



**HAL**  
open science

# Fusion non-linéaire appliquée aux voies pilote et données du signal GPS L2C

Monir Azmani

► **To cite this version:**

Monir Azmani. Fusion non-linéaire appliquée aux voies pilote et données du signal GPS L2C. Automatique / Robotique. Université du Littoral Côte d'Opale, 2010. Français. NNT: . tel-00580417

**HAL Id: tel-00580417**

**<https://theses.hal.science/tel-00580417v1>**

Submitted on 28 Mar 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Fusion non-linéaire appliquée aux voies pilote et données du signal GPS L2C

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 20 Décembre 2010

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université du Littoral Côte d'Opale**  
(Spécialité Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal)

par

Monir AZMANI



### Composition du jury

*Rapporteurs :* Roland CHAPUIS  
Professeur à l'Université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand, LASMEA  
Yassine RUICHEK  
Professeur à l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, SeT

*Examineurs :* René GARELLO  
Professeur à Télécom Bretagne  
Mohamed SAHMOUDI  
Maître de Conférence à l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et l'Espace  
Karim DAHIA  
Ingénieur de recherche à l'ONERA Palaiseau

*Directeurs de Thèse :* Mohammed BENJELLOUN  
Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale, LISIC  
Serge REBOUL  
Maître de Conférence à l'Université du Littoral Côte d'Opale, LISIC



# Fusion non-linéaire appliquée aux voies pilote et données du signal GPS L2C

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 20 Décembre 2010

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université du Littoral Côte d'Opale**

(Spécialité Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal)

par

Monir AZMANI



### Composition du jury

*Rapporteurs :* Roland CHAPUIS  
Professeur à l'Université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand, LASMEA  
Yassine RUICHEK  
Professeur à l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, SeT

*Examineurs :* René GARELLO  
Professeur à Télécom Bretagne  
Mohamed SAHMOUDI  
Maître de Conférence à l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et l'Espace  
Karim DAHIA  
Ingénieur de recherche à l'ONERA Palaiseau

*Directeurs de Thèse :* Mohammed BENJELLOUN  
Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale, LISIC  
Serge REBOUL  
Maître de Conférence à l'Université du Littoral Côte d'Opale, LISIC



*« Ne vous souciez pas d'être meilleur que vos contemporains ou vos prédécesseurs  
essayez d'être meilleur que vous-même »*  
[ William Faulkner]



## Remerciements

Respectons la tradition et dédions cette première page aux remerciements. Bien sûr, ils ne peuvent être que nombreux, hétérogènes et incomplets. Et pourtant, ces deux pages me serviront à fusionner et à combiner toute la gratitude et l'amitié que je porte à tous ceux grâce à qui ce travail a été possible.

Je ne peux débiter ces quelques lignes sans adresser ma plus profonde gratitude à Serge Reboul, mon encadrant de thèse, pour ses compétences, sa disponibilité, son écoute et la qualité de son encadrement en général. Il a su me conseiller et me guider aux moments clefs de ce travail. Il a également su me remonter le moral et me soutenir dans certains moments difficiles et m'a permis de me surpasser. Travailler avec lui est un réel plaisir. J'espère que notre collaboration ne s'arrêtera pas avec cette thèse. Un grand merci à monsieur Mohammed Benjelloun qui m'a proposé cette thèse un jour de novembre 2006. Il a été tout au long de ces années de thèse un directeur exemplaire, me laissant une grande liberté dans mes recherches, tout en étant prolixe de conseils avisés. Il a su guider mon travail avec intelligence et faire preuve de disponibilité en toute circonstance et a toujours fait le maximum pour m'offrir les meilleures conditions possibles pour effectuer ma thèse et m'intégrer au sein du laboratoire.

Je remercie également l'ensemble des personnes qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury. Je pense tout d'abord à Monsieur René Garello, qui l'a présidé. Je souhaite également remercier Monsieur Yassine Ruichek et Monsieur Roland Chapuis, qui ont utilisé leurs grandes compétences au service de l'évaluation de mon travail. Je les remercie pour avoir lu attentivement mon manuscrit et d'en avoir fait une critique très fine et constructive. Ma connaissance va également aux examinateurs, Monsieur Mohamed Sahmoudi et Monsieur Karim Dahia, qui ont utilisé toutes leurs connaissances dans l'examen attentif de mon travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Jean-Bernard Choquel qui s'est beaucoup investi dans cette thèse. J'ai particulièrement apprécié notre collaboration qui a été plus qu'enrichissante. Je le remercie pour sa gentillesse, sa disponibilité et ses conseils avisés. J'adresse aussi mes sincères remerciements à Georges Stienne, Sophie Reboul, Laurent Bourgois et Khalid Touil qui ont pu à un moment ou un autre apporter leur contribution au cours de ce travail. J'associe à ces remerciements madame Magalie Nion, secrétaire dévouée du département qui nous facilite autant que possible les démarches administratives.

Ces années de thèse à Calais ont été une formidable occasion de rencontrer de nouvelles personnes qui me sont chères. Je pense en particulier à Taoufik Elhajli avec qui nous avons partagé de très bons moments. J'en profite pour lui souhaiter bonne chance pour la suite.

Je remercie très vivement mes parents pour la confiance qu'ils m'ont toujours accordée. Ils m'ont toujours encouragé et soutenu, notamment dans la construction de mon parcours scolaire, de mon école maternelle à ce doctorat. Je les remercie pour tout ce qu'ils m'ont transmis et donné, dont la valeur n'a pas d'équivalent matériel mais une grande valeur humaine.

Mes pensées les plus fortes vont à la femme de ma vie, Houda, avec qui je partage ma vie depuis bien longtemps déjà. Sans toi, je ne suis pas certain d'avoir eu le courage de faire autant



d'études. Merci de m'avoir supporté ces derniers mois et nous seuls savons à quel point ce fut dur, merci pour le soutien que tu m'as apporté. Je te promets que l'on va rattraper le temps perdu ! Je t'aime.

Monir AZMANI

# Table des matières

<b>Glossaire</b>	<b>1</b>
<b>Abréviations</b>	<b>5</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 1 - Les signaux GNSS</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Les signaux GPS civils modernes . . . . .	12
1.2.1 Les systèmes GNSS . . . . .	12
1.2.2 Structure des signaux GPS . . . . .	15
1.2.3 Les codes pseudo-aléatoires . . . . .	18
1.3 Présentation générale du système GPS . . . . .	22
1.3.1 Le calcul de position . . . . .	22
1.3.2 Les traitements récepteurs pour l'estimation de la pseudo distance . . . . .	25
1.3.3 Estimation de la pseudo distance . . . . .	31
1.4 Estimation des paramètres du signal . . . . .	32
1.4.1 Modélisation du problème . . . . .	33
1.4.2 Boucle de poursuite vectorielle . . . . .	35
1.4.3 Estimation du retard du code . . . . .	36
1.4.4 Estimation de la phase et de la fréquence porteuse . . . . .	39
1.5 Conclusion . . . . .	42
<b>Chapitre 2 - Introduction à l'estimation, la fusion et la segmentation définies dans le cadre bayésien</b>	<b>43</b>
2.1 Introduction . . . . .	43
2.2 La théorie de l'estimation . . . . .	45
2.2.1 Estimation dans le domaine linéaire . . . . .	45

2.2.2	Estimation dans le domaine circulaire . . . . .	47
2.2.3	Filtrage Bayésien . . . . .	51
2.3	Fusion d'informations par approche bayésienne . . . . .	58
2.3.1	Fusion centralisée . . . . .	58
2.3.2	Fusion distribuée . . . . .	61
2.3.3	Fusion décentralisée . . . . .	63
2.4	Segmentation des signaux . . . . .	65
2.4.1	Notion de stationnarité . . . . .	65
2.4.2	Détecteur de ruptures somme cumulée : CUSUM . . . . .	69
2.4.3	Estimateur de rupture Kalman GLR . . . . .	70
2.5	Conclusion . . . . .	73

**Chapitre 3 - Estimation détection conjointes par un opérateur de fusion non linéaire** **75**

3.1	Introduction . . . . .	75
3.2	Détection de rupture de pente par fusion linéaire . . . . .	76
3.2.1	Position du problème . . . . .	76
3.2.2	Modélisation du problème d'estimation . . . . .	78
3.2.3	Etude et mise en oeuvre du détecteur de ruptures . . . . .	80
3.3	Opérateur de fusion non linéaire . . . . .	84
3.3.1	Position du problème . . . . .	84
3.3.2	Transformation non linéaire . . . . .	88
3.3.3	Fonction non linéaire . . . . .	91
3.4	Détection de rupture de pente par fusion non linéaire . . . . .	94
3.5	Expérimentation . . . . .	95
3.5.1	Evaluation de l'opérateur de fusion non linéaire . . . . .	96
3.5.2	Evaluation du détecteur de ruptures non linéaire . . . . .	98
3.6	Conclusion et perspectives . . . . .	106

**Chapitre 4 - Filtrage Bayésien multi-capteurs de données circulaires** **107**

4.1	Introduction . . . . .	107
4.2	Opérateur de fusion circulaire . . . . .	108
4.2.1	Les distributions circulaires . . . . .	108
4.2.2	Opérateur de fusion circulaire de $N$ mesures angulaires . . . . .	111
4.2.3	Cas de la fusion de 2 mesures angulaires . . . . .	112

4.3	Filtres récursifs circulaires . . . . .	113
4.3.1	Filtre récursif circulaire scalaire . . . . .	113
4.3.2	Filtre récursif circulaire vectoriel . . . . .	119
4.4	Estimation de rupture de moyenne dans un processus angulaire . . . . .	121
4.5	Expérimentation . . . . .	125
4.5.1	Evaluation de la fusion circulaire et du filtre récursif circulaire . . . . .	126
4.5.2	Evaluation du détecteur de ruptures circulaire . . . . .	133
4.6	Conclusion . . . . .	136
 <b>Chapitre 5 - Application au positionnement satellitaire</b>		<b>139</b>
5.1	Introduction . . . . .	139
5.2	Variations du discriminant et discrétisation . . . . .	140
5.3	Boucles de poursuite . . . . .	144
5.3.1	Boucle ouverte de poursuite de code . . . . .	146
5.3.2	Boucle ouverte de poursuite de phase . . . . .	147
5.4	Expérimentations . . . . .	148
5.4.1	Estimation des paramètres des signaux . . . . .	149
5.4.2	Calcul de position . . . . .	152
5.5	Conclusion . . . . .	157
 <b>Conclusion générale</b>		<b>159</b>
 <b>Annexe A - Contrainte de la transformation non linéaire</b>		<b>163</b>
 <b>Annexe B - Calcul de la fonction de vraisemblance de l'instant de rupture</b>		<b>165</b>
 <b>Liste des tableaux</b>		<b>167</b>
 <b>Table des figures</b>		<b>169</b>
 <b>Bibliographie</b>		<b>173</b>



# Glossaire

## Chapitres 1 et 5

$A_e$	: puissance d'émission du signal
$n(t)$	: message de navigation associé au satellite traité à l'instant $t$
$f_1, f_2, f_5$	: fréquences respectives des porteuses L1, L2 et L5
$S_{L_1}, S_{L_2}, S_{L_5}$	: signaux émis respectivement sur les bandes L1, L2 et L5
$c(t)$	: code pseudo-aléatoire à l'instant $t$
$I_5, Q_5$	: les codes civils respectivement en phase et en quadrature sur L5
$(x_s, y_s, z_s)$	: coordonnées du satellite $s$ dans le système ECEF
$(X, Y, Z)$	: coordonnées du récepteur dans le système ECEF
$\rho_{rs}$	: pseudo-distance satellite-récepteur
$f_r$	: fréquence d'émission du signal
$A_s$	: amplitude du signal à la réception pour le satellite $s$
$\tau_s$	: décalage de code du satellite $s$
$f_s$	: fréquence porteuse du signal à la réception pour le satellite $s$
$\phi_s$	: décalage de la porteuse pour le satellite $s$
$S_r$	: signal reçu
$S/N_0$	: rapport signal sur bruit du signal reçu
$I_k, Q_k$	: composantes respectivement en phase et en quadrature
$T_c$	: période d'un code CDMA
$T_b$	: durée d'un bit de code CDMA
$\tau_{e,k}$	: erreur sur le décalage de code pour l'échantillon $k$
$f_{e,k}$	: erreur sur la fréquence pour l'échantillon $k$
$\phi_{e,k}$	: erreur sur la phase pour l'échantillon $k$
$T_{cd}$	: effet Doppler sur la durée du code CDMA
$f_{cd}$	: effet Doppler sur la fréquence du code CDMA
$\alpha_k$	: vitesse de variation de la fréquence porteuse à l'échantillon $k$
$\omega$	: pulsation Doppler
$\alpha_\omega$	: vitesse de variation de la pulsation Doppler
$D_k$	: discriminant Early minus Late pour l'échantillon $k$
$d$	: décalage entre le code Early et le code Late
$f_{ech}$	: fréquence d'échantillonnage

### Chapitres 2 et 3

$Z_k^{(l)}$	: variable aléatoire gaussienne décrivant la mesure numéro $l$ à l'échantillon $k$
$X_k$	: valeur moyenne du processus à l'instant $k$
$\widehat{X}_{k/k-1}$	: prédiction du filtre à l'instant $k$
$P_{k/k-1}$	: variance de la prédiction à l'instant $k$
$\eta_k^{Z^{(l)}}$	: bruit blanc gaussien centré sur la mesure $Z^{(l)}$
$R^{(l)}$	: variance de la variable aléatoire $Z_k^{(l)}$
$\widehat{X}_{k,r}$	: moyenne estimée de $X$ à l'instant $k$ pour $k > r$
$\widehat{X}_{k,0}$	: moyenne estimée de $X$ à l'instant $k$ sans considérer de rupture dans le modèle
$\varepsilon_k$	: innovation à l'instant $k$
$a_i$	: pente dans l'intervalle $[t_{i-1} \ t_i]$
$t_i$	: $i^{\text{ème}}$ instant de rupture du processus
$\Delta a_r$	: dynamique de la rupture $r$
$r$	: instant de la rupture
$\rho_{k,r}$	: fonction de correction à l'instant $k$ après la rupture $r$
$Z_f$	: mesure obtenue par l'opérateur de fusion somme pondérée
$\sigma_f$	: écart-type de l'opérateur de fusion
$\mu$	: moyenne de l'information a priori
$V$	: imprécision de l'information a priori
$\sigma_d$	: nombre d'échantillons avant que la rupture ne soit détectée
$B_d, B_u$	: bornes inférieure et supérieure de l'intervalle d'information a priori
$Z_{fn}$	: mesure obtenue par l'opérateur de fusion non linéaire
$\lambda$	: seuil de détection
$M$	: taille de la fenêtre de test

### Chapitre 4

$\kappa$	: paramètre de concentration
$I_0$	: fonction de Bessel modifiée d'ordre 0
$I_1$	: fonction de Bessel modifiée d'ordre 1
$\kappa_f$	: paramètre de concentration de l'opérateur de fusion
$\phi_{f,k}$	: mesure fusionnée angulaire
$\theta_k$	: variable d'état angulaire
$\delta_r$	: dynamique de la rupture $r$
$\widehat{\theta}_k^0$	: moyenne estimée de $\theta$ à l'instant $k$ sans considérer de rupture dans le modèle
$dc$	: distance circulaire
$D_v$	: dispersion circulaire
$R$	: covariances du bruit de mesure
$Q$	: covariances du bruit de modèle
$\kappa_R$	: paramètre de concentration du bruit de mesure
$\kappa_Q$	: paramètre de concentration du bruit de modèle







# Abréviations

AMRC	: Accès Multiple par Répartition en Code
BOC	: Binary Offset Carrier
BPSK	: Binary Phase Shift Keying
CDMA	: Code Division Multiple Access
Code C/A	: Coarse/Acquisition
Code CL	: Code Long
Code CM	: Code Moderate
Code NH	: Code de Neumann-Hofmann
Code P	: Precision
<i>CN</i>	: distribution Circulaire Normale ou distribution de Von Mises
CS	: Commercial Service, service Galileo
CUSUM	: CUmulative SUM
DLL	: Delay Lock Loop
ECEF	: Earth Centred Earth Fixed
EKF	: Extended Kalman Filter
EQM	: Erreur Quadratique Moyenne
ESA	: Agence Spatiale Européenne
FEC	: Forward Error Correction
FFT	: Fast Fourier Transform
FLL	: Frequency Lock Loop
GLONASS	: GLObalnaya Navigatinnaya Spoutinkovaya Sistema
GLR	: Generalized Likelihood Ratio
GNSS	: Global Navigation Satellite System
GPS	: Global Positioning System
HOW	: Hand Over Word
IRNSS	: Indian Regional Navigation Satellites System
LGA	: Lattice Gas Automata
LS	: moindres carrés (Least Square)
MAP	: Maximum A Posteriori
MDR	: Mean Detection Rate
MRT	: Multiplexage par Répartition dans le Temps
MTD	: Mean Time to Detection
MTF	: Modified Track-to-track Fusion
MV	: Maximum de Vraisemblance
NAVSTAR	: NAVigation System by Timing and Ranging

## *Abréviations*

---

NCO	: Numerically Controlled Oscillator
OS	: Open Service, service Galileo
OXO	: Ovenized Crystal Oscillator
PLL	: Phase Lock Loop
PPS	: Precise Positioning System
PRS	: Public Regulated Service, service Galileo
SAR	: Search And Rescue, , service Galileo
SIR	: Sampling Importance Resampling
SIS	: Sequential Importance Sampling
SoL	: Safety of Life, service Galileo
SPS	: Standard Positioning System
TCXO	: Temperature Compensated Crystal Oscillator
TDM	: Time Division Multiplexing
TFD	: Transformée de Fourier Discrète
TLM	: Telemetry word
QPSK	: Quadrature Phase Shift Keying
QZSS	: Quasi-Zenith Satellite System
UTC	: Universal Time Coordinates
<i>WN</i>	: distribution Wrapped Normal

# Introduction générale

Depuis les cinq dernières années, les domaines du positionnement et de la navigation par satellites se modernise. En effet, le développement du système Européen Galileo, qui sera opérationnel dans les années à venir, a eu pour réponse la modernisation du système Américain NAVSTAR (NAVigation System by Timing And Ranging), plus connu sous le nom de GPS (Global Positioning System). Cette modernisation se traduit par l'apparition de nouvelles fréquences dédiées, de nouveaux codes et de nouvelles méthodes de modulation de fréquence. Ces différentes innovations nécessitent l'étude et la mise en oeuvre de nouveaux algorithmes de traitements des signaux dans le but d'améliorer les services proposés. Dans le cas particulier de la nouvelle fréquence L2C, le signal est composé de deux voies distinctes comportant chacune des informations redondantes utiles au positionnement. L'une des deux voies, nommée voie pilote, ne contient pas de message de navigation tandis que l'autre voie, dite de données, transmet ce message, qui contient diverses informations sur la constellation satellitaire émettrice ou encore sur l'état des couches atmosphériques terrestres. Le principe de la fusion d'informations est de combiner plusieurs informations de différentes sources pour permettre d'obtenir une information plus précise. Les signaux GPS L2C offrent ainsi la possibilité de mettre en oeuvre des systèmes de fusion à partir des mesures obtenues sur ces deux voies pour améliorer les traitements utilisés pour le calcul de position.

Le travail présenté dans cette thèse a pour objet l'étude et la mise en oeuvre d'estimateurs récursifs de ruptures, ainsi que des opérateurs de fusion, qui intègrent une information *a priori* sur le paramètre à estimer. Pour cela, plusieurs approches de la segmentation bayésienne sont étudiées dans les domaines linéaires et angulaires. Trois algorithmes de fusion et de détection de ruptures de pentes intégrant une information *a priori* sur la dynamique de la rupture sont étudiés. Le premier utilise un opérateur de fusion linéaire classique, la somme pondérée, le deuxième et le troisième utilisent des opérateurs de fusion non-linéaire. Le premier est défini dans le domaine linéaire et le second dans le domaine circulaire. Ces différentes méthodes sont appliquées à la segmentation du signal discriminant de la poursuite du code et de la phase du signal GPS moderne. Elles sont utilisées dans un système de poursuite en boucles ouvertes. Elles sont ensuite appliquées à l'estimation de la distance entre un satellite et un récepteur, et évaluées pour le calcul de la position d'un récepteur statique et d'un récepteur mobile. On montre qu'elles permettent de traiter des signaux à faible rapport signal sur bruit pour une fréquence maximale de calcul de la position. En effet l'une des principales tares existantes dans le domaine de la navigation par satellites est le positionnement en milieux contraints, pour lequel les méthodes existantes sont inadaptées.

Ce mémoire est constitué de cinq chapitres. Le premier d'entre eux a pour but de présenter les différents systèmes de navigation par satellites et en particulier les signaux GPS civils modernes. Ces derniers contiennent des informations redondantes sur les paramètres du signal à estimer, soit sur deux fréquences différentes soit sur la même fréquence, comme dans le cas du signal GPS L2C. Dans ce cas, le signal est composé d'une voie pilote et d'une voie de données. Les informations contenues dans le signal GPS sont les délais du code et de la porteuse. Ces informations sont fusionnées pour améliorer la précision du positionnement et pour permettre le traitement de signaux à faible rapport signal sur bruit. On présente aussi dans ce chapitre les différents modèles et traitements récents décrits dans la littérature. Ces traitements ont pour but d'extraire les informations nécessaires à la localisation, allant de la démodulation jusqu'au calcul du point en passant par les nouveaux algorithmes de poursuite du code et de la phase. Ces techniques de référence seront utilisées pour évaluer les méthodes proposées.

Le deuxième chapitre est purement théorique, c'est une introduction à la théorie bayésienne. Nous y présentons dans une première partie les bases de la théorie de l'estimation ainsi que les deux principales méthodes utilisées dans le filtrage statistique qui sont les méthodes analytiques et les méthodes de Monte-Carlo. C'est dans cette partie que nous introduisons la statistique circulaire. Nous présentons les différents paramètres directionnels (direction moyenne, concentration) ainsi que les distributions probabilistes utilisées pour la modélisation des phénomènes angulaires. Dans la troisième partie, nous passons en revue des différentes architectures de fusion décrites dans la littérature. Les techniques d'estimation détection conjointes sont finalement présentées dans la quatrième partie. Nous décrivons entre autre l'algorithme du rapport de vraisemblance généralisé (GLR) qui permet de détecter une rupture dans le modèle d'état ou dans les observations. Cet algorithme sera utilisé comme base des algorithmes de détection de ruptures décrits tout au long de cette thèse.

En fusion d'informations, il existe dans le cas centralisé deux approches permettant d'améliorer les performances des estimateurs. L'introduction d'une information *a priori* sur le paramètre à estimer et la fusion des observations du paramètre à estimer. Dans ce troisième chapitre, nous réalisons dans une première partie l'étude et la mise en oeuvre d'un détecteur de ruptures de pente par fusion linéaire, qui intègre une information *a priori* sur la dynamique de la rupture. L'estimateur de ruptures de stationnarité proposé s'appuie sur une modélisation d'état. Il est composé d'un filtre qui estime l'état du système à partir des mesures fusionnées et d'un détecteur de ruptures qui estime la position et la dynamique de la rupture. Quand une rupture est détectée, l'état estimé est réactualisé avec les paramètres de la rupture pour que le processus estimé reste stationnaire. Dans cette partie, notre apport réside dans la définition d'un détecteur de ruptures qui intègre une information *a priori* sur la dynamique de la rupture de pente. Nous présentons dans une deuxième partie un opérateur de fusion des observations non linéaires. Cet opérateur de fusion est défini à partir de l'opérateur classique du maximum de vraisemblance et d'une information *a priori*. Il n'est pas construit à partir de la distribution *a posteriori*, mais à partir d'un processus non linéaire de sélection transformation qui a pour but de diminuer la corrélation entre les observations fusionnées. Cet opérateur est utilisé par le détecteur de ruptures par fusion non linéaire pour l'estimation des ruptures de pente. Dans cette partie, notre apport réside dans la proposition et la définition de ce nouvel opérateur de fusion.

On réalise dans le quatrième chapitre l'étude et la mise en oeuvre de méthodes de traitement des signaux dans le domaine circulaire. Dans l'approche classique, le traitement des données circulaires s'appuie sur une approximation de leurs lois de probabilités dans le domaine linéaire. Par exemple la loi normale est une approximation de la loi normale circulaire. Ces approximations ne sont pas toujours correctes. En effet ces approximations ne restent judicieuses que pour des petits angles et une loi centrée ou de moyenne proche du centre de l'intervalle de définition des angles aléatoires. Dans le cas contraire il faut redéfinir les opérateurs de fusion, les estimateurs ainsi que les détecteurs de ruptures. La deuxième contribution dans ce mémoire consiste donc à proposer un opérateur qui fusionne les mesures angulaires obtenues à partir de différents capteurs. Ces mesures sont considérées comme des variables aléatoires de von Mises indépendantes. L'opérateur de fusion des observations est construit à partir de la vraisemblance des mesures sachant l'état à estimer. Cet opérateur de fusion sera intégré dans un filtre récursif circulaire défini à partir de la modélisation bayésienne du problème. Cette modélisation s'appuie sur l'équation d'état du système et le filtre est construit à partir de la distribution *a posteriori* de l'état à l'instant  $k$  sachant les mesures obtenues aux instants précédents. Finalement, le filtre récursif est intégré dans le détecteur de ruptures pour réaliser un estimateur des ruptures angulaires d'un processus stationnaire par morceaux. Les méthodes proposées dans ce chapitre seront évaluées sur les données synthétiques pour l'estimation de la direction d'un mobile à partir de plusieurs capteurs.

Le cinquième chapitre est expérimental, il a pour but de montrer l'apport des techniques développées aux chapitres précédents pour le traitement du signal GPS multi-voies. On montre dans ce chapitre que les boucles de poursuite du signal GPS fournissent, quand elles fonctionnent en boucle ouverte, une mesure de phase et une mesure de discriminant linéaire par morceaux. Ces mesures obtenues sur les deux voies du signal GPS L2C seront fusionnées par les méthodes présentées dans les chapitres précédents. Nous proposons dans ce chapitre une architecture du système de poursuite du code et de la porteuse. Cette architecture est composée de boucles de poursuite fonctionnant en boucle ouverte et en boucle fermée. La méthode proposée est comparée aux méthodes classiques décrites au chapitre 1. Ces méthodes sont le Match Filter et la boucle de poursuite vectorielle qui estime les décalages de code et de la porteuse avec un filtre de Kalman étendu. L'intérêt d'une telle approche est démontrée pour l'estimation des observable GPS (pseudo distance et phase) et le calcul de la position dans les cas statique et dynamique.

En résumé, ce mémoire est composé de cinq chapitres : le premier chapitre, essentiellement bibliographique, a pour but de présenter l'historique et le fonctionnement général des signaux et récepteur GNSS (Global Navigation Satellite System) modernes. Le deuxième chapitre, également bibliographique, a pour objectif de présenter la théorie de l'estimation bayésienne. Nous décrivons, dans le troisième chapitre, un estimateur de ruptures basé sur un opérateur de fusion non-linéaire qui utilise l'apport d'une information *a priori* sur la pente du processus. Le chapitre quatre est consacré à l'étude et la mise en oeuvre de filtres et opérateurs de fusion définis dans le domaine circulaire. Le dernier chapitre est principalement expérimental. Il permet de montrer l'apport des méthodes développées dans les chapitres trois et quatre pour le calcul de la position d'un récepteur GPS. Enfin une conclusion générale vient dresser le bilan des travaux réalisés dans ce mémoire, et indiquer les ouvertures et perspectives qu'ils engendrent.



# Chapitre 1

## Les signaux GNSS

### 1.1 Introduction

Le but de ce chapitre bibliographique est de présenter les modèles et traitements des signaux GNSS modernes. La présentation sera plus particulièrement consacrée aux signaux GPS civils modernes. En effet, depuis les cinq dernières années les signaux du système GPS sont modernisés en réponse à l'offre qui sera proposée par GALILEO. De nouvelles fréquences, de nouveaux codes et de nouveaux protocoles ont été proposés pour rester concurrentiels avec les futurs systèmes GNSS développés par l'Europe, la Chine et la Russie.

Dans cette thèse sont réalisées l'étude et la mise en oeuvre d'opérateurs de fusion pour l'estimation de processus définis dans le domaine linéaire et circulaire. Ce travail est appliqué au signal GPS moderne. En effet les informations contenues dans le signal GPS sont le décalage du code et de la phase du signal reçu. Dans ce cas, le code est un paramètre à estimer défini sur un domaine linéaire tandis que la phase est un paramètre à estimer défini sur un domaine angulaire. Nous présentons dans ce chapitre les traitements mis en oeuvre dans les récepteurs pour estimer ces paramètres. D'une part, ces techniques de références seront utilisées au chapitre 5 pour évaluer les méthodes proposées. D'autre part, il existe dans ces nouveaux signaux GPS des informations redondantes sur ces paramètres à estimer. Nous présentons dans ce chapitre la structure des signaux pour introduire les informations qui seront fusionnées au chapitre 5. En effet, on appliquera dans le chapitre 5 les opérateurs de fusion proposés au traitement du signal GPS.

Ce premier chapitre est organisé en trois parties. La première partie est consacrée à la présentation de la constitution de ces nouveaux signaux GPS. La seconde partie rappelle les différents traitements réalisés par le récepteur pour extraire des signaux reçus, les informations nécessaires au calcul de position. On décrit dans cette partie les traitements allant de la démodulation et du démultiplexage jusqu'au calcul du point. Finalement dans la troisième et dernière partie, nous présentons une architecture moderne de poursuite vectorielle des paramètres du signal reçu s'appuyant sur le filtrage d'état non linéaire du code et de la porteuse.



## 1.2 Les signaux GPS civils modernes

### 1.2.1 Les systèmes GNSS

Les systèmes de navigation par satellites (GNSS) sont en train d'opérer une véritable révolution dans un bon nombre de domaines comme par exemple le transport, la météorologie, la géologie, l'environnement ou la protection des animaux. Ils reposent plus particulièrement sur deux constellations de satellites : le système GPS américain et le futur et très attendu GALILEO européen. L'arrivée de GALILEO et la modernisation de GPS poussent la recherche à développer de nouveaux services ayant davantage de contraintes en termes de précision, de disponibilité et d'intégrité.

#### Le System NAVSTAR/GPS américain

Le système NAVSTAR/GPS (NAVigation System by Timing and Ranging/Global Positioning System) est actuellement le système de localisation par satellites le plus utilisé et le plus médiatisé. Le développement du GPS a débuté dans les années 70 quand le département de la défense américaine (US DoD) décide de regrouper le projet 621B, un système de radionavigation, développé par l'US Air Force et le projet "Timation", un système qui permettait de fournir des informations horaires très précises grâce à des satellites équipés d'horloges atomiques, développés par l'US Navy. Le GPS a été déclaré opérationnel en 1995. Il fournit deux services de localisation :

- Le service SPS (Standard Positioning Service) est accessible à tous les utilisateurs sans exception.
- Le service PPS (Precise Positioning Service) est une version plus précise du SPS destinée aux utilisateurs militaires. L'accès au PPS est contrôlé par le ministère de la défense américaine.

Le système GPS est composé de trois secteurs : le secteur spatial, le secteur de contrôle et le secteur utilisateur. Le secteur spatial est constitué d'une constellation de 32 satellites situés sur des orbites quasi-circulaires à une altitude moyenne de 20200 km, avec une révolution autour de la terre de 11h28m02s. Les satellites GPS sont disposés sur 6 plans orbitaux, inclinés de  $55^\circ$  par rapport à l'équateur et séparés d'environ  $60^\circ$ . Cette disposition permet d'assurer à chaque instant et à chaque utilisateur une visibilité d'au moins quatre satellites simultanément. Le secteur de contrôle est constitué de plusieurs stations au sol réparties à travers le monde, leur rôle est de vérifier le bon fonctionnement du système, de calculer les almanachs et les éphémérides utilisés pour le calcul de position des satellites. Enfin, le segment utilisateur comprend les récepteurs qui calculent la position par le service SPS ou PPS.

#### Le système GALILEO européen

En 2002, le Conseil Européen souhaitait développer un système de navigation par satellites propre à l'Europe, afin d'acquies une indépendance vis-à-vis du GPS américain. Ce système

est baptisé GALILEO. Il devait être opérationnel en 2008 mais cette date est repoussée à 2012. La précision attendue de ce nouveau système est de 4m en horizontal et de 8m en vertical. Soit une précision améliorée, comparée à la précision actuelle du GPS qui est de 20 m en horizontal et 30 m en vertical. GALILEO est développé par l'Agence Spatiale Européenne (ESA) et sera composé d'une constellation de 30 satellites, disposés sur trois plans orbitaux espacés de 120° et inclinés de 56° par rapport à l'équateur, avec une altitude de 23616 km. Le système GALILEO aura un service de contrôle composé de deux éléments. Le premier élément du service gère la constellation, c'est-à-dire les manoeuvres de satellites, le suivi de l'état de "santé" des satellites, la transmission des informations et commandes aux satellites, etc. Le deuxième élément du service réalise le contrôle de mission. Il est chargé des données fournies aux utilisateurs comme par exemple le calcul des éphémérides et la correction du temps fourni par les horloges embarquées. Contrairement au GPS, le secteur de contrôle de GALILEO sera géré par une entité civile et non pas militaire.

Le système GALILEO proposera 5 services à accès plus au moins restreint :

- Un service ouvert et gratuit (OS - Open Service) pour la localisation destinée principalement aux applications grand public.
- Un service commercial (CS - Commercial Service) géré par des fournisseurs d'accès. Il offrira des performances augmentées par rapport au service ouvert, grâce à l'utilisation de deux signaux supplémentaires.
- Un service public réglementé (PRS - Public Regulated Service) ou service gouvernemental, crypté et résistant aux brouillages et aux interférences. Il sera réservé principalement aux utilisateurs remplissant une mission du service public, comme la protection civile ou la sécurité nationale. Le PRS sera équivalent au PPS du GPS.
- Un service de sauvegarde de la vie (SoL - Safety of Life), il délivrera un service de très haute qualité et sera destiné aux applications critiques mettant en jeu la vie humaine.
- Un service de recherche et de sauvetage (SAR - Search And Rescue), ce service permettra d'améliorer le système international COSPAR-SARSAT d'assistance en cas de détresse et de sauvetage. Ce service assurera la réception quasi temps réel de message de détresse alors qu'actuellement le délai moyen est d'une heure environ. Il permettra aussi l'échange d'informations entre le centre de secours et la balise de détresse, entre autre pour prévenir l'utilisateur que son signal de détresse a été réceptionné, ce qui n'est pas le cas actuellement.

### Autres systèmes GNSS

Le système GLONASS (pour GLObalnaya Navigatinnaya Spoutnikovaya Sistema) est un système russe. Son développement par l'Union Soviétique a débuté en 1982. Il a été lancé à l'époque pour concurrencer le GPS. La constellation de GLONASS était complète en 1996, malheureusement la situation économique actuelle de la Russie ne lui permet pas d'entretenir le système et il ne reste que 7 satellites en fonctionnement. L'agence spatiale fédérale Russe souhaite dans les années à venir remettre en place un total de 24 satellites couvrant le monde entier.

Le système Beidou est un système chinois utilisant deux satellites géostationnaires couvrant

tout le territoire chinois. Ce système offre une précision de l'ordre de celle obtenue avec le GPS. L'agence officielle d'Informations chinoise a indiqué son intention d'étendre le système régional Beidou à un système couvrant le globe terrestre. Ce système sera appelé COMPASS et il comportera 30 satellites en orbite et 5 satellites géostationnaires.

Le système IRNSS (Indian Regional Navigation Satellites System) est un projet de système de navigation autonome qui couvrira le territoire indien. Les segments spatiaux, terrestres et utilisateurs seront développés en Inde.

Le système QZSS (Quasi-Zenith Satellite System) est développé par le Japon. Il ne sera qu'un complément au système GPS et comportera 3 satellites qui évolueront au dessus du territoire japonais.

### Les signaux GNSS modernes

La modernisation du système GPS en réaction à l'arrivée de nouveaux systèmes GNSS a consisté principalement à modifier les signaux émis par les satellites. En effet les futurs systèmes émettront une grande variété de signaux GNSS utilisant des modulations, des codes et des structures différentes. La principale évolution est l'émission des signaux d'un même système GNSS sur plusieurs bandes de fréquence. Le but principal des signaux fournis sur des fréquences différentes est d'estimer les variations de pseudo distances satellite récepteur provoquées par la traversée de la ionosphère [KAC06].

On représente sur la figure 1.1 les différentes bandes de fréquences allouées aux systèmes GPS et GALILEO. On remarquera que ces différentes bandes se chevauchent parfois. Dans ce contexte de nouvelles modulations sont utilisées pour éviter la superposition des signaux émis sur une même bande par deux systèmes différents ou le même système. La modulation BOC (Binary Offset Carrier), par exemple, permet de répartir la puissance des signaux GNSS sur différentes fréquences de la bande de fréquence. De plus ces nouvelles modulations offrent une plus grande robustesse pour le traitement des multi-trajets [BAS04].

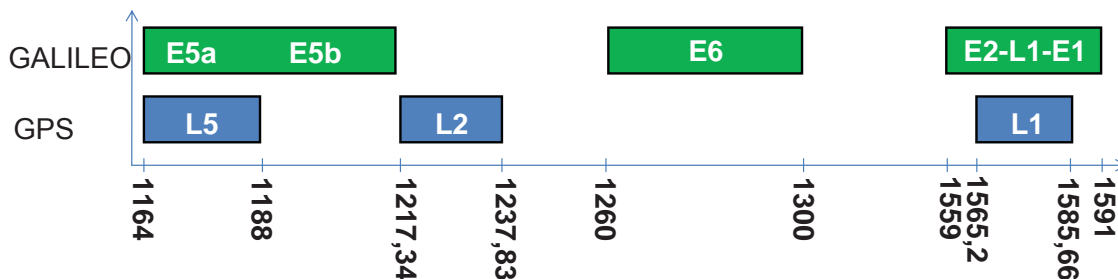


FIG. 1.1 – Fréquences allouées aux systèmes de radionavigation par satellites GPS et GALILEO

Enfin les nouvelles structures de signaux consistent à émettre une voie pilote et une voie données sur le même signal GNSS. La voie données est le signal GNSS classique qui contient

le message de navigation. La voie pilote est un signal GNSS ne contenant pas de message de navigation et qui est donc uniquement composé de la porteuse et du code à étalement de spectre (code CDMA). Le but de la voie pilote est de permettre d'intégrer le signal GPS sur de longues durées sans être limité par le message de navigation. Cette intégration permet d'initialiser avec précision les paramètres du signal GNSS qui sont utilisés dans le calcul de position, ainsi que de détecter les signaux à faible puissance.

## 1.2.2 Structure des signaux GPS

Les signaux envoyés par les satellites GNSS sont essentiellement constitués d'ondes porteuses sur lesquelles sont acheminées des informations binaires.

Deux types d'informations sont émis sur chaque fréquence :

- Un code pseudo-aléatoire  $c(t)$  propre à chaque satellite. Ce code va permettre aux récepteurs de séparer et d'identifier les différents signaux arrivant sur la même fréquence.
- Un message de navigation  $n(t)$  contenant un ensemble de paramètres nécessaires au récepteur pour calculer sa position comme par exemple les positions des satellites, éphémérides, almanachs, . . . .

Chaque onde porteuse est modulée en BPSK (Binary Phase Shift Keying) par un ou plusieurs codes pseudo-aléatoires multiplexés par le message de navigation. La modulation BPSK consiste à inverser la phase de la porteuse à chaque transition du code binaire résultant du multiplexage  $c(t) * n(t)$ . Pour plus de détails sur cette technique de modulation, on pourra se référer à [KAP96]. Les fréquences porteuses allouées aux systèmes de navigation par satellites sont comprises entre 1160 et 1610 MHz soit une longueur d'onde comprise entre 18 et 26 cm. L'émission à ces fréquences élevées présente notamment plusieurs avantages. Par exemple l'influence des couches atmosphériques sur la transmission des signaux sera faible, la taille des antennes sera réduite.

Nous représentons dans l'équation 1.1 l'expression du signal envoyé à la fréquence  $f_1$  dans la bande L1 :

$$S_{L_1}(t) = A_e n(t) C/A(t) \sin(2\pi f_1 t) + \frac{A_e}{\sqrt{2}} n(t) P(t) \cos(2\pi f_1 t) \quad (1.1)$$

avec :

- $A_e$  la puissance d'émission,
- $n(t)$  le message de navigation associé au satellite traité, cadencé à 50 bits/s,
- $C/A(t)$  le code pseudo-aléatoire civil C/A cadencé à 1.023 MHz,
- $f_1$  la fréquence de la porteuse égale à 1575.42 MHz,
- $P(t)$  le code pseudo-aléatoire militaire P cadencé à 10.23 Mhz.

On peut constater que la composante en phase du signal est modulée par le code  $C/A$  tandis que la composante en quadrature est modulée par le code  $P$ . Le message de navigation est pré-

sent sur les deux composantes.

La figure 1.2 représente le schéma de principe du système qui génère le signal envoyé à la fréquence  $f_1$ . On peut constater à partir de la figure 1.2 que la composante en phase a un niveau supérieur de 3 dB par rapport à celle en quadrature. Cette technique permet de transmettre deux informations différentes sur la même fréquence porteuse sans que l'une vienne perturber l'autre.

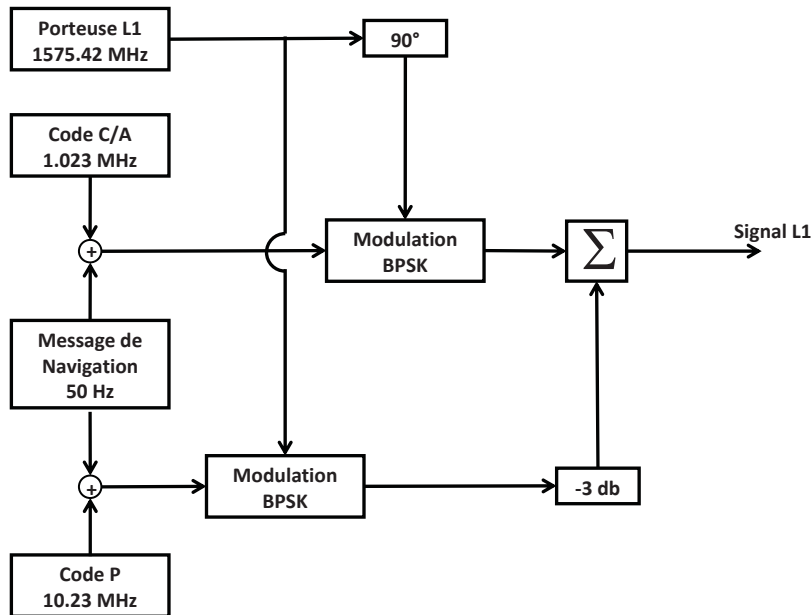


FIG. 1.2 – Génération du signal GPS émis dans la bande de fréquence L1

Quelques satellites de la constellation actuelle transmettent un deuxième signal civil baptisé L2C. Ce signal permettra de corriger les effets ionosphériques en combinant les mesures de pseudo distances obtenues sur L2C avec les mesures obtenues sur L1. La principale différence, entre le signal L2C et le signal L1, hormis une fréquence porteuse différente, est que pour la partie civile du signal L2C, on trouve deux codes multiplexés entre eux (la partie militaire du signal restant fortement semblable à celle de L1). L'un de ces codes (le code CM, pour Code Moderate) sera multiplexé avec le message de navigation tandis que l'autre code (le code CL, pour Code Long) ne le sera pas. Ces codes sont de plus grande période que le code C/A dont la période est de 1 ms. Le code CL a une période de 1.5 secondes et le code CM de 20 ms. La description de ces codes est détaillée dans la prochaine section.

L'expression du signal émis à la fréquence  $f_2$  dans la bande L2 est la suivante :

$$S_{L_2}(t) = \sqrt{2}A_e n(t)P(t) \sin(2\pi f_2 t) + \sqrt{2}A_e [(CM(t)n(t)) \oplus CL(t)] \cos(2\pi f_2 t) \quad (1.2)$$

avec

$f_2$  la fréquence de la porteuse L2, égale à 1227.60MHz,  
 $CM(t)$  le code pseudo-aléatoire civil CM cadencé à 511.5 kHz,

$CL(t)$  le code pseudo-aléatoire civil CL cadencé à 511.5 kHz,

$\oplus$  l'opérateur de multiplexage des codes civils.

La figure 1.3 représente le schéma de principe du système qui génère le signal envoyé à la fréquence  $f_2$ .

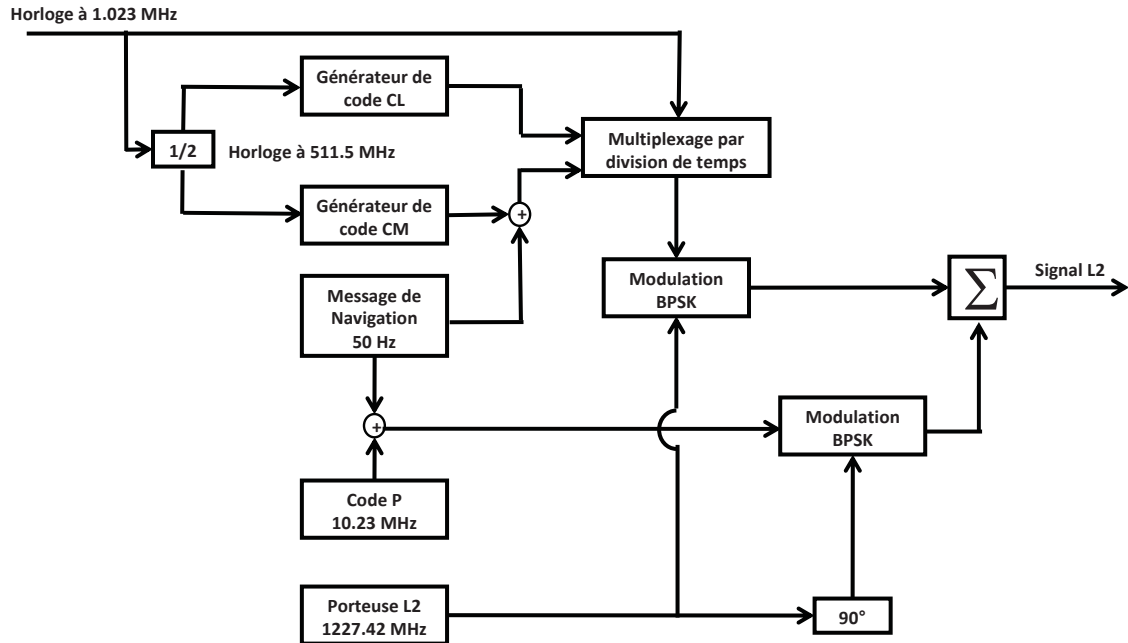


FIG. 1.3 – Génération du signal GPS émis à la fréquence  $L_2$

Le signal GPS L5 fait partie du programme de modernisation du GPS. Il a été spécialement conçu pour l'aviation et les applications de "safety of life". Le signal transmis sur la fréquence L5 est une modulation QPSK (Quadrature Phase Shift Keying). La composante en quadrature ne contient pas de message de navigation, cette composante est appelée pilote, elle permet d'utiliser le signal pour des faibles rapports signal sur bruit.

On représente sur la figure 1.4 le schéma de principe du système qui génère le signal GPS L5. On peut constater que les codes CDMA (Carrier Division Multiple Access)  $I_5$  et  $Q_5$  des deux composantes en quadratures sont multiplexés avec des codes de Neumann-Hofmann  $NH_{10}$  et  $NH_{20}$ . Ces codes sont courts (respectivement 10 bits et 20 bits) et servent simplement à étendre la longueur du code en-phase  $I_5$  de 10230 bits à 102300 bits et la longueur du code en quadrature  $Q_5$  de 10230 bits à 2046000 bits. Avec une vitesse de transmission de 1023 Mégabits par seconde, la période de  $NH_{10}I_5$  est de 10 ms, elle est égale alors à la durée d'un bit du message de navigation. Le code  $NH_{20}Q_5$  a une période de 20 ms.

L'expression du signal émis à la fréquence  $L_5$  est [RAI08] :

$$S_{L_5}(t) = \sqrt{2}A_e n(t) NH_{10}I_5(t) \cos(2\pi f_5 t) + \sqrt{2}A_e NH_{20}Q_5(t) \sin(2\pi f_5 t) \quad (1.3)$$

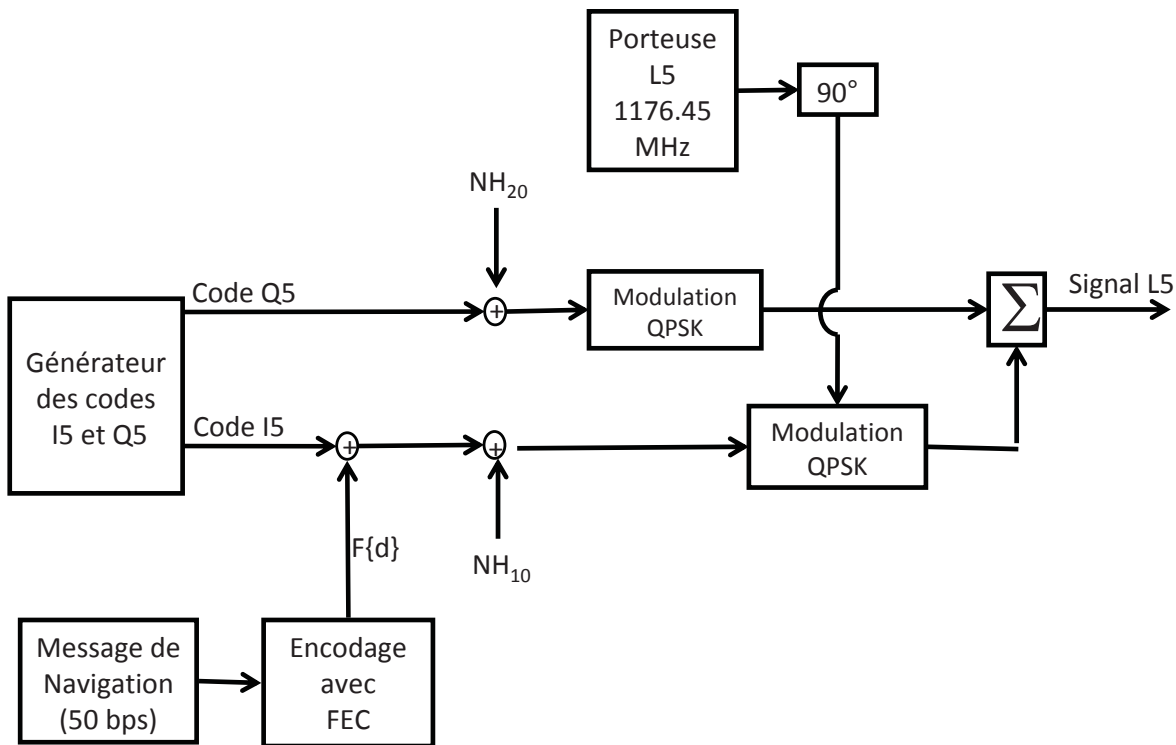


FIG. 1.4 – Génération du signal GPS émis sur la fréquence  $L_5$

avec

- $f_5$  la fréquence de la porteuse  $L_5$ ,
- $I5(t)$  le code civil en phase cadencé à 1023 MHz,
- $Q5(t)$  le code civil en quadrature cadencé à 1023 MHz,
- $NH_{10}$  le code de Neumann-Hofmann cadencé à 1.023 MHz,
- $NH_{20}$  le code de Neumann-Hofmann cadencé à 1.023 MHz.

### 1.2.3 Les codes pseudo-aléatoires

Chaque récepteur reçoit en même temps, sur la même bande de fréquences, les signaux provenant de plusieurs satellites. Pour pouvoir séparer les signaux on affecte un code différent à chaque satellite. Cette technique dite à AMRC (Accès Multiple par Répartition en Code) est plus connue sous le nom CDMA (Code Division Multiple Access).

Dans la technique CDMA, chaque satellite possède un code particulier et unique, qu'il utilise pour multiplexer son message de navigation avant de l'envoyer. Chaque récepteur génère en permanence le code de tous les satellites, et à la réception des signaux il va utiliser ces codes pour séparer et identifier les différents signaux arrivant sur la même fréquence. Cela est réalisé par la fonction de corrélation du récepteur, soit par les corrélateurs du récepteur. Ces codes seront aussi utilisés pour mesurer le retard de propagation du signal en mesurant le décalage entre

le code reçu et le même code généré par le récepteur.

Ces codes sont générés à partir de registres à décalages bouclés de taille  $n$ . Ce sont des codes pseudo-aléatoires parce qu'ils sont générés sous la forme d'une suite aléatoire d'éléments binaires. Cette suite est périodique de période  $N = 2^n - 1$  bits. Ces codes sont dits de longueur maximale si ils sont définis sur une période  $N$ . On représente sur la figure 1.5 la fonction d'autocorrélation d'un code pseudo aléatoire.

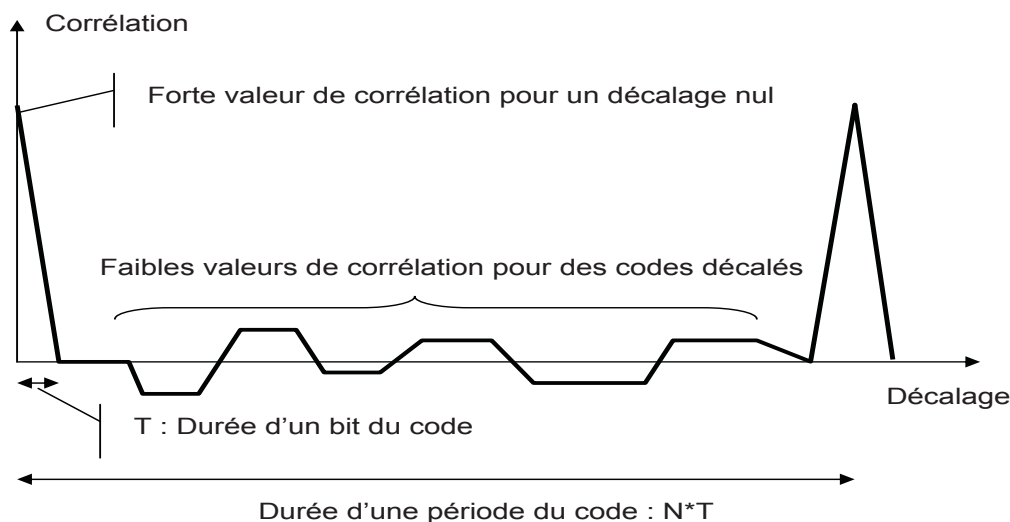


FIG. 1.5 – Fonction d'autocorrélation d'un code CDMA

Ces codes présentent la particularité d'avoir une faible valeur de corrélation quand les deux codes sont identiques mais décalés de plus d'un bit. D'une part, ils ont aussi une faible valeur d'intercorrélation quand les codes sont différents. D'autre part, ils ont une forte valeur de corrélation quand les deux codes sont identiques et en phase.

### Les codes C/A

Le code C/A (Coarse/Acquisition) est un code pseudo-aléatoire binaire appartenant à la famille des codes Gold. Un code Gold est obtenu en effectuant une somme modulo 2 de deux séquences de longueur maximale (m-séquences) et de même période  $N$ . Les deux m-séquences utilisées pour la génération des codes C/A sont produites avec deux registres à décalage bouclés,  $G_1$  et  $G_2$ . Chaque registre contient 10 étages, ce qui implique que la longueur d'un code C/A est 1023 bits.

La génération d'un code C/A commence par une initialisation des étages des deux registres à 1. La génération du code est réalisée ensuite en effectuant une addition modulo 2 entre la sortie du registre à décalage  $G_1$  et le résultat de l'addition modulo 2 de la sortie de deux étages du registre à décalage  $G_2$ . Il existe 45 possibilités pour le choix de ces deux étages donc 45 codes différents possibles. Seuls 36 codes sont pris en considération et attribués aux différents satellites. En effet seuls ces codes offrent une faible intercorrélation. La figure 1.6 représente



l'algorithme de construction d'un des codes C/A.

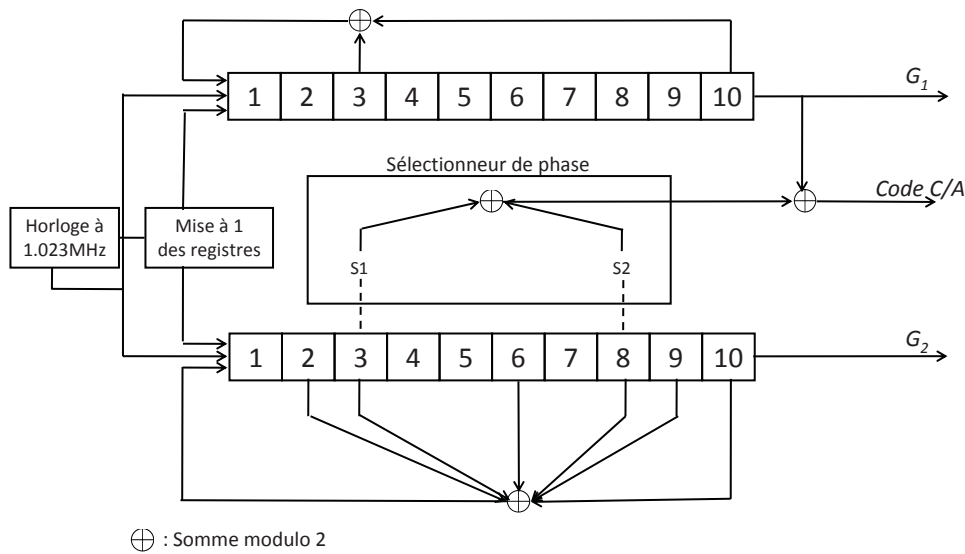


FIG. 1.6 – Génération du code C/A

### Les codes CM et CL

La principale différence entre un signal GPS L2C et un signal GPS L1, hormis une fréquence porteuse différente, est que dans la partie civile du signal GPS L2C on trouve deux codes pseudo-aléatoires multiplexés entre eux par la méthode du multiplexage temporel, appelé aussi MRT (Multiplexage par Répartition dans le Temps ou en anglais TDM, Time Division Multiplexing). Cette méthode consiste à affecter à tour de rôles la totalité de la bande passante pendant un court instant à chacun des codes pour transmettre un seul bit. L'un de ces codes est appelé le code **CM**, pour Code Moderate. Il sera lui-même multiplexé avec le message de navigation. Rappelons que chaque bit du message de navigation dure 20 millisecondes, donc lors du multiplexage, ils seront synchronisés et il y aura un bit de message de navigation par période de code CM. Le deuxième code appelé **CL**, pour Code Long, sera vierge. Ces deux codes sont de plus grande période que le code C/A du signal GPS L1. Le CM a une période de 20 millisecondes, et est constitué de 10230 bits. Le CL a une période de 1.5 secondes, et est constitué de 767250 bits, soit 75 fois la longueur d'un code CM. Tous les deux sont cadencés à 511.5Kbits/s. Le multiplexage des codes CM et CL permet aussi de doubler le débit de la transmission, ce qui implique qu'en sortie de ce multiplexage, nous disposons d'un signal cadencé à 1.023 Mbits/s. Le principe du multiplexage temporel des deux codes est présenté sur la figure 1.7.

Les deux codes CM et CL sont générés en utilisant le même registre à décalage, présenté sur la figure 1.8. L'état initial varie pour chaque code selon le satellite et il est chargé dans le registre à décalage tous les 10230 bits pour CM et tous les 767250 bits pour CL. Les valeurs

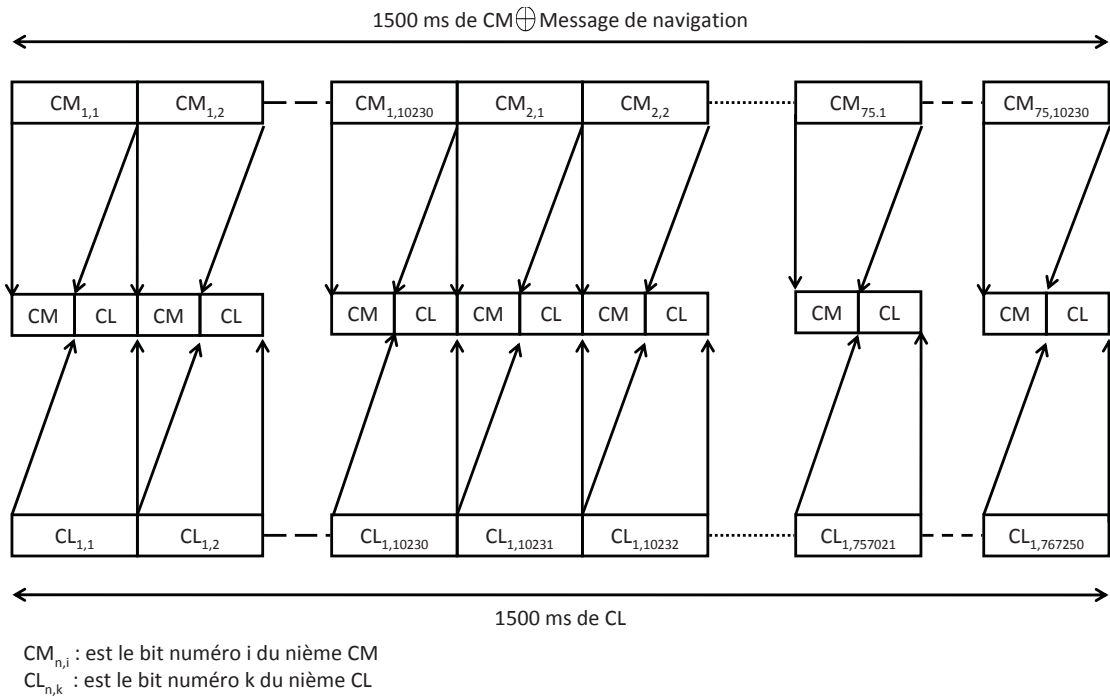


FIG. 1.7 – Multiplexage par répartition dans le temps de CM et CL

initiales du registre associées aux différents satellites sont données dans le document officiel fourni par le "Navstar GPS Joint Program Office" qui décrit le système [ISD04].

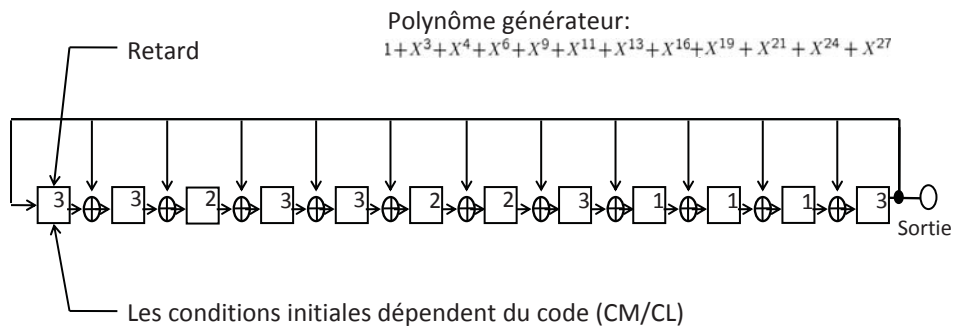


FIG. 1.8 – Génération des codes CM et CL

### Les codes I5 et Q5

Les codes pseudo-aléatoires en phase *I5* et en quadrature *Q5* du signal GPS en bande *L5* sont transmis à une cadence de 10.23 mégabits par seconde et la longueur des codes est de 10230 bits. Dans ce cas la durée d'un bit du code est plus faible et le pic de corrélation est donc plus pointu, soit plus discriminatoire et le spectre du signal s'étale sur une bande de fréquences plus

large. Dans ce cas, l'utilisation d'un débit de transmission plus important a pour but d'améliorer le traitement des multi-trajets (grâce à un pic de corrélation plus discriminant), de diminuer l'influence du bruit sur la précision et de pouvoir rejeter les interférences des bandes voisines (grâce à un spectre étalé sur une bande de fréquences plus large). Les deux codes ont une période d'une milliseconde, le choix de cette période provenait de la volonté de minimiser les changements de conception des satellites, car ils sont déjà équipés d'un code C/A cadencé à 1.023 MHz.

La grande longueur des codes GPS L5 améliore les propriétés de corrélation, mais malheureusement il n'existe aucune famille de code théorique pour les générer. En effet la plupart des familles de code ont une longueur de  $2^n - 1$ , où  $n$  est le nombre d'étages du registre à décalage nécessaire pour leur construction. Les codes de longueur de 10230 bits ne peuvent pas être générés de cette manière. En effet les registres à décalage ayant 13 ou 14 étages, génèrent respectivement des codes de longueur de 8191 et 16383 bits. La solution proposée pour faire face à ce problème a été d'utiliser des codes à cycle court, nommés *XA*, *XBI* et *XBQ*. Le code *XA* est généré à l'aide d'un registre à décalage de 13 étages, il est identique pour tous les satellites. Sa longueur est de 8190 bits, il est donc plus court d'un bit par rapport à sa longueur naturelle. Sa construction s'effectue de la manière suivante : tout d'abord les 8190 bits sont générés, ensuite le registre à décalage est initialisé à 1, enfin les 2040 bits restants sont générés pour construire un code de longueur de 10230 bits et à ce moment là le registre est réinitialisé à nouveau à 1. Les codes *XBI* et *XBQ* sont initialisés en fonction du numéro du satellite. *I5* est généré par une somme modulo 2 de *XA* et *XBI*. En revanche, le *Q5* est généré par une somme modulo 2 de *XA* et *XBQ*. Notons que les registres utilisés pour générer *XBI* et *XBQ* sont identiques, mais leur initialisation est différente et ils ne sont initialisés qu'au bout de la génération de 10230 bits[ANO02, BAS04].

La figure 1.9 représente les différentes étapes de construction des codes *I5* et *Q5*. Parmi les 4000 codes qui peuvent être générés, seulement 74 sont retenus. 37 pour les *I5* et 37 pour les *Q5*. Les autres codes sont disponibles pour une utilisation ultérieure comme par exemple l'envoi de nouveaux satellites ou pour d'autres applications.

## 1.3 Présentation générale du système GPS

### 1.3.1 Le calcul de position

Les systèmes de positionnement GALILEO et GPS reposent sur le même principe de fonctionnement. Les satellites envoient un signal qui est traité et décodé par le récepteur. Le traitement du code CDMA et de la porteuse du signal permet au récepteur de calculer dans son référentiel de temps les heures d'émission et de réception du signal. Le décodage du message de navigation contenu dans le signal permet au récepteur de calculer la position des satellites dans son référentiel de temps. Cependant tous les satellites utilisent des horloges atomiques qui leur permettent d'être synchronisés avec un référentiel de temps appelé temps UTC ( Universal Time Coordinates) . Pour des raisons de coût et de technologie, les récepteurs ne sont pas dotés d'horloges atomiques, ce qui implique que les récepteurs ne son pas synchronisés avec

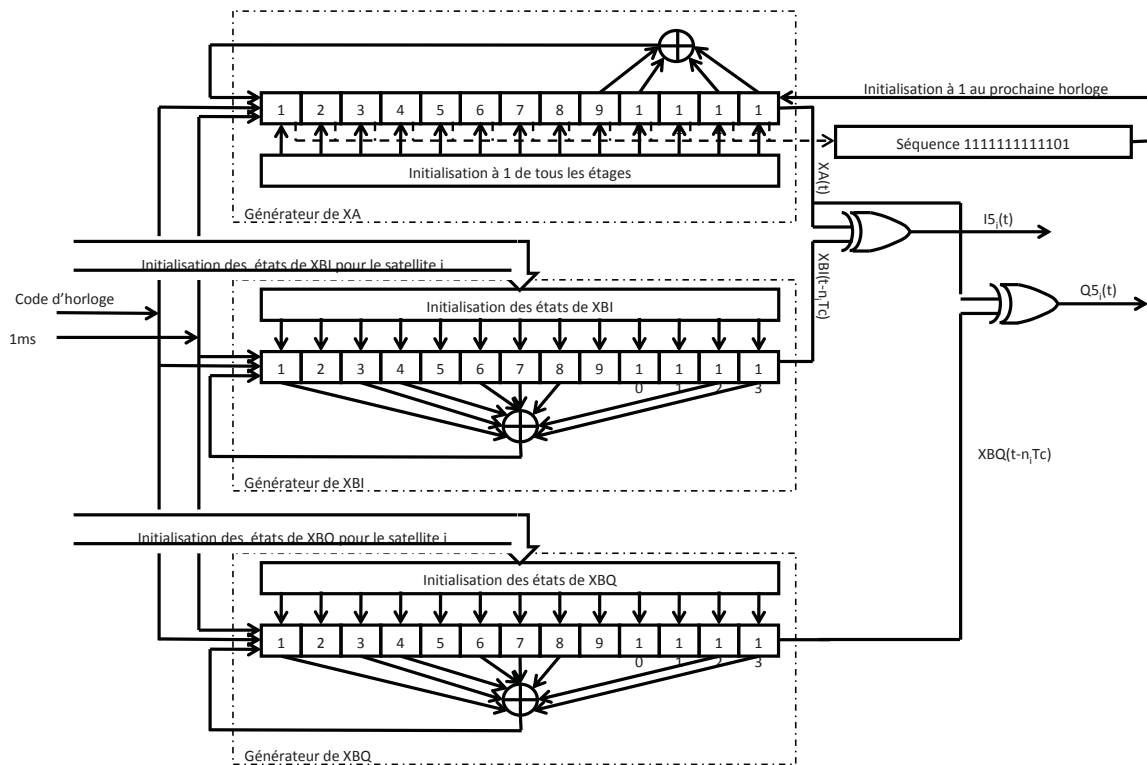


FIG. 1.9 – Génération des codes en quadrature I5 et Q5

le temps UTC. Par conséquent un biais d'horloge est introduit, noté  $\Delta t_r$ . Ce biais provoque une erreur dans la mesure du temps de propagation des signaux identiques pour tous les satellites. Cette erreur sur le temps se traduit par une erreur sur la distance satellite-récepteur qui est alors appelée pseudo-distance. L'algorithme de calcul de position doit calculer les coordonnées du récepteur  $(X, Y, Z)$  et le biais de position lié au biais d'horloge  $\Delta^{Rec} = c * \Delta t_r$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière. On a alors quatre inconnues d'où la nécessité d'utiliser quatre satellites pour le calcul de position [Lei95].

Soit  $\rho_{rs}$  la pseudo-distance entre le récepteur  $r$  et le satellite  $s$ , soient  $(x_s, y_s, z_s)$  les coordonnées du satellite  $s$  et soient  $(X, Y, Z)$  les coordonnées du récepteur.  $(x_s, y_s, z_s)$  et  $(X, Y, Z)$  sont tous les deux dans un système de coordonnées nommé ECEF (Earth Centred Earth Fixed). La pseudo-distance  $\rho_{rs}$  s'écrit alors [GWA01] :

$$\rho_{rs} = \sqrt{((x_s - X)^2 + (y_s - Y)^2 + (z_s - Z)^2) + \Delta^{Rec}} \quad (1.4)$$

Avec  $s = 1, 2, 3, 4$  et  $X, Y, Z, \Delta^{Rec}$  sont les inconnues. Soient  $\Lambda = (X, Y, Z, \Delta^{Rec})^T$  et  $P = (\rho_{r1}, \rho_{r2}, \rho_{r3}, \rho_{r4})^T$ . Le système à résoudre pour calculer  $\Lambda$  peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$P = h(\Lambda) \quad (1.5)$$

Du fait de la non-linéarité de ce système, il sera difficile de le résoudre directement. Une solution pour contourner ce problème est de le linéariser en utilisant la méthode des moindres carrés [Lei95]. C'est une méthode itérative qui permet la linéarisation de la fonction  $h$ .

Une solution initiale  $\hat{\Lambda}_0$  est fournie au système. Considérons par exemple, que les coordonnées initiale  $X, Y, Z$  sont les coordonnées du centre de la terre et que le biais d'horloge est nul  $C_r = 0$ . Le système est linéarisé autour de la solution estimée  $\hat{\Lambda}_j$  courante et on obtient alors :

$$P = h(\hat{\Lambda}_j) + \frac{\delta h(\hat{\Lambda}_j)}{\delta \Lambda} \delta \Lambda_j \quad (1.6)$$

Où :

$$\delta \Lambda_j = [ \delta X, \delta Y, \delta Z, \delta \Delta^{Rec} ]^T \quad (1.7)$$

Pour simplifier, on réécrit la matrice jacobienne de la façon suivante :

$$H_j = \frac{\delta h(\hat{\Lambda}_j)}{\delta \Lambda} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Où

$$\alpha_{s1} = \frac{x_s - X}{\rho_{rs}} \quad \alpha_{s2} = \frac{y_s - Y}{\rho_{rs}} \quad \alpha_{s3} = \frac{z_s - Z}{\rho_{rs}} \quad (1.9)$$

En posant  $\delta P = P - h(\hat{\Lambda}_j)$ , le système devient :

$$\delta P = H_j \delta \Lambda_j \quad (1.10)$$

On a alors :

$$\delta \Lambda_j = H_j^{-1} \delta P_j \quad (1.11)$$

La future estimation est obtenue par l'expression suivante :

$$\hat{\Lambda}_{j+1} = \hat{\Lambda}_j + \delta \Lambda_j \quad (1.12)$$

Le processus est répété jusqu'à convergence de la solution. La solution est obtenue pour une faible valeur de  $\delta\Lambda_j$  définie par un seuil. Dans le cas où  $n$  satellites sont visibles avec  $n > 4$ , la matrice  $H$  devient :

$$H_j = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 1 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Dans ce cas la matrice  $H$  n'est plus carrée et n'est donc plus inversible directement. On utilise alors une matrice pseudo-inverse de  $H$ . L'équation 1.11 devient :

$$\delta\Lambda_j = [H^T H]^{-1} H^T \delta P_j \quad (1.14)$$

En pratique la convergence est obtenue en quelques itérations.

### 1.3.2 Les traitements récepteurs pour l'estimation de la pseudo distance

Pour calculer sa position un récepteur doit extraire le message de navigation et estimer les paramètres du signal reçu pour en déduire une mesure de pseudo distance satellite récepteur. Nous allons présenter dans ce paragraphe le principe des traitements récepteur qui conduisent au calcul de la pseudo distance satellite récepteur. Les satellites émettent un signal à la fréquence  $f_r$ , cette fréquence dépend de la bande GNSS considérée. A la réception, en sortie d'antenne, l'expression de ce signal est donnée par la formule suivante pour un ensemble  $\{S\}$  de satellites visibles :

$$S_r(t) = \sum_{s \in S} n(t) A_s C_s(t - \tau_s) \sin(2\pi f_s t + \phi_s) + \eta_s(t) \quad (1.15)$$

Dans cette expression  $n(t)$  est le message de navigation,  $A_s$  l'amplitude du signal et  $C_s(t - \tau_s)$  le code du satellite décalé de  $\tau_s$  dans la base de temps du récepteur.  $f_s$  est la fréquence porteuse du signal qui est différente de la fréquence d'émission du satellite  $f_r$  à cause de l'effet Doppler. L'effet Doppler est une variation de fréquence associée au mouvement relatif entre le satellite et le récepteur.  $\phi_s$  est le décalage de la porteuse dans le référentiel de temps du récepteur. Finalement  $\eta_s(t)$  est un bruit blanc gaussien centré qui modélise les perturbations aléatoires liées à la propagation du signal dans l'atmosphère et à la réception de celui-ci par l'antenne.

A la réception, le récepteur génère une copie du signal d'un satellite  $s$  donné. Soit une copie du code et de la porteuse du signal reçu. En effet, pour pouvoir extraire le message de navigation en provenance du satellite  $s$ , le récepteur multiplie le signal reçu  $S_r$  par le code du satellite  $C_s(t - \hat{\tau}_s)$ , la porteuse en phase  $\sin(2\pi \hat{f}_s t + \hat{\phi}_s)$  et la porteuse en quadrature  $\cos(2\pi \hat{f}_s t + \hat{\phi}_s)$ .

On a alors les signaux suivants :

$$I_s(t) = n(t)A_s C_s(t - \tau_s) C_s(t - \hat{\tau}_s) \cos(2\pi(f_s - \hat{f}_s)t + \phi_s - \hat{\phi}_s) + \eta_s^I(t) \quad (1.16)$$

$$Q_s(t) = n(t)A_s C_s(t - \tau_s) C_s(t - \hat{\tau}_s) \sin(2\pi(f_s - \hat{f}_s)t + \phi_s - \hat{\phi}_s) + \eta_s^Q(t) \quad (1.17)$$

Dans ce cas, si on connaît parfaitement la fréquence du signal reçu,  $\hat{f}_s = f_s$ , et le décalage du code reçu,  $\hat{\tau}_s = \tau_s$ , l'argument du nombre complexe formé avec  $(I_s(t), Q_s(t))$  nous donne la valeur du déphasage  $\phi_s - \hat{\phi}_s$  et donc le message de navigation.

Pour estimer les paramètres  $f_s$  et  $\tau_s$  du signal reçu, le récepteur intègre sur une ou plusieurs périodes de code, le signal échantillonné. On suppose ici que le décalage de code, la fréquence et la phase du signal reçu sont constants sur la  $k^{\text{ième}}$  période d'intégration considérée. On note  $\tau_{e,k} = \hat{\tau}_{s,k} - \tau_{s,k}$ ,  $f_{e,k} = \hat{f}_{s,k} - f_{s,k}$  et  $\phi_{e,k} = \phi_{s,k} - \hat{\phi}_{s,k}$  les erreurs d'estimation respectivement sur le décalage du code, sur la fréquence porteuse et sur la phase pour le satellite  $s$ . On a alors pour un satellite  $s$  donné les expressions suivantes :

$$I_k(\Delta) = n_k \sqrt{2 S/N_0 T_c} R(\tau_{e,k} - \Delta) \text{sinc}(f_{e,k} T_c) \cos(\phi_{e,k}) + \eta_k^I \quad (1.18)$$

$$Q_k(\Delta) = n_k \sqrt{2 S/N_0 T_c} R(\tau_{e,k} - \Delta) \text{sinc}(f_{e,k} T_c) \sin(\phi_{e,k}) + \eta_k^Q \quad (1.19)$$

On suppose ici que la durée d'un bit du message de navigation est plus longue que la durée du code CDMA. Dans cette expression  $S/N_0$  est le rapport signal à bruit du signal reçu souvent donné en dBHz.  $T_c$  est la durée d'une période du code CDMA.  $R(\cdot)$  est la fonction d'autocorrélation du code CDMA qui décroît avec le décalage entre le code reçu et le code généré par le récepteur.  $\text{sinc}(\cdot)$  est la fonction sinus cardinal qui décroît avec la différence entre la fréquence de la porteuse du signal reçu et la porteuse générée localement.  $\eta_k^I$  et  $\eta_k^Q$  sont respectivement des bruits blancs gaussiens de variance 1 sur les composantes en phase et en quadrature. La valeur de  $\Delta$  dans cette expression dépendra des traitements réalisés décrits par la suite.

Pour estimer les paramètres  $f_{s,k}$  et  $\tau_{s,k}$ , on maximise la composante  $I_k(\Delta)$  et on minimise  $Q_k(\Delta)$ , ce qui revient à minimiser  $\tau_{e,k}$ ,  $f_{e,k}$  et  $\phi_{e,k}$ . Cette maximisation ou minimisation est réalisée en général en deux étapes :

- Une étape d'acquisition : cette étape préalable d'initialisation est réalisée par le récepteur avant le calcul du point. Elle a pour but de rechercher les valeurs de  $f_s$  et  $\tau_s$ . Elle est réalisée en maximisant la somme du carré des composantes  $I_k(0)$  et  $Q_k(0)$  (valeur indépendante de la phase) sur l'ensemble des fréquences et décalage de codes possibles.
- Une étape de poursuite : quand les paramètres ont été initialisés dans l'étape d'acquisition leurs valeurs sont ensuite mises à jour pendant le fonctionnement du récepteur dans l'étape de poursuite. Elle est réalisée en recherchant un maximum associé aux composantes  $I_k(\Delta)$  et  $Q_k(\Delta)$  sur une gamme de fréquences et sur un nombre de décalages de code plus faible. Pour ce travail de thèse, seuls les récepteurs cohérents qui utilisent la

phase estimée sont étudiés. Dans ce cas, la poursuite de la fréquence et du code est réalisée par trois traitements simultanés mais différents. On parle alors de poursuite de la phase (réalisée dans une boucle PLL : Phase Lock Loop), de poursuite de la fréquence (réalisée dans une boucle FLL : Frequency Lock Loop) et de poursuite du code (réalisée dans une boucle DLL : Delay Lock Loop). L'extraction du message de navigation et le calcul de la pseudo distance sont réalisés simultanément avec la poursuite du signal reçu. Nous allons maintenant décrire ces traitements.

### Acquisition

En général l'acquisition est réalisée en recherchant la fréquence  $\hat{f}_s$  et le décalage  $\hat{\tau}_s$  qui maximise le module du nombre complexe formé par  $I_k(0)$  et  $Q_k(0)$ . Cette recherche est réalisée sur une plage de fréquences déduite de la fréquence Doppler maximale et pour les décalages de code inférieurs à la période  $Tc$  du code. Ce traitement nécessite beaucoup de calcul et de temps. Pour minimiser les durées de calculs, on utilise la FFT (Fast Fourier Transform) qui est un algorithme rapide d'implémentation de la TFD (Transformée de Fourier Discrète). On utilise aussi la propriété suivante de la transformée discrète :

$$(f \circ g)_N(k) = TFD^{-1}(F(K)G^*(K)) \quad (1.20)$$

Dans cette expression  $(f \circ g)_N(k)$  est la corrélation discrète des fonctions  $f$  et  $g$ .  $TFD^{-1}$  la Transformée de Fourier Discrète inverse et  $G^*(k)$  est le conjugué de la Transformée de Fourier Discrète de la fonction  $g$ . Finalement on représente sur la figure 1.10 l'architecture classique du système d'acquisition parallèle qui calcule la norme de la corrélation pour l'ensemble des décalages de codes possibles du signal échantillonné et pour une fréquence donnée. Cette implémentation permet de calculer la corrélation en utilisant la FFT et transforme le calcul de corrélation en un produit dans le domaine des fréquences. En pratique, quand la puissance du signal est faible, on calcule la corrélation à partir de l'intégration dite cohérente du signal sur  $N$  périodes de code. Cependant par cette approche, le nombre  $N$  est limité par la durée d'un bit du message de navigation. On peut aussi réaliser l'intégration dite non cohérente en additionnant  $K$  fois le calcul de la corrélation. Malheureusement cette méthode ne fournit pas une valeur précise des paramètres du signal.

On représente sur la figure 1.11 la norme de la fonction d'autocorrélation calculée par cette approche pour différentes fréquences et décalages de code. En pratique le maximum de la courbe, quand il est supérieur à un seuil donné, définit le décalage du code et la fréquence du signal reçu.

### Poursuite du code

Le but de la poursuite du code est de garder le code généré localement par le récepteur synchronisé avec le code du signal reçu. Le récepteur calcule pour cela trois valeurs de corrélation à partir des composantes  $I_k(\cdot)$  et  $Q_k(\cdot)$ . On représente sur la figure 1.12 la norme de la fonction d'autocorrélation et les trois valeurs de corrélations appelées Early, Prompt et Late et notées E, P et L sur la figure. Ces trois valeurs sont respectivement associées aux trois codes CDMA générés simultanément par le récepteur. La valeur de la norme de la corrélation associée au code dit Early, parce qu'il est en avance sur le code Prompt, est obtenue à partir des valeurs  $I_k(-d/2)$



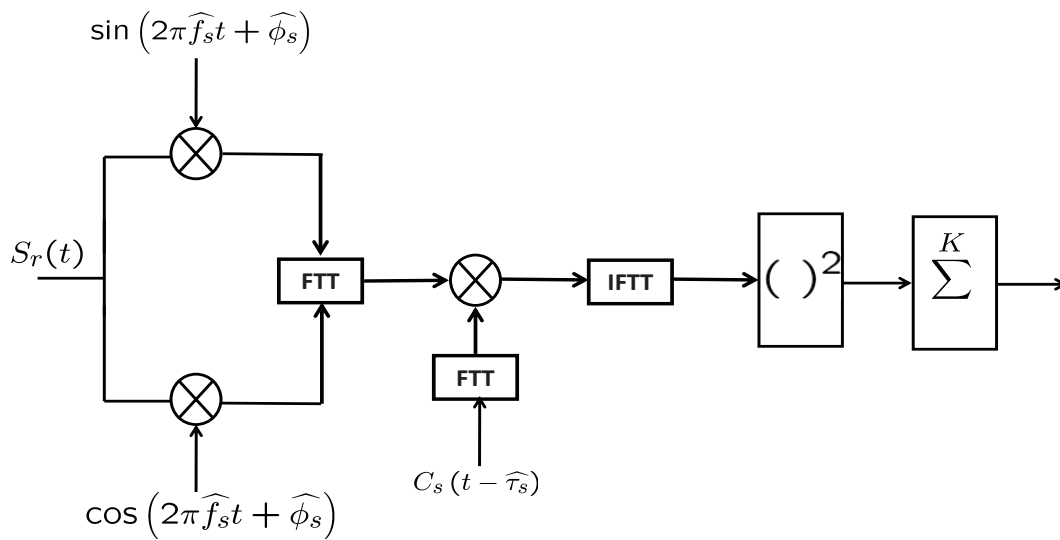


FIG. 1.10 – Algorithme de l’acquisition fréquentielle

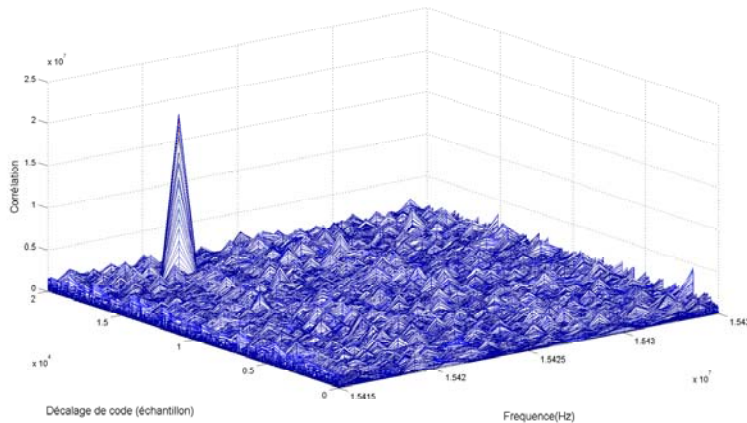


FIG. 1.11 – Exemple d’acquisition effectuée sur un signal réel

et  $Q_k(-d/2)$  (à partir de la norme du nombre complexe formé avec  $I_k(-d/2)$  et  $Q_k(-d/2)$ ). La valeur de la norme de la corrélation associée au code dit Late, parce qu’il est en retard sur le code Prompt, est obtenue à partir des valeurs  $I_k(d/2)$  et  $Q_k(d/2)$ . Finalement la valeur de la norme de la corrélation associée au code dit Prompt, parce qu’il est maintenu synchronisé par le récepteur avec le code reçu, est obtenue à partir des valeurs  $I_k(0)$  et  $Q_k(0)$ .

La valeur de  $d$  dépendra du constructeur, en général elle est égale à  $T_b$ , la durée d’un bit du code CDMA. On représente sur la figure 1.12 l’évolution des trois valeurs de normes calculées avec  $I_k(\cdot)$  et  $Q_k(\cdot)$  quand le code du signal reçu arrive en retard, synchronisé ou en avance par rapport au code Prompt.

Le rôle de la boucle de poursuite du code DLL (Delay Lock Loop) est de garder synchronisé

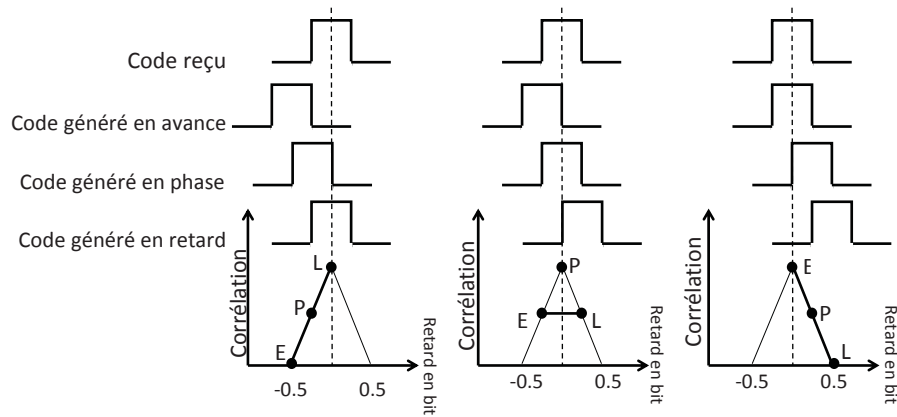


FIG. 1.12 – Evolution de la corrélation en fonction des codes Early, Prompt et Late

le code prompt avec le code du signal reçu. On représente sur la figure 1.13 une architecture classique du système de poursuite du code.

Le signal en entrée du système de poursuite est un signal numérisé. Dans cette architecture

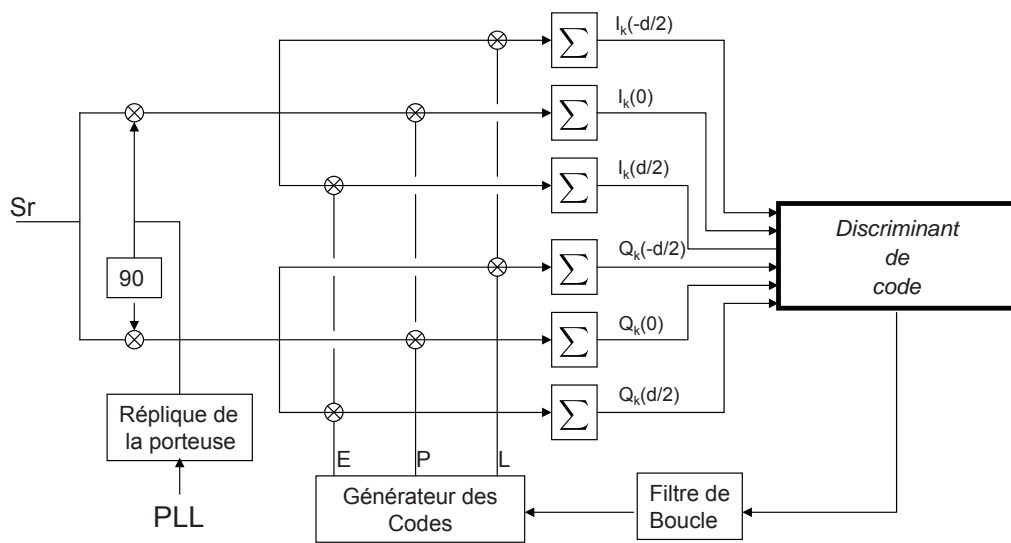


FIG. 1.13 – Principe de la poursuite du code : DLL

on génère d'abord la composante en phase et en quadrature à partir de la fréquence porteuse estimée dans la boucle de poursuite. Puis les trois codes Early Prompt et Late sont multipliés simultanément avec les deux composantes en phase et en quadrature. Enfin le signal est intégré sur une ou plusieurs périodes de code pour produire les six valeurs de  $I_k(\dots)$  et  $Q_k(\dots)$  associées aux codes Early Prompt et Late.

Les valeurs de  $I_k(\dots)$  et  $Q_k(\dots)$  sont utilisées pour calculer le discriminant du signal. Les valeurs de discriminant sont filtrées et utilisées pour piloter le générateur de codes locaux. Les

codes sont avancés ou retardés pour que le code Prompt reste synchronisé avec le code du signal reçu. On distingue principalement deux types de discriminant, les discriminants cohérents et les discriminants non cohérents. Les discriminants cohérents sont sensibles aux valeurs de l'erreur de phase  $\phi_{e,k}$ . On reporte ici les expressions des discriminants les plus utilisés :

- Early-Late :  $I_k(-d/2) - I_k(d/2)$
- Dot Product :  $(I_k(-d/2) - I_k(d/2))I_k(0) + (Q_k(-d/2) - Q_k(d/2))Q_k(0)$
- Early-Late Power :  $(I_k^2(-d/2) + Q_k^2(-d/2)) - (I_k^2(d/2) + Q_k^2(d/2))$

Dans cette liste seul le discriminant "Early-Late" est cohérent. C'est celui que nous utiliserons dans ce travail car le bruit sur sa valeur est gaussien et centré. Ce travail de thèse sera appliqué à l'estimation de la pseudo distance satellite-récepteur à partir des valeurs de discriminant. En effet les valeurs de discriminants sont proportionnelles aux évolutions du décalage entre le code reçu et le code généré localement. Ces évolutions sont provoquées par les variations de distance satellite récepteur. On souhaite dans ce travail montrer l'apport de la fusion des valeurs de discriminants bruitées obtenues lors de la poursuite du code sur les voies données et pilote.

### Poursuite de la phase

Le but de la boucle de poursuite de phase PLL (Phase Lock Loop) est de générer une porteuse en phase avec le signal reçu. On représente sur la figure 1.14 l'architecture classique d'une boucle PLL pour la poursuite du signal GPS. Dans cette architecture le signal reçu échantillonné est d'abord multiplié par le code prompt en provenance de la boucle DLL. Le signal est ensuite multiplié par une réplique de la porteuse en phase et en quadrature déphasé avec le signal reçu. L'intégration du signal permet de générer les valeurs de  $I_k(0)$  et  $Q_k(0)$  qui sont utilisées pour produire un signal discriminant proportionnel au déphasage. Finalement ce signal discriminant, filtré par un filtre de boucle, vient piloter un oscillateur numérique NCO (Numerically Controlled Oscillator) qui génère une réplique de la porteuse en phase avec le signal reçu.

Deux discriminants sont classiquement utilisés pour la phase, le discriminant de Costas et le

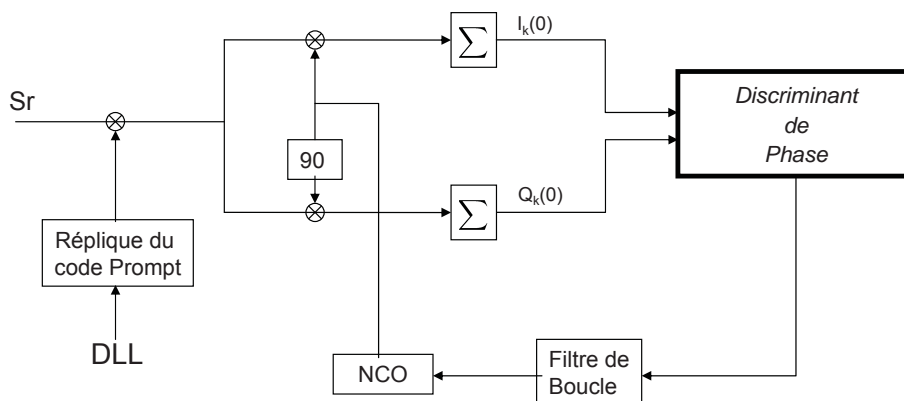


FIG. 1.14 – Principe de la poursuite de la phase : PLL

discriminant Arctangente. Leurs expressions sont les suivantes :

- Costas :  $I_k(0) Q_k(0)$
- Arctangente :  $\text{Atan} \left( \frac{Q_k(0)}{I_k(0)} \right)$

Dans ce travail de thèse, nous utiliserons le discriminant Arctangente car sa valeur est indépendante de la puissance du signal. La boucle FLL de poursuite de la fréquence possède une structure similaire à la boucle de phase, mais avec des discriminants différents. Nous présentons au chapitre 4 un filtre que nous proposons pour l'estimation et la fusion de données angulaires. Ce filtre sera appliqué à l'estimation du déphasage et on montre l'apport de la fusion des valeurs de discriminants bruitées obtenues lors de la poursuite de la phase sur les voies données et pilote.

### 1.3.3 Estimation de la pseudo distance

La boucle de poursuite du code fournit les bits du message de navigation et l'écart entre le code reçu et le code généré par le récepteur. Cependant, l'écart mesuré par la DLL ne peut pas être supérieur à la durée d'une période du code  $T_c$ . Par exemple, dans le cas du code  $C/A$  l'écart mesuré maximale est de 300 km. Malheureusement la différence entre deux pseudo distances en provenance de deux satellites différents peut être supérieure à 300 km. Il existe donc une ambiguïté sur la mesure de pseudo distance avec le code.

Pour lever cette ambiguïté, on utilise les informations contenues dans le message de navigation. Le message de navigation est émis à la cadence de 50 bit/sec. Il est composé de 25 trames de 1500 bits et chaque trame dure 30 secondes. La transmission du message complet requiert alors 750 secondes soit 12.5 minutes. Chaque trame est subdivisée en 5 sous trames de 6 secondes soit 300 bits. Chaque sous-trame est repérable par son premier mot, le **TLM**, de 30 bits. Les 8 premiers bits d'un TLM sont toujours identiques (10001011) et ils correspondent à un message de préambule pour la synchronisation en réception. Le second mot de chaque sous-trame est le mot **HOW** (Hand Over Word) qui mesure également 30 bits. Les informations contenues dans ce mot permettent de dater en temps GPS la sous-trame suivante, c'est-à-dire le temps d'émission du premier bit du TLM suivant. On représente sur la figure 1.15 la structure d'une trame du message de navigation. Parmi les informations envoyées par le satellite on notera les corrections d'horloge qui sont des paramètres permettant de convertir le temps fourni par le satellite en temps UTC. On notera aussi les éphémérides qui sont les paramètres du modèle de Kepler modifié permettant de calculer la position des satellites. On retrouve aussi dans ce message des paramètres permettant de corriger les variations de pseudo distance liées à la traversée du signal dans l'ionosphère.

Pour calculer la première pseudo distance, et lever l'ambiguïté sur le code, le récepteur GPS définit l'heure d'émission du premier bit du TLM avec le message de navigation, on note cet instant  $T_{TLM}$ . Il définit aussi l'heure de réception  $T_{rec}$ , dans la base de temps du récepteur, qui correspond à l'instant de réception du code. Cette heure de réception est alors associée à un décalage temporel  $\Delta T$  du code estimé par la boucle DLL du récepteur. On en déduit donc l'heure d'émission du TLM par le satellite  $T_{sat}$  qui est reçue à  $T_{rec}$  et l'expression de la pseudo

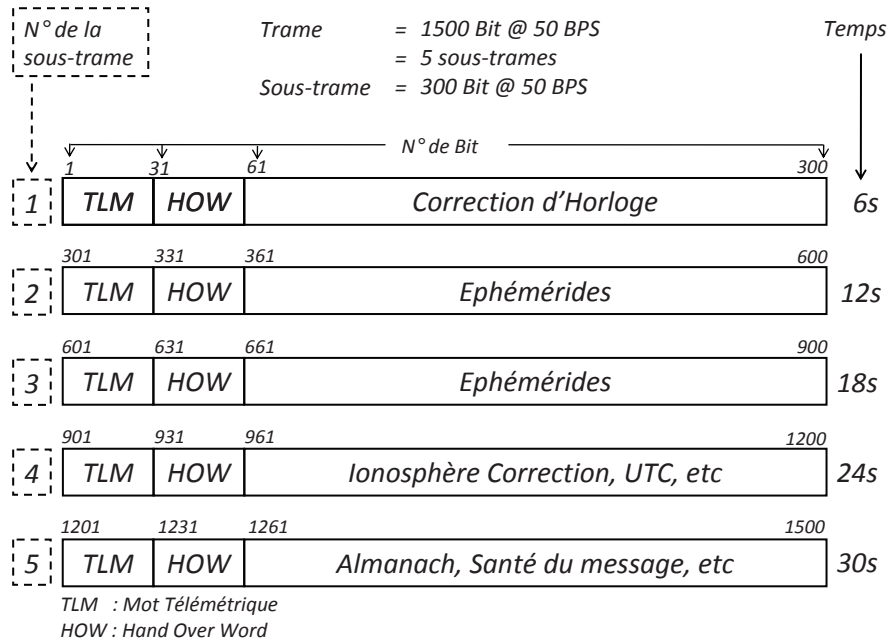


FIG. 1.15 – Structure d'une trame du message de navigation

distance  $\rho_{rs}$  :

$$T_{sat} = T_{TLM} - \Delta T \quad (1.21)$$

$$\rho_{rs} = (T_{rec} - T_{sat}) * c \quad (1.22)$$

Quand l'ambiguïté est levée sur le code, la première pseudo distance, la boucle de code permet alors d'estimer ses variations. De plus, quand les éphémérides ont été extraites du message de navigation,  $T_{sat}$  permet de définir la position du satellite (en utilisant le modèle Keplerien de positionnement des satellites) associée à la pseudo distance  $\rho_{rs}$ . Finalement l'expression de la pseudo distance est donnée par l'expression suivante :

$$\rho_{rs} = \sqrt{((x_s - X)^2 + (y_s - Y)^2 + (z_s - Z)^2) + \Delta^{Rec} + \Delta_s^{Sat} + \Delta_s^{iono} + \Delta_s^{Tropo}} \quad (1.23)$$

Dans cette expression  $\Delta_s^{Sat}$  est un paramètre de correction qui dépend du satellite  $s$ . Il représente l'écart entre l'horloge du satellite et le temps UTC.  $\Delta_s^{iono}$  et  $\Delta_s^{Tropo}$  sont respectivement des paramètres de correction qui représentent les variations de trajectoire du signal liées respectivement à sa traversée de la ionosphère et la troposphère.

## 1.4 Estimation des paramètres du signal

Lorsque l'émetteur et le récepteur sont en mouvement, les paramètres du signal GNSS reçu changent. Ces variations sont définies par rapport à la réplique du signal reçu générée par le récepteur. Les paramètres du signal sont le décalage entre le code généré par le récepteur et le

code reçu, la différence de fréquence entre la porteuse du signal émis par le satellite et le signal reçu, et la différence de phase entre le signal reçu et le signal local. L'évolution du décalage entre les codes est associée aux variations de distance entre le satellite et le récepteur. L'évolution de la fréquence et de la phase est associée aux variations de vitesse relatives satellite récepteur visibles par effet Doppler. Dans la suite les estimateurs présentés sont appliqués au signal GPS en provenance d'un satellite  $s$ . Par la suite, on ne rappellera pas dans les expressions l'indice  $s$  du satellite.

### 1.4.1 Modélisation du problème

Lorsque l'émetteur et le récepteur sont en mouvement, la fréquence du signal à la réception est différente de celle à l'émission. Ce phénomène est appelé **l'Effet Doppler**. Lorsque l'émetteur se rapproche du récepteur, la longueur d'onde diminue, ce qui implique que la fréquence reçue sera plus élevée que celle émise. Quand le récepteur s'éloigne, la longueur d'onde augmente et la fréquence diminue. L'effet Doppler provoque aussi un changement dans la durée des codes CDMA. En effet un Doppler positif provoque un rétrécissement de la taille du code. En revanche un Doppler négatif induit un élargissement de la taille du code. Le récepteur GPS réalise dans une étape d'initialisation l'acquisition du signal en multipliant le signal reçu avec une réplique de celui-ci générée localement en phase et en quadrature. Lors de cette étape, on obtient l'estimation  $\hat{f}_0$  de la valeur de la fréquence du signal à la réception. On a alors les expressions suivantes en phase et en quadrature du signal traité par le récepteur [ZIE06] :

$$I(t) = n(t) A C(t - \tau) C(t - \hat{\tau}) \cos(\phi - \hat{\phi} + 2\pi(f - \hat{f}_0)t - \pi\hat{\alpha} t^2) \eta^I(t) \quad (1.24)$$

$$Q(t) = n(t) A C(t - \tau) C(t - \hat{\tau}) \sin(\phi - \hat{\phi} + 2\pi(f - \hat{f}_0)t - \pi\hat{\alpha} t^2) + \eta^Q(t) \quad (1.25)$$

Dans cette expression  $\alpha$  est la vitesse d'évolution de la fréquence Doppler. On définit l'effet Doppler sur la fréquence du signal reçu par la formule suivante qui nous donne  $f_d$ , l'écart de fréquence par rapport à la fréquence  $f_r$  du signal émis par le satellite :

$$f_d = f_r \frac{-v_r}{c} \quad (1.26)$$

Dans cette expression  $v_r$  est la vitesse relative satellite récepteur et  $c$  la vitesse de la lumière. On peut alors définir l'effet du Doppler sur le décalage du code  $\tau$ . Soit  $\Delta\rho_{rs}$  la variation de pseudo distance pendant  $T_c$  la durée du code CDMA. On définit  $\Delta\tau$  le décalage de code qui lui est associé par l'expression suivante :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\rho_{rs}}{c} = \frac{v_r T_c}{c} = T_c \frac{-f_d}{f_r} \quad (1.27)$$

On définit l'effet Doppler sur la durée du code CDMA notée  $T_{cd}$  par la variation de fréquence suivante :

$$f_{cd} = f_c \frac{-v_r}{c} \quad (1.28)$$

Cet effet a pour conséquence un rétrécissement ou un allongement de la taille du code. En effet, on a dans ce cas :

$$\frac{T_c}{T_{cd}} = \frac{f_{cd} + f_c}{f_c} = 1 - \frac{f_d}{f_r} \quad (1.29)$$

On note  $T_{cd}$  la taille du code lié à l'effet Doppler. On a donc finalement :

$$T_{cd} = T_c \frac{f_r}{f_d + f_r} \quad (1.30)$$

Après l'étape d'acquisition, le récepteur estime dans l'étape de poursuite les paramètres du signal reçu. Pour cela, le récepteur intègre le signal en phase et en quadrature, défini par les expressions 1.24 et 1.25, sur un nombre entier de périodes du code CDMA. On modélise par les expressions suivantes le résultat obtenu à la  $k^{\text{ième}}$  période d'intégration :

$$I_k(\Delta) = n_k \sqrt{2 S/N_0 T_c} R(\tau_{e,k} - \Delta) \text{sinc}\left(\left(f_{e,k} + \alpha_{e,k} \frac{T_{c,k}}{2}\right) T_{c,k}\right) \cos(\phi_{e,k}) + \eta_k^I \quad (1.31)$$

$$Q_k(\Delta) = n_k \sqrt{2 S/N_0 T_c} R(\tau_{e,k} - \Delta) \text{sinc}\left(\left(f_{e,k} + \alpha_{e,k} \frac{T_{c,k}}{2}\right) T_{c,k}\right) \sin(\phi_{e,k}) + \eta_k^Q \quad (1.32)$$

Dans cette expression, pour laquelle les paramètres ont été définis au paragraphe précédent, on introduit l'erreur sur la vitesse de variation de la fréquence porteuse estimée par le récepteur  $\alpha_{e,k}$ . Les valeurs de  $I_k(\cdot)$  et  $Q_k(\cdot)$  obtenues pour différentes valeurs de  $\Delta$  sont utilisées par le récepteur pour estimer ces différentes erreurs et corriger les paramètres du signal généré localement. En pratique dans le simulateur que nous avons réalisé, on calcule les différentes valeurs de ces paramètres à partir de la trajectoire du récepteur que l'on a générée et de la position des satellites. On déduit de cette simulation, la fréquence initiale et les vitesses de variation de la fréquence porteuse  $\alpha_k$  pour générer les paramètres du signal. On définit alors la durée du code qui est fonction de l'effet Doppler par :

$$T_{c_k} = T_c \frac{f_r}{f_k + \alpha_k \frac{T_c}{2}} \quad (1.33)$$

Dans cette expression  $f_k$  est la fréquence du signal reçu au début de la  $k^{\text{ième}}$  période de code et  $\alpha_k$  sa vitesse de variation pendant cet intervalle de temps. On définit aussi l'erreur sur le décalage du code :

$$\tau_{e_k} = \tau_{e_{k-1}} + T_{c_k} \frac{f_r - \left(f_k + \alpha_k \frac{T_c}{2}\right)}{f_r} \quad (1.34)$$

L'erreur sur la phase et la fréquence dépend de la dynamique du système et des imprécisions de l'horloge. Les perturbations dues au bruit d'horloge récepteur peuvent être modélisées par une marche aléatoire gaussienne [BRO92, PAR96, KAP96]. Deux bruits indépendants  $W_{\phi_e}$  et  $W_{f_e}$  sont générés respectivement pour la phase et la fréquence. On génère alors deux marches aléatoires de moyenne nulle et de variances  $\sigma_{\phi_e}^2$  et  $\sigma_{f_e}^2$ . Les variances dépendent du type d'horloge. On trouve par exemple des horloges utilisant un oscillateur *TCXO* (Temperature-Compensated Crystal Oscillator) ou des horloges utilisant un oscillateur *OXO* (Ovenized Crystal Oscillator) [DIE84].

On a alors à la  $k^{\text{ième}}$  période de code :

$$f_{e,k} = f_{e,k-1} + \alpha_{e,k-1} T_{c,k-1} + W_{f_{e,k}} \quad (1.35)$$

$$\phi_{e,k} = \phi_{e,k-1} + 2\pi f_{e,k} T_{c,k} + W_{\phi_{e,k}} \quad (1.36)$$

On représente sur la figure 1.16 les différentes étapes de fonctionnement du simulateur. Un récepteur GNSS réalise l'étape d'estimation et de correction dans une DLL pour le code, dans une PLL pour la phase et dans une FLL pour la fréquence. Nous décrivons dans la suite la réalisation d'estimateurs de ces paramètres avec un filtre de Kalman étendu.

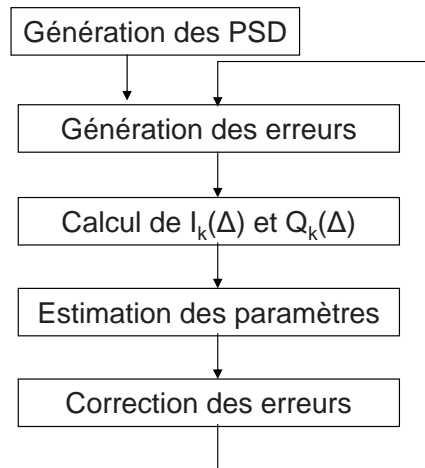


FIG. 1.16 – Les étapes de simulation du récepteur GNSS

## 1.4.2 Boucle de poursuite vectorielle

Dans une boucle de poursuite vectorielle, chaque boucle de poursuite individuelle (PLL, FLL, DLL) est remplacée par une boucle globale qui intègre en retour les informations de navigation et éventuellement les mesures en provenance d'autres capteurs comme le capteur de navigation inertielle [WON09]. Dans ce cas les informations supplémentaires sont intégrées dans l'étape de prédiction par un filtre de Kalman étendu [OHL06]. Cette approche permet d'augmenter la sensibilité de la poursuite et de lutter plus efficacement contre les interférences.

On représente sur la figure 1.17 l'architecture de base d'une boucle de poursuite vectorielle locale. La boucle vectorielle est dite locale car elle n'est représentée ici que pour la poursuite d'un seul satellite. Dans cette thèse c'est l'architecture de base sans les informations de navigation et les mesures en provenance d'autres capteurs qui sera utilisée comme référence. On comparera dans ce cas les performances obtenues de cette architecture avec l'architecture de la boucle de poursuite vectorielle proposée au chapitre 5 qui s'appuie sur des filtres de boucle différents.

Sur la figure 1.17 le signal reçu  $S_r(t, \tau_s, f_s, \phi_s)$  du satellite  $s$  se situe à l'entrée du système, soit au point **A**. Les sorties du corrélateur sont les valeurs en phase et en quadrature  $I_k(\cdot)$  et



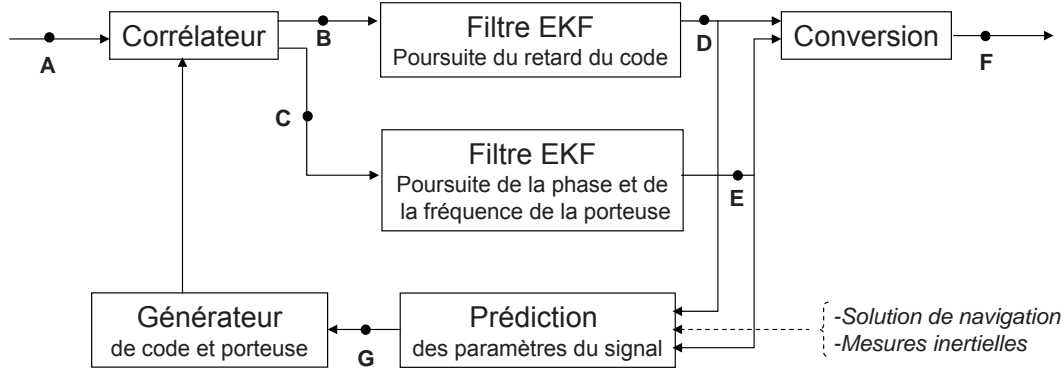


FIG. 1.17 – Architecture d'une boucle de poursuite vectorielle locale

$Q_k(\cdot)$  associées aux codes "early" et "late" au point **B**, soit  $[I_k(-\Delta), Q_k(-\Delta), I_k(\Delta), Q_k(\Delta)]^T$ . De même, au point **C** on a les valeurs associées au code "prompt" soit  $[I_k(0), Q_k(0)]^T$ . Les valeurs de  $I_k(\cdot)$  et  $Q_k(\cdot)$  sont les entrées de filtre de Kalman étendu définies dans les paragraphes suivants. Ces filtres de boucle fournissent une estimation sur le décalage du code  $\hat{\tau}_{e,k}$  au point **D** et une estimation de l'erreur de phase, de l'erreur sur l'estimation de la pulsation Doppler et sur l'estimation de la vitesse de variation de la pulsation Doppler  $[\hat{\phi}_e, \hat{\omega}_e, \hat{\alpha}_{\omega e}]_k^T$  au point **E**. Le bloc prédiction fournit une estimation des paramètres du signal au générateur de la réplique du code et de la porteuse du signal reçu. Les paramètres obtenus au point **G** sont  $[\tau^-, \phi^-, \omega_d^-, \alpha_{\omega}^-]_{k+1}^T$ , soit le décalage du code, la phase de la porteuse, la pulsation Doppler et la vitesse de variation de la pulsation Doppler. La prédiction de ces paramètres est obtenue par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} \tau^- \\ \phi^- \\ \omega_d^- \\ \alpha_{\omega}^- \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & K T_c & 0 \\ 0 & 1 & T_c & T_c^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^- \\ \phi^- \\ \omega_d^- \\ \alpha_{\omega}^- \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \hat{\tau}_e \\ \hat{\phi}_e \\ \hat{\omega}_e \\ \hat{\alpha}_{\omega e} \end{bmatrix}_{k-1}$$

où  $K = \frac{-1}{2\pi f_r}$ . Finalement les variations de pseudo distance et de vitesse relatives, notées  $[\Delta\rho, \Delta\dot{\rho}]_k^T$  sont obtenues au point **F** à partir de l'équation de conversion suivante :

$$\Delta\rho_k = \frac{-c T_c}{2\pi f_r} \omega_{d,k}^- + c \hat{\tau}_{e,k} \quad (1.37)$$

$$\Delta\dot{\rho}_k = \frac{-c}{2\pi f_r} (\omega_{d,k}^- + \hat{\omega}_{e,k}) \quad (1.38)$$

Les valeurs de  $[\Delta\rho, \Delta\dot{\rho}]_k^T$  sont directement utilisées pour le calcul de position décrit au paragraphe 1.3.1. On présente dans la suite de ce chapitre les filtres EKF (Extended Kalman filter : Filtre de Kalman étendu) utilisés pour la poursuite du code et de la phase.

### 1.4.3 Estimation du retard du code

Dans ce paragraphe nous allons présenter un estimateur des décalages du code reposant sur un filtre EKF. On suppose ici que les traitements sont synchronisés sur les bits du message de

navigation, donc qu'il n'y a pas de transition du signal lié à un changement de signe d'un bit du message de navigation. La synchronisation avec le message de navigation est en général réalisée dans la phase d'initialisation du récepteur. Dans cette description le signal est intégré de façon cohérente sur  $1 \leq N \leq 20$  périodes du code pseudo aléatoire. L'estimateur proposé [ZIE06] repose sur le système à temps discret, décrit par le modèle d'état linéaire et le modèle de mesure non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \tau_{e,k} = F \tau_{e,k-1} + W_{\tau_{e,k}} \\ z_k = h_k(\tau_{e,k-1}) + W_{z,k} \end{cases} \quad (1.39)$$

Où  $W_{\tau_{e,k}}$  est le bruit de modèle de covariance  $Q_{\tau}$  et  $F = 1$ . On note  $z_k$  le vecteur de mesure,  $h_k(\cdot)$  une fonction non linéaire et  $W_{z,k}$  le bruit de mesure de covariance  $R_z$ .

Le vecteur de mesure est défini par :

$$z_k = \begin{bmatrix} I_k(-\Delta) \\ Q_k(-\Delta) \\ I_k(\Delta) \\ Q_k(\Delta) \end{bmatrix}$$

Où  $I_k(\cdot)$  et  $Q_k(\cdot)$  sont respectivement les signaux en phase et en quadrature. Le vecteur de mesures obtenu pour  $N$  intégrations cohérentes est défini par :

$$z_k = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} I_{(k+m)}(-\Delta) \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} Q_{(k+m)}(-\Delta) \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} I_{(k+m)}(\Delta) \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} Q_{(k+m)}(\Delta) \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

La division par  $\sqrt{N}$  est utilisée pour garder la variance égale à 1. On a alors :

$$z_k = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}_{(k+m)} \cos(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) R(-\Delta + \tau_{e,(k+m)}) \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}_{(k+m)} \sin(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) R(-\Delta + \tau_{e,(k+m)}) \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}_{(k+m)} \cos(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) R(\Delta + \tau_{e,(k+m)}) \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}_{(k+m)} \sin(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) R(\Delta + \tau_{e,(k+m)}) \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Dans cette expression  $\hat{A}_k = \sqrt{2 S/N_0 T_c} \text{sinc}((\hat{f}_{e,k} + \hat{\alpha}_{e,k} \frac{T_{c,k}}{2}) T_{c,k})$  et  $\hat{\phi}_{e,k}$  sont calculés à partir des paramètres estimés par la boucle PLL de poursuite de la phase. L'estimation de  $\tau_e$  est réalisée en deux étapes. La première étape de prédiction consiste à fournir la meilleure estimation connaissant les mesures jusqu'à l'instant précédent. On définit aussi dans cette étape l'erreur sur la prédiction. Les deux équations qui décrivent cette étape sont les suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{e,k|k-1} = F \hat{\tau}_{e,k-1} \\ P_{k|k-1} = F P_{k-1} F^T + Q_{\tau} \end{cases} \quad (1.42)$$

Où  $\hat{\tau}_{e,k|k-1}$  est la valeur prédite du décalage de code.  $\hat{\tau}_{e,k-1}$  est l'estimée à l'instant précédent.  $P_{k|k-1}$  est la matrice de covariance de la prédiction et  $P_{k-1}$  est la matrice de covariance de l'estimée précédente.  $Q_k$  est la matrice de covariance du bruit de modèle.

Après l'étape de prédiction, l'étape de correction corrige la valeur fournie par la prédiction avec les mesures. L'étape de prédiction est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{e,k} = \hat{\tau}_{e,k|k-1} + K_k(z_k - \hat{z}_k) \\ P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \end{cases} \quad (1.43)$$

$\hat{\tau}_{e,k}$  est l'estimée de l'erreur sur le décalage de code et  $P_k$  est la matrice de covariance de l'état estimé.  $z_k$  est le vecteur de mesure et  $\hat{z}_k$  est le vecteur de mesures prédit.

$$\hat{z}_k = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}(k+m) \cos(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) R(-\Delta + \hat{\tau}_{e,k|k-1}) \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}(k+m) \sin(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) R(-\Delta + \hat{\tau}_{e,k|k-1}) \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}(k+m) \cos(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) R(\Delta + \hat{\tau}_{e,k|k-1}) \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}(k+m) \sin(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) R(\Delta + \hat{\tau}_{e,k|k-1}) \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Le gain du filtre  $K_k$  est donné par l'expression suivante :

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_z)^{-1} \quad (1.45)$$

$H_k$  est la matrice jacobienne de  $h_k(\cdot)$ , elle est donnée par :

$$H_k = \left. \frac{\delta h_v}{\delta \tau} \right|_{\tau=\hat{\tau}_{e,k|k-1}} \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}(k+m) \cos(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) \frac{\delta \hat{R}(-\Delta+\tau)}{\delta \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{e,k|k-1}} \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}(k+m) \sin(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) \frac{\delta \hat{R}(-\Delta+\tau)}{\delta \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{e,k|k-1}} \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}(k+m) \cos(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) \frac{\delta \hat{R}(\Delta+\tau)}{\delta \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{e,k|k-1}} \\ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}(k+m) \sin(\hat{\phi}_{e,(k+m)}) \frac{\delta \hat{R}(\Delta+\tau)}{\delta \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{e,k|k-1}} \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Où  $\hat{\tau}_{e,k|k-1}$  est l'erreur prédite sur le retard du code. Cette erreur est faible car la boucle DLL corrige en permanence le retard du code.

La fonction d'autocorrélation est approximée par un triangle et est définie par :

$$\hat{R}(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T_b} \quad (1.47)$$

Avec

$$|\tau| \leq T_b \quad (1.48)$$

Les dérivées de la fonction d'autocorrélation sont données par :

$$\frac{\delta \hat{R}(-\Delta + \tau)}{\delta \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{e,k|k-1}} = \frac{1}{T_b} \quad (1.49)$$

$$\frac{\delta \hat{R}(\Delta + \tau)}{\delta \tau} \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{e,k|k-1}} = -\frac{1}{T_b} \quad (1.50)$$

$R_z$  la matrice de covariance du bruit de mesure est donnée par :

$$R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (1 - 2\frac{\Delta}{T_b}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (1 - 2\frac{\Delta}{T_b}) \\ (1 - 2\frac{\Delta}{T_b}) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (1 - 2\frac{\Delta}{T_b}) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 1.4.4 Estimation de la phase et de la fréquence porteuse

Pour pouvoir corriger en permanence les erreurs provoquées par l'effet Doppler sur la phase et la fréquence, il a été proposé d'utiliser un filtre de Kalman étendu [ZIE06]. La sortie de ce filtre permet de corriger les différents signaux générés localement. Les erreurs sur la phase et la fréquence pour la  $k^{\text{ième}}$  période d'intégration sont données par :

$$\alpha_{e,k} = \alpha_k - \alpha_k^- \quad (1.51)$$

$$f_{e,k} = f_k - f_k^- \quad (1.52)$$

$$\phi_{e,k} = \phi_k - \phi_k^- \quad (1.53)$$

Si ces différentes erreurs ne sont pas estimées et corrigées en permanence alors elles sont supposées évoluer comme suit :

$$\alpha_{e,k} = \alpha_{e,0} \quad (1.54)$$

$$f_{e,k} = f_{e,k-1} + \alpha_{e,k} T_{c,k} + W_{f_{e,k}} \quad (1.55)$$

$$\phi_{e,k} = \phi_{e,k-1} + 2\pi f_{e,k} T_{c,k} + W_{\phi_{e,k}} \quad (1.56)$$

Soit le vecteur d'état  $X$ . Ce vecteur est composé de l'erreur sur la phase, la pulsation Doppler et la vitesse de variation de la pulsation Doppler :

$$X = \begin{bmatrix} \phi_e \\ \omega_e \\ \alpha_{\omega_e} \end{bmatrix}$$

Avec  $\omega_e = 2\pi f_e$ ,  $\alpha_{\omega_e} = 2\pi \alpha_e$ . Le modèle d'état du filtre EKF est défini par l'équation suivante :

$$\dot{X} = F X + W \quad (1.57)$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_e \\ \dot{\omega}_e \\ \dot{\alpha}_{\omega_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_e \\ \omega_e \\ \alpha_{\omega_e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{\phi_e} \\ W_{\omega_e} \\ W_{\alpha_{\omega_e}} \end{bmatrix}$$

Où  $W_{\phi}$ ,  $W_{\omega}$  et  $W_{\alpha_{\omega}}$  sont des bruits blancs gaussiens centrés sur les composantes du vecteur d'état. La matrice de transition  $\Phi$ , est obtenue par développement en série de Taylor comme suit :

$$\Phi = I + Ft + \frac{1}{2}F^2t^2 \quad (1.58)$$

Avec

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a alors l'équation d'état suivante définie dans le cas discret pour la  $k^{\text{ième}}$  période d'intégration  $T_c$  du signal :

$$X_k = \Phi X_{k-1} + W_{X,k} \quad (1.59)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_e \\ \omega_e \\ \alpha_{\omega_e} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T_{c,k} & \frac{T_{c,k}^2}{2} \\ 0 & 1 & T_{c,k} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_e \\ \omega_e \\ \alpha_{\omega_e} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} W_{\phi_e} \\ W_{\omega_e} \\ W_{\alpha_{\omega_e}} \end{bmatrix}_{k+1}$$

L'équation d'état décrit un modèle dynamique à accélération constante. Les bruits sur les composantes du vecteur d'état sont considérés indépendants et leur variance est définie par :

$$E[W_{\phi_e} W_{\phi_e}^T] = Q_{\phi_e} \quad (1.60)$$

$$E[W_{\omega_e} W_{\omega_e}^T] = Q_{\omega_e} \quad (1.61)$$

$$E[W_{\alpha_{\omega_e}} W_{\alpha_{\omega_e}}^T] = Q_{\alpha_{\omega_e}} \quad (1.62)$$

Ce qui implique que la matrice de covariance du bruit d'état est donnée par :

$$Q_n = \begin{bmatrix} Q_{\phi_e} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{\omega_e} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{\alpha_{\omega_e}} \end{bmatrix}$$

Le signal étant intégré sur une période de durée  $T_{c,k}$  la matrice de covariance est alors calculée par [ZAR05] :

$$Q_{n,k} = \int_0^{T_{c,k}} \phi(t) Q_n \Phi^T(t) dt \quad (1.63)$$

Elle est alors définie comme suit :

$$Q_{n,k} = \begin{bmatrix} Q_{\phi_e} T_{c,k} + Q_{\omega_e} \frac{T_{c,k}}{3} + Q_{\alpha_{\omega_e}} \frac{T_{c,k}^5}{20} & Q_{\omega_e} \frac{T_{c,k}^2}{2} + Q_{\alpha_{\omega_e}} \frac{T_{c,k}^4}{8} & Q_{\alpha_{\omega_e}} \frac{T_{c,k}^3}{6} \\ Q_{\omega_e} \frac{T_{c,k}^2}{2} + Q_{\alpha_{\omega_e}} \frac{T_{c,k}^4}{8} & Q_{\omega_e} T_{c,k} + Q_{\alpha_{\omega_e}} \frac{T_{c,k}^3}{3} & Q_{\alpha_{\omega_e}} \frac{T_{c,k}^2}{2} \\ Q_{\alpha_{\omega_e}} \frac{T_{c,k}^3}{6} & Q_{\alpha_{\omega_e}} \frac{T_{c,k}^2}{2} & Q_{\alpha_{\omega_e}} T_{c,k} \end{bmatrix}$$

Pour définir l'équation de mesure, on considère les valeurs de  $I_k(0)$  et  $Q_k(0)$  en sortie de la boucle PLL. Ces mesures contiennent une information sur la phase  $\phi_{e,k}$ , la puissance du signal  $A_k$  et le message de navigation  $n_k$ . On définit le bruit de mesure par :

$$R_n = \sigma_n^2 \quad (1.64)$$

Dans ce contexte, le signal reçu peut être modélisé sous la forme complexe suivante :

$$y_k = A_k n_k e^{j\phi_{e,k}} \quad (1.65)$$

On peut donc définir l'estimateur de la phase sur une période  $T_{c,k}$  et à l'instant  $k$  à partir de la fonction de vraisemblance suivante :

$$\Lambda(Y | \phi_{e,k}) = f(Y | \phi_{e,k}) = -C | y_k - \hat{A}_k \hat{n}_k e^{j\hat{\phi}_{e,k}} |^2 \quad (1.66)$$

Ou encore :

$$\Lambda(Y | \phi_{e,k}) = \Re \left\{ \hat{n}_k y_k e^{-j\hat{\phi}_{e,k}} \right\} \quad (1.67)$$

On a alors :

$$\frac{d}{d\phi_{e,k}} \Lambda(Y | \phi_{e,k}) = \hat{n}_k \Im \left\{ y_k e^{-j\hat{\phi}_{e,k}} \right\} \quad (1.68)$$

En effet la partie imaginaire de l'exponentielle complexe est la dérivée de la partie réelle. Les valeurs de  $\hat{n}_k$  et  $\hat{\phi}_{e,k}$  sont celles qui minimisent l'équation 1.68. Soit :

$$\frac{d}{d\phi_{e,k}} \Lambda(Y | \phi_{e,k}) = \Im \left\{ \hat{n}_k n_k A_k | (\cos(\phi_{e,k}) + j \sin(\phi_{e,k})) (\cos(\hat{\phi}_{e,k}) - j \sin(\hat{\phi}_{e,k})) | \right\} \quad (1.69)$$

$$= \Im \left\{ \hat{n}_k n_k A_k | \cos(\phi_{e,k}) \cos(\hat{\phi}_{e,k}) + \sin(\phi_{e,k}) \sin(\hat{\phi}_{e,k}) + \right. \quad (1.70)$$

$$\left. j(\sin(\phi_{e,k}) \cos(\hat{\phi}_{e,k}) - \cos(\phi_{e,k}) \sin(\hat{\phi}_{e,k})) | \right\} \quad (1.71)$$

$$= \hat{n}_k n_k A_k \sin(\phi_{e,k} - \hat{\phi}_{e,k}) \quad (1.72)$$

On peut alors déduire l'innovation du filtre EKF pour les faibles variations d'erreur de phase :

$$Innov = \Im \left\{ y_k e^{-j\hat{\phi}_{e,k+1/k}} \right\} = n_k A_k \sin(\phi_{e,k} - \hat{\phi}_{e,k+1/k}) \quad (1.73)$$

$$\approx n_k A_k \phi_{e,k} - \hat{n}_k \hat{A}_k \hat{\phi}_{e,k+1/k} \quad (1.74)$$

où  $\hat{\phi}_{e,k+1/k}$  est l'erreur de phase prédite par le modèle d'état. Rappelons que l'innovation est calculée par :

$$Innov = z_k - H X_{k/k-1} \quad (1.75)$$

où  $X_{k+1/k}$  est le vecteur d'état prédit. On en déduit alors la matrice de mesure :

$$H = [\hat{n}_k \hat{A}_k \quad 0 \quad 0]$$

avec :

$$\hat{A}_k = \left| y_k e^{-j\hat{\phi}_{e,k+1/k}} \right| \quad (1.76)$$

Finalement l'étape de prédiction du filtre de Kalman étendu est obtenue à partir de l'équation d'état 1.59. La mesure est définie par le nombre complexe  $y_k = I_k(0) + j Q_k(0)$  et l'innovation du filtre est obtenue par l'équation 1.73.

## 1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les différents systèmes GNSS et la constitution des signaux GPS modernes. Nous avons introduit les traitements du signal GPS allant de la démodulation au calcul du point. Nous avons décrit les traitements récents proposés dans la littérature pour extraire les paramètres du signal. Les modèles et traitements présentés seront utilisés au chapitre 5 comme références pour évaluer les méthodes proposées.

Les nouveaux signaux GPS contiennent des informations redondantes sur les paramètres du signal à estimer. En effet, les informations sur le délai du code et sur la porteuse seront transmises sur plusieurs fréquences et pourront être fusionnées dans le processus de poursuite du code et de la phase [BOU07]. D'autre part certaines porteuses sont composées d'une voie données et d'une voie pilote. Ces deux voies contiennent aussi des informations sur le délai du code et de la porteuse que nous proposons de fusionner au chapitre 5.

Dans ce contexte l'application de ce travail de thèse portera sur la fusion des voies données et pilote du signal L2C. En effet le nouveau signal GPS L2C déjà émis par une dizaine de satellites du système GPS est constitué de deux codes à étalement CM et CL multiplexés dans le temps. Le code CL encode la voie pilote tandis que le code CM encode la voie données. Nous proposons de fusionner au chapitre 5 les mesures de décalage du code et de la phase de la porteuse dans une boucle de poursuite vectorielle des codes CL et CM.

Les positions sont en général fournies par les récepteurs GPS toutes les secondes. Cependant les récepteurs récents offrent la possibilité d'augmenter la fréquence des mesures mais cela au détriment de la précision. En effet le temps d'intégration des positions étant plus faible, la précision du positionnement diminue. Dans le chapitre 5 nous proposons de calculer la position du récepteur toutes les 20 millisecondes correspondant à la période des codes CM et CL. On montre dans ce cas que les traitements proposés permettent d'améliorer la précision du positionnement en comparaison aux techniques classiques utilisées par les récepteurs.

# Chapitre 2

## Introduction à l'estimation, la fusion et la segmentation définies dans le cadre bayésien

### 2.1 Introduction

Les travaux développés dans cette thèse portent sur la définition d'estimateurs de rupture et d'opérateurs de fusion dans le domaine linéaire et circulaire. En effet, ce travail est appliqué aux traitements des signaux utilisés dans les boucles de poursuite du code et de la phase du signal GPS L2C. Pour cette application les signaux sont stationnaires par morceaux, définis dans le domaine linéaire pour le code et dans le domaine circulaire pour la phase. De plus, les informations traitées par les boucles de poursuite sont présentes sur la voie données et la voie pilote du signal. Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts de l'estimation, de la fusion d'informations et de la détection de rupture qui seront utilisés dans la suite de cette thèse.

La théorie de l'estimation est très fréquemment utilisée dans le domaine du traitement de signal. Il est en effet très habituel qu'une information  $x$  qu'on veut connaître ne soit pas directement accessible, mais soit observée à travers une autre grandeur  $y$ . Il existe plusieurs méthodes d'estimation d'une information sachant une mesure. Si l'information à estimer est une variable aléatoire, alors ces méthodes relèvent de la théorie bayésienne de l'estimation. Le noyau théorique de ces méthodes repose sur des techniques d'estimation bayésienne, parmi lesquelles on trouve la moyenne conditionnelle *a posteriori*, le maximum *a posteriori*, le maximum de vraisemblance. Ces méthodes sont complétées par des filtres statistiques bayésiens. On peut citer par exemple le filtre de Kalman et ses extensions ou bien le filtre particulaire. Le filtre de Kalman repose sur un schéma du type prédiction-correction. Il utilise l'innovation pour corriger la prédiction en prenant en compte l'estimation précédente. En pratique, la difficulté réside dans le fait qu'il faut trouver une solution approchée au problème d'estimation non-linéaire. Cette solution doit garantir un certain nombre de critères qui optimisent la performance du filtre (erreur d'approximation bornée, stabilité de l'estimateur,..). Le filtre particulaire est un algorithme qui satisfait ces exigences de performance.



Un grand nombre de travaux en fusion d'informations porte sur la combinaison d'un ensemble de mesures ou de paramètres estimés. Dans le domaine de l'estimation, cette combinaison a pour but d'obtenir, à partir d'observations en provenance de plusieurs sources, un état estimé global dont l'EQM (Erreur Quadratique Moyenne) sur le paramètre à estimer est la plus faible possible ; on parle alors d'une estimation précise. Cet estimateur doit avoir une EQM inférieure à l'EQM calculée pour chaque mesure ou paramètre estimé qu'il fusionne. Les estimateurs en fusion d'informations sont principalement des estimateurs du maximum de vraisemblance [HAL04]. Dans ce travail, pour fusionner un ensemble de mesures, on propose des opérateurs de fusion intégrant des informations *a priori* sur le paramètre à estimer.

Dans le domaine du filtrage d'état, il existe principalement deux approches pour la fusion de données. Il s'agit de la fusion centralisée et de la fusion distribuée. Dans le cas de la fusion centralisée, on considère un ensemble de mesures indépendantes que l'on combine pour produire une seule observation. Dans le cas distribué, on fusionne un ensemble d'estimations corrélées pour fournir une estimation globale [MIT07]. Dans le cas de la fusion centralisée et lorsque les mesures sont indépendantes, on montre que l'estimateur des moindres carrés (LS) et l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) ont la même expression [SHI06]. Cet estimateur est la somme pondérée des mesures où les coefficients de pondération sont définis à partir de la variance des signaux fusionnés [COC37]. Dans un cas plus général de mesures dépendantes, les coefficients de la somme pondérée sont obtenus à partir de la résolution d'un ensemble d'équations linéaires. Ces équations expriment les contraintes sur la valeur des coefficients pour que la variance de l'opérateur de fusion soit minimale [KAC04][SHI06]. En général, ce cas est rarement envisagé car il nécessite, pour le calcul des coefficients, de connaître la valeur des covariances entre signaux, ce qui est très difficile à estimer en pratique. En revanche, c'est dans la mise en oeuvre des systèmes de fusion distribuée qu'apparaissent des estimés corrélés dont on peut calculer la covariance. En effet, nous considérons dans ce cas les estimations d'un même état fournies par un ensemble de filtres travaillant en parallèle. C'est le cas par exemple de filtres ayant des observations provenant de capteurs de nature différente. On montre pour deux filtres de Kalman en parallèle que le bruit d'état apporte une corrélation entre les états estimés. L'algorithme de fusion track-to-track proposé dans [BAR86] comprend la définition des coefficients de la somme pondérée des états estimés et le calcul de la covariance entre les états estimés par les deux filtres. De nombreuses variantes de ce filtre ont été proposées dans la littérature [GAO02]. L'extension à N filtres en parallèle, présentée dans [BAR01], conduit à un algorithme difficile à implanter en pratique. Finalement une version sous-optimale de l'algorithme track-to-track pour N filtres est proposée dans [SHI06] et conduit à une solution facilement implantable et offrant une bonne précision.

Beaucoup de travaux portent sur la détection de ruptures. Ces travaux s'appuient sur une modélisation bayésienne du problème et concerne la détection de sauts dans le modèle d'état représentant le paramètre à estimer. La détection des changements brusques et des non stationnarités est un problème très souvent rencontré dans le domaine du traitement du signal. En effet la décomposition d'un signal stationnaire par morceaux, en portions stationnaires, constitue une première étape dans de nombreux systèmes d'analyses de signaux. Cette approche est dite aussi de segmentation de signaux. On peut trouver la segmentation dans plusieurs applications, comme par exemple, le traitement des signaux sismiques, le traitement des signaux GPS [BOU07], le traitement des signaux biomédicaux [OBR88], . . . Les algorithmes de détection de

rupture utilisent un estimateur, construit dans le cadre de l'estimation bayésienne, couplé à un détecteur de ruptures, défini dans le cadre de la théorie statistique des tests d'hypothèses. Parmi ces algorithmes on trouve, par exemple, l'algorithme de somme cumulée (CUSUM)[PAG54]. Il est l'un des algorithmes de segmentation les plus efficaces dans le cas où les paramètres sont connus [BAS93]. En pratique, les paramètres des hypothèses ne sont pas toujours connus, c'est pour cette raison que plusieurs algorithmes de segmentation ont été développés pour résoudre ce type de problème [BAS93]. On peut citer par exemple l'algorithme du rapport de vraisemblance généralisé (GLR) [BAS93], l'algorithme de Brandt ou l'algorithme de divergence de Hinkley.

Ce chapitre est organisé en trois parties qui introduisent les thèmes étudiés dans cette thèse. En effet les problèmes étudiés dans cette thèse sont en rapport avec la théorie de l'estimation, la fusion d'information et la détection de ruptures. C'est pour cette raison que la première partie portera sur l'estimation dans le domaine linéaire et le domaine circulaire et sur la définition d'estimateurs récursifs dans le cadre bayésien. Les différentes approches de la fusion existante seront décrites dans la deuxième partie. On définit, là encore, dans un cadre bayésien les différentes architectures des systèmes de fusion. Finalement, la troisième partie est dédiée à la segmentation des processus stationnaires par morceaux. On décrit dans cette partie les estimateurs de ruptures classiques définis dans le cadre bayésien.

## 2.2 La théorie de l'estimation

Dans beaucoup d'applications, les données traitées sont définies sur le cercle. On parle alors de données définies sur un domaine circulaire différent du domaine linéaire classique où les données sont définies sur une droite. Dans cette partie, nous allons rappeler les concepts de base de l'estimation et du filtrage bayésien dans le domaine linéaire. Nous allons présenter quelques concepts de la statistique circulaire qui la différencie de la statistique dans le domaine linéaire.

### 2.2.1 Estimation dans le domaine linéaire

La théorie de l'estimation regroupe les techniques permettant l'estimation des paramètres inconnus regroupés dans un vecteur  $x$ , à partir d'un ensemble d'observations  $z$  contenant de l'information sur  $x$ . Un estimé  $\hat{x}$  est obtenu à partir d'une fonction des observations  $e(z)$  appelé estimateur. On jugera sur la qualité de celui-ci selon trois métriques suivantes :

- Le biais : un estimateur est dit biaisé si  $E\{\hat{x}\} \neq x$ , et non biaisé dans le cas contraire.
- La variance : la dispersion des valeurs estimées.

$$\text{var}\{\hat{x}\} = \mathbb{E}\{[\hat{x} - \mathbb{E}\{\hat{x}\}]^2\} = \mathbb{E}\{\hat{x}^2\} - (\mathbb{E}\{\hat{x}\})^2 \quad (2.1)$$

Pour une classe d'estimateurs donnée, l'estimateur  $\hat{x}$  sera dit à variance minimale si sa variance est inférieure ou égale à celle de tout autre estimateur de la classe. Dans certains cas, cette variance admet une borne inférieure et tout estimateur dont la variance atteint cette borne est alors dit efficace [CRA99].

- Consistance : la valeur fournie par un estimateur dépend naturellement de l'observation, et il est intéressant que les valeurs estimées se rapprochent de la valeur vraie lorsque le nombre des observations augmente. Un estimateur sera dit consistant s'il converge en probabilité vers la vraie valeur ( $x$ ) lorsque le nombre des observations augmente indéfiniment.

### Estimateur du maximum *a posteriori* (MAP)

L'estimation du maximum *a posteriori* est défini comme étant la valeur qui maximise la distribution *a posteriori* du paramètre sachant la mesure  $P_{X|Z}(x | z)$ . Dans ce cas, l'expression de l'estimateur MAP est obtenu en dérivant la distribution *a posteriori* :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_{X|Z}(x | z) |_{x=\hat{x}_{MAP}} = 0 \quad (2.2)$$

Dans la pratique, il est difficile d'évaluer la densité de probabilité *a posteriori*  $P_{X|Z}(x | z)$  du paramètre conditionnée par l'observation. Il est néanmoins possible de renverser le sens des conditionnalités en utilisant la formule de Bayes selon laquelle :

$$P_{X|Z}(x | z) = P_{Z|X}(z | x) \frac{P_X(x)}{P_Z(z)} \quad (2.3)$$

Maximiser  $P_{X|Z}(x | z)$  est équivalent à maximiser son logarithme :

$$\log P_{X|Z}(x | z) = \log P_{Z|X}(z | x) + \log P_X(x) - \log P_Z(z) \quad (2.4)$$

La densité *a priori* de l'observation  $P_Z(z)$  ne dépend pas du paramètre à estimer  $x$ , on a alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \log P_Z(z) = 0 \quad (2.5)$$

L'équation 2.2 devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \log P_{Z|X}(z | x) + \frac{\partial}{\partial x} \log P_X(x) |_{x=\hat{x}_{MAP}} = 0 \quad (2.6)$$

Les trois estimateurs ( la moyenne conditionnelle *a posteriori*, la médiane *a posteriori* ou le MAP) conduisent au même résultat d'estimation lorsque la densité *a posteriori*  $P_{X|Z}(x | z)$  est symétrique par rapport à sa moyenne.

### Estimateur du maximum de vraisemblance

Si on considère maintenant que le paramètre à estimer  $x$  est déterministe mais inconnu, on peut opter pour une approche probabiliste en utilisant l'estimation du maximum *a posteriori* (MAP) et en considérant que  $x$  est la réalisation d'une variable aléatoire suivant une densité uniforme. La dérivée d'une telle densité *a priori*  $P_X(x)$  étant nulle, l'équation 2.6 se réduit à son premier terme, à savoir la dérivée de la densité de probabilité de l'observation conditionnée par le paramètre (ou le logarithme de cette densité). L'estimateur résultant, appelé estimateur du maximum de vraisemblance (ou log-vraisemblance) est défini par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \log P_{Z|X}(z|x) \Big|_{x=\hat{x}_{MAP}} = 0 \quad (2.7)$$

Il est appelé estimateur à Maximum de Vraisemblance MV (maximum likelihood ML).

#### 2.2.2 Estimation dans le domaine circulaire

Dans différents domaines scientifiques, on trouve des données mesurées en angles, se rapportant à l'orientation ou à la direction de certains phénomènes. Par exemple, les météorologues peuvent s'intéresser à la direction des vents, les chercheurs en navigation à celle des véhicules, les océanographes à celle des courants maritimes, etc . . . . Cependant, les mesures de direction ne sont pas les seules données circulaires : des phénomènes périodiques peuvent être représentés sous la forme de cercles. Par exemple, dans une période de 12 h, les différents satellites de la constellation GPS effectuent un tour complet ( $2\pi$ ) autour de la terre. Les mesures d'angles sont considérées comme des mesures circulaires qui se distribuent entre 0 et  $2\pi$ . Les données linéaires usuelles, telles que des mesures de distance, occupent toute la droite réelle. En revanche, pour les mesures circulaires, le point d'origine et le sens de rotation sont arbitraires. En mathématique, les angles sont mesurés dans le sens antihoraire à partir du point  $(1, 0)$  d'un cercle, en coordonnées cartésiennes. Par ailleurs dans certains domaines comme la navigation, les angles sont mesurés dans le sens horaire à partir du nord géographique ou magnétique, de coordonnées cartésiennes  $(0, 1)$ . De tels angles sont nommés *azimuts*.

Le problème rencontré dans l'utilisation des techniques statistiques habituelles dans le cas d'une estimation circulaire se trouve dans les choix arbitraires de l'origine zéro et du sens de rotation. Ces choix influencent les valeurs de différents moments statistiques comme par exemple la moyenne ou l'écart type. En effet la périodicité des mesures circulaires complique également le calcul de la distance entre deux points (l'origine 0 coïncide avec la fin  $2\pi$ ). Pour cette raison, il est nécessaire d'utiliser des techniques qui ne dépendent ni de l'origine ni du sens de rotation. Cependant, lorsque les données mesurées en angles sont limitées à seulement une région précise du cercle, le problème de la périodicité ne se présente pas, et dans ce cas l'estimation usuelle peut être utilisée et les données sont considérées comme des données linéaires.

### Direction moyenne et concentration autour de la moyenne

Lorsque l'on cherche à définir la direction moyenne en utilisant un ensemble de mesures circulaires, on ne peut pas utiliser la moyenne arithmétique des angles. Étant donnée la nature circulaire des mesures, il est fort probable d'obtenir des résultats erronés, comme en témoigne l'exemple suivant extrait de [JAM01] :

Soient deux participants ayant fourni des azimuts de  $10^\circ$  et  $350^\circ$  en réponse à la question suivante : quelle est la direction de Montpellier (France) par rapport à Alger (Algérie) ? Il est clair que la direction moyenne devrait se trouver à  $0^\circ$ , soit le nord géographique. Pourtant, la moyenne arithmétique calculée à partir de ces données serait de  $180^\circ$ , soit le sud !

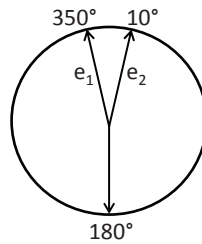


FIG. 2.1 – Périodicité et calcul de la moyenne arithmétique

Pour éviter ce problème, on peut utiliser les fonctions trigonométriques pour calculer la direction moyenne où chacun des vecteurs  $e_i$  possède les coordonnées  $x_i$  et  $y_i$  ainsi calculées :

$$x_i = \cos(\phi_i) \quad \text{et} \quad y_i = \sin(\phi_i) \quad (2.8)$$

On calcule les coordonnées cartésiennes de la direction moyenne à l'aide des équations suivantes :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\phi_i) \quad (2.9)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\phi_i) \quad (2.10)$$

L'angle moyen est obtenu en utilisant la fonction arctan, on a alors :

$$\bar{\phi} = \arctan\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) \quad (2.11)$$

Cependant, la fonction arctan est définie sur l'intervalle  $]-\pi/2, \pi/2[$ , c'est le signe de  $x$  et  $y$  qui permet de définir dans quel cadran du cercle l'angle est défini. Les différents cas à prendre en considération sont les suivants :

$$\phi = \arctan\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) \text{ lorsque } x > 0 \text{ et } y \geq 0 \quad (2.12)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) + \pi \text{ lorsque } x < 0 \quad (2.13)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \text{ lorsque } x = 0 \text{ et } y > 0 \quad (2.14)$$

$$\phi = \frac{3\pi}{2} \text{ lorsque } x = 0 \text{ et } y < 0 \quad (2.15)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) + 2\pi \text{ lorsque } x > 0 \text{ et } y < 0 \quad (2.16)$$

$$\phi = \text{indéterminé lorsque } x = 0 \text{ et } y = 0 \quad (2.17)$$

L'angle moyen ainsi calculé reflète alors la direction moyenne des données sans être affecté par le choix de l'origine ou du sens de rotation.

La longueur du vecteur moyen notée par  $r$  est calculée par :

$$r = \sqrt{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)} \quad (2.18)$$

La concentration des directions individuelles autour du vecteur moyen est aussi importante que la valeur de l'angle moyen. En utilisant des données unimodales, la concentration des directions individuelles est donnée par  $\kappa$ , qui décroît quand les points se dispersent davantage autour du vecteur moyen,  $\kappa = 1$  signifie que toutes les données indiquent la même direction. À partir de  $r$ , il est possible d'obtenir la variance angulaire ainsi que l'écart type angulaire :

$$\sigma^2 = 2(1 - \kappa) \quad (2.19)$$

$$\sigma = \sqrt{2(1 - \kappa)} \quad (2.20)$$

Pour analyser des données angulaires aléatoires, circulaires et sphériques, on fait appel à des distributions circulaires. Parmi ces distributions, on peut citer la distribution uniforme circulaire ou la distribution de von Mises.

## Distributions circulaires

### Distribution uniforme circulaire :

La distribution circulaire uniforme est utilisée lorsque toutes les directions ont autant de chance d'être choisies, ce qui implique qu'aucun secteur du cercle n'est privilégié. Cette distribution est équivalente à la distribution uniforme en statistique linéaire où :

Quand  $\phi$  prend des valeurs entre  $a$  et  $b$  :

$$f(\phi) = \frac{1}{b-a} \quad (2.21)$$

Donc, pour  $\phi$  une variable aléatoire angulaire se trouvant entre 0 et  $2\pi$ , on a alors :

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad (2.22)$$

Le centre de cette distribution correspond à l'origine 0 et aucune direction moyenne n'est privilégiée.

### Distribution de von Mises :

La distribution circulaire de von Mises [MAR99] est très employée dans les applications circulaires. Elle joue, en statistiques circulaires, un rôle similaire à la distribution normale usuelle. C'est pour cette raison qu'elle est aussi nommée distribution circulaire normale [FIS93]. Ce qui apparaît clairement en regard des éléments suivants :

- elle dépend de deux paramètres : la direction moyenne  $\mu$  et la concentration autour de la moyenne  $\kappa$  ;
- elle est symétrique par rapport à la direction moyenne ;
- elle est unimodale et son mode correspond à la direction moyenne  $\mu$ .

La fonction de densité de probabilité de la loi de von Mises est donnée par :

$$f(\phi, \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\phi - \mu)} \quad (2.23)$$

Avec  $0 < \mu < 2\pi$  et  $\kappa \geq 0$ , pour  $0 < \phi < 2\pi$ .  $I_0(\kappa)$  est la fonction de Bessel d'ordre 0.

Le paramètre de concentration inversé  $1/\kappa$  est considéré comme la variance de la loi de von Mises. Lorsque  $\kappa$  tend vers 0 ( $\kappa$  très faible), la loi de von Mises correspondra alors dans ce cas à la distribution circulaire uniforme.

Pour montrer l'intérêt de la statistique angulaire, considérons un échantillon de taille 1000 qui suit une densité de von Mises de paramètres  $\mu = \pi$  et  $\kappa = 1$ . Dans la figure 2.2, nous comparons l'estimation de la moyenne obtenue par la méthode circulaire et celle obtenue par la méthode linéaire. Nous constatons que l'estimation fournie par la méthode usuelle est complètement erronée contrairement à l'estimation circulaire.

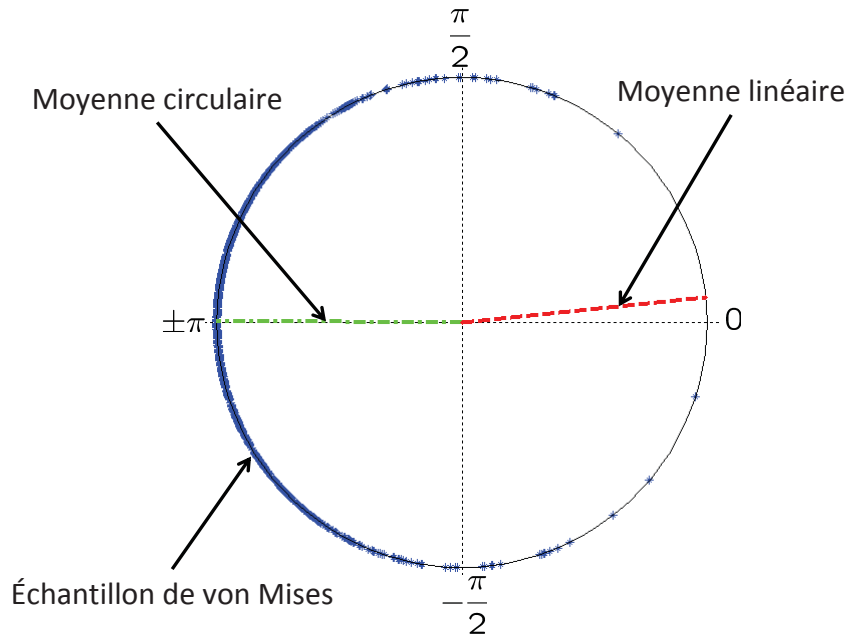


FIG. 2.2 – Comparaison de la moyenne circulaire et de la moyenne linéaire d'un échantillon de von Mises

### 2.2.3 Filtrage Bayésien

Soit un système d'état  $S$  à temps discret de loi initiale  $P(X_0)$ , de loi de transition  $P(X_k|X_{k-1})$  et de fonction de vraisemblance  $P(Z_k|X_k)$ .

$$S = \begin{cases} X_k = f(X_{k-1}, W_k) \\ Z_k = h(X_k, V_k) \end{cases}$$

où  $f$  est la fonction du système de transition,  $h$  est la fonction de mesures et  $W_k$  et  $V_k$  sont respectivement le bruit sur l'état et sur les observations à l'instant  $k$ .

Le problème est d'estimer  $X_k$  en se basant sur les informations *a priori* et sur les observations  $Z_{1:k} = Z_1, \dots, Z_k$ . La plupart des applications sont en temps réel, ce problème d'estimation doit donc être résolu de façon récursive en traitant les observations au fur et à mesure de leur disponibilité. Cela signifie que pour estimer l'état courant, seul l'état précédent et les mesures actuelles sont pris en compte. Ce qui revient à déterminer la densité conditionnelle  $P(X_k | Z_{1:k})$  appelé filtre. Ce calcul s'effectue en deux étapes une dite de prédiction et une étape de correction et de façon récursive selon le schéma classique suivant :

$$P(X_{k-1} | Z_{1:k-1}) \xrightarrow[\underset{P(X_k|X_{k-1})}{\text{étape de prédiction}}]{} P(X_k | Z_{1:k-1}) \xrightarrow[\underset{P(Z_k|X_k)}{\text{étape de correction}}]{} P(X_k | Z_{1:k}) \quad (2.24)$$



L'étape de prédiction est une simple application de l'équation de Chapman-Kolmogorov [PAP02] :

$$P(X_k | Z_{1:k-1}) = \int P(X_k | X_{k-1}, Z_{1:k-1})P(X_{k-1} | Z_{1:k-1})dX_{k-1} \quad (2.25)$$

Sous les hypothèses de Markov [BEN04], on a  $P(X_k | X_{k-1}, Z_{1:k-1}) = P(X_k | X_{k-1})$ , ce qui implique :

$$P(X_k | Z_{1:k-1}) = \int P(X_k | X_{k-1})P(X_{k-1} | Z_{1:k-1})dX_{k-1} \quad (2.26)$$

L'étape de correction consiste à calculer  $P(X_k | Z_{1:k})$ . D'après la formule de Bayes, on a les deux décompositions suivantes :

Avec une première décomposition et en considérant l'hypothèse que  $P(Z_k | X_k, Z_{1:k-1}) = P(Z_k | X_k)$ , on a alors :

$$P(X_k, Z_k | Z_{1:k-1}) = P(X_k | Z_{1:k-1})P(Z_k | X_k, Z_{1:k-1}) \quad (2.27)$$

$$= P(X_k | Z_{1:k-1})P(Z_k | X_k) \quad (2.28)$$

La deuxième décomposition nous permet d'écrire :

$$P(X_k, Z_k | Z_{1:k-1}) = P(X_k | Z_{1:k})P(Z_k | Z_{1:k-1}) \quad (2.29)$$

Ce qui implique :

$$P(X_k | Z_{1:k}) = \frac{P(X_k | Z_{1:k-1})P(Z_k | X_k)}{P(Z_k | Z_{1:k-1})} \quad (2.30)$$

Ainsi d'après l'équation de Chapman-Kolmogorov appliquée à  $P(Z_k | Z_{1:k-1})$ , on a :

$$P(X_k | Z_{1:k}) = \frac{P(X_k | Z_{1:k-1})P(Z_k | X_k)}{\int P(Z_k | X_k)P(X_k | Z_{1:k-1})dX_k} \quad (2.31)$$

En pratique deux solutions se dégagent selon que l'on puisse ou non résoudre explicitement les équations 2.26 et 2.31. Ces équations admettent une solution explicite dans le cas linéaire gaussien. On parle alors du filtre de Kalman. En revanche, dans le cas non linéaire, ces équations n'admettent en général pas de solution explicite. Il est donc nécessaire de faire appel à des techniques d'approximation. La première idée consiste à linéariser le système autour de l'estimé courant (Filtre de Kalman Etendu EKF). C'est une technique qui présente de nombreux avantages mais, elle ne donne pas de résultats satisfaisants dans tous les cas. La deuxième idée s'appuie sur des méthodes d'approximation particulière. Ces deux approches seront présentées dans la suite de ce chapitre.

### 2.2.3.1 Filtre de Kalman

En 1960, Rudolph Kalman a publié un algorithme permettant la résolution optimale des équations de filtrage 2.26 et 2.31 en se basant sur l'hypothèse linéaire et gaussienne [KAL60, GRE01]. Les équations du modèle d'état, supposées linéaires et les bruits, additifs gaussiens, garantissent que la loi de probabilité conditionnelle soit également gaussienne.

Soit le système à temps discret, décrit par le modèle d'état linéaire suivant :

$$S = \begin{cases} X_k & = F_k X_{k-1} + W_k \\ Z_k & = H_k X_k + V_k \end{cases}$$

Avec  $X_k$  est le vecteur d'état observé par  $Z_k$  à l'instant  $k$ .  $F_k$  et  $H_k$  sont les matrices de dynamique et d'observation du système (supposées connues),  $W_k$  et  $V_k$  sont les bruits blancs gaussiens additifs de moyenne nulle et de matrices de covariance respectives  $Q_k$  et  $R_k$ . Ces bruits sont supposés indépendants,  $\mathbb{E}[W_k V_k^T] = 0$ .

L'idée est toujours la même. On détermine  $P(X_k | Z_{1:k})$  à partir de  $P(X_{k-1} | Z_{1:k-1})$  en deux étapes. Pour la prédiction : on calcule  $P(X_k | Z_{1:k-1})$  à l'aide de l'équation d'état. Pour la correction : on corrige la prédiction en tenant compte de la nouvelle observation  $Z_k$  et de l'équation d'observation.

L'algorithme de calcul qui en résulte est présenté sur la figure 2.3

<u>initialisation</u>	
$\hat{X}_0 = \mathbb{E}[X_0]$	$R_0 = Q_0 = cov(X_0)$
<u>prédiction</u>	
Prédiction de l'état	$\hat{X}_{k k-1} = F_k \hat{X}_{k-1}$
Covariance de l'erreur de prédiction	$P_{k k-1} = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k$
<u>correction</u>	
Correction de l'estimé	$\hat{X}_k = \hat{X}_{k k-1} + K_k (Z_k - H_k \hat{X}_{k k-1})$
Covariance de l'erreur de l'estimation	$P_k = (I - K_k H_k) P_{k k-1}$
Gain du filtre	$K_k = P_{k k-1} H_k^T [H_k P_{k k-1} H_k^T + R_k]^{-1}$

FIG. 2.3 – Algorithme du filtre de Kalman

En dehors du cadre gaussien, le filtre de Kalman reste encore l'estimateur optimal dans la classe des filtres linéaires. En revanche, dans le cas non linéaire, le filtre n'est plus optimal. La prochaine section décrit une extension du filtre de Kalman nommée Filtre de Kalman Etendu (EKF) utilisée pour contourner cette problématique.

### 2.2.3.2 Filtre de Kalman Etendu

Le filtre de Kalman Etendu est la solution la plus directe au problème du filtrage non-linéaire [FRA98]. Il ramène au cas linéaire du filtre de Kalman, en prenant un développement de Taylor au premier ordre des équations du modèle autour de l'estimation courante. Le système d'état non-linéaire  $S$  utilisé dans le EKF est donné par :

$$S = \begin{cases} X_k & = f_k(X_{k-1}) + W_k \\ Z_k & = h_k(X_k) + V_k \end{cases}$$

La structure récursive du filtre est similaire à celle du filtre de Kalman linéaire, à laquelle vient s'ajouter une étape de linéarisation des équations du modèle. L'algorithme du filtre de Kalman étendu est représenté sur la figure 2.4 :

<u>initialisation</u>	
$\hat{X}_0 = \mathbb{E}[X_0]$	$R_0 = Q_0 = cov(X_0)$
<u>linéarisation</u>	
$F_k = \left. \frac{\partial f(X_k)}{\partial X_k} \right _{X_k = \hat{X}_{k k-1}}$ et $H_k = \left. \frac{\partial h(X_k)}{\partial X_k} \right _{X_k = \hat{X}_{k k-1}}$	
Avec $F_k$ et $H_k$ les matrices jacobiniennes de $f_k$ et $h_k$	
<u>prédiction</u>	
Prédiction de l'état	$\hat{X}_{k k-1} = f_k(\hat{X}_{k-1})$
Covariance de l'erreur de prédiction	$P_{k k-1} = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k$
<u>correction</u>	
Correction de l'estimé	$\hat{X}_k = \hat{X}_{k k-1} + K_k(Z_k - h_k(\hat{X}_{k k-1}))$
Covariance de l'erreur de l'estimation	$P_k = (I - K_k H_k) P_{k k-1}$
Gain du filtre	$K_k = P_{k k-1} H_k^T [H_k P_{k k-1} H_k^T + R_k]^{-1}$

FIG. 2.4 – Algorithme du Filtre de Kalman Etendu

Remarque : Il existe d'autres extensions des filtres de Kalman du type étendu. On peut citer par exemple le filtre de Kalman Unscented qui utilise des sigma points pour une précision d'ordre 3 de Taylor [JUL97], ou bien les filtres à dérivée numérique [NOR00] (DD1 et DD2) qui utilisent les approximations de Stirling [WHI67], et une des plus intéressantes est la notion de filtre de Kalman d'ensemble ("Ensemble Kalman Filter") proposé par [BUR98] utilisé dans

le cadre de l'assimilation de données.

Dans le cas général, les équations du filtre 2.26 et 2.31 n'admettent pas de solution explicite. Dans la section suivante on introduira les bases d'une technique d'approximation dite particulière. Cette technique fait appel à la méthode de Monte Carlo que nous présentons dans un premier temps.

### 2.2.3.3 Méthode de Monte-Carlo et échantillonnage d'importance

La méthode de Monte-Carlo correspond à toute méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires. Le nom de ces méthodes fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo. Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces, des volumes, etc.). On considère la densité de probabilité  $P(x)$  d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , il s'agit d'approcher numériquement l'intégrale :

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)P(x)dx \quad (2.32)$$

Pour toute fonction  $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  donnée.

L'idée est de donner une interprétation probabiliste à l'intégrale  $I$ . En l'occurrence cette intégrale correspond à l'espérance  $I = \mathbb{E}[\varphi(x)]$ . On considère un échantillon de taille  $N$  de la loi de densité  $P_X(x)$ , ce qui correspond à  $N$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_N$  indépendantes et identiquement distribuées de loi de densité  $P_X(x)$ . L'intégrale  $I$  est alors approchée par :

$$I \simeq I^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(X_i) \quad (2.33)$$

La loi des grands nombres assure que, presque sûrement, cette approximation converge vers  $\mathbb{E}[\varphi(x)]$ .

Avant d'introduire l'approximation particulière du filtre non linéaire, essayons de comprendre ce que l'on entend par "approximation particulière" d'une loi  $P_X(x)$ . L'approximation 2.33 est valide pour toute fonction  $\varphi$ . Il s'agit donc d'une approximation de la loi  $P_X(x)$ , en effet :

$$P(x) \simeq P^N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x=X_i} \quad (2.34)$$

Ainsi  $P^N(x)$  est une approximation particulière de la loi  $P(x)$ . Plus généralement, une approximation particulière sera de la forme :

$$P(x) \simeq P^N(x) = \sum_{i=1}^N \omega_i \delta_{x=X_i} \quad (2.35)$$

avec  $\omega_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$ . L'avantage de ce genre d'approximation réside dans le fait que les calculs d'intégrales sous cette loi sont très simples, en effet :

$$\mathbb{E}[\varphi(x)] = \int \varphi(x)P(x)dx \simeq \int \varphi(x)P^N(x)dx = \sum_{i=1}^N \omega_i \varphi(X_i) \quad (2.36)$$

On cherche une approximation d'une loi  $P(x)$  donnée. Si on sait échantillonner selon  $P(x)$ , alors on utilise directement l'approximation 2.35. En revanche, si on ne sait pas échantillonner selon  $P(x)$ , on peut faire appel à une méthode dite d'échantillonnage d'importance. Supposons que l'on sache échantillonner selon une loi  $\tilde{P}(x)$ , appelée loi d'importance, telle que le support de la densité d'importance  $\tilde{P}(x)$  couvre le support de la densité  $P(x)$ . Il suffit alors de calculer un échantillon de  $\tilde{P}(x)$  et de calculer les poids d'importance  $\omega_i$ , on à alors :

$$\mathbb{E}[\varphi(x)] = \int \varphi(x)P(x)dx = \int \varphi(x) \frac{P(x)}{\tilde{P}(x)} \tilde{P}(x)dx \quad (2.37)$$

Si on dispose d'un  $N$ -échantillon  $\tilde{X}_{1:N}$  de la loi  $\tilde{P}(x)$ , alors :

$$\mathbb{E}[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^N \omega_i \varphi(\tilde{X}_i) \text{ où } \begin{cases} \tilde{X}_{1:N} & \sim_{i.i.d} \tilde{P}(x) \\ \omega_i & = \frac{P(x)}{\tilde{P}(x)} \end{cases} \quad (2.38)$$

L'échantillonnage d'importance consiste simplement à donner plus d'importance aux points les plus cruciaux. Il possède de bonnes propriétés théoriques puisqu'il est asymptotiquement sans biais et vérifie le théorème central limite [BAR88a].

### 1.2.3.4 Filtre Particulaire SIS

Le filtre particulaire repose sur une procédure dite SIS pour (Sequential Importance Sampling). La SIS est une adaptation de l'échantillonnage d'importance appliqué dans le domaine du filtrage statistique. La mise en oeuvre de la procédure SIS est simple, il faut choisir le nombre de particules  $N$  et la probabilité qui va jouer le rôle de la densité d'importance :  $\tilde{P}(x_{0:k} | Z_{1:k})$ . L'algorithme du filtre particulaire SIS est représenté dans la figure 2.5.

Le grand avantage du filtre particulaire SIS est qu'il est parallélisable, ce qui implique un gain important de temps de calcul. Malheureusement les performances de ce filtre ne sont pas toujours optimales. En pratique, il diverge souvent et ses performances dépendent du choix de la densité d'importance [DOU00].

<u>initialisation</u>	
Génération de $N$ -échantillon $(\tilde{x}_0^i), i = 1, \dots, N$ selon la loi $\tilde{P}(x_0)$	
<u>prédiction</u>	
Génération de $N$ -échantillon $(\tilde{x}_k^i), i = 1, \dots, N$ selon la loi $\tilde{P}(\tilde{x}_k   \tilde{x}_{0:k-1}, z_{1:k})$	
<u>mise à jour</u>	
Calcul des poids de pondération des particules :	$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \frac{P(z_k   \tilde{x}_k^i) P(\tilde{x}_k^i   \tilde{x}_{k-1}^i)}{\tilde{P}(\tilde{x}_k^i   \tilde{x}_{0:k-1}^i, z_{1:k})}$ pour $i = 1, \dots, N$
Normalisation des poids :	$\tilde{\omega}_k^i = \frac{\omega_k^i}{\sum_{j=1}^N \omega_k^j}$
<u>estimation</u>	
L'estimation dépendra de la fonction coût choisie (moyenne, maximum <i>a posteriori</i> , médiane)	
Dans le cas d'un estimateur moyen on a :	
L'estimé de l'état :	$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^i \tilde{x}_k^i$
L'erreur sur l'estimé :	$P_k = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^i (\tilde{x}_k^i - \hat{x}_k)(\tilde{x}_k^i - \hat{x}_k)^T$

FIG. 2.5 – Algorithme du Filtre Particulaire SIS

### 1.2.3.5 Filtre Particulaire SIR

Le filtre particulaire SIR (Particular Filter by Sampling Importance Resampling) est similaire au filtre particulaire SIS utilisant l'échantillonnage séquentiel par importance, mis à part l'ajout d'une étape de ré-échantillonnage par importance avant l'évolution vers l'instant suivant. L'algorithme de ce filtre est représenté sur la figure 2.6.

Filtre Particulaire SIS (figure 2.5)	
<u>ré-échantillonnage</u>	
Effectuer un tirage multinomial de $N$ particules $(\tilde{x}_k^i, i = 1 \dots N)$ en fonction de leur poids $\tilde{\omega}_k^1 \dots \tilde{\omega}_k^N$ Réinitialiser tous les poids à $1/N$	

FIG. 2.6 – Algorithme du Filtre Particulaire SIR

## 2.3 Fusion d'informations par approche bayésienne

La fusion d'informations consiste à utiliser simultanément, plusieurs sources d'information différentes, ou de réunir des données hétérogènes, pour obtenir une information de meilleure "qualité". Ce concept existe dans l'estimation dynamique. En effet, le fait d'intégrer des mesures obtenues à différents instants avec l'état du système est une fusion. La fusion de données offre la possibilité d'augmenter la précision de l'estimation ainsi que la robustesse et la tolérance aux erreurs. Cela est réalisé en exploitant la redondance dans l'information fournie par les différents capteurs.

On conçoit aisément que la fusion multi-capteurs trouve des applications dans tous types de domaines. De nombreuses approches théoriques (approche bayésienne, ensembles flous, théorie de Dempster-Shafer, etc. [BAR88a, ZAD99, SHA76]) ont été formulées dans ce cadre. Par la suite, on s'intéressera à la fusion d'information par filtrage statistique. L'objectif consiste à obtenir une meilleure estimation de l'état  $X_k$  en utilisant un ensemble de mesures fournies par  $N$  sources d'information :

$$\begin{cases} X_k &= F_k X_{k-1} + W_k \\ Z_k^{(i)} &= H_k^{(i)} X_k + V_k^{(i)} \end{cases}$$

Avec  $i = 1, 2, \dots, N$ . Les bruits des mesures  $V_k^{(i)}$  sont des bruits blancs gaussiens additifs de moyenne nulle et de matrice de covariance  $R_k^{(i)}$ . Ces bruits sont considérés indépendants.

Il existe plusieurs architectures des systèmes de fusion : centralisée, distribuée, décentralisée, hybride, séquentielle, etc. Différentes architectures de fusion sont exposées dans les sous-sections suivantes.

### 2.3.1 Fusion centralisée

La fusion centralisée est caractérisée par un noeud de fusion global qui centralise l'ensemble des informations disponibles [REY96]. Dans cette architecture de fusion, toutes les mesures  $Z_k^{(i)}$  sont dirigées vers une centrale de traitement unique. La figure 2.7 illustre, par un diagramme simplifié, la structure de la fusion centralisée.

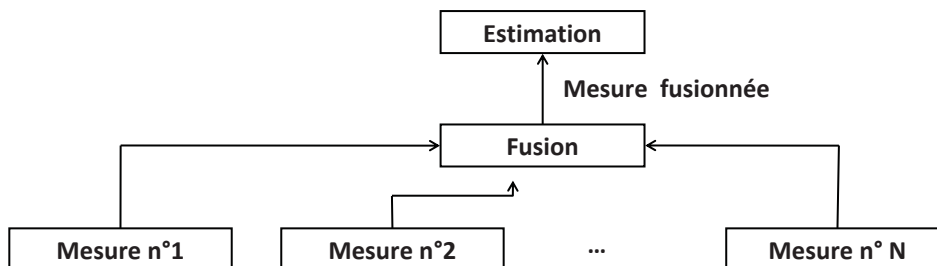


FIG. 2.7 – Architecture de fusion centralisée

Les informations  $Z_k^{(i)}$  fournies par les  $N$  capteurs permettent d'observer le même vecteur d'état  $X_k$ . Leurs équations sont données par :

$$\begin{cases} Z_k^{(1)} &= H_k^{(1)} X_k + V_k^{(1)} \\ Z_k^{(2)} &= H_k^{(2)} X_k + V_k^{(2)} \\ \vdots & \\ Z_k^{(N)} &= H_k^{(N)} X_k + V_k^{(N)} \end{cases}$$

Si on suppose que l'algorithme utilisé pour estimer l'état  $X_k$  est un filtre de Kalman 2.3, alors il faut prendre en considération les différentes mesures. Ce qui implique que les équations de correction du filtre deviennent :

<u>correction</u>	
Correction de l'estimé	$\hat{X}_k = \hat{X}_{k k-1} + \sum_{i=1}^N K_k^{(i)} (Z_k^{(i)} - H_k^{(i)} \hat{X}_{k k-1})$
Covariance de l'erreur de l'estimation	$P_k = (I - \sum_{i=1}^N K_k^{(i)} H_k^{(i)}) P_{k k-1}$
Gain du filtre	$K_k^{(i)} = P_{k k-1} (H_k^{(i)})^T [H_k^{(i)} P_{k k-1} (H_k^{(i)})^T + R_k^{(i)}]^{-1}$

Le filtre de Kalman dans ce cas est dit centralisé car il traite simultanément toutes les mesures fournies par les  $N$  capteurs. On peut constater d'après la formule  $P_k$  que la covariance de l'état diminue quand le nombre de capteurs augmente.

Une deuxième approche peut être utilisée pour réaliser la fusion centralisée des mesures. Elle consiste à fusionner toutes les mesures disponibles en une mesure simple avant de la fournir à l'étape de correction. Figure 2.8

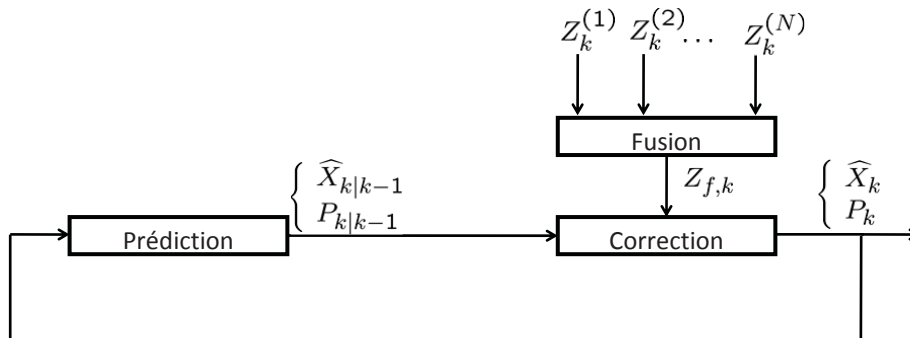


FIG. 2.8 – Fusion de mesures centralisée

La mesure est ainsi obtenue par une somme pondérée des  $N$  mesures, supposées indépendantes. Les poids de pondération sont les variances inversées et normalisées :



$$Z_{f,k} = \left[ \sum_{i=1}^N (R^{(i)})^{-1} \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^N (R^{(i)})^{-1} Z_k^{(i)} \right] \quad (2.39)$$

Dans le cas où les mesures sont corrélées, la variance de  $Z_{f,k}$  est définie par :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} 2\sigma_{ij} \alpha_i \alpha_j \quad (2.40)$$

$\sigma_{ij}$  est la covariance des mesures  $Z_k^{(i)}$  et  $Z_k^{(j)}$ . Le problème posé est la définition des coefficients  $\alpha_i$  qui minimisent la variance de  $Z_{f,j}$ . On recherche la valeur des coefficients  $\alpha_i$  qui minimisent l'expression 2.40 sous la contrainte que leur somme soit égale à 1. On utilise pour cela la méthode des multiplicateurs de Lagrange [KAC04]. On considère la fonction :

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sigma^2 + L(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 1) \quad (2.41)$$

$L$  est un multiplicateur inconnu. On annule les dérivées partielles de la fonction  $f$  :

$$\frac{\partial f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (2.42)$$

Ce qui nous conduit ainsi à résoudre un système de  $(n+1)$  équations à  $(n+1)$  inconnues.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  et  $L$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(\dots)}{\partial \alpha_1} = 2\alpha_1 \sigma_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n \alpha_j \sigma_{1j} + L = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\dots)}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j \sigma_{ij} + L = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\dots)}{\partial \alpha_n} = 2\alpha_n \sigma_n^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \sigma_{nj} + L = 0 \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \end{array} \right.$$

Pour trouver la solution de ce système d'équations linéaires, on utilise une méthode de résolution numérique (methode de Gauss-Seidel). Pour exprimer les coefficients  $\alpha_i$  en fonction des valeurs de variance et covariance, on utilise une méthode de résolution analytique (substitution).

La structure de fusion centralisée permet bien souvent une mise en oeuvre plus simple que dans les autres structures. Cependant elle a deux inconvénients. D'une part, elle requiert une charge de calcul importante pour traiter la grande quantité d'informations brutes. D'autre part, elle est très vulnérable en terme stratégique : un simple dysfonctionnement du noeud de fusion paralyse totalement le système.

### 2.3.2 Fusion distribuée

La structure de fusion distribuée propose d'associer à chaque mesure un estimateur respectif [DWS01, GAO02]. La fusion est effectuée sur les estimations délivrées par les filtres et non pas sur les mesures. L'avantage de cette structure est sa capacité d'implémentation en parallèle [SRS01]. La charge de calcul est répartie sur l'ensemble des unités de traitement et par conséquent, soulage le noeud de fusion qui n'intègre que le minimum d'informations. La figure 2.9 illustre, par un diagramme simplifié, la structure de fusion distribuée.

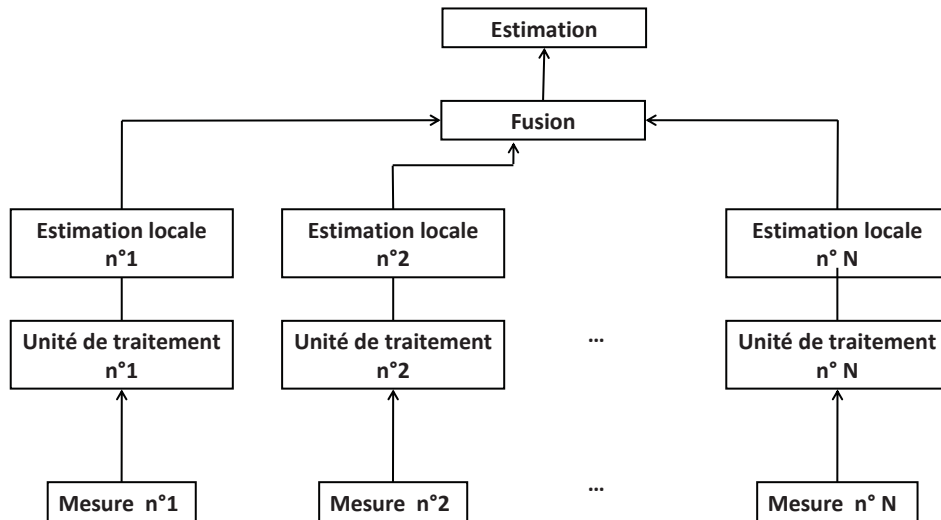


FIG. 2.9 – Architecture de fusion distribuée

La méthode la plus utilisée dans la littérature pour la fusion distribuée est l'algorithme de fusion track-to-track proposé par Bar Shalom [BAR88b]. Elle consiste à estimer l'état  $\hat{X}_{f,k}$  et sa covariance  $P_{f,k}$  à partir des estimations  $\hat{X}_k^{(i)}$  et des covariances  $P_k^{(i)}$  ( $i = 1; 2, \dots, N$ ) des filtres statistique associés aux  $N$  capteurs. On suppose que les mesures fournies par les capteurs sont indépendantes. On montre que les états estimés sont corrélés [BAR81].

On représente sur la figure 2.10 l'algorithme track-to-track dans le cas de deux capteurs.

Dans ce cas, l'estimation fusionnée  $\hat{X}_{f,k}$  est obtenue par une somme pondérée des deux estimations corrélées :

$$\hat{X}_{f,k} = \hat{X}_k^{(1)} + \frac{P_k^{(F)} - P_k^{(12)}}{P_k^{(1)} + P_k^{(2)} - P_k^{(12)} - P_k^{(21)}} (\hat{X}_k^{(2)} - \hat{X}_k^{(1)}) \quad (2.43)$$

Où  $P_k^{(i)}$  représente la matrice de covariance de l'estimation  $\hat{X}_k^{(i)}$ .  $P_k^{(12)} = (P_k^{(21)})^T$  est la covariance entre  $\hat{X}_k^{(1)}$  et  $\hat{X}_k^{(2)}$ . La matrice de covariance est calculée avec l'équation récursive suivante :

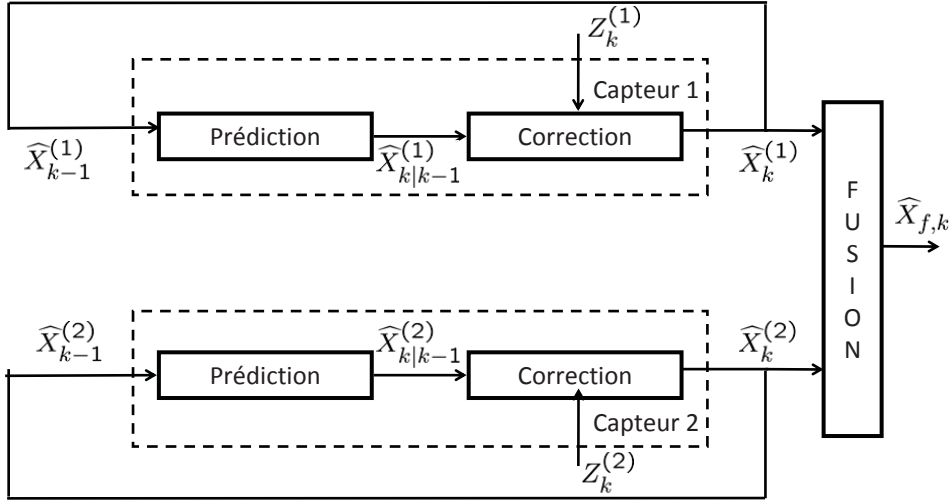


FIG. 2.10 – Algorithme de la fusion track-to-track

$$P_k^{(12)} = (I - K_k^{(1)} H_k^{(1)}) F_{k-1} P_{k-1}^{(12)} F_{k-1}^T (I - K_k^{(2)} H_k^{(2)})^T + (I - K_k^{(1)} H_k^{(1)}) Q_{k-1} (I - K_k^{(2)} H_k^{(2)})^T \quad (2.44)$$

$K_k^{(i)}$  est le gain du filtre de Kalman du capteur  $i$  à l'instant  $k$ . L'expression de la matrice de covariance  $P_{f,k}$  est donnée par :

$$P_{f,k} = P_k^{(1)} + \frac{P_k^{(1)} - P_k^{(12)}}{P_k^{(1)} + P_k^{(2)} - P_k^{(12)} - P_k^{(21)}} (P_k^{(2)} - P_k^{(1)}) \quad (2.45)$$

L'avantage de l'algorithme track-to-track est qu'il prend en compte la corrélation entre les bruits de modèles [BAR81][SAH96]. De plus la covariance  $P_{f,k}$  est plus faible que les covariances  $P_k^{(1)}$  et  $P_k^{(2)}$ .

L'algorithme track-to-track a été généralisé pour  $N$  capteur [BAR01]. Soit,  $\hat{X}_k^{(i)}$  l'estimation de taille  $n$  obtenue par le filtre de Kalman utilisant le capteur  $i$ , et soit  $\hat{X}_{f,k}$  le vecteur d'état fusionné qui suit une distribution gaussienne de matrice de covariance  $P_{f,k}$ . Le logarithme négatif de la fonction de vraisemblance  $P(\hat{X}_k^{(1)}, \hat{X}_k^{(2)}, \dots, \hat{X}_k^{(N)} / \hat{X}_{f,k})$  est donné par :

$$-\ln(P(\hat{X}_k^{(1)}, \dots, \hat{X}_k^{(N)} / X_{f,k})) = c + \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \hat{X}_k^{(1)} \\ \hat{X}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{X}_k^{(N)} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{array} \right] X_k^{(F)} \end{array} \right]^T P_k^{-1} \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \hat{X}_k^{(1)} \\ \hat{X}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{X}_k^{(N)} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{array} \right] X_{f,k} \end{array} \right] \quad (2.46)$$

Où  $I$  est la matrice identité de taille  $n * n$ .  $P(\widehat{X}_k)$  est la matrice de covariance définie par :

$$P_k = \begin{bmatrix} P_k^{(1)} & P_k^{(12)} & \dots & P_k^{(1N)} \\ P_k^{(21)} & P_k^{(2)} & \dots & P_k^{(2N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_k^{(N1)} & P_k^{(N2)} & \dots & P_k^{(N)} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Les matrices d'inter-covariance entre deux états estimés sont calculées à partir de l'équation récursive 2.44. L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\widehat{X}_{f,k}$  est défini par :

$$\widehat{X}_{f,k} = (I^T P_k^{-1} I)^{-1} I^T P_k^{-1} \widehat{X}_k \quad (2.48)$$

où  $\widehat{X}_k = [\widehat{X}_k^{(1)}, \widehat{X}_k^{(2)}, \dots, \widehat{X}_k^{(N)}]^T$  et  $I$  est une matrice identité de taille  $N * N$ .  $P_{f,k}$  la matrice de covariance de l'état estimé  $\widehat{X}_{f,k}$  est donnée par :

$$P_{f,k} = (I^T P_k^{-1} I)^{-1} \quad (2.49)$$

Remarque : Il existe d'autres structures de fusion distribuée. On peut citer par exemple l'algorithme MTF (Modified Track-to-track Fusion) [GAO02] dans lequel l'estimation fusionnée est utilisée pour prédire l'état  $\widehat{X}_{k|k-1}$  commun aux  $N$  capteurs, ou aussi l'algorithme TFP (algorithm with fused Prediction) [GAO02] dans lequel on utilise deux opérateurs de fusion : un pour fusionner les prédictions, et le deuxième pour fusionner les estimations.

La fusion distribuée possède un ensemble non négligeable d'inconvénients. Elle conserve sa nature centralisée, à savoir qu'elle fonctionne grâce à une unité centrale de traitement vitale au bon fonctionnement du système. Le second inconvénient concerne le problème de corrélations entre les différents estimateurs locaux.

### 2.3.3 Fusion décentralisée

Une structure de fusion décentralisée [DWS01, GAO02, GRO02] peut être définie comme un réseau de capteurs dont chaque élément possède sa propre unité de traitement. Elle se distingue des structures centralisées par le fait qu'elle ne s'appuie ni sur l'utilisation d'un noeud global de fusion, ni sur un système de communication spécifique. L'opération de fusion est réalisée localement à partir des informations issues de chaque capteur local et des estimations provenant des noeuds voisins. La fusion décentralisée est caractérisée par trois contraintes :

- il n'y a pas de noeud central de fusion, ce qui rend le réseau robuste aux dysfonctionnements locaux ;
- il n'y a pas de structure de communication commune, les noeuds sont reliés point-à-point ;
- les noeuds n'ont aucune connaissance globale de la structure du réseau, chaque noeud est connecté à ses voisins dont il obtient des informations.

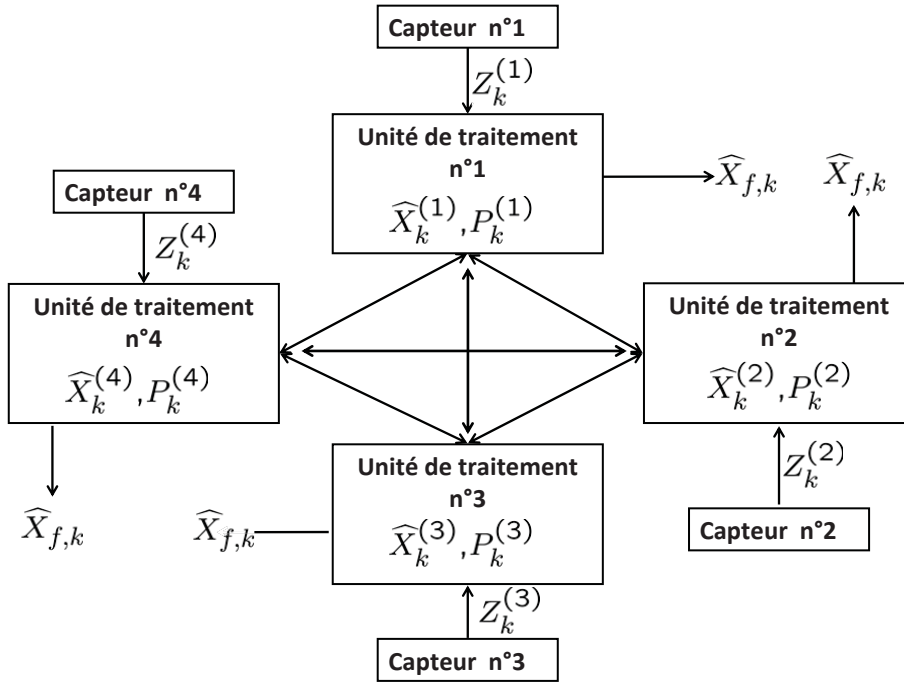


FIG. 2.11 – Exemple d'architecture de fusion décentralisée point-à-point

Il existe trois architectures de fusion décentralisée : point-à-point, en bus et en anneau. On représente, comme exemple, l'architecture point à point sur la figure 2.11.

Le modèle mathématique utilisé pour la fusion décentralisée repose sur le formalisme du filtrage de Kalman et sur la théorie de l'information. Dans ce cadre, les équations du filtre de Kalman sont reformulées en termes de quantité d'information. On considère le vecteur d'état  $X_k$  observé par  $N$  capteurs. Chaque capteur fournit une mesure  $Z_k^i$  telle que  $i = 1, \dots, N$ . Ce filtre est nommé filtre d'information. Dans ce filtre, la covariance et l'état estimé sont respectivement remplacés par la matrice d'information et le vecteur d'information. Ils sont définis par :

$$\hat{Y}_k = P_k^{-1} \hat{X}_k \quad (2.50)$$

$$U_k = P_k^{-1} \quad (2.51)$$

De même, la covariance et l'état prédits ont les formes d'information équivalentes, définies par :

$$\hat{Y}_{k|k-1} = P_{k|k-1}^{-1} \hat{X}_{k|k-1} \quad (2.52)$$

$$U_{k|k-1} = P_{k|k-1}^{-1} \quad (2.53)$$

L'information liée à une observation peut être modélisée sous la forme suivante :

$$I_k = H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (2.54)$$

$$i_k = H_k^T R_k^{-1} Y_k \quad (2.55)$$

On note  $i_k^{(i)}$  et  $I_k^{(i)}$  les informations fournies par chaque capteur à leur environnement. On peut alors construire une estimation de l'état fusionné en chaque capteur à partir des équations suivantes :

$$\widehat{Y}_k = \widehat{Y}_{k|k-1} + \sum_{i=1}^N i_k^{(i)} \quad (2.56)$$

$$U_k = U_{k|k-1} + \sum_{i=1}^N I_k^{(i)} \quad (2.57)$$

Les informations  $i_k^{(i)}$  ne sont pas corrélées et leur somme constitue la quantité d'informations dont on dispose sur l'état à estimer. Dans cette approche, la fusion des données est reportée sur chaque noeud de traitement qui additionne la quantité d'informations dont il dispose.

## 2.4 Segmentation des signaux

### 2.4.1 Notion de stationnarité

Un processus aléatoire est dit strictement ou fortement stationnaire si la loi de probabilité des variables aléatoires le constituant n'évolue pas au cours du temps. D'où cette définition de la stricte stationnarité (ou stationnarité au sens fort) suivante :

**Définition 1 :** Un processus temporel aléatoire  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  est dit strictement ou fortement stationnaire si  $\forall$  n-uplet du temps  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , tel que  $t_i \in \mathbb{Z}$  et pour tout temps  $\tau \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , la suite  $(t_{1+\tau}, \dots, t_{n+\tau})$  a la même loi de probabilité que la suite  $(t_1, \dots, t_n)$ .

Une façon équivalente de définir la stationnarité forte (ou stationnarité stricte) est donnée par :

**Définition 2 :** Un processus est dit stationnaire au sens strict si, pour toutes valeurs  $j_1; j_2; \dots; j_n$  la distribution jointe de la suite  $(x_t; x_{t+j_1}; \dots; x_{t+j_n})$  dépend uniquement des intervalles de temps  $j_1; j_2; \dots; j_n$  et est indépendante de la période  $t$ .

Dans la pratique, on se limite généralement à l'utilisation de la notion de stationnarité du second ordre :

**Définition 3 :** Un processus temporel aléatoire  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  est dit stationnaire au second ordre, ou faiblement stationnaire si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(x_t^2) < \text{inf}$
- $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(x_t) = m$ , indépendant de  $t$
- $\forall (t, \tau) \in \mathbb{Z}^2, \text{cov}(x_t, x_{t+\tau}) = \mathbb{E}[(x_{t+\tau} - m)((x_t - m))] = \gamma(\tau)$ , indépendamment de  $t$ .

La première condition  $\mathbb{E}(x_t^2) < \text{inf}$  signifie simplement l'existence (ou la convergence) des moments d'ordre deux. La deuxième condition  $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(x_t) = m$  signifie que les variables aléatoires  $x_t$  doivent avoir la même espérance quelque soit le temps  $t$ . Enfin, la troisième condition porte sur les moments d'ordre deux résumés par la fonction d'autocovariance. Cette condition implique que ces moments doivent être indépendants de la date considérée et ne doivent dépendre que de l'ordre des retards. Autrement dit, la fonction d'autocovariance du processus  $x_t$  doit être indépendante du temps.

Nous représentons sur la figure 2.12, une réalisation d'un processus  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  présentant une rupture de moyenne à partir de l'instant  $r = 50$ .

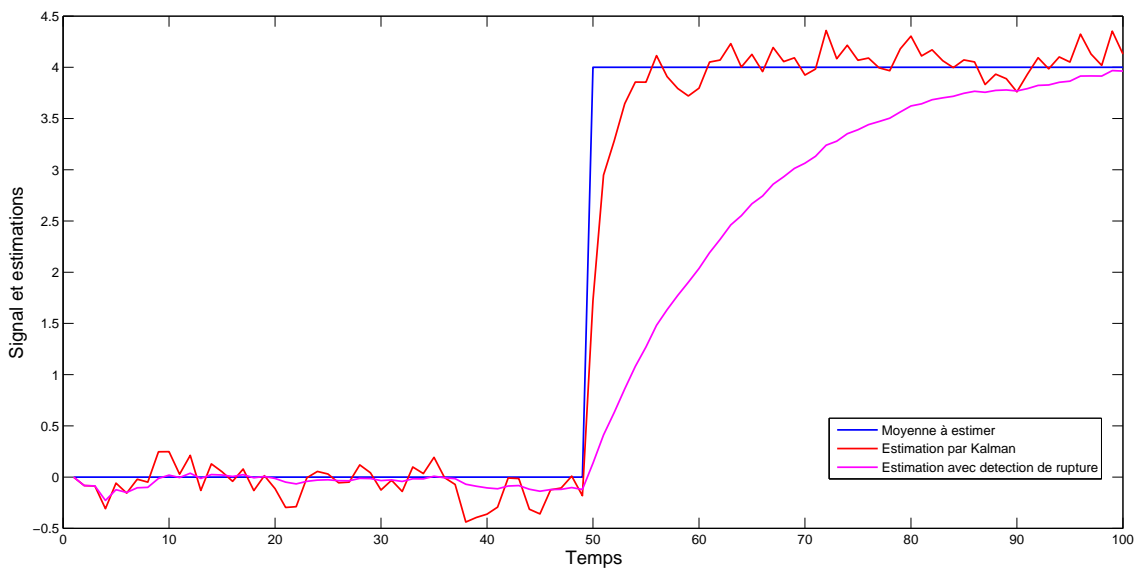


FIG. 2.12 – Exemple d'estimation de rupture

Ce processus est par définition non stationnaire car la condition sur le moment d'ordre un n'est pas vérifiée et on remarque bien sur la figure 2.12 que le calcul de la moyenne empirique dépendra de l'échantillon considéré (avant  $r$  ; ou après  $r$ ) : la non stationnarité dans ce cas est provoquée par une rupture du modèle. On représente sur cette figure la moyenne estimée par un filtre de Kalman et la moyenne estimée par un filtre qui intègre un estimateur de la rupture. On remarque que le filtre qui intègre un estimateur de ruptures fournit une estimation de la moyenne qui suit plus fidèlement le processus.

Il existe d'autres sources de non stationnarité. On peut citer par exemple le processus que l'on qualifie de marche aléatoire pure (Random Walk Process), ou marche aléatoire sans dérive, la non stationnarité dans ce cas est de type stochastique car elle est due à l'accumulation de bruits stochastiques.

### Formulation du problème de détection de ruptures

Considérons un signal  $x$  constitué d'une succession de segments homogènes, de caractéristiques constantes ou lentement variables, séparé par des transitions brutales où les caractéristiques du signal changent rapidement. Le problème de détection des ruptures consiste à détecter si une rupture a eu lieu dans le signal observé  $x$  et à estimer son instant  $r$ , ainsi que son amplitude. Ce problème peut être traduit par un test d'hypothèse.

Si le changement intervient sur les paramètres, le problème s'appelle dans ce cas problème de test d'hypothèse paramétrique. En effet, supposons que nous disposons d'une suite d'observations  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (suite de réalisations indépendantes  $X$ ) qui, jusqu'à l'instant de la rupture  $r$ , suit une densité de probabilité  $P(X/H_0)$  (de paramètre  $\theta_0$ ) et ensuite suit une autre densité de probabilité  $P(X/H_1)$  (de paramètre  $\theta_1$ ). Pour détecter un éventuel changement dans le paramètre  $\theta$ , nous pourrions procéder, à chaque instant, au test d'hypothèse suivant :

$$H_0 : \theta = \theta_0, \text{ pour } 1 \leq i \leq n \quad (2.58)$$

Contre :

$$H_1 : \begin{cases} \theta = \theta_0, & \text{pour } 1 \leq i \leq r \\ \theta = \theta_1, & \text{pour } r+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (2.59)$$

La plupart des algorithmes de détection de ruptures reposent sur la somme de logarithmes de rapports de vraisemblance [BOR99, BAS93]. Le logarithme du rapport de vraisemblance est défini par :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_j) = \frac{P(X/H_1)}{P(X/H_0)} \quad (2.60)$$

En général c'est le test de Neyman-Pearson qui est utilisé pour différencier les hypothèses. Pour ce test on considère un échantillon de taille  $M$ , que l'on va décomposer en plusieurs échantillons de taille  $N$  avec  $N \leq M$ . On prend alors la somme des logarithmes du rapport de vraisemblance comme suit :

$$S_k^N = \sum_{i=(k-1).N+1}^{k.N} S_i \quad (2.61)$$

avec



$$S_i = \log \frac{P(x_i/H_1)}{P(x_i/H_0)} \quad (2.62)$$

Le test de Neyman-Pearson utilise la règle de décision suivante :

$$d_k = \begin{cases} 0 & \text{si } S_k^N < \lambda \\ 1 & \text{si } S_k^N \geq \lambda \end{cases} \quad (2.63)$$

$\lambda$  est un seuil choisi de façon que la probabilité de fausse alarme soit égale à une valeur fixée par les besoins de l'application.

L'instant de la rupture  $r$  est donné par :

$$r = N. \min\{k \geq 1 : d_k = 1\} \quad (2.64)$$

Ces algorithmes de détection sont caractérisés en général par deux paramètres :

- la probabilité de fausse alarme ;
- la probabilité de détection.

Il a été prouvé que cet algorithme est optimal dans le sens qu'il maximise la probabilité de détection pour une probabilité de fausse alarme donnée. Cette propriété est connue sous le nom d'optimalité au sens de Neyman-Pearson [BAS93].

Certains de ces algorithmes d'estimation des ruptures se préoccupent uniquement de détecter la rupture avec un retard. D'autres affinent la position de la frontière de la rupture trouvée en estimant, après détection, l'instant auquel la rupture s'est produite. Finalement, il existe des techniques qui vont jusqu'à estimer les paramètres caractérisant le signal avant et après la rupture. La plupart de ces algorithmes s'appuient sur une modélisation d'état du problème. Les ruptures peuvent se trouver soit au niveau de l'équation du modèle, soit au niveau de l'équation d'observations. Elles sont modélisées soit par :

$$\begin{cases} X_k & = F X_{k-1} + W_k + v \delta_{r,k} \\ Z_k & = H X_k + V_k \end{cases} \quad (2.65)$$

soit par :

$$\begin{cases} X_k & = F X_{k-1} + W_k \\ Z_k & = H X_k + V_k + v \delta_{r,k} \end{cases} \quad (2.66)$$

où

- $X_k$  est le vecteur d'état, observé par  $Z_k$  à l'instant  $k$ ,
- $F_k, H_k$  sont les matrices de dynamique et d'observation du système (supposées connues),

- $W_k, V_k$  sont les bruits blancs gaussiens additifs de moyenne nulle et de matrice de covariance respectives  $Q_t, R_t$ . Ces bruits sont supposés indépendants,
- $\delta_{r,k}$  est le symbole de Kronecker qui représente une impulsion à l'instant  $r$ ,
- $v$  est le vecteur représentant l'amplitude du changement.

Dans la suite, on réalise la description d'algorithmes de détection de rupture dans le cas d'une rupture dans le modèle. On va présenter l'algorithme de somme cumulée (CUSUM : Cumulative Sum) et l'algorithme du rapport de vraisemblance généralisé (GLR : Generalized Likelihood Ratio) utilisé dans le cas où les paramètres de la rupture sont inconnus.

### 2.4.2 Détecteur de ruptures somme cumulée : CUSUM

L'algorithme du CUSUM a été introduit en 1945 par Page [PAG54]. Il est utilisé pour détecter un changement de paramètres dans une suite d'observations indépendantes. C'est encore aujourd'hui un algorithme très utilisé sous sa forme initiale, c'est à dire sous l'hypothèse d'indépendance des observations, pour des systèmes dynamiques, en contrôle de qualité ou autre.

Le fonctionnement de l'algorithme CUSUM peut être défini de la manière suivante : à chaque instant  $n$ , on cherche un changement de paramètre aux instants  $r$  compris entre 1 et  $n$ . L'idée du CUSUM est de construire pour toutes les valeurs  $k$  comprises entre 1 et  $n$  un rapport de vraisemblance entre deux hypothèses. Il n'y a pas eu de changement (hypothèse  $H_0$ ) et il y a eu un changement avant l'instant courant (hypothèse  $H_1$ ). Le logarithme du rapport de vraisemblance entre ces deux hypothèses s'écrit :

$$\log \frac{P_k(x_1, \dots, x_k/H_1)}{P(x_1, \dots, x_k/H_0)} = \log \frac{\prod_{i=1}^{k-1} P(x_i/H_0) \cdot \prod_{i=k}^n P(x_i/H_1)}{\prod_{i=1}^n P(x_i/H_0)} \quad (2.67)$$

$$= \log \frac{\prod_{i=k}^n P(x_i/H_1)}{\prod_{i=k}^n P(x_i/H_0)} \quad (2.68)$$

$$= \sum_{i=k}^n \log \frac{P(x_i/H_1)}{P(x_i/H_0)} \quad (2.69)$$

L'intérêt de cette somme est qu'elle change de signe en moyenne après l'instant de la rupture. On calcule ce rapport pour  $k = 1, \dots, n$ , et on obtient l'écriture du test  $g_n$  de l'algorithme CUSUM :

$$g_n = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=k}^n \log \frac{P(x_i/H_1)}{P(x_i/H_0)} \quad (2.70)$$

Les valeurs de  $g_n$  vérifient les propriétés suivantes :

- sous l'hypothèse  $H_0$  les incréments  $\log(p(x_i/H_1)/p(x_i/H_0))$  sont en moyenne négatifs, ce qui implique que  $g_n$  a tendance à être négatif,
- sous l'hypothèse  $H_1$  les incréments  $\log(p(x_i/H_1)/p(x_i/H_0))$  sont en moyenne positifs ce qui implique que  $g_n$  a tendance à être positif et croissant.

L'instant de la rupture est ainsi défini de la façon suivante :

$$r = \inf\{n : g_n \geq \lambda\} \quad (2.71)$$

C'est le premier instant où  $g_n$  franchit le seuil  $\lambda$ . Ce seuil est fixé au préalable.

Cet algorithme est de faible complexité, car  $g_n$  peut être calculé de manière récursive.

$$g_n = \left( g_{n-1} + \log \frac{P(x_n/H_1)}{P(x_n/H_0)} \right)^+ \quad (2.72)$$

où  $(x)^+ = \max(x, 0)$

Le cas le plus fréquent de détection de changement est le cas où les paramètres de changement sont inconnus, c'est-à-dire qu'il faut, en plus de l'instant de changement, estimer la dynamique du saut. Dans le paragraphe suivant nous présentons un des algorithmes les plus utilisés dans ce cas : l'algorithme de vraisemblance généralisé (GLR).

### 2.4.3 Estimateur de rupture Kalman GLR

L'algorithme GLR permet de détecter et d'estimer en ligne les instants et les amplitudes des ruptures. Le GLR repose sur le filtre de Kalman, il permet d'estimer les paramètres caractéristiques du signal avant et après la rupture. Le GLR utilise l'idée que tout changement (saut, rupture) au niveau du modèle ou d'observations d'un système linéaire peut se traduire par un saut de moyenne sur l'innovation du filtre de Kalman associé au modèle sans rupture. La procédure de détection est de type rapport de vraisemblance généralisé. L'algorithme GLR comprend un filtre de Kalman, un détecteur de saut, un estimateur de l'instant  $r$  et de l'amplitude  $v$  du saut. Quand un saut est détecté il y a une procédure de réactualisation du filtre de Kalman. Les traitements sont réalisés en ligne et de manière récursive, sauf l'estimation de l'instant du saut qui est obtenu par recherche exhaustive du maximum du détecteur dans un intervalle de longueur  $M$ . C'est pour cette raison que le GLR est dit de type  $M$ .

Supposons une rupture dans le modèle d'évolution du processus, de dynamique  $v_r$ , située à la position  $r$ . L'expression de l'estimation  $\hat{X}_{k|k}$  à l'instant  $k$  tel que  $k \geq r$  peut se décomposer en :

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^0 + \rho_{k,r}(v) \quad (2.73)$$

Dans cette expression,  $\hat{X}_k^0$  est l'estimation obtenue sans prendre en considération la rupture.  $\rho_{k,r}(v)$  est une fonction de  $v$  qui représente la différence entre  $\hat{X}_k^0$  et l'estimation qu'on devrait trouver si on considèrait qu'une rupture s'était déjà produite.

On prend la matrice de dynamique et d'observation également 1, ( $H = F = 1$ ), on peut montrer que :

$$\rho_{k,r}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\rho_{k,r} = \mathbf{v} \prod_{i=r+1}^k \frac{P_i}{P_{i-1} + Q} \quad (2.74)$$

On introduit alors l'innovation,  $\varepsilon_k$ , qui correspond à la différence entre la mesure et la prédiction fournie à cet instant par le filtre de Kalman  $\widehat{X}_{k|k-1}$  2.3. On définit alors le test d'hypothèse suivant :

- hypothèse  $H_1$  : en présence d'une rupture de dynamique  $\mathbf{v}_r$  à la position  $r$  dans le modèle, on a :

$$\varepsilon_k \sim N(\mathbf{v}\rho_{k,r}, P_{\varepsilon_k}) \quad (2.75)$$

- hypothèse  $H_0$  : en absence de rupture dans le modèle, on a :

$$\varepsilon_k \sim N(0, P_{\varepsilon_k}) \quad (2.76)$$

$P_{\varepsilon_k}$  est la matrice de covariance de l'erreur sur l'innovation.

La détection d'un saut repose sur le rapport de vraisemblance  $l(k, r)$  donné par la formule suivante :

$$l(k, r) = -2 \log \frac{\prod_{i=r}^k P(\varepsilon_i | H_1)}{\prod_{i=r}^k P(\varepsilon_i | H_0)} \quad (2.77)$$

Ce qui implique :

$$l(k, r) = 2\mathbf{v}^T \sum_{i=r}^k \rho_{k,i} P_{\varepsilon_k}^{-1} \varepsilon_i - \mathbf{v}^T \sum_{i=r}^k \rho_{k,i}^T P_{\varepsilon_k}^{-1} \rho_{k,i} \mathbf{v} \quad (2.78)$$

On pose :

$$d(k, r) = \sum_{i=r}^k \rho_{k,i} P_{\varepsilon_k}^{-1} \varepsilon_i \quad (2.79)$$

$$C(k, r) = \sum_{i=r}^k \rho_{k,i}^T P_{\varepsilon_k}^{-1} \rho_{k,i} \quad (2.80)$$

On a alors :

$$l(k, r) = 2\mathbf{v}^T d(k, r) - \mathbf{v}^T C(k, r) \mathbf{v} \quad (2.81)$$

L'estimateur de l'amplitude du saut est obtenu en maximisant l'expression suivante :

$$\hat{v}_k = C(k, r)^{-1} d(k, r) \quad (2.82)$$

Le logarithme du rapport de vraisemblance généralisé pour un  $r$  fixé est alors obtenu en remplaçant l'amplitude par son estimateur :

$$l(k, r) = d(k, r)^T C(k, r)^{-1} d(k, r) \quad (2.83)$$

$r$  est estimé en recherchant le maximum de  $l(k, r)$  dans une fenêtre de longueur  $M$  :

$$\hat{r}_k = \arg \max_{t-M+1 \leq r \leq t} l(t, r) \quad (2.84)$$

L'estimation de  $v$  devient :

$$\hat{v}_k = C(k, \hat{r}_k)^{-1} d(k, \hat{r}_k) \quad (2.85)$$

La règle de décision peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$l(k, r) = \hat{v}_k^T C(k, \hat{r}_k) \hat{v}_k \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \lambda \quad (2.86)$$

Après la détection d'une rupture, l'algorithme GLR procède à une réactualisation du filtre. La procédure consiste à réactualiser l'estimation des variables d'état et la covariance d'erreur d'estimation de l'état. La réactualisation est donnée par :

$$\hat{X}_{k,r} = \hat{X}_k^0 + \hat{v}_k \rho_{k, \hat{r}_k} \quad (2.87)$$

soit encore :

$$\hat{X}_{k,r} = \hat{X}_k^0 + \hat{v}_k \prod_{i=\hat{r}_k+1}^k \frac{P_i}{P_{i-1} + Q} \quad (2.88)$$

$$\hat{P}_{k,r} = \text{var}(\hat{X}_{k,r}) \quad (2.89)$$

$$= \text{var}(\hat{X}_k^0 + \hat{v}_k \rho_{k, \hat{r}_k}) \quad (2.90)$$

$$= \hat{P}_k^0 + \rho_{k, \hat{r}_k} (C(k, \hat{r}_k))^{-1} \sum_{i=\hat{r}_k}^k \rho_{k,i} \quad (2.91)$$

Sur la figure 2.12 on représente la différence entre les résultats obtenus par un filtre de Kalman classique et un algorithme GLR appliqué à l'estimation de la valeur moyenne d'un processus.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une introduction à l'estimation et au filtrage statistique défini dans un cadre bayésien. Nous avons introduit les différents concepts utilisés en fusion d'informations. Finalement nous avons posé le problème de l'estimation des processus non stationnaires et des estimateurs de rupture ont été présentés.

Aujourd'hui les problèmes de recherche dans le domaine du filtrage bayésien portent principalement sur l'estimation dans le cas non linéaire. La détection de rupture est aussi un problème non linéaire qui fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Finalement, en fusion d'information, c'est la recherche de nouveaux opérateurs de fusion qui est étudiée dans le cadre des probabilités généralisées.

Ce travail de thèse s'inscrit dans les thèmes de recherche étudiés aujourd'hui. En effet, en fusion d'informations, deux approches permettent d'améliorer les performances des estimateurs : l'introduction d'une information *a priori* sur le paramètre à estimer, et la fusion des observations du paramètre à estimer. Dans le cas de l'étude des processus non stationnaires, nous proposons dans le chapitre 3 un estimateur de ruptures de pente qui intègre une information *a priori* imprécise sur les paramètres du signal. Nous proposons aussi dans ce chapitre un opérateur de fusion des mesures qui intègre une information *a priori* sur le paramètre à estimer. Concernant l'étude des processus non linéaires, les travaux présentés au chapitre 4 portent sur la définition de filtres et opérateurs de fusion pour les données circulaires. Dans cette approche originale, nous proposons de redéfinir un filtre bayésien et un opérateur de fusion en utilisant les distributions statistiques utilisées dans le domaine circulaire. Les méthodes proposées dans cette thèse sont appliquées à la fusion des voies pilote et données du signal GPS L2C.



# Chapitre 3

## Estimation détection conjointes par un opérateur de fusion non linéaire

### 3.1 Introduction

Dans ce travail on réalise l'étude et la mise en oeuvre d'un détecteur de ruptures en ligne. Le détecteur proposé réalise l'estimation des paramètres du processus observé et la détection des ruptures de pentes dans le processus. Il s'appuie sur la fusion non linéaire des observations obtenues à partir de deux sources indépendantes et sur l'apport d'une information *a priori* sur la valeur de la rupture de pente à détecter.

En effet, on peut montrer que l'évolution des valeurs du discriminant "Early minus Late" de la boucle de poursuite de code DLL du signal GPS peut être modélisée par un processus linéaire par morceaux. Ce processus est observé au travers des mesures de discriminant obtenues sur la voie données et la voie pilote quand la DLL fonctionne en boucle ouverte. Dans un récepteur GPS, la boucle de poursuite de la porteuse fonctionne en général en parallèle avec la boucle de poursuite du code. Dans notre approche, nous utilisons la fréquence Doppler et la puissance du signal estimés par les boucles de phase et de fréquence PLL et FLL comme information *a priori* utilisée par la boucle DLL. On déduit de ces estimations une valeur *a priori* de la dynamique (amplitude) de rupture de pente qui est utilisée par la boucle de code pour segmenter le signal.

En fusion d'informations, il existe dans le cas centralisé deux approches permettant d'améliorer les performances des estimateurs. L'introduction d'une information *a priori* sur le paramètre à estimer et la fusion des observations du paramètre à estimer. Dans le cas Bayésien les estimateurs sont souvent construits à partir de la distribution *a posteriori*, et c'est la loi *a priori* qui modélise l'information *a priori* sur le paramètre à estimer. De manière générale, on introduit dans les estimateurs MAP ( Maximum *a posteriori*) une loi *a priori* définie par une distribution et des hyper paramètres pour modéliser l'information *a priori*. On peut citer comme exemple le filtrage d'état où la loi *a priori* est définie par la prédiction sur le paramètre à estimer calculée avec l'équation d'état. Les opérateurs de fusion d'un ensemble de mesures fournies par un ensemble de capteurs sont des estimateurs du maximum de vraisemblance. Ils sont réalisés en pratique sous la forme d'une somme pondérée dont les coefficients sont obtenus à partir des



paramètres statistiques des distributions qui modélisent le bruit sur les mesures. Ces opérateurs de fusion sont notés opérateurs de fusion linéaire dans la suite du chapitre. On montre que l'on peut définir les coefficients de cette somme pondérée pour un nombre quelconque de capteurs ayant des mesures corrélées [KAC04][SHI06]. Dans ce cas la fusion sera d'autant plus performante (Variance faible du paramètre estimé avec l'opérateur de fusion) que la corrélation entre les observations sera faible.

Dans ce chapitre nous réalisons d'abord, l'étude et la mise en oeuvre d'un détecteur de ruptures de pente par fusion linéaire, qui intègre une information *a priori* sur la dynamique (amplitude) de la rupture [AZM10]. L'estimateur de rupture de stationnarité proposé s'appuie sur une modélisation d'état. Il est composé d'un filtre qui estime l'état du système à partir des mesures fusionnées et d'un détecteur de ruptures qui estime la position et la dynamique de la rupture. Quand une rupture est détectée, l'état estimé est réactualisé avec les paramètres de la rupture (position,dynamique) pour que le processus estimé reste stationnaire. Dans cette partie, notre apport réside dans la définition d'un détecteur de ruptures qui intègre une information *a priori* sur la dynamique de la rupture de pente.

Nous présentons ensuite un opérateur de fusion non-linéaire des observations. Cet opérateur de fusion est défini à partir de l'opérateur classique du maximum de vraisemblance et d'une information *a priori*. Il n'est pas construit à partir de la distribution *a posteriori*, mais à partir d'un processus non linéaire de sélection ; transformation qui a pour but de diminuer la corrélation entre les observations fusionnées. Cet opérateur est utilisé par le détecteur de ruptures par fusion non linéaire pour l'estimation des ruptures de pente. Dans cette partie, notre apport consiste à proposer et la définition de ce nouvel opérateur de fusion.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Le chapitre commence par uUne introduction ensuite nous présentons dans une deuxième partie un algorithme de détection de rupture de pente basé sur l'opérateur de fusion linéaire (somme pondérée) et l'apport d'information *a priori*. La troisième partie concerne l'étude et la mise en oeuvre d'un opérateur de fusion non linéaire. La définition du détecteur de ruptures utilisant l'opérateur de fusion non linéaire est présentée dans la quatrième partie. La cinquième partie est consacrée à l'expérimentation dans laquelle les différents détecteurs de ruptures proposés seront évalués et comparés.

## 3.2 Détection de rupture de pente par fusion linéaire

### 3.2.1 Position du problème

Dans ce travail on souhaite d'une part déterminer les ruptures de pente dans un processus linéaire par morceaux. On présente sur la figure 3.1 une réalisation de ce processus superposé à sa valeur moyenne. Ce signal représente l'évolution du discriminant de code "Early minus late" quand la DLL fonctionne en boucle ouverte (figure de gauche : c'est à dire, sans que le code local soit recalé). Dans notre approche on souhaite recalé le code local sur le code du signal reçu lorsque le discriminant est maximal. On présente sur la figure 3.1 l'évolution linéaire par morceaux du discriminant quand il est recalé à l'instant où il a atteint sa valeur maximale (figure de droite : lorsque la boucle DLL est refermée à l'instant du maximum du discriminant).

D'autre part on souhaite estimer les valeurs de discriminant avant la rupture. En effet, c'est à partir des valeurs de discriminant que les délais du code local et les pseudo distances sont estimés. On présente dans la suite un détecteur de ruptures de pente pour l'estimation des valeurs du discriminant et la détection de son maximum. L'implémentation de ce détecteur pour la poursuite du signal GPS sera présentée au chapitre 5.

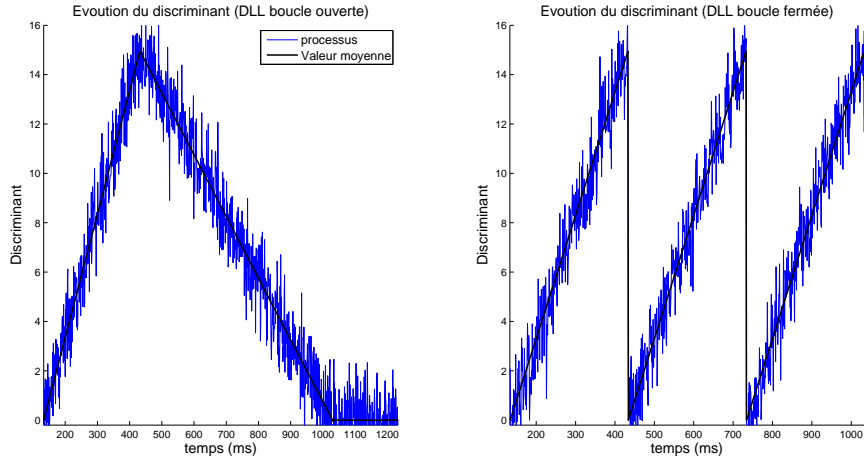


FIG. 3.1 – Evolution du discriminant en boucles ouverte et fermée

Dans notre approche on suppose que l'on a comme information *a priori* les valeurs approximatives des pentes du processus, calculées à partir de la fréquence Doppler et de la puissance du signal reçu. En effet dans un récepteur GPS la boucle de poursuite de la fréquence, qui fonctionne en parallèle avec la boucle de poursuite du code, fournit une estimation de la fréquence Doppler et de la puissance du signal. De plus dans notre application, on réalise la poursuite du code simultanément sur la voie pilote sans message de navigation et un voie de données avec message de navigation du signal GPS L2C. On dispose donc de deux mesures bruitées du discriminant que nous proposons de fusionner.

Considérons deux processus non stationnaires de type déterministe pour décrire les mesures du discriminant en boucle fermée (figure 3.1 de droite). Ces processus sont décrits par une variable aléatoire  $Z_k^{(l)}$  ayant une distribution gaussienne de variance  $R^{(l)}$ .  $Z^{(1)}$  est le processus associé à la voie pilote du signal L2C et  $Z^{(2)}$  est celui associé à la voie données. L'évolution de ces processus est linéaire par morceaux. Considérons alors la série temporelle suivante, définie dans chaque segment linéaire.

$$Z_k^{(l)} = a_i(k - t_{i-1}) + \eta_k^{Z^{(l)}} \quad t_{i-1} + 1 \leq k \leq t_i \text{ et } l \in \{1, 2\}, \quad (3.1)$$

$t_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  instant de rupture du processus.  $a_i$  est la pente dans l'intervalle  $[t_{i-1} \ t_i]$ , On suppose que l'on dispose d'une information *a priori* sur la pente  $a_i$  fournie par une source externe (Boucle FLL). Cette information *a priori* est incertaine, elle est définie comme la réalisation d'un processus gaussien centré sur  $\mu$  (la vraie valeur de la pente) et de variance  $V$  ( $V$

défini l'incertitude).  $\eta_k^{Z^{(l)}}$  est un bruit blanc gaussien centré de variance  $R^{(l)}$ . Soit,  $X_k$  la valeur moyenne du processus à l'instant  $k$ . Elle est définie par l'équation récurrente suivante :

$$X_k = \sum_{r \in \{\hat{t}_i\}_{i \in \mathbb{N}}} X_{k-1} (1 - \delta(k-1-r)) + a_i \Delta t + \omega_{k-1} \quad (3.2)$$

L'impulsion de Dirac  $\delta(\dots)$  prend la valeur 1 à l'instant de la rupture, sinon 0.  $\omega_k$  est un bruit blanc centré de distribution gaussienne et de variance  $Q$ . L'équation qui lie la mesure à la valeur moyenne du processus est donnée par :

$$Z_k^{(l)} = X_k + \eta_k^{Z^{(l)}} \quad (3.3)$$

On souhaite estimer la valeur moyenne du processus  $X_k$ . L'estimateur récursif proposé combine un détecteur de ruptures avec un estimateur de la moyenne sur chaque zone où le processus évolue linéairement. Dans ce contexte, l'estimateur de ruptures détecte à partir de la moyenne estimée les instants de ruptures  $\hat{t}_i$ .

L'étude du détecteur de ruptures est réalisée en deux parties. On décrit dans une première partie l'estimation du processus avant et après la rupture. La deuxième partie concerne la mise en oeuvre du détecteur de ruptures à partir de l'innovation du filtre récursif utilisé pour l'estimation du processus.

### 3.2.2 Modélisation du problème d'estimation

#### Estimation d'état avant la rupture

Dans les zones stationnaires, la définition de l'estimateur utilisé s'appuie sur une modélisation Bayésienne du problème. En effet, il estime la distribution *a posteriori* définie en  $k$  par  $f(X_k/Z_{1:k}^{(1)}, Z_{1:k}^{(2)})$  [KAC04]. La prédiction du filtre est définie par les équations suivantes :

$$\hat{X}_{k/k-1} = \hat{X}_{k-1} + a_k \Delta t \quad (3.4)$$

$$P_{k/k-1} = P_{k-1} + Q \quad (3.5)$$

La valeur de  $Q$  définit la confiance donnée au modèle d'état et à la valeur de la pente  $a_k$ . On montre dans l'annexe A que l'expression du filtre optimal Bayésien peut être mise sous la forme récursive suivante dans le cas de  $n$  mesures :

$$\hat{X}_k = P_k \left( \frac{\hat{X}_{k/k-1}}{P_{k/k-1}} + \sum_{l=1}^n \frac{Z_k^{(l)}}{R^{(l)}} \right) \quad (3.6)$$

$$P_k = \left( \frac{1}{P_{k/k-1}} + \sum_{l=1}^n \frac{1}{R^{(l)}} \right)^{-1} \quad (3.7)$$

Dans cette expression l'opérateur de fusion des mesures est une somme pondérée de poids normalisés. On remarquera de même que la combinaison de la mesure fusionnée avec la prédiction est aussi une somme pondérée de poids normalisés.

### Estimation d'état après la rupture

Considérons à présent le système d'évolution d'état suivant, décrivant une pente avec rupture :

$$X_k = (X_{k-1} + a_i \Delta t + \Delta a_r \Delta t H_{r+1}(k)) + \omega_{k-1}^{(1)} \quad (3.8)$$

avec  $r = t_i$ . Dans cette expression,  $H_{r+1}(k)$  est la fonction de Heaviside qui prend la valeur 1 pour  $k \geq r + 1$  sinon 0.  $\Delta a_r$  est la variation de pente à l'instant de la rupture. Dans le cas du discriminant "Early minus Late", on montre que  $\Delta a_r = \frac{3}{2}a_r$ .

On représente sur la figure 3.2 l'évolution du processus et de sa valeur moyenne. On représente aussi l'estimation de  $\hat{X}_k$  avant et après la rupture quand celle-ci n'est pas détectée. La détection de la rupture est réalisée à partir de la statistique de l'innovation, soit de la différence entre l'état estimé et la mesure. Pour que l'innovation du filtre après la rupture soit centrée, il faut soustraire à l'état estimé la valeur de la fonction de correction  $\rho_{k,r}$ . Nous allons décrire dans la suite le calcul de  $\rho_{k,r}$ .

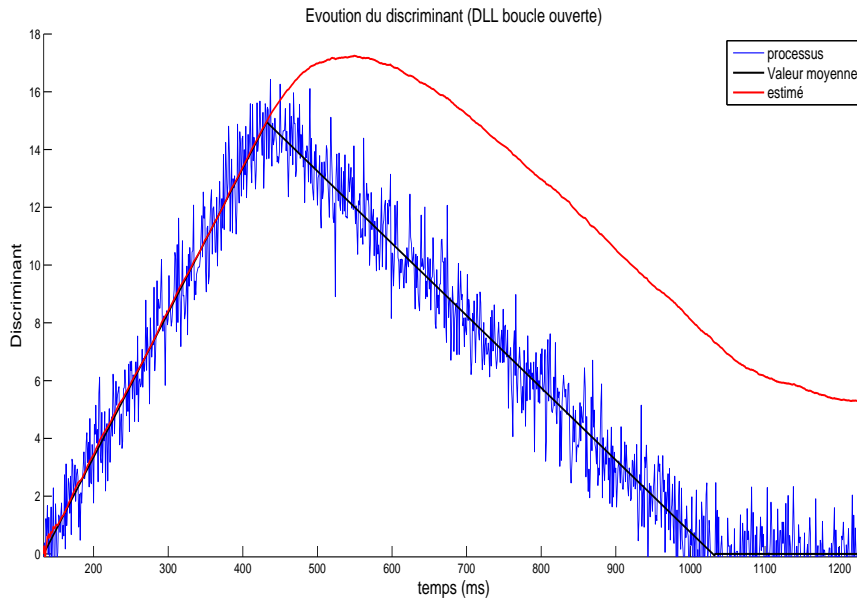


FIG. 3.2 – Evolution du discriminant estimé

Si on suppose une rupture dans le modèle d'évolution du processus 3.8, de dynamique  $\Delta a_r$ , située à la position  $r$ , on aura l'expression de la moyenne estimée  $\hat{X}_{k,r}$  à l'instant  $k$  avec  $k > r$  qui est donnée par :

$$\hat{X}_{k,r} = \hat{X}_{k,0} + \rho_{k,r}(\Delta a_r) \quad (3.9)$$

Dans cette expression  $\hat{X}_{k,0}$  est la moyenne estimée obtenue sans la détection de la rupture du modèle.  $\rho_{k,r}(\Delta a_r)$  est une fonction de  $\Delta a_r$  qui représente la différence avec la moyenne estimée lorsque l'on considère une rupture à la position  $r$  dans le modèle.

Dans le cas du filtre décrit de la section précédente (cas d'une mesure  $Z_k$  et pour  $\Delta t=1$ ), si  $k > r$ , on a :

$$\hat{X}_k = \frac{P_k}{R} Z_k + \frac{P_k}{P_{k-1} + Q} \left( \hat{X}_{k-1} + \Delta a_r \right) \quad (3.10)$$

Dans le cas où  $k-1$  est aussi strictement supérieur à  $r$ , on a :

$$\hat{X}_k = \frac{P_k}{R} Z_k + \frac{P_k}{P_{k-1} + Q} \left( \frac{P_{k-1}}{R} Z_{k-1} + \frac{P_{k-1}}{P_{k-2} + Q} (\hat{X}_{k-2} + \Delta a_r) + \Delta a_r \right) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P_k}{R} Z_k + \frac{P_k}{P_{k-1} + Q} \frac{P_{k-1}}{R} Z_{k-1} + \frac{P_k}{P_{k-1} + Q} \frac{P_{k-1}}{P_{k-2} + Q} \hat{X}_{k-2} \\ &+ \left( \frac{P_k}{P_{k-1} + Q} \frac{P_{k-1}}{P_{k-2} + Q} + \frac{P_k}{P_{k-1} + Q} \right) \Delta a_r \end{aligned} \quad (3.12)$$

En réitérant le même calcul jusqu'à  $r$ , on aura :

$$\hat{X}_k = g(Z_r, Z_{r+1}, \dots, Z_{k-1}, Z_k) + \prod_{i=r}^k \hat{X}_{i-1} + \Delta a_r \sum_{i=1}^{k-r} \prod_{j=k-i}^{k-1} \frac{P_{j+1}}{P_j + Q} \quad (3.13)$$

avec :

$$g(Z_r, Z_{r+1}, \dots, Z_{k-1}, Z_k) = \frac{P_k}{R} Z_k + \frac{P_k}{P_{k-1} + Q} \frac{P_{k-1}}{R} Z_{k-1} + \dots + \prod_{i=r+1}^k \frac{P_i}{P_{i-1} + Q} Z_r \quad (3.14)$$

On a alors :

$$\hat{X}_{k,0} = g(Z_r, Z_{r+1}, \dots, Z_{k-1}, Z_k) + \prod_{i=r}^k \hat{X}_{i-1} \quad (3.15)$$

ce qui implique :

$$\rho_{k,r}(\Delta a_r) = \Delta a_r \quad \rho_{k,r} = \Delta a_r \sum_{i=1}^{k-r} \prod_{j=k-i}^{k-1} \frac{P_{j+1}}{P_j + Q} \quad (3.16)$$

### 3.2.3 Etude et mise en oeuvre du détecteur de ruptures

#### Estimation de l'instant de la rupture

On note  $\varepsilon_k$  l'innovation, soit la différence entre les mesures fusionnées et la moyenne estimée. On suppose qu'on dispose de deux sources de mesures, on a alors :

$$\varepsilon_k = \hat{X}_{k,0} - \left( \frac{R^{(2)}}{R^{(1)} + R^{(2)}} Z_k^{(1)} + \frac{R^{(1)}}{R^{(1)} + R^{(2)}} Z_k^{(2)} \right) \quad (3.17)$$

$$P\varepsilon_k = P_k + \left( \frac{1}{R^{(1)}} + \frac{1}{R^{(2)}} \right)^{-1} \quad (3.18)$$

On considère l'ensemble des valeurs de l'innovation, noté  $\underline{\varepsilon}$ , calculées entre la position  $r$  de la rupture et la position courante  $k$  de la valeur moyenne estimée avec  $r < k$ . La valeur de  $r$  est recherchée dans une fenêtre temporelle de taille  $M$ , soit entre  $k - M + 1$  et  $k$ .  $\underline{\varepsilon}$  est le vecteur d'innovations défini entre  $r$  et  $k$ . La distribution statistique de l'innovation est définie par :

$$P(\underline{\varepsilon}, r, \Delta a_r) = P(\Delta a_r | \underline{\varepsilon}, r) h(\underline{\varepsilon} | r) \pi(r) \quad (3.19)$$

où  $\pi(r)$  est la loi *a priori* sur la position de la rupture.  $r$  est l'instant de la rupture recherchée et  $\Delta a_r$  un paramètre correspondant à la variation de la pente à l'instant de la rupture  $r$ .  $h(\cdot)$  est la fonction de vraisemblance. De plus on a :

$$P(\Delta a_r | \underline{\varepsilon}, r) h(\underline{\varepsilon} | r) = h(\underline{\varepsilon} | r, \Delta a_r) P(\Delta a_r | r) \quad (3.20)$$

L'estimateur de l'instant de la rupture est défini par :

$$\begin{aligned} (\hat{r}) &= \underbrace{\text{Argmax}}_{(k-M+1 \leq r \leq k)} P(r | \underline{\varepsilon}) \\ &= \underbrace{\text{Argmax}}_{(k-M+1 \leq r \leq k)} \log(h(\underline{\varepsilon} | r) \pi(r)) \\ &= \underbrace{\text{Argmin}}_{(k-M+1 \leq r \leq k)} -\log(h(\underline{\varepsilon} | r) \pi(r)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Soient  $\mu, V$  et  $\sigma_d$  des hyperparamètres qui définissent respectivement l'information *a priori* sur la valeur de  $\Delta a_r$  et la position de la rupture. On a :

$$(\hat{r}) = \underbrace{\text{Argmin}}_{(k-M+1 \leq r \leq k)} -\log(h(\underline{\varepsilon} | r; \mu, V) \pi(r; \sigma_d)) \quad (3.22)$$

La distribution de vraisemblance  $h(\underline{\varepsilon} | r, \Delta a_r; P\varepsilon)$  est donnée par :

$$h(\underline{\varepsilon} | r, \Delta a_r; P\varepsilon) = \prod_{i=r}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi P\varepsilon_i}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_i - \Delta a_r \rho_{i,r})^2}{2P\varepsilon_i}\right) \quad (3.23)$$

On suppose que l'on dispose d'une estimation imprécise de la valeur de  $\Delta a_r$  obtenue à partir de la valeur de la pente  $a_i$  qui fournie par la boucle FLL. Nous allons utiliser cette estimation, comme information *a priori* dans notre modèle. On suppose donc que  $\Delta a_r$  suit une distribution gaussienne de moyenne  $\mu$  et de variance  $V/n_r$  [LAV01], avec  $n_r = k - r + 1$ . On a alors :

$$P(\Delta a_r | r; \mu, V) = \frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left(-n_r \frac{(\Delta a_r - \mu)^2}{2V}\right) \quad (3.24)$$

On montre dans l'annexe B que :

$$h(\underline{\varepsilon} | r; \mu, V) = \frac{1}{\prod_{i=r}^k P\varepsilon_i (2\pi)^{\frac{n_r}{2}}} \sqrt{\frac{V_r n_r}{V}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left( \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P\varepsilon_i} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right)\right) \quad (3.25)$$

avec :

$$T_r = \sum_{i=r}^k \frac{\rho_{i,r}^2}{P\varepsilon_i} \quad (3.26)$$

$$V_r = 1 / \left( T_r + \frac{n_r}{V} \right) \quad (3.27)$$

$$\mu_r = V_r \left( \mu \frac{n_r}{V} + \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i}{P\varepsilon_i} \rho_{i,r} \right) \quad (3.28)$$

La probabilité *a priori* d'avoir une rupture  $\pi(r)$  à la position  $r$  peut être définie par une loi de Bernoulli telle que :

$$\pi(r; \sigma_d) = \lambda_r (1 - \lambda_r) \quad (3.29)$$

avec  $\lambda_r = 1/2$  pour  $k - M + 1 \leq r \leq k - \sigma_d$ , sinon  $\lambda_r$  tend vers 0 (en pratique  $\lambda_r$  est fixé à une valeur très faible). Cette loi *a priori* permet de définir le nombre minimum d'échantillons  $\sigma_d$  après la rupture pour que celle-ci puisse être détectée. Ce qui permettra de diminuer le nombre de fausses alarmes. L'estimateur de  $r$  dans la fenêtre est donc défini par :

$$\begin{aligned} (\hat{r}) &= \underset{(k-M+1 \leq r \leq k)}{\text{Argmin}} \left\{ \frac{n_r}{2} \log(2\pi) + \log\left(\prod_{i=r}^k P\varepsilon_i\right) + \frac{1}{2} \log(n_r V_r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P\varepsilon_i} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right) - \log(\pi(r; \sigma_d)) \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

### Détection de la rupture

Soient les deux hypothèses suivantes :

- hypothèse  $H_1$  : en absence d'une rupture de dynamique  $\Delta a_r$  à la position  $r$  dans les mesures  $Z$ , on a après la rupture :

$$\varepsilon_k \sim N(0, P\varepsilon_k^{(l)}) \quad (3.31)$$

- hypothèse  $H_0$  : en présence d'une rupture dans les mesures, on a après la rupture :

$$\varepsilon_k \sim N(\Delta a_r \rho_{k,r}, P\varepsilon_k) \quad (3.32)$$

Nous allons déterminer l'expression du test optimal de Neyman-Pearson entre les deux hypothèses précédemment définies. Pour cela, calculons la vraisemblance  $\Lambda$  du modèle :

$$\Lambda = \frac{\prod_{i=r}^k p(\varepsilon_i | H_1)}{\prod_{i=r}^k p(\varepsilon_i | H_0)} \quad (3.33)$$

$$= \frac{\prod_{i=r}^k \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i^2}{P\varepsilon_i}\right)}{\prod_{i=r}^k \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_i - \Delta a_r \rho_{i,r})^2}{P\varepsilon_i}\right)} \quad (3.34)$$

$$= \frac{\prod_{i=r}^k \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i^2}{P\varepsilon_i}\right)}{\prod_{i=r}^k \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_i - \Delta a_r \rho_{i,r})^2}{P\varepsilon_i}\right)} \quad (3.35)$$

Posons alors  $L = 2 \ln(\Lambda)$ , ce qui implique que :

$$L = \sum_{i=r}^k \frac{1}{P_{\varepsilon_i}} (\varepsilon_i - \Delta a_r \rho_{i,r})^2 - \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} \quad (3.36)$$

En développant cette expression et en mettant en place le test de Neyman Pearson, nous obtenons :

$$L = (\Delta a_r)^2 \sum_{i=r}^k \frac{\rho_{i,r}^2}{P_{\varepsilon_i}} - 2\Delta a_r \sum_{i=r}^k \frac{\rho_{i,r} \varepsilon_i}{P_{\varepsilon_i}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda \quad (3.37)$$

On dérive  $L$  par rapport à  $\Delta a_r$  afin d'obtenir l'expression de l'estimateur de  $\Delta a_r$  noté  $\widehat{\Delta a_r}$ .

$$\frac{\delta L}{\delta \Delta a_r} = 0 \Rightarrow 2\Delta a_r \sum_{i=r}^k \frac{\rho_{i,r}^2}{P_{\varepsilon_i}} - 2 \sum_{i=r}^k \frac{\rho_{i,r} \varepsilon_i}{P_{\varepsilon_i}} = 0 \quad (3.38)$$

Nous obtenons alors l'estimateur de la dynamique de la rupture  $\Delta a_r$  qui maximise la distribution de vraisemblance 3.23 :

$$\widehat{\Delta a_r} = \frac{\sum_{i=\widehat{r}}^k \frac{\rho_{i,r} \varepsilon_i}{P_{\varepsilon_i}}}{\sum_{i=\widehat{r}}^k \frac{\rho_{i,r}^2}{P_{\varepsilon_i}}} \quad (3.39)$$

Finalement le test de détection de rupture de pente est défini par :

$$\widehat{\Delta a_r}^2 \sum_{i=\widehat{r}}^k \frac{\rho_{i,r}^2}{P_{\varepsilon_i}} \underset{H_1}{\overset{H_0}{>}} \lambda \quad (3.40)$$

où  $\lambda$  est le seuil de détection. Quand une rupture de pente est détectée, le filtre est réactualisé. Le code est recalé et le discriminant est nul. La réactualisation du filtre est donnée par :

$$\widehat{X}_{k,\widehat{r}} = 0 \quad (3.41)$$

$$a_{i+1} = \frac{3}{2} \widehat{\Delta a_r} \quad (3.42)$$

On représente sur la figure 3.3 l'architecture du détecteur de ruptures. Dans l'implémentation du filtre, à chaque instant  $k$ , la rupture est détectée à partir de l'innovation calculée entre  $r$  et  $k$ . Pour chaque instant  $k$ , les valeurs de  $r$  varient entre  $k - M + 1$  et  $k$ . Quand la rupture est détectée le filtre d'estimation est réactualisé, sinon le filtre d'estimation utilise l'état précédemment estimé.

Le détecteur de ruptures proposé utilise donc l'information *a priori* sur la pente du discriminant pour estimer la dynamique de la rupture. Dans la modélisation proposée, cette information *a priori* associée à son incertitude apparaît dans l'expression de l'estimateur de l'instant de rupture. Dans la suite de ce chapitre, nous proposons d'utiliser cette information *a priori* pour fusionner les mesures. Dans ce cas l'opérateur de fusion proposé sera utilisé pour construire l'innovation dans la fenêtre de travail du détecteur de ruptures.



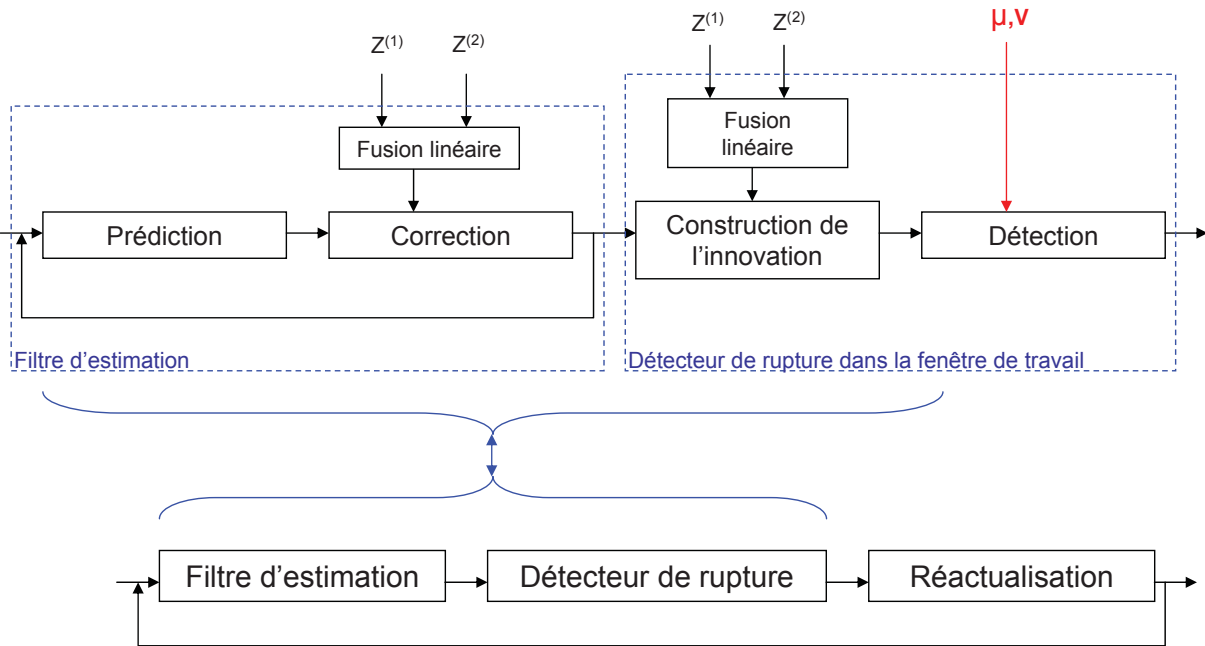


FIG. 3.3 – Architecture du filtre de détection de rupture

### 3.3 Opérateur de fusion non linéaire

#### 3.3.1 Position du problème

##### Cas linéaire

Lorsque les mesures sont indépendantes, on montre que l'estimateur des moindres carrés (LS) et l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) ont la même expression [SHI06]. Cet estimateur est la somme pondérée des mesures où les coefficients de pondération sont définis à partir de la variance des signaux fusionnés [COC37]. Dans un cas plus général de mesures dépendantes, les coefficients de la somme pondérée sont obtenus à partir de la résolution d'un ensemble d'équations linéaires. Ces équations expriment les contraintes sur la valeur des coefficients pour que la variance de l'opérateur de fusion soit minimale [KAC04][SHI06]. En général, ce cas est rarement envisagé car il nécessite, pour le calcul des coefficients, de connaître la valeur des covariances entre signaux, ce qui est très difficile à estimer en pratique.

Considérons le cas de deux capteurs fournissant deux mesures  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  **dépendantes** de variances  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  et de covariance  $\sigma_{12}$ .  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  sont supposés avoir la même moyenne  $m$ . L'opérateur de fusion somme pondérée est défini par :

$$Z_f = \alpha_1 Z^{(1)} + \alpha_2 Z^{(2)} \quad (3.43)$$

avec :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (3.44)$$

Dans cette expression les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont donnés par :

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \quad (3.45)$$

La variance de l'opérateur de fusion  $\sigma_f^2$  est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_f^2 = \sigma_1^2 - \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_{12})^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} = \sigma_2^2 - \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_{12})^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \quad (3.46)$$

On reporte sur la figure 3.4 l'évolution de la variance de l'opérateur de fusion en fonction de la valeur de la covariance entre les signaux [KAC04]. On reporte aussi l'évolution des coefficients de la somme pondérée en fonction de la covariance entre les signaux.

Dans le cas linéaire l'opérateur de fusion n'est pas biaisé, il sera donc d'autant plus précis que

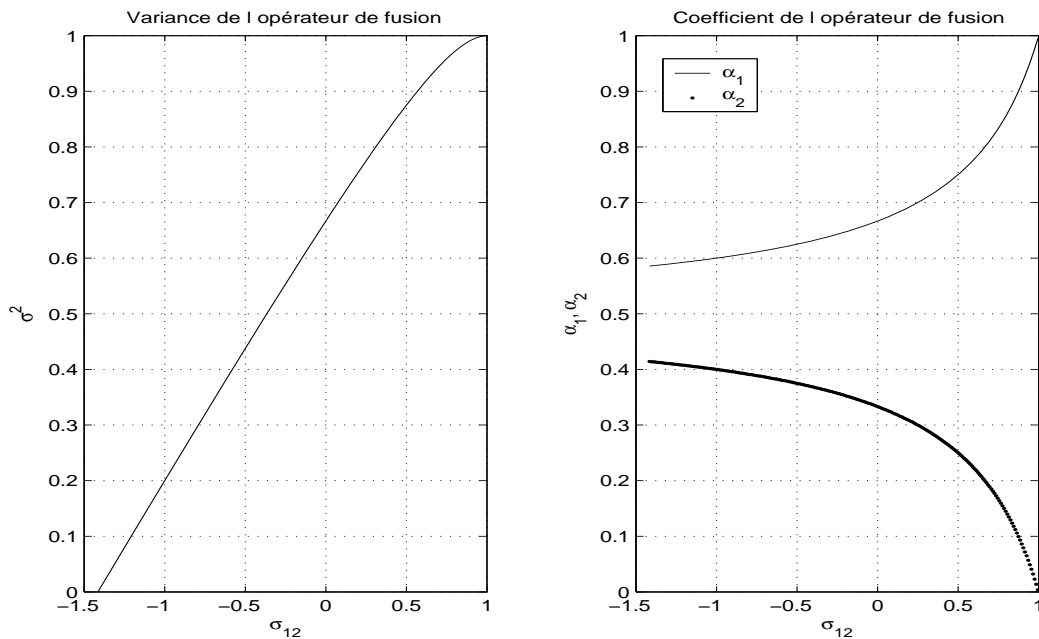


FIG. 3.4 – Variance de l'opérateur de fusion

sa variance de sortie sera faible (variance de  $Z_f$  le signal fusionné). Quand la covariance entre les signaux est négative, les réalisations de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  ont tendance à être de part et d'autre de la valeur moyenne  $m$ . Quand la corrélation est positive, les réalisations de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  ont tendance à être du même côté de la valeur moyenne. La tendance est d'autant plus forte que la variance est négative ou positive. Quand la covariance est nulle, les réalisations sont équitablement réparties

de part et d'autre ou du même côté de la moyenne. L'idée qui sera développée dans la suite de ce chapitre, est que si on diminue la covariance entre les mesures à fusionner, on augmente la précision de l'opérateur de fusion. On utilise dans ce cas une information *a priori* pour réaliser cette diminution.

### Cas non linéaire

Soit deux variables aléatoires gaussiennes et **indépendantes**  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  de variance respectives  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  et de même moyenne  $m$ , le paramètre qu'il faut estimer. On note  $f(\cdot)$  la distribution gaussienne de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$ . La covariance de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  notée  $\sigma_{12}$  est donnée par :

$$\sigma_{12} = \mathbb{E}(Z^{(1)}Z^{(2)}) - [\mathbb{E}(Z^{(1)})\mathbb{E}(Z^{(2)})] \quad (3.47)$$

$$= \iint Z^{(1)}Z^{(2)} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} - \left[ \int Z^{(1)} f(Z^{(1)})dZ^{(1)} \int Z^{(2)} f(Z^{(2)})dZ^{(2)} \right] \quad (3.48)$$

On reporte sur la figure 3.5 des réalisations de  $Z^{(1)}$  notées "+" et de  $Z^{(2)}$  notées "o". On reporte

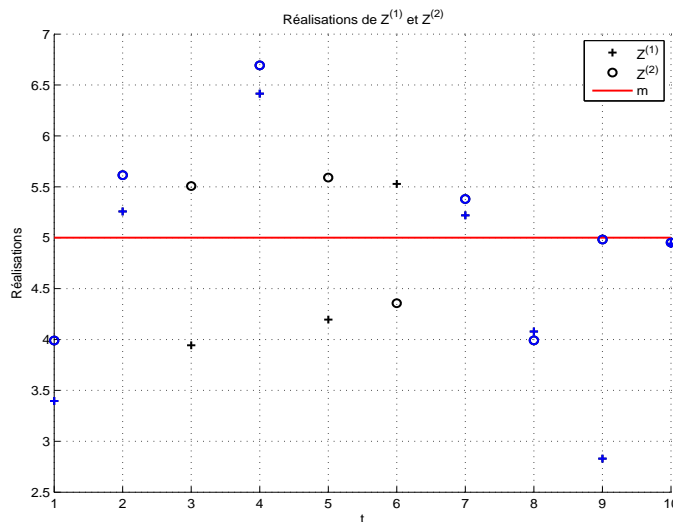


FIG. 3.5 – Réalisations de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$

en bleu les réalisations de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  se trouvant du même côté de la moyenne. On reporte en noir les autres réalisations. Nous allons montrer que les réalisations reportées en bleu sont corrélées positivement et que les réalisations reportées en noir sont corrélées négativement.

Nous pouvons dissocier des réalisations de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  deux ensembles de variables aléatoires :

- Le premier contient deux variables aléatoires, notées  $Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}$  (en noir sur la figure 3.5), ces réalisations sont telles que  $\{Z_n^{(1)} < m\}$  et  $\{Z_n^{(2)} > m\}$  ou que  $\{Z_n^{(1)} > m\}$  et  $\{Z_n^{(2)} < m\}$ .

- Le deuxième ensemble contient deux variables aléatoires , notées  $Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}$  (en bleu sur la figure 3.5), ces réalisations sont telles que  $\{Z_p^{(1)} < m\}$  et  $\{Z_p^{(2)} < m\}$  ou que  $\{Z_p^{(1)} > m\}$  et  $\{Z_p^{(2)} > m\}$ .

On développe l'expression 3.48 de la covariance en fonction du type des réalisations de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$ . On a alors :

$$\sigma_{12} = (PC_1 + PC_2) + (NC_1 + NC_2) - m^2 \quad (3.49)$$

avec :

$$PC_1 = \int_m^{+\infty} \int_m^{+\infty} Z^{(1)} Z^{(2)} f(Z^{(1)}) f(Z^{(2)}) dZ^{(1)} dZ^{(2)}$$

$$PC_2 = \int_{-\infty}^m \int_{-\infty}^m Z^{(1)} Z^{(2)} f(Z^{(1)}) f(Z^{(2)}) dZ^{(1)} dZ^{(2)}$$

$$NC_1 = \int_m^{+\infty} \int_{-\infty}^m Z^{(1)} Z^{(2)} f(Z^{(1)}) f(Z^{(2)}) dZ^{(1)} dZ^{(2)}$$

$$NC_2 = \int_{-\infty}^m \int_m^{+\infty} Z^{(1)} Z^{(2)} f(Z^{(1)}) f(Z^{(2)}) dZ^{(1)} dZ^{(2)}$$

Le terme  $(PC_1 + PC_2)$  est associé aux réalisations de  $Z_p^{(1)}$  et  $Z_p^{(2)}$  et le terme  $(NC_1 + NC_2)$  est associé aux réalisations de  $Z_n^{(1)}$  et  $Z_n^{(2)}$ . On a alors la covariance de  $Z_p^{(1)}$  et  $Z_p^{(2)}$ , notée  $\sigma_{12}^p$ , et la covariance de  $Z_n^{(1)}$  et  $Z_n^{(2)}$ , notée  $\sigma_{12}^n$ , qui sont données par les expressions suivantes :

$$\sigma_{12}^p = \frac{PC_1 + PC_2}{DPC} - m^2 \quad (3.50)$$

$$\sigma_{12}^n = \frac{NC_1 + NC_2}{DNC} - m^2 \quad (3.51)$$

avec :

$$DPC = \int_m^{+\infty} \int_m^{+\infty} f(Z^{(1)}) f(Z^{(2)}) dZ^{(1)} dZ^{(2)} + \int_{-\infty}^m \int_{-\infty}^m f(Z^{(1)}) f(Z^{(2)}) dZ^{(1)} dZ^{(2)}$$

$$DNC = \int_m^{+\infty} \int_{-\infty}^m f(Z^{(1)}) f(Z^{(2)}) dZ^{(1)} dZ^{(2)} + \int_{-\infty}^m \int_m^{+\infty} f(Z^{(1)}) f(Z^{(2)}) dZ^{(1)} dZ^{(2)}$$

$$DPC + DNC = 1;$$

On a alors :

$$\sigma_{12} = DPC \sigma_{12}^p + DNC \sigma_{12}^n \quad (3.52)$$

De plus, si on pose :

$$\int_m^{+\infty} Z^{(1)} f(Z^{(1)}) dZ^{(1)} = \frac{m+a}{2} \quad (3.53)$$

On a :

$$\int_{-\infty}^m Z^{(1)} f(Z^{(1)}) dZ^{(1)} = \frac{m-a}{2} \quad (3.54)$$

On peut alors définir :

$$PC1 = \frac{(m+a)^2}{4} \quad (3.55)$$

$$PC2 = \frac{(m-a)^2}{4} \quad (3.56)$$

$$NC1 = NC2 = \frac{(m^2 - a^2)}{4} \quad (3.57)$$

$$DPC = DNC = \frac{1}{2} \quad (3.58)$$

Finalement on a :

$$\sigma_{12}^p = a^2 \quad (3.59)$$

$$\sigma_{12}^n = -a^2 \quad (3.60)$$

On a donc montré que la covariance de  $Z_p^{(1)}$  et  $Z_p^{(2)}$  est positive, et la covariance de  $Z_n^{(1)}$  et  $Z_n^{(2)}$  est négative. Dans notre approche nous proposons de diminuer la covariance entre les réalisations de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  en diminuant la covariance entre  $Z_p^{(1)}$  et  $Z_p^{(2)}$ . Deux problèmes se posent alors, soient l'extraction des réalisations  $Z_p^{(1)}$  et  $Z_p^{(2)}$  et la définition d'une transformation permettant de diminuer leurs covariances.

### 3.3.2 Transformation non linéaire

#### Opérateur de fusion non linéaire

Pour sélectionner les réalisations de  $Z_p^{(1)}$  et  $Z_p^{(2)}$ , on propose d'utiliser une information *a priori*. L'information *a priori* utilisée dans notre transformation non linéaire est une loi uniforme sur le paramètre à estimer. En pratique, l'information *a priori* est modélisée par un intervalle de borne inférieure  $B_d$  et de borne supérieure  $B_u$ . Cet intervalle contient le paramètre à estimer. La transformation est non linéaire car son application dépend des réalisations de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$ . Soit  $Z_{fn}$  l'opérateur de fusion non linéaire de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$ . Il est défini dans le cas où  $\sigma_2 > \sigma_1$  par :

– Si  $Z^{(1)} > B_u$  et  $Z^{(2)} > B_u$

$$Z_{fn} = \alpha_1 Z_p^{(1)} + \alpha_2 \left( Z_p^{(2)} - g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}) \right) \quad (3.61)$$

– Si  $Z^{(1)} < B_d$  et  $Z^{(2)} < B_d$

$$Z_{fn} = \alpha_1 Z_p^{(1)} + \alpha_2 \left( Z_p^{(2)} + g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}) \right) \quad (3.62)$$

– Sinon, on a :

$$Z_{fn} = \alpha_1 Z_n^{(1)} + \alpha_2 Z_n^{(2)} \quad \text{Soit} \quad g(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}) = 0 \quad (3.63)$$

Dans ces expressions,  $g(Z^{(1)}, Z^{(2)})$  est une fonction non linéaire qui permet de diminuer la covariance de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$ . L'opérateur de fusion non linéaire peut être noté par :

$$Z_{fn} = \alpha_1 Z^{(1)} + \alpha_2 \left( Z^{(2)} \pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}) \right) \quad (3.64)$$

avec dans le cas de mesures  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  indépendantes :

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (3.65)$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (3.66)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (3.67)$$

L'information *a priori* sur le paramètre à estimer est une loi uniforme non obligatoirement centrée sur la valeur de ce paramètre. Dans ce cas, l'opérateur de fusion non linéaire  $Z_{fn}$  est biaisé. Ce qui implique qu'il ne suffit plus que la variance  $Z_{fn}$  soit plus faible que la variance de  $Z_f$  pour que l'opérateur de fusion non linéaire soit meilleur. Il faut comparer leur erreur quadratique moyenne, sachant que celui qui possède la plus petite valeur sera le meilleur.

### Contrainte de la transformation

On souhaite maintenant définir la condition pour que l'erreur quadratique moyenne  $EQM_{Z_{fn}}$  de l'opérateur de fusion non linéaire soit plus faible que l'erreur quadratique moyenne  $EQM_{Z_f}$  de l'opérateur de fusion linéaire. On notera que, dans le cas de la fusion linéaire, l'erreur quadratique moyenne  $EQM_{Z_f}$  est égale à la variance  $var(Z_f)$  car l'opérateur de fusion linéaire est non biaisé.

Concernant l'opérateur de fusion non linéaire on définit deux cas :

- Si  $Z^{(1)} > B_u$  et  $Z^{(2)} > B_u$  ou  $Z^{(1)} < B_d$  et  $Z^{(2)} < B_d$ , alors on note  $EQM_{Z_{fn}}^p, EQM_{Z_f}^p$  respectivement l'erreur quadratique moyenne de l'opérateur de fusion non linéaire et celle de l'opérateur de fusion linéaire définies pour les réalisations  $Z_p^{(1)}$  et  $Z_p^{(2)}$ . Rappelons que l'information *a priori*  $B_d$  et  $B_u$  sont respectivement la borne inférieure et supérieure de l'intervalle contenant le paramètre à estimer.
- Sinon, on note  $EQM_{Z_{fn}}^n, EQM_{Z_f}^n$  l'erreur quadratique moyenne de l'opérateur de fusion non linéaire et l'erreur quadratique moyenne de l'opérateur de fusion classique définies pour les réalisations  $Z_n^{(1)}$  et  $Z_n^{(2)}$ . Avec  $EQM_{Z_{fn}}^n = EQM_{Z_f}^n$ .

On a :

$$EQM_{Z_f} = DPC EQM_{Z_f}^p + NPC EQM_{Z_f}^n \quad (3.68)$$

$$EQM_{Z_{fn}} = DPC EQM_{Z_{fn}}^p + NPC EQM_{Z_{fn}}^n \quad (3.69)$$

Dans le cas des bornes  $B_d$  et  $B_u$  les coefficients de normalisation  $DPC$  et  $NPC$  sont définis comme suit :

$$DPC = \int_{-\infty}^{B_d} \int_{-\infty}^{B_d} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} + \int_{B_u}^{\infty} \int_{B_u}^{\infty} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)}$$

$$\begin{aligned}
 NPC &= \int_{B_u}^{\infty} \int_{-\infty}^{B_d} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} + \int_{-\infty}^{B_d} \int_{B_u}^{\infty} f(Z^{(1)})f(Z^{(1)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} \\
 &+ \int_{B_d}^{B_u} \int_{-\infty}^{B_d} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} + \int_{B_d}^{B_u} \int_{B_u}^{\infty} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} \\
 &+ \int_{-\infty}^{B_d} \int_{B_d}^{B_u} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} + \int_{B_u}^{\infty} \int_{B_d}^{B_u} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} \\
 &+ \int_{B_d}^{B_u} \int_{B_d}^{B_u} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)}
 \end{aligned}$$

L'erreur  $EQM_{Z_{fn}}$  sera inférieure à l'erreur  $EQM_{Z_f}$  si et seulement si  $EQM_{Z_{fn}}^p$  est inférieure à  $EQM_{Z_f}^p$ . On montre en annexe A que cette condition est remplie si la contrainte suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}
 \alpha_2^2(E[\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)})^2]) &+ 2\alpha_1\alpha_2E(Z_p^{(1)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))) + 2\alpha_2^2E(Z_p^{(2)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))) \\
 &- 2m\alpha_2E[\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)})] \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Dans ce cas l'erreur quadratique moyenne de l'opérateur de fusion proposé est donnée par :

$$\begin{aligned}
 EQM_{Z_{fn}} &= var(Z_f) + a * (\alpha_2^2(E[\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)})^2]) + 2\alpha_1\alpha_2E(Z_p^{(1)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))) \\
 &+ 2\alpha_2^2E(Z_p^{(2)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))) - 2m\alpha_2E[\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)})])
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Les termes de ces équations sont définis par :

$$\text{Terme 1 : } E[(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))^2] = \frac{N_{E[(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))^2]}}{D}$$

$$\begin{aligned}
 N_{E[(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))^2]} &= \int_{-\infty}^{B_d} \int_{-\infty}^{B_d} g(Z^{(1)}, Z^{(2)})^2 f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} \\
 &- \int_{B_u}^{\infty} \int_{B_u}^{\infty} g(Z^{(1)}, Z^{(2)})^2 f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)}
 \end{aligned}$$

$$D = \int_{-\infty}^{B_d} \int_{-\infty}^{B_d} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} + \int_{B_u}^{\infty} \int_{B_u}^{\infty} f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)}$$

$$\text{Terme 2 : } E[Z_p^{(1)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))] = \frac{N_{E[Z_p^{(1)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))]}{D}$$

$$\begin{aligned}
 N_{E[Z_p^{(1)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))]} &= \int_{-\infty}^{B_d} \int_{-\infty}^{B_d} Z^{(1)}g(Z^{(1)}, Z^{(2)})f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} \\
 &- \int_{B_u}^{\infty} \int_{B_u}^{\infty} Z^{(1)}g(Z^{(1)}, Z^{(2)})f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Terme 3 : } E[Z_p^{(2)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))] = \frac{N_{E[Z_p^{(2)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))]}{D}$$

$$\begin{aligned}
 N_{E[Z_p^{(2)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))]} &= \int_{-\infty}^{B_d} \int_{-\infty}^{B_d} Z^{(2)}g(Z^{(1)}, Z^{(2)})f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)} \\
 &- \int_{B_u}^{\infty} \int_{B_u}^{\infty} Z^{(2)}g(Z^{(1)}, Z^{(2)})f(Z^{(1)})f(Z^{(2)})dZ^{(1)}dZ^{(2)}
 \end{aligned}$$





– **Condition 2** :  $E[Z_p^{(1)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))] < 0$  et  $E[Z_p^{(2)}(\pm g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}))] < 0$

Ces deux conditions sont vérifiées pour une fonction positive  $g(Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}) > 0$  qui dépend de la différence entre les réalisations. En effet dans ce cas, la fonction  $g\left(\left|Z_p^{(1)} - Z_p^{(2)}\right|\right)$  est symétrique pour  $Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)} > B_u$  et  $Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)} < B_d$ .

### Expression de la fonction non linéaire

Le principe de la transformation non linéaire consiste à ajouter ou bien retirer un offset  $d > 0$  positif si  $Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)} < B_d$  ou bien  $Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)} > B_u$ . L'offset est ajouté ou bien retiré à la réalisation  $Z_p^{(1)}$  ou  $Z_p^{(2)}$  la plus proche de  $B_d$  ou  $B_u$ . Pour calculer  $d$ , on considère les distributions  $f_n(Z_n^{(1)} - Z_n^{(2)})$  et  $f_p(Z_p^{(1)} - Z_p^{(2)})$  de variances respectives  $(\sigma_n)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^n$  et  $(\sigma_p)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^p$  (où  $(\sigma^n)^2 > (\sigma^p)^2$ ). La valeur de  $d$  est définie telle que  $f_n(d) = f_p\left(\left|Z_p^{(1)} - Z_p^{(2)}\right|\right)$ . On représente sur la figure 3.7 le principe du calcul de  $d$  en fonction de  $\left|Z_p^{(1)} - Z_p^{(2)}\right|$ . On a alors :

$$f_n(d) = \frac{f_p(Z_p^{(1)} - Z_p^{(2)})}{C}$$

avec :

$$C = \frac{f_p(0)}{f_n(0)} = \frac{\sigma_n}{\sigma_p}$$

Soit :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_n} \exp^{-\frac{1}{2} \frac{d^2}{\sigma_n^2}} = \frac{1}{C} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_p} \exp^{-\frac{1}{2} \frac{(Z_p^{(1)} - Z_p^{(2)})^2}{\sigma_p^2}}$$

ce qui implique que :

$$d = \frac{\sigma_n}{\sigma_p} \left| Z_p^{(1)} - Z_p^{(2)} \right| \quad (3.72)$$

### Vérification de la contrainte

Pour montrer que l'opérateur de fusion non linéaire proposé est plus précis que la fusion linéaire classique, on calcule la contrainte définie par l'équation 3.70. On représente sur la figure 3.8 les valeurs de l'équation 3.70 en fonction de la taille de l'intervalle  $B_u - B_d$  et de la valeur de l'excentricité  $\left| \frac{B_u + B_d}{2} - m \right|$ .

On représente sur la figure 3.8 les valeurs de l'équations 3.70 pour  $\sigma_1 = \sigma_2$  et  $\sigma_2 \gg \sigma_1$ . Lorsque  $\sigma_2 \gg \sigma_1$ , la fusion a peu d'intérêt, car  $Z^{(1)}$  est plus précis que  $Z^{(2)}$  qui apporte peu d'information. Dans ce cas la contrainte, définie par l'équations 3.70, est proche de zéro.

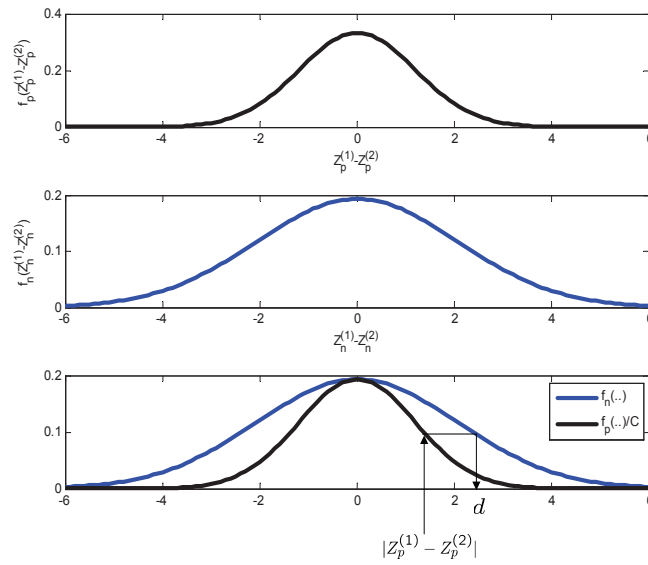


FIG. 3.7 – Principe de la fonction non linéaire

Lorsque  $\sigma_2 = \sigma_1 = 3$ , la contrainte est négative pour tous les intervalles et les valeurs d'excentricité (On suppose dans notre cas que la valeur à estimer est comprise dans l'intervalle). En conclusion, plus la différence de variance entre les deux variables aléatoires  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  est grande, moins la fusion a d'intérêt pour des opérateurs de fusion linéaires et non linéaires. Cependant la contrainte reste négative, la fusion non linéaire reste donc plus précise que la fusion linéaire (EQM plus faible).

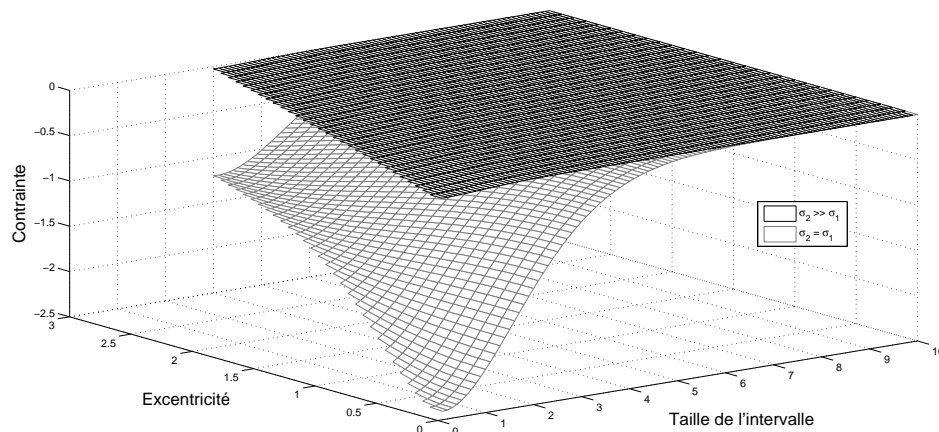


FIG. 3.8 – Contrainte en fonction de l'excentricité et de la taille de l'intervalle

On représente sur la figure 3.9 les valeurs normalisées  $\frac{EQM_{Z_{fn}} - \text{var}(Z^F)}{\text{var}(Z^F)}$  de la contrainte en fonction de la taille de l'intervalle et de l'excentricité. Elles sont définies à partir de l'expression 3.71 pour différentes valeurs de  $\sigma_1 = \sigma_2$ . On constate sur la figure 3.9 que la contrainte est toujours négative et on en conclut que l'opérateur proposé est toujours plus précis que l'opérateur classique quelles que soient les valeurs de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . On notera sur la figure 3.9, que lorsque l'intervalle et l'excentricité augmentent pour  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ , la contrainte tend plus rapidement vers 0 comparé au cas  $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ . En effet lorsque l'intervalle augmente, les valeurs de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  sont plus rapidement comprises dans l'intervalle et ne subissent plus de transformation. Dans ce cas l'opérateur de fusion non linéaire est identique à l'opérateur de fusion linéaire.

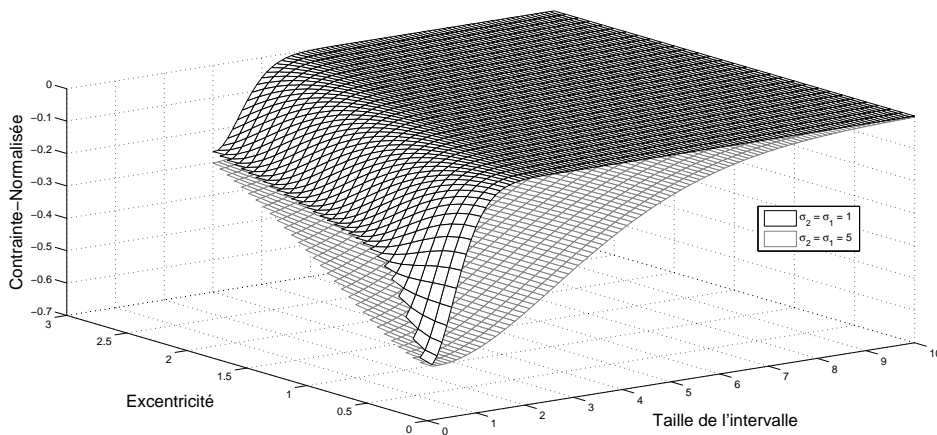


FIG. 3.9 – Evolution de la contrainte pour différentes valeurs de  $\sigma_1 = \sigma_2$

Nous avons proposé dans ce paragraphe un opérateur de fusion non linéaire. Nous avons montré que cet opérateur est plus précis que l'opérateur de fusion linéaire classique. L'opérateur proposé, utilise une information *a priori* définie par intervalle contenant la valeur à estimer. En pratique pour pouvoir utiliser l'opérateur de fusion proposé dans le cas dynamique, soit pour l'estimation statistique des paramètres d'un processus, il faut pouvoir modifier l'information *a priori* lorsque les paramètres du processus changent. Nous proposons dans la suite d'associer l'opérateur de fusion non linéaire au détecteur de ruptures de pente, ce qui nous permettra de modifier l'information *a priori* quand une rupture de stationnarité est détectée.

### 3.4 Détection de rupture de pente par fusion non linéaire

Dans le cas dynamique, nous supposons que le processus varie linéairement et possède une rupture de pente. On dispose d'observations bruitées fournies par deux capteurs indépendants. Dans notre application nous disposons d'observations bruitées du discriminant obtenues sur la voie données et la voie pilote. L'opérateur de fusion non linéaire que nous avons proposé est utilisé pour fusionner les observations. Les observations fusionnées sont utilisées pour détecter

la rupture de pente. On suppose ici que l'on dispose d'une information *a priori* imprécise sur la valeur de la pente du processus.

A chaque instant  $k$  l'algorithme recherche l'instant de la rupture  $\hat{r}$  dans une fenêtre de taille  $M$ . On recherche l'instant de la rupture  $r$  entre  $k - M + 1$  et  $k$ , en minimisant l'équation 3.30. Cette estimation est réalisée à partir du calcul de l'innovation qui est défini par la différence entre les mesures et les estimations. L'information *a priori* sur  $a_i$  est définie au paragraphe 3.2.3 par une distribution gaussienne de moyenne  $\frac{2}{3}\mu$  et de variance  $V$ .

Après l'instant  $k - M + 1$ , dans la fenêtre de recherche, l'information *a priori* est définie par :

$$\begin{cases} B_{d,r} = \frac{2}{3}\mu r - \sqrt{V} & \text{avec } k \geq r > k - M + 1 \\ B_{d,t} = B_{d,t-1} - b_i & \text{avec } k \geq t > r \\ B_{u,r} = \frac{2}{3}\mu r + \sqrt{V} & \text{avec } k \geq r > k - M + 1 \\ B_{u,t} = B_{u,t-1} + b_i & \text{avec } k \geq t > r \end{cases} \quad (3.73)$$

où  $b_i = \frac{2}{3}\mu - \mu$  dans le cas du discriminant "Early minus Late". On représente sur la figure 3.10 l'intervalle défini pour  $r \in [k - M + 1 \quad k]$ .

On représente sur la figure 3.11 les modifications de l'architecture du détecteur de ruptures

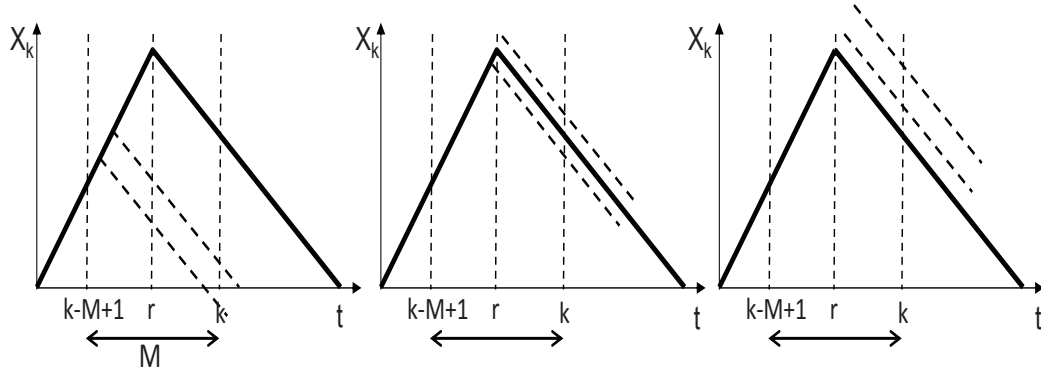


FIG. 3.10 – Exemple d'évolution des bornes décrivant l'information *a priori* de l'opérateur de fusion dans une fenêtre de taille  $M$

proposé décrit sur la figure 3.3 (en vert dans la figure). Il est composé de l'estimateur défini au paragraphe 3.2.3 qui utilise l'opérateur de fusion linéaire classique pour fusionner les mesures. Les mesures fusionnées sont utilisées pour estimer la valeur du discriminant. Cet estimateur est suivi du détecteur de ruptures qui utilise l'opérateur de fusion non linéaire pour calculer l'innovation. Cette innovation est utilisée pour calculer l'instant de rupture et détecter la rupture.

## 3.5 Expérimentation

Dans cette expérimentation on souhaite évaluer l'opérateur de fusion non linéaire et le détecteur de ruptures. On évalue dans une première partie l'opérateur de fusion non linéaire. On

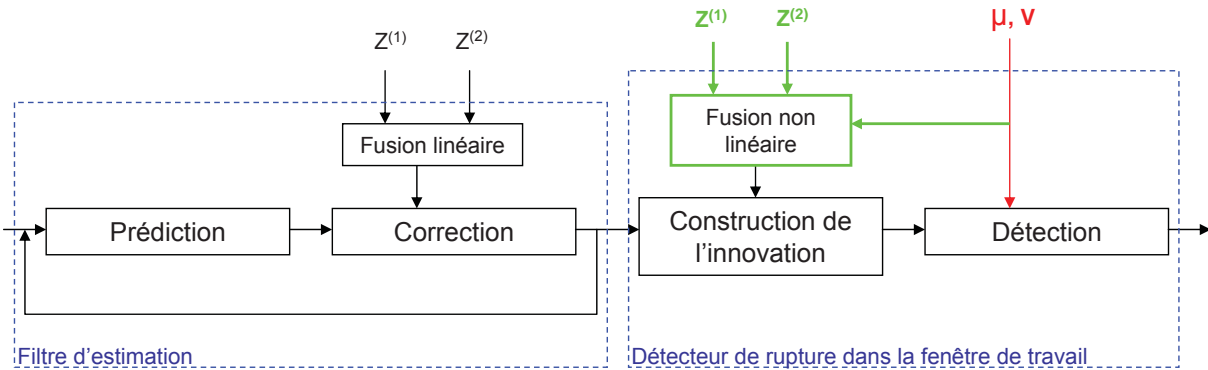


FIG. 3.11 – Architecture du filtre de détection de ruptures

considère pour cela un signal de moyenne constante et un signal de pente non nulle. On évalue dans une seconde partie le détecteur de ruptures. On considère dans cette expérimentation deux types de rupture, une rupture de moyenne et une rupture de pente.

### 3.5.1 Evaluation de l'opérateur de fusion non linéaire

Nous allons comparer dans cette expérimentation l'opérateur de fusion non linéaire avec l'opérateur de fusion linéaire. Les opérateurs seront évalués sur deux types de signaux, un signal constant et un signal de pente non nulle. On représente sur la figure 3.12 une réalisation de chacun des signaux ainsi que la valeur du paramètre à estimer et l'information *a priori*. Dans cette expérimentation, la variance des signaux  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  de pente non nulle, à fusionner est  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2$  (cas du signal GPS). Pour le signal constant, la variance des signaux  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  est  $\sigma_1^2 = 1$  et  $\sigma_2^2 = 2$ .

Pour comparer les résultats obtenus, on estimera l'erreur quadratique moyenne (EQM) entre les mesures fusionnées et la valeur du paramètre à estimer. Pour la fusion linéaire, l'erreur quadratique moyenne est égale à la variance car l'opérateur de fusion n'est pas biaisé. L'EQM est évaluée sur 1000 réalisations pour l'opérateur de fusion linéaire. Elle est évaluée sur 1000 réalisations et 1000 informations *a priori* pour l'opérateur de fusion non linéaire.

En effet, l'information *a priori* est définie par une valeur de pente  $\mu$ . L'imprécision sur cette valeur de pente est modélisée par une distribution gaussienne centrée sur  $\mu$  et de variance  $V$ . Pour évaluer l'opérateur de fusion non linéaire, on génère pour chaque calcul de l'EQM une valeur de pente  $\hat{\mu}$  par tirage suivant une distribution gaussienne de variance  $V$  et moyenne  $\mu$ . On définit alors l'intervalle  $\hat{\mu} - V$  et  $\hat{\mu} + V$  comme information *a priori*.

Dans le cas d'un signal constant, on reporte dans le tableau 3.1 la valeur du paramètre à estimer et la valeur estimée par la fusion linéaire. On reporte aussi la variance de l'estimation et la variance attendue. On reporte dans le tableau 3.2 l'EQM de l'estimation obtenue par l'opérateur de fusion non linéaire. Ces valeurs sont reportées en fonction de la variance de l'information *a*

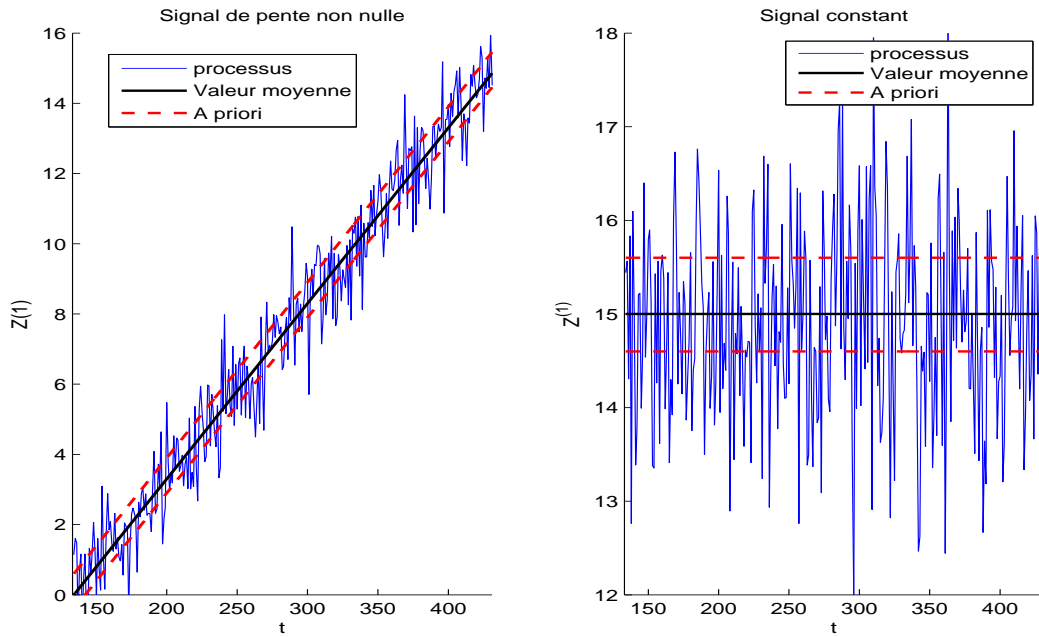


FIG. 3.12 – Exemple de signaux traités

*priori.*

	Moyenne estimée	EQM	Biais
Valeur attendue	4	1	0
Premier signal	4.002	1.017	0.002
Fusion linéaire	4.003	<b>0.678</b>	0.003

TAB. 3.1 – Evaluation de la fusion linéaire pour un signal constant

Imprécision	Moyenne estimée	EQM	Biais
V=0.1	4.0112	0.4512	0.0112
V=0.5	4.0236	0.5131	0.0236
V=1	4.0343	0.5627	0.0343
V=2	4.0366	0.6182	0.0366
V=3	4.0402	0.6459	0.0402

TAB. 3.2 – Evaluation de la fusion non linéaire pour un signal constant

Dans le cas d'un signal de pente non nulle, on reporte dans le tableau 3.3 la valeur du paramètre à estimer et la valeur estimée par la fusion linéaire. On reporte aussi la variance de l'estimation et la variance attendue. On reporte dans le tableau 3.4 l'estimation et la variance

de l'estimation obtenue par l'opérateur de fusion non linéaire. Ces valeurs sont reportées en fonction de la variance de l'information *a priori*.

	Pente estimée	EQM	Biais
Valeur attendue	2	2	0
Premier signal	2.0007	1.97	0.0007
Fusion linéaire	1.9985	0.9998	0.0014

TAB. 3.3 – Evaluation de la fusion linéaire pour un signal de pente non nulle

Imprécision	Pente estimée	EQM	Biais
V=0.1	2.0005	0.5401	0.0005
V=0.5	2.0192	0.6640	0.0192
V=1	1.9698	0.7731	0.0302
V=2	2.0425	0.9025	0.0425
V=3	2.0530	0.9645	0.0530

TAB. 3.4 – Evaluation de la fusion non linéaire pour un signal de pente non nulle

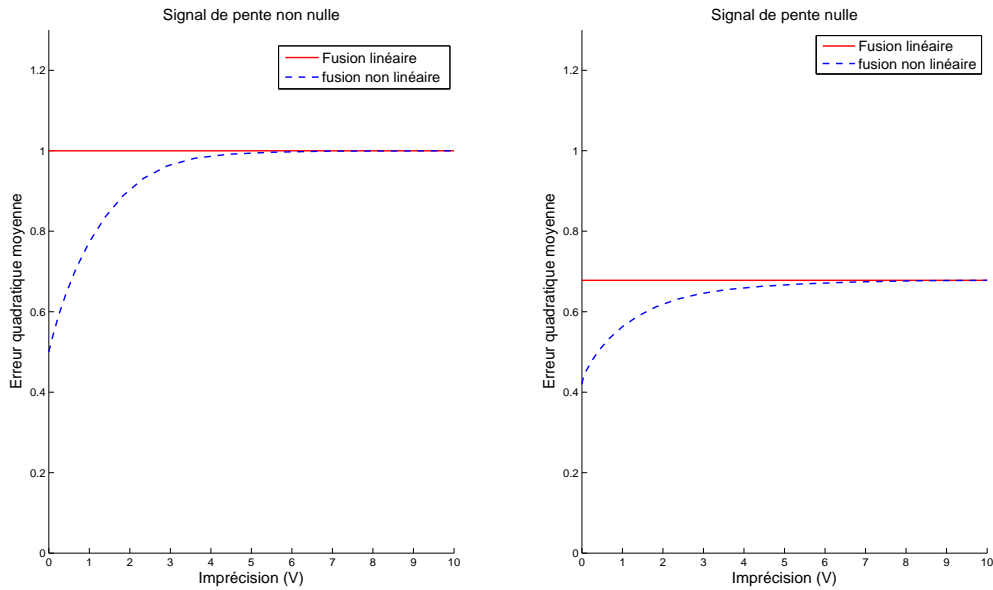
On reporte sur la figure 3.13 l'EQM en fonction de l'imprécision de la variance  $V$  sur l'information *a priori*. On reporte sur deux figures différentes le cas du signal constant et le cas d'un signal de pente non nulle.

En comparant les tableaux 3.1 et 3.3 avec les tableaux 3.2 et 3.4 obtenus dans le cas d'un signal constant et d'un signal de pente 2, on peut conclure que l'erreur quadratique moyenne de l'opérateur de fusion non linéaire est toujours plus faible que celle de l'opérateur de fusion linéaire. Cependant le biais de l'opérateur de fusion non linéaire est non nul. On représente sur la figure 3.13 l'évolution de l'EQM, de l'opérateur de fusion non linéaire et de l'opérateur de fusion linéaire, en fonction de  $V$  la variance de la distribution qui modélise l'information *a priori*. On observe sur cette courbe que l'EQM de l'opérateur de fusion non linéaire tend vers l'EQM de l'opérateur de fusion classique quand l'information *a priori* est moins précise.

### 3.5.2 Evaluation du détecteur de ruptures non linéaire

#### Détection d'une rupture de moyenne

Dans cette expérimentation, on souhaite comparer l'apport de l'opérateur de fusion non linéaire avec l'opérateur de fusion classique pour l'estimation des sauts dans la moyenne des processus. On utilise ici le filtre GLR [GUS00] pour l'estimation des ruptures. L'opérateur de fusion non linéaire est utilisé ici pour générer l'innovation du filtre utilisée par le détecteur de ruptures. Nous souhaitons comparer ces deux méthodes de fusion dans le cas dynamique. On étudie pour cela la détection d'une rupture sur la figure 3.14.(a) puis de deux ruptures de stationnarité sur la figure 3.15.(b). Dans ce contexte, on estime la distribution empirique des ruptures

FIG. 3.13 – EQM en fonction de l’information *a priori*

détectées à partir de 1000 réalisations des signaux. On représente sur les figures 3.14.(b) et 3.15.(b) les distributions empiriques obtenues respectivement pour la détection de une puis de deux ruptures. On évaluera à partir des distributions empiriques la probabilité de détection et la probabilité de fausse alarme du filtre, ainsi que la précision d’estimation de la position de la rupture. Ces indices seront évalués pour deux valeurs du rapport signal à bruit.

Pour estimer ces paramètres statistiques, on utilise 1000 réalisations des signaux  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  que l’on veut fusionner, de variance respective  $\sigma_1^2 = 1$  et  $\sigma_2^2 = 2$ . Les différents instants de saut dans la moyenne des processus sont 25, 40 et 10 pour des signaux de  $N = 60$  échantillons. Les différentes amplitudes du saut testé sont  $v = 5$  et  $v = 2$  et les différentes valeurs de seuil sont respectivement  $\lambda = 6$  et  $\lambda = 3$ . Dans cette expérimentation, l’information *a priori* définie par l’intervalle de borne supérieure  $Bu$  et de borne inférieure  $Bd$  est calculée à partir de l’état estimé  $\hat{X}_t$ , et de la variance  $P_t$ . En effet on considère une étape d’apprentissage (de dix échantillons dans notre expérimentation) pendant laquelle on suppose le signal stationnaire et l’opérateur de fusion linéaire. A la fin de cette étape on calcule  $Bd = \hat{X}_k - \sqrt{P_k}$  et  $Bu = \hat{X}_k + \sqrt{P_k}$  à partir de l’état estimé.

On reporte dans le tableau 3.5 la probabilité de détecter une rupture dans différents cas : en absence de ruptures pour évaluer la probabilité de fausse alarme ; en présence d’une rupture positionnée à différents instants dans la fenêtre pour évaluer le probabilité de détection. Les résultats obtenus sont meilleurs pour l’opérateur de fusion non linéaire proposé (noté GLR NL) car la probabilité de fausse alarme est plus faible et la probabilité de détection est plus forte. Quand on diminue l’amplitude du saut, les performances des filtres se dégradent, mais l’opérateur de fusion non linéaire proposé reste meilleur que l’opérateur de fusion linéaire classique



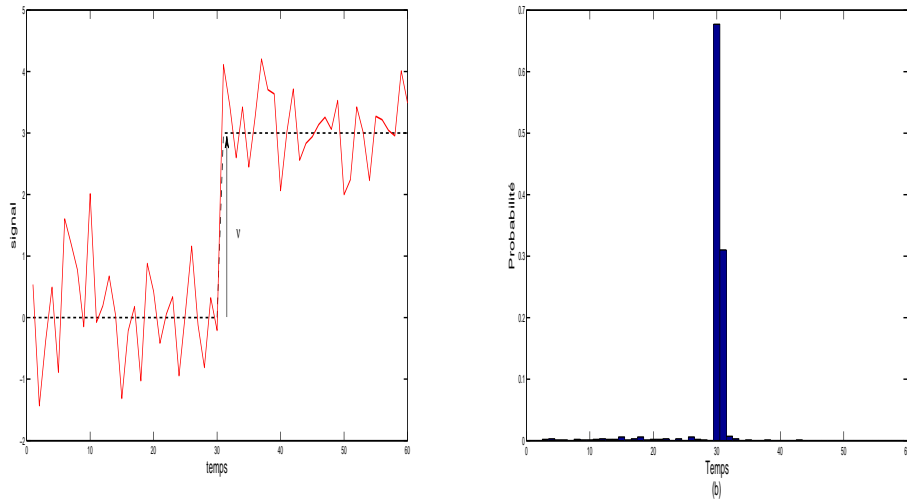


FIG. 3.14 – Détection d’une rupture d’amplitude  $v = 3$  dans le signal. Exemple de réalisation du processus (a) et de distribution empirique des ruptures détectées (b)

(noté GLR). On reporte dans le tableau 3.6 la variance et la valeur moyenne de la position esti-

Opérateur de fusion	GLR	GLR NL	GLR	GLR NL
Amplitude du saut	$v = 5 \text{ \& } \lambda = 6$		$v = 2 \text{ \& } \lambda = 3$	
Absence de saut : Pf	0.14	<b>0.10</b>	0.442	<b>0.423</b>
Présence de saut à $t=25$ : Pd	0.976	<b>0.991</b>	0.661	<b>0.741</b>
Présence de saut à $t=40$ : Pd	0.979	<b>0.995</b>	0.683	<b>0.723</b>
Présence de saut à $t=10$ : Pd	0.979	<b>0.999</b>	0.678	<b>0.764</b>

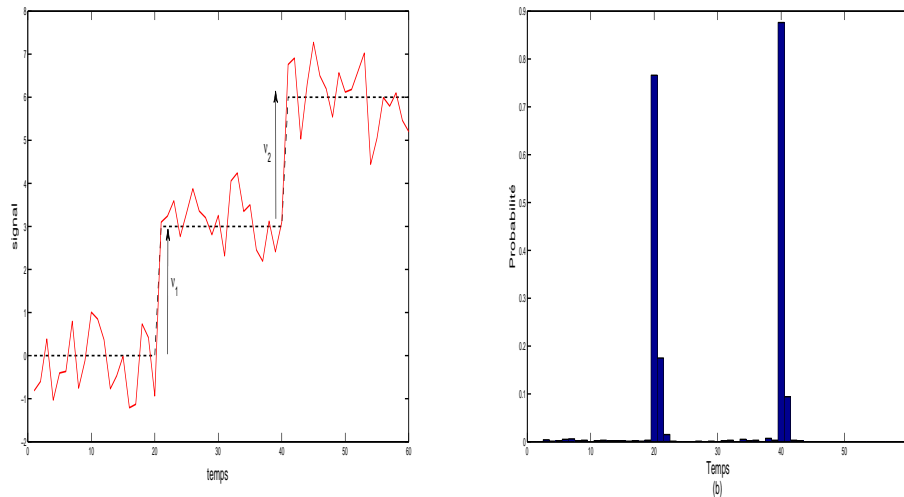
TAB. 3.5 – Probabilité de fausse alarme de la détection de rupture

mée à différents instants du signal. L’opérateur de fusion non linéaire proposé est plus précis car la position estimée de la rupture est plus concentrée (variance plus faible) autour de sa position réelle. Quand on diminue l’amplitude du saut, l’opérateur de fusion non linéaire proposé reste meilleur que l’opérateur de fusion linéaire classique.

Nous reportons dans le tableau 3.7 des critères d’évaluation de la segmentation de signaux comportant plusieurs ruptures dont on présente un exemple sur la figure 3.15.(a). Dans le tableau 3.7, on reporte le critère MTD (Mean Time to Detection) [GUS00] qui mesure la durée moyenne avant ou après la détection. Plus le MTD est grand, moins la méthode est performante. On reporte aussi le critère MDR (Missed Detection Rate) [GUS00] qui évalue le nombre de ruptures non détectées. Plus le MDR est grand, moins la méthode est performante. Les résultats reportés dans le tableau 3.7 montrent que pour deux sauts successifs, l’opérateur de fusion non linéaire proposé est meilleur. En effet les valeurs de MTD et MDR pour les deux ruptures sont plus faibles. Quand on diminue l’amplitude du saut, l’opérateur de fusion non linéaire proposé reste

Opérateur de fusion		GLR	GLR NL	GLR	GLR NL
Amplitude du saut		$v = 5 \text{ \& } \lambda = 6$		$v = 2 \text{ \& } \lambda = 3$	
saut à $t=25$	Moyenne	24.98	<b>25.09</b>	23.17	<b>23.63</b>
	Variance	5.29	<b>0.49</b>	155.05	<b>132.17</b>
saut à $t=40$	Moyenne	39.66	<b>40.01</b>	29.49	<b>31.23</b>
	Variance	11.58	<b>1.74</b>	196.75	<b>185.22</b>
saut à $t=10$	Moyenne	10.38	<b>9.98</b>	29.04	<b>31.38</b>
	Variance	9.72	<b>1.36</b>	207.55	<b>188.04</b>

TAB. 3.6 – Estimation de l’instant de la rupture

FIG. 3.15 – Détection de deux ruptures  $v = 2$  dans le signal en  $k = 20$  et  $k = 40$ . Exemple de réalisation du processus (a) et de distribution empirique des ruptures détectées (b)

meilleur que l’opérateur de fusion linéaire optimale classique.

L’opérateur de fusion non linéaire proposé nécessite de connaître la puissance du bruit de mesure des signaux à fusionner  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  et de définir l’intervalle qui modélise l’information *a priori*  $Bd$  et  $Bu$ . Son implantation dans un filtre GLR pour la segmentation des processus stationnaire par morceaux permet dans une étape d’apprentissage d’estimer l’intervalle  $[Bd Bu]$ . Dans ce cas, seul le seuil de détection  $\lambda$  est à définir comme pour l’implantation de l’opérateur de fusion classique dans un filtre GLR. Dans cette expérimentation, on montre que l’on obtient une meilleure détection des ruptures et une estimation plus précise de leurs positions pour l’opérateur de fusion non linéaire proposé, comparé à l’opérateur de fusion linéaire classique.

Opérateur de fusion		GLR L	GLR NL	GLR L	GLR NL
Amplitude du saut		$v = 5 \text{ \& } \lambda = 6$		$v = 2 \text{ \& } \lambda = 3$	
saut à $t=20$	MTD1	1.4	<b>1.1</b>	5.06	<b>4.03</b>
	MDR1	0.018	<b>0.005</b>	0.11	<b>0.005</b>
saut à $t=40$	MTD2	1.2	<b>1.1</b>	3.15	<b>2.61</b>
	MDR2	0	<b>0</b>	0	<b>0</b>

TAB. 3.7 – Comparaison des opérateurs de fusion dans le cas multi-ruptures

### Détection d'une rupture de pente

On souhaite à présent évaluer l'algorithme de détection de rupture de pente présenté dans les sections 3.2.3 et 3.4. On compare dans ce cas l'algorithme de détection de rupture utilisant un seul signal puis deux signaux et l'opérateur de fusion linéaire, et enfin deux signaux et l'opérateur de fusion non linéaire. Les variances des signaux  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$  utilisés dans cette expérimentation sont  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2$ . On présente sur la figure 3.16 un exemple des différentes configurations testées de ruptures de pentes.

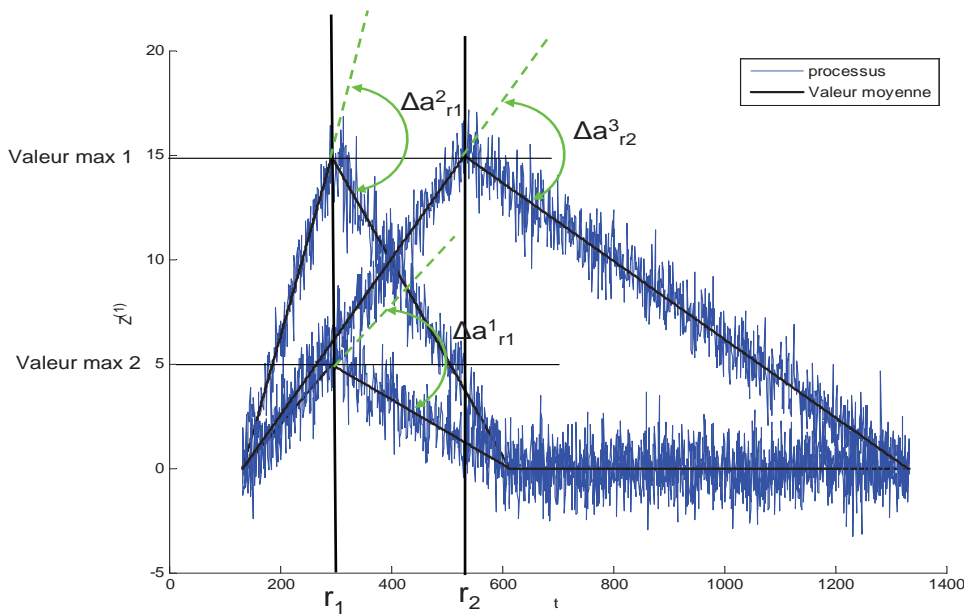


FIG. 3.16 – Différentes configurations de ruptures de pentes

Les signaux représentés sur la figure 3.16 présentent différentes évolutions du discriminant du signal GPS. On associe à chaque courbe deux paramètres liés au fonctionnement du récepteur GPS. La valeur maximale du signal et l'instant de la rupture. La valeur maximale du signal dépend du rapport signal sur bruit du signal reçu. Les récepteurs GPS classiques fonctionnent avec des valeurs maximales du signal comprises entre 14.14 (50 dBHz) et 2.4 (35 dBHz). On re-

porte dans le tableau 3.8 la valeur maximale en fonction du rapport signal sur bruit. Le deuxième paramètre de la courbe est l'instant de rupture. Il dépend de la vitesse relative satellite-récepteur. En pratique l'instant de la rupture varie entre 161 (929 m/s) et 1490 (100 m/s). On reporte sur la figure 3.16 les trois valeurs de changement de pente  $\Delta a_{r1}^1, \Delta a_{r1}^2, \Delta a_{r2}^3$  à l'instant des ruptures. On remarquera que le changement de pente est d'autant plus faible que la puissance du signal reçu est faible et que la vitesse satellite-récepteur est lente. La détection sera d'autant plus difficile à identifier que le changement de pente sera faible.

	50 dbHZ	40 dbHZ	35 dbHZ	30 dbHZ	25 dbHZ
Valeur maximale	14.14	4.47	2.4	1.41	1

TAB. 3.8 – Valeur du discriminant à l'instant de la rupture en fonction du rapport signal sur bruit pour les signaux émis sur la fréquence L1)

La vitesse Doppler maximale vaut 929 m/s [TSU00]. A cette vitesse la rupture se situe à 162 ms soit 162 mesures ou échantillons (dans le cas de la fréquence L1 et du code C/A). Dans ce cas, on suppose, quelque soit la vitesse relative satellite-récepteur, qu'aucune rupture ne se produit avant cet instant. De plus la variance d'estimation du détecteur de ruptures (calculée par le filtre d'estimation de la figure 3.11) devient constante au bout de 30 échantillons. C'est pour cette raison que la taille  $M$  de la fenêtre de test est fixée dans ce cas à  $M = 160 - 30 = 130$  instants. On reporte dans le tableau 3.9 la taille de la fenêtre de travail en fonction de la vitesse satellite-récepteur.

	929 m/s	700 m/s	500 m/s
Taille de la fenêtre	160	180	270

TAB. 3.9 – Taille de la fenêtre de travail  $M$  en fonction de la vitesse relative satellite-récepteur

Dans notre expérimentation on fixe le nombre minimum d'échantillons  $\sigma_d$  après la rupture pour que celle-ci puisse être détectée à 40. Chaque test est effectué 1000 fois, et pour chaque test, l'information *a priori* sur la pente du signal est tirée suivant une loi gaussienne de variance  $V = 0.5$ .

Deux paramètres sont évalués dans cette expérimentation. L'instant de la rupture détectée définit la précision de localisation de la rupture de pente. Le retard de détection de la rupture définit la rapidité de détection du filtre. On reporte dans le tableau 3.10 la valeur moyenne de l'instant de la rupture détectée et dans le tableau 3.11 l'EQM de l'estimation de cet instant. On reporte dans le tableau 3.12 la valeur moyenne du retard de détection de la rupture et dans le tableau 3.13 l'écart type du retard. Les valeurs sont reportées dans les tableaux en fonction de la position de la rupture et de la valeur maximale du signal.

		Valeur maximale				
		14.14	4.47	2.4	1.41	1
$r = 161$ (929 m/s)	Une seule mesure	161	165	168	169	130
	Fusion Linéaire	<b>161</b>	<b>164</b>	<b>166</b>	<b>168</b>	<b>128</b>
	Fusion non linéaire	<b>161</b>	<b>164</b>	<b>166</b>	<b>166</b>	<b>131</b>
$r = 214$ (700 m/s)	Une seule mesure	215	218	221	222	181
	Fusion Linéaire	<b>214</b>	<b>217</b>	<b>220</b>	<b>221</b>	<b>172</b>
	Fusion non linéaire	<b>214</b>	<b>215</b>	<b>219</b>	<b>219</b>	<b>179</b>
$r = 300$ (500 m/s)	Une seule mesure	301	305	307	309	245
	Fusion Linéaire	<b>300</b>	<b>304</b>	<b>306</b>	<b>308</b>	<b>260</b>
	Fusion non linéaire	<b>300</b>	<b>303</b>	<b>305</b>	<b>306</b>	<b>250</b>

TAB. 3.10 – Valeur moyenne de l’instant de la rupture de pente détectée en fonction de la valeur maximale du signal et de la position de la rupture  $r$  pour les trois algorithmes de détection de rupture (sans fusion, fusion linéaire et fusion non linéaire)

		Valeur maximale				
		14.14	4.47	2.4	1.41	1
$r = 161$	Une seule mesure	1.97	28.43	73.66	98.32	745.85
	Fusion Linéaire	<b>1.72</b>	<b>19.89</b>	<b>41.12</b>	<b>64.93</b>	<b>793.23</b>
	Fusion non linéaire	<b>1.54</b>	<b>17.15</b>	<b>35.99</b>	<b>58.45</b>	<b>986.25</b>
$r = 214$	Une seule mesure	3.36	32.78	85.15	112.20	982.62
	Fusion Linéaire	<b>2.34</b>	<b>23.86</b>	<b>45.86</b>	<b>73.66</b>	<b>1284.48</b>
	Fusion non linéaire	<b>1.92</b>	<b>19.87</b>	<b>38.51</b>	<b>64.75</b>	<b>879.25</b>
$r = 300$	Une seule mesure	4.89	35.44	92.55	124.85	2765.25
	Fusion Linéaire	<b>3.76</b>	<b>28.08</b>	<b>49.62</b>	<b>79.82</b>	<b>3584.35</b>
	Fusion non linéaire	<b>3.24</b>	<b>25.77</b>	<b>42.36</b>	<b>68.33</b>	<b>3740.23</b>

TAB. 3.11 – Erreur quadratique moyenne (EQM) sur l’instant de la rupture de pente en fonction de la valeur maximale du signal et de la position de la rupture  $r$

En comparant les résultats reportés dans les tableaux 3.10 et 3.11 on peut faire les conclusions suivantes. L’estimation de l’instant de la rupture est d’autant moins précise que la valeur du rapport signal à bruit du signal reçu est faible. La valeur moyenne de l’instant de la rupture reste proche de la valeur théorique mais l’EQM augmente quand la valeur maximale diminue. Pour un rapport signal à bruit de 25 dBHz la détection de pente est défailante car la rupture est détectée avant son apparition. Enfin on peut remarquer que l’EQM varie peu pour les différentes valeurs de la vitesse relative satellite-récepteur. En effet la taille de la fenêtre de travail étant différente pour chaque vitesse, la détection est peu sensible à ce paramètre.

Si on compare les résultats obtenus pour chaque méthode dans les tableaux 3.10 et 3.11, on peut conclure que la méthode proposée qui utilise l’opérateur de fusion non linéaire est la plus performante. En effet l’EQM obtenue est plus forte pour un signal que pour la fusion linéaire,

et l'EQM de la fusion non linéaire est plus faible que celle obtenue par la fusion linéaire.

		Valeur maximale				
		14.14	4.47	2.4	1.41	1
161	Une seule mesure	1.21	3.77	7.49	8.21	-30.52
	Fusion Linéaire	<b>0.76</b>	<b>2.65</b>	<b>5.35</b>	<b>7.13</b>	<b>-33.75</b>
	Fusion non-Linéaire	<b>0.32</b>	<b>2.24</b>	<b>4.68</b>	<b>5.56</b>	<b>-28.95</b>
214	Une seule mesure	1.34	4.72	8.84	9.47	-27.37
	Fusion Linéaire	<b>1.06</b>	<b>3.83</b>	<b>7.46</b>	<b>8.51</b>	<b>-50.18</b>
	Fusion non-Linéaire	<b>0.86</b>	<b>3.21</b>	<b>4.25</b>	<b>6.25</b>	<b>-35.29</b>
300	Une seule mesure	2.40	5.65	9.94	9.68	-55.38
	Fusion Linéaire	<b>2.11</b>	<b>5.18</b>	<b>8.56</b>	<b>8.55</b>	<b>-36.56</b>
	Fusion non-Linéaire	<b>1.77</b>	<b>4.66</b>	<b>5.72</b>	<b>7.17</b>	<b>-42.77</b>

TAB. 3.12 – Retard moyen sur l'instant de détection de la rupture de pente en fonction de rapport signal sur bruit et de la vitesse relative satellite-récepteur

		Valeur maximale				
		14.14	4.47	2.4	1.41	1
r=161	Une seule mesure	1.07	2.66	6.01	7.12	60.33
	Fusion Linéaire	<b>0.56</b>	<b>2.14</b>	<b>3.97</b>	<b>6.55</b>	<b>32.17</b>
	Fusion non-Linéaire	<b>0.25</b>	<b>1.85</b>	<b>3.33</b>	<b>4.73</b>	<b>14.52</b>
r=214	Une seule mesure	1.12	4.33	7.54	9.43	13.38
	Fusion Linéaire	<b>0.96</b>	<b>3.50</b>	<b>6.88</b>	<b>6.29</b>	<b>27.15</b>
	Fusion non-Linéaire	<b>0.52</b>	<b>2.73</b>	<b>3.46</b>	<b>5.56</b>	<b>18.42</b>
r=300	Une seule mesure	1.96	4.27	7.54	8.03	40.96
	Fusion Linéaire	<b>1.85</b>	<b>3.69</b>	<b>6.32</b>	<b>7.12</b>	<b>57.63</b>
	Fusion non-Linéaire	<b>1.24</b>	<b>2.07</b>	<b>4.33</b>	<b>5.16</b>	<b>32.67</b>

TAB. 3.13 – Ecart-types du retard sur l'instant de détection de la rupture de pente en fonction de rapport signal sur bruit et de la vitesse relative satellite-récepteur

Dans le tableau 3.12 on peut noter que le retard de la détection augmente quand le rapport signal à bruit décroît. De plus la variance du retard, reportée dans le tableau 3.13, augmente quand la valeur maximale diminue. On en conclut que la détection est en moyenne plus retardée quand le rapport signal à bruit du signal reçu décroît. Pour les différentes vitesses satellites-récepteur, le retard moyen et sa variance varient peu. On retrouve dans ce résultat la conséquence de l'utilisation d'une fenêtre adaptée à la vitesse satellite-récepteur. Pour un rapport signal à bruit de 25 dBHz, la détection de pente est défaillante car le retard est négatif. Dans ce cas la rupture est détectée avant son apparition.

A partir des résultats décrits et donnés dans les tableaux 3.12 et 3.13 on peut conclure que la détection est meilleure avec la méthode de fusion non linéaire. En effet, dans ce cas les paramètres

statistiques du retard estimé sont plus faibles. On remarquera aussi que la détection, utilisant la fusion linéaire est plus performante que la détection utilisant un seul signal.

### 3.6 Conclusion et perspectives

L'étude réalisée dans ce chapitre porte sur l'estimation de processus linéaire par morceaux à partir d'observations en provenance de deux sources. La problématique étudiée dans ce chapitre est liée à la segmentation du signal GPS L2C. Dans ce contexte, le type de processus étudié, les observations et informations *a priori* utilisées ont été définis dans le cadre de cette application. Nous avons proposé dans une première partie de ce chapitre, un algorithme d'estimation des ruptures de pente intégrant une information *a priori* sur la dynamique de la rupture. L'estimateur des instants de rupture utilise un opérateur de fusion linéaire des mesures de discriminants observées. Nous avons proposé dans une deuxième partie un opérateur de fusion non linéaire des observations et sa mise en oeuvre dans le détecteur de ruptures de pente.

Dans l'expérimentation les différents algorithmes ont été évalués sur les données de synthèse. Trois types d'expérimentation ont été menés. Dans la première, on compare la fusion linéaire avec l'opérateur de fusion non linéaire proposé pour différentes informations *a priori*. Dans cette expérimentation les processus étudiés sont stationnaires. On montre que la fusion non linéaire est plus précise au sens de l'EQM et que ses performances se dégradent et tendent vers celles de la fusion linéaire lorsque l'information *a priori* est moins précise.

Dans la seconde expérimentation, on évalue l'apport de la fusion non linéaire comparée à la fusion linéaire pour détecter un saut dans la moyenne d'un processus. L'estimateur utilisé est un filtre GLR. Dans ce cas l'opérateur de fusion non linéaire est utilisé pour détecter et estimer l'instant de la rupture dans la fenêtre de travail. On montre dans cette expérimentation que le détecteur qui utilise la fusion non linéaire est plus performant en terme de détection de rupture et qu'il localise plus précisément l'instant de la rupture.

Dans la troisième expérimentation, on évalue le détecteur de ruptures de pente proposé. Dans cette partie on compare les résultats obtenus par l'opérateur de fusion non linéaire et l'opérateur de fusion linéaire. Les paramètres de l'expérimentation sont définis pour le cas de la segmentation d'un signal GPS multi voies et des puissances de signaux observées en pratique. On montre dans cette expérimentation que le détecteur de ruptures de pente qui utilise la fusion non linéaire est plus performant en termes de détection de rupture et qu'il localise plus précisément l'instant de la rupture.

Les perspectives de ce travail résident principalement dans l'étude de l'opérateur de fusion non linéaire. En effet l'extension de la méthode à  $n$  observations n'est pas évidente. Dans ce cas il faut modifier le processus de sélection des observations à transformer. De plus, il semble intéressant de pouvoir traiter les données corrélées. En effet dans le cas corrélé, plus de réalisations seront modifiées, et l'apport de la fusion non linéaire sera plus important. Il faudra alors dans ce cas redéfinir la contrainte de la transformation et vérifier qu'elle est négative.

# Chapitre 4

## Filtrage Bayésien multi-capteurs de données circulaires

### 4.1 Introduction

Dans beaucoup d'applications les données traitées sont définies sur le cercle. On parle alors de données définies sur un domaine circulaire différent du domaine linéaire classique où les données sont définies sur une droite. Les distributions utilisées pour modéliser leurs caractères aléatoires sont des distributions circulaires périodiques qui intègrent la périodicité des données. Dans ce travail nous proposons de définir dans un cadre bayésien, à partir de la distribution circulaire de von Mises, un filtre pour la fusion multi-capteurs de données angulaires. La distribution de von Mises dans le domaine circulaire est l'équivalent de la distribution gaussienne dans le domaine linéaire. On redéfinit dans ce cadre un filtre de fusion temporel, un opérateur de fusion des observations et un estimateur des instants de rupture dans la valeur moyenne d'un processus angulaire stationnaire par morceaux.

Dans un récepteur GPS, les mesures d'angle et de pulsation de la porteuse sont des mesures angulaires. Ces mesures sont fournies par les boucles PLL (Phase-Locked Loop) et FLL (Frequency-Locked Loop) de poursuite des paramètres du signal GPS reçu. Dans le cas du signal GPS L2C, elles sont obtenues sur la voie pilote et la voie données du signal. Nous proposons au chapitre 5 d'estimer et de fusionner ces mesures à partir des filtres et de l'opérateur de fusion proposé dans ce chapitre.

La nécessité d'une "invariance" de méthodes statistiques et de mesures à l'égard du choix arbitraire de la direction zéro et du sens de rotation, rend la plupart des techniques définies dans le domaine linéaire inadapté aux données angulaires. La raison étant principalement que la topologie du cercle et de la droite sont complètement différentes. De plus, la vraisemblance d'une distribution circulaire a souvent une forme très compliquée, elle contient plusieurs constantes de normalisation inconnues [BHA09] [GAT08]. Dans ce contexte, beaucoup de notions telles que la corrélation et la régression ainsi que leurs mesures statistiques, doivent être réinventées pour le domaine circulaire. De même, l'inférence statistique, les fonctions de perte et les estimateurs doivent être redéfinies [JAM01] [MAR99].



En général, les distributions des mesures d'angles ainsi que des états à estimer par les filtres statistiques sont supposées gaussiennes. Elles sont donc définies sur un domaine linéaire. Quand l'état est un angle, le filtre de Kalman étendu qui utilise une linéarisation locale de l'équation du modèle peut être utilisé [QI02]. Cette approximation reste valable pour de petits angles définis entre  $[-\pi, \pi]$ . On peut alors utiliser les filtres et les opérateurs du domaine linéaire classique pour traiter ces mesures d'angles. En effet, dans ce cas, la distribution gaussienne est une bonne approximation de la distribution circulaire de von Mises [MAR99]. Cette approximation n'est pas appropriée aux grandes variations d'angles et aux transitions angulaires entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

Dans ce chapitre, nous proposons un opérateur de fusion qui fusionne les mesures angulaires obtenues à différents instants et en provenance de capteurs différents. Ces données sont des variables aléatoires de von Mises indépendantes. L'utilisation d'une distribution circulaire pour modéliser le problème permet d'obtenir des solutions ne dépendant pas de la variation d'angle et insensibles au choix de la direction zéro. L'opérateur de fusion des observations est construit à partir de la vraisemblance des mesures sachant l'état à estimer. Le filtre circulaire récursif des observations obtenues à différents instants est défini à partir de la modélisation bayésienne du problème. Cette modélisation s'appuie sur l'équation d'état du système et le filtre est construit à partir de la distribution *a posteriori* de l'état à l'instant  $k$  sachant les mesures obtenues aux instants allant de 1 à  $k$ . Finalement nous proposons un estimateur récursif des instants de rupture de moyenne dans un processus angulaire stationnaire par morceaux.

Après une introduction constituant la première partie, ce chapitre est organisé de la façon suivante. Nous présentons dans une deuxième partie l'opérateur de fusion de données angulaires. La troisième partie est consacrée à la définition du filtre circulaire récursif proposé pour l'estimation de la direction moyenne et de la vitesse moyenne angulaire. Le détecteur de ruptures associé au filtre circulaire proposé est présenté dans la quatrième partie. La cinquième partie est consacrée à l'expérimentation dans laquelle les estimateurs proposés seront évalués.

## 4.2 Opérateur de fusion circulaire

### 4.2.1 Les distributions circulaires

Dans de nombreux domaines scientifiques, les mesures traitées peuvent être directionnelles. Par exemple, un biologiste peut étudier la direction du vol d'un oiseau, alors qu'un géologue peut être intéressé par la direction du pôle magnétique, ou la vitesse du vent [AZM09a]. Ces mesures directionnelles peuvent être en deux dimensions comme dans le premier exemple, ou en trois dimensions comme dans le deuxième exemple. L'ensemble des observations sur les orientations est dénommé données directionnelles. Les directions en deux dimensions peuvent être représentées comme des mesures angulaires par rapport à une certaine direction zéro convenablement choisie, c'est à dire, un point de départ et un "sens de rotation". Les observations sur des directions bidimensionnelles sont également appelées *données circulaires*. De même, les orientations en trois dimensions peuvent être représentées par deux angles et les données de direction en trois dimensions sont appelées *données sphériques*.

Il existe dans le domaine de la statistique circulaire plusieurs distributions parmi lesquelles on peut citer la distribution uniforme. Cette distribution est l'équivalent de la distribution uniforme dans le domaine linéaire. Le centre de cette distribution est l'origine 0 et aucune direction n'est privilégiée. La distribution circulaire la plus fréquemment utilisée dans l'analyse de directions est la distribution de von Mises [BAT81]. Cette distribution est l'équivalent de la distribution gaussienne dans le domaine linéaire [MAR99] [MEL05]. On la nomme d'ailleurs aussi distribution circulaire normale ( $CN$ ), car elle s'apparente à la loi normale linéaire au regard des éléments suivants :

- elle dépend de deux paramètres : la direction moyenne et la concentration autour de la moyenne ;
- elle est symétrique par rapport à la direction moyenne [DEG99] ;
- elle est uni-modale sur une période et son mode correspond à la direction moyenne [DEG99].

La distribution de von Mises décrit les réalisations d'une variable aléatoire circulaire  $f(\theta, \mu, \kappa)$  de moyenne  $\mu$  et de variance homogène à  $1/\kappa$  (l'inverse du paramètre de concentration). Le paramètre de concentration  $\kappa$  varie entre 0 et l'infini. Pour une faible valeur de  $\kappa$ , la distribution de von Mises a une répartition uniforme entre 0 et  $2\pi$ , pour laquelle aucune direction particulière n'est privilégiée. Pour une grande valeur de  $\kappa$ , la distribution de von Mises tend vers une distribution normale de variance  $1/\kappa$ . La forme générale de la fonction de densité de probabilité de von Mises pour un angle  $\theta$  est donnée par :

$$f(\theta, \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp(\kappa \cos(\theta - \mu)) \quad (4.1)$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0, donnée par :

$$I_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\kappa \cos(\phi)) d\phi \quad (4.2)$$

On notera :

$$\theta|\mu \sim CN(\theta|\mu, \kappa) \quad (4.3)$$

C'est à dire une variable aléatoire  $\theta$  suivant une distribution de von Mises de moyenne  $\mu$  et de paramètre de concentration  $\kappa$ .

On montre que l'on peut approximer la somme de deux variables aléatoires de von Mises par une variable aléatoire de von Mises. Cette approximation est obtenue en utilisant la distribution Wrapped Normal. La distribution circulaire Wrapped Normal ( $WN$ ) est une somme de distributions gaussiennes centrées sur une valeur périodique  $\mu$  de période  $2 * \pi$ . Cette somme permet de reproduire le caractère multi modal des distributions circulaires liées à la périodicité des variables angulaires. Une distribution Wrapped Normal est obtenue en enroulant (wrapping) une distribution normale autour d'un cercle, son expression est donnée par :

$$f_{WN}(\theta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp - \frac{(\theta - \mu + 2k\pi)^2}{2\sigma^2} \quad (4.4)$$

On notera :

$$\theta|\mu \sim WN(\theta|\mu, \rho) \quad (4.5)$$

C'est à dire une variable aléatoire  $\theta$  suivant une distribution Wrapped Normal de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2 = -2 \log(\rho)$ .

La distribution Wrapped Normal possède la propriété d'additivité des variables aléatoires. Dans ce cas, la convolution de deux variables aléatoires suivant une distribution  $WN$  est également une variable aléatoire de distribution  $WN$ , contrairement à la convolution de deux variables aléatoires suivant une distribution de von Mises [MAR99]. Plus précisément si  $\theta_1 \sim WN(\mu_1, \rho_1)$  et  $\theta_2 \sim WN(\mu_2, \rho_2)$  sont indépendantes, alors  $\theta_1 + \theta_2 \sim WN(\mu_1 + \mu_2, \rho_1 \rho_2)$  avec  $\rho_1 = \exp(-\sigma_1^2/2)$  et  $\rho_2 = \exp(-\sigma_2^2/2)$ .

On montre qu'une distribution de von Mises peut être approximée par une distribution Wrapped Normal [MAR99]. Cette approximation est définie par  $CN(\mu, \kappa) \approx WN(\mu, A(\kappa))$ .  $WN(\mu, A(\kappa))$  est une distribution Wrapped Normal de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2 = -2 \log(A(\kappa))$ . Cette approximation est définie pour :

$$A(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \quad (4.6)$$

$I_1$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 1.

On peut aussi approximer une distribution Wrapped Normal par une distribution de von Mises. Cette approximation est définie par  $WN(\mu, \rho) \approx CN(\mu, A^{-1}(\rho))$ . Le paramètre de concentration de la distribution de von Mises est défini en fonction de la variance de la distribution Wrapped Normal par  $\kappa = A^{-1}(\exp(-\frac{\sigma^2}{2}))$ . Dans cette expression  $A^{-1}(\cdot)$  est calculé par approximation. En effet :

pour  $\kappa > 0.6$  :

$$A(\kappa) \approx (1 - \frac{1}{2\kappa}) \quad (4.7)$$

On a alors :

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \exp(-\frac{\sigma^2}{2})} \right) \quad (4.8)$$

pour  $\kappa < 0.6$  :

$$A(\kappa) \approx \exp\left(\frac{-1}{2\kappa}\right) \quad (4.9)$$

On a alors :

$$\kappa = \frac{1}{\sigma^2} \quad (4.10)$$

### 4.2.2 Opérateur de fusion circulaire de $N$ mesures angulaires

Trois raisons limitent l'utilisation de la somme pondérée comme opérateur de fusion d'un ensemble d'observations angulaires. La première raison est liée au fait que la somme de deux variables aléatoires de von Mises est une variable aléatoire de von Mises dont on ne sait pas calculer le paramètre de concentration. La seconde raison est que le produit d'une variable aléatoire de von Mises par une constante inférieure à 1 n'est pas obligatoirement une variable aléatoire de von Mises de variance plus faible. Ceci étant dû aux transitions d'angle observées entre  $-\pi$  et  $\pi$  quand l'angle nul définit la direction zéro. Finalement la troisième raison est qu'il n'existe pas d'estimateur direct de la variance d'une variable aléatoire de von Mises [JAM01] [FIS87]. Dans ce contexte nous proposons de définir l'opérateur de fusion de variables aléatoires de von Mises au sens du maximum de vraisemblance. L'opérateur proposé intègre dans sa mise en oeuvre la périodicité des variables aléatoires et ne dépend pas du choix de la direction zéro.

Considérons  $N$  mesures angulaires  $\phi_k^{(1)}, \dots, \phi_k^{(N)}$  que nous souhaitons fusionner en une seule mesure  $\phi_{f,k}$ . On suppose que ces mesures sont indépendantes et suivent toutes une distribution de von Mises de moyenne  $\theta_k$  et de paramètres de concentrations respectifs  $\kappa_R^{(1)} \dots \kappa_R^{(N)}$ . Nous pouvons exprimer la distribution de la vraisemblance de von Mises de la mesure fusionnée étant donné l'état par :

$$f(\phi_{f,k}/\theta_k, \kappa_f) \propto f(\phi_k^{(1)}/\theta_k, \kappa_R^{(1)}) f(\phi_k^{(2)}/\theta_k, \kappa_R^{(2)}) \dots f(\phi_k^{(N)}/\theta_k, \kappa_R^{(N)}) \quad (4.11)$$

avec :

$$f(\phi_{f,k}/\theta_k, \kappa_f) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_f)} \exp(\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)) \quad (4.12)$$

$$f(\phi_k^{(i)}/\theta_k, \kappa_R^{(i)}) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(i)})} \exp(\kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)} - \theta_k)) \quad (4.13)$$

On a alors :

$$\frac{1}{2\pi I_0(\kappa_f)} \exp(\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(1)})} \dots \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_R^{(N)})} \exp\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)})\right) \quad (4.14)$$

Ce qui implique la relation suivante :

$$\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k) = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\theta_k - \phi_k^{(i)}) \quad (4.15)$$

On a alors :

$$\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k) = \cos(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos(\phi_k^{(i)}) + \sin(\theta_k) \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin(\phi_k^{(i)}) \quad (4.16)$$

On en déduit donc les deux relations suivantes :

$$\kappa_f \cos \phi_{f,k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos \phi_k^{(i)} \quad (4.17)$$

$$\kappa_f \sin \phi_{f,k} = \sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin \phi_k^{(i)} \quad (4.18)$$

On peut à présent déduire les expressions de  $\phi_{f,k}$  et  $\kappa_f$ . L'expression de  $\phi_{f,k}$  est obtenue par :

$$\phi_{f,k} = \arctan\left(\frac{\kappa_f \sin \phi_{f,k}}{\kappa_f \cos \phi_{f,k}}\right) \quad (4.19)$$

$$= \arctan\left(\frac{\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin \phi_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos \phi_k^{(i)}}\right) \quad (4.20)$$

L'expression de  $\kappa_f$  est obtenue par :

$$\kappa_f = \sqrt{(\kappa_f \cos \phi_{f,k})^2 + (\kappa_f \sin \phi_{f,k})^2} \quad (4.21)$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \cos \phi_k^{(i)}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \kappa_R^{(i)} \sin \phi_k^{(i)}\right)^2} \quad (4.22)$$

Les valeurs de  $\phi_{f,k}$  et  $\kappa_f$  obtenues en sortie de l'opérateur de fusion multi-capteurs circulaire sont utilisées par l'estimateur récursif circulaire défini dans la suite.

### 4.2.3 Cas de la fusion de 2 mesures angulaires

Dans le cas de deux mesures angulaires  $\phi_k^{(1)}$  et  $\phi_k^{(2)}$ , l'opérateur de fusion défini au sens du maximum de vraisemblance est obtenu à partir des relations entre les distributions suivantes :

$$f(\phi_{f,k}/\theta_k, \kappa_f) \propto f(\phi_k^{(1)}/\theta_k, \kappa_R^{(1)}) f(\phi_k^{(2)}/\theta_k, \kappa_R^{(2)}) \quad (4.23)$$

On peut déduire alors l'expression suivante :

$$\exp(\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)) \propto \exp\left(\kappa_R^{(1)} \cos(\phi_k^{(1)} - \theta_k)\right) * \exp\left(\kappa_R^{(2)} \cos(\phi_k^{(2)} - \theta_k)\right) \quad (4.24)$$

Finalement dans le cas de deux mesures angulaires, on a :

$$\phi_{f,k} = \arctan(S_k/C_k) \quad (4.25)$$

$$\kappa_f = \sqrt{C_k^2 + S_k^2} \quad (4.26)$$

avec :

$$C_k = \kappa_R^{(1)} \cos \phi_k^{(1)} + \kappa_R^{(2)} \cos \phi_k^{(2)} \quad (4.27)$$

$$S_k = \kappa_R^{(1)} \sin \phi_k^{(1)} + \kappa_R^{(2)} \sin \phi_k^{(2)} \quad (4.28)$$

Le paramètre de concentration de l'opérateur de fusion  $\kappa_f$  doit être supérieur au plus grand des paramètres de concentrations  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  associé aux distributions qui modélisent les mesures. En effet, le paramètre de concentration est inversement proportionnel à la variance de la distribution. On a :

$$\kappa_f = \sqrt{(\kappa_R^{(1)})^2 + (\kappa_R^{(2)})^2 + 2\kappa_R^{(1)}\kappa_R^{(2)} \cos(\phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)})} \quad (4.29)$$

Les valeurs de  $\phi_k^{(1)}, \phi_k^{(2)}$  sont comprises dans l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  car dans notre modélisation les angles sont obtenus avec la fonction arc tangente dans l'expression 4.25. On a alors :

$$\cos(\phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)}) > 0 \text{ donc } \kappa_f > \max(\kappa_R^{(1)}, \kappa_R^{(2)}) \quad (4.30)$$

On représente sur la figure 4.1 l'évolution de  $\kappa_f$  en fonction de  $\Delta\phi = \phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)}$ . Cette figure est obtenue pour  $\kappa_R^{(1)} = 1$ . On remarquera que, contrairement à l'opérateur de fusion somme pondérée du domaine linéaire, le paramètre de concentration dépend de la valeur des mesures à fusionner. Cependant le paramètre de concentration  $\kappa_f$  est bien supérieur aux valeurs de  $\kappa_R^{(1)}$  et  $\kappa_R^{(2)}$ , quelle que soit la valeur de  $\Delta\phi$ , ce qui démontre l'intérêt de cet opérateur de fusion.

## 4.3 Filtres récurrents circulaires

### 4.3.1 Filtre récurrent circulaire scalaire

Soit un système à temps discret de loi initiale  $f(\theta_0)$ , de loi de transition  $f(\theta_k|\theta_{k-1}, Q)$  et de fonction de vraisemblance  $f(\phi_{f,k}|\theta_k, \kappa_f)$ . Le système est décrit par les équations d'état et de mesure suivantes :

$$\begin{cases} \theta_k & = h\theta_{k-1} + v_{k-1} \\ \phi_{f,k} & = \theta_k + w_k \end{cases}$$

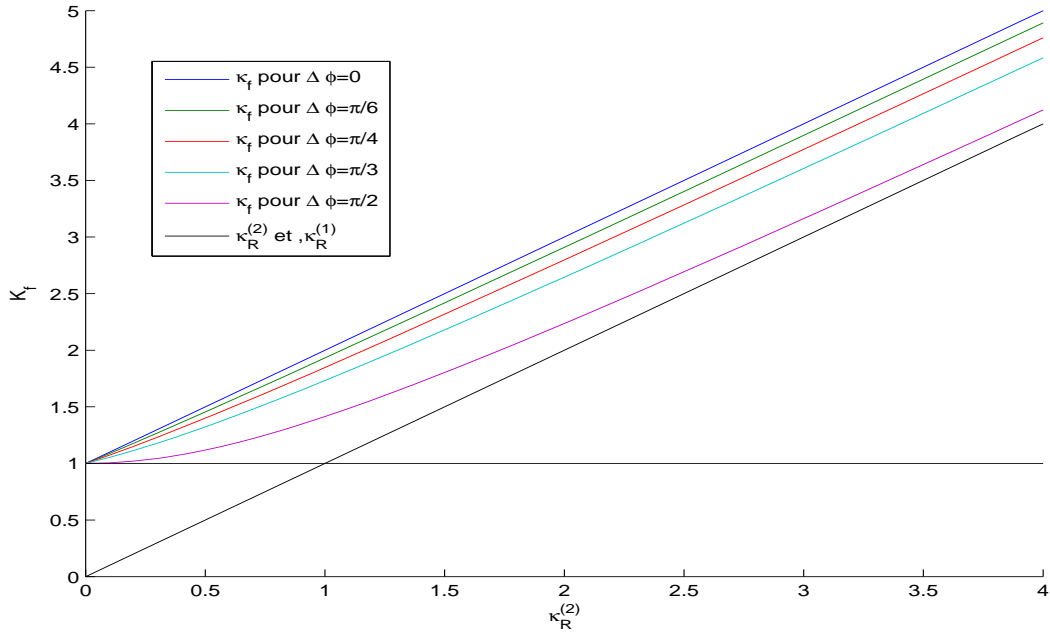


FIG. 4.1 – Evolution de  $\kappa_f$  en fonction de  $\Delta\phi = \phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)}$

Dans cette expression,  $w_k$  est un bruit de mesure de paramètre de concentration  $\kappa_f$ .  $v_{k-1}$  est un bruit de modèle de paramètre de concentration  $\kappa_Q$ .

L'estimation de l'état  $\theta_k$  repose sur des informations *a priori* et sur les observations  $\phi_{f,1:k} = \phi_{f,1}, \dots, \phi_{f,k}$ . Notre estimateur doit pouvoir fonctionner en temps réel, ce qui implique que l'estimation doit être résolue de façon récursive en traitant les observations au fur et à mesure de leur disponibilité. On considère que l'estimateur proposé intègre aussi l'opérateur de fusion circulaire décrit dans la section précédente. L'estimateur récursif circulaire que nous proposons est fondé sur un schéma du type prédiction-correction, comme n'importe quel filtre bayésien. Chaque itération du filtre circulaire se décompose en une étape de prédiction, faisant intervenir la loi de transition, et une étape de correction faisant intervenir la nouvelle observation et la fonction de vraisemblance locale associée. Ce calcul s'effectue en deux étapes, une dite de prédiction et une étape de correction. Le calcul s'effectue de façon récursive selon le schéma classique suivant :

$$P(\theta_{k-1} | \phi_{f,1:k-1}) \xrightarrow[\text{étape de prédiction}]{P(\theta_k | \theta_{k-1})} P(\theta_k | \phi_{f,1:k-1}) \xrightarrow[\text{étape de correction}]{P(\phi_{f,k} | \theta_k)} P(\theta_k | \phi_{f,1:k}) \quad (4.31)$$

$\phi_{f,k}$   
 $\downarrow$

On représente sur la figure 4.2 , le principe général du filtre récursif circulaire .

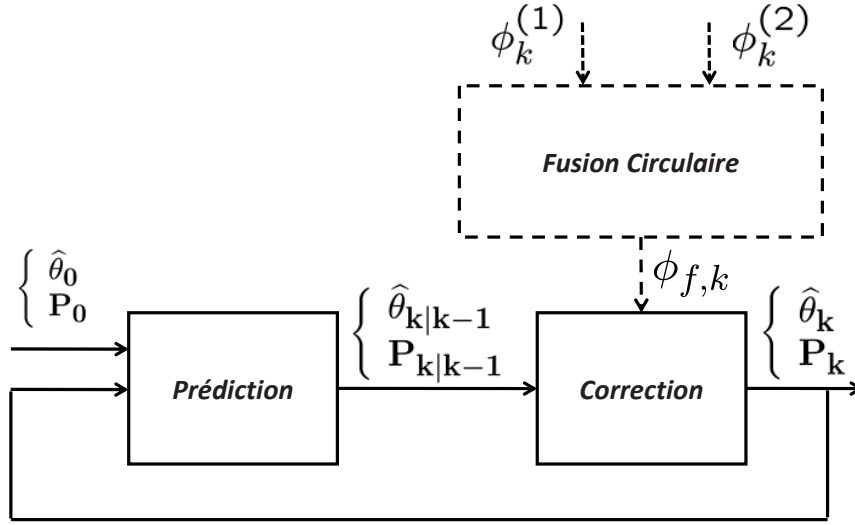


FIG. 4.2 – Schéma de l'estimateur récursif fusionnant deux mesures angulaires

### Définition de l'étape de prédiction

On suppose que la distribution *a posteriori* définie en  $k-1$ ,  $f(\theta_{k-1} | \phi_{f,1:k-1})$  est une distribution de von Mises.

$$\theta_{k-1} | \phi_{f,1:k-1} \sim \mathcal{CN}(\theta_{k-1} | h\hat{\theta}_{k-1}, P_{k-1}) \quad (4.32)$$

où  $\hat{\theta}_{k-1}$  et  $P_{k-1}$  désignent respectivement les moyenne et variance *a posteriori* de  $\theta_{k-1}$ . Dans notre approche, le bruit sur l'état est distribué suivant une loi de von Mises de paramètre de concentration  $\kappa_Q$ . La distribution de la prédiction est donnée par la résolution de l'intégrale de Chapman-Kolmogorov :

$$f(\theta_k | \phi_{f,1:k-1}) = \int f(\theta_k | \theta_{k-1}, \phi_{f,1:k-1}) f(\theta_{k-1} | \phi_{f,1:k-1}) d\theta_{k-1} \quad (4.33)$$

La résolution de l'intégrale de Chapman-Kolmogorov dans le cas de distributions de von Mises doit nous conduire à définir l'étape de prédiction par :

$$\mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \propto \int \mathcal{CN}(\theta_k | \theta_{k-1}, \kappa_Q) \mathcal{CN}(\theta_{k-1} | h\hat{\theta}_{k-1}, P_{k-1}) d\theta_{k-1} \quad (4.34)$$

Pour résoudre cette intégrale, nous proposons d'approximer les distributions de von Mises par des distributions "Wrapped Normal". En effet, il est montré dans [JAM01] qu'une distribution de von Mises  $\mathcal{CN}(\mu, \kappa)$  peut être approximée par une distribution "Wrapped Normal"  $WN(\mu, \rho)$  et vice versa. Avec  $\rho = A(\kappa)$  et  $\kappa = A^{-1}(\rho)$ .

Pour calculer la distribution  $\mathcal{CN}(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1})$ , on approxime chacune des distributions  $\mathcal{CN}(\theta_k | \theta_{k-1}, \kappa_Q)$  et  $\mathcal{CN}(\theta_{k-1} | h\hat{\theta}_{k-1}, P_{k-1})$  de l'équation 4.33 par les distributions "Wrapped Normal" suivantes :



$$CN(\theta_k | \theta_{k-1}, \kappa_Q) \approx WN(\theta_k | \theta_{k-1}, A(\kappa_Q)) \quad (4.35)$$

$$CN(\theta_{k-1} | h\hat{\theta}_{k-1}, P_{k-1}) \approx WN(\theta_{k-1} | h\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{k-1})) \quad (4.36)$$

avec :

$$WN(\theta_k | \theta_{k-1}, A(\kappa_Q)) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(\theta_k - \theta_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_1^2}\right) \quad (4.37)$$

$$WN(\theta_{k-1} | h\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{k-1})) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(\theta_{k-1} - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi m)^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (4.38)$$

où  $\sigma_1^2 = -2\log(A(\kappa_Q))$  et  $\sigma_2^2 = -2\log(A(P_{k-1}))$ .

L'intégrale 4.33 peut s'écrire alors :

$$CN(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \approx \int WN(\theta_k | \theta_{k-1}, A(\kappa_Q)) WN(\theta_{k-1} | h\hat{\theta}_{k-1}, A(P_{k-1})) d\theta_{k-1} \quad (4.39)$$

soit :

$$\approx \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int \exp\left(\frac{-(\theta_k - \theta_{k-1} + 2\pi n)^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(\frac{-(\theta_{k-1} - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi m)^2}{2\sigma_2^2}\right) d\theta_{k-1} \quad (4.40)$$

$$\approx \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int \exp\left(\frac{-1}{2} \left( \frac{(\theta_k - \theta_{k-1} + 2\pi n)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\theta_{k-1} - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi m)^2}{\sigma_2^2} \right)\right) d\theta_{k-1} \quad (4.41)$$

On utilise alors la relation suivante :

$$\frac{(X - Y)^2}{N} + \frac{(Y - Z)^2}{M} = W \left( Y - \left( \frac{X}{WN} + \frac{Z}{WM} \right) \right)^2 + \frac{(X - Z)^2}{M + N} \quad (4.42)$$

avec  $W = \frac{1}{N} + \frac{1}{M}$  et en posant  $X = \theta_k + 2\pi n$ ,  $Y = \theta_{k-1}$ ,  $Z = h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi m$ ,  $N = \sigma_1$  et  $M = \sigma_2$ , on a alors :

$$CN(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi(n-m))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta_{k-1}, n, m) d\theta_{k-1} \quad (4.43)$$

Avec

$$g(\theta_{k-1}, n, m) = \sqrt{\frac{B}{2\pi}} \exp\left(-\frac{B}{2} \left(\theta_{k-1} - \left(\frac{\theta_k + 2\pi n}{B\sigma_1^2} + \frac{h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi m}{B\sigma_2^2}\right)\right)^2\right) \quad (4.44)$$

où  $B = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$ .  $g(\theta_{k-1}, n, m)$  représente une loi gaussienne de moyenne  $\frac{\theta_k + 2\pi n}{B\sigma_1^2} + \frac{h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi m}{B\sigma_2^2}$  et de variance  $\frac{1}{B}$ . On en déduit donc que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta_{k-1}, n, m) d\theta_{k-1} = 1 \quad \forall (n, m) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.45)$$

Ce qui implique :

$$CN(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi(n-m))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \quad (4.46)$$

En effectuant le changement de variable suivant  $\gamma = n - m$ , on a :

$$CN(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) \approx \quad (4.47)$$

$$\approx \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi\gamma)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \quad (4.48)$$

$$\approx \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(-2\log(A(P_{k-1})A(\kappa_Q)))}} \exp\left(\frac{-(\theta_k - h\hat{\theta}_{k-1} + 2\pi\gamma)^2}{2(-2\log(A(P_{k-1})A(\kappa_Q)))}\right) \quad (4.49)$$

$$\approx WN(\theta_k | h\hat{\theta}_{k-1}, A(\kappa_Q)A(P_{k-1})) \quad (4.50)$$

On a alors l'équation complète de la prédiction qui est définie par :

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = h\hat{\theta}_{k-1} \quad (4.51)$$

$$P_{k/k-1} = A^{-1}(A(P_{k-1})A(\kappa_Q)) \quad (4.52)$$

### Définition de l'étape de correction

On peut à présent passer à l'étape de correction où il faut calculer l'estimée  $\hat{\theta}_k$  et sa variance  $P_k$ . Pour cela on utilise la distribution *a posteriori*  $f(\theta_k|\phi_{f,1:k})$  donnée par :

$$\underbrace{f(\theta_k|\phi_{f,1:k})}_{\text{distribution a posteriori}} \propto \underbrace{f(\theta_k|\phi_{f,1:k-1})}_{\text{distribution a priori}} \underbrace{f(\phi_{f,k}|\theta_k)}_{\text{vraisemblance}} \quad (4.53)$$

Dans notre modélisation, on suppose que la distribution *a posteriori*, la distribution *a priori* et la vraisemblance sont des distributions de von Mises. On a alors :

$$CN(\theta_k|\hat{\theta}_k, P_k) \propto CN(\theta_k|\hat{\theta}_{k/k-1}, P_{k/k-1}) CN(\phi_{f,k}|\theta_k, \kappa_f) \quad (4.54)$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi I_0(P_k)} \exp\left(P_k \cos(\theta_k - \hat{\theta}_k)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi I_0(P_{k/k-1})} \exp\left(P_{k/k-1} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1})\right) \frac{1}{2\pi I_0(\kappa_f)} \exp\left(\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)\right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 I_0(P_{k/k-1}) I_0(\kappa_f)} \exp\left(P_{k/k-1} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1}) + \kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)\right) \quad (4.56)$$

On a alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \exp\left(P_k \cos(\theta_k - \hat{\theta}_k)\right) \\ & \propto \exp\left(P_{k/k-1} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1})\right) * \exp\left(\kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)\right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\propto \exp\left(P_{k/k-1} \cos(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k-1}) + \kappa_f \cos(\phi_{f,k} - \theta_k)\right) \quad (4.58)$$

$$\propto \exp\left(C_k \cos(\theta_k) + S_k \sin(\theta_k)\right) \quad (4.59)$$

avec :

$$C_k = P_{k/k-1} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_f \cos \phi_{f,k} \quad (4.60)$$

$$S_k = P_{k/k-1} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_f \sin \phi_{f,k} \quad (4.61)$$

En utilisant la règle de trigonométrie suivante :

$$a \sin(\omega t + \varphi_1) + b \cos(\omega t + \varphi_2) = \sqrt{c^2 + d^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.62)$$

avec :

- $c = a \sin(\varphi_1) + b \cos(\varphi_2)$
- $d = a \cos(\varphi_1) + b \sin(\varphi_2)$
- $\varphi = \arctan(\frac{c}{d})$

et en prenant  $\omega t = \theta_t$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,  $a = S_k$  et  $b = C_k$ , on peut déduire :

$$P_k \cos(\theta_k - \hat{\theta}_k) = \sqrt{C_k^2 + S_k^2} \cos(\theta_k - \arctan(\frac{S_k}{C_k})) \quad (4.63)$$

ce qui implique :

$$\hat{\theta}_k = \arctan(S_k/C_k) \quad (4.64)$$

$$P_k = \sqrt{C_k^2 + S_k^2} \quad (4.65)$$

### 4.3.2 Filtre récursif circulaire vectoriel

On suppose maintenant que l'on dispose de deux capteurs fournissant des mesures d'angles et de vitesses angulaires. L'équation d'état dans ce cas est donnée par :

$$\Theta_k = F \Theta_{k-1} + V_{k-1} \quad (4.66)$$

Avec  $\Theta_k = [\theta_k, \dot{\theta}_k]$  le vecteur d'état, que l'on souhaite estimer à chaque instant  $k$ .  $F$  est la matrice de transition donnée par  $F = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Dans notre approche on considère que  $\theta_k$  est une variable aléatoire angulaire décrivant la direction et que  $\dot{\theta}_k$  est la vitesse angulaire.

$$\theta_k = \theta_{k-1} + dt \dot{\theta}_{k-1} + v_{1,k-1} \quad (4.67)$$

$$\dot{\theta}_k = \dot{\theta}_{k-1} + v_{2,k-1} \quad (4.68)$$

Le vecteur de bruit  $V_{k-1} = [v_{1,k-1}, v_{2,k-1}]^T$  représente l'erreur du modèle d'état.  $v_{1,k-1}$  et  $v_{2,k-1}$  sont respectivement le bruit du modèle d'état sur  $\theta_k$  et sur  $\dot{\theta}_k$ . Ils suivent tous les deux une distribution de von Mises, centrée de paramètres de concentration respectifs  $\kappa_{1,Q}$ ,  $\kappa_{2,Q}$ . Dans notre implémentation on considère que les états ne sont pas corrélés. On a alors la matrice des paramètres de concentration  $\kappa_Q$  qui est définie par :

$$\kappa_Q = \begin{bmatrix} \kappa_{1,Q} & 0 \\ 0 & \kappa_{2,Q} \end{bmatrix}$$

L'équation de mesure est donnée par :

$$\Phi_{f,k} = H \Theta_{k-1} + W_k \quad (4.69)$$

avec  $H$  la matrice d'observation :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Phi_{f,k} = [\phi_{f,k}, \dot{\phi}_{f,k}]^T$  est le vecteur de mesures angulaires fusionnées à l'aide de l'opérateur de fusion circulaire proposé dans la section 4.2.  $\phi_{f,k}$  est la mesure fusionnée des directions et  $\dot{\phi}_{f,k}$  est la mesure fusionnée des vitesses angulaires. Le vecteur de bruit  $W_k = [w_{1,k}, w_{2,k}]^T$  représente le bruit sur les mesures.  $w_{1,k}$ ,  $w_{2,k}$  sont deux bruits centrés suivant une distribution de von Mises. Ils sont respectivement le bruit sur la direction et sur la vitesse angulaire. Leurs paramètres de concentration sont respectivement  $\kappa_{1,R}$ ,  $\kappa_{2,R}$ . On suppose ici que les mesures ne sont pas corrélées entre elles et la matrice des paramètres de concentration  $\kappa_R$  est donnée par :

$$\kappa_R = \begin{bmatrix} \kappa_{1,R} & 0 \\ 0 & \kappa_{2,R} \end{bmatrix}.$$

Soit  $\Theta_k = [\theta_k, \dot{\theta}_k]^T$  le vecteur d'état inconnu qu'on souhaite estimer.

On définit  $\hat{\Theta}_{k/k-1} = [\hat{\theta}_{k/k-1}, \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1}]^T$  le vecteur prédiction de l'état et  $\hat{\Theta}_k = [\hat{\theta}_k, \hat{\dot{\theta}}_k]^T$  l'état estimé. On note  $P_{\theta_k}$  et  $P_{\dot{\theta}_k}$  les paramètres de concentration des estimations de la direction et de la vitesse angulaire. Pour définir l'étape de prédiction du filtre, il faut résoudre l'intégrale de Chapman-Kolmogorov. Cependant l'étape de prédiction, définie par les modèles 4.67 et 4.68 pour le filtre étudié, introduit une corrélation entre les états prédits. Malheureusement il n'existe pas de distribution circulaire qui modélise cette dépendance et qui permette de résoudre analytiquement l'intégrale de Chapman-Kolmogorov. C'est pour cette raison que nous supposons dans la suite que les états sont indépendants. Dans ce cas on considère les deux équations suivantes pour définir l'étape de prédiction :

$$\begin{aligned} CN(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) &\approx \int WN(\theta_k | \theta_{k-1}, A(\kappa_{1,Q})) \\ &\quad WN(\theta_{k-1} | (\hat{\theta}_{k-1} + dt \hat{\dot{\theta}}_{k-1}), A(P_{\theta_{k-1}})A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})) d\theta_{k-1} \quad (4.70) \\ CN(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1}, P_{\dot{\theta}_{k/k-1}}) &\approx \int WN(\dot{\theta}_k | \dot{\theta}_{k-1}, A(\kappa_{2,Q})) \\ &\quad WN(\dot{\theta}_{k-1} | (\hat{\dot{\theta}}_{k-1}, A(P_{\dot{\theta}_{k-1}}))) d\dot{\theta}_{k-1} \quad (4.71) \end{aligned}$$

Ces deux intégrales sont résolues en utilisant la méthode et les approximations définies au paragraphe précédent. On a alors les équations de prédiction du filtre qui sont définies par :

$$\hat{\theta}_{k/k-1} = \hat{\theta}_{k-1} + dt \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (4.72)$$

$$P_{\theta_{k/k-1}} = A^{-1}(A(P_{\theta_{k-1}})A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})A(\kappa_{1,Q})) \quad (4.73)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_{k/k-1} = \hat{\dot{\theta}}_{k-1} \quad (4.74)$$

$$P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} = A^{-1}(A(P_{\dot{\theta}_{k-1}})A(\kappa_{2,Q})) \quad (4.75)$$

Les estimés  $\hat{\theta}_k$  et  $\hat{\dot{\theta}}_k$  sont obtenus respectivement à partir des deux distributions *a posteriori* suivantes, qui définissent l'étape de prédiction :

$$CN(\theta_k | \hat{\theta}_k, P_{\theta_k}) \propto CN(\theta_k | \hat{\theta}_{k/k-1}, P_{\theta_{k/k-1}}) CN(\phi_{f,k} | \theta_k, \kappa_{1,R}) \quad (4.76)$$

$$CN(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_k, P_{\dot{\theta}_k}) \propto CN(\dot{\theta}_k | \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1}, P_{\dot{\theta}_{k/k-1}}) CN(\dot{\phi}_{f,k} | \dot{\theta}_k, \kappa_{2,R}) \quad (4.77)$$

En utilisant la même démonstration que celle utilisée dans le cas scalaire (décrite par les équations 4.54 à 4.65), on montre que :

$$P_{\theta_k} = \sqrt{C_{\theta_k}^2 + S_{\theta_k}^2} \quad (4.78)$$

$$P_{\dot{\theta}_k} = \sqrt{C_{\dot{\theta}_k}^2 + S_{\dot{\theta}_k}^2} \quad (4.79)$$

$$\hat{\theta}_k = \arctan(S_{\theta_k}/C_{\theta_k}) \quad (4.80)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_k = \arctan(S_{\dot{\theta}_k}/C_{\dot{\theta}_k}) \quad (4.81)$$

avec :

$$C_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \cos \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_{1,R} \cos \phi_{f,k} \quad (4.82)$$

$$S_{\theta_k} = P_{\theta_{k/k-1}} \sin \hat{\theta}_{k/k-1} + \kappa_{1,R} \sin \phi_{f,k} \quad (4.83)$$

$$C_{\dot{\theta}_k} = P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \cos \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1} + \kappa_{2,R} \cos Z_k^{(2)fus} \quad (4.84)$$

$$S_{\dot{\theta}_k} = P_{\dot{\theta}_{k/k-1}} \sin \hat{\dot{\theta}}_{k/k-1} + \kappa_{2,R} \sin \dot{\phi}_{f,k} \quad (4.85)$$

## 4.4 Estimation de rupture de moyenne dans un processus angulaire

Deux raisons ont motivé le développement d'un détecteur de ruptures dans la moyenne d'un processus angulaire. La première raison est liée à l'apparition de sauts dans le processus provoqués par des perturbations du capteurs. On peut citer les sauts de cycle dans la phase du signal GPS ou des perturbations électromagnétiques pour les capteurs de direction comme le compas magnétique. La seconde raison est qu'il est parfois possible de modéliser l'évolution par une suite de zones stationnaires de moyenne constante séparées par des transitions entre moyennes. On peut citer par exemple l'évolution de la vitesse du vent ou de la direction d'un véhicule.

Dans la suite nous supposons que le processus angulaire est stationnaire par morceaux. Soit le modèle d'évolution du processus contenant une rupture de dynamique (amplitude)  $\delta_r$  située à la position  $r \in \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . L'équation du modèle d'état dans le cas scalaire est donnée par :

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \sum_{r \in \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}} \delta_r \delta(k-1-r) + \nu_{k-1} \quad (4.86)$$

L'impulsion de Dirac  $\delta(i)$  prend la valeur 1 quand  $i = 0$  ; sinon elle est égale à 0.  $v_k$  est un bruit blanc centré de distribution de von Mises et de variance  $\kappa_Q$ . On note  $\phi_k$  les observations de  $\theta_k$ .  $\phi_k$  est une mesure bruitée suivant une distribution de von Mises centrée en  $\theta_k$  et de paramètre de concentration  $\kappa_R$ .

### Estimation après la rupture

L'expression de la moyenne estimée  $\hat{\theta}_k$  à l'instant  $k$  avec  $k > r$  est donnée dans ce cas par :

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k,0} + \rho_{k,r}(\delta_r) \quad (4.87)$$

Dans cette expression,  $\hat{\theta}_{k,0}$  est la moyenne estimée obtenue sans rupture dans le modèle.  $\rho_{k,r}(\delta_r)$  représente la différence avec la moyenne estimée quand on considère une rupture à la position  $r$  dans le modèle. Dans le cas circulaire,  $\rho_{k,r}(\delta_r)$  n'est pas une fonction linéaire de  $\delta_r$  comme dans le cas linéaire. Pour estimer la fonction  $\rho_{k,r}(\delta_r)$ , on considère la ré-écriture de l'équation 4.64 comme suit :

$$\begin{aligned} \tan(\hat{\theta}_k) &= S_k/C_k \\ P_{k/k-1}(\sin(\hat{\theta}_{k/k-1}) \cos(\hat{\theta}_k) - \cos(\hat{\theta}_{k/k-1}) \sin(\hat{\theta}_k)) &= \kappa_R(\sin(\hat{\theta}_k) \cos(\phi_k) - \cos(\hat{\theta}_k) \sin(\phi_k)) \\ P_{k/k-1} \sin(\hat{\theta}_{k/k-1} - \hat{\theta}_k) &= \kappa_R \sin(\hat{\theta}_k - \phi_k) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Si on suppose une rupture à la position  $r$  et des observations non bruitées définies par  $\phi_k = \hat{\theta}_{r-1} + \delta_r$  pour  $k \geq r$ , on a alors :

$$P_{r/r-1} \sin(\hat{\theta}_{r/r-1} - \hat{\theta}_r) = \kappa_R \sin(\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_{r-1} - \delta_r) \quad (4.89)$$

$$-P_{r/r-1} \sin(\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_{r/r-1}) = \kappa_R(\sin(\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_{r-1}) \cos(\delta_r) - \cos(\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_{r-1}) \sin(\delta_r)) \quad (4.90)$$

$$-\frac{P_{r/r-1}}{\kappa_R} = \cos(\delta_r) - \sin(\delta_r) \cotan(\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_{r-1}) \quad (4.91)$$

$$\cotan(\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_{r-1}) = \frac{1}{\sin \delta_r} \left\{ \cos \delta_r + \frac{P_{r/r-1}}{\kappa_R} \right\} \quad (4.92)$$

$$\tan(\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_{r-1}) = \left( \frac{1}{\sin \delta_r} \left\{ \cos \delta_r + \frac{P_{r/r-1}}{\kappa_R} \right\} \right)^{-1} \quad (4.93)$$

$$\hat{\theta}_r = \arctan \left( \left( \frac{1}{\sin \delta_r} \left\{ \cos \delta_r + \frac{P_{r/r-1}}{\kappa_R} \right\} \right)^{-1} \right) + \hat{\theta}_{r-1} \quad (4.94)$$

Les valeurs de  $\rho_{k,r}(\delta_r)$  pour  $k \geq r$  sont obtenues récursivement. On représente sur la figure 4.3 les paramètres  $\rho_{k,r}(\delta_r)$  et  $\psi_{k,r}$ . On pose alors :

$$\rho_{k,r}(\delta_r) = \delta_r - \psi_{k,r} \quad (4.95)$$

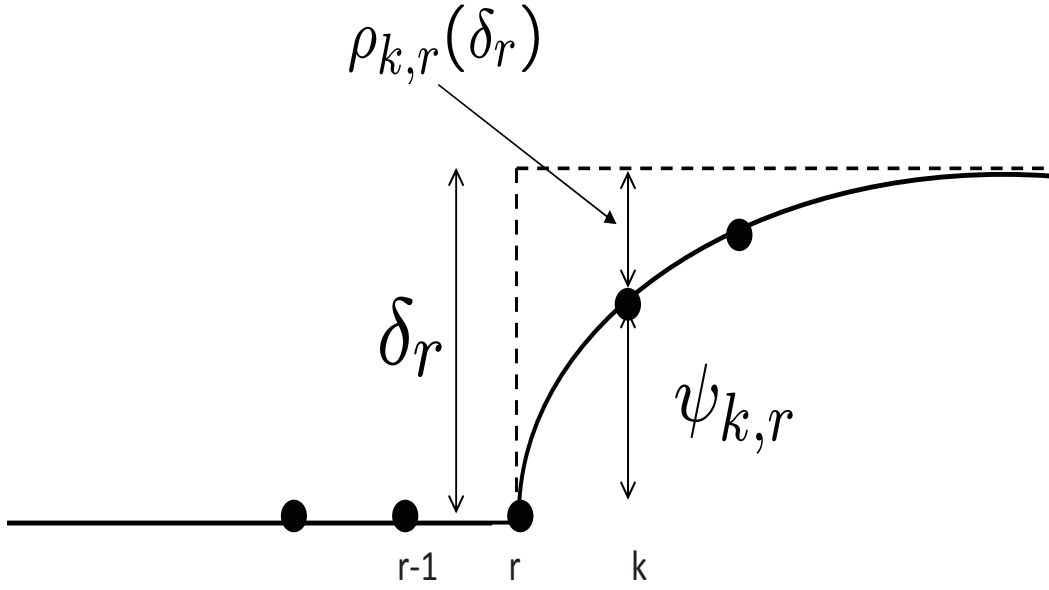


FIG. 4.3 – Evolution de l'état estimé après l'instant de la rupture

Pour tout  $k \geq r$ , on a :

$$\widehat{\theta}_k = \widehat{\theta}_{r-1} + \psi_{k,r} \quad (4.96)$$

L'équation 4.88 peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} P_{k/k-1} \sin(\widehat{\theta}_{r-1} + \psi_{k-1,r} - \widehat{\theta}_{r-1} - \psi_{k,r}) &= \kappa_R \sin(\widehat{\theta}_{r-1} - \psi_{k,r} - \widehat{\theta}_{r-1} + \delta_r) \\ P_{k/k-1} \sin(\psi_{k-1,r} - \psi_{k,r}) &= \kappa_R \sin(\delta_r - \psi_{k,r}) \\ P_{k/k-1} (\sin(\psi_{k-1,r}) \cos(\psi_{k,r}) - \cos(\psi_{k-1,r}) \sin(\psi_{k,r})) &= \kappa_R (\cos(\psi_{k,r}) \sin(\delta_r) - \sin(\psi_{k,r}) \cos(\delta_r)) \\ \cos(\psi_{k,r}) (P_{k/k-1} \sin(\psi_{k-1,r}) - \kappa_R \sin(\delta_r)) &= \sin(\psi_{k,r}) (P_{k/k-1} \cos(\psi_{k-1,r}) - \kappa_R \cos(\delta_r)) \end{aligned}$$

Ce qui implique l'expression récursive suivante :

$$\psi_{k,r} = \arctan \left\{ \frac{P_{k/k-1} \cos(\psi_{k-1,r}) - \kappa_R \cos(\delta_r)}{P_{k/k-1} \sin(\psi_{k-1,r}) - \kappa_R \sin(\delta_r)} \right\} \quad (4.97)$$

dont la valeur initiale est donnée par :

$$\psi_{r,r} = \arctan \left( \left( \frac{1}{\sin \delta_r} \left\{ \cos \delta_r + \frac{P_{r/r-1}}{\kappa_R} \right\} \right)^{-1} \right) \quad (4.98)$$



### Détection de la rupture

Soit  $\varepsilon_k$ , la différence entre la mesure et la moyenne estimée :

$$\varepsilon_k = \phi_k - \hat{\theta}_{k,r} \quad (4.99)$$

La différence entre deux variables aléatoires suivant une distribution de von Mises peut être approximée par une variable aléatoire circulaire suivant une distribution de von Mises. En effet, cela peut être montré en approximant les deux distributions initiales par des distributions "Wrapped Normal" qui possèdent la propriété d'additivité [JAM01]. On se reportera au paragraphe 4.2.1 pour les détails de cette approximation.

On peut alors montrer qu'une approximation du paramètre de concentration de  $\varepsilon_k$  est donnée par :

$$P\varepsilon_k = A^{-1}(A(P_k)A(\kappa_R)) \quad (4.100)$$

On définit alors deux hypothèses :

- Hypothèse  $H_1$  : En présence d'une rupture de dynamique  $\delta_r$  à la position  $r$  dans les mesures  $\phi$ , on a après la rupture :

$$\varepsilon_k \sim CN(0, P\varepsilon_k) \quad (4.101)$$

$CN$  est la distribution circulaire normale de von Mises.

- Hypothèse  $H_0$  : En absence de rupture dans les mesures, on a après la rupture :

$$\varepsilon_k \sim CN(\rho_{k,r}(\delta_r), P\varepsilon_k) \quad (4.102)$$

Le rapport de vraisemblance entre les deux hypothèses est donné par :

$$L = \frac{\prod_{i=r}^k p(\varepsilon_i|H_1)}{\prod_{i=r}^k p(\varepsilon_i|H_0)} \quad (4.103)$$

$$= \frac{\prod_{i=r}^k \exp(P\varepsilon_i \cos(\varepsilon_i - \rho_{k,r}(\delta_r)))}{\prod_{i=r}^k \exp(P\varepsilon_i \cos(\varepsilon_i))} \quad (4.104)$$

$$(4.105)$$

On peut ensuite définir le test entre les deux hypothèses à partir du logarithme du rapport de vraisemblance  $L$  par la relation suivante :

$$\ln(L) = \sum_{i=r}^k P\varepsilon_i \cos(\varepsilon_i - \rho_{i,r}(\delta_r)) - \sum_{i=r}^k P\varepsilon_i \cos \varepsilon_i \underset{H_1}{\overset{H_0}{>}} 0 \quad (4.106)$$

Pour détecter les ruptures à partir de ce test, il existe deux possibilités [JAM01]. La première consiste à utiliser l'approche Bayésienne et à considérer une loi *a priori* sur la position de la

rupture. Dans le cas d'une loi uniforme, on calcule la valeur moyenne du test, obtenue pour chaque position  $r$  dans la fenêtre de travail. La seconde possibilité consiste à rechercher les valeurs de  $r$  et  $\delta_r$  qui maximisent la valeur de  $\ln(L)$ . C'est cette dernière possibilité que nous avons retenue car ces grandeurs seront utilisées dans la réactualisation du filtre.

L'estimation de l'instant et de la dynamique de la rupture est obtenue par la double maximisation suivante :

$$\left\{ \hat{t}_k, \hat{\delta}_k \right\} = \underbrace{\operatorname{argmax}}_{k-M+1 \leq r \leq k} \left\{ \underbrace{\operatorname{argmax}}_{\delta_r} L(\nabla, \delta_\nabla) \right\} \quad (4.107)$$

où  $M$  est la taille de la fenêtre de travail. Pour calculer  $\delta_r$  on utilise l'approximation suivante :

$$\bar{c} = \frac{1}{k-r+1} \sum_{i=r}^k \cos(\phi_i - \hat{\theta}_{k-M+1,r}) \quad (4.108)$$

$$\bar{s} = \frac{1}{k-r+1} \sum_{i=r}^k \sin(\phi_i - \hat{\theta}_{k-M+1,r}) \quad (4.109)$$

$$\delta_r = \arctan\left(\frac{\bar{s}}{\bar{c}}\right) \quad (4.110)$$

Après estimation de ces paramètres, le test d'hypothèses est formulé comme suit :

$$\sum_{i=\hat{t}_k}^k P \varepsilon_i \cos(\varepsilon_i - \rho_{i,\hat{t}_k}(\hat{\delta}_k)) - \sum_{i=\hat{t}_k}^k P \varepsilon_i \cos \varepsilon_i \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} \lambda \quad (4.111)$$

où  $\lambda$  est un seuil défini par l'utilisateur qui ne dépend pas de  $k$ . Le seuil est donc commun à toute la séquence analysée. La distribution de la statistique de ce test n'a pas de forme analytique simple [JAM01]. En pratique la seule possibilité est alors de définir par simulation, pour une probabilité de fausse-alarme donnée, les différentes valeurs de seuil en fonction de  $M$  et  $P\varepsilon$ . La valeur du seuil sera donc définie dans l'expérimentation par simulation. Quand une rupture est détectée à partir de l'inégalité 4.111 à la position  $\hat{t}_k$  et avec la dynamique  $\hat{\delta}_k$ , on définit la moyenne et la variance de la direction réactualisées à l'instant  $k$  par :

$$\hat{\theta}_{k,r} = \hat{\theta}_{k,0} + \rho_{k,\hat{t}_k}(\hat{\delta}_k) \quad (4.112)$$

$$P_{k,r} = A^{-1}(A(P_{k,0})A(P\varepsilon_k)) \quad (4.113)$$

où l'erreur sur l'estimation de  $\rho_{k,\hat{t}_k}(\hat{\delta}_k)$  est inconnue et majorée par  $P\varepsilon_k$ .

## 4.5 Expérimentation

Dans ces expérimentations, on compare les algorithmes développés tout au long de ce chapitre. On compare l'opérateur de fusion circulaire, l'estimateur récursif circulaire et le détecteur

de ruptures circulaire avec les filtres et opérateurs classiques du domaine linéaire. Dans le cas linéaire, on utilisera l'opérateur de fusion linéaire classique (Somme pondérée), le filtre de Kalman et le filtre GLR (Generalized Likelihood Ratio). Dans cette expérimentation nous proposons d'évaluer les filtres et opérateurs sur des variations d'angles inspirées d'une application réelle. On considère donc dans cette expérimentation sur données synthétiques l'évolution de la direction d'un véhicule qui parcourt une trajectoire[AZM09b].

### 4.5.1 Evaluation de la fusion circulaire et du filtre récursif circulaire

On considère un récepteur mobile avec deux capteurs, l'un donnant la direction et le deuxième mesurant la vitesse angulaire. Les deux capteurs sont indépendants et les mesures sont supposées non corrélées. On modélise ici les mesures de direction et vitesse fournies par un compas magnétique et un gyroscope. Nous disposons à chaque instant, de deux mesures de direction et de deux mesures de vitesse angulaire. La trajectoire du mobile est présentée sur la figure 4.4. Pour visualiser la différence entre la direction réelle et la direction estimée, nous représentons la distance circulaire entre ces angles pour 200 mesures de la trajectoire.

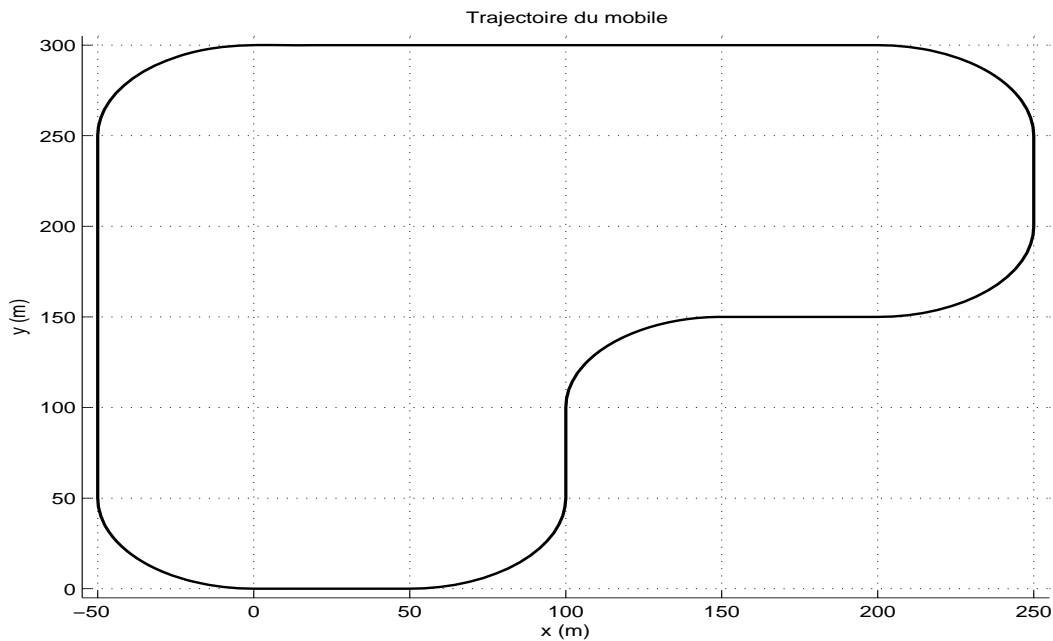


FIG. 4.4 – Trajectoire du mobile

Dans cette expérimentation, nous souhaitons montrer la contribution de l'opérateur de fusion circulaire et du filtre récursif circulaire pour estimer la direction d'un véhicule mobile. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats obtenus par l'opérateur de fusion somme pondérée et un filtre de Kalman. Nous considérons l'estimation de la direction dans le cas scalaire et l'estimation de la direction et de la vitesse angulaire dans le cas vectoriel. Afin d'évaluer et de comparer les résultats obtenus par les deux méthodes, nous estimons la distance circulaire  $dc$  et

la dispersion circulaire  $D_v$  donnée par les expressions suivantes [JAM01] :

Pour évaluer la dispersion angulaire entre la vraie direction et la direction estimée, le calcul est réalisé sur 2000 points de la trajectoire. Soit  $\theta_k$  l'état à estimer et  $\phi_k$  la mesure. On définit la distance circulaire  $dc$  et la dispersion circulaire  $D_v$  entre ces deux angles par les expressions suivantes :

$$dc = 1 - \cos(\theta_k - \phi_k) \quad (4.114)$$

$$D_v = n - \sum_{i=1}^n \cos(\theta_k - \phi_k) \quad (4.115)$$

Quand la différence angulaire  $\theta_k - \phi_k$  prend la valeur 0, la distance circulaire définie dans l'équation 4.114 vaut zéro. Lorsque  $\theta_k - \phi_k$  prend la valeur  $\pi$ , la valeur de la distance circulaire est égale à 2.

### Opérateur de fusion

On représente sur la figure 4.5 la direction réelle et les mesures de direction pour la trajectoire de la figure 4.4. On représente sur la figure 4.5 une réalisation des mesures bruitées associée aux deux valeurs limites des paramètres de concentration des bruits qui seront utilisés dans l'expérimentation. Sur la figure 4.5.(a), on représente les mesures obtenues pour des bruits suivant une distribution de von Mises de paramètres de concentration  $\kappa_R^{(1)} = \kappa_R^{(2)} = 1$ . Sur la figure 4.5.(b) les valeurs des paramètres de concentration du bruit sont  $\kappa_R^{(1)} = \kappa_R^{(2)} = 10$ . On reporte sur cette figure la direction mesurée et la direction fusionnée par la somme pondérée et l'opérateur de fusion circulaire proposé.

On observe sur la figure 4.5.(b) que pour des angles faibles et proche de  $\pi$ , la somme pondérée et l'opérateur de fusion circulaire fournissent les même résultats.

On reporte sur la figure 4.6.(a) l'évolution de la distance circulaire entre la direction réelle et la direction mesurée pour un bruit de paramètre  $\kappa_R^{(1)} = \kappa_R^{(2)} = 3$ . Cette distance est reportée pour les mesures capteurs et les mesures obtenues avec les opérateurs de fusion. On reporte sur la figure 4.6.(a) l'évolution théorique du paramètre de concentration de l'opérateur de fusion circulaire  $\kappa_f$  et la valeur théorique du paramètre de concentration des mesures  $\kappa_R^{(1)}$ . En théorie la mesure obtenue avec l'opérateur de fusion circulaire sera plus précise que la mesure fournie par les capteurs si son paramètre de concentration est supérieur.

On notera sur la figure 4.6.(a) que la distance circulaire obtenue pour la somme pondérée est supérieure ou égale à la distance circulaire obtenue avec l'opérateur de fusion circulaire. On notera sur la figure 4.6.(b) que le paramètre de concentration  $\kappa_f$  n'est pas toujours supérieur à  $\kappa_{1,R}$ . En effet les angles dans cette expérimentation sont compris entre 0 et  $2\pi$  et la contrainte  $\kappa_f > \kappa_R^{(1)}$  n'est garantie que pour des angles compris entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . Cependant même si les performances de l'opérateur de fusion circulaire ne sont toujours pas garanties dans ce cas, nous allons montrer pour plusieurs valeurs de  $\kappa_R^{(1)}$  qu'elles restent supérieures en moyenne à la mesure et à l'opérateur de fusion somme pondérée.

On reporte dans le tableau 4.1 la dispersion angulaire estimée entre la direction réelle et la direction mesurée. La dispersion est calculée pour différentes valeurs des paramètres de concentration  $\kappa_R^{(1)}$  et  $\kappa_R^{(2)}$  du bruit de mesure.

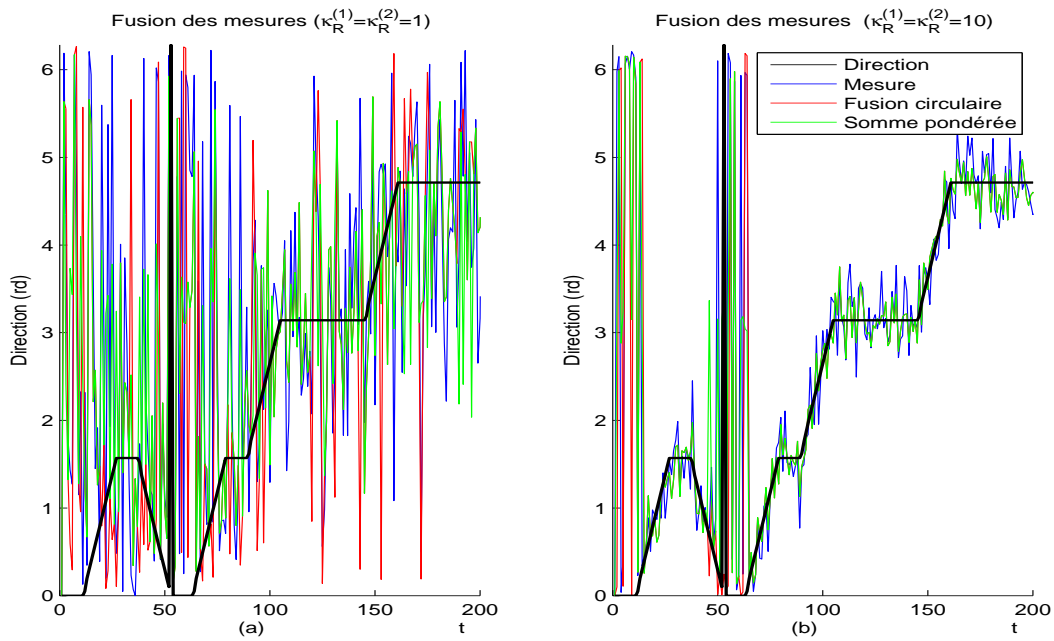


FIG. 4.5 – Evolution de la direction réelle et des mesures

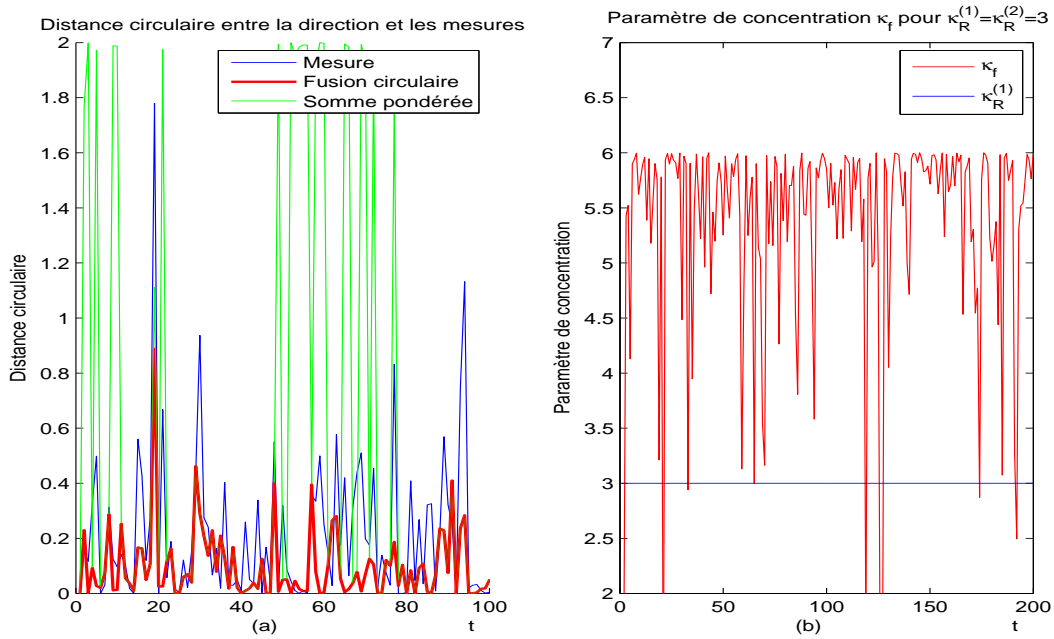


FIG. 4.6 – Evolution de la distance circulaire et du paramètre de concentration  $\kappa_f$

Les dispersions obtenues, reportées dans le tableau 4.1, montrent que l'opérateur de fusion circulaire est le plus précis comparé à la mesure seule et à la somme pondérée. En effet la dispersion estimée est la plus faible pour toutes les valeurs du paramètre de concentration  $\kappa_R^{(1)}$ .

Paramètres $\kappa_R^{(1)} = \kappa_R^{(2)}$	Dispersion angulaire		
	Mesure	Somme pondérée	Fusion circulaire
1	0.5405	0.6315	0.4321
2	0.3089	0.4057	0.1874
3	0.1852	0.3156	0.1027
4	0.1374	0.2712	0.0727
5	0.1059	0.2482	0.0542
6	0.0891	0.2410	0.0446
7	0.0723	0.2089	0.0367
8	0.0649	0.1908	0.0314
9	0.0575	0.2066	0.0290
10	0.0516	0.1899	0.0254

TAB. 4.1 – Dispersion des mesures angulaires

On notera dans ce tableau que la somme pondérée est moins précise que la mesure car sa dispersion angulaire estimée est la plus grande. Ce résultat s'explique par la non prise en compte des transitions entre 0 et  $2\pi$  par l'opérateur de fusion somme pondérée. De plus, pour de fortes valeurs de  $\kappa_R^{(1)}$  la dispersion circulaire de l'opérateur de fusion circulaire est proche de sa valeur théorique  $\kappa_f = \kappa_R^{(1)}/2$  car la contrainte sur  $\kappa_f$  définie au paragraphe 4.2.3 est vérifiée.

### Cas scalaire

On reporte sur les figures 4.7 l'évolution de la direction réelle, de la mesure, et de la direction estimée par filtrage. Sur la figure 4.7.(a) on représente la mesure et l'estimation obtenues pour un bruit ayant une distribution de von Mises de paramètre de concentration  $\kappa_R = 3$ . On représente sur la figure 4.7.(b) la mesure et l'estimation obtenues pour un bruit ayant une distribution de von Mises de paramètre de concentration  $\kappa_R = 10$ . Sur ces figures, la direction estimée est obtenue par le filtre circulaire proposé et par un filtre de Kalman. Dans cette expérimentation la covariance du bruit de modèle du filtre de Kalman est 0.1 et la covariance du bruit de mesure est 1. La covariance du bruit de modèle du filtre circulaire est 70 pour  $\kappa_R = 3$  et 100 pour  $\kappa_R = 10$ .

On observe sur les figures 4.7.(a) et 4.7.(b) que la direction estimée par le filtre proposé est plus proche de la direction réelle comparée à la mesure et à la direction estimées par le filtre de Kalman. On notera notamment que la différence entre les estimés obtenus par les deux filtres est importante aux transitions entre 0 et  $2\pi$ . En effet dans ce cas le filtre de Kalman défini dans le domaine linéaire, observe une variation d'angle qui n'existe pas dans le domaine circulaire. Pour un faible bruit et une direction proche de  $\pi$  l'estimation fournie par le filtre de Kalman est proche de l'estimation fournie par le filtre circulaire.

On reporte sur les figures 4.8 la distance circulaire entre la direction réelle et la direction estimée. La distance reportée est obtenue pour les mesures et estimations de la figure 4.7.

Les résultats présentés sur les figures 4.8.(a) et 4.8.(b) confirment les observations réalisées sur les directions estimées. En effet la distance circulaire est plus faible pour le filtre circulaire

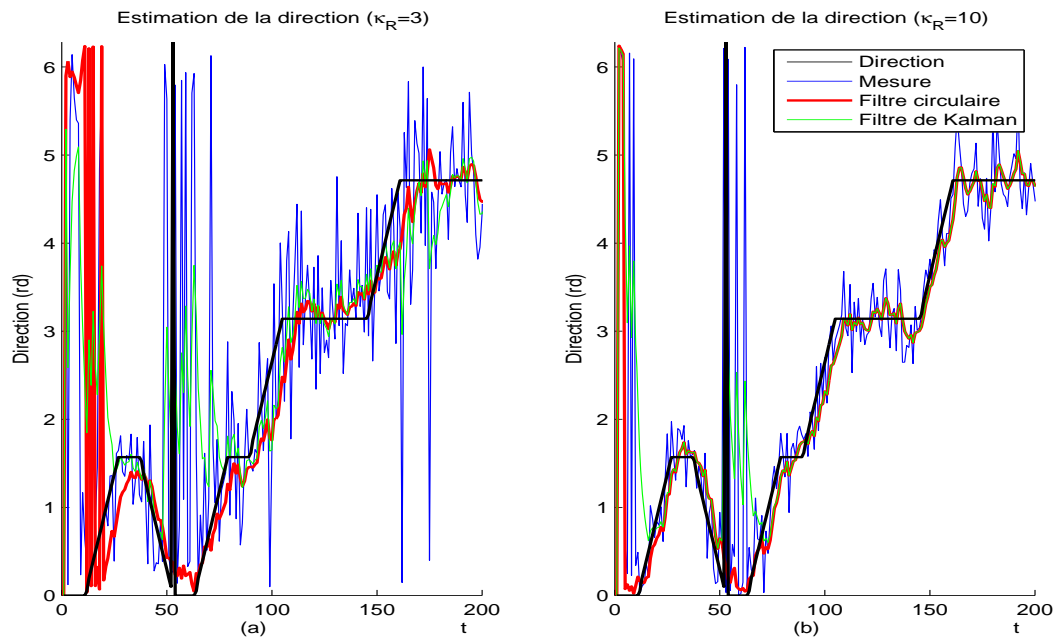


FIG. 4.7 – Estimation de la direction par filtrage

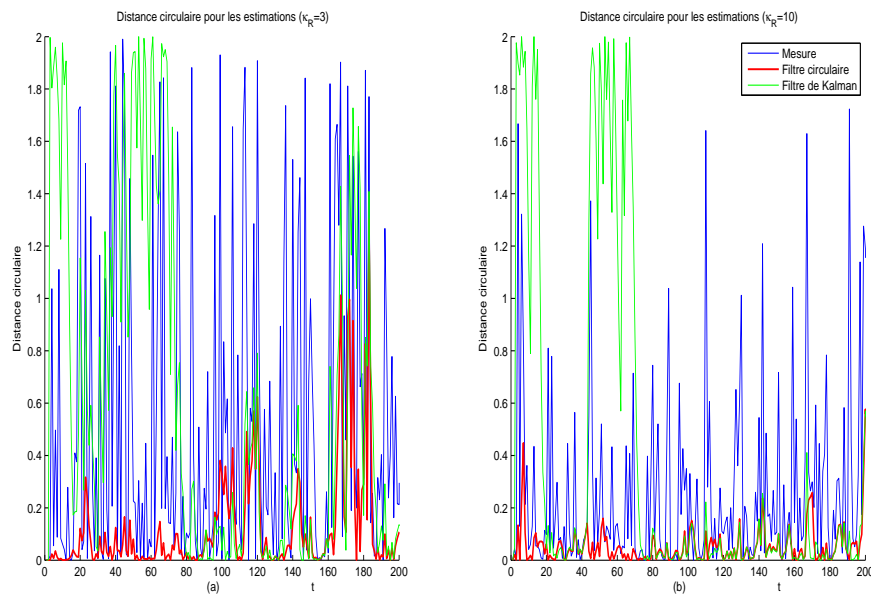


FIG. 4.8 – Evolution de la distance circulaire pour  $\kappa_R = 3$  et  $\kappa_R = 10$

proposé.

On reporte dans le tableau 4.2 la dispersion angulaire estimée entre la direction réelle et la

direction estimée par filtrage. La dispersion est calculée pour différentes valeurs du paramètre de concentration  $\kappa_R$  du bruit de mesure.

Les résultats reportés dans le tableau 4.2 montrent que le filtre proposé est plus précis comparé

Paramètre $\kappa_R$	Dispersion angulaire		
	Mesure	Filtre de Kalman	Filtre circulaire
1	0.5641	0.5979	0.2180
2	0.3018	0.4016	0.0638
3	0.1935	0.3225	0.0359
4	0.1446	0.2791	0.0267
5	0.1082	0.2640	0.0195
6	0.0891	0.2331	0.0160
7	0.0754	0.2183	0.0142
8	0.0643	0.2309	0.0107
9	0.0587	0.2343	0.0102
10	0.0531	0.2235	0.0093

TAB. 4.2 – Dispersion des estimations angulaires

au filtre de Kalman. En effet, la dispersion de l'angle estimé par le filtre circulaire est plus faible pour toute les valeurs de  $\kappa_R$  comparée à celle fournie par le filtre de Kalman. Là encore les transitions entre 0 et  $2\pi$  mettent le filtre de Kalman en défaut et la dispersion de son estimation est alors supérieure à la dispersion de la mesure.

### Cas vectoriel

On reporte sur la figure 4.9.(a) l'évolution de la direction réelle, de la mesure, et de la direction estimée par filtrage. On reporte sur la figure 4.9.(b) l'évolution de la variation angulaire réelle (produit de la vitesse angulaire par l'intervalle de temps entre deux mesures), de la mesure, et de la variation angulaire estimée par filtrage. Sur la figure 4.9.(a), on représente la mesure et l'estimation obtenues pour un bruit ayant une distribution de von Mises de paramètre de concentration  $\kappa_{1,R} = 3$ . On représente sur la figure 4.9.(b) la mesure et l'estimation obtenues pour un bruit ayant une distribution de von Mises de paramètre de concentration  $\kappa_{2,R} = 30$ . Sur ces figures, la direction et la variation angulaire estimées sont obtenues par le filtre circulaire proposé et par un filtre de Kalman. Dans cette expérimentation la covariance du bruit de modèle du filtre de Kalman est  $Q \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et la covariance du bruit de mesure est  $R \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Le paramètre de concentration du bruit de modèle du filtre circulaire est  $\kappa_Q \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$  pour

$$\kappa_R \begin{bmatrix} \kappa_{1,R} & 0 \\ 0 & \kappa_{2,R} \end{bmatrix}.$$

On peut observer sur la figure 4.9.(a) que l'estimation de la direction par le filtre circulaire proposé suit mieux la direction réelle. On bénéficie dans ce cas de l'information apportée par l'estimation de la variation angulaire. Le filtre de Kalman est dans ce cas complètement défaillant



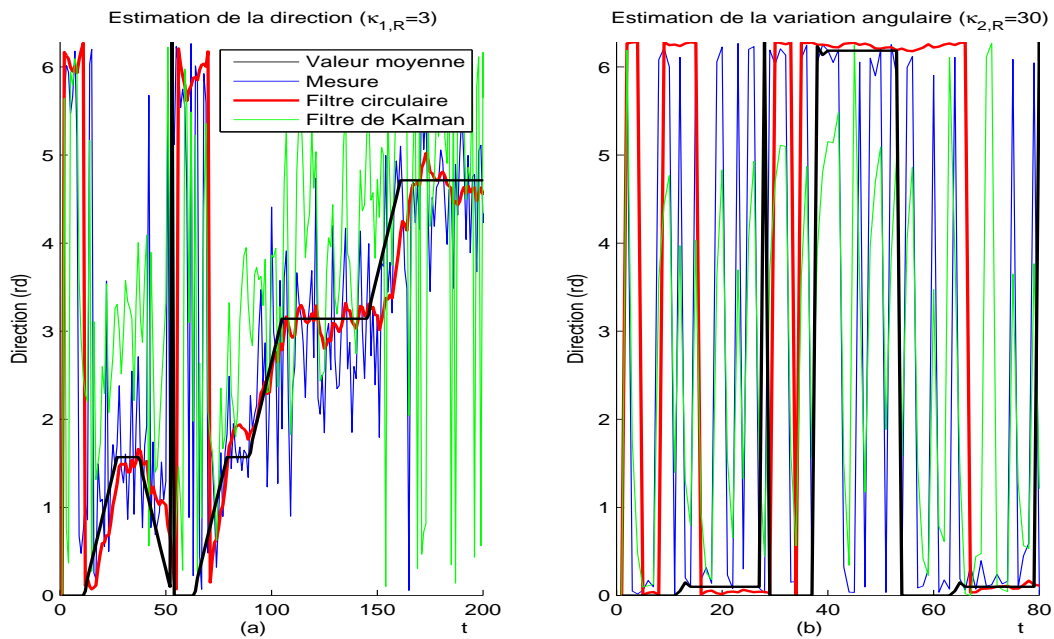


FIG. 4.9 – Estimation de la direction et de la variation angulaire par filtrage

car il perçoit les variations angulaires proches de zéro comme une succession de ruptures provoquées par la transition entre 0 et  $2\pi$ .

On reporte sur les figures 4.10 la distance circulaire des directions et variations d'angles estimés. La distance reportée est obtenue pour les mesures et estimations de la figure 4.9.

Les résultats présentés sur les figures 4.10.(a) et 4.10.(b) confirment les observations réalisées sur les directions et les variations d'angle estimées. En effet la distance circulaire est plus faible pour le filtre circulaire proposé.

On reporte dans le tableau 4.3 la dispersion angulaire estimée entre la direction réelle et la direction estimée par filtrage. La dispersion est calculée pour différentes valeurs du paramètre de concentration  $\kappa_{1,R}$  du bruit de mesure.

On reporte dans le tableau 4.4 la dispersion angulaire estimée entre la variation angulaire réelle et la variation angulaire estimée par filtrage. La dispersion est calculée pour différentes valeurs du paramètre de concentration  $\kappa_{2,R}$  du bruit de mesure.

Les résultats reportés dans les tableaux 4.3 et 4.4 montrent que le filtre proposé est plus précis comparé au filtre de Kalman. En effet la dispersion de l'angle et de la variation angulaire estimées par le filtre circulaire sont plus faibles pour toutes les valeurs de  $\kappa_{1,R}$  et  $\kappa_{2,R}$  comparées à celles fournies par le filtre de Kalman. Là encore les transitions entre 0 et  $2\pi$  mettent le filtre de Kalman en défaut et la dispersion de son estimation est alors supérieure à la dispersion de la mesure.

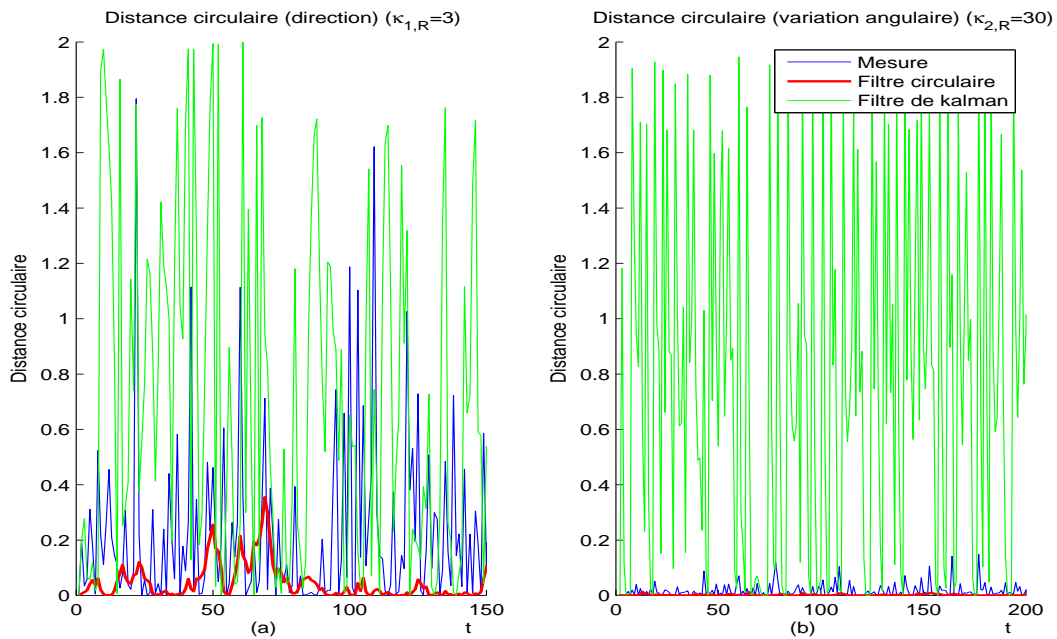


FIG. 4.10 – Evolution de la distance circulaire des directions et variations d’angles estimées

Paramètre $\kappa_{1,R}$	Dispersion angulaire		
	Mesure	Filtre de Kalman	Filtre circulaire
1	0.5787	0.8947	0.1654
2	0.3037	0.8343	0.0424
3	0.1794	0.7957	0.0302
4	0.1329	0.7714	0.0203
5	0.1085	0.7531	0.0187
6	0.0854	0.7028	0.0137
7	0.0787	0.7299	0.0131
8	0.0627	0.7324	0.0121
9	0.0577	0.6958	0.0092
10	0.0515	0.7101	0.0079

TAB. 4.3 – Dispersion des estimations angulaires

#### 4.5.2 Evaluation du détecteur de ruptures circulaire

A présent, on souhaite dans cette expérimentation comparer les performances du filtre récursif circulaire proposé intégrant un détecteur de ruptures avec le filtre de détection de ruptures Kalman GLR (Generalized Likelihood Ratio) classique. On suppose ici que le processus étudié est stationnaire par morceaux[GUS00]. On représente sur la figure 4.11 le signal angulaire sans bruit superposé à une réalisation du processus aléatoire qui modélise la mesure bruitée. On considère que la mesure de la direction suit une loi de von Mises de paramètre de concentration

Paramètre $\kappa_{2,R}$	Dispersion angulaire		
	Mesure	Filtre de Kalman	Filtre circulaire
30	0.0166	0.8444	0.0058
60	0.0083	0.8474	0.0028
90	0.0056	0.8141	0.0020
120	0.0043	0.8136	0.0014
150	0.0032	0.8025	0.0011
180	0.0029	0.8035	0.0010
210	0.0022	0.7967	0.0008
240	0.0020	0.7727	0.0007
270	0.0019	0.7928	0.0006
300	0.0017	0.7825	0.0001

TAB. 4.4 – Dispersion des estimations de la variation angulaires

$\kappa = 3$ . Les amplitudes des ruptures sont :  $\delta_r = \{1, 1, 1.5, -0.5, -1, -1.5\}$ . Elle se produisent aux instants :  $r = \{50, 100, 150, 200, 250, 300\}$ .

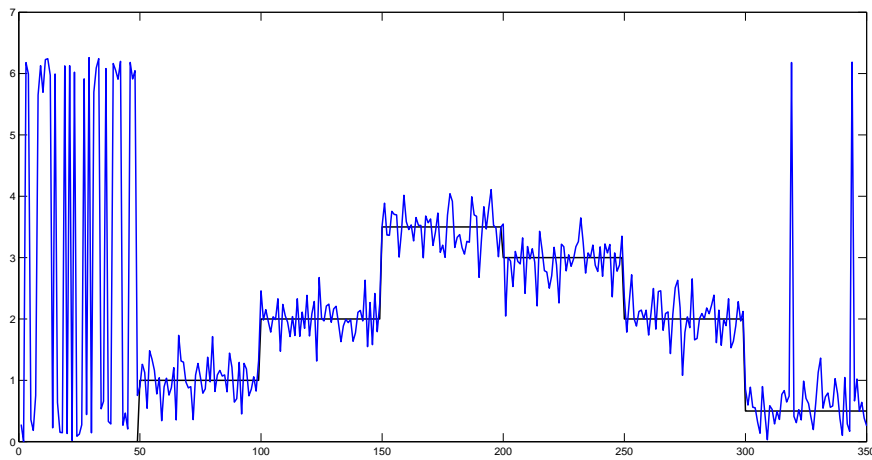


FIG. 4.11 – Exemple de processus et de réalisation du bruit

On remarquera sur la figure 4.11 que dans le cas de la direction, le signal est fortement non stationnaire pour les angles proches de zéro (angles reportés entre 0 et  $2\pi$ ). Ces non-stationnarités sont provoquées par les transitions d'angle entre zéro et  $2\pi$ . Pour remédier à ce problème, on peut imaginer de modifier l'intervalle de définition de l'angle. Cependant cette transformation nécessite de connaître la valeur moyenne du signal que l'on souhaite estimer, ce qui n'est pas toujours possible en pratique, surtout en présence d'un bruit de grande variance.

On reporte sur la figure 4.12 les distributions empiriques des ruptures détectées sur 1000 réalisations de processus qui modélisent l'évolution de la direction. Sur la figure de gauche, on reporte la distribution empirique des ruptures détectées par le filtre récursif circulaire proposé et sur la figure de droite, on reporte la distribution empirique des ruptures détectées pour une segmentation réalisée avec le filtre classique Kalman GLR. On considère qu'une rupture est détectée lorsqu'elle est observée à sa position réelle ou proche de cette position. Une fausse-alarme est une rupture détectée avant sa position réelle. Dans cette expérimentation, les seuils des deux filtres sont fixés pour que la probabilité de détecter une rupture à la position 150 soit la même. On fixe de cette façon la probabilité de détection et on compare les filtres avec les résultats obtenus pour les autres ruptures. A la position 150, la dynamique de la rupture est choisie pour que les performances des filtres en termes de probabilités de détection et de fausses-alarmes soient proches.

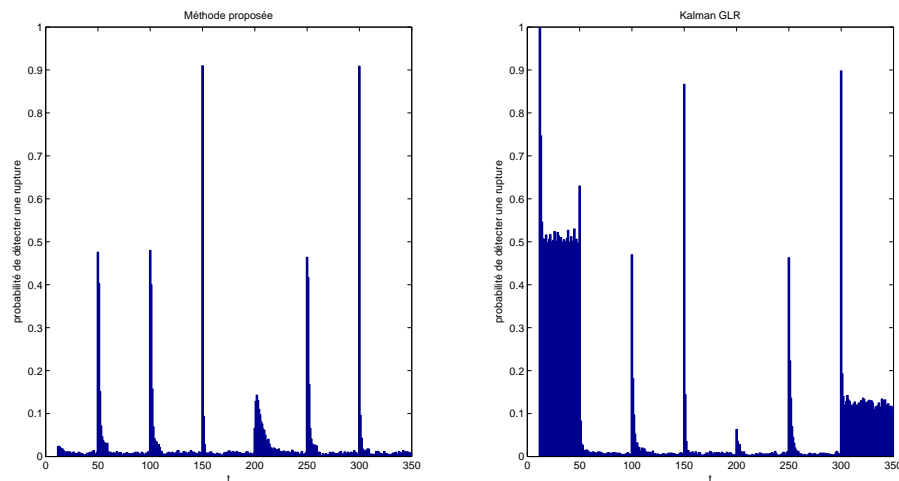


FIG. 4.12 – Distribution empirique des ruptures détectées

On montre sur cette figure que les deux filtres ont des performances semblables pour les angles proches de  $\pi$  mais que le filtre circulaire fournit une meilleure détection des ruptures d'angles proches de zéro (moins de fausses-alarmes). On remarquera un grand nombre de fausses-alarmes, provoquées par les transitions entre 0 et  $2\pi$ , dans le cas du filtre Kalman GLR appliqué à la direction du mobile. L'erreur moyenne et la variance, de la somme des distances circulaires [JAM01] entre la direction estimée et sa valeur réelle, sont de (17.06/1.88) pour le filtre proposé, et de (28.58/24.41) pour le filtre de Kalman GLR.

En conclusion, la comparaison des distributions empiriques obtenues par les filtres proposés et le filtre de Kalman GLR montre que l'on obtient par le filtre récursif circulaire des instants de ruptures détectées plus concentrés autour de leurs positions réelles. De plus, on montre une estimation plus précise de la direction moyenne dans les zones stationnaires.

## 4.6 Conclusion

Le thème de ce chapitre porte sur l'étude de méthodes de traitements du signal pour les données angulaires. Dans l'approche courante, on utilise pour ce type de données une modélisation du problème du domaine linéaire. Dans ce cas les méthodes proposées s'appuient sur des approximations. En effet concernant la distribution des variables aléatoires, la loi normale est une approximation de la loi circulaire normale. Cette approximation reste pertinente pour des petits angles et une loi centrée ou de moyenne proche du centre de l'intervalle de définition des angles aléatoires. En revanche, la topologie du cercle et la périodicité des données impliquent une re-définition des distances et des estimateurs quand on s'éloigne du centre de cet intervalle. Pour contourner ces problèmes, nous proposons dans ce chapitre de définir un opérateur de fusion et des filtres à partir de la distribution de von Mises (loi circulaire normale) qui intègre dans son expression la périodicité des données.

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'étude et la mise en oeuvre d'un filtre récursif circulaire et d'un opérateur de fusion de mesures angulaires. Ce travail est appliqué à l'estimation de données angulaires distribuées suivant une distribution de von Mises. Dans notre problème, nous estimons la vitesse angulaire et la direction à partir de mesures en provenance de plusieurs capteurs. L'opérateur de fusion proposé fusionne des données angulaires supposées être des variables aléatoires circulaires. Le filtre récursif est obtenu à partir de la modélisation bayésienne du problème d'estimation définie dans le cadre circulaire. En effet, dans le cas de la fusion multi-capteurs, l'expression de l'opérateur de fusion est déduite des distributions de vraisemblance du paramètre à estimer sachant les mesures suivent une distribution de von Mises. Le filtre récursif d'estimation est obtenu dans le cadre bayésien à partir de la distribution *a posteriori* du paramètre sachant les mesures. Dans notre approche la distribution *a posteriori* est une distribution de von Mises. Finalement nous avons proposé un estimateur de rupture dans la moyenne d'un processus angulaire qui intègre le filtre circulaire pour l'estimation des paramètres du système et un détecteur de ruptures pour la détection des sauts de moyenne.

Dans ce travail, nous avons comparé les estimateurs proposés pour l'estimation de données angulaires avec les estimateurs classiques utilisés dans le domaine linéaire. Pour la fusion de mesures, nous avons comparé la méthode proposée avec la somme pondérée qui est l'opérateur de fusion classique du domaine linéaire. Pour l'estimation des paramètres du système linéaire étudié, nous avons comparé le filtre circulaire proposé dans le cas scalaire et vectoriel avec le filtre de Kalman. Finalement, nous avons comparé le détecteur de ruptures proposé avec le filtre de Kalman GLR classiquement utilisé dans le domaine linéaire pour l'estimation et la détection des ruptures dans un processus stationnaire par morceaux.

Les expérimentations réalisées sur des données synthétiques montre la faisabilité de notre approche. La comparaison des résultats obtenus par notre filtre circulaire avec les résultats obtenus par les filtres récursifs linéaires classiques et un opérateur de fusion linéaire, montrent l'intérêt d'une telle approche. Nous montrons en effet, que l'estimation obtenue par le filtre que nous proposons est plus précise lorsqu'on compare les dispersions circulaires et la distance circulaire entre la valeur de l'angle et son estimation. En outre, en présence de transitions entre 0 et  $2\pi$ , le filtre proposé est mieux adapté car les transitions ne sont pas considérées par le filtre

circulaire comme des changements brusques.

Les perspectives de ce travail concernent principalement la corrélation dans le domaine circulaire. En effet il existe plusieurs distributions circulaires qui intègrent dans leurs représentations la corrélation entre les variables aléatoires. Cependant ces distributions n'ont pas de forme simple permettant, par exemple, de définir un opérateur de fusion au sens du maximum de vraisemblance. De plus elles ne permettent pas la résolution de l'équation de Chapman Kolmogorov et la définition de la loi *a posteriori* dans le cadre du filtrage bayésien. Finalement il n'existe pas dans le domaine circulaire d'estimateur des paramètres statistiques de ces distributions. La résolution de ces problèmes par des approches numériques constitue aujourd'hui une perspective de ce travail.



# Chapitre 5

## Application au positionnement satellitaire

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre on souhaite mettre à l'épreuve les méthodes décrites dans les chapitres 3 et 4 et montrer leur apport pour le calcul de la position d'un récepteur GPS. Dans ce chapitre expérimental les simulations seront réalisées pour un signal GPS L2C. La méthode proposée sera comparée avec deux techniques de poursuite présentées au chapitre 1 : le Match Filter, et l'algorithme de boucle de poursuite vectorielle. Ces méthodes de poursuite utilisent un calcul de discriminant en boucle fermée faisant intervenir une correction de la phase et une correction du décalage de code à chaque échantillon traité. Nous cherchons ici à éviter les erreurs liées à ces corrections en réalisant la poursuite avec des boucles ouvertes. De plus, nous nous servons dans notre approche de connaissances *a priori* sur l'évolution des variations du discriminant disponible dans le récepteur GPS. Cette information *a priori* permet d'améliorer la poursuite des signaux par une meilleure estimation du décalage de code.

Par ailleurs, les signaux GPS L2C ont la particularité d'être émis à la fois sur une voie de données et une voie pilote. Les méthodes proposées dans les chapitres précédents sont ainsi utilisées à travers la mise en oeuvre de deux boucles ouvertes. La première pour la poursuite du code utilisant le détecteur de ruptures ainsi que l'opérateur de fusion non-linéaire sur ces deux voies (chapitre 3). La seconde pour la poursuite de la phase en utilisant le filtre statistique circulaire (chapitre 4). En plus de réduire le nombre d'erreurs d'estimation générées lors du traitement, les algorithmes proposés permettent une meilleure extraction des informations du signal en cas de faible rapport signal à bruit, ce qui impliquera une meilleure estimation des pseudo-distances satellite-récepteur et donc de la position du récepteur.

On évaluera les algorithmes proposés à l'aide de signaux GPS L2C simulés dans un contexte réel et échantillonnés avec une fréquence de 6 MHz. Ces expérimentations seront réalisées dans le cas d'un récepteur statique ainsi que dans le cas d'un récepteur en mouvement. Les positions sont obtenues pour chaque durée du code CM émis sur la voie de données, soit toutes les 20 millisecondes. Nous comparons pour les trois méthodes (Match Filter, boucle de poursuite vectorielle et solution proposée) l'erreur sur la pseudo-distance satellite-récepteur, l'erreur sur la phase ainsi que l'erreur sur la position. Ces expérimentations sont réalisées pour différents



rapports signal sur bruit allant de 50 dBHz à 20 dBHz.

Après cette introduction, nous présentons dans une première partie, le principe de l'évolution du discriminant Early-Minus-Late en prenant en compte l'échantillonnage des signaux. Nous détaillons dans une deuxième partie le principe de la poursuite du signal GPS avec des boucles de code et de phase ouvertes. Finalement la méthode proposée est évaluée expérimentalement dans une troisième partie sur signaux synthétiques.

## 5.2 Variations du discriminant et discrétisation

A sa réception, le signal GPS est numérisé avec une fréquence d'échantillonnage fixée  $f_{ech}$ . Lors de la poursuite, les décalages de code ne peuvent donc être visibles que si ils sont supérieurs à  $T_{ech} = 1/f_{ech}$  : tant que le décalage ne dépasse pas la durée  $T_{ech}$ , la valeur moyenne du discriminant reste constante. Lorsque le décalage dépasse la durée  $T_{ech}$ , le discriminant effectue un saut de moyenne. L'algorithme de poursuite classique (Match Filter) utilise un seuil pour différencier ce saut des effets du bruit sur le discriminant. En conséquence, dans le cas où le code n'est pas recalé, on observe une stationnarité par morceaux du discriminant.

On considère que le générateur de code utilise un décalage entre les codes Early et Late de  $\Delta = T_b$ , avec  $T_b$  la durée d'un bit de code CDMA. Le discriminant Early-Minus-Late, dans le cas où le code local n'est pas recalé sur le code reçu, présente alors un extremum lorsque le décalage du code est de  $\pm \frac{T_b}{2}$ . En effet, à l'instant  $k$ , on a :

$$I_{E,k} = I_k\left(\frac{T_c}{2}\right) = n_k \sqrt{2 S/N_0 T_c} R\left(\tau_{e,k} - \frac{T_b}{2}\right) \text{sinc}\left(\left(f_{e,k} + \alpha_{e,k} \frac{T_c}{2}\right) T_c\right) \cos(\phi_{e,k}) + \eta_k^I \quad (5.1)$$

$$I_{L,k} = I_k\left(-\frac{T_c}{2}\right) = n_k \sqrt{2 S/N_0 T_c} R\left(\tau_{e,k} + \frac{T_b}{2}\right) \text{sinc}\left(\left(f_{e,k} + \alpha_{e,k} \frac{T_c}{2}\right) T_c\right) \cos(\phi_{e,k}) + \eta_k^L \quad (5.2)$$

Notons que la valeur du message de navigation  $n_k$  à l'instant  $k$  sur la voie de données est obtenue par la boucle de poursuite de la phase. On pose :

$$F_k = n_k \sqrt{2 S/N_0 T_c} \text{sinc}\left(\left(f_{e,k} + \alpha_{e,k} \frac{T_c}{2}\right) T_c\right) \cos(\phi_{e,k}) \quad (5.3)$$

La valeur du discriminant  $D_k = I_{E,k} - I_{L,k}$  est alors :

$$D_k = F_k \left( R\left(\tau_{e,k} - \frac{T_b}{2}\right) - R\left(\tau_{e,k} + \frac{T_b}{2}\right) \right) \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

Rappelons que la fonction de corrélation normalisée est définie par :

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_b} & \text{pour } 0 \leq |\tau| \leq T_b \\ 0 & \text{pour } T_b \leq |\tau| \end{cases} \quad (5.6)$$

On différencie cinq cas pour le calcul de corrélation.

– Pour  $\tau_{e,k} \leq -\frac{3T_b}{2}$ , on obtient :

$$D_k = 0 \quad (5.7)$$

– Pour  $-\frac{3T_b}{2} \leq \tau_{e,k} \leq -\frac{T_b}{2}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} D_k &= F_k \left( -1 - \frac{\tau_{e,k} + \frac{T_b}{2}}{T_b} \right) \\ D_k &= -\frac{3F_k}{2} - \frac{F_k}{T_b} \tau_{e,k} \end{aligned} \quad (5.8)$$

– Pour  $-\frac{T_b}{2} \leq \tau_{e,k} \leq \frac{T_b}{2}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} D_k &= F_k \left( 1 - \frac{\frac{T_b}{2} - \tau_{e,k}}{T_b} - 1 + \frac{\tau_{e,k} + \frac{T_b}{2}}{T_b} \right) \\ D_k &= \frac{2F_k}{T_b} \tau_{e,k} \end{aligned} \quad (5.9)$$

– Pour  $\frac{T_b}{2} \leq \tau_{e,k} \leq \frac{3T_b}{2}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} D_k &= F_k \left( 1 - \frac{\tau_{e,k} - \frac{T_b}{2}}{T_b} \right) \\ D_k &= \frac{3F_k}{2} - \frac{F_k}{T_b} \tau_{e,k} \end{aligned} \quad (5.10)$$

– Pour  $\frac{3T_b}{2} \leq \tau_{e,k}$ , on obtient :

$$D_k = 0 \quad (5.11)$$

Chaque cas correspond à une évolution linéaire du discriminant. La figure 5.1 représente les résultats obtenus en fonction de l'échantillon traité  $k$ , en bleu dans le cas où le décalage  $\tau_{e,k}$  est positif et en rouge dans le cas inverse. Le maximum du discriminant en valeur absolue est atteint en  $\pm\frac{T_b}{2}$ . Les variations représentées sont continues. C'est le cas où la discrétisation du signal suivant une fréquence d'échantillonnage fixée n'est pas prise en compte.

Quand le satellite se rapproche du récepteur le décalage évolue négativement. Le discriminant Early-Minus-Late a une évolution décroissante pour  $|\tau_{e,k}| < \frac{T_b}{2}$ , puis croissante pour  $\frac{3T_b}{2} > |\tau_{e,k}| > \frac{T_b}{2}$ . Ce comportement s'inverse pour un satellite s'éloignant du récepteur. Le discriminant est nul pour  $|\tau_{e,k}| > \frac{3T_b}{2}$ .

On représente sur la figure 5.2 l'évolution du discriminant pour un signal échantillonné, et lorsque le code n'est pas recalé. Dans ce cas l'évolution du discriminant est stationnaire par morceaux. Lorsque l'on diminue le rapport signal sur bruit (figure 5.3), les stationnarités par morceaux du discriminant sont moins visibles.

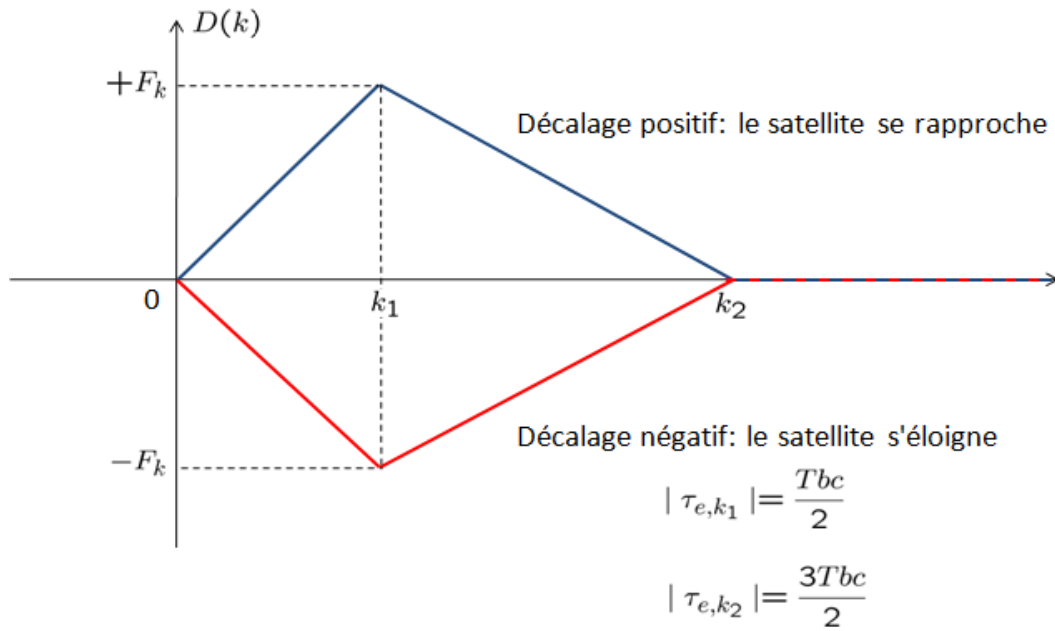


FIG. 5.1 – Variations continues du discriminant sans recalage de code

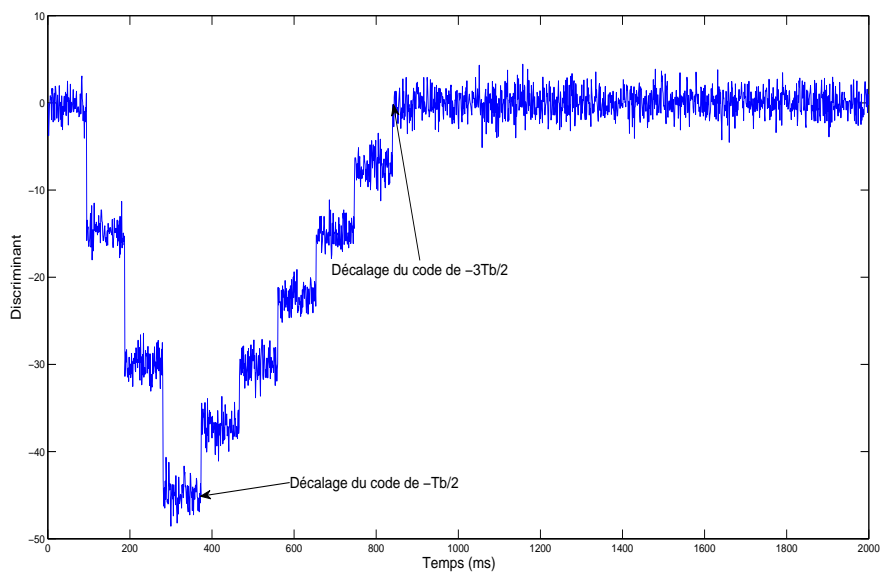


FIG. 5.2 – Variations du discriminant sans recalage de code pour un rapport signal sur bruit de 50 dBHz et une fréquence d'échantillonnage de 6MHz

En effet, la fréquence d'échantillonnage du signal est de  $f_{ech} = 6$  MHz. Le discriminant change de valeur moyenne pour les valeurs de  $\tau_{e,k}$  multiples de  $\frac{10^{-6}}{6}$  s. Or  $T_b = 10^{-6}$  s et le

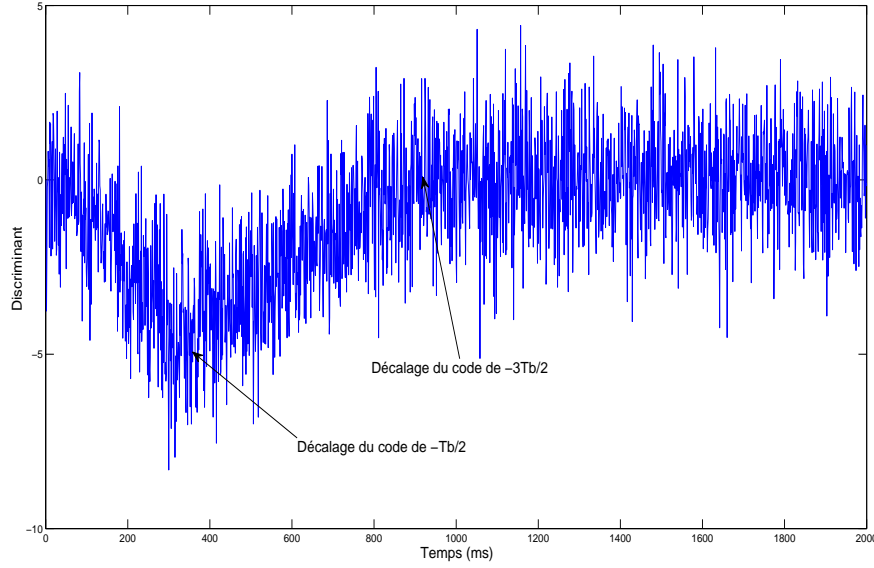


FIG. 5.3 – Variations du discriminant sans recalage de code pour un rapport signal sur bruit de 30 dBHz et une fréquence d'échantillonnage de 6MHz

discriminant est maximum quand  $|\tau_{e,k}| = \frac{T_b}{2}$ . Dans ce cas on obtient trois paliers du discriminant entre  $\tau_{e,k} = 0$  et  $\tau_{e,k} = \frac{T_b}{2}$ . En effet, chaque palier est atteint lorsque le code a été décalé de  $\frac{1}{f_{ech}}$ . La pente de la droite de l'équation 5.8, à savoir  $-\frac{2F_k}{T_b}$ , permet d'obtenir la valeur du discriminant  $D_k$  pour chaque palier :

$$D_k \left( \frac{1}{f_{ech}} \right) = -\frac{2F_k}{T_b f_{ech}} \quad (5.12)$$

$$D_k \left( \frac{2}{f_{ech}} \right) = -\frac{4F_k}{T_b f_{ech}} \quad (5.13)$$

$$D_k \left( \frac{3}{f_{ech}} \right) = -\frac{6F_k}{T_b f_{ech}} = -F_k \quad (5.14)$$

On remarque en particulier que  $\max(|D_k|) = \max(|F_k|)$ , lorsque les erreurs sur la fréquence ( $f_{e,k}$ ), sur la phase ( $\phi_{e,k}$ ) et sur l'accélération fréquentielle ( $\alpha_{e,k}$ ) sont proches de 0, les termes en sinus cardinal et en cosinus de l'équation 5.3 sont proches de 1. On a alors :

$$\max(|D_k|) \approx \sqrt{2 S/N_0 T_c} \quad (5.15)$$

Cette valeur permet de définir le seuil de détection des variations du discriminant.

Dans ce contexte, on peut définir l'instant et la valeur du maximum du discriminant en fonction du rapport signal sur bruit et de la vitesse satellite-récepteur. Nous reportons dans le tableau 5.1 la valeur minimale du discriminant  $D_k$  en fonction du rapport signal sur bruit et dans le tableau 5.2 l'instant du maximum du discriminant pour différentes vitesses satellite-récepteur

[TSU00].

	50 dBHz	40 dBHz	30 dBHz	20 dBHz	10 dBHz	0 dBHz
$\min(D_k)$	-44.71	-14.14	-4.46	-1.41	-0.45	-0.14

TAB. 5.1 – Valeur minimale du discriminant  $D_k$  en fonction du rapport signal sur bruit

	929m/s	700 m/s	500 m/s	400m/s	100 m/s
Instant du maximum de $ D_k $	161	214	300	375	1490

TAB. 5.2 – Instant du maximum de  $|D_k|$  en fonction de la vitesse relative satellite-récepteur

### 5.3 Boucles de poursuite

Les méthodes classiques de poursuite de code et de la phase ont certaines limites intrinsèques. Il existe en particulier deux limites que nous tentons de résoudre à l'aide des méthodes proposées. La première est liée à la discrétisation du signal. En effet, la fréquence d'échantillonnage du signal joue un rôle important dans la poursuite du code et elle a une influence directe sur le calcul de la position. A la fréquence d'échantillonnage considérée pour le signal L2C, à savoir 6 MHz, la plus faible variation de pseudo-distance détectable est de 50 mètres :

$$\frac{C}{f_{ech}} = \frac{3e^8}{6e^6} = 50m \quad (5.16)$$

Ce qui correspond à l'erreur entre les pseudo-distances réelles et estimées. La seconde limite considérée est due à la poursuite classique de la phase. Dans un algorithme Match Filter comme dans une boucle de poursuite vectorielle, la correction de la phase implique une erreur résiduelle aléatoire à chaque recalage. Cette erreur est due en particulier à l'oscillateur interne de l'horloge du récepteur. Ces erreurs, cumulées, faussent le calcul de la pseudo-distance. La solution proposée dans ce chapitre est de mettre en oeuvre trois boucles de poursuite dont deux sont ouvertes. L'architecture du système de poursuite est présentée sur la figure 5.4.

Dans la boucle supérieure de cette figure, le générateur de code 1 utilise le décalage de code  $\tau_{e,k}$  obtenu par le discriminant 2 pour se synchroniser avec le code reçu. La phase  $\phi$  n'est quant à elle pas corrigée. Le filtre circulaire en sortie de cette boucle permet ainsi d'estimer ses variations dans le temps sans que les erreurs liées à sa correction n'apparaissent. Cette estimation  $\phi_{e,k}$  sera utilisée dans le générateur de la porteuse 2. Le discriminant (Early-Minus-Late) permet de recalibrer le code généré dans le générateur de code 2. Concernant la troisième boucle de poursuite, le générateur de la porteuse 3 utilise la phase  $\phi_{e,k}$  obtenue en sortie du filtre circulaire. Le générateur de code 3 ne se synchronise pas avec le code reçu tant qu'une rupture

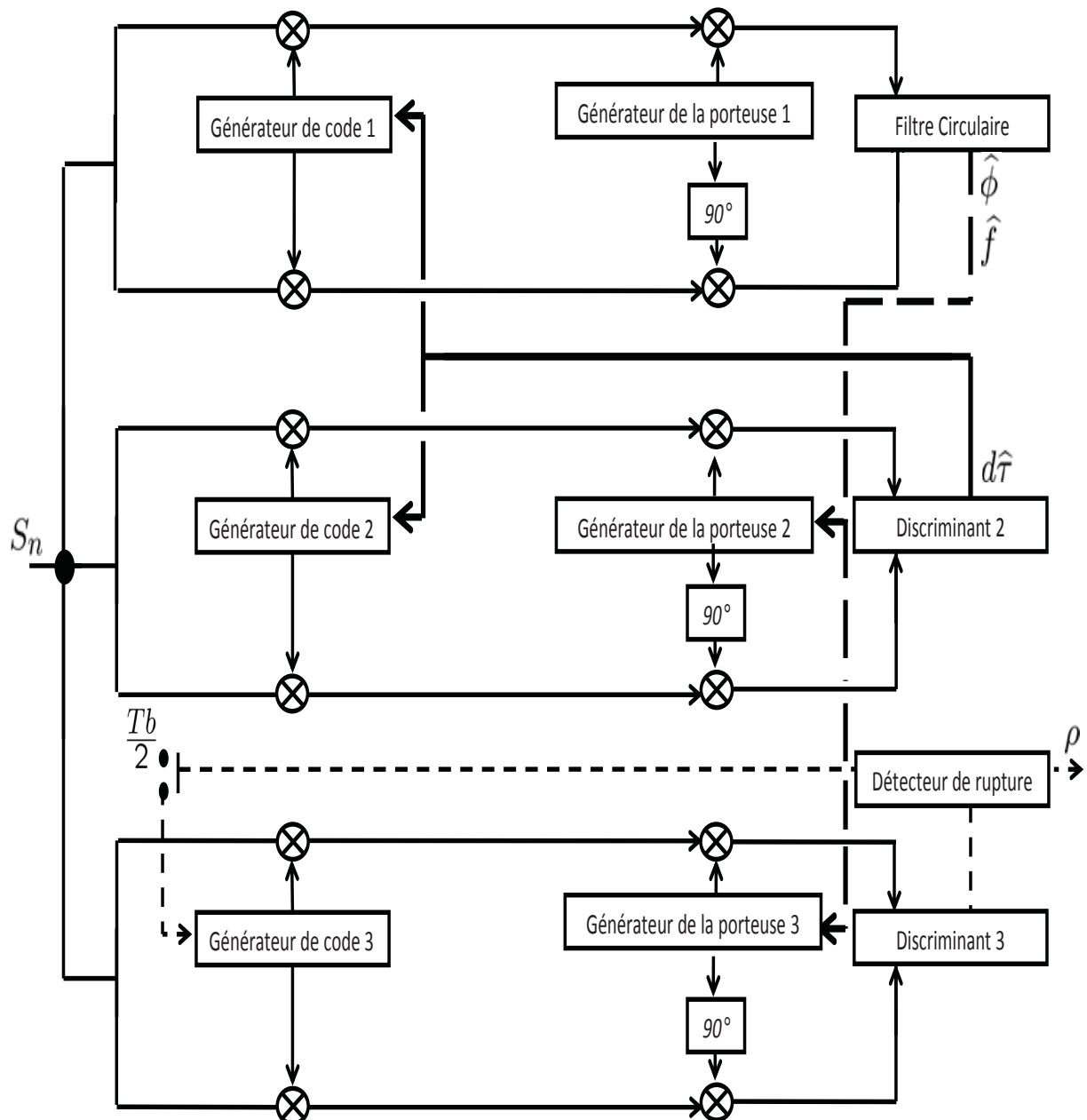


FIG. 5.4 – Architecture de l’algorithme de poursuite proposé

n’est pas détectée dans l’estimation du discriminant 3. Dans le cas où une rupture est détectée, le décalage de code est égal à  $\pm \frac{T_b}{2}$  (comme représenté sur la figure 5.1). Le code local de cette boucle est donc recalé de  $\frac{T_b}{2}$ . Par ailleurs, la pseudo-distance  $\rho$  est calculée à cet instant à l’aide de l’ensemble des estimations du discriminant 3. Cette méthode permet d’éviter les erreurs liées à la fréquence d’échantillonnage du signal dans les calculs de pseudo-distances. Les principes des deux boucles ouvertes utilisées sont exposés en détail dans les sections suivantes.

L'instant de cette rupture est détecté à l'aide du détecteur de ruptures présenté dans le chapitre 3. Trois paramètres principaux doivent être fixés, à savoir la taille de la fenêtre de test, le nombre minimal d'échantillons après la rupture pour que celle-ci puisse être détectée ainsi que le seuil de détection. La vitesse Doppler permet de fixer la taille de la fenêtre de test par l'intermédiaire du tableau 5.2. Pour obtenir les meilleurs résultats de détection possible, la fenêtre de test doit être de taille maximale. Par exemple, pour une vitesse satellite-récepteur de 500 m/s, la fenêtre sera de 300 échantillons. Dans notre expérimentation, on fixe le nombre minimal d'échantillons après la rupture pour que celle-ci puisse être détectée à 40. La valeur du seuil de détection est définie dans le paragraphe suivant.

### 5.3.1 Boucle ouverte de poursuite de code

Dans les méthodes classiques de poursuite de code, ce dernier est recalé lorsque le discriminant dépasse un seuil de  $\left| \frac{F_k}{T_b f_{ech}} \right|$ . A chacun de ces recalages, des erreurs résiduelles apparaissent. De plus, cette méthode ne permet pas de traiter des signaux à faible rapport signal sur bruit, la forte variance du bruit entraînant dans ce cas de nombreuses fausses détections du dépassement du seuil par le discriminant. Dans notre approche, on utilise une boucle ouverte de poursuite de code qui a pour but de ne recalé le code que lorsque le discriminant atteint un extremum, c'est à dire lorsque le décalage entre le code local et le code reçu a atteint  $\pm \frac{T_b}{2}$ . Cela se traduit par une amélioration du calcul de la pseudo-distance. En effet, les erreurs résiduelles liées aux recalages permanents du code sont moins nombreuses. De plus, cette méthode de détection de l'extremum permet de traiter des signaux de plus faibles rapports signal sur bruit.

Après l'acquisition, le discriminant obtenu en sortie de boucle est nul. Lors du traitement des échantillons de signal suivants, on génère le même code sans recalage et le discriminant Early-Minus-Late calculé varie de façon monotone, stationnaire par morceaux. Pour déterminer l'instant de rupture dans les variations du discriminant, la méthode proposée fait appel au filtre récursif de détection de rupture présenté au chapitre 3. Ce filtre récursif permet l'estimation du discriminant ainsi que la pente selon laquelle il évolue. L'innovation n'est pas calculée à partir des mesures mais à partir de la projection de ces mesures sur le palier inférieur dans le cas d'une pente positive et sur le palier supérieur dans le cas d'une pente négative (on considère ici les paliers de l'évolution stationnaire par morceaux du discriminant). Ce filtre donne une forte confiance au modèle et ne suit donc pas immédiatement le discriminant lorsque le sens de variation de celui-ci change, comme indiqué sur la figure 5.5. Une forte augmentation de l'innovation est alors détectée et l'instant de la rupture est ainsi obtenu. C'est seulement à cet instant que le générateur de code se synchronise avec le code du signal reçu en effectuant un décalage du code local de  $\frac{T_b}{2}$ . Après recalage on retrouve un discriminant nul, comme on l'observe sur la figure 5.6. Connaissant la valeur du décalage de code à cet instant, il est aisé de retrouver le décalage de code correspondant à chaque estimation du discriminant et donc de calculer la pseudo-distance correspondant à chaque échantillon traité.

Le seuil de détection de la rupture est fixé à l'aide de l'équation 5.13 à  $\frac{2F_k}{T_b f_{ech}}$ . En effet, tant que le décalage de code est inférieur à  $\frac{T_b}{2}$ , l'innovation est inférieure à la hauteur d'un saut de

discriminant. A l'instant de la rupture, en l'absence de correction, l'innovation dépasse ce seuil, comme on peut l'observer sur la figure 5.5.

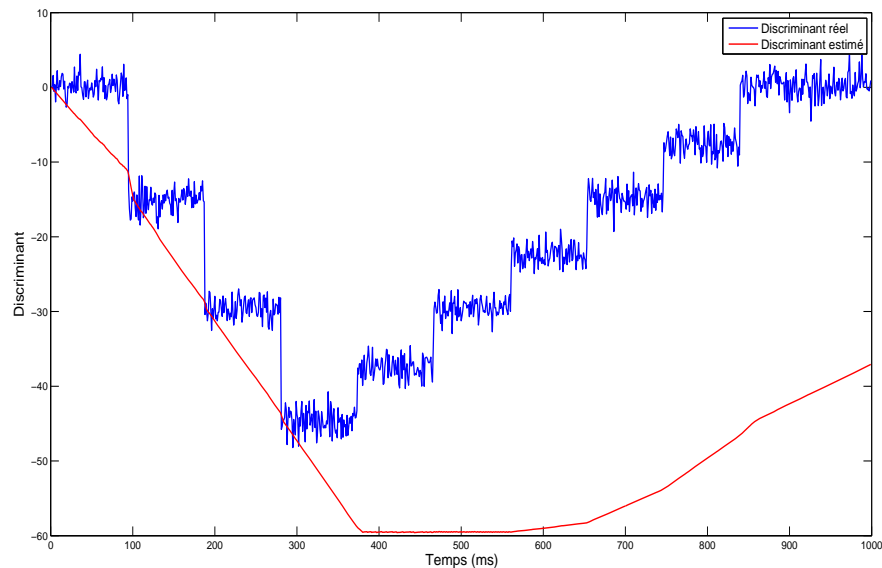


FIG. 5.5 – Estimations des valeurs de discriminant par le filtre récursif en l'absence de recalage de code

Pour améliorer les estimations dans les variations du discriminant, la boucle ouverte de poursuite de code utilise l'opérateur de fusion non linéaire décrit dans le chapitre 3 en se servant des informations obtenues sur les deux voies présentes sur L2C, à savoir la voie de données et la voie pilote. En effet, les codes présents sur ces voies, respectivement CM et CL, sont synchronisés lors de l'émission et donc de la réception du signal. On dispose d'une information *a priori* sous forme d'intervalles autour de la pente suivant laquelle est estimée l'évolution du discriminant. Pour déterminer les mesures de discriminant corrélées positivement sur les deux voies, on projette l'intervalle sur le pas de  $\left| \frac{2F_k}{T_b f_{ech}} \right|$  inférieur dans le cas d'une pente positive, et supérieur dans le cas d'une pente négative. La fusion non linéaire des deux voies permet en particulier de réduire les fausses détections obtenues en cas de forte puissance du bruit.

### 5.3.2 Boucle ouverte de poursuite de phase

Dans les méthodes classiques, la boucle de phase estime la différence entre la phase du signal reçu et la phase du signal local avec chaque valeur de discriminant, soit à chaque période du code CDMA. Cette estimation produit une erreur qui est reportée sur la nouvelle phase du signal local. De ce fait, au fil de la poursuite, les erreurs d'estimations s'accumulent lors du calcul de la phase.



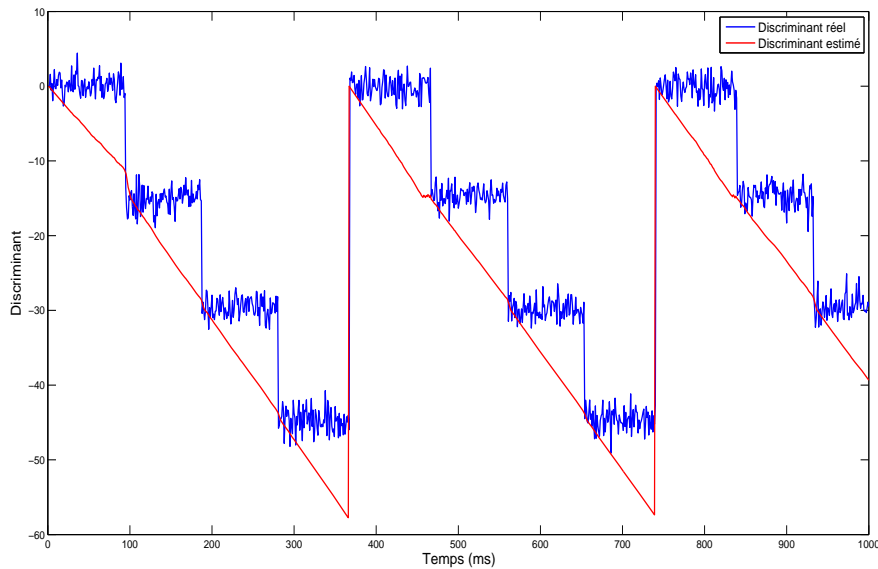


FIG. 5.6 – Estimations des valeurs de discriminant par la méthode proposée

La boucle ouverte de poursuite de phase permet d'obtenir la valeur du déphasage entre le signal reçu et le signal local. Cette valeur est reportée dans les générateurs de signaux des deux autres boucles. Dans ce cas, la phase estimée ne contient pas l'erreur d'estimation liée au recalage du signal local sur le signal reçu. Dans notre approche la phase calculée par la boucle ouverte est obtenue à l'aide du filtre circulaire présenté dans le chapitre 4. En effet, dans ce cas, l'évolution de la phase est comprise dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$ , ce qui ne permet pas d'utiliser un filtre classique du domaine linéaire.

## 5.4 Expérimentations

Les différentes expérimentations de ce chapitre ont été réalisées sur des données synthétiques. Nous simulons pour cela une constellation réelle de satellites au jour 3 de la semaine GPS 1291 à 12 heures, 00 minute et 00 seconde, que nous présentons sur la figure 5.7. L'antenne du récepteur est positionnée sur le toit du Laboratoire Informatique, Signal et Image de la Côte d'Opale. Le signal simulé est du type L2C. Les différents rapports signal sur bruit considérés sont 50 dBHz, 40 dBHz, 30 dBHz et 20 dBHz. La fréquence d'échantillonnage des signaux est fixée à 6 Mhz. Chaque expérimentation durera 40 secondes.

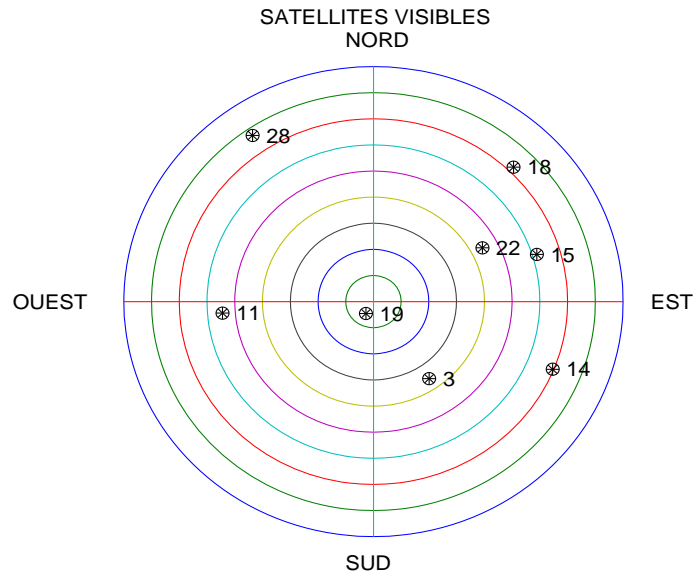


FIG. 5.7 – Constellation simulée pour les expérimentations

### 5.4.1 Estimation des paramètres des signaux

Nous souhaitons à présent comparer l'apport de notre algorithme de poursuite de phase intégrant l'estimateur récursif circulaire par rapport aux méthodes de poursuite classiques. Pour cela nous comparons dans le tableau 5.3 la moyenne et la variance sur l'erreur de la phase. Les résultats présentés concernent le satellite 28 de la constellation simulée.

<i>RSB</i> (dBHz)	50	40	30	20
Match Filter ( $m/\sigma$ )	-0.005/0.07	0.012/0.24	0.017/0.95	-0.053/1.67
Boucle vectorielle ( $m/\sigma$ )	-0.008/0.06	0.007/ 0.16	-0.063/1.82	0.144/1.74
Méthode proposée ( $m/\sigma$ )	-0.004/0.02	-0.005/0.06	0.012/0.19	-0.038/0.30

TAB. 5.3 – Moyennes  $m$  et écarts-types  $\sigma$  des erreurs sur la phase estimée par les méthodes testées, pour différents rapports signal sur bruit (*RSB*).

Les résultats du tableau 5.3 montrent que la boucle de poursuite vectorielle (qui utilise des filtres EKF comme filtres de boucles) n'est pas adaptée à la poursuite de la phase lorsque le rapport signal sur bruit est faible. Les variances obtenues par le Match Filter ne permettent pas non plus de donner une grande confiance aux estimations de phase obtenues pour de faibles rapports signal sur bruit, même si l'erreur moyenne reste bonne. Le filtre circulaire est visiblement le meilleur algorithme pour la poursuite de la phase en comparaison aux autres algorithmes testés.

Nous allons à présent comparer les erreurs sur le calcul de la pseudo-distance satellite-récepteur obtenues par les trois méthodes de poursuite, à savoir le Match Filter, la boucle de poursuite vectorielle et la méthode proposée. Hormis l'amélioration de l'estimation de la phase, on observe ici l'intérêt de l'utilisation de la boucle ouverte de poursuite de code incorporant le détecteur de ruptures et l'opérateur de fusion linéaire du chapitre 3.

On présente sur les figures 5.8 et 5.9 les erreurs sur la pseudo-distance en fonction du temps, calculées par les trois méthodes différentes et pour deux rapports signal sur bruit (50 dBHZ et 30 dBHZ). Plus précisément, on reporte sur les deux figures 5.8.(a) et 5.9.(a) les erreurs sur la pseudo-distance provoquées par l'algorithme de poursuite Match Filter. Sur les deux figures 5.8.(b) et 5.9.(b), on présente les erreurs effectuées par l'algorithme de boucle de poursuite vectorielle. Sur les deux figures 5.8.(c) et 5.9.(c), on présente les erreurs amenées par l'utilisation de l'algorithme de poursuite proposé.

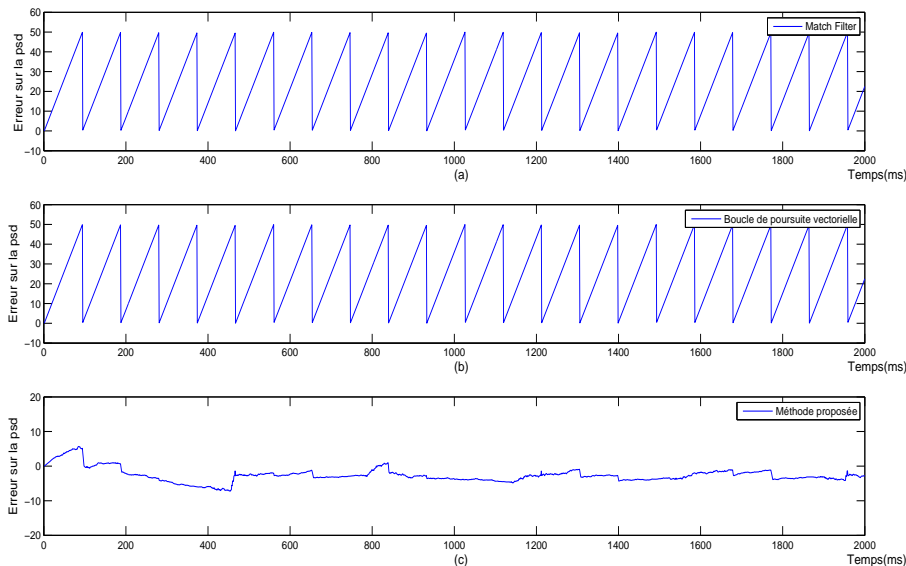


FIG. 5.8 – Erreurs de pseudo-distances (PSD)obtenues pour les différentes méthodes testées avec un rapport signal sur bruit de 50 dBHz

On peut visualiser sur ces différentes figures que la méthode de poursuite proposée, qui intègre les différents algorithmes proposés durant cette thèse, génère une erreur moyenne sur la pseudo-distance plus faible que les méthodes traditionnelles. A 50 dBHz, on observe une évolution linéaire par morceaux des erreurs de pseudo-distance pour les deux méthodes classiques. Les erreurs évoluent tous les 100 échantillons environ entre 0 et +50 mètres. Ce résultat est typique des méthodes de poursuite traditionnelles : chaque retour à zéro de l'erreur de pseudo-distance correspond à un recalage de code. On verra dans le paragraphe suivant que ce comportement fausse les calculs de position lors de la triangulation. A 30 dBHz, les erreurs sur la pseudo-distance ne sont plus linéaires par morceaux, signe que les recalages de code sont plus

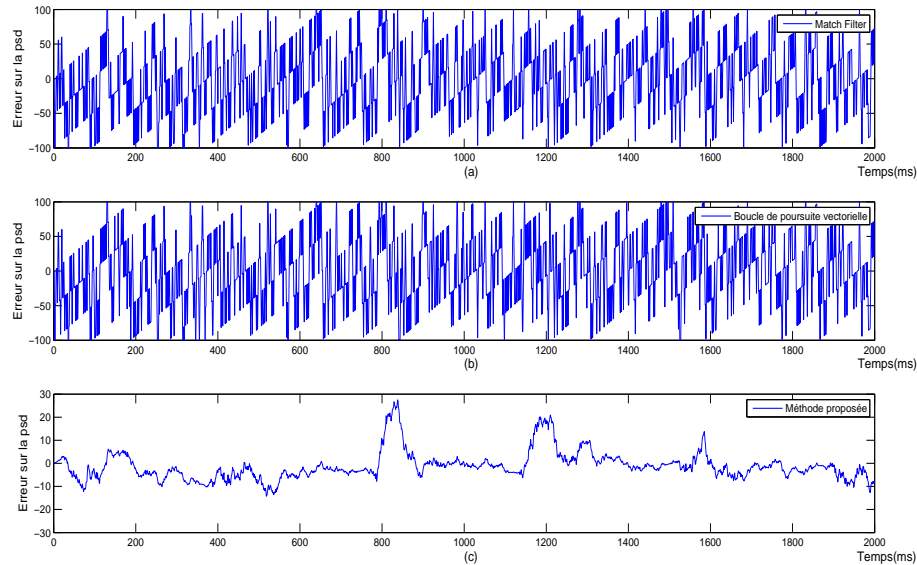


FIG. 5.9 – Erreurs de pseudo-distances (PSD) obtenues pour les différentes méthodes testées avec un rapport signal sur bruit de 30 dBHz

fréquents. Les résultats des deux méthodes classiques sont très semblables. Dans les deux cas, la méthode proposée génère des pseudo-distances plus proches des pseudo-distances réelles, sans linéarité dans son évolution.

Les bons résultats de la méthode proposée comparativement aux méthodes traditionnelles se confirment avec les valeurs du tableau 5.4. En effet, on reporte dans ce tableau la valeur moyenne de l'erreur de pseudo-distance ainsi que sa variance pour les trois méthodes testées et pour différents rapports signal sur bruit. Les valeurs obtenues par les deux méthodes de poursuite classiques Match Filter et boucle de poursuite vectorielle sont sensiblement les mêmes, hormis pour un rapport signal sur bruit de 20 dBHz où la boucle de poursuite vectorielle n'a clairement pas réussi à garder le code local synchronisé avec le code reçu.

A 50 dBHz, on retrouve les résultats obtenus sur la figure 5.8. En effet, la moyenne des erreurs est proche de 25 mètres, alors que sur la figure on observe des variations entre 0 et 50 mètres. Les résultats obtenus par l'algorithme de poursuite proposé sont meilleurs pour ce rapport signal sur bruit. En revanche, ils sont légèrement moins bons en ce qui concerne la moyenne des erreurs, mais nettement meilleurs concernant leur variance, pour des rapports signal sur bruit de 40 et 30 dBHz. On retrouve ici ce qui était visible sur la figure 5.9 : il existe un léger biais pour notre méthode, mais les erreurs de pseudo-distance sont beaucoup plus nombreuses pour les méthodes classiques, malgré une moyenne proche de zéro. Pour un très faible rapport signal sur bruit, de 20 dBHz par exemple, les performances de l'algorithme de poursuite que nous proposons se dégradent. Cette dégradation est principalement provoquée par le fait qu'il est impossible de différencier les ruptures du discriminant des variations dues au bruit

sur le signal.

<i>RSB</i> (dBHz)	50	40	30	20
Match Filter ( $m/\sigma$ )	24.70/14.44	3.69/30.25	-1.02/49.48	21.70/146.97
Boucle vectorielle ( $m/\sigma$ )	24.70/14.44	3.34/30.08	0.599359/49.90	-793.17/912.42
Méthode proposée ( $m/\sigma$ )	-4.14/2.67	-4.16/2.77	-2.19/6.47	-1039.60/508.02

TAB. 5.4 – Moyennes  $m$  et écarts-types  $\sigma$  des erreurs sur la pseudo-distance estimée par les méthodes testées, pour différents rapports signal sur bruit (*RSB*).

Les différents résultats obtenus suggèrent que la méthode de poursuite que nous proposons est meilleure que les méthodes classiques, pour des rapports signal sur bruit de 50 à 30 dBHz. Cependant, il existe un biais légèrement plus important pour notre algorithme, restant cependant inférieur à 5 mètres. Le paragraphe suivant a pour but de vérifier que les fortes variances sur les erreurs de pseudo-distance obtenues par les méthodes classiques provoquent une plus forte dégradation des résultats que le biais obtenu par notre méthode lors d'un calcul de position.

## 5.4.2 Calcul de position

Dans cette partie, les pseudo-distances obtenues pour chaque satellite de la constellation simulée, au nombre de 7, sont utilisées pour effectuer une triangulation permettant d'estimer la position du récepteur. On effectue 2000 estimations de position. Les cas statique et dynamique sont étudiés pour les trois méthodes testées et pour différents rapports signal sur bruit. Ces dernières sont comparées en relevant les écarts moyens de position suivant l'axe Ouest-Est et l'axe Sud-Nord. La distance moyenne entre la position estimée et la position réelle pour chaque estimation est également calculée.

### Cas statique

Dans un premier cas, le récepteur est fixe. On présente sur la figure 5.10 les positions obtenues par les méthodes classiques du Match Filter et de la boucle de poursuite vectorielle. On représente en bleu les positions obtenues avec la méthode proposée. Chaque sous-figure correspond à un rapport signal sur bruit différent, de 50 à 20 dBHz.

A 50 dBHz, les positions obtenues par les deux algorithmes classiques sont les mêmes. Cela s'explique par le fait que les recalages de code sont effectués aux mêmes instants ou presque, par chacune des deux méthodes. Ce comportement est visible sur la figure 5.8. On observe de plus, pour un rapport signal sur bruit de 50 dBHz, une répartition des positions estimées selon un axe Sud Ouest - Nord Est. On peut ici encore se reporter à la figure 5.8 : pour chaque satellite, les erreurs sur la pseudo-distance sont soit toutes positives, soit toutes négatives. La triangulation sur l'ensemble de ces pseudo-distances présente ainsi un décalage dans une direction donnée. Dans le cas d'un rapport signal sur bruit de 50 dBHz, les positions estimées par la méthode proposée sont visiblement plus précises que celles estimées par les méthodes classiques, étant

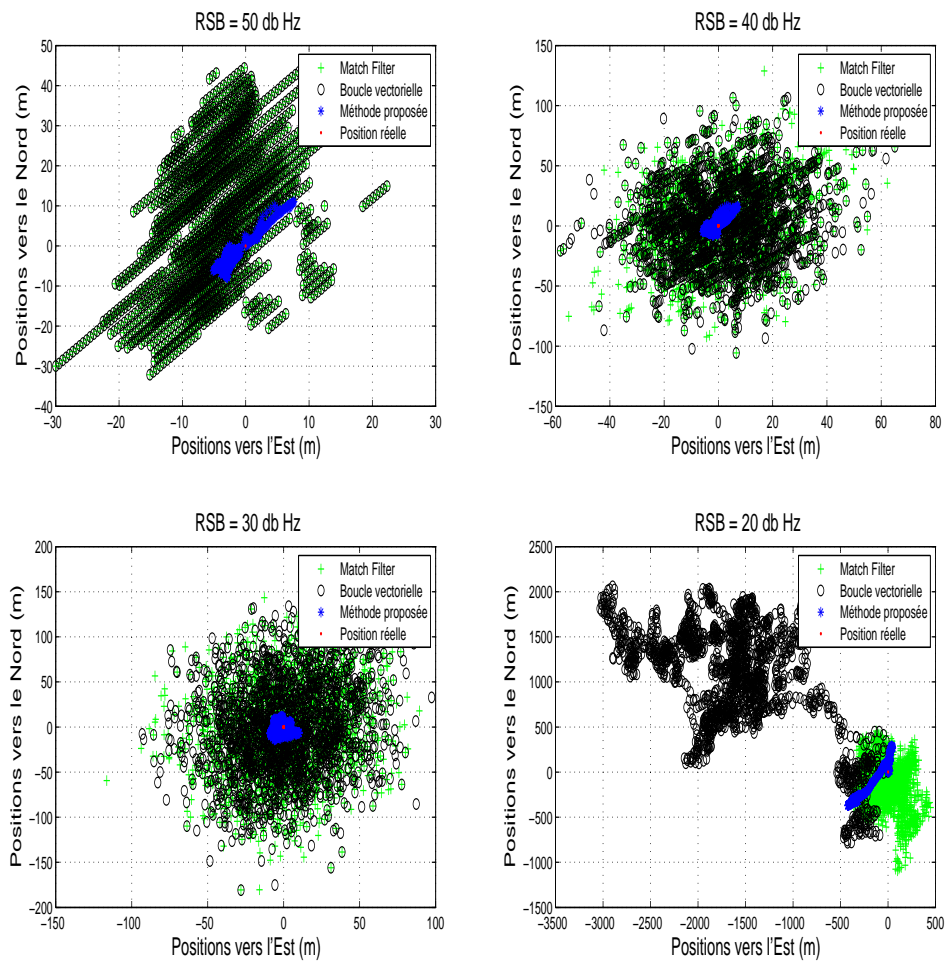


FIG. 5.10 – Positions estimées dans le cas statique par les différentes méthodes testées et pour des rapports signal sur bruit de 50 à 20 dBHz

plus concentrées autour de la position réelle.

Plus le rapport signal sur bruit diminue, plus les positions obtenues par les méthodes classiques diffèrent. Les recalages de code erronés sont en effet plus nombreux et interviennent différemment pour ces deux méthodes, en particulier pour un rapport signal sur bruit de 20 dBHz. Avec des rapports signal sur bruit de 40 ou 30 dBHz, la méthode proposée obtient toujours de meilleurs résultats comparée aux méthodes classiques. On observe que les erreurs de positions estimées par les méthodes classiques sont plus grandes lorsque le rapport signal sur bruit diminue. La méthode proposée est quant à elle beaucoup plus robuste pour des rapports signal sur bruit supérieurs à 30 dBHz. La forte dispersion des positions obtenues par les algorithmes de poursuite classiques est la conséquence des fortes variances reportées dans le tableau 5.4.

Pour un rapport signal sur bruit de 20 dBHz, les trois algorithmes utilisés présentent de fortes erreurs de position. On observe ici la conséquence du décrochage des boucles de poursuites sur les erreurs de pseudo-distances reportées dans le paragraphe précédent. La triangulation effectuée à l'aide de mesures de pseudo-distances erronées provoque des erreurs sur le positionnement.

Nous reportons dans le tableau 5.5 les valeurs des erreurs correspondantes. On constate que la plus grande dispersion des points dans le cas classique se traduit par une augmentation des écarts moyens et de la distance moyenne pour chacun des rapports signal sur bruit entre 50 et 30 dBHz. Pour les méthodes de poursuite classiques, les erreurs de positions sont du même ordre, à savoir de 18 mètres, 33 mètres et 55 mètres en moyenne pour des rapports signal sur bruit respectifs de 50, 40 et 30 dBHz. On observe des erreurs plus importantes sur l'axe Nord-Sud que sur l'axe Ouest-Est. Comme on le supposait en observant la figure 5.10, la méthode proposée, en plus d'obtenir de meilleurs résultats, est beaucoup plus robuste face au bruit, avec des erreurs de positionnement variant de 468 centimètres à 606 centimètres entre 50 et 30 dBHz. Cette robustesse est permise par la nouvelle méthode de détection d'une rupture de discriminant, beaucoup moins sujette à des fausses détections que dans les algorithmes classiques.

Pour un rapport signal sur bruit de 20 dBHz, les erreurs sur la position sont beaucoup plus importantes, de plusieurs centaines de mètres, voire de plusieurs kilomètres pour la boucle de poursuite vectorielle. Les algorithmes ne sont pas suffisamment robustes pour garder les codes générés synchronisés avec le code reçu.

		Ecart moyen vers l'Est (m)	Ecart moyen vers le Nord (m)	Distance moyenne (m)
50 dBHz	Match Filter	6.865	15.334	17.943
	Boucle vectorielle	6.865	15.334	17.943
	Méthode proposée	2.772	3.696	4.680
40 dBHz	Match Filter	14.777	27.304	33.596
	Boucle vectorielle	14.505	26.676	33.046
	Méthode proposée	2.305	4.0795	4.857
30 dBHz	Match Filter	24.486	41.923	53.019
	Boucle vectorielle	24.384	41.610	52.628
	Méthode proposée	3.187	4.682	6.058
20 dBHz	Match Filter	140.4	222.7	284.9
	Boucle vectorielle	1532.0	1116.5	1949.6
	Méthode proposée	115.3	188.7	238.1

TAB. 5.5 – Erreurs sur le calcul de la position pour les différents algorithmes testés dans le cas statique, pour différents rapports signal sur bruit

En conclusion, nous avons comparé différentes méthodes appliquées au calcul de la position

d'un récepteur GPS statique. Les résultats obtenus sont meilleurs pour la méthode proposée, utilisant l'ensemble des nouveaux outils présentés dans les chapitres précédents. La précision du positionnement est de 4 à 9 fois supérieure aux méthodes classiques. Cette différence étant plus importante lorsque le rapport signal sur bruit diminue, la méthode proposée est en effet plus robuste face aux effets du bruit.

### Cas dynamique

On considère maintenant un récepteur en mouvement le long d'une trajectoire circulaire d'un rayon de 10 mètres. La dynamique à laquelle est soumise le récepteur est forte, le récepteur effectuant une boucle en 40 secondes. La trajectoire est représentée sur la figure 5.11. Le récepteur progresse d'abord vers l'Est puis vers le Nord avant de terminer la boucle.

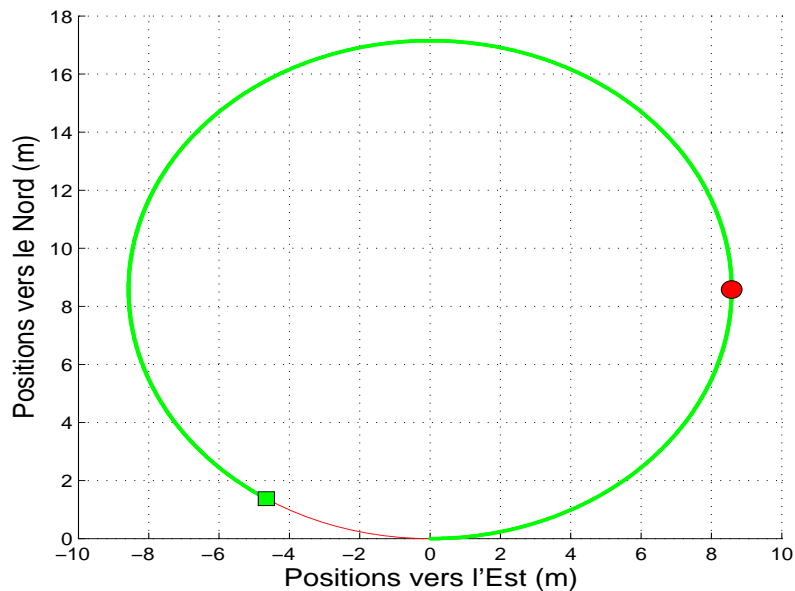


FIG. 5.11 – Trajectoire du récepteur lors des expérimentations dans le cas dynamique

On présente sur la figure 5.12 les positions obtenues par les méthodes traditionnelles testées et par la méthode proposée. Comme au paragraphe précédent, chaque sous-figure correspond à un rapport signal sur bruit différent, de 50 à 20 dBHz.

On retrouve pour les méthodes classiques les mêmes résultats que dans le cas statique. La forte dispersion des positions calculées, liée à la forte variance des calculs de pseudo-distance, ne permet pas de suivre la trajectoire du récepteur. A l'inverse, la méthode proposée semble être robuste face à la dynamique du système. A 50 dBHz et 40 dBHz, on retrouve par la méthode proposée la trajectoire réelle du récepteur, cependant affectée d'un biais de quelques mètres sur le Sud-Ouest. Ce biais augmente au cours du mouvement du mobile, les positions estimées au départ du mouvement, au point le plus au Sud de la boucle, étant confondues avec les positions



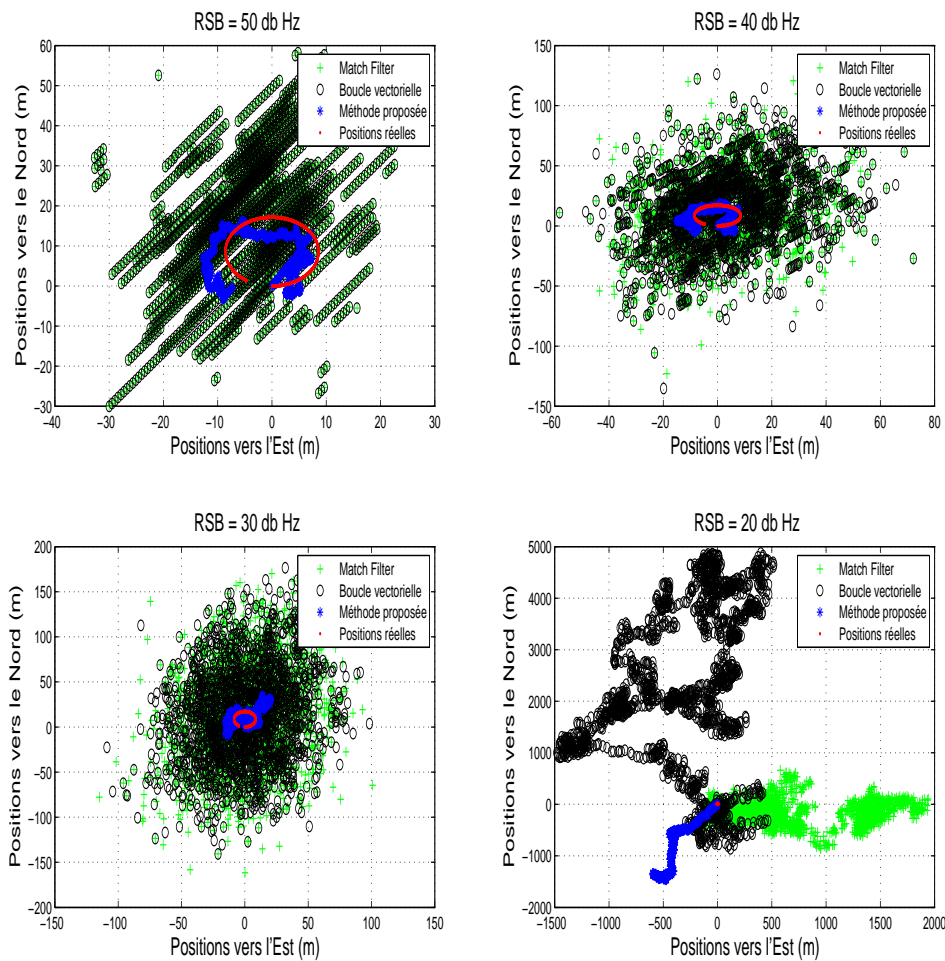


FIG. 5.12 – Positions estimées dans le cas dynamique par les différentes méthodes testées et pour des rapports signal sur bruit de 50 à 20 dBHz

réelles. A 30 dBHz, les positions ne sont pas estimées assez précisément par la méthode proposée pour permettre de retrouver la trajectoire. A 20 dBHz, les trois algorithmes testés présentent de mauvais résultats, l'éloignement des positions calculées avec les positions réelles étant encore augmenté par rapport aux résultats du cas statique.

On présente dans le tableau 5.6 une comparaison numérique des résultats obtenus par les différentes méthodes pour le positionnement dynamique. Pour des rapports signal sur bruit supérieurs à 30 dBHz, les résultats obtenus par les algorithmes classiques sont comparables aux résultats obtenus dans le cas statique, avec une augmentation notable des erreurs pour un rapport signal sur bruit de 50 dBHz, seul cas où la dispersion des positions obtenues en statique pouvait laisser apparaître un suivi de la trajectoire du récepteur en dynamique. Les erreurs de positionnement par la méthode proposée sont de l'ordre du double des erreurs obtenues dans le

cas statique, restant cependant nettement inférieures aux erreurs des méthodes classiques. Cette augmentation de l'erreur moyenne est la conséquence de l'éloignement de la trajectoire réelle du récepteur suite aux virages rapides effectués lors de son mouvement.

		Ecart moyen vers l'Est (m)	Ecart moyen vers le Nord (m)	Distance moyenne (m)
50 dBHz	Match Filter	8.526	18.567	22.210
	Boucle vectorielle	8.526	18.567	22.210
	Méthode proposée	6.287	7.045	10.467
40 dBHz	Match Filter	15.882	27.694	34.775
	Boucle vectorielle	16.116	28.550	35.582
	Méthode proposée	6.086	7.392	10.619
30 dBHz	Match Filter	24.854	44.570	55.451
	Boucle vectorielle	24.781	43.536	54.380
	méthode proposée	7.353	10.316	13.435
20 dBHz	Match Filter	711.10	208.24	776.22
	Boucle vectorielle	402.64	2321.8	2417.8
	Méthode proposée	370.6	761.43	852.7

TAB. 5.6 – Erreurs sur le calcul de la position pour les différents algorithmes testés dans le cas dynamique, pour différents rapports signal sur bruit

On peut conclure que la dégradation des résultats entre les cas statique et dynamique reste vraie dans le cas de notre méthode. Cependant, la méthode proposée reste nettement meilleure que les méthodes classiques lorsque le récepteur suit un mouvement rapide, en particulier lorsque le rapport signal sur bruit atteint les 30 dBHz.

## 5.5 Conclusion

Ce chapitre décrit l'application des méthodes, présentées dans cette thèse, de détection de rupture, de fusion non linéaire et de filtrage circulaire au calcul de la position d'un récepteur GPS. Après avoir présenté les contraintes et connaissances théoriques liées à l'échantillonnage d'un signal GPS L2C, nous avons défini les nouveaux algorithmes de poursuite développés, qui mettent en oeuvre deux boucles ouvertes pour la poursuite du code et de la phase. La position du récepteur est ainsi calculée à partir de l'évolution du discriminant estimé pour plusieurs satellites. La méthode proposée est comparée aux méthodes classiques de poursuite que sont le Match Filter et la boucle de poursuite vectorielle. On compare dans l'expérimentation réalisée sur signaux GPS synthétiques le calcul de la phase, de la pseudo-distance et de la position, dans les cas statique et dynamique.

La qualité du positionnement calculée à partir des signaux GPS reçus dépend à la fois du rapport signal à bruit et de l'échantillonnage du signal. Pour une fréquence d'échantillonnage

de 6 MHz, les pseudo-distances évoluent par pas de 50 mètres. Les méthodes de poursuite classiques sont limitées en précision par cette considération, contrairement à la méthode proposée. On montre que notre algorithme génère une erreur moyenne dans les directions Est et Nord sur la position estimée quatre fois inférieure à celle obtenue avec les algorithmes classiques. Cette erreur est inférieure à quatre mètres dans le cas d'un rapport signal sur bruit de 50 dBHz et d'un récepteur sans mouvement.

On montre que l'utilisation d'un détecteur de ruptures des variations du discriminant permet d'obtenir une poursuite du code et de la phase plus robuste en présence de bruit. En effet, l'expérimentation réalisée montre que pour des rapports signal sur bruit allant jusqu'à 30 dBHz, la précision du positionnement reste du même ordre pour notre méthode, tandis que les méthodes traditionnelles présentent des erreurs allant du simple au triple. Aussi bien en statique qu'en dynamique, c'est l'algorithme de poursuite proposé dans ce chapitre qui donne le positionnement le plus précis, permettant de distinguer les mouvements du récepteur même pour une trajectoire sur une zone très restreinte et parcourue rapidement.

Les perspectives de ce travail sont l'adaptation de ce type de méthode pour la poursuite des voies données et pilote du signal GPS L5. En effet dans ce cas, les mesures obtenues sur ces deux voies sont corrélées. On souhaite dans notre approche utiliser l'opérateur de fusion non linéaire pour diminuer cette corrélation et ainsi obtenir des mesures fusionnées plus précises.

# Conclusion générale

Le travail qui a été présenté dans cette thèse a pour objet l'étude et la mise en oeuvre de techniques d'estimation détection conjointes pour le traitement des signaux GPS multi-voies modernes.

Ce mémoire est composé de cinq chapitres : le premier chapitre, essentiellement bibliographique, a eu pour but de présenter l'historique et le fonctionnement général des signaux GNSS modernes. Une attention plus particulière a été portée à la description et la modélisation des signaux sur lesquels nous avons travaillé, ainsi que sur leur traitement numérique dans un récepteur. Le deuxième chapitre, également bibliographique, a eu pour objectif de présenter la théorie de l'estimation linéaire et circulaire. Y ont été également présentés les algorithmes de segmentation ainsi que les différents algorithmes de la fusion d'information basée sur la théorie d'estimation bayésienne. Les travaux présentés dans ce chapitre ont servi de base pour le développement des traitements proposés aux chapitres suivants.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté des méthodes d'estimation de processus stationnaires par morceaux en utilisant des observations en provenance de deux sources différentes. Ces différentes méthodes sont utilisées pour la segmentation du signal GPS L2C. Dans une première partie, nous présentons un estimateur des ruptures de pente intégrant une information *a priori* et un opérateur de fusion linéaire des mesures de discriminants observées. Dans une seconde partie, nous proposons un opérateur de fusion non-linéaire des observations et sa mise en oeuvre dans le détecteur de ruptures de pente. Ces différents algorithmes ont été évalués et comparés avec les méthodes existantes. Nous commençons par la comparaison de l'opérateur de fusion non-linéaire et l'opérateur de fusion linéaire classique, en variant l'imprécision de l'information *a priori*. Cette comparaison a été réalisée sur des processus stationnaires. Les résultats obtenus montrent que l'opérateur de fusion non-linéaire est plus performant au sens de l'erreur quadratique moyenne. Quand l'information *a priori* est moins précise, ses performances tendent vers celles de l'opérateur de fusion linéaire. Nous avons évalué l'apport de la fusion non-linéaire par rapport à la fusion linéaire pour la détection de un, puis de deux sauts dans la moyenne d'un processus. Pour cela l'opérateur de fusion non linéaire est intégré dans un filtre GLR. Les résultats obtenus montrent que le détecteur utilisant l'opérateur de fusion non-linéaire est plus performant car il fournit une meilleure détection et localisation du saut. A la fin de ce chapitre nous avons évalué le détecteur de ruptures de pente intégrant l'opérateur de fusion non linéaire. Les paramètres de cette expérimentation ont été définis pour le cas de la segmentation d'un signal GPS multi-voies et pour différents rapports signal sur bruit. Il a été montré que le détecteur utilisant la fusion non-linéaire est plus performant en termes de détec-

tions de ruptures et qu'il localise plus précisément l'instant de la rupture.

Nous avons présenté dans le quatrième chapitre l'étude et la mise en oeuvre de méthodes de traitement des signaux dans le domaine circulaire. Dans l'approche classique, le traitement des données circulaires s'appuie sur une approximation de leurs lois de probabilités dans le domaine linéaire. C'est pour cette raison que nous avons proposé un nouvel opérateur de fusion et un filtre récursif circulaire reposant sur la distribution de von Mises. Ceux-ci sont obtenus à partir de la modélisation bayésienne du problème d'estimation définie dans le cadre circulaire. Dans ce contexte, l'opérateur de fusion circulaire est obtenu à partir des distributions de vraisemblance du paramètre à estimer sachant que les observations suivent une distribution de von Mises. L'expression du filtre récursif est obtenue à partir de la distribution *a posteriori* du paramètre à estimer sachant les mesures. Cette distribution est supposée être une distribution circulaire de von Mises. Nous avons aussi proposé au cours de ce chapitre un détecteur de ruptures dans la moyenne d'un processus circulaire. Ce détecteur intègre le filtre récursif circulaire pour estimer les paramètres du système. Pour évaluer ces différentes méthodes, nous avons comparé le filtre récursif circulaire proposé pour l'estimation de données angulaires avec les estimateurs classiques utilisés dans le domaine linéaire. Dans l'expérimentation réalisée sur données synthétiques, on considère les mesures de direction absolue (compas magnétique) et de vitesse angulaire (gyroscope) fournies par deux capteurs situés sur un mobile qui réalise une trajectoire composée de plusieurs virages. Les angles étudiés sont définis entre 0 et  $2\pi$ . L'opérateur de fusion circulaire est comparé avec la somme pondérée qui est considérée comme l'opérateur optimal dans le domaine linéaire. Le filtre circulaire pour l'estimation de la direction est comparé au filtre de Kalman du domaine linéaire. Finalement le détecteur de ruptures a été comparé avec le filtre de Kalman GLR. Les résultats obtenus montrent l'intérêt et la faisabilité des méthodes proposées. En effet, l'estimation par le filtre récursif que nous proposons est plus précise, car les dispersions circulaires et la distance circulaire entre la valeur d'angle et son estimation sont plus proches pour les méthodes proposées. La raison majeure de ce résultat est que les filtres et traitements que nous proposons dans le domaine circulaire sont insensibles aux transitions entre 0 et  $2\pi$ . Ces transitions d'angle sont vues par les traitements définis sur le domaine linéaire comme des changements brusques.

Enfin dans le cinquième et dernier chapitre, nous avons présenté l'application des différentes méthodes développées, tout au long de cette thèse, pour le calcul de la position d'un récepteur GPS. Elles ont été utilisées pour la réalisation d'un nouvel algorithme de poursuite du code, de la phase et de la fréquence du signal GPS L2C. Cet algorithme repose sur deux boucles ouvertes de poursuite, ce qui permet de diminuer l'accumulation d'erreurs résiduelles générées dans les boucles de poursuite classique DLL, PPL et FLL. En effet dans l'approche classique utilisant une boucle fermée, les décalages du code, de la phase et de la fréquence sont corrigés en permanence. On montre en pratique, que l'évolution du discriminant, pour un signal échantillonné, est stationnaire par morceaux. De plus les variations du discriminant présentent une rupture de pente lorsque le décalage entre le code reçu et le code local atteint la moitié de la durée d'un bit du code CDMA. L'estimateur récursif, intégrant le détecteur de ruptures et l'opérateur de fusion non linéaire pour fusionner les informations obtenues sur la voie pilote et la voie données, servira à détecter cette rupture et à synchroniser le code à cet instant. Le filtre circulaire a été utilisé dans la boucle de poursuite de la phase pour filtrer ces valeurs angulaires

qui évoluent entre 0 et  $2\pi$ . Pour juger de la qualité de cet algorithme, il a été comparé avec les méthodes de poursuite de signaux GPS classique, à savoir le Match Filter et la boucle de poursuite vectorielle. Les différentes expérimentations sont réalisées dans un contexte réel, sur des données synthétiques, générées à l'aide d'un simulateur développé pendant la thèse. Les résultats obtenus montrent la robustesse des méthodes proposées que ce soit pour le calcul de la pseudo-distance satellite-récepteur ou le calcul de position dans le cas statique ou dynamique.

Nos perspectives concernent les modèles développés dans ce travail et leurs applications.

L'opérateur de fusion non-linéaire a été développé pour combiner les informations en provenance de deux sources d'informations indépendantes. Dans ce cas, les perspectives résident principalement dans son extension à  $n$  capteurs. Pour cela, il faut modifier le processus de sélection des observations à transformer. D'autre part il semble intéressant de pouvoir traiter les données corrélées. En effet dans le cas corrélé, plus le nombre d'échantillons à transformer sera grand, plus l'apport de la fusion non linéaire sera important. Il faudra alors dans ce cas redéfinir la contrainte de la transformation non linéaire permettant de s'assurer que l'erreur quadratique moyenne de la fusion sera toujours inférieure à celle obtenue par l'opérateur de fusion classique. Cet opérateur pourra alors être utilisé pour traiter le signal GPS L5, pour lequel les signaux de la voie données et la voie pilote sont corrélés.

Pour le filtre circulaire, les perspectives concernent principalement la corrélation dans le domaine circulaire. En effet il existe plusieurs distributions circulaires qui intègrent dans leurs représentations la corrélation entre les variables aléatoires. Malheureusement ces distributions n'ont pas de forme simple permettant, par exemple, de définir un opérateur de fusion au sens du maximum de vraisemblance. De plus elles ne permettent pas de trouver une solution analytique à l'équation de Chapman Kolmogorov et elles ne permettent pas non plus la définition de la loi *a posteriori* dans le cadre du filtrage bayésien. La résolution de ces problèmes par des approches numériques constitue aujourd'hui une perspective de ce travail.

Par ailleurs, le nouvel algorithme de poursuite du code, de la phase et de la fréquence intégrant les différentes méthodes proposées au cours de cette thèse et fonctionnant en mode boucles ouvertes doit être évalué et testé sur des signaux L2C réels. Les domaines d'application envisageables pour les méthodes développées, qui se sont avérées robustes jusqu'à des rapports signal sur bruit de 30 db Hz et plus précises que les méthodes traditionnelles, même dans le cas d'une forte dynamique, sont la réception en environnement couvert ou encore l'application à l'aéronautique.

Enfin, les outils de filtrage et fusion du domaine circulaire pourront être utilisés dans beaucoup d'autres applications de la navigation. On peut citer par exemple l'estimation de la direction d'un véhicule à partir de données odométriques, de mesures gyroscopiques et de mesures fournies par une station inertielle ou un compas magnétique.



# Annexe A

## Contrainte de la transformation non linéaire

Dans cette annexe on définit la condition pour que l'erreur quadratique moyenne  $EQM_{Z_{fn}}$  de l'opérateur de fusion non-linéaire soit plus faible que l'erreur quadratique moyenne  $EQM_{Z_f}$  de l'opérateur de fusion linéaire. La condition est définie pour les réalisations corrélées positivement soit pour  $Z^{(1)} > B_u$  et  $Z^{(2)} > B_u$  ou  $Z^{(1)} < B_d$  et  $Z^{(2)} < B_d$ . On définit  $Z_f$  et  $Z_{fn}$  les opérateurs de fusion linéaire et non linéaire de  $Z^{(1)}$  et  $Z^{(2)}$ . Leur expression est donnée par :

$$Z_f = \alpha_1 Z^{(1)} + \alpha_2 Z^{(2)} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} Z_{fn} &= \alpha_1 Z^{(1)} + \alpha_2 (Z^{(2)} \pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) \\ &= Z_f + \alpha_2 (\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Les erreurs quadratiques moyennes  $EQM_{Z_f}$  et  $EQM_{Z_{fn}}$  des opérateurs de fusion sont données par :

$$\begin{aligned} EQM_{Z_f} &= \text{var}(Z_f) + (\text{biais}(Z_f))^2 \\ EQM_{Z_{fn}} &= \text{var}(Z_{fn}) + (\text{biais}(Z_{fn}))^2 \\ &= \text{var}(Z_{fn}) + (E[Z_{fn}] - m)^2 \\ &= \text{var}(Z_f + \alpha_2 (\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))) + (E[Z_f + \alpha_2 (\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))] - m)^2 \\ &= \text{var}(Z_f) + \alpha_2^2 \text{var}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) + 2\alpha_2 \text{cov}(Z_f, \pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) \\ &\quad + (E[Z_f + \alpha_2 (\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))] - m)^2 \\ &= \text{var}(Z_f) + \alpha_2^2 \text{var}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) + 2\alpha_2 \text{cov}(Z_f, \pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) \\ &\quad + (E[Z_f] - m + E[\alpha_2 (\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))])^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 EQM_{Z_{fn}} &= \text{var}(Z_f) + \alpha_2^2 \text{var}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) + 2\alpha_2 \text{cov}(Z_f, \pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) \\
 &\quad + (E[Z_f] - m)^2 + \alpha_2^2 (E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})])^2 + 2\alpha_2 ((E[Z_f] - m)E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})]) \\
 &= \text{var}(Z_f) + (E[Z_f] - m)^2 + \alpha_2^2 (\text{var}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) + (E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})])^2) \\
 &\quad + 2\alpha_2 (\text{cov}(Z_f, \pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) + (E[Z_f]E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})] - mE[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})])) \\
 &= EQM_{Z_f} + \alpha_2^2 (E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})^2]) \\
 &\quad + 2\alpha_2 (\text{cov}(Z_f, \pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})) + (E[Z_f]E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})] - mE[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})])) \\
 \\
 &= EQM_{Z_f} + \alpha_2^2 (E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})^2]) \\
 &\quad + 2\alpha_2 \alpha_1 E(Z^{(1)}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))) + 2\alpha_2^2 E(Z^{(2)}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))) \\
 &\quad - 2\alpha_2 (\alpha_1 E[Z^{(1)}] + \alpha_2 E[Z^{(2)}]) E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})] \\
 &\quad + 2\alpha_2 (\alpha_1 E[Z^{(1)}] + \alpha_2 E[Z^{(2)}]) E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})] - 2m\alpha_2 E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})] \\
 &= EQM_{Z_f} + \alpha_2^2 (E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})^2]) \\
 &\quad + 2\alpha_2 \alpha_1 E(Z^{(1)}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))) + 2\alpha_2^2 E(Z^{(2)}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))) \\
 &\quad - 2m\alpha_2 E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})]
 \end{aligned}$$

Donc pour que  $EQM_{Z_{fn}}$  soit inférieur à  $EQM_{Z_f}$ , il faut que la condition suivante soit respectée :

$$\begin{aligned}
 \alpha_2^2 (E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})^2]) &+ 2\alpha_2 \alpha_1 E(Z^{(1)}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))) \\
 &+ 2\alpha_2^2 E(Z^{(2)}(\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)}))) - 2m\alpha_2 E[\pm g(Z^{(1)}, Z^{(2)})] \leq 0
 \end{aligned}$$

## Annexe B

# Calcul de la fonction de vraisemblance de l'instant de rupture

On a :

$$P(\Delta a_r/\underline{\varepsilon}, r)h(\underline{\varepsilon}/r) = h(\underline{\varepsilon}/r, \Delta a_r)P(\Delta a_r/r) \quad (\text{B.1})$$

En introduisant l'information a priori dans l'équation 3.20 on obtient :

$$P(\Delta a_r/\underline{\varepsilon}, r; \mu, V, P_{\varepsilon_i})h(\underline{\varepsilon}/r, \mu, V, P_{\varepsilon_i}) = h(\underline{\varepsilon}/r, \Delta a_r; P_{\varepsilon_i})P(\Delta a_r/r; \mu, V) \quad (\text{B.2})$$

Posons  $\Gamma = P(\Delta a_r/\underline{\varepsilon}, r; \mu, V, P_{\varepsilon_i})h(\underline{\varepsilon}/r; \mu, V, P_{\varepsilon_i})$  ; et d'après les deux équations 3.23 et 3.24 on a :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \prod_{i=r}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi P_{\varepsilon_i}}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_i - \Delta a_r \rho_{i,r})^2}{2P_{\varepsilon_i}}\right) \frac{\sqrt{n_r}}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left(-n_r \frac{(\Delta a_r - \mu)^2}{2V}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_r+1}} \prod_{i=r}^k P_{\varepsilon_i}} \sqrt{\frac{n_r}{V}} \exp\left(-n_r \frac{(\Delta a_r - \mu)^2}{2V} - \sum_{i=r}^k \left(\frac{(\varepsilon_i - \Delta a_r \rho_{i,r})^2}{2P_{\varepsilon_i}}\right)\right) \end{aligned}$$

Posons maintenant  $A = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_r+1}} \prod_{i=r}^k P_{\varepsilon_i}} \sqrt{\frac{n_r}{V}}$  ce qui implique que  $\Gamma$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Gamma &= A \exp\left(-n_r \frac{((\Delta a_r)^2 + \mu^2 - 2\Delta a_r \mu)}{2V} - \sum_{i=r}^k \left(\frac{(\varepsilon_i^2 + (\Delta a_r)^2 \rho_{i,r}^2 - 2\varepsilon_i \Delta a_r \rho_{i,r})}{2P_{\varepsilon_i}}\right)\right) \\ &= A \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{n_r(\Delta a_r)^2}{V} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{2n_r \Delta a_r \mu}{V} + \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} + (\Delta a_r)^2 \sum_{i=r}^k \frac{\rho_{i,r}^2}{P_{\varepsilon_i}} - 2\Delta a_r \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i \rho_{i,r}}{P_{\varepsilon_i}}\right)\right) \\ &= A \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r \mu^2}{V} + (\Delta a_r)^2 \left(\sum_{i=r}^k \frac{\rho_{i,r}^2}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r}{V}\right) - 2\Delta a_r \left(\sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i \rho_{i,r}}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r \mu}{V}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

D'après les trois équations 3.27, 3.28 et 3.28 on a :

$$\begin{aligned} T_r &= \sum_{i=r}^k \frac{\rho_{i,r}^2}{P_{\varepsilon_i}} \\ V_r &= 1 / \left( T_r + \frac{n_r}{V} \right) \\ \mu_r &= V_r \left( \mu \frac{n_r}{V} + \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i}{P_{\varepsilon_i}} \rho_{i,r} \right) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \Gamma &= A \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r \mu^2}{V} + \frac{(\Delta a_r)^2}{V_r} - 2 \Delta a_r \frac{\mu_r}{V_r} \right) \right) \\ &= A \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r \mu^2}{V} + \frac{(\Delta a_r)^2}{V_r} - 2 \Delta a_r \frac{\mu_r}{V_r} + \frac{\mu_r^2}{V_r} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right) \right) \\ &= A \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{(\Delta a_r - \mu_r)^2}{V_r} \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right) \right) \\ &= A \frac{1}{\sqrt{2\pi V_r}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{(\Delta a_r - \mu_r)^2}{V_r} \right) \sqrt{2\pi V_r} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V_r}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{(\Delta a_r - \mu_r)^2}{V_r} \right) * \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_r+1} \prod_{i=r}^k P_{\varepsilon_i}}} \sqrt{\frac{n_r}{V}} \sqrt{2\pi V_r} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi V_r}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{(\Delta a_r - \mu_r)^2}{V_r} \right) * \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_r} \prod_{i=r}^k P_{\varepsilon_i}}} \sqrt{\frac{n_r V_r}{V}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right) \right) \end{aligned}$$

avec :

$$P(\Delta a_r / \underline{\varepsilon}; \mu, V, P_{\varepsilon_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V_r}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{(\Delta a_r - \mu_r)^2}{V_r} \right) \quad (\text{B.3})$$

et :

$$h(\underline{\varepsilon}/r; \mu, V, P_{\varepsilon_i}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_r} \prod_{i=r}^k P_{\varepsilon_i}}} \sqrt{\frac{n_r V_r}{V}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=r}^k \frac{\varepsilon_i^2}{P_{\varepsilon_i}} + \frac{n_r \mu^2}{V} - \frac{\mu_r^2}{V_r} \right) \right) \quad (\text{B.4})$$

# Liste des tableaux

3.1	Evaluation de la fusion linéaire pour un signal constant . . . . .	97
3.2	Evaluation de la fusion non linéaire pour un signal constant . . . . .	97
3.3	Evaluation de la fusion linéaire pour un signal de pente non nulle . . . . .	98
3.4	Evaluation de la fusion non linéaire pour un signal de pente non nulle . . . . .	98
3.5	Probabilité de fausse alarme de la détection de rupture . . . . .	100
3.6	Estimation de l'instant de la rupture . . . . .	101
3.7	Comparaison des opérateurs de fusion dans le cas multi-ruptures . . . . .	102
3.8	Valeur du discriminant à l'instant de la rupture en fonction du rapport signal sur bruit pour les signaux émis sur la fréquence $L1$ ) . . . . .	103
3.9	Taille de la fenêtre de travail $M$ en fonction de la vitesse relative satellite-récepteur	103
3.10	Valeur moyenne de l'instant de la rupture de pente détectée en fonction de la valeur maximale du signal et de la position de la rupture $r$ pour les trois algorithmes de détection de rupture (sans fusion, fusion linéaire et fusion non linéaire)	104
3.11	Erreur quadratique moyenne (EQM) sur l'instant de la rupture de pente en fonction de la valeur maximale du signal et de la position de la rupture $r$ . . . . .	104
3.12	Retard moyen sur l'instant de détection de la rupture de pente en fonction de rapport signal sur bruit et de la vitesse relative satellite-récepteur . . . . .	105
3.13	Écarts-types du retard sur l'instant de détection de la rupture de pente en fonction de rapport signal sur bruit et de la vitesse relative satellite-récepteur . . . . .	105
4.1	Dispersion des mesures angulaires . . . . .	129
4.2	Dispersion des estimations angulaires . . . . .	131
4.3	Dispersion des estimations angulaires . . . . .	133
4.4	Dispersion des estimations de la variation angulaires . . . . .	134
5.1	Valeur minimale du discriminant $D_k$ en fonction du rapport signal sur bruit . . . . .	144
5.2	Instant du maximum de $ D_k $ en fonction de la vitesse relative satellite-récepteur	144
5.3	Moyennes $m$ et écarts-types $\sigma$ des erreurs sur la phase estimée par les méthodes testées, pour différents rapports signal sur bruit ( $RSB$ ). . . . .	149
5.4	Moyennes $m$ et écarts-types $\sigma$ des erreurs sur la pseudo-distance estimée par les méthodes testées, pour différents rapports signal sur bruit ( $RSB$ ). . . . .	152
5.5	Erreurs sur le calcul de la position pour les différents algorithmes testés dans le cas statique, pour différents rapports signal sur bruit . . . . .	154
5.6	Erreurs sur le calcul de la position pour les différents algorithmes testés dans le cas dynamique, pour différents rapports signal sur bruit . . . . .	157



# Table des figures

1.1	Fréquences allouées aux systèmes de radionavigation par satellites GPS et GALILEO . . . . .	14
1.2	Génération du signal GPS émis dans la bande de fréquence L1 . . . . .	16
1.3	Génération du signal GPS émis à la fréquence $L_2$ . . . . .	17
1.4	Génération du signal GPS émis sur la fréquence $L_5$ . . . . .	18
1.5	Fonction d'autocorrélation d'un code CDMA . . . . .	19
1.6	Génération du code C/A . . . . .	20
1.7	Multiplexage par répartition dans le temps de CM et CL . . . . .	21
1.8	Génération des codes CM et CL . . . . .	21
1.9	Génération des codes en quadrature I5 et Q5 . . . . .	23
1.10	Algorithme de l'acquisition fréquentielle . . . . .	28
1.11	Exemple d'acquisition effectuée sur un signal réel . . . . .	28
1.12	Evolution de la corrélation en fonction des codes Early, Prompt et Late . . . . .	29
1.13	Principe de la poursuite du code : DLL . . . . .	29
1.14	Principe de la poursuite de la phase : PLL . . . . .	30
1.15	Structure d'une trame du message de navigation . . . . .	32
1.16	Les étapes de simulation du récepteur GNSS . . . . .	35
1.17	Architecture d'une boucle de poursuite vectorielle locale . . . . .	36
2.1	Périodicité et calcul de la moyenne arithmétique . . . . .	48
2.2	Comparaison de la moyenne circulaire et de la moyenne linéaire d'un échantillon de von Mises . . . . .	51
2.3	Algorithme du filtre de Kalman . . . . .	53
2.4	Algorithme du Filtre de Kalman Etendu . . . . .	54
2.5	Algorithme du Filtre Particulaire SIS . . . . .	57
2.6	Algorithme du Filtre Particulaire SIR . . . . .	57
2.7	Architecture de fusion centralisée . . . . .	58
2.8	Fusion de mesures centralisée . . . . .	59
2.9	Architecture de fusion distribuée . . . . .	61
2.10	Algorithme de la fusion track-to-track . . . . .	62
2.11	Exemple d'architecture de fusion décentralisée point-à-point . . . . .	64
2.12	Exemple d'estimation de rupture . . . . .	66
3.1	Evolution du discriminant en boucles ouverte et fermée . . . . .	77
3.2	Evolution du discriminant estimé . . . . .	79

3.3	Architecture du filtre de détection de rupture . . . . .	84
3.4	Variance de l'opérateur de fusion . . . . .	85
3.5	Réalisations de $Z^{(1)}$ et $Z^{(2)}$ . . . . .	86
3.6	Principe de la transformation non linéaire . . . . .	91
3.7	Principe de la fonction non linéaire . . . . .	93
3.8	Contrainte en fonction de l'excentricité et de la taille de l'intervalle . . . . .	93
3.9	Evolution de la contrainte pour différentes valeurs de $\sigma_1 = \sigma_2$ . . . . .	94
3.10	Exemple d'évolution des bornes décrivant l'information <i>a priori</i> de l'opérateur de fusion dans une fenêtre de taille M . . . . .	95
3.11	Architecture du filtre de détection de ruptures . . . . .	96
3.12	Exemple de signaux traités . . . . .	97
3.13	EQM en fonction de l'information <i>a priori</i> . . . . .	99
3.14	Détection d'une rupture d'amplitude $v = 3$ dans le signal. Exemple de réalisation du processus (a) et de distribution empirique des ruptures détectées (b) . . . . .	100
3.15	Détection de deux ruptures $v = 2$ dans le signal en $k = 20$ et $k = 40$ . Exemple de réalisation du processus (a) et de distribution empirique des ruptures détectées (b) . . . . .	101
3.16	Différentes configurations de ruptures de pentes . . . . .	102
4.1	Evolution de $\kappa_f$ en fonction de $\Delta\phi = \phi_k^{(1)} - \phi_k^{(2)}$ . . . . .	114
4.2	Schéma de l'estimateur récursif fusionnant deux mesures angulaires . . . . .	115
4.3	Evolution de l'état estimé après l'instant de la rupture . . . . .	123
4.4	Trajectoire du mobile . . . . .	126
4.5	Evolution de la direction réelle et des mesures . . . . .	128
4.6	Evolution de la distance circulaire et du paramètre de concentration $\kappa_f$ . . . . .	128
4.7	Estimation de la direction par filtrage . . . . .	130
4.8	Evolution de la distance circulaire pour $\kappa_R = 3$ et $\kappa_R = 10$ . . . . .	130
4.9	Estimation de la direction et de la variation angulaire par filtrage . . . . .	132
4.10	Evolution de la distance circulaire des directions et variations d'angles estimées . . . . .	133
4.11	Exemple de processus et de réalisation du bruit . . . . .	134
4.12	Distribution empirique des ruptures détectées . . . . .	135
5.1	Variations continues du discriminant sans recalage de code . . . . .	142
5.2	Variations du discriminant sans recalage de code pour un rapport signal sur bruit de 50 dBHz et une fréquence d'échantillonnage de 6MHz . . . . .	142
5.3	Variations du discriminant sans recalage de code pour un rapport signal sur bruit de 30 dBHz et une fréquence d'échantillonnage de 6MHz . . . . .	143
5.4	Architecture de l'algorithme de poursuite proposé . . . . .	145
5.5	Estimations des valeurs de discriminant par le filtre récursif en l'absence de recalage de code . . . . .	147
5.6	Estimations des valeurs de discriminant par la méthode proposée . . . . .	148
5.7	Constellation simulée pour les expérimentations . . . . .	149
5.8	Erreurs de pseudo-distances (PSD) obtenues pour les différentes méthodes testées avec un rapport signal sur bruit de 50 dbHz . . . . .	150
5.9	Erreurs de pseudo-distances (PSD) obtenues pour les différentes méthodes testées avec un rapport signal sur bruit de 30 dbHz . . . . .	151

5.10	Positions estimées dans le cas statique par les différentes méthodes testées et pour des rapports signal sur bruit de 50 à 20 dBHz . . . . .	153
5.11	Trajectoire du récepteur lors des expérimentations dans le cas dynamique . . .	155
5.12	Positions estimées dans le cas dynamique par les différentes méthodes testées et pour des rapports signal sur bruit de 50 à 20 dBHz . . . . .	156





# Bibliographie

- [ANO02] Anon. *Interface Control Document Navstar GPS SpaceSegment User Segment L5 Interfaces*. ARINC Incorporated, 2002.
- [AZM09a] M. Azmani, S. Reboul, J. Choquel et M. Benjelloun. « Etude et mise en oeuvre d'un estimateur récursif des paramètres statistiques d'une distribution circulaire de von mises et d'une distribution log- normale ». *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 44, n° 4, p. 525–545, 2009.
- [AZM09b] M. Azmani, S. Reboul, J. Choquel et M. Benjelloun. « A recursive fusion filter for angular data ». Dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2009.
- [AZM10] M. Azmani, S. Reboul, J. Choquel et M. Benjelloun. « Information fusion applied to the tracking of gps pilot and data channels ». Dans *Proceedings of the International Conference on Information Fusion*, 2010.
- [BAR81] Y. Bar-Shalom. « On the track-to-track correlation problem ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, n° 2, p. 571–572, 1981.
- [BAR86] Y. Bar-Shalom. « The effect of the common process noise on the two-sensor fused-track covariance ». *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 22, n° 6, p. 803–806, 1986.
- [BAR88a] Y. Bar-Shalom. « Comparison of two-sensor tracking methods based on state vector fusion and measurement fusion ». *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic System*, vol. 24, n° 4, p. 447–449, 1988.
- [BAR88b] Y. Bar-Shalom. *Tracking and data association*. Academic Press Professional, Inc., 1988.
- [BAR01] Y. Bar-Shalom, H. Chen et T. Kirubarajan. « Performance limits of track-to-track fusion vs. centralized estimation : Theory and application ». *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 39, n° 2, p. 386–400, 2001.
- [BAS93] M. Basseville et I. Nikiforov. *Detection of Abrupt Changes : Theory and Application*. Prentice Hall, 1993.
- [BAS04] F. Bastide. *Analysis of the Feasibility and Interests of Galileo E5a E5b and GPS L5 Signals for Use with Civil Aviation*. Thèse de Doctorat, L'Institut National Polytechnique de Toulouse, 2004.
- [BAT81] E. Batschelet. *Circular statistics in biology*. New York, NY : Academic Press, 1981.
- [BEN04] A. Benmiloud. *Chaînes de Markov cachées et segmentation statistique non supervisée de séquence d'images*. Thèse de Doctorat, Université Paris VII, 1994.

- [BHA09] S. Bhattacharya et A. SenGupta. « Bayesian inference for circular distributions with unknown normalising constants ». *Journal of statistical planning and inference*, vol. 139, n° 12, p. 4179–4192, 2009.
- [BLA97] D. D. Blais. *Modélisation de récepteurs GPS, application à l'étude de l'influence des multitrajets sur les performances du récepteur L1 GPS*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997.
- [BOR99] A. Borovkov, A. Borokov et A. Moullagaliev. *Mathematical Statistics*. Taylor and Francis Ltd, 1999.
- [BOU07] S. Boutoille. *Systèmes de fusion pour la segmentation hors-ligne de signaux GPS multi-porteuses*. Thèse de Doctorat, Université du Littoral Côte d'Opale, 2007.
- [BRO92] R. Brown et P. Hwang. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley and Sons publication, 1992.
- [BUR98] G. Burgers, P. J. van Leeuwen et G. Evensen. « On the analysis scheme in the ensemble kalman filter ». *Monthly Weather Review*, vol. 126, n° 1, p. 1719–1724, 1998.
- [COC37] W. Cochran. « Problem arising in the analysis of a series of similar experiments ». *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 4, n° 1, p. 102–118, 1937.
- [CRA99] H. Cramér. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, 1999.
- [CSO96] M. Csorgo et L. Horvath. « A note on the change-point problem for angular data ». *Statistics and Probability Letters*, vol. 27, n° 1, p. 61–65, 1996.
- [DAS97] B. V. Dasarathy. « Sensor fusion potential exploitation-innovative architectures and illustrative applications ». *Proceedings of the THE IEEE*, vol. 85, n° 1, p. 24–38, 1997.
- [DEG99] S. Degerine. « Lois de von mises et lois liées ». *Annales de l'I.H.P, section B*, vol. 1, n° 15, p. 63–77, 1999.
- [DEL00] F. Delmotte. « A new adaptive operator of fusion ». *Traitement du Signal*, vol. 17, n° 4, p. 299–311, 2000.
- [DIE84] A. J. V. Dierendonck, J. B. McGraw et R. G. Brown. « Relationship between allan variances and kalman filter parameters ». Dans *Proceedings of the Sixteenth Annual Precise Time and Time Interval Application and Planning Meeting*, pp. 274–293, 1984.
- [DOU00] A. Doucet, S. Godsill et C. Andrieu. « On sequential simulation based methods for bayesian filtering ». *Journal of Statistics and computing*, vol. 10, n° 3, p. 197–208, 2000.
- [DWS01] H. Durrant-Whyte et M. Stevens.. « Data fusion in decentralized sensing networks ». Dans *Proceedings of the International Conference on Information Fusion*, 2001.
- [FIS87] N. Fisher. « Problem with the current definition of the standard deviation of wind direction ». *Journal of Climate and Applied Meteorology*, vol. 26, p. 1522–1529, 1987.

- 
- [FIS93] N. I. Fisher. *Statistical analysis of circular data*. Cambridge University press, 1993.
- [FRA98] J. Frang, G. Shen et D. Wan. « Establishment of an adaptive extended kalman filter model for a gps/dr integrated navigation system for urban vehicle ». *Journal of Control Theory and Applications*, vol. 15, n° 3, p. 385–390, 1998.
- [GAO02] J. B. Gao et C. J. Harris. « Some remarks on kalman filters for the multisensor fusion ». *Information Fusion*, vol. 3, n° 3, p. 191–201, 2002.
- [GAT08] R. Gatto. « Some computational aspects of the generalized von mises distribution ». *Statistics and Computing*, vol. 18, n° 3, p. 321–331, 2008.
- [GRE01] M. S. Grewal et A. P. Andrews. *Kalman Filtering : Theory and Practice Using MATLAB*. John Wiley and Sons publication, 2001.
- [GRO02] B. Grocholsky. *nformation-Theoric Control of Multiple Sensor Platforms*. Thèse de Doctorat, University of Sydney, 2002.
- [GUS00] F. Gustafsson. *Adaptive Filtering and Change Detection*. John Wiley and Sons Ltd, 2000.
- [HAL04] D. L. Hall et S. A. H. McMullen. *Mathematical Techniques in Multisensor Data Fusion*. Artech House Information Warfare Library, 2004.
- [HOR93] L. Horvath. « The maximum likelihood method for testing changes in the parameters of normal observations ». *The Annals of statistics*, vol. 21, n° 2, p. 671–680, 1993.
- [JAM01] S. R. Jammalamadaka et A. SenGupta. *Topics in Circular Statistics*. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [JUL97] S. J. Julier et J. K. Uhlmann. « A new extension of the kalman filter to nonlinear systems ». Dans *Proceedings of the eleventh International Symposium on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls*, 1997.
- [KAC06] J. Kacemi. *Fusion d'Informations dans un Système de Positionnement Hybride GPS Multi-Porteuses/Estime*. Thèse de Doctorat, Université du Littoral Côte d'Opale, 2006.
- [KAC04] J. Kacemi, S. Reboul et M. Benjelloun. « Information fusion in a multi-frequencies gps receiver ». Dans *Proceedings of IEEE PLANS 2004*, 2004.
- [KAL60] R. E. Kalman. « A new approach to linear filtering and prediction problems ». *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, p. 35–45, 1960.
- [KAP96] E. D. Kaplan. *Understanding GPS, principales and applications*. Artech House Publishers.
- [LAV01] M. Lavielle et E. Lebarbier. « An application of mcmc methods for the multiple change-points problem ». *Signal Processing*, vol. 81, p. 39–53, 2001.
- [LEI95] A. Leick. *GPS Satellite Surveying*. John Wiley and Sons publication, 1995.
- [LIN02] D. M. Lin et J. B. Y. Tsui. « A weak signal tracking technique for a stand-alone software. gps receiver ». Dans *Proceedings of the ION GPS Conference*, 2002.
- [LOM86] F. Lombard. « The change-point problem for angular data : a nonparametric approach ». *Technometrics*, vol. 28, n° 4, p. 391–397, 1986.

- [MAR99] K. Mardia et P. Jupp. *Directional Statistics*. Wiley, 1999.
- [MEL05] C. Mello. « Circular statistics and their uses in psychology ». *Tutorials in Quantitative Methods for Psychology*, vol. 1, n° 1, p. 11–17, 2005.
- [MIT07] H. Mitchell. *Multi-Sensor Data Fusion, An Introduction*. Springer, 2007.
- [NOR00] M. Norgaard, N. K. Poulsen et O. Ravn. « Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems, technical report imm-rep-1998-15 ». Rapport Technique, Technical University of Denmark, 2000.
- [OBR88] R. A. Obrecht. « A new statistical approach for the automatic segmentation of continuous speech signals ». *IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Process*, vol. 36, n° 1, p. 29–40, 1988.
- [OHL06] E. J. Ohlmeyer. « Analysis of an ultra-tightly coupled gps/ins system in jamming ». Dans *Proceedings of IEEE PLANS 2006*, 2006.
- [PAG54] E. S. Page. « Continuous inspection schemes ». *Biometrika*, vol. 41, n° 1, p. 100–115, 1954.
- [PAG55] E. S. Page. « A test for a change in a parameter occurring at an unknown point ». *Biometrika*, vol. 43, n° 3, p. 523–526, 1955.
- [PAP02] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Series in Electrical Engineering, 2002.
- [PAR96] B. Parkinson, J. S. Brown et P. Hwang. *Global Positioning System : Theory and Applications*. AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics), 1996.
- [QI02] H. Qi et J. Moore. « Direct kalman filtering approach for gps/ins integration ». *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 38, n° 2, p. 687–693, 2002.
- [RAI08] M. Raimondi. *Development and Characterization of Pulsed Interference Mitigation Techniques for onboard GNSS Receivers*. Thèse de Doctorat, Université de Toulouse, 2008.
- [REB06] S. Reboul et M. Benjelloun. « Joint segmentation of the wind speed and direction ». *IEEE Transaction on Signal Processing*, vol. 86, p. 744–759, 2006.
- [REY96] G. Reybet-degat. *Proposition d'une Règle de Discrimination Séquentielle Adaptée à la Fusion de Mesures*. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1996.
- [ROB06] C. P. Robert. *Le choix bayésien, Statistique et probabilités appliquées*. Springer, 2006.
- [SAH96] R. Saha. « Track-to-track fusion with dissimilar sensors ». *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, n° 3, p. 1021–1029, 1996.
- [SEN75] A. K. Sen et M. S. Srivastava. « On tests for detecting a change of mean ». *The Annals of statistics*, vol. 3, n° 1, p. 98–108, 1975.
- [SHA76] G. Shafer. *A Mathematical theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [SHI06] V. Shin, Y. Lee et T. Choi. « Generalized millman's formula and its application for estimation problems ». *Signal Processing*, vol. 86, n° 2, p. 257–266, 2006.

- 
- [SIN02] H. Singh, V. Hnizdo et E. Demechuk. « Miscellanea, probabilistic model for two dependent circular variables ». *Biometrika*, vol. 89, n° 3, p. 719–723, 2002.
- [ISD04] S. M. S. C. (SMC) et N. G. J. P. O. (SMC/GP). « Navstar gps space segment/navigation user interfaces, final rept. is-gps-200 revision d ». Rapport Technique, ARINC Engineering Services, 2004.
- [SOU99] J. Soubielle. *Estimation de retards de signaux GPS en présence de multitrajet*. Thèse de Doctorat, Université de Cergy-Pontoise, 1999.
- [SRS01] S. Spors, R. . Rabenstein et N. Strobel. « A multi-sensor object localization system ». Dans *Proceedings of the Vision Modeling and Visualization Conference*, 2001.
- [TSU00] J. B. Y. Tsui. *Fundamentals of Global Positioning System Receivers : A Software Approach, 2nd Edition*. Wiley, 2000.
- [WHI67] E. T. Whittaker et G. Robinson. *The Calculus of Observations : A Treatise on Numerical Mathematics, 4th ed*. Blakie and Son LTD, 1967.
- [WON09] J. Won, D. Dötterböck et B. Eissfeller. « Performance comparison of different forms of kalman filter approach for a vector-based gnss signal tracking loop ». Dans *Proceedings of the International Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation*, 2009.
- [ZAD99] L. A. Zadeh. « Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility ». *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 100, p. 9–34, 1999.
- [ZAR05] P. Zarchan et H. Musoff. *Fundamentals Of Kalman Filtering : A Practical Approach*. AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics), 2005.
- [ZHU01] Y. Zhu, Z. You, J. Zhao, K. Zhang et X. Li. « The optimality for the distributed kalman filtering fusion with feedback ». *Automatica*, vol. 37, p. 1489–1493, 2001.
- [ZIE06] N. I. Ziedan. *GNSS Receivers for Weak Signals*. Artech House Publishers, 2006.







## Résumé

Le nouveau signal GPS L2C contient sur une même porteuse une voie pilote et une voie de données. Il est proposé dans cette thèse des opérateurs de fusion non-linéaire, pour estimer les décalages du code et les informations de retard de phase obtenus sur ces deux voies. De plus nous proposons une nouvelle architecture de poursuite basée sur des boucles ouvertes intégrant des estimateurs et détecteurs de ruptures conjoints. En effet, l'évolution du discriminant obtenu par une boucle de poursuite du code ouverte, est linéaire par morceaux. Nous proposons dans ce cas un estimateur de ruptures intégrant un nouvel opérateur de fusion non-linéaire qui utilise une information a priori sur le paramètre à estimer. Cette information a priori permet de diminuer la corrélation entre les différentes observations et ainsi de diminuer l'erreur quadratique moyenne des mesures fusionnées. La boucle de poursuite ouverte du retard de phase, fournit une mesure angulaire du déphasage du signal GPS reçu. Dans ce contexte nous avons étendu les techniques de fusion et de filtrage d'état Bayésien de la statistique linéaire à l'analyse des données circulaires pour l'estimation du déphasage. Nous proposons un nouvel opérateur de fusion angulaire, un filtre récursif circulaire et un estimateur de rupture de moyennes dans un processus circulaire stationnaire par morceaux. Les algorithmes proposés permettent de réaliser une intégration longue des valeurs cohérentes du discriminant et d'améliorer ainsi la localisation à la milliseconde d'un récepteur mobile.

**Mots-clés:** Fusion d'informations, Détection de rupture, Estimateur circulaire, GPS L2C.

## Abstract

The new GPS L2C signal carry on the same carrier a pilot channel and a data channel. We propose non-linear fusion operators to estimate the code and phase delays that are obtained on both channels. Moreover, we propose a new tracking architecture based on open loops including joint estimators and jump detectors. Indeed, we show that the evolution of the code delay discriminator obtained with an open loop is piecewise linear. In that case, we propose a one-line change point estimate that includes a new non-linear fusion operator, using prior information on the parameter to estimate. This prior information allows decreasing the correlation between the different observations and as a consequence to decrease the mean square error of the fused measurements. The phase delay tracking open loop provides angular measurements of the received GPS signal. In this context, we have extended the fusion and Bayesian filtering techniques from linear statistics to circular statistics to estimate the phase delay. We propose a new angular fusion operator, a circular recursive filter and a change point estimator for piecewise stationary circular process. The proposed methods allow to process long time integration of the coherent discriminator values and so to improve the high rate localization of a mobile receptor compute every millisecond.

**Keywords:** Information fusion, Change point estimation, Circular estimator, GPS L2C signal.