



**HAL**  
open science

# Décomposition de domaines pour des structures hétérogènes

Cissé Ibrahima

► **To cite this version:**

Cissé Ibrahima. Décomposition de domaines pour des structures hétérogènes. Mécanique [physics.med-ph]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2009. Français. NNT: . tel-00582621

**HAL Id: tel-00582621**

**<https://theses.hal.science/tel-00582621v1>**

Submitted on 2 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS NORD

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris Nord**

Spécialité : **Mécanique**

préparée au laboratoire **d'analyse, géométrie et applications**

dans le cadre de l'École Doctorale **Institut Galilée**

présentée et soutenue publiquement  
par

**Ibrahima Cissé**

le 11 Décembre 2009

Titre:  
**Décomposition de domaines pour des structures  
hétérogènes**

Directrice de thèse: **Laurence Halpern**  
Co-directeur de thèse: **Jean Jacques Marigo**

Jury



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale et plan de la thèse</b>	<b>5</b>
<b>I Introduction aux problèmes de perturbations singulières</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduction aux méthodes asymptotiques</b>	<b>13</b>
1.1 Etude du problème $(P_\varepsilon)_0$	13
1.1.1 Analyse asymptotique formelle	14
1.1.2 Estimations a priori et convergence faible	14
1.1.3 Convergence forte et estimation d'erreur	15
1.2 Etude du problème $(P_\varepsilon)_1$	17
1.2.1 Analyse asymptotique formelle	17
1.2.2 Estimations a priori et convergence faible	17
1.2.3 Convergence forte et estimation d'erreur	18
<b>2 Problèmes raides</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction	21
2.2 Existence et unicité de $u^\varepsilon$	22
2.3 Analyse asymptotique formelle	23
2.3.1 Les problèmes élémentaires	24
2.3.2 Quelques remarques	24
2.3.3 Calcul des premiers termes	24
2.4 Justification rigoureuse du développement asymptotique	25
2.5 Discrétisation d'une équation à coefficients discontinus	27
2.5.1 Problème continu	27
2.5.2 Discrétisation	28
<b>3 Problème de collage</b>	<b>29</b>
3.1 Analyse asymptotique formelle	31
3.2 Justification rigoureuse du développement asymptotique	37
3.2.1 Etude de $P^0$	37
3.2.2 Interprétation	39
3.2.3 Quelques remarques sur les termes suivants du développement asymptotique	41
3.3 Etude Numérique	41

<b>4</b>	<b>Problème de revêtement</b>	<b>43</b>
4.1	Introduction	43
4.2	Analyse asymptotique formelle	45
4.3	Justification rigoureuse du développement asymptotique	49
4.3.1	Etude de $P^0$	49
4.3.2	Interprétation	50
4.3.3	Quelques remarques sur les termes suivants du développement asymptotique	51
4.4	Etude Numérique	51
	<b>Conclusions et commentaires</b>	<b>52</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>
<b>II</b>	<b>Méthodes de décomposition de domaines</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>Rappel historique et développement récent</b>	<b>61</b>
5.1	Algorithmes de Dirichlet-Neumann	62
5.1.1	Etude de convergence par analyse de Fourier	63
5.2	Algorithme de Schwarz avec conditions de type Robin	64
5.2.1	Conditions de Robin optimisées avec un paramètre	65
5.2.2	Conditions de Robin optimisées avec deux paramètres	67
5.3	Etude asymptotique de la convergence numérique des algorithmes	69
5.3.1	Influence du maillage sur la convergence	69
5.3.2	Influence de $\varepsilon$ sur la convergence	70
5.4	Etude Numérique	71
5.4.1	Décomposition de domaines symétrique ( $a = b$ )	72
5.4.2	Décomposition de domaines non symétrique ( $a \neq b$ ) et Etude dans la couche	73
5.5	Conclusion et commentaires	74
<b>6</b>	<b>Méthodes de décomposition de domaines pour le problème de collage</b>	<b>77</b>
6.1	Algorithmes de Dirichlet-Neumann	78
6.2	Algorithmes de Schwarz avec des conditions de Robin	85
6.2.1	Conditions de Robin à un paramètre	85
6.2.2	Conditions de Robin à deux paramètres	121
6.3	Validation numérique	125
6.3.1	Décomposition de domaines symétrique ( $a = b$ )	127
6.3.2	Décomposition de domaines non symétrique ( $a \neq b$ ) et étude de la couche mince	128
6.4	Conclusion	130
<b>7</b>	<b>Méthodes de décomposition de domaines pour le problème de revêtement</b>	<b>133</b>
7.1	Algorithmes de Dirichlet-Neumann	134
7.2	Algorithmes de Schwarz avec des conditions de Robin	138
7.2.1	Conditions de Robin à un paramètre	138
7.2.2	Conditions de Robin à deux paramètres	153
7.3	Validation numérique	156
7.3.1	Décomposition de domaines symétrique ( $a = b$ )	157
7.3.2	Décomposition de domaines non symétrique ( $a \neq b$ ) et étude dans la couche	160

7.4 Conclusion . . . . .	161
<b>Bibliographie</b>	<b>163</b>



# Introduction générale et plan de la thèse

LA résolution numérique d'un problème d'équations aux dérivées partielles à coefficients discontinus posé dans un domaine à couche mince est difficile car elle nécessite la discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la couche. D'un point de vue théorique, on parle de problème de perturbation singulière. D'un point de vue numérique, on observe que le maillage comporte alors un très grand nombre d'éléments, ce qui rend les calculs longs et parfois peu précis dans certaines zones appelées zones de couches limites. Les problèmes de perturbations singulières ont été abondamment traités dans la littérature. Pour rappeler des travaux proches de ce qui nous intéresse ici, nous pouvons citer [2] dans lequel l'auteur utilise une approche variationnelle pour traiter certains types de problèmes linéaires et non linéaires. Dans [4, 7], les auteurs présentent plusieurs pathologies provenant de ces types de problèmes et définissent plusieurs classes de couches limites. Plus récemment dans [17], les auteurs exposent les limites d'une approche variationnelle classique pour traiter certaines classes de problèmes de perturbations singulières.

Les méthodes asymptotiques permettent d'approcher les problèmes de départ par des problèmes permettant de tenir compte de la couche mince, ou plus exactement de son épaisseur. On fait dans ce cas un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur de la couche mince. Dans certains cas, en 2D par exemple, on a une expression explicite de la couche mince. On peut remplacer l'effet de la couche mince par une condition aux limites artificielle appelée condition équivalente ou condition d'impédance généralisée qui sera judicieusement choisie. Ce dernier problème peut ensuite être résolu par des méthodes classiques. La précision de la condition équivalente sera une fonction décroissante de l'épaisseur qu'on pourra mesurer. On construit ainsi une famille de méthodes que nous appellerons méthodes multiéchelles [11, 13, 12, 14]. L'apparition de couches limites dans certaines zones rend ces méthodes imprécises et insuffisantes. Alors on a recours à d'autres développements asymptotiques propres aux zones de couches limites. Le domaine de calcul est ainsi divisé en plusieurs zones, dans lesquelles on peut faire un développement asymptotique adapté. Des zones de jonctions sont alors nécessaires pour raccorder tous les développements localisés. On définit ainsi une famille de méthodes appelées méthodes des développements asymptotiques raccordés [4, 7, 15].

Il ressort des méthodes asymptotiques qu'il est nécessaire de décomposer le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines. Une seconde approche purement numérique consiste alors à considérer directement des méthodes de décomposition de domaines sans recouvrement pour pouvoir faire des calculs dans la couche également. Ces méthodes se prêtent naturellement à ces décompositions. Mais il se pose alors la question du choix des conditions d'interface à mettre entre les sous-domaines pour gagner en rapidité de calcul d'une part et d'autre part pour éviter le problème de raffinement trop coûteux. Le choix de la condition d'interface devra donc prendre en compte l'éventuelle discontinuité des équations du problème au passage entre les sous-domaines [18, 22, 15] mais aussi hétérogénéité géométrique créée par l'existence de la couche mince. Les méthodes de décomposition de domaines consistent

à partager le domaine de résolution d'une équation aux dérivées partielles en sous-domaines. On peut reformuler le problème en un problème équivalent dont les inconnues sont des fonctions définies sur les interfaces des sous-domaines (méthodes dites de sous-structuration ou de type Schur). La résolution d'un problème d'interface par une méthode itérative (de type gradient conjugué par exemple) s'effectue par des résolutions successives de problèmes locaux (par sous-domaine). Dans la construction de ces méthodes, les conditions d'interface doivent être judicieusement choisies car il faut qu'elles prennent en compte l'hétérogénéité de certaines quantités pour le matériau mais aussi sa géométrie. Plusieurs ouvrages traitent du sujet à savoir [11, 17]. On distingue deux types de méthodes décomposition de domaines :

- Les méthodes avec recouvrement des sous-domaines qui ont pour point de départ [1] dans lequel l'auteur définit la méthode de Schwarz et étudie sa convergence. Ces méthodes ont l'inconvénient de compliquer énormément la mise en oeuvre numérique, surtout dans le cas des problèmes 3D. De plus pour des géométries complexes, il est difficile voire impossible de définir des zones de recouvrement. Une autre alternative est nécessaire.
- Les méthodes sans recouvrement des sous-domaines : dans ce cas il est impératif de définir des conditions d'interface appropriées pour que la méthode converge. La méthode de Schwarz [1] ne converge pas dans ce cas. Une extension de cette méthode au cas sans recouvrement a été proposée dans [6] où à la place des conditions d'interface de type Dirichlet, l'auteur a proposé des conditions d'interface de type Robin. D'autres conditions d'interface ont été étudiées dans [4, 5], où les auteurs imposent d'un côté de l'interface une condition de Dirichlet et de l'autre une condition de Neumann. Dans [7], l'auteur propose pour l'équation d'Helmholtz des conditions de type radiation à l'interface et prouve par la même occasion la convergence de l'algorithme sans recouvrement. Dans [10], des conditions de type Ventcell sont étudiées pour l'équation d'advection-diffusion. En dimension deux ou trois, le choix optimal des conditions de raccord requiert des opérateurs de transmission non-locaux comme il a été mis en évidence pour l'équation d'advection diffusion dans [8]. Comme les opérateurs non-locaux se prêtent peu au calcul numérique, les auteurs proposent dans le cas d'une convection dominante, de développer ces opérateurs par rapport à la petite viscosité. De cette façon, on obtient des approximations locales. Plusieurs approximations par un développement de Taylor en le paramètre de fréquence ont été proposées et étudiées dans [9]. L'analyse de convergence de ces méthodes est parfaitement maîtrisée. L'idée de résoudre un problème optimisation sur les conditions d'interface pour accélérer la convergence est apparue dans [10] pour l'équation d'advection diffusion puis a été raffinée dans [13]. Depuis cette stratégie a beaucoup été adoptée, notamment dans [12, 18, 19, 22].

Une autre approche consiste à se servir de l'information que nous donne l'étude asymptotique pour l'incorporer dans la méthode numérique choisie de façon à l'enrichir. Dans [14, 18], les auteurs utilisent une méthode des éléments finis enrichis pour traiter les problèmes de couches limites. En effet ils rajoutent dans l'espace des fonctions de base, des fonctions intégrant l'information venant de l'étude asymptotique faite préalablement.

La question fondamentale que nous nous sommes posée est la suivante : ***Comment construire des méthodes numériques efficaces et robustes capables de calculer une solution fiable d'un problème fortement hétérogène en un temps raisonnable.***

Pour y apporter quelques éléments de réponse, nous avons particulièrement étudié le problème modèle défini comme suit : étant donnés deux paramètres positifs  $\varepsilon, \eta$ , un domaine  $\Omega^\eta$ , et une fonction  $f^\varepsilon$  nous cherchons

$$(1) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (v^\varepsilon \nabla \mathbf{u}^{\varepsilon, \eta}) & = f^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\eta, \\ CL^{\varepsilon, \eta}(\mathbf{u}^{\varepsilon, \eta}, \frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon, \eta}}{\partial n}) & = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega^\eta, \end{cases}$$

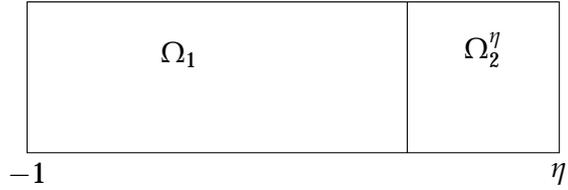


FIGURE 0.1: Modèle de problème avec couche mince

où  $CL^{\varepsilon, \eta}$  est un opérateur défini sur le bord de  $\Omega^\eta$ , et

$$(2) \quad v^\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ \varepsilon & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2^\eta, \end{cases} \quad (3) \quad v^\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2^\eta. \end{cases}$$

C'est un modèle simple bidimensionnel que l'on rencontre très souvent. Les paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont supposés petits. Il modélise par exemple un problème de conduction entre un matériau  $\Omega^1$  et une couche mince  $\Omega^\eta$ . Dans un cas la couche mince est supposée peu conductrice, à la limite isolante, appelé problème de collage [13] et dans l'autre elle est supposée très conductrice, à la limite de conductivité infinie appelé problème de revêtement [19, 16].

## Le plan de thèse

Nous avons structuré notre travail en deux parties qui se veulent indépendantes et qui constituent deux approches pour résoudre les problèmes de type (1).

- ◇ *La première partie* est composée de cinq chapitres traitant tous de méthodes asymptotiques. Nous étudions le comportement asymptotique de la solution  $u^{\varepsilon, \eta}$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Plus précisément nous cherchons la solution  $u^{\varepsilon, \eta}$  de problèmes d'équations aux dérivées partielles sous la forme d'un développement asymptotique du type

$$u^{\varepsilon, \eta} = u^0 + \varepsilon u^1 + \dots$$

Les inconnues sont donc les  $u^i$ . Nous verrons que le lieu d'apparition du petit paramètre  $\varepsilon$  joue un rôle fondamentale dans cette étude. C'est d'ailleurs ce qui motive l'enchaînement de ces 5 chapitres. Le premier chapitre nous servira d'introduction et nous permettra de comprendre les types de difficultés auxquelles nous pouvons être confrontés en envisageant une étude asymptotique de problème d'équations aux dérivées partielles en présence de petits paramètres. Il est inspiré de [9]. Dans un second chapitre, nous regardons le cas du problème (1), (2) avec  $\eta = 1$ . C'est un problème qui a été étudié en détails dans [2], mais nous le reprenons ici car il constitue une transition intéressante pour arriver à exposer la problématique de ce travail. Le troisième chapitre traite du problème de collage [13] (1), (2) avec  $\eta = \varepsilon$ . En effet dans [13], les auteurs étudient un problème d'élasticité linéaire avec des coefficients d'élasticité négligeables dans la couche mince par rapport au reste du matériau, puis ils définissent et étudient le problème limite associé. Dans ce chapitre nous définissons et étudions le problème limite et

soulignons les difficultés posées par les termes suivants du développement asymptotique. De façon assez analogue, le quatrième chapitre traite le problème de revêtement [19, 16], (1), (3) avec  $\eta = \varepsilon$ . Le problème limite correspondant est étudié dans [19], et dans [16] avec une approche utilisant une décomposition du problème de départ en somme d'opérateurs linéaires. Pour étudier ce problème nous utilisons une approche variationnelle.

- ◇ *Dans la seconde partie*, pour résoudre (1), nous envisageons des méthodes de décomposition de domaines sans recouvrement qui se prêtent assez naturellement à ces types de problèmes. Cette partie est constituée de trois chapitres. Dans un premier chapitre introductif nous faisons l'état de l'art en rappelant les développements récents de la méthode de Schwarz sur l'équation de Laplace. Nous reprenons essentiellement les travaux effectués dans [19] et [22] où les auteurs définissent une famille de conditions d'interface robustes basée sur une analyse de Fourier. Ce qui nous permettra de motiver le travail effectué dans cette thèse. Puis dans un second chapitre nous étudions le problème (1), (2) en étendant les résultats obtenus dans [19] et [22]. Finalement dans un troisième chapitre, nous étudions le problème (1), (3).

## **Première partie**

# **Introduction aux problèmes de perturbations singulières**



# Résumé

La formulation mathématique des phénomènes physiques conduit parfois à des équations contenant **un (ou plusieurs) petits paramètres**. Ces petits paramètres peuvent être de nature **matérielle**, comme de nature **géométrique**. On parle souvent de familles de problèmes à petits paramètres.

Dans ces familles de problèmes à petits paramètres, notre étude loin d'être exhaustive, se limitera ici à deux sous familles :

1. problèmes raides où les coefficients au niveau des opérateurs différentiels peuvent être d'ordres de grandeur différents selon les régions comme cela est traité dans [2] ;
2. problèmes posés sur un domaine avec couche mince [13],[14],[16],[17],[19].

Notons une certaine différence qui motive un peu le choix de ces sous-familles, notamment au niveau de l'apparition des petits paramètres. En effet dans les problèmes raides les petits paramètres n'apparaissent qu'au niveau des rigidités des sous régions composant le domaine considéré, tandis que dans le cas des problèmes à couches minces que nous regarderons, les petits paramètres proviennent non seulement des rigidités mais aussi de la géométrie des sous domaines.

Pour comprendre le comportement asymptotique de la grandeur physique qui nous intéresse (en l'occurrence ici ce sera toujours la température), lorsque le **petit paramètre tend vers zéro**, nous recherchons la solution sous forme d'un **développement asymptotique**. Dans certains cas pour traiter le problème de **couche limite et/ou de perturbation singulière**, nous soulignerons la nécessité de recours à des méthodes de développements asymptotiques raccordés. Mais ces problèmes de couches limites ne sont pas traités dans ce travail. La justification rigoureuse mathématique de telles méthodes commencent à émerger. En effet nous pouvons citer les livres [4] et [7] et plus récemment la thèse [15]. Nous finirons cette partie introductive par un chapitre qui traitera deux types de problèmes [9]. Ces problèmes nous permettront de définir et de mettre en évidence les notions de perturbations régulière et singulière.

Dans un second chapitre, nous traiterons des problèmes dits raides [2] posés sur une structure composée d'une partie **rigide** et d'une partie **molle** de coefficient de rigidité supposé **négligeable** par rapport à celui de la partie rigide. Les dimensions caractéristiques des deux composantes de la structure seront supposées ici être de même ordre. Les premiers termes du développement asymptotique seront calculés d'une façon formelle dans un premier temps et ensuite nous en donnerons une démonstration rigoureuse à travers un théorème d'erreur de convergence par rapport au petit paramètre.

Le troisième chapitre sera consacré à l'analyse mathématique des problèmes dits de collage[13]. C'est le premier problème à couche mince que nous traiterons. Ce sont des types de problèmes dans lesquels la couche mince est de rigidité négligeable par rapport au reste du matériau. Il s'agit donc d'étudier le comportement asymptotique de ces problèmes.

Dans un quatrième chapitre, nous étudierons un second problème à couche mince appelé problème de revêtement [16],[19] où cette fois la couche mince est de rigidité beaucoup plus importante que le reste du matériau.

Toutes ces parties seront complétées par des simulations numériques servant à illustrer sur des cas simples la pertinence des études théoriques effectuées. Les essais numériques représentent en soi une étape supplémentaire et nécessaire dans la validation de la construction des solutions approchées par des développements asymptotiques.

Dans toute cette partie nous noterons respectivement  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ ,  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ , les normes  $L^2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$ ,  $|\cdot|_{1,\Omega}$  la semi-norme  $H^1(\Omega)$ , et  $(\cdot, \cdot)_*$  le produit scalaire correspondant à  $\|\cdot\|_*$ .

# Chapitre 1

## Introduction aux méthodes asymptotiques

Dans ce chapitre nous reprenons l'étude effectuée dans [9]. Ce chapitre a pour but de servir d'introduction aux méthodes asymptotiques puis d'en dégager les grandes lignes à travers deux problèmes génériques. Etant donné un réel positif  $\varepsilon$ , un ouvert régulier  $\Omega$  et une fonction  $f$  appartenant à  $L^2(\Omega)$ , soient les deux familles de problèmes suivantes :

$$(1.1) \quad (P_\varepsilon)_0 \begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + \varepsilon^2 u^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(1.2) \quad (P_\varepsilon)_1 \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = f & \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons là deux problèmes elliptiques classiques qui admettent tous les deux une solution unique dans  $H_0^1(\Omega)$ . Nous nous proposons de construire une approximation de cette solution en étudiant son comportement asymptotique quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Le plan d'étude sera donc le suivant :

1. analyse formelle par développement asymptotique et identification du problème limite,
2. estimation a priori et convergence faible,
3. convergence forte et estimation d'erreur.

### 1.1 Etude du problème $(P_\varepsilon)_0$

Le problème aux limites (1.1) admet la formulation variationnelle suivante :

$$(1.3) \quad a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

avec :

$$(1.4) \quad \begin{cases} a(u^\varepsilon, v) = \int_\Omega \nabla u^\varepsilon \nabla v, \\ b(u^\varepsilon, v) = \int_\Omega u^\varepsilon v, \\ l(v) = \int_\Omega f v. \end{cases}$$

### 1.1.1 Analyse asymptotique formelle

Soit l'ansatz

$$(1.5) \quad u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon^2 u^2 + \dots + \varepsilon^{2n} u^{2n} + \dots,$$

avec  $u^{2n} \in H_0^1(\Omega) \forall n \in \mathbb{N}$ . En reportant (1.5) dans (1.3) (1.4) puis en identifiant formellement les termes de même puissance de  $\varepsilon$ , on a pour tout  $v$  dans  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$(1.6) \quad \begin{aligned} a(u^0, v) &= l(v), \\ a(u^2, v) &= -b(u^0, v), \\ &\dots \\ a(u^{2n+2}, v) &= -b(u^{2n}, v). \end{aligned}$$

Regardons les 2 premiers problèmes de plus près, à savoir

$$(1.7) \quad (P_0)_0 \begin{cases} u^0 \in H_0^1(\Omega), \\ a(u^0, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

et

$$(1.8) \quad (P_2)_0 \begin{cases} u^2 \in H_0^1(\Omega), \\ a(u^2, v) = -b(u^0, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Nous pouvons montrer dans un premier temps l'existence et l'unicité de  $u^0$  grâce au théorème de Lax-Milgram, et ensuite comme  $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ , alors l'application  $v \mapsto -b(u^0, v)$  est bien une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ . Et donc toujours grâce aux théorème de Lax-Milgram, nous prouvons que le problème  $(P_2)_0$  est bien posé. Un raisonnement par induction nous permet alors de prouver le caractère bien posé des problèmes  $(P_{2n})_0$ ,  $n > 1$ .

### 1.1.2 Estimations a priori et convergence faible

Dans cette sous section, nous cherchons des estimations simples et directes de la norme de  $u^\varepsilon$ .

**Proposition 1.1.** *Si  $f \in L^2(\Omega)$ , alors la solution  $u^\varepsilon$  du problème défini par (1.3),(1.4), converge faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$  vers  $u^0$  solution du problème (1.7).*

*Démonstration.* Prenons comme fonction test dans (1.3),(1.4),  $v = u^\varepsilon$ . Nous obtenons :

$$(1.9) \quad a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = l(u^\varepsilon).$$

Comme  $l$  est un élément de  $H^{-1}(\Omega)$  ( $F$  désignant une constante positive), nous déduisons de (1.9)

$$|u^\varepsilon|_{1,\Omega}^2 + \varepsilon^2 \|u^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq F |u^\varepsilon|_{1,\Omega}.$$

De cette inégalité, nous avons :

$$|u^\varepsilon|_{1,\Omega} \leq F.$$

Il en résulte la convergence faible de  $u^\varepsilon$  vers  $u^*$  dans  $H_0^1(\Omega)$  (ou plus précisément la possibilité d'extraire une sous-suite de  $u^\varepsilon$  qui converge faiblement vers  $u^*$  dans  $H_0^1(\Omega)$ ). En utilisant cette convergence faible pour passer à la limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) dans (1.3),(1.4), nous obtenons le problème limite suivant :

$$(1.10) \quad \begin{cases} u^* \in H_0^1(\Omega), \\ a(u^*, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique et il caractérise parfaitement  $u^*$ . En le comparant à  $(P_0)$ , nous obtenons :

$$u^* = u^0.$$

L'unicité de la solution implique que la limite faible  $u^0$  (de la sous-suite extraite de  $u^\varepsilon$ ) est unique et par conséquent c'est toute la suite  $u^\varepsilon$  qui converge faiblement vers  $u^0$ . Nous avons donc ainsi montré que  $u^\varepsilon$  converge faiblement vers  $u^0$  dans  $H_0^1(\Omega)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.  $\square$

### 1.1.3 Convergence forte et estimation d'erreur

Dans cette section, nous montrons que la convergence forte de  $u^\varepsilon$  vers  $u^0$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , puis en donner une estimation d'erreur.

**Proposition 1.2.** *La solution  $u^\varepsilon$  du problème défini par (1.3),(1.4) converge fortement vers  $u^0$  défini par (1.7). De plus il existe une constante positive, que nous noterons  $C$ , telle que nous ayons l'estimation suivante :*

$$|u^\varepsilon - u^0|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon^2 |u^0|_{1,\Omega}.$$

*Démonstration.* Posons  $v^\varepsilon = u^\varepsilon - u^0$ , puis introduisons la quantité :

$$E(v^\varepsilon) = a(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + \varepsilon^2 b(v^\varepsilon, v^\varepsilon).$$

Comme  $v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ ,  $E(v^\varepsilon)$  a bien un sens. Développons  $E(v^\varepsilon)$  en utilisant les problèmes (1.3),(1.4) et (1.7), il vient :

$$E(v^\varepsilon) = -\varepsilon^2 b(u^0, v^\varepsilon).$$

Grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré, nous avons ( $C$  désigne une constante positive qui ne dépend que de  $\Omega$ )

$$E(v^\varepsilon) \leq C\varepsilon^2 |u^0|_{1,\Omega} |v^\varepsilon|_{1,\Omega}.$$

Ce qui s'écrit encore

$$|v^\varepsilon|_{1,\Omega}^2 + \varepsilon^2 \|v^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq C\varepsilon^2 |u^0|_{1,\Omega} |v^\varepsilon|_{1,\Omega}.$$

Cette dernière inégalité implique

$$|v^\varepsilon|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon^2 |u^0|_{1,\Omega},$$

i.e

$$(1.11) \quad |u^\varepsilon - u^0|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon^2 |u^0|_{1,\Omega}.$$

L'inégalité (1.11) constitue une estimation d'erreur d'approximation de  $u^\varepsilon$  par  $u^0$  mais aussi permet de montrer la convergence forte de  $u^\varepsilon$  vers  $u^0$ . En effet, en passant à la limite dans (1.11), il vient que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u^\varepsilon - u^0|_{1,\Omega} = 0$  (car  $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ ).

Nous pouvons de façon analogue introduire le terme suivant du développement à savoir  $u^2$ , le caractériser et justifier la convergence faible et forte de  $\frac{u^\varepsilon - u^0}{\varepsilon^2}$  vers  $u^2$ .  $\square$

Nous pouvons alors généraliser ces résultats par l'intermédiaire du théorème suivant :

**Théorème 1.3. (Développement complet).** *Si  $f \in L^2(\Omega)$ , alors il existe une constante positive, que nous noterons  $C$ , telle que nous ayons l'estimation suivante :*

$$|u^\varepsilon - (u^0 + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^4 u^4 + \dots + \varepsilon^{2n} u^{2n})|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon^{2(n+1)} |u^{2n}|_{1,\Omega}$$

où  $u^\varepsilon$  est la solution du problème défini par (1.3), (1.4) et les  $u^{2j}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  sont les solutions des problèmes définis par (1.6).

*Démonstration.* Nous avons déjà prouvé ce résultat pour  $n = 0$ . Posons  $R_\varepsilon^{2n} = u^\varepsilon - (u^0 + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^4 u^4 + \dots + \varepsilon^{2n} u^{2n})$  et écrivons les équations que vérifie  $R_\varepsilon^{2n}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon(R_\varepsilon^{2n}, v) &= \underbrace{a(u^\varepsilon, v) + \varepsilon^2 b(u^\varepsilon, v)}_{I(v)} - \sum_{j=0}^{j=n} \varepsilon^{2j} (a(u^{2j}, v) + \varepsilon^2 b(u^{2j}, v)), \\ &= I(v) - \underbrace{a(u^0, v)}_{I(v)} - \varepsilon^2 b(u^0, v) - \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon^{2j} (a(u^{2j}, v) + \varepsilon^2 b(u^{2j}, v)), \\ &= -\varepsilon^2 b(u^0, v) - \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon^{2j} \underbrace{a(u^{2j}, v)}_{-b(u^{2(j-1)}, v)} - \sum_{j=1}^{j=n} \varepsilon^{2(j+1)} b(u^{2j}, v), \\ &= -\sum_{j=0}^{j=n} \varepsilon^{2(j+1)} b(u^{2j}, v) + \sum_{j=0}^{j=n-1} \varepsilon^{2(j+1)} b(u^{2j}, v), \\ &= -\varepsilon^{2(n+1)} b(u^{2n}, v). \end{aligned}$$

Autrement dit

$$a(R_\varepsilon^{2n}, v) + \varepsilon^2 b(R_\varepsilon^{2n}, v) = -\varepsilon^{2(n+1)} b(u^{2n}, v).$$

Prenons  $v = R_\varepsilon^{2n}$  dans l'égalité précédente puis utilisons l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\begin{aligned} |R_\varepsilon^{2n}|_{1,\Omega}^2 + \varepsilon^2 \|R_\varepsilon^{2n}\|_{0,\Omega}^2 &= -\varepsilon^{2(n+1)} \|u^{2n}\|_{0,\Omega} \|R_\varepsilon^{2n}\|_{0,\Omega}, \\ &\leq C\varepsilon^{2(n+1)} |u^{2n}|_{1,\Omega} |R_\varepsilon^{2n}|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité

$$|R_\varepsilon^{2n}| \leq C\varepsilon^{2(n+1)} |u^{2n}|_{1,\Omega},$$

i.e

$$|u^\varepsilon - (u^0 + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^4 u^4 + \dots + \varepsilon^{2n} u^{2n})|_{1,\Omega} \leq C\varepsilon^{2(n+1)} |u^{2n}|_{1,\Omega}.$$

□

## 1.2 Etude du problème $(P_\varepsilon)_1$

Le problème aux limites (1.2) admet la formulation variationnelle suivante :

$$(1.12) \quad \varepsilon^2 a(u^\varepsilon, v) + b(u^\varepsilon, v) = I(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Les formes bilinéaires  $a$ ,  $b$  et la forme linéaire  $I$  sont définis dans (1.4).

### 1.2.1 Analyse asymptotique formelle

Nous faisons l'ansatz (1.5). En reportant (1.5) dans (1.12) puis en identifiant formellement les termes de même puissance de  $\varepsilon$ , on a pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$(1.13) \quad \begin{aligned} b(u^0, v) &= I(v), \\ b(u^2, v) &= -a(u^0, v), \\ &\dots, \\ b(u^{2n}, v) &= -a(u^{2n-2}, v). \end{aligned}$$

Regardons les 2 premiers problèmes de plus près i.e

$$(1.14) \quad (P_0)_1 \begin{cases} u^0 \in H_0^1(\Omega), \\ b(u^0, v) = I(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

et

$$(1.15) \quad (P_2)_1 \begin{cases} u^2 \in H_0^1(\Omega) \\ b(u^2, v) = -a(u^0, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Nous remarquons que le problème (1.14) est mal posé. En effet, d'après la formulation variationnelle, nous devrions avoir  $u^0 = f$ . Mais si  $f \notin H_0^1(\Omega)$ , alors le problème (1.14) n'aura donc pas de solution. De même, si  $f$  n'est pas assez régulière, le problème (1.15) sera également mal posé. Tout ceci nous laisse prédire que l'étude asymptotique des problèmes de type  $(P_\varepsilon)_1$  est plus délicate.

### 1.2.2 Estimations a priori et convergence faible

Dans cette sous section, nous cherchons des estimations simples et directes de la norme de  $u^\varepsilon$ .

**Proposition 1.4.** *Si  $f \in L^2(\Omega)$ , alors la solution  $u^\varepsilon$  du problème (1.12) converge faiblement dans  $L^2(\Omega)$  vers  $f$ .*

*Démonstration.* Prenons comme fonction test dans (1.12)  $v = u^\varepsilon$ , nous obtenons :

$$(1.16) \quad \varepsilon^2 a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + b(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = I(u^\varepsilon).$$

Comme  $f$  est un élément de  $L^2(\Omega)$  ( $F$  designant une constante positive), nous déduisons de (1.16)

$$\varepsilon^2 \|u^\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 + \|u^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq F \|u^\varepsilon\|_{0,\Omega}.$$

De cette inégalité, nous obtenons les deux inégalités qui suivent

$$\|u^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq F \|u^\varepsilon\|_{0,\Omega} \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 |u^\varepsilon|_{1,\Omega}^2 \leq F \|u^\varepsilon\|_{0,\Omega},$$

i.e

$$\|u^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq F \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 |u^\varepsilon|_{1,\Omega}^2 \leq F^2,$$

d'où

$$\|u^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq F \quad \text{et} \quad \varepsilon |u^\varepsilon|_{1,\Omega} \leq F.$$

De ces inégalités, nous déduisons les convergences faibles de  $u^\varepsilon$  vers  $u^*$  dans  $L^2(\Omega)$  (ou plus précisément la possibilité d'extraire une sous-suite de  $u^\varepsilon$  qui converge faiblement vers  $u^*$  dans  $L^2(\Omega)$ ) et de  $\varepsilon u^\varepsilon$  vers  $v^*$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Grâce au résultat de compacité de l'injection canonique de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  (Rellich), nous avons la convergence forte de  $\varepsilon u^\varepsilon$  vers  $v^*$  dans  $L^2(\Omega)$  d'une part. D'autre part étant donnée la convergence de  $u^\varepsilon$  vers  $u^*$  dans  $L^2(\Omega)$ , nous avons que  $\varepsilon u^\varepsilon$  tend vers 0 dans  $L^2(\Omega)$ , par unicité de la limite, il vient :

$$v^* = 0.$$

Utilisons cette convergence faible pour passer à la limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) dans (1.12), nous obtenons le problème limite suivant :

$$(1.17) \quad \begin{cases} u^* \in L^2(\Omega), \\ b(u^*, v) = I(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Ce problème admet une solution unique et il caractérise parfaitement  $u^*$ . En le comparant à (1.14), nous obtenons

$$u^* = u^0 = f.$$

Nous avons ainsi montré que  $u^\varepsilon$  converge faiblement vers  $u^0 = f$  dans  $L^2(\Omega)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.  $\square$

### 1.2.3 Convergence forte et estimation d'erreur

Dans cette section, nous montrons la convergence de  $u^\varepsilon$  vers  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ , puis nous donnons une estimation d'erreur.

**Proposition 1.5.** *La solution  $u^\varepsilon$  du problème (1.12) converge fortement dans  $L^2(\Omega)$  vers  $f$ . De plus si  $f \in H_0^1(\Omega)$  alors il existe une constante positive, que nous notons  $F$ , telle que nous ayons l'estimation suivante*

$$\|u^\varepsilon - f\|_{0,\Omega} \leq F\varepsilon.$$

*Démonstration.* Introduisons la quantité

$$E^\varepsilon = \varepsilon^2 a(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + b(u^\varepsilon - f, u^\varepsilon - f).$$

Développons  $E^\varepsilon$  et utilisons le problème (1.12), il vient

$$E^\varepsilon = b(f, f - u^\varepsilon).$$

La convergence faible de  $u^\varepsilon$  vers  $f$  entraîne la convergence de  $E^\varepsilon$  vers 0. Et par conséquent, les 2 quantités positives

$$a(\varepsilon u^\varepsilon, \varepsilon u^\varepsilon) \quad \text{et} \quad b(u^\varepsilon - f, u^\varepsilon - f)$$

tendent vers zéro. Nous obtenons donc les convergences fortes suivantes lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro

- $\varepsilon u^\varepsilon$  converge fortement vers zéro dans  $H_0^1(\Omega)$
- et  $u^\varepsilon$  converge vers  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ .

L'estimation d'erreur que nous donnons ci-après n'est possible qu'en supposant que  $f$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ , auquel cas nous pouvons prendre la fonction  $v^\varepsilon = u^\varepsilon - f$  comme fonction test dans (1.12). En développant la quantité

$$E(v^\varepsilon) = \varepsilon^2 a(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + b(v^\varepsilon, v^\varepsilon)$$

puis en utilisant (1.12), il vient :

$$E(v^\varepsilon) = -\varepsilon^2 a(f, v^\varepsilon).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne immédiatement ( $F$  étant une constante positive) :

$$\varepsilon^2 |v^\varepsilon|_{1,\Omega}^2 + \|v^\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq F\varepsilon^2 |v^\varepsilon|_{1,\Omega},$$

soit

$$|v^\varepsilon|_{1,\Omega} \leq F \quad \text{et} \quad \|v^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq F\varepsilon.$$

Nous venons donc de montrer que si  $f \in H_0^1(\Omega)$ , alors

$$(1.18) \quad \|u^\varepsilon - f\|_{0,\Omega} \leq F\varepsilon.$$

□



# Chapitre 2

## Problèmes raides

### Sommaire

---

1.1	Etude du problème $(P_\epsilon)_0$ . . . . .	13
1.1.1	Analyse asymptotique formelle . . . . .	14
1.1.2	Estimations a priori et convergence faible . . . . .	14
1.1.3	Convergence forte et estimation d'erreur . . . . .	15
1.2	Etude du problème $(P_\epsilon)_1$ . . . . .	17
1.2.1	Analyse asymptotique formelle . . . . .	17
1.2.2	Estimations a priori et convergence faible . . . . .	17
1.2.3	Convergence forte et estimation d'erreur . . . . .	18

---

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous reprenons un problème traité intégralement dans [2]. Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Nous noterons  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$ . Nous désignerons (cf figure 2.1) par

- $\partial\Omega$  la frontière de  $\Omega$ ;
- $\partial\Omega_1$  la frontière de  $\Omega_1$ ;
- $\partial\Omega_2$  la frontière de  $\Omega_2$ ;
- $I$ , la frontière commune à  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ;
- $\Sigma_1$  une partie de  $\partial\Omega_1$ ;
- $\Sigma_2$  une partie de  $\partial\Omega_2$ ;
- $\Sigma$  l'union de  $\Sigma_1$  et de  $\Sigma_2$ ;
- $n_\Gamma$  la normale extérieure à  $\partial\Omega$ ;
- $n_I$  la normale extérieure à  $I$  orientée vers le domaine  $\Omega_2$ .

Nous considérons le problème de transmission suivant : Nous cherchons

$$u^\epsilon = \begin{cases} u_1^\epsilon & \text{dans } \Omega_1, \\ u_2^\epsilon & \text{dans } \Omega_2, \end{cases}$$

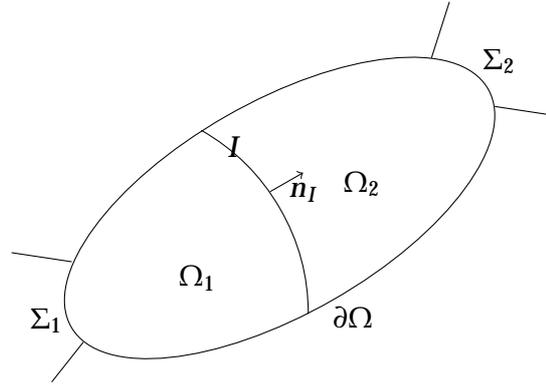


FIGURE 2.1: Modèle de problème raide

solution de :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_1^\varepsilon = f_1 \text{ dans } \Omega_1, \\ -\varepsilon \Delta u_2^\varepsilon = f_2 \text{ dans } \Omega_2, \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Sigma, \\ u_1^\varepsilon = u_2^\varepsilon \text{ sur } I, \\ \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial n_I} = \varepsilon \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial n_I} \text{ sur } I. \end{array} \right.$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre positif destiné à tendre vers zéro et les  $f_i$  sont des fonctions données dans  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ .

## 2.2 Existence et unicité de $u^\varepsilon$

Nous pouvons mettre le problème (2.1) sous la forme variationnelle suivante :

$$(2.2) \quad a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = I(v) \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

avec :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Sigma\}, \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_1} \nabla u_1^\varepsilon \nabla v + \varepsilon \int_{\Omega_2} \nabla u_2^\varepsilon \nabla v, \\ I(v) = \int_{\Omega_1} f_1 v + \int_{\Omega_2} f_2 v. \end{array} \right.$$

Nous pouvons aussi montrer sans peine qu'une solution régulière de cette formulation est aussi solution forte du problème aux limites (2.1). On se contentera de montrer plutôt que le problème variationnel (2.2),(2.3) est bien posé en appliquant le théorème de Lax-Milgram.

**Théorème 2.1.** Si  $f_1 \in L^2(\Omega_1)$ ,  $f_2 \in L^2(\Omega_2)$ , alors le problème variationnel (2.2),(2.3) admet une unique solution  $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ . De plus il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que :

$$(2.4) \quad \varepsilon \|u^\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C(\|f_1\|_{0,\Omega_1} + \|f_2\|_{0,\Omega_2}).$$

*Démonstration.*  $\diamond$  Il est facile de voir que l'espace fonctionnel  $\mathcal{V}$  muni du produit scalaire de  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert .

$\diamond$  Continuité de  $a$  : par l'inégalité de Cauchy Schwarz on a

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} |a^\varepsilon(u^\varepsilon, v)| = \left| \int_{\Omega_1} \nabla u_1^\varepsilon \nabla v_1 + \varepsilon \int_{\Omega_2} \nabla u_2^\varepsilon \nabla v_2 \right|, \\ \leq \left| \int_{\Omega_1} \nabla u_1^\varepsilon \nabla v_1 \right| + \left| \int_{\Omega_2} \nabla u_2^\varepsilon \nabla v_2 \right| \quad (\varepsilon < 1), \\ \leq \|u_1^\varepsilon\|_{1,\Omega_1} \|v_1\|_{1,\Omega_1} + \|u_2^\varepsilon\|_{2,\Omega_2} \|v_2\|_{2,\Omega_2}, \\ \leq 2 \|u^\varepsilon\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \\ \leq 2 \|u^\varepsilon\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in \mathcal{V}. \end{array} \right.$$

$\diamond$  Continuité de  $l$  : par l'inégalité de Cauchy Schwarz nous avons

$$(2.6) \quad |l(v)| = \left| \int_{\Omega_1} f_1 v + \int_{\Omega_2} f_2 v \right|,$$

$$(2.7) \quad \leq \|v\|_{1,\Omega} (\|f_1\|_{0,\Omega_1} + \|f_2\|_{0,\Omega_2}) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

$\diamond$  Coercivité de  $a$  :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |a(u^\varepsilon, u^\varepsilon)| = \int_{\Omega_1} |\nabla u_1^\varepsilon|^2 + \varepsilon \int_{\Omega_2} |\nabla u_2^\varepsilon|^2, \\ \geq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2, \\ \geq \varepsilon P_\Omega \|u^\varepsilon\|_{1,\Omega}^2, \end{array} \right.$$

où  $P_\Omega$  est la constante de Poincaré.

Le théorème de Lax-Milgram nous assure alors l'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.2) et (2.3). L'estimation a priori annoncée découle immédiatement des inégalités (2.7) et (2.8). Cette estimation nous servira ultérieurement.  $\square$

Dans le paragraphe qui suit, nous cherchons à construire un développement asymptotique de  $u^\varepsilon$  en le petit paramètre  $\varepsilon$ . Ce problème est traité avec plus de détails dans [2].

### 2.3 Analyse asymptotique formelle

La structure des équations (2.1) nous conduit naturellement à effectuer l'ansatz suivant :

$$(2.9) \quad u_i^\varepsilon = \frac{u_i^{-1}}{\varepsilon} + \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j u_i^j$$

où  $i=1,2$  et les fonctions  $u_i^j$  ne dépendent pas de  $\varepsilon$ . Nous faisons partir le développement de l'ordre  $-1$ , à cause de l'estimation obtenue dans le théorème (2.1). Cette écriture est purement formelle, et nous ne cherchons pas ici à montrer la convergence éventuelle des séries en  $j$ .

### 2.3.1 Les problèmes élémentaires

En injectant les expressions (2.9) dans (2.1), puis en identifiant les termes de même puissance de  $\varepsilon$ , on obtient deux suites de problèmes découplés cette fois -ci :

$$(2.10) \quad (P^j) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_1^j = f_1 \delta_0^j \quad \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^j = 0 \quad \text{dans } \Sigma_1, \\ \frac{\partial u_1^j}{\partial n_\Gamma} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Sigma_1, \\ \frac{\partial u_1^j}{\partial n_I} = (1 - \delta_{-1}^j) \frac{\partial u_2^{j-1}}{\partial n_I} \quad \text{sur } I, \end{array} \right.$$

et

$$(2.11) \quad (Q^j) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_2^j = f_2 \delta_{-1}^j \quad \text{dans } \Omega_2, \\ u_2^j = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \frac{\partial u_2^j}{\partial n_\Gamma} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Sigma_2, \\ u_2^j = u_1^j \quad \text{sur } I, \end{array} \right.$$

où  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker, et cela pour tout  $j$  supérieur ou égal à  $-1$ . Les problèmes  $P^j$ ,  $Q^j$  définissent les termes  $u^j$  de manière unique. Regardons de plus près les premiers termes.

### 2.3.2 Quelques remarques

Si on suppose connus les  $u_1^k$  et  $u_2^k$  pour  $k < j$  alors le problème (2.10) est bien défini comme problème de Laplace avec des conditions aux limites mixtes et admet une solution unique [1].

Le problème (2.11) admet également une solution unique en tant que problème de Laplace avec condition de Dirichlet à l'interface [1]. On devine bien l'algorithme :

- ◇ On commence par résoudre le problème (2.10) avec condition de Neumann à l'interface, ce qui nous donne  $u_1^j$  qu'on prolonge sur  $I$  par sa trace.
- ◇ Ensuite on résout le problème (2.11) avec condition de Dirichlet à l'interface, ce qui nous donne  $u_2^j$ . Puis on recommence pour  $j+1$ .

### 2.3.3 Calcul des premiers termes

Nous allons calculer les 2 premiers termes du développement asymptotique, ce qui étayera le procédé algorithmique de construction.

#### Termes de rang -1

Grâce à (2.10), (2.11) nous pouvons écrire

$$(P^{-1}) \begin{cases} -\Delta u_1^{-1} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^{-1} = 0 & \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial n_\Gamma} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Sigma_1, \\ \frac{\partial u_1^{-1}}{\partial n_I} = 0 & \text{sur } I, \end{cases} \quad (Q^{-1}) \begin{cases} -\Delta u_2^{-1} = f_2 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_2^{-1} = 0 & \text{sur } \Sigma_2, \\ \frac{\partial u_2^{-1}}{\partial n_\Gamma} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Sigma_2, \\ u_2^{-1} = u_1^{-1} & \text{sur } I. \end{cases}$$

Si bien que  $u_1^{-1} \equiv 0$  et  $u_2^{-1}$  est solution d'un problème avec conditions aux limites mixtes (homogènes) avec  $f_2$  comme terme source.

### Termes de rang 0

Et pour  $j = 0$  on a

$$(P^0) \begin{cases} -\Delta u_1^0 = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^0 = 0 & \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial n_\Gamma} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Sigma_1, \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial n_I} = \frac{\partial u_2^{-1}}{\partial n_I} & \text{sur } I, \end{cases} \quad (Q^0) \begin{cases} -\Delta u_2^0 = 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_2^0 = 0 & \text{sur } \Sigma_2, \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial n_\Gamma} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Sigma_2, \\ u_2^0 = u_1^0 & \text{sur } I. \end{cases}$$

## 2.4 Justification rigoureuse du développement asymptotique

Nous voulons à présent justifier la convergence de  $u^\varepsilon$  vers le développement asymptotique (2.9). Pour cela, définissons l'espace fonctionnel suivant

$$\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V}, v = 0 \text{ dans } \Omega_1\}.$$

La proposition ci-dessous nous permet de montrer la convergence de  $u^\varepsilon$  vers  $u^{-1}$  dans  $\mathcal{W}$ .

**Proposition 2.2.** *Il existe deux constantes  $C_1, C_2$  positives telles qu'on ait :*

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} \|u_1^\varepsilon\|_{1,\Omega_1} &\leq C_1, \\ \varepsilon \|u_2^\varepsilon\|_{1,\Omega_2} &\leq C_2, \end{aligned}$$

avec  $u_1^\varepsilon$  et  $u_2^\varepsilon$  solution de (2.2),(2.3).

*Démonstration.* L'inégalité du théorème 2.1 nous dit qu'il existe une constante  $C$  :

$$\varepsilon^2 \|u^\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 \leq C.$$

Cela entraîne immédiatement d'une part :

$$(2.13) \quad \varepsilon \|u_1^\varepsilon\|_{1,\Omega_1} \leq C_1,$$

et d'autre part

$$(2.14) \quad \varepsilon \|u_2^\varepsilon\|_{1,\Omega_2} \leq C_2.$$

Par ailleurs en posant  $v = u^\varepsilon$  dans la formulation variationnelle (2.2), on obtient :

$$(2.15) \quad \varepsilon |u_1^\varepsilon|_{1,\Omega_1}^2 + \varepsilon^2 |u_2^\varepsilon|_{1,\Omega_2}^2 \leq \varepsilon C (\|u_1^\varepsilon\|_{1,\Omega_1} + \|u_2^\varepsilon\|_{1,\Omega_2}).$$

Ce qui nous donne avec les inégalités (2.13) et (2.14)

$$(2.16) \quad \varepsilon |u_1^\varepsilon|_{1,\Omega_1}^2 + \varepsilon^2 |u_2^\varepsilon|_{1,\Omega_2}^2 \leq C.$$

□

Interprétons les conséquences de ce résultat. De (2.12), on peut dire quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\varepsilon u_2^\varepsilon \rightharpoonup u_2^* \quad H^1 \text{ faible.}$$

et aussi que :

$$\varepsilon u_1^\varepsilon \rightarrow 0 \quad H^1 \text{ fort.}$$

Et donc  $u_2^*$  peut être prolongé par 0 dans un premier temps jusqu'à son bord  $I$ , puis jusque dans  $\Omega_1$  de telle sorte qu'il appartienne à  $\mathcal{W}$  et soit solution de (après passage à la limite en  $\varepsilon$ ) :

$$(2.17) \quad \int_{\Omega_2} \nabla u_2^* \nabla v = \int_{\Omega_2} f_2 v \quad \forall v \in \mathcal{W}.$$

Et nous en déduisons donc l'égalité :

$$u_2^* = u_2^{-1}.$$

Le théorème ci-dessous généralise ce que nous avons fait plus haut, en ce sens que nous donnons estimation d'erreur optimale. Pour plus de détails cf [2].

**Théorème 2.3.** *Sous les hypothèses classiques de continuité et de coercivité de la forme bilinéaire  $a$  et de continuité de la forme linéaire  $l$ , dans la formulation (2.2),(2.3), il existe une constante positive  $C$ , indépendante de  $\varepsilon$  telle que nous ayons :*

$$(2.18) \quad |u^\varepsilon - (\frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^j u^j)|_{1,\Omega} \leq C \varepsilon^{j+1}.$$

*Démonstration.* Posons  $\varphi_{\varepsilon,N} = \frac{u^{-1}}{\varepsilon} + u^0 + \varepsilon u^1 + \dots + \varepsilon^N u^N$ . On voudrait montrer

$$|u^\varepsilon - \varphi_{\varepsilon,N}| \leq C \varepsilon^{N+1}$$

avec  $C$  indépendante de  $\varepsilon$ . On a  $\varphi_{\varepsilon,N+1} = \varphi_{\varepsilon,N} + \varepsilon^{N+1} u^{N+1}$ . Posons aussi  $R_\varepsilon = u^\varepsilon - \varphi_{\varepsilon,N+1}$ . Nous avons  $a^\varepsilon(u, v) = a_1(u, v) + \varepsilon a_2(u, v)$  avec  $a_i(u, v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \nabla v$ . Un calcul simple nous montre que

$$a^\varepsilon(\varphi_{\varepsilon,N+1}, v) = l(v) + \varepsilon^{N+2} a_2(u^{N+1}, v).$$

Ce qui entraîne

$$(2.19) \quad a^\varepsilon(R_\varepsilon, v) = -\varepsilon^{N+2} a_2(u^{N+1}, v).$$

Faisons  $v = R_\varepsilon$  dans (2.19), nous obtenons

$$\varepsilon |R_\varepsilon|_{1,\Omega_1}^2 + \varepsilon |R_\varepsilon|_{1,\Omega_2}^2 \leq |a^\varepsilon(R_\varepsilon, R_\varepsilon)| \leq C' \varepsilon^{N+2} |u^{N+1}|_{1,\Omega} |R_\varepsilon|_{1,\Omega},$$

puis

$$|\mathcal{R}_\varepsilon|_{1,\Omega} \leq C'\varepsilon^{N+1}.$$

Finalement nous pouvons conclure avec l'inégalité triangulaire ci-dessous

$$(2.20) \quad \begin{aligned} |u_\varepsilon - \varphi_{\varepsilon,N}|_{1,\Omega} &= |\mathcal{R}_\varepsilon + \varepsilon^{N+1} \mathbf{u}^{N+1}|_{1,\Omega}, \\ &\leq |\mathcal{R}_\varepsilon|_{1,\Omega} + C''\varepsilon^{N+1} \leq C\varepsilon^{N+1}. \end{aligned}$$

□

## 2.5 Discrétisation d'une équation à coefficients discontinus

Dans le but d'effectuer des simulations numériques nous devons établir une relation nécessaire entre les paramètres qui apparaissent dans nos équations et le paramètre de discrétisation. Cette section a pour vocation de guider le choix de ce paramètre de discrétisation.

### 2.5.1 Problème continu

Nous nous donnons la géométrie suivante :

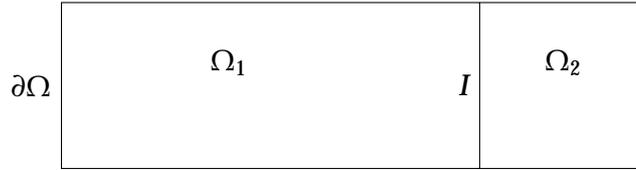


FIGURE 2.2: Géométrie considérée

Notons  $n$  la normale extérieure à  $\Omega_1$  sur  $\partial\Omega_1$ , et introduisons la fonction  $v$  telle que sa restriction à  $\Omega_1$ , respectivement à  $\Omega_2$  soit égale à une constante positive  $\nu_1$ , respectivement  $\nu_2$ . On suppose de plus que  $\nu_1 \neq \nu_2$ . Etant donnée  $f$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ , soit donc le problème modèle

$$(2.21) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(v\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Une formulation variationnelle équivalente au problème (2.21) est la suivante

$$(2.22) \quad \text{Trouver } u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = I(v),$$

avec :

$$(2.23) \quad \begin{cases} a(u, v) = \nu_1 \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v + \nu_2 \int_{\Omega_2} \nabla u \nabla v, \\ I(v) = \int_{\Omega} f v. \end{cases}$$

Le problème (2.22),(2.23) admet une solution unique. Notons  $\nu_m = \min(\nu_1, \nu_2)$  et  $\nu_M = \max(\nu_1, \nu_2)$ . Alors pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons  $|a(u, v)| \leq \nu_M |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}$  et  $a(v, v) \geq \nu_m |v|_{1,\Omega}^2$ . Cette solution n'appartient en général pas dans  $H^2(\Omega)$  car  $\nu_1 \neq \nu_2$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} \neq 0$  en général sur  $I$ . Supposons alors que la solution de (2.22),(2.23) appartienne à un certain  $H^{s_0+1}(\Omega)$ , pour un réel  $s_0$  fixé avec  $0 < s_0 < \frac{1}{2}$ .

## 2.5.2 Discrétisation

Soit  $(\mathcal{T}_h)_h$  une famille régulière de triangulation de  $\Omega$ , telle que pour tout  $h$ , la frontière de  $\Omega_1$  soit contenue dans l'union des côtés (fermés) des éléments  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ .

On note  $h_1$  respectivement  $h_2$  le maximum des diamètres des éléments  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  contenus dans  $\bar{\Omega}_1$  respectivement dans  $\bar{\Omega}_2$ . Pour tout  $h$ , nous introduisons l'espace discret

$$(2.24) \quad X_h = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega); \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \right\}$$

où  $\mathbb{P}_1(K)$  désigne l'espace des restrictions à  $K$  des fonctions affines sur  $\mathbb{R}^2$ . Le problème discret s'écrit alors

$$(2.25) \quad \text{Trouver } u_h \text{ dans } X_h \text{ tel que pour tout } v_h \in X_h, \\ \nu_1 \int_{\Omega_1} (\nabla u_h)(x) \cdot (\nabla v_h)(x) + \nu_2 \int_{\Omega_2} (\nabla u_h)(x) \cdot (\nabla v_h)(x) = \int_{\Omega} f(x) v_h(x).$$

Comme  $X_h$  est inclus dans  $H_0^1(\Omega)$ , les propriétés de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  sont encore vraies avec  $H_0^1(\Omega)$  remplacé par  $X_h$ . Nous en déduisons alors par le lemme de Lax-Milgram que le problème (2.25) admet une solution unique. Pour les majorations d'erreur, nous utiliserons la norme de l'énergie :

$$(2.26) \quad \|v\|_v = \left( \nu_1 \|\nabla v\|_{0,\Omega_1}^2 + \nu_2 \|v\|_{0,\Omega_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui est une norme équivalente à la norme usuelle. En effet nous avons

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \sqrt{\nu_m} |v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_v \leq \sqrt{\nu_M} |v|_{1,\Omega}.$$

En outre l'équivalence de la norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$  avec la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  se déduit de l'inégalité de Poincaré. Nous pouvons alors écrire successivement

$$\forall w_h \in X_h, a(u - u_h, w_h) = 0,$$

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq a(u - u_h, u - u_h)^{\frac{1}{2}} a(u - v_h, u - v_h)^{\frac{1}{2}}.$$

Puis en utilisant  $\|v\|_v = a(v, v)^{\frac{1}{2}}$ , il en résulte

$$(2.27) \quad \|u - u_h\|_v \leq \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_v.$$

Introduisons l'opérateur d'interpolation  $\Pi_h$  comme cela est fait dans [5], nous avons les deux résultats suivants pour  $i = 1$  et  $2$  ( $C$  désigne une constante positive) :

$$(2.28) \quad |u - \Pi_h u|_{1,\Omega_i} \leq C \|u\|_{1,\Omega}, \quad |u - \Pi_h u|_{1,\Omega_i} \leq Ch_i \|u\|_{2,\Omega},$$

où l'on peut remplacer  $\Omega$  par l'union des triangles de  $\mathcal{T}_h$  dont au moins un sommet appartient à  $\bar{\Omega}_i$ . Nous en déduisons par un argument d'interpolation

$$(2.29) \quad |u - \Pi_h u|_{1,\Omega_i} \leq Ch_i^{s_0} \|u\|_{s_0+1,\Omega},$$

d'où la majoration d'erreur

$$(2.30) \quad |u - u_h|_v \leq C \left( \nu_1 h_1^{2s_0} + \nu_2 h_2^{2s_0} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{s_0+1,\Omega}.$$

En ce qui nous concerne dans toutes les simulations numériques effectuées dans cette thèse, nous avons choisi  $h_1 = h_2 = h$ , de (2.30) nous avons

$$(2.31) \quad |u - u_h|_v \leq Ch^{s_0} (\nu_1 + \nu_2)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{s_0+1,\Omega}.$$

## Chapitre 3

# Problème de collage

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Existence et unicité de $u^\varepsilon$ . . . . .	22
2.3	Analyse asymptotique formelle . . . . .	23
2.3.1	Les problèmes élémentaires . . . . .	24
2.3.2	Quelques remarques . . . . .	24
2.3.3	Calcul des premiers termes . . . . .	24
2.4	Justification rigoureuse du développement asymptotique . . . . .	25
2.5	Discrétisation d'une équation à coefficients discontinus . . . . .	27
2.5.1	Problème continu . . . . .	27
2.5.2	Discrétisation . . . . .	28

---

### Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude d'un modèle simplifié de collage d'un matériau. Pour définir le problème plus précisément, on se donne la géométrie suivante :

- $\varepsilon$  est un petit paramètre positif destiné à tendre vers zéro,
- $\Omega_1 = (-1, 0) \times (0, 1)$  qui représentera pour nous la partie à coller,
- $\Omega_2^\varepsilon = (0, \varepsilon) \times (0, 1)$  qui sera le domaine occupé par la couche de colle,
- $I = \{0\} \times (0, 1)$  interface entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ,
- $\Gamma^g = \{-1\} \times (0, 1)$  : le bord gauche de l'ensemble,
- $\Gamma^{d,\varepsilon} = \{\varepsilon\} \times (0, 1)$  : le bord droit de l'ensemble.

Notons  $\Omega^\varepsilon = \Omega_1 \cup \Omega_2^\varepsilon \cup I$ , le domaine occupé par l'ensemble collé (cf figure 3.1). On voudrait étudier le problème de transmission suivant (**Modèle simplifié de collage (cas thermique)**)

Nous cherchons

$$v^\varepsilon = \begin{cases} v_1^\varepsilon & \text{dans } \Omega_1, \\ v_2^\varepsilon & \text{dans } \Omega_2^\varepsilon, \end{cases}$$



FIGURE 3.1: Géométrie considérée.

solution de :

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(v^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) &= f^\varepsilon & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ v_1^\varepsilon &= 0, & \text{sur } \Gamma^g, \\ v_2^\varepsilon &= 0, & \text{sur } \Gamma^{d,\varepsilon}, \\ \frac{\partial v_1^\varepsilon}{\partial n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \{\Gamma^g \cup I\}, \\ \frac{\partial v_2^\varepsilon}{\partial n} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \{\Gamma^{d,\varepsilon} \cup I\}, \end{cases}$$

avec

$$(3.2) \quad v^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_1, \\ \varepsilon & \text{si } x \in \Omega_2^\varepsilon. \end{cases}$$

La fonction

$$(3.3) \quad f^\varepsilon = \begin{cases} f_1^\varepsilon & \text{dans } \Omega_1, \\ f_2^\varepsilon & \text{dans } \Omega_2^\varepsilon, \end{cases}$$

est donnée et supposée comme étant fonction de la variable  $y = (\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2)$ .

**Théorème 3.1.** Soient donnés  $\varepsilon > 0$ ,  $f^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ . Le problème aux limites (3.1), (3.2), (3.3), admet une unique solution  $v^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ .

*Démonstration.* La démonstration est analogue à celle du théorème (2.1). En effet nous pouvons mettre le problème (3.1), (3.2), (3.3) sous la forme variationnelle suivante :

$$(3.4) \quad a^\varepsilon(v^\varepsilon, v) = I^\varepsilon(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\varepsilon,$$

avec :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \mathcal{V}^\varepsilon &= \left\{ v \in H^1(\Omega^\varepsilon), v = 0 \text{ sur } \Gamma^g \cup \Gamma^{d,\varepsilon} \right\}, \\ a^\varepsilon(v^\varepsilon, v) &= \int_{\Omega_1} \nabla v_1^\varepsilon \nabla v + \varepsilon \int_{\Omega_2} \nabla v_2^\varepsilon \nabla v, \\ I^\varepsilon(v) &= \int_{\Omega_1} f_1^\varepsilon v + \int_{\Omega_2} f_2^\varepsilon v. \end{cases}$$

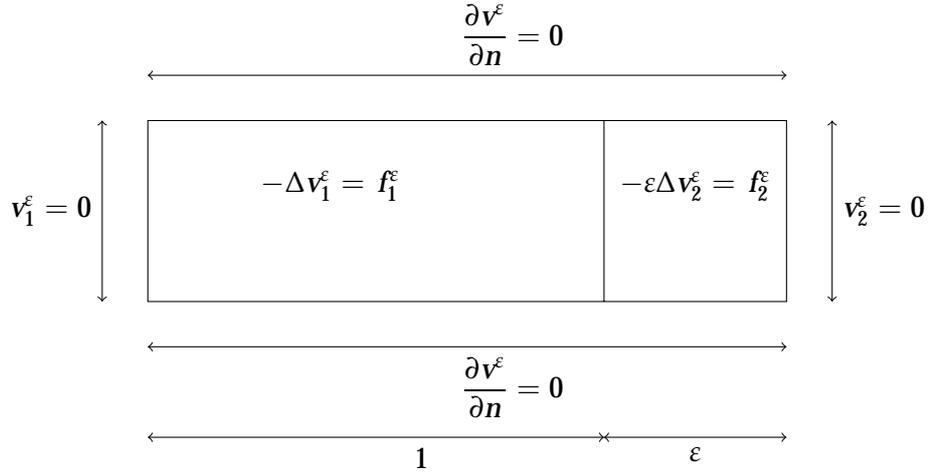


FIGURE 3.2: Modèle de problème de collage

L'existence et l'unité de la solution de (3.4), (3.5) résultent de l'application du théorème de Lax-Milgram.  $\square$

Afin de comprendre le comportement asymptotique de la couche de colle, nous rechercherons la solution  $v^\varepsilon$  sous la forme d'un développement asymptotique.

### 3.1 Analyse asymptotique formelle

Il est difficile d'étudier la convergence du problème (3.4), (3.5) car il est posé sur un domaine  $\Omega^\varepsilon$  dépendant de  $\varepsilon$ . Afin d'obtenir un domaine fixe (indépendant de  $\varepsilon$ ), nous effectuerons le changement de coordonnées suivant dans  $\Omega_2^\varepsilon$  (dans la colle). Soit la fonction

$$(3.6) \quad \Psi^\varepsilon : \Omega = (-1, 1) \times (0, 1) \rightarrow \Omega^\varepsilon = (-1, \varepsilon) \times (0, 1)$$

$$y = (y_1, y_2) \mapsto x = (x_1, x_2) = \begin{cases} (y_1, y_2) & \text{si } y_1 \leq 0, \\ (\varepsilon y_1, y_2) & \text{si } y_1 \geq 0. \end{cases}$$

Posons

$$(3.7) \quad u^\varepsilon = v^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon, u_1^\varepsilon = (v^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon)|_{\Omega_1} = v_1^\varepsilon,$$

$$(3.8) \quad f = f^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon, f_1 = (f^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon)|_{\Omega_1} = f_1^\varepsilon,$$

et

$$(3.9) \quad u_2^\varepsilon = (v^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon)|_{\Omega_2}$$

$$(3.10) \quad f_2 = (f^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon)|_{\Omega_2}.$$

Notons enfin  $\Gamma^d = \{1\} \times (0, 1)$ . Si bien que le problème aux limites (3.1),(3.2),(3.3) se reformule de la façon équivalente suivante : Nous cherchons  $u^\varepsilon$  solution de (voir figure 4.2) :

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_1^\varepsilon = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1, \\ -\frac{\partial^2 u_2^\varepsilon}{\partial y_1^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2^\varepsilon}{\partial y_2^2} = \varepsilon f_2 \quad \text{dans } \Omega_2, \\ u_1^\varepsilon = 0, \quad \text{sur } \Gamma^g, \\ u_2^\varepsilon = 0, \quad \text{sur } \Gamma^d, \\ \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \{\Gamma^g \cup I\}, \\ \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \{\Gamma^d \cup I\}, \\ \llbracket u^\varepsilon \rrbracket = 0 \quad \text{sur } I, \\ \llbracket \nabla u^\varepsilon \rrbracket \cdot n = 0 \quad \text{sur } I, \end{array} \right.$$

où  $\llbracket w \rrbracket = w|_{\Omega_2} - w|_{\Omega_1}$ . Le système (3.11) se met sous la formulation variationnelle suivante :

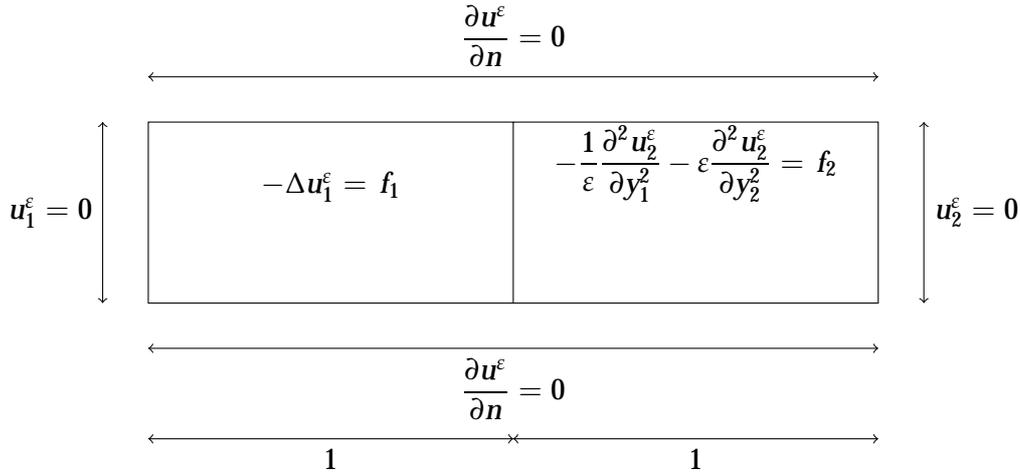


FIGURE 3.3: Problème modèle en domaine fixe.

$$(3.12) \quad \mathcal{A}^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = F^\varepsilon(v) \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

avec :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega), \quad v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma^g, \quad v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma^d \}, \\ \mathcal{A}^\varepsilon(u^\varepsilon, \mathbf{v}) = \mathcal{A}^0(u^\varepsilon, \mathbf{v}) + \varepsilon^2 a_{22}(u_2^\varepsilon, v_2), \\ \mathcal{A}^0(u^\varepsilon, \mathbf{v}) = a_1(u_1^\varepsilon, v_1) + a_{21}(u_2^\varepsilon, v_2), \\ a_1(u_1^\varepsilon, v_1) = \int_{\Omega_1} \nabla u_1^\varepsilon \nabla v_1, \\ a_{2j}(u_2^\varepsilon, v_2) = \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y_j} \frac{\partial v_2}{\partial y_j} \quad j = 1, 2 \text{ sans sommation}, \\ F^\varepsilon(\mathbf{v}) = F_1(v_1) + \varepsilon F_2(v_2), \\ F_1(v_1) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1, \\ F_2(v_2) = \int_{\Omega_2} f_2 v_2. \end{array} \right.$$

La structure des équations du système (3.12), (3.13) suggère l'ansatz

$$(3.14) \quad u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 \dots$$

En reportant (3.14) dans (3.12), (3.13), puis en identifiant les termes de même puissance en  $\varepsilon$ , obtient de façon formelle les problèmes imbriqués suivants :

-  $P^0$  :

$$(3.15) \quad \mathcal{A}^0(u_1^0, \mathbf{v}) = F_1(v_1),$$

-  $P^1$  :

$$(3.16) \quad \mathcal{A}^0(u_1^1, \mathbf{v}) = F_2(v_2),$$

-  $P^j$  :

$$(3.17) \quad \mathcal{A}^0(u_1^j, \mathbf{v}) = -a_{22}(u_2^{j-2}, v_2) \quad \text{pour tout } j \geq 2.$$

Nous pouvons réécrire les problèmes  $P^j$ ,  $j \geq 0$  de façon plus compacte :

$$(3.18) \quad \mathcal{A}^0(u^j, \mathbf{v}) = \dot{J}^j(\mathbf{v}),$$

où

$$(3.19) \quad \dot{J}^j(\mathbf{v}) = \begin{cases} F_1(v_1) & \text{pour } j = 0, \\ F_2(v_2) & \text{pour } j = 1, \\ -a_{22}(u_2^{j-2}, v_2) & \text{pour tout } j \geq 2. \end{cases}$$

À ce stade, l'écriture (3.18),(3.19) est purement formelle. En effet nous n'avons montré aucun lien entre  $u^\varepsilon$  et le développement asymptotique (3.14), et nous n'avons pas non plus défini les espaces dans

lesquels les problèmes  $P^j$  sont bien posés. Nous en donnerons un sens dans les lignes qui suivent. Soit

$$(3.20) \quad \mathcal{V}^0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = (v_1, v_2), \\ v_1 \in H^1(\Omega_1), \\ v_2 \in L^2(\Omega_2), \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \in L^2(\Omega_2), \\ v_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^g, \\ v_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^d, \\ v_1 = v_2 \quad \text{sur} \quad I. \end{array} \right.$$

Nous munirons  $\mathcal{V}^0$  de sa norme naturelle

$$(3.21) \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}^0}^2 := \|v_1\|_{1,\Omega_1}^2 + \|v_2\|_{0,\Omega_2}^2 + \left\| \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right\|_{0,\Omega_2}^2,$$

et donc de sa semi-norme :

$$(3.22) \quad |\mathbf{v}|_{\mathcal{V}^0}^2 := |v_1|_{1,\Omega_1}^2 + \left\| \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right\|_{0,\Omega_2}^2.$$

Signalons que l'espace  $\mathcal{V}^0$  n'est pas vide. En effet les traces  $[\cdot]_{10}$  sur  $I$  et  $\Gamma^d$  existent pour tout  $\mathbf{v}$  appartenant à l'espace anisotrope  $H^{1,0}(\Omega_2)$  qui est l'espace des fonctions  $w$  telles que  $w \in L^2(\Omega_2)$  et  $\frac{\partial w}{\partial y_1} \in L^2(\omega_2)$ . Cela nous permet de montrer à présent le

**Lemme 3.2.** 1. *L'espace fonctionnel  $\mathcal{V}$ , défini par la première égalité de (3.13), muni de la norme de  $H^1(\Omega)$  est un  $\mathbb{R}$  espace de Hilbert.*

2. *L'espace fonctionnel  $\mathcal{V}^0$ , défini par (3.20), muni de la norme (3.21) est un  $\mathbb{R}$  espace de Hilbert.*

3. *La forme bilinéaire  $a_{22}$ , définie par la cinquième égalité de (3.13), est continue sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  et nous avons :*

$$|a_{22}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

4. *Nous avons l'égalité suivante :*

$$(3.23) \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}^0}^2 + a_{22}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

5. *La forme bilinéaire  $\mathcal{A}^0$ , définie par la troisième égalité de (3.13), est continue sur  $\mathcal{V}^0 \times \mathcal{V}^0$  et nous avons l'inégalité :*

$$|\mathcal{A}^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}^0} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}^0} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0.$$

6. *Il existe un réel positif  $\beta$  tel que :*

$$(3.24) \quad \mathcal{A}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \beta \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}^0}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^0.$$

7. *La semi-norme (3.22) est une norme équivalente à (3.21) sur  $\mathcal{V}^0$ .*

8. *L'espace fonctionnel  $\mathcal{V}$  s'injecte continûment dans  $\mathcal{V}^0$  ; de plus  $\mathcal{V}$  est dense dans  $\mathcal{V}^0$ .*

9. Les formes linéaires  $F^e$  et  $F_1$ , définies par les septième et huitième égalité de (3.13), sont continues sur  $\mathcal{V}^0$  et il existe deux réels  $C_1$  et  $C_2$  tels que nous ayons les deux inégalités

$$|F^e(v)| \leq C_1 \|v\|_{\mathcal{V}^0} \quad \forall v \in \mathcal{V}^0,$$

$$|F_1(v)| \leq C_2 \|v\|_{\mathcal{V}^0} \quad \forall v \in \mathcal{V}^0.$$

*Démonstration.* 1. Puisque  $\mathcal{V}$  est un sous espace vectoriel de  $H^1(\Omega)$  qui est un espace de Hilbert, Il suffit de montrer que  $\mathcal{V}$  est fermé. Puisque le noyau d'une forme linéaire continue est un hyperplan fermé, nous exhibons une forme linéaire continue sur  $H^1(\Omega)$  dont  $\mathcal{V}$  est le noyau.  $\mathcal{V}$  est très exactement le noyau de l'application linéaire suivante :

$$H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \mapsto v|_{\Gamma^g \cup \Gamma^d}.$$

Cette forme linéaire est continue grâce au théorème de trace de fonctions de  $H^1(\Omega)$ .

2.  $\mathcal{V}^0$  muni de la norme (3.21) est un  $\mathbb{R}$  espace de Hilbert. En effet  $\mathcal{V}^0$  est préhilbertien en vertu du produit scalaire induit par (3.21). Il reste donc à vérifier qu'il est complet pour cette norme. Soit  $(v^m)$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{V}^0$ . D'après (3.21),

- $(v_1^m)$  est une suite de Cauchy dans  $H^1(\Omega_1)$  ;
- $(v_2^m)$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega_2)$  ;
- $(\frac{\partial v_2^m}{\partial y_1})$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\Omega_2)$ .

Puisque  $H^1(\Omega_1)$  et  $L^2(\Omega_2)$  sont des espaces de Hilbert, il existe les fonctions  $v_1^*$ ,  $\tilde{v}_2$  et  $\hat{v}_2$  tels que

$$(3.25) \quad v_1^m \rightarrow v_1^* \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega_1),$$

$$(3.26) \quad v_2^m \rightarrow \tilde{v}_2 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega_2),$$

$$(3.27) \quad \frac{\partial v_2^m}{\partial y_1} \rightarrow \hat{v}_2 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega_2).$$

Il reste à prouver que  $\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_1} = \hat{v}_2$ , puis de la continuité de l'application trace, nous pourrions déduire  $v_1^* = 0$  sur  $\Gamma^g$ ,  $\tilde{v}_2 = 0$  sur  $\Gamma^d$  et  $v_1^* = \tilde{v}_2$  sur  $I$ . Puisque l'injection canonique de  $L^2(\Omega_2)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega_2)$  est continue, nous déduisons de (3.26) et (3.27)

$$(3.28) \quad v_2^m \rightarrow \tilde{v}_2 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega_2),$$

$$(3.29) \quad \frac{\partial v_2^m}{\partial y_1} \rightarrow \hat{v}_2 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega_2).$$

D'autre part, d'après la continuité de la dérivation de  $\mathcal{D}'(\Omega_2)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ , (3.28) implique

$$(3.30) \quad \frac{\partial v_2^m}{\partial y_1} \rightarrow \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_1} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega_2).$$

En vertu de l'unicité de la limite dans  $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ , on conclut de (3.29) et (3.30)

$$\hat{v}_2 = \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_1}.$$

Ceci prouve que  $\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_1}$  est une fonction de  $L^2(\Omega_2)$ .

3. Grâce à la définition de la forme bilinéaire  $a_{22}$ , pour tout  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{V}$  nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |a_{22}(u, v)| &= \left| \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right|, \\ &\leq |u_2|_{1, \Omega_2} |v_2|_{1, \Omega_2}, \\ &\leq \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega}. \end{aligned}$$

4. L'égalité (3.23) résulte simplement de la définition des normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}^0}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ .

5. Grâce à la définition de la forme bilinéaire  $\mathcal{A}^0$ , pour tout  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{V}^0$  nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}^0(u, v)| &= \left| \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 + \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right|, \\ &\leq |u|_{1, \Omega_1} |v|_{1, \Omega_1} + \left\| \frac{\partial u}{\partial y_1} \right\|_{0, \Omega_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial y_1} \right\|_{0, \Omega_2}, \\ &\leq 2 \|u\|_{\mathcal{V}^0} \|v\|_{\mathcal{V}^0}. \end{aligned}$$

6. Pour tout  $v$  dans  $\mathcal{V}^0$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0(v, v) &= |v_1|_{1, \Omega_1}^2 + \left\| \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right\|_{0, \Omega_2}^2, \\ &\geq C_{\Omega_1} \|v_1\|_{1, \Omega_1}^2 + C_{\Omega_2} \|v_2\|_{0, \Omega_2}^2, \\ &\geq \min \{C_{\Omega_1}, C_{\Omega_2}\} \|v\|_{\mathcal{V}^0}^2, \end{aligned}$$

où  $C_{\Omega_1}$  et  $C_{\Omega_2}$  sont les constantes respectives de l'inégalité de Poincaré dans les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

7. Les deux items précédents prouvent que  $|\cdot|_{\mathcal{V}^0}$  définie en (3.22) est une norme sur  $\mathcal{V}^0$ . Établissons à présent l'équivalence des normes sur  $\mathcal{V}^0$ . Soit  $v$  dans  $\mathcal{V}^0$ . Alors nous avons

$$\|v\|_{\mathcal{V}^0}^2 = \|v_1\|_{1, \Omega_1}^2 + \|v_2\|_{0, \Omega_2}^2 + \left\| \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right\|_{0, \Omega_2}^2 \geq |v|_{\mathcal{V}^0}^2.$$

Il reste à prouver qu'il existe une constante positive  $C$  telle que nous ayons  $\|v\|_{\mathcal{V}^0} \leq C |v|_{\mathcal{V}^0}$ . Ceci découle de l'item précédent car il suffit de voir que

$$\mathcal{A}^0(v, v) = |v|_{\mathcal{V}^0}^2.$$

8. Démontrons à présent que  $\mathcal{V}$  est dense dans  $\mathcal{V}^0$ . Comme  $\mathcal{V}$  est inclu dans  $\mathcal{V}^0$  qui est un espace de Hilbert, il suffit de vérifier que l'orthogonal de l'espace  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}^0$  est réduit à  $\{0\}$  i.e

$$(3.31) \quad \mathcal{V}^\perp = \{0\}.$$

Soit  $v^\perp \in \mathcal{V}^\perp$ . Comme  $\mathcal{A}^0$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{V}^0$ , la relation d'orthogonalité (3.31) se traduit par

$$(3.32) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{A}^0(v^\perp, v) = 0.$$

Or la forme linéaire  $\mathcal{A}^0(v^\perp, \cdot)$  est continue sur  $\mathcal{V}$ , donc par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique  $v_\star^\perp$  dans  $\mathcal{V}$  tel que pour tout  $v \in \mathcal{V}$  nous ayons

$$(3.33) \quad 0 = \mathcal{A}^0(v^\perp, v) = (v_\star^\perp, v)_{1,\Omega}.$$

Nous en déduisons  $v_\star^\perp = 0$ , puis  $v^\perp = 0$ .

9. La continuité des formes linéaires  $F^\varepsilon$  et  $F_1$  sur  $\mathcal{V}^0$  résulte du fait que  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$ . □

## 3.2 Justification rigoureuse du développement asymptotique

Toute cette section a pour vocation de justifier la validité du développement (3.14). Plus précisément, nous montrons que  $u^\varepsilon$  solution du système (3.12), (3.13) ne reste pas bornée dans  $\mathcal{V}$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro mais dans  $\mathcal{V}^0$ . Nous nous focaliserons sur le problème suivant :

$$(3.34) \quad \text{Nous cherchons } v^0 \in \mathcal{V}^0, \mathcal{A}^0(v^0, v) = F_1(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^0.$$

Nous formulerons des remarques pour les termes suivants du développement (3.14) ultérieurement. Grâce au lemme (3.2), nous pouvons montrer le résultat suivant :

**Théorème 3.3.** *Pour  $f_1 \in L^2(\Omega_1)$  le problème (3.34) admet une unique solution  $u^0$  dans  $\mathcal{V}^0$ .*

*Démonstration.* Ce théorème est une application directe du lemme de Lax-Milgram pour les équations elliptiques. Nous savons en effet par le lemme (3.2) que :

- $\mathcal{V}^0$  est un espace de Hilbert,
- $\mathcal{A}^0$  est une forme bilinéaire continue sur  $\mathcal{V}^0 \times \mathcal{V}^0$  et coercive sur  $\mathcal{V}^0$ ,
- $F_1$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{V}^0$ .

Nous concluons donc que le problème (3.34) admet une unique solution  $u^0$  dans  $\mathcal{V}^0$ . □

### 3.2.1 Etude de $\mathcal{P}^0$

Avec les deux théorèmes qui suivent nous montrons les convergences faibles et fortes de  $u^\varepsilon$  vers  $u^0$ .

**Théorème 3.4.** *La solution du problème défini par (3.12),(3.13) converge faiblement vers la solution du problème défini par (3.34) dans  $\mathcal{V}^0$ .*

*Démonstration.* Faisons  $v = u^\varepsilon$  dans (3.12),(3.13), il vient :

$$\mathcal{A}^0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 a_{22}(u_2^\varepsilon, u_2^\varepsilon) = F^\varepsilon(u^\varepsilon).$$

Grâce au lemme (3.2) :

$$\mathcal{A}^0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}}^2 - \varepsilon^2 \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}^0}^2 = |F^\varepsilon(u^\varepsilon)|,$$

puis l'inégalité

$$\varepsilon^2 \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}}^2 + (\beta - \varepsilon^2) \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}^0}^2 \leq C_{FG} \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}^0}.$$

On en déduit les 2 inégalités suivantes ( $C_1$  et  $C_2$  désignent deux constantes positives) :

$$\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}^0} \leq C_1, \quad \text{puis} \quad \varepsilon \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}} \leq C_2.$$

On peut donc extraire une sous-suite de  $u^\varepsilon$  qu'on appellera aussi  $u^\varepsilon$  qui converge faiblement dans  $\mathcal{V}^0$  vers  $u_*^0$ . Fixons à présent  $v \in \mathcal{V}$  dans (3.12),(3.13), on peut écrire

$$|\varepsilon^2 a_{22}(u^\varepsilon, v)| \leq \varepsilon^2 C \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon C \rightarrow 0,$$

puis

$$\mathcal{A}^0(u^\varepsilon, v) \rightarrow \mathcal{A}^0(u_*^0, v)$$

(car  $\mathcal{A}^0(\cdot, v)$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{V}^0$ ) et enfin

$$F^\varepsilon(v) \rightarrow F_1(v).$$

Il découle donc de (3.12),(3.13) :

$$\mathcal{A}^0(u_*^0, v) = F_1(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

(et comme  $\mathcal{V}$  est dense dans  $\mathcal{V}^0$ ) nous avons aussi :

$$\mathcal{A}^0(u_*^0, v) = F_1(v). \quad \forall v \in \mathcal{V}^0$$

Enfin par unicité de la solution de (3.34), nous avons

$$u_*^0 = u^0.$$

□

**Théorème 3.5.** *La solution du problème défini par (3.12),(3.13) converge fortement vers la solution du problème défini par (3.34) dans  $\mathcal{V}^0$ . De plus si  $\|\frac{\partial u^0}{\partial y_2}\|_{0,\Omega_2} < \infty$ , alors nous avons l'estimation d'erreur suivante :*

$$(3.35) \quad \|u^\varepsilon - u^0\|_{\mathcal{V}^0} \leq C\varepsilon.$$

*Démonstration.* Posons :

$$w^\varepsilon = u^\varepsilon - u^0 \in \mathcal{V}^0.$$

Nous pouvons écrire :

$$(3.36) \quad \mathcal{A}^0(w^\varepsilon, w^\varepsilon) + \varepsilon^2 a_{22}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \mathcal{A}^0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon^2 a_{22}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) - \mathcal{A}^0(u^0, w^\varepsilon) - \mathcal{A}^0(u^0, u^\varepsilon),$$

ou encore

$$(3.37) \quad \mathcal{A}^0(w^\varepsilon, w^\varepsilon) + \varepsilon^2 a_{22}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = F^\varepsilon(u^\varepsilon) - F_1(u^\varepsilon) - F_1(w^\varepsilon).$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro dans (3.37), nous en déduisons :

– d'une part que  $F_1(w^\varepsilon)$  tend vers zéro, car  $w^\varepsilon$  tend vers zéro faiblement dans  $\mathcal{V}^0$  et  $F_1$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{V}^0$ ,

– d'autre part que  $F^\varepsilon(u^\varepsilon) - F_1(u^\varepsilon)$  tend vers zéro car  $F^\varepsilon \rightarrow F^1$  dans  $(\mathcal{V}^0)'$

Si de plus nous supposons que  $\|\frac{\partial u_2^0}{\partial y_2}\|_{0,\Omega_2} < \infty$  alors  $u^0 \in \mathcal{V}$ , nous pouvons donc choisir come fonction test dans (3.12),(3.13) :

$$w^\varepsilon \in \mathcal{V} \subset \mathcal{V}^0.$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0(w^\varepsilon, w^\varepsilon) + \varepsilon^2 a_{22}(w^\varepsilon, w^\varepsilon) &= F_1(w^\varepsilon) + \varepsilon F_2(w^\varepsilon) - \mathcal{A}^0(u^0, w^\varepsilon) - \varepsilon^2 a_{22}(u^0, w^\varepsilon), \\ &= F_1(w^\varepsilon) + \varepsilon F_2(w^\varepsilon) - F_1(w^\varepsilon) - \varepsilon^2 a_{22}(u^0, w^\varepsilon). \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$(3.38) \quad |w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}^2 = \varepsilon (F_2(w^\varepsilon) - \varepsilon a_{22}(u^0, w^\varepsilon)) ..$$

Il existe donc deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$(3.39) \quad |w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}^2 \leq C\varepsilon |w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0} + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}.$$

Etudions le deux cas à savoir :  $\varepsilon |w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0} > \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}$  et  $\varepsilon |w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0} < \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}$

– cas où  $\varepsilon |w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0} > \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}$ . De (3.39), on déduit les deux inégalités successives :

$$|w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0} < C\varepsilon, \quad \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2} < \varepsilon^2.$$

– cas où  $\varepsilon |w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0} < \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}$ . De (3.39), on déduit les deux inégalités successives :

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2} < \varepsilon^2, \quad |w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0} < C\varepsilon.$$

Il en résulte donc que :

$$|w^\varepsilon|_{\mathcal{V}_0} < C\varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2} < C.$$

d'où (3.35). □

Nous pouvons remarquer que l'inégalité (3.35) est optimale. Nous la retrouverons d'ailleurs sur les simulations numériques. Dans la sous-section suivante, nous interprétons le problème variationnel (3.34) en termes de problèmes aux limites. Puis nous identifions le problème limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

### 3.2.2 Interprétation

Dans cette partie, nous interprétons le problème variationnel (3.34) évoqué dans la précédente sous-section dans le but d'une étude numérique. Le problème (3.34) s'interprète comme le problème aux limites suivant :

$$(P^0) \begin{cases} -\Delta u_1^0 & = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^0(-1, y_2) & = 0, & \forall y_2 \in (0, 1), \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2}(y_1, 0) & = 0, & \forall y_1 \in (-1, 0), \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2}(y_1, 1) & = 0, & \forall y_1 \in (-1, 0), \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1}(0, y_2) & = \frac{\partial u_2^0}{\partial y_1}(0, y_2), & \forall y_2 \in (0, 1), \end{cases} \quad (Q^0) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial y_1^2} & = 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_2^0(1, y_2) & = 0, & \forall y_2 \in (0, 1), \\ u_2^0(0, y_2) & = u_1^0(0, y_2), & \forall y_2 \in (0, 1). \end{cases}$$

Réécrivons la condition de transmission en calculant explicitement la solution sur  $\Omega_2$ . Prenons par exemple le problème  $Q^0$ , si nous supposons connue la fonction  $u_1^0$ , il vient :

$$(3.40) \quad u_2^0(y_1, y_2) = u_1^0(0, y_2) (1 - y_1).$$

De (3.40), nous déduisons :

$$(3.41) \quad \frac{\partial u_2^0}{\partial y_1}(y_1, y_2) = -u_1^0(0, y_2).$$

La dernière équation du problème  $P^0$  peut donc se réécrire grâce à (3.41) comme :

$$(3.42) \quad \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1}(0, y_2) = -u_1^0(0, y_2).$$

Les termes d'ordre 0 s'obtiennent donc de la façon suivante :

$$(3.43) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^0 & = f_1 & \Omega_1, \\ u_1^0(-1, y_2) & = 0, & \forall y_2 \in (0, 1), \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2}(y_1, 0) & = 0, & \forall y_1 \in (-1, 0), \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2}(y_1, 1) & = 0, & \forall y_1 \in (-1, 0), \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1}(0, y_2) + u_1^0(0, y_2) & = 0, & \forall y_2 \in (0, 1), \end{cases}$$

et

$$(3.44) \quad u_2^0(y_1, y_2) = u_1^0(0, y_2) (1 - y_1).$$

**Remarque** Nous pouvons donc observer que la solution limite (variationnelle)  $u^0$  qui était supposé appartenir à  $\mathcal{V}^0$  est en fait plus régulière. En fait  $u^0$  appartient aussi à  $\mathcal{V}$ . C'est le résultat énoncé dans le théorème (3.6). Ce théorème nous dit qu'il n'y a pas de singularités au voisinage des sommets  $A = (0, 0)$  et  $B = (0, 1)$ . Pour la démonstration et pour plus de détails se référer à [6].

**Théorème 3.6.** *Le problème (3.43) admet une unique solution  $u_1^0 \in H^1(\Omega_1)$ . De plus si  $V(A)$  et  $V(B)$  sont deux voisinages des points  $A$  et  $B$  respectivement alors nous avons :*

$$u_1^0 \in H^2(V(A)) \quad \text{et} \quad u_1^0 \in H^2(V(B)).$$

### 3.2.3 Quelques remarques sur les termes suivants du développement asymptotique

En s'inspirant de l'étude rigoureuse faite sur le problème (3.34), nous pouvons envisager de faire une étude analogue sur tous les problèmes (3.18),(3.19). En effet nous pourrions nous demander dans un premier temps le caractère bien posé de ces problèmes. Rappelons les problèmes auxquels nous nous intéressons :

$$(3.45) \quad \text{Nous cherchons } u^j, \mathcal{A}^0(u^j, v) = \mathcal{J}(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}^0$$

où

$$(3.46) \quad \mathcal{J}(v) = \begin{cases} F_1(v_1) & \text{pour } j = 0, \\ F_2(v_2) & \text{pour } j = 1, \\ -a_{22}(u_2^{j-2}, v_2) & \forall j \geq 2. \end{cases}$$

Nous avons déjà montré à travers le lemme (3.2) que la forme bilinéaire  $\mathcal{A}^0$  était coercive sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{V}^0$ , continue aussi sur  $\mathcal{V}^0 \times \mathcal{V}^0$  par contre nous voyons clairement que la forme linéaire  $\mathcal{J}$  n'est pas toujours continue sur  $\mathcal{V}^0$  pour tout  $j \geq 0$ . Cela reste vrai pour  $j = 0$  comme nous l'avons montré dans le lemme (3.2), mais aussi pour  $j = 1$  par la même analyse. En revanche,  $\mathcal{J}$  n'est pas continue sur  $\mathcal{V}^0$  pour tout  $j \geq 2$ . Nous concluons que les problèmes (3.18),(3.19) sont bien posés pour  $j = 0$  et  $j = 1$ , et pour tout  $j$  supérieur ou égal à deux, nous avons donc apparition de couches limites. En effet si  $v \in \mathcal{V}^0$ , nous ne contrôlons pas sa dérivée par rapport à  $y_2$ . Le développement (3.14) n'est donc pas uniformément valide sur tout  $\Omega^\varepsilon$ , car il est singulier près des bords  $y_2 = 0$  et  $y_2 = 1$ . Pour avoir un développement asymptotique uniformément valide sur tout  $\Omega^\varepsilon$ , nous traiter séparément une zone de  $\Omega^\varepsilon$  "loin" (dans un sens à définir) des bords  $y_2 = 0$  et  $y_2 = 1$ , et un voisinage des bords  $y_2 = 0$  et  $y_2 = 1$ . Nous définirons ainsi deux développements de la même solution  $u^\varepsilon$  mais valides dans deux zones distinctes. Il se posera donc la question de raccordement de ces deux développements. L'étude rigoureuse de ces développements reste une question difficile à cause de la complexité géométrique des zones de définition mais reste néanmoins une perspective intéressante dans la suite du travail effectué dans cette thèse.

### 3.3 Etude Numérique

Les calculs présentés ici ont été effectués par éléments finis. Le but de ces calculs est d'illustrer les résultats obtenus dans la section précédente. Plus précisément, nous cherchons à approcher pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ , le système (3.1),(3.2),(3.3). Nous évaluons numériquement la vitesse de convergence de la solution du système (3.1),(3.2),(6.1),(3.3) vers (3.43).

Pour  $\varepsilon = 2^{-j}$ ,  $j = \llbracket 1, 6 \rrbracket$  nous calculons :

- l'approximation par éléments finis de la solution  $u^\varepsilon$  du problème de transmission (3.1),(3.2),(3.3) ;
- l'approximation par éléments finis de la solution  $u_1^0$  du problème (3.43) ;
- estimations des normes  $L^2$ ,  $L^\infty$ ,  $H^1$  de la différence  $u_1^\varepsilon - u_1^0$

Dans la figure 3.4, nous traçons l'erreur sous différentes normes par rapport à  $\varepsilon$ , les pentes des différentes courbes sont calculées dans tableau 3.1.

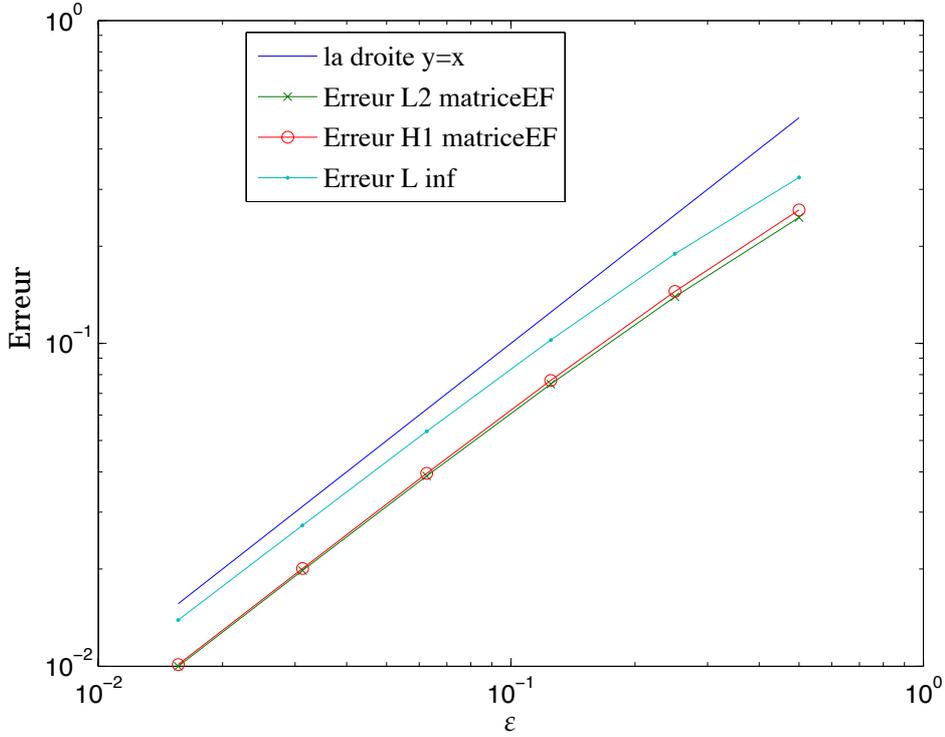


FIGURE 3.4: Ordre de la condition équivalente de collage par rapport à  $\varepsilon$

penL2	0.8152	0.8984	0.9465	0.9725	0.9860
penH1	0.8378	0.9156	0.9572	0.9784	0.9891
penL <sup>∞</sup>	0.7858	0.8861	0.9403	0.9678	0.9746

TABLE 3.1: Pente de l'erreur

La figure 3.4 et la table 3.1 indiquent que  $\|u^\varepsilon - u^0\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , comme cela a été établi à travers l'inégalité (3.35).

# Chapitre 4

## Problème de revêtement

### Sommaire

---

3.1	Analyse asymptotique formelle . . . . .	31
3.2	Justification rigoureuse du développement asymptotique . . . . .	37
3.2.1	Etude de $P^0$ . . . . .	37
3.2.2	Interprétation . . . . .	39
3.2.3	Quelques remarques sur les termes suivants du développement asymptotique . . . . .	41
3.3	Etude Numérique . . . . .	41

---

### 4.1 Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude d'un modèle simplifié de revêtement d'un matériau. Contrairement au cas du collage, ici la couche mince est de rigidité beaucoup importante que l'autre partie du domaine. Pour définir le problème plus précisément, on se donne à nouveau la géométrie 3.1. On voudrait étudier cette fois-ci le problème de transmission suivant (**Modèle simplifié de revêtement (cas thermique)**).

Nous cherchons

$$v^\varepsilon = \begin{cases} v_1^\varepsilon & \text{dans } \Omega_1, \\ v_2^\varepsilon & \text{dans } \Omega_2^\varepsilon, \end{cases}$$

solution de :

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(v^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) & = f^\varepsilon & \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ v_1^\varepsilon & = 0 & \text{sur } \Gamma^g, \\ \frac{\partial v_2^\varepsilon}{\partial n} & = 0 & \text{sur } \Gamma^{d,\varepsilon}, \\ \frac{\partial v_1^\varepsilon}{\partial n} & = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \{\Gamma^g \cup I\}, \\ \frac{\partial v_2^\varepsilon}{\partial n} & = 0, & \text{sur } \partial\Omega_2^\varepsilon \setminus \{\Gamma^{d,\varepsilon} \cup I\}, \end{cases}$$

avec

$$(4.2) \quad v^\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_2^\varepsilon. \end{cases}$$

La fonction

$$(4.3) \quad f^\varepsilon = \begin{cases} f_1^\varepsilon & \text{dans } \Omega_1, \\ f_2^\varepsilon & \text{dans } \Omega_2^\varepsilon, \end{cases}$$

est donnée et supposée comme étant fonction de la variable  $y = (\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2)$ . Nous notons 2 différences

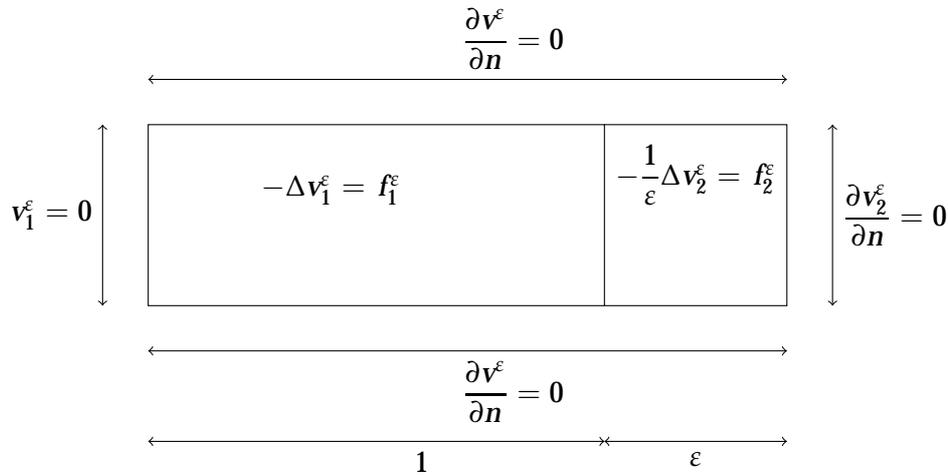


FIGURE 4.1: Modèle de problème de revêtement

avec le problème de collage :

1. La rigidité de la couche mince est de l'ordre de  $\frac{1}{\varepsilon}$  (elle était de l'ordre de  $\varepsilon$  pour la couche de colle), donc beaucoup plus importante que celle de l'autre partie du matériau.
2. la seconde différence est au niveau de la condition aux limites sur le bord  $x_1 = 1$  qui est de type Neumann (alors qu'elle était de type Dirichlet pour la couche de colle)

A l'instar du problème de collage, nous allons montrer que le problème de revêtement est bien posé :

**Théorème 4.1.** Pour  $f^\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ , le problème aux limites défini par (4.1), (4.2), (4.3) admet une unique solution  $v^\varepsilon$  dans  $H^1(\Omega^\varepsilon)$ .

*Démonstration.* Nous pouvons mettre le problème (4.1), (4.2), (4.3) sous la forme variationnelle suivante :

$$(4.4) \quad a^\varepsilon(v^\varepsilon, v) = I^\varepsilon(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\varepsilon,$$

avec

$$(4.5) \quad \begin{cases} \mathcal{V}^\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon), v = 0 \text{ sur } \Gamma^g\}, \\ a^\varepsilon(v^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_1} \nabla v_1^\varepsilon \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_2} \nabla v_2^\varepsilon \nabla v, \\ I^\varepsilon(v) = \int_{\Omega_1} f_1^\varepsilon v + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon v, \end{cases}$$

et conclure qu'il admet une solution unique dans  $H^1(\Omega^\varepsilon)$  grâce au théorème de Lax-Milgram.  $\square$

Nous allons donc à présent analyser le comportement asymptotique de la couche mince, pour cela nous rechercherons la solution  $v^\varepsilon$  sous la forme d'un développement asymptotique.

## 4.2 Analyse asymptotique formelle

Nous faisons le même changement de coordonnées que dans la section 3.1. Le problème aux limites (4.1),(4.2),(4.3) se reformule alors de la façon équivalente suivante : Nous cherchons donc une fonction

$$u^\varepsilon = \begin{cases} u_1^\varepsilon & \text{dans } \Omega_1, \\ u_2^\varepsilon & \text{dans } \Omega_2, \end{cases}$$

solution de :

$$(4.6) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^\varepsilon & = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_2^\varepsilon}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u_2^\varepsilon}{\partial y_2^2} & = \varepsilon f_2 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_1^\varepsilon & = 0, & \text{sur } \Gamma^g, \\ \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y_2} & = 0, & \text{sur } \Gamma^d, \\ \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial n} & = 0, & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \{\Gamma^g \cup I\}, \\ \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial n} & = g, & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \{\Gamma^d \cup I\}, \\ [u^\varepsilon] & = 0 & \text{sur } I, \\ \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial y_1} & = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y_1} & \text{sur } I, \end{cases}$$

où  $[w] = w|_{\Omega_2} - w|_{\Omega_1}$ .

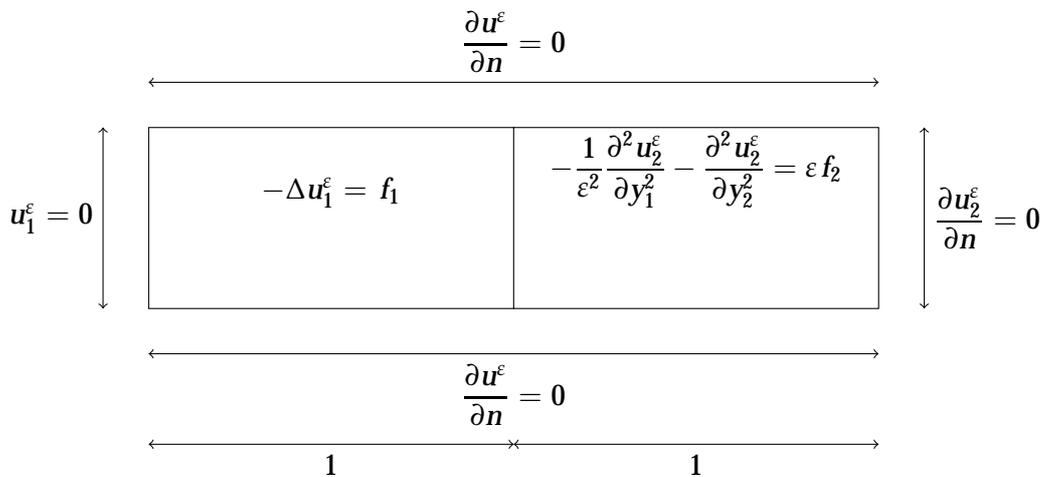


FIGURE 4.2: Problème modèle en domaine fixe.

Le système (4.6) se met sous la formulation variationnelle suivante :

$$(4.7) \quad \mathbf{a}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) = \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$$

avec :

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega), v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma^g \}, \\ \mathbf{a}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) = a_1(\mathbf{u}_1^\varepsilon, v_1) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{21}(\mathbf{u}_2^\varepsilon, v_2) + a_{22}(\mathbf{u}_2^\varepsilon, v_2), \\ a_1(\mathbf{u}^\varepsilon, v_1) = \int_{\Omega_1} \nabla \mathbf{u}_1^\varepsilon \nabla v_1, \\ a_{2j}(\mathbf{u}_2^\varepsilon, v_2) = \int_{\Omega_2} \frac{\partial \mathbf{u}_2^\varepsilon}{\partial y_j} \frac{\partial v_2}{\partial y_j}, \\ \mathcal{A}^0(\mathbf{u}^j, \mathbf{v}) = a_1(\mathbf{u}_1^j, v_1) + a_{22}(\mathbf{u}^j, v), \\ \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{v}) = F_1(v_1) + \varepsilon F_2(v_2), \\ F_1(v_1) = \int_{\Omega_1} f_1 v_1, \\ F_2(v_2) = \int_{\Omega_2} f_2 v_2 \end{array} \right.$$

La structure des équations du système (4.7), (4.8) suggère de chercher une solution  $\mathbf{u}^\varepsilon$  sous la forme :

$$(4.9) \quad \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2 \dots$$

En reportant (4.9) dans (4.7), (4.8), puis en identifiant les termes de même puissance en  $\varepsilon$ , il en sort les problèmes imbriqués suivants : pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$(4.10) \quad a_{21}(\mathbf{u}_2^0, v_2) = 0,$$

$$(4.11) \quad a_{21}(\mathbf{u}_2^1, v_2) = 0,$$

$$(4.12) \quad a_1(\mathbf{u}_1^0, v_1) + a_{21}(\mathbf{u}_2^0, v_2) + a_{22}(\mathbf{u}_2^0, v_2) = F_1(v_1),$$

$$(4.13) \quad a_1(\mathbf{u}_1^1, v_1) + a_{21}(\mathbf{u}_2^1, v_2) + a_{22}(\mathbf{u}_2^1, v_2) = F_2(v_2),$$

$$(4.14) \quad a_1(\mathbf{u}_1^i, v_1) + a_{21}(\mathbf{u}_2^{i+2}, v_2) + a_{22}(\mathbf{u}_2^i, v_2) = 0, \quad \forall i \geq 2.$$

A ce stade, l'écriture (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) n'est que formelle. Nous allons en donner un sens dans les sections qui suivront. Définissons tout d'abord l'espace fonctionnel qui nous permettra d'obtenir des problèmes bien posés. Soit  $\mathcal{W}$  défini comme :

$$(4.15) \quad \mathcal{W} = \left\{ \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathcal{V}, \quad a_{21}(w_2, v_2) = 0 \quad \forall v_2 \in H^1(\Omega_2) \right\}.$$

Ce qui nous permet d'affirmer grâce à (4.10), (4.11)

$$\mathbf{u}^0 \in \mathcal{W}, \quad \mathbf{u}^1 \in \mathcal{W}.$$

Munissons cet espace de la norme naturelle :

$$(4.16) \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{W}}^2 := \|\mathbf{v}_1\|_{1,\Omega_1}^2 + \|\mathbf{v}_2\|_{0,\Omega_2}^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}^2,$$

et donc de sa semi-norme :

$$(4.17) \quad |\mathbf{v}|_{\mathcal{W}}^2 := |\mathbf{v}_1|_{1,\Omega_1}^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}^2.$$

Nous pouvons déjà remarquer que pour tout  $w$  dans  $\mathcal{W}$  on a  $\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{W}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}$ . Si nous prenons alors comme fonction test dans l'équation (4.12), une fonction  $v$  appartenant à  $\mathcal{W}$ , nous obtenons le problème variationnel qui définit  $u^0$  :

Nous cherchons :

$$(4.18) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^0 \in \mathcal{W}, \\ \mathcal{A}^0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = F_1(\mathbf{v}_1) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}. \end{cases}$$

De façon analogue, nous pouvons définir le terme d'ordre 1 par

$$(4.19) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^1 \in \mathcal{W}, \\ \mathcal{A}^0(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}) = F_2(\mathbf{v}_2) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}, \end{cases}$$

puis le terme d'ordre 2 :

$$(4.20) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^2 \in \mathcal{V}, \\ a_{21}(\mathbf{u}_2^2, \mathbf{v}_2) = F_1(\mathbf{v}_1) - \mathcal{A}^0(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \mathcal{A}^0(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}, \end{cases}$$

ensuite le terme d'ordre 3 :

$$(4.21) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^3 \in \mathcal{V}, \\ a_{21}(\mathbf{u}_2^3, \mathbf{v}_2) = F_2(\mathbf{v}_2) - \mathcal{A}^0(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \mathcal{A}^0(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}, \end{cases}$$

enfin le terme générique d'ordre  $j, \forall j \geq 4$

$$(4.22) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^j \in \mathcal{V}, \\ a_{21}(\mathbf{u}_2^j, \mathbf{v}_2) = -\mathcal{A}^0(\mathbf{u}^{j-2}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \mathcal{A}^0(\mathbf{u}^j, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}, \end{cases}$$

où l'opérateur  $\mathcal{A}^0$  est défini en (4.8).

Nous étudierons rigoureusement le problèmes (4.18) dans les lignes qui suivent et nous ferons des remarques sur les problèmes (4.19),(4.20),(4.21),(4.22) dans une section ultérieure. Avant de continuer, signalons une différence notable entre les espaces variationnels définis ici et ceux qui ont été définis dans le chapitre précédent, elle réside essentiellement dans la perte de la condition de Dirichlet dans le domaine  $\Omega_2$  qui est maintenant de Neumann. Nous verrons que cela n'est pas sans conséquence. Nous pouvons à présent montrer le lemme suivant

**Lemme 4.2.** 1. *L'espace fonctionnel  $\mathcal{W}$  défini par (4.15) la muni de la norme (4.16) est un  $\mathbb{R}$  espace de Hilbert.*

2. *La forme bilinéaire  $\mathcal{A}^0$  défini dans (4.8) est continue sur  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$  et coercive sur  $\mathcal{W}$ .*

3. *La semi-norme (4.17) est une norme équivalente à (4.16) sur  $\mathcal{W}$ .*

4. *Les formes linéaires  $F_1, F_2$ , définies par (4.8) sont continues sur  $\mathcal{W}$ .*

**Démonstration.** 1.  $\mathcal{W}$  est un sous-espace de  $\mathcal{V}$  qui est un espace de Hilbert. Il suffit de montrer qu'il est fermé. En effet pour tout  $v$  dans  $\mathcal{V}$ , l'espace  $\mathcal{W}$  est très exactement le noyau de la forme linéaire  $a_{21}(\cdot, v)$  qui est continue sur  $\mathcal{V}$ ; il est donc fermé dans  $\mathcal{V}$ .

2. Grâce à la définition de la forme bilinéaire  $\mathcal{A}^0$ , pour tout  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{W}$  nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}^0(u, v)| &\leq \int_{\Omega_1} |\nabla u_1| |\nabla v_1| + \int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right| \left| \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right|, \\ &\leq |u|_{1, \Omega_1} |v|_{1, \Omega_1} + \left\| \frac{\partial u}{\partial y_2} \right\|_{0, \Omega_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial y_2} \right\|_{0, \Omega_2}, \\ &\leq 2 \|u\|_{\mathcal{W}} \|v\|_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

Ceci prouve la continuité de  $\mathcal{A}^0$  sur  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ . Prouvons à présent la coercivité de  $\mathcal{A}^0$ . En effet pour tout  $v \in \mathcal{W}$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |v|_{\mathcal{W}}^2 &= |v_1|_{1, \Omega_1}^2 + |v_2|_{1, \Omega_2}^2 \quad \left( \left\| \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right\|_{0, \Omega_2} = 0 \right), \\ &= |v|_{\mathcal{V}}^2, \\ &\geq C_{\Omega} \|v\|_{\mathcal{V}}^2 = C_{\Omega} \|v\|_{\mathcal{W}}^2, \end{aligned}$$

où  $C_{\Omega}$  est la constante dans l'inégalité de Poincaré.

3. En vertu des deux items précédents, la semi-norme (4.17) est une norme sur  $\mathcal{W}$ . Il reste à prouver l'équivalence avec la norme (4.16), c'est à dire qu'il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que pour tout  $v$  dans  $\mathcal{W}$  nous ayons

$$C_1 \|v\|_{\mathcal{W}} \leq |v|_{\mathcal{W}} \leq C_2 \|v\|_{\mathcal{W}}.$$

Il est facile de voir que  $C_2 = 1$ . En vertu de l'inégalité prouvant l'ellipticité de la forme bilinéaire  $\mathcal{A}^0$  sur  $\mathcal{W}$  nous avons pour tout  $v$  dans  $\mathcal{W}$

$$\mathcal{A}^0(v, v) = |v|_{\mathcal{W}}^2 \geq C_{\Omega} \|v\|_{\mathcal{W}}^2.$$

Nous avons alors  $C_1 = \sqrt{C_{\Omega}}$ .

4. Comme  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$ , les formes linéaires  $F_1$ , et  $F_2$  sont continues sur  $\mathcal{W}$ . □

### 4.3 Justification rigoureuse du développement asymptotique

Cette partie représente un petit pas dans la validation du développement asymptotique (4.9). Dans un premier temps nous montrons que le problème (4.18) est bien posé. Grâce au lemme (4.2), nous avons :

**Théorème 4.3.** *Pour  $f \in L^2(\Omega)$ , le problème (4.18) admet une unique solution dans  $\mathcal{W}$ .*

*Démonstration.* Cela résulte d'une simple application du théorème de Lax-Milgram dont les hypothèses sont vérifiées grâce au lemme (4.2). □

#### 4.3.1 Etude de $P^0$

Plus précisément, nous montrons que  $u^\varepsilon$  tend vers  $u^0$  dans  $\mathcal{W}$  de façon faible puis de façon forte.

**Théorème 4.4.** *La solution du problème défini par (4.7), (4.8) converge faiblement vers  $u^0$  défini par (4.18) dans  $\mathcal{W}$ .*

*Démonstration.* En prenant  $v = u^\varepsilon$  dans (4.7),(4.8), il vient :

$$\mathcal{A}^0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{21}(u_2^\varepsilon, u_2^\varepsilon) = F_1(u_1^\varepsilon) + \varepsilon F_2(u_2^\varepsilon),$$

autrement dit

$$(4.23) \quad |u_1^\varepsilon|_{1,\Omega_1}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y_1} \right\|_{0,\Omega_2}^2 + \left\| \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}^2 = F_1(u_1^\varepsilon) + \varepsilon F_2(u_2^\varepsilon).$$

Il en résulte en minorant le terme à gauche de l'inégalité et en majorant celui à droite de l'inégalité ( $C_F$  et  $C_\Omega$  désignant deux constantes positives dépendant respectivement de  $F_1$ ,  $F_2$  et de  $\Omega$ )

$$C_\Omega \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}}^2 \leq C_F \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}}.$$

Soit  $C = \frac{C_F}{C_\Omega}$ , alors  $\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{V}} \leq C$  et

$$(4.24) \quad |u_1^\varepsilon|_{1,\Omega_1}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y_1} \right\|_{0,\Omega_2}^2 + \left\| \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2}^2 \leq C.$$

On en déduit les trois inégalités suivantes

$$|u^\varepsilon|_{1,\Omega_1} \leq C, \quad \left\| \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0,\Omega_2} \leq C, \quad \left\| \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial y_1} \right\|_{0,\Omega_2} \leq \varepsilon C.$$

On peut donc extraire une sous-suite de  $u^\varepsilon$  qu'on appellera aussi  $u^\varepsilon$  qui converge faiblement dans  $\mathcal{W}$  vers  $u_x^0$ . Prenons comme fonction test  $v$  dans  $\mathcal{W}$ , et faisons tendre  $\varepsilon$  vers 0 dans (4.7),(4.8), les principaux termes admettent les limites suivantes :

$$a_1(u_1^\varepsilon, v_1) \rightarrow a_1(u_x^0, v_1),$$

$$a_{21}(u_2^\varepsilon, v_2) = 0,$$

$$a_{22}(u_2^\varepsilon, v_2) \rightarrow a_{22}(u_x^0, v_2).$$

Les équations (4.7),(4.8) deviennent :

$$u_*^0 \in \mathcal{W}, \quad \mathcal{A}^0(u_*^0, v) = F_1(v_1), \quad \forall v \in \mathcal{W}.$$

Par unicité de la solution de (4.18) on a

$$u_*^0 = u^0.$$

□

**Théorème 4.5.** *La solution du problème défini par (4.7), (4.8) converge fortement vers  $u^0$  défini par (4.18) dans  $\mathcal{W}$ .*

*Démonstration.* Par définition  $u^0 \in \mathcal{W}$ , donc  $u^0 \in \mathcal{V}$ , nous pouvons donc choisir comme fonction test dans (4.7),(4.8) :

$$w^\varepsilon = u^\varepsilon - u^0 \in \mathcal{V}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0(w^\varepsilon, w^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{21}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) &= \mathcal{A}^0(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \mathcal{A}^0(u^0, u^0) - 2\mathcal{A}^0(u^0, u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{21}(u^\varepsilon, u^\varepsilon), \\ &= F(u^\varepsilon) + F_1(u^0) - 2F(u^0), \\ &= F(u^\varepsilon - u^0) - \varepsilon F(u^0) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On en déduit d'une part les convergences fortes suivantes :

$$|w^\varepsilon|_{\mathcal{W}} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_2} \right\|_{0, \Omega_1} \rightarrow 0.$$

□

**Remarque** Nous n'avons pas réussi à établir une estimation d'erreur de type (3.35) avec des techniques de type variationnelles. En revanche nous renvoyant à l'article [16] où les auteurs montrent la convergence de  $u^\varepsilon$  vers  $u^0$  et une estimation d'erreur optimale en utilisant une technique de décomposition en somme d'opérateurs linéaires.

### 4.3.2 Interprétation

Dans cette partie, nous interprétons le problème variationnel (4.18) pour des fins numériques . En effet regardons de plus près l'espace  $\mathcal{W}$ , ou plus précisément la condition :

$$a_{21}(u, v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Cette égalité nous dit simplement que  $u$  n'est fonction que de la variable  $y_2$  dans le domaine  $\Omega_2$ . Soit donc

$$\mathcal{W} = \{v = (v_1, V), v_1 \in H_1(\Omega_1), v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma^g, V \in H_1(I), v_1 = V \text{ sur } I\}.$$

Le problème (4.18) se réécrit alors comme

$$\text{On cherche} \quad u^0 = (u_1^0, U) \in \mathcal{W},$$

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1^0 \nabla v_1 + \int_I U' V' = \int_{\Omega_1} f_1 v_1 \quad \forall v = (v_1, V) \in \mathcal{W}.$$

Ce problème s'interprète comme

$$(4.25) \quad (P^0) \begin{cases} -\Delta u_1^0 = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^0 = 0, & \text{sur } \Gamma^g, \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} = U'' & \text{sur } I, \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \{I \cup \Gamma^g\}, \end{cases} \quad (Q^0) \begin{cases} U(y_2) = u_1^0(0, y_2) & \text{sur } I, \\ U'(0) = 0, \\ U'(1) = 0. \end{cases}$$

Avec la première équation de  $(Q^0)$  sur  $I$ , la condition  $\frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} = U''$  se réécrit alors

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial y_2^2}.$$

Finalement le problème (4.18) admet quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  le problème limite suivant

$$(4.26) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^0 = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^0 = 0 & \text{sur } \Gamma^g, \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial y_2^2} & \text{sur } I, \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \{I \cup \Gamma^g\}. \end{cases}$$

L'avant-dernière équation de (4.26) est appelée condition de type Ventcel. Le problème (4.26) est bien posé et admet une unique solution  $u_1^0 \in H^2(\bar{\Omega}_1)$ . Pour plus de détails se référer à [3].

### 4.3.3 Quelques remarques sur les termes suivants du développement asymptotique

Dans cette sous-section, nous soulignons la difficulté de justification rigoureuse de la convergence vers les termes suivants du développement asymptotique (4.9). Par des techniques variationnelles, nous n'avons pas réussi à établir la convergence de la quantité  $\frac{(u^\varepsilon - u^0)}{\varepsilon}$  vers  $u^1$  solution de (4.19), le problème soulevé est d'ailleurs le même que la preuve de l'estimation d'erreur. Par ailleurs, nous remarquons que les problèmes (4.20),(4.21),(4.22) sont mal posés. En effet, nous perdons le contrôle suivant la direction  $y_2$  dans la couche. Comme dans le cas du problème de collage, il est nécessaire pour récupérer les conditions aux limites en  $y_2 = 0, y_2 = 1$  de traiter de façon distincte le cas d'une zone voisine des bords en question et celui des zones loin des bords.

## 4.4 Etude Numérique

Les calculs présentés ici ont été effectués par éléments finis. Plus précisément, nous cherchons à approcher pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ , le système (3.1),(3.2),(3.3). Nous évaluons numériquement la vitesse de convergence de la solution du système (3.1),(3.2),(3.3) vers (3.43).

Pour  $\varepsilon = 2^{-j}$ ,  $j = \llbracket 1, 6 \rrbracket$  nous calculons :

- l'approximation par éléments finis de la solution  $u^\varepsilon$  du problème de transmission (3.1),(3.2),(3.3) ;
- l'approximation par éléments finis de la solution  $u_1^0$  du problème (3.43) ;
- estimations des normes  $L^2$ ,  $L^\infty$ ,  $H^1$  de la différence  $u_1^\varepsilon - u_1^0$ .

Dans la figure (4.3), nous traçons l'erreur sous différentes normes par rapport à  $\varepsilon$ , les pentes des différentes courbes sont calculées dans tableau (4.1)

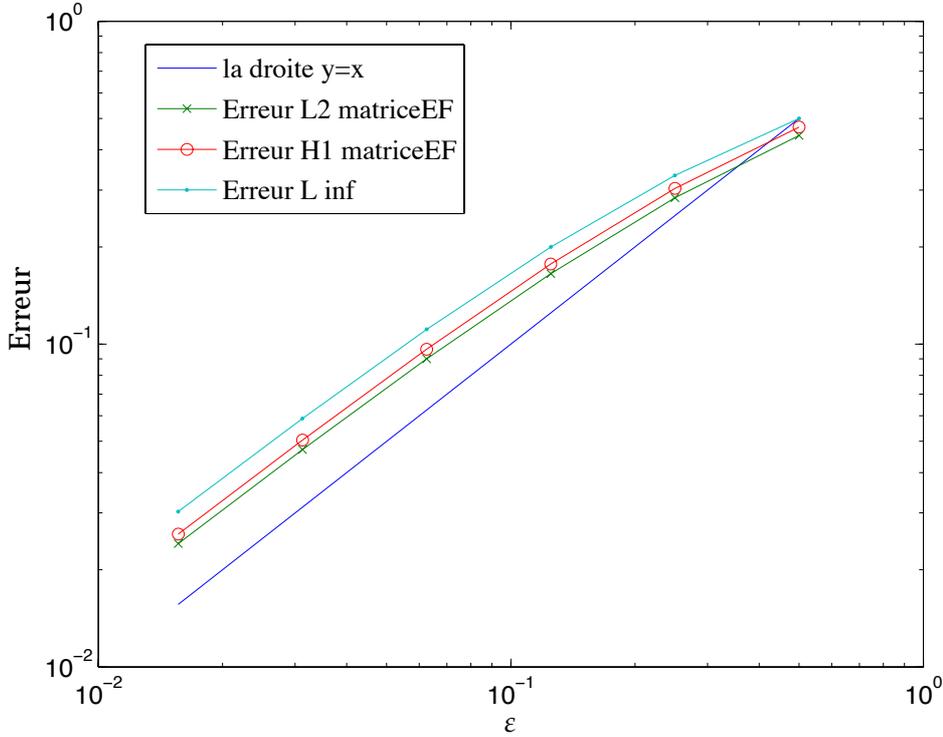


FIGURE 4.3: Ordre de la condition équivalente de revêtement par rapport à  $\varepsilon$

penL2	0.6408	0.7807	0.8767	0.9342	0.9659
penH1	0.6308	0.7779	0.8770	0.9351	0.9666
penL $^\infty$	0.5849	0.7369	0.8479	0.9175	0.9569

TABLE 4.1: Pente de l'erreur

La figure 4.3 et le tableau 4.1 semblent indiquer le comportement suivant :

$$\|u^\varepsilon - u^0\| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

## Conclusions et commentaires

Dans cette partie, nous avons effectué une étude mathématique rigoureuse des problèmes limites de collage et de revêtement. Nous avons vu que dans le cas du collage, la convergence vers le

problème limite se passe dans un espace plus grossier que l'espace de départ, par contre pour le problème de revêtement, la solution limite est plus régulière que celle de départ. Nous en avons déduits des conditions équivalentes à la couche mince. Pour le problème de collage, il s'agit de conditions de type Robin et pour celui de revêtement, il en ressort des conditions de type Ventcell. Nous avons également mesurer numériquement la précision de ces deux conditions. Nous avons pointé du doigt les problèmes de définition des ordres suivants du développement asymptotique dus à l'apparition de couches limites au voisinage des bords  $y_2 = 0$ ,  $y_2 = 1$ . Une solution possible serait une méthode des développements raccordés. Cela constitue une perspective naturelle à ce travail.

Cette partie nous a permis de comprendre le comportement asymptotique de des problèmes de type collage ou revêtement, mais par construction les problèmes limites ne permettent pas d'effectuer des calculs dans la couche mince ou du moins la précision reste limitée à l'ordre de la condition équivalente. La construction mathématique d'un problème limite d'ordre élevé reste difficile. Alors nous avons opté dans la seconde partie de ce travail pour des méthodes de décompositions de domaines. Nous construisons et comparons plusieurs conditions d'interface en tenant compte de la rigidité mais également de la géométrie de la couche mince.



# Bibliographie

- [1] J.-L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, 1968
- [2] JACQUES LOUIS LIONS, *Perturbations Singulieres dans les Problèmes aux Limites et en Controle Optimal*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 1973
- [3] K.LEMRABET, *Régularité de la solution d'un problème de transmission*, *J.Math.pures et appl.*,56, pp 1-38, 1977
- [4] W. ECKHAUS, *Asymptotic Analysis of singular perturbations*, North Holland,Amsterdam,1979
- [5] P.A.RAVIART, J.M.THOMAS *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1983
- [6] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985
- [7] A. IL'LIN, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, *Translations of Mathematical Monographs*,1992
- [8] SANCHEZ-HUBERT, J. AND SANCHEZ-PALENCIA E, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Masson, Paris,1992
- [9] MARIGO JEAN JACQUES,PLANCHAIS ERIC, *Introduction aux méthodes asymptotiques, application à des problèmes de thermiques linéaires*, *Rapport EDF*, 1992
- [10] JOLY PATRICK, *Some trace theorems in anisotropic Sobolev spaces*,*SIAM J. Math. Anal.* 23, no. 3, 799–819,1992
- [11] AMMARI.H, NÉDÉLEC.J.-C., *Sur les conditions d'impédance généralisées pour les couches minces*, *C.R.Acad.Sci. Paris Ser. I* 322, pp 995-1000, 1996
- [12] G.GEYMONAT, F.KRASUCKI, D.MARINI, M.VIDRASCU, *A domain decomposition method for a bonded structure*, *Mathematical models and methods in applied sciences*, vol 8, pp 1387-1402, 1998
- [13] G.GEYMONAT, F.KRASUCKI, S.LENCI, *Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive*, *Mathematics and Mechanics of solids*,4, pp 201-225,1999
- [14] G. VIAL, *Analyse multiéchelle et conditions aux limites approchées pour un problème de couche mince dans un domaine a coin*, *doctorat, université de Rennes*, 2003
- [15] S.TORDEUX, *Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes*, *doctorat, université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines*, 2004
- [16] A. FAVINI, R. LABBAS, K. LEMRABET, S. MAINGOT *Study of the limit of transmission problems in a thin layer by sum theory of linear operators*, *Rev.Mat.Complu.*,18, Num. 1, pp 143-176, 2005

- [17] N.MEUNIER , J.SANCHEZ-HUBERT, E. SANCHEZ-PALENCIA , *Various kinds of sensitive singular perturbations*, *Ann. Math. Blaise Pascal* 14 , no. 2, 199–242.,2007
- [18] JUNG ,C.-Y. *Interaction of boundary layers and corner singularities*, *Discrete and continuous dynamical systems, DCDS-A*, volume in honor of Li Ta-Tsien, 5, No. 4, pp 729-748, 2008
- [19] A-L. BESSOUD, F. FRASUCKI AND G. MICHAILLE *Multi materials with strong interface : variational modelings* *Asymptot. Anal.*, 2009

## **Deuxième partie**

# **Méthodes de décomposition de domaines**



# Introduction

La méthode de Schwarz classique[1] est basée sur des conditions d'interface de type Dirichlet. Un recouvrement entre les sous-domaines est nécessaire pour garantir la convergence de l'algorithme. Des méthodes de Dirichlet-Neumann [4, 5, 11] ont été proposées pour obtenir une convergence dans le cas de sous-domaines sans recouvrement. Elles sont basées sur le fait qu'à chaque itération, à l'interface entre les sous-domaines la condition de Dirichlet est d'abord imposée sur l'un des côtés, puis la condition de Neuman est imposée sur l'autre. Afin d'assurer d'assurer la convergence de l'algorithme, une relaxation de la donnée de Dirichlet à l'interface est utilisée. Des variantes partant de [6] ont été proposées dans le cas de sous-domaines sans recouvrement. Elles sont basées sur des conditions d'interface de type Robin. De nombreuses techniques de préconditionnement telles que les conditions d'interface optimisées [12, 18, 19, 22] ou des conditions d'Aitken-Schwarz [14] ont été développées ces dernières années.

Les méthodes de Schwarz optimisées font partie des méthodes de décomposition de domaines qui possèdent une convergence grandement améliorée. Dans ces méthodes, les conditions d'interface ont une importance cruciale pour la convergence de l'algorithme. Des conditions d'interface optimales qui conduisent à une meilleure convergence peuvent être déterminées. En revanche, ces conditions optimales sont non-locales. Une approche consiste à les approcher par des opérateurs locaux. Ces opérateurs locaux dépendront de plusieurs paramètres qui seront judicieusement choisis de manière à accélérer la convergence des algorithmes. Le choix de ces paramètres est formulé à travers un problème d'optimisation[19, 24]. L'étude théorique de ce problème d'optimisation fournit des formules explicites ou des caractérisations simples pour les conditions de transmission optimisées. De plus elle permet une analyse du comportement asymptotique de la convergence.

Historiquement les méthodes de Schwarz optimisées ont été introduites dans [10] pour les équations d'advection-diffusion et ont été étudiées en détail pour l'équation de Laplace dans [19]. Quelques travaux [15, 23] ont aussi été effectués pour les problèmes d'évolution. Plus récemment dans [25], des conditions d'interfaces optimisées ont été développées pour les équations de Maxwell. Mais toutes ces méthodes s'appliquaient aux équations à coefficients réguliers. Plus récemment, plusieurs études [16, 21] ont été menées pour étendre et améliorer ces techniques dans le cas des milieux hétérogènes. Dans [18, 20, 22], les auteurs étudient les méthodes de Schwarz optimisées pour une équation de diffusion avec coefficients discontinus. Ils construisent des conditions d'interface prenant en compte l'hétérogénéité des coefficients. Ils fournissent une forme explicite des paramètres optimisés, ce qui leur permet de faire une étude asymptotique en fonction de la finesse du maillage et du rapport d'hétérogénéité des coefficients de diffusion. Mais ces paramètres optimisés montrent une certaine limite dès que les matériaux présentent une forte dissymétrie géométrique.

Dans un premier chapitre, nous rappelons l'étude faite dans [19] sur l'équation de Laplace où l'au-

teur démontre qu'en général, le facteur de convergence est asymptotiquement de la forme  $1 - Ch^\alpha$ , où  $h$  est le pas de maillage et  $C, \alpha$  deux réels positifs. Ceci lui a permis de comparer diverses conditions d'interface d'un point de vue théorique mais aussi de valider les simulations numériques. Puis nous reprenons l'étude faite dans [22] en y présentant sur des applications numériques les limites de non-applicabilité. Dans [22], l'auteur étudie une équation de diffusion à coefficients discontinus, mais toujours dans la même démarche que [19]. Il obtient alors des résultats du même type qui généralisent le cas à coefficients continus. De plus il trouve un comportement asymptotique linéaire par rapport au ratio des discontinuités.

Dans un second chapitre, nous étendons cette étude au cas discret, ce qui nous permettra de traiter aussi le cas des matériaux avec une hétérogénéité de type géométrique. Nous prendrons pour modèle le problème (3.1), (3.2), (3.3). Nous montrons que les résultats de l'étude du cas discret suivent fidèlement ceux obtenus dans [19, 22]. En effet nous obtenons que le comportement par rapport à  $h$  est essentiellement du type  $1 - C_d h^{\alpha_d}$  où  $C_d$  et  $\alpha_d$  sont deux réels positifs qui dépendent de la géométrie du domaine. Nous obtenons également une dépendance linéaire par rapport au ratio des discontinuités.

Enfin dans un troisième chapitre, nous appliquons la même idée pour traiter le problème (4.1), (4.2), (4.3). Là également nous obtenons les mêmes tendances asymptotiques.

## Chapitre 5

# Rappel historique et développement récent

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	43
4.2	Analyse asymptotique formelle . . . . .	45
4.3	Justification rigoureuse du développement asymptotique . . . . .	49
4.3.1	Etude de $P^0$ . . . . .	49
4.3.2	Interprétation . . . . .	50
4.3.3	Quelques remarques sur les termes suivants du développement asymptotique . . . . .	51
4.4	Etude Numérique . . . . .	51

---

Etant donnés deux ouverts réguliers  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  ; deux réels positifs  $\nu_1$  et  $\nu_2$  ; deux fonctions suffisamment régulières  $f_1$  et  $f_2$  ; nous voulons résoudre numériquement le problème suivant :

$$(5.1) \quad -\operatorname{div}(\nu \nabla u) = f \quad \text{dans} \quad \Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

avec

$$(5.2) \quad \nu(\mathbf{x}) = \begin{cases} \nu_1 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ \nu_2 & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{cases}$$

et

$$(5.3) \quad f = \begin{cases} f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ f_2 & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

Appelons  $I$  l'interface entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Alors le problème (5.1),(5.2),(5.3) est équivalent au problème :

$$(5.4) \quad u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_2 & \text{dans } \Omega_2, \end{cases}$$

solution de

$$(5.5) \quad \begin{cases} -\nu_1 \Delta u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ -\nu_2 \Delta u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_1 = u_2 & \text{sur } I, \\ \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \nu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} & \text{sur } I, \end{cases}$$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\Omega_1$  par exemple. On voudrait écrire des algorithmes itératifs de résolution de type Schwarz, ce qui amène à se poser la question de la condition aux limites à mettre à l'interface. Nous rappellerons deux grandes familles d'algorithmes itératifs :

- celle dont la condition d'interface exprime les continuités de la solution et du flux, qu'on appelle algorithmes de Dirichlet-Neumann [4] ;
- Puis une autre famille d'algorithmes dont la condition d'interface exprime la continuité d'une combinaison de la solution et du flux, appelés algorithmes de Schwarz avec condition de type Robin [10, 12, 19, 22, 18, 20].

En effet, pour le cas  $\nu_1 = \nu_2$  dans [4], les auteurs proposent des algorithmes de Dirichlet-Neumann avec un paramètre de relaxation qu'ils choisissent de façon à accélérer la convergence. Toujours dans le cas  $\nu_1 = \nu_2$ , dans [10, 12, 19], les auteurs proposent différentes conditions d'interface basées sur une analyse de convergence par transformée de Fourier. L'expression de ces conditions contient des paramètres qui peuvent être choisis en résolvant un problème d'optimisation. Ce qui permet d'ailleurs de faire une étude asymptotique de la vitesse de convergence des algorithmes associés par rapport au pas de maillage par exemple. Dans [22, 18, 20] les auteurs étendent l'étude au cas  $\nu_1 \neq \nu_2$ . Dans la perspective de notre travail,  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = \varepsilon$ . Donc dans ce chapitre nous présenterons les résultats qu'ils obtiennent pour  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = \varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$ ; puis nous montrerons de façon numérique les limites d'applicabilité de ces conditions.

## 5.1 Algorithmes de Dirichlet-Neumann

Dans cette section nous définissons la première famille d'algorithmes [4]. Etant donné un paramètre  $\theta \in ]0, 1[$ , et une donnée initiale

$$(5.6) \quad u^0 := \begin{cases} u_1^0 & \text{sur } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ u_2^0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

nous cherchons les suites

$$u^n := \begin{cases} u_1^n & \text{sur } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ u_2^n & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

pour  $n \geq 1$ , solutions de

$$(5.7) \quad DN \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f_1 & \text{sur } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ -\varepsilon \Delta u_2^{n+1} = f_2 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u_1^{n+1} = \theta u_2^n + (1 - \theta) u_1^n & \text{en } x_1 = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial x_1} & \text{en } x_1 = 0, \end{cases}$$

ou de

$$(5.8) \quad ND \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f_1 & \text{sur } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ -\varepsilon \Delta u_2^{n+1} = f_2 & \text{sur } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ u_2^{n+1} = \theta u_1^n + (1 - \theta) u_2^n & \text{en } x_1 = 0, \\ \frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial x_1} = \varepsilon \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_1} & \text{en } x_1 = 0. \end{cases}$$

Le système (5.6), (5.7) définit les algorithmes de Dirichlet-Neumann et le système (5.6), (5.8) définit lui, les algorithmes de Neumann-Dirichlet. Le réel  $\theta$  est appelé paramètre de relaxation. Une fois nos différents algorithmes itératifs définis, nous nous posons la question de leur convergence.

### 5.1.1 Etude de convergence par analyse de Fourier

Dans cette partie nous nous intéressons à l'erreur que nous commettons en remplaçant respectivement  $u$  solution du problème (5.4), (5.5) par les  $u_j^n$ ,  $j = 1, 2$  solutions de (5.6), (5.7) ou de (5.6), (5.8). En d'autres termes nous voulons étudier les quantités :  $e_j^n := u_j - u_j^n$ ,  $j = 1, 2$ , qui sont solutions de (5.6), (5.7) ou de (5.6), (5.8) avec  $f_1 = 0$  et  $f_2 = 0$ .

Pour cela, nous cherchons les équations vérifiées par la transformée de Fourier partielle de  $e_j^n$  par rapport à  $x_2$ , c'est à dire :

$$\hat{e}_j^n := \hat{u}_j - \hat{u}_j^n, \quad j = 1, 2.$$

Pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , sa transformée de Fourier partielle par rapport à  $x_2$  peut être définie comme :

$$(5.9) \quad \mathcal{F}_{x_2}(f)(x_1, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{-ikx_2} dx_2 = \hat{f}(x_1, k).$$

Les  $\hat{e}_j^n$  sont donc solutions de deux équations différentielles linéaires d'ordre deux :

$$(5.10) \quad -\frac{\partial^2 \hat{e}_j^{n+1}}{\partial x_1^2} + k^2 \hat{e}_j^{n+1} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Les solutions de (5.10) qui sont dans  $L^2$  sont de la forme

$$(5.11) \quad \hat{e}_1^{n+1}(x_1, k) = \alpha_1^{n+1}(k) e^{|k|x_1} \quad \text{et} \quad \hat{e}_2^{n+1}(x_1, k) = \alpha_2^{n+1}(k) e^{-|k|x_1}.$$

A ce stade les coefficients  $\alpha_1^{n+1}$  sont inconnus. Nous les déterminerons en utilisant les deux conditions d'interface en  $x_1 = 0$ , par exemple dans le cas de (5.6), (5.7) on a

$$(5.12) \quad \begin{cases} \hat{e}_1^{n+1} = \theta \hat{e}_2^n + (1 - \theta) \hat{e}_1^n, \\ \varepsilon \frac{\partial \hat{e}_2^{n+1}}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{e}_1^{n+1}}{\partial x_1}, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \hat{e}_1^{n+1} = \theta \hat{e}_2^n + (1 - \theta) \hat{e}_1^n, \\ -\varepsilon |k| \hat{e}_2^{n+1} = |k| \hat{e}_1^{n+1}. \end{cases}$$

Ce qui nous permet de définir la quantité suivante :

$$(5.13) \quad R_{DN}(k) := \frac{\hat{e}_1^{n+1}(0, k)}{\hat{e}_1^n(0, k)} = 1 - \theta \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Puis de façon analogue pour le cas de (5.6),(5.8),

$$(5.14) \quad R_{ND}(k) := \frac{\hat{e}_1^{n+1}(0, k)}{\hat{e}_1^n(0, k)} = 1 - \theta(1 + \varepsilon).$$

Les quantités (5.13) et (5.14) sont appelées facteurs de convergence des algorithmes de Dirichlet-Neumann et de Neumann-Dirichlet. Les algorithmes (5.7) et (5.8) convergent si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad |R_{DN}(k)| < 1$$

et

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad |R_{ND}| < 1.$$

Si nous faisons  $\theta = 1$  dans (5.13), c'est à dire sans relaxation nous avons :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad R_{DN}(k) = \frac{1}{\varepsilon},$$

d'où la divergence de l'algorithme (5.6), (5.7) dès que  $\varepsilon < 1$ . Nous pouvons en revanche remarquer que  $R_{DN}$  est complètement indépendant de  $k$  d'où en posant  $\theta = \theta_{DN}^* := \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$ , le facteur de convergence  $R_{DN}$  est identiquement nul et nous avons une convergence en deux itérations. De même, si nous faisons  $\theta = 1$  dans (5.14), nous avons  $|R_{ND}| = \varepsilon$ , l'algorithme (5.6),(5.8) converge. Mais nous avons une meilleure convergence en posant  $\theta = \theta_{ND}^* := \frac{1}{1 + \varepsilon}$  auquel cas le facteur de convergence  $R_{ND}$  est identiquement nul et nous avons une convergence en deux itérations.

## 5.2 Algorithme de Schwarz avec conditions de type Robin

Nous suivons toujours la présentation faite dans [19, 22]. Nous nous intéressons toujours à des algorithmes itératifs de résolution de type Schwarz mais cette fois-ci avec des conditions à l'interface de type Robin. Nous allons poser le problème de façon un peu plus générale. Etant donné  $u^0$ , nous cherchons les suites  $u^n$  pour  $n \geq 1$ , solutions de

$$(5.15) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} & = f_1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ -\varepsilon \Delta u_2^{n+1} & = f_2 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + S_1\right) u_1^{n+1} & = \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + S_1\right) u_2^n \quad \text{en } x_1 = 0, \\ \left(-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + S_2\right) u_2^{n+1} & = \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + S_2\right) u_1^n \quad \text{en } x_1 = 0, \end{cases}$$

où les  $S_j$ ,  $j = 1, 2$  sont des opérateurs linéaires agissant uniquement selon la direction  $x_2$ .

Nous allons une fois de plus faire une analyse de convergence par transformée de Fourier. Mais pour ce faire, supposons que les opérateurs  $S_j$  ont des symboles de Fourier que nous noterons  $\sigma_j$ ,  $j = 1, 2$  c'est à dire :

$$\mathcal{F}_{x_2}(S_j u(x_1, x_2)) = \sigma_j(k) \hat{u}(x_1, k), \quad j = 1, 2.$$

Nous travaillons sur la suite des erreurs  $e_j^n$  qui sont solution de (5.15) avec  $f_1 = 0$  et  $f_2 = 0$ . Plus précisément nous cherchons les équations satisfaites par leur transformée de Fourier  $\hat{e}_j^n$ . Elles sont

données par (5.11) et (5.16).

$$(5.16) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_1\right) \hat{e}_1^{n+1} &= \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_1\right) \hat{e}_2^n \quad \text{en } x_1 = 0, \\ \left(-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2\right) \hat{e}_2^{n+1} &= \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2\right) \hat{e}_1^n \quad \text{en } x_1 = 0. \end{cases}$$

Pour déterminer les  $\alpha_j^n$ ,  $j = 1, 2$ , nous utilisons (5.16), soit

$$(5.17) \quad \begin{cases} (|k| + \sigma_1) \hat{e}_1^{n+1} &= (-\varepsilon |k| + \sigma_1) \hat{e}_2^n \quad \text{en } x_1 = 0, \\ (\varepsilon |k| + \sigma_2) \hat{e}_2^{n+1} &= (-|k| + \sigma_2) \hat{e}_1^n \quad \text{en } x_1 = 0. \end{cases}$$

A partir de (5.17), nous pouvons donc définir le facteur de convergence :

$$R(k, \sigma_1, \sigma_2) := \frac{\hat{e}_1^{n+1}(0, k)}{\hat{e}_1^{n-1}(0, k)} = \frac{(\sigma_1 - \varepsilon |k|)(\sigma_2 - |k|)}{(\sigma_1 + |k|)(\sigma_2 + \varepsilon |k|)}.$$

Pour avoir la convergence de l'algorithme (5.15), nous devons garantir

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad |R(k, \sigma_1, \sigma_2)| < 1.$$

Par ailleurs si nous posons donc  $\sigma_1(k) = \sigma_1^{opt}(k) := \varepsilon |k|$  et  $\sigma_2(k) = \sigma_2^{opt}(k) := |k|$ , nous obtiendrons une convergence au bout de 2 itérations, ce sont les opérateurs optimaux[12]. En revanche  $\sigma_1^{opt}$  et  $\sigma_2^{opt}$  ne sont pas des symboles de Fourier d'opérateurs différentiels, il est donc impossible de remonter aux  $S_j$ . Ils définissent donc des opérateurs pseudo-différentiels qui ont le désavantage d'être non-locaux. Cela est dû à la valeur absolue dans l'expression des  $\sigma_i^{opt}$ ,  $i = 1, 2$ . Une approche possible consiste à approcher la valeur absolue dans l'expression des  $\sigma_i^{opt}$  par des polynômes en  $k$ .

### 5.2.1 Conditions de Robin optimisées avec un paramètre

Une première approximation [19, 22] d'ordre 0, consiste à poser

$$\sigma_1(k) = \varepsilon p, \quad \text{et} \quad \sigma_2(k) = p$$

avec  $p \in \mathbb{R}_*^+$ . Cela nous permet de définir la famille d'algorithmes suivante :

$$(5.18) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} &= f_1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ -\varepsilon \Delta u_2^{n+1} &= f_2 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon p\right) u_1^{n+1} &= \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon p\right) u_2^n \quad \text{en } x_1 = 0, \\ \left(-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + p\right) u_2^{n+1} &= \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + p\right) u_1^n \quad \text{en } x_1 = 0 \end{cases}$$

Ces conditions d'interface sont appelées conditions de Robin one-sided dans [19, 22] dû au fait que l'on a choisi le même paramètre  $p$  pour les deux sous-domaines. Le taux de convergence de l'algorithme (5.18) se réécrit alors pour tout réel non nul  $k$  et pour tout réel positif  $p$  comme :

$$(5.19) \quad R_1(k, p) := \frac{(p - |k|)^2}{\left(p + \frac{|k|}{\varepsilon}\right)(p + \varepsilon |k|)}.$$

Bien que (5.19) soit défini pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , dans les applications numériques, il existe une fréquence minimale positive  $k_1$  et une fréquence maximale  $k_2$  telles que  $k_1 \leq |k| \leq k_2$ . Par exemple pour un problème posé dans un domaine borné avec des conditions de Dirichlet homogène, les fréquences correspondent exactement aux fréquences d'oscillation de la fonction  $\sin(|k|x_2)$ . Si le domaine est quadrillé avec un pas de maillage égal à  $h$  et si on suppose  $|x_2| \leq L$  alors les fréquences extrêmes sont respectivement  $k_1 = \frac{\pi}{L}$  et  $k_2 = \frac{\pi}{h}$ . Nous pouvons alors remplacer  $|k|$  par la variable positive  $k$  dans (5.19), c'est à dire pour tout réel strictement positif  $k_1 \leq k \leq k_2$  et pour tout réel strictement positif  $p$

$$(5.20) \quad R_1(k, p) := \frac{(p-k)^2}{\left(p + \frac{k}{\varepsilon}\right)(p + \varepsilon k)}.$$

Il nous reste donc à choisir la constante  $p$ . Nous prendrons celle qui minimise la quantité  $\sup_{0 < k_1 \leq k \leq k_2} |R_1(k, p)|$ . Soit donc à résoudre le problème d'optimisation

$$(5.21) \quad \inf_{p > 0} \sup_{0 < k_1 \leq k \leq k_2} |R_1(k, p)|.$$

**Théorème 5.1.** *Le problème d'optimisation (5.21) admet une unique solution qui est donnée par :*

$$(5.22) \quad p = p^* := \sqrt{k_1 k_2}$$

et qui est caractérisée par

$$(5.23) \quad R_1(k_1, p^*) = R_1(k_2, p^*).$$

*Démonstration.* Nous ferons la démonstration en 3 étapes :

- ◇ Restriction de l'intervalle de recherche de  $p$ ;
- ◇ Montrer que le  $\max_{k_1 \leq k \leq k_2} |R_1(k, p)|$  est atteint aux bornes de l'intervalle  $[k_1, k_2]$ ;
- ◇ Etude des fonctions restreintes au bord,  $R_1(k_1, \cdot)$  et  $R_1(k_2, \cdot)$ .

Calculons les deux dérivées partielles du facteur de convergence (5.20)

$$(5.24) \quad \frac{\partial R_1}{\partial k}(k, p) = (k-p) \frac{p\varepsilon(1+\varepsilon)^2(p+k)}{[(\varepsilon p+k)(p+\varepsilon k)]^2};$$

$$(5.25) \quad \frac{\partial R_1}{\partial p}(k, p) = (p-k) \frac{k\varepsilon(1+\varepsilon)^2(p+k)}{[(\varepsilon p+k)(p+\varepsilon k)]^2}.$$

$$\text{D'où } \text{sign}\left(\frac{\partial R_1}{\partial p}\right) = \text{sign}(p-k), \quad \text{et} \quad \text{sign}\left(\frac{\partial R_1}{\partial k}\right) = \text{sign}(k-p).$$

Nous en dégageons les propriétés suivantes :

- ◇  $R_1$  est positive pour tout  $k \in [k_1, k_2]$ ;

◇ Pour  $p < k_1$ ,  $\frac{\partial R_1}{\partial p}(k, p) < 0$  pour tout  $k \in [k_1, k_2]$ ,  $R_1$  décroît donc quand  $p$  croît. On a alors :

$$\inf_{p \geq k_1} \sup_{0 < k_1 \leq k \leq k_2} |R_1(k, p)| \leq \inf_{p \in \mathbb{R}^*_+} \sup_{0 < k_1 \leq k \leq k_2} |R_1(k, p)|.$$

De même pour  $p > k_2$ ,  $\frac{\partial R_1}{\partial p}(k, p) > 0$  pour tout  $k \in [k_1, k_2]$ ,  $R_1$  croît donc quand  $p$  croît. On a alors :

$$\inf_{p \leq k_2} \sup_{0 < k_1 \leq k \leq k_2} |R_1(k, p)| \leq \inf_{p \in \mathbb{R}^*_+} \sup_{0 < k_1 \leq k \leq k_2} |R_1(k, p)|.$$

Nous pouvons donc restreindre l'intervalle de recherche de  $p$  à l'intervalle  $[k_1, k_2]$ . Le problème (5.21) est alors équivalent au problème de min-max suivant :

$$(5.26) \quad \min_{p \in [k_1, k_2]} \max_{k \in [k_1, k_2]} R_1(k, p).$$

◇ A  $p$  fixé sur  $[k_1, k_2]$ , comme fonction de  $k$ ,  $R_1$  décroît sur  $[k_1, p]$  en admettant un extremum en  $k = p$  qui est en fait un minimum car  $R_1(p, p) = 0$ . Ensuite  $R_1$  croît sur  $[p, k_2]$ . Le  $\max_{k \in [k_1, k_2]} R_1(k, p)$  est donc atteint soit en  $k = k_1$  soit en  $k = k_2$ . Il faut donc étudier les fonctions de la variable  $p$ ,  $R_1(k_1, \cdot)$  et  $R_1(k_2, \cdot)$ .

◇  $R_1(k_1, \cdot)$  est une fonction croissante en  $p$  et vérifie  $R_1(k_1, k_1) = 0$  et  $R_1(k_2, \cdot)$  est décroissante en  $p$  vérifie  $R_1(k_2, k_2) = 0$ . Quand  $p = k_1$ , le  $\max_k R_1(k, p) = R_1(k_2, p)$ . Quand  $p$  croît,  $R_1(k_1, p)$  croît et  $R_1(k_2, p)$  décroît. Mais le  $\max_k R_1(k, p)$  reste  $R_1(k_2, p)$ , jusqu'à ce que

$$R_1(k_1, p) = R_1(k_2, p).$$

Ensuite il devient  $R_1(k_1, p)$  puis il recroît. Donc il est minimal (cf fig(5.1)) pour  $p$  tel que :

$$R_1(k_1, p) = R_1(k_2, p).$$

Cette équation admet une unique racine sur  $[k_1, k_2]$  du fait de la monotonie de  $R_1$  et cette racine a pour valeur  $p = p^* := \sqrt{k_1 k_2}$ . □

## 5.2.2 Conditions de Robin optimisées avec deux paramètres

Une seconde approximation [19, 22, 18, 20] toujours d'ordre 0, des symboles  $\sigma_j$ ,  $j = 1, 2$  consisterait à poser

$$\sigma_1(k) = \varepsilon p, \quad \sigma_2(k) = q,$$

où  $p, q$  sont des réels positifs. Ce qui correspond à l'algorithme :

$$(5.27) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} & = f_1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \\ -\varepsilon \Delta u_2^{n+1} & = f_2 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon p \right) u_1^{n+1} & = \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon p \right) u_2^n \quad \text{en } x = 0, \\ \left( -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + q \right) u_2^{n+1} & = \left( -\frac{\partial}{\partial x} + q \right) u_1^n \quad \text{en } x = 0. \end{cases}$$

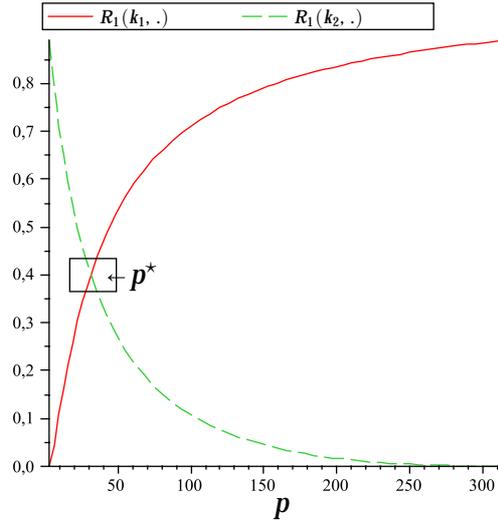


FIGURE 5.1: Fonctions partielles de  $p$ .

L'algorithme (5.27) correspond à un algorithme de Schwarz avec des conditions de Robin un peu plus générales à l'interface, au sens que nous nous donnons deux degrés de libertés différents, un pour chaque sous-domaine. C'est pourquoi ces conditions ont été nommées 2sided dans [19, 22]. Le facteur de convergence correspondant s'écrit :

$$(5.28) \quad R_2(k, p, q) := \frac{(p - k)(q - k)}{(p + \frac{k}{\varepsilon})(q + \varepsilon k)}.$$

Et comme dans le paragraphe précédent, nous nous intéressons aux paramètres  $p$  et  $q \in \mathbb{R}_*^+$  qui minimisent uniformément sur la gamme de fréquences choisie, le taux de convergence correspondant. Nous voulons donc résoudre le problème de min-max suivant.

$$(5.29) \quad \min_{p, q > 0} \max_{0 < k_1 \leq k \leq k_2} |R_2(k, p, q)|.$$

Cette optimisation étant intégralement faite dans [22], nous en donnons un énoncé ici, puis quelques commentaires.

**Théorème 5.2.** *Le problème d'optimisation (5.29) admet une unique paire de solutions  $(p^{**}, q^{**})$  qui est donnée par les relations suivantes :*

$$(5.30) \quad p^{**} q^{**} = k_1 k_2,$$

$$(5.31) \quad R_2(k_1, p^{**}, q^{**}) = R_2(\sqrt{p^{**} q^{**}}, p^{**}, q^{**}).$$

Dans [22], l'auteur fait une démonstration en 3 étapes :

- ◇ Restriction de l'intervalle de recherche de  $p$  et  $q$ ;
- ◇ Montrer que  $R(\cdot, p, q)$  admet trois maximum locaux atteints respectivement pour  $k = k_1$ ,  $k = \sqrt{pq}$  et  $k = k_2$ ;
- ◇ Etude des fonctions  $R_1(k_1, \cdot, \cdot)$  et  $R_1(k_2, \cdot, \cdot)$  pour établir les paramètres optimaux  $p^{**}$  et  $q^{**}$  sont obtenus par une équioscillation en ces trois maximum locaux.

Sur la figure (5.2), nous pouvons observer les taux de convergence (5.20) et (5.28) en fonction de  $k$ , évalués aux différents paramètres optimisés. Nous voyons notamment que les paramètres optimisés sont caractérisés par une équioscillation en deux ou trois points et l'algorithme (5.27) a une meilleure convergence. La section suivante fait l'objet d'étude des performances des différents algorithmes.

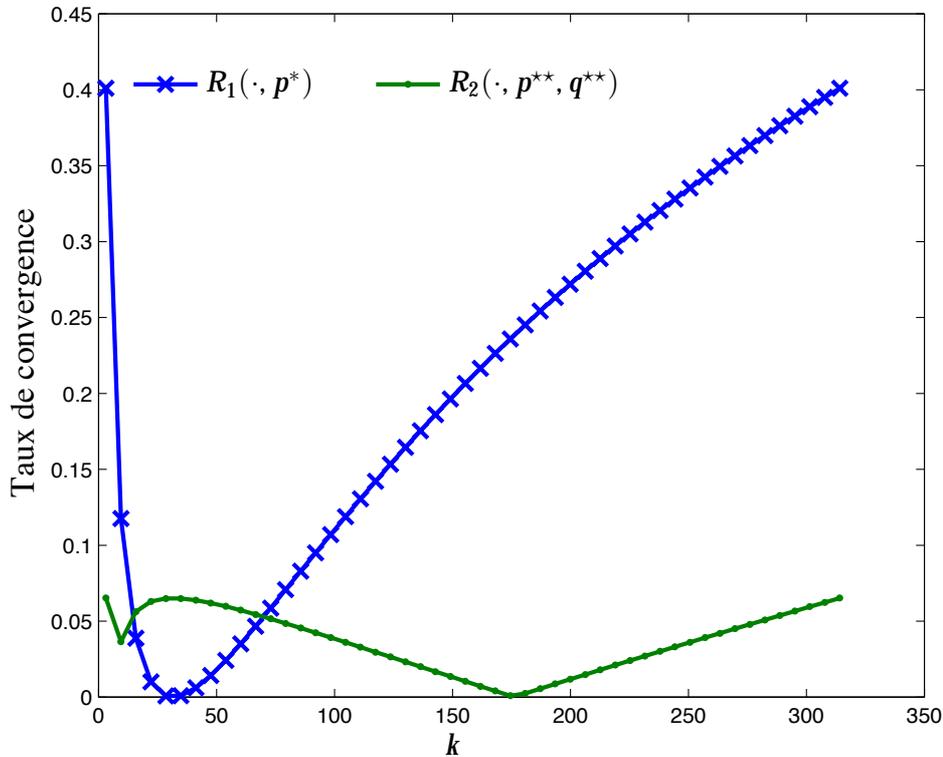


FIGURE 5.2: Taux de convergence par rapport à la fréquence  $\varepsilon = 0.1$   $h = 1/100$

### 5.3 Etude asymptotique de la convergence numérique des algorithmes

Dans ce qui suit, nous exhibons la performance de la famille d'algorithmes par rapport à chacun des petits paramètres ( $h, \varepsilon$ ), l'autre étant fixé. Nous supposons de plus ici que  $\varepsilon \leq 1$ .

#### 5.3.1 Influence du maillage sur la convergence

A  $\varepsilon$  fixé, les deux propositions qui suivent nous donnent le comportement du taux de convergence par rapport à  $h$ . Quand cela sera nécessaire, nous distinguerons le cas  $\varepsilon = 1$  du cas  $\varepsilon < 1$  qui sont traités respectivement dans [19] et [22].

**Proposition 5.3.** *Les comportements asymptotiques du paramètre optimal et du taux de convergence (5.20) pour*

de petites valeurs de  $h$  sont donnés par :

$$p^* = \sqrt{k_1 \pi h}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\max_{k_1 \leq k \leq \frac{\pi}{h}} R_1(k, p^*) = 1 - \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon} \left( \frac{k_1 h}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h).$$

**Proposition 5.4.** Les comportements asymptotiques du paramètre optimal et du taux de convergence (5.28) pour de petites valeurs de  $h$  sont donnés par :

- si  $\varepsilon = 1$

$$p^{**} \sim 2^{-\frac{3}{5}} k_1^{\frac{4}{5}} h^{-\frac{1}{5}},$$

$$q^{**} \sim (2k_1^2)^{\frac{1}{5}} h^{-\frac{3}{5}},$$

$$\max_{k_1 \leq k \leq \frac{\pi}{h}} R_2(k, p^*, q^*) = 1 - 2\sqrt{2} \left( \frac{k_1}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}).$$

- si  $\varepsilon < 1$

$$p^{**} \sim \frac{2k_1}{1-\varepsilon} - \frac{4k_1^{3/2} (1+\varepsilon)^2}{\sqrt{\pi} (1-\varepsilon)^3} h^{1/2}$$

$$q^{**} \sim \frac{\pi(1-\varepsilon)}{2} h^{-1} + \sqrt{k_1 \pi} \frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon} h^{-1/2}$$

$$\max_{k_1 \leq k \leq \frac{\pi}{h}} R_2(k, p^*, q^*) = \varepsilon - \frac{4\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{k_1}{\pi}} h^{1/2} + \mathcal{O}(h).$$

### 5.3.2 Influence de $\varepsilon$ sur la convergence

A  $h$  fixé, les deux propositions qui suivent nous donnent le comportement du taux de convergence par rapport à  $\varepsilon$ .

**Proposition 5.5.** Les comportements asymptotiques du taux de convergence (5.20) pour de petites valeurs de  $\varepsilon$  sont donnés par :

$$p^* = \sqrt{k_1 k_2},$$

$$\max_{k_1 \leq k \leq k_2} R_1(k, p^*) = \varepsilon \frac{(\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1})^2}{\sqrt{k_1 k_2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

**Proposition 5.6.** Soient :

$$(5.32) \quad p_0^{**} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p^{**} = \frac{1}{4} (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}) - \frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^4 - 16k_1 k_2},$$

$$(5.33) \quad q_0^{**} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q^{**} = \frac{1}{4} (\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}) + \frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^4 - 16k_1 k_2},$$

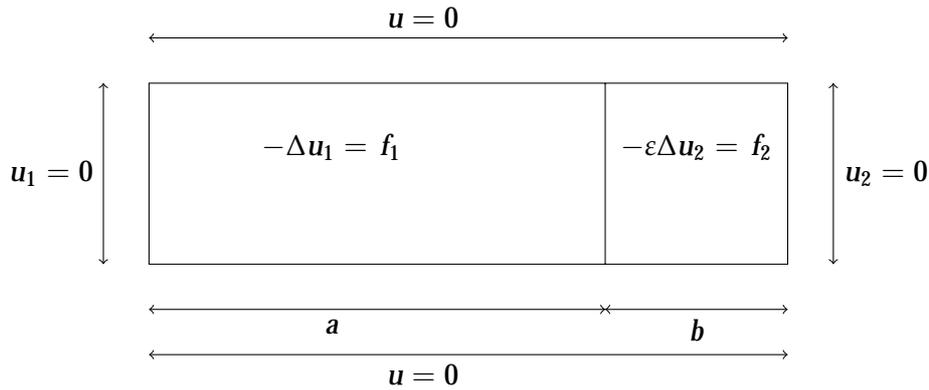
alors les comportements asymptotiques du paramètre optimal et du taux de convergence (5.28) pour de petites valeurs de  $\varepsilon$  sont alors donnés par :

$$\max_{k_1 \leq k \leq k_2} R_2(k, p^*, q^*) = \varepsilon \frac{(p_0^{**} - k_1)(q_0^* - k_1)}{k_1 q_0^{**}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Dans la section suivante, nous faisons une étude numérique servant à corroborer les résultats théoriques obtenus dans ce chapitre, notamment au sujet du comportement asymptotique des algorithmes par rapport aux différents paramètres. Les différents résultats numériques sont présentés sous forme de tableaux et de figures comparant les algorithmes (5.7), (5.8), (5.18), (5.27). Les conditions d'interface considérées sont celles avec les paramètres optimisés. Nous étudions séparément le cas d'une décomposition symétrique de domaines ( $a = b$ ) et le cas non-symétrique. Dans le cas symétrique, nous regardons le comportement par rapport au pas de maillage, puis par rapport à  $\varepsilon$ . Dans le cas non-symétrique, nous simulons l'influence de la dissymétrie sur la convergence.

## 5.4 Etude Numérique

Tous les résultats numériques exposés ici ont été effectués sur le problème modèle suivant :



avec

$$(5.34) \quad u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) = (x+a) \sin\left(\frac{\pi}{L}y\right) & (x, y) \in ]-a, 0] \times ]0, L], \\ u_2(x, y) = \left[ -\frac{x^2}{b^2} \left(a + \frac{b}{\varepsilon}\right) + a + \frac{x}{\varepsilon} \right] \sin\left(\frac{\pi}{L}y\right) & (x, y) \in ]0, b] \times ]0, L]. \end{cases}$$

Prenons le cas du carré unité pour se fixer les idées :

$$\begin{cases} a = 0.5, \\ b = 0.5, \\ L = 1. \end{cases}$$

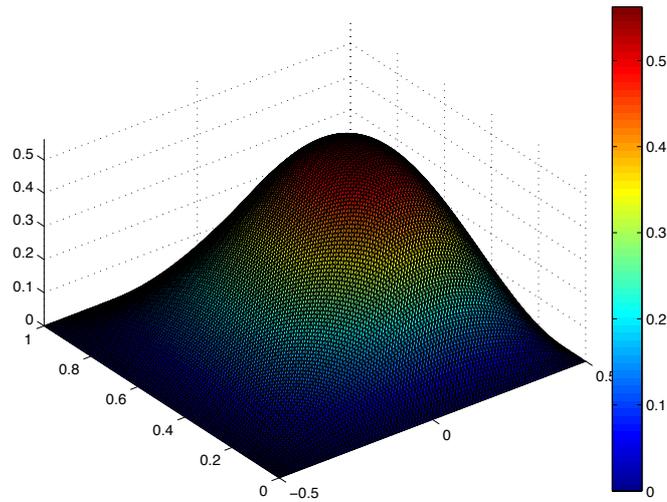


FIGURE 5.3: Solution de référence

Nous avons utilisé une méthode d'éléments finis  $P^1$  Lagrange comme solveur mono-domaine. Pour commencer définissons la norme d'erreur que nous utiliserons à chaque itération  $n$ .

$$\|E_{\Omega}^n\| = \max(\|E_{\Omega_1}^n\|, \|E_{\Omega_2}^n\|)$$

avec

$$E_{\Omega_i}^n = \|u_{i,h}^n - U^n\|_{L^\infty}$$

où  $U^n$  est une solution de référence discrète et  $u_{i,h}^n$  est la solution calculée à l'itération  $n$ . Nous choisissons pour donnée initiale un vecteur de valeurs aléatoires comprises entre  $-1$  et  $1$  de façon à ce que l'erreur initiale contienne toutes les fréquences possibles. De plus tous les résultats ont été testés à la fois sur un **maillage régulier** mais aussi sur un **maillage quelconque** et la vitesse de convergence est la même.

#### 5.4.1 Décomposition de domaines symétrique ( $a = b$ )

Nous regardons la vitesse de convergence des différents algorithmes étudiés dans le cas où nous avons deux sous-domaines de dimensions égales. Pour cela nous considérons d'abord le cas où  $\varepsilon = 1$  [19].

##### Cas de matériaux homogènes $\varepsilon = 1$

Dans le tableau 5.1, nous simulons la performance des différents algorithmes par rapport au pas de maillage. En effet nous comptons le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de la taille du maillage  $h$ . Nous voyons que cela corrobore les asymptotes données dans les propositions 5.3 et 5.4.

##### Cas de matériaux inhomogènes $\varepsilon \neq 1$

Nous évaluons la performance des algorithmes (5.7), (5.8),(5.18),(5.27) par rapport au pas de maillage  $h$  et à  $\varepsilon$ . D'abord nous fixons  $\varepsilon = 0.1$  et nous comptons le nombre d'itérations nécessaires

h	Dirichlet-Neumann	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
1/50	2	2	23	13
1/100	2	2	32	15
1/200	2	2	46	19
1/400	2	2	66	23

TABLE 5.1: Nombre d'itérations (Gauss-Seidel) pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de la taille du maillage  $h$ .

pour atteindre  $10^{-6}$  en fonction du maillage dans le tableau 5.2 Puis nous fixons  $h = 1/200$  et nous

h	Dirichlet-Neumann	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
1/50	2	2	12	5
1/100	2	2	16	6
1/200	2	2	22	6
1/400	2	2	30	6

TABLE 5.2: Nombre d'itérations (Gauss-Seidel) pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de la taille du maillage  $h$ .

comptons le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre  $10^{-6}$  en fonction de  $\varepsilon$  dans le tableau 5.3. Ceci confirme les asymptotes données dans les propositions 5.3 et 5.4.

#### 5.4.2 Décomposition de domaines non symétrique ( $a \neq b$ ) et Etude dans la couche

Le tableau 5.4 et la figure 5.4 qui suivent étudient le comportement de ces nouvelles méthodes par rapport à la dissymétrie de la décomposition de domaines. Nous fixons

$$a = 1, \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$$

et faisons décroître  $b$  en comptant le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$ . Les algorithmes de Neumann-Dirichlet et de Robin à deux paramètres divergent pour les valeurs de  $b$  égales à 0.01 et 0.005. L'algorithme de Robin à un paramètre diverge pour  $b = 0.005$ . Sur les figures, la légende est décrite de la façon suivante :

- Robin<sub>1</sub> désigne l'algorithme avec conditions de Robin à un paramètre ;
- Robin<sub>2</sub> désigne l'algorithme avec conditions de Robin à deux paramètres.

$\varepsilon$	Dirichlet-Neumann	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
0.1	2	2	22	6
$10^{-2}$	2	2	7	4
$10^{-3}$	2	2	4	3
$10^{-4}$	2	2	3	2
$10^{-5}$	2	2	2	2

TABLE 5.3: Nombre d'itérations pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $\varepsilon(h = 1/200)$

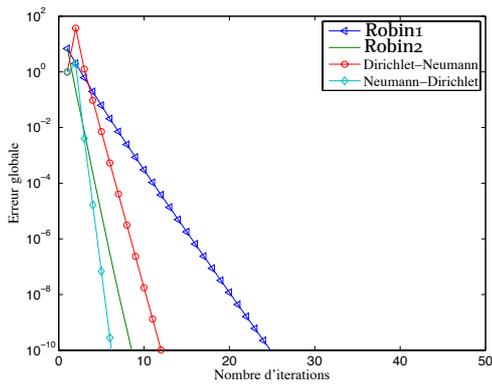
$b$	Dirichlet-Neumann	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
0.5	8	4	15	5
0.1	38	8	15	6
0.02	124	42	15	34
0.01	171	DIV	23	DIV
0.005	200	DIV	DIV	DIV

TABLE 5.4: Nombre d'itérations pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $b(h = 1/200, \varepsilon = 0.05)$

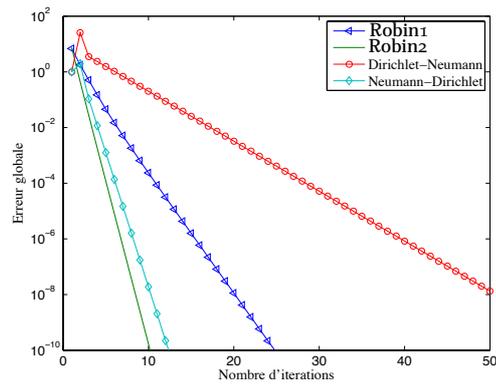
## 5.5 Conclusion et commentaires

Dans ce chapitre nous avons rappelé les études théoriques effectuées dans [19, 22] où les auteurs ont développé des conditions d'interface pour un problème de diffusion. Ils ont montré la robustesse de ces nouvelles conditions par rapport au pas de maillage  $h$  mais aussi par rapport à la discontinuité éventuelle des coefficients de diffusion  $\varepsilon$ . Il est intéressant de remarquer que l'on peut donner explicitement ces dépendances. Dans le cas  $\varepsilon = 1$ , il avait déjà été montré [19] que le facteur de convergence se comportait asymptotiquement comme  $1 - Ch^\alpha$  où  $C, \alpha$  sont des réels positifs. En effet, l'auteur montre que  $\alpha = \frac{1}{2}$  pour le cas des conditions d'interface de Robin à un paramètre et  $\alpha = \frac{1}{4}$  pour le cas des conditions d'interface de Robin à deux paramètres. Dans [22] qui traite du cas  $\varepsilon \neq 1$ , l'auteur retrouve cette tendance pour le cas à un paramètre, mais ce qui est le plus intéressant c'est le fait que l'algorithme avec des conditions de Robin à deux paramètres a une convergence complètement indépendante du pas de maillage  $h$ . En revanche, il montre que l'on a une dépendance linéaire par rapport à  $\varepsilon$  dans tous les cas.

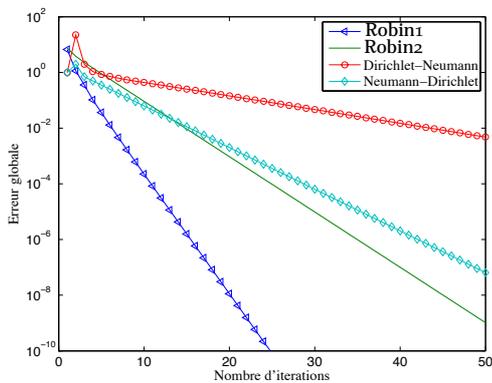
Par ailleurs, les conditions d'interface de Dirichlet-Neumann ont montré la meilleure performance



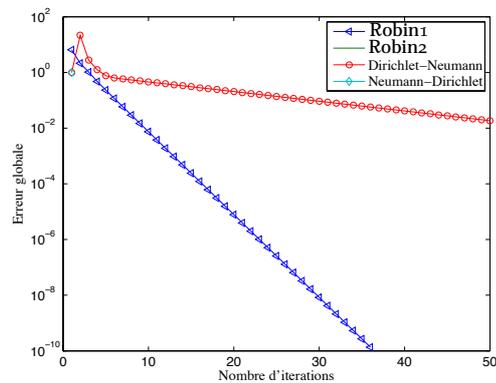
(a)  $a = 1, b = 0.5$



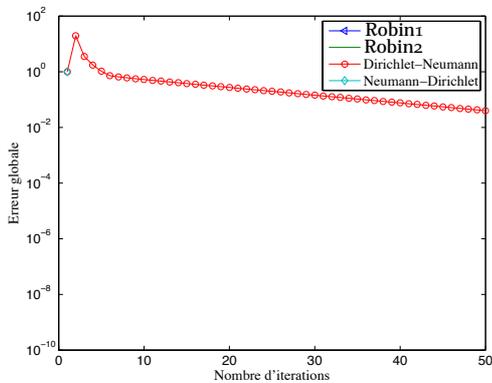
(b)  $a = 1, b = 0.1$



(c)  $a = 1, b = 0.02$



(d)  $a = 1, b = 0.01$



(e)  $a = 1, b = 0.005$

FIGURE 5.4: Erreur globale au cours des itérations pour  $\varepsilon = 0.05, h = 1/200$

dans le cas d'une décomposition symétrique de domaines, mais restent très sensibles à la géométrie.

Pour finir, rappelons que le tableau 5.4 et la figure 5.4 montrent la non-applicabilité de ces conditions dans le cas d'une trop grande dissymétrie du domaine de calcul qui s'avère pourtant être un cas très intéressant. Dans les chapitres qui suivent nous montrons comment choisir ces conditions de façon à tirer profit de la dissymétrie du domaine, en d'autres termes nous cherchons à construire des algorithmes qui convergent d'autant plus vite que la dissymétrie du domaine est importante mais tout en restant dans le même esprit que [19, 22].



## Chapitre 6

# Méthodes de décomposition de domaines pour le problème de collage

### Introduction

Le chapitre précédent illustre l'importance du choix des conditions d'interface dans la convergence des algorithmes itératifs de décomposition de domaines. Dans ce chapitre, nous construisons des conditions d'interface qui prennent en compte les difficultés essentielles que l'on rencontre dans les problèmes de type collage. A savoir :

- la discontinuité des coefficients de diffusion ( conductivité en thermique, coefficients de rigidité en élasticité...);
- l'épaisseur fine de la couche.

Pour cela nous allons donc étendre les études faites dans [22] et [19] de façon à tenir compte de ces difficultés.

Définissons un problème modèle. Nous nous donnons un réel positif  $\varepsilon < 1$  et trois autres réels positifs  $a, b$  et  $L$ . Puis considérons la géométrie définie comme suit :

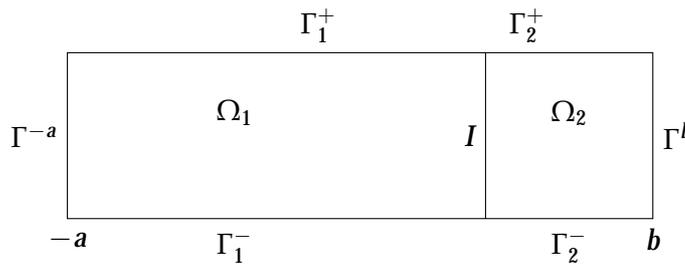


FIGURE 6.1: Géométrie considérée

- $\Omega_1 = ]-a, 0[ \times ]0, L[$ ;
- $\Omega_2 = ]0, b[ \times ]0, L[$ ;
- $\Gamma^{-a} = \{(-a, x_2), x_2 \in ]0, L[ \}$ ;
- $\Gamma_1^+ = \{(x_1, L), x_1 \in ]-a, 0[ \}$ ;
- $\Gamma_1^- = \{(x_1, 0), x_1 \in ]-a, 0[ \}$ ;
- $\Gamma^b = \{(b, x_2), x_2 \in ]0, L[ \}$ ;
- $\Gamma_2^+ = \{(x_1, L), x_1 \in ]0, b[ \}$ ;
- $\Gamma_2^- = \{(x_1, 0), x_1 \in ]0, b[ \}$ ;

- $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$ ;
- $\Gamma^- = \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^-$ ;
- $I = \{(0, x_2), x_2 \in ]0, L[\}$ .

Notons  $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$ . On considère le problème de transmission suivant :

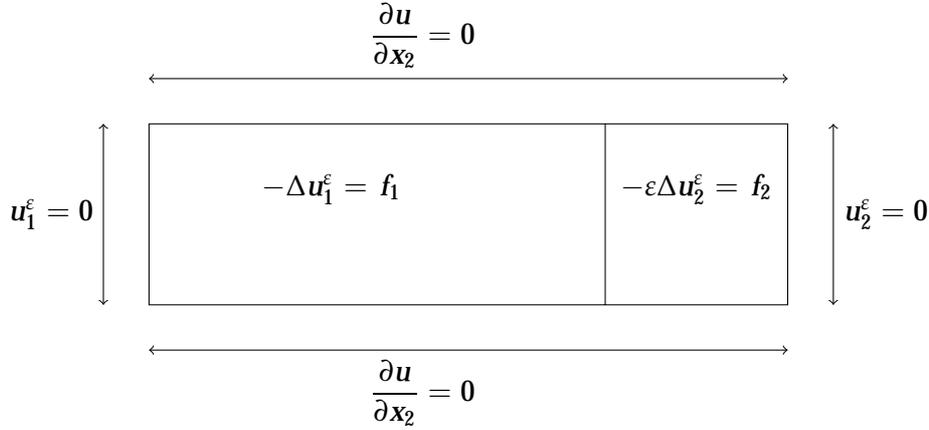


FIGURE 6.2: Problème de transmission

avec les conditions de transmission suivantes sur  $I$  (en  $x_1 = 0$ )

$$(6.1) \quad \begin{cases} u_1 & = u_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & = \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \end{cases}$$

La fonction

$$(6.2) \quad f = \begin{cases} f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ f_2 & \text{dans } \Omega_2, \end{cases}$$

est donnée. Nous allons associer au problème de transmission défini par la figure 6.2 différents algorithmes itératifs, puis nous analyserons leur convergence. Afin de pouvoir tenir compte de la géométrie, nous ferons une analyse de convergence au moyen de séries de Fourier en  $x_2$ .

## 6.1 Algorithmes de Dirichlet-Neumann

Nous reprenons les deux algorithmes (5.7) et (5.8) et étudions leur convergence par des séries de Fourier. La différence entre ces 2 algorithmes étant les conditions à l'interface  $I$ , nous allons d'abord nous intéresser aux équations qui leur sont communes. Comme dans le chapitre précédent, nous travaillerons non pas sur les suites  $u_i^n$  mais sur l'erreur, c'est à dire  $e_i^n = u_i^n - u_i$  qui sont solutions de (5.7),(5.8) avec les conditions aux limites héritées de (5.1) où  $f_1 = 0$  et  $f_2 = 0$ . Nous pouvons alors développer les  $e_i^n$  sur les fonctions propres de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx_2^2}$  sur  $(0, L)$  avec des conditions aux limites de Neumann. En d'autres termes, nous cherchons les  $e_i^n$  comme :

$$e_i^n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \varphi_{i,k}^n(x_1) \cos(\omega_k x_2),$$

où  $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Nous trouvons alors :

$$(6.3) \quad e_1^n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \alpha_{1,0}^n(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{1,k}^n \text{sh}(\omega_k(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a})) \cos(\omega_k \mathbf{x}_2),$$

$$(6.4) \quad e_2^n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \alpha_{2,0}^n(\mathbf{b} - \mathbf{x}_1) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{2,k}^n \text{sh}(\omega_k(\mathbf{b} - \mathbf{x}_1)) \cos(\omega_k \mathbf{x}_2).$$

Le lemme qui suit calcule les coefficients  $\alpha_{i,k}^n$ ,  $i = 1, 2$ .

**Lemme 6.1.** Les coefficients  $\alpha_{1,k}^n$ ,  $\alpha_{2,k}^n$  sont donnés par la relation suivante :

$$(6.5) \quad \alpha_{j,k}^n = \rho_{DN}(\omega) \alpha_{j,k}^{n-1}, \quad j = 1, 2$$

pour (5.7), et

$$(6.6) \quad \alpha_{j,k}^n = \rho_{ND}(\omega) \alpha_{j,k}^{n-1}, \quad j = 1, 2$$

pour (5.8), où

$$(6.7) \quad \rho_{DN}(\omega) = 1 - \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\text{th}(\omega \mathbf{b})}{\text{th}(\omega \mathbf{a})} \right]; \quad \rho_{ND}(\omega) = 1 - \theta \left[ 1 + \varepsilon \frac{\text{th}(\omega \mathbf{a})}{\text{th}(\omega \mathbf{b})} \right].$$

*Démonstration.* Prenons le cas de (5.7). Il nous reste alors à utiliser les 2 conditions d'interface. Ces 2 conditions se traduisent par :

$$\begin{aligned} a\alpha_{1,0}^{n+1} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{1,k}^{n+1} \text{sh}(\omega_k \mathbf{a}) \cos(\omega_k \mathbf{x}_2) &= \theta \left[ \alpha_{2,0}^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{2,k}^n \text{sh}(\omega_k \mathbf{b}) \cos(\omega_k \mathbf{x}_2) \right] \\ &\quad + (1 - \theta) \left[ \alpha_{1,0}^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{1,k}^n \text{sh}(\omega_k \mathbf{a}) \cos(\omega_k \mathbf{x}_2) \right], \\ \varepsilon \left[ -\alpha_{2,0}^{n+1} - \sum_{k=1}^{k=\infty} \omega_k \alpha_{2,k}^n \text{ch}(\omega_k \mathbf{b}) \cos(\omega_k \mathbf{x}_2) \right] &= \alpha_{1,0}^{n+1} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \omega_k \alpha_{1,k}^{n+1} \text{ch}(\omega_k \mathbf{a}) \cos(\omega_k \mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Si bien que l'on a :

$$\begin{cases} a\alpha_{1,0}^{n+1} &= \theta \alpha_{2,0}^n + (1 - \theta) \alpha_{1,0}^n & \begin{cases} \alpha_{1,k}^{n+1} \text{sh}(\omega_k \mathbf{a}) &= \theta \alpha_{2,k}^n \text{sh}(\omega_k \mathbf{b}) + (1 - \theta) \alpha_{1,k}^n \text{sh}(\omega_k \mathbf{a}) \\ -\varepsilon \alpha_{2,0}^{n+1} &= \alpha_{1,0}^{n+1}, & \begin{cases} -\varepsilon \omega_k \text{ch}(\omega_k \mathbf{b}) \alpha_{2,k}^{n+1} &= \omega_k \text{ch}(\omega_k \mathbf{a}) \alpha_{1,k}^{n+1}. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} a\alpha_{1,0}^{n+1} &= \left[ -\frac{\theta}{\varepsilon} + 1 - \theta \right] \alpha_{1,0}^n, \\ \alpha_{1,k}^{n+1} \text{sh}(\omega_k \mathbf{a}) &= \left[ -\frac{\theta \text{ch}(\omega_k \mathbf{a})}{\varepsilon \text{ch}(\omega_k \mathbf{b})} \text{sh}(\omega_k \mathbf{b}) + 1(-\theta) \text{sh}(\omega_k \mathbf{a}) \right] \alpha_{1,k}^n. \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit finalement par la relation (6.5). Le cas (5.8) se traite de façon strictement analogue. Les quantités  $\rho_{DN}$  et  $\rho_{ND}$  apparaissent comme étant les facteurs d'amplification de la  $k^{\text{ime}}$  fréquence de l'erreur à l'interface  $I$ . C'est pourquoi elles sont appelées facteurs de convergence.  $\square$

Enonçons un lemme utile à l'étude de la convergence des algorithmes (5.7) et (5.8).

**Lemme 6.2.** Soit la fonction définie par  $g(\omega) = \frac{\text{th}(\omega b)}{\text{th}(\omega a)}$ . La fonction  $g$  est croissante pour  $a > b$  et décroissante pour  $a < b$ .

*Démonstration.* Posons  $x = \omega a$ ,  $\omega b = x \frac{b}{a} = x\delta$ , où  $\delta = \frac{b}{a}$  et

$$f(x) = \frac{\text{th}(\delta x)}{\text{th}(x)}.$$

Il suffit alors de montrer que  $f$  est décroissante pour  $\delta > 1$ . Calculons sa dérivée

$$f'(x) = \frac{\delta \text{sh}(2x) - \text{sh}(2\delta x)}{2\text{ch}^2(\delta x)\text{sh}^2(x)}.$$

Le signe de  $f'$  est donc dicté par son numérateur. Etudions son signe. Soit à  $x$  fixé

$$(6.8) \quad \begin{cases} h(\delta) &= \delta \text{sh}(2x) - \text{sh}(2\delta x), \\ h'(\delta) &= \text{sh}(2x) - 2x\text{ch}(2\delta x), \\ h''(\delta) &= -4x^2 \text{sh}(2\delta x) < 0. \end{cases}$$

Donc  $h'$  est une fonction décroissante. De plus comme  $h'(0) = \text{sh}(2x) - 2x > 0$ , et  $h'(1) = \text{sh}(2x) - 2x\text{ch}(2x) < 0$ , alors il existe  $0 < \delta_0 < 1$  tel que  $h'(\delta_0) = 0$ .  $h'$  est donc positive sur l'intervalle  $[0, \delta_0]$ , nulle en  $\delta = \delta_0$ , puis est négative pour tout  $\delta > \delta_0$  en vertu de sa décroissance. Nous en déduisons les variations de  $h$  dans le tableau qui suit

$\delta$	0	$\delta_0$	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	-
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$	0 $\searrow$

De plus la fonction  $h$  vérifie  $h(0) = h(1) = 0$ , ce qui implique que  $h$  est positive pour tout  $\delta < 1$  et négative pour  $\delta > 1$ . Donc  $f'$  est négative pour  $\delta > 1$ .  $\square$

Nous pouvons à présent énoncer le

**Théorème 6.3 (Convergence).** Pour  $0 < \theta < \frac{2}{1 + \frac{1}{\varepsilon} \max(1, \frac{b}{a})}$ , l'algorithme (5.7) converge. De même pour

$0 < \theta < \frac{2}{1 + \varepsilon \max(1, \frac{a}{b})}$ , l'algorithme (5.8) converge.

*Démonstration.* Nous ferons la démonstration en deux étapes :

1. Tout d'abord nous déterminerons les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles les facteurs de convergence  $\rho_{DN}$  et  $\rho_{ND}$  sont en module plus petits que 1 pour tout  $\omega_k$ .
2. Ensuite nous montrerons que si les facteurs de convergence  $\rho_{DN}$  et  $\rho_{ND}$  sont en module plus petits que 1 pour tout  $\omega_k$ , alors les algorithmes (5.7) et (5.8) convergent.

Prenons le cas de (5.7). Nous avons l'équivalence

$$|\rho_{DN}(\omega_k)| < 1 \Leftrightarrow \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} g(\omega_k) \right] < 2.$$

Or en vertu du lemme 6.2, nous avons :

$$\inf_{\omega \in [0, \infty]} (g(\omega)) = \min \left( 1, \frac{b}{a} \right)$$

$$\sup_{\omega \in [0, \infty]} (g(\omega)) = \max \left( 1, \frac{b}{a} \right).$$

Alors

$$\sup_{\omega \in [0, \infty]} |\rho_{DN}(\omega)| < 1 \Leftrightarrow \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\omega_k \in [0, \infty]} g(\omega) \right] < 2$$

$$\Leftrightarrow \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \max \left( 1, \frac{b}{a} \right) \right] < 2$$

$$\Leftrightarrow \theta < \frac{2}{1 + \frac{1}{\varepsilon} \max \left( 1, \frac{b}{a} \right)}.$$

Le cas (5.8) se fait de manière analogue en interchangeant les rôles de  $a$  et  $b$  et en remplaçant  $\varepsilon$  par  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Montrons maintenant que si les facteurs de convergence  $\rho_{DN}$  et  $\rho_{ND}$  sont en module plus petits que 1 pour tout  $\omega_k$ , alors les algorithmes (5.7) et (5.8) convergent. Pour cela écrivons la norme  $L^2(0, L)$  de l'erreur en tout point  $x_1$ .

$$\|e_1^n(x_1, \cdot)\|_{L^2(0, L)}^2 = \int_0^L e_1^n(x_1, x_2)^2 dx_2$$

$$= L \left[ (\alpha_{1,0}^n(x_1 + a))^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} |\alpha_{1,k}^n \text{sh}(\omega_k(x_1 + a))|^2 \right]$$

et par la formule de récurrence du lemme (6.1)

$$\|e_1^n(x_1, \cdot)\|_{L^2(0, L)}^2 = L \left[ (\alpha_{1,0}^0)^2 \rho_{DN}(0)^{2n} (x_1 + a)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} (\alpha_{1,k}^0)^2 \rho_{DN}(\omega_k)^{2n} \text{sh}(\omega_k(x_1 + a))^2 \right].$$

Considérons maintenant la suite de fonction  $f_n(k) = \alpha_{i,k}^0 \rho_{DN}^n(\omega_k) \text{sh}(\omega_k(x_1 + a))$ . Puisque  $|\rho_{DN}| < 1$ , la suite  $f_n$  tend vers zéro presque partout, de plus

$$\sum_k f_n(k)^2 \leq \sum_k |\alpha_{i,k}^0|^2 < +\infty.$$

Donc par le théorème de convergence dominée

$$\sum_k f_n(k)^2 \rightarrow 0.$$

Nous pouvons montrer de la même façon que  $e_2^n(x_1, \cdot)$  tend vers zéro dans  $L^2(0, L)$ . □

Revenons un instant sur l'écriture (6.3), (6.4). Nous décomposons l'erreur dans la base des  $\cos(\omega_k x_2)$  qui est de dimension infinie. Pour des raisons d'application numérique, nous tronquerons les séries (6.3), (6.4) en introduisant un paramètre  $N > 0$ , de façon à avoir des séries discrètes avec  $k \in [0, N]$  et donc la variable  $\omega_k \in [0, \omega_N]$  où on a noté :

$$\omega_N := \frac{N\pi}{L}.$$

Le théorème (6.3) nous donne un intervalle pour le paramètre  $\theta$ . Nous allons maintenant optimiser ce paramètre. Nous le choisirons de façon à minimiser le maximum des taux convergence ( $\rho_{DN}$  et  $\rho_{ND}$ ) sur la gamme de fréquence qui nous intéresse. C'est à dire que nous cherchons à résoudre les problèmes de minimisations suivant

$$(6.9) \quad \min_{\theta > 0} \max_{\omega_k \in [0, \omega_N]} |\rho_{DN}|$$

et

$$(6.10) \quad \min_{\theta > 0} \max_{\omega_k \in [0, \omega_N]} |\rho_{ND}|.$$

Ceci fait l'objet de la

**Proposition 6.4.** (*paramètres optimaux de Dirichlet-Neumann*).

– Le problème (6.9) admet une unique solution qui est donnée par

$$(6.11) \quad \theta = \tau_{DN}^* := \frac{1}{1 + \frac{1}{2\varepsilon}(g(\omega_N) + g(0))}.$$

– Le problème (6.10) admet une unique solution qui est donnée par

$$(6.12) \quad \theta = \tau_{ND}^* := \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{g(\omega_N)} + \frac{1}{g(0)} \right)}.$$

De plus pour  $\theta = \tau_{DN}^*$ ,

$$(6.13) \quad \max_{\omega_k \in [0, \omega_N]} |\rho_{DN}| = \frac{|(g(\omega_N) - g(0))|}{2\varepsilon + g(0) + g(\omega_N)},$$

et pour pour  $\theta = \tau_{ND}^*$ ,

$$(6.14) \quad \max_{\omega_k \in [0, \omega_N]} |\rho_{ND}| = \frac{\varepsilon \left| \left( \frac{1}{g(\omega_N)} - \frac{1}{g(0)} \right) \right|}{2 + \varepsilon \left( \frac{1}{g(0)} + \frac{1}{g(\omega_N)} \right)}.$$

*Démonstration.* Comme précédemment, nous traiterons uniquement le cas du Dirichlet-Neumann sans perte de généralité, car il suffit d'interchanger les rôles de  $a$  et  $b$  et de remplacer  $\varepsilon$  par  $\frac{1}{\varepsilon}$  pour obtenir le cas du Neumann-Dirichlet. En utilisant les notations du lemme (6.2), nous avons :

$$\rho_{DN}(\omega) = 1 - \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} g(\omega) \right].$$

Calculons sa dérivée :

$$\rho'_{DN}(\omega) = -\frac{\theta}{\varepsilon} g'(\omega).$$

D'après le lemme (6.2),  $g$  est une fonction monotone de  $\omega$ , donc  $\rho_{DN}$  aussi, et

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_{DN}| = \max\{|\rho_{DN}(0)|, |\rho_{DN}(\omega_N)|\},$$

soit

$$(6.15) \quad \max_{\omega_k \in [0, \omega_N]} |\rho_{DN}| = \max\left\{ \left| 1 - \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{b}{a} \right] \right|, \left| 1 - \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} g(\omega_N) \right] \right| \right\}.$$

Il nous reste donc à minimiser la quantité (6.15) par rapport à  $\theta$ . Regardons par exemple le cas  $a > b$ . (cf fig (6.3))

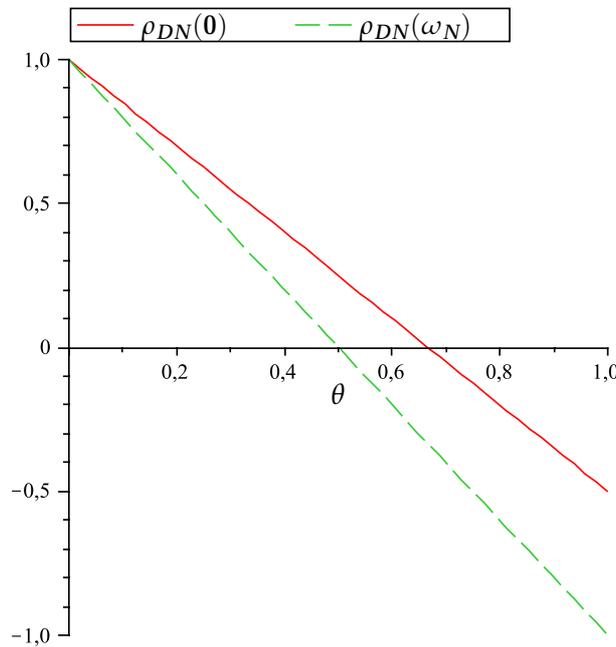


FIGURE 6.3: Fonctions partielles de  $\theta$ .

$\rho_{DN}$  est alors une fonction décroissante de  $\omega$ . Pour  $\theta = 0$ , on a  $\rho_{DN} \equiv 1$ . Lorsque  $\theta$  croît à partir de 0,  $\rho_{DN}(0)$  et  $\rho_{DN}(\omega_N)$  décroissent et  $\max_{\omega} |\rho_{DN}(\omega)| = \rho_{DN}(0)$  qui décroît jusqu'à ce que  $\rho_{DN}(\omega_N)$  s'annule puis devient négatif. Puis  $\rho_{DN}(0) = -\rho_{DN}(\omega_N)$  si c'est possible. Ensuite le  $\max_{\omega}$  en module croît. L'égalité  $\rho_{DN}(0) = -\rho_{DN}(\omega_N)$  est réalisée pour

$$\theta = \tau_{DN}^* := \frac{1}{1 + \frac{1}{2\varepsilon}(g(\omega_N) + g(0))}.$$

De plus pour  $\theta = \tau_{DN}^*$ ,

$$\max_{\omega_k \in [0, \omega_N]} |\rho_{DN}| = \frac{|g(0) - g(\omega_N)|}{2\varepsilon + g(0) + g(\omega_N)}.$$

Le  $\max_{\omega}$  est donc minimal en  $\theta$  pour  $\theta = \tau^*$ . □

**Corollaire 6.5. (Convergence.)**

Pour  $\theta = \tau_{DN}^*$ , l'algorithme (5.7) converge et pour  $\theta = \tau_{ND}^*$ , l'algorithme (5.8) converge également.

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement asymptotique des algorithmes 5.7 et 5.8 si nous faisons les choix respectifs  $\theta = \tau_{DN}^*$  et  $\theta = \tau_{ND}^*$ . Pour cela nous nous plaçons dans le cas où  $b = \varepsilon \ll 1$ . Ce résultat est résumé dans la proposition suivante :

**Proposition 6.6.** Pour  $b = \varepsilon \ll 1$ , le comportement asymptotique des différents paramètres optimisés et taux de convergence est résumé dans le tableau suivant :

Conditions d'interface	Paramètres optimisés	Facteurs de convergence
D-N	$\tau_{DN}^* = 2K\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$	$\max_{\omega \in [0, \omega_N]}  \rho_{DN}(\omega, \tau_{DN}^*)  = 1 - (2 + a^{-1})\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$
N-D	$\tau_{ND}^* = \frac{1}{1 + \frac{a}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon)$	$\max_{\omega \in [0, \omega_N]}  \rho_{ND}(\omega, \tau_{ND}^*)  = \frac{1}{1 + 2a^{-1}} \left[ 1 - a^{-1}K \left( 1 + \frac{1}{1 + 2a^{-1}} \right) \varepsilon \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

TABLE 6.1: asymptotes des paramètres optimisés et facteurs de convergence

où  $K$  est une constante.

Démonstration. Algorithme de Dirichlet-Neumann

Le facteur de convergence vaut

$$\rho_{DN}(\omega) = 1 - \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} g(\omega) \right].$$

D'après la proposition (6.4), le  $\min_{\theta > 0} \max_{0 \leq \omega \leq \omega_N} |\rho_{DN}|$  est atteint pour  $\theta = \tau_{DN}^* := \frac{1}{1 + \frac{1}{2\varepsilon}(g(\omega_N) + \frac{b}{a})}$  où

$$g(\omega) = \frac{\text{th}(\omega b)}{\text{th}(\omega a)}.$$

Et pour cette valeur du paramètre optimisé, le facteur de convergence vaut :

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} \rho_{DN} = \frac{|g(0) - g(\omega_N)|}{g(0) + g(\omega_N) + 2\varepsilon} = \frac{1 - \frac{b}{ag(\omega_N)}}{1 + \frac{b}{ag(\omega_N)} + \frac{2\varepsilon}{g(\omega_N)}}$$

d'après le lemme (6.2) Pour  $b = \varepsilon$ , nous avons

$$(6.16) \quad g(\omega_N) \sim \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega_N^{-1} = o(\varepsilon) \\ \text{th}(\varepsilon\omega_N) & \text{pour } \omega_N^{-1} = \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

Notons  $K = \frac{1}{g(\omega_N)}$ . Le facteur de convergence et le paramètre optimisé valent alors :

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_{DN}(\omega)| \sim \frac{1 - a^{-1}K\varepsilon}{1 + (2 + a^{-1})K\varepsilon} \quad \tau_{DN}^* \sim \frac{1}{1 + \frac{1}{2\varepsilon}(K^{-1} + a^{-1}\varepsilon)}$$

Nous avons donc

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_{DN}(\omega)| = 1 - (2 + a^{-1})\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

et

$$\tau_{DN}^* = 2K\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Algorithme de Neumann-Dirichlet :

Le facteur de convergence de l'algorithme de Neumann-Dirichlet est :

$$\rho_{DN}(\omega, \theta) = 1 - \theta \left[ 1 + \varepsilon \frac{1}{g(w)} \right].$$

Nous procéderons d'une façon strictement analogue au cas Dirichlet-Neumann. D'après la proposition (6.4) la valeur optimale du paramètre est

$$\theta = \tau_{ND}^* := \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2} \left( K + \frac{a}{b} \right)}.$$

Si nous évaluons le taux de convergence pour cette valeur du paramètre et pour  $b = \varepsilon$ , nous obtenons :

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_{ND}(\omega)| = \frac{1 - Ka^{-1}\varepsilon}{1 + Ka^{-1}\varepsilon + 2a^{-1}}.$$

Puis finalement

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_{ND}(\omega)| = \frac{1}{1 + 2a^{-1}} \left[ 1 - a^{-1}K \left( 1 + \frac{1}{1 + 2a^{-1}} \right) \varepsilon \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

et

$$\tau_{ND}^* = \frac{1}{1 + \frac{a}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

□

## 6.2 Algorithmes de Schwarz avec des conditions de Robin

Dans cette partie, nous envisageons des conditions de Robin à l'interface. Nous étudierons donc des conditions à l'interface [19, 22] de type Robin à un paramètre puis à deux paramètres.

### 6.2.1 Conditions de Robin à un paramètre

Nous nous proposons donc d'étudier la convergence de l'algorithme (5.18) avec une démarche analogue au cas des algorithmes de Dirichlet-Neumann, à savoir

- définir le facteur de convergence pour cet algorithme
- puis établir des conditions de convergence de l'algorithme
- enfin calculer les paramètres optimaux de convergence.

Comme dans la section précédente, nous travaillerons non pas sur les suites  $u_i^n$  mais sur l'erreur, c'est à dire  $e_i^n = u_i^n - u_i$  qui sont solutions de (5.18) avec  $f_1 = 0$  et  $f_2 = 0$ . Nous obtenons les formules (6.3) et (6.4). Le calcul des coefficients  $\alpha_{1,k}^n$ , et  $\alpha_{2,k}^n$  fait l'objet du lemme qui suit :

**Lemme 6.7.** *Les coefficients  $\alpha_{1,k}^n$ , et  $\alpha_{2,k}^n$  dans (6.3) et (6.4) sont donnés par*

$$(6.17) \quad \alpha_{j,k}^{n+1} = \rho_1(\omega_k, p) \alpha_{j,k}^{n+1}, \quad j = 1, 2$$

où

$$(6.18) \quad \rho_1(\omega_k, p) = \frac{\left(p - \frac{\omega_k}{\operatorname{th}(\omega_k b)}\right) \left(p - \frac{\omega_k}{\operatorname{th}(\omega_k a)}\right)}{\left(p + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\omega_k}{\operatorname{th}(\omega_k a)}\right) \left(p + \varepsilon \frac{\omega_k}{\operatorname{th}(\omega_k b)}\right)}$$

avec  $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* En effet les 2 conditions d'interface de Robin dans (5.18) se traduisent par :

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,0}^{n+1} (1 + \varepsilon a p) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{1,k}^{n+1} (\omega_k \operatorname{ch}(\omega a) + \varepsilon p \operatorname{sh}(\omega_k a)) \cos(\omega_k x_2) \\ & = \\ & -\varepsilon \alpha_{2,0}^n (-1 + b p) + \varepsilon \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{2,k}^n (-\omega_k \operatorname{ch}(\omega_k b) + p \operatorname{sh}(\omega_k b)) \cos(\omega_k x_2), \\ & \alpha_{2,0}^{n+1} (\varepsilon + b p) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{2,k}^{n+1} (\varepsilon \omega_k \operatorname{ch}(\omega_k b) + p \operatorname{sh}(\omega_k b)) \cos(\omega_k x_2) \\ & = \\ & \alpha_{1,0}^{n+1} (-1 + a p) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \omega_k \alpha_{1,k}^n (-\omega_k \operatorname{ch}(\omega_k a) + p \operatorname{sh}(\omega_k a)) \cos(\omega_k x_2). \end{aligned}$$

Si bien que l'on a :

$$\begin{cases} \alpha_{1,0}^{n+1} (1 + \varepsilon a p) & = -\varepsilon \alpha_{2,0}^n (-1 + b p) \\ \alpha_{2,0}^{n+1} (\varepsilon + b p) & = \alpha_{1,0}^{n+1} (-1 + a p), \\ \alpha_{1,k}^{n+1} (\omega_k \operatorname{ch}(\omega a) + \varepsilon p \operatorname{sh}(\omega a)) & = \varepsilon \alpha_{2,k}^n (-\omega_k \operatorname{ch}(\omega b) + p \operatorname{sh}(\omega b)) \\ \alpha_{2,k}^{n+1} (\varepsilon \omega_k \operatorname{ch}(\omega_k b) + p \operatorname{sh}(\omega_k b)) & = \omega_k \alpha_{1,k}^n (-\omega_k \operatorname{ch}(\omega_k a) + p \operatorname{sh}(\omega_k a)), \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0}^{n+1} &= \frac{\left(p - \frac{1}{a}\right) \left(p - \frac{1}{b}\right)}{\left(p + \frac{1}{a\varepsilon}\right) \left(p + \frac{\varepsilon}{b}\right)} \alpha_{1,0}^{n-1}, \\ \alpha_{1,k}^{n+1} &= \frac{\left(p - \frac{\omega_k}{\operatorname{th}(\omega_k a)}\right) \left(p - \frac{\omega_k}{\operatorname{th}(\omega b)}\right)}{\left(p + \frac{\omega_k}{\varepsilon \operatorname{th}(\omega_k a)}\right) \left(p + \frac{\varepsilon \omega_k}{\operatorname{th}(\omega_k b)}\right)} \alpha_{1,k}^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Cette section est consacré à l'étude du facteur de convergence de Robin (6.18). Comme il est plus facile d'optimiser sur une variable continue, dans toute la suite nous remplacerons la variable discrète  $\omega_k$  par la variable continue  $\omega$ . Comme cela a été fait dans le chapitre précédent, nous chercherons à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{p>0} \max_{w \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p)|.$$

Nous nous placerons dorénavant dans le cas où  $a \geq b$ . Nous définissons la fonction

$$(6.19) \quad f_a(\omega) := \frac{\omega}{\text{th}\omega a}.$$

Pour  $a > 0$ ,  $\omega \geq 0$ , c'est une fonction croissante de  $\omega$  et décroissante de  $a$ . En effet, ses dérivées partielles valent :

$$\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\text{sh}2\omega a - 2\omega a}{\text{sh}^2 \omega a} > 0; \quad \frac{\partial f_a}{\partial a}(\omega) = -\frac{\omega^2}{\text{sh}^2 \omega a} < 0.$$

Le facteur de convergence (6.18) se réécrit comme

$$\rho_1(\omega, p) = \frac{p - f_a(\omega)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega)} \cdot \frac{p - f_b(\omega)}{p + \varepsilon f_b(\omega)}; \quad R(\omega, p) = |\rho_1(\omega, p)|.$$

Notons  $K := [0, \omega_N]$ ,  $H(p) := \sup_K R(\omega, p)$ . Enfin posons (on a un ensemble de nombres réels positifs, il admet une borne inférieure)

$$\delta := \inf_{p \in \mathbb{R}} H(p).$$

le problème d'optimisation est :

$$(\mathcal{P}) \quad \text{trouver } (\omega^*, p^*) \text{ tels que } R(\omega^*, p^*) = \delta.$$

**Lemme 6.8.**  $\mathcal{P}$  est équivalent au problème de min-max suivant :

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \quad \min_{p \in [f_a(0), f_b(\omega_N)]} \left( \max_{\omega \in [0, \omega_N]} R(\omega, p) \right).$$

De plus nous avons pour tous  $a, b, \varepsilon$  positifs,  $\delta < 1$ .

*Démonstration.*

La dérivée partielle de  $\rho_1$  par rapport  $p$  est :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p) = \varepsilon \frac{(1 + \varepsilon)(f_a(\omega) + \varepsilon f_b(\omega))(p^2 - f_a(\omega) f_b(\omega))}{[\varepsilon p^2 + p(f_a(\omega) + \varepsilon^2 f_b(\omega)) + \varepsilon f_a(\omega) f_b(\omega)]^2}.$$

Pour  $p < f_a(0)$ , on a  $p^2 < f_a(0) f_b(0)$  car  $f_a$  est une fonction décroissante de  $a$  et  $p^2 < f_a(\omega) f_b(\omega)$  pour tout  $\omega$  car  $f_a$  est une fonction croissante de  $\omega$ . Donc pour  $p < f_a(0)$ , nous avons  $\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p) < 0$  pour tout  $\omega$  et donc

$$\inf_{p>0} \sup_{\omega \in K} R(\omega, p) \geq \inf_{p \geq f_a(0)} \sup_{\omega \in K} R(\omega, p).$$

De même, pour  $p > f_b(\omega_N)$ , nous avons  $\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p) > 0$  pour tout  $\omega$  et alors

$$\inf_{p>0} \sup_{\omega \in K} R(\omega, p) \geq \inf_{p \leq f_b(\omega_N)} \sup_{\omega \in K} R(\omega, p).$$

Nous pouvons donc restreindre l'intervalle de recherche de  $p$  dans le problème  $\mathcal{P}$  à l'intervalle  $[f_a(0), f_b(\omega_N)]$ .

Choisissons maintenant  $p = 1/a$ , puisqu'alors  $f_b(\omega) > 1/b > 1/a$  et pour tout  $\omega$  dans le compact  $K$ , nous avons donc

$$\rho_1(\omega, 1/a) = \frac{f_a(\omega) - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega)} \cdot \frac{f_b(\omega) - 1/a}{\frac{1}{a} + \varepsilon f_b(\omega)} < 1.$$

Ce qui entraîne

$$\delta \leq H(1/a) = \sup_{\omega} \rho_1(\omega, 1/a) < 1.$$

□

Pour le cas symétrique ( $a=b$ ), nous avons le résultat suivant :

**Théorème 6.9.** *Si  $a = b$ , le problème  $\tilde{\mathcal{P}}$  admet une unique solution  $p^*$ , qui est donnée par l'unique racine positive de l'équation*

$$R(0, p^*) = R(\omega_N, p^*).$$

*Démonstration.*

Réécrivons la fonction  $\rho_1$  en définissant une nouvelle variable :

$$x := f_a(\omega) = f_b(\omega)$$

qui en vertu du lemme (6.8) varie entre  $x_0 := \frac{1}{a}$  et  $x_N := \frac{\omega_N}{\text{th}(a\omega_N)}$ . Nous avons

$$\rho(x, p) := \rho_1(\omega, p) = \frac{(p - x)^2}{(p + \frac{x}{\varepsilon})(p + \varepsilon x)}.$$

Le problème  $\mathcal{P}$  est alors équivalent à

$$(6.20) \quad \min_{p \in [x_0, x_N]} \max_{x \in [x_0, x_N]} \rho(x, p).$$

$\rho$  est une fonction positive. Ses dérivées partielles par rapport  $x$  et  $p$  sont :

$$(6.21) \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, p) = (x - p) \frac{p\varepsilon(1 + \varepsilon)^2(p + x)}{[(\varepsilon p + x)(p + \varepsilon x)]^2},$$

$$(6.22) \quad \frac{\partial \rho}{\partial p}(x, p) = (p - x) \frac{x\varepsilon(1 + \varepsilon)^2(p + x)}{[(\varepsilon p + x)(p + \varepsilon x)]^2}.$$

La démonstration peut se faire en 2 étapes :

1. Pour  $p \in [x_0, x_N]$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  s'annule seulement en  $x = p$ , pour lequel  $\rho = 0$ . Ce point correspond donc à un minimum. Le maximum de  $\rho$  en tant que fonction de  $x$  de  $\rho$  est donc atteint aux bornes de l'intervalle, c'est à dire soit pour  $x = x_0$ , soit pour  $x = x_N$ .
2.  $\rho(x_0, x_0) = 0$  et d'après (6.22), la fonction  $p \rightarrow \rho(x_0, p)$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[x_0, x_N]$ . De même la fonction  $p \rightarrow \rho(x_N, p)$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[x_0, x_N]$ , et  $\rho(x_N, x_N) = 0$ , comme représenté Figure 6.4.

Il existe un unique  $p^*$  tel que  $\rho(x_0, p^*) = \rho(x_N, p^*)$ . Pour  $p < p^*$  le maximum est  $\rho(x_N, p)$ , et pour  $p > p^*$  le maximum est  $\rho(x_0, p)$ . Il est minimal pour  $p = p^*$ . Revenant aux variables originelles, nous obtenons le théorème.

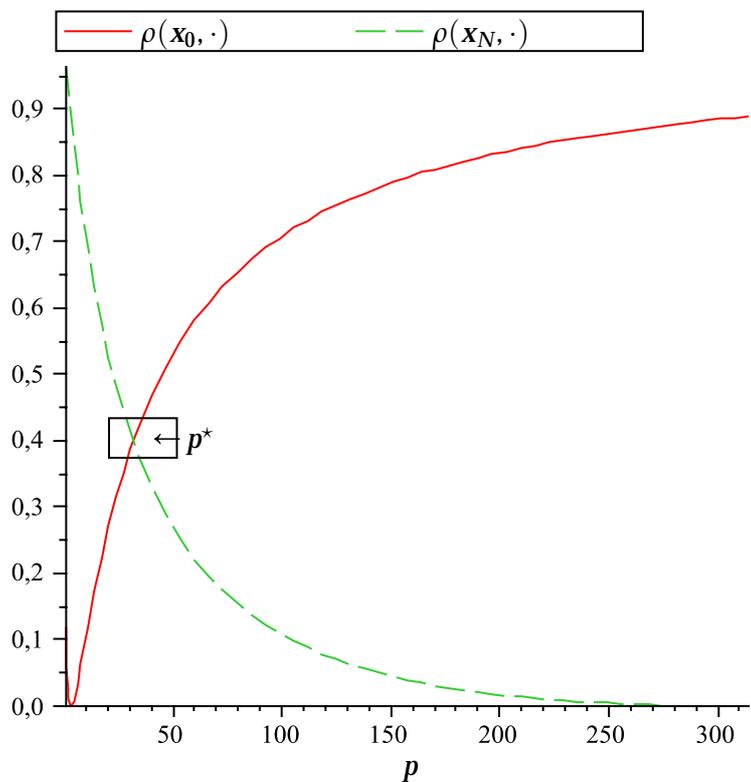


FIGURE 6.4: Fonctions partielles de  $p$ .

□

Revenons au cas  $a \neq b$ .

**Etude du problème d'optimisation  $\bar{\mathcal{P}}$**

Le problème est ici beaucoup plus complexe que dans le cas symétrique. D'abord nous montrons qu'il existe une solution. Ensuite que toute solution équilibre en au moins deux points en  $\omega$ . Puis nous montrerons qu'il n'y a pas plus de deux solutions. Enfin nous établirons un série de résultats asymptotiques prouvant l'existence et l'unité de la solution du problème  $\bar{\mathcal{P}}$  dans les cas ci-dessous

- $\omega_N \gg 1$  et  $a, b, \varepsilon$  fixés ;
- $\omega_N \gg 1$  et  $\varepsilon \ll 1$  simultanément ;
- enfin le cas  $b = \varepsilon$ .

Commençons par le résultat d'existence donnée par le

**Théorème 6.10. (Existence)** *Le problème  $\bar{\mathcal{P}}$  a au moins une solution.*

*Démonstration.*

Soit  $p_n$  une suite minimisante, c'est-à-dire  $H(p_n) \rightarrow \delta$ . A chaque  $p_n$  nous associons  $\omega_n$  telle que

$R(\omega_n, p_n) = H(p_n)$ . Si la suite  $p_n$  tend vers l'infini, puisque  $f_a$  est continue bornée, on a

$$\frac{p_n - f_a(\omega_n)}{p_n + f_a(\omega_n)/\varepsilon} \rightarrow 1, \quad \frac{p_n - f_b(\omega_n)}{p_n + \varepsilon f_b(\omega_n)} \rightarrow 1$$

et donc  $R(\omega_n, p_n)$  tend vers 1, en même temps qu'il tend vers  $\delta < 1$ , ce qui est contradictoire.  $\square$

Nous allons maintenant établir un théorème d'équioscillation, et nous commençons par deux lemmes techniques.

**Lemme 6.11.** *Soit  $(\omega^*, p^*)$  une solution optimale de  $\bar{\mathcal{P}}$ . Alors*

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega^*, p^*) \neq 0.$$

*Démonstration.*

Remarquons d'abord que  $\omega^*$  est, soit un point intérieur, auquel cas  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega^*, p^*) = 0$ , soit une des extrémités de l'intervalle. Calculons

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p) = \frac{(1 + \varepsilon)\left(\frac{f_a(\omega)}{\varepsilon} + f_b(\omega)\right)}{\left(p + \frac{f_a(\omega)}{\varepsilon}\right)^2 (p + \varepsilon f_b(\omega))^2} (p^2 - f_a(\omega) f_b(\omega))$$

et vérifions par l'absurde que  $(p^{*2} - f_a(\omega^*) f_b(\omega^*)) \neq 0$ . Supposons l'inverse, nous pourrions calculer alors

$$\delta = -\rho_1(p^*, \omega^*) = \varepsilon \left( \frac{\sqrt{f_a(\omega^*)} - \sqrt{f_b(\omega^*)}}{\sqrt{f_a(\omega^*)} + \varepsilon \sqrt{f_b(\omega^*)}} \right)^2.$$

Calculons la dérivée de  $\rho_1$  par rapport à  $\omega$  :

$$(6.23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega, p) &= p \frac{1 + \varepsilon}{\left(p + \frac{f_a(\omega)}{\varepsilon}\right) (p + \varepsilon f_b(\omega))} D(\omega, p), \\ D(\omega, p) &= - \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{p - f_b(\omega)}{p + \frac{f_a(\omega)}{\varepsilon}} \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) + \frac{p - f_a(\omega)}{p + \varepsilon f_b(\omega)} \frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega) \right). \end{aligned}$$

Calculons  $D(\omega^*, p^*)$ .

$$D(\omega^*, p^*) = \sqrt{f_b(\omega^*) f_a(\omega^*)} \frac{\sqrt{f_b(\omega^*)} - \sqrt{f_a(\omega^*)}}{\sqrt{f_a(\omega^*)} + \varepsilon \sqrt{f_b(\omega^*)}} \left( \frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega^*, a)}{f_a(\omega^*)} - \frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega^*, b)}{f_b(\omega^*)} \right)$$

mais

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega, a)}{f_a(\omega)} = \frac{1}{\omega} - \frac{a}{\text{ch} \omega a \text{sh} \omega a}$$

si bien que

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega^*, a)}{f_a(\omega^*)} - \frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega^*, b)}{f_b(\omega^*)} = \frac{b}{\text{ch} \omega^* b \text{sh} \omega^* b} - \frac{a}{\text{ch} \omega^* a \text{sh} \omega^* a}.$$

Nous avons donc,

$$\begin{cases} \text{si } \omega^* = 0, & \frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega^*, p^*) = 0, \\ \text{si } \omega^* \neq 0, & \frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega^*, p^*) > 0. \end{cases}$$

Ceci nous amène déjà à une contradiction si  $\omega^*$  est un point intérieur, puisque cette dérivée devrait s'annuler. Si  $\omega^* = \omega_N$ , nous avons :

$$\rho_1(\omega_N, p^*) = \left( \frac{\sqrt{f_a(\omega_N) f_b(\omega_N)} - f_a(\omega_N)}{p^* + \frac{\sqrt{f_a(\omega_N) f_b(\omega_N)}}{\varepsilon}} \right) \left( \frac{\sqrt{f_a(\omega_N) f_b(\omega_N)} - f_b(\omega_N)}{p^* + \varepsilon \sqrt{f_a(\omega_N) f_b(\omega_N)} \varepsilon} \right) < 0.$$

$\rho_1$  est négatif et la fonction de  $\omega$  est croissante au voisinage de  $\omega_N$ ,  $\rho_1(\omega^*, p^*)$  ne peut donc être un maximum local comme fonction de  $\omega$ . Le traitement du cas  $\omega^* = 0$  est plus délicat, puisque  $(\omega^* = 0, p^* = \frac{1}{\sqrt{ab}})$  est un point stationnaire. Nous pouvons calculer les dérivées secondes par rapport aux deux variables, ou faire un développement limité, à l'ordre 2, ce qui donne tous calculs faits

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial p^2} \left( 0, \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) &= -\rho_1 \left( 0, \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) (\sqrt{ab})^3 \left( \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} + \frac{1}{(\varepsilon \sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \omega^2} \left( 0, \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) &= -\rho_1 \left( 0, \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) \frac{\sqrt{ab}}{3} \left( a + \sqrt{ab} + b + \frac{(\sqrt{a})^3 + \varepsilon (\sqrt{b})^3}{\sqrt{b} + \varepsilon \sqrt{a}} \right), \\ \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial p \partial \omega} \left( 0, \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) &= 0. \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\rho_1 \left( \omega, \frac{1}{\sqrt{ab}} + p \right) = \rho_1 \left( 0, \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) (1 - \alpha p^2 - \beta \omega^2 + o((\eta, \omega)^2))$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont strictement positifs. Ceci implique que dans un voisinage de  $(0, \frac{1}{\sqrt{ab}})$ , nous avons  $|\rho_1| < \left| \rho_1 \left( 0, \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) \right|$ , ce qui contredit le fait que  $\delta$  est une borne inférieure.  $\square$

**Lemme 6.12.** Soit  $(\omega^*, p^*)$  une solution optimale de  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

$$\bar{p} = -\frac{\rho_1(\omega^*, p^*)}{\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega^*, p^*)}.$$

Alors pour tout  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , il existe  $\eta > 0$  et  $t_0 \in [0, 1]$  tels que, pour tout  $t \in [\varepsilon t_0, t_0]$ , pour tout  $\omega \in I_\eta(\omega^*)$ ,

$$|\rho_1(\omega^*, p^* + t\bar{p})| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon t_0}{2}\right) \delta$$

où  $I_\eta(\omega^*) = [\omega^* - \eta, \omega^* + \eta] \cap K$ .

*Démonstration.*

$\bar{p}$  est bien défini grâce au lemme 6.11. Fixons  $t > 0$ . Par la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction  $\rho_1$  en une variable  $p$ , il existe  $\theta \in ]0, t[$  tel que

$$\rho_1(\omega, p^* + t\bar{p}) = \rho_1(\omega, p^*) + t\bar{p} \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p^* + \theta\bar{p})$$

ce qui se réécrit

$$\rho_1(\omega, p^* + t\bar{p}) = \rho_1(\omega, p^*) + t\bar{p} \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega^*, p^*) + t\bar{p} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p^* + \theta\bar{p}) - \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega^*, p^*) \right)$$

Remplaçons  $\bar{p}$  par sa valeur

$$\rho_1(\omega, p^* + t\bar{p}) = \rho_1(\omega, p^*) - t\rho_1(\omega^*, p^*) + t\bar{p} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p^* + \theta\bar{p}) - \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega^*, p^*) \right)$$

$$\rho_1(\omega, p^* + t\bar{p}) = (1-t)\rho_1(\omega, p^*) + t\bar{p} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p^* + \theta\bar{p}) - \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega^*, p^*) \right) + t(\rho_1(\omega, p^*) - \rho_1(\omega^*, p^*)).$$

Définissons

$$\zeta(\omega - \omega^*, \omega) = \bar{p} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p^* + \theta\bar{p}) - \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega^*, p^*) \right) + (\rho_1(\omega, p^*) - \rho_1(\omega^*, p^*)).$$

$\zeta$  est une fonction continue de deux variables, donc uniformément continue en  $\omega$  sur tout compact.

$$\forall \varepsilon, \exists \eta, \sup_{\omega \in I_\eta(\omega^*)} |\zeta(\omega - \omega^*, \omega)| \leq \varepsilon\delta/2.$$

Fixons  $t_0 \in ]0, 1[$ . Alors pour tout  $t \in [0, t_0]$ , on a

$$|\rho_1(\omega, p^* + t\bar{p})| \leq (1-t + \varepsilon t_0/2)\delta,$$

ce qui conclut le lemme si l'on choisit  $t \in [\varepsilon t_0, t_0]$ . □

**Théorème 6.13.** *Si  $p^*$  réalise l'infimum, alors il existe au moins deux points  $\omega_1^*, \omega_2^*$  dans  $K$  tels que*

$$R(\omega_1^*, p^*) = R(\omega_2^*, p^*) = H(p^*) = \delta.$$

*Démonstration.*

La preuve est par l'absurde : en supposant qu'il n'y a qu'un point  $\omega^*$ , nous allons construire  $p$  tel que  $H(p) < \delta$ .

$$\sup_{\omega \in K \setminus I_\eta(\omega^*)} |\rho_1(\omega, p^*)| < \delta$$

Ensuite, par continuité, il existe un voisinage fermé  $U$  de  $p^*$  tel que pour tout  $p$  dans  $U$  on a

$$\sup_{\omega \in K \setminus I_\eta(\omega^*)} |\rho_1(\omega, p)| < \delta$$

et

$$\sup_{\omega \in K} |\rho_1(\omega, p)| = \sup_{\omega \in I_\eta(\omega^*)} |\rho_1(\omega, p)|$$

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, il existe  $t \in [\varepsilon t_0, t_0]$  tel que  $p^* + t\bar{p} \in U$ . Donc

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in K} |\rho_1(\omega, p^* + t\bar{p})| &= \sup_{\omega \in I_\eta(\omega^*)} |\rho_1(\omega, p^* + t\bar{p})| \\ &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon t_0}{2}\right)\delta < \delta \end{aligned}$$

d'après le lemme 7.8. Ce qui contredit la définition de  $p^*$ . □

Nous allons examiner géométriquement le problème de minimisation. Pour cela, nous définissons

$$X(\omega, p) = \frac{p}{f_a(\omega)}; \quad Y(\omega, p) = \frac{p}{f_b(\omega)}.$$

$$\rho_1(\omega, p) = \frac{X-1}{X+\frac{1}{\varepsilon}} \cdot \frac{Y-1}{Y+\varepsilon}.$$

On a

$$Y/X = \frac{f_a(\omega)}{f_b(\omega)} = \frac{\text{th}\omega b}{\text{th}\omega a}$$

qui est une fonction croissante de  $\omega$ , de  $\frac{b}{a}$  à  $\frac{\text{th}\omega_N b}{\text{th}\omega_N a} < 1$ . L'ensemble  $\mathcal{E}(\delta) = \{R(\omega, p) \leq \delta\}$  est caractérisé par

$$\begin{cases} X \geq 0, & Y \geq 0, \\ \left| \frac{X-1}{X+\frac{1}{\varepsilon}} \cdot \frac{Y-1}{Y+\varepsilon} \right| \leq \delta. \end{cases}$$

Il est constitué de deux parties limitées par deux hyperboles :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1(\delta) : (1-\delta)(XY+1) - (1+\frac{\delta}{\varepsilon})Y - (1+\delta\varepsilon)X < 0 \\ \mathcal{E}_2(\delta) : (1+\delta)(XY+1) - (1-\frac{\delta}{\varepsilon})Y - (1-\delta\varepsilon)X > 0. \end{cases}$$

Nous notons  $\mathcal{H}_j(\delta)$  les deux hyperboles définies ci-dessus, que nous pouvons réécrire sous forme standard, pour identifier leurs asymptotes.

$$\begin{cases} \mathcal{H}_1(\delta) : (X - \frac{1+\frac{\delta}{\varepsilon}}{1-\delta})(Y - \frac{1+\delta\varepsilon}{1-\delta}) - \frac{\delta}{(1-\delta)^2}(\sqrt{\varepsilon} + 1/\sqrt{\varepsilon})^2 = 0 \\ \mathcal{H}_2(\delta) : (X - \frac{1-\frac{\delta}{\varepsilon}}{1+\delta})(Y - \frac{1-\delta\varepsilon}{1+\delta}) + \frac{\delta}{(1+\delta)^2}(\sqrt{\varepsilon} + 1/\sqrt{\varepsilon})^2 = 0. \end{cases}$$

Nous noterons géométriquement les branches des hyperboles :  $\mathcal{H}_1^N(\delta)$  et  $\mathcal{H}_2^N(\delta)$  sont les branches nord,  $\mathcal{H}_1^S(\delta)$  et  $\mathcal{H}_2^S(\delta)$  les branches sud. Les hyperboles se coupent au point  $(1, -\varepsilon)$  et  $(-1/\varepsilon, 1)$ . La figure 6.5 représente le domaine pour  $\varepsilon = 0.1$  et  $\delta = 0.05$ . Le domaine est délimité par l'extérieur des hyperboles. La droite  $D_1$  correspond à  $\omega = 0$ , sa pente est  $\frac{b}{a}$ , la pente de  $D_2$  est  $\frac{\text{th}\omega_N b}{\text{th}\omega_N a} < 1$ . Nous appelons *trajectoire*  $\mathcal{T}(p)$  une courbe dans le plan  $(X, Y)$  définie par

$$X = X(\omega, p), \quad Y = Y(\omega, p).$$

**Lemme 6.14.** 1. Le long d'une trajectoire,  $X$  et  $Y$  sont des fonctions positives et décroissantes de  $\omega$ .

2. La trajectoire est concave.

3. Deux trajectoires correspondant à des paramètres  $p$  distincts ne se coupent pas.

4.  $\mathcal{H}_2^N$  est située au-dessus de la droite  $Y = X$ .

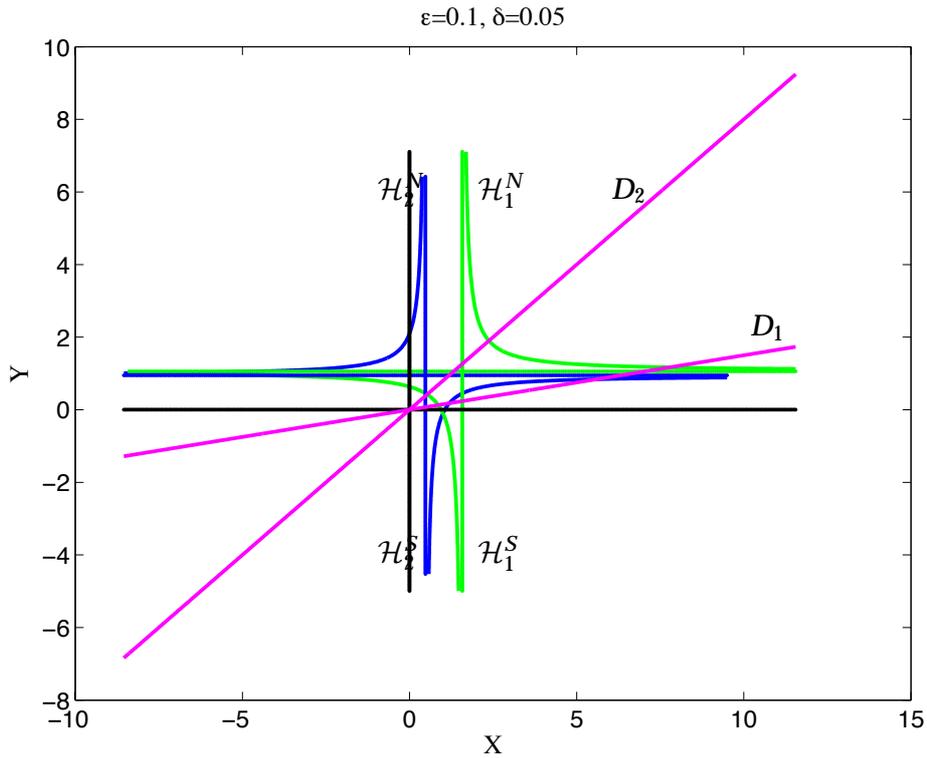


FIGURE 6.5: Représentation du domaine  $\mathcal{E}(\delta)$  pour  $\varepsilon = 0.1$  et  $\delta = 0.05$ .

*Démonstration.*

La première assertion vient de ce que  $f$  est une fonction croissante de  $\omega$ , la deuxième du calcul suivant. Notons  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \text{th}(x)/x$ . On a alors  $X = paF(\omega a), Y = pbF(\omega b)$ . Calculons

$$X'Y'' - X''Y' = p^2 a^2 b^2 (b F'(\omega a) F''(\omega b) - a F'(\omega b) F''(\omega a)).$$

La trajectoire est concave si et seulement si cette quantité est négative, si et seulement si pour tout  $\omega$ ,

$$\omega b F'(\omega a) F''(\omega b) - \omega a F'(\omega b) F''(\omega a) < 0.$$

Puisque  $b < a$ , ceci est réalisé si la fonction

$$x \mapsto \frac{x F''(x)}{F'(x)}$$

est décroissante. Calculons

$$\frac{x F''(x)}{F'(x)} = - \frac{2(\text{sh}(x)\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)x^2 - x\text{ch}(x))}{(\text{sh}(x)\text{ch}(x) - x)\text{ch}(x)}.$$

Un calcul maple nous a montré que cette fonction est effectivement décroissante. La troisième assertion vient de ce que  $f$  est une fonction injective de  $\omega$ , la quatrième repose sur le calcul suivant. Si  $\mathcal{H}_2$  coupe la droite  $Y = X$ , c'est en le point défini par l'équation du second degré

$$\left(X - \frac{1 - \frac{\delta}{\varepsilon}}{1 + \delta}\right) \left(X - \frac{1 - \delta\varepsilon}{1 + \delta}\right) + \frac{\delta}{(1 + \delta)^2} (\sqrt{\varepsilon} + 1/\sqrt{\varepsilon})^2 = 0$$

Calculons  $X_0 - (X_1 + X_2)/2$ , où  $X_0$  est l'abscisse du centre de l'hyperbole,  $X_1$  et  $X_2$  les deux racines de l'équation précédente. On a

$$X_0 - (X_1 + X_2)/2 = \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} < 0.$$

S'ils existent, les deux points d'intersection sont donc sur la partie sud. □

Si l'on trace les hyperboles pour  $\delta = \delta^*$ , une trajectoire optimale doit partir d'un point de  $D_1$ , se diriger vers le sud-ouest en restant entre les hyperboles, et atterrir sur  $D_2$ . La partie  $\mathcal{H}_2^N$  n'intervient donc pas. D'après le théorème précédent, la trajectoire doit toucher les hyperboles au moins deux fois, et si ce n'est pas en une des extrémités, la trajectoire doit être tangente à l'hyperbole en ce point. Ce qui traduit le fait que le maximum en  $\omega$  de  $\rho$  est soit en l'une des extrémités de l'intervalle, soit en un point où la dérivée s'annule. Jusqu'ici, nous n'avons pu établir le nombre de zéros intérieurs de la dérivée de  $\rho_1$  (7.16).

**Théorème 6.15.** *Le problème  $\mathcal{P}$  a au plus deux solutions.*

*Démonstration.*

Nous avons plusieurs cas.

1. La droite  $D_1$  est au-dessus de  $\mathcal{H}_2^S$ . La seule trajectoire optimale possible relie  $P$  à  $F$ .

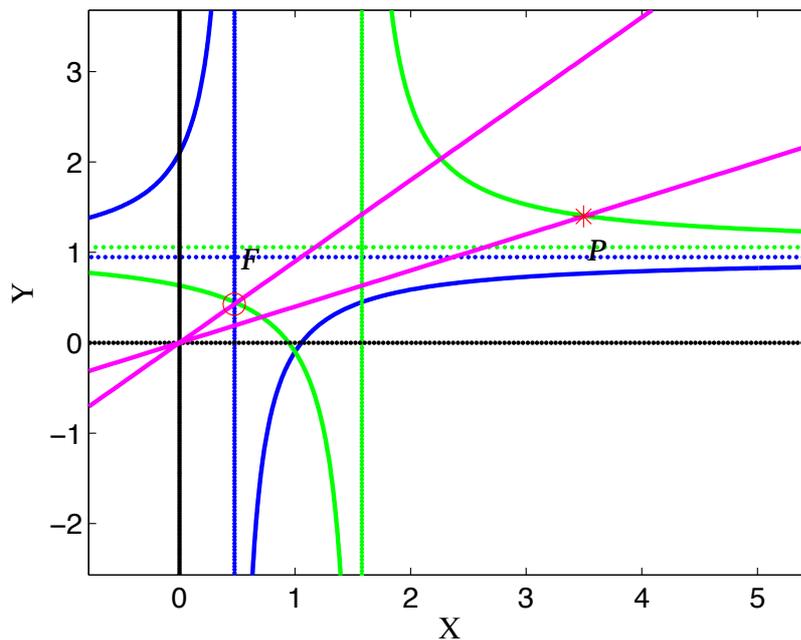


FIGURE 6.6: Représentation du cas 1

2. La droite  $D_1$  coupe  $\mathcal{H}_2^S$ , mais  $D_2$  est au-dessus.



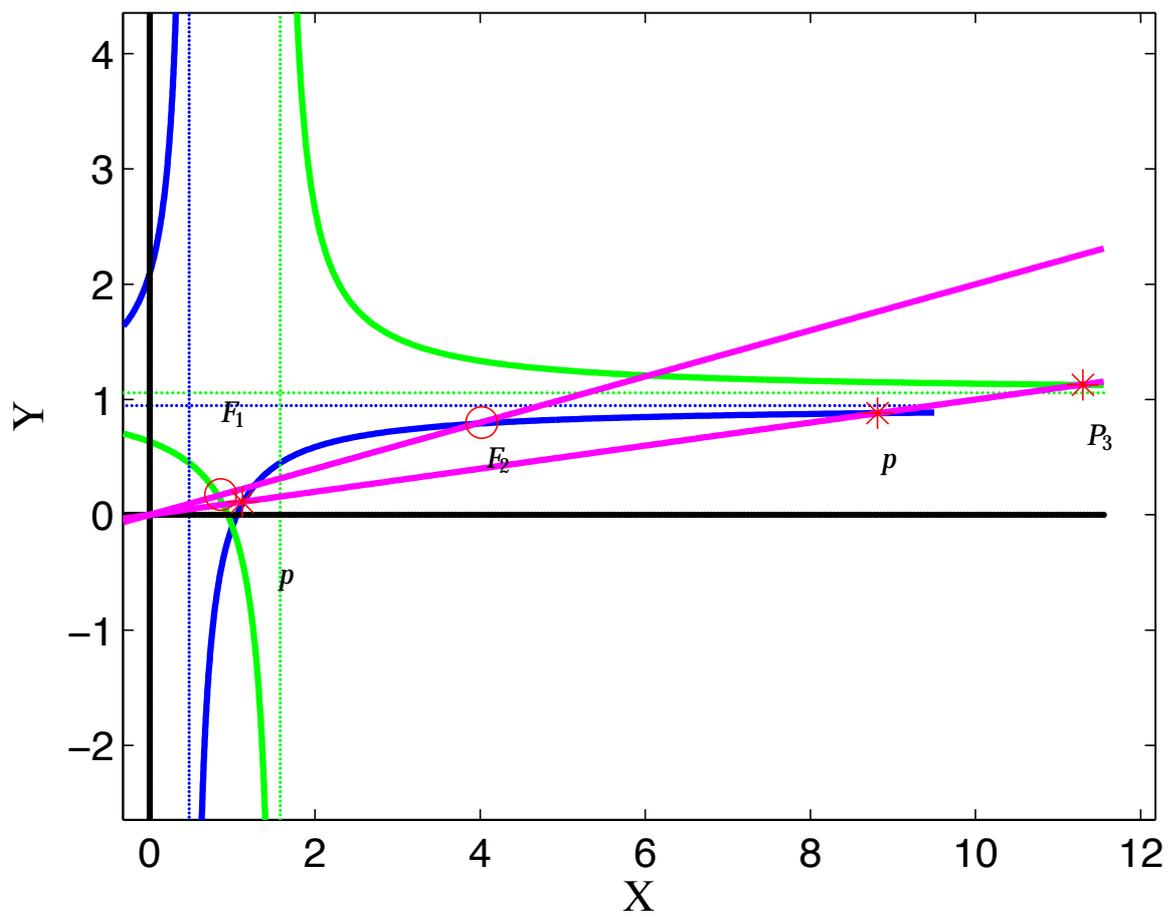


FIGURE 6.8: Représentation du cas 3

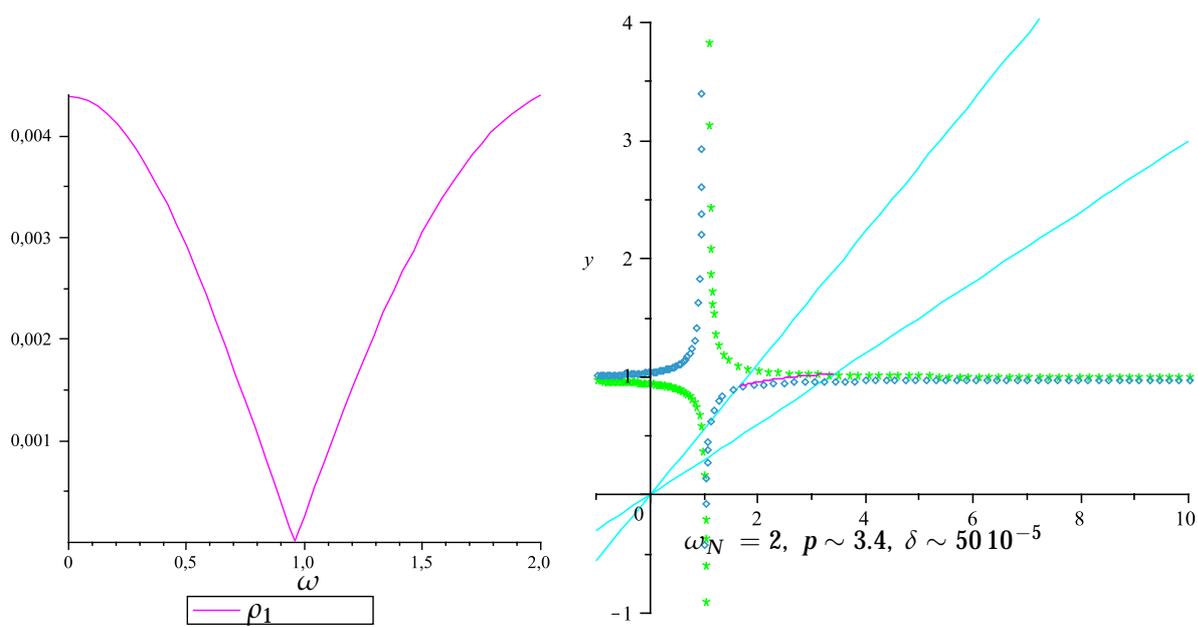


FIGURE 6.9: equioscillation entre 0 et  $\omega = \omega_N$

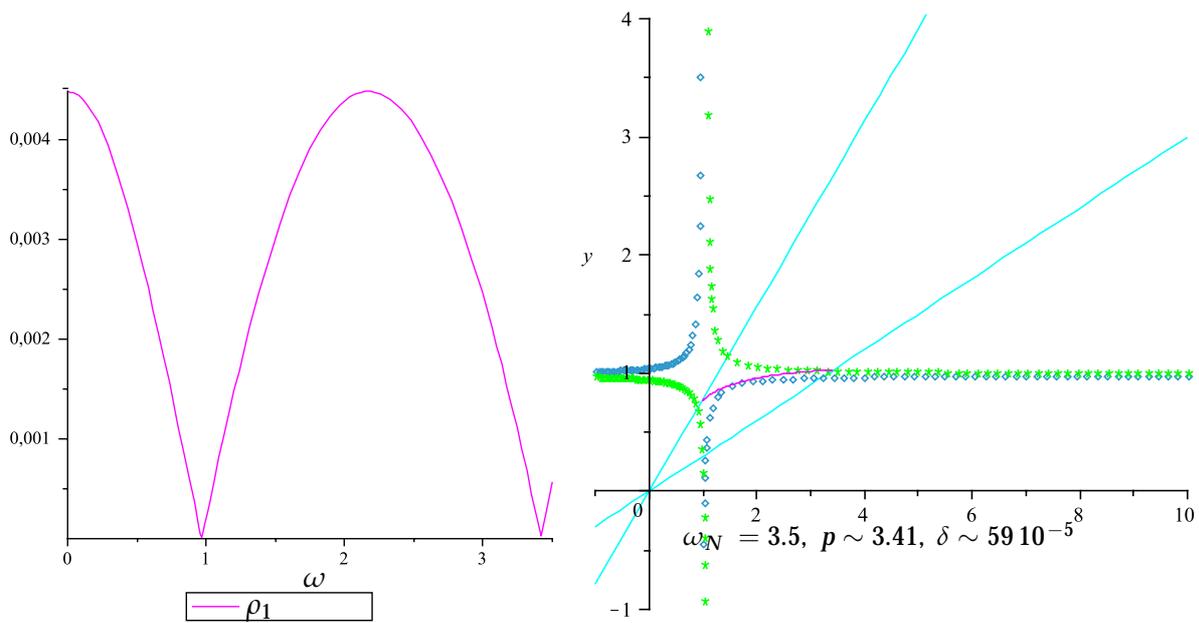


FIGURE 6.10: equioscillation entre 0 et  $\omega = \bar{\omega}$

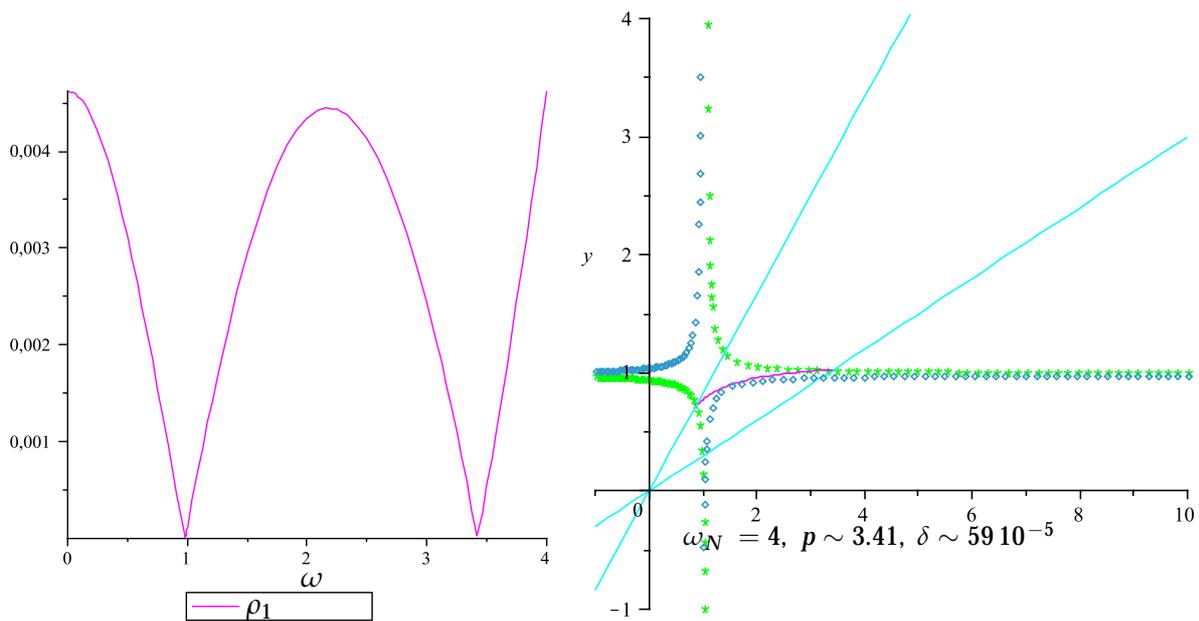


FIGURE 6.11: equioscillation entre 0,  $\omega = \bar{\omega}$  et  $\omega = \omega_N$

De ces courbes nous pouvons conjecturer qu'il existe une valeur de  $\omega_N$  pour laquelle  $\bar{\omega} = \omega_N$ , et une valeur  $\tilde{\omega}_N$  pour laquelle  $\rho$  equioscille en 3 points 0,  $\bar{\omega}$ ,  $\omega_N$ . Pour  $\omega_N > \tilde{\omega}_N$ , il y a une seule solution, caractérisée par l'équioscillation en 0 et  $\omega_N$ . C'est pourquoi nous étudions le problème  $\mathcal{P}$  de façon asymptotique et nous montrons qu'il admet une unique solution puis nous en donnons un équivalent. Ceci fait l'objet des lignes qui suivent. Tout d'abord, nous énonçons deux lemmes qui nous seront très utiles dans cette démarche.

**Lemme 6.16.** Soient  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  des fonctions continues et positives sur  $\mathbb{R}$ ,  $K$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $p_1^* > 0$  est un point minimum local strict de

$$H(p) = \left\| \frac{p - f_1}{p + f_2} \frac{p - g_1}{p + g_2} \right\|_{L^\infty(K)},$$

avec  $H(p_1^*) < 1$  et pour tout  $\omega$  dans  $K$ ,

$$(6.24) \quad \frac{p_1^* - f_1(\omega)}{p_1^* + f_2(\omega)} \frac{p_1^* - g_1(\omega)}{p_1^* + g_2(\omega)} > -H(p_1^*).$$

Alors  $p_1^*$  est l'unique point minimum global de  $H$ .

*Démonstration.* Nous faisons une démonstration par l'absurde. Notons  $\delta^* = H(p_1^*)$  et supposons qu'il existe un autre point minimum local  $p_1^{**}$  tel que  $H(p_1^{**}) \leq \delta^*$ . Nous avons alors

$$\left\| \frac{p_1^{**} - f_1}{p_1^{**} + f_2} \frac{p_1^{**} - g_1}{p_1^{**} + g_2} \right\|_{L^\infty(K)} = H(p_1^{**}) \leq \delta^*,$$

ainsi pour tout  $\omega$  dans  $K$  on a

$$(p_1^{**} - f_1(\omega))(p_1^{**} - g_1(\omega)) \leq \delta^* (p_1^{**} + f_2(\omega))(p_1^{**} + g_2(\omega)),$$

i.e

$$(6.25) \quad (1 - \delta^*) p_1^{**2} - (f_1(\omega) + g_1(\omega) + \delta^* f_2(\omega) + \delta^* g_2(\omega)) p_1^{**} + f_1(\omega) g_1(\omega) - \delta^* f_2(\omega) g_2(\omega) \leq 0.$$

Le polynôme du premier membre de (6.25) admet deux racines réelles que nous notons  $X_1(\omega)$  et  $X_2(\omega)$ , car sinon l'inégalité (6.25) ne serait pas réalisée. Ce qui implique alors que pour tout  $\omega$  dans  $K$ , nous avons  $X_1(\omega) \leq p_1^{**} \leq X_2(\omega)$ . De façon analogue nous avons pour tout  $\omega$  dans  $K$ ,  $X_1(\omega) \leq p_1^* \leq X_2(\omega)$ . Par conséquent pour tout  $t$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  et  $p(t) = t p_1^{**} + (1 - t) p_1^*$ , nous aurons  $X_1(\omega) \leq p(t) \leq X_2(\omega)$ . Ce qui signifie que

$$(6.26) \quad \frac{p(t) - f_1(\omega)}{p(t) + f_2(\omega)} \frac{p(t) - g_1(\omega)}{p(t) + g_2(\omega)} \leq \delta^*.$$

L'hypothèse (6.24) se réécrit

$$(6.27) \quad (1 + \delta^*) p_1^{*2} + (-f_1(\omega) - g_1(\omega) + \delta^* f_2(\omega) + \delta^* g_2(\omega)) p_1^* + f_1(\omega) g_1(\omega) + \delta^* f_2(\omega) g_2(\omega) > 0.$$

Considérons maintenant le discriminant  $\Delta(\omega)$  du polynôme du premier membre de l'inégalité (6.27) et notons

$$\Omega_1 = \{\omega, \Delta(\omega) < 0\},$$

$$\Omega_2 = \{\omega, \Delta(\omega) \geq 0\}.$$

Si  $\omega$  appartient à  $\Omega_1$ , on a pour tout  $p$  positif

$$(6.28) \quad (1 + \delta^*) p^2 + (-f_1(\omega) - g_1(\omega) + \delta^* f_2(\omega) + \delta^* g_2(\omega)) p + f_1(\omega) g(\omega) + \delta^* f_2(\omega) g_2(\omega) > 0.$$

Notons alors pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_2$ ,  $T_1(\omega)$  et  $T_2(\omega)$  les deux racines du polynôme du premier membre de (6.27). Alors pour tout  $\omega$  appartenant à  $\Omega_2$ , on a  $p_1^* < T_1(\omega)$  ou  $T_2(\omega) < p_1^*$ . Posons à présent

$$\Omega_{21} = \{\omega \in \Omega_2, p_1^* < T_1(\omega)\},$$

$$\Omega_{22} = \{\omega \in \Omega_2, p_1^* > T_2(\omega)\}.$$

Puisque  $\Omega_2$  est un ensemble compact, alors il existe  $\omega_1, \omega_2$  appartenant à  $\Omega_2$  tels que  $T_1(\omega_1) = \inf_{\omega \in \Omega_{21}} T_1(\omega)$  et  $T_2(\omega_2) = \sup_{\omega \in \Omega_{22}} T_2(\omega)$ . Ceci entraîne  $T_2(\omega_2) \leq p_1^* \leq T_1(\omega_1)$ . Nous pouvons

remarquer que  $p_1^* \neq T_1(\omega_1)$ , sinon on aurait  $\frac{p_1^* - f_1(\omega_1)}{p_1^* + f_2(\omega_1)} \frac{p_1^* - g_1(\omega_1)}{p_1^* + g_2(\omega_1)} = -\delta^*$ . Pour la même raison nous avons  $p_1^* \neq T_2(\omega_2)$ . Ainsi  $p_1^* < \inf_{\omega \in \Omega_{21}} T_1(\omega)$  et  $p_1^* > \sup_{\omega \in \Omega_{22}} T_2(\omega)$ , et il existe  $t_0$  tel que pour tout  $t$  appartenant à  $[0, t_0]$ ,  $\sup_{\omega \in \Omega_{22}} T_2(\omega) < p(t) < \inf_{\omega \in \Omega_{21}} T_1(\omega)$ . Ce qui entraîne

$$(6.29) \quad \frac{p(t) - f_1(\omega)}{p(t) + f_2(\omega)} \frac{p(t) - g_1(\omega)}{p(t) + g_2(\omega)} > -\delta^*.$$

De (6.26) et (6.29) on déduit  $H(p(t)) \leq H(p_1^*)$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} H(p(t)) = H(p_1^*)$ , ce qui contredit le fait que  $H(p_1^*)$  est un minimum local strict.  $\square$

**Lemme 6.17.** Soient  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  des fonctions continues et positives sur  $\mathbb{R}$ ,  $K$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $p_1^* > 0$  est un point minimum local strict de

$$H(p) = \left\| \frac{p - f_1}{p + f_2} \frac{p - g_1}{p + g_2} \right\|_{L^\infty(K)},$$

avec  $H(p_1^*) < 1$  et pour tout  $\omega$  dans  $K$ , il existe un réel positif  $\eta$  tel que pour tout  $p$  dans l'intervalle  $[p_1^*, p_1^* + \eta]$  nous ayons

$$(6.30) \quad \frac{p - f_1(\omega)}{p + f_2(\omega)} \frac{p - g_1(\omega)}{p + g_2(\omega)} > -H(p_1^*).$$

Alors  $p_1^*$  est l'unique point minimum global de  $H$  sur l'intervalle  $[p_1^*, \infty)$ .

*Démonstration.* Nous raisonnons par l'absurde. Nous supposons qu'il existe un autre point minimum local  $p_1^{**}$  tel que  $H(p_1^{**}) \leq H(p_1^*)$  où  $p_1^{**} \in [p_1^*, \infty)$ . Posons  $p(t) = tp_1^{**} + (1-t)p_1^*$ . Avec une démarche strictement analogue au lemme (6.16), on a

$$(6.31) \quad \frac{p(t) - f_1(\omega)}{p(t) + f_2(\omega)} \frac{p(t) - g_1(\omega)}{p(t) + g_2(\omega)} \leq H(p_1^*).$$

Selon les hypothèses, il existe  $t_0$  tel que pour tout  $t$  dans l'intervalle  $[0, t_0]$  nous ayons

$$(6.32) \quad \frac{p(t) - f_1(\omega)}{p(t) + f_2(\omega)} \frac{p(t) - g_1(\omega)}{p(t) + g_2(\omega)} > -H(p_1^*).$$

Les inégalités (6.31) et (6.32) entraîne l'inégalité

$$H(p(t)) \leq H(p_1^*)$$

qui constitue une contradiction car  $p_1^*$  est un point minimum local strict de  $H$ .  $\square$

Les lemmes permettent de montrer une série de résultats. Dans le théorème nous nous intéressons au cas  $\omega_N \gg 1$  et  $a, b$  et  $\varepsilon$  étant fixés où nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème  $\mathcal{P}$ , puis nous donnons un équivalent du paramètre optimisé et du taux de convergence.

**Théorème 6.18.** *Pour  $\omega_N \gg 1$ , le problème  $\tilde{\mathcal{P}}$  admet une unique solution notée  $p_1^*$ , qui est donnée par la racine positive de*

$$\rho_1(0, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*).$$

De plus si nous notons  $c_p = \sqrt{\frac{a^{-1} + \varepsilon b^{-1}}{1 + \varepsilon}}$  nous avons asymptotiquement

$$p_1^* \sim C_p \omega_N^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p_1^*)| \sim 1 - \frac{C_p(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon} \omega_N^{-\frac{1}{2}}$$

*Démonstration.* On a nécessairement

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p)| = \max \{ |\rho_1(0, p)|, |\rho_1(\tilde{\omega}, p)|, |\rho_1(\omega_N, p)| \}$$

où  $\tilde{\omega} \in \left\{ \omega, \frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega, p) = 0 \right\}$ . Partant de ce fait, la démonstration s'effectue en six étapes à savoir :

- ◆ trouver d'abord  $p_1^*$  solution de  $\rho_1(0, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$  pour en déduire  $p_1^*$ ;
- ◆ calculer la valeur de  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$ ;
- ◆ trouver  $\tilde{\omega}$  solution de  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\cdot, p_1^*) = 0$ ;
- ◆ calculer la valeur de  $\rho_1(\tilde{\omega}, p_1^*)$ ;
- ◆ Comparer  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$  à  $\rho_1(\tilde{\omega}, p_1^*)$  pour en déduire  $\|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ ;
- ◆ Montrer que  $p_1^*$  est un point minimum local de  $H$  afin de conclure avec le lemme 6.16 que  $p_1^*$  est l'unique point minimum global de  $H$ .
- ◆ Solutions de  $\rho_1(0, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$ .

Nous cherchons d'abord les solutions de  $\rho_1(0, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$ , c'est à dire

$$(6.33) \quad \frac{p - f_a(0)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(0)} \frac{p - f_b(0)}{p + \varepsilon f_b(0)} = \frac{p - f_a(\omega_N)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega_N)} \frac{p - f_b(\omega_N)}{p + \varepsilon f_b(\omega_N)}.$$

Comme  $\lim_{\omega \rightarrow 0} f_a(\omega) = a^{-1}$  et  $\lim_{\omega \rightarrow 0} f_b(\omega) = b^{-1}$ , on déduit de (6.33)

$$(6.34) \quad \frac{p - a^{-1}}{p + \frac{1}{\varepsilon} a^{-1}} \frac{p - b^{-1}}{p + \varepsilon b^{-1}} = \frac{p - f_a(\omega_N)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega_N)} \frac{p - f_b(\omega_N)}{p + \varepsilon f_b(\omega_N)}.$$

Si on développe et réduit (6.34), il vient

$$(6.35) \quad \left( -a^{-1} - \varepsilon b^{-1} + \omega_N \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(b\omega_N)} \right) \right) p^2 + \left( \omega_N(\varepsilon - 1) \left( \frac{b^{-1}}{\text{th}(a\omega_N)} - \frac{a^{-1}}{\text{th}(b\omega_N)} \right) \right) p - \omega_N \left( \frac{\omega_N}{\text{th}(a\omega_N)\text{th}(b\omega_N)} (a^{-1} + \varepsilon b^{-1}) + (ab)^{-1} \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(b\omega_N)} \right) \right) = 0.$$

Nous allons développer les coefficients de (6.35). En effet pour  $\omega_N \gg 1$  (6.35) équivaut à

$$(6.36) \quad (1 + \varepsilon)p^2 + (\varepsilon - 1)(b^{-1} - a^{-1})p - (a^{-1} + \varepsilon b^{-1})\omega_N = 0.$$

Si nous appelons  $p_1^*$  la solution positive de (6.36), alors  $p_1^* \sim C_p \sqrt{\omega_N}$ .

◆ Calcul de  $\rho_1(0, p_1^*)$ .

Calculons alors  $\rho_1(0, p_1^*)$  avec  $p_1^* \sim C_p \sqrt{\omega_N}$ .

$$(6.37) \quad \rho_1(0, p_1^*) = \frac{p_1^* - a^{-1}}{p_1^* + \frac{1}{\varepsilon} a^{-1}} \frac{p_1^* - b^{-1}}{p_1^* + \varepsilon b^{-1}}$$

$$(6.38) \quad \sim \frac{p_1^{*2} - p_1^*(a^{-1} + b^{-1})}{p_1^{*2} + p_1^*((\varepsilon a)^{-1} + \varepsilon b^{-1})}.$$

Puis finalement en développant (6.38) nous avons  $\rho_1(0, p_1^*) \sim 1 - \frac{1 + \varepsilon}{p_1^*} (b^{-1} + (\varepsilon a)^{-1})$ , ou de façon équivalente

$$\rho_1(0, p_1^*) \sim 1 - \frac{1 + \varepsilon}{C_p} (b^{-1} + (\varepsilon a)^{-1}) \omega_N^{-\frac{1}{2}} = 1 - C_p \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon} \omega_N^{-\frac{1}{2}}.$$

◆ Solutions de l'équation  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega, p_1^*) = 0$ .

Ce qui revient à chercher les solutions de

$$(6.39) \quad \frac{f_b(\omega) - p_1^*}{\varepsilon p_1^* + f_a(\omega)} \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) + \frac{f_a(\omega) - p_1^*}{p_1^* + \varepsilon f_b(\omega)} \frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega) = 0.$$

Appelons ces solutions  $\bar{\omega}$ . Pour réaliser (6.50), on a nécessairement

$$f_b(\bar{\omega}) \geq p_1^* \geq f_a(\bar{\omega}).$$

Supposons que  $\bar{\omega} \sim C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}$  ( $\gamma_\omega$  peut être négatif.) En remplaçant dans (6.50), il vient

$$\frac{\omega}{\text{th}(\omega b)} \geq C_p \sqrt{\omega_N} \geq \frac{\omega}{\text{th}(\omega a)},$$

puis

$$\frac{C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}}{\text{th}(b C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega})} \geq C_p \sqrt{\omega_N} \geq \frac{C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}}{\text{th}(a C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega})}.$$

Ceci entraîne que  $\gamma_\omega$  est strictement positif. il s'en suit que  $f_a(\bar{\omega}) \sim C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}$  et  $f_b(\bar{\omega}) \sim C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}$ . Finalement  $\bar{\omega} \sim C_p \sqrt{\omega_N}$ .

◆ Calcul de  $\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)$ .

Désignons par  $C_1$   $C_2$  et  $C_3$  des constantes positives. Faisons à présent les hypothèses suivantes :

$$(6.40) \quad \begin{cases} f_b(\bar{\omega}) - p_1^* & \sim C_1 \omega_N^{\gamma_1} \\ p_1^* - f_a(\bar{\omega}) & \sim C_2 \omega_N^{\gamma_2} \end{cases}$$

où  $\gamma_1, \gamma_2 < \frac{1}{2}$  et évaluons le facteur de convergence en  $\bar{\omega}$ . Alors

$$(6.41) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| = \frac{p_1^* - f_a(\bar{\omega})}{p_1^* + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\bar{\omega})} \frac{f_b(\bar{\omega}) - p_1^*}{p_1^* + \varepsilon f_b(\bar{\omega})},$$

puis avec (6.51),

$$(6.42) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| \sim \frac{C_2 \omega_N^{\gamma_2}}{C_p \sqrt{\omega_N} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{C_1 \omega_N^{\gamma_1}}{C_p \sqrt{\omega_N} (1 + \varepsilon)},$$

ou encore

$$(6.43) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| \sim C_3 \omega_N^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}.$$

◆ Calcul de  $\|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} \|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)} &= \max \{ \rho_1(0, p_1^*), |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|, \rho_1(\omega_N, p_1^*) \} \\ &= \rho_1(0, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*) \gg |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|. \end{aligned}$$

◆ minimum local de  $H$ .

Prouvons à présent que  $p_1^*$  est un point minimum local de  $H$ . Comme

$$\begin{aligned} H(p_1^*) &= \max \{ \rho_1(0, p_1^*), \rho_1(\omega_N, p_1^*) \} \\ &\gg |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|, \end{aligned}$$

alors il existe un réel positif  $\eta_1$  tel que pour tout  $p$  dans  $[p_1^* - \eta_1, p_1^* + \eta_1]$ ,

$$H(p) = \max \{ \rho_1(0, p), \rho_1(\omega_N, p) \}.$$

Nous voyons que :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(0, p_1^*) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(0)}{\varepsilon} + f_b(0) \right)}{\left( p_1^* + \frac{f_a(0)}{\varepsilon} \right)^2 (p_1^* + \varepsilon f_b(0))^2} (p_1^{*2} - f_a(0) f_b(0)) > 0$$

puisque  $p_1^{*2} - f_a(0) f_b(0) \sim C_p^2 \omega_N - (ab)^{-1} > 0$  et

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega_N, p_1^*) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} + f_b(\omega_N) \right)}{\left( p_1^* + \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} \right)^2 (p_1^* + \varepsilon f_b(\omega_N))^2} (p_1^{*2} - f_a(\omega_N) f_b(\omega_N)) < 0$$

puisque  $p_1^{*2} - f_a(\omega_N) f_b(\omega_N) \sim C_p^2 \omega_N - \omega_N^2 < 0$ . Il existe donc un réel positif  $\eta_2$  tel que pour tout  $p$  dans  $[p_1^* - \eta_2, p_1^* + \eta_2]$ ,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(0, p) > 0 > \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega_N, p).$$

Si nous posons  $\eta = \min \{\eta_1, \eta_2\}$ , alors  $p_1^*$  est un point minimum strict de  $H$  sur l'intervalle  $[p_1^* - \eta, p_1^* + \eta]$ . □

Nous pouvons ensuite généraliser le résultat précédent au cas où  $\omega_N \gg 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$  avec  $a$  et  $b$  étant fixés pour obtenir le

**Théorème 6.19.** *Pour  $\omega_N \gg 1$  et  $\varepsilon \ll 1$ , il existe une unique solution  $p_1^*$  du problème  $\tilde{\mathcal{P}}$  qui est donnée par l'unique racine positive de*

$$\rho_1(0, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*).$$

De plus on a asymptotiquement

$$p_1^* \sim \sqrt{(a^{-1} \omega_N)}$$

et ( $C$  désigne une constante positive)

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p_1^*)| \sim \begin{cases} 1 - \frac{(\varepsilon a)^{-1}}{p_1^*} & \text{si } p_1^* \gg (\varepsilon a)^{-1}, \\ \varepsilon a p_1^* & \text{si } p_1^* \ll (\varepsilon a)^{-1}, \\ \frac{1}{1+C} & \text{si } p_1^* \approx (\varepsilon a)^{-1}. \end{cases}$$

*Démonstration.* On a nécessairement

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p)| = \max \{ |\rho_1(0, p)|, |\rho_1(\tilde{\omega}, p)|, |\rho_1(\omega_N, p)| \}$$

où  $\tilde{\omega} \in \left\{ \omega, \frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega, p) = 0 \right\}$ . Partant de ce fait, la démonstration s'effectue en six étapes à savoir :

- ◆ trouver d'abord  $p_1^*$  solution de  $\rho_1(0, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$  pour en déduire  $p_1^*$ ;
- ◆ calculer la valeur de  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$ ;
- ◆ trouver  $\tilde{\omega}$  solution de  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\cdot, p_1^*) = 0$ ;
- ◆ calculer la valeur de  $\rho_1(\tilde{\omega}, p_1^*)$ ;
- ◆ Comparer  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$  à  $\rho_1(\tilde{\omega}, p_1^*)$  pour en déduire  $\|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ ;
- ◆ Montrer que  $p_1^*$  est un point minimum local de  $H$  afin de conclure avec le lemme 6.16 que  $p_1^*$  est l'unique point minimum global de  $H$ .
- ◆  $\rho_1(0, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$ .

Nous cherchons d'abord les solutions de  $\rho_1(0, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$ , c'est à dire

$$(6.44) \quad \frac{p - f_a(0)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(0)} \frac{p - f_b(0)}{p + \varepsilon f_b(0)} = \frac{p - f_a(\omega_N)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega_N)} \frac{p - f_b(\omega_N)}{p + \varepsilon f_b(\omega_N)}.$$

Comme  $\lim_{\omega \rightarrow 0} f_a(\omega) = a^{-1}$  et  $\lim_{\omega \rightarrow 0} f_b(\omega) = b^{-1}$ , on déduit de (6.44)

$$(6.45) \quad \frac{p - a^{-1}}{p + \frac{1}{\varepsilon} a^{-1}} \frac{p - b^{-1}}{p + \varepsilon b^{-1}} = \frac{p - f_a(\omega_N)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega_N)} \frac{p - f_b(\omega_N)}{p + \varepsilon f_b(\omega_N)}.$$

Si on développe et réduit (6.45), il vient

$$(6.46) \quad \left( -a^{-1} - \varepsilon b^{-1} + \omega_N \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(b\omega_N)} \right) \right) p^2 + \left( \omega_N(\varepsilon - 1) \left( \frac{b^{-1}}{\text{th}(a\omega_N)} - \frac{a^{-1}}{\text{th}(b\omega_N)} \right) \right) p - \omega_N \left( \frac{\omega_N}{\text{th}(a\omega_N)\text{th}(b\omega_N)} (a^{-1} + \varepsilon b^{-1}) + (ab)^{-1} \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(b\omega_N)} \right) \right) = 0.$$

Nous allons développer les coefficients de (6.46). En effet pour  $\omega_N \gg 1$  et  $\varepsilon \ll 1$  (6.46) équivaut à

$$(6.47) \quad p^2 + (a^{-1} - b^{-1})p - \omega_N a^{-1} = 0.$$

Si nous appelons  $p_1^*$  la solution positive de (6.47), alors  $p_1^* \sim \sqrt{a^{-1}\omega_N}$ .

◆ Calcul de  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$ .

Calculons alors  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$  avec  $p_1^* \sim \sqrt{a^{-1}\omega_N}$ .

$$(6.48) \quad \rho_1(\omega_N, p_1^*) = \frac{p_1^* - f_a(0)}{p_1^* + \frac{1}{\varepsilon} f_a(0)} \frac{p_1^* - f_b(0)}{p_1^* + \varepsilon f_b(0)}$$

$$(6.49) \quad \sim \frac{p_1^{*2}}{p_1^{*2} + p_1^*(\varepsilon a)^{-1}}.$$

Puis finalement en développant (6.49) nous avons 3 possibilités ( $C$  désignant une constante positive)

- Si  $p_1^* \gg (\varepsilon a)^{-1}$ , alors  $\rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim 1 - \frac{(\varepsilon a)^{-1}}{p_1^*}$ .

- Si  $p_1^* \ll (\varepsilon a)^{-1}$ , alors  $\rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim \varepsilon a p_1^*$ .

- Si  $p_1^* \approx (\varepsilon a)^{-1}$ , alors  $\rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim \frac{1}{1 + C}$ .

◆ Solutions de l'équation  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega, p_1^*) = 0$ .

Ce qui revient à chercher les solutions de

$$(6.50) \quad \frac{f_b(\omega) - p_1^*}{\varepsilon p_1^* + f_a(\omega)} \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) + \frac{f_a(\omega) - p_1^*}{p_1^* + \varepsilon f_b(\omega)} \frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega) = 0.$$

Appelons ces solutions  $\bar{\omega}$ . Pour réaliser (6.50), on a nécessairement

$$f_b(\bar{\omega}) \geq p_1^* \geq f_a(\bar{\omega}).$$

Supposons que  $\bar{\omega} \sim C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}$  ( $\gamma_\omega$  peut être négatif.) En remplaçant dans (6.50), il vient

$$\frac{\omega}{\text{th}(\omega b)} \geq \sqrt{a^{-1}\omega_N} \geq \frac{\omega}{\text{th}(\omega a)},$$

puis

$$\frac{C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}}{\text{th}(bC_\omega \omega_N^{\gamma_\omega})} \geq \sqrt{a^{-1}\omega_N} \geq \frac{C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}}{\text{th}(aC_\omega \omega_N^{\gamma_\omega})}.$$

Ceci entraîne que  $\gamma_\omega$  est strictement positif. il s'en suit que  $f_a(\bar{\omega}) \sim C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}$  et  $f_b(\bar{\omega}) \sim C_\omega \omega_N^{\gamma_\omega}$ .  
Finalement  $\bar{\omega} \sim \sqrt{a^{-1}\omega_N}$ .

◆ Calcul de  $\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)$ .

Faisons à présent les hypothèses suivantes :

$$(6.51) \quad \begin{cases} f_b(\bar{\omega}) - p_1^* & \sim C_1 \omega_N^{\gamma_1} \\ p_1^* - f_a(\bar{\omega}) & \sim C_2 \omega_N^{\gamma_2} \end{cases}$$

où  $\gamma_1, \gamma_2 < \frac{1}{2}$  et évaluons le facteur de convergence en  $\bar{\omega}$ . Alors

$$(6.52) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| = \frac{p_1^* - f_a(\bar{\omega})}{p_1^* + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\bar{\omega})} \frac{f_b(\bar{\omega}) - p_1^*}{p_1^* + \varepsilon f_b(\bar{\omega})},$$

puis avec (6.51),

$$(6.53) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| \sim \frac{C_2 \omega_N^{\gamma_2}}{\sqrt{a^{-1}\omega_N} + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{a^{-1}\omega_N}} \frac{C_1 \omega_N^{\gamma_1}}{\sqrt{a^{-1}\omega_N} + \varepsilon \sqrt{a^{-1}\omega_N}},$$

ou encore

$$(6.54) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| \sim C_3 \omega_N^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1} \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2}.$$

Enfin en développant (6.54) pour  $\omega_N \gg 1$

$$(6.55) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| \sim C_4 \varepsilon \omega_N^{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}.$$

◆  $\|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ .

Nous étudions  $\|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)}$  dans les 3 cas suivants :

- pour  $p_1^* \gg (\varepsilon a)^{-1}$ ,  $\rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim 1 - \frac{(\varepsilon a)^{-1}}{p_1^*}$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)} &= \max \{ \rho_1(\mathbf{0}, p_1^*), |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|, \rho_1(\omega_N, p_1^*) \} \\ &= \rho_1(\mathbf{0}, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*) \gg |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|. \end{aligned}$$

- pour  $p_1^* \ll (\varepsilon a)^{-1}$ ,  $\rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim \varepsilon a p_1^*$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)} &= \max \{ \rho_1(\mathbf{0}, p_1^*), |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|, \rho_1(\omega_N, p_1^*) \} \\ &= \rho_1(\mathbf{0}, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*) \gg |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|. \end{aligned}$$

- pour  $p_1^* \approx (\varepsilon a)^{-1}$ ,  $\rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim \frac{1}{1+C}$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)} &= \max \{ \rho_1(\mathbf{0}, p_1^*), |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|, \rho_1(\omega_N, p_1^*) \} \\ &= \rho_1(\mathbf{0}, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*) \gg |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|. \end{aligned}$$

Finalemnt

$$\begin{aligned} \|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)} &= \max \{ \rho_1(\mathbf{0}, p_1^*), |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|, \rho_1(\omega_N, p_1^*) \} \\ &= \rho_1(\mathbf{0}, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*) \gg |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|. \end{aligned}$$

◆ minimum local de  $H$ .

Prouvons à présent que  $p_1^*$  est un point minimum local de  $H$ . Comme

$$\begin{aligned} H(p_1^*) &= \max \{ \rho_1(\mathbf{0}, p_1^*), \rho_1(\omega_N, p_1^*) \} \\ &\gg |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|, \end{aligned}$$

alors il existe un réel positif  $\eta_1$  tel que

$$H(p) = \max \{ \rho_1(\mathbf{0}, p), \rho_1(\omega_N, p) \}, \quad \forall p \in [p_1^* - \eta_1, p_1^* + \eta_1].$$

Nous voyons que :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\mathbf{0}, p_1^*) = \frac{(1+\varepsilon) \left( \frac{f_a(\mathbf{0})}{\varepsilon} + f_b(\mathbf{0}) \right)}{\left( p_1^* + \frac{f_a(\mathbf{0})}{\varepsilon} \right)^2 (p_1^* + \varepsilon f_b(\mathbf{0}))^2} \left( p_1^{*2} - f_a(\mathbf{0}) f_b(\mathbf{0}) \right) > 0$$

puisque  $p_1^{*2} - f_a(\mathbf{0}) f_b(\mathbf{0}) \sim a^{-1} \omega_N - (ab)^{-1} > 0$   
et

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega_N, p_1^*) = \frac{(1+\varepsilon) \left( \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} + f_b(\omega_N) \right)}{\left( p_1^* + \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} \right)^2 (p_1^* + \varepsilon f_b(\omega_N))^2} \left( p_1^{*2} - f_a(\omega_N) f_b(\omega_N) \right) < 0$$

puisque  $p_1^{*2} - f_a(\omega_N) f_b(\omega_N) \sim a^{-1} \omega_N - \omega_N^2 < 0$ . Il existe donc un réel positif  $\eta_2$  tel que

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\mathbf{0}, p) > 0 > \frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega_N, p) \quad \forall p \in [p_1^* - \eta_2, p_1^* + \eta_2].$$

$p_1^*$  est alors un point minimum strict de  $H$  sur l'intervalle  $[p_1^* - \eta, p_1^* + \eta]$  où  $\eta = \min \{ \eta_1, \eta_2 \}$ . □

Revenons au cas qui a motivé ce chapitre.

Etude du problème d'optimisation  $\bar{\mathcal{P}}$  pour  $b = \varepsilon$

**Théorème 6.20.** Pour  $b = \varepsilon$  et  $\omega_N \sim C\varepsilon^{-\gamma}$  avec  $\gamma > 2$ , il existe une unique solution  $p_1^*$  du problème  $\bar{\mathcal{P}}$  qui est donnée par l'unique racine positive de

$$\rho_1(0, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*),$$

et on a asymptotiquement

$$p_1^* \sim \sqrt{(a^{-1} + 1)C\varepsilon^{-\frac{\gamma}{2}}} \quad \text{et} \quad \max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p_1^*)| \sim 1 - \sqrt{\frac{a^{-1} + 1}{C}} \varepsilon^{\frac{\gamma}{2} - 1}.$$

Si  $\omega_N = C\varepsilon^{-\gamma}$  avec  $1 < \gamma < 2$ , alors le problème  $\bar{\mathcal{P}}$  admet une unique solution donnée par l'unique racine positive de

$$\rho_1(0, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*),$$

et on a asymptotiquement

$$p_1^* \sim \varepsilon^{-1} \quad \text{et} \quad \max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p_1^*)| \sim C\varepsilon^{2-\gamma}.$$

*Démonstration.* On a nécessairement

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p)| = \max \{ |\rho_1(0, p)|, |\rho_1(\bar{\omega}, p)|, |\rho_1(\omega_N, p)| \}$$

où  $\bar{\omega} \in \left\{ \omega, \frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega, p) = 0 \right\}$ . De ce fait, pour chaque valeur de  $\gamma$  considérée, la stratégie qu'on adopte ici consiste à trouver d'abord  $p_1^*$  solution de  $\rho_1(0, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$ . Ensuite, la démonstration s'effectue en cinq étapes à savoir :

- ◆ calculer la valeur de  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$ ;
- ◆ trouver  $\bar{\omega}$  solution de  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\cdot, p_1^*) = 0$ ;
- ◆ calculer la valeur de  $\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)$ ;
- ◆ Comparer  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$  à  $\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)$  pour en déduire  $\|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ ;
- ◆ Montrer que  $p_1^*$  est un point minimum local de  $H$  afin de conclure avec le lemme 6.16 que  $p_1^*$  est l'unique point minimum globale de  $H$ .

Nous cherchons d'abord les solutions de  $\rho_1(0, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$ , c'est à dire

$$(6.56) \quad \frac{p - f_a(0)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(0)} \frac{p - f_b(0)}{p + \varepsilon f_b(0)} = \frac{p - f_a(\omega_N)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega_N)} \frac{p - f_b(\omega_N)}{p + \varepsilon f_b(\omega_N)}.$$

Comme  $\lim_{\omega \rightarrow 0} f_a(\omega) = a^{-1}$  et  $\lim_{\omega \rightarrow 0} f_b(\omega) = b^{-1}$ , on déduit de (6.56)

$$(6.57) \quad \frac{p - a^{-1}}{p + \frac{1}{\varepsilon} a^{-1}} \frac{p - b^{-1}}{p + \varepsilon b^{-1}} = \frac{p - f_a(\omega_N)}{p + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega_N)} \frac{p - f_b(\omega_N)}{p + \varepsilon f_b(\omega_N)}.$$

Si on développe et réduit (6.57), il vient

$$(6.58) \quad \left( -a^{-1} - \varepsilon b^{-1} + \omega_N \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(b\omega_N)} \right) \right) p^2 + \left( \omega_N(\varepsilon - 1) \left( \frac{b^{-1}}{\text{th}(a\omega_N)} - \frac{a^{-1}}{\text{th}(b\omega_N)} \right) \right) p - \omega_N \left( \frac{\omega_N}{\text{th}(a\omega_N)\text{th}(b\omega_N)} (a^{-1} + \varepsilon b^{-1}) + (ab)^{-1} \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(b\omega_N)} \right) \right) = 0.$$

Si on fait  $b = \varepsilon$ , dans (6.58) on a

$$(6.59) \quad \left( -a^{-1} - 1 + \omega_N \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(\varepsilon\omega_N)} \right) \right) p^2 + \left( \omega_N(\varepsilon - 1) \left( \frac{\varepsilon^{-1}}{\text{th}(a\omega_N)} - \frac{a^{-1}}{\text{th}(\varepsilon\omega_N)} \right) \right) p \\ - \omega_N \left( \frac{\omega_N}{\text{th}(a\omega_N)\text{th}(\varepsilon\omega_N)} (a^{-1} + 1) + (a\varepsilon)^{-1} \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(\varepsilon\omega_N)} \right) \right) = 0.$$

Appelons  $p_1^*$  les solutions de (6.59) et supposons  $p_1^* \sim C_p \varepsilon^{-\gamma_p}$  (dans l'expression de  $p_1^*$ , seul le terme dominant en  $\varepsilon$  nous intéresse) et  $\omega_N \sim C\varepsilon^{-\gamma}$  ( $\gamma > 1$ ) et développons (6.59)

$$(6.60) \quad \left( C\varepsilon^{-\gamma} + C\varepsilon^{1-\gamma} - a^{-1} - 1 \right) C_p^2 \varepsilon^{-2\gamma_p} + (\varepsilon - 1) \left( C\varepsilon^{-1-\gamma} - a^{-1} C\varepsilon^{-\gamma} \right) C_p \varepsilon^{-\gamma_p} \\ - (a^{-1} + 1) C^2 \varepsilon^{-2\gamma} + (a\varepsilon)^{-1} \left( C\varepsilon^{-\gamma} + C\varepsilon^{1-\gamma} \right) = 0.$$

Les termes dominants de l'égalité (6.60) sont :  $\varepsilon^{-\gamma-2\gamma_p}$ ,  $\varepsilon^{-1-\gamma-\gamma_p}$  et  $\varepsilon^{-2\gamma}$ . Pour réaliser donc l'égalité, nous devons équilibrer ces termes. Nous sommes donc dans deux cas de figures. Soit les termes en  $\varepsilon^{-\gamma-2\gamma_p}$  et  $\varepsilon^{-2\gamma}$  s'équilibrent en dominant le troisième terme; soit les termes en  $\varepsilon^{-\gamma-2\gamma_p}$  et  $\varepsilon^{-1-\gamma-\gamma_p}$  s'équilibrent en dominant le troisième terme.

– Premier cas.

Soit nous avons donc  $-\gamma - 2\gamma_p = -2\gamma \Leftrightarrow \gamma_p = \frac{\gamma}{2}$ . Il nous faudra alors imposer  $-1 - \gamma - \gamma_p > -2\gamma$ , ce qui entraîne la condition  $\gamma > 2$ . Nous avons de plus  $\gamma_p = \frac{\gamma}{2}$  et  $CC_p^2 = (1 + a^{-1})C^2$ , d'où  $C_p = \sqrt{C(1 + a^{-1})}$ .

◆ Calcul de  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$ .

Calculons alors  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$  avec  $p_1^* \sim \sqrt{C(1 + a^{-1})} \varepsilon^{-\frac{\gamma}{2}}$

$$(6.61) \quad \rho_1(\omega_N, p_1^*) = \frac{p_1^* - f_a(\omega_N)}{p_1^* + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega_N)} \frac{p_1^* - f_b(\omega_N)}{p_1^* + \varepsilon f_b(\omega_N)}$$

$$(6.62) \quad \sim \frac{C_p \varepsilon^{-\frac{\gamma}{2}} - C\varepsilon^{-\gamma}}{C_p \varepsilon^{-\frac{\gamma}{2}} + C\varepsilon^{-1-\gamma}} \frac{C_p \varepsilon^{-\frac{\gamma}{2}} - C\varepsilon^{-\gamma}}{C_p \varepsilon^{-\frac{\gamma}{2}} + C\varepsilon^{1-\gamma}}.$$

Puis finalement en développant (6.62) pour  $\varepsilon \ll 1$ ,

$$(6.63) \quad \rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim \left( \frac{C_p}{C} \varepsilon^{\frac{\gamma}{2}} - 1 \right)^2 \left( 1 - \frac{C_p}{C} \varepsilon^{\frac{\gamma}{2}} - 1 \right),$$

i.e

$$(6.64) \quad \rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim 1 - \frac{C_p}{C} \varepsilon^{\frac{\gamma}{2}} - 1.$$

◆ Solutions de l'équation  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega, p_1^*) = 0$ .

Ce qui revient à chercher les solutions de

$$(6.65) \quad \frac{f_b(\omega) - p_1^*}{\varepsilon p_1^* + f_a(\omega)} \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) + \frac{f_a(\omega) - p_1^*}{p_1^* + \varepsilon f_b(\omega)} \frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega) = 0.$$

Appelons ces solutions  $\bar{\omega}$ . Pour réaliser (6.65), on a nécessairement

$$f_b(\bar{\omega}) \geq p_1^* \geq f_a(\bar{\omega}).$$

Supposons que  $\bar{\omega} \sim C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}$  ( $\gamma_\omega$  peut être négatif.) En remplaçant dans (6.65), il vient

$$\frac{\omega}{\text{th}(\omega b)} \geq C_p \varepsilon^{\frac{-\gamma}{2}} \geq \frac{\omega}{\text{th}(\omega a)},$$

puis

$$\frac{C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}}{\text{th}(C_\omega \varepsilon^{1-\gamma_\omega})} \geq C_p \varepsilon^{\frac{-\gamma}{2}} \geq \frac{C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}}{\text{th}(a C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega})}.$$

Comme  $\frac{C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}}{\text{th}(a C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega})} \sim C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}$ , on a  $\frac{\gamma}{2} \geq \gamma_\omega$ . Montrons que  $\gamma_\omega > 1$ . Supposons le contraire, c'est à dire  $\gamma_\omega \leq 1$ . Ce qui entraîne  $\frac{C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}}{\text{th}(C_\omega \varepsilon^{1-\gamma_\omega})} \sim \varepsilon^{-1} > C_p \varepsilon^{\frac{-\gamma}{2}}$ , et par voie de conséquence  $2 \geq \gamma$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse  $\gamma > 2$ . Il s'en suit que  $f_a(\bar{\omega}) \sim C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}$  et  $f_b(\bar{\omega}) \sim C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}$ . Finalement  $\bar{\omega} \sim C_p \varepsilon^{\frac{-\gamma}{2}}$ .

◆ Calcul de  $\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)$ .

Faisons à présent les hypothèses suivantes :

$$(6.66) \quad \begin{cases} f_b(\bar{\omega}) - p_1^* \sim C_1 \varepsilon^{-\gamma_1}, \\ p_1^* - f_a(\bar{\omega}) \sim C_2 \varepsilon^{-\gamma_2}, \end{cases}$$

où  $\gamma_1, \gamma_2 < \frac{\gamma}{2}$  et évaluons le facteur de convergence en  $\bar{\omega}$ . Alors

$$(6.67) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| = \frac{p_1^* - f_a(\bar{\omega})}{p_1^* + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\bar{\omega})} \frac{f_b(\bar{\omega}) - p_1^*}{p_1^* + \varepsilon f_b(\bar{\omega})},$$

puis avec (6.66), nous avons

$$(6.68) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| = \frac{C_2 \varepsilon^{-\gamma_2}}{C_p \varepsilon^{\frac{-\gamma}{2}} + \frac{1}{\varepsilon} C_p \varepsilon^{\frac{-\gamma}{2}}} \frac{C_1 \varepsilon^{-\gamma_1}}{C_p \varepsilon^{\frac{-\gamma}{2}} + \varepsilon C_p \varepsilon^{\frac{-\gamma}{2}}},$$

ou encore

$$(6.69) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)| = C_3 \varepsilon^{\gamma - (\gamma_1 + \gamma_2)} \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2}.$$

Enfin en développant (6.69) pour  $\varepsilon \ll 1$

$$(6.70) \quad |\rho_1(\bar{\omega}, \mathbf{p}_1^*)| \sim C_4 \varepsilon^\gamma + 1 - (\gamma_1 + \gamma_2).$$

◆ Calcul de la  $\|\rho_1(\cdot, \mathbf{p}_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ .

Finalemet

$$\begin{aligned} \|\rho_1(\cdot, \mathbf{p}_1^*)\|_{L^\infty(K)} &= \max \{ \rho_1(\mathbf{0}, \mathbf{p}_1^*), |\rho_1(\bar{\omega}, \mathbf{p}_1^*)|, \rho_1(\omega_N, \mathbf{p}_1^*) \} \\ &= \rho_1(\mathbf{0}, \mathbf{p}_1^*) = \rho_1(\omega_N, \mathbf{p}_1^*) \gg |\rho_1(\bar{\omega}, \mathbf{p}_1^*)|. \end{aligned}$$

◆ minimum local de  $H$ .

Prouvons à présent que  $\mathbf{p}_1^*$  est un point minimum local de  $H$ . Comme

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}_1^*) &= \max \{ \rho_1(\mathbf{0}, \mathbf{p}_1^*), \rho_1(\omega_N, \mathbf{p}_1^*) \} \\ &\gg |\rho_1(\bar{\omega}, \mathbf{p}_1^*)|, \end{aligned}$$

alors il existe un réel positif  $\eta_1$  tel que

$$H(\mathbf{p}) = \max \{ \rho_1(\mathbf{0}, \mathbf{p}), \rho_1(\omega_N, \mathbf{p}) \}, \quad \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}_1^* - \eta_1, \mathbf{p}_1^* + \eta_1].$$

Nous voyons que :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{p}_1^*) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(\mathbf{0})}{\varepsilon} + f_b(\mathbf{0}) \right)}{\left( \mathbf{p}_1^* + \frac{f_a(\mathbf{0})}{\varepsilon} \right)^2 (\mathbf{p}_1^* + \varepsilon f_b(\mathbf{0}))^2} \left( \mathbf{p}_1^{*2} - f_a(\mathbf{0}) f_b(\mathbf{0}) \right) > 0$$

puisque  $\mathbf{p}_1^{*2} - f_a(\mathbf{0}) f_b(\mathbf{0}) \sim C_p^2 \varepsilon^{-\gamma} - (a\varepsilon)^{-1} > 0$  et

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{p}}(\omega_N, \mathbf{p}_1^*) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} + f_b(\omega_N) \right)}{\left( \mathbf{p}_1^* + \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} \right)^2 (\mathbf{p}_1^* + \varepsilon f_b(\omega_N))^2} \left( \mathbf{p}_1^{*2} - f_a(\omega_N) f_b(\omega_N) \right) < 0$$

puisque  $\mathbf{p}_1^{*2} - f_a(\omega_N) f_b(\omega_N) \sim C_p^2 \varepsilon^{-\gamma} - C^2 \varepsilon^{-2\gamma} < 0$ . Il existe donc un réel positif  $\eta_2$  tel que

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{p}) > 0 > \frac{\partial \rho_1}{\partial \mathbf{p}}(\omega_N, \mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}_1^* - \eta_2, \mathbf{p}_1^* + \eta_2].$$

$\mathbf{p}_1^*$  est alors un point minimum strict de  $H$  sur l'intervalle  $[\mathbf{p}_1^* - \eta, \mathbf{p}_1^* + \eta]$  où  $\eta = \min \{ \eta_1, \eta_2 \}$ .

- Deuxième cas.

La seconde possibilité de réaliser l'égalité (6.60), consiste à avoir  $-\gamma - 2\gamma_p = -1 - \gamma - \gamma_p$  ou encore  $\gamma_p = 1$ . Il nous faut de plus imposer que  $-2\gamma > -1 - \gamma - \gamma_p = -2 - \gamma$ , i.e  $\gamma < 2$ . Nous avons ainsi  $\gamma_p = 1$  et  $C C_p = C C_p^2$  ou  $C_p = 1$ . Le paramètre optimal  $\mathbf{p}_1^*$  se développe donc comme  $\mathbf{p}_1^* \sim \varepsilon^{-1}$ .

◆ Calcul de  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$ .

Calculons le facteur de convergence  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$  avec  $p_1^* \sim \varepsilon^{-1}$

$$\begin{aligned}
 \rho_1(\omega_N, p_1^*) &= \frac{p_1^* - f_a(\omega_N)}{p_1^* + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\omega_N)} \frac{p_1^* - f_b(\omega_N)}{p_1^* + \varepsilon f_b(\omega_N)}, \\
 &\sim \frac{\varepsilon^{-1} - C\varepsilon^{-\gamma}}{\varepsilon^{-1} + C\varepsilon^{-1-\gamma}} \frac{\varepsilon^{-1} - C\varepsilon^{-\gamma}}{\varepsilon^{-1} + C\varepsilon^{1-\gamma}}, \\
 (6.71) \quad &\sim \frac{C\varepsilon^{-\gamma} - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + C\varepsilon^{-1-\gamma}} \frac{C\varepsilon^{-\gamma} - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + C\varepsilon^{1-\gamma}}.
 \end{aligned}$$

Puis en développant (6.71) pour  $\varepsilon \ll 1$ , nous avons

$$(6.72) \quad \rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^\gamma}{C}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon^\gamma}{C}\right) (C\varepsilon^{1-\gamma} - 1) (1 - C\varepsilon^{2-\gamma}).$$

Finalement

$$(6.73) \quad \rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim C\varepsilon^{2-\gamma}.$$

L'étape suivante consiste à calculer les solutions de  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\cdot, p_1^*) = 0$ . Mais avant regardons le terme suivant du développement de  $p_1^*$  en  $\varepsilon$  c'est à dire posons  $p_1^* = \varepsilon^{-1} + \bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma p}$ . Faisons une petite remarque : nous savons que  $\frac{1}{\text{th}(x)} \rightarrow 1$ . En effet si nous considérons la fonction à variable réelle  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1$ , on a  $f(x) = \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x} - 1}$ , et pour tout entier naturel  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x - 1} = 0$ . On peut donc écrire formellement  $\frac{1}{\text{th}(x)} = 1 + \mathcal{O}("x^\infty")$ . Avec l'hypothèse  $\omega_N = C\varepsilon^{-\gamma}$ , développons à nouveau l'égalité  $\rho_1(0, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*)$  par rapport à  $\varepsilon$ , il vient

$$\begin{aligned}
 (6.74) \quad &\left(C\varepsilon^{-\gamma} + C\varepsilon^{1-\gamma} - a^{-1} - 1\right) \left(\varepsilon^{-1} + \bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma p}\right)^2 + (\varepsilon - 1) \left(C\varepsilon^{-1-\gamma} - a^{-1} C\varepsilon^{-\gamma}\right) \left(\varepsilon^{-1} + \bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma p}\right) \\
 &\quad - (a^{-1} + 1) C^2 \varepsilon^{-2\gamma} + (a\varepsilon)^{-1} \left(C\varepsilon^{-\gamma} + C\varepsilon^{1-\gamma}\right) = 0.
 \end{aligned}$$

Puis en développant (6.74) nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (6.75) \quad &C\varepsilon^{-\gamma-2} + C\varepsilon^{-1-\gamma} - (a^{-1} + 1)\varepsilon^{-2} + 2C\bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma-\gamma p-1} + 2C\bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma-\gamma p} \\
 &\quad - 2(a^{-1} + 1)\bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma p-1} - Ca^{-1} \varepsilon^{-\gamma} + Ca^{-1} \varepsilon^{-\gamma-1} \\
 &\quad + C\varepsilon^{-\gamma-1} - C\varepsilon^{-\gamma-2} - \bar{p}_1 Ca^{-1} \varepsilon^{-\gamma-\gamma p+1} \\
 &\quad + Ca^{-1} \bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma-\gamma p} + C\bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma-\gamma p} - C\bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma-\gamma p-1} \\
 &\quad - (a^{-1} + 1)C^2 \varepsilon^{-2\gamma} + a^{-1} C\varepsilon^{-\gamma-1} + a^{-1} C\varepsilon^{-\gamma} = 0.
 \end{aligned}$$

Si on équilibre les termes dominants de (6.75), il vient

$$C \bar{p}_1 \varepsilon^{-\gamma-\gamma p-1} = (1 + a^{-1}) C^2 \varepsilon^{-2\gamma}$$

d'où  $\gamma_p = \gamma - 1$  et  $\bar{p}_1 = (a^{-1} + 1)C$  donc

$$p_1^* \sim \varepsilon^{-1} + (a^{-1} + 1)C \varepsilon^{1-\gamma}.$$

◆ Solutions de l'équation  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\cdot, p_1^*) = 0$ .

Appelons ces solutions  $\bar{\omega}$  et supposons que  $\bar{\omega} \sim \omega^0 \varepsilon^{-\gamma\omega}$  alors on a nécessairement  $f_b(\bar{\omega}) \geq p_1^* \geq f_a(\bar{\omega}) \sim \omega^0 \varepsilon^{-\gamma\omega}$  et donc  $\gamma_\omega \leq 1$ . Cherchons ensuite des équivalents des fonctions  $\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\cdot)$ ,  $\frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\cdot)$ . On a  $\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\text{sh}(2\omega a) - 2\omega a}{\text{sh}^2(\omega a)}$  et

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\text{sh}(2\omega a) - 2\omega a}{\text{sh}^2(\omega a)} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{2\text{ach}(2\omega a) - 2a}{\text{ash}(2\omega a)} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\text{ch}(2\omega a) - 1}{\text{sh}(2\omega a)} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{2\text{ash}(2\omega a)}{2\text{ach}(2\omega a)} = 1. \end{aligned}$$

Si  $\gamma_\omega > 0$ , alors  $\omega \rightarrow \infty$ , donc  $\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) \sim 1$ . Si par contre  $\gamma_\omega = 0$ , alors  $\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) = \frac{1}{\text{th}(\omega^0 a)} - \frac{\omega^0 a}{\text{sh}^2(\omega^0 a)}$ . Et pour finir si  $\gamma_\omega < 0$ , nous développons  $\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega)$  pour  $\omega \rightarrow 0$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{th}(x)} - \frac{x}{\text{sh}^2(x)} &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{4x}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &\sim \frac{2(1 + \frac{x^2}{2})}{2(x + \frac{x^3}{6})} - \frac{4x}{\left(2(x + \frac{x^3}{6})\right)^2} \\ &\sim (1 + \frac{x^2}{2})x^{-1}(1 - \frac{x^2}{6}) - \frac{1}{x(1 + \frac{x^2}{6})^2} \sim \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

Finalement si  $\gamma_\omega < 0$ , alors  $\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) \sim \frac{2}{3}\omega a$ . De façon analogue si  $\gamma_\omega = 1$ , alors  $\frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega) = \frac{\text{sh}(2\omega^0) - 2\omega^0}{2\text{sh}^2(\omega^0)}$ , ou si  $\gamma_\omega < 1$ , alors  $\frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega) \sim \frac{2}{3}\omega^0 \varepsilon^{1-\gamma\omega}$ . Remplaçons à présent les différentes valeurs de  $\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega)$  et  $\frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega)$  dans (6.65) :

- si  $\gamma_\omega = 1$ , l'égalité (6.65) devient

$$\frac{\frac{\bar{\omega}}{\text{th}(\varepsilon\bar{\omega})} - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon\varepsilon^{-1} + \frac{\bar{\omega}}{\text{th}(a\bar{\omega})}} + \frac{\frac{\bar{\omega}}{\text{th}(a\bar{\omega})} - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + \varepsilon\frac{\bar{\omega}}{\text{th}(\varepsilon\bar{\omega})}} \frac{1}{\text{th}(\omega^0)} - \frac{\omega^0}{\text{sh}^2(\omega^0)} = 0.$$

ou encore

$$\frac{\left(\frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)} - 1\right)\varepsilon^{-1}}{1 + \omega^0\varepsilon^{-1}} + \frac{(\omega^0 - 1)\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + \frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)}} \frac{1}{\text{th}(\omega^0)} - \frac{\omega^0}{\text{sh}^2(\omega^0)} = 0.$$

Cette dernière équation nous dit qu'asymptotiquement,  $\omega^0$  est le zéro de la fonction  $\Phi$  définie ci-dessous :

$$\Phi(x) = 1 - \frac{x}{\text{th}(x)} + x(1-x) \left( \frac{1}{\text{th}(x)} - \frac{x}{\text{sh}^2(x)} \right) = 0.$$

$\Phi$  a au moins une solution sur  $(0, 1)$  car  $\Phi$  y est continue et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) > 0$  et  $\Phi(1) < 0$ . En effet trouvons un équivalent de  $\Phi$  au voisinage de zéro. Nous savons que  $\frac{x}{\text{th}(x)} \sim 1 + \frac{x^2}{3}$  et  $\frac{1}{\text{th}(x)} - \frac{x}{\text{sh}^2(x)} \sim \frac{2}{3}x$ , donc  $\Phi(x) \sim -\frac{x^2}{3} + \frac{2x^2(1-x)}{3} = \frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{3} > 0$ . On peut par ailleurs calculer une approximation cette valeur (par exemple avec Maple), on a :  $\omega^0 \sim 0.4920406097$ .

- Pour  $0 < \gamma_\omega < 1$ , l'égalité (6.65) devient

$$\frac{\frac{\bar{\omega}}{\text{th}(\varepsilon\bar{\omega})} - \varepsilon^{-1} - (1 + a^{-1})C\varepsilon^{1-\gamma}}{\varepsilon\varepsilon^{-1} + \frac{\bar{\omega}}{\text{th}(a\bar{\omega})}} + \frac{\frac{\bar{\omega}}{\text{th}(a\bar{\omega})} - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + \varepsilon\frac{\bar{\omega}}{\text{th}(\varepsilon\bar{\omega})}} \frac{2}{3}\bar{\omega}\varepsilon = 0,$$

ou encore en développant on a

$$\frac{\varepsilon^{-1} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \bar{\omega}^2}{3}\right) - \varepsilon^{-1} - (1 + a^{-1})C\varepsilon^{1-\gamma}}{1 + \bar{\omega}} + \frac{\bar{\omega} - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + 1} \frac{2}{3}\bar{\omega}\varepsilon = 0.$$

Puis en remplaçant  $\bar{\omega}$  par sa valeur,

$$\frac{\frac{\omega^0}{3}\varepsilon^{1-2\gamma_\omega} - (1 + a^{-1})C\varepsilon^{1-\gamma}}{1 + \omega^0\varepsilon^{-\gamma_\omega}} + \frac{\omega^0\varepsilon^{-\gamma_\omega} - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + 1} \frac{2}{3}\omega^0\varepsilon^{1-\gamma_\omega} = 0,$$

i.e

$$\frac{\frac{\omega^0}{3}\varepsilon^{1-\gamma_\omega} - (1 + a^{-1})C\varepsilon^{1+\gamma_\omega-\gamma}}{\varepsilon^{\gamma_\omega} + \omega^0} + \frac{\omega^0\varepsilon^{1-\gamma_\omega} - 1}{\varepsilon + 1} \frac{2}{3}\omega^0\varepsilon^{1-\gamma_\omega} = 0.$$

Et donc

$$\frac{\varepsilon^{1-\gamma_\omega}}{3} - \frac{(1 + a^{-1})C}{\omega^0}\varepsilon^{1+\gamma_\omega-\gamma} - \frac{2}{3}\omega^0\varepsilon^{1-\gamma_\omega} = 0.$$

Cette dernière équation n'admet pas de solution.

- Dans le cas où  $\gamma_\omega = 0$ , l'équation (6.65) devient

$$\left( \frac{1}{\text{th}(a\omega^0)} - \frac{a\omega^0}{\text{sh}^2(a\omega^0)} \right) \frac{\frac{\omega^0}{\text{th}(\varepsilon\omega^0)} - \varepsilon^{-1} - (1+a^{-1})C\varepsilon^{1-\gamma}}{\varepsilon\varepsilon^{-1} + \frac{\omega^0}{\text{th}(a\omega^0)}} + \frac{\frac{\omega^0}{\text{th}(a\omega^0)} - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + \varepsilon\frac{\omega^0}{\text{th}(a\omega^0)}} \frac{2\omega^0}{3} \varepsilon = 0.$$

En développant on a :

$$\left( \frac{1}{\text{th}(a\omega^0)} - \frac{a\omega^0}{\text{sh}^2(a\omega^0)} \right) \frac{\varepsilon^{-1} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2(\omega^0)^2}{3} \right) - \varepsilon^{-1} - (1+a^{-1})C\varepsilon^{1-\gamma}}{1 + \frac{\omega^0}{\text{th}(a\omega^0)}} + \frac{\varepsilon\frac{\omega^0}{\text{th}(a\omega^0)} - 1}{1 + \varepsilon} \frac{2\omega^0}{3} \varepsilon = 0,$$

puis

$$\left( \frac{1}{\text{th}(a\omega^0)} - \frac{a\omega^0}{\text{sh}^2(a\omega^0)} \right) \frac{\frac{(\omega^0)^2}{3}\varepsilon - (1+a^{-1})C\varepsilon^{1-\gamma}}{1 + \frac{\omega^0}{\text{th}(a\omega^0)}} - \frac{2\omega^0}{3} \varepsilon = 0$$

qui est impossible à réaliser.

- Enfin dans le cas où  $\gamma_\omega < 0$ , l'équation (6.65) devient

$$\frac{2}{3}a\bar{\omega} \frac{\frac{\bar{\omega}}{\text{th}(\varepsilon\bar{\omega})} - \varepsilon^{-1} - (1+a^{-1})C\varepsilon^{1-\gamma}}{\varepsilon\varepsilon^{-1} + \frac{\bar{\omega}}{\text{th}(a\bar{\omega})}} + \frac{2}{3}\varepsilon\bar{\omega} \frac{\frac{\bar{\omega}}{\text{th}(a\bar{\omega})} - \varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + \frac{\varepsilon\bar{\omega}}{\text{th}(\varepsilon\bar{\omega})}}$$

puis en développant on obtient successivement

$$\frac{2}{3}a\omega^0 \varepsilon^{-\gamma_\omega} \frac{\varepsilon^{-1} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2\omega^0 \varepsilon^{-2\gamma_\omega}}{3} \right) - \varepsilon^{-1} - (1+a^{-1})C\varepsilon^{1-\gamma}}{1 + a^{-1}} + \frac{2}{3}\omega^0 \varepsilon^{1-\gamma_\omega} \frac{\varepsilon a^{-1} - 1}{1 + \varepsilon} = 0,$$

puis

$$\frac{2}{3}a\omega^0 \varepsilon^{-\gamma_\omega} \frac{\frac{\omega^0 \varepsilon^{1-2\gamma_\omega}}{3} - (1+a^{-1})C\varepsilon^{1-\gamma}}{1 + a^{-1}} - \frac{2}{3}\omega^0 \varepsilon^{1-\gamma_\omega} = 0$$

qui n'a pas de solution.

En résumé  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega, p_1^*) = 0$  a une unique solution qui est  $\omega := \bar{\omega} = \omega^0 \varepsilon^{-1}$ .

- ◆ Calcul de  $\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)$ .

Évaluons donc le facteur de convergence pour  $\omega = \bar{\omega}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \rho_1(\bar{\omega}, p_1^*) &= \frac{p_1^* - f_a(\bar{\omega})}{p_1^* + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\bar{\omega})} \frac{p_1^* - f_b(\bar{\omega})}{p_1^* + \varepsilon f_b(\bar{\omega})}, \\ &\sim \frac{\varepsilon^{-1} - \frac{\bar{\omega}}{\text{th}(a\bar{\omega})}}{\varepsilon^{-1} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\bar{\omega}}{\text{th}(a\bar{\omega})}} \frac{\varepsilon^{-1} - \frac{\bar{\omega}}{\text{th}(\varepsilon\bar{\omega})}}{\varepsilon^{-1} + \varepsilon \frac{\bar{\omega}}{\text{th}(\varepsilon\bar{\omega})}}. \end{aligned}$$

Finalement en développant pour  $\varepsilon \ll 1$

$$(6.76) \quad \rho_1(\bar{\omega}, p_1^*) \sim \frac{(1 - \omega^0)}{\omega^0} \left(1 - \frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)}\right) \varepsilon.$$

◆ Calcul de  $\|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ .

On déduit de l'item précédent que  $|\rho_1(\omega_N, p_1^*)| = |\rho_1(0, p_1^*)| = C\varepsilon^{2-\gamma} > |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$  car  $1 < \gamma < 2$ . En conséquence

$$(6.77) \quad \|\rho_1(\cdot, p_1^*)\|_{L^\infty(K)} = |\rho_1(\omega_N, p_1^*)|.$$

◆ Minimum local de  $H$ .

Montrons à présent que  $p_1^*$  est un point minimum local strict de  $H$ . En effet

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega, p_1^*) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(0)}{\varepsilon} + f_b(0) \right)}{\left( p_1^* + \frac{f_a(0)}{\varepsilon} \right)^2 (p_1^* + \varepsilon f_b(0))^2} (p_1^{*2} - f_a(0) f_b(0)) > 0,$$

puisque  $p_1^{*2} - f_a(0) f_b(0) \sim \varepsilon^{-2} - (a\varepsilon)^{-1} > 0$  et

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\omega_N, p_1^*) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} + f_b(\omega_N) \right)}{\left( p_1^* + \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} \right)^2 (p_1^* + \varepsilon f_b(\omega_N))^2} (p_1^{*2} - f_a(\omega_N) f_b(\omega_N)) < 0$$

puisque  $p_1^{*2} - f_a(\omega_N) f_b(\omega_N) \sim \varepsilon^{-2} - C^2 \varepsilon^{-2\gamma} < 0$ . Il existe donc un intervalle autour de  $p_1^*$ ,  $[p_1^* - \eta, p_1^* + \eta]$  sur lequel  $p_1^*$  est un point minimum strict de  $H$ .

Nous obtenons le résultat annoncé en utilisant le lemme (6.16).  $\square$

Dans le théorème précédent, nous n'avons pas regardé le cas limite  $\omega_N \sim \varepsilon^{-1}$ , c'est l'objet du théorème qui suit.

**Théorème 6.21.** *Supposons que  $b = \varepsilon$  et  $\omega_N \sim C\varepsilon^{-1}$ . Alors le problème  $\bar{P}$  admet une unique solution notée  $p_1^*$  et donnée par*

- Si  $C > C_0 \sim 1.220732727$

$$(6.78) \quad p_1^* \sim \varepsilon^{-1} + (1 + a^{-1}) (C - 1) \left( \frac{1}{\text{th}(C)} - \frac{1}{C} \right)$$

et

$$(6.79) \quad \max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p_1^*)| \sim \left(1 - \frac{C}{\text{th}(C)}\right) \frac{(1 - C)}{C} \varepsilon.$$

- Si  $C < C_0$ ,

$$(6.80) \quad p_1^* \sim \varepsilon^{-1} + \bar{p}_1,$$

où  $\bar{p}_1 = -(1 + a^{-1}) \frac{(1 - \omega^0)}{\omega^0} \left(1 - \frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)}\right)$  et  $\omega^0 \sim 0.4920406097$ . On a de plus

$$(6.81) \quad \max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p_1^*)| \sim \frac{\bar{p}_1}{1 + a^{-1}} \varepsilon.$$

**Démonstration.** La démonstration se fait en six étapes

- Résoudre l'équation  $\rho_1(\mathbf{0}, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$  pour en déduire  $p_1^*$ ;
- évaluer la quantité  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$ ;
- Résoudre l'équation  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\cdot, p_1^*) = 0$  pour en déduire  $\bar{\omega}$ ;
- évaluer la quantité  $|\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$ ;
- comparer  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$  à  $|\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$  et étudier les deux cas séparément : cas où  $\rho_1(\omega_N, p_1^*) > |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$ , et cas où  $\rho_1(\omega_N, p_1^*) < |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$ ;
- montrer que  $p_1^*$  est un point minimum local de  $H$  dans les deux cas précédents, puis conclure au moyen des lemmes 6.16 ou 6.17.

Commençons alors par la première étape.

- $\rho_1(\mathbf{0}, \cdot) = \rho_1(\omega_N, \cdot)$ .

Premièrement, nous essayons de trouver les solutions de l'équation  $\rho_1(\mathbf{0}, p) = \rho_1(\omega_N, p)$  ou encore

$$(6.82) \quad \left( -a^{-1} - 1 + \omega_N \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(\varepsilon\omega_N)} \right) \right) p^2 + \left( \omega_N(\varepsilon - 1) \left( \frac{\varepsilon^{-1}}{\text{th}(a\omega_N)} - \frac{a^{-1}}{\text{th}(\varepsilon\omega_N)} \right) \right) p - \omega_N \left( \frac{\omega_N}{\text{th}(a\omega_N)\text{th}(\varepsilon\omega_N)} (a^{-1} + 1) + (a\varepsilon)^{-1} \left( \frac{1}{\text{th}(a\omega_N)} + \frac{\varepsilon}{\text{th}(\varepsilon\omega_N)} \right) \right) = 0.$$

Supposons que  $\omega_N$  et  $p_1^*$  se développent comme  $\omega_N \sim C\varepsilon^{-1}$  et  $p_1^* \sim C_p \varepsilon^{-\gamma_p}$ . En remplaçant dans (6.82) il vient

$$(6.83) \quad \left( -a^{-1} - 1 + C\varepsilon^{-1} + \frac{C}{\text{th}(C)} \right) C_p^2 \varepsilon^{-2\gamma_p} + (\varepsilon - 1) \left( C\varepsilon^{-2} - \frac{Ca^{-1}\varepsilon^{-1}}{\text{th}(C)} \right) C_p \varepsilon^{-\gamma_p} - (a^{-1} - 1) \frac{C^2 \varepsilon^{-2}}{\text{th}(C)} + a^{-1}\varepsilon^{-1} \left( C\varepsilon^{-1} + \frac{C}{\text{th}(C)} \right) = 0.$$

Developpons par rapport (6.83) à  $\varepsilon$ , on obtient

$$C C_p^2 \varepsilon^{-1-2\gamma_p} + \left( \frac{C}{\text{th}(C)} - a^{-1} - 1 \right) C_p^2 \varepsilon^{-2\gamma_p} + C C_p \varepsilon^{-1-\gamma_p} - C C_p \varepsilon^{-2-\gamma_p} - \frac{C a^{-1} C_p}{\text{th}(C)} \varepsilon^{-\gamma_p} + \frac{C a^{-1} C_p}{\text{th}(C)} \varepsilon^{-1-\gamma_p} - (1 + a^{-1}) \frac{C^2 \varepsilon^2}{\text{th}(C)} + a^{-1} C \varepsilon^{-2} + \frac{a^{-1} C}{\text{th}(C)} \varepsilon^{-1} = 0,$$

dont on peut équilibrer les termes dominants. Pour ce faire, il faut  $-1 - 2\gamma_p = -2 - \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_p = 1$  et  $C C_p^2 = C C_p \Leftrightarrow C_p = 1$ . En conclusion

$$p_1^* \sim \varepsilon^{-1}.$$

Regardons le terme suivant du développement en  $\varepsilon$  de  $p_1^*$ , c'est à dire posons  $p_1^* \sim \varepsilon^{-1} + C' \varepsilon^{-\gamma'}$ . L'égalité  $\rho_1(\mathbf{0}, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*)$  nous donne

$$\left( -a^{-1} - 1 + C\varepsilon^{-1} + \frac{C}{\text{th}(C)} \right) \left( \varepsilon^{-2} + 2C' \varepsilon^{-1-\gamma'} \right) + (\varepsilon - 1) \left( C\varepsilon^{-2} - \frac{Ca^{-1}\varepsilon^{-1}}{\text{th}(C)} \right) \left( \varepsilon^{-1} + C' \varepsilon^{-\gamma'} \right) - (a^{-1} - 1) \frac{C^2 \varepsilon^{-2}}{\text{th}(C)} + a^{-1}\varepsilon^{-1} \left( C\varepsilon^{-1} + \frac{C}{\text{th}(C)} \right) = 0.$$

En développant la quantité précédente par rapport à  $\varepsilon$ , il vient le système suivant

$$\begin{aligned}
& C\varepsilon^{-3} + \left( \frac{C}{\text{th}(C)} - a^{-1} - 1 \right) \varepsilon^{-2} + 2CC'\varepsilon^{-2-\gamma'} + \left( \frac{C}{\text{th}(C)} - a^{-1} - 1 \right) 2C'\varepsilon^{1-\gamma'} \\
& + C\varepsilon^{-2} - C\varepsilon^{-3} - \frac{Ca^{-1}}{\text{th}(C)}\varepsilon^{-1} + \frac{Ca^{-1}}{\text{th}(C)}\varepsilon^{-2} - (1+a^{-1})\frac{C^2\varepsilon^{-2}}{\text{th}(C)} + a^{-1}C\varepsilon^{-2} \\
& + \frac{CC'a^{-1}}{\text{th}(C)}\varepsilon^{-1-\gamma'} - \frac{CC'a^{-1}}{\text{th}(C)}\varepsilon^{-\gamma'} + CC'\varepsilon^{-1-\gamma'} - CC'\varepsilon^{-2-\gamma'} + \frac{a^{-1}C}{\text{th}(C)}\varepsilon^{-1} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Pour équilibrer les termes dominants, il faut que  $\gamma' = 0$  et

$$CC' = 1 + a^{-1} - \frac{C}{\text{th}(C)} - C - C\frac{a^{-1}}{\text{th}(C)} + \frac{(1+a^{-1})C^2}{\text{th}(C)} - Ca^{-1}$$

ou encore

$$C' = (1+a^{-1})(C-1)\left(\frac{1}{\text{th}(C)} - \frac{1}{C}\right).$$

- Calcul de  $\rho_1(\omega_N, p_1^*)$ .

Evaluons le facteur de convergence pour cette valeur du paramètre optimal, on a

$$\begin{aligned}
\rho_1(\omega_N, p_1^*) &= \frac{p_1^* - f_a(\omega_N)}{p_1^* + \varepsilon^{-1} f_a(\omega_N)} \frac{p_1^* - f_b(\omega_N)}{p_1^* + \varepsilon f_b(\omega_N)} \\
&= \frac{\varepsilon^{-1} - C\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + C\varepsilon^{-2}} \frac{\varepsilon^{-1} - \frac{C\varepsilon^{-1}}{\text{th}(C)}}{\varepsilon^{-1} + \frac{C}{\text{th}(C)}} \\
(6.84) \quad &= \frac{\varepsilon(1-C)}{C+\varepsilon} \frac{1 - \frac{C}{\text{th}(C)}}{1 + \varepsilon \frac{C}{\text{th}(C)}}.
\end{aligned}$$

Enfinement en développant (6.84) pour  $\varepsilon \ll 1$

$$(6.85) \quad \rho_1(\omega_N, p_1^*) \sim \left( \frac{1-C}{C} \right) \left( 1 - \frac{C}{\text{th}(C)} \right) \varepsilon.$$

- Résolution de l'équation  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\cdot, p_1^*) = 0$ .

Ensuite nous cherchons les solutions de  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\cdot, p_1^*) = 0$  où nous rappelons que  $p_1^* \sim \varepsilon^{-1}$ . Si nous supposons de plus que nous cherchons des solutions de la forme  $\bar{\omega} \sim \omega^0 \varepsilon^{-\gamma_\omega}$ , de (6.65) on déduit  $f_b(\bar{\omega}) \geq p_1^* \sim \varepsilon^{-1} \geq f_a(\bar{\omega}) \sim \omega^0 \varepsilon^{-\gamma_\omega}$ . Ce qui entraîne que  $\gamma_\omega \leq 1$ . et donc  $\bar{\omega} \sim \omega^0 \varepsilon^{-1}$  où  $\omega^0 = 0.4920406097$  (voir démonstration du théorème (6.20)).

- Calcul de  $|\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$ .

Evaluons le facteur de convergence pour  $\omega \sim \bar{\omega}$ , nous avons

$$\begin{aligned}\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*) &= \frac{p_1^* - f_a(\bar{\omega})}{p_1^* + \frac{1}{\varepsilon} f_a(\bar{\omega})} \frac{p_1^* - f_b(\bar{\omega})}{p_1^* + \varepsilon f_b(\bar{\omega})}, \\ &\sim \frac{\varepsilon^{-1} - \omega^0 \varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-1} + \omega^0 \varepsilon^{-2}} \frac{\varepsilon^{-1} - \frac{\omega^0 \varepsilon^{-1}}{\text{th}(\omega^0)}}{\varepsilon^{-1} + \frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)}}, \\ &\sim \left( \frac{1 - \omega^0}{\omega^0} \right) \left( 1 - \frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)} \right) \varepsilon = -0.08199780769 \varepsilon.\end{aligned}$$

- Comparer  $|\rho_1(\omega_N, p_1^*)|$  et  $|\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$ .

Il nous reste donc à comparer les quantités  $\rho_1(0, p_1^*)$  et  $|\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$ . Ce qui revient donc à comparer les constantes  $\left( \frac{1-C}{C} \right) \left( 1 - \frac{C}{\text{th}(C)} \right)$  et  $\left| \left( \frac{1-\omega^0}{\omega^0} \right) \left( 1 - \frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)} \right) \right|$ .

◆ Nous avons  $\rho_1(0, p_1^*) > |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$  dès que  $C > C_0 = 1.220732727$ .

◆ Maintenant regardons le cas  $C < C_0$ , pour lequel

$$\rho_1(0, p_1^*) = \rho_1(\omega_N, p_1^*) < |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|.$$

Faisons l'hypothèse suivante :  $p_1^* \sim \varepsilon^{-1} + \bar{p}_1$  et cherchons un développement asymptotique de la solution de l'équation  $\rho_1(0, p_1^*) = |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|$ . Cette dernière équation s'écrit

$$\begin{aligned}\rho_1(0, p_1^*) &= \frac{p_1^* - a^{-1}}{p_1^* + \varepsilon^{-1} a^{-1}} \frac{p_1^* - \varepsilon^{-1}}{p_1^* + \varepsilon \varepsilon^{-1}}, \\ &\sim \frac{\bar{p}_1 + \varepsilon^{-1} - a^{-1}}{\bar{p}_1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1} a^{-1}} \frac{\bar{p}_1 + \varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1}}{\bar{p}_1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon \varepsilon^{-1}}, \\ &\sim \frac{(\bar{p}_1 - a^{-1}) \varepsilon + 1}{\bar{p}_1 \varepsilon + 1 + a^{-1}} \frac{\bar{p}_1 \varepsilon}{(\bar{p}_1 + 1) \varepsilon + 1}, \\ &\sim \frac{\bar{p}_1}{1 + a^{-1}} \varepsilon.\end{aligned}$$

Nous avons vu à travers le théorème (6.20) que la solution du problème  $\frac{\partial \rho_1}{\partial \omega}(\omega, p_1^*)$  peut se développer comme  $\bar{\omega} \sim \omega^0 \varepsilon^{-1}$  où une approximation de  $\omega^0$  est 0.4920406097. De plus nous avons  $\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*) \sim \left( \frac{1-\omega^0}{\omega^0} \right) \left( 1 - \frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)} \right) \varepsilon$ . D'où

$$\bar{p}_1 \sim -(1 + a^{-1}) \left( \frac{1-\omega^0}{\omega^0} \right) \left( 1 - \frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)} \right) \varepsilon \sim 0.08199780769(1 + a^{-1}).$$

Nous avons dans ce cas

$$\rho_1(\omega_N, p) \sim \frac{1-C}{C} \left( 1 - \frac{C}{\text{th}(C)} \right) \varepsilon < |\rho_1(\bar{\omega}, p_1^*)|.$$

Ainsi

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p)| = -\rho_1(\bar{\omega}, p) = \rho_1(0, p).$$

– Minimum local de  $H$ .

◆ Cas  $C > C_0$ .

Dans ce cas on obtient la première conclusion du théorème en utilisant les résultats de lemme 6.16 et du théorème 6.20.

◆ Cas  $C < C_0$ .

Etudions les valeurs de  $\rho_1(0, p)$  pour tout  $p < p_1^* \sim \varepsilon^{-1}$ . Ce sont des valeurs de  $p$  qui ne sont pas couvertes par le lemme 6.17.

– Considérons  $p$  de la forme  $M\varepsilon^{-m}$ , ( $m < 1$ ). Alors

$$\begin{aligned} |\rho_1(0, p)| &\sim \left| \frac{M\varepsilon^{-m} - a^{-1}}{M\varepsilon^{-m} + (\varepsilon a)^{-1}} \frac{M\varepsilon^{-m} - \varepsilon^{-1}}{M\varepsilon^{-m} + \varepsilon\varepsilon^{-1}} \right|, \\ &\sim \left| \frac{M\varepsilon^{1-m} - a^{-1}\varepsilon}{M\varepsilon^{1-m} + a^{-1}} \frac{M - \varepsilon^{m-1}}{M + \varepsilon^m} \right|, \\ &\sim \left| \frac{M}{a^{-1}} \varepsilon^{1-m} \frac{-\varepsilon^{m-1}}{M} \right| = a \end{aligned}$$

Donc pour  $p \sim M\varepsilon^{-m}$ , ( $m < 1$ ),  $H(p) = \max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p)| > H(p_1^*)$ .

– Considérons à présent  $p$  de la forme  $M\varepsilon^{-1}$ , ( $M < 1$ ). Alors

$$\begin{aligned} |\rho_1(0, p)| &\sim \left| \frac{M\varepsilon^{-1} - a^{-1}}{M\varepsilon^{-1} + (\varepsilon a)^{-1}} \frac{(M-1)\varepsilon^{-1}}{M\varepsilon^{-1} + \varepsilon\varepsilon^{-1}} \right|, \\ &\sim \left| \frac{M - a^{-1}\varepsilon}{M + a^{-1}} \frac{M-1}{M + \varepsilon} \right|, \\ &\sim \left| \frac{M-1}{M + a^{-1}} \right|. \end{aligned}$$

Donc pour  $p$  de la forme  $M\varepsilon^{-1}$ , ( $M < 1$ ),  $H(p) = \max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\rho_1(\omega, p)| > H(p_1^*)$ .

– Considérons pour finir le cas  $p \sim \varepsilon^{-1} < p_1^*$ . Pour cette valeur de  $p$  on a

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(0, p) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(0)}{\varepsilon} + f_b(0) \right)}{\left( p + \frac{f_a(0)}{\varepsilon} \right)^2 (p + \varepsilon f_b(0))^2} (p^2 - f_a(0) f_b(0)) > 0$$

puisque  $p^2 - f_a(0) f_b(0) \sim \varepsilon^{-2} - (a\varepsilon)^{-1} > 0$  et

$$-\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\bar{\omega}(p), p) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(\bar{\omega})}{\varepsilon} + f_b(\bar{\omega}) \right)}{\left( p + \frac{f_a(\bar{\omega})}{\varepsilon} \right)^2 (p + \varepsilon f_b(\bar{\omega}))^2} (f_a(\bar{\omega}) f_b(\bar{\omega}) - p^2) \frac{d\bar{\omega}}{dp} < 0$$

puisque d'une part  $f_a(\bar{\omega}) f_b(\bar{\omega}) - p^2 \sim \omega^0 \varepsilon^{-1} \frac{\omega^0}{\text{th}(\omega^0)} \varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-2} < 0$ , et d'autre part

$$\frac{d\bar{\omega}}{dp} = \frac{\frac{d\bar{\omega}}{d\varepsilon}}{\frac{dp}{d\varepsilon}} \sim \frac{-\omega^0 \varepsilon^{-2}}{-\varepsilon^{-2}} \sim \omega^0 > 0.$$

On en déduit  $\rho_1(0, p) < \rho_1(0, p_1^*) = -\rho_1(\bar{\omega}(p_1^*), p_1^*) < -\rho_1(\bar{\omega}(p), p)$ . Donc  $H(p) = -\rho_1(\bar{\omega}(p), p) > -\rho_1(\bar{\omega}(p_1^*), p_1^*)$ .

Il reste à présent prouver que  $p_1^*$  est un point minimum local strict de  $H$ . En effet, on a  $\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(0, p_1^*) > 0 > -\frac{\partial \rho_1}{\partial p}(\bar{\omega}, p_1^*)$ . Il existe donc un intervalle autour de  $p_1^*$ ,  $[p_1^* - \eta, p_1^* + \eta]$  sur lequel  $p_1^*$  est un point minimum strict de  $H$ . Nous concluons en utilisant le lemme (6.17).  $\square$

## 6.2.2 Conditions de Robin à deux paramètres

Nous reprenons l'algorithme (5.27) et envisageons d'analyser sa convergence au moyen de séries de Fourier. Cette étude conduit naturellement à la définition du facteur de convergence

$$(6.86) \quad \rho_2(\omega_k, p, q) := \frac{(p - \frac{\omega_k}{\text{th}(\omega_k b)})(q - \frac{\omega_k}{\text{th}(\omega_k a)})}{(p + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\omega_k}{\text{th}(\omega_k a)})(q + \varepsilon \frac{\omega_k}{\text{th}(\omega_k b)})},$$

où par souci de lisibilité nous avons renommé les anciennes variables  $p$  et  $q$  dans (5.27) par  $p$  et  $q$ . Nous pouvons déjà constater que la question de trouver les plages de paramètres pour que l'algorithme (5.27) converge est compliquée. Ce qui fait l'objet du résultat suivant :

**Théorème 6.22** ((Convergence)). *L' algorithme (5.27) converge pour tout couple  $(p, q) \in \mathcal{P}_{ad}$  où  $\mathcal{P}_{ad} = \mathcal{P}_{ad}^1 \cup \mathcal{P}_{ad}^2$  avec*

$$\mathcal{P}_{ad}^1 = \{q - \varepsilon p > 0\} \cap \{y_N + (q - \varepsilon p)(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{a}{2}y_N) + apq \geq 0\},$$

$$\mathcal{P}_{ad}^2 = \{q - \varepsilon p < 0\} \cap \{x_N + (q - \varepsilon p)(\frac{b}{2\varepsilon}x_N - \frac{1}{2}) + bpq \geq 0\},$$

où

$$x_N = \frac{\omega_N}{\text{th}(a\omega_N)} \quad \text{et} \quad y_N = \frac{\omega_N}{\text{th}(b\omega_N)}.$$

*Démonstration.*

Pour assurer la convergence, nous devons garantir que :

$$|\rho_2(\omega, p, q)| < 1, \quad \forall \omega \in [0, \omega_N].$$

Ce qui se traduit par les deux inégalités suivantes :

$$(6.87) \quad -(pth(\omega a) + \frac{\omega}{\varepsilon})(qth(\omega b) + \varepsilon\omega) < (pth(\omega b) - \omega)(qth(\omega a) - \omega)$$

et

$$(6.88) \quad (pth(\omega b) - \omega)(qth(\omega a) - \omega) < (pth(\omega a) + \frac{\omega}{\varepsilon})(qth(\omega b) + \varepsilon\omega)$$

L'inégalité (6.88) est réalisée  $\forall \omega > 0$ . Quant à l'inégalité (6.87), elle équivaut à :

$$(6.89) \quad 0 \leq 2 \frac{\omega^2}{\text{th}(\omega a) \text{th}(\omega b)} + 2pq + \frac{\omega}{\text{th}(\omega b)}(\varepsilon p - q) + \frac{\omega}{\text{th}(\omega a)}\left(\frac{q}{\varepsilon} - p\right)$$

Posons

$$x := \frac{a\omega}{\text{th}(\omega a)}, \quad y := \frac{b\omega}{\text{th}(\omega b)}.$$

Vérifier l'inégalité (6.89) revient à chercher l'ensemble  $\mathcal{P}_{ad}$  des couples  $(p, q) > 0$  tels que  $\forall x, y \in \mathcal{D} = [1, ax_N] \times [1, by_N]$  nous ayons :

$$(6.90) \quad f(x, y, p, q) := xy + (q - \varepsilon p)\left(\frac{b}{2\varepsilon}x - \frac{a}{2}y\right) + abpq > 0$$

Remarquons que si  $q = \varepsilon p$ , alors  $(p, q) \in \mathcal{P}_{ad}$ . La zone ainsi définie par (6.90) est entre les deux branches d'une hyperbole. On a donc deux cas :

1.  $q - \varepsilon p > 0$  :

On trace l'hyperbole.

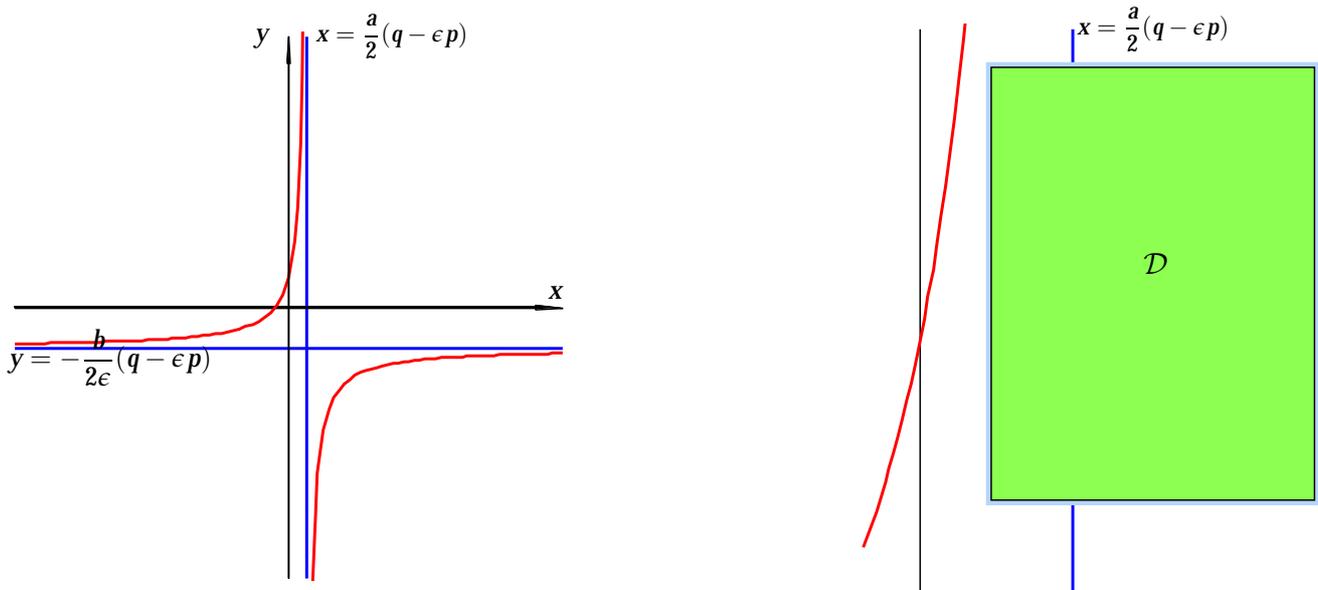


FIGURE 6.12: Cas 1.1

Une condition nécessaire pour que  $f(x, y, p, q)$  soit positif est que le rectangle  $\mathcal{D}$  soit droite de l'hyperbole, et pour cela il faut et il suffit que  $f(1, by_N, p, q) \geq 0$ .

$$\text{Si } q - \varepsilon p > 0, (p, q) \in \mathcal{P}_{ad} \Leftrightarrow y_N + (q - \varepsilon p)\left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{a}{2}y_N\right) + apq > 0.$$

2.  $q - \varepsilon p < 0$  :

On trace l'hyperbole.

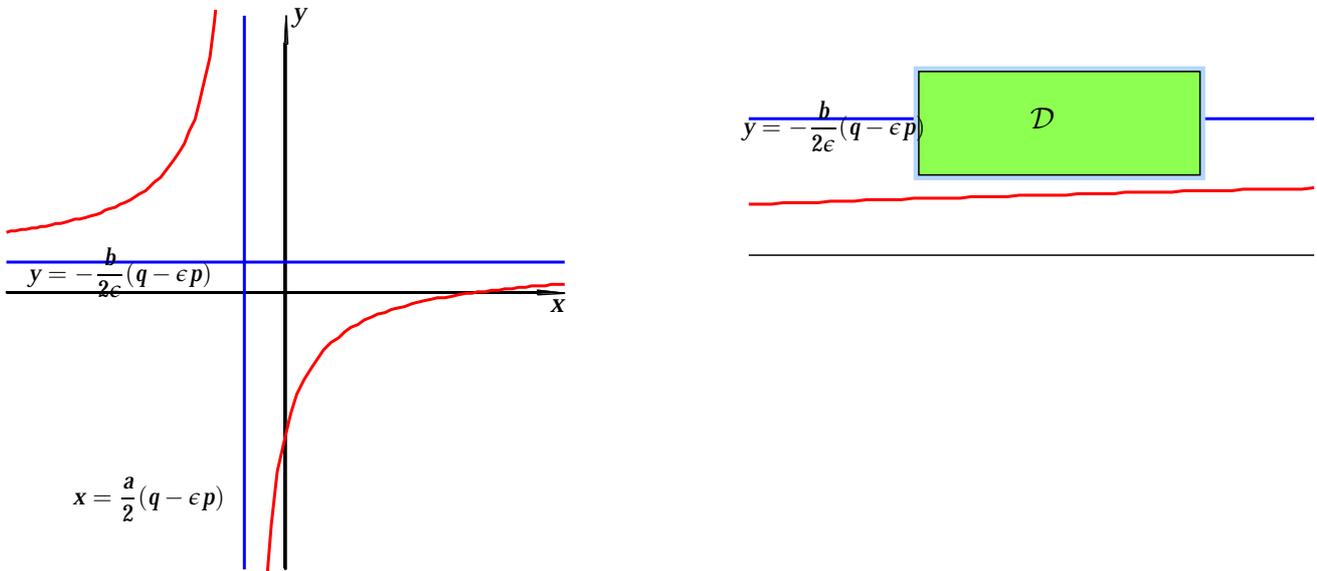


FIGURE 6.13: Cas 1.2

Une condition nécessaire pour que  $f(x, y, p, q)$  soit positif est que le rectangle  $\mathcal{D}$  soit au-dessus de l'hyperbole, et pour cela il faut et il suffit que  $f(ax_N, 1, p, q) > 0$ .

Si  $q - \epsilon p < 0$ ,  $(p, q) \in \mathcal{P}_{ad} \Leftrightarrow x_N + (q - \epsilon p)\left(\frac{b}{2\epsilon}x_N - \frac{1}{2}\right) + bpq > 0$ .

En résumé,  $\mathcal{P}_{ad} = \mathcal{P}_{ad}^1 \cup \mathcal{P}_{ad}^2$  avec

$$\mathcal{P}_{ad}^1 = \{q - \epsilon p > 0\} \cap \{y_N + (q - \epsilon p)\left(\frac{1}{2\epsilon} - \frac{a}{2}y_N\right) + apq > 0\}$$

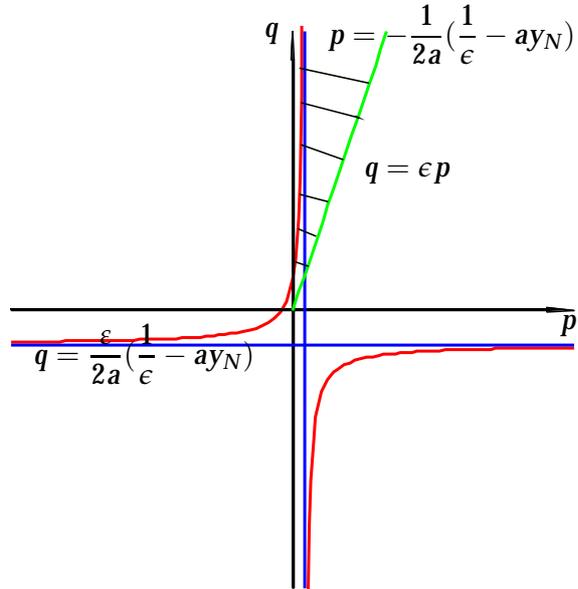
$$\mathcal{P}_{ad}^2 = \{q - \epsilon p < 0\} \cap \{x_N + (q - \epsilon p)\left(\frac{b}{2\epsilon}x_N - \frac{1}{2}\right) + bpq > 0\}$$

Etudions  $\mathcal{P}_{ad}$ .

$$\frac{1}{\epsilon} - ay_N > 0$$

$$\mathcal{P}_{ad}^1 = \{\epsilon p < q\}$$

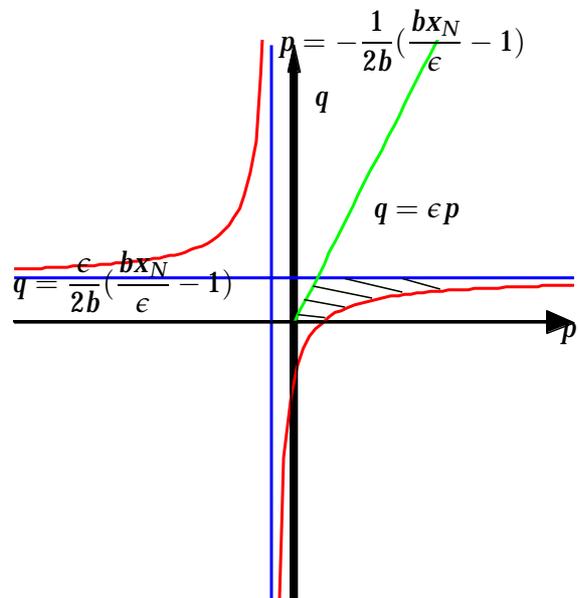
$\frac{1}{\epsilon} - ay_N < 0$   
la région est quadrillée sur le dessin.



$$\frac{bx_N}{\epsilon} - 1 < 0,$$

$$\mathcal{P}_{ad}^2 = \{\epsilon p > q\}$$

$\frac{bx_N}{\epsilon} - 1 > 0,$   
la région est quadrillée sur le dessin.



□

La figure 6.14 montre clairement les limites des paramètres optimisés obtenus dans [19, 22]. Nous y avons tracé les différents facteurs de convergence évalués aux paramètres optimisés i.e

- $\max_{\omega} \rho_{DN}$  où  $\theta = \theta_{DN}^*$ ;
- $\max_{\omega} \rho_{ND}$  où  $\theta = \theta_{ND}^*$ ;

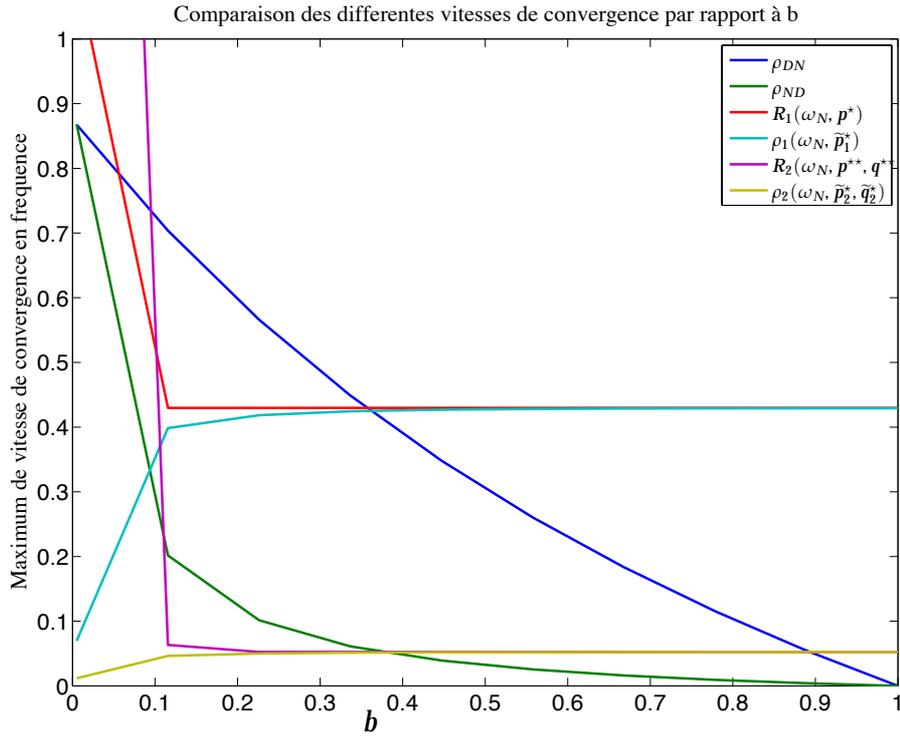
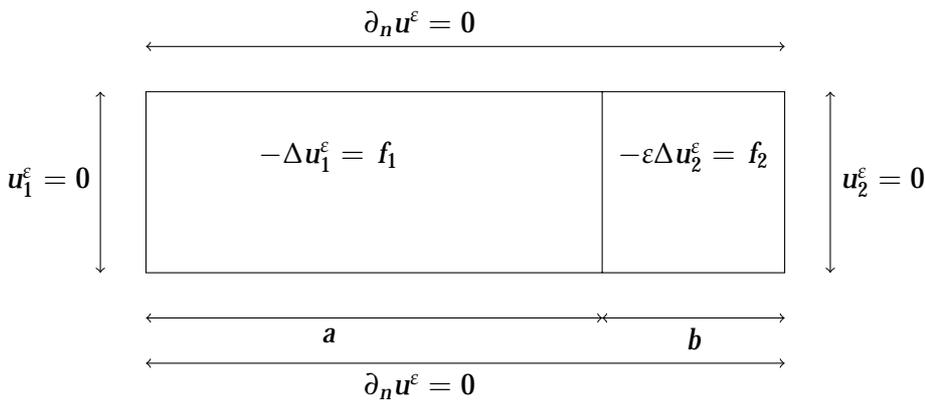


FIGURE 6.14: Comparaison des différentes vitesses de convergence par rapport à  $b$  pour  $\varepsilon = 0.07$   $h = 1/200$

### 6.3 Validation numérique

Tous les résultats numériques exposés ici ont été effectués sur le problème modèle suivant :



avec comme solution de référence la solution suivante :

$$(6.91) \quad u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) = (x+a) \cos\left(\frac{\pi}{L} y\right) & \forall (x, y) \in ]-a, 0] \times ]0, L] \\ u_2(x, y) = \left[ -\frac{x^2}{b^2} \left(a + \frac{b}{\varepsilon}\right) + a + \frac{x}{\varepsilon} \right] \cos\left(\frac{\pi}{L} y\right) & \forall (x, y) \in ]0, b] \times ]0, L]. \end{cases}$$

Prenons le cas du carré unité pour se fixer les idées :  $\begin{cases} a = 0.5 \\ b = 0.5 \\ L = 1. \end{cases}$

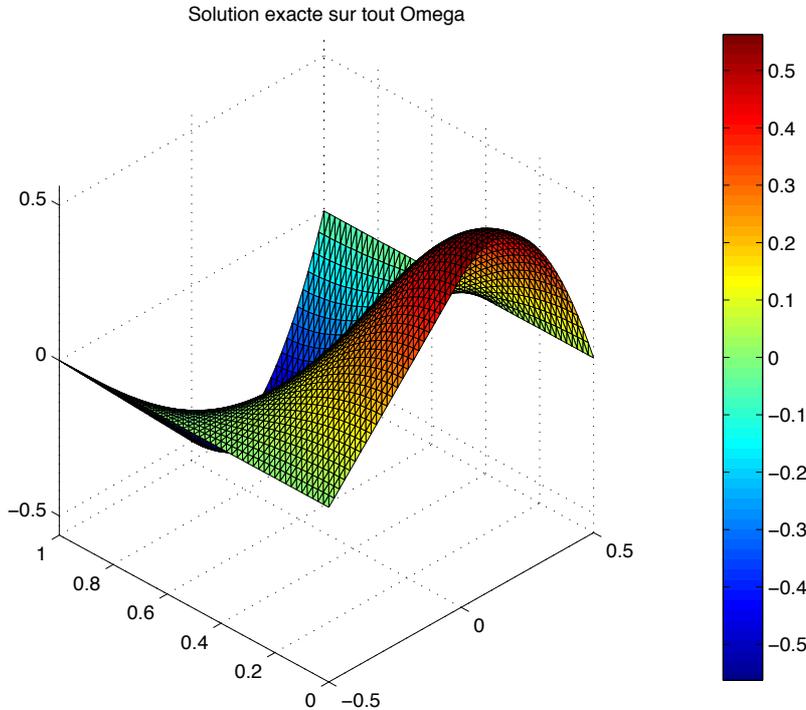


FIGURE 6.15: Solution de référence

De plus tous les résultats ont été testés à la fois sur un **maillage régulier** mais aussi sur un **maillage quelconque**. La vitesse de convergence est la même. Nous avons utilisé une méthode d'éléments finis  $P^1$  Lagrange comme solveur mono-domaine. Pour commencer définissons la norme de l'erreur que nous utiliserons à chaque itération  $n$ .

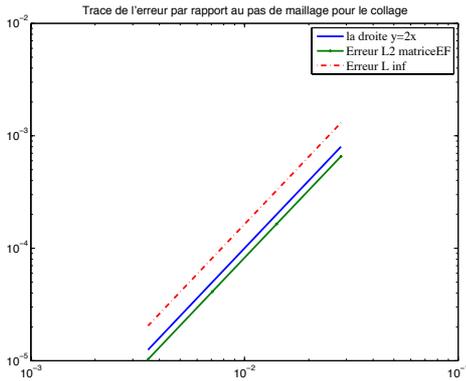
$$\|E_{\Omega}(n)\| = \max(\|E_{\Omega_1}(n)\|, \|E_{\Omega_2}(n)\|)$$

où

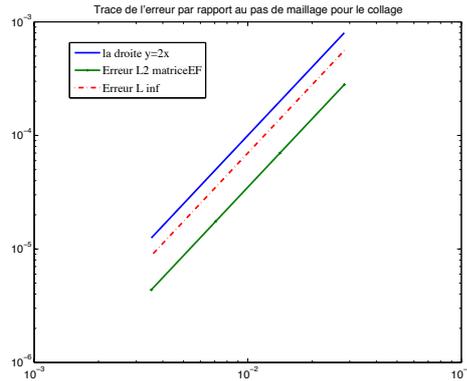
$$E_{\Omega_i}(n) = \|u_{i,h}^n - U\|_{L^\infty},$$

avec  $U$  est une solution de référence discrète et  $u_{i,h}^n$  est la solution calculée à l'itération  $n$ . La figure 6.16 valide la solution de référence utilisée. En effet elle exhibe la performance de la méthode des éléments finis utilisée pour discrétiser les algorithmes (5.18) et (5.27). Nous y traçons les erreurs en norme  $L^2(\Omega)$  par rapport au maillage. Nous précisons que les paramètres de Robin ( $p, q$ ) dans (5.27) ont été calculés par un algorithme d'optimisation de type Nelder-Mead [2]. Avant de lancer les simulations numériques, il nous reste à donner des précisions sur l'initialisation des différents algorithmes ; le choix des fonctions  $u_i^0, i = 1, 2$  sur l'interface  $I$ . En effet, nous effectuons deux choix :

- Le premier choix naturel est de prendre pour donnée initiale un vecteur aléatoire de façon à y faire figurer toutes les fréquences possibles ;



(a) Robin à un paramètre



(b) Robin à deux paramètres

FIGURE 6.16: Solution obtenue avec la condition de Robin.

- dans notre cas, un autre choix s'avère intéressant, il s'agit d'utiliser les résultats déjà obtenus dans le chapitre. En effet, nous y avons construit des problèmes limites pour les problèmes raide, de collage, et de soudage, qui sont de bonnes approximations à  $\varepsilon$  petit et dont les solutions sont de bons candidats pour une donnée initiale.

De plus nous précisons que dans les conditions d'interface, nous avons utilisé les paramètres optimisés suivants :

- $\theta = \tau_{DN}^*$  pour l'algorithme 5.7,  $\theta = \tau_{ND}^*$  pour l'algorithme 5.8;
- $p = p_1^*$  pour l'algorithme 5.18;
- $p = p_2^*$  et  $q = q_2^*$  pour l'algorithme 5.27 où  $p_2^*$ ,  $q_2^*$  sont calculés par un algorithme de Nelder-Mead avec Matlab.

### 6.3.1 Décomposition de domaines symétrique ( $a = b$ )

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas d'une décomposition symétrique. Nous essayons de valider toute l'étude théorique montrant le comportement des différents algorithmes par rapport à  $h$  et  $\varepsilon$ . Les différents algorithmes ont été initialisés soit par un vecteur aléatoire, soit par la solution du problème limite du problème raide. Dans un premier temps examinons le cas de coefficient de diffusion continue, i.e  $\varepsilon = 1$ .

#### Cas de matériaux homogènes $\varepsilon = 1$

Dans le tableau 6.2, nous simulons la performance des différents algorithmes par rapport au pas de maillage. En effet on compte le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de la taille du maillage  $h$ . Les tests ont été effectués sur des maillages conformes. Le tableau 6.2 est en accord avec les prévisions théoriques d'une part et d'autre part le fait d'initialiser les algorithmes par la solution du système  $P^0$ ,  $Q^0$  semble diviser le nombre d'itérations par deux.

#### Cas de matériaux hétérogènes $\varepsilon \neq 1$

Il serait intéressant de comparer les résultats obtenus avec les paramètres optimisés dans [22] à  $p_1^*$ . Pour cela nous comparons les paramètres optimaux théoriques et numériques. Sur la figure 6.17, nous comptons le nombre d'itérations par rapport à une plage de paramètres incluant les différents paramètres optimisés. Ensuite nous évaluons la performance des algorithmes (5.7), (5.7),(5.18),(5.27)

	Dirichlet-Neumann	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
<b>h</b>	algorithmes initialises par de nombres aléatoires compris entre $-1$ et $1$ .			
1/50	2	2	29	15
1/100	2	2	41	17
1/200	2	2	58	21
1/400	2	2	83	25
	algorithmes initialises par $P^0$ et $Q^0$			
1/50	2	2	14	7
1/1000	2	2	20	8
1/200	2	2	28	9
1/400	2	2	40	10

TABLE 6.2: Nombre d'itérations (Gauss-Seidel) pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de la taille du maillage  $h$ .

par rapport au pas de maillage pour  $\varepsilon = 0.1$  dans le tableau 6.3 puis par rapport à  $\varepsilon$  dans le tableau 6.4. Les tableaux 6.3 et 6.4 confirment les calculs théoriques et de plus l'initialisation des algorithmes

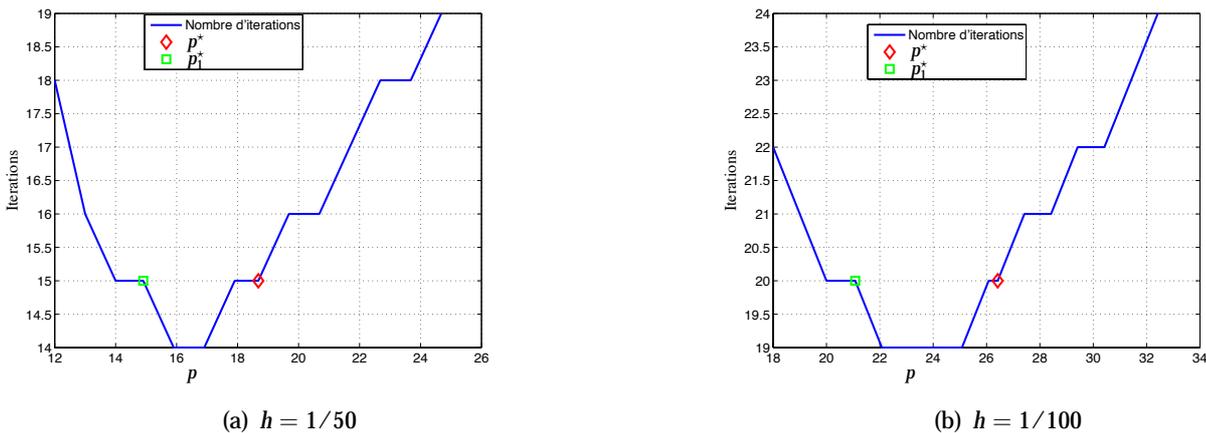


FIGURE 6.17: Nombre d' itérations pour atteindre une erreur de  $1e-6$  par rapport au parametre optimisé de Robin  $\varepsilon = 0.1$

par la solution du système  $P^0$  et  $Q^0$  semble diviser le nombre d'itérations par deux.

### 6.3.2 Décomposition de domaines non symétrique ( $a \neq b$ ) et étude de la couche mince

Nous nous intéressons à présent au comportement des différents algorithmes par rapport à la dissymétrie de la décomposition de domaines. Plaçons nous pour commencer dans le cas illustré par le tableau 5.4 et la figure 5.4. Nous illustrons ce cas à travers le tableau 6.5 et la figure 6.18. Il s'agit donc de regarder le comportement des algorithmes quand nous faisons décroître  $b$  en laissant fixés les autres paramètres. Les méthodes de Dirichlet-Neumann convergent mais lentement tandis que les algorithmes avec condition de Robin convergent de plus en plus vite quand  $b$  décroît. Sur les figures, la légende est décrite de la façon suivante :

- Robin<sub>1</sub> désigne l'algorithme avec conditions de Robin à un paramètre ;
- Robin<sub>2</sub> désigne l'algorithme avec conditions de Robin à deux paramètres.

	Dirichlet-Neumann	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
<b>h</b>	algorithmes initialises par de nombres aléatoires compris entre $-1$ et $1$ .			
1/50	2	2	15	6
1/100	2	2	20	6
1/200	2	2	27	7
1/400	2	2	36	6
	algorithmes initialises par $P^0$ et $Q^0$			
1/50	2	2	9	3
1/100	2	2	11	3
1/200	2	2	14	4
1/400	2	2	18	3

TABLE 6.3: Nombre d'itérations (Gauss-Seidel) pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de la taille du maillage  $h$ .

	Dirichlet-Neumann	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
<b><math>\varepsilon</math></b>	algorithmes initialises par de nombres aléatoires compris entre $-1$ et $1$ .			
1	2	2	58	21
1/2	2	2	56	14
1/4	2	2	43	9
1/8	2	2	30	7
1/16	2	2	20	6
	algorithmes initialises par $P^0$ et $Q^0$			
1	2	2	28	9
1/2	2	2	26	6
1/4	2	2	20	5
1/8	2	2	14	4
1/16	2	2	12	3

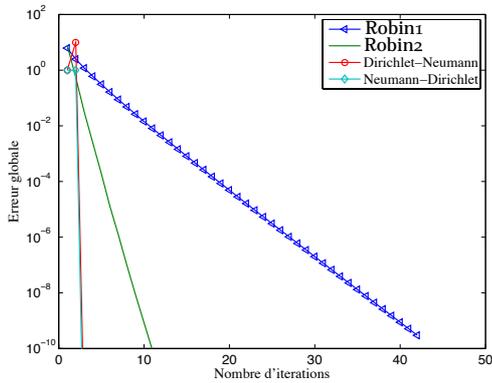
TABLE 6.4: Nombre d'itérations pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $\varepsilon$  ( $h = 1/200$ )

	Dirichlet-Neumann	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
<b><math>b</math></b>	algorithmes initialises par de nombres aléatoires compris entre $-1$ et $1$ .			
$5.10^{-1}$	16	5	23	5
$10^{-1}$	60	10	18	5
$2.10^{-2}$	128	24	10	4
$10^{-2}$	142	41	7	4
$5.10^{-3}$	111	74	5	4

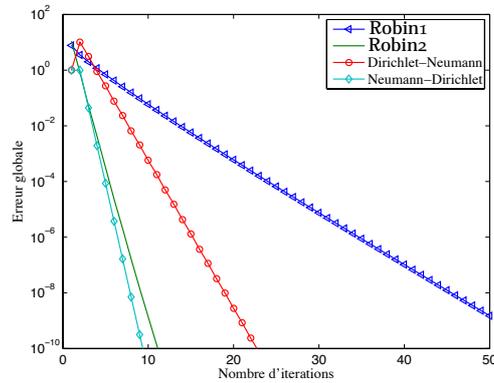
TABLE 6.5: Nombre d'itérations pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $b$  ( $\varepsilon = 5.10^{-2}$ ,  $h = 1/200$ )

Enfin sur le tableau 6.6 et la figure 6.19 nous étudions le comportement asymptotique des différents algorithmes dans le cas où  $b = \varepsilon$ . L'algorithme de Dirichlet-Neumann converge très lentement alors que l'algorithme de Neumann-Dirichlet a une meilleure convergence quand nous faisons décroître  $\varepsilon$ .

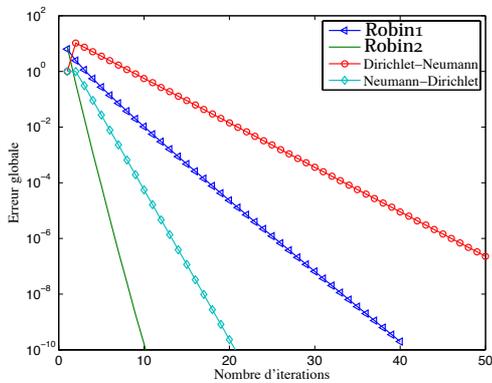
Les algorithmes avec des conditions de Robin convergent de plus en plus vite quand  $\varepsilon$  décroît.



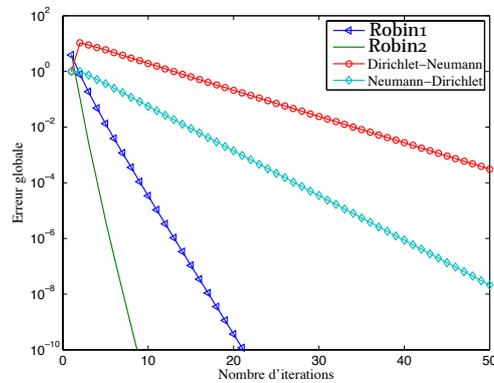
(a)  $a = 0.5, b = 0.5$



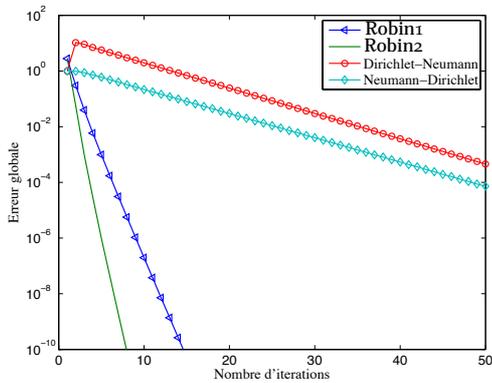
(b)  $a = 1, b = 0.5$



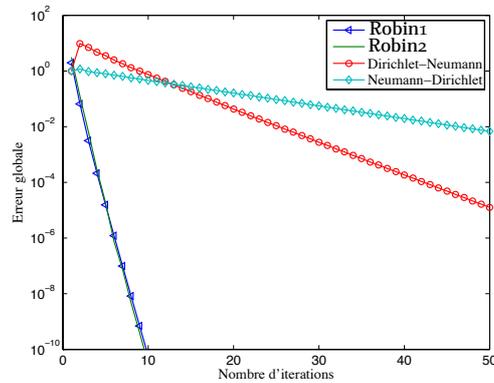
(c)  $a = 1, b = 0.1$



(d)  $a = 1, b = 0.02$



(e)  $a = 1, b = 0.01$



(f)  $a = 1, b = 0.005$

FIGURE 6.18: Erreur globale au cours des itérations pour  $\varepsilon = 0.1, h = 1/200$

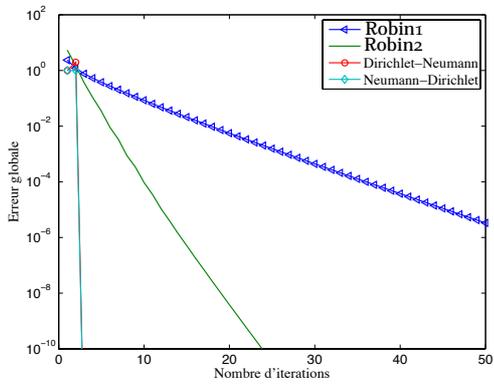
## 6.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons construit des algorithmes rapides, efficaces et s'adaptant parfaitement au type d'hétérogénéité que l'on rencontre dans les problèmes de collage. Pour cela nous avons étendu les études faites dans [19, 22]. En effet dans [19, 22], les auteurs définissent des conditions d'interface

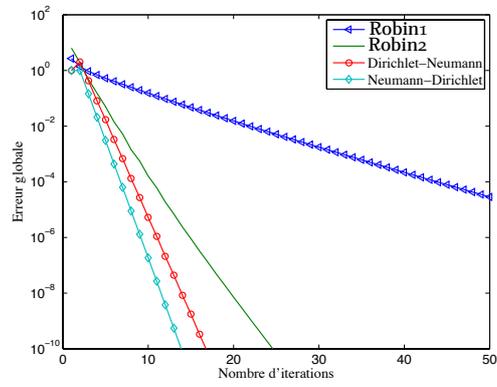
	Dirichlet-Neumann	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
$b = \varepsilon$	algorithmes initialises par de nombres aléatoires compris entre $-1$ et $1$ .			
$5.10^{-1}$	11	9	66	14
$10^{-1}$	45	13	25	6
$2.10^{-2}$	229	14	7	4
$10^{-2}$	419	14	5	3
$5.10^{-3}$	526	14	3	3
	algorithmes initialises par (3.43),(3.44)			
$5.10^{-1}$	9	7	24	5
$10^{-1}$	22	8	11	4
$2.10^{-2}$	126	8	5	3
$10^{-2}$	232	8	3	2
$5.10^{-3}$	381	8	2	2

TABLE 6.6: Nombre d'itérations pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $\varepsilon(h = 1/200)$

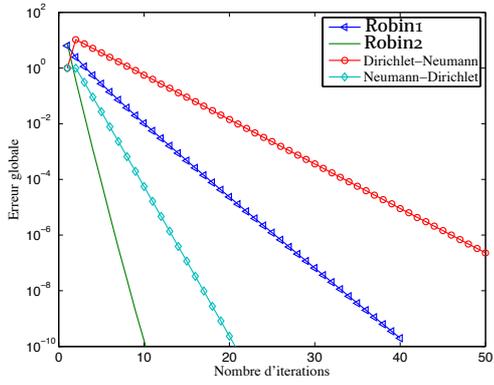
souples et faciles à implémenter car elles dépendent de paramètres qui sont explicitement fournis. De plus ils montrent que l'on peut adapter ces conditions d'interface aux discontinuités que l'on rencontre dans les problèmes raides. Nous avons donc étendu cette étude au cas des problèmes de collage. Globalement les algorithmes de Dirichlet-Neumann ont une convergence nettement meilleure aux autres algorithmes dans le cas  $a = b$  et cette convergence se détériore progressivement quand  $b$  décroît. Les algorithmes avec des conditions de Robin restent stables et convergent de plus en plus vite quand  $b$  décroît. Ces résultats sont encourageants et méritent d'être approfondis à travers l'étude éventuelle d'un raffinement de maillage localisé dans la couche.



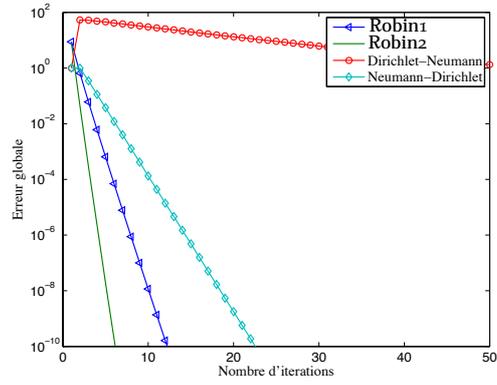
(a)  $a = 0.5, b = \epsilon = 0.5$



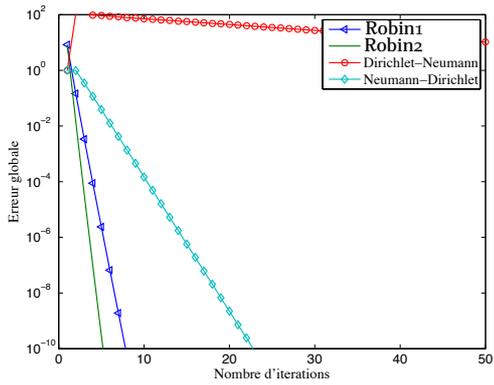
(b)  $a = 1, b = \epsilon = 0.5$



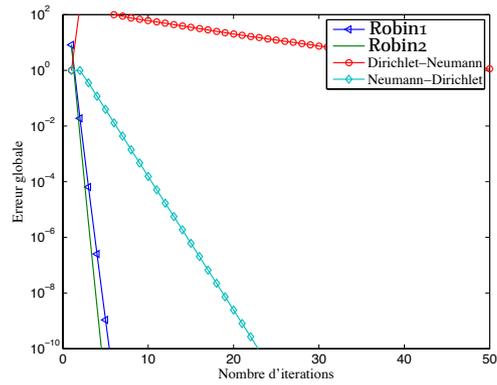
(c)  $a = 1, b = \epsilon = 0.1$



(d)  $a = 1, b = \epsilon = 0.02$



(e)  $a = 1, b = \epsilon = 0.01$



(f)  $a = 1, b = \epsilon = 0.005$

FIGURE 6.19: Erreur globale au cours des itérations pour  $h = 1/200$ .

## Chapitre 7

# Méthodes de décomposition de domaines pour le problème de revêtement

### Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au second type de problème déjà annoncé antérieurement, à savoir celui de revêtement. Nous ferons une étude analogue à celle effectuée pour le problème de collage. Cette étude ira de l'introduction des algorithmes itératifs avec des conditions d'interface de type Dirichlet, Neumann ou Robin à leur étude asymptotique et numérique. Faisons un petit rappel du problème de revêtement. Étant donnée la géométrie représentée sur la figure 7.1, nous cherchons

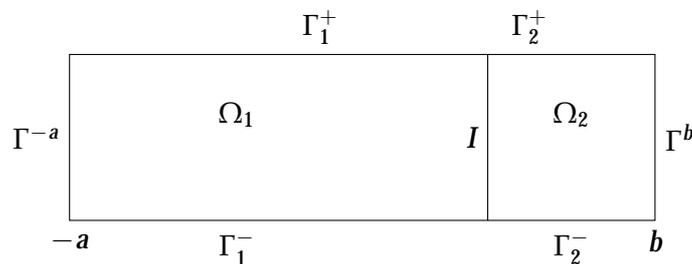


FIGURE 7.1: Géométrie considérée

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_2 & \text{dans } \Omega_2, \end{cases}$$

solution de :

$$(7.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\nu \nabla u) = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma^{-a} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma^{-a} \end{cases}$$

avec

$$(7.2) \quad v(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \Omega_1 \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{pour } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

et

$$(7.3) \quad f = \begin{cases} f_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ f_2 & \text{dans } \Omega_2. \end{cases}$$

est une fonction donnée. Ce problème est équivalent au problème de transmission suivant

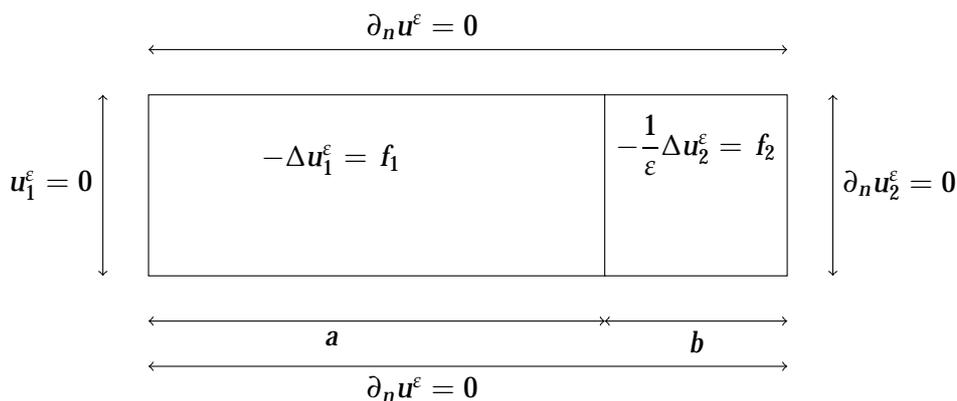


FIGURE 7.2: Problème de transmission

avec les conditions de transmission suivantes sur  $I$  (en  $x_1 = 0$ )

$$(7.4) \quad \begin{cases} u_1 & = u_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Comme dans le chapitre précédent, nous allons associer au problème de transmission défini par la figure (7.2) différents algorithmes itératifs, puis nous analyserons leur convergence. Afin de pouvoir tenir compte de la géométrie, nous ferons une analyse de convergence au moyen de séries de Fourier en  $x_2$ .

## 7.1 Algorithmes de Dirichlet-Neumann

Nous pouvons associer à (7.1),(7.2),(7.3) la famille d'algorithmes itératifs Neumann-Dirichlet suivante. A  $\theta$  donné, nous cherchons les 2 suites  $u_i^n$  définies comme suit :

$$(7.5) \quad ND \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} & = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -\frac{1}{\varepsilon} \Delta u_2^{n+1} & = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial x_1} & = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_1} & \text{sur } \Gamma^0 \\ u_2^{n+1} & = \theta u_1^n + (1 - \theta) u_2^n & \text{sur } \Gamma^0, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites héritées de (7.1). Pour plus de détails sur ces méthodes, se référer à [4],[5]. Nous allons analyser la convergence de (7.5), pour cela nous travaillerons une fois de plus sur l'erreur, c'est à dire sur les suites  $e_i^n = u_i^n - u_i$  qui sont solutions de (7.5) avec les conditions aux limites héritées de (7.1) où  $f_1 = 0$  et  $f_2 = 0$ . Nous pouvons alors développer les  $e_i^n$  sur les fonctions propres de  $-\frac{d^2}{dx_2^2}$  sur  $(0, L)$  avec des conditions aux limites de Neumann. Nous cherchons donc les  $e_i^n$  comme :

$$e_i^n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \varphi_{i,k}^n(x_1) \cos(\omega_k x_2)$$

et nous trouvons

$$(7.6) \quad e_1^n(x_1, x_2) = \alpha_{1,0}^n(x_1 + a) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{1,k}^n \text{sh}(\omega_k(x_1 + a)) \cos(\omega_k x_2)$$

$$(7.7) \quad e_2^n(x_1, x_2) = \alpha_{2,0}^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{2,k}^n \text{ch}(\omega_k(b - x_1)) \cos(\omega_k x_2)$$

où  $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le lemme qui suit calcule les coefficients  $\alpha_{i,k}^n$ ,  $i = 1, 2$ .

**Lemme 7.1.** Les coefficients  $\alpha_{j,k}^n$ ,  $\alpha_{j,k}^n$  sont donnés par la relation suivante :

Pour tout  $k > 0$  :

$$(7.8) \quad \alpha_{j,k}^n = \Lambda_{ND}(\omega_k) \alpha_{j,k}^{n-1}$$

où

$$(7.9) \quad \Lambda_{ND}(\omega_k) = 1 - \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \text{th}(\omega_k a) \text{th}(\omega_k b) \right].$$

Pour  $k = 0$  :

$$\forall n \quad \alpha_{1,0}^n = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{2,0}^n = \Lambda_{ND}(0) \alpha_{1,0}^{n-1}$$

*Démonstration.*

Il nous reste alors à utiliser les 2 conditions d'interface. Ces 2 conditions se traduisent par :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0}^{n+1} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \omega_k \alpha_{1,k}^{n+1} \text{ch}(\omega_k a) \cos(\omega_k x_2) &= -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{k=\infty} \omega_k \alpha_{2,k}^{n+1} \text{sh}(\omega_k b) \cos(\omega_k x_2), \\ \alpha_{2,0}^{n+1} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{2,k}^{n+1} \text{ch}(\omega_k b) \cos(\omega_k x_2) &= \theta \left[ a \alpha_{1,0}^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{1,k}^n \text{sh}(\omega_k a) \cos(\omega_k x_2) \right] \\ &+ (1 - \theta) \left[ \alpha_{2,0}^n + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{2,k}^n \text{ch}(\omega_k b) \cos(\omega_k x_2) \right]. \end{aligned}$$

Si bien que l'on a :

$$\begin{cases} \alpha_{2,0}^{n+1} = \theta a \alpha_{1,0}^n + (1 - \theta) \alpha_{2,0}^n & \begin{cases} \alpha_{2,k}^{n+1} \text{ch}(\omega_k b) &= \theta \alpha_{1,k}^n \text{sh}(\omega_k a) + (1 - \theta) \alpha_{2,k}^n \text{ch}(\omega_k b) \\ \omega_k \text{ch}(\omega_k a) \alpha_{1,k}^{n+1} &= -\frac{1}{\varepsilon} \omega_k \text{sh}(\omega_k b) \alpha_{2,k}^{n+1}. \end{cases} \\ \alpha_{1,0}^{n+1} = 0, \end{cases}$$

Et donc

$$\forall n \geq 1 \quad \alpha_{1,0}^n = 0,$$

$$\alpha_{2,0}^{n+1} = (1 - \theta)\alpha_{2,0}^n,$$

$$\alpha_{2,k}^{n+1} \text{ch}(\omega_k \mathbf{b}) = \left[ -\frac{\theta \text{sh}(\omega_k \mathbf{a}) \text{sh}(\omega_k \mathbf{b})}{\varepsilon \text{ch}(\omega_k \mathbf{a})} + (1 - \theta) \text{ch}(\omega_k \mathbf{b}) \right] \alpha_{2,k}^n.$$

Ce qui s'écrit finalement :

$$\alpha_{2,k}^{n+1} = \Lambda_{ND}(\omega_k) \alpha_{2,k}^n$$

avec

$$\Lambda_{ND}(\omega_k) = 1 - \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \text{th}(\omega_k \mathbf{b}) \text{th}(\omega_k \mathbf{a}) \right].$$

La quantité  $\Lambda_{ND}$  ainsi obtenue est appelée facteur de convergence de l'algorithme (7.5).  $\square$

Le théorème suivant nous fixe les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles la famille d'algorithmes (7.5) converge.

**Théorème 7.2 (Convergence).** *La famille d'algorithmes (7.5) converge pour tout  $\theta < \frac{2}{1 + \frac{1}{\varepsilon}}$ .*

*Démonstration.*

La démonstration se fait en deux étapes

1. Tout d'abord nous déterminerons les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles le facteur de convergence  $\Lambda_{ND}$  est en module plus petit que 1 pour tout  $\omega_k$ .
2. Ensuite nous montrerons que si  $\Lambda_{ND}$  est en module plus petit que 1 pour tout  $\omega_k$ , alors l'algorithme (7.5) converge .

Posons :

$$f(\omega_k) := \text{th}(a\omega_k)\text{th}(b\omega_k), \quad \omega_k \in [0 + \infty).$$

Nous pouvons écrire

$$|\Lambda_{ND}| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} f(\omega_k) \right] < 2.$$

Or  $0 \leq f \leq 1$ , alors

$$\begin{aligned} \sup_{\omega_k \in [0, \infty]} |\Lambda_{ND}(\omega_k)| < 1 &\Leftrightarrow \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right] < 2 \\ &\Leftrightarrow \theta < \frac{2}{1 + \frac{1}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à montrer que si le facteur de convergence  $\Lambda_{ND}$  est borné par 1 pour tout  $\omega_k$ , alors l' algorithme (7.5) converge. Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée aux suites de fonctions  $f_n(k) = \alpha_{i,k}^0 \Lambda_{ND}^n(\omega_k) \text{sh}(\omega_k(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}))$  et  $g_n(k) = \alpha_{i,k}^0 \Lambda_{ND}^n(\omega_k) \text{ch}(\omega_k(\mathbf{b} - \mathbf{x}_1))$ .  $\square$

Comme dans le cas du collage, nous introduirons un paramètre  $N > 0$ , et travaillerons sur la variable  $\omega \in [0, \omega_N]$  avec :

$$\omega_N := \frac{N\pi}{L}.$$

En gardant en tête que le théorème (7.2) nous donne un intervalle pour le paramètre  $\theta$ , nous optimiserons ce choix de paramètre. Nous le choisirons de façon à minimiser le maximum du facteur de convergence  $\Lambda_{ND}$  sur la gamme de fréquence qui nous intéresse. C'est à dire que nous cherchons à résoudre

$$(7.10) \quad \min_{\theta > 0} \max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\Lambda_{ND}|.$$

**Proposition 7.3** (paramètres optimaux de Neumann-Dirichlet). *Le problème (7.10) admet une unique solution qui est donnée par  $\theta = \theta_{ND}^* := \frac{1}{1 + \frac{f(\omega_N)}{2\varepsilon}}$ , où  $f(\omega) = th(\omega a)th(\omega b)$ . De plus pour  $\theta = \lambda_{ND}^*$ ,*

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\Lambda_{ND}| = \frac{f(\omega_N)}{2\varepsilon + f(\omega_N)}.$$

*Démonstration.* Le taux de convergence Neumann-Dirichlet vaut :

$$\Lambda_{ND}(\omega_k) = 1 - \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} f(\omega_k) \right], \quad \forall \omega_k \in [0, \omega_N] \quad \text{et} \quad \theta > 0.$$

Calculons sa dérivée :

$$\Lambda'_{ND}(\omega_k) = -\frac{\theta}{\varepsilon} f'(\omega_k).$$

$f$  est une fonction croissante, donc  $\Lambda_{ND}$  est décroissante. Nous avons donc :

$$\max_{\omega_k \in [0, \omega_N]} |\Lambda_{ND}(\omega_k)| = \max\{|\Lambda_{ND}(0)|, |\Lambda_{ND}(\omega_N)|\}$$

soit

$$(7.11) \quad \max_{\omega_k \in [0, \omega_N]} |\Lambda_{ND}| = \max\left\{ |1 - \theta|, \left| 1 - \theta \left[ 1 + \frac{1}{\varepsilon} f(\omega_N) \right] \right| \right\}$$

Il nous reste donc à minimiser la quantité (7.11) par rapport à  $\theta$ . Pour  $\theta = 0$ , on a  $\Lambda_{ND} \equiv 1$ . Lorsque  $\theta$  croît à partir de 0,  $\Lambda_{ND}(0)$  et  $\Lambda_{ND}(\omega_N)$  décroissent et  $\max_{\omega} |\Lambda_{ND}(\omega_k)| = \Lambda_{ND}(0)$  qui décroît jusqu'à ce que  $\Lambda_{ND}(\omega_N)$  s'annule puis devient négatif. Puis  $\Lambda_{ND}(0) = -\Lambda_{ND}(\omega_N)$  si c'est possible. Ensuite le  $\max_{\omega_k} |\Lambda_{ND}(\omega_k)|$  en module croît. L'égalité  $\Lambda_{ND}(0) = -\Lambda_{ND}(\omega_N)$  est réalisée pour

$$\theta = \lambda_{ND}^* = \frac{1}{1 + \frac{f(\omega_N)}{2\varepsilon}}.$$

De plus pour  $\theta = \lambda_{ND}^*$ ,

$$\max_{\omega_k \in [0, \omega_N]} |\Lambda_{ND}| = \frac{f(\omega_N)}{2\varepsilon + f(\omega_N)}.$$

Le  $\max_{\omega_k} |\Lambda_{ND}(\omega_k)|$  est donc minimal pour  $\theta = \lambda^*$ . □

Nous pouvons ainsi en déduire le

**Corollaire 7.4. (Convergence.)**

Pour  $\theta = \lambda_{ND}^*$ , l'algorithme 7.5 converge.

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que pour  $\theta = \lambda_{ND}^*$  :

$$\max_{w_k \in [0, \omega_N]} |\Lambda_{ND}| = \frac{f(\omega_N)}{2\varepsilon + f(\omega_N)} < 1.$$

□

Nous pouvons à présent nous intéresser au comportement asymptotique de l'algorithme 7.5 quand nos paramètres  $\omega_N$  et  $\varepsilon$  deviennent respectivement grands et petits. Ceci fait l'objet du

**Théorème 7.5.** Pour  $\omega_N \gg 1$  et  $\varepsilon \ll 1$ , nous avons les comportements asymptotiques suivants

$$\lambda_{ND}^* \sim 2\varepsilon \quad \text{et} \quad \max_{w_k \in [0, \omega_N]} |\Lambda_{ND}| \sim 1 - 2\varepsilon.$$

*Démonstration.*

Pour  $\omega_N \gg 1$ , nous avons  $f(\omega_N) \sim 1$ , donc  $\lambda_{ND}^* = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + f(\omega_N)} \sim 2\varepsilon$  et

$$\max_{w_k \in [0, \omega_N]} |\Lambda_{ND}| = \frac{f(\omega_N)}{f(\omega_N) + 2\varepsilon} \sim 1 - 2\varepsilon.$$

□

D'après théorème 7.5, pour  $\omega_N$  grand et  $\varepsilon$  petit la convergence est d'une part très lente et d'autre part indépendante du maillage.

**7.2 Algorithmes de Schwarz avec des conditions de Robin**

Dans cette partie, nous envisageons des conditions de Robin générales à l'interface. Soit donc la famille d'algorithmes suivante :

$$(7.12) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} & = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ -\frac{1}{\varepsilon} \Delta u_2^{n+1} & = f_2 & \text{dans } \Omega_2, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_1 \right) u_1^{n+1} & = \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_1 \right) u_2^n & \text{sur } I, \\ \left( -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \right) u_2^{n+1} & = \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \right) u_1^n & \text{sur } I, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites héritées de (7.1) où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux réels positifs donnés. Nous étudierons deux types de conditions de Robin [22, 19].

**7.2.1 Conditions de Robin à un paramètre**

Dans cette sous-section, nous regarderons le cas de la condition de Robin à un paramètre (appelé *1sided* dans [22, 19] ) qui consiste à poser  $\alpha_1 = \frac{1}{\varepsilon} p$  et  $\alpha_2 = p$  avec  $p > 0$ . Ce choix nous permet de

définir la famille d'algorithmes suivants :

$$(7.13) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} & = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ -\frac{1}{\varepsilon} \Delta u_2^{n+1} & = f_2 & \text{dans } \Omega_2, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon} p \right) u_1^{n+1} & = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + p \right) u_2^n, & \text{sur } I, \\ \left( -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} + p \right) u_2^{n+1} & = \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + p \right) u_1^n & \text{sur } \Gamma^0, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites héritées de (7.1). Nous nous proposons donc d'étudier la convergence de l'algorithme 7.13. Nous allons analyser sa convergence. Nous travaillerons non pas sur les suites  $u_i^n$  mais sur l'erreur, c'est à dire  $e_i^n = u_i^n - u_i$  qui sont solutions de (7.13) et des conditions aux limites héritées de (7.1) mais avec  $f_1 = 0$  et  $f_2 = 0$ . Nous trouvons les formules (7.6),(7.7). Et grâce aux conditions de transmission de Robin, les coefficients  $\alpha_{i,k}^n$ ,  $i = 1, 2$  se calculent par la relation suivante :

$$(7.14) \quad \alpha_{j,k}^{n+1} = \Lambda_1(\omega_k, p) \alpha_{j,k}^{n-1}, \quad j = 1, 2$$

où

$$(7.15) \quad \Lambda_1(\omega_k, p) = \frac{(p - \omega_k \text{th}(\omega_k b)) \left( p - \frac{\omega_k}{\text{th}(\omega_k a)} \right)}{\left( p + \varepsilon \frac{\omega_k}{\text{th}(\omega_k a)} \right) \left( p + \frac{\omega_k}{\varepsilon} \text{th}(\omega_k b) \right)}$$

avec  $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$ . En effet les 2 conditions d'interface de Robin se traduisent par :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0}^{n+1} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} ap \right) + & \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{1,k}^{n+1} \left( \omega_k \text{ch}(\omega a) + \frac{1}{\varepsilon} p \text{sh}(\omega_k a) \right) \cos(\omega_k x_2) \\ = & \\ \frac{1}{\varepsilon} \alpha_{2,0}^n + & \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{2,k}^n \left( -\omega_k \text{sh}(\omega_k b) + p \text{ch}(\omega_k b) \right) \cos(\omega_k x_2), \\ \alpha_{2,0}^{n+1} p + & \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{2,k}^{n+1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \omega_k \text{sh}(\omega_k b) + p \text{ch}(\omega_k b) \right) \cos(\omega_k x_2) \\ = & \\ \alpha_{1,0}^{n+1} (-1 + ap) + & \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_{1,k}^n \left( -\omega_k \text{ch}(\omega_k a) + p \text{sh}(\omega_k a) \right) \cos(\omega_k x_2); \end{aligned}$$

Si bien que l'on a :

$$\begin{cases} \alpha_{1,0}^{n+1} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} ap \right) & = \frac{1}{\varepsilon} \alpha_{2,0}^n \\ \alpha_{2,0}^{n+1} p & = \alpha_{1,0}^{n+1} (-1 + ap), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{1,k}^{n+1} \left( \omega_k \text{ch}(\omega a) + \frac{1}{\varepsilon} \text{psh}(\omega a) \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \alpha_{2,k}^n (-\omega \text{sh}(\omega b) + \text{pch}(\omega b)) \\ \alpha_{2,k}^{n+1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \omega_k \text{sh}(\omega_k b) + \text{pch}(\omega b) \right) &= \alpha_{1,k}^n (-\omega \text{ch}(\omega_k a) + \text{psh}(\omega a)). \end{cases}$$

Et donc

$$\alpha_{1,0}^{n+1} = \frac{ap-1}{ap+\varepsilon} \alpha_{1,0}^{n-1},$$

$$\alpha_{1,k}^{n+1} = \frac{(p - \omega_k \text{th}(\omega_k b)) \left( p - \frac{\omega_k}{\text{th}(\omega_k a)} \right)}{\left( p + \varepsilon \frac{\omega_k}{\text{th}(\omega_k a)} \right) \left( p + \frac{\omega_k}{\varepsilon} \text{th}(\omega_k b) \right)} \alpha_{1,k}^{n-1}.$$

Les lignes qui suivent sont consacrées à l'étude du facteur de convergence de Robin (7.13). Comme il est plus facile d'optimiser sur une variable continue, dans toute la suite nous remplacerons la variable discrète  $\omega_k$  par la variable continue  $\omega$  et noterons par  $K$  l'intervalle  $[0, w_N]$ .

Définissons la nouvelle fonction

$$g_a(\omega) = \omega \text{th}(a\omega).$$

Pour  $a > 0$ ,  $g_a$  est une fonction croissante de  $\omega$ . Le facteur de convergence se réécrit comme

$$\Lambda_1(\omega, p) = \frac{p - f_a(\omega)}{p + \varepsilon f_a(\omega)} \cdot \frac{p - g_b(\omega)}{p + \frac{1}{\varepsilon} g_b(\omega)}; \quad R_1(\omega, p) = |\Lambda_1(\omega, p)|$$

où la fonction  $f_a$  est définie dans (6.19). En tant que fonction de  $\omega$ ,  $\Lambda_1$  est défini sur  $K$ . Posons de nouveau

$$\delta^* = \inf_{p \in \mathbb{R}_+^*} \sup_{\omega \in K} R_1(\omega, p),$$

et le problème d'optimisation :

$$(\mathcal{P}) \quad \text{trouver } (\omega^*, \tilde{p}_1^*) \text{ tels que } R_1(\omega^*, \tilde{p}_1^*) = \delta^*.$$

On notera  $H(p) = \sup_K R_1(\omega, p)$ .

**Lemme 7.6.** *Le problème d'optimisation  $\mathcal{P}$  est équivalent au problème de min-max suivant :*

$$\bar{\mathcal{P}} \quad \min_{p \in ]0, f_a(\omega_N)]} \left( \max_{\omega \in [0, \omega_N]} R_1(\omega, p) \right).$$

De plus nous avons pour tous  $a, b, \varepsilon$  positifs,  $\delta^* < 1$ .

*Démonstration.* Nous avons pour tout  $\omega$  dans  $K$ ,

$$f_a(\omega) \geq g_b(\omega)$$

car  $\frac{g_b(\omega)}{f_a(\omega)} = \text{th}(\omega a) \text{th}(\omega) b < 1$ . La dérivée partielle de  $\Lambda_1$  par rapport  $p$  est :

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial p}(\omega, p) = \varepsilon \frac{(1 + \varepsilon)(g_b(\omega) + \varepsilon f_a(\omega))(p^2 - f_a(\omega)g_b(\omega))}{[\varepsilon p^2 + p(g_b(\omega) + \varepsilon^2 f_a(\omega)) + \varepsilon g_b(\omega) f_a(\omega)]^2}.$$

Ce qui montre qu'aussi longtemps que  $p > f_a(\omega_N)$ , nous aurons  $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial p}(\omega, p) > 0$  uniformément sur  $K$  car pour tout  $\omega \in K$  nous aurons  $p^2 > f_a(\omega)g_b(\omega)$ . Nous pouvons donc restreindre l'intervalle de recherche de  $p$  dans le problème  $\mathcal{P}$  à l'intervalle  $(0, f_a(\omega_N)]$ .

Choisissons maintenant  $p = f_a(\omega_N)$ . Nous avons alors pour tout  $\omega \in K$ ,  $f_a(\omega_N) > f_a(\omega) \geq g_b(\omega)$  et

$$\delta^* \leq H(f_a(\omega_N)) = \sup_{\omega} \Lambda_1(\omega, f_a(\omega_N)).$$

Or pour tout  $\omega$  dans le compact  $K$ ,

$$\Lambda_1(\omega, f_a(\omega_N)) = \frac{f_a(\omega_N) - g_b(\omega)}{f_a(\omega_N) + \frac{1}{\varepsilon} g_b(\omega)} \cdot \frac{f_a(\omega_N) - f_a(\omega)}{f_a(\omega_N) + \varepsilon f_a(\omega)} < 1.$$

Donc  $\delta^* < 1$ . □

### Etude du problème d'optimisation $\tilde{\mathcal{P}}$

Elle est parallèle à celle du collage, mais les résultats sont assez différents. En effet nous établissons tout d'abord un résultat d'existence, puis un résultat d'équioscillation. Ensuite nous en déduisons un résultat d'unicité basé sur une interprétation géométrique du problème d'optimisation. Pour finir nous complétons tout ceci par des résultats asymptotiques prouvant l'existence et l'unicité de la solution du problème d'optimisation  $\tilde{\mathcal{P}}$  d'une part et nous donnons explicitement sa valeur d'autre part. Ces résultats sont établis dans les cas suivants :

- $\omega_N \gg 1$ , avec  $a, b, \varepsilon$  fixés ;
- $b = \varepsilon \ll 1$  avec  $a, \omega_N$  fixés.

Nous commençons donc par le

**Théorème 7.7. (Existence)** *Le problème  $\tilde{\mathcal{P}}$  a au moins une solution.*

*Démonstration.* La démonstration est la même que dans le cas du collage (Théorème 6.10). □

Nous allons maintenant établir un théorème d'équioscillation, et nous commençons par deux lemmes techniques.

**Lemme 7.8.** *Soit  $(\omega^*, \tilde{p}_1^*)$  une solution optimale de  $\tilde{\mathcal{P}}$ . Alors*

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial p}(\omega^*, \tilde{p}_1^*) \neq 0.$$

*Démonstration.*

Remarquons d'abord que  $\omega^*$  est, soit un point intérieur, auquel cas  $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\omega^*, \tilde{p}_1^*) = 0$ , soit une des extrémités de l'intervalle. Calculons

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial p}(\omega, p) = \frac{(1 + \varepsilon)(f_a(\omega) + \frac{g_b(\omega)}{\varepsilon})}{(p + \varepsilon f_a(\omega))^2 (p + \frac{g_b(\omega)}{\varepsilon})^2} (p^2 - f_a(\omega)g_b(\omega))$$

et vérifions par l'absurde que  $(\tilde{p}_1^{*2} - f_a(\omega^*)g_b(\omega^*)) \neq 0$ .

Supposons l'inverse, nous pourrions alors calculer

$$\delta = -\Lambda_1(\tilde{p}_1^*, \omega^*) = \varepsilon \left( \frac{\sqrt{f_a(\omega^*)} - \sqrt{g_b(\omega^*)}}{\sqrt{g_b(\omega^*)} + \varepsilon \sqrt{f_a(\omega^*)}} \right)^2.$$

Calculons la dérivée de  $\Lambda_1$  par rapport à  $\omega$  :

$$(7.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\omega, p) &= p \frac{1 + \varepsilon}{(p + \frac{g_b(\omega)}{\varepsilon})(p + \varepsilon f_a(\omega))} D(\omega, p), \\ D(\omega, p) &= - \left( \frac{p - g_b(\omega)}{p + \varepsilon f_a(\omega)} \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{p - f_a(\omega)}{f_b(\omega)} \frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega) \right). \end{aligned}$$

Calculons  $D(\omega^*, \tilde{p}_1^*)$ .

$$D(\omega^*, \tilde{p}_1^*) = \sqrt{g_b(\omega^*) f_a(\omega^*)} \frac{\sqrt{f_a(\omega^*)} - \sqrt{g_b(\omega^*)}}{\sqrt{g_b(\omega^*)} + \varepsilon \sqrt{f_a(\omega^*)}} \left( -\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega^*)}{f_a(\omega^*)} + \frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega^*)}{f_b(\omega^*)} \right)$$

mais

$$\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) = \frac{1}{\omega} - \frac{a}{ch\omega a sh\omega a}, \quad \frac{\partial g_b}{\partial \omega}(\omega) = \frac{1}{\omega} + bch\omega b sh\omega b,$$

si bien que

$$-\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega^*)}{f_a(\omega^*)} + \frac{\partial f_b}{\partial \omega}(\omega^*)}{g_b(\omega^*)} = bch\omega b sh\omega b + \frac{a}{ch\omega a sh\omega a} > 0$$

Nous avons donc, pour  $\omega^* \neq 0$ ,

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\omega^*, \tilde{p}_1^*) > 0.$$

Ceci nous amène déjà à une contradiction si  $\omega^*$  est un point intérieur, puisque cette dérivée devrait s'annuler. Si  $\omega^* = \omega_N$ , nous concluons comme au lemme 6.11. Si  $\omega^* = 0$  et  $\tilde{p}_1^* = \sqrt{f_a(\omega^*) g_b(\omega^*)}$ ,

faisons un calcul asymptotique pour calculer  $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\omega^*, \tilde{p}_1^*)$  :

$$\tilde{p}_1^* \sim \sqrt{\frac{b}{a}} \omega^*, \quad f_a(\omega^*) \sim \frac{1}{a}, \quad g_b(\omega^*) \sim b (\omega^*)^2,$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\omega^*, \tilde{p}_1^*) &\sim -\varepsilon \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{a}} - \sqrt{b\omega^*}}{\varepsilon \sqrt{\frac{1}{a}} - \sqrt{b\omega^*}} \right)^2 \\ &\sim -\frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1 - \sqrt{ab}\omega^*}{1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{ab}}\omega^*} \right)^2 \\ &\sim -\frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - 2\sqrt{ab} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \omega^* \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\omega^*, \tilde{p}_1^*) &\sim \sqrt{\frac{b}{a}} \omega^* \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{a}} - \sqrt{b\omega^*}}{\varepsilon \sqrt{\frac{1}{a}} - \sqrt{b\omega^*}} \right) \left( b^2 \omega^* + \frac{1}{\omega^*} \right) \\ &\sim \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{b}{a}} \left( 1 - \sqrt{ab} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \omega^* \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial \omega^*, \tilde{p}_1^*} &\sim \sqrt{\frac{b}{a}} \omega^* (1 + \varepsilon) \frac{\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{b}{a}}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \omega^* + \frac{\varepsilon}{a}\right) \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \omega^* + \frac{b}{\varepsilon} (\omega^*)^2\right)} \\ &\sim \sqrt{ab} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon^2} > 0.\end{aligned}$$

On peut alors conclure comme au lemme 6.11. □

Le lemme 7.8 s'applique maintenant, et nous obtenons le théorème 7.9 qui se démontre comme le théorème 6.13.

**Théorème 7.9.** . Si  $\tilde{p}_1^*$  réalise l'infimum, alors il existe au moins deux points  $\omega_1^*, \omega_2^*$  dans  $K$  tels que

$$R_1(\omega_1^*, \tilde{p}_1^*) = R_1(\omega_2^*, \tilde{p}_1^*) = H(\tilde{p}_1^*) = \delta^*.$$

Définissons maintenant les trajectoires

$$X = \frac{g_b(\omega)}{p}; \quad Y = \frac{f_a(\omega)}{p}.$$

**Lemme 7.10.** 1. Le long d'une trajectoire,  $X$  et  $Y$  sont des fonctions positives et croissantes de  $\omega$ .

2. La trajectoire est convexe.

3. Deux trajectoires correspondant à des paramètres  $p$  distincts ne se coupent pas.

*Démonstration.* La première assertion vient de ce que  $f_a$  et  $g_b$  sont des fonctions croissantes de  $\omega$ , la deuxième du calcul suivant. Notons  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \frac{x}{\text{th}(x)}$ , et  $G(x) = x \text{th}(x)$ . On a

alors  $X = \frac{G(\omega b)}{pb}$  et  $Y = \frac{F(\omega a)}{pa}$ . Calculons

$$X'Y'' - X''Y' = \frac{1}{p^2} (a G'(\omega b) F'''(\omega a) - b G''(\omega b) F'(\omega a)).$$

La trajectoire est convexe si et seulement si cette quantité est positive, si et seulement si pour tout  $\omega$ ,

$$a G'(\omega b) F'''(\omega a) - b G''(\omega b) F'(\omega a) > 0.$$

Par l'étude du collage, nous savons que  $\omega b F'(\omega a) F'''(\omega b) - \omega a F'(\omega b) F'''(\omega a) < 0$ . Puisque les fonctions  $F$  et  $G$  sont croissantes, l'inégalité précédente est donc réalisée si

$$\frac{F'''}{F'} - \frac{G''}{G'} > 0.$$

ce qui est réalisé si  $\frac{F'}{G'}$  est une fonction croissante. Calculons

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{\tanh^2(x)} \frac{\sinh(2x) - 2x}{\sinh(2x) + 2x}.$$

Un calcul maple nous montre que cette fonction est croissante de 0 à 1. La troisième assertion vient du fait que  $f_a$  est une fonction injective de  $\omega$ . □

Nous nous plaçons maintenant dans le plan  $(X, Y)$ . Pour chaque  $\delta$ , l'ensemble des  $(X, Y)$  tels que  $R_1(\omega, p) \leq \delta$  est l'ensemble  $\mathcal{E}$  décrit dans le collage. Si l'on trace les hyperboles pour  $\delta = \delta^*$ , une trajectoire optimale doit partir de l'axe des  $X$ , se diriger vers le nord-est en restant entre les hyperboles, et atterrir sur  $D_2$ . D'après le théorème précédent, la trajectoire doit toucher les hyperboles au moins deux fois, et si ce n'est pas en une des extrémités, la trajectoire doit être tangente à l'hyperbole en ce point. Ce qui traduit le fait que le maximum en  $\omega$  de  $\Lambda_1$  est soit en l'une des extrémités de l'intervalle, soit en un point où la dérivée s'annule. Jusqu'ici, nous n'avons pu établir le nombre de zéros intérieurs de la dérivée de  $\Lambda_1(\cdot, p)$  (7.16).

**Théorème 7.11.** *Le problème d'optimisation  $\tilde{\mathcal{P}}$  a une et une seule solution.*

*Démonstration.* Considérons d'abord  $\mathcal{T}_1$  la trajectoire partant de  $P$ . Soit elle va directement à  $F$  (cas de la figure 7.3), soit elle est tangente à  $\mathcal{H}_2^S$  et rejoint la droite  $D_2$  avant  $F$ . Si une autre trajectoire optimale part à droite de  $F$ , elle doit être tangente à  $\mathcal{H}_2^S$ . Elle ne peut coexister avec  $\mathcal{T}_1$ , car dans le premier cas elle serait empêchée de rejoindre la droite  $D_2$  par  $\mathcal{T}_1$ , dans le deuxième cas elle serait empêchée d'être tangente à  $\mathcal{H}_2^S$  par  $\mathcal{T}_1$ . De la même façon, pour les mêmes raisons, deux trajectoires démarrant à droite de  $P$  ne peuvent coexister. On a donc au plus une solution. Comme on a montré qu'on en avait au moins une, on a une solution unique.  $\square$

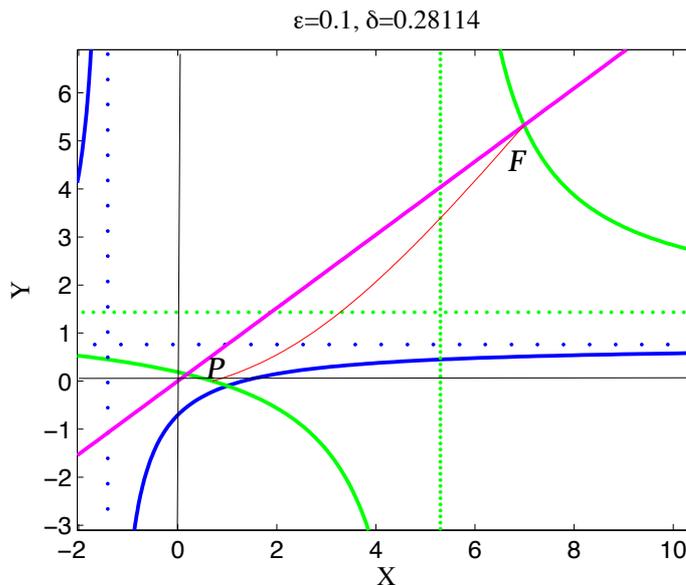


FIGURE 7.3: Représentation géométrique

Nous savons maintenant que le problème d'optimisation  $\tilde{\mathcal{P}}$  admet une unique solution caractérisée par un phénomène d'équioscillation. Nous pouvons alors établir deux résultats asymptotiques précisant les endroits de l'équioscillation et donc a fortiori donnant la valeur du paramètre optimisé. Dans le cas où  $\omega_N \gg 1$ , nous pouvons établir le

**Théorème 7.12.** *Pour  $\omega_N \gg 1$  il existe une unique solution  $\tilde{p}_1^*$  positive du problème  $\tilde{\mathcal{P}}$  qui est donnée par*

$$\Lambda_1(0, \tilde{p}_1^*) = \Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*).$$

De plus on a asymptotiquement

$$\tilde{p}_1^* \sim \sqrt{\frac{\varepsilon\omega_N}{a(1+\varepsilon)}} \quad \text{et} \quad \max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\Lambda_1(\omega, \tilde{p}_1^*)| \sim 1 - \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)^3}{a\varepsilon\omega_N}}.$$

*Démonstration.* En utilisant le fait que

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\Lambda_1(\omega, p)| = \max \{ |\Lambda_1(0, p)|, |\Lambda_1(\bar{\omega}, p)|, |\Lambda_1(\omega_N, p)| \}$$

où  $\bar{\omega} \in \left\{ \omega, \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\omega, p) = 0 \right\}$ , nous allons établir la démonstration en six étapes

- ◆ résoudre l'équation  $\Lambda_1(0, \cdot) = \Lambda_1(\omega_N, \cdot)$ , et identifier  $\tilde{p}_1^*$ ;
- ◆ calculer  $\Lambda_1(0, \tilde{p}_1^*)$ ;
- ◆ résoudre l'équation  $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\cdot, \tilde{p}_1^*) = 0$  et identifier  $\bar{\omega}$ ;
- ◆ calculer  $|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)|$ ;
- ◆ comparer  $\Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*)$  à  $|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)|$  puis en déduire  $\|\Lambda_1(\cdot, \tilde{p}_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ ;
- ◆ enfin montrer que  $\tilde{p}_1^*$  est un point minimum local strict de  $H$ , puis conclure avec 6.16.

Nous commençons par la première étape

- ◆ Résolution de  $\Lambda_1(0, \cdot) = \Lambda_1(\omega_N, \cdot)$ .

Pour commencer, cherchons les solutions de l'équation  $\Lambda_1(0, p) = \Lambda_1(\omega_N, p)$ , i.e

$$(7.17) \quad \frac{ap - 1}{ap + \varepsilon} = \frac{p - f_a(\omega_N)}{p + \varepsilon f_a(\omega_N)} \frac{p - g_b(\omega_N)}{p + \frac{1}{\varepsilon} g_b(\omega_N)}.$$

Développons et réduisons l'égalité (7.27), nous obtenons

$$(7.18) \quad \left( a\omega_N \operatorname{th}(b\omega_N) + \varepsilon \left( a \frac{\omega_N}{\operatorname{th}(a\omega_N)} - 1 \right) \right) p^2 + (\omega_N(\varepsilon - 1) \operatorname{th}(b\omega_N)) p - \varepsilon \omega_N^2 \left( \frac{\operatorname{th}(b\omega_N)}{\operatorname{th}(a\omega_N)} \right) = 0.$$

Pour  $\omega_N \gg 1$ , l'égalité (7.28) devient

$$(7.19) \quad a(1 + \varepsilon)p^2 + (\varepsilon - 1)p - \varepsilon\omega_N = 0.$$

Appelons  $\tilde{p}_1^*$  la racine positive de (7.29), elle se développe comme

$$(7.20) \quad \tilde{p}_1^* \sim \sqrt{\frac{\varepsilon\omega_N}{a(1+\varepsilon)}}.$$

- ◆ Calcul de  $\Lambda_1(0, \tilde{p}_1^*)$ .

Evaluons le facteur de convergence pour (7.20).

$$\begin{aligned} \Lambda_1(0, \tilde{p}_1^*) &= \frac{a\tilde{p}_1^* - 1}{a\tilde{p}_1^* + \varepsilon} \\ &\sim 1 - \frac{1}{a\tilde{p}_1^*}(1 + \varepsilon) = 1 - \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)^3}{a\varepsilon\omega_N}}. \end{aligned}$$

◆ Résolution de l'équation  $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\cdot, \tilde{p}_1^*) = 0$ .

Cherchons à présent les solutions de l'équation  $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\omega, \tilde{p}_1^*) = 0$ , ce qui revient à chercher les  $\omega$  solutions de

$$(7.21) \quad \frac{g_b(\omega) - \tilde{p}_1^*}{\tilde{p}_1^* + \varepsilon f_a(\omega)} \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) + \frac{f_a(\omega) - \tilde{p}_1^*}{\varepsilon \tilde{p}_1^* + g_b(\omega)} \frac{\partial g_b}{\partial \omega}(\omega) = 0.$$

Appelons ces solutions  $\bar{\omega}$ . Pour réaliser (7.34), nous avons nécessairement

$$(7.22) \quad f_a(\bar{\omega}) \geq \tilde{p}_1^* \geq g_b(\bar{\omega}).$$

Supposons que  $\bar{\omega} \sim C \omega_N^\gamma$ . En remplaçant  $\tilde{p}_1^*$  et  $\bar{\omega}$  par leurs valeurs dans (7.35), il vient

$$(7.23) \quad \frac{C \omega_N^\gamma}{\text{th}(a C \omega_N^\gamma)} > \sqrt{\frac{\varepsilon \omega_N}{a(1+\varepsilon)}} > C \omega_N^\gamma \text{th}(b C \omega_N^\gamma).$$

Comme  $\frac{C \omega_N^\gamma}{\text{th}(a C \omega_N^\gamma)} \sim C \omega_N^\gamma$ , nous avons

$$(7.24) \quad \frac{1}{2} \leq \gamma.$$

Ceci entraîne  $f_a(\bar{\omega}) \sim C \omega_N^\gamma$  et  $\sim C \omega_N^\gamma$  puis par suite

$$\bar{\omega} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon \omega_N}{a(1+\varepsilon)}}.$$

◆ Calcul de  $\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)$ .

Faisons à présent les hypothèses suivantes :

$$(7.25) \quad \begin{cases} f_a(\bar{\omega}) - \tilde{p}_1^* & \sim C_1 \omega_N^{\gamma_1}, \\ \tilde{p}_1^* - g_b(\bar{\omega}) & \sim C_2 \omega_N^{\gamma_2}, \end{cases}$$

où  $\gamma_1, \gamma_2 < \frac{1}{2}$  et évaluons le facteur de convergence en  $\bar{\omega}$ . Alors

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)| &= \frac{f_a(\bar{\omega}) - \tilde{p}_1^*}{\tilde{p}_1^* + \varepsilon f_a(\bar{\omega})} \frac{\tilde{p}_1^* - g_b(\bar{\omega})}{\tilde{p}_1^* + \frac{1}{\varepsilon} g_b(\bar{\omega})} \\ &\sim \frac{C_1 C_2 \omega_N^{\gamma_1 + \gamma_2}}{\tilde{p}_1^{*2} (1+\varepsilon)(1+\frac{1}{\varepsilon})} \\ &\sim C_3 \omega_N^{(\gamma_1 + \gamma_2) - 1} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

Enfin en développant  $|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)|$  pour  $\omega_N \gg 1$

$$(7.26) \quad |\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)| \sim C_4 \omega_N^{(\gamma_1 + \gamma_2) - 1}.$$

◆ Calcul de  $\|\Lambda_1(\cdot, \tilde{p}_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ .

Comme  $\max_{\omega} |\Lambda_1(\omega, p)| = \max \{|\Lambda_1(0, p)|, |\Lambda_1(\bar{\omega}, p)|, |\Lambda_1(\omega_N, p)|\}$  et  $\tilde{p}_1^*$  est tel que  $|\Lambda_1(0, \tilde{p}_1^*)| = |\Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*)|$ , il nous reste donc à comparer  $|\Lambda_1(0, \tilde{p}_1^*)|$  à  $|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)|$ . Nous avons

$$|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)| \sim C_4 \omega_N^{(\gamma_1 + \gamma_2) - 1} \ll |\Lambda_1(0, \tilde{p}_1^*)| = |\Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*)| \sim 1 - \frac{1}{a\tilde{p}_1^*} (1 + \varepsilon) = 1 - \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)^3}{a\varepsilon\omega_N}}.$$

Nous avons alors

$$\|\Lambda_1(\cdot, \tilde{p}_1^*)\|_{L^\infty(K)} = |\Lambda_1(0, \tilde{p}_1^*)| = |\Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*)|.$$

◆ Minimum local de  $H$ .

Montrons à présent que  $\tilde{p}_1^*$  est un point minimum local strict de  $H$ . En effet

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial p}(0, \tilde{p}_1^*) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(0)}{\varepsilon} + g_b(0) \right)}{\left( \tilde{p}_1^* + \frac{f_a(0)}{\varepsilon} \right)^2 (\tilde{p}_1^* + \varepsilon g_b(0))^2} \left( \tilde{p}_1^{*2} - f_a(0) g_b(0) \right) > 0$$

puisque  $g_b(0) = 0$  et

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial p}(\omega_N, \tilde{p}_1^*) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} + g_b(\omega_N) \right)}{\left( \tilde{p}_1^* + \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} \right)^2 (\tilde{p}_1^* + \varepsilon g_b(\omega_N))^2} \left( \tilde{p}_1^{*2} - f_a(\omega_N) g_b(\omega_N) \right) < 0$$

puisque  $\tilde{p}_1^{*2} - f_a(\omega_N) g_b(\omega_N) \sim \omega_N - \omega_N^2 < 0$ . Il existe donc un réel positif  $\eta$  et un intervalle autour de  $\tilde{p}_1^*$ ,  $[\tilde{p}_1^* - \eta, \tilde{p}_1^* + \eta]$  sur lequel  $\tilde{p}_1^*$  est un point minimum strict de  $H$ . Nous concluons en utilisant le lemme (6.16). □

Plaçons nous à présent dans le cas où  $b = \varepsilon$ , nous pouvons alors montrer le

**Théorème 7.13.** *Pour  $b = \varepsilon$  et  $\omega_N \sim C\varepsilon^{-\gamma}$  avec  $\gamma > 1$ , il existe une unique solution  $\tilde{p}_1^*$  positive du problème  $\bar{P}$  qui est donnée par*

$$\Lambda_1(0, \tilde{p}_1^*) = \Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*).$$

*De plus on a asymptotiquement*

$$\tilde{p}_1^* \sim \sqrt{\frac{C}{a}} \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \text{et} \quad \max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\Lambda_1(\omega, \tilde{p}_1^*)| = 1 - \sqrt{\frac{1}{aC}} \varepsilon^{\frac{\gamma-1}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1+\gamma}{2}}).$$

*Démonstration.* On a nécessairement

$$\max_{\omega \in [0, \omega_N]} |\Lambda_1(\omega, p)| = \max \{|\Lambda_1(0, p)|, |\Lambda_1(\bar{\omega}, p)|, |\Lambda_1(\omega_N, p)|\}$$

où  $\bar{\omega} \in \left\{ \omega, \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\omega, p) = 0 \right\}$ . Partant de ce fait, nous construisons la démonstration en six étapes

- ◆ résoudre l'équation  $\Lambda_1(0, \cdot) = \Lambda_1(\omega_N, \cdot)$ , et identifier  $\tilde{p}_1^*$ ;
- ◆ calculer  $\Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*)$ ;
- ◆ résoudre l'équation  $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\cdot, \tilde{p}_1^*) = 0$  et identifier  $\bar{\omega}$ ;
- ◆ calculer  $|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)|$ ;
- ◆ comparer  $\Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*)$  à  $|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)|$  puis en déduire  $\|\Lambda_1(\cdot, \tilde{p}_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ ;
- ◆ enfin montrer que  $\tilde{p}_1^*$  est un point minimum local strict de  $H$ , puis conclure avec 6.16.

Nous commençons par la première étape

- ◆ Résolution de  $\Lambda_1(0, \cdot) = \Lambda_1(\omega_N, \cdot)$ .

Pour commencer, cherchons les solutions de l'équation  $\Lambda_1(0, p) = \Lambda_1(\omega_N, p)$ , i.e

$$(7.27) \quad \frac{ap - 1}{ap + \varepsilon} = \frac{p - f_a(\omega_N)}{p + \varepsilon f_a(\omega_N)} \frac{p - g_b(\omega_N)}{p + \frac{1}{\varepsilon} g_b(\omega_N)}.$$

Développons et réduisons l'égalité (7.27), nous obtenons

$$(7.28) \quad \left( a \omega_N \operatorname{th}(b \omega_N) + \varepsilon \left( a \frac{\omega_N}{\operatorname{th}(a \omega_N)} - 1 \right) \right) p^2 + (\omega_N(\varepsilon - 1) \operatorname{th}(b \omega_N)) p - \varepsilon \omega_N^2 \left( \frac{\operatorname{th}(b \omega_N)}{\operatorname{th}(a \omega_N)} \right) = 0.$$

En faisant  $b = \varepsilon$  dans l'égalité (7.28) nous obtenons

$$(7.29) \quad \left( a \omega_N \operatorname{th}(\varepsilon \omega_N) + \varepsilon \left( a \frac{\omega_N}{\operatorname{th}(a \omega_N)} - 1 \right) \right) p^2 + (\omega_N(\varepsilon - 1) \operatorname{th}(\varepsilon \omega_N)) p - \varepsilon \omega_N^2 \left( \frac{\operatorname{th}(\varepsilon \omega_N)}{\operatorname{th}(a \omega_N)} \right) = 0.$$

Appelons  $\tilde{p}_1^*$  la solution positive de l'équation (7.29). et supposons qu'elle s'écrive comme  $\tilde{p}_1^* \sim C_p \varepsilon^{-\gamma p}$  (dans l'expression de  $\tilde{p}_1^*$  seul le terme dominant en  $\varepsilon$  nous intéresse) et  $\omega_N \sim C \varepsilon^{-\gamma}$  et développons (7.29)

$$(7.30) \quad \left( a C \varepsilon^{-\gamma} \operatorname{th}(C \varepsilon^{1-\gamma}) + \frac{a C \varepsilon^{1-\gamma}}{\operatorname{th}(a C \varepsilon^{-\gamma})} - \varepsilon \right) C_p^2 \varepsilon^{-2\gamma p} \\ + \left( C \varepsilon^{-\gamma} (\varepsilon - 1) \operatorname{th}(C \varepsilon^{1-\gamma}) \right) C_p \varepsilon^{-\gamma p} \\ - C^2 \varepsilon^{1-2\gamma} \frac{\operatorname{th}(C \varepsilon^{1-\gamma})}{\operatorname{th}(a C \varepsilon^{-\gamma})} = 0.$$

Les termes dominants de l'égalité (7.30) sont :  $\varepsilon^{-\gamma-2\gamma p}$  et  $\varepsilon^{1-2\gamma}$ . Pour réaliser (7.30), nous devons équilibrer ces termes. Nous avons donc

- d'une part  $-\gamma - 2\gamma p = 1 - 2\gamma$  ou encore  $\gamma p = \frac{\gamma - 1}{2}$ ,
  - d'autre part  $a C C_p^2 = C^2$  ou encore  $C_p = \sqrt{\frac{C}{a}}$ ,
- d'où

$$(7.31) \quad \tilde{p}_1^* \sim \sqrt{\frac{C}{a}} \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

◆ Calcul de  $\Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*)$ .

Evaluons le facteur de convergence pour (7.31).

$$\begin{aligned}\Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*) &= \frac{\tilde{p}_1^* - f_a(\omega_N)}{\tilde{p}_1^* + \varepsilon f_a(\omega_N)} \frac{\tilde{p}_1^* - g_b(\omega_N)}{\tilde{p}_1^* + \frac{1}{\varepsilon} g_b(\omega_N)} \\ &\sim \frac{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} - C \varepsilon^{-\gamma}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + C \varepsilon^{1-\gamma}} \frac{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} - C \varepsilon^{-\gamma}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + C \varepsilon^{-1-\gamma}}.\end{aligned}$$

Puis finalement en développant  $\Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*)$  pour  $\varepsilon \ll 1$  on obtient

$$(7.32) \quad \Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*) \sim \left(1 - \frac{C_p}{C} \varepsilon^{\frac{1+\gamma}{2}}\right)^2 \left(1 - \frac{C_p}{C} \varepsilon^{\frac{\gamma-1}{2}}\right) \left(1 - \frac{C_p}{C} \varepsilon^{\frac{3+\gamma}{2}}\right)$$

i.e

$$(7.33) \quad \Lambda_1(\omega_N, \tilde{p}_1^*) = 1 - \frac{C_p}{C} \varepsilon^{\frac{\gamma-1}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1+\gamma}{2}}).$$

◆ Résolution de l'équation  $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\cdot, \tilde{p}_1^*) = 0$ .

Cherchons à présent les solutions de l'équation  $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \omega}(\omega, \tilde{p}_1^*) = 0$ , ce qui revient à chercher les  $\omega$  solutions de

$$(7.34) \quad \frac{g_b(\omega) - \tilde{p}_1^*}{\tilde{p}_1^* + \varepsilon f_a(\omega)} \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\omega) + \frac{f_a(\omega) - \tilde{p}_1^*}{\varepsilon \tilde{p}_1^* + g_b(\omega)} \frac{\partial g_b}{\partial \omega}(\omega) = 0.$$

Appelons ces solutions  $\tilde{\omega}$ . Pour réaliser (7.34), on a nécessairement

$$(7.35) \quad f_a(\tilde{\omega}) \geq \tilde{p}_1^* \geq g_b(\tilde{\omega}).$$

Supposons que  $\tilde{\omega} \sim C_\omega \varepsilon^{-\gamma\omega}$ . En remplaçant  $\tilde{p}_1^*$  et  $\tilde{\omega}$  par leurs valeurs dans (7.35), il vient

$$(7.36) \quad \frac{C_\omega \varepsilon^{-\gamma\omega}}{\text{th}(a C_\omega \varepsilon^{-\gamma\omega})} > C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} > C_\omega \varepsilon^{-\gamma\omega} \text{th}(C_\omega \varepsilon^{1-\gamma\omega}).$$

Comme  $\frac{C_\omega \varepsilon^{-\gamma\omega}}{\text{th}(a C_\omega \varepsilon^{-\gamma\omega})} \sim C_\omega \varepsilon^{-\gamma\omega}$ , on a

$$(7.37) \quad \frac{\gamma-1}{2} \leq \gamma\omega.$$

$\gamma\omega$  est donc positive. Cherchons ensuite des équivalents des fonctions  $\frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\cdot)$ ,  $\frac{\partial g_b}{\partial \omega}(\cdot)$ . Nous avons

$$\frac{\partial g_b}{\partial \omega}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\text{sh}(2\omega b) + 2\omega b}{\text{ch}^2(\omega b)}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\text{sh}(2\omega b) + 2\omega b}{\text{ch}^2(\omega b)} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{2b\text{ch}(2\omega b) + 2b}{b\text{sh}(2\omega b)} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{2b\text{sh}(2\omega b)}{2b\text{ch}(2\omega b)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Pour résoudre (7.34), il nous faudra distinguer 4 cas dépendant de la valeur de  $\gamma_\omega$  qui sont  $\gamma_\omega > 1$ ,  $\gamma_\omega = 1$ , et  $0 < \gamma_\omega < 1$  et  $\gamma_\omega = 0$ . Etudions alors les solutions éventuelles dans chacun de ces cas.

- Si  $\gamma_\omega > 1$ , on a les équivalents suivants

$$(7.38) \quad \begin{cases} f_a(\bar{\omega}) \sim C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}; & \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\bar{\omega}) \sim 1 \\ g_b(\bar{\omega}) \sim C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}; & \frac{\partial g_b}{\partial \omega}(\bar{\omega}) \sim 1, \end{cases}$$

si bien que (7.34) est équivalente à

$$(7.39) \quad \frac{C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega} - C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + C_\omega \varepsilon^{1-\gamma_\omega}} \frac{C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega} - C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}}{C_p \varepsilon^{\frac{3-\gamma}{2}} + C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}} = 0.$$

Pour réaliser(7.42) on a nécessairement

$$(7.40) \quad C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega} \geq C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} \geq C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}.$$

Par conséquent,  $C_\omega = C_p$  et  $\gamma_\omega = \frac{\gamma-1}{2}$ , puis finalement

$$\bar{\omega} \sim C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

- Si  $\gamma_\omega = 1$ ,

$$(7.41) \quad \begin{cases} f_a(\bar{\omega}) \sim C_\omega \varepsilon^{-1}; & \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\bar{\omega}) \sim 1 \\ g_b(\bar{\omega}) \sim C_\omega \operatorname{th}(C_\omega) \varepsilon^{-1}; & \frac{\partial g_b}{\partial \omega}(\bar{\omega}) \sim \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}(2C_\omega) + 2C_\omega}{\operatorname{ch}^2(C_\omega)} \end{cases}$$

et l'égalité (7.34) est équivalente à

$$(7.42) \quad \frac{C_\omega \operatorname{th}(C_\omega) \varepsilon^{-1} - C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + C_\omega} + \frac{1}{2} \frac{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} - C_\omega \varepsilon^{-1}}{C_p \varepsilon^{\frac{3-\gamma}{2}} + C_\omega \operatorname{th}(C_\omega) \varepsilon^{-1}} \frac{\operatorname{sh}(2C_\omega) + 2C_\omega}{\operatorname{ch}^2(C_\omega)} = 0.$$

De l'inégalité (7.37), on déduit que  $\gamma < 3$ . L'égalité (7.42) est donc équivalente à

$$(7.43) \quad \frac{C_\omega \operatorname{th}(C_\omega) \varepsilon^{\frac{\gamma-3}{2}}}{C_p} - \frac{1}{\operatorname{th}(C_\omega)} \frac{\operatorname{sh}(2C_\omega) + 2C_\omega}{\operatorname{ch}^2(C_\omega)} = 0.$$

Cette dernière égalité est impossible à réaliser.

- Si  $0 < \gamma_\omega < 1$ , nous avons les équivalents suivants

$$(7.44) \quad \begin{cases} f_a(\bar{\omega}) \sim C_\omega \varepsilon^{-\gamma_\omega}; & \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\bar{\omega}) \sim 1 \\ g_b(\bar{\omega}) \sim C_\omega^2 \varepsilon^{1-2\gamma_\omega}; & \frac{\partial g_b}{\partial \omega}(\bar{\omega}) \sim 0 \end{cases}$$

et l'égalité (7.34) est équivalente à

$$(7.45) \quad \frac{C_\omega^2 \varepsilon^{1-2\gamma_\omega} - C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + C_\omega \varepsilon^{1-\gamma_\omega}} = 0.$$

L'égalité (7.45) entraîne d'une part  $C_\omega = \sqrt{C_p}$  et d'autre part  $\gamma_\omega = \frac{1+\gamma}{4}$ . On a donc

$$(7.46) \quad \bar{\omega} \sim \sqrt{C_p} \varepsilon^{-\frac{1+\gamma}{4}}$$

où  $\gamma < 3$  grâce à l'inégalité (7.37).

- Si  $\gamma_w = 0$ ,

$$(7.47) \quad \begin{cases} f_a(\bar{\omega}) \sim \frac{C_\omega}{\text{th}(aC_\omega)}; & \frac{\partial f_a}{\partial \omega}(\bar{\omega}) \sim \frac{1}{\text{th}(aC_\omega)} - \frac{aC_\omega}{\text{sh}^2(aC_\omega)} \\ g_b(\bar{\omega}) \sim C_\omega^2 \varepsilon; & \frac{\partial g_b}{\partial \omega}(\bar{\omega}) \sim 0 \end{cases}$$

et l'égalité (7.34) est équivalente à

$$(7.48) \quad \frac{\varepsilon C_\omega^2 - C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + \varepsilon \frac{C_\omega}{\text{th}(aC_\omega)}} \left( \frac{1}{\text{th}(aC_\omega)} - \frac{aC_\omega}{\text{sh}^2(aC_\omega)} \right) = 0.$$

L'égalité (7.48) est impossible car  $\frac{1}{\text{th}(aC_\omega)} - \frac{aC_\omega}{\text{sh}^2(aC_\omega)} > 0$ .

◆ Calcul de  $\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)$ .

- $\gamma_\omega > 1$ .

Faisons à présent les hypothèses suivantes :

$$(7.49) \quad \begin{cases} f_a(\bar{\omega}) - \tilde{p}_1^* & \sim C_1 \varepsilon^{-\gamma_1} \\ \tilde{p}_1^* - g_b(\bar{\omega}) & \sim C_2 \varepsilon^{-\gamma_2} \end{cases}$$

où  $\gamma_1, \gamma_2 < \frac{\gamma}{2}$  et évaluons le facteur de convergence en  $\bar{\omega}$ . Alors

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)| &= \frac{f_a(\bar{\omega}) - \tilde{p}_1^*}{\tilde{p}_1^* + \varepsilon f_a(\bar{\omega})} \frac{\tilde{p}_1^* - g_b(\bar{\omega})}{\tilde{p}_1^* + \frac{1}{\varepsilon} g_b(\bar{\omega})} \\ &\sim \frac{C_1 \varepsilon^{-\gamma_1}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + C_p \varepsilon^{\frac{3-\gamma}{2}}} \frac{C_2 \varepsilon^{-\gamma_2}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + C_p \varepsilon^{-\frac{(1+\gamma)}{2}}} \\ &\sim C_3 \varepsilon^{(\gamma-1) - (\gamma_1 + \gamma_2)} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

Enfin en développant  $|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)|$  pour  $\varepsilon \ll 1$

$$(7.50) \quad |\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{p}_1^*)| \sim C_4 \varepsilon^{\gamma - (\gamma_1 + \gamma_2)}.$$

- cas où  $0 < \gamma_w < 1$ .

Soit  $\gamma_1$  un réel positif tel que  $\gamma_1 < \frac{\gamma-1}{2}$ . Supposons à présent que

$$(7.51) \quad |\tilde{p}_1^* - g_b(\bar{\omega})| \sim C_1 \varepsilon^{-\gamma_1}$$

et évaluons le facteur de convergence en  $\bar{\omega}$ . Alors

$$\begin{aligned}
|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)| &= \frac{|f_a(\bar{\omega}) - \tilde{\mathbf{p}}_1^*|}{\tilde{\mathbf{p}}_1^* + \varepsilon f_a(\bar{\omega})} \frac{|\tilde{\mathbf{p}}_1^* - \mathbf{g}_b(\bar{\omega})|}{\tilde{\mathbf{p}}_1^* + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{g}_b(\bar{\omega})}, \\
&\sim \frac{\sqrt{C_p} \varepsilon^{-\frac{1+\gamma}{4}} - C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + \sqrt{C_p} \varepsilon^{\frac{3-\gamma}{4}}} \frac{C_1 \varepsilon^{-\gamma_1}}{C_p \varepsilon^{\frac{1-\gamma}{2}} + C_p \varepsilon^{-\frac{(1+\gamma)}{2}}} \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{C_p}} \varepsilon^{\frac{\gamma-3}{4}} \frac{C_1}{C_p} \varepsilon^{-\gamma_1 + \frac{1+\gamma}{2}} \\
&\sim \frac{C_1}{C_p^{\frac{3}{2}}} \varepsilon^{-\gamma_1 + \frac{3\gamma-1}{4}}.
\end{aligned}$$

◆ Calcul de  $\|\Lambda_1(\cdot, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)\|_{L^\infty(K)}$ .

Comme  $\max_{\omega} |\Lambda_1(\omega, \mathbf{p})| = \max \{|\Lambda_1(\mathbf{0}, \mathbf{p})|, |\Lambda_1(\bar{\omega}, \mathbf{p})|, |\Lambda_1(\omega_N, \mathbf{p})|\}$  et  $\tilde{\mathbf{p}}_1^*$  est tel que  $|\Lambda_1(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)| = |\Lambda_1(\omega_N, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)|$ , il nous reste donc à comparer  $|\Lambda_1(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)|$  à  $|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)|$ . Ce calcul dépendra également des valeurs de  $\gamma_\omega$ . Nous avons

- cas où  $\gamma_\omega > 1$ .

Nous avons

$$|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)| \sim C_4 \varepsilon^{\gamma - (\gamma_1 + \gamma_2)} \ll |\Lambda_1(\omega_N, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)| = |\Lambda_1(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)| \sim 1 - \frac{C_p}{C} \varepsilon^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Nous avons donc

$$\|\Lambda_1(\omega, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)\|_{L^\infty(K)} = |\Lambda_1(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)|.$$

- cas où  $0 < \gamma_\omega < 1$ .

Par hypothèse  $\gamma_1 < \frac{\gamma-1}{2}$  ou encore  $-\gamma_1 > \frac{1-\gamma}{2}$ . D'autre part  $\frac{3\gamma-1}{4} = \frac{\gamma-1}{2} + \frac{1+\gamma}{4} > \frac{\gamma-1}{2}$ . Nous en déduisons alors que  $-\gamma_1 + \frac{3\gamma-1}{4} > 0$ , et

$$|\Lambda_1(\bar{\omega}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)| \sim \frac{C_1}{C_p^{\frac{3}{2}}} \varepsilon^{-\gamma_1 + \frac{3\gamma-1}{4}} \ll |\Lambda_1(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)| = |\Lambda_1(\omega_N, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)|.$$

Finalement

$$\|\Lambda_1(\cdot, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)\|_{L^\infty(K)} = |\Lambda_1(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)|.$$

En résumé pour tout  $\gamma_\omega$  positif, nous avons

$$\|\Lambda_1(\cdot, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)\|_{L^\infty(K)} = |\Lambda_1(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)| = |\Lambda_1(\omega_N, \tilde{\mathbf{p}}_1^*)|.$$

◆ Minimum local de  $H$ .

Montrons à présent que  $\tilde{\mathbf{p}}_1^*$  est un point minimum local strict de  $H$ . En effet

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{p}}_1^*) = \frac{(1+\varepsilon) \left( \frac{f_a(\mathbf{0})}{\varepsilon} + \mathbf{g}_b(\mathbf{0}) \right)}{\left( \tilde{\mathbf{p}}_1^* + \frac{f_a(\mathbf{0})}{\varepsilon} \right)^2 (\tilde{\mathbf{p}}_1^* + \varepsilon \mathbf{g}_b(\mathbf{0}))^2} \left( \tilde{\mathbf{p}}_1^{*2} - f_a(\mathbf{0}) \mathbf{g}_b(\mathbf{0}) \right) > 0$$

puisque  $g_b(0) = 0$ . et

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial p}(\omega_N, \tilde{p}_1^*) = \frac{(1 + \varepsilon) \left( \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} + g_b(\omega_N) \right)}{\left( \tilde{p}_1^* + \frac{f_a(\omega_N)}{\varepsilon} \right)^2 (\tilde{p}_1^* + \varepsilon g_b(\omega_N))^2} \left( \tilde{p}_1^{*2} - f_a(\omega_N) g_b(\omega_N) \right) < 0$$

puisque  $\tilde{p}_1^{*2} - f_a(\omega_N) g_b(\omega_N) \sim \varepsilon^{1-\gamma} - C^2 \varepsilon^{-2\gamma} < 0$ . Il existe donc un réel positif  $\eta$  et un intervalle autour de  $\tilde{p}_1^*$ ,  $[\tilde{p}_1^* - \eta, \tilde{p}_1^* + \eta]$  sur lequel  $\tilde{p}_1^*$  est un point minimum strict de  $H$ . Nous concluons en utilisant le lemme (6.16).  $\square$

Ceci clôt l'étude des conditions de Robin à un paramètre. La sous-section qui suit s'intéresse au cas de deux paramètres qui est nettement plus complexe. Le problème d'optimisation qui en déduit est très difficile. En revanche nous pouvons analyser la convergence de l'algorithme. Pour l'illustration numérique, nous utilisons un algorithme d'optimisation de type Nelder-Mead pour calculer les paramètres optimisés.

### 7.2.2 Conditions de Robin à deux paramètres

Soient deux paramètres  $p, q > 0$ . En posant

$$\alpha_1 = \frac{p}{\varepsilon}, \quad \alpha_2 = q,$$

dans l'algorithme (7.12), nous définissons une famille d'algorithmes de Schwarz avec condition de Robin à deux paramètres (appelé 2sided dans [22]) :

$$(7.52) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} & = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ -\frac{1}{\varepsilon} \Delta u_2^{n+1} & = f_2 & \text{dans } \Omega_2, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon} p \right) u_1^{n+1} & = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + q \right) u_2^n & \text{sur } I, \\ \left( -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} + q \right) u_2^{n+1} & = \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + q \right) u_1^n & \text{sur } \Gamma^0, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites héritées de 7.1. L'étude de la convergence de l'algorithme 7.52 conduit naturellement à la définition du facteur de convergence

$$(7.53) \quad \Lambda_2(\omega, p, q) := \frac{(p - \omega \operatorname{th}(\omega b)) \left( q - \frac{\omega}{\operatorname{th}(\omega a)} \right)}{\left( p + \varepsilon \frac{\omega}{\operatorname{th}(\omega a)} \right) \left( q + \frac{\omega}{\varepsilon} \operatorname{th}(\omega b) \right)},$$

où  $\omega$  varie dans l'intervalle  $[0, w_N]$ . Le résultat qui suit étudie la plage de  $(p, q)$  nécessaire et suffisante pour obtenir une convergence.

**Théorème 7.14** (Conditions nécessaires et suffisantes de convergence). *L'algorithme (7.52) converge pour tout couple  $(p, q) \in \mathcal{P}_{ad}$  où  $\mathcal{P}_{ad} = \mathcal{P}_{ad}^1 \cup \mathcal{P}_{ad}^2$  avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ad}^1 &= \{p - \varepsilon q > 0\} \cap \left\{ pq > (p - \varepsilon q) \frac{x_N}{2} \right\} \\ \mathcal{P}_{ad}^2 &= \{p - \varepsilon q < 0\} \cap \left\{ y_N + \frac{(q - \varepsilon p)}{2} \left( \frac{a}{\varepsilon} y_N - \frac{1}{2} \right) + apq \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

avec

$$x_N = \frac{\omega_N}{\text{th}(a\omega_N)} \quad \text{et} \quad y_N = \omega_N \text{th}(b\omega_N).$$

*Démonstration.* Pour assurer la convergence, nous devons garantir que :

$$|\Lambda_2(\omega_k, p, q)| = \left| \frac{(p - \omega \text{th}(\omega b))(q \text{th}(\omega a) - \omega)}{(\text{pth}(\omega a) + \varepsilon \omega)(q + \frac{\omega}{\varepsilon} \text{th}(\omega b))} \right| < 1 \quad \forall \omega \in [0, \omega_N],$$

ce qui se traduit par les 2 inégalités suivantes

$$(7.54) \quad -(\text{pth}(\omega a) + \varepsilon \omega)(q + \frac{\omega}{\varepsilon} \text{th}(\omega b)) < (p - \omega \text{th}(\omega b))(q \text{th}(\omega a) - \omega)$$

et

$$(7.55) \quad (p - \omega \text{th}(\omega b))(q \text{th}(\omega a) - \omega) < (\text{pth}(\omega a) + \varepsilon \omega)(q + \frac{\omega}{\varepsilon} \text{th}(\omega b)).$$

L'inégalité (7.55) est réalisée  $\forall \omega > 0$ . Quant à l'inégalité (7.54), elle équivaut à :

$$(7.56) \quad 0 \leq 2 \frac{\omega^2 \text{th}(\omega b)}{\text{th}(\omega a)} + 2pq + \omega \text{th}(\omega b) (\frac{p}{\varepsilon} - q) + \frac{\omega}{\text{th}(\omega a)} (\varepsilon q - p).$$

Soient deux variables  $x$  et  $y$  telles que  $x := \frac{a\omega}{\text{th}(\omega a)}$ ,  $y := b\omega \text{th}(\omega b)$ . L'inégalité (7.56) équivaut à dire que nous cherchons l'ensemble  $\mathcal{P}_{ad}$  des couples  $(p, q) > 0$  tels que  $\forall x, y \in \mathcal{D} = [1, ax_N] \times [0, by_N]$  nous ayons :

$$(7.57) \quad f(x, y, p, q) = xy + (p - \varepsilon q) (\frac{a}{2\varepsilon} y - \frac{b}{2} x) + abpq > 0.$$

Remarquons que si  $p = \varepsilon q$ , alors  $(p, q) \in \mathcal{P}_{ad}$ . La zone ainsi définie par (7.57) est entre les deux branches d'une hyperbole. On a donc deux cas :

1.  $p - \varepsilon q > 0$  : On trace l'hyperbole.

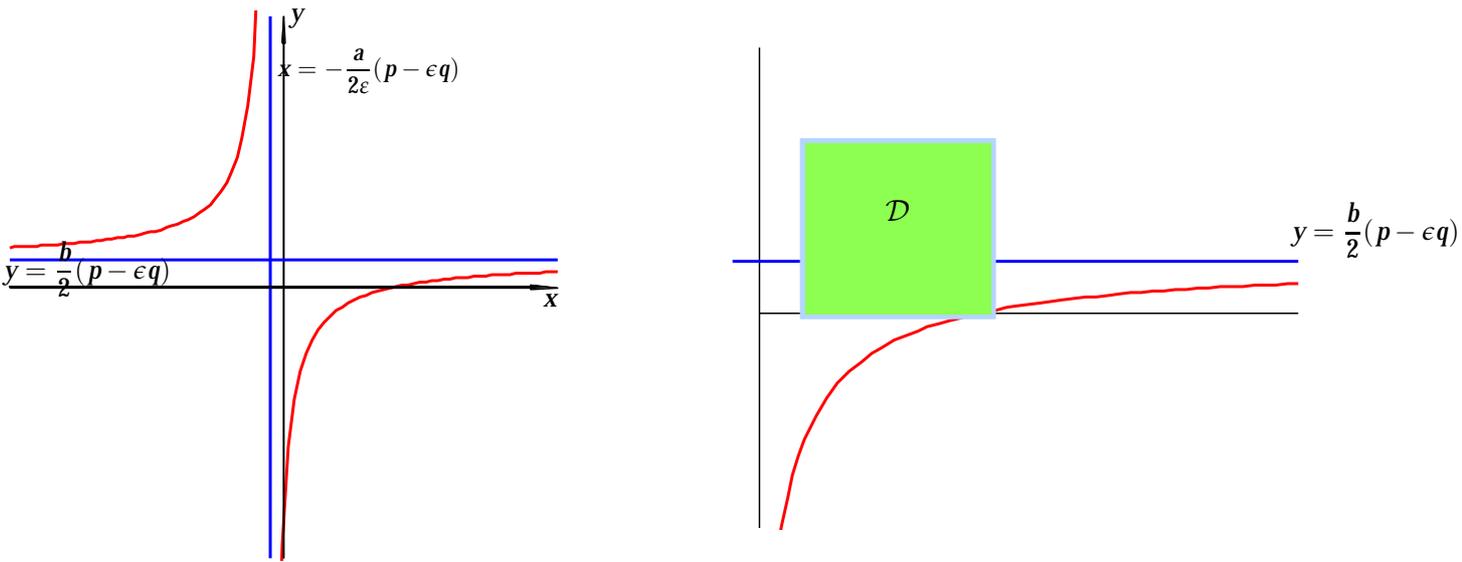


FIGURE 7.4: Cas 1.1

Une condition nécessaire pour que  $f(x, y, p, q)$  soit positif est que le rectangle  $\mathcal{D}$  soit à gauche de l'hyperbole, et pour cela il faut et il suffit que  $f(ax_N, 0, p, q) \geq 0$ .

Si  $p - \varepsilon q > 0$ ,  $(p, q) \in \mathcal{P}_{ad} \Leftrightarrow pq > (p - \varepsilon q) \frac{x_N}{2}$ .

2.  $p - \varepsilon q < 0$  : On trace l'hyperbole.

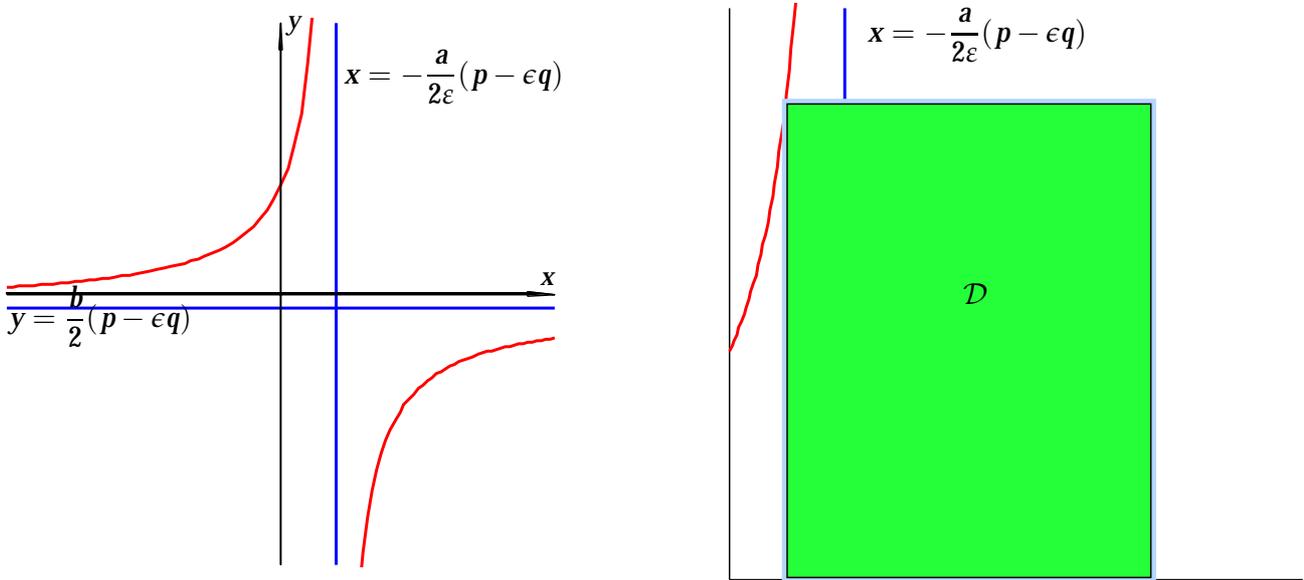


FIGURE 7.5: Cas 1.2

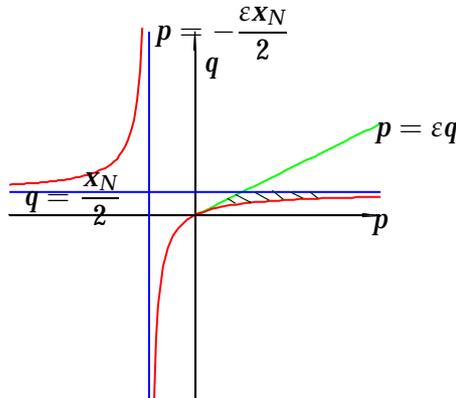
Une condition nécessaire pour que  $f(x, y, p, q)$  soit positif est que le rectangle  $\mathcal{D}$  soit à droite de l'hyperbole, et pour cela il faut et il suffit que  $f(1, by_N, p, q) > 0$ . Si  $p - \varepsilon q < 0$ , alors  $(p, q) \in \mathcal{P}_{ad}$  ce qui est équivalent à  $y_N + \frac{(p - \varepsilon q)}{2} \left( \frac{a}{\varepsilon} y_N - \frac{1}{2} \right) + apq \geq 0$ .

En résumé,  $\mathcal{P}_{ad} = \mathcal{P}_{ad}^1 \cup \mathcal{P}_{ad}^2$  avec

$$\mathcal{P}_{ad}^1 = \{p - \varepsilon q > 0\} \cap \left\{ pq > (p - \varepsilon q) \frac{x_N}{2} \right\}$$

$$\mathcal{P}_{ad}^2 = \{p - \varepsilon q < 0\} \cap \left\{ y_N + \frac{(q - \varepsilon p)}{2} \left( \frac{a}{\varepsilon} y_N - \frac{1}{2} \right) + apq \geq 0 \right\}.$$

Etudions  $\mathcal{P}_{ad}^1$ . La région est quadrillée sur le dessin.

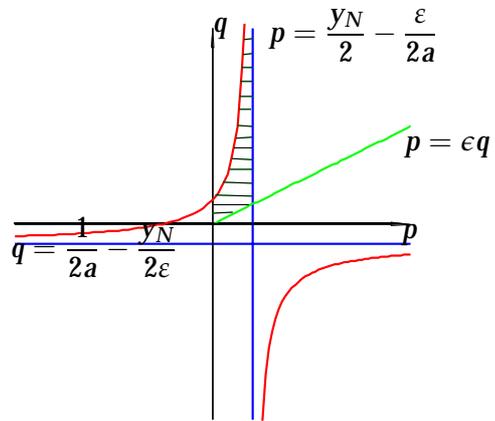


$$\frac{y_N}{\epsilon} - \frac{1}{a} < 0,$$

$$\mathcal{P}_{ad}^2 = \{\epsilon q > p\}$$

$$\frac{y_N}{\epsilon} - \frac{1}{a} > 0,$$

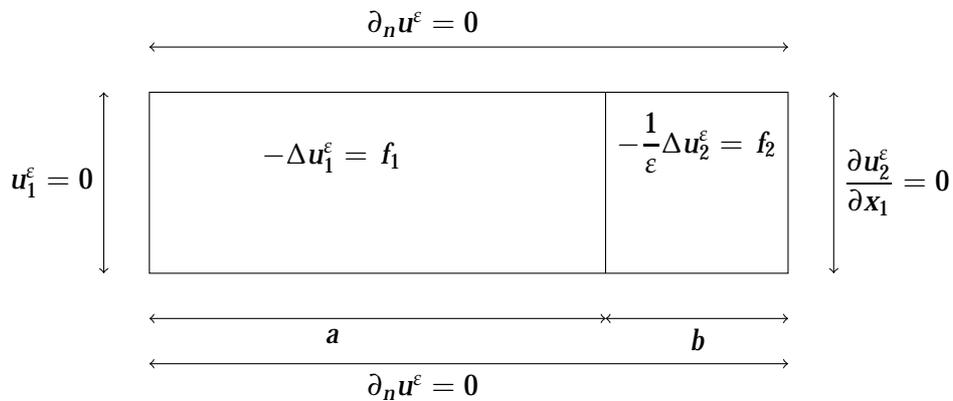
la région est quadrillée sur le dessin



□

### 7.3 Validation numérique

Tous les résultats numériques exposés ici ont été effectués sur le problème modèle suivant : avec



comme solution de référence

$$(7.58) \quad u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) = (x + a) \cos\left(\frac{\pi}{L} y\right) & (x, y) \in ]-a, 0] \times ]0, L] \\ u_2(x, y) = \left[ a + \epsilon x \left(1 - \frac{x}{2b}\right) \right] \cos\left(\frac{\pi}{L} y\right) & (x, y) \in ]0, b] \times ]0, L]. \end{cases}$$

Prenons le cas du carré unité pour se fixer les idées :  $\begin{cases} a = 0.5 \\ b = 0.5 \\ L = 1. \end{cases}$

Nous avons utilisé une méthode d'éléments finis  $P^1$  Lagrange comme solveur mono-domaine.

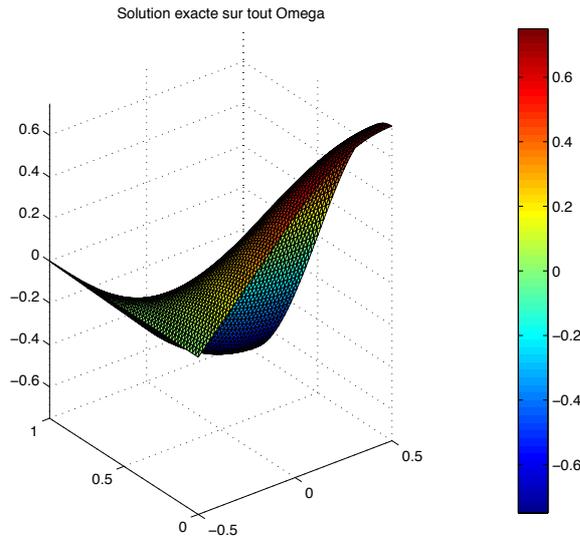


FIGURE 7.6: Solution de référence

Pour commencer définissons la norme de l'erreur que nous utiliserons à chaque itération  $n$ .

$$\|E_\omega(n)\| = \max(\|E_{\Omega_1}(n)\|, \|E_{\Omega_2}(n)\|)$$

où

$$E_{\omega_i}(n) = \|u_{i,h}^n - U\|_\infty$$

où  $U$  est une solution de référence discrète et  $u_{i,h}^n$  est la solution calculée à l'itération  $n$ . De plus tous les résultats ont été testés à la fois sur un **maillage régulier** mais aussi sur un **maillage quelconque**, la vitesse de convergence reste inchangée. Nous précisons de plus que dans les conditions d'interface, nous avons utilisé les paramètres optimisés suivants :

- $\theta = \lambda_{ND}^*$  pour l'algorithme 7.5 ;
- $p = \tilde{p}_1^*$  pour l'algorithme 7.13 ;
- $p = \tilde{p}_2^*$  et  $q = \tilde{q}_2^*$  pour l'algorithme 7.52 où  $\tilde{p}_2^*$ ,  $\tilde{q}_2^*$  sont calculés par un algorithme de Nelder-Mead avec Matlab.

Pour finir il nous reste à donner des précisions sur l'initialisation des différents algorithmes; le choix des fonctions  $u_i^0$ ,  $i = 1, 2$  sur l'interface  $\Gamma^0$ . En effet, nous effectuons deux choix analogue à ceux faits pour le collage :

- Le premier choix naturel est de prendre pour donnée initiale un vecteur aléatoire de façon à y faire figurer toutes les fréquences possibles ;
- un second intéressant est d'utiliser pour une donnée initiale la solution du problème (4.26) .

### 7.3.1 Décomposition de domaines symétrique ( $a = b$ )

Considérons une décomposition symétrique et étudions le comportement des différents algorithmes par rapport à  $h$ .

**Cas de matériaux homogènes  $\varepsilon = 1$** 

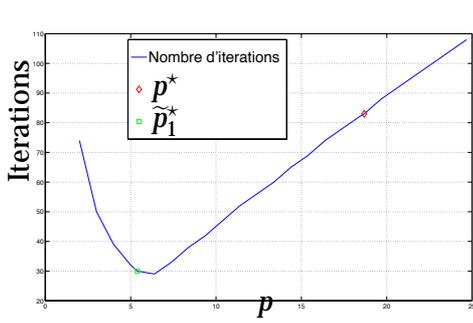
Dans le tableau 7.1, nous simulons la performance des différents algorithmes par rapport au pas de maillage  $h$ . En effet nous comptons le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $h$ . Nous avons aussi mis entre parenthèses à titre de comparaison, le nombre d'itérations qu'on obtient avec les paramètres optimisés sans tenir compte de la taille des domaines, ceux développés dans [22]. Comme dans le problème de collage, l'algorithme de Neumann-Dirichlet semble être le plus rapide et stable dans ce cas. De plus il est indépendant du maillage comme le stipule le théorème 7.5. Pour, l'algorithme avec des conditions de Robin, les résultats sont en accord avec les prévisions théoriques

**Cas de matériaux hétérogènes  $\varepsilon \neq 1$** 

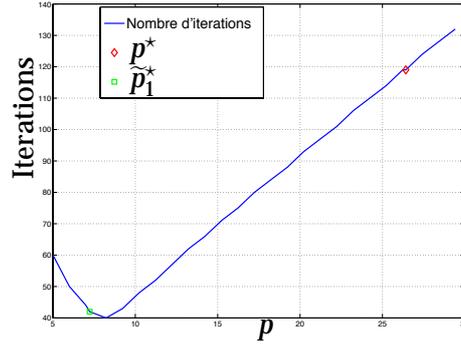
Nous comparons les résultats obtenus avec le paramètre optimisé en domaine non borné à ceux en domaine borné. Pour cela nous comparons les paramètres optimaux théoriques et numériques sur la figure 7.7 où nous comptons le nombre d'itérations par rapport à une plage de paramètres incluant les paramètres optimisés  $\tilde{p}_1^*$  et ceux dans [22]. Cela situera  $\tilde{p}_1^*$  par rapport au paramètre optimisé numérique Ensuite nous évaluons la performance des algorithmes (7.5),(7.13),(7.52) pa rapport à  $h$  sur la table 7.2 et à  $\varepsilon$  sur la table 7.4. La vitesse de l'algorithme de Dirichlet-Neumann est toujours indépendante du maillage, ainsi que celle de l'algorithme avec conditions de Robin à deux paramètres. Le fait de faire décroître  $\varepsilon$ , fait croître la vitesse de convergence de l'algorithme de Neumann-Dirichlet et décroître celle des algorithmes avec conditions de Robin. Nous avons choisi comme donnée initiale, un vecteur de nombres aléatoires compris entre  $-1$  et  $1$ .

h	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
1/50	14	41(59)	15(26)
1/100	14	58(83)	19(31)
1/200	14	82(115)	23(37)
1/400	14	117(142)	28(43)

TABLE 7.1: Nombre d'itérations (Gauss-Seidel) pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de la taille du maillage  $h$  pour  $\varepsilon = 1$ .



(a)  $h = 1/50$



(b)  $h = 1/100$

FIGURE 7.7: Nombre d'itérations pour atteindre une erreur de  $1e-6$  par rapport au parametre d'optimisation 1sided  $\varepsilon = 0.1$

h	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
1/50	91	30(83)	5(22)
1/100	91	42(119)	5(27)
1/200	91	61(167)	5(34)
1/400	91	89(199)	5(37)

TABLE 7.2: Nombre d'itérations (Gauss-Seidel) pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de la taille du maillage  $h$  pour  $\varepsilon = 0.1$ .

TABLE 7.3: Nombre d'itérations pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $\varepsilon$  ( $h = 1/200$ )

$\varepsilon$	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
1/2	23	88(143)	14(40)
1/4	39	81(161)	9(40)
1/8	73	66(167)	6(36)
1/16	143	51(165)	5(30)
1/36	289	37(157)	4(24)

TABLE 7.4: Nombre d'itérations (Gauss-Seidel) pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $h$ .

### 7.3.2 Décomposition de domaines non symétrique ( $a \neq b$ ) et étude dans la couche

Dans cette sous-section nous étudions le comportement des différents algorithmes par rapport à la dissymétrie du domaine. En effet sur la table 7.5 et la figure 7.3.2, nous fixons  $a$ , faisons décroître  $b$  et observons le comportement des différents algorithmes. Sur les figures, la légende est décrite de la façon suivante :

- Robin<sub>1</sub>SF et Robin<sub>2</sub>SF désignent respectivement les algorithmes avec conditions de Robin à un et deux paramètres;
- Robin<sub>1</sub>TF et Robin<sub>2</sub>TF désignent respectivement les algorithmes avec conditions de Robin à un et deux paramètres où les paramètres optimisés sont ceux développés dans [22].

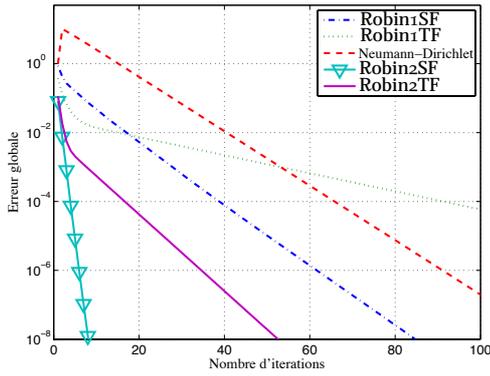
L' algorithme de Neumann-Dirichlet et celui avec conditions de Robin à un paramètre restent stables, tandis que l'algorithme avec conditions de Robin à deux paramètres convergent de moins en moins vite mais restent néanmoins le plus rapide.

$b$	Neumann-Dirichlet	Robin(one-sided)	Robin(two-sided)
$5.10^{-1}$	91	87(338)	6(72)
$10^{-1}$	91	87(338)	9(72)
$2.10^{-2}$	91	87(338)	18(72)
$10^{-2}$	87	87(338)	28(72)
$5.10^{-3}$	65	87(338)	43(72)

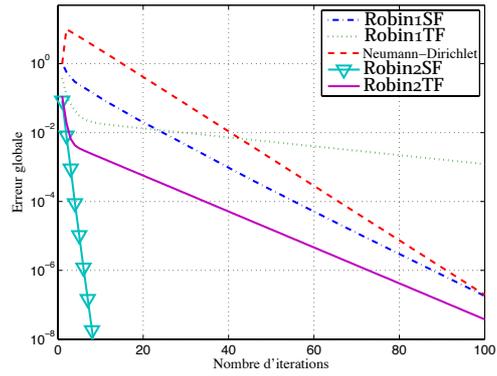
TABLE 7.5: Nombre d'itérations (Gauss-Seidel) pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $b$  pour  $h = 1/200$ .

	Neumann-Dirichlet	Robin <sub>1</sub> SF	Robin <sub>1</sub> TF	Robin <sub>2</sub> SF	Robin <sub>2</sub> TF
$b = \varepsilon$	algorithmes initialises par un vecteur de nombres aléatoires compris entre $-1$ et $1$ .				
$5.10^{-1}$	23	125	289	15	85
$10^{-1}$	91	87	338	9	72
$2.10^{-2}$	455	43	306	8	45
$10^{-2}$	779	30	284	8	37
$5.10^{-3}$	892	21	261	8	30
	algorithmes initialises par la solution du problème (4.26)				
$5.10^{-1}$	18	28	58	9	20
$10^{-1}$	34	20	42	8	13
$2.10^{-2}$	171	10	42	8	10
$10^{-2}$	269	7	42	8	9
$5.10^{-3}$	347	6	42	8	8

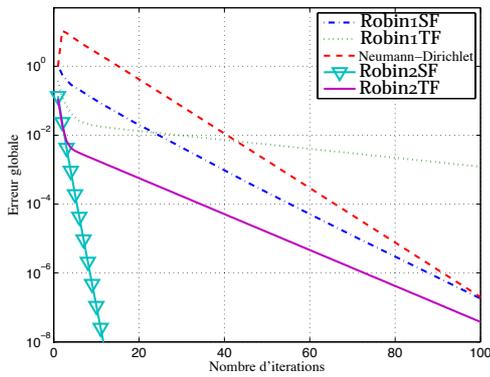
TABLE 7.6: Nombre d'itérations pour atteindre une erreur de  $10^{-6}$  en fonction de  $\varepsilon$  ( $h = 1/200$ )



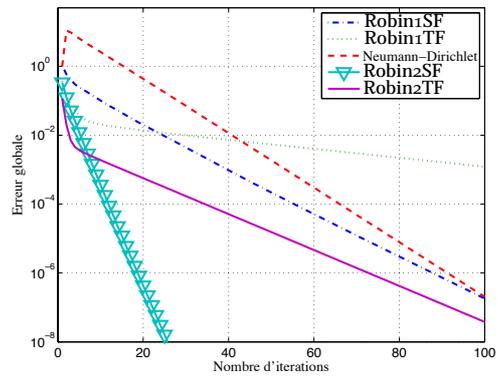
(a)  $a = b = 0.5$



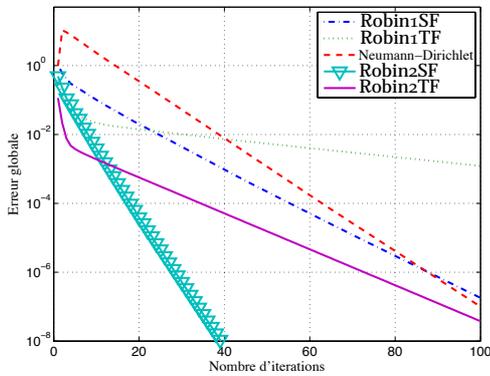
(b)  $a = 1, b = 0.5$



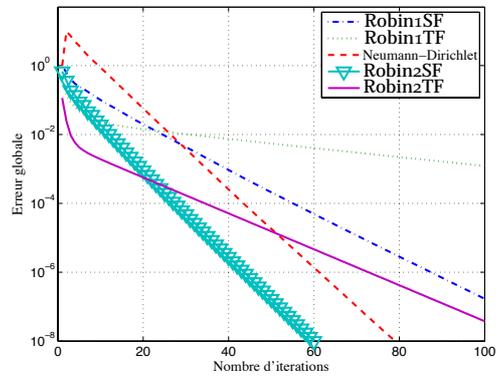
(c)  $a = 1, b = 0.1$



(d)  $a = 1, b = 0.02$



(e)  $a = 1, b = 0.01$



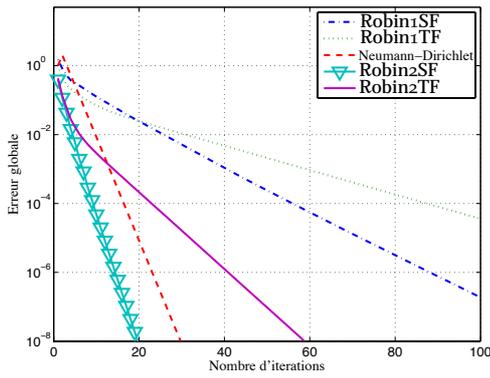
(f)  $a = 1, b = 0.005$

FIGURE 7.8: Erreur au cours des itérations pour différentes valeurs de  $a$  et  $b$

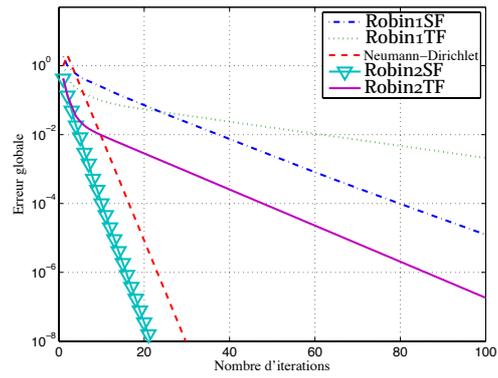
Sur la table 7.6 et la figure 7.9, nous pouvons observer le comportement des algorithmes dans le cas où  $a = 1$ ,  $b = \varepsilon$  et où nous faisons décroître  $\varepsilon$ .

## 7.4 Conclusion

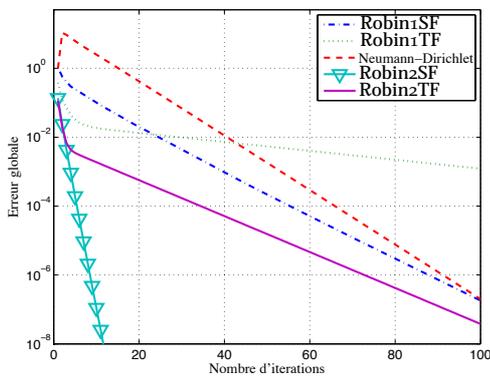
Dans ce chapitre nous avons développé des conditions d'interface adaptées aux difficultés posées par les problèmes de type revêtement. Parallèlement au chapitre précédent, ce travail s'allie aux résultats obtenus dans [19, 22] et démontre l'efficacité et la robustesse des conditions de Robin optimisées.



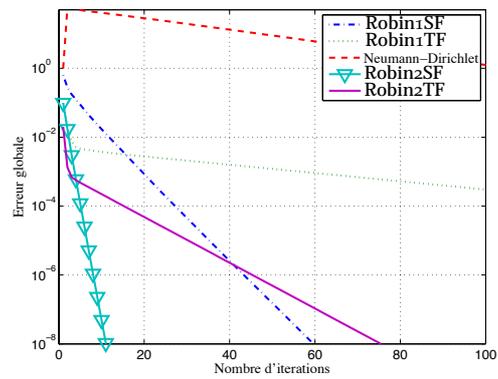
(a)  $a = b = \varepsilon = 0.5$



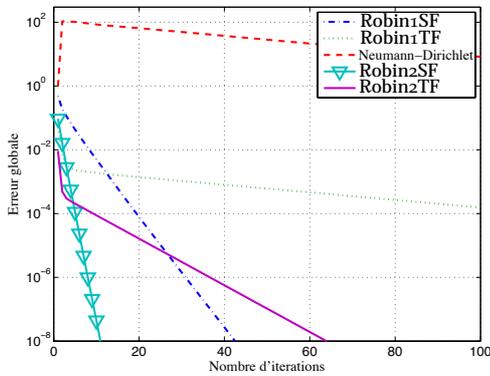
(b)  $a = 1, b = \varepsilon = 0.5$



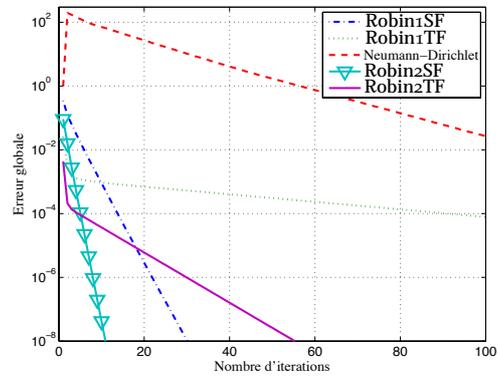
(c)  $a = 1, b = \varepsilon = 0.1$



(d)  $a = 1, b = \varepsilon = 0.02$



(e)  $a = 1, b = \varepsilon = 0.01$



(f)  $a = 1, b = \varepsilon = 0.005$

FIGURE 7.9: Erreur au cours des itérations pour différentes valeurs de  $\varepsilon$

De ce fait les résultats obtenus sont encourageants et nécessitent une étude plus approfondie concernant la précision de la solution calculée comparativement à d'autres approches. La suite de ce travail sera bien entendu l'étude du raffinement de maillage dans la couche mince.

# Bibliographie

- [1] H.A. SCHWARZ, *Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren*, *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15 , pp.272-286,1870
- [2] J. NELDER AND R. MEAD, *A simplex method for function minimization*, *The Computer Journal*, 7, pp. 308-313, 1964
- [3] Y. SAAD AND M. H. SCHULTZ, *GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 7, pp. 856-869,1986
- [4] D. FUNARO,A. QUARTERONI, P. ZANOLLI, *An iterative procedure with interface relaxation for domain decomposition methods*, *SIAM J. Numer.Anal.*25. 1213-1236, 1988
- [5] L.D. MARINI, A. QUARTERONI, *An relaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements*, *Numer.Math.*55. 575-598, 1988
- [6] P.LIONS, *On the Schwarz alternating method. III : A variant for non overlapping subdomains*, in *T.Chan,R.Glowinski,JPeriaux,Owidlund(Eds.)*, *third international symposium on Domain decomposition methods for partial differential equations,held in Houston,TX,March 20-22,1989,Siam,Philadelphia,PA,1990*
- [7] B. DESPRÉS, *Décomposition de domaine et problème de Helmholtz*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1, pp. 313-316, 1990
- [8] P. CHARTON, F.NATAF, F,ROGIER, *Méthode de décomposition de domaines pour l'équation d'advection-diffusion*, *C.R.Acad.Sci*,313, pp 623-626, 1991
- [9] F.NATAF, F,ROGIER, *Factorization of the convection-diffusion operator and the Schwarz algorithm*, *M<sup>3</sup>AS*, 5, pp. 67-93, 1995
- [10] C. JAPHET, *Optimized Krylov-Ventcell method. Application to convection-diffusion problems*, in *proceedings of the 9th international conference on domain decomposition methods*, *P.E.Bjorstad, M.S.Espedal, and D.E.Keyes, eds ; ddm.org*, pp.382-389, 1998
- [11] A. QUARTERONI, A. VALLI, *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, *Oxford Science Publications*, 1999
- [12] MARTIN J. GANDER, L. HALPERN, FREDERIC NATAF, *Optimized Schwarz methods*, *12th International Conference on Domain Decomposition Methods* , 2001
- [13] C. JAPHET AND F. NATAF, *The Best Interface Conditions for Domain Decomposition Methods : Absorbing Boundary Conditions*, *Absorbing Boundaries and Layers, Domain Decomposition Methods. Applications to Large Scale Computations*, L. Tournette and L. Halpern, eds., Nova Science Publishers, Inc., New York, 2001, pp 348-373, Nova Science, 2001

- [14] M.GARBAY, D. TROMEUR-DEROVOUT, *On some Aitken like acceleration of the Schwarz method*, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 40(12), 2002
- [15] M.J. GANDER AND L. HALPERN, *Optimal Schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation*, *SIAM Journal on Numerical Analysis* Vol. 41, No 5, pp 1643-1681, 2003.
- [16] L.GERARDO GIORDA, F.NATAF, *Optimized Schwarz methods for unsymmetric layered problems with strongly discontinuous and anisotropic coefficients*, R.R 561, CMAP, 2004.
- [17] A.TOSELLI, O.WIDLUND, *Domain decomposition methods-algorithms and theory, vol.34 of Springer series in computational mathematics*, Springer-Verlag, Berlin 2005
- [18] Y.MADAY, F.MAGOULÈS, *Multilevel optimized Schwarz methods without Optimized Schwarz methods for highly heterogenous media*, RR-05015, Université Pierre et Marie-Curie, Laboratoire Jacques Louis Lions, 2005.
- [19] MARTIN J. GANDER, *Optimized Schwarz methods* *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 44, No. 2, pp. 699-731, 2006.
- [20] Y.MADAY, F.MAGOULÈS , *Improved ad hoc interface conditions for Schwarz solution procedure tuned to highly heterogeneous media*, *Applied mathematical modelling*, 30(8) :731-743,2006
- [21] E. FLAURAUD AND F. NATAF, *Optimized interface conditions in domain decomposition methods for problems with extreme contrasts in the coefficients*, *J. Comput. Appl. Math*, 189,no 1-2, 539-554, 2006.
- [22] O. DUBOIS, *Optimized Schwarz methods for advection-diffusion equation and for problems with discontinuous coefficients*, Ph.D. thesis, McGill University, June 2007
- [23] M.J. GANDER AND L. HALPERN, *Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems* ,*SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 45, No. 2, pp. 666-697, 2007.
- [24] D.BENNEQUIN, M.J. GANDER AND L. HALPERN, *A homographic best approximation problem with application to optimized Schwarz waveform relaxation*, *Math. Comp.* 78 , no. 265, pp.185—223, 2009.
- [25] V. DOLEAN, M.J. GANDER, AND L. GERARDO-GIORDA, *Optimized Schwarz methods for Maxwells equations*, *SIAM Journal on Scientific Computing*, in press, 2009.