

ACADEMIE DE MONTPELLIER



**UNIVERSITE MONTPELLIER II**

— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

**MÉMOIRE D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES**

Présentée à l'Université de Montpellier II

# **Dynamique des structures et lois d'interface**

par

**Franck JOURDAN**

Soutenue le 6 juillet 2006 devant le jury composé de :

MM.	Alart	Pierre	Professeur, Université de Montpellier II
	Ben Dhia	Hachmi	Professeur, Ecole Centrale Paris
	Boucard	Pierre-Alain	Professeur, ENS Cachan
	Brogliato	Bernard	Directeur de recherche, INRIA
	Chabrand	Patrick	Professeur, Université Aix-Marseille II
	Dureisseix	David	Professeur, Université de Montpellier II



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Présentation du mémoire</b>	<b>5</b>
<b>II</b>	<b>Méthodes numériques en calcul des structures</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Méthode à grands incréments de temps</b>	<b>13</b>
1.1	Principes de la méthode . . . . .	13
1.2	Prise en compte de la dynamique . . . . .	16
1.3	Conclusion . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Méthode des éléments finis espace-temps et remaillage</b>	<b>21</b>
2.1	Principes de la méthode . . . . .	21
2.2	Comparaisons avec les méthodes de type FD-FE . . . . .	26
2.3	Remaillage . . . . .	29
2.4	Elements finis espace-temps et traitement du contact frottant . .	32
2.5	Conclusion . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Méthode d'approximation par fonctions constantes par mor- ceaux pour des problèmes de membrane</b>	<b>35</b>
3.1	Méthode . . . . .	35
3.2	Résultats numériques . . . . .	37
3.3	Conclusion et perspectives . . . . .	39
<b>III</b>	<b>Modélisations des lois d'interface</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>Modélisation numérique de l'usure</b>	<b>45</b>
4.1	Loi d'usure . . . . .	46
4.2	Traitement numérique . . . . .	48
4.3	Simulations . . . . .	49
4.4	Conclusions et perspectives . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Modélisation numérique de la fragmentation du béton</b>	<b>53</b>
5.1	Etude expérimentale . . . . .	53
5.2	Eléments discrets . . . . .	55
5.3	Simulations . . . . .	56

5.4	Conclusion et perspectives . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Modélisation de lois de choc</b>	<b>63</b>
6.1	Matrice de restitution . . . . .	63
6.2	Identification de la matrice de restitution . . . . .	65
6.3	Comparaisons numériques . . . . .	66
6.3.1	Choc sans pesanteur . . . . .	66
6.3.2	Choc et chute libre . . . . .	67
6.4	Conclusion . . . . .	68
<b>IV</b>	<b>Autres études et projets de recherche</b>	<b>71</b>
6.5	Le 3D... et plus . . . . .	73
6.5.1	Pliage et dépliage des systèmes de tensérité . . . . .	73
6.5.2	Usure 3D . . . . .	73
6.5.3	Eléments finis espace-temps 4D . . . . .	74
6.6	La biomécanique . . . . .	75
6.6.1	Attelles articulées de genou . . . . .	75
6.6.2	Remodelage osseux . . . . .	75



Première partie

Présentation du mémoire



Ce document de synthèse a pour objectif de mettre en lumière l'ensemble de mes travaux de recherche réalisés depuis la fin de ma thèse de doctorat. On ne trouvera pas de découvertes majeures, mais une accumulation de résultats qui peuvent être utile à la communauté scientifique.

La première difficulté que j'ai rencontrée dans la rédaction de ce mémoire était de donner un enchaînement cohérent à un ensemble d'actions qui, à première vue, n'ont pas de réels points communs et qui ont été réalisées dans le cadre de programmes de recherche prédéfinis ou à l'occasion d'opportunités scientifiques. Cependant, mes affinités scientifiques ont fait qu'il se dégage malgré tout, une ligne directrice dont la source peut se retrouver dans mes travaux de thèse.

Pour aider à la compréhension de mon parcours scientifique, rappelons que l'objectif de ma thèse était de proposer une méthode robuste de traitement du contact frottant dans la simulation numérique du procédé d'emboutissage. Cela a abouti à l'élaboration d'un algorithme de traitement du contact frottant initialement appelé "méthode des équilibres successifs", qui a participé au développement d'une approche plus générale connue sous le nom de "Non Smooth Contact Dynamics", [20]. On a montré que la robustesse de cet algorithme est fortement liée à l'introduction des effets dynamiques dans le modèle. Ces derniers ont une contribution régularisante sur la résolution. Ce constat est appuyé par un théorème de convergence que nous avons établi à l'occasion de cette thèse [23]. C'est le seul résultat théorique que l'on peut trouver pour ce type d'algorithme. Ce qui est intéressant, c'est que comme toute démarche de recherche c'est le fruit de longues observations. C'est en observant le comportement de l'algorithme qu'est apparue la clef de la preuve de la convergence. Il se trouve que cette dernière est liée au pas de temps de discrétisation au travers des effets dynamiques. Je tiens à montrer, par ces remarques, que le lien entre la Mécanique et la méthode de résolution est relativement fort. La démarche adoptée pour ce type d'étude et que l'on retrouvera souvent par la suite dans mes travaux, peut être qualifiée "d'expérimentations numériques".

A posteriori, on peut dire que l'influence des effets dynamiques n'a rien de surprenant pour ce type de procédé de mise en forme. Pour s'en rendre compte il suffit de suivre une chaîne de production, de voir et d'entendre l'action des outils de formage. Pourtant, à l'origine la plupart des logiciels de simulation d'emboutissage étaient développés en adoptant des approches quasi-statiques. Or aujourd'hui, les plus performants sont non seulement en dynamique, mais en dynamique explicite (PAMSTAMP, OPTRIS, ABAQUS explicite, ...). On comprendra mieux pourquoi lorsque, après ma thèse, l'on m'a demandé de contribuer à la simulation du découpage de tôle, j'ai aussitôt travaillé à prendre en compte les effets dynamiques. Il est encore plus important de tenir compte des effets dynamiques en découpage de tôle qu'en emboutissage. Mais cette fois-ci la difficulté était ailleurs. Il fallait tenir compte des forces d'inertie dans la méthode LATIN. On verra dans le premier chapitre de ce mémoire quelle stratégie j'ai employée.

Ensuite, mes connaissances sur la méthode LATIN ont fait que je me suis intéressé à la méthode des éléments finis espace-temps. Ces deux approches

diffèrent dans la représentation des inconnues, mais la philosophie reste la même.

Par ailleurs, je porte un certain intérêt à la biomécanique et mes compétences en contact et frottement, m'ont amenées à m'intéresser à l'usure dans les prothèses de genou. J'ai obtenu une aide de l'Université de Montpellier, dans le cadre de projets innovants, pour débiter ce type d'étude. Cette thématique a ensuite fait boule-de-neige au sein du laboratoire qui compte à l'heure actuelle, parmi ces activités scientifiques, un axe transversal sur la mécanique du vivant. Depuis, j'ai proposé un modèle numérique d'usure qui tient compte des grands glissements, j'ai participé à la conception d'une attelle articulée de genou respectant les structures anatomiques et je co-encadre un thèse sur la modélisation du remodelage osseux.

Toujours dans la modélisation des lois d'interface, on peut citer mes contributions dans la mise au point de lois de chocs et dans l'utilisation de lois cohésives pour la simulation de la fragmentation du béton.

En résumé, mes activités de recherche post-doctorales peuvent s'articuler autour de deux axes. Le premier concerne le développement de méthodes numériques en calcul des structures. Il fait l'objet de la partie II de ce mémoire. Le second, concerne la modélisation, et plus particulièrement, l'enrichissement de lois d'interface. Une synthèse est proposée dans la partie III. Tous ces travaux ont été le fruit de collaborations de recherche avec des industriels et des chercheurs Français et étrangers. Dans la dernière partie de ce mémoire, je présente les projets scientifiques que je souhaite mener à bien.

Deuxième partie

Méthodes numériques en  
calcul des structures



## Organisation de la partie II

J'ai rassemblé dans cette partie du mémoire mes travaux de recherche qui concernent le développement de méthodes numériques en calcul des structures. Cette partie s'articule autour de trois chapitres distincts. Dans les deux premiers, il est question de calculs en dynamique des structures.

Le premier chapitre est consacré à la prise en compte des effets dynamiques dans la méthode à grands incréments de temps. Les calculs sont appliqués à la simulation du découpages de tôles.

Le second chapitre est une synthèse de mes travaux sur le remaillage espace-temps en dynamique avec contact frottant. Les applications sont plus académiques qu'au chapitre précédent, car le sujet est dans une phase émergente.

Dans le troisième chapitre je présente une étude qui relève plus de l'analyse numérique. Il s'agit d'une validation de la convergence d'une méthode d'approximation du problème de membrane par des fonctions constantes par morceaux.





# Chapitre 1

## Méthode à grands incréments de temps

De 1998 à 2000 j'ai travaillé dans le cadre d'un contrat de recherche entre l'UTC, l'Université de Picardie Jules Verne (UPJV) et la région Picardie. Cette dernière a financé une étude, que nous avons proposée dans le pôle régional de modélisation, sur la simulation des procédés d'emboutissage et de découpage des tôles. La méthode LATIN (LArge Time INcrement) est une méthode incrémentale non classique qui nécessite très peu d'incrémentes pour simuler le procédé dans sa totalité. Cependant, c'est une méthode itérative qui n'échappe pas non plus aux problèmes de convergence surtout lorsque l'on considère des structures en grandes déformations élasto-plastiques avec contact, frottement et endommagement. Ainsi, la méthode de régularisation dynamique est apparue intéressante pour surmonter ces obstacles. Une version dynamique de la méthode LATIN a été réalisée et une validation sur des exemples de découpage de tôle a fait l'objet d'un article [25] et d'une communication [26]. L'approche adoptée est basée sur une formulation variationnelle à quatre champs des problèmes dynamiques en grandes déformations. Cette formulation est compatible avec les étapes successives de la méthode LATIN. Elle fait apparaître le couple (contrainte de Piola-Kirchhoff - gradient du déplacement) mais aussi un couple dual inhabituel (force d'inertie - déplacement). Les résultats que nous avons publiés sur le découpage des tôles, ont, entre autres, mis en évidence que le traitement du contact-frottant par une méthode de pénalité (méthode historiquement implantée dans le logiciel utilisé) est mal adapté à la dynamique.

### 1.1 Principes de la méthode

La méthode LATIN, introduite par P. Ladevèze [31] pour des problèmes mécaniques en petites perturbations, a par la suite été, entre autres, généralisée

par P. Bussy [9] en grandes déformations avec contact, frottement et endommagement. Afin de mettre en évidence les points nouveaux que j'ai développés, je présente dans ce paragraphe les grandes lignes de la méthode initiale. C'est-à-dire, sans tenir compte des efforts d'inertie. Pour simplifier la présentation, les actions de contact sont négligées (c'est une des rares études que j'ai mené sans me préoccuper de la gestion du contact frottant).

On note  $\Omega_0$  le domaine occupé par la structure à l'instant initial  $t = 0$  et  $\Omega$  la configuration à l'instant  $t$  (voir figure 1.1). Soit  $X$  la position initiale et  $x(t)$  la position actuelle, la transformation  $\varphi$  définie par

$$x(t) = \varphi(X, t) \quad \forall X \in \Omega_0 \text{ and } \forall t \in [0, T] , \quad (1.1)$$

est supposée suffisamment régulière pour que le gradient de transformation,

$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial X}(X, t) , \quad (1.2)$$

et le vecteur accélération,

$$\ddot{x}(t) , \quad (1.3)$$

existent. Le vecteur déplacement  $u$  est défini par,

$$u(X, t) = \varphi(X, t) - X . \quad (1.4)$$

On note  $U_d$  les déplacements imposés sur la partie  $\partial_0\Omega$  la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$   $F_d$  les forces imposées sur la partie  $\partial_1\Omega$ . Les images réciproques de ces parties par la transformation  $\varphi$  sont notées  $\partial_0\Omega_0 = \varphi^{-1}(\partial_0\Omega)$  et  $\partial_1\Omega_0 = \varphi^{-1}(\partial_1\Omega)$ .  $f_d$  est la densité volumique de force imposée.

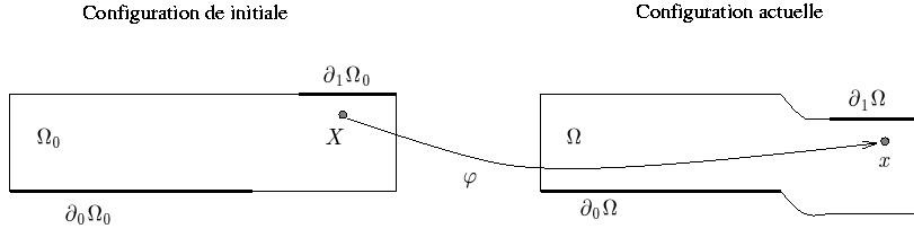


FIG. 1.1 – Configurations initiales et actuelles

L'équilibre de la structure peut se mettre sous la forme variationnelle suivante

$$\int_{\Omega_0} \text{tr}(P^T \nabla v^*) dX = \int_{\partial_1 \Omega_0} F_d^0 \cdot v^* dS + \int_{\Omega_0} f_d^0 \cdot v^* dX , \quad (1.5)$$

$$\forall t \in [0, T] \text{ and } \forall v^* \in U_0 = \{v^*, v^*|_{\partial_0 \Omega_0} = 0\} ,$$

où  $P = J\sigma F^{-T}$  est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff,  $J = \det F$  et  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy. Il s'agit d'une formulation Lagrangienne totale.

La méthode LATIN commence par la définition de deux ensembles, à l'intersection desquels se trouve la solution du problème. Le premier ensemble  $A_d$  est l'ensemble des variables  $S = (F, P)$  qui vérifient :

- *Les conditions cinématiques*

$$u|_{\partial_0\Omega_0} = U_d \quad \text{and} \quad F = I + \frac{\partial u}{\partial X} \quad (1.6)$$

- *et l'équation d'équilibre* : à travers le principe de puissances virtuelles (1.10).

Le second ensemble  $\Gamma$  est l'ensemble des variables  $\hat{S} = (\hat{F}, \hat{P})$  qui vérifient

- *la loi de comportement*

$$\hat{F}_t = \mathcal{A}(\hat{P}_\tau, \tau \leq t), \quad (1.7)$$

La solution  $S^e$  du problème est à l'intersection des ensembles  $\Gamma$  et  $A_d$ . Pour la déterminer, on utilise un algorithme itératif divisé en deux étapes (voir figure 1.2).

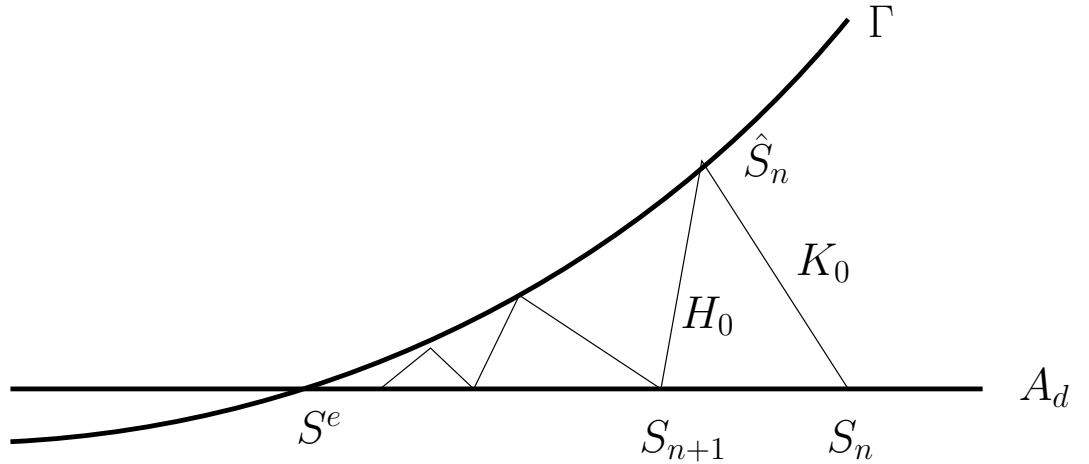


FIG. 1.2 – Algorithme itératif

On note  $\Delta S_{n+1}$  la différence  $S_{n+1} - S_n$ . La solution  $S^e$  est obtenue par la relation suivante :

$$S^e = S_0 + \sum_{n=0}^N (S_{n+1} - S_n) = S_0 + \sum_{n=0}^N \Delta S_{n+1}$$

où  $S_0$  est une initialisation, par exemple, la solution du problème en élasticité linéaire. Comme l'état initial est supposé connu et pour des raisons d'homogénéité dans la représentation des inconnues, on travaille avec les taux  $\dot{S} = (\dot{F}, \dot{P})$ .

- La première étape de la méthode consiste à déterminer  $\hat{S}_n$  connaissant  $\dot{S}_n$  et la direction de recherche  $K_0$ . Il s'agit d'une étape locale non linéaire.

- La seconde étape de la méthode consiste à déterminer  $\hat{S}_{n+1}$  connaissant  $\hat{S}_n$  et la direction de recherche  $H_0$ . Il s'agit d'une étape globale linéaire.

En ce qui concerne les directions de recherche, on utilise classiquement, pour ces problèmes de mise en forme, la verticale comme opérateur  $K_0$  et l'opérateur de Hooke comme direction de descente  $H_0$ . Dans ce cas, l'algorithme schématisé dans la figure 1.2 correspond à une méthode de Newton modifiée.

Les particularités de la méthode LATIN résident dans sa formulation variationnelle et dans sa représentation des inconnues. Du principe des puissances virtuelles, on peut en tirer la relation suivante

$$\forall v^*(X, t) \in \bar{U} \quad \int_0^T \int_{\Omega_0} \text{tr} \left( (\dot{P}_{n+1} - \dot{P}_n)^T \nabla v^* \right) dX dt = 0 \quad (1.8)$$

où  $\bar{U} = \{v^*, v^*|_{\partial_0 \Omega_0} = 0\}$ . Notons que l'intégration se fait sur l'espace et sur le temps. On verra plus loin que l'on retrouve ce type d'approche dans la méthode des éléments finis espace-temps. La différence fondamentale entre ces deux méthodes réside dans la représentation des inconnues. Les détails sont donnés dans le paragraphe suivant.

## 1.2 Prise en compte de la dynamique

Je présente dans ce paragraphe une généralisation de cette méthode à la dynamique. On peut trouver dans la littérature d'autres approches intéressantes dans les travaux de Gaignebet [14] et Ladevèze [30], mais elles restent dans le cadre des petites déformations.

La première idée qui vient à l'esprit est de rajouter la puissance virtuelle des quantités d'accélération. Cela revient à modifier l'ensemble  $A_d$  en ajoutant les conditions initiales et en considérant l'équation du mouvement. Les éléments de  $A_d$  doivent alors vérifier

- *Les conditions cinématiques*

$$\begin{cases} u(X, 0) = 0 \\ \dot{u}(X, 0) = 0 \end{cases}, \quad \forall t \in [0, T], \quad u|_{\partial_0 \Omega_0} = U_d \quad \text{and} \quad F = I + \frac{\partial u}{\partial X} \quad (1.9)$$

- *L'équation du mouvement :*

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{u} \cdot v^* dX + \int_{\Omega_0} \text{tr}(P^T \nabla v^*) dX = \int_{\partial_1 \Omega_0} F_d^0 \cdot v^* dS + \int_{\Omega_0} f_d^0 \cdot v^* dX, \quad (1.10)$$

$$\forall t \in [0, T] \text{ and } \forall \mathbf{v}^* \in U_0 = \{\mathbf{v}^*, \mathbf{v}^*|_{\partial_0 \Omega_0} = 0\},$$

Ensuite la démarche doit rester la même. En fait, cette approche ne respecte pas les principes de la méthode LATIN car les efforts d'inertie sont des inconnues et à ce titre, ils doivent apparaître dans l'ensemble des variables à déterminer. Ainsi, on note

$$\nu = \rho \ddot{u}$$

la densité de force d'inertie et l'on choisit comme variable duale le déplacement  $u$ . De telle manière que la solution du problème est à l'intersection de l'ensemble des variables

$$S = ((F, u), (P, \nu)) \in A_d$$

et de l'ensemble  $\Gamma$  des variables  $\hat{S} = ((\hat{F}, \hat{u}), (\hat{P}, \hat{\nu}))$  vérifiant les lois de comportement

$$\hat{F}_t = \mathcal{A}(\hat{P}_\tau, \tau \leq t), \quad (1.11)$$

et

$$\hat{\nu} = \rho_0 \frac{\partial^2 \hat{u}(t)}{\partial t^2}. \quad (1.12)$$

La relation (1.12) est considérée comme une loi de comportement. C'est un point très important de la démarche. Cela permet de traiter de la même manière les variables  $\hat{\nu}$ ,  $\hat{u}$  et les variables  $\hat{P}$ ,  $\hat{F}$ .

En utilisant l'algorithme précédent, la première étape

- *l'étape locale* devient : Trouver  $\hat{S}_n = ((\hat{F}_n, \hat{P}_n), (\hat{u}_n, \hat{\nu}_n))$  tel que

$$\begin{cases} \hat{P}_n - \dot{P}_n = -K_0(\hat{F}_n - \dot{F}_n) \\ \hat{\nu}_n - \dot{\nu}_n = -k_a(\hat{u}_n - \dot{u}_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{P}_n = K_\tau \hat{F}_n \\ \hat{\nu}_n = \rho_0 \frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $k_a$  est une direction de recherche au même titre que  $K_0$ .

Et la seconde étape,

- *l'étape globale* : devient : Trouver  $\hat{S}_{n+1} = ((\hat{F}_{n+1}, \hat{P}_{n+1}), (\hat{u}_{n+1}, \hat{\nu}_{n+1}))$  tel que

$$\begin{cases} \hat{P}_n - \dot{P}_{n+1} = H_0(\hat{F}_n - \dot{F}_{n+1}) \\ \hat{\nu}_n - \dot{\nu}_{n+1} = h_a(\hat{u}_n - \dot{u}_{n+1}) \end{cases} \quad \text{et} \quad [S_{n+1} \in A_d],$$

où  $h_a$  est une direction de recherche au même titre que  $H_0$ .

Un autre point clef de mon travail a été de choisir les directions de recherche  $h_a$  et  $k_a$ . Pour les mêmes raisons que  $K_0$ , la direction  $k_a$  est choisie verticale.

D'autre part, la direction optimale pour  $h_a$  serait la direction tangente à la loi (1.12) c'est-à-dire

$$h_a = \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial \hat{u}}.$$

Pour calculer cet opérateur, nous choisissons d'approcher la loi par une méthode de différences finies, de type Euler implicite. Soit  $\Delta t = t_{I+1} - t_I$  le pas de temps, la discrétisation donne

$$\hat{\nu}(I+1) = \rho_0 \frac{\hat{u}(I+1) - 2\hat{u}(I) + \hat{u}(I-1)}{\Delta t^2}.$$

On a alors,

$$\frac{\partial \hat{\nu}(I+1)}{\partial \hat{u}(I+1)} = \frac{\rho_0}{\Delta t^2} I_d.$$

où  $I_d$  est la matrice identité. Nous choisissons de prendre comme direction de recherche  $h_a$  l'opérateur  $\frac{\rho_0}{\Delta t^2} I_d$ .

Cette discrétisation de la relation de comportement (1.12) sera réutilisée pour l'étape locale, c'est-à-dire pour l'intégration de la loi (détails dans l'atrice [25]).

La représentation des inconnues est une des particularités de la méthode. Elles sont interpolées par des combinaisons linéaires de fonctions du temps et de fonctions d'espace. On choisit pour les variables cinématiques les interpolations suivantes

$$\dot{u}_{n+1}(X, t) - \dot{u}_n(X, t) = \sum_{i=1}^{p_n} g_i(t) w_i(X)$$

$$\dot{F}_{n+1}(X, t) - \dot{F}_n(X, t) = \sum_{i=1}^{p_n} g_i(t) \alpha_i(X)$$

et pour les variables duales les interpolations suivantes

$$\dot{\nu}_{n+1}(X, t) - \dot{\nu}_n(X, t) = \sum_{i=1}^{p_n} h_i(t) \mu_i(X)$$

$$\dot{P}_{n+1}(X, t) - \dot{P}_n(X, t) = \sum_{i=1}^{p_n} h_i(t) \beta_i(X)$$

où  $g_i, h_i$  sont des fonctions du temps définies sur  $[0, T]$  et  $w_i, \alpha_i, \mu_i, \beta_i$  sont des tenseurs dépendants de la variable d'espace  $X$ . Pour chaque itération  $n$ , l'entier  $p_n$  est un paramètre de la méthode. Le reste des développements de la méthode, qui est un peu technique, est détaillé dans l'article [25].

### 1.3 Conclusion

J'ai présenté une synthèse de la méthode que j'ai développée, en essayant de distinguer les points clefs de la démarche. J'ai choisi de ne pas présenter les problèmes techniques rencontrés. Pourtant ils sont nombreux. Pour avoir pratiqué et développé de nombreuses méthodes numériques je peux dire que la méthode LATIN est certainement une des plus difficiles à comprendre et à mettre en oeuvre. De plus, on a malheureusement tendance à l'oublier trop vite.

Bien entendu, implanter la dynamique avait un but de régularisation. Les exemples numériques traités ont montré qu'en découpage de tôle, l'apport de la dynamique a permis de mener les calculs d'endommagement jusqu'à des niveaux proche de la rupture. Cependant l'étude a mis aussi en évidence le fait que le traitement par pénalité du contact frottant n'était pas adapté au problème dynamique. Une approche par sous domaines et multiplicateurs, comme proposée dans [11] et [30], serait probablement plus adaptée.





## Chapitre 2

# Méthode des éléments finis espace-temps et remaillage

Les travaux que j'ai réalisés sur la méthode à grands incréments de temps m'ont amené à me pencher sur la méthode des éléments finis espace-temps. Il se trouve que ces deux méthodes sont relativement proches. Toutes les deux sont basées sur une formulation variationnelle dont le domaine d'intégration est l'espace-temps. La différence majeure entre ces deux approches réside dans la représentation de inconnues. L'objectif de l'étude était multiple. Dans un premier temps il s'agissait de résoudre des problèmes instationnaires linéaires (elastodynamiques) en utilisant la méthode des éléments finis espace-temps. Il était question de montrer l'efficacité de la méthode, en terme de précision, de rapidité et aussi la souplesse d'adaptabilité du maillage dans l'espace et dans le temps. Dans un second temps, il s'agissait de résoudre des problèmes non linéaires de contact et frottement. Des résultats ont été obtenus sur des exemples académiques et sur des exemples de contact avec frottement. Ces activités ont fait l'objet d'une thèse soutenue en décembre 2001, de deux articles dans des revues internationales [4], [5] et de deux communications internationales.

### 2.1 Principes de la méthode

La Méthode des Eléments finis Espace-Temps (STFEM), se distingue des autres méthodes en calcul des structures par l'utilisation d'une interpolation de même nature sur l'espace et sur le temps.

La STFEM n'est pas une méthode très répandue. Elle peut être considérée comme une extension de la méthode des éléments finis "classique", dans le sens où elle s'applique, à un problème aux limites issu d'un problème d'évolution. Actuellement, plusieurs approches existent, on peut citer, la méthode à grands incréments de temps (LATIN), la méthode de " Galerkin Discontinue ", et la nôtre que l'on nommera " méthode de Galerkin Semi-Discontinue

". Dans la plupart des publications sur la méthode de Galerkin Discontinue, les fonctions d'interpolation sont considérées comme étant le produit de fonctions d'espace et de temps. Nous montrerons que dans ce cas, et pour certains maillages espace-temps, utiliser la méthode de Galerkin Semi-Discontinue revient tout simplement à appliquer un schéma d'intégration numérique de type Newmark.

Nous verrons dans ce chapitre qu'une attention particulière sera portée à la non séparation des variables espace et temps. La raison de ce choix n'est pas motivée par des questions de précisions de résultats, mais plutôt par ce qui constitue le fond de notre étude à savoir le remaillage. Nous montrerons, en effet, que ce type d'interpolation est adapté au remaillage. Le remaillage espace-temps que nous avons développé est basé sur la construction de maillages espace-temps non structurés.

Ce remaillage sera appliqué à différents problèmes mécaniques et notamment de contact avec frottement. Lors de problèmes de contact, il est nécessaire d'avoir un maillage fin autour de la zone de contact. Le plus souvent, cette zone de contact est évolutive. Ainsi pour gagner du temps de calcul, il apparaît intéressant de construire un maillage évolutif qui suivrait la zone de contact.

Contrairement au chapitre précédent, les déformations sont supposées petites.

L'objectif de cette étude étant d'appliquer une méthode d'éléments finis, le problème d'évolution est à considérer comme un problème aux limites sur le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ . Dans ce problème aux limites, la condition sur la vitesse initiale (à  $t = 0$ ) et une éventuelle condition sur la vitesse finale (à  $t = T$ ), par exemple si le système est arrêté brutalement, sont considérées comme des conditions aux limites. Ces conditions peuvent mener à des discontinuités de vitesse où du point de vue dual à des impulsions. De la même manière que dans la méthode de Galerkin discontinue et que dans la méthode LATIN, la formulation variationnelle est établie sur le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$

Dans cette approche, l'inconnue principale est le déplacement  $u$ . On note  $\varepsilon$  le tenseur des déformations et  $a$  le tenseur de Hooke. La formulation variationnelle en déplacements peut s'écrire :

Trouver le déplacement  $u \in U_{ad}$  tel que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\rho \ddot{u}v + a\varepsilon(u) : \varepsilon(v) - f_d v) dx dt = \int_0^T \int_{\partial_1 \Omega} F_d v ds dt, \quad (2.1)$$

$$\forall v \in U_{ad}^0$$

où  $U_{ad}$  est l'ensemble des déplacements suffisamment réguliers, qui satisfont les conditions cinématiques et initiales,  $v$  est le déplacement virtuel et  $U_{ad}^0$  est l'ensemble des déplacements suffisamment réguliers, qui satisfont les conditions cinématiques et initiales nulles.

Afin de tenir compte, dans la formulation variationnelle, de la condition sur la vitesse initiale, le travail virtuel des quantités d'accélération est intégré par parties par rapport au temps. Ce qui donne,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho \ddot{u} v dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \rho \dot{u} \dot{v} dx dt + \int_{\Omega} [\rho \dot{u}_T(x) v(x, T) - \rho \dot{u}_0(x) v(x, 0)] dx \quad (2.2)$$

où  $\dot{u}_T(x)$  est la vitesse au temps  $t = T$ . L'approximation proposée dans cette étude est de type Galerkin en temps et en espace. L'interpolation espace-temps est construite à partir de polynômes de Lagrange. Les éléments finis sont isoparamétriques.

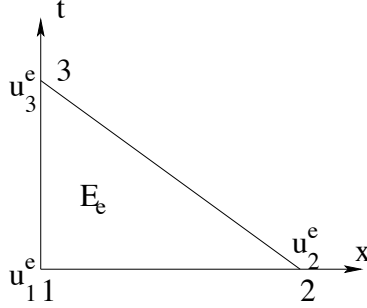


FIG. 2.1 – Élément fini de référence en 2D espace-temps de type simplex

Sur un élément fini espace-temps  $E_e$  (figure 2.1), le déplacement vérifie :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e} \varphi_i^e(x, t) u_i^e \quad (2.3)$$

où  $n_e$  est le nombre de noeuds de l'élément  $E_e$ ,  $\varphi_i^e$  sont les fonctions d'interpolation et  $u_i^e$  les déplacements nodaux. La même interpolation est utilisée pour les déplacements virtuels  $v$ , ce qui constitue une variante par rapport aux approches développées par Bajer et Bohatier [6], [7]. La discrétisation espace-temps de la précédente formulation variationnelle mène au système linéaire suivant :

$$([\widetilde{M}_u] + [\widetilde{K}_u])\{U\} = \{F_u\} + \{\Lambda\} \quad (2.4)$$

où  $[\widetilde{M}_u]$  est la matrice relative aux efforts d'inertie,  $[\widetilde{K}_u]$  la matrice relative aux efforts intérieurs,  $\{F_u\}$  le vecteur nodal relatif aux efforts extérieurs,  $\{\Lambda\}$  le vecteur nodal relatif aux conditions aux limites en vitesses et  $\{U\}$  le vecteur nodal des déplacements.

Considérons un maillage espace-temps construit par couches successives d'éléments dans le temps. On pourra parler de maillage "stratifié". Si de plus, les numéros des noeuds qui ont les mêmes coordonnées temporelles sont proches les uns des autres (figure 2.2), alors le membre de gauche du système (2.4), se met sous la forme

$$([\widetilde{M}_u] + [\widetilde{K}_u])\{U\} = [T]\{U\} =$$

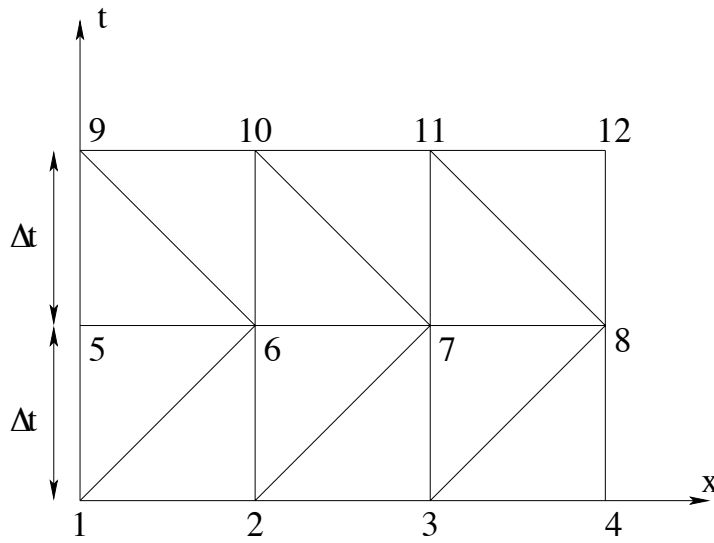


FIG. 2.2 – Exemple d'un maillage 2D espace-temps

$$\begin{pmatrix} [T_{11}] & [T_{12}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [T_{21}] & [T_{22}] & [T_{23}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{32}] & [T_{33}] & [T_{34}] & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & [T_{n/n-1}] & [T_{n/n}] & [T_{n/n+1}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [T_{n+1/n}] & [T_{n+1/n+1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{U_0\} \\ \{U_1\} \\ \vdots \\ \{U_n\} \end{pmatrix}$$

Par exemple, pour le maillage espace-temps de la figure 2.2, on a

$$\{U_0\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \{U_1\} = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} \text{ et } \{U_2\} = \begin{pmatrix} u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$$

En utilisant ce type de numérotation, la matrice totale  $[T]$  et les sous-matrices  $[T_{ij}]$  sont de type bande.

REMARQUES . — Le fait de choisir une interpolation de Lagrange pour les déplacements implique que les déplacements sont continus mais que les vitesses sont discontinues. Par conséquent l'intégration par parties (2.2) n'est pas exacte, il faut plutôt utiliser la formulation de la méthode de Galerkin discontinue, ce qui revient à écrire la dérivée de la vitesse au sens des distributions. Dans la suite nous conserverons la formulation (2.2), sachant que l'erreur commise est du même ordre que dans le cas d'éléments finis en espace classique. En effet, avec une interpolation de Lagrange, le déplacement est continu alors que la déformation est discontinue. De plus, on peut montrer, dans le cas d'une

interpolation linéaire, que la méthode de Galerkin discontinue et celle développée dans cet article donnent les mêmes résultats.

— Utiliser un maillage stratifié tel que nous l'avons défini, permet de ne pas assembler la matrice totale  $[T]$ , mais seulement les sous-matrices  $[T_{ij}]$ . Ceci réduit considérablement la taille des systèmes à résoudre. En fait, la taille de ces systèmes linéaires est exactement la même que celle obtenue dans le cas des approches couplant les méthodes incrémentales de type différences finies en temps à la méthode d'éléments finis en espace. Ces approches seront appelées dans la suite : méthodes FD-FE.

— Ensuite, il convient de préciser que le vecteur nodal relatif aux conditions aux limites en vitesses  $\{\Lambda\}$  est de la forme

$$\{\Lambda\} = (\{\Lambda_0\}, 0, \dots, 0, \{\Lambda_n\})^T$$

et que  $\{\Lambda_0\}$  est donné à partir des conditions sur la vitesse initiale, alors que  $\{\Lambda_n\}$  est inconnu. Par conséquent, la résolution du système (2.4) est effectuée de la manière suivante :

le premier système d'équations,

$$[T_{11}]\{U_0\} + [T_{12}]\{U_1\} = \{F_0\} + \{\Lambda_0\} \quad (2.5)$$

donne  $\{U_1\}$ , les systèmes d'équations,

$$[T_{i/i-1}]\{U_{i-2}\} + [T_{i/i}]\{U_{i-1}\} + [T_{i/i+1}]\{U_i\} = \{F_{i-1}\} \quad 2 \leq i \leq n, \quad (2.6)$$

donnent les déplacements  $\{U_i\}$  et le dernier système d'équations,

$$[T_{n+1/n}]\{U_{n-1}\} + [T_{n+1/n+1}]\{U_n\} = \{F_n\} + \{\Lambda_n\}, \quad (2.7)$$

donne  $\{\Lambda_n\}$ .

Je tiens à insister sur le fait que si l'on se réfère à la procédure classique adoptée dans la méthode des éléments finis, puisque l'on connaît  $\{U_0\}$  le premier système d'équations (2.5) ne doit pas servir à déterminer  $\{U_1\}$ . C'est le deuxième (2.6) qu'il faudrait utiliser. Et pourtant, ce n'est pas le cas. Cela vient du fait que l'on résout un problème d'évolution. Mais, avant de s'en rendre compte, de nombreux calculs ont été réalisés. Là encore, on peut dire que la démarche a été trouvée par expérimentation numérique.

— Notons enfin que les matrices de résolution  $[T_{i/i+1}]$  sont généralement non symétriques, alors que la matrice totale  $[T]$  est symétrique. Ainsi, pour l'algorithme présenté ci-dessus, il faut utiliser un solveur non symétrique. Cela peut paraître pénalisant en terme de temps de calcul. Cependant, comme l'objectif est d'utiliser cette approche pour traiter des problèmes de contact avec frottement et que la résolution non linéaire que nous avons développée [5] est de type Gauss Seidel non linéaire, ces non symétries n'affectent pas les temps de calcul.

## 2.2 Comparaisons avec les méthodes de type FD-FE

Les méthodes présentées dans le paragraphe précédent sont incrémentales dès que l'on utilise des maillages espace-temps stratifiés. La question est de savoir si elles ont un lien avec les méthodes incrémentales classiques de type FD-FE. Ces dernières sont basées sur une séparation des variables espace et temps. Elles couplent la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale avec les méthodes de type différences finies pour la discrétisation temporelle.

Avant d'effectuer ces comparaisons et pour faciliter la présentation, proposons les terminologies suivantes :

- Nous appellerons "simplex de type  $n$ ", un élément fini espace-temps admettant des fonctions d'interpolation polynomiale de degré  $n$ . Par exemple, un triangle à trois nœuds ou un tétraèdre à 4 nœuds sont des simplex de type 1 (figure 2.3).

- Nous appellerons "multiplex", un élément fini espace-temps admettant des fonctions d'interpolation qui sont le produit d'une fonction du temps par une fonction de l'espace. Par exemple, un quadrangle à 4 nœuds ou un hexaèdre à 8 nœuds sont des multiplex (figure 2.3). Les éléments finis espace-temps 4D ne sont pas représentables.

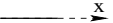
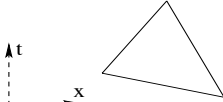
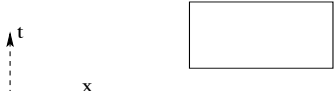
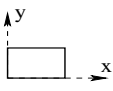
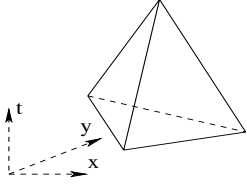
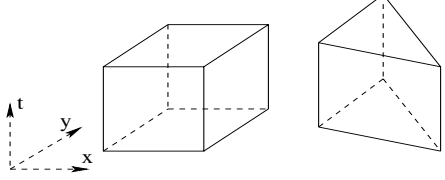
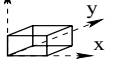
Espace	Simplex	Multiplex
1D 		
2D 		
3D 	Non representable	Non representable

FIG. 2.3 – Exemples d'éléments finis espace-temps de type 1

- Nous appellerons maillage espace-temps "régulier", un maillage stratifié dont le temps est constitué de strates identiques. Par exemple, les maillages des

figures 2.4 et 2.5 sont des maillages espace-temps réguliers. D'autre part, pour faciliter la lecture des résultats, rappelons l'algorithme d'intégration de Newmark. Il est défini comme suit :

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{U}_{i+1}\} + [K]\{U_{i+1}\} = 0 \\ \{\dot{U}_{i+1}\} = \{\dot{U}_i\} + \Delta t \left[ (1 - \delta) \{\ddot{U}_i\} + \delta \{\ddot{U}_{i+1}\} \right] \\ \{U_{i+1}\} = \{U_i\} + \Delta t \{\dot{U}_i\} + \Delta t^2 \left[ \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \{\ddot{U}_i\} + \theta \{\ddot{U}_{i+1}\} \right] \end{cases}$$

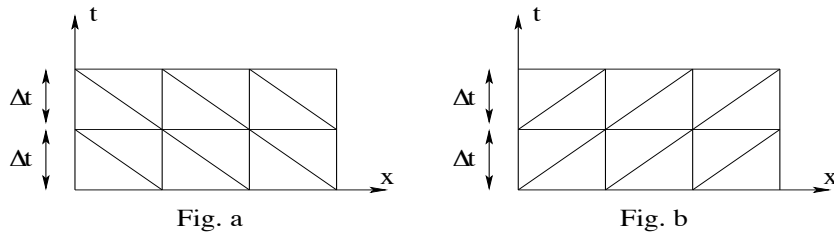


FIG. 2.4 – Maillages 2D espace-temps réguliers composés de simplex

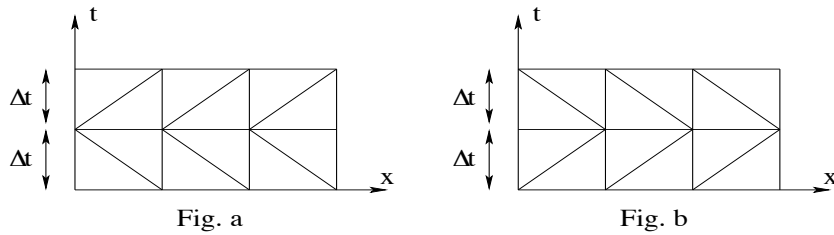


FIG. 2.5 – Maillages 2D espace-temps réguliers composés de simplex

Nous avons mené des comparaisons. Suivant que l'on adopte une approche en vitesse ou en déplacement, suivant le type d'élément fini et la structure du maillage que l'on utilise, les schémas d'intégrations sont différents. L'essentiel de nos résultats sont résumées dans le tableau suivant (tableau 2.1) :

Au vue des résultats précédents (tableau 2.1), la STFEM peut apparaître comme une généralisation des méthodes FD-FE. Pour affirmer que la STFEM est réellement une généralisation des méthodes FD-FE, il faudrait trouver, pour chaque schéma de différences finies un maillage et une interpolation espace-temps donnant un algorithme équivalent. Ce type d'étude, que nous n'avons pas encore menée serait probablement riche d'enseignements.

Notons aussi que lorsque les maillages sont non réguliers, on ne retrouve pas de schémas de type FD-FE équivalent.

En ce qui concerne l'utilisation d'éléments finis plus riches (de degré supérieur), nous nous sommes limités à une comparaison numérique en 1D espace-

Dimension	Approche en déplacements		Approche en vitesses	
	Simplex	Multiplex	Simplex	Multiplex
1D ( $t$ )	Accélération linéaire	Accélération linéaire	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$
2D ( $x, t$ )	Différences centrales	Accélération linéaire	Newmark $\delta = \frac{7}{6}, \theta = \frac{2}{3}$	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$
3D ( $x, y, t$ )	?	Accélération linéaire	?	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$
4D ( $x, y, z, t$ )	?	Accélération linéaire	?	Newmark $\delta = \frac{2}{3}, \theta = \frac{1}{4}$

TAB. 2.1 – Comparaisons entre la STFEM et les méthodes FD-FE

temps (vibrations d'un oscillateur simple) utilisant une interpolation quadratique (figure 2.6). Dans ce cas, on constate que pour un même pas de temps, la STFEM donne des résultats numériques environ 10 fois plus précis que ceux obtenus par la méthode de l'accélération linéaire.

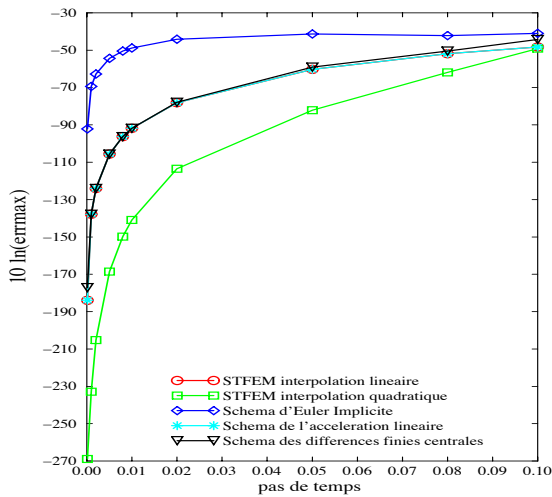


FIG. 2.6 – Erreur absolue maximum sur une période

Enfin, on constate aussi qu'avec les multiplex, le schéma d'intégration est conservé quelle que soit la dimension du problème (tableau 2.1). Par contre, cette propriété n'est pas vérifiée par les simplex. Les résultats sont surprenants. En effet, pour l'approche en déplacements, on passe d'un schéma d'intégration implicite en 1D à un schéma d'intégration explicite en 2D. Pour l'approche en vitesses, on passe d'un schéma d'intégration implicite en 1D, conditionnellement



stable à un schéma d'intégration implicite en 2D, inconditionnellement stable. La raison essentielle de ces changements est que suivant la dimension du problème, les simplex ont des topologies différentes. En effet, sur une couche temporelle  $[t_i, t_{i+1}]$ , suivant la dimension du problème, on traverse une ou plusieurs zones de discontinuité (figure 2.7).

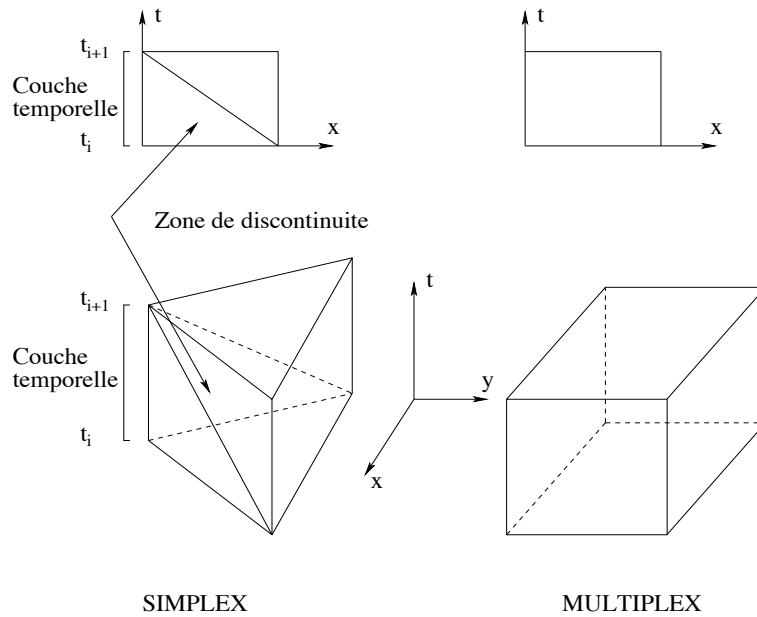


FIG. 2.7 – Zone de discontinuité

Par contre, avec les multiplex, sur une couche temporelle on ne traverse aucune zone de discontinuité (figure 2.7).

## 2.3 Remaillage

Dans ce paragraphe je présente les techniques de remaillage espace-temps que nous avons développées. Dans la littérature, on trouve de nombreux articles sur le remaillage. Parmi ces papiers, un bon nombre parle de remaillage espace-temps. Ces derniers utilisent la méthode de Galerkin discontinue. Mais, dans la plupart, l'approche est incrémentale. C'est à dire que le remaillage s'effectue à des pas de temps donnés. Le plus souvent, les valeurs des inconnues du nouveau maillage sont obtenues par approximation ou interpolation de celles de l'ancien maillage, ce que nous appellerons reprojection. De plus, l'interpolation utilisée est de type multiplex. Dans l'article [4], nous présentons une technique d'adaptation de maillage incrémentale en simplex, développée pour l'approche en déplacements. Cette technique ne nécessite pas de reprojections. Elle a été couplée à des problèmes de contact frottant (voir [5]). Je ne présente pas les

détails de la technique de remaillage, mais renvoie le lecteur à l'article [4]. Par contre, je vais présenter, dans ce paragraphe, ce qui me paraît encore plus intéressant. Il s'agit d'une technique de remaillage non incrémentale, basée sur des maillages espace-temps non structurés.

Certaines équipes se sont déjà penchées sur ce problème. On peut citer les travaux de Hugues et Hulbert [17] et plus récemment ceux de Idesman et al [18]. Ils utilisent la méthode de Galerkin discontinue. Dans les deux approches, le calcul s'effectue sur tout le domaine espace-temps  $\Omega \times [0, T]$ . Ainsi, pour un domaine  $\Omega$  de dimension  $d$  et un nombre total  $N$  de nœuds du maillage espace-temps, la dimension du problème linéaire à résoudre est  $d \times N$ , ce qui devient vite grand lorsque  $d = 2$  ou  $d = 3$ . Une solution pour diminuer le temps de résolution est d'utiliser le calcul parallèle. C'est l'option choisie dans [18].

Dans ce paragraphe nous proposons une solution non incrémentale, qui substitue à la notion de pas de temps, celle de "front espace-temps". L'idée est de réduire la taille du problème, par l'emploi d'une résolution frontale originale.

Pour fixer les idées, prenons  $d = 1$  et considérons le maillage non structuré figure 2.8.

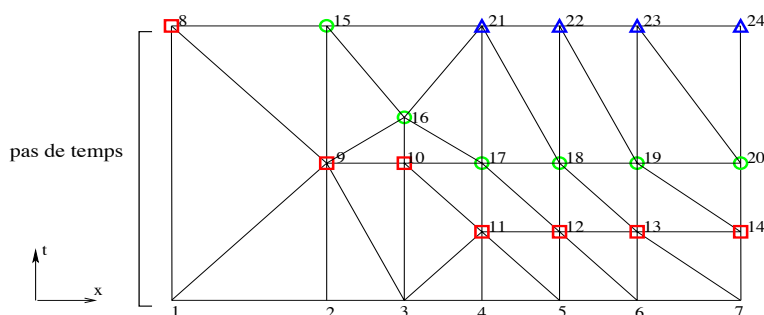


FIG. 2.8 – Fronts espace-temps

Pour calculer les valeurs des nœuds du maillage, on procède par fronts espace-temps. Cela consiste à calculer les déplacements des nœuds à partir des déplacements des nœuds du front espace-temps précédent. Pour illustrer cette démarche, nous utilisons le maillage 2D espace-temps figure 2.8. Sur ce maillage, on peut distinguer trois fronts espace-temps. Le premier front est constitué des nœuds (8,9,10,11,12,13,14). Leurs déplacements sont calculés à partir de ceux des nœuds de l'instant  $t = 0$ . Le deuxième front est constitué des nœuds (15,16,17,18,19,20) et le troisième, des nœuds (21,22,23,24). Les déplacements des nœuds du front  $k + 1$  sont calculés à partir de ceux du front espace-temps  $k$ , jusqu'à l'obtention de tous les déplacements à l'instant final.

L'avantage de cette approche est de diminuer la taille des systèmes linéaires à résoudre. Le premier système est de dimension 7, le second de dimension 6, etc... Par contre, dans une approche directe, telle que proposée dans [17], il faut résoudre un système de dimension 17. Évidemment, sur un exemple aussi petit, le gain de temps de calcul et de place mémoire n'est pas significatif, mais

pour des applications plus compliquées (3D et 4D espace-temps) le gain est considérable.

Pour illustrer cette méthode de calcul, nous avons traité un problème de remaillage élémentaire sur le maillage espace-temps non structuré figure 2.9.

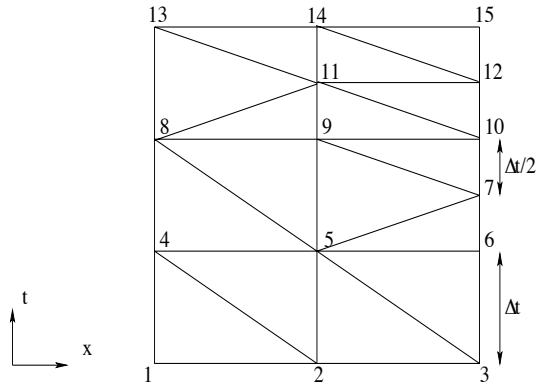


FIG. 2.9 – Maillage espace-temps non régulier et non stratifié

Les résultats numériques obtenus par cette méthode frontale, sur l'exemple d'une barre en vibration, ont été comparés à ceux obtenus avec le maillage régulier plus fin, figure 2.10.

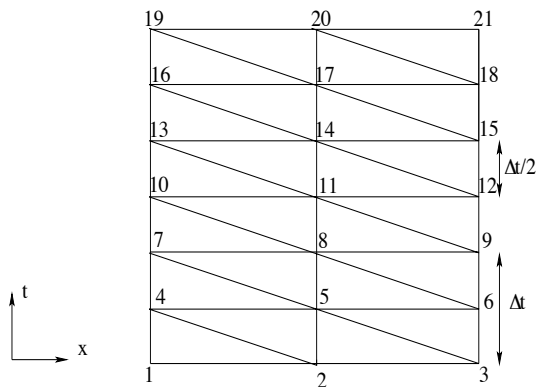


FIG. 2.10 – Maillage espace-temps régulier et stratifié

La différence relative maximum entre les valeurs des déplacements pour les deux simulations (figures 2.9 et 2.10) est d'environ  $4.10^{-3}\%$  (figure 2.11). Cet exemple tend à montrer que cette technique de remaillage frontale n'entraîne pas de perte de précision. L'exemple est cependant trop petit pour mettre en évidence le gain de temps de calcul. Faute d'automatisation de cette méthode frontale, nous ne pourrons pas aller plus loin dans nos investigations. Toutefois,

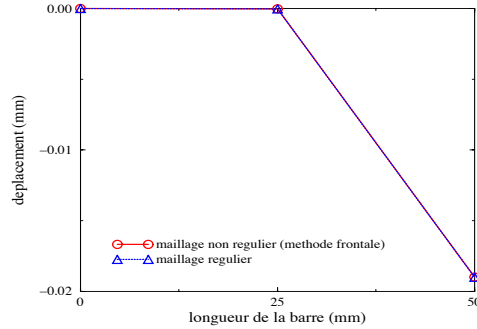


FIG. 2.11 – Déplacement des nœuds issus des maillages figures 2.9 et 2.10 à l'instant  $3\Delta t$

l'approche apparaît très prometteuse et elle constitue une perspective de travail intéressante.

## 2.4 Elements finis espace-temps et traitement du contact frottant

Cette méthode d'éléments finis espace-temps a été utilisée et adaptée au traitement des problèmes mettant en jeu des conditions aux limites unilatérales avec frottement sec de Coulomb. Je présente dans ce paragraphe une synthèse de la méthode et des résultats.

Pour tenir compte de ces conditions aux limites unilatérales, on ajoute le travail virtuel des forces de réaction, que l'on discrétise de la manière suivante

$$\int_0^T \int_{\partial_c \Omega} r v d s d t = \sum_{e=1}^p \{V_e\}^T [C_e] \{R_e\} \quad (2.8)$$

où

$$\{R_e\} = (r_1^e, \dots, r_{n_e}^e)^T \quad (2.9)$$

est le vecteur assemblé des réactions sur l'élément  $E_e$ . Il est composé des vecteurs réactions  $r_i^e$  exercées sur chaque nœud  $i$  de l'élément  $E_e$ . Ces réactions sont supposées concentrées aux nœuds et constantes sur une strate temporelle. L'opérateur  $[C_e]$  est diagonal par blocs. Les sous-matrices  $3 \times 3$ ,  $C_e^{ii}$  sont nulles si le nœud  $i$  est libre et égal à  $hI$ , où  $I$  est la matrice identité et  $h$  le pas de temps (ou la dimension temporelle de la strate), si le nœud  $i$  est candidat au contact. Ainsi, l'équation du mouvement discrétisée devient

$$([\widetilde{M}_u] + [\widetilde{K}_u])\{U\} - [\widetilde{C}]\{R\} = \{F_u\} + \{\Lambda\} \quad (2.10)$$

où  $[\tilde{C}]$  est la matrice diagonale par blocs relative aux forces de contact et  $\{R\}$  et le vecteur assemblé de réactions de contact. Ainsi sur chaque strate  $i$  du maillage, on doit résoudre

$$[T_{i/i+1}]\{U_i\} - [C_i]\{R_i\} = \{F_{i-1}\} - [T_{i/i-1}]\{U_{i-2}\} - [T_{i/i}]\{U_{i-1}\} \quad 2 \leq i \leq n, \quad (2.11)$$

Pour déterminer les actions de contact ( $\{R_i\}$ ), on couple ce système d'équations avec les lois de contact et de frottement. La résolution du système total est effectuée en utilisant une méthode de type "Non Smooth Contact Dynamics" adaptée au cadre de la méthode espace-temps. Les détails sont donnés dans l'article [5].

Des résultats numériques modélisant la chute d'un bloc sur un obstacle plan ont été comparés à ceux obtenus par le logiciel CASTEM. Les résultats en terme de force et de déplacement sont relativement proches (voir [5]).

De plus un essai de serrage d'une tôle par un mors dentelé a permis de tester, avec succès, la méthode de remaillage incrémental (voir [5]).

## 2.5 Conclusion

Cette étude nous a demandé un travail considérable et nous a apporté une reconnaissance tardive. Les aspects prometteurs de cette approche, en particulier dans la méthode frontale de remaillage espace-temps, vont probablement être poursuivi par une thèse de doctorat. Il s'y ajoutera certainement, une étude sur le remaillage en 4D. Quelques pistes sont proposées dans la partie IV de ce mémoire.



## Chapitre 3

# Méthode d'approximation par fonctions constantes par morceaux pour des problèmes de membrane

Cette activité est réalisée en collaboration avec Cesare Davini de l'Université de Udine (Italie). L'objectif est de développer une alternative aux approches dites « non conformes » en éléments finis. Il s'agit de substituer à la fonctionnelle issue du problème variationnel, une suite de fonctionnelles discrétisées qui converge au sens de la  $\Gamma$ -convergence vers cette dernière. La méthode est basée sur une approximation par des fonctions constantes par morceaux. Elle s'apparente à une méthode de Galerkin discontinue en espace. Une validation numérique a été réalisée et un article a été publié [12]. Un autre est en préparation.

### 3.1 Méthode

On considère le problème de Poisson dans sa forme variationnelle : Trouver  $u \in H_{\partial_u}^1(\Omega)$  tel que

$$\mathcal{F}(u) = \inf_{v \in H_{\partial_u}^1(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - 2 \langle f, v \rangle, \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{F}(\cdot)$  est la fonctionnelle.  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  avec une frontière suffisamment régulière;  $H_{\partial_u}^1(\Omega)$  est l'espace des fonction de  $H^1$  nulle sur la partie  $\partial_u \Omega$  de la frontière  $\partial \Omega$ ;  $f \in (H_{\partial_u}^1(\Omega))'$ , et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire entre  $H_{\partial_u}^1(\Omega)$  et son dual. Le but est de construire une suite de problèmes de minimisation sans contraintes pour des fonctionnelles discrètes définies avec des fonctions constantes par morceaux sur une famille de triangulations de  $\Omega$ .

### 363 – Méthode d'approximation par fonctions constantes par morceaux pour des problèmes de membrane

La construction de cette suite de fonctionnelles discrétisées passe par la définition d'un maillage primal et dual de  $\Omega$ , puis par celle d'un gradient généralisé.

On note  $\mathcal{T}_h$  le maillage primal de  $\Omega$  représenté par les traits continus sur la figure 3.1 et  $\hat{\mathcal{T}}_h$  le maillage dual de  $\mathcal{T}_h$  représenté par les traits discontinus. L'indice  $h$  représente la finesse du maillage. Il est calculé comme étant la plus grande dimension des triangles du maillage. Les coordonnées des noeuds du maillage primal sont notées  $x_i$ . On note  $N_h$  le nombre total de noeuds du maillage primal.

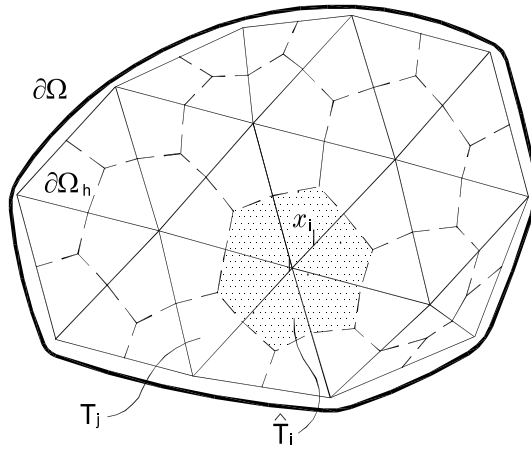


FIG. 3.1 – Maillages primal et dual.

L'espace des fonctions d'interpolation  $Y_h$  est défini par

$$Y_h := \{v \in L^2(\Omega) : v = \text{const sur } T_j \in \mathcal{T}_h, \text{ avec } v = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_h\}. \quad (3.2)$$

On note  $\bar{v}_h$  les fonction de  $Y_h$  prolongées par zéro dans  $\mathbb{R}^2$ . Etant donné que ces fonctions ne sont pas différentiables, il est nécessaire de définir un gradient généralisé au sens des distributions. On note  $D\bar{v}_h$  le gradient au sens des distributions de  $\bar{v}_h$ . Il est défini par

$$\langle D\bar{v}_h, \hat{q} \rangle = - \int_{\Omega_h} \bar{v}_h \nabla \hat{q} dx \quad \forall \hat{q} \in X_h. \quad (3.3)$$

où  $X_h$  est l'espace des fonctions affines sur  $T_j$  est continues sur  $\Omega_h$  (C'est à dire les fonctions polyédriques sur  $\mathcal{T}_h$ ). De ce gradient on définit la fonctionnelle



$$J_h(\bar{v}_h) := \sum_{i \in \mathcal{N}_h} |D_h \bar{v}_h(x_i)|^2 |\hat{T}_i| + \eta h^2 \sum_{i \in \mathcal{N}_h} \sum_{t=1}^{t_i} |[[\bar{v}_h]](t)|^2, \quad (3.4)$$

où  $\mathcal{N}_h$  est l'ensemble des indices des noeuds du maillage et  $\eta$  est un réel strictement positif. Le terme additionnel

$$\eta h^2 \sum_{i \in \mathcal{N}_h} \sum_{t=1}^{t_i} |[[\bar{v}_h]](t)|^2, \quad (3.5)$$

fait apparaître le saut de continuité  $[[\bar{v}_h]](t)$  de  $\bar{v}_h$  le long du segment  $(x^i, x_t^{(i)})$ , où  $x_t^{(i)}$  appartient à l'ensemble  $x_t^{(i)}$ ,  $t = 1, \dots, t_i$ , des noeuds voisins de  $x_i$ . C'est la présence de ce terme additionnel qui apparente la méthode à une méthode de Galerkin discontinue.

La première partie de l'étude, réalisée principalement par C. Davini (pour un lecteur averti, voir [12]), a montré que l'introduction de ce terme additionnel (3.5) permet d'assurer la  $\Gamma$ -convergence de la fonctionnelle vers

$$J(v) := \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx & \text{pour } v \in H_{\partial_u}^1(\Omega) \\ +\infty & \text{pour } v \in L^2(\Omega) \setminus H_{\partial_u}^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce théorème permet de construire une suite d'approximations du problème de Poisson (3.1) à travers la minimisation de la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_h(v) := J_h(v) - 2\langle\langle f, v \rangle\rangle_h, \quad (3.7)$$

où  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_h$  est défini par

$$\langle\langle f, v \rangle\rangle_h := \begin{cases} 0 & \text{si } v \in L^2(\Omega) \setminus Y_h \\ \int_{\Omega} f^0 v + \mathbf{f}^1 \cdot D_h v dx & \text{si } v \in Y_h, \end{cases} \quad (3.8)$$

et  $f = f^0 - \operatorname{div} \mathbf{f}^1$ .

## 3.2 Résultats numériques

L'objectif de cette campagne de calculs était de donner une estimation numérique du taux de convergence de la méthode et de comparer ces performances avec la méthode des éléments finis classique (Galerkin).

Sans rentrer dans les détails, on peut montrer que la fonctionnelle  $J_h(\bar{v}_h)$  peut se réécrire de la manière suivante

$$J_h(\bar{v}_h) = \sum_{i \in \mathcal{N}_h} \left[ \frac{1}{|\hat{T}_i|} \left( \sum_{t=1}^{t_i} \frac{1}{2} |x_i - x_t^{(i)}| |[[\bar{v}_h]](t) n_t \right)^2 + \sum_{t=1}^{t_i} \eta h^2 |[[\bar{v}_h]](t)|^2 \right], \quad (3.9)$$

### 383 – Méthode d'approximation par fonctions constantes par morceaux pour des problèmes de membrane

où  $n_i$  est le vecteur normal au segment  $(x_i, x^{(i)})$ . On note  $v_h^i$  le déplacement sur l'élément  $T_i$ , et  $V_h = \{v_h^1, \dots, v_h^{P_h}\}^T$ , le vecteur assemblé de tous les déplacements. L'ensemble des solutions admissibles, noté  $V_{ad}$  est l'ensemble des  $V_h$  tels que, pour chaque élément qui a un côté commun avec la frontière libre  $\partial_t \Omega_h$ , le saut de continuité est supposé nul, et pour chaque élément  $T_i$ , qui a un côté commun avec la frontière bloquée  $\partial_u \Omega_h$ , le saut de continuité vérifie

$$[[v_h^i]] = v_h^i$$

Le problème de minimisation s'écrit alors : Trouver  $V_h \in V_{ad}$  minimum de la forme quadratique suivante

$$J_h(V_h) = \frac{1}{2} V_h^T A V_h - F^T V_h$$

où  $A$  est une matrice symétrique définie positive et  $F$  est le vecteur second membre. Les déplacements imposés sur  $\partial_u \Omega_h$  sont pris en compte à travers le saut de continuité à la frontière. Ces conditions affectent la matrice  $A$  et le second membre  $F$ .

Pour tester cette méthode j'ai développé un logiciel spécifique appelé CAMP (Constant Approximations in Membrane Problems). Même si le problème de minimisation précédent est classique, j'ai tout de même rencontré des difficultés techniques innérentes à la méthode. Par exemple, l'assemblage de la matrice  $A$  se fait sur les éléments et non sur les noeuds. De ce fait, pour obtenir une matrice bande, il faut optimiser la numérotation des éléments. J'ai développé une technique d'optimisation des éléments s'appuyant sur celle utilisée pour les noeuds. D'autre part, il a fallu constituer la liste des noeuds voisins, puis celle des éléments, etc...

La méthode a été testée sur les quatre exemples de la figure 3.2. Dans les trois premiers, la solution exacte est connue. Pour le quatrième, on a pris comme solution exacte celle obtenue par la méthode des éléments finis avec un maillage très fin. Pour plus de détails voir [12].

Dans les figures 3.3 et 3.4, est présenté une évaluation numérique de l'erreur (en base logarithmique) commise sur le gradient en fonction de la finesse du maillage. La figure 3.3 rassemble les résultats obtenus par le logiciel CAMP et 3.4 ceux obtenus par le logiciel CASTEM.

On constate que l'ordre de convergence est proche de 1 pour les trois premiers exemples et proche de 1/2 pour l'exemple 4. En ce qui concerne la comparaison avec CASTEM, on peut dire que l'ordre de grandeur est le même. Il n'y a pas vraiment de différences majeures. Par contre, pour un maillage très fin (17000 éléments), le temps de calcul obtenu par CAMP est 37% supérieur à celui de CASTEM. Cela s'explique par le nombre de degrés de libertés qui est environ deux fois supérieur avec notre méthode (17000 éléments contre 8700 noeuds).

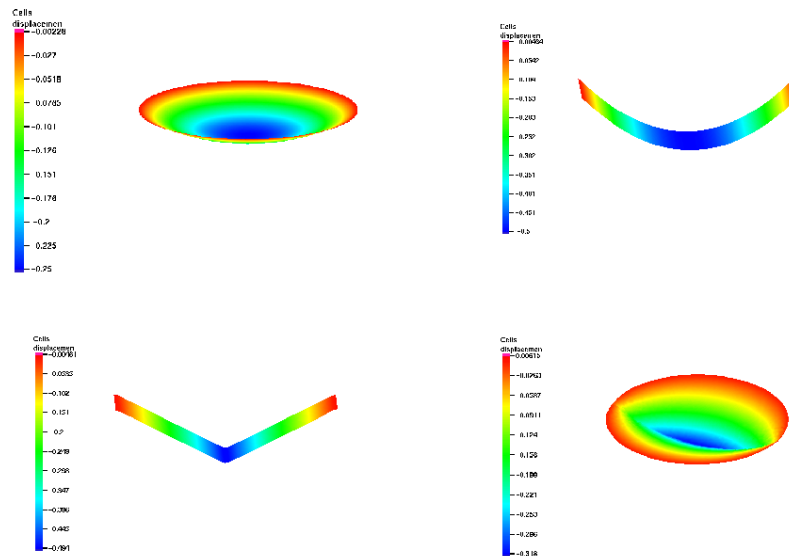


FIG. 3.2 – Isovaleurs des déplacements

### 3.3 Conclusion et perspectives

Cette étude est certainement la plus théorique à laquelle j'ai participé depuis celle menée durant ma thèse sur la convergence de la méthode Non Smooth Contact Dynamics.

Une étude sur l'influence du terme additionnel est en cours et un article est en préparation. Dans ces nouveaux développements, Roberto Paroni de l'Université de Sassari (Italie) est venu élargir notre groupe de collaborateurs. La méthode a montré ses capacités et ses limites (taille importante des systèmes à résoudre). Par ailleurs et de par sa construction, elle semble intéressante pour traiter des problèmes où la solution est discontinue, comme dans les cas de la fissuration. Nous avons entamé des recherches dans cette direction.

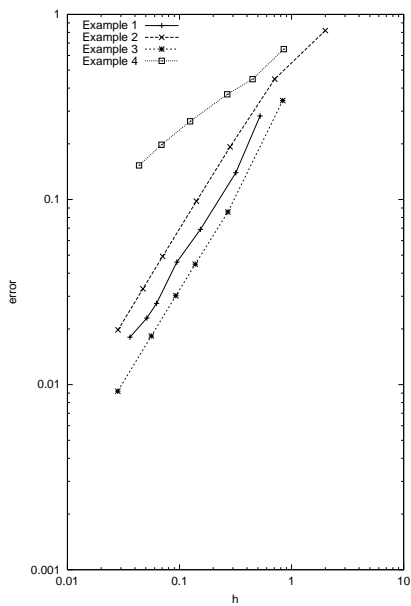


FIG. 3.3 – Erreur  $\frac{\|D_h u_h - \nabla u\|_{L^2}}{\|\nabla u\|_{L^2}}$  fonction de  $h$  (CAMP).

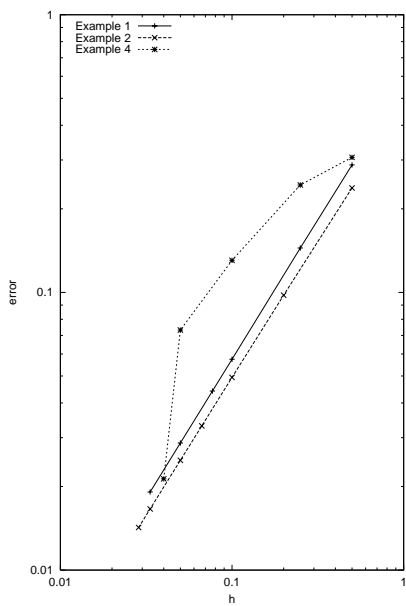


FIG. 3.4 – Erreur  $\frac{\|D_h u_h - \nabla u\|_{L^2}}{\|\nabla u\|_{L^2}}$  fonction de  $h$  (CASTEM).

Troisième partie

Modélisations des lois  
d'interface



### **Organisation de la partie III**

J'ai rassemblé dans cette troisième partie du mémoire mes travaux de recherche qui concernent la modélisation numérique et l'enrichissement des lois d'interface. Cette partie est constituée de trois chapitres distincts.

Dans le premier chapitre je présente le modèle d'usure en grandes déformations que j'ai développé et la méthode numérique qui lui est associée. Les calculs sont réalisés sur des exemples d'usure dans des prothèses de genou.

Le second chapitre traite de la fragmentation du béton sous une explosion confinée. Je développe la méthode numérique qui nous a permis de rendre compte de ces phénomènes et d'évaluer les vitesses d'éjection des fragments.

Dans le troisième chapitre je présente un modèle de loi de chocs entre solides rigides. Cette loi est basée sur la définition d'un opérateur de restitution.





## Chapitre 4

# Modélisation numérique de l'usure

L'origine de ces travaux remonte à l'année 1998. Alors que j'étais au Laboratoire de Mécanique et CAO de Saint-Quentin, j'ai été contacté par un chirurgien de Valenciennes, le Docteur Van de Velde, spécialiste des prothèses unicompartmentales de genoux. Ce dernier souhaitait optimiser la géométrie de ces implants. Ce type d'étude, sur les prothèses, est largement traité dans la littérature, mais il existe peu de références sur les prothèses unicompartmentales (implant sur un seul condyle). J'ai de suite été séduit par ce domaine de recherche, et j'ai obtenu, après ma mutation au LMGC, un financement de la part du conseil scientifique de l'université de Montpellier II pour travailler dans cette direction. De plus, porté par cette dynamique, mon laboratoire d'accueil a mis des moyens pour développer une activité transversale nommée "Mécanique du vivant". Je présente dans ce chapitre, une synthèse des travaux que j'ai réalisés. Il s'agissait de modéliser l'usure de prothèses de genoux, afin de pouvoir contrôler son évolution. La modélisation du phénomène est macroscopique. Cette étude est inspirée des travaux de Stromberg et Klarbring, mais dans un cadre plus général des grands glissements. Comme dans la majorité des modèles proposés dans la littérature, ce modèle est construit autour de la loi d'usure d'Archard. Le modèle a été développé pour être local en espace et en temps et pour que la loi d'usure vérifie le principe d'objectivité. Des résultats numériques ont été obtenus sur un exemple d'usure entre deux blocs d'acier et comparés à des données expérimentales. Fort de ces résultats, une articulation de genoux a été modélisée par éléments finis et une analyse de la distribution de l'usure, sur le plateau tibial, a pu mettre en évidence l'importance de l'action des muscles et des ligaments croisés. Cette étude a fait l'objet de deux articles dans des revues internationale [27], [29] et de deux communications nationales.

## 4.1 Loi d'usure

Le modèle ne tiens pas directement compte des phénomènes microscopiques, ni de la présence du troisième corps (débris d'usure). Ces aspects sont globalisés et pris en compte à travers les coefficients d'usure et de frottement. Le modèle ne tiens pas non plus compte de la température. Je fais l'hypothèse que les effets thermiques sur l'usure peuvent être négligés dans les conditions invivo d'utilisation de la prothèse.

On note  $\varphi$  la transformation qui donne la position de la particule  $X$  au temps  $t$ .

$$x = \varphi(X, t) \quad (4.1)$$

En petites perturbations (voir les travaux de Stromberg et al [19], [44]), le déplacement,  $u$  est décomposé de la manière suivante

$$u = u^e + u^w \quad (4.2)$$

où  $u^w$  est le déplacement dû à l'usure et  $u^e$  sa partie complémentaire.

Le point de départ de mon modèle est le même, mais pour respecter le principe d'objectivité, la décomposition est faite sur l'opérateur  $\varphi$ .

$$\varphi(X, t) = \varphi^e(X, t) + \varphi^w(X, t) \text{ sur } \partial\Omega_c \quad (4.3)$$

$\varphi^w$  est la transformation due à l'usure et  $\varphi^e$  sa partie complémentaire (voir figure 4.1).

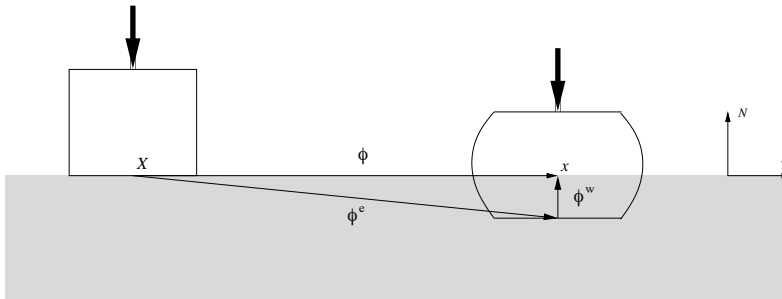


FIG. 4.1 – Décomposition de la transformation

La transformation due à l'usure est pilotée par une loi d'usure qui s'inspire de la loi d'Archard. Une interprétation des travaux d'Archard est la suivante. Il a observé que le volume d'usure  $w$  perdu par frottement vérifie

$$w = Kfs \quad (4.4)$$

où  $K$  est le coefficient global d'usure, qui dépend des matériaux en contact,  $f$  est la force appliquée et  $s$  la distance totale de glissement. Si l'on souhaite

déterminer la part du volume d'usure  $w_1$  relative au matériau 1 et celle  $w_2$  relative au matériau 2, on peut proposer les relations suivantes

$$w = w_1 + w_2$$

et

$$w_1 = K_1 f s, \quad w_2 = K_2 f s$$

où,  $K_i$ , est le coefficient global d'usure associé au corps  $i = 1, 2$ .

Cette loi est globale. Elle n'est ni instantanée, ni localisée. Je propose dans cette étude une généralisation de cette loi en chaque point de contact et à tout instant. On note  $(T, N)$ , le repère local associé au point de contact entre deux corps.  $N$  est le vecteur normal et  $T$  le vecteur tangentiel.

On note  $\varphi_1$  la transformation pour le premier corps, et  $\varphi_2$  pour le deuxième corps. La vitesse relative tangentielle est définie par

$$v_T = (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2).T \quad (4.5)$$

Soit  $r = (r_T, r_N)$  la force de réaction exercée sur le premier corps, exprimée dans le repère local, la composante normale de la vitesse d'usure, est pilotée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\varphi_1^w.N) = k_1^w r_N |v_T| \\ \frac{d}{dt}(\varphi_2^w.N) = -k_2^w r_N |v_T| \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $k_i^w$  est le coefficient d'usure local du corps  $i = 1, 2$ . Les composantes tangentielles des transformations d'usures sont supposées nulles.

$$\varphi_1^w.T = \varphi_2^w.T = 0 \quad (4.7)$$

Notons que cette loi locale d'usure est écrite en vitesse. Elle a été établie pour vérifier le principe d'objectivité. Dans l'article [29] je montre que la loi ne dépend pas du changement d'observateur. La démonstration repose en partie sur le fait que la vitesse relative est invariante par changement d'observateur.

Cette loi d'usure est couplée aux lois de contact de Signorini et de frottement sec de Coulomb. Si  $g_N = (\varphi_1 - \varphi_2).N$  est l'interstice entre les deux corps candidats au contact, les conditions unilatérales de Signorini peuvent être écrite de la manière suivante,

$$r_N = \text{proj}_{\mathfrak{R}^+}(r_N - \rho_n g_N) \quad (4.8)$$

où  $\text{proj}_{\mathfrak{R}^+}$  est l'opérateur de projection sur  $\mathfrak{R}^+$  et  $\rho_n > 0$ . La loi de Coulomb est pilotée par la relation

$$r_T = \text{proj}_{C(r_N)}(r_T - \rho_T v_T) \quad (4.9)$$

où  $C(r_N) = \{r_T \in \mathfrak{R}^2 \text{ tels que } \|r_T\| \leq \mu r_N\}$  est la section du cône de Coulomb,  $\mu$  est le coefficient de frottement et  $\rho_T > 0$ .

### Remarques

- D'après les lois d'usures (4.6) et (4.7), l'interstice apparaît comme une fonction de  $r_N$  et  $v_T$ .
- Dans la partie tangentielle de la vitesse relative, la vitesse d'usure n'intervient pas, on a

$$v_T = (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cdot T = (\dot{\varphi}_1^e - \dot{\varphi}_2^e) \cdot T \quad (4.10)$$

- En 2D, sans usure, l'opérateur de contact frottant est linéaire par morceaux. Lorsqu'il y a usure cet opérateur devient non-linéaire par morceaux. Cela vient du produit entre la réaction normale et la vitesse de glissement.

## 4.2 Traitement numérique

Les grands déplacements sont traités en adoptant une méthode de lagrangien réactualisé. Pour la discrétisation spatiale, on utilise la méthode des éléments finis et pour la discrétisation temporelle, une méthode d'Euler implicite. L'équation du mouvement discrétisée donne le système non-linéaire suivant

$$M(q^+)(\dot{q}^+ - \dot{q}^-) - hF_{int}(q^+) - hR - hF_{ext} = 0 \quad (4.11)$$

où  $h$  est le pas de temps,  $M(q^+)$  est la matrice de masse,  $q^+$  est le vecteur nodal des positions des noeuds au temps  $t+h$ ,  $\dot{q}^+$  est le vecteur nodal des vitesses des noeuds au temps  $t+h$ ,  $F_{int}(q^+)$  est le vecteur nodal des forces intérieures,  $R$  est le vecteur nodal des forces de réaction et  $F_{ext}$  est le vecteur nodal des forces extérieures données.

D'après la loi d'usure (4.6),  $q^+$  est une fonction de la partie complémentaire (étant donné que nous sommes en élasticité, nous parlerons de la partie élastique)  $q^{e+}$  du vecteur position et du vecteur réaction de contact  $R$  :

$$q^+ = f_w(q^{e+}, R) \quad (4.12)$$

D'autre part, la loi de comportement est supposée hyperélastique, et les forces intérieures dépendent seulement de la partie élastique de la déformation :

$$F_{int}(q^+) = F_{int}(q^{e+}) \quad (4.13)$$

Le système d'équations (4.11) est linéarisé par une méthode de Newton modifiée, appliquée à la variable  $q^{e+}$ . Ainsi,  $\dot{q}^{e+}$  est cherché comme la limite de la suite  $(\dot{q}_k^{e+})_{k \in N}$  vérifiant

$$(M + h^2 K)(\dot{q}_{k+1}^{e+} - \dot{q}_k^{e+}) - hR_{k+1} = -M(\dot{q}_k^+ - \dot{q}^-) - hF_{int}(q_k^{e+}) + hF_{ext}(k) \quad (4.14)$$

C'est une méthode de Newton modifiée car dans l'opérateur tangent, la contribution du gradient  $\frac{\partial f_w}{\partial q^{e+}}$  n'est pas considérée et la variation de masse  $\frac{\partial M}{\partial q^{e+}}$  est négligée.

Le système (4.14) est couplé aux lois d'usure, de contact et de frottement. Pour résoudre le problème couplé, j'ai développé une version, adaptée à l'usure, de la méthode "Non-Smooth Contact Dynamics". Les équations sont résolues dans les repères locaux. Pour chaque noeud  $\alpha$  candidat au contact, on note  $H_\alpha$  la matrice de changement de base. Les inconnues sont  $r^\alpha$ , le vecteur réaction au noeud  $\alpha$  à l'itération  $k+1$  et  $v^{e\alpha}$ , la partie élastique de la vitesse relative à l'itération  $k+1$ . Cette dernière est définie par

$$v^{e\alpha} = H_\alpha(\dot{q}_{k+1}^{e+} - \dot{q}_0^{e+}) \quad (4.15)$$

où  $\dot{q}_0^{e+}$  est la vitesse du point antagoniste (centre du repère local). Ainsi, pour chaque noeud  $\alpha$ , l'équation du mouvement discrétisée se réduit à

$$v^{e\alpha} - hW r^\alpha = v_f^{e\alpha} \quad (4.16)$$

où  $v_f^{e\alpha}$  est la vitesse libre. C'est la vitesse que le noeud  $\alpha$  aurait, en l'absence de réaction  $r^\alpha$  et pour des valeurs des réactions des autres noeuds prises à l'itération précédente. La matrice  $W$  est définie par

$$W = H_\alpha(M + h^2K)^{-1}H_\alpha^T \quad (4.17)$$

Pour chaque noeud  $\alpha$  les lois de contact et frottement discrétisées sont

$$r_N^\alpha = \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(r_N^\alpha - \rho_n g_N^\alpha) \quad (4.18)$$

et

$$r_T^\alpha = \text{proj}_{C(r_N^\alpha)}(r_T^\alpha - \rho_T v_T^{e\alpha}) \quad (4.19)$$

L'interstice  $g_N^\alpha$  est pilotée par la relation suivante

$$g_N^\alpha = g_N^{\alpha-} + h(v_N^{e\alpha} + k^w r_N^\alpha |v_T^{e\alpha}|) \quad (4.20)$$

où  $g_N^{\alpha-}$  est l'interstice au temps  $t$ . Le système d'équations (4.17), (4.18), (4.19) est résolu par une méthode de Newton généralisée, car les opérateurs issus des équations (4.18), (4.19) sont non-linéaires et non-différentiables. Cette méthode est appliquée aux variables locales  $y^\alpha = (v_T^{e\alpha}, v_N^{e\alpha}, r_T^\alpha, r_N^\alpha)$ . Après avoir calculé  $y^\alpha$ , on traite le noeud candidat au contact suivant  $\alpha+1$  est ainsi de suite jusqu'à convergence.

### 4.3 Simulations

Le modèle a été validé sur un exemple classique de frottement d'un cylindre sur un plateau. Les résultats numériques ont été comparés avec des résultats expérimentaux. On peut trouver ces comparaisons dans l'article [29]. J'ai choisi de présenter les résultats numériques concernant les prothèses de genoux. Ces résultats donnent un aperçu des possibilités du modèle dans l'assistance à la conception des implants.

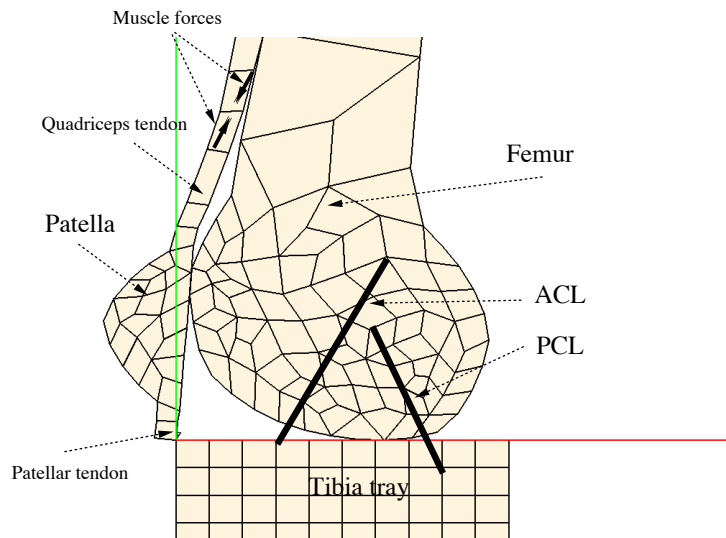


FIG. 4.2 – modèle numérique de genou

L'articulation du genou a été modélisée par éléments finis en dimension deux. Toutes les structures anatomiques jouant un rôle dans la mécanique du genou ont été intégrées (figure 4.2). On retrouve le fémur, la rotule, le plateau tibial, les tendons rotulien et du quadriceps, qui sont modélisés par des solides élastiques et les ligaments croisés, modélisés par des câbles élastiques. Toutes les caractéristiques matériau sont rassemblées dans [29].

L'articulation est pilotée en forces par l'action du muscle quadriceps et du poids du reste du corps. L'action du muscle est réalisée par deux forces opposées (voir figure 4.2). L'intensité de cette force est fonction de la vitesse de flexion que l'on souhaite imposer. Il faut noter que le pilotage en force de l'articulation est crucial pour évaluer correctement l'usure. En effet, piloter l'articulation en déplacements, reviendrait à contrôler le déplacement relatif du fémur par rapport au tibia, et donc le glissement. Alors que le glissement est essentiellement piloté par l'action des ligaments croisés.

Cinq essais de flexion ont été réalisés : une flexion à 44 degrés, une flexion à 44 degrés suivie d'une extension, une flexion totale à 110 degrés, une flexion totale sans l'action du muscle et une flexion totale sans l'action des ligaments croisés. L'usure sur le plateau tibial est représentée dans la figure 4.3, pour chaque cas de flexion.

L'analyse des courbes fait ressortir des résultats intéressants. On constate que l'usure est plus importante après une flexion totale qu'après une flexion-extension. Il y a deux raisons à cela. La force du muscle est plus importante durant une flexion totale, ce qui augmente les forces de réaction sur le plateau tibial, et le glissement est aussi plus important en fin de flexion. Pour appuyer cette remarque, il suffit de constater, sur la figure 4.3, que l'usure est moins

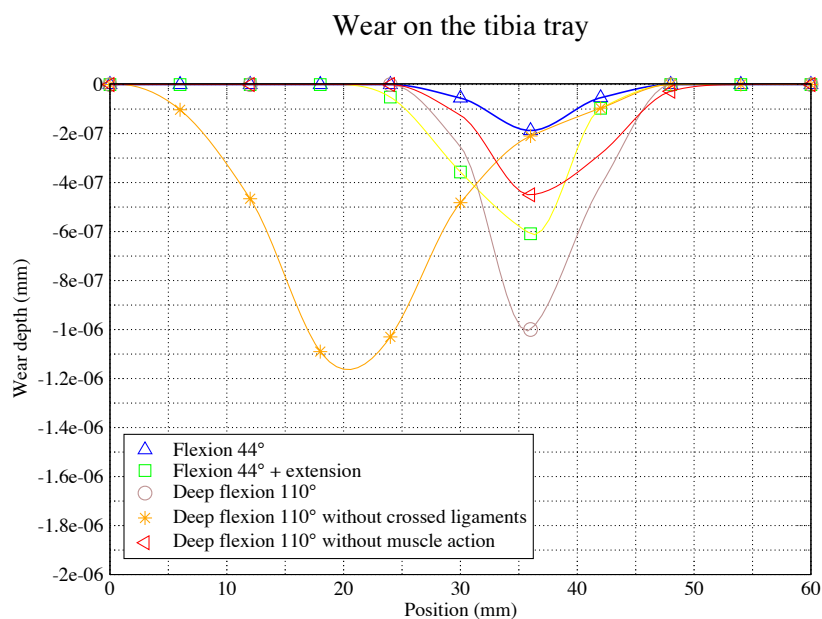


FIG. 4.3 – Distribution de l'usure

importante quand le muscle est inactif.

On note aussi que l'usure augmente lors de la phase d'extension. C'est dû à l'action du muscle nécessaire pour se redresser.

Notons aussi que lorsque les ligaments croisés sont inactivés, l'usure se localise sur l'avant du plateau tibial. Cela est dû au glissement antérieur du fémur.

Des résultats sur un plus grand nombre de cycles ont été réalisés pour montrer l'évolution de l'usure en fonction du cycle (voir [29]).

#### 4.4 Conclusions et perspectives

Ce modèle implicite de traitement de l'usure a permis de traiter des problèmes en grands déplacements et de donner des indications intéressantes sur les facteurs pilotants l'usure dans les articulations du genou.

Prévoir correctement la distribution de l'usure nécessite, en particulier, d'être au plus près de la cinématique réelle. Dans l'articulation du genou, il existe une rotation axiale entre le fémur et le tibia. Cette rotation, ne peut être prise en compte qu'à travers une modélisation 3D de l'articulation. De plus, plusieurs articles mettent en évidence les effets aggravants du changement de direction sur l'usure. Tout cela me pousse à développer un modèle 3D d'usure tenant compte de ces effets multi-directionnels.



## Chapitre 5

# Modélisation numérique de la fragmentation du béton

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre de la thèse de Hugues Roméro [41], que j'ai co-encadrée en collaboration avec le Laboratoire Energétique Explosions Structures (LEES) de Bourges. L'objectif de cette étude, d'origine industrielle, était d'obtenir une représentation de la rupture d'un élément de structure en béton armé, de type mur, sous l'action d'une explosion. Il s'agissait aussi, d'estimer les effets externes consécutifs à cette rupture, en évaluant les masses et les vitesses des fragments de bétons projetés. Pour cela, H. Roméro a dans un premier temps, estimé le chargement sous explosion par des méthodes expérimentales déterministes. Puis, nous avons développé, une modélisation du comportement du béton par l'intermédiaire d'éléments discrets cohésifs. Cette étude a fait l'objet d'une communication internationale [42] et un article est soumis dans une revue internationale.

### 5.1 Etude expérimentale

Le problème est issu de préoccupations industrielles. Elles concernent le risque d'explosion d'une chambre renfermant une pompe de refroidissement dans la structure d'un réacteur nucléaire. Le but de notre étude est d'évaluer la puissance de l'explosion et de quantifier son effet sur la structure en béton armé et sur sa destruction (figure 5.1).

La partie expérimentale a été réalisée au LEES de Bourges. La chambre en béton renfermant la pompe de refroidissement a été modélisée par une maquette en acier à l'échelle réduite  $1/20^e$ . Une face de la maquette a été instrumentée de capteurs de force (voir figure 5.2).

Des tests avec ou sans maquette interne, sensée représenter la présence du réacteur nucléaire, avec différents mélanges gazeux, différentes énergies d'amorçage et différentes pressions initiales internes, ont été réalisés. N'ayant pas contribué aux campagnes d'essais, je ne détaillerai pas le contenu de cette partie de

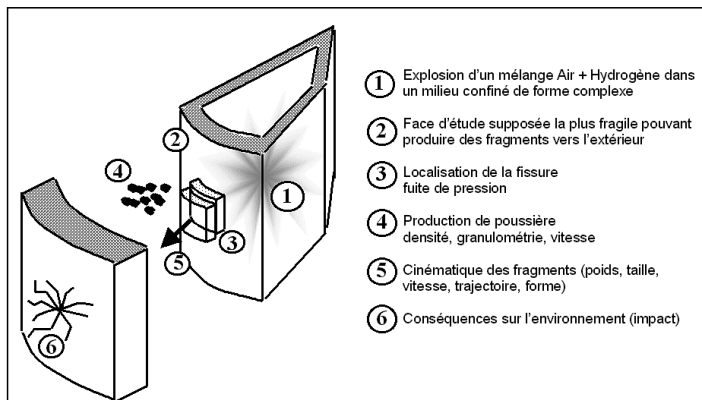


FIG. 5.1 – Problème industriel

l'étude (tous les informations sont dans le mémoire de thèse de H. Roméro [41]). Cependant pour les besoins de la suite, voici une synthèse des résultats. Suivant l'énergie d'amorçage et le mélange gazeux, on obtient deux type d'explosion.

- Une explosion de type **déflagration**, qui apparaît pour des mélanges Air+Hydrogène, caractéristique d'une montée lente en pression. La vitesse de flamme est lente. (cf. figure 5.3)

-Une explosion de type **détonation**, qui apparaît pour des mélanges Oxygène+Hydrogène, caractéristique d'une montée rapide en pression sur un temps court. (cf. figure 5.4)

La présence de couloirs et de sous espaces dus à la forme complexe du volume concentrent les pressions des gaz et augmentent la température lors de la combustion. De fortes détonations locales peuvent en résulter.

La répartition des pressions maximales sur la face d'étude de la maquette est représentée, pour chaque type d'explosion dans les figures 5.5 et 5.6.

Il se pose la question de l'interprétation des résultats à l'échelle réelle. A la vue d'autres expériences ou constatations faites sur des cas de déflagration en milieu confiné, on relève deux phénomènes importants. Pour une même densité de chargement (même conditions initiales) mais des volumes différents : - La pression maximale est indépendante du volume expérimental ou réel (aux conditions adiabatiques plus ou moins parfaites prés).

- La dérivée moyenne  $\frac{\partial p}{\partial t}$  de la courbe pression/temps en phase de croissance est d'autant plus élevée que le volume confiné est faible.

Cette étude expérimentale a permis de construire une base de données intéressante, qui nous a aidé à déterminer les conditions aux limites de chargement dans les simulations de fragmentation du béton qui suivent.

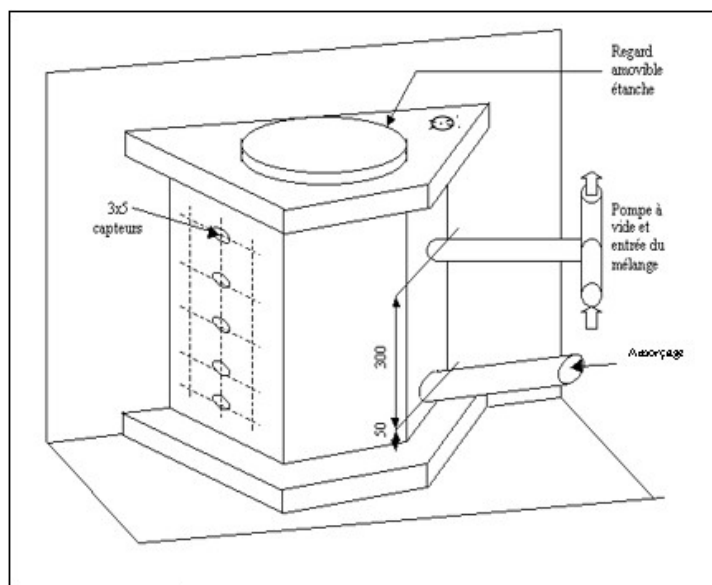


FIG. 5.2 – Maquette expérimentale

## 5.2 Eléments discrets

Initialement, la méthode par éléments discrets visait à modéliser les matériaux granulaires. Il s'agissait de modéliser le milieu comme un ensemble de solides rigides liés par des lois d'interfaces. Des adaptations que nous avons réalisées avec M. Jean ont permis de modéliser des milieux continus jusqu'à la ruine et d'observer des phénomènes dynamiques de fracture. L'idée principale était de remplacer les éléments rigides par des éléments déformables discrétisés par éléments finis. Ces éléments finis sont reliés par des liaisons d'interface cohésive. C'est une approche différente de celles de [8], [16]. Elle n'est cependant pas nouvelle, mais n'a jamais été appliquée à de structures béton soumises à de la dynamique rapide en grandes déformations. Nous avons choisi d'utiliser un modèle à interface endommageable. Cette formulation proposée dans [40] est développée à partir de la notion d'intensité d'adhésion du contact unilatéral initiée par M. Fremond [13]. Ce modèle permet de rendre compte d'un endommagement d'interface formulé en énergie. Une grande partie de l'étude de ce modèle est détaillée dans [21]. Il est proposé un passage progressif de l'état adhérent à l'état frottant par l'introduction d'une variable d'endommagement  $\beta$  ( $1 > \beta > 0$ ). Une élasticité de l'interface est introduite par les raideurs  $C_N$  et  $C_T$  définies par unité de surface (Unités Pa/m). L'énergie locale de rupture de l'interface par unité de surface est portée par la variable  $w$ . Elle est exprimée en ( $J/m^2$ ). En 2D, la loi d'interface cohésive endommageable peut être représentée par les graphes de la figure 5.7. La valeur de l'énergie d'interface  $w$  dépend de la

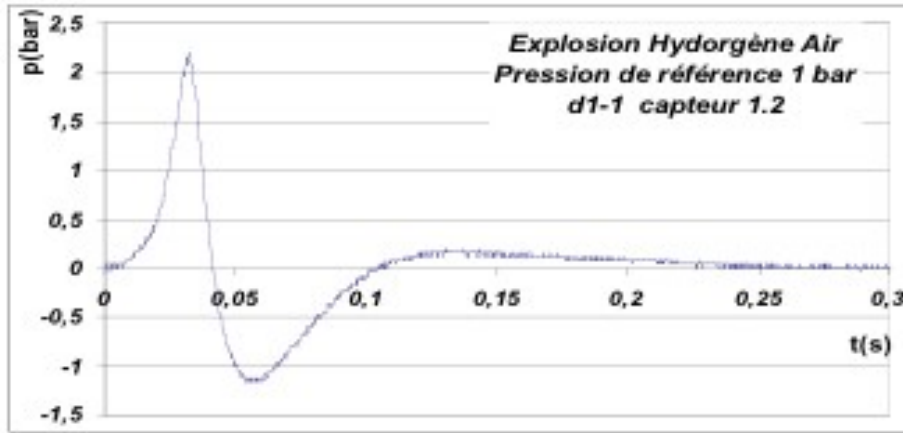


FIG. 5.3 – Signal de pression pour une déflagration

contrainte à rupture  $\sigma_c$  et de la rigidité d'interface  $C_N$  par la relation suivante :

$$w = \frac{(\sigma_c)^2}{C_N}$$

La modélisation numérique est réalisée par la méthode "Non smooth contact dynamics" adaptée par M. Jean, V. Acary et Y. Monerie [21] aux multicorps avec interface cohésive. Il s'agit d'un traitement implicite des conditions d'interface cohésive par un algorithme de type Gauss Seidel non linéaire. Cette méthode a été programmée dans le logiciel LMGC 90.

### 5.3 Simulations

Le modèle a été validé sur un exemple test de traction dynamique (barre de Hopkinson). Il a permis de calculer de manière explicite la limite à rupture en fonction de la vitesse de déformation. Dans toutes nos simulations, les raideurs d'interface ont été prises 10 fois plus grandes que la rigidité du matériau. Ce choix vient de l'épaisseur d'interface que nous avons considérée. J'ai choisi de présenter les résultats numériques concernant la fragmentation d'un voile de béton armé soumis à une explosion confinée. Le voile de béton a les dimensions suivantes : 1m x 1m x 10cm. Le béton a les caractéristiques suivantes : Module de Young  $E=35\text{GPa}$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ , masse volumique  $\rho=2350\text{kg/m}^3$ , coefficient de frottement  $\mu = 0,3$ . Le problème est traité en déformations planes. De ce fait, la modélisation des armatures est délicate. Nous avons choisi de modéliser les renforts par des câbles d'acier qui ne travaillent qu'en traction.

Dans le cas d'une détonation, la contrainte à rupture est prise à 10 MPa, car nous avons choisi une vitesse de déformation d'environ  $15\text{ s}^{-1}$ . Les conditions

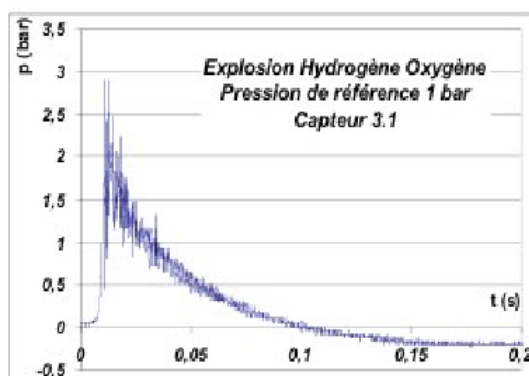


FIG. 5.4 – Signal de pression pour une détonation

aux limites et le chargement sont représentés dans la figure 5.8. On observe, dans la figure 5.9, l'évolution de l'onde de compression dans l'épaisseur du mur. Cette onde se reflète sur la surface libre et se transforme en onde de traction, et c'est la superposition des ondes de traction et de compression qui rompt le matériau. Les segments bleus représentent les ruptures. Le modèle permet d'estimer la vitesse d'éjection des fragments (figure 5.10). Dans ce cas elle est d'environ 7 m/s. On constate aussi que la rupture se concentre autour de renforts.

Le même type d'étude a été réalisé dans le cas d'une déflagration. La contrainte à rupture est prise à 5 MPa, car nous avons choisi une vitesse de déformation d'environ  $1,5 \text{ s}^{-1}$ . Les conditions aux limites et le chargement sont représentés dans la figure 5.11. Pour ce type d'explosion, il n'y a pas d'écaillage, mais une rupture par cisaillement concentrée aux bords de la dalle en béton (figure 5.12).

## 5.4 Conclusion et perspectives

L'étude a permis de constituer une base de données intéressante sur l'évolution de la pression dans un milieu confiné sous explosion. D'autre part, le modèle numérique a permis de retrouver les mécanismes de fragmentation du béton et d'estimer les vitesses d'éjections des fragments. Tous cela dans la limite d'une étude bidimensionnelle.

Il est prévu de poursuivre ces travaux en proposant une modélisation 3D, ce qui rendra un aspect plus proche de la réalité, en particulier dans la représentation des armatures. Il est prévu aussi de développer une approche implicite pour le calcul de la contrainte à rupture et de tenir compte des phénomènes de compaction du béton et d'accroissement de la rigidité en fonction de la vitesse de déformation.

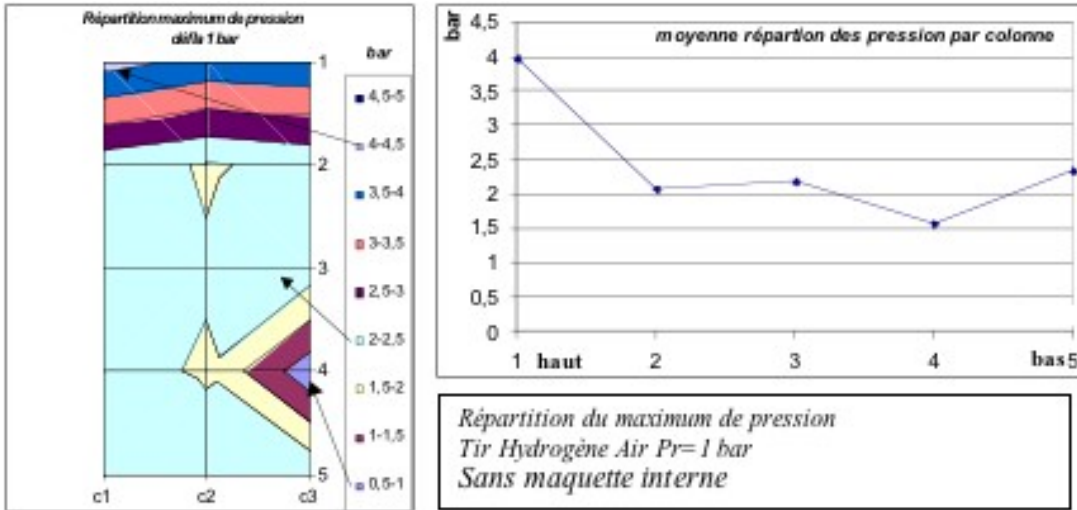


FIG. 5.5 – Pression maximale pour une déflagration

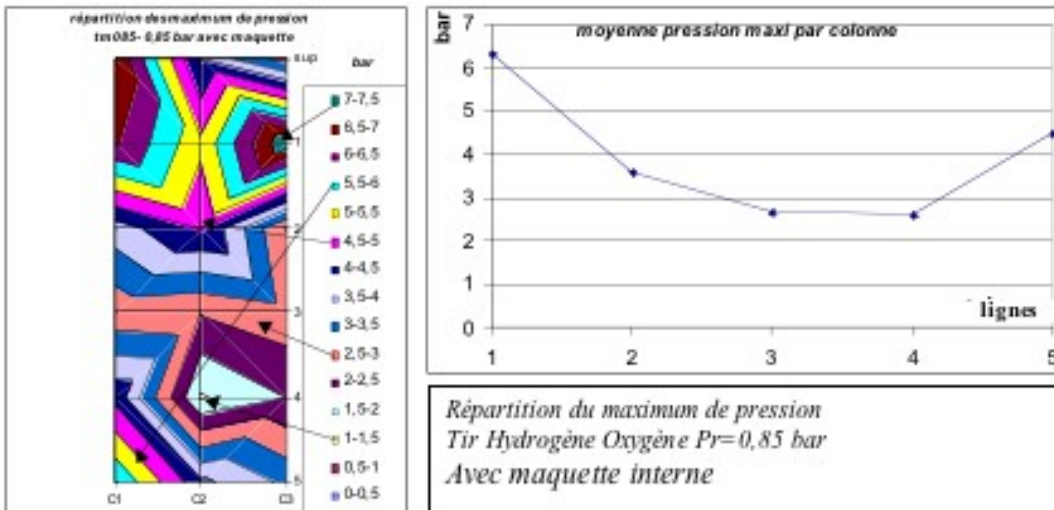


FIG. 5.6 – Pression maximale pour une détonation

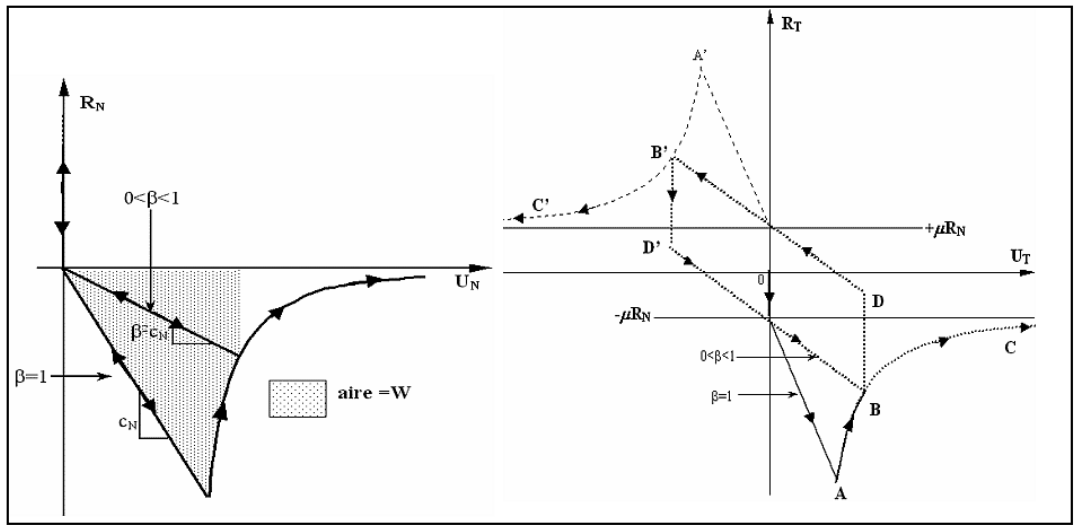


FIG. 5.7 – Modèle d'interface cohésive : Cycle de charge/décharge normal et tangentiel

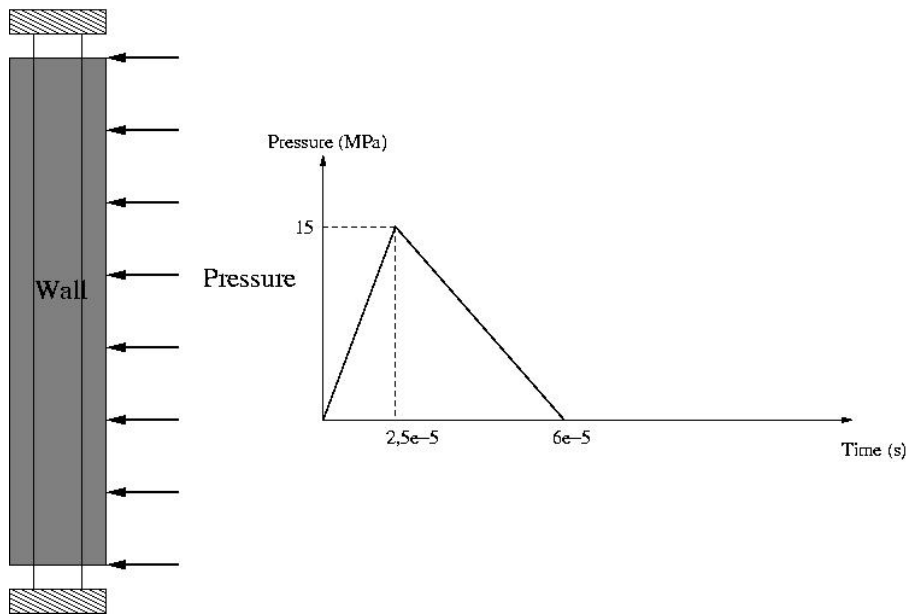


FIG. 5.8 – Conditions aux limites et chargement, cas d'une détonation

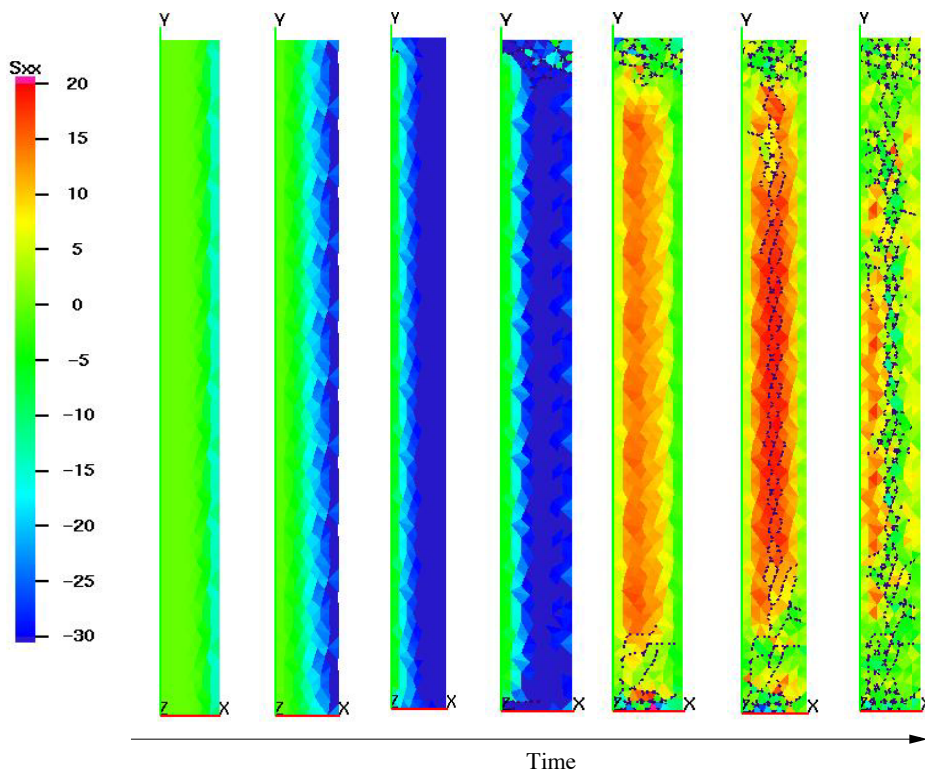


FIG. 5.9 – Contrainte transversale en fonction du temps (MPa)

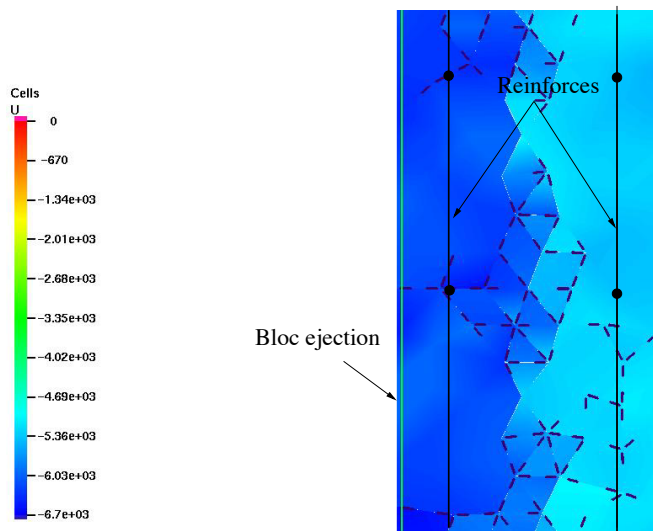


FIG. 5.10 – Vitesse d'éjection des fragments (mm/s)



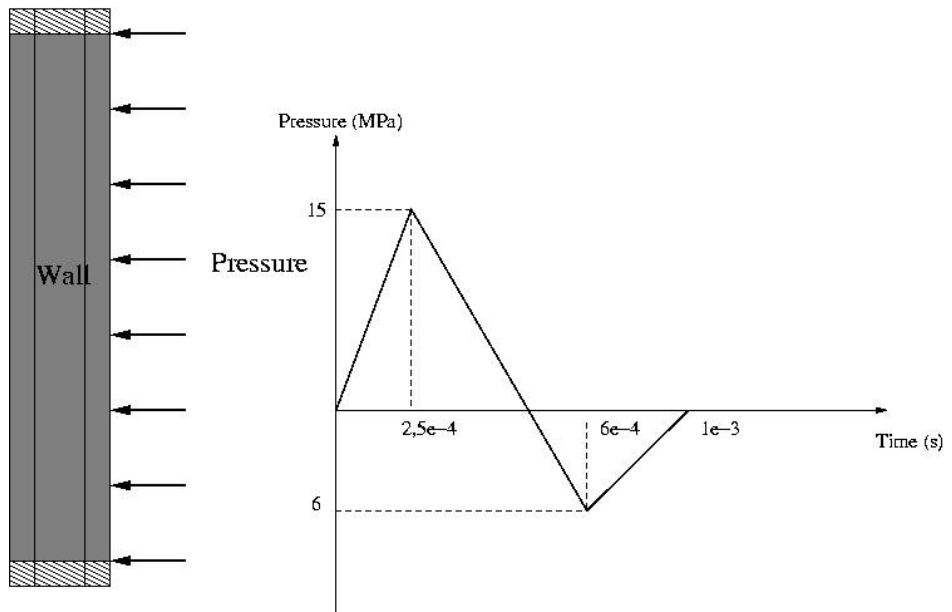


FIG. 5.11 – Conditions aux limites et chargement, cas d'une déflagration

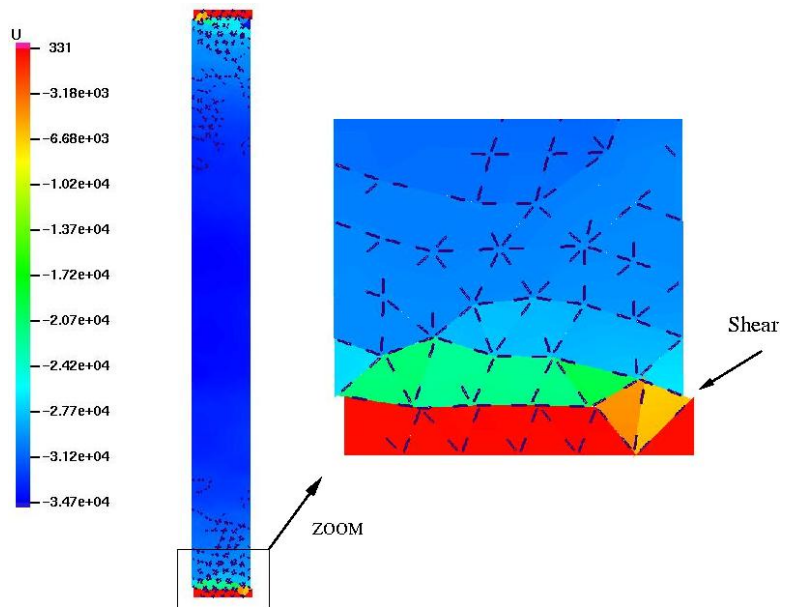


FIG. 5.12 – Rupture en cisaillement, cas d'une déflagration



## Chapitre 6

# Modélisation de lois de choc

L'étude que j'ai choisie de présenter dans ce chapitre concerne la modélisation numérique des matériaux granulaires par des collections de solides rigides. Lorsque ces solides sont des disques ou des sphères, les lois de choc définies par la donnée de deux coefficients de restitutions, un coefficient normal et tangentiel, restent bien adaptées. Mais lorsque la géométrie des rigides sort de ce cadre, les modèles demandent à être enrichis. Pour des solides de forme polygonale, nous avons proposé une loi de choc de type matricielle. Cette loi tient compte de la géométrie des solides et de l'angle d'impact. Pour l'instant, des résultats numériques ont été obtenus pour des solides de forme carrée. Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis, appliquée à des carrés déformables. Ils montrent que cette loi matricielle est préférable. Cette étude a fait l'objet de deux communications internationales [2], [3].

### 6.1 Matrice de restitution

En terme de modélisation des collisions entre solides rigides on trouve de nombreuses publications. Parmi ces modèles on peut citer la loi de choc de Newton qui est formulée par une relation linéaire entre la vitesse relative normale avant le choc  $v_N^-$  et la vitesse relative normale après le choc  $v_N^+$ .

$$v_N^+ = -e_N v_N^-$$

Le coefficient  $e_N$  est appelé coefficient de restitution. Dans le même esprit, lorsque les chocs sont obliques et en présence de frottement, la nécessité d'introduire un coefficient de restitution tangentiel apparaît. Dans la plupart des publications, ce coefficient tangentiel est fonction de l'angle d'impact et du coefficient de frottement. Dans ce contexte, J.J. Moreau [36], [37] a proposé d'utiliser un coefficient de restitution tangentiel constant et de réécrire les lois de contact frottant avec une vitesse relative formelle  $\tilde{v}$  définie comme une combinaison

convexe des vitesses relatives avant et après le choc

$$\tilde{v}_N = \frac{1}{1 + e_N} v_N^+ + \frac{e_N}{1 + e_N} v_N^-$$

et

$$\tilde{v}_T = \frac{1}{1 + e_T} v_T^+ + \frac{e_T}{1 + e_T} v_T^-$$

où  $e_T$  est le coefficient de restitution tangentiel,  $v_T^-$  la vitesse relative tangentielle avant le choc et  $v_T^+$  la vitesse relative tangentielle après le choc. Ce modèle est bien adapté aux solides de type disque ou sphère. Par contre, lorsque la géométrie est plus complexe, le modèle montre ses limites (voir Stoianovici [43], Le Saux [34]). Sur des exemples de chocs entre barres, ils montrent que le coefficient de restitution (de Newton) dépend de l'orientation de la barre et du point de contact à l'instant de l'impact. L'essentiel du problème vient de la prise en compte des couplages entre les vitesses de rotation, les vitesses normales et tangentielles. On peut facilement se convaincre que ces couplages sont en partie dus à des propriétés géométriques (forme des solides, localisation spatiale du point d'impact et angle d'impact). En s'inspirant de la notion de vitesse formelle introduite par J.J. Moreau, et de celle d'opérateur de collision, nous avons proposé un nouveau modèle de collision basé sur la relation suivante :

$$(1 + E)\tilde{V} = V^+ + EV^- \quad (6.1)$$

où  $E$  est l'opérateur de collision,  $V^-$  le torseur des vitesses relatives avant le choc et  $V^+$  le torseur des vitesses relatives après le choc. Si l'on exprime les torseurs par leurs éléments de réductions au point de contact  $C$ , la relation (6.1) se met sous la forme matricielle suivante :

$$(1 + E_C)\tilde{V}_C = V_C^+ + EV_C^- \quad (6.2)$$

En 2D,  $E_C$  est une matrice 3x3, que nous appellerons matrice de restitution au point de contact  $C$ .

Etant donné que ce point de contact est variable, nous choisirons d'identifier la matrice de restitution au centre d'inertie  $G$  des solides, sachant que l'on peut la transporter en n'importe quel point. En effet, d'après la relation sur les torseurs

$$V_C = JV_G$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées du vecteur  $\vec{GC}$ , on obtient

$$E_G = J^{-1}E_CJ.$$

## 6.2 Identification de la matrice de restitution

Cette identification a été réalisée sur un exemple de collision d'un solide de forme carrée sur un plan. Pour identifier les termes de la matrice de restitution, nous avons utilisé la généralisation de la loi de Newton suivante

$$V_G^+ = -E_G V_G^- \quad (6.3)$$

en supposant que le frottement est nul. Connaissant la distribution des vitesses  $V^-$ , nous avons calculé  $V^+$  en utilisant une approche par éléments finis de type espace-temps (voir chapitre 2). Le mouvement de solide rigide a été extrait du

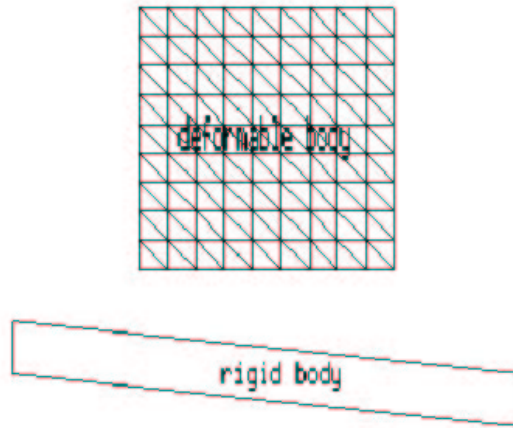


FIG. 6.1 – Modèle élément fini d'identification

mouvement d'ensemble et exprimé au centre d'inertie  $G$ . En faisant varier l'angle d'incidence  $\theta$ , et la vitesse du solide avant impact,

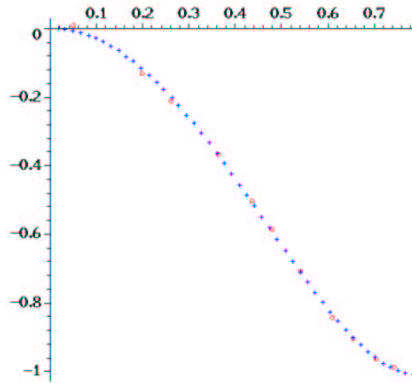
$$V_G^- = \begin{pmatrix} \Omega^- \\ V_x^- \\ V_y^- \end{pmatrix}$$

nous avons pu déterminer tous les coefficients de la matrice de restitution

$$E_G = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}.$$

Pour des raisons de symétrie, un seul coin du solide n'a été traité. On peut retrouver les courbes donnant la valeur de  $E_{ij}$  en fonction de  $\theta$  dans [3]. Ces courbes ont été approchées par des polynômes de degrés trois en  $\cos(\theta)$ . Voici, par exemple, les résultats que nous avons obtenu pour  $E_{11}$  :

$$E_{11} = 7,4 - 26,9\cos(\theta) + 25,4\cos(\theta)^2 - 5,9\cos(\theta)^3$$

FIG. 6.2 –  $E_{11}(\theta)$ 

### 6.3 Comparaisons numériques

Pour illustrer cette loi de choc avec matrice de restitution, nous avons considéré deux cas tests.

#### 6.3.1 Choc sans pesanteur

Dans le premier cas, nous avons simulé l'impact d'un cube d'acier, de 50 mm de côté, sur un plan infiniment rigide, incliné d'un angle  $\theta = \pi/6$  avec l'horizontale, en considérant que la pesanteur et le frottement étaient négligés et en lui imposant une vitesse initiale verticale de 50 mm/s (voir figure 6.3). Le problème est traité avec trois approches différentes. Dans les deux premières, le bloc d'acier est considéré rigide obéissant respectivement à une loi de choc scalaire et à une loi de choc matricielle. Pour la loi matricielle, nous avons pris la matrice de restitution déterminée au paragraphe précédent et pour la loi scalaire nous avons considéré un coefficient de restitution normal  $e_N = 1$  et un coefficient de restitution tangentiel  $e_T = 0,5$ . Dans la troisième approche le solide est considéré déformable avec un modèle éléments finis qui tient compte des grands déplacements. Dans le tableau 6.1 est représenté les éléments de réductions du torseur des vitesses du solide au centre d'inertie juste après le choc.

On constate que le torseur distributeur des vitesses après choc, obtenu avec une loi de choc matricielle, est plus proche de celui obtenu par l'approche éléments finis que celui issu des calculs avec une loi de choc scalaire. Nous allons voir dans le paragraphe qui suit les conséquences de ces résultats sur le comportement du bloc après le choc, dans le cas d'une chute libre.

On peut vérifier aussi avec les valeurs du tableau 6.1 que pour la loi de choc

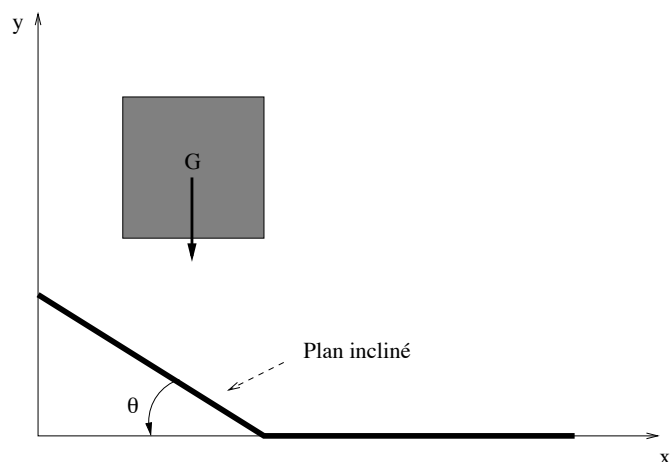


FIG. 6.3 – Choc sur plan incliné

	Rigide Loi de choc scalaire	Rigide Loi de choc matricielle	Déformable éléments finis
$\Omega^+$ (rad/s)	-0,6	-1,3	-1,4
$V_x^+(G)$ (mm/s)	39,6	34,4	34,5
$V_y^+(G)$ (mm/s)	18,6	12,9	13

TAB. 6.1 – Comparaisons des vitesses après choc

matricielle, l'énergie cinétique après le choc est inférieure à celle avant le choc, ce qui est en accord avec le second principe de la thermodynamique.

### 6.3.2 Choc et chute libre

Dans le deuxième cas test, nous avons simulé la chute libre du cube d'acier sur le même plan incliné. Cette fois-ci, le problème est traité avec une accélération de la pesanteur de  $9,81 \text{ m/s}^2$  et le frottement est négligé. Contrairement au cas précédent la vitesse initiale est choisie nulle. Les simulations ont été réalisées avec un pas de temps de  $10^{-4} \text{ s}$ . J'ai rassemblé, dans la figure 6.4, les positions du bloc d'acier, obtenu par chaque simulation, 500 pas de temps après le choc.

Si l'on considère que la solution de référence est celle obtenue par l'approche déformable, on peut dire qu'il est préférable de choisir une loi de choc matricielle. En effet, on observe que dans le cas d'une loi de choc scalaire, le point de contact a beaucoup trop glissé le long du plan et que la rotation n'est pas suffisante. Cela est essentiellement dû au manque de couplages entre les effets normaux et tangentiels.

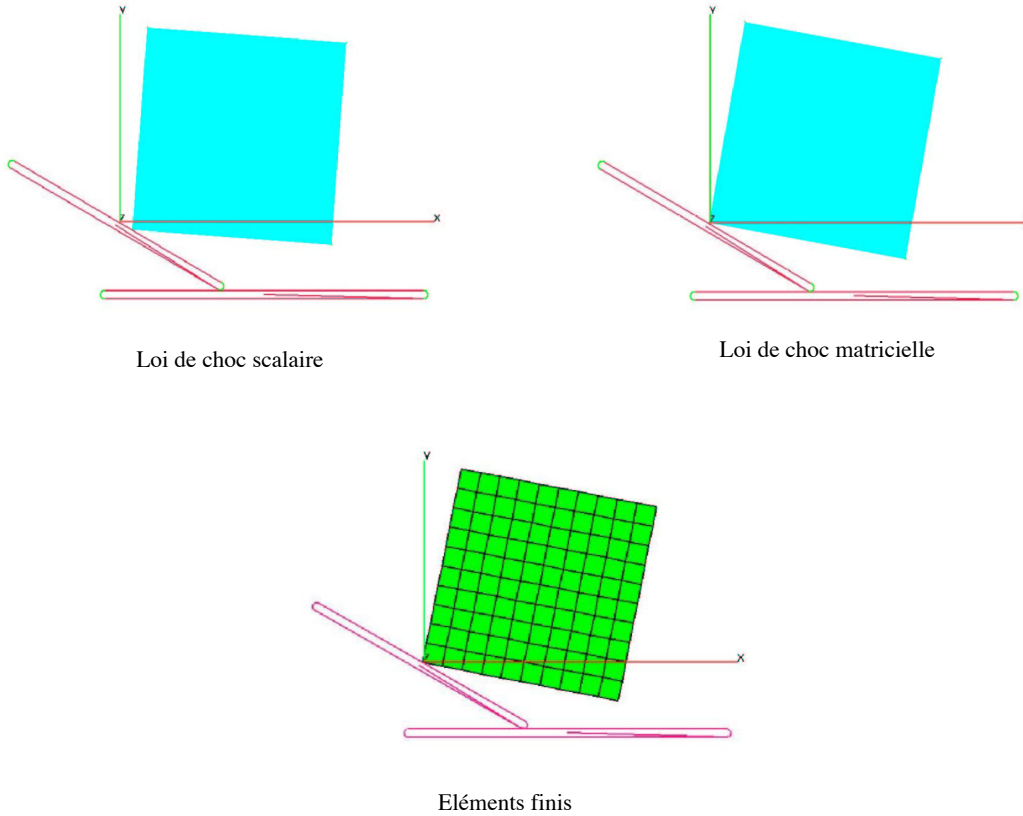


FIG. 6.4 – Chute libre après choc

## 6.4 Conclusion

A la vue de ces premiers calculs, il apparaît clairement que l'approche matricielle est plus adaptée à la modélisation des chocs entre solides de forme polygonales, qu'une approche scalaire. De plus, l'interpolation des coefficients de la matrice de restitution par des polynômes en cosinus, permet de réduire la base de donnée pour chaque sommet. Cette méthode peut se généraliser à des polygones quelconques, mais dans ce cas, il faut définir une matrice de restitution pour chaque sommet. Une généralisation aux polyèdres, semble plus délicate. Il faut non seulement définir une matrice de restitution pour chaque sommet, qui dépendrait de trois angles, mais aussi pour chaque arête.

Notons toutefois que dans cette étude, les comparaisons sont faites entre différentes approches numériques. Il serait intéressant de les comparer à des résultats expérimentaux.



La suite à donner à cette étude serait de modéliser les chocs avec frottement. Nous avons quelques pistes d'investigation, en particulier, une méthode qui consisterait à déduire la matrice de restitution, avec frottement, en faisant un changement de variable sur l'angle d'incidence du choc.



## Quatrième partie

# Autres études et projets de recherche



## 6.5 Le 3D... et plus

A la lecture de ce mémoire on peut remarquer que dans presque toutes les perspectives, je parle d'élargir les modèles au tridimensionnel, allant même jusqu'à parler du 4D pour les éléments finis espace-temps. Je pense que ces développements vont constituer une partie importante de mes futurs travaux de recherche. On peut penser que je suis en retard d'une bonne décennie pour le passage au 3D, mais dans le domaine des lois d'interface et celui des espace-temps, je crois qu'il reste encore beaucoup à faire.

### 6.5.1 Pliage et dépliage des systèmes de tensérité

En relation avec les lois de choc, j'ai mené une étude, en collaboration avec Franck Cevaer de l'équipe Conception et Structures du LMGC, dans le cadre du stage de DEA de Robert Pérales [39], sur les chocs dans les systèmes de tensérité. Ces travaux ont fait suite à ceux engagés dans la thèse de Cédric Le Saux [35] sur la modélisation du pliage et dépliage des structures de tensérité. Il a mis en évidence et nous avons confirmé par une série d'expériences, les limites de la loi de choc de Moreau pour des solides rigides de type barre. Pour s'affranchir de ces problèmes de lois de choc, nous avons choisi de modéliser les barres par des déformables et développé un élément fini de poutre en dynamique et grandes déformations. Cet élément fini est basé sur les travaux de Gérardin [15]. On aurait pu adopter comme précédemment une loi de choc matricielle, mais il nous est apparu plus intéressant d'utiliser une approche éléments finis car le nombre de solides mis en jeu dans ces systèmes de tensérité est peu élevé. Ces travaux ont fait l'objet d'une communication dans le colloque Lagrange [10].

### 6.5.2 Usure 3D

Comme je l'ai évoqué en conclusion du chapitre 4, les changements de directions sont des facteurs aggravants pour l'usure. Des mesures (voir Laurent [32], Johnson [22]), ont montré que pour une même charge et une même distance de frottement parcourue, les changements de direction pouvaient augmenter l'usure d'un facteur dix. Je pense qu'une partie du phénomène peut être expliquée par une localisation des contraintes lors des changements de direction (passage de bourrelets). Par ses propriétés locales et intrinsèques, le modèle d'usure que j'ai développé, semble adapté pour rendre compte de ces phénomènes multidirectionnels. Mais pour cela, il faut le généraliser au 3D. En théorie, il n'y a pas de difficultés majeures dans la généralisation, car dans la présentation du modèle, au chapitre 4, il n'est pas fait d'hypothèses sur la dimension. La différence la plus notable sera dans l'expression et le calcul de l'opérateur de contact frottant avec usure, c'est à dire l'opérateur tangent aux lois (4.18), (4.19). Je compte réaliser ces futurs travaux assez rapidement et les programmer dans LMGC90.

### 6.5.3 Éléments finis espace-temps 4D

Je présente dans ce paragraphe une réflexion que j'ai commencée à mener concernant la résolution de problèmes comprenant trois dimensions dans l'espace et une dans le temps.

Construire un élément fini 4D ne pose pas de réels problèmes, si ce n'est des problèmes de représentation. Par contre, construire un maillage, même le plus élémentaire, est loin d'être trivial, excepté dans le cas de maillages réguliers formés d'éléments finis de type multiplex. Dans les autres cas, et en particulier pour des éléments finis de type simplex, le maillage reste une difficulté. Pourtant, pour montrer que la méthode STFEM est efficace, il faut aller beaucoup plus loin et proposer une technique de remaillage par méthode frontale. C'est à dire proposer une généralisation de celle présentée dans le paragraphe 2.3. Pour montrer toute la difficulté de l'étude, voici quelques développements (non encore publiés), qui je pense, méritent d'être poursuivis :

Dans la figure 6.5 sont représentés des parties élémentaires de maillages 2D, 3D et 4D avec les numéros des noeuds. On note  $n_0$  le nombre total de noeuds à l'instant  $t = 0$  du maillage espace entier, et l'on suppose qu'à l'instant  $t = h$  le nombre de noeuds reste le même. Pour le maillage 2D, les connectivités sont

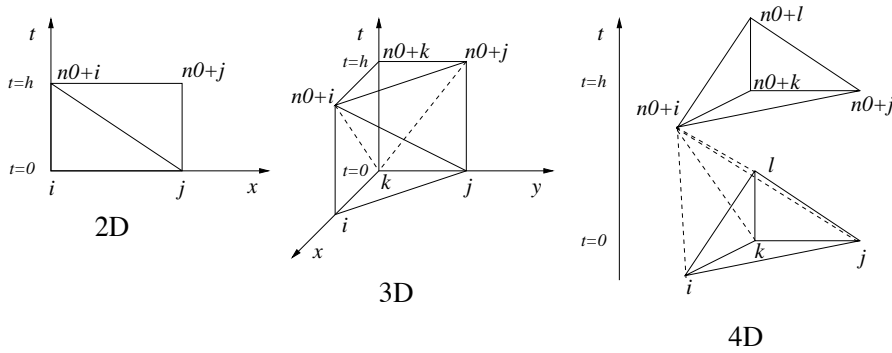


FIG. 6.5 – Maillage espace-temps 2D,3D,4D

$$i, j, n_0 + i$$

$$j, n_0 + i, n_0 + j$$

Pour le maillage 3D, les connectivités sont

$$i, j, k, n_0 + i$$

$$j, k, n_0 + i, n_0 + j$$

$$k, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k$$

En s'inspirant de ce qui précède, on peut proposer la généralisation suivante des connectivités pour le maillage 4D.

$$i, j, k, l, n_0 + i$$

$$j, k, l, n_0 + i, n_0 + j$$

$$k, l, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k$$

$$l, n_0 + i, n_0 + j, n_0 + k, n_0 + l$$

Ces développements constituent un point de départ intéressant, mais beaucoup de travail reste encore à faire dans ce domaine et dans d'autres tels que les grandes déformations, l'élasto-plasticité, etc...

## 6.6 La biomécanique

Comme je l'ai annoncé dans la présentation du mémoire, une partie de mon activité scientifique s'est portée sur des préoccupations en lien avec la biomécanique. Je présente ici les domaines que j'ai abordés et ceux qui sont en cours de développement.

### 6.6.1 Atelles articulées de genou

Connaissant mon activité sur les prothèses de genoux, le Pôle Santé de la région Languedoc Roussillon, m'a contacté fin 2002, pour une étude sur un projet d'orthèse (attelle articulée) de genoux, proposée par la société ORTHOSOFT. Cette étude a été réalisée dans le cadre d'une collaboration de recherche entre le CNRS, l'Université de Montpellier II et ORTHOSOFT, dont j'étais le responsable. L'étude consistait à optimiser un système d'attelle de genoux, breveté par la société ORTHOSOFT. En particulier, il était question de déterminer les dimensions optimales de certaines pièces afin d'être au plus près de la cinématique de l'articulation du genoux, pour protéger les structures anatomiques. Cette cinématique est relativement complexe et repose en partie sur l'action des ligaments croisés. Pour être au plus près de la cinématique réelle, j'ai utilisé le modèle d'articulation que j'ai développé dans le cadre de mes travaux sur l'usure. Cette collaboration de recherche a fait l'objet d'un article dans une revue internationale [28] et d'un rapport de contrat. Ces travaux ont permis de mettre en évidence plusieurs résultats intéressants. J'ai montré, en particulier que le système de quatre barres développé par Müller [38], qui fait référence dans le domaine, pouvait rendre compte de la cinématique du genou, mais pas avec les dimensions initialement proposées.

### 6.6.2 Remodelage osseux

En collaboration avec David Dureisseix et Patrick Cañadas, du LMGC, nous avons lancé une étude sur l'influence de l'action des fluides physiologiques sur le remodelage osseux. Ces travaux ont débutés par le stage de DEA de Julien Belloni en mars 2005 et se poursuivent par la thèse d'Etienne Malachanne, dont je suis actuellement co-directeur.

L'os est un matériau complexe, anisotrope, hétérogène, et évolutif. Il est constitué d'éléments de structure sollicités mécaniquement et physiologiquement, de façon cyclique, et qui s'adaptent continuellement à leur environnement. Dans le but d'expliquer la perte de masse osseuse lors des vols spatiaux de longue durée, il apparaît nécessaire de prendre en compte le rôle du fluide interstitiel présent au sein de l'os, non seulement à une échelle macroscopique

(répartition des pressions), mais aussi à celle des cellules osseuses (par exemple les ostéocytes supposés sensibles aux déséquilibres électro-osmotiques et/ou aux contraintes de cisaillement liés aux micromouvements du fluide).

Lors du stage de DEA, nous avons utilisé un modèle poroélastique que nous avons couplé à une loi de remodelage de Woff, liant le taux de remodelage à une déformation équivalente. Cette approche a montré une influence faible de la pression sur le remodelage pour un temps de sollicitation court (de l'ordre de la seconde). Le cumul sur un temps long (de l'ordre du mois) pourrait par contre conduire à des prédictions de densités osseuses assez différentes. Les phénomènes poroélastiques et de remodelage ont des temps caractéristiques d'ordres de grandeurs très différents. La modélisation directe à une échelle fine en temps conduirait à des temps de calcul prohibitifs. Une stratégie de calcul pourrait consister à utiliser des méthodes de saut de cycles pour mener à bien une telle simulation, mais au vu des gammes de variabilité des lois physiologiques de remodelage, on se propose de s'orienter vers une modélisation différente. Celle-ci requière l'utilisation d'une approche multiéchelle temporelle afin de modéliser l'influence de la pression sur un temps de sollicitation long (de l'ordre du mois). Une première technique d'homogénéisation en temps a été utilisée au cours du DEA et devra être approfondie. Dans le modèle initialement proposé, la pression n'avait une influence sur le remodelage que de manière indirecte à travers une déformation équivalente. Cependant, des travaux expérimentaux ont montré l'influence du gradient de pression sur la densité de masse osseuse. Cette influence est elle directe ou indirecte? Un des objectifs du travail de thèse sera d'apporter des éléments de réponse à cette question. Au final, cette modélisation devra se faire avec ou sans prise en compte de la gravité, afin d'apporter un éclairage sur l'ostéoporose observée chez les spationautes. Bien entendu, une ouverture de ce travail peut porter aussi sur le comportement de l'association prothèses/os qui à déjà fait l'objet de plusieurs études et pour lesquelles des comparaisons avec la réponse du modèle proposé pourront être réalisées.



# Bibliographie

- [1] L. Adélaïde, Méthode des éléments finis espace-temps : adaptation du maillage en cours d'évolution avec contact, Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, 2001.
- [2] L. Adélaïde, F. Jourdan, C. Bohatier, Shock law for rigid bodies and space-time finite element Method, Proceedings Solid Mechanics Conference, Zakopane, Pologne, 2-7, Septembre, 2002
- [3] L. Adélaïde, F. Jourdan, C. Bohatier, Large Rocking motion, rolling motion and space-time finite element method, Gliwice, Pologne, 3-6 juin, 2003
- [4] L. Adélaïde, F. Jourdan, C. Bohatier, Méthode des éléments finis espace-temps et remaillage, Revue Européenne des éléments finis, Vol. 12 - n°4, pp 427-459, 2003
- [5] L. Adélaïde, F. Jourdan, C. Bohatier, Frictional contact solver and mesh adaptation in Space-Time Finite Element Method, European Journal of Mechanics A/solids, vol. 22, 633-647, 2003
- [6] C. Bajer, C. Bohatier, The soft way method and the velocity formulation, Comput. And Struct., Vol. 55, pp 1015-1025, 1993
- [7] C. Bajer, C. Bohatier, Kinematic approach to dynamic contact problems, the geometrical soft way method Eng. Transactions, Polish Scientific Publishers, Vol.43, pp 101-111, 1995
- [8] Brara A., Camborde F., Klepaczko J. R. and Mariotti C. : Experimental and numerical study of concrete at high strain rates in tension. In : Mechanics of Materials, Volume 33, Issue 1, January, pp. 33-45, 2001
- [9] P. Bussy, B.Liu, P. Vaucher, Numerical simulation of metal forming processes : The LARge Time Increment Method, Second World Congress on Computational Mechanics, Stuttgart, 1990.
- [10] F. Cévaer, F. Jourdan, R. Motro, Etude de la collision entre barres élançées, Colloque Lagrange, Modélisation des Intéractions Multi-Corps, Montpellier, 6-7 juin 2005
- [11] L. Champaney, J. Y. Cognard, J.Y., P. Ladevèze.. Modular analysis of assemblages of 3D structures with unilateral contact conditions. Computers and Structures. Vol 73. Pages 249-266. 1999

- [12] C. Davini, F. Jourdan, Approximations of degree zero in the Poisson problem, *Communications on Pure and Applied Analysis*, Vol 4, Numéro2, pp 269-283, 2005
- [13] Fremond M. : Adhesion et contact unilatéral. In : *Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*. British Columbia University of Waterloo Press, Vancouver 6-9 July, pp. 63-77, 1982
- [14] Y. Gaignebet, Approche non incrémentale des calculs de chocs pour des structures viscoplastiques, Gaignebet Yvon, Cachan - ENS Cachan - 1996
- [15] M. Geradin, A. Cardona, Flexible multibody dynamics, British library cataloguing in publication data, 2000
- [16] S. Hentz, F. V. Donzé, L. Daudeville , Discrete element modelling of concrete submitted to dynamic loading at high strain rates, *Comput. and Struct.* , Vol. 82, pp 2509-2524, 2004
- [17] T. J. R. Hughes, G. Hulbert , Space-time finite element methods for elastodynamics : formulations and error estimates, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* , Vol. 66, pp 339-363, 1988
- [18] A. Idesman, R. Niekamp, Continuous and discontinuous Galerkin methods with finite elements in space and time for parallel computing of viscoelastic deformation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 190, pp 1049-1063, 2000
- [19] P. Ireman, A. Klarbring, N. Stromberg, Finite element algorithms for thermoelastic wear problems, *Euro. Jour. Mech. A/Solids* 21, pp. 423-440, 2002.
- [20] M. Jean, The non-smooth contact dynamics method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* Vol. 177, pp. 235-257, 1999
- [21] Jean M., Acary V., Monerie Y. : Non smooth contact dynamics approach of cohesive materials. In : *Proceedings Royal society, London* pp. 2497-2518, 2001.
- [22] Johnson T.S. et al., The effect of displacement control input parameters on tibiofemoral prosthetic knee wear, *Wear*, Vol. 250, pp. 222-226, 2001
- [23] F. Jourdan, P. Alart, M. Jean, A Gauss Seidel like algorithm to solve frictional contact problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , pp 31-47, 1998.
- [24] F. Jourdan, P. Alart, M. Jean, An alternative method between implicit and explicit schemes devoted to frictional contact problems in deep drawing simulation, *Journal of Materials Processing Technology*, pp 257-262, 1998
- [25] F. Jourdan, P. Bussy, Large Time Increment Method in dynamic regularization : sheet cutting simulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , pp 1245-1259, 2000
- [26] F Jourdan, P Bussy, Simulation numérique du découpage de tôle en dynamique par la méthode à grands incréments de temps, 4e Congrès de Mécanique, Université Hassan II, Mohammadia, pp 117-118, 12-16 Avril, 1999

- [27] F. Jourdan, Numerical model of wear phenomena for joint prostheses, *Archives of Physiology and Biochemistry*, vol 111, pp 90, 2003
- [28] F. Jourdan, T. Marc, A numerical design of a knee brace based on a crossed bars mechanism, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Supplément I, pp 151-152, 2005
- [29] F. Jourdan, Numerical wear modelling in dynamics and large strains : Application to knee joint prostheses, *Wear*, sous presse
- [30] P. Ladevèze, H. Lemoussu, P.A. Boucard, A modular approach to 3D impact computation with frictional contact, *Computers and Structures*, Vol. 78, pp. 45-52, 2000
- [31] P. Ladevèze, Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures, *C.R., Acad. des Sc.*, 300, Série II, n°2, 1985
- [32] Laurent M.P. et al., In vitro lateral versus medial wear of a knee prosthesis, *Wear*, Vol. 255, pp. 1101-1106, 2003
- [33] C. Le Saux, Modélisation numérique du pliage et du déploiement de systèmes spatiaux avec prise en compte des contacts et des frottements - Cas des systèmes de tensegrité, Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, 2002
- [34] C. Le Saux, F. Cevaer and R. Motro, Contribution to 3D impact problems : collisions between two slender steel bars, *Comptes Rendus Mecanique*, Volume 332, Issue 1, pp. 17-22, 2004
- [35] C. Le Saux
- [36] J.-J. Moreau, Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials, *Eur. J. Mech., A/Solids*, vol. 13, N°4 - suppl., pp. 93-114, 1994
- [37] J.-J. Moreau, Numerical aspects of the sweeping process, Martins J.A.C., Klarbring A. (Eds) *Computational Modeling of Contact and Friction*, special issue of *Computer Meth. and Engng.*, vol. 177, pp. 329-349, 1999
- [38] W. Müller, *The Knee : Form, Function, and Ligament Reconstruction*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983
- [39] R. Pérales, Etude de choc entre deux cylindres : approche éléments finis et expérimentation, Mémoire de DEA, Université de Montpellier II, 2004
- [40] Raous M., Cangémi L., Cocu M. :Consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact. In : *Computer Methods Appl. Mech. Engrg.*, N°177, pp. 383-399, 1999
- [41] H. Roméro, Fragmentation du béton sous explosion : Etude expérimentale d'une explosion confinée, approche par éléments discrets, Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, 2003
- [42] H. Romero, F. Jourdan, F. Dubois, Study and simulation of fragmentation phenomena of concrete structures under stuffy explosion, *Advances in Computational and Experimental Engineering and Science*, Tech Science Press, ICCES 2004, 26-29 juin, Madeira, Portugal, pp81-89, 2004

- [43] D. Stoianovici, Y. Hurmuzlu , A critical study of applicability of rigid-body collision theory, ASME J. Applied Mechanics, Vol. 63, pp. 307-316, 1996
- [44] N. Stromberg, Finite element treatment of two-dimensional thermoelastic wear problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. Vol. 177, pp. 441-455, 1998