



**HAL**  
open science

# Etude de l'incidence des comportements dissipatifs dans les instabilités vibratoires des systèmes de freinages

Franck Renaud

► **To cite this version:**

Franck Renaud. Etude de l'incidence des comportements dissipatifs dans les instabilités vibratoires des systèmes de freinages. Autre. Ecole Centrale Paris, 2011. Français. NNT : 2011ECAP0012 . tel-00585269

**HAL Id: tel-00585269**

**<https://theses.hal.science/tel-00585269>**

Submitted on 12 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

Présentée par **RENAUD Franck**

pour l'obtention du  
**GRADE DE DOCTEUR**

Spécialité : Science pour l'ingénieur

Laboratoire d'accueil : LISMMA

---

# Étude de l'incidence des comportements dissipatifs dans les instabilités vibratoires des systèmes de freinage

---

Soutenue le : **02 février 2011**

Devant un jury composé de :

M. FOLTETE Emmanuel	Président de jury
M. BALMES Etienne	Rapporteur
M. SINOU Jean-Jacques	Rapporteur
M. TAWFIQ Imad	Directeur de thèse
M. DION Jean-Luc	Co-encadrant
M. CHEVALLIER Gaël	Co-encadrant
M. PASQUET Thierry	Invité
M. LEMAIRE Rémi	Invité



# Remerciements

Je remercie M. Pasquet et M. Lemaire du service NVH de Bosch Système de Freinage de leur intérêt pour mes travaux de thèse. Sans leur financement cette thèse n'aurait pas eu lieu. Je remercie également mon directeur de thèse, Imad Tawfiq, pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je présente toute ma gratitude à mes encadrants, Jean-Luc Dion et Gaël Chevallier. Tout d'abord, ils ont su convaincre les ingénieurs du service NVH de Bosch de la nécessité de modéliser la viscoélasticité. Ensuite, ils ont toujours été disponibles et patients pour répondre à mes questions et discuter de mes propositions même les plus farfelues. Enfin, leur bonne humeur a permis de créer entre nous un climat propice au bon déroulement de la thèse.

Je remercie le personnel des pôles techniques de Supmeca et plus particulièrement Hamidou Sebbah et Christophe Ben Brahim. Ils m'ont largement épaulé lors de l'instrumentation des divers bancs d'essai sur lesquels j'ai travaillé pendant ma thèse. Auprès d'eux j'ai parfait ma culture d'expérimentateur.

Il me faut également remercier mes collègues de bureau, Sylvain Thouviot et Hervé Rognon, avec qui science a toujours rimée avec bonne ambiance. Entre franche rigolade et émulation scientifique et technique (Matlab, Emacs, ...), ces années de thèse m'ont toujours semblées légères. Je tiens également à saluer de manière générale la bonne humeur dispensée par tous mes collègues de travail, notamment lors des repas de midi sur la mezzanine.

En parallèle de ma thèse, j'ai développé un goût prononcé pour les bonnes vibrations produites par le didgeridoo et les instruments de musique percussifs. Je suis d'ailleurs en perpétuel recherche d'amélioration des didgeridoos que je fabrique moi-même (voir la figure 1). Aussi, je tiens à remercier mon ami d'enfance, dit "Le Blé" qui m'a toujours encouragé dans cette voie musicale. Je remercie également Nicolas Dauchez, mon chef d'équipe, qui m'a aiguillé dans la modélisation des mes didgeridoos.

Mille mercis à ma famille et plus spécialement à ma maman et à ma future épouse Ruixian pour leur patience avec moi. Enfin, je dédie ma thèse à mon père qui aurait été fier de mon parcours.



FIGURE 1 – Photos du didgeridoo n°5 réalisé en bois de pêcher. La figure (a) montre une vue globale. Les deux extrémités du didgeridoo sont vernies et le reste est huilé (voir fig. (b), (c) et (e)). Une chauve-souris est pyrogravée (voir fig. (c)), ainsi qu'une salamandre (voir fig. (d)) et un sanglier qui joue du didgeridoo (fig. (e)).

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Table des matières</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
Bibliographie de l'introduction	14
<b>2 Observation expérimentale du crissement</b>	<b>19</b>
2.1 Intérêt de l'observation des plaquettes	21
2.2 Banc d'essai et instrumentation	21
2.3 Résultats d'essai	22
2.3.1 Harmoniques	24
2.3.2 Mouvement de la plaquette	26
2.4 Comparaison avec un modèle EF	32
2.5 Conclusion et perspectives	37
Bibliographie du chapitre 2	38
<b>3 Compréhension phénoménologique du crissement</b>	<b>39</b>
3.1 Modèle de basculement	42
3.1.1 Mise en équation	43
3.1.2 Résolution du système linéarisé	45
3.2 Le modèle de Hoffmann	47
3.3 Le modèle de Hoffmann avec amortissement	52
3.3.1 Etude des instabilités dynamiques	54
3.3.2 Exemples numériques	58
3.4 Conclusion	62
Bibliographie du chapitre 3	63
<b>4 Caractérisation des matériaux viscoélastiques</b>	<b>67</b>
4.1 Conception du viscoanalyseur	69
4.1.1 Principe de fonctionnement	69
4.1.2 Instrumentation	71
4.1.3 Choix des actionneurs piézoélectriques	71
4.1.4 Conception des supports d'échantillons et des mâchoires	74
4.2 Modélisation du banc	78
4.2.1 Modélisation des mâchoires	79
4.2.2 Modélisation des chaînes d'actionnement	79
4.2.3 Equations de post-traitement	80

4.3	Protocole d'essai . . . . .	82
4.4	Quelques résultats de caractérisation . . . . .	84
4.4.1	Répétabilité . . . . .	84
4.4.2	Caractérisation d'un shim . . . . .	85
4.5	Conclusion et perspectives . . . . .	88
	Bibliographie du chapitre 4 . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Modélisation de la viscoélasticité</b>	<b>89</b>
5.1	Introduction . . . . .	91
5.2	Theoretical aspects . . . . .	96
5.2.1	The Generalized Maxwell Model . . . . .	96
5.2.2	Asymptotes of the PZF . . . . .	97
5.3	Existing methods . . . . .	99
5.3.1	The Enclosing Curve Method . . . . .	99
5.3.2	The CRONE Method . . . . .	99
5.3.3	A test transfer function . . . . .	101
5.3.4	Two fitting indicators . . . . .	102
5.4	The Asymptotical Variations Method . . . . .	103
5.4.1	Initialization of the PZF parameters with a new graphical method . . . . .	103
5.4.2	Optimization of identified parameters . . . . .	107
5.5	Conclusion and perspectives . . . . .	114
5.6	Identification simultanée de plusieurs matériaux viscoélastiques . . . . .	115
5.6.1	La contrainte des pôles communs . . . . .	115
5.6.2	Étape 3 : Moyenne des pôles . . . . .	115
5.6.3	Étape 4 : Optimisation sous contraintes . . . . .	118
5.6.4	Résultats . . . . .	120
	Bibliographie du chapitre 5 . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Analyse aux valeurs propres complexes de systèmes viscoélastiques</b>	<b>125</b>
6.1	Analyse aux valeurs propres complexes "classique" . . . . .	127
6.1.1	Théorie . . . . .	127
6.1.2	Exemple . . . . .	130
6.2	Prise en compte de la viscoélasticité des matériaux . . . . .	131
6.2.1	Théorie . . . . .	131
6.2.2	Exemple . . . . .	134
6.3	Enrichissement du sous-espace de projection . . . . .	135
6.3.1	Itération sur les résidus . . . . .	135
6.3.2	Exemple . . . . .	138
6.4	Conclusion et perspectives . . . . .	141
	Bibliographie du chapitre 6 . . . . .	141
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>143</b>
<b>A</b>	<b>Annexe du chapitre 3 : Le critère de Routh-Hurwitz</b>	<b>147</b>
<b>B</b>	<b>Annexes du chapitre 4 : Caractérisation des matériaux</b>	<b>149</b>
B.1	Essais sur vérin hydraulique . . . . .	150
B.2	Caractérisation par ultrasons . . . . .	151

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>C Annexes du chapitre 5 : Identification du modèle de Maxwell généralisé</b>	<b>159</b>
C.1 Rheological models . . . . .	159
C.2 The parameters of GMM in function of the parameters of PZF . . . . .	160
C.3 Parameters values obtained with initialization methods . . . . .	161
C.4 Parameters values obtained with optimization methods . . . . .	162
C.5 Paramètres obtenus avec la contrainte des pôles communs . . . . .	163
<b>D Annexes du chapitre 6</b>	<b>165</b>
D.1 Taux d'amortissement . . . . .	165
D.2 Intérêt de la contrainte de pôles communs . . . . .	166
<b>Bibliographie générale</b>	<b>167</b>





# Chapitre 1

## Introduction

Dans nos sociétés actuelles, le confort et le bien-être du consommateur sont devenus des critères primordiaux lors de la conception d'un produit. Dans l'industrie automobile, les ambiances acoustiques et vibratoires au sein de l'habitacle sont particulièrement soignées. La psychoacoustique s'est développée pour concevoir des éléments mécaniques qui produisent des bruits de fonctionnement procurant des sentiments de sécurité et de confiance aux utilisateurs. Le ronronnement de son moteur, le claquement de ses portières, le bruit de ses clignotants sont autant de sons qui permettent à l'acheteur de juger de la qualité d'un véhicule. Historiquement, la principale source de bruit générée par une automobile provenait de son moteur. Aujourd'hui ce bruit doit inspirer des sentiments de puissance et de robustesse pour les voitures sportives, mais il doit rester en dessous d'un certain niveau pour les citadines ou les berlines. En effet, le silence à l'intérieur de l'habitacle est également une source de confort. Ainsi, les moteurs actuels sont devenus tellement silencieux que d'autres sources acoustiques autrefois secondaires, comme les bruits de roulement, les bruits aérodynamiques ou les bruits de freinage, sont maintenant la principale cause d'inconfort. Dans le cas des systèmes de freinage, toutes sortes de bruits sont générés au cours de leur utilisation. Ces bruits se différencient par leur fréquence et par les éléments mécaniques qui les produisent. Les phénomènes de "squeal, groan, chatter, judder, moan, hum et squeak"<sup>1</sup> décrits dans la littérature sont autant de bruits qui donnent aux utilisateurs le sentiment que le système de freinage est défectueux et donc que la sécurité du véhicule n'est pas assurée. A titre d'exemple, le crissement de frein (squeal), qui apparaît à des fréquences élevées entre 1kHz et 10kHz est particulièrement désagréable mais n'a pourtant aucun impact sur les performances d'un système de freinage.

Le crissement de frein est un phénomène difficile à observer et les premières études expérimentales remontent aux années 1930 d'après Kinkaid [1]. La principale difficulté réside dans le fait qu'il est souvent difficile de l'obtenir de manière répétable en laboratoire. Son apparition est bien corrélée avec certains environnements climatiques comme le froid et l'humidité. Le crissement apparaît classiquement à de faibles vitesses de véhicule et pour de faibles pressions de freinage, dans les derniers mètres avant l'arrêt complet par exemple.

Le crissement de frein est un phénomène dont la cause est difficile à appréhender. Il est généralement admis que l'élément mécanique rayonnant est le disque. La source de l'excitation est sans contestes possibles le frottement des plaquettes sur le disque. Toutefois, les plaquettes,

---

1. Ils correspondent à des bruits de crissement, ronflement, chuintement, saccade, gaillonnement, martèlement et sifflement.

qui doivent se traduire en direction du disque lors du freinage, sont maintenues de manière relativement souple. La plaquette possède ainsi une relative autonomie de “flottement” dans l’espace qui lui est réservé. Cela offre un large panel de possibilités quant aux interactions entre le disque et le système de freinage rendant compliqué la modélisation du crissement. Si beaucoup d’auteurs s’accordent à dire que ce phénomène va de pair avec un couplage entre les modes propres du système de freinage, la cause de son apparition est encore floue. Dans sa revue de 2002, Kinkaid [1] recensait différents types de phénomènes susceptibles d’expliquer l’apparition du crissement :

- le stick-slip où la plaquette adhère et glisse successivement sur le disque.
- le sprag-slip où le bord d’attaque s’arc-boute sur la piste.
- un coefficient de frottement dépendant de la vitesse.
- le couplage modal.
- les vibrations auto-entretenues.

Actuellement, les industriels préfèrent tenter de modéliser le crissement en privilégiant l’hypothèse du couplage modal. Cela est principalement dû à l’existence d’outils perfectionnés permettant de telles modélisations. Ainsi, les systèmes de freinage sont modélisés par éléments finis (EF) en raffinant suffisamment le maillage pour que chaque détail de la géométrie soit pris en compte. Ensuite, des analyses aux valeurs propres complexes sont menées sur ces modèles EF. Il est alors supposé que le système vibre, de manière élastique et linéaire en déplacement, autour d’un équilibre de glissement stationnaire. Autrement dit, les instabilités sont cherchées autour d’un point fixe. Ces hypothèses sont considérées acceptables lors de la naissance du crissement. De telles analyses permettent de prédire quelques dizaines de modes instables. Hors, expérimentalement, il est assez rare de trouver un système de freinage ayant plus d’une seule fréquence de crissement. Il est généralement admis que la vibration du crissement de frein est décrite par l’une des vibrations instables prédites par le modèle EF. En effet, ces vibrations instables peuvent potentiellement générer un crissement de frein si elles sont excitées, c’est-à-dire si elles récupèrent une partie de l’énergie du freinage. Selon Kinkaid [1], L’énergie d’un crissement d’un niveau sonore de 100dB à 2m de distance de la source est d’environ 0.25W contre une moyenne de 50kW dissipée par le frein à disque lors d’un freinage ! Le phénomène de crissement est devenu plus récurrent depuis que, pour des raisons sanitaires, l’amiante est interdite dans la composition des plaquettes. A la vue de ces difficultés de compréhension, beaucoup d’industriels cherchent à amortir les vibrations en associant des matériaux viscoélastiques aux systèmes de freinage.

Les méthodes classiques de modélisation, c’est-à-dire les analyses aux valeurs propres complexes sur des modèles EF à plusieurs centaines de milliers de degrés de libertés, ne permettent pas une description complètement satisfaisante du phénomène de crissement. Cela nous pousse à remettre en cause certaines de leurs hypothèses sous-jacentes. Dans un premier temps, il semble nécessaire d’investiguer, par des observations, le mouvement réel des éléments du système de freinage lors du crissement. Cela permettra de répondre à certains nombre de questions sur la validité de ces modèles. Beaucoup d’auteurs ont déjà fait des observations sur frein réel. Citons Fieldhouse et Newcomb [2] qui utilisèrent la technique de l’holographie Laser à double impulsions, sous l’hypothèse de mouvements sinusoïdaux. Cette technique permet la visualisation des mouvements dans les trois directions de l’espace avec une grande résolution spatiale mais une faible bande fréquentielle d’observation. Ils observèrent des modes de disques se propageant le long du disque et virent également un mouvement de flexion pure au niveau du bord d’attaque

---

de la plaquette de frein. Giannini et al. [3, 4, 5, 6, 7] ont conçus un banc de crissement avec un système de freinage simplifié ou l'étrier est constitué uniquement de barres sur lesquels sont fixés des garnitures. Ils ont mesuré les déformées opérationnelles au vibromètre Laser. Cette technique permet d'avoir une bonne résolution spatiale et fréquentielle mais ne permet d'étudier que les phénomènes stationnaires et en aucun cas les régimes transitoires. Ils ont observés une dépendance de la fréquence de crissement à la charge normale et à l'angle d'attaque de la plaquette sur le disque. Les crissements apparaissaient à des fréquences proches des fréquences naturelles du système couplé. Cela apporte du crédit à la théorie du couplage modal. Il est relativement aisé de mesurer les modes hors plan du disque pendant le crissement et cela grâce à des techniques Laser. Ces modes sont importants car ce sont eux qui rayonnent l'énergie acoustique que nous percevons en tant que crissement. Néanmoins, nous avons vu que la cinématique des petits mouvements de la plaquette de frein était sujet à discussion lors du crissement. Le crissement naît du frottement entre les plaquettes et le disque et à ce titre il est important de s'intéresser au mouvement de la plaquette pendant le crissement. Par ailleurs, les études expérimentales de Fieldhouse et Newcomb [2] et Giannini et al. [3] ont déjà mis en évidence le mouvement du disque lors du crissement. Pour limiter l'apparition du crissement, Liu et al. [8] décrivent une méthode pour dessiner les chanfreins à partir de la connaissance des modes de la plaquette libre-libre ayant une fréquence proche de celle du crissement. Ainsi, des essais de crissement, ont été menés sur un frein anciennement commercialisé par Bosch en concentrant les efforts d'observation sur une des plaquettes. Les résultats de ces essais sont présentés dans le chapitre 2 et ils ont fait l'objet d'une communication en conférence, voir Renaud et al. [9]. Ces résultats montrent que les non-linéarités de contact jouent un grand rôle dans la naissance et l'apparition du crissement.

Dans un second temps, nous allons tenter de modéliser le crissement. Bien qu'elles ne soient pas entièrement satisfaisantes, les analyses aux valeurs propres complexes sur les modèles EF ont beaucoup de vertus. Notamment, elles donnent la possibilité de réduire le système à quelques degrés de liberté bien choisis, les premiers vecteurs propres de la base modale. Ce type de modélisation permet également d'expliquer le couplage modal. Avant de commencer une telle modélisation, il convient d'expliquer quelques uns des aspects de ces modèles EF grâce à des modèles phénoménologiques d'interprétation plus aisée. Ce genre de modèle est relativement répandu dans la littérature, voir Sheng [10] :

- Quelques auteurs ont traité le modèle à un degré de liberté du frotteur sur piste<sup>2</sup> en explorant les effets de différentes lois de frottement : McMillan [11], Hinrichs et al. [12, 13], Thomsen et Fidlin [14] et Hetzler et al. [15].
- Certains auteurs se sont penchés sur des modèles à quelques degrés de liberté du frotteur sur piste. Cela permet notamment l'apparition du couplage modal : Swayze et Akay [16], Hess et Al-Grafi [17], Shin et al. [18], Paliwal et al. [19], Hoffmann et al. [20, 21], Sinou et al. [22, 23, 24], Lignon et al. [25], Pilipchuk et al. [26], Kinkaid et al. [27], von Wagner et al. [28], Slavič et al. [29], Ouyang et al. [30].
- Parmi les modèles à degrés de liberté multiples, certains auteurs ont pris en compte les déformations du disque : Ouyang [31, 32, 33, 34], Stăncioiu [35], Flint et Hultén [36], Heilig et Wauer [37], Giannini et Sestieri [4], Kang et al. [38, 39, 40, 41, 42], Hochlenert et al. [43, 44].

Le chapitre 3, présente deux modèles proches de ceux de la littérature. Le premier est un

---

2. Dans la littérature, ils sont dénommés "mass-on-belt".

modèle à deux degrés de liberté analogue à ceux de Swayze et Akay [16] et de Hess et Al-Grafi [17]. Il est constitué d'un frotteur sur piste, à deux points de contact, pouvant se déplacer suivant la normale à la piste et pouvant également basculer entre son bord d'attaque et son bord de fuite. Il permet de mettre en avant les limites de la linéarisation. Le deuxième modèle est celui de Hoffmann et Gaul [20, 21]. Il est constitué d'un frotteur sur piste comportant deux degrés de libertés, l'un dans le sens de la piste l'autre dans son sens normal. Ce modèle exhibe une instabilité par flottement via un couplage modal. Ensuite, de l'amortissement est introduit dans les équations et une étude paramétrique de la stabilité du système est menée. L'évolution du coefficient de frottement critique par rapport au taux d'amortissement montre à quel point il est important de modéliser l'amortissement au sein des freins à disque dans le but d'améliorer la prédiction des zones de stabilité.

Ces modèles phénoménologiques mettent en évidence le couplage modal qui déstabilise les systèmes en faisant apparaître des valeurs propres à partie réelle positive au sens de la transformée de Laplace, c'est-à-dire avec des taux d'amortissement négatifs. Ces modèles phénoménologiques mettent également en évidence l'importance de l'amortissement. En effet, si les instabilités sont décrites par des taux d'amortissement négatifs, alors la précision des modèles passe par la prise en compte de l'amortissement des matériaux qui génère des taux d'amortissement positifs, les deux effets se contrebalançant. Or, à l'heure actuelle, les instabilités naissant du couplage modal sont modélisées sans tenir compte de l'amortissement des matériaux. La viscoélasticité des matériaux étant la cause de leur comportement amortissant, le but de cette thèse est de modéliser la viscoélasticité au sein des analyses aux valeurs propres complexes.

Pour modéliser le comportement viscoélastique des matériaux, il convient en premier lieu de le caractériser expérimentalement. Pour cela, le chapitre 4 présentera quelques méthodes de caractérisation classiques en rhéologie. Citons la poutre sandwich de Oberst et Frankenfeld [45] et des techniques similaires décrites par de nombreux auteurs comme Castello et al. [46], Zhang et al. [47], Chevalier [48]. Citons également les techniques de caractérisation basées sur la mesure des temps de relaxation, voir Chen [49] et les techniques utilisant les ultrasons, voir Chevalier [50, 51]. Ces méthodes ne sont malheureusement pas entièrement satisfaisantes pour obtenir des données dans la gamme fréquentielle du crissement. Un des principaux apports de cette thèse a été de développer un viscoanalyseur capable de caractériser des matériaux dans la bande fréquentielle allant de 200-3600Hz. Il travaille en cisaillement quasi-statique et permet de caractériser le comportement des shims<sup>3</sup> que les constructeurs de système de freinage collent au dos des plaquettes. Ce banc d'essai est présenté dans le chapitre 4. Il permet de mesurer la réponse dynamique des shims entre 200 et 3600Hz. Il apparaît que les shims sont des matériaux fortement amortissants, ce qui conforte notre démarche de prise en compte de ce type de comportement.

La viscoélasticité est un phénomène largement étudié depuis des décennies. Citons à titre d'exemple les travaux de Ferry [52], Vinh [53], Caputo et Mainardi [54], Lakes [55], Chevalier et Vinh [51] ou encore Balmès et Leclère [56]. La viscoélasticité est un phénomène causal pour lequel la force précède toujours le déplacement. Ce comportement peut être décrit par la fonction de relaxation ou par la fonction de fluage. Dans le domaine de Fourier, la rigidité dynamique est une fonction complexe qui dépend de la fréquence. La rigidité dynamique présente à la fois un

---

3. Les shims sont des matériaux multicouches viscoélastiques. Ils sont collés au dos des plaquettes de freins et sont composés d'un empilement de couches de caoutchouc, métal et colle.

---

déphasage et une augmentation de son module en fonction de la fréquence. Ces deux facettes de la viscoélasticité doivent impérativement être prises en compte. Si le déphasage qui correspond à l'amortissement est toujours pris en compte par les modèles, l'augmentation du module qui correspond à la rigidification du matériau n'est pas toujours modélisée, pourtant elle modifie sensiblement les fréquences des modes propres d'une structure en la rigidifiant.

Des modèles rhéologiques viscoélastiques linéaires plus ou moins réalistes peuvent être trouvés dans la littérature. Malheureusement, les modèles les plus utilisés ne sont pas ceux qui décrivent le mieux la viscoélasticité. Ainsi, le module complexe constant n'est pas causal et ne peut être utilisé que dans le domaine fréquentiel, voir Gaul [57]. L'amortissement modal ne prend pas en compte la rigidification des matériaux et les modèles de Maxwell et de Voigt ne sont valables que sur une bande fréquentielle très étroite. Les dérivées non entières proposent une alternative intéressante en modélisant la viscoélasticité correctement avec peu de paramètres. Elles ont fait l'objet de beaucoup de publications. Oldham et Spanier [58] ont décrit les propriétés des dérivées non entières. Podlubny [59] a donné quelques exemples dans le cas de la viscoélasticité. Vinh [53], Koeller [60], Bagley et Torvik [61], Gaul et al. [57], Chevalier et Vinh [51] ont plus longuement étudié les dérivées non entières dans le cas de la viscoélasticité. Lion [62, 63] les a étudiées du point de vue thermodynamique et Heymans [64] les a étendues à la viscoélasticité non-linéaire. Malheureusement, dans la pratique, les dérivées non entières s'avèrent difficiles à mettre en oeuvre dans les simulations temporelles et les analyses aux valeurs propres complexes. Pour cette raison, elles sont écartées, même si certains auteurs les ont adoptées, voir Sorrentino et Fasana [65].

Le modèle de Maxwell généralisé a été retenu. Sa configuration la plus répandue est constituée d'un ressort en parallèle de plusieurs cellules de Maxwell. Une cellule de Maxwell est constituée d'un ressort en série avec un amortisseur. Le modèle de Maxwell généralisé permet une description fidèle et large bande des comportements viscoélastiques. Dion [66, 67] a montré que ce modèle est équivalent aux formulations pôles-zéro pour lesquelles Vinh [53] et Oustaloup [68] ont respectivement proposés des méthodes d'identification des paramètres à partir des fonctions de relaxation et des fonctions de transfert. De plus, ce modèle est aisé à mettre en oeuvre au sein des analyses aux valeurs propres complexes, grâce à une formulation d'état. Le chapitre 5 présente en détail tous les aspects, énoncés ci-dessus, de la modélisation de la viscoélasticité, ainsi que de l'identification des paramètres du modèle de Maxwell généralisé. Une nouvelle méthode d'identification itérative y est décrite. Elle utilise les asymptotes des formulations pôle-zéro afin d'évaluer les variations des paramètres à chaque itération. Nous l'avons nommée "*la méthode des variations asymptotiques*" (AVM).

Les chapitres 4 et 5 expliquent comment caractériser des matériaux viscoélastiques et comment les modéliser avec des modèles de Maxwell généralisés. Ainsi, les comportements viscoélastiques des matériaux du système de freinage sont pris en compte. L'utilisation de modèles de Maxwell généralisés au sein des analyses aux valeurs propres complexes augmente artificiellement l'ordre de dérivation des équations. Le chapitre 5 explique comment contraindre les paramètres du modèle de telle sorte que cette augmentation ne dépende pas du nombre de matériaux viscoélastiques. Les travaux du chapitre 5 sont un des plus importants apports de cette thèse. Ils ont été présentés à la conférence VCB 2008 dont les actes sont publiés dans Mécanique et Industries, voir Renaud [69]. Ces travaux sont publiés en détails dans le journal MSSP, voir Renaud [70]. Afin de résoudre ces équations aux dérivées partielles avec les solveurs classiques,

il faut exprimer le système sous forme d'état. Le chapitre 6 présente la forme d'état retenue. Les analyses aux valeurs propres complexes se passent en 3 temps. L'équilibre stationnaire du modèle EF du système de freinage sous pression est calculé par le solveur non-linéaire d'Abaqus. Ensuite, les modes propres réels du système sont calculés par Abaqus sans prendre en compte ni le frottement, ni la viscoélasticité. Ces modes propres réels constituent la base de projection du problème avec frottement et viscoélasticité. Le problème ainsi projeté est de taille suffisamment petite pour que les modes propres complexes soient calculés sous Matlab, voir Thouviot et al. [71], Renaud et al. [72] et Chevallier et al. [73]. La base de projection du problème est enrichie par itérations sur les résidus. Plusieurs comportements contre-intuitifs apparaissent lorsque la viscoélasticité est introduite, notamment une déstabilisation de modes prédits comme stables par le modèle sans viscoélasticité.

## Bibliographie de l'introduction

- [1] N. M. Kinkaid, O. M. O'Reilly, and P. Papadopoulos, "Automotive disc brake squeal," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 267, no. 1, pp. 105 – 166, 2003.
- [2] J. D. Fieldhouse and T. P. Newcomb, "Double pulsed holography used to investigate noisy brakes," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 25, no. 6, pp. 455 – 494, 1996. Optical Diagnostics in the Automotive Industry.
- [3] O. Giannini, A. Akay, and F. Massi, "Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 292, no. 1-2, pp. 1 – 20, 2006.
- [4] O. Giannini and A. Sestieri, "Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 296, no. 3, pp. 583 – 601, 2006.
- [5] F. Massi, L. Baillet, O. Giannini, and A. Sestieri, "Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, no. 6, pp. 2374 – 2393, 2007.
- [6] O. Giannini and F. Massi, "Characterization of the high-frequency squeal on a laboratory brake setup," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, no. 1-2, pp. 394 – 408, 2008.
- [7] A. Akay, O. Giannini, F. Massi, and A. Sestieri, "Disc brake squeal characterization through simplified test rigs," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, no. 8, pp. 2590 – 2607, 2009.
- [8] W. Liu, G. M. Vyletel, and J. Li, "A rapid design tool and methodology for reducing high frequency brake squeal," in *Proceedings of the 24th Annual Brake Colloquim & Exhibition*, 2006.
- [9] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, and I. Tawfiq, "Mouvements d'une plaquette de frein mesurés par des accéléromètres," in *Colloque Vibrations, Chocs et Bruits Lyon 2010*, 2010.
- [10] G. Sheng, *Friction-induced vibrations and sound*. CRC Press, 2008. ISBN-10 : 1420051784 ISBN-13 : 978-1420051780.
- [11] A. J. McMillan, "A non-linear friction model for self-excited vibrations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 205, no. 3, pp. 323 – 335, 1997.

- [12] N. Hinrichs, M. Oestreich, and K. Popp, "Dynamics of oscillators with impact and friction," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 8, no. 4, pp. 535 – 558, 1997. Nonlinearities in Mechanical Engineering.
- [13] N. Hinrichs, M. Oestreich, and K. Popp, "On the modelling of friction oscillators," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 216, no. 3, pp. 435 – 459, 1998.
- [14] J. J. Thomsen and A. Fidlin, "Analytical approximations for stick-slip vibration amplitudes," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 38, no. 3, pp. 389 – 403, 2003.
- [15] H. Hetzler, D. Schwarzer, and W. Seemann, "Analytical investigation of steady-state stability and hopf-bifurcations occurring in sliding friction oscillators with application to low-frequency disc brake noise," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 12, no. 1, pp. 83 – 99, 2007.
- [16] J. L. Swayze and A. Akay, "Effects of system dynamics on friction-induced oscillations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 173, no. 5, pp. 599 – 609, 1994.
- [17] D. P. Hess and M. W. Al-Grafi, "Stability of a slider with hemispherical legs in plane contacting a flat surface," *Applied Acoustics*, vol. 49, no. 2, pp. 163 – 177, 1996.
- [18] K. Shin, M. J. Brennan, J. E. Oh, and C. J. Harris, "Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 254, no. 5, pp. 837 – 848, 2002.
- [19] M. Paliwal, A. Mahajan, J. Don, T. Chu, and P. Filip, "Noise and vibration analysis of a disc-brake system using a stick-slip friction model involving coupling stiffness," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 282, no. 3-5, pp. 1273 – 1284, 2005.
- [20] N. Hoffmann, M. Fischer, R. Allgaier, and L. Gaul, "A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations," *Mechanics Research Communications*, vol. 29, no. 4, pp. 197 – 205, 2002.
- [21] N. Hoffmann and L. Gaul, "Non-conservative beating in sliding friction affected systems : transient amplification of vibrational energy and a technique to determine optimal initial conditions," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 18, no. 3, pp. 611 – 623, 2004.
- [22] J. J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel, "Analysis of friction and instability by the centre manifold theory for a non-linear sprag-slip model," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 265, no. 3, pp. 527 – 559, 2003.
- [23] J. J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel, "Center manifold and multivariable approximants applied to non-linear stability analysis," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 38, no. 9, pp. 1421 – 1442, 2003.
- [24] J.-J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel, "Extension of the center manifold approach, using rational fractional approximants, applied to non-linear stability analysis," *Nonlinear Dynamics*, vol. 33, no. 3, pp. 267 – 282, 2003.
- [25] S. Lignon, J.-J. Sinou, and L. Jézéquel, "Stability analysis and  $\mu$ -synthesis control of brake systems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 298, no. 4-5, pp. 1073 – 1087, 2006.



- 
- [26] V. Pilipchuk and C. Tan, "Creep-slip capture as a possible source of squeal during decelerated sliding," *Nonlinear Dynamics*, vol. 35, no. 3, pp. 259 – 285, 2004.
- [27] N. Kinkaid, O. O'Reilly, and P. Papadopoulos, "On the transient dynamics of a multi-degree-of-freedom friction oscillator : a new mechanism for disc brake noise," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 287, no. 4-5, pp. 901 – 917, 2005.
- [28] U. von Wagner, D. Hochlenert, and P. Hagedorn, "Minimal models for disk brake squeal," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, no. 3, pp. 527 – 539, 2007.
- [29] J. Slavic, M. D. Bryant, and M. Boltezar, "A new approach to roughness-induced vibrations on a slider," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 306, no. 3-5, pp. 732 – 750, 2007.
- [30] H. Ouyang, L. Baeza, and S. Hu, "A receptance-based method for predicting latent roots and critical points in friction-induced vibration problems of asymmetric systems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 321, no. 3-5, pp. 1058 – 1068, 2009.
- [31] H. Ouyang, J. E. Mottershead, M. P. Cartmell, and M. I. Friswell, "Friction-induced parametric resonances in discs : effect of a negative friction-velocity relationship," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 209, no. 2, pp. 251 – 264, 1998.
- [32] H. Ouyang, J. E. Mottershead, M. P. Cartmell, and D. J. Brookfield, "Friction-induced vibration of an elastic slider on a vibrating disc," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, no. 3, pp. 325 – 336, 1999.
- [33] H. Ouyang and J. E. Mottershead, "Unstable travelling waves in the friction-induced vibration of discs," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 248, no. 4, pp. 768 – 779, 2001.
- [34] H. Ouyang, Y. Gu, and H. Yang, "A dynamic model for a disc excited by vertically misaligned, rotating, frictional sliders," *Acta Mechanica Sinica*, vol. 20, no. 4, pp. 418 – 425, 2004.
- [35] D. Stancioiu, H. Ouyang, and J. E. Mottershead, "Vibration of a beam excited by a moving oscillator considering separation and reattachment," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, no. 4-5, pp. 1128 – 1140, 2008.
- [36] J. Flint and J. Hultén, "Lining-deformation-induced modal coupling as squeal generator in a distributed parameter disc brake model," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 254, no. 1, pp. 1 – 21, 2002.
- [37] J. Heilig and J. Wauer, "Stability of a nonlinear brake system at high operating speeds," *Nonlinear Dynamics*, vol. 34, no. 3, pp. 235–247, 2003.
- [38] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, "Dynamic instability of a thin circular plate with friction interface and its application to disc brake squeal," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 316, no. 1-5, pp. 164 – 179, 2008.
- [39] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, "Analytical formulation of mode-coupling instability in disc-pad coupled system," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 51, no. 1, pp. 52 – 63, 2009.

- [40] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, “Comprehensive stability analysis of disc brake vibrations including gyroscopic, negative friction slope and mode-coupling mechanisms,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 324, no. 1-2, pp. 387 – 407, 2009.
- [41] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, “Oscillation pattern of stick-slip vibrations,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 44, no. 7, pp. 820 – 828, 2009.
- [42] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, “Wave pattern motion and stick-slip limit cycle oscillation of a disc brake,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 325, no. 3, pp. 552 – 564, 2009.
- [43] D. Hochlenert, “Nonlinear stability analysis of a disk brake model,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 58, pp. 63–73, 2009.
- [44] D. Hochlenert, G. Spelsberg-Korspeter, and P. Hagedorn, “A note on safety-relevant vibrations induced by brake squeal,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 19, pp. 3867 – 3872, 2010.
- [45] H. Oberst and K. Frankenfeld, “Damping of the bending vibrations of thin laminated metal beams connected through adherent layer,” *Acustica 2*, pp. 181–194, 1952.
- [46] D. Castello, F. Rochinha, N. Roitman, and C. Magluta, “Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, no. 8, pp. 1840 – 1857, 2008.
- [47] J. Zhang and C. M. Richards, “Parameter identification of analytical and experimental rubber isolators represented by maxwell models,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, no. 7, pp. 2814 – 2832, 2007.
- [48] Y. Chevalier, “Essais dynamiques sur composites. caractérisation aux basses fréquences.,” tech. rep., Techniques de l’ingénieur, 2002.
- [49] T. Chen, “Determining a prony series for a viscoelastic material from time varying strain data,” tech. rep., NASA, may 2000.
- [50] Y. Chevalier, “Essais dynamiques sur composites. caractérisation aux hautes fréquences.,” tech. rep., Techniques de l’ingénieur, 2003.
- [51] Y. Chevalier and J. T. Vinh, *Mechanics of Viscoelastic Materials and Wave Dispersion*, vol. 1. ISTE and John Wiley & Sons, 2010.
- [52] J. D. Ferry, *Viscoelastic Properties Of Polymers*. John Wiley & Sons, 1961.
- [53] T. Vinh, “Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoelastique,” *Mémoires de l’artillerie française*, vol. 3ème fascicule, 1967.
- [54] M. Caputo and F. Mainardi, “Linear models of dissipation in anelastic solids,” in *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)* (I. P. Society, ed.), vol. 1, pp. 161–198, Italian Physical Society, avril 1971.
- [55] R. S. Lakes, *Viscoelastic Solids*. CRC Press, 1999.
- [56] E. Balmès and J.-M. Leclère, *Viscoelastic vibration toolbox*. SDTools, Paris, 2009.

- [57] L. Gaul, P. Klein, and S. Kemple, "Damping description involving fractional operators," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 5, no. 2, pp. 81 – 88, 1991.
- [58] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, vol. 111 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1974.
- [59] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, vol. 198 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1999.
- [60] R. C. Koeller, "Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, no. 2, pp. 299–307, 1984.
- [61] R. L. Bagley and P. J. Torvik, "On the fractional calculus model of viscoelastic behavior," *Journal of Rheology*, vol. 30, no. 1, pp. 133–155, 1986.
- [62] A. Lion, "On the thermodynamics of fractional damping elements," *Continuum Mechanics And Thermodynamics*, vol. 9, pp. 83–96, APR 1997.
- [63] A. Lion, "Thermomechanically consistent formulations of the standard linear solid using fractional derivatives," *Archives of Mechanics*, vol. 53, no. 3, pp. 253–273, 2001.
- [64] N. Heymans, "Fractional calculus description of non-linear viscoelastic behaviour of polymers," *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, pp. 221–231, DEC 2004.
- [65] S. Sorrentino and A. Fasana, "Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, no. 4-5, pp. 839 – 853, 2007.
- [66] J.-L. Dion, *Modélisation et identification du comportement dynamique de liaisons hydro-élastiques*. PhD thesis, ISMCM, Saint-Ouen, 1995.
- [67] J. Dion and S. Vialard, "Identification of rubber shock absorber mounts," *Mécanique industrielle et matériaux*, vol. 50, pp. 232–237, DEC 1997.
- [68] A. Oustaloup, *La commande CRONE : commande robuste d'ordre non entier*. Hermès, 1991.
- [69] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier, "Méthode d'identification des paramètres d'un modèle de maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement," *Mécanique & Industries*, vol. 11, no. 1, pp. 47–55, 2010.
- [70] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq, and R. Lemaire, "A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized maxwell model," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, no. 3, pp. 991 – 1010, 2011.
- [71] S. Thouviot, G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion, and R. Lemaire, "Prise en compte des comportements viscoélastiques dans la simulation dynamique des systèmes de freinage," *Mécanique & Industries*, vol. 10, no. 5, pp. 385–396, 2009.
- [72] F. Renaud, G. Chevallier, and J.-L. Dion, "Impact de la viscoélasticité sur les modes instables des systèmes de freinage," in *19<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, 2009.
- [73] G. Chevallier, F. Renaud, and J.-L. Dion, "Viscoelastic damping effect on brake squeal noise," in *Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, 2009.

## Chapitre 2

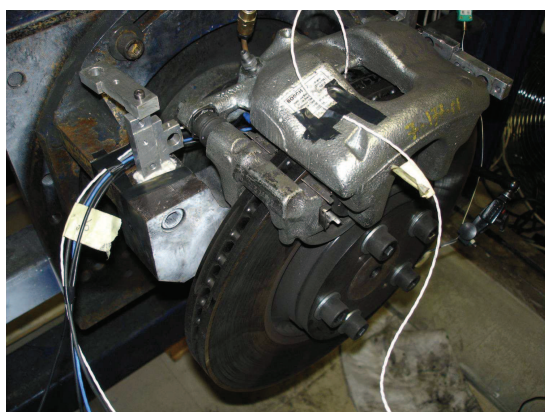
# Observation expérimentale du crissement

### Sommaire

---

2.1	Intérêt de l'observation des plaquettes . . . . .	21
2.2	Banc d'essai et instrumentation . . . . .	21
2.3	Résultats d'essai . . . . .	22
2.3.1	Harmoniques . . . . .	24
2.3.2	Mouvement de la plaquette . . . . .	26
2.4	Comparaison avec un modèle EF . . . . .	32
2.5	Conclusion et perspectives . . . . .	37
	Bibliographie du chapitre 2 . . . . .	38

---



### Résumé

---

Ce chapitre présente les observations expérimentales effectuées sur un frein industriel. L'une des plaquettes de frein a été instrumentée par six accéléromètres triaxes afin de caractériser son mouvement pendant le crissement. Cette étude permet d'avoir un regard critique sur les hypothèses généralement admises en modélisation.

---

Quelques auteurs se sont déjà intéressés à l'observation expérimentale du crissement de frein. Citons Fieldhouse et Newcomb [1] qui ont utilisés une technique laser, l'holographie à double impulsions. Cette technique permet la visualisation des mouvements dans les trois directions de l'espace. Ils ont observés des modes de disque composés de modes propagatifs tournants à une vitesse dépendant de la fréquence divisée par l'ordre du mode du disque. Ils ont également vus un mouvement de flexion pure au niveau du bord d'attaque de la plaquette de frein. Giannini et al. [2] ont conçus un banc de crissement avec un système de freinage simplifié ou l'étrier est constitué uniquement de barres sur lesquels sont fixés des garnitures. Ils ont mesurés les déformées opérationnelles au vibromètre laser. Les crissements observés sur ce banc ont eu lieu pour une vitesse de rotation faible : entre 5 à 30 tours par minutes et présentaient des harmoniques. La fréquence de crissement dépendait de la charge normale et de l'angle d'attaque de la plaquette sur le disque. Lors des crissements, les mouvements hors-plan étaient en quadrature de phase avec les mouvements dans le plan. Les crissements apparaissaient à des fréquences proches de celles des modes propres du système notamment des modes qui impliquent un mouvement dans le plan du patin. Giannini a montré que le crissement n'a pas besoin qu'un cycle limite de stick-slip s'établisse. Le crissement est généralement attribuée au couplage des modes propres du frein à cause du frottement entre les patins et le disque (cf. [3]). Le contact frottant apporte en outre l'énergie nécessaire au maintien de l'instabilité. Toutefois, lors d'une autre étude Giannini [4] a observé des modes de disque tournants qu'il n'a pas pu modéliser de manière linéaire, il lui semble qu'un tel phénomène serait mieux décrit par un modèle où le contact plaquette-disque est non-linéaire.

Il est relativement aisé d'observer les modes hors plan du disque pendant le crissement et cela grâce à des techniques laser. Ces modes sont importants car ils rayonnent l'énergie acoustique que nous percevons en tant que crissement. Néanmoins, le crissement naît du frottement entre les plaquettes et le disque et à ce titre il est important de s'intéresser au mouvement de la plaquette pendant le crissement. Les plaquettes de frein ne sont pas fermement maintenues dans l'étrier. Elles sont à l'interface entre le disque et le système de freinage qui comporte un grand nombre de modes propres dont plusieurs sont instables en glissement stationnaire. Or physiquement, il est rare de trouver plus d'une fréquence de crissement. Ainsi, la liberté de mouvement des plaquettes de frein dans l'étrier semble jouer un rôle important dans la physique du crissement. Il est par exemple possible de limiter l'apparition du crissement en effectuant des chanfreins sur les plaquettes. Liu et al. [5] décrivent une méthode pour dessiner les chanfreins à partir de la connaissance des modes de la plaquette libre-libre ayant une fréquence proche de celle du crissement. Le but des essais présentés dans ce chapitre est d'observer et de qualifier le mouvement d'une plaquette de frein lors du crissement. Pour cela, le dos de la plaquette a été instrumenté avec six accéléromètres tri-axes. Le mouvement de la plaquette présente des harmoniques suggérant l'existence de comportements non-linéaires en déplacement, dont l'origine est discutée : stick-slip, chocs ... ? Le mouvement de la plaquette est ensuite reconstruit par interpolation. Une des questions à laquelle ce chapitre tente de répondre concerne la possibilité de décrire ce mouvement à l'aide des modes propres issus d'un calcul classique par éléments finis.

## 2.1 Intérêt de l'observation des plaquettes

Afin de pouvoir facilement procéder à leur remplacement, les plaquettes de frein sont maintenues par des ressorts au niveau de leurs oreilles, voir la figure 2.1(b). Ces ressorts sont relativement souples et laissent aux plaquettes les six degrés de liberté d'un corps rigide. Lors d'un freinage, les plaquettes de frein sont plaquées contre le disque à l'aide du piston pour la plaquette intérieure<sup>1</sup> et à l'aide des deux "doigts" de l'étrier pour la plaquette extérieure. Les garnitures des plaquettes de frein étant composées de poudre compactées, leur raideur suit une loi non-linéaire en déplacement du type exponentiel. Ainsi, pour de faibles pressions d'huile lors du freinage, la raideur des plaquettes dans le sens normal au disque reste faible et les plaquettes conservent virtuellement leur six degrés de liberté de corps rigides. Cela nous amène à nous poser la question suivante : Lors du crissement, les plaquettes ont-elles un comportement de corps rigide ou de corps déformable ?

Les éléments mécaniques déformables se modélisent facilement et avec une bonne précision, contrairement aux liaisons entre les éléments mécaniques qui ont souvent un comportement non-linéaire en déplacement. En général, la raideur des liaisons est approchée par linéarisation autour de l'équilibre de glissement stationnaire. Cela suppose que les mouvements restent à des niveaux d'amplitude suffisamment faible pour que l'hypothèse de linéarité soit valable. Ainsi, l'observation d'une plaquette de frein permet de répondre à un certain nombre de questions :

1. Lors du crissement, la plaquette a-t-elle un comportement de corps rigide ou déformable ?
2. Le mouvement de la plaquette est-il compatible avec l'hypothèse de linéarité des liaisons ?
3. Si non, à quel genre de non-linéarités est-on confronté ?

## 2.2 Banc d'essai et instrumentation

Les essais de crissement ont été effectués sur un banc d'essai du service NVH de R. BOSCH France (voir les figures 2.2(a) et 2.2(b)). A l'exception du porte-fusée, ce banc est constitué des éléments d'un système de freinage commercialisé. Sa chape est directement encastrée à la structure qui maintient l'arbre du disque. Lors de ces essais, une plaquette de frein a été instrumentée avec six accéléromètres tri-axes de la marque Endevco. Comme le montre la figure 2.1(a), les capteurs ont tous été collés sur la backplate<sup>2</sup> avec de la colle cyanolite. La disposition des capteurs a été contrainte par l'encombrement du piston, d'une part, et de l'étrier d'autre part. Ils ont été placés le plus loin possible les uns des autres, à raison de deux au niveau du bord d'attaque (accéléromètres 1 et 6), deux à mi-longueur de la plaquette (accéléromètres 2 et 5) et deux au niveau du bord de fuite (accéléromètres 3 et 4), voir la figure 2.1. Les accéléromètres qui ont été utilisés pèsent entre 3g et 10g alors que la plaquette pèse environ 500g. Leur disposition permet une description relativement fidèle du mouvement sur une large bande fréquentielle et elle permet notamment de reconstruire d'éventuels mouvements de flexion.

---

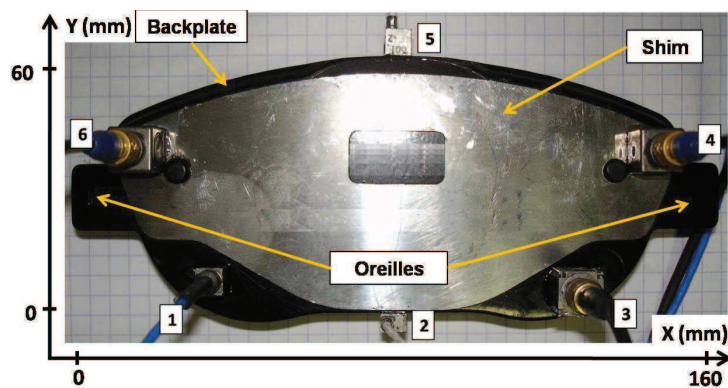
1. La plaquette intérieure se situe du côté du moteur du véhicule contrairement à la plaquette extérieure.

2. La backplate est la plaque métallique au dos de la plaquette de frein.

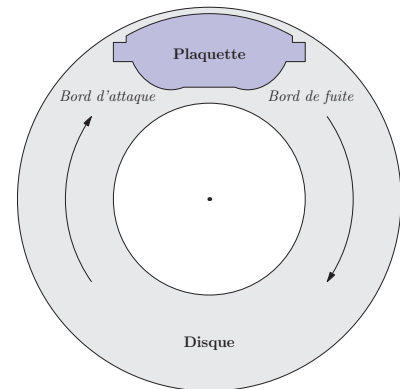
## 2.3 Résultats d'essai

Plusieurs essais ont été menés sur ce banc et deux types de crissement sont apparus :

- Un crissement autour de 2000Hz en marche avant et avec un shim<sup>3</sup> au dos de la plaquette, voir la figure 2.1(a).
- Un crissement en marche arrière, voir la figure 2.1(b), et sans shim. La fréquence de ce crissement évoluait entre 1500 et 2000Hz en fonction de la pression de contact.

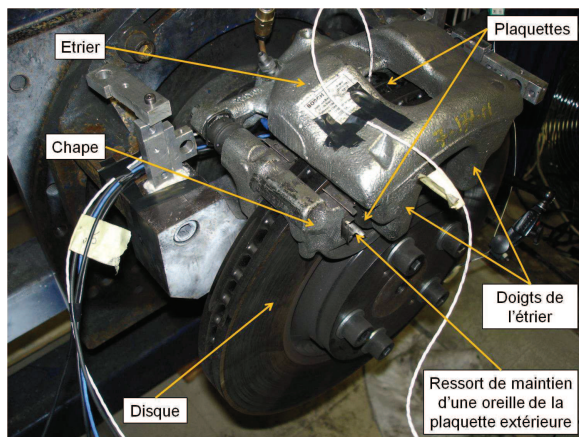


(a) Vue du dos de la plaquette de frein instrumentée avec six accéléromètres : deux au niveau du bord d'attaque, deux à mi-longueur de la plaquette et deux au niveau du bord de fuite.

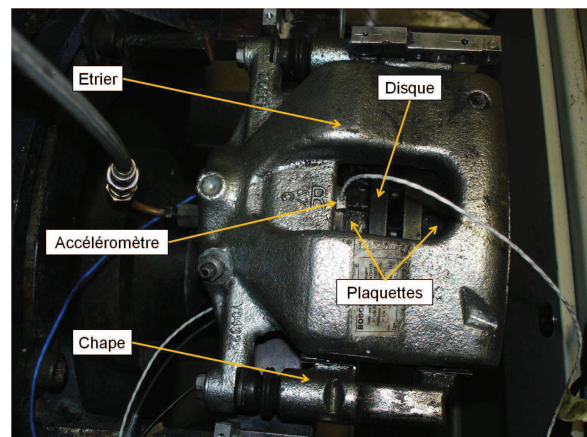


(b) Schéma de la plaquette de frein lors de l'essai en marche arrière.

FIGURE 2.1 – Vue de la plaquette de frein et de la position des accéléromètres (a) et schéma de sa position par rapport au disque (b).



(a) Vue du banc d'essai.



(b) Zoom du banc d'essai

FIGURE 2.2 – Vues du banc d'essai de crissement composé d'un système de freinage.

3. Les shims sont des matériaux multicouches viscoélastiques comportant trois types de couche : caoutchouc, métal et colle. Ils sont fréquemment collés au dos des plaquettes pour amortir les vibrations.

Dans ce chapitre, ne sont présentés que les résultats issus d'un essai sans shim et en marche arrière à une vitesse d'environ 157 tours par minutes, soit environ 2.6Hz. Pour cet essai, le bord d'attaque se situe du côté gauche de la plaquette montrée en figure 2.1(a) et 2.1(b) et le bord de fuite du côté droit. Le crissement a été obtenu en faisant évoluer manuellement la pression de freinage de 0 à 10 bars ce qui a également causé une augmentation de la fréquence de crissement.

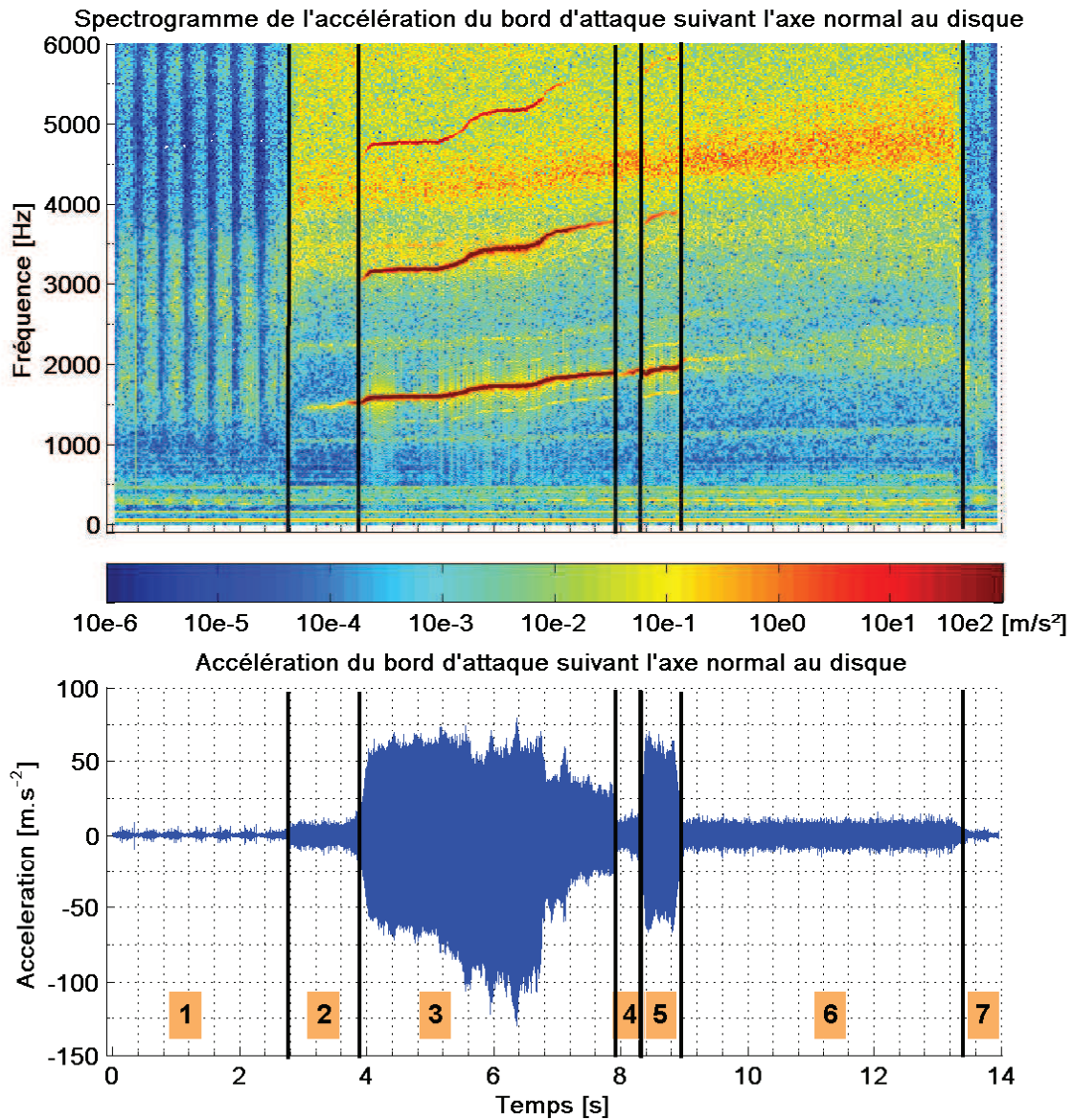


FIGURE 2.3 – En bas est représenté la mesure accélérométrique acquise par le capteur n°6, selon  $\vec{e}_Z$ , situé en bord d'attaque. En haut est représenté le spectrogramme du même signal avec la même échelle de temps. Les couleurs représentent l'amplitude de l'accélération normale au disque en échelle logarithmique.



### 2.3.1 Harmoniques

En bas de la figure 2.3 se trouve la mesure accélérométrique, en fonction du temps, du capteur n°6 (cf. numérotation de la figure 2.1(a)) suivant l'axe  $\vec{e}_Z$ . Le signal dure 14s et il est échantillonné à la fréquence de  $F_e = 16384\text{Hz}$ . Le spectrogramme est l'outil d'analyse le plus adapté à l'étude de ce signal pour lequel la pression évoluait, voir le haut de la figure 2.3. Le spectrogramme est une analyse temps-fréquence qui permet de connaître le contenu fréquentiel d'un signal à un instant donné. Sur la figure 2.3, l'échelle des temps se trouve en abscisse et l'échelle des fréquences se trouve en ordonnée. Les niveaux de couleurs symbolisent l'amplitude des composantes fréquentielles. Ce spectrogramme a été obtenu en utilisant une fenêtre de Hamming glissante. Chaque fenêtre comprend 1024 points, soit une durée de 0.0625s avec un recouvrement de 512 points entre deux fenêtres.

Le signal temporel présenté en figure 2.3 peut être découpé en sept sections chronologiques :

1. *De 0 à 2.8 s* : La pression d'huile est nulle mais la plaquette frotte légèrement contre le disque, ce qui excite toutes les fréquences. Les variations d'épaisseur du disque engendrent des variations d'amplitude d'accélération dont la période d'apparition correspond à un tour du disque.
2. *De 2.8 à 3.9 s* : La pression d'huile est augmentée manuellement. Toutes les fréquences au dessus de 3000 Hz sont excitées. Le crissement n'est pas encore apparu bien qu'il existe deux raies, l'une autour de 1500 Hz et l'autre autour de 2250 Hz. Vers 3.9 s le signal accélérométrique diverge et le crissement est en train de naître. Cela se traduit sur le spectrogramme par une augmentation de l'amplitude de la raie à 1500 Hz.
3. *De 3.9 à 7.9 s* : La pression est manuellement augmentée de 2 à 5 bars. Le crissement apparaît à 3.9 s et se maintient jusqu'à 7.9 s, alors que la fréquence de sa fondamentale (H1) évolue de 1500 à 1900 Hz. Des harmoniques (H2 et H3) apparaissent en même temps que le crissement.
4. *De 7.9 à 8.3 s* : La pression est augmentée de 5 à 6 bars et le crissement disparaît en même temps que les harmoniques. Même s'il ne se fait plus entendre, la fréquence fondamentale du crissement reste latente avec un niveau d'amplitude plus faible.
5. *De 8.3 à 8.9 s* : La pression est augmentée de 6 à 8 bars et le crissement réapparaît. Ses harmoniques réapparaissent également mais avec un niveau plus faible que précédemment.
6. *De 8.9 à 13.3 s* : La pression est augmentée et le crissement disparaît à nouveau. Cette fois-ci la fréquence latente de la fondamentale du crissement disparaît progressivement.
7. *De 13.3 à 14 s* : La pression est relâchée à la fin de l'essai et la plaquette tangente le disque comme entre 0 et 2.8 s.

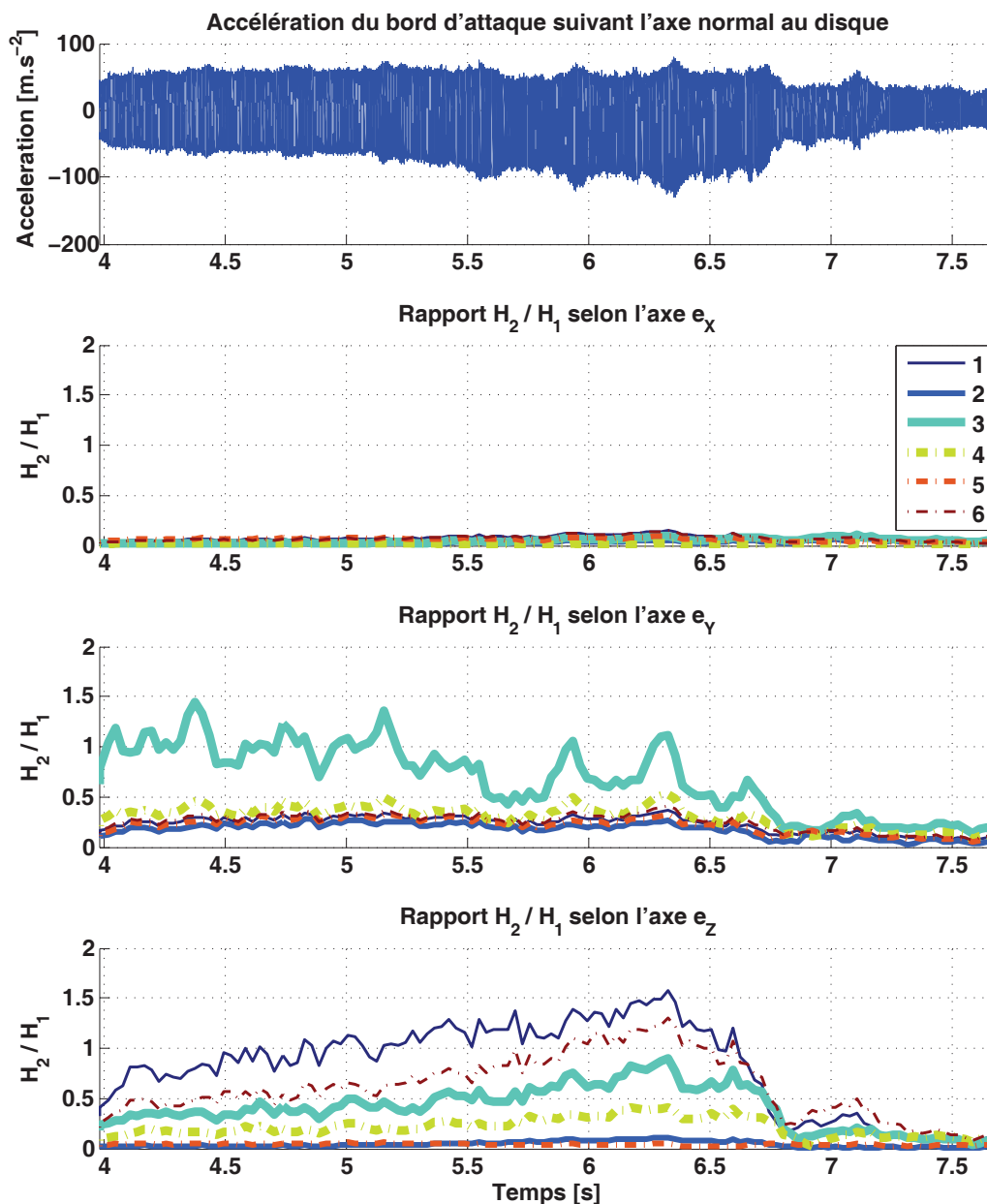


FIGURE 2.4 – Evolution temporelle des taux d'harmoniques des accélérations. En haut est représenté la mesure accélérométrique acquise par le capteur n°6 selon l'axe  $\vec{e}_z$ , puis les taux d'harmoniques sont classés par direction d'observation. Chaque courbe correspond aux taux d'harmoniques mesurés par l'un des six accéléromètres.

La présence d'harmoniques dans le signal accélérométrique indique la très probable existence d'une non-linéarité. Notons que lors de cet essai de crissement, le phénomène de stick-slip n'a pas pu exister. En effet, la vitesse de translation de la plaquette selon l'axe  $\vec{e}_x$  était inférieure d'environ deux ordres de grandeur à la vitesse tangentielle de la zone du disque en contact avec la plaquette<sup>4</sup>. Ainsi, la plaquette ne pouvait pas rattraper le disque donc l'adhérence et

4. L'accélération maximale suivant l'axe  $\vec{e}_x$  a lieu au niveau du capteur n°1 et reste inférieure à  $200\text{m.s}^{-2}$  pour une fréquence supérieure à  $1700\text{Hz}$ , soit une vitesse de déplacement de la plaquette inférieure à  $V = \gamma \cdot \vec{e}_x / \omega =$

l'apparition du phénomène de stick-slip étaient impossibles. Or, la pression de freinage a influé sur la fréquence du crissement. Cela suggère qu'une augmentation de raideur a eu lieu, elle peut être due à une raideur non-linéaire entre le piston et la plaquette ou entre les plaquettes et le disque.

La figure 2.4 montre l'évolution temporelle des taux d'harmoniques  $H_2/H_1$  pour les différentes mesures accélérométriques, avec  $H_1$  l'amplitude à la fréquence fondamentale et  $H_2$  l'amplitude à la fréquence de la deuxième harmonique. Tout en haut de cette figure se trouve un zoom du signal temporel acquis par l'accéléromètre n°6 suivant l'axe  $\vec{e}_Z$  entre 4 et 7.5s, puis, en dessous sont présentés les évolutions des taux d'harmoniques classés en fonction de la direction d'observation. Pour obtenir ces courbes une fenêtre de Hanning glissante a été appliquée aux signaux temporels. La largeur des différentes fenêtres était de 0.1s et elles se recouvrent de 0.07s. Le spectre des signaux fenêtrés a ensuite permis le calcul des taux d'harmoniques. Ils sont très marqués suivant les composantes radiales, axe  $\vec{e}_Y$ , et normale au disque, axe  $\vec{e}_Z$ , mais la composante tangentielle, axe  $\vec{e}_X$ , semble être exempte d'harmoniques. La non-linéarité n'est donc pas orientée dans le plan du disque. La cause des harmoniques semble donc être des raideurs non-linéaires entre la plaquette et le disque ou entre le piston et la plaquette. Il est également possible que le ressort de maintien des oreilles soit non-linéaire en raideur suivant l'axe  $\vec{e}_Y$ .

Enfin, remarquons que les pics de taux d'harmoniques suivant l'axe  $\vec{e}_Y$ , cf. figure 2.4 correspondent à la vitesse de rotation du disque, c'est-à-dire à une fréquence de  $7/2.75 \simeq 2.6Hz$ . Ainsi, les pics de taux d'harmoniques sont liés aux variations d'épaisseur du disque, ce qui renforce l'hypothèse de la non-linéarité suivant l'axe  $\vec{e}_Z$ .

### 2.3.2 Mouvement de la plaquette

La figure 2.5 montre l'évolution temporelle du déphasage, à la fréquence fondamentale, entre les différentes mesures accélérométriques et celle du capteur n°6 suivant l'axe  $\vec{e}_Z$ , qui sert de référence. Comme précédemment, ces courbes ont été obtenues avec une fenêtre de Hanning glissante appliquée aux signaux temporels. La largeur des fenêtres était de 0.1s avec un recouvrement de 0.07s. La figure 2.5 montre que les accélérations suivant la composante tangentielle au disque,  $\vec{e}_X$ , sont toutes en phase. Pour la composante radiale au disque,  $\vec{e}_Y$ , les accélérations du bord d'attaque et du centre de la plaquette sont en phase entre elles mais en opposition de phase par rapport aux accélérations du bord de fuite. Ces deux types de composantes engendrent deux mouvements de corps rigides, une translation suivant la tangente au disque et une rotation suivant la normale au disque avec un centre de rotation situé plutôt en bord de fuite. Enfin, les accélérations normales sont en phase pour chaque paire de capteurs, bord d'attaque, centre et bord de fuite. Ces trois paires sont déphasées entre elles avec une quasi opposition de phase entre les bords et le centre. Cela se traduit par un mouvement de flexion de la plaquette qui se propage dans sa longueur. Ces trois types de mouvement sont ceux observés à la fréquence fondamentale.

La plaquette de frein étant instrumentée par 6 accéléromètres tri-axes, il est possible d'interpoler les mouvements sur toute la surface du dos de la plaquette, voir Dhatt et al. [6]. L'interpolation est faite sur un unique quadrilatère composé de 6 variables nodales avec une

---

$200/(2\pi * 1700) = 0.019m.s^{-1}$ . La vitesse du disque au niveau du rayon intérieur de la plaquette, c'est-à-dire à un rayon de 10cm, vaut  $V = R * \omega = 0.1 * 2\pi * 2.6 = 1.6m.s^{-1}$

interpolation quadratique selon  $\vec{e}_X$  et linéaire suivant  $\vec{e}_Y$  (cf. figure 2.6). Pour cela, la base polynomiale choisie est :  $\langle P(x, y) \rangle = \langle 1, x, y, xy, x^2, x^2y \rangle$ . Les déplacements sont interpolés grâce à l'équation (2.1) où  $u_n$  est le vecteur des déplacements nodaux calculés par l'intégration numérique des mesures accélérométriques des capteurs. Les fonctions d'interpolation  $\langle N \rangle$  sont calculées grâce à l'équation (2.2) en ayant préalablement évalué la base polynomiale en chacune des positions des capteurs (cf. équation (2.3)).

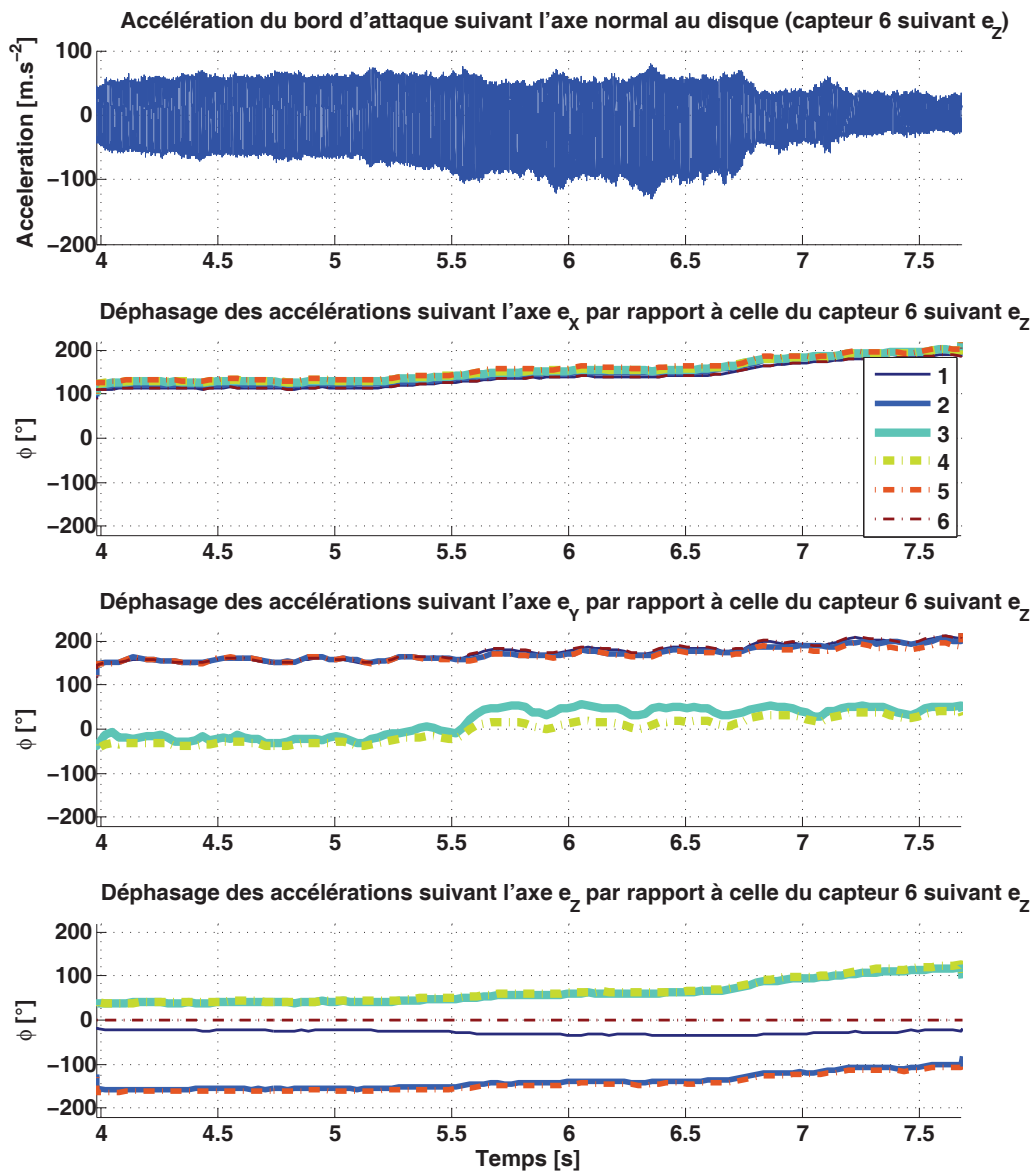


FIGURE 2.5 – Evolution temporelle des déphasages, à la fréquence fondamentale, des accélérations par rapport à celle du capteur n°6 suivant l'axe  $\vec{e}_z$ . En haut est représenté le signal de l'accélération du capteur n°6 selon  $\vec{e}_z$ , puis les déphasages sont classés par direction d'observation. Chaque courbe correspond à l'un des six accéléromètres.

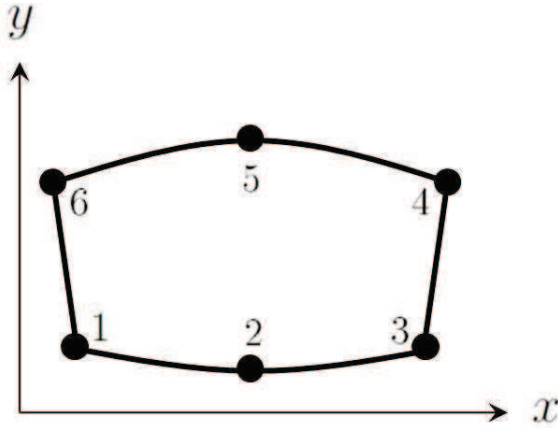


FIGURE 2.6 – Quadrilatère isoparamétrique à six noeuds. Les fonctions de forme et d'interpolation sont quadratiques selon  $\vec{e}_X$  et linéaires selon  $\vec{e}_Y$ .

$$u(x, y) = \langle N(x, y) \rangle \{u_n\} \quad (2.1)$$

$$\langle N(x, y) \rangle = \langle P(x, y) \rangle [P_n]^{-1} \quad (2.2)$$

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & x_1^2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & x_2^2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & x_3^2 & x_3^2 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & x_4^2 & x_4^2 y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5 y_5 & x_5^2 & x_5^2 y_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6 y_6 & x_6^2 & x_6^2 y_6 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Les mouvements respectifs de la plaquette aux fréquences du fondamental et des harmoniques deux et trois, sont respectivement présentés sur les figures 2.7, 2.8 et 2.9. Ces mouvements ont eu lieu autour de 4.17s, juste après la stabilisation du crissement. Le mouvement global de la plaquette est la somme des mouvements observés aux différentes fréquences. Ainsi, de part sa grande amplitude de déplacement, le mouvement observé à la fréquence du fondamental est représentatif du mouvement global. L'accéléromètre tri-axe du noeud 6 étant défectueux suivant l'axe  $\vec{e}_X$ , les valeurs manquantes dans cette direction ont été prises égales au déplacement du noeud 1 suivant le même axe<sup>5</sup>. Remarquons que les déplacements des noeuds se trouvant à l'extérieur du quadrilatère sont extrapolés, ce qui peut générer une erreur plus importantes en ces points.

Les figures 2.7, 2.8 et 2.9 ont été obtenues en utilisant un filtre passe-bande de Butterworth appliqué respectivement entre 1475 et 1675Hz, entre 3055 et 3255Hz et entre 4630 et 4830Hz. Les déplacements ont été amplifiés de manière à être visibles, mais lors de ce crissement, ils sont restés inférieurs à  $1\mu\text{m}$  pour la fréquence fondamentale et ont été encore plus faible pour les harmoniques. En effet, à niveau d'accélération identique, les amplitudes de déplacements à haute fréquence sont naturellement plus faibles que celles à basse fréquence. L'échelle des couleurs des figures 2.7, 2.8 et 2.9 est représentative des déplacements suivant la normale au disque,  $\vec{e}_Z$ . La figure 2.7 permet de visualiser très clairement le déphasage spatial du mouvement de flexion de la plaquette à la fréquence fondamentale. L'onde au sein de la plaquette s'y propage de droite à gauche, ce qui correspond au sens inverse de la rotation du disque. Il pourrait être intéressant de vérifier si le disque est lui-même le siège d'une telle onde se propageant dans le même sens. L'harmonique deux, vue en figure 2.8, présente un mouvement de flexion pure du bord d'attaque. Ce mouvement avait déjà été observé par Fieldhouse [1]. L'harmonique trois, vue en figure 2.9, exhibe un mouvement qui ressemble à une torsion du bord d'attaque.

5. Les accéléromètres des noeuds 1 et 6 sont proches l'un de l'autre et sont tous les deux situés en bord d'attaque.

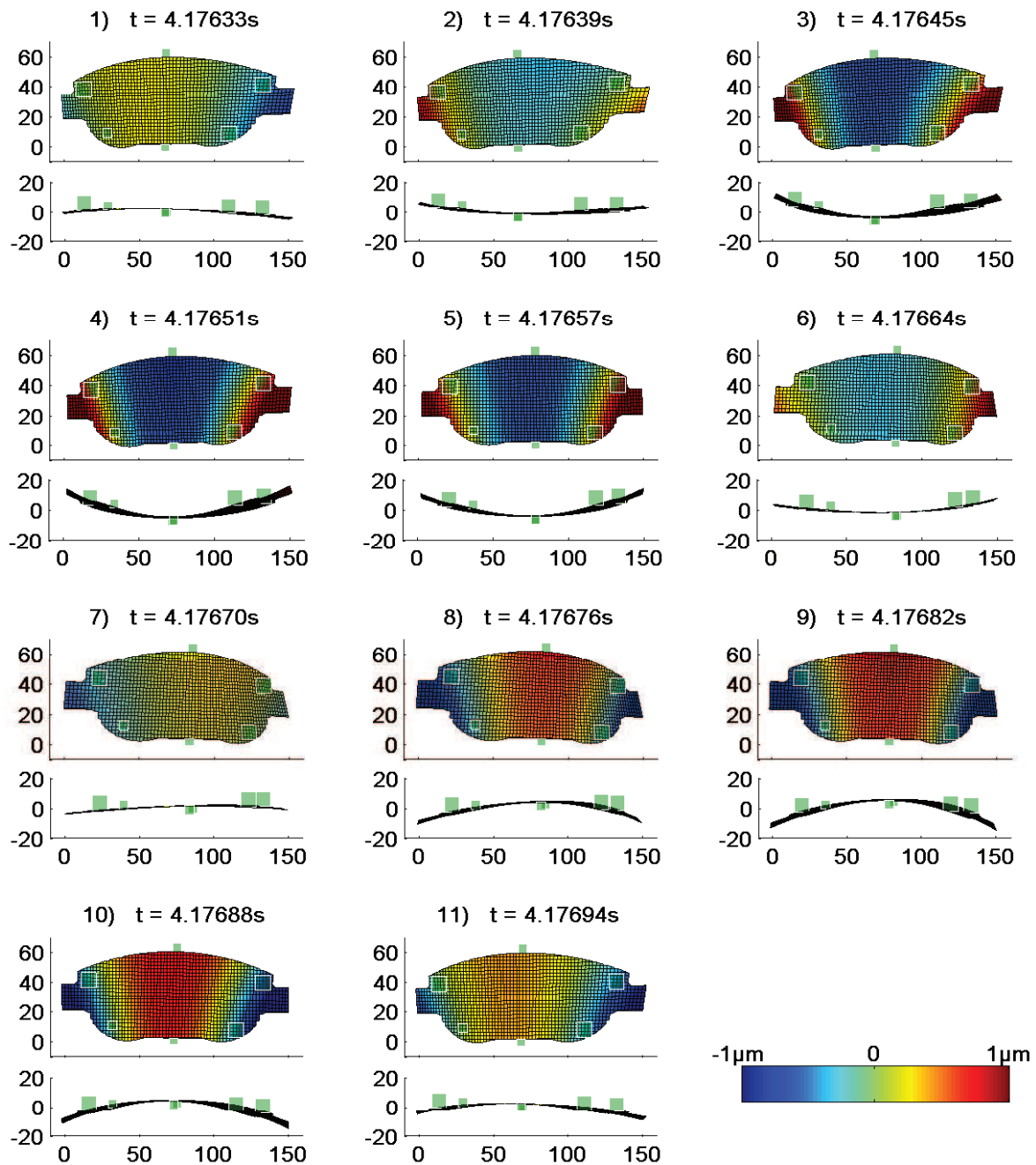


FIGURE 2.7 – Evolution temporelle du mouvement du dos de la plaquette, en vue de dessus et de côté. Le mouvement a été filtré par un filtre de Butterworth passe-bande 1475-1675Hz, pour visualiser le mouvement à la fréquence fondamentale. Les niveaux de couleurs représentent les déplacements suivant la normale au disque (axe  $\vec{e}_z$ ).

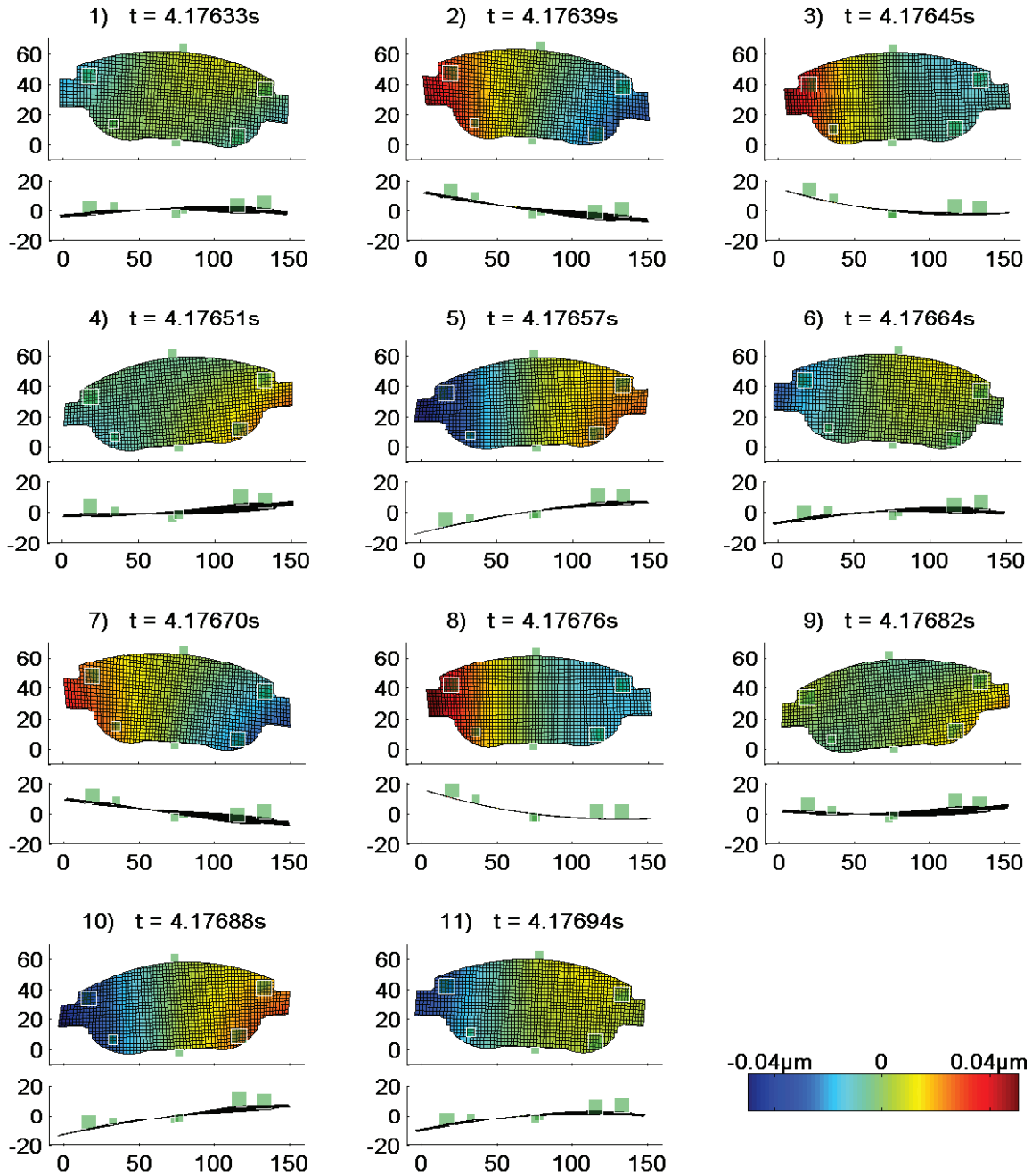


FIGURE 2.8 – Evolution temporelle du mouvement du dos de la plaquette, en vue de dessus et de côté. Le mouvement a été filtré par un filtre de Butterworth passe-bande 3055-3255Hz, pour visualiser le mouvement à la fréquence de la deuxième harmonique. Les niveaux de couleurs représentent les déplacements suivant la normale au disque (axe  $\vec{e}_z$ ).

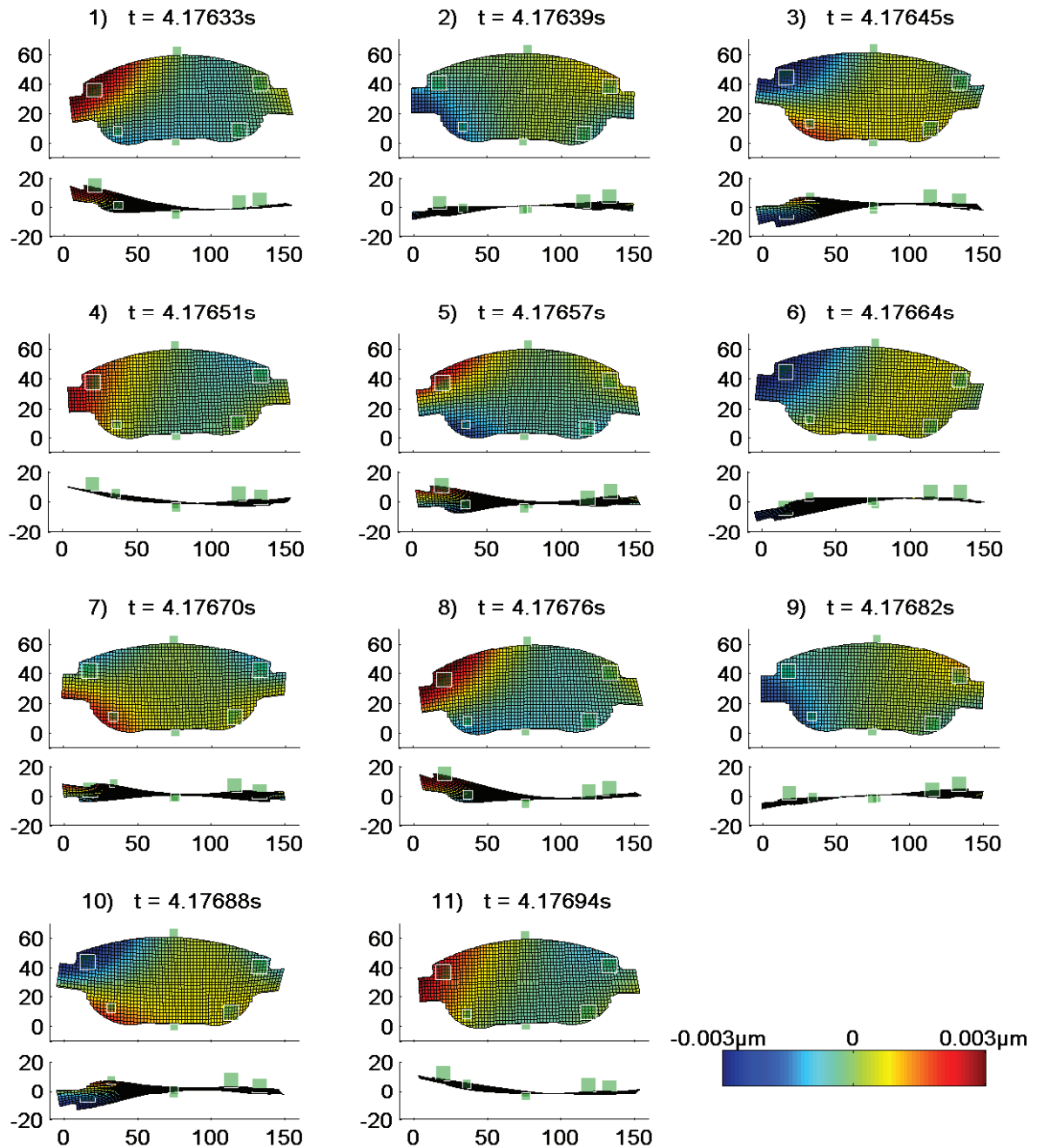


FIGURE 2.9 – Evolution temporelle du mouvement du dos de la plaquette, en vue de dessus et de côté. Le mouvement a été filtré par un filtre de Butterworth passe-bande 4630-4830Hz, pour visualiser le mouvement à la fréquence de la troisième harmonique. Les niveaux de couleurs représentent les déplacements suivant la normale au disque (axe  $\vec{e}_z$ ).



Le mouvement global de la plaquette dû au crissement est la somme des mouvements aux trois fréquences : fondamentale, harmoniques deux et trois. Ce mouvement global ressemble en premier lieu à celui du fondamental car c'est celui-ci qui génère le plus de déplacements. Malgré tout, les mouvements des harmoniques deux et trois sont radicalement différents du mouvement fondamental. Il est donc intéressant de confronter ces trois types de mouvements à un modèle éléments finis afin de voir si ces mouvements sont convenablement décrits par certaines déformées modales issues de la base modale.

## 2.4 Comparaison avec un modèle EF

Nous avons vu en introduction de ce chapitre que Liu et al. [5] préconisent d'agir sur le mode de la plaquette libre-libre dont la fréquence est la plus proche de celle du crissement. Pour cela, il faut dessiner des chanfreins afin que la déformée modale de ce mode se couple le moins possible avec le disque. Regardons dans notre cas d'étude quelles sont les déformées modales de la plaquette libre-libre. Celles-ci ont été calculées grâce à une analyse aux valeurs propres d'un modèle éléments finis. La figure 2.10 représente le modèle EF de la plaquette 2.10(a) ainsi que ses 3 premières déformées modales flexibles (2.10(b), (c), (d)).

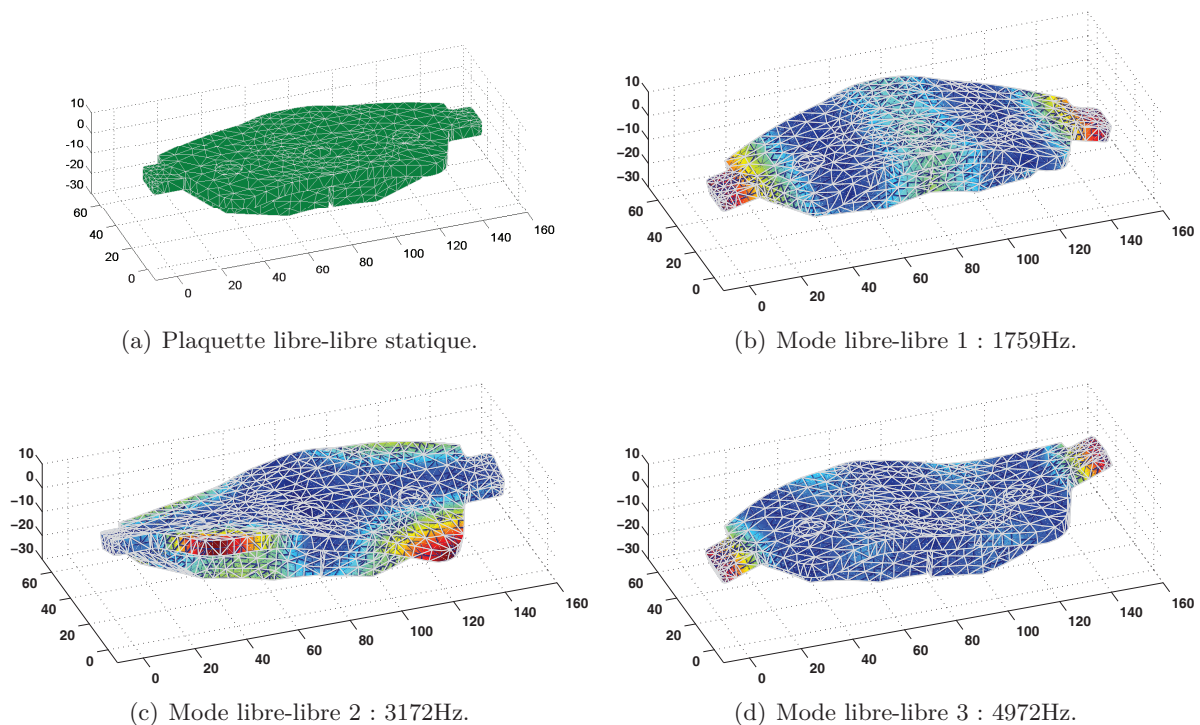


FIGURE 2.10 – Les 3 premiers modes déformables de la plaquette libre-libre calculés par une analyse aux valeurs propres sur un modèle EF.

Remarquons que les 3 premiers modes déformables (voir figures 2.10(b), (c) et (d)) ont des fréquences propres relativement proches de la fréquence fondamentale du crissement ainsi que de ses harmoniques. Pour preuve, la figure 2.11 montre le spectrogramme de la précédente accélération mesurée expérimentalement ainsi que les fréquences des trois premiers modes propres déformables de la plaquette libre-libre.

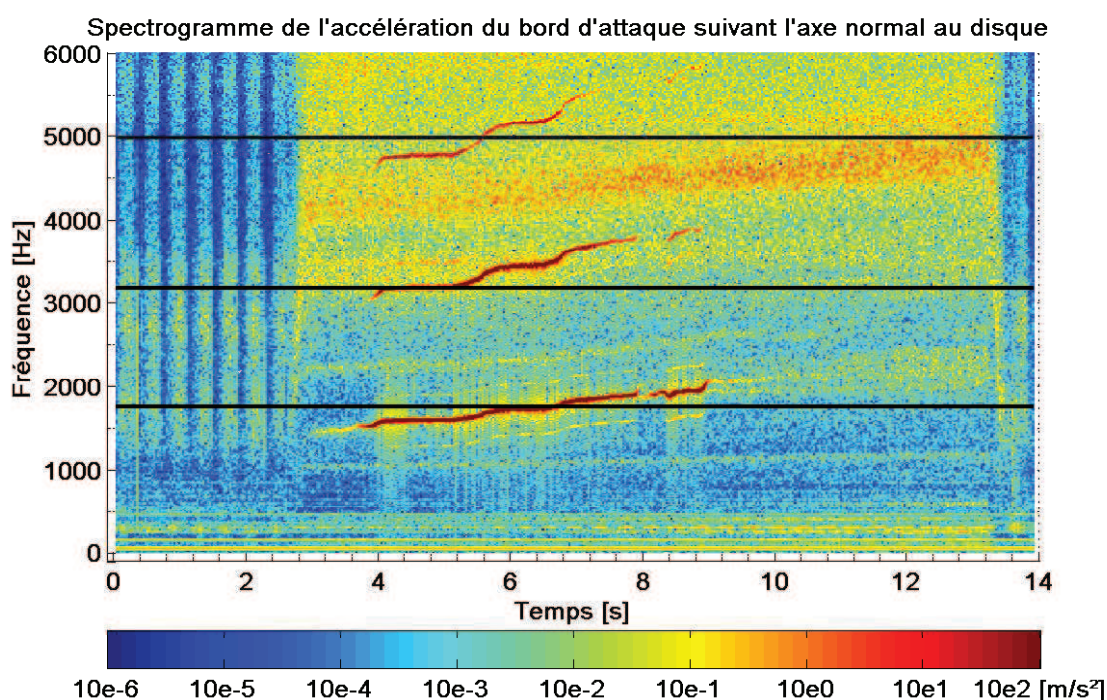


FIGURE 2.11 – Spectrogramme de la mesure accélérométrique acquise par le capteur n°6, situé en bord d'attaque, selon  $\vec{e}_Z$ . Les traits noirs représentent les fréquences des modes libre-libre de la plaquette de frein calculés par EF.

Il est remarquable que le crissement naît à  $t = 4s$ , à partir du moment où la deuxième harmonique du crissement coïncide avec la fréquence du deuxième mode de la plaquette libre-libre. Pourtant, la deuxième harmonique a un mouvement de flexion pure du bord d'attaque alors que le deuxième mode de la plaquette libre-libre est un mode de torsion selon  $\vec{e}_X$ . Ensuite, autour de  $t = 5s$ , la figure 2.11 montre que la fréquence du crissement augmente de sorte que la coïncidence fréquentielle entre le deuxième mode et la deuxième harmonique n'existe plus. Pourtant, le crissement perdure, semble-t-il, grâce à la coïncidence entre le premier mode de la plaquette et la fréquence fondamentale du crissement. Enfin, lorsque la fréquence du crissement augmente encore et s'éloigne de trop de celle du premier mode de la plaquette, le crissement finit par disparaître vers  $t = 9s$ .

Il semble que le crissement apparaisse à la fréquence du premier mode de la plaquette libre-libre. Le mouvement fondamental observé ainsi que le premier mode de la plaquette libre-libre sont tous deux des mouvements de flexion. De plus, sur tous les essais effectués que ce soit en marche avant ou en marche arrière, le crissement était inmanquablement accompagné d'harmoniques. Les harmoniques ne joueraient-elles pas un rôle de premier ordre dans le phénomène

de crissement ? Nous avons vu également que les niveaux accélérométriques aux fréquences des harmoniques dépassent fréquemment ceux présents à la fréquence fondamentale. De plus, la figure 2.11 montre à  $t \in [3..4]s$ , que même si la fréquence fondamentale du crissement est latente, celui-ci n'apparaît nettement que lorsque sa deuxième harmonique émerge et coïncide avec le deuxième mode de la plaquette libre-libre. Le couplage modal serait-il à l'oeuvre de manière plus complexe que la simple coïncidence entre 2 modes de fréquences propres relativement proches ? Est-ce que le crissement peut naître de la coïncidence de l'une de ses harmoniques avec un mode propre de structure ?

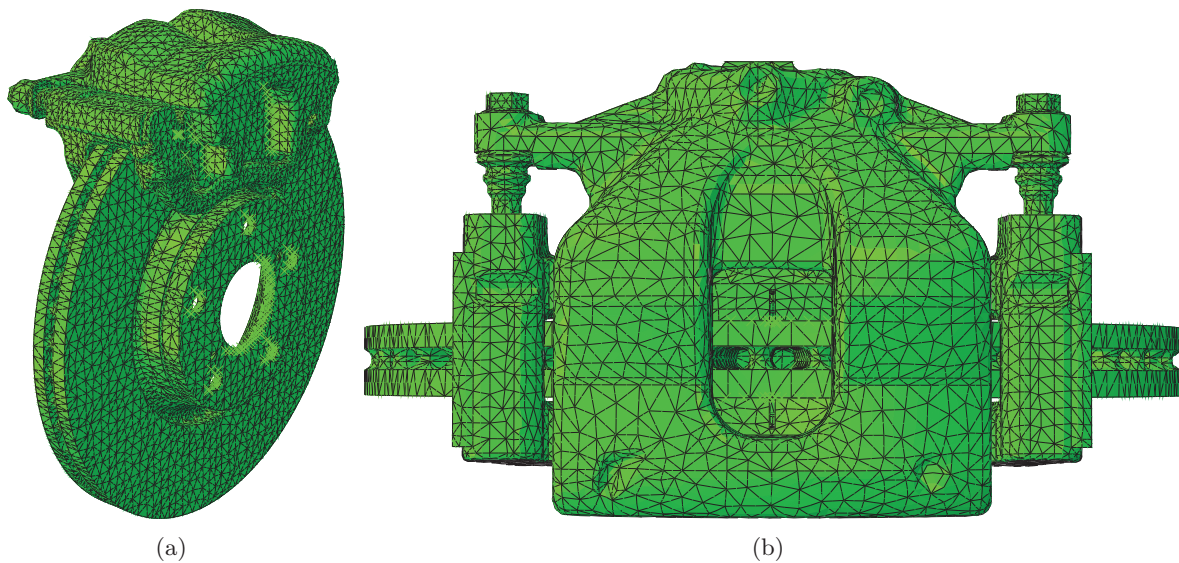


FIGURE 2.12 – Vues du modèle éléments finis du frein étudié.

Nous avons vu que les mouvements des harmoniques deux et trois sont radicalement différents de celui du fondamental. Il est intéressant de confronter ces trois types de mouvements à un modèle éléments finis afin de voir si ces mouvements sont convenablement décrits par certains vecteurs de la base modale. Pour cela, le frein étudié a été modélisé sous Abaqus<sup>6</sup>, voir la figure 2.12. Une pression de 3 bars a été appliquée au niveau du piston pour modéliser les conditions subies par le système de freinage du banc d'essai lors de l'apparition du crissement (autour de  $t = 4s$ ). Un calcul non-linéaire a été effectué pour déterminer l'équilibre stationnaire du système en prenant en compte le frottement des plaquettes sur le disque. Puis une analyse aux valeurs propres a été menée sur le système dynamique linéarisé sans prendre en compte ni le frottement, ni les comportements viscoélastiques. La base modale issue de ce calcul a été restreinte aux degrés de libertés du modèle correspondants aux positions des accéléromètres. De cette façon, il est possible de comparer les vecteurs propres issus du calcul EF et les vecteurs des déplacements mesurés expérimentalement aux fréquences du fondamental et des harmoniques deux et trois. Bien qu'habituellement le critère MAC<sup>7</sup> ne soit utilisé que pour comparer des modes propres entre eux, nous l'utilisons ici avec les vecteurs de déplacements des harmoniques,

6. Ce modèle est issu d'une étude du service NVH de Bosch

7. MAC = Modal Assurance Criterion. Les diagrammes de MAC permettent de comparer la ressemblance entre deux vecteurs. Une valeur de 100% signifie que les deux vecteurs sont colinéaires.

voir la figure 2.13. L'équation (2.4) rappelle la manière dont la valeur du MAC est calculée<sup>8</sup> entre les vecteurs  $\varphi_i$  et  $\psi_j$ , voir Allemang [7].

$$\text{MAC}_{ij} = \frac{|\langle \varphi_i, \overline{\psi_j} \rangle|^2}{\langle \varphi_i, \overline{\varphi_i} \rangle \langle \psi_j, \overline{\psi_j} \rangle} \quad (2.4)$$

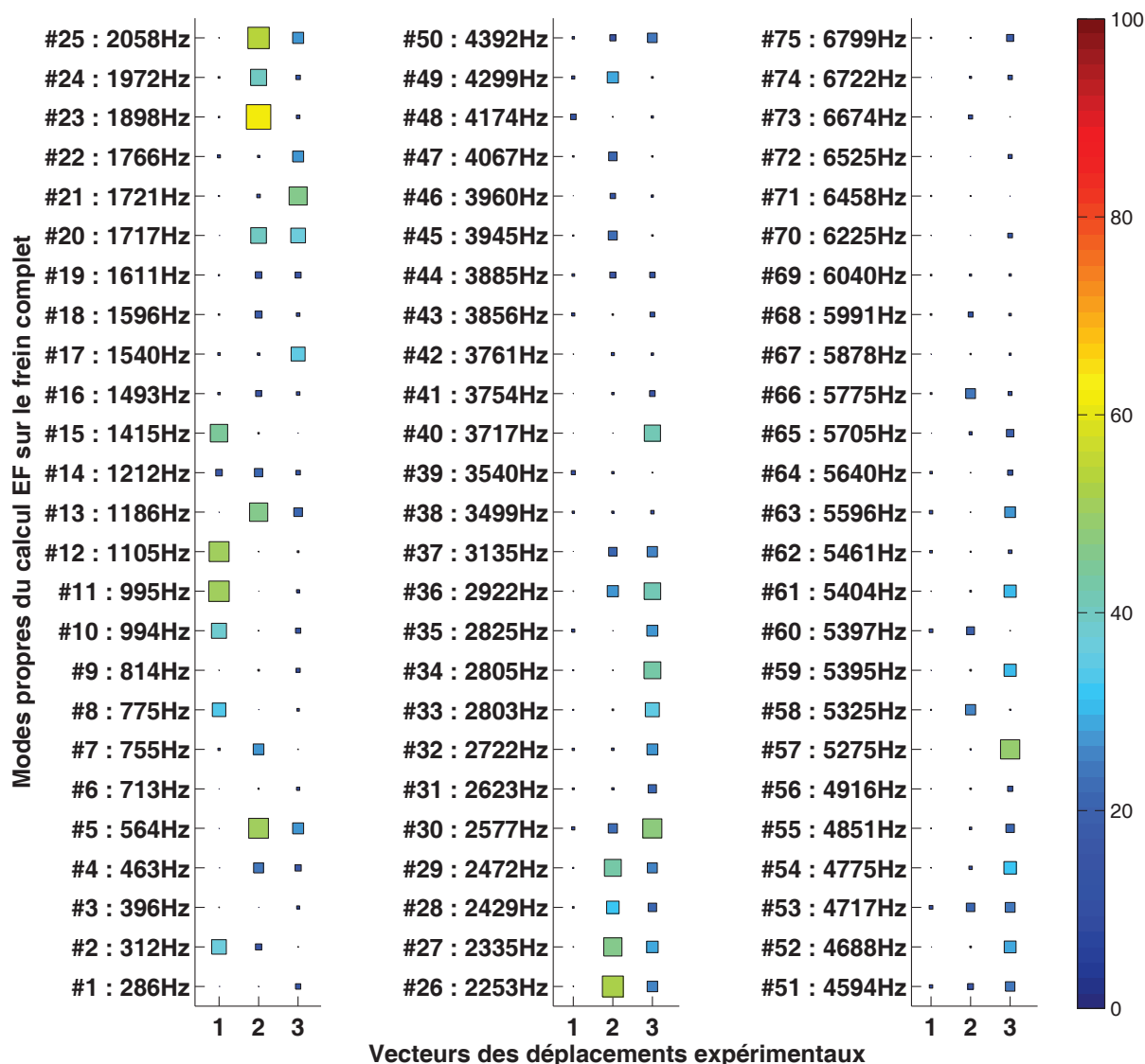


FIGURE 2.13 – Diagramme de MAC entre les vecteurs propres issus du calcul éléments finis (ordonnée) et les vecteurs des déplacements mesurés expérimentalement aux fréquences du fondamental et des harmoniques deux et trois (abscisse). La couleur et la taille des carrés représentent la valeur du MAC en %.

8. Ici,  $\varphi_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre issu du calcul par EF et  $\psi_j$  est le  $j^{\text{ème}}$  vecteurs des déplacements mesurés expérimentalement.

La figure 2.13 montre que les valeurs de MAC sont faibles, dénotant une mauvaise corrélation. Cela provient de plusieurs problèmes. Les vecteurs expérimentaux mesurés ont été obtenus pour une pression avoisinant les 3 bars avec incertitude de lecture de 1bar. Ainsi, les conditions aux limites imposées sur le modèle EF ne sont peut-être pas représentatives de l'essai expérimental. De plus, la base modale a été calculée sans prendre en compte le frottement, ainsi les modes propres calculés sont réels et non pas complexes, c'est-à-dire stationnaires et non pas propagatifs. Or, expérimentalement, nous avons observé la propagation du mode de flexion à la fréquence fondamentale. Ainsi, il serait plus judicieux de comparer les mouvements observés à des modes propres complexes.

Bien que les valeurs de MAC ne montrent pas de bonnes corrélations les observations et le modèle EF, remarquons que le MAC entre l'harmonique deux et le mode n°23 se démarque des autres par sa valeur supérieure à 60%. Or, lors l'apparition du crissement, seule l'harmonique deux avait une fréquence coïncidente avec un mode de la plaquette libre-libre (voir figure 2.11). La figure 2.14 montre que le mode n°23 est un mode de flexion pure tout comme le mouvement de l'harmonique deux. Cela soulève la question suivante : Est-ce que le crissement s'établit grâce à l'amplification de l'harmonique deux par un mode propre de la structure ? Soulignons toutefois qu'à  $t = 4s$ , cet harmonique apparaît à une fréquence d'environ 3180Hz contre une fréquence propre de 1898Hz pour le mode n°23. Ainsi, la corrélation reste très mauvaise et ne permet pas de répondre à cette question.

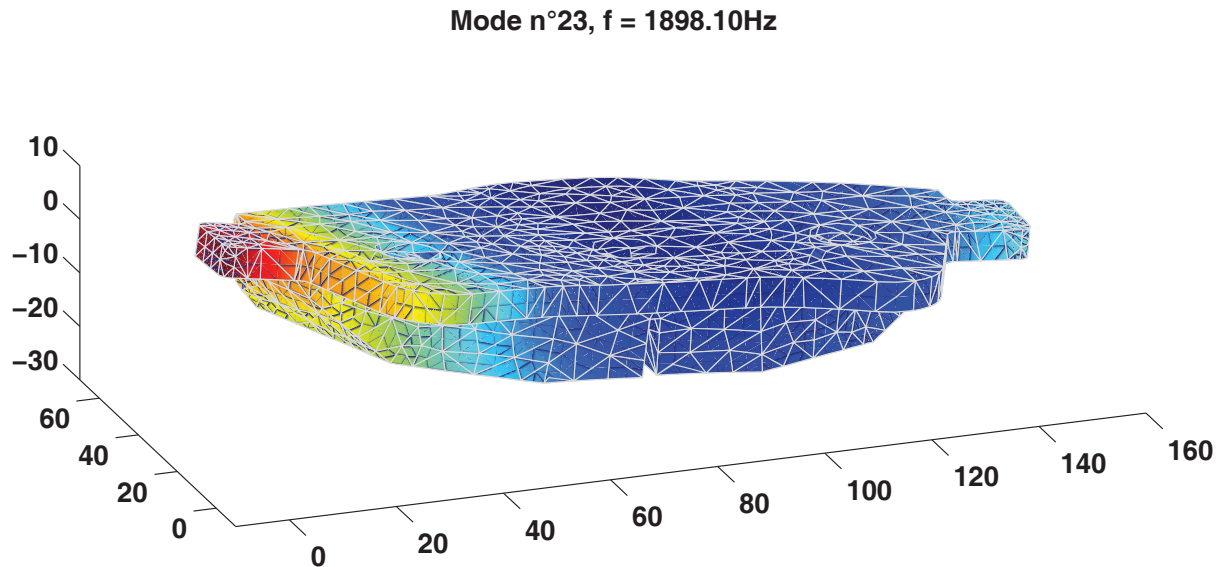


FIGURE 2.14 – Mode n°23 du frein complet restreint à la plaquette de frein issu du calcul des modes propres par éléments finis.

## 2.5 Conclusion et perspectives

Quand bien même la fréquence fondamentale du crissement était présente de manière latente, le mouvement de la plaquette n'a divergé et ne s'est établi que simultanément avec l'émergence d'harmoniques. Le crissement semble donc être un phénomène non-linéaire. Il a été prouvé dans le cas présent que cette non-linéarité n'est pas due à un phénomène de stick-slip. Les taux d'harmoniques étaient très marqués suivant les composantes radiale et normale au disque alors que la composante tangentielle semblait être quasi mono-fréquentielle. De plus, la fréquence du crissement dépendait de la pression de contact de la plaquette. Il semble donc que la présente non-linéarité soit du type raideur de contact non-linéaire. Elle pourrait intervenir au niveau des interfaces piston/plaquette ou plaquette/disque.

Les mesures accélérométriques des six capteurs étaient déphasées entre elles, dénotant un mouvement de propagation. Le mouvement du dos de la plaquette a pu être reconstruit en interpolant les déplacements grâce à la méthode des éléments finis. Ce mouvement est la somme de ceux du fondamental et des harmoniques deux et trois. Le mouvement apparaissant à la fréquence fondamentale est une flexion se propageant dans la longueur de la plaquette. Les mouvements apparaissant aux fréquences des deuxième et troisième harmoniques sont respectivement une flexion pure du bord d'attaque et torsion du bord d'attaque. Ainsi, bien que les plaquettes ne soient pas fermement maintenues par l'étrier, elles ne présentent pas de mouvement de corps rigide.

Il est tentant de modéliser le crissement par des modèles éléments finis linéaires. Une analyse aux valeurs propres du modèle EF d'un système de freinage a fourni une base modale de vecteurs réels. Le critère MAC (Modal Assurance Criterion) a servi à comparer cette base modale avec les déplacements observés expérimentalement aux fréquences du fondamental et des harmoniques deux et trois. La corrélation est très mauvaise, indiquant que le modèle EF ne décrit pas bien les phénomènes observés.

Cette étude expérimentale soulève de nouvelles questions. Les harmoniques ne joueraient-elles pas un rôle de premier ordre dans le phénomène de crissement ? Est-ce que le crissement peut naître de la coïncidence de l'une de ses harmoniques avec un mode propre de structure permettant ainsi son amplification ? Si tel est vraiment le cas les modèles linéaires pourraient servir à détecter de mauvaises configurations où plusieurs modes instables ont des fréquences dont les rapports sont des fractions d'entiers (rapports harmoniques). Pour répondre à ces questions, il est important d'affiner la connaissance des non-linéarités en jeu en observant les mouvements relatifs du disque, de l'étrier et de la plaquette, afin de tester des modèles non-linéaires. Enfin, il serait également intéressant de regarder si le crissement peut continuer d'apparaître lorsque qu'aucun mode propre de la structure ne coïncide avec les harmoniques.

## Bibliographie du chapitre 2

- [1] J. D. Fieldhouse and T. P. Newcomb, “Double pulsed holography used to investigate noisy brakes,” *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 25, no. 6, pp. 455 – 494, 1996. Optical Diagnostics in the Automotive Industry.
- [2] O. Giannini, A. Akay, and F. Massi, “Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 292, no. 1-2, pp. 1 – 20, 2006.
- [3] O. Giannini and A. Sestieri, “Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 296, no. 3, pp. 583 – 601, 2006.
- [4] O. Giannini and F. Massi, “Characterization of the high-frequency squeal on a laboratory brake setup,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, no. 1-2, pp. 394 – 408, 2008.
- [5] W. Liu, G. M. Vyletel, and J. Li, “A rapid design tool and methodology for reducing high frequency brake squeal,” in *Proceedings of the 24th Annual Brake Colloquim & Exhibition*, 2006.
- [6] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois, *Méthode des éléments finis*. Lavoisier, 2005.
- [7] R. J. Allemang, “The modal assurance criterion (mac) : Twenty years of use and abuse.” University of Cincinnati.

## Chapitre 3

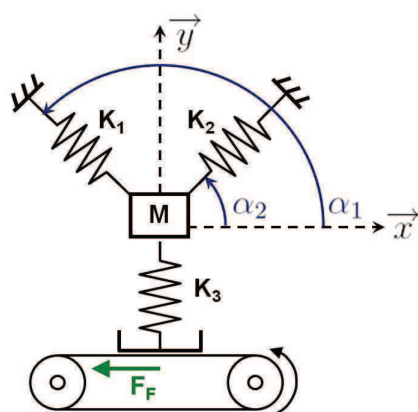
# Compréhension phénoménologique du crissement

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modèle de basculement</b>	<b>42</b>
3.1.1	Mise en équation	43
3.1.2	Résolution du système linéarisé	45
<b>3.2</b>	<b>Le modèle de Hoffmann</b>	<b>47</b>
<b>3.3</b>	<b>Le modèle de Hoffmann avec amortissement</b>	<b>52</b>
3.3.1	Etude des instabilités dynamiques	54
3.3.2	Exemples numériques	58
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>62</b>
	<b>Bibliographie du chapitre 3</b>	<b>63</b>

---



### Résumé

---

Ce chapitre illustre les hypothèses couramment utilisées pour la modélisation des systèmes dynamiques. Cela permet de mettre en avant les limitations qui découlent de celles-ci. Notamment, le fait de ne pas prendre en compte l'amortissement viscoélastique induit une surestimation du domaine d'instabilité.

---



Le crissement des systèmes de freinage est étudié depuis presque un siècle. Si beaucoup d'auteurs s'accordent à dire que le crissement et le couplage modal sont concomitants, la cause de l'apparition du crissement est encore mal comprise. Dans son article de 2002, Kinkaid [1] recensait différents types de phénomènes susceptibles d'expliquer l'apparition du crissement :

- le stick-slip où la plaquette adhère et glisse successivement sur le disque.
- le sprag-slip où le bord d'attaque s'arc-boute sur la piste.
- un coefficient de frottement dépendant de la vitesse.
- le couplage modal.
- les vibrations auto-entretenues.

Ces phénomènes sont, pour la plupart, non-linéaires. Afin de les mettre en évidence, tout en facilitant leur compréhension, les auteurs ont développé des modèles phénoménologiques ne comportant que quelques degrés de liberté (ddl). Il est possible de les classer en trois catégories :

- Les modèles à un ddl du frotteur sur piste fortement non-linéaire.
- Les modèles à quelques ddls du frotteur sur piste. Ils se différencient des précédents par l'apparition du couplage modal.
- Les modèles à ddl multiples qui prennent en compte les mouvements normaux du disque, l'évolution du contact plaquette/disque étant un point important.

Les auteurs qui traitent du modèle à un degré de liberté, ont exploré différents types de non-linéarités. McMillan [2] utilise une loi de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique. Cela engendre un phénomène de stick-slip. Hinrichs et al. [3] proposent deux modèles de frotteurs excités à leur base, le premier comporte une butée en déplacement et le second, une loi de frottement de Coulomb avec un coefficient statique. Par la suite, Hinrichs et al. [4] ont proposés différentes lois de frottement, dépendantes de la vitesse, pour le modèle du frotteur excité à sa base. Thomsen et Fidlin [5] ont modélisé un frotteur sur piste sans excitation autre que le frottement dépendant de la vitesse, modélisé par une loi de type Stribeck. Ils observent également du stick-slip. Hetzler et al. [6] ont également étudié le frotteur sur piste avec une loi de frottement de type Stribeck. Ils ont montré l'existence d'une bifurcation de Hopf sous-critique qui n'avait pas été prédite auparavant.

Certains auteurs se sont penchés sur des modèles à quelques degrés de liberté du frotteur sur piste. Cela permet notamment l'apparition du couplage modal. Swayze et Akay [7] puis Hess et Al-Grafi [8] ont décrit des modèles à deux degrés de liberté l'un en rotation et l'autre en translation, ce qui permet au frotteur de basculer entre ses bords d'attaque et de fuite. Le frotteur du modèle de Hess et Al-Grafi [8] est en contact avec la piste par l'intermédiaire d'hémisphères générant des contacts de type hertzien, puis le système est linéarisé pour étudier sa stabilité. Ce modèle permet de décrire trois types de comportement : stable, instable par flottement et divergent. Or, expérimentalement, Hess et Al-Grafi [8] ont observés quatre types de comportement : stable, glissement avec crissement, glissement saccadé et basculement du frotteur. Le glissement avec crissement et le glissement saccadé peuvent être modélisés tous les deux par l'instabilité de flottement. Shin et al. [9] ont étudié un modèle à deux degrés de liberté, un pour la plaquette et un pour le disque. Le disque et la plaquette sont liés par une loi de frottement linéairement décroissante par rapport à la vitesse. Paliwal et al. [10] ont enrichi le modèle de Shin et al. [9] en ajoutant un élément de Voigt<sup>1</sup> entre la plaquette et le disque. Hoffmann et al. [11, 12] ont choisi d'attribuer deux degrés de liberté au frotteur sur piste afin de mettre en

---

1. L'élément de Voigt est composé d'un ressort en parallèle avec un amortisseur.

---

évidence le couplage modal. Le modèle purement élastique de leur premier article est modifié dans leur deuxième article pour introduire de l'amortissement. Pour modéliser le judder, Sinou et al. [13, 14, 15] utilisent un modèle à deux degrés de liberté décrivant le phénomène de sprag-slip. Les raideurs de ce modèle sont des fonctions polynomiales d'ordre deux en déplacement. Ce modèle non-linéaire est traité grâce à la variété centrée et aux approximants multivariés. Les lecteurs intéressés par la résolution de systèmes non-linéaires pourront se référer à la revue des techniques de réduction non-linéaire de Sinou et al. [16]. Le modèle utilisé par Sinou et al. [13, 14, 15] a été utilisé par Lignon et al. [17] pour faire du contrôle actif sur le coefficient de frottement. Pilipchuk et al. [18] ont décrit un modèle de fluage-glisement<sup>2</sup> à deux degrés de liberté avec une loi de frottement élasto-plastique qui décroît en fonction de la vitesse. Kinkaïd et al. [19] ont modélisé un système à quatre degrés de liberté analogue à celui de Shin et al. [9] où les mouvements transverses ont été pris en compte. Ces mouvements transverses semblent être importants pour les faibles vitesses relatives. Slavič et al. [20] proposent d'étudier les vibrations induites par la rugosité grâce à un modèle à deux degrés de liberté analogue à ceux de Swayze et Akay [7] ou Hess et Al-Grafi [8]. Ouyang et al. [21] présente un modèle à six degrés de liberté comprenant deux frotteurs de type Hoffmann et al. [11].

Le couplage normal entre la plaquette et le disque est important car c'est le disque qui, au final, rayonne l'énergie acoustique. Parmi les modèles à degrés de liberté multiples, certains auteurs ont pris en compte les mouvements normaux du disque. Ouyang et al. [22, 23, 24, 25] ont modélisés le disque par un anneau déformable dont les mouvements transverses sont décrits par les fonctions de Bessel. Le comportement stick-slip du frotteur est couplé avec les mouvements transverses du disque. Stăncioiu et al. [26] utilise le modèle analytique de disque déformable, ainsi qu'un frotteur à un degré de liberté pour étudier la possibilité de décollement entre le frotteur et le disque. Heilig et Wauer [27] ont décrit un modèle analogue à celui de Ouyang et al., en considérant une loi de frottement exponentielle décroissante de type Stribeck. Citons Flint et Hultén [28] qui proposent une modélisation d'un système de freinage complet où le disque et les plaquettes sont modélisés par des poutres, les pistons par des corps indéformables et l'étrier par deux corps indéformables. Tous ces éléments sont reliés par des raideurs. La méthode de Galerkin est utilisée pour discrétiser le problème continu en le projetant sur les vecteurs propres des éléments libre-libre. Le problème est ainsi réduit à 66 degrés de libertés. Giannini et Sestieri [29] ont proposé un modèle prédictif du comportement de leur banc de frein simplifié. Ils projettent eux-aussi le problème sur les modes du disque. Ce modèle linéaire réduit permet de prédire toutes les fréquences de crissement et seulement celles-ci. Ils en concluent que les non-linéarités ne génèrent pas le crissement mais le stabilisent sur un cycle limite. Remarquons que leur frein simplifié ne comporte toutefois que très peu de non-linéarités comparé à un frein réel. Ainsi ils obtiennent le crissement en imposant différents angles d'attaque à leurs plaquettes de frein, ce qui amplifie artificiellement les non-linéarités géométriques et le couplage normal/tangentiel. Kang et al. [30, 31, 32, 33, 34] modélisent eux aussi le disque par un anneau encastré dont les vibrations sont décrites par les fonctions de Bessel. Les plaquettes ne sont pas modélisées mais leur effet sur le disque est décrit par une portion angulaire de disque soumis à une répartition uniforme de raideur normale et de frottement. Le principe des travaux virtuels est ensuite appliqué en considérant les modes de l'anneau encastré-libre. Puis le modèle est réduit à deux degrés de liberté en extrayant deux modes doubles, voir Kang et al. [30]. Il en ressort que les domaines d'instabilité dépendent fortement de la portion angulaire occupée par les plaquettes. Von Wagner et al. [35] présente un modèle à deux degrés de liberté, un pour

---

2. Le terme anglais utilisé est "*creep-slip*"

chaque plaquette dans le sens normal au disque. Le disque est considéré comme rigide et voilé afin de modéliser simplement le déplacement normal de vrais modes doubles à trois lobes d'un disque déformable. Ce modèle a été enrichi par Hochlenert et al. [36], qui a ajouté un degré de liberté supplémentaire à chaque plaquette dans le sens radial au disque. Hochlenert [37] a également publié un modèle à douze degrés de liberté où tous les éléments d'un système de freinage sont pris en compte. Dans ce modèle, deux degrés de libertés sont attribués au disque et ils correspondent aux deux modes à trois lobes du disque. Le contact plaquette/disque est décrit par un polynôme d'ordre 5. En traitant le système linéarisé puis le système non-linéaire, Hochlenert [37] montre que les conclusions sur les zones stables et instables sont différentes, mettant ainsi en avant les limites de la linéarisation.

Dans ce chapitre, deux modèles proches de ceux de la littérature sont étudiés plus en détails. Le premier est un modèle à deux degrés de liberté analogue à ceux de Swayze et Akay [7] et de Hess et Al-Grafi [8]. Il est constitué d'un frotteur sur piste, à deux points de contact, pouvant se déplacer suivant la normale à la piste et pouvant également basculer entre son bord d'attaque et son bord de fuite. Il permet de mettre en avant les limites de la linéarisation. Le deuxième modèle est celui de Hoffmann et Gaul [11, 12]. Il est constitué d'un frotteur sur piste comportant deux degrés de libertés, l'un dans le sens de la piste l'autre dans son sens normal. Ce modèle exhibe une instabilité par flottement via un couplage modal. Les développements réalisés à partir de ce modèle portent sur l'introduction de l'amortissement et sur une étude paramétrique de la stabilité du système. Les surfaces de réponses obtenues montrent l'importance d'introduire de l'amortissement dans un système mécanique tel que les freins à disque, afin d'en améliorer la stabilité.

### 3.1 Modèle de basculement

Le modèle présenté dans la figure 3.1 a pour vocation de modéliser une instabilité géométrique de type sprag-slip via des mouvements de basculement du frotteur. Le système comporte deux degrés de liberté permettant ainsi le couplage des modes. Le premier degré de liberté correspond à une translation d'ensemble de la plaquette suivant l'axe  $\vec{e}_y$  et le deuxième degré de liberté consiste en une rotation de la plaquette autour de l'axe  $\vec{e}_z$ . La plaquette est modélisée par 2 masses  $M$  identiques, l'une en bord d'attaque, indice 1, et l'autre en bord de fuite, indice 2. Ces masses sont liées rigidement et sont en appui glissant sur une piste en mouvement via des ressorts, de raideur  $K$ . La loi de frottement retenue est la loi de Coulomb avec un coefficient de frottement  $\mu$ . Le couple de rappel de la liaison de la plaquette avec son étrier est notée  $C$ . Aucun amortissement n'est pris en compte.

Ce modèle est analogue à celui de Hess et Al-Grafi [8], mais comporte quelques différences notables. Les raideurs sont linéaires et le poids des masses est considéré négligeable par rapport aux efforts extérieurs qui sont exercés sur chacune d'entre elles,  $F_1$  et  $F_2$ . Plusieurs paramètres sont introduits, notamment pour modéliser une position de zone de contact située plus ou moins en bord d'attaque ou en bord de fuite. Ainsi, les forces  $F_1$  et  $F_2$  appliquées aux masses 1 et 2 peuvent être différentes. De plus elles sont toujours dirigées selon  $\vec{e}_y$ . Les 2 masses sont espacées de la distance  $d$  et le centre de rotation de la plaquette se trouve sur l'axe formé par les 2 masses. Le centre de rotation est à une distance  $d_1 = -rd$  de la masse 1 et  $d_2 = (1 - r)d$  de la masse 2, avec  $r$  un paramètre rationnel, qui peut donc être négatif ou supérieur à 1 si besoin. Le centre de rotation est l'origine du repère, il sera noté 0.

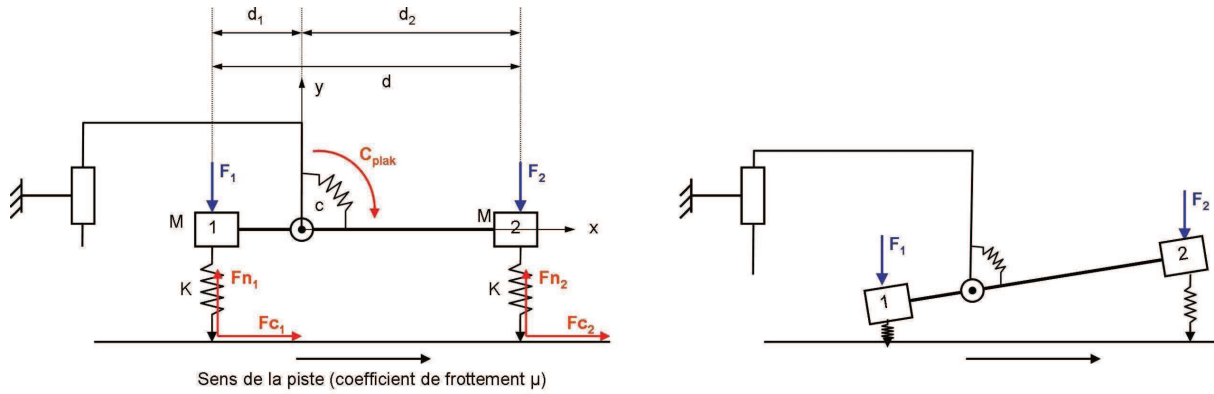


FIGURE 3.1 – Schéma du modèle à 2 ddl, rotation et translation

### 3.1.1 Mise en équation

Les torseurs des efforts, appliqués aux 2 masses ainsi qu'au centre de rotation, réduits au centre de rotation, qui est l'origine du repère, sont  $T_{ext \rightarrow 0}^0$ ,  $T_{ext \rightarrow 1}^0$  et  $T_{ext \rightarrow 2}^0$  :

$$T_{ext \rightarrow 0}^0 = \begin{pmatrix} F_{plak} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{plak} \end{pmatrix}$$

$$T_{ext \rightarrow 1}^0 = \begin{pmatrix} F_{c1} - M\ddot{x}_1 & 0 \\ F_{n1} - F_1 - M\ddot{y}_1 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} d_1 \cos \alpha (F_{n1} - F_1 - M\ddot{y}_1) \\ -d_1 \sin \alpha (F_{c1} - M\ddot{x}_1) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$T_{ext \rightarrow 2}^0 = \begin{pmatrix} F_{c2} - M\ddot{x}_2 & 0 \\ F_{n2} - F_2 - M\ddot{y}_2 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} d_2 \cos \alpha (F_{n2} - F_2 - M\ddot{y}_2) \\ -d_2 \sin \alpha (F_{c2} - M\ddot{x}_2) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique,  $T_{ext \rightarrow 0}^0 + T_{ext \rightarrow 1}^0 + T_{ext \rightarrow 2}^0 = 0$  nous fournit les équations à résoudre : résultante en  $\vec{y}$  et moment en  $\vec{z}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{n1} + F_{n2} - F_1 - F_2 = M(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) \\ d_1 \cos \alpha (F_{n1} - F_1) + d_2 \cos \alpha (F_{n2} - F_2) - d_1 \sin \alpha F_{c1} - d_2 \sin \alpha F_{c2} + C_{plak} = \\ M(d_1 \cos \alpha \ddot{y}_1 + d_2 \cos \alpha \ddot{y}_2) - M(d_1 \sin \alpha \ddot{x}_1 + d_2 \sin \alpha \ddot{x}_2) \end{array} \right.$$

Le changement de variables suivant permet de réécrire les équations avec deux variables, la translation  $y$  et la rotation  $\alpha$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = d_1 \cos \alpha \\ y_1 = y + d_1 \sin \alpha \\ x_2 = d_2 \cos \alpha \\ y_2 = y + d_2 \sin \alpha \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 = -d_1 \ddot{\alpha} \sin \alpha - d_1 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ \ddot{y}_1 = \ddot{y} + d_1 \ddot{\alpha} \cos \alpha - d_1 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ \ddot{x}_2 = -d_2 \ddot{\alpha} \sin \alpha - d_2 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ \ddot{y}_2 = \ddot{y} + d_2 \ddot{\alpha} \cos \alpha - d_2 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \end{array} \right.$$

En faisant l'hypothèse que le patin reste toujours en contact avec le disque et que le frottement est décrit par le modèle de Coulomb, il est possible d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{n1} = -Ky_1 \\ F_{n2} = -Ky_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{c1} = -\mu Ky_1 \\ F_{c2} = -\mu Ky_2 \end{array} \right. \quad C_{plak} = -C\alpha$$

Posons les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} D = d_1 + d_2 = (1 - 2r)d \\ \Delta = d_1^2 + d_2^2 = (1 - 2r + 2r^2)d^2 \\ \gamma = F_1 d_1 + F_2 d_2 \\ \frac{D^2}{2} - \Delta = -\frac{d^2}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} F = F_1 + F_2 \\ I = M\Delta \\ \chi = K\Delta \end{array} \right.$$

Avec ces nouvelles notations, les équations de la dynamique du système sont décrites par l'équation (3.1). Le modèle est très clairement non-linéaire avec des termes, s'apparentant à des effets centrifuges, qui couplent les deux équations.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2M\ddot{y} + MD\ddot{\alpha} \cos \alpha - MD\dot{\alpha}^2 \sin(\alpha) = -2Ky - KD \sin(\alpha) - F \\ MD\ddot{y} \cos(\alpha) + M\Delta\ddot{\alpha} = -K Dy \cos(\alpha) + \mu K Dy \sin \alpha \\ \quad \quad \quad -K\Delta \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \mu K \Delta \sin^2(\alpha) - \gamma \cos(\alpha) - C\alpha \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Le but n'est pas d'appliquer à l'équation (3.1) des méthodes de résolution non-linéaires pour savoir si ce système peut mener à des instabilités. La littérature montre que tel est le cas. Le modèle de Hess et AL-Grafi [8] linéarisé présentait des valeurs propres instables. Nous allons

donc regarder si la linéarisation de notre système permet de les trouver. La linéarisation permet les changements suivants :

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = 1 \\ \sin(\alpha) = \alpha = \alpha_0 + \delta_\alpha \\ \alpha_0^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\alpha}^2 = 0 \\ \sin^2(\alpha) = \alpha_0^2 + 2\alpha_0\delta_\alpha \\ y = y_0 + \delta_y \end{cases}$$

Nous obtenons alors les équations dynamiques du système linéarisé, voir équation (3.2).

$$\begin{cases} 2M\ddot{\delta}_y + MD\ddot{\delta}_\alpha = -2K(y_0 + \delta_y) - KD(\alpha_0 + \delta_\alpha) - F \\ MD\ddot{\delta}_y + M\Delta\ddot{\delta}_\alpha = -KD(y_0 + \delta_y) + \mu KD(y_0\alpha_0 + y_0\delta_\alpha + \alpha_0\delta_y) \\ \quad -K\Delta(\alpha_0 + \delta_\alpha) + 2\mu K\Delta\alpha_0\delta_\alpha - \gamma - C(\alpha_0 + \delta_\alpha) \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Résolution du système linéarisé

Nous allons maintenant calculer la solution statique du système. Le système à résoudre est écrit ci-dessous et la solution statique est donné par l'équation (3.3).

$$\begin{cases} -2K(y_0) - KD(\alpha_0) - F = 0 \\ -KD(y_0) + \mu KD(y_0\alpha_0) - K\Delta(\alpha_0) - \gamma - C\alpha_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = -\frac{F}{2K} - \frac{D^2F - 2D\gamma}{2Kd^2 + 2\mu DF + 4C} \\ \alpha_0 = \frac{DF - 2\gamma}{2Kd^2 + 2\mu DF + 4C} \end{cases} \quad (3.3)$$

En retranchant les termes de la solution statique, les équations dynamiques linéarisées sont à nouveau modifiées, voir l'équation (3.4).

$$\begin{cases} 2M\ddot{\delta}_y + MD\ddot{\delta}_\alpha = -2K(\delta_y) - KD(\delta_\alpha) \\ MD\ddot{\delta}_y + M\Delta\ddot{\delta}_\alpha = -KD(\delta_y) + \mu KDy_0(\delta_\alpha) + \mu KD\alpha_0(\delta_y) \\ \quad -K\Delta(\delta_\alpha) + 2\mu K\Delta\alpha_0(\delta_\alpha) - \gamma - C(\delta_\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{\delta}_y = \delta_y \left( -\frac{K}{M} - \frac{\mu K}{Md^2} D^2\alpha_0 \right) + \delta_\alpha \left( \frac{CD}{Md^2} - \frac{\mu K}{Md^2} (D^2y_0 + 2\Delta D\alpha_0) \right) \\ \ddot{\delta}_\alpha = \delta_y \left( 2\frac{\mu K}{Md^2} D\alpha_0 \right) + \delta_\alpha \left( 2\frac{\mu K}{Md^2} (Dy_0 + 2\Delta\alpha_0) - \frac{K}{M} - \frac{2C}{Md^2} \right) \end{cases} \quad (3.4)$$

La transformée de Laplace est appliquée aux équations différentielles (3.4). En utilisant les notation définies ci-dessous, le polynôme caractéristique de l'équation (3.4) s'exprime simplement grâce à l'équation (3.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} M_A = -\frac{K}{M} - \zeta_k D^2 \alpha_0 \\ M_B = \zeta_c \frac{D}{2} - \zeta_k (D^2 y_0 + 2\Delta D \alpha_0) \\ M_C = 2\zeta_k D \alpha_0 \\ M_D = 2\zeta_k (D y_0 + 2\Delta \alpha_0) - \frac{K}{M} - \zeta_c \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_c = \frac{2C}{M d^2} \\ \zeta_k = \frac{\mu K}{M d^2} \\ \psi = 2D y_0 + 4\Delta \alpha_0 - D^2 \alpha_0 \end{array} \right.$$

$$p^4 - p^2(M_A + M_D) + (M_A M_D - M_C M_B) = 0 \quad (3.5)$$

Le polynôme caractéristique est un polynôme bicarré. En effectuant un changement de variables,  $\lambda = p^2$ , les solutions  $\lambda_{1,2}$  sont données par l'équation (3.6) :

$$\lambda_{1,2} = \frac{M_A + M_D}{2} \pm \frac{\sqrt{(M_A - M_D)^2 + 4M_B M_C}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{K}{M} + \frac{\zeta_k \psi - \zeta_c}{2} \pm \frac{\sqrt{(\zeta_c - \zeta_k(\psi + 2D^2 \alpha_0))^2 + 4D^2 \alpha_0 (\zeta_k \zeta_c - \zeta_k^2 (\psi + D^2 \alpha_0))}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{K}{M} + \frac{\zeta_k \psi - \zeta_c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\zeta_c^2 - (2\zeta_k \zeta_c \psi + 4\zeta_k \zeta_c D^2 \alpha_0) + (\zeta_k^2 \psi^2 + 4\zeta_k^2 \psi D^2 \alpha_0 + 4\zeta_k^2 D^4 \alpha_0^2) + 4\zeta_k \zeta_c D^2 \alpha_0 - 4D^2 \alpha_0 \zeta_k^2 \psi - 4D^4 \alpha_0^2 \zeta_k^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{K}{M} + \frac{\zeta_k \psi - \zeta_c}{2} \pm \frac{\sqrt{\zeta_c^2 - 2\zeta_k \zeta_c \psi + \zeta_k^2 \psi^2}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{K}{M} + \frac{\zeta_k \psi - \zeta_c}{2} \pm \frac{\zeta_c - \zeta_k \psi}{2} \quad (3.6)$$

L'équation (3.7) donne les 4 valeurs propres du système. Ainsi,  $p_{1,2}$  sont purement oscillantes, alors que  $p_{3,4}$  sont soit purement oscillantes, soit purement divergentes.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{K}{M}} \\ p_{3,4} = \pm i \sqrt{\zeta_k \psi - \zeta_c - \frac{K}{M}} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Contrairement au modèle de Hess et Al-Grafi [8], ce modèle phénoménologique ne permet pas le couplage de modes et l'apparition de vibrations divergentes. Soit il s'arc-boute, soit il oscille. Peut-être est-ce du au fait que le centre de rotation est sur la droite passant par les masses ? Peut-être est-ce du au fait que l'équilibre statique a été calculé grâce à des équations déjà linéarisées ? A l'instar de l'article de Hochlenert [37], cela met en évidence que les linéarisations peuvent cacher certains phénomènes qui sont réputés existants.

### 3.2 Le modèle de Hoffmann

Dans la suite de ce mémoire de thèse, le phénomène de couplage modal sera mis en évidence en menant des analyses de stabilité sur des modèles éléments finis de grande taille. Afin de se familiariser avec ce phénomène, il est intéressant de l'observer sur un système aussi simple que possible. En 2002, Hoffmann et al. [11] ont publié un modèle à deux degrés de liberté d'un frotteur sur piste afin de mettre en évidence le couplage modal. Nous nous proposons de reprendre ici ce modèle purement élastique.

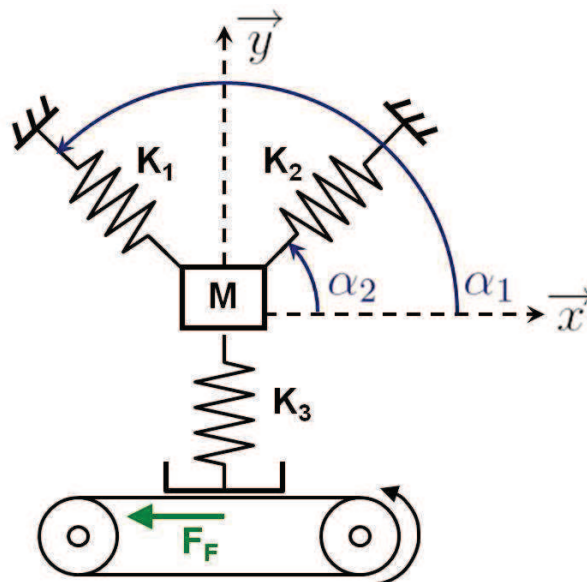


FIGURE 3.2 – Modèle minimaliste à 2 degrés de liberté de Hoffmann et al.

Le modèle de Hoffmann est présenté par la figure 3.2. Il est constitué d'une masse liée au bâti par deux ressorts et liée à la piste mobile par un ressort. Ces 3 ressorts permettent le couplage entre les directions axiale,  $\vec{x}$  et normale  $\vec{y}$  grâce aux angles formé par les ressorts 1 et 2. L'équilibre stationnaire n'est pas résolu ici, car il ne modifie pas les équations dynamiques. Ainsi,  $x$  et  $y$  représentent les perturbations de la masse autour de l'équilibre stationnaire. Les équations dynamiques du système sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} M\ddot{x} + K_{11}x + (K_c - \mu k_3)y = 0 \\ M\ddot{y} + K_{22}y + K_c x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2 x + (\omega_c - \mu k_3/M)y = 0 \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y + \omega_c x = 0 \end{cases}$$



$$\text{avec } \begin{cases} K_{11} = k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2 \\ K_{22} = k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3 \\ K_c = k_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{K_{11}/M} \\ \omega_2 = \sqrt{K_{22}/M} \\ \omega_c = K_c/M \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \omega_1^2 = (k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2) / M \\ \omega_2^2 = (k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3) / M \\ \omega_c = (k_1 \sin(2\alpha_1) + k_2 \sin(2\alpha_2)) / (2M) \end{cases}$$

Les notations  $K_{11}$  et  $K_{22}$  correspondent aux raideurs projetées respectivement sur  $\vec{x}$  et sur  $\vec{y}$ . Le terme  $K_c$  correspond au couplage dû à l'angle entre les ressorts. Enfin, le terme  $\mu k_3$  dû au frottement induit un couplage univoque entre les mouvements normaux et axiaux. Les notations  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_c$  désignent des termes homogènes à des pulsations. L'équation (3.8) exprime les équations dynamiques sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \\ \omega_c & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Afin de trouver les valeurs propres de ce système, il est nécessaire de le diagonaliser, c'est-à-dire de trouver  $\lambda$ , tel que  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{Id}) X = 0$ . Nous cherchons les solutions  $X$  du système sous la forme  $X = X_0 e^{pt}$ , ici  $-\lambda = p^2$ . Pour cela, nous allons étudier le polynôme caractéristique issu de la formulation matricielle. Il est défini par l'équation (3.9) et les carrés de ses zéros sont donnés par l'équation (3.10).

$$(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2) - \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) = 0$$

$$\implies p^4 + p^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) = 0 \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} p_{1,2}^2 = -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right)} \\ p_{3,4}^2 = -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right)} \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour que les perturbations en déplacements  $X = X_0 e^{pt}$ , soient stables, les valeurs propres,  $p$ , dont les carrés sont défini par l'équation (3.10), doivent comporter une partie réelle négative. Différents cas peuvent apparaître et les carrés des valeurs propres peuvent être réels purs quelque soit le signe ou complexes avec une partie réelle négative. Soient  $a$  et  $b$ , deux réels positifs et  $p$  un complexe, l'équation (3.11) exprime les liens entre un complexe et ses racines carrées.

$$\begin{cases} p^2 = (a + ib)^2 = (-a - ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2iab \\ p^2 = (a - ib)^2 = (-a + ib)^2 = (a^2 - b^2) - 2iab \end{cases} \quad (3.11)$$

Connaissant le signe des parties réelles et imaginaires de  $p^2$ , il est possible d'en déduire la forme de  $p$  par l'étude de l'équation (3.11). Le tableau 3.1 récapitule le comportement du système en fonction des parties réelles et imaginaires de  $p^2$ .

Conditions sur $p^2$	Stabilité du système	
$\Re(p^2) > 0$ et $\Im(p^2) = 0 \iff$	$p = + a$ divergence pure	ou $p = - a$ amorti
$\Re(p^2) < 0$ et $\Im(p^2) = 0 \iff$	$p = + ib$ oscillations pures	et $p = - ib$ oscillations pures
$\Re(p^2) < 0$ et $\Im(p^2) > 0 \iff$	$p = a + ib$ oscillations divergentes (par flottement)	et $p = -a - ib$ oscillations amorties
$\Re(p^2) < 0$ et $\Im(p^2) < 0 \iff$	$p = a - ib$ oscillations divergentes (par flottement)	et $p = -a + ib$ oscillations amorties

TABLE 3.1 – Les différents cas possibles

D'après le tableau 3.1, le phénomène de divergence pure apparait quand les carrés des valeurs propres sont des réels purs positifs. On l'obtient grâce à  $p_{1,2}^2$ , quand les termes sous la racine sont positifs. Le phénomène de divergence pure est assimilable à de l'arc-boutement (c'est-à-dire du *sprag*). L'équation (3.12) est la condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que l'arc-boutement apparaisse.

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right)} > 0 \\ \implies & \quad (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right) > (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 \\ \implies & \quad \boxed{\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right) < 0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Il est possible d'utiliser les paramètres de raideurs et d'angles pour exprimer cette condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que l'arc-boutement apparaisse. L'équation (3.13) montre que le terme de couplage doit être négatif et le coefficient de frottement supérieur à un seuil qui est toujours positif.

$$\omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_c^2 + \omega_c \frac{\mu k_3}{M} < 0$$

Partant de l'équation (3.12), les termes  $\omega_1^2$ ,  $\omega_2^2$  et  $\omega_c^2$  sont remplacés par leur expressions en termes de raideurs :

$$\begin{aligned} \implies & [(k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2)(k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3) \\ & - (k_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)^2 + \mu k_3 M \omega_c] / M^2 < 0 \end{aligned}$$

Puis cette équation est développée pour faire apparaître tous les termes :

$$\begin{aligned} \implies & [k_1^2 \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2^2 \cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 \\ & + k_1 k_2 (\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_1) + k_3 (k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2) \\ & - k_1^2 \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 - k_2^2 \cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 - 2k_1 k_2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 + \mu k_3 M \omega_c] / M^2 < 0 \end{aligned}$$

Ensuite, nous la simplifions en soustrayant les termes en  $k_1^2$  et en  $k_2^2$ . Nous reconnaissons également le terme  $k_3(k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2) = k_3 M \omega_1^2$  :

$$\begin{aligned} \implies & [k_1 k_2 \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + k_1 k_2 \cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_1 + k_3 M \omega_1^2 \\ & - 2k_1 k_2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 + \mu k_3 M \omega_c] / M^2 < 0 \end{aligned}$$

Une identité remarquable apparaît :

$$\implies [k_1 k_2 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1)^2 + k_3 M \omega_1^2 + \mu k_3 M \omega_c] / M^2 < 0$$

Ne subsistent alors, que des termes angulaires et le coefficient de frottement est placé en second membre :

$$\implies k_1 k_2 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1)^2 + k_3 M \omega_1^2 < -\mu k_3 M \omega_c$$

Or le membre de gauche est toujours positif, donc pour vérifier cette inéquation, le membre de droite doit l'être aussi. Cela impose  $\omega_c < 0$ . La condition pour l'apparition d'arc-boutement est alors donnée par l'équation (3.13).

$$\boxed{\begin{cases} \omega_c < 0 \\ \mu > -\frac{k_1 k_2 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_1)^2}{k_3 M \omega_c} - \frac{\omega_1^2}{\omega_c} \end{cases}} \quad (3.13)$$

D'après le tableau 3.1, les phénomènes d'oscillations divergentes apparaissent lorsque les carrés des valeurs propres sont des complexes à partie réelle négative. Ceci impose que le terme sous la racine soit négatif. L'équation (3.14) est la condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que des oscillations divergentes apparaissent.

$$\begin{aligned}
 & (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) < 0 \\
 \Rightarrow & \boxed{\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} < -\omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right)} \quad (3.14) \\
 \Rightarrow & \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} + \omega_c^2 < \omega_c \mu k_3 / M
 \end{aligned}$$

Or le terme de gauche  $(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2/4 + \omega_c^2 > 0$  est toujours positif, donc pour vérifier cette inéquation,  $\omega_c \mu k_3 / M$  doit être positif. Ceci impose  $\omega_c > 0$ . La condition pour l'apparition des oscillations divergentes est donnée par l'équation (3.15).

$$\boxed{\begin{cases} \omega_c > 0 \\ \mu > \frac{M(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4 \omega_c k_3} + \frac{\omega_c M}{k_3} > 0 \end{cases}} \quad (3.15)$$

Lorsqu'il est impossible d'obtenir une formule analytique pour les valeurs propres d'un système, il est toutefois possible de trouver des conditions pour assurer sa stabilité en utilisant le critère de Routh-Hurwitz. Ce critère est rappelé en annexe A où il est appliqué au polynôme caractéristique du modèle de Hoffmann. Ce critère est utilisé dans la section 3.3 qui suit.

Les inéquations (3.12) et (3.14) sont incompatibles. Ainsi, le système est soit instable par divergence pure, soit instable par flottement. L'inéquation (3.16) donne les conditions nécessaires et suffisantes (CNS) pour que le système soit stable.

$$\boxed{-\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} < \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) < \omega_1^2 \omega_2^2} \quad (3.16)$$

### 3.3 Le modèle de Hoffmann avec amortissement

La section précédente a mis en évidence deux types d'instabilités, divergence pure et flottement. Le modèle précédent était purement élastique. Il convient de lui ajouter de l'amortissement afin d'observer les modifications que cela produit sur les zones d'instabilités. Des taux d'amortissement identiques,  $\varepsilon$ , sont ajoutés aux deux équations (3.8) sans que cela engendre de couplage supplémentaire entre les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . Ce choix arbitraire naît de la volonté de ne pas complexifier le modèle. La figure 3.3 présente une représentation possible du modèle de Hoffmann modifié. Le modèle de Hoffmann avec amortissement est régi par l'équation (3.17).

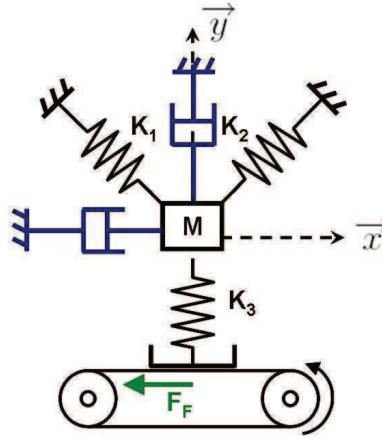


FIGURE 3.3 – Modèle de Hoffmann, modifié pour y inclure de l'amortissement

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\varepsilon\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon\omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \omega_c - \mu k_3/M \\ \omega_c & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Comme précédemment, nous supposons des solutions de la forme  $X = X_0 e^{pt}$ . Le polynôme caractéristique de l'équation (3.17) est donné par l'équation (3.18).

$$\begin{aligned} (p^2 + 2\varepsilon\omega_1 p + \omega_1^2)(p^2 + 2\varepsilon\omega_2 p + \omega_2^2) - \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) &= 0 \\ \implies p^4 + 2\varepsilon(\omega_1 + \omega_2)p^3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\varepsilon^2\omega_1\omega_2)p^2 + & \\ 2\varepsilon\omega_1\omega_2(\omega_1 + \omega_2)p + \omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le critère de Routh-Hurwitz évoqué dans la section 3.2 et présenté dans l'annexe A est utilisé pour étudier la stabilité du modèle de Hoffmann avec amortissement. Pour que le système puisse

être stable, tous les coefficients du polynôme caractéristique, voir l'équation (3.18), doivent avoir le même signe, positif en l'occurrence. Seul le terme  $\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c(\omega_c - \mu k_3/M)$  a un signe indéfini, les autres sont tous positifs. Le système est instable quand ce terme est négatif, ce qui correspond à la condition précédemment trouvée dans le cas sans amortissement, voir inéquation (3.12). Cette inéquation conditionne l'apparition d'une instabilité par divergence pure. Dans le cas où ce terme est positif, le tableau du critère de Routh, voir l'annexe A, ci-dessous, permet de déterminer si le système est effectivement stable.

$p^4$	1	$\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\varepsilon^2\omega_1\omega_2$	$\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right)$
$p^3$	1	$\omega_1\omega_2$	0
$p^2$	$\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (1 + 4\varepsilon^2)\omega_1\omega_2}{(1 + 4\varepsilon^2)\omega_1\omega_2}$	$\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right)$	0
$p$	$A$	0	0
1	$\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right)$	0	0

$$\begin{aligned} \text{Avec } A &= \frac{((\omega_1 - \omega_2)^2 + (1 + 4\varepsilon^2)\omega_1\omega_2)\omega_1\omega_2 - \left(\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right)\right)}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (1 + 4\varepsilon^2)\omega_1\omega_2} \\ \implies A &= \frac{((\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_1\omega_2)\omega_1\omega_2 + \omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right)}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (1 + 4\varepsilon^2)\omega_1\omega_2} \end{aligned}$$

D'après le critère de Routh, le système comporte autant de racines instables qu'il y a de changement de signe dans la première colonne du tableau précédent. Si tous les termes de la première colonne sont positifs alors le système est stable. Le terme  $(\omega_1 - \omega_2)^2 + (1 + 4\varepsilon^2)\omega_1\omega_2$  est toujours positif car  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont toujours positives d'après leur définition dans la section 3.2 et l'amortissement  $\varepsilon$  est choisi arbitrairement positif. Le terme  $\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c(\omega_c - \mu k_3/M)$ , est considéré positif car le système est inconditionnellement instable dans le cas contraire. Le système ne peut être stable que si  $A > 0$ .

En l'absence d'amortissement, nous avons observé une instabilité par oscillations divergentes. Ainsi et alors que le terme  $\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c(\omega_c - \mu k_3/M)$  est positif, nous allons chercher pour ce modèle avec amortissement, les domaines paramétriques pour lesquels  $A$  est négatif et donc où le système est instable. Le dénominateur de  $A$  est toujours positif, c'est donc le signe de son numérateur qui peut être négatif. Pour que tel soit le cas, l'inéquation (3.19) doit être vérifiée.

$$\begin{aligned} & [ (\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_1\omega_2 ] \omega_1\omega_2 + \omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right) < 0 \\ \implies & -\omega_c\left(\omega_c - \frac{\mu k_3}{M}\right) > [ (\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_1\omega_2 ] \omega_1\omega_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le terme  $( [ (\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_1\omega_2 ] \omega_1\omega_2 + \omega_c^2 ) M/k_3$  est toujours positif. Ainsi, le système ne peut être instable, que si  $\omega_c$  est positif et que le coefficient de frottement  $\mu$  dépasse une valeur critique. L'inéquation (3.19) est alors reformulée par l'inéquation (3.20).

$$\begin{aligned} \implies \quad & \mu \omega_c > ( [ (\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_1\omega_2 ] \omega_1\omega_2 + \omega_c^2 ) M/k_3 \\ & \left\{ \begin{array}{l} \omega_c > 0 \\ \mu > \frac{M [ (\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_1\omega_2 ] \omega_1\omega_2 + \omega_c M}{\omega_c k_3} > 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En résumé, le système dynamique est instable si l'un ou l'autre des inéquations (3.12) et (3.19) sont vérifiées. L'inéquation (3.21) exprime les conditions pour que le système soit stable. Comme précédemment, les deux types d'instabilités sont incompatibles.

$$\boxed{- [ (\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_1\omega_2 ] \omega_1\omega_2 < \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) < \omega_1^2 \omega_2^2} \quad (3.21)$$

### 3.3.1 Etude des instabilités dynamiques

Les inéquations (3.11) et (3.12) définissent les conditions d'apparition de l'instabilité par divergence pure assimilable à de l'arc-boutement. Dans cette section, nous allons étudier l'autre instabilité, celle qui menait à une divergence dans la section 3.2 et qui est conditionnée par les inéquations (3.19) et (3.20). L'inéquation (3.20) se décline en deux conditions nécessaires et suffisantes pour l'apparition d'instabilités dynamiques. Tout d'abord,  $\omega_c$  doit être positif, ensuite, le coefficient  $\mu$  doit être supérieur à un seuil. Il est important de remarquer que cette étude ne porte que sur les instabilités dynamiques et que par conséquent, être dans une configuration dynamiquement stable ne signifie pas être stable dans l'absolu car cela n'empêche pas de se trouver dans une zone instable par divergence pure.

#### Etude du signe de $\omega_c$

La première condition à vérifier pour que le système soit instable, concerne le terme  $\omega_c$  qui doit être positif. En remplaçant  $\omega_c$  par sa définition, on obtient la condition nécessaire donnée par l'inéquation (3.22). Si cette condition est vérifiée le système n'est que potentiellement instable dynamiquement, car ce n'est qu'une condition nécessaire.

$$\boxed{k_1 \sin(2\alpha_1) + k_2 \sin(2\alpha_2) > 0} \quad (3.22)$$

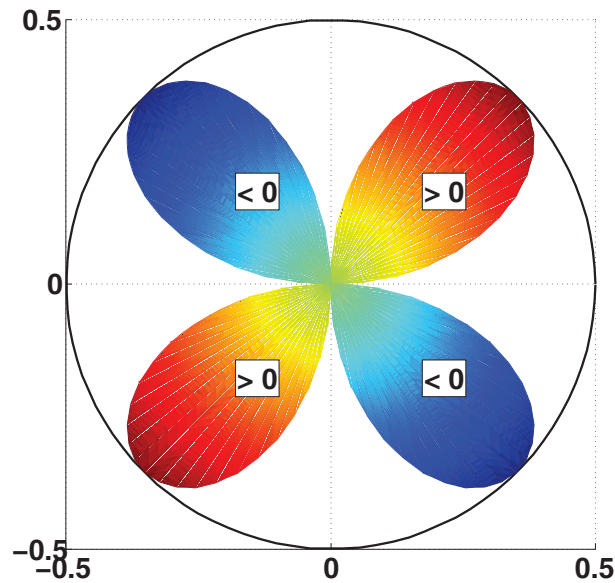


FIGURE 3.4 – Tracé de  $r(\alpha_i) = \sin(2\alpha_i)$  en fonction de l'angle  $\alpha_i$ , représenté ici en coordonnées polaires.

Les raideurs étant physiquement positives, on a  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$ . L'inéquation (3.22) invite à s'intéresser au signe de  $\sin(2\alpha_i)$ . Comme le montre la figure 3.4, le signe de  $\sin(2\alpha_i)$  varie suivant les 4 principaux secteurs angulaires où peut se trouver  $\alpha_i$  :

- $\forall \alpha_i \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2], \sin(2\alpha_i) > 0$
- $\forall \alpha_i \in [\pi/2, \pi] \cup [3\pi/2, 2\pi], \sin(2\alpha_i) < 0$

Le système ne peut présenter des oscillations divergentes uniquement si au moins l'un des deux ressorts ( $k_1$  et  $k_2$ ) se trouve dans l'une des deux zones rouges de la figure 3.4, voir CN (3.23). Si les deux ressorts se trouvent dans les zones bleues, le système sera inconditionnellement stable vis-à-vis des oscillations divergentes. Si les deux ressorts se trouvent dans les zones rouges, il sera potentiellement instable. Par contre, si l'un des deux ressorts se trouve dans une zone rouge et l'autre dans une zone bleue, alors, la 2<sup>ème</sup> CN (3.24) concernant les raideurs  $k_1$  et  $k_2$  doit être vérifiée pour que le système soit potentiellement instable. Ces deux conditions nécessaires sont récapitulées par les figures 3.5(a) et 3.5(b). La condition (3.24) est vérifiée quand  $k_i/k_j$  est supérieur aux lignes de niveau représentées sur les figures 3.5(a) et 3.5(b).

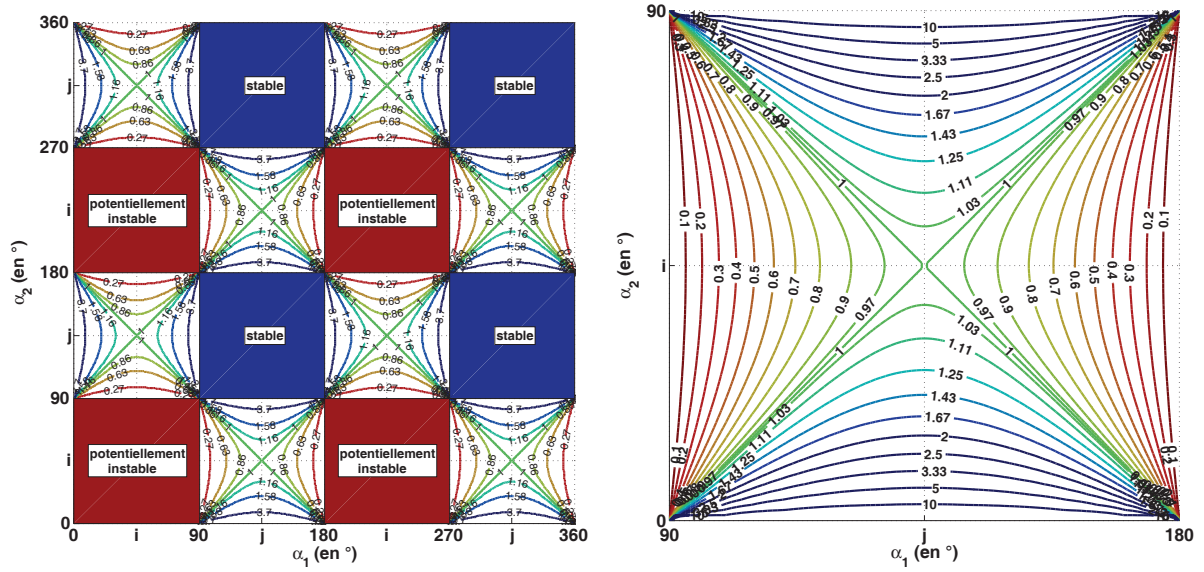
$$\exists \alpha_i \text{ tel que } \sin(2\alpha_i) > 0 \quad (3.23)$$

Soient  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  tels que  $\sin(2\alpha_i) > 0$  et  $\sin(2\alpha_j) < 0$

$$\frac{k_i}{k_j} > -\frac{\sin(2\alpha_j)}{\sin(2\alpha_i)} \quad (3.24)$$

Ces deux conditions sont nécessaires mais pas suffisantes. Pour que le système soit effectivement instable, il faudra vérifier que le coefficient de frottement  $\mu$  soit suffisamment grand.





(a) Condition nécessaire sur  $k_1$  et  $k_2$ , quelque soient les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . (b) Condition nécessaire sur  $k_1$  et  $k_2$  pour  $\alpha_1$  compris entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$  et  $\alpha_2$  compris entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ .

FIGURE 3.5 – Valeurs critiques de  $k_i/k_j$  en fonction de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . L'indice  $i$  signifie que  $\alpha_i$  est tel que  $\sin(2\alpha_i) > 0$  et l'indice  $j$  signifie que  $\alpha_j$  est tel que  $\sin(2\alpha_j) < 0$ . Quand  $\sin(2\alpha_i) > 0$  et  $\sin(2\alpha_j) < 0$ , le système devient potentiellement instable quand le rapport  $k_i/k_j$  est plus grand que les valeurs données par les lignes de niveau.

### Etude de la coïncidence de $\omega_1$ avec $\omega_2$

L'équation (3.20) implique que la deuxième condition pour que le système soit effectivement instable par oscillations divergentes est que le coefficient de frottement dépasse un seuil qui dépend de plusieurs paramètres. Le cas sans amortissement,  $\varepsilon = 0$  et où il y a coïncidence entre les pulsations  $\omega_1 = \omega_2$  est favorable à l'apparition de l'instabilité, car la deuxième condition devient  $\mu > \omega_c M/k_3$ , qui peut toujours être vérifiée pour  $k_3$  suffisamment grand. Il faut toutefois garder à l'esprit que même si la condition  $\omega_1 = \omega_2$  facilite la déstabilisation du système, ce n'est pas une condition nécessaire. Etudions dans quels cas il est possible de vérifier  $\omega_1 = \omega_2$ .

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 &= \sqrt{(k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2)/M} = \sqrt{(k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3)/M} \\ \implies k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2 &= k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3 \\ \implies k_1(\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1) + k_2(\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2) &= k_3 \\ \implies k_1 \cos(2\alpha_1) + k_2 \cos(2\alpha_2) &= k_3 > 0 \end{aligned}$$

Soit  $k_3 > 0$ , pour que  $\omega_1 = \omega_2$ , il est faut que la condition nécessaire (3.25) soit vérifiée. Si les 2 angles la vérifient, alors les deux pulsations peuvent être égales. Si cette condition n'est pas vérifiée, alors les deux pulsations ne peuvent en aucun cas être égales mais cela n'assure

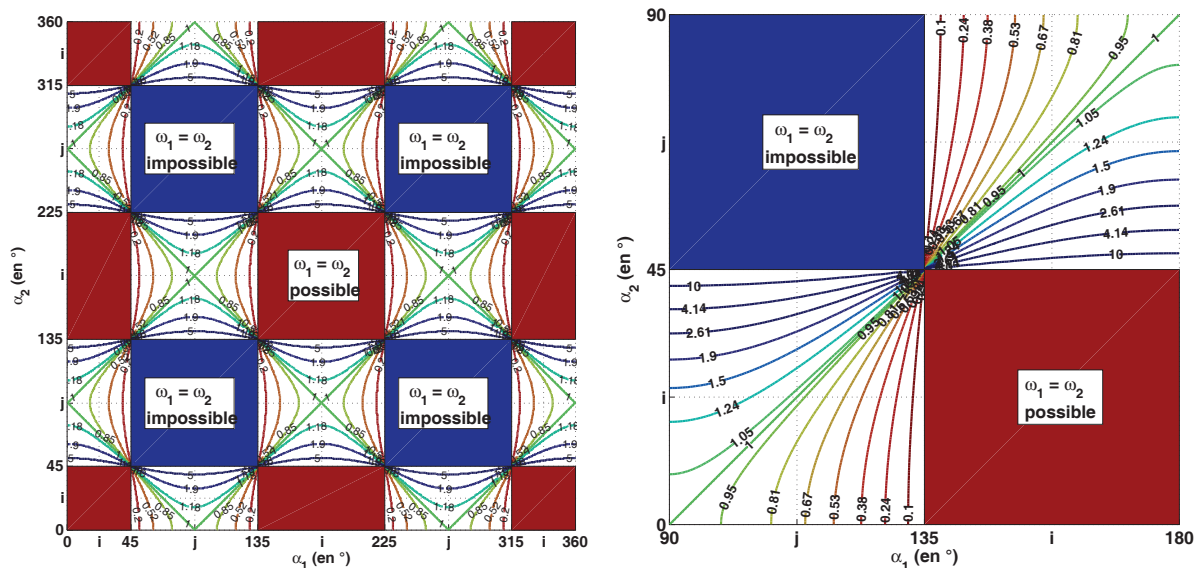
pas pour autant la stabilité du système. Si un seul des angles vérifie la condition (3.25), alors la seconde condition (3.26) doit être vérifiée pour obtenir l'égalité des deux pulsations.

$$\exists \alpha_i \text{ tel que } \cos(2\alpha_i) > 0 \tag{3.25}$$

Soient  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  tels que  $\cos(2\alpha_i) > 0$  et  $\cos(2\alpha_j) < 0$

$$\frac{k_i}{k_j} > -\frac{\cos(2\alpha_j)}{\cos(2\alpha_i)} \tag{3.26}$$

Les figures 3.6(a) et 3.6(b) résument les conditions nécessaires pour obtenir l'égalité de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . La condition (3.26) est vérifiée quand  $k_i/k_j$  est supérieur aux lignes de niveau représentées sur les figures 3.6(a) et 3.6(b). Remarquons que Hoffmann et al. [11] avait choisi comme valeur angulaire,  $\alpha_1 = 150^\circ$  et  $\alpha_2 = 30^\circ$ . Dans leur cas, le ressort  $k_2$  vérifie la condition (3.23) et les deux ressorts vérifient la condition (3.25). Ils ont observés une instabilité par flottement du au couplage entre les deux modes propres du système.



(a) Condition nécessaire sur  $k_1$  et  $k_2$ , quelque soient les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . (b) Condition nécessaire sur  $k_1$  et  $k_2$  pour  $\alpha_1$  compris entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$  et  $\alpha_2$  compris entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ .

FIGURE 3.6 – Valeurs critiques de  $k_i/k_j$  en fonction de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . L'indice  $i$  signifie que  $\alpha_i$  est tel que  $\cos(2\alpha_i) > 0$  et l'indice  $j$  signifie que  $\alpha_j$  est tel que  $\cos(2\alpha_j) < 0$ . Quand  $\cos(2\alpha_i) > 0$  et  $\cos(2\alpha_j) < 0$ , alors il peut y avoir coïncidence des pulsations  $\omega_1 = \omega_2$  quand le rapport  $k_i/k_j$  est plus grand que les valeurs données par les lignes de niveau.

### 3.3.2 Exemples numériques

Par la suite, nous allons étudier deux cas où les angles sont fixés :

- le cas développé par Hoffmann et al. [11], où  $\alpha_1 = 150^\circ$  et  $\alpha_2 = 30^\circ$
- un cas particulier, où  $\alpha_1 = 180^\circ$  et où  $\alpha_2$  varie autour de  $90^\circ$ .

Dans les systèmes de freinage réels, le coefficient de frottement est tel que  $\mu \in [0, 3 \dots 0, 5]$ . Les fréquences de crissement se situent principalement entre 2000 et 10000 Hz et sur la bande fréquentielle de 1 à 16000 Hz, il existe 250 modes différents, d'où un faible écart de fréquences entre les modes propres. Le taux d'amortissement des fontes utilisées dans les systèmes de freinage peut atteindre de 2,5%. Toutefois, certains éléments tels que les shims présentent des taux d'amortissement plus élevé, ainsi, nous considérerons  $\varepsilon \in [1 \dots 4]$  %. Dans ce modèle,  $k_3$  est vu comme la raideur normale du patin, laquelle dépend de manière non-linéaire de la pression exercée sur ce dernier. Pour une pression de 5 bars, la valeur mesurée est  $K_{5 \text{ bars}} = 20 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ . Par soucis de réalisme, nous choisissons  $k_1$ ,  $k_2$  et  $M$  de manière à avoir des modes propres autour de 2000Hz.

#### Cas angulaire de Hoffmann : $\alpha_1 = 150^\circ$ et $\alpha_2 = 30^\circ$

Le cas angulaire choisi par Hoffmann et al. [11] permet le couplage modal qui induit l'instabilité par flottement. Le choix des angles permet d'exprimer simplement les pulsations en fonctions des raideurs :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 5\pi/6 \\ \alpha_2 = \pi/6 \end{cases} \implies \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{3}{4M}(k_1 + k_2) \\ \omega_2^2 = \frac{1}{4M}(k_1 + k_2) + \frac{k_3}{M} \end{cases} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{\sqrt{3}}{4M}(k_2 - k_1)$$

Dans toute cette section, les paramètres choisis sont :  $\alpha_1 = 150^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,  $M = 150\text{g}$ ,  $k_1 = 22.5 \times 10^6 \text{ N/m}$  et  $k_2 = 23.4 \times 10^6 \text{ N/m}$ . Ainsi,  $f_1 = 2411\text{Hz}$ . Ces paramètres ont été utilisés pour produire les figures 3.7, 3.8 et 3.9. La raideur  $k_3$  est vue comme la raideur normale du patin, qui dépend de manière non-linéaire de la pression exercée sur ce dernier. Quand l'utilisateur appuie sur le frein, le patin vient s'écraser progressivement contre le disque, ainsi, la raideur du patin augmente pendant ce laps de temps. Lorsque l'utilisateur relâche la pression, la raideur  $k_3$  diminue progressivement. Il convient alors d'étudier les domaines de stabilité en fonction du paramètre  $k_3$ . Le deuxième paramètre intéressant est le taux d'amortissement,  $\varepsilon$  qui augmente la valeur du coefficient de frottement critique, voir l'équation (3.20)

La frontière entre les deux domaines, stable et instable a été tracée sur les figures 3.7(a) et 3.7(b). La surface frontière de la figure 3.7(a) correspond au  $\mu$  critique en fonction des paramètres, ainsi le domaine de stabilité se situe sous la surface frontière. En effet, l'équation (3.20) montre que le système est instable quand  $\mu$  est supérieur au  $\mu$  critique. Le domaine d'instabilité de la figure 3.7(b) est défini par la zone où le coefficient de frottement  $\mu$  est supérieur aux lignes de niveaux.

Les figures 3.8(a), 3.8(b) et 3.9(a) représente les diagrammes de coalescence des modes propres, respectivement en fonction des paramètres de raideur  $k_3$ , du coefficient de frottement  $\mu$  et de l'amortissement  $\varepsilon$ . Le système est instable lorsque la partie réelle de l'un des modes

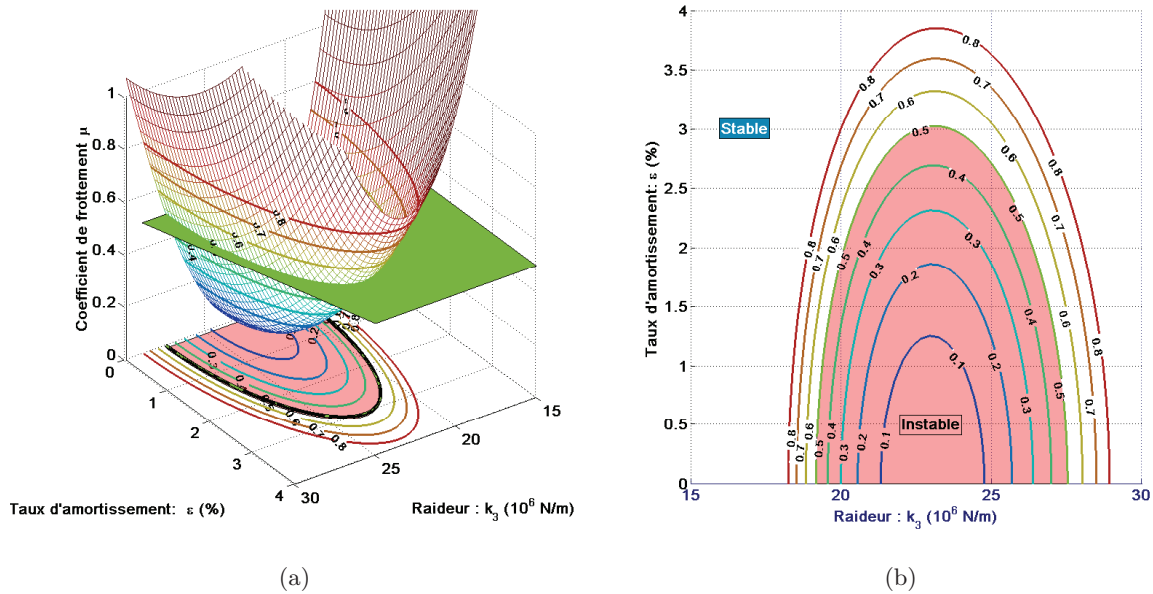
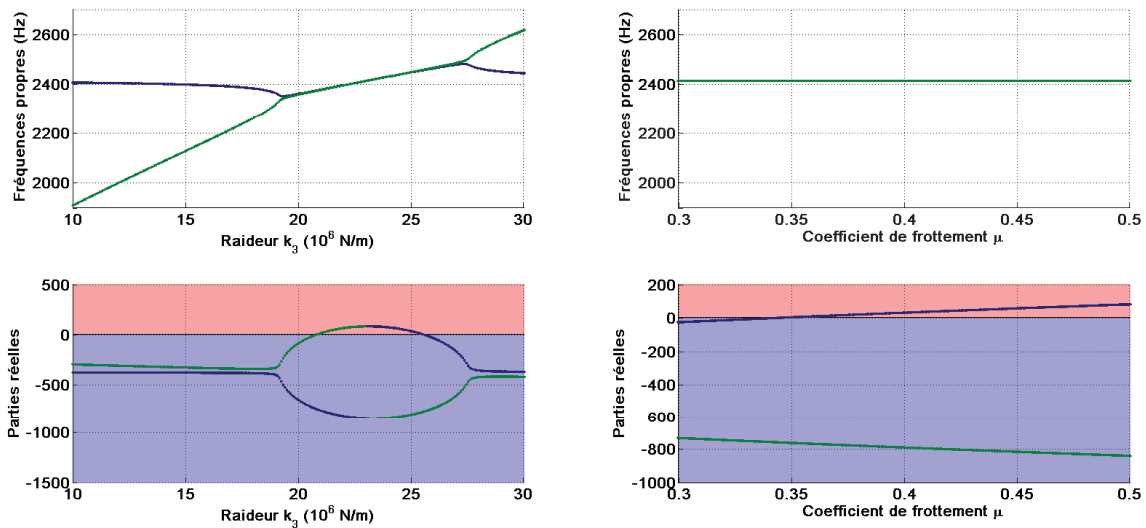
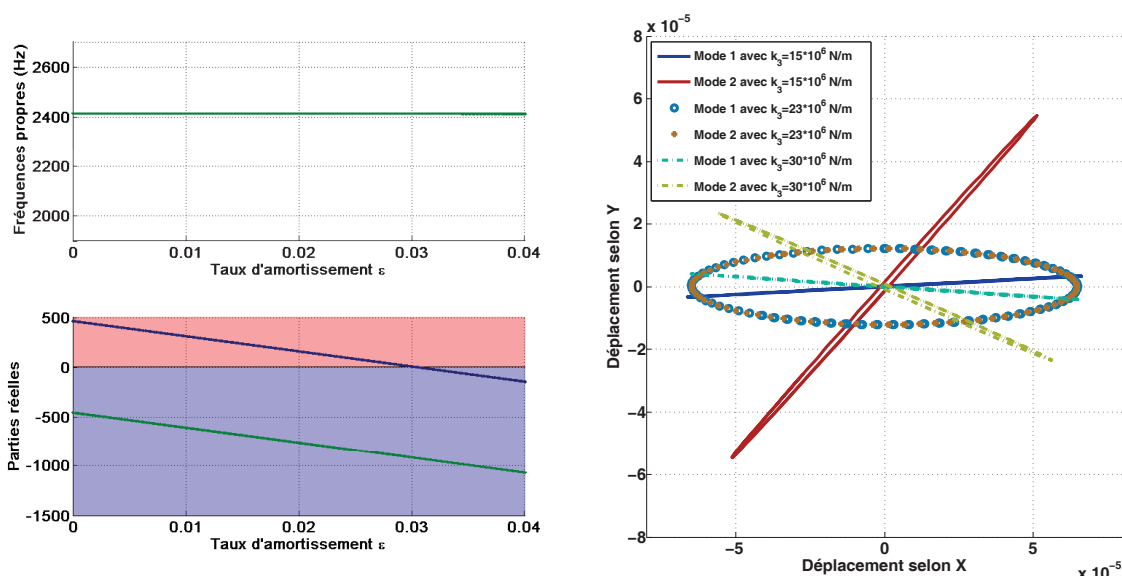


FIGURE 3.7 – Frontière entre domaine stable et domaine instable en fonction de la raideur  $k_3$ , du taux d’amortissement  $\varepsilon$  et du coefficient de frottement  $\mu$ . Le plan de la figure (a), à  $\mu = 0.5$  qui coupe la surface frontière permet de définir la zone instable pour les paramètres  $k_3$  et  $\varepsilon$  représentée sur la figure (b).



(a) Diagramme de coalescence en fonction de  $k_3$ , avec  $\mu = 0.5$  et  $\varepsilon = 2.5\%$ . (b) Diagramme de coalescence en fonction de  $\mu$ , avec  $k_3 = 23 \times 10^6$  N/m et  $\varepsilon = 2.5\%$ .

FIGURE 3.8 – Diagramme de coalescence des deux modes en fonction de la raideur  $k_3$ , figure (a), et du coefficient de frottement  $\mu$ , figure (b).



(a) Diagramme de coalescence en fonction de  $\varepsilon$ , avec  $k_3 = 23 \times 10^6 \text{ N/m}$  et  $\mu = 0.5$ . (b) Trajectoires en fonction de  $k_3$ , avec  $\mu = 0.5$  et  $\varepsilon = 2.5\%$ .

FIGURE 3.9 – La figure (a) montre le diagramme de coalescence des deux modes en fonction du taux d’amortissement  $\varepsilon$  et la figure (b), représente les trajectoires de la masse pour les deux modes propres en fonction de  $k_3$ .

propres devient positive, entrant ainsi dans la zone rouge. Tant que les modes propres sont situés dans les zones bleues des figures 3.8(a), 3.8(b) et 3.9(a), le système est stable. La figure 3.8(a) a été réalisée en fixant  $\mu = 0.5$  et  $\varepsilon = 2.5\%$ . La figure 3.8(a) montre le couplage puis le découplage des modes qui intervient lorsque  $k_3$  augmente. Il est remarquable que le couplage de modes intervienne avant que la partie réelle de l’un des modes ne devienne positive. Cela met en évidence l’importance de la prise en compte de l’amortissement dans les modèles, car deux modes peuvent se coupler sans que le système soit instable. La figure 3.8(b) a été réalisée en fixant  $k_3 = 23 \times 10^6 \text{ N/m}$  et  $\varepsilon = 2.5\%$ . Elle montre que le système finit par se déstabiliser quand le coefficient de frottement est trop élevé. La figure 3.9(a) a été réalisée en fixant  $k_3 = 23 \times 10^6 \text{ N/m}$  et  $\mu = 0.5$ . Cette figure montre que quand le système est instable, un coefficient d’amortissement suffisamment élevé permet de la stabiliser.

La figure 3.9(b) montre l’évolution des trajectoires des masses correspondant aux deux déformées modales. Les deux modes sont d’abord découplés et ont des mouvements correspondants aux deux directions de l’espace. Ensuite, quand  $k_3$  augmente, ces deux modes se couplent et leur trajectoires deviennent identiques. Le système est instable. Enfin,  $k_3$  dépasse le domaine d’instabilité représenté sur les figures 3.7(a), 3.7(b) et 3.8(a) et les deux modes se découplent. Leurs trajectoires redeviennent différentes. Elles sont également différentes de celles qu’elles avaient avant de traverser le domaine d’instabilité.

**Cas particulier avec  $\alpha_1 = 178^\circ$  et où  $\alpha_2$  varie**

La raideur  $k_3$  a précédemment été considérée comme dépendante de la pression et donc de l'équilibre stationnaire du système. La mise en charge progressive de la plaquette de frein contre le disque fait évoluer les zones principales de contact entre bord d'attaque et bord de fuite. Ainsi, les angles peuvent eux-aussi dépendre de l'équilibre stationnaire du système. Dans cette section, les paramètres choisis sont :  $\alpha_1 = 178^\circ$ ,  $M = 100\text{g}$ ,  $k_1 = 17 \times 10^6\text{N/m}$  et  $k_2 = 15.2 \times 10^6\text{N/m}$ . Ces paramètres ont été utilisés pour produire les figures 3.10 et 3.11.

Les figures 3.10 et 3.11 montrent les surfaces frontière entre domaines stable et instable. Ces surfaces ont été obtenues en faisant varier l'angle  $\alpha_2$  et la raideur  $k_3$ . Les figures 3.10(a) et 3.10(b) ont été produites avec un taux d'amortissement nul,  $\varepsilon = 0\%$ . Il existe deux zones instables quand le coefficient de frottement est fixé à  $\mu = 0.5$ . Remarquons que pour un coefficient de frottement  $\mu = 0.6$ , ces deux zones instables n'en formeraient qu'une seule plus étendue. Lorsque de l'amortissement est apporté au système, la petite zone d'instabilité disparaît, comme en témoignent les figures 3.11(a) et 3.11(b). Ces figures ont été produites avec un taux amortissement  $\varepsilon = 2.5\%$ . Une fois de plus, cet exemple met en évidence l'importance de la prise en compte de l'amortissement dans les modèles.

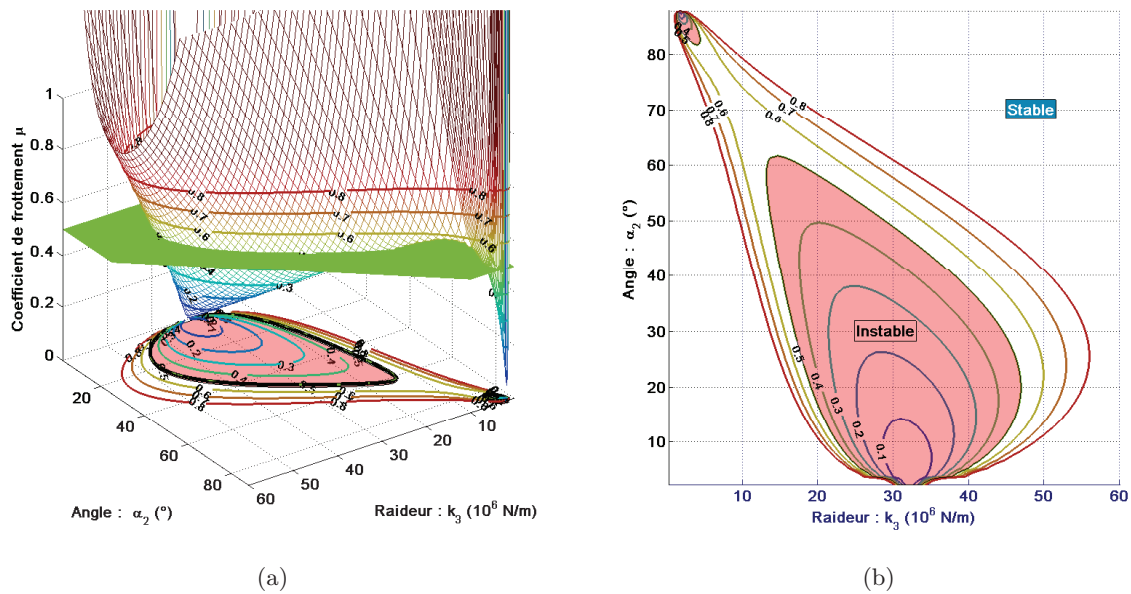


FIGURE 3.10 – Frontière entre domaine stable et domaine instable en fonction des paramètres  $\alpha_2$ ,  $k_3$ , sans amortissement,  $\varepsilon = 0\%$ . La zone d'instabilité est représentée pour le cas  $\mu = 0.5$ .

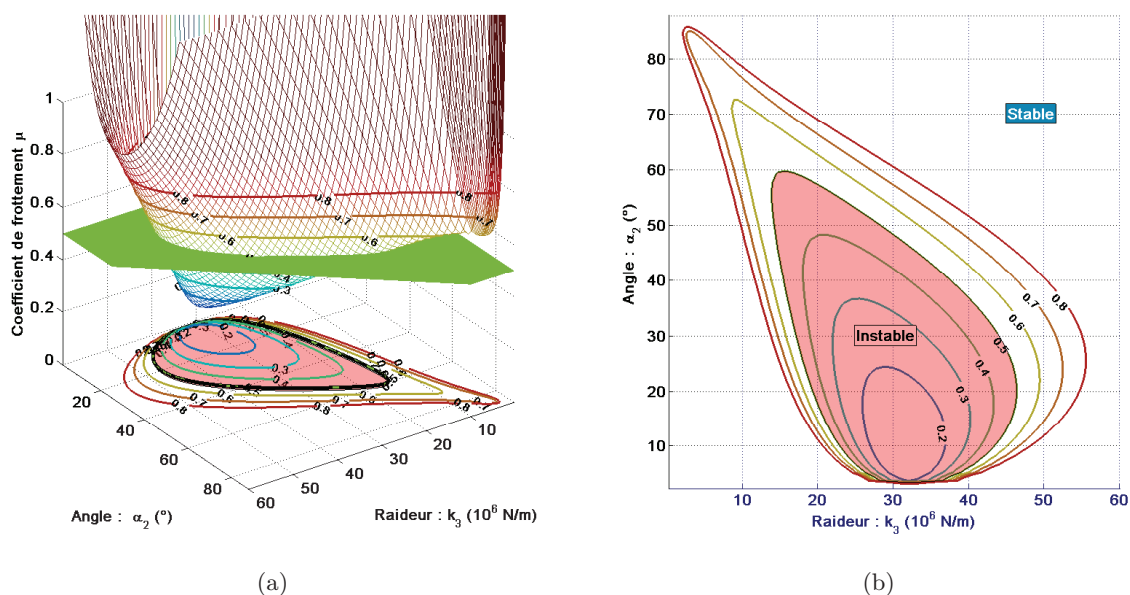


FIGURE 3.11 – Frontière entre domaine stable et domaine instable en fonction des paramètres  $\alpha_2$ ,  $k_3$ , avec amortissement,  $\varepsilon = 2.5\%$ . La zone d’instabilité est représentée pour le cas  $\mu = 0.5$ .

### 3.4 Conclusion

De ces modèles se dégagent plusieurs aspects importants. D’abord, le modèle de basculement a montré les limites de la linéarisation. Bien que non-linéaire à cause de sa cinématique, l’étude des équations linéarisées du modèle de basculement ne permet pas d’exhiber d’instabilités par oscillations divergentes. Il n’y a pas de couplage modal alors qu’il a deux degrés de libertés. La seule instabilité décrite par ce modèle linéarisé est une divergence pure assimilable à de l’arc-boutement. Ensuite, le modèle de Hoffmann a été étudié. Il présente lui-aussi deux degrés de liberté et exhibe deux types d’instabilité. La première est une divergence pure, l’autre est une instabilité par oscillations divergentes qui naît du couplage entre ses modes propres. Le modèle de Hoffmann a permis de mettre en relief quelques assertions que l’on retrouve dans l’étude des systèmes de freinage :

- Un coefficient de frottement élevé déstabilise le système.
- Un taux d’amortissement élevé stabilise le système.
- Des fréquences propres proches l’une de l’autre peuvent déstabiliser le système par couplage modal.

De plus lors de la mise sous pression de la plaquette contre le disque, le système atteint un équilibre stationnaire régit par des équations non-linéaires. En effet, les raideurs de contact entre les pièces sont de types hertziennes. Ainsi, en fonction de la pression et donc de l’équilibre stationnaire, les paramètres angulaires et de raideur du modèle de Hoffmann sont appelés à varier. En considérant que la raideur  $k_3$  augmente avec la pression, le système est amené à traverser le domaine d’instabilité. Cela concorde avec les observations que le crissement n’apparaît que pour certaines pressions. Cette zone d’instabilité est d’autant plus petite que l’amortissement est grand. En considérant que l’angle  $\alpha_2$  dépend lui aussi de l’équilibre stationnaire, nous avons

montré qu'il existe parfois plusieurs zones d'instabilités. Encore une fois, ces zones se réduisent quand l'amortissement augmente. Le fait remarquable à retenir, est qu'il est facile de surestimer les domaines d'instabilité lorsque l'on étudie un modèle purement élastique. L'amortissement des matériaux génère des cas où le couplage modal a lieu sans déstabiliser le système. En effet, le système qui était instable en première approche pour certains jeu de paramètres s'est finalement avéré être stable une fois que l'amortissement a été pris en compte. Ainsi, modéliser l'amortissement des matériaux permet de restreindre l'étendue des domaines d'instabilité du système.

A l'heure actuelle, la viscoélasticité, qui rend les matériaux amortissants, n'est pas prise en compte dans les modèles éléments finis des systèmes de freinage. Or les matériaux viscoélastiques sont abondamment utilisés par les industriels. De ce fait, leurs modèles ne sont pas très prédictifs et beaucoup de modes propres sont considérés à tort comme étant instables. L'enjeu principal de ma thèse est d'améliorer la prédiction des analyses aux valeurs propres complexes en mettant en place un modèle de viscoélasticité dans les modèles éléments finis. Pour cela, il est avant tout nécessaire de caractériser le comportement des matériaux viscoélastiques par des essais.

### Bibliographie du chapitre 3

- [1] N. M. Kinkaid, O. M. O'Reilly, and P. Papadopoulos, "Automotive disc brake squeal," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 267, no. 1, pp. 105 – 166, 2003.
- [2] A. J. McMillan, "A non-linear friction model for self-excited vibrations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 205, no. 3, pp. 323 – 335, 1997.
- [3] N. Hinrichs, M. Oestreich, and K. Popp, "Dynamics of oscillators with impact and friction," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 8, no. 4, pp. 535 – 558, 1997. Nonlinearities in Mechanical Engineering.
- [4] N. Hinrichs, M. Oestreich, and K. Popp, "On the modelling of friction oscillators," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 216, no. 3, pp. 435 – 459, 1998.
- [5] J. J. Thomsen and A. Fidlin, "Analytical approximations for stick-slip vibration amplitudes," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 38, no. 3, pp. 389 – 403, 2003.
- [6] H. Hetzler, D. Schwarzer, and W. Seemann, "Analytical investigation of steady-state stability and hopf-bifurcations occurring in sliding friction oscillators with application to low-frequency disc brake noise," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 12, no. 1, pp. 83 – 99, 2007.
- [7] J. L. Swayze and A. Akay, "Effects of system dynamics on friction-induced oscillations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 173, no. 5, pp. 599 – 609, 1994.
- [8] D. P. Hess and M. W. Al-Grafi, "Stability of a slider with hemispherical legs in plane contacting a flat surface," *Applied Acoustics*, vol. 49, no. 2, pp. 163 – 177, 1996.
- [9] K. Shin, M. J. Brennan, J. E. Oh, and C. J. Harris, "Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 254, no. 5, pp. 837 – 848, 2002.



- 
- [10] M. Paliwal, A. Mahajan, J. Don, T. Chu, and P. Filip, “Noise and vibration analysis of a disc-brake system using a stick-slip friction model involving coupling stiffness,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 282, no. 3-5, pp. 1273 – 1284, 2005.
- [11] N. Hoffmann, M. Fischer, R. Allgaier, and L. Gaul, “A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations,” *Mechanics Research Communications*, vol. 29, no. 4, pp. 197 – 205, 2002.
- [12] N. Hoffmann and L. Gaul, “Non-conservative beating in sliding friction affected systems : transient amplification of vibrational energy and a technique to determine optimal initial conditions,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 18, no. 3, pp. 611 – 623, 2004.
- [13] J. J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel, “Analysis of friction and instability by the centre manifold theory for a non-linear sprag-slip model,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 265, no. 3, pp. 527 – 559, 2003.
- [14] J. J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel, “Center manifold and multivariable approximants applied to non-linear stability analysis,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 38, no. 9, pp. 1421 – 1442, 2003.
- [15] J.-J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel, “Extension of the center manifold approach, using rational fractional approximants, applied to non-linear stability analysis,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 33, no. 3, pp. 267 – 282, 2003.
- [16] J. J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel, “Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 11, no. 3, pp. 257 – 344, 2004.
- [17] S. Lignon, J.-J. Sinou, and L. Jézéquel, “Stability analysis and  $\mu$ -synthesis control of brake systems,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 298, no. 4-5, pp. 1073 – 1087, 2006.
- [18] V. Pilipchuk and C. Tan, “Creep-slip capture as a possible source of squeal during decelerated sliding,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 35, no. 3, pp. 259 – 285, 2004.
- [19] N. Kinkaid, O. O’Reilly, and P. Papadopoulos, “On the transient dynamics of a multi-degree-of-freedom friction oscillator : a new mechanism for disc brake noise,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 287, no. 4-5, pp. 901 – 917, 2005.
- [20] J. Slavic, M. D. Bryant, and M. Boltezar, “A new approach to roughness-induced vibrations on a slider,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 306, no. 3-5, pp. 732 – 750, 2007.
- [21] H. Ouyang, L. Baeza, and S. Hu, “A receptance-based method for predicting latent roots and critical points in friction-induced vibration problems of asymmetric systems,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 321, no. 3-5, pp. 1058 – 1068, 2009.
- [22] H. Ouyang, J. E. Mottershead, M. P. Cartmell, and M. I. Friswell, “Friction-induced parametric resonances in discs : effect of a negative friction-velocity relationship,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 209, no. 2, pp. 251 – 264, 1998.
- [23] H. Ouyang, J. E. Mottershead, M. P. Cartmell, and D. J. Brookfield, “Friction-induced vibration of an elastic slider on a vibrating disc,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, no. 3, pp. 325 – 336, 1999.

- [24] H. Ouyang and J. E. Mottershead, “Unstable travelling waves in the friction-induced vibration of discs,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 248, no. 4, pp. 768 – 779, 2001.
- [25] H. Ouyang, Y. Gu, and H. Yang, “A dynamic model for a disc excited by vertically misaligned, rotating, frictional sliders,” *Acta Mechanica Sinica*, vol. 20, no. 4, pp. 418 – 425, 2004.
- [26] D. Stancioiu, H. Ouyang, and J. E. Mottershead, “Vibration of a beam excited by a moving oscillator considering separation and reattachment,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, no. 4-5, pp. 1128 – 1140, 2008.
- [27] J. Heilig and J. Wauer, “Stability of a nonlinear brake system at high operating speeds,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 34, no. 3, pp. 235–247, 2003.
- [28] J. Flint and J. Hultén, “Lining-deformation-induced modal coupling as squeal generator in a distributed parameter disc brake model,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 254, no. 1, pp. 1 – 21, 2002.
- [29] O. Giannini and A. Sestieri, “Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 296, no. 3, pp. 583 – 601, 2006.
- [30] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, “Dynamic instability of a thin circular plate with friction interface and its application to disc brake squeal,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 316, no. 1-5, pp. 164 – 179, 2008.
- [31] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, “Analytical formulation of mode-coupling instability in disc-pad coupled system,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 51, no. 1, pp. 52 – 63, 2009.
- [32] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, “Comprehensive stability analysis of disc brake vibrations including gyroscopic, negative friction slope and mode-coupling mechanisms,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 324, no. 1-2, pp. 387 – 407, 2009.
- [33] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, “Oscillation pattern of stick-slip vibrations,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 44, no. 7, pp. 820 – 828, 2009.
- [34] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi, “Wave pattern motion and stick-slip limit cycle oscillation of a disc brake,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 325, no. 3, pp. 552 – 564, 2009.
- [35] U. von Wagner, D. Hochlenert, and P. Hagedorn, “Minimal models for disk brake squeal,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, no. 3, pp. 527 – 539, 2007.
- [36] D. Hochlenert, G. Spelsberg-Korspeter, and P. Hagedorn, “A note on safety-relevant vibrations induced by brake squeal,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 19, pp. 3867 – 3872, 2010.
- [37] D. Hochlenert, “Nonlinear stability analysis of a disk brake model,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 58, pp. 63–73, 2009.



## Chapitre 4

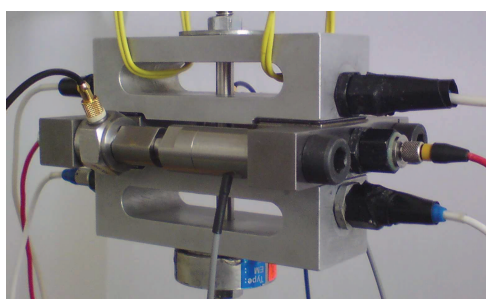
# Caractérisation des matériaux viscoélastiques

### Sommaire

---

<b>4.1 Conception du viscoanalyseur</b> . . . . .	<b>69</b>
4.1.1 Principe de fonctionnement . . . . .	69
4.1.2 Instrumentation . . . . .	71
4.1.3 Choix des actionneurs piézoélectriques . . . . .	71
4.1.4 Conception des supports d'échantillons et des mâchoires . . . . .	74
<b>4.2 Modélisation du banc</b> . . . . .	<b>78</b>
4.2.1 Modélisation des mâchoires . . . . .	79
4.2.2 Modélisation des chaînes d'actionnement . . . . .	79
4.2.3 Equations de post-traitement . . . . .	80
<b>4.3 Protocole d'essai</b> . . . . .	<b>82</b>
<b>4.4 Quelques résultats de caractérisation</b> . . . . .	<b>84</b>
4.4.1 Répétabilité . . . . .	84
4.4.2 Caractérisation d'un shim . . . . .	85
<b>4.5 Conclusion et perspectives</b> . . . . .	<b>88</b>
<b>Bibliographie du chapitre 4</b> . . . . .	<b>88</b>

---



### Résumé

---

Ce chapitre présente la conception d'un banc d'essai permettant la caractérisation en cisaillement de matériaux viscoélastiques. Sa limite fréquentielle de caractérisation est de 3600Hz sans utiliser les équivalences temps-température. Ce banc a servi à caractériser des matériaux amortissants collés au dos des plaquettes de frein.

---

Les matériaux viscoélastiques présents dans les freins à disque sont divers. La fonte qui est le constituant principal du frein présente un taux d'amortissement inférieur à 2%. Son comportement peut être convenablement modélisé par de l'amortissement structurel. Les garnitures des plaquettes de frein sont composées de poudres de divers matériaux, dont des fils de cuivre et du caoutchouc, amalgamées par frittage. Ce procédé de fabrication les rend quasi-isotropes transverses, non-linéaire par rapport aux contraintes et viscoélastiques. Les shims<sup>1</sup> sont les matériaux les plus viscoélastiques au sein des systèmes de freinage. Ils sont placés au dos des plaquettes de frein de manière à amortir les vibrations de cisaillement entre la plaquette et l'étrier. On peut supposer que le comportement des shims en flexion est principalement régi par leurs couches métalliques, mais on peut difficilement évaluer leur comportement sous charge normale ou en cisaillement.

Pour améliorer les modèles EF des systèmes de freinage, il est nécessaire de connaître les comportements viscoélastiques de ces matériaux sur la bande fréquentielle du crissement qui s'étend de 1 à 10kHz. Pour cela, il existe plusieurs méthodes de caractérisation. Oberst et Frankenfeld [1] ont proposé d'étudier le premier mode d'une poutre sandwich composée de peaux en métal et d'une âme viscoélastique. Leur méthode permet de connaître l'amortissement induit par l'âme viscoélastique à la fréquence du mode. Plusieurs auteurs utilisent ce genre de technique pour l'identification de paramètres viscoélastiques, citons Barbosa et Farage [2] et Castello et al. [3]. Il est également possible de déduire les propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique à partir de la mesure des différentes fréquences propres d'un échantillon ayant une forme simple, une poutre par exemple, voir Chevalier [4]. Ces méthodes s'apparentent au recalage des propriétés mécaniques à partir de Fonction de Réponse en Fréquence (FRF). Ce type de méthodes permet uniquement la caractérisation aux fréquences des modes propres et non sur une large bande fréquentielle. De plus ces méthodes ne sont valides que sous l'hypothèse de matériaux linéaires en amplitude d'excitation. Chen [5] a proposé de mesurer directement les fonctions de relaxation et de fluage pour en déduire les coefficients d'une série de Prony. Or, il est difficile d'imposer un échelon de déplacement parfait, ainsi cette méthode, qui donne accès au comportement sur une large bande fréquentielle, n'est précise qu'aux basses fréquences.

Pour la caractérisation des matériaux viscoélastiques, les viscoanalyseurs sont les outils les plus adaptés. Ils permettent de mesurer la contrainte et la déformation des matériaux et donc de calculer la rigidité dynamique des échantillons en fonction de la fréquence. Les viscoanalyseurs fonctionnent en quasi-statique, c'est-à-dire à des fréquences inférieures au premier mode propre du banc. Le LISMMA<sup>2</sup>, dispose d'un banc hydraulique (MTS), voir annexe B.1, qui permet de caractériser les matériaux jusqu'à 200Hz. Actuellement, les viscoanalyseurs les plus performants permettent une caractérisation directe<sup>3</sup> jusqu'à environ 1000Hz, c'est-à-dire à des fréquences inférieures à la bande fréquentielle d'intérêt. Il est donc nécessaire de multiplier les moyens d'essai pour cerner le comportement des matériaux.

Les garnitures, qui sont quasi-isotropes transverse, ont une matrice de rigidité symétrique composée de six coefficients indépendants, voir l'annexe B.2 et l'article de Chevalier [6]. Ainsi, la connaissance de ces six coefficients sur la bande fréquentielle du crissement est nécessaire

---

1. Les shims sont des matériaux multicouches composés de couches de caoutchouc, de métal et de colle. Ils sont collés au dos des plaquettes de frein. En fonctionnement, ils sont pris en sandwich entre la plaquette et l'étrier ou entre la plaquette et le piston.

2. LISMMA = Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Mécaniques et des MATériaux.

3. Sans faire appel aux équivalences fréquence/température.

pour décrire le comportement de ces matériaux. Actuellement, le comportement des garnitures peut être caractérisé par divers moyens d'essai. Premièrement, des essais de compression statique fournissent rapidement deux des six valeurs de la matrice de rigidité autour de 0.1Hz. Ensuite, grâce à un banc d'essai analogue à une barre de Hopkinson, il est possible de mesurer le module d'Young de la garniture dans la direction normale au disque à la fréquence de 3800Hz. Ensuite, par propagation d'ondes ultrasonores, il est possible de mesurer cinq des six coefficients de la matrice de rigidité à des fréquences situées autour du MHz. Cette technique est détaillée en annexe B.2 et dans l'article de Chevalier [6]. Enfin, le recalage des fréquences des modes propres d'une plaquette libre-libre à partir des FRF mesurées expérimentalement donne accès aux amortissements modaux et donc au taux d'amortissement de la garniture. Ces moyens d'essai permettent de connaître les modules de rigidité dynamique à des fréquences bien précises, toutefois ils ne donnent pas tous accès aux valeurs d'amortissement. Ainsi, la connaissance du comportement des garnitures est partielle.

Le comportement des shims est à l'heure actuelle quasiment inconnu. Les shims étant destinés à amortir les modes de cisaillement, la priorité est donc de caractériser leur comportement en cisaillement entre 1 et 10 kHz. Ces matériaux sont très amortissants, ce qui rend difficile la méthode de recalage à partir de FRF. Des shims ont été testés en cisaillement sur le banc hydraulique jusqu'à 200Hz, voir annexe B.1. Ces shims se sont avérés fortement viscoélastiques, laissant ainsi supposer que leur comportement à 200Hz est différent de celui dans la bande fréquentielle du crissement. C'est pourquoi nous avons conçu un nouveau viscoanalyseur permettant de caractériser le module de cisaillement des shims sur une bande fréquentielle couvrant partiellement celle du crissement.

## 4.1 Conception du viscoanalyseur

Le viscoanalyseur doit permettre de caractériser le module dynamique de cisaillement des shims sous précharge normale et dans la bande fréquentielle du crissement, soit de 1 à 10 kHz. En pratique, cette bande fréquentielle est limitée par la fréquence du premier mode propre du viscoanalyseur et la bande fréquentielle visée va de 100Hz à environ 5000Hz. La précharge normale maximale que devra imposer le viscoanalyseur est 4MPa<sup>4</sup>. Cette valeur correspond à ce que subit un shim lors d'un freinage normal. De plus cette précharge devra être uniformément répartie sur la surface des échantillons.

### 4.1.1 Principe de fonctionnement

Pour satisfaire ces contraintes, la solution du montage à quatre échantillons a été retenue, voir la figure 4.1. Elle avait été utilisée lors des essais sur le vérin hydraulique, voir la figure B.1(a) de l'annexe B.1. Les échantillons de shims sont pincés entre les mâchoires et les supports d'échantillons. Ce type de montage est symétrique et permet de solliciter les échantillons en cisaillement pur sans flexion. L'autre avantage de ce montage symétrique est de n'appliquer la précharge normale qu'en seul endroit, ce qui facilite sa mesure. La précharge est appliquée grâce un boulon M6 et la force est limitée à 5000N afin de ne pas plastifier les mâchoires. La taille des échantillons

---

4. Dans les système de freinage, la surface du piston du côté de l'huile est plus grande que la surface en appui sur le shim. En conséquence, lors d'un freinage d'urgence, la pression d'huile qui est de 3MPa, correspond à une pression sur le shim d'environ 10MPa. Ainsi une pression sur les shims de 4MPa correspond à un freinage normal.

est choisie en conséquence pour assurer une pression de 4MPa. Les dimensions des échantillons sont de 20\*30mm, ainsi pour un effort de 5000N réparti sur deux échantillons, la pression vaut :  $P = 4.17 \text{ MPa}$ .

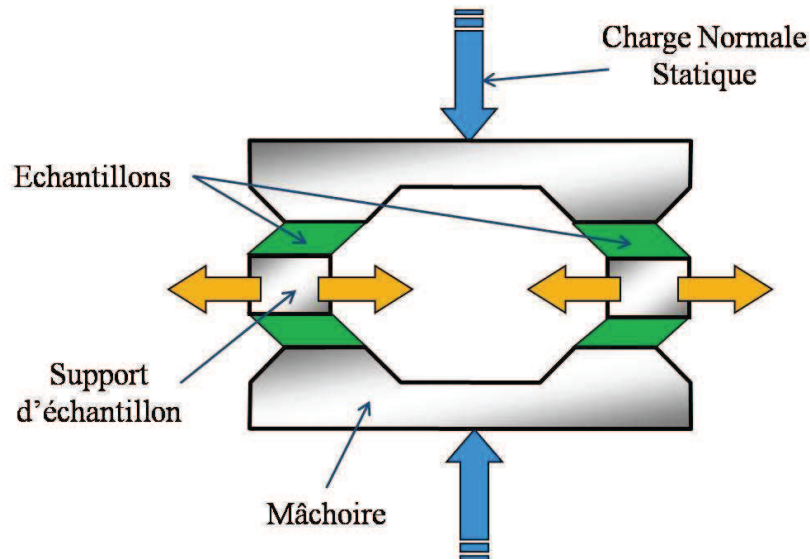


FIGURE 4.1 – Schéma de principe du fonctionnement du banc d'essai de cisaillement.

Le cisaillement des échantillons est obtenu en déplaçant les supports en opposition de phase. Pour cela, deux chaînes d'actionnement sont placées entre les supports. Elles sont constituées d'un actionneur piézoélectrique, d'un raccord et d'un capteur de force. Les actionneurs piézoélectriques permettent d'atteindre des fréquences élevées supérieures à 10kHz. La limite fréquentielle de caractérisation du viscoanalyseur est imposée par son premier mode propre, qui doit apparaître à une fréquence la plus élevée possible. En conséquence, le viscoanalyseur est suspendu par des élastiques pour le découpler des modes propres du bâti.

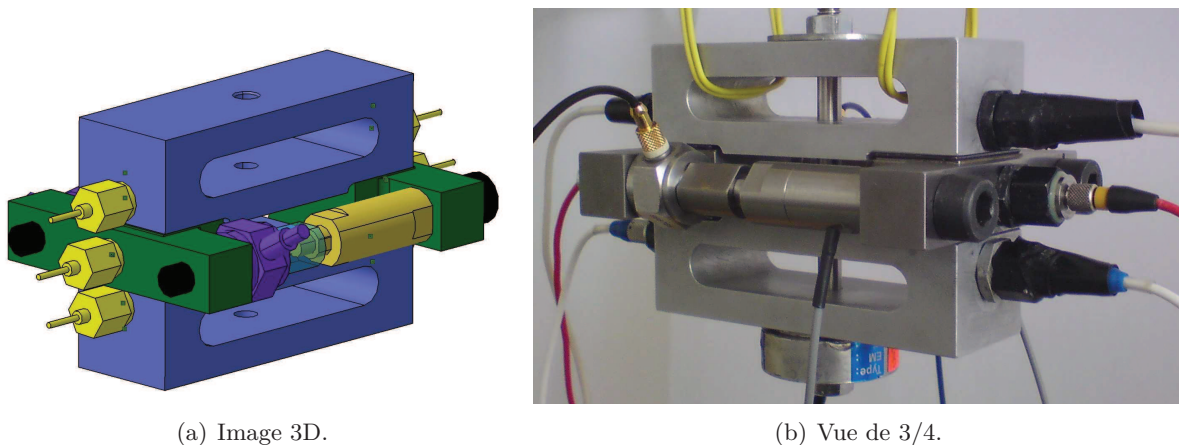


FIGURE 4.2 – Vues du banc d'essai de cisaillement. Ce viscoanalyseur permet de caractériser les matériaux entre 100 et 3600Hz.

### 4.1.2 Instrumentation

Les figures 4.2 et 4.3 présentent une image 3D et les photos du viscoanalyseur que nous avons réalisé. La conception des supports d'échantillons et des mâchoires est détaillée dans la section 4.1.4.

L'effort de précharge est mesurée par un capteur à jauge d'extensométrie, TME F402C, situé sous la mâchoire du bas dans les photos des figures 4.2 et 4.3. La forme annulaire de ce capteur permet passer le boulon M6 à travers lui. L'excitation dynamique des supports est assurée par des actionneurs piézoélectriques, PI 842.10. Le choix de ces actionneurs est discuté dans la section 4.1.3 suivante. Les efforts dynamiques sont mesurés par des capteurs de force, B&K 8200, placés entre les supports et les raccords.

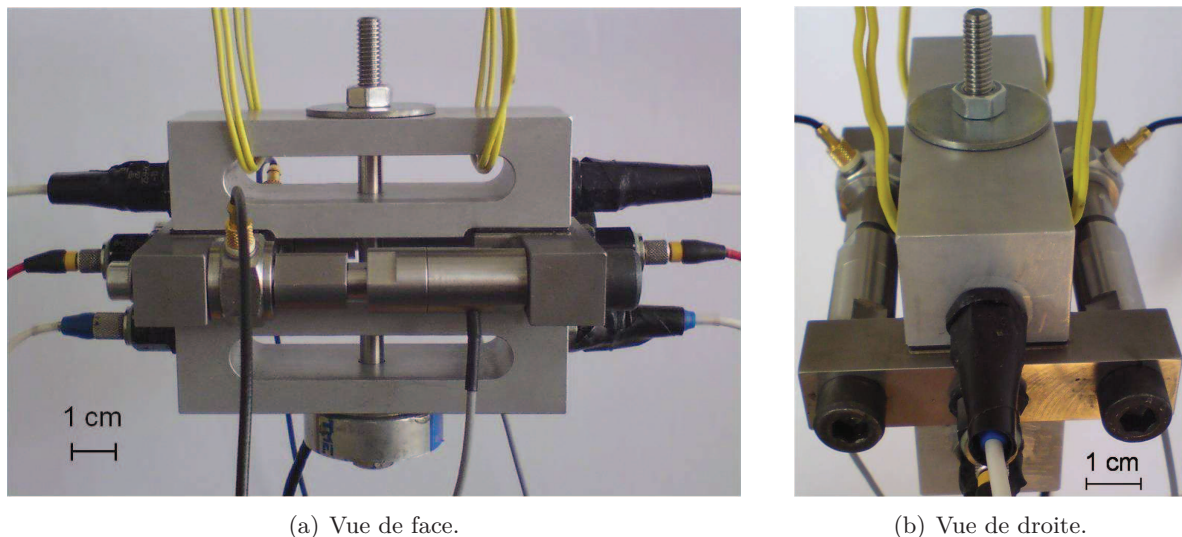


FIGURE 4.3 – Vues du banc d'essai de cisaillement. Ce viscoanalyseur permet de caractériser les matériaux entre 100 et 3600Hz.

Six accéléromètres piézoélectriques, de la marque Endevco, sont placés sur les faces des mâchoires et des supports. Ils permettent de mesurer les accélérations de part et d'autres des quatre échantillons. Ainsi, après une double intégration temporelle, il est possible de calculer l'élongation de chacun des échantillons. L'utilisation d'accéléromètres permet d'assurer une bonne précision de mesure à haute fréquence pour de faibles déplacements.

### 4.1.3 Choix des actionneurs piézoélectriques

Les actionneurs piézoélectriques ont été retenus pour l'excitation des échantillons car ils sont compacts, légers et utilisables jusqu'à des fréquences supérieures à celles de la bande fréquentielle du crissement de frein. Pour alimenter les actionneurs piézoélectriques, le contrôleur LVPZT-Amplifier E-501 00 X de la marque PI a été utilisé. Il sert à amplifier les signaux provenant d'un générateur Agilent 33220A. L'ensemble générateur de signaux et contrôleur permet d'imposer aux actionneurs une tension dynamique évoluant entre -20V et 120V. Le catalogue CEDRAT [7] donne l'équation de comportement des actionneurs en quasi-statique, voir l'équation (4.1) avec  $\delta X$  l'élongation de l'actionneur,  $N$  le facteur de force,  $\delta V$  la tension,  $F$  l'effort



fournit par l'actionneur et  $K$  sa raideur. Les tensions négatives seront évitées car les actionneurs piézoélectriques précontraints cassent lorsqu'ils dépassent certaines valeurs de traction.

$$\delta X = (N\delta V - F)/K \quad (4.1)$$

En régime nominal, le contrôleur LVPZT-Amplifier E-501 00 X fournit 30W en régime nominal et jusqu'à 200W en pics de puissance qui ne peuvent être maintenus que pendant 5ms. Le catalogue de CEDRAT [7], donne l'équation du courant requis pour l'alimentation d'un actionneur piézoélectrique en dynamique. Cela permet de calculer la puissance  $Q$  requise, voir l'équation (4.2), avec  $f$  la fréquence,  $C$  la capacité des actionneurs et  $V_p$  l'amplitude de tension sinusoïdale.

$$Q = 2\pi f C V_p^2 \quad (4.2)$$

L'équation (4.2) montre que pour une puissance donnée, des actionneurs de faible capacité permettent une excitation à fréquence plus élevée. Les actionneurs PI sont très fragiles vis-à-vis des contraintes de torsion et de cisaillement, ce qui pose des problèmes de manipulation, notamment lors de leur montage. Les actionneurs CEDRAT sont plus robustes mais également plus chers. Le tableau 4.1 résume les caractéristiques de quelques actionneurs piézoélectriques. Le but est de trouver l'actionneur qui réalise le meilleur compromis entre une capacité  $C$  faible, un grand débattement  $\delta X$  et une grande amplitude de force de traction / compression. Les trois actionneurs retenus sont le P842.10 de PI, le PPA20M et le PPA40M de CEDRAT. Ces trois actionneurs permettent de pousser jusqu'à 800N. Afin de solliciter plus fortement les échantillons de shim, deux actionneurs sont utilisés en parallèle. Ils sont branchés également en parallèle de manière électrique, ce qui conduit à une capacité équivalente qui est la somme de celle de chaque actionneur.

référence	$\delta V$ (V)	$\delta X$ ( $\mu m$ )	K ( $N/\mu m$ )	push / pull (N)	C ( $\mu F$ )	M (g)	L (mm)
P 842 10	0 à 100	0 à 15	57	800/300	1.5	31	37
P 844 10	0 à 100	0 à 15	225	3000/700	6	84	47
PPA 10 M	-20 à 150	0 à 8	100	800/400	0.7	6	18
PPA 20 M	-20 à 150	0 à 20	40	800/400	1.4	12	28
PPA 40 M	-20 à 150	0 à 40	20	800/400	2.7	25	48
PPA 40 L	-20 à 150	0 à 40	87.5	3500/NC <sup>5</sup>	13.3	92	57
PPA 60 L	-20 à 150	0 à 60	58.3	3500/NC	20	117	77
PPA 80 L	-20 à 150	0 à 80	43.8	3500/NC	26.6	142	97

TABLE 4.1 – Caractéristiques de quelques actuateurs piézoélectriques

Pour déterminer l'actionneur le plus adapté, il faut étudier leur point de fonctionnement. Chaque support comprend deux échantillons et est poussé par deux actionneurs, voir les figures 4.2 et 4.3. Ainsi, du point de vue d'un échantillon, l'effort subi est celui d'un seul actionneur et le déplacement imposé vaut la moitié de celui d'un actionneur. L'équation (4.1) permet de tracer les courbes d'effort / déplacement des trois actionneurs. Elles sont représentées sur la figure 4.4, en noir pour le P842.10, en rouge pour le PPA20M et en bleu pour le PPA40M. Ces trois courbes en traits pleins représentent les données du catalogue. L'équation (4.2) permet de prendre en compte la limite en puissance du contrôleur LVPZT lorsque la fréquence imposée augmente afin de tracer les courbes d'effort / déplacement à 800Hz, en traits pointillés, et à

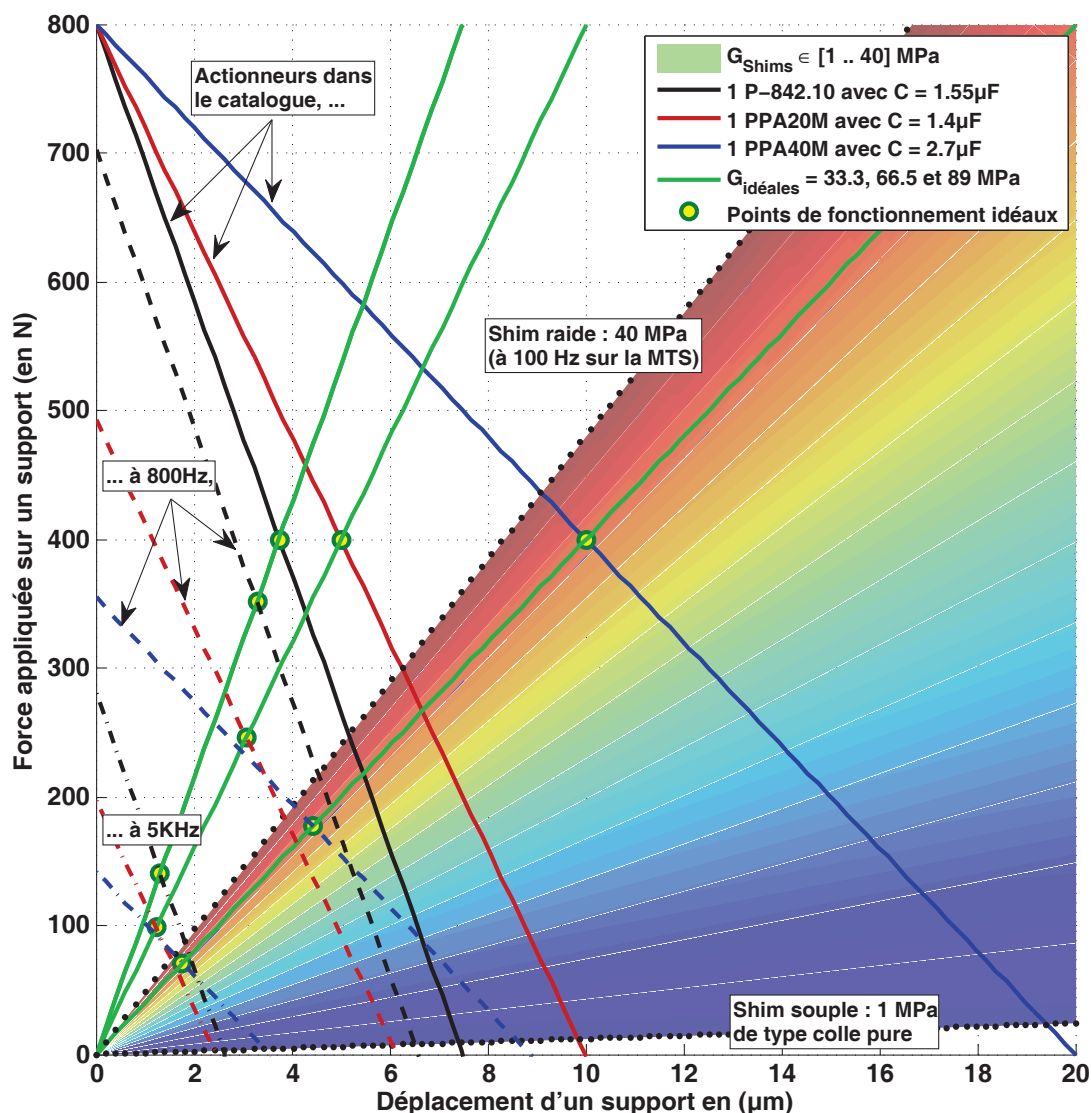


FIGURE 4.4 – Points de fonctionnement du montage à 2 actionneurs et 4 échantillons du point de vue d’un support (la moitié du déplacement) avec un contrôleur fournissant  $Q = 30 \text{ W}$

5000Hz, en traits discontinus. Chaque actionneur a un point de fonctionnement idéal symbolisé par un point jaune. Ainsi, il existe pour chaque actionneur une raideur de shim idéale, représentée par un trait vert, pour laquelle cet actionneur est le plus adapté.

Les essais effectués sur le banc hydraulique, voir annexe B.1, montre que le module de cisaillement des shims est susceptible d’évoluer de 1MPa à 40MPa. Cette gamme de modules est représentée en arc-en-ciel sur la figure 4.4. En tenant compte du fait que les essais réalisés sur le banc hydraulique ont été effectués à des fréquences inférieures à 200Hz et que les matériaux viscoélastiques rigidifient quand la fréquence augmente, la gamme de modules des shims s’étendra au-delà de 40MPa pour des fréquences supérieures à 200Hz.

La figure 4.4 montre que le PPA20M est moins performant que les deux autres actionneurs pour des fréquences élevées. L'actionneur que nous avons finalement retenu est le P842.10 de PI car sa capacité est plus faible que le PPA40M. Ainsi, il permet d'exercer plus de force sur les shims raides. De plus il est moins cher. L'équation (4.2) permet de calculer la fréquence de coupure dans le cas de deux actionneur PI P842.10 branchés en parallèle et alimentés à pleine charge, c'est-à-dire avec  $V_p = 50V$  :  $f = Q/(2\pi CV_p^2) \simeq 637Hz$ . Au delà de 637Hz, le contrôleur n'est pas assez puissant et la tension d'alimentation doit être baissée.

#### 4.1.4 Conception des supports d'échantillons et des mâchoires

La limite fréquentielle de caractérisation du viscoanalyseur est imposée par son premier mode propre, qui doit apparaître à une fréquence la plus élevée possible. Pour cela, le viscoanalyseur doit être compact et rigide. La taille des mâchoires dépend de la longueur de l'ensemble supports, actionneurs et capteurs de force. La figure 4.5 représente la géométrie retenue pour les supports d'échantillons. Elle permet de rapprocher les surfaces fonctionnelles où seront collés les échantillons de shims et donc de réduire la longueur des mâchoires.

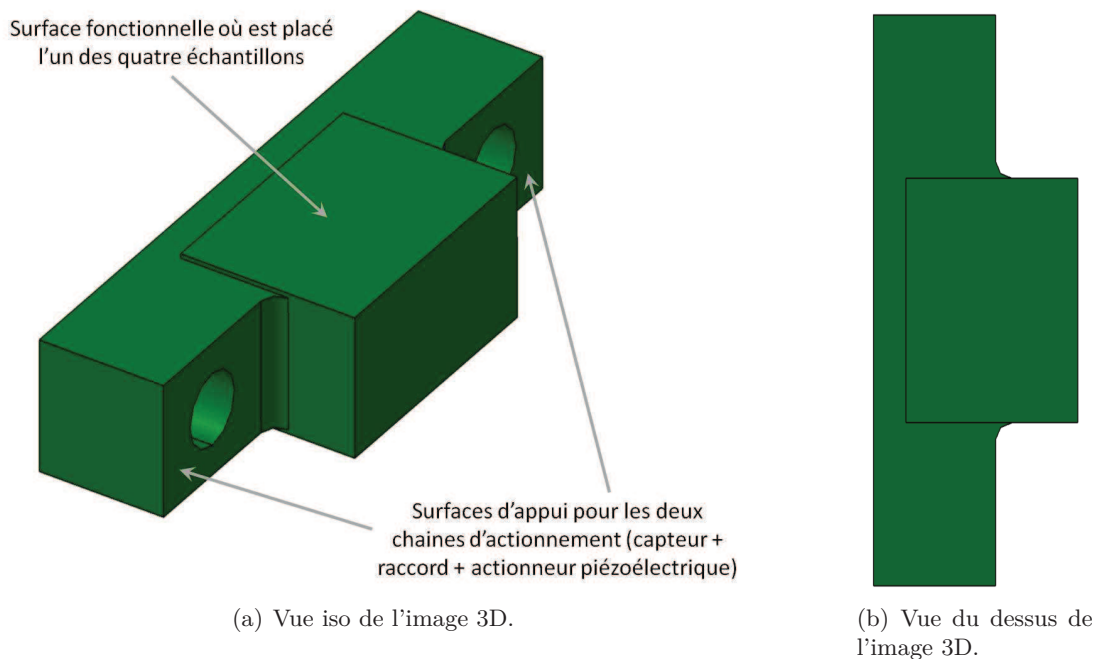


FIGURE 4.5 – Supports d'échantillons.

Les mâchoires doivent permettre d'appliquer une précharge uniformément répartie sur la surface des échantillons. De plus, leur premier mode propre libre-libre doit apparaître au-delà de 5000Hz pour ne pas limiter la bande fréquentielle de caractérisation. Enfin, les mâchoires doivent découpler les efforts normaux et tangentiels afin que les efforts de cisaillement des échantillons n'impactent pas l'effort de précharge normale.

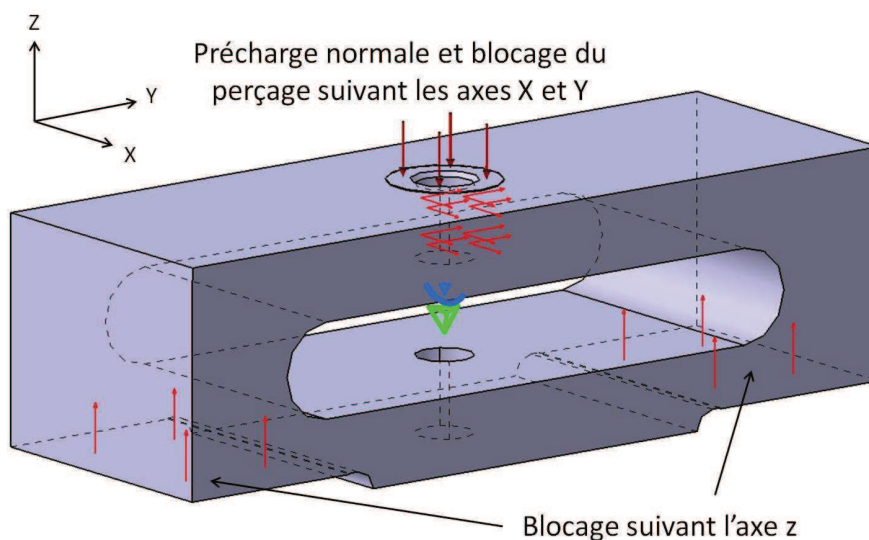


FIGURE 4.6 – Conditions aux limites appliquées sur la mâchoire pour l'étude de la déformée statique sous charge normale.

Le respect de ces contraintes est vérifié par des analyses statiques et dynamiques par élément finis sous CATIA. La mâchoire est maillée par des éléments TET10, c'est-à-dire des tétraèdres quadratiques. La distance moyenne entre deux noeuds est 2mm. La mâchoire est en aluminium avec pour propriétés mécaniques, le module d'Young  $E = 70\text{GPa}$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0.34$ , la masse volumique  $\rho = 2710\text{kg/m}^3$ . La limite d'élasticité de l'aluminium utilisé est estimée à  $\sigma_e = 180\text{MPa}$ .

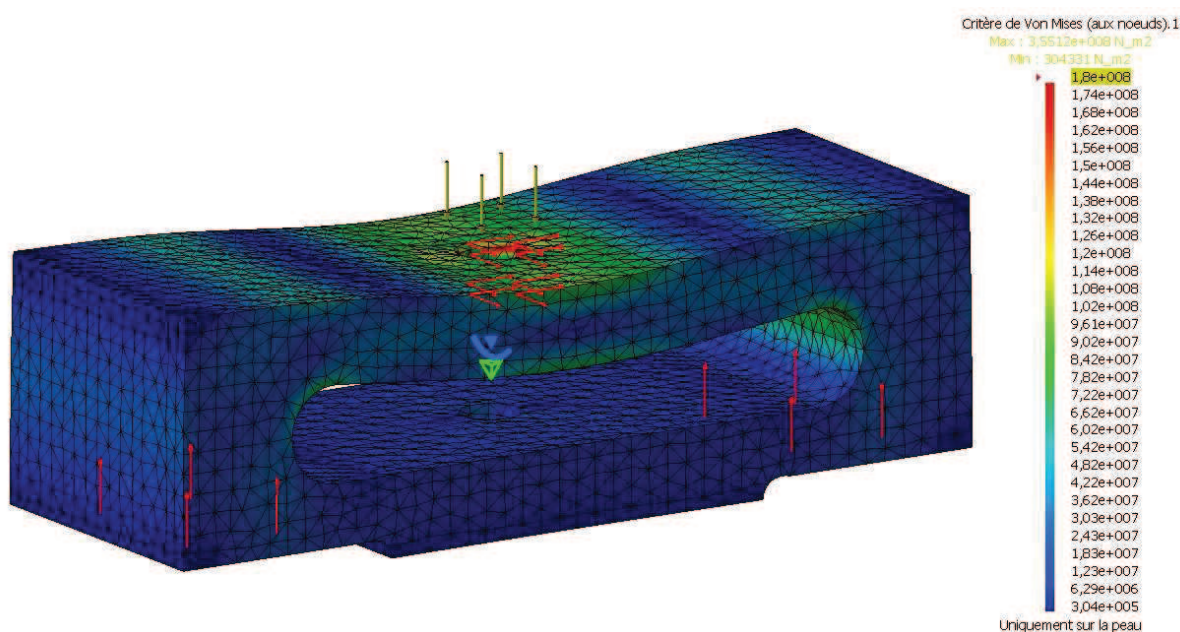


FIGURE 4.7 – Contraintes de Von Mises sur la mâchoire sous 5000N de charge normale

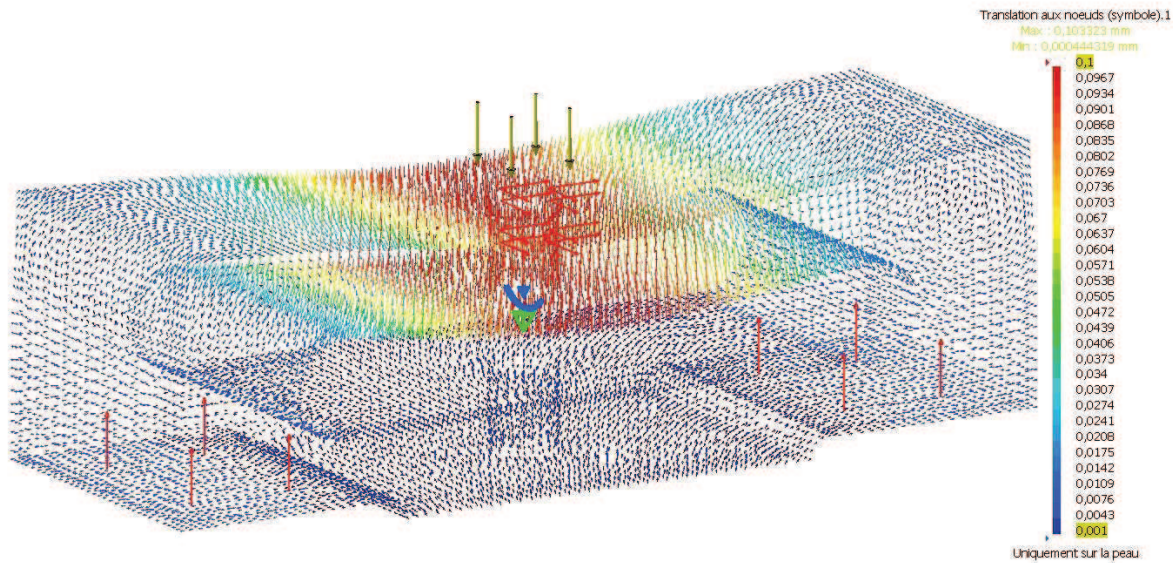


FIGURE 4.8 – Déplacements des points de la mâchoire sous 5000N de charge normale

La forme retenue est un parallélépipède rectangle percé d'un trou oblong, voir la figure 4.6. Cette géométrie permet de répondre à toutes les contraintes de conception. Pour cela il faut dimensionner les épaisseurs des quatre côtés. La figure 4.6 montre les conditions aux limites utilisées pour les calculs statiques : les surfaces fonctionnelles sont bloquées dans le sens normal et l'intérieur du trou supérieur est bloqué dans les directions tangentielle et radiale. Cette figure montre également le chargement normal appliqué : il s'agit de 5000N uniformément répartis sur un anneau autour du trou supérieur.

La première épaisseur à dimensionner est celle de la poutre en haut du rectangle. Elle doit résister aux efforts de flexion dus à la charge normale. La figure 4.7 montre que sous 5000N de charge normale, la contrainte maximale de von Mises ne dépasse pas la limite d'élasticité de 180MPa. La poutre du bas sert à assurer le découplage entre les efforts normaux et tangentiels, elle retient les surfaces fonctionnelles qui ont tendance à suivre le mouvement de flexion de la poutre du haut lorsque la mâchoire est préchargée. La poutre du bas doit être suffisamment épaisse. La figure 4.8 montre que lorsque la précharge maximale est appliquée sur le système, les déplacements tangentiels statiques des surfaces fonctionnelles restent de l'ordre du micron. Ainsi, le découplage entre les directions normales et tangentielles est assuré.

Les épaisseurs et les longueurs des côtés gauche et droit sont très importantes. Les côtés sont dimensionnés pour fléchir de manière à compenser exactement la flexion de la poutre du haut. De cette façon il est possible d'assurer que les surfaces fonctionnelles, des mâchoires sous chargement, restent parallèle aux supports et répartissent correctement la charge sur les échantillons. La figure 4.9 permet de visualiser la répartition des contraintes principales au niveau des surfaces fonctionnelles. La charge n'est pas répartie de manière uniforme mais de manière symétrique. Le maximum de pression se situe au milieu des surfaces fonctionnelles et la pression décroît quand on s'éloigne du centre. Sachant qu'il est très difficile d'obtenir une pression uniforme sur toute une surface et considérant la symétrie de la répartition de la charge, nous considérerons que la précharge est assez bien répartie sur la surface des échantillons.

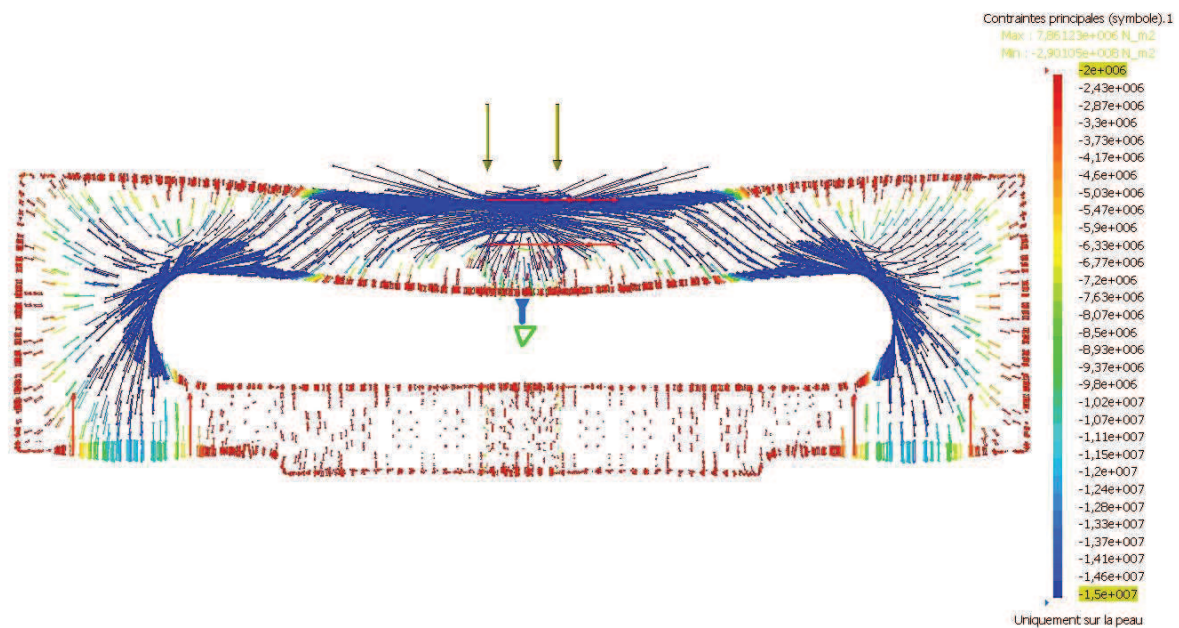


FIGURE 4.9 – Contraintes principales de la mâchoire sous 5000N de charge normale

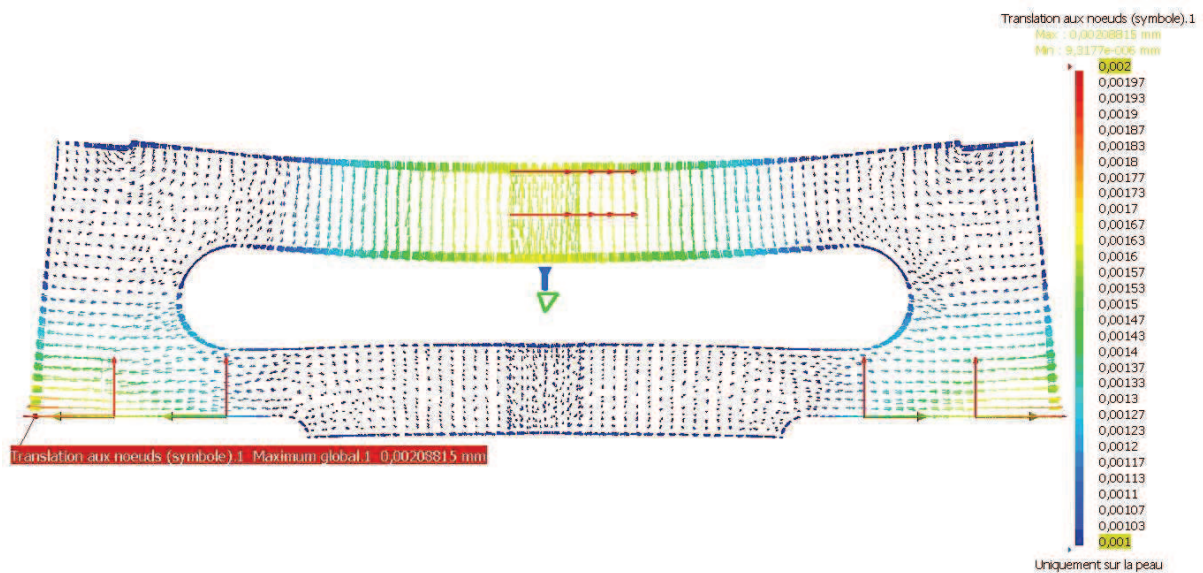


FIGURE 4.10 – Déplacements de la mâchoire sous 800N de cisaillement

Lors du cisaillement des échantillons, les mâchoires ne doivent presque pas se déformer par rapport aux échantillons. Pour cela, il faut que la raideur d'une mâchoire soit plus grande que la raideur de deux échantillons de shim en série. Les shims les plus raides ont un module de cisaillement d'environ  $G = 40\text{MPa}$ , ainsi la raideur de deux shims<sup>6</sup> en série vaut

6. Ici l'épaisseur des shims est de  $h = 1\text{mm}$ .

$K = GS/(2h) = 12 \times 10^6 \text{N/m}$ . Pour calculer la raideur des mâchoires en cisaillement, un calcul statique est mené sur le modèle EF. Le chargement appliqué au modèle EF consiste en un effort de 800N uniformément réparti sur les surfaces fonctionnelles<sup>7</sup>. La figure 4.10 montre les déplacements quand la mâchoire est soumise au cisaillement. Les extrémités des surfaces fonctionnelles des mâchoires se déplacent de  $2\mu\text{m}$ . La raideur des mâchoires en cisaillement est donc  $K_{\text{mâchoire}} = \delta F/\delta X = 800/(2 \times 2 \times 10^{-6}) = 200 \times 10^6 \text{N/m}$ . Remarquons que la raideur apparente des mâchoires vis-à-vis des accéléromètres est différente, car ils sont positionnés sur les côtés, plus haut que les surfaces fonctionnelles, voir les figures 4.2 et 4.3. Ainsi, ils mesureraient une elongation de la mâchoire  $\delta X = 2 \times 1.2 \times 10^{-6} \text{m}$ , ce qui induit une raideur apparente  $K = \delta F/\delta X = 800/(2.4 \times 10^{-6}) \simeq 340 \times 10^6 \text{N/m}$ .

La fréquence du premier mode propre du viscoanalyseur doit être la plus élevée possible car elle limite la bande fréquentielle de caractérisation. Pour cela, la fréquence du premier mode propre des mâchoires libre-libre doit elle-aussi être élevée et dépasser 5000Hz. D'après les calculs, elle vaut  $f = 7563 \text{Hz}$ , voir la figure 4.11.

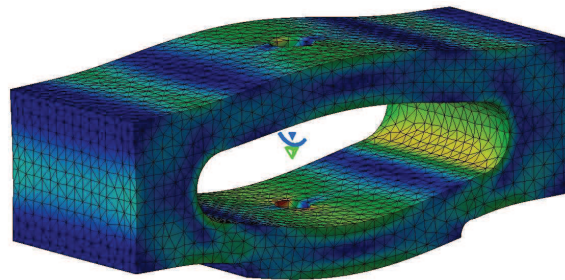


FIGURE 4.11 – Premier Mode propre d'une mâchoire libre-libre :  $f = 7563 \text{Hz}$ .

## 4.2 Modélisation du banc

Pour post-traiter les essais menés sur le viscoanalyseur, il faut le modéliser afin de compenser les déformations des pinces et les effets de masses embarquées. Le viscoanalyseur est utilisé pour caractériser les matériaux avant sa première fréquence propre. Cela signifie que les pièces déformables peuvent être modélisées par des raideurs. Toutefois, à haute fréquence, de petits déplacements peuvent générer de grandes accélérations et donc des efforts d'inertie. Ainsi, il est important de prendre en compte la masse des parties mobiles du viscoanalyseur. Le modèle du viscoanalyseur est présentée en figure 4.12. Les masses des différentes pièces du système sont les suivantes :

- $M_{\text{support gauche}} = 155 \text{g}$
- $M_{\text{support droite}} = 147 \text{g}$
- $M_{\text{mâchoire}} = 130 \text{g}$
- $M_{\text{boulonM5}} = 5 \text{g}$
- $M_{\text{boulonM8}} = 12.5 \text{g}$
- $M_{\text{raccord}} = 10 \text{g}$
- $M_{\text{capteur force}} = 21 \text{g}$
- $M_{\text{P842.10}} = 34 \text{g}$
- $M_{\text{accéléromètre}} = 9 \text{g}$

7. Les surfaces fonctionnelles des mâchoires sont les emplacements où les échantillons sont collés.

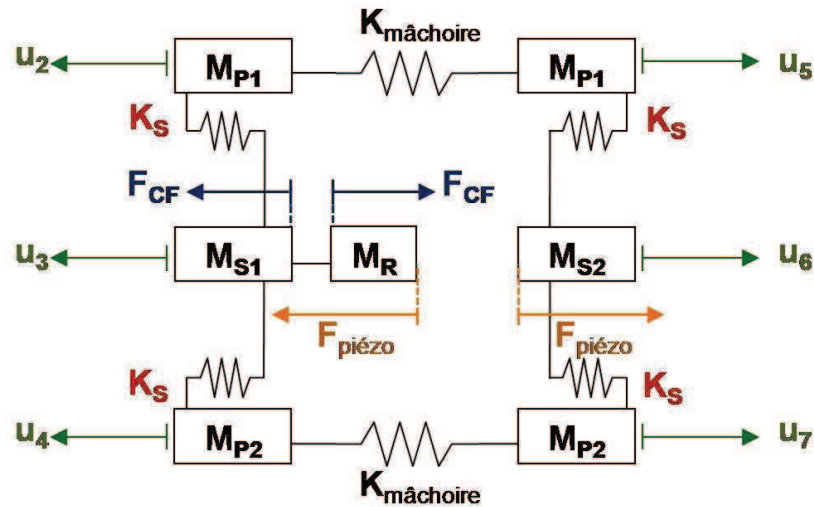


FIGURE 4.12 – Modélisation du banc d’essai de cisaillement par un modèle à 6 ddl à “masses concentrées”.

#### 4.2.1 Modélisation des mâchoires

Les mâchoires sont modélisées par deux masses,  $M_P$ , identiques et reliées entre elles par un ressort,  $K_{\text{mâchoire}}$ . Remarquons que l’une des mâchoires embarque le capteur de force. Les masses  $M_P$  représentent la partie mobile de la mâchoire qui subit les accélérations lues au niveau des accéléromètres. Le viscoanalyseur étant quasi-symétrique entre les côtés gauche et droit, la partie centrale des mâchoires qui constitue le plan de symétrie, ne se déplace pas. En conséquence, les masses de la vis M6 et du capteur de force n’entre pas en compte et on a  $M_{P1} = M_{P2} \simeq M_{\text{mâchoire}}/3 + M_{\text{accéléromètre}} = 52\text{g}$ .

Le ressort  $K_{\text{mâchoire}}$  est le même pour les deux mâchoires. Il a été évalué dans la section 4.1.4 à partir d’un calcul par éléments finis. Différentes valeurs peuvent être retenues en fonction de l’endroit où l’élongation est mesurée. La figure 4.10 montre que sous 800N de charge tangentielle, les accéléromètres subissent un déplacement de  $1.2\mu\text{m}$  soit une élongation de  $\delta X = 2.4\mu\text{m}$ . La raideur apparente des mâchoires est alors  $K_{\text{mâchoire}} = 800/(2.4 \times 10^{-6}) \simeq 340 \times 10^6\text{N/m}$ .

#### 4.2.2 Modélisation des chaînes d’actionnement

Les deux chaînes d’actionnement sont identiques et sont composées d’un capteur de force, d’un raccord et d’un actionneur piézoélectrique. Ces deux chaînes d’actionnement travaillent en phase et poussent avec la même force, ainsi elles sont considérées comme formant une chaîne d’actionnement équivalente générant une force équivalente qui est la somme des forces des deux  $F_{\text{piézo}} = F_0 + F_1$ . Toutefois, à cause des efforts d’inertie, la force mesurée au niveau des capteurs, n’est ni égale à la force générée par les actionneurs ni égale à la force subie par un échantillon. Afin de prendre en compte ces efforts d’inertie, la chaîne d’actionnement équivalente est modélisée par trois masses différentes  $M_{S1}$ , la masse du support de gauche,  $M_R$  la masse du raccord et  $M_{S2}$  la masse du support de droite.



Les actionneurs piézoélectriques sont composés de deux masses, reliées par leur céramique PZT, avec 10g du côté du raccord et 24g du côté du support de droite. La force générée par cette céramique est notée  $F_{\text{piézo}}$ . De la même manière, les capteurs de force sont composés d'une céramique PZT reliant 2 masses : 18g du côté du support de gauche et 3g du côté du support de droite. Les forces  $F_{FC}$  sont mesurées par les capteurs au niveau de leur céramique.

La masse  $M_{S1}$  comprend l'accéléromètre, le support de gauche, les deux boulons M5 et les 18g des deux capteurs de force. La masse  $M_R$  comprend les 3g des deux capteurs de force, les deux raccords et les 10g des deux actionneurs piézoélectriques. La masse  $M_{S2}$  comprend les 24g des deux actionneurs piézoélectriques, le support de droite, les deux boulons M8 et l'accéléromètre. En résumé :

- $M_{S1} = M_{\text{accéléromètre}} + M_{\text{support gauche}} + 2 \times M_{\text{boulonM5}} + 2 \times 18 = 210g$
- $M_R = 2 \times 3 + 2 \times M_{\text{raccord}} + 2 \times 10 = 46g$
- $M_{S2} = 2 \times 24 + 2 \times M_{\text{boulonM8}} + M_{\text{support droite}} + M_{\text{accéléromètre}} = 229g$

### 4.2.3 Equations de post-traitement

Remarquons qu'à cause des efforts d'inertie du raccord, la force générée par les actionneurs piézoélectriques vaut  $F_{\text{piezo}} = M_R \ddot{u}_3 + F_{CF}$ . Les échantillons sont modélisés par des raideurs pures,  $K_S$ . Les équations de la dynamique du système s'écrivent :

$$\begin{array}{l}
 (a) \\
 (b) \\
 (c) \\
 (d) \\
 (e) \\
 (f)
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 M_{P1} \ddot{u}_2 = -K_{\text{mâchoire}}(u_2 + u_5) + K_S(u_3 - u_2) \\
 M_{S1} \ddot{u}_3 = -K_S(2u_3 - u_2 - u_4) + F_{CF} \\
 M_{P2} \ddot{u}_4 = -K_{\text{mâchoire}}(u_4 + u_7) + K_S(u_3 - u_4) \\
 M_{P1} \ddot{u}_5 = -K_{\text{mâchoire}}(u_2 + u_5) + K_S(u_6 - u_5) \\
 M_{S2} \ddot{u}_6 = -K_S(2u_6 - u_5 - u_7) + F_{CF} + M_R \ddot{u}_3 \\
 M_{P2} \ddot{u}_7 = -K_{\text{mâchoire}}(u_4 + u_7) + K_S(u_6 - u_7)
 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

La raideur des mâchoires  $K_{\text{mâchoire}}$  est déduite des équations (4.3), en calculant (a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f), voir l'équation (4.4) :

$$K_{\text{mâchoire}} = - \frac{(M_{S1} - M_R) \ddot{u}_3 + M_{S2} \ddot{u}_6 + M_{P1}(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_5) + M_{P2}(\ddot{u}_4 + \ddot{u}_7) - 2F_{CF}}{2(u_2 + u_4 + u_5 + u_7)} \quad (4.4)$$

Le module de cisaillement des échantillons peut être calculé de deux manières différentes que nous nommeront respectivement équations A et B. Le calcul (b) + (e) donne le module de cisaillement des échantillons,  $K_{S_A}$  par l'équation A en estimant les efforts à partir de la mesure des capteurs de force, voir l'équation (4.5) :

$$\text{éq. (A)} \quad K_{S_A} = \frac{(M_{S1} - M_R) \ddot{u}_3 + M_{S2} \ddot{u}_6 - 2F_{CF}}{u_2 + u_4 + u_5 + u_7 - 2u_3 - 2u_6} \quad (4.5)$$

Le calcul (a)+(c)+(d)+(f) donne le module de cisaillement des échantillons,  $K_{S_B}$  par l'équation B en estimant les efforts à partir de l'élongation des mâchoires, voir l'équation (4.6) :

$$\text{éq. (B)} \quad K_{S_B} = \frac{M_{P1}(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_5) + M_{P2}(\ddot{u}_4 + \ddot{u}_7) + 2K_{\text{mâchoire}}(u_2 + u_4 + u_5 + u_7)}{2u_3 + 2u_6 - u_2 - u_4 - u_5 - u_7} \quad (4.6)$$

Les équations (4.4), (4.5) et (4.6) ne sont pas utilisées directement lors du post-traitement car les déplacements sont calculés par double intégration des mesures accélérométriques. Le déplacement étant considéré mono fréquentiel, la double intégration est effectuée par la formule  $\ddot{u} = -\omega^2 u$ . Ainsi, les équations (4.4), (4.5) et (4.6) sont respectivement remplacées par les équations (4.7), (4.8) et (4.9) :

$$K_{\text{mâchoire}} = \omega^2 \frac{(M_{S1} - M_R)\ddot{u}_3 + M_{S2}\ddot{u}_6 + M_{P1}(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_5) + M_{P2}(\ddot{u}_4 + \ddot{u}_7) - 2(F_0 + F_1)}{2(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_4 + \ddot{u}_5 + \ddot{u}_7)} \quad (4.7)$$

$$\text{éq. (A)} \quad K_{S_A} = \omega^2 \frac{(M_{S1} - M_R)\ddot{u}_3 + M_{S2}\ddot{u}_6 - 2(F_0 + F_1)}{2\ddot{u}_3 + 2\ddot{u}_6 - \ddot{u}_2 - \ddot{u}_4 - \ddot{u}_5 - \ddot{u}_7} \quad (4.8)$$

$$\text{éq. (B)} \quad K_{S_B} = \frac{2K_{\text{mâchoire}}(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_4 + \ddot{u}_5 + \ddot{u}_7) - \omega^2 M_{P1}(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_5) - \omega^2 M_{P2}(\ddot{u}_4 + \ddot{u}_7)}{2\ddot{u}_3 + 2\ddot{u}_6 - \ddot{u}_2 - \ddot{u}_4 - \ddot{u}_5 - \ddot{u}_7} \quad (4.9)$$

Les résultats issus de ce post-traitement sont entachés d'erreur du fait de l'évaluation des paramètres et des erreurs systématiques dues à la mesure par les capteurs. Ainsi, nous allons considérer les erreurs sources d'erreur suivantes :

1. Incertitude due à la résolution fréquentielle  $\delta\omega = 2\pi\delta f = 2.45 \text{ rad/s}$ .
2. Incertitude concernant les paramètres du modèle :
  - $\delta M_{S1} = 3\text{g}$ , incertitude due au poids du câble de l'accéléromètre
  - $\delta M_R = 3\text{g}$ , incertitude due au répartition de masse des capteurs de force et des actionneurs piézoélectriques
  - $\delta M_{S2} = 3\text{g}$ , incertitude due au poids des câbles de l'accéléromètre et des actionneurs piézoélectriques
  - $\delta M_{P1} = 10\text{g}$ , incertitude due au comportement non symétrique des pinces
  - $\delta M_{P2} = 10\text{g}$ , incertitude due au comportement non symétrique des pinces
  - $\delta K_{\text{mâchoire}} = 20 * 10^6 \text{N/m}$ , incertitude sur l'évaluation de la raideur des pinces

3. Incertitudes concernant les modules des variables mesurées par les capteurs. Cette incertitude est fixée arbitrairement à 3% pour tous les capteurs.
  - $\delta|F_0|/|F_0| = 3\%$
  - $\delta|F_1|/|F_1| = 3\%$
  - $\delta|\ddot{u}_2|/|\ddot{u}_2| = 3\%$
  - $\delta|\ddot{u}_2|/|\ddot{u}_3| = 3\%$
  - $\delta|\ddot{u}_4|/|\ddot{u}_4| = 3\%$
  - $\delta|\ddot{u}_5|/|\ddot{u}_5| = 3\%$
  - $\delta|\ddot{u}_6|/|\ddot{u}_6| = 3\%$
  - $\delta|\ddot{u}_7|/|\ddot{u}_7| = 3\%$
  
4. Incertitudes concernant les phases des variables mesurées par les capteurs. Ces incertitudes proviennent de retards purs du à l'électronique. A 5000Hz ces retards purs peuvent engendrer jusqu'à 3° de phase.
  - $\delta Arg(F_0) = f/5000 * 2^\circ$
  - $\delta Arg(F_1) = f/5000 * 2^\circ$
  - $\delta Arg(\ddot{u}_2) = f/5000 * 2^\circ$
  - $\delta Arg(\ddot{u}_3) = f/5000 * 2^\circ$
  - $\delta Arg(\ddot{u}_4) = f/5000 * 2^\circ$
  - $\delta Arg(\ddot{u}_5) = f/5000 * 2^\circ$
  - $\delta Arg(\ddot{u}_6) = f/5000 * 2^\circ$
  - $\delta Arg(\ddot{u}_7) = f/5000 * 2^\circ$

Afin de calculer les erreurs sur le module et la phase de  $K_{\text{mâchoire}}$ ,  $K_{S_A}$  et  $K_{S_B}$ , nous utiliserons l'équation (4.10). Le détail des calculs n'est pas donné dans ce mémoire car il n'apporte aucune valeur ajoutée en termes de compréhension.

$$\delta f(x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N |\delta x_i| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \quad (4.10)$$

### 4.3 Protocole d'essai

Les actionneurs étant fragiles, il convient de monter en premier et avec le plus grand soin, l'ensemble chaines d'actionnement et supports. Les échantillons de shims présentent toujours une face adhésive. Par sécurité pour l'intégrité des actionneurs piézoélectriques, il vaut mieux coller les shims sur les mâchoires qui sont plus robustes.

Un générateur de signaux de la marque Agilent sert à produire des sinus balayés qui sont ensuite amplifiés par le contrôleur LVPZT E-501. Le but est de couvrir une plage fréquentielle de mesure s'étendant entre environ 200Hz et 3600Hz en obtenant autant de points de mesure du module de cisaillement que la résolution fréquentielle le permet. Un unique contrôleur LVPZT E-501 alimente les 2 actionneurs piézoélectriques, ces derniers étant branchés en parallèle. Ce contrôleur ne permet de piloter les actionneurs piézoélectriques qu'en tension. Malheureusement, le comportement des actionneurs pilotés en tension est non-linéaire, contrairement à des actionneurs pilotés en courant. Afin de s'affranchir d'une excitation due aux harmoniques de la

fréquence d'excitation, les essais ont été réalisés sur des bandes fréquentielles inférieures à une octave. Cela permet de s'assurer que la réponse des échantillons est uniquement due à l'excitation à la fréquence fondamentale. Pour couvrir la bande fréquentielle allant de 200Hz à 3600Hz, cinq bandes fréquentielles inférieures à l'octave sont nécessaires :

- de 200Hz à 360Hz
- de 360Hz à 650Hz
- de 650Hz à 1150Hz
- de 1150Hz à 2000Hz
- de 2000Hz à 3600Hz

Ainsi, pour chaque référence de shim testée et pour chaque valeur de précharge, cinq mesures sont nécessaires. Les shims ont été caractérisés pour quatre valeurs de précharge : 200N, 500N, 2000N et 5000N qui correspondent à des pressions respectives de 0.17MPa, 0.41Mpa, 1.7MPa et 4.1Mpa. Ces quatre valeurs permettent de savoir, en un minimum d'essais, si la rigidité du shim dépend de la charge normale. L'amplitude de tension aux bornes des actionneurs diffère en fonction des bandes fréquentielles de caractérisation car les essais sont très bruyants à haute fréquence.

Les signaux accélérométriques et les signaux issus des capteurs de force sont échantillonnés à la fréquence de 12800Hz et fenêtrés par une fenêtre rectangulaire. Les signaux sont acquis sur des intervalles temporels appelés blocs. Chaque bloc dure 2.56s et est constitué de 32768 points de mesure en fonction du temps. Pour chaque bloc, le spectre des signaux est calculé. Ensuite, l'un des capteurs de force sert de référence pour le calcul de fonctions de transfert H1, avec comme entrée le capteur de force de référence et comme sortie les signaux des autres capteurs. Ainsi, pour chaque capteur et pour chaque bloc, il y a une fonction de transfert. Pour chaque capteur, ces fonctions de transfert sont ensuite moyennées sur tous les blocs, soit plus d'une centaine. Les fonctions de transfert H1 sont directement utilisées pour post-traiter la raideur des mâchoires et des échantillons de shims grâce aux équations (4.7), (4.8) et (4.9). Remarquons que par définition, la fonction de transfert du capteur de force qui sert de référence est égale à l'unité.

## 4.4 Quelques résultats de caractérisation

### 4.4.1 Répétabilité

Afin de tester la répétabilité des essais sur le viscoanalyseur, un lot de quatre échantillons d'une référence de shim a été testé deux fois, voir les courbes bleues et vertes des essais a et b de la figure 4.13. Les mâchoires ont été démontées entre les deux essais. La figure 4.13 montre les modules de cisaillement post-traités pour une précharge de 5000N. Les courbes de la raideur des échantillons calculées avec l'équation (4.8), notée A, sont représentées en traits continus et les courbes de la raideur des échantillons calculées avec l'équation (4.9), notée B, sont représentées en traits discontinus.

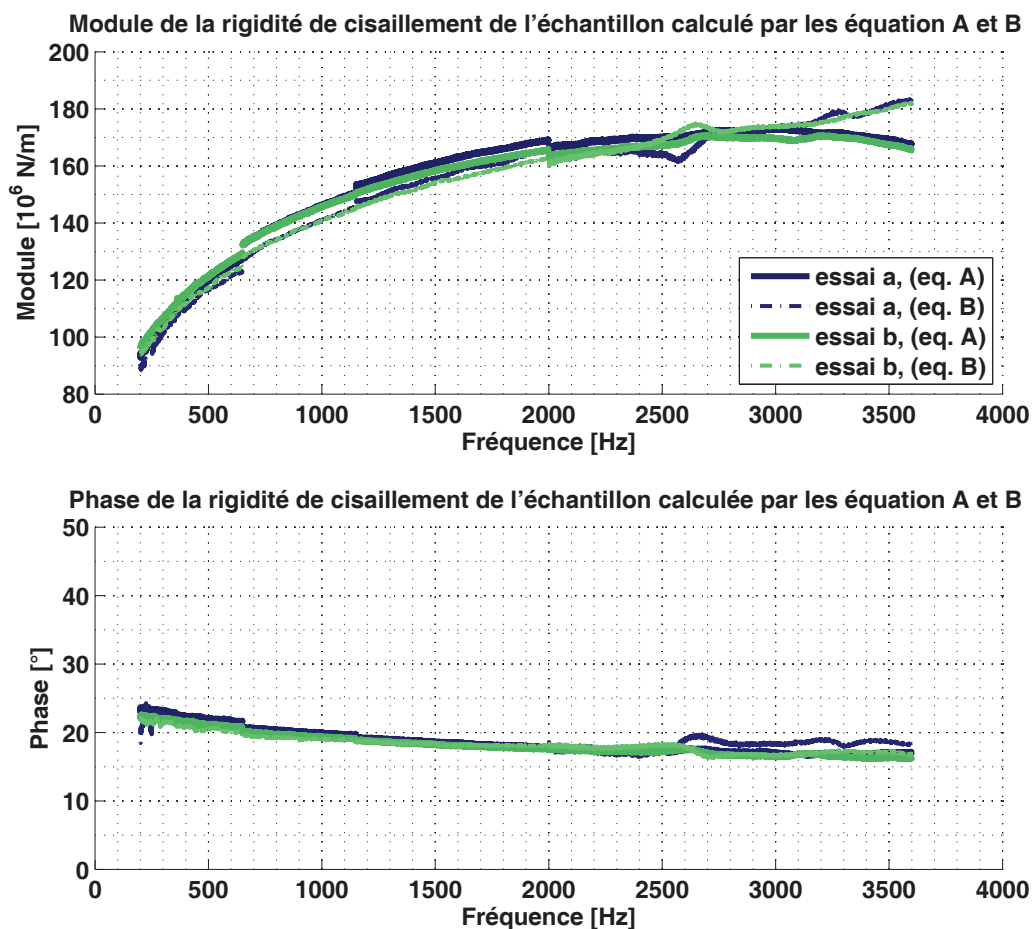


FIGURE 4.13 – Test de la répétabilité de la mesure de raideur sur un échantillon de shim. Comparaison entre les essais a, b pour une précharge de 5000N

Les valeurs de phases mesurées sont identiques quelque soit l'essai, a ou b. Les courbes de module sont quasiment identiques, donc les essais sont répétables. Remarquons que les courbes issues des équations (4.8) et (4.9) sont presque identiques et diffèrent pour les valeurs proches de 4100Hz qui est la fréquence du premier mode propre du viscoanalyseur. Ainsi, la limite fréquentielle de caractérisation du viscoanalyseur est d'environ 3600Hz.

#### 4.4.2 Caractérisation d'un shim

Les courbes de la figure 4.14 montrent les raideurs des mâchoires obtenues grâce à l'équation (4.7) lors de la caractérisation d'un échantillon de shim. La raideur des mâchoires vaut environ  $K \simeq 330 \times 10^6 \text{N/m}$ . Cette valeur est cohérente avec son estimation,  $K \simeq 340 \times 10^6 \text{N/m}$  par le calcul éléments finis. La phase de la raideur des mâchoires est nulle et son module est constant, ce qui est logique pour des matériaux métalliques tel que l'aluminium.

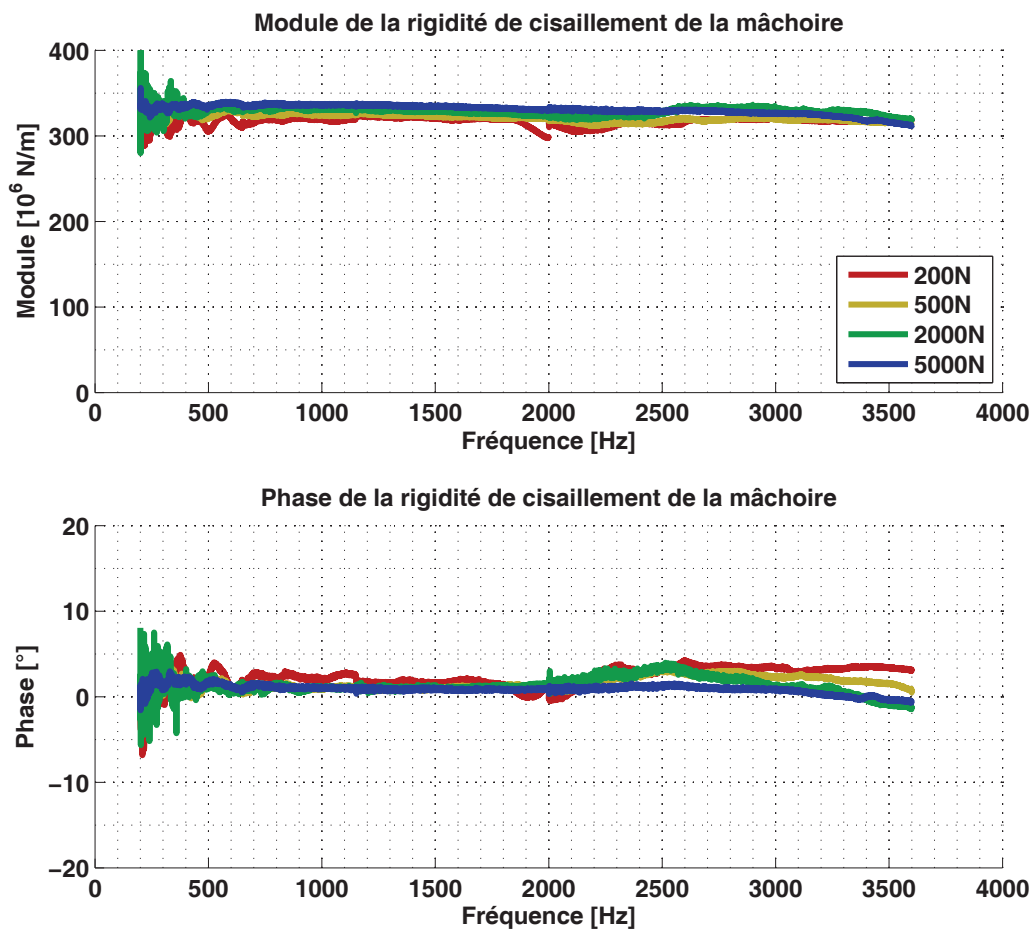


FIGURE 4.14 – Module et phase de la raideur des mâchoires calculée par la relation 4.7 lors des essais sur une référence de shim.

Les figures 4.15 et 4.16 montrent les courbes des raideurs des échantillons de shims obtenues respectivement avec les équations (4.8) et (4.9). Chacune de ces courbes est encadrée par deux autres qui représentent l'étendue du domaine d'incertitude calculé par l'équation (4.10). La figure 4.17 synthétise les résultats de ces deux équations et met en évidence que les équations (4.8) et (4.9) aboutissent sensiblement aux mêmes courbes.

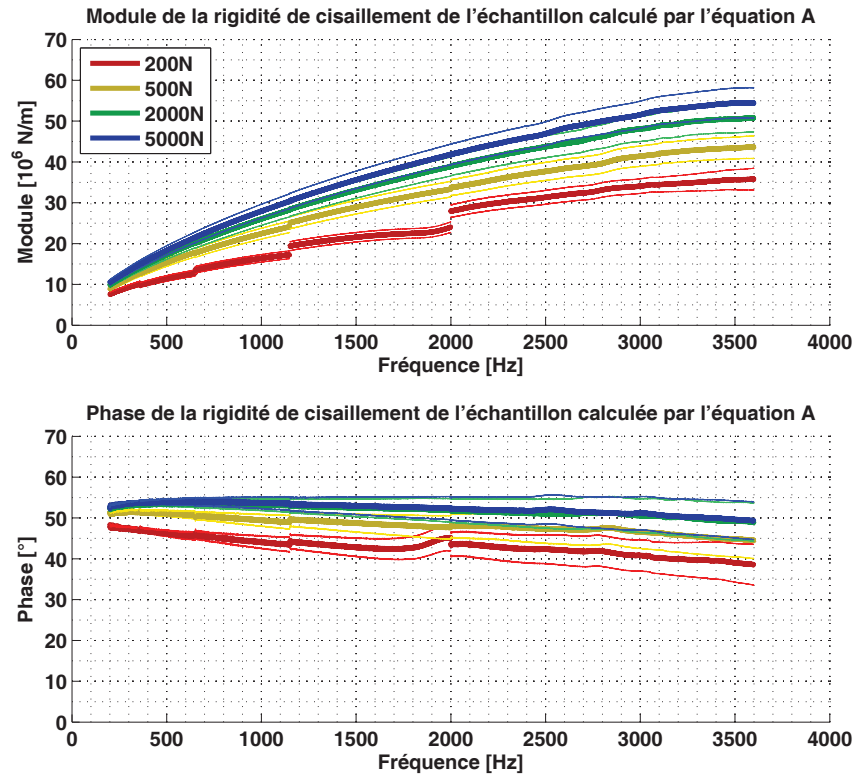


FIGURE 4.15 – Raideur des échantillons de shim calculée par la relation 4.8

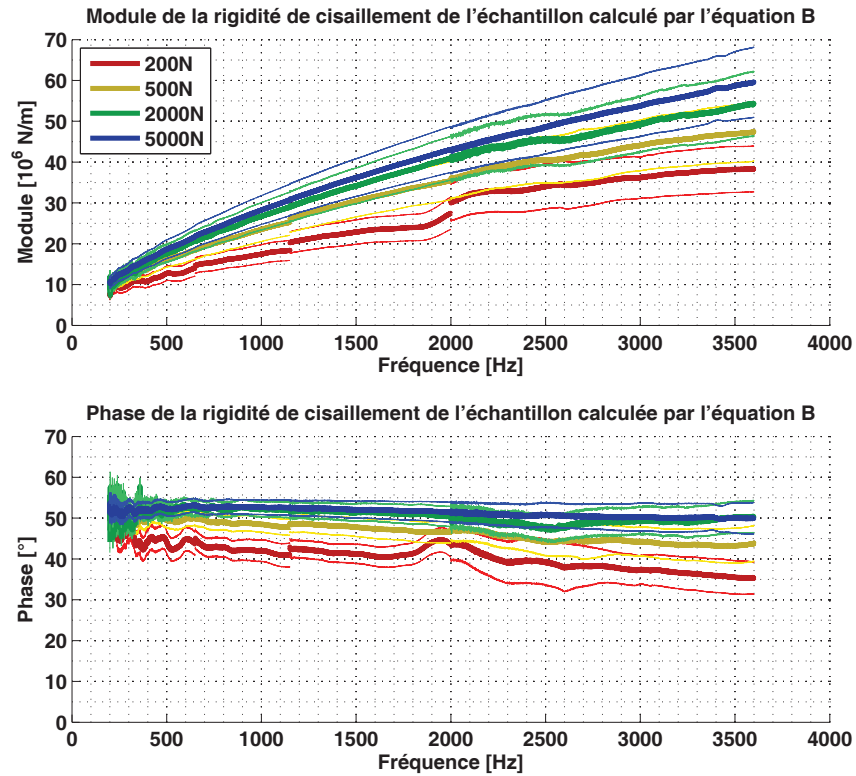


FIGURE 4.16 – Raideur des échantillons de shim calculée par la relation 4.9

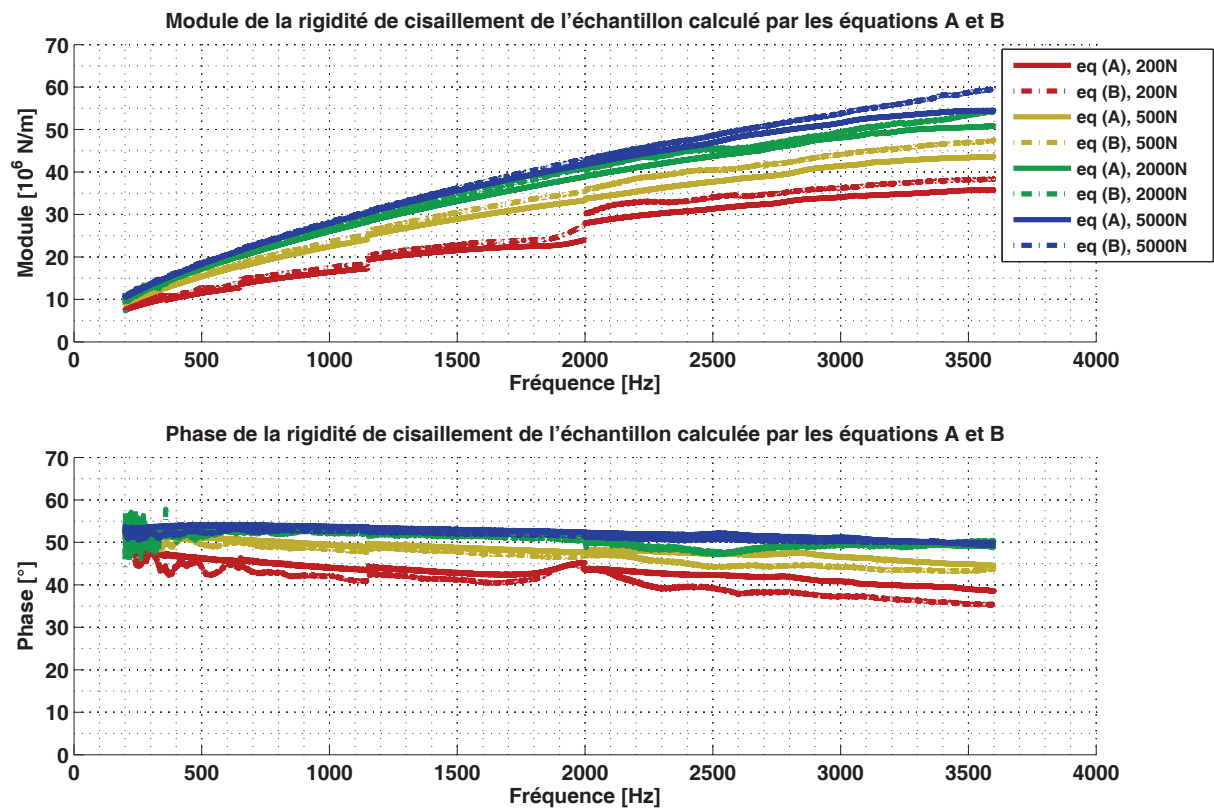


FIGURE 4.17 – Comparaison des résultats des raideurs des échantillons de calculées par les relations 4.8 et 4.9

Le module statique de cette référence de shim est relativement indépendant de la précharge normale, contrairement à sa phase. Ainsi, son module rigidifie différemment en fonction de la précharge. Les valeurs de phase mesurées sur cette référence de shim sont très élevées. A notre connaissance, les caoutchoucs ne peuvent pas produire de tels comportements, ainsi il semble que ce soit la couche de colle des shims qui leur confère leur comportement fortement viscoélastique.



## 4.5 Conclusion et perspectives

Le viscoanalyseur permet de caractériser de manière répétable la raideur en cisaillement des shims jusqu'à 3600Hz au lieu des 5000Hz prévus initialement car il présente un mode propre à la fréquence de 4100Hz. Il est possible de post-traiter la raideur des shims sans utiliser de capteur de force mais en se basant sur l'élongation des mâchoires. A l'avenir, il sera intéressant de retirer les capteurs de force, ce qui aura pour effet de rendre le viscoanalyseur plus compact et par la même de repousser sa limite de fréquentielle de caractérisation.

Le viscoanalyseur a mis en évidence que les shims sont très viscoélastiques en cisaillement. Certaines références de shim présentent des valeurs de phase dépassant les 50°. Cela nous semble être dû à leur couche de colle. Le comportement des shims dans les autres directions reste toutefois inconnu et il serait étonnant que la viscoélasticité des shims soit isotrope. Ainsi, il serait intéressant d'adapter le principe de ce viscoanalyseur à la caractérisation d'autres coefficients de matériaux, notamment pour les modules d'Young.

## Bibliographie du chapitre 4

- [1] H. Oberst and K. Frankenfeld, "Damping of the bending vibrations of thin laminated metal beams connected through adherent layer," *Acustica* 2, pp. 181–194, 1952.
- [2] F. Barbosa and M. Farage, "A finite element model for sandwich viscoelastic beams : Experimental and numerical assessment," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 317, no. 1-2, pp. 91 – 111, 2008.
- [3] D. Castello, F. Rochinha, N. Roitman, and C. Magluta, "Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, no. 8, pp. 1840 – 1857, 2008.
- [4] Y. Chevalier, "Essais dynamiques sur composites. caractérisation aux basses fréquences.," tech. rep., Techniques de l'ingénieur, 2002.
- [5] T. Chen, "Determining a prony series for a viscoelastic material from time varying strain data," tech. rep., NASA, may 2000.
- [6] Y. Chevalier, "Essais dynamiques sur composites. caractérisation aux hautes fréquences.," tech. rep., Techniques de l'ingénieur, 2003.
- [7] Cedrat, "Cedrat technologies 2010-2011." Cedrat Technologies Piezo Products Catalogue Version 3.3, 2010.

# Chapitre 5

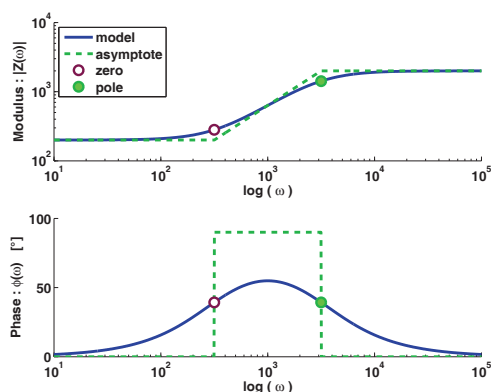
## Modélisation de la viscoélasticité

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>91</b>
<b>5.2</b>	<b>Theoretical aspects</b>	<b>96</b>
5.2.1	The Generalized Maxwell Model	96
5.2.2	Asymptotes of the PZF	97
<b>5.3</b>	<b>Existing methods</b>	<b>99</b>
5.3.1	The Enclosing Curve Method	99
5.3.2	The CRONE Method	99
5.3.3	A test transfer function	101
5.3.4	Two fitting indicators	102
<b>5.4</b>	<b>The Asymptotical Variations Method</b>	<b>103</b>
5.4.1	Initialization of the PZF parameters with a new graphical method	103
5.4.2	Optimization of identified parameters	107
<b>5.5</b>	<b>Conclusion and perspectives</b>	<b>114</b>
<b>5.6</b>	<b>Identification simultanée de plusieurs matériaux viscoélastiques</b>	<b>115</b>
5.6.1	La contrainte des pôles communs	115
5.6.2	Étape 3 : Moyenne des pôles	115
5.6.3	Étape 4 : Optimisation sous contraintes	118
5.6.4	Résultats	120
	<b>Bibliographie du chapitre 5</b>	<b>121</b>

---



### Résumé

Le modèle rhéologique de Maxwell généralisé est choisi pour représenter les comportements viscoélastiques au sein des modèles éléments finis. Ce chapitre présente une méthode d'identification des paramètres de ce modèle, voir Renaud [1]. Dans le cas de plusieurs matériaux viscoélastiques, les temps de relaxation identifiés sont identiques pour tous les matériaux.

Ce chapitre explique le choix du modèle de Maxwell généralisé comme modèle retenu pour la modélisation des comportements viscoélastiques. Ce choix résulte d'une analyse comparée des performances de plusieurs modèles. Une partie importante de ce chapitre est consacrée à l'identification des paramètres du modèle de Maxwell généralisé à partir des courbes expérimentales obtenues avec le banc d'essai décrit précédemment (cf. chapitre 4).

Ce travail a été présenté lors du colloque Vibrations, Chocs et Bruits en 2008 dont les actes ont été publiés, voir Renaud et al. [2]. Par ailleurs, ce travail a fait l'objet d'une publication dans le journal *Mechanical Systems and Signal Processing* [1]. La forme de l'article a été conservée dans ce chapitre, c'est la raison pour laquelle cette section est rédigée en anglais.

Dans le cas où plusieurs matériaux viscoélastiques sont présents au sein d'une même structure, une contrainte sur les paramètres a été ajoutée dans le but de faciliter l'utilisation de ce modèle dans le cadre d'analyses aux valeurs propres complexes sur des modèles éléments finis. La section 5.6 explique la manière dont cette contrainte supplémentaire est traitée.

# A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the Generalized Maxwell Model

Franck Renaud<sup>a</sup>, Jean-Luc Dion<sup>a</sup>, Gaël Chevallier<sup>a</sup>, Imad Tawfiq<sup>a</sup>, Rémi Lemaire<sup>b</sup>

<sup>a</sup> LISMMA-EA2336 - Institut Supérieur de Mécanique de Paris - 3 rue Fernand Hainaut - 93400 SAINT OUEN - FRANCE

<sup>b</sup> BOSCH - Chassis Systems Brakes - 126 Rue de Stalingrad - 93700 DRANCY - FRANCE

---

## Abstract

This paper focuses on the Generalized Maxwell Model (GMM) identification. The formulation of the transfer function of the GMM is defined, as well as its asymptotes. To compare identification methods of the parameters of the GMM, a test transfer function and two quality indicators are defined. Then, three graphical methods are described, the enclosing curve method, the CRONE method and an original one. But the results of graphical methods are not good enough. Thus, two optimization recursive processes are described to improve the results of graphical methods. The first one is based on an unconstrained nonlinear optimization algorithm and the second one is original and allows constraining identified parameters. This new process uses the asymptotes of the modulus and the phase of the transfer function of the GMM. The result of the graphical method optimized with the new process is very accurate and fast.

## Keyword

Viscoelasticity ; Identification ; Generalized Maxwell ; Fractional Derivatives ; Transfer Function ; Pole-Zero ; Damping

---

## 5.1 Introduction

Many mechanical systems are damped with viscoelastic materials. This helps to avoid instabilities and to limit the levels of vibration. Although the viscoelastic behavior of materials is of great importance in order to obtain accurate results, the assumption of purely elastic materials is very commonplace for frequency analysis with Finite Element (FE) models. In order to carry out realistic Complex Eigenvalue Analysis (CEA) in dynamics, one needs to model viscoelasticity. Linear viscoelasticity has been described by many authors, for citing just a few of them : Ferry [3], Vinh [4], Caputo and Mainardi [5], Lakes [6], Chevalier and Vinh [7], or Balmes et al. [8]. Linear viscoelasticity assumes the existence of a relation between stress,  $\sigma_{ij}$ , of a material and its strain,  $\varepsilon_{kl}$ , history. Let us call  $h_{ijkl}(t)$ , the relaxation function which is also an element of the complex stiffness tensor. The Fourier transform is denoted with a hat.

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t h_{ijkl}(t - \tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau \\ \hat{\sigma}_{ij}(\omega) = \hat{h}_{ijkl}(\omega) \hat{\varepsilon}_{kl}(\omega) \end{cases} \quad (5.1)$$

**Nomenclature**

$\sigma_{ij}$	The stress and $\hat{\sigma}_{ij}$ its Fourier transform.
$\varepsilon_{kl}$	The strain and $\hat{\varepsilon}_{kl}$ its Fourier transform.
$h_{ijkl}$	The relaxation function and $\hat{h}_{ijkl}$ its Fourier transform.
$\omega$	Angular frequency.
$\chi$	$= \log(\omega)$ Logarithm of the angular frequency.
$H(\omega)$	$=  H(\omega)  \times \exp(j\psi(\omega))$ Measured impedance of the material. A test function in this paper.
$Z(\omega)$	$=  Z(\omega)  \times \exp(j\varphi(\omega))$ Impedance of the identified model.
$ Z^u(\chi_k) $	Modulus of the model, during the $u^{\text{th}}$ iteration taken at the angular frequency $10^{\chi_k}$ of the $k^{\text{th}}$ point of the modulus curve. With $k \in [1..V]$ , and $u \in [1..U]$ .
$\varphi^u(\chi_k)$	Phase of the model, during the $u^{\text{th}}$ iteration taken at the angular frequency $10^{\chi_k}$ of the $k^{\text{th}}$ point of the phase curve. With $k \in [1..V]$ , and $u \in [1..U]$ .
$\eta$	Damping rate.
$K_0$	Static stiffness taken at $\omega = 0$ , i.e. $t = +\infty$ .
$K_i$	Stiffness of the $i^{\text{th}}$ spring.
$C_i$	Damping of the $i^{\text{th}}$ dashpot.
$G_i$	Coefficient of the $i^{\text{th}}$ spring-pot.
$\gamma_i$	Fractional derivative order of the $i^{\text{th}}$ Pole-Zero couple.
$\omega_{z,i}^u$	The Zero of the $i^{\text{th}}$ Pole-Zero couple during the $u^{\text{th}}$ iteration and $\chi_{z,i}^u = \log(\omega_{z,i}^u)$ its logarithm. With $i \in [1..N]$ .
$\omega_{p,i}^u$	A Pole and $\chi_{p,i}^u = \log(\omega_{p,i}^u)$ its logarithm.
$\omega_{c,i}^u$	$= \sqrt{\omega_{z,i}^u \omega_{p,i}^u}$ the medium frequency of a Pole-Zero couple and $\chi_{c,i}^u = (\chi_{z,i}^u + \chi_{p,i}^u)/2$ its logarithm.
$\delta_{ij}$	Kronecker's symbol.
$A$	Area under the phase curve.
$S$	Stiffening of the impedance modulus.
$\delta_{ Z }$	Modulus convergence indicator.
$\delta_{\varphi}$	Phase convergence indicator.
$r$	Weighting coefficient.

**Acronyms**

GMM	Generalized Maxwell Model
PZF	Pole-Zero Formulation
GFCMM	Generalized Fractional Calculus Maxwell Model
CEA	Complex Eigenvalue Analysis

Linear viscoelasticity is defined by the Relations (5.1). In the present paper, identification will be conducted on  $\hat{h}_{ijkl}(\omega)$  by considering a rheological model between  $\hat{\sigma}_{ij}$  and  $\hat{\varepsilon}_{kl}$ . Linear viscoelasticity of rheological models is written in terms of force and displacement :  $F(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ , with  $H(\omega)$ , the complex stiffness of a viscoelastic material, equivalent to  $\hat{h}_{ijkl}(\omega)$ .

Tests on viscoelastic materials led by many authors exhibit strong stiffness frequency dependence on both modulus and phase (see Vinh [4], Soula et al. [9, 10]). For example, Figure 5.1

shows the stiffness of a multi layer material with layers of glue, rubber and steel. The non-Zero value of the stiffness phase of viscoelastic materials is well known, because it generates damping. But the stiffness modulus is also frequency dependent, hence, simple models, with constant modulus, such as constant complex modulus or modal damping are not sufficient enough for carrying out CEA. In order to show how five of these viscoelastic models behave, they are listed with their complex impedance formulas in Table 5.1. All these models are linear ones. The Figure 5.2 shows the modulus and the phase versus frequency of each model. The parameters used to produce this figure are given in Table C.1 in Appendix C.1.

The constant complex modulus model is non-causal so it is only suitable in the frequency domain, Gaul et al. [11]. The constant complex modulus is not a relevant model since its modulus is constant. The models of Maxwell and Voigt are efficient only on a small frequency range, but they are unrealistic, respectively, at low and high frequency, where their modulus is infinitely small and high. Moreover, a ninety-degree-of-phase material would tend towards a viscous fluid.

We would like to point out that Generalized Maxwell Model is classically composed of Maxwell cells in parallel (see Koeller [12]). With such definition this model is not able to display reversible creep (see Caputo and Mainardi [5]). As this paper deals only with viscoelastic solids, Generalized Maxwell Model (GMM) and Generalized Fractional Maxwell Model would refer to a spring in parallel with respectively Maxwell cells and Fractional Calculus Maxwell cells (see Koeller [12]). Thus the GMM defined here is the same as that used by Chevalier and Vinh [7] and the same as the Maxwell representation given by Caputo and Mainardi [5], without the first dashpot. The fractional derivatives allow describing behaviours between purely elastic and purely viscous. Oldham and Spanier [13] and Podlubny [14] have described the mathematical properties of fractional derivatives. Podlubny [14] has given some examples for viscoelasticity. Vinh [4], Koeller [12], Bagley and Torvik [15], Gaul et al. [11], Chevalier and Vinh [7] have studied the application of fractional derivatives in viscoelasticity. Lion [16, 17] has investigated rheological models incorporating “fractional damping elements”, called spring-pots, from the point of view of thermodynamics. Heymans [18] has extended the fractional calculus to non-linear viscoelasticity. Koeller [12] has defined the spring-pot has a rheological element whose stress is proportional to the fractional derivative of the strain.

Generalized Maxwell Model (GMM) and Generalized Fractional Calculus Maxwell Model (GFCMM) (see Table 5.1) seem to be very relevant. Firstly, their modulus is constant at low frequency, secondly, it increases on a frequency range and finally it is also constant at high frequency (see Figure 5.2). Moreover their phase is firstly nil at low frequency, secondly it is non-Zero on a frequency range and finally it is also nil at high frequency (see Figure 5.2). GFCMM use non-integer derivative orders. The use of a GFCMM in state space model requires that these derivative orders are fractions of integer. Both GMM and GFCMM allow one to describe behaviors between purely elastic and purely viscous materials (see Vinh [4] and Soula et al. [9]). Figure 5.2 plots a transfer function of a GFCMM with one Pole-Zero couple with a derivation order of  $\gamma = 1/2$ . The GMM plotted in blue in Figure 5.3 has 3 couples of spring and dashpot in series. It allows describing the same behavior as the Pole-Zero Fractional Derivatives model. By increasing the number of spring and dashpot in series, the blue curve will tend towards the black one. Although the two models are relevant for viscoelasticity, the present paper focuses on GMM.

Linear Models	Symbol	Frequency representation $Z(\omega)$
Constant complex modulus		$K(1 + j\eta)$
Maxwell		$(j\omega KC)/(K + j\omega C)$
Voigt		$K + j\omega C$
Generalized Maxwell		$K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i}$
Generalized Fractional Calculus Maxwell		$K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{(j\omega)^{\gamma_i} K_i G_i}{K_i + (j\omega)^{\gamma_i} G_i}$

TABLE 5.1 – Rheologic representation of some common linear viscoelastic models

Given a viscoelastic material, one needs to identify the parameters of the GMM from experiments. Common tests can be sorted in 3 kinds of methods. The first ones are based on the Oberst's beam method. It consists in comparing the frequency response function of a structure with and without the viscoelastic material to be tested (see [19, 20, 21, 22]). Although this works well for low damping materials, this only allows one to measure values taken at the frequency of the first Eigenmodes of the beam. The second kind of tests consists in studying the creep and relaxation curves of materials (see Chen [23]). This is very efficient to get values at low frequency, when the material takes time to respond to the excitation. But to get high frequency values, one needs to assess a perfect unit step function when exciting the material, which is technically hard. The last kind of test is the Dynamic Mechanical Analysis. This consists in forcing oscillations of a material at a frequency and measuring its strain and its stress far from the resonance frequencies of the test bench. By sweeping in frequency, one is able to build the transfer function between stress and strain on a wide frequency range. This last kind of test is the most suitable for acquiring knowledge on the behavior of a material versus frequency.

Given an experimental transfer function characterizing a complex stiffness  $H(\omega)$ , the identification of the parameters of the GMM can be carried out with some graphical methods. Two of them were described by Vinh [4] and Oustaloup [24]. These methods are led on a Pole-Zero Formulations which are equivalent to the GMM. For example, the equivalence between the classical

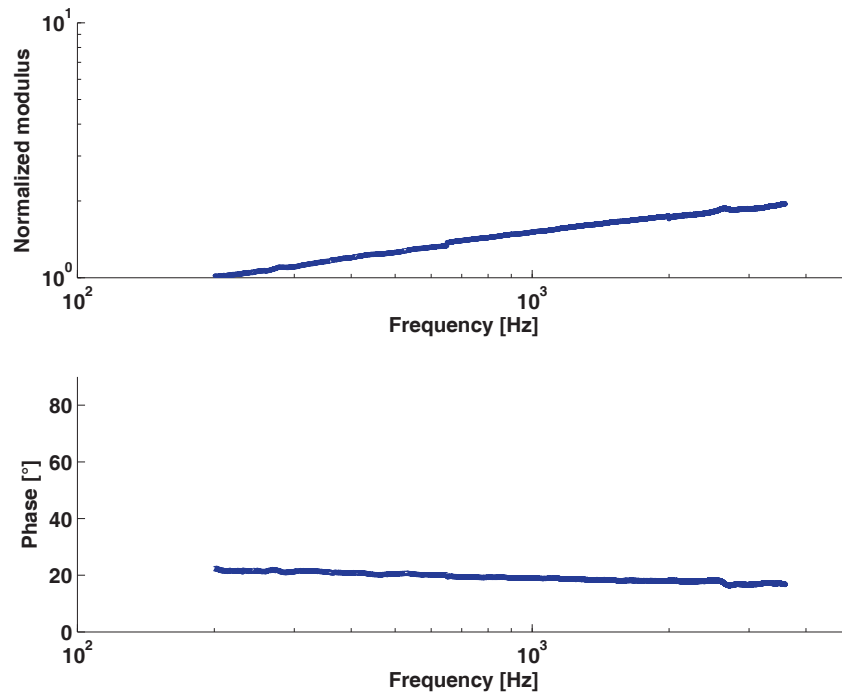


FIGURE 5.1 – Complex shear stiffness of a multilayer viscoelastic material at ambient temperature in the [200-3500Hz] frequency range. The top graph represents the normalized modulus  $H(f)/H(f = 200Hz)$  (dimensionless) and the bottom graph represents the phase  $\psi$  (in degrees).

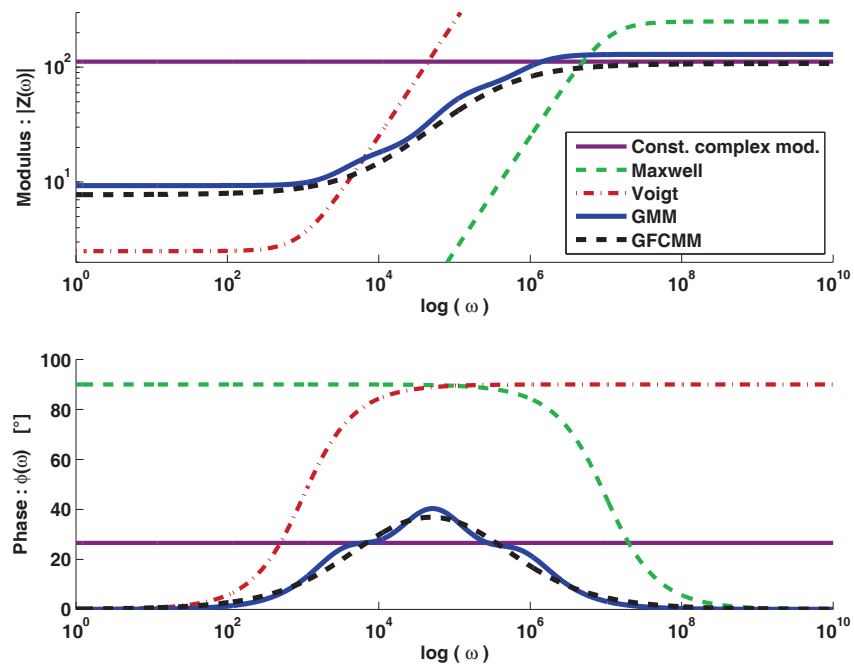


FIGURE 5.2 – Complex stiffness of the viscoelastic models described in Table 5.1. The parameters of these models are detailed in Table C.1 in Appendix C.1.



Standard Linear Solid<sup>1</sup> and a Pole-Zero Formulation with one Pole-Zero couple is demonstrated by Equations (5.2).

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(\omega) = K_0 + \frac{j\omega K_1 C_1}{K_1 + j\omega C_1} = K_0 \frac{1 + j\omega(C_1/K_1 + C_1/K_0)}{(1 + j\omega C_1/K_1)} = K_0 \frac{1 + (j\omega/\omega_{z,1})}{1 + j\omega/\omega_{p,1}} \\ \omega_{z,1} = \left( \frac{C_1}{K_1} + \frac{C_1}{K_0} \right)^{-1} = \frac{K_0 K_1}{C_1 (K_0 + K_1)} \quad \text{and} \quad \omega_{p,1} = \frac{K_1}{C_1} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

The graphical identification methods use the characteristics of the asymptotes of Pole-Zero Formulations. The present paper presents an algorithm based on the principles of these graphical methods. This algorithm allows one to identify parameters from both the modulus and the phase curves with more efficiency than the classical graphical methods thanks to the optimization algorithm based on asymptotes.

## 5.2 Theoretical aspects

### 5.2.1 The Generalized Maxwell Model

Experimental transfer functions, characterizing complex stiffnesses, are well described by their modulus and phase. They are usually plotted versus the logarithm of the frequency. Moreover, the modulus is usually represented in logarithmic scale. In such scale, models with a product of terms, like Pole-Zero Formulations (PZF given by Equation (5.3)), become a sum of terms. This is why PZF are very suitable for the identification of parameters on transfer functions. The rheological formulation of GMM already presented in Table 5.1, is reminded in Equation (5.4).

$$Z(\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + (j\omega/\omega_{z,i})}{1 + (j\omega/\omega_{p,i})} \quad (5.3)$$

$$Z(\omega) = K_0 + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i} \quad (5.4)$$

Equation (5.4) is very difficult to use in logarithmic scale. Fortunately, Relations (5.5) allow one to compute GMM parameters from the parameters of PZF (see Dion et al. [25, 26]). The proof of these relations is given in Appendix C.2.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i = K_0 \prod_{h=1}^N \left( \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{\omega_{p,i} - \omega_{z,h}}{\omega_{p,i} + \omega_{p,h}(\delta_{ih} - 1)} \right) \\ C_i = \frac{K_i}{\omega_{p,i}} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

---

1. Standard Linear Solid is also called Zener model. It is a simple case of Generalized Maxwell Model where  $N = 1$ .

Given a transfer function of GMM,  $Z(\omega) = |Z(\omega)| \exp(j\varphi(\omega))$ , the modulus and the phase of the associated PZF are defined in Equation (5.6).

$$\left\{ \begin{array}{l} |Z(\omega)| = K_0 \prod_{i=1}^N |Z(\omega)|_i = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{z,i})^2}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{p,i})^2}} \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega) = \sum_{i=1}^N \left( \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right) \right) \end{array} \right. \quad (5.6)$$

It is worth noticing that PZF can be generalized to fractional calculus. Then, Equation (5.3) becomes Equation (5.7). The modulus and phase of this Fractional Calculus Pole-Zero Formulation (FCPZF) is given by Equation (5.8). Thus, PZF is a particular case of the FCPZF, where the derivation order is  $\gamma_i = 1$ . One could expect FCPZF to be equivalent to GFCMM of Table 5.1, but the link between these two formulations has not been established yet.

$$Z(\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + (j\omega/\omega_{z,i})^{\gamma_i}}{1 + (j\omega/\omega_{p,i})^{\gamma_i}} \quad (5.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |Z(\omega)| = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{\sqrt{1 + 2(\omega/\omega_{z,i})^\gamma \cos(\gamma\pi/2) + (\omega/\omega_{z,i})^{2\gamma}}}{\sqrt{1 + 2(\omega/\omega_{p,i})^\gamma \cos(\gamma\pi/2) + (\omega/\omega_{p,i})^{2\gamma}}} \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \tan^{-1} \left( \frac{(\omega/\omega_{z,i})^\gamma \sin(\gamma\pi/2)}{1 + (\omega/\omega_{z,i})^\gamma \cos(\gamma\pi/2)} \right) \\ \quad - \tan^{-1} \left( \frac{(\omega/\omega_{p,i})^\gamma \sin(\gamma\pi/2)}{1 + (\omega/\omega_{p,i})^\gamma \cos(\gamma\pi/2)} \right) \end{array} \right. \quad (5.8)$$

### 5.2.2 Asymptotes of the PZF

Relations (5.6) are non-linear compared with frequency and make the identification difficult to carry out. Fortunately, it is possible to approach the behavior of PZF using the asymptotes of the modulus and the phase (see Vinh [4], Oustaloup [24] and Dion [25, 26]). The authors want to point out that thanks to Relation (5.6) :  $\log(|Z(\omega)|) = \log(K_0) + \sum_{i=1}^N \log(|Z(\omega)|_i)$  and  $\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega)$ . In statics, when the angular frequency is nil,  $\log(|Z(\omega=0)|) = \log(K_0)$  and  $\varphi(\omega=0) = 0$ . In dynamics, the behavior of PZF is the superposition of the behaviors of Pole-Zero couples. Each of these couples adds a non-linear contribution compared with frequency to the modulus and to the phase (see Equations (5.9)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \log(|Z(\omega)|_i) = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right)^2 \right) \\ \varphi_i(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_{p,i}} \right) \end{array} \right. \quad (5.9)$$

At this point, we would like to define  $\chi = \log(\omega)$ , the logarithm of the angular frequency. Assuming an angular frequency far from the Zero and the Pole and taking the limit, Relations

(5.9) tend towards the asymptotes given by Equations (5.10). These asymptotes are shown in Figure 5.3. The curves generated by a Pole-Zero couple, as well as their asymptotes, are symmetrical around the medium angular frequency,  $\chi_{c,i} = \log(\sqrt{\omega_{z,i}\omega_{p,i}}) = (\chi_{z,i} + \chi_{p,i})/2$ .

$$\begin{aligned} \log(|Z(\chi)|_i) \longrightarrow \log(|Z^{asy}(\chi)|_i) &= \begin{cases} 0 & \text{if } \chi < \chi_{z,i} < \chi_{p,i} \\ \log(\omega/\omega_{z,i}) = \chi - \chi_{z,i} & \text{if } \chi_{z,i} \leq \chi \leq \chi_{p,i} \\ \log(\omega_{p,i}/\omega_{z,i}) = \chi_{p,i} - \chi_{z,i} & \text{if } \chi_{z,i} < \chi_{p,i} < \chi \end{cases} \\ \varphi_i(\chi) \longrightarrow \varphi_i^{asy}(\chi) &= \begin{cases} 0 & \text{if } \chi < \chi_{z,i} < \chi_{p,i} \\ \pi/2 & \text{if } \chi_{z,i} \leq \chi \leq \chi_{p,i} \\ 0 & \text{if } \chi_{z,i} < \chi_{p,i} < \chi \end{cases} \end{aligned} \quad (5.10)$$

It is worth noticing that the asymptote of the modulus is the primitive of the asymptote of the phase divided by  $\pi/2$  (see Equations (5.10) and Figure 5.3). Considering the analogy between the asymptote of the phase and the derivative of the asymptote of the modulus with respect to  $\chi$ , we would like to define the stiffening,  $S$ , of a modulus and the area,  $A$ , under a phase curve. Given two angular frequencies,  $\omega_a$  and  $\omega_b$ ,  $S$  and  $A$  are defined thanks to Relations (5.11) :

$$\begin{aligned} \forall \chi_a = \log(\omega_a) \in \mathbb{R} \text{ and } \chi_b = \log(\omega_b) \in \mathbb{R}, \\ \left\{ \begin{aligned} S(|Z|, \chi_a, \chi_b) &= \int_{\chi_a}^{\chi_b} \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|Z(\chi)|) d\chi \\ &= \log(|Z(\chi_b)|) - \log(|Z(\chi_a)|) \quad \text{The stiffening} \\ A(\varphi, \chi_a, \chi_b) &= \int_{\chi_a}^{\chi_b} \varphi(\chi) d\chi \quad \text{The area under the phase curve} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (5.11)$$

The analogy between the phase and the derivative of the modulus allow one to get a useful relation between the stiffening and the area of the asymptotes of PZF (see Equation (5.12)). Moreover, given two angular frequencies logarithms  $\chi_a < \chi_{z,i}$  and  $\chi_b > \chi_{p,i}$ , Equations (5.12) becomes  $S(|Z^{asy}(\chi)|_i, \chi_a, \chi_b) = 2/\pi \times A(\varphi_i^{asy}(\chi), \chi_a, \chi_b) = (\chi_{p,i} - \chi_{z,i})$ .

$$\forall \chi_a \in \mathbb{R} \text{ and } \chi_b \in \mathbb{R}, \quad S(|Z^{asy}(\chi)|_i, \chi_a, \chi_b) = \frac{2}{\pi} A(\varphi_i^{asy}(\chi), \chi_a, \chi_b) \quad (5.12)$$

The asymptotes present the advantage to be easy to manipulate and to be simultaneously representative of modulus and phase. Asymptotes allow one to perform simple graphical identification.

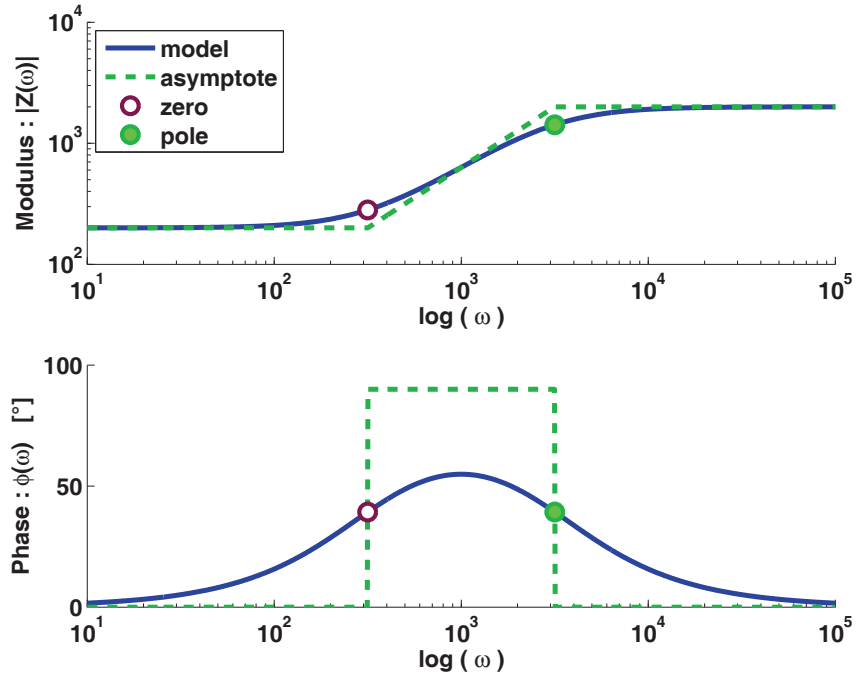


FIGURE 5.3 – The modulus and the phase of a PZF with only one one Pole-Zero couple (see Equations (5.6), (5.9) and (5.10)). The asymptotes are plotted in dashed line.

## 5.3 Existing methods

### 5.3.1 The Enclosing Curve Method

Vinh [4] has described a graphical method based on asymptotes (see Figures 5.4 and 5.7). This consists in plotting 2 enclosing curves above and below the experimental modulus curve, here :  $|H(\omega)|_+ = |H(\omega)| \times 10^{0.06}$  and  $|H(\omega)|_- = |H(\omega)| / 10^{0.06}$ . Then the 2 enclosing curves are linked alternatively by 2 types of curves : constant ones ( $f = a$ ) and linear one with a unitary slope ( $f = \log(\omega) + b$ ). The Zeros are given by the angular frequency where the linear segments cross the bottom curve and the Poles are given by the angular frequency where the linear segments cross the top curve. The closer to modulus are the enclosing curves, the better the model fits the modulus curve and the more it requires Pole-Zero couples. The parameters obtained with the enclosing curves method are listed in Table C.2 in Appendix C.3.

Each linear segment is in fact the asymptotic behavior of a Pole-Zero couple. This old method shows how powerful it is to use asymptotic curves in the logarithmic scale instead of the non-linear modulus and phase relations in the linear scale. Oustaloup [24] has proposed the same kind of method for the phase curve. His method consists in equalizing the area under the experimental curve,  $\psi(\chi)$ , and the area between the model curve,  $\varphi(\chi)$ .

### 5.3.2 The CRONE Method

The CRONE Method is described by Oustaloup [24] in his book. First, the number of Pole-Zero couples is defined to have at least one Pole-Zero couple per decade in the frequency domain,

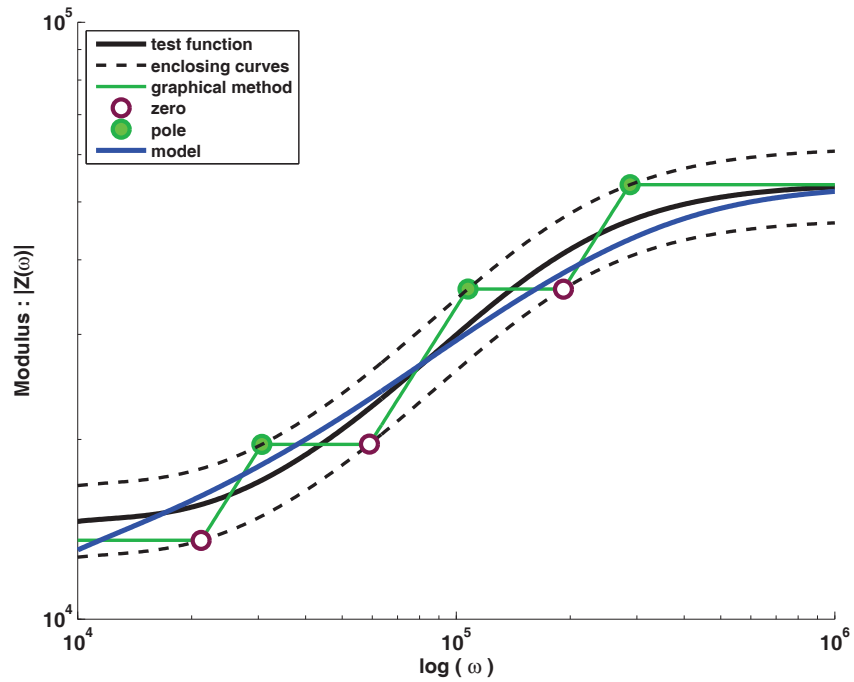


FIGURE 5.4 – Enclosing Curves Method allows identifying Poles and Zeros thanks to the enclosing curves of the modulus. The asymptotes are plotted between the two enclosing curves.

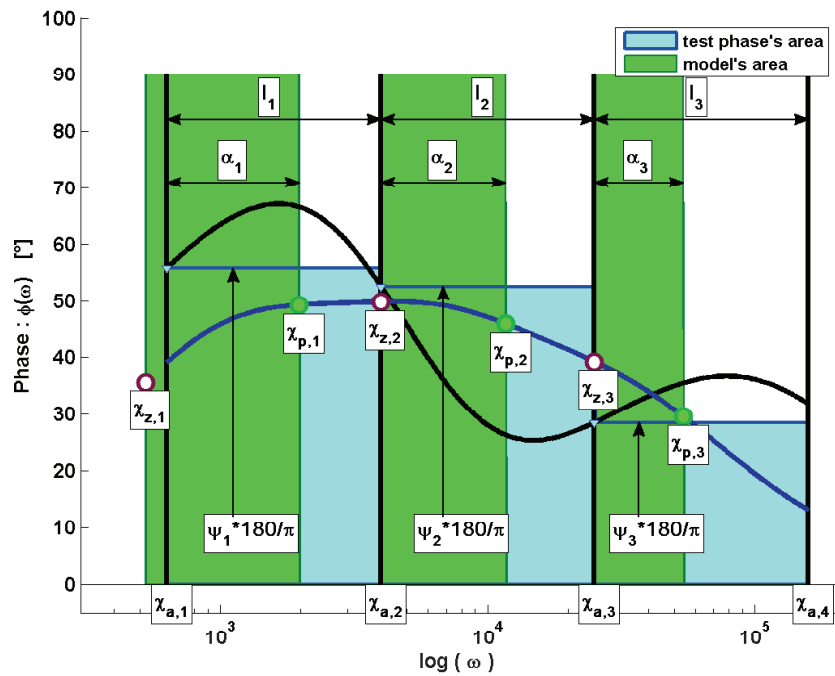


FIGURE 5.5 – CRONE's graphical method [24]. The areas under the asymptotes curve and under the test curve are equal. The width  $\alpha_i$  give the distance between poles and zeros.

Pole-Zero couples	1	2	3	4	5	6
$\chi_z$	2.52	3.10	3.20	4.10	4.40	4.80
$\chi_p$	2.95	3.50	3.75	3.80	4.60	5.25
$\chi_p - \chi_z$	0.43	0.40	0.55	<b>- 0.30</b>	0.20	0.45

TABLE 5.2 – Poles and Zeros list of the test function and  $K_{stk1} = 1000$ 

here we have 8 couples for 5 decades. The frequency domain is divided in frequency subdomains,  $\chi \in [\chi_{a,i} \dots \chi_{a,i+1}]$ , one for each Pole-Zero couple, (see Figure 5.5). The subdomains have the same length,  $\ell_i$ . In each subdomain, the area under the test curve is approached by the area of a rectangle whose height is the first phase value of the subdomain,  $\psi_i$ . It has to be equal to the area under the asymptotic curve of the model phase. Zeros are arbitrary placed on the left of subdomains, thus,  $\chi_{z,i+1} = \ell_i + \chi_{z,i}$ . Poles are placed in such a way that  $\chi_{p,i} = \chi_{z,i} + \alpha_i$ , with  $\alpha_i = \psi_i \ell_i \times 2/\pi$ .

This method generates edge effects with a decreasing phase near the edge. To avoid it, the first Zero and the last Pole are corrected by an arbitrary value around 0.08 :  $\chi_{z,1}^{\text{corrected}} = \chi_{z,1} - 0.08$  and  $\chi_{p,\text{end}}^{\text{corrected}} = \chi_{p,\text{end}} + 0.08$ . This helps to increase the phase value of the first and the last Pole-Zero couple. Then in Figure 5.5 the asymptotic area of the first subdomain begins on the left of it. As it is shown in Figure 5.5, this method is not very accurate for non smooth phase curves. The parameters of the method used to obtain Figures 5.5 and 5.8 are listed in Table C.3 in Appendix C.3.

### 5.3.3 A test transfer function

In order to benchmark the methods presented in this paper, it is useful to define a common transfer function with modulus and phase,  $H(\chi) = |H(\chi)| \exp(j\psi(\chi))$ . For this purpose we have chosen an arbitrary Pole-Zero function with big variations in order to test the robustness of the methods. The logarithm of the Zeros and Poles are presented in Table 5.2, and  $K_0 = 1000$ .

It is worth noticing that a Pole-Zero couple with the Zero bigger than the Pole is not causal. Such a couple generates a decreasing modulus with a negative phase, what would mean that the material respond before the excitation. One can expect an identification method of viscoelastic properties to always give causal Pole-Zero couples, i.e. with a Zero lower than the Pole. In order to test the robustness of the methods with the test transfer function, its 4th Pole-Zero couple is not causal (see Table 5.2). Nevertheless, the transfer function, which is the sum of all couples behavior, is still globally causal with an increasing modulus and a positive phase (Figure 5.6). It is worth noticing that for all methods, experimental curves are usually interpolated exponentially in the frequency domain for the modulus and linearly for the phase. This helps to treat values between experimentally measured points. The present test function is defined with 1000 points equally spaced in logarithmic scale between  $10^2$  and  $10^6$  rad/s. The subscript  $k$  will be used to refer to one of these points.

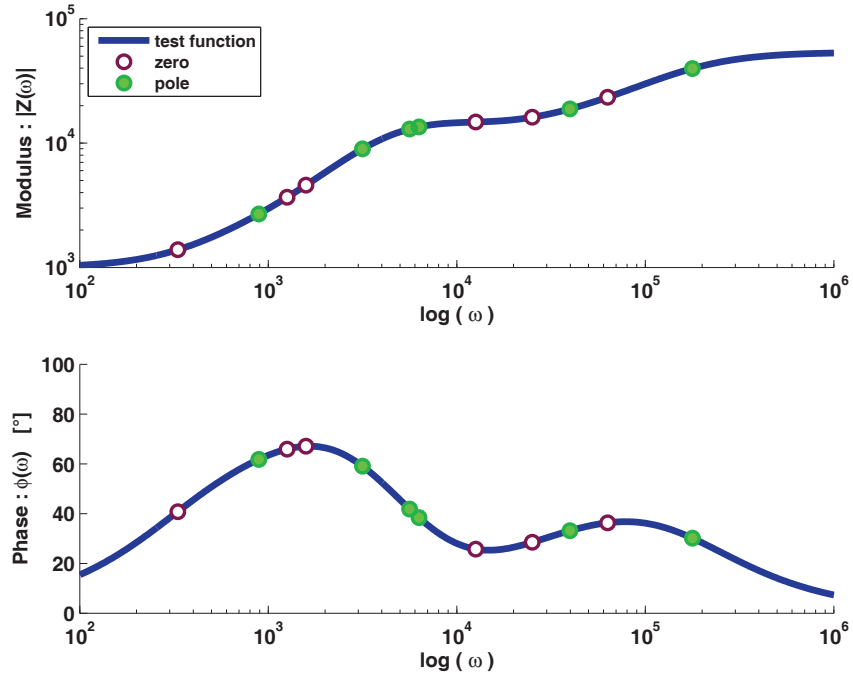


FIGURE 5.6 – The modulus and the phase of the test transfer function used to compare identification methods. Particular attention should be paid on the fourth Pole Zero couple which has been arbitrary taken to be non-causal (see Table 5.2).

### 5.3.4 Two fitting indicators

To compare the methods presented in this paper, two curves fitting indicators are defined, one for the modulus and one for the phase. The purpose is to quantify how good a model  $Z(\chi) = |Z(\chi)| \exp(j\varphi(\chi))$ , is able to fit an experimental transfer function  $H(\chi) = |H(\chi)| \exp(j\psi(\chi))$ . To be equivalent, these indicators must respect the analogy between the stiffening of the modulus asymptote and the area under the asymptote of the phase see Relation (5.12).

$$\delta_{|Z|} = \frac{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \left( \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|H(\chi)|) - \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|Z(\chi)|) \right)^2 d\chi}{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \left( \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|H(\chi)|) \right)^2 d\chi} \quad (5.13)$$

$$\delta_{\varphi} = \frac{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} (\psi(\chi) - \varphi(\chi))^2 d\chi}{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \psi(\chi)^2 d\chi} \quad (5.14)$$

Taking advantage of the definition of the stiffening as an integral in Equation (5.11), the indicators are given in Equations (5.13) and (5.14). They are normalized to be dimensionless. A model curve that fits really well an experimental curve will exhibit a low indicator. These indicators only allow evaluating the identification of Poles and Zeros, but do not evaluate the identification of the static modulus,  $K_0$ . Thus, even if a GMM has low indicators, an offset can occur between the modulus of the GMM and the modulus of the experimental curve. Indeed,

the offset between the two modulus curves is driven by the static modulus :  $K_0$ . This static modulus is chosen after the identification of poles and zeros. One can either set it before the identification and deals the offset with the first zero (see Section 5.4.2).

As the indicators of these two methods show (Figures 5.7 and 5.8), the enclosing curves method gives better results than the CRONE method. But these results can be improved, furthermore, none of both methods allow identifying parameters from both modulus and phase curves.

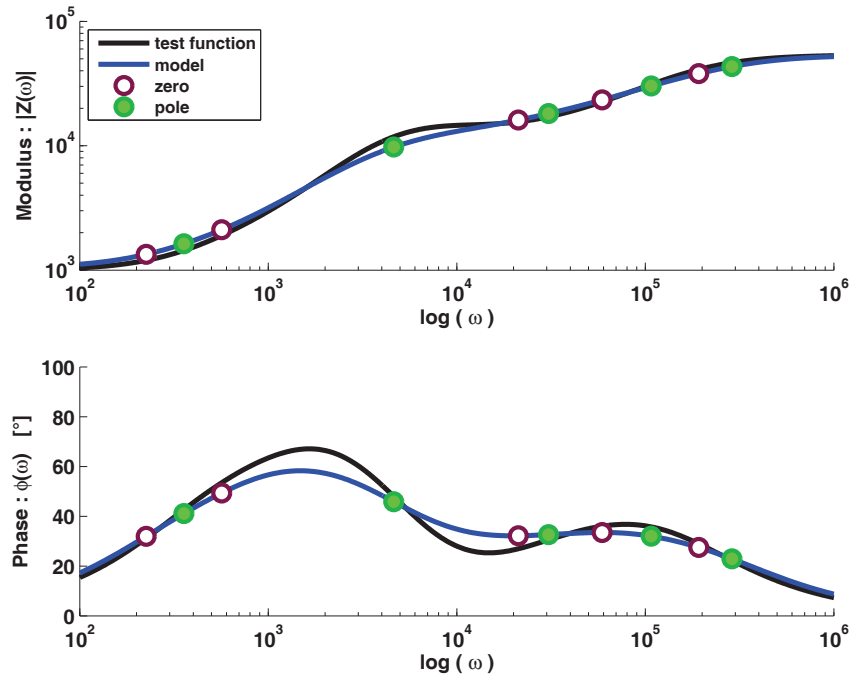


FIGURE 5.7 – Enclosing Curves Method. Pole Zero couples are detailed in Table C.2 in Appendix C.3. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 4.5\%$  and  $\delta_{\varphi} = 1.25\%$

## 5.4 The Asymptotical Variations Method

Figure 5.9 represents the identification process. This begins by an initialization of the parameters of the PZF. Three initialization methods are presented in this paper and they are detailed in Section 5.3 for the two firsts and in Section 5.4.1 for the last one. Given the initial parameters of the PZF, optimization processes allow one to improve the fitting of experimental curves. The indicators are used to quantify the quality of the identified parameters.

### 5.4.1 Initialization of the PZF parameters with a new graphical method

Given an experimental transfer function with modulus and phase, one can expect to use both of them for the identification of GMM parameters. The previous methods have already



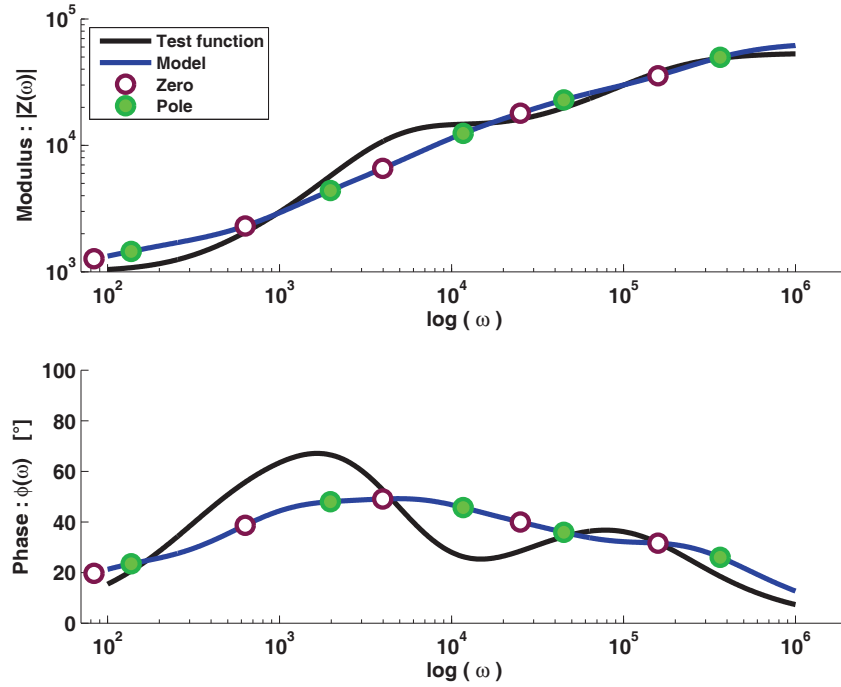


FIGURE 5.8 – CRONE’s graphical method [24]. Pole Zero couples are detailed in Table C.3 in Appendix C.3. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 23.48\%$  and  $\delta_{\varphi} = 8.24\%$ .

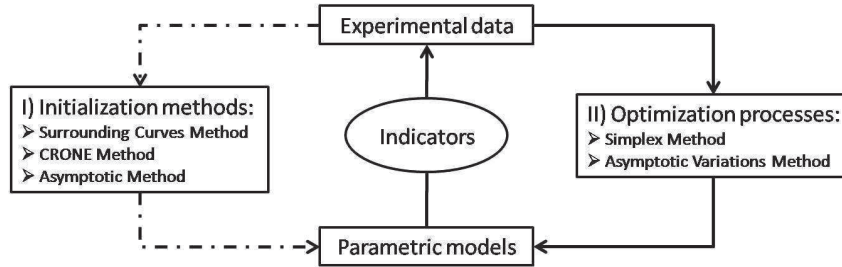


FIGURE 5.9 – The iterative identification process with three different methods for initialization and two methods for optimization.

shown that these two kinds of curves content the same information. The next methods presented in this paper are described for the modulus and for the phase, then to manage the two kinds of value, the Poles and the Zeros will be the averaged with a weighting coefficient  $r$  :  $\omega_{z,i} = (1 - r) \times \omega_{z,i}^{\text{modulus}} + r \times \omega_{z,i}^{\text{phase}}$  and  $\omega_{p,i} = (1 - r) \times \omega_{p,i}^{\text{modulus}} + r \times \omega_{p,i}^{\text{phase}}$ . Here, the weight  $r$  will always be taken to 0.5. Moreover, in order to prevent edge effects, the test curves are extrapolated with a constant modulus and a null phase on about half a decade before and after the frequency domain.

Unlike the previous method already described by Oustaloup, the area under the phase is evaluated by the Trapezes Method (see Figure 5.10). This helps to give better results when the transfer function is only known in a few points. Then Pole-Zero couples are placed according to

the need of stiffening and phase. This is realized by dividing the frequency domain in  $N$  frequency subdomains, one for each Pole Zero couple. Each of these subdomains,  $\chi \in [\chi_{a,i}, \chi_{b,i}]$ , has the same experimental stiffening  $\alpha_i = \int_{\chi_{a,i}}^{\chi_{b,i}} \frac{d}{d\chi} [\log(|H(\chi)|)] d\chi = \log(|H(\chi_{b,i})|) - \log(|H(\chi_{a,i})|)$ , (see the modulus curve in Figure 5.10) or the same area of phase,  $\alpha_i \pi/2 = \int_{\chi_{a,i}}^{\chi_{b,i}} \psi(\chi) d\chi$ , (see the phase integral curve in Figure 5.10). Thus, if high stiffening or high phase occurs in the vicinity of a frequency, then couples will concentrate around this frequency. In a subdomain, the medium frequency of a couple  $\chi_{c,i} = (\chi_{z,i} + \chi_{p,i})/2$ , is placed with respect to this principle. The medium frequency divides the subdomain in two parts of equal stiffening or area of phase. In Figure 5.10, the stiffening or phase integral apportionment is represented by horizontal lines and the frequency domain apportionment by vertical lines, continuous lines separating subdomains and dashed lines denoting medium frequencies.

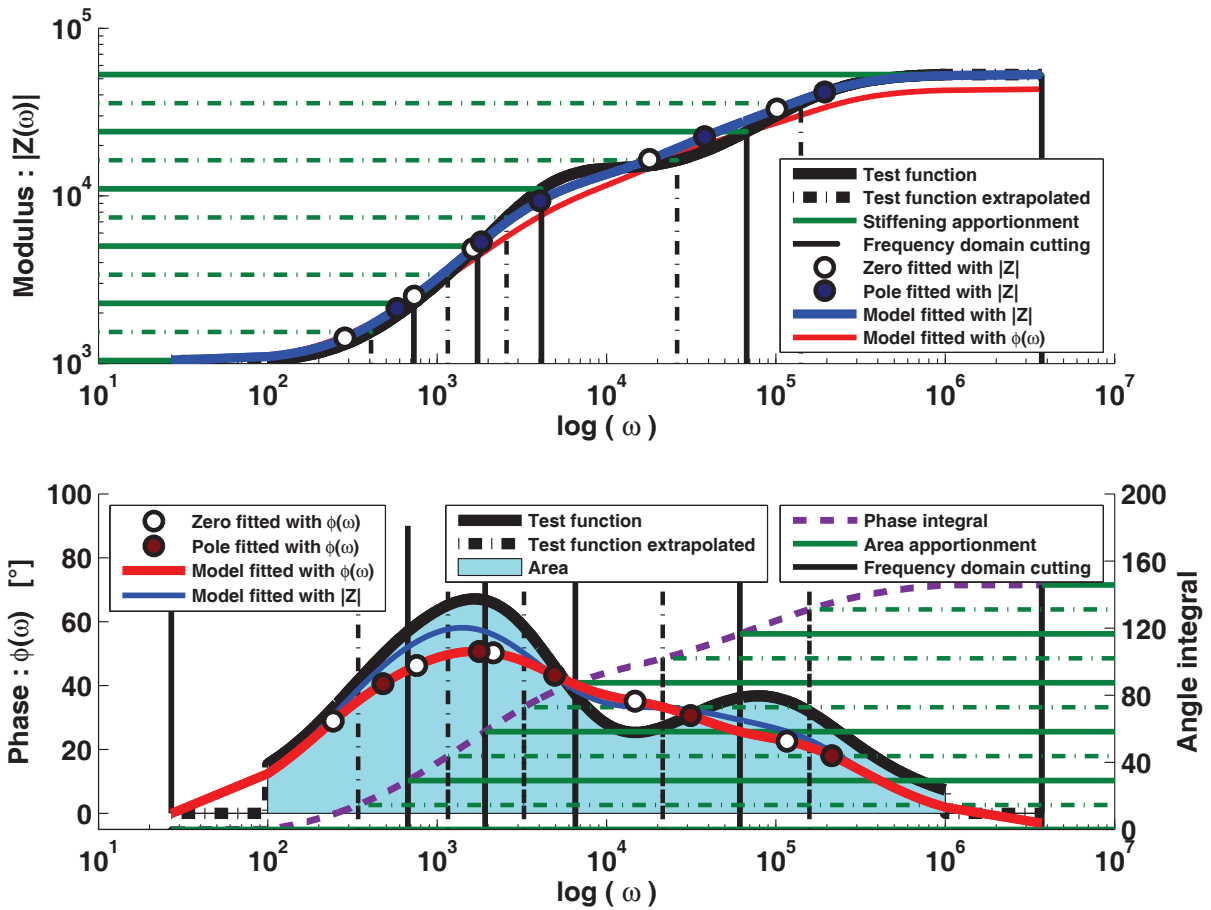


FIGURE 5.10 – A new graphical method using asymptotes to identify parameters on both modulus and phase curve. The parameters are detailed in Appendix C.3. The final parameters (see Table C.6 and Figure 5.11) are obtained by averaging the ones from the modulus curve (see Table C.4) and from the phase curve (see Table C.5).

As in the previous method, the ratio  $\alpha_i$  is used to place the Zeros and the Poles, but here it is defined for both modulus and phase. The factor  $\alpha_i$  is the value calculated in a subdomain and it affects only the Pole Zero couple of this subdomain. Because of the frequency domain

apportionment, here  $\alpha_i$  is the same for all subdomains. Unfortunately, there are some cases where curves with big variations can produce very smooth fitted model. To avoid these cases,  $\alpha_i$  is weighted by a coefficient  $\nu_i$  which depends on the length of the subdomains. A short subdomain means that the phase or the slope of the stiffness is big, then a big  $\nu_i$  coefficient is required, Equation (5.15) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_{total} = \chi_{\max} - \chi_{\min} \\ \ell_i = \chi_{b,i} - \chi_{a,i} \\ \nu_i = \left( \frac{\ell_{total} - \ell_i}{\ell_{total}} \right) \left( \frac{N}{N-1} \right) \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \chi_{z,i} = \chi_{c,i} - \frac{\nu_i \alpha_i}{2} \\ \chi_{p,i} = \chi_{c,i} + \frac{\nu_i \alpha_i}{2} \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Notice that  $\sum_{i=1}^N \nu_i = N$ , and that when all the subdomains have the same length, the weighting coefficients are  $\nu_i = 1$ . The results of this method are shown in Figure 5.10. The blue curves are produced by a fitting on the test modulus curve, the Pole Zeros coefficients of such a model are shown in Table C.4 in Appendix C.3. Table C.5 lists the Pole Zeros coefficients of the model produced by a fitting on the test phase curve (red curves). The static modulus,  $K_0$ , in Equation (5.3) is taken as the first value of the test modulus curve. Notice that all Zeros are lower than their associated Poles. Finally, the average Pole Zeros coefficients are shown in Table C.6, they lead to the model plotted in Figure 5.11.

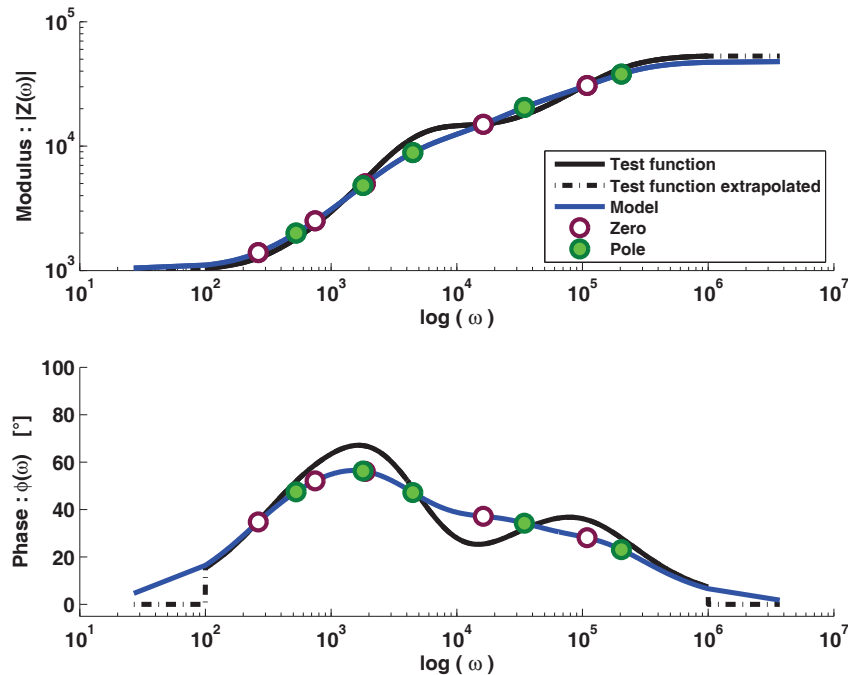


FIGURE 5.11 – The final results of the graphical method described in Section 5.4.1. The parameters are in detailed in Table C.6 in Appendix C.3. They have been averaged from the ones plotted on Figure 5.10. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 8.87\%$  and  $\delta_{\varphi} = 2.57\%$

This method allows improving the placement of the couples. It is better than the CRONE method but it is worse than the enclosing curve method which intrinsically places well couples.

Nevertheless, this method uses both the modulus and the phase. The values of the convergence indicators are lower for a fitting on the experimental modulus : 6.3% and 1.7% than for a fitting on the experimental phase : 12.31% and 3.8%. The averaged parameters score intermediate indicators : 8.87% and 2.57%. These indicators value are not so good, this means that the model is not close enough to the test curves especially for the test curve of phase (see Figure 5.11). The results of this method can be optimized and they will be used as an initialization for the optimization processes proposed in the following sections.

### 5.4.2 Optimization of identified parameters

Given a GMM with initial values for Poles and Zeros, some ways to optimize the fitting of experimental curves are described in this section. For this purpose, iterative methods are required. One can use the classical Newton-Raphson method to find the parameters leading to the least mean square value. This method does not work very well because of the existence of several local minima.

To overcome this difficulty, two optimizations processes are presented here. First, a Matlab<sup>®</sup> function is used, it is based on the Nelder-Mead Simplex Method. Second, a new method based on the modulus and phase asymptotes is described. These asymptotes are used to translate the differences between the model and the experimental curves into step of variations.

#### An unconstrained nonlinear optimization algorithm

"fminsearch" is a Matlab<sup>®</sup> function based on the Nelder-Mead Simplex Method which convergence properties have been discussed by Lagarias and al. [27]. This method finds the minimum of a scalar-valued nonlinear function  $W$  of  $n$  real variables, the Zeros and the Poles. For the present identification problem, this function will be defined as the weighted sum of the 2 indicators previously defined in Equations (5.13) and (5.14) (see Equation (5.16)). This allows fitting both modulus and phase in the same time :

$$W = (1 - r) \times \delta_{|Z|} + r \times \delta_{\varphi} \quad (5.16)$$

Although in general cases, taking the weighting coefficient  $r \neq 0.5$  gives better results, in the present paper,  $r$  has been taken to 0.5 for all methods in order to compare them. This was already the case in Section 5.4.1. The simplex method will be used to minimize  $W$ . The calculation time used by this method seems to be strongly dependent of the initial parameters. These initial parameters were found by the method described in Section 5.4.1 and are listed in Table C.6 in Appendix C.3.

According to the indicators : 0.11% and 0.03%, this method gives very good results (Figure 5.12). The parameters of this method are reported in Table C.7 in Appendix C.4. Since it is an unconstrained method, non causal Pole-Zero couples can occur like the fourth couple of Table C.7 for which its Zero is greater than its Pole. Despite its good results, this method remains unconstrained and can lead to non causal solutions.

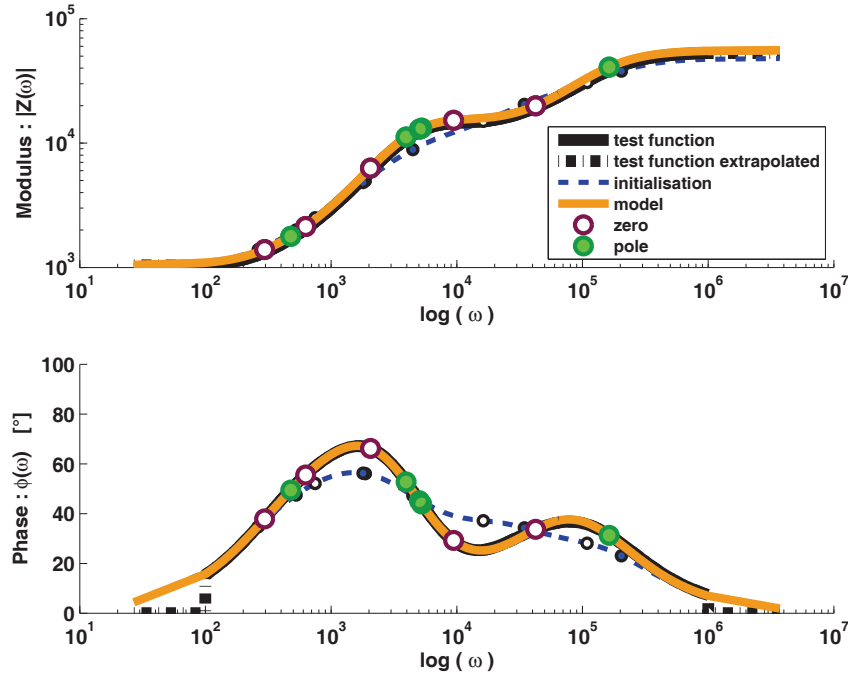


FIGURE 5.12 – The GMM obtained after the optimization of parameters given by the method described in Section 5.4.1 (see Table C.6 in Appendix C.3). The optimization is proceed thanks to a Matlab<sup>®</sup> function based on the Nelder-Mead Simplex Method. The optimized parameters are detailed in Table C.7 in Appendix C.4. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 0.11\%$  and  $\delta_{\varphi} = 0.03\%$ . Notice that the fourth Pole is lower than the fourth Zero, thus it is non-causal.

### Optimization with the Asymptotical Variations Method

The method described here allow constraining Pole Zero couples to be causal, i.e. with the Zero smaller than the Pole. The principle of this method is to find each local difference between the experimental curves and the model curves in terms of stiffening or phase integral. These local differences are attributed to all different couples in function of their local weight. Local lack and excess of stiffening and integral of phase can be seen as a gradient integrated on a variable step. The asymptotes provide the simple relations for the translation of this variable step into parameter variations.

To compute the stiffening and the phase integral, the experimental curves are interpolated in logarithmic scale thanks to linear functions. After the interpolation, curves reach a rate of 100 points per decade. The subscript  $k$  will be used to denote these points. The interval between two successive points is a subdomain where integration is done with the Trapezes Method. In Figure 5.13, Figure 5.15 and Figure 5.17, the interpolated modulus and phase are represented with a wide line.

While identifying the modulus, the relevant quantity to look at is the difference between the modulus slope of the experimental curve,  $\frac{d}{d\chi}[\log(|H(\chi)|)]$ , in dashed line in Figure 5.13 and the modulus slope of the model,  $\frac{d}{d\chi}[\log(|Z(\chi)|)]$ , in dashed-dotted line in Figure 5.13. Integrating this modulus slope in between 2 points,  $\omega \in [\omega_k.. \omega_{k+1}]$ , provides the local stiffening :

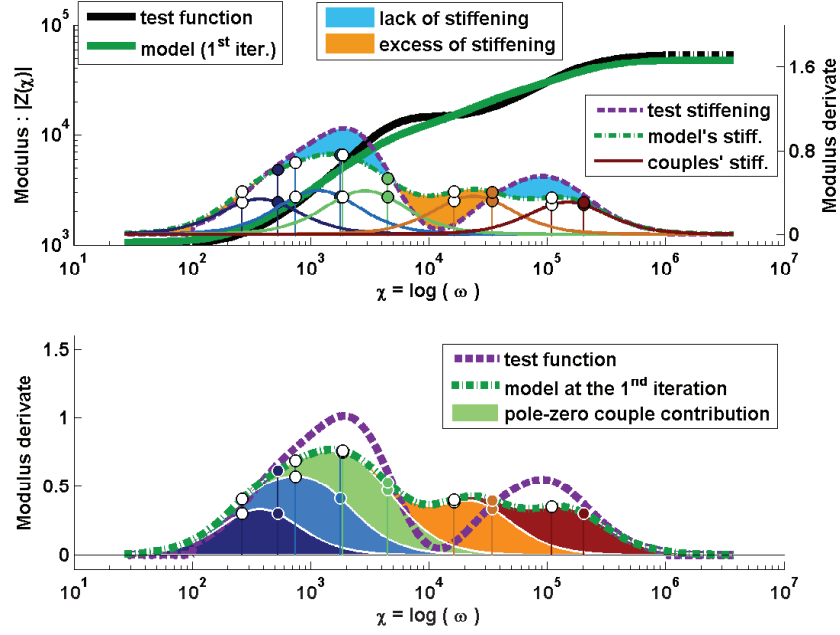


FIGURE 5.13 – Modulus of the test function and its derivative compared to the model's ones with the couple contributions during the 1st iteration

$\int_{\chi_k}^{\chi_{k+1}} \frac{d}{d\chi} [\log(|Z(\chi)|)] d\chi = \log(|Z(\chi_{k+1})|) - \log(|Z(\chi_k)|)$ . The local stiffening difference,  $\delta S_k$ , is defined by Equation (5.17). In the upper part of Figure 5.13, the model lack and excess of local stiffening are represented in painted area.

$$\delta S_k = \log \left( \frac{|Z(\chi_{k+1})| |H(\chi_k)|}{|Z(\chi_k)| |H(\chi_{k+1})|} \right) \quad (5.17)$$

Relation (5.10), describing the behavior of asymptotes of the model is used to convert the local differences of stiffening into parameter variations steps. These variations steps are shared between all couples in agreement with their local weight in each subdomain. The local weight of a couple,  $I_{k,i}^{|Z|}$  is defined as the ratio of its local stiffening contribution to the model's local stiffening (Equation (5.18)). The local stiffening contribution of the  $i^{\text{th}}$  couple is  $\log(|Z(\chi_{k+1})|_i) - \log(|Z(\chi_k)|_i)$ , this is the difference between 2 successive points of the modulus logarithm generated by the  $i^{\text{th}}$  couple (Equation (5.9)).

$$I_{k,i}^{|Z|} = \frac{\log(|Z(\chi_{k+1})|_i) - \log(|Z(\chi_k)|_i)}{\log(|Z(\chi_{k+1})|) - \log(|Z(\chi_k)|)} \quad (5.18)$$

Figure 5.13 shows, in its upper part, the contribution of each particular couple to the derivative of the modulus,  $\frac{d}{d\chi} [\log(|Z(\chi_k)|_i)]$ , and, in the lower part, the derivative of the modulus,  $\frac{d}{d\chi} [\log(|Z(\chi_k)|)]$ , as the sum of all couple contributions. The influence curves of each Pole Zero couple are shown in the upper part of Figure 5.14. Notice that for each couple, the peak of influence occurs in the vicinity of its medium frequency,  $\chi_{c,i}$ . These medium frequencies are represented in the lower part of Figure 5.14 with the local stiffening difference,  $\delta S_k$  (Equation

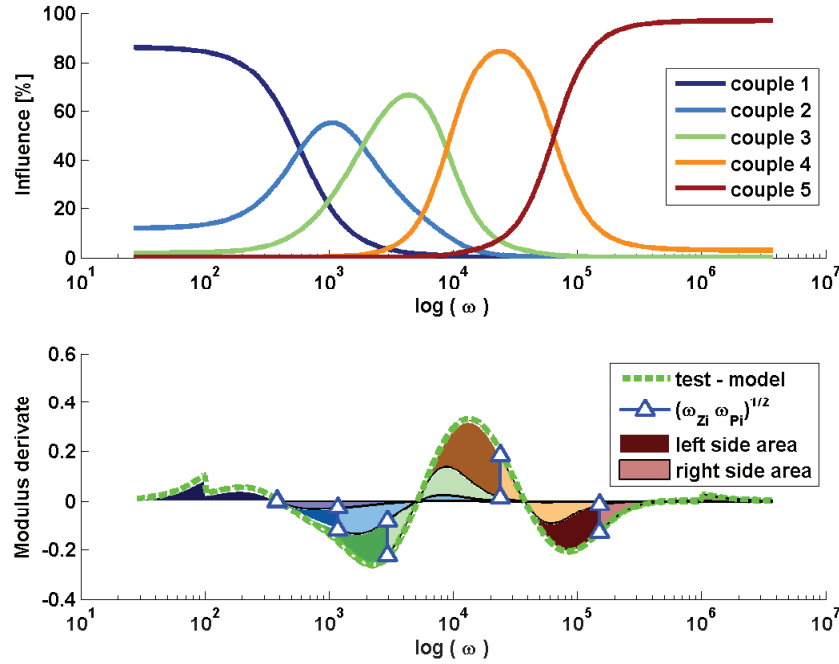


FIGURE 5.14 – Sharing between the Poles and the Zeros of the modulus derivative difference between the model and the test function

(5.17)). In each subdomain, this difference already shared between couples according to their influence must be shared again between the Pole and the Zero of a couple. The sum of stiffening difference occurring in subdomains on the left of the medium frequency is attributed to the Zero and the sum of the ones of the right is attributed to the Pole (see Equation (5.19)). Thus at each iteration step denoted by the superscript  $u$ , the parameters are changed according to the lack and excess of stiffening.

$$\begin{cases} \chi_{z,i}^{\text{modulus}} = \chi_{z,i}^u - \sum_{\chi_k \leq \chi_{c,i}} I_{k,i}^{|Z|,u} \delta S_k^u \\ \chi_{p,i}^{\text{modulus}} = \chi_{p,i}^u + \sum_{\chi_{c,i} < \chi_k} I_{k,i}^{|Z|,u} \delta S_k^u \end{cases} \quad (5.19)$$

The way to identify the phase curve is analogous. The relevant quantity to look at is the difference between the phase of the experimental curve,  $\psi(\chi)$ , in continuous line in Figure 5.15 and the phase of the model curve,  $\varphi(\chi)$ , in dashed line in Figure 5.15. Integrating this phase between 2 points,  $\omega \in [\omega_k \dots \omega_{k+1}]$ , provides the local area of phase :  $\int_{\chi_k}^{\chi_{k+1}} \varphi(\chi) d\chi = (\varphi(\chi_{k+1}) + \varphi(\chi_k))/2$ . The local area of phase difference,  $\delta A_k$ , is defined by Equation (5.20). The model lack and excess of area of phase are represented in painted area.

$$\delta A_k = \frac{\psi(\chi_{k+1}) + \psi(\chi_k) - \varphi(\chi_{k+1}) - \varphi(\chi_k)}{2} \quad (5.20)$$

Relation (5.10), describing the behavior of asymptotes of the model will be used to convert

the local differences into parameter variations step. These variations steps are shared between all couples in agreement with their local weight in each subdomain. The local weight of a couple,  $I_{k,i}^\varphi$  is defined as the ratio of its local area of phase contribution to the model's local area of phase (Equation (5.21)). The local area of phase contribution of the  $i^{\text{th}}$  couple is  $(\varphi_i(\chi_{k+1}) + \varphi_i(\chi_k))/2$ , this is the integral of phase between two successive points of the phase generated by the  $i^{\text{th}}$  couple (Equation (5.9)).

$$I_{k,i}^\varphi = \frac{\varphi_i(\chi_{k+1}) + \varphi_i(\chi_k)}{\varphi(\chi_{k+1}) + \varphi(\chi_k)} \quad (5.21)$$

Figure 5.15 shows, in its upper part, the phase contribution of each particular couple  $\varphi_i(\chi)$  and, in the lower part, the model phase,  $\varphi(\chi)$ , as the sum of all couple contributions. The influence curves of Pole Zero couple are shown in the upper part of Figure 5.16. Notice that for each couple, the peak of influence occurs in the vicinity of its medium frequency,  $\chi_{c,i}$ . These medium frequencies are represented in the lower part of Figure 5.16 with the local area of phase difference,  $\delta A_k$  (see Equation (5.20)). In each subdomain, this difference already shared between couples according to their weight must be shared again between the Pole and the Zero of a couple. The sum of area of phase difference occurring in subdomains on the left of the medium frequency is attributed to the Zero and the sum of the ones of the right is attributed to the Pole (see Equation (5.22)). Thus at each iteration step denoted by the superscript  $u$ , the parameters are changed according to the lack and excess of area of phase.

$$\begin{cases} \chi_{z,i}^{\text{phase}} = \chi_{z,i}^u - \frac{2}{\pi} \sum_{\chi_k \leq \chi_{c,i}} I_{k,i}^{\varphi,u} \delta A_k^u \\ \chi_{p,i}^{\text{phase}} = \chi_{p,i}^u + \frac{2}{\pi} \sum_{\chi_{c,i} < \chi_k} I_{k,i}^{\varphi,u} \delta A_k^u \end{cases} \quad (5.22)$$

The sharing of differences between couples in function of their weight has the advantage to only affects couples close to a local deviation, thus it does not disturb couples without any weight. The sharing of differences between Pole and Zero, in function of the position of a subdomain to the medium frequency, allows two different kinds of parameters behavior during iteration. First, the medium frequency of a Pole Zero couple can move in frequency without any change of the relative position of the Pole to the Zero. It seems that the whole couple is moving in frequency. The second behavior has a standstill medium frequency while the coefficient Pole and the Zero are changing their value. This behavior induces the growth or the decrease of the whole couple.

The parameters found according to modulus and phase are averaged as in the previous method :  $\omega_{z,i} = (1 - r) \times \omega_{z,i}^{\text{modulus}} + r \times \omega_{z,i}^{\text{phase}}$ , with  $r = 0.5$  and the static modulus,  $K_0$ , defined in Equation (5.3) is taken as the first value of the test modulus curve. The method described here for the modulus allows fitting its derivative. Thus, although the global form of the modulus is respected, an offset always occurs between the model and the test function. To remove this offset, the first Zero is modified according to the mean distance between the 2 curves :  $\chi_{Z_0}^{u+1} = \chi_{Z_0}^u - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^V \log(|H(\chi_k)|) - \log(|Z^u(\chi_k)|)$ . Indeed, this means distance can be seen as a stiffening. Moreover, the causality is verified at each iteration. If the Zero of one couple is bigger than its Pole then their values are forced, for example,  $\chi_{p,i} - \chi_{z,i} = 10^{-6}$  centred on



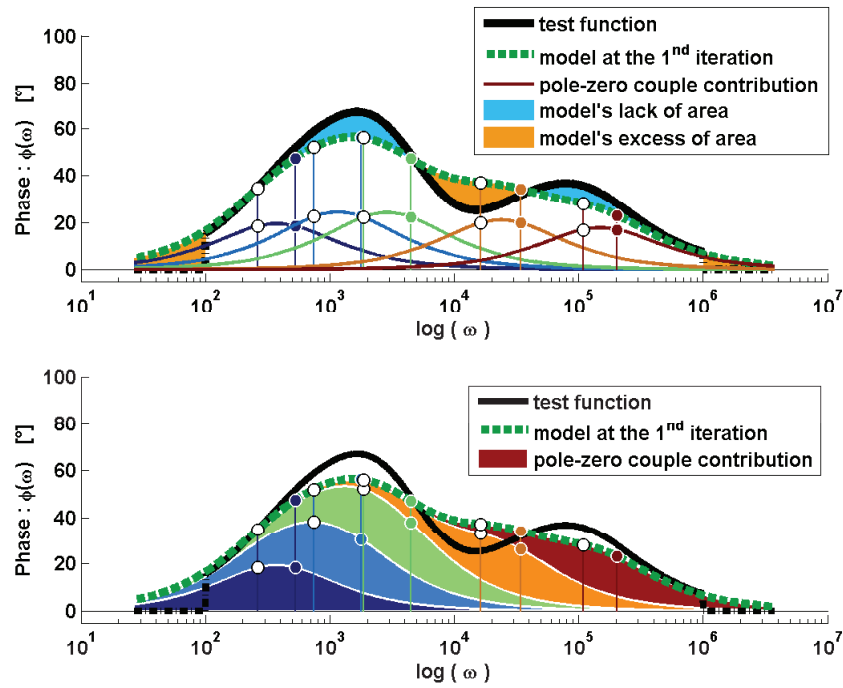


FIGURE 5.15 – Phase of the test function compared to the model's phase with the couple contributions during the 1st iteration

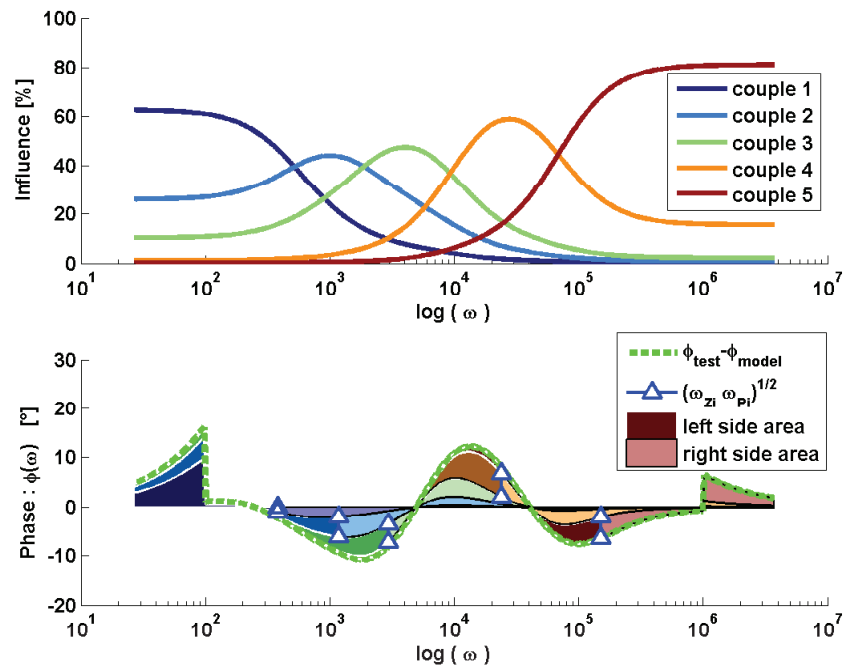


FIGURE 5.16 – Sharing between the Poles and the Zeros of the phase difference between the model and the test function

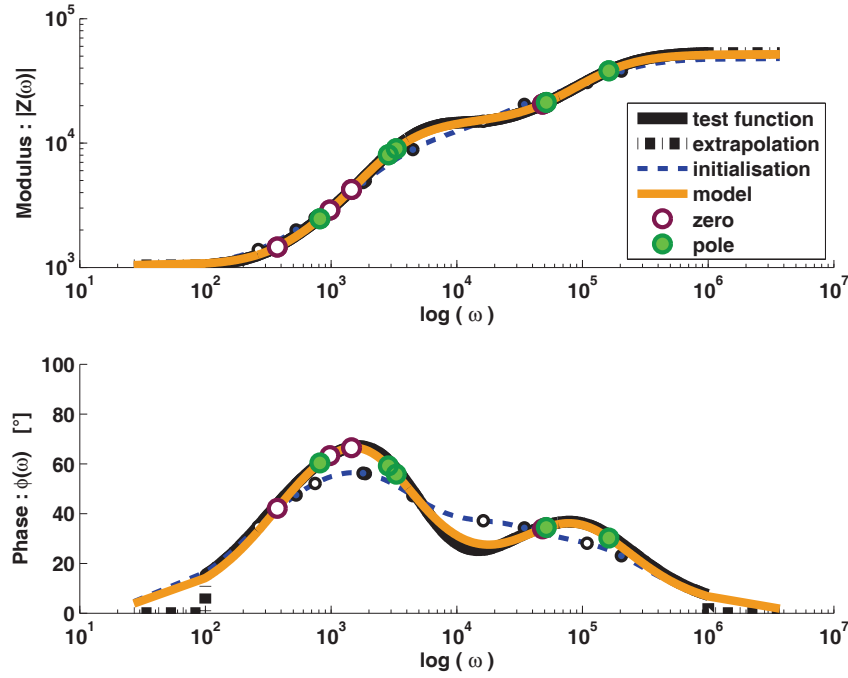


FIGURE 5.17 – The GMM obtained after the optimization of parameters given by the method described in Section 5.4.1 (see Table C.6 in Appendix C.3). The optimization is proceed thanks to the method, described in Section 5.4.2, using asymptotes to translate model deviations from the test curves into parameters steps. The optimized parameters are detailed in Table C.8 in Appendix C.4. The indicators of such parameters are  $\delta_{|Z|} = 0.77\%$  and  $\delta_{\varphi} = 0.15\%$ .

the medium frequency. Notice that such a couple is superfluous for the model since it does not produce any phase or stiffening. Finally, the problem of edge effects have already been treated by the extrapolation of tests curves. If for some reasons the medium frequency of a couple would step out the frequency domain, a virtual medium frequency would be defined inside the frequency domain in order to allow the computation of Equations (5.19) and (5.22).

The iterative process stops when the maximum parameter step,  $\delta_{ZP_{\max}}^u = \max(|\chi_{z,i}^{u+1} - \chi_{z,i}^u|, |\chi_{p,i}^{u+1} - \chi_{p,i}^u|)$  is smaller than a defined value,  $\varepsilon = 10^{-3}$  for example, or after a certain amount of iteration, 125 for example. For robustness, the maximum parameter step is imposed to be smaller than the previous one :  $\delta_{ZP_{\max}}^u \leq \delta_{ZP_{\max}}^{u-1}$ . If it is not the case all parameter steps are normalized by multiplying per  $\delta_{ZP_{\max}}^{u-1} / \delta_{ZP_{\max}}^u$ . During the first iteration, this step limitation is initialized to a certain value, 0.25 for example.

This method gives good results (see Figure 5.17), and the indicators prove it : 0.77% and 0.15%, moreover the causality is respected for all Pole Zero couples (see Table C.8 in Appendix C.4). Finally, this method is a little bit faster than the simplex method one.

## 5.5 Conclusion and perspectives

Generalized Maxwell Model (GMM) can be expressed with a Pole Zero Formulation (PZF). In logarithmic scale this formulation is a superposition of Pole Zero couple behavior. These behaviors are non-linear against frequency and it is easier to manipulate the asymptotes to approach the value of stiffening and integral of phase. The new identification method presented in this paper is split in 2 parts, initialization of parameters and optimization.

The initialization places the medium frequencies of Pole-Zero couples in the frequency domain such that they are equally distant according to stiffening and integral of phase. Thus, the couples are placed where they are most needed. The stiffening and area of phase are translated into parameter steps : distance between Pole and Zero of each couple, thanks to the relations of asymptotes. This gives the initialized parameters of the GMM. Then they are optimized by considering each local deviation between the model and the experimental curve. Each local deviation is translated into parameter step thanks to asymptotes. The steps are shared between couples in function of their local weight. Then they are shared between Poles and Zeros in function of the position of the local deviation compared to the medium frequency of the couple. Iterating until the parameters steps become too small provides the optimized parameters.

This new method is very efficient for the identification of a Pole Zero Formulation according to both modulus and phase curves. It is neither restricted to viscoelasticity nor to the GMM. A very analogous version of this method could be applied to identify the parameters of a Fractional Calculus Pole Zero Formulation (FCPZF). Indeed the only difference would be the asymptotic value. Given a derivation order,  $\gamma_i$  and considering Equation (5.8), the stiffening and the integral of phase of one Pole-Zero couple's asymptotes become for a FCPZF, respectively,  $S_i = \gamma_i \times (\chi_{p,i} - \chi_{z,i})$  and  $A_i = \gamma_i \times \pi/2 \times (\chi_{p,i} - \chi_{z,i})$ .

The advantage of this method is the possibility to constrain the parameters. In the present case of viscoelasticity, for the seek of causality, Zeros were constrained to be smaller than their Pole. Although this method is very quick and efficient, some improvements would still be possible. It is possible that the Zero of a couple would become close but different to its Pole. In such a situation the contribution of this couple is very low inducing very low step variation because of the weighting parameters. That means that it will be difficult to modify this kind of couple. This problem can be solved by adding a constant to the weighting coefficient,  $I_{k,i}^{|Z|}$  and  $I_{k,i}^{\varphi}$ . This constant would be equal for all couples, for example :  $\zeta = 1/N$ .

Other improvements can be done when, for some reasons, a Zero tends to be equal to a Pole. In this case the behavior of the Zero is exactly cancelled by the behavior of the Pole. In that case, the number of Pole Zero couples to identify can be reduced. One other possibility is to suppress this couple and to replace it by another one located in the frequency region with the highest deviations.

## Acknowledgments

The authors wish to thanks Thierry Pasquet and Remi Lemaire from the CSB division, NVH department of Robert Bosch France for their technical and financial help.

## 5.6 Identification simultanée de plusieurs matériaux viscoélastiques

Le travail d'identification simultanée de plusieurs matériaux viscoélastiques est un des apports majeurs de la thèse. Il est la suite directe de l'article précédent mais n'a pas encore été publié. Ainsi ce travail est exposé en français.

### 5.6.1 La contrainte des pôles communs

Le modèle de Maxwell généralisé permet de prendre en compte les effets d'amortissement et de rigidification des matériaux viscoélastiques lors de la modélisation par éléments finis d'un système mécanique. Le but est d'améliorer la prédiction des modes instables lors des analyses aux valeurs propres complexes (CEA<sup>2</sup>). Or, **avoir des pôles communs à tous les matériaux viscoélastiques permet de gagner du temps de calcul car l'ordre du modèle ne dépend pas du nombre de matériaux viscoélastiques quand les pôles sont identiques pour tous les matériaux**. L'explication est présentée au chapitre 6 et dans l'annexe D.2. Il est donc nécessaire d'intégrer la contrainte d'obtenir des pôles communs à tous les matériaux viscoélastiques lors de leur identification.

Le nouvel algorithme d'identification est décrit par la figure 5.18. Il comporte quatre étapes dont les deux premières sont effectuées en considérant tous les matériaux viscoélastiques indépendamment les uns des autres, sous l'hypothèse que tous les modèles associés comportent le même nombre de couples pôle-zéro. L'étape 1 correspond à la méthode graphique décrite dans la section 5.4.1. Elle permet l'initialisation des pôles et des zéros qui seront ensuite optimisés par la méthode des variations asymptotiques décrite dans la section 5.4.2. Ensuite, la contrainte des pôles communs est prise en compte en effectuant la moyenne sur tous les matériaux viscoélastiques. L'étape 3 permet ensuite de recalculer les zéros pour chaque matériau grâce à une méthode graphique similaire à celle de l'étape 1. L'étape 3 est décrit dans la section 5.6.2. Enfin, l'étape 4 décrite dans la section 5.6.3 permet l'optimisation des paramètres en respectant la contrainte des pôles communs. Notons, que les termes  $\delta_{z,i,m}^u$  et  $\delta_{p,i,m}^u$  de la figure 5.18 correspondent aux termes du type  $\sum_{\chi_k \leq \chi_{c,i}} I_{k,i}^{|Z|,u} \delta S_k^u$  des équations (5.19) et (5.22).

### 5.6.2 Étape 3 : Moyenne des pôles

Au début de l'étape 3, les pôles et les zéros viennent d'être identifiés de manière optimale pour chaque matériau viscoélastique indépendamment les uns des autres. Pour respecter la contrainte des pôles communs, la moyenne du  $i^{\text{ème}}$  pôle sur tous les matériaux viscoélastiques est effectuée, voir l'équation (5.23). Rappelons que  $\chi = \log(\omega)$  et remarquons que la moyenne de l'équation (5.23) est en fait une moyenne géométrique sur les pulsations  $\omega_{p,i,m}$ .

$$\chi_{p,i} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \chi_{p,i,m} \quad (5.23)$$

---

2. CEA = Complex Eigenvalue Analysis

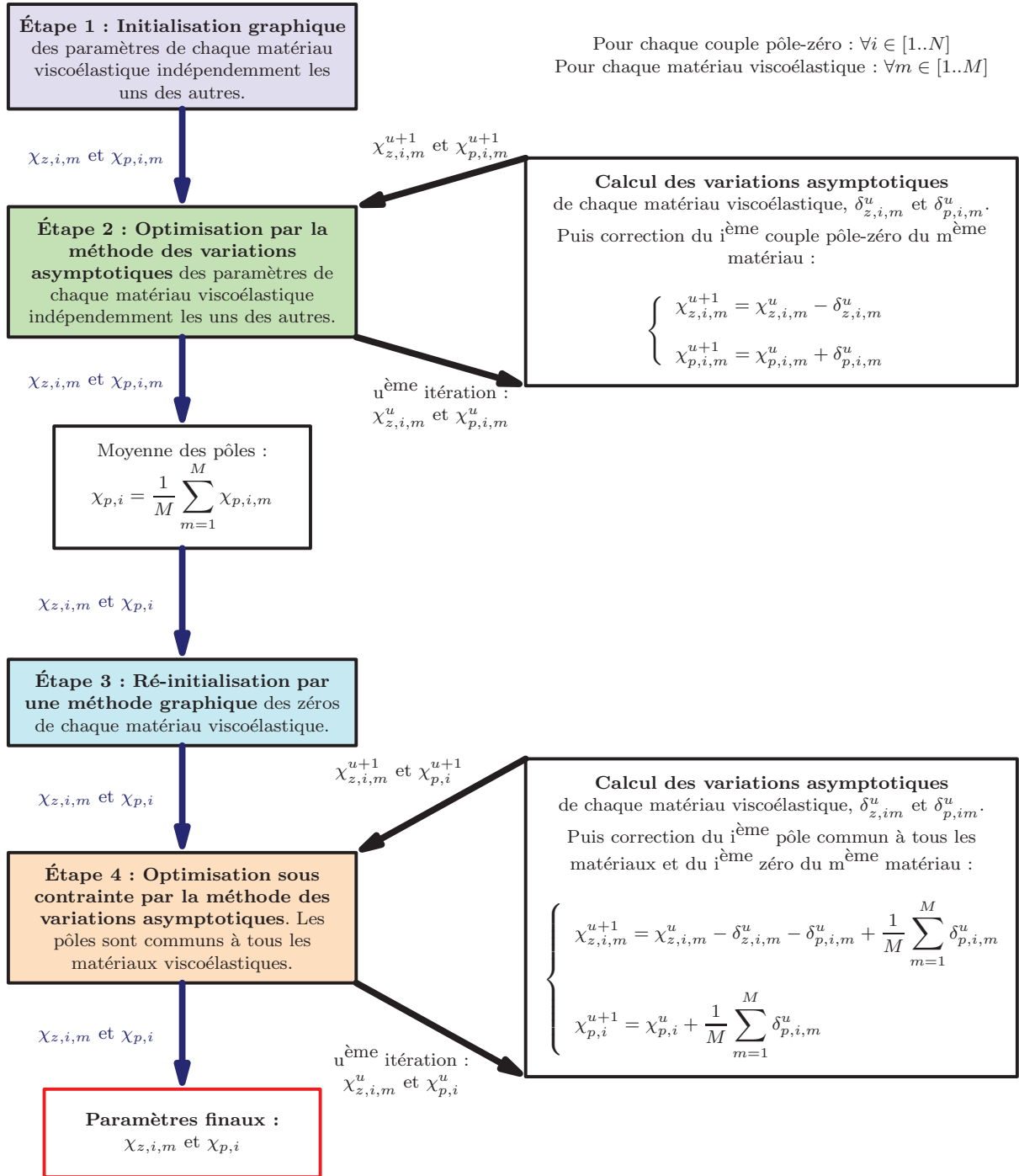


FIGURE 5.18 – Algorithme d'identification avec la contrainte de pôles communs à tous les matériaux identifiés.

Les domaines fréquentiels,  $\chi \in [\chi_a \cdot \chi_b]$ , où les matériaux viscoélastiques ont été mesurés expérimentalement sont supposés identiques pour tous les matériaux. Si tel n'est pas le cas, les phases sont extrapolées par une constante et les modules sont extrapolés par une droite affine en échelle logarithmique. Ainsi, les bornes inférieures,  $\chi_{\text{decoupage},0}$  et supérieures,  $\chi_{\text{decoupage},N}$

du domaine fréquentiel deviennent les mêmes pour tous les matériaux. Les zéros précédemment calculés ne sont plus adaptés aux nouveaux pôles communs et doivent être recalculés. Il s'agit d'une réinitialisation des paramètres en respectant la contrainte de pôles communs. Cela est réalisé par une méthode graphique similaire à celle décrite dans la section 5.4.1, ainsi il est nécessaire de redécouper le domaine fréquentiel pour chacun des matériaux.

Il n'est plus possible de découper le domaine fréquentiel en fonction des besoins en rigidification et en aire de phase de chaque matériaux, comme il avait été précédemment effectué, voir 5.4.1. En effet, il faudrait pour cela que les besoins en rigidification et en aire de phase soient identiques pour chaque matériau. Les sous-domaines seront donc différents pour chacun des matériaux. Le logarithme de la pulsation de séparation entre deux sous-domaines,  $\chi_{\text{decoupage},i,m}$  est placée, en échelle logarithmique, à la moyenne entre un pôle du premier sous-domaine,  $\chi_{p,i}$  et la position supposée du zéro du second sous-domaine, voir l'équation (5.24). Cette position du zéro qui n'est pas connue doit être évaluée. Pour cela, l'écart moyen entre les logarithmes des pôles et les zéros,  $\delta_{\text{zp moy},m}$  est calculé puis les zéros sont placés à gauche des pôles en fonction de cet écart moyen,  $\chi_{p,i+1} - \delta_{\text{zp moy},m}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\text{tot},m} = \int_{\chi_a}^{\chi_b} \psi_m(\chi) d\chi \\ S_{\text{tot},m} = \int_{\chi_a}^{\chi_b} \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|H_m(\chi)|) d\chi \\ \delta_{\text{zp moy},m} = r \times \frac{2}{\pi} \frac{A_{\text{tot},m}}{N} + (1-r) \times \frac{S_{\text{tot},m}}{N} \\ \chi_{\text{decoupage},0} = \chi_a \\ \chi_{\text{decoupage},i,m} = (\chi_{p,i} + \chi_{p,i+1} - \delta_{\text{zp moy},m})/2 \quad \forall i \in [1..N-1] \\ \chi_{\text{decoupage},N} = \chi_b \end{array} \right. \quad (5.24)$$

A ce stade l'évaluation grossière des zéros a permis, pour chaque matériau, le découpage en sous-domaines fréquentiels, ce qui permet le calcul des zéros par une méthode graphique analogue à celle décrite en section 5.4.1. Cette fois-ci, les sous-domaines ne comportent pas la même rigidification ni la même aire de phase. Dans la section 5.4.1 il a été considéré qu'à rigidification ou aire de phase identique, un sous-domaine fréquentiel de grande taille nécessitait un écart pôle-zéro inférieur à un sous-domaine de petite taille. De la même manière à taille identique, un sous-domaine fréquentiel présentant une petite rigidification ou une petite aire de phase nécessitera un écart pôle-zéro moindre qu'un sous-domaine présentant une grande rigidification ou aire de phase. Les coefficients pondérateurs,  $\nu_{i,m}$ , donnés par l'équation (5.25), permettent de prendre en compte ces considérations. L'équation (5.26) explique comment calculer les nouveaux zéros,  $\chi_{z,i,m}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_{tot} = \chi_b - \chi_a \quad \text{et} \quad \ell_{i,m} = \chi_{\text{decoupage},i,m} - \chi_{\text{decoupage},i-1,m} \quad \forall i \in [1..N] \\ A_{i,m} = \int_{\chi_{\text{decoupage},i-1,m}}^{\chi_{\text{decoupage},i,m}} \psi_m(\chi) d\chi \quad \text{et} \quad S_{i,m} = \int_{\chi_{\text{decoupage},i-1,m}}^{\chi_{\text{decoupage},i,m}} \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|H_m(\chi)|) d\chi \\ \nu_{i,m}^\varphi = \frac{\ell_{tot} - \ell_{i,m}}{\ell_{tot}} \frac{A_{tot,m}}{A_{tot,m} - A_{i,m}} \quad \text{et} \quad \nu_{i,m}^{|Z|} = \frac{\ell_{tot} - \ell_{i,m}}{\ell_{tot}} \frac{S_{tot,m}}{S_{tot,m} - S_{i,m}} \end{array} \right. \quad (5.25)$$

$$\chi_{z,i,m} = \chi_{p,i} - \left( r \times \nu_{i,m}^\varphi A_{i,m} + (1-r) \times \nu_{i,m}^{|Z|} S_{i,m} \right) \quad (5.26)$$

### 5.6.3 Étape 4 : Optimisation sous contraintes

A cette étape, les pôles communs à tous les matériaux viscoélastiques ont été calculés et des nouveaux zéros adaptés à ces pôles communs ont été identifiés grâce à une méthode graphique. Les paramètres obtenus ne sont pas optimaux. Dans cette section est présentée une méthode itérative basée sur les variations asymptotiques. Elle permet de respecter la contrainte des pôles communs grâce à une répartition intelligente des variations asymptotiques.

La méthode de calcul des variations asymptotiques est identique à celle présentée dans la section 5.4.2. Comme précédemment, les équations (5.17) et (5.18) permettent de calculer les variations asymptotiques nécessaires du point de vue du module et les équations (5.20) et (5.21), celles nécessaires du point de vue de la phase. L'équation (5.27) exprime les variations asymptotiques de chaque couple pôle-zéro, en fonction des différences de rigidification,  $\delta S_k$ , des différences d'aire de phase,  $\delta A_k$  et de l'influence locale de chaque couple pôle-zéro sur le module global et sur la phase globale,  $I_{k,i}^{|Z|}$  et  $I_{k,i}^\varphi$ . Pour rappel,  $k$  désigne un point parmi tous ceux où le modèle est évalué,  $u$  désigne le numéro de l'itération,  $i$  désigne un couple pôle-zéro parmi les  $N$  possibles,  $m$  désigne un matériau viscoélastique parmi les  $M$  possibles,  $\chi_{c,i}$  désigne le logarithme de la pulsation moyenne du  $i^{\text{ème}}$  couple pôle-zéro et  $r$  désigne le coefficient de pondération qui permet d'ajuster le poids accordé à la courbe de module par rapport à la courbe de phase.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{z,i,m}^u = r \times \left( \sum_{\chi_k \leq \chi_{c,i}} I_{k,i}^{|Z|,u} \delta S_k^u \right) + (1-r) \times \left( \frac{2}{\pi} \sum_{\chi_k \leq \chi_{c,i}} I_{k,i}^{\varphi,u} \delta A_k^u \right) \\ \delta_{p,i,m}^u = r \times \left( \sum_{\chi_{c,i} < \chi_k} I_{k,i}^{|Z|,u} \delta S_k^u \right) + (1-r) \times \left( \frac{2}{\pi} \sum_{\chi_{c,i} < \chi_k} I_{k,i}^{\varphi,u} \delta A_k^u \right) \end{array} \right. \quad (5.27)$$

Afin de respecter la contrainte des pôles communs, il convient de déterminer des variations asymptotiques identiques pour les pôles des différents matériaux en prenant leur moyenne. Cependant, quand des matériaux ont des comportements très différents, celui qui présente la

rigidification et l'aire de phase les plus fortes est mieux identifié au détriment des autres. Pour pallier ce problème, il convient de pondérer la moyenne des variations asymptotiques des pôles des différents matériaux. Le calcul des variations asymptotiques des pôles communs est explicité par l'équation (5.28). La pondération,  $\lambda_{i,m}^u$ , de la variation asymptotique du  $i^{\text{ème}}$  couple pôle-zéro est constituée de la valeur de la phase et de la valeur de la dérivée du module à la pulsation moyenne de ce couple pôle-zéro,  $\chi_{c,i}$ . Un coefficient  $\beta$  est ajouté afin de traiter les cas où un des matériaux est très faiblement viscoélastique, afin que la pondération ne tende pas vers l'infini. Dans la pratique, ce coefficient a été fixé à  $\beta = 2$ . Remarquons que pour un matériau purement visqueux sur toute la bande fréquentielle d'intérêt, on a  $\omega_{z,i} \ll \omega \ll \omega_{p,i}$ . Ainsi l'équation (5.9) montre que  $\varphi(\chi) = \pi/2$  et  $\log(|Z(\chi)|) = \chi$ . Donc, pour un matériau purement visqueux, le reste du dénominateur de la pondération vaut  $2/\pi \varphi^u(\chi_{c,i}) + \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|Z^u(\chi_{c,i})|) = 2$  comme  $\beta = 2$ , d'où le choix de cette valeur.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{i,m}^u = \frac{1}{\beta + \frac{2}{\pi} \varphi^u(\chi_{c,i}) + \frac{\partial}{\partial \chi} \log(|Z^u(\chi_{c,i})|)} \\ \delta_{p,i}^u = \frac{\sum_{m=1}^M \lambda_{i,m}^u \delta_{p,i,m}^u}{\sum_{m=1}^M \lambda_{i,m}^u} \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Ces variations asymptotiques doivent être réparties entre les pôles communs d'une part et les zéros de chaque matériau d'autre part. Cette répartition est faite en accord avec l'équation (5.29).

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{z,i,m}^{u+1} = \chi_{z,i,m}^u - \delta_{z,i,m}^u - \delta_{p,i,m}^u + \delta_{p,i}^u \\ \chi_{p,i}^{u+1} = \chi_{p,i}^u + \delta_{p,i}^u \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Les conditions régissant l'arrêt des itérations d'optimisation sont les mêmes que celles de la section 5.4.2. Ainsi, le processus itératif s'arrête lorsque la variation asymptotique maximale,  $\delta_{ZP \max}^u = \max(|\delta_{z,i,m}^u|, |\delta_{p,i,m}^u|)$  devient inférieure à une valeur définie,  $\varepsilon = 10^{-3}$  par exemple, ou après un certain nombre d'itérations, 250 par exemple. Par robustesse, la variation asymptotique maximale est plafonnée à sa valeur précédente :  $\delta_{ZP \max}^u \leq \delta_{ZP \max}^{u-1}$ . Si cette relation n'est pas vérifiée, alors toutes les variations asymptotiques sont multipliées par  $\delta_{ZP \max}^{u-1} / \delta_{ZP \max}^u$ .

De plus, la causalité est vérifiée à chaque itération. Si le zéro d'un couple est plus grand que son pôle, alors les paramètres sont imposés, par exemple ils sont centrés autour de la pulsation moyenne et  $\chi_{p,i} - \chi_{z,i} = 10^{-6}$ . Le problème des effets de bord a déjà été traité par l'extrapolation des courbes de tests. Lorsque la pulsation moyenne d'un couple sort du domaine fréquentiel, une pulsation moyenne virtuelle est définie à l'intérieur du domaine des fréquences afin de permettre le calcul de l'équation (5.27).



Comme dans la section 5.4.2, le module statique de chaque matériau,  $K_{0,m}$ , défini dans l'équation (5.3), est pris égal à la première valeur de la courbe de module. Nous avons vu dans les sections 5.3.4 et 5.4.2 qu'un offset est susceptible d'apparaître entre les courbes du module  $|H(\chi)|$  et  $|Z(\chi)|$ . Pour gérer ce problème, l'équation (5.30) permet de modifier le premier zéro de chaque matériau afin d'introduire une rigidification qui compense l'offset.

$$\chi_{z,0}^{u+1} = \chi_{z,0}^u - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^V \log(|H(\chi_k)|) - \log(|Z^u(\chi_k)|) \quad (5.30)$$

### 5.6.4 Résultats

Reprenons l'exemple de la fonction test définie dans la section 5.3.3 et adjoignons lui deux autres fonctions tests. Ces dernières sont définies par un modèle de Maxwell généralisé ayant respectivement cinq et six couples pôle-zéro pour respectivement la deuxième et la troisième fonction. Les paramètres de ces dernières sont définis dans le tableau C.9 de l'annexe C.5.

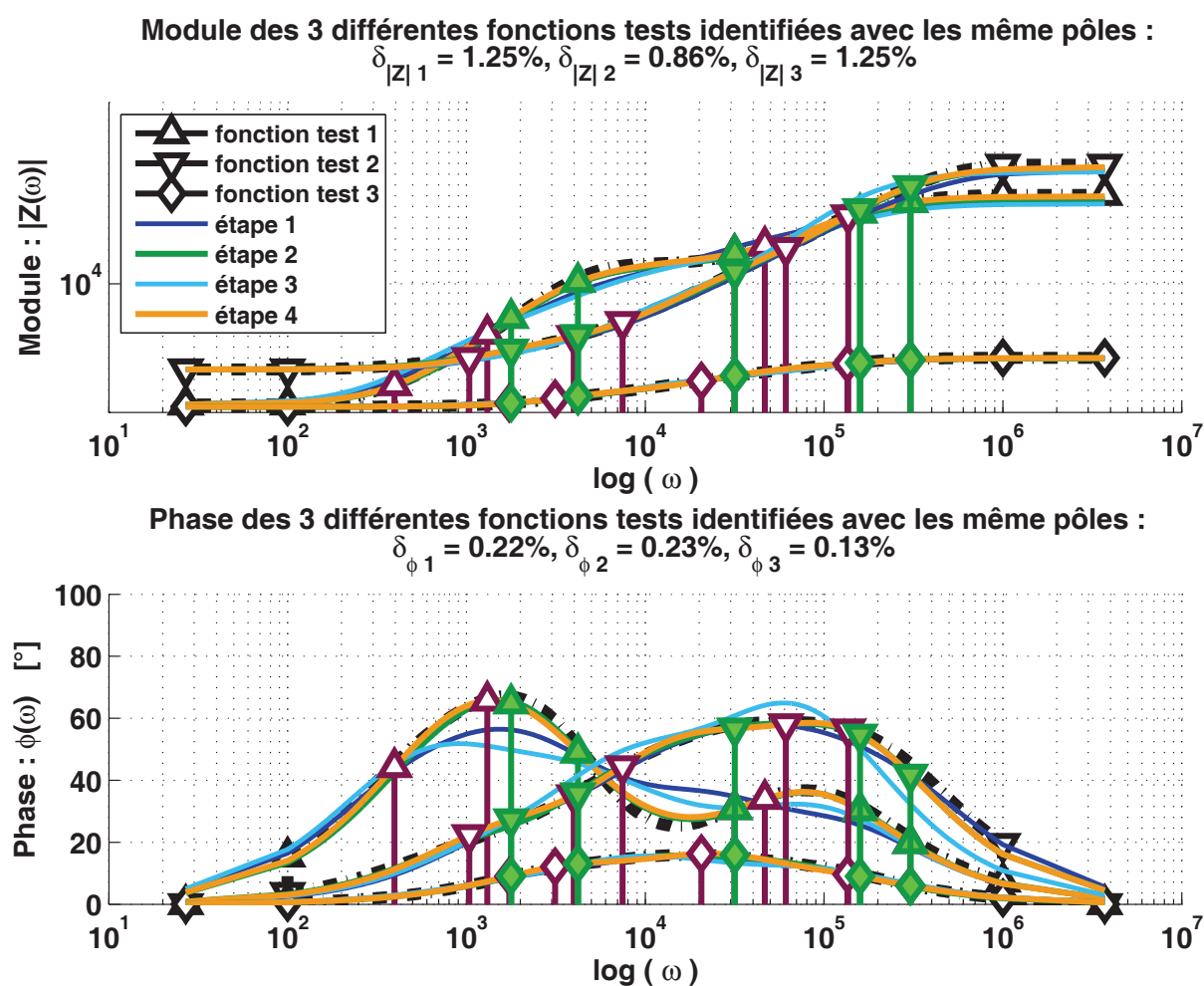


FIGURE 5.19 – Exemple d'optimisation sous contrainte sur 3 courbes expérimentales

Les paramètres des trois modèles de Maxwell généralisés, associés à ces fonctions tests, sont identifiés. La figure 5.19 représente les courbes issues des quatre étapes d'identification et les valeurs des paramètres sont reportées dans les tableaux C.10, C.11, C.12 et C.13 de l'annexe C.5.

Le tableau 5.3 montre l'évolution des valeurs des indicateurs au cours des différentes étapes. Les paramètres obtenus à l'issue de l'étape 3 présentent de mauvais indicateurs, par exemple  $\delta_{|Z|} = 11.4806\%$  prouvant la nécessité d'une étape d'optimisation. Les résultats de l'étape 4 sont excellents et après celle-ci, le plus mauvais indicateur vaut 1.25%. Ainsi, les paramètres ont été optimisés. De plus, les résultats de l'étape 4 sont aussi bons que ceux de l'étape 2. Au final, la contrainte de pôles communs à tous les matériaux viscoélastiques a été respectée en conservant une excellente identification des paramètres.

Fonction test	Indicateurs (en %)	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4
1	$\delta_{ Z }$	8.8746	0.8626	11.4806	1.2526
2	$\delta_{ Z }$	0.8179	0.4312	6.7307	0.8626
3	$\delta_{ Z }$	0.6241	0.2272	2.7757	1.2529
1	$\delta_{\varphi}$	2.5748	0.2184	3.1466	0.2151
2	$\delta_{\varphi}$	0.2858	0.1823	2.1838	0.2251
3	$\delta_{\varphi}$	0.2134	0.0402	0.5312	0.1308

TABLE 5.3 – Liste des valeurs des indicateurs de convergence pour les 3 courbes à identifier en fonction de l'étape lors de l'identification par la méthode des variations asymptotiques. Les courbes correspondantes à cette identification sont représentées sur la figure 5.19.

## Bibliographie du chapitre 5

- [1] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq, and R. Lemaire, "A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized maxwell model," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, no. 3, pp. 991 – 1010, 2011.
- [2] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier, "Méthode d'identification des paramètres d'un modèle de maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement," *Mécanique & Industries*, vol. 11, no. 1, pp. 47–55, 2010.
- [3] J. D. Ferry, *Viscoelastic Properties Of Polymers*. John Wiley & Sons, 1961.
- [4] T. Vinh, "Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique," *Mémoires de l'artillerie française*, vol. 3ème fascicule, 1967.
- [5] M. Caputo and F. Mainardi, "Linear models of dissipation in anelastic solids," in *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)* (I. P. Society, ed.), vol. 1, pp. 161–198, Italian Physical Society, avril 1971.
- [6] R. S. Lakes, *Viscoelastic Solids*. CRC Press, 1999.
- [7] Y. Chevalier and J. T. Vinh, *Mechanics of Viscoelastic Materials and Wave Dispersion*, vol. 1. ISTE and John Wiley & Sons, 2010.

- 
- [8] E. Balmès and J.-M. Leclère, *Viscoelastic vibration toolbox*. SDTools, Paris, 2009.
- [9] M. Soula, T. Vinh, and Y. Chevalier, “Transient responses of polymers and elastomers deduced from harmonic responses,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 205, no. 2, pp. 185 – 203, 1997.
- [10] M. Soula, T. Vinh, Y. Chevalier, T. Beda, and C. Esteoule, “Measurements of isothermal complex moduli of viscoelastic materials over a large range of frequencies,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 205, no. 2, pp. 167 – 184, 1997.
- [11] L. Gaul, P. Klein, and S. Kemple, “Damping description involving fractional operators,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 5, no. 2, pp. 81 – 88, 1991.
- [12] R. C. Koeller, “Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, no. 2, pp. 299–307, 1984.
- [13] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, vol. 111 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1974.
- [14] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, vol. 198 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1999.
- [15] R. L. Bagley and P. J. Torvik, “On the fractional calculus model of viscoelastic behavior,” *Journal of Rheology*, vol. 30, no. 1, pp. 133–155, 1986.
- [16] A. Lion, “Thermomechanically consistent formulations of the standard linear solid using fractional derivatives,” *Archives of Mechanics*, vol. 53, no. 3, pp. 253–273, 2001.
- [17] A. Lion, “On the thermodynamics of fractional damping elements,” *Continuum Mechanics And Thermodynamics*, vol. 9, pp. 83–96, APR 1997.
- [18] N. Heymans, “Fractional calculus description of non-linear viscoelastic behaviour of polymers,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, pp. 221–231, DEC 2004.
- [19] H. Oberst and K. Frankenfeld, “Damping of the bending vibrations of thin laminated metal beams connected through adherent layer,” *Acustica 2*, pp. 181–194, 1952.
- [20] J. Zhang and C. M. Richards, “Parameter identification of analytical and experimental rubber isolators represented by maxwell models,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, no. 7, pp. 2814 – 2832, 2007.
- [21] D. Castello, F. Rochinha, N. Roitman, and C. Magluta, “Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, no. 8, pp. 1840 – 1857, 2008.
- [22] A. de Lima, D. Rade, and F. L. Neto, “An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, no. 4, pp. 1272 – 1281, 2009.
- [23] T. Chen, “Determining a prony series for a viscoelastic material from time varying strain data,” tech. rep., NASA, may 2000.
- [24] A. Oustaloup, *La commande CRONE : commande robuste d'ordre non entier*. Hermès, 1991.

- [25] J.-L. Dion, *Modélisation et identification du comportement dynamique de liaisons hydro-élastiques*. PhD thesis, ISMCM, Saint-Ouen, 1995.
- [26] J. Dion and S. Vialard, “Identification of rubber shock absorber mounts,” *Mécanique industrielle et matériaux*, vol. 50, pp. 232–237, DEC 1997.
- [27] J. Lagarias, J. Reeds, M. Wright, and P. Wright, “Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions,” *SIAM Journal on optimization*, vol. 9, pp. 112–147, DEC 21 1998.



# Chapitre 6

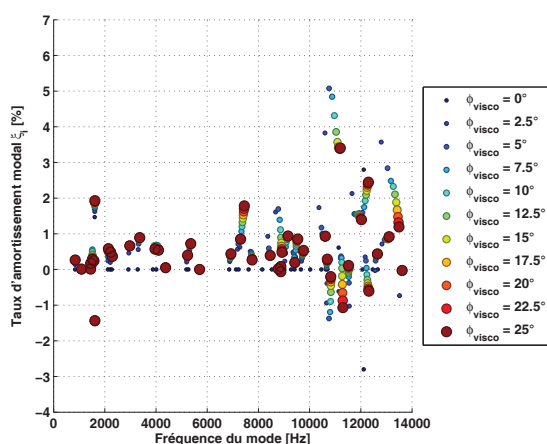
## Analyse aux valeurs propres complexes de systèmes viscoélastiques

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Analyse aux valeurs propres complexes “classique”</b>	<b>127</b>
6.1.1	Théorie	127
6.1.2	Exemple	130
<b>6.2</b>	<b>Prise en compte de la viscoélasticité des matériaux</b>	<b>131</b>
6.2.1	Théorie	131
6.2.2	Exemple	134
<b>6.3</b>	<b>Enrichissement du sous-espace de projection</b>	<b>135</b>
6.3.1	Itération sur les résidus	135
6.3.2	Exemple	138
<b>6.4</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>Bibliographie du chapitre 6</b>		<b>141</b>

---



### Résumé

---

La rhéologie de Maxwell généralisé est introduite dans les modèles éléments finis afin de prendre en compte la viscoélasticité des matériaux. Les analyses aux valeurs propres complexes sont menées sur un sous-espace enrichi par la méthode d’itérations sur les résidus. La viscoélasticité permet d’amortir certains modes mais en déstabilise d’autres par des effets de couplage.

---

Le principal objectif de cette thèse est de modéliser les comportements viscoélastiques des matériaux au sein des analyses aux valeurs propres complexes par éléments finis, ce qui n'est actuellement pas le cas dans l'industrie. Certains auteurs ont montré que la viscoélasticité pouvait déstabiliser les systèmes mécaniques. Ainsi, Fritz [1, 2] a montré que la prise en compte d'un amortissement visqueux générerait deux types d'effets sur les modes couplés. Si les deux modes sont amortis de manière équivalente, la viscoélasticité stabilise le système mais si l'un des modes est plus amorti que l'autre le système peut se déstabiliser. Sorrentino et al. [3] ont modélisé une poutre de Timoshenko avec un amortissement visqueux. Par ailleurs, Zhang et Richards [4] ont montré que le comportement d'un étouffeur dynamique viscoélastique pouvait être correctement reproduit à l'aide d'un modèle de Maxwell généralisé comportant deux cellules de Maxwell alors que le simple modèle de Voigt ne le permet pas. Sorrentino et Fasana [5] ont montré comment prendre en compte la viscoélasticité des matériaux en incluant des dérivées fractionnaires dans les analyses aux valeurs propres complexes de modèles éléments finis. Pour cela ils ont utilisé une formulation d'état. Citons également la méthode de Golla-Hughes (GHM) qui est utilisée par Barbosa et Farage [6] pour modéliser par éléments finis une poutre sandwich dans le domaine temporel.

Nous avons choisi de travailler avec le modèle rhéologique de Maxwell généralisé pour la modélisation de la viscoélasticité. Une formulation d'état a permis d'inclure ce modèle dans les analyses aux valeurs propres complexes. Cette formulation d'état augmente sensiblement la taille du modèle éléments finis et rend la résolution directe prohibitive en temps CPU. Ainsi, le problème en frottement stationnaire avec prise en compte de la viscoélasticité est résolu sur un sous-espace. Ce sous-espace est obtenu en calculant les modes propres réels du système sans frottement ni viscoélasticité. Toutefois, un tel sous-espace n'est pas parfaitement adapté et doit être enrichi pour minimiser les résidus en énergie.

Afin d'illustrer la méthode, les différentes étapes sont appliquées à un modèle de frein simplifié représenté en figure 6.1. Ce modèle a vocation d'exemple et ne comporte pas tous les éléments mécaniques d'un frein industriel. Il est composé d'un disque, de deux garnitures, d'un étrier et de deux backplates liant l'étrier et les garnitures. Le matériau des backplates sera considéré viscoélastiques à partir de la partie 6.2.

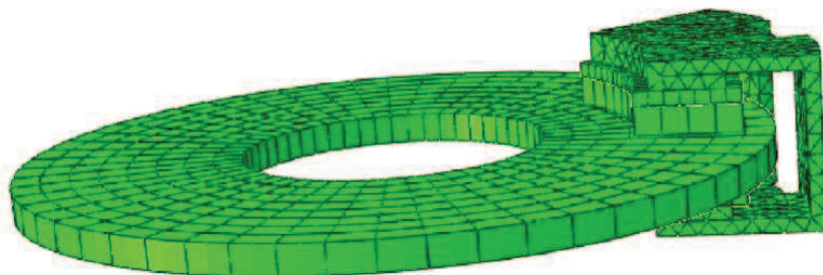


FIGURE 6.1 – CAO du modèle d'étude

Les calculs classiques de l'analyse aux valeurs propres complexes décrits dans la partie 6.1 sont effectués grâce au logiciel Abaqus version 6.81. Le modèle comporte environ 33000 degrés de liberté. Le maillage est quadratique. Le disque, les garnitures et les backplates sont maillées avec des éléments hexagonaux à 20 noeuds et l'étrier est maillé avec des éléments tétraédriques

à 10 noeuds. Les garnitures, les backplates et l'étrier sont liés rigidement et une pression de 1bar est appliquée au dos des backplates. Le disque est encastré sur sa tranche interne et l'étrier est encastré localement sur sa partie centrale. Le contact entre les garnitures et le disque est pénalisé. La loi de Coulomb est utilisée pour le frottement.

## 6.1 Analyse aux valeurs propres complexes “classique”

La méthode utilisée classiquement par les industriels est présentée dans cette section. Le frottement des plaquettes sur le disque est pris en compte mais pas la viscoélasticité des matériaux. Cette méthode classique est implémentée dans le logiciel Abaqus qui est utilisé par le service NVH de Bosch.

### 6.1.1 Théorie

Le problème à résoudre dans le cadre du crissement de frein est celui de la stabilité dynamique du système autour de son équilibre de glissement stationnaire. Etant donné la géométrie complexe d'un frein réel, la méthode des éléments finis est utilisée pour trouver une solution approchée. Cette méthode est décrite dans le livre de Dhatt et al. [7]. Son application commence par une discrétisation spatiale du système de freinage. Ce dernier est alors représenté par un ensemble de noeuds et d'éléments formant un maillage. Le champ des déplacements du système est approché par des polynômes. Cela permet de discrétiser la formulation variationnelle faible de l'équation de la dynamique qui est alors réduite à un système différentiel plus simple à résoudre. Dans le cadre des systèmes de freinage, cette méthode classique débouche sur l'équation (6.1).

$$\mathbf{M} \ddot{x}_{\text{total}} + \mathbf{K}_{\text{NL}}(x_{\text{total}}) x_{\text{total}} = \mathbf{F}_{\text{extérieures}} \quad (6.1)$$

L'équation (6.1) est écrite dans le domaine temporelle, avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $x_{\text{total}}$  le vecteur des déplacements de chaque noeud et  $\mathbf{F}_{\text{extérieures}}$  est le vecteur des forces extérieures appliquées au système. Le terme  $\mathbf{K}_{\text{NL}}(x_{\text{total}})$  est non-linéaire par rapport aux déplacements  $x_{\text{total}}$  et regroupe plusieurs lois de comportement  $\mathbf{K}_{\text{NL}}(x_{\text{total}}) = \mathbf{K}_{\text{v}} + \mathbf{k}_{\text{c}}(x_{\text{total}}) + \mathbf{K}_{\text{f}}$ , avec :

- $\mathbf{K}_{\text{v}}$  : L'élasticité volumique des matériaux qui est linéaire en déplacement.
- $\mathbf{k}_{\text{c}}(x_{\text{total}})$  : Les raideurs de contact entre les éléments mécaniques du système de freinage. Ces raideurs de contact sont non-linéaires en déplacement et sont modélisées par des lois exponentielles par le service NVH de Bosch.
- $\mathbf{K}_{\text{f}}$  : Les raideurs dues au frottement entre les plaquettes et le disque. La loi de Coulomb est utilisée pour modéliser le frottement. Cette loi n'est pas symétrique car un effort normal génère un effort tangentiel mais la réciproque n'est pas vraie.

L'équation différentielle (6.1) est résolue en deux temps, en étudiant tout d'abord son équilibre stationnaire puis en considérant cette équation sans son second membre afin d'étudier sa dynamique. Les déplacements,  $x_{\text{total}}$ , des noeuds du maillage sont décomposés en déplacements stationnaires,  $x_0$  et en déplacements dynamiques  $x$ , voir l'équation (6.2) :

$$x_{\text{total}} = x_0 + x \quad (6.2)$$



### Problème stationnaire

Le problème statique est donné par l'équation (6.3). Ce problème non-linéaire en déplacement est résolu par le solveur non-linéaire d'Abaqus pour trouver la position d'équilibre stationnaire du système. Connaître cet équilibre permet de linéariser le problème à son voisinage en considérant la raideur linéarisée  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{NL}}(x_0)$ .

$$\mathbf{K}_{\text{NL}}(x_0) x_0 = \mathbf{F}_{\text{extérieures}} \quad (6.3)$$

### Problème dynamique

La dynamique du système est étudiée dans le domaine de Laplace. La transformée de Laplace du problème dynamique linéarisé autour de l'équilibre de glissement stationnaire est donnée par l'équation matricielle (6.4), avec  $p$  la variable de Laplace et  $X$  la transformée de Laplace de  $x$ . Cette équation est diagonalisée afin de calculer les modes propres. Le système est instable si et seulement si il existe des modes propres dont la valeur propre a une partie réelle positive<sup>1</sup>.

$$(p^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) X = 0 \quad (6.4)$$

L'équation (6.4) utilise le terme de raideur linéarisé  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_f$ , avec  $\mathbf{K}_c = \mathbf{k}_c(x_0)$ . La matrice  $\mathbf{K}_f$ , des termes de frottement, n'est pas symétrique car les forces de frottement ne sont pas conservatives. En conséquence, l'équation (6.4) doit être résolue par les solveurs aux valeurs propres complexes. Dans le cadre industriel où les modèles présentent environ 500 000 degrés de liberté (ddl), de tels solveurs demanderaient d'énormes temps de calcul. Dans la pratique, l'équation (6.4) est réduite en la projetant sur un sous-espace de Ritz, calculé sans prendre en compte les termes des raideurs de frottement, ce qui rend le problème symétrique, voir l'équation (6.5).

$$(p^2\mathbf{M} + \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_c) X = 0 \quad (6.5)$$

La résolution de l'équation (6.5), par les solveurs aux valeurs propres réels, est rapide et permet de calculer les valeurs propres  $p_i$  et les vecteurs propres  $\varphi_i$  qui diagonalisent ce problème, voir l'équation (6.6). Les vecteurs propres sont orthogonaux et normés en masse, c'est-à-dire qu'ils vérifient :  $\varphi_i^t \mathbf{M} \varphi_i = 1$ . Ainsi, ils forment une base orthonormée.

$$(p_i^2\mathbf{M} + \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_c) \varphi_i = 0 \quad (6.6)$$

---

1. Une partie réelle positive indique un mode instable lorsque que la transformée de Laplace est utilisée. Si l'on utilise la transformée de Fourier, un mode instable est indiqué par une partie imaginaire négative.

Les équations des problèmes symétriques (6.5) et non symétriques (6.4) ne diffèrent que par les termes de frottement. Ainsi, les vecteurs propres solutions de l'équation (6.4) sont peu différents des vecteurs propres  $\varphi_i$  solutions de l'équation (6.5), ce qui rend leur utilisation intéressante pour projeter le problème non symétrique. Soit  $\Phi$ , la base modale tronquée formée par les  $NM$  premiers modes propres :  $\Phi = [\varphi_1 \dots \varphi_{NM}]$ . Les déplacements,  $X$ , sont décrits dans le sous-espace vectoriel :  $X = \Phi q$ , où  $q$  sont les déplacements modaux. Du fait de la normalisation par rapport à la masse, les matrices projetées ont des formes particulières, voir l'équation (6.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^t \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \\ \Phi^t (\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_c) \Phi = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & -p_i^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} = \Lambda \end{array} \right. \quad (6.7)$$

La projection de l'équation (6.4), voir l'équation (6.8), permet de réduire significativement sa taille et donc de réduire son temps de résolution par les solveurs aux valeurs propres complexes.

$$\left( p^2 \mathbf{I} + \Lambda + \Phi^t \mathbf{K}_f \Phi \right) q = 0 \quad (6.8)$$

La résolution de l'équation (6.8) permet de calculer les valeurs propres  $s_i$  et les vecteurs propres  $\psi_i$  qui diagonalisent le problème, voir l'équation (6.9).

$$\left( s_i^2 \mathbf{I} + \Lambda + \Phi^t \mathbf{K}_f \Phi \right) \psi_i = 0 \quad (6.9)$$

Les vecteurs propres complexes de l'équation (6.9) exprimés dans l'espace complet des déplacements des noeuds du maillage se calculent simplement :  $X_i = \Phi \psi_i$ . Les parties imaginaires des vecteurs propres complexes reflètent un déphasage spatial du mouvement, ainsi, le mode propre n'est plus une onde stationnaire, mais une onde qui se propage dans le milieu solide. Les valeurs propres ont une partie réelle non nulle qui reflète le taux d'amortissement du mode. Ce dernier peut être positif ou négatif, ainsi l'onde qui se propage peut être amortie ou divergente. Le taux d'amortissement du  $i^{\text{ème}}$  mode est calculé grâce à l'équation (6.10), voir annexe D.1.

$$\xi_i = -\frac{\Re(s_i)}{|s_i|} \quad (6.10)$$

### 6.1.2 Exemple

Appliquons la méthode classique d'analyse au modèle EF présenté en figure 6.1. Nous considérons un coefficient de frottement  $\mu = 0.5$ . Les valeurs des taux d'amortissement des modes propres complexes sont présentées sur la figure 6.2. Un taux d'amortissement négatif signifie que le mode est instable. La figure 6.2 exhibe trois modes instables.

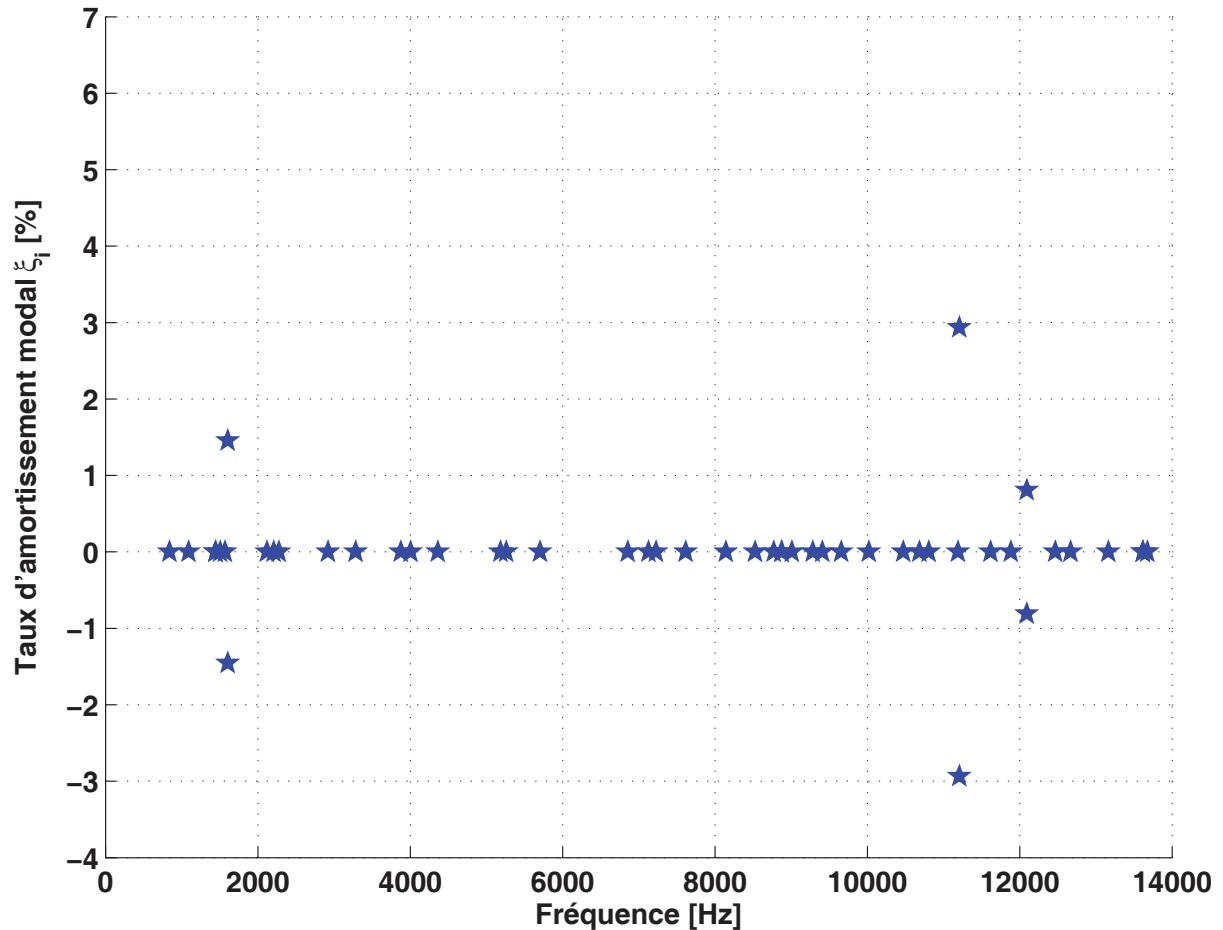


FIGURE 6.2 – Taux d'amortissement des modes propres complexes pour un calcul avec un coefficient de frottement  $\mu = 0.5$ , sans prise en compte de la viscoélasticité.

Par cette méthode, il est fréquent de trouver plusieurs modes instables, même si expérimentalement le crissement n'apparaît qu'à une seule fréquence. Cela s'explique par l'absence de prise en compte de l'amortissement des matériaux. La grande majorité des autres valeurs propres ont un taux d'amortissement nul. La stabilité de ces modes propres n'est donc pas déterminée. Puisque la stabilité d'une vibration est définie à partir de son taux d'amortissement, il est nécessaire de prendre en compte l'amortissement généré par les matériaux viscoélastiques. Comme nous le verrons dans la section 6.2, cela permet d'améliorer la prédiction du mode propre crissant en réduisant le nombre de modes instables calculés.

## 6.2 Prise en compte de la viscoélasticité des matériaux

Dans cette section est présentée la méthode qui permet d'inclure le comportement viscoélastique des matériaux dans les analyses aux valeurs propres complexes. Pour cela, le logiciel Abaqus est utilisé comme précédemment, puis notre programme sous Matlab permet de prendre en compte la viscoélasticité et de résoudre le système réduit.

### 6.2.1 Théorie

#### Modèle viscoélastique

Nous avons vu dans le chapitre 5 qu'il est possible de modéliser le comportement des matériaux viscoélastiques grâce au modèle de Maxwell généralisé dont l'expression est rappelée ci-dessous par l'équation (6.11). Cette équation utilise la transformée de Laplace  $p$ .  $K_0$  est la raideur statique et  $K_u$  et  $C_u$  sont les ressorts et les amortisseurs qui modélisent le déphasage entre l'excitation du matériau et sa réponse. Il a été vu dans le chapitre 5 que cette équation est équivalente à l'équation (6.12) et les relations de passage entre ces deux formulations sont données par l'équation (5.5).

$$Z(p) = K_0 + \sum_{u=1}^N \frac{pK_u C_u}{K_u + pC_u} \quad (6.11)$$

$$Z(p) = K_0 \prod_{u=1}^N \frac{1 + (p/\omega_{z,u})}{1 + (p/\omega_{p,u})} \quad (6.12)$$

Il est possible de réécrire ces fonctions de relaxation pour faire apparaître les temps de relaxation,  $\tau_u$ , dus à chaque couple ressort-amortisseur,  $K_u$  et  $C_u$ . La nouvelle écriture est donnée par l'équation (6.13).

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(p) = K_0 \left( 1 + \sum_{u=1}^N \frac{\alpha_u \tau_u p}{1 + \tau_u p} \right) \\ \text{avec} \quad \alpha_u = \frac{K_u}{K_0} = \prod_{h=1}^N \left( \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{\omega_{p,u} - \omega_{z,h}}{\omega_{p,u} + \omega_{p,h}(\delta_{uh} - 1)} \right) \\ \text{et} \quad \tau_u = \frac{C_u}{K_u} = \frac{1}{\omega_{p,u}} \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Les coefficients  $\alpha_u$  de l'équation (6.13) sont sans dimension. Ils représentent la rigidification en fréquence des matériaux viscoélastiques. Remarquons que cette écriture est très proche de la transformée de Carson<sup>2</sup> des séries de Prony,  $pR(p)$ , donnée par l'équation (6.14). La différence réside dans la définition de  $G_0$  qui est la raideur instantanée, c'est-à-dire la valeur limite de la raideur à une fréquence infinie.

---

2. La transformée de Carson est égale à la transformée de Laplace multipliée par  $p$  :  $\text{Carson}\{r(t)\} = p\text{Laplace}\{r(t)\} = pR(p)$

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t) = G_0 \left( 1 - \sum_{u=1}^N \alpha_u^{\text{Prony}} (1 - e^{-t/\tau_u^{\text{Prony}}}) \right) \\ pR(p) = G_0 \left( \left( 1 - \sum_{u=1}^N \alpha_u^{\text{Prony}} \right) + \sum_{u=1}^N \frac{\alpha_u^{\text{Prony}} \tau_u^{\text{Prony}} p}{1 + \tau_u^{\text{Prony}} p} \right) \\ \text{avec } G_0 = K_0 + \sum_{u=1}^N K_u \quad ; \quad \alpha_u^{\text{Prony}} = \frac{K_u}{G_0} \quad \text{et} \quad \tau_u^{\text{Prony}} = \frac{C_u}{K_u} \end{array} \right. \quad (6.14)$$

Dans les modèles éléments finis comme ceux décrit par les équations (6.4) et (6.8), les matrices de raideur sont calculées en se basant sur la mesure du comportement statique des matériaux. Pour prendre en compte la viscoélasticité dans les analyses aux valeurs propres complexes par EF, nous allons introduire l'équation (6.13) dans l'équation (6.8) en considérant  $K_0$  comme la matrice de raideur statique.

### Analyse aux valeurs propres complexes de systèmes viscoélastiques

Les analyses aux valeurs propres complexes avec viscoélasticité se déroulent de manière similaire aux analyses classiques décrites précédemment dans la section 6.1.1. En plus des termes de frottement, la viscoélasticité, modélisée grâce à l'équation (6.13), est introduite dans l'équation (6.4). Si le système mécanique comporte  $N_{\text{mater}}$  matériaux viscoélastiques, alors il faut inclure  $N_{\text{mater}}$  modèles de Maxwell généralisé.

Le terme  $K_0$  qui apparait dans l'équation (6.13) est désormais noté  $\mathbf{K}_{\text{visco}}^m$  pour le  $m^{\text{ième}}$  matériau viscoélastique et correspond à une matrice de raideur statique.  $\mathbf{K}_{\text{visco}}^m$  est obtenue en restreignant la matrice des raideurs volumiques,  $\mathbf{K}_v$ , aux degrés de libertés du  $m^{\text{ième}}$  matériau viscoélastique. Ainsi, tout en ayant la même taille que  $\mathbf{K}_v$ ,  $\mathbf{K}_{\text{visco}}^m$  est essentiellement nulle. Remarquons que par définition,  $\mathbf{K}_v$  contient toutes les matrices  $\mathbf{K}_{\text{visco}}^m$ . Ainsi seuls les termes  $\mathbf{K}_{\text{visco}}^m \sum_{u=1}^N \frac{\alpha_u^m \tau_u^m p}{1 + \tau_u^m p}$  de l'équation (6.13) doivent être ajoutés à l'équation (6.8). On obtient l'équation (6.15) qui, après projection sur le sous-espace de Ritz, devient l'équation (6.16).

$$\left( p^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_f + \sum_{m=1}^{N_{\text{mater}}} \mathbf{K}_{\text{visco}}^m \left( \sum_{u=1}^N \frac{\alpha_u^m \tau_u^m p}{1 + \tau_u^m p} \right) \right) X = 0 \quad (6.15)$$

$$\left( p^2 \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Phi}^t \mathbf{K}_f \mathbf{\Phi} + \sum_{m=1}^{N_{\text{mater}}} \mathbf{\Phi}^t \mathbf{K}_{\text{visco}}^m \mathbf{\Phi} \left( \sum_{u=1}^N \frac{\alpha_u^m \tau_u^m p}{1 + \tau_u^m p} \right) \right) q = 0 \quad (6.16)$$

L'équation différentielle (6.16) est d'ordre  $N \times N_{\text{mater}} + 2$ . Or les solveurs aux valeurs propres classiques résolvent au mieux des équations d'ordre 2. Ainsi, elle doit être mise sous la forme d'un modèle d'état avant sa résolution. Le fait de choisir des temps de relaxation,  $\tau_u^m = \tau_u$  communs à tous les matériaux viscoélastiques permet de réduire l'ordre de l'équation différentielle à  $N + 2$ . Ceci est expliqué dans l'annexe D.2. Cette contrainte est équivalente à celle de choisir des pôles communs lors de l'identification des paramètres du modèle de Maxwell généralisé présenté au

chapitre 5. Ainsi la taille des matrices du modèle d'état est réduite à  $N_{\text{ddl}} \times (N + 2)$  au lieu de  $N_{\text{ddl}} \times (N \times N_{\text{mater}} + 2)$ , avec  $N_{\text{ddl}}$ , le nombre de degrés de libertés du modèle projeté qui est égal à la dimension des matrices  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{\Phi}^t \mathbf{K}_f \mathbf{\Phi}$  et  $\mathbf{\Phi}^t \mathbf{K}_{\text{visco}}^m \mathbf{\Phi}$ .

$$\begin{aligned}
 p \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \tau_1 \mathbf{I} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \tau_u \mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \tau_N \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p q \\ q_1 \\ \vdots \\ q_u \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Phi}^t \mathbf{K}_f \mathbf{\Phi} & 0 & \mathbf{\Sigma}_1 & \cdots & \mathbf{\Sigma}_u & \cdots & \mathbf{\Sigma}_N \\ 0 & \tau_1 \mathbf{I} & -\mathbf{I} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \tau_u \mathbf{I} & \vdots & \ddots & -\mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \tau_N \mathbf{I} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p q \\ q_1 \\ \vdots \\ q_u \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \mathbf{\Sigma}_u = \sum_{m=1}^{N_{\text{mater}}} \alpha_u^m \mathbf{\Phi}^t \mathbf{K}_{\text{visco}}^m \mathbf{\Phi}$$

L'équation (6.17) présente le modèle d'état avec la contrainte des temps de relaxation,  $\tau_u^m = \tau_u$  communs à tous les matériaux viscoélastiques. Remarquons que les  $N \times N_{\text{ddl}}$  dernières lignes de l'équation d'état (6.17) reviennent à écrire  $q_u = (\tau_u p)/(1 + \tau_u p) q$ . En nommant  $[\mathbf{A}]$  la matrice du membre de gauche et  $[\mathbf{B}]$  la matrice à droite du signe égal, la résolution de l'équation (6.17) fournit les valeurs propres  $s_i$  et les vecteurs propres  $\psi_i$ , voir l'équation (6.18).

$$s_i [\mathbf{A}] \begin{bmatrix} \psi_i \\ s_i \psi_i \\ \psi_{i,1} \\ \vdots \\ \psi_{i,N} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \psi_i \\ s_i \psi_i \\ \psi_{i,1} \\ \vdots \\ \psi_{i,N} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

### 6.2.2 Exemple

Appliquons la méthode d'analyse, avec prise en compte de la viscoélasticité, au modèle EF présenté en figure 6.1. Nous considérerons un coefficient de frottement  $\mu = 0.5$ . Deux calculs sont effectués avec une garniture viscoélastique dont la phase vaut  $0^\circ$  (matériau élastique) puis  $25^\circ$ . Les valeurs des taux d'amortissement des modes propres complexes sont présentées sur la figure 6.3.

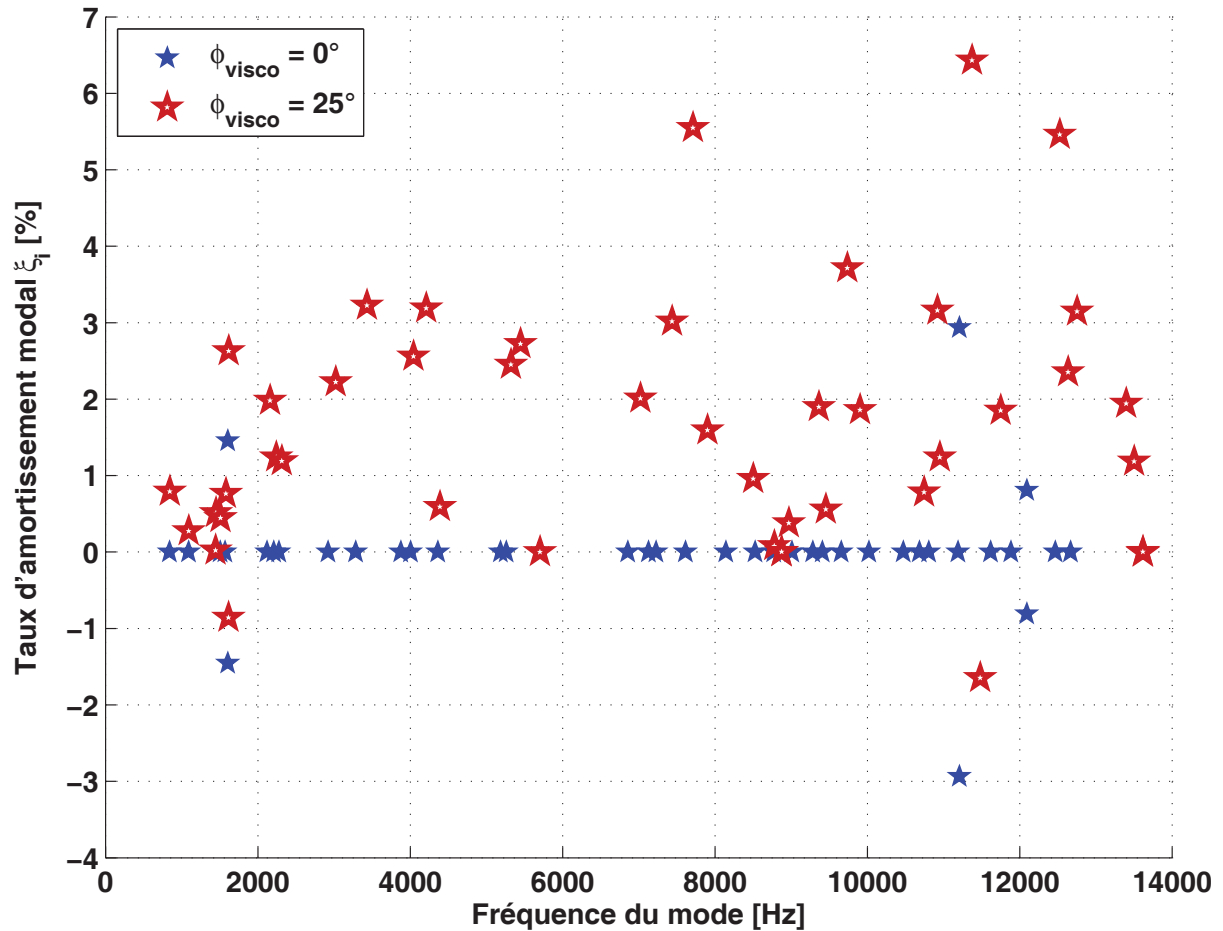


FIGURE 6.3 – Comparaison des taux d'amortissement des modes propres complexes pour deux calculs sans puis avec prise en compte de la viscoélasticité. Le coefficient de frottement vaut  $\mu = 0.5$  et la phase du matériau viscoélastique vaut  $0^\circ$  puis  $25^\circ$ .

La modélisation d'une garniture viscoélastique permet de prédire deux modes instables au lieu de trois dans le cas purement élastique. Il s'avère que l'un des modes précédemment considérés instables est en fait amorti par la viscoélasticité. Remarquons que ces résultats sont issus de la projection du problème sur un sous-espace qui peut potentiellement être mal adapté.

### 6.3 Enrichissement du sous-espace de projection

La résolution des systèmes aux valeurs propres complexes des deux sections précédentes 6.1 et 6.2, a été menée sur un sous-espace afin de réduire le temps de calcul. Ce sous-espace de Ritz est défini par la base modale,  $\Phi$ . Malheureusement, même si la base modale,  $\Phi$ , est relativement bien adaptée, elle ne décrit pas parfaitement les mouvements engendrés par les phénomènes de frottement et de viscoélasticité. Or les modes propres instables font partie de ces mouvements mal décrits. Pour pallier ce problème, il convient d'enrichir cette base en lui ajoutant des vecteurs adaptés.

Le but de cette section est de mettre en évidence les erreurs qui peuvent apparaître en l'absence d'enrichissement de la base de projection. Plusieurs méthodes d'enrichissement peuvent être utilisées. Il est possible d'utiliser la base des modes réels calculée avec la raideur à haute fréquence des matériaux viscoélastiques. La nouvelle base formée contient des informations sur la rigidification des modes propres complexes due à la viscoélasticité. Toutefois, elle ne corrige pas les effets dus au frottement. Nous avons préféré utiliser la méthode de l'itération sur les résidus qui permet de corriger le sous-espace pour les deux phénomènes de frottement et de viscoélasticité. Pour plus de détails, le lecteur intéressé peut se référer à la thèse de A. Bobillot [8].

#### 6.3.1 Itération sur les résidus

Le schéma représenté en figure 6.4 expose les différentes étapes de l'enrichissement de la base de projection par itérations sur les résidus. Lors de la  $k^{\text{ième}}$  itération<sup>3</sup> sur les résidus, le problème est projeté sur la base  $\mathbf{T}^{(k)}$  puis la résolution du système réduit fournit les valeurs propres  $s_i^{(k)}$  et les vecteurs propres  $\psi_i^{(k)}$ . Comme dans les sections 6.1 et 6.2, la base de Ritz est utilisée initialement,  $\mathbf{T}^{(0)} = \Phi$ . Du fait de la projection, les vecteurs propres ramenés à l'espace complet,  $\mathbf{T}^{(k)} \psi_i^{(k)}$ , sont entachés d'erreur et génèrent un résidu,  $R_{F,i}^{(k)}$ , homogène à un effort, voir l'équation (6.19).

$$\left( \left( s_i^{(k)} \right)^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_f + \sum_{m=1}^{N_{\text{mater}}} \mathbf{K}_{\text{visco}}^m \left( \sum_{u=1}^N \frac{\alpha_u^m \tau_u^m s_i^{(k)}}{1 + \tau_u^m s_i^{(k)}} \right) \right) \mathbf{T}^{(k)} \psi_i^{(k)} = R_{F,i}^{(k)} \quad (6.19)$$

Ce résidu en effort est du à une mauvaise description du vecteur propre complexe par le sous-espace de projection. Ainsi, il existe un résidu en déplacement,  $R_{X,i}^{(k)}$ , orthogonal au sous-espace de projection qui complète le vecteur propre calculé sur le système projeté. Afin d'estimer ce résidu en déplacement, un opérateur,  $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$  est nécessaire, voir l'équation (6.20) :

$$R_{X,i}^{(k)} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} R_{F,i}^{(k)} \quad (6.20)$$

Comme le système étudié ne présente pas de modes de corps rigide, la rigidité est inversible et elle peut être utilisée comme opérateur :  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_f$ . Remarquons que cette rigidité

3. L'exposant  $k$  correspond au numéro de l'itération. L'indice  $i$  correspond au numéro du mode propre complexe.



est statique et ne tient pas compte de l'effet de rigidification des matériaux viscoélastiques. Ainsi, il est plus intéressant d'utiliser la rigidité dynamique, voir l'équation (6.21).

$$\tilde{\mathbf{K}}(p) = \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_f + \sum_{m=1}^{N_{\text{mater}}} \mathbf{K}_{\text{visco}}^m \left( \sum_{u=1}^N \frac{\alpha_u^m \tau_u^m p}{1 + \tau_u^m p} \right) \quad (6.21)$$

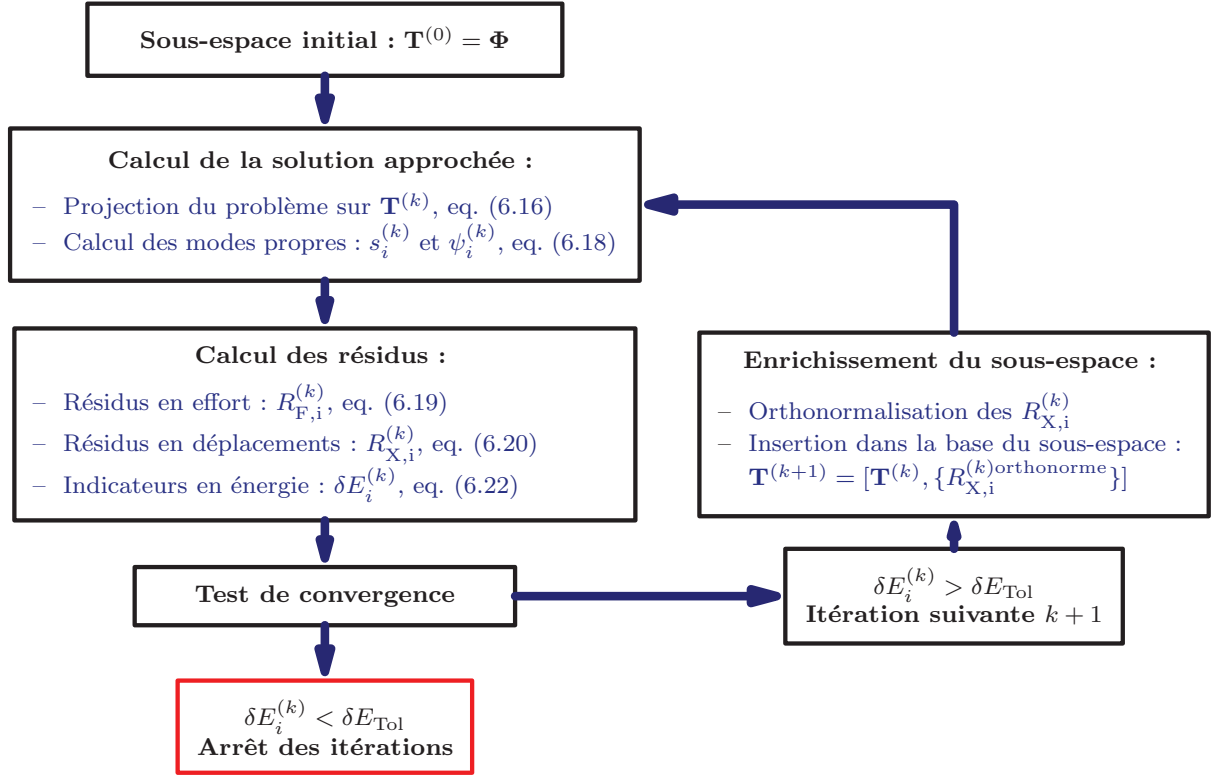


FIGURE 6.4 – Schéma de l'enrichissement du sous-espace par itération sur les résidus.

Inverser une telle matrice demande beaucoup de ressources informatiques. Ainsi, mieux vaut choisir une seule valeur de  $p$  pour laquelle l'opérateur sera adapté au calcul des résidus en déplacement sur tout l'intervalle fréquentiel d'intérêt. Du fait de la troncature de la base de projection initiale à  $NM$  modes propres, les derniers modes complexes du problème projeté sont généralement ceux qui présentent les plus grands résidus. Ainsi, l'opérateur  $\tilde{\mathbf{K}}(s_{NM}^{(0)})$  convient bien pour le calcul des résidus en déplacement.

Afin de savoir si la base de projection requiert un enrichissement, il est nécessaire de se donner un indicateur. Celui utilisé par A. Bobillot [8] est défini comme le rapport de l'énergie de déformation du résidu sur l'énergie de déformation du mode propre complexe. Nous faisons de même en utilisant l'indicateur  $\delta E_i^{(k)}$  défini par l'équation (6.22) :

$$\delta E_i^{(k)} = \frac{|{}^t R_{X,i}^{(k)} \quad R_{F,i}^{(k)}|}{|{}^t \psi_i^{(k)} \quad {}^t \mathbf{T}^{(k)} \quad \tilde{\mathbf{K}} \quad \mathbf{T}^{(k)} \quad \psi_i^{(k)}|} \quad (6.22)$$

Une base de projection est considérée comme bien adaptée si les indicateurs d'énergie des modes propres sont inférieurs à  $\delta E_{\text{Tot}}$ . Cette valeur de tolérance est arbitrairement fixée à 0.1 %. Si  $\delta E_i^{(k)} > 0.1\%$ , le résidu en déplacement du  $i^{\text{ième}}$  mode propre complexe doit servir à enrichir la base de projection.

La base de projection initiale,  $\mathbf{T}^{(0)} = \Phi$ , est orthonormée par rapport à la masse, c'est-à-dire qu'elle vérifie :  ${}^t\mathbf{T}^{(0)} \mathbf{M} \mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{I}$ . Or, les résidus en déplacements sont en général quasiment colinéaires par rapport au sous-espace. Ainsi, pour assurer le bon conditionnement des matrices projetées, il est nécessaire d'orthonormaliser les résidus en déplacements par rapport à la masse avant de les ajouter à la base :  $\mathbf{T}^{(k+1)} = [\mathbf{T}^{(k)}, \{R_{X,i}^{(k)\text{orthonormé}}\}]$ . Cette orthonormalisation est effectuée grâce au processus de Gram-Schmidt modifié, voir la figure 6.5. Ce processus consiste à soustraire du vecteur que l'on souhaite inclure, successivement toutes les composantes colinéaires aux vecteurs de la base  $\mathbf{T}^{(k)}$ . Le nouveau vecteur est normalisé après chaque soustraction dans le but de limiter les arrondis numériques. Enfin, la nouvelle base de projection  $\mathbf{T}^{(k+1)}$  sert à recalculer les modes propres complexes à l'itération suivante. Le processus itératif est appliqué jusqu'à ce que tous les modes propres vérifient  $\delta E_i^{(k)} < 0.1\%$ .

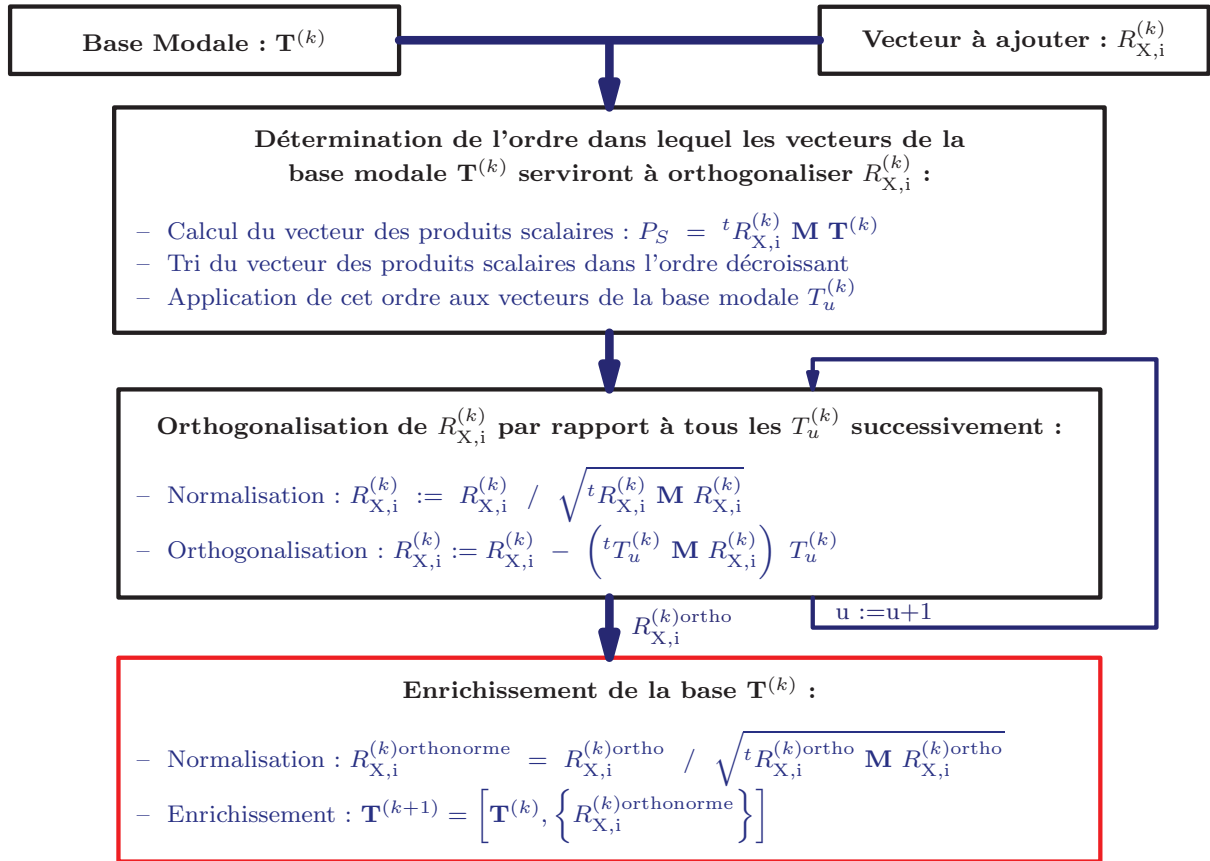


FIGURE 6.5 – Processus de Gram-Schmidt modifié pour l'orthonormalisation d'un vecteur à inclure dans la base modale.

### 6.3.2 Exemple

Nous venons de présenter la méthode générale d'itération sur les résidus pour le problème de glissement stationnaire avec viscoélasticité. Or, même sans viscoélasticité, le sous-espace défini par la base  $\mathbf{T}^{(0)} = \Phi$ , n'est pas adapté. La figure 6.6 montre que les taux d'énergie résiduelle  $\delta E_i^{(0)}$  calculés pour le problème de glissement stationnaire, décrit dans la section 6.1, dépassent la valeur seuil arbitrairement fixée à 0.1%. L'enrichissement de la base  $\mathbf{T}^{(0)}$  nécessite deux itérations. La résolution du problème de glissement stationnaire projeté sur la base  $\mathbf{T}^{(2)}$  conduit à des résultats différents aussi bien en termes de fréquences propres que de déformées modales et de taux d'amortissement des modes. La figure 6.6 montre les différences entre les calculs avec projection sur  $\mathbf{T}^{(0)}$  et sur  $\mathbf{T}^{(2)}$ .

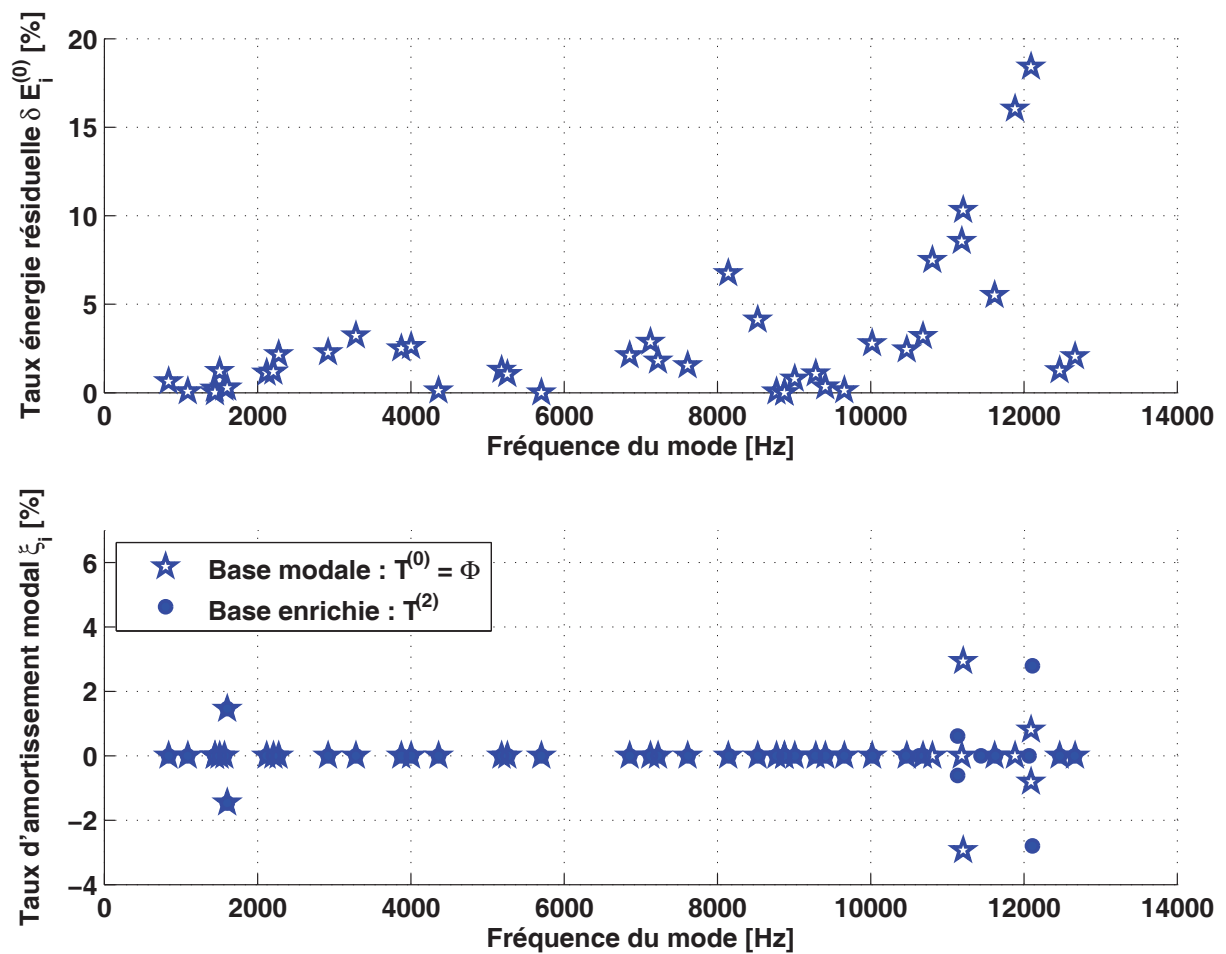


FIGURE 6.6 – En haut figurent les taux d'énergies résiduelles des modes propres complexes pour un calcul avec un coefficient de frottement  $\mu = 0.5$  et sans viscoélasticité. Pour le même problème, la figure du bas représente la comparaison des taux d'amortissement des modes propres complexes pour deux calculs **sans** puis **avec** enrichissement du sous-espace de projection.

Le sous-espace de projection défini par la base  $\mathbf{T}^{(0)} = \Phi$ , n'est pas adapté au problème de glissement stationnaire avec viscoélasticité. La figure 6.7 montre que les taux d'énergie résiduelle  $\delta E_i^{(0)}$  dépassent la valeur seuil de 0.1%. L'enrichissement de la base  $\mathbf{T}^{(0)}$  nécessite deux itérations. La résolution du problème de glissement stationnaire avec viscoélasticité projeté sur la base  $\mathbf{T}^{(2)}$  conduit à des résultats différents comme le montre la figure 6.7.

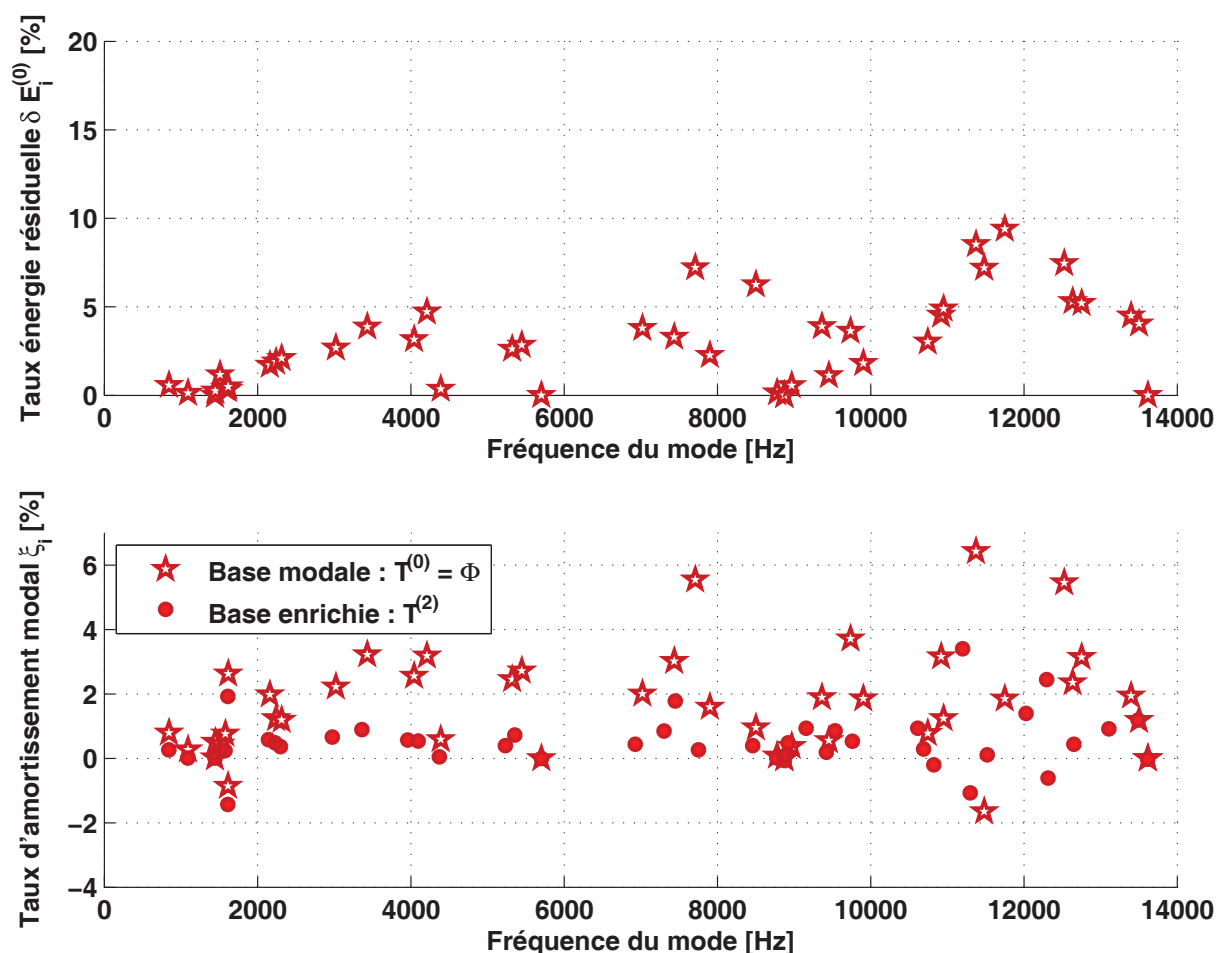


FIGURE 6.7 – En haut figurent les taux d'énergie résiduelle des modes propres complexes pour un calcul avec un coefficient de frottement  $\mu = 0.5$  et en considérant des garnitures présentant  $25^\circ$  de phase. Pour le même problème, la figure du bas représente la comparaison des taux d'amortissement des modes propres complexes pour deux calculs **sans** puis **avec** enrichissement du sous-espace de projection.

L'enrichissement de la base de projection s'avère nécessaire que ce soit pour le problème avec frottement ou pour le problème avec frottement et viscoélasticité. Les prédictions des sections précédentes sont modifiées. La figure 6.8 montre l'évolution des taux d'amortissement des modes propres complexes lorsque le comportement des garnitures est de plus en plus viscoélastique. En considérant que la phase évolue entre  $0^\circ$  et  $25^\circ$ , la figure 6.8 montre que la viscoélasticité peut stabiliser ou déstabiliser les modes propres.

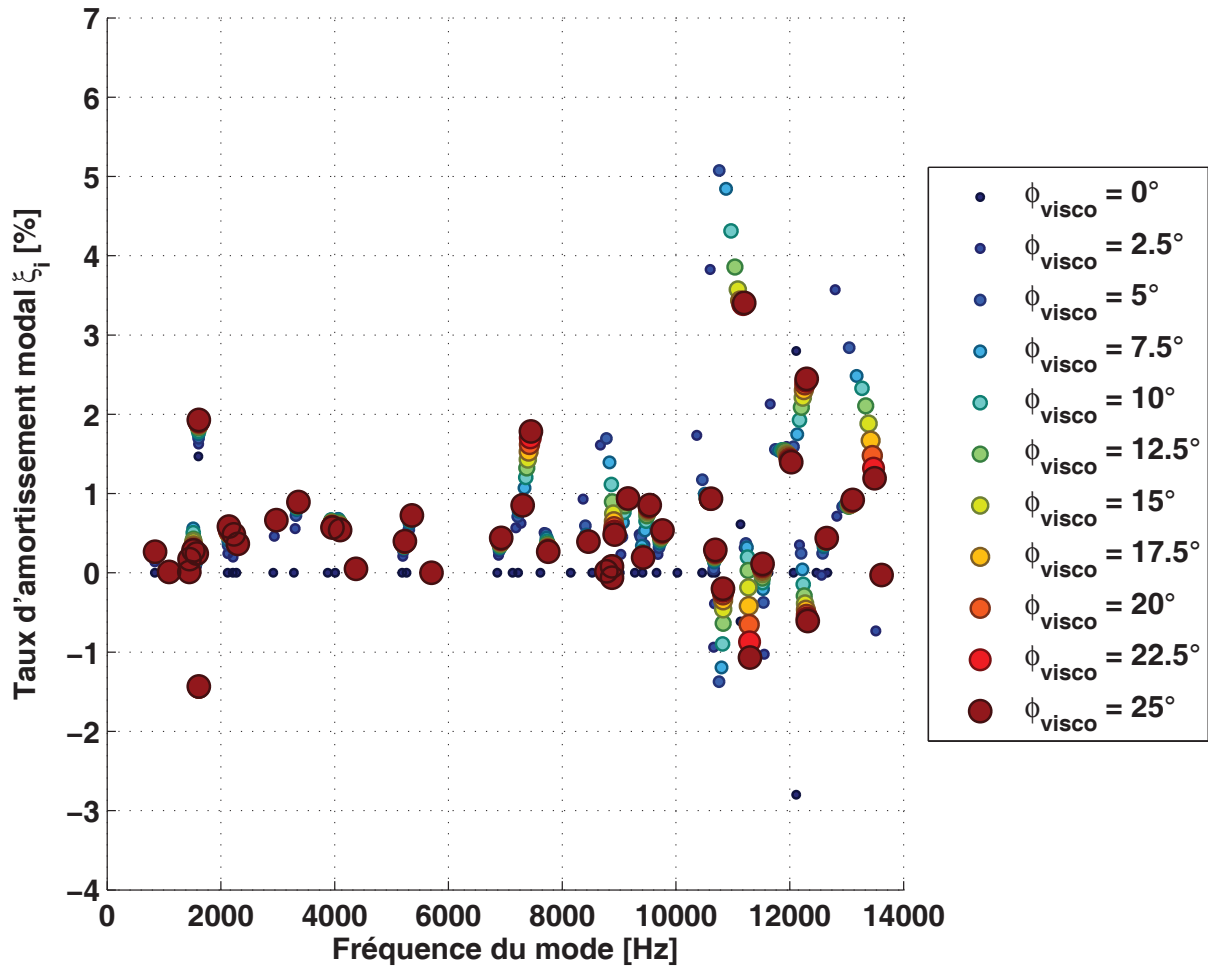


FIGURE 6.8 – Comparaison des taux d'amortissement des modes propres complexes pour différentes valeurs de phase du matériau viscoélastique comprise entre  $0^\circ$  et  $25^\circ$ . Le coefficient de frottement vaut  $\mu = 0.5$  et le sous-espace de projection a été enrichi.

La viscoélasticité a deux effets distincts. Elle génère de l'amortissement qui stabilise les modes propres et elle rigidifie les matériaux, impactant ainsi les couplages modaux. En fonction de la manière dont les modes propres sollicitent les matériaux viscoélastiques, certains modes sont plus sensibles que d'autres à la viscoélasticité des garnitures. Ainsi, du fait de la rigidification, la fréquence de certains modes augmentent plus que celle des autres modes. En conséquence, le fait de prendre en compte la viscoélasticité permet de prédire certains couplages modaux qui n'apparaissent pas quand tous les matériaux sont considérés purement élastiques. De la même manière, la prise en compte de la rigidification montre que certains modes ne sont

pas couplés contrairement à ce que prédit le modèle où tous les matériaux sont considérés comme purement élastiques.

## 6.4 Conclusion et perspectives

Le comportement viscoélastique des matériaux a été pris en compte au sein des analyses aux valeurs propres complexes par éléments finis. Pour cela, le modèle de Maxwell généralisé a été utilisé. Le comportement viscoélastique a été introduit en même temps que le frottement de Coulomb lors de la projection du problème sur un sous-espace. Le sous-espace utilisé est constitué des modes propres réels du problème de glissement stationnaire sans frottement ni viscoélasticité. Il n'est donc pas bien adapté au problème de glissement stationnaire avec frottement et viscoélasticité. En conséquence, ce sous-espace a été enrichi par la méthode d'itération sur les résidus. L'impact de la viscoélasticité a ainsi pu être mise en évidence sans être entachée par les erreurs de projection.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, la viscoélasticité induit deux phénomènes qui ne peuvent pas être décrits par des comportements élastiques, à savoir l'amortissement des matériaux et leur rigidification. L'amortissement dû à la viscoélasticité tend à stabiliser le système mécanique. Par contre la rigidification des matériaux peut soit stabiliser le système en découplant certains modes ou alors déstabiliser le système en couplant certains modes.

En conséquence, ajouter des matériaux viscoélastiques, tels que les shims, à un système de freinage peut le rendre instable par couplage modal. D'autre part, les modèles éléments finis classiques, qui utilisent des comportements purement élastiques pour décrire des matériaux fortement viscoélastiques, tels que les shims, ne peuvent en aucun cas être prédictifs.

## Bibliographie du chapitre 6

- [1] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, and L. Jézéquel, "Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 307, no. 3-5, pp. 591 – 609, 2007.
- [2] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, and L. Jézéquel, "Effects of damping on brake squeal coalescence patterns - application on a finite element model," *Mechanics Research Communications*, vol. 34, no. 2, pp. 181 – 190, 2007.
- [3] S. Sorrentino, A. Fasana, and S. Marchesiello, "Analysis of non-homogeneous timoshenko beams with generalized damping distributions," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 304, no. 3-5, pp. 779 – 792, 2007.
- [4] J. Zhang and C. M. Richards, "Parameter identification of analytical and experimental rubber isolators represented by maxwell models," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, no. 7, pp. 2814 – 2832, 2007.
- [5] S. Sorrentino and A. Fasana, "Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, no. 4-5, pp. 839 – 853, 2007.

- [6] F. Barbosa and M. Farage, “A finite element model for sandwich viscoelastic beams : Experimental and numerical assessment,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 317, no. 1-2, pp. 91 – 111, 2008.
- [7] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois, *Méthode des éléments finis*. Lavoisier, 2005.
- [8] A. Bobillot, *Méthodes de réduction pour le recalage : application au cas d’ Ariane 5*. PhD thesis, Centrale Paris, 2002.

## Chapitre 7

# Conclusion et perspectives

Le crissement de frein est un phénomène complexe difficile à modéliser et donc difficile à prédire. De nombreux auteurs ont proposés différentes causes pour expliquer son existence, le couplage modal étant la cause la plus fréquemment retenue.

Des observations expérimentales menées sur un frein réel ont exhibé des symptômes attribuables à un comportement non-linéaire : La fréquence du crissement dépend fortement de la pression de freinage et les spectres d'accéléromètres collés sur une des plaquettes présentent des harmoniques pendant la phase de crissement. Toutefois, la fréquence fondamentale du crissement est présente de manière latente avant l'apparition de ce dernier, ce qui tend à accréditer la cause du couplage modal.

Les phénomènes dynamiques non-linéaires tels que le crissement de frein sont difficiles à analyser car ils peuvent avoir plusieurs comportements stables pour les mêmes conditions aux limites. La résolution de systèmes non-linéaires est souvent menée dans le domaine temporel, ce qui peut rendre le coût de calcul prohibitif. Pour éviter cela, le système est en général linéarisé autour de sa position d'équilibre afin d'être résolu dans le domaine fréquentiel où ses modes propres complexes sont calculés. L'étude du modèle de Hoffmann amorti par la viscoélasticité illustre bien cette démarche. Tout mode propre complexe divergent est considéré comme pouvant potentiellement faire naître le crissement. Si aucun amortissement n'est pris en compte dans le système linéarisé, alors la stabilité de certains modes propres reste indéterminée. L'étude du modèle de Hoffmann met en évidence qu'il existe deux manières de stabiliser un système frottant : soit en découplant ses modes propres, soit en introduisant de l'amortissement. Or, la densité modale d'un frein à disque industriel assure l'inexorable existence de quelques modes couplés divergents. L'amortissement étant la seule manière d'assurer la stabilité, il convient de le modéliser lors de l'analyse de la dynamique du système linéarisé.

Bien que les sources de dissipation d'énergie puissent être diverses, nous avons concentré nos efforts sur l'amortissement dû à la viscoélasticité. Parmi les matériaux viscoélastiques utilisés dans les systèmes de freinage, les shims sont les plus amortissants et leur loi de comportement est inconnue. Un banc d'essai a été mis au point afin de caractériser leur comportement en cisaillement dynamique sous précharge normale. Ce banc permet de mesurer le module et la phase de la rigidité de cisaillement en fonction de la fréquence, jusqu'à 3600Hz et sans utiliser les équivalences temps-température. Pour atteindre de telles fréquences, des actionneurs piézoélectriques ont été utilisés. La caractérisation des lois de comportement des shims confirme



leur potentiel de dissipation en cisaillement, avec un déphasage entre effort et déplacement de l'ordre de quelques dizaines de degrés. Ce déphasage, qui est à l'origine de l'amortissement s'accompagne d'une rigidification du shim quand la fréquence augmente.

Peu de modèles rhéologiques sont aptes à décrire à la fois le déphasage et la rigidification et cela sur une bande fréquentielle large de plusieurs décades. Le modèle de Maxwell généralisé parvient à cela moyennant l'utilisation d'un nombre suffisant de cellules de Maxwell. Une méthode a été développée pour identifier les paramètres du modèle de Maxwell généralisé à partir des courbes d'essai du banc de cisaillement. Cette méthode d'identification repose sur la superposition du comportement de chaque cellule de Maxwell approché par la somme des comportements de leurs asymptotes. Les équations des asymptotes lient de manière simple les paramètres du modèle aux écarts entre la rigidité complexe mesurée et la rigidité complexe du modèle. Les paramètres du modèle de Maxwell sont obtenus par itérations sur ces écarts. Cette méthode d'identification permet d'alimenter en paramètres les modèles éléments finis utilisant Maxwell généralisé pour modéliser les comportements viscoélastiques. Dans le cas où plusieurs matériaux viscoélastiques sont décrits dans le même modèle éléments finis, la taille est multipliée par le nombre de matériaux, ce qui augmente également le coût de calcul. Cette multiplication est évitée en imposant que les temps de relaxation associés à chaque cellule de Maxwell soient identiques pour tous les matériaux. La méthode d'identification permet de respecter cette contrainte.

La rhéologie de Maxwell généralisé est introduite dans un modèle éléments finis afin de prendre en compte la viscoélasticité des matériaux. Pour cela le système dynamique est exprimé sous la forme d'un modèle d'état projeté sur la base de Ritz du problème sans frottement ni viscoélasticité. Cette projection induit des erreurs qui ont été corrigées en enrichissant la base de projection par la méthode d'itération sur les résidus. La prise en compte des matériaux viscoélastiques dans les modèles éléments finis permet d'introduire une description réaliste de l'amortissement. Cet amortissement stabilise le système. Il permet de lever l'incertitude sur la stabilité des modes qui avaient une valeur propre à partie réelle nulle dans les modèles purement élastiques. Certains modes couplés précédemment instables sont suffisamment amortis et deviennent stables. Ainsi, la prise en compte de la viscoélasticité dans les modèles éléments finis a permis de restreindre le nombre de modes propres complexes étant prédits instables par le calcul. Toutefois, la viscoélasticité peut également déstabiliser le système car elle induit une rigidification du matériau. Ainsi les modes sollicitant le matériau viscoélastique ont une fréquence propre plus élevée que la valeur prédite par le modèle purement élastique. Par ce biais, la rigidification du matériau viscoélastique peut découpler des modes et donc stabiliser le système, mais elle peut également rendre instable par couplage des modes propres qui étaient stables lors du calcul sur le modèle purement élastique. Au final les cas de déstabilisation par la rigidification justifient à eux seuls la nécessité de modéliser les comportements viscoélastiques dans les analyses aux valeurs propres par éléments finis.

Cette thèse a permis de modéliser de manière réaliste la viscoélasticité dans les modèles éléments finis. Il reste à prendre en compte d'autres sources de dissipation d'énergie, telle que le frottement aux niveaux des liaisons. En effet, les éléments mécaniques d'un système de frein permettant la translation des plaquettes vers le disque dissipent de l'énergie par frottement lorsque le frein vibre.

Enfin, un point important soulevé lors de cette thèse concerne l'apparition d'harmoniques

---

lors de l'observation du mouvement d'une plaquette de frein pendant le crissement. Bien que cela soit vraisemblablement dû à une non-linéarité, il est envisageable de réutiliser le modèle éléments finis linéarisé pour détecter des cas critiques où les multiples de la fréquence d'un mode propre instable coïncident avec d'autres modes propres instables. Dans de tels cas les non-linéarités pourraient être amplifiées par les modes de structure. Eviter de telles combinaisons pourrait être une règle de conception judicieuse.



## Annexe A

# Annexe du chapitre 3 : Le critère de Routh-Hurwitz

Voici un rappel sur le critère de Routh-Hurwitz. Ce critère stipule que pour qu'un système soit stable, c'est-à-dire que son polynôme caractéristique ne comporte que des racines à partie réelle négative, tous les coefficients de ce polynôme doivent être du même signe (condition nécessaire<sup>1</sup>). Dans le cas du modèle de Hoffmann présenté en section 3.2, le polynôme caractéristique est donné par l'équation (3.9) qui est rappelée ci-dessous :

$$p^4 + p^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) = 0$$

Le terme  $\omega_1^2 + \omega_2^2$  est toujours positif, ainsi le système peut potentiellement être stable si le terme  $\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c(\omega_c - \mu k_3/M)$  est lui aussi positif. On en déduit que le système est toujours instable si l'inéquation (3.12), rappelée ci-dessous est vérifiée.

$$\omega_1^2\omega_2^2 - \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) < 0$$

Quand la condition nécessaire sur le signe commun à tous les coefficients du polynôme est vérifiée, le critère de Routh-Hurwitz dit que le système est stable si la première colonne du tableau ci-dessous ne contient que des termes du même signe (condition suffisante). Le nombre de changements de signe est égal au nombre de racines instables, donc de manière générale, pour un polynôme de degré 4 :  $\alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0$ , on obtient :

$p^4$	$\alpha_4$	$\alpha_2$	$\alpha_0$
$p^3$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	0
$p^2$	$\beta_2 = (\alpha_3\alpha_2 - \alpha_4\alpha_1)/\alpha_3$	$\beta_1 = (\alpha_3\alpha_0)/\alpha_3$	0
$p$	$\zeta = (\beta_2\alpha_1 - \alpha_3\beta_1)/\beta_2$	0	0
1	$\gamma = (\zeta\beta_1)/\zeta = \beta_1$	0	0

---

1. Cette condition est nécessaire et suffisante pour les polynômes de degré  $\leq 2$ .

Dans le cas du modèle de Hoffmann, le polynôme caractéristique donné par l'équation (3.9) est un polynôme bicarré, ainsi, la deuxième ligne du tableau est une ligne de zéros, ce qui indique l'existence d'une paire de racines imaginaires pures. Dans ce cas, on continue le tableau en remplaçant la ligne nulle par les coefficients obtenus en dérivant le polynôme reconstitué à partir de la ligne supérieure, car les racines imaginaires pures sont celles de ce polynôme bicarré reconstitué. Dans le cas du modèle de Hoffmann, le tableau devient :

$$\begin{array}{ccc}
 1 & (\omega_1^2 + \omega_2^2) & \omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) \\
 4 & 2(\omega_1^2 + \omega_2^2) & 0 \\
 (\omega_1^2 + \omega_2^2)/2 & \omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) & 0 \\
 \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 + 4\omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} & 0 & 0 \\
 \omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) & 0 & 0
 \end{array}$$

Puisque  $(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2 > 0$  est toujours vrai, le système étudié est instable quand :

$$\begin{aligned}
 & (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2 + 4\omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) < 0 \\
 \implies & (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_c \left( \omega_c - \frac{\mu k_3}{M} \right) < 0
 \end{aligned}$$

On reconnaît alors l'inéquation 3.14 qui conduit à la condition 3.15 pour que le système soit instable. Le système étudié est également instable quand  $\omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_c(\omega_c - \mu k_3/M) < 0$ , ce qui mène aux inéquations 3.12 et 3.13. Les mêmes conclusions sur les conditions d'instabilités ont été retrouvées par le critère de Routh-Hurwitz.

## Annexe B

# Annexes du chapitre 4 : Caractérisation des matériaux

Certains éléments des systèmes de freinage sont composés de matériaux dont le comportement est méconnu, tels que les garnitures des plaquettes et les shims. Or, il est nécessaire de connaître les lois de comportement de ces matériaux lors de la modélisation du frein par EF. De plus, le recalage du comportement de ces matériaux à partir de FRF n'est pas toujours précis<sup>1</sup>. Dans ce but, ces matériaux ont été testés sur des bancs d'essai. Pour cela, trois techniques de caractérisation ont été utilisées :

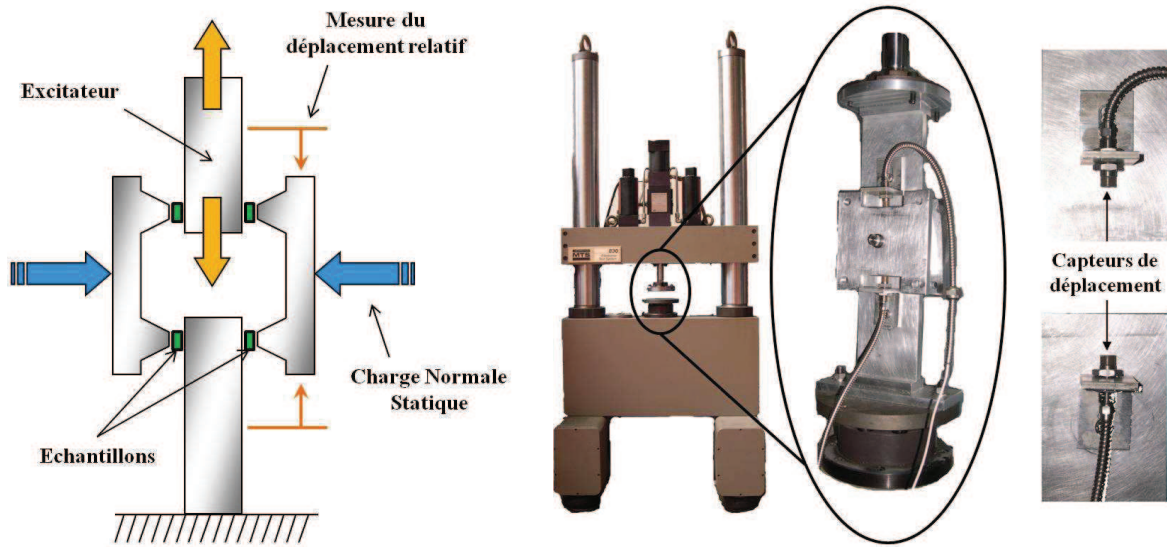
- La caractérisation par excitation en compression et en cisaillement quasi-statique à l'aide d'un vérin hydraulique, voir l'annexe B.1 suivant.
- La caractérisation par propagation ultrasonore, voir l'annexe B.2 suivant.
- La caractérisation par excitation en cisaillement quasi-statique à l'aide du banc conçu au cours de la thèse et présenté dans le chapitre 4.

---

1. Il est extrêmement difficile de réaliser une FRF d'un shim seul à cause de leur fort taux d'amortissement.

## B.1 Essais sur vérin hydraulique

La MTS est une machine hydraulique qui permet d'imposer des déplacements jusqu'à 25 mm de débattement, ou des efforts jusqu'à 6000 N. Elle est contrôlée par une servovalve avec une fréquence pouvant atteindre 200Hz. En utilisant le montage adéquat, conjointement avec des capteurs de déplacement et de force, la MTS peut être utilisée comme viscoanalyseur.



(a) Schéma du montage qui permet de caractériser des échantillons en cisaillement grâce au vérin hydraulique. (b) Photo du vérin hydraulique (MTS) et du montage pour l'utiliser en tant que viscoanalyseur. Ce montage permet de caractériser des échantillons en cisaillement jusqu'à 200Hz.

FIGURE B.1 – Principe du vérin hydraulique utilisé comme viscoanalyseur.

Le vérin hydraulique a été utilisé pour la mesure du comportement des matériaux en compression d'une part et en cisaillement d'autre part. La figure B.1(a) présente le schéma de principe du montage qui permet de tester des matériaux en cisaillement grâce à la MTS. Le montage est symétrique par rapport à l'axe du vérin et il nécessite quatre échantillons. Une précharge normale statique est appliquée sur les échantillons, voir les flèches bleues de la figure B.1(a). Puis une excitation de cisaillement dynamique est imposée aux échantillons, voir les flèches oranges de la figure B.1(a). La figure B.1(b) montre les photos de la MTS et du montage qui a été utilisé. Des capteurs à courant de Foucault mesurent les déplacements relatifs entre les pièces du montage. Ces déplacements relatifs permettent de calculer l'élongation des échantillons. Les efforts de cisaillement dynamiques sont également mesurés, ce qui permet de calculer le coefficient de cisaillement des échantillons.

## B.2 Caractérisation par ultrasons

Cette méthode a été décrite dans l'article de Chevalier [12]. Le principe de la caractérisation par ultrasons est de déduire les propriétés mécaniques d'un matériau à partir de la mesure du temps de propagation<sup>2</sup> d'ondes solidiennes à travers un échantillon. Ces ondes solidiennes peuvent être des ondes de pression, voir la figure B.2(a) ou des ondes de cisaillement, voir la figure B.2(b), afin de caractériser respectivement les modules de rigidité de compression ou de cisaillement.

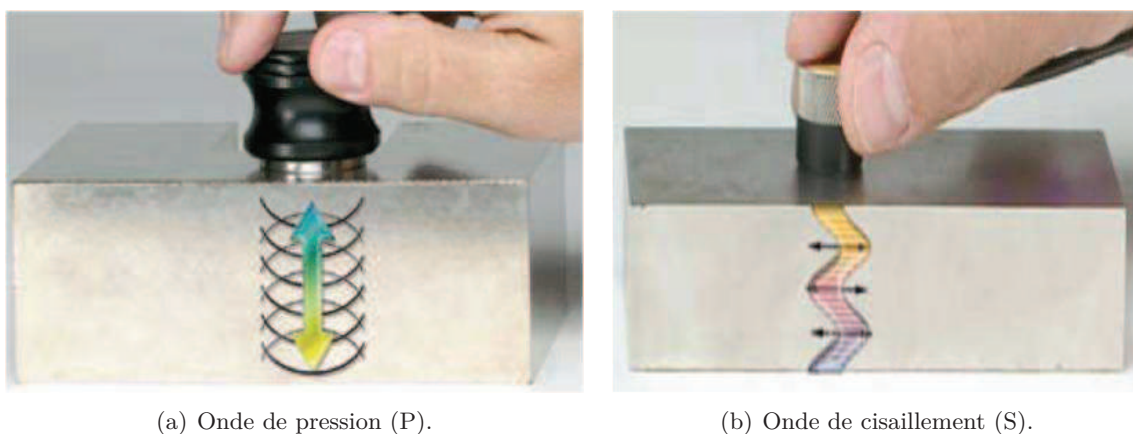


FIGURE B.2 – Les deux types de polarisation d'une onde solidienne.

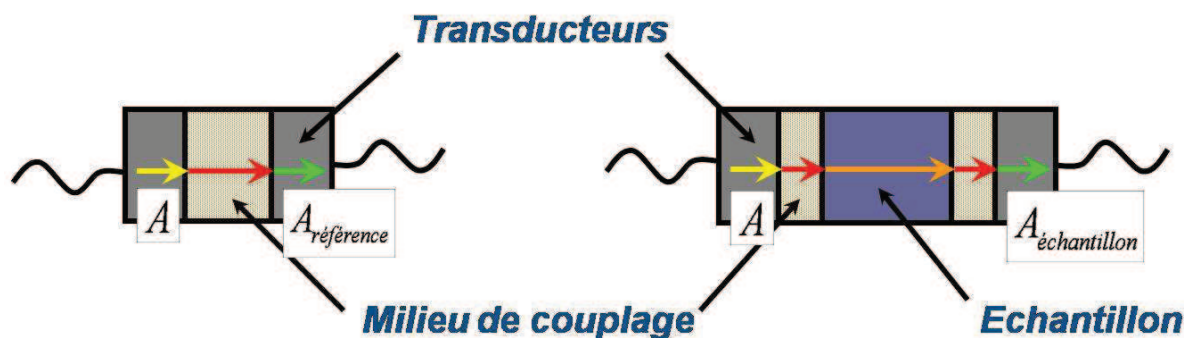
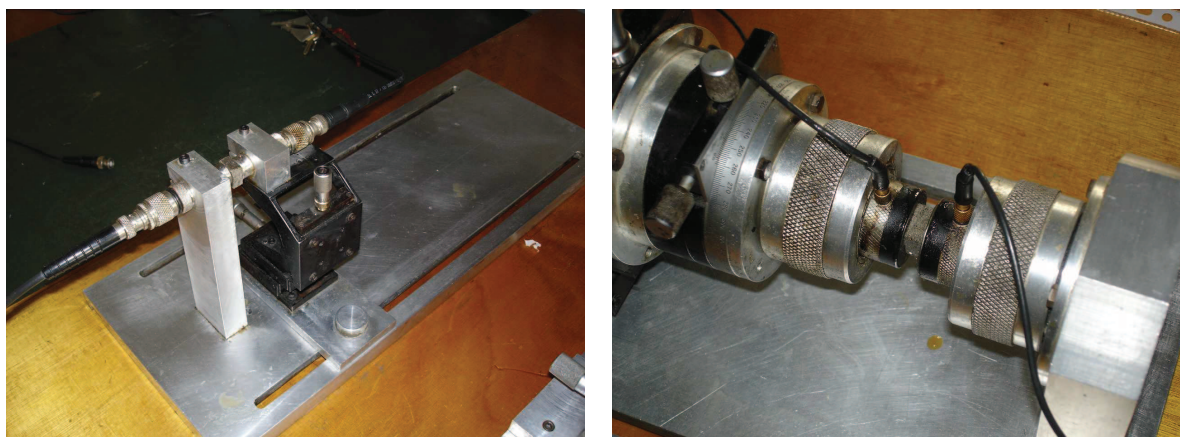


FIGURE B.3 – Schéma de principe de la caractérisation des matériaux par propagation d'ondes ultrasonores. Le temps de vol est mesuré sans échantillon puis avec afin de connaître le temps que l'onde a mis pour traverser l'échantillon.

Cette méthode de caractérisation nécessite deux transducteurs, l'un émettant l'onde et l'autre la recevant. On mesure le temps de vol de l'onde entre l'émetteur et le récepteur. En comparant les mesures de temps de vol sans échantillon puis avec, on déduit le temps de vol de l'onde dans l'échantillon, voir la figure B.3. Afin d'améliorer la transmission de l'onde, un milieu de couplage visqueux est utilisé, du gel ou du miel conviennent particulièrement bien.

2. Ce temps de propagation est appelé temps de vol de l'onde.





(a) Transmission d'une onde de pression.

(b) Transmission d'une onde de cisaillement.

FIGURE B.4 – Les bancs de caractérisation par transmission d'onde ultrasonore.

Les figures B.4(a) et B.4(b) montrent les bancs d'essai de compression et de cisaillement utilisés pour caractériser les garnitures de frein.

Soit la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k = v_\phi/f$ , avec  $k$ , la partie réelle du nombre d'onde,  $v_\phi = \omega/k$ , la vitesse de phase de l'onde et  $\omega = 2\pi f$ , la pulsation de l'onde. Supposons un milieu homogène semi-infini, afin d'éviter les phénomènes d'ondes stationnaires. Cela implique que la longueur d'onde soit très inférieure à la taille de l'échantillon du matériau. En pratique, la méthode fonctionne bien quand longueur d'onde est inférieure à la taille de l'échantillon de 4 à 6 fois. De plus la longueur d'onde doit être plus grande que la taille des inclusions du matériau afin de pouvoir le considérer comme homogène. Dans le cas des garnitures, cette hypothèse nous conduit à ne pas dépasser quelques MHz. A ces fréquences et compte tenu de la vitesse des ondes dans les matériaux composites (2000 à 5000 m/s), les échantillons doivent présenter des dimensions de l'ordre du cm.

Postulons un déplacement de la forme d'une onde plane, avec  $t$  est le temps,  $\omega$  la pulsation de l'onde,  $A$  son amplitude,  $\vec{P}$  son vecteur unitaire de polarisation,  $\vec{v}$  son vecteur unitaire de direction de propagation,  $\phi(\vec{x}, t)$  sa phase et  $\tilde{k} = k - i\alpha$  le nombre d'onde complexe du matériau amortissant :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = A\vec{P} \exp(i(\omega t - \tilde{k}\vec{v}\cdot\vec{x})) = A\vec{P} \exp(i\phi(\vec{x}, t))$$

En remplaçant le déplacement par onde plane dans l'équation de la dynamique d'un solide déformable, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \left[ C_{pqrs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \right] = \rho \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}$$

où  $C_{pqrs}$  est un coefficient du tenseur de Hooke et  $\rho$  la masse volumique du matériau. Après division par  $\exp(i \phi(\vec{x}, t))$ , on trouve :

$$(\tilde{\Gamma}_{pr}(\omega) - \tilde{\zeta} \delta_{pr}) P_r = 0$$

avec  $\tilde{\Gamma}_{pr}(\omega) = \tilde{C}_{pqrs}(\omega) v_q v_s$  le tenseur acoustique ou tenseur de Christoffel, où  $\tilde{C}_{pqrs}$  est le coefficient complexe du tenseur de Hooke tel que  $\tilde{C}_{pqrs}(\omega) = C'_{pqrs}(\omega) + i C''_{pqrs}(\omega)$ . L'amortissement dans le matériau composite s'exprime alors :  $\eta_{pqrs}(\omega) = C''_{pqrs}(\omega) / C'_{pqrs}(\omega)$ .  $\tilde{\zeta}$  est la valeur propre du système telle que :  $\tilde{\zeta} = \rho \omega^2 / \tilde{k}^2 = \rho v_\phi^2 / (1 - i \alpha v_\phi^2 / \omega)^2$ . Ainsi, en considérant le matériau comme purement élastique et en s'arrangeant pour que l'onde se propage le long d'un axe de principal du matériau, par exemple selon  $\vec{e}_\alpha$ , il existe une relation simple entre la vitesse de l'onde et la rigidité du matériau :

$$\left( \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1\alpha 1\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_{2\alpha 2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{3\alpha 3\alpha} \end{bmatrix} - \rho v_\phi^2 \text{Id} \right) \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Pour un matériau orthotrope, il faut déterminer 9 coefficients. Notons que, par symétrie,  $C_{1122} = C_{2211}$ ,  $C_{1133} = C_{3311}$  et  $C_{2233} = C_{3322}$  :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Pour un matériau isotrope transverse, d'axe de symétrie  $\vec{e}_z$ , seulement 5 coefficients sont nécessaires :

- en pression hydrostatique  $C_{1111} = C_{2222} = C_{11}$  et  $C_{3333} = C_{33}$
- en couplage par effet Poisson  $C_{1122} = C_{12}$  et  $C_{1133} = C_{2233} = C_{13}$
- en cisaillement  $C_{1313} = C_{2323} = C_{44}$  et  $C_{1212} = (C_{11} - C_{12})/2$

Ainsi, la matrice de rigidité d'un matériau isotrope transverse s'exprime comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Ainsi, pour chaque direction  $\vec{e}_\alpha$ , en transmettant une onde ultrasonore successivement dans chacune des 3 directions de polarisation, on peut mesurer les temps de vol permettant de calculer tous les coefficients de la matrice de rigidité sauf les coefficients  $\tilde{C}_{1122}$ ,  $\tilde{C}_{1133}$  et  $\tilde{C}_{2233}$  dans le cas orthotrope et  $\tilde{C}_{13}$  dans le cas isotrope transverse.

Dans la pratique, le temps de vol de l'onde, ou temps de propagation, servant au calcul des coefficients de la matrice de rigidité à été mesuré de deux manières différentes : par détection de pic sur les signaux de référence sans échantillon et avec échantillon, puis en faisant l'intercorrélacion de ces deux signaux. La détection de pics s'effectue en relevant, sur chacun des deux signaux, avec et sans échantillon, le temps auquel la valeur extrême est atteinte par le signal. Puis par soustraction de ces 2 temps, on obtient le temps de propagation de l'onde ultrasonore dans l'échantillon. Dans le cas de l'intercorrélacion, on utilise la formule suivante qui est la version discrétisée de l'intercorrélacion classique :

$$\begin{aligned} \text{Pour } m > 0 : \quad R_{S_{ref}S_{ech}}(m) &= \langle S_{ref}, S_{ech} \rangle (t) = \sum_{n=0}^{N-m-1} S_{ref}(n+m) S_{ech}^*(n) \\ \text{Pour } m < 0 : \quad R_{S_{ref}S_{ech}}(m) &= R_{S_{ech}S_{ref}}^*(-m). \end{aligned}$$

La figure B.5 montre les résultats d'un essai mené sur une pièce en aluminium. Le coefficient de rigidité selon l'axe  $e_{\vec{x}}$  est estimée par la méthode de détection de pic à  $C_{xx} = 111.9\text{GPa}$  et par la méthode d'intercorrélacion à  $C_{xx} = 113.3\text{GPa}$ . Remarquons que de manière générale  $E_{iiii} = C_{iiii} (1+\nu)(1-2\nu) / (1-\nu)$ . Dans le cas d'un échantillon en aluminium, en estimant le coefficient de Poisson à  $\nu = 0.33$ , cela donne  $E_{xx} = 0.6749 \times C_{xx}$ . Ainsi, pour respectivement  $C_{xx} = 111.9\text{GPa}$  et  $C_{xx} = 113.3\text{GPa}$ , cela donne un module d'Young de  $E_{xx} = 75.52\text{GPa}$  et  $E_{xx} = 76.46\text{GPa}$ . Ces valeurs doivent être comparées au module d'Young généralement attribué à l'aluminium :  $E_{xx} = 72\text{GPa}$ . Les résultats de cette méthode sont bons et nous l'avons utilisée comme technique de caractérisation des garnitures.

La table B.1 donne les dimensions des échantillons ainsi que leur masse volumique. Les tables B.2 et B.3 donnent les valeurs des temps de vol de l'onde, respectivement, pour la méthode de détection de pics et pour la méthode d'intercorrélacion. Les tables B.4 et B.5 donnent les valeurs des coefficients de la matrice de rigidité, respectivement, pour la méthode de détection de pics et pour la méthode d'intercorrélacion. Enfin les figures B.6 et B.7 reprennent les valeurs données par les tables précédentes, des coefficients de la matrice de rigidité, respectivement, pour la méthode de détection de pics et pour la méthode d'intercorrélacion. Ces deux dernières figures permettent de voir très clairement que les garnitures sont effectivement quasi isotropes transverse. En effet, ces figures montrent que  $C_{1111} \simeq C_{2222} \neq C_{3333}$  et  $C_{1313} \simeq C_{2323} \neq C_{1212}$ .

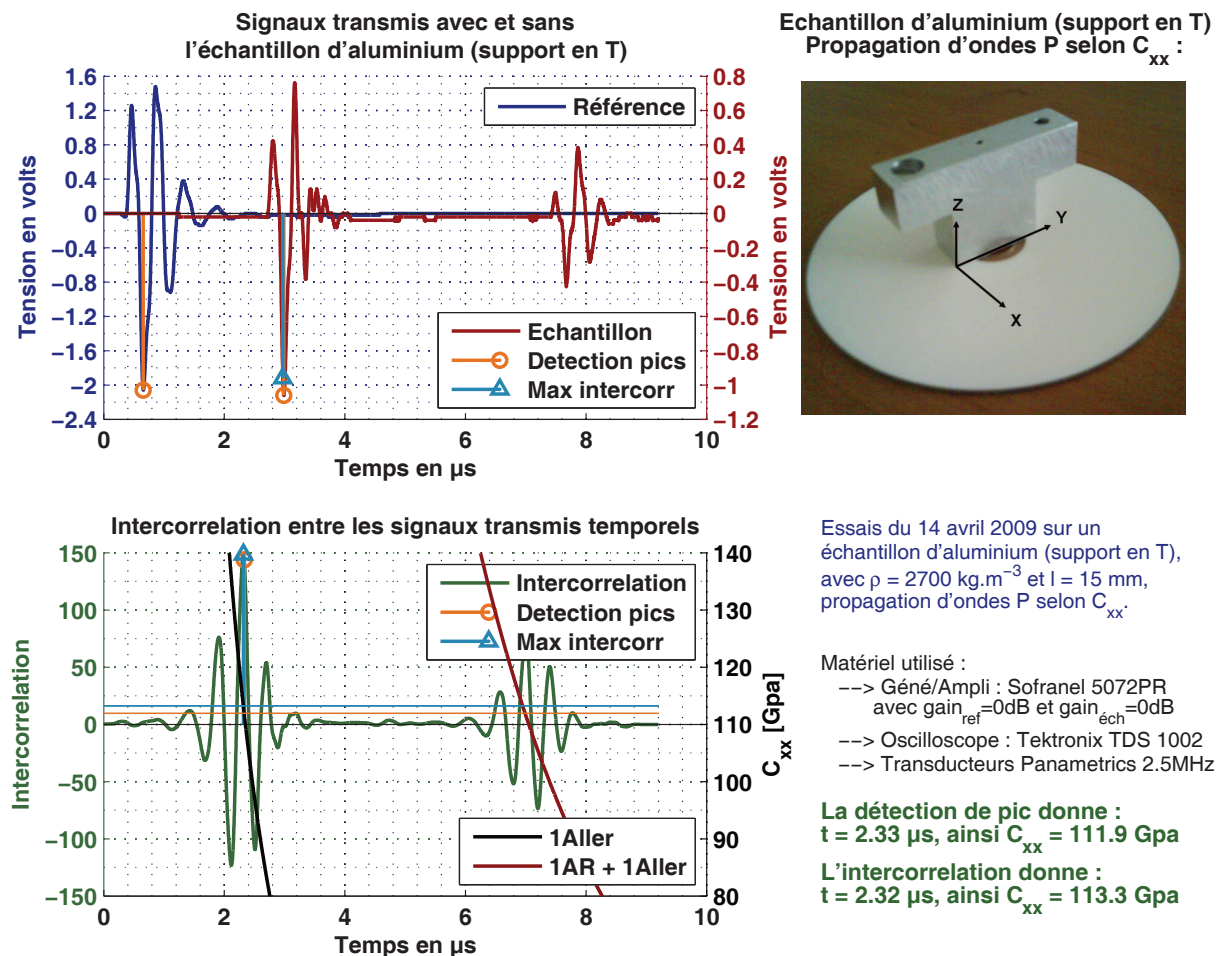


FIGURE B.5 – Essais sur une pièce en aluminium afin de valider la méthode de caractérisation par propagation d’onde ultrasonore.

échantillon	dimension	dimension	dimension	masse
	selon x (en mm)	selon y (en mm)	selon z (en mm)	volumique (en Kg.m <sup>-3</sup> )
1	15.00	14.95	10.00	3114
2	14.80	14.95	10.00	3058
3	14.95	14.95	10.00	3091
4	14.95	14.95	10.00	3118
10	14.90	14.90	10.10	3086
11	14.90	14.90	10.10	3016

TABLE B.1 – Caractéristiques des échantillons

échantillon	$\Delta t_{1111}$	$\Delta t_{2222}$	$\Delta t_{3333}$	$\Delta t_{2121}$	$\Delta t_{1212}$	$\Delta t_{3131}$	$\Delta t_{1313}$	$\Delta t_{3232}$	$\Delta t_{2323}$
1	6.25	6.18	12.29	9.59	9.62	12.78	8.68	12.53	8.50
2	6.47	6.44	7.31	10.16	9.74	12.85	8.88	13.07	8.52
3	6.55	6.36	13.26	9.96	9.84	13.44	9.19	15.51	8.98
4	6.17	6.25	6.79	9.26	9.36	12.62	8.48	12.28	8.20
10	6.37	6.33	13.60	9.79	9.77	13.28	9.26	13.34	9.18
11	6.40	6.65	13.78	10.00	10.04	15.75	8.76	15.35	9.31

TABLE B.2 – Temps de vol des ondes ultrasonores (en  $\mu s$ ) mesurés par la méthode de détection des pics d'amplitude des signaux

échantillon	$\Delta t_{1111}$	$\Delta t_{2222}$	$\Delta t_{3333}$	$\Delta t_{2121}$	$\Delta t_{1212}$	$\Delta t_{3131}$	$\Delta t_{1313}$	$\Delta t_{3232}$	$\Delta t_{2323}$
1	6.24	6.20	9.85	9.87	9.77	15.04	9.01	12.85	8.68
2	6.48	6.37	7.27	10.46	11.07	10.89	9.19	15.48	8.81
3	6.51	6.36	10.64	10.39	10.12	15.91	9.36	15.47	9.11
4	6.14	6.21	6.73	9.44	9.58	12.96	8.63	12.70	8.35
10	6.39	6.30	13.61	9.84	9.85	13.51	9.44	13.47	9.27
11	6.41	6.67	11.14	10.36	8.15	15.93	9.13	15.76	9.50

TABLE B.3 – Temps de vol des ondes ultrasonores (en  $\mu s$ ) mesurés par la méthode de l'inter-correlation des signaux

échantillon	$C_{1111}$	$C_{2222}$	$C_{3333}$	$C_{2121}$	$C_{1212}$	$C_{3131}$	$C_{1313}$	$C_{3232}$	$C_{2323}$
1	17925	18223	2062	7618	7521	4290	4133	4433	4310
2	16016	16500	5729	6489	7204	4057	3878	4001	4213
3	16103	17101	1758	6964	7135	3825	3660	2872	3833
4	18300	17840	6771	8127	7954	4376	4336	4621	4637
10	16895	17109	1702	7148	7178	3885	3671	3850	3736
11	16347	15159	1621	6696	6643	2699	4009	2842	3550

TABLE B.4 – Coefficients de la matrice de rigidité (en MPa) calculés à partir du temps de vol des ondes ultrasonores mesurés par la méthode de détection des pics d'amplitude des signaux

échantillon	$C_{1111}$	$C_{2222}$	$C_{3333}$	$C_{2121}$	$C_{1212}$	$C_{3131}$	$C_{1313}$	$C_{3232}$	$C_{2323}$
1	17971	18106	3208	7192	7291	3097	3836	4215	4133
2	15932	16828	5784	6122	5577	5648	3621	2852	3940
3	16321	17101	2730	6400	6746	2729	3528	2887	3724
4	18503	18053	6878	7820	7593	4149	4187	4321	4472
10	16805	17245	1700	7076	7061	3754	3533	3776	3663
11	16286	15069	2481	6239	10081	2639	3691	2696	3409

TABLE B.5 – Coefficients de la matrice de rigidité (en MPa) calculés à partir du temps de vol des ondes ultrasonores mesurés par la méthode de l'intercorrélation des signaux

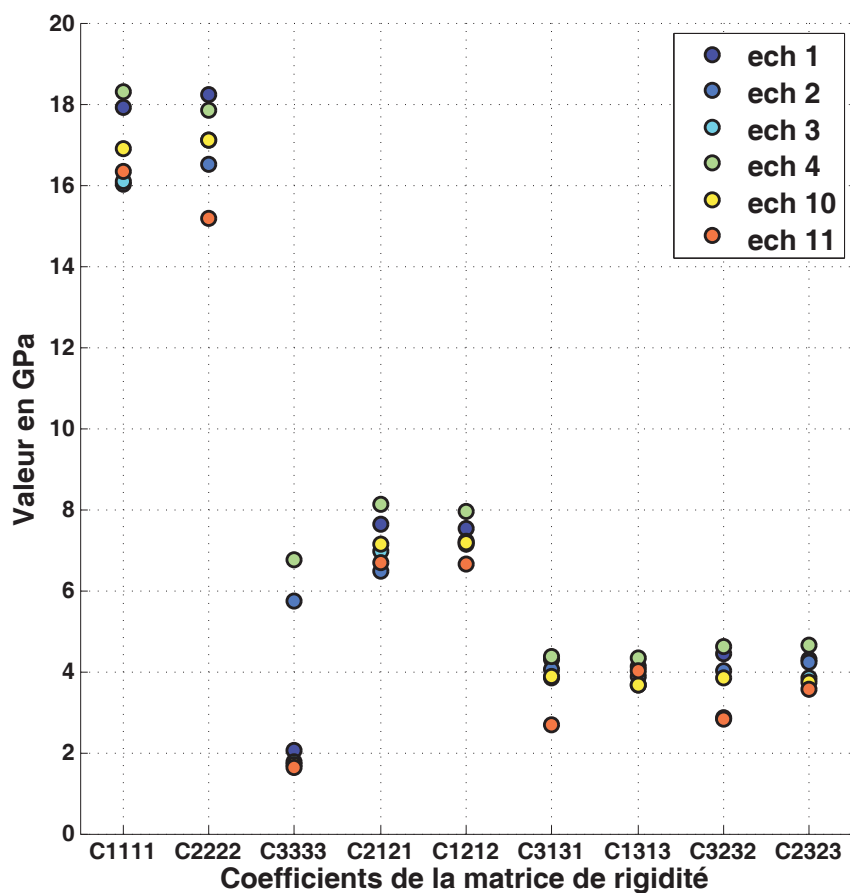


FIGURE B.6 – Résultats de la méthode de détection du plus grand pic des signaux transmis

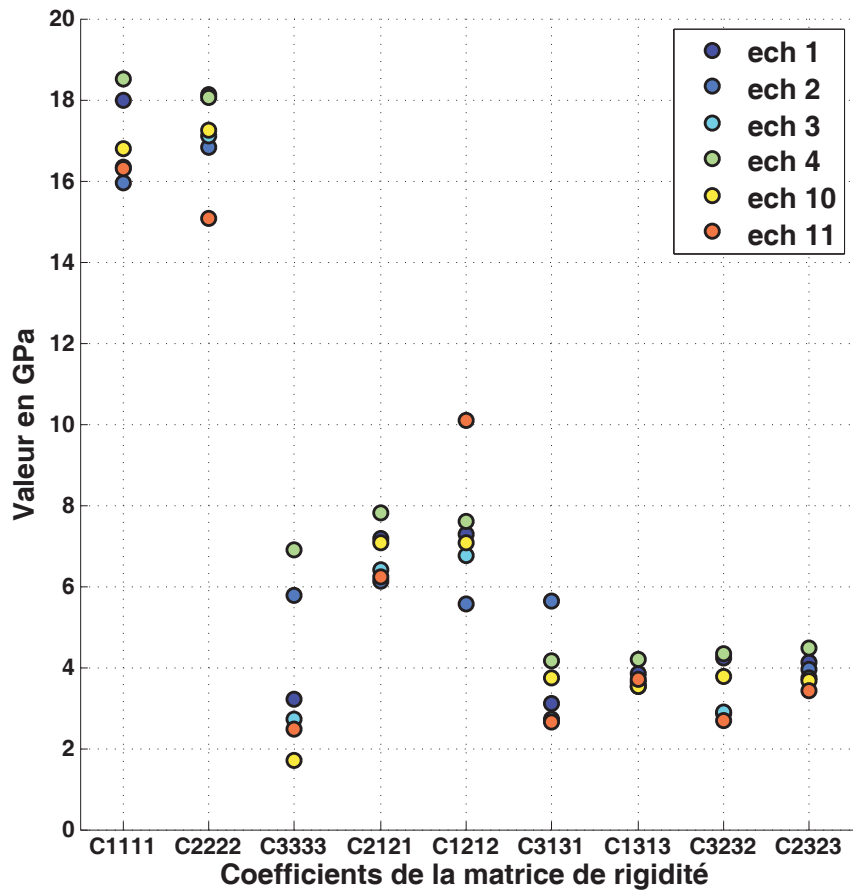


FIGURE B.7 – Résultats de l'intercorrélation des deux signaux

## Annexe C

# Annexes du chapitre 5 : Identification du modèle de Maxwell généralisé

### C.1 Rheological models

Model	Parameters value
Complex modulus	$K = 100$ and $\eta = 0.5$
Maxwell	$K = 250$ and $C = 2.5 \times 10^{-5}$
Kelvin-Voigt	$K = 2.5$ and $C = 2.5 \times 10^{-3}$
Generalized Maxwell Model	$\left\{ \begin{array}{l} \text{with } K_0 = 9.3072 \\ K_1 = 7.8211 \text{ and } C_1 = 1.551 \times 10^{-3} \\ K_2 = 46.3241 \text{ and } C_2 = 0.4646 \times 10^{-3} \\ K_3 = 65.8711 \text{ and } C_3 = 0.0631 \times 10^{-3} \end{array} \right.$
Generalized Fractional Calculus Maxwell	$\left\{ \begin{array}{l} \text{with } K_0 = 7.746 \text{ and } \gamma_1 = 2/3 \\ K_1 = 100 \text{ and } C_1 = 0.02 \end{array} \right.$

TABLE C.1 – Classical rheologic model



## C.2 The parameters of GMM in function of the parameters of PZF

The proof of Relations (5.5) is given below. It allows linking a Pole-Zero Formulation to a Generalized Maxwell Model. Starting from a Pole-Zero Formulation :

$$Z(j\omega) = K_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + j\omega/\omega_{z,i}}{1 + j\omega/\omega_{p,i}} = K_0 j\omega \left( \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{1}{j\omega} \prod_{i=1}^N \frac{j\omega + \omega_{z,i}}{j\omega + \omega_{p,i}} \right)$$

$Z(j\omega)$  can be expressed as a sum of fractions :

$$Z(j\omega) = K_0 j\omega \left( \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{A_0}{j\omega} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{j\omega + \omega_{p,i}} \right)$$

Considering the following relation :

$$\frac{A_0}{j\omega} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{j\omega + \omega_{p,i}} = \frac{1}{j\omega} \prod_{i=1}^N \frac{j\omega + \omega_{z,i}}{j\omega + \omega_{p,i}}$$

The coefficient  $A_0$  is obtained by multiplying the previous relation by  $j\omega$  and taking  $j\omega = 0$ . The coefficients  $A_i$  are obtained by multiplying the previous relation by  $(j\omega + \omega_{p,i})$ , and taking  $j\omega = -\omega_{p,i}$  :

$$A_0 = \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{z,h}}{\omega_{p,h}} \quad \text{and} \quad A_i = \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{z,h} - \omega_{p,i}}{\omega_{p,h}(1 - \delta_{ih}) - \omega_{p,i}} \quad \forall i \in [1..N] \quad (\text{C.1})$$

By replacing Equations (C.1) into the Pole-Zero Formulation, one obtains :

$$Z(j\omega) = K_0 j\omega \left( \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \left( \frac{A_0}{j\omega} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{j\omega + \omega_{p,i}} \right) = K_0 + K_0 \left( \prod_{h=1}^N \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \right) \sum_{i=1}^N \frac{j\omega A_i}{j\omega + \omega_{p,i}}$$

Then by comparing the above relation with the Generalized Maxwell Model, one is able to identify the coefficients  $K_{stk}$ ,  $K_i$  and  $C_i$ , see Equation (C.2) :

$$Z(\omega) = K_{stk} + \sum_{i=1}^N \frac{j\omega K_i C_i}{K_i + j\omega C_i}$$

Thus, Equations (5.5) are retrieved :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{stk} = K_0 \\ K_i = K_0 \prod_{h=1}^N \left( \frac{\omega_{p,h}}{\omega_{z,h}} \frac{\omega_{z,h} - \omega_{p,i}}{\omega_{p,h}(1 - \delta_{ih}) - \omega_{p,i}} \right) \\ C_i = \frac{K_i}{\omega_{p,i}} \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

### C.3 Parameters values obtained with initialization methods

Pole-Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.3524	2.7528	4.3263	4.7708	5.2833
$\chi_p _{\text{modulus}}$	2.5526	3.6657	4.4865	5.0310	5.4595
$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.2002	0.9129	0.1602	0.2603	0.1762

TABLE C.2 – Poles and Zeros list with the enclosing curves method.

Pole-Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z _{\text{phase}}$	1.9208	2.8000	3.6000	4.4000	5.2000
$\chi_p _{\text{phase}}$	2.1370	3.2956	4.0674	4.6529	5.5618
$(\chi_p - \chi_z) _{\text{phase}}$	0.2162	0.4956	0.4674	0.2529	0.3618

TABLE C.3 – Poles and Zeros list with CRONE's graphical method using phase's asymptotes.

Pole-Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.4554	2.8652	3.2120	4.2537	5.0071
$\chi_p _{\text{modulus}}$	2.7630	3.2604	3.6071	4.5796	5.2890
$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.3077	0.3952	0.3952	0.3259	0.2819

TABLE C.4 – Poles and Zeros list with the new graphical method applied to the modulus curve.

Pole-Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z _{\text{phase}}$	2.3860	2.8798	3.3314	4.1681	5.0654
$\chi_p _{\text{phase}}$	2.6807	3.2485	3.6940	4.4963	5.3297
$(\chi_p - \chi_z) _{\text{phase}}$	0.2947	0.3688	0.3627	0.3282	0.2643

TABLE C.5 – Poles and Zeros list with the new graphical method applied to the phase curve.

Pole-Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z$	2.4207	2.8725	3.2717	4.2109	5.0362
$\chi_p$	2.7218	3.2545	3.6506	4.5379	5.3093
$\chi_p - \chi_z$	0.3012	0.3820	0.3789	0.3271	0.2731

TABLE C.6 – Poles and Zeros list with the new graphical method applied to both the modulus and the phase curves, taking the mean value weighted with  $r = 0.5$ .

## C.4 Parameters values obtained with optimization methods

Pole-Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z$	2.4707	2.7978	3.3134	4.6268	3.9743
$\chi_p$	2.6792	3.5962	3.7026	3.7209	5.2124
$\chi_p - \chi_z$	0.2085	0.7984	0.3892	<b>-0.9059</b>	1.2381

TABLE C.7 – Poles and Zeros list with fminsearch optimization.

Pole-Zero couples	1	2	3	4	5
$\chi_z$	2.5726	2.9975	3.1630	4.6855	4.7029
$\chi_p$	2.9198	3.5205	3.4539	4.7131	5.2103
$\chi_p - \chi_z$	0.3472	0.5230	0.2910	0.0276	0.5074

TABLE C.8 – Poles and Zeros list with the new method using the gradient of asymptotes with variable step and  $K_0 = 1000$ .

## C.5 Paramètres obtenus avec la contrainte des pôles communs

Fonction test	Couples pôle-zéro	1	2	3	4	5	6
1	$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.52	3.10	3.20	4.10	4.40	4.80
2	$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.75	3.20	3.70	4.20	4.90	
3	$\chi_z _{\text{modulus}}$	3.40	4.00	4.40	5.00		
1	$\chi_p _{\text{modulus}}$	2.95	3.50	3.75	3.80	4.60	5.25
2	$\chi_p _{\text{modulus}}$	2.85	3.30	4.00	4.70	5.60	
3	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.50	4.10	4.50	5.10		
1	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.43	0.40	0.55	<b>-0.30</b>	0.20	0.45
2	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.10	0.10	0.30	0.50	0.70	
3	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.10	0.10	0.10	0.10		

TABLE C.9 – Liste des valeurs logarithmiques des pôles et des zéros des modèles de Maxwell généralisé qui ont servi à l'élaboration des 3 fonctions tests de la figure 5.19.

Fonction test	Couples pôle-zéro	1	2	3	4	5
1	$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.4207	2.8725	3.2717	4.2109	5.0362
2	$\chi_z _{\text{modulus}}$	3.1069	3.8416	4.3509	4.8268	5.3668
3	$\chi_z _{\text{modulus}}$	3.2095	3.7626	4.1940	4.6235	5.1870
1	$\chi_p _{\text{modulus}}$	2.7218	3.2545	3.6506	4.5379	5.3093
2	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.3338	4.2013	4.7191	5.1957	5.6687
3	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.2671	3.8516	4.2843	4.7126	5.2537
1	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.3012	0.3820	0.3789	0.3271	0.2731
2	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.2269	0.3597	0.3682	0.3690	0.3019
3	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.0577	0.0890	0.0903	0.0891	0.0667

TABLE C.10 – Liste des valeurs logarithmiques des pôles et des zéros identifiés par la méthode des variations asymptotiques. Ces valeurs ont été obtenues lors l'étape 1 de l'identification simultanée de 3 fonctions test. Les courbes associées sont représentées en bleu foncé sur la figure 5.19.

Fonction test	Couples pôle-zéro	1	2	3	4	5
1	$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.5926	2.9986	3.1631	4.6859	4.7026
2	$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.9187	3.7037	4.2622	4.9264	5.2214
3	$\chi_z _{\text{modulus}}$	3.3041	3.7152	4.1865	4.6514	5.0869
1	$\chi_p _{\text{modulus}}$	2.9212	3.5208	3.4537	4.7132	5.2103
2	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.0965	4.0718	4.7106	5.3549	5.4379
3	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.3588	3.8045	4.2898	4.7373	5.1482
1	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.3286	0.5221	0.2906	0.0272	0.5077
2	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.1778	0.3681	0.4484	0.4285	0.2165
3	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.0547	0.0893	0.1033	0.0860	0.0613

TABLE C.11 – Liste des valeurs logarithmiques des pôles et des zéros identifiés par la méthode des variations asymptotiques. Ces valeurs ont été obtenues lors l'étape 2 de l'identification simultanée de 3 fonctions test. Les courbes associées sont représentées en vert sur la figure 5.19.

Fonction test	Couples pôle-zéro	1	2	3	4	5
1	$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.4265	3.4236	4.0338	4.7111	5.0490
2	$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.9964	3.6080	3.7957	4.5154	4.7526
3	$\chi_z _{\text{modulus}}$	3.0836	3.7128	4.0268	4.8382	5.2188
1	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.1255	3.7990	4.1514	4.9351	5.2655
2	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.1255	3.7990	4.1514	4.9351	5.2655
3	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.1255	3.7990	4.1514	4.9351	5.2655
1	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.6990	0.3755	0.1176	0.2241	0.2164
2	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.1291	0.1910	0.3557	0.4197	0.5129
3	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.0418	0.0862	0.1246	0.0969	0.0467

TABLE C.12 – Liste des valeurs logarithmiques des pôles et des zéros identifiés par la méthode des variations asymptotiques. Ces valeurs ont été obtenues lors l'étape 3 de l'identification simultanée de 3 fonctions test. Les courbes associées sont représentées en cyan sur la figure 5.19.

Fonction test	Couples pôle-zéro	1	2	3	4	5
1	$\chi_z _{\text{modulus}}$	2.5970	3.1160	4.4987	4.6691	5.4822
2	$\chi_z _{\text{modulus}}$	3.0163	3.6002	3.8724	5.1349	4.7862
3	$\chi_z _{\text{modulus}}$	3.2394	3.4956	4.3136	5.1311	5.4818
1	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.2493	3.6236	4.5007	5.2009	5.4836
2	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.2493	3.6236	4.5007	5.2009	5.4836
3	$\chi_p _{\text{modulus}}$	3.2493	3.6236	4.5007	5.2009	5.4836
1	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.6523	0.5076	0.0020	0.5318	0.0014
2	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.2330	0.0234	0.6282	0.0660	0.6974
3	$(\chi_p - \chi_z) _{\text{modulus}}$	0.0099	0.1281	0.1871	0.0697	0.0018

TABLE C.13 – Liste des valeurs logarithmiques des pôles et des zéros identifiés par la méthode des variations asymptotiques. Ces valeurs ont été obtenues lors l'étape 4 de l'identification simultanée de 3 fonctions test. Les courbes associées sont représentées en orange sur la figure 5.19.

## Annexe D

# Annexes du chapitre 6

### D.1 Taux d'amortissement

Dans le cas d'un système à un seul degré de liberté  $x$ , l'équation de la dynamique est donné par l'équation (D.1). Cet unique degré de liberté peut être un mode propre complexe.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{D.1})$$

On suppose que le déplacement s'exprime sous la forme d'une exponentielle en fonction du temps :  $x = \exp(pt)$ . Le polynôme caractéristique de ce système est donné par l'équation (D.2), avec  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  la pulsation propre et  $\xi = c/(2\sqrt{km})$  le taux d'amortissement. Les deux valeurs propres solutions de ce polynôme caractéristique sont données par l'équation (D.3).

$$p^2 + 2\xi p\omega_0 + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$(p + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2) = 0$$

$$(p + \xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})(p + \xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}) = 0$$

$$p = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{D.3})$$

Les valeurs propres  $p$  sont complexes. Leur partie imaginaire  $\Im(p) = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$  est la pseudo-pulsation et leur partie réelle  $\Re(p) = \xi\omega_0$  définit l'amortissement, positif ou négatif, de la vibration. Connaissant la valeur propre, il est possible de déterminer son taux d'amortissement. Dans le cadre d'un faible taux d'amortissement  $\xi \ll 1$ , la partie imaginaire devient  $\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \simeq \omega_0$  et l'équation (D.4) permet de calculer  $\xi$ . C'est cette équation qui est utilisée dans Abaqus.

$$\xi = -\frac{\Re(p)}{|\Im(p)|} \quad (\text{D.4})$$

Toutefois, certains systèmes mécaniques sont fortement amortis et l'équation (D.4) n'est plus valable. Dans ce cas il faut utiliser l'équation (D.5) qui ne fait aucune hypothèse sur le taux d'amortissement.

$$\xi = -\frac{\Re(p)}{|p|} \quad (\text{D.5})$$

## D.2 Intérêt de la contrainte de pôles communs

L'équation (6.16), rappelée ci-dessous par l'équation (D.6) est une équation différentielle d'ordre  $N \times N_{\text{mater}} + 2$ , avec  $N$  le nombre de cellules de Maxwell définies par les couples  $\alpha_i$  et  $\tau_i$ , et avec  $N_{\text{mater}}$ , le nombre de matériaux viscoélastiques. Cela se voit en faisant disparaître la variable  $p$  des dénominateurs. Pour cela, les fractions concernant un même matériau sont exprimées au même dénominateur, voir l'équation (D.7), puis toute l'équation est multipliée par le produit des dénominateurs, voir l'équation (D.8).

$$\left( p^2 \Phi^t M \Phi + \Phi^t (K_v + K_c + K_f) \Phi + \sum_{m=1}^{N_{\text{mater}}} \Phi^t K_{\text{visco}}^m \Phi \left( \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i^m \tau_i^m p}{1 + \tau_i^m p} \right) \right) q = 0 \quad (\text{D.6})$$

$$\left( p^2 \Phi^t M \Phi + \Phi^t (K_v + K_c + K_f) \Phi + \sum_{m=1}^{N_{\text{mater}}} \Phi^t K_{\text{visco}}^m \Phi \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i^m \tau_i^m p \prod_{u=1}^N (1 + \tau_u^m p)^{(1-\delta_{iu})}}{\prod_{u=1}^N (1 + \tau_u^m p)} \right) q = 0 \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} & \left( p^2 \left( \prod_{v=1}^{N_{\text{mater}}} \prod_{u=1}^N (1 + \tau_u^v p) \right) \Phi^t M \Phi + \left( \prod_{v=1}^{N_{\text{mater}}} \prod_{u=1}^N (1 + \tau_u^v p) \right) \Phi^t (K_v + K_c + K_f) \Phi \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{N_{\text{mater}}} \Phi^t K_{\text{visco}}^m \Phi \sum_{i=1}^N \alpha_i^m \tau_i^m p \left( \prod_{v=1}^{N_{\text{mater}}} \prod_{u=1}^N (1 + \tau_u^m p)^{(1-\delta_{iu})(1-\delta_{mv})} \right) \right) q = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Soit  $N_{\text{ddl}}$ , le nombre de degrés de libertés du modèle projeté qui est égal à la dimension des matrices  $\Phi^t M \Phi$ ,  $\Phi^t (K_v + K_c + K_f) \Phi$  et  $\Phi^t K_{\text{visco}}^m \Phi$ . La taille du problème défini par l'équation (D.8) est fonction de l'ordre de son polynôme caractéristique. La puissance de  $p$  la plus élevée de l'équation (D.8) vaut  $N \times N_{\text{mater}} + 2$ , ceci est l'ordre de l'équation différentielle. La taille de l'équation (D.8) mise sous forme d'état vaut  $N_{\text{ddl}} \times (N \times N_{\text{mater}} + 2)$ . Remarquons que si tous les matériaux viscoélastiques ont les mêmes temps de relaxation,  $\tau_i^m = \tau_i$ , alors l'équation (D.8) devient égale à l'équation (D.9) qui est de taille  $N_{\text{ddl}} \times (N + 2)$ . Ainsi la contrainte d'avoir des temps de relaxation,  $\tau_i$ , communs à tous les matériaux viscoélastiques permet de gagner en temps de calcul et donc de traiter des systèmes de taille plus importante. Remarquons que d'après l'équation (6.13) cette contrainte est équivalente à avoir des pôles communs à tous les matériaux, car  $\omega_{p,i} = 1/\tau_i$ . Cela explique l'intérêt d'inclure la contrainte des pôles communs dans la méthode d'identification décrite au chapitre 5.

$$\begin{aligned} & \left( p^2 \left( \prod_{u=1}^N (1 + \tau_u p) \right) \Phi^t M \Phi + \left( \prod_{u=1}^N (1 + \tau_u p) \right) \Phi^t (K_v + K_c + K_f) \Phi \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{N_{\text{mater}}} \Phi^t K_{\text{visco}}^m \Phi \sum_{i=1}^N \alpha_i^m \tau_i p \left( \prod_{u=1}^N (1 + \tau_u p)^{(1-\delta_{iu})} \right) \right) q = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

**Bibliographie générale**

- [1] A. Akay, O. Giannini, F. Massi, and A. Sestieri. Disc brake squeal characterization through simplified test rigs. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(8) :2590 – 2607, 2009.
- [2] R. J. Allemang. The modal assurance criterion (mac) : Twenty years of use and abuse. University of Cincinnati.
- [3] R. L. Bagley and P. J. Torvik. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 30(1) :133–155, 1986.
- [4] E. Balmès and J.-M. Leclère. *Viscoelastic vibration toolbox*. SDTools, Paris, 2009.
- [5] F. Barbosa and M. Farage. A finite element model for sandwich viscoelastic beams : Experimental and numerical assessment. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1-2) :91 – 111, 2008.
- [6] A. Bobillot. *Méthodes de réduction pour le recalage : application au cas d' Ariane 5*. PhD thesis, Centrale Paris, 2002.
- [7] M. Caputo and F. Mainardi. Linear models of dissipation in anelastic solids. In I. P. Society, editor, *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)*, volume 1, pages 161–198. Italian Physical Society, avril 1971.
- [8] D. Castello, F. Rochinha, N. Roitman, and C. Magluta. Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(8) :1840 – 1857, 2008.
- [9] Cedrat. Cedrat technologies 2010-2011. Cedrat Technologies Piezo Products Catalogue Version 3.3, 2010.
- [10] T. Chen. Determining a prony series for a viscoelastic material from time varying strain data. Technical report, NASA, may 2000.
- [11] Y. Chevalier. Essais dynamiques sur composites. caractérisation aux basses fréquences. Technical report, Techniques de l'ingénieur, 2002.
- [12] Y. Chevalier. Essais dynamiques sur composites. caractérisation aux hautes fréquences. Technical report, Techniques de l'ingénieur, 2003.
- [13] Y. Chevalier and J. T. Vinh. *Mechanics of Viscoelastic Materials and Wave Dispersion*, volume 1. ISTE and John Wiley & Sons, 2010.
- [14] G. Chevallier, F. Renaud, and J.-L. Dion. Viscoelastic damping effect on brake squeal noise. In *Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, 2009.
- [15] A. de Lima, D. Rade, and F. L. Neto. An efficient modeling methodology of structural systems containing viscoelastic dampers based on frequency response function substructuring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(4) :1272 – 1281, 2009.
- [16] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois. *Méthode des éléments finis*. Lavoisier, 2005.



- 
- [17] J. Dion and S. Vialard. Identification of rubber shock absorber mounts. *Mécanique industrielle et matériaux*, 50(5) :232–237, DEC 1997.
- [18] J.-L. Dion. *Modélisation et identification du comportement dynamique de liaisons hydro-élastiques*. PhD thesis, ISMCM, Saint-Ouen, 1995.
- [19] J. D. Ferry. *Viscoelastic Properties Of Polymers*. John Wiley & Sons, 1961.
- [20] J. D. Fieldhouse and T. P. Newcomb. Double pulsed holography used to investigate noisy brakes. *Optics and Lasers in Engineering*, 25(6) :455 – 494, 1996. Optical Diagnostics in the Automotive Industry.
- [21] J. Flint and J. Hultén. Lining-deformation-induced modal coupling as squeal generator in a distributed parameter disc brake model. *Journal of Sound and Vibration*, 254(1) :1 – 21, 2002.
- [22] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, and L. Jézéquel. Effects of damping on brake squeal coalescence patterns - application on a finite element model. *Mechanics Research Communications*, 34(2) :181 – 190, 2007.
- [23] G. Fritz, J.-J. Sinou, J.-M. Duffal, and L. Jézéquel. Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3-5) :591 – 609, 2007.
- [24] L. Gaul, P. Klein, and S. Kemple. Damping description involving fractional operators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 5(2) :81 – 88, 1991.
- [25] O. Giannini, A. Akay, and F. Massi. Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup. *Journal of Sound and Vibration*, 292(1-2) :1 – 20, 2006.
- [26] O. Giannini and F. Massi. Characterization of the high-frequency squeal on a laboratory brake setup. *Journal of Sound and Vibration*, 310(1-2) :394 – 408, 2008.
- [27] O. Giannini and A. Sestieri. Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake. *Journal of Sound and Vibration*, 296(3) :583 – 601, 2006.
- [28] J. Heilig and J. Wauer. Stability of a nonlinear brake system at high operating speeds. *Nonlinear Dynamics*, 34(3) :235–247, 2003.
- [29] D. P. Hess and M. W. Al-Grafi. Stability of a slider with hemispherical legs in plane contacting a flat surface. *Applied Acoustics*, 49(2) :163 – 177, 1996.
- [30] H. Hetzler, D. Schwarzer, and W. Seemann. Analytical investigation of steady-state stability and hopf-bifurcations occurring in sliding friction oscillators with application to low-frequency disc brake noise. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12(1) :83 – 99, 2007.
- [31] N. Heymans. Fractional calculus description of non-linear viscoelastic behaviour of polymers. *Nonlinear Dynamics*, 38(1-4) :221–231, DEC 2004.
- [32] N. Hinrichs, M. Oestreich, and K. Popp. Dynamics of oscillators with impact and friction. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(4) :535 – 558, 1997. Nonlinearities in Mechanical Engineering.

- [33] N. Hinrichs, M. Oestreich, and K. Popp. On the modelling of friction oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 216(3) :435 – 459, 1998.
- [34] D. Hochlenert. Nonlinear stability analysis of a disk brake model. *Nonlinear Dynamics*, 58 :63–73, 2009.
- [35] D. Hochlenert, G. Spelsberg-Korspeter, and P. Hagedorn. A note on safety-relevant vibrations induced by brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 329(19) :3867 – 3872, 2010.
- [36] N. Hoffmann, M. Fischer, R. Allgaier, and L. Gaul. A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. *Mechanics Research Communications*, 29(4) :197 – 205, 2002.
- [37] N. Hoffmann and L. Gaul. Non-conservative beating in sliding friction affected systems : transient amplification of vibrational energy and a technique to determine optimal initial conditions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(3) :611 – 623, 2004.
- [38] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi. Dynamic instability of a thin circular plate with friction interface and its application to disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 316(1-5) :164 – 179, 2008.
- [39] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi. Analytical formulation of mode-coupling instability in disc-pad coupled system. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(1) :52 – 63, 2009.
- [40] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi. Comprehensive stability analysis of disc brake vibrations including gyroscopic, negative friction slope and mode-coupling mechanisms. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2) :387 – 407, 2009.
- [41] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi. Oscillation pattern of stick-slip vibrations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(7) :820 – 828, 2009.
- [42] J. Kang, C. M. Krousgrill, and F. Sadeghi. Wave pattern motion and stick-slip limit cycle oscillation of a disc brake. *Journal of Sound and Vibration*, 325(3) :552 – 564, 2009.
- [43] N. Kinkaid, O. O’Reilly, and P. Papadopoulos. On the transient dynamics of a multi-degree-of-freedom friction oscillator : a new mechanism for disc brake noise. *Journal of Sound and Vibration*, 287(4-5) :901 – 917, 2005.
- [44] N. M. Kinkaid, O. M. O’Reilly, and P. Papadopoulos. Automotive disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 267(1) :105 – 166, 2003.
- [45] R. C. Koeller. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2) :299–307, 1984.
- [46] J. Lagarias, J. Reeds, M. Wright, and P. Wright. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on optimization*, 9(1) :112–147, DEC 21 1998.
- [47] R. S. Lakes. *Viscoelastic Solids*. CRC Press, 1999.

- 
- [48] S. Lignon, J.-J. Sinou, and L. Jézéquel. Stability analysis and  $\mu$ -synthesis control of brake systems. *Journal of Sound and Vibration*, 298(4-5) :1073 – 1087, 2006.
- [49] A. Lion. On the thermodynamics of fractional damping elements. *Continuum Mechanics And Thermodynamics*, 9(2) :83–96, APR 1997.
- [50] A. Lion. Thermomechanically consistent formulations of the standard linear solid using fractional derivatives. *Archives of Mechanics*, 53(3) :253–273, 2001.
- [51] W. Liu, G. M. Vyletel, and J. Li. A rapid design tool and methodology for reducing high frequency brake squeal. In *Proceedings of the 24th Annual Brake Colloquim & Exhibition*, 2006.
- [52] F. Massi, L. Baillet, O. Giannini, and A. Sestieri. Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(6) :2374 – 2393, 2007.
- [53] A. J. McMillan. A non-linear friction model for self-excited vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 205(3) :323 – 335, 1997.
- [54] H. Oberst and K. Frankenfeld. Damping of the bending vibrations of thin laminated metal beams connected through adherent layer. *Acustica 2*, pages 181–194, 1952.
- [55] K. B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*, volume 111 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1974.
- [56] A. Oustaloup. *La commande CRONE : commande robuste d'ordre non entier*. Hermès, 1991.
- [57] H. Ouyang, L. Baeza, and S. Hu. A receptance-based method for predicting latent roots and critical points in friction-induced vibration problems of asymmetric systems. *Journal of Sound and Vibration*, 321(3-5) :1058 – 1068, 2009.
- [58] H. Ouyang, Y. Gu, and H. Yang. A dynamic model for a disc excited by vertically misaligned, rotating, frictional sliders. *Acta Mechanica Sinica*, 20(4) :418 – 425, 2004.
- [59] H. Ouyang and J. E. Mottershead. Unstable travelling waves in the friction-induced vibration of discs. *Journal of Sound and Vibration*, 248(4) :768 – 779, 2001.
- [60] H. Ouyang, J. E. Mottershead, M. P. Cartmell, and D. J. Brookfield. Friction-induced vibration of an elastic slider on a vibrating disc. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(3) :325 – 336, 1999.
- [61] H. Ouyang, J. E. Mottershead, M. P. Cartmell, and M. I. Friswell. Friction-induced parametric resonances in discs : effect of a negative friction-velocity relationship. *Journal of Sound and Vibration*, 209(2) :251 – 264, 1998.
- [62] M. Paliwal, A. Mahajan, J. Don, T. Chu, and P. Filip. Noise and vibration analysis of a disc-brake system using a stick-slip friction model involving coupling stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 282(3-5) :1273 – 1284, 2005.
- [63] V. Pilipchuk and C. Tan. Creep-slip capture as a possible source of squeal during decelerated sliding. *Nonlinear Dynamics*, 35(3) :259 – 285, 2004.

- [64] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*, volume 198 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1999.
- [65] F. Renaud, G. Chevallier, and J.-L. Dion. Impact de la viscoélasticité sur les modes instables des systèmes de freinage. In *19<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, 2009.
- [66] F. Renaud, J.-L. Dion, and G. Chevallier. Méthode d'identification des paramètres d'un modèle de maxwell généralisé pour la modélisation de l'amortissement. *Mécanique & Industries*, 11(1) :47–55, 2010.
- [67] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, and I. Tawfiq. Mouvements d'une plaquette de frein mesurés par des accéléromètres. In *Colloque Vibrations, Chocs et Bruits Lyon 2010*, 2010.
- [68] F. Renaud, J.-L. Dion, G. Chevallier, I. Tawfiq, and R. Lemaire. A new identification method of viscoelastic behavior : Application to the generalized maxwell model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(3) :991 – 1010, 2011.
- [69] G. Sheng. *Friction-induced vibrations and sound*. CRC Press, 2008. ISBN-10 : 1420051784 ISBN-13 : 978-1420051780.
- [70] K. Shin, M. J. Brennan, J. E. Oh, and C. J. Harris. Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model. *Journal of Sound and Vibration*, 254(5) :837 – 848, 2002.
- [71] J. J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel. Analysis of friction and instability by the centre manifold theory for a non-linear sprag-slip model. *Journal of Sound and Vibration*, 265(3) :527 – 559, 2003.
- [72] J. J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel. Center manifold and multivariable approximants applied to non-linear stability analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(9) :1421 – 1442, 2003.
- [73] J.-J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel. Extension of the center manifold approach, using rational fractional approximants, applied to non-linear stability analysis. *Nonlinear Dynamics*, 33(3) :267 – 282, 2003.
- [74] J. J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jezequel. Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 11(3) :257 – 344, 2004.
- [75] J. Slavic, M. D. Bryant, and M. Boltezar. A new approach to roughness-induced vibrations on a slider. *Journal of Sound and Vibration*, 306(3-5) :732 – 750, 2007.
- [76] S. Sorrentino and A. Fasana. Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4-5) :839 – 853, 2007.
- [77] S. Sorrentino, A. Fasana, and S. Marchesiello. Analysis of non-homogeneous timoshenko beams with generalized damping distributions. *Journal of Sound and Vibration*, 304(3-5) :779 – 792, 2007.
- [78] M. Soula, T. Vinh, and Y. Chevalier. Transient responses of polymers and elastomers deduced from harmonic responses. *Journal of Sound and Vibration*, 205(2) :185 – 203, 1997.

- [79] M. Soula, T. Vinh, Y. Chevalier, T. Beda, and C. Esteoule. Measurements of isothermal complex moduli of viscoelastic materials over a large range of frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 205(2) :167 – 184, 1997.
- [80] D. Stancioiu, H. Ouyang, and J. E. Mottershead. Vibration of a beam excited by a moving oscillator considering separation and reattachment. *Journal of Sound and Vibration*, 310(4-5) :1128 – 1140, 2008.
- [81] J. L. Swayze and A. Akay. Effects of system dynamics on friction-induced oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 173(5) :599 – 609, 1994.
- [82] J. J. Thomsen and A. Fidlin. Analytical approximations for stick-slip vibration amplitudes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(3) :389 – 403, 2003.
- [83] S. Thouviot, G. Chevallier, F. Renaud, J.-L. Dion, and R. Lemaire. Prise en compte des comportements viscoélastiques dans la simulation dynamique des systèmes de freinage. *Mécanique & Industries*, 10(5) :385–396, 2009.
- [84] T. Vinh. Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire viscoélastique. *Mémoires de l'artillerie française*, 3ème fascicule, 1967.
- [85] U. von Wagner, D. Hochlenert, and P. Hagedorn. Minimal models for disk brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 302(3) :527 – 539, 2007.
- [86] J. Zhang and C. M. Richards. Parameter identification of analytical and experimental rubber isolators represented by maxwell models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(7) :2814 – 2832, 2007.