HAL
open science

Modélisation des propriétés mécaniques anisotropes aléatoires et impacts sur la propagation des ondes élastiques.

Quang Anh Ta

To cite this version:

Quang Anh Ta. Modélisation des propriétés mécaniques anisotropes aléatoires et impacts sur la propagation des ondes élastiques.. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris, 2011. Français. NNT : . tel-00585466

HAL Id: tel-00585466

https://theses.hal.science/tel-00585466v1

Submitted on 13 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Centrale des Arts et Manufactures
"École Centrale Paris"

Modélisation des propriétés mécaniques anisotropes aléatoires et impacts sur la propagation des ondes élastiques.

THÈSE

enregistrée sous **n° 2011ECAP0006** et soutenue publiquement le **19 janvier 2011**

pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

(spécialité mécanique et génie civil)

par

TẠ Quang Anh

Composition du jury

Président :	M. Jean-Pierre Vilotte	(IPG Paris)
Rapporteurs :	M. Geert Lombaert	(K.U. Leuven, Belgique)
	M. Éric Savin	(ONERA)
Examinateurs :	M. Christophe Desceliers	(Université Paris Est)
	M. Jean-François Semblat	(LCPC)
Invité :	M. Régis Cottereau	(École Centrale Paris)
Directeur :	M. Didier Clouteau	(École Centrale Paris)

Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux — CNRS U.M.R. 8579

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Ce mémoire de thèse, fruit d'un peu plus de trois années de travail personnel, n'aurait jamais abouti sans l'aide et la collaboration de nombreuses personnes. La thèse a été soutenue, c'est le moment de mettre par écrit mes gratitudes envers ces personnes qui m'ont soutenues.

Je tiens à remercier tout d'abord et profondément mon directeur de thèse Didier Clouteau pour m'avoir donné l'occasion de travailler avec lui à partir d'un petit projet d'initiation de recherche puis en stage de fin d'étude du Master 2 jusqu'à la fin de ce travail de thèse. C'est une chance pour moi de témoigner de ses qualités scientifiques et humaines : ses idées novatrices et érudites m'ont parfois laissé dans la perplexité mais le recul m'a permis d'apprécier la pertinence que ses connaisances ont apporté à mon travail ; son soutient permanent, sa disponibilité et sa patience infinie m'ont permis de surmonter les moments difficiles de la thèse. Dans notre équipe OMHA du laboratoire MSSMat, je suis également très reconnaissant envers Maarten Arnst et Régis Cottereau : l'un pour son encadrement très pédagogique lors de mes premiers projets de recherche et pour m'avoir beaucoup encouragé à commencer cette thèse ; l'autre pour ses collaborations et ses conseils très constructifs.

Je remercie vivement Jean-Pierre Villote d'une part pour m'avoir accordé l'utilisation et l'adaptation du code SPEC3D initialement développé par son équipe à l'IPGP (j'en profite pour remercier Elise Delavaud, Gëtano Festa et Paul Coupillard pour avoir facilité l'intégration de mon travail dans le logiciel à travers leurs précieuses explications) et d'autre part pour l'honneur qu'il nous a fait de présider le jury de ma soutenance. Mes sincères remerciements sont destinés à Éric Savin et Geert Lombaert pour avoir accepté la tâche fastidieuse d'être rapporteur de mon manuscrit de thèse. J'exprime toute ma gratitude à Jean-François Semblat et à Christophe Desceliers pour avoir bien voulu participer au jury.

Mes sentiments de reconnaissance vont également à Jean-Marie Fleureau et à Hachmi Ben Dhia qui m'ont accueilli au sein du laboratoire MSSMat de l'ECP. Je tiens aussi à remercier Anne-Sophie Mounronval l'ingénieur de calcul scientifique du labo de son aide indispensables pour ce travail considérablement orientée numérique. Je vais garder comme souvenir ses "appels à l'ordre" lors de mes utilisations excessives des resources informatiques. Je remercie particulièrement Salma Bougacha, Jessica Philippon, Amélie Fau et de nouveau Régis Cottereau pour avoir lu et corrigé la thèse, que ce soient des croquis barbares ou des expressions étranges que j'ai parfois inventés. Je me suis dit que si un jour vous aviez à traduire votre thèse en vietnamien, je m'engage à m'en occuper volontiers ! J'en profite pour saluer tous les collègues de travail que j'ai l'occasion de côtoyer : Réza Taherzadeh, Hugo Bajas, Nadia Elkhodja, Alex Nietoferro, Cédric Zacardi, Fernando Lopez-Caballero, Mohamed Torkhani, Biyu Tian, Thành Đô Vũ...

À tous les amis de ma promotion PFIEV en France, je souhaite qu'ils trouvent ici la marque de ma reconnaissance.

À mon petit Quang Thụy, à ma femme Anh Đào et à mes parents Quang Ngọc et Thanh Châu, je dédie ce mémoire de thèse comme un petit morceau d'un immense merci.

Résumé

L'objectif de ce travail de thèse est de prendre en compte à la fois l'hétérogénéité, l'anisotropie et des incertitudes dans la simulation 3D de la propagation d'ondes élastiques. Pour ce faire, dans un premier temps, on modélise le champ de propriétés mécaniques, ici le champ de tenseur d'élasticité, par un modèle de champ stochastique 3D des matrices définie-positives. La construction de ce modèle de champ est essentiellement fondée sur celle de Soize [2008]. Notre modèle conserve ainsi les propriétés principales du modèle de Soize comme le paramétrage minimal contrôlant l'amplitude de la fluctuation et la taille caractéristique de la variabilité spatiale, le comportement local a priori arbitrairement anisotrope (anisotropie triclinique) et les propriétés mathématiques fondamentales. De plus, un nouveau paramètre est introduit dans ce modèle pour imposer un niveau d'anisotropie moyen souhaité. Dans un deuxième temps, on effectue des adaptations du code de calcul d'éléments finis spectraux, à savoir le code parallèle SPEC3D, afin d'une part de générer les réalisations du champ stochastique du tenseur d'élasticité et d'autre part de prendre en compte l'anisotropie dans la résolution numérique du problème élastodynamique. Des études paramétriques utilisant SPEC3D sont ensuite réalisées mettant en évidence les influences de l'anisotropie et des paramètres d'hétérogénéité sur la propagation d'ondes sismiques. En particulier, elles démontrent une dépendance directe entre la longueur de corrélation du champ de propriétés et le temps caractéristique d'apparition de la diffusion. Ce régime se manifeste par l'équipartition d'énergie entre les mouvements irrotationnels et rotationnels.
Mots-clés : *ondes élastiques, anisotropie triclinique, hétérogénéité aléatoire, variabilité spatiale, champ stochastique, diffraction multiple, diffusion, simulation numérique 3D, éléments finis spectraux, calcul parallèle*.

Abstract

The aim of this thesis is to take into account the heterogeneity, the anisotropy and the uncertainties within 3D numerical simulation of elastic waves propagation. Firstly, the elasticity tensor field is modeled by means of a stochastic tensor-valued field. Its construction is generalized from the model of Soize [2008]. Hence, our model preserves principle properties of the former : a small set of parameters controlling the whole dispersion and the characteristic size of spatial variability, a local behavior being a priori arbitrary anisotropic (triclinic anisotropy) and others essential mathematical properties. Moreover, a new parameter is added in order to impose a desired anisotropy mean level. Secondly, we carry out adaptations of an existing spectral finite elements-based elastic waves simulation software, namely the SPEC3D parallel computing code. On the one hand a sample generator of the elasticity random field model is implemented and on the other hand anisotropic material behavior is introduced in the elastodynamic solver. Finally, numerical parametric studies are performed using SPEC3D highlighting influences of heterogeneity and anisotropy on elastic waves behavior. In particular, it is observed that the characteristic time beyond which a multiple scattering pattern can be approximated by a diffusion regime directly depends on the correlation length of elasticity tensor field model. This time is detected by an energy equipartition between rotational and irrotational movements.
Keywords : *elastic waves propagation, triclinic anisotropy, random heterogeneity, spatial variability, stochastic field, multiple scattering, diffusion, 3D numerical simulation, spectral finite elements, parallel computing*.

Table des matières

Résumé **iii**

Abstract **v**

Introduction **1**

1 Approches phénoménologiques **9**

1.1 Facteurs caractéristiques d'échelle 10
1.2 Études des ondes sismiques fondées sur l'homogénéisation 12
1.3 Études des ondes sismiques fondées sur la théorie de la diffraction simple . . . 13
1.4 Études des ondes sismiques fondées sur la théorie de la diffraction multiple . . 13
1.4.1 Diffraction multiple sans considération de la conversion des modes . . 14
1.4.2 Diffraction multiple avec conversion de modes 15
1.5 Bilan du chapitre 16

2 Tenseur d'élasticité et la propagation d'ondes **17**

2.1 Tenseur d'élasticité 18
2.1.1 Forme matricielle du tenseur d'élasticité 18
2.1.2 Quantification de l'anisotropie 19
2.2 Ondes en milieu anisotrope homogène 22
2.2.1 Comportement élastodynamique linéaire 22
2.2.2 Visualisation des modes propres d'onde volumique 23
2.2.3 Effets de l'anisotropie sur le comportement élastodynamique d'un espace homogène infini 25
2.2.4 Illustration des modes d'onde volumique par type de symétrie. 26
2.3 Onde de Rayleigh dans des milieux anisotropes 39
2.3.1 Cas des matériaux isotropes 39
2.3.2 Cas des matériaux anisotropes 40
2.3.2.1 Formulation de Stroh 41
2.3.2.2 Onde de Rayleigh et Impédance acoustique à la surface. . . 43

2.3.3 Illustration des ondes de surface. 51
2.4 Bilan du chapitre 57

3 Modélisation de champs stochastiques des propriétés élastiques. 75
3.1 Tenseur d'élasticité aléatoire à niveau d'anisotropie contrôlable 76
3.1.1 Éléments mathématiques sur le tenseur d'élasticité $\boldsymbol{C}$ 76
3.1.2 Introduction de l'incertitude dans le tenseur d'élasticité $\boldsymbol{C}$ 78
3.1.2.1 Principe du maximum d'entropie. Modèle de Soize pour les matrices définies-positives 79
3.1.2.1.a Entropie probabiliste 79
3.1.2.1.b Maximum d'entropie pour les matrices définies-positives. 81
3.1.2.2 Construction de la loi de probabilité de $\boldsymbol{C}$ par l'approche de maximisation d'entropie 84
3.1.2.3 Noyau $\boldsymbol{G}$: Loi de distribution et schéma de mise en oeuvre . 89
3.1.2.4 Modules d'élasticité : Loi de distribution et schéma de mise en oeuvre 91
3.1.2.5 Propriétés de la variable $\boldsymbol{C}$ 91
3.2 Champ stochastique de tenseur d'élasticité 101
3.2.1 Processus stochastique d'une variable scalaire 101
3.2.1.1 Processus stochastique : Notions de bases et structure de corrélation 101
3.2.1.1.a Notions de bases 101
3.2.1.1.b Structure de corrélation 104
3.2.1.2 Simulation par représentation spectrale de processus stochastiques stationnaires, Gaussiens et univariables 105
3.2.2 Extension à la simulation de champ stochastique tridimensionnel multivariable : champ du tenseur $\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})$ 107
3.2.2.1 Simulation 107
3.2.2.2 Propriétés du champ $\{\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell}) \mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}\}$ 111
3.3 Formulation variationnelle stochastique. 112
3.3.1 Modèle déterministe en élasto-visco-dynamique 112
3.3.2 Modèle stochastique en élasto-visco-dynamique 114
3.4 Bilan du chapitre 117

4 Simulations numériques 119
4.1 Brève zoologie des méthodes numériques en élastodynamique. 119
4.2 Élément finis spectraux : milieu isotrope, homogène par élément 123
4.2.1 Forme variationnelle 123

4.2.2 Discrétisation spatiale par éléments finis spectraux 124
4.2.3 Approximation de Galerkin et Formes matricielles 132
4.2.4 Schéma d'intégration de Newmark 138
4.2.5 Conditions aux limites absorbantes : PML 140
4.2.5.1 Contexte d'utilisation des PMLs 140
4.2.5.2 PML dans SPEC3D 143
4.3 Structure du logiciel SPEC3D 147
4.4 Adaptations du code SPEC3D vis-à-vis de l'anisotropie et de l'hétérogénéité aléatoire 148
4.4.1 Algorithme parallèle d'introduction d'hétérogénéité au niveau des *points GLLs* 148
4.4.2 Prise en compte du tenseur d'élasticité anisotrope dans le calcul de travail interne 150
4.4.3 Stabilisation des PML vis-à-vis des milieux anisotropes 150
4.4.3.1 Instabilité des PMLs vis-à-vis des matériaux anisotropes . . . 150
4.4.3.2 Initiatives de stabilisation des PMLs 152
4.4.3.2.a Remplacement d'une partie des PMLs par les matériaux isotropes 152
4.4.3.2.b Utilisation des PMLs multiaxiales 152
4.5 Bilan du chapitre 154

5 Validations des adaptations du code SPEC3D 155
5.1 Onde volumique dans de espaces infinis élastiques homogènes. 155
5.2 Existence et Non-existence des ondes de surface subsonique 159
5.3 Statistique sur les champs stochastiques de $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\ell}; \delta, \delta_{\mathrm{G}})$ 161
5.4 Renversement temporel et Propriété conservative du schéma d'intégration en temps 162
5.5 Bilan du chapitre 165

6 Études de la propagation d'ondes élastiques dans des demi-espaces anisotropes aléatoires 169
6.1 Équipartition de l'énergie entre les mouvements irrotationnel et rotationnel . . 169
6.1.1 Deux régimes d'ondes pour de fortes fluctuations 172
6.1.2 Vers une identification de ℓ à partir de propriétés diffusives du champ d'onde 173
6.1.3 Discussion sur le niveau stabilisé du rapport énergétique Υ_{Ω} 174
6.2 Identification de la directivité et de la vitesse apparente du champ d'ondes . . . 181
6.2.1 Application de MuSiC pour les milieux homogènes 181

6.2.2 Application de MuSiC pour les milieux hétérogènes 184
6.3 Bilan du chapitre 188

Conclusions et Perspectives **193**

A Développement des termes du travail interne pour les éléments volumiques **197**
A.1 Les coefficients des forces pour un matériau triclinique 203
A.2 Les coefficients des forces pour un matériau isotrope 208

B Caractérisation de la directivité d'ondes à partir de données sismiques à la surface **209**

Table des figures **215**

Bibliographie **223**

Introduction

Hétérogénéité, Anisotropie et Incertitudes

Lorsque on modélise des problèmes mécaniques, l'hypothèse de milieu homogène à comportement isotrope est très couramment adoptée pour les configurations qui sont elle-même très souvent considérées comme déterministes. Cependant, dans la réalité, ces modèles simplifiés s'avèrent parfois trop idéaux. Dans le cas de la propagation d'ondes sismiques par exemple, l'hétérogénéité et l'anisotropie peuvent exister à toutes les échelles et le manque de connaissances et/ou l'ignorance de certaines informations peuvent nécessiter des modélisations avec un certain niveau d'incertitude.

Différentes études dans de nombreux domaines des géosciences démontrent que la Terre est une structure hétérogène à toutes les échelles et vis-à-vis de divers paramètres, que ce soit des paramètres chimiques, minéalorogiques, thermiques ou sismiques. En ce qui nous concerne, l'hétérogénéité sismique est le fait que les propriétés mécaniques (la densité, la rigidité, l'atténuation *etc.*) connaissent des variabilités spatiales entraînant des dispersions en temps d'arrivée des ondes sismiques observées à toutes les distances. À propos de sa structure globale, en très bonne approximation, la Terre peut être vue comme un rassemblement de couches sphériques différenciées par leur densité et les vitesses de leur ondes volumiques qui augmentent *a priori* avec la profondeur. Il s'agit de la *croûte* qu'on peut également appeler (avec abus) *lithosphère* (définie entre $0\mathrm{km}$ et $100\mathrm{km}$ de profondeur), du *manteau* qui est lui-même composé d'une partie extérieure dont la plupart est plastique (entre $100\mathrm{km}$ et $700\mathrm{km}$) et d'une partie intérieure solide (entre $700\mathrm{km}$ et $2900\mathrm{km}$), du *noyau externe* (entre $2900\mathrm{km}$ et $5200\mathrm{km}$) considéré comme un fluide et du *noyau intérieur* également appelé le grain solide. Cette structure classique constitue un exemple à grande échelle de l'hétérogénéité radiale de la Terre, sachant qu'il existe un autre type d'hétérogénéité qui intéresse les géophysiciens et les séismologues, à savoir la variabilité latérale. Ces deux types d'hétérogénéité sont associés à deux mécanismes différents. Le premier est dû à la fusion et la différentiation gravitationnelle tandis que le second résulte de la subduction des plaques tectoniques (lithosphériques) dans le manteau (FIG 0.1-a). Il convient de noter que pour les couches superficielles, d'autres formes de la variabilité latérale peuvent provenir des interactions entre les mouvements internes avec l'hydrosphère, l'atmosphère (FIG 0.1-b) voire avec les milieux urbains (voir FIG 0.1-c). Grâce aux analyses des données sismiques sur le temps d'arrivée des ondes directes, des ondes de réflexion et de réfraction, le profil global des couches terrestres a été découvert dans la première moitié du vingtième siècle. Récemment, des études de tomographie sismique (FIG 0.2) faites par [Van der Hilst et al., 2007], utilisant les données fournies par des milliers de stations sismiques situées dans une zone géographique limitée de l'Amérique Centrale qui se trouve au-dessus d'une zone de subduction lithosphérique

(a) (b) (c)

FIG. 0.1 – Principaux mécanismes de l'hétérogénéité dans les couches terrestres. (a) Modèle mixte de la convection mantellique [image extraite de Perrot]. (b) Cycle de vie des matériaux lithosphériques [*Source* WIKIPEDIA]. (c) Modèle de la ville de Mexico [Mezher, 2004].

ont permis d'une part d'imager la zone de subduction avec les variabilités latérales associées et d'autre part d'affirmer l'enfoncement de la plaque tectonique jusqu'à la couche D" (une couche à la base du manteau, juste au dessus de l'interface CMB[1] avec le noyau externe, d'environ $200\mathrm{km}$ d'épaisseur) ainsi que d'échographier cette couche fortement hétérogène. Cependant, pour ce type de prospection, on n'exploite la base de données sismiques (archivée à l'issue des événements sismiques qui se produisent distinctement en temps et en espace) que d'une façon non-systématique où seuls les pics principaux sont utilisés. Une autre direction de recherche consiste à utiliser au mieux, les informations cachées dans le *coda* sismique lors des modèles employés pour identifier et pour quantifier les hétérogénéités de petites et moyennes échelles. Cette dernière n'est initialisée que dans les année 1970 avec les travaux de [Aki, 1969]. Sachant que on est rarement en mesure de disposer d'un réseau de capteurs aussi dense que celui de [Van der Hilst et al., 2007] et que on s'intéresse également à des zones géographiques plus larges, l'interprétation des diffractions apparues dans le coda, qu'elles soient simples [Aki, 1969, Aki and Chouet, 1975, Sato, 1977, Schisselé et al., 2004] ou multiples [Aki and Chouet, 1975, Gao et al., 1983, Margerin, 1998], constitue une stratégie prometteuse pour les géophysiciens et les séismologues.

L'anisotropie sismique est le fait que la propriété élastique du milieu fait apparaître dans le champ d'ondes les phénomènes caractéristiques comme la dépendance de la vitesse de la propagation d'ondes sismiques en fonction de la direction et la séparation spatio-temporelle des ondes de cisaillement. L'origine de l'anisotropie est multiple mais on peut l'associer aux deux principaux mécanismes qui sont les anisotropies avec orientation préférentielle d'origine structurelle (dont l'acronyme est SPO pour *shape-preferred orientation*) d'une part et avec orientation préférentielle d'origines minérales (LPO pour *lattice-preferred orientation*) d'autre part. La SPO regroupe les formes d'anisotropie pour lesquelles le matériau est isotrope à une échelle fine mais à une échelle supérieure, le matériau effectif fait apparaître des priorités directionnelles. La LPO concerne l'anisotropie induite à l'échelle fine par des alignements minéraux. Elle est conservée, au moins en partie par le matériau effectif aux plus grandes échelles. On peut facilement discriminer ces deux mécanismes en remarquant que dans une situation SPO, le caractère anisotrope est dû à une forme prioritaire de l'hétérogénéité alors que pour une situation LPO, l'anisotropie est intrinsèque même pour les milieux homogènes. Selon des études bibliographiques

[1] L'acronyme anglais pour *core-mantle boundary*

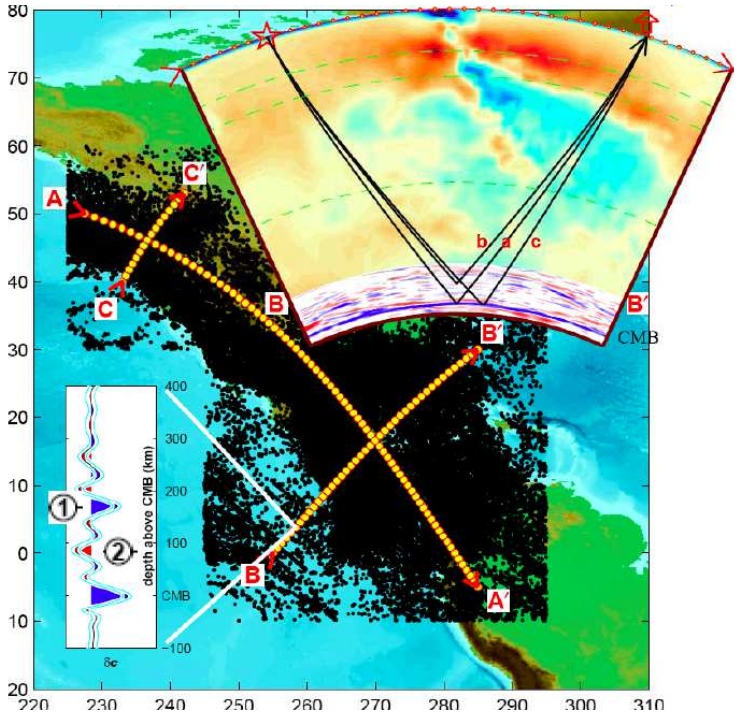


FIG. 0.2 – Exemple de l'identification de l'hétérogénéité dans la Terre profonde [Van der Hilst et al., 2007]

présentées dans [Fontaine, 2005] et dans [Shearer, 2009], l'anisotropie sismique est quasiment omniprésente dans les couches terrestres. Dans la croûte supérieure, l'anisotropie observée est principalement de type SPO. Elle est attribuée à l'alignement de micro-fractures des massifs métamorphiques ou à la stratification horizontale ou inclinée des couches sédimentaires. Mais on peut parfois y observer des anisotropies de type LPO associées à l'orientation préférentielle de minéraux dans certains sites de roches volcaniques récentes en présence d'eau (dorsale océanique ou dans certains sites volcaniques côtiers). À partir d'environ $15\mathrm{km}$ de profondeur, la pression statique devient grande fermant les fractures et le seul mécanisme potentiellement responsable de l'anisotropie dans la croûte inférieure est ainsi celui de LPO avec alignement des minéraux. Dans le manteau supérieur, qui est plastique et est considéré comme la source principale de l'anisotropie, l'orientation préférentielle des cristaux d'olivine (constituant minéral majeur de cette couche) ainsi que la teneur en ce minéral contrôlent principalement l'anisotropie. L'orientation de minéraux est elle-même induite par des mécanismes de déformation plastique associés à l'écoulement convectif présent dans le manteau. Différents modèles tomographiques mettent en évidence dans le manteau inférieur une faible anisotropie entre $660\mathrm{km}$ et $1000\mathrm{km}$. Cette intensité moindre de l'anisotropie peut s'expliquer par l'augmentation de la proportion de minéraux isotropes. La partie du manteau inférieur comprise entre $1000\mathrm{km}$ et $2700\mathrm{km}$ de profondeur constitue une zone isotrope où l'absence de l'anisotropie semble liée à une distribution aléatoire de l'orientation des minéraux. L'anisotropie est à nouveau observée dans la couche D". Comme cette couche D" d'une part se trouve en profondeur et d'autre part est considérée comme le terminus pour le lithosphère subductée, les modèles proposés pour cette zone où l'anisotropie est importante incluent à la fois les mécanismes SPO comme dans la croûte et

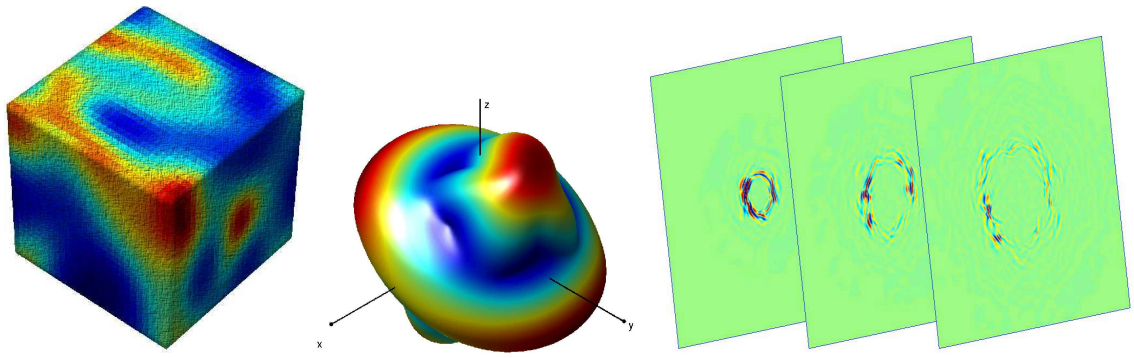
FIG. 0.3 – Exemples des (potentielles) anisotropies avec orientation préférentielle d'origine structurelle, de gauche à droite : Roche sédimentaire de la Falaise d'Êtretat (France) et Roche volcanique de l'Escarpement de Da Dia (Viêtnam)

les mécanismes LPO de l'alignement minéral. Le noyau externe, qui est considéré comme liquide, semble être isotrope. Enfin, une forme d'anisotropie est plus récemment découverte dans le noyau solide. Elle se traduit principalement par le fait que les ondes P dans les directions parallèles à l'axe de rotation sont plus rapides que dans les autres directions. Cette anisotropie serait due à une orientation préférentielle des cristaux de fer. Par contre le mécanisme de cette orientation prioritaire reste encore à déterminer.

Au sens large, le terme scientifique d'incertitude est employé pour caractériser une forme d'impuissance de l'homme à maîtriser complètement la connaissance de la nature. L'incertitude d'un modèle mécanique est pour ainsi dire la différence entre ce qui est pris en compte dans des raisonnements mathématiques et éventuellement dans la simulation numérique avec ce qui se passe physiquement dans la réalité. Les sources de cette imprécision sont multiples mais elles font partie de 3 grands groupes : les incertitude du modèle mathématique (*e.g.,* les approximations physiques, l'idéalisation), les erreurs calculatoires (*e.g.*, l'imprécision du calculateur, les discrétisations) et les incertitudes sur les données (concernant *e.g.*, la géométrie, l'excitation, les paramètres du modèle, la méconnaissance sur les données). Si on reprend l'exemple de la propagation d'ondes sismiques, les incertitudes peuvent être présentes dans le choix du modèle (le matériau est isotrope ou anisotrope, avec hétérogénéité ou non), dans le choix de la topologie, dans la localisation de la source sismique ou bien dans les mesures de champs. Une des manières de prendre en compte ces incertitudes pour quantifier le niveau de certitude dans les calculs de modélisation directe ou d'identification est l'approche probabiliste. Cela consiste à introduire des variables aléatoires modélisant les sources d'incertitudes et puis à quantifier leurs impacts sur la réponse du système mécanique. Par exemple, la variabilité spatiale des propriétés mécaniques peut être caractériser d'une façon indirecte à travers la diffraction aléatoire d'onde comme dans [Aki and Chouet, 1975, Margerin, 1998] ou bien d'une manière directe en modélisant les champs des propriétés par des champs stochastiques comme dans [Frankel and Clayton, 1986, Arnst, 2007].

Objectif et organisation de la thèse

Comme implicitement annoncé par le titre du paragraphe précédent, l'objectif de ce travail de thèse est de prendre en compte à la fois l'hétérogénéité, l'anisotropie et les incertitudes dans la simulation de la propagation d'ondes sismiques. On se limite par contre au cas de milieux tridimensionnels, linéairement élastiques et non-dissipatifs. Pour ce faire, dans un premier temps, on modélise le champ de propriétés mécaniques, ici le champ de tenseur d'élasticité, par le champ stochastique 3D (voir FIG 0.4-a) des matrices aléatoires de taille 6×6 proposé dans [Ta et al., 2010]. La construction de ce modèle de champ est essentiellement fondée sur celle de Soize [2006, 2008]. Notre modèle conserve ainsi les propriétés principales du modèle de Soize, c'est-à-dire un paramétrage minimal contrôlant l'amplitude de la fluctuation et la taille caractéristique de la variabilité spatiale, le comportement local *a priori* arbitrairement anisotrope (voir FIG 0.4-b) et les propriétés mathématiques fondamentales (*e.g.*, la propriété du second ordre, la stationnarité et la continuité en moyenne d'ordre deux, la positivité et l'inversibilité). De plus, un nouveau paramètre est introduit dans ce modèle pour imposer un niveau d'anisotropie moyen souhaité. Dans un deuxième temps, on effectue des adaptations du code de calcul d'éléments finis spectraux, à savoir le code parallèle SPEC3D [Festa and Vilotte, 2005, Delavaud, 2007], afin d'une part de générer les réalisations du champ stochastique du tenseur d'élasticité et d'autre part de prendre en compte l'anisotropie dans la résolution numérique du problème élastodynamique. Des études paramétriques sont ensuite réalisées mettant en évidence les influences de l'anisotropie et des paramètres d'hétérogénéité sur la propagation d'ondes sismiques.



(a) (b) (c)

FIG. 0.4 – Quelques visées de la thèse : (a) Variabilité spatiale. (b) Anisotropie locale se manifestant par une surface de lenteur très irrégulière non sphérique. (c) Simulations de la propagation d'ondes.

Dans cet esprit, l'organisation de ce mémoire de thèse est la suivante :

Le **Chapitre** 1 est consacré à une brève étude bibliographique sur l'état-de-l'art du problème de la propagation d'ondes sismiques en milieu aléatoirement hétérogène. Différentes approximations phénoménologiques de la diffraction d'ondes sismiques y sont présentées. Ces approximations étant seulement destinées aux matériaux isotropes, un besoin d'une nouvelle approche prenant en compte de l'anisotropie apparaît. En revanche, les différents comportements asymptotiques de ces approches fournissent une panoplie de références ou au moins des stratégies possibles pour la validation d'une éventuelle nouvelle approche.

Dans le **Chapitre** 2, le tenseur d'élasticité déterministe est discuté. Sa représentation, ses propriétés mathématiques et son rôle dans le comportement élastodynamique anisotrope des espaces et demi-espaces homogènes infinis sont abordés. Pour les ondes volumiques, après une présentation de quelques résultats théoriques classiques, les trois modes d'ondes sont visualisés en 3D en caractérisant leurs surfaces de lenteur, de vitesse de phase et de vitesse de groupe permettant une compréhension plus perceptible des effets de l'anisotropie sur le champ d'onde élastique, à savoir entre autres, la différentiation directionnelle, la polarisation impure et la séparation des modes quasi-transversaux. Une partie importante de ce chapitre est réservée à un résumé bibliographique des travaux portant sur l'existence d'onde de surface en milieu anisotrope homogènes. Les vitesses de phase et de groupe de cette onde, si elle existe, sont également calculées et visualisées. Les différentes applications numériques effectuées dans ce chapitre traitant de diverses symétries d'anisotropie peuvent constituer une base de références analytiques.

Le **Chapitre** 3 prend sa place ensuite pour une introduction de l'incertitude aléatoire dans le tenseur d'élasticité présenté dans le chapitre précédent. Dans un premier temps, un modèle probabiliste des matrices de taille 6×6 définies positives est proposé. Sachant que notre point de départ est le modèle de [Soize, 2001] construit par le principe de maximum d'entropie probabiliste, deux nouvelles contraintes imposées lors de notre construction sont l'isotropie de la matrice moyenne et la moyenne du niveau d'anisotropie. Dans un deuxième temps, le passage de la matrice aléatoire à la variabilité spatiale du tenseur d'élasticité sous forme d'un champ stochastique est déduite d'une façon analogue à celui de [Soize, 2006] où l'approximation par représentation spectrale [Shinozuka and Jan, 1972] est appliquée pour les champs germes gaussiens faisant apparaître la structure de corrélation tridimensionnelle associée à des longueurs de corrélation spatiale. Les propriétés mathématiques essentielles de la matrice aléatoire et du champ stochastique y sont également abordées.

La résolution numérique du problème de la propagation d'onde en milieu hétérogène anisotrope est présentée dans le **Chapitre** 4. Après avoir résumé les fondements bibliographiques et théoriques du code SPEC3D, qui est initialement destiné aux milieux isotropes, on présente trois principales adaptations de ce code pour notre thématique. La première concerne l'insertion d'un générateur de réalisations du champ stochastique de tenseur d'élasticité, proposé dans le chapitre précédent, permettant l'introduction de l'hétérogénéité jusqu'au niveau des points d'intégration. La deuxième adaptation permet de prendre en compte l'anisotropie dans ce solveur élastodynamique à base d'éléments finis spectraux. La dernière adaptation vise à traiter le problème d'instabilité à temps long des couches absorbantes PML en présence d'anisotropie.

Dans le **Chapitre** 5, différentes validations des adaptations proposées au cours du chapitre précédent sont présentées. Pour les milieux homogènes anisotropes, les résultats numériques obtenus dans le **Chapitre** 2 sont utilisés comme références analytiques pour valider les simulations correspondantes effectuées par SPEC3D. Pour les milieux anisotropes aléatoirement hétérogènes, des expériences numériques fondées sur le principe du retournement temporel sont menées pour juger de la qualité de nos simulations.

Les différentes simulations présentées dans le **Chapitre** 6 peuvent également servir à valider nos contributions dans le code SPEC3D mais elles visent principalement à étudier les influences que l'anisotropie et/ou l'hétérogénéité aléatoire exercent sur le champ d'onde sismique. Dans la première partie du chapitre, des simulations avec fortes hétérogénéités du champ de matériau mettent en évidence deux régimes d'onde : la localisation et la diffusion. Pour le régime diffusif,

le phénomène de l'équipartition de l'énergie entre les modes d'ondes est également observé. Les influences des paramètres du champ stochastique du tenseur d'élasticité sur ce comportement stabilisant sont également explicitées. Dans la deuxième partie du chapitre, les simulations sont destinées à des expériences de traitement d'antenne sismique. La compatibilité de ce type de post-traitement avec l'anisotropie et avec l'hétérogénéité est brièvement discutée.

Chapitre 1

Approches phénoménologiques de la propagation d'ondes dans des milieux aléatoirement hétérogènes

La diffraction d'onde entraînée par des hétérogénéités aléatoires du milieu de propagation est un phénomène rencontré dans différentes branches des sciences naturelles. De nombreux modèles théoriques sont développés d'une façon continue en astrophysique, en électromagnétique, en acoustique et en sismologie. En raison de leurs complexités, que ce soit pour les cas des ondes scalaires (les ondes acoustiques, les photons) où des ondes polarisées (les ondes électromagnétiques en générale, les ondes élastiques), différentes approximations sont adoptées afin de simplifier la résolution. Concernant les ondes élastiques, hors la considération de tenseurs d'élasticité isotropes, ces approximations consistent principalement à :

(i) appliquer une théorie de perturbation au premier ordre pour de faibles fluctuations des propriétés mécaniques (*i.e.*, le tenseur d'élasticité et la densité volumique de masse). Cette configuration peut être schématisée par le fait que, entre l'émetteur et le capteur, n'apparaît qu'un seul évènement de diffraction au niveau d'un seul diffracteur ; d'où le terme diffraction simple (single scattering en anglais).

(ii) appliquer la théorie du transfert radiatif (ou bien transfert de rayonnement) et sa limite de diffusion aux grandes distances. Ce cas correspond au fait que de nombreux évènements de diffraction se produisent avant que l'onde n'arrive au point d'observation. D'où vient le terme diffraction multiple (multiple scattering en anglais).

(iii) simplifier la fluctuation de la densité volumique de masse : soit la supposer constante (cela se résume à une fluctuation des vitesses d'onde), soit supposer qu'elle fluctue en corrélation parfaite avec les coefficients du tenseur d'élasticité (cela se résume à une fluctuation des impédances acoustiques).

Dans ce chapitre, on esquisse un état-de-l'art des approches phénoménologiques pour l'étude de la propagation des ondes élastiques en présence d'hétérogénéité. Les études sont classifiées en trois grands groupes qui sont résumés respectivement dans les sections (1.2)-(1.4). Avant cela, des notions sur les différentes grandeurs géométriques caractérisant un problème de diffraction d'onde sont énumérées dans la section (1.1) où, à titre d'illustration et dans un souci de simplicité, le cas des ondes scalaires est considéré. Ces grandeurs servent en effet à justifier *a priori*

l'association d'un problème de diffraction d'onde élastique donné aux régimes de diffraction simple ou de diffraction multiple.

1.1 Facteurs caractéristiques d'échelle

Dès lors que l'on considère un problème de propagation d'onde, qu'il s'agisse d'ondes acoustiques, électromagnétiques ou élastiques, trois longueurs fondamentales y sont naturellement attachées. Il s'agit de la taille L du domaine, de la distance d'observation R et de la longueur d'onde λ de l'onde qui se propage. Lorsque que le milieu devient désordonné ou aléatoire, une taille caractéristique d'hétérogénéité est requise. Dans le cas des milieux aléatoires, il s'agit de ℓ, la longueur de corrélation. Éventuellement, dans des approximations développées aux limites mathématiques, d'autres paramètres homogènes à une longueur apparaissent comme les longueurs caractéristiques du mécanisme de la diffraction d'ondes. Ce sont le *libre parcours moyen* ℓ_{sc} pour l'approche de transfert radiatif et le *libre parcours moyen de transport* ℓ^* pour l'approche de diffusion.

En supposant que les longueurs géométriques sont beaucoup plus grandes que les longueurs d'onde et d'hétérogénéité, et que l'effet de bord est négligeable ($L \gg R \gg \lambda, \ell$), différents scénarii phénoménologiques se distinguent à partir du rapport entre λ et ℓ. Ainsi, d'une façon caricaturale, un problème de propagation d'onde en milieu aléatoire peut être classé suivant les trois scénarii suivants :

a. Quand $\lambda \gg \ell$, le scénario dit *microscopique* se met en place. Les techniques d'homogénéisation peuvent être utilisées pour trouver un milieu homogène équivalent.

b. Quand $\lambda \ll \ell$, le scénario dit *macroscopique* se met en place. Le milieu peut être qualifié comme homogène par morceaux. Si la fluctuation est faible, l'onde ne voit pas le changement de célérité du milieu. L'approximation de Born [Born and Wolf, 1965] est appliquée pour l'équation d'Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} - c^2(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}^2} = 0 \tag{1.1}$$

dont la solution est ainsi approchée par :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}_o(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{u}_d(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.2}$$

avec :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_o}{\partial t^2} - c_o^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_o}{\partial \boldsymbol{x}^2} = 0 \tag{1.3}$$

et du problème de la petite perturbation :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_d}{\partial t^2} - c_o^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_d}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \delta c^2\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_o}{\partial \boldsymbol{x}^2} \tag{1.4}$$

La résolution de ces deux problèmes peut être effectuée analytiquement pour des géométries simples.

c. Quand $\lambda \simeq \ell$, le scénario dit *mésoscopique* se met en place. L'interaction entre l'onde et l'hétérogénéité est *a priori* plus significative [Aki and Richards, 1980]. Une approximation de l'équation d'onde en termes de transport d'énergie en milieu aléatoire est applicable. L'idée

principale de cette approche est d'adopter l'hypothèse que les phases des ondes diffractées deviennent aléatoires au bout de suffisamment d'évènements de diffractions. Aucune interférence n'est donc possible. Cela a pour conséquence l'additivité du flux d'énergie. Il s'agit de la théorie du *transfert radiatif* développée par Chandrasekhar [1960] pour la propagation des photons de lumière en milieu astrophysique. Dans le cas simple d'une source ponctuelle placée à $\boldsymbol{x}_o = 0$ et en absence d'absorption intrinsèque, cette dernière peut s'écrire comme suit pour $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_o$:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial a(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}},t)}{\partial t} + \boldsymbol{\kappa}\cdot\mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\, a(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}},t) = -\frac{a(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}},t)}{\ell_{sc}} + \frac{1}{4\pi\ell_{sc}}\int_{4\pi} a(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}},t)s(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}},\hat{\boldsymbol{\kappa}}')\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\kappa}}' \quad (1.5)$$

- $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$, $\hat{\boldsymbol{\kappa}}'$ les vecteurs unitaires représentant la direction de propagation
- $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ l'angle solide élémentaire entourant $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$
- $a(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}},t)$ l'intensité spécifique de l'énergie mesurée à l'instant t et à un point $\boldsymbol{x}$ de l'onde ayant l'incidence $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$
- $s(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}},\hat{\boldsymbol{\kappa}}')$ la section efficace différentielle des diffracteurs est définie comme le taux d'énergie (ou bien en quelque sorte la probabilité) selon lequel une onde $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ se convertit dans une onde $\hat{\boldsymbol{\kappa}}'$ lors de l'évènement de diffraction se produisant au point $\boldsymbol{x}$. Cela est lié à la section efficace totale, *i.e.* le taux énergétique entre l'énergie diffractée et l'énergie incidente, du diffracteur situé à $\boldsymbol{x}$ pour une onde de l'incidence $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ par :

$$\Sigma(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}}) = \int_{4\pi} s(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}},\hat{\boldsymbol{\kappa}}')\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\kappa}}' \quad (1.6)$$

- $c = |\boldsymbol{c}^g|$ la valeur absolue du vecteur de vitesse de groupe.
- $\ell_{sc}(\hat{\boldsymbol{\kappa}}) = \dfrac{c}{\Sigma(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\kappa}})}$ la longueur de libre parcours moyen est définie comme la distance moyenne entre deux évènements consécutifs de diffraction. Dans des milieux discrets où les particules sont très souvent considérées comme infiniment rigides par rapport au matériau de fond, faisant apparaitre la taille moyenne des particules et la distance moyenne entre eux, paramètres pouvant se réduire à la densité volumique de particules. Dans des milieux continus, cette longueur correspond à la distance moyenne entre 2 hétérogénéités "visibles" par l'onde monochromatique. D'où, ce facteur d'échelle dépend en général de la longueur de corrélation ℓ, de l'amplitude de fluctuation δ et de la fréquence.

L'équation de transfert radiatif (1.5) ne peut pas se résoudre analytiquement. Cependant, une méthode numérique très efficace et donc prometteuse pour la résoudre est l'intégration par Monte-Carlo du type *marche aléatoire*.

Par ailleurs une limite du régime de diffraction multiple décrit par l'équation de transfert radiatif (1.5) est le régime de *diffusion*, qui sera ci-dessous exprimé par l'équation (1.7). Cette limite apparaît sous condition d'une absorption suffisemment faible, au bout d'un nombre suffisamment grand de diffractions. Cela se manifeste par un rayonnement approximativement isotrope [voir Margerin, 1998, par exemple] résultant dans l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial\mathcal{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} - \frac{c\ell^\star}{3}\frac{\partial^2\mathcal{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial\boldsymbol{x}^2} \quad (1.7)$$

dans laquelle

– $\mathcal{E}(\boldsymbol{x}, t)$ la densité spatiale d'énergie donnée par :

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}, t) = \int_{4\pi} a(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, t) \mathrm{d}\, \hat{\boldsymbol{\kappa}} \tag{1.8}$$

– $\ell^\star$ le libre parcours moyen de transport défini comme une distance moyenne au delà de laquelle le rayonnement effectif d'énergie devient isotrope,*i.e.* les ondes perdent totalement la mémoire de leurs directions. Il peut être calculé à partir du libre parcours moyen ℓ_{sc} par :

$$\ell^\star = \frac{\ell_{sc}}{1 - \int_{4\pi} \hat{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \hat{\boldsymbol{\kappa}}' a(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}, t) \mathrm{d}\, \hat{\boldsymbol{\kappa}}} \tag{1.9}$$

dont l'intégrale présente dans le dénominateur représente la déviation moyenne dans toutes les directions.

Dans la pratique, on regroupe très souvent c et $\ell^\star$ dans un paramètre nommé le coefficient de diffusion $D := \dfrac{c\ell^\star}{3}$. L'équation (1.7) devient alors :

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \mathcal{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}^2} = 0 \tag{1.10}$$

La résolution de l'équation de diffusion (1.10) peut être faite de façon analytique pour des géométries simples telles qu'un espace infini, un demi-espace infini homogène.

REMARQUE 1.1. *Une similarité intéressante entre la forme (1.10) de l'équation de diffusion avec l'équation d'onde (1.1) peut être aisément remarquée. La différence fondamentale entre ces deux équations réside dans l'ordre de la dérivée partielle par rapport du temps. Au lieu de d'une dérivée seconde, l'approximation de diffusion fait apparaître seulement une dérivée première. Cela a pour conséquence la différence dans le comportement dynamique global : contrairement à l'équation d'onde, l'équation de diffusion n'est pas symétrique par renversement du temps.*

1.2 Études des ondes sismiques fondées sur l'homogénéisation

Dans le domaine de la propagation des ondes élastiques, cette technique est initialisée par [Backus, 1962] pour le modèle laminaire composé des couches minces. L'idée principale de cette approximation de Backus consiste à [voir Berryman, 1998, par exemple pour les couches isotropes] réarranger la relation élastique contrainte-déformation (l'équation (2.1) ultérieurement exprimée) sous une forme particulière où les variables quasi-statiquement constantes (à savoir σ_{13}, σ_{23}, σ_{33}, ϵ_{11}, ϵ_{22} et ϵ_{12} sont constants en raison de la continuité entre les couches) sont isolées puis d'évaluer les moyennes de nouveaux coefficients. L'homogénéisation peut être appliquée au préalable, puis une méthode d'optique géométrique permet de prédire la propagation des ondes. Il convient de noter que dans cette méthode, le milieu effectif devient anisotrope. Des illustrations pour ce cas de figure peuvent être trouvées dans les travaux de [Backus, 1962, Berryman, 1979, Thomsen, 1993, Berryman, 1998, Chang and Gardner, 1997] où un modèle laminaire des couches minces isotropes ou anisotropes peut être remplacé par un milieu effectif isotrope transverse homogène.

1.3 Études des ondes sismiques fondées sur la théorie de la diffraction simple

Pour des perturbations des vitesses et de la densité volumique de masse suffisamment faibles, la plupart de l'énergie diffractée arrive au point d'observation après avoir subi un seul évènement de diffraction. Le champ d'onde peut être adéquatement modélisé par l'approche de diffraction simple, connue dans la littérature sous le nom de l'approximation de Born ou bien de la théorie de Chernov. Une hypothèse forte et fondamentale de cette approche est que malgré leur passage à travers les zones de perturbation, les ondes directes sont inchangées. Le champ total, qui est la somme des ondes directes et des ondes diffractées, est par conséquent d'énergie supérieure à l'énergie émise à la source. Cette approximation est donc seulement valide quand l'énergie des ondes diffractées est petite devant celles des ondes principales. Les éléments bibliographiques concernant la théorie de la diffraction simple peuvent être trouvés dans [Wu, 1985, Sato and Fehler, 1998, Shearer, 2007].

La théorie de la diffraction simple peut fournir la puissance moyenne des ondes diffractées en fonction du type d'onde (*i.e.*, P ou S), de la puissance de l'onde incidente, de l'hétérogénéité locale et de la fréquence. L'application la plus importante de cette théorie est proposée par [Aki and Chouet, 1975] pour prédire le taux de décroissance de la *coda*[2] des séismes locaux. Pour un point d'observation coïncidant avec la source et pour les ondes de volume dans un espace tridimensionnel infini et homogène (stationnaire), on a l'expression :

$$A_c(t) \propto \frac{1}{t} \times \exp\left(\frac{-\pi f t}{Q_c}\right) \tag{1.11}$$

dans laquelle $A_c(t, f)$ est l'amplitude de la coda évaluée à l'instant t en fonction de la fréquence prépondérante f.

L'approximation par diffraction simple est également fondamentale dans plusieurs études de la géophysique interne (de la Terre profonde) en termes de modèle de diffraction par des hétérogénéités aléatoires. Ces études regroupent l'interprétation du précurseur ou de la coda des observation de différentes phases sismiques comme les précurseurs de la réflexion PKP [Haddon and Cleary, 1974, Doornbos, 1976, par exemple], de la réflexion PP [King et al., 1975] et de la réflexion P'P' [Vinnik, 1981] ou bien des codas de la phase P_{diff} [Earle and Shearer, 2001] ou de la réflexion PKiKP [Vidale and Earle, 2000]. L'approximation de Born est également utilisée comme modèle de prédiction de la variation du temps de parcours des ondes balistiques traversant les zones à vitesse aléatoirement perturbée [voir Spetzler and Sneider, 2001, Baig et al., 2003, par exemple].

1.4 Études des ondes sismiques fondées sur la théorie de la diffraction multiple

Quand l'énergie du champ d'ondes diffractées représente une partie importante du champ d'onde totale, les imprécisions faites par l'approximation de Born deviennent intolérables. Une

[2] la partie du signal sismique après les ondes principales

approche plus adéquate est nécessaire pour prendre en compte la réduction de l'énergie des ondes balistiques due à de multiples événements de diffraction dans le parcours d'onde. Des études bibliographiques assez complètes de la diffraction multiple lors de la modélisation ou de l'interprétation des ondes sismiques peuvent être trouvées dans [Herraiz and Espinosa, 1987, Sato and Fehler, 1998, Shearer, 2007].

Les premières idées [Kopnichev, 1977, Gao et al., 1983] pour la diffraction multiple consistent naturellement à considérer consécutivement les résultats de la diffraction simple. Cependant, comme mentionné dans la section 1.1, la plupart des études actuelles pour synthétiser le phénomène de diffraction multiple des ondes sismiques sont fondées sur la théorie du transfert radiatif [Wu, 1985, Wu and Aki, 1988, Weaver, 1990, Margerin et al., 1998, Sato and Nishino, 2002] et son approximation par l'équation de diffusion [Kopnichev, 1977, Ryzhik et al., 1996, Turner, 1998, Margerin et al., 2000, Shapiro et al., 2000].

1.4.1 Diffraction multiple sans considération de la conversion des modes

Les premières applications de la méthode de *marches aléatoires* pour les ondes sismiques ne tiennent pas compte de la conversion entre les modes d'onde (*i.e.*, P et S), elles suivent la procédure appliquée pour les ondes acoustiques [Gusev and Abubakirov, 1987]. Il s'agit consécutivement de l'étude de Abubakirov and Gusev [1990] pour les codas de l'onde S dans les évènements sismiques enregistrés à Kamchatka, des études de Hoshiba [1994, 1997] pour les ondes SH avec considération de la variation du niveau de diffraction en fonction de la profondeur, de l'étude de Margerin et al. [1998] pour la diffraction de l'onde S dans un modèle d'une couche sur un demi-espace et enfin de l'étude de Bal and Moscoso [2000] avec prise en compte de la polarisation des ondes S concluant par contre à la dépolarisation de ces dernières sous la diffraction multiple.

En particulier, il convient de rappeler ici les résultats fournis par les simulations bidimensionnelles effectuées dans [Margerin et al., 1998]. Dans ce travail, la couche lithosphérique est modélisée comme une couche diffractante d'épaisseur H (limitée par la discontinuité de Moho) et les parties inférieures de la Terre sont modélisées comme un demi-espace homogène. Margerin obtient, en simulant par *marche aléatoire* la solution de l'équation de diffusion, l'évolution temporelle de la densité d'énergie de l'onde S comme suit :

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{x},t) \propto \exp\Big(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4D_1 t}\Big) \times \frac{1}{HD_1 t} \times \exp\Big(-\frac{\xi_o^2}{H^2} D_1 t\Big) \tag{1.12}$$

où D_1 est le coefficient de diffusion de la couche et ξ_o un paramètre lié au contraste de vitesse entre la couche et le demi-espace. De plus, sachant que la fréquence prépondérante est $f = 1Hz$, en posant :

$$Q_c^\star := \frac{2\pi H^2 f}{D_1 \xi_o^2} \tag{1.13}$$

ces auteurs déduisent de l'expression (1.12) l'évolution de la densité d'énergie pour les séismes locaux ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_o = 0$) :

$$\mathcal{E}(t) \propto \frac{1}{t} \times \exp\Big(\frac{-\pi f t}{Q_c^\star}\Big) \tag{1.14}$$

Ce résultat montre une grande similarité avec l'équation (1.11) et réaffirme le taux de décroissance de l'énergie du coda proposé par Aki and Chouet [1975].

1.4.2 Diffraction multiple avec conversion de modes

Les travaux analytiques les plus importants concernant la limite de diffusion de l'équation de transfert radiative en élastodynamique, *i.e.* avec prise en compte de la polarisation et des conversions entre modes, sont ceux réalisés par Weaver [1990] et par l'équipe du mathématicien Papanicolaou [Ryzhik et al., 1996, Papanicolaou et al., 1996]. Ces études déduisent pour les ondes élastiques une équation de diffusion analogue à l'équation (1.10) avec cette fois un coefficient de diffusion pondéré par les modes de propagation :

$$D^{el} = \frac{\dfrac{\ell_{\mathrm{P}}^{\star}}{3c_{\mathrm{P}}^{3}} + \dfrac{2\ell_{\mathrm{S}}^{\star}}{3c_{\mathrm{S}}^{3}}}{\dfrac{2}{c_{\mathrm{S}}^{3}} + \dfrac{1}{c_{\mathrm{P}}^{3}}} \tag{1.15}$$

où

- $\ell_{\mathrm{P}}^{\star}$ et $\ell_{\mathrm{S}}^{\star}$ les libres parcours moyen de transport partiels de l'onde P et de l'onde S.
- c_{P} et c_{S} les vitesses de ces ondes.

En dehors de ce résultat plutôt attendu, [Ryzhik et al., 1996] ajoute un résultat fondamental concernant le régime de diffusion des ondes élastiques dans un espace tridimensionnelle élastique : l'équipartition de l'énergie entre les modes d'ondes. Concrètement, cela se traduit par les faits que (i) les ondes S sont dépolarisées, *i.e.* l'énergie du mouvement de cisaillement se répartit d'une façon identique sur toutes les polarisations transverses et (ii) entre les polarisations longitudinales et transverses, il y a autant de conversions P→S que de conversions S→P. Une fois que le régime de diffusion s'établit, cette équipartition de l'énergie est universelle quelque soit les détails de la diffraction multiple et la nature de la source. Elle peut être exprimée par une stabilisation du rapport énergétique entre les ondes P et S :

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{P}}}{\mathcal{E}_{\mathrm{S}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{c_{\mathrm{S}}}{c_{\mathrm{P}}}\right)^{3} \tag{1.16}$$

où $\mathcal{E}_{\mathrm{P}}$ et $\mathcal{E}_{\mathrm{S}}$ sont les densités spatiales d'énergie de l'onde P et de l'onde S. Dans les milieux géologiques, le matériau élastique isotrope est fréquemment considéré comme poissonnien (*i.e.*, les 2 coefficients de Lamé sont égaux), le second membre de l'expression (1.16) correspond à environ 10%. Cette stabilisation du rapport énergétique implique que quelle que soit la partition initiale d'énergie, dans le régime de diffusion la plupart de l'énergie réside dans les mouvements engendrés par les ondes S. Vu le caractère universel de l'équipartition, elle fournit un critère essentiel pour déterminer le domaine de validité du régime de diffusion dans les études sismiques. En effet, l'approximation de diffusion n'est pas valable avant que les densités d'énergie des ondes P et S vérifient la relation (1.16).

REMARQUE 1.2. *D'un autre point de vue, le régime de diffusion se réalise lorsque l'onde parcourt une distance supérieure à $\ell^{\star}$ qui est de l'ordre de quelques ℓ_{sc}. L'évaluation du temps caractéristique au-delà duquel la stabilisation du rapport énergétique se réalise serait une piste intéressante pour inverser ces longueurs caractéristiques de diffraction multiple.*

Suite à la mise en évidence de ce critère, plusieurs études sismiques complètes, *i.e.* avec prise en compte des conversions de modes ont été menées. Il s'agit à la fois de simulations numériques et d'analyses portant sur des données réelles. Margerin et al. [2000] introduisent

dans leur procédure des *marches aléatoires* avec des probabilités de conversions P→S et S→P à chaque évènement de diffraction. Les auteurs retrouvent le régime de diffusion avec la stabilisation de l'énergie à la valeur théorique. Cette procédure est réutilisée plus tard dans [Margerin and Nolet, 2003a,b] pour modéliser la propagation et la diffraction multiple des ondes sismiques dans la Terre profonde. Un modèle similaire est proposé dans [Shearer and Earle, 2004] prenant en compte les contrastes aux niveaux de la surface libre, du Moho, des interfaces CMB et ICB ainsi que la variabilité spatiale à travers des structures de corrélation de type exponentiel pour différentes probabilités de diffraction. En ce qui concerne les observation réelles, Shapiro et al. [2000] proposent d'évaluer les densités d'énergie par le biais de la séparation des mouvements irrotationnels et rotationnels respectivement pour les ondes P et S (voir les expressions (6.1-6.2)). Les opérateurs Div et Curl sont en fait estimés à partir des données fournies par un réseau de capteurs sismiques installé sur un site à Mexico [voir Shapiro et al., 2000, Margerin et al., 2000, Trégourès et al., 2002, pour plus de détails]. Ces auteurs observent également la stabilisation du rapport d'énergie mais à une valeur différente de celle prédite par l'expression (1.16). Selon eux, d'une part cette différence est due à la présence de la surface libre et d'autre part l'important est la stabilisation elle-même et non la valeur à laquelle ce rapport se stabilise. Ils concluent ainsi que le régime de diffusion est observé dans ce cas réel de Mexico lors de différents séismes.

1.5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons effectué une brève étude bibliographique sur les approches phénoménologiques du problème de la propagation d'ondes sismiques en milieux aléatoires. Après avoir évoqué différentes longueurs caractéristiques dans le cas des ondes scalaires, ce résumé aborde les scénarii de diffractions simple et multiple où quelques résultats théoriques et expérimentaux importants sont rappelés. Le fait que ces résultats ne s'appliquent qu'aux matériaux isotropes fait naître un besoin d'une nouvelle approche tenant compte de l'anisotropie. En revanche, les différents comportements asymptotiques de ces approches fournissent une panoplie de références ou au moins des idées pour la validation d'une éventuelle nouvelle approche.

Chapitre 2

Tenseur d'élasticité et la propagation d'ondes

Au sens strict du mot indexé dans les dictionnaires, *anisotropie*, dont l'origine grecque de ses syllabes est $\{a =$ non, $iso =$ égal, $tropos =$ direction$\}$, veut figurer le fait qu'un objet physique ne possède pas les mêmes propriétés dans toutes les direction de l'espace. En termes de comportement élastodynamique, l'anisotropie, se reflète dans le fait que les ondes se forment et se propagent de façons non-identiques en fonction de la direction de propagation. Ces différences peuvent concerner la vitesse de propagation, la polarisation ou bien la composition des ondes. Comme mentionné dans l'introduction de ce manuscrit, l'anisotropie des roches dans la nature peut fondamentalement provenir d'orientations préférentielles structurales ou minérales. Par contre, quelle que soit sa nature, une fois le comportement élastodynamique anisotrope observé à une échelle quelconque, on peut associer au matériau à cette échelle d'observation un modèle mathématique d'anisotropie représenté par le tenseur d'élasticité.

Ce présent chapitre est donc consacré à une description rapide de différents modèles d'anisotropie à travers la symétrie du tenseur d'élasticité ainsi que des comportements élastodynamiques associés tant en terme d'ondes volumiques que d'ondes de surface quand une limite géométrique se présente. Dans la section 2.1, les notions de tenseur d'élasticité vont être décrites sans entrer dans les détails mathématiques (qui seront étudiés davantage au début du **Chapitre** 3). La section 2.2 va ensuite aborder les caractéristiques principales des ondes volumiques susceptibles de se propager dans différents types de matériaux anisotropes. Enfin, la théorie des ondes de surface en milieux anisotropes est résumée et discutée dans la section 2.3. Les éléments bibliographiques de ce chapitre se réfèrent principalement à [Auld, 1973, Hearmon, 1961, Arts, 1993, Cerveny, 2001] pour les parties concernant la généralité de l'anisotropie et de l'onde volumique ainsi qu'à [Barnett and Lothe, 1985, Urba and Miskinis, 2000] à propos des ondes de surface.

2.1 Tenseur d'élasticité

2.1.1 Forme matricielle du tenseur d'élasticité

Les modèles d'anisotropie sont déterminés par le tenseur d'élasticité $\boldsymbol{C}$ dans la relation contrainte-déformation définie par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \tag{2.1}$$

Ce tenseur d'ordre 4 peut être représenté en suivant la notation de Kelvin-Voigt par un tenseur d'ordre 2, sous forme d'une matrice symétrique, définie - positive ayant 21 coefficients indépendants dans le cas le plus général d'un matériau triclinique :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Lorsque que le matériau possède certaines symétries, le nombre de coefficients indépendants diminue.

- **Orthotropie** : 9 coefficients indépendants

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

- **Anisotropie hexagonale** où **isotropie transvers** : 5 coefficients indépendants

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

- **Anisotropie cubique** : 3 coefficients indépendants

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

– **Isotropie** : on peut retrouver le modèle isotrope (2 coefficients indépendants) en adaptant la condition

$$C_{44} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \tag{2.6}$$

au modèle cubique. Dans la pratique, il existe de nombreuses façons de choisir cette paire de coefficients indépendants : *Module d'Young-Coefficient de Poisson*, *Coefficients de Lamé*, *Modules d'élasticité*, *Modules des vitesses*, *etc*. Ces représentations peuvent facilement se convertir entre elles. Parmi elles, les deux représentations les plus utilisées sont les coefficients de Lamé (λ, μ) et le couple module d'Young-coefficient de Poisson (E, ν) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} &= \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{E}{1+\nu} \times \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1+2\nu} & \frac{\nu}{1+2\nu} & \frac{\nu}{1+2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1+2\nu} & \frac{1-\nu}{1+2\nu} & \frac{\nu}{1+2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1+2\nu} & \frac{\nu}{1+2\nu} & \frac{1-\nu}{1+2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Une autre représentation intéressante qui se base sur la relation entre la déformation et le changement volumique est celle des modules de compressibilité et de cisaillement :

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}+\frac{4\mu}{3} & \mathcal{K}-\frac{2\mu}{3} & \mathcal{K}-\frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{K}-\frac{2\mu}{3} & \mathcal{K}+\frac{4\mu}{3} & \mathcal{K}-\frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{K}-\frac{2\mu}{3} & \mathcal{K}-\frac{2\mu}{3} & \mathcal{K}+\frac{4\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

2.1.2 Quantification de l'anisotropie

Dans les sous-sections 2.2-2.3 qui suivent, on va percevoir qu'en terme du comportement élastodynamique, un matériau anisotrope se reflète en général par le fait que l'onde se propage à différentes vitesses selon différentes directions et que le type de symétrie du modèle d'anisotropie (parmi ceux définis par les équations 2.3-2.5 et 2.7) contribuera d'une façon décisive à la forme de cette dépendance directionnelle. Si le type d'anisotropie se caractérise par le nombre de coefficients indépendants (qui est en quelque sorte l'inverse du degré de symétrie), cette quantité ne permet pas en revanche la comparaison de différents modèles d'anisotropie quels que soient ces derniers (qu'ils soient de même type d'anisotropie ou non). La définition d'une quantité capable de mesurer le niveau d'anisotropie est donc nécessaire.

Dans la littérature géophysique et la science des cristaux, différentes mesures d'anisotropie sont proposées suivant les comparaisons quantitatives visées. L'éventuelle première définition de cette sorte de mesure remonte au rapport de Zener proposé par Zener [1948] et réutilisé dans [Auld, 1973] :

$$\text{A} = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{22}} \tag{2.9}$$

Par contre, comme toutes ses variantes proposées dans Chung and Buessem [1967] où dans Spoor et al. [1995], par définition, ce rapport n'est applicable que pour les matériaux anisotropes de type cubique. Une autre famille de mesures d'anisotropie regroupe celle de Thomsen [1986] proposée pour les matériaux d'anisotropie de type hexagonale (isotrope transverse) et une version généralisée de cela proposée par Tsvankin [2005] en vue d'une comparaison des matériaux orthotropes. Des approches similaires pour quantifier les anisotropies de types arbitraires sont également proposées par [Mensch and Rosolofosaon, 1997] ou par [Psencik and Gajewski, 1998]. Pourtant, hors leur manque de généralité (elles dépendent non seulement du degré de symétrie mais également de l'orientation du plan d'observation [Arts, 1993]), ces quantifications requièrent plus qu'un seul indice pour une caractérisation complète du niveau d'anisotropie.

Dans un autre contexte, une approximation d'un modèle anisotrope est souvent construite à partir d'un modèle de symétrie supérieure [Gazis et al., 1963, Arts, 1993, Norris, 2006a, Moakher and Norris, 2006, Bucatatu and Slawinski, 2009]. L'approximation la plus simple et donc la plus utilisée est celle consistant à remplacer le milieu par son milieu isotrope le plus proche [Arts, 1993, Norris, 2006b] au sens d'une projection de l'espace $\mathbb{R}^{21}$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$. Une illustration géométrique de cette projection est présentée dans (FIG- 2.1). Le tenseur

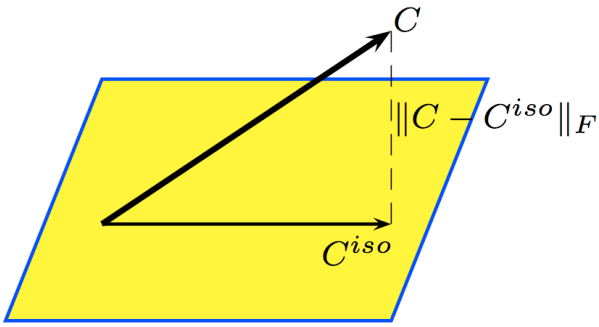


FIG. 2.1 – Explication géométrique de l'approximation isotrope

isotrope remplaçant où équivalent $\boldsymbol{C}_{iso}^{eqv}$ d'un tenseur arbitraire $\boldsymbol{C}$ s'écrit en effet à travers un opérateur de projection :

$$\boldsymbol{C}_{iso}^{eqv} = \left(\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{S} + \frac{1}{5}\boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{C} \tag{2.10}$$

dans lequel $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{D}$ sont les formes matricielles de deux tenseurs d'ordre 4 nommés respectivement *tenseur sphérique* et *tenseur déviatorique*. Les détails mathématiques de ces matrices seront présentés dans le **Chapitre** 3. L'essentiel à souligner à ce stade est que la paire $\{\boldsymbol{S}, \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{D}\}$ forme une base orthonormée du sous-espace isotrope de l'espace des tenseurs d'élasticité et que

$\boldsymbol{C}_{iso}^{eqv}$ est la meilleure approximation de $\boldsymbol{C}$ au sens de la norme associée. D'une façon plus explicite que dans l'équation (2.10), les 21 coefficients indépendants se condensent en 2 coefficients du modèle isotrope, par exemple en ceux de Lamé comme suit :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \cdot & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \cdot & \cdot & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \text{S} & \cdot & \cdot & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \cdot & \text{Y} & \cdot & \cdot & C_{55} & C_{56} \\ \cdot & \cdot & \text{M.} & \cdot & \cdot & C_{66} \end{pmatrix}$$
$$\approx \begin{pmatrix} \lambda^{eqv}+2\mu^{eqv} & \lambda^{eqv} & \lambda^{eqv} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \lambda^{eqv}+2\mu^{eqv} & \lambda^{eqv} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \lambda^{eqv}+2\mu^{eqv} & 0 & 0 & 0 \\ \text{S} & \cdot & \cdot & 2\mu^{eqv} & 0 & 0 \\ \cdot & \text{Y} & \cdot & \cdot & 2\mu^{eqv} & 0 \\ \cdot & \cdot & \text{M.} & \cdot & \cdot & 2\mu^{eqv} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

où λ^{eqv} et μ^{eqv} sont les coefficients de Lamé équivalents qui se calculent en minimisant une distance euclidienne définie par $\|C - C_{iso}^{eqv}\|$, la norme frobénienne d'un tenseur étant la différence entre 2 tenseurs d'ordre 4. Ces coefficients équivalents sont donnés par :

$$\lambda^{eqv} = \frac{C_{11}+C_{22}+C_{33}+4(C_{12}+C_{23}+C_{13})-2(C_{44}+C_{55}+C_{66})}{15} \tag{2.12}$$

$$\mu^{eqv} = \frac{2(C_{11}+C_{22}+C_{33})-(C_{12}+C_{23}+C_{13})+3(C_{44}+C_{55}+C_{66})}{15} \tag{2.13}$$

L'utilisation de cette approximation avec la distance associée donne lieu en effet à une définition d'une mesure dite universelle du niveau d'anisotropie.

Mesure universelle d'anisotropie

C'est Fedorov [1968] le premier qui introduit la notion de l'indice universel d'anisotropie (indice d'anisotropie). L'universalité est adoptée ici pour mettre l'accent sur le fait qu'avec un seul indice on peut décrire en quelque sorte la nature tensorielle de l'anisotropie. L'idée principale proposée dans [Fedorov, 1968] consiste à normaliser la norme frobénienne utilisée pour quantifier la qualité de l'approximation d'un tenseur arbitraire par son tenseur isotrope équivalent. L'indice d'anisotropie est défini alors comme suit :

$$I_{\text{A}} = \sqrt{\frac{\|\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_{iso}^{eqv}\|^2}{\|\boldsymbol{C}\|^2}} \tag{2.14}$$

Physiquement, I_{A} représente la similarité du matériau anisotrope en question à un matériau isotrope. Mathématiquement, I_{A} prend sa valeur dans l'intervalle $(0;1]$. Dans le cas où C est isotrope, I_{A} est égal à 0. Plus le milieu est anisotrope, moins cet indice est proche de l'unité. En raison de sa simplicité ainsi que de sa généralité, l'indice d'anisotropie de Fedorov est largement utilisé dans les études de caractérisation du niveau d'anisotropie. Concernant ses applications les lecteurs sont invités à se référer aux travaux de Carcione [2007], Arts [1993], Cavallini [1999], Vernik and Liu [1997], dans les domaines de la géophysique ou bien de la pétrophysique.

REMARQUE 2.1. *Comme cet indice représente la ressemblance d'un tenseur $\boldsymbol{C}$ de symétrie arbitraire à un tenseur isotrope, elle peut s'appeler à l'inverse l'indice d'isotropie.*

2.2 Ondes en milieu anisotrope homogène

2.2.1 Comportement élastodynamique linéaire

Soit $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ le domaine physique, muni d'un repère Cartésien $\{\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3\}$ occupé par un matériau homogène complètement caractérisé par la densité de masse ρ et le tenseur d'élasticité C_{ijkl} en état équilibre, la formulation forte du problème élastodynamique en temps t, à forces volumiques nulles s'écrit :

$$\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}\left[\boldsymbol{u}\right] = \rho \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^2} \tag{2.15}$$

où $\boldsymbol{u}$ est le champ du vecteur de déplacement et $\boldsymbol{\sigma}\left[\boldsymbol{u}\right]$ son état de contrainte associé. La déduction de l'état de contrainte à partir du déplacement est faite grâce à la loi de comportement élastique (équation 2.1) par le calcul du tenseur de déformation infinitésimal $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\, \boldsymbol{u} + \mathrm{grad}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}\right) \tag{2.16}$$

La forme explicite de l'équation (2.15) devient donc :

$$C_{\mathrm{ijkl}} \frac{\partial^2 u_{\mathrm{k}}}{\partial x_{\mathrm{j}} \partial x_{\mathrm{l}}} = \rho \frac{\partial^2 u_{\mathrm{i}}}{\partial t^2} \tag{2.17}$$

On cherche des familles particulières de solutions de (éqn. 2.17) sous forme d'ondes planes :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_0 \mathsf{exp}\left\{j(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)\right\} \tag{2.18}$$

où j est l'unité imaginaire, ω est la pulsation, $\boldsymbol{U}_0$ est le vecteur modulant du déplacement de particule et $\boldsymbol{\kappa}$ est le vecteur d'onde. Il convient pour la suite de définir ici la direction de polarisation $\boldsymbol{n}_u$ et la direction de propagation $\boldsymbol{n}_\kappa$:

$$\boldsymbol{n}_u = \frac{\boldsymbol{U}_0}{\|\boldsymbol{U}_0\|} \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{n}_\kappa = \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\|\boldsymbol{\kappa}\|} \tag{2.20}$$

En remplaçant (éqn. 2.18) dans (éqn. 2.17) et en désignant $\mathbf{Id}_3$ l'identité de l'espace des matrice réelle $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, on se ramène à :

$$\left(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\kappa}) - \rho\omega^2 \mathbf{Id}_3\right) \boldsymbol{U}_0 = \mathbf{0} \tag{2.21}$$

dont la forme explicite s'écrit en 3 lignes correspondant aux 3 directions du repère Cartésien $\{\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3\}$:

$$\begin{cases} (\Gamma_{11} - \rho\omega^2)U_{01} + \Gamma_{12}U_{02} + \Gamma_{13}U_{03} = 0 \\ \Gamma_{12}U_{01} + (\Gamma_{22} - \rho\omega^2)U_{02} + \Gamma_{13}U_{03} = 0 \\ \Gamma_{13}U_{01} + \Gamma_{23}U_{02} + (\Gamma_{33} - \rho\omega^2)U_{03} = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

où $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\kappa})$ est le tenseur d'ordre 2 nommé *tenseur acoustique* ou bien *tenseur de Christoffel* fonction de $\boldsymbol{\kappa}$, paramétré par $\boldsymbol{C}$ suivant l'expression :

$$\Gamma_{\mathrm{ik}} = C_{\mathrm{ijkl}} \kappa_{\mathrm{j}} \kappa_{\mathrm{l}} \tag{2.23}$$

Les expressions de l'équation (2.21) ou de l'équation (2.22) se traduisent par le fait que le vecteur de polarisation $\boldsymbol{U}_0$ est un vecteur propre du tenseur $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\kappa})$ associé à la valeur propre :

$$\Lambda = \rho\omega^2 \tag{2.24}$$

La résolution de ce problème aux valeurs propres se fait en annulant le déterminant caractéristique :

$$F(\omega; \boldsymbol{\kappa}) = \mathsf{det}\left(\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\kappa}) - \rho\omega^2 \mathbf{Id}_3\right) = 0 \tag{2.25}$$

Cette dernière équivaut à une équation cubique en $\rho\omega^2$ dont la résolution est triviale. Puisque le tenseur élastique $\boldsymbol{C}$ est défini-positif, le tenseur acoustique $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\kappa})$ est également défini-positif. Il possède par conséquent 3 valeurs propres positives associées aux 3 vecteurs propres réels. Physiquement, les 3 valeurs propres Λ sont liées avec trois vitesses de propagation :

$$\boldsymbol{c}^p = \frac{\omega}{|\boldsymbol{\kappa}|}\boldsymbol{n}_\kappa = \sqrt{\frac{\Lambda}{\rho|\boldsymbol{\kappa}|^2}}\boldsymbol{n}_\kappa \tag{2.26}$$

À chaque point $\boldsymbol{x}$ du front d'onde, se superposent 3 ondes planes dont les directions de polarisation $\boldsymbol{U}_0$ sont perpendiculaires entre elles et auxquelles sont associées des vitesses de propagation calculées ci-dessus dans l'équation (2.26). Chaque onde plane de vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ caractérisée par la paire $(\boldsymbol{U}_0; \Lambda)$ contribue à un mode de propagation. Elle peut être caractérisée par l'angle de polarisation qui est par définition, l'angle entre la direction de mouvement de particule $\boldsymbol{n}_u$ et la direction de propagation $\boldsymbol{n}_\kappa$

$$\alpha_\mathrm{p} = \mathsf{acos}\left(\boldsymbol{n}_u \cdot \boldsymbol{n}_\kappa\right) \tag{2.27}$$

En général, α_p prend valeur entre $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Le cas où $\alpha_\mathrm{p} = 0$ correspond à une polarisation de pression pure, *i.e.* onde P, tandis que le cas $\alpha_\mathrm{p} = \frac{\pi}{2}$ correspond à une polarisation de cisaillement pur, *i.e.* onde S. Dans la plupart des cas, sauf pour le matériau isotrope ou dans des directions spécifiques pour des matériaux de symétrie inférieure, la direction de polarisation $\boldsymbol{n}_u$ n'est ni colinéaire ni perpendiculaire à la direction de propagation $\boldsymbol{n}_\kappa$. Lorsque l'angle α_p est au voisinage de 0 ou de $\frac{\pi}{2}$, on parle d'ondes *quasi*-P ou *quasi*-S.

2.2.2 Visualisation des modes propres d'onde volumique

D'une manière habituelle, le comportement élastodynamique anisotrope d'un milieu est visualisé par 3 type de surface : *surfaces de vitesse*, *surfaces de lenteur* et surfaces d'onde ou *front d'onde*.

a. **Surface de vitesse de phase**. La surface de vitesse de phase est la représentation la plus naturelle, elle est formée par l'ensemble des extrémités des vecteurs de vitesse de phase, *i.e*, vecteur de direction de propagation et de longueur égale à la vitesse de phase $\boldsymbol{c}^p$ de la propagation d'onde plane dans cette direction.

b. **Surface de lenteur**. La surface de lenteur est formée de la même manière que la surface de vitesse avec une longueur des vecteurs égale à l'inverse de la vitesse de phase. La lenteur est déduite de la relation de dispersion, *i.e.*, de l'équation (2.25) :

$$F(\omega; \boldsymbol{\kappa}) = 0 \equiv F_*(1; \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\omega}) = F_*(1; \boldsymbol{s}) = 0 \tag{2.28}$$

c. **Front d'onde** et **Surface de vitesse de groupe**. Ces deux surfaces sont les mêmes à une constante près. Le front d'onde est l'enveloppe des ondes planes à un instant t, sachant qu'à l'instant $t_0 = 0$, l'onde passe par l'origine. Il est en fait formé par la trace de l'extrêmité du vecteur de vitesse de groupe $\boldsymbol{c}^g$, qui est défini par :

$$\boldsymbol{c}^g = \mathsf{grad}_{\boldsymbol{\kappa}}\omega \tag{2.29}$$

et peut être calculé, selon[Cerveny, 2001], à partir du vecteur de lenteur $\boldsymbol{s}$ et de la polarisation propre associée :

$$c_{\mathrm{i}}^g = \frac{C_{\mathrm{ijkl}}}{\rho} s_{\mathrm{l}} U_{0\mathrm{j}} U_{0\mathrm{k}} \tag{2.30}$$

Du point de vue énergétique, dans le cas des milieux conservatifs et pour les ondes planes, le vecteur de vitesse de groupe $\boldsymbol{c}^g$ est égal au vecteur de vitesse du flux d'énergie.

En général, les surfaces (de lenteurs, de vitesse de phase, le front d'onde) ont chacun 3 branches séparables à l'exception du cas d'un matériau isotrope où les deux branches correspondant aux modes *quasi*-S coïncident. La FIG. 2.2 illustre d'une façon schématique, en 2D, la réciprocité polaire entre la surface de lenteur et la surface de vitesse de groupe. Une partie d'une section plane de lenteur (à gauche) d'une branche d'onde *quasi-S* d'un matériau particulier est associée à la partie correspondante de vitesse de groupe (à droite). Les deux courbes sont les polaires réciproques l'une de l'autre par rapport au cercle unité. Cela pour dire que l'une est colinéaire à l'enveloppe des vecteur normaux de l'autre. Ainsi, la concavité de la surface de lenteur impose la torsade de la surface de vitesse de groupe. Ce fait entraîne les phénomènes de singularité et de multivariabilité, témoignés par deux type de points. Les marqueurs ronds verts représentant les points d'inflexion de la courbe à gauche deviennent les points de singularité dans l'image à droite. Les marqueurs carrés noirs sont les 3 points ayant les vecteurs normaux parallèles à gauche et qui se trouvent sur une même direction à droite.

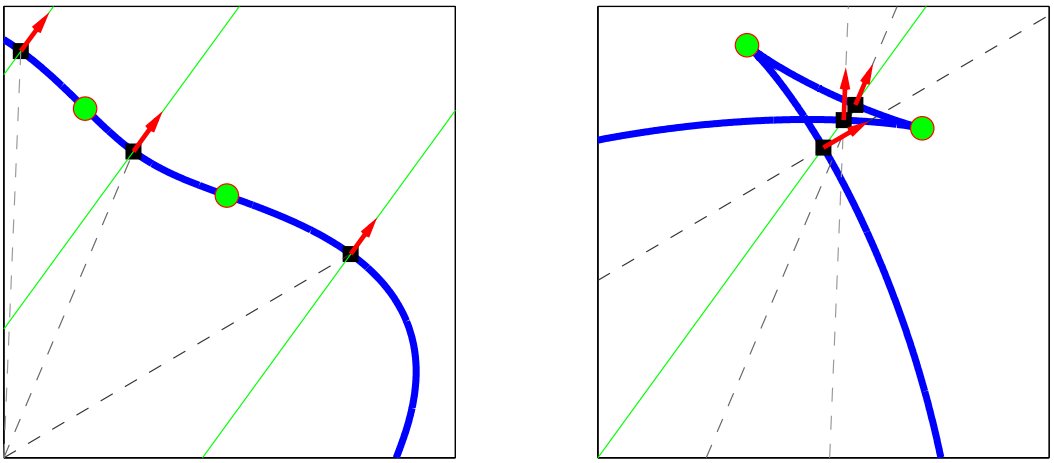


FIG. 2.2 – Illustration schématique 2D de la réciprocité polaire entre la surface de lenteur (à gauche) et celle de vitesse de groupe (à droite).

2.2.3 Effets de l'anisotropie sur le comportement élastodynamique d'un espace homogène infini

Si le comportement élastodynamique d'un espace homogène isotrope infini peut se décrire d'une façon simple par des fronts d'ondes sphériques d'une onde P plus rapide et de deux ondes S de même allure, ce n'est plus le cas en présence d'anisotropie. Cette présente section vise à fournir un résumé des différences de propriétés les plus importantes pour une onde plane se propageant dans un espace homogène anisotrope par rapport à un milieu isotrope.

a. **Dépendance directionnelle des vitesse de propagation.** Comme attendu, à la différence du cas isotrope, les vitesses de propagation dépendent en général de la direction dans laquelle l'onde se propage.

b. **Quasi-modes.** Bien que les polarisations des 3 modes propres restent perpendiculaires entre elles, l'angle de polarisation α_{P} n'est égal ni à 0 ni à $\frac{\pi}{2}$. D'où les 3 modes sont en général dits 1 mode quasi-compression (qP) et 2 modes quasi-cisaillement (qS1, qS2). Par contre, cela n'empêche pas la possibilité que des modes purs existent dans des directions spécifiques.

c. **Séparation d'ondes (*quasi-*)cisaillement.** Les 3 modes propres d'onde possèdent en général des propriétés différentes. À part la différence par définition en terme de polarisation, les vitesses de propagation dans une direction arbitraire ne sont pas identiques. Cela distingue l'anisotropie de l'isotropie, notamment pour les deux les plus lentes. À la différence des ondes pures de cisaillement dans les milieux isotropes, l'écart de vitesse entre les deux ondes *quasi*-S entraîne une séparation en temps et en espace de ces dernières.

d. **Relation entre vitesse de phase et vitesse de groupe.** Les vecteurs de vitesse de phase et de vitesse de groupe d'une onde individuelle quelconque se propageant dans un milieu homogène anisotrope possèdent différents cosinus directeurs et différentes magnitudes. Comme le vecteur de vitesse de phase est perpendiculaire au front d'onde et le vecteur de vitesse de groupe coïncide avec la vitesse de propagation de l'énergie, on peut déduire que le flux d'énergie (*i.e.*, le vecteur de Poynting où bien le rayon dans le cas d'ondes à haute fréquence) n'est pas perpendiculaire au front d'onde. Toutes ces propriétés distinguent le cas anisotrope au cas isotrope où les vitesses de phase, de groupe et de l'énergie coïncident et sont perpendiculaires au front d'onde sphérique.

e. **Direction multivariable des ondes *quasi*-cisaillement.** Comme la surface de vitesse de groupe peut être géométriquement déduite à travers une transformation par polaire réciproque appliquée à la surface de lenteur et comme cette dernière peut posséder des parties concaves (sauf pour la branche d'onde *quasi*-P), il est possible que dans une direction particulière, le front d'onde d'une onde plane monochromatique soit constitué de plusieurs points distincts (FIG 2.2). Cela se traduit par le phénomène que plusieurs ondes de même mode *quasi*-S se propagent dans différentes directions mais leurs énergies contribuent à une direction unique.

f. **Singularité des ondes *quasi*-cisaillement.** La singularité d'onde est le fait que pour certaines directions, les branches *quasi*-S des fronts d'onde se croisent l'une avec l'autre ou se replient sur elles-mêmes. À proximité de cette direction, le comportement des ondes *quasi*-S est extrêmement complexe. Cette anomalie n'existe pas dans les milieux isotropes.

2.2.4 Illustration des modes d'onde volumique par type de symétrie.

Dans cette section, à travers une mise en pratique des équations énumérées dans la section 2.2.1 utilisant le logiciel MATLAB pour résoudre numériquement le problème de Christoffel dans toutes les directions de l'espace tridimensionnel, on essaie de visualiser les différentes surfaces présentées dans la section 2.2.2. Cela a pour but de donner une illustration de la complexité mentionnée dans la section 2.2.3 du comportement élastodynamique causée par l'anisotropie des différentes symétries évoquées dans la section 2.1.

Les matériaux utilisés dans ces démonstrations purement numériques sont en provenance de différents origines. Ils peuvent être : un matériau réel (comme pour le cas isotrope qui est en effet celui du modèle sédimentaire du Bassin de Caracas étudié dans [Delavaud, 2007]), un matériau partiellement manipulé en modifiant celui d'un cristal (comme pour les cas cubiques (Nickel), hexagonale (Béryl) ou orthotrope (α-Uranium) avec les coefficients d'élasticité référée de [Hearmon, 1961]) afin de le rendre comparable (en terme de vitesse de propagation) à un milieu géologique, ou bien un matériau complètement synthétisé faute de référence dans la littérature (comme pour le cas du matériau triclinique ayant le tenseur d'élasticité qui est en effet obtenu d'une réalisation du modèle probabiliste de Soize [2001] des matrices définies-positives). Par ailleurs, une densité volumique $\rho = 2000\mathrm{kg/m^3}$ est fixé pour tous ces matériaux.

EXEMPLE 2.1. Visualisations des modes propres d'onde volumique

---

Description

Pour chacune de ces illustrations, deux options de visualisation sont présentées. D'abord, les surfaces (3D) des 2 modes (*quasi*-) cisaillement et 1 mode (*quasi*-) longitudinal (respectivement de gauche à droite) sont séparément disposées, correspondant aux lenteurs, aux polarisations, aux vitesses de phase et aux vitesses de groupe (respectivement de haut en bas). Dans un deuxième temps, les sections des lenteurs, de vitesse de phase et de vitesse de groupe (respectivement de gauche à droite) traversant l'origine et perpendiculaire aux $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ et $\boldsymbol{i}_3$ (respectivement de haut en bas) sont superposées. Les calculs présentés se basent en grandes lignes sur l'algorithme proposé dans [Abbudi and Barnett, 1991]. Une seule différence par rapport à ce dernier est à noter : la discrétisation des directions d'espace est faite automatiquement par une routine MATLAB partitionnant une sphère unitaire en polyèdre.

Les tenseurs d'élasticité correspondant à ces matériaux sont les suivants :

– **Matériau I** : Isotrope

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 5.985 & 1.985 & 1.985 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 5.985 & 1.985 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 5.985 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{S} & \cdot & \cdot & 2 & 0 & 0 \\ \cdot & \mathrm{Y} & \cdot & \cdot & 2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \mathrm{M.} & \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix} [\times 10^9 \mathrm{Pa}] \tag{2.31}$$

– **Matériau II** : Cubique

$$\boldsymbol{C}_{\text{II}} = \begin{pmatrix} 5.985 & 1.985 & 1.985 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 5.985 & 1.985 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 5.985 & 0 & 0 & 0 \\ \text{S} & \cdot & \cdot & 4 & 0 & 0 \\ \cdot & \text{Y} & \cdot & \cdot & 4 & 0 \\ \cdot & \cdot & \text{M.} & \cdot & \cdot & 4 \end{pmatrix} [\times 10^9 \text{Pa}] \tag{2.32}$$

– **Matériau III** : Isotrope transverse (hexagonal)

$$\boldsymbol{C}_{\text{III}} = \begin{pmatrix} 6.735 & 2.4025 & 1.6525 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 6.735 & 1.6525 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 5.9075 & 0 & 0 & 0 \\ \text{S} & \cdot & \cdot & 2.16625 & 0 & 0 \\ \cdot & \text{Y} & \cdot & \cdot & 1.6325 & 0 \\ \cdot & \cdot & \text{M.} & \cdot & \cdot & 1.6325 \end{pmatrix} [\times 10^9 \text{Pa}] \tag{2.33}$$

– **Matériau IV** : Orthotrope

$$\boldsymbol{C}_{\text{IV}} = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 15 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 14 & 0 & 0 & 0 \\ \text{S} & \cdot & \cdot & 2 & 0 & 0 \\ \cdot & \text{Y} & \cdot & \cdot & 1.5 & 0 \\ \cdot & \cdot & \text{M.} & \cdot & \cdot & 2.5 \end{pmatrix} [\times 10^9 \text{Pa}] \tag{2.34}$$

– **Matériau V** : Triclinique

$$\boldsymbol{C}_{\text{V}} = \begin{pmatrix} 6.369 & 0.461 & 0.880 & 0.671 & -0.303 & -0.178 \\ \cdot & 3.949 & 1.403 & 0.039 & -0.405 & -0.513 \\ \cdot & \cdot & 4.394 & -0.142 & -0.152 & -0.662 \\ \text{S} & \cdot & \cdot & 3.091 & -1.072 & -0.081 \\ \cdot & \text{Y} & \cdot & \cdot & 2.036 & 0.223 \\ \cdot & \cdot & \text{M.} & \cdot & \cdot & 2.047 \end{pmatrix} [\times 10^9 \text{Pa}] \tag{2.35}$$

Discussion

Comme convenu, les visualisations 3D des solutions analytiques des 3 modes d'onde volumique dans un espace infini remplis par les matériaux I-V sont présentées respectivement dans les FIGs (2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 2.11). Les versions 2D correspondantes sont présentées respectivement dans les FIGs (2.4, 2.6, 2.8, 2.10, 2.12).

On constate systématiquement d'un matériau à l'autre les choses suivantes :

– Toutes les visualisations sont centro-symétriques.
– Les vecteurs de polarisation (les flèches en vert situées sur les surfaces en deuxième ligne des visualisations 3D) forment un triplet orthonormé local dans la direction concernée (les flèches en rouge dans les mêmes figures).

- Les angles α_{P} faits par les vecteurs de polarisation (les flèches en vert) avec les directions d'onde (les flèches en rouge) ne sont pas exactement 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour les matériaux anisotropes (II-V). À part ces flèches tracées dans certaines directions, le code de couleur pour les surfaces en deuxième ligne des visualisations 3D correspond aux $\cos\alpha_{\text{P}}$. Il témoingne ainsi que les modes ne sont pas purs.
- Les surfaces (et donc les sections) de lenteurs des modes de (*quasi*-)compression sont toujours convexes. Cela correspond aux surfaces de vitesse de groupe de ces modes ayant le caractère univariable envers les directions.
- Les surfaces de lenteurs des modes de quasi-cisaillement des matériaux (II-V) possèdent des parties concaves, ce qui donne la mutivariabilité des vitesses de groupe en fonction des directions concernées (comme déjà illustrée dans la FIG 2.2).
- À part le cas du matériau isotrope I, les 2 modes de quasi-cisaillement sont en général séparés sauf en quelques points de singularité (qu'on peut constater dans certaines sections de lenteur et de vitesse de phase).

Les remarques suivantes distinguent les visualisations des matériaux :

- Pour le matériau isotrope (matériau I), les surfaces sont sphériques (tous les axes et les plans traversant l'origine sont les axes et les plans de symétrie des surfaces). Les modes sont purs. On peut constater dans les (FIGS 2.3-2.4) qu'il n'y a pas de distinction entre les surfaces de vitesse de phase et les surfaces de vitesse de groupe.
- Pour le matériau cubique (matériau I), on peut constater dans la FIG 2.5 et surtout dans la FIG 2.6 que les 3 plans traversant l'origine et perpendiculaires respectivement à $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$ et $\boldsymbol{i}_3$ sont les plans de symétrie des surfaces. De plus, à la différence du matériau orthotrope IV, les sections d'une même grandeur étudiée sont invariants : les 3 lignes de la FIG 2.6 sont pratiquement identiques.
- Les surfaces de la FIG 2.7, qui correspondent au matériau isotrope transverse (matériau II), sont toutes axisymétriques par rapport à $\boldsymbol{i}_3$. En conséquence, dans la FIG 2.7, les sections de la première ligne apparaissent sous forme des cercles et les 2 dernières lignes sont identiques l'une à l'autre.
- Pour le matériau orthotrope (matériau IV), comme le matériau cubique, les surfaces de la FIG 2.9 connaissent les 3 plans perpendiculaires traversant l'origine en tant que plans de symétrie. Par contre, les 3 lignes de la FIG 2.10 ne sont plus identiques.
- Dans les (FIGS 2.11-2.12), qui correspondent au matériau triclinique (matériau V), à part l'origine qui est le centre de symétrie de tous les objets graphiques, il n'y a aucun autre élément de symétrie.

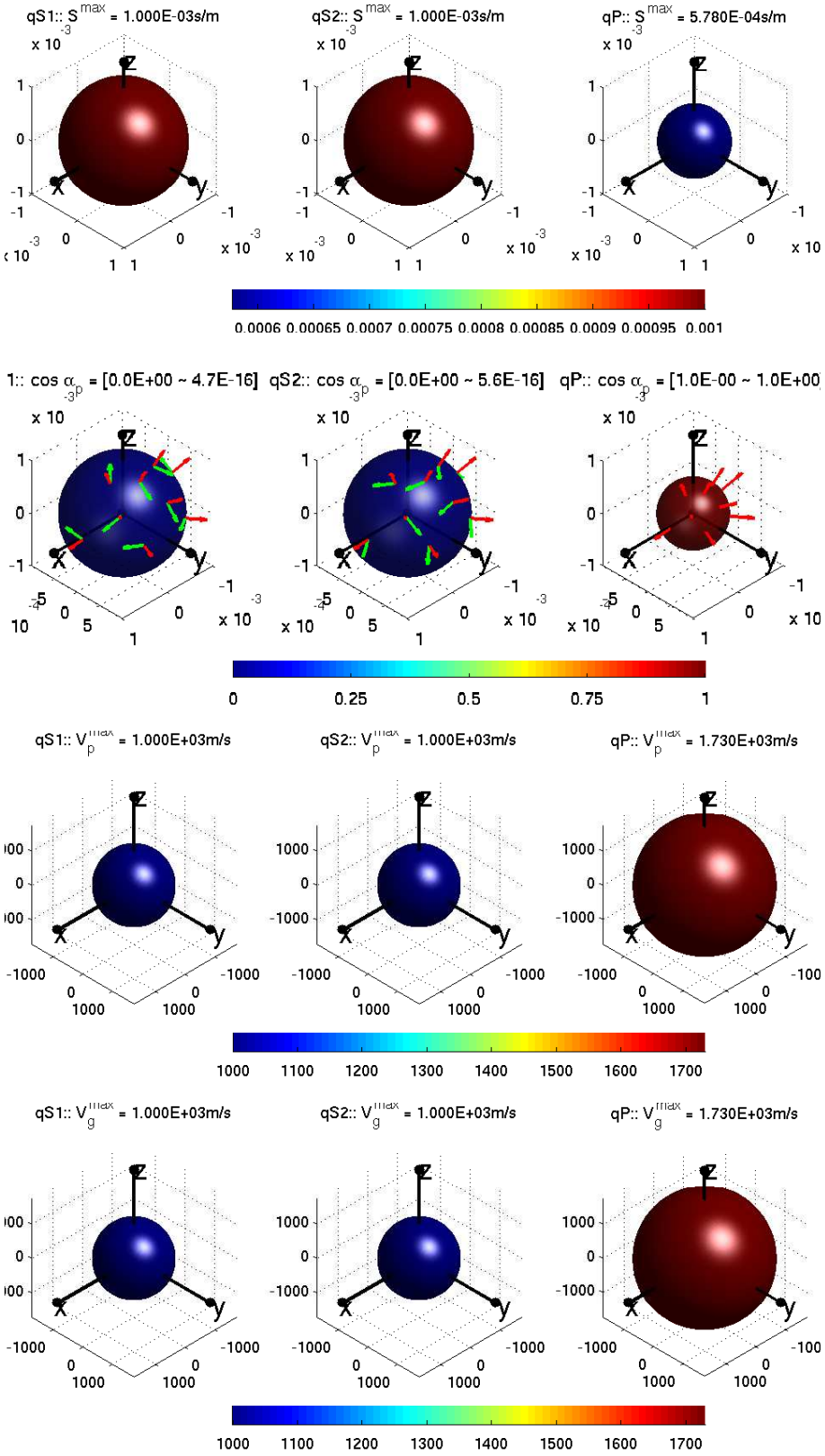


FIG. 2.3 – Illustration d'un matériau isotrope, surfaces des modes propres. De haut en bas : Surfaces de lenteur, Polarisation (vecteurs d'onde en rouge, vecteur de polarisation en vert), Surfaces de vitesse de phase, Surfaces de vitesse de groupe.

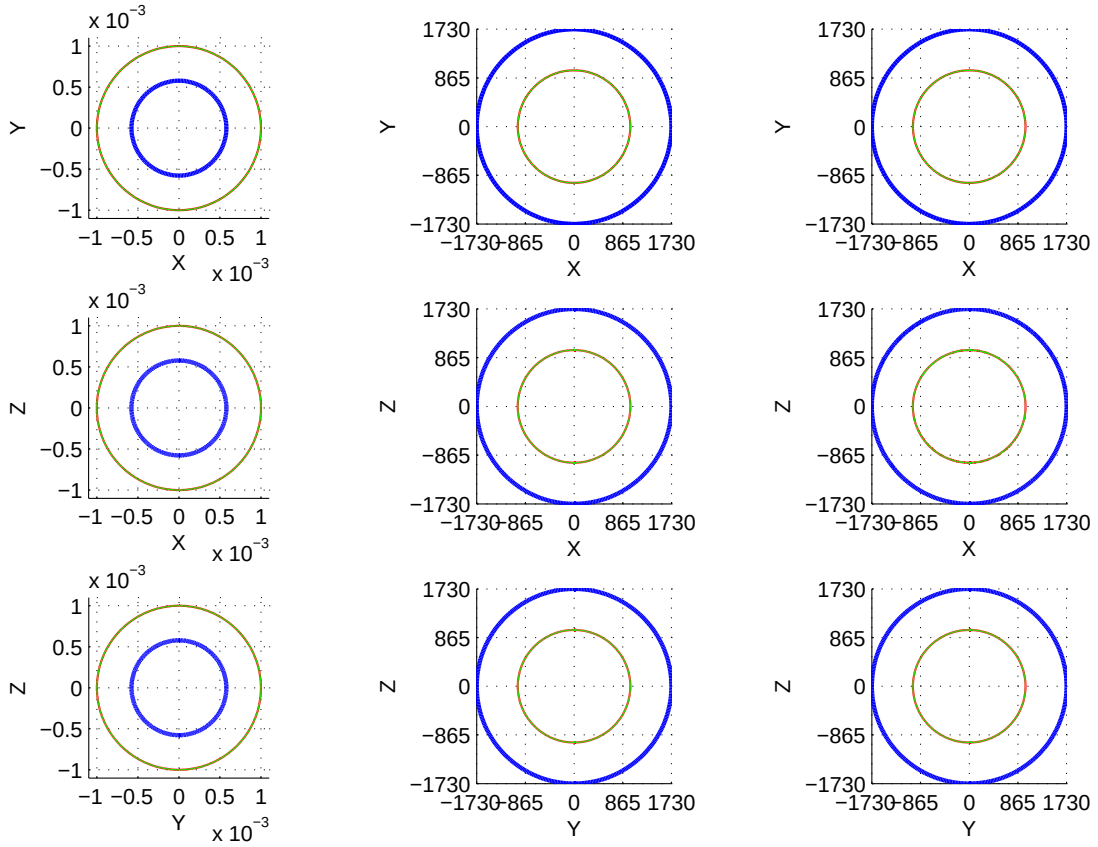


FIG. 2.4 – Illustration d'un matériau isotrope : superposition des sections planes. De haut en bas : les sections planes perpendiculaires respectivement à $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{i}_2$ et $\boldsymbol{i}_1$. De gauche à droite : les sections planes de lenteur, de vitesse de phase et de vitesse de groupe.

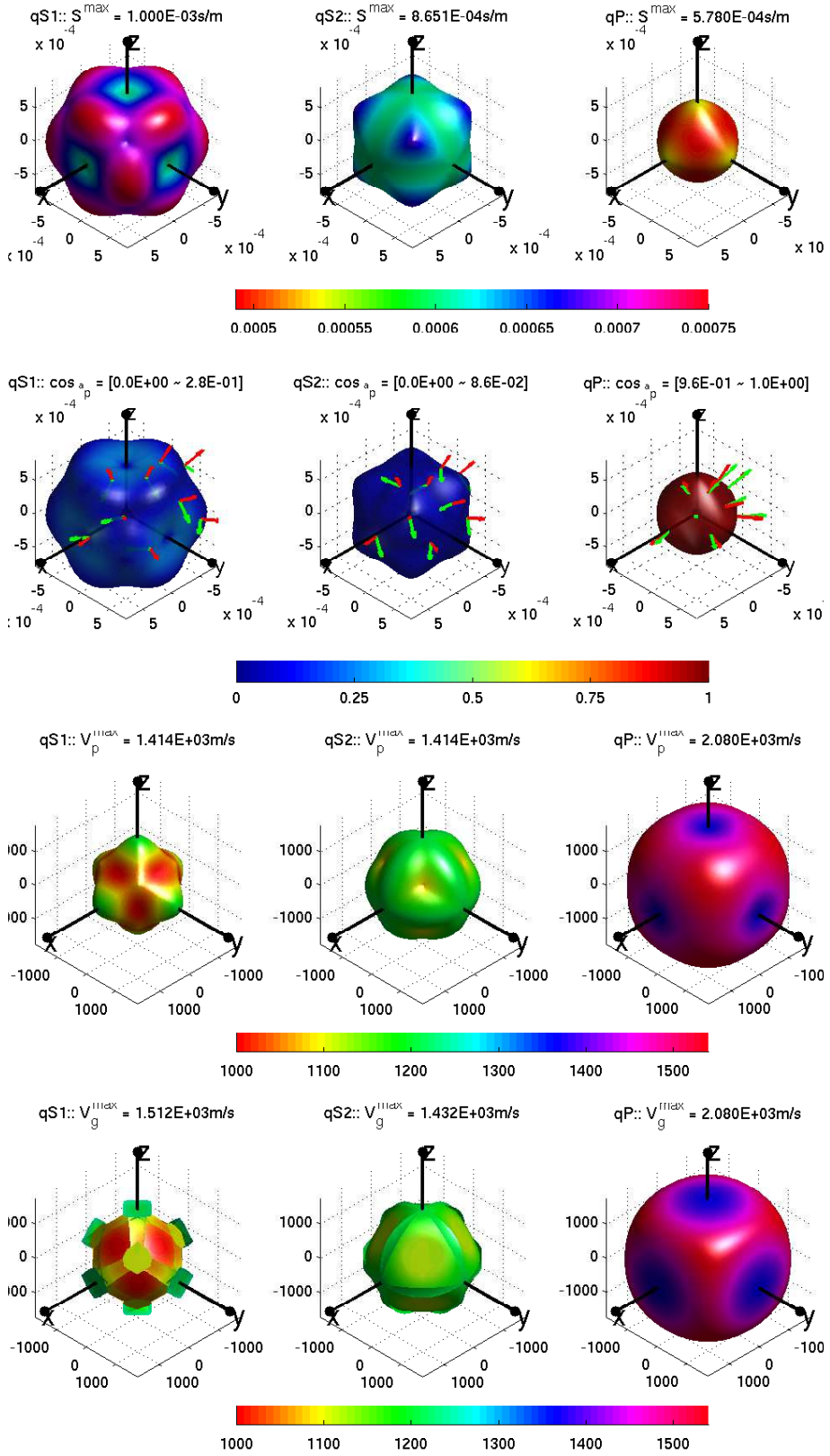


FIG. 2.5 – Illustration d'un matériau cubique, surfaces des modes propres. De haut en bas : Surfaces de lenteur, Polarisation (vecteurs d'onde en rouge, vecteur de polarisation en vert), Surfaces de vitesse de phase, Surfaces de vitesse de groupe.

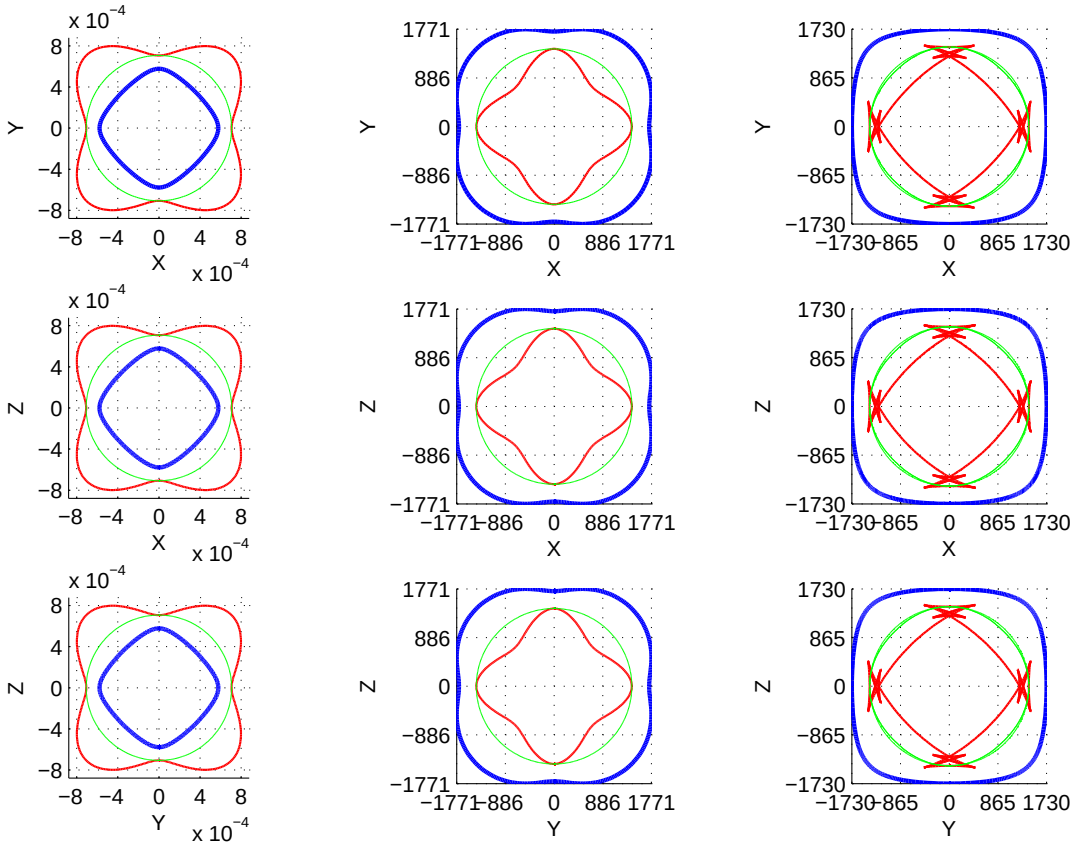


FIG. 2.6 – Illustration d'un matériau cubique : superposition des sections planes. De haut en bas : les sections planes perpendiculaires respectivement à $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{i}_2$ et $\boldsymbol{i}_1$. De gauche à droite : les sections planes de lenteur, de vitesse de phase et de vitesse de groupe.

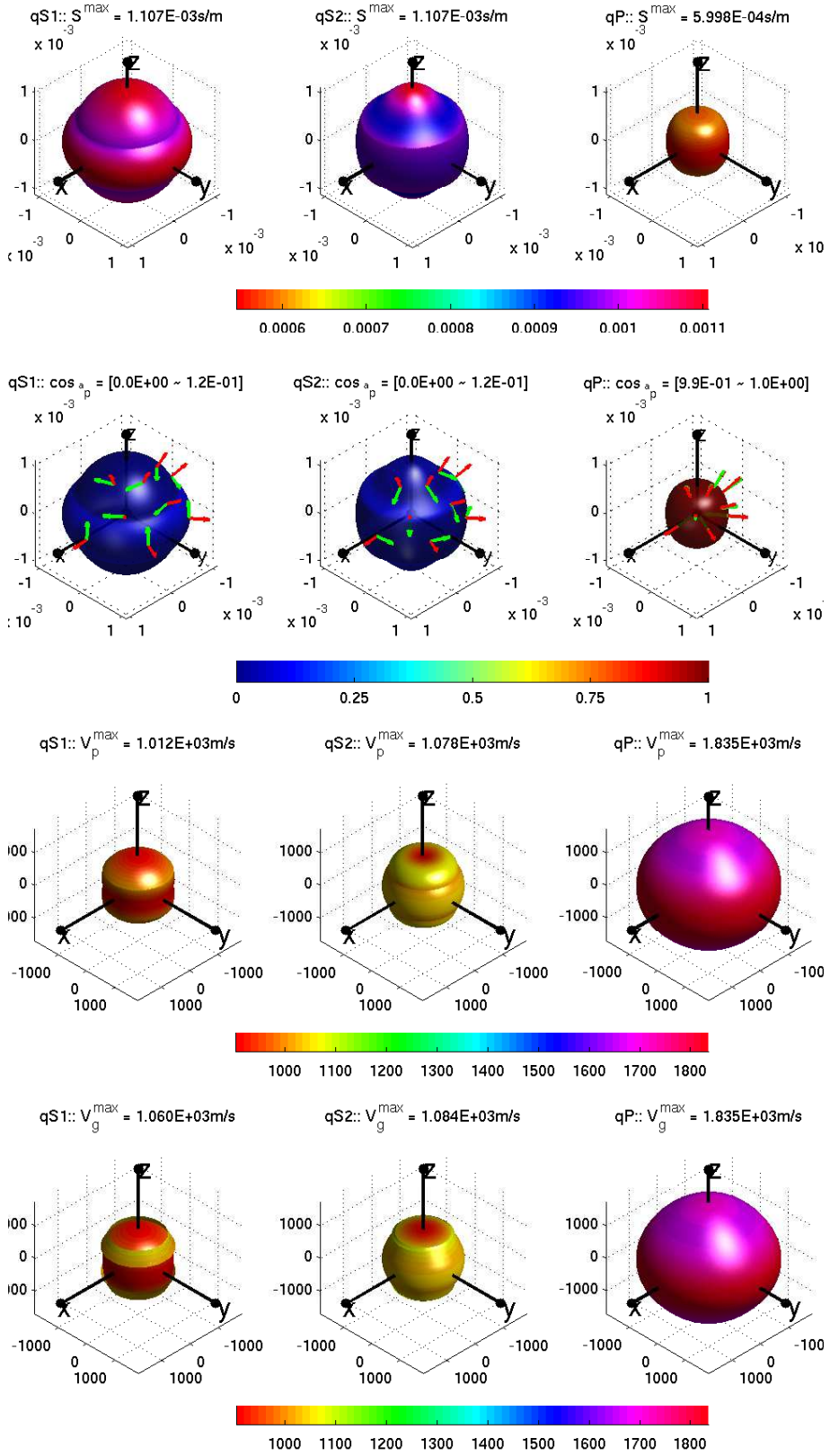


FIG. 2.7 – Illustration d'un matériau isotrope transverse, surfaces des modes propres. De haut en bas : Surfaces de lenteur, Polarisation (vecteurs d'onde en rouge, vecteur de polarisation en vert), Surfaces de vitesse de phase, Surfaces de vitesse de groupe.

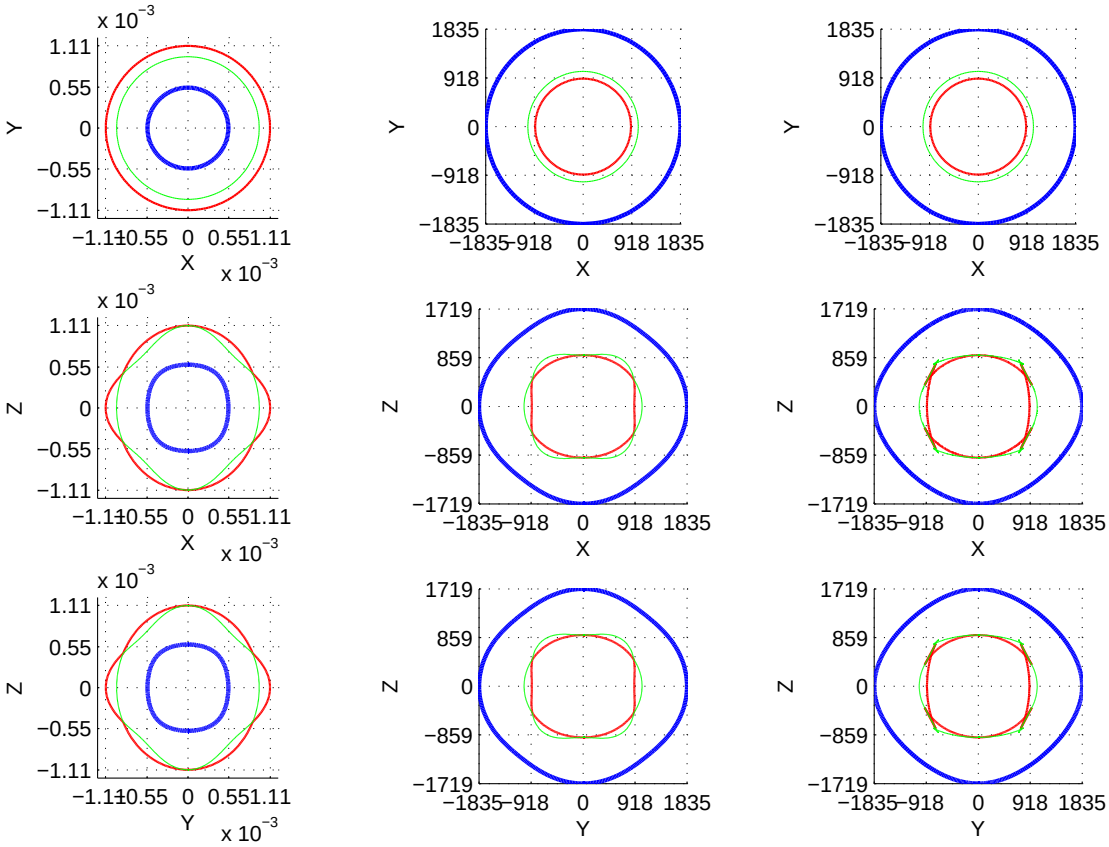


FIG. 2.8 – Illustration d'un matériau isotrope transverse : superposition des sections planes. De haut en bas : les sections planes perpendiculaires respectivement à $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{i}_2$ et $\boldsymbol{i}_1$. De gauche à droite : les sections planes de lenteur, de vitesse de phase et de vitesse de groupe.

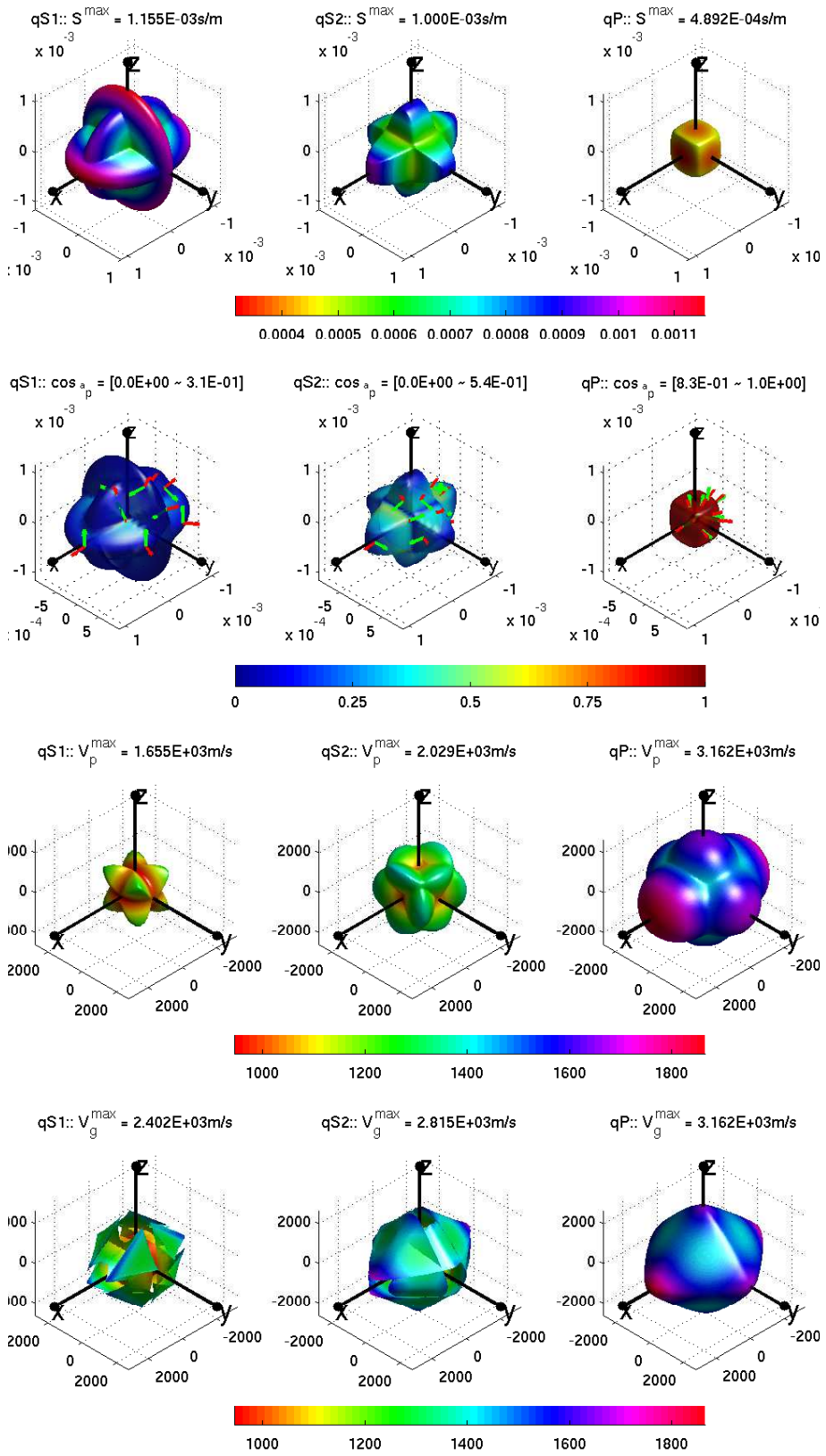


FIG. 2.9 – Illustration d'un matériau orthotrope, surfaces des modes propres. De haut en bas : Surfaces de lenteur, Polarisation (vecteurs d'onde en rouge, vecteur de polarisation en vert), Surfaces de vitesse de phase, Surfaces de vitesse de groupe.

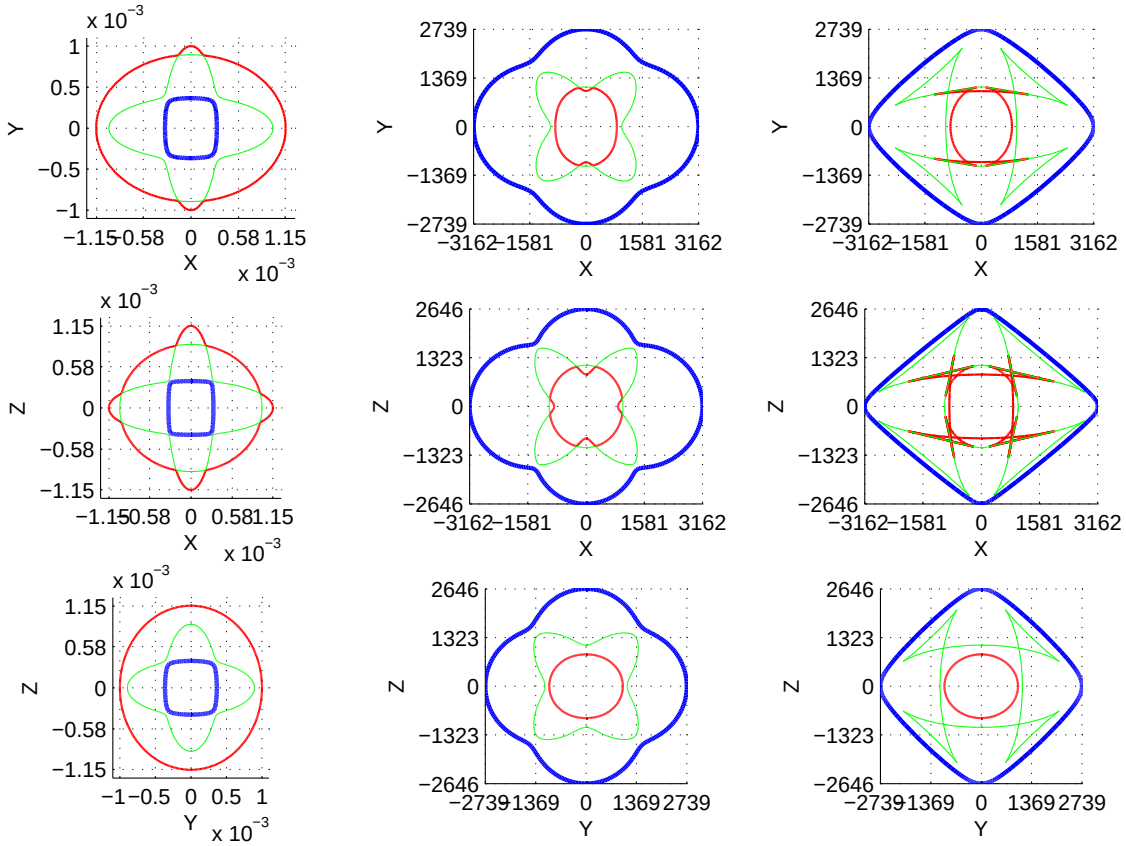


FIG. 2.10 – Illustration d'un matériau orthotrope : superposition des sections planes. De haut en bas : les sections planes perpendiculaires respectivement à $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{i}_2$ et $\boldsymbol{i}_1$. De gauche à droite : les sections planes de lenteur, de vitesse de phase et de vitesse de groupe.

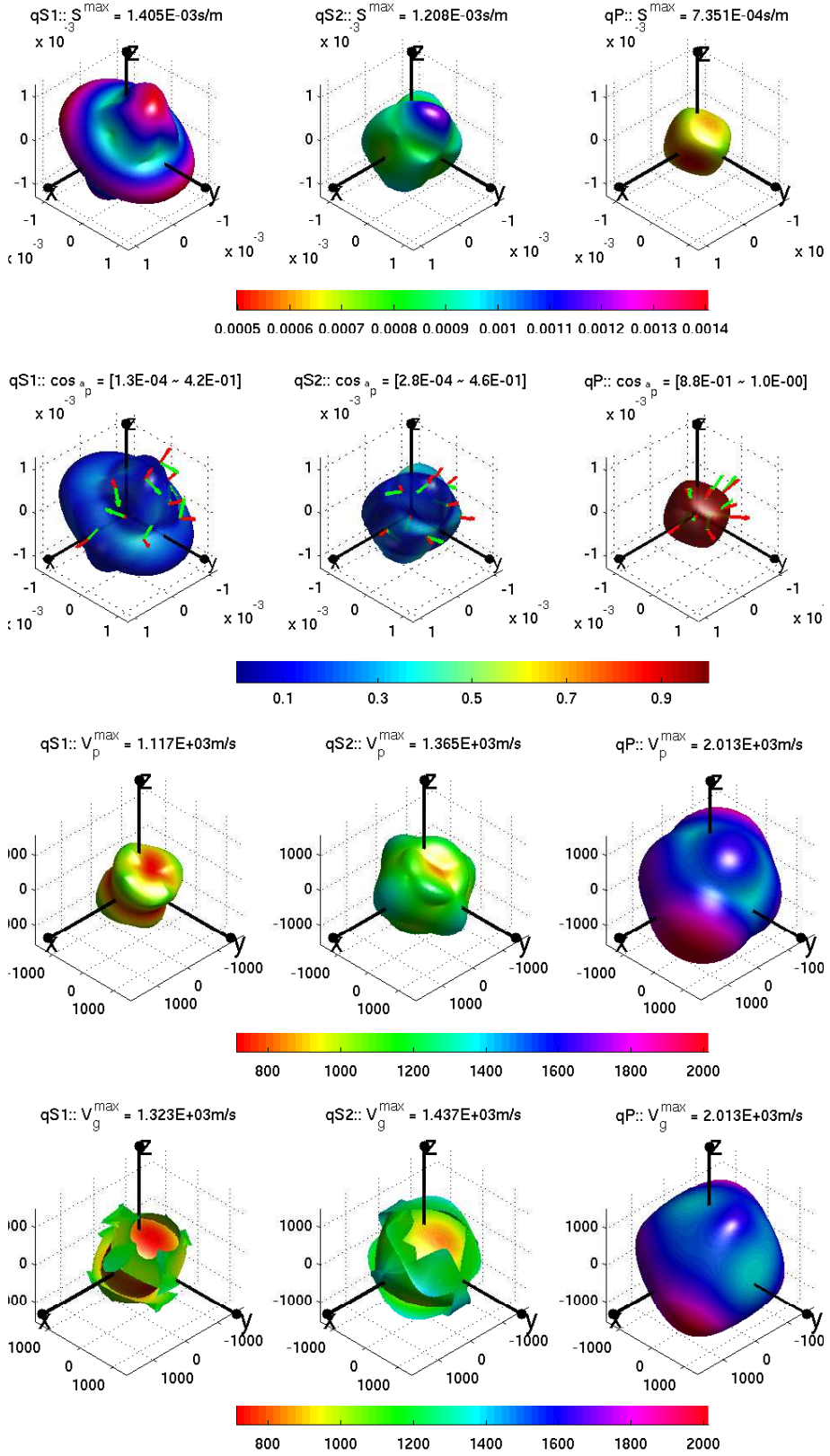


FIG. 2.11 – Illustration d'un triclinique, surfaces des modes propres. De haut en bas : Surfaces de lenteur, Polarisation (vecteurs d'onde en rouge, vecteur de polarisation en vert), Surfaces de vitesse de phase, Surfaces de vitesse de groupe.

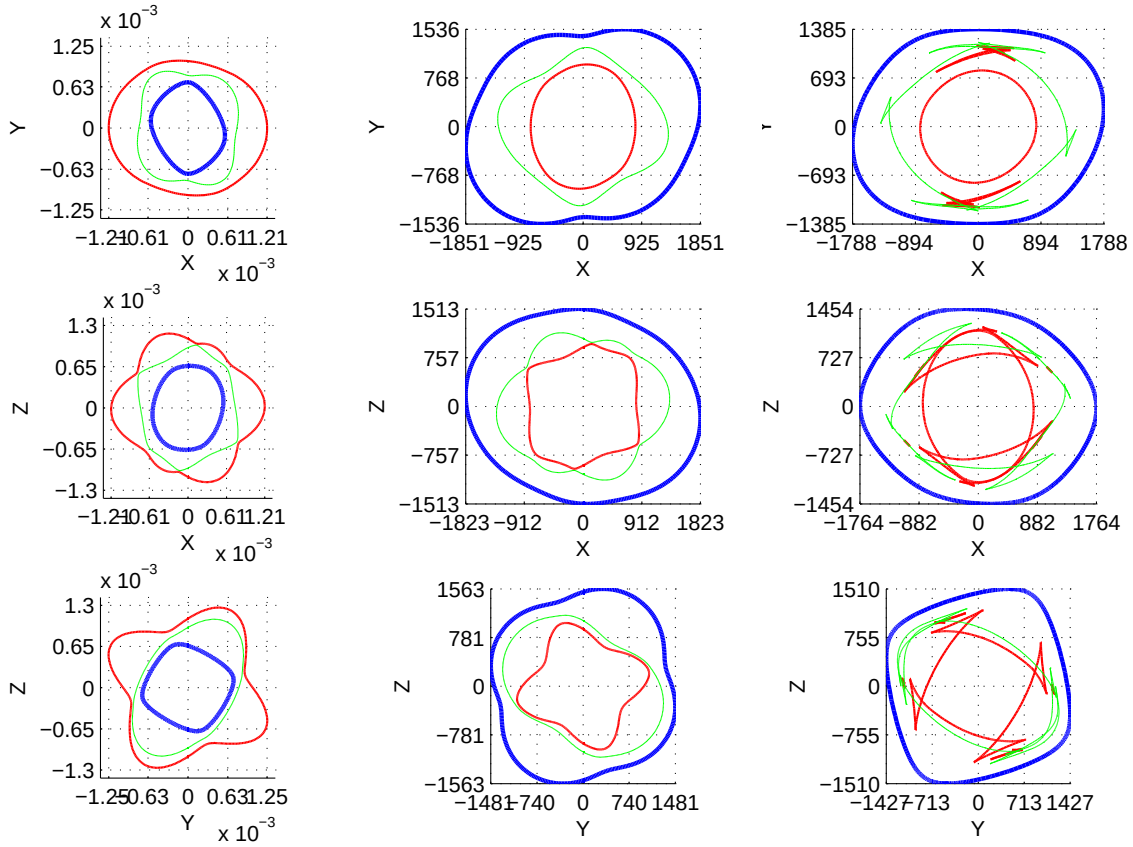


FIG. 2.12 – Illustration d'un matériau triclinique : superposition des sections planes. De haut en bas : les sections planes perpendiculaires respectivement à $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{i}_2$ et $\boldsymbol{i}_1$. De gauche à droite : les sections planes de lenteur, de vitesse de phase et de vitesse de groupe.

2.3 Onde de Rayleigh dans des milieux anisotropes

Dans la section précédente, on a abordé l'existence et la propagation des ondes planes dites volumiques dans un espace non borné. Dans la réalité, cette condition géométrique n'est satisfaite nulle part, *i.e.* tous les milieux sujets à la mécanique connaissent leurs limites géométriques. L'hypothèse de l'infinité de l'espace dans le problème de la propagation d'onde élastique ne peut être adoptée que si on étudie la zone à l'intérieur du domaine qui est considérée comme lointaine, dans un intervalle de temps donné, par rapport aux bords géométriques. Cela est pour dire que dans la zone jugée proche de ces limites (surface libre, interface entre deux matériaux à propriétés élastiques différentes), de nombreux phénomènes se produisent (i) qui modifient les ondes volumiques comme le phénomène de réflexion/transmission éventuellement accompagné par la conversion entre les modes volumiques ou bien qui (ii) créent d'autres type d'onde comme des ondes évanescentes, des ondes d'interface ou de surface *etc.*

Un des phénomènes liés à la limite géométrique qui intéresse les plus les géophysiciens et les séismologues est celui de la propagation d'onde à la surface libre, *i.e.* l'interface sol-air. La raison de cette préoccupation est tout naturellement le fait que l'être humain réside à la surface de la Terre dont les activités sismiques sont dans de nombreux cas marquées par la domination des ondes qui se propagent à la surface. Une autre raison moins passive consiste dans le principe des contrôles non-destructifs où on cherche à identifier les propriétés d'un solide mécanique en ne se basant que sur les enregistrements à la surface de l'objet. Dans le cadre de notre étude, la brève bibliographie figurant dans les paragraphes suivants se limite à l'état-de-l'art des études sur la propagation des ondes de surface dans un demi-espace homogène anisotrope.

2.3.1 Cas des matériaux isotropes

L'existence et les propriétés de l'onde de surface dans un demi-espace homogène sont mathématiquement étudiées pour la première fois par Lord Rayleigh en 1895 pour les matériaux isotropes, donnant son nom à ce type d'ondes. D'une façon générale, l'onde de Rayleigh est définie comme une onde propagative guidée par la surface qui est en effet une combinaison des ondes P et ondes S à proximité de la surface telle que la condition de la traction nulle soit réalisée à la surface libre. Les propriétés principales de l'onde de Rayleigh sont les suivantes :

- Elle se compose d'un mouvement longitudinal et d'un mouvement transversal hors-plan de surface qui font que la trajectoire d'une particule est en général de forme elliptique.
- Elle est non dispersive, *i.e.*, la vitesse de propagation c_{R} (vitesse de phase) est constante en fonction de la fréquence f (où bien la pulsation $\omega = 2\pi f$). Soit le matériau élastique caractérisé par la vitesse de l'onde de compression et la vitesse de l'onde de cisaillement respectivement c_{P} et c_{S}, la vitesse de l'onde de Rayleigh associée est inférieure à c_{S} et doit vérifier la relation suivante [voir Auld, 1973, Udías, 1999, par exemple] :

$$\left(2 - \frac{c_{\mathrm{R}}^2}{c_{\mathrm{S}}^2}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{c_{\mathrm{R}}^2}{c_{\mathrm{P}}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2 - \frac{c_{\mathrm{R}}^2}{c_{\mathrm{S}}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.36}$$

L'expression (2.36) équivaut en effet à une équation cubique en $\left(\frac{c_{\mathrm{R}}}{c_{\mathrm{S}}}\right)^2$ avec pour para-

mètre le coefficient de Poisson :

$$\nu = \frac{c_{\mathrm{P}}^2 - 2c_{\mathrm{S}}^2}{2(c_{\mathrm{P}}^2 - 2c_{\mathrm{S}}^2)} \tag{2.37}$$

Cette équation, pour les matériaux élastiques courants où ν varie entre 0 et $\frac{1}{2}$, possède toujours une solution réelle correspondant à une vitesse c_{R} de l'onde de Rayleigh, qui prend sa valeur environ entre $0,76c_{\mathrm{S}}$ et $0,92c_{\mathrm{S}}$.

– Elle est décroissante en profondeur. La profondeur où une onde de Rayleigh monochromatique de pulsation ω est considérée comme disparue est de l'ordre d'une longueur d'onde $\lambda_{\mathrm{R}} = \frac{\omega}{c_{\mathrm{R}}}$.
– Elle est rétrograde (*i.e.* au début du circuit elliptique, la particule recule en montant) à une faible profondeur et devient prograde (au contraire, au début du circuit elliptique, la particule avance en montant) en profondeur plus grande. La profondeur où le régime rétrograde bascule en régime prograde est de l'ordre de $0,5\lambda_{\mathrm{R}}$.

De nombreuses études dans la littérature concernant l'onde de surface se basent sur ce que Lord Rayleigh a démontré : dans un demi-espace homogène isotrope, une unique onde de Rayleigh existe toujours. La question maintenant porte sur l'existence de ce type d'onde dans des cas où le matériau n'est plus isotrope : Est-ce que l'onde de surface existe ? Si elle existe, est-elle unique ? Et comment peut-on calculer sa vitesse de propagation ?

2.3.2 Cas des matériaux anisotropes

L'extension de l'onde de Rayleigh dans le cas d'un demi-espace homogène anisotrope a été réalisée pour la première fois par Stroh [1962] dans le cadre de ses études sur les matériaux cubiques. Dans cette dernière étude, en proposant un problème aux valeurs propres d'ordre six, Stroh a montré l'existence de l'onde de Rayleigh pour certains types particuliers de matériaux anisotropes. Par contre, la question sur les critères de l'existence de l'onde de Rayleigh dans un milieu anisotrope en général restait ouverte et n'était étudiée qu'à partir du travail de ses deux collègues Ingebrigtsen and Tonning [1969] avec la mise en évidence pour la première fois de l'étroite relation entre le problème d'onde de surface et l'impédance acoustique à la surface. Finalement, la théorie de l'onde de surface en milieu anisotrope linéairement élastique est considérée comme complète après les travaux de Barnett and Lothe [1973, 1974], Lothe and Barnett [1976], Chadwick and Smith [1977] qui, en se basant sur la similarité entre le problème de l'onde de surface avec la théorie du glissement des dislocations, proposent un critère d'existence de l'onde de surface. La plus grande conclusion résumée de ces références est que l'onde de Rayleigh existe toujours sauf si on est dans le cas où une onde volumique exceptionnelle vérifie la condition de surface libre. La formulation et les résultats présentés ci-dessous sont essentiellement extraits des études bibliographies trouvées dans la littérature. Pour cela, les lecteurs sont invités à se référer aux [Barnett and Lothe, 1985, Barnett, 2000, Urba and Miskinis, 2000, Wang, 2004, Fu, 2005] pour de plus amples détails. Il est à remarquer qu'à la similitude de la formulation de Stroh, une autre généralisation de l'équation de Christoffel [Taziev, 1989, Deschamps and Huet, 2009] peut également amener à la résolution des ondes de surface si elles existent mais le critère d'existence de ce type d'onde n'est pas explicité.

D'ailleurs, il convient de noter qu'il n'y a pas seulement le phénomène de l'onde de Rayleigh qui peut se réaliser à la proximité de la surface d'un demi-espace anisotrope. En dehors de ce type d'ondes appelé (dans la littérature où plus tard dans cette thèse) l'*onde de surface subsonique*, ou bien l'*onde de surface à trois composantes*[3], d'autres types d'ondes propagatives peuvent exister et être guidées par la surface de milieux homogènes anisotropes. Il s'agit d'*ondes de surface transsoniques à deux composantes* [Barnett and Lothe, 1985], d'*ondes de surface isolées supersoniques* (à deux composantes) [Gundersen et al., 1991] ou d'*ondes de surface supersoniques à une composante* [Wang and Gundersen, 1993, Barnett and Chadwick, 1991]. Il peut exister d'ailleurs un autre type d'ondes baptisées *ondes à perte* (leaky wave en anglais) constituées d'une pseudo onde de surface supersonique superposition de deux ondes amorties dans la direction de propagation et d'une onde volumique évanescente [Wang and Gundersen, 1993, Darinskii et al., 1999]. Par contre, on remarque à travers une étude statistique (qui reste pour l'instant empirique) que pour notre modèle probabiliste du tenseur d'élasticité à moyenne isotrope[4], une onde de Rayleigh existe toujours quelle que soit la fluctuation globale et le niveau moyen de l'anisotropie. Pour cette raison ainsi que pour des raison de simplicité, la bibliographie de la théorie des ondes de surface présentée au cours de cette section se limite au cas de l'onde de Rayleigh.

2.3.2.1 Formulation de Stroh

Très probablement inspirée du fait qu'une onde de Rayleigh classique (*i.e.*, pour un demi-espace homogène isotrope) se propage dans une direction et décroit dans une autre direction perpendiculaire à cette dernière, la formulation de Stroh [Stroh, 1962] consiste à décomposer un vecteur unitaire d'onde $\dfrac{\boldsymbol{\kappa}}{|\boldsymbol{\kappa}|}$ d'une onde plane monochromatique en deux vecteurs unitaires de direction $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ qui sont perpendiculaires l'un à l'autre. Stroh [1962] a démontré que pour toutes les fonctions à dérivées continues $f \in \mathscr{H}(\mathbb{R})$, il est possible de trouver une paire $(\boldsymbol{a}, p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ telle que le champ de déplacement décrit par :

$$u_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}) = a_{\mathrm{k}} f(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x} + p\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} - ct) \quad \mathrm{k} = 1, 2, 3 \tag{2.38}$$

vérifie l'équation d'onde (2.15). Pour l'instant, la paire de vecteur de direction est choisie d'une façon arbitraire et on ignore le sens physique (ou bien géométrique) de p.

Sans perte de généralité, on cherche les solutions de (2.15) sous forme harmonique :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \exp\Big(\mathrm{j}|\boldsymbol{\kappa}|(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{x} + p\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} - ct)\Big) \tag{2.39}$$

avec $|\boldsymbol{\kappa}|$ le nombre d'onde habituellement donné par la pulsation ω et la vitesse de phase c :

$$|\boldsymbol{\kappa}| = \frac{\omega}{c} \tag{2.40}$$

En substituant (2.39) dans (2.15) on obtient :

$$\Big(\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\kappa}) - \rho\omega^2 \mathbf{Id}_3\Big)\, \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \tag{2.41}$$

[3] le terme composante est utilisé ici dans le sens de solutions propres d'une certaine équation d'onde définie dans la formulation de Stroh

[4] Ce modèle sera présenté dans le **Chapitre** 3

où $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}$ est un tenseur d'ordre 2 défini par :

$$\widetilde{\Gamma}_{\mathrm{ik}} = C_{\mathrm{ijkl}}(m_{\mathrm{i}} + pn_{\mathrm{i}})(m_{\mathrm{k}} + pn_{\mathrm{k}}) \tag{2.42}$$

REMARQUE 2.2. *Une remarque immédiate est que $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}$ peut être considéré comme le cas généralisé du tenseur acoustique de Christoffel exprimé par (2.23). En effet, (2.42) revient à (2.23) si on prend $p = 0$.*

L'équation (2.41) peut être réécrite sous une autre forme :

$$\Big(\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^{\mathrm{T}}) + p^2\mathbf{T}\Big)\boldsymbol{a} = \mathbf{0} \tag{2.43}$$

avec $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ et $\mathbf{T}$ des matrices 3×3 qui ne dépendent que du tenseur élastique, de la paire des directions $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ considérée et de la vitesse de propagation c :

$$Q_{\mathrm{il}} = m_{\mathrm{i}} C_{\mathrm{ijkl}} m_{\mathrm{l}} - \rho c^2 \delta_{\mathrm{il}} \tag{2.44}$$

$$R_{\mathrm{il}} = m_{\mathrm{i}} C_{\mathrm{ijkl}} n_{\mathrm{l}} \tag{2.45}$$

$$T_{\mathrm{il}} = n_{\mathrm{i}} C_{\mathrm{ijkl}} n_{\mathrm{l}} \tag{2.46}$$

Pour que la solution de (2.43) ne soit pas triviale, l'expression suivante doit être satisfaite :

$$\mathrm{Det}\Big(\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^{\mathrm{T}}) + p^2\mathbf{T}\Big) = 0 \tag{2.47}$$

Ce déterminant dans (2.47) est un polynôme d'ordre 6 vis-à-vis de p car les matrices $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ et $\mathbf{T}$ sont de taille 3×3. Par conséquent (2.47) possède 6 racines qui forment en effet 3 paires de racines conjuguées (p,p^*). Les 6 vecteurs propres $\boldsymbol{a}$ de $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ sont alors également donnés sous forme des 3 paires de vecteurs conjugués ($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}^*$).

Comme le but est d'étudier l'onde de surface dont un des caractères essentiels réside dans le fait que la traction résultante à la surface est nulle, il convient de quantifier dans la formulation de Stroh cette grandeur vectorielle. Stroh [1962] a démontré que la traction associée à $\boldsymbol{a}$ résultant sur le plan qui possède $\boldsymbol{n}$ comme vecteur normal définie par :

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{a}] \cdot \boldsymbol{n} \tag{2.48}$$

est donnée par :

$$\boldsymbol{b} = \Big(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} + p\mathbf{T}\Big)\boldsymbol{a} \tag{2.49}$$

Jusqu'à ce point les solutions d'ondes sont bien déterminées dans un premier temps par les paires $(\boldsymbol{a}, p)$. Ainsi, dans le deuxième temps, la traction engendrée sur la surface $\boldsymbol{n}$ est calculée à partir de $\boldsymbol{a}$. Par contre, Stroh [1962] propose une façon plus convenable où en résolvant un autre problème aux valeurs propres équivalent, on peut trouver à la fois le triplet $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, p)$. En effet, avec prise en compte de (2.43), la relation (2.49) implique que :

$$\Big(\mathbf{Q} + p\mathbf{R}\Big)\boldsymbol{a} = -p\boldsymbol{b} \tag{2.50}$$

Ensuite, (2.49) et (2.50) peuvent être regroupées sous la forme blocs matriciels suivante :

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^{\mathrm{T}} & \mathbf{Id}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Id}_3 \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

D'autre part, sachant que $\mathbf{T}$ est une matrice symétrique, définie positive, sa matrice inverse $\mathbf{T}^{-1}$ existe et est alors également définie positive. D'où on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{Id}_3 & -\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Id}_3 \\ \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \tag{2.52}$$

En multipliant côté par côté (2.51) avec (2.52), on se ramène à :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{Id}_3 & -\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^{\mathrm{T}} & \mathbf{Id}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

Le problème aux valeurs propres (2.43) équivaut donc à un autre problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\varrho} = p\boldsymbol{\varrho} \tag{2.54}$$

avec $\mathbf{N}$ une matrice de taille 6×6 :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} & \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} - \mathbf{Q}(c) & -\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

et $\boldsymbol{\varrho}$ le vecteur généralisé (de taille 6) défini par :

$$\boldsymbol{\varrho} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

Étant de taille 6×6, la matrice $\mathbf{N}$ possède en général 6 valeurs propres qui forment 3 paires de valeurs propres conjuguées (p, p^*) avec p les valeurs propres à partie imaginaire positive. Six vecteurs propres associés forment également 3 paires de vecteurs propres conjugués $(\boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\varrho}^*)$. Ainsi, six triplets $(p, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sont déterminés, les solutions propres d'onde sous la forme (2.39) sont ainsi entièrement définies pour une paire de vecteurs $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ choisie. Les solutions physiques sont enfin formées des combinaisons de solutions propres associées aux 3 triplets $(p, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ayant les parties imaginaires positives.

2.3.2.2 Onde de Rayleigh et Impédance acoustique à la surface.

Avant d'aller plus loin dans notre investigation, il convient de souligner à nouveau que on s'intéresse aux ondes de surface de type Rayleigh. Cette onde est guidée par la surface (*i.e.*, l'énergie d'onde se concentre dans la zone à proximité de la surface) et est propagative avec une vitesse de propagation dite *subsonique*.

Onde de Rayleigh dans un demi-espace anisotrope

On considère maintenant un demi-espace homogène anisotrope équipé d'un système Cartésien des repères $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ et on s'intéresse aux solutions d'onde de la forme (2.39) où $\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{i}_3$ est la normale de la surface libre et la direction apparente de propagation $\boldsymbol{m}$ se situe dans la surface libre appelée désormais la surface $\boldsymbol{n}$. Sans perte de généralité, on suppose que $\boldsymbol{m} \equiv \boldsymbol{i}_1$.

Comme on a abordé dans la section (2.3.1) les ondes de surface au sens classique (*i.e.*, en milieu élastique isotrope), une onde de Rayleigh dans un milieu élastique anisotrope, si elle existe, est une superposition des ondes volumiques à la surface $\boldsymbol{n}$ telle que la traction résultante sur ce plan est nulle. Avant d'aller plus loin, on décrit d'abord une onde volumique dans la formulation de Stroh et le sens physique du paramètre p en analysant la section de lenteur. Ainsi, des notions sur les régimes de propagation (*i.e.* subsonique, supersonique et transsonique), qui sont caractérisées par la notions de l'état limite, sont brièvement abordées. Pour ce faire, considérons une section de lenteur qui est en effet une coupe de la surface de lenteur en intersection avec le plan généré par $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$. Un schéma d'illustration de cette dernière est présenté dans la (FIG. 2.13). Si on prend une lenteur s associée à une vitesse de phase quelconque $c = \dfrac{1}{s}$ et trace une ligne $s_1 = s$ dans le plan $s_1 s_3$, chaque point de cette ligne verticale[5] va correspondre à une hypothétique onde volumique qui se propage à une inclinaison θ par rapport à la direction $\boldsymbol{m} \equiv \boldsymbol{i}_1$ et à une lenteur apparente à la surface égale à s.

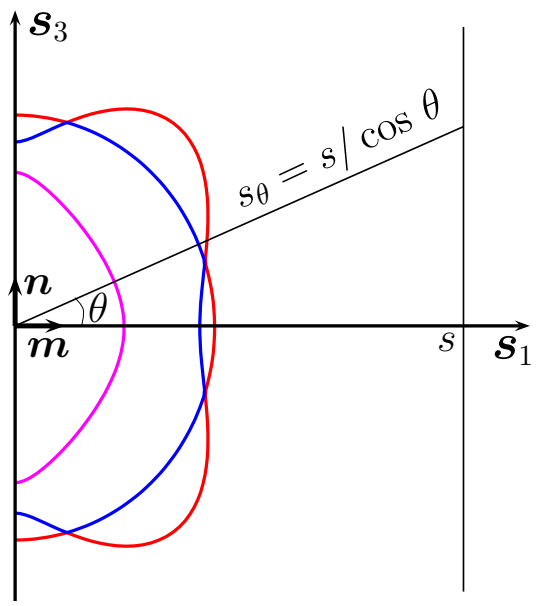


FIG. 2.13 – Section de lenteur dans le plan $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ et la ligne d'une lenteur constante.

D'ailleurs, cette onde peut être décrite dans la référence $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ à travers la formulation de Stroh de l'équation (2.39) avec expressions explicites de $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$, ce qui donne :

$$\boldsymbol{u}_\theta = \boldsymbol{a} \exp\Big(\mathrm{j}|\boldsymbol{\kappa}|(x_1 + p x_3 - ct)\Big) \tag{2.57}$$

[5]Il convient de noter que dans le plan $c_1 c_3$ de l'espace de vitesse de phase, cette ligne correspond à un cercle de rayon $c/2$ et centré à $c_1 = c/2$.

avec le paramètre p lié à l'inclinaison θ par :

$$p = \tan\theta \tag{2.58}$$

REMARQUE 2.3. *Puisque durant un même intervalle de temps, l'onde parcourt une distance plus longue à la surface que selon la direction inclinée, la lenteur apparente est plus petite que la vraie lenteur :*

$$s = s_\theta \cos\theta \tag{2.59}$$

REMARQUE 2.4. *À chaque vitesse hypothétique d'onde volumique on cherche les valeurs possibles de p pour que (2.39) soit une solution de l'équation d'onde (2.15). Comme ce qu'on a développé dans la section précédente, cela conduit à la résolution du problème (2.54) aux valeurs propres d'ordre 6. Pour un tenseur d'élasticité donné et une référence $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ donnée, un état transsonique ou bien un état limite est définie par l'état où la ligne verticale $s_1 = s$ est la tangente à une des branches de la section de lenteur. La lenteur et la vitesse correspondant à cet état sont appelées la lenteur limite et la vitesse limite. Généralement, comme une section de lenteur a 3 branches (1 onde quasi-P et 2 ondes quasi-S), il y a 3 états limites $s_{\mathrm{L}}^{(1)} < s_{\mathrm{L}}^{(2)} < s_{\mathrm{L}}^{(3)}$ où bien $c_{\mathrm{L}}^{(1)} > c_{\mathrm{L}}^{(2)} > c_{\mathrm{L}}^{(3)}$.*
Dans la zone $s < s_{\mathrm{L}}^{(1)}$, et pour une référence $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ quelconque, le fait qu'à chaque lenteur hypothétique s on cherche la paire $(p, \boldsymbol{a})$ vérifiant l'équation d'onde (2.15) donne en général le même résultat que la résolution du problème de Christoffel car les six racines réelles de (2.54) correspondent aux six intersections entre la ligne verticale $s_1 = s$ et les 3 branches de la section de lenteur.
Par contre, l'état limite qui porte le plus d'intérêt pour l'étude des ondes de surface est celui associé à la plus grande des lenteurs limites où bien à la plus petite des vitesses limites. Par conséquent, dans la suite, sans d'autre indication, le caractère limite est réservé particulièrement à cet état qui correspond à la lenteur limite $s_{\mathrm{L}} = s_{\mathrm{L}}^{(3)}$ et à la vitesse limite $c_{\mathrm{L}} = c_{\mathrm{L}}^{(3)}$. Cet état limite, dite premier état transsonique, est défini par la ligne $c = c_{\mathrm{L}}$. Il découpe le plan s_1, s_3 en deux régions : quand $s < s_{\mathrm{L}}$ (et donc $c > c_{\mathrm{L}}$) l'onde se propage dans un régime supersonique, au contraire, dans la région où $s > s_{\mathrm{L}}$ (et donc $c < c_{\mathrm{L}}$), l'onde est dite subsonique. De ce point de vue, l'onde de Rayleigh dans un milieu isotrope est une onde subsonique.

REMARQUE 2.5. *En fonction du nombre de points de tangence, Chadwick and Smith [1977] classifient le (premier) état transsonique en 6 types, dits les types transsoniques :*

- ***Type 1*** *: La ligne $c = c_{\mathrm{L}}$ intersecte le secteur de lenteur extérieur en un point unique.*
- ***Type 2*** *: La ligne $c = c_{\mathrm{L}}$ intersecte à la fois les deux secteurs de lenteur extérieurs en un point unique.*
- ***Type 3*** *: La ligne $c = c_{\mathrm{L}}$ intersecte les trois secteurs de lenteur à un point unique.*
- ***Type 4*** *et* ***Type 6*** *: La ligne $c = c_{\mathrm{L}}$ intersecte les deux secteurs de lenteur extérieurs en respectivement 2 points et 3 points distingués.*
- ***Type 5*** *: La ligne $c = c_{\mathrm{L}}$ intersecte à la fois les deux secteurs de lenteur extérieurs en un point commun et intersecte le secteur de lenteur intérieur en un autre point distingué.*

En résolvant le problème aux valeurs propres 2.54 réécrit pour $\boldsymbol{m} \equiv \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{i}_3$, on peut trouver $(\boldsymbol{a}, p)$ dans l'équation (2.57) avec la traction $\boldsymbol{b}$ associée. Ainsi, une combinaison linéaire des 3 premières solutions propres (3 vecteurs propres associés aux valeurs propres à partie imaginaire positive) est potentiellement la solution d'onde physique (qui sont en effet les ondes

volumiques propagatives, décroissantes en profondeur[6]) :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\alpha=1}^{3} l_\alpha \boldsymbol{u}_\theta^{[\alpha]} = \sum_{\alpha=1}^{3} l_\alpha \boldsymbol{a}_\alpha \exp\Big(\mathrm{j}|\boldsymbol{\kappa}|(x_1 + p_\alpha x_3 - ct)\Big) \tag{2.60}$$

Pour que la solution hypothétique mentionnée dans (2.60) soit la vraie solution d'onde de surface, la condition aux limites de la surface libre doit être remplie. Pour cela, la traction associée au déplacement combiné (2.60) doit s'annuler à la surface $x_3 = 0$:

$$\mathbf{t}_0(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\alpha=1}^{3} l_\alpha \boldsymbol{b}_\alpha \exp\Big(\mathrm{j}|\boldsymbol{\kappa}|(x_1 - ct)\Big) = \mathbf{0} \tag{2.61}$$

D'après l'équation (2.61), la solution d'onde de surface existe sous réserve de l'existence, à une vitesse de propagation c, d'un triplet réel et non trivial des poids l_α qui définit la combinaison linaire des solutions propres. La première étude qui a établi une étroite relation entre la condition de cette existence et le tenseur d'impédance acoustique à la surface a été proposée par Ingebrigtsen and Tonning [1969]. Les auteurs ont démontré que la vitesse de propagation à laquelle s'annule le déterminant du tenseur d'impédance acoustique à la surface est la vitesse de l'onde de surface. Il existe plusieurs définitions du tenseur acoustique à la surface sachant que l'introduction de ce tenseur consiste à fournir une dépendance linéaire de la traction surfacique $\mathbf{t}_0$ par rapport au mouvement des particules à la surface libre. Les études de l'équipe de Barnett [Barnett and Lothe, 1973, Barnett et al., 1973, Barnett and Lothe, 1974, 1985, Lothe and Barnett, 1976], en approfondissant cette initiative et en se basant sur des similarités entre le problème d'ondes de surface vis-à-vis du problème du mouvement de dislocation dans les cristaux, donne lieu aux deux importantes conclusions suivantes :

(i) Si l'onde de surface subsonique (l'onde de Rayleigh) existe, elle est unique : *i.e.* il existe une seule valeur $c_\mathrm{R} \in (0, c_\mathrm{L})$ à laquelle le déterminant du tenseur acoustique à la surface s'annule.

(ii) Cette vitesse existe inconditionnellement dans la plupart des cas sauf si à la vitesse limite c_L, le tenseur acoustique à la surface possède une valeur propre nulle ou aucune valeur propre négative. Dans le premier cas particulier, une onde rasante[7] existe toujours dans la proximité de la surface. Elle est accompagnée par une onde de Rayleigh si le tenseur d'impédance acoustique à la surface possède une autre valeur propre s'annulant ailleurs entre 0 et c_L. Le deuxième cas particulier donne suite à l'existence éventuelle des ondes de surface transsonique et supersonique.

Tenseur d'impédance acoustique à la surface

Concrètement, Barnett and Lothe [1985] propose d'évaluer le tenseur d'impédance acoustique à la surface $\boldsymbol{Z}(c)$ défini comme suit :

$$\boldsymbol{Z}(c) = \mathrm{j}\boldsymbol{B}(c)\boldsymbol{A}^{-1}(c) \tag{2.62}$$

[6] Il convient de noter que le cas contraire où la partie imaginaire de p est négative correspond aux solutions non physiques pour lesquelles l'énergie augmente en profondeur

[7] dont les termes équivalents en anglais sont *surface-skimming bulk wave* où bien *limiting exceptional wave*

dans laquelle $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des matrices obtenues par la juxtaposition respectivement des polarisations propres $\boldsymbol{a}$ et des tractions propres $\boldsymbol{b}$ correspondantes :

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] \tag{2.63}$$

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3] \tag{2.64}$$

REMARQUE 2.6. *Le terme Tenseur d'impédance acoustique est bien pertinent. En effet, l'équation (2.62) équivaut à :*

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Z} \times (-\mathrm{j}\boldsymbol{A}) \tag{2.65}$$

Comme chacun des termes de la matrice $(-\mathrm{j}\boldsymbol{A})$ est homogène à une vitesse (de particule), $\boldsymbol{Z}$ correspond bien à une impédance acoustique dans le sens ou elle caractérise la résistance du milieu soumis à un champ de déplacement.

REMARQUE 2.7. *Il convient de noter qu'avant [Barnett and Lothe, 1985], ces mêmes auteurs ont réussi à calculer la vitesse de Rayleigh en évaluant le déterminant d'une autre matrice, $2j\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ mais cette tentative, malgré des améliorations proposées par Chadwick and Smith [1977], ne donne pas suite à une condition explicite d'existence d'onde de surface qui exige une analyse précise autour de la vitesse limite.*

Critère sur $\boldsymbol{Z}(c)$ pour l'existence d'onde de Rayleigh

Si l'onde de Rayleigh existe et se propage à une vitesse de phase c_{R}, elle correspond à un triplet non-trivial des coefficients $\{l_\alpha \,|\, \alpha = 1, 2, 3\}$ tel que la combinaison linéaire $\mathbf{t}_0$ dans l'équation (2.61) s'annule en temps (quel que soit t) et en espace (quel que soit x_1). Pour ce faire, l'égalité suivante doit être satisfaite :

$$\boldsymbol{B}[l_1\ l_2\ l_3]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \tag{2.66}$$

ce qui équivaut à

$$\det \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{à } c = c_{\mathrm{R}}. \tag{2.67}$$

Or, en utilisant l'équation (2.65) de la (REMARQUE 2.6), on a :

$$\det \boldsymbol{B} = \mathrm{j} \times \det \boldsymbol{Z} \times \det \boldsymbol{A} \tag{2.68}$$

Comme le fait que les polarisations propre $\boldsymbol{a}_\alpha$ forment une base indépendante implique que $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, les équations (2.67-2.68) obligent l'annulation du déterminant du tenseur d'impédance acoustique à la vitesse c_{R} :

$$\det \boldsymbol{Z} = 0 \quad \text{à } c = c_{\mathrm{R}}. \tag{2.69}$$

Barnett and Lothe [1985] ont démontré que $\boldsymbol{Z}(c)$ est *Hermitienne*[8] et que ses valeurs propres (qui sont réelles par conséquent) prennent des valeurs positives à $c = 0$ et sont monotonement décroissantes [Chadwick and Smith, 1977] dans $0 \leq c \leq c_{\mathrm{L}}$. Or, toutes ces valeurs propres ne peuvent pas être strictement positives dans cet intervalle subsonique. Il y a donc au moins une valeur propre qui devient non-positive avec l'augmentation de c. D'où la condition nécessaire et suffisante de l'existence unique de l'onde de Rayleigh a été formulée et prouvée dans [Barnett

[8] Une matrice est dite *Hermitienne* si elle est égale à sa matrice transconjugée

and Lothe, 1985] est que à la vitesse limite $c = c_{\mathrm{L}}$, au moins une des deux inégalités suivant doit être vérifiée :

$$\begin{cases} \text{Soit} \quad \det \boldsymbol{Z}(c_{\mathrm{L}}) < 0 & \text{(a)} \\ \text{Soit} \quad [\mathrm{tr}\, \boldsymbol{Z}(c_{\mathrm{L}})]^2 - \mathrm{tr}\,[\boldsymbol{Z}^2(c_{\mathrm{L}})] < 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{2.70}$$

Si on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ les 3 valeurs propres de $\boldsymbol{Z}$, une forme alternative des critères (2.70) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Soit} \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\big|_{c_{\mathrm{L}}} < 0 & \text{(a)} \\ \text{Soit} \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3\big|_{c_{\mathrm{L}}} < 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{2.71}$$

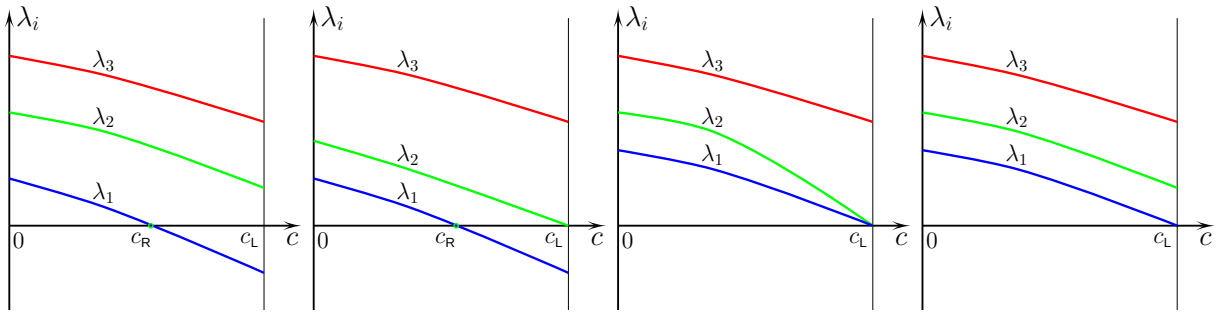
De plus, toujours selon [Barnett and Lothe, 1985], il y a au maximum une valeur propre qui peut être négative quand $c < c_{\mathrm{L}}$. En conséquence, les critères (2.70) ou (2.71) équivalent à une forme plus compacte [voir Urba and Miskinis, 2000] :

> La condition nécessaire et suffisante pour qu'une onde de Rayleigh existe est qu'une (unique) des valeurs propres du tenseur d'impédance acoustique à la surface $\boldsymbol{Z}(c)$ soit négative à la vitesse limite. Si on note λ_1 la plus petite valeur propre de $\boldsymbol{Z}$, cette condition s'écrit comme :
>
> $$\lambda_1(c_{\mathrm{L}}) < 0 \tag{2.72}$$

En raison de sa simplicité, ce critère (2.72) va être utilisé dans la suite en tant que critère définitif de l'existence de l'onde de Rayleigh subsonique.

Typologie de $\{\lambda_i(c)\}$ vis-à-vis du critère de l'existence de l'onde de Rayleigh

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement la classification selon [Barnett and Lothe, 1985] de l'espace des valeurs propres $\{\lambda_i(c) \,|\, i = 1, 2, 3\}$ du tenseur d'impédance acoustique $\boldsymbol{Z}(c)$. D'après cette référence, il y a 4 types possibles de l'ensemble des valeurs propres λ_i.



(a) Cas de figure 1 (b) Cas de figure 2 (c) Cas de figure 3 (d) Cas de figure 4

FIG. 2.14 – Cas 1-4 : les quatre possibilités [selon Barnett and Lothe, 1985] de la variabilité des valeurs propres du tenseur d'impédance acoustique $\boldsymbol{Z}(c)$ avec les vitesses situées dans l'intervalle subsonique.

Parmi les 4 cas de figure présenté dans la FIG-2.14, le premier est le cas le plus habituel pour un demi-espace arbitrairement anisotrope. Dans ce cas, une onde de surface de Rayleigh existe dans l'intervalle subsonique et se propage à la vitesse de phase annulant λ_1. À la vitesse

limite c_{L}, toutes les valeurs propres sont différentes à zéro. Cela se traduit par le fait que l'état transsonique est normal.

Le deuxième cas de figure correspond aux cas où une onde de Rayleigh subsonique existe et est accompagnée par une onde rasante se propageant à la vitesse limite. Ce cas se réalise en réalité par exemple pour un demi-espace isotrope. En fonction du mode d'excitation que ces deux types d'onde se manifestent : une excitation P/SV donne lieu à une onde de Rayleigh tandis que une excitation SH génère une onde rasante à la surface.

Dans les deux derniers cas mentionnés dans la FIG-2.14, aucune onde de surface subsonique n'existe. Par contre, des études approfondies [Chadwick and Smith, 1977, Lothe and Barnett, 1976, Gundersen et al., 1991, Wang and Gundersen, 1993, Barnett and Chadwick, 1991] ayant pour objet ces deux cas particuliers ont montré que même dans ces cas, une onde de surface dite transsonique existe pour la possibilité de la FIG-2.14c, et une onde de surface dite supersonique pour la possibilité de la FIG-2.14d. Ces études ont tendance à montrer que ces cas peuvent se réaliser seulement pour les anisotropies à hautes symétries (sauf l'isotropie). Nous remarquons également que les rares exemples pour ces deux types d'onde de surface correspondent aux matériaux à symétrie hexagonale ou cubique ayant un axe de symétrie qui se place dans le plan $x_3 = 0$.

Conjecture sur l'existence de l'onde de surface dans des matériaux aléatoires

Pour les modèles des matériaux anisotropes aléatoires (dont le tenseur d'élasticité aléatoire est celui de [Soize, 2001] ou bien celui proposé dans le **Chapitre** 3) qu'on va étudier dans le cadre de notre étude le comportement à la proximité de la surface libre est attendu de se trouver dans les deux premiers cas de figure, c'est-à-dire qu'une onde de Rayleigh subsonique existe toujours pour notre modèle. Les arguments sur lesquels est basés cette proposition sont que sauf si le paramètre δ_{G} s'annule (voir le **Chapitre** 3), ce qui donne des matériaux isotropes aléatoires (et donc le cas de figure 2 s'applique), la probabilité que le tenseur d'élasticité possède un axe de symétrie est nulle.

Calcul de la vitesse d'onde de surface vis-à-vis de l'azimut

Jusqu'à ce point, les formulations employées dans cette section pour le calcul de la vitesse d'onde de Rayleigh réduisent le problème élastodynamique dans un demi-espace tridimensionnel de référence cartésienne $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ dans un plan vertical $(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_3)$ où l'onde de Rayleigh se propage dans la direction $\boldsymbol{m} \equiv \boldsymbol{i}_1$. Cette direction de propagation se situant à la surface libre horizontale, est appelée également l'azimut. Pour la considération complète de la structure 3D, à chaque azimut, la vitesse d'onde de surface associée est estimée afin d'établir une visualisation ressemblant à celles des ondes volumique (*i.e.*, surfaces de lenteur, surfaces de vitesse de phase, *etc.*) qui décrit la dépendance de cette vitesse en fonction de la direction. Ce besoin d'avoir une description de l'anisotropie de l'onde de surface est naturel pour les matériaux anisotropes surtout quand ce dernier est sans symétrie ou d'une symétrie autre qu'isotrope tranverse. Pour ce faire, deux points de vue techniques équivalents peuvent être envisagés dans la pratiques concernant un azimut θ quelconque situé *a priori* entre 0 et 2π : soit (i) on remplace directement la direction de propagation de $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{i}_1$ parue dans les formules ci-dessus par $\boldsymbol{m}_\theta = \cos\theta\, \boldsymbol{i}_1 + \sin\theta\, \boldsymbol{i}_2$; soit (ii) on applique une rotation de l'angle θ autour de l'axe $\boldsymbol{i}_3$ sur le tenseur d'élasticité. Puisque ce diagramme de la vitesse d'onde de surface est déduit des surface d'onde volumique et que ces dernières sont centro-symétriques, le diagramme d'onde

de Rayleigh est également symétrique par rapport au centre de la surface. D'où une estimation de la vitesse d'onde de surface pour les θ sur un demi-cercle, entre 0 et π par exemple, est suffisante. Les valeurs sur l'autre demi-cercle vont être en déduites par une transformation centro-symétrique. Le calcul du diagramme de vitesse l'onde de Rayleigh en fonction de l'azimut est résumé dans la (PROCÉDURE 2.1). Il convient de remarquer que bien que la matrice $\boldsymbol{Z}$ d'impédance acoustique à la surface soit théoriquement hermitienne, elle ne l'est pas forcément dans la pratique des calculs numériques. Cela nécessite une régularisation de la matrice vis-à-vis du caractère hermitien (PROCÉDURE 2.1, Étape 1, f.iv).

PROCÉDURE 2.1. Calcul du diagramme d'onde de Rayleigh

- **Étape 0 : Initialisation**
  a. Choisir le nombre d'échantillonnage $2N_\theta$ de l'ensemble d'azimut $[\,0\,;\,2\pi]$ et définir le cercle unité

$$\theta_i = (i-1) \times \frac{\pi}{N_\theta} \quad i \in \{1, 2, ..., 2N_\theta\} \tag{2.73}$$

  b. Discrétiser le système cartésien correspondant

$$\boldsymbol{m}_{\theta_i} = [\,\cos\theta_i \quad \sin\theta_i \quad 0]^{\mathrm{T}} \quad i \in \{1, 2, ..., 2N_\theta\} \tag{2.74}$$

  c. Choisir le nombre d'échantillonnage N_c des intervalles subsoniques
- **Étape 1 : Calcul de la vitesse de Rayleigh pour un demi-cercle.**
  Itérer sur $i \in \{1, 2, ..., N_\theta\}$
  a. Appliquer une rotation par rapport à $\boldsymbol{i}_3$ sur le tenseur d'élasticité

$$\boldsymbol{C}_{\theta_i} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\theta_i}(\boldsymbol{C}) \tag{2.75}$$

  dans laquelle $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\theta_i}$ la transformation géométrique appliquée sur la notation de 2 indices de Kelvin-Voigt (la transformation de Bond), décrite dans [Auld, 1973, page 74, volume 1].
  b. Calculer les matrices de Christoffel selon l'équation (2.23) pour les directions $\boldsymbol{\kappa}$ situées dans le plan vertical $\mathscr{P}_2$, perpendiculaire à $\boldsymbol{i}_2$.
  c. Calculer les parties $\boldsymbol{N}$ dans (2.55), définies (en remplaçant $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{i}_1$ et $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_3$) par les équations (2.44-2.46), qui sont indépendantes de la vitesse c.
  d. Calculer les 3 modes propres de ces dernières et projeter la branche extérieur du diagramme de lenteur sur $\boldsymbol{i}_1$ afin de trouver la vitesse limite transsonique :

$$c_{\mathrm{L}}^{\theta_i} = \min_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathscr{P}_2} \{\boldsymbol{c}^p \cdot \boldsymbol{i}_1\} \tag{2.76}$$

  avec $\boldsymbol{c}^p$ la vitesse de phase donnée par (2.26)

e. Discrétiser l'intervalle subsonique $[0, c_{\mathrm{L}}^{\theta_i}]$

$$c^{ij} = (j-1) \times \frac{c_{\mathrm{L}}^{i}}{N_c} \tag{2.77}$$

f. Itérer sur $j \in \{1, 2, .., N_c + 1\}$.

   i. Mettre à jour c^{ij} pour la sous-matrice $\mathbf{Q}(c)$ de $\boldsymbol{N}$ dans (2.55).

   ii. Résoudre le problème aux valeurs propres (2.54).

   iii. Sélectionner les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres à partie imaginaire positives et mettre en forme le tenseur d'impédance acoustique à la surface $\boldsymbol{Z}^{i,j}$ selon l'équation (2.62).

   iv. Régulariser $\boldsymbol{Z}^{ij}$ pour que cette matrice de taille 6×6 soit hermitienne. Pour $1 \leq k, l \leq 6$, les termes Z_{kl}^{ij} de cette matrice sont modifiés comme suit :

$$Z_{kl}^{ij} = \begin{cases} \mathfrak{Re}\, Z_{kl}^{ij} & \text{pour les termes diagonaux } k = l \\ Z_{kl}^{ij} & \text{pour les termes extra-diagonaux supérieures } k < l \\ Z_{lk}^{ij*} & \text{pour les termes extra-diagonaux inférieures } k > l. \end{cases} \tag{2.78}$$

   v. Calculer $\lambda_1^i(c^{ij})$, la plus petite valeur propre de $\boldsymbol{Z}^{ij}$.

g. Trouver, avec l'interpolation au besoin, le zéro de la suite monotonnement décroissante $\left\{\lambda_1^i(c^{ij})\right\}_{j=1..N_c}$ qui est en effet la vitesse d'onde de Rayleigh dans la direction θ_i. Une approximation est la suivante :

$$c_{\mathrm{R}}^{\theta_i} = \arg\ \min_{j=1..N_c} \left\{|\lambda_1^i(c^{ij})|\right\} \tag{2.79}$$

- **Étape 2 : Déduction (par centro-symétrie) de la vitesse de Rayleigh pour l'autre demi-cercle.**
  Itérer sur $i \in \{N_\theta + 1, N_\theta + 2, ..., 2N_\theta\}$

$$c_{\mathrm{R}}^{\theta_i} = c_{\mathrm{R}}^{\theta_k} \text{ avec } k = i - N_\theta \tag{2.80}$$

- **Étape 3 : Construction du diagramme d'onde de Rayleigh.**
  Tracer l'enveloppe des vecteurs de vitesse de Rayleigh $\boldsymbol{c}_{\mathrm{L}}^{\theta_i}$ définis par :

$$\boldsymbol{c}_{\mathrm{R}}^{\theta_i} = c_{\mathrm{R}}^{\theta_i} \times \boldsymbol{m}_{\theta_i} \tag{2.81}$$

2.3.3 Illustration des ondes de surface.

Dans cette section, des applications numériques sont présentées afin d'illustrer l'estimation de la vitesse d'onde de surface en fonction du type de symétrie du matériau. Pour ce faire, les matériaux étudiés dans la section (2.2.4) sont réétudié dans les exemples suivants. Ils cor-

respondent toujours, en faisant l'objet du PROCÉDURE 2.1, à une onde de Rayleigh (onde de surface subsonique) existant dans toutes les directions à la surface. Pour illustrer l'existence des ondes de surfaces supersoniques et transsoniques au lieu de celle de Rayleigh pour certains azimuts, des exemples correspondant aux matériaux ayant un plan de symétrie qui coïncide à la surface libre sont présentés. Enfin, des exemples illustratifs pour notre conjecture sont traités sous forme de calculs de la vitesse d'onde de Rayleigh correspondant aux tenseurs d'élasticités aléatoires étant les réalisations des matrices aléatoires de taille 6×6 de Soize [2001] avec différents niveaux de fluctuation.

EXEMPLE 2.2. Onde de Rayleigh dans des matériaux déterministes

---

Description

Au cours de cet exemple, on va étudier les vitesses d'ondes de surface pour les matériaux mentionnés dans EXEMPLE 2.1 ainsi que pour les nouveaux matériaux suivants :

– Matériau IIIa (hexagonal). Cela est obtenu en appliquant au matériau III une rotation $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'axe $\boldsymbol{i}_1$. Son axe d'axisymétrie est par conséquent $\boldsymbol{i}_2$ au lieu de $\boldsymbol{i}_3$ comme pour le matériau III.

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{III}a} = \begin{pmatrix} 6.735 & 1.6525 & 2.4025 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 5.9075 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 6.735 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{S} & \cdot & \cdot & 2.16625 & 0 & 0 \\ \cdot & \mathrm{Y} & \cdot & \cdot & 2.16625 & 0 \\ \cdot & \cdot & \mathrm{M.} & \cdot & \cdot & 1.6325 \end{pmatrix} [\times 10^9 \mathrm{Pa}] \tag{2.82}$$

– Matériau IVa (orthotrope). Cela est obtenu en remaniant le matériau IV pour réduire les différences entre les 3 directions principales.

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{IV}a} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 3 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{S} & \cdot & \cdot & 2.1 & 0 & 0 \\ \cdot & \mathrm{Y} & \cdot & \cdot & 1.8 & 0 \\ \cdot & \cdot & \mathrm{M.} & \cdot & \cdot & 1.6 \end{pmatrix} [\times 10^9 \mathrm{Pa}] \tag{2.83}$$

– Matériau Va (triclinique). Cela est une autre réalisation du même paramétrage (modèle de Soize [2001]) du matériau V.

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{V}a} = \begin{pmatrix} 8.0177 & 2.6309 & 4.5950 & 0.1903 & 0.5646 & 0.9278 \\ \cdot & 6.7081 & 1.6199 & 0.4711 & -0.1942 & -0.1912 \\ \cdot & \cdot & 7.0668 & 0.6601 & 0.6740 & -0.0551 \\ \mathrm{S} & \cdot & \cdot & 1.8366 & -0.4014 & -0.7683 \\ \cdot & \mathrm{Y} & \cdot & \cdot & 1.1591 & 0.3994 \\ \cdot & \cdot & \mathrm{M.} & \cdot & \cdot & 1.2701 \end{pmatrix} [\times 10^9 \mathrm{Pa}] \tag{2.84}$$

Pour chacun de ces matériaux, qui sont considérés dans l'ordre I, III, V, Va, II, IIIa, IV, IVa, d'abord, les sections globales représentant la vitesse de Rayleigh c_{R} (bleu) et la vitesse d'état limite transsonique c_{L} (rouge) en fonction de tous les azimuts possibles (qui se trouvent dans le plan horizontal) sont visualisées respectivement dans les FIGs (2.15, 2.17, 2.19, 2.21, 2.23, 2.25, 2.27 et 2.29). Dans ces figures, les vitesses de phases données par les équations 2.76 et 2.79 de la PROCÉDURE 2.1 sont affichées en haut tandis que les sous-figures en bas sont réservées aux vitesses de groupes déduites de celles en haut à travers la transformation par polaires réciproques comme dans les calculs des sections d'onde volumique. Il convient de noter que pour les 4 derniers matériaux, l'onde de Rayleigh (encore une fois, l'onde de surface subsonique) n'existe pas forcément pour tous les azimuts. Si c'est le cas, la valeur de la courbe bleue est prise égale à la valeur de la courbe rouge dans cette direction.

Ensuite, les détails de l'application de la procédure de calcul la vitesse d'onde de surface pour quelques azimuts θ sont visualisées brièvement à travers l'évaluation des 3 valeurs propres ainsi que de la valeur absolue du déterminant du tenseur d'impédance acoustique à la surface. Ces visualisations sont énumérées par les FIGs (2.16, 2.18, 2.20, 2.22, 2.24, 2.26, 2.28 et 2.30). Dans chacune de ces dernières, et pour chacun des azimuts considérés (à titre d'exemple, l'azimut $\theta = 0$ est choisi pour tous ces matériaux, il est éventuellement accompagné par un azimut particulier), les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet ; la vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique. L'évolution des 3 valeurs propres peuvent être dans tous les cas comparée avec les 4 cas de figure de la classification de Barnett and Lothe [1985] schématisée dans la FIG 2.14.

Discussion

À première vue, on peut remarquer que l'allure de la section de la vitesse d'onde de surface suit bien les caractères symétriques du matériau considéré, et est directement guidée par l'allure de la section de l'onde volumique à l'état transsonique (qui est une onde (*quasi*-)S). Elle peut être sous forme d'un cercle comme dans les FIG 2.15 et 2.17 qui correspondent aux matériaux isotropes et isotropes transverses. Elle peut avoir 2 axes de symétrie comme dans les FIGs (2.23, 2.25, 2.27 et 2.29) pour les matériaux orthotropes et cubiques (dont la FIG 2.23 est invariante par rapport à une rotation de $\frac{\pi}{2}$. Elle peut, en revanche, ne posséder aucune symétrie (à par de la centro-symétrie) comme dans les cas des matériaux tricliniques (FIGs (2.19 et2.21)). D'ailleurs, tout comme dans le cas des visualisations des solutions propres volumiques, le front d'onde de surface peut être totalement régulier (même pour le cas triclinique de la FIG 2.19) ou comprendre des parties torsadées (directionnellement multivariables) comme dans les cas cubiques, orthotropes ou le cas triclinique de la FIG 2.21.

Pour les 4 premiers matériaux, les vitesses d'onde de Rayleigh sont trouvées pour tous les azimuts. En effet, l'évolution des 3 valeurs propres λ_i du $\boldsymbol{Z}(c)$ dans l'intervalle subsonique correspond aux deux premiers cas de figure de la FIG 2.14.

– On peut vérifier que pour tous les azimuts dans le cas des matériaux tricliniques V et

va, l'évolution des valeurs propres est semblable à celles de l'azimut $\theta = 0$ affichées dans les FIGs (2.20 et2.22) et donc à la FIG 2.14a. L'onde de Rayleigh existe ainsi dans toutes les directions à la surface libre.

– Cette évolution est de plus invariante en fonction de l'azimut dans les symétries isotrope et isotrope transverse dont les FIGs (2.16 et 2.18) correspondent respectivement aux cas de figure de la FIG 2.14b et de la FIG 2.14a. L'onde de Rayleigh existe également dans toutes les directions.
– Pour le cas isotrope, il y a deux vérifications importantes par rapport aux résultats classiques dans la littérature. D'abord, le fait que la valeur propre λ_2 s'annule à l'état limite transsonique $c_{\mathrm{L}} = 1000\ \mathrm{m/s}$ correspond à l'existence d'une onde exceptionnelle c'est-à-dire une onde volumique exerçant une traction nulle à la surface libre (en fait, selon [Udías, 1999, par exemple], à la proximité de la surface libre d'un demi-espace isotrope, une onde évanescente de polarisation SH existe à la place de l'onde de Love). D'ailleurs, la vitesse d'onde de Rayleigh $c_{\mathrm{R}} \approx 920\mathrm{m/s}$ estimée par la FIG 2.16 vérifie parfaitement la relation 2.36 avec $c_{\mathrm{S}} = 1000\ \mathrm{m/s}$ et $c_{\mathrm{S}} = 1710\ \mathrm{m/s}$.

Pour les 4 derniers matériaux, bien que la vitesse d'onde de Rayleigh soit trouvée pour la plupart des azimuts (dont l'évolution typique est affichée dans les FIGs (2.24a, 2.26b, 2.28a, 2.30a), il y a des directions à la surface libre où $\lambda_1(c_{\mathrm{L}}) \leq 1$ qui correspondent aux deux derniers cas de figure de la FIG 2.14 et qui donnent suite à l'existence d'autres types d'onde de surface à la place d'onde de Rayleigh :

– Onde de surface supersonique : ce type d'onde est trouvé dans les cas des azimuts $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ respectivement pour les matériaux II, IIIa et IV. Les évolutions correspondantes de λ_i affichées dans les FIGs (2.24b, 2.26a et 2.28b) sont similaires au cas de figure de la FIG 2.14d.
– Onde de surface transsonique : ce type d'onde est trouvé dans le cas d'azimut $\theta = 0.353\pi$ pour le matériau orthotrope IVa. Les évolutions correspondantes de λ_i affichées dans la FIG 2.30b sont similaires au cas de figure de la FIG 2.14c où les deux petites valeurs propres s'annulent à l'état limite transsonique.

EXEMPLE 2.3. Onde de Rayleigh dans des matériaux aléatoires

Description

Dans cet exemple, on étudie des matériaux tricliniques aux tenseurs d'élasticité aléatoires construits selon le modèle de Soize [2001] des matrices aléatoires définie-positives appliqué aux matrices de taille 6×6 dont le modèle moyen isotrope correspond au matériau I (équation 2.31). Dans un premier temps, trois niveaux de fluctuation δ sont considérés afin d'étudier l'influence de ce paramètre δ sur la vitesse d'onde de Rayleigh. Pour chaque configuration, en acceptant que l'équipartition de l'orientation du matériau aléatoire se réalise (une fois qu'on prennent la moyenne de c_{R} sur un suffisemment grand nombre de réalisations), on cherche sans perte de généralité la vitesse d'une onde de Rayleigh qui se propage à la surface du demi-espace selon la direction $\boldsymbol{i}_1$.

Les résultats présentés dans la FIG 2.31 correspondent de haut en bas aux $\delta = 0.05, 0.2$ et 0.5. En chaque sous-figure, l'évolution du déterminant du tenseur d'impédance acoustique en fonction de la vitesse dans l'intervalle subsonique correspondant aux 100000 réalisations de chaque configuration est affichée en gris. Les courbes jaunes et rouges sont respectivement celles du modèle moyen (comme dans la FIG 2.16) et d'une réalisation choisie aléatoirement parmi les 100000 réalisation. La moyenne estimée de vitesse de Rayleigh $\mathsf{E}\{c_{\mathrm{R}}\}$ est représentée par une ligne verticale en bleu foncé. L'axe det $\boldsymbol{Z} = 0$ est coloré en bleu clair.

En approfondissant les propriétés statistiques de la vitesse d'onde de Rayleigh, la FIG 2.32a présente les distributions (histogrammes normalisées) de la vitesse d'onde de Rayleigh correspondant aux 3 niveaux de fluctuations étudiés par la FIG 2.31 et la FIG 2.32a affiche les convergences des coefficients de variance de la vitesse c_{R} de ces 3 configurations en fonction du nombre de tirage (en échelle logarithmique). Les courbes en couleurs bleu, violet et rouge correspondent respectivement aux $\delta = 0.05, 0.2$ et 0.5. Par ailleurs, afin de valider l'hypothèse de l'équipartition de l'orientation du matériau aléatoire, des courbes supplémentaires (noires) représentant les statistiques sur la vitesse d'onde de Rayleigh se propageant dans une autre direction (l'azimut $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{i}_2$) et correspondant à la configuration la plus fluctuante ($\delta = 0.5$) sont superposées dans les sous-figures (a-b) de la FIG 2.32.

Finalement, les dépendances de la moyenne et du coefficient de variation de c_{R} en fonction du niveau de fluctuation δ sont tracées respectivement dans les FIG 2.32c et 2.32d. Pour ce faire, 11 niveaux de fluctuation δ régulièrement espacés entre 0 et 0.5 ont été étudiées.

Discussion

Deux remarques importantes peuvent être tirées de la FIG 2.31

- Quel que soit le niveau de fluctuation δ, les courbes grises croisent toujours la ligne bleu ciel det $\boldsymbol{Z}$ à une vitesse subsonique. Cela contribue à un exemple faisant preuve de notre conjecture sur l'existence presque sûre de vitesse d'onde de Rayleigh dans des matériaux aléatoires.
- La moyenne des vitesse d'onde de Rayleigh se décale vers le bas quand le niveau de fluctuation du modèle augmente.

Dans la FIG 2.32, on constate que :

- La convergence statistique semble logiquement plus rapide pour les faibles fluctuations. La fluctuation de c_{R} augmente avec δ. Par contre, elle est plus petite que δ.
- Le fait que les courbes noire et rouge se rapprochent valide bien l'hypothèse d'une équipartition de l'orientation structurelle.
- La moyenne de la vitesse de Rayleigh décroit avec la fluctuation. Cette dépendance semble être parabolique dans l'intervalle $[0, 0.5]$.

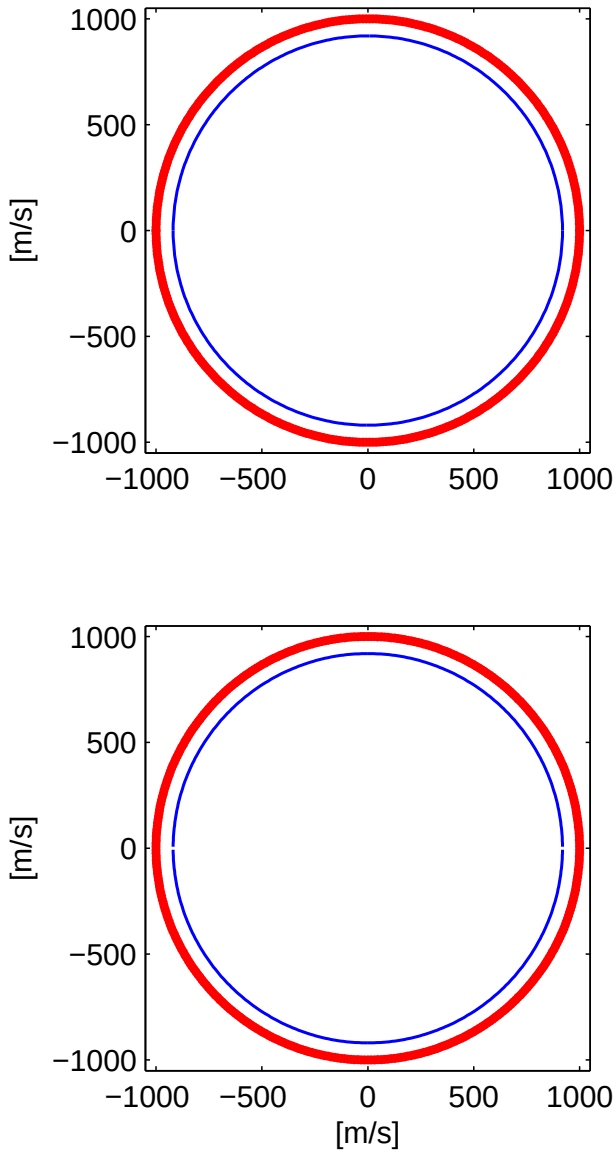


FIG. 2.15 – Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu isotrope I : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas).

2.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, on a étudié le rôle du tenseur d'élasticité dans le comportement élastodynamique d'un matériau à travers de brefs rappels des théories existantes sur la propagation d'ondes dans les milieux homogènes anisotropes. Si les théories sur les ondes volumiques dans des milieux anisotropes [voir Hearmon, 1961, Auld, 1973, par exemple] ou sur l'onde de surface de Rayleigh dans les milieux isotropes [voir Auld, 1973, Udías, 1999, par exemple] sont

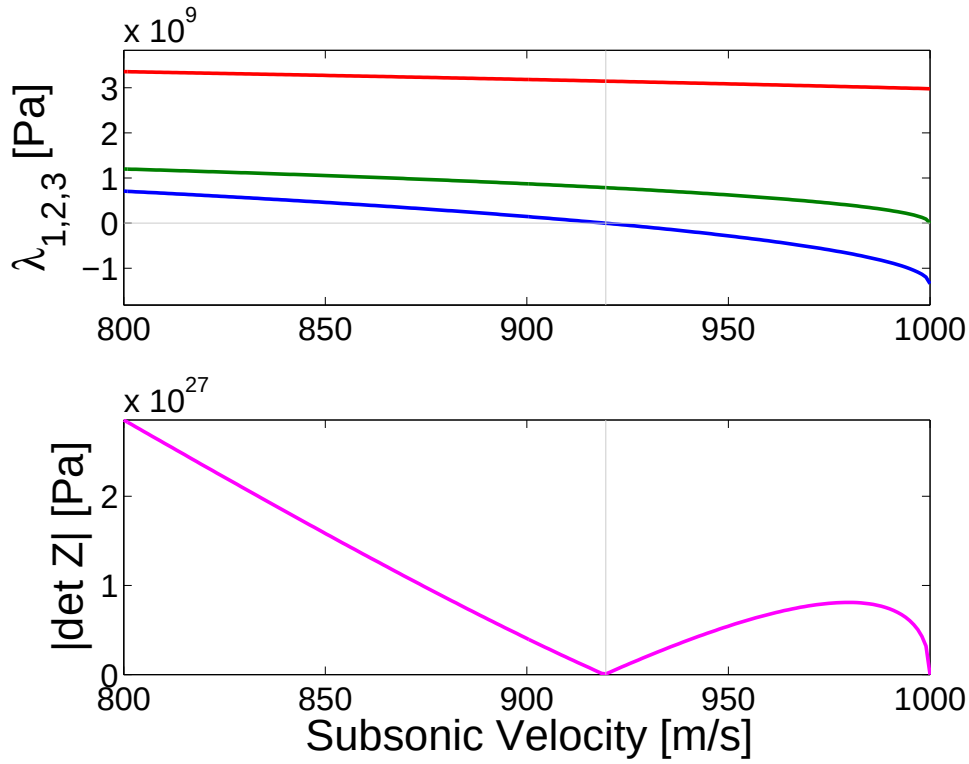


FIG. 2.16 – Détails de la recherche d'onde de Rayleigh dans l'azimut $\theta = 0$ du matériau I (isotrope) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique.

devenues classiques depuis un certain temps, les théories plus récentes sur l'existence et sur le calcul des ondes de surface dans les milieux anisotropes [Stroh, 1962, Barnett, 2000] méritent plus d'investigation surtout vis-à-vis des critères de non-existence de l'onde de Rayleigh.

Néanmoins, en se basant sur les éléments de classification de l'existence de l'onde de surface en fonction des caractères mathématiques de l'impédance acoustique à la surface et des exemples associés, nous avons proposé une conjecture sur l'existence de l'onde de Rayleigh dans les matériaux aléatoires.

Différentes illustrations numériques ont été présentées en appliquant les formulations des ondes volumiques et des ondes de surface. Elles vérifient manifestement les théories concernées et vont être utilisées comme références analytiques pour les validations de notre outil numérique de simulation par éléments finis spectraux présenté dans le **Chapitre** 4.

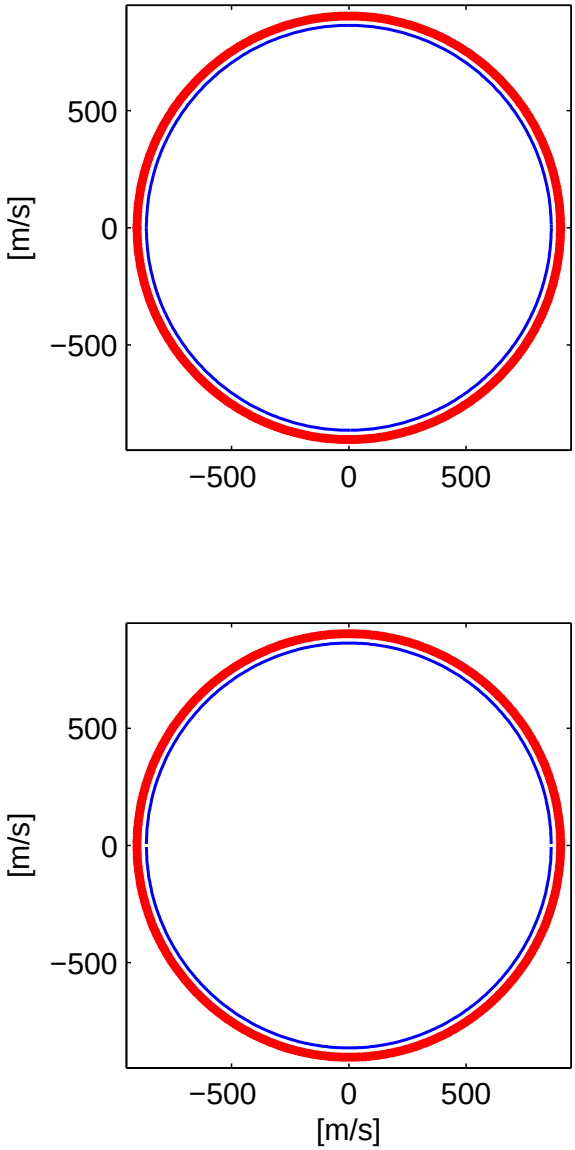


FIG. 2.17 – Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu isotrope transverse III : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas).

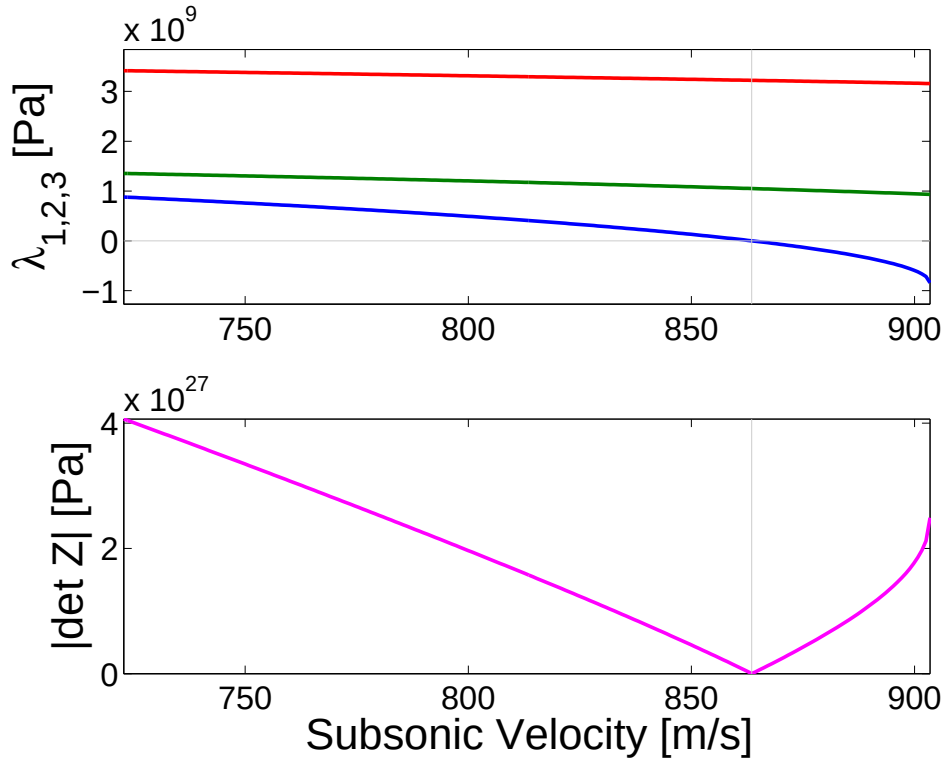


FIG. 2.18 – Détails de la recherche d'onde de Rayleigh dans l'azimut $\theta = 0$ du matériau III (isotrope transverse) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique.

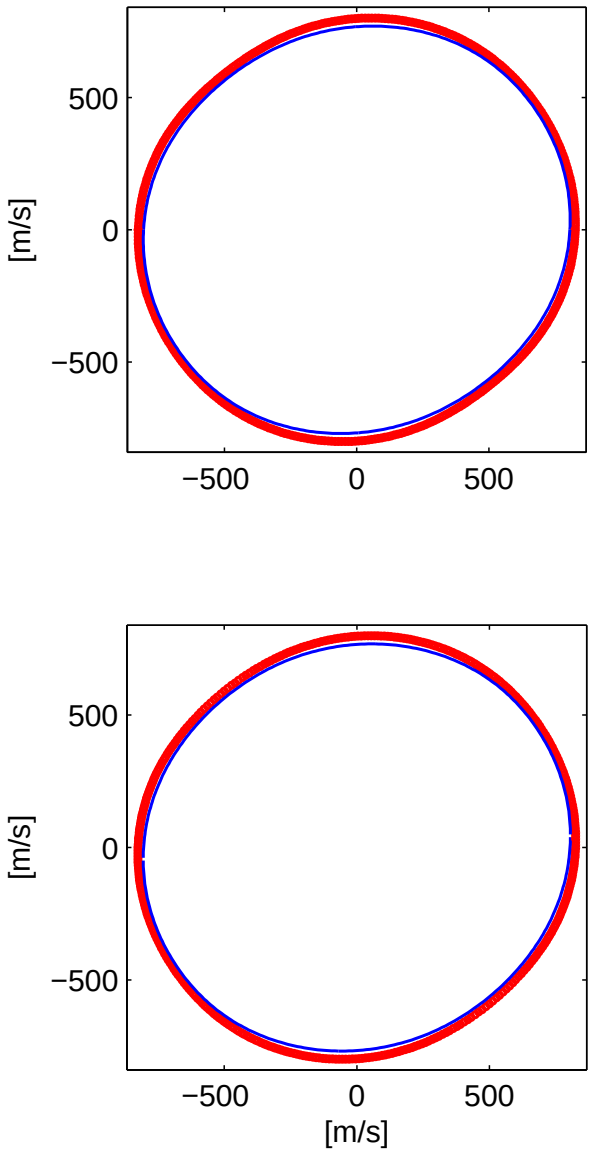


FIG. 2.19 – Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu triclinique (matériau V) : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas).

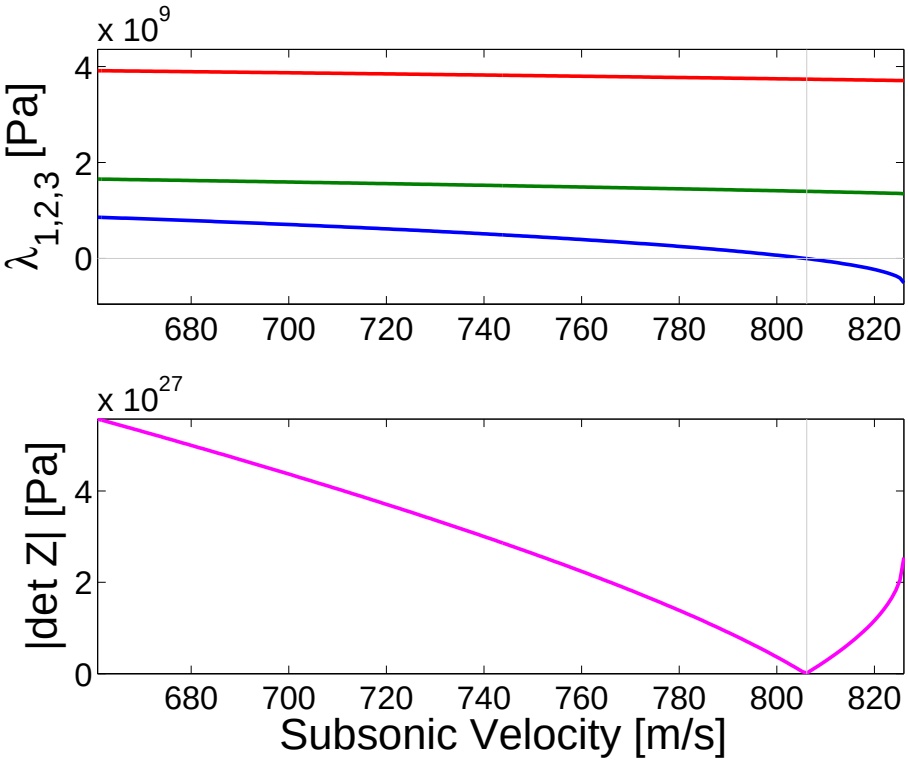


FIG. 2.20 – Détails de la recherche d'onde de Rayleigh dans l'azimut $\theta = 0$ du matériau V (triclinique) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique.

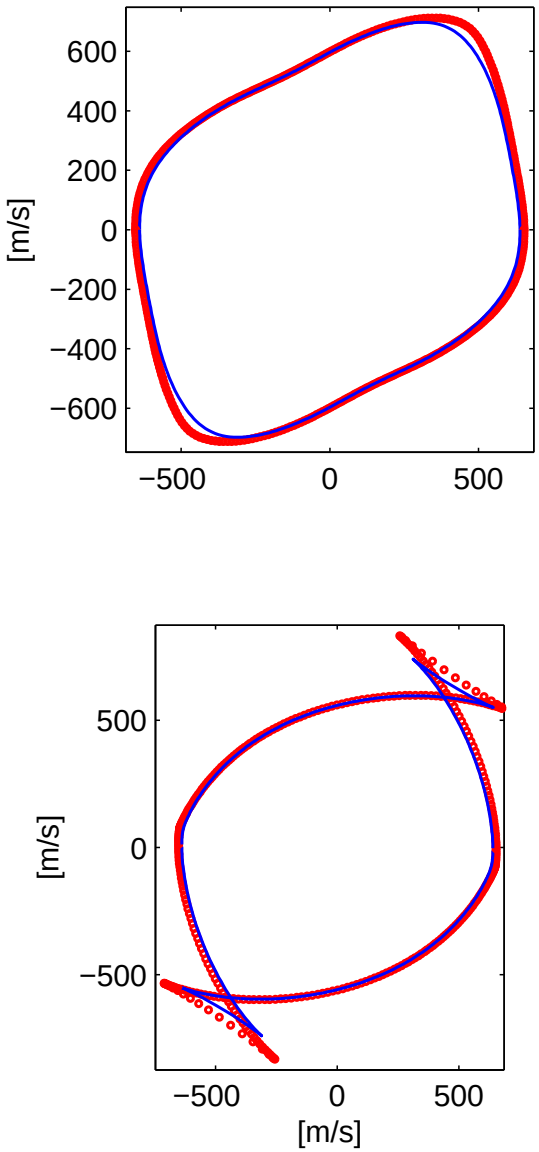


FIG. 2.21 – Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu triclinique (matériau V-a) : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas).

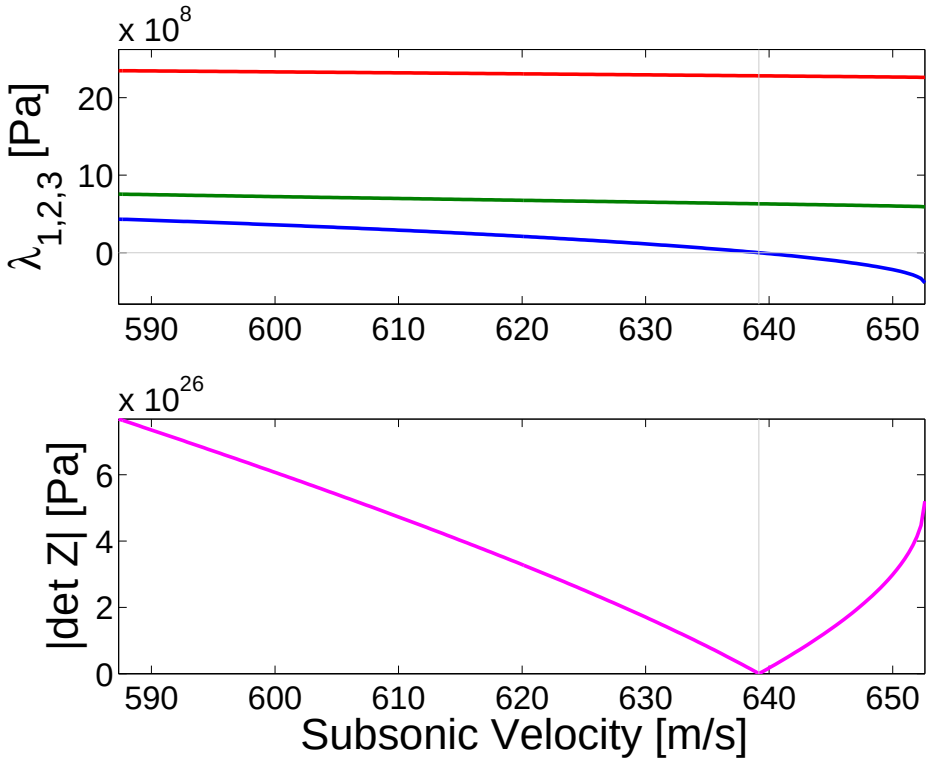


FIG. 2.22 – Détails de la recherche d'onde de Rayleigh dans l'azimut $\theta = 0$ du matériau Va (triclinique) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique.

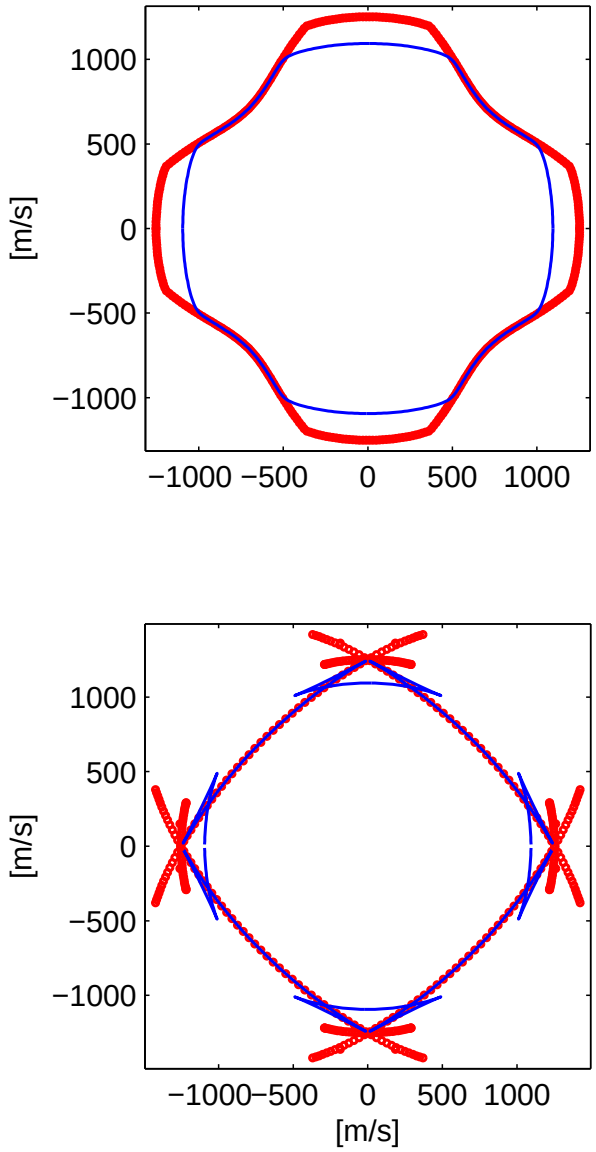
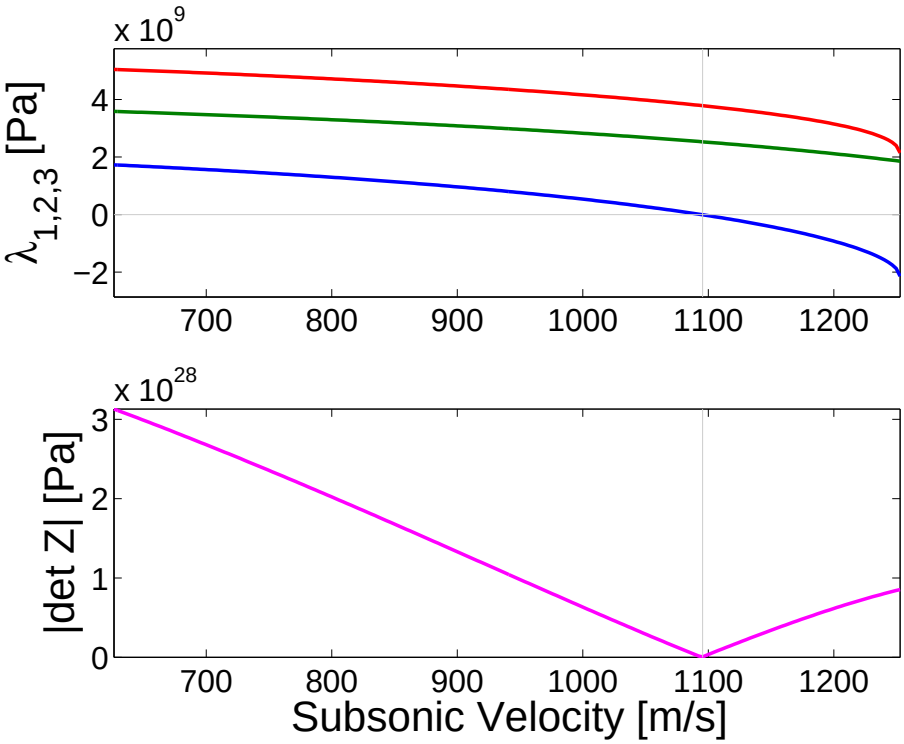
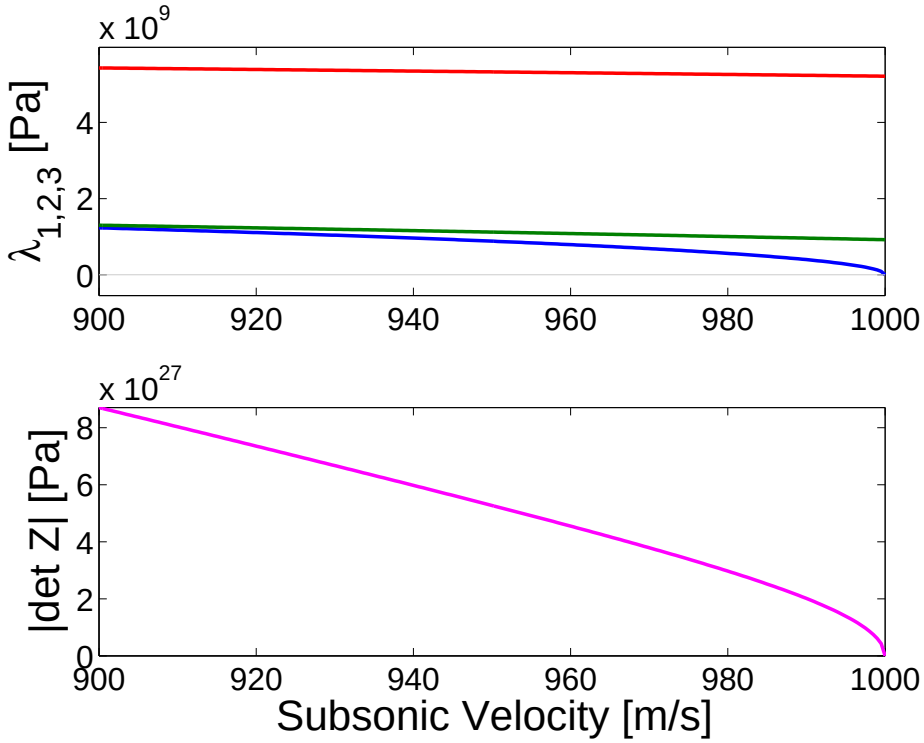


FIG. 2.23 – Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu cubique II avec existence d'onde de surface supersonique à la place de l'onde de Rayleigh dans certaines directions : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas).



(a)



(b)

FIG. 2.24 – Détails de la recherche d'onde de Rayleigh (a) dans l'azimut $\theta = 0$ et (b) dans l'azimut $\theta = \frac{\pi}{4}$ du matériau IV (orthotrope) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique.

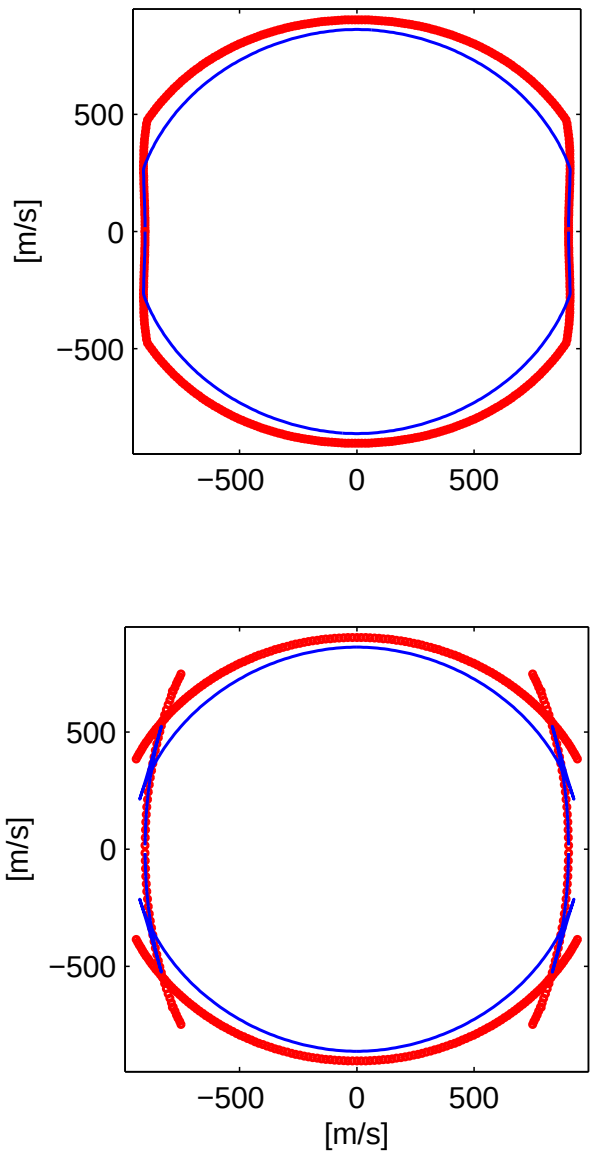
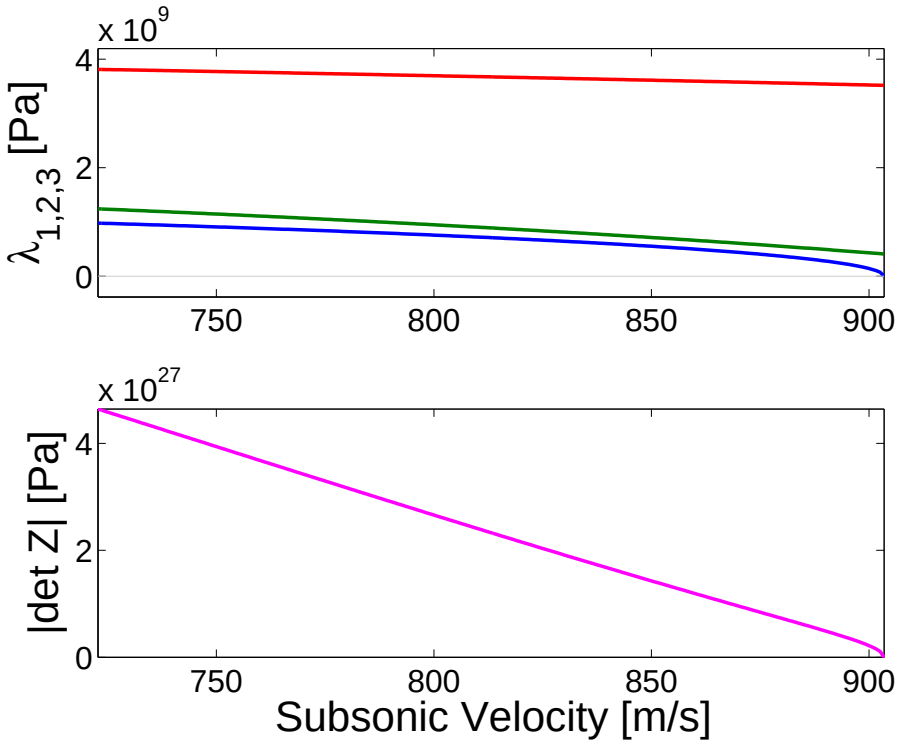
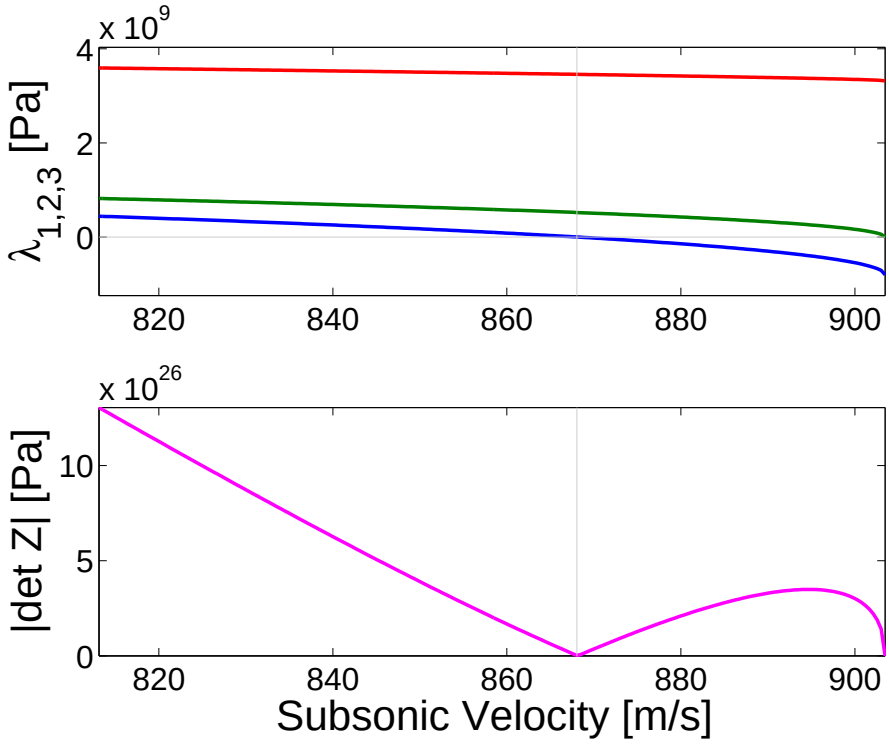


FIG. 2.25 – Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu hexagonal IIIa avec existence d'onde de surface supersonique à la place de l'onde de Rayleigh dans certaines directions : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas).



(a)



(b)

FIG. 2.26 – Détails de la recherche d'onde de Rayleigh (a) dans l'azimut $\theta = 0$ et (b) dans l'azimut $\theta = \frac{\pi}{2}$ du matériau IIIa (isotrope transverse HTI) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique.

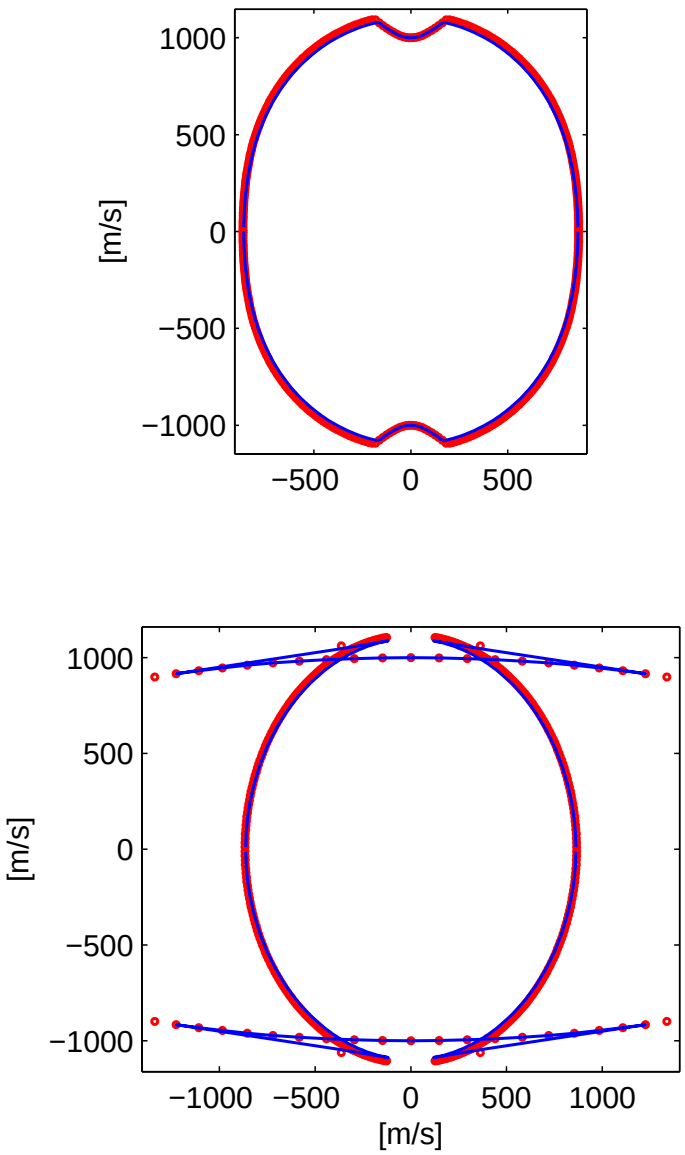
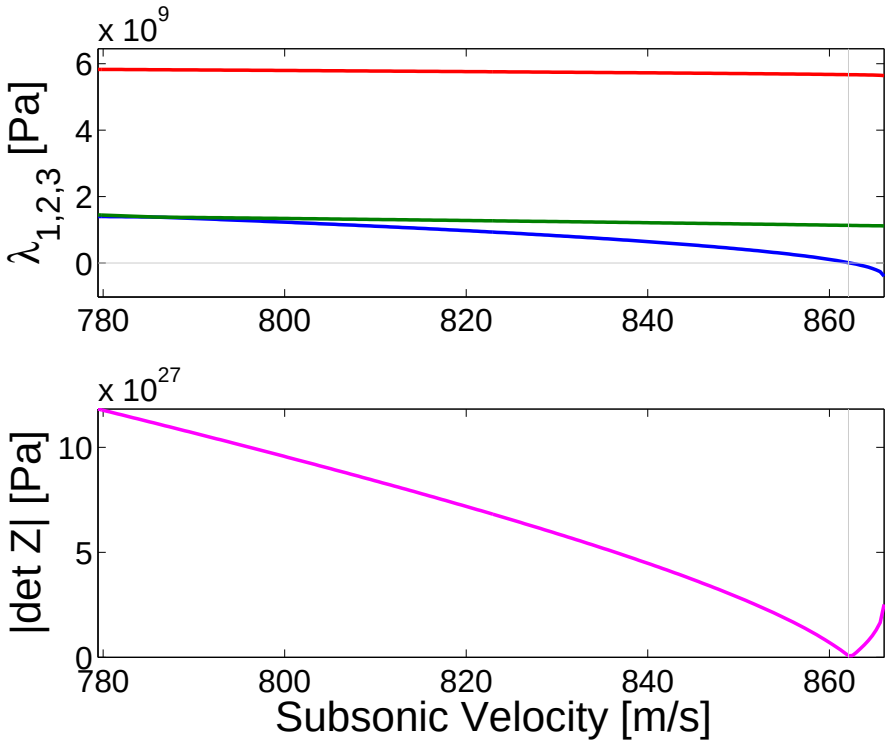
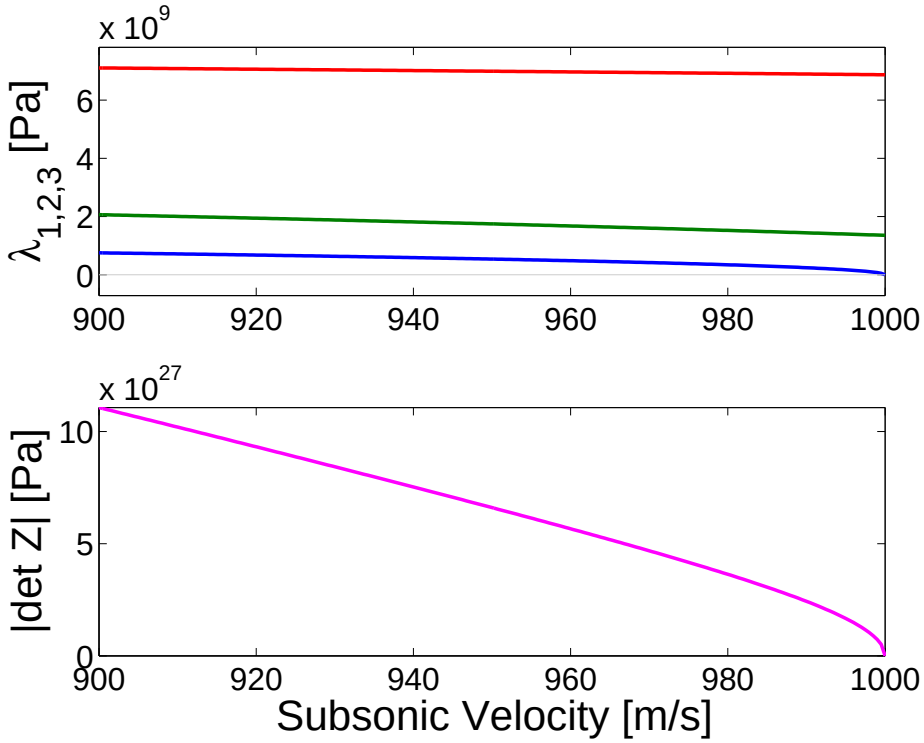


FIG. 2.27 – Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu orthotrope IV avec existence d'onde de surface supersonique à la place de l'onde de Rayleigh dans certaines directions : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas).



(a)



(b)

FIG. 2.28 – Détails de la recherche d'onde de Rayleigh (a) dans l'azimut $\theta = 0$ et (b) dans l'azimut $\theta = \frac{\pi}{2}$ du matériau IV (orthotrope) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique.

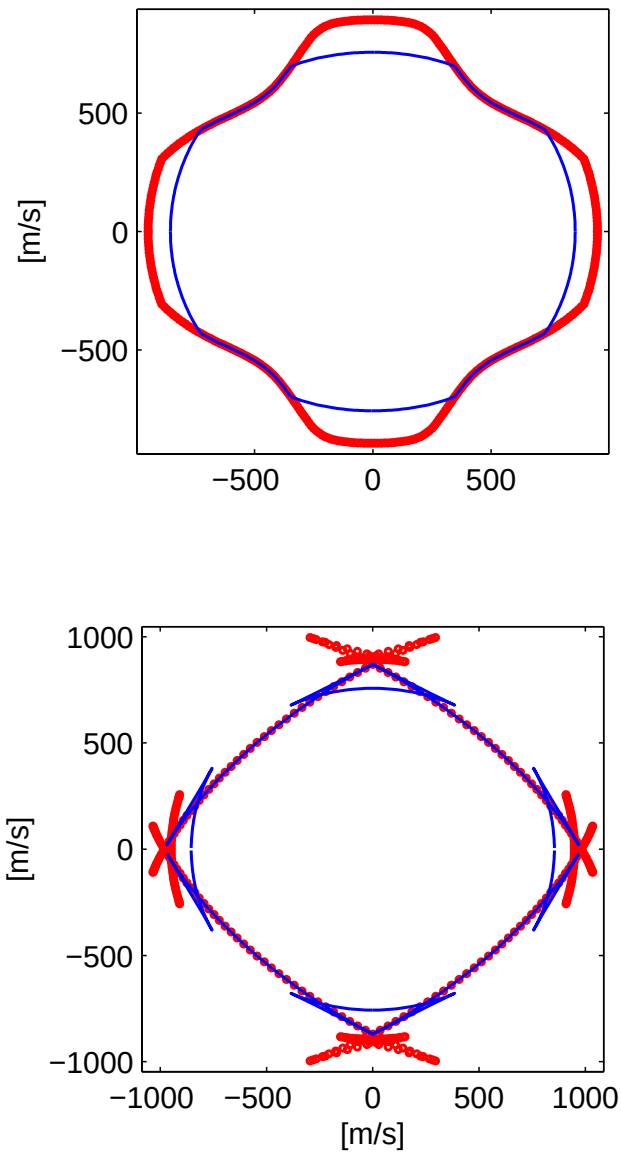
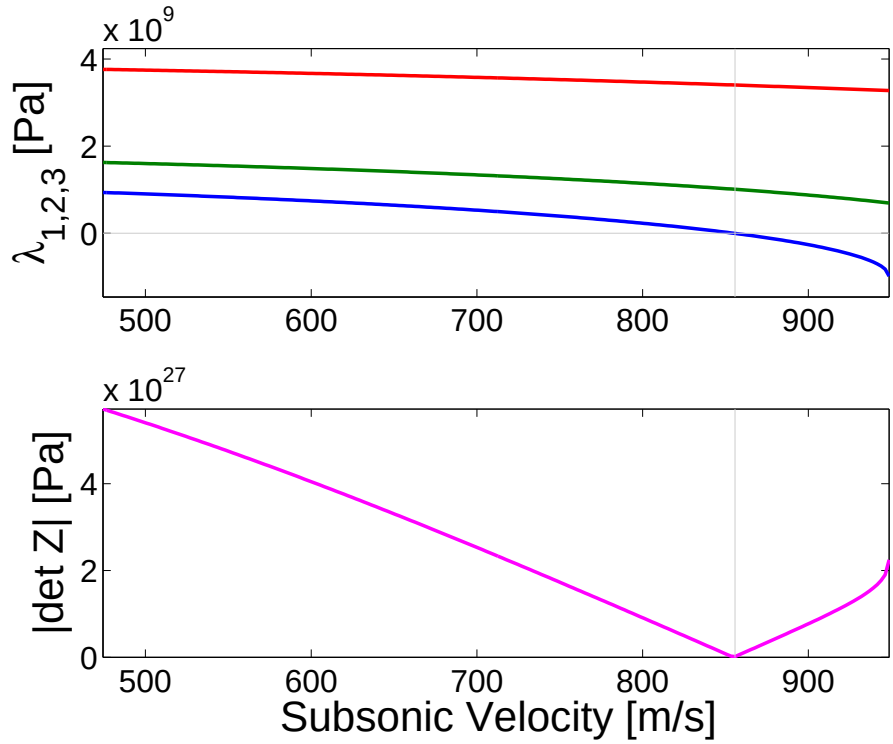
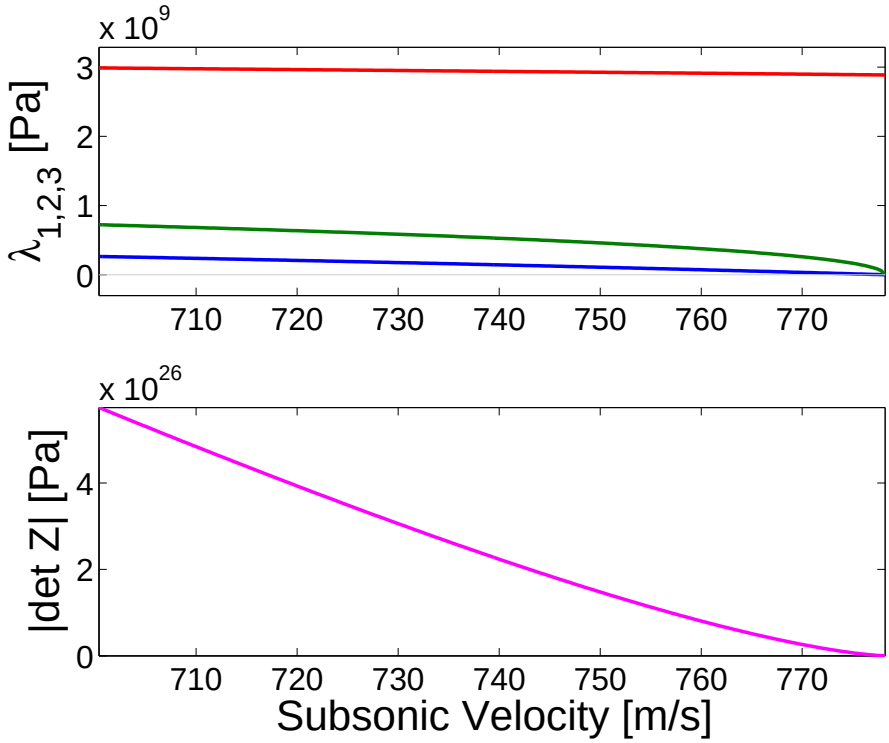


FIG. 2.29 – Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu orthotrope IVa avec existence d'onde de surface transsonique à la place de l'onde de Rayleigh dans certaines directions : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas).



(a)



(b)

FIG. 2.30 – Détails de la recherche d'onde de Rayleigh (a) dans l'azimut $\theta = 0$ et (b) dans l'azimut $\theta = 0.353\pi$ du matériau IVa (orthotrope) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique.

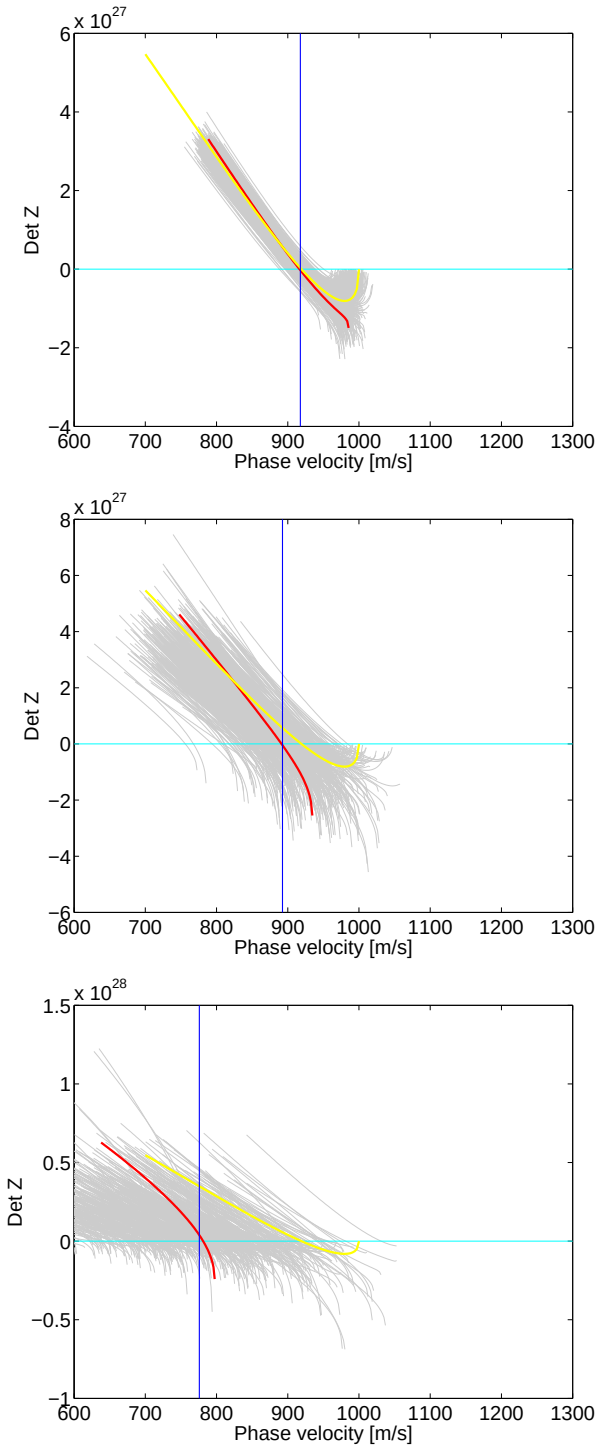


FIG. 2.31 – Vitesses d'onde de surface trouvés pour les réalisations (intersections des courbes grises du det $\boldsymbol{Z}(c)$ avec la ligne bleu ciel de det $\boldsymbol{Z} = 0$) des matériaux aléatoires à tenseur d'élasicité aléatoire selon le modèle de [Soize, 2001] avec le niveau de fluctuation $\delta = 0.05, 0.2$ et 0.5 de haut en bas. La moyenne estimée des vitesses de Rayleigh est affichée en bleu marin. Les courbes jaune et rouge représentant l'évolution de det $\boldsymbol{Z}(c)$ dans l'intervalle subsonique correspondent respectivement au matériau moyen et à une réalisation quelconque.

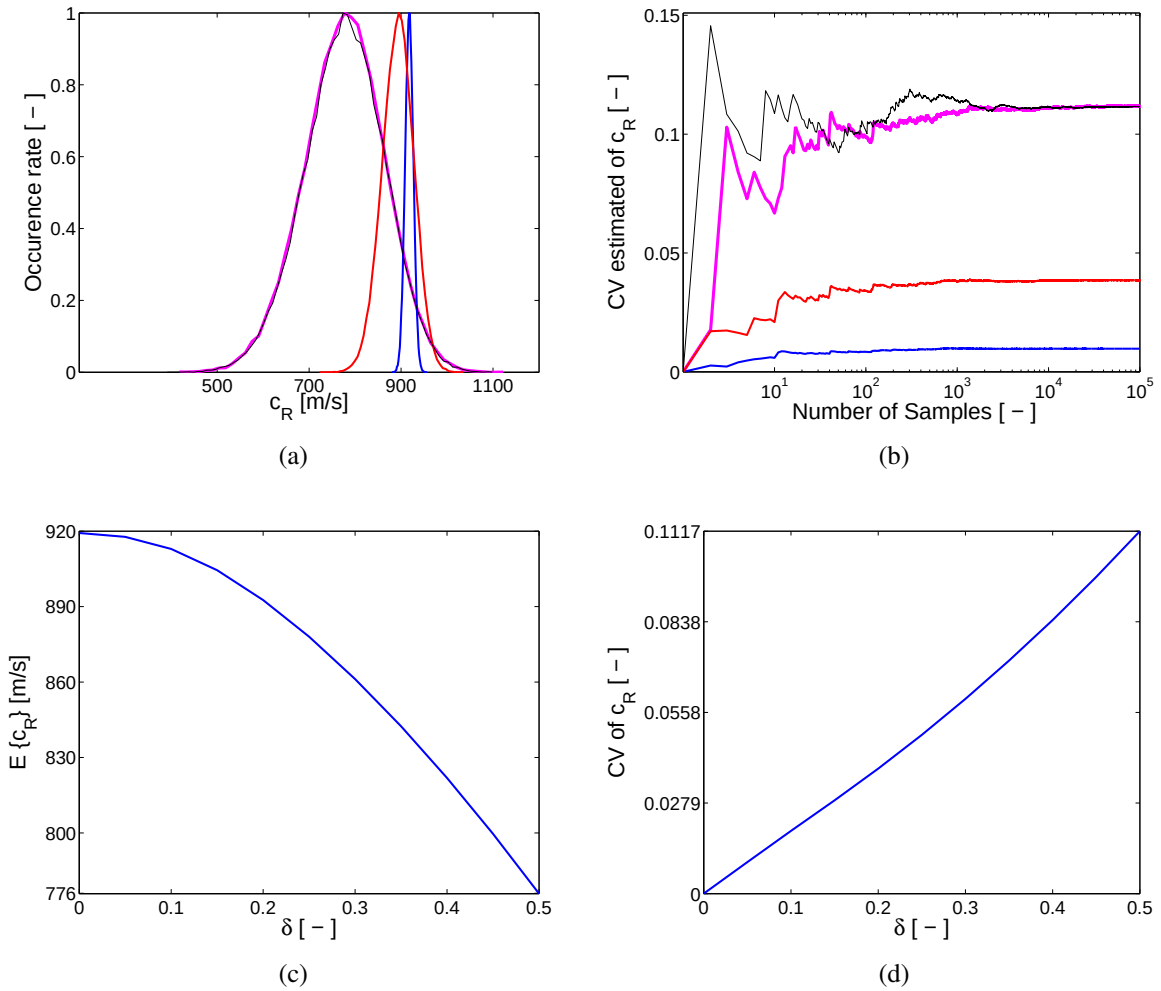


FIG. 2.32 – Distributions (a), convergences (b) de la vitesse c_R pour les 3 niveaux de fluctuations δ et Dépendances de la moyenne (c), coefficient de variance (d) de la vitesse c_R en fonction de δ. Dans (a-b), ondes de Rayleigh dans la direction $\boldsymbol{i}_1$ avec les fluctuations δ égales à 0.05, 0.2, 0.5 sont en bleu, rouge, violet. Celles de la direction $\boldsymbol{i}_2$ et $\delta = 0.5$ sont en noir. Dans (c-d), les statistiques sont faites pour la direction $\boldsymbol{i}_1$

Chapitre 3

Modélisation de champs stochastiques des propriétés élastiques.

Pour répondre au besoin mentionné à la fin du chapitre précédent, ce chapitre, se référant aux travaux de [Soize, 2001, 2006, 2008, Arnst, 2007, Popescu, 1995, Shinozuka and Jan, 1972], a pour but de décrire la construction des champs hétérogènes de propriétés mécaniques d'un matériau par une approche probabiliste à paramétrage minimale. Dans la première section du chapitre, après avoir abordé les éléments mathématiques sur le tenseur d'élasticité, on propose une nouvelle façon d'introduire l'incertitude pour cette quantité tensorielle représentée sous forme matricielle. Cette construction par maximisation d'entropie probabiliste est étroitement inspirée du modèle de Soize [2001] concernant les matrices aléatoires définies-positives de taille quelconque. Il était en premier lieu destiné aux approches probabilistes non-paramétriques des matrices macroscopiques réduites d'un système dynamique (*i.e.* celles de raideur, de masse et d'amortissement en dynamique de structure comme par exemple dans [Soize, 2001, Arnst et al., 2006] ou bien de l'impédance dynamique de l'interaction sol-structure comme dans le travail de Cottereau [2007], *etc.*). Il a ensuite été utilisé pour des matrices aléatoires de taille 6 [Soize, 2006, 2008] représentant à l'échelle mésoscopique le tenseur local d'élasticité.

Notre proposition concerne toujours des matrices définies-positives aléatoires variant avec un certain niveau de fluctuation mais à la différence du modèle précédent [Soize, 2006, 2008], la matrice moyenne correspond à un tenseur d'élasticité isotrope. De plus, une contrainte supplémentaire sur le niveau moyen d'anisotropie est imposée. Ce modèle local de tenseur aléatoire est ensuite étendu en un modèle de champ stochastique afin de prendre en compte la variabilité spatiale du tenseur d'élasticité dans la section 3.2. Avant de faire cela, la sous-section (3.2.1) aborde les processus stochastiques (monodimensionnels) d'une variable scalaire (monovariable) afin de fournir quelques éléments de base et quelques concepts fondamentaux partagés avec les cas plus complexes multivariables et/ou multidimensionnels. Une construction du processus scalaire par représentation spectrale [Shinozuka and Jan, 1972] est aussi présentée dans le même esprit pour enfin proposer un algorithme de simulation d'un champ 3D de tenseur d'élasticité de 21 coefficients indépendants.

3.1 Tenseur d'élasticité aléatoire à niveau d'anisotropie contrôlable

Au cours de cette section, on cherche à factoriser un tenseur d'élasticité quelconque par un tenseur d'élasticité isotrope en vue de découpler la fluctuation du niveau d'anisotropie de la fluctuation générale du champ.

3.1.1 Éléments mathématiques sur le tenseur d'élasticité C

Soit $\mathbb{M}_3^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques de taille 3×3 définies sur $\mathbb{R}$, les tenseurs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ d'ordre 2 et ainsi que la matrice d'identité $\boldsymbol{Id}_3$ y appartiennent.
À son tour, le tenseur d'élasticité C appartient à $\mathbb{T}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{T}_4(\mathbb{R})$ l'espace des tenseurs T_{ijkl} d'ordre 4, de dimension 3 vérifiant les symétries suivantes :

$$T_{ijkl} = T_{jikl} = T_{ijlk} = T_{klij} \text{ pour } i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \tag{3.1}$$

Du fait de ces symétries, on peut adopter la représentation *chapeau* $(\hat{\cdot})$, dite notation de Kelvin-Voigt [voir Auld, 1973, par exemple] définie ci-dessous pour alléger les notations.

$$\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_3^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) : \hat{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{22} & X_{33} & \sqrt{2}X_{12} & \sqrt{2}X_{13} & \sqrt{2}X_{23} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{T}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) : \hat{\boldsymbol{X}} &= \begin{bmatrix} \hat{X}_{11} & \hat{X}_{12} & \hat{X}_{13} & \hat{X}_{14} & \hat{X}_{15} & \hat{X}_{16} \\ \hat{X}_{12} & \hat{X}_{22} & \hat{X}_{23} & \hat{X}_{24} & \hat{X}_{25} & \hat{X}_{26} \\ \hat{X}_{13} & \hat{X}_{23} & \hat{X}_{33} & \hat{X}_{34} & \hat{X}_{35} & \hat{X}_{36} \\ \hat{X}_{14} & \hat{X}_{24} & \hat{X}_{34} & \hat{X}_{44} & \hat{X}_{45} & \hat{X}_{46} \\ \hat{X}_{15} & \hat{X}_{25} & \hat{X}_{35} & \hat{X}_{45} & \hat{X}_{55} & \hat{X}_{56} \\ \hat{X}_{16} & \hat{X}_{26} & \hat{X}_{36} & \hat{X}_{46} & \hat{X}_{56} & \hat{X}_{66} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_{1111} & X_{1122} & X_{1133} & \sqrt{2}X_{1112} & \sqrt{2}X_{1113} & \sqrt{2}X_{1123} \\ X_{1122} & X_{2222} & X_{2233} & \sqrt{2}X_{2212} & \sqrt{2}X_{2213} & \sqrt{2}X_{2223} \\ X_{1133} & X_{2233} & X_{3333} & \sqrt{2}X_{3312} & \sqrt{2}X_{3313} & \sqrt{2}X_{3323} \\ \sqrt{2}X_{1112} & \sqrt{2}X_{2212} & \sqrt{2}X_{3312} & 2X_{1212} & 2X_{1213} & 2X_{1223} \\ \sqrt{2}X_{1113} & \sqrt{2}X_{2213} & \sqrt{2}X_{3313} & 2X_{1213} & 2X_{1313} & 2X_{1323} \\ \sqrt{2}X_{1123} & \sqrt{2}X_{2223} & \sqrt{2}X_{3323} & 2X_{1223} & 2X_{1323} & 2X_{2323} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

On peut aisément déduire, avec abus de l'utilisation du symbole *chapeau* $(\hat{\cdot})$, que

$$\hat{\mathbb{T}}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) = \mathbb{M}_6^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) \tag{3.4}$$

Grâce à cette notation, la relation tensorielle *contrainte-déformation* peut s'écrire sous forme matricielle

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\epsilon} \Longleftrightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{C}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{3.5}$$

On s'intéresse maintenant aux sous-espaces $\mathbb{S}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{D}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$ de l'espace des opérateurs linéaires $\mathbb{T}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$. Le premier est l'ensemble des opérateurs proportionnels à l'identité tandis que

le deuxième regroupe des opérateurs à trace nulle [9]. Parmi les opérateurs de $\mathbb{S}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur sphérique

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{3}\boldsymbol{I}_2 \otimes \boldsymbol{I}_2 \tag{3.8}$$

et l'opérateur à trace nul nommé l'opérateur déviatorique :

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{S} \tag{3.9}$$

On va vérifier dans la suite en faisant appel à la présentation *chapeau* que $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{D}$ sont les projections orthogonales de $\mathbb{T}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{S}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{D}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$ respectivement et que $\{\boldsymbol{S}, \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{D}\}$ est une paire orthonormée de $\mathbb{T}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R})$.

– Forme matricielle

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{S}} &= \frac{1}{3}\widehat{\boldsymbol{I}}_2 \otimes \widehat{\boldsymbol{I}}_2 \\
&= \frac{1}{3}\widehat{\mathbf{Id}}_3 \otimes \widehat{\mathbf{Id}}_3 \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{D}} &= \widehat{\boldsymbol{I}}_4 - \hat{\boldsymbol{S}} \\
&= \mathbf{Id}_6 - \widehat{\boldsymbol{S}} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

– Projections orthogonales : La vérification des égalités ci-dessous est triviale

$$\widehat{\boldsymbol{S}}\widehat{\boldsymbol{S}} = \widehat{\boldsymbol{S}} \tag{3.12}$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}\widehat{\boldsymbol{D}} = \widehat{\boldsymbol{D}} \tag{3.13}$$

$$\widehat{\boldsymbol{S}}\widehat{\boldsymbol{D}} = \mathbf{0}_6 \tag{3.14}$$

9

$$\forall \boldsymbol{T} \in \mathbb{S}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) : \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_3^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) : \exists c \in \mathbb{R} : \quad \boldsymbol{T} : \boldsymbol{X} = c\boldsymbol{I}_3 \tag{3.6}$$

$$\forall \boldsymbol{T} \in \mathbb{D}_4^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) : \forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_3^{\mathrm{s}}(\mathbb{R}) : \quad \mathrm{tr}(\boldsymbol{T} : \boldsymbol{X}) = 0 \tag{3.7}$$

– Norme

$$\|\widehat{\boldsymbol{S}}\|_F = \sqrt{\widehat{\boldsymbol{S}} \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}} = \sqrt{\mathsf{tr}(\widehat{\boldsymbol{S}}\widehat{\boldsymbol{S}})} = \sqrt{\mathsf{tr}(\widehat{\boldsymbol{S}})} = 1 \tag{3.15}$$

$$\|\widehat{\boldsymbol{D}}\|_F = \sqrt{\widehat{\boldsymbol{D}} \cdot \widehat{\boldsymbol{D}}} = \sqrt{\mathsf{tr}(\widehat{\boldsymbol{D}}\widehat{\boldsymbol{D}})} = \sqrt{\mathsf{tr}(\widehat{\boldsymbol{D}})} = \sqrt{5} \tag{3.16}$$

On ne va désormais manipuler que la forme matricielle et, pour raison de simplicité de la notation, les symboles (-*chapeau*) seront systématiquement supprimés.
Un tenseur d'élasticité isotrope peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{C}_{iso} = 3\mathcal{K}\boldsymbol{S} + 2\mu\boldsymbol{D} \tag{3.17}$$

où $\mathcal{K}$ et μ sont respectivement le module de compressibilité et le module de cisaillement.
De plus, en raison de l'orthogonalité de la paire $\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{D}\}$, l'équation (3.17) devient :

$$\boldsymbol{C}_{iso} = \left(\sqrt{3\mathcal{K}}\boldsymbol{S} + \sqrt{2\mu}\boldsymbol{D}\right)^2 \tag{3.18}$$

Du fait de l'équation (3.18), on propose d'écrire un tenseur d'élasticité anisotrope quelconque sous la forme :

$$\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}}) = \left(\sqrt{3\mathcal{K}(\delta)}\boldsymbol{S} + \sqrt{2\mu(\delta)}\boldsymbol{D}\right) \boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}}) \left(\sqrt{3\mathcal{K}(\delta)}\boldsymbol{S} + \sqrt{2\mu(\delta)}\boldsymbol{D}\right) \tag{3.19}$$

où $\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$, $\mathcal{K}(\delta)$ et $\mu(\delta)$ sont des variables aléatoires qui seront détaillées dans les sections (3.1.2.3-3.1.2.4) suivantes.

3.1.2 Introduction de l'incertitude dans le tenseur d'élasticité C

Ce qui est dit incertain est dit aléatoire. La façon la plus naturelle de rendre aléatoire une matrice $\boldsymbol{C}$, c'est de le faire à travers ses éléments (élément par élément, indépendemment) selon certaines lois habituelles comme les lois *Gaussienne, Log-Normale, Gamma, etc.* Toutefois, cela ne donne aucune assurance sur les propriétés mathématiques et mécaniques devant être satisfaites par ce tenseur. Or, pour un tenseur de rigidité, à part la connaissance de sa moyenne et de son écart-type, il est légitime d'imposer au moins sa positivité, son inversibilité (où bien sa propriété du second ordre) ou éventuellement d'autres propriétés correspondant aux informations qu'on possède telles que les moyennes de ses premières valeurs propres [Mignolet and Soize, 2008], ses moments d'ordres plus élevés, ou bien, comme ce que l'on a l'intention d'imposer dans le cadre de cette étude : la moyenne de son niveau d'anisotropie. Puisque ces contraintes sont à respecter globalement sur la matrice et non sur chacun de ses éléments, il est indispensable de connaître, d'une façon explicite ou bien implicite, la loi jointe de distribution de probabilité des éléments matriciels. Pour ce faire, il existe trois grandes approches méthodologiques :

(i) soit on estime la loi de distribution par des méthodes statistiques mathématiques quand on possède un assez grand nombre de données réelles correspondant aux réalisations de la matrice

(ii) soit on la construit directement par le principe de maximum d'entropie en partant des propriétés à respecter qu'on considère en fait comme les seules informations disponibles.

(iii) soit, quand la loi de distribution est impossible à écrire explicitement, on peut employer des algorithmes indirectes de la famille *Metropolis-Hastings* [voir Robert and Casella, 1999, par exemple] qui permettent l'obtention des réalisations d'une variable de loi quelconque en générant une chaîne MCMC [10] qui approxime la loi en question. Chaque maille de cette chaîne est obtenue d'après une procédure *accepté-refusé* avec une certaine probabilité.

Comme il s'agit d'une matrice de 21 coefficients mutuellement indépendants, on est loin d'être dans le premier cas. Dans le cadre de notre travail, on ne peut également pas utiliser la troisième stratégie car on envisage de simuler dans la suite un champ 3D aléatoire avec une certaine structure de corrélation spatiale qui ne serait accepté qu'avec une probabilité d'autant plus faible que le nombre de DDLs est élevé. On propose par conséquent de faire appel, dans un premier temps, à la construction par le principe de maximum d'entropie et ensuite de valider notre approche par des statistiques mathématiques.

3.1.2.1 Principe du maximum d'entropie. Modèle de Soize pour les matrices définies-positives

Dans cette sous-section, on décrit la stratégie à suivre pour construire un modèle probabiliste d'une matrice aléatoire à valeurs dans l'espace des matrices de taille 6×6, réelles, symétriques et définies-positives en s'inspirant du modèle proposé par Soize [2000]. La loi cible est celle de niveau d'incertitude optimale, qui caractérise la distribution probabiliste d'une variable aléatoire définie sur l'espace probabilitsé $(\mathfrak{A}, \mathcal{F}, P)$, à valeur dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$, paramétrée par un paramètre de dispersion $\delta \in \mathbb{R}^+$, un paramètre contrôlant son niveau d'anisotropie et une matrice moyenne isotrope. Mais avant de faire cela, on rappelle brièvement les notions de niveau d'incertitude, du principe de maximum d'entropie probabiliste et ainsi le modèle de Soize [2000] pour les variables aléatoires à valeurs matricielles définies-positives.

3.1.2.1.a Entropie probabiliste

Philosophiquement, plus on connaît d'information à propos d'un modèle, plus ce dernier est certain. Mais à un niveau de connaissance (ou bien de méconnaissance) donné, parmi les lois candidates remplissant les contraintes, on cherche celle qui est la plus incertaine possible car elle prend en compte le mieux la méconnaissance - la partie cachée de la réalité. Mais comment peut-on quantifier l'incertitude ? La réponse à cette question réside dans la définition de l'entropie probabiliste introduit comme une *mesure de l'incertitude* pour la première fois par Shannon [1948]. À titre d'illustration, l'entropie probabiliste est définie dans la suite pour les variables aléatoires vectorielles continues. Soit une variable aléatoire $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n)$ continue à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de loi de probabilité $P_\Phi(\mathrm{d}\boldsymbol{\phi})$ définie par la densité $p_\Phi(\boldsymbol{\phi})$ à travers la relation[11] :

$$P_\Phi(\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}) = p_\Phi(\boldsymbol{\phi})\mathrm{d}\,\boldsymbol{\phi}\ , \tag{3.20}$$

[10] MarKov Chain Monte Carlo

[11] avec $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$ les points de $\mathbb{R}^n$ associés à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}\boldsymbol{\phi} = \mathrm{d}\phi_1 \times \mathrm{d}\phi_2 \times ... \times \mathrm{d}\phi_n$, l'expression (3.20) représente la probabilité qu'une réalisation de $\mathbf{\Phi}$ se situe géométriquement à l'intérieur d'une *sphère* de *rayon* $\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}$ centrée en $\boldsymbol{\phi}$.

l'entropie probabiliste de $\boldsymbol{\phi}$ est alors définie par la fonction suivante :

$$\mathrm{S}(p_\Phi) = -\,\mathsf{E}\,\{\,\log p_\Phi(\boldsymbol{\phi})\} = -\int_{\mathbb{R}^n} p_\Phi(\boldsymbol{\phi})\,\log p_\Phi(\boldsymbol{\phi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\phi} \tag{3.21}$$

REMARQUE 3.1. *Les propriétés essentielles suivantes sont démontrées dans la littérature [voir Shannon, 1948, Soize, 2004, pour les détails des démonstrations] pour l'entropie probabiliste d'une variable vectorielle continue :*

(i) $\mathrm{S}(p_\Phi)$ *prend des valeurs dans tout* $\mathbb{R}$

$$-\infty \;<\; \mathrm{S}(p_\Phi) \;<\; +\infty \tag{3.22}$$

(ii) Si le support K *de* $p_\Phi(\boldsymbol{\phi})$ *est compact,* $\mathrm{S}(p_\Phi)$ *atteint son maximum* $\log|K|$ *quand* $p_\Phi(\boldsymbol{\phi})$ *est uniforme sur* K*, i.e. :*

$$p_\Phi(\boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{|K|}\mathbb{1}_K(\boldsymbol{\phi}) \tag{3.23}$$

où $|K|$ *désigne la mesure de* K

$$|K| = \int_K \mathrm{d}\boldsymbol{\phi} < +\infty \tag{3.24}$$

(iii) Si $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_m)$ *une autre variable aléatoire continue à valeur dans* $\mathbb{R}^m$ *obéissant à la loi de probabilité* $P_{\boldsymbol{\Psi}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\psi})$ *définie par la densité* $p_{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{\psi})$ *à travers :*

$$P_\Psi(\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}) = p_\Psi(\boldsymbol{\psi})\mathrm{d}\,\boldsymbol{\psi}\ , \tag{3.25}$$

la loi jointe des deux variables est caractérisée par :

$$P_{\Phi\Psi}(\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}, \mathrm{d}\boldsymbol{\psi}) = p_{\Phi\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}\Phi\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}\ , \tag{3.26}$$

dont l'entropie probabiliste correspondante s'écrit alors comme suit :

$$\mathrm{S}(p_\Phi, p_\Phi) = -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^m} p_{\Phi\Psi}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})\,\log p_{\Phi\Psi}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}\boldsymbol{\psi} \tag{3.27}$$

on a l'inégalité suivante :

$$\mathrm{S}(p_\Phi, p_\Psi) \leq \mathrm{S}(p_\Phi) + \mathrm{S}(p_\Psi). \tag{3.28}$$

Le signe d'égalité dans (3.28) se réalise quand $\boldsymbol{\phi}$ *et* $\boldsymbol{\psi}$ *sont deux variables indépendantes l'une de l'autre.*

(iv) À la différence des variables discrètes, l'entropie d'une variable continue est une mesure relative (mais n'est pas absolue) de l'incertitude, i.e. elle n'est pas invariante par rapport au système des coordonnées. Par contre, la loi de probabilité qui annule sa première dérivée reste invariante vis à vis des coordonnées.

Les propriétés récemment mentionnées dans (REMARQUE 3.1) donnent suite au *principe du maximum d'entropie*[12] qui a été énoncé pour la première fois par Jaynes [1957] dans les domaines de la physique statistique et de la mécanique quantique. Ce principe permet de construire la fonction de densité de probabilité $p_\Phi(\boldsymbol{\phi})$ (et donc la fonction de distribution cumulative de probabilité $P_{\boldsymbol{\phi}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\phi})$) de la variable aléatoire $\boldsymbol{\phi}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ en n'utilisant que les seules informations disponibles (jouant le rôle de contraintes dans ce problème d'optimisation). Le principe du maximum d'entropie peut s'exprimer comme suit (selon Soize [2004]) :

[12] appelé aussi *principe du maximum d'incertitude*

La densité de probabilité $p_\Phi(\boldsymbol{\phi})$ à construire est celle qui doit avoir la plus grande entropie probabiliste parmi l'ensemble de toutes les densités de probabilité possibles qui satisfont les contraintes définies par les informations disponibles.

Dans ce problème d'optimisation, bien que l'inconnue soit $p_\Phi(\boldsymbol{\phi})$, on connaît certaines conditions préalables comme être une densité de probabilité, *i.e.*

$$p_\Phi(\boldsymbol{\phi}) \geq 0 \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}^n} p_\Phi(\boldsymbol{\phi})\mathrm{d}\boldsymbol{\phi} = 1 \tag{3.29}$$

sur un support donné (compact où non)

$$\mathsf{supp}\, p_\Phi(\boldsymbol{\phi}) = K_n \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.30}$$

En dehors de ces deux informations triviales, les contraintes peuvent être imposées sous forme d'espérances mathématiques $\left\{\underline{\boldsymbol{g}}_j(\boldsymbol{\phi})\right\}_{j=1,\ldots,m}$ de m fonctions $\left\{\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{\phi})\right\}_{j=1,\ldots,m}$ avec $m \geq 1$ un nombre entier. Pour chacune de ces fonctions $\boldsymbol{\phi} \mapsto \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{\phi})$ de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^{\nu_j}$ avec $\nu_j \leq n$, la contrainte associée s'écrit alors comme suit :

$$\mathsf{E}\left\{\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{\phi})\right\} = \int_{K_n} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{\phi}) p_\Phi(\boldsymbol{\phi})\mathrm{d}\boldsymbol{\phi} = \underline{\boldsymbol{g}}_j(\boldsymbol{\phi}) \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.31}$$

L'ensemble des fonctions $p_\Phi(\boldsymbol{\phi})$ vérifiant les conditions (3.29-3.31) forme l'espace admissible $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(\boldsymbol{\Phi})$ où on va trouver une densité qui maximise l'entropie probabiliste définie en amont par (3.21) :

$$\hat{p}_\Phi(\boldsymbol{\phi}) = \mathsf{arg}\ \ \mathsf{max}_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(\boldsymbol{\Phi})}\ \mathrm{S}(p_\Phi) \tag{3.32}$$

La résolution du problème d'optimisation fonctionnelle (3.32) faisant appel en général à la méthode des multiplicateurs de Lagrange donne une solution unique.

3.1.2.1.b Maximum d'entropie pour les matrices définies-positives.

Si maintenant on s'intéresse aux tenseurs d'élasticité aléatoires et non aux variables aléatoires vectorielles précédemment étudiées, est-ce qu'une approche par le principe du maximum d'entropie peut aboutir à une loi de probabilité pour les matrices aléatoires représentant cette grandeur tensorielle ? Les travaux de recherche de Soize [2006, 2008], basés sur son travail fondamental de la théorie des matrices aléatoires pour modéliser les incertitudes non paramétriques [Soize, 2000], ont donné lieu à une réponse positive à cette question. Dans la suite, on résume les grandes lignes pour trouver cette loi de probabilité.

Soit $\boldsymbol{C}$ une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_6^s(\mathbb{R})$. Sa fonction de densité de probabilité est définie comme :

$$\begin{aligned} p_C(\boldsymbol{C}) : \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R}) &\to [0; +\infty[\\ \boldsymbol{C} &\mapsto p_C(\boldsymbol{C}) \end{aligned}$$

telle que :

$$\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} p_C(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{C} = 1 \tag{3.33}$$

où $\mathrm{d}\boldsymbol{C}$ le volume élémentaire de l'espace $\mathbb{M}_6^s(\mathbb{R})$ qui s'écrit, selon [Soize, 2000] :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{C} = 2^{6(6-1)/4} \prod_{1\leq \mathrm{i}\leq \mathrm{j}\leq 6} \mathrm{d}C_{\mathrm{ij}}$$

À part les informations triviales sur le support de $p_C(\boldsymbol{C})$ et sur la condition préalable (3.33) d'une densité de probabilité, les autres informations utilisables, imposées par Soize en tant que contraintes, sont la matrice moyenne et une condition assurant à la fois la propriété du second ordre et la propriété d'inversibilité du second ordre. Concrètement, le problème d'optimisation fonctionnelle peut être formulé sous forme de (PROBLÈME-3.1).

PROBLÈME 3.1. Problème d'optimisation de Soize

$$p_C(\boldsymbol{C}) = \mathsf{arg}\ \ \mathsf{max}_{\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(\boldsymbol{C})}\ \mathbb{S}(p_C) \tag{3.34}$$

Où l'espace $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(\boldsymbol{C})$ des densités admissibles est associé aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} p_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{C} = 1 & \text{(a)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} \boldsymbol{C}\ p_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{C} = \underline{\boldsymbol{C}} & \text{(b)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} \mathsf{log}(\mathsf{det}\boldsymbol{C})\ p_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{C} = \eta_c \text{ avec } |\nu| < +\infty & \text{(c)} \end{cases} \tag{3.35}$$

La résolution du (PROBLÈME 3.1) en utilisant les multiplicateurs de Lagrange conduit à la recherche d'une solution sous forme :

$$p_C^{\boldsymbol{\Lambda},\lambda}(\boldsymbol{C}) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})}(\boldsymbol{C}) \times \gamma_c \times (\mathsf{det}\,\boldsymbol{C})^{\lambda-1} \times \mathsf{exp}\Big(-\mathsf{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{C})\Big) \tag{3.36}$$

avec $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ et $(1-\lambda) \in \mathbb{R}$ sont respectivement les multiplicateurs des contraintes (3.35b) et (3.35c). Ensuite, l'introduction de l'intégrale de Siegel avec sa formule exacte[13] lors de la considération de la fonction caractéristique de $p_C^{\boldsymbol{\Lambda},\lambda}(\boldsymbol{C})$ permet de calculer explicitement $\boldsymbol{\Lambda}$ et γ_c comme suit :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{5+2\lambda}{2}\underline{\boldsymbol{C}}^{-1} \tag{3.38}$$

[13] D'après [Soize, 2000, Fougead and Fuchs, 1967], l'intégrale de Siegel est définie et calculée comme

$$J^{\boldsymbol{\Lambda},\lambda}(\boldsymbol{C}) := \int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} (\mathsf{det}\,\boldsymbol{C})^{\lambda-1} \times \mathsf{exp}\Big(-\mathsf{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{C})\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{C} = \sqrt{2\pi^7} \times \frac{\displaystyle\prod_{\mathrm{k}=1..6} \Gamma\Big(\frac{6-\mathrm{k}+2\lambda}{2}\Big)}{\sqrt{(\mathsf{det}\,\boldsymbol{\Lambda})^{5+2\lambda}}} \tag{3.37}$$

où $\Gamma(\tau)$ est la fonction *Gamma* que l'on va exprimer plus tard dans (3.79).

$$\gamma_c = \sqrt{2\pi^7} \times \frac{\sqrt{\left(\frac{5+2\lambda}{2}\right)^{6(5+2\lambda)}}}{\sqrt{(\det \boldsymbol{\Lambda})^{5+2\lambda}} \prod_{\mathrm{k}=1..6} \Gamma\left(\frac{6-\mathrm{k}+2\lambda}{2}\right)} \tag{3.39}$$

Il convient de justifier ici le fait que l'on explicite seulement $\boldsymbol{\Lambda}$ et γ_c. En effet, γ_c, qui est une constante liée au multiplicateur correspondant à (3.35a), joue le rôle du normalisateur pour que (3.35a) soit satisfaite. D'ailleurs, dans la construction de Soize [2000], il est inutile d'exprimer λ en fonction de η_c car la contrainte (3.35c) est imposée pour que $\boldsymbol{C}$ soit du second ordre et que son inverse soit une variable d'ordre[14] $q \geq 2$. Ces conditions sont assurées une fois que λ est suffisamment grand :

$$\lambda > \max\left\{0; \frac{q}{6} - \frac{5}{2}\right\}. \tag{3.40}$$

Par conséquent, λ peut être considéré comme un paramètre du modèle. Ainsi, les substitutions de (3.38) et (3.39) dans (3.49) nous donnent l'expression complètement explicite de la densité recherchée $p_C(\boldsymbol{C})$.

Une autre façon de représenter la solution de Soize du (PROBLÈME 3.1), étroitement liée avec la mise en oeuvre de la simulation de cette variable matricielle consiste à écrire au départ $\boldsymbol{C}$ à l'aide d'un noyau fluctuant normalisé[15] $\boldsymbol{G} \in \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ comme :

$$\boldsymbol{C} = \underline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \underline{\boldsymbol{L}} \tag{3.42}$$

avec $\underline{\boldsymbol{L}}$ la matrice triangulaire supérieure qui est en effet le facteur de Cholesky de la matrice moyenne $\underline{\boldsymbol{C}}$:

$$\underline{\boldsymbol{C}} = \underline{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}} \underline{\boldsymbol{L}} \tag{3.43}$$

Puisque $\underline{\boldsymbol{L}}$ est donné déterministe, la variable aléatoire $\boldsymbol{C}$ peut être complètement déterminée à travers la loi de probabilité de la variable aléatoire $\boldsymbol{G}$. De plus, en effectuant un reparamétrage $0 \leq \delta_{\mathrm{G}} < 1$ concernant le paramètre λ :

$$\delta_{\mathrm{G}} = \sqrt{\frac{7}{5+2\lambda}}\,, \tag{3.44}$$

on arrive à écrire la loi de probabilité de $\boldsymbol{G}$ sous la forme

$$p_G(\boldsymbol{G}) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})}(\boldsymbol{G}) \times \gamma_{\mathrm{G}} \times \det \boldsymbol{G} \times \frac{7(1-\delta_{\mathrm{G}}^2)}{2\delta_{\mathrm{G}}^2} \exp\left(-\frac{7}{2\delta_{\mathrm{G}}^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{G})\right) \tag{3.45}$$

que l'on utilise dans la prochaine section pour notre proposition où (3.39) détaille γ_{G}. L'intérêt principal de ce paramétrage est que δ_{G} est homogène à un coefficient de variance et que si l'on définit $\delta_{|C|}$ le coefficient de variance de la norme de Frobenius de $\boldsymbol{C}$ de la façon suivante :

$$\delta_{|C|} := \sqrt{\frac{\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C} - \underline{\boldsymbol{C}}\|^2\right\}}{\|\underline{\boldsymbol{C}}\|^2}}, \tag{3.46}$$

[14] *i.e.* $\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}^{-1}\|^q\right\} < +\infty$

[15] L'écriture de (3.42) exige naturellement que

$$\mathsf{E}\left\{\boldsymbol{G}\right\} = \mathbf{Id}_6 \tag{3.41}$$

pour que la contrainte (3.35b) sur la moyenne de $\boldsymbol{C}$ soit vérifiée.

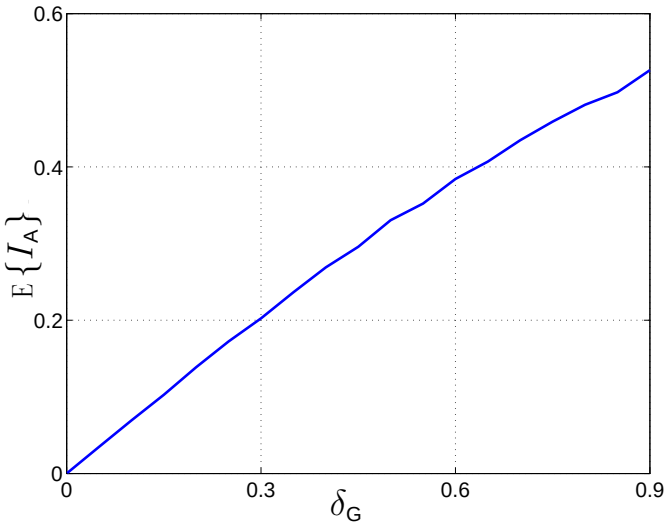


FIG. 3.1 – Niveau d'anisotropie augmente avec la fluctuation δ_G

il peut être exprimé en fonction de δ_G et de la matrice moyenne $\underline{\boldsymbol{C}}$:

$$\delta^2_{|C|} = \frac{\delta_G^2}{7}\left(1 + \frac{\left(\mathrm{tr}(\underline{\boldsymbol{C}})\right)^2}{\mathrm{tr}(\underline{\boldsymbol{C}}^2)}\right) \tag{3.47}$$

Une des propriétés importantes de cette construction est que : quelle que soit la symétrie matérielle du modèle moyen, (*i.e.*, qu'il soit un parmi ceux que l'on résumé dans le chapitre précédent : triclinique, orthotrope, cubique, isotrope transverse où isotrope *etc.*), les réalisations de la matrice $\boldsymbol{C}$ sont toutes en général tricliniques, *i.e.*, de 21 coefficients indépendants. Cela contribue à la généralité du modèle. Par contre, cette même propriété peut devenir problématique pour des applications particulières. En effet, lors d'une étude statistique sur les tenseurs (matrices) d'élasticité à moyenne isotrope, on remarque (FIG-3.1) que leur niveau d'anisotropie (quantifié par la valeur moyenne de l'indice d'anisotropie classique définie dans l'équation (2.14) du **Chapitre** 2) augmente avec le niveau de fluctuation.

Le fait que le paramètre δ_G contrôle à la fois la fluctuation des matrices et leur niveau d'anisotropie rend impossible l'application de ce modèle de Soize pour la modélisation de matériaux réalistes qui sont susceptibles d'être fortement variant mais d'un comportement élastique de niveau d'anisotropie limité, comme dans le cas très courant des milieux géophysiques. Pour cette raison, un principal objectif de ce travail de thèse est de proposer un nouveau modèle concernant les matériaux à comportement moyen isotrope, qui est toujours à paramétrage minimal et possède entre outre un nouveau paramètre contrôlant l'anisotropie du tenseur d'élasticité.

3.1.2.2 Construction de la loi de probabilité de C par l'approche de maximisation d'entropie

Comme l'objectif supplémentaire est de contrôler I_A, on introduit, à part des conditions dans la construction du [Soize, 2000] qui impose la matrice moyenne (elle est isotrope cette fois) et la positivité, une autre information utilisable concernant la valeur moyenne de l'indice

d'anisotropie. Ainsi, le problème d'optimisation de l'incertitude du tenseur $\boldsymbol{C}$ peut être formulé sous forme du (PROBLÈME 3.2).

PROBLÈME 3.2. Problème d'origine

$$p_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{C}) = \mathsf{arg}\ \ \mathsf{max}_{\ \boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_C)}\ \mathbb{S}_C(p_C) \tag{3.48}$$

Où l'espace des densités admissibles $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_C)$ est défini sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} p_C(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{C} = 1 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} \boldsymbol{C}\ p_C(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{C} = \underline{\boldsymbol{C}} = 3\underline{\mathcal{K}}\boldsymbol{S} + 2\underline{\mu}\boldsymbol{D} \in \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R}) \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} \mathsf{log}(\mathsf{det}\boldsymbol{C})\ p_C(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{C} = \nu \text{ avec } |\nu| < +\infty \\ \text{et,} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{C})\ p_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{C} = \eta \in [0;1[\end{cases}$$

avec $I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{C})$ l'indice anisotrope définie par (2.14).

Naturellement, on effectue les démarches similaires à celles de Soize en commençant par l'écriture du Lagrangien qui conduit à chercher la solution de densité sous la forme :

$$\begin{aligned} p_C^{\boldsymbol{\Lambda},\lambda_1,\lambda_2}(\boldsymbol{C}) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})}(\boldsymbol{C}) \times \gamma_c \times (\mathsf{det}\,\boldsymbol{C})^{\lambda_1-1} \times \mathsf{exp}\Big(-(1-\lambda_2)I_{\mathrm{A}}\Big) \\ \times \mathsf{exp}\Big(-\mathsf{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{C})\Big). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Par contre, une difficulté apparaît lors du passage en fonction caractéristique. Il apparaît que dans notre cas l'étude de la fonction caractéristique de $\boldsymbol{C}$ ne donne pas suite exactement à la considération de l'intégrale de Siegel (3.37) mais d'une autre intégrale qui concerne aussi $I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{C})$:

$$\tilde{J}^{\boldsymbol{\Lambda},\lambda_1,\lambda_2}(\boldsymbol{C}) := \int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} (\mathsf{det}\,\boldsymbol{C})^{\lambda-1} \times \mathsf{exp}\big(-(1-\lambda_2)I_{\mathrm{A}}\big) \times \mathsf{exp}\Big(-\mathsf{tr}(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{C})\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{C} \tag{3.50}$$

Une première piste était d'utiliser les raisonnements développés par Godement [1957] dans le cadre de l'étude sur la classe d'intégrales généralisées de l'intégrale de Siegel en remplaçant la fonction scalaire $(\mathsf{det}\,\boldsymbol{C})^{\lambda-1}$ parue dans (3.37) par une fonction scalaire quelconque[16] de $\boldsymbol{C}$. Néanmoins, la forme non-quadratique de $I_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{C})$ rend le développement compliqué et fait en conséquence que la résolution ou bien la solvabilité du (PROBLÈME 3.2) reste pour nous une question ouverte. Toutefois, un contournement du (PROBLÈME 3.2) est faisable quand on se base sur les trois arguments intuitifs suivants :

[16] dans notre cas cette fonction va être $(\mathsf{det}\,\boldsymbol{C})^{\lambda_1-1} \times \mathsf{exp}\Big(-(1-\lambda_2)I_{\mathrm{A}}\Big)$

PROBLÈME 3.3. Problème de maximum d'entropie sur $\boldsymbol{C}$

$$p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C}) = \arg\ \max_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_{G\,\mathcal{K}\,\mu})} \mathrm{S}_C(\boldsymbol{C}) \tag{3.51}$$

Où l'espace $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_{G\,\mathcal{K}\,\mu})$ est défini sous contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\,\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu = 1 & \text{(a)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\,\log\det(\boldsymbol{C})\,\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu = \eta,\ \text{avec } |\eta| < +\infty & \text{(b)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu = \mathbf{Id}_6 & \text{(c)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\,\mathcal{K}\,\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu = \underline{\mathcal{K}} & \text{(d)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\,\mu\,\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu = \underline{\mu} & \text{(e)} \end{cases} \tag{3.52}$$

avec sous-entendu $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{G}, \mathcal{K}, \mu)$ fonction de 3 variables aléatoires $\boldsymbol{G} \in \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{K}$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$.

(i) Dans la formule (3.19) si $\underline{\mathcal{K}}$ et $\underline{\mu}$ sont imposés, $\boldsymbol{G}$ doit être une matrice aléatoire à moyenne identité. De ce point de vue là, les rôles de $\boldsymbol{G}$ dans (3.19) et dans (3.42) sont analogues.

(ii) La fluctuation de $\boldsymbol{G}$ va contrôler le niveau d'anisotropie d'une façon vraisemblable à ce que l'on a constaté dans la FIG 3.1.

(iii) Les fluctuations de $\mathcal{K}$ et μ vont principalement imposer la variation de $\boldsymbol{C}$.

D'où, en utilisant la décomposition du tenseur d'élasticité sous la forme (3.19), on propose de formuler le problème de maximisation sous forme du (PROBLÈME-3.3). Le Lagrangien associé à ce problème est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{L}\big(p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\big) = {} & \mathrm{S}\big(p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\big) \\ & - (\lambda_0 - 1)\Big(\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\,\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu - 1\Big) \\ & - \lambda_1\Big(\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\log\det(\boldsymbol{C})\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu - \eta\Big) \\ & - \Big\langle \boldsymbol{\Lambda};\Big(\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu - \mathbf{Id}_6\Big)\Big\rangle \\ & - \lambda_{\mathcal{K}}\Big(\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\mathcal{K}\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu - \underline{\mathcal{K}}\Big) \\ & - \lambda_{\mu}\Big(\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\mu\mathrm{d}\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\mathcal{K}\,\mathrm{d}\mu - \underline{\mu}\Big) \end{aligned} \tag{3.53}$$

où

- λ_0, λ_1, $\boldsymbol{\Lambda}$, $\lambda_{\mathcal{K}}$, λ_μ sont les multiplicateurs de Lagrange correspondant aux contraintes énumérées dans (3.52).
- $\langle \bullet ; \bullet \rangle$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$

La stationnarisation de la variation du $\mathrm{L}\big(p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\big)$ vis-à-vis de $p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})$:

$$\frac{\partial}{\partial p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})}\mathrm{L}\big(p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})\big) = 0 \tag{3.54}$$

donne lieu à la forme suivante de la solution :

$$p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C}) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}(\boldsymbol{C}) \times \exp\Big(-\lambda_0 - \lambda_1 \log\det(\boldsymbol{C}) - \langle \boldsymbol{\Lambda}; \boldsymbol{G}\rangle - \lambda_{\mathcal{K}}\mathcal{K} - \lambda_\mu \mu\Big) \tag{3.55}$$

avec $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}(\boldsymbol{C})$ la loi de distribution uniforme définie sur le support $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Cette loi peut s'écrire à une constante près, grâce au fait que $\boldsymbol{G}$, $\mathcal{K}$, μ sont indépendants l'un à l'autre, comme le produit des lois uniformes définies pour chacune de ces trois variables :

$$\mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}(\boldsymbol{C}) = \gamma \times \mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})}(\boldsymbol{G}) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\mathcal{K}) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\mu) \tag{3.56}$$

D'ailleurs, en utilisant la décomposition proposée à l'équation (3.19), on peut développer la déterminant de la matrice $\boldsymbol{C}$ comme :

$$\det \boldsymbol{C} = \det \boldsymbol{C}_{iso} \times \det \boldsymbol{G} \tag{3.57}$$

et puis, avec la propriété ([voir Bucatatu and Slawinski, 2009, Gazis et al., 1963, par exemple[17]]) que $\mathcal{K}$ et 2μ sont les valeurs propres aux multiplicités respectivement de 1 et de 5 de la matrice $\boldsymbol{C}_{iso}$, on a pour cette dernière :

$$\det \boldsymbol{C} = \mathcal{K}(2\mu)^5 \times \det \boldsymbol{G} \tag{3.58}$$

D'où, l'équation (3.55) devient :

$$\begin{aligned} p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C}) = \gamma &\times \mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})}(\boldsymbol{G}) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\mathcal{K}) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\mu) \\ &\times \exp\Big(-\lambda_0 - \lambda_1\big(\log(\mathcal{K}) + 5\log(2\mu) + \log\det \boldsymbol{G}\big)\Big) \\ &\times \exp\Big(-\langle \boldsymbol{\Lambda}; \boldsymbol{G}\rangle - \lambda_{\mathcal{K}}\mathcal{K} - \lambda_\mu\mu\Big) \end{aligned} \tag{3.59}$$

Ensuite, en séparant les termes concernant les 3 variables $\boldsymbol{G}$, $\mathcal{K}$, μ et en choisissant de nouvelles constantes, on arrive à écrire la loi conjointe $p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C})$ sous forme du produit de 3 lois marginales :

$$p_{G\,\mathcal{K}\,\mu}(\boldsymbol{C}) = p_G(\boldsymbol{G}) \times p_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}) \times p_\mu(\mu) \tag{3.60}$$

avec

$$p_G(\boldsymbol{G}) = \gamma_G \times \mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})}(\boldsymbol{G}) \times (\det \boldsymbol{G})^{-\lambda_1} \times \exp\Big(-\langle \boldsymbol{\Lambda}; \boldsymbol{G}\rangle\Big) \tag{3.61}$$

$$p_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}) = \gamma_{\mathcal{K}} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\mathcal{K}) \times \mathcal{K}^{-\lambda_1}\exp(-\lambda_{\mathcal{K}}\mathcal{K}) \tag{3.62}$$

$$p_\mu(\mu) = \gamma_\mu \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\mu) \times \mu^{-\lambda_1}\exp(-\lambda_\mu\mu) \tag{3.63}$$

[17] Cette propriété peut être déduite directement du fait que $\{\boldsymbol{S}, \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{D}\}$ forme une base orthonormale de l'espace des tenseurs isotropes

PROBLÈME 3.4. Problème de maximum d'entropie sur $\boldsymbol{G}$

$$p_G(\boldsymbol{G}) = \arg\max_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_G)} \mathbb{S}_G(\boldsymbol{G}) \tag{3.64}$$

Où l'espace des densités admissibles $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_G)$ est définie sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} p_G(\boldsymbol{G})\, \mathrm{d}\boldsymbol{G} = 1 & \text{(a)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} \boldsymbol{G}\, p_G(\boldsymbol{G})\, \mathrm{d}\boldsymbol{G} = \mathbf{Id}_6 & \text{(b)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})} \log(\det \boldsymbol{G})\, p_G(\boldsymbol{G})\, \mathrm{d}\boldsymbol{G} = \eta_{\mathrm{G}} \text{ avec } |\eta_{\mathrm{G}}| < +\infty & \text{(c)} \end{cases} \tag{3.65}$$

PROBLÈME 3.5. Problème de maximum d'entropie sur $\mathcal{K}$

$$p_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}) = \arg\max_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_{\mathcal{K}})} \mathbb{S}_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\mathcal{K}}) \tag{3.66}$$

Où l'espace des densités admissibles $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_{\mathcal{K}})$ est définie sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} p_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\mathcal{K}})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{K}} = 1 & \text{(a)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \boldsymbol{\mathcal{K}}\, p_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\mathcal{K}})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{K}} = \underline{\mathcal{K}} \in]0; +\infty[& \text{(b)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \log(\boldsymbol{\mathcal{K}})\, p_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{\mathcal{K}})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{K}} = \eta_k \text{ avec } |\eta_k| < +\infty & \text{(c)} \end{cases} \tag{3.67}$$

L'écriture dans (3.60) et le fait que p_G, $p_{\mathcal{K}}$, p_μ ne dépendent respectivement que de $\boldsymbol{G}$, $\mathcal{K}$, μ confirment d'une part, que ces 3 variables sont mutuellement indépendantes et permettent d'autre part l'écriture équivalente du problème d'origine (PROBLÈME 3.3) sous forme d'un système des 3 problèmes indépendants du maximum d'entropie . En effet, les 3 lois de distribution de probabilité p_G, $p_{\mathcal{K}}$, p_μ prennent forme de la solution respectivement des 3 problèmes indépendants (PROBLÈMES 3.4-3.6) de maximisation d'entropie séparemment effectués sur $\boldsymbol{G}$, $\mathcal{K}$ et μ.

Les solutions de ces 3 problèmes sont toutes connues dans la littérature. Les PROBLÈMES 3.5 et 3.6 peuvent se réduire en réalité à un seul problème appliqué aux 2 copies indépendantes d'une variable scalaire de support $\mathbb{R}^+$, de moyenne et moyenne du logarithme données dont la solution peut être trouvée dans [Soize, 2004]. Le PROBLÈME 3.4 est identique au problème de Soize [2000]. Ces résolutions donnent lieu à la construction de $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}$, $\boldsymbol{\mu}$, qui font l'objet des sections (3.1.2.3) et (3.1.2.4) suivantes.

PROBLÈME 3.6. Problème de maximum d'entropie sur $\boldsymbol{\mu}$

$$p_\mu(\boldsymbol{\mu}) = \arg\max_{\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_\mu)} \mathrm{S}_\mu(\boldsymbol{\mu}) \tag{3.68}$$

Où l'espace des densités admissibles $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}(p_\mu)$ est définie sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} p_\mu(\boldsymbol{\mu})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\mu} = 1 & \text{(a)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \boldsymbol{\mu}\, p_\mu(\boldsymbol{\mu})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\mu} = \underline{\mu} \in]0; +\infty[& \text{(b)} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \log(\boldsymbol{\mu})\, p_\mu(\boldsymbol{\mu})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\mu} = \eta_m \text{ avec } |\eta_m| < +\infty & \text{(c)} \end{cases} \tag{3.69}$$

3.1.2.3 Noyau G : Loi de distribution et schéma de mise en oeuvre

La matrice $\boldsymbol{G}$ appartient à l'ensemble SG^+ des matrices réelles aléatoires, normées[18], symétriques et définies-positives. Cette matrice est définie sur l'espace probabilisé$(\mathfrak{A}, \mathcal{F}, P)$, à valeur dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$, paramétrée par un seul réel positif paramètre de dispersion $\delta_{\mathrm{G}} \in \mathbb{R}^+$, *i.e.* $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$. D'après [Soize, 2005, Arnst, 2007, pour $n = 6$], la densité de distribution probabilité de $\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$ obtenue par le principe de maximum d'entropie est celle exprimée par (3.45) que l'on rappelle ici :

$$p_G(\boldsymbol{G}) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})}(\boldsymbol{G}) \times \gamma_{\mathrm{G}} \times \det \boldsymbol{G} \times \frac{7(1-\delta_{\mathrm{G}}^2)}{2\delta_{\mathrm{G}}^2} \exp\Big(-\frac{7}{2\delta_{\mathrm{G}}^2} \mathrm{tr}(\boldsymbol{G})\Big)$$

avec la constante de normalisation γ_{G} donnée par :

$$\gamma_{\mathrm{G}} = \frac{\sqrt{(2\pi)^7} \left(\dfrac{7}{2\delta_{\mathrm{G}}^2}\right)^{\dfrac{21}{\delta_{\mathrm{G}}^2}}}{\displaystyle\prod_{\mathrm{k}=1..6} \Gamma\left(\dfrac{7}{\delta_{\mathrm{G}}^2} + \dfrac{1-\mathrm{k}}{2}\right)} \tag{3.70}$$

Simulation de l'ensemble des matrice aléatoire $\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$: Soize [2006] a proposé une stratégie pour simuler la matrice carrée, de taille $n \times n$, aléatoire non-gaussienne. Cette stratégie, qui est utilisée également dans [Arnst, 2007], consiste d'abord à factoriser la matrice en sa racine carrée au sens de Cholesky et ensuite de construire la matrice triangulaire à partir des germes gaussiens centrés réduits avec une transformation non-gaussienne isoprobabiliste si nécessaire. La description ci-dessous, où $n = 6$, est une application identique de cette démarche à notre cas de la matrice noyau $\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$.

$$\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}}) = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(\delta_{\mathrm{G}})\boldsymbol{L}(\delta_{\mathrm{G}}) \tag{3.71}$$

où $\boldsymbol{L}(\delta_{\mathrm{G}})$ une matrice triangulaire supérieure aléatoire possédant des termes définis comme suit :

[18] *i.e.*, sa norme de Frobenius connaît un écart-type unitaire et sa matrice moyenne vaut identité

– Pour les termes extra-diagonaux supérieurs (j > i) :

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{ij}}(\delta_{\mathrm{G}}) = \frac{\delta_{\mathrm{G}}}{\sqrt{7}}\mathcal{G}_{\mathrm{k}} \tag{3.72}$$

– Pour les termes diagonaux (j = i) :

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{ii}}(\delta_{\mathrm{G}}) = \frac{\delta_{\mathrm{G}}}{\sqrt{7}}\sqrt{2h(\mathcal{G}_{\mathrm{k}}, \alpha_{\mathrm{i}})} \tag{3.73}$$

– Pour les termes extra-diagonaux inférieurs (j < i) :

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{ij}}(\delta_{\mathrm{G}}) = 0 \tag{3.74}$$

Où :
- $\mathcal{G}_{\mathrm{k}}$ pour $\mathrm{k} = 1..21$ sont 21 copies indépendants d'une variable obéissant la loi Gaussienne réduite $\mathcal{N}(0,1)$
- k, réindexation

$$\mathrm{k} = \frac{(14-\mathrm{i})(\mathrm{i}-1)}{2} + \mathrm{j} - \mathrm{i} + 1 \tag{3.75}$$

- α_{i} le paramètre de $h(\bullet, \alpha_{\mathrm{i}})$ qui contrôle la fluctuation

$$\alpha_{\mathrm{i}} = \frac{7}{2\delta_{\mathrm{G}}^2} - \frac{\mathrm{i}-1}{2} \tag{3.76}$$

- $h(g, \alpha_{\mathrm{i}})$ la transformation non-gaussienne qui transforme une variable scalaire Gaussienne g, centrée et réduite, à une variable scalaire de loi *Gamma* :

$$h(g;\alpha) = F_{\Gamma}^{-1}\left(F_g(g);\alpha\right) \tag{3.77}$$

où F_g et F_{Γ} sont respectivement la fonction cumulative de distribution de la loi *Gaussienne* :

$$\begin{aligned} F_g : \mathbb{R} &\to]0,1[\\ g &\mapsto F_g(g) = \int_{-\infty}^{g} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.78}$$

et de la loi *Gamma* :

$$\begin{aligned} F_{\Gamma}(\alpha) : \mathbb{R}^+ &\to]0,1[\\ g &\mapsto F_{\Gamma}(g;\alpha) = \int_{0}^{g} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-x\right) \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.79}$$

avec

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp\left(-t\right) \mathrm{d}t \tag{3.80}$$

Conséquence de la réalisation des contraintes (3.65), les matrices aléatoires $\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$ connaissent une fluctuation

$$\frac{\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}}) - \mathbf{Id}_6\|^2\right\}}{6} = \delta_{\mathrm{G}}^2 \tag{3.81}$$

3.1.2.4 Modules d'élasticité : Loi de distribution et schéma de mise en oeuvre

Étant la valeur propre (resp. la valeur propre multiple) d'une matrice symétrique, défini positive, le module de compressibilité $\mathcal{K}$ (resp. de cisaillement μ) est considéré comme une variable aléatoire à valeur réelle et strictement positive. Si on applique le principe de maximum d'entropie en connaissant la valeur moyenne, et la valeur moyenne du logarithme, *i.e.* on résoud les PROBLÈMES 3.5-3.6, on trouve [voir Soize, 2004, par exemple] que la loi de distribution de probabilité de ces modules est la loi *Gamma* :

$$p_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\mathcal{K}) \frac{1}{\underline{\mathcal{K}}} \left(\frac{1}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{\delta^2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\delta^2})} \left(\frac{\mathcal{K}}{\underline{\mathcal{K}}}\right)^{\frac{1}{\delta^2}-1} \exp\left(-\frac{\mathcal{K}}{\delta^2 \underline{\mathcal{K}}}\right) \tag{3.82}$$

et

$$p_{\mu}(\mu) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\mu) \frac{1}{\underline{\mu}} \left(\frac{1}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{\delta^2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\delta^2})} \left(\frac{\mu}{\underline{\mu}}\right)^{\frac{1}{\delta^2}-1} \exp\left(-\frac{\mu}{\delta^2 \underline{\mu}}\right) \tag{3.83}$$

Leurs valeurs réduites peuvent être construites par la transformation isoprobabiliste appliquée à 2 autres copies de la variable Gaussienne $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{K}(\delta) = \delta \underline{\mathcal{K}} h(\mathcal{G}_{22}, \delta) \tag{3.84}$$

$$\mu(\delta) = \delta \underline{\mu} h(\mathcal{G}_{23}, \delta) \tag{3.85}$$

3.1.2.5 Propriétés de la variable C

Déterminé par l'équation (3.19), $\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})$ hérite les propriétés suivantes des propriétés de $\mathcal{K}(\delta)$, $\mu(\delta)$ et $\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$:

(i) Sa matrice moyenne est isotrope :

PROPRIÉTÉ 3.1. *Si $\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})$ est donnée par (3.19), son espérance mathématique $\underline{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})$ existe et peut s'écrire :*

$$\underline{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}}) = \mathsf{E}\left\{\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\right\} = 3\underline{\mathcal{K}}\boldsymbol{S} + 2\underline{\mu}\boldsymbol{D} \tag{3.86}$$

PREUVE. Comme $\boldsymbol{G}$, $\mathcal{K}$ et μ sont mutuellement indépendants, on peut développer comme suit :

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left\{\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\right\} &= \mathsf{E}\left\{(3\mathcal{K}(\delta)\boldsymbol{S} + 2\mu(\delta)\boldsymbol{D})^{1/2} \times \mathsf{E}\left\{\boldsymbol{G}\right\} \times (3\mathcal{K}(\delta)\boldsymbol{S} + 2\mu(\delta)\boldsymbol{D})^{1/2}\right\} \\ &= \left(3\,\mathsf{E}\left\{\mathcal{K}\right\}\boldsymbol{S} + 2\,\mathsf{E}\left\{\mu\right\}\boldsymbol{D}\right) \end{aligned} \tag{3.87}$$

sachant que les espérances mathématiques de $\boldsymbol{G}$, $\mathcal{K}$ et μ sont respectivement $\mathbf{Id}_6$, $\underline{\mathcal{K}}$ et $\underline{\mu}$, la déduction de l'équation (3.86) est directe.

(ii) Elle est du second ordre :

PROPRIÉTÉ 3.2. *Si la matrice $\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})$ est donnée par (3.19), elle est de carré intégrable dans $\mathbb{M}_6^+$. C'est à dire :*

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2\right\} < +\infty \tag{3.88}$$

PREUVE. À partir de la double inégalité $\|\boldsymbol{C}\|_{\mathsf{vp}} \leq \|\boldsymbol{C}\| \leq \sqrt{6}\|\boldsymbol{C}\|_{\mathsf{vp}}$, l'équation (3.19) implique :

$$\|\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2 \leq 6^2 \|\boldsymbol{Q}(\delta)\|_{\mathsf{vp}}^4 \|\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})\|_{\mathrm{F}}^2 \tag{3.89}$$

où

$$\boldsymbol{Q}(\delta) = \sqrt{3\mathcal{K}(\delta)}\boldsymbol{S} + \sqrt{2\mu(\delta)}\boldsymbol{D}. \tag{3.90}$$

On remarque que $\boldsymbol{Q}(\delta)$ est ainsi un tenseur isotrope, il possède une valeur propre simple égale à $\sqrt{3\mathcal{K}}$ et une valeur propre à multiplicité 5 égale à $\sqrt{2\mu}$. Sa norme sup est par définition égale à sa valeur propre la plus grande :

$$\|\boldsymbol{Q}(\delta)\|_{\mathsf{vp}} = \max\left\{\sqrt{3\mathcal{K}}; \sqrt{2\mu}\right\}. \tag{3.91}$$

Comme $\mathcal{K}(\delta)$, $\mu(\delta)$ et $\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$ sont indépendants on a :

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2\right\} &\leq 6^2\, \mathsf{E}\left\{\max\left\{9\mathcal{K}^2\,; 4\mu^2\right\}\right\}\, \mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{G}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2\right\} \\ &\leq 2 \times 6^2 \max\left\{\mathsf{E}\left\{9\mathcal{K}^2\right\}\,;\, \mathsf{E}\left\{4\mu^2\right\}\right\} \mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{G}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2\right\}\end{aligned} \tag{3.92}$$

Ainsi, du fait que $\mathcal{K}(\delta)$, $\mu(\delta)$ et $\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$ sont du second ordre, $\boldsymbol{C}(\delta_{\mathrm{G}})$ l'est également.

(iii) Son inverse est également du second ordre :

PROPRIÉTÉ 3.3.

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}^{-1}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2\right\} < +\infty \tag{3.93}$$

PREUVE. La norme de l'inverse de $\boldsymbol{C}$ s'écrit :

$$\|\boldsymbol{C}^{-1}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2 = \|\boldsymbol{Q}^{-1}(\delta)\boldsymbol{G}^{-1}(\delta_{\mathrm{G}})\boldsymbol{Q}^{-1}(\delta)\|^2 \tag{3.94}$$

$$\|\boldsymbol{C}^{-1}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2 \leq \|\boldsymbol{Q}^{-1}(\delta)\|^4 \|\boldsymbol{G}^{-1}(\delta_{\mathrm{G}})\|^2 \tag{3.95}$$

Le fait que $(3\mathcal{K})^{-1/2}$ et $(2\mu)^{-1/2}$ sont les valeurs propres aux multiplicités respectivement 1 et 5 de $\boldsymbol{Q}^{-1}$ donne lieu à l'inégalité suivante :

$$\|\boldsymbol{Q}^{-1}(\delta)\|^4 \leq 6^2 \max\left\{\frac{1}{9\mathcal{K}^2}; \frac{1}{4\mu^2}\right\} \tag{3.96}$$

D'où la majoration de $\|\boldsymbol{C}^{-1}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2$ et en passant à l'espérance mathématique tout en prenant en compte d'indépendance entre $\boldsymbol{C}_{iso}(\delta)$ et $\boldsymbol{G}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})$:

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}^{-1}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})\|^2\right\} \leq 2 \times 6^2 \max\left(\mathsf{E}\left\{\frac{1}{9\mathcal{K}^2}\right\} + \mathsf{E}\left\{\frac{1}{4\mu^2}\right\}\right) \times \mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{G}^{-1}(\delta_{\mathrm{G}})\|^2\right\} \tag{3.97}$$

Par ailleurs, les troisièmes contraintes (3.67) et (3.69) sur $\mathcal{K}$ et μ impliquent, selon [Arnst, 2007], pour

$$0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.98}$$

que :

$$\mathsf{E}\left\{\frac{1}{\mathcal{K}^2}\right\} < +\infty, \tag{3.99}$$

$$\mathsf{E}\left\{\frac{1}{\mu^2}\right\} < +\infty \tag{3.100}$$

tandis que la troisième contrainte de (3.65) implique, d'après [Soize, 2006], l'inégalité suivante :

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{G}^{-1}(\delta_{\mathrm{G}})\|^2\right\} < +\infty \ \text{ pour } 0 < \delta_{\mathrm{G}} < \sqrt{\frac{7}{11}}. \tag{3.101}$$

Enfin, en remplaçant les inégalités (3.99), (3.100) et (3.101) dans l'expression (3.97), on montre l'inégalité 3.93 pour la variable aléatoire $\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})$.

(iv) *Son niveau d'anisotropie est contrôlé par δ_{G} :*
La matrice isotrope équivalente (la plus proche) de $\boldsymbol{C}$ est définie comme :

$$\boldsymbol{C}_{iso}^{eqv} = \left(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{S} + \frac{1}{5}\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{C} \tag{3.102}$$

$$= \overline{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{C}_{iso} \tag{3.103}$$

avec

$$\boldsymbol{C}_{iso} = \boldsymbol{Q}^2 = 3\mathcal{K}\boldsymbol{S} + 2\mu\boldsymbol{D} \text{ ou } \boldsymbol{C}_{iso}^{1/2} = \boldsymbol{Q} \tag{3.104}$$

et

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \frac{\mathcal{K}^{eqv}}{\mathcal{K}}\boldsymbol{S} + \frac{\mu^{eqv}}{\mu}\boldsymbol{D} \tag{3.105}$$

où $\mathcal{K}^{eqv}$ et μ^{eqv} sont respectivement des modules équivalents de compressibilité et de cisaillement :

$$\mathcal{K}^{eqv} = \frac{1}{9}\mathsf{tr}(\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_2) \tag{3.106}$$

$$\mu^{eqv} = \frac{1}{10}\left(\mathsf{tr}(\boldsymbol{C}) - \frac{1}{3}\mathsf{tr}(\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_2)\right) \tag{3.107}$$

La différence entre $\boldsymbol{C}$ et sa matrice isotrope s'écrit alors comme :

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{iso} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}_{iso}^{eqv} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{G} - \overline{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{Q} \tag{3.108}$$

À la différence de l'indice d'anisotropie classique I_{A} exprimée dans (2.14), on définit maintenant le nouvel indice d'anisotropie $\mathrm{I}_{\boldsymbol{\alpha}}$ comme la norme de la matrice normalisée de $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{iso}$ par rapport à $\boldsymbol{C}_{iso}$

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{\alpha}}^2 := \frac{\|\boldsymbol{\mathcal{D}}_{iso}\|^2_{\boldsymbol{C}_{iso}}}{6}$$

$$= \frac{\|\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{G} - \overline{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}\|^2}{6}$$

$$\mathrm{I}_{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \frac{\|\boldsymbol{G} - \overline{\boldsymbol{C}}\|^2}{6} \tag{3.109}$$

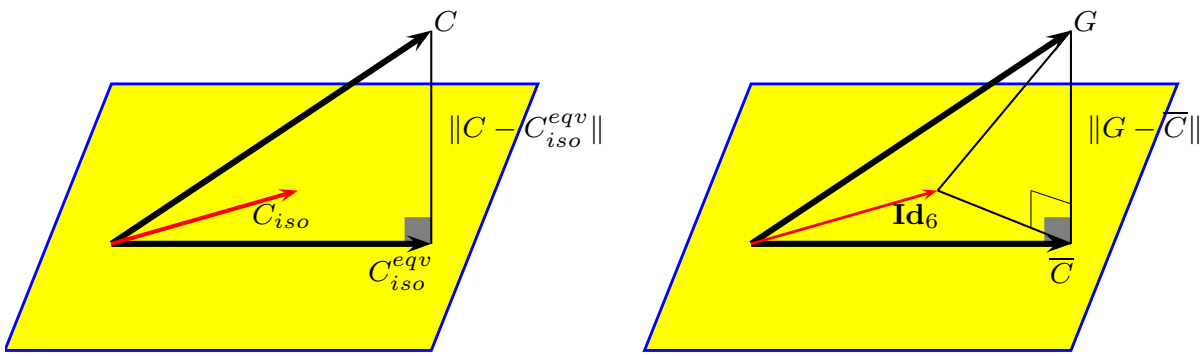


FIG. 3.2 – Comparaison de l'illustration géométrique de la construction de l'indice d'anisotropie proposé (à droite) avec celui existant (à gauche) : espace jaune représente le sous-espace de $\mathbb{M}^{\mathrm{SD}}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ des matrices isotropes générées par une combinaison de $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{D}$, la normalisation par rapport à $\boldsymbol{C}_{iso}$ transforme $\boldsymbol{C}_{iso}$ en $\mathbf{Id}_6$.

Le chiffre 6 étant la norme du matrice d'identité $\mathbf{Id}_6$, prend sa place ici en vue d'une rénormalisation pour que $\mathrm{I}_{\boldsymbol{\alpha}}^2 \in [0; 1)$.

PROPRIÉTÉ 3.4.

$$\mathsf{E}\left\{\mathrm{I}_{\boldsymbol{\alpha}}^2\right\} = \frac{19\delta_{\mathrm{G}}^2}{21} \tag{3.110}$$

PREUVE. À partir de l'orthogonalité entre $\boldsymbol{G} - \overline{\boldsymbol{C}}$ et $\overline{\boldsymbol{C}} - \mathbf{Id}_6$[19], on peut déduire, à l'aide du théorème de Pythagore dans $\mathbb{M}_6(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{\boldsymbol{\alpha}}^2 &= \frac{\|(\boldsymbol{G} - \mathbf{Id}_6) - (\overline{\boldsymbol{C}} - \mathbf{Id}_6)\|^2}{6} \\
\mathrm{I}_{\boldsymbol{\alpha}}^2 &= \frac{\|\boldsymbol{G} - \mathbf{Id}_6\|^2 - \|\overline{\boldsymbol{C}} - \mathbf{Id}_6\|^2}{6}
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Notant que, selon [Soize, 2006], l'espérance du premier terme à la droite de l'équation (3.111) est donné par :

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{G} - \mathbf{Id}_6\|^2\right\} = 6\delta_{\mathrm{G}}^2 \tag{3.112}$$

Pour calculer l'espérance du deuxième terme, on a :

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left\{\|\overline{\boldsymbol{C}} - \mathbf{Id}_6\|^2\right\} &= \mathsf{E}\left\{\|\overline{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{S} - \boldsymbol{D}\|^2\right\} \\
&= \mathsf{E}\left\{\left\|\left(\frac{1}{3}\mathsf{tr}(\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{I}_2) - 1\right)\boldsymbol{S} + \frac{1}{5}\left(\mathsf{tr}(\boldsymbol{G}) - \frac{1}{3}\mathsf{tr}(\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{I}_2) - 5\right)\boldsymbol{D}\right\|^2\right\}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

[19] Comme on peut constater sur la FIG. 3.2 que $\overline{\boldsymbol{C}}$ et $\mathbf{Id}_6$ se trouvent dans le sous espace isotrope tandis que $\boldsymbol{G} - \overline{\boldsymbol{C}}$ est la direction de la projection isotrope.

Comme $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{D}$ sont orthogonaux, l'équation (3.113) devient :

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left\{\|\overline{\boldsymbol{C}}-\mathbf{Id}_6\|^2\right\} &= \mathsf{E}\left\{\left(\frac{1}{3}\mathsf{tr}(\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{I}_2)-1\right)^2\|\boldsymbol{S}\|^2+\frac{1}{25}\left(\mathsf{tr}(\boldsymbol{G})-\frac{1}{3}\mathsf{tr}(\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{I}_2)-5\right)^2\|\boldsymbol{D}\|^2\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{\left(\frac{1}{3}\mathsf{tr}(\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{I}_2)-1\right)^2\right\}+\frac{1}{5}\mathsf{E}\left\{\left(\mathsf{tr}(\boldsymbol{G})-\frac{1}{3}\mathsf{tr}(\boldsymbol{I}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{I}_2)-5\right)^2\right\}\end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\mathsf{E}\left\{\|\overline{\boldsymbol{C}}-\mathbf{Id}_6\|^2\right\} = \mathsf{E}\left\{\left(A(\boldsymbol{G})-1\right)^2\right\}+\frac{1}{5}\mathsf{E}\left\{\left(B(\boldsymbol{G})-5\right)^2\right\} \tag{3.115}$$

où A et B sont les applications linéaires définies comme :

$$\begin{aligned}A : \mathrm{SG}^+ &\to \mathbb{R}\\ \boldsymbol{G} &\mapsto A(\boldsymbol{G}) = \frac{1}{3}\sum_{\mathrm{i,j}=1}^{3} G_{\mathrm{ij}} = \sum_{\mathrm{i,j}=1}^{6} S_{\mathrm{ij}}G_{\mathrm{ij}}\end{aligned} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}B : \mathrm{SG}^+ &\to \mathbb{R}\\ \boldsymbol{G} &\mapsto B(\boldsymbol{G}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{6} G_{\mathrm{ii}} - \frac{1}{3}\sum_{\mathrm{i,j}=1}^{3} G_{\mathrm{ij}} = \sum_{\mathrm{i,j}=1}^{6} D_{\mathrm{ij}}G_{\mathrm{ij}}\end{aligned} \tag{3.117}$$

Du fait que $\mathsf{E}\{\boldsymbol{G}\} = \mathbf{Id}_6$ et que les termes G_{ij} sont indépendents, on peut vérifier que :

$$\mathsf{E}\{A(\boldsymbol{G})\} = 1 \text{ et } \mathsf{E}\{B(\boldsymbol{G})\} = 5 \tag{3.118}$$

En développant l'équation (3.115) en tenant compte de l'équation (3.118), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left\{\|\overline{\boldsymbol{C}}-\mathbf{Id}_6\|^2\right\} &= \mathsf{E}\left\{\left(A(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\right)^2\right\}+\frac{1}{5}\mathsf{E}\left\{\left(B(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\right)^2\right\} \qquad (3.119)\\ &= \mathsf{E}\left\{\left(A(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\right)\left(A(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\right)^{\mathrm{T}}\right\}\\ &\quad+\frac{1}{5}\mathsf{E}\left\{\left(B(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\right)\left(B(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\right)^{\mathrm{T}}\right\}\\ &= A\,\mathsf{E}\left\{(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)^{\mathrm{T}}\right\}A^{\mathrm{T}}\\ &\quad+\frac{1}{5}B\,\mathsf{E}\left\{(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)^{\mathrm{T}}\right\}B^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

Sachant que $\mathsf{E}\{(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)^{\mathrm{T}}\}$ est par définition la covariance de $\boldsymbol{G}$, l'équation (3.119) devient :

$$\mathsf{E}\left\{\|\overline{\boldsymbol{C}}-\mathbf{Id}_6\|^2\right\} = A\,\mathrm{Cov}\{\boldsymbol{G}\}\,A^{\mathrm{T}}+\frac{1}{5}B\,\mathrm{Cov}\{\boldsymbol{G}\}\,B^{\mathrm{T}} \tag{3.120}$$

$\mathrm{Cov}\{\boldsymbol{G}\}$ est un tenseur d'ordre 4 dont la forme explicite est donnée dans [Soize, 2006] comme

$$\left[\,\mathrm{Cov}\{\boldsymbol{G}\}\,\right]_{\mathrm{ijkl}} = \frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\left(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{kj}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{il}}+\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{ik}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{jl}}\right) \tag{3.121}$$

où le symbole gras $\boldsymbol{\delta}$ est le symbole de Kronecker $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{Id}_6$. Le premier terme à droite de l'équation (3.120) peut se développer comme suit :

$$A\ \mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{G}\right\} A^{\mathrm{T}} = \frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\Big(\sum_{\mathrm{i,j,k,l}=1}^{6} S_{\mathrm{ij}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{kj}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{il}}S_{\mathrm{kl}} + S_{\mathrm{ij}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{ik}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{jl}}S_{\mathrm{kl}}\Big) \tag{3.122}$$

$$A\ \mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{G}\right\} A^{\mathrm{T}} = \frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\Big(\sum_{\mathrm{i,j}=1}^{6} S_{\mathrm{ij}}S_{\mathrm{ji}} + S_{\mathrm{ij}}^2 = 2\sum_{\mathrm{i,j}=1}^{6} S_{\mathrm{ij}}^2\Big) \tag{3.123}$$

$$A\ \mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{G}\right\} A^{\mathrm{T}} = \frac{2\|\boldsymbol{S}\|_F^2\delta_{\mathrm{G}}^2}{7} \tag{3.124}$$

Similairement, pour le deuxième terme, on a :

$$\frac{1}{5}B\ \mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{G}\right\} B^{\mathrm{T}} = \frac{2\|\boldsymbol{D}\|_F^2\delta_{\mathrm{G}}^2}{5\times 7} \tag{3.125}$$

D'après (3.15) et (3.16), $\|\boldsymbol{S}\|_F^2 = 1$ et $\|\boldsymbol{D}\|_F^2 = 5$. En remplaçant ces valeurs dans les équations (3.124),(3.125) et puis dans (3.120), on obtient :

$$\mathsf{E}\left\{\|\overline{\boldsymbol{C}} - \mathbf{Id}_6\|^2\right\} = \frac{4\delta_{\mathrm{G}}^2}{7} \tag{3.126}$$

Connaissant $\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{G} - \mathbf{Id}_6\|^2\right\}$ et $\mathsf{E}\left\{\|\overline{\boldsymbol{C}} - \mathbf{Id}_6\|^2\right\}$, en les remplaçant dans l'expression de l'espérance mathématique de l'équation (3.111), on peut estimer la valeur moyenne (3.110) de l'indice d'anisotropie $\mathrm{I}_{\boldsymbol{\alpha}}$

(v) *Son niveau de fluctuation est contrôlé linéairement par δ_{G} et δ :*
On rappelle d'abord la définition (3.46) en accord avec [Soize, 2000], où la fluctuation de la norme de $\boldsymbol{C}$ s'exprime à travers un pseudo coefficient de covariance

$$\delta_{|C|}^2 = \frac{\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C} - \underline{C}\|^2\right\}}{\|\underline{C}\|^2}$$

PROPRIÉTÉ 3.5.

$$\delta_{|C|}^2 = \delta^2 + \frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\left(1 + \frac{\mathsf{tr}^2(\underline{C})}{\|\underline{C}\|^2}\right) + \frac{\delta^2\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\left(2 + \frac{80\underline{\mu}^2}{\|C\|^2}\right) \tag{3.127}$$

PREUVE. Le dénominateur de (3.46) s'écrit :

$$\|\underline{C}\|^2 = \|3\underline{\mathcal{K}}\boldsymbol{S} + 2\underline{\mu}\boldsymbol{D}\|^2 \tag{3.128}$$

et en raison de l'orthogonalité entre $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{D}$:

$$\|\underline{C}\|^2 = (3\underline{\mathcal{K}})^2\|\boldsymbol{S}\|^2 + (2\underline{\mu})^2\|\boldsymbol{D}\|^2 \tag{3.129}$$

Sachant que $\|\boldsymbol{S}\|^2 = 1$ et $\|\boldsymbol{D}\|^2 = 5$, on a l'égalité :

$$\|\underline{C}\|^2 = 9\underline{\mathcal{K}}^2 + 20\underline{\mu}^2 \tag{3.130}$$

Quant au numérateur de (3.46), il va être développé comme suit :

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}-\underline{C}\|^2\right\} &= \mathsf{E}\left\{\|(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}_{iso})-(\underline{C}-\boldsymbol{C}_{iso})\|^2\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\boldsymbol{Q}-(\underline{C}-\boldsymbol{C}_{iso})\|^2\right\}\\ &= \mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\boldsymbol{Q}\|^2\right\}+\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}_{iso}-\underline{C}\|^2\right\}\\ &\quad+2\,\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{C}_{iso}-\underline{C})\|\right\}\end{aligned} \tag{3.131}$$

Le dernier terme de l'équation (3.131) s'annule car $\mathsf{E}\{\boldsymbol{G}\} = \mathbf{Id}_6$. D'où, l'équation (3.131) devient :

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}-\underline{C}\|^2\right\} = \mathsf{E}\left\{\mathrm{tr}\big((\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\otimes(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6):\boldsymbol{C}_{iso}\otimes\boldsymbol{C}_{iso}\big)\right\}+\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}_{iso}-\underline{C}\|^2\right\} \tag{3.132}$$

Le deuxième terme du côté droit de l'équation (3.132) n'est en fonction que de $\mathcal{K}$ et μ tandis que le premier est à la fois fonction de $\mathcal{K}$, μ et $\boldsymbol{G}$. Dans la suite, on va détailler le développement de chacun de ces termes en faisant apparaître $\|\underline{C}\|^2$.

– Deuxième terme : Comme $\boldsymbol{C}_{iso}$ et $\underline{C}$ sont tous isotropes, ils peuvent être représentés en fonction de $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{D}$. D'où :

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}_{iso}-\underline{C}\|^2\right\} = \mathsf{E}\left\{\|3(\mathcal{K}-\underline{\mathcal{K}})\boldsymbol{S}+2(\mu-\underline{\mu})\boldsymbol{D}\|^2\right\} \tag{3.133}$$

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}_{iso}-\underline{C}\|^2\right\} = 9\,\mathsf{E}\left\{(\mathcal{K}-\underline{\mathcal{K}})^2\right\}+20\,\mathsf{E}\left\{(\mu-\underline{\mu})^2\right\}. \tag{3.134}$$

Par ailleurs, on a par définition :

$$\delta^2 = \frac{(\mathcal{K}-\underline{\mathcal{K}})^2}{\underline{\mathcal{K}}^2} = \frac{(\mu-\underline{\mu})^2}{\underline{\mu}^2} \tag{3.135}$$

qui implique que l'équation (3.134) devient :

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}_{iso}-\underline{C}\|^2\right\} = \delta^2(9\underline{\mathcal{K}}^2+20\underline{\mu}^2) \tag{3.136}$$

En remplaçant (3.130) dans (3.136), on obtient :

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{C}_{iso}-\underline{C}\|^2\right\} = \delta^2\|\underline{C}\|^2 \tag{3.137}$$

– Premier terme : Grâce à l'indépendance entre $(\mathcal{K},\mu)$ et $\boldsymbol{G}$, il est raisonnable d'écrire :

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\left\{\mathrm{tr}\Big((\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\otimes(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6):\boldsymbol{C}_{iso}\otimes\boldsymbol{C}_{iso}\Big)\right\} =\\ &\qquad\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{C}_{iso}\,\mathsf{E}_G\left\{(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\otimes(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\right\}\boldsymbol{C}_{iso}\Big)\right\}\end{aligned} \tag{3.138}$$

où les opérateurs $\mathrm{E}_{\mathcal{K},\mu}$ et E_G sont respectivement les espérances mathématiques vis-à-vis de $(\mathcal{K},\mu)$ et de $\boldsymbol{G}$. L'espérance prise sur $\boldsymbol{G}$, sachant que $\mathsf{E}_G\{\boldsymbol{G}\} = \mathbf{Id}_6$, étant d'ailleurs par définition le tenseur de covariance de $\boldsymbol{G}$, l'équation (3.138) devient :

$$\mathsf{E}\left\{\mathrm{tr}\Big((\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\otimes(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6):\boldsymbol{C}_{iso}\otimes\boldsymbol{C}_{iso}\Big)\right\} = \mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{C}_{iso}\,\mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{G}\right\}\boldsymbol{C}_{iso}\Big)\right\} \tag{3.139}$$

En utilisant la forme explicite de ce tenseur d'ordre 4 donné par l'équation (3.121) avec les indices muets, on développe (3.139) de la forme suivante :

$$\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{jk}}\left[\,\mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{G}\right\}\right]_{\mathrm{ijkl}}\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{il}}\right\} = \frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\,\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{jk}}\left(\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{kj}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{il}}+\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{ik}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{jl}}\right)\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{il}}\right\} \tag{3.140}$$

en désélectionnant les paires d'indice qui annulent le *kroneker* $\boldsymbol{\delta}$, on a cette égalité :

$$\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{jk}}\left[\,\mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{G}\right\}\right]_{\mathrm{ijkl}}\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{il}}\right\} = \frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\,\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{jj}}\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{ll}}+\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{ij}}\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{ij}}\right\} \tag{3.141}$$

$$\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{jk}}\left[\,\mathrm{Cov}\left\{\boldsymbol{G}\right\}\right]_{\mathrm{ijkl}}\left[\boldsymbol{C}_{iso}\right]_{\mathrm{il}}\right\} = \frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\left(\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\mathsf{tr}^2(\boldsymbol{C}_{iso})\right\}+\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\mathsf{tr}(\boldsymbol{C}_{iso}^2)\right\}\right) \tag{3.142}$$

En utilisant la représentation sur la base $\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{D}\}$ de $\boldsymbol{C}_{iso}$ et en prennant en compte les égalités de l'équation (3.46), on obtient :

$$\frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\left(\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\mathsf{tr}^2(\boldsymbol{C}_{iso})\right\}+\mathsf{E}_{\mathcal{K},\mu}\left\{\mathsf{tr}(\boldsymbol{C}_{iso}^2)\right\}\right) = \frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\left((\delta^2+1)(18\underline{\mathcal{K}}^2+120\underline{\mu}^2)+60\underline{\mathcal{K}}\underline{\mu}\right) \tag{3.143}$$

Et puis avec l'équation (3.130), on obtient :

$$\mathsf{E}\left\{\mathsf{tr}\left((\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6)\otimes(\boldsymbol{G}-\mathbf{Id}_6):\boldsymbol{C}_{iso}\otimes\boldsymbol{C}_{iso}\right)\right\} = \frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\|\underline{C}\|^2\left(1+\frac{\mathsf{tr}^2(\underline{C})}{\|\underline{C}\|^2}\right)+\frac{\delta^2\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\|\underline{C}\|^2\left(2+\frac{80\underline{\mu}^2}{\|\underline{C}\|^2}\right) \tag{3.144}$$

Finalement, le remplacement des équations (3.130), (3.136) et (3.144) dans (3.46), la fluctuation globale du tenseur d'élasticité est donnée par (3.127).

REMARQUE 3.2. *Quand δ et δ_{G} sont petits, le terme couplé est négligeable, (3.127) devient :*

$$\delta_{|C|}^2 \simeq \delta^2+\frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\left(1+\frac{\mathsf{tr}^2(\underline{C})}{\|\underline{C}\|^2}\right) \tag{3.145}$$

Trois cas particuliers sont les suivants :

(i) Si $\delta=\delta_{\mathrm{G}}=0$, la matrice $\boldsymbol{C}(\delta,\delta_{\mathrm{G}})$ est déterministe et égale à la matrice moyenne qui est isotrope.

(ii) Si $\delta\neq 0;\delta_{\mathrm{G}}=0$, la matrice $\boldsymbol{G}(\delta_{\mathrm{G}})$ est déterministe et égale à identité, la matrice $\boldsymbol{C}(\delta,\delta_{\mathrm{G}})$ est donc une variable aléatoire dont chaque réalisation est isotrope. Le pseudo coefficient de variance $\delta_{|C|}$ est dégénéré et devient δ. Il convient de noter que dans notre construction, on a choisi la même fluctuation pour les modules d'élasticité $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ et $\boldsymbol{\mu}$ pour une raison de simplicité.

(iii) Si $\delta = 0; \delta_G \neq 0$, la matrice $\boldsymbol{C}_{iso}(\delta_G)$ est déterministe et égale à la matrice moyenne isotrope. Le modèle de $\boldsymbol{C}(\delta, \delta_G)$ devient le modèle de Soize [2006] appliqué à la variable aléatoire à valeurs matricielles de taille 6×6 et de matrice moyenne isotrope. Il est également vérifié que la fluctuation (3.47) est une dégénération de (3.127) dans ce cas.

Afin de valider et d'illustrer les deux dernières propriétés (*c.f.* PROPRIÉTÉS 3.4-3.5) du tenseur d'élasticité aléatoire construit par notre modèle, nous présentons dans EXEMPLE 3.1 qui suivent quelques résultats numériques d'une étude statistique.

EXEMPLE 3.1. Statistique sur la fluctuation et le niveau d'anisotropie

---

Description

Au cours de cet exemple, des configurations paramétriques combinant $\delta \in \{0.05 : 0.05 : 0.6\}$ et $\delta_G \in \{0.05 : 0.05 : 0.35\}$ sont utilisées. Pour chacune d'entre elles, 100000 réalisations du tenseur d'élasticité aléatoire du modèle présenté dans la section (3.1.2.2) sont tirées. Les estimations statistiques sur la fluctuation globale $\delta_{|c|}$ ainsi que sur les niveaux d'anisotropie, *i.e.* les indices conventionnel I_A et nouvel $\mathrm{I}_{\boldsymbol{\alpha}}$ sont en suite effectuées. Pour comparer l'observation numérique et la théorie, les évolutions de ces grandeurs statistiques par rapport au couple (δ, δ_G) sont affichées dans les FIGs 3.3-3.4. Puisque le niveau d'anisotropie dépend principalement de δ_G, la FIG 3.3 affiche des courbes : celle qui est épaise et en couleur gris est donnée par l'expression théorique (3.110) de $\mathrm{I}^2_{\boldsymbol{\alpha}}$, celle qui est en bleu foncé correspond aux moyennes observée du nouvel indice, les courbes observées de l'indice d'anisotropie conventionnel I_A sont tracées respectivement en couleurs violet et rouge pour $\delta = 0.05$ et $\delta = 0.65$. Par ailleurs, comme la fluctuation $\delta_{|C|}$ dépend à la fois à δ et δ_G, la FIG 3.4 représente les surfaces : celle en rouge correspond à la surface théorique dont chaque point est est évalué par l'équation (3.127) ; celle en bleu clair correspond aux valeurs numériques de l'estimateur de moyenne.

Discussion

Concernant les indices d'anisotropie, les courbes théorique et observée du nouvel indice sont linéaires et elles coïncident parfaitement. Cette FIG 3.3 montre également l'équivalence entre cet indice avec l'indice conventionnel. En effet, d'une part bien les courbes observées dépendent de δ, cette dépendance peut être considérée comme faible ; d'autre part les dépendances de ces indices par rapport à δ_G sont toutes linéaires et monotones.

Quant au niveau de fluctuation globale, on constate dans la FIG 3.4 une très bonne superposition entre les surfaces théorique et observée.

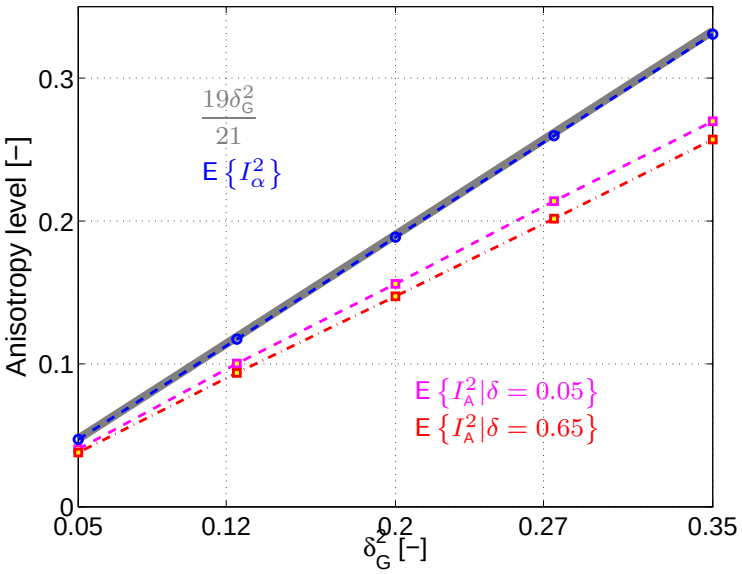


FIG. 3.3 – Comparaison de la moyenne des indices d'anisotropie au carré en fonction de $(\delta; \delta_G)$: les courbes de nouvel indice, théorique (gris - calculée à l'aide de l'équation (3.110)) et observé (bleu foncé) coïncident tandis que celles de définition classique (violet, rouge) sont légèrement en dessous.

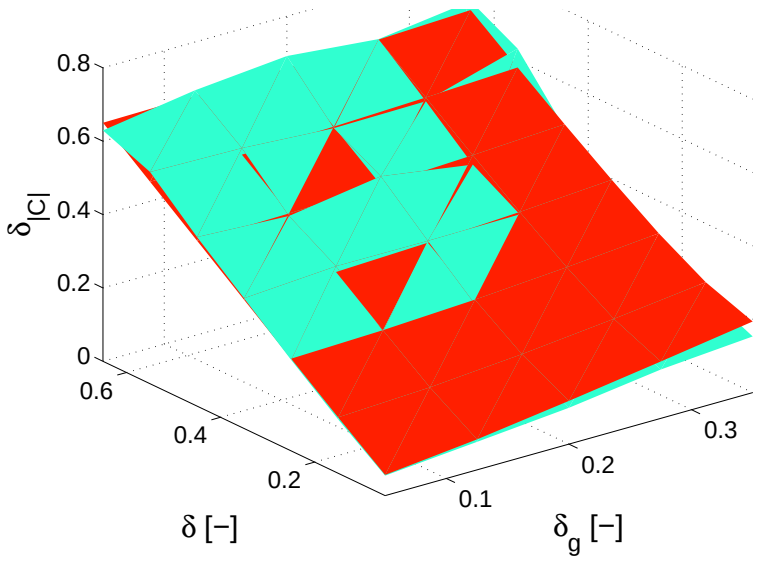


FIG. 3.4 – Comparaison du niveau de fluctuation de la norme du tenseur d'élasticité en fonction de $(\delta; \delta_G)$: superposition entre la surface théorique (rouge) calculée à l'aide de (3.127) et la surface observée (bleu clair) donnée par estimation statistique.

3.2 Champ stochastique de tenseur d'élasticité

Dans la section précédente, on a présenté la proposition de la loi de densité de distribution d'une nouvelle classe de tenseurs d'élasticité aléatoires anisotropes. Une description de la construction et de la mise en oeuvre a également été présentée. Par contre, la variabilité considérée jusqu'ici n'était que ponctuelle en espace. Pour prendre en compte la variabilité spatiale, il convient de faire évoluer cette variable aléatoire tensorielle en fonction de sa coordonnée $\boldsymbol{x}$. Ce fait consiste à considérer, au lieu d'une variable aléatoire $\boldsymbol{C}(\delta_{\mathrm{G}}, \delta)$, une fonction aléatoire $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta_{\mathrm{G}}, \delta; \boldsymbol{\ell}_c)$. Cette fonction, que l'on appelle dans la suite un champ aléatoire ou bien champ stochastique, est paramétrée, en plus des paramètres de fluctuation locale $(\delta_{\mathrm{G}}, \delta)$, par un vecteur $\boldsymbol{\ell}_c$ de corrélation spatiale. Ce vecteur, dont les composantes ont la dimension d'une longueur, est en fait le paramètre de la structure de corrélation. L'idée physique de base de cette structure est d'assurer que les valeurs observées en des endroits adjacents ne diffèrent pas autant que les valeurs en des endroits distants. Ainsi, les longueurs de corrélation définissent les limites de distance au-delà desquelles les valeurs locales sont décorrélées.
La clef de cette extension de la loi d'une variable aléatoire tensorielle à la loi d'un champs stochastique tensoriel s'effectue essentiellement à travers les extensions des 23 germes scalaires aléatoires $\{\mathcal{G}_{\mathrm{k}};\ \mathrm{k} = 1..23\}$ apparus dans les équations (3.72), (3.73), (3.84), (3.85) en 23 champs germes $\{\mathbb{g}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\ell});\ \mathrm{k} = 1..23\}$. Comme les germes $\mathcal{G}_{\mathrm{k}}$ sont 23 copies indépendantes d'une variable scalaire Gaussienne $\mathcal{G}$, les champs germes $\mathbb{g}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\ell})$ sont à leur tour des copies indépendantes d'un champ stochastique $\mathbb{g}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\ell})$ à valeur scalaire dans $\mathbb{R}$.
Dans la suite de cette section, on va aborder d'abord brièvement les notions de base sur le champ stochastique scalaire à travers un champ stochastique unidimensionnel (qu'on appelle habituellement un *processus stochastique*. Le modèle du champ stochastique tridimensionnel $\mathbb{g}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\ell})$ et sa simulation par méthode de représentation spectrale sont ensuite présentés. Enfin, on propose un algorithme complet pour simuler le champ stochastique du tenseur d'élasticité $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta_{\mathrm{G}}, \delta; \boldsymbol{\ell})$.

3.2.1 Processus stochastique d'une variable scalaire

À titre d'illustration, on va présenter les notions de base d'un processus stochastique scalaire en considérant le module d'Young d'une barre. Chaque barre occupe un domaine physique unidimensionnel $\Omega_1 \subset \mathbb{R} = \{x_1 | x_1 \in \mathbb{R}\}$. Avec l'incertitude sur la fabrication, le module d'Young $\boldsymbol{E}(x_1)$ varie d'un endroit à l'autre de la barre.

3.2.1.1 Processus stochastique : Notions de bases et structure de corrélation

3.2.1.1.a Notions de bases

Par définition, un processus stochastique défini sur l'espace probabilisé $(\mathfrak{A}, \mathcal{T}, P)$, indexé dans $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ presque sûrement est une collection $\{\boldsymbol{E}(x_1);\ x_1 \in \Omega_1\}$ des variables scalaires indexées par Ω_1 ou bien d'une façon équivalente une application de $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$ dans l'espace $L^0(\mathfrak{A}, \mathbb{R})$ des variables scalaires aléatoires définies sur $(\mathfrak{A}, \mathcal{T}, P)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(x_1) : \Omega_1 &\to L^0(\mathfrak{A}, \mathbb{R}) \\ x_1 &\mapsto \boldsymbol{E}(x_1) \end{aligned} \tag{3.146}$$

Trajectoires : Pour chaque processus stochastique $\{\boldsymbol{E}(x_1);\ x_1 \in \Omega_1\}$, l'application :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} : \mathfrak{A} &\to \mathbb{R}^{\Omega_1} \\ a &\mapsto (x_1 \mapsto \boldsymbol{E}(x_1, a)) \end{aligned} \tag{3.147}$$

associe à chaque évènement élémentaire $a \in \mathfrak{A}$ une trajectoire ou une réalisation ou bien encore un échantillon du processus $\{\boldsymbol{E}(x_1);\ x_1 \in K\}$. Pour notre illustration, la représentation du module d'Young en fonction de la position dans deux barres quelconques constitue deux réalisations du processus.

Lois de distribution marginale : Pour $\forall m$ intervalles autour de m positions $x_1^{(j)};\ j = 1..m$, la loi marginale d'ordre m, désignée $p_m\Big(\boldsymbol{E}\big(x_1^{(1)}\big), \boldsymbol{E}\big(x_1^{(2)}\big), .., \boldsymbol{E}\big(x_1^{(m)}\big); x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, .., x_1^{(m)}\Big)$, est telle que :

$$\begin{aligned} p_{m-1}\Big(\boldsymbol{E}\big(x_1^{(1)}\big), &\boldsymbol{E}\big(x_1^{(2)}\big), .., \boldsymbol{E}\big(x_1^{(m-1)}\big); x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, .., x_1^{(m-1)}\Big) = \\ &\int_{\mathbb{R}} p_m\Big(\boldsymbol{E}\big(x_1^{(1)}\big), \boldsymbol{E}\big(x_1^{(2)}\big), .., \boldsymbol{E}\big(x_1^{(m)}\big); x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, .., x_1^{(m)}\Big)\ d\boldsymbol{E}\big(x_1^{(m)}\big) \end{aligned} \tag{3.148}$$

Moyenne et Corrélation : Cette écriture de l'équation (3.148) permet les calculs de tous les moments du processus en particulier la moyenne :

$$\underline{E}(x_1) = \mathsf{E}\{\boldsymbol{E}(x_1)\} = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{E}(x_1) p_1\big(\boldsymbol{E}(x_1); x_1\big)\ d\boldsymbol{E}(x_1) \tag{3.149}$$

et la fonction d'auto-corrélation :

$$R_E(x_1, x_1^{'}) = \mathsf{E}\Big\{\boldsymbol{E}(x_1)\boldsymbol{E}(x_1^{'})\Big\} = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{E}(x_1)\boldsymbol{E}(x_1^{'}) p_2\big(\boldsymbol{E}(x_1), \boldsymbol{E}(x_1^{'}); x_1, x_1^{'}\big)\ d\boldsymbol{E}(x_1)\ d\boldsymbol{E}(x_1^{'}) \tag{3.150}$$

Propriété du second ordre : Le processus est dit du second ordre si l'espace des variables scalaires aléatoires définies sur $(\mathfrak{A}, \mathcal{T}, P)$ est $L^2(\mathfrak{A}, \mathbb{R}) \subset L^0(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, c'est-à-dire il est de *carré intégrable* :

$$\mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{E}(x_1)\|^2\right\} < +\infty \tag{3.151}$$

Stationnarité et Stationnarité d'ordre deux : Le processus est dit stationnaire[20] quand tous les lois marginales de ce dernier sont invariantes par rapport à une translation dans l'espace

$$\begin{aligned} p_m\Big(\boldsymbol{E}\big(x_1^{(1)} + \tau\big), &\boldsymbol{E}\big(x_1^{(2)} + \tau\big), .., \boldsymbol{E}\big(x_1^{(m)} + \tau\big); x_1^{(1)} + \tau, x_1^{(2)} + \tau, .., x_1^{(m)} + \tau\Big) = \\ &p_m\Big(\boldsymbol{E}\big(x_1^{(1)}\big), \boldsymbol{E}\big(x_1^{(2)}\big), .., \boldsymbol{E}\big(x_1^{(m)}\big); x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, .., x_1^{(m)}\Big) \quad \forall \tau \in \mathbb{R};\ \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.152}$$

[20] Littéralement, à part les termes stationnarité/stationnaire qui est initialement employés pour les processus stochastiques dits temporels, on peut utiliser les termes homogénéité/homogène pour les champs stochastiques dits spatiaux.

Quand seules les lois marginales des 2 premiers ordres sont invariantes, le processus est dit stationnaire d'ordre 2. Dans ce cas, ces deux premiers moments (la moyenne et la corrélation) sont donnés par :

$$\underline{E}(x_1) = E_E \quad \forall x_1 \in \Omega_1 \tag{3.153}$$

$$R_E(x_1, x_1^{'}) = R_E(|x_1 - x_1^{'}|) \quad \forall x_1, x_1^{'} \in \Omega_1 \tag{3.154}$$

Continuité en moyenne d'ordre deux : Un processus est continu en moyenne d'ordre deux (m.o.d.) quand on a :

$$\lim_{x_1 \to x_1^{'}} \mathsf{E}\left\{\|\boldsymbol{E}(x_1) - \boldsymbol{E}(x_1^{'})\|^2\right\} = 0 \quad \forall x_1, x_1^{'} \in \Omega_1 \tag{3.155}$$

Processus gaussiens et non-gaussiens : Un processus est dit Gaussien si l'ensemble de ses lois marginales sont gaussiennes. Si cette propriété n'est pas satisfaite, il est dit non Gaussien. Dans le cadre de ce manuscrit de thèse, les processus à valeurs positives ou définies-positives seront nécessairement non-gaussiens.

Ergodicité et Ergodicité d'ordre deux : On a défini dans les équations (3.149) et (3.150) les deux premiers moments statistiques. Les moments statistiques d'ordres plus élevés peuvent être également définis de la même façon. Par contre, ces moments ne donnent qu'une image dite *transversale* du processus. Pour avoir des informations dites *longitudinales* le long d'une réalisation, on définit en plus les moments spatiaux dont ceux des deux premiers ordres sont les suivants :

$$\mathcal{E}_a(\boldsymbol{E}(x_1; a)) = \lim_{X_1 \to +\infty} \frac{1}{2X_1} \int_{-X_1}^{X_1} \boldsymbol{E}(x_1; a)\, dx_1 \tag{3.156}$$

$$\mathcal{V}_a(\boldsymbol{E}(x_1; a)) = \lim_{X_1 \to +\infty} \frac{1}{2X_1} \int_{-X_1}^{X_1} \boldsymbol{E}(x_1; a)^2\, dx_1 \tag{3.157}$$

ou bien pour en processus stationnaire d'au moins d'ordre deux :

$$\mathcal{R}_a(\tau; a) = \lim_{X_1 \to +\infty} \frac{1}{2X_1} \int_{-X_1}^{X_1} \boldsymbol{E}(x_1; a)\boldsymbol{E}(x_1 + \tau; a)\, dx_1 \tag{3.158}$$

Un processus est dit ergodique quand tous les moments définis dans les équations (3.156), (3.157) et (3.158) ou d'une façon similaire pour les ordres plus élevés sont, s'ils existent, invariants d'une réalisation a à l'autre réalisation a'. L'ergodicité n'entraîne pas la stationnarité et réciproquement, par contre, le théorème de Birkhoff [voir Kornfeld et al., 1982, par exemple] montre que si un processus est stationnaire, il est ergodique quand ses moments convergent vers les moments statistiques pour tous les réalisations. Ainsi, un processus stationnaire d'ordre deux est dit ergodique d'ordre deux quand ses moments spatiaux calculés jusqu'à l'ordre deux existent et convergent vers les moments statistiques correspondants.

3.2.1.1.b Structure de corrélation

Pour un processus stochastique stationnaire d'ordre deux ou supérieur, on peut aborder la notion de sa structure de corrélation. Si la longueur de corrélation ℓ_1 représente une limite de distance au-delà de laquelle les valeurs locales sont considérablement décorrélées, la structure de corrélation définit, pour un processus stochastique stationnaire d'ordre deux dont la corrélation n'est en fonction que de $\tau = |x_1 - x_1^{'}|$, l'évolution de cette fonction univariable $R_o(\tau)$. À son tour, la longueur de corrélation est un paramètre principal de cette fonction.
Ainsi, une structure de corrélation est connue quand $R_E(\tau)$ est explicite. En pratique on considère également $S_E(\kappa)$, sa transformation de Fourier, qui n'est rien d'autre que ce que l'on appelle la fonction de densité spectrale :

$$S_E(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\,(-i\kappa\tau) R_E(\tau) d\tau \tag{3.159}$$

Ce paragraphe présente une brève bibliographie, où une panoplie de structures de corrélation proposées dans la littérature est regroupée pour la modélisation de la variabilité spatiale. Elle sont notamment, [voir Popescu, 1995, Cottereau, 2007, Arnst, 2007, Sato et al., 2009, par exemple], les modèles suivants :

– Modèle *Gaussien* ou *Exponentiel au carré* :

$$R_E(\tau) = \exp\left(- \left(\frac{\tau\sqrt{\pi}}{\ell_1} \right)^2 \right) \tag{3.160}$$

$$S_E(\kappa) = \frac{\ell_1}{\pi} \exp\left(- \left(\frac{\ell_1 \kappa}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 \right) \tag{3.161}$$

– Modèle *Exponentiel* :

$$R_E(\tau) = \exp\left(- \frac{2\tau}{\ell_1} \right) \tag{3.162}$$

$$S_E(\kappa) = \frac{2\ell_1}{\pi(4 + \kappa^2 \ell_1^2)} \tag{3.163}$$

– Modèle *Triangulaire* :

$$R_E(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\tau}{\ell_1} & \text{si } \tau < \ell_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.164}$$

$$S_E(\kappa) = \begin{cases} 1 & \text{si } \kappa = 0 \\ \dfrac{\ell_1}{2\pi} \mathrm{sinc}_1^2\left(\dfrac{\kappa\ell_1}{2}\right) = \dfrac{\ell_1 \sin^2\left(\dfrac{\kappa\ell_1}{2}\right)}{2\pi\left(\dfrac{\kappa\ell_1}{2}\right)^2} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.165}$$

– Modèle de *Von Kármán* :

$$R_E(\tau) = \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{\tau}{\ell_1}\right)^{\nu} B_\nu\left(\frac{\tau}{\ell_1}\right) \tag{3.166}$$

$$S_E(\kappa) = \frac{\ell_1 \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)(1 + \kappa^2 \ell_1^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} \tag{3.167}$$

avec ν un nombre réel positif et $0 < \nu \leq 1$, nommé *coefficient de Hurst*, qui est variable de la fonction *Gamma* $\Gamma(\mu)$ et est paramètre de la fonction *Bessel* du troisième genre B_ν.

– Modèle *Sinus cardinal au carré* :

$$R_E(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = 0 \\ \mathsf{sinc}_\pi^2\left(\dfrac{\tau}{2\ell_1}\right) = \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi\tau}{2\ell_1}\right)}{\left(\dfrac{\pi\tau}{2\ell_1}\right)^2} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.168}$$

$$S_E(\kappa) = \begin{cases} \dfrac{\ell_1}{\pi}\left(1 - \dfrac{|\kappa|}{\ell_1}\right) & \text{si } |\kappa| < \dfrac{\pi}{\ell_1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.169}$$

Le choix de structure de corrélation parmi celles énumérées ci-dessous est généralement fait de façon empirique. Notons toutefois que la régularité à l'origine de cette corrélation conditionne la régularité des trajectoires. La structure triangulaire est la plus simple à imaginer car elle est une fonction affine dans l'espace physique. Selon [Sato et al., 2009], les modèles de Von Kármán, dont la structure exponentielle est un cas particulier avec $\nu = 0.5$, semblent le mieux adaptés aux données réelles des milieux lithosphériques. Dans le cadre de ce travail de simulation numérique, on a choisi, dans un premier temps, la structure de sinus cardinale au carré. La raison en est que dans le domaine spectral, la densité de puissance de cette structure de corrélation est une fonction triangulaire, qui rend plus pratique la simulation par représentation spectrale, sujet de la section suivante.

3.2.1.2 Simulation par représentation spectrale de processus stochastiques stationnaires, Gaussiens et univariables

Dans la présente sous-section, on essaie de synthétiser un processus stochastique univariable stationnaire Gaussien en approximant sa dimension aléatoire, qui est en générale de dimension infinie, à travers une projection sur une base de dimension finie. Pour ce faire, de nombreuses méthodologies existent qui se regroupent en deux grandes familles de méthodes qui correspondent aux deux points de vue :

(i) Du point de vue local, la valeur du processus à un point x_1 donné peut être construite à partir des valeurs aux autres points de l'espace. La méthode *ARMA*[21] [voir Mignolet, 1993, par exemple] suit cette approche. La méthode comporte deux étapes. Dans un premier temps, à la phase *AR* une valeur temporaire est extrapolée comme la somme avec pondérations des valeurs déjà connues. Cette valeur va être ensuite, dans la phase *MA*, augmentée d'une perturbation aléatoire de loi Gaussienne pour devenir la valeur finale à cet endroit.

(ii) Du point de vue global, tout le processus est simulé en même temps. Cette fonction aléatoire est en fait approximée par une somme infinie avec pondération de fonctions de base. Les méthodes de *représentation spectrale*, de *Karhunen-Loève* et de *Chaos Polynomial* sont les trois principales méthodes qui partagent ce point de vue. Pour la méthode spectrale [voir Shinozuka and Jan, 1972, Poirion and Soize, 1989, Arnst, 2007, par exemple],

[21] Auto-Regressive Moving Average

les poids de pondération sont déterministes, en fonction du spectre de densité de puissance, les fonctions de base sont des *cosinus* de pulsation correspondante et ayant comme phase et amplitude les variables aléatoires Gaussiennes. Pour la méthode de Karhunen-Loève [voir Ghanem and Spanos, 1991, Puig, 2003, pour de plus amples détails], les fonctions de base sont déterministes. Ce sont les vecteurs propres d'un opérateur linéaire intégral ayant comme noyau la fonction de corrélation. Les poids de pondérations sont les valeurs propres de cet opérateur modulées par une variable aléatoire de loi Gaussienne. Pour la dernière méthode [voir Puig, 2003, Ghanem and Spanos, 1990, par exemple], les fonctions de base sont des polynômes orthogonaux hermitiens des variables Gaussiennes.

Dans la pratique du travail de cette dissertation, on utilise l'approche par la représentation spectrale pour simuler un processus stochastique Gaussien unidimensionnel, étendu ensuite aux champs (3D) stochastiques gaussiens. Le choix de cette méthode se fonde sur sa simplicité d'implémentation (elle convient bien avec la structure de corrélation de sinus cardinale au carrée dont le spectre de densité de puissance est à support compact), et surtout, elle contribue, selon Arnst [2007], à l'esprit d'un paramétrage minimal du problème mécanique.
Ainsi, considérons à nouveau le processus stochastique $\boldsymbol{E}(x_1)$. Si sa structure de corrélation est connue et donnée explicitement par son spectre de densité de puissance $S_E(\kappa;\ell_1)$, il peut être modélisé comme dans [Poirion and Soize, 1989] par :

$$\boldsymbol{E}(x_1;\ell_1) = \lim_{n_\kappa \to +\infty} \boldsymbol{E}^{(n_\kappa)}(x_1;\ell_1) \text{ pour } \forall x_1 \in \Omega_1 \tag{3.170}$$

avec $\boldsymbol{E}^{(n_\kappa)}(x_1;\ell_1)$ une chaîne définie à chaque endroit x_1 comme suit :

$$\boldsymbol{E}^{(n_\kappa)}(x_1;\ell_1) = \sqrt{\Delta_\kappa} \sum_{\mathrm{i}=1..n_\kappa-1} \sqrt{S_E(\kappa_\mathrm{i};\ell_1)}\, \Theta_{\kappa_\mathrm{i}} \cos\big(\kappa_\mathrm{i} x_1 + 2\pi \Xi_{\kappa_\mathrm{i}}\big) \tag{3.171}$$

- K_1 est le support de $S_E(\kappa;\ell_1)$. Pour la structure de corrélation de type *sinus cardinal au carré* définie par les équations (3.168) et (3.169), ce support est compact

$$K_1 = \mathsf{supp}\ S_E(\kappa) = \left[-\frac{\pi}{\ell_1};\frac{\pi}{\ell_1}\right]. \tag{3.172}$$

- n_κ, le nombre d'intervalles d'échantillonnage du support du spectre de densité de puissance. Comme en pratique, n_κ est un entier fini, selon le théorème de *Nyquist-Shannon* [Shannon, 1949], la représentation $\boldsymbol{E}^{(n_\kappa)}(x_1;\ell_1)$ de $\boldsymbol{E}(x_1;\ell_1)$ est périodique en espace. Cette période spatiale est donnée, selon Poirion and Soize [1989] ou Shinozuka and Deodatis [1996], par le produit de la longueur de corrélation ℓ_1 et le nombre de points d'échantillonnage :

$$T_1 = n_\kappa \times \ell_1 \tag{3.173}$$

  Ainsi, pour ne pas perdre de généralité, que $\boldsymbol{E}(x_1;\ell_1)$ ne soit pas périodique, n_κ est choisi suffisamment grand pour que T_1 le soit, *i.e.* $T_1 \geq |\Omega_1|$:

$$n_\kappa \geq \frac{|\Omega_1|}{\ell_1}. \tag{3.174}$$

– Δ_κ est un intervalle d'échantillonnage du support K_1. Dans le cas d'un échantillonnage régulier, ce dernier vaut :

$$\Delta_\kappa = \frac{|K_1|}{n_\kappa} \tag{3.175}$$

– κ_i le i-ième nombre d'onde dans l'échantillonnage :

$$\kappa_i = -\frac{\pi}{\ell_1} + \Delta_\kappa i \tag{3.176}$$

– Ξ_κ est une variable scalaire aléatoire de loi uniforme $\mathbb{1}_{[0;1]}$ connaissant $K_1 \times \mathfrak{A}$ comme espace d'évènements élémentaires. Ainsi la phase aléatoire est une loi uniforme sur $[0; 2\pi]$.
– Θ_κ est l'amplitude aléatoire du cosinus. Cela est à son tour une variable aléatoire connaissant $K_1 \times \mathfrak{A}$ comme espace d'évènements élémentaires. Elle se réalise en pratique en appliquant sur une variable uniforme $\Xi'_\kappa \sim \mathbb{1}_{[0;1]}$, copie indépendante de Ξ_κ la transformation suivante :

$$\Theta_\kappa = \sqrt{-2 \log (\Xi'_\kappa)}. \tag{3.177}$$

REMARQUE 3.3. *Il convient de noter que le fait de générer des cosinus à amplitudes et phases aléatoires comme ce qu'on vient de décrire est inspiré de l'algorithme de Box-Muller*[22] *de transformer deux variables aléatoire de loi uniforme* $\mathbb{1}_{[0;1]}$ *en deux variables Gaussiennes centrées réduites.* $\boldsymbol{E}^{(n_\kappa)}(x_1; \ell_1)$ *peut alors s'appeler une série tronquée de Gaussiennes. Il est démontré dans [Poirion and Soize, 1989] que* $\boldsymbol{E}^{(n_\kappa)}(x_1; \ell_1)$ *converge en distribution vers un processus Gaussien.*

3.2.2 Extension à la simulation de champ stochastique tridimensionnel multivariable : champ du tenseur $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathbf{G}}; \boldsymbol{\ell})$

3.2.2.1 Simulation

Par rapport à un processus stochastique, un champ stochastique tridimensionnel multivariable se distingue principalement par (i) une structure de corrélation tridimensionnelle associée au domaine physique 3D et aussi par (ii) le fait qu'il peut se constituer par une combinaison de plusieurs champs germes indépendants l'un à l'autre.

Structure de corrélation tridimensionnelle : Dans notre cas de modélisation du champ stochastique de tenseur d'élasticité $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell})$, la structure de corrélation

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\ell}) = \boldsymbol{R}(x_1, x_2, x_3; \ell_1, \ell_2, \ell_3) \\ \boldsymbol{\mathfrak{S}}(\boldsymbol{\kappa}; \boldsymbol{\ell}) = \boldsymbol{\mathfrak{S}}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3; \ell_1, \ell_2, \ell_3) \end{cases} \tag{3.179}$$

est la même pour le champ de tenseur que pour les champs germes. Cette structure tridimensionnelle est choisie sous les hypothèses que :

[22] Algorithme de *Box-Muller* [voir Robert and Casella, 1999, par exemple] consiste à générer deux variables gaussienne $Z_1, Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ à partir de deux variables uniformes $z_1, z_2 \sim \mathbb{1}_{[0;1]}$ comme suit :

$$Z_1 = \sqrt{-2 \log z_1} \cos(2\pi z_2) \qquad Z_2 = \sqrt{-2 \log z_1} \sin(2\pi z_2) \tag{3.178}$$

1. Elle est spatialement séparable [voir Popescu, 1995, Vanmarcke, 1983, par exemple], *i.e.* elle peut s'écrire sous forme suivante :

$$\boldsymbol{R}(x_1, x_2, x_3; \ell_1, \ell_2, \ell_3) = R_1(x_1; \ell_1) \times R_2(x_2; \ell_2) \times R_3(x_3; \ell_3) \tag{3.180}$$
$$\mathfrak{S}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3; \ell_1, \ell_2, \ell_3) = S_1(\kappa_1; \ell_1) \times S_2(\kappa_2; \ell_2) \times S_3(\kappa_3; \ell_3) \tag{3.181}$$

2. Elle peut être isotrope ou anisotrope. À la différence de l'isotropie dans la loi de comportement mécanique, l'isotropie d'hétérogénéité veut exprimmer que les structures de corrélation monodimensionnelles correspondant aux 3 directions spatiales sont identiques et que les longueurs de corrélations sont aussi égales. Si c'est le cas, on a :

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell \tag{3.182}$$

$$R_1(x_1; \ell_1) = R_2(x_2; \ell_2) = R_3(x_3; \ell_3) \tag{3.183}$$
$$S_1(\kappa_1; \ell_1) = S_2(\kappa_2; \ell_2) = S_3(\kappa_3; \ell_3) \tag{3.184}$$

Combinaison de 23 champs germes : D'après la simulation du tenseur d'élasticité $\boldsymbol{C}(\delta, \delta_{\mathrm{G}})$ présentée dans les sous-sections (3.1.2.3) et (3.1.2.4), l'extension à la simulation de champ stochastique du champ du tenseur $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell})$ peut être vue comme une combinaison de 23 champs germes qui ne sont rien d'autre que 23 copies indépendantes d'un champ stochastique Gaussien centré et réduit. Cette combinaison consiste en grandes lignes à (i) réaliser 23 fois ce champ stochastique qui est homogène et continu en moyen d'ordre deux, (ii) puis transformer certaines parmi ces réalisations en champs stochastiques scalaires positifs en appliquant des transformations isoprobabilistes des variables *Gaussiennes* en variables *Gamma*, (iii) ensuite mettre en forme le noyau et les modules d'élasticité *i.e.,* placer les champs scalaires Gaussiens ou non-Gaussiens dans un ordre convenable : 21 champs germes vont remplir le champ stochastique matriciel du noyau $\mathbb{G}(\boldsymbol{x}; \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell})$, les deux autres vont engendrer les champs stochastiques scalaires du module de compressibilité $\mathbb{K}(\boldsymbol{x}; \delta; \boldsymbol{\ell})$ et du module de cisaillement $\mathbb{\mu}(\boldsymbol{x}; \delta; \boldsymbol{\ell})$, et (iv) finalement, obtenir le champ global de $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell})$ par une expression inspirée de celle de l'équation (3.19).
Pour concrétiser la simulation d'une réalisation de $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell})$ avec ces deux aspects mentionnés ci-dessus, on propose la procédure suivante, qui est, en grande partie, dérivée de celle détaillée dans [Arnst, 2007, Box 1.5, Section 1.2].

Procédure de simulation du champ stochastique de tenseur d'élasticité

- **Étape 0 : Initialisation**
  a. Choisir le nombre r, label de la réalisation de Monte Carlo : $r \in J$, l'ensemble d'indices de $\mathfrak{A}$. On peut considérer $J = \mathbb{N}$, r est donc un entier.
  b. Choisir le champ moyen $\underline{C}$ isotrope qui correspond aux valeurs moyennes des modules d'élasticité $\underline{\mathcal{K}}$ et $\underline{\mu}$.
  c. Choisir les longueurs de corrélation $\boldsymbol{\ell} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$.

d. Choisir les paramètres de dispersion δ_{G} et δ respectivement du noyau $\mathbb{G}(\boldsymbol{x};\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})$ et de la partie isotrope $\mathbb{C}_{iso}(\boldsymbol{x};\delta;\boldsymbol{\ell})$

e. Choisir le nombre d'échantillonnage n_κ du support de la fonction de densité spectrale (*cf.* équation (3.184)).

- **Étape 1 : Simulation des champs germes Gaussiens centrés réduits**

a. Simuler les réalisations des phases et amplitudes aléatoires
   - Les amplitudes aléatoires constituent pour un évènement a_r l'ensemble

$$\Theta(r) = \Big\{\Theta_\kappa\big(i_\kappa, \mathrm{k}(r)\big) \;\Big|\; i_\kappa \in \mathbb{N} : 1 \leq i_\kappa \leq n_\kappa - 1 \;; \\ \mathrm{k}(r) \in \mathbb{N} : 23r \leq \mathrm{k}(r) \leq 23r + 22\Big\} \tag{3.185}$$

   de $23 \times n_\kappa \times n_\kappa \times n_\kappa$ copies indépendantes d'une variable réelle dérivée d'une variable uniforme à valeur dans $[0,1]$ selon l'équation (3.177).
   - Les phases uniformes à valeurs dans $[0, 2\pi]$ ont leur partie normalisée uniforme à valeurs dans $[0,1]$ constituant , pour un évènement a_r , à l'ensemble

$$\Xi(r) = \Big\{\Xi_\kappa\big(i_\kappa, \mathrm{k}(r)\big) \;\Big|\; i_\kappa \in \mathbb{N} : 1 \leq i_\kappa \leq n_\kappa - 1 \;; \\ \mathrm{k}(r) \in \mathbb{N} : 23r \leq \mathrm{k}(r) \leq 23r + 22\Big\} \tag{3.186}$$

   de $23 \times n_\kappa \times n_\kappa \times n_\kappa$ copies indépendantes d'une variable réelle uniforme à valeurs dans $[0,1]$.

b. Construire 23 champs germes :
   Pour chacun des $\mathrm{k}(r)$ parmi les 23 $\Big\{\mathrm{k}(r) \;\Big|\; 23r \leq \mathrm{k}(r) \leq 23r + 22\Big\}$, on a la représentation :

$$\boldsymbol{x} \to \mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{n_\kappa \ell}\right)^3} \sum_{l,m,n=1}^{n_\kappa - 1} \sqrt{\mathfrak{S}(\kappa_l, \kappa_m, \kappa_n; \ell)}\Theta_\kappa\big(i_\kappa, \mathrm{k}(r)\big) \times \\ \cos\Big(\kappa_l x_1 + \kappa_m x_2 + \kappa_n x_3 + \Xi_\kappa\big(i_\kappa, \mathrm{k}(r)\big)\Big) \tag{3.187}$$

- **Étape 2 : Mise en formes du noyau $\mathbb{G}$ et des modules d'élasticité à partir des champs germes Gaussiens $\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r)$**

a. Simuler le noyau :
   $\mathbb{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta_{\mathrm{G}};r)$ est construit à travers sa racine au sens de Cholesky $\mathbb{L}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta_{\mathrm{G}};r)$ qui est un champ stochastique à valeur dans l'espace des matrices triangulaires supérieures de taille 6×6. Chacun des termes $\mathbb{L}_{\mathrm{ij}}$ de $\mathbb{L}$ constitue un champ stochastique scalaire.
   - Pour les termes extra-diagonaux supérieurs ($\mathrm{j} > \mathrm{i}$) :

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{L}_{\mathrm{ij}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta_{\mathrm{G}};r) = \frac{\delta_{\mathrm{G}}}{\sqrt{7}}\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r) \tag{3.188}$$

– Pour les termes diagonaux (j = i) :

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{L}_{\mathrm{ii}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta_{\mathrm{G}};r) = \frac{\delta_{\mathrm{G}}}{\sqrt{7}}\sqrt{2h\big(\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r),\alpha_{\mathrm{i}}\big)} \tag{3.189}$$

– Pour les termes extra-diagonaux inférieurs (j < i) :

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{L}_{\mathrm{ij}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta_{\mathrm{G}};r) = 0 \tag{3.190}$$

où

– k(r) est une réindexation similaire à celle présentée dans (3.75) :

$$\mathrm{k} = \mathrm{k}(r) = \frac{(14-\mathrm{i})(\mathrm{i}-1)}{2} + \mathrm{j} - \mathrm{i} + 1 + 23(r-1) \tag{3.191}$$

– $h(\bullet,\bullet)$ est la transformation isoprobabiliste définie dans l'équation (3.77) qui transforme en chaque point $\boldsymbol{x}$, une variable scalaire Gaussienne centrée réduite en une variable réduite de lois *Gamma*.

b. Simuler les champs des modules d'élasticité :
Ils correspondent aux deux derniers champs germes parmi les 23 construits à l'étape 1.

– Module de compressibilité :

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{K}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta;r) = \delta^2\underline{\mathcal{K}}h\big(\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r),\frac{1}{\delta^2}\big) \tag{3.192}$$

avec

$$\mathrm{k} = \mathrm{k}(r) = 23r + 21 \tag{3.193}$$

– Module de cisaillement :

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{\mu}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta;r) = \delta^2\underline{\mu}h\big(\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r),\frac{1}{\delta^2}\big) \tag{3.194}$$

avec

$$\mathrm{k} = \mathrm{k}(r) = 23r + 22 \tag{3.195}$$

- **Étape 3 : Calcul du champ de tenseur d'élasticité**
Le champ de tenseur d'élasticité $\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta,\delta_{\mathrm{G}};r)$ est ensuite déduit du champ noyau et des champs de modules d'élasticité isotrope d'une façon généralisée de celle présentée par l'équation (3.19).

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{C}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta,\delta_{\mathrm{G}};r) = \mathbb{Q}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell},\delta;r) \times \mathbb{G}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta_{\mathrm{G}};r) \times \mathbb{Q}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell},\delta;r) \tag{3.196}$$

avec

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{Q}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell},\delta;r) = \sqrt{3\mathbb{K}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta;r)}\boldsymbol{S} + \sqrt{2\mathbb{\mu}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta;r)}\boldsymbol{D} \tag{3.197}$$

où $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{D}$ sont les tenseurs sphérique et déviatorique définis dans la sous-section (3.1.1).

3.2.2.2 Propriétés du champ $\{\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell}) \mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}\}$

Par la construction prémentionnée, le champ stochastique $\{\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell}) \mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}\}$ possède les propriétés suivantes qui sont des déductions directes des propriétés de la variable aléatoire $C(\delta;\delta_{\mathrm{G}})$ étudiées dans la section (3.1.2.5) :

PROPRIÉTÉ 3.6. *Le champ moyen est isotrope presque sûrement*

$$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}\ :\ \mathsf{E}\left\{\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})\right\}=\underline{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x})=\underline{\mathbb{C}} \tag{3.198}$$

PROPRIÉTÉ 3.7. *Le champ est défini-positif presque sûrement :*

$$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}\ :\ \mathbb{C}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})\in\mathbb{M}_6^{+}(\mathbb{R}) \tag{3.199}$$

PROPRIÉTÉ 3.8. *Le champ est d'ordre deux presque sûrement pour δ et δ_{G} vérifiant respectivement les premières inégalités des doubles inégalités (3.98) et (3.101)*

$$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}\ :\ \exists\,\gamma_{\mathrm{C}}\in[0;\mathbb{R}^{+})\ \mid\ \mathsf{E}\left\{\|\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})\|^2\right\}<\gamma_{\mathrm{C}} \tag{3.200}$$

PROPRIÉTÉ 3.9. *Le champ inverse est de moyenne d'ordre deux presque sûrement pour δ et δ_{G} qui vérifient respectivement les deuxièmes inégalités des doubles inégalités (3.98) et (3.101)*

$$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}\ :\ \exists\,\gamma_{\mathrm{C}}\in[0;\mathbb{R}^{+})\ \mid\ \mathsf{E}\left\{\|\mathbb{C}^{-1}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})\|^2\right\}<\gamma_{\mathrm{C}} \tag{3.201}$$

PROPRIÉTÉ 3.10. *La valeur moyenne de l'indice d'anisotropie $\mathrm{I}^2_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})$ défini dans (3.109) est presque sûrement contrôlée par δ_{G} à travers l'expression suivante :*

$$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}\ :\ \mathsf{E}\left\{\mathrm{I}^2_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})\right\}=\frac{38\delta_{\mathrm{G}}^2}{42} \tag{3.202}$$

PROPRIÉTÉ 3.11. *Le coefficient de variance $\delta_{|C|}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})$ défini en (3.46) est presque sûrement contrôlé par δ et δ_{G} à travers l'expression suivantes :*

$$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}\ :\ \delta^2_{|C|}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})=\delta^2+\frac{\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\left(1+\frac{\mathsf{tr}^2(\underline{C})}{\|\underline{C}\|^2}\right)+\frac{\delta^2\delta_{\mathrm{G}}^2}{7}\left(2+\frac{80\underline{\mu}^2}{\|\underline{C}\|^2}\right) \tag{3.203}$$

Il convient de noter que les propriétés (3.10-3.11) conduisent automatiquement à la propriété homogène (au sens de la stationnarité spatiale) d'ordre deux du champ stochastique $\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})$ car les paramètres de fluctuations δ et δ_{G} sont choisis constants en espace, tout comme le modèle moyen dont le tenseur d'élasticité isotrope est constant :

$$\underline{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x})=\underline{\boldsymbol{C}}\in\mathbb{M}^{\mathrm{SD}}(\mathbb{R})\subset\mathbb{M}_6^{+}(\mathbb{R})\ \forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega} \tag{3.204}$$

qui équivaut au fait que les modules d'élasticité moyens sont également constants en espace :

$$\underline{\mathbb{K}}(\boldsymbol{x})=\underline{\mathcal{K}}\in\mathbb{R}^{+}\ \forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega} \tag{3.205}$$

et

$$\underline{\mathbb{\mu}}(\boldsymbol{x})=\underline{\mu}\in\mathbb{R}^{+}\ \forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega} \tag{3.206}$$

De plus, puisque la mise en forme de la matrice $\mathbb{C}$ (qui se réalise par l'intermédiaire des mises en forme des matrices $\boldsymbol{G}$ et les modules d'élasticités $\boldsymbol{\mathcal{K}}, \boldsymbol{\mu}$ à travers des expressions (3.188-3.190) et (3.192-3.194) respectivement) à partir des 23 champs germes $\mathbb{g}$ à chaque endroit $\boldsymbol{x}$ est une application continue $\mathfrak{F}$ de $\mathbb{R}^{+23}$ à $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$, les propriétés de continuité des champs germes $\{\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{g}_{\mathrm{k}}\}_{\mathrm{k}=1\ldots23}$ sont transmises au champ $\mathbb{C}$ qui est considéré comme une fonction composée de $\mathfrak{F}$ avec $\mathbb{g}$. C'est-à-dire que le champ stochastique $\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell})$ est continu en moyen d'ordre deux et possède des réalisations presque sûrement continues. Également, il est raisonnable d'adopter l'hypothèse de l'ergodicité (d'au moins d'ordre deux) du $\{\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}\}$ si le domaine $\boldsymbol{\Omega}$ est assez grand devant la longueur de corrélation.

PROPRIÉTÉ 3.12. *$\{\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}\}$ est continu en moyen d'ordre deux, ergodique et a des réalisations continues.*

En dehors de ces propriétés de base que l'on vient d'énumérer, une propriété fondamentale du champ stochastique $\{\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}\}$ consiste au fait qu'il assure le caractère bien posé du problème stochastique d'élasto(-visco-)dynamique contribuant à notre approche probabiliste paramétrique. Ce caractère bien posé du problème se traduit par l'existence de sa solution stochastique unique et du second-ordre. Dans la section qui suit, on va poser le problème stochastique d'élasto(-visco-)dynamique dans le domaine temporel en employant $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell})$ comme modèle du champ de tenseur d'élasticité anisotrope hétérogène et ensuite démontrer que sa solution unique est du second-ordre.

3.3 Modèle stochastique paramétrique dans le domaine temporel du problème d' élasto-visco-dynamique.

Cette section est consacrée à la description du modèle stochastique paramétrique en élasto-visco-dynamique dans le domaine temporel inspiré du modèle présenté dans l'appendice A de [Arnst, 2007]. Le modèle détaillé ci-dessous est également à paramétrage minimal où le tenseur d'élasticité est seulement modélisé par un champ tensoriel (à représentation vectorielle) stochastique contrôlé par un ensemble réduit de paramètres de fluctuation et de corrélations spatiales, tandis que la géométrie et les autres propriétés mécaniques (masse volumique, tenseur de viscosité) ainsi que l'excitation sont considérées comme déterministes. À la différence du modèle de Arnst [2007], au lieu d'utiliser le modèle de Soize [2006] du champ stochastique à valeurs matricielles (dont le modèle des variables aléatoires correspondant est brièvement présenté dans la sous-section 3.1.2.1.b), on utilise le modèle de champ approprié proposé dans la section précédente du tenseur d'élasticité. Au cours de la section on va décrire tout d'abord le problème déterministe avec les formulations forte et faible pour ensuite établir que le problème stochastique correspondant à la formulation variationnelle a une solution unique et du second-ordre.

3.3.1 Modèle déterministe en élasto-visco-dynamique

Reprenons maintenant la formulation forte du problème élasto-visco-dynamique abordée au début du chapitre précédent et considérons sa formulation variationnelle associée. Avant d'écrire la forme variationnelle du problème élastodynamique, il convient d'introduire les no-

tions de l'espace de champs de vecteur de déplacement et de vitesse *cinématiquement admissibles* et l'espace de champ de vecteur de déplacement *test*. Soit $\mathscr{H}_2^1(\boldsymbol{\Omega})$ l'espace de Sobolev des champs de fonction vectorielle défini sur $\boldsymbol{\Omega}$ qui sont de carré intégrables et dont les premières dérivées spatiales le sont également[23] sur $\boldsymbol{\Omega}$, se définissent :

(i) l'espace des champs de déplacement et de vitesse cinématiquement admissibles

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^t = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) : \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}^{n_d} | \boldsymbol{u} \in \mathscr{H}^1 2(\boldsymbol{\Omega})\} \tag{3.209}$$

associé à

(ii) l'espace des variations de déplacement admissible pour chaque instant t donné

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\Omega} \to \mathbb{R}^{n_d} | \delta\boldsymbol{u} \in \mathscr{H}_2^1(\boldsymbol{\Omega})\} \tag{3.210}$$

La formulation faible du modèle déterministe du problème élasto-visco-dynamique dans le domaine temporel associée à la formulation forte (2.15) consiste alors à trouver la réponse déterministe, *i.e.* le champ de déplacement $\{\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) | (\boldsymbol{x},t) \in \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{T}\}$ et le champ de vitesse $\{\boldsymbol{x} \mapsto \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t) | (\boldsymbol{x},t) \in \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{T}\}$ définis dans l'espace des champs de déplacement et de vitesse cinématiquement admissibles $\boldsymbol{\mathcal{S}}^t$ tels qu'à tous les instants $\forall t \in \boldsymbol{T}$ et pour toutes les fonctions test $\forall \delta\boldsymbol{u} \in \delta\boldsymbol{\mathcal{S}}$ l'expression suivante soit vérifiée :

$$\left\langle \delta\boldsymbol{u}, \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} \right\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \left\langle \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}_{\mathrm{v}} \right\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} + \left\langle \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}_{\mathrm{s}} \right\rangle_{\partial\boldsymbol{\Omega}} - \mathcal{A}^e_{\boldsymbol{\Omega}}(\delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - \mathcal{A}^v_{\boldsymbol{\Omega}}(\delta\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) \tag{3.211}$$

avec les conditions initiales données par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_o(\boldsymbol{x}) & \text{(a)} \\ \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},0) = \dot{\boldsymbol{u}}_o(\boldsymbol{x}) & \text{(b)} \end{cases} \tag{3.212}$$

Dans l'expression (3.211), tous les opérateurs sont des formes bilinéaires déterministes définies-positives, symétriques. Ils sont établis en tant qu'intégrales spatiales sur $\boldsymbol{\Omega}$ ou sur son bord $\partial\boldsymbol{\Omega}$ comme suit respectivement pour les travaux exercés par la force inertielle, par les chargements externes et pour les énergies de déformations en viscosité (à travers le tenseur de viscosité $\boldsymbol{\vartheta}$) et en élasticité :

$$\left\langle \delta\boldsymbol{u}, \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} \right\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \delta\boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{3.213}$$

$$\left\langle \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}_{\mathrm{v}} \right\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}_{\mathrm{v}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{3.214}$$

[23] Mathématiquement, $\mathscr{H}_2^1(\boldsymbol{\Omega})$ est défini par :

$$\mathscr{H}_2^1(\boldsymbol{\Omega}) = \{\boldsymbol{u} \in \mathscr{L}^2(\boldsymbol{\Omega}) | \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u} \in \mathscr{L}^2(\boldsymbol{\Omega})\} \tag{3.207}$$

où $\mathscr{L}^2(\boldsymbol{\Omega})$ l'espace de Lebesgue d'ordre 2 des fonctions carré-intégrables sur $\boldsymbol{\Omega}$. Ainsi, $\mathscr{H}_2^1(\boldsymbol{\Omega})$ est hilbertien par rapport à la norme $\|\cdot\|_H$ définie comme :

$$\|\boldsymbol{u}\|_H^2 = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} + \int_{\boldsymbol{\Omega}} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u} : \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{3.208}$$

.

$$\langle \delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}_{\mathrm{s}} \rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \int_{\partial \boldsymbol{\Omega}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f}_{\mathrm{s}} \, \mathrm{d}S \tag{3.215}$$

$$\mathcal{A}^{v}_{\boldsymbol{\Omega}}(\delta \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \delta \boldsymbol{u} : \boldsymbol{\vartheta} : \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{u}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{3.216}$$

$$\mathcal{A}^{e}_{\boldsymbol{\Omega}}(\delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \delta \boldsymbol{u} : \boldsymbol{C} : \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{3.217}$$

Pour les fonctions $\boldsymbol{f}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{f}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}_o(\boldsymbol{x})$ et $\dot{\boldsymbol{u}}_o(\boldsymbol{x})$ choisies suffisamment régulières (*i.e.*, elles sont au moins de carré intégrable en espace et en temps), il est démontré [Dautray and Lions, 1987] que la formulation variationnelle (3.211)-(3.212) est mathématiquement bien posée c'est-à-dire que la solution $(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}})$ existe et qu'elle est unique. Par conséquent, connaissant la géométrie $\boldsymbol{\Omega}$ ainsi que l'ensemble des données $\{\boldsymbol{\vartheta}, \rho, \boldsymbol{f}_{\mathrm{v}}, \boldsymbol{f}_{\mathrm{s}}, \boldsymbol{u}_o, \dot{\boldsymbol{u}}_o\}$ on peut définir une application $\mathscr{S}$ faisant correspondre le champ de tenseur d'élasticité $\{\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\}$ à la solution unique de la formulation faible

$$\begin{aligned} \mathscr{S} : \mathbb{M}^{+}_{6}(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{\Omega} &\to \boldsymbol{\mathcal{S}}^{t} \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) &\mapsto \mathscr{S}\big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})\big) = \big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})\big). \end{aligned} \tag{3.218}$$

De plus, le champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ et le champ de vitesse $\dot{\boldsymbol{u}}$ sont des fonctions continues en temps et en espace.

3.3.2 Modèle stochastique en élasto-visco-dynamique

La formulation faible du modèle stochastique du problème élasto-visco-dynamique dans le domaine temporel est maintenant énoncée dans ce paragraphe. Comme on a abordé au préambule de la section que le modèle stochastique paramétrique à paramétrage minimal modélise le champ de tenseur d'élasticité par le champ stochastique $\{\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}\}$, la formulation variationnelle stochastique associée consiste alors à trouver la réponse aléatoire, *i.e.* le champ de déplacement $\{\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{u}(\boldsymbol{x}, t; \mathfrak{p}) \,|\, (\boldsymbol{x}, t) \in \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{T}\}$ et le champ de vitesse $\{\boldsymbol{x} \mapsto \dot{\mathbb{u}}(\boldsymbol{x}, t; \mathfrak{p}) \,|\, (\boldsymbol{x}, t) \in \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{T}\}$ définis[24] dans l'espace de mesure probabilisé $(\mathfrak{A}, \mathcal{T}, P)$ à valeur dans l'espace des fonctions cinématiquement admissibles $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{t}$ tels que à tous les instants $\forall t \in \boldsymbol{T}$ et pour toutes les fonctions test $\forall \delta \boldsymbol{u} \in \delta \boldsymbol{\mathcal{S}}$ l'expression suivante soit vérifiée :

$$\left\{ \left\langle \delta \boldsymbol{u}, \rho \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbb{u}}}{\mathrm{d}t} \right\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \langle \delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f} \rangle_{\boldsymbol{\Omega}} + \langle \delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}_{\mathrm{s}} \rangle_{\partial \boldsymbol{\Omega}} - \mathbb{A}^{e}_{\boldsymbol{\Omega}}(\delta \boldsymbol{u}, \mathbb{u}) - \mathcal{A}^{v}_{\boldsymbol{\Omega}}(\delta \boldsymbol{u}, \dot{\mathbb{u}}) \right\} \text{ p.s.} \tag{3.219}$$

avec les conditions initiales données par :

$$\begin{cases} \mathbb{u}(\boldsymbol{x}, 0; \mathfrak{p}) = \boldsymbol{u}_o(\boldsymbol{x}) & \text{p.s.} \quad \text{(a)} \\ \dot{\mathbb{u}}(\boldsymbol{x}, 0; \mathfrak{p}) = \dot{\boldsymbol{u}}_o(\boldsymbol{x}) & \text{p.s.} \quad \text{(b)} \end{cases} \tag{3.220}$$

À part des différences d'apparence, une chose essentielle qui distingue la formulation variationnel stochastique (3.219)-(3.220) avec sa formulation déterministe d'origine (3.211)-(3.212)

[24] où le symbole $\mathfrak{p}$ est utilisé désormais pour représenter le paramétrage minimal qui se compose des paramètres de fluctuation δ, δ_{G} et des 3 longueurs de corrélation regroupées dans $\boldsymbol{\ell}$.

réside dans le remplacement de l'opérateur déterministe d'élasticité $\mathcal{A}^{e}_{\Omega}$ par un opérateur stochastique d'élasticité $\mathbb{A}^{e}_{\Omega}$ défini par :

$$\left\{\mathbb{A}^{e}_{\Omega}(\delta\boldsymbol{u},\mathbb{U}) = \int_{\Omega} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\delta\boldsymbol{u} : \mathbb{C}(\boldsymbol{x};\mathfrak{p}) : \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\right\} \text{ p.s.} \tag{3.221}$$

tandis que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^{e}_{\Omega}$ et les autres formes bilinéaires des chargements externes et de l'inertie restent déterministes et sont identiques à celles définies dans les expressions (3.213)-(3.216).

Deux propriétés importantes de la formulation faible stochastique que l'on vient de décrire sont que (i) sa solution $(\mathbb{U},\dot{\mathbb{U}})$ existe avec unicité et que (ii) le champ stochastique du déplacement et le champ stochastique de la vitesse sont du second ordre. Pour la démonstration de la propriété (i), les lecteurs sont invités à se référer à [Arnst, 2007]. Dans la suite, on va écrire l'expression mathématique de la propriété du second ordre de la solution et en suite des éléments importants pour établir une démonstration complète se fondant sur celle présentée dans [Arnst, 2007] concernant la propriété homologue ayant pour champ du tenseur d'élasticité le modèle de Soize [2006].

PROPRIÉTÉ 3.13. *Si les paramètres de fluctuation δ et δ_{G} du champ stochastique de tenseur d'élasticité $\mathbb{C}(\boldsymbol{x},\mathfrak{p})$ vérifient respectivement les inégalités (3.98) et (3.101), les inégalités suivantes se vérifient pour $\forall t \in \boldsymbol{T}$:*

$$\begin{cases} \mathsf{E}\left\{\|\mathbb{U}(t)\|^2\right\} < +\infty & (a) \\ \mathsf{E}\left\{\|\dot{\mathbb{U}}(t)\|^2\right\} < +\infty & (b) \end{cases} \tag{3.222}$$

Une démonstration complète de cette propriété peut être obtenue en appliquant similairement le schéma de démonstration décrit dans [Arnst, 2007, Appendice A.4]. Par contre, il convient de noter qu'à la différence de cette démonstration en référence faite sur mesure pour le modèle de [Soize, 2006], on va utiliser les PROPRIÉTÉS 3.14 et 3.15, énoncées et démontrées dans la suite, respectivment à la place des expressions (A.73) et (1.85) de [Arnst, 2007].

PROPRIÉTÉ 3.14. *Si on dénomme $\underline{\mathcal{A}}^{e}_{\Omega}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ l'opérateur bilinéaire d'élasticité associé au champ moyen du tenseur d'élasticité $\boldsymbol{x} \mapsto \underline{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x})$:*

$$\underline{\mathcal{A}}^{e}_{\Omega}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\delta\boldsymbol{u} : \underline{\boldsymbol{C}} : \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{3.223}$$

et réécrit le tenseur $\mathbb{C}$ sous la forme

$$\mathbb{C} = \underline{\boldsymbol{Q}}\sqrt{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}\sqrt{\mathbb{Q}}\,\underline{\boldsymbol{Q}} := \underline{\boldsymbol{Q}}\,\mathbb{Z}\underline{\boldsymbol{Q}} \tag{3.224}$$

avec

$$\mathbb{Z} = \left(\sqrt{\frac{\mathbb{K}}{\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}}\boldsymbol{S} + \sqrt{\frac{\mathbb{U}}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}}\boldsymbol{D}\right)\mathbb{G}\left(\sqrt{\frac{\mathbb{K}}{\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}}\boldsymbol{S} + \sqrt{\frac{\mathbb{U}}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}}\boldsymbol{D}\right), \tag{3.225}$$

on a :

$$\underline{\mathcal{A}}^{e}_{\Omega}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \leq \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|\mathbb{Z}^{-1}\|_{\mathsf{vp}} \times \mathbb{A}^{e}_{\Omega}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \tag{3.226}$$

PREUVE. Par définition dans l'équation (3.223), $\underline{\mathcal{A}}^e_\Omega(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ peut s'écrire également sous la forme d'un produit scalaire des tenseurs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ engendrés par les déplacements $\delta\boldsymbol{u}$:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{A}}^e_\Omega(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) &= \left\langle \underline{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\right\rangle_\Omega \\
&= \left\langle \underline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}),\underline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\right\rangle_\Omega \\
&= \left\langle \mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Z}\underline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}),\underline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\right\rangle_\Omega \\
&\leq \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|\mathbb{Z}^{-1}\|_{\mathsf{vp}} \times \left\langle \mathbb{Z}\underline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}),\underline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\right\rangle_\Omega \\
&= \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|\mathbb{Z}^{-1}\|_{\mathsf{vp}} \times \left\langle \underline{\boldsymbol{Q}}\mathbb{Z}\underline{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\right\rangle_\Omega
\end{aligned}$$

D'où la démonstration s'achève en raison de l'équation (3.224).

PROPRIÉTÉ 3.15. *Si les paramètres δ et δ_{G} vérifient respectivement les conditions $0<\delta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $0<\delta_{\mathrm{G}}<\sqrt{\dfrac{7}{11}}$, l'inégalité suivante se satisfait :*

$$\mathsf{E}\left\{\left(\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|\mathbb{Z}^{-1}(\boldsymbol{x},\mathfrak{p})\|_{\mathsf{vp}}\right)^2\right\} < +\infty \tag{3.227}$$

PREUVE. La définition[25] $\mathbb{Z} = \sqrt{\overline{\mathbb{Q}}}\mathbb{G}\sqrt{\overline{\mathbb{Q}}}$ induit que $\|\mathbb{Z}^{-1}\|_{\mathsf{vp}} \leq \|\overline{\mathbb{Q}}^{-1}\|_{\mathsf{vp}}\|\mathbb{G}^{-1}\|_{\mathsf{vp}}$. D'où, comme $\mathbb{G}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ sont indépendantes, on a :

$$\mathsf{E}\left\{\left(\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|\mathbb{Z}^{-1}\|_{\mathsf{vp}}\right)^2\right\} \leq \mathsf{E}\left\{\left(\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|\overline{\mathbb{Q}}^{-1}\|_{\mathsf{vp}}\right)^2\right\} \times \mathsf{E}\left\{\left(\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|\mathbb{G}^{-1}\|_{\mathsf{vp}}\right)^2\right\} \tag{3.229}$$

Sachant que selon [Soize, 2006]

$$\mathsf{E}\left\{\left(\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|\mathbb{G}^{-1}\|_{\mathsf{vp}}\right)^2\right\} < +\infty \text{ pour } 0<\delta_{\mathrm{G}}<\sqrt{\frac{7}{11}} \tag{3.230}$$

la démonstration s'achève si à ce stade on peut prouver que

$$\mathsf{E}\left\{\left(\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\|\overline{\mathbb{Q}}^{-1}\|_{\mathsf{vp}}\right)^2\right\} < +\infty \text{ pour } 0<\delta<\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.231}$$

On peut démontrer (3.231) en se basant sur la démonstration de Soize [2006] pour (3.230). En effet, comme $\overline{\mathbb{Q}}^{-1}$ peut s'écrire dans la base orthonormée $\{\boldsymbol{S},\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{D}\}$ induit que cette matrice est

[25] dont la matrice de racine carré est au sens :

$$\sqrt{\overline{\mathbb{Q}}} = \sqrt{\frac{\mathbb{K}}{\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}}}\boldsymbol{S} + \sqrt{\frac{\mathbb{U}}{\underline{\boldsymbol{\mu}}}}\boldsymbol{D} \tag{3.228}$$

également isotrope et donc elle possède 2 valeurs propres $\frac{\mathcal{K}}{3\mathbb{K}}$ et $\frac{\mu}{\mathbb{\mu}}$ respectivement à multiplicité 1 et 5. D'où, on a :

$$\|\overline{\mathbb{Q}}^{-1}\|_{\mathsf{vp}} = \sup_{\mathcal{K},\mu} \left\{ \frac{\mathcal{K}}{3\mathbb{K}}; \frac{\mu}{\mathbb{\mu}} \right\} \tag{3.232}$$

D'ailleurs, par construction, $\frac{\mathcal{K}}{\mathbb{K}}$ et $\frac{\mu}{\mathbb{\mu}}$ sont deux copies indépendantes d'un même champ stochastique qu'on nomme $\mathbb{m}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell})$ et qui n'est rien d'autre que celui défini comme suit, en fonction du champ germe $\mathbb{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell})$ selon les équations (3.192) et (3.194) :

$$\boldsymbol{x} \mapsto \mathbb{m}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell}, \delta) = \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{h(\mathbb{g}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell}\right), \frac{1}{\delta^2})} \tag{3.233}$$

Cela et le fait que $\dfrac{1}{h(g, \alpha)}$ l'inverse de transformation isoprobabiliste est une fonction positive décroissante en g à un α positif fixé impliquent que :

$$\left(\sup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}} \|\overline{\mathbb{Q}}^{-1}\|_{\mathsf{vp}}\right)^2 = \frac{1}{\delta^4} \frac{1}{h^2\left(\inf_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}} \mathbb{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell}), \frac{1}{\delta^2}\right)} \tag{3.234}$$

D'où, en prenant l'espérance mathématique de la grandeur d'intérêt :

$$\mathsf{E}\left\{\left(\sup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}} \|\overline{\mathbb{Q}}^{-1}\|_{\mathsf{vp}}\right)^2\right\} = \frac{1}{\delta^4} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h^2(g, \alpha)} p_{inf}(y) \mathrm{d}y \tag{3.235}$$

où $p_{inf}(y)$ est la fonction de distribution de probabilité de la variable scalaire $y = \inf_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}} \mathbb{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell})$. La démonstration est donc complète car selon [Soize, 2006], l'intégrale à droite du (3.235) est finie.

3.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre portant sur la modélisation du champ stochastique des propriétés élastiques, on a proposé un modèle mathématique du champ stochastique 3D de tenseur d'élasticité. Il s'agit d'une modification du modèle de Soize [2006, 2008] à paramétrage minimal des champs stochastiques à valeurs de matrice définies-positives appliqué sur les champs du tenseur d'élasticité de moyenne isotrope dont la variabilité spatiale est contrôlée par 3 longueurs de corrélation spatiales composant le vecteur de corrélation $\boldsymbol{\ell}$ et le niveau de fluctuation globale paramétré par un scalaire réel positif δ. La contribution principale de ce modèle consiste dans le fait qu'un nouveau paramètre δ_{G} homogène à un coefficient de fluctuation est ajouté dans le paramétrage pour imposer la moyenne du niveau d'anisotropie. À ce propos, il convient de noter qu'une nouvelle définition de l'indice d'anisotropie est également proposée au point de vue statistique sur le niveau d'anisotropie du champ. Le rôle de contrôle de la fluctuation globale dans le modèle est donc partagé par δ et δ_{G}. Comme le modèle de Soize, notre modèle de champ proposé satisfait certaines propriétés mathématiques nécessaires pour un champ de propriétés mécaniques. Ce sont notamment les propriétés que le champ est stationnaire, du second-ordre, continu en moyen d'ordre deux et à réalisations continues.

Par ailleurs, au cours de ce chapitre une formulation variationnelle du problème stochastique en élasto-visco-dynamique est également élaborée pour laquelle les propriétés mathématiques du modèle des données élastiques assurent l'unicité, la continuité par réalisation et la propriété du second-ordre des champs de réponse en déplacement et en vitesse.

La résolution non-intrusive du problème stochastique sera effectuée en faisant appel à une approche par la méthode de Monte-Carlo où chaque réalisation du champ de réponse est une solution du problème variationnel en élasto-visco-dynamique associé à une réalisation du champ stochastique de tenseur d'élasticité. Un tel solveur variationnel déterministe pour le problème élastodynamique par la méthode des éléments finis spectraux fera l'objet du **Chapitre** 4 qui suit.

Chapitre 4

Simulations numériques de la propagation d'ondes élastiques en milieux hétérogènes anisotropes

Après avoir d'une part abordé le problème élastodynamique en régime transitoire dans le **Chapitre** 2 et, d'autre part proposé un modèle stochastique de champ de tenseur d'élasticité dans le **Chapitre** 3, on va décrire dans ce présent chapitre l'implémentation numérique d'un solveur non-intrusif du problème de la propagation d'onde dans des milieux anisotropes et aléatoirement hétérogènes.

Ce chapitre est organisé comme suit : La section 4.1 est consacrée à une étude bibliographique sur les méthodes numériques utilisées pour la simulation en élastodynamique. La section qui la suit (section 4.2) est réservée aux fondements théoriques de la *méthode des éléments finis spectraux* et sur la *couche absorbante parfaitement adaptée* sur lesquelles s'est basé le développement du code de calcul SPEC3D au sein du groupe des sismologues de l'IPGP. La section 4.3 résume la structure des données du logiciel SPEC3D. La dernière section comporte une description des contributions dans le cadre de ce travail de thèse en termes d'adaptations du logiciel vis-à-vis de notre thématique de simulation de la propagation d'onde élastique en présence d'hétérogénéité et d'anisotropie.

4.1 Brève zoologie des méthodes numériques en élastodynamique.

La nécessité de recourir aux méthodes numériques est soulevée dès lors que l'on a l'intention d'étudier la propagation des ondes dans des structures réelles. De toutes les façons, on ne connaît de solutions analytiques que dans des cas extrêmement simples comme celui d'un demi-espace homogène ou bien d'un demi-espace horizontalement stratifié, cas éloignés des structures réelles qu'on veut étudier. Depuis une quarantaine d'années, la naissance de l'infrastructure informatique et puis sa croissance spectaculaire et ininterrompue, tant en terme de vitesses de calcul que sur le plan de la capacité de stockage, ont des effets bénéfiques sur l'apparition des techniques numériques avancées ainsi que sur l'amélioration de leur efficacité voire de leur faisabilité.

À la racine de l'arbre généalogique des méthodes numériques en élastodynamique, se distinguent le groupe des méthodes approchées et le groupe des méthodes de calcul d'ensemble d'ondes. Le premier, du type de la théorie des rayons fondée sur une approximation haute fréquence, permet seulement l'identification des quantités spécifiques de la propagation d'ondes volumiques comme les trajectoires, les temps de parcours, l'amplitude, les coefficients de réflexion-transmission, *etc.*. Les méthodes du deuxième groupe visent à fournir une résolution complète sous forme de champs de déplacements, de vitesses ou bien de contraintes. Ces champs évoluant à la fois en temps et en espace sont en fait les superpositions de tous les types d'ondes susceptibles de se propager dans le milieu, quel que soit leur contenu fréquentiel et quel que soit leur nature : qu'elles soient volumiques (*i.e.* ondes P et S), ou guidées (*i.e.* ondes de de *Rayleigh*, de *Love* ou de *Stoneley*). Sachant que l'intention principale dans le cadre de ce travail de thèse est de simuler la réponse complète d'une structure hétérogène et anisotrope complexe afin de mieux comprendre l'influence de ces complexités sur la propagation d'ondes élastiques, on va choisir une méthode de calcul parmi celles du deuxième groupe. La suite de cette section décrit brièvement les grandes familles de méthodes qu'on utilise en élastodynamique. Ce sont les méthodes de *différences finies*, d'*éléments finis* et *de frontière*, les méthodes *spectrale*, *pseudo-spectrale* et d'*éléments finis spectraux*. L'ordre selon lequel elles seront abordées n'est pas forcément chronologique : les méthodes fortes ou globales seront présentées en premier lieu, ensuite, les méthodes intégrales et enfin les méthodes variationnelles.

Face à l'équation d'onde élastodynamique, comme avec toutes les équations aux dérivées partielles, la première chose à tenter est de chercher à la résoudre directement dans la forme forte, *i.e.* forme différentielle (2.15). C'est ce que les méthodes de différences finies, les méthodes spectrales et pseudo-spectrales consistent à faire. Les méthodes des différences finies (FDM) fondées sur un développement des dérivées spatiales[26] intervenant dans l'équation en série de Taylor ont été largement utilisées en 2D et récemment en 3D pour modéliser la propagation des ondes. Le premier avantage de ces méthodes est une mise en oeuvre facile surtout dans des cas de géométrie simple. Par contre, si la géométrie est complexe l'implémentation n'est plus un atout de ces méthodes. Dans ce cas, pour réduire la dispersion numérique liée à la grille deux mesures doivent être envisagés : choisir un rapport pas de grille-longueur d'onde suffisamment petit et une formulation de la grille en quinconce. Pour la première technique, de nombreuses études montrent une nécessité d'avoir au moins 15 points de grille par longueur d'onde la plus petite. Par conséquent, un coût de calcul considérable est requis. Le deuxième schéma, initialisé par Madariaga [1976] et devenu standard en FDM après les travaux de [Virieux, 1984, 1986], a efficacement amélioré la situation en atteignant une réduction de la mémoire vive jusqu'à 27 fois pour le cas 3D. Ce gain est réalisé grâce à un besoin de seulement 5 points de grille par longueur d'onde la plus petite selon le schéma d'ordre 4 recommandé par Levander [1988]. Malgré cette performance en vue du surmontage de l'imprécision liées aux grilles, un autre type d'artefacts reste encore un inconvénient majeur des schémas de différences finies. Cela réside dans l'incapacité à implémenter la condition aux limites de surface libre avec la même précision que dans l'intérieur du domaine [Virieux, 1986, Levander, 1988], notamment avec les schémas d'ordres élevés. Pour cette raison, les méthodes des différences finies semblent peu adoptables pour prendre en compte de la propagation d'ondes de Rayleigh dans des structures géologiques réalistes.

[26] la discrétisaion temporelle de toutes les méthodes numériques est sous-entendue en différences finies.

Dans le même principe de résoudre l'équation d'équilibre en version forte, les méthodes spectrale, qui sont basée sur une représentation de la solution en série de Fourier[27] tronquée sont également employées dans la littératures [Gazdag, 1981, Reshef et al., 1988]. Par contre, cette base des fonctions trigonométrique n'étant pas capable de bien vérifier des conditions aux limites non périodiques a été rapidement remplacée par des bases d'ondelettes et notamment par des bases de polynômes orthogonaux comme les polynômes de Chebyshev ou bien les polynômes de Legendre. Ces changements au fond mathématique sont traduits dans la pratique de calcul élastodynamique par l'utilisation des méthodes dites pseudo-spectrales dans les travaux de Fornberg [1988] et de Canuto et al. [1988]. Cette technique de collocation est appréciée pour sa précision et son faible nombre requis de points de collocation par longueur d'onde. Par contre, comme l'espacement entre les points de collocation n'est pas uniforme, la plus petite distance (au bord du domaine) est en général (quel que soit le type des polynômes choisi, *i.e* polynômes de Legendre ou de Chebyshev) inversement proportionnelle au nombre de points de collocation au carrée et devient très vite très petite. Cette dernière implique une discrétisation temporelle d'autant plus fine pour assurer un schéma stable de l'intégration en temps. De plus, ce schéma global souffre des mêmes limitations que les schémas de différences finies en terme de prise en compte de la condition aux limites de surface libre [Carcione and Wang, 1993].

Les méthodes des éléments de frontière (BEM), basées sur les théorèmes de représentation intégrale combinés à des expansions en nombre d'onde discret de fonctions de Green, sont également utilisées depuis longtemps en sismologie et en génie parasismique afin d'incorporer des surfaces et des topographies d'interface réalistes (milieux non-bornés, demi-espace avec ou sans stratification horizontale *etc.*). Cette famille de méthode des éléments finis de frontières découle de l'application du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, qui permet d'exprimer le champ de déplacement à l'intérieur d'un domaine $\mathbf{\Omega}$ à partir des champs de déplacement et de la contrainte calculés à la frontière $\partial\mathbf{\Omega}$. Dans l'ensemble, les méthodes BEM procèdent en deux étapes principales [voir Clouteau, 1990, Bonnet, 1995, par exemple] qui sont les suivantes : dans un premier temps on résout une équation intégrale de frontière qui donne le champ *surfacique* de déplacement ainsi que le champ *surfacique* de contraintes sur ces frontières qui sont soit réalistes (surface libres, interfaces entre les couches géologiques *etc.*) soit purement fictives, et *a posteriori* on déduit, à travers une sorte d'interpolation par application d'une formule de représentation intégrale, les champs *volumiques* associés, *i.e.*, le déplacement et l'état de contraintes dans tous les points à l'intérieur de ces frontières. Cette interpolation se base en effet sur les solutions analytiques fondamentales $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathrm{G}}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ qu'on appelle la fonction de Green qui exprime la composante suivant la direction j du déplacement au point $\boldsymbol{x}$ situé à la frontière $\partial\mathbf{\Omega}$ dû à une excitation ponctuelle au point $\boldsymbol{y}$ du domaine $\mathbf{\Omega}$ dirigée suivant la direction i. La modélisation par éléments de frontière peut se faire en employant les fonctions de Green d'un milieu infini [Dangla, 1989] ou d'un milieu semi-infini et semi-infini stratifié [Clouteau, 1990]. Deux principaux avantages de la méthode des éléments de frontières sont, d'une part, la capacité naturelle de prendre en compte le caractère non-borné des milieux infinis et, d'autre part, le fait de chercher la solution de la propagation d'ondes élastiques dans un espace qui a une dimension de moins que le domaine physique étudié (*i.e.*, courbes en dimension 2 et surfaces en dimension 3). Cependant, ce gain d'une dimension devient un inconvénient pour la modélisation des hétérogénéités tridimensionnelles. Dans ce cas, seule la fluctuation verticale peut être

[27] d'où vient le terme *spectral*

paramétrable avec les modèles de stratification, les variations latérales ne peuvent être prises en compte que par le biais des perturbations non-paramétriques. Une piste a été suggérée par Savin and Clouteau [2002] consistant à employer une méthode de sous-structuration qui donne suite à un couplage BEM/FEM et permet des résultats intéressants en termes d'études probabilistes paramétriques sur l'interaction sismique sol-structure.

Étant les plus utilisées en calcul numérique, les méthodes d'éléments finis (FEM), qui sont basées sur une formulation variationnelle de l'équation d'onde, permettent la prise en compte plus naturelle des conditions aux limites (en particulier la condition de surface libre). Bien qu'elles soient plus adaptées au traitement de géométries complexes et de modèles réellement hétérogènes, elle n'ont pas été beaucoup utilisées dans le domaine de la sismologie [Belytschko and Mullen, 1978, Toshinawa and Ohmachi, 1992]. En effet, les méthodes d'éléments finis classiques, limitées en pratique à des ordres d'approximation polynomiale faibles, restent peu précises et dispersives dans le cas de l'équation des ondes [Dupond, 1973, Marfurt, 1984]. Les éléments finis classiques d'ordre plus élevé (p-FEM) posent également d'autres problèmes difficiles à résoudre tels que l'apparition d'ondes parasites. Les élément finis type hp (hp-FEM) peuvent probablement contourner le problème en raffinant à la fois la taille h et l'ordre p, mais alors comme les raffinements p ne conduisent pas naturellement à des méthodes numériques explicites, ce qui signifie qu'il est nécessaire d'inverser une matrice N-diagonale dont la largeur N de bande croît avec l'ordre d'approximation polynomiale utilisé. Notons que plus récemment, des méthodes d'éléments finis espace-temps ont été introduites en élastodynamique [Hughes and Hulbert, 1988, Richter, 1994] et ont ouvert des perspectives intéressantes.

La méthode d'éléments spectraux (SEM) est une méthode de discrétisation variationnelle d'ordre élevé d'équations aux dérivées partielles, basée sur des idées originelles de Patera [1984] pour le cas des polynômes de Chebyshev et développée dans la suite pour le cas des bases polynomiales de Legendre, qui nous intéresse ici, par Maday and Patera [1988]. Des applications de la SEM au cas 2D [Cohen et al., 1993, Priolo et al., 1994] et 3D [Komatitsch, 1997, Seriani, 1998, Fauqueux, 2003, Delavaud, 2007] de l'élastodynamique ont montré qu'une grande précision et une faible dispersion numérique peuvent être obtenues, et qu'elle peut être efficacement implémentée en version parallèle. L'approximation par la méthode SEM dépend de la partition géométrique du domaine et du degré d'approximation polynomiale p. En considérant fixée la partition du domaine et en augmentant le degré p dans les sous-domaines pour améliorer la précision de l'approximation, la méthode SEM ressemble beaucoup, en termes de structure, à la méthode d'éléments finis d'ordre p (p-FEM). Ces deux méthodes sont toutes basées sur l'utilisation d'un élément de référence sur lequel on construit les fonctions de base. La principale différence, qui va influencer la structure des matrices des systèmes linéaires correspondants, réside dans le choix des fonctions de base ainsi que dans la façon de calculer les intégrales. La méthode SEM est née comme généralisation des méthodes spectrales à des domaines ne pouvant pas être l'image d'élément de référence via une unique transformation géométrique. Elle permet donc de faire du raffinement local de maillage, de prendre en compte les comportements différents de la solution sur différentes parties du domaine, *etc.*. Globalement, on peut dire que la méthode SEM réunit les aspects avantageux des méthodes pseudo-spectrales et des méthodes variationnelles : la performance en termes de précision, la condensation naturelle de la matrice de masse des unes et la flexibilité géométriques des autres.

Dans ce travail de thèse, nous avons choisi d'employer une approche par la méthode des éléments finis spectraux tant en raison de sa performance numérique que pour une autre rai-

son purement pratique. En effet, grâce à une étroite collaboration entre nous et l'équipe *Sismologie* de l'*Institut de Physique du Globe*, nous avons eu l'occasion d'utiliser et d'adapter un code de calcul élastodynamique par éléments finis spectraux existant. Ce code scientifique, baptisé SPEC3D, a été développé et enrichi (condition aux limites absorbante, calcul massivement parallèle, maillage non-structuré, champ incident d'ondes planes *etc.*) autour des travaux de recherche de Festa and Vilotte [2005], Delavaud [2007] et Cupillard [2008] et est accompagné par une base documentaire très riche [citons Komatitsch, 1997, Capdeville, 2000, Chaljub, 2000, par exemple] concernant à la fois les calculs numériques et les applications sismologiques. Les sections suivantes de ce chapitre sont consacrées : (i) à la description des fondements théoriques et techniques de ce code de calcul pour des matériaux isotropes et homogènes par élément, (ii) à l'adaptation à des matériaux anisotropes hétérogènes dont l'hétérogénéité aléatoire est introduite au niveau des points d'intégration et enfin (ii) à des validations.

4.2 Élément finis spectraux : milieu isotrope, homogène par élément

4.2.1 Forme variationnelle

Avant d'écrire la forme variationnelle du problème élastodynamique, il convient d'introduire les notions de l'espace de champs de vecteur de déplacement et de vitesse *cinématiquement admissibles* et l'espace de champ de vecteur de déplacement *test*. Soit $\mathscr{H}_2^1(\boldsymbol{\Omega})$ l'espace des champs de fonction scalaire défini sur $\boldsymbol{\Omega}$ qui sont de carré intégrable et dont les premières dérivées spatiales le sont également sur $\boldsymbol{\Omega}$, se définissent :

(i) l'espace de champs de déplacement et de vitesse *cinématiquement admissibles* en n_d dimension

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^t = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) : \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}^{n_d} | \boldsymbol{u}(.,t) \in H_1(\boldsymbol{\Omega})^{n_d}\} \tag{4.1}$$

associé à

(ii) l'espace des variations de déplacement admissible pour chaque instant t donné

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\Omega} \to \mathbb{R}^{n_d} | \delta\boldsymbol{u} \in H_1(\boldsymbol{\Omega})^{n_d}\} \tag{4.2}$$

Étant donné maintenant le problème élastodynamique (2.15), sa forme variationnelle (aussi appelée sa formulation faible) associée consiste alors à, [voir Komatitsch, 1997, Festa and Vilotte, 2005, par exemple], trouver le couple de déplacement-vitesse $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathcal{S}^t \times \mathcal{S}^t$ tel que pour toutes les fonctions test $\delta\boldsymbol{u} \in \delta\mathcal{S}$ et à tous les instants $t \in \boldsymbol{T}$, se vérifient :

$$\begin{cases} \langle \delta\boldsymbol{u}, \rho\dot{\boldsymbol{v}}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \langle \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} - \mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) & \text{(a)} \\ \langle \delta\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \langle \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} & \text{(b)}, \end{cases} \tag{4.3}$$

avec les conditions initiales :

$$\langle \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|_{t=0}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \langle \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_0\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} \quad \text{et} \quad \langle \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)|_{t=0}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \langle \delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0\rangle_{\boldsymbol{\Omega}} \tag{4.4}$$

Dans le système (4.3), le produit scalaire classique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la forme bilinéaire $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ sont définis comme suit :

$$\langle \delta \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}} \rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{4.5}$$

$$\langle \delta \boldsymbol{u}, \rho \dot{\boldsymbol{v}} \rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \rho \delta \boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{4.6}$$

$$\langle \delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f} \rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{4.7}$$

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}}(\delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \delta \boldsymbol{u} : \boldsymbol{C} : \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{4.8}$$

Mathématiquement, le lemme de Lax-Milgram [voir Allaire, 2005, par exemple] assure que ce problème variationnel admet une solution unique $\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)\big) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^t$. Physiquement, l'écriture de la formulation faible peut être obtenue après l'application du principe des puissances virtuelles (*PPV*) au domaine $\boldsymbol{\Omega}$ avec un champ virtuel des variations de déplacement $\delta \boldsymbol{u}$. Une intégration par partie est en fait utilisée au cours du développement d'équilibre entre les puissances internes et externes (variations de travaux exercés par les forces apparues dans l'équation (2.15) sur le chemin $\delta \boldsymbol{u}$). Le théorème de Gauss est ensuite appliqué (première égalité de l'équation (4.9)) pour aboutir à la formule (4.3). Il convient de noter ici que dans l'écriture finale (l'équation 4.3-a), l'absence de l'intégrale sur le bord $\partial \boldsymbol{\Omega}$

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}} \mathrm{Div} \left(\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{u}] \cdot \delta \boldsymbol{w} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = \int_{\partial \boldsymbol{\Omega}} \left(\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{n} \right) \delta \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}S = 0 \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \tag{4.9}$$

impose implicitement (mais aussi naturellement) la condition aux limites de surface libre :

$$\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \boldsymbol{\Omega} \tag{4.10}$$

4.2.2 Discrétisation spatiale par éléments finis spectraux

La discrétisation spatiale consiste à définir une partition $\boldsymbol{\mathcal{P}}^h(\boldsymbol{\Omega}) = \{\boldsymbol{\Omega}_e \subset \boldsymbol{\Omega} | \bigcup_{\boldsymbol{\Omega}_e \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\}$ du domaine physique $\boldsymbol{\Omega}$. Les éléments $\boldsymbol{\Omega}_e$, indexés de 1 à $n_e = \mathsf{card}\ \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\mathsf{h}}(\boldsymbol{\Omega})$, sont caractérisés par une taille h. Du point de vue de la théorie d'ensemble, $\boldsymbol{\mathcal{P}}^h(\boldsymbol{\Omega})$ est un sous-ensemble de $\boldsymbol{\Omega}$. Le terme partition insiste sur le fait que les éléments finis ne se sont pas recouverts l'un par l'autre. Du point de vue géométrique, pour un domaine 3D et les éléments *hexaédriques*[28], l'intersection entre deux éléments différemment indexés est soit vide, soit se compose d'une face et/ou des arrêtes et/ou des sommets.

Grâce à cette discrétisation spatiale, les intégrales (4.5)-(4.8) peuvent s'écrire de la façon semi-discrétisée suivante :

$$\langle \delta \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}} \rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{e=1}^{n_e} \langle \delta \boldsymbol{u}^e, \dot{\boldsymbol{u}}^e \rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e} \tag{4.11}$$

$$\langle \delta \boldsymbol{u}, \rho \dot{\boldsymbol{v}} \rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{e=1}^{n_e} \langle \delta \boldsymbol{u}^e, \rho \dot{\boldsymbol{v}}^e \rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e} \tag{4.12}$$

[28] Dans cette dissertation, sauf pour quelques illustrations schématiques où les éléments *quadrilatéraux* sont utilisés, un élément fini est sous-entendu *hexaédrique*.

$$\langle \delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f} \rangle_{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{e=1}^{n_e} \langle \delta \boldsymbol{u}^e, \boldsymbol{f}^e \rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e} \tag{4.13}$$

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}}(\delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \sum_{e=1}^{n_e} \mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}_e}(\delta \boldsymbol{u}^e, \boldsymbol{u}^e) \tag{4.14}$$

où $\boldsymbol{u}^e, \boldsymbol{v}^e, \boldsymbol{f}^e, \delta \boldsymbol{u}^e$ sont respectivement les restrictions de $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}, \delta \boldsymbol{u}$ à $\boldsymbol{\Omega}_e$, qui s'écrivent, par exemple pour $\boldsymbol{u}^e$ et $\delta \boldsymbol{u}^e$, comme suit :

$$\boldsymbol{u}^e(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)|_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}_e} \quad , \quad \delta \boldsymbol{u}^e(\boldsymbol{x}) = \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}_e} \tag{4.15}$$

Afin d'avoir la forme totalement discrète des intégrales, une règle de quadrature est nécessaire. Pour ce faire, les intégrales doivent être évaluées sur un élément de référence $\square_\Omega = [-1, 1]^{n_d}$ qui est en commun pour tous les sous-domaines physiques. Chaque élément $\boldsymbol{\Omega}_e \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^h(\boldsymbol{\Omega})$ est en effet l'image de l'élément de référence à travers une transformation géométrique $\mathcal{F}_e$ correspondant à $\boldsymbol{\Omega}_e$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_e \ : \square_\Omega &\to \boldsymbol{\Omega}_e \qquad\qquad \forall e \in \{1, .., n_e\} \\ \boldsymbol{\xi} &\mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_e(\boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \tag{4.16}$$

où $\boldsymbol{\xi}$ se réfère à un système de coordonnées cartésiennes défini sur l'élément de référence. Le fait que $\mathcal{F}_e$ est une transformation géométrique implique que cette fonction doit être bijective, différentiable et que sa fonction inverse $\mathcal{F}_e^{-1} \ : \ \boldsymbol{\Omega}_e \to \square_\Omega$ le soit également. Une façon classique de définir une telle fonction consiste à interpoler $\boldsymbol{x}$ à partir des n_p points de contrôle $\boldsymbol{a}^i$ de $\boldsymbol{\Omega}_e$.

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}_e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n_p} \boldsymbol{a}^i N_{\boldsymbol{\alpha}^i}(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.17}$$

Cette interpolation géométrique fait appel à la tensorisation $N_{\boldsymbol{\alpha}^i}(\boldsymbol{\xi})$ des polynômes de Lagrange unidimensionnels l_i^n d'ordre n associés aux i-ième points parmi les $n+1$ points configurant le segment $[-1, 1]$:

$$N_{\boldsymbol{\alpha}^i}(\boldsymbol{\xi}) = \bigotimes_{j=1}^{n_d} l_i^n(\xi_j) \quad , \tag{4.18}$$

où les expressions analytiques des fonctions de forme lagrangiennes peuvent être trouvées par exemple dans [Dhatt and Touzou, 1984].

REMARQUE 4.1. *L'écriture $\boldsymbol{\alpha}^i$ en indice de $N_{\boldsymbol{\alpha}^i}(\boldsymbol{\xi})$ associe la tensorisation $N_{\boldsymbol{\alpha}^i}(\boldsymbol{\xi})$ au noeud $\boldsymbol{\alpha}^i$ de l'élément de référence au sens où $N_{\boldsymbol{\alpha}^i}(\boldsymbol{\xi})$ prend la valeur unité à ce noeud et s'annule pour les autres noeuds :*

$$N_{\boldsymbol{\alpha}^i}\big(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\alpha}^j)\big) = \boldsymbol{\delta}_{ij} \tag{4.19}$$

Ainsi concernant $N_{\boldsymbol{\alpha}^i}$, il convient de noter ici que les éléments finis qu'on utilise ne font pas partie de la classe des éléments isoparamétriques[29]*. En effet, ils peuvent être regroupés dans la classe des éléments sousparamétriques car les fonctions de forme l_i^n sont des polynômes de faible ordre n (linéaire, quadratique) tandis que les fonctions de base h_i^n qu'on va choisir plus tard sont des polynômes d'ordre p plus élevé ($p > 4$).*

[29] éléments isoparamétriques : éléments où les fonctions d'interpolation géométrique (*fonctions de forme*) sont identiques aux fonctions d'interpolation du déplacement (*fonctions de base*).

REMARQUE 4.2. *Le choix des fonctions de forme en polynômes lagrangiens vérifie que $\mathcal{F}_e$ est inversible dans tous les points du $\boldsymbol{\Omega}_e$, ce qui est mathématiquement traduit par le fait que son jacobien $\mathrm{Det}(\boldsymbol{\mathcal{J}}_e)$, avec :*

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_e = \mathrm{grad}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

soit non-nul partout. Un autre intérêt de manipuler le jacobien de $\mathcal{F}_e$ est qu'un jacobien régulier évite les singularités du maillage.

Le fait que les éléments $\boldsymbol{\Omega}_e$ partagent un même élément de référence muni d'un système de fonctions de forme défini une fois pour toutes assure la coïncidence parfaite des frontières partagées entre éléments. Dans le cadre de notre travail, les éléments hexaédriques *H8* sont utilisés mais à titre d'exemple, la figure (FIG. 4.1) présente une illustration schématique de la transformation géométrique dans le cas 2D des éléments quadrilatéraux *Q4*.

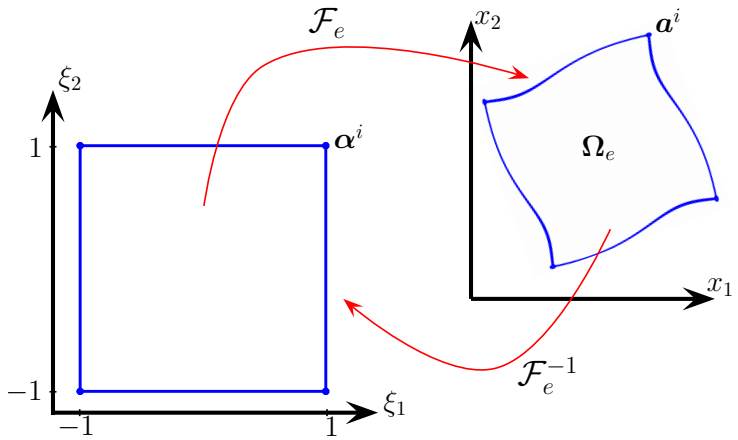


FIG. 4.1 – Illustration schématique de la transformation géométrique dans le cas 2D avec des fonctions de forme linéaires.

L'idée générale d'une résolution numérique variationnelle est de ne pas chercher directement l'approximation $(\boldsymbol{u}^{hp}, \boldsymbol{v}^{hp})$ du couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ défini sur $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{T}$ mais plutôt de trouver les approximations de leurs restrictions $(\boldsymbol{u}^e, \boldsymbol{v}^e)$ dans les éléments $\boldsymbol{\Omega}_e$ de l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{P}}_\Omega$ que l'on a appelé les sous-domaines de $\boldsymbol{\Omega}$, *e.g.* un élément fini. La solution globale est ensuite obtenue par juxtaposition[30] des champs élémentaires. Ce sont les grandes lignes de la méthode d'approximation de Galerkin qu'on va aborder dans la sous-section suivante. Avant de faire cela, on introduit les deux espaces fonctionnels de dimension finie qui sont en effet les sous-espaces de $\boldsymbol{\mathcal{S}}^t$ et $\delta\boldsymbol{\mathcal{S}}$ définis dans les équations (4.1) et (4.2) :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^{t,hp} = \left\{ \boldsymbol{u}^{hp} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}^t | \boldsymbol{u}^{hp,e} = \boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e} \circ \mathcal{F}_e^{-1} \in \left\{ \mathsf{span} \bigotimes_{i=1}^{n_d} [\mathbb{P}_p(\xi_i)] \right\} \right\} \tag{4.21}$$

[30] Il convient de noter qu'avec cette approximation par juxtaposition, la solution globale est seulement continue (sa dérivée première ne l'est *a priori* que par élément)

et

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{S}}^{hp} = \left\{ \delta\boldsymbol{u}^{hp} \in \delta\boldsymbol{\mathcal{S}}^{t} | \delta\boldsymbol{u}^{hp,e} = \delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e} \circ \mathcal{F}_e^{-1} \in \left\{ \mathsf{span} \bigotimes_{i=1}^{n_d} [\mathbb{P}_p(\xi_i)] \right\} \right\} \tag{4.22}$$

où $\left\{ \mathsf{span} \bigotimes_{i=1}^{n_d} [\mathbb{P}_p(\xi_i)] \right\}$ désigne l'espace généré par la tensorisation des polynômes définis sur $[-1;1]$ de degré inférieur ou égal à p. Après avoir introduit ces 2 espaces fonctionnels de dimension finie, pour arriver au problème discret, il nous reste (i) à définir une base d'interpolation pour pourvoir déduire le déplacement à un point quelconque à partir des déplacements définis sur un nombre fini de points de collocation et (ii) à savoir calculer les intégrales définies dans les équations (4.11-4.14).

Jusqu'à ce point, où on se prépare à chercher les approximations de $\boldsymbol{u}^e$ et $\boldsymbol{v}^e$ parmi les $\boldsymbol{u}^{hp,e}$ en résolvant ces deux points, rien ne diffère d'un schéma d'éléments finis de type *h-p*. La plus intéressante propriété de la méthode d'éléments finis spectraux, résultant du couplage d'un schéma pseudo-spectral de fonctions de base de Legendre[31] avec un schéma d'éléments finis *h-p*, est la condensation naturelle de la matrice de masse élémentaire (*i.e.* la matrice de masse et donc son inverse sont naturellement diagonales, sachant que dans les schémas *h-p* classiques, cette matrice est N-diagonale, où N augmente avec p, et possède une matrice inverse en générale pleine). Ce couplage entre un schéma pseudo-spectral et un schéma d'éléments finis de type *h-p* réside dans le choix de la base des fonctions d'interpolation associé aux points de collocation du type pseudo-spectral qui échantillonne le support de $\left\{ \mathsf{span} \bigotimes_{i=1}^{n_d} [\mathbb{P}_p(\xi_i)] \right\}$, *i.e.* l'élément de référence $\square_\Omega$. Dans le cas 1D, cette base, qui est en lien étroit avec la quadrature de Gauss-Lobatto dans le sens où les points de collocation coïncident avec les noeuds de quadrature, est obtenue à partir des $p+1$ polynômes orthogonaux de Lagrange $\mathfrak{P}_p = \{h_k^p; k = 0, ..., p\}$ tels que :

$$h_k^p(\xi) = \frac{\prod_{\substack{m=0\\m\neq k}}^{p} (\xi - \xi_m^p)}{\prod_{\substack{m=0\\m\neq k}}^{p} (\xi_k - \xi_m^p)} \tag{4.23}$$

associés aux $p+1$ points ξ_m^p qui sont en fait les points GLL[32] discrétisant le segment $[-1;1]$. L'ensemble de ces points $\mathfrak{G}_p$ est défini [voir Abramowitz and Stegun, 1964, Stroud and Secrest, 1966, par exemple] comme :

$$\mathfrak{G}_p = \left\{ \xi_m^p; m = 0, ..., p \;\middle|\; \left((\xi_m^p)^2 - 1\right) \frac{\mathrm{d}L_p(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\bigg|_{\xi_m^p} = 0 \right\} \tag{4.24}$$

avec $L_p(\xi)$ le polynôme de Legendre[33] de l'ordre p. Ainsi, d'une part, une règle d'interpolation

[31] *i.e.* les polynômes de Legendre, explicité plus tard dans l'équation 4.25. Il convient de noter que l'utilisation des polynômes de Chebyshev (l'utilisation très courante dans les schémas globaux de type pseudo-spectral [voir Komatitsch, 1997, par exemple]) ne donne pas lieu à la diagonalité de la matrice de masse.

[32] *i.e.* points d'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre

[33] Selon Abramowitz and Stegun [1964] :

$$L_p(\xi) = \frac{1}{n!2^p} \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}\xi^n} \left((\xi^2 - 1)^p\right) \tag{4.25}$$

associée aux $\mathfrak{G}_{\boldsymbol{p}}^{[-1;1]}$ et $\mathfrak{P}_{\boldsymbol{p}}^{[-1;1]}$ est définie par :

$$\phi(\xi) = \sum_{k=0}^{p} \phi(\xi_k^p) h_k^p(\xi) \quad \forall \phi(\xi) \in \mathbb{P}_p([-1;1]) \tag{4.27}$$

d'autre part, la quadrature d'intégration Gauss-Lobatto-Legendre associée à $\mathfrak{G}_{\boldsymbol{p}}^{[-1;1]}$ s'écrit [selon Abramowitz and Stegun, 1964, Stroud and Secrest, 1966, par exemple] :

$$\int_{-1}^{1} \phi(\xi) \mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{p} \phi(\xi_k^p) w_k^p \quad \forall \phi(\xi) \in \mathbb{P}_{2p-1}([-1;1]) \tag{4.28}$$

où w_k^p les poids de pondération associées aux ξ_k^p :

$$w_k^p = \frac{2}{p(p+1)} \frac{1}{\left(L_p(\xi_k^p)\right)^2} \tag{4.29}$$

REMARQUE 4.3. *Les points ξ_m^p comprennent les deux extrémités. Ils ne sont pas, en général sauf pour les cas où $p < 3$, régulièrement disposés dans $[-1, 1]$. À un p donné, la distance entre deux points successifs décroît du milieu aux bords du segment. À titre d'illustration, l'abscisse du graphe représenté dans (*FIG.-*4.2) est repérée par 7 points ξ_m^p correspondant au $p = 6$. Pour les différents p, la plus petite distance (se trouvant aux bords) décroît en p^2.*

REMARQUE 4.4. *Une propriété importante de la relation entre $\mathfrak{P}_p^{[-1;1]}$ et $\mathfrak{G}_p^{[-1;1]}$ est que chaque élément $h_k^p(\xi)$ de $\mathfrak{P}_p^{[-1;1]}$ est lié avec un et seulement un élément ξ_k^p de $\mathfrak{G}_p^{[-1;1]}$ dans le sens où tous les autres $\xi_{m\neq k}^p$ sont des racines de $h_k^p(\xi)$. Ce fait est illustré dans (*FIG.-*4.2) et peut s'exprimer à l'aide du symbole de Kronecker comme suit :*

$$h_k^p(\xi_m^p) = \boldsymbol{\delta}_{km} \tag{4.30}$$

---

sont des solutions de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\xi}\right] + p(p+1)L = 0 \tag{4.26}$$

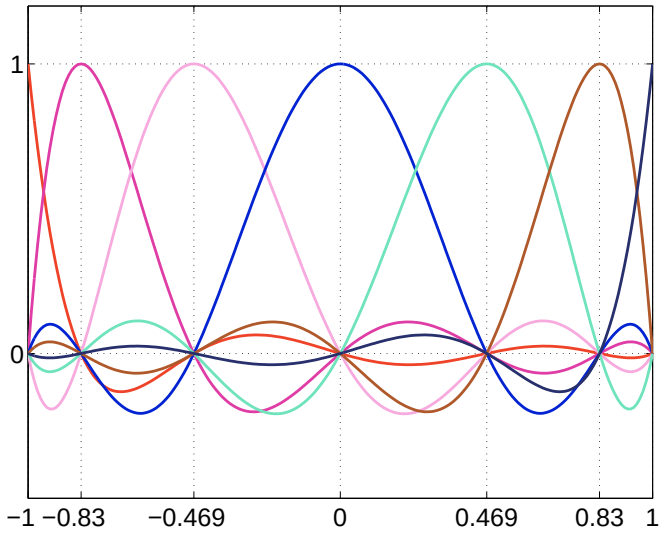


FIG. 4.2 – Polynômes $h_k^p(\xi)$ et leurs noeuds ξ_m^p associés pour $p = 6$.

REMARQUE 4.5. *La forme discrète de la dérivée partielle par rapport à $\boldsymbol{\xi}$ des polynômes de Legendre est également calculée explicitement. Soit $\mathfrak{D}$ de taille $(p+1)\times(p+1)$ la matrice qui représente l'opérateur de gradient 1D, elle est diagonale dont les termes sont définis et évalués par :*

$$\mathfrak{D}_{km}^p := \left.\frac{\mathrm{d}h_m^p}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\xi_k^p} = \begin{cases} \dfrac{L_p(\xi_k^p)}{L_p(\xi_m^p)}\dfrac{1}{\xi_k^p-\xi_m^p} & \textit{Si } k \neq m \\ -\dfrac{p(p+1)}{4} & \textit{Si } k = m = 0 \\ \dfrac{p(p+1)}{4} & \textit{Si } k = m = p \\ 0 & \textit{Sinon.} \end{cases} \tag{4.31}$$

Ce calcul discret est très utile pour approximer la forme matricielle du travail interne.

L'extension de la grille monodimensionnelle $\mathfrak{G}_p^{[-1;1]}$ à l'aide d'une tensorisation dans les n_d dimensions de l'espace est ensuite effectuée. L'élément de référence est donc équipé d'une grille de GLL (dont chaque noeud peut s'appeler aussi *point de collocation*) et de la base polynomiale définie par :

$$\mathfrak{G}_p^{\square_\Omega} = \bigotimes_{i=1}^{n_d} \mathfrak{G}_{p,i}^{[-1;1]} \tag{4.32}$$

$$\mathfrak{P}_p^{\square_\Omega} = \bigotimes_{i=1}^{n_d} \mathfrak{P}_{p,i}^{[-1;1]} \tag{4.33}$$

L'approximation polynomiale dans chaque élément $\boldsymbol{\Omega}$ est alors donnée par une interpolation de Lagrange. Pour $n_d = 3$, l'i-ième composant ($i = \{1, 2, 3\}$) du déplacement ainsi que du

déplacement admissible à un point $\boldsymbol{x}$ de l'élément $\boldsymbol{\Omega}$ dans l'espace réel s'écrit comme suit :

$$u^{hp}_{i|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e} = \sum_{r,s,r=0}^{p} u_i^{hp,e}(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)h_r^p(\xi_1)h_s^p(\xi_2)h_t^p(\xi_3) \tag{4.34}$$

$$\delta u^{hp}_{i|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e} = \sum_{r,s,r=0}^{p} \delta u_i^{hp,e}(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)h_r^p(\xi_1)h_s^p(\xi_2)h_t^p(\xi_3) \tag{4.35}$$

où,

- $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \mathcal{F}_e^{-1}(\boldsymbol{x})$
- ξ_r^p,ξ_s^p,ξ_t^p sont les coordonnées d'un noeud de $\mathfrak{G}_p^{\square_\Omega}$ associées respectivement aux polynômes $h_r^p(\xi), h_s^p(\xi), h_t^p(\xi)$.
- $u_i^{hp,e}(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)$ est le déplacement au point de collocation $(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)$.

Également, les produits fonctionnels définis sous forme d'intégrales sous le signe de sommation selon e dans les formules (4.11-4.14) sont ainsi approximées respectivement par les expressions (4.36-4.39) à l'aide de la formule de quadrature Gauss-Lobatto-Legendre associée aux points de grille $\mathfrak{G}_p^{\boldsymbol{\Omega}_e}$ avec leurs poids de pondération correspondants :

$$\begin{aligned}\left\langle \delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}, \dot{\boldsymbol{u}}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}\right\rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e} &= \int_{\boldsymbol{\Omega}_e} \delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{u}}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \int_{\square_\Omega} \delta\boldsymbol{u}^{hp,e}(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{u}}^{hp,e}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathrm{Det}(\boldsymbol{\mathcal{J}}_e)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\ &\simeq \sum_{r,s,t=0}^{p} [\delta\boldsymbol{u}^{hp,e}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^{hp,e}](\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p) \times K_{r,s,t}\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}, \rho\dot{\boldsymbol{v}}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}\right\rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e} &= \int_{\boldsymbol{\Omega}_e} \delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{v}}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \int_{\square_\Omega} \rho\delta\boldsymbol{u}^{hp,e}(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{v}}^{hp,e}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathrm{Det}(\boldsymbol{\mathcal{J}}_e)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\ &\simeq \sum_{r,s,t=0}^{p} \rho[\delta\boldsymbol{u}^{hp,e}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}^{hp,e}](\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p) \times K_{r,s,t}\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}, \boldsymbol{f}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}\right\rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e} &= \int_{\boldsymbol{\Omega}_e} \delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\boldsymbol{f}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \int_{\square_\Omega} \delta\boldsymbol{u}^{hp,e}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}^{hp,e}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathrm{Det}(\boldsymbol{\mathcal{J}}_e)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\\ &\simeq \sum_{r,s,t=0}^{p} [\delta\boldsymbol{u}^{hp,e}\cdot\boldsymbol{f}^{hp,e}](\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p) \times K_{r,s,t}\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}_e}(\delta \boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}, \boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}) &= \int_{\boldsymbol{\Omega}_e} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \delta \boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{C} : \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \\ &= \int_{\square_\Omega} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{\xi}} \delta \boldsymbol{u}^{hp,e}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\mathcal{J}}_e^{-1} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\mathcal{J}}_e^{-T} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{u}^{hp,e}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathrm{Det}(\boldsymbol{\mathcal{J}}_e)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \\ &\simeq \sum_{r,s,t=0}^{p} [\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\xi}} \delta \boldsymbol{u}^{hp,e} \boldsymbol{\mathcal{J}}_e^{-1} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\mathcal{J}}_e^{-T} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{u}^{hp,e}](\xi_r^p, \xi_s^p, \xi_t^p) \times K_{r,s,t}\end{aligned} \tag{4.39}$$

où $K_{r,s,t}$ est le terme regroupant le jacobien de la transformation géométrique (dont la matrice est exprimée dans l'équation (4.20)) avec les poids de pondération définis dans l'équation (4.29) :

$$K_{r,s,t} = \mathrm{Det}(\boldsymbol{\mathcal{J}}_e)|_{\boldsymbol{\xi}=(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)} w_r^p w_s^p w_t^p \tag{4.40}$$

REMARQUE 4.6. *Puisque la transformation géométrique est inversible et que les noeuds de $\mathfrak{G}_p^{\square_\Omega}$ se distinguent l'un à l'autre, chaque noeud $\boldsymbol{\xi}^p(\xi_1^p, \xi_2^p, \xi_3^p)$ de la grille définie dans l'élément de référence $\square_\Omega$ correspond, voir (FIG.-4.3), pour chaque élément $\boldsymbol{\Omega}_e$ et donc pour le domaine réel à un noeud unique $\boldsymbol{a}^p \in \mathfrak{G}_p^{\boldsymbol{\Omega}_e} = \mathcal{F}_e(\mathfrak{G}_p^{\square_\Omega})$ qui se situe à $\mathcal{F}_e(\xi_1^p, \xi_2^p, \xi_3^p)$ et vice versa. Cela peut servir à l'introduction des champs de propriétés mécaniques (masse volumique, tenseur d'élasticité, etc.) hétérogènes à l'intérieur des éléments que l'on présente dans la section suivante.*

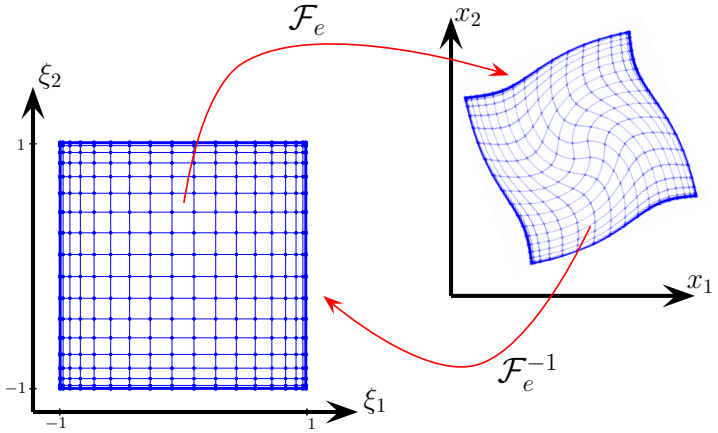


FIG. 4.3 – Illustration schématique de la transformation géométrique dans le cas 2D avec des fonctions de forme linéaires et la grille de points GLL correspondant à $p = 17$.

REMARQUE 4.7. *Les propriétés présentées dans (REMARQUE-4.3) et (REMARQUE-4.4) sont généralisées dans n_d dimensions. L'espacement irrégulier entre les points $\boldsymbol{\xi}^p$ peut être observé pour les cas 2D dans les figures (FIG.-4.3 ou 4.4). Le fait que la tensorisation $h_r^p(\xi) \otimes h_s^p(\xi) \otimes h_t^p(\xi)$ s'annule en tous points $\boldsymbol{\xi}^p$ sauf au point $(\xi_r^p, \xi_s^p, \xi_t^p)$ où elle prend la valeur 1 est aussi illustré pour le cas 2D dans (FIG.-4.4). Cela vérifie la propriété explicite de l'interpolation (4.34), i.e. le déplacement au point image d'un $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{G}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{\Omega}_e}$ ne dépend pas de ceux en d'autres points :*

$$u^{hp}_{i|\boldsymbol{x}=\mathcal{F}_e(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)} = u_i^{hp,e}(\xi_r^p, \xi_s^p, \xi_t^p) \tag{4.41}$$

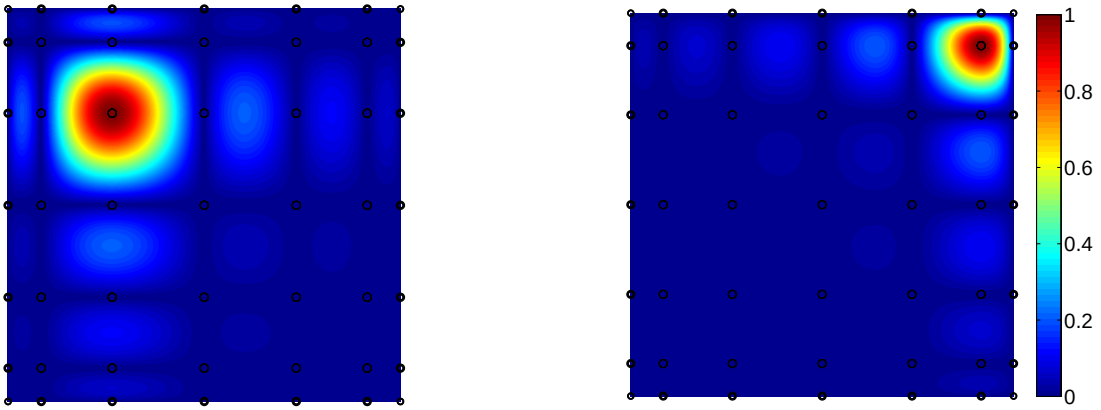


FIG. 4.4 – Valeurs absolues des tensorisations 2D dans $[-1;1]\times[-1;1]$ pour $p=6$: de gauche à droite $h_3^p(\xi)\otimes h_5^p(\xi)$ et $h_6^p(\xi)\otimes h_6^p(\xi)$.

4.2.3 Approximation de Galerkin et Formes matricielles

Les éléments ci-dessus développés (*i.e.* formule de quadrature, règle d'interpolation) contribuent à la projection Galerkin de la formulation faible dans les sous-espaces de dimension finie $\boldsymbol{\mathcal{S}}^{t,hp}$ et $\delta\boldsymbol{\mathcal{S}}^{hp}$ définis dans les équations (4.21-4.22). Si maintenant on note $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{\Omega}}^{hp}$ et $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}}^{hp}$ les projection Galerkin des termes $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\boldsymbol{\Omega}}$ et $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}}$ apparus à gauche des équations (4.11-4.14), l'approximation Galerkin du problème variationnel initial consiste alors à chercher le couple $(\boldsymbol{u}^{hp},\boldsymbol{v}^{hp})\in\boldsymbol{\mathcal{S}}^{t,hp}\times\boldsymbol{\mathcal{S}}^{t,hp}$ tel que $\forall\delta\boldsymbol{u}^{hp}\in\delta\boldsymbol{\mathcal{S}}^{hp}$ et $\forall t\in\boldsymbol{T}$:

$$\begin{cases}\langle\delta\boldsymbol{u},\rho\dot{\boldsymbol{u}}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}}^{hp}=\langle\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}}^{hp}-\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}}^{hp}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) & \text{(a)}\\ \langle\delta\boldsymbol{u},\rho\dot{\boldsymbol{u}}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}}^{hp}=\langle\delta\boldsymbol{u},\rho\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}}^{hp} & \text{(b)},\end{cases}\tag{4.42}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases}\langle\delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e},\boldsymbol{u}^{hp}(\boldsymbol{x},t)_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e,t=0}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e}^{hp}=\langle\delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e},\boldsymbol{u}^{hp}_{0|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e} & \text{(a)}\\ \langle\delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e},\boldsymbol{v}^{hp}(\boldsymbol{x},t)_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e,t=0}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e}^{hp}=\langle\delta\boldsymbol{u}^{hp}_{|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e},\boldsymbol{v}^{hp}_{0|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e}\rangle_{\boldsymbol{\Omega}_e} & \text{(b)}\end{cases},\quad\forall e.\tag{4.43}$$

Les expressions (4.42-4.43) sont déjà complètement en formes discrètes, par contre, pour une résolution par ordinateur, des expressions de formes matricielles sont nécessaires. Pour ce faire, comme ce problème conduit finalement à déterminer les DDLs nodaux $\boldsymbol{u}^{hp,e}(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)$, $\boldsymbol{v}^{hp,e}(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)$ correspondant aux éléments $\boldsymbol{\Omega}_e$ définies aux points GLL de l'élément de référence $\square_\Omega$, il convient de définir une réindexation vectorielle qui regroupe à la fois r,s,t et l'indice sur les composantes spatiales. Avant de faire cela, en allégeant les notations, on adopte l'écriture ci-dessous pour la composante i d'une grandeur vectorielle, ici par exemple le déplacement 3D dans l'équation (4.44) et le déplacement 2D dans la FIG 4.5, définis au point de collocation à coordonnées $(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)$:

$$u_{i|rst}^{hp,e}=u_i^{hp,e}(\xi_r^p,\xi_s^p,\xi_t^p)\tag{4.44}$$

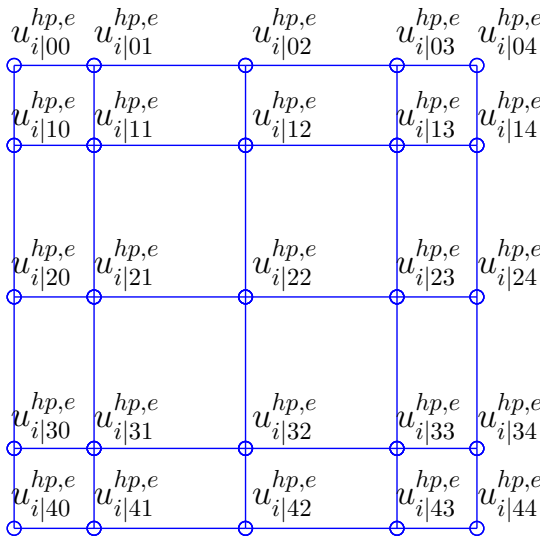


FIG. 4.5 – Composant i des déplacements nodaux pour le cas 2D et $p = 4$.

Le vecteur de déplacement, dont les termes sont les composantes des déplacements nodaux venant de tous les éléments dans le domaine, est construit alors à l'aide d'une concaténation selon i, r, s, t et e. Ce dernier s'écrit, selon Delavaud [2007], donc comme suit :

$$\boldsymbol{U}^{hp}_{\mathrm{L}} = \left[\left[\boldsymbol{u}^{hp,1}\right]^{\mathrm{T}}, \left[\boldsymbol{u}^{hp,2}\right]^{\mathrm{T}}, ..., \left[\boldsymbol{u}^{hp,e}\right]^{\mathrm{T}}, ..., \left[\boldsymbol{u}^{hp,n_e}\right]^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}} \tag{4.45}$$

avec, récursivement :

$$\boldsymbol{u}^{hp,e} = \left[\left[\boldsymbol{u}^{hp,e}_1\right]^{\mathrm{T}}, \left[\boldsymbol{u}^{hp,e}_2\right]^{\mathrm{T}}, \left[\boldsymbol{u}^{hp,e}_3\right]^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{hp,e}_i &= \left[\left[u^{hp,e}_{i|000}\right]^{\mathrm{T}}, \left[u^{hp,e}_{i|100}\right]^{\mathrm{T}}, ..., \left[u^{hp,e}_{i|rst}\right]^{\mathrm{T}}, ..., \left[u^{hp,e}_{i|ppp}\right]^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}} \\ &:= \left[\left[u^{hp,e}_{i|1}\right]^{\mathrm{T}}, \left[u^{hp,e}_{i|2}\right]^{\mathrm{T}}, ..., \left[u^{hp,e}_{i|k}\right]^{\mathrm{T}}, ..., \left[u^{hp,e}_{i|N}\right]^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{4.47}$$

où k est une réindexation 3D à 1D :

$$k = 1 + r + s(p+1) + t(p+1)^2 \tag{4.48}$$

et N est donc le nombre total des points GLL dans un élément :

$$N = (p+1)^3 \tag{4.49}$$

L'indice L dans l'écriture (4.45) souligne le caractère local de ce regroupement des valeurs nodales, *i.e.* les inconnues nodales sont concaténées avec répétition des noeuds en commun qui se trouvent aux sommets, sur les arrêtes ou bien sur les facettes des éléments. La continuité du champ de déplacement entre les éléments est traduite par une passage de cette numérotation U^{hp}_{L} des DDLs locaux à une numérotation U^{hp} des DDLs globaux (celle qui attribue à chaque

noeud un indice unique) à travers la matrice de connectivité du point de vue de la théorie des graphes. En effet, cette matrice non-carrée de taille $\mathcal{N} \times \overline{\mathcal{N}}$ avec $\mathcal{N}$ le nombre total des valeurs nodales avec toutes les répétitions possibles et $\overline{\mathcal{N}}$ le nombre total des valeurs nodales distinctes dans le maillage. Si $\mathfrak{Q}$ désigne cette matrice de connectivité, son terme qui se trouve à la $i-$ ième ligne et à la $j-$ ième colonne n'est rien d'autre qu'une application booléenne :

$$\mathfrak{Q}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } U_{\text{L}i}^{hp} \equiv U_j^{hp} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}, \tag{4.50}$$

et la relation globale-locale se représente par :

$$\boldsymbol{U}^{hp} = \mathfrak{Q}^{\text{T}} \boldsymbol{U}_{\text{L}}^{hp} \tag{4.51}$$

d'où la matrice transposée $\mathfrak{Q}^{\text{T}}$ peut être considérée comme l'opérateur d'assemblage dont les termes non nuls sur une ligne jouent le rôle de récupérateur des valeurs nodales du DDLs correspondant à la ligne.

REMARQUE 4.8. *Le nombre total des valeurs nodales s'obtient comme le nombre d'élément n_e et l'ordre spectral p du maillage (dans le cas ou l'ordre de spectral p est invariant d'un élément à l'autre) :*

$$\mathcal{N} = n_d \times n_e \times N \tag{4.52}$$

et $\overline{\mathcal{N}}$ le nombre total des valeurs nodales distinctes dans le maillage qui peut être calculer par exemple dans le cas d'un maillage structuré comme :

$$\overline{\mathcal{N}} = n_d \times \prod_{i=1}^{n_d} 1 + n_e^i (p-1) \tag{4.53}$$

où n_e^i est le nombre d'éléments le long de la direction i.

Une fois les vecteurs de DDLs globaux établis, l'approximation polynomiale et quadratique du problème variationnel (4.42) ramène à un système d'équations différentielles ordinaires qui porte sur ces inconnues nodales :

$$\begin{cases} \mathfrak{M}\dot{\boldsymbol{V}}^{hp} = \mathfrak{F}^{ext} - \mathfrak{F}^{int}(\boldsymbol{U}^{hp}) & \text{(a)} \\ \dot{\boldsymbol{U}}^{hp} = \boldsymbol{V}^{hp} & \text{(b)} \end{cases} \tag{4.54}$$

En effet, pour arriver à cette forme matricielle, la matrice de masse $\mathfrak{M}$ ainsi que les forces externe $\mathfrak{F}^{ext}$ et interne $\mathfrak{F}^{int}$ sont assemblées à partir des grandeurs élémentaires correspondantes :

$$\mathfrak{M} = \biguplus_{e=1}^{n_e} \mathfrak{M}^e \tag{4.55}$$

$$\mathfrak{F}^{int} = \biguplus_{e=1}^{n_e} \mathfrak{F}^{int,e} \tag{4.56}$$

$$\mathfrak{F}^{ext} = \biguplus_{e=1}^{n_e} \mathfrak{F}^{ext,e} \tag{4.57}$$

où $\biguplus_{e=1}^{n_e}$ est l'opérateur d'assemblage avec action de sommation aux DDLs communs. À leur tour, les matrices élémentaires sont données par les quadratures (4.36-4.39) avec prise en compte de la propriété suivante : pour que la formulation variationnelle soit valable quelle que soit la fonction-test δu définie dans l'espace admissible des champs de déplacement et de vitesse $\delta\boldsymbol{\mathcal{S}}$, la formule (4.35) peut être évaluée avec les valeurs nodales qui sont unitaires[34].

REMARQUE 4.9. *En raison de cette évaluation à valeurs nodales unitaires des fonction-tests, l'équilibre des travaux virtuels (4.42-a) revient à l'équilibre de force (4.54-a) où la force externe $\mathfrak{F}^{ext}$ se compense par la force inertielle $\mathfrak{M}\dot{\boldsymbol{V}}^{hp}$ et la force interne $\mathfrak{F}^{int} = \mathfrak{K}\boldsymbol{U}^{hp}$ (où $\mathfrak{K}$ est une certaine matrice de rigidité)*

Plus concrètement, selon [Festa and Vilotte, 2005, Delavaud, 2007], ces formes discrètes élémentaires sont calculées comme suit :

- **Matrice de masse**. La matrice de masse résulte d'un produit tensoriel de la matrice identité de l'espace géométrique et une matrice diagonale caractéristique de la méthode d'éléments finis spectraux. Pour $n_d = 3$, on a :

$$\mathfrak{M}^e = \mathbf{Id}_3 \otimes \hat{\mathfrak{M}}^e \tag{4.59}$$

  avec $\hat{\mathfrak{M}}^e$ une matrice de taille $N \times N$ associée à la concaténation $(r, s, t) \mapsto k$ définie dans (4.48). Les termes de cette matrice sont exprimés par :

$$\hat{\mathfrak{M}}^e_{kk'} = \begin{cases} \rho \times K_{r,s,t} & \text{Si } k' = k \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases} \tag{4.60}$$

  où $K_{r,s,t}$ déjà défini dans (4.40) est le produit entre le jacobien de la transformation géométrique et les poids des points de collocation dans la quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre. La matrice de masse élémentaire $\mathfrak{M}^e$ de taille $3N \times 3N$ et puis la matrice de masse assemblée $\mathfrak{M}$ de taille $\bar{\mathcal{N}} \times \bar{\mathcal{N}}$ sont donc diagonales. Cette propriété est en effet obtenue naturellement grâce aux choix des fonctions d'interpolation des champs de solution (4.34) et du champ de déplacement admissible (équation (4.35) ou bien équation (4.58) pour des déplacements admisssibles choisis égaux à l'unité aux points GLL) qui sont identiques et qui sont les polynômes orthogonaux de Legendre. Cette diagonalité intrinsèque de la matrice de masse contribue à l'avantage fondamental de la méthode SEM qui est que l'inversion de la matrice de masse est triviale permettant le schéma explicite d'intégration en temps sachant que pour les autres méthodes variationnelles, les éventuelles procédures de condensation de masse ne sont pas automatiques et peuvent exercer des effets néfastes sur la précision du calcul.

- **Vecteur de force interne**. Avant de détailler la force interne, comme l'estimation du travail interne $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}_e}$ dans (4.39) fait intervenir les opérateurs de gradient, il est convenable

[34] c'est-à-dire :

$$\delta u^{hp}_{i|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}_e} = \sum_{r,s,r=0}^{p} h^p_r(\xi_1) h^p_s(\xi_2) h^p_t(\xi_3) \tag{4.58}$$

de définir la forme matricielle des dérivées spatiales. Pour ce faire, on généralise l'écriture $\mathfrak{D}^p$ de la matrice de dérivée 1D définie dans (4.31) de la section précédente. En effet, pour les opérateurs $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\xi}}$ la dérivée dans le domaine de référence de la composante du vecteur de déplacement correspondant à la direction i par rapport à la direction j peut être écrite sous forme vectorielle comme suit (pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i^{hp,e}}{\partial \xi_j} = \mathfrak{D}_j^{\xi} \boldsymbol{u}_i^{hp,e} \tag{4.61}$$

avec $\mathfrak{D}_j^{\xi}$ les 3 matrices de dérivées partielles de taille $N \times N$ données par les produits tensoriels entre $\mathfrak{D}^p$ et 2 matrices d'identité aussi de taille $N \times N$ dans des ordres convenables :

$$\mathfrak{D}_1^{\xi} = \mathbf{Id}_{p+1} \otimes \mathbf{Id}_{p+1} \otimes \mathfrak{D}^p \tag{4.62}$$

$$\mathfrak{D}_2^{\xi} = \mathbf{Id}_{p+1} \otimes \mathfrak{D}^p \otimes \mathbf{Id}_{p+1} \tag{4.63}$$

$$\mathfrak{D}_3^{\xi} = \mathfrak{D}^p \otimes \mathbf{Id}_{p+1} \otimes \mathbf{Id}_{p+1} \tag{4.64}$$

Ainsi, la dérivée partielle dans le domaine physique $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}$ peut également s'écrire sous une forme vectorielle similaire :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i^{hp,e}}{\partial x_j} = \mathfrak{D}_j^{x} \boldsymbol{u}_i^{hp,e} \tag{4.65}$$

mais cette fois avec $\mathfrak{D}_j^{x}$ différente de $\mathfrak{D}_j^{\xi}$ par :

$$\mathfrak{D}_j^{x} = \left[\sum_{i=1}^{3} \mathfrak{D}_i^{\xi^{\mathrm{T}}} \mathcal{J}_{e|ij}^{-1} \right]^{\mathrm{T}} \tag{4.66}$$

Une fois la forme discrète des dérivées partielles définie, on remplace les expressions (4.61) de $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\xi}} \delta \boldsymbol{u}^{hp,e}$ et de $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{u}^{hp,e}$ dans l'expression (4.39) du travail interne avec prise en compte du choix (4.58) de la fonction test $\delta \boldsymbol{u}^{hp,e}$ et avec utilisation du terme regroupant $K_{r,s,t}$. Ceci donne le champ élémentaire de force interne selon la direction i à un point de collocation situé à $\boldsymbol{\xi} = (\xi_r, \xi_s, \xi_t)$ comme une fonction du champ élémentaire de déplacement :

$$\mathfrak{F}_{i|r,s,t}^{int,e}(\boldsymbol{u}^{hp,e}) = \sum_{l,m,n=1}^{3} \left[\mathfrak{D}_l^{x^{\mathrm{T}}} C_{ilmn} \mathfrak{D}_n^{x} \right]_{\boldsymbol{\xi}=(\xi_r,\xi_s,\xi_t)} \times \boldsymbol{u}_{m|r,s,t}^{hp,e} \times K_{r,s,t} \tag{4.67}$$

REMARQUE 4.10. *À part la formulation 4.67, il existe une expression alternative où le champ de force interne est écrit en fonction du champ de contrainte :*

$$\mathfrak{F}_{i|r,s,t}^{int,e}(\boldsymbol{\sigma}^{hp,e}) = \sum_{l=1}^{3} \mathfrak{D}_l^{x^{\mathrm{T}}} C_{ilmn} \boldsymbol{\sigma}_{il|r,s,t}^{hp,e} \times K_{r,s,t} \tag{4.68}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}^{hp,e}_{il|r,s,t}$ le tenseur d'ordre deux de contrainte défini à un point de collocation $\boldsymbol{\xi} = (\xi_r, \xi_s, \xi_t)$ comme :

$$\boldsymbol{\sigma}^{hp,e}_{il|r,s,t} = \sum_{m,n=1}^{3} \left[C_{ilmn} \boldsymbol{\mathfrak{D}}^{x}_{n} \right]_{\boldsymbol{\xi}=(\xi_r,\xi_s,\xi_t)} \times \boldsymbol{u}^{hp,e}_{m|r,s,t} := \overline{\boldsymbol{\mathfrak{K}}}^{hp,e}_{il|r,s,t} \boldsymbol{u}^{hp,e}_{r,s,t} \tag{4.69}$$

ou bien par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{hp,e}_{r,s,t} = \overline{\boldsymbol{\mathfrak{K}}}^{hp,e}_{r,s,t} \boldsymbol{u}^{hp,e}_{r,s,t} \tag{4.70}$$

dans laquelle $\overline{\boldsymbol{\mathfrak{K}}}^{hp,e}_{r,s,t}$ est un tenseur d'ordre 4 représentable sous forme d'une matrice diagonale par bloc.

– **Vecteur de force externe.** Les forces externes sont données sous formes des sources ponctuelles situées en espace et évoluant continûment en temps. La densité de ces forces est écrite comme

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}}(\boldsymbol{x}) f_t(t) \tag{4.71}$$

où $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}}(\boldsymbol{x})$ est la dépendance en espace ayant pour contenu le terme $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{S}})$ qui est la distribution de Dirac en espace associée à la position $\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}$ de l'excitation et implicitement à un vecteur d'intensité directionnelle désigné $\overline{\boldsymbol{f}}$ et $f(t)$ une fonction temporelle. Comme ce qui est fréquemment choisi, la dépendance en temps $f_t(t)$ est sous forme d'une ondelette de Ricker $f_{\mathrm{R}}(t)$, qui est en effet la dérivée seconde d'une fonction Gaussienne en temps. $f_{\mathrm{R}}(t)$ est centrée à un instant t_o en temps (dite le temps de décalage) et à une fréquence f_o en fréquence (dite la fréquence centrale[35]) :

$$f_{\mathrm{R}}(t) = \left(1 - 2\pi^2 (t - t_o)^2 f_o^2\right) \exp\left(\frac{1}{\pi^2 (t - t_o)^2 f_o^2} \right) \tag{4.72}$$

En ce qui concerne $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}}(\boldsymbol{x})$, l'expression de ce vecteur d'intensité diffère en fonction du type de l'excitation. En fait, il y a 2 types de source ponctuelle qui nous intéressent dans nos applications : la source unidirectionnelle qui modélise en pratique les coups de marteau ou les chutes de masse à la surface et la source isotrope qui peut représenter une explosion située en profondeur.

– Pour une excitation unidimensionnelle selon la direction j, le composant selon la direction i du vecteur d'intensité s'écrit alors ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) :

$$f^{ij}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}} = \begin{cases} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}) & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases} \tag{4.73}$$

– Pour une source isotrope, le vecteur $\overline{\boldsymbol{f}}$ est tel que :

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}} = \mathrm{Div}\left(\mathbf{Id}_3 \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}) \right) \tag{4.74}$$

[35] La fréquence centrale est la fréquence qui contribue le plus d'énergie dans le signal. De plus, dans le cas d'une ondelette Ricker, au delà de $f_{max} = 2.5 f_o$, la contribution est réduite à néant ($< 5\%$). f_{max} joue un rôle important pour le choix de pas de discrétisation spatiale car il est directement lié à la plus petite longueur d'onde.

REMARQUE 4.11. *Il convient de noter que dans (4.74), la matrice d'identité* $\mathbf{Id}_3$ *joue le rôle d'un tenseur de contrainte. Par sa nature, elle est une contrainte sphérique, ce qui donne une émission isotrope de la force depuis la position* $\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}$.

Quant à la distribution Dirac $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}})$, la position $\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}$ n'est en général pas en coïncidence avec les points de collocation. Pour que l'intégrale quadratique (4.7) puisse avoir un sens, la densité de force $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ devrait être distribuée aux point GLLs de manière à ce que le travail exercé par le champ de forces nodales $\mathfrak{F}^{ext,e}_{i,|r,s,t}$ soit équivalent au travail du $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}}$. Pour ce faire, l'interpolation de Lagrange permet d'écrire pour une source $\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}$ qui se trouve à l'intérieure d'élément $\boldsymbol{\Omega}_e$:

$$\mathfrak{F}^{ext,e}_{i|r,s,t} = \boldsymbol{f}^{hp,e}_{i,|\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{S}}} \times \prod_{q=0}^{p-1} \frac{(\xi_1-\xi_q)(\xi_2-\xi_q)(\xi_3-\xi_q)}{(\xi_r-\xi_q)(\xi_s-\xi_q)(\xi_t-\xi_q)} \times K_{r,s,t} \tag{4.75}$$

La définition explicite de la matrice de masse, les forces et les inconnues permettent la résolution du problème élastodynamique sous forme matricielle (4.54). Pour ce faire, une intégration temporelle du système (4.54) prend sa place en suivant l'algorithme de Newmark.

4.2.4 Schéma d'intégration de Newmark

Le schéma d'intégration temporelle utilisé dans le code fait partie de la famille d'algorithmes de Newmark [voir Hughes, 1987, Géradin and Rixen, 1992, par exemple] dont l'idée d'ensemble est tout d'abord de discrétiser l'intervalle de temps $\boldsymbol{T}=[0,T]$ en n sous-intervalle $[t_i,t_{i+1}]$ avec $t_{i+1}=t_i+\Delta t=(i+1)\Delta t$. Après avoir été initialisé, l'état du système à l'instant t_{i+1} va ensuite être extrapolé uniquement à partir de l'état du système à l'instant t_i pour $i=0,n-1$ par une application définie comme :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1} + \mathfrak{F}^{int}(\boldsymbol{U}^{hp}_{i+1}) = \mathfrak{F}^{ext}_{i+1} && \text{(a)}\\
&\dot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i} + (1-\gamma)\Delta t\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i} + \gamma\Delta t\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1} && \text{(b)}\\
&\boldsymbol{U}^{hp}_{i+1} = \boldsymbol{U}^{hp}_{i} + \Delta t\dot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i} + \Delta t^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i} + \Delta t^2\beta\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1} && \text{(c)}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

avec les deux paramètres $\gamma\in[0,1]$ et $\beta\in[0,1/2]$ qui distinguent les différents schémas dans la famille des méthodes de Newmark. Pour résoudre numériquement ce système, une procédure de type prédiction-correction doit être mis en place.
Dans la phase prédiction dont les variables d'état est remarquées par le symbole $*$, on suppose que $\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1} = \ddot{\boldsymbol{U}}^{hp,*}_{i+1} i = 0$, ce qui donne alors les valeurs prédicative de la vitesse et du déplacement :

$$\dot{\boldsymbol{U}}^{hp,*}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i} + (1-\gamma)\Delta t\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i} \tag{4.77}$$

$$\boldsymbol{U}^{hp,*}_{i+1} = \boldsymbol{U}^{hp}_{i} + \Delta t\dot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i} + \Delta t^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i} \tag{4.78}$$

Dans la phase de correction, on recalcule la valeur exacte de $\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1}$ grâce à l'inversion de la matrice de masse dans (4.76-a) et puis on corrige les valeurs de $\dot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1}$ et de $\boldsymbol{U}^{hp}_{i+1}$:

$$\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1} = \mathfrak{M}^{-1}\Big(\mathfrak{F}^{ext}_{i+1} - \mathfrak{F}^{int}(\boldsymbol{U}^{hp,*}_{i+1})\Big) \tag{4.79}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{U}}^{hp,*}_{i+1} + \gamma\Delta t\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1} \tag{4.80}$$

$$\boldsymbol{U}^{hp,*}_{i+1} = \boldsymbol{U}^{hp,*}_{i+1} + \beta\Delta t^2\ddot{\boldsymbol{U}}^{hp}_{i+1} \tag{4.81}$$

REMARQUE 4.12. *D'après Géradin and Rixen [1992], le schéma d'intégration en temps est stable s'il existe un pas de temps Δt tel qu'une perturbation finie de l'énergie dans le système à l'instant t_n (liée aux normes du déplacement et de la vitesse) n'entraîne qu'une modification non croissante de l'énergie du système aux instants d'après. On distingue la stabilité conditionnelle et inconditionnelle. Si le schéma est seulement conditionnellement stable, la valeur du pas de temps ne peut pas être choisie librement, mais doit vérifier une condition de stabilité, qui est liée à la fréquence propre la plus élevée ω^{max} du système et dépend aussi des paramètres β et γ du schéma (TAB.4.1). Dans [Géradin and Rixen, 1992], une étude de sensibilité concernant la stabilité et l'erreur (en phase et en amplitude) du calcul dynamique d'un système 1DDL avec application des configurations (β, γ) fréquemment utilisés de la famille de Newmark donne lieu au tableau récapitulatif suivant*

Algorithme	γ	β	$[\omega^{\max}\Delta t]_{\text{limite}}$	Erreur d'amplitude	Erreur de périodicité
Différence centrée	$\frac{1}{2}$	0	2	0	$-\frac{(\omega^{\max})^2\Delta t^2}{24}$
Fox-Goodwin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	2.45	0	$o(\Delta t^3)$
Accélération moyenne	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	∞	0	$\frac{(\omega^{\max})^2\Delta t^2}{12}$

TAB. 4.1 – Différents schémas de l'intégration temporelle dans la famille des méthodes de Newmark.

La méthode dite différence centrée est plus simple à implémenter et résulte en un coût de calcul plus faible par pas de temps. Par contre, elle donne lieu à une erreur de périodicité importante et la condition de stabilité est la plus restrictive, c'est-à-dire, elle nécessite le plus petit pas de temps. La méthode de Fox-Goodwin entraîne des erreurs acceptables et permet un pas de temps plus élevé, mais elle résulte en un coût de calcul plus important. L'algorithme d'accélération moyenne est inconditionnellement stable, mais donne lieu à une erreur de périodicité plus importante et il est recommandé par Géradin and Rixen [1992] de choisir $\Delta t \leq \frac{\pi}{2\omega^{max}}$ pour avoir une précision acceptable.

Pour la raison de facilité de mise en oeuvre, le schéma *différence centrée*, qui correspond à la configuration $\gamma = \dfrac{1}{2}, \beta = 0$ est largement utilisé en simulation élastodynamique tridimensionnelle. Avec cette configuration, l'évolution temporelle du système peut se réécrire comme :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}^{hp}_{i+1} - \boldsymbol{V}^{hp}_{i} \\ \boldsymbol{U}^{hp}_{i+1} - \boldsymbol{U}^{hp}_{i} \end{pmatrix} = \Delta t \begin{pmatrix} \mathfrak{M}^{-1}\Big[\mathfrak{F}^{ext}_{i+1} - \mathfrak{F}^{int}(\boldsymbol{U}^{hp}_{i+\frac{1}{2}})\Big] \\ \boldsymbol{V}^{hp}_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{4.82}$$

où les écritures $\boldsymbol{U}_{i+1}^{hp,*}$ et $\boldsymbol{V}_{i+1}^{hp,*}$ pour les valeurs prédites sont respectivement remplacées par $\boldsymbol{U}_{i+\frac{1}{2}}^{hp}$ et $\boldsymbol{V}_{i+\frac{1}{2}}^{hp}$. Bien que $t_{i+\frac{1}{2}}$ ne soit pas un vrai pas de calcul, cette écriture rappelle que $\gamma = \dfrac{1}{2}$.

REMARQUE 4.13. *En conformité avec l'alternative mentionnée dans* REMARQUE *4.10, une alternative de l'expression (4.82) peut être donnée selon [Festa and Vilotte, 2005] par :*

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_{i+1}^{hp} - \boldsymbol{V}_{i}^{hp} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}|i+1}^{hp} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}|i}^{hp} \end{pmatrix} = \Delta t \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mathfrak{M}}^{-1}\left[\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{i+1}^{ext} - \boldsymbol{\mathfrak{F}}^{int}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{L}|i+\frac{1}{2}}^{hp})\right] \\ \overline{\boldsymbol{\mathfrak{K}}}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\boldsymbol{V}_{i+\frac{1}{2}}^{hp} \end{pmatrix} \tag{4.83}$$

où $\boldsymbol{\mathfrak{Q}}$ est la matrice de connectivité et où l'utilisation de l'indice L *(concaténation avec répétition des noeuds partagés) est nécessaire car le champ de contrainte n'est pas continu d'un élément à l'autre.*

Le fait que $\beta = 0$ rend la procédure explicite en chaque pas de temps, c'est-à-dire, le déplacement prédit est le déplacement final. Par contre, comme on a discuté dans (REMARQUE-4.12), ce schéma n'est pas inconditionnellement stable. Pour que cela fonctionne convenablement, selon (TAB.4.1) un pas de temps Δt plus petit que 2 fois l'inverse de la plus grand fréquence propre du système est requis. Cette condition équivaut à :

$$\Delta t \leq N_{\mathrm{C}} \frac{\min_{\boldsymbol{\Omega}}\{\Delta x\}}{\max_{\boldsymbol{\Omega}}\{c\}} \tag{4.84}$$

avec N_{C} le nombre de Courant qui vaut empiriquement à 0,4 dans le cas 3D (N_{C} respectivement 0,8 et 0,6 dans des calculs 1D et 2D) ; $\min_{\boldsymbol{\Omega}}\{\Delta x\}$ est la plus petite discrétisation en espace et $\max_{\boldsymbol{\Omega}}\{c\}$ la plus grande vitesse de propagation d'onde dans le domaine.

4.2.5 Conditions aux limites absorbantes : PML

4.2.5.1 Contexte d'utilisation des PMLs

Dans la section précédente, on a décrit les aspects essentiels de la méthode d'éléments finis spectraux appliquée à la résolution du problème élastodynamique avec la possibilité d'une introduction naturelle de la condition aux limites de surface libre. Si l'on sait que d'autres conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet peuvent être implémentées avec efficacité, il reste à trouver un moyen d'imiter le côté non réfléchissant d'un domaine physique considéré comme infini ou demi-infini sans augmenter la taille du modèle numérique. À la différence des méthodes d'éléments finis de frontières, la prise en compte de cette condition aux limites, dite de rayonnement, dans les méthodes variationnelles n'est pas naturellement faite. La recherche d'une modélisation de cette condition aux limites est partagée en électromagnétique, en acoustique et en élastodynamique. À part le couplage FEM/BEM, la plupart des solutions se classent en deux grands groupes : bord absorbant (ABCs-*absorbing boundary conditions*) et couche absorbante (ABLs-*absorbing boundary layer*).
Les techniques des ABCs cherchent à forcer l'énergie à sortir du domaine à partir de sa frontière artificielle. Cette méthode introduite par Engquist and Majda [1979] lors d'une étude des ondes scalaires acoustiques consiste à appliquer des conditions locales aux limites du premier ordre

qui simulent les ondes immédiatement sortant quand elles touchent le bord. La méthode est efficace en absorbant les ondes à incidence normale, pour celles qui arrivent obliquement vers le bord, les ABCs généralisées d'ordre élevé [Hagstrom, 1997] sont requises pour améliorer la précision. Quant aux ondes élastiques, l'application des ABCs est plus compliquée, même pour l'incidence normale, car la condition de transparence reliant l'état de contrainte et le déplacement aux limites n'est plus scalaire mais sous forme matricielle et intégro-différentielle pour les autres incidences. L'approximation de ces derniers par l'approche des équations différentielles conduit à un système complexe qui est difficile pour la résolution et délicat pour l'analyse de stabilité [Chalindar, 1987, Bécache, 2003]. Pour franchir ces difficultés, Higdon [1991] a proposé de combiner certaines conditions aux limites du premier ordre, chacune d'entre elles est associée à la vitesse de propagation d'un type d'onde. Cette technique est théoriquement stable et pratiquement facile en termes d'implémentation mais sa zone d'efficacité reste au voisinage de l'incidence normale.
Les modèles de couches absorbantes ABLs constituent une alternative aux ABCs. L'idée essentielle de cette approche [Israeli and Orszag, 1981] est qu'au lieu de supprimer "brutalement" l'énergie sortant du système à partir d'une frontière artificielle, on cherche à la stocker dans une zone tampon dissipative. Pour cela, on entoure le domaine physique par des couches à amortissement non nulle. Plusieurs modèles de ce type sont proposés pour piéger des ondes élastiques. La manière la plus simple et la plus physique d'ajouter le terme d'atténuation à l'intérieur de ces couches est la considération des matériaux visco-élastique à fort amortissement comme dans les études de Cerjan et al. [1985], Sochacki et al. [1987]. Pourtant, la transparence au niveau de l'interface entre le milieu physique et la couche absorbante est délicate à assurer car cette condition est violée dès lors que l'onde "aperçoit" le contraste de viscosité entre les deux matériaux. Une amélioration peut se faire en utilisant un profil d'amortissement plus lisse mais cette technique demande une épaisseur plus importante des couches ABLs. Rappaport and Bahrmasel [1992] ont proposé plus tard une autre technique consistant à configurer un profil dit pyramide de matériaux absorbant mais c'est seulement à partir de l'introduction de la couche absorbante parfaitement adaptée (PML pour *Perfect Matched Layer*) par Bérenger [1994] pour les calculs électromagnétiques que les techniques ABLs deviennent des concurrents dominants par rapport aux ABCs.

Efficacité des PMLs en élastodynamique

La propriété clé des PMLs, à part de l'absorption à l'intérieur de la couche, réside dans la transparence à l'interface entre la couche et le domaine d'intérêt. Cette propriété permet l'utilisation d'un taux d'amortissement plus important qui réduit l'épaisseur de la couche. Les PML deviennent maintenant une technique abondamment utilisée pour simuler la condition aux limites de rayonnement des ondes, que ce soit en électromagnétique [Teixeira and Chew, 1997, Collino and Monk, 1998] en acoustique [Liu and Tao, 1997] ou bien en élastodynamique [Hastings et al., 1996, Collino and Tsogka, 2000, Komatitsch and Tromp, 2003, Festa, 2004]. Pour les ondes élastiques il existe deux façons principales d'implémenter des PMLs : soit au niveau de la décomposition des ondes en énergies potentielles de compression et de cisaillement comme dans [Hastings et al., 1996], soit à travers la formulation contrainte-vitesse comme dans la plupart des applications élastodynamiques. Du coté pratique, les PML sont très souvent implémentées dans leur version *splitté* (*i.e.*, le caractère d'absorption est fortement orthotrope et peut être séparément considéré dans les trois directions principales). Cela simplifie d'une façon

considérable la mise en oeuvre tout en gardant la performance attendue. D'ailleurs, comme le profil fréquentiel de l'amortissement dans les PMLs est non-dispersif (*i.e.*, le paramètre contrôlant le caractère absorbant ne dépend par de la fréquence), l'intégration en temps peut être effectuée, à l'aide de variables additionnelles [Basu and Chopra, 2004], d'une façon directe sans faire appel aux convolutions temporelles.

Limites et Améliorations continues des PMLs en élastodynamique

Bien que les PMLs soient utilisées en général avec succès en élastodynamique, il y a encore des configurations sensibles où la performance de ces couches absorbantes n'est pas au rendez-vous. Dans le cas des matériaux isotropes, ces points délicats concernent principalement [voir Festa and Vilotte, 2005, Komatitsch and Martin, 2007, par exemple] la modification en profondeur (et donc à basse fréquence) des ondes ayant le caractère évanescent (ondes de surface ou onde évanescente) et l'instabilité en temps longs. Le premier inconvénient est lié au fait que les PMLs, au lieu d'absorber les ondes de Rayleigh de basse fréquence (qui arrivent vers la PML en profondeur sous l'angle $\frac{\pi}{2}$) ou les ondes rasantes (qui arrivent à l'interface entre le milieu physique et la couche PML sous une incidence supérieure à l'angle critique), transforment leurs composantes parallèles (par rapport au PML) en des ondes volumique. Pour surmonter cela, une piste, en proposant les FPMLs (PML filtrante en fréquence) de [Festa and Vilotte, 2005] et les CPMLs (PMLs de convolution) de [Komatitsch and Martin, 2007] est d'appliquer un profil fréquentiel dispersif du paramètre d'amortissement à la place du profil non-dispersif employé pour les PMLs classiques. Il convient de noter que ces deux améliorations des PMLs proposées nécessitent la convolution temporelle de l'amortissement. Par contre, le coût de calcul n'est pas excessivement augmenté en raison des choix simples du profil fréquentiel d'absorption qui permet l'utilisation avec efficacité du schéma récursif de convolution [Luebbers and Hunsberger, 1992, Zeng et al., 2001] qui ne requiert le stockage en mémoire que d'un pas de temps. Un autre point délicat que partagent ces deux types de PML concerne leur capacité d'absorber à très basse fréquence car elles sont considérées comme désactivées au dessous d'une certaine fréquence limite (choisie en concordance avec l'épaisseur du maillage). La différence essentielle entre les couches absorbantes de type FPML et celles de type CPML est qu'elles sont construites respectivement à partir des versions *splittée* et *non-splittée* des PMLs classiques. Par conséquent, la deuxième technique peut être jugée comme une amélioration plus complète que l'autre car cela semble éviter l'instabilité due au caractère faiblement bien posé de la version splittée des PMLs. L'existence de ce type d'instabilité est suggérée pour la première fois par Abarbanel and Gottlieb [1997] et démontrée polynomialement croissante par [Meza-Fajardo and Papageorgiou, 2008].

Pour les matériaux anisotropes, un autre type d'instabilité des PMLs (qui persiste même pour les CPMLs) est celui provenant des propriétés élastiques de certaines symétries matérielles. En effet, dans le cadre d'études analytiques et numériques en 2D, Bécache et al. [2003], Bécache [2003] ont démontré que lorsque la surface de lenteur possède une partie concave orientée vers la direction d'absorption d'une couche de PML, la rend instable à partir d'un temps fini. Une conjecture est également formée par ces auteurs consistant à exprimer que moins la concavité est marquante, plus tard l'instabilité se déclenche. Ce critère sur la concavité est explicitement traduit en terme des coefficients du tenseur d'élasticité mais cela n'est fait que pour les matériaux orthotropes et en 2D. Plus récemment, à travers une autre approche (*i.e.*, analyse de sensibilité des valeurs propres du système asymétrique [inspirée de Adhikari

and Friswell, 2001, Gallina, 2003] des équations aux dérivées partielles concernant les PML), Meza-Fajardo and Papageorgiou [2008] ont également formulé pour le cas 2D des PMLs splittée un critère d'existence de ce type d'instabilité qui est exponentiellement croissante et susceptible de se produire plut tôt par rapport au premier type d'instabilité. Il convient de noter que, à propos du mode d'onde subi d'instabilité, ces deux études partagent la même tentative de conclure que l'instabilité provient principalement de l'interaction entre les ondes *quasi*-S et la PML : pour le critère de Bécache [2003], la surface de lenteur du mode *quasi*-P est toujours convexe tandis que pour le critère de Meza-Fajardo and Papageorgiou [2008], pour les mêmes matériaux analysés par [Bécache, 2003], la partie imaginaire de la valeur propre correspondante décroît de façon monotonne avec le taux d'amortissement transversal. Pour stabiliser les PMLs vis-à-vis de l'anisotropie, une amélioration est également proposée par [Meza-Fajardo and Papageorgiou, 2008] pour la version splittée, non convolutionnaire des PMLs. Cela consiste à spécifier non seulement le profil dans la direction normale de la couche PML mais également ceux des 2 directions transversales (1 direction transversale dans le cas 2D) de la couche PML en question. D'où la nouvelle PML est baptisé MPML (Mutiaxiale PML). [Meza-Fajardo and Papageorgiou, 2008] a également proposé, en ajustant pour que les dérivées premières des valeurs propres vis-à-vis du profil d'amortissement soient positives pour toutes les incidences, les rapports inter-axial optimaux des profils d'amortissement pour certains matériaux orthotropes dans leurs configurations 2D. Bien que cette technique soit critiquable par le fait que la transparence à l'interface n'est pas trivialement assurée, les simulations en pratique ont montré que les éventuelles réflexions à l'interface sont acceptables dans le sens où elles sont du même ordre que des réflexions causées par la discrétisation des couches de PML.

Dans la pratique de notre travail de la propagation d'onde 3D en milieux élastiques aléatoirement hétérogènes et anisotropes, sachant que la concavité de la surface de lenteur et son exposition envers l'axe principale des PML est quasiment inévitable pour les matériaux en général tricliniques, un traitement de stabilisation des PMLs est *a priori* nécessaire. Par contre, à cause du caractère aléatoire de l'hétérogénéité, l'instabilité peut se produire en n'importe quel point situé à l'interface entre le domaine physique et les PML et au bout d'un temps de déclenchement aléatoire. Pour cette raison, le traitement est envisagé du point de vue global, *i.e.* une fois pour tous les comportements locaux, pour au moins retarder l'instabilité.

Dans le code SPEC3D, les PMLs sont implémentées dans leur forme splittée classique non convolutionnaire pour traiter les matériaux isotropes. La sous-section suivante contribue à un résumé des fondements théoriques de cette implémentation. Il convient de noter que dans les versions plus récentes du code, les PMLs filtrantes convolutionnaires (FPML) sont également mises en oeuvre.

4.2.5.2 PML dans SPEC3D

Stratégie absorbante des PMLs classiques

La propriété absorbante de la PML est représentée mathématiquement par la présence d'une opération $\widetilde{\mathrm{Div}}$ dans la formulation forte de l'élastodynamique :

$$\widetilde{\mathrm{Div}}\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f_v} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{4.85}$$

Où $\widetilde{\mathrm{Div}} = \widetilde{\mathrm{grad}} \cdot \widetilde{\mathrm{grad}}$ est un opérateur de divergence correspondant au gradient modifié :

$$\widetilde{\mathrm{grad}} = \frac{1}{S_1}\boldsymbol{i}_1\partial x_1 + \frac{1}{S_1}\boldsymbol{i}_2\partial x_2 + \frac{1}{S_3}\boldsymbol{i}_3\partial x_3 \tag{4.86}$$

Avec S_i la fonction d'étirement de l'espace selon la direction $\boldsymbol{i}_i$. Selon [Festa and Vilotte, 2005], cette fonction, pour le cas le plus simple d'une façade de normale $\boldsymbol{i}_\mathrm{j}$, s'écrit comme suit dans le domaine de fréquence à l'aide du symbole de Kronecker :

$$S_\mathrm{i} = 1 - \mathrm{j}\frac{\beta_\mathrm{i}(x_\mathrm{i})}{\omega}\boldsymbol{\delta}_\mathrm{ij} \tag{4.87}$$

À son tour, $\beta_\mathrm{i}(x_\mathrm{i})$ est une fonction scalaire réelle de la distance à l'interface *milieu physique-PML* selon la direction x_i. Cette fonction est choisie strictement croissante à partir de zéro à l'interface *milieu physique-PML*.

REMARQUE 4.14. *Il est également possible de voir l'introduction de* $\widetilde{\mathrm{Div}}$ *comme un changement de coordonnées :*

$$\widetilde{x}_\mathrm{i} = x_\mathrm{i} - \frac{\mathrm{j}}{\omega}\int_0^{x_\mathrm{i}} \beta_\mathrm{i}(s)ds \tag{4.88}$$

Physiquement, la présence de $\widetilde{Div}$ *implique une atténuation exponentielle au sein des PMLs. À titre d'exemple, la région PML perpendiculaire à* $\boldsymbol{i}_1$ *transforme (selon, par exemple, [Collino and Tsogka, 2000]) une onde plane*

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\Phi}_0 e^{\mathrm{j}(\omega t - \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x})} \tag{4.89}$$

en une onde atténuée suivante :

$$\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\Phi}_0 e^{\mathrm{j}(\omega t - \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x})} e^{-\frac{k_1}{\omega}\int_0^{x_1}\beta_1(s)ds} \tag{4.90}$$

soit avec un facteur d'atténuation égal à $e^{-\frac{k_1}{\omega}\int_0^{x_1}\beta_x(s)ds}$.

PML et les formulations continues et discrétisées

Concernant la formulation forte, [Festa and Vilotte, 2005] ont montré qu'il existe une équivalence entre le schéma *déplacement-vitesse* (qu'utilisent les approches variationnelles) classique et le schéma *contrainte-vitesse* (*i.e.*, schéma en quinconce [Madariaga, 1976, Virieux, 1986] qu'utilisent systématiquement dans les approches par différences finies où les premières implémentations des PMLs ont été faites). Ce dernier est également employé pour la mise en place non-convolutionnelle des PMLs dans le contexte d'une approche par éléments finis spectraux :

$$\begin{cases} \rho(\dot{v}_\mathrm{i}^m + \beta_m v_\mathrm{i}^m) = \dfrac{\partial \sigma_\mathrm{ij}}{\partial x_\mathrm{j}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{j}m} & \text{(a)} \\ \dot{\sigma}_\mathrm{ij}^m + \beta_m \sigma_\mathrm{ij}^m = C_\mathrm{ijkl}\dfrac{\partial v_\mathrm{k}}{\partial x_\mathrm{l}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{l}m} & \text{(b)} \end{cases} \tag{4.91}$$

dans lesquelles

- la sommation muette d'Einstein est appliquée sauf pour l'indice m.
- l'exposant est lié à l'unique dérivée spatiale dans les seconds membres qui n'est pas désactivées par le symbole de Kronecker.

sachant que

- pour une façade de PML, perpendiculaire à l'axe $\boldsymbol{i}_1$ par exemple, on a

$$\beta_1(\boldsymbol{x}) = \beta_1(x_1) \neq 0\,;\ \beta_2(\boldsymbol{x}) = \beta_3(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.92}$$

- pour une PML qui se trouve à l'intersection entre 2 façades de PML, perpendiculaires à $\boldsymbol{i}_1$ et $\boldsymbol{i}_2$ par exemple, on a $\beta_1(\boldsymbol{x}) = \beta_1(x_1) \neq 0\,;\ \beta_2(\boldsymbol{x}) = \beta_2(x_2) \neq 0\,;\ \beta_3(\boldsymbol{x}) = 0$.
- pour une PML qui se trouvent à l'intersection entre 3 façades de PML on a $\beta_1(\boldsymbol{x}) = \beta_1(x_1) \neq 0\,;\ \beta_2(\boldsymbol{x}) = \beta_2(x_2) \neq 0\,;\ \beta_3(\boldsymbol{x}) = \beta_3(x_3) \neq 0$.

Pour que les PMLs soient applicables dans un schéma variationnel tel que la SEM, une intégration des puissances virtuelles concernant (4.91) est nécessaire. Ainsi, une forme vectorielle est utilisée dans la pratique en définissant le vecteur de taille 9×1 contenant les composantes splittées de la vitesse :

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \left[v_1^1\ v_2^1\ v_3^1\ v_1^2\ v_2^2\ v_3^2\ v_1^3\ v_2^3\ v_3^3\right]^{\mathrm{T}} \tag{4.93}$$

associée à une matrice de taille 3×9 contenant les contraintes :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{4.94}$$

Cette nouvelle écriture a pour but de réutiliser l'opérateur grad mais pas l'opérateur modifié $\widetilde{\mathrm{grad}}$. La formulation faible concernant les couches PMLs consiste donc à trouver la vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, t)$ définie dans l'espace vectoriel :

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}}^t = \{\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t) : \boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}} \times \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}^9 \mid \overline{\boldsymbol{u}} \in H_1(\boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}})^9\ \forall t\} \tag{4.95}$$

telle que pour toutes les fonctions test $\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ définies dans

$$\delta\overline{\boldsymbol{\mathcal{S}}} = \{\delta\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}} \to \mathbb{R}^9 \mid \delta\overline{\boldsymbol{u}} \in H_1(\boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}})^9\} \tag{4.96}$$

et pour toutes les fonctions test $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})$ définies dans

$$\boldsymbol{\mathcal{W}} = \{\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}} \to \mathbb{R}^{18} \mid \boldsymbol{\tau} \in H_1(\boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}})^{18}\} \tag{4.97}$$

le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}}} \rho\delta\overline{\boldsymbol{u}}(\dot{\overline{\boldsymbol{v}}} + \boldsymbol{E}\overline{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = -\int_{\boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}}} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\delta\overline{\boldsymbol{u}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} & \text{(a)} \\ \displaystyle\int_{\boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}}} \tau_{ij}^m(\dot{\sigma}_{ij}^m + \beta_m\sigma_{ij}^m)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}}} \tau_{ij}^m C_{ijkl}\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\boldsymbol{\delta}_{lm}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}\ \ \forall i,j,k,l,m \in \{1,2,3\} & \text{(b)} \end{cases} \tag{4.98}$$

avec $\boldsymbol{E}$ une matrice diagonale de taille 9×9 dont

$$\mathsf{diag}\,\boldsymbol{E} = \left[\beta_1\ \beta_1\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_2\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_3\ \beta_3\right]^{\mathrm{T}} \tag{4.99}$$

La discrétisation spatiale du système (4.98) concernant le domaine absorbant $\boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}}$ est effectuée d'une façon identique par rapport à celle appliquée pour le domaine physique $\boldsymbol{\Omega}$. Elle se constitue en grandes lignes de :

(i) une partition du $\boldsymbol{\Omega}_{\text{PML}}$ en éléments isoparamétriques de même élément de référence $\square_{\boldsymbol{\Omega}}$ qui est munie d'une grille des points de collocation GLL et d'une base polynomiale formées respectivement par $\mathfrak{G}_p^{\square_\Omega}$ et $\mathfrak{P}_p^{\square_\Omega}$ définies dans les expressions (4.32- 4.33).

(ii) une évaluation des intégrales (où les fonctions test sont choisies unitaires) dans laquelle les intégrales élémentaires approximées par quadratures GLL sont globalement assemblées. Il est à noter que les valeurs nodales du tenseur de contraintes sont évaluées par l'expression (4.68).

La discrétisation temporelle du système (4.98) selon la configuration *différences-centrées* du schéma d'intégration de Newmark est donnée dans [Festa and Vilotte, 2005, Appendix B] pour le matériau isotrope comme un cas particulier des FPMLs. Cette écriture peut être considérée comme une modification (l'introduction de l'amortissement dans les relations splittées) de celle exprimée par (4.83) avec prise en compte de l'absence de force externe dans le domaine des PMLs. Concrètement, l'équation (4.98-a) splittée pour la direction $\boldsymbol{i}_l$ donne l'évolution en temps entre l'instant i et l'instant $i+1$ par :

$$\left[\boldsymbol{V}_{i+1}^{hp,(l)} - \boldsymbol{V}_{i}^{hp,(l)}\right] + \beta_l \Delta t \frac{\boldsymbol{V}_{i+1}^{hp,(l)} + \boldsymbol{V}_{i}^{hp,(l)}}{2} = -\Delta t \mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{F}^{int,(l)}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{L}|i+\frac{1}{2}}^{hp}) \tag{4.100}$$

où la force interne splittée est assemblée à partir des valeurs nodales données par (4.68) sans sommer sur l. Ainsi, les 18 équations contribuant à (4.98-b) sont réduites à 15 (dont 9 concernant les termes diagonaux et 6 concernant les termes extra-diagonaux du tenseur de contrainte) et discrétisées à l'intérieur d'un élément[36] par :

$$\left[\sigma_{11|i+\frac{1}{2}}^{(1)} - \sigma_{11|i-\frac{1}{2}}^{(1)}\right] + \beta_1 \Delta t \frac{\sigma_{11|i+\frac{1}{2}}^{(1)} - \sigma_{11|i-\frac{1}{2}}^{(1)}}{2} = (\lambda + 2\mu)\Delta t \mathfrak{D}_1^{\boldsymbol{x}} v_1 \tag{4.101}$$

$$\left[\sigma_{11|i+\frac{1}{2}}^{(2)} - \sigma_{11|i-\frac{1}{2}}^{(2)}\right] + \beta_2 \Delta t \frac{\sigma_{11|i+\frac{1}{2}}^{(2)} - \sigma_{11|i-\frac{1}{2}}^{(2)}}{2} = \lambda \Delta t \mathfrak{D}_2^{\boldsymbol{x}} v_2 \tag{4.102}$$

$$\left[\sigma_{11|i+\frac{1}{2}}^{(3)} - \sigma_{11|i-\frac{1}{2}}^{(3)}\right] + \beta_3 \Delta t \frac{\sigma_{11|i+\frac{1}{2}}^{(3)} - \sigma_{11|i-\frac{1}{2}}^{(3)}}{2} = \lambda \Delta t \mathfrak{D}_3^{\boldsymbol{x}} v_3 \tag{4.103}$$

par exemple pour une contrainte de compression et par :

$$\left[\sigma_{12|i+\frac{1}{2}}^{(1)} - \sigma_{12|i-\frac{1}{2}}^{(1)}\right] + \beta_1 \Delta t \frac{\sigma_{12|i+\frac{1}{2}}^{(1)} - \sigma_{12|i-\frac{1}{2}}^{(1)}}{2} = \mu \Delta t \mathfrak{D}_1^{\boldsymbol{x}} v_2 \tag{4.104}$$

$$\left[\sigma_{12|i+\frac{1}{2}}^{(2)} - \sigma_{12|i-\frac{1}{2}}^{(2)}\right] + \beta_2 \Delta t \frac{\sigma_{12|i+\frac{1}{2}}^{(2)} - \sigma_{12|i-\frac{1}{2}}^{(2)}}{2} = \mu \Delta t \mathfrak{D}_2^{\boldsymbol{x}} v_1 \tag{4.105}$$

par exemple pour une contrainte de cisaillement, dans lesquelles $\mathfrak{D}_j^{\boldsymbol{x}}$ sont les opérateurs matriciels de gradient déjà définis par l'expression (4.66).

[36] Il convient de noter que pour simplifier la notation, les sous (supra-)-scriptions $\bullet_{|r,s,t}^{hp,e}$ sont supprimées

4.3 Structure du logiciel SPEC3D

Le langage utilisé pour le développement du code SPEC3D est le FORTRAN 90. Même si ce dernier n'est pas un langage totalement orienté objet comme le C++, une stratégie de développement selon une orientation objet permet de viser le but d'une grande clarté, flexibilité et pérennité. Cette stratégie consiste à identifier des briques de données jouant un même rôle et à les regrouper par *type*. Le typage permet de définir pour un *type* son *attribut* (son identité, sa structure) et ses *fonctionnalités* (les opérations qu'il exerce en autonomie ou en interaction avec d'autres pour l'évolution globale du système). Le code SPEC3D a été développé à partir de l'analyse de la description topologique et géométrique du domaine d'étude et des opérations associées à la SEM. Il convient de noter en premier lieu que concernant la géométrie, SPEC3D n'est capable que de traiter directement des maillages et non des objets mécaniques. La seule discrétisation spatiale dont il s'occupe consiste à discrétiser les éléments de référence en grille de collocation. Toutes autres décompositions géométriques sont faites en amont par les outils numériques que ce soit pour la création du maillage (SDTOOLS [Balmes et al., 2009]) ou pour la partition du maillage en sous-maillages (METIS [Karypis and Kumar, 1998]). Les deux paragraphes suivants vont donner une brève description extraite de [Delavaud, 2007] à propos des principaux *attributs* et *fonctionnalités* du code SPEC3D. Les lecteurs sont invités à s'adresser à cette référence pour de plus amples détails sur la structure du SPEC3D.

Concernant les *attributs*, ils sont conçus en fonction des sous-maillages en entrée. Chaque sous-maillage correspond à un domaine (objet de *type* DOMAIN) qui est géré par un processeur. Chaque domaine comporte un ensemble d'éléments (objets de *type* SPECEL), de faces (*type* FACE), d'arêtes (*type* EDGE) et de sommets (*type* VERTEX) qui peuvent avoir des propriétés mécaniques différentes quand ils se situent dans des zones différentes (*type* SUBDOMAIN). Une représentation par frontière est utilisée dans l'optique de mieux gérer les conditions aux bords, y compris pour les communications entre processeurs. À la différence d'une représentation classique des éléments finis où un élément est structuré dans son intégralité, la représentation par frontières utilisée dans le code considère l'élément dans le même ordre hiérarchique que ces frontières. D'où SPECEL, FACE, EDGE et VERTEX sont tous les directs sous-types du DOMAIN. Un objet de type SPECEL ne contient finalement pas les inconnues nodales appartenant à ses faces, arêtes et sommets mais seulement les informations sur les points de collocations dans son intérieur. Par contre, il doit posséder une liste des coordonnées de ces frontières. Comme les éléments hexaédriques sont systématiquement utilisés, chaque élément est en effet composé de 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets avec les conventions de numérotation et d'orientation locales en conformité avec le partitionneur de maillage (METIS) décrit dans [Delavaud, 2007, Karypis and Kumar, 1998]. Un élément doit donc connaître le numéro global de chacune de ses 6 faces mais également leur orientation par rapport à la face globale qui est partagée par deux éléments et pour laquelle a été choisie une orientation. L'élément doit connaître également le numéro global de ses 12 arêtes avec leur orientation par rapport à l'arête globale (soit la même, soit inversée) et le numéro global de ses 8 sommets. Ces orientations correspondent à différentes transformations de l'élément par rapport à l'élément de référence. D'ailleurs, bien que ces objets élémentaires soient de même rang, ce sont les SPECEL qui coordonnent les FACE, les EDGE et les VERTEX dans leurs portées pour assurer l'évaluation des $\mathfrak{M}^e$ et des forces $\mathfrak{F}^{int,e}$ et $\mathfrak{F}^{ext,e}$.

Quant aux *fonctionnalités*, elles sont implémentées dans SPEC3D dans le cadre des trois parties fondamentales : une phase de pré-traitement, une phase d'évolution en temps et une phase

de post-traitement. Le pré-traitement consiste à importer les entrées (la géométrie des maillages, les caractéristiques des matériaux, les caractéristiques des excitations et les paramètres d'évolution temporelle *etc.*) et à définir les propriétés des objets (les discrétisations des éléments de référence en points GLLs, les numérotations globales des éléments, des arrêtes, des sommets et les points de collocation ainsi que les coordonnées cartésiennes de ces derniers *etc.*) qui sont constantes au cours de l'évolution temporelle du système. Les opérateurs les plus importants de la première phase sont regroupés dans la sous-routine DEFINE_ARRAY où la matrice de masse est mise en forme et est inversée ainsi que les coefficients des forces internes et éventuellement externes sont calculés. Ces coefficients des forces internes pour le domaine physique sont en réalité les 45 combinaisons possibles entres les termes indépendants du temps qui sont figurés dans l'équation (4.67). Pour les PML isotropes, il y a 36 combinaisons possibles liées à l'équation (4.98). Les opérations sont effectuées localement, au niveau d'un élément pour que dans chaque itération de la deuxième phase, le système se résolve au niveau élémentaire plutôt qu'au niveau global. Les *fonctionnalités* principales dans la phase d'évolution temporelle sont regroupées dans la sous-routine NEWMARK qui va piloter les opérateurs de prédiction-correction dont sont équipés chacun des types SPECEL, FACE, EDGE et VERTEX. Concrètement, lors d'une nouvelle itération, les faces, les arrêtes et les sommets prédisent indépendamment les valeurs nodales de la vitesse en tenant compte seulement l'accélération de l'itération précédente. Les éléments récupèrent ensuite ces informations prédicatives et calculent une prédiction du déplacement pour évaluer les forces internes partout dans l'élément, frontières incluses. La présence de dérivées dans le calcul des forces internes implique en effet la connaissance des champs dans tout l'élément. L'assemblage (sommation des contributions venant de chaque élément) s'effectue directement au niveau des faces, arêtes et sommets grâce à un adressage indirect via un mapping de la numérotation locale à un élément vers une numérotation globale. Les frontières récupèrent les valeurs nodales de leurs forces internes et externes et effectuent la correction de l'accélération, de la vitesse et du déplacement. Il convient de noter que ce schéma d'évolution temporelle peut être appliqué à l'échelle des DOMAIN. En effet, vu que les DOMAIN partagent entre eux leurs frontières qui sont également de type FACE, EDGE et VERTEX, un objet de type DOMAIN est en quelque sorte comparable à un élément. Lors de la séquence de l'assemblage des forces sur un objet de frontière entre deux domaines, à part des informations venant des éléments à l'intérieur de chaque DOMAIN, la contribution des forces venant du domaine voisin sont également considérées à l'aide des communicateurs MPI.

4.4 Adaptations du code SPEC3D vis-à-vis de l'anisotropie et de l'hétérogénéité aléatoire

4.4.1 Algorithme parallèle d'introduction d'hétérogénéité au niveau des *points GLLs*

La génération de l'hétérogénéité est faite indépendamment dans chaque sous domaine et au niveau des points de collocation GLLs à l'intérieur des éléments. Concrètement, chaque sous domaine simule consécutivement les 23 champs germe $\{\mathrm{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r)\,|\,k=1..23\}$. Une tâche essentielle est d'assurer la continuité de chacun de ces champs germes aux interfaces entre les sous-domaines. Cela est fait à l'aide d'un opérateur global de communication qui

fait partager entre tous les sous-domaines $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{I}}$ le numéro r unique qui indexe la partition de l'espace d'évènement $\mathfrak{A}$. Ainsi, les champs germes indépendamment générés par mes différents processeurs I sont les restrictions de $\{\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r)\,|\,k=1..23\}$ dans les sous-domaines $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{I}}$:

$$\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa),\mathrm{I}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r)=\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r)\Big|_{\mathbf{\Omega}_{\mathrm{I}}}\qquad\forall k\in\{1,2,..,23\}\tag{4.106}$$

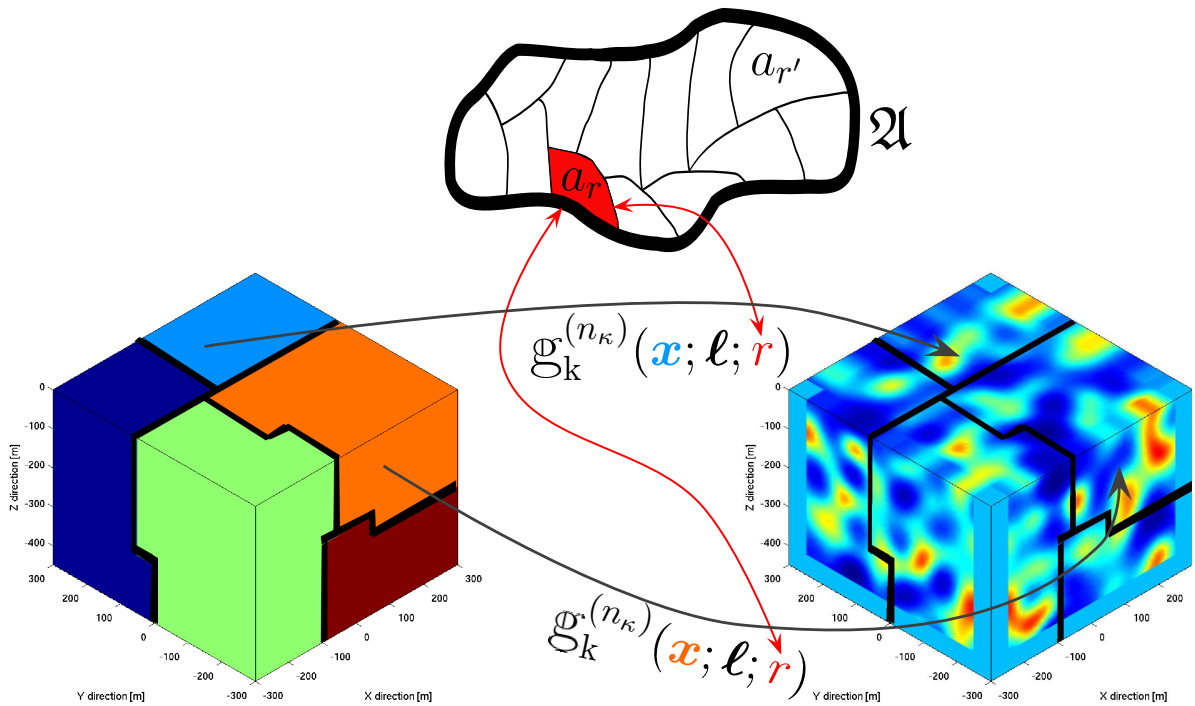


FIG. 4.6 – Illustration schématique du parallélisme de la génération des champs stochastiques.

Cette stratégie du parallélisme est résumée dans la FIG 4.6 où l'indexation des sous-domaines est exprimée en couleur au lieu d'en numérotation I et les restrictions (à droite) du $\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r)$ aux sous-domaines (à gauche) du domaine entier $\mathbf{\Omega}$ sont obtenues, à l'aide de l'équation (3.187), comme suit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\mapsto\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r)&=\sqrt{\left(\frac{\pi}{n_\kappa\ell}\right)^3}\sum_{l,m,n=1}^{n_\kappa-1}\sqrt{\mathfrak{S}(\kappa_l,\kappa_m,\kappa_n;\ell)}\Theta_\kappa\big(i_\kappa,\mathrm{k}(r)\big)\times\\
&\qquad\cos\Big(\kappa_l x_1+\kappa_m x_2+\kappa_n x_3+\Xi_\kappa\big(i_\kappa,\mathrm{k}(r)\big)\Big)\\
\boldsymbol{x}\mapsto\mathbb{g}_{\mathrm{k}}^{(n_\kappa)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};r)&=\sqrt{\left(\frac{\pi}{n_\kappa\ell}\right)^3}\sum_{l,m,n=1}^{n_\kappa-1}\sqrt{\mathfrak{S}(\kappa_l,\kappa_m,\kappa_n;\ell)}\Theta_\kappa\big(i_\kappa,\mathrm{k}(r)\big)\times\\
&\qquad\cos\Big(\kappa_l x_1+\kappa_m x_2+\kappa_n x_3+\Xi_\kappa\big(i_\kappa,\mathrm{k}(r)\big)\Big)\\
&\qquad\qquad etc.
\end{aligned}\tag{4.107}$$

Sachant que chaque sous domaine Ω_{I} est encore partitionné en éléments finis Ω_{I}^{e}, les restrictions de champs sont réalisées aux niveaux élémentaires en utilisant le même numéro d'évènement. Ainsi, avec la discrétisation spatiale à l'intérieur des éléments, l'hétérogénéité est introduite au niveau des points de collocation.

4.4.2 Prise en compte du tenseur d'élasticité anisotrope dans le calcul de travail interne

Le champ de propriété généré selon la stratégie de la section 4.4.1 comporte en général des tenseurs locaux d'élasticité pleins. Pour que la résolution du système élastodynamique prenne en compte ce comportement anisotrope, les forces internes doivent être évaluées en présence de 21 coefficients indépendants d'élasticité mais pas seulement de 2 coefficients de Lamé comme pour les matériaux isotropes. Le développement déduisant les 45 coefficients de la force interne est présenté dans l'ANNEXE A dont la section A.1 correspond à un tenseur $\boldsymbol{C}$ à 21 coefficients indépendants tandis que la section A.2 rappelle les coefficients de la force interne pour un matériau isotrope.

4.4.3 Stabilisation des PML vis-à-vis des milieux anisotropes

4.4.3.1 Instabilité des PMLs vis-à-vis des matériaux anisotropes

On s'intéresse maintenant à nouveau à l'expression du système (4.91) et écrit pour une PML de direction particulière. Sans perdre de généralité, on considère une PML perpendiculaire à $\boldsymbol{i}_1$, *i.e.* l'amortissement du PML est activé seulement pour la direction $\boldsymbol{i}_1$ *i.e.*, $\beta_1 \neq 0$:

$$\begin{cases} \rho(\dot{v}_{\mathrm{i}}^{m} + \boldsymbol{\delta}_{1m}\beta_m v_{\mathrm{i}}^{m}) = \dfrac{\partial \sigma_{\mathrm{ij}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{j}m} \\ \dot{\sigma}_{\mathrm{ij}}^{m} + \boldsymbol{\delta}_{1m}\beta_m \sigma_{\mathrm{ij}}^{m} = C_{\mathrm{ijkl}}\dfrac{\partial v_{\mathrm{k}}}{\partial x_{\mathrm{l}}}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{l}m} \end{cases} \tag{4.108}$$

Le système (4.108) peut être assemblé dans la forme suivante, qui est d'une équation différentielle d'ordre 1 :

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}} = \boldsymbol{A}_1\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x_1} + \boldsymbol{A}_2\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x_2} + \boldsymbol{A}_3\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x_3} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Psi} \tag{4.109}$$

où $\boldsymbol{\Psi}$ un vecteur de 27 composants concaténant tous les termes splittés de la vitesse et de l'état de contrainte :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} = \Big[& \sigma_{11}^{(1)}\ \sigma_{22}^{(1)}\ \sigma_{33}^{(1)}\ \sigma_{12}^{(1)}\ \sigma_{13}^{(1)}\ \sigma_{23}^{(1)}\ v_1^{(1)}\ v_2^{(1)}\ v_3^{(1)} \ldots \\ & \sigma_{11}^{(2)}\ \sigma_{22}^{(2)}\ \sigma_{33}^{(2)}\ \sigma_{12}^{(2)}\ \sigma_{13}^{(2)}\ \sigma_{23}^{(2)}\ v_1^{(2)}\ v_2^{(2)}\ v_3^{(2)} \ldots \\ & \sigma_{11}^{(3)}\ \sigma_{22}^{(3)}\ \sigma_{33}^{(3)}\ \sigma_{12}^{(3)}\ \sigma_{13}^{(3)}\ \sigma_{23}^{(3)}\ v_1^{(3)}\ v_2^{(3)}\ v_3^{(3)} \Big]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{4.110}$$

$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ sont des matrices contenant les propriétés mécaniques C_{ijkl} et ρ tandis que $\boldsymbol{B}$ est une matrice diagonale qui caractérise la propriété absorbante des PML :

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \mathbf{Id}_9 & \mathbf{0}_{18} \\ \mathbf{0}_{18} & \mathbf{0}_{18} \end{bmatrix} \tag{4.111}$$

L'équation (4.109) est associée à une équation homogène de forme hyperbolique décrivant le domaine physique :

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}} = \boldsymbol{A}_1 \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x_1} + \boldsymbol{A}_2 \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x_2} + \boldsymbol{A}_3 \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x_3} \tag{4.112}$$

qui accepte des solutions de type onde plane $\boldsymbol{\Psi}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x})}$ quand $(\boldsymbol{\kappa}, \omega)$ satisfont la relation de dispersion :

$$F(\omega, \boldsymbol{\kappa}) = F(\omega, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \mathrm{Det}\left(\omega \mathbf{Id}_{27} - \kappa_1 \boldsymbol{A}_1 - \kappa_2 \boldsymbol{A}_2 - \kappa_3 \boldsymbol{A}_3\right) = 0 \tag{4.113}$$

Pour que (4.109) possède des solutions de type onde plane, la relation de dispersion suivante doit être remplie :

$$F^{pml}(\omega, \boldsymbol{\kappa}) = F(\omega, \kappa_1^{pml}, \kappa_2, \kappa_3) = F\left(\omega, \kappa_1 \frac{\omega}{\omega - i\beta_1}, \kappa_2, \kappa_3\right) = 0 \tag{4.114}$$

$$F\Big(\omega(\omega - i\beta_1), \kappa_1(\omega), \kappa_2(\omega - i\beta_1), \kappa_3(\omega - i\beta_1)\Big) = 0 \tag{4.115}$$

Selon ([Bécache, Fauqueux, and Joly, 2003]), pour que les solutions $\boldsymbol{\Psi}$ soient stables, la partie imaginaire de ω doit être positive. Ceci implique que pour toutes les directions de propagation :

$$\text{sign } \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{i}_1 = \text{sign } \boldsymbol{c}^g \cdot \boldsymbol{i}_1 \tag{4.116}$$

où $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{c}^g$ sont respectivement les vecteurs de lenteur et de vitesse de groupe (dans la direction en question) dont les notions sont abordées dans le **Chapitre** 2. Dans le cas 2D et pour un matériau orthotrope, cette condition peut également s'exprimer en terme des coefficients du tenseur d'élasticité.

Géométriquement, dans la configuration 3D, la condition (4.116) implique que la stabilité du système (4.109) est assurée si les projections du vecteur de lenteur et du vecteur de vitesse de groupe dans la direction $\boldsymbol{i}_1$ se trouvent dans un même demi-espace limité par le plan x_2x_3. Une explication schématique 2D de cette condition géométrique est présentée dans la (FIG-4.7) où on constate *grosso modo* que l'instabilité du PML se réalise, intuitivement avec certitude, à temps long si les surfaces de lenteur du matériau exposent au moins une partie concave en vers les PML.

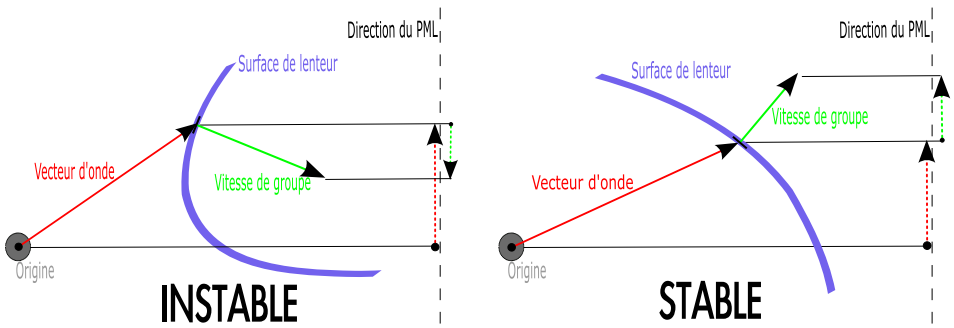


FIG. 4.7 – Explication géométrique selon [Bécache et al., 2003] de l'instabilité des PMLs

REMARQUE 4.15. *Pour un matériau isotrope, les 3 surfaces de lenteurs sont des sphères qui sont donc convexes dans toutes les directions. Les PMLs sont par conséquent naturellement stables quelle que soit leur orientation. Pour les matériaux anisotropes, comme on a constaté sur les surfaces de lenteur étudiées dans le* ***Chapitre*** *2 que la surface de lenteur du mode quasi-P est toujours convexe, l'instabilité peut provenir seulement des ondes quasi-S*

4.4.3.2 Initiatives de stabilisation des PMLs

Comme l'instabilité des PMLs est étroitement liée à la concavité des surfaces de lenteur du matériaux, l'initiative la plus naturelle pour stabiliser ou au moins pour retarder l'instabilité est d'orienter les PMLs de la manière qu'elles s'exposent le moins possible aux parties concaves des surfaces de lenteur. Dans le cas d'un milieu homogène et des PMLs cartésiennes classiques, ce remède est applicable au moins pour les anisotropies ayant 3 plans de symétrie perpendiculaires et pour les géométries simples. En revanche, pour notre modèle de champ stochastique dans lequel le tenseur d'élasticité est en générale triclinique et varie d'un point à l'autre dans l'espace, il est impossible de placer des PMLs pour éviter les éventuelles concavités locales. En raison de cette difficulté fondamentale, des stratégies de stabilisation plus globales sont attendues. Dans le cadre de ce travail de thèse, les deux initiatives suivantes sont adoptées.

4.4.3.2.a Remplacement d'une partie des PMLs par les matériaux isotropes

Une remarque peut être faite dans l'immédiat à partir de la FIG 4.7 : un matériau isotrope ayant des surfaces de lenteur sous formes des sphères, il est naturellement stable vis-à-vis de cette sorte d'instabilité des PMLs. Cette remarque importante nous donne une idée pour adapter les PML aux matériaux hétérogènes anisotropes aléatoires. Cela consiste à remplacer une partie de la couche PML anisotrope, dans sa profondeur, par un PML isotrope de matériau isotrope équivalent[37]. Cette adaptation, dont l'illustration schématique est présentée dans la FIG-4.8 pour les milieux hétérogènes aléatoires où la transparence à l'interface physique-PML n'est pas strictement requise. Dans la pratique des calculs par les éléments finis spectraux, l'épaisseur de la couche remplaçante est évaluée en nombre des points GLLs.

4.4.3.2.b Utilisation des PMLs multiaxiales

Lors d'une autre étude en 2D, Meza-Fajardo and Papageorgiou [2008] formulent un autre critère de stabilité que celui de l'expression (4.116). Sans entrer dans les détails, cette étude conclut que le système dynamique (4.109) est stable si les dérivées par rapport à $\boldsymbol{\beta_1}$ des valeurs propres du système non-splitté correspondant évaluées à l'entrée de la PML sont toutes négatives. Ces auteurs ont ensuite proposé une mesure pour corriger les cas où ces dérivées sont positives donnant naissance à l'instabilité. D'où la proposition d'un nouveau type de couche absorbante baptisée MPML pour Multiaxiale-PML. Techniquement, cela consiste à introduire des coefficients d'amortissement non seulement pour la direction normale de la PML mais également dans les directions transversales. Ainsi, pour une façade de PML perpendiculaire à $\boldsymbol{i}_1$, au lieu de la configuration présentée dans l'expression (4.92) pour les PMLs classiques, la configuration suivante est adoptée :

$$\beta_1(\boldsymbol{x}) = \beta_1(x_1) \neq 0\,;\ \beta_2(\boldsymbol{x}) = \beta_3(\boldsymbol{x}) = b\beta_1(x_1) \tag{4.117}$$

[37]Comme on a abordé dans le **Chapitre** 2, le milieu isotrope équivalent d'un milieu anisotrope est obtenu par la projection de son tenseur d'élasticité dans le sous espace isotrope généré par la base formée du tenseur sphérique $\boldsymbol{S}$ et du tenseur déviatorique $\boldsymbol{D}$.

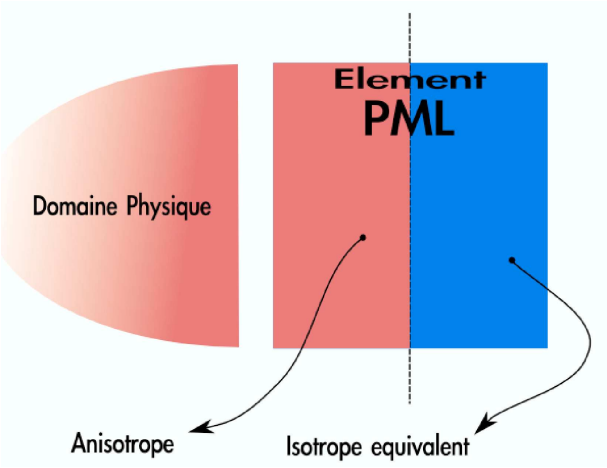


FIG. 4.8 – Illustration schématique de l'adaptation du PML.

dans laquelle b est un facteur réel qui prend la valeur dans $[0; 1]$.

EXEMPLE 4.1. Stabilisation des PMLs

Cet exemple concerne des simulations par SPEC3D sur lesquelles différentes configurations des PMLs sont considérées afin d'illustrer le fonctionnement de ces 2 initiatives de stabilisations des PMLs vis-à-vis d'un matériau hétérogène anisotrope. Le domaine physique $\mathbf{\Omega}$ du demi-espace limité par $x_3 = 0$ est défini par la géométrie $-1500\ \mathrm{m} \leq x_1, x_2 \leq 1500\ \mathrm{m}\,;\ 500\ \mathrm{m} \leq x_3 \leq 0\ \mathrm{m}$. Le champ stochastique de tenseur d'élasticité ayant $\delta = 0,\ \delta_{\mathrm{G}} = 0.5, \ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 50\ \mathrm{m}$ et le tenseur moyen correspondant à un matériau isotrope caractérisé par les vitesses d'onde volumique $c_{\mathrm{P}} = 1730\ \mathrm{m/s}$ et $c_{\mathrm{S}} = 1000\ \mathrm{m/s}$. Une sollicitation ponctuelle sous forme d'un Ricker de $f_o = 10\ \mathrm{Hz}$ et $t_o = 0.3\ \mathrm{s}$ est imposée au centre de la surface libre. Les éléments spectraux utilisés sont de taille $50\ \mathrm{m} \times 50\ \mathrm{m} \times 50\ \mathrm{m}$ associés à une grille de GLLs de 8 points par direction.

11 configurations de PMLs sont considérées. Pour chaque configuration, l'évolution temporelle de l'énergie totale du domaine physique est calculée à travers les évolutions du champ de vitesse $\boldsymbol{v}(t)$ ainsi que des champs des tenseurs de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(t)$ et de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{\Omega}}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{\Omega}} \rho \|\boldsymbol{v}(t)\|^2\, \mathrm{d}\mathbf{\Omega} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{\Omega}} \boldsymbol{\sigma}(t) : \boldsymbol{\varepsilon}\,(t)\, \mathrm{d}\mathbf{\Omega} \tag{4.118}$$

Les courbes normalisées (par rapport à $\mathcal{E}_{\mathbf{\Omega}}(t_o)$) sont tracées dans la FIG-4.9 en échelle semi-log. Les 11 courbes affichées dans cette figure correspondent respectivement (dans l'ordre de la légende à droite) aux PMLs non-modifiées, 7 configurations modifiées conformément à la section 4.4.3.2.a avec une épaisseur croissante de la couche de substitution et 3 configurations (b=0.05, 0.1 et 0.01) de MPML.

On constate que :

– Le modèle d'origine devient instable au bout de 3.5 secondes.

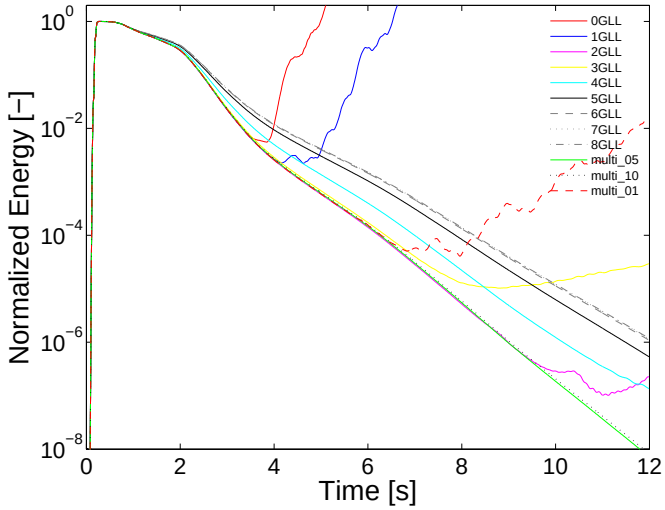


FIG. 4.9 – Sensibilité de l'adaptation du PML vis-à-vis de l'énergie totale du domaine physique

- Pour le premier type de modification, une tendance est que plus la profondeur de PML remplacée augmente, plus elle est stable, mais également plus l'énergie est réfléchie à la frontière car la différence entre le milieu isotrope équivalent et le milieu anisotrope d'origine constitue une discontinuité. Les PMLs semblent être stabilisées (jusqu'à 12 secondes) à partir d'une longueur de 4 points GLLs.
- Pour les MPMLs, un facteur d'amortissement latéral de 1% n'est pas suffisant pour stabiliser le système (l'énergie redevient croissante exponentiellement à partir de 4.5 secondes) tandis que le système est stabilisé pour $b = 0.05$ et $b = 0.1$.
- Pour les configurations stables, l'énergie renvoyée à l'interface domaine physique - PML est plus importante pour les PMLs à couche remplacée.

4.5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre consacré à l'implémentation numérique, on a abordé les éléments bibliographiques sur les calculs numériques en élastodynamique ainsi que sur l'utilisation de couches absorbantes parfaitement adaptées (PML). On a également rappelé les fondements théoriques ainsi que la mise en oeuvre du logiciel SPEC3D de [Festa and Vilotte, 2005]. Sont décrites les adaptations de ce code concernant le générateur du champ stochastique de tenseur d'élasticité, la prise en compte de l'anisotropie complète dans le comportement élastique et la stabilisation des PMLs faces à l'instabilité liée à l'anisotropie. Différentes validations de ces adaptations seront présentées dans le **Chapitre** 5.

Chapitre 5

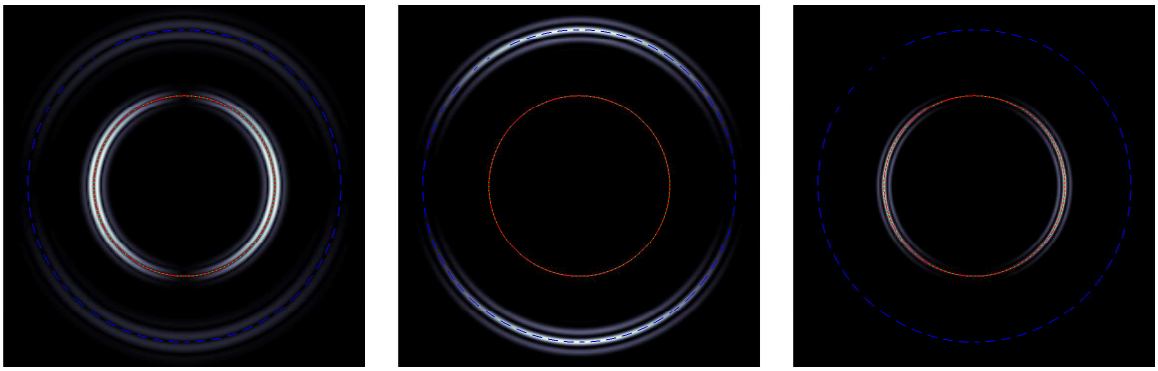
Validations des adaptations du code SPEC3D

Dans ce chapitre, différentes applications numériques sont présentées dans le but de justifier les adaptations du code SPEC3D développées dans le **Chapitre** 4 concernant le générateur de champ stochastique du tenseur d'élasticité et la résolution numérique du problème d'onde avec prise en compte de l'anisotropie et de l'hétérogénéité, qu'il s'agisse du domaine physique ou des couches absorbantes. Pour ce faire, les sections 5.1-5.2 comparent les résultats de simulations numériques effectuées à l'aide de SPEC3D avec les éléments théoriques développés dans le **Chapitre** 2 afin de valider le code vis-à-vis de l'anisotropie. Quelques études statistiques sur le champ hétérogène de propriétés élastiques sont ensuite présentées dans la section 5.3 en vue de valider le générateur de champ implémenté dans SPEC3D. Enfin, la section 5.4, à travers un principe simple de retournement du temps, donne un argument intéressant pour justifier notre simulation de la propagation d'onde dans des milieux à la fois anisotropes et aléatoirement hétérogènes.

5.1 Onde volumique dans de espaces infinis élastiques homogènes.

On considère dans les applications présentées dans cette section le problème d'ondes élastiques dans un espace infini homogène sollicité par une source ponctuelle. Pour ce faire, un domaine cubique défini par $\mathbf{\Omega} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -1000\mathrm{m} \leq x_1, x_2 \leq 1000\mathrm{m}\,;\, -2000\mathrm{m} \leq x_3 \leq 0\mathrm{m}$ est entouré sur toutes ses faces par des PMLs. Une source sous forme d'un Ricker de fréquence centrale $f_o = 10Hz$ est placé au point $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -1000$, *i.e.* au centre du $\mathbf{\Omega}$. Les fronts d'onde sont ensuite observés sur des plans contenant le point source correspondant aux champs instantanés du module du vecteur de vitesse de particule $|\dot{\boldsymbol{u}}|$. Une décomposition de ces champs en parties rotationnelles $\left|\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{u}\right|$ et irrotationnelles $\left|\mathrm{Div}\,\boldsymbol{u}\right|$ est également effectuée systématiquement pour les différents matériaux considérés. Il s'agit d'un matériau isotrope (matériau I), d'un matériau orthotrope (matériau IVa) et d'un matériau triclinique (matériau V) qui sont décrits et étudiés dans le **Chapitre** 2. Les fronts d'onde théoriques correspondant, *i.e.* les courbes de vitesse de groupe en fonction des directions (calculés dans l'EXEMPLE 2.1) mis à l'échelle par le temps de parcours, sont ensuite superposés aux fronts d'onde simulés.

Pour le matériau isotrope, la source utilisée est unidirectionnelle. Elle s'applique uniquement selon la direction $\boldsymbol{i_3}$. Comme les fronts d'onde attendus sont sphériques, seule la section perpendiculaire à i_2 est présentée dans la FIG 5.1. La corrélation entre les champs d'onde observés et théoriques en terme de positionnement en temps est parfaite. On constate dans le champ d'onde total (FIG 5.1-a) à la fois la présence de l'onde longitudinale et celle de l'onde de cisaillement, mais elles sont distinctes l'une de l'autre en espace à l'instant étudié. Grâce à leurs polarisations purement longitudinale ou transverse, la décomposition en champs irrotationnels et rotationnels sépare parfaitement ces deux ondes.



(a) (b) (c)

FIG. 5.1 – Comparaison des fronts d'onde théoriques et simulés pour un matériau isotrope dans le plan x_1x_2. De gauche à droite : valeur absolue du champ de vitesse $|\dot{\boldsymbol{u}}|$, du champ de divergence $|\mathrm{Div}\,\boldsymbol{u}|$ et du champ rotationnel $|\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{u}|$.

Pour des matériaux anisotropes, une source d'explosion isotrope est utilisée. Les différentes sections de fronts d'onde correspondent à trois plans perpendiculaires et aux champs rotationnels et irrotationnels sont présentées dans la FIG 5.2 et dans la FIG 5.3 respectivement pour des matériaux orthotrope et triclinique. Sur le champ d'onde total, on constate que les fronts d'onde théoriques et simulés coïncident. Pour les décompositions rotationnel-divergence du champ de déplacement, on retrouve les fronts d'onde principaux correspondant aux modes lents et rapides. Par contre, comme une des particularités des milieux anisotropes est que la polarisation n'est pas pure (longitudinale ou transverse), la décomposition rotationnel-divergence ne permet plus de séparer complètement les modes d'ondes. Pour cette raison, d'une part des traces des modes quasi-transveres peuvent être présents dans les champs à rotationnel nul (les colonnes d'image au milieu) et d'autre part, les champs à divergence nulle contiennent également une énergie significative en provenance des modes quasi-longitudinaux (les colonnes d'image à droite).

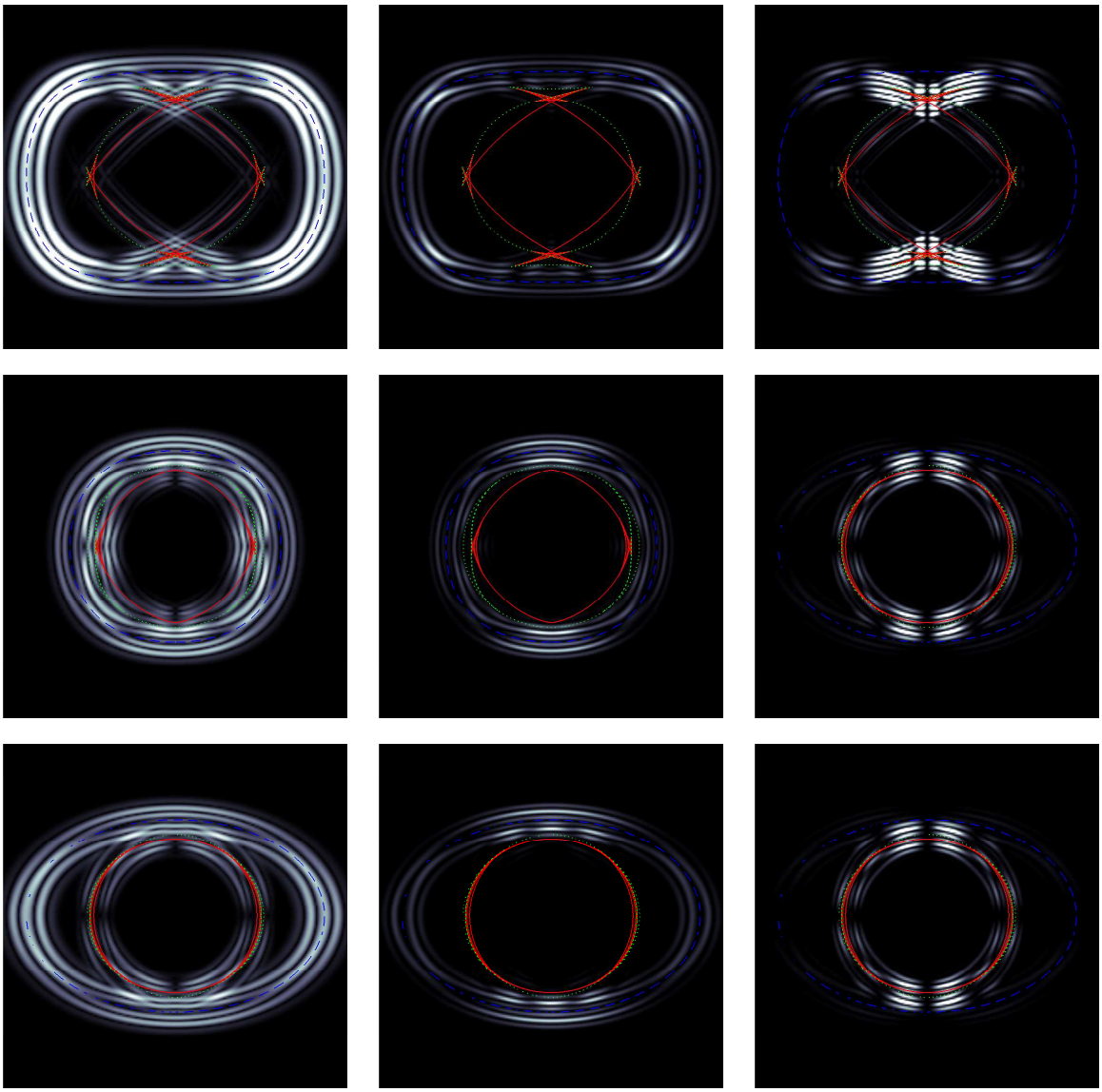


FIG. 5.2 – Comparaison des fronts d'onde théoriques et simulés pour un matériau orthotrope. Du haut en bas : plans x_1x_2, x_2x_3 et x_1x_3. De gauche à droite : valeur absolue du champ de vitesse $|\dot{\boldsymbol{u}}|$, du champ irrotationnel $|\mathrm{Div}\,\boldsymbol{u}|$ et du champ rotationnel $|\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{u}|$. Les modes théoriques sont représentés par les courbes *bleues* , *vertes* et *rouges* respectivement pour *quasiP* , *quasiS1* et *quasiS2*.

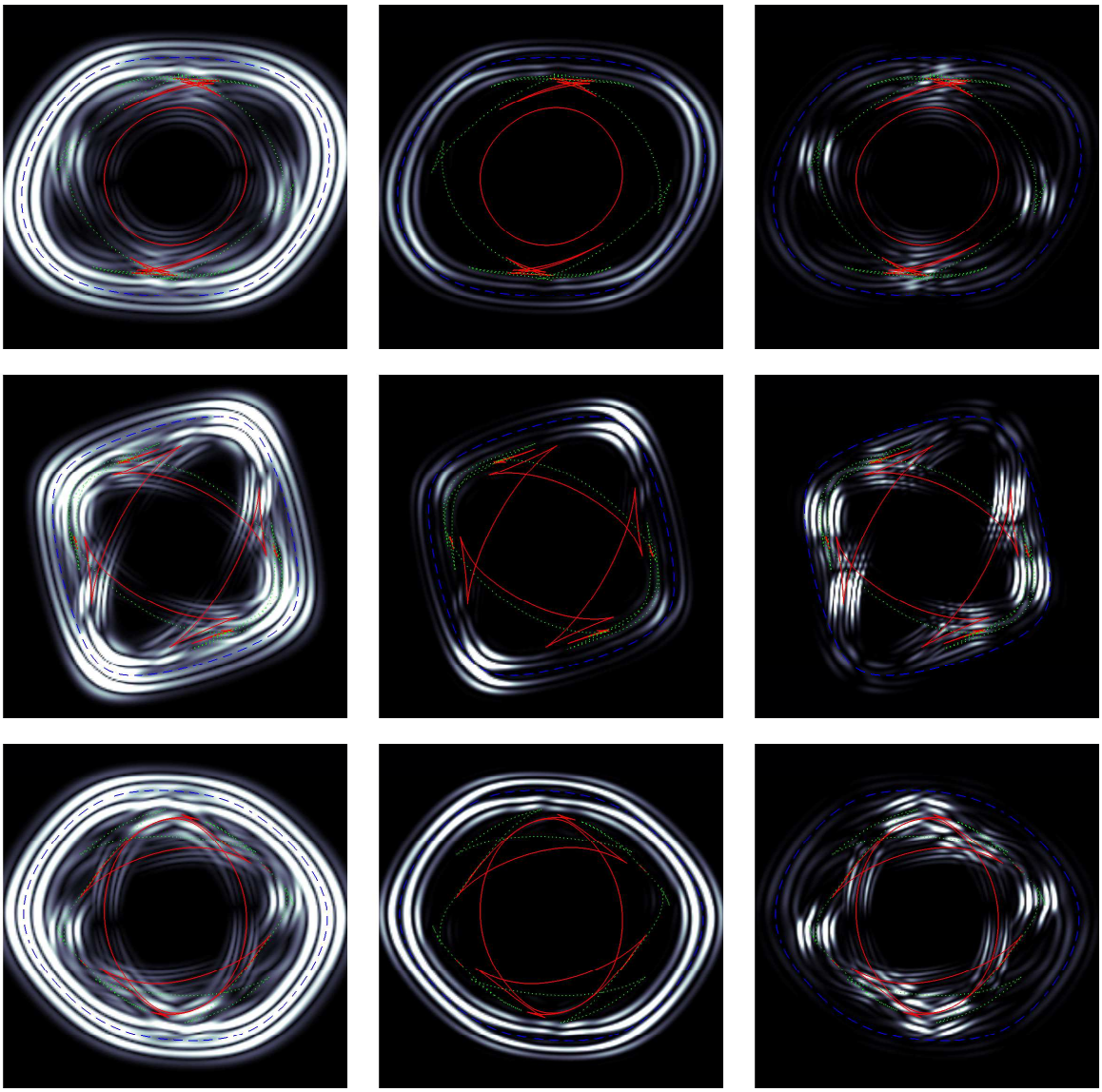


FIG. 5.3 – Comparaison des fronts d'onde théoriques et simulés pour un matériau triclinique. Du haut en bas : plans x_1x_2, x_2x_3 et x_1x_3. De gauche à droite : valeur absolue du champ de vitesse $|\boldsymbol{v}|$, du champ irrotationnel $|\mathrm{Div}\,\boldsymbol{u}|$ et du champ rotationnel $|\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{u}|$. Les modes théoriques sont représentés par les courbes *bleues* , *vertes* et *rouges* respectivement pour *quasiP* , *quasiS*1 et *quasiS*2.

5.2 Existence et Non-existence des ondes de surface subsonique

Dans les applications présentées au cours de cette section, on considère le problème de propagation d'onde élastique dans un demi-espace infini homogène sollicité par une source ponctuelle située à la surface. Pour ce faire, un domaine physique sous forme d'un cube défini par $\mathbf{\Omega} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -1500\mathrm{m} \leq x_1, x_2 \leq 1500\mathrm{m}\,;\, -450\mathrm{m} \leq x_3 \leq 0\mathrm{m}$ est entouré partout par les PMLs, sauf à la limite $x_3 = 0$ ou une condition aux limites de surface libre est appliquée. Une source ponctuelle sous forme d'un Ricker, impulsionnelle dans la direction $\boldsymbol{i}_3$, de fréquence centrale $f_o = 10Hz$ est placée au point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, *i.e.* au centre de la surface libre du $\mathbf{\Omega}$. Les fronts d'onde sont ensuite observés correspondant aux champs instantanés du module du vecteur de vitesse de particule $|\dot{\boldsymbol{u}}|$ sont observés sur la surface libre. Ces champs observés sont superposés aux fronts d'onde théoriques. Ces derniers contiennent les ondes à la limite transsonique et les ondes de surface qu'on obtient en modulant par le temps de parcours les courbes calculées dans l'EXEMPLE 2.2. Puisque les fronts d'onde sont toujours centro-symétriques par rapport à la source, pour faciliter la comparaison des zones manifestant de faibles énergies, les courbes théoriques sont seulement superposées sur les moitiés hautes des images des champs d'onde. Ces comparaisons sont présentées ci-dessous dans les FIGS (5.4-5.5) regroupant respectivement les cas de matériaux où l'onde de surface subsonique existe dans toutes les directions horizontales et les cas de matériaux où l'absence de cette onde de Rayleigh pour certains azimuts est prédite dans l'EXEMPLE 2.2.

Dans la FIG 5.4, un matériau isotrope transverse (le matériau III), un matériau orthotrope (le matériau IVb, qui est obtenu à travers une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe $\boldsymbol{i}_1$ appliquée au matériau IVa) et deux matériaux tricliniques (les matériaux V et Va) font l'objet de la validation. On y constate une corrélation parfaite entre les parties principales des fronts d'onde simulés et les courbes bleues, *i.e.* les fronts d'onde théoriques de l'onde de Rayleigh. Cela montre d'une part, la qualité des simulations en terme de temps de parcours et d'autre part que à la surface des demi-espaces remplis par ces matériaux anisotropes en question, l'onde de Rayleigh existe dans tous les azimuts et prédomine sur les autres modes de propagation.

Dans la FIG 5.5, un matériau cubique (le matériau II), un matériau isotrope transverse de type HTI (le matériau IIIa) et deux matériaux orthotropes (les matériaux IV et IVa) font l'objet de la validation. D'après les calculs théoriques (*i.e.* FIGS (2.23-2.28)) les trois premiers doivent faire apparaître des ondes de surface supersonique (au lieu de l'onde de Rayleigh) pour certains azimuts. Le dernier matériau doit donner lieu à des ondes de surface transsonique. Une corrélation entre les principaux fronts d'onde simulés et théoriques est toujours observée pour la plupart des azimuts. Les azimuts avec non-existence prévue de l'onde de Rayleigh sont également identifiés dans le front d'onde. Il s'agit des azimuts θ qui sont multiples (dans le sens de la symétrie du matériau) respectivement de $\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ et 0.353π pour ces quatre matériaux. Pour les 3 premiers matériaux (FIG 5.5-abc), les ondes de surface supersonique (qui se propagent plus vite que l'onde de l'état transsonique représentées par la courbe verte) les azimuts attendus apparaissent. En revanche, pour le matériau IVa, l'onde de surface transsonique (attendue à l'azimut $\theta = 0.353\pi$) n'est pas au rendez-vous. Dans ces directions de la FIG 5.5-d, une partie supersonique à faible énergie est constatée. Une explication possible pour cette différence entre les fronts d'onde simulés et théoriques est que la source utilisée n'est pas adéquate pour exciter

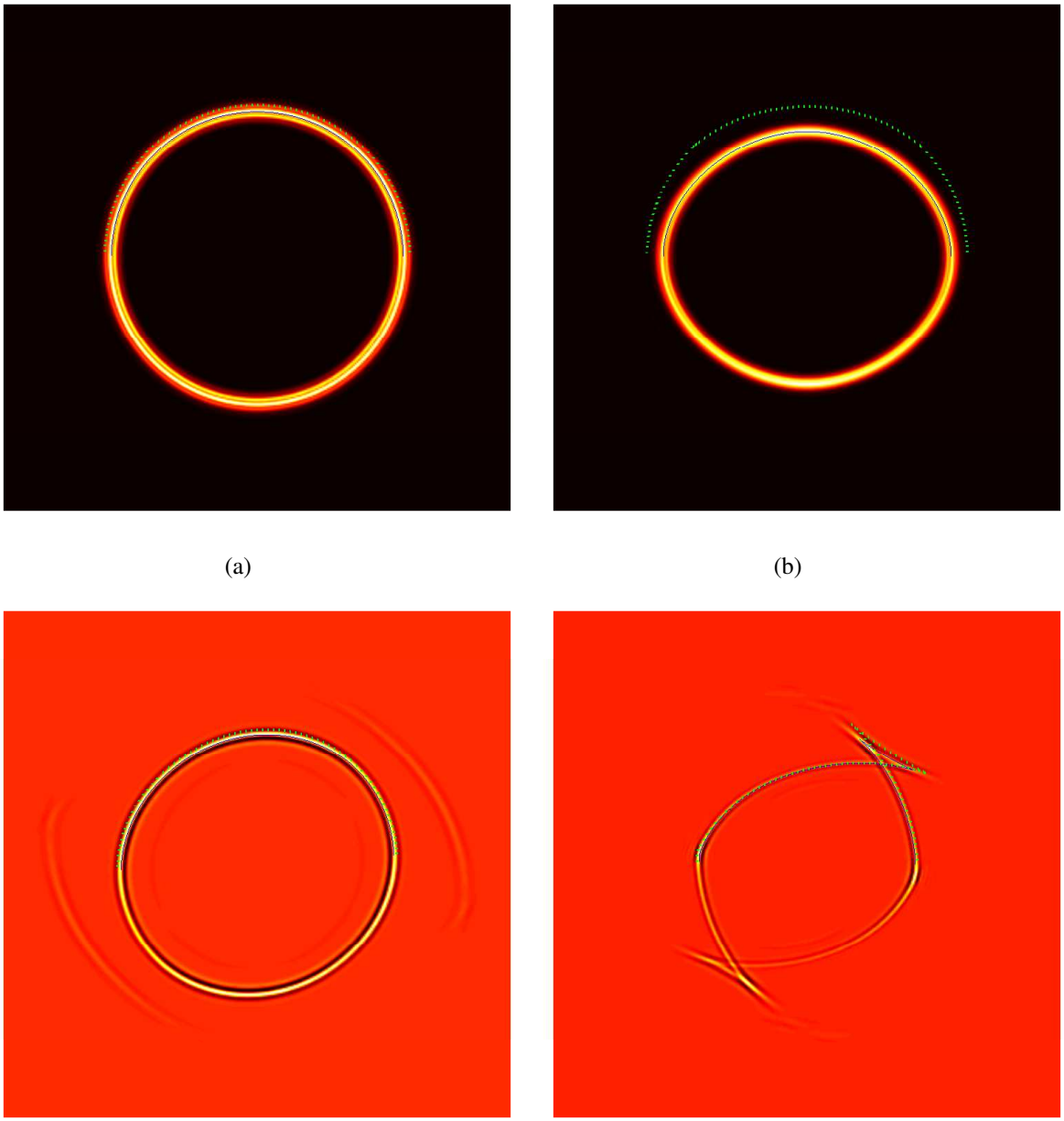


FIG. 5.4 – Comparaison des fronts d'ondes théoriques et simulés à la surface $x_3 = 0$ pour les matériaux (a) isotrope transverse III, (b) orthotrope IVb, et (c) triclinique V et (d) triclinique Va.

ce mode transsonique et que ce type d'ondes de surface est masqué par les modes correspondant aux singularités et aux multivariabilités directionnelles de la courbe bleue.

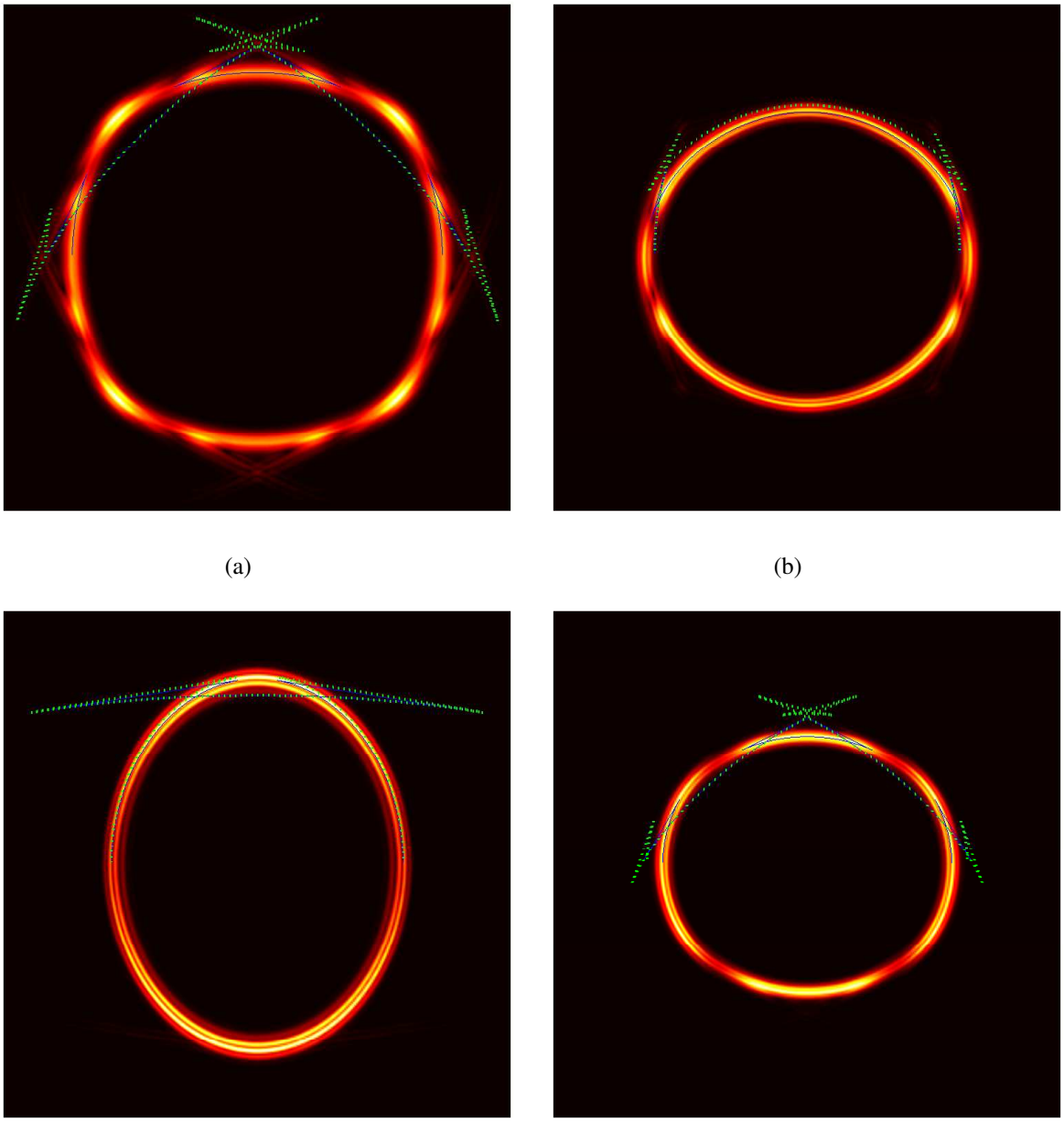


FIG. 5.5 – Comparaison des fronts d'ondes théoriques et simulés à la surface $x_3 = 0$ pour les matériaux (a) cubique II, (b) isotrope transverse IIIa, (c) orthotrope IV et (d) orthotrope IVa .

5.3 Statistique sur les champs stochastiques de $\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\ell};\delta,\delta_{\mathbf{G}})$

Afin de valider le générateur de champ stochastique du tenseur d'élasticité, on considère un domaine physique sous forme d'un cube défini par $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, -250\mathrm{m} \leq x_1, x_2 \leq 250\mathrm{m}\,;\, -500\mathrm{m} \leq x_3 \leq 0\mathrm{m}$ sur lequel est simulé le champ $\mathbb{C}(\boldsymbol{x};\delta,\delta_{\mathrm{G}};\boldsymbol{\ell})$ dont :

- le champ moyen est choisi isotrope correspondant, pour une densité de masse $\rho = 2000\mathrm{kg/m^3}$, aux vitesses des ondes volumiques $c_{\mathrm{P}} = 1730\mathrm{m/s}$ et $c_{\mathrm{S}} = 1000\mathrm{m/s}$.

- les longueurs de corrélations spatiales (*i.e.,* les composantes de $\boldsymbol{\ell}$) sont choisies comme $\ell_1 = \ell_2 = 50\mathrm{m}$ et $\ell_3 = 20\mathrm{m}$
- les paramètres de fluctuation sont $\delta = 0.47$ et $\delta_{\mathrm{G}} = 0.17$. Ces derniers correspondent à une fluctuation globale $\delta_{|c|} = 0.5$

Le domaine physique est en effet décomposé en 6 sous-domaines (dont la topologie est similaire à celle présentée dans la FIG 4.6). Chacun de ces derniers est à son tour partitionné en éléments spectraux de taille $50\mathrm{m} \times 50\mathrm{m} \times 50\mathrm{m}$ possédant $8 \times 8 \times 8$ points GLL. La valeur du tenseur est générée au niveau des points GLL et varie d'un point à l'autre tout en respectant la structure de corrélation spatiale imposée par $\boldsymbol{\ell}$ et les niveaux de fluctuation définis par δ et δ_{G}. Comme $\boldsymbol{\Omega}$ est grand par rapport à ℓ, une propriété d'ergodicité est attendue. Cette dernière permet d'effectuer les études statistiques sur une réalisation du champ en calculant les estimateurs des moyennes sur un nuage suffisamment grand de points GLL aléatoirement choisis parmi l'ensemble des $(50 \times 7 + 1)^3 \simeq 3.5 \times 10^6$ points de GLLs présents dans $\boldsymbol{\Omega}$. La FIG. 5.6 représente à gauche l'allure d'une réalisation du champ tensoriel $\mathbb{C}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell})$ à travers le champ scalaire correspondant à son terme C_{11} et à droite la structure de corrélation de la quantité en question. On y constate que :

- Malgré les générations indépendantes des restrictions du champ $\mathbb{C}_{11}(\boldsymbol{x}; \delta, \delta_{\mathrm{G}}; \boldsymbol{\ell})$ dans de différents sous-domaines du $\boldsymbol{\Omega}$, le champ global obtenu par juxtaposition de ces restrictions reste continu aux interfaces entre les sous-domaines. Ainsi, il convient de noter que les images de continuité analogues à celle du C_{11} sont aussi obtenues pour d'autres termes C_{ij}, pour sa norme $\|\mathbb{C}\|$, pour le champ d'indice d'anisotropie correspondant, voire pour le champ de vitesse d'onde de surface se propageant le long d'une direction fixée (calculée selon la PROCÉDURE 2.1, Étape 1.f.). À titre d'exemple, ces images de continuité pour cette même réalisation du champ tensoriel sont présentées dans les FIGS (5.7-5.8).
- Les corrélations spatiales du C_{11} vis-à-vis des différentes directions suivent la structure de corrélation théorique définie par les expressions (3.180-3.181). Il convient de noter que les courbes théoriques (courbes noires) dans l'image à droite de FIG. 5.6 correspondent à des fonctions de corrélations monodimensionnelles, qui sont de forme *sinus cardinal au carrée* données par l'équation (3.168), imposées sur les champs germes $\mathbb{g}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell})$ mais pas directement sur les champs correspondant aux termes C_{ij}. Comme la transformation isoprobabiliste $h(\mathbb{g}_{\mathrm{k}}; \delta)$ définie dans l'équation (3.77) est en générale non-linéaire, une coïncidence parfaite entre les fonctions de corrélation spatiale observées et théoriques n'est pas nécessairement obtenue. L'essentiel est que le support apparent de la fonction de corrélation observée s'étale avec l'augmentation de ℓ_i.

Il convient de noter que cette validation se focalise sur les propriétés de continuité et de corrélation spatiale observées sur les champs stochastiques réalisés mais non sur les amplitudes de fluctuations. Ces dernières ont déjà été étudiées dans le CHAPITRE 3 lors de la prise en compte du modèle probabiliste des variables tensorielles $\boldsymbol{C}(\delta; \delta_{\mathrm{G}})$, notamment à travers (FIGS 3.3-3.4).

5.4 Renversement temporel et Propriété conservative du schéma d'intégration en temps

Dans cette section une validation partielle de notre simulation de la propagation d'ondes en milieux aléatoires est présentée. À la différence du cas des milieux homogènes, une des

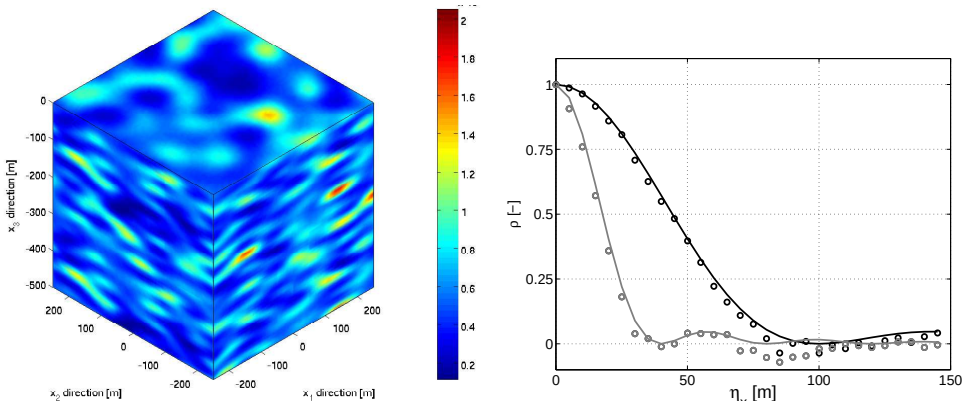


FIG. 5.6 – Une réalisation du champ de propriétés élastiques : (à gauche) Cartographie du terme C_{11} et (à droite) Comparaison entre la structure de corrélation théorique (courbes en lignes continues) avec la structure de corrélation observée (courbes en cercles) pour C_{11} dans les directions $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$ (courbes noires) et dans la direction $\boldsymbol{i}_3$ (courbes grises).

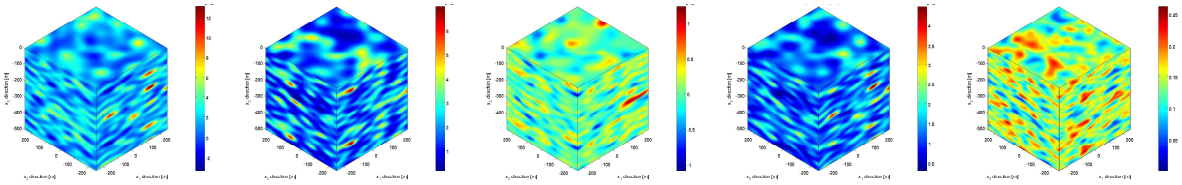


FIG. 5.7 – Une réalisation du champ stochastique de tenseur d'élasticité. De gauche à droite : les champs correspondant aux termes C_{12}, C_{44}, C_{15}, à la norme $\|C\|$ et à l'indice d'anisotropie I_{A}.

difficultés majeures réside dans le manque de références analytiques pour valider notre simulation numérique. Par contre, on peut se baser sur la propriété réversible de l'équation d'ondes élastiques pour vérifier la propriété non-dissipative du schéma numérique. Pour ce faire, un opérateur de renversement du temps est défini. Il sera appliqué sur l'ensemble du système au bout d'un temps t_{R} que l'on souhaite. D'une façon générale, comme en mécanique classique, un tel opérateur baptisé $\mathscr{T}$ peut être défini comme celui transformant tout le déplacement $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ d'un système physique en un autre déplacement $\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}} := \mathscr{T}(\boldsymbol{u})$ tel que pour $\forall t$:

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, -t) \tag{5.1}$$

REMARQUE 5.1. *On peut aisément déduire de la relation (5.1) que les dérivées temporelles de ce champ après le renversement sont ainsi donnés par les champs de vitesses et d'accélérations :*

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}, t) = -\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, -t) \tag{5.2}$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{x}, t) = \ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, -t) \tag{5.3}$$

D'une façon imagée, si on tourne un film à partir de l'évolution en temps du système jusqu'à un instant t_{R}, l'opérateur de renversement du temps peut être vu comme l'opérateur de lecture à l'envers, *i.e.* en commençant par la fin du film.

Dans la pratique de notre simulation, l'implémentation de l'opérateur $\mathscr{T}$ de renversement du temps dans le schéma Newmark de *vitesse-déplacement* se réalise en prenant en compte

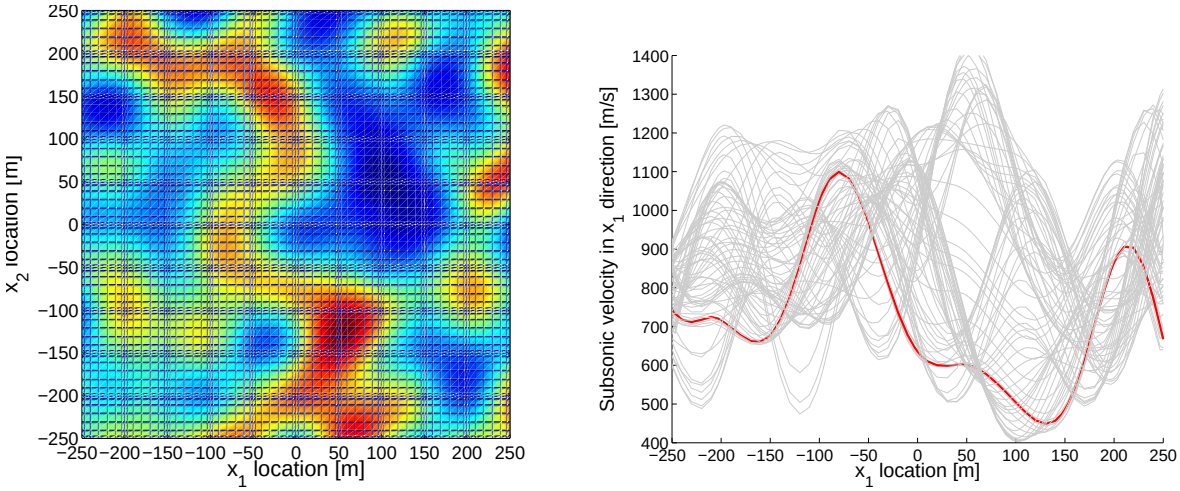


FIG. 5.8 – Une réalisation du champ stochastique de tenseur d'élasticité. À gauche : Carte 2D de la vitesse d'onde de Rayleigh dans la direction $\boldsymbol{i}_1$ donnée à partir des valeurs du tenseur d'élasticité à la surface. À droite : Profil 1D selon x_1 de cette même information pour de différentes x_2, la courbe rouge correspond à la ligne $x_2 = 0$

l'équation (5.2) lors de l'évolution du système spatialement et temporellement discrétisé. En effet, cette relation est injectée dans l'évolution (4.82) au pas de temps i correspondant au moment t_{R} comme suit :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_{i+1}^{hp} - \boldsymbol{V}_{i}^{hp} \\ \boldsymbol{U}_{i+1}^{hp} - \boldsymbol{U}_{i}^{hp} \end{pmatrix} = \Delta t \begin{pmatrix} \mathfrak{M}^{-1}\left[\mathfrak{F}_{i+1}^{ext} - \mathfrak{F}^{int}(\boldsymbol{U}_{i+\frac{1}{2}}^{hp})\right] \\ -\boldsymbol{V}_{i+\frac{1}{2}}^{hp} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Après ce renversement temporel, l'évolution en temps reprend la forme donnée par l'équation (4.82) en tenant compte de l'évolution renversée de la force externe, *i.e.* $\mathfrak{F}_{i+1}^{ext}$ est systématiquement[38] remplacée par $\mathfrak{F}_{i+1}^{ext,\mathrm{R}} = \mathfrak{F}_{i-1}^{ext}$. Si l'on considère le rôle de $\mathfrak{F}_{i+1}^{ext}$ dans l'équation (4.82) comme une pompe de l'énergie dans le système, la présence de $\mathfrak{F}_{i+1}^{ext,\mathrm{R}}$ a pour but de retirer cette part d'énergie au fil du temps. Il convient de noter que l'opérateur de renversement du temps défini par l'équation (5.4) ne concerne que des milieux conservatifs.

REMARQUE 5.2. *Il convient de noter la différence essentielle entre notre action de renversement du temps avec la technique de renversement temporel grâce au miroir à retournement temporel qui est mise au point par Mathias Fink au début des années 1990. Bien que les deux techniques proviennent d'une même idée fondamentale, elles se différencient par le contenu des données à sauvegarder avant le moment de retourner du temps. Dans notre procédé, tout le champ des données à un seul instant (l'instant juste avant le renversement) est mémorisé tandis que dans les expériences de Fink [1992, 1997] toute l'histoire de l'évolution temporelle d'un ensemble fini des points de l'espace est sauvegardée.*

Ainsi, un domaine physique défini par $\boldsymbol{\Omega} = \{-1000\mathrm{m} \leq x_1, x_2 \leq 1000\mathrm{m}\ ;\ -1000\mathrm{m} \leq x_3 \leq 0\mathrm{m}\}$est étudié. Ce dernier est rempli par un matériau hétérogène aléatoire (à densité

[38] Ce remplacement est appliquée en effet pour $t < 2t_{\mathrm{R}}$, au delà de cet instant, la force externe est supprimée (*i.e.*, $\mathfrak{F}_{i+1}^{ext,\mathrm{R}} = 0$) dans l'esprit de respecter la causalité de la force.

constant $\rho = 2000\mathrm{kg/m^3}$) dont les paramètres du modèle de champ stochastique de tenseur d'élasticité sont $\delta = 0$, $\delta_{\mathrm{G}} = 0.5$, $\ell = 50\mathrm{m}$ et le tenseur moyen étant isotrope, correspondant aux vitesses $c_{\mathrm{p}} = 1730\mathrm{m/s}$ et $c_{\mathrm{p}} = 1000\mathrm{m/s}$. Le milieu est excité par une source ponctuelle, verticale sous forme d'un Ricker ($f_o = 10\mathrm{Hz}$, $t_o = 0.3\mathrm{s}$). Cette dernière est placée au centre de la surface libre $x_3 = 0$. Trois capteurs sont disposés à cette surface, aux distances respectives de $200\mathrm{m}$, $500\mathrm{m}$ et $800\mathrm{m}$ par rapport à la source.

On ne peut implémenter un tel opérateur aux milieux sujets à des pertes d'énergie tels que les milieux non-bornés ou bien les milieux dissipatifs (y compris les couches absorbantes). Par contre, dans l'optique double de valider le caractère conservatif du schéma numérique employé à l'intérieur de $\mathbf{\Omega}$ ainsi que d'illustrer l'incompatibilité de ce type de validation avec les PML, deux configurations des conditions aux limites de $\mathbf{\Omega}$ sont simulées : les images à gauche des FIGs (5.9-5.10) correspondent au cas où la condition de Neumann (de surface libre) est imposée partout sur les frontières de $\mathbf{\Omega}$ tandis que les images à droite sont celles du cas où les PMLs sont utilisées pour modéliser un demi-espace. L'instant de renversement est $t_{\mathrm{R}} = 1.5\mathrm{s}$. Avant et après ce repère, les signaux sont tracés respectivement en rouge et en bleu foncé. Dans la FIG 5.10, les signaux postérieurs au temps de retournement t_{R} (en bleu foncé) sont inversés en signe et tracés en superposition des signaux avant retournement (en rouge) et en ordre chronologique inverse. Les différences sont affichées en bleu clair.

Pour le cas borné, malgré les complexités (hétérogénéité, anisotropie) présentes dans le milieu, on constate un accord parfait (surtout après $t_o = 0.3\mathrm{s}$) entre les signaux *aller* et *retour*, que ce soit loin ou proche par rapport à la source. Dans l'image en haut à gauche de la FIG 5.10, on observe quelques fluctuations de la courbe bleue dans l'intervalle de $0\mathrm{s}$ à $0.3\mathrm{s}$. Comme le capteur se situe pas très loin de la source, cette partie du signal concerne les ondes de retour de l'autre coté de la source. Ces ondes directes atteignent le capteur en question après avoir traversé la source.

Pour le cas non-borné où les PML ne font l'objet d'aucun changement au cours de l'évolution temporelle, bien que les principaux pics des signaux *aller* puissent être retrouvés (en terme de positionnement en temps) dans les signaux de retour, de considérables différences entre ces signaux sont observées. Il s'agit en premier lieu de la différence de l'amplitude, surtout avant arrivée de l'impulsion principale. Comme une partie des ondes a été absorbée par les PML, cette part de l'énergie ne se retrouve pas dans les signaux de retour. D'une même nature, le contenu des pics secondaires concernant les ondelettes absorbées est aussi modifié car ces ondes sont amorties de différentes façons dépendant des angles d'incidence selon lesquels elles arrivent aux PML. Par ailleurs, pour le capteur placé loin de la source, on constate des oscillations à haute fréquence. Vu la distance entre ce capteur et les PML, cette anomalie provient probablement de ces couches absorbantes.

5.5 Bilan du chapitre

Au cours de ce chapitre, différents arguments de validation de nos adaptations du code SPEC3D vis-à-vis de notre thématique de la propagation d'onde dans des milieux complexes ont été présentés. En effet, pour la prise en compte de l'anisotropie dans le comportement élastodynamique, nous avons montré de parfaits accords en terme de positionnement en temps entre les fronts d'onde simulés et des prédictions théoriques. Ce type de validation a été fait pour les

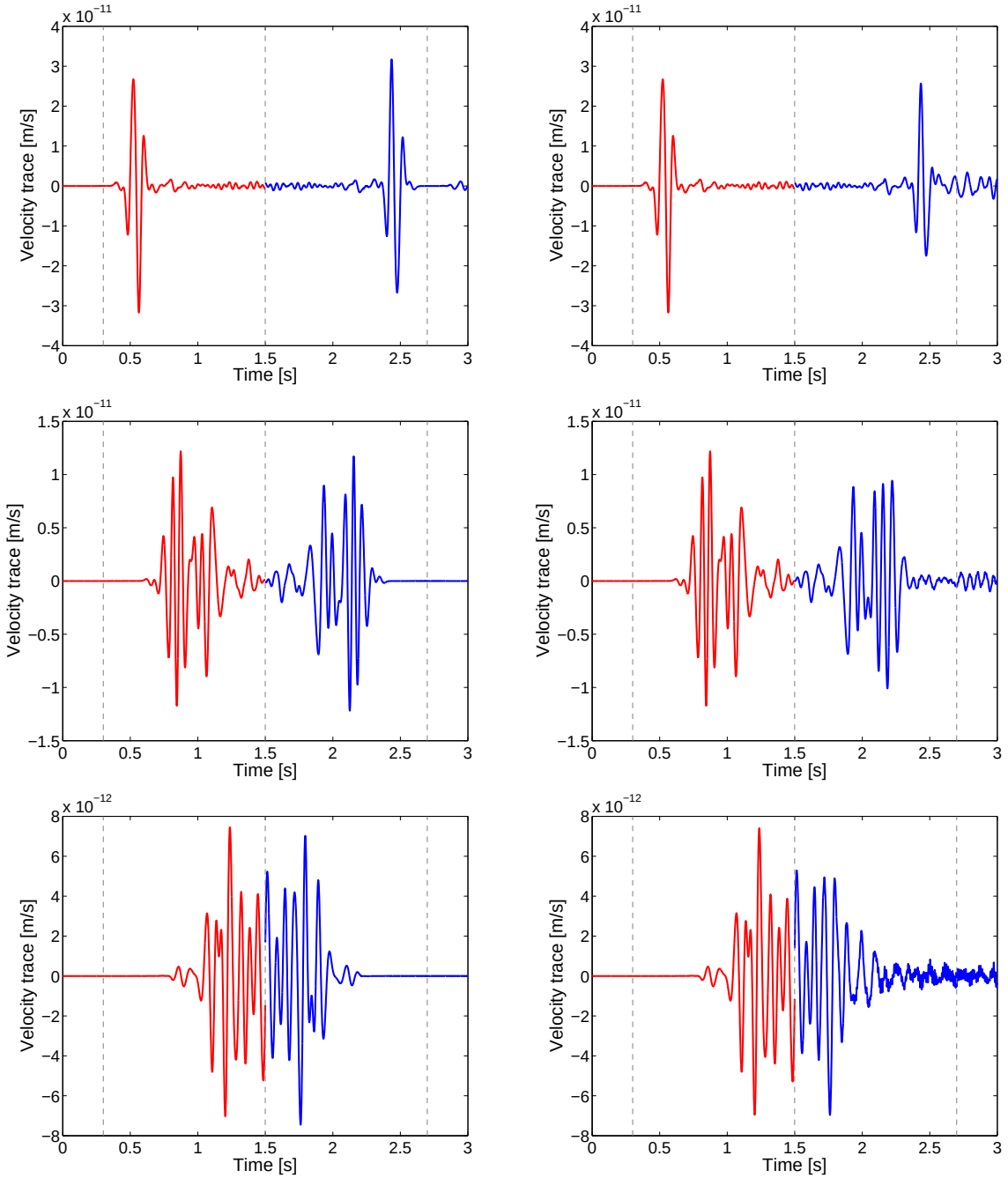


FIG. 5.9 – Traces de vitesse avec retournement temporel enregistrées à la surface $x_3 = 0$ pour les conditions aux limites de Neumann (à gauche) et absorbantes PML (à droite). Les signaux du haut en bas sont enregistrés à des distances respectives de $200\mathrm{m}$, $500\mathrm{m}$ et $800\mathrm{m}$ par rapport à la source située au centre de la surface.

matériaux de niveaux de symétrie variés, *i.e.* de l'isotropie à l'anisotropie triclinique, et pour deux géométries différentes, *i.e.* l'espace infini pour les ondes volumiques et le demi-espace pour les ondes de surface. Quant aux champs stochastiques du tenseur d'élasticité générés par ce code avec parallélisation massive, les études statistiques appliquées sur ces données ont mon-

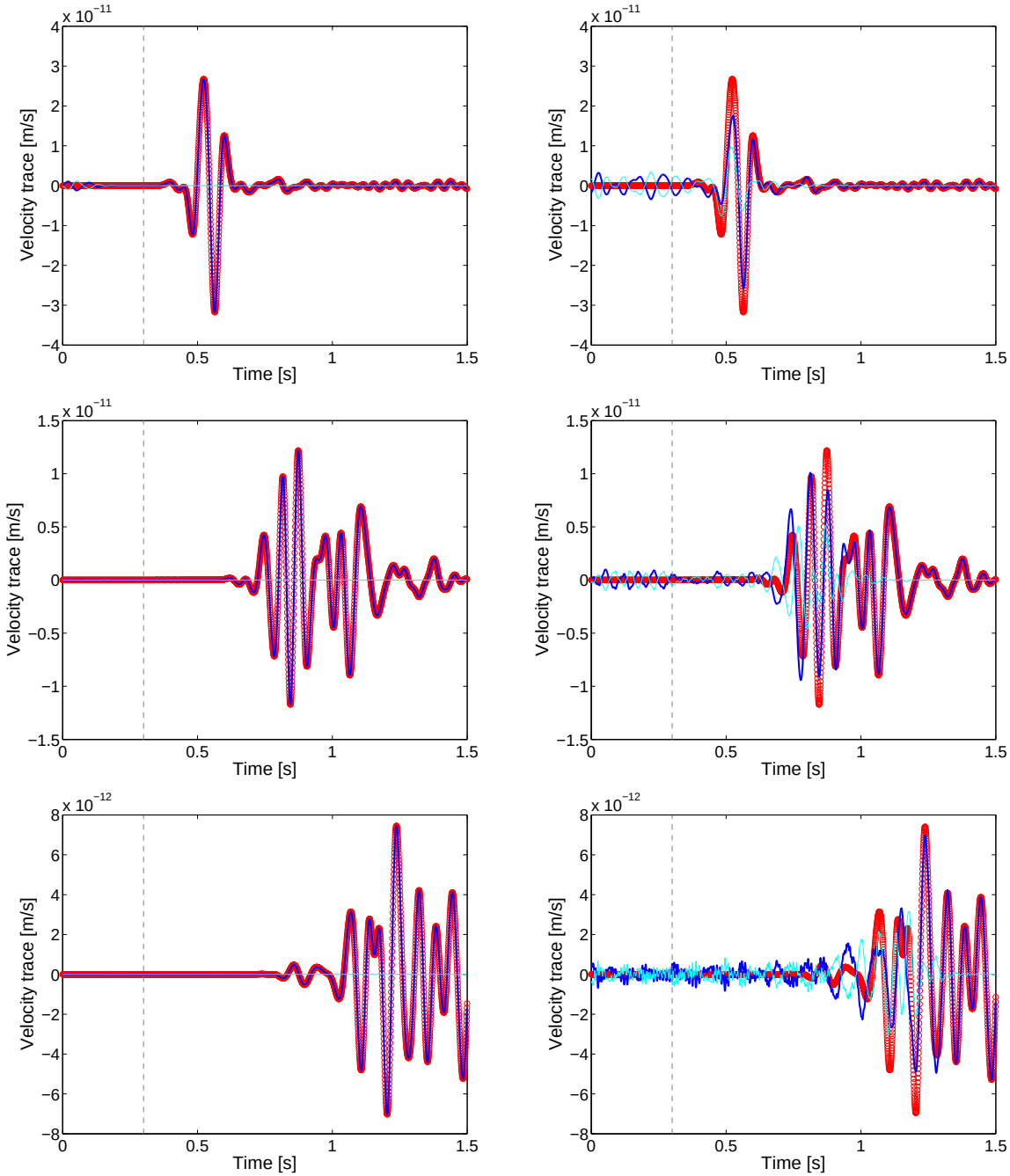


FIG. 5.10 – Traces de vitesse avec retournement temporel enregistrées à la surface $x_3 = 0$ pour les conditions aux limites de Neumann (à gauche) et absorbantes PML (à droite). Les signaux du haut en bas sont enregistrés à des distances respectives de $200\mathrm{m}$, $500\mathrm{m}$ et $800\mathrm{m}$ par rapport à la source située au centre de la surface. Les signaux "retour" de la FIG 5.9 (bleu marine) sont inversés en signe et en ordre d'évolution pour pouvoir être comparés avec les signaux "aller" (rouge). Les différences entre les deux sens sont également affichées (bleu ciel)

tré le rôle des paramètres du modèle probabiliste de cette propriété mécanique. À la fin du chapitre, une tentative de validation du calcul de la propagation d'onde dans le milieu anisotrope et

aléatoirement hétérogène (dont aucune validation n'est possible à notre connaissance de l'état-de-l'art faute de calcul de référence) a été effectuée à travers une approche par retournement du temps.

Chapitre 6

Études de la propagation d'ondes élastiques dans des demi-espaces anisotropes aléatoires

Dans ce sixième et dernier chapitre, des simulations de la propagation d'ondes dans les milieux anisotropes et/ou aléatoirement hétérogènes sont présentées. Ces calculs ont été effectués dans le but d'étudier le rôle joué par les différents paramètres du milieu de propagation ou de la source sur le champ d'ondes. Bien que ces simulations demeurent prospectives, elles fournissent d'intéressants indicateurs pour des problèmes d'identification à partir d'enregistrements d'ondes.

6.1 Équipartition de l'énergie entre les mouvements irrotationnel et rotationnel

À travers les applications présentées ci-dessous, on généralise empiriquement la théorie de diffusion avec équipartition des modes d'ondes élastiques des milieux isotropes [Ryzhik et al., 1996] abordée au cours du **Chapitre** 1 dans le cas des matériaux anisotropes. Pour ce faire, on va tout d'abord rappeler la manière d'évaluer le premier membre de l'équation (1.16) dans le cas isotrope pour définir ensuite un rapport énergétique analogue et l'appliquer aux données synthétiques fournies à l'aide du code SPEC3D modifié. Ce nouveau rapport énergétique est également stabilisé dans le temps par la diffusion d'onde. De plus, le temps caractéristique d'apparition de la diffusion est influencé par le paramétrage du champ stochastique de propriété mécanique. En particulier, une dépendance linéaire de ce temps vis-à-vis de la longueur de corrélation ℓ est observée.

Dans le cas d'un milieu isotrope, selon [Margerin, 1998, Campillo et al., 1999, Shapiro et al., 2000], la densité d'énergie (potentielle) élastique des ondes P et S lors du régime de diffusion peut être évaluée par :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{P}} = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \times \left(\mathrm{Div}\, \boldsymbol{u}\right)^2 \tag{6.1}$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{S}} = \mu \times \left(\mathrm{Rot}\, \boldsymbol{u}\right)^2 \tag{6.2}$$

Ces écritures ne sont en réalité possibles que grâce au fait que dans le cas isotrope, les polarisations d'ondes sont pures entraînant que l'onde P est irrotationnelle (*i.e.*, $\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{P}} = 0$) et que les ondes S sont rotationnelles (*i.e.*, $\mathrm{Div}\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{S}} = 0$). Cela permet une séparation complète du champ d'onde total en un champ d'onde de compression et un champ d'onde de cisaillement comme on a pu nettement l'observer dans la FIG 5.1 par exemple. Ce n'est plus le cas dans des milieux anisotropes où les modes d'ondes sont impures et où la classification des mouvements en ondes *quasi*-P, *quasi*-S1 et *quasi*-S2 n'est plus possible en termes depolarisation. Par conséquent, la séparation des modes d'ondes à partir du champ total n'est pas possible par cette technique. Les FIGS 5.2-5.3, où l'on constate des traces significativement énergétiques de l'onde *quasi*-P dans le rotationnel du champ, en constituent une illustration imagée. Un autre point concernant le cas anisotrope est que le tenseur d'élasticité ne dépend pas que de deux coefficients isotropes comme le suggère les formules (6.1-6.2).

Pour ces raisons, nous proposons, au lieu d'étudier le rapport énergétique entre des ondes P et S, d'évaluer le rapport énergétique entre les composantes rotationnelles et irrotationnelles du champ. La densité d'énergie élastique de ces 2 types d'ondes est définie par :

$$\mathcal{E}_{div} = \left(\frac{\lambda^{eqv}}{2} + \mu^{eqv}\right) \times \left(\mathrm{Div}\,\boldsymbol{u}\right)^2 \tag{6.3}$$

$$\mathcal{E}_{rot} = \mu^{eqv} \times \left(\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{u}\right)^2 \tag{6.4}$$

où, à part le changement de dénomination par rapport aux équations (6.1-6.2), apparaît le couple des coefficients de Lamé équivalents. Ces deux coefficients du tenseur d'élasticité isotrope le plus proche du tenseur d'élasticité local anisotrope, dont l'expression est donnée par les équations (2.12-2.13), jouent ici le rôle de normalisation.

REMARQUE 6.1. *Il est trivial de noter que quand le milieu est isotrope, les expressions (6.4) et (6.3) redeviennent respectivement (6.1) et (6.2).*

Il convient de noter que dans la pratique de notre simulation, le rapport énergétique, ci-dessous désigné Υ_Ω, est quantifiée d'une façon globale dans le domaine physique $\boldsymbol{\Omega}$

$$\Upsilon_\Omega = \frac{\mathcal{E}^{\Omega}_{div}}{\mathcal{E}^{\Omega}_{rot}} \tag{6.5}$$

où $\mathcal{E}^{\Omega}_{div}$ et $\mathcal{E}^{\Omega}_{rot}$ sont les intégrales en espace des densités d'énergie :

$$\mathcal{E}^{\Omega}_{div} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \left(\frac{\lambda^{eqv}(\boldsymbol{x})}{2} + \mu^{eqv}(\boldsymbol{x})\right) \times \left(\mathrm{Div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6.6}$$

$$\mathcal{E}^{\Omega}_{rot} = \int_{\boldsymbol{\Omega}} \mu^{eqv}(\boldsymbol{x}) \times \left(\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6.7}$$

Un domaine physique $\boldsymbol{\Omega}$ défini par $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, -1500\mathrm{m} \leq x_1, x_2 \leq 1500\mathrm{m}\,;\, -400\mathrm{m} \leq x_3 \leq 0\mathrm{m}$ est alors étudié. Il va être rempli par des matériaux hétérogènes anisotropes aléatoires dont la densité volumique $\rho = 2000\mathrm{kg/m^3}$ et le modèle stochastique de champ de tenseur d'élasticité est celui défini par l'équation (3.196) avec le tenseur moyen isotrope correspondant aux vitesses $c_{\mathrm{P}} = 1730\mathrm{m/s}$ et $c_{\mathrm{S}} = 1000\mathrm{m/s}$. Les sollicitations ponctuelles ont la forme d'un signal de Ricker de fréquence centrale $f_o = 10\mathrm{Hz}$ avec retard $t_o = 0.3\mathrm{s}$. Comme on a l'intention d'établir une stabilisation ressemblant à l'égalité (1.16) qui se vérifie, d'après [Ryzhik

et al., 1996, Margerin, 1998], indépendemment de la source, deux configurations de l'excitation, nommées *source "S"* et *source "P"*, seront considérées. La première, étant une source unidimensionnelle située au centre de la surface libre $x_3 = 0$ génère en champ proche principalement des polarisations transversales. La seconde, étant une source explosive située en profondeur ($x_1 = x_2 = 0; x_3 = -100$), génère principalement des mouvements longitudinaux.

Les conditions aux limites absorbantes PML sont *a priori* appliquées partout autour de $\mathbf{\Omega}$ sauf à la surface libre $x_3 = 0$ afin de simuler un demi-espace. Par contre, pour que les estimations du régime de diffusion sont justifiables, l'énergie d'ondes doit rester assez longtemps, par rapport au temps de libre parcours moyen du milieu, dans le domaine $\mathbf{\Omega}$. Pour ce faire, il faut que (i) le libre parcours moyen de transport $\ell^\star$ du milieu soit relativement petit devant la géométrie du $\mathbf{\Omega}$, et/ou que (ii) les ondes soient artificiellement enfermées dans ce domaine. La condition (i) se réalise si la fluctuation est forte et/ou la longueur de corrélation ℓ de l'hétérogénéité [39] est petite. Concernant la deuxième condition, si le libre parcours moyen n'est pas assez petit, on recours à une configuration où la condition aux limites de Neumann (surface libre) est appliquée à toutes les frontières de $\mathbf{\Omega}$. Les différentes configurations concernant l'hétérogénéité et la condition aux limites sont regroupées dans le TAB 6.1. Les simulations faites avec ces configurations sont consécutivement présentées dans la suite.

CONFIG.	δ	δ_G	ℓ	C.L.
I-a	0	0.6476	50 m	PML
I-b	0.6	0	50 m	PML
I-c	0.5	0.3327	50 m	PML
II-a	0	0.5387	50 m	PML
II-b	0	0.5387	60 m	PML
II-c	0	0.5387	70 m	PML
II-d	0	0.5387	80 m	PML
II-e	0	0.5387	90 m	PML
III-a	0	0.4317	50 m	PML
III-b	0	0.4317	60 m	PML
III-c	0	0.4317	70 m	PML
III-d	0	0.4317	80 m	PML
III-e	0	0.4317	90 m	PML
IV-a	0	0.1074	50 m	PML
IV-b	0	0.1074	50 m	Neumann
V-a	0.1	0	50 m	PML
V-b	0.1	0	50 m	Neumann

TAB. 6.1 – Configurations de l'hétérogénéité et de la condition aux limites.

[39] dans un souci de simplicité, des hétérogénéités isotropes, *i.e.* $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell$

6.1.1 Deux régimes d'ondes pour de fortes fluctuations

En partant de l'hypothèse d'une fluctuation forte, les trois premières configurations, à savoir les CONFIGS (I-a-c) dans le TAB 6.1, ont une même longueur de corrélation $\ell = 50\mathrm{m}$ ainsi qu'un même niveau de fluctuation $\delta_{|C|} = 0.6$ (la fluctuation de la norme du tenseur d'élasticité donnée en fonction de δ et δ_{G} par l'équation (3.127)). En analysant les paramètres de fluctuation fournis par le TAB 6.1, on peut apercevoir que la CONFIG (I-a) est fortement anisotrope, que la CONFIG (I-b) est au contraire strictement isotrope et que la CONFIG (I-c) est un cas intermédiaire de ces deux configurations extrêmes. Les évolutions temporelles du champ d'ondes dû à la source "S" (champ de valeur absolue de vitesse de particule) simulé correspondant à ces trois configurations sont respectivement affichées dans les FIG 6.1, 6.2 et 6.3 pour la surface libre $x_3 = 0$. Les mêmes instantanés pour le plan vertical $x_2 = 0$ sont visualisées dans les FIG 6.4, 6.5 et 6.6. On y constate deux régimes d'ondes complètement différents correspondant aux deux premiers paramétrages : le champ d'ondes du cas "anisotrope" est manifestement propagatif en espace d'une façon isotrope tandis que celui du cas "isotrope" semble être fortement localisé à proximité de la source, dans les zones *a priori* molles du milieu. Dans les FIG 6.3 et 6.6 correspondant aux la CONFIG (I-c), les images similaires de la localisation sont constatées mais cette fois l'énergie principale d'ondes s'étale un peu plus dans l'espace. En termes d'énergie, on calcule l'énergie élastique totale[40] compris dans Ω et ensuite on la normalise par rapport à son maximum en temps. Les évolutions temporelles de cette énergie normalisée correspondant aux 3 configurations sont tracées dans la FIG 6.7-a. On y constate que l'énergie du cas "isotrope" (courbe noire) diminue beaucoup plus lentement par rapport à celle du cas "anisotrope" (courbe bleu foncé). Ainsi, la courbe du cas intermédiaire (bleu clair) s'intercale entre les deux autres courbes. La distinction de ces deux régimes se confirme. Une explication physique possible du point de vue local pour cette différence est la suivante : bien que la fluctuation globale du tenseur soit la même, le contraste entre les zones en espace se concentre seulement sur deux coefficients d'élasticité dans le cas "isotrope", elle facilite le fait que les ondes soient piégées ; au contraire, dans les cas ou $\delta_{\mathrm{G}} \neq 0$, le contraste est partagé par 21 coefficients (plus δ_{G} est grand, moins le maximum de contraste de coefficients est prononcé), une fluctuation plus graduelle des coefficients favorise la transmission d'ondes.

Si maintenant on s'intéresse au caractère diffusif du champ d'onde, qui serait détecté par le fait que le rapport énergétique Υ_Ω entre les mouvements rotationnel et irrotationnel se stabilise à une valeur indépendante de la nature et de la position de la source, on effectue des simulations supplémentaires avec une source "P" pour toutes les 3 configurations. À chaque fois de ces 6 simulations, l'évolution temporelle du rapport Υ_Ω est calculée à l'aide de l'équation (6.5) et est tracée dans la FIG 6.7-b. On y constate que pour le cas "anisotrope", les courbes de Υ_Ω, (bleu foncé et rouge respectivement pour les sources "S" et "P"), se stabilisent à une même valeur d'environ 0.167 un peu avant 1 seconde. Ce n'est pas le cas pour les deux autres configurations. Pour le cas "isotrope", ces deux courbes (noire et jaune pour "S" et "P") ne coïncident à aucun moment dans le temps d'observation et elles ne se stabilisent pas. Pour le cas intermédiaire, le critère de diffusion ne semble être réalisé qu'au bout d'un temps très long (d'environ 11.44 secondes) où les deux courbes (bleue ciel et violet pour "S" et "P") manifestent leur coïncidence et leurs stabilisations à une valeur d'environ 0.113, *i.e.* plus petite que celle du cas "anisotrope". La discrimination de ces deux régimes se confirme à nouveau. Une explication est possible

[40] à savoir, le dernier terme du second membre de l'équation (4.118)

concernant le libre parcours moyen de transport $\ell^\star$. Apparemment, $\ell^\star$ diminue plus vite avec δ qu'avec δ_{G}. Cette longueur est donc plus petite dans le cas "isotrope" que dans le cas "anisotrope". On semble se trouver dans un scénario où, pour les fréquences les plus énergétiques, $\ell^\star$ du cas "isotrope" pourrait vérifier le critère de Ioffe-Regel de localisation, *i.e.* elle est inférieure à $\frac{\lambda}{2\pi}$ tandis que $\ell^\star$ du cas "anisotrope" serait supérieur à ce seuil.

6.1.2 Vers une identification de ℓ à partir de propriétés diffusives du champ d'onde

On a constaté dans l'image de la stabilisation (FIG 6.7-b, courbes rouge et bleu foncé) que l'équipartition entre les composantes rotationnelle et irrotationnelle du champ d'onde ne s'établit qu'au bout d'un temps caractéristique. D'une façon intuitive, plus le milieu est diffractant, moins ce temps est long. Ainsi, l'idée de cette section est d'exploiter l'estimation de ce temps caractéristique, qu'on va nommer dans la suite *temps de stabilisation* et désigner par τ_s, afin d'identifier le paramétrage du champ stochastique de tenseur d'élasticité. Pour les raisons mentionnées ci-dessous, on se limite aux cas de fluctuations fortes. Deux niveaux de fluctuation $\delta_{|c|} = 0.5$ et $\delta_{|c|} = 0.4$ sont considérés. D'ailleurs, dans un souci d'éviter les éventuelles localisations constatées dans la sous-section 6.1.1, les paramétrages sont tous à $\delta = 0$. Cela signifie, selon l'équation (3.128), que l'autre paramètre de fluctuation est $\delta_{\mathrm{G}} = 0.5387$ ou $\delta_{\mathrm{G}} = 0.4317$ en concordant avec 2 niveaux $\delta_{|c|}$ de fluctuation globale. Pour chacun de ces niveaux de fluctuation, 5 longueurs de corrélation spatiale différentes ℓ sont considérées. Ces paramétrages correspondent aux configurations (II-a-e) et (III-a-e) figurées dans le TAB 6.1.

À l'issue des simulations, des courbes similaires à celles de la FIG 6.7-b (qui sont enregistrées chaque 0.01s entre 0 et 12s) sont obtenues. Pour faciliter la détection de τ_s, ces courbes sont lissées à l'aide d'une fenêtre glissante de temps de taille 0.2s, moyennant ainsi les évolutions. Les courbes lissées $\overline{\Upsilon}_\Omega$ correspondant à $\delta_{|c|} = 0.5$ et $\delta_{|c|} = 0.4$ sont affichées respectivement dans la FIG 6.8-a et b. Le temps de stabilisation est par commodité détecté sur les courbes rouges comme suit :

$$\tau_s = \min \arg\Big\{ \big|\overline{\Upsilon}_\Omega(\tau) - \mathsf{E}_{t>\tau}\left\{\overline{\Upsilon}_\Omega(t)\right\}\big| < 0.01\overline{\Upsilon}_\Omega(\tau)\Big\} \tag{6.8}$$

Les τ_s détectés, affichés par les marqueurs de couleurs jaune et violet pour $\delta_{|c|} = 0.5$ et $\delta_{|c|} = 0.4$ et de formes différentes pour les différentes longueurs de corrélation ℓ, sont superposés avec les courbes correspondantes de FIG 6.8. Pour mettre en évidence l'interdépendance entre τ_s et ℓ, une synthèse des τ_s estimés en fonction de ℓ est visualisée dans la FIG 6.9.

On constate dans la FIG 6.8 que pour chaque $\delta_{|c|}$ fixé, le rapport énergétique $\boldsymbol{\Upsilon}_\Omega$ se stabilise à une même valeur (0.146 et 0.132 respectivement pour $\delta_{|c|} = 0.5$ et $\delta_{|c|} = 0.4$) quelque soit la longueur de corrélation. On y observe également que l'équipartition des modes d'onde s'établit à un temps τ_s qui augmente avec ℓ et qui *a priori* diminue avec $\delta_{|c|}$. Ces observations se confirment dans la FIG 6.9. Sur cette figure, on peut adopter dans un premier temps une loi affine pour la dépendance entre τ_s et ℓ

$$\tau_s = t_o + \alpha\ell \tag{6.9}$$

$t_o = 0.3$s étant le temps caractéristique de la source Ricker et la pente α vaut respectivement $0.0107s/m$ et $0.0153s/m$ pour $\delta_{|c|} = 0.5$ et $\delta_{|c|} = 0.4$. Le point sortant de cette loi ($\delta_{|c|} = 0.4$

et $\ell = 90\mathrm{m}$) peut s'expliquer par le fait que son libre parcours moyen, le plus grand de tous les paramétrages, se trouve dans une autre échelle par rapport à la taille géométrique du $\mathbf{\Omega}$. À terme, vu l'ensemble des marqueurs violet, d'autres modèles d'ordre plus élevé peuvent être considérés. Malgré le caractère qualitatif du choix de modèle de dépendance entre τ_s et ℓ, la tendance

$$\lim_{\ell \to 0} \tau_s = t_o \tag{6.10}$$

peut être manifestement constatée. Bien que la limite $\ell \to 0$ ne puisse jamais être atteinte (d'une part, il n'existe pas de tels milieux et d'autre part, cette longueur de corrélation devenant très petite par rapport à la longueur d'onde, la diffraction n'aura plus lieu et sera remplacée par une propagation dans un milieu effectif), cette tendance est un argument intéressant pour justifier la qualité de nos calculs.

6.1.3 Discussion sur le niveau stabilisé du rapport énergétique Υ_Ω

Dans les sections précédentes, différentes simulations ont mis en évidence que si l'équipartition entre les composantes irrotationnelle et rotationnelle se manifeste, la valeur à laquelle le rapport énergétique se stabilise est indépendante de l'excitation (sa nature, sa position) et de l'hétérogénéité (sa longueur de corrélation). Les questions qui se posent maintenant sont (i) est-ce que cette valeur est justifiable ? et (ii) comment elle dépend de l'amplitude de la fluctuation du champ de propriétés mécaniques ?

On revient à la seule référence analytique disponible pour l'instant, à savoir l'égalité (1.16) écrite pour les milieux isotropes. Le second membre de cette équation vaut environ $\Upsilon^{iso} = 0.1$ pour les vitesses correspondant au tenseur moyen isotrope (qui sont $1730\mathrm{m/s}$ et $1000\mathrm{m/s}$ respectivement pour les ondes P et S). Inspiré par la REMARQUE 6.1, on considère des matériaux isotropes ou faiblement anisotropes. Les simulations sont faites dans un premier temps avec les CONFIGS (IV-a) et (V-a). Leurs rapports calculés par l'expression 6.5 sont affichés en couleurs bleu et rouge dans la FIG 6.10. Dans ces deux cas, les courbes dues à la source "S" (en ligne continue) n'ont pas tendance à coïncider aux celles dues à la source "P" (en cercles). Le régime de diffusion n'y est pas observé. Cela peut s'expliquer par le fait qu'une fluctuation trop faible impose un très long libre parcours moyen de transport $\ell^\star$. Quand ce dernier est suffisemment grand par rapport à la géométrie du $\mathbf{\Omega}$, il n'y a que des événements de diffraction simple avant que le signal soit dominé par les erreurs numériques. Pour prolonger le parcours des ondes sans augmenter la taille du Ω, les conditions aux limite de Neumann sont appliquées à la place des PML. Les résultats sont également présentés dans la FIG 6.10, cette fois en couleurs jaune et noir. La stabilisation avec coïncidence des courbes jaunes et noires (pour les source "P" et "S") est constatée pour les deux paramétrages, bien qu'elle soit, logiquement, beaucoup plus tardive que celles observées pour les grandes fluctuations. De plus, la valeur à laquelle Υ_Ω se stabilise est comparable avec Υ^{iso}.

D'ailleurs, en se basant sur les derniers calculs faits avec les CONFIGS (II-a-e), (III-a-e), (V-b) on a tendance à juger que Υ_Ω diminue avec le niveau d'anisotropie δ_{G} et qu'à une faible anisotropie, le rapport analytique Υ^{iso} de l'espace infini isotrope est appliquable. Bien qu'il faille approfondir l'influence des conditions aux limites sur ce rapport énergétique, et que le point important soit le phénomène de stabilisation lui-même et son temps caractéristique τ_s, cette observation pourrait constituer un indicateur intéressant sur l'anisotropie du milieu.

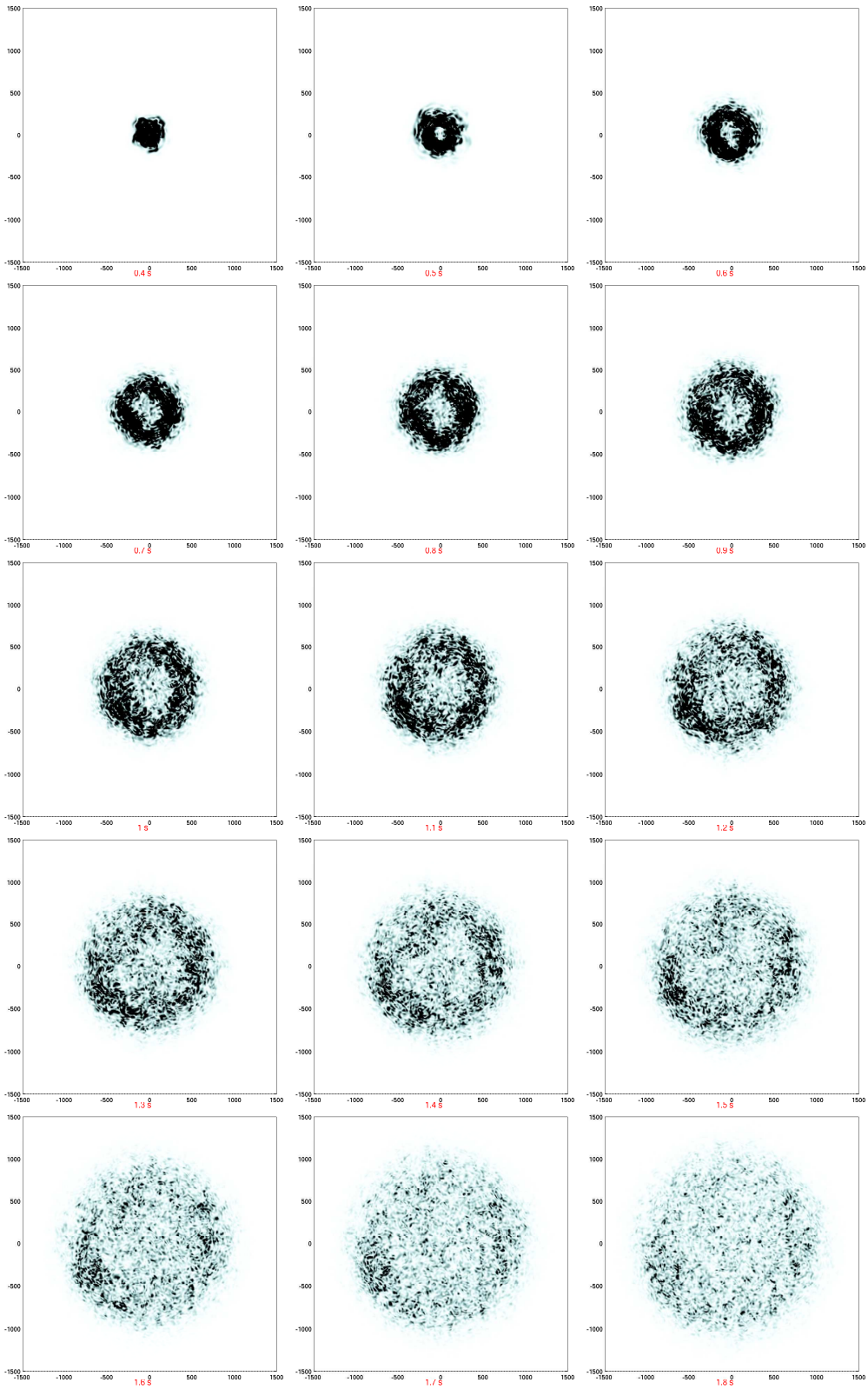


FIG. 6.1 – Évolution temporelle du champ de module de vitesse à la surface ($x_3 = 0$) pour le paramétrage "anisotrope" $\delta = 0$; $\delta_G = 0.6476$ entre 0.4s et 1.8s

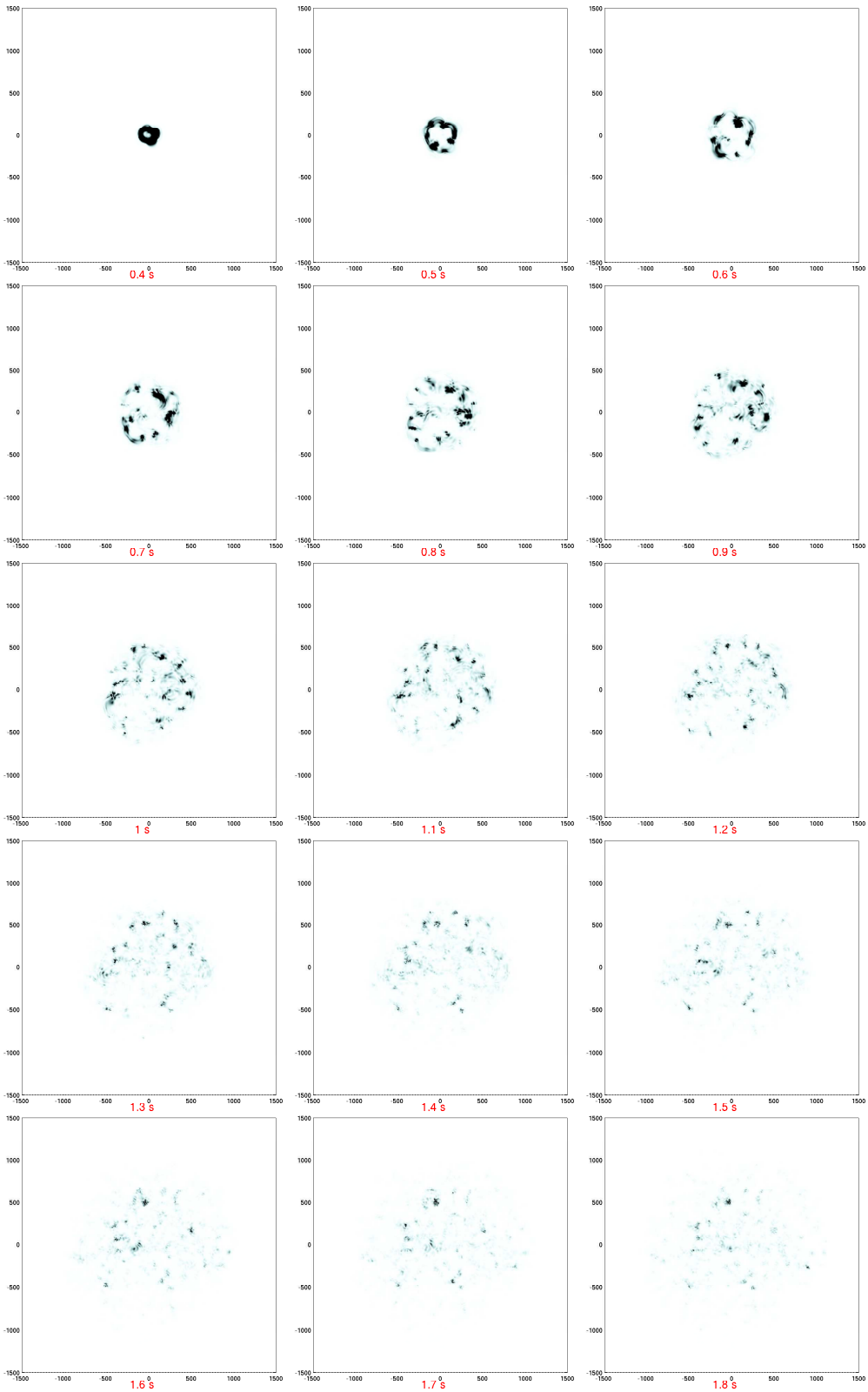


FIG. 6.2 – Évolution temporelle du champ de module de vitesse à la surface ($x_3 = 0$) pour le paramétrage "isotrope" $\delta = 0.6;\ \delta_G = 0$ entre 0.4s et 1.8s

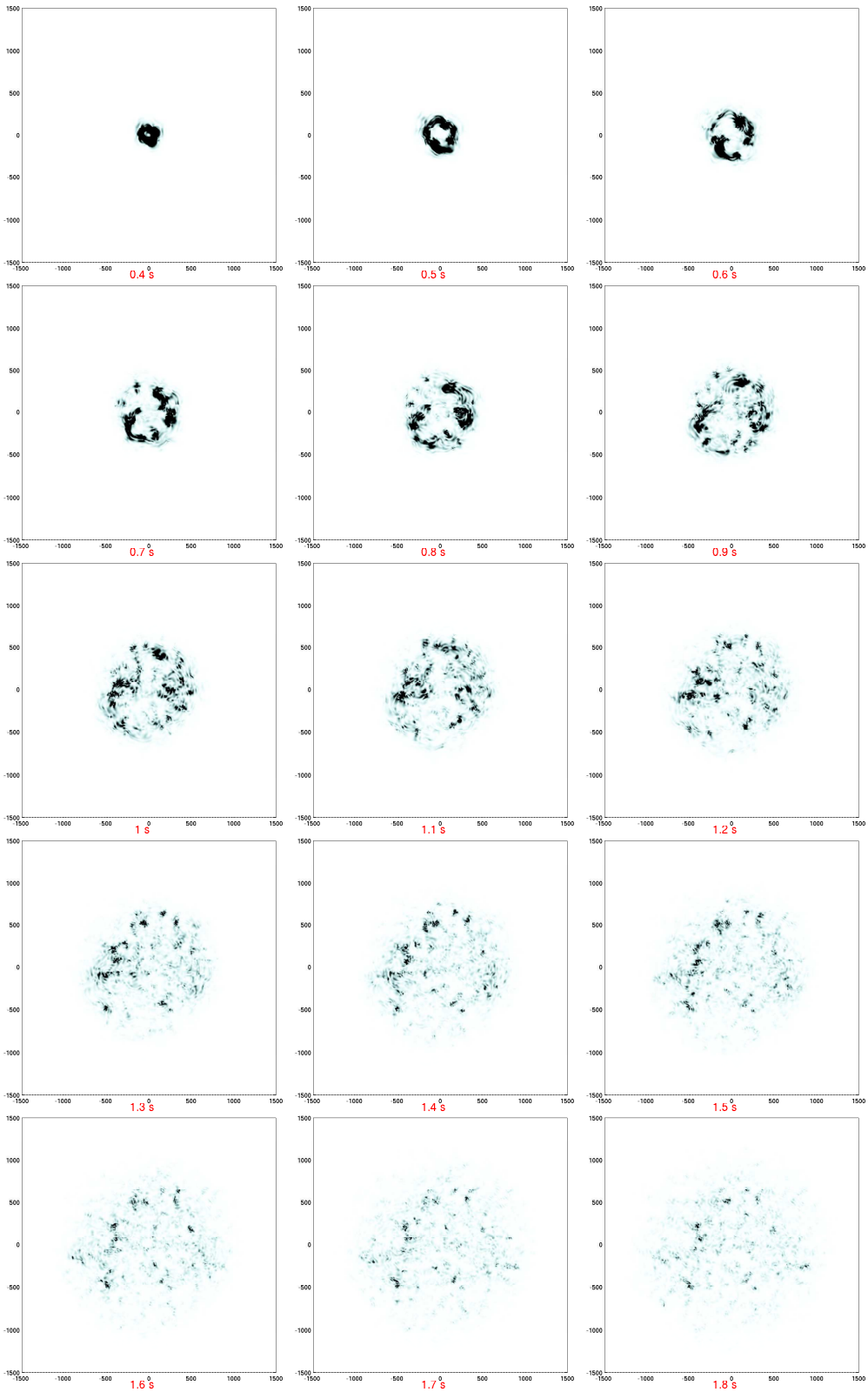


FIG. 6.3 – Évolution temporelle du champ de module de vitesse à la surface ($x_3 = 0$) pour le paramétrage "intermédiaire" $\delta = 0.3$; $\delta_G = 0.5456$ entre 0.4s et 1.8s

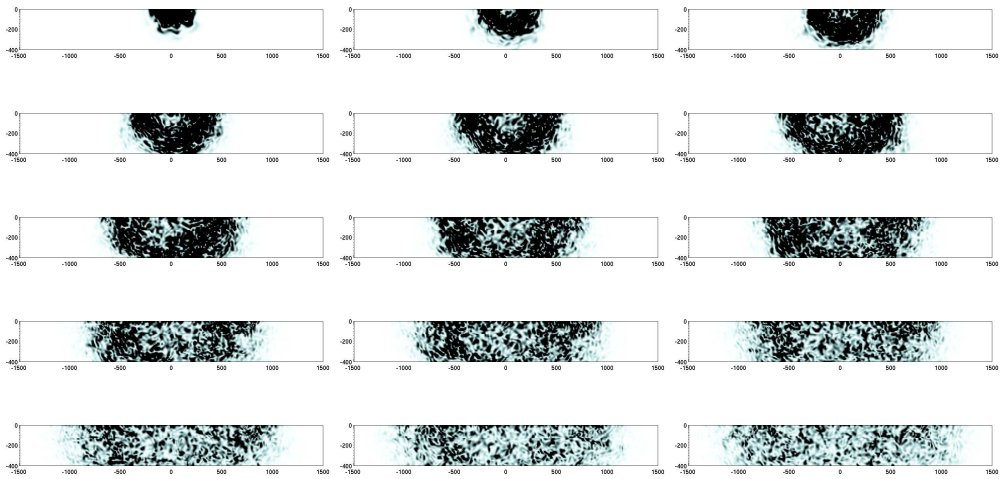


FIG. 6.4 – Évolution temporelle du champ de module de vitesse dans le plan vertical traversant le point d'excitation ($x_2 = 0$) pour le paramétrage "anisotrope" $\delta = 0;\ \delta_{\mathrm{G}} = 0.6476$ entre 0.4s et 1.8s

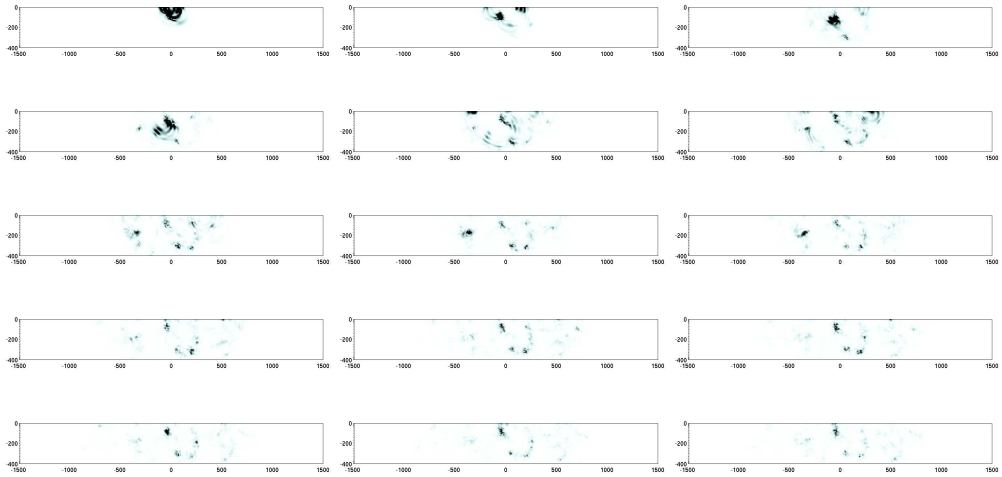


FIG. 6.5 – Évolution temporelle du champ de module de vitesse dans le plan vertical traversant le point d'excitation ($x_2 = 0$) pour le paramétrage "isotrope" $\delta = 0.6;\ \delta_{\mathrm{G}} = 0$ entre 0.4s et 1.8s

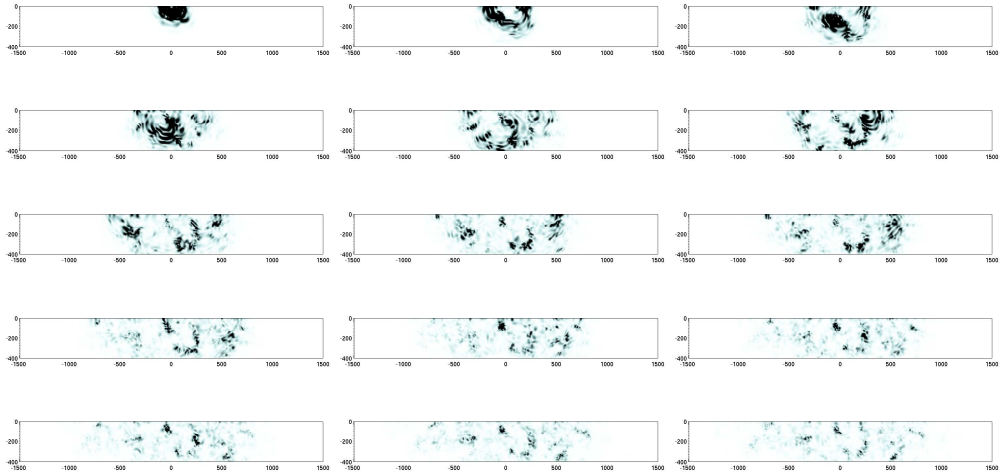
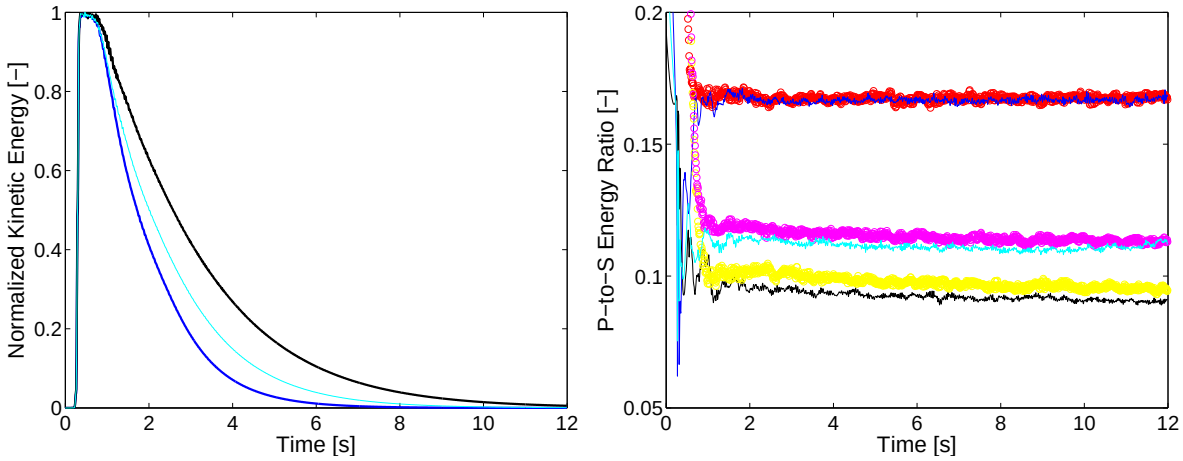


FIG. 6.6 – Évolution temporelle du champ de module de vitesse dans le plan vertical traversant le point d'excitation ($x_2 = 0$) pour le paramétrage "intermédiaire" $\delta = 0.5;\ \delta_G = 0.3327$ entre 0.4s et 1.8s



(a) (b)

FIG. 6.7 – Comparaison énergétique globale entre le paramétrage "isotrope" $\delta = 0.6;\ \delta_G = 0$, le paramétrage "anisotrope" $\delta = 0;\ \delta_G = 0.6476$ et le paramétrage "intermédiaire" $\delta = 0.5;\ \delta_G = 0.3327$. (a) Évolutions dues à une excitation unidirectionnelle des énergies totales normalisées correspondant à ces paramétrages (respectivement en noir, bleu foncé et bleu clair). (b) Évolutions du rapport des énergies rotationnelle et irrotationnelle dues à une source unidirectionnelle (courbes continues : noire, bleu foncé et bleu clair respectivement pour "isotrope", "anisotrope" et intermédiaire) et à une source explosive (cercles : jaune, rouge et violet respectivement pour "isotrope", "anisotrope" et "intermédiaire").

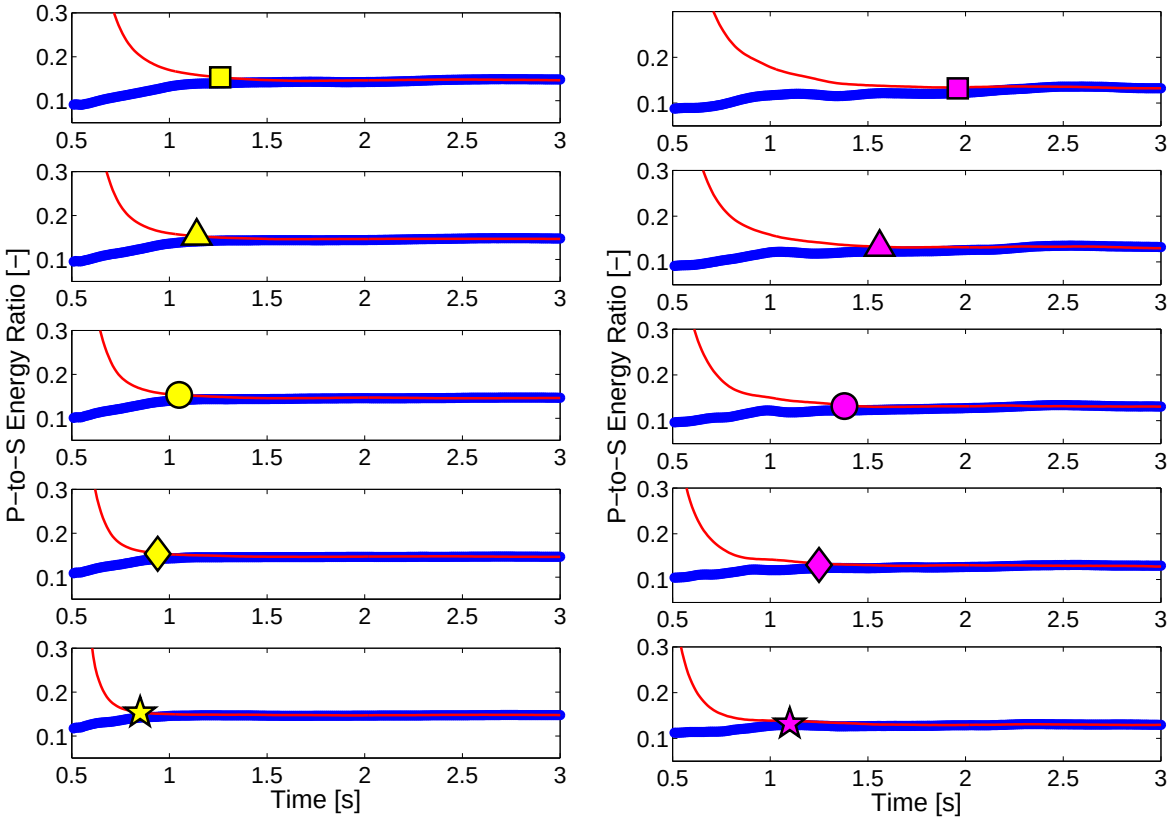


FIG. 6.8 – Stabilisation du rapport des énergies rotationnelle et irrotationnelle dans des milieux ayant $\delta = 0$, $\delta_{\mathrm{G}} = 0.5387$ (à gauche) et $\delta = 0$, $\delta_{\mathrm{G}} = 0.4317$ (à droite) pour différentes longueurs de corrélation. De haut en bas : $\ell = 90\mathrm{m}$, $\ell = 80\mathrm{m}$, $\ell = 70\mathrm{m}$, $\ell = 60\mathrm{m}$ et $\ell = 50\mathrm{m}$. Les courbes rouges représentent les rapports donnés par la source "S" les courbes bleues correspondent à la source "P".

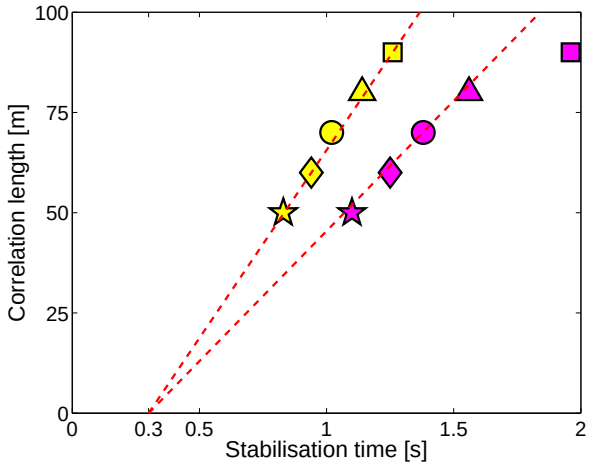


FIG. 6.9 – Dépendance du temps de stabilisation du champ d'onde à la longueur de corrélation du champ de propriétés élastiques. Les marqueurs jaunes et violets correspondent respectivement aux jeux de paramètres de fluctuation $(\delta = 0; \delta_{\mathrm{G}} = 0.5387)$ et $(\delta = 0; \delta_{\mathrm{G}} = 0.4317)$.

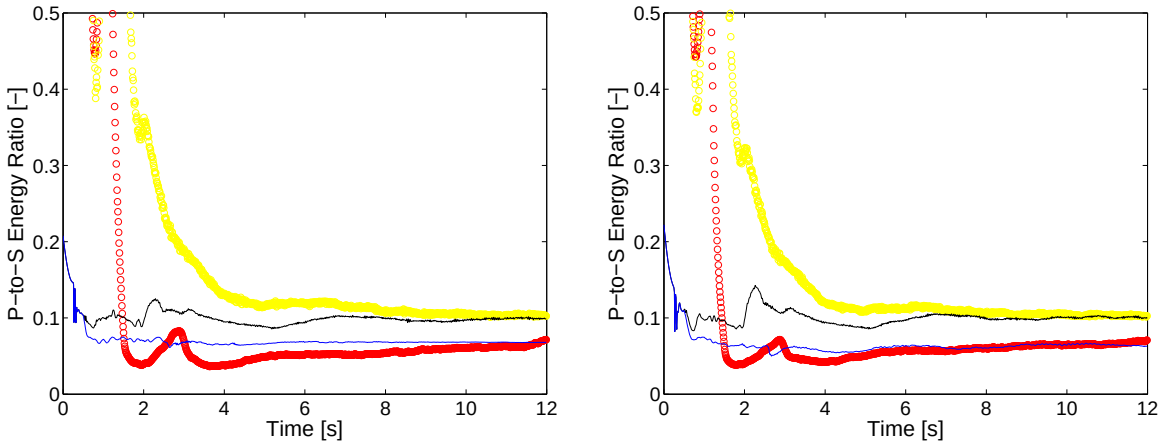


FIG. 6.10 – Rapport des énergies rotationnelle et irrotationnelle dans des milieux ayant pour paramètres $\delta = 0.1$, $\delta_G = 0$ (à gauche) et $\delta = 0$, $\delta_G = 0.1074$ (à droite) pour une même longueur de corrélation $\ell = 50\text{m}$. Les courbes rouges et bleues sont issues des simulations avec PML, celles en jaune et noir correspondent aux C.L. de Neumann. Les courbes continues représentent les rapports donnés par la source "S", les cercles correspondent à la source "P".

6.2 Identification de la directivité et de la vitesse apparente du champ d'ondes

6.2.1 Application de MuSiC pour les milieux homogènes

Dans cette section, on présente une application de la méthode MuSiC pour la détection de la directivité des ondes ainsi que pour l'identification de la vitesse des ondes de surface dans des milieux homogènes. Pour ce faire, un domaine physique défini par $\mathbf{\Omega} = \{-1500\text{m} \leq x_1, x_2 \leq 1500\text{m} \ ; \ -400\text{m} \leq x_3 \leq 0\text{m}\}$ est étudié. Ce dernier est entouré par des couches absorbantes PML afin de modéliser un demi-espace de surface libre $x_3 = 0$. Le milieu est excité par une source ponctuelle, verticale sous forme d'un Ricker ($f_o = 10\text{Hz}$, $t_o = 0.3\text{s}$). Cette force impulsionnelle est placée au centre de la surface libre. L'évolution en temps (jusqu'à 0.6s) et le contenu fréquentiel de cette excitation sont affichés respectivement à gauche et à droite de la FIG 6.11.

Quatre antennes circulaires nommées A, B, C, D sont placées à une distance de 1000m par rapport à la source dans les directions $\theta_A = 0$, $\theta_B = \frac{\pi}{6}$, $\theta_C = \frac{\pi}{3}$ et $\theta_D = \frac{\pi}{2}$. Chacune de ces antennes est formée d'un réseau de 25 capteurs dont 24 régulièrement disposés sur 2 cercles concentriques de rayons 50m et 100m et le dernier placé au centre des cercles. Cette configuration géométrique des capteurs est présentée en détail dans les images de la première ligne de la FIG 6.12 dans lesquelles les capteurs sont représentés par des points de couleur bleu foncé.

Trois matériaux homogènes sont étudiés. Ils sont de même densité volumique $\rho = 2000\text{kg/m}^3$ mais d'anisotropies différentes. Le premier, étant isotrope, est le matériau I dont le tenseur d'élasticité est donné par l'équation (2.31). Le deuxième, étant un matériau isotrope transverse dont l'axe d'axisymétrie est horizontal (HTI pour *horizontal transversly isotropic*), est le matériau IIIa dont le tenseur d'élasticité est donnée par l'équation (2.82). Il convient de rappeler que

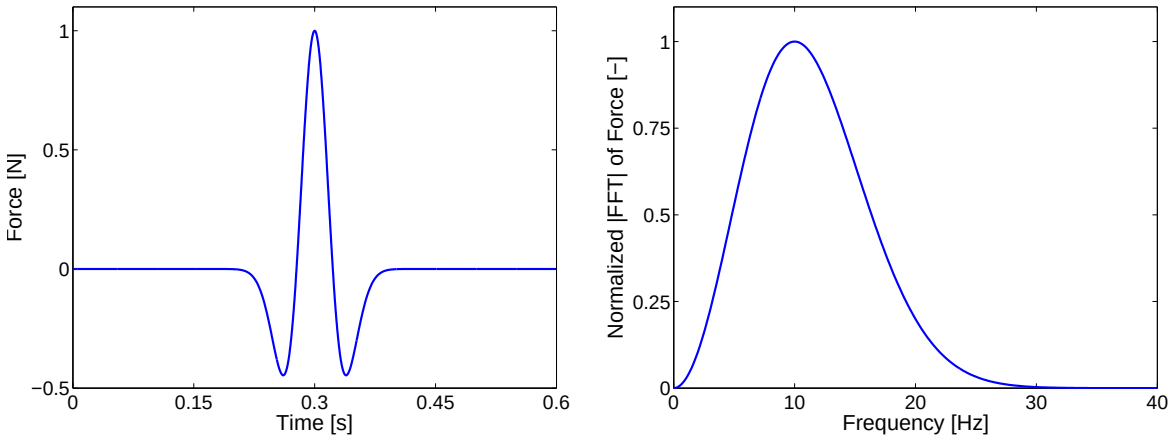


FIG. 6.11 – Évolution temporelle et contenu fréquentiel du Ricker de $t_o = 0.3\text{s}$ et $f_o = 10\text{Hz}$.

dans le **Chapitre** 2 ce matériau est obtenu par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe $\boldsymbol{i}_1$ appliquée au matériau III qui est isotrope transverse du type VTI (*vertical transversly isotropic*) dont l'axe d'axisymétrie est vertical (CF. FIG 2.7). Suivant le même principe, le troisième matériau utilisé dans cette application est obtenu par travers une rotation de $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe $\boldsymbol{i}_1$ appliquée au matériau III. Ce nouveau matériau d'étiquette IIIb est donc isotrope transverse avec un axe de symétrie oblique par rapport à l'horizon.

Avec ce choix de trois matériaux, le champ d'onde apparent à la surface libre est attendu, d'une façon caricaturale, sous formes de fronts respectivement circulaires, "fortement" elliptiques et "faiblement" elliptiques. En effet, les champs d'onde (modules de la vitesse des particules, capturés à la surface et à l'instant $t = 0.9\text{s}$, soit à $t - t_o = 0.6\text{s}$ par rapport au pic principal du Ricker) correspondant à ces 3 simulations sont affichés respectivement de gauche à droite de la première ligne de la FIG 6.12 (en superposition avec les dispositions des antennes). Les formes du champ d'onde sont *a priori* au rendez-vous.

La méthode MuSiC (version fréquentielle) est appliquée pour les signaux d'antenne issus de ces trois simulations. En terme de détection de la directivité des ondes, les résultats calculés à 13Hz par exemple, sont présentés dans les 4 dernières lignes de sous-figures de la FIG 6.12. Ces 12 sous-figures sont en effet la carte de la fonction directionnelle $D(\boldsymbol{\kappa})$ en dépendance des composantes κ_1, κ_2 du vecteur d'onde apparent (horizontal) $\boldsymbol{\kappa}$. L'évaluation de cette fonction donnée par l'équation (B.14) a été faite avec la connaissance exacte du nombre de source $q = 1$. Ces cartes de $D(\boldsymbol{\kappa})$ correspondent respectivement de haut en bas aux antennes A-B-C-D et de gauche à droite aux matériaux I – IIIa – IIIb. Dans chacune de ces images, 12 rayons discontinus découpent le cercle en 12 parts régulières de $\frac{\pi}{6}$. Ces rayons de repère sont comparables avec les rayons gris superposés aux champs d'onde et aux dispositions des antennes présentées dans les images de la première ligne de la FIG 6.12. L'idée de tracer ces repères est que : la détection est jugée robuste une fois que le pic (unique) de la carte $D(\boldsymbol{\kappa})$ se trouve sur le rayon correspondant à l'antenne considérée. On constate manifestement dans cette figure que :

- Dans le cas du matériau isotrope, les maxima des cartes se trouvent exactement sur les rayons. Ce fait signifie que l'algorithme MuSiC détecte avec précision la direction d'arrivée, et donc la localisation de la source, pour toutes les 4 antennes A, B, C et D.
- Dans le cas des matériaux anisotropes, deux possibilités sont observées. Les détections

de la directivité semble robustes pour les antennes A et D. Quant aux antennes B et C, elles donnent de mauvaises directions.

Cette imprécision s'explique par le fait que l'algorithme MuSiC détecte la direction d'arrivée en se basant sur la directivité du vecteur de vitesse de phase tandis que le rayon liant la source et l'antenne est colinéaire au vecteur de vitesse de groupe. Or, ces deux vecteurs ne sont en général pas colinéaires. Si on trace maintenant dans les images situées en premier rang de la FIG 6.12 les flèches rouges perpendiculaires aux fronts d'onde à l'endroit où les rayons (directivité de la vitesse de groupe) l'intersecte, elles représentent la directivité des vitesse de phase. On y observe effectivement des inclinaisons entre ces deux types de direction pour les antennes B et D dans le cas de matériaux anisotropes. En effet, si l'on estime la direction d'arrivée par :

$$\theta_i^{obs} = \mathrm{atan}\left(\frac{\kappa_1^i}{\kappa_2^i}\right) \qquad \text{pour } i = \text{B,C} \tag{6.11}$$

alors les différences $\theta_B^{obs} - \theta_B$ ou $\theta_C^{obs} - \theta_C$ entre les directivités observées et les directivités attendues coïncident bien avec les éventuels décalages correspondant entre les flèches rouges et les rayons gris dans les images du premier rang de la FIG 6.12. Dans le cas du matériau isotrope ou bien dans les directions spécifiques (antennes A et D) des cas anisotropes, ces mêmes calculs ne donnent lieu à aucune différence entre θ_i^{obs} et θ_i. La robustesse de l'estimation de la direction d'arrivée est obtenue grâce à la colinéarité entre les vecteurs de vitesse de groupe et de vitesse de phase.

REMARQUE 6.2. *Pour conclure, ces observations sur la directivité d'ondes révèlent une incompatibilité fondamentale de la méthode de MuSiC vis-à-vis des matériaux anisotropes dans des cas avec absence de la colinéarité entre les vitesses de groupe et de phase.*

En terme de vitesses apparentes, on peut également tracer les courbes de dispersion, *i.e.* celles qui représentent la dépendance de la vitesse de phase en fonction de la fréquence, après avoir répété la procédure de la FIG 6.12 pour les différentes fréquences. Ces courbes sont affichées dans la FIG 6.13 dont les sous-figures de haut en bas correspondent respectivement aux matériaux I, IIIa, IIIb. Les courbes marquées par des cercles, des carrés, des astérisques et des diamants sont respectivement calculées par

$$c_i^{obs} = \frac{2\pi f}{|\boldsymbol{\kappa}^i|} \qquad \text{pour } i = \text{A,B,C,D} \tag{6.12}$$

à partir des données fournies par les antennes A, B, C et D avec f dans la gamme de fréquence comprise entre $5\mathrm{Hz}$ et $30\mathrm{Hz}$. On constate que :

- Pour tous ces matériaux et quelle que soit la direction, la vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence[41]. Cette observation confirme que l'onde de surface dans un demi-espace est non-dispersive.
- Dans le cas du matériau isotrope, toutes les courbes correspondent à une vitesse de phase de l'ordre de $920\mathrm{m/s}$ qui n'est rien d'autre que la vitesse de l'onde de Rayleigh en demi-espace isotrope bien connue par $c_\mathrm{R} \simeq 0.92 c_\mathrm{S}$.

[41] à l'exception des basses fréquences où une probable interaction entre l'onde de surface et la couche de PML en base du modèle apparaît.

– Dans les cas des matériaux IIIa et IIIb, l'anisotropie se traduit par le fait que les courbes ne sont pas de même niveau. La différence entre les courbes de la FIG 6.13-b est plus importante que celles de la FIG 6.13-c. Cela est conforme avec les images des fronts d'onde affichées en première lignes de la FIG 6.12. De même, dans chacune de ces deux images, on peut relativement comparer la rapidité des ondes se propageant dans deux des directions parmi θ_A, θ_B, θ_C et θ_D.

Il convient de noter que, hormis le cas isotrope, la comparaison de la vitesse de l'onde dans différentes directions et pour différents matériaux reste très qualitative.

6.2.2 Application de MuSiC pour les milieux hétérogènes

Dans cette section, on applique la procédure adoptée par [Schisselé et al., 2004, 2005] pour la caractérisation de la diffraction d'onde élastique en milieu hétérogène à partir des données d'antenne sismique. Un même domaine physique $\mathbf{\Omega}$ représentant un demi-espace et une même excitation de la section (6.2.1) sont utilisés. Le demi-espace est occupé cette fois par un matériau hétérogène dont le modèle de champ de tenseur d'élasticité est celui défini dans le **Chapitre** 3. La densité volumique est constante et égale à $2000\mathrm{kg/m^3}$. Le tenseur d'élasticité moyen est isotrope et correspond aux vitesses $c_{\mathrm{P}} = 1730\mathrm{m/s}$ et $c_{\mathrm{S}} = 1000\mathrm{m/s}$. Les paramètres de fluctuation sont choisis tels que $\delta = 0$ et $\delta_{\mathrm{G}} = 0.5$. Deux jeux de longueurs de corrélation spatiale sont considérés : l'un modélise une variabilité latérale avec $\ell_1 = \ell_2 = 100\mathrm{m}, \ell_3 = \infty$, l'autre représente une variabilité tridimensionnelle avec $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 100\mathrm{m}$.

Quel que soit le paramétrage, deux antennes identiques à celles de l'application précédente se trouvent à la surface à une distance de $1000\mathrm{m}$ par rapport à l'excitation dans les directions $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_B = 0$. La disposition des antennes est présentée dans la FIG 6.14.

Une fois les signaux temporels, ici l'évolution de la vitesse de particule dans le temps, enregistrés (les images à la première ligne de la FIGS 6.15-6.18), elles font l'objet d'une convolution (équation (B.6)) avec une ondelette de Morlet de paramètre de résolution $\sigma = 5$ [voir Goupillaud et al., 1984, pour plus de détails]. Cette opération a été faite pour chacun des 25 capteurs composant l'antenne à l'aide de la routine gwlCwt de transformée en ondelette continue du GEOPHYSICAL WAVELET LIBRARY [Kulesh et al., 2005]. Les moyennes de l'ensemble des RTF (*i.e.*, représentations temps-fréquence) sont ensuite estimées et affichées dans les images de fond des sous-figures en bas des FIGS 6.15-6.18.

L'extraction des squelettes de ces RTF moyennes est ensuite effectuée pour relever les cellules temps-fréquence les plus représentatives (en terme énergétique) du signal moyen (sur lesquelles l'algorithme MuSiC va être appliqué postérieurement). Pour ce problème d'optimisation où les diffractions susceptibles d'entraîner des concentrations énergétiques isolées du signal en temps et fréquence, l'algorithme des grimpeurs aléatoires (connu sous son appellation anglais *crazy climber* ou bien *hill climbing*) est implémenté. L'avantage de cette méthode [voir Le, 2003, Nguyen, 2007, par exemple], outre la capacité de détecter de multiples arêtes, isolées les unes des autres, est la simplicité. En effet, la carte RTF avec ses reliefs peut être considérer d'une façon imagée comme un champ montagneux. L'idée de cette métaheuristique de type *recuit simulé* (*simulated annealing* en anglais, [voir Robert and Casella, 1999, par exemple]) peut être exprimée par l'image suivante : un grand nombre N_g de grimpeurs indépendants (dont les positions initiales dans la zone sont aléatoires) cherchent aveuglement à monter (ils acceptent rarement de descendre) ; malgré cette motivation de folie, leurs puissances diminuent dans le

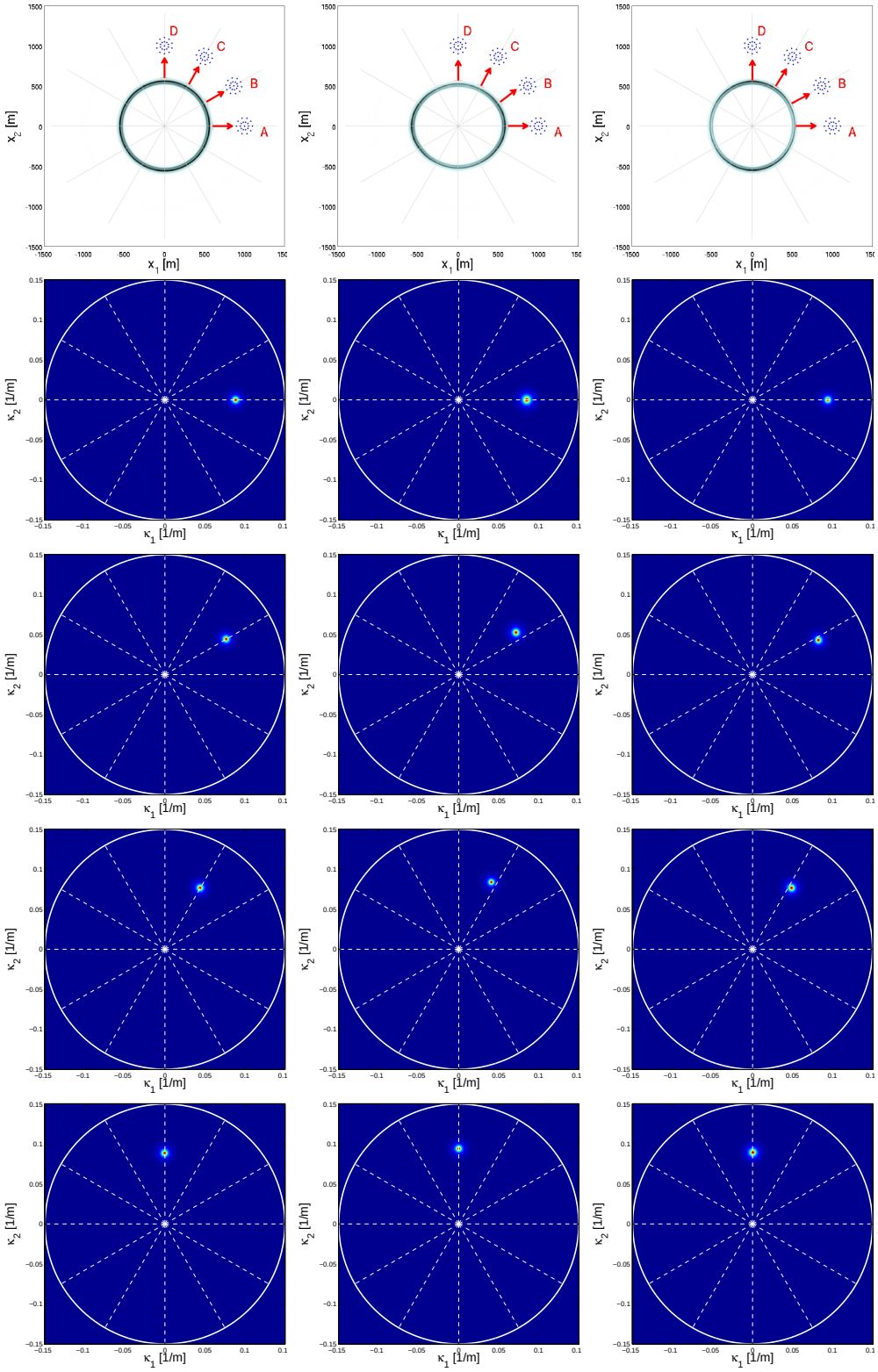


FIG. 6.12 – Applications de l'algorithme MuSiC pour détecter la direction d'arrivée dans des milieux homogènes. De gauche à droite : milieu isotrope, milieu isotrope transverse type HTI et milieu isotrope transverse de type TTI. Du haut en bas : front d'onde observé (dont les flèches rouges sont les normales) superposé à la disposition des antennes sismiques et les back-azimuths détectés à $13Hz$ respectivement par les antennes A, B, C, D.

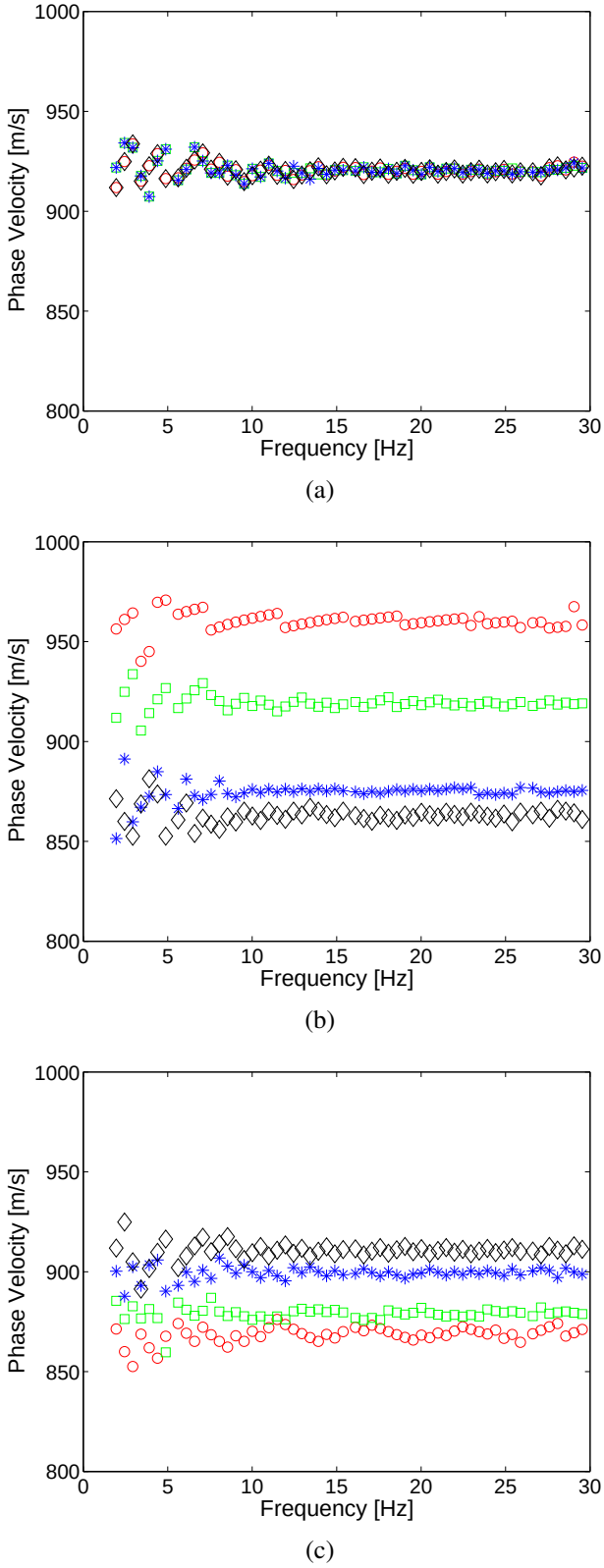


FIG. 6.13 – Courbes de dispersion données par MuSiC pour les demi-espaces homogènes. De haut en bas : milieu isotrope, milieu isotrope transverse type HTI et milieu isotrope transverse de type TTI. Les courbes correspondant aux antennes A, B, C, D sont respectivement marquées par des cercles, des carrées, des astérisques et des diamants.

temps ; à un temps long où tous les grimpeurs sont épuisés, l'image *gelée* de l'ensemble des grimpeurs constitue le squelette du champ RTF ; la densité de concentration des grimpeurs pondérée par l'énergie RTF locale donne par ailleurs le taux de participation de ces arêtes au signal brut. Les images *gelées* sont affichée dans les sous-figures situées en deuxièmes lignes des FIGs 6.15 et 6.18. Les arêtes sont ensuite regroupées selon une procédure de chaînage. Le but de cette étape est de former N_c cellules (morceaux de signal monochromatique) les plus longs (en temps) possibles. Ces cellules sont représentées par des traits blancs superposés à la RTF moyenne dans les images en bas de la FIGs 6.15 et 6.18. Chacune de ces cellules est caractérisée par :

- Un intervalle de temps τ_c
- Une fréquence constante f_c
- Un taux de participation $p_c = N_g^c \times \mathcal{W}(t,f)\big|_{\substack{t\in\tau_c \\ f=f_c}}$

La version fréquentielle de l'algorithme MuSiC est ensuite appliquée pour chacun de ces morceaux de signal. Le nombre q des vecteurs d'onde significatifs donnant le signal le plus ressemblant au signal réel est sélectionné. Le résultat de cette étape est affiché pour le paramétrage ($\ell_1 = \ell_2 = 100\mathrm{m}, \ell_3 = \infty$) dans la FIG 6.16 concernant la directivité d'ondes et dans la FIG 6.17 concernant la vitesse apparente. Dans chacune de ces dernières : les sous-figures (a) et (c) sont issues des données de l'antenne A, calculées respectivement dans les intervalles de temps correspondant à l'onde balistique et aux premières ondes diffractées ; les sous-figures (b) et (d) contiennent des informations analogues pour l'antenne B. Les images à droite dans tous les sous-figures a,b,c,d sont les histogrammes, que l'on peut nommer *histogrammes énergétiques*, des quantités généralisées χ_θ ou χ_c de la directivité ou de la vitesse apparente :

$$\chi_\theta = \alpha_\theta \times p_c \times P^{(cv)}(\boldsymbol{\kappa}^i, f_c) \times \mathsf{atan}\left(\frac{\kappa_1^i}{\kappa_2^i}\right) \tag{6.13}$$

$$\chi_c = \alpha_c \times p_c \times P^{(cv)}(\boldsymbol{\kappa}^i, f_c) \times \frac{2\pi f_c}{|\boldsymbol{\kappa}^i|} \tag{6.14}$$

où α_θ, α_c sont les constantes de normalisation ; $\{\boldsymbol{\kappa}^i,\ i = 1..q\}$ les vecteurs d'onde détectés pour la fréquence f_c dans l'intervalle τ_c associés à leurs puissances $P^{(cv)}(\boldsymbol{\kappa}^i, f_c)$ au sens conventionnel[42] ; p_c le taux de participation de la cellule en question dans la RTF moyenne.

En termes de la détection de la directivité d'ondes, la FIG 6.16a-b montre une identification robuste de la direction d'arrivée. En effet, les histogrammes énergétiques connaissent des pics prédominants se trouvant aux back-azimuts prédéfinis par la disposition de l'antenne par rapport à la source, à savoir respectivement à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et à $\theta = 0$ pour l'antenne A et B. Cette observation peut se ramener à une remarque importante : bien que l'anisotropie puisse entraîner l'imprécision pour l'estimation de la directivité d'onde dans un milieu homogène (voir REMARQUE 6.2), ce n'est plus le cas dans les milieux hétérogènes où l'antenne sismique est placée suffisamment loin de la source. Dans ce cas, l'inclinaison entre les directions de vitesse de phase et de vitesse de groupe est moyennée et s'annule au bout de la distance parcourue qui est grande devant la longueur de corrélation d'hétérogénéité.

En termes de vitesse apparente, les pics principaux des histogrammes énergétiques des FIG 6.17a-b apparaissent à environ $887\mathrm{m/s}$ pour l'antenne A et $939\mathrm{m/s}$ pour l'antenne B.

[42] voir l'équation (B.7)

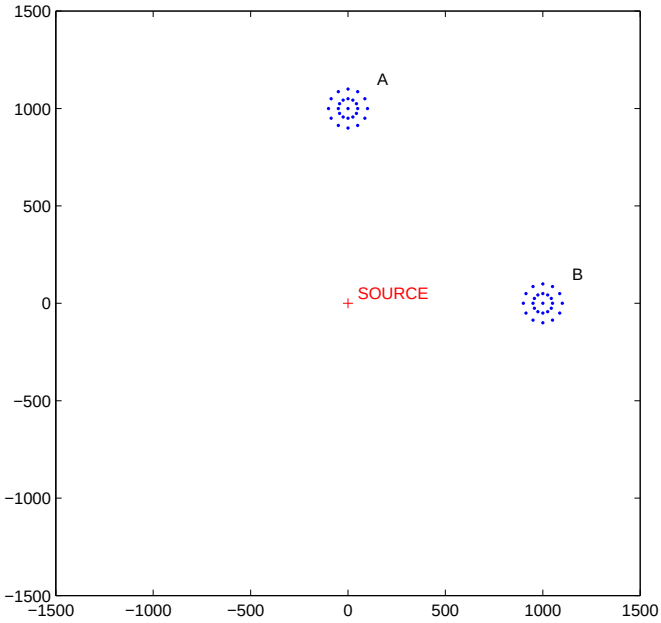


FIG. 6.14 – Disposition des antennes sismiques

Ces valeurs sont comparables avec la vitesse d'onde de Rayleigh du modèle moyen isotrope $(920\mathrm{m/s})$.

Pour les cellules situées après l'arrivée de l'onde balistique, on peut constater dans les FIG 6.16c-d et FIG 6.17c-d que l'onde arrive à l'antenne selon différentes directions et avec des vitesses variées. Cela montre des diffractions multiples présentes dans la coda des signaux.

Une même procédure est également appliquée pour un cas de la variabilité spatiale tridimensionnelle avec $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 100\mathrm{m}$. Les résultats similaires concernant l'antenne B sont présentés dans la FIG 6.19. Par contre, les estimations semblent n'être pertinentes que dans la configuration précédente : l'onde balistique est détectée à $\theta = 16.6°$ au lieu de $\theta = 0°$. Ce manque de performance est probablement dû à l'incompatibilité de l'antenne 2D par rapport de la forte fluctuation 3D.

6.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, différents problèmes de propagation d'ondes dans les milieux anisotropes homogènes ou aléatoirement hétérogènes ont été résolus numériquement dans l'idée de mettre en évidence l'influence des paramètres du champ de propriétés sur le champ d'ondes. En termes d'hétérogénéité, les expériences numériques à fortes fluctuations, où le régime de diffusion est atteint, ont permis de mettre en évidence la dépendance directe de l'apparition de la diffusion à la longueur de corrélation du champ de propriétés. Concrètement, une loi linéaire liant le temps de stabilisation τ_s et la longueur de corrélation ℓ du champ stochastique modélisant le champ de tenseur d'élasticité est mise en évidence. À part ce résultat important, en jouant avec les paramètres de fluctuation δ, et δ_{G}, on a pu d'une part, constater deux régimes d'ondes distincts,

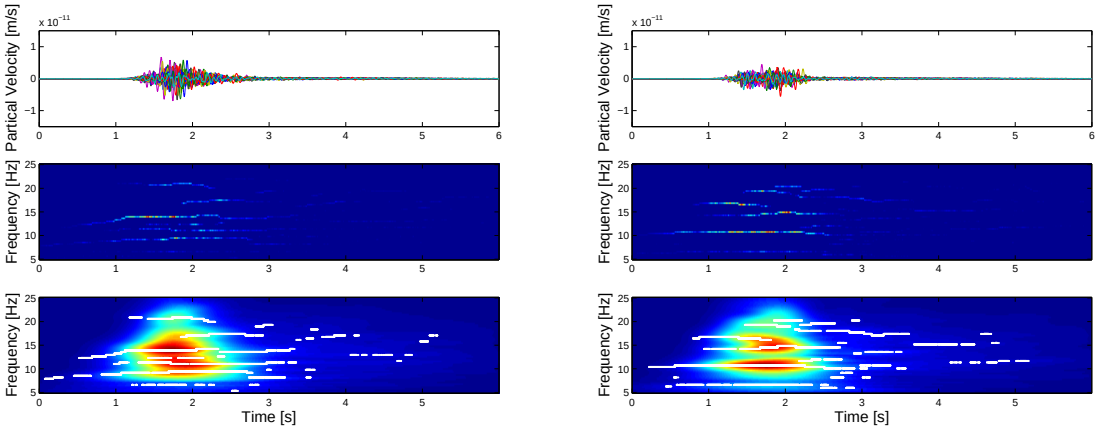
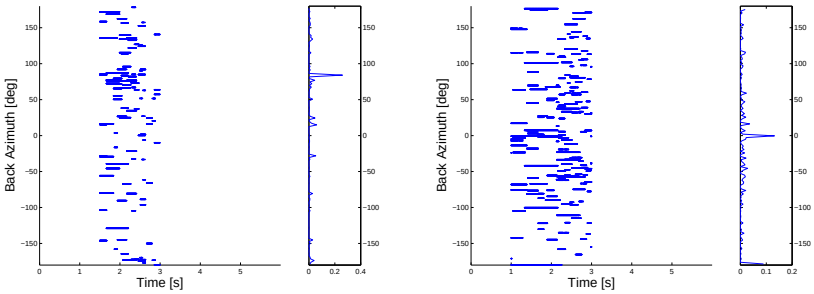
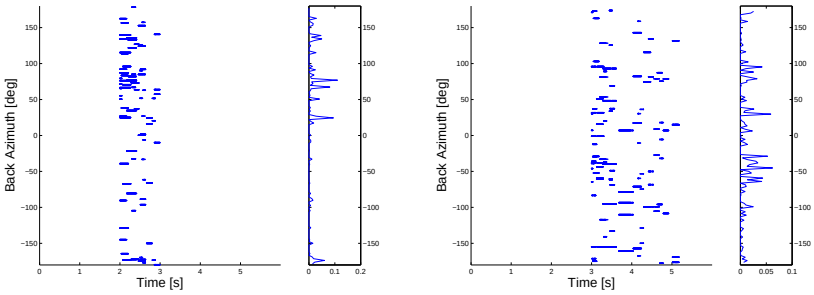


FIG. 6.15 – Extraction du squelette de la représentation temps-fréquence pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = 100\text{m}, \ell_3 = \infty$. De gauche à droite : Antennes A et B. De haut en bas : les signaux bruts des capteurs, l'image gelée des grimpeurs aléatoires et les cellules du squelette (lignes blanches) sont superposées sur la RTF moyenne de l'antenne.

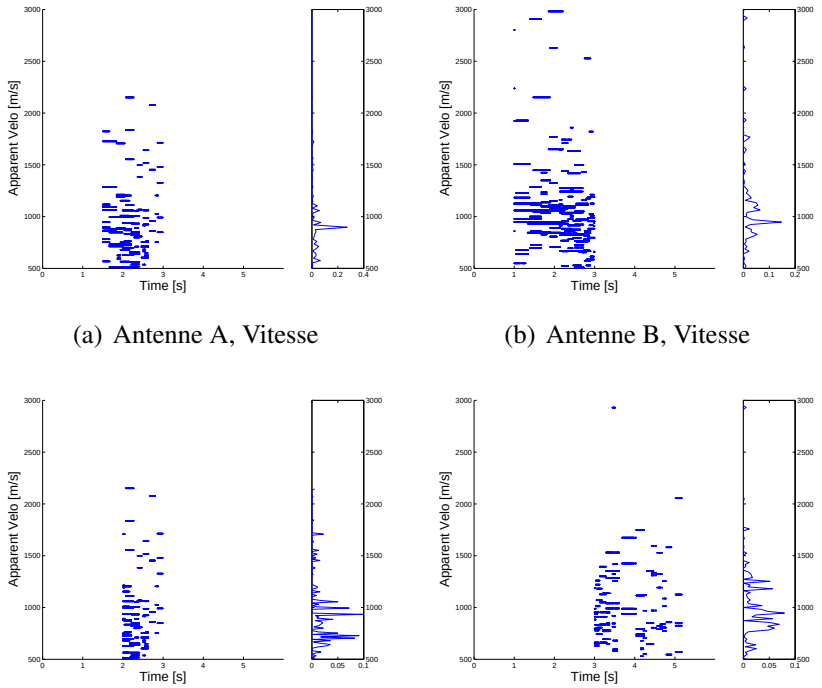


(a) Antenne A, Back Azimuth (b) Antenne B, Back Azimuth



(c) Antenne A, Back Azimuth (d) Antenne B, Back Azimuth

FIG. 6.16 – Détection des directions d'arrivée pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = 100, \ell_3 = \infty$. De gauche à droite : Antennes A et B. De haut en bas : ondes ballistiques et ondes diffractées.



(a) Antenne A, Vitesse (b) Antenne B, Vitesse

(c) Antenne A, Vitesse (d) Antenne B, Vitesse

FIG. 6.17 – Détection des vitesses apparentes pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = 100\text{m}, \ell_3 = \infty$. De gauche à droite : Antennes A et B. De haut en bas : ondes ballistiques et ondes diffractées.

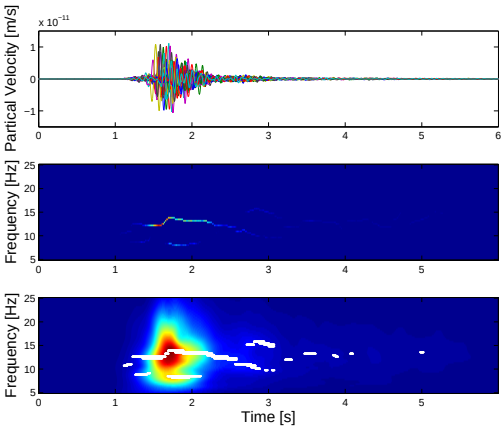
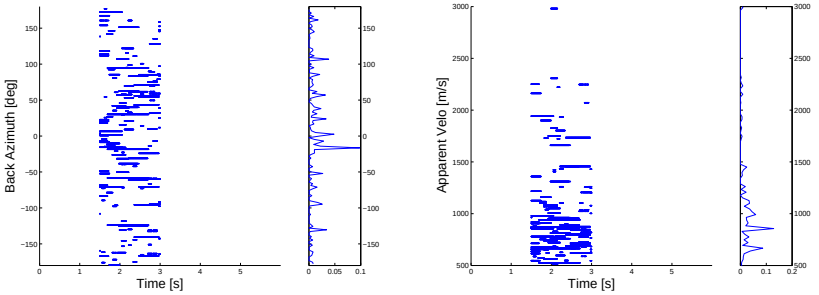
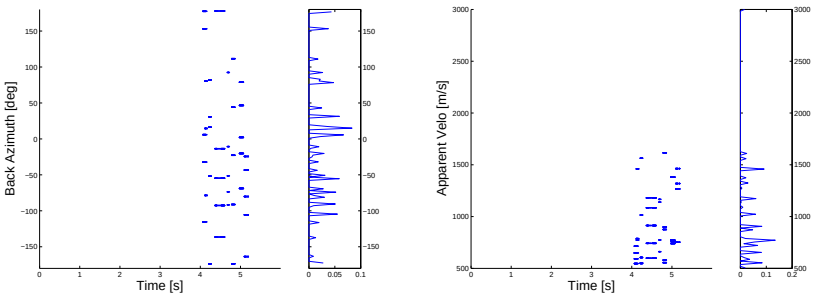


FIG. 6.18 – Extraction du squelette de la représentation temps-fréquence pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 100\text{m}$ à partir des données de l'antenne B. De haut en bas : les signaux bruts des capteurs, l'image gelée des grimpeurs aléatoires et les cellules du squelette (lignes blanches) sont superposées sur la RTF moyenne de l'antenne.



(a) Antenne B, Back Azimuth (b) Antenne B, Vitesse



(c) Antenne B, Back Azimuth (d) Antenne B, Vitesse

FIG. 6.19 – Détections de la directivité d'onde (a-c) et de la vitesse apparente (b-d) de l'antenne B pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 100\mathrm{m}$

diffusion et localisation ; d'autre part observer l'influence de l'anisotropie sur la répartition énergétique des modes dans le régime de diffusion. Dans la deuxième partie du chapitre, les post-traitements imitant le traitement d'antenne en géophysique ont pu d'une part dévoiler une incompatibilité entre la méthode MuSiC (pour la détection de la directivité d'ondes et la localisation de source) avec les milieux anisotropes homogènes. Ce point délicat sera probablement à prendre en compte dans les milieux anisotropes faiblement hétérogènes. Par contre, dans des milieux à fortes fluctuations, le fait que l'inclinaison entre les vecteurs de vitesse de phase et de groupe s'annule en moyenne du fait des hétérogénéïtés aléatoires rend la méthode à nouveau opérationnelle.

Conclusions et Perspectives

Contributions de la thèse

La compréhension des influences de l'anisotropie avec ou sans variabilité spatiale des propriétés mécaniques dans le comportement élastodynamique du matériau à travers des simulations numériques constitue la principale contribution de ce travail de thèse.

Concernant l'anisotropie dans les milieux homogènes, la mise en oeuvre des théories classiques concernant la propagation d'ondes élastiques de volume [Auld, 1973, Cerveny, 2001] ou de surface [Stroh, 1962, Barnett and Lothe, 1985] considérée dans le **Chapitre** 2 pour visualiser les modes d'ondes volumiques et les vitesses d'onde de surface en milieux anisotropes ainsi que sa comparaison avec les simulations (**Chapitre** 5) permettent une compréhension concrète des différentes influences de l'anisotropie sur la propagation d'ondes élastiques. Il convient de noter que plusieurs parmi ces visualisations et simulations tridimensionnelles considérant différentes anisotropies sont inédites à notre connaissance.

Pour la modélisation de la variabilité des propriétés élastiques, en se basant sur le modèle de [Soize, 2006], nous avons proposé au cours du **Chapitre** 3 un modèle stochastique du champ de tenseur d'élasticité. Ce nouveau modèle permet la prise en compte de matériaux plus réalistes (à travers sa capacité de prendre en compte la connaissance *a priori* sur le niveau d'anisotropie du milieu) tout en conservant les propriétés du modèle de Soize [2006] comme le paramétrage minimal (un seul nouveau paramètre à ajouter), la positivité, l'inversibilité. Ce modèle est original à notre connaissance.

Pour la propagation d'ondes élastiques dans les milieux anisotropes aléatoirement hétérogènes, le résultat numérique le plus important de ce travail concerne l'équipartition des modes d'ondes dans le régime de diffusion due à une hétérogénéité forte des propriétés élastiques. Ce phénomène est observé à travers la stabilisation du rapport énergétique entre les mouvements irrotationnels et rotationnels. Sachant que les références analytiques [Ryzhik et al., 1996, Papanicolaou et al., 1996], numériques [Margerin, 1998] ou *in-situ* [Shapiro et al., 2000] sont obtenues avec l'hypothèse du comportement isotrope, notre résultat peut être considéré comme une généralisation empirique de cette théorie. De plus, les études paramétriques présentées dans la première partie du **Chapitre** 6 font preuve des dépendances indéniables de cette stabilisation énergétique aux paramètres du champ stochastique : si le temps de stabilisation manifeste une dépendance linéaire envers la longueur caractéristique de l'hétérogénéité (*i.e.*, la longueur de corrélation), la pente de cette loi affine ainsi que la valeur à laquelle le rapport énergétique se stabilise semble être contrôlées par l'amplitude de la fluctuation.

Dans la deuxième partie du **Chapitre** 6, des expériences numériques imitant la méthode de MuSiC de traitement des antennes sismiques sont réalisées afin d'avoir une idée de la sensibilité

de cette méthode pratique vis-à-vis de l'anisotropie et de l'hétérogénéité. Les simulations et les post-traitements faits avec les milieux homogènes permettent de révéler une incompatibilité entre la méthode MuSiC et l'anisotropie. Il s'agit de l'imprécision lors de l'estimation de la directivité d'ondes due à la non-colinéarité entre les vecteurs de vitesse de phase et de vitesse de groupe. Pour le cas des matériaux anisotropes aléatoirement hétérogènes, les estimations de la direction d'arrivée et de la vitesse apparente sont en revanche raisonnablement obtenues. Apparemment, la moyenne de l'inclinaison entre la vitesse de phase et de la vitesse de groupe s'annule au bout d'un parcours assez long des ondes.

Sur le plan technique, il convient de noter que la prise en compte des différentes complexités (*e.g.* la tridimensionnalité géométrique, le caractère non-borné, la variabilité spatiale aléatoire, l'anisotropie) lors des simulations numériques considérées dans ce travail est possible grâce à la capacité d'exploiter les progrès en termes de l'infrastructure informatique (*e.g.* le parallélisme de calcul et de stockage) pour résoudre avec précision les problèmes élastodynamiques ayant un nombre important de degrés de liberté du logiciel SPEC3D [Festa and Vilotte, 2005]. Sachant que ce code de calcul parallèle par éléments finis spectraux, était destiné aux milieux 3D homogènes isotropes et déterministes avec la possibilité d'employer des PMLs pour les conditions aux limites de radiation infinie, une partie importante de ce travail a été consacrée aux adaptations du code vis-à-vis du comportement anisotrope et de l'hétérogénéité aléatoire. Les trois principales contributions au développement du code SPEC3D sont présentées dans le **Chapitre** 4. Il s'agit en premier lieu de l'implémentation d'un générateur parallèle des réalisations du champ stochastique proposé dans le **Chapitre** 3 modélisant le tenseur d'élasticité anisotrope aléatoire avec variabilité spatiale. Ensuite, comme les tenseurs d'élasticité locaux donnés par ce modèle de champ sont généralement ceux des matériaux anisotropes tricliniques (dont le nombre des coefficients indépendants est 21), le calcul de la force interne est adapté à l'anisotropie au niveau élémentaire que ce soit pour le domaine physique ou pour les PMLs. Concernant ces couches absorbantes, son incompatibilité avec l'anisotropie (*e.g.*, l'instabilité à temps long rigoureusement étudiée dans [Bécache, 2003, Bécache et al., 2003]) est également abordée. Deux options pour stabiliser le schéma numérique concerné sont implémentées dans le code.

Recommandations pour de futures recherches

Dans ce travail de thèse, sont abordés divers aspects théoriques et techniques concernant la simulation de la propagation d'ondes élastiques en milieux anisotropes et aléatoirement hétérogènes. Certains d'entre eux sont néanmoins à approfondir ou à améliorer. Quelques voies sont recommandées dans la suite, d'autres questions restant encore ouvertes y sont également évoquées.

Tout d'abord, concernant le modèle stochastique du champ de tenseur d'élasticité, nous nous sommes rapprochés des matériaux réalistes à travers la possibilité de contrôler le niveau d'anisotropie. Par contre, ce modèle n'est applicable qu'avec des tenseurs moyens isotropes. Dans la réalité, on est parfois dans des situations où les données de champs correspondent à des tenseurs d'élasticité aux symétries inférieures (*e.g.* isotrope transverse ou orthotrope) comme dans [Arts, 1993]. La stochatisation du tenseur d'élasticité avec prise en compte de la symétrie d'anisotropie serait donc une considération intéressante. Préalablement, une façon de la faire consiste à

trouver une décomposition autre que celle exprimée par l'équation (3.19) permettant un tenseur moyen anisotrope. Si cela est possible, une projection euclidienne sur un sous-espace de tenseur d'élasticité (comprenant le tenseur moyen anisotrope) autre que le sous-espace isotrope peut être considérées pour quantifier le niveau de fluctuation en termes d'anisotropie.

Concernant le comportement des ondes dans le régime de diffusion :

- Un approfondissement est nécessaire pour formuler une dépendance du temps de stabilisation et le niveau auquel le rapport énergétique se stabilise explicitement en fonction de différents paramètres du champ stochastique du champ de tenseur d'élasticité, à savoir les longueurs de corrélations, la fluctuation globale et le niveau statistique d'anisotropie.
- Il convient de remarquer un fait assez paradoxal dans notre étude : d'une part on a réussi lors de la construction du champ de propriété à limiter le niveau d'anisotropie, d'autre part, nos conclusions les plus significatives sont issues de configurations irréalistes avec des niveaux d'anisotropie importants. Des simulations de plus grande taille par rapport au libre parcours moyen, sont à envisager pour pouvoir observer l'équipartition de l'énergie dans des configurations plus réalistes en termes de la fluctuation globale et de niveau d'anisotropie. Cela rend par ailleurs indispensable l'utilisation des infrastructures de calcul intensif à plus haute performance.
- Un autre point à améliorer concerne le rapport énergétique. Pour l'instant, ce ratio est calculé à partir des énergies de mouvements irrotationnels et rotationnels estimées en sommant dans tout le domaine physique. Cette mesure est donc inaccessible *in situ*. Une fonctionnalité du code SPEC3D permettant d'évaluer l'évolution temporelle du rapport énergétique local est à développer pour pouvoir imiter par exemple l'expérience présentée dans [Shapiro et al., 2000].
- La considération de topographies plus complexes, comme par exemple une éventuelle stochatisation du modèle du bassin de Caracas [Delavaud, 2007], est également recommandée.

La condition aux limites absorbantes reste une question ouverte. Lors des simulations présentées dans ce mémoire, les PMLs sont utilisées pour prendre en compte le caractère non-borné de la propagation d'ondes sismiques. Bien que ces éléments amortisseurs font l'objet dans la thèse d'adaptations vis-à-vis de l'anisotropie, tant sur le comportement non-isotrope que sur l'instabilité typique à temps long, l'objectif de ces modifications reste à absorber au mieux, tout en ne déstabilisant pas le système, les ondes du domaine physique lors qu'elles arrivent à la frontière avec les PMLs. Or, dans un milieu hétérogène aléatoire, la réflectivité est *a priori* non nulle quelles que soient ces frontières. La recherche d'une condition aux limites qui tout en absorbant l'énergie de radiation, laisse réfléchir d'une façon justifiable l'énergie vers le domaine physique est une thématique à considérer lors de la modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux aléatoires.

Enfin, d'un point de vue prospectif, la modélisation d'un problème direct va servir à la résolution de problèmes inverses associés. Dans le dernier chapitre de ce travail, bien qu'il y ait des éléments significatifs permettant l'identification de la directivité d'ondes ou bien l'identification des paramètres du modèle stochastique, ils sont soit incomplets soit inaccessibles *in-situ*. Sachant qu'une des optiques majeures de la modélisation probabiliste à paramétrage minimal est une inversion paramétrique robuste, les futures mises au point mentionnées dans les précédents paragraphes devraient permettre des inversions probabilistes comme celle présentée dans [Arnst, 2007]. Une fois cette dernière réalisée, elle peut par exemple remplacer ou compléter

la phase descriptive de la géostatistique fournissant le point de départ pour des études de la géostatistique déductive.

Annexe A

Développement des termes du travail interne pour les éléments volumiques

Le travail qu'exercent les forces internes à l'intérieure d'un élément $\boldsymbol{\Omega}_e$ le long du champ de déplacement admissible $\delta\boldsymbol{u}$ est donné par

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}_e}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}_e} \mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\delta\boldsymbol{u} : \boldsymbol{\sigma}\,[\boldsymbol{u}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{A.1}$$

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}_e}(\delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega} (L_1 + L_2 + L_3)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{A.2}$$

Avec L_1, L_2, L_3 les produits scalaires ligne par ligne des 2 matrices $\mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\delta\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. Dans les développements suivants, on dénomme les composantes des vecteurs comme suit :

$$\delta\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{\omega} \equiv \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{u} \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

– Ligne 1

$$L_1 = \omega_{1,1}\sigma_{11} + \omega_{1,2}\sigma_{12} + \omega_{1,3}\sigma_{13} \tag{A.4}$$
$$L_1 = \omega_{x,x}\left[C_{11}u_{1,1} + C_{12}u_{2,2} + C_{13}u_{3,3} + C_{14}(u_{2,3}+u_{3,2}) + C_{15}(u_{1,3}+u_{3,1}) + C_{16}(u_{1,2}+u_{2,1})\right] + \tag{A.5}$$
$$\omega_{x,y}\left[C_{16}u_{1,1} + C_{26}u_{2,2} + C_{36}u_{3,3} + C_{46}(u_{2,3}+u_{3,2}) + C_{56}(u_{1,3}+u_{3,1}) + C_{66}(u_{1,2}+u_{2,1})\right] + \tag{A.6}$$
$$\omega_{x,z}\left[C_{15}u_{1,1} + C_{25}u_{2,2} + C_{35}u_{3,3} + C_{45}(u_{2,3}+u_{3,2}) + C_{55}(u_{1,3}+u_{3,1}) + C_{56}(u_{1,2}+u_{2,1})\right] \tag{A.7}$$

– Ligne 2

$$L_2 = \omega_{2,1}\sigma_{12} + \omega_{2,2}\sigma_{22} + \omega_{2,3}\sigma_{23} \tag{A.8}$$
$$L_2 = \omega_{y,x}\left[C_{16}u_{1,1} + C_{26}u_{2,2} + C_{36}u_{3,3} + C_{46}(u_{2,3}+u_{3,2}) + C_{56}(u_{1,3}+u_{3,1}) + C_{66}(u_{1,2}+u_{2,1})\right] + \tag{A.9}$$
$$\omega_{y,y}\left[C_{12}u_{1,1} + C_{22}u_{2,2} + C_{23}u_{3,3} + C_{24}(u_{2,3}+u_{3,2}) + C_{25}(u_{1,3}+u_{3,1}) + C_{26}(u_{1,2}+u_{2,1})\right] + \tag{A.10}$$
$$\omega_{y,z}\left[C_{14}u_{1,1} + C_{24}u_{2,2} + C_{34}u_{3,3} + C_{44}(u_{2,3}+u_{3,2}) + C_{45}(u_{1,3}+u_{3,1}) + C_{46}(u_{1,2}+u_{2,1})\right] \tag{A.11}$$

– Ligne 3

$$L_3 = \omega_{3,1}\sigma_{12} + \omega_{3,2}\sigma_{23} + \omega_{3,3}\sigma_{33} \tag{A.12}$$
$$L_3 = \omega_{z,x}\left[C_{15}u_{1,1} + C_{25}u_{2,2} + C_{35}u_{3,3} + C_{45}(u_{2,3}+u_{3,2}) + C_{55}(u_{1,3}+u_{3,1}) + C_{56}(u_{1,2}+u_{2,1})\right] + \tag{A.13}$$
$$\omega_{z,y}\left[C_{14}u_{1,1} + C_{24}u_{2,2} + C_{34}u_{3,3} + C_{44}(u_{2,3}+u_{3,2}) + C_{45}(u_{1,3}+u_{3,1}) + C_{46}(u_{1,2}+u_{2,1})\right] + \tag{A.14}$$
$$\omega_{z,z}\left[C_{13}u_{1,1} + C_{23}u_{2,2} + C_{33}u_{3,3} + C_{34}(u_{2,3}+u_{3,2}) + C_{35}(u_{1,3}+u_{3,1}) + C_{36}(u_{1,2}+u_{2,1})\right] \tag{A.15}$$

Où le tenseur d'élasticité est exprimé selon la notation de Kelvin-Voigt. Cette intégrale est évaluée dans le domaine de référence

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}_e} = \int_{\square_\Omega} \left[L_1(\xi,\eta,\zeta) + L_2(\xi,\eta,\zeta) + L_3(\xi,\eta,\zeta)\right] \mathrm{Det}(\mathcal{J})\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \tag{A.16}$$

où la jacobienne :

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

Les développements de L_1, L_2 et L_3 sont donnée respectivement dans les expressions (A.18-A.20). Les coefficients de la force interne sont ensuite calculées comme $\mathcal{A}_{\boldsymbol{\Omega}_e}(\delta\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u})$ en adoptant le champ déplacement $\delta\boldsymbol{u}$ unitaire. Ces 45 coefficients $\{\mathfrak{q}_i \,|\, i = 0..44\}$ sont présentés dans les sections A.1 et A.2 respectivement pour le cas d'un tenseur d'élasticité plein et pour le cas isotrope.

$$
\begin{aligned}
L_1(\xi,\eta,\zeta) = \;
&\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}\Bigg\{\frac{\partial\xi}{\partial x}\Bigg[C_{11}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{12}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{13}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{14}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{16}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\xi}{\partial y}\Bigg[C_{16}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{26}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{36}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{46}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{66}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\xi}{\partial z}\Bigg[C_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{25}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{35}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{45}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{55}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]\Bigg\}+ \\
&\quad \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots+\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}\Bigg\{\frac{\partial\eta}{\partial x}\Bigg[C_{11}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{12}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{13}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{14}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{16}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\eta}{\partial y}\Bigg[C_{16}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{26}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{36}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{46}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{66}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\eta}{\partial z}\Bigg[C_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{25}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{35}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{45}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{55}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]\Bigg\}+ \\
&\quad \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots+\frac{\partial\omega_1}{\partial\zeta}\Bigg\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Bigg[C_{11}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{12}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{13}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{14}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{16}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Bigg[C_{16}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{26}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{36}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{46}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{66}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Bigg[C_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{25}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{35}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{45}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{55}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2(\xi,\eta,\zeta) = \; & \frac{\partial\omega_2}{\partial\xi}\Bigg\{\frac{\partial\xi}{\partial x}\Bigg[C_{16}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{26}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{36}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
& C_{46}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{66}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
& \quad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
& \frac{\partial\xi}{\partial y}\Bigg[C_{12}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{22}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{23}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
& C_{24}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{25}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{26}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
& \quad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
& \frac{\partial\xi}{\partial z}\Bigg[C_{14}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{24}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{34}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
& C_{44}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{45}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{46}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
& \quad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]\Bigg\}+ \\
& \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdots + \; & \frac{\partial\omega_2}{\partial\eta}\Bigg\{\frac{\partial\eta}{\partial x}\Bigg[C_{16}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{26}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{36}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
& C_{46}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{66}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
& \quad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
& \frac{\partial\eta}{\partial y}\Bigg[C_{12}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{22}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{23}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
& C_{24}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{25}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{26}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
& \quad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
& \frac{\partial\eta}{\partial z}\Bigg[C_{14}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{24}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{34}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
& C_{44}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{45}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{46}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
& \quad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]\Bigg\}+ \\
& \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdots + \; & \frac{\partial\omega_2}{\partial\zeta}\Bigg\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Bigg[C_{16}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{26}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{36}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
& C_{46}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{66}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
& \quad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
& \frac{\partial\zeta}{\partial y}\Bigg[C_{12}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{22}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{23}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
& C_{24}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{25}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{26}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
& \quad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
& \frac{\partial\zeta}{\partial z}\Bigg[C_{14}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{24}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{34}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
& C_{44}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
& C_{45}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
& \quad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
& C_{46}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
& \quad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3(\xi,\eta,\zeta) = \quad
&\frac{\partial\omega_2}{\partial\xi}\Bigg\{\frac{\partial\xi}{\partial x}\Bigg[C_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{25}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{35}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{45}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{55}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\xi}{\partial y}\Bigg[C_{14}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{24}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{34}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{44}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{45}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{46}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\xi}{\partial z}\Bigg[C_{13}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{23}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{33}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{34}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{35}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{36}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]\Bigg\}+ \\
&\quad \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdots+\frac{\partial\omega_2}{\partial\eta}\Bigg\{\frac{\partial\eta}{\partial x}\Bigg[C_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{25}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{35}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{45}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{55}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\eta}{\partial y}\Bigg[C_{14}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{24}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{34}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{44}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{45}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{46}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\eta}{\partial z}\Bigg[C_{13}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{23}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{33}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{34}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{35}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{36}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]\Bigg\}+ \\
&\quad \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdots+\frac{\partial\omega_2}{\partial\zeta}\Bigg\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Bigg[C_{15}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{25}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{35}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{45}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{55}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{56}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Bigg[C_{14}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{24}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{34}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{44}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{45}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{46}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]+ \\
&\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Bigg[C_{13}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{23}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{33}\Big(\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)+ \\
&\quad C_{34}\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)+ \\
&\quad C_{35}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+ \\
&\qquad \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial w}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial w}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)+ \\
&\quad C_{36}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\widehat{\partial u}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\widetilde{\partial u}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+ \\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\widehat{\partial v}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\widetilde{\partial v}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

A.1 Les coefficients des forces pour un matériau triclinique

$$\mathbf{q}_0 = \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big(C_{11}\xi_x^2 + C_{44}\xi_y^2 + C_{55}\xi_z^2 + 2C_{14}\xi_x\xi_y + 2C_{15}\xi_x\xi_z + 2C_{45}\xi_y\xi_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big(C_{11}\xi_x\eta_x + C_{44}\xi_y\eta_y + C_{55}\xi_z\eta_z + C_{14}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C_{15}(\xi_x\eta_z + \xi_z\eta_x) + C_{45}(\xi_y\eta_z + \xi_z\eta_x)\Big)$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\Big(C_{11}\xi_x\zeta_x + C_{44}\xi_y\zeta_y + C_{55}\xi_z\zeta_z + C_{14}(\xi_x\zeta_y + \xi_y\zeta_x) + C_{15}(\xi_x\zeta_z + \xi_z\zeta_x) + C_{45}(\xi_y\zeta_z + \xi_z\zeta_x)\Big)$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big(C_{14}\xi_x^2 + C_{14}\xi_y^2 + C_{56}\xi_z^2 + (C_{12} + C_{44})\xi_x\xi_y + (C_{16} + C_{45})\xi_x\xi_z + (C_{46} + C_{25})\xi_y\xi_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_4 = \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big(C_{12}\xi_x\eta_y + C_{16}\xi_x\eta_z + C_{14}\xi_x\eta_x + C_{24}\xi_y\eta_y + C_{46}\xi_y\eta_z + C_{44}\xi_y\eta_x + C_{25}\xi_z\eta_y + C_{56}\xi_z\eta_z + C_{45}\xi_z\eta_x\Big)$$

$$\mathbf{q}_5 = \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big(C_{12}\xi_x\zeta_y + C_{16}\xi_x\zeta_z + C_{14}\xi_x\zeta_x + C_{26}\xi_y\zeta_y + C_{46}\xi_y\zeta_z + C_{44}\xi_y\zeta_x + C_{25}\xi_z\zeta_y + C_{56}\xi_z\zeta_z + C_{45}\xi_z\zeta_x\Big)$$

$$\mathbf{q}_6 = \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big((C_{55} + C_{13})\xi_x\xi_z + (C_{45} + C_{16})\xi_x\xi_y + C_{15}\xi_x^2 + (C_{34} + C_{56})\xi_y\xi_z + C_{46}\xi_y^2 + C_{35}\xi_z^2\Big)$$

$$\mathbf{q}_7 = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(C_{13}\xi_x\eta_z + C_{16}\xi_x\eta_y + C_{15}\xi_x\eta_x + C_{34}\xi_y\eta_z + C_{46}\xi_y\eta_y + C_{45}\xi_y\eta_x + C_{35}\xi_z\eta_z + C_{56}\xi_z\eta_y + C_{55}\xi_z\eta_x\Big)$$

$$\mathbf{q}_8 = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(C_{13}\xi_x\zeta_z + C_{16}\xi_z\zeta_y + C_{15}\xi_x\zeta_x + C_{34}\xi_x\zeta_z + C_{46}\xi_y\zeta_y + C_{45}\xi_y\zeta_x + C_{35}\xi_z\zeta_z + C_{56}\xi_z\zeta_y + C_{55}\xi_z\zeta_x\Big)$$

$$\mathbf{q}_9 = \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big(C_{11}\eta_x^2 + C_{44}\eta_y^2 + C_{55}\eta_z^2 + 2C_{14}\eta_x\eta_y + 2C_{15}\eta_x\eta_z + 2C_{45}\eta_y\eta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{10} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\Big(C_{11}\eta_x\zeta_x + C_{44}\eta_y\zeta_y + C_{55}\eta_z\zeta_z + C_{14}(\eta_x\zeta_y + \eta_y\zeta_x) + C_{15}(\eta_x\zeta_z + \eta_z\zeta_x) + C_{45}(\eta_y\zeta_z + \eta_z\zeta_x)\Big)$$

$$\mathbf{q}_{11} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big(C_{12}\xi_y\eta_x + C_{16}\xi_z\eta_x + C_{14}\xi_x\eta_x + C_{24}\xi_y\eta_y + C_{46}\xi_z\eta_y + C_{44}\xi_x\eta_y + C_{25}\xi_y\eta_z + C_{56}\xi_z\eta_z + C_{45}\xi_x\eta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{12} = \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big((C_{12} + C_{44})\eta_x\eta_y + (C_{16} + C_{45})\eta_x\eta_z + C_{14}\eta_x^2 + C_{24}\eta_y^2 + C_{56}\eta_z^2 + (C_{46} + C_{25})\eta_y\eta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{13} = \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big(C_{12}\eta_x\zeta_y + C_{16}\eta_x\zeta_z + C_{14}\eta_x\zeta_x + C_{24}\eta_y\zeta_y + C_{46}\eta_y\zeta_z + C_{44}\eta_y\zeta_x + C_{25}\eta_z\zeta_y + C_{56}\eta_z\zeta_z + C_{45}\eta_z\zeta_x\Big)$$

$$\mathbf{q}_{14} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big(C_{13}\xi_z\eta_x + C_{16}\xi_y\eta_x + C_{15}\xi_x\eta_x + C_{34}\xi_z\eta_y + C_{46}\xi_y\eta_y + C_{45}\xi_x\eta_y + C_{35}\xi_z\eta_z + C_{56}\xi_y\eta_z + C_{55}\xi_x\eta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{15} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big((C_{13}+C_{55})\eta_x\eta_z + (C_{16}+C_{45})\eta_x\eta_y + (C_{34}+C_{56})\eta_y\eta_z + C_{15}\eta_x^2 + C_{46}\eta_y^2 + C_{35}\eta_z^2\Big)$$

$$\mathbf{q}_{16} = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(C_{13}\zeta_z\eta_x + C_{16}\zeta_y\eta_x + C_{15}\zeta_x\eta_x + C_{34}\zeta_z\eta_y + C_{46}\zeta_y\eta_y + C_{45}\zeta_x\eta_y + C_{35}\zeta_z\eta_z + C_{56}\zeta_y\eta_z + C_{55}\zeta_x\eta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{17} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}\Big(C_{11}\zeta_x^2 + C_{44}\zeta_y^2 + C_{55}\zeta_z^2 + 2C_{14}\zeta_x\zeta_y + 2C_{15}\zeta_x\zeta_z + 2C_{45}\zeta_y\zeta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{18} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big(C_{12}\xi_y\zeta_x + C_{16}\xi_z\zeta_x + C_{14}\xi_x\zeta_x + C_{24}\xi_y\zeta_y + C_{46}\xi_z\zeta_y + C_{44}\xi_x\zeta_y + C_{25}\xi_y\zeta_z + C_{56}\xi_z\zeta_z + C_{45}\xi_x\zeta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{19} = \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big(C_{12}\eta_y\zeta_x + C_{16}\eta_z\zeta_x + C_{14}\eta_x\zeta_x + C_{24}\eta_y\zeta_y + C_{46}\eta_z\zeta_y + C_{44}\eta_x\zeta_y + C_{25}\eta_y\zeta_z + C_{56}\eta_z\zeta_z + C_{45}\eta_x\zeta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{20} = \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big((C_{12}+C_{44})\zeta_x\zeta_y + (C_{16}+C_{45})\zeta_x\zeta_z + C_{14}\zeta_x^2 + C_{24}\zeta_y^2 + C_{56}\zeta_z^2 + (C_{46}+C_{25})\zeta_y\zeta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{21} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big(C_{13}\xi_z\zeta_x + C_{16}\xi_y\zeta_x + C_{15}\xi_x\zeta_x + C_{34}\xi_z\zeta_y + C_{46}\xi_y\zeta_y + C_{45}\xi_x\zeta_y + C_{35}\xi_z\zeta_z + C_{56}\xi_y\zeta_z + C_{55}\xi_x\zeta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{22} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(C_{13}\eta_z\zeta_x + C_{16}\eta_y\zeta_x + C_{15}\eta_x\zeta_x + C_{34}\eta_z\zeta_y + C_{46}\eta_y\zeta_y + C_{45}\eta_x\zeta_y + C_{35}\eta_z\zeta_z + C_{56}\eta_y\zeta_z + C_{55}\eta_x\zeta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{23} = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big((C_{55}+C_{13})\zeta_x\zeta_z + (C_{45}+C_{16})\zeta_x\zeta_y + C_{15}\zeta_x^2 + (C_{34}+C_{56})\zeta_y\zeta_z + C_{46}\zeta_y^2 + C_{35}\zeta_z^2\Big)$$

$$\mathbf{q}_{24} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big(C_{44}\xi_x^2 + C_{22}\xi_y^2 + C_{66}\xi_z^2 + 2C_{24}\xi_x\xi_y + 2C_{46}\xi_x\xi_z + 2C_{26}\xi_y\xi_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{25} = \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big(C_{44}\xi_x\eta_x + C_{22}\xi_y\eta_y + C_{66}\xi_z\eta_z + C_{24}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C_{46}(\xi_x\eta_z + \xi_z\eta_x) + C_{26}(\xi_y\eta_z + \xi_z\eta_x)\Big)$$

$$\mathbf{q}_{26} = \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big(C_{44}\xi_x\zeta_x + C_{22}\xi_y\zeta_y + C_{66}\xi_z\zeta_z + C_{24}(\xi_x\zeta_y + \xi_y\zeta_x) + C_{46}(\xi_x\zeta_z + \xi_z\zeta_x) + C_{26}(\xi_y\zeta_z + \xi_z\zeta_x)\Big)$$

$$\mathbf{q}_{27} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big((C_{34}+C_{56})\xi_x\xi_z + (C_{25}+C_{46})\xi_x\xi_y + C_{45}\xi_x^2 + (C_{23}+C_{66})\xi_y\xi_z + C_{26}\xi_y^2 + C_{34}\xi_z^2\Big)$$

$$\mathbf{q}_{28} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(C_{34}\xi_x\eta_z + C_{46}\xi_x\eta_y + C_{45}\xi_x\eta_x + C_{23}\xi_y\eta_z + C_{26}\xi_y\eta_y + C_{25}\xi_y\eta_x + C_{34}\xi_z\eta_z + C_{66}\xi_z\eta_y + C_{56}\xi_z\eta_x\Big)$$

$$\mathbf{q}_{29} = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(C_{34}\xi_x\zeta_z + C_{46}\xi_x\zeta_y + C_{45}\xi_x\zeta_x + C_{23}\xi_y\zeta_z + C_{26}\xi_y\zeta_y + C_{25}\xi_y\zeta_x + C_{34}\xi_z\zeta_z + C_{66}\xi_z\zeta_y + C_{56}\xi_z\zeta_x\Big)$$

$$\mathbf{q}_{30} = \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big(C_{44}\eta_x^2 + C_{22}\eta_y^2 + C_{66}\eta_z^2 + 2C_{24}\eta_x\eta_y + 2C_{46}\eta_x\eta_z + 2C_{26}\eta_y\eta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{31} = \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big(C_{44}\eta_x\zeta_x + C_{22}\eta_y\zeta_y + C_{66}\eta_z\zeta_z + C_{24}(\eta_x\zeta_y + \eta_y\zeta_x) + C_{46}(\eta_x\zeta_z + \eta_z\zeta_x) + C_{26}(\eta_y\zeta_z + \eta_z\zeta_x)\Big)$$

$$\mathbf{q}_{32} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big(C_{34}\xi_z\eta_x + C_{46}\xi_y\eta_x + C_{45}\xi_x\eta_x + C_{23}\xi_z\eta_y + C_{26}\xi_y\eta_y + C_{25}\xi_x\eta_y + C_{36}\xi_z\eta_z + C_{66}\xi_y\eta_z + C_{56}\xi_x\eta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{33} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big((C_{34} + C_{56})\eta_x\eta_z + (C_{25} + C_{46})\eta_x\eta_y + C_{45}\eta_x^2 + (C_{23} + C_{66})\eta_y\eta_z + C_{26}\eta_y^2 + C_{34}\eta_z^2\Big)$$

$$\mathbf{q}_{34} = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(C_{34}\zeta_z\eta_x + C_{46}\zeta_y\eta_x + C_{45}\zeta_x\eta_x + C_{23}\zeta_z\eta_y + C_{26}\zeta_y\eta_y + C_{25}\zeta_x\eta_y + C_{36}\zeta_z\eta_z + C_{66}\zeta_y\eta_z + C_{56}\zeta_x\eta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{35} = \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big(C_{44}\zeta_x^2 + C_{22}\zeta_y^2 + C_{66}\zeta_z^2 + 2C_{24}\zeta_x\zeta_y + 2C_{46}\zeta_x\zeta_z + 2C_{26}\zeta_y\zeta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{36} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big(C_{34}\xi_z\zeta_x + C_{46}\xi_y\zeta_x + C_{45}\xi_x\zeta_x + C_{23}\xi_z\zeta_y + C_{26}\xi_y\zeta_y + C_{25}\xi_x\zeta_y + C_{36}\xi_z\zeta_z + C_{66}\xi_y\zeta_z + C_{56}\xi_x\zeta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{37} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(C_{34}\eta_z\zeta_x + C_{46}\eta_y\zeta_x + C_{45}\eta_x\zeta_x + C_{23}\eta_z\zeta_y + C_{26}\eta_y\zeta_y + C_{25}\eta_x\zeta_y + C_{36}\eta_z\zeta_z + C_{66}\eta_y\zeta_z + C_{56}\eta_x\zeta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{38} = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big((C_{34} + C_{56})\zeta_x\zeta_z + (C_{25} + C_{46})\zeta_x\zeta_y + C_{45}\zeta_x^2 + (C_{23} + C_{66})\zeta_y\zeta_z + C_{26}\zeta_y^2 + C_{34}\zeta_z^2\Big)$$

$$\mathbf{q}_{39} = \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big(C_{55}\xi_x^2 + C_{66}\xi_y^2 + C_{33}\xi_z^2 + 2C_{56}\xi_x\xi_y + 2C_{35}\xi_x\xi_z + 2C_{36}\xi_y\xi_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{40} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(C_{55}\xi_x\eta_x + C_{66}\xi_y\eta_y + C_{33}\xi_z\eta_z + C_{56}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C_{35}(\xi_x\eta_z + \xi_z\eta_x) + C_{36}(\xi_y\eta_z + \xi_z\eta_x)\Big)$$

$$\mathbf{q}_{41} = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(C_{55}\xi_x\zeta_x + C_{66}\xi_y\zeta_y + C_{33}\xi_z\zeta_z + C_{56}(\xi_x\zeta_y + \xi_y\zeta_x) + C_{35}(\xi_x\zeta_z + \xi_z\zeta_x) + C_{36}(\xi_y\zeta_z + \xi_z\zeta_x)\Big)$$

$$\mathbf{q}_{42} = \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(C_{55}\eta_x^2 + C_{66}\eta_y^2 + C_{33}\eta_z^2 + 2C_{56}\eta_x\eta_y + 2C_{35}\eta_x\eta_z + 2C_{36}\eta_y\eta_z\Big)$$

$$\mathbf{q}_{43} = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(C_{55}\eta_x\zeta_x + C_{66}\eta_y\zeta_y + C_{33}\eta_z\zeta_z + C_{56}(\eta_x\zeta_y + \eta_y\zeta_x) + C_{35}(\eta_x\zeta_z + \eta_z\zeta_x) + C_{36}(\eta_y\zeta_z + \eta_z\zeta_x)\Big)$$

$$\mathbf{q}_{44} = \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(C_{55}\zeta_x^2 + C_{66}\zeta_y^2 + C_{33}\zeta_z^2 + 2C_{56}\zeta_x\zeta_y + 2C_{35}\zeta_x\zeta_z + 2C_{36}\zeta_y\zeta_z\Big)$$

A.2 Les coefficients des forces pour un matériau isotrope

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_0 &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big((\lambda+2\mu)\xi_x^2+\mu\xi_y^2+\mu\xi_z^2\Big) & \mathbf{q}_1 &= \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big((\lambda+2\mu)\xi_x\eta_x+\mu\xi_y\eta_y+\mu\xi_z\eta_z\Big)\\
\mathbf{q}_2 &= \frac{\partial u}{\partial \zeta}\Big((\lambda+2\mu)\xi_x\zeta_x+\mu\xi_y\zeta_y+\mu\xi_z\zeta_z\Big) & \mathbf{q}_3 &= \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big((\lambda+\mu)\xi_x\xi_y\Big)\\
\mathbf{q}_4 &= \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big(\lambda\xi_x\eta_y+\mu\xi_y\eta_x\Big) & \mathbf{q}_5 &= \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big(\lambda\xi_x\zeta_y+\mu\xi_y\zeta_x\Big)\\
\mathbf{q}_6 &= \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big((\lambda+\mu)\xi_x\xi_z\Big) & \mathbf{q}_7 &= \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(\lambda\xi_x\eta_z+\mu\xi_z\eta_x\Big)\\
\mathbf{q}_8 &= \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(\lambda\xi_x\zeta_z+\mu\xi_z\zeta_x\Big) & \mathbf{q}_9 &= \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big((\lambda+2\mu)\eta_x^2+\mu\eta_y^2+\mu\eta_z^2\Big)\\
\mathbf{q}_{10} &= \frac{\partial u}{\partial \zeta}\Big((\lambda+2\mu)\eta_x\zeta_x+\mu\eta_y\zeta_y+\mu\eta_z\zeta_z\Big) & \mathbf{q}_{11} &= \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big(\lambda\eta_x\xi_y+\mu\eta_y\xi_x\Big)\\
\mathbf{q}_{12} &= \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big((\lambda+\mu)\eta_x\eta_y\Big) & \mathbf{q}_{13} &= \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big(\lambda\eta_x\zeta_y+\mu\eta_y\zeta_x\Big)\\
\mathbf{q}_{14} &= \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big(\lambda\eta_x\xi_z+\mu\eta_z\xi_x\Big) & \mathbf{q}_{15} &= \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big((\lambda+\mu)\eta_x\eta_z\Big)\\
\mathbf{q}_{16} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(\lambda\eta_x\zeta_z+\mu\eta_z\zeta_x\Big) & \mathbf{q}_{17} &= \frac{\partial u}{\partial \zeta}\Big((\lambda+2\mu)\zeta_x^2+\mu\zeta_y^2+\mu\zeta_z^2\Big)\\
\mathbf{q}_{18} &= \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big(\lambda\xi_y\zeta_x+\mu\xi_x\zeta_y\Big) & \mathbf{q}_{19} &= \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big(\lambda\eta_y\zeta_x+\mu\eta_x\zeta_y\Big)\\
\mathbf{q}_{20} &= \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big((\lambda+\mu)\zeta_x\zeta_y\Big) & \mathbf{q}_{21} &= \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big(\lambda\xi_z\zeta_x+\mu\xi_x\zeta_z\Big)\\
\mathbf{q}_{22} &= \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(\lambda\eta_z\zeta_x+\mu\eta_x\zeta_z\Big) & \mathbf{q}_{23} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big((\lambda+\mu)\zeta_x\zeta_z\Big)\\
\mathbf{q}_{24} &= \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big((\lambda+2\mu)\xi_y^2+\mu\xi_x^2+\mu\xi_z^2\Big) & \mathbf{q}_{25} &= \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big((\lambda+2\mu)\xi_y\eta_y+\mu\xi_x\eta_x+\mu\xi_z\eta_z\Big)\\
\mathbf{q}_{26} &= \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big((\lambda+\mu)\zeta_y\zeta_y+\mu\xi_x\zeta_x+\mu\xi_z\zeta_z\Big) & \mathbf{q}_{27} &= \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big((\lambda+\mu)\xi_y\xi_z\Big)\\
\mathbf{q}_{28} &= \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(\lambda\xi_y\eta_z+\mu\xi_z\eta_y\Big) & \mathbf{q}_{29} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(\lambda\xi_y\zeta_z+\mu\xi_z\zeta_y\Big)\\
\mathbf{q}_{30} &= \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big((\lambda+2\mu)\eta_y^2+\mu\eta_x^2+\mu\eta_z^2\Big) & \mathbf{q}_{31} &= \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big((\lambda+\mu)\eta_y\zeta_y+\mu\eta_x\zeta_x+\mu\eta_z\zeta_z\Big)\\
\mathbf{q}_{32} &= \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big(\lambda\eta_y\xi_z+\mu\eta_z\xi_y\Big) & \mathbf{q}_{33} &= \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big((\lambda+\mu)\eta_y\eta_z\Big)\\
\mathbf{q}_{34} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big(\lambda\eta_y\zeta_z+\mu\eta_z\zeta_y\Big) & \mathbf{q}_{35} &= \frac{\partial v}{\partial \zeta}\Big((\lambda+2\mu)\zeta_y^2+\mu\zeta_y^2+\mu\zeta_z^2\Big)\\
\mathbf{q}_{36} &= \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big(\lambda\zeta_y\xi_z+\mu\zeta_z\xi_y\Big) & \mathbf{q}_{37} &= \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big(\lambda\zeta_y\eta_z+\mu\zeta_z\eta_y\Big)\\
\mathbf{q}_{38} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big((\lambda+\mu)\zeta_y\zeta_z\Big) & \mathbf{q}_{39} &= \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big((\lambda+2\mu)\xi_z^2+\mu\xi_x^2+\mu\xi_y^2\Big)\\
\mathbf{q}_{40} &= \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big((\lambda+2\mu)\xi_z\zeta_z+\mu\xi_x\eta_x+\mu\xi_y\eta_y\Big) & \mathbf{q}_{41} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big((\lambda+2\mu)\xi_z\zeta_z+\mu\xi_x\zeta_x+\mu\xi_y\zeta_y\Big)\\
\mathbf{q}_{42} &= \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big((\lambda+2\mu)\eta_z^2+\mu\eta_x^2+\mu\eta_y^2\Big) & \mathbf{q}_{43} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big((\lambda+2\mu)\eta_z\zeta_z+\mu\eta_x\zeta_x+\mu\eta_y\zeta_y\Big)\\
\mathbf{q}_{44} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta}\Big((\lambda+2\mu)\zeta_z^2+\mu\zeta_x^2+\mu\zeta_y^2\Big)
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

Annexe B

Caractérisation de la directivité d'ondes à partir de données sismiques à la surface

La caractérisation des champs d'ondes élastiques à l'issue d'un évenement sismique fait appel en général à l'information enregistrée sur un réseau de capteur. Ce type de traitement a pour nature de relever des différences entre différents signaux situés en espace et en temps.

– **De paire de capteurs ...**

Une des applications élémentaires se basant sur le traitement de capteurs, figurant des paires de capteurs, est la procédure de prospection sismique SASW (Spectral Analysis of Surface Waves). Cette méthode, proposée par Nazarian [1984], Nazarian and Desai [1993] consiste à identifier les propriétés du sol en mesurant (fig. B.1) la propagation d'ondes de surface entre deux capteurs positionnés à une distance Δx l'un de l'autre. Une fois connu en fonction de

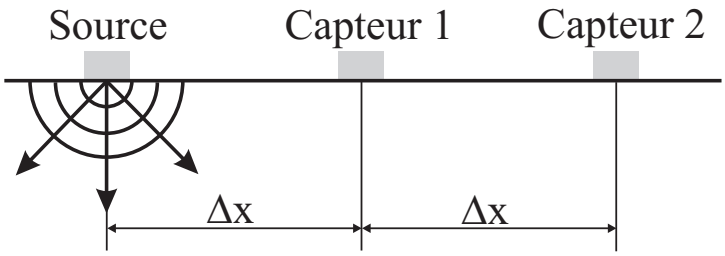


FIG. B.1 – Configuration expérimentale

la pulsation ω le déphasage $\Delta\Phi(\omega)$ entre les réponses dynamiques enregistrées par les deux capteurs, on calcule la vitesse de phase

$$c_R(\omega) = \frac{\omega \Delta x}{\Delta\Phi(\omega)} \ . \tag{B.1}$$

En minimisant la distance entre la courbe de dispersion expérimentale ainsi obtenue avec celles résultant de modèles numériques ou analytiques, un profil vertical du module de cisaillement du sol est identifié.

Toutefois, ces modèles se fondent sur l'hypothèse que chaque couche de sol est homogène. Dans le cas où le sol présente une variabilité importante, la mise en oeuvre de la méthode SASW classique devient difficile, voire impossible. Pour l'illustrer, la figure B.2, extrait de

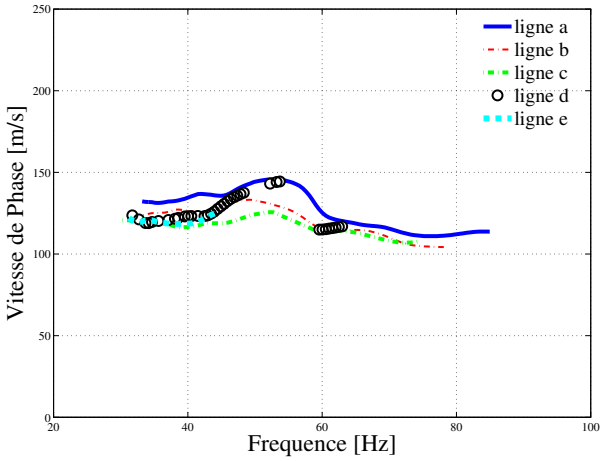


FIG. B.2 – Courbes de dispersion expérimentale pour 6 lignes différentes

[Arnst et al., 2006], représente le résultat d'une campagne de mesures effectuée sur un site à Lincent en Belgique au cours de laquelle des paires de capteurs étaient positionnées sur 6 lignes différentes. Les courbes de dispersion expérimentales présente une variabilité importante, rendant ainsi l'hypothèse d'une stratification horizontale problématique.

– **... À antenne sismique**

Lors qu'une onde élastique se propage dans un milieu hétérogène aléatoire non borné, elle est susceptible d'engendrer des ondes diffractées en interagissant avec des hétérogénéités. Si c'est le cas d'une diffusion, un point d'observation donné, au lieu de voir arriver seulement des ondes directes en provenance de la source, va les constater accompagnées par des ondes de différentes directions d'arrivée, de différents temps d'arrivée ainsi que de différentes contributions énergétiques. Ce travail est une tentative d'analyser les directions d'arrivées afin d'en trouver le lien avec les caractéristiques d'hétérogénéité. Pour détecter les directions d'arrivée, une classe de techniques initialisée en télécommunication et largement inspirée pour les applications en prospection sismique est la famille de techniques se basant sur le traitement d'antenne sismique [voir, Marcos, 1998, Zerva, 1996, Schisselé et al., 2004, par exemple] dont les 3 méthodes *f-k conventionnelle, f-k haute résolution* et MuSiC.

Par définition, l'antenne sismique est un ensemble des capteurs disposés selon une certaine géométrie $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_M\}$. À titre d'illustration, les antennes rondes du type UCA (Uniform Circular Array) ayant les capteurs sont disposés régulièrement sur un cercle. Dans la suite, on va brièvement présenter le traitement de ce type d'antenne sismique adapté par [Schisselé et al., 2004, 2005] pour caractériser l'hétérogénéité du milieu en exploitant les informations contenues dans le coda. Ce traitement peut se résumer en 3 étapes :

Étape 1 : Décomposition de signaux en ondes planes monochromatiques

Si l'antenne est disposée suffisamment loin de la source pour que l'hypothèse de champ lointain soit valable, le signal enregistré à l'instant t par le capteur se situant à la position $\boldsymbol{r}_j$ peut s'écrire sous forme d'une superposition des ondes planes monochromatiques [voir, Zerva,

1996, par exemple] :

$$X(\boldsymbol{r}_j, t) = \int_{f\in\mathbb{R}^+} \int_{\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^2} \exp\left[-i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}_j + 2\pi f t + \Phi_{f\boldsymbol{\kappa}})\right] d\boldsymbol{\kappa} df \;\forall t \in \{t_1, t_2, ..., t_N\} \;\forall \boldsymbol{r}_j \in \{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_M\} \tag{B.2}$$

où $\{t_1, t_2, ..., t_N\}$ est l'échantillonage en temps. Cette somme infinie peut être approximée par une somme finie complétée par une erreur

$$X(\boldsymbol{r}_j, t) = \bar{X}(\boldsymbol{r}_j, t) + \epsilon(\boldsymbol{r}_j, t) \tag{B.3}$$

avec

$$\bar{X}(\boldsymbol{r}_j, t) = \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{m=1}^{q} \exp\left[-i(\boldsymbol{\kappa}_{m\ell}\cdot\boldsymbol{r}_j + 2\pi f_\ell t + \Phi_{m\ell})\right] \tag{B.4}$$

où les ondes planes composantes sont caractérisées par leurs phases complexes $\Phi_{m\ell}$ et surtout par leurs vecteurs d'onde $\boldsymbol{\kappa}_{m\ell}$ et leurs fréquences f_ℓ. Ces derniers peuvent être estimés dans les sections suivantes. D'abord, les fréquences f_ℓ sont choisies à partir de l'extraction des lignes de crêtes des représentations temps-fréquence de signaux. Ensuite, l'algorithme MuSiC (Multiple Signals Classification) est appliqué sur des morceaux de signaux en temps correspondants aux f_ℓ afin de trouver les vecteurs d'onde $\boldsymbol{\kappa}_{m\ell}$.

Étape 2 : Représentation temps-fréquence pour la détection du squelette moyen des signaux

Pour chacun des signaux $X(\boldsymbol{r}_j, t)$, on effectue une transformation en ondelettes, *i.e.* une convolution de $X(\boldsymbol{r}_j, t)$ avec une fonction $g(t)$ qui est translatée lors du déplacement le long de l'axe *temps* et qui est dilatée - contractée lors du déplacement le long de l'axe *fréquence*, pour obtenir une représentation temps-fréquence [voir, Hlawathsch and Auger, 2005, Kulesh et al., 2005, par exemple].

$$\mathcal{TO}(t,a)\big\{X(\boldsymbol{r}_j, t)\big\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} X(\boldsymbol{r}_j, \tau) g^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau \quad a \in \mathbb{R}\ ; t \in \mathbb{R} \tag{B.5}$$

où a la variable d'échelle est en fait inversement proportionnelle à la fréquence $a \propto \frac{1}{f}$ Ensuite, on calcule la moyenne des représentations temps-fréquence pour tous les capteurs dans l'antenne. Ce fait a pour but de concentrer la distribution énergétique dans l'espace temps-fréquence de l'ensemble des signaux passant le réseau.

$$\mathcal{TO}(t,a)\big\{X(t)\big\} = \mathrm{E}\Big\{\mathcal{TO}(t,a)\big\{X(\boldsymbol{r}_j, t)\big\}\Big\}_{\mathrm{r}} \tag{B.6}$$

où $\mathrm{E}\{\bullet\}_{\mathrm{r}}$ désigne l'espérance mathématique sur les posisions $\boldsymbol{r}_j$.
À partir de cette image moyenne, on extrait les points les plus significatifs formant les lignes de crêtes. Chaque ligne de crête représente une cellule significative de l'image temps-fréquence moyennée. À l'aide de cette extraction, au lieu d'approximer $X(\boldsymbol{r}_j, t)$ aux points f, t dans l'espace 2D temps-fréquence, on les cherche dans les espaces 1D qui sont les lignes des crêtes.
À la fin de cette étape, on obtient les cellules $\{t \in \tau_c = [t_c^{(1)}, t_c^{(2)}]; f = f_\ell\}$ qui représentent le mieux le signal et qui font ensuite dans l'étape suivante l'objet du traitement de distinction des directions et des vitesses apparentes d'arrivée.

Étape 3 : Application de la méthode de MuSiC sur le squelette moyen des signaux

Méthode fréquence - nombre d'onde conventionnelle

$$P^{(CV)}(\boldsymbol{\kappa}, f) = \frac{1}{M^2}\left|\sum_{j=1}^{M}\hat{X}(\boldsymbol{r}_j, f)\exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}_j)\right|^2 = \frac{1}{M^2}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\kappa})\boldsymbol{R}_f\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{\kappa}) \tag{B.7}$$

Méthode fréquence - nombre d'onde haute résolution

$$P^{(HR)}(\boldsymbol{\kappa}, f) = \frac{1}{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\kappa})\boldsymbol{R}_f^{-1}\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{\kappa})} \tag{B.8}$$

Méthode MuSiC

L'algorithme MUSIC est utilisé dans chaque cellule $\{t \in \tau_c = [t_c^{(1)}, t_c^{(2)}]; f = f_\ell\}$ de signaux de l'antenne. Soit $X(\boldsymbol{r}_j, t)$ le signal complex à l'instant t enregistré par le capteur situé à $\boldsymbol{r}_j$. Avec l'hypothèse qui considère l'error comme un bruit blanc, on peut récrire l'équation (B.3) comme :

$$X(\boldsymbol{r}_j, t) = \bar{X}(\boldsymbol{r}_j, t) + \eta(\boldsymbol{r}_j, t) \tag{B.9}$$

où $\eta(\boldsymbol{r}_j, t)$ le bruit blanc et $\bar{X}(\boldsymbol{r}_j, t)$ le signal cohérent.
Dans le domaine temporel, la matrice de covariance se calcule comme

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{t}} = \mathrm{E}\big\{\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^*(t)\big\}_{\mathrm{t}} \quad t \in \tau_c = [t_c^{(1)}; t_c^{(2)}] \tag{B.10}$$

où $\boldsymbol{X}(t) = \big[X(\boldsymbol{r}_1, t)\ldots X(\boldsymbol{r}_j, t)\ldots X(\boldsymbol{r}_M, t)\big]^{\mathrm{T}}$ et $\boldsymbol{X}^*(t)$ sa matrice transposée conjugale [43] avec $\mathrm{E}\{\bullet\}_{\mathrm{t}}$ désigne l'espérance mathématique sur les instants t.

Dans le domaine fréquentiel, on calcule la matrice inter-spectrale qui est définie comme suit

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{f}} = \mathrm{E}\big\{\hat{\boldsymbol{X}}(f)\hat{\boldsymbol{X}}^*(f)\big\}_{\mathrm{f}} \quad f \in B(f_\ell) = [f_\ell - \Delta f; f_\ell + \Delta f] \tag{B.11}$$

où $\hat{\boldsymbol{X}}(f) = \big[\hat{X}(\boldsymbol{r}_1, f)\ldots\hat{X}(\boldsymbol{r}_j, f)\ldots\hat{X}(\boldsymbol{r}_M, f)\big]^{\mathrm{T}}$ et $\hat{\boldsymbol{X}}^*(t)$ avec $\mathrm{E}\{\bullet\}_{\mathrm{f}}$ désigne l'espérance mathématique sur les fréquences f et $B(f_\ell)$ une bande étroite centrée en f_ℓ.

Étant hermitienne, $\boldsymbol{R}$ (que ce soit temporelle $\boldsymbol{R}_{\mathrm{t}}$ où fréquentielle $\boldsymbol{R}_{\mathrm{f}}$) possède des valeurs propres réelles dont les q valeurs les plus grandes génèrent le sous-espace de signaux et les $M-q$ autres représentent du bruit. La difficulté principale de la méthode MUSIC est d'estimer le nombre q des signaux. Dans cette étude, on utilise l'estimation proposée par [Schisselé et al., 2004] dont l'idée est de trouver $q \in \{1, 2, ..., M-1\}$ donnant le signal le plus proche du signal commun de la cellule en question au sens de moindre-carrées.

Avec cette décomposition en sous-espaces signaux-bruit, $\boldsymbol{R}$ se réécrit comme suit :

$$\boldsymbol{R}_{M\times M} = \boldsymbol{V}^s_{M\times q}\boldsymbol{\Lambda}^s_{q\times q}\boldsymbol{V}^{s*}_{q\times M} + \boldsymbol{V}^b_{M\times(M-q)}\boldsymbol{\Lambda}^b_{(M-q)\times(M-q)}\boldsymbol{V}^{b*}_{(M-q)\times M} \tag{B.12}$$

Où $\boldsymbol{V}^s$ (*resp.* $\boldsymbol{V}^b$) la matrice dont les colonnes sont les vecteurs élémentaires d'une base orthonormée du sous-espace de signal (*resp.* bruit), $\boldsymbol{\Lambda}^s$ (*resp.* $\boldsymbol{\Lambda}^b$) la matrice diagonale remplissée

[43] Dans la suite, $(^*)$ désigne la transposée conjugale pour les matrices et le conjugal pour les vecteurs

par des valeurs propres du sous-espace de signal (*resp.* bruit).
Jusqu'à ce point, les $\boldsymbol{r}_j$ ne jouent que le rôle des indices dans la matrice $\boldsymbol{R}$ mais pas d'indications géométriques. Lorsqu'une onde plane de vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ arrive à l'antenne, elle se propage entre les capteurs composants situés aux $\boldsymbol{r}_j$. Cette propagation interne se fait reconaître par les déphasages entre les signaux enregistrés aux $\boldsymbol{r}_j$. Ces derniers sont caractérisés par le vecteur $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\kappa})$ défini comme :

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\kappa}) = [\exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{r}_1)\ \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{r}_2)\ ...\ \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{r}_M)]^{\mathrm{T}} \tag{B.13}$$

Autrement dit, si $\boldsymbol{\kappa}$ représente un signal source, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\kappa})$, avec un multiplicateur près, est un vecteur dans le sous-espace généré par $\boldsymbol{V}^s$ donc il est orthogonal à $\boldsymbol{V}^b$. Grâce à cette orthogonalité entre des sous-espaces, on peut trouver q vecteurs $\boldsymbol{\kappa}_{m\ell}$ étant les maxima de la fonction suivante qui s'appelle la fonction directionnelle :

$$D(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\kappa})\boldsymbol{V}^b|^2} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{M-q} \boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{\kappa}).\boldsymbol{v}_k^b.\boldsymbol{v}_k^{b*}.\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\kappa})} \tag{B.14}$$

Cette fonction est en fait l'inverse de la norme du projeté de $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\kappa})$ dans l'espace de bruit. Les pics de $D(\boldsymbol{\kappa})$ correspondent à des vecteurs dont leur projeté s'annule.

Une fois les vecteurs d'onde des sources sont trouvés, on peut estimer les angles d'incident $\theta_{m\ell}$ et la vistesse apparente $c_{m\ell}$ pour le morceau $\{t \in [t_c^{(1)}, t_c^{(2)}]; f = f_\ell\}$:

$$\theta_{m\ell} = \arctan\left(\frac{\kappa_x}{\kappa_y}\right) \tag{B.15}$$

$$c_{m\ell} = \frac{2\pi f_\ell}{|\boldsymbol{\kappa}_{m\ell}|} \tag{B.16}$$

REMARQUE B.1. *Il convient de noter que la principale adaptation de cette procédure de 3 étapes par rapport au traitement d'antenne (du type MuSiC et autres) consiste à l'étape 2 où on détecte le squelette de la représentation temps-fréquence. En effet, dans le cas des milieux hétérogènes dans lesquels le signal d'onde est susceptible d'avoir le contenu fréquentiel changeant au cours du temps, on est obligé de découper le signal temporel en sous-intervalle. Le fait que la méthode MuSiC est seulement appliquée sur des cellules temps-fréquence représentatives (mais pas sur tous les points du plan temps-fréquence) réduit considérablement le coût de calcul. Dans le cas des matériaux homogènes, le contenu fréquentiel des signaux enregistrés, la procédure comporte seulement les étapes 1 et 3 où il'y a un seul morceau qui est le signal temporel dans son intégralité sur lequel la méthode MuSiC peut être appliquée que ce soit dans sa version temporelle ou dans sa version fréquencielle pour toute la gamme de fréquence considérée.*

Table des figures

0.1 Principaux mécanismes de l'hétérogénéité dans les couches terrestres. (a) Modèle mixte de la convection mantellique [image extraite de Perrot]. (b) Cycle de vie des matériaux lithosphériques [*Source* WIKIPEDIA]. (c) Modèle de la ville de Mexico [Mezher, 2004]. 2

0.2 Exemple de l'identification de l'hétérogénéité dans la Terre profonde [Van der Hilst et al., 2007] 3

0.3 Exemples des (potentielles) anisotropies avec orientation préférentielle d'origine structurelle, de gauche à droite : Roche sédimentaire de la Falaise d'Êtretat (France) et Roche volcanique de l'Escarpement de Da Dia (Viêtnam) 4

0.4 Quelques visées de la thèse : (a) Variabilité spatiale. (b) Anisotropie locale se manifestant par une surface de lenteur très irrégulière non sphérique. (c) Simulations de la propagation d'ondes. 5

2.1 Explication géométrique de l'approximation isotrope 20

2.2 Illustration schématique 2D de la réciprocité polaire entre la surface de lenteur (à gauche) et celle de vitesse de groupe (à droite). 24

2.3 Illustration d'un matériau isotrope, surfaces des modes propres. 29

2.4 Illustration d'un matériau isotrope, superposition des sections planes. 30

2.5 Illustration d'un matériau cubique, surfaces des modes propres. 31

2.6 Illustration d'un matériau cubique, superposition des sections planes. 32

2.7 Illustration d'un matériau isotrope transverse, surfaces des modes propres. . . . 33

2.8 Illustration d'un matériau isotrope transverse, superposition des sections planes. 34

2.9 Illustration d'un matériau orthotrope, surfaces des modes propres. 35

2.10 Illustration d'un matériau orthotrope, superposition des sections planes. 36

2.11 Illustration d'un matériau triclinique, surfaces des modes propres. 37

2.12 Illustration d'un matériau triclinique, superposition des sections planes. 38

2.13 Section de lenteur dans le plan $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ et la ligne d'une lenteur constante. . . . 44

2.14 Cas 1-4 : les quatre possibilités [selon Barnett and Lothe, 1985] de la variabilité des valeurs propres du tenseur d'impédance acoustique $\boldsymbol{Z}(c)$ avec les vitesses situées dans l'intervalle subsonique. 48

2.15 Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu isotrope I : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas). . 57

2.16 Détails de la recherche d'onde de Rayleigh dans l'azimut $\theta = 0$ du matériau I (isotrope) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_R est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique. 58
2.17 Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu isotrope transverse III : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas). 59
2.18 Détails de la recherche d'onde de Rayleigh dans l'azimut $\theta = 0$ du matériau III (isotrope transverse) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_R est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique. 60
2.19 Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu triclinique (matériau V) : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas). 61
2.20 Détails de la recherche d'onde de Rayleigh dans l'azimut $\theta = 0$ du matériau V (triclinique) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_R est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique. 62
2.21 Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu triclinique (matériau V-a) : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas). 63
2.22 Détails de la recherche d'onde de Rayleigh dans l'azimut $\theta = 0$ du matériau Va (triclinique) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_R est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique. 64
2.23 Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu cubique II avec existence d'onde de surface supersonique à la place de l'onde de Rayleigh dans certaines directions : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas). 65
2.24 Détails de la recherche d'onde de Rayleigh (a) dans l'azimut $\theta = 0$ et (b) dans l'azimut $\theta = \frac{\pi}{4}$ du matériau IV (orthotrope) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_R est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique. 66
2.25 Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu hexagonal IIIa avec existence d'onde de surface supersonique à la place de l'onde de Rayleigh dans certaines directions : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas). 67
2.26 Détails de la recherche d'onde de Rayleigh (a) dans l'azimut $\theta = 0$ et (b) dans l'azimut $\theta = \frac{\pi}{2}$ du matériau IIIa (isotrope transverse HTI) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_R est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique. 68

2.27 Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu orthotrope IV avec existence d'onde de surface supersonique à la place de l'onde de Rayleigh dans certaines directions : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas). 69

2.28 Détails de la recherche d'onde de Rayleigh (a) dans l'azimut $\theta = 0$ et (b) dans l'azimut $\theta = \frac{\pi}{2}$ du matériau IV (orthotrope) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique. 70

2.29 Vitesses d'ondes de surface (bleu) et vitesses de l'état transsonique (rouge) dans le milieu orthotrope IVa avec existence d'onde de surface transsonique à la place de l'onde de Rayleigh dans certaines directions : vitesse de phase (en haut) et vitesse de groupe (en bas). 71

2.30 Détails de la recherche d'onde de Rayleigh (a) dans l'azimut $\theta = 0$ et (b) dans l'azimut $\theta = 0.353\pi$ du matériau IVa (orthotrope) : les valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ du $\boldsymbol{Z}(c)$ sont affichées respectivement en bleu, rouge, vert ; la valeur absolue de son déterminant en violet. La vitesse c_{R} est trouvée en minimisant cette dernière dans l'intervalle subsonique. 72

2.31 Vitesses d'onde de surface trouvés pour les réalisations (intersections des courbes grises du det $\boldsymbol{Z}(c)$ avec la ligne bleu ciel de det $\boldsymbol{Z} = 0$) des matériaux aléatoires à tenseur d'élasicité aléatoire selon le modèle de [Soize, 2001] avec le niveau de fluctuation $\delta = 0.05, 0.2$ et 0.5 de haut en bas. La moyenne estimée des vitesses de Rayleigh est affichée en bleu marin. Les courbes jaune et rouge représentant l'évolution de det $\boldsymbol{Z}(c)$ dans l'intervalle subsonique correspondent respectivement au matériau moyen et à une réalisation quelconque. 73

2.32 Distributions (a), convergences (b) de la vitesse c_{R} pour les 3 niveaux de fluctuations δ et Dépendances de la moyenne (c), coefficient de variance (d) de la vitesse c_{R} en fonction de δ. Dans (a-b), ondes de Rayleigh dans la direction $\boldsymbol{i}_1$ avec les fluctuations δ égales à 0.05, 0.2, 0.5 sont en bleu, rouge, violet. Celles de la direction $\boldsymbol{i}_2$ et $\delta = 0.5$ sont en noir. Dans (c-d), les statistiques sont faites pour la direction $\boldsymbol{i}_1$ 74

3.1 Niveau d'anisotropie augmente avec la fluctuation δ_{G} 84

3.2 Comparaison de l'illustration géométrique de la construction de l'indice d'anisotropie proposé (à droite) avec celui existant (à gauche) : espace jaune représente le sous-espace de $\mathbb{M}^{\mathrm{SD}}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ des matrices isotropes générées par une combinaison de $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{D}$, la normalisation par rapport à $\boldsymbol{C}_{iso}$ transforme $\boldsymbol{C}_{iso}$ en $\mathbf{Id}_6$. 94

3.3 Comparaison de la moyenne des indices d'anisotropie au carré en fonction de $(\delta; \delta_{\mathrm{G}})$: les courbes de nouvel indice, théorique (gris - calculée à l'aide de l'équation (3.110)) et observé (bleu foncé) coïncident tandis que celles de définition classique (violet, rouge) sont légèrement en dessous. 100

3.4 Comparaison du niveau de fluctuation de la norme du tenseur d'élasticité en fonction de $(\delta; \delta_G)$: superposition entre la surface théorique (rouge) calculée à l'aide de (3.127) et la surface observée (bleu clair) donnée par estimation statistique. 100

4.1 Illustration schématique de la transformation géométrique dans le cas 2D avec des fonctions de forme linéaires. 126
4.2 Polynômes $h_k^p(\xi)$ et leurs noeuds ξ_m^p associés pour $p = 6$. 129
4.3 Illustration schématique de la transformation géométrique dans le cas 2D avec des fonctions de forme linéaires et la grille de points GLL correspondant à $p = 17$ 131
4.4 Valeurs absolues des tensorisations 2D dans $[-1; 1] \times [-1; 1]$ pour $p = 6$: de gauche à droite $h_3^p(\xi) \otimes h_5^p(\xi)$ et $h_6^p(\xi) \otimes h_6^p(\xi)$. 132
4.5 Composant i des déplacements nodaux pour le cas 2D et $p = 4$ 133
4.6 Illustration schématique du parallélisme de la génération des champs stochastiques. 149
4.7 Explication géométrique selon [Bécache et al., 2003] de l'instabilité des PMLs 151
4.8 Illustration schématique de l'adaptation du PML. 153
4.9 Sensibilité de l'adaptation du PML vis-à-vis de l'énergie totale du domaine physique 154

5.1 Comparaison des fronts d'onde théoriques et simulés pour un matériau isotrope dans le plan x_1x_2. De gauche à droite : valeur absolue du champ de vitesse $|\dot{\boldsymbol{u}}|$, du champ de divergence $|\mathrm{Div}\, \boldsymbol{u}|$ et du champ rotationnel $|\mathrm{Rot}\, \boldsymbol{u}|$. 156
5.2 Comparaison des fronts d'onde théoriques et simulés pour un matériau orthotrope. Du haut en bas : plans x_1x_2, x_2x_3 et x_1x_3. De gauche à droite : valeur absolue du champ de vitesse $|\dot{\boldsymbol{u}}|$, du champ irrotationnel $|\mathrm{Div}\, \boldsymbol{u}|$ et du champ rotationnel $|\mathrm{Rot}\, \boldsymbol{u}|$. Les modes théoriques sont représentés par les courbes *bleues* , *vertes* et *rouges* respectivement pour *quasiP* , *quasiS*1 et *quasiS*2. 157
5.3 Comparaison des fronts d'onde théoriques et simulés pour un matériau triclinique. Du haut en bas : plans x_1x_2, x_2x_3 et x_1x_3. De gauche à droite : valeur absolue du champ de vitesse $|\boldsymbol{v}|$, du champ irrotationnel $|\mathrm{Div}\, \boldsymbol{u}|$ et du champ rotationnel $|\mathrm{Rot}\, \boldsymbol{u}|$. Les modes théoriques sont représentés par les courbes *bleues* , *vertes* et *rouges* respectivement pour *quasiP* , *quasiS*1 et *quasiS*2. 158
5.4 Comparaison des fronts d'ondes théoriques et simulés à la surface $x_3 = 0$ pour les matériaux (a) isotrope transverse III, (b) orthotrope IVb, et (c) triclinique V et (d) triclinique Va. 160
5.5 Comparaison des fronts d'ondes théoriques et simulés à la surface $x_3 = 0$ pour les matériaux (a) cubique II, (b) isotrope transverse IIIa, (c) orthotrope IV et (d) orthotrope IVa 161
5.6 Une réalisation du champ de propriétés élastiques : (à gauche) Cartographie du terme C_{11} et (à droite) Comparaison entre la structure de corrélation théorique (courbes en lignes continues) avec la structure de corrélation observée (courbes en cercles) pour C_{11} dans les directions $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$ (courbes noires) et dans la direction $\boldsymbol{i}_3$ (courbes grises). 163

5.7 Une réalisation du champ stochastique de tenseur d'élasticité. De gauche à droite : les champs correspondant aux termes C_{12}, C_{44}, C_{15}, à la norme $\|C\|$ et à l'indice d'anisotropie I_{A}. 163
5.8 Une réalisation du champ stochastique de tenseur d'élasticité. À gauche : Carte 2D de la vitesse d'onde de Rayleigh dans la direction $\boldsymbol{i}_1$ donnée à partir des valeurs du tenseur d'élasticité à la surface. À droite : Profil 1D selon x_1 de cette même information pour de différentes x_2, la courbe rouge correspond à la ligne $x_2 = 0$ 164
5.9 Traces de vitesse avec retournement temporel enregistrées à la surface $x_3 = 0$ pour les conditions aux limites de Neumann (à gauche) et absorbantes PML (à droite). Les signaux du haut en bas sont enregistrés à des distances respectives de 200m, 500m et 800m par rapport à la source située au centre de la surface. . 166
5.10 Traces de vitesse avec retournement temporel enregistrées à la surface $x_3 = 0$ pour les conditions aux limites de Neumann (à gauche) et absorbantes PML (à droite). Les signaux du haut en bas sont enregistrés à des distances respectives de 200m, 500m et 800m par rapport à la source située au centre de la surface. Les signaux "retour" de la FIG 5.9 (bleu marine) sont inversés en signe et en ordre d'évolution pour pouvoir être comparés avec les signaux "aller" (rouge). Les différences entre les deux sens sont également affichées (bleu ciel) 167

6.1 Évolution temporelle du champ de module de vitesse à la surface ($x_3 = 0$) pour le paramétrage "anisotrope" $\delta = 0$; $\delta_{\text{G}} = 0.6476$ entre 0.4s et 1.8s 175
6.2 Évolution temporelle du champ de module de vitesse à la surface ($x_3 = 0$) pour le paramétrage "isotrope" $\delta = 0.6$; $\delta_{\text{G}} = 0$ entre 0.4s et 1.8s 176
6.3 Évolution temporelle du champ de module de vitesse à la surface ($x_3 = 0$) pour le paramétrage "intermédiaire" $\delta = 0.3$; $\delta_{\text{G}} = 0.5456$ entre 0.4s et 1.8s 177
6.4 Évolution temporelle du champ de module de vitesse dans le plan vertical traversant le point d'excitation ($x_2 = 0$) pour le paramétrage "anisotrope" $\delta = 0$; $\delta_{\text{G}} = 0.6476$ entre 0.4s et 1.8s 178
6.5 Évolution temporelle du champ de module de vitesse dans le plan vertical traversant le point d'excitation ($x_2 = 0$) pour le paramétrage "isotrope" $\delta = 0.6$; $\delta_{\text{G}} = 0$ entre 0.4s et 1.8s 178
6.6 Évolution temporelle du champ de module de vitesse dans le plan vertical traversant le point d'excitation ($x_2 = 0$) pour le paramétrage "intermédiaire" $\delta = 0.5$; $\delta_{\text{G}} = 0.3327$ entre 0.4s et 1.8s 179
6.7 Comparaison énergétique globale entre le paramétrage "isotrope" $\delta = 0.6$; $\delta_{\text{G}} = 0$, le paramétrage "anisotrope" $\delta = 0$; $\delta_{\text{G}} = 0.6476$ et le paramétrage "intermédiaire" $\delta = 0.5$; $\delta_{\text{G}} = 0.3327$. (a) Évolutions dues à une excitation unidirectionnelle des énergies totales normalisées correspondant à ces paramétrages (respectivement en noir, bleu foncé et bleu clair). (b) Évolutions du rapport des énergies rotationnelle et irrotationnelle dues à une source unidirectionnelle (courbes continues : noire, bleu foncé et bleu clair respectivement pour "isotrope", "anisotrope" et intermédiaire) et à une source explosive (cercles : jaune, rouge et violet respectivement pour "isotrope", "anisotrope" et "intermédiaire"). 179

6.8 Stabilisation du rapport des énergies rotationnelle et irrotationnelle dans des milieux ayant $\delta = 0$, $\delta_G = 0.5387$ (à gauche) et $\delta = 0$, $\delta_G = 0.4317$ (à droite) pour différentes longueurs de corrélation. De haut en bas : $\ell = 90\mathrm{m}$, $\ell = 80\mathrm{m}$, $\ell = 70\mathrm{m}$, $\ell = 60\mathrm{m}$ et $\ell = 50\mathrm{m}$. Les courbes rouges représentent les rapports donnés par la source "S" les courbes bleues correspondent à la source "P". . . . 180
6.9 Dépendance du temps de stabilisation du champ d'onde à la longueur de corrélation du champ de propriétés élastiques. Les marqueurs jaunes et violets correspondent respectivement aux jeux de paramètres de fluctuation $(\delta = 0; \delta_G = 0.5387)$ et $(\delta = 0; \delta_G = 0.4317)$. 180
6.10 Rapport des énergies rotationnelle et irrotationnelle dans des milieux ayant pour paramètres $\delta = 0.1$, $\delta_G = 0$ (à gauche) et $\delta = 0$, $\delta_G = 0.1074$ (à droite) pour une même longueur de corrélation $\ell = 50\mathrm{m}$. Les courbes rouges et bleues sont issues des simulations avec PML, celles en jaune et noir correspondent aux C.L. de Neumann. Les courbes continues représentent les rapports donnés par la source "S", les cercles correspondent à la source "P". 181
6.11 Évolution temporelle et contenu fréquentiel du Ricker de $t_o = 0.3\mathrm{s}$ et $f_o = 10\mathrm{Hz}$. 182
6.12 Applications de l'algorithme MuSiC pour détecter la direction d'arrivée dans des milieux homogènes. De gauche à droite : milieu isotrope, milieu isotrope transverse type HTI et milieu isotrope transverse de type TTI. Du haut en bas : front d'onde observé (dont les flèches rouges sont les normales) superposé à la disposition des antennes sismiques et les back-azimuths détectés à $13Hz$ respectivement par les antennes A, B, C, D. 185
6.13 Courbes de dispersion données par MuSiC pour les demi-espaces homogènes. De haut en bas : milieu isotrope, milieu isotrope transverse type HTI et milieu isotrope transverse de type TTI. Les courbes correspondant aux antennes A, B, C, D sont respectivement marquées par des cercles, des carrées, des astérisques et des diamants. 186
6.14 Disposition des antennes sismiques 188
6.15 Extraction du squelette de la représentation temps-fréquence pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = 100\mathrm{m}, \ell_3 = \infty$. De gauche à droite : Antennes A et B. De haut en bas : les signaux bruts des capteurs, l'image gelée des grimpeurs aléatoires et les cellules du squelette (lignes blanches) sont superposées sur la RTF moyenne de l'antenne. 189
6.16 Détection des directions d'arrivée pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = 100, \ell_3 = \infty$. De gauche à droite : Antennes A et B. De haut en bas : ondes ballistiques et ondes diffractées. 189
6.17 Détection des vitesses apparentes pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = 100\mathrm{m}, \ell_3 = \infty$. De gauche à droite : Antennes A et B. De haut en bas : ondes ballistiques et ondes diffractées. 190
6.18 Extraction du squelette de la représentation temps-fréquence pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 100\mathrm{m}$ à partir des données de l'antenne B. De haut en bas : les signaux bruts des capteurs, l'image gelée des grimpeurs aléatoires et les cellules du squelette (lignes blanches) sont superposées sur la RTF moyenne de l'antenne. 190

6.19 Détections de la directivité d'onde (a-c) et de la vitesse apparente (b-d) de l'antenne B pour le paramétrage $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 100\mathrm{m}$ 191

B.1 Configuration expérimentale 209
B.2 Courbes de dispersion expérimentale pour 6 lignes différentes 210

Bibliographie

S. Abarbanel and D. Gottlieb. A mathematical analysis of the pml method. *Journal of Computational Acoustics*, 134 :357–363, 1997. 142

M. Abbudi and D. M. Barnett. Three-Dimensional Computer visualisation of the Slowness Surfaces of Anisotropic crystals. In J.J. Wu, T.C.T. Ting, and D. M. Barnett, editors, *Modern theory of Anisotropic Elasticity and Applications*. SIAM, 1991. 26

M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover, 1964. 127, 128

I.R. Abubakirov and A.A. Gusev. Gusev a a 1990 estimation of scattering properties of lithosphere of kamchatka based on monte-carlo simulation of record envelope of a near earthquake. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 64 :52–67, 1990. 14

S. Adhikari and M.I. Friswell. Eigenderivative analysis of asymetric non-consevative systems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 51 :709–733, 2001. 142

K. Aki. Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *Journal of Geophysical Research*, 4 :71–79, 1969. 2

K. Aki and B. Chouet. Origin of coda waves : sources, attenuation and scattering effects. *Journal of Geophysical Research*, 80 :3322–3342, 1975. 2, 4, 13, 14

K. Aki and P.G. Richards. *Quantitative Seismology : Theory and Methods*, volume 1. W. H. Freeman and Company, 1980. 10

A. Akthakul. Study of Waveguide and Anisotropy Effects upon Surface Acoustic Wave Velocities in Thin Film. Master's thesis, Kobe University, 1998.

G. Allaire. *Analyse numérique et Optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Les Éditions de l'École Polytechnique, 2005. 124

M. Arnst. *Inversion of probabilistic models of structures using measured transfer function*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, France, 2007. 4, 75, 89, 92, 104, 105, 106, 108, 112, 115, 195

M. Arnst, D. Clouteau, H. Chebli, R. Othman, and G. Degrande. A non-parametric probabilistic model for ground-borne vibrations in buildings. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(1) : 18–34, 2006. 75

M. Arnst, Q.-A. Ta, R. Taherzadeh, R. Cottereau, M. Schevenels, G. Lombaert, D. Clouteau, M. Bonnet, and G. Degrande. Measurements at a site in lincent : transfer functions, dispersion curves and seismogrames. Technical report, Labo MSSMat, École Centrale Paris, 2006. 210

R. J. Arts. *Étude de l'élasticité anisotrope générale dans les roches par propagation des ondes.* PhD thesis, Université de Pierre et Marie Curie, 1993. 17, 20, 21, 194

B. A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids*, volume 1-2. John Wiley & Sons, 1973. 17, 20, 39, 50, 57, 76, 193

G.E. Backus. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67 :4427–4440, 1962. 12

A.M. Baig, F.A. Dahlen, and S.-H. Hung. Traveltimes of waves in three-dimensional random media. *Geophysical Journal International*, 153 :467–482, 2003. 13

G. Bal and M. Moscoso. Polarization effects of seismic waves on the basis of radiative transport theory. *Geophysical Journal International*, 142 :571–585, 2000. 14

É. Balmes, J.-P. Bianchi, and J.-M. Leclère. *Structural Dynamics Toolbox FEMLink*. SDTools, 2009. 147

D. M. Barnett. Bulk, surface, and interfacial waves in anisotropic linear elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :45–54, 2000. 40, 58

D. M. Barnett and P. Chadwick. The Existance of One-Component Surface Waves and Eceptional Subsequent Transonic States of Type 2, 4 and E1 in Anisotropic Elastic Media. In J.J. Wu, T.C.T. Ting, and D. M. Barnett, editors, *Modern theory of Anisotropic Elasticity and Applications*. SIAM, 1991. 41, 49

D. M. Barnett, J. Lothe, K. Nishioka, and R.J. Asaro. Elastic surface waves in anisotropic crystals : a simplified method for calculating rayleigh velocities using dislocation theory. *Journal of Physics F : Metal Physics*, 3 :1083–1096, 1973. 46

D.M. Barnett and J. Lothe. Synthesis of the sextic and the formalism for dislocations, Green function and surface waves in anisotropics elastic solids. *Physica Norvegica*, 7 :13–19, 1973. 40, 46

D.M. Barnett and J. Lothe. Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals. *Journal of Physics F*, 4 :671–686, 1974. 40, 46

D.M. Barnett and J. Lothe. Free surface (Rayleigh) waves in anisotropic elastic half-spaces : the surface impedance method. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 402 : 135–152, 1985. 17, 40, 41, 46, 47, 48, 53, 193, 215

U. Basu and A. K. Chopra. Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbonded domains. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 59(12), 2004. URL www.sciencedirect.com. 142

E. Bécache. Méthodes variationnelles, domaines fictifs et conditions aux limites artificielles pour des problèmes hyperboliques linéaires. Application aux ondes dans les solides. Habilitation à diriger des recherches, INRIA, 2003. URL http://www.inria.fr/rrrt/th-024.html. 141, 142, 143, 194

E. Bécache, S. Fauqueux, and P. Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, (188) :399–433, 2003. URL www.sciencedirect.com. 142, 151, 194, 218

T. Belytschko and R. Mullen. On dispersive properties of finite element solutions. In J. Miklowitz and J.D. Achenbach, editors, *Modern problem in elastic wave propagation*, volume 67. John Wiley & Sons, New York, 1978. 122

F. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200, 1994. 141

J.G. Berryman. Long-wave elastic anisotropy in transversly isotropic media. *Geophysics*, 44 : 896–917, 1979. 12

J.G. Berryman. Transversly isotropic poroelasticity araising from thin isotropic layers. In K. M. Golden, G. R. Grimmett, R. D. James, G. W. Milton, and P. N. Sen, editors, *Mathematics of Multiscale Materials*, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, pages 37–50. Springer, New York edition, 1998. 12

M. Bonnet. *Équations intégrales et Élements de frontières*. CNRS Editions-Eyrolles, 1995. 121

M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon Press, Oxford, 3rd edition edition, 1965. 10

I. Bucatatu and M.A. Slawinski. Invariant propeties for finding distance in Space of Elasticity Tensors. *Journal of Elasticity*, 94 :97–114, 2009. 20, 87

M. Campillo, L. Margerin, and N.M. Shapiro. Seismic wave diffusion in the earth lithosphere. In J.-P. Fouque, editor, *Diffuse Waves in Complex Media*, volume 531 of *C Mathematical and Physical Sciences*, pages 383–404, Dordrecht/Boston/London, 1999. NATO Sciences Series, Kluwer Academic Publishers. 169

C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. *Spectral method in fluid dynamics*. Springer - Verlag, new york edition, 1988. 121

Y. Capdeville. *Méthode couplée éléments spectraux – solution modale pour la propagation d'ondes dans la Terre à l'échelle globale*. PhD thesis, Université de Paris VII - Denis Diderot, 2000. 123

J.-M. Carcione. *Wave Fields in Real Media : Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*, volume 38 of *Hanbook of Geophysical Exploration : Seismic Exploration*. Elsevier, second : revised and extended edition, 2007. 21

J.-M. Carcione and P.J. Wang. A Chebyshev collocation method for the wave equation in generalized coordinates. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 2 :269–290, 1993. 121

F. Cavallini. The best isotropic approximation of an anisotropic Hooke's law. *Bolletino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 40(1) :1–18, 1999. 21

C. Cerjan, D. Kosloff, R. Kosloff, and M. Reshef. A non-reflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic waves. *Geophysics*, 50 :705–708, 1985. 141

V. Cerveny. *Seismic ray theory*. Cambridge University Press, 2001. 17, 24, 193

P. Chadwick and G.D. Smith. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials. *Advances in Applied Mechanics*, 17 :303–376, 1977. 40, 45, 47, 49

B. Chalindar. *Conditions aux Limites Artificielles pour les Équations de l'Élastodynamique*. PhD thesis, Université de Saint-Étienne, 1987. 141

E. Chaljub. *Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques en géométrie sphérique : Application à la seismologie globale*. PhD thesis, Université de Paris VII - Denis Diderot, 2000. 123

S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover, New York edition, 1960. 11

C.-H. Chang and G.H.F Gardner. Effects of vertically aligned subsurface fractures on seismic reflections : A physical model study. *Geophysics*, 62(1) :245–252, 1997. 12

D. H. Chung and W. R. Buessem. The elastic anisotropy of crystals. *Journal of Applied Physics*, 38(5) :217–245, 1967. 20

D. Clouteau. *Propagation d'ondes dans les milieux hétérogènes, application à la tenue des ouvrages sous séismes*. PhD thesis, École Centrale Paris, 1990. 121

D. Clouteau and D. Aubry. Modification of the ground motion in dense urban areas. *Journal of Computational Acoustics*, 9(4) :1659–1675, 2001.

G. Cohen, P. Joly, and N. Tordjman. Construction and analysis of high order finite elements with mass lumping for the wave equation. In *The Second International Conference on Mathematical an Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*, pages 152–160, Philadelphia, 1993. SIAM. 122

A. Collino and C. Tsogka. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66(1) :294–307, 2000. 141, 144

F. Collino and P. Monk. The perfectly matched layer in curvilinear corrdinates. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(6) :2061–2090, 1998. 141

R. Cottereau. *Probabilistic models of impedence matrices. Application to dynamic soil-structure interaction.* PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2007. 75, 104

P. Cupillard. *Simulation par la méthode des éléments spectraux des formes d'onde obtenues par corrélation de bruit sismique*. PhD thesis, Université de Paris VII - Denis Diderot, 2008. 123

P. Dangla. *Couplage éléments finis - équations intégrales en élastodynamique et interaction sol-structures*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1989. 121

A.N. Darinskii, V.I. Alshits, and J. Lothe. Simple reflection and leaky wave in the vinicity of a line of exceptional bulk wave. *Wave Motion*, 30 :253–274, 1999. 41

R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 1987. 114

É. Delavaud. *Simulation Numérique de de la propagation d'ondes en milieu géologique complexe : application à évaluation de la réponse sismique du bassin de Caracas (Venezuela)*. PhD thesis, Université de Paris VII - Denis Diderot, juin 2007. 5, 26, 122, 123, 133, 135, 147, 195

M. Deschamps and G. Huet. Complex surface rays associated with inhomogeneous skimming and Rayleigh waves. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(2009) :469–477, 2009. 40

G. Dhatt and G. Touzou. *The finite element method displayed*. John Wiley & Sons, 1984. 125

D.J. Doornbos. Characteristics of lower mantle inhomogeneities from scattered waves. *Geophysical Journal Recherche of Astronology Society*, 44 :447–470, 1976. 13

T. Dupond. A L^2 estimate of Galerkin method for second order hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10 :880–891, 1973. 122

P.S. Earle and P.M. Shearer. Distribution of fine-scale mantle heterogeneity from observations of P_diff coda. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 91 :1875–1881, 2001. 13

B. Engquist and A. Majda. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 32(3) :313–357, 1979. 140

S. Fauqueux. *Éléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation des ondes élastiques en régime transitoire*. PhD thesis, Université de Paris IX - Dauphine, 2003. 122

F.I. Fedorov. *Theory of Elastic Waves in Crystal*. Plenum Press, New York, 1968. 21

G. Festa. *Slip imaging by isochron back projection and source dynamics with spectral element methods*. PhD thesis, Unisversità degli studi di Bologna, Italy, 2004. 141

G. Festa and J.-P. Vilotte. The newmark scheme as a velocity-stress time staggering : An efficient pml for spectral element simulations of elastodynamics. *Geophysical Journal International*, 161(3) :789–812, 2005. 5, 123, 135, 140, 142, 144, 146, 154, 194

M. Fink. Time Reversal of Ultrasonic Fields–basic principles. *IEEE Transaction on Ultrasonics, Ferrolectrics and Frequency Control*, 5(39) :555–566, 1992. 164

M. Fink. Time Reversal Acoustic. *Physics Today*, (20) :34, 1997. 164

F.R. Fontaine. *Anisotropie et Atténuation sismique en domaine océanique : Application aux panaches mantelliques de le Polynésie française et des Galapagos*. PhD thesis, Université Monpellier II, 2005. 3

B. Fornberg. The pseudospectral method : accurate representation of interfaces in elastic wave calculations. *Geophysics*, 61(4) :1160–1174, 1988. 121

C. Fougead and A. Fuchs. *Statistique*. Dunod, Paris, 2nd edition 1972 edition, 1967. 82

A. Frankel and R.W. Clayton. Finite difference simulation of wave propagations of seismic scattering : implications for the propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity. *Journal of Geophysical Research*, 91 :6465–6489, 1986. 4

Y. Fu. An integral representation of the surface-impedance tensor for incompressible elastic materials. *Journal of Elasticity*, 81 :75–90, 2005. 40

P. Gallina. Effect of damping on asymmetric systems. *Journal of Vibration Acoustic*, 125 : 359–364, 2003. 143

L.S. Gao, N.N. Biswas, L.C. Lee, and K. Aki. Effects of multiple scattering on coda waves in three-dimensional medium. *Pure and Applied Geophysics*, 121 :3–15, 1983. 2, 14

J. Gazdag. Modeling of acoustic wave equation with transform methods. *Geophysics*, (46) : 854–859, 1981. 121

D.C. Gazis, I. Tadjbakhsh, and R.A. Toupin. The elastic tensor of a given symmetry neareast to an anisotropic elastic tensor. *Acta Cristallogr*, (16) :917–922, 1963. 20, 87

M. Géradin and D. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and Applications to Structural Dynamics*. John Wiley & Sons, 1992. 138, 139

R. G. Ghanem and P.D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A spectral approach*. Springer, 1991. 106

R.G. Ghanem and P.D. Spanos. Polynomial chaos in finite elements. *Journal of Applied Mechanics*, 57 :197–202, 1990. 106

R. Godement. Où l'on généralise une intégrale étudiée par C.L. siegel et généralisant la fonction gamma. In *Séminaire Henri Cartan*, volume 10, pages 1–24. Secrétariat mathématique, Paris, 1957. 85

P. Goupillaud, A. Grossman, and J. Morlet. Cycle-Octave and Related transforms in Seismic Signal Analysis. *Geoexploration*, 23 :85–102, 1984. 184

S.A. Gundersen, L. Wang, and J. Lothe. Secluded supersinic elastique surface wave. *Wave Motion*, 14(2) :129–143, 1991. 41, 49

A.A. Gusev and I.R. Abubakirov. Monte carlo simulation of record envelope of a near earthquake. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 49 :30–36, 1987. 14

R.A.W. Haddon and J.R. Cleary. Evidence for scattering of seismic PKP waves near the mantle-core boundary. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 8 :211–234, 1974. 13

T. Hagstrom. On high-order radiation boundary condition. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 86 :1–21, 1997. 141

F.D. Hastings, J.B. Schneider, and S.L. Broschat. Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *Journal of Acoustical Society of America*, 100(5) :3061–3069, 1996. 141

R. F. S. Hearmon. *An introdution to applied anisotropic elasticity*. Oxford University Press, 1961. 17, 26, 57

M. Herraiz and A.F. Espinosa. Coda Waves : A Review. *Pure and Applied Geophysics*, 125 (4) :499–577, 1987. 14

R.L. Higdon. Absorbing boundary conditions for elastic waves. *Geophysics*, 56(2) :231–241, 1991. 141

Franz Hlawathsch and Francois Auger. *Temps-fréquence : concept et outil*. Hermes Lavoisier, 2005. 211

M. Hoshiba. Simulation of coda wave envelope in depth dependent scattering and absorption structure. *Geophysical Research Letters*, 21 :2853–2856, 1994. 14

M. Hoshiba. Seismic coda wave envelope in depth-dependent s wave velocity structure. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 104 :15–22, 1997. 14

T.J.R. Hughes. *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice Hall International, 1987. 138

T.J.R. Hughes and G.M. Hulbert. Space-time finite element methods for elastodynamics, formulation and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66 :339–363, 1988. 122

K. Ingebrigtsen and A. Tonning. Elastic surface waves in crystals. *Physical Review*, 184(3) : 952–951, 1969. 40, 46

O.A. Ishizawa Escudero. *Diffraction multiple des ondes en milieu aléatoire. Application à l'étude de l'effet site-ville.* PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2006.

M. Israeli and S.A. Orszag. Approximation of radiation boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 41 :115–135, 1981. 141

E.T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, (106) :620–630, 1957. 80

G. Karypis and V. Kumar. *METIS - A Software Package for Partitioning Unstructired Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill-Reducing Orderings of Sparse Matrices*. University of Minnesota, Departement of Computer Science / Army HPC Rerearch Center, 1998. 147

D.W. King, R.A.W. Haddon, and E.S. Husebye. Precursors to PP. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 10 :103–127, 1975. 13

D. Komatitsch. *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène*. PhD thesis, Université de Paris 7 - Denis Diderot, France, 1997. 122, 123, 127

D. Komatitsch and R. Martin. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation. *Geophysics*, 72(5) :155–167, 2007. 142

D. Komatitsch and J. Tromp. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second order seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 154 :146–153, 2003. 141

Y.F. Kopnichev. The role of multiple scattering in the formation of a seismogram's tail (english translation). *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Fiz. Zemli*, 13 :394–398, 1977. 14

I.P. Kornfeld, S.V. Formin, and Y.G. Sinai. *Ergodic Theory*. Springer, 1982. 103

M. Kulesh, M. Holschneider, M. S. Diallo, Q. Xie, and F. Scherbaul. Modeling of wave dispersion using continuous wavelet transforms. *Pure and Applied Geophysics*, 162(2005) : 843–855, 2005. 184, 211

T.P. Le. *Auscultation dynamique des structures à l'aide de l'analyse continue en ondelettes*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, France, 2003. 184

A.R. Levander. Fourth-order finite-differences P SV seismograms. *Geophysics*, (53) :1425–1436, 1988. 120

Q.H. Liu and J. Tao. The perfectly matched layer (PML) for acoustic waves in absorptive media. *Journal of Acoustical Society of America*, 102(4) :2072–2082, 1997. 141

G. Lombaert and D. Clouteau. The resonant multiple wave scattering in the seismic response of a city. *Waves in Random and Complex Media*, 16(3) :205–230, 2006.

J. Lothe and D. M. Barnett. On the existence of surface wave solutions for anisotropic half-spaces with free surface. *Journal of Applied Physics*, 47 :428–433, 1976. 40, 46, 49

R.J. Luebbers and F. Hunsberger. FDTD for Nth-order dispersive media. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, 40 :1297–1301, 1992. 142

R. Madariaga. Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 3(66) :639–666, 1976. 120, 144

Y. Maday and A.T. Patera. Spectral element methods for the Navier-Stokes equations. In A.K. Noor and J.T. Oden, editors, *State-of-the-Art-Survey in Computational Fluid Mechanics*, chapter 3. ASME, 1988. 122

S. Marcos. *Les méthodes à haute résolution : traitement d'antenne et analyse spactrale*. Hermes, 1998. 210

K.J. Marfurt. Accurancy of finite-difference and finite-element modeling of scalar wave equation. *Geophysics*, 49 :533–549, 1984. 122

L. Margerin. *Diffusion multiple des ondes élastiques dans la lithosphère*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1998. 2, 4, 11, 169, 171, 193

L. Margerin and G. Nolet. Multiple scattering of high-frequency seismic waves in the deep Earth : Modeling and numerical examples. *Journal of Geophysical Research*, 108 :2234–2250, 2003a. 16

L. Margerin and G. Nolet. Multiple scattering of high-frequency seismic waves in the deep Earth : PKP precursor analysis and inversion for mantle granularity. *Journal of Geophysical Research*, 108 :2514–2529, 2003b. 16

L. Margerin, M. Campillo, and B. Van Tiggelen. Radiative transfer and diffusion of waves in a layer medium : new insight to coda Q. *Geophysical Journal International*, 134 :596–612, 1998. 14

L. Margerin, M. Campillo, and B.V. Tiggelen. Monte Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves. *Journal of Geophysical Research*, 105(B4) :7873–7892, 2000. 14, 15, 16

T. Mensch and P. Rosolofosaon. Elastic-wave velocities in anisotropic media of arbitrary symmetry - generalization of Thomsen's parameter ϵ, δ and γ. *Geophysical Journal International*, 128 :43–64, 1997. 20

K.C. Meza-Fajardo and A.S. Papageorgiou. A Nonconvolutional, Split-Field, Perfectly Matched Layer for Wave Propagation in Isotropic and Anisotropic Elastic Media : Stability analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(4) :1811–1836, 2008. 142, 143, 152

N. Mezher. *Modélisation numérique et quantification de l'effet sismique Site-Ville*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2004. 2, 215

M.P. Mignolet. *Simulation pf random processe and fields by ARMA models : A review*, pages 149–173. Elsevier, 1993. 105

M.P. Mignolet and C. Soize. Nonparametric stochastique modeling of linear systems with prescribed variance several natural frequencies. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2-3 (23) :267–278, 2008. 78

M. Moakher and A.N. Norris. The closest elastic tensor of arbitrary symmetry to an elastic tensor of lower symmetry. *Journal of Elasticity*, 85(3) :215–263, 2006. 20

S. Nazarian. *In situ determination of elastic moduli of soil deposits and pavements systems by spectral-analysis-of-surface-waves method*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 1984. 209

S. Nazarian and M.R. Desai. Automated surface wave method field testing. *Journal of Geotechnical Engineering*, 119(7) :1094–1111, 1993. 209

T.M. Nguyen. *Dynamique non-linéaire des systèmes mécaniques couplés : Réduction de modèle et Identification*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, France, 2007. 184

A.N. Norris. Elastic moduli approximation of higher symmetry for the acoustical propeties of an anisotropic material. *Journal of Acoustical Society of America*, 119(4) :2114–2121, 2006a. 20

A.N. Norris. The isotropic material closest to a given anisotropic material. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1(2) :2223–2238, 2006b. 20

G.C. Papanicolaou, L.V. Ryzhik, and J.B. Keller. Stability of the p-to-s energy ratio in the diffusive regime. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86 :1107–1115, 1996. 15, 193

A.T. Patera. A spectral method for fluid dynamics : Laminar flow in a chanel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54 :468–488, 1984. 122

J. Perrot. Terre profonde. Support de Cours, Université de Bretagne Occidentale. 2, 215

F. Poirion and C. Soize. Simulation numérique de champs vectoriels stochastiques Gaussiens homogènes et non-homogènes. *La Recherche Aérospatiale*, (1) :41–61, 1989. 105, 106, 107

R. Popescu. *Stochastique variability of soil properties : data analysis, digital simulation, effect on system behavior*. PhD thesis, Princeton University, USA, 1995. 75, 104, 108

E. Priolo, J.-M. Carcione, and G. Seriani. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques. *Journal of Acoustical Society of America*, 95(2) :681–693, 1994. 122

I. Psencik and D. Gajewski. Polarization, phase velocity and NMO velocity of qP-waves in arbitrary weakly anisotropic media. *Geophysics*, 63 :1754–1766, 1998. 20

B. Puig. *Modélisation et simulation de processus stochastiques non-Gaussiens*. PhD thesis, Université de Pierre et Marie Curie, 2003. 106

C. Rappaport and L. Bahrmasel. An absorbing boundary condition based on anechoic absorber for EM scattering computation. *Journal of Electromagnetic Wave*, 6(12) :1621–1634, 1992. 141

M. Reshef, D. Kosloff, M. Edward, and C. Hsiung. Three dimensional acoustic modeling by the Fourier method. *Geophysics*, (53) :1175–1183, 1988. 121

G.R. Richter. An explicit finite element method for the wave equation. *Applied Numerical Mathematics*, 16(65-80), 1994. 122

C. P. Robert and G. Casella. *Monte Carlo statistical methods*. Springer, 1999. 79, 107, 184

L.V. Ryzhik, G.C. Papanicolaou, and J.B. Keller. Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave Motion*, 24 :327–370, 1996. 14, 15, 169, 170, 193

H. Sato. Energy propagation including scattering effects, single isotropic scattering approximation. *Journal of Physics of the Earth*, 25 :27–41, 1977. 2

H. Sato and M.C. Fehler. *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous Earth*. Springer - Verlag, New York edition, 1998. 13, 14

H. Sato and M. Nishino. Multiple isotropic-scattering model on the spherical earth for the synthesis of rayleigh-wave envelopes. *Journal of Geophysical Research*, 107 :2343, 2002. 14

H.. Sato, M. C. Fehler, and R. Dmowska. *Earth Heterogeneity and Scattering Effects on Seismic Waves*, volume 50 of *Advances in Geophysics*. Academic Press, 2009. 104, 105

E. Savin and D. Clouteau. Elastic wave propagation in 3D unbounded random heterogenous medium coupled with a bounded medium. Applications to seismic soil-structure interaction. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 4(54) :607–630, 2002. 122

E. Schisselé, J. Guilbert, S. Gaffet, and Y. Cansi. Accurate time-frequency-wavenumber analysis to study coda waves. *Geophysical Journal International*, 158, 2004. 2, 184, 210, 212

E. Schisselé, S. Gaffet, and Y. Cansi. Characterization of regional and local scattring effects from small-aperture seismic array recordings. *Journal of Seismology*, 9 :137–149, 2005. 184, 210

G. Seriani. 3-D large-scale wave propagation modeling by a spectral element method on a Cray T3E multiprocessor. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998. 122

C. Shannon. Communication in the Presence of Noise. In *Proceedings of the IRE*, volume 37, pages 10–21. Institute of Radio Engineers, January 1949. 106

C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, 27 : 379–423, 1948. 79, 80

N.M. Shapiro, M. Campillo, L. Margerin, S.K. Singh, V. Kostoglodov, and J. Pacheco. The Energy Partitioning and the Diffusive Character of the Seismic Coda. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 90(3) :655–665, 2000. 14, 16, 169, 193, 195

P.M. Shearer. Deep Earth structure - seismic scattering in the Deep Earth. In *Treatise on Geophysics*, pages 695–718. Elsevier, 2007. 13, 14

P.M. Shearer. *Introduction to Seismology*. Cambridge University Press, 2nd edition edition, 2009. 3

P.M. Shearer and P.S. Earle. The global short-period wavefield modelled with a monte carlo seismic phonon method. *Geophysical Journal International*, 158 :1103–1117, 2004. 16

M. Shinozuka and G. Deodatis. Simulation of multi-dimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation. *Applied Mechanics Review*, 1(49) :29–53, 1996. 106

M. Shinozuka and C.-M. Jan. Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of Sound and Vibration*, (25) :111–128, 1972. 6, 75, 105

J. Sochacki, R. Kubichek, G. George, W.R. Fletcher, and S. Smithson. Absorbing boundary conditions and surface waves. *Geophysics*, 52 :60–71, 1987. 141

C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, (15) :277–294, 2000. 79, 81, 82, 83, 84, 88, 96

C. Soize. Maximum entropy approach for medeling random uncertainties in transient elastodynamiques. *Journal of Acoustical Society of America*, (109) :1979–1996, 2001. 6, 26, 49, 52, 55, 73, 75, 217

C. Soize. Probabilité et modélisation des incertitude. Note de cour de l'Université de Marne la Vallée, 2004. 80, 88, 91

C. Soize. Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (194) :1333–1366, 2005. 89

C. Soize. Non-Gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(1-3) :26–64, 2006. 5, 6, 75, 81, 89, 93, 94, 95, 99, 112, 115, 116, 117, 193

C. Soize. Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 23(2008) :307–323, 2008. iii, v, 5, 75, 81, 117

J. Spetzler and R. Sneider. The effect of small-scale heterogeneity on the arrival time of waves. *Geophysical Journal International*, 145 :786–796, 2001. 13

P. S. Spoor, J.D. Maynard, and A. R. Kortan. Elastic isotropy and anisotropy in quasicrystalline and cubic alculi. *Physical review letters*, 75(19) :3462–3465, 1995. 20

A.N. Stroh. Some analytic solutions for Rayleigh waves in cubic crystals. *Journal of Mathematics and Physics*, 41 :77–103, 1962. 40, 41, 42, 58, 193

A. Stroud and D. Secrest. *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice Hall, 1966. 127, 128

Q.-A. Ta, D. Clouteau, and R. Cottereau. Modeling of random anisotropic elastic media and impact on wave propagation. *European Journal of Computational Mechanics*, 19(1-2-3) : 241–253, 2010. 5

K. Tanuma, C.S. Man, M. Huang, and G. Nakamura. Surface impedance tensors of textured polycrystals. *Journal of Elasticity*, 67 :131–147, 2002.

R.M. Taziev. Dispersion relation for acoustic waves in an anisotropic elastic half-space. *Soviet Physics Acoustics*, 35(5) :922–928, 1989. 40

F.L. Teixeira and W.C. Chew. Systematic derivation of anisotropic PML absorbing media in cylindrical and spherical coordinates. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 7(11) : 371–374, 1997. 141

L. Thomsen. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 51 :1954–1966, 1986. 20

L. Thomsen. Weak anisotropy reflections. In J.P. Castagna and M. M. Backus, editors, *Offset-Dependent Reflectivity – Theory and practice of AVO analysis*, pages 103–111, 1993. 12

T. Toshinawa and T. Ohmachi. Love wave propagation in three-dimension sedimentary basin. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 82 :1661–1667, 1992. 122

N. Trégourès, R. Hennino, C. Lacombe, N.M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, and B. Van Tiggelen. Multiple scattering of seismic waves. *Ultrasonics*, 40 :269–274, 2002. 16

I. Tsvankin. *Seismic Signatures and Analysis of Reflection Data in Anisotropic Media*, volume 29 of *Hanbook of Geophysical Exploration : Seismic Exploration*. Elsevier, 2005. 20

J.A. Turner. Scattering and Diffusion of Seismic Waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88 :276–283, 1998. 14

A. Udías. *Principles of Seismology*. Cambridge University Press, 1999. 39, 54, 57

E. Urba and R. Miskinis. Surface acoutic wave in anisotropic media : A review. *Ultragarsas*, 37(4) :29, 2000. 17, 40, 48

R.D. Van der Hilst, M.V. De Hoop, P. Wang, S.-H. Shim, L. Tenorio, and P. Ma. Seismostratigraphy and thermal structure of Earth's core-mantle boundary region. *Science*, 315 (1813–1817), 2007. 1, 2, 3, 215

E.H. Vanmarcke. *Random Fields : Analysis and Synthesis*. The MIT Press, 1983. 108

L. Vernik and X. Liu. Velocity anisotropy in shales : A petrophysical study. *Geophysics*, 62 : 521–532, 1997. 21

J.E. Vidale and P.S. Earle. Fine-scale heterogeneity in the earth's inner core. *Natures*, 404 (273–275), 2000. 13

L.P. Vinnik. Evaluation of the effective cross-section of scattering in the lithosphere. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 26 :268–284, 1981. 13

J. Virieux. SH wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, 11(49) :1933–1957, 1984. 120

J. Virieux. P-SV wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite difference method. *Geophysics*, 4(51) :889–901, 1986. 120, 144

L. Wang. Space of degeneracy in the Stroh eigensystem and surface waves in tranversely isotropic elastic media. *Wave Motion*, 2004. 40

L. Wang and S.A. Gundersen. Existance of One Component surface wave in anisotropic elastic media. *Physica scripta*, 47 :394–404, 1993. 41, 49

R.L. Weaver. Diffusitivity of ultrasound in polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38 :55–86, 1990. 14, 15

R.-S. Wu. Multiple scattering and energy transfer of seismic waves separation of scattering effect from intrinsic attenuation i. theoretical modelling. *Geophysical Journal Recherche of Astronology SocietyGeophysical Journal Recherche of Astronology Society*, 82 :57–80, 1985. 13, 14

R.-S. Wu and K. Aki. Multiple scattering and energy transfer of seismic waves separation of scattering effect from intrinsic attenuation ii. application of the theory to hindu kush region. *Pure and Applied Geophysics*, 128 :49–80, 1988. 14

C. Zener. *Elasticity and Anelasticity of Metals*. University of Chicago Press, Chicago, 1948. 20

Y.Q. Zeng, Q.E. He, and Q.H. Liu. The application of the perfectly matched layer in a numerical modeling of wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 6(64) :1258–1266, 2001. 142

A. Zerva. Estimation of signal characteristics in seismic ground motion. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1996. 210