



HAL
open science

Modèles et observateurs pour les systèmes d'écoulement sous pression. Extension aux systèmes chaotiques

Flor Lizeth Torres Ortiz

► To cite this version:

Flor Lizeth Torres Ortiz. Modèles et observateurs pour les systèmes d'écoulement sous pression. Extension aux systèmes chaotiques. Automatique / Robotique. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENT005 . tel-00586334

HAL Id: tel-00586334

<https://theses.hal.science/tel-00586334v1>

Submitted on 15 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique-Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Torres Ortiz Flor Lizeth

Thèse dirigée par **Gildas Besançon**
et codirigée par **Didier Georges**

préparée au sein du **Laboratoire Gipsa Lab**
et de l'**ÉCOLE DOCTORALE EEATS**

Modèles et observateurs pour les systèmes d'écoulement sous pression. Extension aux systèmes chaotiques

Thèse soutenue publiquement le **28 janvier 2011**,
devant le jury composé de :

Dr. Métails Olivier

Professeur des Universités, INP Grenoble , Président

M. Kinnaert Michel

Professeur des Universités, Université Libre de Bruxelles, Rapporteur

M. Busvelle Eric

Professeur des Universités, Université de Bourgogne, Rapporteur

Mme. Verde Cristina

Professeur des Universités, Universidad Nacional Autónoma de México,
Examineur



"No estudio por saber mas, sino por ignorar menos"
Sor Juana Inés de la Cruz.

Remerciements

Je tiens à adresser ma sincère et profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, Gildas Besançon, de qui j'ai reçu un soutien constant, de la patiente et de la confiance.

Je remercie également mon co-directeur de thèse, Didier Georges, pour son soutien et pour ses réflexions qui ont été toujours riches en enseignements.

Je tiens à remercier les membres du Jury, qui ont accepté de juger mon travail : M. Olivier Métails pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance, M. Michel Kinnaert, Monsieur M. Eric Busvelle et Mme. Cristina Verde pour avoir accepté d'examiner en profondeur ce travail ainsi que pour tous leurs commentaires constructifs.

Je voudrais exprimer ma gratitude au Conseil National de la Science et de la Technologie du Mexique, CONACYT, pour l'attribution de la bourse qui m'a permis effectuer mes études de doctorat.

J'exprime ma reconnaissance aux professeurs de Gipsa Lab pour leurs critiques et leurs enseignements toujours constructifs, particulièrement aux membres de SYSCO, à Mazen alamir, Emmnauel Witrant, et John Jairo Martinez.

Je remercie tout le personnel qui rend la vie des thésards plus agréable. Mes remerciements les plus sincères à Marie-Thérèse, Virginie, et à Patricia.

Je tiens aussi à remercier mes collègues et amis du laboratoire, avec lesquels j'ai partagé tant de choses et qui ont fait de ma vie à Grenoble une expérience inoubliable : Aloushita, Andra YellowPenguin, Irfi Cool, Tony LaTaupe, Federico, Jennifer, Diana, Pham et sa femme, Lam, Hieu, Van, Amine, Marouane, Oumayma, Simona, Lara, Sylvain, Emilie, Valentina, Carolina, David, Rogelio, Sarah, Gabriel, Sebastien, Fermi et Hala.

Un grand remerciement aux personnes qui m'ont aidé à corriger mon rapport de thèse : Delphine Chazot, Joumana Hermassi et Clément Garçon. Surtout à Delphine qui m'a soutenu, corrigé et supporté durant l'étape la plus prenante.

Je tiens également à remercier mes amis de Grenoble pour les encouragements et la joie de vivre : Michelle Alvarez, Olga, Luis, Arturo, Pancho, El gordo, Arnaud, Jino, Sebastien, David, Paco, Chio, Chente, Paty, Johnatan, Constanza, Jorge, José Luis, Adrian, Ramon, Elena, Andreaa et Alejandro.

J'ai laissé pour la fin les plus importants, ma famille, GRACIAS POR TODO, les dedico este trabajo.

Résumé

Principalement, ce travail présente l'application d'observateurs non linéaires pour la détection de fuites (uniques, séquentielles et simultanées) dans des canalisations sous pression. Les observateurs présentés ici ont été conçus à partir d'une version discrète des équations du coup de bélier, qui a été obtenue en utilisant la méthode des différences finies et en prenant comme alternative la méthode de collocation orthogonale. Les modèles discrets ainsi que certains observateurs ont été validés par une série d'expériences effectuées dans des canalisations d'essai. D'autre part, une nouvelle version d'observateurs à grand gain pour des systèmes non uniformément observables a été développée. Elle a été utilisée pour la détection de fuites ainsi que pour la synchronisation de systèmes chaotiques avec des paramètres inconnus. Des résultats de convergence, expérimentaux et en simulation sont exposés dans ce mémoire.

Abstract

This work mainly deals with the application of nonlinear observers for the detection of leaks (single, sequential and simultaneous) in pipes under pressure. The proposed observers were conceived from a spatially discretized version of the water hammer equations. This version was obtained using the finite difference method, as an alternative to the orthogonal collocation method also considered. The discrete models, as well as some observers were validated by a set of experiments realized in test pipes. This work also gave rise to a new version of high gain observers for non-uniformly observable systems. Firstly used for the purpose of leak detection, it was successfully applied to the synchronization of chaotic systems with unknown parameters as well. Its presentation includes a formal convergence proof, as well as simulation and experimental results.

Resumen

Este trabajo trata principalmente la aplicación de observadores no lineales para la detección de fugas (únicas, secuenciales y simultáneas) en tuberías bajo presión. Los observadores que aquí se presentan fueron concebidos a partir de una versión discreta (espacialmente) de las ecuaciones del golpe de ariete. Tal versión se logró utilizando el método de diferencias finitas, y como alternativa el método de colocación ortogonal. Los modelos discretos, así como ciertos observadores, fueron validados mediante una serie de experimentos realizados en tuberías de ensayo.

Este trabajo también dio origen a una nueva versión de observadores de gran ganancia para sistemas no uniformemente observables, la cual se utilizó para la detección de fugas, así como para la sincronización de sistemas caóticos con parámetros desconocidos. Su presentación incluye resultados de convergencia formales, en simulación, y experimentales.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Modélisation des écoulements sous pression	5
2.1	Équations du coup de bélier	5
2.1.1	Calcul des profils d'équilibre	6
2.1.2	Conditions aux limites	7
2.1.2.1	Conditions à l'amont et à l'aval	7
2.1.2.2	Conditions internes	8
2.2	Modèles de dimension finie	9
2.2.1	Méthode des différences finies implicite en temps	9
2.2.1.1	Modèle "y"	11
2.2.1.2	Modèle "h"	11
2.2.1.3	Modèle "g"	12
2.2.1.4	Modèle "z"	12
2.2.1.5	Conditions internes	12
2.2.2	Méthode de collocation orthogonale	13
2.2.2.1	Principe de la méthode des résidus pondérés	13
2.2.2.2	Résolution des équations du coup de bélier par collocation	15
2.2.2.3	Utilisation de points de pression et débit	18
2.2.2.4	Modèle y	18
2.2.2.5	Modèle h	19
2.2.2.6	Modèle g	19
2.2.2.7	Modèle z	19
2.2.2.8	Conditions aux limites internes	20
2.3	Résultats en simulation	21
2.4	Conclusions	25
3	Observateurs non linéaires	27
3.1	Introduction et notations de base	28
3.2	Rappels sur l'observabilité non linéaire	29
3.2.1	Conditions Géométriques d'observabilité	29
3.2.2	Conditions analytiques d'observabilité	31
3.3	Résumé sur la conception d'observateurs non linéaires	36
3.3.1	Conception basée sur une transformation	36
3.3.2	Synthèse d'observateurs par sous-systèmes	37
3.3.3	Filtre de Kalman Étendu	38
3.3.4	Grand gain et systèmes uniformément observables	39
3.3.4.1	Observateur à grand gain 'classique'	40
3.3.4.2	Lien avec le filtre Kalman étendu	41

3.3.5	Grand gain et systèmes infinitésimalement uniformément observables	42
3.3.5.1	Forme de base et lien avec le filtre de Kalman étendu	42
3.3.5.2	Un grand gain adaptatif	44
3.3.6	Grand gain et systèmes non uniformément observables	45
3.3.6.1	Une nouvelle forme d'observateur à grand gain pour systèmes non uniformément observables	46
3.3.7	Vers une version adaptative	49
3.4	Conclusions	49
4	Applications à la détection de défauts en canalisations	51
4.1	Problématique et panorama bibliographique	52
4.2	Observabilité des équations du coup de bélier	54
4.3	Détection d'une fuite	56
4.3.1	Estimation de la position	57
4.3.1.1	Équation statique	57
4.3.1.2	Observateur à grand gain	58
4.3.2	Estimation de la position et du coefficient de fuite	60
4.3.3	Estimation de la position, du coefficient de fuite et d'un coefficient de friction unique	61
4.3.4	Estimation de la position, du coefficient de fuite et de deux coefficients de friction	65
4.4	Estimation de deux fuites simultanées	67
4.4.1	Filtre de Kalman étendu	70
4.4.2	Nouvelle forme d'observateur à grand gain	74
4.5	Détection de fuites multiples simultanées	75
4.6	Conclusions	77
5	Résultats expérimentaux	79
5.1	Description des bancs d'essais	79
5.2	Validation expérimentale de modèles en dimension finie	82
5.2.1	Expériences en régime oscillatoire	82
5.2.2	Expériences avec fuites dans le système	84
5.3	Validation expérimentale d'observateurs	86
5.3.1	Détection d'une fuite	87
5.3.2	Détection d'une fuite et estimation du coefficient de friction	88
5.4	Conclusion	89
6	Extension aux systèmes chaotiques	91
6.1	Des systèmes d'écoulement aux systèmes chaotiques	92
6.2	Synchronisation de systèmes chaotiques avec des paramètres inconnus	95
6.3	Synchronisation d'oscillateurs nonlinéaires avec des paramètres inconnus	99
6.4	Estimation de paramètres pour la synchronisation spatiale-temporelle	101

Table des matières	ix
6.5 Conclusions	108
7 Conclusions et perspectives	111
Bibliographie	113

Table des figures

2.1	Discrétisation en différences finies	10
2.2	Quadripôles hydrauliques	11
2.3	Modèle y en différences finies	11
2.4	Modèle h en différences finies	12
2.5	Modèle g en différences finies	12
2.6	Modèle z en différences finies	13
2.7	Discrétisation par la méthode de collocation	18
2.8	Points de collocation différents	18
2.9	(a) Débits le long de la canalisation, (b) Pressions le long de la canalisation. Exemple 1	22
2.10	(a) Débits le long de la canalisation, (b) Pressions le long de la canalisation. Exemple 2	23
2.11	(a) Débits le long de la canalisation, (b) Pressions le long de la canalisation. Exemple 3	23
2.12	(a) Débits le long de la canalisation, (b) Pressions le long de la canalisation. Exemple 4	24
2.13	Erreur relative entre un modèle plus précis et des modèles plus simples	25
2.14	Erreur relative entre un modèle par différences finies et un modèle par collocation	26
4.1	Problème avec une fuite	56
4.2	Schéma pour l'estimation de la position d'une fuite.	58
4.3	Position estimée par l'observateur 3.15 à grand gain de la section 4.3.1.2	60
4.4	Schéma pour l'estimation de la position et le coefficient d'une fuite.	61
4.5	Position estimée par l'observateur de la section 4.3.2, (b) Coefficient de la fuite estimé par l'observateur de la section 4.3.2	62
4.6	Schéma pour l'estimation de la friction, de la position et du coefficient d'une fuite.	62
4.7	Erreurs en pourcentage Exemple 7	64
4.8	Exemple 7 : Entrées bruitées	65
4.9	Exemple 7 : (a) Evolution de λ (b) Estimation de la friction	65
4.10	Exemple 7 : (a) Estimation de la position de la fuite (b) Estimation du coefficient de la fuite	66
4.11	Schéma pour l'estimation de deux frictions, de la position et du coefficient d'une fuite.	66
4.12	Estimation du coefficient de la fuite (Exemple 8)	67
4.13	(a) Estimation de la position (Exemple 8), (b) Estimation des coefficients de friction (Exemple 8)	68
4.14	Deux fuites	68
4.15	Schéma pour l'estimation des positions et des coefficients de deux fuites	69

4.16	Schéma pour l'estimation des positions et des coefficients de deux fuites	70
4.17	(a) Estimation des positions des fuites (Exemple 9), (b) Estimation des coefficients des fuites Exemple (9)	71
4.18	(a) Entrées 10, (b) Erreur en pourcentage de l'estimation (Exemple 10)	72
4.19	(a) Estimation des positions des fuites Exemple 10, (b) Estimation des coefficients des fuites Exemple 10	72
4.20	(a) Entrées (Exemple 11), (b) Sorties (Exemple 11)	73
4.21	(a) Erreur d'estimation des positions des fuites (Exemple 11), (b) Erreur d'estimation des coefficients des fuites (Exemple 11)	73
4.22	(a) Estimation des positions des fuites Exemple 12, (b) Estimation des coefficients des fuites Exemple 12	74
4.23	Estimation d'une première fuite dans le cas de deux fuites simultanées en utilisant différentes fréquences à la pression d'aval	77
5.1	Diagramme de la canalisation CINVESTAV	80
5.2	Diagramme de la canalisation UNAM	81
5.3	Expérience 1. Comparaison entre les débits mesurés sur la canalisation de l'UNAM et ceux du modèle (5.1)	83
5.4	Expérience 2. Comparaison entre les données mesurées sur la canalisation du CINVESTAV et les réponses du modèle (5.2)	84
5.5	Expérience 2. Comparaison entre les données mesurées sur la canalisation du CINVESTAV et les données du modèle (5.1)	85
5.6	Expérience 2. Relation pression-débit	85
5.7	Relation débit-Ouverture/Fermeture de la vanne pour la canalisation du CINVESTAV	86
5.8	Expérience 3. Comparaison entre les débits mesurés sur la canalisation du CINVESTAV et ceux du modèle (5.3) en présence de deux fuites	86
5.9	(a) Débits mesurés (b) Pressions mesurés	87
5.10	(a) Estimation de la position avec l'équation statique (4.6) (b) Estimation avec un observateur à grand gain	88
5.11	(a) Estimation de la position avec un observateur à grand gain constant (b) Estimation du coefficient de fuite avec un observateur à grand gain constant	89
5.12	Expérience 5 : (a) Mesures de débit et pression (b) Estimation du coefficient de la fuite	90
5.13	Expérience 5 : (a) Estimation de la friction (b) Estimation de la position	90
5.14	Erreur en pourcentage de l'estimation de la position	90
6.1	(a) Estimation des Paramètres du système de Lorenz, (b) Portrait de phase du système de Lorenz	98
6.2	(a) Estimation des Paramètres du système de Rössler, (b) Portrait de phase du système de Rössler	99

6.3	(a) Estimation des Paramètres du système de Duffing, (b) Portrait de phase du système de Duffing	100
6.4	L'attracteur de Lorenz lorsque $\alpha = 0$ dans le système (6.2)	101
6.5	L'attracteur de Chen lorsque $\alpha = 0.8$ dans le système (6.2)	102
6.6	L'attracteur de Lü lorsque $\alpha = 1$ dans le système (6.2)	103
6.7	Estimation de α pour le système chaotique unifié	104
6.8	Estimation des fonctions $\phi(x_1)$ et $\psi(x_1)$ pour le système (6.3)	104
6.9	Portraits de phase de la synchronisation pour le système (6.3)	105
6.10	(a) Evolution spatiale-temporelle de $u_1(z, t)$ (b) Propagation de $u_1(z, t)$	105
6.11	(a) Evolution spatiale-temporelle de $u_2(z, t)$ (b) Propagation de $u_2(z, t)$	106
6.12	(a) Evolution spatiale-temporelle de $u_1(z, t)$ (b) Propagation de $u_1(z, t)$	106
6.13	(a) Evolution spatiale-temporelle de $u_2(z, t)$ (b) Propagation de $u_2(z, t)$	107
6.14	Schema de l'estimation des paramètres	107
6.15	(a) Estimation de paramètres a et b (b) Estimation de paramètres d_1 et d_2	108
6.16	(a) Evolution spatiale-temporelle de $u_1(z, t)$ (b) Evolution spatiale-temporelle de $u_2(z, t)$	108

Liste des tableaux

2.1	Exemples de Lois d'ouvrages	8
2.2	Paramètres d'une canalisation pour les simulations	22
5.1	Paramètres des bancs d'essais	81
6.1	Systèmes chaotiques	95
6.2	Ensemble de paramètres des systèmes chaotiques	96
6.3	Coefficients de $A(u, y)$ et $\varphi(u, \hat{\xi})$ pour les systèmes chaotiques	97
6.4	Paramètres de réglage et conditions initiales pour les observateurs des systèmes chaotiques	97

Introduction

Le transport par canalisation mobilise des fluides et des énergies qui représentent, comme toute activité industrielle, un danger. Le risque industriel lié à ce danger est estimé et traité, dans le cadre des réglementations locales et internationales en vigueur. Ainsi, au delà des opérations classiques d'entretien faisant partie de l'exploitation de l'ouvrage, un diagnostic poussé des ouvrages de transport est réalisé périodiquement, en fonction des réglementations nationales et des pratiques locales.

Ces dernières années, certains soucis comme les dommages environnementaux associés à l'énergie gaspillée, ont mené les pouvoirs publics à l'introduction de pénalités plus strictes contre les administrateurs de canalisations négligeant un peu trop les défauts. Parallèlement, ils ont fourni des incitations nécessaires pour l'investissement destiné à l'amélioration technologique des systèmes de surveillance.

En ce qui concerne les systèmes de distribution d'eau, les problèmes découlant de défaillances dans les canalisations vont au-delà des pertes économiques et des dommages environnementaux. Il y a aussi des risques liés à la santé publique ou encore le gaspillage d'une ressource vitale de plus en plus rare dans certaines régions. Ainsi, tous les scénarios d'accident se ramènent à une perte de confinement du produit transporté et à une interaction néfaste du produit libéré avec l'environnement inerte ou vivant.

Quel que soit le niveau de sécurité visé et les moyens mis en oeuvre pour l'obtenir, l'accident demeure toujours possible. En réalité, les risques majeurs de défaillance des canalisations sont liés aux agressions (volontaires ou involontaires) de tiers et à la corrosion interne ou externe.

Puisque les défauts sont inévitables, tous les systèmes hydrauliques devraient être équipés d'un procédé de surveillance pour la détection de ces derniers. Ceci, afin d'éviter des catastrophes ou tout au moins pour diminuer les effets non souhaitables.

Il existe diverses approches concernant la détection de défauts pour les systèmes dynamiques en général [1] mais aussi pour les systèmes d'écoulement [2]. Dans ce mémoire, comme il est spécifié dans le titre, c'est la conception d'observateurs non linéaires pour la surveillance de systèmes d'écoulement qui fait l'objet principal de l'étude.

Il y a différents types de systèmes d'écoulements : des canaux à surface libre (régulier et irrégulier), des canalisations sous pression, des systèmes d'écoulement souterrains, etc. Ainsi que différents types de défauts qui pourraient se présenter dans ces systèmes. Dans ce mémoire, on se concentre sur les canalisations sous pression posées horizontalement, mais, l'approche que l'on présente peut également s'étendre aux autres types de système. Par ailleurs, les défauts que l'on traite sont les fuites, la détection de fuites multiples étant l'un des grands enjeux de cette étude.

L'organisation de ce travail est présentée sous la forme suivante.

Le Chapitre 2 est dédié à l'obtention de modèles en dimension finie à partir des équations aux dérivées partielles qui représentent le comportement des canalisations sous pression. Ces équations sont connues comme les équations du coup de bélier puisqu'elles ont été conçues pour représenter un phénomène de choc (du même nom) qui apparaît au moment de la variation brusque de la vitesse d'un liquide.

L'intérêt d'obtenir des modèles en dimension finie est leur utilisation pour la conception d'observateurs en vue de la détection de défauts dans les canalisations sous pression. Les méthodes examinées pour obtenir les modèles finis sont la méthode des différences finies et la méthode de collocation orthogonale.

Il faut préciser, à ce point, que la première contribution de ce travail de thèse correspond à l'utilisation de la méthode de collocation orthogonale, qui n'avait pas encore été explorée dans le contexte jusqu'à présent. Les travaux sont étayés par plusieurs simulations.

Le Chapitre 3 est alors consacré à la présentation de quelques définitions sur l'observabilité, en évoquant notamment le problème des entrées qui engendre la classification des systèmes nonlinéaires en systèmes uniformément et non uniformément observables.

Sur cette base, quelques résultats déjà disponibles sur la conception des observateurs pour les systèmes nonlinéaires sont rappelés. Plus précisément, on présente les résultats concernant la synthèse d'observateurs de type *grand gain* pour des classes particulières de systèmes nonlinéaires uniformément observables, en rappelant notamment leur lien avec le filtre de Kalman. Ceci permet alors d'introduire une nouvelle forme d'observateurs pour systèmes non uniformément observables, alliant les propriétés d'observateur à grand gain avec celles du filtre de Kalman étendu, et constituant la contribution principale de ce chapitre.

Les observateurs présentés seront utilisés par la suite pour deux types d'applications : la surveillance des canalisations sous pression et la synchronisation de systèmes chaotiques.

Le Chapitre 4 porte donc sur l'application des observateurs à la surveillance de canalisations ; il récapitule tout d'abord, les divers travaux réalisés par les automa-

ticiens et la communauté hydraulicienne sur le développement de méthodes efficaces pour la détection de défauts dans les systèmes d'écoulement. A partir de cela, l'approche basée sur des observateurs nonlinéaires que nous proposons est présentée, et déclinée selon différents problèmes de détection. La construction de chaque observateur est réalisée à partir des modèles finis obtenus dans le Chapitre 2 et sous le contexte théorique du Chapitre 3. Les résultats sont illustrés en simulation pour vérifier la performance des observateurs.

En complément, le Chapitre 5 est composé d'une série d'expériences sur des canalisations réelles. A partir de ces expériences, on a obtenu des données utilisées postérieurement pour valider *offline* les observateurs présentés dans le Chapitre 4. Le chapitre résume un ensemble de ces résultats.

Finalement, dans le Chapitre 6, on aborde le problème de synchronisation de systèmes chaotiques de nouveau par application d'observateurs nonlinéaires. Cette extension, initialement motivée par l'étude d'écoulements avec un comportement turbulent, donc générant du chaos [3], a en fait débordé le cadre de modèles d'écoulements ; elle illustre plutôt différentes autres applications possibles de l'observateur proposé au Chapitre 3, à des systèmes chaotiques ou à l'observation nonlinéaire.

Les conclusions finales et quelques perspectives ouvertes par ce travail sont présentées à la fin de ce mémoire.

Pour conclure, on peut mentionner qu'une partie des résultats présentée dans ce mémoire a déjà été publiée dans des conférences internationales de spécialité, notamment sur la modélisation des canalisations sous pression [4], l'application d'observateurs à la détection de fuites [5], et la validation expérimentale de modèles en dimension finie [6]. D'ailleurs, deux articles ont été soumis dans les revues internationales : *IEEE Transactions on Automatic Control* pour la contribution *observateur* [7] et *Chaos, Solitons and Fractals* pour l'application aux systèmes chaotiques [8].

Modélisation des écoulements sous pression

Sommaire

2.1	Équations du coup de bélier	5
2.1.1	Calcul des profils d'équilibre	6
2.1.2	Conditions aux limites	7
2.2	Modèles de dimension finie	9
2.2.1	Méthode des différences finies implicite en temps	9
2.2.2	Méthode de collocation orthogonale	13
2.3	Résultats en simulation	21
2.4	Conclusions	25

Dans ce chapitre, on présente les éléments de modélisation nécessaires à l'utilisation d'observateurs pour la détection de fuites, à savoir les équations dites du *coup de bélier*, ainsi que des méthodes numériques pour les résoudre en dimension finie.

La prise en compte de fuites dans les modèles est donc tout particulièrement examinée, et deux méthodes de réduction en dimensions finies sont considérées : d'une part une méthode de différences finies assez classique et d'autre part la méthode de collocation orthogonale moins utilisée dans ce type de contexte.

Les comportements de ces modèles sont illustrés et comparés en simulation (leur validation expérimentale étant reporté au Chapitre 5).

2.1 Équations du coup de bélier

En hydraulique, le régime transitoire en systèmes sous pression est décrit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles hyperboliques quasi-linéaires connues comme équations du coup de bélier. Cet ensemble est composé d'une équation de continuité et une équation dynamique (2.1)-(2.2). L'obtention rigoureuse et la formulation complète de ces équations peuvent se trouver dans [9] and [10] avec les hypothèses suivantes :

- ★ La densité de l'eau et l'aire de la section transversale sont considérées constantes.

- ★ Le débit dans la conduite est unidimensionnel.
- ★ La distribution de la vitesse est uniforme à travers la section transversale de la conduite.

$$\frac{\partial H(z, t)}{\partial t} + \frac{b^2}{gA_r} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{A_r} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + g \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} + \frac{fQ(z, t)|Q(z, t)|}{2\phi A_r^2} = 0 \quad (2.2)$$

pour $(z, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$. Avec t and z : Coordonnées du temps et d'espace dans le sens de l'écoulement, L : Longueur de la conduite, H : Pression, Q : Débit, b : Vitesse de l'onde de pression, g : accélération de gravité, A_r : Section transversale, ϕ : Diamètre de la conduite et f : Coefficient de friction. On peut écrire les équations (2.1)-(2.2) sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} Q \\ H \end{bmatrix} = -B(Q, H) \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} Q \\ H \end{bmatrix} - G(Q, H) \quad (2.3)$$

Avec :

$$B(Q, H) = \begin{bmatrix} 0 & gA_r \\ \frac{b^2}{gA_r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(Q, H) = \begin{bmatrix} \frac{fQ|Q|}{2\phi A_r^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $B(Q, H)$ est :

$$\lambda^2 - b^2 = 0$$

donc, les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \pm b$. Puisque b est réel les deux valeurs propres sont réelles et distinctes, par conséquent, les équations (2.1)-(2.2) sont un ensemble d'équations du type hyperbolique.

2.1.1 Calcul des profils d'équilibre

Les conditions d'équilibre sont obtenues en posant dans les équations (2.1)-(2.2)

$$\frac{\partial H(z, t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} = 0$$

Les points d'équilibre en pression et en débit sont alors solutions des équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial Q_e(z)}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial H_e(z)}{\partial z} = -\frac{fQ_e(z)|Q_e(z)|}{2g\phi A_r^2} \quad (2.5)$$

A l'équilibre, le débit est donc constant quelle que soit la valeur z (profil uniforme du débit à l'équilibre $Q_e(z) = Q_e, \forall z$). L'équation (2.5) est appelée équation de Darcy-Weisbach. Elle permet de calculer la perte de charge due à la friction dans une conduite.

2.1.2 Conditions aux limites

Afin de compléter les équations du coup de bélier, on a besoin des conditions aux limites et des conditions initiales. Les conditions aux limites expriment les profils temporaires des variables aux valeurs de bord des coordonnées spatiales, et les conditions initiales expriment leurs profils spatiaux à l'instant initial.

Les conditions initiales peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$H(z, 0) = H^0, Q(z, 0) = Q^0 \quad (2.6)$$

Les équations du coup de bélier décrivent correctement l'écoulement le long de canaux sans composants (pompes, valves, réservoirs, etc.), ni singularités (fuites, prises d'eau, etc.). A chaque occurrence de composants ou de singularités, il faut introduire des équations d'interconnexion qui définissent les conditions aux limites de l'écoulement filaire qui les sépare. Ces équations d'interconnexion ou conditions aux limites sont classées en conditions aux limites amont, aval ou internes.

2.1.2.1 Conditions à l'amont et à l'aval

On doit utiliser une condition limite à l'amont et une condition limite à l'aval, soit une pression soit un débit, de telle sorte qu'on a quatre conditions possibles : H_{in} , H_{out} , Q_{in} , Q_{out} , donc, quatre différentes combinaisons des quatre conditions possibles : $H_{in}-H_{out}$, $Q_{in}-H_{out}$, $H_{in}-Q_{out}$, $Q_{in}-Q_{out}$.

Dans un contexte physique, les conditions aux limites sont des relations entre le débit et la pression qui représentent des composants dans une canalisation. Ces relations sont appelées *lois d'ouvrages*. Des exemples de lois d'ouvrages sont listés dans la Table 2.1.

En conclusion, les conditions aux limites sont définies par une loi d'ouvrage à l'amont aussi bien qu'à l'aval.

TAB. 2.1 – Exemples de Lois d'ouvrages

Composant	Amont/Aval
Valve	$Q_{in} = C_v A_v \sqrt{2gH(0,t)}$ $Q_{out} = C_v A_v \sqrt{2gH(L,t)}$
Réservoir constant	$H_{in} = H(0,t) \Big _{\frac{\partial H(0,t)}{\partial t} = 0}$ $H_{out} = H(L,t) \Big _{\frac{\partial H(L,t)}{\partial t} = 0}$
Réservoir avec une perte à l'entrée	$H_{in} = \left[H(0,t) - (1 + \kappa) \frac{Q^2(0,t)}{2gA_r^2} \right]_{\frac{\partial H(0,t)}{\partial t} = 0}$ $H_{out} = \left[H(L,t) - (1 + \kappa) \frac{Q^2(L,t)}{2gA_r^2} \right]_{\frac{\partial H(L,t)}{\partial t} = 0}$

C_v = Coefficient de décharge, A_v = Ouverture de la valve, κ = Coefficient de la perte de pression.

2.1.2.2 Conditions internes

Une condition interne se situe par définition entre les conditions à l'amont et à l'aval. Elle peut être, par exemple : une fuite, une prise d'eau, une obstruction, etc. Les conditions internes représentent une discontinuité des solutions aux équations (2.1)-(2.2) dans le domaine spatial.

Les conditions internes considérées dans cette étude sont présentées ci-après. Ce sont les pertes de débit causées par des fuites dans une canalisation.

Une fuite provoque une discontinuité sur (2.1). Si elle se présente à $z = z_f$ avec une perte de débit, $Q_f(z,t)$, l'équation (2.1) reste toujours valide pour $z \in [0, z_f[\cup]z_f, L]$ ($z \neq z_f$). Cependant, elle ne l'est plus au voisinage de z_f . La conservation de la masse à $z \in [z_f^-, z_f^+]$ requiert que :

$$Q(z_f^-, t) - Q(z_f^+, t) = Q_f(z_f, t) \quad (2.7)$$

avec $Q(z_f^-, t)$: débit avant z_f , $Q(z_f^+, t)$: débit après z_f .

Si nous supposons que la fuite introduit un *moment* négligeable, l'équation (2.2) n'est pas affectée à $z = z_f$. [11]

La perte de débit à z_f est donnée par la relation débit-pression suivante :

$$Q_f(z_f, t) = \mathbb{H}_f(t) \sigma_f \sqrt{H(z_f, t)} \quad (2.8)$$

où $\sigma_f = A_f C_f \geq 0$, A_f : l'aire de la fuite, C_f : le coefficient de décharge, $\mathbb{H}_f(t)$: la fonction Heaviside (2.9) représentante de l'occurrence d'une fuite à l'instant t_f .

$$\mathbb{H}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \\ 1 & \text{si } t \geq t_f \end{cases} \quad (2.9)$$

Pour le cas d'occurrence de plusieurs fuites, nous définissons $Q_{f_k}(z_{f_k}, t)$ comme étant les pertes de débit dont k est l'indice de fuite. Les occurrences de fuite seront représentées par $\mathbb{H}_{f_k}(t)$ associées aux pertes de débit $Q_{f_k}(z_{f_k}, t)$, aux instants de fuites t_{f_k} , coefficients σ_{f_k} , et positions z_{f_k} .

2.2 Modèles de dimension finie

La solution analytique du modèle général (2.1)-(2.2) n'est pas disponible, et une façon de l'approcher est de se ramener à un modèle de dimension finie. Pour cela on va utiliser des méthodes numériques qui permettent d'obtenir une solution approchée des équations du coup de bélier. Il existe diverses méthodes numériques pour la résolution de systèmes de ce type, les plus connues sont : la méthode des caractéristiques, la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies et la méthode des résidus pondérés. Les méthodes les plus utilisées pour la résolution des équations du coup de bélier sont la méthode des caractéristiques et la méthode des différences finies, car elles sont les plus simples et bien adaptées à une modélisation unidimensionnelle. Cependant, il y a une autre méthode très peu utilisée pour les systèmes hydrauliques mais qui est aussi simple et bien adaptée pour des simulations unidimensionnelles. Cette méthode est la méthode de collocation orthogonale [12], avec une formulation variationnelle par polynômes de Lagrange. Elle fait partie de la famille des méthodes de résidus pondérés qui a principalement été utilisée en chimie. Bien que cette méthode n'ait pas été trop utilisée en hydraulique, il existe tout de même quelques travaux. Par exemple dans [13], la méthode de collocation orthogonale a été utilisée pour résoudre les équations de Saint-Venant. Dans cette thèse, nous explorerons cette méthode de collocation dans le cas des équations de coup de bélier et nous la comparerons à la méthode des différences finies.

Ci-après sont donc rappelées les bases de ces méthodes pour la résolution des équations du coup de bélier.

2.2.1 Méthode des différences finies implicite en temps

Il existe plusieurs formes de différences finies [14]. Dans le cas implicite en temps retenu ici, le principe en bref est une discrétisation spatiale selon le schéma de la Figure 2.1. Avec les approximations et simplifications suivantes :

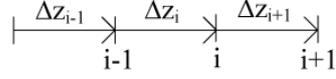


FIG. 2.1 – Discrétisation en différences finies

- ★ $H(z, t) \cong H_i(t) := H_i$ pression à l'abscisse spatiale d'indice i .
- ★ $Q(z, t) \cong Q_i(t) := Q_i$ débit à l'abscisse spatiale d'indice i .
- ★ $\frac{\partial H(z, t)}{\partial t} \cong \frac{\partial H_i(t)}{\partial t} := \dot{H}_i$ variation temporelle de pression à l'abscisse spatiale d'indice i .
- ★ $\frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} \cong \frac{\partial Q_i(t)}{\partial t} := \dot{Q}_i$ variation temporelle de débit à l'abscisse spatiale d'indice i .

Les dérivées partielles sont approchées par différences finies du premier ordre (à droite ou à gauche) :

$$\begin{aligned} \star \frac{\partial H}{\partial z} &\approx \frac{\Delta H_i}{\Delta z_i} = \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta z_i} \text{ ou } \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta z_i} \\ \star \frac{\partial Q}{\partial z} &\approx \frac{\Delta Q_i}{\Delta z_i} = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta z_i} \text{ ou } \frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta z_i} \end{aligned}$$

En chaque point de discrétisation, les équations (2.1)-(2.2) deviennent deux équations différentielles ordinaires non linéaires :

$$\begin{aligned} \dot{H}_i &= a_2 \frac{\Delta Q_i}{\Delta z_i} \\ \dot{Q}_i &= a_1 \frac{\Delta H_i}{\Delta z_i} - \mu Q_i |Q_i| \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } a_1 = -gA_r, \quad a_2 = -\frac{b^2}{gA_r} \text{ et } \mu = \frac{f}{2\phi A_r}$$

Il faut juste remarquer que le modèle discret du système (2.1)-(2.2) dépend des conditions aux limites utilisées ce qui fait qu'il existe quatre modèles possibles pour les quatre paires de conditions possibles. En faisant une analogie avec les systèmes électriques, les modèles discrets obtenus peuvent être assimilés aux quadripôles (voir Fig.2.2).

Modèle y. Si les conditions sont : H_{in}, H_{out}

Modèle h. Si les conditions sont : Q_{in}, H_{out}

Modèle g. Si les conditions sont : H_{in}, Q_{out}

Modèle z. Si les conditions sont : Q_{in}, Q_{out}

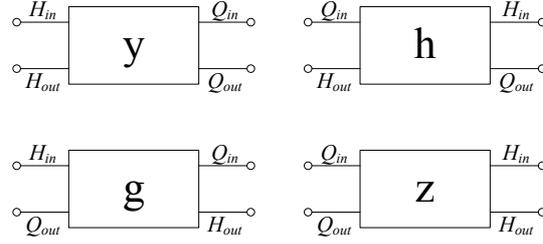


FIG. 2.2 – Quadripôles hydrauliques

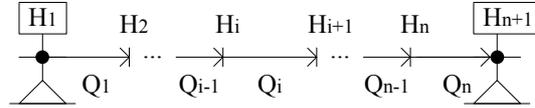
2.2.1.1 Modèle "y"

Si les pressions à l'amont et à l'aval (H_{in} , H_{out}) sont considérées comme les conditions aux limites, les équations aux dérivées partielles discrétisées en n sections sont :

$$\dot{Q}_i = \frac{a_1}{\Delta z_i} (H_i - H_{i+1}) - \mu Q_i |Q_i|; \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

$$\dot{H}_{i+1} = \frac{a_2}{\Delta z_i} (Q_i - Q_{i+1}); \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

Avec $H_1 = H_{in}$ et $H_{n+1} = H_{out}$.

FIG. 2.3 – Modèle y en différences finies

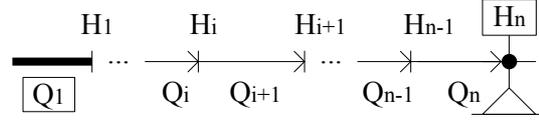
2.2.1.2 Modèle "h"

Si on considère le débit à l'aval et la pression à l'amont (Q_{in} , H_{out}) comme conditions aux limites, les équations (2.1)-(2.2) prennent la forme discrète suivante :

$$\dot{Q}_{i+1} = \frac{a_1}{\Delta z_i} (H_i - H_{i+1}) - \mu Q_{i+1} |Q_{i+1}|; \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

$$\dot{H}_i = \frac{a_2}{\Delta z_{i-1}} (Q_i - Q_{i+1}); \quad \forall i = 1, \dots, n - 1 \quad (2.13)$$

Avec $Q_1 = Q_{in}$, $H_n = H_{out}$ et $\Delta z_0 = 1$.

FIG. 2.4 – Modèle h en différences finies

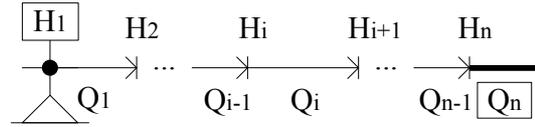
2.2.1.3 Modèle "g"

Si on considère la pression à l'aval et le débit à l'amont (H_{in} , Q_{out}) comme conditions aux limites, les équations (2.1)-(2.2) prennent la forme discrète suivante :

$$\dot{Q}_i = \frac{a_1}{\Delta z_i} (H_i - H_{i+1}) - \mu Q_i |Q_i|; \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (2.14)$$

$$\dot{H}_{i+1} = \frac{a_2}{\Delta z_i} (Q_i - Q_{i+1}); \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

Avec $H_1 = H_{in}$ et $Q_n = Q_{out}$.

FIG. 2.5 – Modèle g en différences finies

2.2.1.4 Modèle "z"

Si on considère le débit à l'aval et le débit à l'amont (Q_{in} , Q_{out}) comme conditions aux limites, les équations (2.1)-(2.2) prennent la forme discrète suivante :

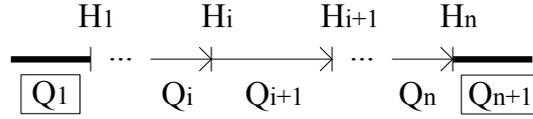
$$\dot{Q}_{i+1} = \frac{a_1}{\Delta z_i} (H_i - H_{i+1}) - \mu Q_{i+1} |Q_{i+1}|; \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

$$\dot{H}_i = \frac{a_2}{\Delta z_i} (Q_i - Q_{i+1}); \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

Avec $Q_1 = Q_{in}$ et $Q_{n+1} = Q_{out}$.

2.2.1.5 Conditions internes

Quand une fuite se présente dans le système, l'équation (2.7) qui représente la conservation de la masse doit être considérée afin d'imposer la condition interne. Si

FIG. 2.6 – Modèle z en différences finies

on applique la méthode des différences finies quand une fuite se présente entre les sections z_i et z_{i+1} , l'équation (2.7) devient :

$$Q_i - Q_{i+1} - Q_f = 0 \quad (2.18)$$

Donc, à chaque occurrence d'une fuite, la relation des débits entre les deux sections

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta z_i} = \frac{Q_i - Q_{i+1}}{\Delta z_i}$$

doit être remplacée par

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta z_i} = \frac{Q_i - Q_{i+1} - Q_{f_k}}{\Delta z_i}$$

Avec Q_{f_k} exprimé par (2.8) et k comme étant l'indice de fuite.

2.2.2 Méthode de collocation orthogonale

La méthode de collocation orthogonale est une procédure de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites. Cette méthode permet donc de résoudre de manière discrète des équations aux dérivées partielles dont on cherche une solution approchée «suffisamment» fiable.

La méthode de collocation appartient au groupe de méthodes dites de résidus pondérés [15] dont le principe est l'approximation d'une fonction générale par des fonctions plus simples (généralement des polynômes).

2.2.2.1 Principe de la méthode des résidus pondérés

On considère une équation différentielle définie par l'opérateur L :

$$L(u) = 0 \quad (2.19)$$

Ou encore plus généralement une équation aux dérivées partielles non linéaires définies sur un domaine Ω .

Avec les conditions initiales $I(u) = 0$, et les conditions aux limites $S(u) = 0$ dans le cas d'une équation aux dérivées partielles.

Le principe général d'une méthode de résidus pondérés est le suivant :

1. Il s'agit de choisir une approximation fonctionnelle de la solution u sous la forme générale :

$$u_a(z, t) = u_0(z, t) + \sum_{j=1}^N a_j(t) \phi_j(z) \quad (2.20)$$

avec ϕ_j : des fonctions analytiques appelées couramment fonctions de forme (en anglais "trial functions"). a_j : coefficients à déterminer, $u_0(z, t)$: éventuellement introduit pour satisfaire les conditions initiales et aux frontières,

2. Ensuite on génère un résidu R de l'équation (2.19) en y injectant la solution approchée (2.20)

$$L(u_a) = R$$

3. Enfin il faut déterminer les coefficients a_j qui rendent le résidu nul ou minimal au sens de :

$$(R, W_k(z)) = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

Où les W_k sont des fonctions de pondération et $(., .)$ le produit interne (entre R et W_k) défini comme :

$$(f, g) = \int_D f g dx dy$$

La relation (2.21), d'où la méthode prend le nom, est analogue à la forme faible de l'équation :

$$(L(u), W_k(z)) = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (2.22)$$

Il existe diverses méthodes qui forment partie de la famille des méthodes de résidus pondérés, elles se différencient entre elles par le choix de fonctions de pondération W_k , les plus connues sont : La méthode de Galerkin, la méthode des moments, la méthode des moindres carrés, la méthode des sous-domaines, et évidemment la méthode concernant cette section, la méthode de collocation orthogonale. Pour une description plus détaillée sur les autres méthodes on peut se reporter à [15].

Dans la méthode de collocation orthogonale les fonctions de pondération sont de la forme :

$$W_k(z) = \delta(z - z_k)$$

Où δ indique la fonction impulsion ou delta de Dirac et d'autre part z_1, \dots, z_n correspondent aux coordonnées des points de collocation répartis sur le domaine.

Dans ce cas (2.21) se réduit à un ensemble d'équations : $R(z_k) = 0$

Il est souligné dans [12] que la méthode de collocation orthogonale peut se voir comme une méthode analogue discrète de la méthode de Galerkin, car elles donnent une précision presque identique, mais la méthode de collocation étant plus simple à mettre en œuvre.

2.2.2.2 Résolution des équations du coup de bélier par collocation

La méthode de collocation appliquée aux équations du coup de bélier revient à choisir un nombre n de points de collocation z_i et, pour chaque point, à faire l'approximation

$$Qa(z_i, t) = \sum_{j=1}^n Q_j(t)N_j(z_i) \quad (2.23)$$

$$Ha(z_i, t) = \sum_{j=1}^n H_j(t)N_j(z_i) \quad (2.24)$$

Où $Q_j(t)$ et $H_j(t)$ sont les coefficients à calculer.

Maintenant, considérons que \bar{H} et \bar{Q} sont les vecteurs des coordonnées $H_j(t)$ et $Q_j(t)$ respectivement. Alors pour chaque point de collocation z_i on a :

$$\frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial t} + \frac{b^2}{gA_r} \frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial z} = R_1(z_i, \bar{H}, \bar{Q})$$

$$\frac{1}{A_r} \frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial t} + g \frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial z} + \frac{fQ_a(z_i, t)|Q_a(z_i, t)|}{2\phi A_r^2} = R_2(z_i, \bar{H}, \bar{Q})$$

On obtient un système de $2n$ équations et $2n$ inconnues en $Q_j(t)$ et $H_j(t)$:

$$R_1(z_i, \bar{H}, \bar{Q}) = 0$$

$$R_2(z_i, \bar{H}, \bar{Q}) = 0$$

Soit sous sa forme faible :

$$\frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial t} + \frac{b^2}{gA_r} \frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{A_r} \frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial t} + g \frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial z} + \frac{fQ_a(z_i, t)|Q_a(z_i, t)|}{2\phi A_r^2} = 0$$

Les termes $N_j(z_i)$ sont constants une fois introduits les points de collocation pour une fonction de forme donnée, donc, il est possible de les écrire sur une matrice avec la forme suivante :

$$[N_{ji}]_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} N_1(z_1) & N_1(z_2) & \dots & N_1(z_n) \\ N_2(z_1) & N_2(z_2) & \dots & N_2(z_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_n(z_1) & N_n(z_2) & \dots & N_n(z_n) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Le dérivées par rapport a z de la fonction de forme donnée, évaluées en z_i , sont aussi des éléments d'une matrice énoncée par :

$$[N'_{ji}]_{1 \leq i, j \leq n} = \left[\frac{\partial N_j}{\partial z}(z_i) \right]_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} N'_1(z_1) & N'_1(z_2) & \dots & N'_1(z_n) \\ N'_2(z_1) & N'_2(z_2) & \dots & N'_2(z_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N'_n(z_1) & N'_n(z_2) & \dots & N'_n(z_n) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Par ailleurs, les dérivées spatiales et temporelles des sommes (2.23)-(2.24) sont exprimées par :

$$\frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial z} = Q_j(t) N'_{ji} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial z} = H_j(t) N'_{ji} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial Q_a(z_i, t)}{\partial t} = \dot{Q}(t)_j N_{ji} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial H_a(z_i, t)}{\partial t} = \dot{H}(t)_j N_{ji} \quad (2.30)$$

Après la substitution de (2.27), (2.28), (2.29) et (2.30) dans les équations aux dérivées partielles, le nouveau système d'équations devient :

$$\sum_{j=1}^n \dot{H}(t)_j N_{ji}(z_i) = -\frac{b^2}{gA_r} \sum_{j=1}^n Q_j(t) N'_{ji}(z_i) \quad (2.31)$$

$$\sum_{j=1}^n \dot{Q}_j(t) N_{ji}(z_i) = -gA_r \sum_{j=1}^n H_j(t) N'_{ji}(z_i) - \frac{\int \sum_{j=1}^n Q_j(t) N_{ji}(z_i) \sum_{j=1}^n |Q_j(t) N_{ji}(z_i)|}{2\phi A_r} \quad (2.32)$$

Nous avons donc transformé le système de 2 équations non linéaires aux dérivées partielles avec 2 inconnues en un système de $2n$ équations différentielles ordinaires avec $2n$ inconnues. Il reste alors à résoudre ce nouveau système avec une méthode traditionnelle de solutions d'équations différentielles.

Dans la mise en œuvre de la méthode collocation il y a deux points importants à noter : Les fonctions de formes utilisées et l'introduction des conditions aux limites.

Le choix des fonctions de forme est soumis, en théorie, à la seule condition d'être un jeu de fonctions linéairement indépendantes, mais dans la pratique il est intéressant d'utiliser des fonctions qui puissent rendre plus simple le calcul de la solution, et qui permettent en plus l'obtention d'une solution plus précise et robuste. En fonction

des objectifs indiqués, les fonctions de forme choisies sont les fonctions d'interpolation de Lagrange [13]. L'intérêt de ces fonctions est l'obtention de coefficients $H_j(t)$ et $Q_j(t)$ correspondants aux valeurs physiques des pressions et des débits aux points de collocation.

Les fonctions de forme se construisent avec la récurrence suivante :

$$N_j(z) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{z - z_i}{z_j - z_i} \quad (2.33)$$

Soit sous la forme développée :

$$\begin{aligned} N_1(z) &= \frac{(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_{n-1})(z - z_n)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_{n-1})(z_1 - z_n)} \\ N_2(z) &= \frac{(z - z_1)(z - z_3) \dots (z - z_{n-1})(z - z_n)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3) \dots (z_2 - z_{n-1})(z_2 - z_n)} \\ &\vdots \\ N_n(z) &= \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-2})(z - z_{n-1})}{(z_n - z_1)(z_n - z_2) \dots (z_n - z_{n-2})(z_n - z_{n-1})} \end{aligned}$$

Ce type de fonction de forme présente l'avantage de produire des valeurs 1 pour la variable avec l'indice correspondant au point de collocation et zéro pour les autres valeurs, c'est à dire :

$$N_j(z_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Donc, la matrice $[N_{ji}] = Id$ quand $j = i$. Dans ce cas les équations (2.31)-(2.32) se simplifient et elles deviennent :

$$\dot{H}_i(t) = a_2 \sum_{i=1}^n Q_i(t) N'_{ji}(z_i) \quad (2.34)$$

$$\dot{Q}_i(t) = a_1 \sum_{i=1}^n H_i(t) N'_{ji}(z_i) - \mu Q_i(t) |Q_i(t)| \quad (2.35)$$

$$\text{Avec : } a_1 = -gA_r, \quad a_2 = -\frac{b^2}{gA_r} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{f}{2\phi A_r}.$$

La Fig. 2.7 montre un schéma de la discrétisation pour les équations du coup de bélier. Dans ce schéma on peut remarquer qu'à chaque point de collocation correspondent un débit et une pression. D'autre part, le nombre des équations pour les débits $Q_i(t)$ ainsi que le nombre des équations pour les pressions $H_i(t)$ dépendent des conditions aux limites employées.

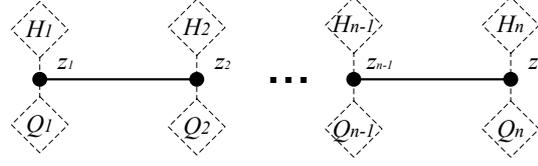


FIG. 2.7 – Discrétisation par la méthode de collocation

2.2.2.3 Utilisation de points de pression et débit

Il existe la possibilité d'utiliser un nombre de points différent pour les débits et pour les pressions, ainsi que différentes positions pour les points des débits et des pressions. Dans ce travail, nous allons utiliser le même nombre de points aussi bien pour les débits que pour les pressions. Cependant, nous allons utiliser différentes positions pour les débits et pour les pressions (voir la figure 2.8).

Pour cela, nous définissons :

- ★ z_i^Q : points pour les débits.
- ★ z_i^H : points pour les pressions.
- ★ N_{ji}^Q : la fonction interpolant de points z_i^Q , elle est calculée par (2.33).
- ★ N_{ji}^H : la fonction interpolant de points z_i^H , elle est calculée par (2.33).

Le fait d'utiliser différents points pour les variables Q et H sert à améliorer la stabilité numérique [16].

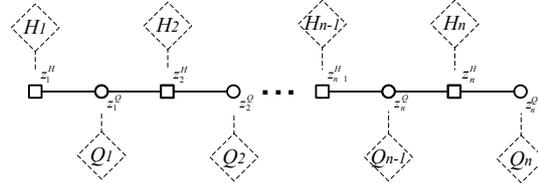


FIG. 2.8 – Points de collocation différents

2.2.2.4 Modèle y

Dans ce cas, les pressions à l'amont et à l'aval (H_{in} , H_{out}) sont considérées comme conditions aux limites, alors, si on a z_i ($i = 1, \dots, n$) points de collocation, les équations aux dérivées partielles discrétisées sont :

$$\dot{Q}_i(t) = a_1 \sum_{i=1}^n H_i(t) N'_{ji}{}^H(z_i^H) - \mu Q_i(t) |Q_i(t)|; \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

$$\dot{H}_i(t) = a_2 \sum_{i=1}^n Q_i(t) N'_{ji}{}^Q(z_i^Q); \quad \forall i = 2, \dots, n-1 \quad (2.37)$$

Avec $H_1(t) = H_{in}$ et $H_n(t) = H_{out}$.

2.2.2.5 Modèle h

Dans ce cas, les pressions à l'amont et à l'aval (Q_{in} , H_{out}) sont considérées comme conditions aux limites, alors, si on a z_i ($i = 1, \dots, n$) points de collocation, les équations aux dérivées partielles discrétisées sont :

$$\dot{Q}_i(t) = a_1 \sum_{j=1}^n H_j(t) N'_{ji}(z_i^H) - \mu Q_i(t) |Q_i(t)|; \quad \forall i = 2, \dots, n \quad (2.38)$$

$$\dot{H}_i(t) = a_2 \sum_{j=1}^n Q_j(t) N'_{ji}(z_i^Q); \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (2.39)$$

Avec $Q_1(t) = Q_{in}$ et $H_n(t) = H_{out}$.

2.2.2.6 Modèle g

Dans ce cas, les pressions à l'amont et à l'aval (H_{in} , Q_{out}) sont considérées comme conditions aux limites, alors, si on a z_i ($i = 1, \dots, n$) points de collocation, les équations aux dérivées partielles discrétisées sont :

$$\dot{Q}_i(t) = a_1 \sum_{j=1}^n H_j(t) N'_{ji}(z_i^H) - \mu Q_i(t) |Q_i(t)|; \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (2.40)$$

$$\dot{H}_i(t) = a_2 \sum_{j=1}^n Q_j(t) N'_{ji}(z_i^Q); \quad \forall i = 2, \dots, n \quad (2.41)$$

Avec $H_1(t) = H_{in}$ et $Q_n(t) = Q_{out}$.

2.2.2.7 Modèle z

Dans ce cas, les pressions à l'amont et à l'aval (Q_{in} , Q_{out}) sont considérées comme conditions aux limites, alors, si on a z_i ($i = 1, \dots, n$) points de collocation, les équations aux dérivées partielles discrétisées sont :

$$\dot{Q}_i(t) = a_1 \sum_{j=1}^n H_j(t) N'_{ji}(z_i^H) - \mu Q_i(t) |Q_i(t)|; \quad \forall i = 2, \dots, n-1 \quad (2.42)$$

$$\dot{H}_i(t) = a_2 \sum_{i=1}^n Q_i(t) N'_{j_i^Q}(z_i^Q); \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.43)$$

Avec $Q_1(t) = Q_{in}$ et $Q_n(t) = Q_{out}$.

2.2.2.8 Conditions aux limites internes

La méthode de collocation orthogonale permet d'imposer les conditions internes aux points de collocation.

Dans le cas de l'occurrence d'une fuite, les points de collocation peuvent être utilisés comme points de fuites, à l'exception de z_1 et z_n , car il existe déjà une condition à l'amont en z_1 , et une autre à l'aval en z_n .

Afin d'imposer les conditions internes (les fuites), les notations suivantes seront utilisées :

- ★ $Q_i(t)$: Le débit dans une section postérieure à z_i (point de fuite).
- ★ $Q_{\bar{i}}(t)$: Le débit dans une section antérieure à z_i (point de fuite).

Avec ces notations et en accord avec la conservation de la masse, (2.7) devient :

$$Q_i(t) - Q_{\bar{i}}(t) = Q_f(t)$$

Donc, l'expression suivante est valide pour exprimer le débit à chaque point de collocation :

$$Q_i(t) = Q_{\bar{i}}(t) + Q_f(t); \quad \forall i \neq \{1, n\} \quad (2.44)$$

A cause de l'occurrence de la fuite, la somme (2.23) doit être modifiée afin d'inclure l'effet de la fuite (la perte de débit). Pour cela, (2.44) est introduite dans (2.23). Puis y sont ajoutés les débits, $Q_1(t)$ et $Q_n(t)$ dépendants des conditions à l'amont et à l'aval.

$$Qa(z_i, t) = \left[Q_1(t) + Q_n(t) + \sum_{\bar{i}=2}^{n-2} Q_{\bar{i}}(t) + Q_f(t) \right] N_i^Q(z_i^Q) \quad (2.45)$$

Maintenant, considérons le cas d'occurrence de plusieurs fuites. Pour cela, nous définissons Q_{f_k} comme étant les pertes de débit, dont l'indice spatial k est associé au numéro de fuite. D'autre part nous définissons m comme étant le nombre de fuites.

Alors, (2.44) devient pour l'occurrence de plusieurs fuites :

$$Q_i(t) = Q_{\bar{i}}(t) + \sum_{k=1}^{i-1} Q_{f_k}(t) \quad \forall i \neq \{1, n\}; \quad (2.46)$$

L'occurrence de fuites implique des modifications à faire sur la somme (2.23) afin d'exprimer leurs effets (les pertes de débit). De ce fait, (2.46) est introduite dans (2.23), après les débits, $Q_1(t)$ et $Q_n(t)$ qui dépendent des conditions à l'amont et à l'aval. Cette modification donne alors :

$$Qa(z_i, t) = \left[Q_1(t) + Q_n(t) + \sum_{\bar{i}=2}^{n-1} \left(Q_{\bar{i}}(t) + \sum_{k=1}^{i-1} Q_{f_k}(t) \right) \right] N_i^Q(z_i^Q) \quad (2.47)$$

Si nous considérons que le débit Q_n a une valeur non-fixée (i.e. n n'a pas une conditions limite), le débit Q_n sera affecté par toutes les fuites. Par conséquence, la série (2.47) doit être modifiée en :

$$Qa(z_i, t) = \left[Q_1(t) + \left(Q_n(t) + \sum_{k=1}^{n-2} Q_{f_k}(t) \right) + \sum_{\bar{i}=2}^n \left(Q_{\bar{i}}(t) + \sum_{k=1}^{i-1} Q_{f_k}(t) \right) \right] N_i^Q(z_i^Q) \quad (2.48)$$

2.3 Résultats en simulation

Nous allons montrer ici certains résultats en simulation en utilisant les modèles à dimension finie obtenus par les méthodes présentées précédemment.

Exemple 1 (Comportement en régime oscillatoire) Prenons un modèle discret obtenu par différences finies avec 51 sections dont les conditions aux limites sont les pressions aux extrêmes. Considérons ces conditions comme les entrées du système avec les valeurs fixées, $H_{in} = 12 + \sin(t)$ (m) et $H_{out} = 5$ (m). Les paramètres de la canalisation utilisés pour cet exemple sont listés dans le Tableau 2.2. La durée de la simulation est $t = 30$ (s).

Les résultats de la simulation sont illustrés dans la Fig. 2.9, où on voit clairement le comportement oscillatoire des débits et des pression provoqué par les entrées appliquées.

Exemple 2 (Comportement avec une fuite dans le système) Prenons le même modèle de l'exemple precedent avec les entrées fixées $H_{in} = 12$ (m) et $H_{out} = 5$ (m).

TAB. 2.2 – Paramètres d’une canalisation pour les simulations

Paramètres	Valeur
g	$9.8 (m/s^2)$
L	$300 (m)$
b	$600 (m/s)$
ϕ	$0.25 (m)$
f	0.01

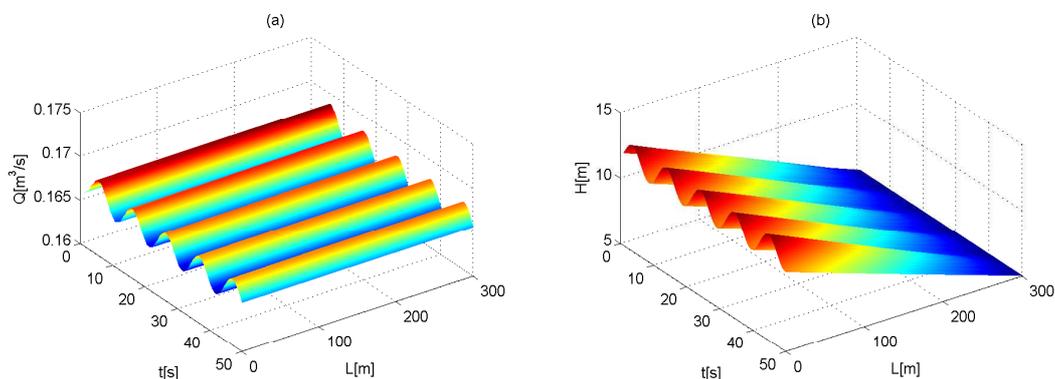


FIG. 2.9 – (a) Débits le long de la canalisation, (b) Pressions le long de la canalisation. Exemple 1

Dans cet exemple on simule une fuite à $z_{f_1} \approx 117.64 (m)$ à l’instant $t_{f_1} = 10 (s)$. On fixe le coefficient de la fuite $\sigma_{f_1} \approx 0.004517 (m^2)$. Le temps de simulation à été fixé $t = 50 (s)$.

Les comportements des débits et des pressions le long la canalisation peuvent être vus dans la Fig.2.10. On note dans cette figure, qu’à cause de la fuite le débit s’accroît avant la position de la fuite et diminue après. Par ailleurs, on voit que les pressions sont aussi altérées parce que leurs valeurs le long de la canalisation diminuent après la position d’affectation. De plus, dans le point exact de la fuite, il y a un changement de pression drastique.

Il faut préciser que le comportement de la canalisation montré dans la Fig. 2.10 correspond uniquement lorsque les conditions de frontière sont les pressions aux extrêmes. Le comportement de la canalisation sera toujours différent selon les conditions de frontière utilisées.

Exemple 3 (Comportement avec trois fuites dans le système) Prenons le même modèle de l’exemple précédent avec les entrées fixées $H_{in} = 12 (m)$ et $H_{out} = 5 (m)$.

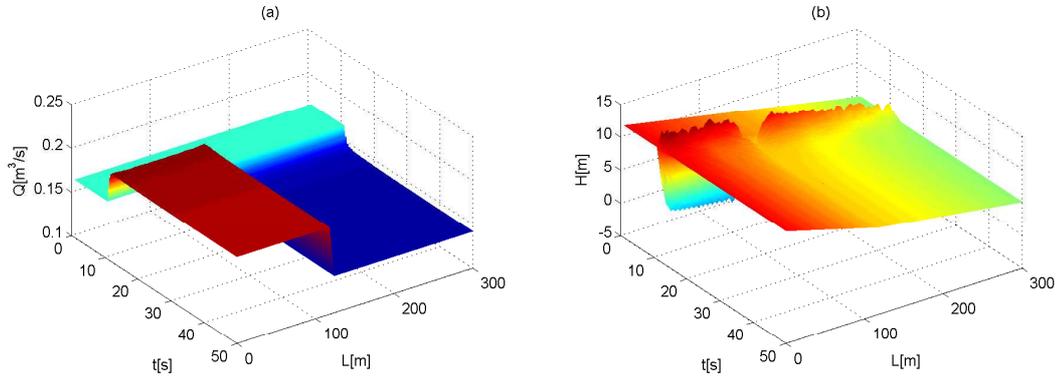


FIG. 2.10 – (a) Débits le long de la canalisation, (b) Pressions le long de la canalisation. Exemple 2

On simule trois fuites dans les positions $z_{f_1} \approx 58.82$, $z_{f_2} \approx 147.058$ et $z_{f_3} \approx 235.29$ aux instants $t_{f_1} = 10$, $t_{f_2} = 30$ et $t_{f_3} = 50$ respectivement. Les coefficients correspondant à chaque fuite sont fixés : $\sigma_{f_1} \approx 0.001129$, $\sigma_{f_2} \approx 0.001129$ et $\sigma_{f_3} \approx 0.001129$.

Pour l'exemple 3, la Fig.2.11 présente le comportement des débits et des pressions le long la canalisation. On voit clairement des changements de débit après chaque fuite. On voit aussi que les pressions sont affectées dans les différents points de fuite.

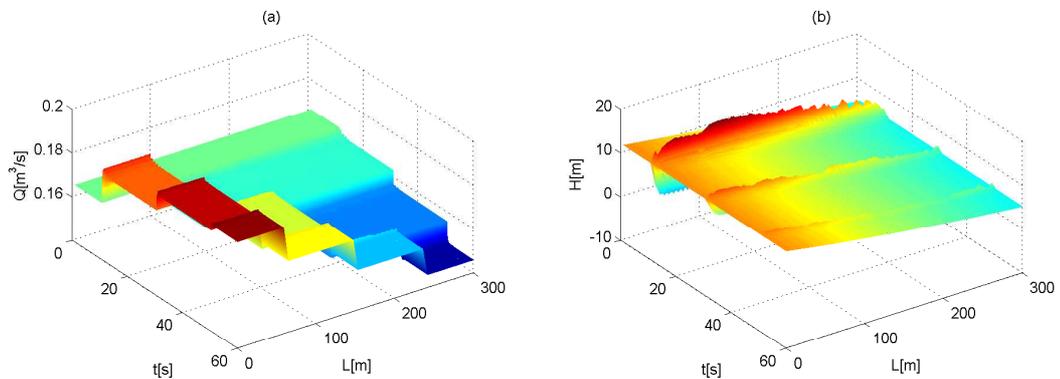


FIG. 2.11 – (a) Débits le long de la canalisation, (b) Pressions le long de la canalisation. Exemple 3

Exemple 4 (Comportement avec une fuite en régime oscillatoire) Prenons le même modèle de l'exemple précédent avec les entrées fixées $H_{in} = 12 + \sin(t)$ (m) et $H_{out} = 5$ (m). Dans cet exemple on simule une fuite à $z_{f_1} \approx 117.64$ (m) et à l'instant $t_{f_1} = 10$ (s). On fixe le coefficient de la fuite $\sigma_{f_1} \approx 0.00225$ (m^2). Le comportement des débits et des pressions le long la canalisation peut être vu dans la

Fig. 2.12.

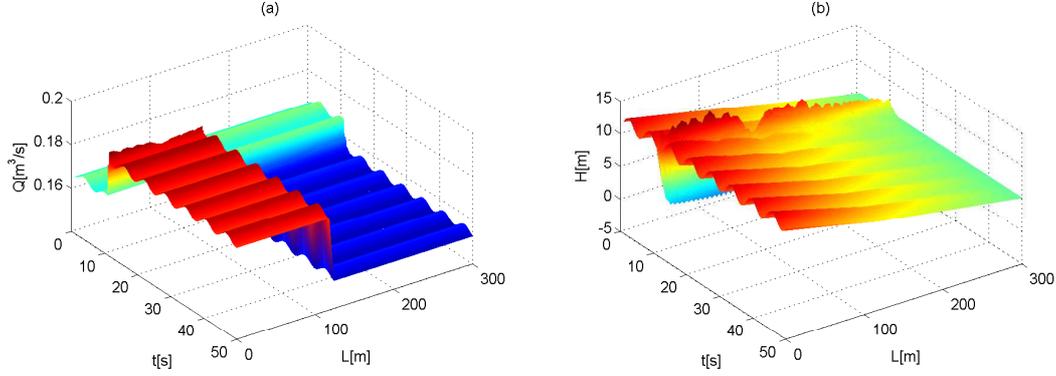


FIG. 2.12 – (a) Débits le long de la canalisation, (b) Pressions le long de la canalisation. Exemple 4

En résumé, les différentes simulations effectuées nous donnent une idée de ce qui passe dans la canalisation sous différentes conditions. Grâce à la grande taille des modèles utilisés dans les simulations, nous avons obtenu une bonne représentation d'une canalisation.

Par contre, un modèle fini avec un grand nombre de sections n'est pas facilement utilisable pour la conception d'observateurs en dimension finie, et pour la détection de défauts, il faut utiliser des modèles réduits dans la mesure du possible. Cependant, l'utilisation de modèles plus petits implique a priori une plus grande erreur du modèle (erreur de discrétisation spatiale).

Afin d'avoir un idée sur l'erreur de discrétisation selon le nombre de sections utilisées, on suppose qu'une canalisation réelle est représentée fidèlement par un modèle avec 100 sections. Dans la Fig. 2.13, on illustre l'erreur relative de discrétisation entre le modèle *fidèle*, et des autres modèles avec un nombre de sections inférieur à 100. Les valeurs d'erreur montrées dans la Fig. 2.13 sont obtenues lorsque les conditions aux frontières sont fixées à $H_{in} = 12 + \sin(t)$ (m) et $H_{out} = 5$ (m). Les erreurs ont été calculées à partir du débit Q_{in} donné par chaque modèle et l'équation suivante :

$$\varepsilon = \text{mean} |(Q_{in}^{reel} - Q_{in}^{modele})| / Q_{in}^{reel}$$

A partir de la Fig. 2.13, on note que l'erreur diminue exponentiellement par rapport au nombre de sections.

Ensuite, on présente des exemples de modèles par collocation. Tout d'abord on fait une comparaison entre un modèle par différences finies de grande taille, et un modèle par collocation avec 5 points. La comparaison est réalisée lorsque les modèles sont en régime oscillatoire.

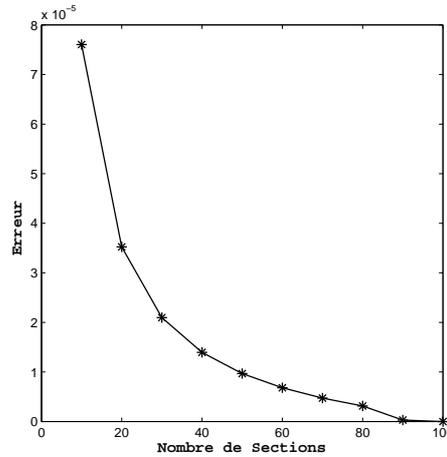


FIG. 2.13 – Erreur relative entre un modèle plus précis et des modèles plus simples

Exemple 5 (Comparaison entre modèles) Prenons un modèle par différences finies avec 100 sections tenant $H_{in} = 12 + \sin(t)$ (m) et $H_{out} = 5$ (m) comme ses conditions aux limites. D'un autre côté, prenons un modèle par collocation avec 5 points, tenant aussi les mêmes pressions aux extrêmes comme les conditions aux frontières. Pour la simulation, les points de collocation sont fixés : $z_1 = 0$ (m), $z_2 = 75$ (m), $z_3 = 150$ (m), $z_4 = 225$ (m), $z_5 = L$ (m) et la taille de chaque section du modèle par différences est fixée $\Delta z = 3$ (m).

La Fig. 2.14 montre l'erreur relative entre les modèles en considérant que le modèle par différences finies est plus précis. L'erreur est calculée à partir des débits aux extrémités considérés comme les sorties. Cela, par les équations ci-dessous :

$$\varepsilon(Q_{in}) = \left| \frac{Q_{in}^{dif} - Q_{in}^{col}}{Q_{in}^{dif}} \right|$$

$$\varepsilon(Q_{out}) = \left| \frac{Q_{out}^{dif} - Q_{out}^{col}}{Q_{out}^{dif}} \right|$$

A partir de la Fig. 2.14, on note que l'erreur diminue lorsque le temps s'écoule, c'est-à-dire, que l'erreur est plus grande à l'initialisation.

2.4 Conclusions

Ce chapitre a été dédié à la présentation et obtention de modèles finis pour la représentation d'une canalisation. Les modèles ont été obtenus à partir des équations du coup de bélier qui représentent le régime stationnaire et transitoire du débit

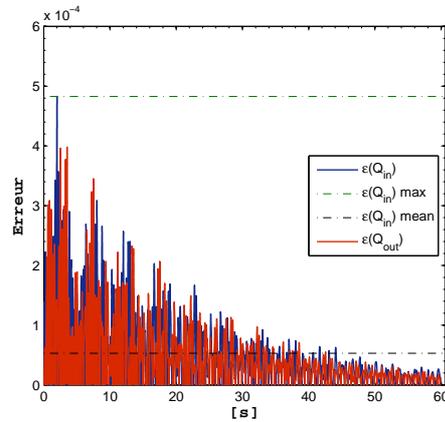


FIG. 2.14 – Erreur relative entre un modèle par différences finies et un modèle par collocation

dans des conduites fermées. Les modèles obtenus ont été programmés et testés en simulation afin d'étudier le comportement d'une canalisation sous certaines conditions d'opération. Une validation expérimentale de ces modèles sera présentée au Chapitre 5.

Soulignons la prise en compte particulière de fuites et de leur effets sur les variables de débit/pression dans cette modélisation, en vue de la construction d'observateurs pour leur détection.

A cet égard, il faut préciser que les modèles par différences finies seront plutôt retenus pour cette synthèse d'observateurs, dans la mesure où leur structure s'y prête plus facilement (comme on le verra au Chapitre 4). L'utilisation des modèles par collocation est donc laissée pour d'autres études.

Observateurs non linéaires

Sommaire

3.1	Introduction et notations de base	28
3.2	Rappels sur l'observabilité non linéaire	29
3.2.1	Conditions Géométriques d'observabilité	29
3.2.2	Conditions analytiques d'observabilité	31
3.3	Résumé sur la conception d'observateurs non linéaires .	36
3.3.1	Conception basée sur une transformation	36
3.3.2	Synthèse d'observateurs par sous-systèmes	37
3.3.3	Filtre de Kalman Étendu	38
3.3.4	Grand gain et systèmes uniformément observables	39
3.3.5	Grand gain et systèmes infinitésimalement uniformément observables	42
3.3.6	Grand gain et systèmes non uniformément observables	45
3.3.7	Vers une version adaptative	49
3.4	Conclusions	49

Ce chapitre vise à rappeler les principaux outils disponibles pour l'observation de systèmes non linéaires, et à proposer sur cette base une nouvelle contribution, en vue d'application à la détection de fuites, puis, par extension, à la synchronisation de systèmes chaotiques.

Il passe donc en revue un certain nombre de définitions relatives à l'observabilité, ainsi que d'observateurs déjà disponibles pour les systèmes non linéaires, classifiés en systèmes *uniformément* et *non uniformément* observables.

A la suite, une nouvelle forme d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires sous une structure particulière est proposée, dans le prolongement des idées de [17] d'une part, et de [18] d'autre part.

Certaines des techniques mentionnées ici, et tout particulièrement cette dernière, seront mises en oeuvre aux chapitres suivants.

3.1 Introduction et notations de base

L'observation des variables d'état et des paramètres d'un système est souvent exigée afin d'appliquer des algorithmes avancés de commande ou de surveillance. Le processus d'observation est dans la plupart des cas inévitable, du moment où, en général, les variables d'état d'un système (qu'il soit linéaire ou non linéaire) ne peuvent pas se déduire directement (algébriquement) de la sortie, ce qui est valable aussi pour les paramètres. Le processus d'observation est mené par un observateur, dont la construction ne pose pas de problème en ce qui concerne l'estimation des dynamiques linéaires, pour lesquelles on dispose de méthodes systématiques de synthèse. En revanche, en ce qui concerne les systèmes non linéaires, on ne dispose que d'une collection de solutions "dédiées", chacune applicable à une classe particulière de systèmes.

Dans toutes les sections du chapitre, ainsi que dans les chapitres suivants, les notations/terminologies suivantes seront utilisées :

- ★ x, u, y et t respectivement pour le vecteur d'état, le vecteur d'entrées, le vecteur de sorties, et la variable du temps (laquelle peut être omise comme un argument lorsque ce n'est pas indispensable).
- ★ I_d pour la matrice symétrique identité avec les dimensions appropriées.
- ★ v_i pour le i -ème composant d'un vecteur v .
- ★ $S = S^T > 0$ pour une matrice définie positive S .

Dans tout le chapitre, le système non linéaire considéré est décrit par une représentation d'état explicite de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\tag{3.1}$$

avec $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ et $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$. Les fonctions f et h sont supposées être C^∞ par rapport à leur arguments, et les fonctions d'entrées sont en général supposées comme étant des fonctions mesurables et bornées dans un ensemble \mathcal{U} .

Par ailleurs, la plupart des définitions et techniques discutées par la suite, sont basées sur des formes plus spécifiques, parmi celles-là, on a :

- ★ Système affine en l'état

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(u)x(t) + B(u) \\ y(t) &= C(u)x(t) + D(u)\end{aligned}\tag{3.2}$$

- ★ Système affine en l'entrée

$$f(x, u) = f_0(x) + g(x)u\tag{3.3}$$

Étant donné un système Σ décrit par les équations (3.1), le rôle d'un observateur consiste à estimer l'état courant x du système à partir de ses entrées u (éventuellement issues d'un algorithme de commande) et ses sorties y (mesurées par des

capteurs). Un observateur \mathcal{O} pour Σ est donc un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont les entrées/sorties de Σ , et les sorties les états estimés \hat{x} .

Un tel système peut se définir comme suit :

Définition 1 (Observateur) *Un observateur pour le système (3.1) est un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont les entrées/sorties de (3.1), et les sorties, les états estimés \hat{x} . Un tel système peut être représenté d'une façon générale comme suit*

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= F(X(t), u(t), y(t), t) \\ \hat{x}(t) &= H(X(t), u(t), y(t), t)\end{aligned}$$

tel que :

- (i) $\hat{x}(0) = x(0) \implies \hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0$
- (ii) $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$;

Si (ii) est vérifié pour tout $x(0)$ et $\hat{x}(0)$, l'observateur est global.

Si (ii) est vérifié avec une convergence exponentielle, l'observateur est exponentiel.

Si (ii) est vérifié avec une vitesse de convergence à régler, l'observateur est réglable.

3.2 Rappels sur l'observabilité non linéaire

L'objectif de cette section est de discuter quelques conditions nécessaires pour la conception d'observateurs (selon le panorama de [19] notamment).

3.2.1 Conditions Géométriques d'observabilité

Pour les systèmes linéaires stationnaires, l'observabilité dépend exclusivement de la description mathématique du système et elle se montre aussi suffisante pour garantir l'existence d'un observateur à convergence globale, exponentielle et arbitrairement rapide. Pour les systèmes non linéaires, le problème est compliqué du fait que l'observabilité dépend en plus de l'entrée appliquée. Plus précisément, pour tout couple d'états initiaux, l'observabilité dépend de l'existence d'une entrée qui permette de discerner (ou distinguer) les éléments de ce couple. En s'appuyant sur le travail de [20], on définit l'observabilité à partir de la notion d'indiscernabilité.

Définition 2 (Indiscernabilité) Une paire $(x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sera dite indiscernable par u si

$$\forall u \in \mathcal{U}, \forall t \geq 0, h(\mathcal{X}_u(t, x_0)) = h(\mathcal{X}_u(t, x'_0)).$$

La paire sera dite indiscernable, si elle l'est par tout u .

À partir de cette définition, nous pouvons définir l'observabilité.

Définition 3 (Observabilité) Un système non linéaire (3.1) est observable s'il n'admet pas de paire indiscernable.

Cette définition est assez globale, et parfois très générale pour une utilisation pratique, surtout quand on est intéressé à distinguer des états dans un voisinage. Cela nous ramène à considérer la définition suivante d'observabilité :

Définition 4 (Observabilité faible) Un système non linéaire (3.1) est faiblement observable s'il existe un voisinage W de x tel que il n'y a pas un état indiscernable de x dans W .

Cette définition ne prend pas en compte les cas dont les trajectoires doivent aller au delà W avant de distinguer entre deux états en W . Afin de prévenir cette situation, une définition plus locale peut être donnée :

Définition 5 (Observabilité locale faible) Un système non linéaire (3.1) est localement faiblement observable s'il existe un voisinage W de x tel que pour tout voisinage V de x contenu dans W , il n'y a pas un état indiscernable de x dans V .

Ceci signifie qu'on peut distinguer chaque état de ses voisins sans "aller trop loin". Cette notion est plus intéressante dans la pratique, et aussi puisqu'elle présente l'avantage d'admettre une caractérisation de condition au sens du rang. Telle condition est basée sur la notion d'un espace d'observabilité correspondant à l'espace de tous les états observables :

Définition 6 [Espace d'observabilité] L'espace d'observabilité du système (3.1) est défini comme le plus petit sous espace vectoriel $\mathcal{O}(h)$ de fonctions de C^∞ contenant les sorties de h et invariant sous l'action de la dérivée de Lie le long de $f_u := f(\cdot, u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ (à savoir que pour tout $\varphi \in \mathcal{O}(h)$, avec $L_{f_u} \varphi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x, u)$)

Définition 7 (Condition de rang pour l'observabilité) On dira que le système (3.1) satisfait la condition de rang pour l'observabilité, s'il satisfait :

$$\forall x, \dim d\mathcal{O}(h)|_x = n$$

avec $\dim d\mathcal{O}(h)|_x$ comme l'ensemble de $d\varphi$ et $\varphi \in \mathcal{O}(h)$.

Cette condition nous ramène au théorème suivant [20] :

Théorème 1 *Si le système (3.1) satisfait la condition du rang (en x_0), alors il est localement faiblement observable (en x_0).*

En général, si le système (3.1) satisfait la condition de rang pour l'observabilité, il est localement faiblement observable.

Inversement, le système (3.1) localement faiblement observable satisfait la condition du rang génériquement.

D'ailleurs, il y a une équivalence entre la condition de rang pour l'observabilité et la condition de rang de Kalman utilisé pour les systèmes linéaires.

Théorème 2 *Pour un système de la forme suivante :*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{3.4}$$

- ★ *La condition de rang pour l'observabilité est équivalente à $\text{rank}\mathcal{O}_m = n$, avec une matrice d'observabilité définie par*

$$\mathcal{O}_m = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T$$

- ★ *La condition de rang pour l'observabilité est équivalente à l'observabilité du système (3.4).*

La condition ci-dessus est aussi applicable aux systèmes contrôlés, $\dot{x} = Ax + Bu$. Cette condition est suffisante pour la conception d'un observateur pour (3.4) (même nécessaire et suffisante pour la conception d'un observateur réglable). Cependant, pour les systèmes en général, la condition de rang n'est pas suffisante pour la possible conception d'un observateur. Cela est dû au fait que l'observabilité dépend des entrées, c'est-à-dire qu'elle ne prend pas en compte l'existence d'entrées pour lesquelles l'observabilité disparaît.

3.2.2 Conditions analytiques d'observabilité

Étant donné que les conditions présentées précédemment ne suffisent pas pour la synthèse d'un observateur, il faut donner des conditions additionnelles relatives aux entrées.

Définition 8 (Entrées universelles) *Une entrée $u : [0, T] \rightarrow U$ admissible est dite universelle pour le système (3.1) sur $[0, T]$ si $\forall x_0 \neq x'_0, \exists \tau \geq 0$ tel que $h(\mathcal{X}_u(\tau, x_0)) \neq h(\mathcal{X}_u(\tau, x'_0))$.*

Définition 9 (Entrées singulières) Une entrée non universelle sera dite entrée singulière.

Lorsqu'il n'existe pas d'entrée singulière parmi l'ensemble des entrées admissibles U , alors tout couple d'états initiaux sont discernables. Cette propriété est appelée la U -uniforme observabilité.

Définition 10 [Observabilité U -uniforme] Un système dont toutes les entrées admissibles dans U sont universelles est dit U -uniformément observable. Dans le cas où l'ensemble de toutes les entrées à valeurs bornées dans \mathbb{R}^m sont universelles, ce système sera dit \mathbb{R}^m -uniformément observable (puis, uniformément observable par la suite).

En général, la caractérisation d'entrées singulières n'est pas évidente. Ceci devient une tâche plus facile pour les systèmes qui n'admettent pas des entrées singulières.

Définition 11 (Systèmes uniformément observables) Un système dont toutes les entrées sont universelles est dit uniformément observable.

Théorème 3 Si le système (3.3) est uniformément observable, alors il existe un sous-ensemble dense $X \in \mathbb{R}^m$, tel que $\forall x_0 \in X$ il y a un voisinage V , dans lequel un opérateur Φ donné devient un difféomorphisme qui transforme le système (3.1) sous la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + \varphi_0(\xi) + \sum_{i=1}^m \varphi_i(\xi)u_i \\ y &= C\xi \end{aligned} \quad (3.5)$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_0(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi) \end{bmatrix}, \quad \varphi_i(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Inversement, si un système (3.1) peut se mettre sous la forme canonique ci-dessus par un difféomorphisme Φ , le système sera uniformément observable dans le domaine de la définition du difféomorphisme.

L'observabilité locale faible (observabilité au sens de rang) du système (3.1) n'implique pas l'observabilité du système autonome suivant :

$$\Sigma_u \begin{cases} x = f_u(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

avec u comme étant une entrée constante fixée et $f_u(x) = f(u, x)$. La structure d'observabilité uniforme définie ci-dessous possède la propriété indiquant que si le système (3.1) est observable au sens du rang, alors pour chaque $u \in U$ fixée, Σ_u défini par (3.6) est aussi observable au sens de rang. Avant d'énoncer la définition concernée, considérons que $u \in U$ et les codistributions suivantes :

- * \mathcal{E}_1^u est engendrée par $\{dh_1, \dots, dh_p\}$ (il faut noter que \mathcal{E}_1^u ne depend pas de u étant donné que $h_i = h_i(x)$)
 - * Pour $k \geq 1$, soit \mathcal{E}_{k+1}^u la codistribution engendrée par \mathcal{E}_k^u et $\{dL_{f_u}^k(h_1), \dots, dL_{f_u}^k(h_p)\}$
- Clairement, on a $\mathcal{E}_1^u \subset \dots \subset \mathcal{E}_{n-1}^u \subset \mathcal{E}_n^u \subset \dots$

Définition 12 [21][Structure d'observabilité U -uniforme (U -u.o.s.)] *Le système (3.1) aura une structure U -uniforme observable si et seulement si :*

- (i) $\forall u, u' \in U; \forall x \in X, \mathcal{E}_1^u = \mathcal{E}_1^{u'}$
- (ii) *Pour chaque i , la codistribution \mathcal{E}_i^u est de dimension constante ν_i^u ($\dim \mathcal{E}_i^u = \nu_i^u, \forall x \in X; \forall u \in U$).*

D'une manière similaire, soit $(\mathcal{E}_i)_{i \geq 1}$ la famille des codistributions définie par :

- * $\mathcal{E}_1 = \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}$
- * $\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i + \text{span}\{dL_{f_{u_i}} \dots L_{f_{u_1}}(h_j); u_1, \dots, u_i \in U, j = 1, \dots, p\}$.

Remarque 1 *À partir du :*

- *point (i) on peut déduire que pour chaque $u \in U$ et pour tout $i \geq 1, \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i^u$*
- *point (ii), si le système (3.1) est observable au sens du rang en x et il a une U -u.o.s., alors il est observable au sens de rang à chaque point de X .*

Maintenant on énonce le théorème suivant :

Théorème 4 *En supposant que le système (3.1) est observable au sens de rang en un point de X et qu'il a une U -u.o.s. Alors, pour chaque sous-ensemble U' de U ; le système (3.1) est localement U' -uniformément observable.*

En ce qui concerne les systèmes mono-sortie de la forme générale

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u) \\ y(t) &= h(x, u) \end{aligned} \quad (3.7)$$

qui sont observables indépendamment de l'entrée, dans [22] a été introduit la notion d'*observabilité infinitésimale* qui diffère de la notion d'observabilité comme suit : si dans la définition classique nous sommes amenés à distinguer tout couple distinct dans l'espace d'état, dans le cas de l'observabilité infinitésimale nous sommes amenés à distinguer des éléments de l'espace tangent à l'espace d'état. Les éléments en question sont les vecteurs tangents, d'où la terminologie *infinitésimale*.

Pour le système (3.7), avec l'entrée $u(\cdot)$ on considère que l'application entrée-sortie $PX_{\Sigma,u}$ associe la condition initiale x_0 à la trajectoire de sortie $y(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$.

$$PX_{\Sigma,u} : x_0 \mapsto y(\cdot)$$

De plus, l'application $PX_{\Sigma,u}$ est différentiable par rapport à x_0 . Considérons $TPX_{\Sigma,u}$ comme cette différentielle, laquelle est aussi l'application entrée-sortie d'un autre système avec un espace d'états TX (le fibré tangent). Cet autre système -ci dessous- est appelé *première variation* du (3.7).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{\xi} &= D_x f(x, u)\xi \\ \eta &= d_x h(x, u)\xi \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dont, $(x, \xi) \in TX$ est l'état de TX_{Σ} .

Définition 13 [*Observabilité uniforme infinitésimale*] *Le système est dit uniformément infinitésimalement observable si, pour chaque $u(\cdot) \in L^\infty(U)$, pour chaque $x_0 \in X$, toutes les applications tangentes $TPX_{\Sigma,u}$ sont injectives.*

Pour les systèmes non uniformément observables, il est possible de synthétiser des observateurs qui dépendent des entrées, mais dans ce cas, toutes les entrées ne sont pas admissibles, seules quelques unes le sont. Maintenant, la restriction des entrées aux entrées universelles n'est plus suffisante.

L'universalité peut être garantie au cours du temps, c'est-à-dire, qu'elle doit être persistante. Afin de caractériser cette persistance, on a la propriété suivante :

Définition 14 (Entrées persistantes) *Une entrée u est persistante pour le système (3.1) si :*

$$\begin{aligned} \exists t_0, T : \forall t \geq t_0, \forall x_t \neq x'_t, \\ \int_t^{t+T} \|h(\mathcal{X}_u(\tau, x_0)) - h(\mathcal{X}_u(\tau, x'_0))\|^2 d\tau > 0 \end{aligned}$$

Cette propriété garantit l'observabilité au cours d'un intervalle de temps. Cependant, elle ne prévoit pas le fait que l'observabilité disparaisse lorsque le temps tend à l'infini. Pour éviter cela, on doit garantir l'observabilité avec une persistance régulière :

Définition 15 (Entrées régulièrement persistantes) Une entrée u est régulièrement persistante pour le système (3.1) si :

$$\begin{aligned} & \exists t_0, T : \forall t \geq t_0, \forall x_{t-T} \neq x'_{t-T}, \\ & \int_{t-T}^t \|h(\mathcal{X}_u(\tau, x_{t-T})) - h(\mathcal{X}_u(\tau, x'_{t-T}))\|^2 d\tau \geq \beta(\|x_{t-T} - x'_{t-T}\|) \end{aligned}$$

pour une classe de \mathcal{K} -fonction β .

À partir de ces définitions sur la persistance et la persistance régulière, on peut reprendre les définitions classiques déjà disponibles [23] pour une classe de systèmes affines en l'état.

Proposition 1 Une fonction u est dite régulièrement persistante pour le système (3.2), s'il existe $\alpha > 0$, $T > 0$ tel que

$$\int_{t-T}^t \Phi_u^T(\tau, t-T) C^T C \Phi_u(\tau, t-T) d\tau \geq \alpha I_d > 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.9)$$

où la matrice de transition est définie classiquement

$$\frac{d\Phi_u(\tau, t)}{d\tau} = A(u(\tau))\Phi_u(\tau), \quad \Phi_u(t, t) = Id,$$

Le terme à gauche de l'équation (3.9) correspond au *Grammian d'observabilité*.

Maintenant on sait que la persistance régulière est la propriété dont on a besoin pour la reconstruction d'états, par contre, elle dépend d'un temps nécessaire T pour obtenir l'information suffisante. Si l'on est intéressé par une estimation à temps court, on aura besoin d'une propriété plus forte d'observabilité. Cela peut s'énoncer comme suit :

Définition 16 (Entrées localement régulières) Une entrée u est localement régulière pour le système (3.1) si :

$$\begin{aligned} & \exists T_0, \alpha : \forall T \leq T_0, \forall t \geq T, \forall x_{t-T} \neq x'_{t-T}, \\ & \int_{t-T}^t \|h(\mathcal{X}_u(\tau, x_{t-T})) - h(\mathcal{X}_u(\tau, x'_{t-T}))\|^2 d\tau \geq \beta(\|x_{t-T} - x'_{t-T}\|, \frac{1}{T}) \end{aligned}$$

pour une classe de \mathcal{KL} -fonction β .

3.3 Résumé sur la conception d'observateurs non linéaires

Ce paragraphe fait quelques rappels (selon [19]) sur la synthèse d'observateurs non linéaires, aussi bien pour les systèmes uniformément observables que pour les non uniformément observables. D'abord, nous présentons quelques manières de traiter les systèmes non linéaires qui ne satisfont pas *a priori* les structures appropriées pour la conception d'observateurs.

3.3.1 Conception basée sur une transformation

La théorie développée jusqu'à présent pour la synthèse d'observateurs non linéaires comprend des systèmes avec des structures particulières. Cependant, on peut appliquer cette théorie aux systèmes en les transformant sous ces structures de synthèse. L'approche plus évidente implique un changement de coordonnées qui établit une équivalence entre systèmes.

Définition 17 (Equivalence entre systèmes) *Un système décrit par :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) = f_u(x); & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y &= h(x) \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (3.10)$$

sera dit équivalent au système

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= F(\xi, u) = F_u(x); \\ y &= H(\xi) \end{aligned} \quad (3.11)$$

s'il existe un difféomorphisme $\xi = \Phi(x)$ défini en \mathbb{R}^n tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^m, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} f_u(x)|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} = F_u(\xi), \quad h \circ \Phi^{-1} = H$$

Les systèmes (3.10) et (3.11) sont dits équivalents par $\xi = \Phi(x)$.

L'intérêt de telle propriété pour la conception d'observateurs peut s'illustrer par la proposition suivante :

Proposition 2 *Étant donnés deux systèmes Σ_1 et Σ_2 respectivement définis par :*

$$\Sigma_1 \begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}, \quad \Sigma_2 \begin{cases} \dot{\xi} = Z(\xi, u) \\ y = H(\xi) \end{cases}$$

et équivalents par $\xi = \Phi(x)$,

Si :

$$\mathcal{O}_1 \begin{cases} \dot{\hat{\xi}} = Z(\hat{\xi}, u) + k(w, H(\hat{\xi}) - y) \\ \dot{w} = (w, u, y) \end{cases}$$

est un observateur pour Σ_2 ,

Alors :

$$\mathcal{O}_2 \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= X(\hat{x}, u) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{|\hat{x}}^{-1} k(w, H(\hat{x}) - y) \\ \dot{w} &= (w, u, y) \end{cases}$$

est un observateur pour Σ_1 .

De fait, si un système n'a pas la structure appropriée pour la synthèse d'un observateur, mais qu'il est équivalent à un autre système, ayant la bonne structure, alors il existe un observateur pour le système original.

Il existe diverses manières de transformer des systèmes en systèmes avec une structure adéquate pour la conception d'observateurs, par exemple, un système affine en l'entrée peut se transformer pour la conception d'un observateur de grand gain moyennant la transformation suivante ([24], [25]) :

$$\Phi = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.3.2 Synthèse d'observateurs par sous-systèmes

Une autre manière d'étendre la classe des systèmes pour lesquels un observateur peut être conçu, peut se faire en interconnectant un ensemble d'observateurs afin de concevoir un observateur pour un système inter-connecté.

Lorsqu'un système n'est pas sous une forme pour laquelle un observateur est déjà disponible, il peut être vu comme l'interconnexion entre plusieurs sous-systèmes qui admettraient chacun un observateur.

Si chaque sous-système admet un observateur, et si les états de chaque sous-système complémentaire sont connus, alors un observateur candidat principal pour l'interconnexion de ces sous-systèmes est donné en interconnectant l'ensemble des *sous-observateurs* disponibles (e.g. [26]).

Pour les systèmes non linéaires, la stabilité d'un observateur inter-connecté n'est pas garantie par la stabilité de chaque sous-observateur, puisque le principe de séparation ne s'applique pas. Cela signifie que la stabilité de l'interconnexion des sous-observateurs exige une attention spécifique. Dans [26], certaines conditions ont été dérivées afin de garantir une conception possible par l'interconnexion. Les cas considérés dans ce travail sont *l'interconnexion en cascade* et *l'interconnexion pleine* qui sont présentées ci-après. Les conditions de stabilité pour le cas respectif sont disponibles dans [26].

Considérons le premier cas d'interconnexion pleine, par l'intermédiaire d'un exemple dont un système est constitué par deux sous-systèmes et décrit par les équations suivantes :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u), u \in U \subset \mathbb{R}^m; f_i \text{ est une fonction } \mathcal{C}^\infty, i = 1, 2; \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2, x_1, u), x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, 2; \\ y = [h_1(x_1), h_2(x_2)]^T = [y_1, y_2]^T, y_i \in \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, 2. \end{cases} \quad (3.13)$$

On suppose que $u(\cdot) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+, U)$; et on fixe $\mathcal{X}_i := \mathcal{AC}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n_i})$ comme étant l'espace de fonctions absolument continues de \mathbb{R}^+ en \mathbb{R}^{n_i} . Finalement, on considère que \bar{i} dénote l'index complémentaire de $i \in \{1, 2\}$.

Le système (3.13) peut être vu comme une interconnexion entre deux sous-systèmes Σ_i , avec $i = 1, 2$ donné par :

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_i, v_{\bar{i}}, u), (v_{\bar{i}}, u) \in \mathcal{X}_{\bar{i}} \times \mathcal{U} \\ y_i = h_i(x_i) \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour chaque sous-système Σ_i , on peut concevoir un observateur \mathcal{O}_i avec la forme suivante :

$$\mathcal{O}_i : \begin{cases} \dot{\xi}_i = f_i(\xi_i, v_{\bar{i}}, u) + k_i(g_i, \xi_i)(h_i(\xi_i) - y_i), & \dot{g}_i = G_i(\xi_i, v_{\bar{i}}, u, g_i), \end{cases} \quad (3.15)$$

avec des fonctions régulières k_i, G_i et $(\xi_i, g_i) \in (\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{G}_i)$ où \mathbb{G}_i est invariant positivement par (3.15).

Si chaque sous-observateur \mathcal{O}_i résulte en un observateur asymptotique pour un système correspondant Σ_i , alors, l'observateur (3.16) est un observateur pour (3.13), si les fonctions de Lyapunov associées à chaque sous-observateur satisfont les conditions données en [26].

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) + K_1(\hat{x}_1)(h_1(\hat{x}_1) - y_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = f_2(\hat{x}_2, \hat{x}_1, u) + K_2(\hat{x}_2)(h_2(\hat{x}_2) - y_2) \end{cases} \quad (3.16)$$

Un cas plus faible à considérer se présente quand $f_1(x_1, x_2, u) = f_1(x_1, u)$ dans (3.13). On dit que ce type de système inter-connecté se trouve sous *une interconnexion en cascade*. Pour ce cas là, il existe plusieurs résultats pour la stabilité ([26]).

3.3.3 Filtre de Kalman Étendu

Une approche pour laquelle on n'a pas besoin d'une structure spécifique pour la synthèse d'observateurs, se base sur le célèbre Filtre de Kalman [27], sous sa version non linéaire.

Le Filtre de Kalman Étendu (EKF) comme on l'appelle est l'un des algorithmes les plus connus utilisés pour l'estimation des états et des paramètres de systèmes non linéaires (voir par exemple [28]).

Pour la conception d'un tel EKF, le système (3.1) est considéré. Pour celui-ci, il existe un observateur avec la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - K[\hat{y} - h(\hat{x})] \quad (3.17)$$

Le gain de cet observateur s'exprime comme étant

$$K = SC^T(\hat{x})R^{-1} \quad (3.18)$$

avec S calculée par l'équation de Riccati suivante :

$$\dot{S} = A(\hat{x}, u)S + SA^T(\hat{x}, u) - SC^T(\hat{x})R^{-1}C(\hat{x})S + Q \quad (3.19)$$

Par ailleurs, les matrices de covariance Q et R sont des matrices définies positives, tandis que les matrices $A(\hat{x}, u)$ et $C(\hat{x}, u)$ sont obtenues en calculant les jacobiniennes suivantes :

$$A(\hat{x}, u) = \frac{\partial f(\hat{x}, u)}{\partial x}, \quad C(\hat{x}) = \frac{\partial h(\hat{x})}{\partial x} \quad (3.20)$$

Un inconvénient du EKF est qu'il ne garantit pas la convergence globale. Toutefois, la stabilité locale peut être prouvée en supposant quelques bornes dans les nonlinéarités. Intuitivement, si l'estimation *a priori* est loin de la valeur actuelle de l'état, la linéarisation autour de la valeur estimée n'a pas de sens.

Dans [29], une légère modification pour l'EKF a été présentée. Cette modification essaie d'ajuster la dynamique du filtre afin d'accroître le domaine d'attraction et régler le temps de convergence. Cela s'effectue en ajoutant à la matrice $A(\hat{x}(t), u(t))$ de l'équation (3.19), un terme de stabilité λ . Cette modification donne :

$$\dot{S} = [A(\hat{x}, u) + \lambda I_d]S + S[A^T(\hat{x}, u) + \lambda I_d] - SC^T(\hat{x}, u)R^{-1}C(\hat{x}, u)S + Q \quad (3.21)$$

Avec cette modification, l'efficacité du filtre de Kalman étendu peut s'améliorer d'un point de vue pratique, cependant, d'un point de vue théorique on sait qu'il n'est pas un observateur global car sa convergence exponentielle ne repose sur aucun théorème, et elle dépend du système auquel le filtre s'applique. Par ailleurs cette forme du filtre de Kalman est non intrinsèque, mais lorsqu'il est appliqué à un système mis sous une forme canonique d'observabilité alors il acquiert des propriétés de convergence exponentielle. On verra ce fait dans la suite.

3.3.4 Grand gain et systèmes uniformément observables

La synthèse d'observateur à grand gain pour les systèmes uniformément observables s'appuie sur le fait que ces systèmes peuvent se mettre sous une forme

canonique (3.5) dont la construction ne pose pas de problème dans le cas mono-sortie.

L'étude plus approfondie des formes canoniques d'observabilité et des structures d'observabilité uniforme a permis de proposer des observateurs à gain constant et en particulier de dégager des conditions pour lesquelles la solution stationnaire de l'équation de Riccati différentielle existe et donne le gain d'un observateur exponentiel pour le système. Dans ce cas, les systèmes considérés sont de la forme (3.22) où la non linéarité vérifie une structure triangulaire *affine en l'entrée* (3.3) et des conditions de Lipchitz. Le réglage du facteur d'oubli exponentiel permet alors d'éliminer l'influence de la non linéarité pour des valeurs suffisamment grandes, et d'accélérer plus ou moins la convergence de l'observateur. En contrepartie, ce type d'observateur est souvent peu robuste vis-à-vis des bruits de mesure.

3.3.4.1 Observateur à grand gain 'classique'

Considérons le système (3.5) en une forme plus compacte comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + \varphi(\xi, u), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y &= C\xi \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{3.22}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Théorème 5 Si le système (3.22) satisfait les conditions

★ φ globalement Lipschitzienne par rapport à ξ et uniformément par rapport à

u ,
★ $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_j} = 0$ pour $j > i$, $i = 1, \dots, n-1$,

alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, le système

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}} &= A\hat{\xi} + \varphi(u, \hat{\xi}) - S^{-1}C^T(\hat{y} - y) \\ 0 &= -\lambda S - A^T S - SA + C^T C\end{aligned}\tag{3.23}$$

soit un observateur de (3.22) à convergence exponentielle dont la vitesse puisse être choisie arbitrairement rapide par l'intermédiaire du paramètre de réglage λ .

Notons que la solution S de l'équation de Lyapunov statique peut s'exprimer comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{(i+j)} C_{i+j-2}^{j-1} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n\tag{3.24}$$

où C_n^p est le symbole désignant le coefficient binomial, c'est à dire $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

De même, le terme $S^{-1}C^T$ peut se mettre sous la forme $\Lambda_\lambda K$ avec

$$\Lambda_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^n \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} C_n^1 \\ C_n^2 \\ \vdots \\ C_n^n \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Il suffit même que le vecteur K soit tel que la matrice $(A - KC)$ ait toutes ses valeurs propres négatives [23]. Une structure plus générale des systèmes uniformément observables multi-sorties admettant un observateur à grand gain à été donnée par [30].

Sans trop entrer dans les détails, mentionnons que la synthèse de l'observateur à grand gain est légèrement plus compliquée dans le cas des systèmes non autonomes multi-sorties à cause de l'absence d'une procédure pour la construction, par rapport à φ , d'une forme canonique convenable. En réalité, les conditions de structure employées dans le cas multi-sorties sont seulement *suffisantes* en ce qui concerne l'observabilité uniforme locale, alors que dans le cas mono-sortie, la condition de structure est aussi *nécessaire*. De plus, la satisfaction des conditions de structure dépend du choix, parmi les éléments de l'espace d'observation du système, des coordonnées dans lesquelles le système est écrit. Dans un travail plus récent [31], certaines conditions de structure ont été présentées par l'intermédiaire d'une nouvelle approche pour la caractérisation de l'observabilité locale uniforme pour les systèmes multi-sorties. Le problème lié aux choix des coordonnées reste néanmoins ouvert.

3.3.4.2 Lien avec le filtre Kalman étendu

Maintenant, un premier résultat est présenté justifiant l'utilisation du filtre de Kalman étendu sur un système mis sous une forme canonique d'observabilité. Son intérêt pratique est évident : il allie le filtre de Kalman étendu à l'observateur grand gain.

Il n'existe pas de preuves de la convergence du filtre de Kalman étendu, mais en revanche de nombreux exemples de systèmes non linéaires où le filtre de Kalman étendu ne converge pas (cf.[32]) : cela est dû au fait que si la trajectoire réelle du système est éloignée de la trajectoire estimée, les non linéarités peuvent être impossibles à compenser par un observateur à petit gain. Il paraît donc naturel d'appliquer un observateur de type Kalman étendu avec un grand gain lorsque l'on a très peu d'information sur l'état réel du système.

Soit $R > 0$. Soit Q symétrique définie positive. On pose $\Lambda = \text{diag}(1, \frac{1}{\lambda}, \dots, \frac{1}{\lambda^{n-1}})$ et $Q_\lambda = \lambda^2 \Lambda^{-1} Q \Lambda^{-1}$. Pour toute fonction $\varphi(x)$ on note $d\varphi$ comme étant sa matrice Jacobienne.

Théorème 6 . [18] Supposons que A et φ soient globalement Lipschitz et que u reste borné. Soit $\lambda > 0$. Alors pour tout λ suffisamment grand, le système

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}} &= A\hat{\xi} + \varphi(u, \hat{\xi}) - SC^T R^{-1}(\hat{y} - y) \\ \dot{S} &= Q_\lambda + S(A + d\varphi)^T + (A + d\varphi)S - SC^T r^{-1}CS\end{aligned}\quad (3.26)$$

est un observateur de (3.22) à convergence exponentielle dont la vitesse peut être choisie arbitrairement rapide par l'intermédiaire du paramètre de réglage λ .

3.3.5 Grand gain et systèmes infinitésimalement uniformément observables

3.3.5.1 Forme de base et lien avec le filtre de Kalman étendu

La notion d'observabilité infinitésimale uniforme est accompagnée dans [22] d'une forme canonique à savoir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ y &= h(x_1, u)\end{aligned}\quad (3.27)$$

où pour tout $1 \leq i < n$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, u) \neq 0$ (i.e. ne s'annule jamais quelles que soit les valeurs de x et de u).

Le système (3.27) peut s'obtenir, dans le cas des systèmes analytiques, par l'intermédiaire d'un changement de coordonnées. Enfin, toujours dans [22] cette forme canonique est utilisée pour la synthèse d'un observateur à grand gain.

On s'intéresse à présent à la structure particulière suivante, obtenue éventuellement suite à un changement de coordonnées, de système non affine en l'entrée :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(u)\xi + \varphi(\xi, u) \\ y &= C(u)\xi\end{aligned}\quad (3.28)$$

avec

$$A(u) = \begin{bmatrix} 0 & a_1(u) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1}(u) \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_i(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, u) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, u) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n, u) \end{bmatrix}$$

$$C(u) = [c_1(u) \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Le système (3.28) est uniformément infinitésimement observable si et seulement si $c_1(u)$ et $a_i(u)$, $i = 1, \dots, n-1$, ne s'annulent jamais. Pour la synthèse de l'observateur, une certaine condition de régularité est nécessaire, au sens où aucun de ces scalaires ne tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini. De plus, les matrices A et C doivent admettre des bornes supérieures. Ainsi, on suppose

$$0 < \alpha \leq |c_1(u)|, |a_i(u)| \leq \beta \quad i = 1, \dots, n-1$$

ou bien, après un changement de coordonnées convenable,

$$0 < \alpha \leq c_1(u), a_i(u) \leq \beta \quad i = 1, \dots, n-1$$

Sous l'hypothèse spécifique aux techniques *grand gain* - φ Lipschitzienne globalement par rapport à z , uniformément par rapport à u - la particularisation au système (3.28) de l'observateur proposée dans [22] est la suivante :

$$\dot{\hat{\xi}} = A(u)\hat{\xi} + \varphi(\xi, u) - \Lambda_\lambda K(C(u)\hat{\xi} - y)$$

où Λ_λ est la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$ avec $\lambda > 0$ suffisamment grand et K est un vecteur colonne qui peut être toujours trouvé sous la condition de régularité ci-dessus tel qu'il existe une matrice symétrique, définie positive S qui satisfait :

$$[A(u) - KC(u)]^T S + S[A(u) - KC(u)] \leq -\gamma Id$$

avec $\gamma > 0$.

Une version à gain variable a été proposée dans [33], faisant le lien avec le filtre de Kalman étendu, avec un gain donné par $S^{-1}C^T$ pour S solution de :

$$\dot{S} = Q_\lambda - SC^T R_\lambda CS + S \left(A(u) + d\varphi(u, \hat{\xi}) \right)^T + \left(A(u) + d\varphi(u, \hat{\xi}) \right) S$$

avec $d\varphi(u, \hat{\xi}) = \frac{\partial \varphi(u, \hat{\xi})}{\partial \xi}$ et Q_λ, R_λ sont définies comme suit : soit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$, $R > 0$ et

$$\Lambda_\lambda = \text{diag}\left(1, \frac{1}{\lambda(t)}, \dots, \frac{1}{\lambda^{n-1}(t)}\right)$$

alors, $Q_\lambda = \lambda(t)\Lambda_\lambda^{-1}Q\Lambda_\lambda^{-1}$ et $R_\lambda = \frac{1}{\lambda(t)}R$.

Ce choix confère à l'observateur, au voisinage d'un état d'équilibre, le comportement d'un observateur de Kalman étendu, et cette façon particulière (choix du repère de coordonnées) de construire un tel observateur permet d'obtenir un résultat de stabilité.

3.3.5.2 Un grand gain adaptatif

Il a été montré que sous des conditions d'observabilité uniforme, le système peut être mis sous une forme canonique d'observabilité et que sous cette forme, un observateur de type de Kalman étendu grand gain peut être construit. Il est démontré que cet observateur converge arbitrairement vite vers l'état du système (Théorème 6, [34]). Cependant, cet algorithme présente un inconvénient : une valeur très grande de λ produit l'amplification du bruit.

Une manière de surmonter ce désavantage est d'adapter le gain, tel que sa valeur soit grande quand il faut utiliser les propriétés d'un observateur à grand gain, et petite, quand les propriétés de filtrage sont exigées. Cette idée a été complètement développée dans [35] à la suite de premiers travaux [36], [37], [38]. Ici, on montre les résultats obtenus dans [35].

Considérons le système (3.28), un observateur de Kalman avec un grand gain adaptatif pour un tel système donné par :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}} &= A(u)\hat{\xi} + \varphi(u, \hat{\xi}) - S^{-1}C^T(u)R_\lambda^{-1}(\hat{y} - y) \\ \dot{S} &= -(A(u) + d\varphi(u, \hat{\xi}))^T S - S(A(u) + d\varphi(u, \hat{\xi})) + C^T(u)R_\lambda^{-1}C(u) - SQ_\lambda S \\ \dot{\lambda} &= \mathcal{F}(\lambda(t), \mathcal{I}_n(t)) = \mathcal{S}(\mathcal{I}_n)F_0(\lambda) + \mathcal{K}(1 - \mathcal{S}(\mathcal{I}_n))(1 - \lambda)\end{aligned}\quad (3.29)$$

où :

- ★ $\lambda(0) = 1$, $\lambda(t) \geq 1$ et $S(0) > 0$,
- ★ $d\varphi$ dénote la matrice Jacobienne de φ ,
- ★ Q_λ et R_λ sont définies comme suit : soit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$, $R > 0$ et

$$\Lambda_\lambda = \text{diag}\left(1, \frac{1}{\lambda(t)}, \dots, \frac{1}{\lambda^{n-1}(t)}\right)$$

alors, $Q_\lambda = \lambda(t)\Lambda_\lambda^{-1}Q\Lambda_\lambda^{-1}$ et $R_\lambda = \frac{1}{\lambda(t)}R$.

- ★ \mathcal{I}_n est une fonction d'innovation exprimée par :

$$\mathcal{I}_n = \int_{t-d}^t \|y(\tau) - \hat{y}(\tau)\|^2 d\tau$$

avec y comme étant la sortie actuelle du système (3.28) et \hat{y} comme une prédiction de la trajectoire de la sortie calculée sur l'intervalle $[t-d, t]$ avec l'état initial $\xi(t-d)$.

$$\begin{aligned}\star \mathcal{F}_0(\lambda) &= \begin{cases} \frac{1}{\Delta T} \lambda^2 & \text{si } \lambda \leq \lambda_1 \\ \frac{1}{\Delta T} (\lambda - 2\lambda_1)^2 & \text{si } \lambda > \lambda_1 \end{cases} \\ \star \mathcal{S}(\mathcal{I}_n) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{I}_n \leq \gamma_0 \\ \in [0; 1] & \text{si } \gamma_0 < \mathcal{I}_n < \gamma_1 \\ 1 & \text{si } \mathcal{I}_n \geq \gamma_1 \end{cases}\end{aligned}$$

En fait, la fonction $\mathcal{S}(\mathcal{I}_n)$ contrôle quelle partie de $\mathcal{F}(\lambda(t), \mathcal{I}_n(t))$ est activée dans un temps spécifié. Le comportement de la fonction $\mathcal{F}(\lambda(t), \mathcal{I}_n(t))$ peut être résumé comme suit :

- ★ lorsque $\mathcal{I}_n \geq \gamma_1$: λ augmente vers $2\lambda_1$ et dessus λ_1 dans un temps inférieur à ΔT , pour tout λ_1 ,
- ★ lorsque $\mathcal{I}_n \leq \gamma_0$: λ diminue vers 1 avec une vitesse fixée par le paramètre \mathcal{K} .

La convergence exponentielle globale de cet observateur appelé *filtre de Kalman étendu de grand gain adaptatif* est prouvée dans [35], où les détails d'application sont aussi donnés.

3.3.6 Grand gain et systèmes non uniformément observables

On considère maintenant une structure plus générale pour la conception d'un observateur à grand gain. Cette structure admet le cas (3.28) comme cas particulier, et inclut aussi les systèmes pour lesquels certaines entrées peuvent être singulières en ce qui concerne l'observabilité, c'est-à-dire des systèmes non uniformément observables. Elle a été formalisée dans [39], [17], généralisant les travaux de [23].

La structure est décrite comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A(u, y)\xi + \varphi(u, \xi) \\ y &= C(u)\xi + \zeta(u)\end{aligned}\tag{3.30}$$

avec $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_q)^T \in \mathbb{R}^N$, $\xi_i \in \mathbb{R}^{N_i}$ pour $i = 1, \dots, q$, $A_{i-1i} \in \mathbb{R}^{N_{i-1} \times N_i}$ pour $i = 2, \dots, q$ et $C_1(u) \in \mathbb{R}^{1 \times N_1}$. Les matrices impliquées possèdent les structures particulières suivantes

$$A(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & A_{12}(u, y) & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & A_{q-1q}(u, y) \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(u, \xi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(u, \xi_1) \\ \varphi_2(u, \xi_1, \xi_2) \\ \vdots \\ \varphi_{q-1}(u, \xi_1, \dots, \xi_{q-1}) \\ \varphi_q(u, \xi) \end{bmatrix},$$

$$C(u) = [C_1(u) \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Cette classe de systèmes non linéaires est particulièrement intéressante pour la synthèse d'un observateur étant donné que, presque tout système affine en l'entrée possède la propriété de pouvoir être mis sous la forme (3.30) [17]. Le résultat relatif à l'observation de ce système peut alors s'énoncer comme suit :

Théorème 7 *Étant données un système (3.30) et les hypothèses :*

- (i) *l'entrée u est localement régulière, bornée et telle que $A(u, y)$ et $C(u)$ soient bornés ;*
- (ii) *la non linéarité φ est Lipschitzienne-globalement par rapport à ξ , uniformément par rapport à u ,*

alors pour tout $\sigma > 0$, il exist $\lambda, \gamma > 0$ tels que le système :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}} &= A(u, y)\hat{\xi} + \varphi(u, \hat{\xi}) - \Lambda_\lambda S^{-1}C^T(u)(\hat{y} - y); \quad \hat{y} = C(u)\hat{\xi} + \xi(u) \\ \dot{S} &= \lambda(-\gamma S - A(u, y)^T S - SA(u, y) + C^T C) \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec Λ_λ donné par

$$\Lambda_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda I_{N_1} & & & 0 \\ & \lambda^2 I_{N_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda^q I_{N_q} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

et des conditions initiales $\hat{\xi}(0) \in \mathbb{R}^N$, $S(0) > 0$, assure :

$$\|\xi(t) - \hat{\xi}(t)\| \leq \mu e^{-\sigma t}, \quad \mu > 0, \quad \forall t \geq \frac{1}{\lambda}.$$

La démonstration du Théorème 7 est donnée dans l'article [17].

3.3.6.1 Une nouvelle forme d'observateur à grand gain pour systèmes non uniformément observables

Afin d'améliorer le résultat exprimé par le Théorème 7, le terme $A(u, y)$ peut être remplacé par $(A(u, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi})$. Cette modification fait que l'observateur, au voisinage d'un état d'équilibre, se comporte comme un observateur de Kalman étendu. Alors, on peut établir le théorème suivant :

Théorème 8 *Étant donné un système (3.30) et les hypothèses du Théorème 7 alors pour tout $\sigma > 0$, il existe $\lambda, \gamma > 0$ tels que le système :*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}} &= A(u, y)\hat{\xi} + \varphi(u, \hat{\xi}) - \Lambda_\lambda S^{-1}C^T(u)(\hat{y} - y); \quad \hat{y} = C(u)\hat{\xi} + \xi(u) \\ \dot{S} &= \lambda(-\gamma S - [A(u, y) + d\varphi_\lambda(u, \hat{\xi})]^T S - S[A(u, y) + d\varphi_\lambda(u, \hat{\xi})] + C^T C) \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec Λ_λ donné par (3.32), $d\varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda} \Lambda_\lambda^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Lambda_\lambda$, et conditions initiales $\hat{\xi}(0) \in \mathbb{R}^N$, $S(0) > 0$, assure que :

$$\|\xi(t) - \hat{\xi}(t)\| \leq \mu e^{-\sigma t}, \quad \mu > 0, \quad \forall t \geq \frac{1}{\lambda}.$$

La démonstration du Théorème 8 est proposée dans [7] et en suivant les mêmes lignes proposées dans [17].

La preuve s'appuie sur deux lemmes et sur des arguments standards de Lyapunov (comme par exemple résumés dans [40]) :

Lemme 1 *Considérons S comme dans le théorème 8, avec les mêmes suppositions étant vraies.*

Alors $\exists \gamma > 0$ et $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda_0$ et $\forall t \geq \frac{1}{\lambda}$, $\alpha_1 I_N \leq S(t) \leq \alpha_2 I_N$.

A partir de cela, une fonction de Lyapunov peut être construite pour l'erreur du système :

Lemme 2 *Considérons S comme dans le Théorème 8, avec les mêmes suppositions étant vraies.*

Si $e := \hat{\xi} - \xi$ est l'erreur d'observation, alors $V(t, e) := e^T \Lambda^{-1}(\lambda) S(t) \Lambda^{-1}(\lambda) e$ est une fonction candidate pour l'erreur du système qui satisfait $\dot{V} \leq -\alpha(\lambda) V$ pour tout λ suffisamment grand et pour toute fonction α croissante strictement positive le long les trajectoires de e .

Preuve 1 *Notons qu'un résultat similaire a été établi dans [19], avec S obtenue comme dans l'équation 3.33, mais sans $d\varphi_\lambda$. Soit S_0 cette matrice (avec la même condition initiale $S_0(0) = S(0)$). Alors, le lemme 1 découle du fait que S_0 satisfait le même résultat (pour α_{10}, α_{20}), et $S - S_0$ peut devenir arbitrairement petit. Cela peut être montré comme suit :*

Tout d'abord, à partir de la structure et les conditions Lipschitz de φ , il résulte que S admet une borne supérieure $s_M > 0$, pareil à S_0 [17]. Ceci peut être vu à partir de l'expression explicite de S :

$$S(t) = e^{-\lambda \gamma t} \Lambda \Psi^T(0, t) \Lambda^{-1} S(0) \Lambda^{-1} \Psi(0, t) \Lambda + \lambda \int_0^t e^{-\lambda \gamma (t-\tau)} \Lambda \Psi^T(\tau, t) \Lambda^{-1} C^T C \Lambda^{-1} \Psi(\tau, t) \Lambda d\tau$$

où Ψ désigne la matrice de transition pour le système : $\dot{\zeta}(t) = [A(u(t), y(t)) + d\varphi_\lambda(u(t), \hat{\xi}(t))] \zeta(t)$.

En notant qu'à partir des propriétés Lipschitz et la structure de φ , il existe $\delta > 0$ tel que pour $u, \hat{\xi}$, $d\varphi_\lambda \leq \frac{\delta}{\lambda}$, il peut être vérifié que par le lemme de Gronwall's, cette matrice de transition satisfait une inégalité supérieure comme suit :

$$\|\Lambda^{-1} \Psi(\tau, t) \Lambda\| \leq e^{\lambda a + \delta}$$

A partir cela :

$$\|S(t)\| \leq e^{-\lambda(\gamma - 2a - 2\delta/\lambda)t} \|S(0)\| + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(\gamma - 2a - 2\delta/\lambda)(t-\tau)} \|C^T C\| d\tau$$

et alors $\|S(t)\|$ admet une borne supérieure constante α_2 dès que $\gamma > 2a$ (ou $\gamma \geq 2a + \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ et $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ suffisamment grand afin que $\frac{2\delta}{\lambda_0} < \varepsilon$).

• Notons ensuite que $E := S - S_0$ satisfait :

$$\dot{E} = \lambda[-\gamma E - A^T(u, y)E - EA(u, y) - d\varphi_\lambda^T(u, \hat{\xi})S - Sd\varphi_\lambda^T(u, \hat{\xi})].$$

D'où,

$$E(t) = -\lambda \int_0^t e^{-\lambda\gamma(t-\tau)} \Lambda \Phi^T(\tau, t) \Lambda^{-1} (d\varphi_\lambda^T S + S d\varphi_\lambda) \Lambda^{-1} \Phi(\tau, t) \Lambda d\tau$$

avec Φ comme étant la matrice de transition

En utilisant la borne de Φ (comme Ψ) et aussi de $d\varphi_\lambda$, nous obtenons :

$$\|E(t)\| \leq \lambda \int_0^t e^{-\lambda(\gamma-2a)(t-\tau)} 2\alpha_2 \delta d\tau \leq \frac{2\delta\alpha_2}{\lambda(\gamma-2a)} =: \rho(\lambda)$$

avec ρ tendant vers zero et λ tendant vers l'infini.

• Finalement, en tenant compte que $S = S_0 + E$, nous avons pour ξ ,

$$\xi^T S \xi \geq \xi^T S_0 \xi - |\xi^T E \xi| \geq \alpha_{10} \|\xi\|^2 - \rho(\lambda) \|\xi\|^2 \geq \alpha_1 \|\xi\|^2$$

pour $\alpha_1 > 0$ et λ suffisamment grands.

Preuve 2 Nous avons clairement :

$$\dot{e} = (A - \Lambda S^{-1} C^T C) e + \varphi(u, \hat{\xi}) - \varphi(u, \xi)$$

A partir de la définition de V , et du lemme 1, V est effectivement une fonction de Lyapunov candidate adéquate pour e . A savoir, elle satisfait :

$$\dot{V} = -\lambda\gamma V - 2e^T \Lambda^{-1} \lambda d\varphi_\lambda^T S \Lambda^{-1} e + 2e^T \Lambda^{-1} S \Lambda^{-1} (\varphi(u, \hat{\xi}) - \varphi(u, \xi))$$

et à partir de la supposition Lipschitz de φ et son structure, on obtient :

$$\dot{V} \leq -\lambda\gamma V + 4\alpha_2 \delta \|\Lambda^{-1} e\|^2 \leq -(\lambda\gamma - \frac{4\alpha_2 \delta}{\alpha_1}) V$$

ce qui termine la preuve.

On peut à présent faire quelques remarques sur le résultats.

Remarque 2 On peut noter que l'observateur (3.33) ressemble en fait à un filtre de Kalman étendu, si on redéfinit son gain par $\bar{S} = \lambda^2 \Lambda_\lambda^{-1} S \Lambda_\lambda^{-1}$ à la place de S , ce qui fait devenir le gain en $\lambda \bar{S}^{-1} C^T(u)$ avec

$$\dot{\bar{S}} = \lambda\gamma \bar{S} + [A(u, y) + d\varphi(u, \hat{\xi})]^T \bar{S} + \bar{S} [A(u, y) + d\varphi(u, \hat{\xi})] - \lambda C^T(u) C(u)$$

où $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ comme le filtre de Kalman classique, mais avec un facteur d'oublie $\lambda\gamma$, et une matrice de covariance pour les sorties $R = \lambda^{-1}$.

En outre, un filtre de Kalman plus standard peut s'obtenir par l'usage des matrices de covariance classiques R, Q à la place du facteur d'oubli, mais dans une "forme structurée" par rapport au grand gain $R_\lambda = \lambda^{-1} R$, $Q_\lambda = \lambda^{-2} \Lambda_\lambda Q \Lambda_\lambda$ comme dans [34], [41], afin d'obtenir un gain $\bar{S}^{-1} C^T(u) R_\lambda^{-1}$ avec

$$\dot{\bar{S}} = -\bar{S} Q_\lambda \bar{S} - [A(u, y) + d\varphi(u, \hat{\xi})]^T \bar{S} - \bar{S} [A(u, y) + d\varphi(u, \hat{\xi})] + C^T(u) R_\lambda^{-1} C(u)$$

Remarque 3 *Finalement, il faut marquer que l'implémentation de l'observateur (3.33) peut provoquer des soucis numériques dus à l'inversion de la matrice S . Ceci peut s'éviter en calculant $M := S^{-1}$ comme :*

$$\dot{M} = \lambda(\gamma M + [A(u, y) + d\varphi(u, \hat{\xi})]M + M[A(u, y) + d\varphi(u, \hat{\xi})]^T - MC^T(u)C(u)M)$$

et obtenir le gain par : $\Lambda(\lambda)MC^T(u)$ avec $M(0) \geq 0$.

Des exemples d'utilisation résultats pratiques de l'observateur du Théorème 8 sont présentés dans la suite de la thèse (ils se retrouvent dans [8]).

3.3.7 Vers une version adaptative

On peut naturellement proposer dans le prolongement du Théorème 8 et de la section 3.3.5.2 un observateur du type filtre de Kalman étendu avec un gain adaptatif, similaire à celui exprimé par (3.29), mais synthétisé pour les systèmes sous la forme (3.31) :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}} &= A(u, y)\hat{\xi} + \varphi(u, \hat{\xi}) - S^{-1}C^T(u)R_\lambda^{-1}(\hat{y} - y) \\ \dot{S} &= -(A(u, y) + d\varphi(u, \hat{\xi}))^T S - S(A(u, y) + d\varphi(u, \hat{\xi})) + C^T(u)R_\lambda^{-1}C(u) - SQ_\lambda S \\ \dot{\lambda} &= \mathcal{F}(\lambda(t), \mathcal{I}_n(t)) = \mathcal{S}(\mathcal{I}_n)F_0(\lambda) + \mathcal{K}(1 - \mathcal{S}(\mathcal{I}_n))(1 - \lambda) \end{aligned} \quad (3.34)$$

où toutes les variables relatives à l'observateur sont définies de la même manière qu'elles ont été définies pour l'observateur (3.29), sauf Λ_λ qui est donné par (3.32). A priori, on peut supposer qu'une preuve de convergence exponentielle de cet observateur doit pouvoir se dériver de la preuve de convergence pour l'observateur (3.29) présentée dans [35].

Enfin, l'observateur (3.34) permet l'estimation d'états des systèmes non uniformément observables moyennant un gain adaptatif, en commutant comme l'observateur 3.29 du mode filtre de Kalman quand l'innovation est petite, vers le mode grand gain lorsque l'innovation est supérieure à un seuil. L'intérêt de cet observateur concerne les applications en présence de bruit et de grandes perturbations.

3.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons rappelé quelques conditions inhérentes à l'observation des systèmes non linéaires, ainsi que certains résultats concernant la synthèse d'observateurs uniformément observables et non uniformément observables.

Nous avons présenté notamment les résultats relatifs à la conception d'observateurs à grand gain, des filtres de Kalman, et le développement théorique pour les rassembler.

A l'issue des résultats présentés précédemment pour des systèmes sous certaines formes canoniques d'observabilité, nous avons proposé en extension un type d'observateur qui peut s'appliquer aux systèmes pour lesquels certaines entrées sont singulières en ce qui concerne l'observabilité. Cet observateur peut être considéré comme l'association d'un observateur à grand gain avec le filtre de Kalman étendu. Cela lui confère les propriétés des deux algorithmes, à savoir, le filtrage de bruit et la convergence globale. Finalement, comme un prolongement naturel du filtre de Kalman étendu de grand gain adaptatif proposé pour le cas de systèmes uniformément observables [35], une version à gain adaptatif du nouvel observateur proposé peut être envisagée. La preuve de convergence de cet observateur reste néanmoins à formaliser.

Applications à la détection de défauts en canalisations

Sommaire

4.1	Problématique et panorama bibliographique	52
4.2	Observabilité des équations du coup de bélier	54
4.3	Détection d'une fuite	56
4.3.1	Estimation de la position	57
4.3.2	Estimation de la position et du coefficient de fuite	60
4.3.3	Estimation de la position, du coefficient de fuite et d'un coefficient de friction unique	61
4.3.4	Estimation de la position, du coefficient de fuite et de deux coefficients de friction	65
4.4	Estimation de deux fuites simultanées	67
4.4.1	Filtre de Kalman étendu	70
4.4.2	Nouvelle forme d'observateur à grand gain	74
4.5	Détection de fuites multiples simultanées	75
4.6	Conclusions	77

Ce chapitre est dédié à l'application des observateurs présentés dans le chapitre précédent au cas de la détection de défauts pour les systèmes de distribution d'eau.

La synthèse des observateurs s'effectue en utilisant les modèles discrets présentés dans le Chapitre 2. Pour tous les cas de synthèse, le choix du modèle adéquat dépend des caractéristiques de la canalisation concernée, des conditions aux limites employées, et de la structure appropriée à la synthèse.

Tout d'abord, on présente une brève introduction sur la problématique de la détection de défauts pour les systèmes hydrauliques, ainsi que quelques solutions données par la communauté scientifique à ce sujet.

Ensuite, on examine l'observabilité des équations du coup de bélier selon les besoins d'estimation ou des défauts à détecter, par exemple, la détection d'une fuite, l'estimation des coefficients de friction, etc.

Finalement, différents types d'observateurs sont proposés pour répondre aux besoins d'estimation fixés, ainsi que certaines simulations en testant la performance

de chaque observateur. Les simulations s'appuient sur les données paramétriques de 2 bancs de test au Mexique, l'un au sein d'un département de recherche du CINVESTAV dans la ville de Guadalajara (*canalisation du CINVESTAV* dans la suite) et l'autre à l'Université de Mexico UNAM (*canalisation de l'UNAM*), qui seront présentés plus en détails au Chapitre 4 de validation expérimentale.

4.1 Problématique et panorama bibliographique

Il est quasiment impossible d'éviter la présence de défauts pour les systèmes hydrauliques, même s'ils sont conçus pour maintenir leur intégrité. Les défauts peuvent être le résultat des changements soudains de la pression non considérés dans la construction, de la corrosion, ou d'un manque d'entretien.

Puisque les défauts sont inévitables, tous les systèmes hydrauliques devraient avoir un procédé de surveillance pour la détection de défauts afin de diminuer les effets non souhaitables comme des pertes économiques, des dommages à l'infrastructure environnante, des désastres environnementaux, etc.

Ces dernières années, la communauté hydraulicienne a focalisé son attention sur le développement de méthodes efficaces pour la détection de défauts dans les canalisations.

Concernant la détection d'une fuite dans une canalisation sous pression, nous avons par exemple les travaux présentés dans [42] et [11], lesquels utilisent des méthodes en état stationnaire des équations du coup de bélier.

Par ailleurs, dans [43] est formulée une méthode qui utilise le comportement de l'onde de pression lorsqu'il y a une fuite. Quand l'onde transitoire de pression rencontre une fuite, une partie est reflétée en arrière. La position de la fuite est déterminée à partir du temps d'arrivée de l'onde reflétée.

Dans [44] les caractéristiques d'atténuation de l'onde de pression ont été étudiées. Les auteurs ont souligné que le mode d'atténuation dû à une fuite dépend de sa position.

Dans [45], les auteurs ont développé une méthodologie basée sur une matrice de transfert et la réponse fréquentielle du système avec une fuite. Tout d'abord par cette méthodologie, les composants d'un circuit hydraulique sont représentés par une matrice de transfert. Ensuite, des transitoires sont provoqués par l'ouverture/fermeture périodique d'une vanne. A partir de la matrice de transfert, un diagramme de la réponse fréquentielle est développé. S'il y a des fuites dans le système, le diagramme montre l'amplitude de la pression avec des crêtes résonnantes additionnelles. A partir de la fréquence de ces crêtes, la position de la fuite est calculée.

Dans [46] une méthode semblable est présentée, elle repose sur la génération d'un écoulement régulier-oscillant dans la canalisation, par le fonctionnement sinusoïdal d'une vanne et l'analyse fréquentielle du système pour une certaine gamme de fréquences oscillantes. Les auteurs ont montré qu'une fuite crée un effet de résonance dans le signal de pression avec une onde stationnaire superposée secondaire. La mesure de la pression ainsi que l'analyse spectrale de l'amplitude maximale à l'emplacement de l'excitation, permettent de déterminer la position approximative de la fuite.

Dans [47], les équations du coup de bélier sont résolues directement dans le domaine de la fréquence par la méthode de réponse à une impulsion. L'analyse harmonique de la pression transitoire est employée pour identifier la position et la taille de la fuite.

En ce qui concerne la détection de multi-fuites, une approche *off-line* a été présentée dans [48], qui permet d'identifier les paramètres inconnus associés à l'existence des multi-fuites dans une canalisation. Cette méthode est basée sur la combinaison des conditions transitoires et régulières sans requérir la perturbation du système. Cependant, la connaissance du débit entre les fuites est demandée.

Les méthodes présentées dans [45], [46] et [47] permettent aussi la détection de multi-fuites, néanmoins, elles demandent l'excitation du système à plusieurs fréquences.

On peut noter que toutes les méthodes précédemment mentionnées pour la détection de multi-fuites ne sont pas basées sur la réponse du système en état stationnaire, au contraire, elles profitent des conditions transitoires. Par conséquent, une méthode dans le domaine temporel basée sur la réponse transitoire du système devient une autre solution possible pour le cas de multi-fuites et c'est bien l'une des idées directrices de la thèse présente : en utilisant des entrées persistantes pour exciter un système de canalisation on peut obtenir une réponse avec deux propriétés indispensables pour la détection de deux positions de fuite : discernabilité et unicité [5]. Cette tâche est inatteignable en état stationnaire puisque le résultat alors serait l'estimation d'une fuite équivalente et non les vraies positions [48].

Par ailleurs, dans les approches fréquentielles il faut faire osciller le système à différents fréquences pour obtenir l'information nécessaire à la détection. D'un point de vue pratique, cette altération répétée du fonctionnement du système peut poser problème.

Ce type d'inconvénient peut être limité par une approche à base d'observateur.

Les observateurs sont conçus à partir des modèles non linéaires de dimension finie. Les modèles sont étendus afin d'inclure les paramètres des fuites dans leur vecteur d'états. Ainsi, certains de ces observateurs pourront fonctionner en condi-

tions opératoires "normales" ou, selon les besoins de détection nécessiter des entrées persistantes.

On peut noter qu'il existe aussi des travaux pour la détection de fuites dans le canaux à surface libre. Parmi ceux-ci, on a le travail présenté dans [49], qui expose deux méthodes en utilisant les équations de Saint-Venant et en considérant la fuite comme une prise latérale. La première méthode utilise un ensemble de N modèles correspondant à N positions des fuites possibles, la position de la fuite est déterminée par le modèle qui minimise une fonction de coût quadratique. La deuxième méthode utilise le même principe, mais en utilisant des observateurs à la place des modèles purs. Un autre travail plus ancien mais plus simple est présenté dans [50], où est utilisé un algorithme qui compare les changements des niveaux d'eau observés et les débits aux extrémités connus.

D'autres défauts typiques dans les canalisations sous pression sont les blocages. Pour ce problème, on trouve de bons résultats comme ceux montrés dans [51]. La méthode utilisée est similaire à celle présentée dans [44] mais appliquée aux blocages. De la même manière, la procédure présentée pour la détection de blocages dans [52] est similaire à celle présentée dans [45] pour la localisation de fuites. Enfin, il y a plusieurs méthodes utilisées pour la détection de blocages qui sont basées sur des algorithmes originalement conçus pour la détection de fuites.

Les approches par observateurs que nous proposons ci-après peuvent aussi être étendus à la détection d'autres défauts que des fuites, ou d'autres écoulements que sous pression, mais ceci sera laissé en perspective.

4.2 Observabilité des équations du coup de bélier

L'observabilité des équations du coup de bélier en dimension infinie peut s'analyser sous les concepts et résultats d'observabilité présentés dans [53]. Les systèmes d'intérêt de ce travail sont représentés par des équations différentielles partielles hyperboliques quasi-linéaires unidimensionnels du premier ordre, avec des conditions aux limites non-linéaires générales.

Dans le cas des équations différentielles partielles, les valeurs observées peuvent être, soit des valeurs à la frontière (sur le *domaine frontière* complet ou en une partie), soit des valeurs internes (sur le domaine complet ou en partie). Lorsque l'observabilité se réalise à partir des valeurs à la frontière, on parle *d'observabilité exacte frontière*.

Ensuite, on applique les résultats d'observabilité exacte frontière présentés dans [53] sur les équations du coup de bélier.

Considérons le système du coup de bélier (2.3) avec ses valeurs propres $\tilde{\lambda}_{1,2} = \pm b$ et ses points d'équilibre Q_e, H_e donnés par (2.4)-(2.5). De plus, utilisons les conditions initiales :

$$H(z, 0) = H^0, \quad Q(z, 0) = Q^0, \quad z \in [0, L]$$

et les conditions aux limites :

$$H(0, t) = H_{in}, \quad H(L, t) = H_{out} \quad (4.1)$$

Rappelons la notation pour la norme $\|f\|_{C^1[a,b]} = \sum_{i=0}^n \sup_{x \in [a,b]} |f^{(i)}(x)|$.

On obtient alors, comme conséquence immédiate d'un résultat de [54] (Théorème 1) :

Proposition 3 *Soit T un nombre vérifiant que :*

$$T > \frac{L}{|b|}$$

Alors, si la norme $\|H^0 - H_e, Q^0 - Q_e\|_{C^1[0,L]}$ est suffisamment petite, les données initiales, H^0, Q^0 , sont uniquement déterminées par les valeurs observées $Q_{in} = Q(0, t), Q_{out} = Q(L, t)$ sur l'intervalle $[0, T]$. De plus, on a l'inégalité d'observabilité suivante :

$$\begin{aligned} \|H^0 - H_e, Q^0 - Q_e\|_{C^1[0,L]} &\leq C(\|Q_{in} - Q_e\|_{C^1[0,T]} + \|Q_{out} - Q_e\|_{C^1[0,T]} \\ &\quad + \|H_{in} - H_e\|_{C^1[0,T]} + \|H_{out} - H_e\|_{C^1[0,T]}) \end{aligned}$$

De même, à partir d'un autre résultat de [54] (théorème 2) :

Proposition 4 *Soit T un nombre vérifiant que :*

$$T > \frac{2L}{|b|}$$

Alors, si la norme $\|H^0 - H_e, Q^0 - Q_e\|_{C^1[0,L]}$ est suffisamment petite, les données initiales, H^0, Q^0 , sont uniquement déterminées par la valeur observée Q_{in} à $z = 0$ (resp. Q_{out} à $z = L$) sur l'intervalle $[0, T]$. De plus, on a l'inégalité d'observabilité suivante :

$$\begin{aligned} \|H^0 - H_e, Q^0 - Q_e\|_{C^1[0,L]} &\leq C(\|Q_{in} - Q_e\|_{C^1[0,T]} \text{ (resp. } \|Q_{out} - Q_e\|_{C^1[0,T]}) \\ &\quad + \|H_{in} - H_e\|_{C^1[0,T]} + \|H_{out} - H_e\|_{C^1[0,T]}) \end{aligned}$$

Ces deux résultats assurent que les valeurs de toutes les pressions et débits de la canalisation peuvent être récupérées à partir de la connaissance des conditions aux limites, pourvu que l'onde de pression b partant d'une frontière arrive à la frontière opposée. Cependant ces théorèmes ne considèrent pas l'existence de pertes de débit comme ce pourrait être le cas avec des fuites dans le système, ou des changements d'aire dûs aux blocages dans la canalisation.

En vue de construire des observateurs pour la détection de défauts dans une canalisation, il faudra donc l'observabilité des équations du coup de bélier modifiées par la relation du défaut d'intérêt. Étant donné qu'il n'y a pas (jusqu'à présent) une méthodologie en dimension infinie pour déterminer l'observabilité des équations du coup de bélier avec l'inclusion de défauts de ce type, nous nous baserons sur les modèles en dimension finie affectés pour chaque défaut.

4.3 Détection d'une fuite

Dans un premier temps, on s'intéresse à la détection d'une fuite. Afin d'illustrer l'objectif de détection, on présente le schéma de la Fig. 4.1 qui montre une canalisation affectée par une seule fuite. Dans cette figure, on peut voir qu'à cause de la présence d'une fuite, la canalisation est divisée en deux sections. Alors, pour la conception d'un observateur, on a besoin d'un modèle en dimension finie qui représente au moins ces deux sections. Considérons éventuellement une canalisation

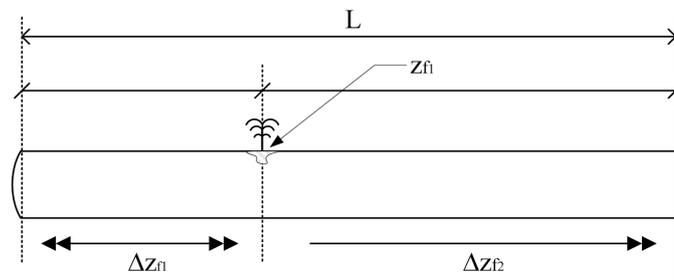


FIG. 4.1 – Problème avec une fuite

où les conditions aux limites sont les pressions à l'amont et à l'aval, H_{in} et H_{out} . Considérons de plus, la disponibilité des mesures des débits aux extrêmes, Q_{in} et Q_{out} . Le modèle suivant remplit ces conditions :

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_1 &= -\mu Q_1 |Q_1| + \frac{a_1}{\Delta z_{f_1}} (H_{in} - H_2) \\
 \dot{H}_2 &= \frac{a_2}{\Delta z_{f_1}} (Q_1 - Q_2 - \sigma_{f_1} \sqrt{H_2}) \\
 \dot{Q}_2 &= -\mu Q_2 |Q_2| + \frac{a_1}{L - \Delta z_{f_1}} (H_2 - H_{out})
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

avec : $a_1 = -gA_r$, $a_2 = -\frac{b^2}{gA_r}$ et $\mu = \frac{f}{2\phi A_r} = fa_3$.

Le modèle (4.2) est obtenu par la méthode de différences finies à partir des équations (2.10)-(2.11) avec $n = 2$. La position de la fuite z_{f_1} avec un coefficient de fuite σ_{f_1} est donné par la taille de la section Δz_{f_1} (strictement comprise entre 0 et L).

4.3.1 Estimation de la position

Si nous nous intéressons seulement à la position d'une fuite (et non son coefficient), nous pouvons ajouter un état au système (4.2), pour qu'il représente la dynamique de la position. En considérant que cette dynamique est constante, nous avons :

$$\dot{\Delta z}_{f_1} = 0$$

Par ailleurs, si nous considérons que le débit perdu à cause de la fuite est constant $\dot{Q}_{f_1} = 0$, et que le débit perdu est donné par la relation $Q_{f_1} = Q_1 - Q_2$, nous pouvons déduire que :

$$\dot{H}_2 = 0$$

Sous ces suppositions, le système (4.2) devient :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= -\mu Q_1 |Q_1| + \frac{a_1}{\Delta z_{f_1}} (H_{in} - H_2) \\ \dot{H}_2 &= 0 \\ \dot{Q}_2 &= -\mu Q_2 |Q_2| + \frac{a_1}{L - \Delta z_{f_1}} (H_2 - H_{out}) \\ \dot{\Delta z}_{f_1} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.3.1.1 Équation statique

Le système (4.3) peut se voir comme un système d'équations non linéaires avec deux variables inconnues.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + \mu y_1 |y_1| &= a_1 u_1 \xi_1 - a_1 \xi_2 \\ \dot{y}_2 + \mu y_2 |y_2| &= a_1 \left(\frac{\xi_2}{\xi_1 L - 1} \right) - a_1 \left(\frac{u_2 \xi_1}{\xi_1 L - 1} \right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

avec $y_1 = Q_{in} = Q_1$, $y_2 = Q_{out} = Q_2$, $u_1 = H_{in}$, $u_2 = H_{out}$, $\xi_1 = \frac{1}{\Delta z_{f_1}}$ et $\xi_2 = \frac{H_2}{\Delta z_{f_1}}$.

À partir de (4.4) on obtient l'équation suivante qui donne formellement la position d'une fuite :

$$\Delta z_{f_1} = \frac{\dot{y}_2 L + \mu y_2 |y_2| L + a_1 (u_2 - u_1)}{-\dot{y}_1 - \mu y_1 |y_1| + \dot{y}_2 + \mu y_2 |y_2|} \tag{4.5}$$

Si les débits sont constants l'équation (4.5) se réduit à :

$$\Delta z_{f_1} = \frac{\mu y_2 |y_2| L + a_1 (u_2 - u_1)}{\mu (y_2 |y_2| - y_1 |y_1|)}; \quad y_1 \neq y_2 \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) est appelée "Calcul de la position équivalente" dans [55].

4.3.1.2 Observateur à grand gain

Le système (4.3) peut se voir de la forme générale (3.1) avec un vecteur d'états :

$$x(t) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [Q_1 \quad H_2 \quad Q_2 \quad \Delta z_{f_1}]^T \quad (4.7)$$

un vecteur d'entrées : $u(t) = [u_1, u_2]^T = [H_{in}, H_{out}]^T$ et un vecteur de sorties donné par $y(t) = [h_1(x), h_2(x)]^T = [Q_1, Q_2]^T$.

Le but est de construire un observateur à partir du système (4.3) afin d'estimer la position de la fuite donnée par la taille de la section Δz_{f_1} .

L'estimation de Δz_{f_1} peut être perçue comme le déplacement spatial de cette section vers la position de la fuite. Ce déplacement peut s'obtenir si Δz_{f_1} a un degré de liberté pour se déplacer. Le degré de liberté est donné par la relation $L - \Delta z_{f_1}$, qui est la taille de la section Δz_{f_2} (voir Fig.4.1).

Passons maintenant, à l'analyse d'observabilité pour le cas d'une fuite et à la conception des observateurs.

Étant données les entrées et les sorties du système (4.3), la configuration d'observation est montrée dans la Figure 4.2. Montrons que l'on peut obtenir à partir

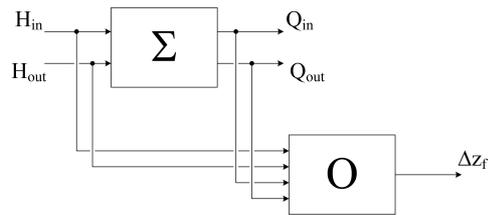


FIG. 4.2 – Schéma pour l'estimation de la position d'une fuite.

du système (4.3) une structure uniformément observable permettant un observateur à grand gain. En considérant en effet les entrées fixées à des valeurs constantes, H_{in}^o, H_{out}^o et en ré-écrivant (4.3) sous forme $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ avec comme sorties $y_1 = h_1(x)$ et $y_2 = h_2(x)$, on peut définir un changement de coordonnées :

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{bmatrix}$$

avec

$$\xi^1 = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ L_{f+gu}h_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \frac{a_1}{\Delta z_{f_1}}(H_{in}^o - H_2) \end{bmatrix},$$

$$\xi^2 = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2(x) \\ L_{f+gu}h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_2 \\ \frac{a_1}{L - \Delta z_{f_1}}(H_2 - H_{out}^o) \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que ce changement de coordonnées est inversible pour

$$\frac{H_2 - H_{out}}{L - \Delta z_{f_1}} \neq \frac{H_{in} - H_2}{\Delta z_{f_1}}$$

ce qui est nécessairement vrai en présence de un fuite d'après (4.3).

Il s'en suit que le système peut être ré-écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi^1 + \begin{bmatrix} -\mu\xi_{11}^2 \\ \varphi_1(\xi_{12}, \xi_{22}, u_1, u_2, \dot{u}_1) \end{bmatrix} \\ \dot{\xi}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi^2 + \begin{bmatrix} -\mu\xi_{21}^2 \\ \varphi_2(\xi_{12}, \xi_{22}, u_1, u_2, \dot{u}_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec

$$\varphi_1(\xi_{12}, \xi_{22}, u_1, u_2, \dot{u}_1) = 0$$

$$\varphi_2(\xi_{12}, \xi_{22}, u_1, u_2, \dot{u}_2) = 0$$

qui est clairement uniformément observable selon la Définition 10 (et aussi uniformément infinitésimalement observable d'après la Definition 13).

On peut remarquer que la même démarche peut être suivie dans le cas de fonctionnement avec entrées variables conduisant toujours à une structure (4.8) où cette fois

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi_{12}, \xi_{22}, u_1, u_2, \dot{u}_1) &= \frac{a_1(\xi_{12} + \xi_{21})}{(a_1u_1 - \xi_{21}L + a_1u_2)}\dot{u}_1 \\ \varphi_2(\xi_{12}, \xi_{22}, u_1, u_2, \dot{u}_2) &= \frac{a_1(\xi_{12} + \xi_{21})}{L(\xi_{12} + \xi_{21}) - (a_1u_1 - \xi_{21}L + a_1u_2)}\dot{u}_2 \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on peut construire un observateur à grand gain pour (4.8), par exemple à partir de deux observateurs interconnectés de la forme (3.15) pour chaque sous-système ξ^i de gains respectifs $S_i^{-1}C_i^T$ avec

$$S_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & -\frac{1}{\lambda^2} \\ -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} \end{bmatrix}; \quad i = \{1, 2\}, \lambda > 0$$

On peut finalement récupérer les états du système (4.8) par inversion de Φ , ou encore exprimer l'observateur dans les coordonnées originales selon la Proposition 2 :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\hat{x}}^{-1} \begin{bmatrix} S_1^{-1}C_1^T & 0 \\ 0 & S_2^{-1}C_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(\hat{x}) - y_1 \\ h_2(\hat{x}) - y_2 \end{bmatrix}$$

Remarque 4 On peut obtenir le même type de structure que (4.8) dans le cas d'entrées H_{in} et H_{out} non constantes, en prenant en compte leurs variations dans le changement de coordonnées.

Pour finir, on peut illustrer les résultats pour la détection d'une fuite en simulation. Pour cela, on représente la canalisation par un modèle discret obtenu par la méthode des différences finies avec $n = 9$ sections, et avec H_{in} et H_{out} comme ses conditions aux limites. Les paramètres de la canalisation correspondent au banc d'essais du CINVESTAV, et sont donnés dans la Table 5.1 du Chapitre 5.

Exemple 6 Une fuite est simulée à $\Delta z_{f_1} = 28.5$ (m) avec un coefficient donné par $\sigma_{f_1} = 1 \times 10^{-3}$ (m²). Les entrées du système sont fixées à $u_1 = 6.4435$ (m) et $u_2 = 3.6589$ (m). L'observateur a été réglé avec $\lambda = 10$.

La bonne estimation de la position par l'observateur proposé est montrée sur la Fig.4.3. Pour compléter la vérification de la performance de cet observateur, des résultats expérimentaux seront présentés dans le chapitre suivant.

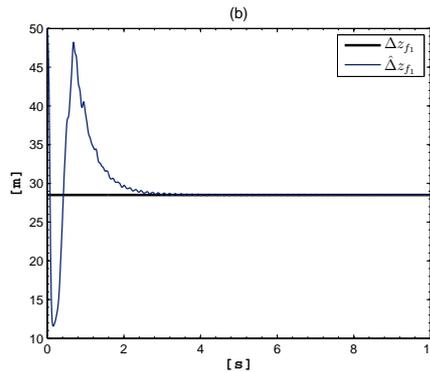


FIG. 4.3 – Position estimée par l'observateur 3.15 à grand gain de la section 4.3.1.2

4.3.2 Estimation de la position et du coefficient de fuite

A présent, l'objectif d'intérêt est l'estimation simultanée du coefficient d'une fuite et sa position. Pour cela, le système (4.2) est étendu avec les états additionnels suivants :

$$\dot{\Delta z}_{f_1} = 0; \dot{\sigma}_{f_1} = 0 \quad (4.9)$$

C'est-à-dire qu'on a un système (3.1) avec un vecteur d'états étendu

$$x(t) = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T = [Q_1 \ H_2 \ Q_2 \ \Delta z_{f_1} \ \sigma_{f_1}]^T \quad (4.10)$$

un vecteur d'entrées $u(t) = [H_{in}, H_{out}]^T$ et un vecteur de sorties $y(t) = [h_1(x), h_2(x)]^T = [Q_1, Q_2]^T$.

Le schéma pour l'estimation est montré dans la Figure 4.4. On peut faire des

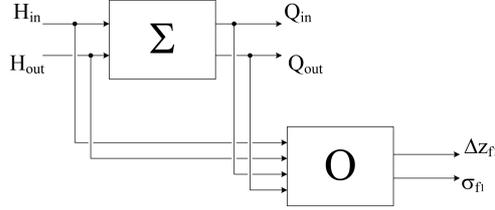


FIG. 4.4 – Schéma pour l'estimation de la position et le coefficient d'une fuite.

calculs et une analyse comparables au cas précédent pour vérifier que le système peut être mis sous la forme canonique (3.5). Par conséquent, on peut synthétiser un observateur à grand gain constant.

Pour cela, on peut de nouveau procéder par une approche interconnectée en définissant le changement de coordonnées suivant :

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi^1 &= [\xi_{11}, \xi_{12}]^T = [h_1, L_{f_1+g_1u_1}h_1]^T \\ \xi^2 &= [\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}]^T = [h_2, L_{f_2+g_2u_2}h_2, L_{f_2+g_2u_2}^2h_2]^T \end{aligned}$$

Cette approche a aussi été testée en simulation. Pour ceci, l'observateur a été réglé avec $\lambda = 10$. La Fig. (4.5) montre les résultats correspondant à l'exemple 6, où on vérifie l'efficacité de l'observateur, tant pour l'estimation de la position que celle du coefficient de la fuite.

4.3.3 Estimation de la position, du coefficient de fuite et d'un coefficient de friction unique

Jusqu'à présent, le paramètre de friction a été considéré comme parfaitement connu dans les approches de détection de fuite proposées, ce qui n'est pas toujours très réaliste dans certains cas, puisque la friction est fonction du nombre de Reynolds Re qui dépend de la vitesse du fluide [10]. Pour cette raison, dans les algorithmes de détection de fuites, il faudrait considérer un calcul plus précis de la friction pour l'obtention de résultats plus exacts. Une autre solution possible : l'estimation de la friction.

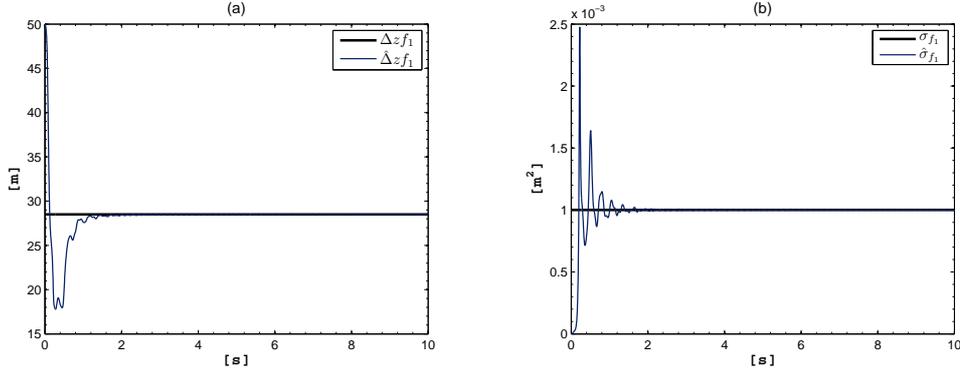


FIG. 4.5 – Position estimée par l’observateur de la section 4.3.2, (b) Coefficient de la fuite estimé par l’observateur de la section 4.3.2

Considérons donc à présent, le problème d’estimation du coefficient de friction parallèlement à l’estimation du coefficient et la position d’une fuite. Dans ce cas, les états suivants sont ajoutés au système (4.2) :

$$\dot{\Delta z}_{f_1} = 0; \quad \dot{\sigma}_{f_1} = 0; \quad \dot{f} = 0 \quad (4.12)$$

Alors, le système (4.2), avec les états additionnels, devient un modèle étendu avec un vecteur d’états, $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = [Q_1, H_2, Q_2, \Delta z_{f_1}, \sigma_{f_1}, f]^T$, un vecteur d’entrées $u = [u_1, u_2] = [H_{in}, H_{out}]$ et un vecteur de sorties, $y = [y_1, y_2] = [Q_1, Q_2]$.

L’estimation se réalise comme il est indiqué dans la Figure (4.6) Considérons la

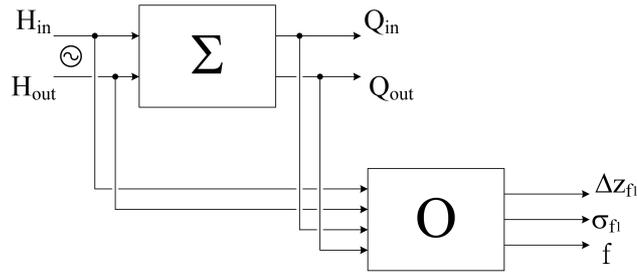


FIG. 4.6 – Schéma pour l’estimation de la friction, de la position et du coefficient d’une fuite.

construction d’un changement de coordonnées par la dérivation continue des sorties du système (4.11), en supposant que les entrées sont constantes comme précédemment.

$$\Phi(x) : x \longrightarrow \xi = \left(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(k)}, y_2, \dot{y}_2, \dots, y_2^{(k)} \right) \quad (4.13)$$

On remarque cette fois qu’il n’y a pas de solution pour l’inversion de l’application

(4.13). Ceci signifie qu'il n'existe pas la possibilité de récupérer le vecteur d'états x à partir de la connaissance du vecteur ξ , et par conséquent, la synthèse d'un observateur à grand gain constant, ne permet plus de résoudre ce problème.

On peut néanmoins remarquer que ceci provient de l'hypothèse d'entrées constantes et pour cette raison, il faut prendre en compte la synthèse d'un observateur sur la base de l'utilisation d'entrées persistantes.

Considérons alors le système (4.2) avec les états additionnels (4.12) et le changement de coordonnées suivant :

$$\Phi(x) : x \longrightarrow \xi = [x_1, x_6, \frac{1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_5\sqrt{x_2}}{x_4^2}, x_3] \quad (4.14)$$

qui est bien inversible dans les conditions de fonctionnement réalistes (où $H_2 \neq 0$) et en présence d'une fuite Δz_{f_1} .

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -a_3 y_1 |y_1| \xi_2 + a_1 u_1 \xi_3 - a_1 \xi_4 & (4.15) \\ \dot{\xi}_2 &= \dot{\xi}_3 = 0 \\ \dot{\xi}_4 &= -a_2 \xi_5 + a_2 (\xi_3^2 y_1 - \xi_3^2 y_2 - \xi_5) \\ \dot{\xi}_5 &= a_2 \frac{\xi_5 \xi_3}{2\xi_4} \left(\xi_3 y_1 - \xi_3 y_2 - \frac{\xi_5}{\xi_3} \right) \\ \dot{\xi}_6 &= -a_3 y_2 |y_2| \xi_2 + \frac{a_1}{L - \frac{1}{\xi_3}} \left(\frac{\xi_4}{\xi_3} - u_2 \right) \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Le système (4.15) se trouve sous la structure (3.30). Pour les systèmes sous cette structure, il est possible de construire des observateurs par les Théorèmes 7-8.

Nous illustrons cette approche dans deux nouveaux exemples ci-après (Exemples 7)-(8) pour lesquels la canalisation considérée est toujours représentée par un modèle discret obtenu par la méthode des différences finies avec $n = 9$ sections et H_{in} et H_{out} comme ses conditions aux limites. Les paramètres de la canalisation correspondent cette fois à la canalisation de l'UNAM, et sont donnés dans la Table 5.1 du Chapitre 5.

Exemple 7 Une fuite est simulée à $\Delta z_{f_1} = 76$ (m) avec un coefficient $\sigma_{f_1} = 0.005$ (m^2) dans la canalisation ayant un coefficient de friction unique $f = 0.008$. L'objectif est d'estimer ces trois paramètres. Pour accomplir cela, on considère un observateur construit à partir du Théorème 8 et le système (4.15), dont les paramètres de réglage sont fixés $\lambda = 1$, $\gamma = 1$ et $S(0) = I_d$. Les entrées utilisées pour l'estimation sont : $u_1 = 7 + \sin(t)$ (m) et $u_2 = 1$ (m). Les conditions initiales de l'observateur sont

fixées : $\hat{\xi}_1 = 0.03745$, $\hat{\xi}_2 = 0.003$, $\hat{\xi}_3 = 0.02857$, $\hat{\xi}_4 = 0.1428$, $\hat{\xi}_5 = 0$, $\hat{\xi}_6 = 0.0374$. La Fig.4.7 montre les erreurs en pourcentage de l'estimation des paramètres estimés. On note dans cette figure la bonne convergence des paramètres estimés vers les valeurs réelles.

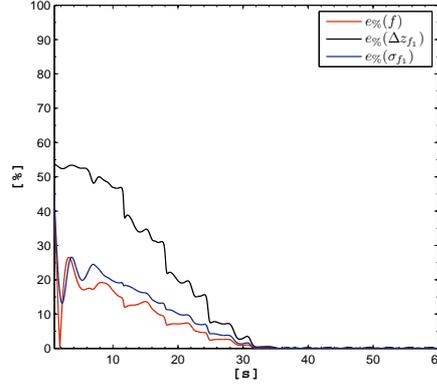


FIG. 4.7 – Erreurs en pourcentage Exemple 7

Enfin, on présente des résultats d'estimation lorsque les mesures Q_{in} et Q_{out} sont périodiques et bruitées (comme illustré dans la Fig. 4.8). Dans ce cas, on a utilisé l'observateur (3.34) à grand gain adaptatif de façon à améliorer les performances par rapport au bruit.

Le calcul du gain λ a été réalisé par l'intermédiaire de l'équation suivante :

$$\dot{\lambda} = (1 - S(\mathcal{I}_n))(\lambda_{min} - \lambda) + (\lambda_{max} - \lambda)S(\mathcal{I}_n); \quad (4.16)$$

avec

$$S(\mathcal{I}_n) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(\mathcal{I}_n - m)}}$$

et

$$\mathcal{I}_n = \int_{t-T}^t \|y(s) - \bar{y}_{t-T}(s)\|^2 ds = \|y - \bar{y}_{t-T}\|_{L^2(t-T,t)}$$

Pour la simulation, l'observateur a été réglé avec $T = 1$, $m = 1 \times 10^{-6}$, $\beta = 2 \times 10^6$, $\lambda_{max} = 2$ et $\lambda_{min} = 0.5$. Dans la Fig. 4.9, on peut voir l'évolution de λ , ainsi que l'estimation de f .

Par ailleurs, dans la Fig. 4.10 on visualise les estimations relativement satisfaisants de la position et de son coefficient.

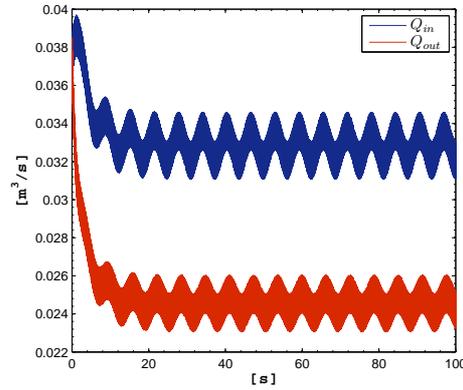
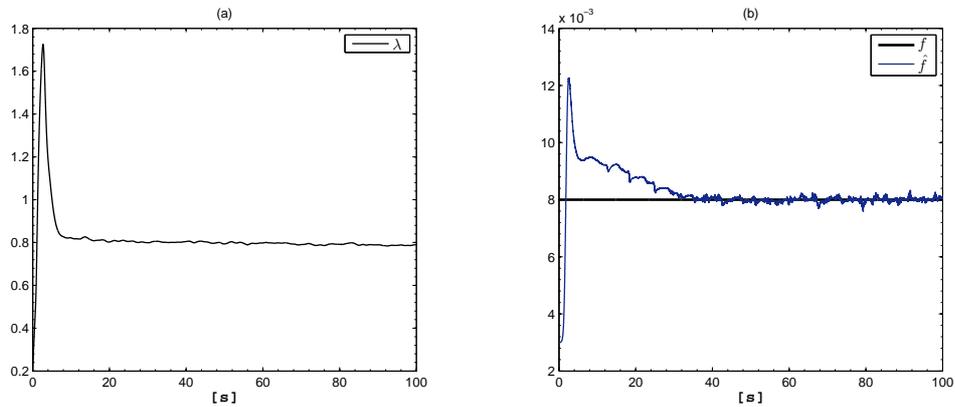


FIG. 4.8 – Exemple 7 : Entrées bruitées

FIG. 4.9 – Exemple 7 : (a) Evolution de λ (b) Estimation de la friction

4.3.4 Estimation de la position, du coefficient de fuite et de deux coefficients de friction

Afin d'affiner ce modèle de friction, considérons à présent le cas dans lequel on a deux frictions dans la canalisation lorsqu'il y a présence de fuite. On a une friction avant la position de la fuite, et une autre après. Pour l'estimation de ce cas, les états suivants doivent être ajoutés au système (4.2) :

$$\dot{\Delta z}_{f_1} = 0; \quad \dot{\sigma}_{f_1} = 0; \quad \dot{f}_1 = 0; \quad \dot{f}_2 = 0 \quad (4.17)$$

Le modèle étendu obtenu est donc constitué d'un vecteur d'états donné par $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7] = [Q_1, H_2, Q_2, \Delta z_{f_1}, \sigma_{f_1}, f_1, f_2]^T$, un vecteur d'entrées $u = [u_1, u_2] = [H_{in}, H_{out}]$ et un vecteur de sorties, $y = [y_1, y_2] = [Q_1, Q_2]$. L'estimation est menée comme on peut le voir dans la Figure 4.11. Par l'intermédiaire du

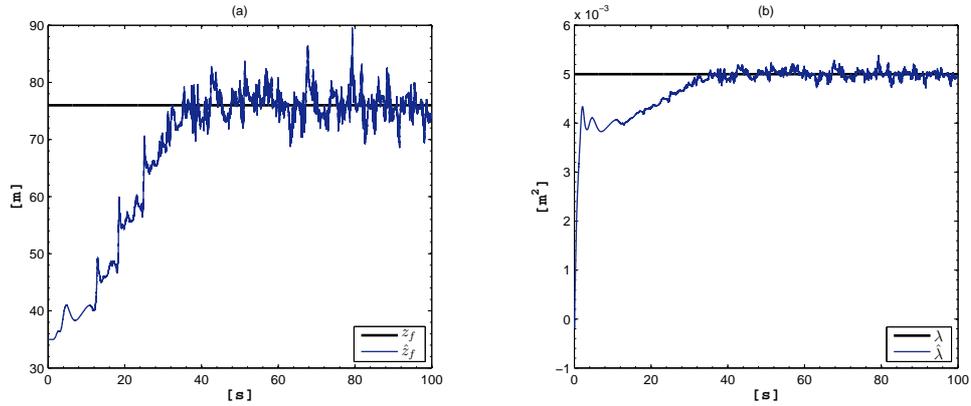


FIG. 4.10 – Exemple 7 : (a) Estimation de la position de la fuite (b) Estimation du coefficient de la fuite

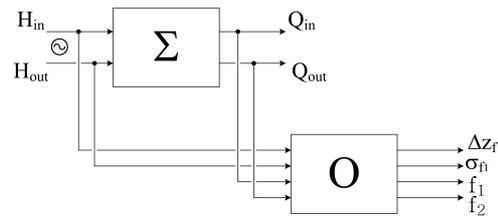


FIG. 4.11 – Schéma pour l'estimation de deux frictions, de la position et du coefficient d'une fuite.

changement de coordonnées ci-dessous :

$$\Phi(x) : x \longrightarrow \xi = \left[x_1, x_6, \frac{1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_5 \sqrt{x_2}}{x_4^2}, x_3, x_7 \right] \quad (4.18)$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -a_3 y_1 |y_1| \xi_2 + a_1 u_1 \xi_3 - a_1 \xi_4 \\ \dot{\xi}_2 &= \dot{\xi}_3 = 0 \\ \dot{\xi}_4 &= -a_2 \xi_5 + a_2 (\xi_3^2 y_1 - \xi_3^2 y_2 - \xi_5) \\ \dot{\xi}_5 &= a_2 \frac{\xi_5 \xi_3}{2 \xi_4} \left(\xi_3 y_1 - \xi_3 y_2 - \frac{\xi_5}{\xi_3} \right) \\ \dot{\xi}_6 &= -a_3 y_2 |y_2| \xi_7 + \frac{a_1}{L - \frac{1}{\xi_3}} \left(\frac{\xi_4}{\xi_3} - u_2 \right) \\ \dot{\xi}_7 &= 0 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le système (4.19) possède de nouveau la structure (3.30), pour laquelle, il est possible de construire un observateur par les Théorèmes 7-8.

Cette approche est illustrée par l'exemple 8 ci-après sur la canalisation de l'UNAM :

Exemple 8 Une fuite est simulée à $\Delta z_{f_1} = 66$ (m) avec un coefficient $\sigma_{f_1} = 0.005$ (m^2). Deux coefficients de friction sont considérés comme conséquence de la fuite, $f_1 = 0.005$ et $f_2 = 0.009$. Pour l'estimation de ces quatre paramètres, on considère un observateur construit à partir du Théorème 8 et le système (4.19).

Les paramètres de réglage de l'observateur sont fixés $\lambda = 1$, $\gamma = 1$ et $S(0) = I_d$.

Les entrées utilisées pour l'estimation sont : $u_1 = 7 + \sin(t)$ (m) et $u_2 = 1$ (m).

Les conditions initiales de l'observateur sont fixées : $\hat{\xi}_1 = 0.03745$, $\hat{\xi}_2 = 0.001$, $\hat{\xi}_3 = 0.02857$, $\hat{\xi}_4 = 0.1428$, $\hat{\xi}_5 = 0$, $\hat{\xi}_6 = 0.0374$ et $\hat{\xi}_7 = 0.001$. La Fig.4.12 montre l'estimation du coefficient de la fuite, tandis que la Fig.4.13 montre l'estimation de la position et des deux coefficients de friction.

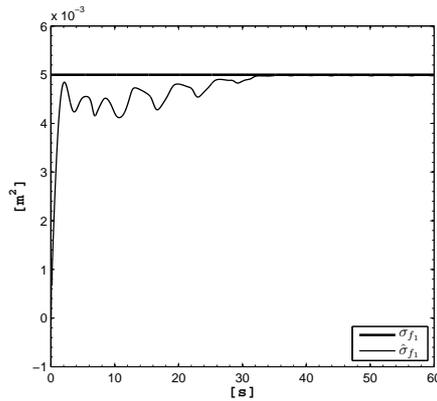


FIG. 4.12 – Estimation du coefficient de la fuite (Exemple 8)

4.4 Estimation de deux fuites simultanées

Comme indiqué en introduction, un problème plus délicat est celui de fuites simultanées.

Considérons donc ici la présence de deux fuites dans une canalisation comme illustré par la Fig. 4.14. À cause des fuites, la canalisation est divisée en trois sections. C'est pourquoi, un modèle représentant les trois sections est nécessaire pour la tâche

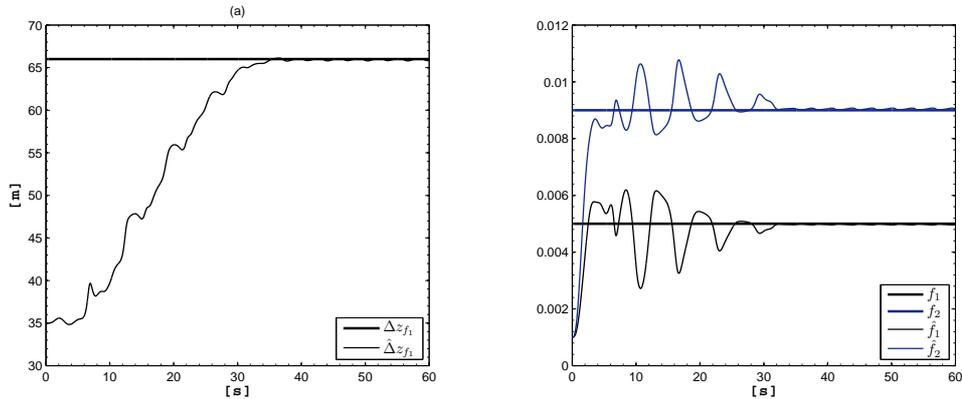


FIG. 4.13 – (a) Estimation de la position (Exemple 8), (b) Estimation des coefficients de friction (Exemple 8)

de détection des fuites. La détection de plusieurs fuites n'est pas réalisable si les

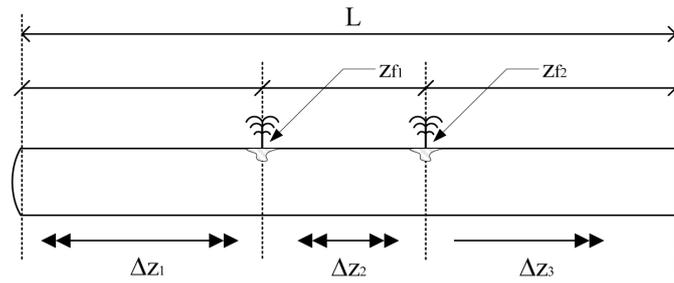


FIG. 4.14 – Deux fuites

entrées de la canalisation sont constantes. Ceci a été déjà vérifié, discuté et présenté dans divers travaux (e.g. [55]-[56]). Ici on peut le revérifier rapidement par certaines considérations physiques, et moyennant un modèle discret des équations du coup de bélier avec des états additionnels représentant les paramètres des fuites.

Prenons le système (5.3) obtenu par la méthode des différences finies avec $n = 3$ sections. Avec ce modèle on a la possibilité de représenter deux fuites. Considérons que les entrées du système sont les conditions aux limites, $u = [H_{in}, H_{out}]$, et les sorties sont les débits aux extrêmes $y = [Q_{in}, Q_{out}]$.

Finalement, ajoutons les états additionnels $x_6 = \Delta z_{f_1}$, $x_7 = \Delta z_{f_2}$ comme les deux premières sections de la canalisation et $x_8 = \sigma_{f_1}$, $x_9 = \sigma_{f_2}$, comme les coefficients des fuites. L'addition de ces quatre états donne le vecteur étendu suivant :

$$x = [Q_1, H_2, Q_2, H_3, Q_3, \Delta z_{f_1}, \Delta z_{f_2}, \sigma_{f_1}, \sigma_{f_2}] \quad (4.20)$$

et le modèle étendu suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\mu x_1^2 + (a_1/x_6)(u_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= (a_2/x_6)(x_1 - x_3 - x_8\sqrt{x_2}) \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_3^2 + (a_1/x_7)(x_2 - x_4) \\ \dot{x}_4 &= (a_2/x_7)(x_3 - x_5 - x_9\sqrt{x_4}) \\ \dot{x}_5 &= -\mu x_5^2 + (a_1/(L - x_6 - x_7))(x_4 - u_2) \\ \dot{x}_6 &= 0 \\ \dot{x}_7 &= 0 \\ \dot{x}_8 &= 0 \\ \dot{x}_9 &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

On voit que la troisième section de la canalisation est donnée par $L - x_6 - x_7$. Par ailleurs, l'état x_6 représente la position de la première fuite z_{f_1} , tandis que la position de la deuxième fuite est donnée par la somme des deux premières sections $z_{f_2} = x_6 + x_7$.

Si la canalisation se trouve en état stationnaire et les entrées sont constantes, alors toutes les pressions du système sont aussi constantes. A partir de ce fait, les équations de pression du système étendu deviennent $\dot{x}_2 = 0$ et $\dot{x}_4 = 0$. En conséquence, l'impossibilité d'accomplir la condition du rang pour le système étendu (4.21) devient évidente.

Un analyse en simulation de l'effet d'entrées variables sur la possibilité de distinguer plusieurs fuites simultanées est présentée dans [5]. De ce fait, le modèle (4.21) peut être utilisé pour l'estimation de deux fuites sous conditions d'entrées variables et selon la configuration schématisée dans la Figure 4.15.

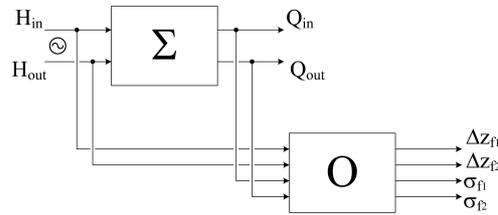


FIG. 4.15 – Schéma pour l'estimation des positions et des coefficients de deux fuites

4.4.1 Filtre de Kalman étendu

En première approche, le filtre de Kalman étendu peut être utilisé pour détecter et localiser deux fuites simultanées, pourvu que des entrées persistantes soient utilisées. Pour la conception du filtre, on peut utiliser le modèle (4.21). Un autre choix est l'utilisation d'un modèle avec des entrées *hybrides*, c'est-à-dire, un débit et une pression. D'après cette idée, prenons le modèle qui utilise comme entrées, les conditions aux limites $u_1 = H_{in}$ et $u_2 = Q_{out}$.

Considérons :

- ★ que les trois sections du modèle sont Δz_{f_1} , Δz_{f_2} et $\Delta z_{f_3} = L - \Delta z_{f_1} - \Delta z_{f_2}$,
- ★ que les positions des fuites sont données par $z_{f_1} = \Delta z_{f_1}$, $z_{f_2} = \Delta z_{f_1} + \Delta z_{f_2}$,
- ★ que les paramètres $\dot{\Delta z}_{f_1} = 0$, $\dot{\Delta z}_{f_2} = 0$, $\dot{\sigma}_{f_1} = 0$, $\dot{\sigma}_{f_2} = 0$ sont des états supplémentaires du système.

Sous ces considérations et avec le vecteur ci-dessous :

$$x = [Q_1, H_2, Q_2, H_3, Q_3, H_4, \Delta z_{f_1}, \Delta z_{f_2}, \sigma_{f_1}, \sigma_{f_2}] \quad (4.22)$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\mu x_1^2 + (a_1/x_6)(u_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= (a_2/x_6)(x_1 - x_3 - x_8\sqrt{x_2}) \\ \dot{x}_3 &= -\mu x_3^2 + (a_1/x_7)(x_2 - x_4) \\ \dot{x}_4 &= (a_2/x_7)(x_3 - x_5 - x_9\sqrt{x_4}) \\ \dot{x}_5 &= -\mu x_5^2 + (a_1/(L - x_6 - x_7))(x_4 - x_6) \\ \dot{x}_6 &= (a_2/(L - x_6 - x_7))(x_5 - u_2) \\ \dot{x}_7 &= 0 \\ \dot{x}_8 &= 0 \\ \dot{x}_9 &= 0 \\ \dot{x}_{10} &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les sorties du système sont $y = [y_1, y_2] = [x_1, x_6]$. La configuration pour l'estimation est présentée dans la Figure 4.16. L'obtention du filtre se fait avec les équations

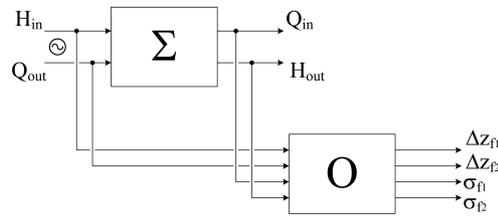


FIG. 4.16 – Schéma pour l'estimation des positions et des coefficients de deux fuites (3.19)-(3.20).

On présente alors les résultats de simulation de l'estimation de deux fuites en utilisant le filtre de Kalman étendu avec la loi d'adaptation (3.19). Tout d'abord dans les exemples (9)-(10), le filtre est construit à partir du modèle (4.21). Comme précédemment, un modèle obtenu à partir des equations (2.10)-(2.11) avec 9 sections est pris comme la canalisation "réelle" avec les paramètres correspondant à la canalisation de l'UNAM.

Dans un deuxième temps, pour l'Exemple 12 le filtre de Kalman étendu est conçu à partir du modèle (4.23). Un modèle obtenu à partir des equations (2.14)-(2.15) avec 9 sections est alors utilisé comme le système "réel" avec les paramètres correspondant à la canalisation de l'UNAM.

Exemple 9 On simule deux fuites, $z_{f_1} = \Delta z_{f_1} = 28.88$ (m) et $z_{f_2} = \Delta z_{f_1} + \Delta z_{f_2} = 87.88$ (m) avec les coefficients respectifs $\sigma_{f_1} = 0.01$ (m²) et $\sigma_{f_2} = 0.01$ (m²). On considère qu'il y a un coefficient de friction unique $f = 0.005$. Les entrées utilisées pour l'estimation sont $u_1 = 7 + \sin(0.5t)$ m et $u_2 = 1 + \sin(0.5t)$ m.

Le filtre est réglé avec $\lambda = 0.01$, $Q = 0.001I_d$, $R = I_d$, $S(0) = I_d$.

La Fig.4.17 montre les résultats concluants de l'estimation. On peut remarquer alors, que l'estimation est bien abouti avec des entrées du type sinusoïdal. Ensuite,

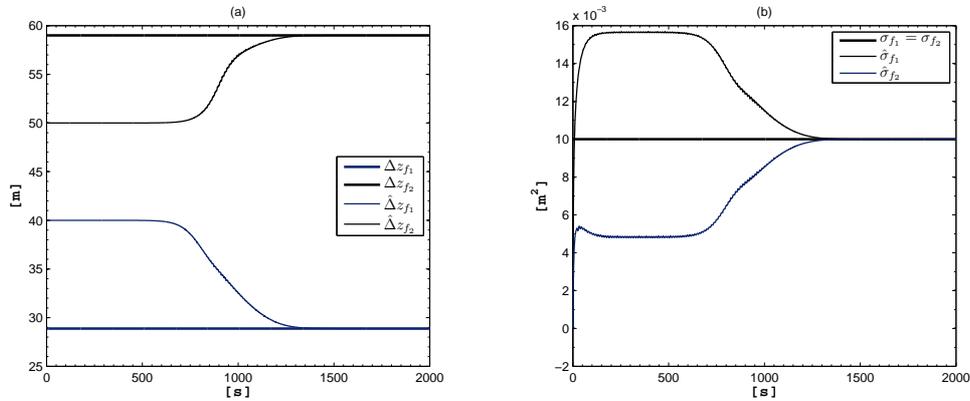


FIG. 4.17 – (a) Estimation des positions des fuites (Exemple 9), (b) Estimation des coefficients des fuites Exemple (9)

on propose un exemple qui vérifie la performance du filtre de Kalman avec un autre type d'entrées.

Exemple 10 On simule deux fuites, $z_{f_1} = \Delta z_{f_1} = 38.88$ (m) et $z_{f_2} = \Delta z_{f_1} + \Delta z_{f_2} = 87.88$ (m) avec les coefficients respectifs $\sigma_{f_1} = 0.01$ (m²) et $\sigma_{f_2} = 0.02$ (m²). On considère qu'il y a un coefficient de friction unique $f = 0.005$. Les entrées

utilisées pour l'estimation sont tracées dans la Fig.4.18(a). Le filtre est réglé avec $\lambda = 0.1$, $Q = 0.001Id$, $R = I$, $S(0) = I$.

La Fig.4.19 montre les résultats de l'estimation tandis que la Fig.4.18(b) expose les erreurs en pourcentage entre les sorties mesurées et estimées. On constate alors, que l'estimation est aussi bien réalisée en utilisant des entrées du type triangulaire. L'exemple suivant est proposé afin de montrer la performance du filtre en présence

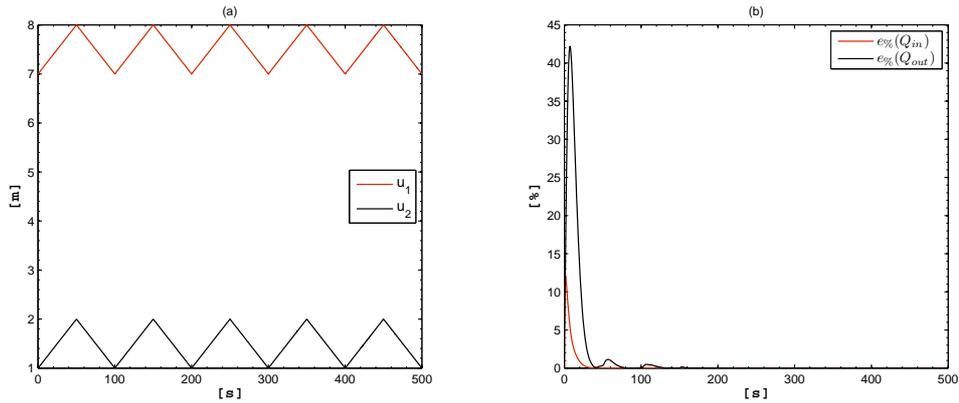


FIG. 4.18 – (a) Entrées 10, (b) Erreur en pourcentage de l'estimation (Exemple 10)

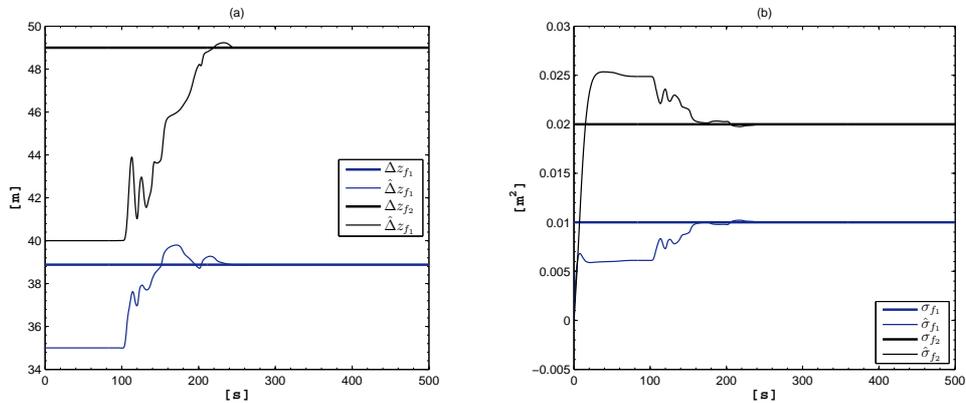


FIG. 4.19 – (a) Estimation des positions des fuites Exemple 10, (b) Estimation des coefficients des fuites Exemple 10

de bruit sur les entrées et les sorties mesurées.

Exemple 11 On simule deux fuites, $z_{f_1} = \Delta z_{f_1} = 38.88$ (m) et $z_{f_2} = \Delta z_{f_1} + \Delta z_{f_2} = 87.88$ (m) avec les coefficients respectifs $\sigma_{f_1} = 0.01$ (m^2) et $\sigma_{f_2} = 0.02$ (m^2).

On considère qu'il y a un coefficient de friction unique $f = 0.005$. Les entrées utilisées pour l'estimation sont tracées dans la Fig. 4.20, ainsi que les sorties mesurées.

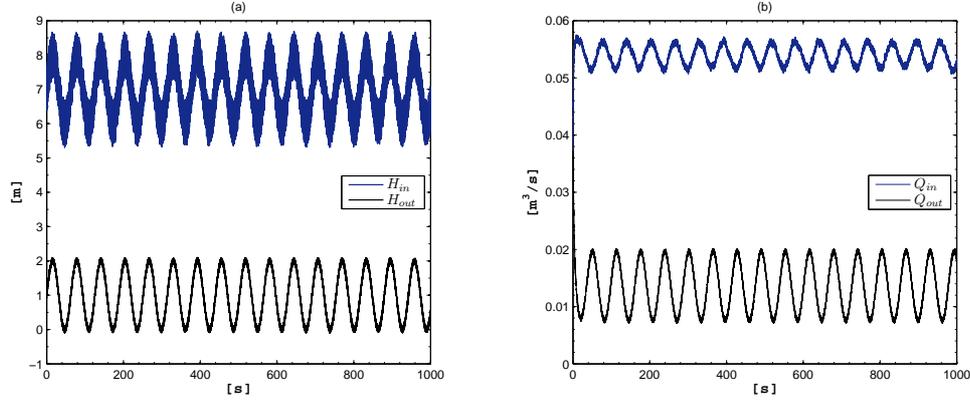


FIG. 4.20 – (a) Entrées (Exemple 11), (b) Sorties (Exemple 11)

Les erreurs relatives d'estimation par rapport à la position et coefficient de fuite sont montrées dans la Fig. 4.21. On voit alors que le bruit affecte visiblement la performance d'estimation, et par conséquent leurs effets doivent être considérés dans les cas réalistes, et dans le développement d'observateurs à l'avenir. L'exemple suivant

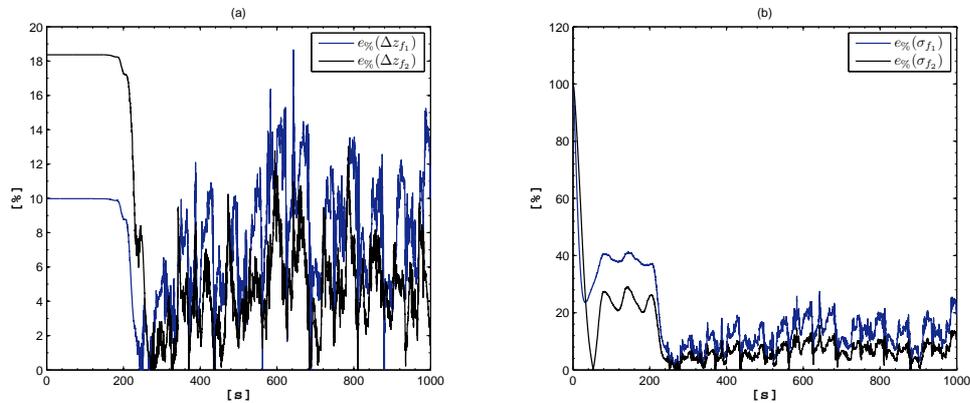


FIG. 4.21 – (a) Erreur d'estimation des positions des fuites (Exemple 11), (b) Erreur d'estimation des coefficients des fuites (Exemple 11)

est proposé en vue de vérifier le fonctionnement du filtre avec des conditions de frontières mixtes, dans ce cas, H_{in} et Q_{out} .

Exemple 12 On simule deux fuites, $z_{f_1} = \Delta z_{f_1} = 48.88$ (m) et $z_{f_2} = \Delta z_{f_1} + \Delta z_{f_2} = 107.88$ (m) avec les coefficients $\sigma_{f_1} = 0.006$ (m^2) et $\sigma_{f_2} = 0.005$ (m^2),

respectivement. On considère qu'il y a un coefficient de friction unique $f = 0.005$. Les entrées utilisées pour l'estimation sont $u_1 = 7.2 + \sin(0.5t)$ (m) et $u_2 = 0.0373 + 0.001 \sin(0.5t)$ (m^3/s). Le filtre est réglé avec $\lambda = 0.01$, $Q = 0.001I_d$, $R = I_d$, $S(0) = I_d$.

La Fig.(4.22) montre les bons résultats d'estimation de l'Exemple 12. De cette manière, on peut constater que le filtre marche avec différents types de conditions de frontières, toujours avec l'excitation.

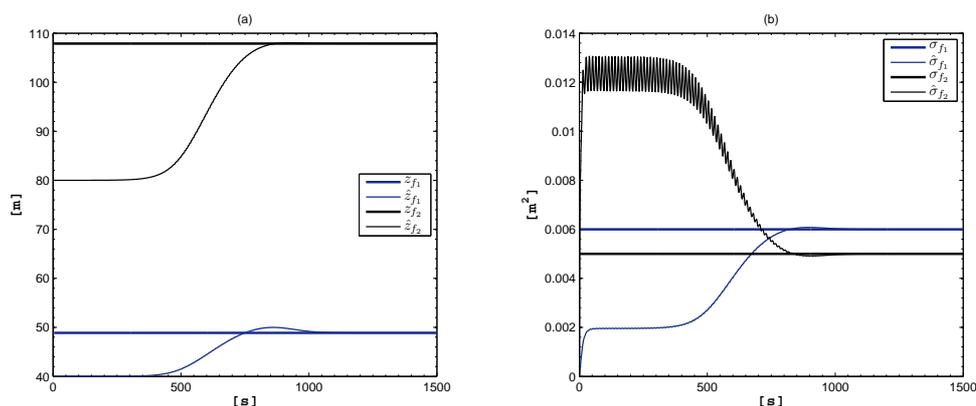


FIG. 4.22 – (a) Estimation des positions des fuites Exemple 12, (b) Estimation des coefficients des fuites Exemple 12

4.4.2 Nouvelle forme d'observateur à grand gain

On a vérifié qu'avec l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu on arrive à détecter deux fuites simultanées. Cependant, si on veut des arguments pour la convergence exponentielle c'est avec le Théorème 8 que l'on peut en avoir. Pour cette raison, il faut transformer le système (4.21) (par exemple) sous la forme (3.33).

Le changement de coordonnées ci-dessous transforme le système en la forme adéquate.

$$\Phi(x) : x \longrightarrow \xi = \left[x_1, \frac{1}{x_6}, \frac{x_2}{x_6}, \frac{x_3}{x_6^2}, \frac{x_8 \sqrt{x_2}}{x_6^2}, \frac{x_2}{x_7 x_6^2}, \frac{x_4}{x_7 x_6^2}, \frac{x_9 \sqrt{x_4}}{x_7 x_6^2}, x_5 \right] \quad (4.24)$$

L'implémentation du système résultant du changement de variables provoque des soucis numériques liés au calcul de la matrice S à cause de la matrice A (mal conditionnée) obtenue. On peut supposer que ces problèmes vont aussi se présenter dans le cas de n fuites. D'ailleurs, si on extrapole cette approche au cas de n fuites, le changement de coordonnées deviendra de plus en plus compliqué avec l'accroissement de n .

Par contre, à partir des résultats obtenus avec le filtre de Kalman étendu pour la détection de deux fuites, on peut supposer qu'il existe la possibilité de détecter plusieurs fuites simultanées si on est déjà arrivé à en estimer deux.

4.5 Détection de fuites multiples simultanées

Dans cette partie, on examine la possibilité de synthèse d'observateur plus simple pour la détection de fuites multiples simultanées. L'idée est d'utiliser un modèle représentant une seule fuite pour estimer la position de la première fuite par rapport à l'amont, et ensuite utiliser cette information pour estimer les positions subséquentes.

Considérons le système suivant obtenu avec les équations (2.10)-(2.11) avec $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu x_1 |x_1| + \frac{a_1}{x_4} (u_1 - x_2) \\ \frac{a_2}{x_4} (x_1 - x_3 - x_5 \sqrt{x_2}) \\ -\mu x_3 |x_3| + \frac{a_1}{L-x_4} (x_2 - u_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$y = [x_1, x_3]^T$$

Le système (4.25) peut être mis sous la forme (3.33) en fixant $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = \frac{1}{x_4}$ et $\xi_3 = \frac{x_2}{x_4}$ dont les dérivés sont :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= a_1 \xi_2 u_1 - a_1 \xi_3 - \mu \xi_1 |\xi_1| \\ \dot{\xi}_2 &= 0 \\ \dot{\xi}_3 &= \frac{\dot{x}_2}{x_4} = \frac{a_2}{x_4^2} x_1 - \frac{a_2}{x_4^2} x_3 - \frac{a_2}{x_4^2} x_5 \sqrt{x_2} = a_2 \xi_2^2 \xi_1 - a_2 \xi_2^2 y_2 - \frac{a_2}{x_4^2} x_5 \sqrt{x_2} \end{aligned}$$

Maintenant, si nous prenons $\xi_4 = \frac{x_5 \sqrt{x_2}}{x_4^2}$, l'équation pour $\dot{\xi}_3$ devient :

$$\dot{\xi}_3 = -a_2 \xi_4 + a_2 \xi_2^2 \xi_1 - a_2 \xi_2^2 y_2$$

et la dérivée de ξ_4 se calcule avec :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_4 &= \frac{x_5 \dot{x}_2}{2x_4^2 \sqrt{x_2}} = \frac{x_5}{2x_4^2 \sqrt{x_2}} \left(\frac{a_2}{x_4} x_1 - \frac{a_2}{x_4} x_3 - \frac{a_2 x_5 \sqrt{x_2}}{x_4} \right) \\ \dot{\xi}_4 &= \frac{\xi_4 \xi_2}{2\xi_3} \left(a_2 \xi_2 \xi_1 - a_2 \xi_2 y_2 - a_2 \frac{\xi_4}{\xi_2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, le système suivante (4.25) est sous la forme (3.33) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 u_1 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu y_1 |y_1| \\ 0 \\ a_2 \xi_2^2 (y_1 - y_2) \\ a_2 \frac{\xi_4 \xi_2}{2\xi_3} \left(\xi_2 y_1 - \xi_2 y_2 - \frac{\xi_4}{\xi_2} \right) \end{bmatrix}$$

Remarquons, que le système ci-dessus ne contient pas l'équation du débit $Q_{out}(x_3)$, en conséquence, la frontière du domaine spatial à l'aval (L) n'est pas prise en compte. Cela veut dire que le système obtenu représente une canalisation avec une longueur indéfinie.

Comme on a déjà fait précédemment, on peut de nouveau utiliser le Théorème 8 pour construire un observateur exponentiel. Dans ce cas, on utilise le système ci-dessus.

On présente ci-après un exemple illustratif pour tester et analyser la performance de cette approche. D'abord, on considère le cas d'une seule fuite et après le cas de deux fuites simultanées.

Exemple 13 *Pour cet exemple, on a considéré une canalisation avec les paramètres du banc d'essais de l'UNAM. On a de plus utilisé un modèle de $n = 3$ sections pour représenter la canalisation. On a simulé une fuite à $z_{f_1} = 56$ (m) tenant comme coefficient, $\sigma_{f_1} = 0.005$. La friction de la canalisation a été fixée à $f_2 = 0.005$. Les entrées ont été fixées $u_1 = 7 + \sin(t)$ (m) et $u_2 = 1$ (m) Les paramètres de réglage de l'observateur sont fixés à $\lambda = 0.679$, $\gamma = 20$ et $S(0) = I_d$.*

La détection de la fuite par cette approche est bien réalisée, néanmoins, l'intérêt de l'observateur proposé n'est pas pour l'estimation dans le cas d'une seule fuite, mais de s'en servir pour le cas des plusieurs fuites simultanées. Pour cette raison, on étend l'Exemple 13 à l'exemple suivant :

Exemple 14 *Les considérations de cet exemple sont les mêmes que pour l'Exemple 13, mais en provoquant une autre fuite simultanément, avec une position $z_{f_2} = 88$ (m) et un coefficient $\sigma_{f_2} = 0.005$. Les paramètres de réglage de l'observateur sont fixés à $\lambda = 0.679$, $\gamma = 20$ et $S(0) = I_d$.*

Les entrées utilisées pour l'estimation ont été : $u_1 = 7 + \sin(\omega t)$ (m) et $u_2 = 1$ (m). Pour les simulations on a utilisé des valeurs différentes de fréquence pour la pression à l'aval, $\omega = 10, \omega_n, 30$ (rad/s). Cela, afin de vérifier que la fréquence nécessaire pour estimer la première de deux fuites simultanées soit supérieure à la fréquence naturelle du système, ω_n .

La fréquence naturelle du système est donnée par [10] :

$$\omega_n = \frac{\pi b}{2L} \tag{4.26}$$

avec b = vitesse d'onde et L = Longueur de la canalisation. Pour la canalisation de l'UNAM, cette fréquence est $\omega_n \approx 14.875$ (rad/s).

La Fig. 4.23 montre l'estimation de la position de la fuite avec différents fréquences (indiquées), ce qui permet de vérifier de cette façon, que la fréquence d'esti-

mation doit être supérieure à la fréquence naturelle du système. Quoique les résultats

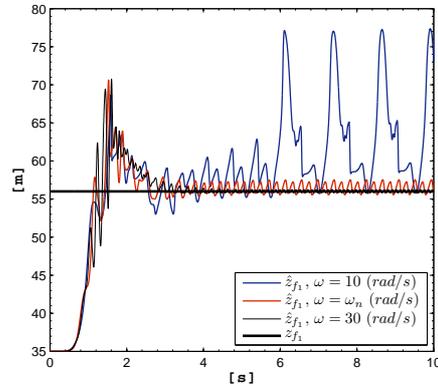


FIG. 4.23 – Estimation d’une première fuite dans le cas de deux fuites simultanées en utilisant différentes fréquences à la pression d’aval

des Exemples 13 et 14 soient valides, ils ne donnent que des premières pistes qui restent à approfondir. La validation a notamment été faite sur un modèle de taille comparable à celui utilisé par l’observateur.

4.6 Conclusions

L’objectif de ce chapitre a été de traiter la conception d’observateurs pour la détection de fuites et l’estimation de paramètres dans les canalisations sous pression.

Les observateurs ont été construits en utilisant les bases théoriques présentées dans le chapitre précédent.

Quelques résultats en simulation ont été proposés pour illustrer les performances des observateurs conçus.

Les explorations entreprises n’ont néanmoins pas été exhaustives et quelques pistes restent à approfondir notamment autour des modèles de friction, ou de l’utilisation d’observateurs ‘simples’ en cascade.

Dans le chapitre suivant, certains résultats expérimentaux seront toutefois présentés pour compléter l’analyse de la performance des observateurs proposés.

Résultats expérimentaux

Sommaire

5.1	Description des bancs d'essais	79
5.2	Validation expérimentale de modèles en dimension finie	82
5.2.1	Expériences en régime oscillatoire	82
5.2.2	Expériences avec fuites dans le système	84
5.3	Validation expérimentale d'observateurs	86
5.3.1	Détection d'une fuite	87
5.3.2	Détection d'une fuite et estimation du coefficient de friction	88
5.4	Conclusion	89

Dans ce chapitre, les approches de modélisation proposées au Chapitre 2, ainsi que les observateurs proposés au Chapitre 4 pour la détection de défauts, sont validés expérimentalement sur la base de deux bancs d'essais (correspondant à ceux déjà utilisés en simulation au chapitre précédent).

Premièrement, on fait la présentation des dits bancs d'essais, de leurs composants, paramètres et configurations.

Ensuite, on montre les résultats de la validation expérimentale des modèles en dimension finie du Chapitre 2. Les expériences de validation sont réalisées avec la canalisation en régime oscillatoire et avec la présence de fuites.

Finalement, on illustre les performances des observateurs du Chapitre 4 en utilisant des données réelles.

5.1 Description des bancs d'essais

Les deux bancs d'essais considérés sont situés au Mexique : l'un se trouve au Centre de Recherche et d'Études Avancées (CINVESTAV) à Guadalajara et le deuxième se trouve à l'Université Nationale Autonome du Mexique (UNAM) à México.

Les figures 5.1 et 5.2 montrent les diagrammes des canalisations du CINVESTAV

et de l'UNAM respectivement. Les valeurs des paramètres physiques correspondant à chaque canalisation sont listées dans la Table 5.1.

La canalisation du CINVESTAV (Fig.5.1) est en circuit fermé. Elle est composée d'un réservoir de 750 L (E-1) qui fournit de l'eau à toute la canalisation en utilisant une pompe centrifuge (E-2) à l'amont. Elle est aussi composée de trois vannes (V1, V2, V3) qui sont utilisées pour émuler des fuites. Les vannes se trouvent à 20 m, 41.5 m et 63 m respectivement du point d'alimentation.

A l'aval de la canalisation, il y a une vanne (V4) qui est utilisée pour générer des transitoires, et commandée par des signaux électroniques.

Lorsqu'une fuite est provoquée, l'eau perdue rentre au réservoir à travers une canalisation secondaire. L'accès de l'eau à travers cette canalisation au réservoir peut se faire en manipulant une vanne (V5).

L'installation est équipée avec des capteurs de pression et de débit à l'amont (P1, F1) et à l'aval (P2, F2). Une description plus détaillée de la canalisation peut se trouver dans [57]. La canalisation de l'UNAM (Fig.5.2) est aussi en circuit fermé et

LISTE DE COMPOSANTS			
Identifiant	Composant	Identifiant	Composant
E-1	Réservoir	V-5	Valve électrique
E-2	Pompe	P-1	Capteur de pression
V-1	Valve électrique	P-2	Capteur de pression
V-2	Valve électrique	F-1	Capteur de débit
V-3	Valve manuelle	F-2	Capteur de débit
V-4	Valve électrique		

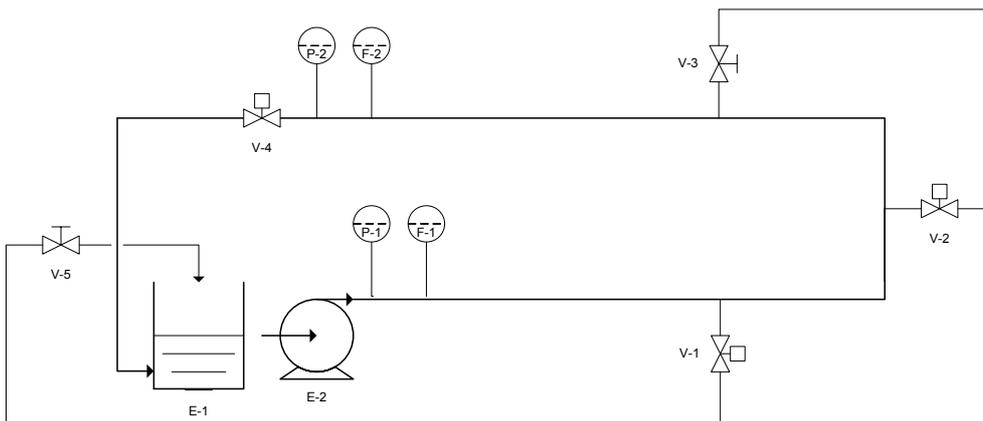


FIG. 5.1 – Diagramme de la canalisation CINVESTAV

elle possède un réservoir de 7.4 m³ (E-1) qui fournit de l'eau à toute la canalisation en utilisant une pompe de vitesse variable (E-2) à l'amont. Il y a quatre vannes (V1, V2, V3, V4) qui sont utilisées pour émuler des fuites. Les vannes se trouvent à 15

m , $49 m$, $60 m$ et $83 m$ respectivement du point d'entrée.

À travers une canalisation secondaire, l'eau perdue à cause des fuites est récupérée et versée dans le réservoir. La vanne V5 est l'accès de la canalisation secondaire au réservoir.

L'installation est instrumentée avec des capteurs de pression et débit à l'amont (P1, F1) et à l'aval (P2, F2). Des détails plus précis sur la canalisation se trouvent dans [48]. Plusieurs essais réalisés en collaboration avec les collègues du CINVES-

LISTE DE COMPOSANTS			
Identifiant	Composant	Identifiant	Composant
E-1	Réservoir	V-5	Valve électrique
E-2	Pompe	P-1	Capteur de pression
V-1	Valve électrique	P-2	Capteur de pression
V-2	Valve électrique	F-1	Capteur de débit
V-3	Valve électrique	F-2	Capteur de débit
V-4	Valve électrique		

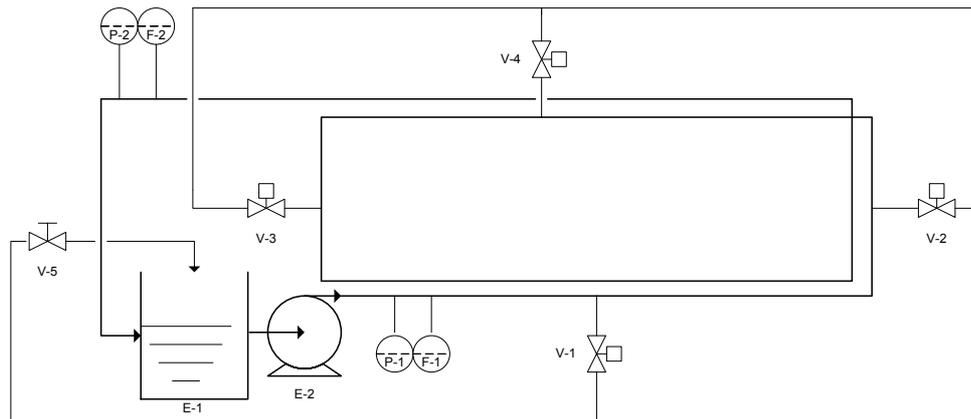


FIG. 5.2 – Diagramme de la canalisation UNAM

TAB. 5.1 – Paramètres des bancs d'essais

Paramètres	CINVESTAV	UNAM
g	$9.81 m/s^2$	$9.8 m/s^2$
L	$85 m$	$132.56 m$
b	$407.7508 m/s$	$1250 m/s$
D	$0.0635 m$	$0.105 m$

TAV et de l'UNAM ont permis de mieux analyser la pertinence des modèles proposés en dimension finie comme des observateurs construits sur cette base.

5.2 Validation expérimentale de modèles en dimension finie

Dans cette partie, nous allons présenter des validations expérimentales des modèles en dimension finie obtenus par les méthodes de différences finies et collocation orthogonale (selon le Chapitre 2).

5.2.1 Expériences en régime oscillatoire

On présente tout d'abord des expériences réalisées dans les bancs d'essais en régime oscillatoire. Les résultats expérimentaux obtenus sont comparés avec les modèles finis suivants :

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_1 &= a_1 \left(N'_{11} H_{in} + N'_{12} H_2 + N'_{13} H_{out} \right) - \mu Q_1 |Q_1| \\
 \dot{Q}_2 &= a_1 \left(N'_{21} H_{in} + N'_{22} H_2 + N'_{23} H_{out} \right) - \mu Q_2 |Q_2| \\
 \dot{Q}_3 &= a_1 \left(N'_{31} H_{in} + N'_{32} H_2 + N'_{33} H_{out} \right) - \mu Q_3 |Q_3| \\
 \dot{H}_2 &= a_2 \left[N'_{21} Q_1 + N'_{22} (Q_2 + Q_{f_1}) + N'_{23} (Q_3 + Q_{f_1}) \right]
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_1 &= a_1 \left(N'_{11} H_{in} + N'_{12} H_2 + N'_{13} H_3 \right) - \mu Q_1 |Q_1| \\
 \dot{Q}_2 &= a_1 \left(N'_{21} H_{in} + N'_{22} H_2 + N'_{23} H_3 \right) - \mu Q_2 |Q_2| \\
 \dot{H}_2 &= a_2 \left[N'_{21} Q_1 + N'_{22} (Q_2 + Q_f) + N'_{23} (Q_{out} + Q_f) \right] \\
 \dot{H}_3 &= a_2 \left[N'_{31} Q_1 + N'_{32} (Q_2 + Q_f) + N'_{33} (Q_{out} + Q_f) \right]
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pour l'obtention du modèle (5.1) on a considéré le même nombre de points de collocation pour les débits et pour les pressions : $n = 3$. Avec cette quantité de points, il est possible de représenter l'occurrence d'une fuite avec une perte de débit Q_{f_1} . Par ailleurs, on a pris $H_{in} - H_{out}$ comme les entrées du système, c'est pour cela que l'obtention du modèle (5.1) est faite en concordance avec les équations (2.36)-(2.37).

Le modèle (5.2) est obtenu en considérant $H_{in} - Q_{out}$ comme les entrées et $n = 3$. Pour cela, l'obtention du modèle est faite en concordance avec les équations (2.40)-(2.41).

Deux résultats d'expérience sont considérés, l'un pour la canalisation de l'UNAM, l'autre pour celle du CINVESTAV.

Expérience 1. Cette expérience a été effectuée sur la canalisation de l'UNAM, où nous avons fait osciller la pression à l'amont. L'oscillation a été réalisée par la variation triangulaire de la puissance de la pompe. Cette variation a produit une

oscillation de la pression à l'amont, de manière persistante et aussi triangulaire. Le coefficient de friction correspondant à cette expérience est : $f = 0.023$ qui a été calculée précédemment à l'expérience en régime stationnaire.

La figure 5.3 montre les débits donnés par le modèle (5.1), ainsi que les débits mesurés par les débitmètres installés sur la canalisation. **Expérience 2.** Cette

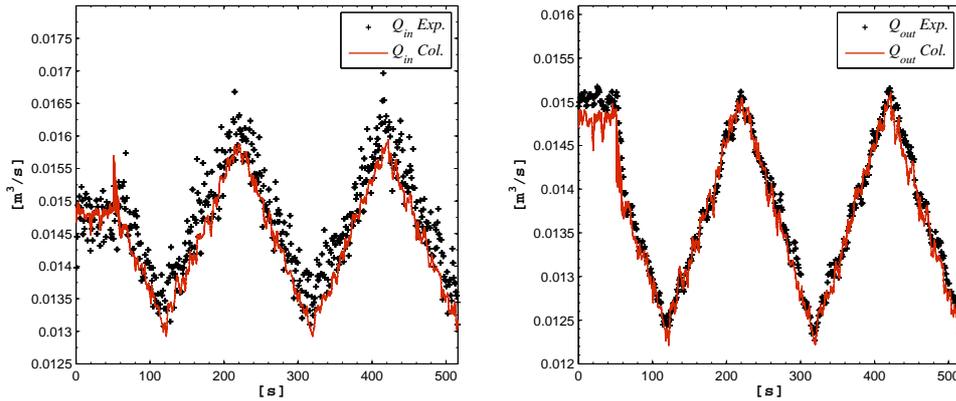


FIG. 5.3 – Expérience 1. Comparaison entre les débits mesurés sur la canalisation de l'UNAM et ceux du modèle (5.1)

expérience a été effectuée sur la canalisation du CINVESTAV en régime oscillatoire. Le régime a été provoqué par la variation sinusoïdale de l'ouverture-fermeture de la vanne à l'aval. Cette variation a produit l'oscillation du débit dans la canalisation et par conséquent l'oscillation de la pression. Le coefficient de friction correspondant à cette expérience est : $f = 0.0225$ calculé en régime stationnaire.

La figure 5.4 montre le débit Q_{in} et la pression H_{out} donnés par le modèle (5.2), ainsi que ceux mesurés.

Dans le deux cas, on peut observer la bonne concordance entre les données réelles et simulées.

A propos de choix de modèles différents entre les deux expériences on peut faire l'analyse suivante :

La Figure 5.5 montre la comparaison, entre les données mesurées et les données simulées cette fois avec le modèle 5.1 pour l'expérience 2. On peut remarquer que le calage est moins satisfaisant. Ceci s'explique par l'incohérence entre les conditions de frontières du modèle et les conditions de frontières physiques, qui sont la pression fournie par la pompe à l'amont H_{in} et le débit Q_{out} au point de la vanne à l'aval.

Il est donc clair qu'il faut adapter le choix du modèle aux conditions physiques d'expérimentation. On a de surcroît pu mettre en évidence une nonlinéarité du type

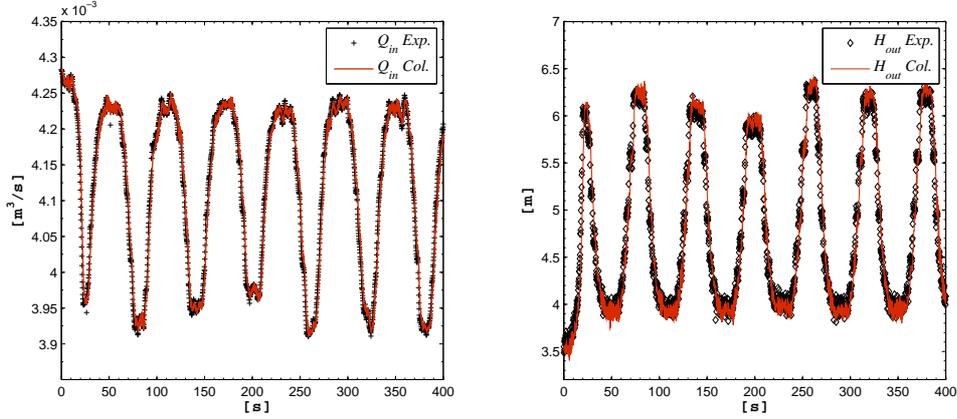


FIG. 5.4 – Expérience 2. Comparaison entre les données mesurées sur la canalisation du CINESTAV et les réponses du modèle (5.2)

hystérésis entre pression d'entrée H_{in} et débit de sortie Q_{out} pour la canalisation du CINESTAV : elle est illustrée dans la Figure 5.6.

En fait cette nonlinéarité est provoquée par l'existence d'hystérésis dans le comportement de la vanne à l'aval, qui est justement utilisée pour produire le régime oscillatoire.

On peut visualiser l'hystérésis dans la Fig. 5.7, où est tracée la relation entre la signal d'ouverture de la vanne et la réponse de ce dispositif. On peut noter que la relation est nonlinéaire, et en conséquence le débit n'est pas parfaitement sinusoïdal si on applique une sinusoïde comme signal d'ouverture.

5.2.2 Expériences avec fuites dans le système

On propose à présent des résultats d'expériences en ayant des fuites dans la canalisation. Les données obtenues sont comparées avec les réponses du modèle suivant :

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_1 &= \frac{a_1}{\Delta z_{f_1}}(H_{in} - H_2) - \mu Q_1 |Q_1| \\
 \dot{H}_2 &= \frac{a_2}{\Delta z_{f_1}}(Q_1 - Q_2 - Q_{f_1}) \\
 \dot{Q}_2 &= \frac{a_1}{\Delta z_{f_2}}(H_2 - H_3) - \mu Q_2 |Q_2| \\
 \dot{H}_3 &= \frac{a_2}{\Delta z_{f_2}}(Q_2 - Q_3 - Q_{f_2}) \\
 \dot{Q}_3 &= \frac{a_1}{\Delta z_{f_3}}(H_3 - H_{out}) - \mu Q_3 |Q_3|
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

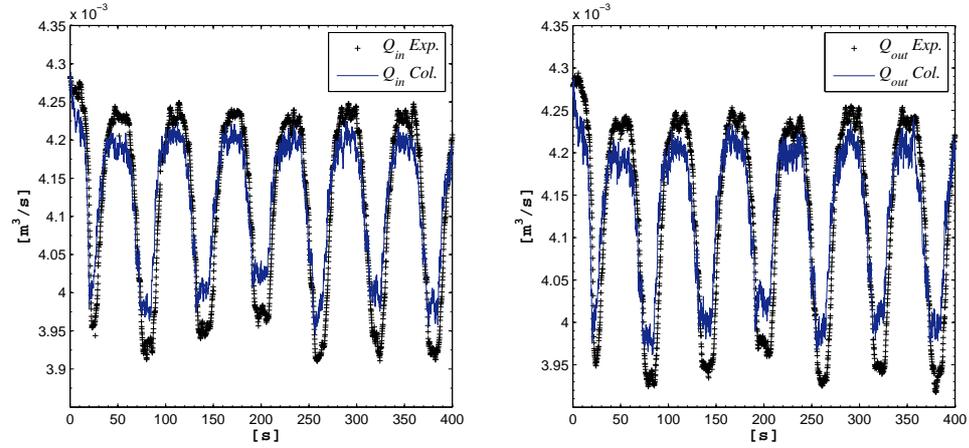


FIG. 5.5 – Expérience 2. Comparaison entre les données mesurées sur la canalisation du CINVESTAV et les données du modèle (5.1)

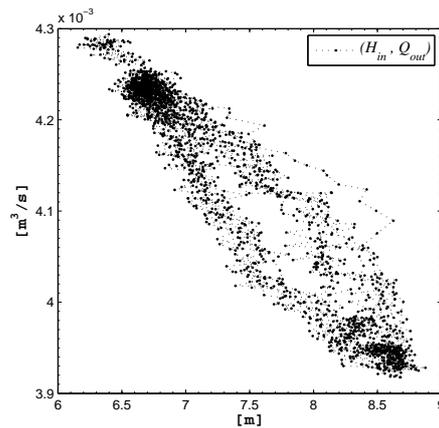


FIG. 5.6 – Expérience 2. Relation pression-débit

Le modèle (5.3) a été obtenu avec les équations (2.10)-(2.11) en prenant en compte H_{in} et H_{out} comme entrées. Le nombre de sections a été choisi $n = 3$ pour pouvoir représenter l'occurrence de deux fuites.

Expérience 3. Deux fuites aux positions $z_{f_1} = 20$ m et $z_{f_2} = 41.5$ m ont été provoquées dans la canalisation du CINVESTAV. Les coefficients des fuites ont été $\sigma_{f_1} = 4.6083 \times 10^{-5}$ et $\sigma_{f_2} = 1.1982 \times 10^{-4}$, respectivement. Il faut préciser que les valeurs des coefficients de fuites ont été estimées par l'intermédiaire d'observateurs avec la connaissance des positions des fuites.

La Figure 5.8 montre une comparaison entre les mesures des débits et ceux donnés par le modèle (5.3), qui valide relativement bien ce modèle.

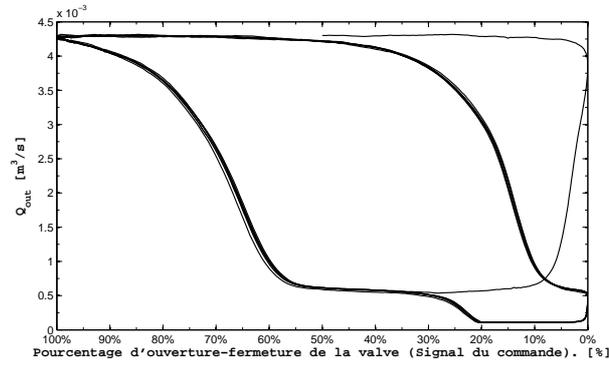


FIG. 5.7 – Relation débit-Ouverture/Fermeture de la vanne pour l canalisation du CINVESTAV

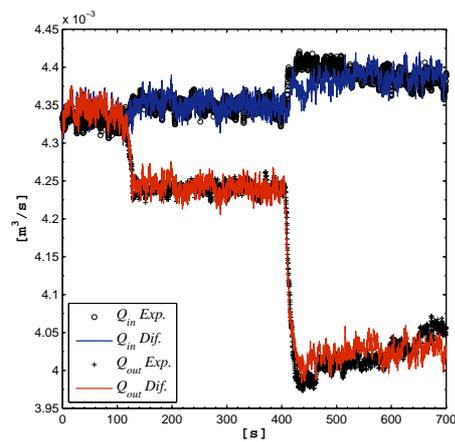


FIG. 5.8 – Expérience 3. Comparaison entre les débits mesurés sur la canalisation du CINVESTAV et ceux du modèle (5.3) en présence de deux fuites

5.3 Validation expérimentale d'observateurs

En ayant validé les approches de modélisation envisagées, on peut maintenant présenter la performance d'observateurs proposés au Chapitre 4, en utilisant des données réelles.

Des résultats d'estimation des paramètres d'une fuite puis d'une fuite et de la friction sont ainsi reportés.

5.3.1 Détection d'une fuite

Expérience 4. Une fuite est provoquée à $z_{f_1} = 20$ m dans la canalisation du CINVESTAV. Le coefficient de friction $f = 0.0226$ est calculé avant l'occurrence de la fuite.

La Fig. 5.9 montre les débits et pressions mesurés dans l'Expérience 4. Dans cette figure, on peut noter l'effet de la fuite à partir du moment $t = 130$ (s). Pour cette raison, les algorithmes de détection sont initialisés à $t = 150$ (s). La Fig.

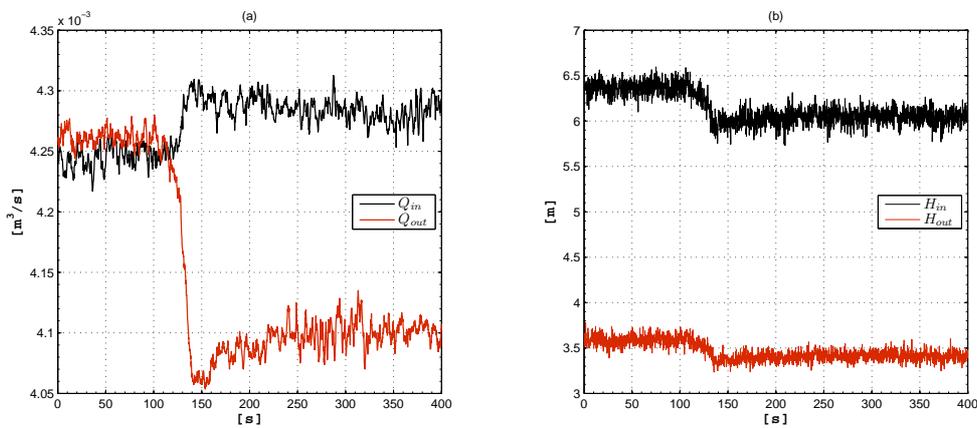


FIG. 5.9 – (a) Débits mesurés (b) Pressions mesurés

5.10(a) illustre la détection de la position de la fuite avec l'équation statique (4.6). En comparant les résultats sans filtrage des mesures à ceux avec filtrage, on peut remarquer le caractère indispensable du filtrage.

Dans la Fig.5.10(b) on peut visualiser la détection de la position de la fuite réalisée avec un observateur à grand gain constant. L'observateur a été conçu dans la Section 4.3.1.2. Les résultats obtenus pour deux réglages différents correspondant à $\lambda = 2$ et $\lambda = 8$ sont présentés. On peut ainsi vérifier la bonne détection réalisée par l'observateur, ainsi que les effets d'un grand gain : une convergence rapide mais bruitée. Il faut néanmoins préciser que l'observateur utilise les mesures bruitées sans l'utilisation des filtres. Par ailleurs, la Fig. 5.11 exhibe les résultats de l'estimation de la position et du coefficient de la fuite avec un autre observateur à grand gain, spécifiquement construit pour estimer de plus le coefficient de fuite. Cet observateur a été conçu dans la Section 4.3.2.

Pour voir les effets du grand gain, l'estimation a été réalisée avec deux valeurs de gain différentes, $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. On constate alors dans la Fig. 5.11 la bonne estimation des paramètres de fuite.

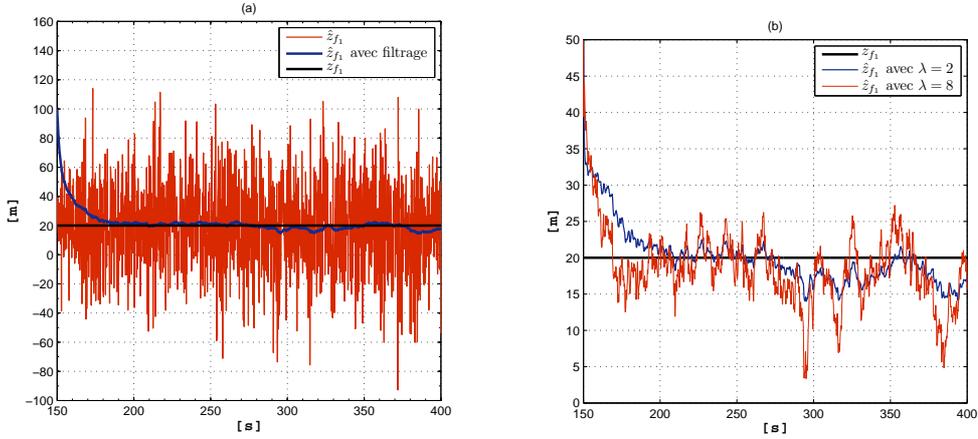


FIG. 5.10 – (a) Estimation de la position avec l'équation statique (4.6) (b) Estimation avec un observateur à grand gain

5.3.2 Détection d'une fuite et estimation du coefficient de friction

Expérience 5. Une fuite a été provoquée dans la canalisation du CINVESTAV à $z_{f_1} = 63$ m. Avant l'occurrence de la fuite la vanne à l'aval avait une ouverture de 60% (valeur nominale), après l'occurrence de la fuite la vanne a été activée pour osciller sinusoidalement. L'amplitude d'ouverture-fermeture de la vanne a été choisie de 10% de la valeur nominale. La période d'oscillation a été fixée à $T = 90$ (s).

La Figure 5.12 (a) montre les mesures de pression et débit prises par les capteurs.

Les Figures 5.12(a) 5.13(a) 5.13(b) présentent alors les résultats d'estimation obtenus avec l'observateur (3.34). Les détails de la conception de l'observateur sont donnés dans la subsection 4.3.3. Pour l'estimation on a réglé l'observateur avec les paramètres $m = 1 \times 10^{-3}$, $\beta = 2 \times 10^6$, $\lambda_{max} = 2$ et $\lambda_{min} = 0.5$. L'observateur a été démarré à 283 (s) de l'initialisation de l'expérience, un peu après le début du régime oscillatoire.

La Figure 5.12 (b) illustre l'estimation du coefficient de friction, tandis que la Figure 5.13 illustre l'estimation de la friction d'une part (a) et de la position de la fuite d'autre part (b). Pour l'estimation de la position \hat{z}_{f_1} on a une valeur de référence précise z_{f_1} , à partir de laquelle on peut calculer une erreur relative :

$$e\%(z_{f_1}) = \frac{|z_{f_1} - \hat{z}_{f_1}|}{z_{f_1}} \times 100$$

Cette erreur est représentée sur la Figure 5.14 où l'on peut voir qu'elle se situe en moyenne entre 5 et 10%. Ceci est vraisemblablement dû aux bruits dans la mesure.

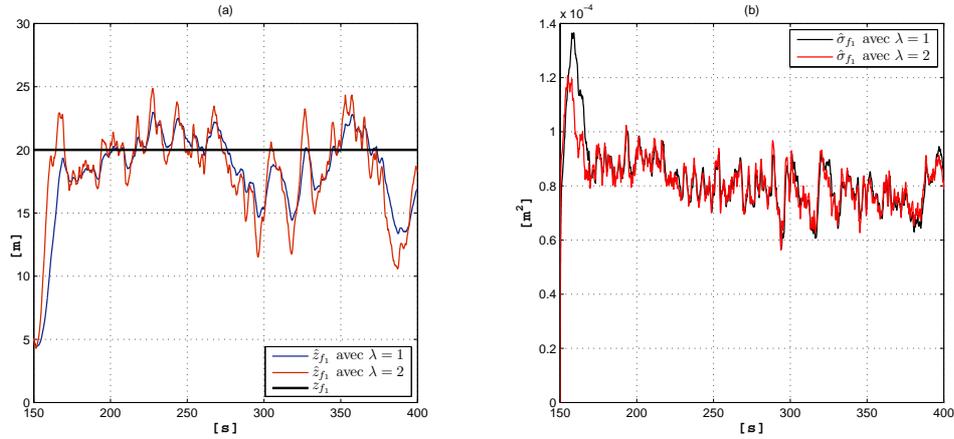


FIG. 5.11 – (a) Estimation de la position avec un observateur à grand gain constant
 (b) Estimation du coefficient de fuite avec un observateur à grand gain constant

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté des résultats d'expériences réalisées en vue de valider les modèles finis proposés précédemment, ainsi que pour tester la performance de certains observateurs proposés dans le Chapitre 4. Du côté de la validation expérimentale des modèles, on a vérifié que les modèles en dimension finie considérés représentent de manière adéquate deux canalisations différentes, et par conséquent peuvent être utilisés pour la conception des algorithmes d'estimation.

En ce qui concerne la validation des observateurs, on a vérifié certains des algorithmes proposés qui ont donné des résultats prometteurs.

Une validation plus approfondie et plus complète de l'ensemble des approches discutées dans cette thèse reste encore en perspective.

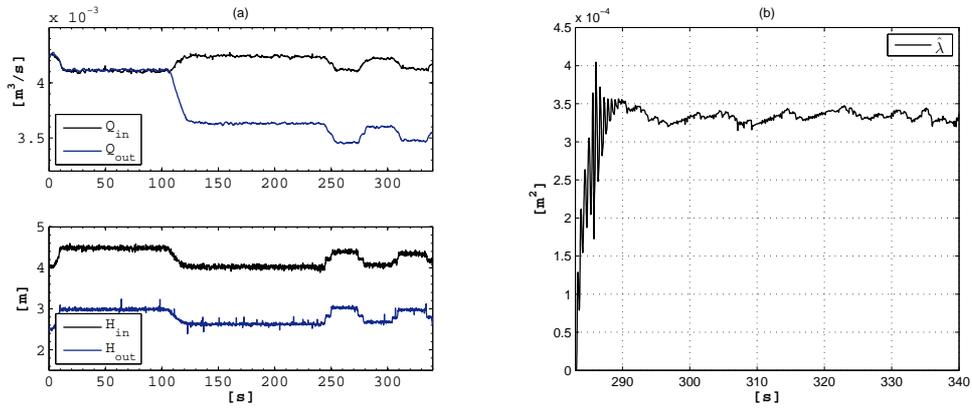


FIG. 5.12 – Expérience 5 : (a) Mesures de débit et pression (b) Estimation du coefficient de la fuite

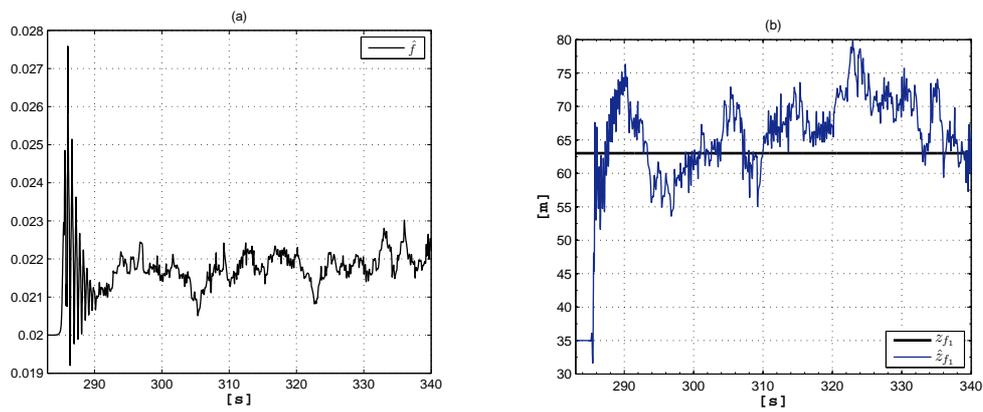


FIG. 5.13 – Expérience 5 : (a) Estimation de la friction (b) Estimation de la position

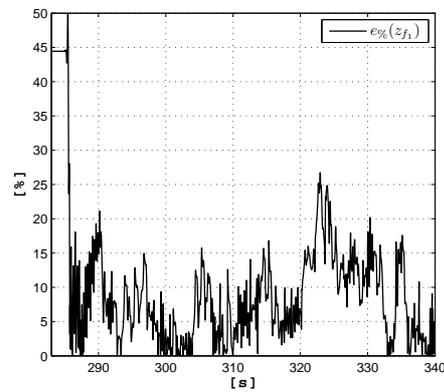


FIG. 5.14 – Erreur en pourcentage de l'estimation de la position

Extension aux systèmes chaotiques

Sommaire

6.1	Des systèmes d'écoulement aux systèmes chaotiques . . .	92
6.2	Synchronisation de systèmes chaotiques avec des paramètres inconnus	95
6.3	Synchronisation d'oscillateurs nonlinéaires avec des paramètres inconnus	99
6.4	Estimation de paramètres pour la synchronisation spatiale-temporelle	101
6.5	Conclusions	108

Dans ce chapitre, nous présentons quelques autres applications possibles de l'observateur du Théorème 8. Comme cet observateur nécessite une certaine excitation, les systèmes auxquels on fait référence ici ont un dénominateur commun : ils présentent une sorte de condition d'excitation autonome. En d'autres termes, ils ont de bonnes chances de remplir les conditions de convergence de l'observateur.

Nous pouvons citer à titre d'exemples de ces systèmes les oscillateurs non linéaires, les systèmes hydrauliques à écoulement turbulent (dans le prolongement des études aux chapitres précédents), ou plus généralement, les systèmes chaotiques. Nous allons nous concentrer ici sur quelques exemples classiques de systèmes chaotiques et d'oscillateurs nonlinéaires.

Plus précisément nous allons utiliser l'observateur du Théorème 8 pour la synchronisation de tels systèmes, tout en étant robuste face aux incertitudes sur les paramètres. Pour cela, nous utilisons l'observateur 8 comme un esclave d'un système chaotique principal, connu comme le *système maître*.

Pour résumer, l'observateur que nous présentons nous permet à la fois la synchronisation de systèmes chaotiques et l'estimation de paramètres inconnus du système maître. On étend aussi les résultats de synchronisation aux oscillateurs nonlinéaires et aux systèmes qui présentent du chaos dans l'espace et le temps.

6.1 Des systèmes d'écoulement aux systèmes chaotiques

On a constaté, dans les chapitres précédents, le besoin d'entrées persistantes pour l'estimation de paramètres et de défauts en canalisations, notamment, en utilisant des observateurs nonlinéaires. Le cas idéal serait de se passer du besoin d'excitation externe et d'avoir un système qui génère pour lui-même la condition d'excitation. Ainsi, les conditions d'opération du système ne seraient pas altérées.

Pour la détection de multi-fuites, on a utilisé des observateurs conçus à partir des équations du coup de bélier unidimensionnelles qui donnent un profil axial de la vitesse le long de la canalisation. Pour obtenir l'information suffisante de la position des fuites, on a excité le système par l'intermédiaire de changements périodiques des pressions et/ou des débits. Par contre, en pratique, cette approche peut provoquer des problèmes techniques à l'implémentation. Ceci devient alors une raison pour considérer un modèle du coup de bélier plus précis qui donne une information plus détaillée du profil de la vitesse, sans le besoin d'entrées persistantes.

La simulation du coup de bélier en utilisant un modèle bidimensionnel (e.g. [58]) pourrait apporter cette information exigée pour la conception des observateurs, puisqu'on pourrait avoir la connaissance de la vitesse sur différents points axiaux et radiaux de la canalisation.

De plus, si le modèle comprenait un modèle du type de mouvement du débit (laminaire/turbulent), on pourrait avoir une information cruciale pour la conception des observateurs.

Lorsqu'un fluide coule dans une canalisation sous pression ou dans un canal ouvert, il y a deux formes basiques de mouvement : laminaire et turbulent. La nature de l'écoulement dépend classiquement du nombre de Reynolds, \mathbf{Re} . Si $\mathbf{Re} > 10^3$, le débit devient turbulent. Le nombre de Reynolds est défini comme le ratio entre les forces inertiales et les forces visqueuses, à savoir $\mathbf{Re} = UL/\nu$, avec U la vitesse, L la longueur, ν la viscosité cinématique.

L'information des différents profils de vitesse d'une canalisation pourrait être suffisante pour la détection de défauts avec certains observateurs. Ces derniers pourraient se concevoir sous certaines conditions d'observabilité à partir d'un modèle bidimensionnel. De plus, à partir de la définition de turbulence, on peut supposer que l'observateur du théorème 8 que l'on a proposé, pourrait se bénéficier de la condition nécessaire pour son fonctionnement, sans le besoin d'excitation externe.

Dans la dynamique des fluides, la turbulence ou l'écoulement turbulent est un régime caractérisé par la propriété chaotique et par des changements stochastiques. Ceci inclut la diffusion basse du mouvement, la convection élevée du mouvement, et la variation rapide de la pression et de la vitesse dans l'espace et le temps [59]. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée,

un comportement difficilement prévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Pour sa propriété chaotique, la turbulence est parfois appelée *Eulerian chaos* [59].

Idéalement, les mécanismes qui provoquent la transition d'un comportement stationnaire vers un comportement chaotique, et la nature du mouvement en régime chaotique, pourraient être déductibles à partir des équations de Navier-Stokes. Cependant, une solution analytique de ces équations n'existe que pour certains cas. Donc le mécanisme concret de l'origine de la turbulence continue d'être un mystère.

Pour éviter les difficultés d'une approche directe, différentes façons d'attaquer le problème ont été mises en marche. L'une de ces approches est la théorie des *attracteurs étranges* [60][61]. Le pionnier de cette théorie est le célèbre météorologue Edward Lorenz.

Mathématiquement, le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système de Navier-Stokes. Ce système d'équations était beaucoup trop compliqué à résoudre numériquement pour les premiers ordinateurs existant au temps de Lorenz. Celui-ci a donc eu l'idée de chercher un modèle très simplifié de ces équations pour étudier une situation physique particulière : le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard. Il a alors abouti à un système dynamique différentiel possédant seulement trois degrés de liberté qui est beaucoup plus simple à intégrer numériquement que les équations de départ.

La théorie des *attracteurs étranges* se focalise sur la dépendance du temps du mouvement turbulent, comme étant une propriété partagée par une grande classe d'équations différentielles typiques, et non seulement par les équations de mouvement.

Cette théorie va au-delà de la recherche de l'origine de la turbulence. Elle est utilisée dans différents domaines, par exemple, en économie, en astrophysique, dans les systèmes de communication, etc. Ainsi, lorsqu'on parle de la théorie des *attracteurs étranges* d'une manière générale, appliquée dans autres domaines, on parle de la *théorie du chaos*. Cette dernière traite des systèmes dynamiques rigoureusement déterministes, mais qui présentent un phénomène fondamental d'instabilité appelé *sensibilité aux conditions initiales* qui, modulant une propriété supplémentaire de récurrence, les rend non prédictibles en pratique sur le long terme.

C'est ainsi que toutes propositions gardées, en s'intéressant aux écoulements on en arrive aux systèmes chaotiques. Inspirés par les nombreuses applications que l'estimation des états et paramètres peut impliquer, nous proposons des observateurs nonlinéaires du type (3.33) pour l'estimation de paramètres dans les systèmes chaotiques.

Compte tenu de l'ampleur des domaines d'application de tels systèmes, nous

avons choisi d'en retenir une en particulier afin d'illustrer notre approche : la synchronisation.

Des phénomènes impliquant une synchronisation sont généralement trouvés dans les sciences naturelles ainsi que dans le domaine technologique. En effet, la nature est riche en connexions, interactions et communications, on trouve donc souvent que les systèmes non linéaires sont construits de plusieurs sous-systèmes qui interagissent les uns avec les autres.

Dans la littérature, plusieurs travaux existent concernant la synchronisation de systèmes chaotiques et oscillateurs nonlinéaires. Parmi eux, on peut citer le travail pionnier présenté dans [62] et ceux proposés dans [63]-[64].

La synchronisation par l'intermédiaire d'observateurs a été discutée précédemment dans [65], où les observateurs d'états sont utilisés comme des *systèmes esclaves* qui se synchronisent avec un *système maître*.

Dans des travaux postérieurs, [66]-[67], les observateurs ont été utilisés pour la synchronisation des systèmes chaotiques robustes face aux incertitudes des paramètres. C'est-à-dire que les observateurs proposés permettent à la fois la synchronisation et l'estimation de paramètres inconnus du système maître.

L'estimation des paramètres pendant la synchronisation peut être adressée en employant des observateurs adaptatifs. De tels observateurs ont besoin d'une excitation persistante pour garantir la convergence, et l'idée dans [66]-[67] était que le comportement chaotique peut fournir telle excitation.

En suivant la même idée, on propose l'observateur du Théorème 8 pour estimer les paramètres de systèmes chaotiques et d'oscillateurs nonlinéaires, et pour les synchroniser.

Tout d'abord, on présente l'estimation des paramètres des systèmes de Lorenz, Rössler et Duffing, en supposant que tous les paramètres son inconnus. Ensuite, on présente la conception d'un observateur pour l'estimation d'un paramètre correspondant à un système qui unifie trois attracteurs. On continue avec la synthèse d'un observateur pour la synchronisation de deux neurones artificiels en supposant une incompatibilité entre les paramètres. Finalement, on montre la conception d'un observateur pour l'estimation des paramètres d'un système de réaction-diffusion qui présente un comportement chaotique dans l'espace et le temps.

6.2 Synchronisation de systèmes chaotiques avec des paramètres inconnus

Les équations de Lorenz, Rössler et Duffing représentent des systèmes chaotiques très connus dans la science nonlinéaire. Ils sont exprimés par les équations résumées dans le Tableau 6.1. L'attracteur de Lorenz, baptisé d'après son découvreur Edward

TAB. 6.1 – Systèmes chaotiques

Lorenz	Rössler	Duffing
$\dot{x}_1 = \theta_1(x_2 - x_1)$	$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3$	$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = \theta_2 x_1 - x_2 - x_1 x_3$	$\dot{x}_2 = x_1 + \theta_1 x_2$	$\dot{x}_2 = -\theta_1 x_2 - \theta_2 x_1 - \theta_3 x_1^3 + \theta_4 u$
$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - \theta_3 x_3$	$\dot{x}_3 = \theta_2 + x_3(x_1 - \theta_3)$	

Lorenz, est une structure fractale correspondant au comportement à long terme de l'oscillateur de Lorenz. Cet oscillateur est un système dynamique tridimensionnel qui engendre un comportement chaotique dans certaines conditions. L'attracteur montre comment les différentes variables du système dynamique évoluent dans le temps en une trajectoire non périodique.

L'attracteur et les équations associées ont été rendus publics dans [68] par Edward Lorenz, qui les avait extraites d'une version simplifiée des équations de Navier-Stoke. Lorenz a découvert que le comportement de son système dépendait fortement des conditions initiales. Donc, des petits changements dans les conditions initiales provoquent de grand changements dans le comportement du système avec le temps. Pour le système de Lorenz, θ_1 est appelé nombre de Prandtl, θ_2 est appelé nombre de Rayleigh, et θ_1 , θ_2 et θ_3 sont strictement positifs.

Le système dynamique de Rössler est composé de 3 équations différentielles non-linéaires. Ces équations différentielles définissent un système dynamique continu et tridimensionnel qui présente des caractéristiques chaotiques. L'ensemble des trajectoires à long terme de ce système définissent un attracteur étrange aux propriétés fractales. Otto Rössler a conçu son attracteur en 1976 dans un but purement théorique, mais ces équations se sont avérées utiles dans la modélisation de l'équilibre dans les réactions chimiques. L'article original de Rössler mentionne que son système a été conçu pour fonctionner d'une façon similaire au système de Lorenz, mais également pour être plus simple à analyser, il ne présente qu'une seule spirale.

L'équation de Duffing est une équation différentielle de deuxième ordre nonlinéaire. Elle est l'exemple d'un système dynamique qui exhibe un comportement chaotique. L'équation décrit le mouvement d'un oscillateur harmonique avec un potentiel plus compliqué qu'un oscillateur simple. En termes physiques, il modélise par

exemple, un *spring pendulum* dont la rigidité des ressorts n'obéit pas exactement à la loi de Hooke.

Maintenant, on présente un exemple avec ces systèmes afin de montrer comment l'observateur (3.33) peut fonctionner comme un synchronisateur et comme un estimateur pour les systèmes chaotiques. Pour cet exemple, on considère que les valeurs des paramètres des trois systèmes sont ceux listés dans le Tableau 6.2. Les conditions initiales pour chaque système sont données dans le même tableau. L'entrée du système de Duffing a été fixée à $u = \sin(100t)$, tandis que les deux autres systèmes sont considérés comme étant autonomes. En supposant que seulement une variable

TAB. 6.2 – Ensemble de paramètres des systèmes chaotiques

Lorenz	$\theta_1 = 16, \theta_2 = 45.6, \theta_3 = 4$	$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 1$
Rössler	$\theta_1 = 0.1, \theta_2 = 0.1, \theta_3 = 14$	$x_1(0) = 4, x_2(0) = 4, x_3(0) = 0.1$
Duffing	$\theta_1 = 1, \theta_2 = 1, \theta_3 = 0.3, \theta_4 = 0.2$	$x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$

du vecteur d'état est mesurée, et que tous les paramètres sont inconnus, l'objectif est la reconstruction de l'ensemble des paramètres et états. Le but peut être atteint en transformant chaque système en la structure (3.33). Dans les trois cas, la transformation apporte des systèmes avec 6 dimensions obtenus par les applications suivantes :

- ★ Lorenz : si $y = x_1$ alors $\Phi(x) : x \rightarrow \xi = [x_1 \ \theta_1 \ \theta_1 x_2 \ \theta_1 \theta_2 \ \theta_1 x_3 \ \theta_1 \theta_3 x_3]$
- ★ Rössler : si $y = x_2$ alors $\Phi(x) : x \rightarrow \xi = [x_2 \ \theta_1 \ x_1 \ x_3 \ \theta_2 \ \theta_3 x_3]$
- ★ Duffing : si $y = x_1$ alors $\Phi(x) : x \rightarrow \xi = [x_1 \ x_2 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_1 x_2]$

Suivant le Théorème 8, un observateur pour les systèmes du Tableau 6.1 peut alors s'exprimer comme suit :

$$\dot{\hat{\xi}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}}_{A(u,y)} \hat{\xi} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix}}_{\varphi(u,\hat{\xi})} - K(\hat{y} - y); \hat{y} = C(u)\hat{\xi} + D(u) \quad (6.1)$$

où $K = \Lambda(\lambda)SC^T(u)$ est le gain et la matrice S est calculée comme dans le Théorème 8.

Les coefficients différents de zéro $a_{i,j}$ et φ_i de la matrice $A(u,y)$ et du vecteur $\varphi(u,\hat{\xi})$ respectivement, sont listés dans le Tableau 6.3 pour chaque système.

Les paramètres de réglage, λ et γ , ainsi que les conditions initiales pour chaque

cas sont listés dans le Tableau 6.4.

TAB. 6.3 – Coefficients de $A(u, y)$ et $\varphi(u, \hat{\xi})$ pour les systèmes chaotiques

	Lorenz	Rössler	Duffing
a_{ij}	$a_{12} = -y, a_{13} = 1,$ $a_{34} = y$ $a_{35} = -y, a_{56} = -1$	$a_{12} = y, a_{13} = 1,$ $a_{34} = -1$ $a_{45} = 1, a_{46} = -1$	$a_{12} = 1, a_{23} = -y,$ $a_{24} = -y^3$ $a_{25} = u, a_{26} = -1$
φ_i	$\varphi_3 = -\xi_3, \varphi_5 = \xi_3 y,$ $\varphi_6 = \frac{\xi_6}{\xi_5}(y\xi_3 - \xi_6)$	$\varphi_3 = -y, \varphi_4 = \xi_3 \xi_4$ $\varphi_6 = \frac{\xi_6}{\xi_4}(\xi_5 + \xi_3 \xi_4 - \xi_6)$	$\varphi_6 = \frac{\xi_6}{\xi_2}(-\xi_3 y - \xi_4 y^3 + \xi_5 u - \xi_6)$

Les résultats obtenus pour le système de Lorenz sont indiqués dans la Fig.6.1,

TAB. 6.4 – Paramètres de réglage et conditions initiales pour les observateurs des systèmes chaotiques

Lorenz	$\lambda = 1, \gamma = 10$	$\xi_1(0) = 10, \xi_2(0) = 19, \xi_3(0) = 190$ $\xi_4(0) = 760, \xi_5(0) = 190, \xi_6(0) = 950$
Rössler	$\lambda = 0.5, \gamma = 15$	$\xi_1(0) = 2, \xi_2(0) = 0.2, \xi_3(0) = 2$ $\xi_4(0) = 0.2, \xi_5(0) = 0.2, \xi_6(0) = 2$
Duffing	$\lambda = 1, \gamma_2 = 12$	$\xi_1(0) = -2, \xi_2(0) = 2, \xi_3(0) = 2$ $\xi_4(0) = 2, \xi_5(0) = 0.4, \xi_6(0) = 0.6$

où l'on peut apercevoir l'estimation de ses paramètres, ainsi que son portrait de phase en 2 dimensions donné pas les états x_2 et x_3 . Le portrait de phase montre clairement la synchronisation (et donc la convergence de l'observateur). Les résultats de l'estimation et de synchronisation pour les systèmes de Rössler et Duffing sont résumés dans la Fig. 6.2 et la Fig. 6.3. Dans tous les cas, on peut noter la bonne convergence des paramètres estimés vers les vrais paramètres ainsi que le succès de la synchronisation. Dans [69], il est proposé un ensemble d'équations qui unifient les systèmes de Lorenz, de Chen et de Lü dans un seul système avec un paramètre unique, α . Le système chaotique unifié est exprimé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= (25\alpha + 10)(x_2 - x_1) \\
 \dot{x}_2 &= (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2 \\
 \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \left(\frac{\alpha + 8}{3}\right)x_3
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ce système donne :

- ★ L'attracteur de Lorenz si $0 \leq \alpha \leq 0.8$.
- ★ L'attracteur de Chen si $\alpha = 0.8$

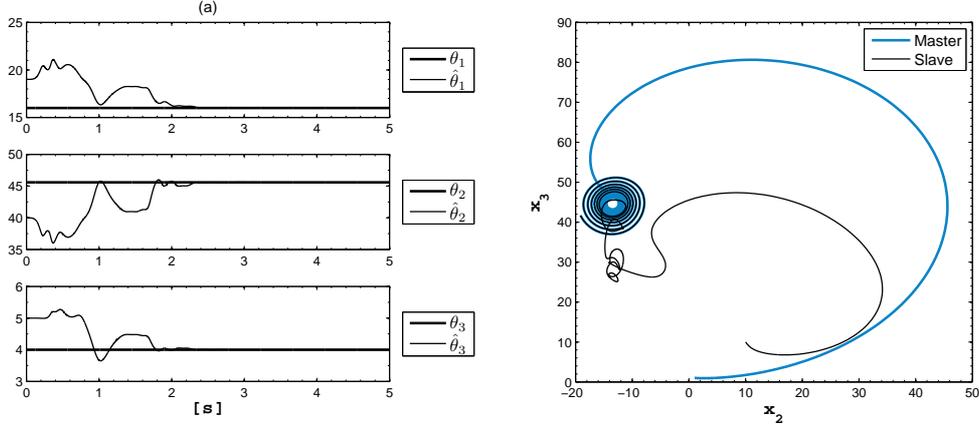


FIG. 6.1 – (a) Estimation des Paramètres du système de Lorenz, (b) Portrait de phase du système de Lorenz

★ L'attracteur de Lü si $0.8 \leq \alpha \leq 1$

Dans les Figures 6.4, 6.5 et 6.6, il est possible de voir les portraits de phase du système unifié avec différentes valeurs de α . On peut alors proposer la conception d'un observateur du type (3.33) afin d'estimer le paramètre α , tel qu'il se synchronise avec le système maître. Pour cela, on transforme le système (6.2) en la forme décrite par (3.33).

En fixant $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = (25\alpha + 10)$, $\xi_3 = (25\alpha + 10)x_2$ et $\xi_4 = (25\alpha + 10)x_3$, on obtient le système suivant comme une version transformée de (6.2) :

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & -y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_2 \left(\left(28 - 35 \frac{\xi_2 - 10}{25} \right) y + \left(29 \frac{\xi_2 - 10}{25} - 1 \right) \frac{\xi_3}{\xi_2} \right) \\ \xi_2 \left(y \frac{\xi_3}{\xi_2} - \frac{(\xi_2 - 10/25) + 8}{3} \frac{\xi_4}{\xi_2} \right) \end{bmatrix}$$

Pour les tests en simulation, les conditions initiales de l'observateur (différentes à celles du système maître) sont fixées à : $\hat{\xi}_1(0) = 2$, $\hat{\xi}_2(0) = 10$, $\hat{\xi}_3(0) = 20$, $\hat{\xi}_4(0) = 20$. L'observateur est réglé avec $S(0) = I_d$, $\lambda = 5$ et $\gamma = 2$. Dans la figure 6.7 on peut voir les bonnes performances de l'estimation réalisée par l'observateur pour différentes valeurs de α ($\alpha = 0$, $\alpha = 0.8$, $\alpha = 1$).

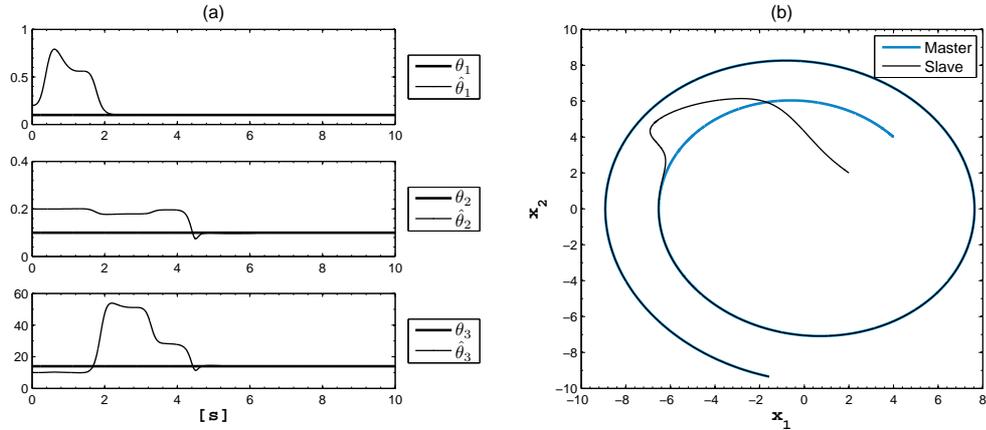


FIG. 6.2 – (a) Estimation des Paramètres du système de Rössler, (b) Portrait de phase du système de Rössler

6.3 Synchronisation d'oscillateurs nonlinéaires avec des paramètres inconnus

En 1952, A.L. Hodgkin et A.F. Huxley décrivent la cinétique des mécanismes ioniques au sein d'un neurone par un système de quatre équations différentielles ordinaires autonomes [70]. En 1982, J.L. Hindmarsh et R.M. Rose ont simplifié ce modèle en un système à deux EDO [71]. Enfin, afin de se rapprocher du comportement réel d'un neurone, ils ont, deux années plus tard, ajouté une équation d'adaptation à leur premier modèle [72]. Cette dernière équation donne au système de Hindmarsh-Rose son caractère lent-rapide. Alors, les trois équations du modèle de Hindmarsh-Rose sont données par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \phi(x_1) - x_3 + I \\ \dot{x}_2 &= \psi(x_1) - x_2 \\ \dot{x}_3 &= \theta_3[\theta_4(x_1 - \theta_5) - x_3]\end{aligned}\tag{6.3}$$

dont x_1 correspond au potentiel de la membrane qui mesure la différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur du neurone, x_2 décrit les échanges d'ions à travers la membrane par des canaux rapides, tandis que x_3 décrit les échanges d'ions à travers la membrane par des canaux lents. Normalement, I est le courant que l'on applique au neurone pour le stimuler. Les fonctions $\phi(x_1) = \theta_1 x_1^2 - x_1^3$ et $\psi(x_1) = 1 - \theta_2 x_1^2$ contiennent les paramètres θ_1 et θ_2 qui sont des constantes déterminées expérimentalement. Le paramètre θ_3 représente la différence d'échelle de temps entre la dynamique rapide et la dynamique lente, tandis que θ_5 est le point d'équilibre de x lorsqu'il n'y a pas de courant appliqué. Finalement, θ_4 est une constante réglée expérimentalement.

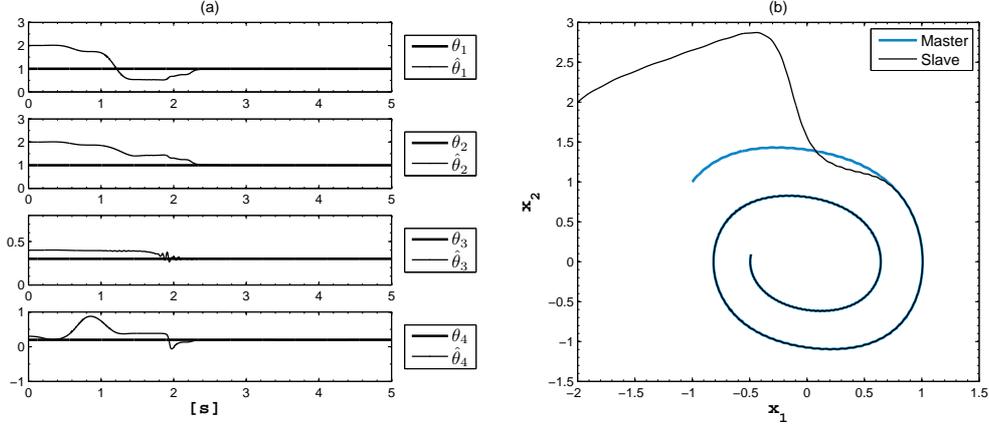


FIG. 6.3 – (a) Estimation des Paramètres du système de Duffing, (b) Portrait de phase du système de Duffing

L'objectif que l'on considère ici est de concevoir un observateur qui permette d'estimer les fonctions $\phi(x_1)$ et $\psi(x_1)$ à partir de $y = x_1$ sans la connaissance de θ_3 , θ_4 et θ_5 , tel que deux neurones puissent être synchronisés. Pour parvenir à cet objectif, le système (6.3) doit être transformé pour qu'il se trouve sous la structure (3.33), et pour cela on utilise l'application suivante :

$$\Phi(x) : x \rightarrow \xi = [x_1 \quad \theta_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \theta_2 \quad \theta_3\theta_4 \quad \theta_3\theta_4\theta_5 \quad \theta_3x_3] .$$

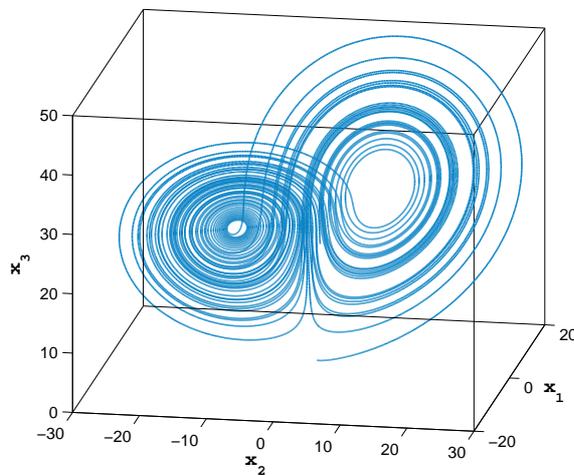
Avec cette transformation, le système devient :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_3 + \xi_2 y^2 - y^3 - \xi_4 + I & (6.4) \\ \dot{\xi}_2 &= 0 \\ \dot{\xi}_3 &= 1 - \xi_5 y^2 - \xi_3 \\ \dot{\xi}_4 &= \xi_6 y - \xi_7 - \xi_8 \\ \dot{\xi}_5 &= \dot{\xi}_6 = \dot{\xi}_7 = 0 \\ \dot{\xi}_8 &= \frac{\xi_8}{\xi_4} (\xi_6 y - \xi_7 - \xi_8) \end{aligned}$$

A présent, il est possible de construire un observateur comme dans le Théorème 8. Dans les simulations réalisées, les conditions initiales considérées pour le système maître ont été : $x_1(0) = -3$, $x_2(0) = -12$, $x_3(0) = 1$ et les paramètres ont été fixés à : $\theta_1 = 3$, $\theta_2 = 5$, $\theta_3 = 0.005$, $\theta_4 = 4$ and $\theta_5 = -1$.

Par ailleurs, l'observateur a été initialisé avec : $S(0) = I_d$, $\hat{\xi}_1(0) = -1$, $\hat{\xi}_2(0) = 5$, $\hat{\xi}_3(0) = -14$, $\hat{\xi}_4(0) = 5$, $\hat{\xi}_5(0) = 5$, $\hat{\xi}_6(0) = 0.018$, $\hat{\xi}_7(0) = -0.036$ et $\hat{\xi}_8(0) = 0.015$. Ces conditions initiales sont différentes de celles considérées pour le système maître.

Finalement, l'observateur a été réglé avec $\gamma = 2$ and $\lambda = 1$.

FIG. 6.4 – L'attracteur de Lorenz lorsque $\alpha = 0$ dans le système (6.2)

Lorsque l'entrée I est fixé à $I = 3$, le système présente un comportement oscillatoire, et à partir des résultats d'estimation réussis, ceci peut être considéré suffisant pour garantir la condition d'excitation.

Dans la Fig.6.8 on illustre la reconstruction des fonctions du modèle, tandis que dans la Fig.6.9 on illustre la synchronisation entre le système maître et l'observateur.

6.4 Estimation de paramètres pour la synchronisation spatiale-temporelle

Plusieurs phénomènes physiques dans la nature sont modélisés par des systèmes spatiaux-temporels étendus, soit par des équations différentielles partielles, soit par treillis d'applications couplées (*coupled map lattices*), soit par des équations différentielles ordinaires couplées. Comme exemple de systèmes spatiaux étendus on a les systèmes d'écoulements, les systèmes optiques, les oscillateurs électriques couplés, les réactions chimiques, le plasma et les systèmes biologiques.

Sous certaines conditions (paramétriques, initiales, etc.), les systèmes spatiaux-temporels étendus présentent une turbulence ou un chaos spatial-temporel. Ces conditions sont étudiées dans [73].

L'étude des propriétés chaotiques des systèmes spatiaux-temporels étendus comporte des aspects comme l'interaction et la synchronisation entre eux. Ceci vient du fait que la synchronisation entre systèmes de ce type a différentes applications, par

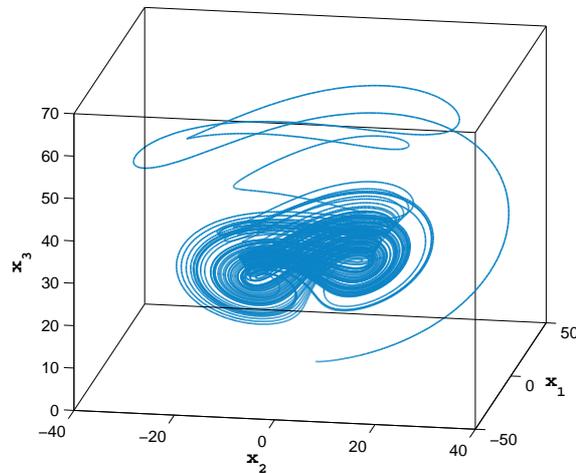


FIG. 6.5 – L'attracteur de Chen lorsque $\alpha = 0.8$ dans le système (6.2)

exemple, les réseaux de neurones artificiels, la convection thermique dans un media multi-couches ou la convection electro-hydro-dynamique dans des cristaux liquides [74].

Plusieurs scientifiques ont déjà abordé la synchronisation spatiale-temporelle pour certains systèmes, par exemple dans [75], les auteurs ont utilisé un couplage local pour synchroniser les équations de Ginzburg-Landau. Les mêmes équations ont été synchronisées par un couplage asymétrique dans [76] et par un nombre fini de contrôleurs opérant dans différents points du système [77].

Dans [78], les auteurs ont proposé la synchronisation géophysique d'écoulements afin d'appliquer les résultats à la prévision météorologique. En fait, ils synchronisent deux canaux, chacun sous différents régimes chaotiques, de telle sorte la synchronisation représente la relation entre deux secteurs de l'Atlantique et du Pacifique d'un système climatique.

Par ailleurs, dans [79], les auteurs ont proposé la synchronisation des équations de Kuramoto-Sivashinsky et les équations de Gray-Scott pour chiffrer de messages électroniques.

De manière générale, dans tous les travaux que l'on a mentionnés, les auteurs considèrent que les paramètres des systèmes synchronisés sont connus et identiques. C'est pour cela qu'ici, nous supposons la synchronisation des équations différentielles partielles lorsque les paramètres du système maître sont inconnus. En fait, nous proposons un observateur pour estimer les paramètres du système maître, de telle sorte que les estimées puissent être utilisées postérieurement pour la synchronisation.

Pour illustrer notre approche, nous utilisons le modèle de Gray-Scott. Celui-ci

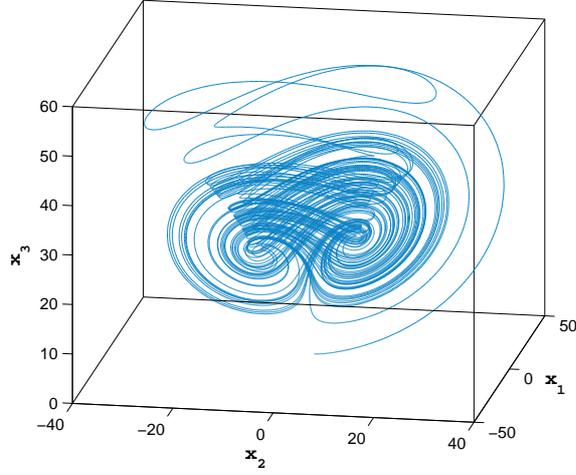


FIG. 6.6 – L'attracteur de Lü lorsque $\alpha = 1$ dans le système (6.2)

est un système de réaction-diffusion qui correspond à deux réactions irréversibles et qui exhibe un mode de chaos dans l'espace et le temps. Le modèle est décrit par les équations suivantes :

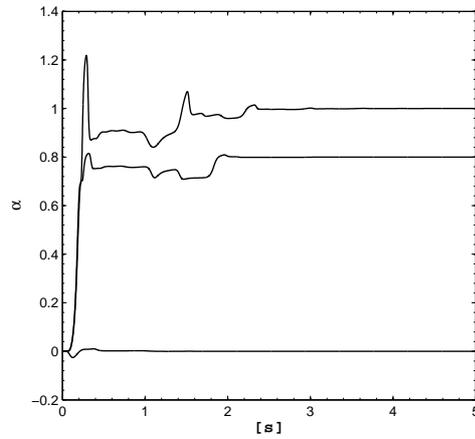
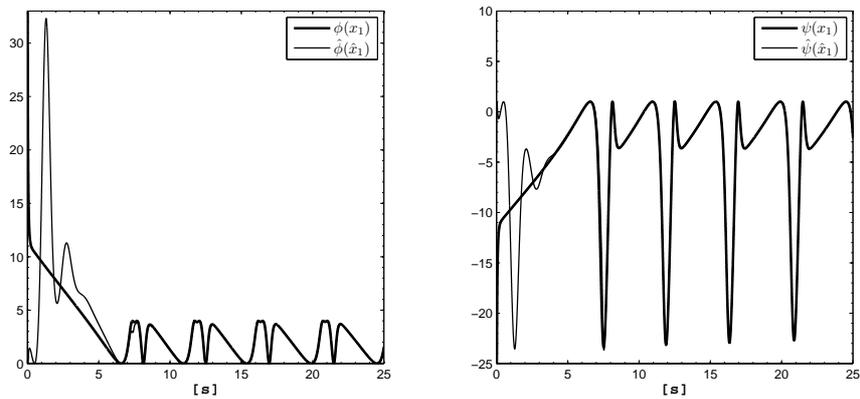
$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= -u_1 u_2^2 + a(1 - u_1) + d_1 \nabla^2 u_1 \\ \dot{u}_2 &= u_1 u_2^2 - (a + b)u_2 + d_2 \nabla^2 u_2\end{aligned}\quad (6.5)$$

avec b comme la constante du taux de la deuxième réaction, a comme étant le taux d'alimentation, d_1 et d_2 comme étant les coefficients de diffusion.

Une version finie du modèle (6.5) est obtenue dans [79] à partir de la méthode de différences finies. Cette version est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{u}_1^{(0)} &= -u_1^{(0)} \left(u_2^{(0)}\right)^2 + a \left(1 - u_1^{(0)}\right) + d_1 \frac{2u_1^{(0)} - 5u_1^{(1)} + 4u_1^{(2)} - u_1^{(3)}}{(\Delta z)^2} \\ \dot{u}_2^{(0)} &= u_1^{(0)} \left(u_2^{(0)}\right)^2 - (a + b)u_2^{(0)} + d_2 \frac{2u_2^{(0)} - 5u_2^{(1)} + 4u_2^{(2)} - u_2^{(3)}}{(\Delta z)^2} \\ \dot{u}_1^{(j)} &= -u_1^{(j)} \left(u_2^{(j)}\right)^2 + a \left(1 - u_1^{(j)}\right) + d_1 \frac{u_1^{(j+1)} - 2u_1^{(j)} + u_1^{(j-1)}}{(\Delta z)^2} \\ \dot{u}_2^{(j)} &= u_1^{(j)} \left(u_2^{(j)}\right)^2 - (a + b)u_2^{(j)} + d_1 \frac{u_2^{(j+1)} - 2u_2^{(j)} + u_2^{(j-1)}}{(\Delta z)^2} \\ \dot{u}_1^{(N)} &= -u_1^{(N)} \left(u_2^{(N)}\right)^2 + a \left(1 - u_1^{(N)}\right) + d_1 \frac{2u_1^{(N)} - 5u_1^{(N-1)} + 4u_1^{(N-2)} - u_1^{(N-3)}}{(\Delta z)^2} \\ \dot{u}_2^{(N)} &= u_1^{(N)} \left(u_2^{(N)}\right)^2 - (a + b)u_2^{(N)} + d_2 \frac{2u_2^{(N)} - 5u_2^{(N-1)} + 4u_2^{(N-2)} - u_2^{(N-3)}}{(\Delta z)^2}\end{aligned}\quad (6.6)$$

On présente ci-après deux exemples afin d'illustrer le comportement du système fini (6.6). Dans le premier exemple, on utilise des conditions initiales dépendant

FIG. 6.7 – Estimation de α pour le système chaotique unifiéFIG. 6.8 – Estimation des fonctions $\phi(x_1)$ et $\psi(x_1)$ pour le système (6.3)

de l'espace périodiquement, tandis que dans le deuxième exemple, on utilise des conditions initiales aléatoires. On verra alors que le comportement chaotique du système se présente plutôt dans le deuxième cas.

Exemple 15 Les paramètres du modèle (6.6) sont fixés $a = 0.09$, $b = -0.09$, $d_1 = 0.01$ et $d_2 = 0.03$. Les conditions initiales sont fixées à $u_1(z, 0) = 1 + 0.01 \sin(\frac{\pi z}{L})$ et $u_2(z, 0) = -0.2 \sin(\frac{\pi z}{L})$. Le nombre de sections est fixé à $N = 257$. La période d'échantillonnage de la simulation est fixée à $t_e = 0.1$.

Les figures 6.10 et 6.11 montrent le comportement de $u_1(z, t)$ et $u_2(z, t)$.

Exemple 16 Les paramètres du modèle (6.6) sont fixés à $L = 3000$, $a = 0.09$, $b = -0.09$, $d_1 = 0.01$ et $d_2 = 0.03$. Les conditions initiales $u_1(z, 0)$ et $u_2(z, 0)$

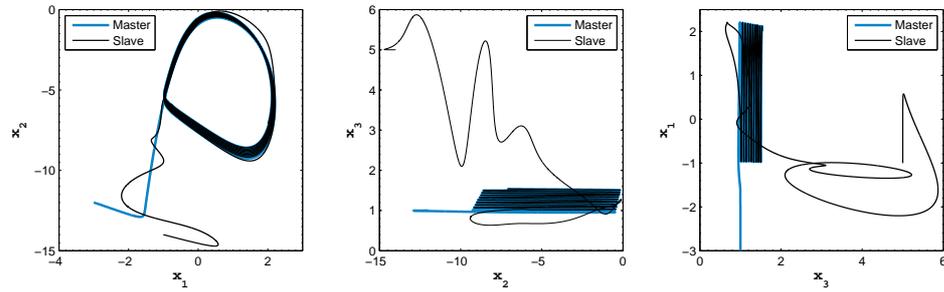


FIG. 6.9 – Portraits de phase de la synchronisation pour le système (6.3)

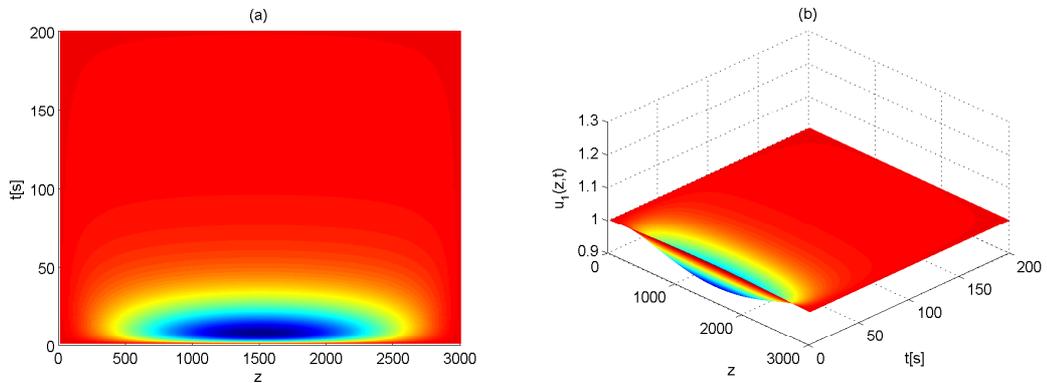
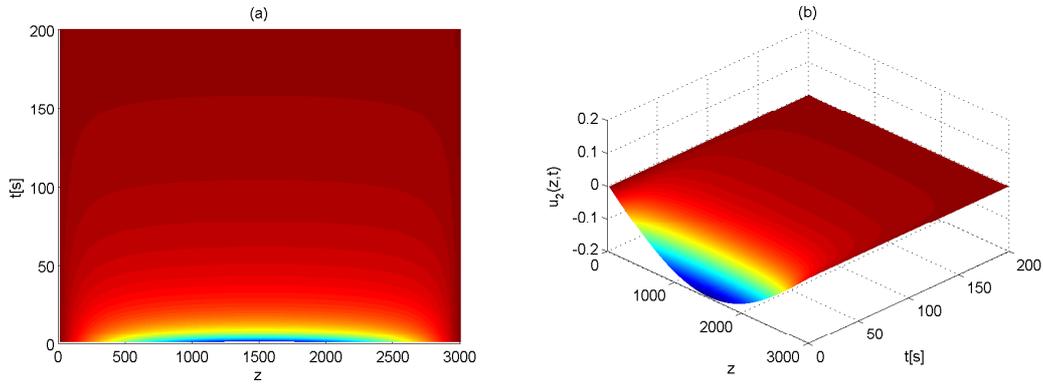
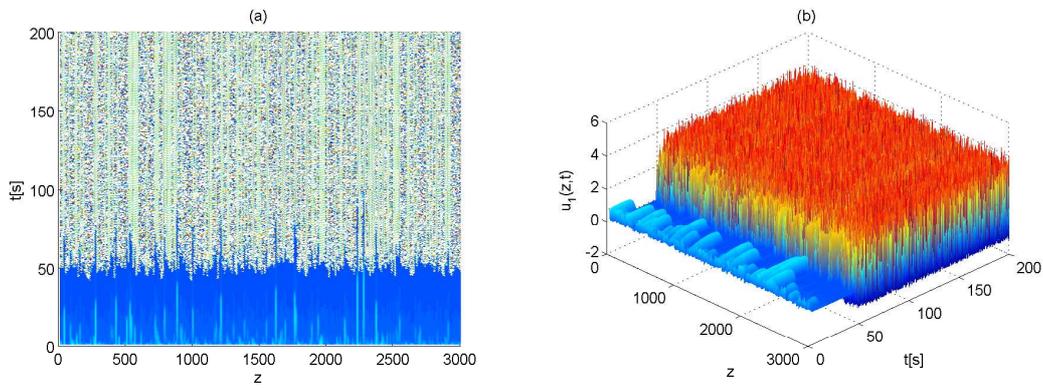


FIG. 6.10 – (a) Evolution spatiale-temporelle de $u_1(z, t)$ (b) Propagation de $u_1(z, t)$

sont choisies aléatoirement. Le nombre de sections est fixé à $N = 257$. La période d'échantillonnage de la simulation est fixée à $t_e = 0.1$.

Les figures 6.12 6.11 montrent les évolutions de $u_1(z, t)$ et $u_2(z, t)$. A partir des figures 6.10-6.13, on vérifie que le comportement du système (6.5) dépend fortement de ses conditions initiales, ce qui est l'une des caractéristiques des systèmes chaotiques.

Maintenant, on présente une approche pour estimer les paramètres a, b, d_1, d_2 du système maître supposés inconnus. Un schéma de cette approche est montré dans la Fig. 6.14, où l'on voit que les conditions de frontière du système maître, $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}$, sont prises comme les mesures y_1, y_2 que l'observateur utilise pour calculer l'erreur d'estimation. Par ailleurs, les mesures $u_1^{(1,\dots,3)}, u_2^{(1,\dots,3)}$ du système maître, sont prises pour calculer les fonctions $S_1 = -5u_1^1 + 4u_1^2 - u_1^3, S_2 = -5u_2^1 + 4u_2^2 - u_2^3$ utilisées comme entrées de l'observateur. Pour la conception de l'observateur, considérons le

FIG. 6.11 – (a) Evolution spatiale-temporelle de $u_2(z, t)$ (b) Propagation de $u_2(z, t)$ FIG. 6.12 – (a) Evolution spatiale-temporelle de $u_1(z, t)$ (b) Propagation de $u_1(z, t)$

vecteur d'états $x = [u_1^{(0)}, u_2^{(0)}]^T$ donnant le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 x_2^2 + a(1 - x_1) + d_1 \left(\frac{2x_1 + S_1}{\Delta z^2} \right) \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2^2 - (a + b)x_2 + d_2 \left(\frac{2x_2 + S_2}{\Delta z^2} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Par l'intermédiaire de l'application :

$$\Phi(x) : x \rightarrow \xi = [x_1, a, d_1, x_2, b, d_2]$$

on obtient le système ci-dessous adéquat pour la conception d'un observateur du

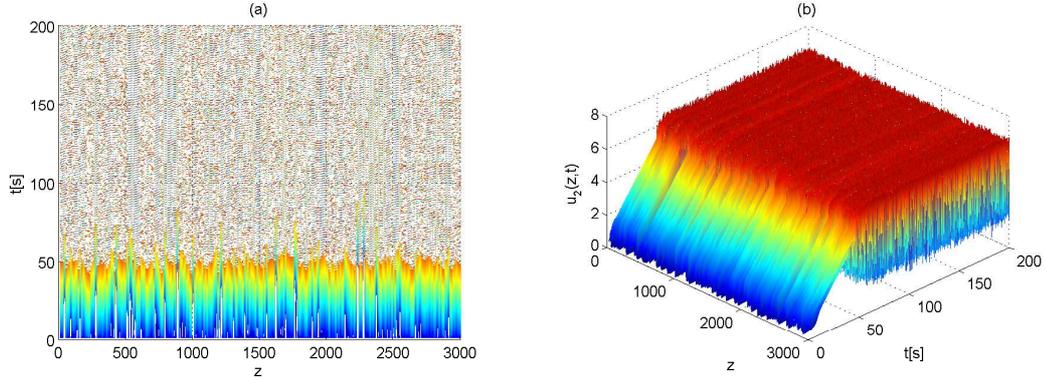
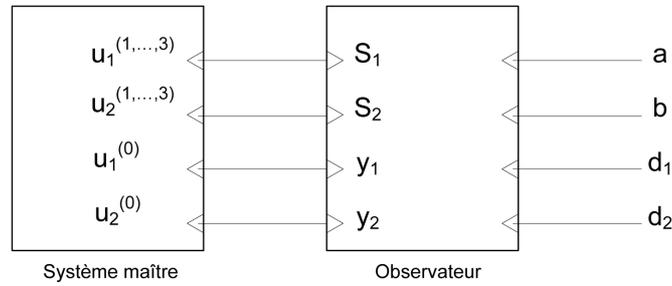

 FIG. 6.13 – (a) Evolution spatiale-temporelle de $u_2(z, t)$ (b) Propagation de $u_2(z, t)$


FIG. 6.14 – Schema de l'estimation des paramètres

type (3.33) :

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \xi_2(1 - \xi_1) + \xi_3 \left(\frac{2\xi_1 + S_1}{\Delta z^2} \right) - \xi_1 \xi_4^2 \\
 \dot{\xi}_2 &= \dot{\xi}_3 = 0 \\
 \dot{\xi}_6 &= -\xi_2 \xi_4 - \xi_5 \xi_4 + \xi_6 \left(\frac{2\xi_4 + S_2}{\Delta z^2} \right) + \xi_1 \xi_4^2 \\
 \dot{\xi}_5 &= \dot{\xi}_6 = 0
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Pour finir, on présente un exemple illustrant la performance de l'observateur proposé.

Exemple 17 Les paramètres du modèle (6.6) sont fixés à $a = 0.09$, $b = -0.09$, $d_1 = 0.1$ et $d_2 = 0.3$. Les conditions initiales sont fixées à $u_1(z, 0) = 1 + 0.01 \sin(\frac{31\pi z}{L})$ et $u_2(z, 0) = -0.2 \sin(\frac{31\pi z}{L})$. Le nombre de sections est fixé à $N = 257$. L'observateur est réglé avec $S(0) = I_d$, $\lambda = 2$ et $\gamma = 1$. Ses conditions initiales sont posées $\xi_1(0) = 0.5$, $\xi_2(0) = 0.07$, $\xi_3(0) = 0.2$, $\xi_4(0) = -0.004$, $\xi_5(0) = -0.07$, $\xi_6(0) = 0.1$. La période d'échantillonnage de la simulation est spécifiée $t_e = 0.08$.

La Fig. 6.5 montre l'estimation (réussie) des paramètres du système, tandis que la

Fig. 6.16 montre les portraits de phase spatiales-temporels de $u_1(z, t)$ et $u_2(z, t)$. Il

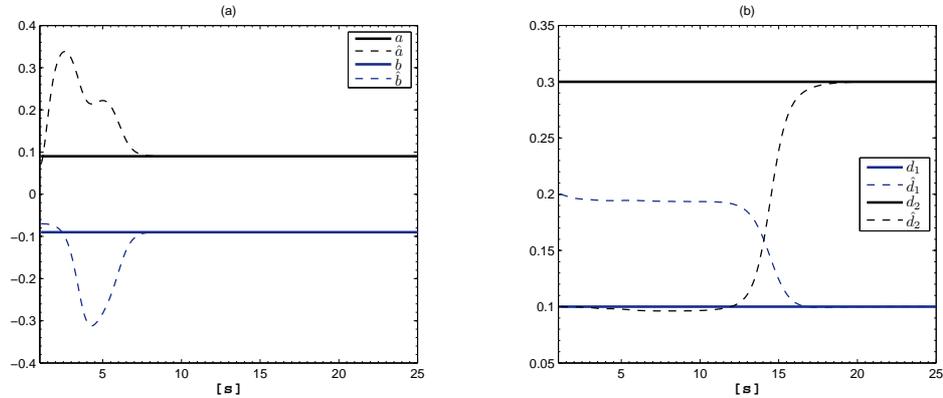


FIG. 6.15 – (a) Estimation de paramètres a et b (b) Estimation de paramètres d_1 et d_2

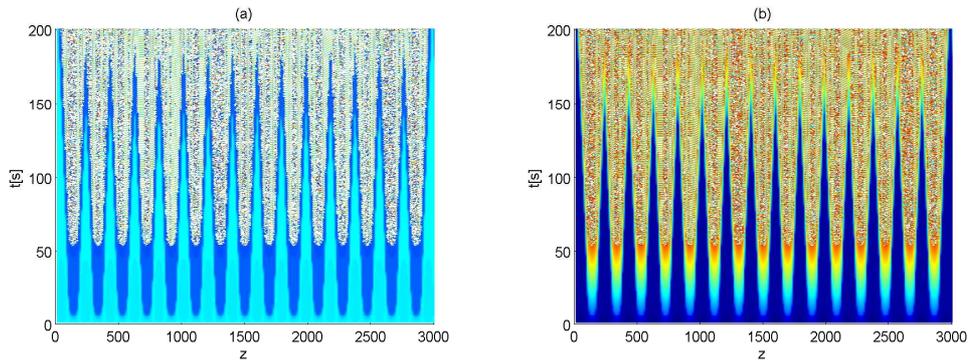


FIG. 6.16 – (a) Evolution spatiale-temporelle de $u_1(z, t)$ (b) Evolution spatiale-temporelle de $u_2(z, t)$

faut préciser que l'observateur proposé se synchronise avec le système maître seulement dans les points des mesures prises. L'objectif de l'observateur est uniquement l'estimation des paramètres du système maître, pour que les estimations données soient utilisées dans la synchronisation d'un système esclave de la même taille que celle du système maître.

6.5 Conclusions

Dans ce chapitre on a présenté, l'utilisation de l'observateur (3.33) pour l'estimation des paramètres de systèmes chaotiques et d'oscillateurs nonlinéaires, ainsi que

pour la synchronisation entre eux. Pour cela, on a profité de leurs comportements naturels pour assurer la stabilité de l'observateur.

Le Théorème 8 établit qu'il est requis une condition d'excitation pour la convergence de l'observateur, laquelle est généralement générée par les entrées du système. Ici, on a utilisé le comportement chaotique intrinsèque de certains systèmes pour fournir à l'observateur une telle condition d'excitation. Les résultats obtenus ont été fructueux et sont prometteurs pour d'autres systèmes chaotiques, mais il reste à approfondir l'étude du lien entre la condition d'excitation requise pour l'observateur et la propriété du chaos.

Conclusions et perspectives

L'objectif de ce dernier chapitre est double : d'une part, il se veut être un bilan des contributions de ce travail dans le domaine de l'estimation nonlinéaire pour des systèmes d'écoulement, ainsi que pour des systèmes chaotiques. D'autre part, il vise à indiquer dans quelle mesure ces contributions peuvent donner lieu à des travaux supplémentaires.

En ce qui concerne les contributions, nous avons exploré la possibilité de développer des observateurs non linéaires pour la détection de fuites dans des canalisations sous pression. Pour cela, on a abordé en première instance l'obtention de modèles de dimension finie à partir des équations du coup de bélier en utilisant deux méthodes numériques : la méthode de collocation orthogonale et la méthode des différences finies. A partir des modèles obtenus et selon les besoins d'estimation, on a construit des observateurs à grand gain avec différentes formes de synthèse et de fonctionnement.

La recherche d'estimateur multi-fuites nous a en particulier amené à étudier une nouvelle forme d'observateur à grand gain pour les systèmes non uniformément observables. Cet observateur s'appuie sur une structure de système particulière, qui peut être obtenue à partir d'une transformation relativement facile à construire. Une fois le système obtenu sous cette structure, on a montré comment calculer le gain de l'observateur à partir de certaines conditions en utilisant les notions de stabilité de Lyapunov.

Un intérêt de cet observateur est le lien qu'il fait entre les propriétés des observateurs à grand gain et celles du filtre de Kalman étendu. D'ailleurs, on a appliqué cette nouvelle technique pour la détection de fuites dans des canalisations, ainsi que pour la synchronisation de systèmes chaotiques avec des paramètres inconnus.

En ce qui concerne la détection de fuites, indépendamment du nouvel observateur proposé, on a présenté la conception d'observateurs déjà existants dans la littérature pour des besoins divers de détection, et on a alors illustré l'efficacité des observateurs par l'intermédiaire de simulations, mais aussi d'expériences menées sur des bancs expérimentaux.

En ce qui concerne la synchronisation de systèmes chaotiques, on a présenté plu-

sieurs exemples. A ce sujet, on a utilisé des systèmes très connus dans la littérature, tels que, le système de Lorenz, le système de Rössler et les équations de Gray Scott. Notre contribution principale dans le domaine a été la synchronisation entre deux systèmes (*maître* et *esclave*) avec la méconnaissance de tous les paramètres du système *maître*. C'est-à-dire, qu'avec notre approche il est possible d'estimer tout les états et tous les paramètres de certains systèmes chaotiques.

De plus, on a exploré l'utilisation des observateurs non linéaires pour estimer les paramètres des systèmes chaotiques dans l'espace et le temps. Pour cela, on a donné comme exemple l'estimation des paramètres du système de Gray Scott.

En ce qui concerne les perspectives ouvertes par nos contributions, plusieurs pistes ont été indiquées à l'issue de chaque chapitre, et nous pouvons en rappeler quelques unes ici : tout d'abord la validation expérimentale de la détection de fuites multiples reste encore un travail à faire puisque, pour ce propos, il faut avoir l'instrumentation adéquate dans les canalisations d'essais.

D'un autre côté, l'utilisation des observateurs nonlinéaires conçus à partir de modèles finis pour la surveillance d'autres types de défauts que les fuites, ou d'autres types d'écoulement que l'eau devient une perspective intéressante pour le développement de travaux futurs. L'approfondissement des modèles, notamment de la friction, peut y être associé.

Un autre aspect à faire aboutir est la preuve de convergence pour l'observateur à grand gain adaptif présenté à la fin du Chapitre 3, dont le fonctionnement a été montré seulement en simulation avec des données réelles.

Finalement, nous proposons l'exploration formelle des propriétés de systèmes chaotiques pour trouver le lien entre elles et la condition d'excitation pour l'observateur. La caractérisation des entrées d'excitation permettant d'assurer la convergence et la performance de l'observation.

Bibliographie

- [1] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki, *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*, 2nd ed. Springer, 2006.
- [2] A. F. Colombo, P. Lee, and B. W. Karney, “A selective literature review of transient-based leak detection methods,” *Journal of Hydro-environment Research*, vol. 2, pp. 212–227, 2009.
- [3] M. V. Dyke, *An Album of Fluid Motion*. Stanford : Parabolic Press, 1982.
- [4] L. Torres, G. Besançon, and D. Georges, “A collocation model for water-hammer dynamics with application to leak detection,” in *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, 2008.
- [5] —, “Multi-leak estimator for pipelines based on an orthogonal collocation model,” in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, China, 2009.
- [6] —, “Collocation modeling with experimental validation for pipeline dynamics and application to transient data estimations,” in *European Control Conference*, Budapest, Hungary, 2009.
- [7] —, “EKF-like observer with stability for a class of triangular nonlinear systems,” 2010, submitted to IEEE Transactions on Automatic Control.
- [8] L. Torres, G. Besançon, and D. Georges., “A nonlinear observer approach for parameter estimation in chaotic systems,” 2010, submitted to Chaos, Solitons and Fractals.
- [9] E. B. Wylie and V. L. Streeter, *Fluid Transient*. McGr, 1978.
- [10] M. H. Chaudry, *Applied Hydraulic Transients*. Van, 1979.
- [11] A. Y. Allidina and A. Benkherouf, “Leak detection and location in gas pipelines,” *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, vol. 135, no. 2, pp. 142–148, 1988.
- [12] J. V. Villadsen and W. E. Stewart, “Solution of boundary value problems by orthogonal collocation,” *International Journal of Mathematics and computers in simulation*, vol. 1, no. 4, pp. 350–355, 2007.
- [13] J. F. Dulhoste, D. Georges, and G. Besançon, “Nonlinear control of open-channel water flow based on collocation control model,” *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 30, no. 3, pp. 254–266, 2004.
- [14] K. W. Morton and D. F. Mayers, *Numerical Solution of Partial Differential Equations, An Introduction*. Cambridge University Press, 2005.
- [15] C. A. J. Fletcher, *Computational Galerkin Methods*. Springer Verlag, 1984.
- [16] J. F. Dulhoste, “Contribution à la commande non linéaire de systèmes d’irrigation,” Ph.D. dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.

-
- [17] G. Besançon and A. Ticlea, "An immersion-based observer design for rank-observable nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 1, pp. 83–88, 2007.
- [18] F. Deza, E. Busvelle, J. P. Gauthier, and D. Rakotopara, "High gain estimation for nonlinear systems," *Systems and Control Letters*, vol. 18, no. 4, pp. 295–299, 1992.
- [19] G. Besançon, *Nonlinear Observers and applications*, G. Besançon, Ed. Springer, 2007.
- [20] R. Hermann and A. Krener, "Nonlinear controllability and observability," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 5, pp. 728–740, 1977.
- [21] H. Hammouri and M. Farza, "Nonlinear observers for locally uniformly observable systems," *ESAIM : Control, optimisation and calculus of Variations*, vol. 9, pp. 353–370, 2003.
- [22] J. P. Gauthier and I. A. K. Kupka, "Observability and observers for nonlinear systems," *Control and Optimization*, vol. 32, no. 4, pp. 975–994, 1994.
- [23] G. Bornard, N. Couenne, and G. Gilles, "Observability and observers," in *Nonlinear systems - T.1, Modeling and estimation*. London : Chapman&Hall, 1995, pp. 173–216.
- [24] J. Gauthier and G. Bornard, "Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, no. 5, pp. 922–926, 1981.
- [25] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems-applications to bioreactors," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 6, pp. 875–880, 1992.
- [26] G. Besançon and H. Hammouri, "On observer design for interconnected systems." *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control.*, vol. 8, no. 3, pp. 1–25, 1998.
- [27] R. Kalman and R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory," *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. D, pp. 35–40, 1960.
- [28] A. Gelb, "Applied optimal estimation," M.I.T., Tech. Rep., 1974.
- [29] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen, "An ekf-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability," *Automatica*, vol. 34, no. 9, pp. 1119–1123, 1998.
- [30] G. Bornard and H. Hammouri, "A high gain observer for a class of uniformly observable systems," in *Proc. of the 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, Brighton, UK, 1991, pp. 1494–1496.
- [31] G. Bornard and H. Hammouri, "A graph approach to uniform observability of nonlinear multi output systems," in *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, 2002, pp. 701–706.

- [32] J. Picard, "Efficiency of the extended kalman filter for nonlinear systems with small noise," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 39, no. 2, pp. 824–885, 1991.
- [33] F. Deza, D. Bossanne, E. Busvelle, J. P. Gauthier, and D. Rakotopara, "Exponential observers for nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 3, pp. 482–484, 1993.
- [34] J. P. Gauthier and I. Kupka, *Deterministic Observation theory and applications*. Cambridge University Press, 2001.
- [35] N. Boizot, E. Busvelle, and J. P. Gauthier, "An adaptive high-gain observer for nonlinear systems," *Automatica*, vol. 46, no. 9, pp. 1483–1488, 2010.
- [36] E. Bullinger and F. Allgöwer, "An adaptive high-gain observer for nonlinear systems," in *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, San Diego, California, USA, 1997.
- [37] V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi, "High gain observers with updated gain and homogeneous correction term," *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 422–428, 2009.
- [38] J. H. Ahrens and H. K. Khalil, "High-gain observers in the presence of measurement noise : A switched-gain approach," *Automatica*, vol. 45, no. 4, pp. 946–943, 2009.
- [39] G. Besançon, "Further results on high gain observers for nonlinear systems," in *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, AZ, USA, 1999, pp. 2904–2909.
- [40] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed. Prentice Hall, 1996.
- [41] N. Boizot and E. Busvelle, *Nonlinear observers and applications*. Springer, LNCIS 363, 2007, ch. Adaptive-gain observers and applications, pp. 71–114.
- [42] L. Billman and R. Isermann, "Leak detection methods for pipelines," in *Proceeding of the 8th IFAC Congress*, Budapest, Hungary, 1984, pp. 1813–1818.
- [43] B. Brunone and M. Ferrante, "Detecting leaks in pressurised pipes by means of transients," *Journal of Hydraulic Research*, vol. 39, no. 5, pp. 539–547, 2001.
- [44] X. J. Wang, "Leak detection in pipelines using the damping of fluid transients," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 128, no. 7, pp. 697–711, 2002.
- [45] W. Mpesha, M. N. Chaudry, and S. Gassman, "Leak detection in pipes by frequency response method," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 127, pp. 137–147, 2001.
- [46] D. Covas, H. Ramos, and A. B. de Almeida, "Standing wave difference method for leak detection in pipeline systems," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 131, no. 12, pp. 1106–1116, 2005.
- [47] M. Ferrante and B. Brunone, "Pipe system diagnosis and leak detection by unsteady-state test-1 : Harmonic analysis," *Advanced Water Resources*, vol. 26, no. 1, pp. 95–105, 2003.

- [48] C. Verde, N. Visairo, and S. Gentil, "Two leaks isolation in a pipeline by transient response," *Advances in Water Resources*, vol. 30, no. 8, pp. 1711–1721, 2007.
- [49] N. Bedjaoui, E. Weyer, and G. Bastin, "Methods for the localization of a leak in open water channels," *Networks and heterogeneous media*, vol. 4, no. 2, pp. 189–210, 2009.
- [50] E. Weyer and G. Bastin, "Leak detection in open water channels," in *Proceedings of the 17th World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [51] X. J. Wang, M. F. Lambert, and A. R. Simpson, "Detection and location of a partial blockage in a pipeline using damping of fluid transients," *Journal of water resources planning and management*, vol. 131, no. 3, pp. 244–249, 2005.
- [52] P. K. Mohapatra, M. H. Chaudhry, A. A. Kassem, and J. Moloo, "Detection of partial blockage in single pipelines," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 132, no. 2, pp. 200–206, 2006.
- [53] T. Li, "Exact boundary controllability and observability for first order quasilinear hyperbolic systems with a kind of nonlocal boundary conditions," *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, vol. 28, no. 1, pp. 243–257, 2010.
- [54] T. Li., "Observabilité exacte frontière pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires," *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 342, no. 12, pp. 937–942, 2006.
- [55] C. Verde, G. Bornard, and S. Gentil, "Isolability of multileaks in a pipeline," in *Proceedings 4th MATHMOD*, Vienna, Austria, 2003.
- [56] C. Verde and N. Visairo, "Identifiability of multi-leaks in a pipeline," in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 5, Boston, USA, 2004, pp. 4378 – 4383.
- [57] O. Begovich, J. García, and B. Leon, "Validation of a semiphysical pipeline model for multi-leak purposes," in *Proceedings of the 20th IASTED International Conference. Modelling and simulation*, 2009, pp. 24–29.
- [58] G. Pezzinga, "Quasi-2d model for unsteady flow in pipe networks," *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 125, no. 7, pp. 676–685, 1999.
- [59] E. J. Hinch, *Mixing Chaos and turbulence*. Cambridge University Press, 1999, ch. Mixing : Turbulence and Chaos - An Introduction, pp. 37–56.
- [60] O. E. Lanford, "The strange attractor theory of turbulence," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 14, pp. 347–364, 1982.
- [61] J. P. Crutchfield, "Are attractors relevant to turbulence?" *Physical Review Letters*, vol. 60, no. 26, pp. 2715–2718, 1988.
- [62] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Physical Review Letters*, vol. 64, pp. 821–824, 1990.
- [63] E. Mosekilde, Y. Maistrenko, and D. Postnov, *Chaotic Synchronization, Applications to living systems*. World Scientific, 2002.

- [64] J. H. Park, "Chaos synchronization of a chaotic system via nonlinear control," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 25, pp. 579–584, 2005.
- [65] H. Nijmeijer and I. Mareels, "An observer look at synchronization," *IEEE Transactions on circuits and systems I*, vol. 44, no. 10, pp. 882–890, 1997.
- [66] A. Loria, E. Panteley, and A. Zavala-Rio, "Adaptive observers with persistency of excitation for synchronization of chaotic systems," *IEEE Transactions on circuits and systems I*, vol. 56, no. 12, pp. 2703–2716, 2009.
- [67] G. Besançon, J. D. Leon-Morales, and J. Huerta-Guevara, "On adaptive observers for state affine systems," *International Journal of Control*, vol. 79, no. 6, pp. 581–591, 2006.
- [68] E. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp. 130–141, 1963.
- [69] J. Lu, X. Wu, and L. Lü, "Synchronization of a unified chaotic system and the application in secure communication," *Physic Letters A*, vol. 305, pp. 365–370, 2002.
- [70] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, "A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve," *Journal of Physiology*, vol. 117, no. 4, pp. 500–544, 1952.
- [71] J. L. Hindmarsh and R. M. Rose, "A model of the nerve impulse using two first-order differential equations," *Nature*, vol. 296, pp. 162–164, 1982.
- [72] —, "A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations," *Proceedings of the Royal Society of London B*, vol. 221, no. 1222, pp. 87–102, 1984.
- [73] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization : A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, 2001.
- [74] L. Kocarev, Z. Tasev, T. Stojanovski, and U. Parlitz, "Synchronizing spatio-temporal chaos," *Chaos*, vol. 7, no. 4, pp. 635–643, 1997.
- [75] L. Junge and U. Parlitz, "Synchronization and control of coupled ginzburg-landau equations using local coupling," *Physical Review E*, vol. 61, no. 4, pp. 3736–3742, 2000.
- [76] S. Boccaletti, C. Mendoza, and J. Bragard, "Synchronization of spatially extended chaotic systems with asymmetric coupling," *Brazilian Journal of physics*, vol. 35, no. 2B, pp. 411–417, 2005.
- [77] S. Boccaletti, J. Bragard, and F. T. Arecchi, "Controlling and synchronizing space time chaos," *Physical Review E*, vol. 59, no. 6, pp. 6574–6578, 1999.
- [78] G. S. Duane and J. Tribbia, "Synchronized chaos in geophysical fluid dynamics," *Physic Review Letters*, vol. 86, no. 19, pp. 4298–4301, 2001.
- [79] A. Khadra, X. Liu, and X. Shen, "Impulsive control and synchronization of spatiotemporal chaos," *Chaos, solitons and fractals*, vol. 26, pp. 615–636, 2005.