



**HAL**  
open science

# Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel — Application à la dynamique rotor

David Demailly

► **To cite this version:**

David Demailly. Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel — Application à la dynamique rotor. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2003. Français. NNT : . tel-00587168

**HAL Id: tel-00587168**

**<https://theses.hal.science/tel-00587168v1>**

Submitted on 19 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 2003-06

Année 2003

**THESE**

présentée pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

**Spécialité Mécanique**

par

**DAVID DEMAILLY**

**ETUDE DU COMPORTEMENT NON-LINEAIRE**

**DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL**

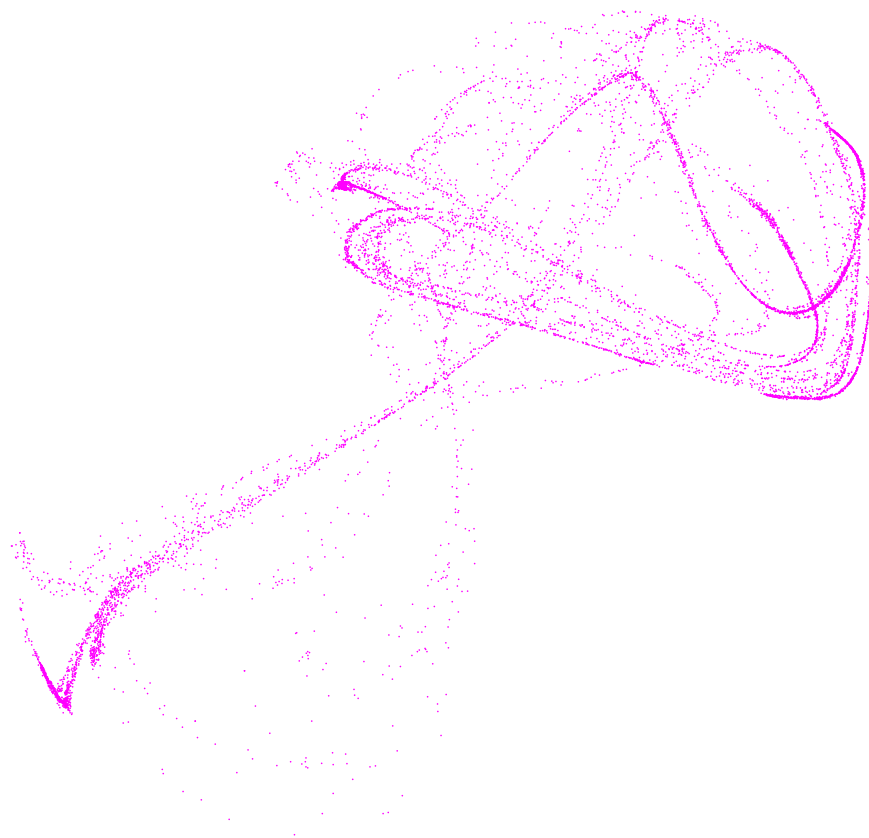
**APPLICATION A LA DYNAMIQUE ROTOR**

Soutenue le 28 Janvier 2003 devant le Jury :

M<sup>me</sup> E. AUBRY, Pr., MIPS, ESSAIM, Université de Haute Alsace  
M<sup>f</sup> J. BONINI, Responsable Département Méthodes, Snecma Moteurs  
M<sup>f</sup> J. C. GOLINVAL, Pr., ASMA, LTAS, Université de Liège  
M<sup>f</sup> G. JACQUET-RICHARDET, Pr., LMSt, INSA de Lyon  
M<sup>f</sup> L. JEZEQUEL, Pr., MS.GM.GC, LTDS, Ecole Centrale de Lyon  
M<sup>f</sup> F. THOUVEREZ, Pr., MS.GM.GC, LTDS, Ecole Centrale de Lyon

Rapporteur  
Examineur  
Rapporteur  
Président de Jury  
Directeur de Thèse  
Examineur





A mes parents.



# Avant-propos

Avant que vous ne commenciez à parcourir cette thèse, j'aimerais faire quelques remerciements.

Mes premiers remerciements s'adressent à Georges Jacquet-Richardet, qui a accepté de présider mon jury, puis Evelyne Aubry et Jean-Claude Golinval qui ont accepté la lourde tâche de rapporter mon travail.

Je remercie aussi Jérôme Bonini et Fabrice Thouverez pour l'accompagnement et l'encadrement qu'ils m'ont apportés tout au long de cette thèse. J'associe à ces remerciements Louis Jézéquel, d'une part pour m'avoir accepté au sein de son équipe, et d'autre part pour toute la confiance qu'il m'a accordé.

Je tiens également à dire merci toutes les personnes qui ont travaillé de près ou de loin sur le projet Dynamique d'Ensemble et grâce à qui le banc d'essais a pu voir le jour. J'en profite pour dire à Michel que ce fut un plaisir de partager le bureau avec lui.

Avec les remerciement que j'adresse à la Snecma Moteurs pour avoir supporté ces travaux de recherche, je souhaite dire combien j'ai apprécié l'accueil que m'ont réservé toutes les personnes du département Méthodes, en particulier Olivier et Franck.

A tous les permanents, thésards et anciens, je souhaite leur exprimer ma profonde gratitude, et leur dire combien ce fut un plaisir de passer ces quelques années à leur côté. Un grand merci entre autre à Magic qui a toujours répondu présent pour régler les problèmes informatiques.

Je n'oublierais pas mes collègues de l'Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, notamment Claude-Henri Lamarque qui m'a toujours épaulé et sans qui je n'aurais sans doute pas fait cette thèse.

Enfin, je ne saurais terminer ces quelques mots sans remercier mes proches, famille et amis, qui ont toujours su m'apporter leur soutien et grâce à qui ces années de thèse n'ont pu être que plus agréables.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Dynamique des rotors</b>	<b>9</b>
I.1 <b>Particularités des machines tournantes</b>	12
1.1 Les divers types d'excitations	12
1.2 La notion de vitesse critique	14
1.3 L'influence des dissymétries	15
1.4 Le rôle déstabilisant de l'amortissement interne	18
I.2 <b>Origine des non-linéarités</b>	19
2.1 Les roulements	19
2.2 Contact rotor/stator	22
<b>II Les méthodes non-linéaires</b>	<b>27</b>
II.1 Les méthodes temporelles	30
1.1 Les intégrateurs temporels	30
1.1a Principe de fonctionnement d'un intégrateur	31
1.1b Classification des schémas	32
1.1c Analyse de la stabilité	32
1.1d Etude de la précision	34



---

1.1e	Cas des problèmes non-linéaires . . . . .	35
1.2	La méthode des différences finies . . . . .	37
1.2a	Description de la méthode . . . . .	37
1.2b	Limitations de la méthode . . . . .	38
II.2	Les méthodes fréquentielles . . . . .	39
2.1	La méthode de balance harmonique incrémentale . . . . .	41
2.1a	La procédure de Newton-Raphson . . . . .	42
2.1b	La procédure de Galerkin . . . . .	43
2.1c	Evaluation des termes non-linéaires . . . . .	46
2.1d	Application d'autres algorithmes de résolution . . . . .	50
2.1e	Relation avec la méthode de balance harmonique . . . . .	52
2.2	La méthode de collocation trigonométrique . . . . .	52
2.2a	Procédure de collocation . . . . .	53
2.2b	Pondération par des Dirac . . . . .	54
2.2c	Collocation par moindres carrés . . . . .	55
II.3	Les techniques de continuation . . . . .	56
3.1	La paramétrisation . . . . .	57
3.1a	Paramétrisation par longueur d'arc . . . . .	57
3.1b	Paramétrisation sélective . . . . .	59
3.2	Les prédicteurs . . . . .	61
3.2a	Prédiction tangente . . . . .	61
3.2b	Prédiction par interpolation polynomiale . . . . .	64
3.3	Les correcteurs . . . . .	65
3.3a	Le correcteur de Newton-Raphson . . . . .	65

3.3b	Le correcteur de minimisation par moindres carrés . . . . .	66
3.4	Aspects pratiques . . . . .	66
3.4a	Gestion du pas . . . . .	67
3.4b	Mises à échelle . . . . .	67
3.4c	Homothétie . . . . .	68
3.5	Expression des jacobienes relatives à $\omega_f$ . . . . .	69
II.4	L'étude de la stabilité . . . . .	70
4.1	Stabilité . . . . .	71
4.1a	Quelques définitions . . . . .	71
4.1b	La théorie de Floquet . . . . .	72
4.2	Bifurcations . . . . .	74
4.2a	Les bifurcations de type <i>cyclic fold</i> . . . . .	75
4.2b	Les bifurcations de type <i>flip</i> . . . . .	78
4.2c	La bifurcation secondaire de Hopf . . . . .	80
4.3	Calcul effectif de la matrice monodrome . . . . .	82
4.3a	Le calcul direct . . . . .	82
4.3b	Cas des méthodes fréquentielles . . . . .	83
II.5	Les techniques de condensation . . . . .	86
5.1	La condensation du modèle spatial . . . . .	86
5.2	La condensation en fréquentiel . . . . .	87
5.3	La condensation en temporel . . . . .	88
5.4	La condensation aux connexions . . . . .	89
<b>III Analyse phénoménologique</b>		<b>93</b>
III.1	<b>Modélisation des roulements</b> . . . . .	<b>94</b>

1.1	Modélisation actuelle . . . . .	94
1.1a	Le modèle radial bi-linéaire . . . . .	95
1.1b	Le raccordement du maillage . . . . .	96
1.2	Théorie du contact de Hertz . . . . .	97
1.2a	Relation fondamentale . . . . .	97
1.2b	Application au contact bille/bague . . . . .	98
1.2c	Extension au contact rouleau/bague . . . . .	100
1.3	Modélisation 2D . . . . .	101
1.3a	Cinématique interne d'un roulement . . . . .	101
1.3b	Expressions des efforts transmis . . . . .	102
1.3c	Prise en compte d'une précharge axiale . . . . .	104
1.4	Phénomènes annexes . . . . .	104
<b>III.2</b>	<b>La méthode de tir . . . . .</b>	<b>106</b>
2.1	Formulation du problème . . . . .	107
2.2	La procédure de Newton-Fox . . . . .	108
2.3	Expression de la jacobienne relative à $\omega_f$ . . . . .	110
2.4	Extension au tir multiple . . . . .	110
2.5	Extraction de la matrice monodrôme . . . . .	112
<b>III.3</b>	<b>Application sur des modèles simplifiés . . . . .</b>	<b>113</b>
3.1	Exemple avec le modèle radial bi-linéaire . . . . .	113
3.2	Etude du phénomène de prise de contact . . . . .	118
3.3	Utilisation du modèle 2D . . . . .	124
<b>IV</b>	<b>Eléments finis en temps . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>IV.1</b>	<b>Un bref historique . . . . .</b>	<b>129</b>

---

1.1	La formulation variationnelle . . . . .	129
1.1a	La limitation du principe d'Hamilton . . . . .	130
1.1b	La loi de variation de l'action d'Hamilton . . . . .	130
1.2	D'une approche globale vers une approche locale . . . . .	131
IV.2	Description de la méthode . . . . .	132
2.1	Principe de la méthode . . . . .	132
2.1a	Application de la loi d'Hamilton . . . . .	133
2.1b	Opération d'assemblage . . . . .	135
2.1c	Condensation . . . . .	136
2.2	Gestion des non-linéarités . . . . .	136
2.2a	Démarche usuelle . . . . .	137
2.2b	Interpolation des forces non-linéaires . . . . .	138
2.2c	Comparaison des méthodes de quadrature . . . . .	140
2.3	Expression des jacobienes . . . . .	141
2.3a	Jacobienne par rapport à $\underline{X}$ . . . . .	143
2.3b	Jacobienne par rapport à $\omega_f$ . . . . .	144
2.4	Analyse de la stabilité . . . . .	145
2.4a	Linéarisation . . . . .	145
2.4b	Assemblage . . . . .	146
2.4c	Problème d'instabilité . . . . .	148
2.4d	Quadrature réduite . . . . .	149
IV.3	Applications de la méthode . . . . .	151
3.1	Exemples de validation . . . . .	151
3.1a	Calcul des multiplicateurs de Floquet . . . . .	152

3.1b	Intégration de termes non-linéaires en vitesse . . . . .	153
3.2	Applications avec le modèle de roulement 2D . . . . .	157
3.2a	Cas d'un système rotor / stator à 4 <i>ddl</i> . . . . .	157
3.2b	Cas d'un modèle éléments finis . . . . .	159
<b>V</b>	<b>Partie expérimentale</b>	<b>167</b>
V.1	<b>Description générale</b> . . . . .	168
1.1	Motivations de sa construction . . . . .	168
1.1a	Les enjeux actuels . . . . .	169
1.1b	Un banc promis à évoluer . . . . .	169
1.2	Caractéristiques principales . . . . .	170
1.2a	Les rotors basse et haute-pression . . . . .	170
1.2b	Les supports-paliers . . . . .	171
1.3	Equipements . . . . .	172
1.3a	Instrumentation . . . . .	172
1.3b	Dispositifs de sécurité . . . . .	174
V.2	<b>Essais préliminaires</b> . . . . .	176
2.1	Essais d'analyse modale . . . . .	176
2.2	Mesure de raideur des supports-paliers . . . . .	180
2.3	Recalage des modèles éléments finis . . . . .	180
2.4	Vérification du dimensionnement . . . . .	183
V.3	<b>Exploitation du banc</b> . . . . .	185
3.1	Procédure d'alignement . . . . .	185
3.2	Résultats sur l'équilibrage . . . . .	186
3.2a	Méthode des trois masselottes . . . . .	187

---

3.2b	Méthode des coefficients d'influence . . . . .	188
3.3	Passage de la vitesse critique . . . . .	190
3.3a	Essais de montée en régime . . . . .	190
3.3b	Utilisation d'un support-palier élastomère . . . . .	191
<b>Conclusion et Perspectives</b>		<b>195</b>



# Résumé

Parmi tous les composants mécaniques présents dans un moteur d'avion, les roulements tiennent une place majeure puisqu'ils assurent la liaison entre les parties tournantes, les rotors, et les parties fixes, les stators. Pour assurer leur bon fonctionnement, un jeu radial interne est nécessaire. Les roulements présentent de ce fait une non-linéarité forte qui peut affecter le comportement vibratoire de la structure.

L'objectif de cette thèse, réalisée en collaboration avec la société Snecma Moteurs, est d'étudier l'influence de ce jeu fonctionnel sur la dynamique rotor. A cette fin, un banc expérimental, dénommé banc Dynamique D'Ensemble, a été réalisé.

Dans un premier temps, l'aspect modélisation des roulements sera traité. Le modèle proposé, qui prend en compte le jeu radial et considère le contact bille/bague comme hertzien, nécessite cependant des outils de calcul appropriés. Nous présenterons alors la méthode de tir multiple et la méthode des éléments finis en temps avant de montrer les résultats de calculs effectués sur divers exemples.

Dans un second temps, nous présenterons le banc Dynamique D'Ensemble qui permettra de valider expérimentalement les modèles de roulements utilisés. Ce banc a été conçu pour être le plus simple possible, tout en restant le plus représentatif d'un moteur d'avion. Nous exposerons tout d'abord les aspects dimensionnement et recalage, puis les premiers résultats obtenus sur banc tournant.

## Mots clés :

dynamique rotor, jeu de roulement, contact de Hertz  
méthodes non-linéaires, analyse de la stabilité  
dimensionnement, essais expérimentaux





# Abstract

Of all mechanical components in aircraft engines, bearings are primordial since they connect rotating parts, namely the rotors, to non-rotating parts, namely the stators. The good running is insured by an internal radial clearance. This latter gives to bearings a strongly nonlinear behaviour which can affect rotordynamics.

The aim of this thesis is to study the influence of the clearance on rotordynamics. For this purpose, an experimental set-up, called DDE bench, has been built-up.

The first part is devoted to bearing model bearings. The one developed here takes into account the radial clearance and assumes that the balls/raceways contact is of hertzian nature. Specific algorithms based on the multiple shooting method and the time finite element method are used. These methods will be thoroughly studied before presenting some results on relevant examples.

The description of the DDE bench will follow. This one will help us to validate the bearing models. It was designed to be as simple as possible, while remaining representative of an actual aircraft engine. Elements of design and updating will be addressed. The obtained results will then be presented.

## Keywords :

rotordynamics, bearing clearance, Hertz contact  
nonlinear methods, stability analysis  
mechanical design, testing



# Introduction

Les exigences fonctionnelles de tout équipement sont bien entendu le premier souci du concepteur. Pour les moteurs d'avions, on cherche donc tout d'abord à optimiser le rendement. Mais les tendances actuelles visent à diminuer la masse totale, à augmenter les vitesses de rotation, à réduire les jeux entre parties tournantes et parties fixes, ainsi qu'à accroître la durée de vie et améliorer la fiabilité. Les aspects concernant la dynamique des rotors doivent dès lors être analysés au début même du stade de la conception, afin de s'assurer du fonctionnement sain et correct du moteur.

La dynamique des machines tournantes est un domaine particulier de la mécanique qui a depuis longtemps intéressé autant la communauté scientifique que le monde industriel, les premiers y voyant un vaste domaine à explorer, riche en phénomènes physiques complexes, les seconds un atout majeur non seulement pour la compréhension des problèmes rencontrés mais aussi pour l'innovation technologique.

Jusque dans les années 1980, les recherches étaient axées vers le calcul des modes propres d'aubes et de roues aubagées, la détermination des vitesses critiques et la prédiction des amplitudes de réponse de rotors soumis à un balourd. Depuis, on s'oriente vers une amélioration des modèles pour obtenir des prédictions de plus en plus réalistes, ce qui passe bien entendu par une meilleure compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Les études portent donc à présent sur une modélisation plus fine de chaque composant (comme les roulements ou les amortisseurs par film d'huile), de chaque liaison ou interface (liaisons boulonnées ou à gorge en v, interfaces au niveau des aubes), . . .

Parmi tous les composants que l'on trouve sur un moteur d'avion, les roulements jouent un rôle majeur puisqu'ils assurent la liaison entre les parties tournantes, les *rotors*, et les parties fixes, les *stators*. Cependant, un jeu radial est nécessaire pour assurer leur bon fonctionnement. Les roulements présentent de ce fait une non-linéarité forte qui peut affecter le comportement vibratoire de la structure. L'objectif de cette thèse, réalisée en collaboration avec la société Snecma Moteurs, est d'étudier l'influence de ce jeu fonctionnel sur la dynamique rotor, l'idée étant de pouvoir à terme quantifier les jeux de roulement à partir de mesures expérimentales.

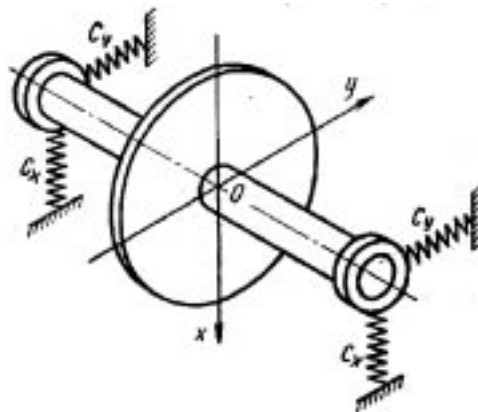


FIG. 1: *Modélisation des roulements par des ressorts*

A cette fin, nous avons dimensionné un banc expérimental dénommé banc *Dynamique D'Ensemble*. Celui-ci a été conçu pour être le plus simple possible tout en restant représentatif d'un moteur d'avion civil, de type turboréacteur à double flux. Nous nous sommes cependant orientés dès sa conception vers un banc modulable et évolutif, qui puisse être facilement adapté et utilisé pour des études à plus long terme, concernant par exemple le contact aubes/carter. Ce banc va nous permettre d'une part d'acquérir une base de données expérimentales sur la signature spectrale de ce type de non-linéarité et d'autre part de valider les modèles numériques proposés dans cette étude.

Le modèle classiquement utilisé est un modèle linéaire, composé d'un assemblage de deux ressorts orthogonaux entre eux et à l'axe de rotation, comme montré sur la figure 1. Ce modèle ne prend bien entendu pas en compte le jeu radial. Un modèle plus évolué intégrant cette non-linéarité intrinsèque sera donc proposé. Il faut alors avoir recours à des algorithmes de calculs capables de traiter des problèmes incluant ce type de non-linéarités.

L'approche traditionnelle est l'intégration temporelle. Cependant, cette approche s'avère coûteuse en temps de calcul, surtout pour des structures faiblement amorties. Si, dans le cadre de l'analyse transitoire, l'intégration temporelle est la seule alternative, il n'en est pas de même pour l'étude en régime forcé, en particulier l'étude des réponses à balourd. Dans ce cas, il est préférable d'avoir recours à des méthodes spécialement dédiées au calcul dans le domaine fréquentiel. Nous avons donc développé de nouveaux outils que nous présenterons dans ce document, destinés aux calculs de réponses à balourd et capables de traiter les problèmes avec jeu.

## Structure du document

Le premier chapitre du mémoire est consacré à la dynamique des rotors. Les machines tournantes possèdent en effet certaines particularités comparativement aux structures fixes. Dans un premier temps, les principaux points qui leur sont propres sont donc précisés. La seconde partie porte quant à elle sur les phénomènes non-linéaires typiquement rencontré dans les moteurs d'avion.

Le lecteur trouvera, au deuxième chapitre, une synthèse des méthodes utilisables dans le domaine fréquentiel pour traiter les problèmes intégrant des non-linéarités. En plus du cadre théorique, nous évoquons aussi les aspects un peu plus pratique comme les techniques de continuation et de condensation. Une attention particulière est également apportée à l'analyse de la stabilité, en l'abordant notamment du point de vue fréquentiel.

Dans le troisième chapitre, nous exposons la nouvelle modélisation proposée pour les roulements. Celle-ci est basée sur la théorie du contact de Hertz et prend en considération le jeu radial. Les exemples, traités avec la méthode de tir adaptée dans sa version multiple, montrent alors la richesse comportementale induite par la présence du jeu. Cette méthode demande cependant un temps de calcul excessif pour des systèmes de taille importante.

Nous nous sommes donc orientés vers une seconde méthode : la méthode des éléments finis en temps. Cette méthode, qui fait l'objet du quatrième chapitre, s'apparente à la méthode des éléments finis classique, c'est-à-dire en spatial. La structure creuse des matrices qu'elle met en jeu associée à une technique d'évaluation des forces non-linéaires astucieuse permet de traiter des problèmes plus conséquents.

Enfin, le cinquième et dernier chapitre porte sur le banc d'essais *Dynamique D'Ensemble*. Il présente d'abord les motivations de sa construction avant de présenter ses caractéristiques principales et les divers équipements. Les résultats des essais préliminaires qui ont servi pour le recalage des modèles éléments finis sont ensuite reportés. Pour finir, on présente les procédures établies et suivies pour l'exploitation du banc ainsi que les résultats des premiers essais obtenus sur banc tournant.





# Chapitre I

---

---

## Dynamique des rotors

*Généralités*

---

---

Le plus simple écolier sait maintenant des vérités pour  
lesquelles Archimède eût sacrifié sa vie.

**Ernest Renan**



## Introduction

Les rotors sont définis comme *tout élément tournant autour d'un axe fixe*. Le champ des rotors est donc vaste, les satellites géostationnaires animés d'une rotation libre étant, conformément à cette définition, des rotors. De tels rotors sont appelés rotors *libres*, par opposition aux *rotors fixés* qui sont eux supportés par des paliers. Ces derniers sont présents dans de nombreux domaines : l'aéronautique, l'automobile, le nucléaire, ou encore l'industrie pétrolière. Dans notre étude, on se focalisera sur les rotors fixés, plus précisément sur ceux des moteurs d'avion. Comme le montre la figure I.1, sur les rotors des moteurs d'avion on distingue un arbre, une partie *compresseur* et une partie *turbine*. Les compresseurs permettent de comprimer l'air aspiré par l'avant, air qui est alors chauffé par la combustion d'un carburant puis détendu et rejeté vers l'arrière à grande vitesse à travers la tuyère. Les turbines quant à elles permettent de prélever une partie de l'énergie du gaz pour provoquer le fonctionnement des compresseurs, qu'elles entraînent par l'arbre.

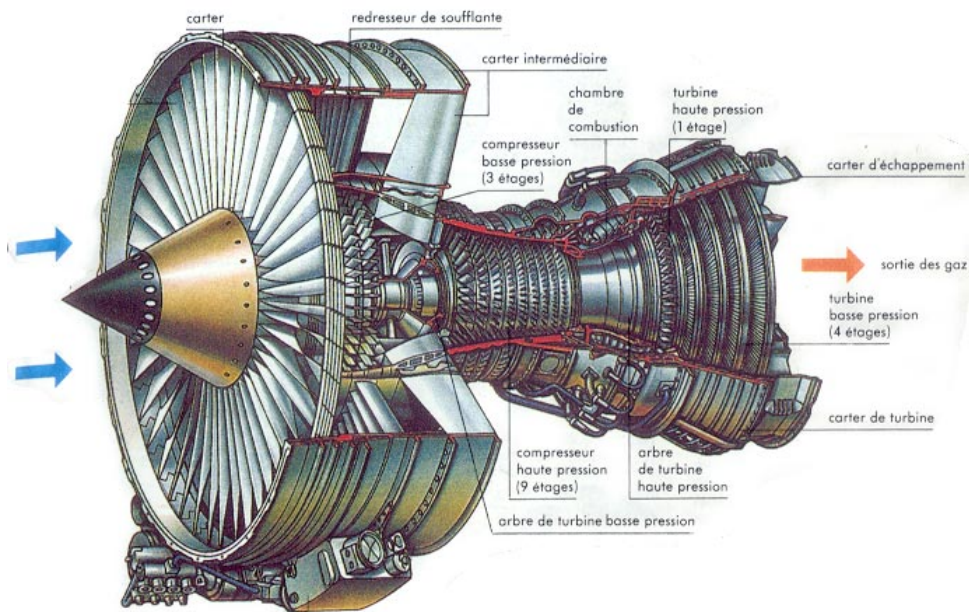


FIG. I.1: Moteur d'avion de type turboréacteur à double flux

Pour étudier la dynamique d'un système comportant un ou plusieurs rotors, il est possible d'écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe soit dans un repère tournant à la même vitesse de rotation que le rotor. On utilise un repère tournant principalement pour l'étude des roues ou disques aubagés. Dans le contexte qui nous intéresse, celui de la dynamique d'ensemble, le repère fixe est plus approprié. Il convient de préciser

que ces deux domaines sont étudiés en parallèle, les fréquences propres des roues aubagées se plaçant bien au-delà de celles des arbres sur lesquels elles sont montées.

Lors de la mise en équation, on utilise les angles d'Euler pour décrire le mouvement d'un élément de rotor, comme pour le mouvement général de tout solide. Les équations du mouvement comportent ainsi de nombreuses non-linéarités. Pour l'étude dynamique des rotors cela dit, l'hypothèse de petits déplacements est classiquement avancée. On suppose aussi que la vitesse de rotation est constante, ou tout au moins qu'il s'agit d'une fonction connue du temps. Cela permet d'obtenir des équations du mouvement linéaires. Les vibrations axiales et de torsion se trouvent de plus découplées des vibrations de flexion, auxquelles on s'intéresse plus particulièrement en dynamique d'ensemble.

Les études essentielles en dynamique rotor concernent le tracé du diagramme de Campbell, qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, et le calcul des réponses à balourd, principalement lors du passage des vitesses critiques. Pour réaliser de telles études, on dispose aujourd'hui de nombreux outils de modélisation comme la méthode des matrices de transfert, des éléments finis, de l'expansion polynomiale généralisée ou encore des fonctions de transfert distribuées. Toutes ces méthodes permettent de prendre en compte les particularités que présentent la dynamique des rotors vis-à-vis de la dynamique des structures fixes. On peut citer par exemple l'existence de moments gyroscopiques responsables de la variation de la fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation ou celle de forces circulatoires qui rendent le mouvement instable à partir d'une certaine vitesse, et ce même dans le cadre purement linéaire.

Nous présenterons donc dans un premier temps les divers aspects propres aux rotors avant de présenter, dans un deuxième temps, les sources de non-linéarités présentes dans les moteurs, en particulier celles provenant des roulements ou des problèmes d'interaction entre rotor et stator.

## I.1 Particularités des machines tournantes

### 1.1 Les divers types d'excitations

Les moteurs d'avion sont soumis à diverses sollicitations extérieures. Outre le poids propre, on trouve les efforts de balourd, qui sont propres aux machines tournantes. Ceux-ci correspondent aux forces d'inertie générées par le mouvement rotatif des masses excentrées et non équilibrées du rotor. Lorsqu'une pièce d'un rotor possède des axes principaux d'inertie transversale non orthogonaux à l'axe de rotation, un couple est aussi produit. On le qualifie de *balourd dynamique*, par opposition à *balourd statique* usuellement employé pour désigner la force. Pour une vitesse de rotation constante, l'expression de ces efforts dans un repère fixe est de la forme

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m.e.\Omega^2.\cos(\Omega.t - \alpha) \\ m.e.\Omega^2.\sin(\Omega.t - \alpha) \\ (I_d - I_p).\tau.\Omega^2.\cos(\Omega.t - \beta) \\ (I_d - I_p).\tau.\Omega^2.\sin(\Omega.t - \beta) \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

où  $m$ ,  $I_d$ , et  $I_p$  sont respectivement la masse, l'inertie diamétrale et l'inertie polaire,  $e$  l'excentricité du centre de gravité,  $\tau$  l'angle d'inclinaison de l'axe d'inertie (supposé faible),  $\alpha$  et  $\beta$  leur phase. Si la vitesse de rotation n'est pas constante, des termes de couplage en  $\dot{\Omega}$  viennent s'ajouter.

L'origine des efforts de balourd est variée. Il peut s'agir soit de problèmes d'usinage, de montage, voire de gradients thermiques qui peuvent induire un fléchissement de l'arbre. Puisqu'ils constituent la source majeure d'excitation, il faut tenter de les minimiser.

Pour cela, l'usinage des pièces tournantes de moteurs est toujours suivi d'une rectification pour respecter des tolérances sévères. Ensuite, durant la phase de montage, un très grand soin est apporté ; la seule opération robotisée lors de l'assemblage d'un moteur est d'ailleurs la pesée des aubes, qui permet, une fois terminée, d'optimiser la position des aubes afin de minimiser le balourd résiduel. A chaque stade de la fabrication du moteur, on effectue de plus un équilibrage (quatre phases d'équilibrage au total : pièces primaires, modules assemblés, rotors assemblés et *in-situ*). Cette opération consiste à apporter des ajouts de masses ponctuels pour compenser les balourds résiduels, et permet de se retrouver avec un balourd final admissible.

D'un autre côté, le balourd peut aussi survenir en phase d'utilisation à cause de la perte d'une aube ou la détérioration de certains éléments du moteur suite à un incident. Ce cas de figure se produit par exemple lors d'ingestion de grêlons ou d'oiseaux. Cela cause des dégâts considérables car, une fois aspiré, l'oiseau vient heurter la soufflante, endommageant ainsi certaines aubes, ce qui génère aussitôt un important balourd. De plus, suite à l'impact, ces pièces peuvent se désolidariser des rotors. Les carters sont donc dimensionnés pour que les débris soient contenus, afin d'assurer l'intégrité du moteur et la sécurité des passagers. La capacité de rétention d'un moteur rentre d'ailleurs en ligne de compte dans sa qualification, et des nombreux essais d'ingestion sont réalisés afin de l'apprécier.

Les réponses dynamiques pour ces balourds exceptionnels se distinguent de celles observées en condition normale de fonctionnement, *i.e.* induites par un *faible balourd*. En effet, les mécanismes qui rentrent en compte sont nombreux et très complexes : mouvements de grandes amplitudes et déformations importantes, problèmes de contacts et frottements avec le stator, plastification de certaines pièces et propagation de fissures, desserremments de boulons et ouvertures de brides, décélération rapide des rotors, . . . [124] Les calculs de réponse à *fort balourd* s'effectuent donc exclusivement par intégration temporelle (phénomène transitoire). En particulier, l'étude d'ingestions d'oiseaux ou de pertes d'aubes demande de prendre des pas de temps très faibles. Ces problèmes sont donc classés dans la *dynamique rapide*.

En outre, bien que l'alimentation du moteur soit automatiquement coupé lors d'un tel événement, les rotors continuent à tourner, à faible vitesse, à cause du flux d'air entrant. C'est ce qu'on appelle le *wind-milling* [145]. Le fort balourd persiste donc et peut s'avérer dangereux s'il vient exciter un mode de l'aile.

Le *wind-milling* est un bon exemple de couplage aérodynamique. Mais ces couplages existent aussi en régime normal : si pour l'étude de la dynamique d'ensemble du moteur on ne les prend pas en considération (le couplage intervient uniquement de manière indirecte via la vitesse de rotation), ils sont de première importance pour l'étude des roues aubagées. Premièrement, compte tenu de la rotation et de la présence de nombreux obstacles gênant le passage de l'air dans le moteur (raidisseurs, redresseurs de flux), les aubes se trouvent excitées par des impulsions dues à la discontinuité de l'écoulement et de fréquence égale à la vitesse de rotation que multiplie le nombre d'obstacles. Secondement, l'écoulement de l'air autour des aubes peut amener des problèmes d'instabilité de type flottement, *i.e.* l'apparition de vibrations auto-entretenues qui peuvent mener à la rupture.

Enfin, il faut préciser que les rotors subissent des effets d'inertie lorsque l'avion tourne. Très peu d'études ont été menées sur ce sujet. Ces efforts, nommés *forces de manœuvre*, amènent des vibrations transitoires de basses fréquences qui viennent se moduler avec les vibrations synchrones du balourd [114, 102].

## 1.2 La notion de vitesse critique

Il est connu que les modes propres d'un système conservatif en rotation sont des modes complexes deux à deux conjugués à pulsations propres purement imaginaires. Cela est dû aux effets gyroscopiques, induits par la rotation, qui couplent les déplacements horizontaux et verticaux [66, 59]. Ils peuvent cependant être associés pour obtenir des modes réels qualifiés soit de *direct*, soit de *rétrograde*, suivant que le mouvement de précession qui leur est associé est dans un sens identique ou contraire au mouvement de rotation.

Le point essentiel est la dépendance de leur fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ . Le graphique représentant l'évolution de celles-ci en fonction de  $\Omega$  s'appelle le diagramme de Campbell [76]. On peut démontrer que la partie de l'énergie cinétique relative aux termes gyroscopiques est positive (négative) pour les modes directs (rétrogrades), si bien que les effets gyroscopiques tendent à rigidifier (assouplir) la structure [23]. Ainsi, les courbes croissantes (décroissantes) du diagramme de Campbell (figure I.2) sont relatives aux modes directs (rétrogrades). L'amortissement modal  $\xi$ , lui aussi, évolue en fonction de la vitesse de rotation. Le tracé du diagramme  $\xi$  en fonction de  $\Omega$  permet donc de statuer sur la stabilité du système tournant en présence d'amortissement.

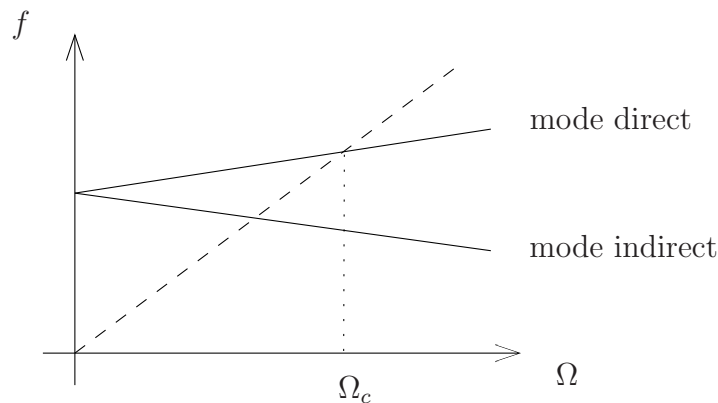


FIG. I.2: *Diagramme de Campbell*

L'excitation majeure dans un système en rotation étant les forces synchrones de balourd, il est possible de détecter les phénomènes de résonance en reportant la droite d'équation  $f = \Omega$ , appelée droite d'excitation synchrone, sur le diagramme de Campbell. Les points d'intersection avec les courbes des fréquences propres directes fournissent les vitesses auxquelles les résonances ont lieu. Ces vitesses portent le nom de *vitesses critiques*. Les points d'intersection avec les fréquences propres rétrogrades n'ont pas d'intérêt à première vue puisqu'elles ne peuvent être excitées par un balourd (au même titre qu'une poutre sollicitée uniquement horizontalement ne peut vibrer verticalement), à moins qu'il

n'existe des couplages ou des interactions. Il faut préciser que dans le cas d'un système bi-rotor (ou plus, certains moteurs possédant un rotor *moyenne pression*), il convient de reporter sur le diagramme les droites synchrones correspondant aux deux rotors,  $f = \Omega_{BP}$  et  $f = \Omega_{HP}$ , car le balourd présent sur un rotor peut exciter aussi l'autre rotor. Le nombre de vitesses critiques se trouve ainsi doublé (on distingue les vitesses critiques produites par le rotor basse pression et celles produites par le rotor haute pression). De plus, on reporte parfois aussi les droites d'équation  $f = n.\Omega$  ou  $f = \Omega/n$  pour repérer les vitesses auxquelles des pics super ou sous-harmoniques causées par des non-linéarités peuvent éventuellement survenir.

La détermination des vitesses critiques demande donc le tracé du diagramme de Campbell, *i.e.* un calcul de modes propres à chaque vitesse de rotation (méthode de balayage en fréquence). Le temps de calcul est donc important. Pour traiter efficacement les systèmes de taille importante, G. GENTA a proposé une technique itérative basée sur la décomposition en parties proportionnelle et non proportionnelle des matrices d'amortissement et gyroscopiques pour le calcul de valeurs propres [57].

Dans le cas particulier de systèmes non amortis et sans couplage directionnel, il est possible de calculer directement les vitesses critiques (c'est-à-dire sans passer par l'extraction des fréquences propres pour diverses valeurs de la vitesse de rotation). Il suffit d'injecter la relation  $\omega = \pm\lambda.\Omega$  dans l'équation homogène du mouvement, le signe étant positif (négatif) pour les vitesses critiques directes (rétrogrades) [16]. La résolution du problème aux valeurs propres alors obtenu fournit d'emblée les vitesses critiques. Le coefficient  $\lambda$  est introduit pour la conversion des unités ainsi que pour gérer les excitations induites par les balourds d'autres rotors ou rechercher les éventuels pics de réponses sur ou sous-harmoniques.

### 1.3 L'influence des dissymétries

Si les rotors sont souvent axisymétriques, axisymétrie de forme bien sûr mais aussi en comportement (pour des rotors en matériaux composites par exemple), il n'en est pas de même pour les stators : la présence d'éléments juxtaposés aux carters, la fixation avec l'aile, . . . créent des dissymétries à la fois de masse et surtout de raideur.

L'influence des dissymétries en raideur des paliers sur la dynamique du rotor est bien documentée. Tout d'abord, on note que si les raideurs transversales dans deux directions principales sont différentes, la réponse synchrone du rotor à un balourd est un mouvement de précession elliptique au lieu de circulaire. De plus, à l'arrêt, les modes propres dans les plans vertical et horizontal ont naturellement des fréquences propres distinctes. Les modes

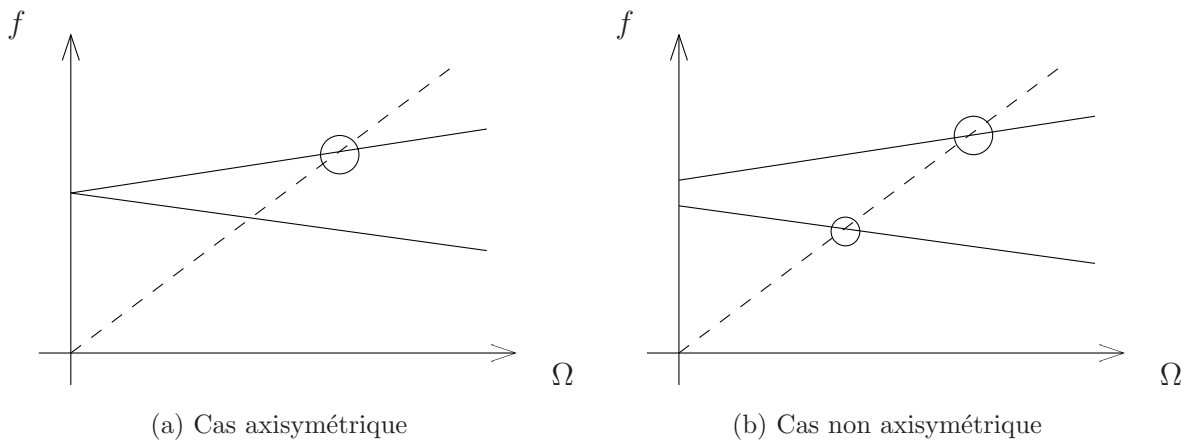


FIG. I.3: Influence des dissymétries sur le diagramme de Campbell

classiquement associés par paires dans le contexte axisymétrique (car identiques à vitesse de rotation nulle), avec un mode direct et un mode rétrograde, sont dès lors différents l'un de l'autre. On montre d'ailleurs que pour chacun des deux une vitesse critique existe [76]. Lors d'une réponse à balourd, on observe donc non plus un pic de résonance mais deux (on parle de phénomène de dédoublement de résonance, *split resonances* dans la littérature anglo-saxonne) : le mode *rétrograde* est excité (cf. figure I.3).

Dans certaines plages de vitesse de rotation, on observe alors un mouvement de précession rétrograde du rotor, engendrant ainsi des contraintes axiales normales alternées dans le rotor qui peuvent s'avérer nuisible (diminution de la durée de vie à cause de la fatigue cyclique, apparition de fissures). Cependant, ces plages sont relativement étroites et se trouvent aux alentours de vitesses critiques, *i.e.* des zones dans lesquelles les opérations prolongées sont naturellement prohibées (afin d'éviter les phénomènes d'amplification dynamique). Les mouvements rétrogrades apparaissent donc de manière transitoire, lors des passages de vitesses critiques.

Ce phénomène est classique et peut être inhibé lorsque l'amortissement est suffisant. De nombreuses études numériques et expérimentales ont permis de le mettre en évidence. Un point moins connu mais pourtant bien réel est l'existence simultanée de la précession directe et de la précession rétrograde. C. RAO et *al.* ainsi que A. MUSZYNSKA ont mené avec succès des expériences durant lesquelles ce cas de figure s'est manifesté [109, 94]. C. RAO et *al.* ont étudié un rotor de type Jeffcott supporté par des paliers hydrodynamiques soumis à l'influence de la gravité, avec différentes valeurs de jeu radial pour les paliers. Ils ont constaté, pour un jeu dans un certain intervalle, un dédoublement du pic de résonance, avec le rotor qui orbite dans un sens au niveau du disque et dans l'autre partout ailleurs sur l'arbre. Il s'avère que le mouvement de précession rétrograde est effectivement initié au niveau du disque, et, qu'avec l'augmentation de la vitesse de rotation,

il s'étend progressivement le long de l'arbre puis diminue de nouveau avant de disparaître totalement.

De son côté, A. MUSZYNSKA s'est intéressée à l'étude d'un rotor vertical monté sur roulement à billes et possédant un battement total. L'anisotropie des paliers est assurée par des ressorts de raideurs différentes pour le maintien des bagues extérieures de roulement. Le rotor possède un disque en extrémité qui génère des effets gyroscopiques. Les essais ont révélé l'existence de vitesses de rotation pour lesquelles l'extrémité de l'arbre accouplée avec le moteur d'entraînement orbite dans le sens direct et le disque à l'autre extrémité orbite dans le sens rétrograde.

La dérivation d'un modèle simplifié lui permet d'analyser les contraintes dans l'arbre, révélant ainsi la décomposition de celles-ci en une composante constante et une composante harmonique d'ordre 2 (*i.e.* dont la dépendance en temps est en  $2\Omega t$ ,  $\Omega$  étant la vitesse de rotation de l'arbre). Une analyse paramétrique à partir de ce modèle recalé confirme les rôles du balourd et de l'amortissement dans l'apparition de ce phénomène.

Pour connaître le sens de précession à une abscisse donnée sur l'arbre, le moyen le plus simple est de regarder le déphasage entre le déplacement horizontal et le déplacement vertical (ou toutes autres données analogues). Expérimentalement, cela requiert l'utilisation de capteurs placés perpendiculairement dans un même plan et d'un oscilloscope (ou d'un matériel d'acquisition de signaux). On peut également relever le sens de précession directement à partir de l'orbite si on utilise un top-tour connecté à l'entrée "impulsion" de l'oscilloscope [46].

Au-delà de la simple observation, il est aussi possible de déterminer le sens de précession par le calcul : si  $\vec{OA}$  représente le vecteur déplacement d'un point  $A$  placé sur la fibre neutre du rotor par rapport un point  $O$  fixe (situé sur l'axe d'alignement) et  $\vec{V}(A)$  sa vitesse, alors  $\vec{OA} \wedge \vec{V}(A)$  est positif alors le mouvement de précession est direct, sinon il est rétrograde. Basé sur ce principe, C. RAO et *al.* fournit les plans d'un circuit électronique de type différentiateur-multiplicateur qui délivre une tension continue positive ou négative suivant le sens de la précession.

Comme précisé au départ, la dissymétrie des rotors est beaucoup plus rare, mais elle peut exister. Il s'agit principalement de dissymétries d'inertie (anisotropie des inerties diamétrales) ou de dissymétries de raideur (pour les rotors en matériaux composites par exemple). En raison de la rotation propre, les équations décrivant la dynamique du système comportent alors des termes fonction du temps, qui peuvent, dans certaines circonstances, générer des instabilités. Le mouvement d'un tel rotor, même parfaitement équilibré, peut donc diverger. Il a été démontré que les zones d'instabilité se trouvent entre les vitesses critiques dédoublées [154] et qu'elles peuvent disparaître en présence de non-linéarités [67].



Il faut préciser que les dissymétries dans les rotors peuvent apparaître au cours du temps avec la fatigue : la présence de fissures transversales dans l'arbre entraîne une modification locale de raideur qui rend les caractéristiques élastiques anisotropes. Le problème est cela dit tout différent. En effet, la raideur locale dans la direction de la fissure n'est pas identique selon que cette dernière est ouverte ou fermée [20, 158]. On la modélise donc par une raideur bi-linéaire valant  $k \pm \delta k$  (suivant le signe du moment de flexion),  $k$  étant la raideur dans l'autre direction principale. Les équations du mouvement sont donc toujours paramétriques mais comporte cette fois-ci des termes non-linéaires fonction du temps. Les réponses à balourd se trouvent fortement affectées et varient considérablement en fonction de la direction du balourd, des zones d'instabilité pouvant émerger lorsque la position du balourd correspond à celle de la fissure [67].

## 1.4 Le rôle déstabilisant de l'amortissement interne

Si l'amortissement a toujours un rôle bénéfique sur la dynamique des systèmes non-tournants, il n'en est pas de même pour les systèmes tournants. Les ingénieurs ont depuis longtemps été conscients des effets déstabilisants induits par l'amortissement *interne*, *i.e.* matériel, des rotors : il s'avère en effet que pour des systèmes axisymétriques le mouvement peut devenir instable à partir d'un certain seuil de vitesse de rotation. Ce seuil dépend du ratio entre l'amortissement qualifié d'externe (c'est-à-dire celui introduit par les paliers, le couplage avec le fluide environnant, ...) et l'amortissement interne, mais il est toujours supérieur à la première vitesse critique.

L'instabilité est liée à la rotation propre du rotor et n'est en rien attribuable à d'éventuelles non-linéarités. Lorsque l'on exprime les forces d'amortissement internes des parties tournantes dans un repère fixe, on remarque que celles-ci se décomposent en deux termes : un terme proportionnel à la vitesse, *i.e.* des forces d'amortissement au sens classique, et un terme proportionnel au déplacement, *i.e.* des forces dites *circulatoires*. Ce sont ces dernières qui sont à l'origine des phénomènes d'instabilité car elles s'opposent aux forces d'amortissement externe [143]. Les forces circulatoires sont parfois appelées forces pseudo-gyroscopiques. Il faut cependant noter qu'elles ne s'observent pas exclusivement sur les systèmes en rotation. Par exemple, lors de l'étude de la barre de Pflüger (barre sur appuis simples soumise à des forces tangentielles concentrées), on retrouve également des forces de nature circulatoire [122].

La modélisation par éléments finis reflète bien ce phénomène. On montre aisément que la prise en compte d'amortissement tournant fait intervenir des matrices d'amortissement symétriques  $\underline{\underline{D}}$  qui s'ajoutent aux matrices d'amortissement externe et des matrices de

forces circulatoires antisymétriques  $\underline{H}$  qui s'adjoignent aux matrices de raideur formant ainsi des matrices de raideur généralisée. Le caractère non symétrique de celle-ci révèle bien l'existence éventuelle d'instabilités. Si l'amortissement est visqueux,  $\underline{D}$  est constante et  $\underline{H}$  dépend linéairement de  $\Omega$ . A grande vitesse, les forces circulatoires deviennent donc prépondérantes. Dans le cas d'un amortissement hystérétique,  $\underline{D}$  dépend linéairement de  $\Omega^{-1}$  mais que  $\underline{H}$  est constante. Ce type d'amortissement apporte donc toujours la même contribution aux effets circulatoires, indépendamment de la vitesse de rotation. Pour un amortissement externe nul, on peut montrer que le système reste stable jusqu'à la première vitesse critique, compte tenu du terme  $\underline{D}$  qui prédomine [162].

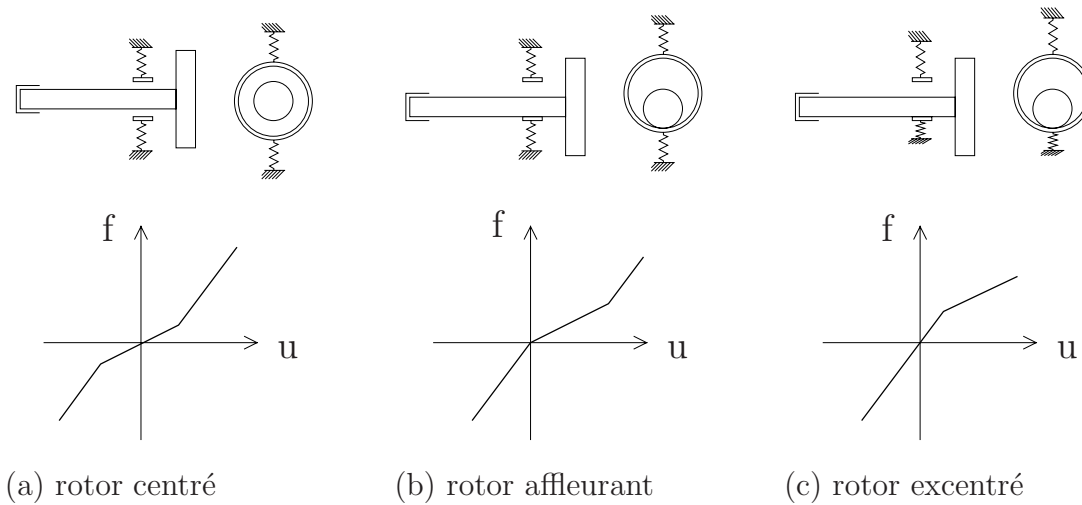
Il convient de remarquer que si le rotor a un mouvement de précession synchrone et circulaire, alors les forces d'amortissement interne sont nulles. L'énergie est alors dissipée exclusivement par les forces d'amortissement externe. Seule la présence d'amortissement sur les parties non tournantes permet donc de limiter les amplitudes de vibration lors du passage des vitesses critiques.

## I.2 Origine des non-linéarités

### 2.1 Les roulements

Pour un grand nombre de machines tournantes, on utilise des paliers hydrodynamiques. Cependant, pour les moteurs aéronautiques, les paliers doivent être de faible encombrement et capables de supporter d'importantes charges non seulement radiales mais aussi axiales, et ce même à des vitesses de rotation quasi-nulles. Cela justifie donc l'utilisation de roulements. Ces éléments sont des pièces majeures puisqu'ils assurent les liaisons entre rotor et stator et les liaisons inter-rotor.

Etant donné que les roulements sont soumis lors de leur fonctionnement à des gradients thermiques, un jeu interne est nécessaire pour éviter des compressions importantes des billes ou rouleaux et, par conséquent, une fatigue prématurée. Ils possèdent donc une non-linéarité inhérente. Celle-ci peut induire des phénomènes complexes et variés. Il a en effet été observé sur moteur d'avion des réponses asynchrones de grandes amplitudes à 2 fois et même 8 fois la vitesse critique [43]. Celles-ci ne se produisant pas avec des roulements délibérément montés avec un jeu excessivement serré, ces réponses sous-harmoniques s'avèrent donc être liées à l'existence d'un jeu de fonctionnement.

FIG. I.4: *Modélisation des roulements*

F. F. EHRICH a montré qu'elles sont associées à l'existence d'un excentrement du rotor dans un de ses paliers, qui peut être dû par exemple à des forces statiques (comme le poids propre ou les charges de manœuvre) ou encore à un mauvais alignement (problème de montage). Des vibrations sur-harmoniques ont aussi été décelées en régime sous-critique [45]. Ces réponses sur ou sous-harmoniques ont une grande importance car elles expliquent les pseudo-pics de résonance observés à des vitesses de rotation multiples ou sous-multiples de la vitesse critique (non prédits par l'analyse linéaire). Physiquement, ces zones de vitesse correspondent à des régimes où le rotor rebondit plusieurs fois par période ou une fois en plusieurs périodes sur la bague extérieure de roulement. Entre deux pics consécutifs de réponses sur ou sous-harmoniques, des comportements chaotiques ont également été remarqués [44]. Cependant, l'existence de solutions chaotiques dans ces zones de transition a une importance moindre car les amplitudes de vibrations sont assez faibles.

Afin de modéliser ces phénomènes, de nombreux auteurs ont proposé d'utiliser une raideur bi-linéaire par morceaux (*cf.* figure I.4, cas rotor excentré) pour tenir compte de la dissymétrie en raideur apportée par la présence combinée d'un jeu radial et d'une force statique : si le déplacement du rotor est dans le sens opposé à cette force et s'il s'avère suffisant pour assurer le décollement, alors la flexibilité se limite à la flexibilité apparente du rotor au niveau du palier (raideur  $k_1$ ). Elle est donc plus faible que celle de l'ensemble roulement/rotor (raideur  $k_2$ ). Ce phénomène se retrouve dans la littérature sous le nom de *normal-loose condition* [25, 55]. Ce modèle a effectivement permis de confirmer, via des méthodes de perturbation [25], l'existence de réponses sous-harmoniques, ainsi que de réponses sur-harmoniques et chaotiques via l'intégration temporelle [43, 44, 45].

Les études paramétriques menées sur un rotor de type Jeffcott montrent que l'existence de telles solutions sont fortement influencées par le ratio des raideurs,  $k_1/k_2$ , et le taux d'amortissement. Elles apparaissent en effet pour des faibles valeurs de ces coefficients.

Grâce à un tel modèle, F. F. EHRICH a également réussi à expliquer des combinaisons de fréquence constatées expérimentalement sous certaines conditions [42, 40].

D'autres auteurs sont arrivés à des conclusions identiques en considérant un modèle de raideur radiale bi-linéaire, cette raideur étant nulle si le déplacement relatif entre le rotor et le palier est inférieur au jeu radial [29]. La raideur du palier n'est donc prise en compte que lorsque le jeu est consommé. Ce modèle offre l'avantage de gérer facilement les forces statiques et permet d'étudier l'influence des forces de balourd (la validité du modèle précédent repose sur l'hypothèse que le rotor reste au voisinage du fond du roulement, *i.e.* que la force de balourd est relativement faible comparativement à la force statique).

Y. B. KIM et *al.* précisent que le balourd doit se trouver dans un certain intervalle pour pouvoir observer des réponses sous-harmoniques d'ordre 2 [74]. Effectivement, si le balourd est trop faible vis-à-vis de la force statique, le phénomène de décollement ne se produit pas : le système est donc linéaire. De même, si le balourd est trop important, le rotor orbite toujours en fond de roulement : la réponse est dans ce cas circulaire et synchrone. Des remarques semblables tiennent aussi pour la valeur de la force statique ou celle du jeu de roulement. Ils montrent de plus que l'augmentation de l'amortissement permet de réduire, voire d'inhiber, les pseudo-pics de réponses sous-harmoniques, et ce quelle que soit la valeur de la force statique. Des réponses chaotiques ont également été détectées pour des grandes valeurs de ratio entre la raideur du roulement et celle de l'arbre. Elles proviennent de bifurcations successives par dédoublement de période.

L'ajout dans ce modèle d'un terme de couplage en raideur modélisant sommairement les forces induites par les joints d'étanchéité a révélé qu'à partir d'une certaine valeur de ce terme, des réponses quasi-périodiques peuvent survenir [72, 75] ainsi que des sauts de réponse au passage de la vitesse critique [27].

La nature hertzienne du contact constitue un autre type de non-linéarité présent dans les roulements [46]. En gardant une modélisation radiale bi-linéaire mais en prenant cette fois-ci une force de raideur en puissance  $3/2$  et non plus linéaire, S. SAITO montre qu'il est possible d'obtenir des intervalles de vitesse de rotation pour lesquels deux solutions existent, conduisant ainsi à des sauts de réponse [113, 49].

Outre ces aspects de jeu radial et de contact de Hertz, la rotation d'ensemble des billes ou des rouleaux, *i.e.* la cinématique du roulement causée par la rotation du rotor, engendre une variation périodique de la raideur sous l'action d'une force statique. Ceci est source de vibration : un rotor même parfaitement équilibré est donc soumis à une force d'excitation paramétrique [138]. En présence d'un balourd, la réponse du rotor possède donc deux composantes fréquentielles distinctes (une relative à la vitesse de rotation et une autre égale à la fréquence de rotation de la cage), avec éventuellement des combinaisons de celles-ci, qui s'amplifient lorsque le jeu radial augmente [137]. Quelques études réalisées

pour des roulements à billes ont d'ailleurs aussi montré, d'un point de vue théorique uniquement, la possible apparition de chaos par dédoublement de période et via une route quasi-périodique [137, 92]. La perte de contact entre les billes et les bagues semble être une condition nécessaire pour avoir un régime chaotique, indiquant que les roulements faiblement chargés sont potentiellement sujet à de telles réponses [92].

Mais en pratique, l'influence de la force de balourd est généralement telle que ces effets induits par l'excitation paramétrique sont négligeables, surtout lorsque le nombre de billes ou de rouleaux est important, si bien que seule la fréquence synchrone du rotor est prise en considération dans la réponse.

Cependant ce phénomène a son importance dans les détections de défauts dans les roulements [132]. En effet, les imperfections géométriques génèrent, du fait de la rotation, des impulsions dont la fréquence est beaucoup plus importante que la fréquence synchrone [127, 155]. En utilisant des accéléromètres, on retrouve de ce fait dans le spectre du signal des raies à certaines combinaisons de fréquences qui dépendent du type de défaut. Il est donc possible en analysant les signaux de conclure quant à la localisation et le type de défaut [133, 30].

Bien que la présence de défauts dans un roulement n'influence pas d'ordinaire la réponse principale due au balourd, des résultats expérimentaux ont montré que des phénomènes de résonance peuvent se produire à la fréquence de la cage lorsqu'une des billes d'un roulement possède un diamètre bien supérieur aux autres. L'explication réside dans le fait qu'avec la présence de cette anomalie géométrique, l'arbre se trouve excentré par rapport à la ligne passant le centre des bagues extérieures des roulements, causant inévitablement un balourd qui tourne non pas à la vitesse de rotation de l'arbre mais à celle de la cage. De plus, la raideur dans la direction de la bille anormale est plus importante que dans les autres directions. Vu cette asymétrie, d'autres résonances, relatives à un mode rétrograde, peuvent aussi apparaître [154].

## 2.2 Contact rotor/stator

Pour le bon fonctionnement du moteur, des jeux sont nécessaires entre parties fixes et parties tournantes. On en trouve donc à tous les endroits, que ce soit entre les aubes de la soufflante et le carter fan ou encore au niveau des joints d'étanchéité. Au stade de la conception, on essaie cependant de les réduire au minimum pour atteindre les meilleures performances possibles, puisqu'en les diminuant on augmente le rendement, minimise les fuites, ... Au niveau du carter fan par exemple, on place un matériau tendre d'épaisseur suffisante pour qu'il soit en contact avec les aubes de la soufflante. Dès les premières

rotations, les aubes viennent alors consommer le surplus, ce qui assure un jeu minimal en fonctionnement normal.

Bien entendu, la réduction des jeux entre parties fixes et parties tournantes entraîne une augmentation de la probabilité que le rotor vienne rentrer en contact avec un élément du stator, si bien que depuis une vingtaine d'années les recherches dans ce domaine n'ont cessé de se multiplier. Ces recherches ont permis de mettre en évidence, soit expérimentalement soit numériquement, une très grande diversité du comportement vibratoire après une prise de contact, de valider les modélisations adoptées, et s'orientent maintenant vers la prédiction de couplages éventuels [150].

L'interaction rotor/stator a été étudié par F. F. EHRICH d'un point de vue théorique et numérique sur un système simplifié [47]. Il a démontré que sous l'influence d'une force de balourd suffisante le rotor peut, à l'approche de la vitesse critique, entrer en contact avec un élément du stator, engendrant ce qu'il appelle un *stator whirl* (mouvement de précession directe du stator). En régime permanent, ce contact continu engendre une rigidification locale responsable d'un décalage du pic de résonance vers une fréquence plus grande. Dans certains cas, cela peut aller jusqu'à l'apparition d'un phénomène d'hystérésis se traduisant par deux sauts de réponse (le premier arrivant lors de l'accélération et le second lors de la décélération, à une vitesse plus faible) et l'existence d'une zone dans laquelle deux réponses dynamiques sont possibles (le stator suivant ou non un mouvement de précession directe).

Il a aussi mis en évidence l'existence, en régime sur-critique, d'une branche secondaire de réponse stable dans laquelle le mouvement de précession du stator est également possible. Cette branche étant déconnectée de la courbe de réponse principale (précession directe du rotor seul), la précession n'est généralement pas observée. Elle peut cependant survenir si le système est soumis à quelques perturbations. Une fois initiée, elle persiste jusqu'à ce qu'on décélère jusqu'à un certain seuil (souvent la fréquence propre du stator) à partir du quel on retrouve la solution principale, un saut de réponse accompagnant cette transition. H. F. BLACK, à l'aide des réceptances polaires, montre aussi que l'interaction synchrone est possible même si le rayon du mouvement de précession du rotor est inférieur au jeu radial. Il fournit de plus un critère permettant de définir les zones d'interaction. J. L. LAWEN et G. T. FLOWERS ont d'ailleurs utilisé ce critère pour analyser les interactions possibles entre un rotor supporté par des paliers magnétiques et un palier auxiliaire [79].

Les interactions précédentes supposent que le coefficient de frottement dynamique entre les parties tournantes et fixes est assez faible. Cette hypothèse est valide par exemple si le contact vient par exemple d'une consommation du jeu radial d'un amortisseur par film d'huile due à une pression d'huile insuffisante. Dans ce cas, c'est la bague extérieure du roulement qui vient frotter sur le stator, le rotor tournant sans problème dans son roulement.

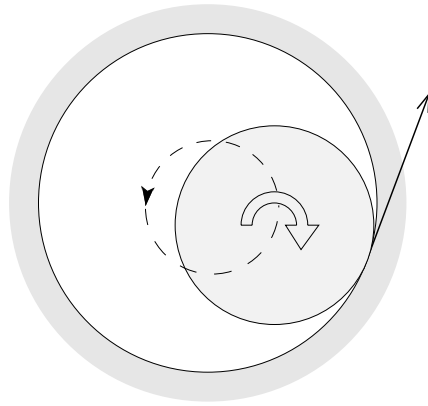


FIG. I.5: Force de frottement responsable de la précession rétrograde

Cependant, dans de nombreuses circonstances, le coefficient de frottement est important. La prise de contact du rotor avec le stator génère alors une force de frottement non négligeable qui peut être source d'instabilité, l'instabilité se traduisant par un mouvement de précession rétrograde du rotor. M. P. DEN HARTOG a été un des premiers à expliquer ce phénomène : dès que le rotor vient toucher une partie de stator, une force de frottement apparaît du fait de sa rotation. Mais cette force qui s'applique au point de contact est de sens contraire à la vitesse tangentielle du rotor en ce même point (*cf.* figure 2.2). Elle s'oppose ainsi au mouvement de rotation, engendrant un mouvement de précession rétrograde auto-entretenu (cette vibration correspondant avec une des fréquences propres du système). Avec une description aussi sommaire, on pourrait penser que cette instabilité est assez fréquente. Néanmoins, sa réalisation est influencée par de nombreux paramètres, autres que le seul coefficient de frottement. F. F. EHRICH par exemple témoigne, en considérant la dynamique du stator dans un problème de contact rotor/stator, que les mouvements de précession rétrogrades de grandes amplitudes peuvent ne pas exister dans certaines circonstances [41]. Il trace un diagramme de stabilité qui montre l'influence des ratios de raideur et d'amortissement,  $\omega_{0s}/\omega_{0r}$  et  $\xi_s/\xi_r$  sur l'apparition ou non d'un *whirling* rétrograde.

En réalité, du fait des décalages statiques ou d'imperfections géométriques, la prise de contact ne s'opère pas immédiatement de manière totale. Il existe préalablement des phases où le contact est partiel. Pendant ces phases, des composantes sur-harmoniques apparaissent dans le spectre de la réponse. De nombreux essais sur moteur réel ont en effet révélé la présence de sur-harmoniques d'ordre 2 et 3. Leur niveau dépend de la sévérité du contact. R. F. BEATTY les explique en analysant la série de Fourier d'un signal sinusoïdal tronqué et donne une relation entre la longueur d'arc de la zone de contact et les niveaux des sur-harmoniques [14]. Il affirme que le contact est bénin pour la machine tant que la zone de contact reste inférieure à  $270^\circ$ , ou que le niveau des composantes harmoniques d'ordre 2 et 3 ne dépasse pas 75 et 50 % de l'amplitude synchrone (si les mesures ne sont pas effectuées près de l'endroit du contact, il faut utiliser les fonctions de transfert).

Une fois le rotor en contact permanent établi, il se peut, si la force de frottement est suffisante, que le rotor subisse en régime sur-critique une instabilité se traduisant par une réponse sous-harmonique en précession rétrograde. Sinon, dans le cas où le frottement est trop faible, le stator se comporte comme un palier supplémentaire et joue le rôle de limiteur d'amplitude.

De nombreux autres phénomènes s'observent parfois en présence de contact. Par exemple, si le rotor possède une certaine flexibilité en torsion, il peut alors y avoir des phénomènes de couplage entre les vibrations de torsion et les vibrations latérales, puisque la force de frottement génère également un couple résistant qui s'oppose au couple moteur [3]. Il a aussi été démontré expérimentalement que les effets thermiques peuvent s'avérer importants : avant la vitesse critique, le frottement provoque un échauffement local sur l'arbre, causant alors un fléchissement de l'arbre sous les effets thermiques. Puisqu'en régime sous-critique le centre de gravité du rotor se trouve plus éloigné de l'axe que le centre géométrique, le balourd se trouve amplifié, ce qui augmente les forces de frottement et ainsi de suite. Au-delà de la vitesse critique par contre, c'est l'inverse. Le fléchissement n'est donc pas accentué et contribue à diminuer le balourd dû à l'excentrement du centre de gravité [14].

Enfin, concernant la modélisation, deux modèles sont classiquement utilisés. Le premier fait appel à une raideur de contact  $k_c$  : en cas de contact, la force normale s'exprime par  $f_n = -k_c.(\Delta - \delta)$  et la force tangentielle par  $f_t = \mu.f_n$ , les paramètres  $\Delta$ ,  $\delta$  et  $\mu$  représentant respectivement le déplacement radial, le jeu radial et le coefficient de frottement dynamique. Le deuxième est le modèle de rebond : la condition de non pénétration  $\Delta \leq \delta$  est imposée et on admet qu'au point de contact la variation de vitesse normale s'écrit  $v_n^+ = -e.v_n^-$ ,  $e$  étant le coefficient de restitution. A la suite d'une comparaison entre des résultats numériques obtenus avec ces deux modèles et des résultats expérimentaux, Y. S. CHOI et C. Y. BAE ont conclu que le modèle de raideur de contact permet de mieux appréhender le contact, en terme de niveau et de forme des orbites, que le modèle de rebond [28].



## Conclusion

Ce chapitre a présenté les principaux aspects liés à la dynamique des rotors, particulièrement dans le cadre des rotors de moteurs d'avion. On y a montré comment de nombreuses instabilités peuvent survenir à cause de la rotation, même sans non-linéarités. Ces instabilités proviennent notamment de l'amortissement interne des rotors ou de dissymétries. Leur étude, bien que non immédiate, est simplifiée du fait de l'absence de non-linéarités.

Comme on vient de le voir cependant, la prise en compte de certains phénomènes se produisant dans les moteurs d'avion — comme les phénomènes d'interaction entre rotor et stator par exemple — ou de certains éléments — comme les roulements ou les amortisseurs par film d'huile appelés *squeeze film* — introduisent des non-linéarités importantes qui peuvent elles aussi être sources d'instabilité. Dans notre étude, on s'intéressera en particulier aux roulements, éléments de première importance compte tenu de leur fonction, dont le comportement est fortement non-linéaire. L'analyse dynamique dans ce contexte est donc difficile et demande de disposer d'outils numériques adaptés et efficaces, ainsi que des modèles physiques pertinents.



# Chapitre II

---

---

## Les méthodes non-linéaires

*état de l'art*

---

---

Les vrais hommes de progrès sont ceux qui ont pour  
point de départ un respect profond du passé.

**Ernest Renan,** *Souvenirs d'enfance et de jeunesse*

## Introduction

Ce chapitre présente différents outils de calcul utilisables lors de l'étude du comportement dynamique d'une structure soumise à une sollicitation périodique. Cette étude consiste, du point de vue mathématique, à rechercher la solution du système d'équations différentielles dépendant du temps qui modélise le mouvement de la structure. Il paraît licite d'admettre que la solution est elle aussi périodique, hypothèse essentielle de nombreuses méthodes de résolution dont on passera en revue les plus répandues. Les non-linéarités présentes dans l'équation peuvent malgré tout conduire à des solutions aperiodiques ou chaotiques [136]. A l'heure actuelle, les seuls outils de calcul permettant la détermination de telles solutions sont les intégrateurs temporels. C'est pourquoi uniquement des méthodes de calcul de solutions périodiques sont présentées ici.

Dans toutes ces méthodes, il est nécessaire de stipuler la forme de la réponse. Cela permet de transformer le système d'équations différentielles régissant le mouvement de la structure en un système d'équations algébriques qui lui est équivalent sous les hypothèses avancées. Si, lors de la résolution des équations différentielles du mouvement par intégration temporelle directe, il est impossible d'obtenir des solutions instables (sauf dans des cas particuliers, comme un cycle répulsif qui peut s'obtenir par une intégration rétrograde, *i.e.* en temps négatif), il n'en est pas de même lors de la résolution des équations algébriques. L'étude de la stabilité des solutions est donc indispensable, pour ne prendre en considération que les solutions stables, c'est-à-dire physiquement observables.

Ces méthodes ont un large domaine d'application. Toutefois, leur présentation est ici volontairement limitée à un cas particulier mais néanmoins important : celui des structures composées d'un assemblage d'éléments supposés linéaires reliés entre eux par des liaisons éventuellement non-linéaires. Son importance se justifie non seulement par son ampleur mais aussi par sa particularité : ampleur car de telles modélisations sont fréquentes, et particularité car, les liaisons étant localisées, il est possible de condenser les degrés de liberté (*ddl*) linéaires sur les *ddl* non-linéaires.

Dans ce contexte, l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{B}} \cdot \dot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}(t) + \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \underline{f}^{ext}(t) \quad (\text{II.1})$$

où  $\underline{q}$ ,  $\underline{f}^{lia}$  et  $\underline{f}^{ext}$  représentent respectivement les vecteurs des coordonnées généralisées, des forces non-linéaires et des forces extérieures. Les matrices  $\underline{\underline{M}}$ ,  $\underline{\underline{B}}$  et  $\underline{\underline{K}}$  correspondent aux matrices de masse, d'amortissement généralisé et de raideur généralisée, pouvant contenir des termes relatifs à de la précontrainte, à la rotation à vitesse constante de certains éléments, ou autre.

---

Si toutes les liaisons sont linéaires, la solution analytique exacte peut être déterminée directement [59]. Cela n'est bien entendu plus possible lorsque des liaisons présentent des non-linéarités. Cependant, pour de faibles non-linéarités, *i.e.* si  $\underline{f}^{lia}$  peut se mettre sous la forme  $\underline{f}^{lia lin} + \varepsilon \underline{f}^{lia nl}$  où  $\varepsilon$  est un petit paramètre, on peut avoir recours à la méthode de balance harmonique ou à des méthodes dites de perturbation, comme la méthode de Lindstedt-Poincaré ou encore la méthode des échelles multiples. Pour ces méthodes, le lecteur est renvoyé à l'excellent ouvrage des professeurs A.H. NAYFEH et D.T. MOOK [99]. R. GANESAN [55] ou D. W. CHILDS [25] ont par exemple appliqué celle des échelles multiples pour l'analyse des vibrations d'un rotor de type Jeffcott en prenant en compte un effet de *normal-loose*. Ces méthodes conduisent également à des solutions analytiques, mais approchées. Cela permet d'établir des relations entre les paramètres physiques du modèle et des caractéristiques de la réponse, ce qui est particulièrement utile dans le domaine de l'identification [13]. Il faut toutefois souligner qu'elles restent difficiles à mettre en place sur des systèmes de taille importante, et que la prise en compte d'un nouveau paramètre demande de reconduire tous les calculs soit à la main, soit à l'aide d'un logiciel de calcul formel comme Maple ou Mathematica.

Dans le cas de fortes non-linéarités, il n'est plus envisageable d'effectuer des calculs analytiques. On a alors recours à des méthodes purement numériques, qu'il est possible de classer en deux catégories : les méthodes temporelles et les méthodes fréquentielles. Compte tenu de leur caractère numérique, si un paramètre  $\lambda$  du système évolue, il est nécessaire d'effectuer un calcul pour chaque valeur prise par celui-ci. Ainsi, pour déterminer la solution lorsque  $\lambda$  varie entre  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$ , on couple ces méthodes avec un algorithme de type prédicteur/correcteur, incluant éventuellement une méthode de continuation.

Les deux premiers paragraphes exposent successivement des méthodes temporelles et fréquentielles. Le troisième paragraphe est consacré à leur implémentation dans un algorithme de type prédicteur/correcteur et présente quelques méthodes de continuation. Le quatrième paragraphe traite de l'analyse de la stabilité des solutions ainsi que des problèmes de bifurcations. Enfin, le cinquième et dernier paragraphe aborde de la mise en place de la technique de condensation sur les *ddl* non-linéaires lors de l'application de ces méthodes.

## II.1 Les méthodes temporelles

L'intégration temporelle représente l'approche classique pour résoudre un système d'équations différentielles dépendant du temps. Elle consiste à construire la solution progressivement dans le temps, pas à pas. La popularité des intégrateurs réside tant dans leur simplicité d'utilisation que dans leur capacité à traiter tout type de problèmes. Leur application à l'étude du comportement dynamique d'une structure soumise à une sollicitation périodique s'effectue naturellement, en commençant l'intégration à partir d'une condition initiale quelconque et en la poursuivant jusqu'à ce que le régime permanent soit atteint. Cependant, le temps calcul nécessaire pour s'affranchir du régime transitoire peut s'avérer prohibitif, surtout pour les structures faiblement amorties.

Dans ce contexte de régime forcé, les solutions à long terme aux quelles on s'intéresse peuvent être de trois types:  $T$ -périodiques ( $T$  étant un multiple de la période  $T_f$  de l'excitation, *i.e.*  $T = p.T_f$  avec  $p$  entier non nul), quasi-périodiques ou chaotiques. Pour ces deux derniers types, seule l'intégration temporelle directe permet de les calculer. Par contre, dans le cas assez fréquent des réponses périodiques, il est souvent plus judicieux de recourir à des méthodes temporelles, comme la méthode de tir ou la méthode des différences finies.

Ces méthodes, assez récentes dans le domaine de la mécanique vibratoire, découlent de méthodes largement développées dans un domaine mathématique, celui de la résolution des problèmes de valeurs aux limites [126]. Elles consistent à trouver la solution d'une équation différentielle de la forme  $\mathbf{y}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}))$  qui vérifie des conditions aux limites décrites par une équation du type  $r(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0$ . C'est exactement le problème qui se pose lors de la recherche de solutions  $T$ -périodiques. L'équation différentielle est dans ce cas l'équation différentielle du mouvement mise sous forme d'état, et la fonction  $\underline{r}$  est définie par  $\underline{r}(\underline{\mathbf{y}}(0), \underline{\mathbf{y}}(T)) = \underline{\mathbf{y}}(T) - \underline{\mathbf{y}}(0)$  (où  $\underline{\mathbf{y}} = {}^t[\underline{\mathbf{q}}, \underline{\dot{\mathbf{q}}}]$  représente le vecteur d'état), traduisant la périodicité de la solution, à savoir  $\underline{\mathbf{q}}(0) = \underline{\mathbf{q}}(T)$  et  $\underline{\dot{\mathbf{q}}}(0) = \underline{\dot{\mathbf{q}}}(T)$ . L'application de celles-ci à la dynamique des structures découle donc spontanément [98].

### 1.1 Les intégrateurs temporels

Les méthodes d'intégration directe, ou plus simplement *intégrateurs*, sont des procédures numériques pas-à-pas qui permettent de traiter les équations différentielles (*initial value problems*). Leur popularité et leur essor important sont dûs à leur facilité

d'implémentation et leur disposition à traiter aisément tout type de systèmes, même non-linéaires.

En mécanique, les équations en question sont celles du mouvement. Il s'agit d'équations différentielles ordinaires temporelles d'ordre 2 provenant de la semi-discrétisation (via par exemple la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies) des équations différentielles partielles hyperboliques spatio-temporelles établies à partir des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus.

Ces équations du mouvement sont parfois mises sous forme d'état

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \ddot{\underline{q}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \dot{\underline{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1} \cdot (-\underline{f}^{lia} + \underline{f}^{ext}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.2})$$

La taille du système est dans ce cas multipliée par 2, mais son ordre passe à 1. Cela permet d'utiliser les nombreux intégrateurs du premier ordre répertoriés dans la littérature mathématique.

### 1.1a Principe de fonctionnement d'un intégrateur

La résolution de l'équation différentielle du mouvement consiste pour tout intégrateur à vérifier cette équation en plusieurs instants consécutifs  $t_k$ , en avançant des hypothèses sur la variation du déplacement, de la vitesse et de l'accélération durant chaque intervalle de temps  $[t_k, t_{k+1}]$ . Cela conduit à des algorithmes pas-à-pas qui fournissent des approximations successives de ces trois champs.

Les intégrateurs les plus répandus sont ceux basés sur les différences finies, comme la famille des algorithmes de Newmark, le principe étant de remplacer les dérivées temporelles par des différences finies. Ils s'appuient sur des relations du type

$$\begin{pmatrix} \underline{q}^{(k)} \\ \dot{\underline{q}}^{(k)} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \cdot \begin{pmatrix} \underline{q}^{(k-j)} \\ \dot{\underline{q}}^{(k-j)} \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^p \Delta t \cdot \beta_j \cdot \begin{pmatrix} \dot{\underline{q}}^{(k-j)} \\ \ddot{\underline{q}}^{(k-j)} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3})$$

où  $\underline{q}^{(k)}$  est l'approximation de la vraie solution  $\underline{q}$  au temps  $t_k$  (idem pour les autres termes). Couplées à l'équation différentielle du mouvement, elles donnent des schémas numériques qui agissent comme des filtres sur la solution.

A côté des schémas basés sur les différences finies, on trouve aussi des schémas basés sur l'extrapolation ou encore le développement en série de Taylor, comme la famille des algorithmes de Runge-Kutta, qui présentent l'avantage d'une meilleure précision, au prix d'un temps de calcul plus important, avantage cependant non garanti pour les problèmes fortement non-linéaires.

### 1.1b Classification des schémas

Les schémas numériques des intégrateurs sont souvent répertoriés en deux catégories : les schémas implicites ( $\beta_0 \neq 0$ ) et les schémas explicites ( $\beta_0 = 0$ ). En implicite, le calcul de la solution au temps  $t_{k+1}$  se base sur l'équation du mouvement considérée à l'instant  $t_{k+1}$ , alors qu'en explicite c'est à l'instant  $t_k$ . De ce fait, en formulation implicite le coût calcul pour un pas de temps est élevé et la demande de stockage en mémoire importante (inversion à chaque pas) contrairement à la formulation explicite qui, quant à elle, présente l'inconvénient de nécessiter un pas de temps assez faible pour des questions de stabilité. Les schémas implicites sont surtout utilisés pour traiter les problèmes structuraux (aussi appelés problèmes inertiels, pour lesquels la réponse est dominée par un petit nombre de modes basse fréquence), alors que les schémas explicites sont utilisés pour traiter les problèmes de propagation d'ondes (problèmes de dynamique rapide, pour lesquels il y a une contribution importante des moyennes et hautes fréquences).

La classification des schémas s'opère également suivant le nombre  $p$  d'instant ultérieurs  $t_{k-j}$  utilisés pour d'écrire l'état du système à l'instant actuel  $t_k$ . Si  $p = 1$ , on parle de schéma à un pas, si  $p > 1$ , de schéma à pas multiples. En pratique, les schémas à pas multiples sont beaucoup moins répandus, car ils présentent l'inconvénient de nécessiter une procédure spéciale de démarrage. De plus, la gestion du pas de temps pour ces schémas est très délicate, de même que l'établissement de leur limite de stabilité et leur niveau de précision [126].

### 1.1c Analyse de la stabilité

Pour établir la convergence d'un intégrateur, l'analyse de la stabilité du schéma numérique associé est essentielle. En effet, d'après le théorème d'équivalence de LAX, la stabilité d'un schéma aux différences finies est une condition nécessaire et suffisante pour que la solution numérique converge vers la solution exacte lorsque le pas de temps tend vers 0 (condition globale de convergence), pourvu toutefois que l'algorithme soit consistant (condition locale de convergence).

La stabilité est classiquement étudiée dans le cadre linéaire (en présence de non-linéarités, l'analyse de stabilité est rendue beaucoup plus complexe voire impossible). De plus, on se limite à un seul degré de liberté, la condensation modale permettant toujours (sous l'hypothèse d'une matrice d'amortissement modal diagonale) de passer d'un système de  $n$  équations à  $n$  équations découplées.

Pour cette analyse, il faut tout d'abord injecter les relations reclinem dans l'équation différentielle du mouvement, ce qui conduit à une nouvelle relation qui, sous forme canonique, s'exprime par

$$\underline{y}^{(k)} = \begin{pmatrix} \underline{q}^{(k)} \\ \underline{\dot{q}}^{(k)} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{q}^{(k-1)} \\ \underline{\dot{q}}^{(k-1)} \end{pmatrix} + \underline{b}^{(k-1)} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{y}^{(k-1)} + \underline{b}^{(k-1)} \quad (\text{II.4})$$

Cette expression relie les vecteurs d'état du système (configuration dans l'espace des phases) aux instants successifs  $t_{k-1}$  et  $t_k$ . La matrice  $\underline{\underline{A}}$ , appelée *matrice d'amplification*, est propre au système étudié et s'exprime donc en fonction des paramètres physiques (pulsation propre  $\omega_0$  et amortissement modal  $\xi$ ). Le vecteur  $\underline{b}$  quant à lui est relatif à l'excitation appliquée au système. Tous deux dépendent bien sûr du pas de temps  $\Delta t$  et des paramètres du schéma ( $\alpha_j$  et  $\beta_j$ ). Il s'en suit que

$$\underline{y}^{(k)} = \underline{\underline{A}}^k \cdot \underline{y}^{(0)} + \sum_{j=1}^k \underline{\underline{A}}^{j-1} \cdot \underline{b}^{(k-j)} \quad (\text{II.5})$$

On remarque ainsi que la stabilité numérique du schéma n'est assurée que si  $\|\underline{\underline{A}}\| \leq 1$ . On a par conséquent recours au rayon spectral  $\rho(\underline{\underline{A}}) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$  (les  $\lambda_i$  étant les valeurs propres de  $\underline{\underline{A}}$ ) et le critère de stabilité s'écrit

$$\rho(\underline{\underline{A}}) \leq 1 \quad (\text{II.6})$$

On parle dans ce cas de stabilité spectrale (il existe d'autres techniques pour étudier la stabilité d'un schéma par différences finies, comme le principe de coefficients fixés). Il faut noter que le recours aux invariants principaux de  $\underline{\underline{A}}$  permet de vérifier de manière élégante cette condition, puisqu'elle s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} \det(\underline{\underline{A}}) \pm \text{tr}(\underline{\underline{A}}) + 1 \geq 0 \\ -1 \leq \det(\underline{\underline{A}}) \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Vu la dépendance de  $\underline{\underline{A}}$  vis-à-vis de  $\Delta t$ , cette stabilité peut, suivant le schéma, être conditionnelle ou non (*i.e.* indépendante ou non du pas de temps). L'avantage majeur des schémas implicites sur les schémas explicites provient du fait qu'ils sont généralement inconditionnellement stable. Ainsi, en implicite, le pas de temps n'est pas limité par des problèmes de convergence, mais uniquement par des problèmes de précision, alors qu'en explicite, le pas de temps doit vérifier  $\Delta t < \Delta t_{cri}$  pour assurer la convergence. Cette condition à respecter n'est cependant pas une contrainte à l'égard des problèmes de propagation d'ondes, pour lesquels on utilise toujours un pas de temps très faible afin de pouvoir capturer les variations très rapides des quantités étudiées. Etant donné que les schémas explicites sont plus rapides que les schémas implicites, travailler en explicite est particulièrement recommandé dans ce cas.



Le pas de temps critique, calculé à partir de II.6 ou II.7, s'exprime en fonction des paramètres du schéma et de la pulsation propre  $\omega_0$ , *i.e.* de la fréquence. Dans le cas d'un système d'équations, le pas de temps critique sera celui fourni par la fréquence maximale. Pour les modèles éléments finis, en résolution directe (*i.e.* sans calcul des modes propres), le calcul de  $f_{max}$  n'est toutefois pas indispensable car il est possible de l'approximer par excès (car la valeur propre maximale d'une structure homogène est inférieure ou égale à la valeur propre maximale du plus petit élément du réseau qui est elle plus aisément calculable, analytiquement ou numériquement, et dépend sous une forme ou une autre de la célérité des ondes dans le modèle, *cf.* la condition de compatibilité de Courant).

### 1.1d Etude de la précision

Outre la stabilité purement numérique du schéma, il faut aussi s'intéresser à sa capacité à suivre l'évolution de la solution exacte au cours d'un pas de temps  $\Delta t$ . L'erreur de troncature locale  $\underline{e}$  définie par

$$\underline{y}(t_k) = \underline{A}.\underline{y}(t_{k-1}) + \underline{b}(t_{k-1}) + \Delta t.\underline{e}(t_{k-1}) \quad (\text{II.8})$$

donne une indication sur la précision locale de l'algorithme. On dit que l'algorithme est consistant si  $\forall t_k, \|\underline{e}(t_k)\|_2 \leq c.\Delta t^m$ . Le coefficient  $m$  est l'ordre de précision, supérieur ou égal à 2 pour la plupart des intégrateurs utilisés en mécanique.

L'ordre de précision, ou taux de convergence, ne donne cependant aucune information sur l'écart entre la solution numérique et la solution exacte. Pour quantifier cet écart, on fait l'hypothèse d'une structure conservative ( $\xi = 0$ ) soumise uniquement à des conditions initiales (pas de chargement ou d'excitation extérieurs). Dans ce cas, la solution exacte entre les instants  $t_k$  et  $t_{k-1}$  vérifie l'équation suivante

$$\underline{y}(t_k) = \begin{pmatrix} \underline{q}(t_k) \\ \underline{\dot{q}}(t_k) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0.\Delta t) & \sin(\omega_0.\Delta t)/\omega_0 \\ -\omega_0.\sin(\omega_0.\Delta t) & \cos(\omega_0.\Delta t) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{q}(t_{k-1}) \\ \underline{\dot{q}}(t_{k-1}) \end{pmatrix} = \underline{\hat{A}}.\underline{y}(t_{k-1}) \quad (\text{II.9})$$

La matrice  $\underline{\hat{A}}$  relie entre elles les solutions exactes aux instants  $t_k$  et  $t_{k-1}$ . Elle est à comparer avec la matrice  $\underline{A}$  de l'équation II.4 qui est associée à la solution numérique. La comparaison du module et de la phase de leurs valeurs propres ( $\hat{\lambda}_{1,2} = e^{\pm i\omega_0\Delta t}$  pour  $\underline{\hat{A}}$  et  $\lambda_{1,2} = \rho.e^{\pm i\varphi}$  pour  $\underline{A}$ ) offre donc une mesure adéquate de la précision du schéma. On définit alors les erreurs relatives d'amplitude  $\varepsilon_a$  et de périodicité  $\varepsilon_p$  par

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \rho - 1 \\ \varepsilon_p = \omega_0.\Delta t/\varphi - 1 \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

L'erreur de périodicité, qualitativement semblable pour tous les schémas classiques, mesure la distorsion en fréquence. Elle est toujours bien plus élevée que l'erreur d'amplitude.

Les intégrateurs, agissant comme des filtres, atténuent tous plus ou moins l'amplitude de la solution (à l'exception de la méthode de l'accélération moyenne). On parle de dissipation numérique.

Le rayon spectral de la matrice d'amplification permet de juger de l'efficacité du filtrage. Celui-ci est utile en hautes fréquences (car les modes hautes fréquences, sont peu précis voire non physiques — artefact de la discrétisation spatiale — et parfois générateurs d'oscillations parasites) mais il ne doit surtout pas affecter les basses fréquences (sous peine de détériorer énormément la solution). Si on utilise une condensation modale, les modes propres d'ordre élevés sont naturellement évincés et le filtrage des hautes fréquences ne devient plus primordial. L'amortissement numérique est donc un paramètre clef permettant de juger de la qualité d'un intégrateur.

A la place de  $\rho(\underline{A})$  ou  $\varepsilon_a$ , le paramètre  $\eta_a = -\ln |\rho(\underline{A})|/\varphi(\underline{A})$  (avec  $\varphi(\underline{A})$  la phase de la plus grande valeur propre de  $\underline{A}$ , en module), appelé facteur de dissipation algorithmique, est d'ailleurs plus facilement utilisé.

### 1.1e Cas des problèmes non-linéaires

Toutes les remarques données sur les schémas numériques d'intégration sont valables uniquement pour les systèmes linéaires. Dès qu'une non-linéarité est introduite, la convergence n'est plus assurée. Y. M. XIE a montré qu'il est même possible d'obtenir une moins bonne précision malgré un pas de temps plus petit [153].

La stabilité inconditionnelle des schémas implicites n'est plus valide en non-linéaire. Ils sont donc soumis, comme les schémas explicites, à une restriction sur le pas de temps. Mais le pas de temps critique  $\Delta t_{cri}$  ne peut plus être établi analytiquement. En pratique, dans les problèmes incluant de non-linéarités de comportement, on linéarise autour de la position d'équilibre à l'instant considéré puis on utilise les formules utilisées en linéaire pour l'estimer. Le pas de temps maximum est aussi dicté par la lenteur de la convergence et les erreurs introduites par le traitement approximatif des non-linéarités.

De plus, si la limite de la stabilité est dépassée en linéaire (*i.e.*  $\Delta t > \Delta t_{cri}$ ), la solution numérique croît exponentiellement jusqu'à la limite de l'*overflow* de l'ordinateur (donc facilement détectable par l'utilisateur) alors qu'en non-linéaire il se peut que l'instabilité ne soit pas directement visible, conduisant à une solution erronée sans que l'utilisateur

en soit conscient. Ce phénomène appelé instabilité arrêtée, qui arrive par exemple dans les problèmes élasto-plastiques, peut facilement être mis en évidence par une seconde intégration avec un pas de temps plus faible pour s'assurer que le résultat est relativement indépendant de la taille du pas de temps utilisé, ou par une balance énergétique.

La balance énergétique consiste à faire le bilan des énergies du système entre deux instants successifs. Il existe en effet un lien étroit entre la conservation de l'énergie et la stabilité numérique de certains schémas : le bilan est positif dans la zone d'instabilité ( $\Delta t > \Delta t_{cri}$ ). Tester les schémas sur des systèmes non-linéaires conservatifs est d'ailleurs un moyen rapide de quantifier leur inexactitude par la variation relative de l'énergie totale  $e = |(E - E_0)/E_0|$ . Le bilan énergétique correspond donc à une mesure de stabilité qui trouve son application non seulement dans les problèmes non-linéaires mais aussi avec les algorithmes implicites-explicites (issus d'une formulation hybride implicite/explicite) pour lesquels le calcul de  $\Delta t_{cri}$  n'est pas réalisable analytiquement.

Pour un oscillateur comprenant une non-linéarité cubique, de nombreux auteurs [86, 134] ont observé que les intégrateurs classiques tels que la méthode des différences centrées ou la méthode de l'accélération moyenne donnent de bons résultats dès que  $\Delta t < T/20$ , tandis que d'autres intégrateurs comme la  $\theta$ -méthode de Wilson ou la méthode de Houbolt amènent des erreurs importantes pour  $\Delta t > T/50$  à cause de leur fort amortissement numérique.

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4/5 est quant à elle de loin la plus précise si le pas de temps reste assez faible ( $e < 0,1\%$  pour  $\Delta t < T/100$ ). Son excellent taux de convergence explique pourquoi elle sert souvent de référence sur des cas simples [116], même si elle n'est pas utilisée pour traiter les problèmes transitoires en éléments finis car beaucoup trop onéreuse. Dans tous les cas, pour des pas de temps trop grands ( $\Delta t > T/5$ ), divers types de problèmes peuvent apparaître, notamment des problèmes de non-convergence, de solution numériquement chaotique, ou encore de solution totalement erronée [153].

D'autres auteurs comme C. H. LAMARQUE et O. JANIN [77] ont étudié les performances d'intégrateurs numériques sur des systèmes mécaniques avec impacts. Ils ont montré que les méthodes classiques de l'accélération moyenne ou de Runge-Kutta se comportent mieux, en termes de précision et de temps de calcul, que la méthode de Schatzman-Paoli pour laquelle un résultat de convergence a été établi (pour une catégorie de problèmes avec impacts). De plus, en testant plusieurs algorithmes de localisation de l'instant de chaque impact (interpolation linéaire, parabolique et dichotomie), ils ont pu mettre en évidence que la localisation très fine de l'instant des impacts n'est pas toujours nécessaire.

## 1.2 La méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une alternative à la méthode de tir. Elle est utilisée pour traiter divers types de problèmes, notamment ceux de propagation de la chaleur ou encore de crash. Le principe sous-jacent à cette méthode est le remplacement de toutes les dérivées (temporelles et/ou spatiales) apparaissant dans une équation différentielle par des quotients ou *différences finies* [126]. Pour le cas auquel on s'intéresse ici, les dérivées qui rentrent en jeu sont naturellement des dérivées temporelles.

### 1.2a Description de la méthode

La période  $[0, T]$  est tout d'abord partitionnée en  $M$  sous-intervalles  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $i$  allant de 1 à  $M$ ). L'objectif de la méthode est alors de trouver une valeur approchée  $\underline{q}_i$  de  $\underline{q}(t_i)$ , solution exacte au temps  $t_i$ . Pour cela on a recours à une approximation par différences finies des vitesses et accélérations généralisées ( $\underline{\dot{q}}$  et  $\underline{\ddot{q}}$ ) à ces instants. On rejoint là les schémas numériques d'intégration temporelle (*cf.* relations cinématiques II.3).

Pour illustrer cette méthode, le schéma de Crank-Nicolson sera utilisé (la démarche étant la même pour tout autre schéma) et les intervalles de temps seront tous supposés de longueur  $\Delta t$  par souci de simplicité. Le schéma de Crank-Nicolson est un schéma d'ordre 2 (*i.e.* avec une précision en  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ ) qui donne les approximations suivantes

$$\begin{cases} \underline{\dot{q}}_i &= \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot (\underline{q}_{i+1} - \underline{q}_{i-1}) \\ \underline{\ddot{q}}_i &= \frac{1}{\Delta t^2} \cdot (\underline{q}_{i+1} - 2 \cdot \underline{q}_i + \underline{q}_{i-1}) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

L'insertion de ces approximations dans l'équation différentielle du mouvement II.1 écrite à chaque instant  $t_i$ , associée à l'hypothèse de périodicité  $\underline{q}_M = \underline{q}_0$ , conduit alors à un système algébrique non-linéaire de la forme

$$\underline{H}(\underline{X}) = \underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{b}(\underline{X}) = \underline{0} \quad (\text{II.12})$$

qu'il faut résoudre pour obtenir le vecteur  $\underline{X} = {}^t [\underline{q}_0 \dots \underline{q}_i \dots \underline{q}_{M-1}]$ , *i.e.* les approximations de  $\underline{q}$  aux différents instants  $t_i$ . La matrice  $\underline{A}$  possède une structure particulière : bloc-tridiagonale avec en plus deux termes extra-diagonaux qui proviennent de la condi-

tion de périodicité.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}^d & \underline{\underline{A}}^u & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}}^l \\ \underline{\underline{A}}^l & \underline{\underline{A}}^d & \underline{\underline{A}}^u & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{A}}^l & \underline{\underline{A}}^d & \underline{\underline{A}}^u \\ \underline{\underline{A}}^u & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}}^l & \underline{\underline{A}}^d \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{A}}^l = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \underline{\underline{M}} - \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{A}}^d = -\frac{2}{\Delta t^2} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{A}}^u = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \underline{\underline{M}} + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \underline{\underline{B}} \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Le terme qui englobe les non-linéarités,  $\underline{\underline{b}}$ , s'exprime simplement par

$$\underline{\underline{b}}(\underline{\underline{X}}) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}^{lia}(t_0, \underline{\underline{q}}_0, \underline{\underline{q}}_1, \underline{\underline{q}}_{M-1}) - \underline{\underline{f}}^{lia}(t_0) \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}^{lia}(t_m, \underline{\underline{q}}_{m-1}, \underline{\underline{q}}_m, \underline{\underline{q}}_{m+1}) - \underline{\underline{f}}^{lia}(t_m) \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}^{lia}(t_{M-1}, \underline{\underline{q}}_0, \underline{\underline{q}}_{M-2}, \underline{\underline{q}}_{M-1}) - \underline{\underline{f}}^{lia}(t_{M-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

rendant aisé le calcul de la jacobienne de  $\underline{\underline{H}}$ . En effet,  $\underline{\underline{J}}_b = \frac{\partial \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{X}}}$  possède la même structure que  $\underline{\underline{A}}$ . Ses blocs non-nuls sur la ligne  $i$  étant

$$\underline{\underline{J}}_b^d = \frac{\partial \underline{\underline{f}}^{lia}}{\partial \underline{\underline{q}}} (t_i, \underline{\underline{q}}_i, \underline{\underline{q}}_i) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{J}}_b^u = -\underline{\underline{J}}_b^l = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{f}}^{lia}}{\partial \underline{\underline{q}}} (t_i, \underline{\underline{q}}_i, \underline{\underline{q}}_i) \quad (\text{II.15})$$

On remarque que si la force non-linéaire  $\underline{\underline{f}}^{lia}$  est indépendante de la vitesse généralisée  $\underline{\underline{q}}$  alors la jacobienne de  $\underline{\underline{b}}$  est bloc-diagonale.

## 1.2b Limitations de la méthode

A l'instar de la méthode de tir que nous verrons au chapitre suivant qui *utilise* un intégrateur, la méthode des différences finies *se base* directement sur le schéma numérique d'un intégrateur. A ce titre, le schéma usité se doit d'être consistant et de posséder de bonnes propriétés relativement à la stabilité et la précision (*cf.* paragraphe sur l'intégration temporelle). Le schéma de Crank-Nicolson par exemple est, en linéaire, inconditionnellement stable d'ordre 2.

Il faut noter que la méthode des différences finies conduit généralement à des systèmes de grande taille car pour obtenir une précision acceptable il faut utiliser une partition assez fine de la période. Elle n'est pas donc adaptée à l'étude de systèmes dont le champ

de déplacement présente des gradients importants ou comporte des termes moyenne ou haute fréquence. Cela explique pourquoi son utilisation dans les problèmes de dynamique non-linéaire en régime forcé est assez restreint. Des auteurs l'ont cependant déjà appliquée avec succès sur un problème de dynamique rotor supporté par un palier hydrodynamique. Pour que cette méthode soit viable point de vue temps de calcul, ils ont eu recours à la condensation modale et pris en considération la structure particulière des matrices au sein du solveur utilisé [140, 141].

## II.2 Les méthodes fréquentielles

Pour tout système linéaire subissant une excitation mono-harmonique, sa réponse, une fois le régime permanent établi, est elle aussi mono-harmonique. Cette constatation, fondée sur la théorie des équations différentielles linéaires, n'est cependant plus toujours vérifiée pour des systèmes non-linéaires. Il est toutefois légitime de supposer que la réponse forcée de tels systèmes sera quand même périodique.

Cela n'est bien entendu pas toujours vrai, car on observe également dans certains cas des réponses quasi-périodiques ou encore chaotiques, mais le cas de réponses périodiques reste quand même le plus fréquent, la période de la réponse  $T$  étant un multiple de la période de l'excitation  $T_f$  (*i.e.*  $T = p.T_f$ , avec  $p$  entier non nul). Dans ce cas, il est possible de décomposer la solution périodique de l'équation différentielle du mouvement en série de Fourier [56].

C'est exactement l'idée des méthodes fréquentielles. On admet que la solution recherchée est  $T$ -périodique et assez régulière. Elle peut ainsi être décomposée sur la base infinie mais dénombrable des fonctions trigonométriques. Comme du point de vue numérique il n'est pas envisageable de traiter des sommes infinies, l'hypothèse suivante est avancée : *la solution peut être approchée correctement par une série de Fourier tronquée*. Se limitant aux premiers termes uniquement (le terme constant, ou biais, et les  $M$  premiers harmoniques), et en notant  $\omega = 2\pi/T$ , on peut ainsi écrire [78]

$$\underline{q}^{exact}(t) \approx \underline{q}^{approché}(t) = \frac{1}{2} \underline{a}_0 + \sum_{m=1}^M \left( \underline{a}_m \cdot \cos(m\omega t) + \underline{b}_m \cdot \sin(m\omega t) \right) \quad (\text{II.16})$$

qui traduit qu'on approche la solution exacte par une fonction appartenant au sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par la base  $\mathcal{B}_M$  des fonctions trigonométriques  $\cos(m\omega t)$  ( $m=0$  à  $M$ ) et  $\sin(m\omega t)$  ( $m=1$  à  $M$ ).

La validité de cette hypothèse dépend fortement de l'ordre de troncature : plus le nombre de termes dans la série sera important, *i.e.* plus  $M$  sera grand, et plus  $\underline{q}^{\text{approché}}$  se rapprochera de  $\underline{q}^{\text{exact}}$ . Mais pour assurer cette convergence vers la solution exacte, encore faut-il vérifier un axiome de complétude. Celui-ci stipule qu'il faut utiliser la base  $\mathcal{B}_M$  dans sa totalité, c'est-à-dire prendre en considération tous les termes de la série tronquée. Bien entendu, s'il s'avère qu'un coefficient  $\underline{a}_m$  ou  $\underline{b}_m$  est nul ou négligeable comparé aux autres, l'harmonique relatif à celui-ci peut être omis dans la base utilisée. Malheureusement, il n'existe aucun critère permettant de stipuler à l'avance quels sont les harmoniques qui ont une importance, *i.e.* ceux qu'il faut effectivement retenir pour obtenir une solution acceptable.

La solution approchée, une fois injectée dans l'équation différentielle du mouvement, conduit alors à

$$\underline{\mathcal{E}}_M(t, \underline{X}) = \underline{M} \cdot \ddot{\underline{q}}^{\text{app}}(t) + \underline{B} \cdot \dot{\underline{q}}^{\text{app}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{q}^{\text{app}}(t) + \underline{f}^{\text{lia}}(t, \underline{q}^{\text{app}}, \dot{\underline{q}}^{\text{app}}) - \underline{f}^{\text{ext}}(t) \approx \underline{0} \quad (\text{II.17})$$

où

$$\underline{X} = {}^t[{}^t\underline{a}_0, {}^t\underline{a}_1, {}^t\underline{b}_1, \dots, {}^t\underline{a}_M, {}^t\underline{b}_M] \quad (\text{II.18})$$

Ce terme résiduel non nul obtenu,  $\underline{\mathcal{E}}_M$ , est lié à l'erreur de troncature : il mesure l'erreur commise en remplaçant la solution exacte par la solution approchée  $\underline{q}^{\text{approché}}$ , *i.e.* sa série de Fourier tronquée à l'ordre  $M$  (*cf.* II.16).

L'avantage de travailler avec des fonctions trigonométriques est de pouvoir exprimer ce terme résiduel uniquement en fonction du temps et des coefficients de Fourier de  $\underline{q}$ , *i.e.* de  $t$  et  $\underline{X}$ . En effet, la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'une fonction trigonométrique étant elle-même une fonction trigonométrique, accélération et vitesse peuvent s'exprimer dans la même base que celle utilisée pour exprimer le déplacement. Cela permet donc d'exprimer  $\underline{\mathcal{E}}_M$  sous la forme

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{E}}_M(t, \underline{X}) = & \frac{1}{2} \underline{K} \cdot \underline{a}_0 + \sum_{m=1}^M \left( \left( (\underline{K} - (m\omega)^2 \cdot \underline{M}) \cdot \underline{a}_m + (m\omega \cdot \underline{B}) \cdot \underline{b}_m \right) \cdot \cos(m\omega t) + \right. \\ & \left. \left( (\underline{K} - (m\omega)^2 \cdot \underline{M}) \cdot \underline{b}_m - (m\omega \cdot \underline{B}) \cdot \underline{a}_m \right) \cdot \sin(m\omega t) \right) \\ & + \underline{f}^{\text{lia}}(t, \underline{q}^{\text{approché}}(t, \underline{X}), \dot{\underline{q}}^{\text{approché}}(t, \underline{X})) - \underline{f}^{\text{ext}}(t) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Le propre de chaque méthodes fréquentielles est alors de faire disparaître la variable temps  $t$ , conduisant ainsi à un système d'équations algébriques dont les seules inconnues sont les coefficients de Fourier  $\underline{a}_m$  ( $m=0$  à  $M$ ) et  $\underline{b}_m$  ( $m=1$  à  $M$ ). Deux d'entre elles, les

plus répandues, sont exposées ci-dessous : la méthode de balance harmonique incrémentale et la méthode de collocation trigonométrique.

Avant de poursuivre, un point important est à souligner, car il conduit à une diminution du nombre d'inconnues. Ce point concerne quelques propriétés de la solution recherchée qu'il est parfois possible de trouver préalablement à tout calcul, et dont il faut tirer avantage lorsqu'elles permettent d'affirmer que certains harmoniques ont une contribution nulle. A titre d'exemple, on peut citer le cas d'un oscillateur soumis à du frottement sec pour lequel seuls les harmoniques d'ordre impair ont une participation non nulle [105]. Même remarque pour l'étude d'un oscillateur de Duffing si on se restreint aux solutions symétriques [24, 81].

## 2.1 La méthode de balance harmonique incrémentale

Déjà évoquée précédemment, la méthode de balance harmonique est une méthode fréquentielle dont l'inconvénient majeur provient de sa nature analytique. Pour son utilisation, on se heurte donc à quelques limitations :

1. travailler sur un système de petite taille,
2. considérer une non-linéarité faible assez simple,
3. prendre un nombre d'harmoniques restreint.

En effet, il est évident que les calculs ne peuvent être conduits sur des systèmes de grande taille et qu'ils sont difficilement réalisables pour des non-linéarités complexes. De plus, même pour des systèmes à un seul  $ddl$ , les calculs qu'il faut conduire lors de son application deviennent vite fastidieux si le nombre d'harmoniques retenus augmente (on dépasse rarement  $M = 3$ ). De ce fait, cela ne permet l'étude de systèmes qu'avec de faibles non-linéarités pour lesquels la réponse peut être correctement approchée par un petit nombre d'harmoniques. Le lecteur intéressé pourra consulter un ouvrage de A.H. NAYFEH et D.T. MOOK [99] dans lequel sont traités de nombreux exemples à quelques  $ddl$  incluant des non-linéarités de type raideur quadratique.

E. H. DOWELL [38] a également utilisé la méthode de balance harmonique pour analyser le comportement vibratoire d'une poutre, décrite dans sa base modale, reliée à un système masse/ressort par l'intermédiaire d'un patin modélisant du frottement sec. Pour



ce système à plusieurs  $ddl$ , malgré le fait qu'il ne retienne qu'un seul harmonique, ses conclusions semblent, pour reprendre ses mots, paradoxales, et le sont : il s'agit d'une inversion de signe conduisant alors à une mauvaise interprétation de l'effet de l'amortissement modal linéaire de la poutre. Cette erreur commise, corrigée dans un second article [52], montre la complexité des calculs à mener et comment il est facile de se tromper.

Avec l'essor de l'informatique, une nouvelle méthode permettant de s'abstenir de ces limitations, nommée *méthode de balance harmonique incrémentale*, a pu voir le jour. Les premiers travaux semblent être ceux de S. L. LAU et *al.* (*cf.* références dans [78]). Cette méthode s'effectue en deux étapes désignées dans la littérature par *procédure de Newton-Raphson* et *procédure de Galerkin*. La méthode sera d'abord décrite telle que présentée initialement par S. L. LAU. Le lecteur ne verra peut-être donc pas immédiatement de lien direct avec l'introduction sur les méthodes fréquentielles. Elle sera ensuite exposée sous un autre angle, ce qui permettra alors de la comparer à la méthode de balance harmonique et de revenir dans le cadre plus général exposé en introduction.

### 2.1a La procédure de Newton-Raphson

Dans la méthode de balance harmonique incrémentale, l'équation différentielle du mouvement II.1 est préalablement mise sous forme incrémentale, l'idée étant de déterminer la solution de manière itérative selon le schéma de Newton-Raphson. A cette fin, on décompose  $\underline{q}$  en deux termes : une fonction donnée a priori et une fonction corrective, *i.e.*  $\underline{q} = \underline{q}^{ini} + \underline{\Delta q}$ . Une fois cette expression injectée dans II.1, on obtient alors une nouvelle équation différentielle dont l'inconnue est  $\underline{\Delta q}$ . Si  $\underline{q}^{ini}$  est assez proche de la solution exacte, *i.e.*  $\underline{\Delta q} \approx \underline{0}$ , un développement de Taylor à l'ordre 1 de  $\underline{f}^{lia}$  conduit alors à

$$\underline{M} \cdot \underline{\Delta \ddot{q}}(t) + \left( \underline{B} + \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) \cdot \underline{\Delta \dot{q}}(t) + \left( \underline{K} + \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{q}} \right) \cdot \underline{\Delta q}(t) + \underline{\mathcal{R}}(t, \underline{q}^{ini}(t)) \approx \underline{0} \quad (\text{II.20})$$

avec

$$\underline{\mathcal{R}}(t, \underline{q}^{ini}(t)) = \underline{M} \cdot \underline{\ddot{q}}^{ini}(t) + \underline{B} \cdot \underline{\dot{q}}^{ini}(t) + \underline{K} \cdot \underline{q}^{ini}(t) + \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}^{ini}(t), \underline{\dot{q}}^{ini}(t)) - \underline{f}^{ext}(t) \quad (\text{II.21})$$

terme résiduel qui est d'autant plus faible que  $\underline{q}^{ini}$  est proche de la solution initiale.

Par souci de lecture, on notera l'omission volontaire des arguments des matrices jacobiennes relatives à  $\underline{f}^{nl}$ . Celles-ci sont bien entendu évaluées en  $(t, \underline{q}^{ini}(t), \underline{\dot{q}}^{ini}(t))$ . Il est également important de souligner que l'expression II.20 est non nulle du fait de l'approximation faite (développement de Taylor limité à l'ordre 1).

On se replace alors dans le contexte fréquentiel : s'intéressant à la solution périodique, on utilise des décompositions en série de Fourier limitées aux  $M$  premiers harmoniques

$$\begin{cases} \underline{q}^{ini}(t) &= \frac{1}{2} \underline{a}_0^{ini} + \sum_{m=1}^M \left( \underline{a}_m^{ini} \cdot \cos(m\omega t) + \underline{b}_m^{ini} \cdot \sin(m\omega t) \right) \\ \underline{\Delta q}(t) &= \frac{1}{2} \underline{\Delta a}_0 + \sum_{m=1}^M \left( \underline{\Delta a}_m \cdot \cos(m\omega t) + \underline{\Delta b}_m \cdot \sin(m\omega t) \right) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Restreindre  $\underline{q}^{ini}$  sous cette forme n'a aucune importance puisque c'est une fonction quelconque. Cependant, pour  $\underline{\Delta q}$ , il s'agit d'une troncature. De ce fait, on ne pourra converger vers  $\underline{q}^{exact}$ , la solution exacte du problème, mais seulement l'approcher par une fonction  $\underline{q}^{approché}$  appartenant à l'espace vectoriel engendré par  $\mathcal{B}_M$ .

Ces expressions, reportées dans les équations II.20 et II.21, conduisent à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \underline{K} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \right) \cdot \underline{\Delta a}_0 + \sum_{m=1}^M \left( \left( \underline{K} - (m\omega)^2 \cdot \underline{M} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \right) \cdot \underline{\Delta a}_m \right. \\ \left. + m\omega \cdot \left( \underline{B} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \right) \cdot \underline{\Delta b}_m \right) \cdot \cos(m\omega t) + \left( \underline{K} - (m\omega)^2 \cdot \underline{M} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \right) \cdot \underline{\Delta b}_m \\ \left. - m\omega \cdot \left( \underline{B} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \right) \cdot \underline{\Delta a}_m \right) \cdot \sin(m\omega t) + \underline{\mathcal{E}}_M(t, \underline{X}^{ini}) \approx \underline{0} \quad (\text{II.23}) \end{aligned}$$

où la définition de  $\underline{\mathcal{E}}_M$  est donnée en II.19.

Cette dernière équation est le produit de la procédure de Newton-Raphson. Elle se présente sous forme incrémentale en faisant intervenir des coefficients de Fourier et non plus de dérivées temporelles. Cependant il s'agit toujours d'une équation temporelle. L'application numérique de la méthode de Newton-Raphson est impossible à ce stade, car cela demande de travailler sur des systèmes d'équations algébriques de dimension finie. Transformer II.23 en un tel système est précisément l'objet de la seconde étape de la méthode de balance harmonique incrémentale.

### 2.1b La procédure de Galerkin

La procédure de Galerkin consiste à rechercher  $\underline{\Delta X}$  qui annule l'expression II.23 en moyenne temporelle pondérée, les fonctions de pondération étant les fonctions trigonométriques  $\cos(m\omega t)$  ( $m = 0$  à  $M$ ) et  $\sin(m\omega t)$  ( $m = 1$  à  $M$ ). On multiplie donc successivement II.23 par  $2/T$ ,  $2 \cos(k\omega t)/T$  et  $2 \sin(k\omega t)/T$  ( $k = 1$  à  $M$ ) puis on intègre sur une période, *i.e.*  $[0, T]$ . Dans la littérature, certains auteurs disent qu'ils réalisent une

balance harmonique [29], ou plutôt un équilibrage des termes harmoniques. Cela conduit à un système de  $(2M+1).N$  équations algébriques à  $(2M+1).N$  inconnues ( $N$  étant le nombre de  $ddl$  du système étudié) qui s'écrit sous la forme matricielle

$$\left( \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{J}}_b(\underline{X}^{ini}) \right) \cdot \underline{\underline{\Delta X}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X}^{ini} + \underline{b}(\underline{X}^{ini}) = \underline{0} \quad (\text{II.24})$$

où

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}^{(0,0)} & \dots & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \dots & \underline{\underline{A}}^{(2m-1,2m-1)} & \underline{\underline{A}}^{(2m-1,2m)} & \dots & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \dots & \underline{\underline{A}}^{(2m,2m-1)} & \underline{\underline{A}}^{(2m,2m)} & \dots & \underline{0} & \underline{0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{\underline{A}}^{(2M-1,2M-1)} & \underline{\underline{A}}^{(2M-1,2M)} \\ \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{\underline{A}}^{(2M,2M-1)} & \underline{\underline{A}}^{(2M,2M)} \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

et

$$\underline{b}(\underline{X}^{ini}) = \begin{pmatrix} \underline{b}^{(0)}(\underline{X}^{ini}) \\ \vdots \\ \underline{b}^{(2k-1)}(\underline{X}^{ini}) \\ \underline{b}^{(2k)}(\underline{X}^{ini}) \\ \vdots \\ \underline{b}^{(2M-1)}(\underline{X}^{ini}) \\ \underline{b}^{(2M)}(\underline{X}^{ini}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.26})$$

La structure bloc-diagonale de  $\underline{\underline{A}}$  est due à l'orthogonalité de la base  $\mathcal{B}_M$  (pour le produit scalaire  $\langle \bullet, \bullet \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \bullet \bullet dt$ ) combinée à la définition des vecteurs  $\underline{X}^{ini}$  et  $\underline{\underline{\Delta X}}$  (coefficients de Fourier classés harmonique par harmonique, *i.e.*  ${}^t [a_{0_1}^{ini}, a_{0_2}^{ini}, \dots, b_{M_{N-1}}^{ini}, b_{M_N}^{ini}]$  et non  $ddl$  par  $ddl$ , *i.e.*  ${}^t [a_{0_1}^{ini}, a_{1_1}^{ini}, \dots, b_{M-1_N}^{ini}, b_{M_N}^{ini}]$ ). La matrice jacobienne de  $\underline{b}$ , notée  $\underline{\underline{J}}_b$ , ne possède quant à elle pas de structure particulière a priori.

Les sous-matrices et sous-vecteurs sont définis comme suit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}^{(0,0)} &= \underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{A}}^{(2m-1,2m-1)} &= \underline{\underline{K}} - (m\omega)^2 \cdot \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{A}}^{(2m-1,2m-1)} \\ \underline{\underline{A}}^{(2m-1,2m)} &= m\omega \cdot \underline{\underline{B}} = -\underline{\underline{A}}^{(2m,2m-1)} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J}}_b^{(0,0)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} dt \\ \underline{\underline{J}}_b^{(0,2m-1)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \cos(m\omega t) - m\omega \cdot \frac{\partial f^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \sin(m\omega t) \right) dt \\ \underline{\underline{J}}_b^{(0,2m)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \sin(m\omega t) + m\omega \cdot \frac{\partial f^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \cos(m\omega t) \right) dt \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{J}}_b^{(2k-1,0)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \cos(k\omega t) dt \\
\underline{\underline{J}}_b^{(2k-1,2m-1)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \cos(m\omega t) - m\omega \cdot \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \sin(m\omega t) \right) \cdot \cos(k\omega t) dt \\
\underline{\underline{J}}_b^{(2k-1,2m)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \sin(m\omega t) + m\omega \cdot \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \cos(m\omega t) \right) \cdot \cos(k\omega t) dt \\
\\
\underline{\underline{J}}_b^{(2k,0)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \sin(k\omega t) dt \\
\underline{\underline{J}}_b^{(2k,2m-1)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \cos(m\omega t) - m\omega \cdot \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \sin(m\omega t) \right) \cdot \sin(k\omega t) dt \\
\underline{\underline{J}}_b^{(2k,2m)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \sin(m\omega t) + m\omega \cdot \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \cos(m\omega t) \right) \cdot \sin(k\omega t) dt
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\underline{b}^{(0)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}^{ini}(t, \underline{X}^{ini}), \dot{\underline{q}}^{ini}(t, \underline{X}^{ini})) - \underline{f}^{ext}(t) \right) dt \\
\underline{b}^{(2k-1)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}^{ini}(t, \underline{X}^{ini}), \dot{\underline{q}}^{ini}(t, \underline{X}^{ini})) - \underline{f}^{ext}(t) \right) \cdot \cos(k\omega t) dt \\
\underline{b}^{(2k)}(\underline{X}^{ini}) &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}^{ini}(t, \underline{X}^{ini}), \dot{\underline{q}}^{ini}(t, \underline{X}^{ini})) - \underline{f}^{ext}(t) \right) \cdot \sin(k\omega t) dt
\end{aligned} \tag{II.29}$$

Pour l'expression des sous-matrices de  $\underline{\underline{J}}_b$ , les dérivées de  $\underline{f}^{lia}$  par rapport à  $\underline{q}$  et  $\dot{\underline{q}}$  sont bien entendu évaluées en  $(t, \underline{q}^{ini}(t, \underline{X}^{ini}), \dot{\underline{q}}^{ini}(t, \underline{X}^{ini}))$ .

A la fin de cette procédure de Galerkin, on se retrouve donc avec un système matriciel linéaire dont la résolution conduit aux coefficients de Fourier de  $\underline{\Delta q}$ . Cependant il ne faut pas oublier que le développement de Taylor dans II.20 a été limité à l'ordre 1. De ce fait, la fonction  $\underline{q}^{ini} + \underline{\Delta q}$  n'est pas la solution attendue, *i.e.*  $\underline{q}^{approché}$ , mais juste une approximation de celle-ci.

La méthode de balance harmonique incrémentale est donc implémentée en suivant l'algorithme suivant

- |   |  |
|---|--|
| 1. Initialisation de $\underline{X}^{ini}$                | 3. $\underline{X}^{ini} \leftarrow \underline{X}^{ini} + \underline{\Delta X}$ |
| 2. Résolution de II.20 $\Rightarrow \underline{\Delta X}$ | 4. Retour au point 2   |

On retrouve l'algorithme classique de Newton-Raphson [73, 126]. Après chaque itération, on obtient une approximation de la solution  $\underline{X}$  meilleure que la précédente, la convergence étant assurée si le premier itéré n'est pas trop éloigné de la solution. Le

processus est stoppé dès qu'un critère d'arrêt est vérifié. Les tests de convergence utilisés sont généralement [78, 95]

$$\|\underline{\Delta X}\| \leq \text{TOL}_1 \quad \text{et / ou} \quad \frac{\|\underline{\Delta X}\|}{\|\underline{X}^{ini}\|} \leq \text{TOL}_2 \quad (\text{II.30})$$

où  $\text{TOL}_1$  et  $\text{TOL}_2$  sont des tolérances fixées par l'utilisateur.  $\|\bullet\|$  représente soit la norme euclidienne  $\|\bullet\|_2$  soit la norme infinie  $\|\bullet\|_\infty$ .

### 2.1c Evaluation des termes non-linéaires

Dans le système d'équations algébriques linéarisées II.24 auquel conduit la méthode de balance harmonique incrémentale apparaissent de nombreuses intégrales faisant intervenir en intégrant les forces non-linéaires et leurs dérivées par rapport aux déplacements et vitesses généralisés (*cf.* II.28 et II.29). La grande difficulté de cette méthode réside en fait dans l'évaluation de ces intégrales.

La première approche est le calcul direct. Il s'agit d'une évaluation littérale de toutes ces intégrales :  $\underline{b}$  et  $\underline{J_b}$  sont ainsi obtenus sous une forme explicite. C'est classiquement l'approche utilisée pour la partie linéaire de  $\underline{b}$ , relative à  $\underline{f}^{ext}$ . En effet, la sollicitation extérieure est souvent décomposée en harmoniques,

$$\underline{f}^{ext}(t) = \underline{f}_0 + \underline{f}_c \cdot \cos(\omega_f t) + \underline{f}_s \cdot \sin(\omega_f t) + \underline{f}_{c2} \cdot \cos(2\omega_f t) + \underline{f}_{s2} \cdot \sin(2\omega_f t) + \dots \quad (\text{II.31})$$

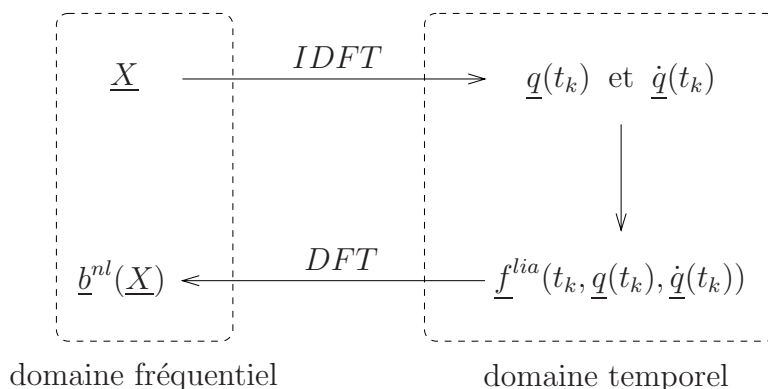
le calcul est donc immédiat et donne

$$\underline{b}^{lin} = -{}^t[ 2 \cdot {}^t\underline{f}_0, \underbrace{{}^t\underline{0}, \dots, {}^t\underline{0}, {}^t\underline{f}_c, {}^t\underline{f}_s}_{2p \text{ termes}}, \underbrace{{}^t\underline{0}, \dots, {}^t\underline{0}, {}^t\underline{f}_{c2}, {}^t\underline{f}_{s2}}_{2p \text{ termes}}, \dots ] \quad (\text{II.32})$$

Les vecteurs nuls n'interviennent que dans le cas où la période présumée de la solution ne correspond pas à celle de la force d'excitation, *i.e.* lorsque  $p > 1$ .

Pour la partie non-linéaire de  $\underline{b}$ , cette approche a cependant des limites, car les calculs à mener sont lourds et peuvent vite devenir inextricables avec certains types de non-linéarités. Néanmoins, elle est applicable dans le cas d'une raideur linéaire par morceaux [78] éventuellement paramétrique (en  $\cos(\omega t)$ ) [107], d'une raideur quadratique [108] et d'un amortissement de type frottement sec [105].

Une autre approche pour l'évaluation de  $\underline{b}^{nl}$  se base sur une décomposition en série de Fourier de  $\underline{f}^{lia}$ . La décomposition est licite puisque cette fonction est  $T$ -périodique (la justification découlant des trois points suivants : (1)  $\underline{q}$  est supposée  $T$ -périodique donc

FIG. II.1: *Technique AFT*

$\underline{\dot{q}}$  et  $\underline{\ddot{q}}$  le sont aussi, (2)  $\underline{f}^{ext}$  est  $T_f$ -périodique donc  $T$ -périodique, (3)  $\underline{f}^{lia}$  s'exprime en fonction de ces quatre vecteurs au travers de II.1). Tronquée à  $M$  harmoniques, cette décomposition s'écrit

$$\underline{f}^{lia}(t, \underline{q}, \underline{\dot{q}}) \approx \frac{1}{2} \underline{c}_0(\underline{X}) + \sum_{m=1}^M \left( \underline{c}_m(\underline{X}) \cdot \cos(m\omega t) + \underline{d}_m(\underline{X}) \cdot \sin(m\omega t) \right) \quad (\text{II.33})$$

En remarquant que les termes non-linéaires apparaissant dans  $\underline{b}$  correspondent aux coefficients de la série de Fourier de  $\underline{f}^{lia}$ , c'est-à-dire à  $\underline{c}_m$  et  $\underline{d}_m$ , on peut alors avoir recours aux transformées de Fourier discrètes directes (DFT) et inverses (IDFT) pour le calcul de  $\underline{b}^{nl}$  en fonction de  $\underline{X}$ . En effet, connaissant les coefficients de Fourier de  $\underline{q}$ , on peut obtenir, via une IDFT, la valeur de  $\underline{q}$  et  $\underline{\dot{q}}$  en plusieurs instants  $t_k = kT/L$  ( $k = 0$  à  $L-1$ ). On en déduit alors, par définition, la valeur de  $\underline{f}^{lia}$  en ces mêmes instants. Enfin, l'utilisation d'une DFT sur  $\underline{f}^{lia}$  échantillonnée fournit ses coefficients de Fourier, autrement dit les éléments du vecteur  $\underline{b}^{nl}$ .

Ce principe, portant le nom de technique AFT (pour *Alternating Frequency/Time*), est schématisé figure II.1. Initialement, AFT est le nom donné à une méthode par T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN [19] (variante de la méthode de balance harmonique incrémentale). Cela dit, dans la littérature actuelle, AFT réfère désormais à cette technique de transitions entre les domaines temporel et fréquentiel, bien que T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN n'en soient pas les créateurs puisque d'autres personnes — S. SAITO par exemple [113] — l'employaient déjà avant eux.

Pour le calcul des transformées de Fourier discrètes, il est fortement conseillé de prendre un nombre de points d'échantillonnage multiple de 2 ( $L = 2^n$  avec  $n$  entier généralement compris entre 8 et 12). Ceci permet d'utiliser un algorithme FFT (pour *Fast Fourier Transform*) développé par J. W. COOLEY et J. W. TUKEY en 1965, qui, grâce à sa performance, minimise le temps de calcul.

Il est important de noter que la DFT est une méthode numérique de calcul de trans-

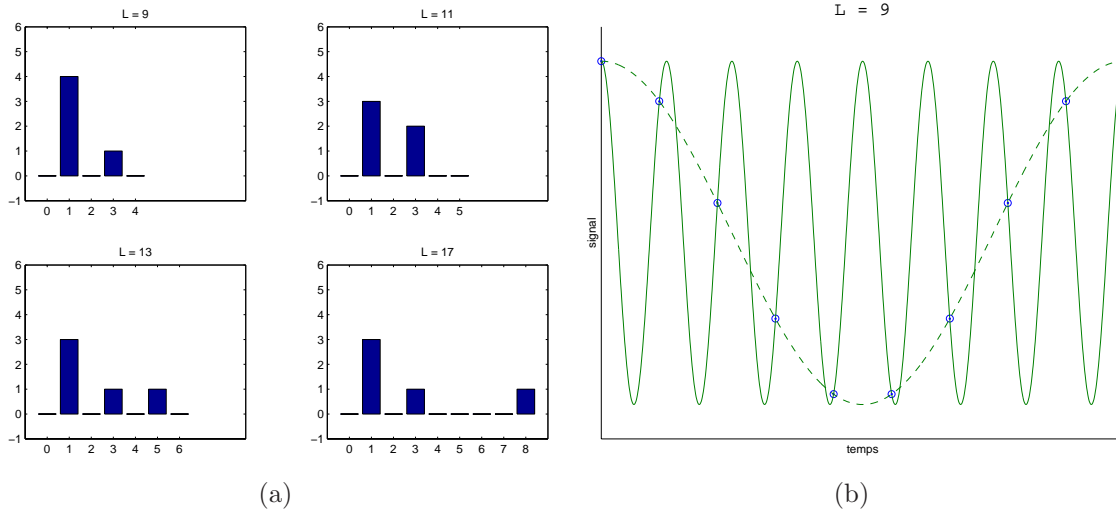


FIG. II.2: *Explication du phénomène de distorsion de repliement*

formée de Fourier (discrète) et non de calcul de série de Fourier (tronquée). Ainsi il est nécessaire d'établir correctement le lien entre les coefficients de la transformée et les coefficients de la série (certains auteurs [29, 72] utilisent d'ailleurs directement une notation dérivée de la DFT à la place de II.16 et II.33, à un coefficient multiplicatif près, correspondant au nombre de points d'échantillonnage). Lors du traitement numérique du calcul de la transformée de Fourier, il faut également être conscient des erreurs classiques introduites par l'échantillonnage [48]. La première erreur est une distorsion de repliement (*aliasing*) qui se produit lorsque le signal analysé comporte des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist ( $f_{max} = (L/T)/2$ , soit la moitié de la fréquence d'échantillonnage). Si tel est le cas, ces composantes fréquentielles viennent s'ajouter aux composantes comprises dans le spectre  $[0, f_{max}]$ . L'exemple figure II.2(a) montre un signal de période 1 sec comportant des harmoniques à 1, 3 et 8 Hz. L'harmonique à 8 Hz est bien visible pour  $L = 17$ . Mais pour  $L < 17$ , elle se superpose aux autres harmoniques. Pour  $L = 9$ , la figure II.2(b) montre comment l'échantillonnage temporel intervient dans ce phénomène. La seconde erreur est le *leakage*. Il s'agit de la répartition de l'énergie de chaque composante fréquentielle d'un signal analysé pendant une période finie sur les fréquences discrètes présentes dans le spectre de la DFT. Cette erreur se traite aisément ici en prenant comme période d'échantillonnage la période  $T$ . Quant au problème de distorsion de spectre, le seul moyen de s'en affranchir est de prendre un nombre de points  $L$  assez grand lors du calcul de la DFT [19].

Le calcul de  $\underline{b}^{lin}$  par FFT est une approche très répandue principalement grâce à sa capacité à traiter indifféremment tout type de non-linéarité [29, 72, 73, 15, 146]. Lorsque le nombre de points d'échantillonnage n'est pas une puissance de 2, on a recours à l'algorithme classique de DFT [56, 48]. En prenant  $L = 2.M + 1$ , les coefficients  $\underline{c}_m$  et  $\underline{d}_m$  se calculent

aisément par

$$\underline{F}(\underline{X}) = \begin{pmatrix} \underline{c}_0(\underline{X}) \\ \underline{c}_1(\underline{X}) \\ \underline{d}_1(\underline{X}) \\ \vdots \\ \underline{c}_M(\underline{X}) \\ \underline{d}_M(\underline{X}) \end{pmatrix} = (\underline{\Gamma} \otimes \underline{I}) \cdot \begin{pmatrix} \underline{f}^{lia}(t_1, \underline{q}(t_1), \dot{\underline{q}}(t_1)) \\ \vdots \\ \underline{f}^{lia}(t_L, \underline{q}(t_L), \dot{\underline{q}}(t_L)) \end{pmatrix} \quad (\text{II.34})$$

le déplacement aux divers instants de l'échantillonnage  $t_k$  ( $k = 1$  à  $L$ ) étant obtenu via

$${}^t[\underline{q}(t_1), \dots, \underline{q}(t_L)] = (\underline{\Gamma}^{-1} \otimes \underline{I}) \underline{X} \quad (\text{II.35})$$

Les matrices  $\underline{\Gamma}$  et  $\underline{\Gamma}^{-1}$  d'ordre  $L$  sont parfois appelées matrices de transformation. Elles permettent de passer respectivement du temporel au fréquentiel et du fréquentiel au temporel. Leurs expressions sont [95, 142]

$$\underline{\Gamma}(i, j) = \begin{cases} 2/L & \text{pour } i = 1 \\ 2/L \cdot \cos(i \cdot (j-1) \cdot \pi/L) & \text{pour } i = 2, 4, \dots, L-1 \\ 2/L \cdot \sin((i-1) \cdot (j-1) \cdot \pi/L) & \text{pour } i = 3, 5, \dots, L \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

et

$$\underline{\Gamma}^{-1}(i, j) = \begin{cases} 1/2 & \text{pour } j = 1 \\ \cos((i-1) \cdot j \cdot \pi/L) & \text{pour } j = 2, 4, \dots, L-1 \\ \sin((i-1) \cdot (j-1) \cdot \pi/L) & \text{pour } j = 3, 5, \dots, L \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

et se retrouvent facilement en écrivant l'interpolation des signaux aux instants  $t_k$  par les fonctions de la famille  $\mathcal{B}_M$ .

Bien que certains auteurs affirment que cette technique est plus efficace en se basant sur la constatation que les matrices de transformation ne nécessitent qu'une et une seule initialisation [29], son utilisation montre que dans quasiment tous les cas elle est moins rapide que celle utilisant l'algorithme FFT [144]. Elle est toutefois plus précise. Son attrait réside principalement dans sa nature générale qui lui permet d'être utilisée dans d'autres circonstances, notamment pour traiter les solutions quasi-périodiques [75]. Le plus rapide et précis reste quand même la méthode de balance harmonique sans technique AFT, *i.e.* avec les expressions analytiques (si disponibles) [78], en dépit d'une probabilité accrue d'introduction d'erreurs lors de leur programmation.

Pour l'évaluation de  $\underline{J}_b$ , le calcul classique, applicable dans toute situation, est une approximation par différences finies [29, 74]. Le calcul analytique exact peut aussi être mené, dans certaines circonstances [105, 78, 107]. La technique AFT peut encore s'appliquer. Il suffit de remarquer que les colonnes de  $\underline{J}_b$  contiennent les coefficients de Fourier des fonctions  $\frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} , \frac{\partial f^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \cos(m\omega t) - m\omega \cdot \frac{\partial f^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \sin(m\omega t)$  et  $\frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \sin(m\omega t) + m\omega \cdot \frac{\partial f^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} \cdot \cos(m\omega t)$ ,



comme le montrent les équations II.28. Cette technique a déjà été appliquée [95] mais conduit à un grand nombre de calcul de FFT  $((2M + 1)^2 \cdot N^2$  au total), ce qui se révèle coûteux lorsque  $M$  ou  $N$  augmente. A. Y. T. LEUNG et S. K. CHUI [81] proposent quant à eux un calcul explicite de  $\underline{\underline{J}}_b$  directement à partir de coefficients de Fourier des matrices jacobienes de  $\underline{f}^{lia}$  (par rapport à  $\underline{q}$  et  $\underline{\dot{q}}$ ). Le calcul de leurs coefficients ne nécessite que  $N^2$  FFT pour chaque, engendrant ainsi un gain en temps calcul important. La matrice  $\underline{\underline{J}}_b$  est ensuite construite à partir de formules analytiques non données ici mais détaillées dans [81]. Outre la rapidité, on limite également les erreurs de calcul liées au traitement numérique de l'évaluation de la transformée de Fourier. Le seul point faible réside dans la complexité des formules qui peuvent facilement donner naissance à des erreurs de programmation.

Une dernière technique consiste à combiner le calcul analytique de la jacobienne de  $\underline{f}^{lia}$  avec les formules de la DFT et IDFT. Y. B. KIM et S. T. NOAH en donne le détail des calculs sur des cas particuliers comme un système comprenant une raideur bi-linéaire [73] ou un rotor de Jeffcott avec un jeu radial [72]. Dans le cadre d'une non-linéarité quelconque, P. SEKAR [115] fournit l'expression générale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}) = & (\underline{\Gamma} \otimes \underline{I}) \cdot \text{diag} \left( \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{q}}(t_l, \underline{q}(t_l), \underline{\dot{q}}(t_l)) \right) \cdot (\underline{\Gamma}^{-1} \otimes \underline{I}) \\ & + (\underline{\Gamma} \otimes \underline{I}) \cdot \text{diag} \left( \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}}(t_l, \underline{q}(t_l), \underline{\dot{q}}(t_l)) \right) \cdot ((\underline{\Gamma}^{-1} \cdot \underline{D}) \otimes \underline{I}) \quad (\text{II.38}) \end{aligned}$$

qui se découle directement de la dérivation de II.34. La matrice de dérivation

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega & \dots & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & M \cdot \omega \\ 0 & \dots & 0 & -M \cdot \omega & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

n'est utilisée que lorsque la force  $\underline{f}^{lia}$  dépend de la vitesse généralisée. L'expression II.38 combine précision et facilité de programmation.

### 2.1d Application d'autres algorithmes de résolution

Historiquement, dans la méthode de balance harmonique incrémentale, l'ordre dans lequel les procédures de Newton-Raphson et de Galerkin sont appliquées est effectivement

celui présenté dans les paragraphes précédents. Cela dit, et comme démontré par A. A. FERRI [51], cet ordre a peu d'importance. En effet, il est possible de partir directement de l'équation II.17. Lui appliquer la procédure de Galerkin revient à écrire

$$\begin{cases} \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \underline{\mathcal{E}}_M(t, \underline{X}) \cdot \cos(k\omega t) dt = \underline{0} & , \quad \forall k, 0 \leq k \leq M \\ \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \underline{\mathcal{E}}_M(t, \underline{X}) \cdot \sin(k\omega t) dt = \underline{0} & , \quad \forall k, 1 \leq k \leq M \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Cela montre que la solution approchée obtenue est la projection orthogonale de la solution exacte sur le sous-espace vectoriel engendré par  $\mathcal{B}_M$ . Ces intégrations menées, on trouve un système algébrique de la forme

$$\underline{H}(\underline{X}) = \underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{b}(\underline{X}) = \underline{0} \quad (\text{II.41})$$

La résolution de celui-ci par la méthode de Newton-Raphson nécessite son écriture sous forme incrémentale, ce qui redonne finalement II.24. Dans ce cas, inverser l'ordre des 2 procédures n'a donc aucune importance tant point de vue théorique que pratique. Néanmoins, appliquer en premier la procédure de Galerkin montre clairement que la procédure de Newton-Raphson n'est pas indispensable. Pour résoudre le système II.41, on peut en réalité avoir recours à n'importe quel solveur. F. CHU et Z. ZHANG par exemple utilisent la méthode inverse de Broyden de rang 1 [32].

La méthode AFT développée par T. M. CAMERON et J. H. GRIFFIN [19] est une variante de la méthode de balance harmonique incrémentale. Dans cette méthode, l'équation différentielle du mouvement II.1 est écrite sous forme fréquentielle en prenant la transformation de Fourier de chacun des termes. Puisque cela est effectué par FFT, l'équation obtenue doit être vérifiée à toutes les fréquences discrètes introduites par la FFT ( $\omega_k = 2\pi/T_e$  avec  $k = 0$  à  $L/2$ ,  $L$  étant le nombre de points et  $T_e$  la période d'échantillonnage). Il s'agit donc de résoudre un système algébrique de  $(1 + L/2) \cdot N$  équations à  $(1 + L/2) \cdot N$  inconnues. Si on prend  $T_e = T$  et  $L = 2M$ , on retrouve exactement la méthode de balance harmonique incrémentale avec évaluation du terme non-linéaire  $\underline{b}$  par FFT. La différence principale avec celle-ci réside dans son implémentation judicieuse. En effet, plutôt que de limiter le nombre de fréquences discrètes pour la FFT et ainsi se limiter aux basses fréquences, l'approche de la méthode AFT consiste à prendre au départ un grand nombre de fréquences discrètes ( $L$  élevé) en appliquant quelques itérations de type point fixe sur le système algébrique à résoudre pour voir quels harmoniques sont prépondérants, puis à se limiter à ces dernières pour la résolution par la méthode de Newton-Raphson. Cette implémentation permet de conserver les termes hautes fréquences du signal tout en limitant le nombre d'inconnues et donc le temps de calcul.

Pour la méthode de balance harmonique incrémentale, il est aussi possible de limiter le nombre d'harmoniques dans II.16 à la composante synchrone à quelques sur-harmoniques et/ou sous-harmoniques d'ordre  $m$  (pour ces dernières il faut  $p > 1$ ). Le système à résoudre

comportant plus d'équations que d'inconnues, on a alors recours à un algorithme d'optimisation tel que celui de Levenberg-Marquardt (optimisation par moindres carrés) pour la recherche de la solution [118].

### 2.1e Relation avec la méthode de balance harmonique

On s'aperçoit en observant II.40 que la méthode de balance harmonique incrémentale n'est autre que la méthode de la balance harmonique classique en ce qui concerne la mise en équation. La seule différence réside dans la résolution qui n'est plus analytique mais numérique.

La méthode de balance harmonique incrémentale est, comme cela vient d'être exposé, très diversifiée dans sa mise en équation et technique de résolution. Pendant de nombreuses années les auteurs ont donné divers nom à cette méthode, comme la méthode de Newton-Raphson / Galerkin, la *Fast Galerkin Method* ou encore la méthode de Balance Harmonique / Newton-Raphson. Aujourd'hui le nom de *balance harmonique incrémentale* semble définitivement adopté. De nombreuses présentations de cette méthode, différentes de celles exposées ici, existent [81, 15].

## 2.2 La méthode de collocation trigonométrique

La méthode de balance harmonique incrémentale exposée précédemment n'est autre qu'une méthode de résidus pondérés. Ces méthodes de résidus pondérés, bien connues dans le domaine du calcul par éléments finis [34], permettent d'approcher numériquement des solutions dont l'expression analytique ne peut être trouvée.

Elles consistent à approximer la solution exacte par sa projection sur une base complète préalablement définie (*cf.* II.16). Puisqu'il s'agit d'une approximation, l'équation que l'on cherche à résoudre n'est donc pas parfaitement vérifiée. Il subsiste une erreur dénommée *résidu* (II.19). L'objectif est alors de minimiser l'erreur. Pour cela, on cherche à rendre ce résidu orthogonal à une famille de fonctions de pondérations (ou fonctions *test*) qui forment une base complète (II.40). Appliquées au calcul de solutions périodiques, ces méthodes permettent donc de transformer l'équation différentielle du mouvement (II.1) en un système d'équations algébriques (II.41).

Pour la méthode de balance harmonique incrémentale, fonctions d'approximation et

fonctions de pondérations sont identiques (il s'agit des fonctions harmoniques de la base  $\mathcal{B}_M$ ). Elle s'apparente donc à la méthode de Galerkin, la plus célèbre des méthodes de résidus pondérés, aussi nommée méthode de Bubnov-Galerkin. D'autres méthodes de résidus pondérés existent néanmoins [34]. Pour évoquer les plus populaires, on peut citer : la méthode de collocation (encore appelée méthode de collocation par points), la méthode des sous-domaines (ou de collocation par sous-domaines), la méthode des moindres carrés (ou des moindres carrés continus) et la méthode de collocation par moindres carrés (ou des moindres carrés ponctuels, ou encore de collocation sur-déterminée). A titre informatif, elles appartiennent à la famille des méthodes de Petrov-Galerkin (méthodes de résidus pondérés pour lesquelles les fonctions de pondération ne dépendent pas des fonctions utilisées pour approcher la solution).

L'application d'autres méthodes de résidus pondérés au calcul de solutions périodiques semble donc justifiée. C'est ce qui a été fait avec la méthode de collocation, donnant ainsi naissance à une méthode fréquentielle désignée dans la littérature par *méthode de collocation trigonométrique*.

De nombreux auteurs l'ont déjà largement utilisée principalement sur des problèmes incluant des amortisseurs à film d'huile. J. Y. ZHAO et *al.* étudie grâce à cette méthode leurs influences sur le comportement de rotors rigides ou flexibles dans le cas où ils sont montés avec ressort de retenue, en fonctionnement concentrique mais aussi excentrique [157, 156]. C. S. CHEN et *al.* quant à eux l'emploient pour analyser les vibrations couplées en torsion et flexion d'un engrenage dont le pignon menant est supporté par un tel amortisseur [21, 22].

## 2.2a Procédure de collocation

Cette méthode consiste à chercher la solution approchée qui vérifie l'équation du mouvement en  $2M+1$  instants  $t_k$  préalablement choisis sur la période étudiée, *i.e.*  $[0, T]$  (en général cette répartition est uniforme :  $t_k = k.T/(2M+1)$ ). La collocation consiste donc à écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{M} \cdot \ddot{q}(t_1) + \underline{B} \cdot \dot{q}(t_1) + \underline{K} \cdot q(t_1) + \underline{f}^{lia}(t_1, \underline{q}, \dot{q}) = \underline{f}^{ext}(t_1) \\ \vdots \\ \underline{M} \cdot \ddot{q}(t_k) + \underline{B} \cdot \dot{q}(t_k) + \underline{K} \cdot q(t_k) + \underline{f}^{lia}(t_k, \underline{q}, \dot{q}) = \underline{f}^{ext}(t_k) \\ \vdots \\ \underline{M} \cdot \ddot{q}(t_{2M}) + \underline{B} \cdot \dot{q}(t_{2M}) + \underline{K} \cdot q(t_{2M}) + \underline{f}^{lia}(t_{2M}, \underline{q}, \dot{q}) = \underline{f}^{ext}(t_{2M}) \end{array} \right. \quad (\text{II.42})$$

On injecte ensuite dans ce système d'équations le développement en série de Fourier

tronquée de  $\underline{g}$  (II.16). Les calculs qui en découlent ont été menés par A. N. JEAN et H. D. NELSON [68] et sont assez fastidieux. Nous proposons donc un autre moyen de développer les calculs. Notre nouvelle approche, exposée ci-dessous, conduit bien entendu au même résultat, mais beaucoup plus simplement et rapidement.

## 2.2b Pondération par des Dirac

L'idée consiste à appliquer directement la collocation sur l'équation II.19, ce qui revient en fait à annuler le résidu  $\underline{\mathcal{E}}_M$  (cf. II.19) en moyenne temporelle pondérée, les fonctions de pondération étant des Dirac,  $\delta(t_k) : t \mapsto \delta(t - t_k)$  ( $k=0$  à  $2M$ ). Concrètement, il suffit de vérifier

$$\forall k, 0 \leq k \leq 2M, \quad \int_0^T \underline{\mathcal{E}}_M(t, \underline{X}) \cdot \delta(t - t_k) dt = \underline{\mathcal{E}}_M(t_k, \underline{X}) = \underline{0} \quad (\text{II.43})$$

d'où le lien entre la méthode de collocation trigonométrique et la méthode de collocation classique.

Par cette technique, on obtient directement un système de  $(2M + 1) \cdot N$  équations algébriques à  $(2M + 1) \cdot N$  inconnues qui s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\underline{H}(\underline{X}) = \underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{b}(\underline{X}) = \underline{0} \quad (\text{II.44})$$

La matrice  $\underline{A}$  s'exprime par

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}^{(0,0)} & \dots & \underline{A}^{(0,2m-1)} & \underline{A}^{(0,2m)} & \dots & \underline{A}^{(0,2M-1)} & \underline{A}^{(0,2M)} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \underline{A}^{(k,0)} & \dots & \underline{A}^{(k,2m-1)} & \underline{A}^{(k,2m)} & \dots & \underline{A}^{(k,2M-1)} & \underline{A}^{(k,2M)} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \underline{A}^{(2M,0)} & \dots & \underline{A}^{(2M,2m-1)} & \underline{A}^{(2M,2m)} & \dots & \underline{A}^{(2M,2M-1)} & \underline{A}^{(2M,2M)} & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{A}^{(k,0)} &= \frac{1}{2} \underline{K} \\ \underline{A}^{(k,2m-1)} &= (\underline{K} - (m\omega)^2 \underline{M}) \cdot \cos(m\omega t_l) - m\omega \underline{B} \cdot \sin(m\omega t_l) \\ \underline{A}^{(k,2m)} &= (\underline{K} - (m\omega)^2 \underline{M}) \cdot \sin(m\omega t_l) + m\omega \underline{B} \cdot \cos(m\omega t_l) \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

La matrice  $\underline{A}$  n'a pas, comme dans le cas de la méthode de balance harmonique incrémentale, une structure bloc-diagonale. Cependant sa construction est assez aisée. Il suffit de remarquer que

$$\underline{A} = (\underline{\Gamma}^{-1} \underline{D}^2) \otimes \underline{M} + (\underline{\Gamma}^{-1} \underline{D}) \otimes \underline{B} + \underline{\Gamma}^{-1} \otimes \underline{K} \quad (\text{II.47})$$

avec  $\underline{\Gamma}$  et  $\underline{D}$  matrices définies dans II.36 et II.39. La matrice  $\underline{\underline{D}}^2$  est diagonale, ses termes étant de la forme  $(m\omega)^2$ .

Le vecteur  $\underline{b}$  quant à lui englobe les forces non-linéaires et les forces extérieures

$$\underline{b} = \underline{b}^{nl} + \underline{b}^{lin} = \begin{pmatrix} \underline{f}^{lia}(t_0, \underline{q}(t_0, \underline{X}), \underline{\dot{q}}(t_0, \underline{X})) \\ \vdots \\ \underline{f}^{lia}(t_k, \underline{q}(t_k, \underline{X}), \underline{\dot{q}}(t_k, \underline{X})) \\ \vdots \\ \underline{f}^{lia}(t_{2M}, \underline{q}(t_{2M}, \underline{X}), \underline{\dot{q}}(t_{2M}, \underline{X})) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underline{f}^{ext}(t_0) \\ \vdots \\ \underline{f}^{ext}(t_k) \\ \vdots \\ \underline{f}^{ext}(t_{2M}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.48})$$

Le système obtenu peut alors être résolu par n'importe quel solveur non-linéaire. C. NATARAJ et H. D. NELSON [96] utilisent par exemple une méthode de la sécante. Mais on peut également faire appel à d'autres algorithmes, qui utilisent éventuellement la matrice jacobienne de  $\underline{b}$  dont voici l'expression

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J}}_b = \text{diag} \left( \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{q}}(t_k, \underline{q}(t_k), \underline{\dot{q}}(t_k)) \right) \cdot (\underline{\Gamma}^{-1} \otimes \underline{I}) \\ + \text{diag} \left( \frac{\partial \underline{f}^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}}(t_k, \underline{q}(t_k), \underline{\dot{q}}(t_k)) \right) \cdot ((\underline{\Gamma}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}}) \otimes \underline{I}) \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

On remarquera la similitude avec II.38.

### 2.2c Collocation par moindres carrés

La collocation peut s'effectuer sur un nombre d'instantan quelconque  $L$  vérifiant  $L \geq 2M+1$  (condition nécessaire pour que le problème soit bien posé). Pour  $L > 2M+1$ , cette collocation dite sur-déterminée conduit à un système de  $L \cdot N$  équations pour  $(2M+1) \cdot N$  inconnues, similaire à II.44. Ce système étant rectangulaire, sa résolution passe donc par l'utilisation d'un algorithme d'optimisation. Il est possible de démontrer que la solution de ce problème minimise la fonctionnelle  $\mathcal{I}$  définie par

$$\mathcal{I}(\underline{X}) = \sum_{k=1}^L \|\underline{\mathcal{E}}_M(t_k, \underline{X})\|_2^2 \quad (\text{II.50})$$

montrant par conséquent son lien direct avec la méthode de collocation par moindres carrés. Le cas particulier  $L = 2M+1$  conduit naturellement à la méthode de collocation trigonométrique telle exposée précédemment.

Cette méthode est adaptée astucieusement par M. CHINTA et A. B. PALAZZOLO [26]. Leur stratégie est de faire d'abord appel à la méthode de collocation trigonométrique. Si un problème de convergence est rencontré avec le solveur, suite à une mauvaise estimation de la solution recherchée (*i.e.* mauvais itéré initial) ou autre (mauvaise répartition des instants  $t_k$  par exemple), ils se retournent vers la méthode de collocation trigonométrique sur-déterminée. Pour la résolution du problème, l'algorithme de Levenberg-Marquardt est alors utilisé.

## II.3 Les techniques de continuation

Les méthodes temporelles et fréquentielles exposées auparavant permettent de calculer les oscillations périodiques d'un système forcé pour un jeu de paramètres fixé. Mais une étude dynamique ne se limite pas à un seul calcul. Elle consiste généralement à suivre l'évolution du comportement vibratoire lors d'une variation d'un paramètre physique noté  $\lambda$ . Il peut s'agir de l'amplitude d'une force, d'un taux d'amortissement, d'une valeur de raideur, . . . On le nomme paramètre de contrôle ou paramètre de bifurcation.

On s'intéresse donc aux oscillations périodiques pour les valeurs de  $\lambda$  comprises dans une plage de variation donnée,  $[\lambda_1, \lambda_2]$ . La solution de l'équation différentielle du mouvement dépendant de ce paramètre, elle est notée  $\underline{q}(t; \lambda)$ , et il en est évidemment de même pour les solutions  $\underline{X}(\lambda)$  du système algébrique

$$\underline{H}(\underline{X}, \lambda) = \underline{A}(\lambda) \cdot \underline{X} + \underline{b}(\underline{X}, \lambda) = \underline{0} \quad (\text{II.51})$$

obtenu par l'application des méthodes non-linéaires, avec une dépendance implicite de  $\underline{X}$  vis-à-vis de  $\lambda$ .

Bien entendu la solution n'est déterminée qu'à un nombre fini de valeurs  $\lambda_p$ , ne permettant qu'un tracé de la courbe de réponse point par point. Sur cette courbe est représentée l'évolution d'une grandeur convenablement choisie, liée à  $\underline{q}(t; \lambda)$ , en fonction de  $\lambda$ . La grandeur en question dépend du problème considéré et peut être l'amplitude de vibration, l'énergie du signal, . . . Elle peut toujours s'exprimer en fonction des composantes de  $\underline{X}$  et, dans un souci de généralisation, sera par la suite notée  $[X]$ . Dans le cadre de la dynamique des rotors, l'étude classique est celle de réponse à balourd, au quel cas on représente l'amplitude de vibration en fonction de la vitesse de rotation ( $\lambda = \Omega$ ).

La continuation, dont le but est le tracé des courbes de réponse, repose en général sur des algorithmes du type prédicteur/correcteur : le prédicteur fournit une estimation  $\hat{\underline{X}}^{(p)}$  de la solution à  $\lambda_p$ , qui est ensuite améliorée par le correcteur jusqu'à l'obtention de la

solution recherchée  $\underline{X}^{(p)} = \underline{X}(\lambda_p)$ . Chaque couple de prédicteur et correcteur constitue donc une technique de continuation. Cette technique n'est cependant pas unique, mais dépend du choix de la paramétrisation adoptée.

### 3.1 La paramétrisation

Pour tracer la courbe en réponse, on calcule usuellement la solution pour un ensemble de valeurs  $\lambda_p$  fixées. On parle dans ce cas de continuation séquentielle. Son inconvénient est qu'elle ne permet pas de suivre la courbe lorsque celle-ci se retourne, évènement fréquent lors de l'analyse non-linéaire (*cf.* problèmes de flambement en statique ou de saut de réponse en dynamique). Pour palier cette difficulté, quelques stratégies existent et sont exposées ci-dessous.

#### 3.1a Paramétrisation par longueur d'arc

L'idée est de paramétrer la courbe par son abscisse curviligne, et non plus par le paramètre de contrôle qui devient de ce fait une inconnue du problème. L'abscisse curviligne  $s$  de la courbe de réponse réelle ne pouvant être déterminée précisément, elle est approximée par la longueur de ligne brisée définie par l'ensemble des points  $([X]^{(p)}, \lambda^{(p)})$ . La distance entre deux points successifs sur la courbe est donnée par

$$\Delta s^{(p)} = \sqrt{\|X^{(p)} - X^{(p-1)}\|^2 + (\lambda^{(p)} - \lambda^{(p-1)})^2} \quad (\text{II.52})$$

la norme utilisée étant la norme euclidienne. Le premier point calculé servant d'origine ( $s^{(1)} = 0$ ), l'abscisse curviligne se définit alors de proche en proche

$$s^{(p)} = s^{(p-1)} + \Delta s^{(p)} \quad (\text{II.53})$$

L'équation algébrique II.51 qu'il faut résoudre ne dépend plus implicitement que du seul paramètre  $s$ , et possède maintenant une inconnue supplémentaire,  $\lambda(s)$ . Pour que la résolution soit possible, il faut donc l'augmenter d'une équation scalaire : l'équation de paramétrisation  $p$ . La première idée est de dire que le point recherché se trouve sur la courbe d'équation  $\underline{H}(\underline{X}) = \underline{0}$  et sur une hypersphère centrée sur le dernier point trouvé et de rayon  $\Delta s$ . L'incrément  $\Delta s$ , fixé par l'utilisateur (constant alors) ou par le programme (variable), est appelé longueur d'arc. Le système à résoudre est donc

$$\begin{cases} \underline{H}(\underline{X}, \lambda) = \underline{A}(\lambda) \cdot \underline{X} + \underline{b}(\underline{X}, \lambda) = \underline{0} \\ \mathcal{P}(\underline{X}, \lambda) = \|\underline{X} - \underline{X}^{(p)}\|^2 + (\lambda - \lambda^{(p)})^2 - \Delta s^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.54})$$



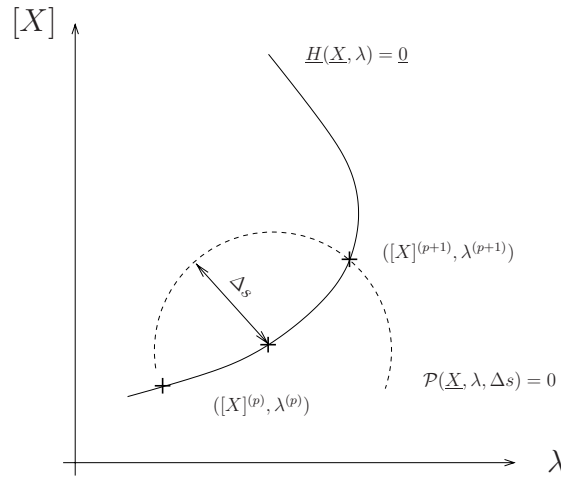


FIG. II.3: Méthode de continuation du type *arc-length*

Cette méthode de continuation, schématisée figure II.3 porte le nom de continuation *arc-length*.

Une autre possibilité est de rechercher la solution à l'intersection de la courbe réponse et d'un hyperplan orthogonal à la tangente à la courbe au point  $(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)})$  et situé à une distance  $\Delta l$  de ce dernier. L'équation de la tangente s'obtient facilement en écrivant que  $dH = 0$  et s'exprime par

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{X}} \cdot d\underline{X} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \cdot d\lambda = 0 \quad (\text{II.55})$$

Les composantes  $\dot{\underline{X}}^{(p)}$  et  $\dot{\lambda}^{(p)}$  d'un vecteur directeur à cette tangente vérifient donc la relation

$$\dot{\underline{X}}^{(p)} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \cdot \dot{\lambda}^{(p)} \quad (\text{II.56})$$

En normalisant le vecteur directeur, l'équation de cet hyperplan s'obtient aisément et conduit au système augmenté suivant

$$\begin{cases} H(\underline{X}, \lambda) = \underline{A}(\lambda) \cdot \underline{X} + \underline{b}(\underline{X}, \lambda) = 0 \\ \mathcal{P}(\underline{X}, \lambda) = {}^t \dot{\underline{X}}^{(p)} \cdot (\underline{X} - \underline{X}^{(p)}) + \dot{\lambda}^{(p)} \cdot (\lambda - \lambda^{(p)}) - \Delta l = 0 \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

L'équation de l'hyperplan découle en fait de la linéarisation de celle de l'hypersphère de la méthode de continuation *arc-length*. Le terme  $\Delta l$  ne représente pas la distance entre deux points de la courbe mais la distance entre un point et la projection d'un second sur la tangente du premier, comme le montre la figure II.4. On parle ainsi de continuation *pseudo arc-length*.

Si pour la méthode de continuation *arc-length* on est sûr de pouvoir trouver une intersection avec l'hypersphère, pour la méthode de continuation *pseudo arc-length* il se peut qu'il n'existe pas d'intersection. De plus, même si l'hyperplan venait à couper

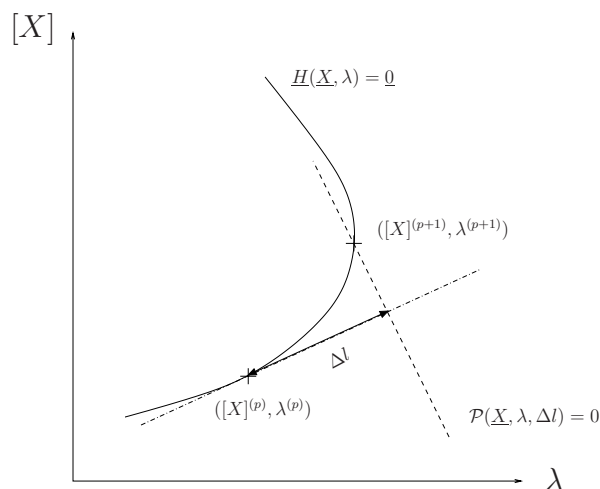


FIG. II.4: Méthode de continuation du type pseudo arc-length

la courbe de réponse non localement (c'est-à-dire hors voisinage du dernier point), on rencontrerait des problèmes de convergence lors la résolution de II.57. Pour éviter ce cas de figure, il suffit de prendre  $\Delta l$  assez faible (relativement à la courbure de la courbe au point  $([X]^{(p)}, \lambda^{(p)})$ ).

Il est possible pour la méthode de continuation *arc-length* d'utiliser une autre hypersphère, dont le centre se trouve à une distance  $\Delta l$  du point dernier point trouvé, sur la tangente à la courbe en ce point, et le rayon correspond à un fraction de  $\Delta l$ .

L'avantage de la méthode de continuation *arc-length* sur la méthode de continuation *pseudo arc-length* réside dans sa simplicité d'application. Mais l'équation ajoutée est non-linéaire, contrairement à celle de l'hyperplan. La méthode de continuation *pseudo-arc length* par contre nécessite le calcul des jacobiniennes de  $\underline{H}$  par rapport et  $\lambda$ .

### 3.1b Paramétrisation sélective

Une alternative à la paramétrisation par longueur d'arc est la paramétrisation sélective. Elle consiste à fixer soit une composante de  $\underline{X}$ , soit  $\lambda$ , ce qui revient à résoudre le système augmenté

$$\begin{cases} \underline{H}(\underline{X}, \lambda) = \underline{A}(\lambda) \cdot \underline{X} + \underline{b}(\underline{X}, \lambda) = \underline{0} \\ \mathcal{P}(\underline{X}, \lambda) = \underline{X}_k - \eta = 0 \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

avec  $k \in [1, n+1]$  (en posant  $\underline{X}_{n+1} = \lambda$ ). Le coefficient  $\eta$  peut être défini de plusieurs manières. En général, il est adapté à chaque pas, de même que l'indice  $k$ , offrant ainsi une grande flexibilité. Il est de pratique courante de prendre comme indice celui du terme

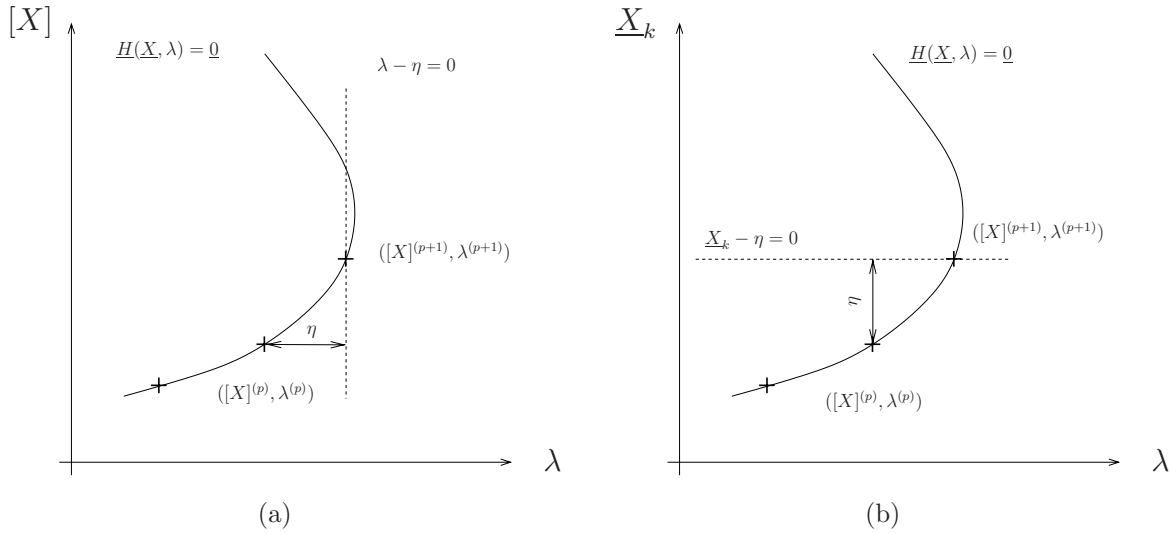


FIG. II.5: Méthode de continuation du type AFC

qui, entre deux calculs, a subi la plus grande variation relative, c'est-à-dire pour lequel

$$\Delta \underline{X}_k = \max\{\Delta \underline{X}_1, \dots, \Delta \underline{X}_{n+1}\} \quad \text{avec} \quad \Delta \underline{X}_i = \frac{|\underline{X}_i^{(p)} - \underline{X}_i^{(p-1)}|}{|\underline{X}_i^{(p)}|} \quad (\text{II.59})$$

Une fois que l'indice est fixé, il reste à choisir une valeur appropriée pour  $\eta$ . Ce choix dépend de  $\underline{X}_k$  et de la valeur d'incrément entre deux points successifs. Une stratégie souvent employée consiste à prendre

$$\eta = \underline{X}_k^{(p)} + \xi \cdot (\underline{X}_k^{(p)} - \underline{X}_k^{(p-1)}) \quad (\text{II.60})$$

où  $\xi$  est un facteur d'ajustement entre l'ancien incrément  $\underline{X}_k^{(p)} - \underline{X}_k^{(p-1)}$  et le nouvel incrément  $\eta - \underline{X}_k^{(p)}$ .

Parfois la variation relative de  $\underline{X}_{n+1}$  est pondérée par une constante plus grande que 1 afin de favoriser le choix  $\lambda$ . Changer la paramétrisation de  $\lambda$  pour  $\underline{X}_k$  ( $k = 1$  à  $n$ ) ne présente d'intérêt que localement, précisément aux retournements éventuels de la courbe (c'est d'ailleurs aux points de retournement que la variation relative de  $\lambda$  n'est pas la plus importante), d'où le nom également employé de paramétrisation locale [117]. G. XIE et Y. K. LOU ont appliqué cette technique de continuation avec la méthode de balance harmonique incrémentale et la méthode de collocation trigonométrique [151, 152]. Leur paramètre de contrôle étant la fréquence, ils parlent de technique AFC (pour *Alternating Frequency/Coefficient*). La figure II.5 montre le fonctionnement de cette technique.

Il est intéressant de remarquer que lorsque  $\lambda$  est utilisé (*cf.* figure II.5(a)), on se retrouve dans le cas de la continuation séquentielle, le choix pour  $\eta$  étant alors tout naturellement la valeur  $\Delta \lambda$ .

## 3.2 Les prédicteurs

Un prédicteur est un algorithme qui permet de prédire  $(\underline{X}^{(p+1)}, \lambda^{(p+1)})$ , la solution recherché, à partir des solutions trouvées précédemment,  $(\underline{X}^{(p-i)}, \lambda^{(p-i)})$ ,  $i \geq 0$ . L'estimation fournie par le prédicteur,  $(\hat{\underline{X}}^{(p+1)}, \hat{\lambda}^{(p+1)})$ , est alors prise comme premier itéré dans le processus incrémental utilisé lors de la résolution de II.51, ce qui assure une meilleure convergence.

### 3.2a Prédiction tangente

Le prédicteur tangent consiste à utiliser la tangente du dernier point trouvé comme prolongement local de la courbe. En continuation séquentielle, la variation  $\Delta\lambda$  du paramètre de contrôle étant imposée, II.55 permet de déduire directement l'estimation suivante

$$\hat{\underline{X}}^{(p+1)} = \underline{X}^{(p)} - \left( \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \cdot \Delta\lambda \quad (\text{II.61})$$

Il s'agit du point situé sur la tangente à la courbe de réponse en  $(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)})$ , et pour lequel la valeur de  $\lambda$  est  $\lambda^{(p+1)} = \lambda^{(p)} + \Delta\lambda$ .

Ce prédicteur, proposé par DAVIDENKO, s'adapte aussi pour le cas où le paramétrage de la courbe s'effectue par longueur d'arc, et se trouve dans la littérature sous le nom de prédicteur d'Euler. Le point estimé est alors celui se trouvant sur la tangente à une distance  $\Delta s$  (ou  $\Delta l$ ) du point  $(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)})$ . Les incréments entre le dernier point trouvé et le point estimé vérifient donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \cdot \underline{\Delta X} + \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \cdot \Delta\lambda = \underline{0} \\ \|\underline{\Delta X}^{(p)}\|^2 + |\Delta\lambda^{(p)}|^2 = \Delta s^2 \text{ (ou } \Delta l^2) \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

La première équation donne la direction et la seconde la distance. La résolution conduit alors à l'estimation suivante

$$\begin{cases} \hat{\lambda}^{(p+1)} = \lambda^{(p)} + \Delta\lambda^{(p)} = \lambda^{(p)} \pm \frac{\Delta s \text{ (ou } \Delta l)}{\sqrt{\left\| \left( \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \right\|^2 + 1}} \\ \hat{\underline{X}}^{(p+1)} = \underline{X}^{(p)} + \underline{\Delta X}^{(p)} = \underline{X}^{(p)} - \left( \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda}(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)}) \cdot \Delta\lambda^{(p)} \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

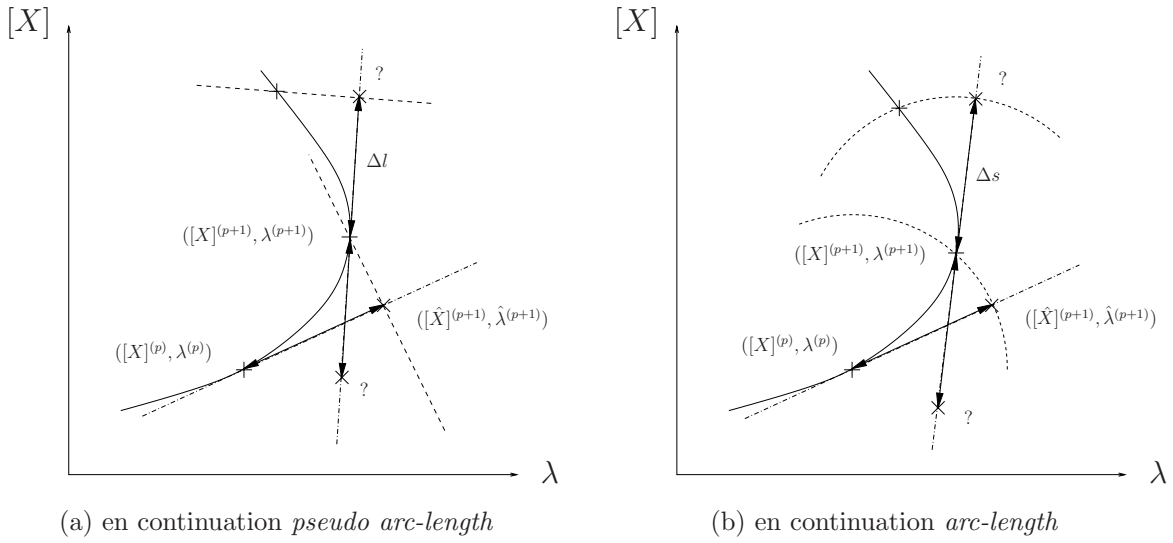


FIG. II.6: Prédicteur d'Euler

Sur l'interprétation graphique (*cf.* figure II.6), on remarque que les points prédits vérifient l'équation de paramétrisation des continuations de type *arc-length* et *pseudo arc-length*. Cette figure montre aussi les deux possibilités fournies par II.63, relative au choix du signe pour  $\Delta\lambda^{(p)}$ .

Ce choix doit s'opérer de telle sorte à préserver l'orientation (*i.e.* à conserver toujours le même sens de parcours). Pour cela, on requiert usuellement que le produit scalaire entre les vecteurs directeurs des tangentes aux points  $(\underline{X}^{(p-1)}, \lambda^{(p-1)})$  et  $(\underline{X}^{(p)}, \lambda^{(p)})$  soit positif [131, 130]. On opte à priori pour le signe *positif* pour  $\Delta\lambda^{(p)}$  puis on regarde si l'inégalité

$${}^t \underline{\Delta X}^{(p-1)} \cdot \underline{\Delta X}^{(p)} + \Delta\lambda^{(p-1)} \cdot \Delta\lambda^{(p)} > 0 \quad (\text{II.64})$$

est vérifiée. Si ce n'est pas le cas, on prend l'opposé. Cette procédure permet de ne pas conduire à une estimation qui se trouve sur la partie déjà calculée et évite donc de revenir en arrière.

Un inconvénient du prédicteur est qu'il ne peut s'utiliser tel quel au voisinage d'un point de retournement. En effet, la jacobienne  $\frac{\partial H}{\partial \underline{X}}$  évaluée en un point de retournement est singulière, de rang  $n - 1$ : il est donc impossible d'obtenir les incréments à partir de II.63. Bien entendu, il y a très peu de chance de trouver exactement un tel point. Mais pour des points à proximité de celui-ci, la jacobienne  $\frac{\partial H}{\partial \underline{X}}$ , bien que régulière, peut être mal conditionnée, engendrant éventuellement des problèmes purement numériques. Pour traiter ces cas particuliers, le moyen le plus simple consiste à augmenter la première équation de II.62 par une équation de normalisation qui impose une relation entre les

différents incréments.

$$\langle \underline{c}, \begin{pmatrix} \underline{\Delta X} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}} & \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda} \\ \hline \underline{c} & \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} \underline{\Delta X} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_{n+1} \quad (\text{II.65})$$

Sachant que pour les points de retournement le rang de  $\left[ \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}} \mid \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda} \right]$  est égal à  $n$ , on constate alors que si le vecteur constant  $\underline{c}$  est convenablement choisi (pour pouvoir passer du rang  $n$  à  $n+1$ ), la matrice augmentée n'est plus singulière (ou presque singulière). Son inversion conduit alors aux incréments souhaités qu'il est possible de normaliser, puis de multiplier par  $\Delta s$  pour respecter la seconde équation de II.62.

Si pour le vecteur de normalisation on prend  $\underline{c} = c \cdot \underline{e}_k$  ( $k$  compris entre 1 et  $n$ ), alors  $\Delta \underline{X}_k = 1/c$ , et la résolution de II.65 peut être remplacée par celle de

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}} & \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}} \\ \hline & & \end{array} \right]_{(:,1:k-1)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\Delta X}_{(:,1:k-1)} \\ \Delta \lambda \\ \underline{\Delta X}_{(:,k+1:n)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}} \end{pmatrix}_{(:,k)} \cdot \underline{\Delta X}_k \quad (\text{II.66})$$

où la notation  $(:, i)$  signifie  $i^{\text{ème}}$  colonne d'une matrice et  $(i : j)$  composantes  $i$  à  $j$  d'un vecteur [103]. On remarque la similitude de II.66 avec II.61, les termes correspondant à  $\underline{X}_k$  et  $\lambda$  ayant juste été permutés.

Pour ce type de paramétrisation, l'équation de normalisation  $\|\underline{\Delta X}^{(p)}\|^2 + |\Delta \lambda^{(p)}|^2 = \Delta s^2$  est remplacée par l'équation de normalisation  $\underline{X}_k = 1/c$ . Pour que le point prédit satisfasse l'équation de paramétrisation  $\underline{X}_k - \eta = 0$ , les coefficients  $c$  et  $\eta$  doivent vérifier la relation  $\eta - \underline{X}_k = 1/c$ .

Ce prédicteur s'apparente à une itération de la méthode d'Euler (méthode de résolution d'équations différentielles ordinaires). A ce titre, on le qualifie dans la littérature de prédicteur d'Euler [148]. Il s'agit d'un prédicteur d'ordre 1, c'est-à-dire que l'erreur commise peut s'écrire  $\sqrt{\|\hat{\underline{X}}^{(p+1)} - \underline{X}^{(p+1)}\|^2 + (\hat{\lambda}^{(p+1)} - \lambda^{(p+1)})^2} = cste \cdot \Delta s^2 + \mathcal{O}(|\Delta s^3|)$ . Beaucoup d'autres prédicteurs peuvent se construire, comme pour le prédicteur d'Euler, sur des algorithmes d'intégration. Cela vient de l'analogie qu'il est possible de faire entre  $(\underline{X}, \lambda)$  et  $(\underline{y}, t)$  et qui conduit à la similitude

$$\frac{d\underline{X}}{d\lambda}(\lambda) = \left( \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}} \right)^{-1}(\underline{X}, \lambda) \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda}(\underline{X}, \lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\dot{y}}(t) = F(t, \underline{y}) \quad (\text{II.67})$$

D'ailleurs, les algorithmes d'intégration temporelle se basent souvent sur les méthodes dites *prédicteur/correcteur*, qui consistent à prédire dans un premier temps la solution à un pas de temps donné à l'aide d'un schéma rapide en temps de calcul, et ensuite de la corriger

par un schéma plus élaboré. A titre d'exemple, les intégrateurs à pas multiples d'Adams-Bashforth (explicite) et d'Adams-Moulton (implicite) sont utilisés conjointement, respectivement en tant que prédicteur et correcteur. La méthode d'Adams-Bashforth trouve également son application dans le calcul d'une courbe de réponse.

### 3.2b Prédiction par interpolation polynomiale

La deuxième grande famille de prédicteurs est basée sur l'interpolation polynomiale. Ces prédicteurs, contrairement au prédicteur d'Euler, ne nécessitent pas le calcul des jacobienes de  $\underline{H}$  par rapport à  $\underline{X}$  et  $\lambda$  (ni l'inversion de la première par conséquent). Ils requièrent juste le stockage des  $d + 1$  derniers points calculés, si on désigne par  $d$  le degré du polynôme d'interpolation.

Le principe est de déterminer les coefficients vectoriels du polynôme qui passe par ces  $d + 1$  points, l'interpolation étant réalisée sur les abscisses  $\lambda_i$  (en continuation séquentielle) ou sur les abscisses curvilignes  $s_i$  (en continuation de type *arc-length*, *pseudo arc-length* ou *AFC*),  $i = p - d$  à  $p$ . Le point prédit sera alors l'extrapolation suivant cette courbe polynomiale, se situant à l'abscisse  $\lambda_{p+1}$  ou  $s^{(p+1)}$ . Pour les polynômes de Lagrange de degré  $d$  [126], en prenant un paramétrage par longueur d'arc, l'estimation sera

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{X}}^{(p+1)} = \sum_{i=0}^d L_i \cdot \underline{X}^{(p-d+i)} \\ \hat{\lambda}^{(p+1)} = \sum_{i=0}^d L_i \cdot \lambda^{(p-d+i)} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^d \frac{s^{(p+1)} - s^{(p-d+j)}}{s^{(p-d+i)} - s^{(p-d+j)}} \quad (\text{II.68})$$

Il est déconseillé d'utiliser des polynômes d'ordre élevé. En effet, cela exige de prendre beaucoup de points. Et ils seront naturellement répartis sur une partie plus grande de la courbe, qui ne pourra éventuellement plus être approchée convenablement par une courbe polynomiale. Même si la courbe est assez régulière, il est connu que l'approximation d'une fonction par un polynôme interpolateur en des points d'abscisses équidistantes se détériore aux voisinages des points d'abscisses maximale (*i.e.* le voisinage auquel on s'intéresse) et minimale lorsque l'on augmente le nombre de points d'interpolation (phénomène de *Runge*) [50].

Compte tenu de ces remarques, on se restreint en général à une interpolation cubique [24, 95]. Le prédicteur linéaire obtenu pour  $d = 1$  est également utilisé pour sa simplicité [15].

### 3.3 Les correcteurs

L'estimation fournie par un prédicteur ne satisfait pas en général l'équation de la courbe de réponse. Il est alors nécessaire de la corriger. Tel est le rôle d'un correcteur. Il ne s'agit proprement dit ni d'une méthode, ni d'un algorithme, mais plus d'une stratégie pour gérer l'équation de paramétrisation. La méthode n'est autre qu'une des méthodes présentées auparavant : elle fournit le système algébrique II.51 (*i.e.* l'équation de la courbe de réponse). L'algorithme correspond soit à un solveur, soit à un algorithme de minimisation : il résoud ce système éventuellement augmenté d'une équation de paramétrisation.

#### 3.3a Le correcteur de Newton-Raphson

Si le solveur utilisé est la méthode de Newton-Raphson, la résolution du système augmenté se ramène à une succession de résolutions de systèmes linéaires

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}^{(i)\underline{X}, (i)\lambda} & \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda}^{(i)\underline{X}, (i)\lambda} \\ \frac{\partial \underline{\mathcal{P}}}{\partial \underline{X}}^{(i)\underline{X}, (i)\lambda} & \frac{\partial \underline{\mathcal{P}}}{\partial \lambda}^{(i)\underline{X}, (i)\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (i)\underline{\Delta X} \\ (i)\Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \underline{H}^{(i)\underline{X}, (i)\lambda} \\ \underline{\mathcal{P}}^{(i)\underline{X}, (i)\lambda} \end{pmatrix} \quad (\text{II.69})$$

L'exposant  $(i)$  correspond au numéro d'itération (placé à gauche pour éviter la confusion avec l'exposant  $(p)$  utilisé pour la numérotation des points, *i.e.* des solutions).

En continuation du type *AFC*, il est possible de simplifier la résolution de II.69 en gérant en interne l'équation de paramétrisation  $\mathcal{P}(\underline{X}, \lambda) = \underline{X}_k - \eta$ . En effet, la solution de cette équation est connue,  $\underline{X}_k^{(p+1)} = \eta$ . Il est donc possible de l'injecter dans II.69 à la place de  $(i)\underline{X}_k$ , d'où  $\Delta^{(i)}\underline{X}_k = 0$  à chaque itération. Ainsi la  $k^{\text{ième}}$  colonne de la jacobienne augmentée et sa dernière ligne deviennent sans intérêt (elle donne  $\Delta^{(i)}\underline{X}_k = 0$  : on se ramène à un équation identique à II.66 avec le terme de droite égal cette fois-ci à  $\underline{H}^{(i)\underline{X}, (i)\lambda}$  [151, 152]). L'intérêt est de toujours conserver un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues (les  $(i)\Delta X_i$ ,  $i = 1$  à  $n + 1$ ,  $i \neq k$ ). On remarque qu'avec cette approche, les itérés se trouvent toujours sur la droite d'équation  $\underline{X}_k - \eta = 0$ .

Il est possible d'adapter cette stratégie à la technique de continuation *pseudo arc-length* vu le caractère linéaire de  $\mathcal{P}$ . Le système à résoudre est dans ce cas

$$\left( \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}} - \frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{P}}}{\partial \underline{X}} / \frac{\partial \underline{\mathcal{P}}}{\partial \lambda} \right) \cdot (i)\underline{\Delta X} = -\underline{H} + \underline{\mathcal{P}} / \frac{\partial \underline{\mathcal{P}}}{\partial \lambda} \quad (\text{II.70})$$

avec  $(i)\lambda = \lambda^{(p)} + \mathbf{t}\underline{\Delta X}^{(p)} \cdot ((i)\underline{X} - \underline{X}^{(p)}) / \Delta^{(p)}$  (par souci de clarté, il n'est pas rappelé que  $\underline{H}$ ,  $\underline{\mathcal{P}}$  et leurs jacobiennes sont évalués en  $((i)\underline{X}, (i)\lambda)$ ). Mais l'avantage est moindre : cela



revient à effectuer une inversion de Gauss par blocs et non plus juste une permutation de colonnes. On note encore que tous les itérés se situent sur l'hyperplan perpendiculaire à la tangente [148].

Cette stratégie étant applicable lorsque le solveur utilisé est la méthode de Newton-Raphson, on trouve parfois le nom de prédicteur de Newton-Raphson [148]. Les codes de calcul n'effectuent communément pas cette gestion interne mais résolvent directement le système II.58. La première raison est une volonté de rester dans un cadre général (valable également pour une équation de paramétrisation non-linéaire, comme pour la méthode *arc-length*), la seconde repose sur l'utilisation éventuelle d'autres algorithmes que celui de Newton-Raphson.

### 3.3b Le correcteur de minimisation par moindres carrés

Un algorithme de minimisation peut aussi s'employer pour corriger la prédiction [95]. Cela présente l'avantage de ne pas nécessiter d'équation de paramétrisation. On peut par exemple utiliser la pseudo-inverse de  $\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \underline{X}} & \frac{\partial H}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$  pour résoudre II.69 restreint à  $\underline{H}$  uniquement (*i.e.* dernière ligne impliquant  $\mathcal{P}$  supprimée).

Le calcul de la pseudo-inverse s'effectue suivant une décomposition par valeurs singulières, *SVD*. Le principe de la *SVD* est de décomposer une matrice rectangulaire de dimension  $n$  par  $(n + 1)$  en un produit matriciel  $\underline{U} \cdot \underline{S} \cdot {}^t \underline{V}$  avec  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  matrices orthonormales de dimensions respectives  $n$  par  $n$  et  $n + 1$  par  $n + 1$ , et  $\underline{S}$  matrice de dimension  $n$  par  $n + 1$ . La solution est alors

$$\begin{pmatrix} {}^{(i)}\underline{\Delta X} \\ {}^{(i)}\underline{\Delta \lambda} \end{pmatrix} = -\underline{V} \cdot \underline{W}^{-1} \cdot {}^t \underline{U} \cdot \underline{H}({}^{(i)}\underline{X}, {}^{(i)}\lambda) \quad (\text{II.71})$$

où  $\underline{W}^{-1}$  correspond à l'inverse de  $\underline{W}$  calculée en ignorant sa dernière colonne (nulle), complétée par une ligne de zéros. À la fin des itérations, on obtient la solution pour laquelle le critère  $\|\underline{X} - \hat{\underline{X}}^{(p+1)}\|_2^2 + (\lambda - \hat{\lambda}^{(p+1)})^2$  est minimum, c'est-à-dire le point sur la courbe de réponse le plus proche du point prédit.

## 3.4 Aspects pratiques

En théorie, les méthodes de continuation permettent le tracé effectif de la courbe de réponse. En pratique, il est courant de rencontrer divers problèmes lors de leur utilisation,

comme des mauvais conditionnements de matrices, des convergences très lentes voire pas de convergence, . . . Quelques considérations permettant d'améliorer la robustesse de ces méthodes sont listées ci-dessous.

### 3.4a Gestion du pas

Dans toutes les méthodes de continuation apparaissent des pas :  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta\underline{X}_k$ ,  $\Delta s$  ou  $\Delta l$ . Les valeurs prises pour ces incréments sont primordiales, car d'un côté un pas trop long donne une mauvaise approximation initiale (trop éloignée de la solution exacte) et par conséquent de nombreuses itérations sont nécessaires avant de converger, et d'un autre côté, un pas trop faible conduit à un nombre de points à calculer excessif. Afin d'optimiser au mieux le temps de calcul, l'emploi d'un pas variable est souhaitable.

La gestion du pas est très utilisée en intégration temporelle, où l'adaptation du pas de temps se base sur des critères de précision (*cf.* la célèbre méthode de Runge-Kutta-Fehlberg [106]). Dans le cas présent, cette approche n'est pas applicable car aucune estimation d'erreur n'est disponible (en intégration temporelle, ces estimations découlent généralement facilement de développements en série de Taylor). On a alors recours à des critères d'origine statistique. Le principe est d'utiliser, pour le calcul de chaque point, le pas du calcul précédent multiplié par une constante  $\beta$ . Ce coefficient multiplicateur dépend du nombre d'itérations nécessaires pour le dernier calcul (noté  $I$ ) et doit permettre d'augmenter le pas lorsque le solveur converge rapidement et de le diminuer si le nombre d'itérations dépasse un certain seuil. On peut, à titre d'exemple, prendre

$$\beta = \frac{I_{opt}}{I} \quad \text{ou} \quad \beta = 2^{(I_{opt}-I)/4} \quad (\text{II.72})$$

où  $I_{opt}$  est le nombre d'itérations souhaité (fonction du solveur utilisé,  $I_{opt} = 6$  préconisé avec la méthode de Newton-Raphson) [24, 131]. Il est par ailleurs conseillé de borner la valeur du coefficient multiplicateur, *e.g.* prendre  $\beta = 0,5$  (respectivement  $\beta = 2$ ) si la formule d'adaptation II.72 conduit à  $\beta < 0,5$  (resp.  $\beta > 2$ ).

En continuation séquentielle ou de type *AFC*, il est aussi d'usage courant de limiter le pas pour des questions non pas de convergence mais de visualisation. Dans ce cas, on limite les incréments de telle sorte que la variation relative des composantes de  $\underline{X}$  et/ou  $\lambda$  soit inférieure à un seuil donné.

### 3.4b Mises à échelle

Dans certaines circonstances, il est souhaitable de pondérer le rôle de  $\underline{X}$  vis-à-vis de  $\lambda$ . En paramétrisation sélective, la variation relative de  $\lambda$  dans II.59 est classiquement multipliée par une constante supérieure à 1 afin de favoriser son choix.

En paramétrisation par longueur d'arc, il est possible de porter l'accentuation sur  $\underline{X}$  ou  $\lambda$  en pondérant les termes de l'équation de paramétrisation par un facteur d'ajustement  $\xi$ . Avec la continuation de type *arc-length* par exemple, cela donne

$$\mathcal{P}(\underline{X}, \lambda) = \xi \cdot \|\underline{X} - \underline{X}^{(p)}\|^2 + (1 - \xi) \cdot (\lambda - \lambda^{(p)})^2 - \Delta s^2 \quad (\text{II.73})$$

K. B. BLAIR et *al.* définissent un facteur d'échelle  $\sigma$  et proposent la pondération suivante

$$\mathcal{P}(\underline{X}, \lambda) = \frac{\|\underline{X} - \underline{X}^{(p)}\|^2}{\sigma^2} + (\lambda - \lambda^{(p)})^2 - \Delta s^2 \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{\|\underline{X}^{(p)}\|}{\lambda^{(p)}} \quad (\text{II.74})$$

Ces facteurs s'appliquent aussi en continuation du type *pseudo arc-length*.

En continuation *arc-length*, un autre point pouvant aider la convergence dans certaines circonstances est de remplacer la norme euclidienne  $\|\bullet\|_2$  par une fonction appropriée de juste quelques composantes. On pourra prendre par exemple  $\|\underline{y}_0\|$  avec la méthode de tir multiple, ou encore  $\sqrt{\|\underline{a}_1\|^2 + \|\underline{b}_1\|^2}$ , *i.e.* l'amplitude du premier harmonique, avec les méthodes fréquentielles. De plus, il n'est pas obligatoire, du point de vue bon fonctionnement, de considérer tous les degrés de liberté du modèle : prendre  $\underline{y}_{0_i}$  ou  $\sqrt{a_{1_i}^2 + b_{1_i}^2}$  suffit, sous réserve que le *ddl*  $i$  contienne assez d'information sur la dynamique du système (amplitudes de vibrations non négligeables pour ce *ddl*).

### 3.4c Homothétie

Comme déjà précisé, les prédicteurs permettent d'améliorer la convergence, en donnant une estimation assez proche de la solution. Cependant, pour le premier point à calculer,  $(\underline{X}^{(1)}, \lambda_1)$ , il n'existe aucune prédiction. Il est de coutume de partir d'une valeur de  $\lambda$  pour laquelle les non-linéarités sont peu influantes [103] ou, au pire, d'employer l'intégration temporelle pour obtenir cette première solution.

Une alternative possible est l'homothétie. Elle consiste à construire une suite finie d'équations  $\underline{H}^{[i]}(\underline{X}, \lambda) = \underline{0}$  dont la première est facile à résoudre et la dernière correspond à  $\underline{H}(\underline{X}, \lambda) = \underline{0}$ , puis à les résoudre à la chaîne en prenant comme point de départ la solution trouvée pour l'équation précédente. Si les équations successives sont assez similaires, cette technique permet d'aboutir finalement à la solution attendue, à savoir  $(\underline{X}^{(1)}, \lambda_1)$ . Il s'agit de la version discrète de l'homothétie. Sous sa forme continue, elle s'exprime par

$\underline{H}^{[\theta]}(\underline{X}, \lambda) = \underline{0}$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , avec  $\underline{H}^{[0]}(\underline{X}, \lambda) = \underline{0}$  équation dont la résolution est aisée, et  $\underline{H}^{[1]} = \underline{H}$ . Un moyen rapide de construire une telle homothétie est de considérer

$$\underline{H}^{[\theta]} = \theta.\underline{H} + (1 - \theta).\underline{H}^{[0]} \quad (\text{II.75})$$

Pour  $\underline{H}^{[0]}$ , divers choix sont applicables, comme  $\underline{H}^{[0]}(\underline{X}, \lambda) = \underline{X}$  (le plus simple) ou  $\underline{H}^{[0]}(\underline{X}, \lambda) = \underline{A}(\lambda).\underline{X} + \underline{b}^{lin}(\lambda)$  [103]. Pour ce dernier cas, il faut être averti des problèmes éventuellement soulevés pour  $\theta = 0$ , suite à l'élimination du terme non-linéaire  $\underline{b}^{nl}$  (création de corps rigides, ...).

L'expression de l'homothétie non plus par  $\underline{H}^{[\theta]}(\underline{X}, \lambda) = \underline{0}$  mais par  $\underline{H}(\underline{X}, \lambda, \theta) = \underline{0}$  soulève le lien existant avec le suivi de la solution en fonction de l'évolution de  $\theta$  (traité comme paramètre de contrôle). Cela justifie l'application des méthodes de continuation dans ce contexte. En guise d'illustration, prenons le cas où  $\theta$  représente l'amplitude de la force d'excitation. A niveau élevé, les non-linéarités ont une trop grande influence, on commence alors par calculer la solution pour une amplitude assez faible (le système se comportant d'ordinaire de manière quasiment linéaire à faible niveau), puis on l'augmente progressivement jusqu'à atteindre le niveau souhaité.

### 3.5 Expression des jacobiennes relatives à $\omega_f$

Comme on vient de voir, les techniques de continuation font souvent intervenir le calcul de la jacobienne de  $\underline{H}$  par rapport et  $\lambda$ . A ce titre sont fournies ci-dessous les jacobiennes par rapport  $\omega_f$  pour différentes méthodes, la pulsation propre de la force d'excitation étant souvent utilisée comme paramètre de contrôle.

La dérivation de  $\underline{A}$  et  $\underline{b}$  ne pose pas de problème. En effet, pour la méthode des différences finies,  $\frac{\partial \underline{A}}{\partial \omega_f}$  possède la même structure que  $\underline{A}$ , il suffit juste de dériver chaque bloc, sachant que

$$\frac{\partial}{\partial \omega_f} \left( \frac{1}{\Delta t^2} \right) = \frac{2}{\omega_f \cdot \Delta t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \omega_f} \left( \frac{1}{\Delta t} \right) = \frac{1}{\omega_f \cdot \Delta t} \quad (\text{II.76})$$

Le calcul de  $\frac{\partial \underline{b}}{\partial \omega_f}$  quant à lui s'effectue directement.

Pour la méthode de balance harmonique, la même remarque vaut pour  $\frac{\partial \underline{A}}{\partial \omega_f}$ , les dérivées de chaque bloc nécessitant juste de savoir que

$$\frac{\partial (m.\omega)^2}{\partial \omega_f} = 2.(m.\omega)^2/\omega_f \quad \text{et} \quad \frac{\partial (m.\omega)}{\partial \omega_f} = (m.\omega)/\omega_f \quad (\text{II.77})$$

Le calcul de  $\frac{\partial \underline{b}}{\partial \omega_f}$ , bien que plus pénible, ne pose pas de difficulté. En voici juste l'expression du premier sous-vecteur

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{b}^{(0)}}{\partial \omega_f}(\underline{X}, \omega_f) &= \frac{1}{\omega_f} \cdot \underline{b}^{(0)} - \frac{1}{\omega_f} \cdot \left( \frac{\partial f^{lia}}{\partial \omega_f}(T, \underline{q}(T), \dot{\underline{q}}(T); \omega_f) + \frac{\partial f^{ext}}{\partial \omega_f}(T; \omega_f) \right) \\ &\quad + \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( \frac{\partial f^{lia}}{\partial \omega_f}(t, \underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t); \omega_f) + \frac{\partial f^{ext}}{\partial \omega_f}(t; \omega_f) \right) dt \quad (\text{II.78}) \end{aligned}$$

Les autres sous-vecteurs s'obtiennent de manière identique, la seule différence étant que la dérivée de l'intégrande est la dérivée d'un produit.

Pour la méthode de collocation trigonométrique, on se base sur la formule II.47 pour trouver immédiatement

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial \omega_f} = (\underline{\Gamma} \cdot \frac{2}{\omega_f} \underline{D}^2) \otimes \underline{M} + (\underline{\Gamma} \cdot \frac{1}{\omega_f} \underline{D}) \otimes \underline{B} + (\underline{\Gamma} \cdot \underline{D}) \otimes \frac{\partial \underline{B}}{\partial \omega_f} \quad (\text{II.79})$$

puisque  $\underline{\Gamma}$  est indépendante de  $\omega_f$  et que  $\frac{\partial \underline{D}}{\partial \omega_f}$  et  $\frac{\partial \underline{D}^2}{\partial \omega_f}$  font intervenir les dérivés de  $(m \cdot \omega)$  et  $(m \cdot \omega)^2$  déjà vus pour la méthode de balance harmonique incrémentale (*cf.* II.77). Le calcul de la jacobienne de  $\underline{b}$  par rapport à  $\omega_f$  s'effectue, comme pour la méthode des différences finies, tout naturellement.

## II.4 L'étude de la stabilité

Le principe des méthodes exposées auparavant étant de rechercher directement une solution périodique, c'est-à-dire sans avoir recours à l'intégration temporelle, il se peut que la solution trouvée soit instable. Physiquement, cette solution n'est pas observable, car elle ne possède pas de bassin d'attraction : tout mouvement initié à partir d'une condition initiale quelconque s'éloigne de cet état d'équilibre périodique pour se stabiliser sur un autre état d'équilibre stable (qui n'est pas forcément périodique) ou diverger (en cas d'absence de solution bornée).

La stabilisation vers un état d'équilibre stable correspond en fait à la phase transitoire d'une réponse. Les intégrateurs ne peuvent donc converger vers une solution instable. Pourtant celle-ci est bien solution du problème puisqu'elle vérifie l'équation différentielle du mouvement II.1 (ou le système algébrique II.51 associé). A ce titre, toute méthode de résolution directe — qu'elle soit numérique ou analytique — est capable à priori de la détecter, rendant indispensable l'étude de la stabilité.

## 4.1 Stabilité

La notion de stabilité est large. En mécanique, il en existe plusieurs définitions, l'idée sous-jacente demeurant la stabilité au sens commun du terme. Il convient donc avant toute chose d'en donner les définitions exactes et de préciser de quelle stabilité il est question dans le contexte des solutions périodiques.

### 4.1a Quelques définitions

La définition la plus connue est celle de Lyapunov : une solution  $\underline{y}$  d'un système d'équations différentielles est dite stable au sens de Lyapunov si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall \underline{z}, \|\underline{z}(t_0) - \underline{y}(t_0)\|_2 < \delta \Rightarrow \forall t > t_0, \|\underline{z}(t) - \underline{y}(t)\|_2 < \varepsilon \quad (\text{II.80})$$

Si de plus le critère  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\underline{z}(t) - \underline{y}(t)\|_2 = 0$  est vérifié, la stabilité est qualifiée d'asymptotique. Cette définition est classiquement utilisée pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre (*i.e.* des positions d'équilibre statiques). Cependant elle s'avère trop restrictive dans le cas de l'analyse de la stabilité des solutions dynamiques (dont les solutions périodiques ou *cycles*). On a alors recours à la notion de stabilité orbitale introduite par Poincaré : une solution  $\underline{y}$  d'un système d'équations différentielles, de trajectoire  $\mathcal{C}$ , est dite stable au sens de Poincaré si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall \underline{z}, \|\underline{z}(t_0) - \underline{y}(t_0)\|_2 < \delta \Rightarrow \forall t > t_0, d(\underline{z}(t), \mathcal{C}) < \varepsilon \quad (\text{II.81})$$

L'application  $d$  est une distance : on examine comment, dans l'espace des phases, la trajectoire d'une autre solution reste à proximité de la trajectoire  $\mathcal{C}$  étudiée. Enfin, on trouve aussi une définition très générale de la stabilité, celle de Lagrange : une solution  $\underline{y}$  est stable au sens de Lagrange si  $\exists M > 0$  tel que  $\forall t > t_0, \|\underline{y}(t)\|_2 < M$ . En d'autres mots, la solution est stable si elle est bornée, *i.e.* non divergente.

Les différentes définitions de stabilité énoncées ci-dessus n'imposent pas de condition sur la perturbation initiale  $\underline{z}(t_0) - \underline{y}(t_0)$  apportée à la solution  $\underline{y}$ . La stabilité est analysée au niveau global. Une autre vision consiste à prendre les solutions  $\underline{z}$  qui à  $t = t_0$  se trouvent dans un voisinage de  $\underline{y}(t_0)$  ou de la trajectoire  $\mathcal{C}$ . Cela conduit à la notion de stabilité locale, représentée graphiquement figure II.7 à l'aide du *potentiel*  $V$  [125]. Le cas (1) montre une solution globalement stable. Dans le cas (3), l'oscillateur de Duffing ( $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ ), la stabilité est locale, tout comme pour le cas (2). Ce dernier est l'oscillateur d'Helmholtz, de potentiel  $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$  (il possède une signification

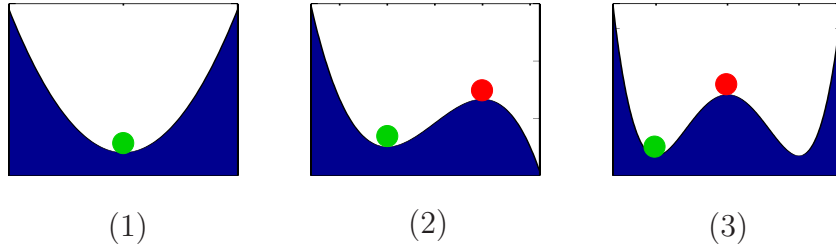


FIG. II.7: Nature locale ou globale de la stabilité

spéciale car il équivaut à la forme normale d'une catastrophe de type *fold*). On note que pour cet oscillateur la solution perturbée diverge si elle dépasse la barrière de potentiel, *i.e.* le cercle de droite (car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$ ), alors que dans le cas (3) toute solution perturbée reste bornée.

Dans la pratique, il est très difficile de prouver qu'une solution est globalement stable. On s'intéresse donc à la stabilité locale en ajoutant à la solution  $\underline{y}$  une petite perturbation initiale  $\underline{\delta y}_0$ . Cela permet de recourir à un développement de Taylor au premier ordre de  $\underline{F}$  lorsque l'on écrit que la solution perturbée  $\underline{y} + \underline{\delta y}$  qui en résulte vérifie l'équation du mouvement III.29. Ce développement conduit donc à

$$\dot{\underline{\delta y}} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}(t, \underline{y}) \cdot \underline{\delta y} + \mathcal{O}(\|\underline{\delta y}\|_2^2), \quad \text{soit} \quad \dot{\underline{\delta y}}(t) = \underline{\underline{J_F}}(t, \underline{y}) \cdot \underline{\delta y} \quad (\text{II.82})$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur. Le fait que cette dernière équation différentielle soit linéaire explique la dénomination usuelle d'*analyse de stabilité linéarisée* ou d'*analyse linéaire de la stabilité*.

#### 4.1b La théorie de Floquet

Etant donné que  $\underline{y}$  est  $T$ -périodique, il en est au moins de même pour  $\underline{\underline{J_F}}$ ,  $T$  n'étant pas forcément la période minimale (il se peut que la jacobienne soit de période  $T/2$  si  $\underline{F}$  contient des non-linéarités impaires par exemple). Le système II.82 est donc à coefficient périodique en temps. Il est alors possible de lui appliquer la théorie de Floquet utilisée pour l'étude de systèmes linéaires à excitation paramétrique. De tels systèmes sont très fréquents dans l'analyse dynamique des structures tournantes, comme des pales d'hélicoptère [54], des turbines d'éoliennes [39] ou encore des rotors fissurés [90].

Il est connu que l'ensemble des solutions d'un système de  $n$  équations différentielles d'ordre 1, comme II.82, est engendré par  $n$  vecteurs linéairement indépendants  $\{\underline{\delta y}_1, \dots, \underline{\delta y}_n\}$ . Le théorème de Floquet affirme que ces solutions sont, dans une certaine base, de la forme  $e^{\gamma_i t} \cdot \underline{\phi}_i(t)$  avec  $\underline{\phi}_i$  de même période que  $\underline{\underline{J_F}}$ . Cette forme est appelée forme *normale*

ou forme de Floquet, et les constantes complexes  $\gamma_i$  sont les *exposants caractéristiques* de Floquet. En voici le principe de la démonstration.

Le premier point est de construire la base de l'ensemble des solutions. D'après la théorie des équations différentielles du premier ordre, on sait que si la famille  $\{\underline{\delta y}_1, \dots, \underline{\delta y}_n\}$  est libre à un instant  $t_0$  alors elle l'est à tout autre instant. Pour assurer simplement l'indépendance des  $\underline{\delta y}_i$ , on utilise donc la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  pour la former, *i.e.* on choisit les solutions vérifiant  $\underline{\delta y}_i(t_0) = \underline{e}_i$  (l'existence de telles solutions est assurée d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz dont l'application est valide puisque que la fonction  $f : (t, \underline{\delta y}) \mapsto \underline{J}_F(t, \underline{y}) \cdot \underline{\delta y}$  est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable  $\underline{\delta y}$ ). Ces vecteurs forment la matrice (invertible)  $\underline{\delta Y} = [\underline{\delta y}_1 | \underline{\delta y}_2 | \dots | \underline{\delta y}_n]$ , communément appelée *matrice fondamentale*. Toute solution  $\underline{\delta y}$  s'exprime donc à partir de cette matrice.

Dans un deuxième temps, les solutions  $\underline{\delta y}$  translatées de  $T$  étant également solutions de l'équation différentielle II.82, on les exprime dans la base préalablement construite, ce qui s'écrit

$$\underline{\delta Y}(t + T) = \underline{\delta Y}(t) \cdot \underline{\Phi} \quad (\text{II.83})$$

La matrice  $\underline{\Phi}$  ainsi définie s'appelle *matrice monodrome* (ou matrice de transition de Floquet). Ses valeurs propres,  $\lambda_i$ , sont les multiplicateurs de Floquet. Si elles sont distinctes, il est possible de la diagonaliser dans  $\mathbb{C}$ , *i.e.*  $\exists \underline{P}$  matrice de passage de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$  telle que  $\underline{\Phi} = \underline{P} \cdot \underline{D} \cdot \underline{P}^{-1}$  (avec  $\underline{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ). Les vecteurs  $\underline{z}_i$  de la nouvelle base  $\underline{Z}(t) = \underline{\delta Y}(t) \cdot \underline{P}$  ainsi formée, sont solutions de II.82. En posant  $\lambda_i = \exp(\gamma_i T)$ , il vient

$$e^{-\gamma_i \cdot (t+T)} \cdot \underline{z}_i(t + T) = e^{\gamma_i t} \cdot \underline{z}_i(t) \quad (\text{II.84})$$

On en déduit que les solutions  $\underline{z}_i$  peuvent effectivement se mettre sous la forme  $\underline{z}_i(t) = \exp(\gamma_i t) \cdot \phi_i(t)$  avec  $\phi_i$  de période  $T$ . Le cas où une valeur propre est multiple se traite de manière identique en effectuant une décomposition de Jordan [126].

L'intérêt de se placer dans la base  $\{\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_n\}$  est d'exprimer II.83 sous une forme simplifiée

$$\underline{Z}(t + T) = \underline{Z}(t) \cdot \underline{D} \quad \text{i.e.} \quad \underline{z}_i(t + T) = \lambda_i \cdot \underline{z}_i(t) \quad (\text{II.85})$$

ce qui implique

$$\underline{z}_i(t + \kappa \cdot T) = \lambda_i^\kappa \cdot \underline{z}_i(t) \quad (\kappa \in \mathbb{N}) \quad (\text{II.86})$$

On en conclut sans difficulté que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{z}_i(t) = 0$  si  $|\lambda_i| < 1$  ou  $+\infty$  si  $|\lambda_i| > 1$ , d'où le résultat classique : si tous les multiplicateurs de Floquet sont à l'intérieur du cercle unité, la solution  $\underline{y}$  est asymptotiquement stable (la solution est un cycle attracteur) alors que si juste un seul d'entre eux est à l'extérieur, la solution est instable (cycle répulseur si tous les multiplicateurs sont à l'extérieur, la solution peut sous cette condition être obtenue par une intégration temporelle rétrograde, ou cycle de type *point selle* sinon).



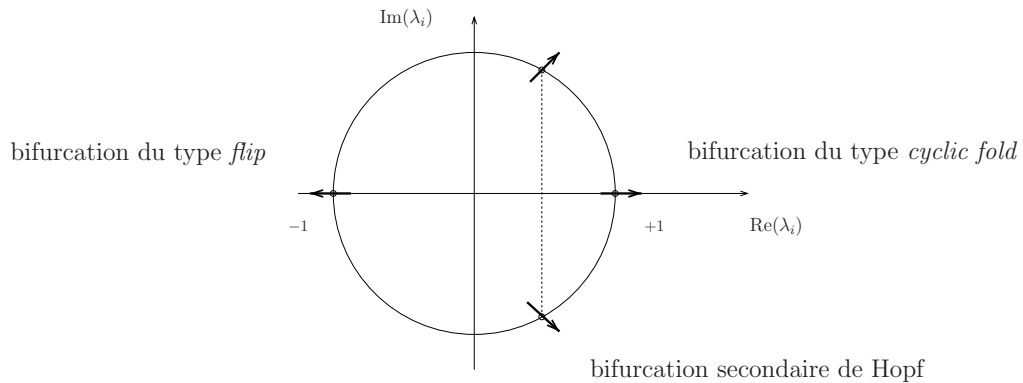
Pour les cas particuliers où un multiplicateur se trouve sur le cercle unité ( $|\lambda_i| = 1$ ) et aucun à l'extérieur, aucune conclusion quant à la stabilité de  $\underline{y}$  ne peut être avancée : une analyse non-linéaire de la stabilité est nécessaire (conservation des termes d'ordre 2 ou plus dans le développement de Taylor de  $\underline{F}$ ). Ces cas correspondent à une transition entre stabilité et instabilité. Pour  $\lambda_i = 1$ , la solution particulière  $\underline{z}_i$  de II.82 est  $T$ -périodique ( $\underline{z}_i(t + T) = \underline{z}_i(t)$ ). Pour  $\lambda_i = -1$ , elle est  $2T$ -périodique ( $\underline{z}_i(t + 2T) = -\underline{z}_i(t + T) = \underline{z}_i(t)$ ). Pour une valeur  $\lambda_i$  non réelle, la matrice  $\underline{\Phi}$  étant réelle, il existe une seconde valeur propre qui lui est conjuguée. La combinaison des deux solutions particulières associées,  $\underline{z}_i$  et  $\bar{\underline{z}}_i$ , donne une solution quasi-périodique (la première pulsation étant  $2\pi/T$  et la seconde  $\omega_i = 2\pi \cdot \arctan(\Im(\lambda_i)/\Re(\lambda_i))/T$ ), sauf si  $\lambda_i$  est une racine  $k^{\text{ième}}$  de l'unité (*i.e.*  $\lambda_i = \exp(2\pi i/k)$ ), au quel cas la solution est  $kT$ -périodique (on retrouve les cas  $T$  et  $2T$ -périodiques qui correspondent aux racines simple et carré de 1) [136].

Grâce à la théorie de Floquet, l'étude de la stabilité d'une solution périodique se résume au calcul des valeurs propres de la matrice monodrome, qui fournissent une mesure de la divergence ou convergence orbitale d'une perturbation apportée à la solution le long d'une direction particulière sur une période. On rejoint donc l'analyse de la stabilité des points d'équilibre de systèmes autonomes (pour lesquels II.82 se réduit  $\dot{\underline{y}} = \underline{J}_F(\underline{y}) \cdot \underline{\delta y}$  avec  $\underline{J}_F(\underline{y})$  indépendant du temps [98]). Le lien est encore plus explicite en traduisant le critère de la stabilité de  $\underline{y}$  à l'aide des exposants caractéristiques de Floquet : cette solution périodique est stable si tous les  $\gamma_i$  sont négatifs, instable si au moins un des  $\gamma_i$  est positif [54]. Les exposants ont une signification physique peut-être plus parlante que celle des multiplicateurs : leur partie réelle mesure la croissance (ou décroissance) exponentielle de la partie transitoire d'une perturbation, alors que sa partie imaginaire, définie modulo  $2\pi/T$ , représente la fréquence de cette perturbation.

## 4.2 Bifurcations

Le terme *bifurcation*, introduit par H. POINCARÉ, a un sens très large. Cela correspond à un changement qualitatif des caractéristiques de la réponse d'un système relativement à la variation d'un ou plusieurs paramètres. Une bifurcation qui nécessite au moins  $m$  paramètres pour avoir lieu est nommée bifurcation de co-dimension  $m$ . Dans ce qui suit, seules les bifurcations de co-dimension 1 sont traitées.

Lorsqu'un paramètre du système évolue, une solution périodique initialement stable peut subitement devenir instable : on a donc un changement qualitatif de la solution, *i.e.* une bifurcation. Elle se produit lorsque le plus grand des multiplicateurs de Floquet (multiplicateur principal), fonction du paramètre en question, atteint le cercle unité. A

FIG. II.8: *Les principaux types de bifurcation*

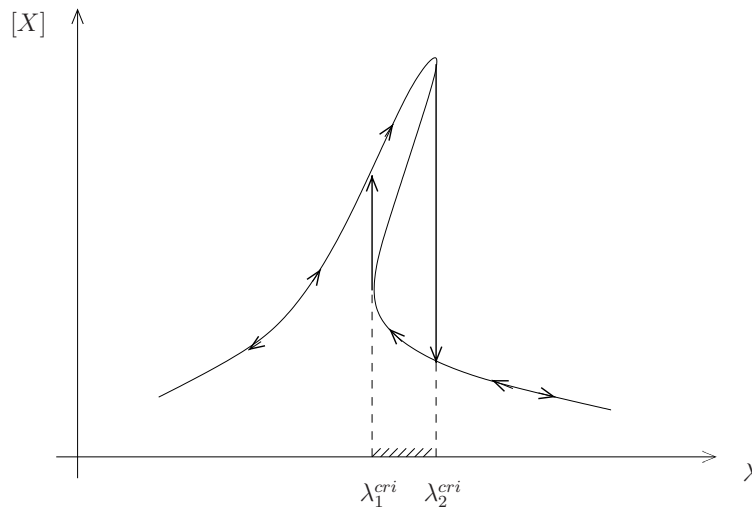
ce point de bifurcation, plusieurs phénomènes peuvent se produire. La manière dont le multiplicateur principal quitte le cercle unité apporte une indication sur les différents scénarios observables.

Il existe trois possibilités pour le multiplicateur principal de traverser le cercle unité : soit par  $+1$ , soit par  $-1$ , soit par une paire de valeurs complexes conjuguées.

Ces trois cas, représentés figure II.8, sont associés à des bifurcations appelées respectivement bifurcation de type *cyclic fold*, bifurcation par dédoublement de période (ou de type *flip*) et bifurcation secondaire de Hopf.

#### 4.2a Les bifurcations de type *cyclic fold*

Pour les bifurcations de type *cyclic fold*, deux solutions périodiques, une stable et une instable, co-existent avant la bifurcation, se rejoignent lorsque le paramètre de contrôle atteint la valeur critique (valeur du paramètre pour laquelle la bifurcation a lieu). Le comportement du système après la bifurcation ne peut être prédit par des considérations locales uniquement. Deux possibilités existent. L'attracteur périodique peut tout simplement disparaître (on parle de *blue sky catastrophe*, terme qui fait référence à la disparition soudaine d'un attracteur). Il en résulte alors une stabilisation vers un autre attracteur. Le phénomène physique qui en découle est un saut de réponse au passage de la valeur critique (valeur du paramètre pour laquelle la bifurcation a lieu), raison pour laquelle cette bifurcation est qualifiée de *dangereuse*. Parmi les systèmes qui, sous certaines conditions, exhibent ce type de comportement, on trouve ceux possédant des raideurs non-linéaires, comme des raideurs quadratiques [112] ou tri-linéaires [97], ou soumis à des impacts [91]. Pour ces exemples, le nouvel attracteur est périodique, mais il se peut qu'il soit quasi-périodique [27] ou chaotique (observé pour un rotor rigide sur paliers squeeze-films montés

FIG. II.9: *Phénomène d'hystérésis*

symétriquement [131]), voire non borné (la divergence est assez fréquente, dans le domaine du génie électrique par exemple, elle explique le *claquage* de composants).

En général, ces bifurcations s'observent par paires, se produisant à la valeur  $\lambda_1^{cri}$  et une deuxième à  $\lambda_2^{cri}$  par exemple, ce qui conduit à un phénomène d'hystérésis, comme le montre la figure II.9 : entre  $\lambda_1^{cri}$  et  $\lambda_2^{cri}$  deux solutions stables co-existent, et aux valeurs critiques la solution instable rentre en collision avec une solution stable et se détruit mutuellement.

La solution instable, bien que sans intérêt à priori car non observable physiquement, revêt une importance notable. Premièrement, elle délimite les bassins d'attraction des deux solutions stables (*i.e.* c'est une *séparatrice*). Deuxièmement, elle permet, par l'intermédiaire d'une méthode de continuation, de transiter d'une solution stable à l'autre. Certes les deux solutions stables peuvent aussi, pour cet exemple particulier, s'obtenir par deux calculs successifs en continuation séquentielle classique (un avec  $\Delta\lambda > 0$ , et l'autre avec  $\Delta\lambda < 0$ ). Mais cette approche n'est pas toujours utilisable si plus d'une paire de bifurcations de ce type ont lieu, car plus de deux solutions stables peuvent alors éventuellement co-exister, comme cela a déjà été observé sur les vibrations d'engrenages tant numériquement [135] qu'expérimentalement [70], ou encore pour des oscillateurs à impacts [33].

La deuxième possibilité envisageable après une bifurcation de type *cyclic fold* est une explosion de l'attracteur périodique stable en un nouveau attracteur, plus grand et englobant l'attracteur initial. Une telle bifurcation est dite *explosive*, et ne s'accompagne pas de saut soudain de réponse, mais d'un phénomène transitoire : la trajectoire observée ensuite tend à rester sur l'ancien attracteur périodique (appelé *cycle fantôme*) tout en présentant des excursions en dehors du *cycle fantôme*. Ce type de bifurcation s'observe notamment

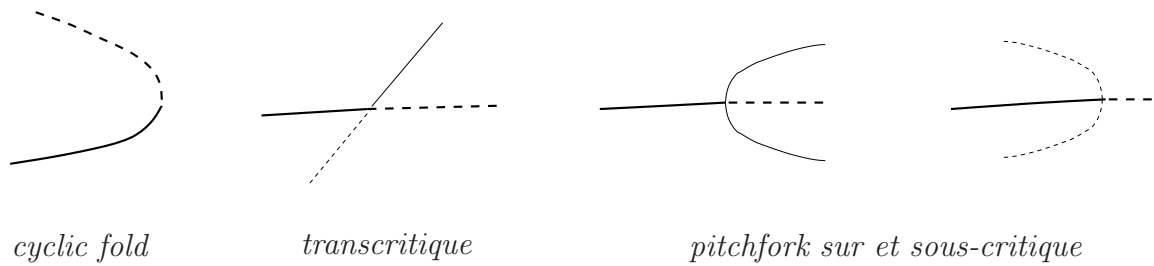


FIG. II.10: Courbe de réponse au voisinage d'une bifurcation

sur des oscillateurs comportant une raideur linéaire par morceaux. Dans [84], l'attracteur engendré à la suite de la bifurcation d'une solution  $3T$ -périodique est chaotique et la trajectoire semble avoir une allure régulière, mais elle est entrecoupée de comportements irréguliers qui prennent de plus en plus d'importance au fur et à mesure qu'on s'éloigne du point de bifurcation, jusqu'à l'obtention d'une solution chaotique. Dans la littérature, ce phénomène de transition vers le chaos se nomme transition par intermittance de type  $I$ .

En co-dimension 1, la bifurcation de type *cyclic fold* est la seule qui peut se produire lorsque le multiplicateur principal quitte le cercle unité par  $+1$ , à moins que la solution périodique suivie ne soit soumise à des contraintes. Dans cette circonstance, des bifurcations analogues aux bifurcations de points d'équilibre peuvent se produire : la bifurcation transcritique et celle de type *pitchfork* (aussi appelée bifurcation *symmetry breaking* ou plus simplement *cusp*) [136]. La bifurcation par rupture de symétrie se trouve par exemple avec l'oscillateur de Duffing [15]. La figure II.10 montre la distinction entre celles-ci et la bifurcation de type *cyclic fold*.

On remarque que pour la bifurcation de type *cyclic fold* la courbe d'équation  $\underline{H}(\underline{X}, \lambda) = 0$  admet une tangente verticale au point de bifurcation. A ce point de *retournement*, la jacobienne de  $\underline{H}$  par rapport à  $\underline{X}$  est singulière, mais si on lui associe la jacobienne par rapport à  $\lambda$ , la jacobienne augmentée ainsi obtenue est de rang maximal,  $n$ . Ce schéma offre une explication graphique sur la manière dont la paramétrisation sélective permet de contourner les problèmes de singularité : intervertir le paramètre de contrôle avec un coefficient de  $\underline{X}$  revient à faire pivoter la courbe de  $90^\circ$ , faisant par conséquent disparaître la tangente verticale.

Pour les bifurcations transcritiques ou de type *pitchfork*, le scénario est complètement différent : la branche suivie continue d'exister au-delà de la bifurcation mais sous forme instable, et elle est coupée par une autre branche. Dans cas, la jacobienne de  $\underline{H}$  par rapport à  $\underline{X}$  est de rang  $n - 2$  (et non pas  $n - 1$  comme pour la bifurcation *cyclic fold*). A l'exception du type *pitchfork sous-critique*, l'analyse locale de la stabilité permet de prédire le comportement du système après bifurcation, un échange de stabilité s'effectuant au moment de la bifurcation (il existe d'ailleurs des algorithmes de changement de branche,

qui permettent de poursuivre la continuation sur une des nouvelles branches émergentes [117]).

Il convient de préciser que la résolution du système

$$\begin{cases} \underline{H}(\underline{X}, \lambda) = \underline{A}(\lambda) \cdot \underline{X} + \underline{b}(\underline{X}, \lambda) \\ \det(\underline{J}_{\underline{H}}(\underline{X}, \lambda)) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.87})$$

permet de déterminer directement les points de bifurcations de type *cyclic fold*, transcritique et *symmetry breaking*. A. Y. T. LEUNG et T. C. FUNG donnent une expression des dérivées de  $\det(\underline{J}_{\underline{H}})$  basée sur la décomposition LU de la matrice jacobienne [82].

#### 4.2b Les bifurcations de type *flip*

Les bifurcations de type *flip* sont une des particularités des solutions périodiques. Une solution  $T$ -périodique stable avant bifurcation devient instable, soit en laissant place à une seconde solution  $2T$ -périodique stable (cas *sur-critique*), soit en détruisant une solution  $2T$ -périodique instable qui existait avant la bifurcation (cas *sous-critique*) [131].

Dans sa version sous-critique, il s'agit d'une bifurcation catastrophique, pour laquelle la connaissance de l'état du système après bifurcation demande une analyse globale. Comme dans le cas de la bifurcation de type *cyclic fold*, l'ancien attracteur peut disparaître (*blue sky catastrophe*) ou exploser. S'il disparaît, il s'en suit un saut de réponse. Ce cas de figure a déjà été observé pour un oscillateur composé de deux galets en contact (contact supposé hertzien), à surface ondulée, animés d'une rotation à vitesse constante [95]. S'il explose en un attracteur chaotique, la transition de la solution  $T$ -périodique en une solution chaotique est dénommée transition par intermittance de type *III*.

La bifurcation sur-critique, quant à elle, est continue. Elle s'accompagne d'un doublement de période. Il est assez fréquent de constater une succession de  $k$  bifurcations de ce genre, donnant finalement naissance à une solution stable de période  $2^k T$  (appelée sous-harmonique d'ordre  $2^k$ ). Elle peut se poursuivre par un même nombre de bifurcations inverses, retrouvant ainsi la solution  $T$ -périodique du départ [81]. D'un autre côté, la séquence peut être infinie : la cascade de doublement de période est dans ce cas suivie d'une solution chaotique. Cette transition bien connue vers la chaos est la transition par doublement de période, observable par exemple lors d'une réponse à balourd d'un rotor rigide sur paliers hydrodynamiques [131] ou d'un rotor de Jeffcott avec frottement du disque sur un carter rigide [32].

Il a été prouvé théoriquement par Feigenbaum, et montré numériquement et expérimentalement maintes fois depuis, que les valeurs du paramètre auxquelles se produisent

ces bifurcations successives,  $\lambda_k$ , évoluent conformément à la loi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \delta \quad (\text{II.88})$$

La constante universelle  $\delta \approx 4,66292019$  est la constante de Feigenbaum. Il s'avère d'ailleurs que le ratio en question converge assez rapidement (sur la base des quatre premières bifurcations, le ratio se trouve généralement déjà égal à 4). Si en théorie, la solution devient chaotique à partir de  $\lambda_\infty$ , en pratique il n'est possible d'observer qu'un nombre fini de bifurcations, notamment à cause du bruit ou des arrondis. De plus, l'intervalle  $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$  au cours duquel la  $k^{\text{ième}}$  solution sous-harmonique est stable diminue avec  $1/k$ , rendant numériquement difficile voire impossible la recherche des sous-harmoniques au-delà de l'ordre 4 [15].

Pour le calcul des solutions sous-harmoniques, les méthodes exposées au début de ce chapitre peuvent s'employer. Il suffit de prendre le ratio sous-harmonique  $p$  correspondant [29]. En pratique, deux problèmes se posent cela dit. Le premier problème est lié à la taille du système à résoudre qui, à l'exception de la méthode de tir, est logiquement multipliée par deux : pour les méthodes fréquentielles par exemple il faut maintenant retenir  $\omega/2, \omega, 3\omega/2, 2\omega, \dots$  au lieu de  $\omega, 2\omega, \dots$  (on prend bien conscience ici que rester avec toujours le même nombre d'inconnues affecte la précision de la solution approchée). Cela engendre donc une augmentation draconienne du temps de calcul ainsi que des difficultés de convergence pour le solveur [15]. On peut toutefois ne pas modifier la formulation (matrice  $\underline{\underline{A}}$  conservée). Il suffit pour cela de prendre la pulsation de l'excitation égale à  $2\omega$  au lieu de  $\omega$  (en méthode de balance harmonique incrémentale, cela revient à décaler  ${}^t f_c, \dots$  de  $2p$  termes vers la droite dans II.32). Après calcul, on se retrouve alors avec la réponse sous-harmonique du système soumis à une excitation de pulsation  $\omega$ . Cela s'applique aussi bien pour les méthodes fréquentielles [78] que temporelles [149]. L'inconvénient est que l'on perd en précision (normal puisque le nombre d'inconnues reste inchangé).

Le second problème concerne la continuation. La solution instable, de période  $T$ , vérifie également la condition de périodicité  $\underline{y}(t + 2T) = \underline{y}(t)$  : elle est donc aussi solution du problème. Pour ne pas continuer sur la branche  $T$ -périodique, il est de ce fait nécessaire d'employer des algorithmes spéciaux de prédiction pour poursuivre la continuation sur la branche  $2T$ -périodique [81]. Une alternative possible en paramétrisation sélective avec les méthodes fréquentielles est d'imposer un des nouveaux coefficients ( $\omega/2$  par exemple) à être non nul, forçant ainsi l'algorithme à converger vers la solution sous-harmonique [82] (cette même astuce est utilisée dans [108] sur un système autonome ayant subi une bifurcation de Hopf pour forcer le solveur à converger vers la solution périodique).

A l'inverse des bifurcations tangentes, la jacobienne augmentée n'est pas singulière pour une telle bifurcation. Elle le devient par contre si on prend en compte les termes

sous-harmoniques, permettant la détermination directe des points de bifurcations de type *flip* via la résolution d'un système identique à II.87 (mais de taille  $2n + 1$  cette fois-ci, et non plus  $n + 1$ ). Graphiquement, cela se traduit comme attendu par deux branches émergentes au point de bifurcation.

#### 4.2c La bifurcation secondaire de Hopf

La dernière façon dont une solution périodique peut perdre sa stabilité correspond à une bifurcation de Naimark. Il s'agit de l'équivalent en régime forcé de la bifurcation de Hopf pour les points d'équilibre, d'où son autre nom amplement usité de bifurcation secondaire de Hopf. Elle introduit une nouvelle fréquence  $\omega_2$  à la fréquence initiale  $\omega_1$ . Suivant que le ratio de ces deux fréquences (qui correspond dans ce cas au *winding number*) est irrationnel ou non, on obtient alors une solution bifurquée quasi-périodique à deux pulsations ou périodique (sur-harmonique si  $\omega_2 > \omega_1$ , sous-harmonique si  $\omega_2 < \omega_1$ ).

Cette bifurcation existe sous deux formes. Dans sa version sous-critique, la solution quasi-périodique (ou périodique), instable, co-existe avant le point de bifurcation avec la solution périodique stable suivie. Au point de bifurcation, la solution quasi-périodique disparaît et la solution périodique devient instable. L'état du système après bifurcation ne peut être prédit par des considérations locales. Deux possibilités existent : soit l'ancien attracteur périodique stable disparaît (il y a alors apparition d'un saut de réponse), soit il explose en un autre attracteur plus grand, et éventuellement chaotique (on a alors une transition vers le chaos connue sous le nom de transition par intermittance de type *II*).

Dans sa version sur-critique, la bifurcation est continue et donne en général naissance à une solution stable quasi-périodique à deux pulsations (mais il se peut qu'elle soit périodique). Lorsque le paramètre de contrôle continue au-delà du point de bifurcation, les deux pulsations évoluent et peuvent se synchroniser (*i.e.* leur ratio peut devenir rationnel), la solution quasi-périodique devenant de ce fait périodique. Ce phénomène de synchronisation est appelé indifféremment *phase-locking*, *frequency-locking* ou *mode-locking* et s'observe pour de nombreux systèmes comme un rotor rigide avec paliers squeeze-films montés symétriquement [131]. Sur la courbe représentant l'évolution du ratio des deux pulsations en fonction du paramètre de contrôle (nommée *devil's staircase*), cela se traduit par des paliers qui correspondent à des plages pour lesquelles le phénomène de *locking* existe. Bien qu'il en existe une infinité — on les obtient par l'arithmétique de l'arbre de Farey [98] — seul ceux relatifs aux ratios  $\omega_2 : \omega_1 = p : q$  les plus importants (*i.e.* entiers  $p$  et  $q$  petits) sont visibles, l'intervalle fréquentiel des autres étant trop petit pour pouvoir être détectés.

Une seconde bifurcation sur-critique peut suivre la première. Une solution quasi-périodique à trois pulsations stable remplace alors l'ancienne, à deux pulsations, devenue instable. Si cette succession se poursuit, au bout de  $k$  bifurcations la solution stable est donc quasi-périodique à  $k+1$  pulsations incommensurables entre elles. Cependant, ce scénario avancé par Landau pour expliquer les mouvements irréguliers ou *turbulents* s'observe rarement au-delà de  $k = 3$ . Cela conforte les travaux de Ruelle et Takens qui ont démontré qu'une solution quasi-périodique à 4 pulsations (ou plus) peut être facilement perturbée pour laisser place à un attracteur chaotique robuste. Cette route vers le chaos à partir d'une solution quasi-périodique est connue sous le nom de *scénario de Ruelle-Takens*.

Une deuxième route est celle du *torus doubling*. Là, le tore sur lequel se trouve la solution quasi-périodique subit une cascade de *period doubling*, *i.e.* la période  $T_2 = 2\pi/\omega_2$  est doublée à chaque bifurcation, résultant en un nouveau tore qui forme deux boucles autour de l'ancien. La cascade, complète ou non, laisse finalement apparaître un attracteur chaotique. Une telle transition vers le chaos s'observe pour des oscillateurs à impacts [87].

Enfin, l'attracteur quasi-périodique peut tout simplement être détruit brutalement (on parle alors de *torus breakdown*) et remplacé par un attracteur chaotique ou périodique (qui peut lui même subir une transition vers le chaos par doublement de période ou intermittence). S. K. CHOI et S. T. NOAH ont observé ce phénomène de destruction sur un modèle de rotor de type Jeffcott soumis à l'effet de la gravité et excité par un balourd, incluant une raideur radiale bi-linéaire (pour modéliser des roulements avec jeu) et des termes de couplage en raideur (provenant des joints d'étanchéité ou de toute autre interaction fluide/structure). L'étude dynamique révèle une succession de solutions périodiques, quasi-périodiques et chaotiques [27].

En ce qui concerne le calcul des solutions quasi-périodiques, les méthodes classiques s'avèrent inapplicables. Cela dit, il existe des adaptations des méthodes de tir et de balance harmonique incrémentale. Pour la première, le principe est de rechercher un point fixe non plus sur la section de Poincaré d'ordre 1 mais d'ordre 2. F. H. LING [85] a appliqué avec succès cette méthode sur un oscillateur de Duffing excité à deux fréquences et un oscillateur de Van-der-Pol forcé. Pour la seconde, la solution est recherchée cette fois-ci sous la forme d'une série de Fourier généralisée tronquée (de terme générique  $k\omega_1 + l\omega_2$ ). Grâce à cette méthode de balance multi-harmonique, Y. B. KIM a pu mettre en évidence des résonances en combinaisons de pulsations sur un système à raideur bi-linéaire excité à deux fréquences [71]. Avec S. T. NOAH, il l'a également appliqué à un rotor de Jeffcott avec jeu de roulement et couplage en raideur et conclue que les solutions quasi-périodiques pouvant exister pour certaines valeurs de paramètres sont bien souvent de plus grande amplitude que celles périodiques [75].



### 4.3 Calcul effectif de la matrice monodrôme

A l'aide de la théorie de Floquet, la détermination de la stabilité d'une solution périodique se ramène à celle d'un signe, le signe de la partie réelle des exposants caractéristiques de Floquet qui dépendent des valeurs propres de la matrice monodrôme suivant la relation  $\lambda_i = \exp(\gamma_i \cdot T)$ . On retrouve donc le même concept que pour l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre. Pour ces solutions statiques cependant, les exposants dont il est question sont les valeurs propres de la matrice jacobienne  $\underline{\underline{J_H}}$  évaluée au point d'équilibre.

Dans le cadre statique, il est possible de s'abstenir du calcul de valeurs propres. On peut par exemple avoir recours aux fonctions de Lyapunov, comme il en est souvent fait usage en théorie du contrôle, ou encore, pour de petits systèmes, au critère de Routh-Hurwitz. Celui-ci permet d'obtenir facilement les conditions de stabilité en terme d'inéquations exprimées sous une forme littérale. Il est donc très apprécié dans les études paramétriques.

Par contre, dans le cadre dynamique, la matrice monodrôme étant fournie numériquement et non analytiquement, des critères tel celui de Routh-Hurwitz n'offrent aucun avantage (bien que pour de faibles non-linéarités il soit parfois possible de l'obtenir sous forme littérale via des méthodes de perturbation). Dans ce contexte et plus généralement pour des systèmes de taille importante, on ne peut donc pas échapper au calcul des valeurs propres.

En pratique, seules les plus grandes valeurs propres en module sont calculées (cette option de calcul est disponible dans la plupart des logiciels ou bibliothèques scientifiques permettant de faire du calcul de valeur propres). Cela permet d'obtenir un gain en temps de calcul non négligeable sans affecter l'analyse de la stabilité, puisque seul le coefficient de Floquet principal est déterminant. La seule difficulté restante est la construction préalable la matrice monodrôme.

#### 4.3a Le calcul direct

En revenant sur l'équation II.83, on voit comment former la matrice monodrôme : il suffit d'intégrer plusieurs fois l'équation différentielle linéarisée II.82 sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ , avec à chaque fois une condition initiale différente :  $\underline{\delta y}(0) = \underline{e}_i$ ,  $i = 1$  à  $n = 2N$ . Les solutions  $\underline{\delta y}(T)$  obtenues sont alors stockées colonne par colonne pour former la matrice monodrôme.

Le calcul de cette matrice est assez long, puisqu'il demande de réaliser un total de  $N$  intégrations temporelles. Il est donc courant, en pratique, de l'approximer en utilisant la procédure de Friedmann [54, 90]. Celle-ci s'appuie sur les travaux de Hsu [64] et consiste à découper la période en un nombre fini d'intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$  sur lesquels la matrice jacobienne de  $\underline{H}$  est supposée constante, égale à une valeur moyenne  $\underline{J_F}^{(k)}$  (par exemple  $\underline{J_F}^{(k)} = \underline{J_F}(t_k, \underline{y}(t_k))$  [81]). Ainsi, sur chaque intervalle, II.82 devient une équation différentielle à coefficients constants qu'il est possible d'intégrer analytiquement pour trouver

$$\underline{\delta y}(t_{k+1}) = \exp(\underline{J_F}^{(k)} \cdot (t_{k+1} - t_k)) \cdot \underline{\delta y}(t_k) \quad (\text{II.89})$$

Les intégrations successives conduisent alors à l'approximation suivante

$$\underline{\Phi} \approx \prod_{k=1}^{N_k} \exp(\underline{J_F}^{(k)} \cdot (t_{k+1} - t_k)) \approx \prod_{k=1}^{N_k} \left( \underline{I} + \sum_{j=1}^{N_j} \frac{(\underline{J_F}^{(k)} \cdot (t_{k+1} - t_k))^j}{j!} \right) \quad (\text{II.90})$$

où, pour des raisons liées au coût de calcul élevé d'une exponentielle matricielle, on a recours à un développement en série entière limité aux premiers termes. En général,  $N_k = 200$  et  $N_j = 4$  permettent d'atteindre une très bonne précision à un coût raisonnable [24].

En remarque, il convient de souligner que si la solution dont on étudie la stabilité est de période  $T$  et que la matrice jacobienne  $\underline{J_F}$  évaluée en cette solution est de période  $T/2$ , l'intégration de II.82 n'a besoin que d'être réalisée sur l'intervalle de temps  $[0, T/2]$ . Effectivement, dans ce cas on démontre aisément que la matrice  $\underline{\hat{\Phi}} = \underline{\delta Y}(T/2)$  alors obtenue vérifie la relation  $\underline{\hat{\Phi}}^2 = \underline{\Phi}$  [98]. Pour obtenir les valeurs propres recherchées, il suffit donc de prendre les racines carrées des valeurs propres de  $\underline{\hat{\Phi}}$ . Le temps de calcul dédié à l'intégration temporelle est ainsi divisé par deux.

### 4.3b Cas des méthodes fréquentielles

Pour les méthodes temporelles, il est facile d'étudier la stabilité de la solution trouvée. L'évolution de la solution perturbée s'opère en effet en suivant la même philosophie que la méthode. Cela découle simplement du fait que les inconnues du problème correspondent à des valeurs temporelles. Pour les méthodes fréquentielles, cela n'est plus le cas. Effectivement, les inconnues sont des amplitudes d'harmoniques. Indépendantes du temps, elles ne peuvent servir pour exprimer l'évolution temporelle de la perturbation initiale. C'est la raison pour laquelle on a classiquement recours au calcul direct pour ces méthodes. L'inconvénient est que la solution périodique trouvée est donnée dans le domaine fréquentiel, alors qu'on en a besoin dans le domaine temporel (pour l'évaluation de la jacobienne dans II.82). Du point de vue du temps de calcul, il est donc avantageux de réaliser l'intégration

numérique avec  $\underline{q}$  et  $\dot{\underline{q}}$  préalablement discrétisé [73], surtout si la procédure de Friedmann est employée.

Il est pourtant possible d'utiliser la philosophie des méthodes fréquentielles pour construire la matrice monodrome, *i.e.* de partir d'une perturbation des  $\underline{a}_k$  et  $\underline{b}_k$ . Nous avons en effet développé une technique qui permet d'analyser la stabilité des solutions trouvées par les méthodes fréquentielles directement (c'est-à-dire sans revenir dans le domaine temporel). Celle-ci a déjà été utilisée avec la méthode de balance harmonique incrémentale [144], mais dans notre approche, la formulation s'appuie sur la méthode des résidus pondérés, justifiant ainsi notre méthode du point de vue mathématique. Cela nous a également permis de montrer qu'elle ne s'applique pas uniquement à la méthode de balance harmonique incrémentale mais aussi aux autres méthodes fréquentielles, comme la méthode de collocation trigonométrique.

L'idée est de pondérer ces coefficients par  $\exp(\gamma t)$  pour établir la croissance ou décroissance de la perturbation  $\underline{\delta q}$  apportée à la solution. On pose donc

$$\underline{\delta q}(t) = \exp(\gamma t) \cdot \left( \frac{1}{2} \underline{\delta a}_0 + \sum_{m=1}^M (\cos(m\omega t) \cdot \underline{\delta a}_m + \sin(m\omega t) \cdot \underline{\delta b}_m) \right) \quad (\text{II.91})$$

On remarque qu'il s'agit d'une forme normale de Floquet :  $\underline{\delta q}(t) = \exp(\gamma t) \cdot \underline{\phi}(t)$  avec  $\underline{\phi}$  fonction  $T$ -périodique. Basé sur cette hypothèse, on obtient alors

$$\begin{cases} \dot{\underline{\delta q}}(t) = (\gamma \cdot \underline{\phi}(t) + \dot{\underline{\phi}}(t)) \cdot \exp(\gamma t) \\ \underline{\delta \ddot{q}}(t) = (\gamma^2 \cdot \underline{\phi}(t) + 2\gamma \cdot \dot{\underline{\phi}}(t) + \ddot{\underline{\phi}}(t)) \cdot \exp(\gamma t) \end{cases} \quad (\text{II.92})$$

avec  $\dot{\underline{\phi}}$  et  $\ddot{\underline{\phi}}$  qui s'expriment uniquement en fonction du taux de croissance exponentiel  $\gamma$ , de  $\underline{\delta X} = {}^t[\underline{\delta a}_0, \underline{\delta a}_1, \underline{\delta b}_1, \dots, \underline{\delta a}_M, \underline{\delta b}_M]$  et des fonctions trigonométriques de la base  $\mathcal{B}_M$ . Par commodité, on réécrit l'équation II.82 sous la forme plus usuelle

$$\underline{M} \cdot \underline{\delta \ddot{q}}(t) + \left( \underline{B} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}}(t, \underline{q}, \dot{\underline{q}}) \right) \cdot \underline{\delta \dot{q}}(t) + \left( \underline{K} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}}(t, \underline{q}, \dot{\underline{q}}) \right) \cdot \underline{\delta q}(t) = \underline{0} \quad (\text{II.93})$$

Cette équation se retrouve aisément en reportant  $\underline{q} + \underline{\delta q}$  dans l'équation différentielle du mouvement II.1 et en linéarisant  $f^{lia}$  autour de la solution périodique  $\underline{q}$ . En remplaçant  $\underline{\delta q}$  et ses dérivées par leurs expressions et compte tenu du fait que  $\exp(\gamma t) > 0$ , cette équation conduit à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \left( \gamma^2 \underline{M} + \gamma \cdot \underline{B} + \underline{K} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \right) \cdot \underline{\delta a}_0 + \\ & \sum_{m=1}^M \left( \left( \underline{K} - (m\omega)^2 \cdot \underline{M} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} + \gamma \cdot \underline{B} + \gamma^2 \cdot \underline{M} \right) \cdot \left( \cos(m\omega t) \cdot \underline{\delta a}_m + \sin(m\omega t) \cdot \underline{\delta b}_m \right) \right. \\ & \left. + (m\omega) \cdot \left( \underline{B} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \dot{\underline{q}}} + 2\gamma \cdot \underline{M} \right) \cdot \left( \cos(m\omega t) \cdot \underline{\delta b}_m - \sin(m\omega t) \cdot \underline{\delta a}_m \right) \right) = \underline{0} \quad (\text{II.94}) \end{aligned}$$

On note la similitude avec II.23. Se plaçant dans le contexte de la méthode de balance harmonique incrémentale, l'application de la procédure de Galerkin à II.94 fournit alors le système matriciel

$$\left( \gamma^2 \cdot \underline{\underline{A}}_2 + \gamma \cdot \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{J}}_b(\underline{\underline{X}}) \right) \cdot \underline{\underline{\delta X}} = \underline{\underline{0}} \quad (\text{II.95})$$

qui doit être vérifié pour  $\underline{\underline{\delta X}} \neq \underline{\underline{0}}$  (la solution nulle, triviale, est sans intérêt). L'étude de la stabilité de la solution décrite dans le domaine temporelle par ses coefficients de Fourier  $\underline{\underline{X}}$  se ramène donc à la résolution d'un problème de valeurs propres polynomial.

Les matrices  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{J}}_b$  sont celles utilisées avec la méthode de balance harmonique incrémentale, définies par II.27 et II.28. Elles sont de ce fait directement disponibles (les remarques faites pour le calcul de la matrice monodrome via la méthode de tir restent valables, à savoir si l'expression de  $\underline{\underline{J}}_b$  est fournie au solveur, à la dernière itération de celui-ci  $\underline{\underline{J}}_b$  est bien évaluée en  $\underline{\underline{X}}$ , sinon, il faut s'assurer que son approximation fournie par le solveur une fois le critère de convergence satisfait est correcte). Quant aux matrices  $\underline{\underline{A}}_2$  et  $\underline{\underline{A}}_1$ , elles possèdent la même structure bloc-diagonale que  $\underline{\underline{A}}$ , leurs sous-matrices non nulles étant

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_2^{(0,0)} &= \underline{\underline{A}}_2^{(2m-1,2m-1)} = \underline{\underline{A}}_2^{(2m,2m)} = \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{A}}_1^{(0,0)} &= \underline{\underline{A}}_1^{(2m-1,2m-1)} = \underline{\underline{A}}_1^{(2m,2m)} = \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{A}}_1^{(2m-1,2m)} &= 2(m\omega) \cdot \underline{\underline{M}} = -\underline{\underline{A}}_1^{(2m,2m-1)} \end{aligned} \quad (\text{II.96})$$

En ce qui concerne la méthode de collocation trigonométrique, la procédure de collocation appliquée à II.94 donne aussi un système algébrique de la forme II.95. Encore une fois, il n'est pas nécessaire de recalculer les matrices  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{J}}_b$  (évaluée en  $\underline{\underline{X}}$ ) qui sont données respectivement par II.46 et II.49 (en fin de convergence). Les deux autres matrices s'expriment en remplaçant dans II.47 le triplet  $(\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{K}})$  soit par  $(\underline{\underline{0}}, 2\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{B}})$  pour  $\underline{\underline{A}}_1$  ou par  $(\underline{\underline{0}}, \underline{\underline{0}}, \underline{\underline{M}})$  pour  $\underline{\underline{A}}_2$ . Sous forme condensée, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_1 &= \underline{\underline{\Gamma}}^{-1} \otimes \underline{\underline{B}} + 2 \cdot (\underline{\underline{\Gamma}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}}) \otimes \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{A}}_2 &= \underline{\underline{\Gamma}}^{-1} \otimes \underline{\underline{M}} \end{aligned} \quad (\text{II.97})$$

avec  $\underline{\underline{\Gamma}}$  et  $\underline{\underline{D}}$  matrices définies dans II.36 et II.39.

D'une manière générale, pour toute méthode fréquentielle dérivée d'une méthode de résidus pondérés, la procédure de pondération transforme l'équation temporelle II.94 en un système algébrique du type II.95, et la détermination de la stabilité en un calcul de valeurs propres. Il est important de rappeler que les valeurs propres trouvées ne sont pas les multiplicateurs de Floquet mais les exposants caractéristiques de Floquet : ainsi la solution périodique sera stable si ils ont tous une partie réelle strictement négative (instable si une d'entre elles a une partie réelle strictement positive). Les vecteurs propres ne sont autres que les fonctions  $\underline{\underline{\phi}}$  qui aident à mieux comprendre les mécanismes d'instabilité, *i.e.* le comportement dynamique transitoire juste après la bifurcation (le mode non-linéaire qui répond alors étant celui correspondant justement au  $\gamma$  ayant la plus grande partie réelle).

## II.5 Les techniques de condensation

Il n'est pas concevable d'appliquer les méthodes non-linéaires exposées sur des systèmes de grande taille pour des questions de temps de calcul, voire même de limitations en stockage mémoire. Pour les modèles industriels, il est donc nécessaire de recourir à des techniques de réduction ou condensation, particulièrement lors des études de conception.

### 5.1 La condensation du modèle spatial

Le modèle construit à partir d'une discrétisation spatiale (via la méthode des éléments finis, des différences finies, . . . ) est rarement utilisé directement. Pour les systèmes linéaires, il est classique d'avoir recours à la superposition modale, qui permet, en ne gardant que les premiers modes, de minimiser le temps de calcul et d'assurer un filtrage des hautes fréquences [59].

Une autre alternative pour diminuer la taille du système est d'utiliser une méthode de réduction statique ou dynamique [139], applicable aussi sur des systèmes à non-linéarités localisées [53]. Dans ce cas, on utilise plus généralement la méthode des modes composants (à interface fixe et/ou libre) : pour chaque sous-structure, on calcule les modes propres (en libre-libre ou encastres) et les modes statiques [130]. La plus connue d'entre elles est la condensation de Craig et Bampton (interface fixe) [35]. La condensation avec interface libre, comme la méthode de Mc Neal [88], est principalement utilisée lorsque les caractéristiques modales proviennent d'essais d'analyse modale. Ce concept de sous-structuration est particulièrement développé et apprécié dans le contexte industriel, vu qu'il permet de scinder les études.

Pour le calcul des réponses forcées via une méthode non-linéaire, la condensation préalable du modèle par la méthode des modes composants améliore donc nettement l'efficacité. De nombreux auteurs l'ont mis à profit pour simuler des réponses à balourd de rotors supportés par des paliers hydrodynamiques ou incluant un amortisseur de type *squeeze film* [130, 140, 96]. Il faut cependant garder à l'esprit que le modèle obtenu n'est qu'une approximation du modèle de départ. Les calculs sont donc souvent effectués avec deux modèles condensés en retenant un nombre de modes différent, pour s'assurer que la troncature modale faite permet de retranscrire correctement la dynamique du système initial.

## 5.2 La condensation en fréquentiel

Pour les méthodes fréquentielles, il est possible d'appliquer une technique de condensation sur les degrés de liberté non-linéaires. Cette approche possède l'avantage de ne faire aucune approximation (certains auteurs parlent de méthode de condensation *exacte*). Elle peut éventuellement s'appliquer en parallèle avec la méthode des modes composants.

Dans un premier temps, les matrices et vecteurs du système algébrique obtenu à l'aide de la méthode de collocation trigonométrique ou de balance harmonique incrémentale sont partitionnés pour regrouper les termes relatifs aux *ddl* sur lesquels s'exerce une force non-linéaire. On obtient ainsi le système équivalent

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}^{11} & \underline{\underline{A}}^{12} \\ \underline{\underline{A}}^{21} & \underline{\underline{A}}^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{X}^1 \\ \underline{X}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b}^{lin\ 1} \\ \underline{b}^{lin\ 2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b}^{nl\ 1}(\underline{X}^1) \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (\text{II.98})$$

avec les indices supérieurs 1 et 2 respectivement mis pour les termes non-linéaires et linéaires. Bien entendu,  $\underline{b}^{nl\ 2}$  est nul et  $\underline{b}^{nl\ 1}$  ne dépend que de  $\underline{X}^1$ .

S'inspirant de la célèbre réduction de Guyan [34], on aboutit finalement au système réduit suivant

$$\underline{\tilde{A}} \cdot \underline{X}^1 + \underline{\tilde{b}} + \underline{b}^{nl\ 1}(\underline{X}^1) = \underline{0} \quad (\text{II.99})$$

En général, le nombre de *ddl* non-linéaires est relativement petit comparé au nombre de *ddl* linéaires. Le nouveau système algébrique non-linéaire à résoudre est donc de taille beaucoup plus faible, ce qui engendre des gains en temps de calcul considérables. Une fois  $\underline{X}^1$  trouvé, les inconnues restantes s'obtiennent facilement par substitution inverse

$$\underline{X}^2 = -(\underline{\underline{A}}^{22})^{-1} \cdot (\underline{\underline{A}}^{21} \cdot \underline{X}^1 + \underline{b}^{lin\ 2}) \quad (\text{II.100})$$

La matrice  $\underline{\tilde{A}}$  et le vecteur  $\underline{\tilde{b}}$  sont donnés par les expressions suivantes

$$\begin{cases} \underline{\tilde{A}} = \underline{\underline{A}}^{11} - \underline{\underline{A}}^{12} \cdot (\underline{\underline{A}}^{22})^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{21} \\ \underline{\tilde{b}} = \underline{b}^{lin\ 1} - \underline{\underline{A}}^{12} \cdot (\underline{\underline{A}}^{22})^{-1} \cdot \underline{b}^{lin\ 2} \end{cases} \quad (\text{II.101})$$

Leur évaluation demande donc l'inversion de la matrice  $\underline{\underline{A}}^{22}$  de taille non négligeable. On voit là la limitation de cette technique de condensation. En particulier, on s'aperçoit qu'elle n'offre pas d'avantage si la méthode non-linéaire est couplée avec une méthode de continuation. En effet,  $\underline{\underline{A}}$  dépendant du paramètre de contrôle  $\lambda$ , il est nécessaire de réaliser l'inversion non pas à chaque pas (*i.e.* à chaque valeur de  $\lambda$ ) mais à chaque itération du solveur, ce qui n'est pas viable si le nombre de *ddl* est conséquent.

Il est important de rappeler qu'aucune information n'est perdue. En fait, cette technique de condensation pour un système linéaire revient juste à effectuer une résolution de II.98 en utilisant l'algorithme de Gauss par blocs.

De nombreux auteurs l'ont appliqué avec la méthode de balance harmonique incrémentale [118, 74] et la méthode de collocation trigonométrique [68]. Mais elle peut tout aussi bien être appliquée à d'autres méthodes, même non fréquentielles, comme la méthode des différences finies par exemple. La seule condition pour pouvoir l'appliquer est que la méthode conduise à un système similaire à II.12.

### 5.3 La condensation en temporel

La technique décrite précédemment s'adapte également pour les méthodes d'intégration temporelle implicites [119]. Pour en montrer le principe, on suppose que, à tout instant  $t_k$ , vitesse et accélération généralisées s'expriment en fonction du déplacement généralisé suivant la relation [128]

$$\begin{cases} \ddot{\underline{q}}_k = \underline{\underline{R}}_k \cdot \underline{q}_k + \underline{r}_k \\ \dot{\underline{q}}_k = \underline{\underline{S}}_k \cdot \underline{q}_k + \underline{s}_k \end{cases} \quad (\text{II.102})$$

avec les matrices  $\underline{\underline{R}}_k$  et  $\underline{\underline{S}}_k$  fonction uniquement du pas de temps et des paramètres du schéma, et les vecteurs  $\underline{r}_k$  et  $\underline{s}_k$  dépendants en plus de l'état du système aux instants précédents. De nombreux intégrateurs sont donnés directement sous cette forme. C'est le cas par exemple pour la méthode de Houbolt [129, 153]. Pour d'autres intégrateurs, comme ceux de la famille de Newmark, quelques manipulations sur les équations cinématiques sont nécessaires avant d'aboutir à de telles expressions [59].

Contrairement aux schémas d'intégration explicites, pour trouver l'état du système à l'instant  $t_k$  en implicite, l'équation différentielle du mouvement II.1 est écrite en ce même instant (l'état du système aux instants  $t_{k-i}$ ,  $i > 0$ , étant connu). En présence de non-linéarités, la résolution de cet équilibre dynamique doit donc se faire de manière itérative, en général par un algorithme du genre prédicteur/correcteur (dont la convergence peut s'avérer lente). Il est aussi possible d'y injecter les expressions de  $\underline{\ddot{q}}_k$  et  $\underline{\dot{q}}_k$  en fonction de  $\underline{q}_k$ , on se ramène alors au système non-linéaire

$$(\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{R}}_k + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{S}}_k + \underline{\underline{K}}) \cdot \underline{q}_k + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{r}_k + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{s}_k + \underline{f}_k^{lia}(\underline{q}_k) = \underline{f}^{ext}(t_k) \quad (\text{II.103})$$

qui peut se résoudre par la méthode de Newton-Raphson. Mais pour des systèmes de grande taille, la résolution devient coûteuse en temps de calcul.

Les non-linéarités étant localisées, on partitionne naturellement les  $ddl$  en deux groupes,  $\underline{q}^1$  pour les  $ddl$  non-linéaires et  $\underline{q}^2$  pour les  $ddl$  linéaires, afin d'obtenir

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{E}}_k^{11} & \underline{\underline{E}}_k^{12} \\ \underline{\underline{E}}_k^{21} & \underline{\underline{E}}_k^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{q}_k^1 \\ \underline{q}_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{e}_k^1 \\ \underline{e}_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{f}_k^{lia^1}(\underline{q}_k^1) \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (\text{II.104})$$

où la matrice  $\underline{\underline{E}}_k$  est équivalente à  $\underline{\underline{M}}.\underline{\underline{R}}_k + \underline{\underline{B}}.\underline{\underline{S}}_k + \underline{\underline{K}}$  et le vecteur  $\underline{e}$  à  $\underline{\underline{M}}.\underline{r}_k + \underline{\underline{B}}.\underline{s}_k + \underline{f}^{ext}(t_k)$ . Vu la similitude avec II.98, on procède avec la même technique de condensation inspirée de la réduction de Guyan, ce qui permet de se ramener au système

$$\underline{\underline{\tilde{E}}}_k.\underline{q}_k^1 + \underline{\tilde{e}}_k + \underline{f}_k^{lia^1}(\underline{q}_k^1) = \underline{0} \quad (\text{II.105})$$

La taille de ce nouveau système non-linéaire est égale au nombre de *ddl* non-linéaire, généralement faible devant le nombre de *ddl* total, ce qui engendre un gain en temps de calcul notable. Une fois  $\underline{q}_k^1$  trouvé, le déplacement généralisé des *ddl* linéaires se calcule aisément par une substitution arrière similaire à II.100, et les vitesses et accélérations généralisées se déduisent finalement des équations II.102.

La condensation doit être reconduite à chaque nouveau calcul. L'inversion répétitive de  $\underline{\underline{E}}_k$ <sup>22</sup> pour la construction de  $\underline{\underline{\tilde{E}}}_k$  constitue alors un inconvénient de taille (si l'influence des non-linéarités est faible, la résolution directe, *i.e.* sans condensation, de l'équilibre dynamique par un algorithme de type prédicteur/correcteur peut s'avérer plus rapide). Cependant, lorsque le pas de temps est constant et que les matrices structurale sont indépendantes du temps, l'inversion n'a besoin d'être effectuée qu'une seule fois. Et si tel n'est pas le cas, une condensation préalable du modèle spatial permet de ramener la matrice à inverser à une taille raisonnable, rendant attrayante la condensation en temporel.

Cette technique de condensation a été employée en parallèle avec la méthode des modes composants pour l'étude dynamique transitoire de rotors supportés par des paliers avec amortisseurs de type *squeeze film* [69] ou des paliers hydrodynamiques [160]. Elle s'utilise aussi avec la méthode de tir pour l'étude d'un régime permanent périodique en l'intégrant tout simplement dans la méthode d'intégration temporelle à laquelle on fait appel pour réaliser les tirs [160].

## 5.4 La condensation aux connexions

Les degrés de liberté sur lesquels sont réalisés la condensation en fréquentiel ou en temporel sont en général ceux sur lesquels agissent une force non-linéaire. En particulier, ceux-ci englobent les *ddl* reliés entre eux par un élément non-linéaire. Puisqu'au niveau des connexions simples seuls les déplacements relatifs sont réellement nécessaires pour le calcul des forces, il est dans ce cas possible de poursuivre encore la condensation. Le principe, bien qu'exposé à partir du système II.99 obtenu par une première condensation en fréquentiel, est valable aussi dans le contexte temporel (prendre II.105 dans cette circonstance).

Il faut d'abord définir pour chaque connexion simple un noeud amont et un noeud aval.



On partitionne ensuite les *ddl* non-linéaires en trois catégories. Les première et deuxième, indexées par les lettres *u* et *d* (pour *upstream* et *downstream*), regroupent respectivement les *ddl* amont et aval de toutes les connexions (le *ddl* amont représenté par la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\underline{X}^{1u}$  doit bien sûr correspondre avec le *ddl* aval représenté par la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\underline{X}^{1d}$ ). La troisième, indexée par *n* (pour *neutral*), est composée des *ddl* n'appartenant à aucune connexion.

Cette nouvelle organisation permet de scinder le vecteur  $\underline{b}^{nl1}$  en trois sous vecteurs :  $\underline{b}^{nl1u}$ ,  $\underline{b}^{nl1d}$  et  $\underline{b}^{nl1n}$ . Les deux premiers ne dépendent que de  $\underline{X}^{1r} = \underline{X}^{1u} - \underline{X}^{1d}$ , et vérifient l'égalité  $\underline{b}^{nl1d} = -\underline{b}^{nl1u}$  en vertu du principe de l'action et de la réaction. Quant au dernier sous-vecteur, il n'est fonction que de  $\underline{X}^{1n}$ . Ainsi, en notant  $\underline{\underline{H}}$  l'inverse de  $\underline{\underline{A}}$  (pour travailler en terme de réceptance), le système II.99 se réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \underline{X}^{1u} \\ \underline{X}^{1d} \\ \underline{X}^{1n} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}^{11} & \underline{\underline{H}}^{12} & \underline{\underline{H}}^{13} \\ \underline{\underline{H}}^{21} & \underline{\underline{H}}^{22} & \underline{\underline{H}}^{23} \\ \underline{\underline{H}}^{31} & \underline{\underline{H}}^{32} & \underline{\underline{H}}^{33} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} \tilde{b}^u \\ \tilde{b}^d \\ \tilde{b}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b}^{nl1u}(\underline{X}^{1r}) \\ -\underline{b}^{nl1u}(\underline{X}^{1r}) \\ \underline{b}^{nl1n}(\underline{X}^{1n}) \end{pmatrix} \right) \quad (\text{II.106})$$

A partir de ce point, la condensation sur les connexions consiste juste à exprimer la différence entre  $\underline{X}^{1u}$  et  $\underline{X}^{1d}$ . On se ramène ainsi à un système ne faisant plus intervenir que  $\underline{X}^{1r}$  et  $\underline{X}^{1n}$

$$\begin{pmatrix} \underline{X}^{1r} \\ \underline{X}^{1n} \end{pmatrix} = - \left[ \begin{array}{c|c|c} (\underline{\underline{H}}^{11} - \underline{\underline{H}}^{21}) & (\underline{\underline{H}}^{12} - \underline{\underline{H}}^{22}) & (\underline{\underline{H}}^{13} - \underline{\underline{H}}^{23}) \\ \underline{\underline{H}}^{31} & \underline{\underline{H}}^{32} & \underline{\underline{H}}^{33} \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} \tilde{b}^u \\ \tilde{b}^d \\ \tilde{b}^n \end{pmatrix} \\ - \left[ \begin{array}{c|c} (\underline{\underline{H}}^{11} - \underline{\underline{H}}^{12} - \underline{\underline{H}}^{21} + \underline{\underline{H}}^{22}) & (\underline{\underline{H}}^{13} - \underline{\underline{H}}^{23}) \\ \underline{\underline{H}}^{31} - \underline{\underline{H}}^{32} & \underline{\underline{H}}^{33} \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}^{nl1u}(\underline{X}^{1r}) \\ \underline{b}^{nl1n}(\underline{X}^{1n}) \end{pmatrix} \quad (\text{II.107})$$

Une fois ce système résolu, on dispose de  $\underline{X}^{1r}$ ,  $\underline{b}^{nl1u}$  et  $\underline{b}^{nl1n}$ . Le sous-vecteur  $\underline{X}^{1u}$  se calcule alors en utilisant II.106, et on déduit  $\underline{X}^{1d} = \underline{X}^{1u} - \underline{X}^{1r}$  par simple soustraction.

Cette condensation demande de nombreuses manipulations matricielles mais permet de diviser le nombre de *ddl* non-linéaires associés à des connexions simples par 2. Elle est appliquée dans [110] pour étudier le comportement de deux poutres modélisées par éléments finis et reliées entre elles par un élément frotteur.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé de nombreuses méthodes de calcul dédiées à la recherche des réponses périodiques d'un système forcé possédant des non-linéarités. Un intérêt particulier a été porté sur les techniques de continuation et les aspects purement numériques, qui viennent s'adjoindre à toute méthode de calcul non-linéaire lors de sa mise en place. Nous nous sommes attachés en outre à l'analyse de la stabilité, qui ne peut être dissociée du calcul de la solution, en rappelant aussi bien les aspects théoriques de la stabilité linéarisée que les divers scénarios accompagnant les pertes de stabilité. Nous avons précisé également les moyens disponibles pour calculer effectivement les coefficients de Floquet.

Notre exposé est bien entendu non exhaustif. On aurait pu ajouter par exemple la méthode des fonctions descriptives assez répandue dans le domaine du contrôle, la méthode des ondelettes beaucoup plus récente ou les techniques de continuation par approximants de Padé qui font leur apparition dans les problèmes de flambements. De plus, les méthodes présentées sont en permanente évolution. Certaines ont ainsi été adaptées au calcul des solutions quasi-périodiques, mais elles demandent des ressources informatiques considérables. En ce qui concerne les solutions chaotiques, à présent seule l'intégration temporelle permet de les calculer. D'ici quelques décennies néanmoins, il existera sans doute des algorithmes destinés à la détermination directe des attracteurs étranges, basés peut-être sur le principe de périodicité de solutions chaotiques dans l'espace non pas euclidien mais d'Hausdorff.





# Chapitre III

---

---

## Analyse phénoménologique

*Utilisation de la méthode de tir*

---

---

On n'est curieux qu'à proportion qu'on est instruit.

Jean-Jacques Rousseau, *Du contrat social*

## Introduction

Les roulements sont des éléments d'importance majeure dans les moteurs d'avions, puisqu'ils assurent les liaisons entre les parties fixes et les parties tournantes. C'est donc par eux que passent tous les efforts comme les forces de balourd ou les charges statiques issues des problèmes de montage. Les modéliser de manière fine n'est pas envisageable pour des calculs de réponses à balourd, à cause de problèmes évidents de limitations en ressources informatiques. Il est donc primordial de disposer de modèles simplifiés, toutefois capables de rendre compte du mieux possible de leur comportement réel.

La présence d'un jeu de fonctionnement et la nature des contacts entre leurs divers éléments rendent le comportement des roulements fortement non-linéaire. Il convient alors de disposer d'un outil assez robuste pour réaliser des calculs dynamiques avec de telles non-linéarités.

Nous exposerons donc tout d'abord la modélisation proposée pour les roulements et ensuite la méthode de tir multiple, qui s'appuie sur l'intégration temporelle. Cette méthode présente l'avantage, comparée aux autres méthodes vues dans le chapitre précédent, de n'émettre aucune hypothèse concernant la solution, si ce n'est sa périodicité. Cette méthode sera alors utilisée pour traiter des exemples phénoménologiques incluant divers modèles de roulement.

### III.1 Modélisation des roulements

#### 1.1 Modélisation actuelle

Pour les calculs de dynamique d'ensemble, les roulements sont modélisés par une matrice de raideur linéaire lors du dimensionnement. Mais un modèle non-linéaire est aussi utilisé. Celui-ci correspond à une raideur radiale bi-linéaire et présente l'avantage de prendre en compte le jeu radial.

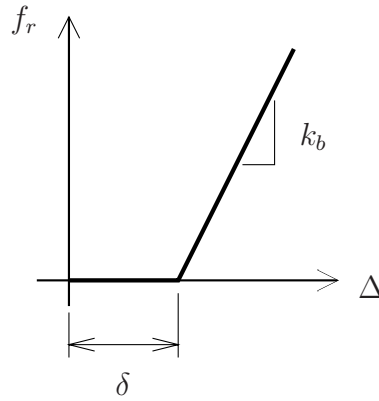


FIG. III.1: Force radiale bi-linéaire

### 1.1a Le modèle radial bi-linéaire

Le roulement est modélisé par un ressort radial dont la raideur est soit nulle soit égale à une raideur constante  $k_b$  (cf. figure III.1). La force qui s'exerce entre rotor et stator au travers du roulement s'exprime donc par

$$f_r = \begin{cases} k_b \cdot (\Delta - \delta) & \text{si } \Delta > \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

avec  $\Delta = \sqrt{(u_x^r - u_x^s)^2 + (u_y^r - u_y^s)^2}$  qui représente le déplacement relatif radial entre rotor (indexé par  $r$ ) et stator (indexé par  $s$ ),  $u_x$  et  $u_y$  étant respectivement employés pour les déplacements horizontaux et verticaux.

L'expression de cette force dans le repère fixe est, après projection,

$$\begin{cases} f_x^{s \rightarrow r} = -\cos(\theta) \cdot f_r \\ f_y^{s \rightarrow r} = -\sin(\theta) \cdot f_r \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = (u_x^r - u_x^s) / \Delta \\ \sin(\theta) = (u_y^r - u_y^s) / \Delta \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Le terme  $s \rightarrow r$  est là pour préciser qu'il s'agit de la force exercée sur le rotor (pour avoir celle exercée sur le stator il suffit, compte tenu du principe de l'action et de la réaction, de changer le signe).

Ce modèle est plus généralement utilisé pour modéliser les contacts rotor/stator. Dans ce cas, à la force de contact  $f_r$ , on peut adjoindre une force de frottement définie de manière usuelle, *i.e.* par  $f_t = \mu \cdot f_r$ , avec  $\mu$  coefficient de frottement dynamique. Matriciellement, on trouve alors

$$\begin{pmatrix} f_x^{s \rightarrow r} \\ f_y^{s \rightarrow r} \end{pmatrix} = -k_b \cdot \frac{\Delta - \delta}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x^r - u_x^s \\ u_y^r - u_y^s \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

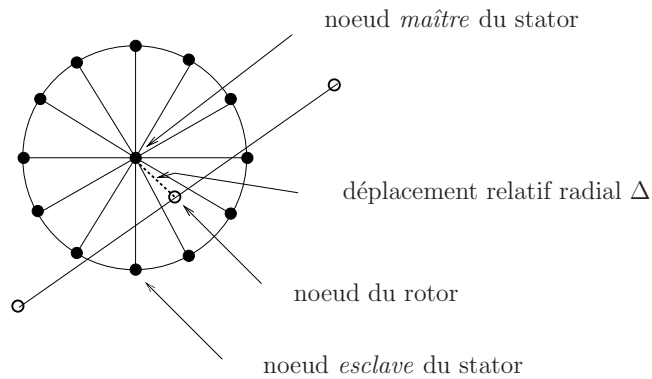


FIG. III.2: Schématisation de la roue de vélo

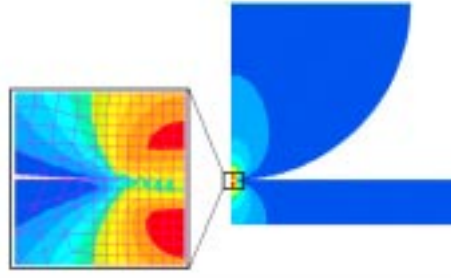
On s'aperçoit sous cette forme que la prise en compte du coefficient  $\mu$  rend la matrice de raideur antisymétrique, montrant clairement que le frottement peut potentiellement engendrer des instabilités.

### 1.1b Le raccordement du maillage

Dans le contexte purement axisymétrique, tous les éléments, même fixes, peuvent être rapportés sur l'axe de rotation pour les besoins de la modélisation (qu'on qualifie alors de  $2D$ ). L'introduction du modèle exposé ci-dessus ne présente donc pas de difficulté. On utilise simplement le déplacement relatif des  $ddl$  correspondant aux noeuds du rotor et du stator où sont fixées les bagues du roulement.

Lorsque la structure n'est plus supposée axisymétrique, ce qui est toujours le cas en pratique pour les parties fixes, il est nécessaire de recourir à des éléments intermédiaires pour pouvoir utiliser ce modèle. En effet, le carter ne peut plus être ramené sur l'axe : on doit le modéliser avec des éléments surfaciques ou volumiques. Plusieurs noeuds sont donc définis à l'endroit où se loge la bague extérieure. Il devient alors nécessaire d'ajouter une connexion rigide entre ces noeuds (noeuds *esclaves*) et leur centre géométrique qui lui se trouve sur l'axe (noeud *maître*). Il est aussi possible de remplacer cet élément rigide par autant d'éléments *poutre* ou *barre* qu'il y a de noeuds sur le stator. Les éléments *barre* ne reprenant pas d'effort axial sont réservés pour la modélisation de roulements à rouleaux alors qu'on utilisera à profit les éléments *poutre* pour prendre en compte une raideur axiale présente dans les roulements à billes. Ce raccordement de maillage qui porte le nom de *roue de vélo* est schématisé sur la figure III.2.

Si le rotor est lui aussi modélisé en  $3D$ , la même procédure doit être appliquée avec les noeuds définis à l'endroit où se loge la bague intérieure. Le déplacement relatif qui sert à exprimer la force transmise via le roulement est dans ce cas celui des noeuds *maîtres*.

FIG. III.3: *Contact de Hertz*

## 1.2 Théorie du contact de Hertz

Le modèle de raideur radiale bi-linéaire est un modèle global assez sommaire puisqu'il ne prend en compte aucune caractéristique physique du roulement. Si on veut étudier le roulement plus en détail, il convient de s'intéresser aux contacts entre éléments roulants et bagues. Ce contact est analysé à partir de la théorie du contact de Hertz.

### 1.2a Relation fondamentale

La théorie du contact de Hertz, qui date de 1896, porte sur l'étude du contact ponctuel entre deux solides élastiques. Hertz a stipulé que les surfaces déformées étaient des ellipsoïdes de révolution, ce qui lui a permis de montrer que la contrainte normale induite par une force normale  $Q$  appliquée sur les solides s'exprimait par

$$\sigma_n = \frac{3Q}{2\pi ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (\text{III.4})$$

au niveau de l'ellipse de contact,  $a$  et  $b$  étant les demi-axes.

Il a aussi montré que la relation entre force de contact et la distance d'inter-pénétration des deux solides  $\delta x$  due à leur déformation élastique locale se mettait sous la forme

$$Q(\delta x) = K_H \cdot \delta x^{\frac{3}{2}} \quad (\text{III.5})$$

où la constante de Hertz,  $K_H$ , est uniquement fonction de la géométrie des solides au niveau du point de contact et des caractéristiques du matériau les composant (modules d'Young  $E_i$  et coefficients de Poisson  $\nu_i$ ).

Pour des géométries simples, il est possible d'exprimer la constante de Hertz de manière analytique. Dans le cas d'un contact bille/bille par exemple, elle s'exprime par [147]



$$K_H = \frac{4}{3} \sqrt{R^*} \cdot E^* \quad (\text{III.6})$$

avec

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}} \quad (\text{III.7})$$

respectivement nommés rayon équivalent et module d'Young équivalent. La formule III.6 peut évidemment se généraliser au cas du contact sphère sur plan en prenant  $R_{II}$  infini (*cf.* figure III.3). Mais dans le cas général, le calcul de  $K_H$  fait intervenir les intégrales elliptiques de première et seconde espèces. On montre que

$$K_H = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{\Sigma\rho}} \cdot E^* \cdot \frac{1}{(\delta x^*)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{III.8})$$

Le terme  $\Sigma\rho$ , appelé somme des courbures, ne dépend que de la géométrie. Il est défini par

$$\Sigma\rho = \rho_{Ix} + \rho_{IIx} + \rho_{Iy} + \rho_{IIy} = \rho_x + \rho_y \quad (\text{III.9})$$

où  $\rho_{i,x}$  et  $\rho_{i,y}$  ( $i = I$  ou  $II$ ) sont les courbures des solides suivant les deux directions principales (comptées positivement pour les surfaces convexes, négativement pour les surfaces concaves), comme montré sur la figure III.4, et  $\rho_x$  ( $\rho_y$ ) la courbure équivalente suivant  $x$  ( $y$ ). Le terme adimensionnel  $\delta x^*$ , fonction des intégrales elliptiques, est compris entre 0 et 1. Il s'obtient à l'aide d'abaques [61] paramétrées par la différence des courbures, notée  $F(\rho)$ . Celle-ci s'exprime par

$$F(\rho) = \frac{(\rho_{Ix} - \rho_{Iy}) + (\rho_{IIx} - \rho_{IIy})}{\Sigma\rho} = \frac{1 - \kappa^{-1}}{1 + \kappa} \quad (\text{III.10})$$

avec  $\kappa = \rho_x / \rho_y$  représentant le ratio des courbures équivalentes.

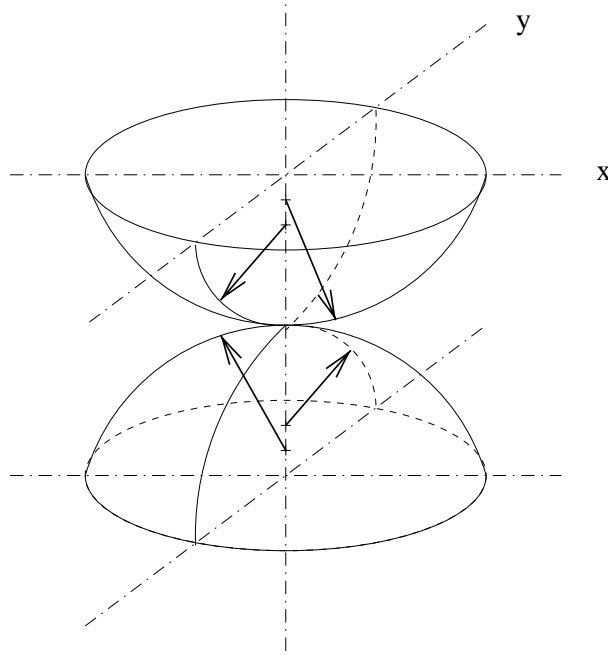
Ces constantes servent aussi à exprimer les demi-axes de l'ellipse de contact selon

$$a = a^* \cdot \left( \frac{3Q}{2\Sigma\rho} \cdot \frac{1}{E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad b = b^* \cdot \left( \frac{3Q}{2\Sigma\rho} \cdot \frac{1}{E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{III.11})$$

les quantités adimensionnelles  $a^*$  et  $b^*$  s'obtenant par abaques, toujours paramétrées par  $F(\rho)$ . Cela permet alors de remonter à la contrainte normale maximale qui s'applique au niveau de l'ellipse de contact, *i.e.*  $\sigma_n^{max} = 3Q / (2\pi ab)$ .

## 1.2b Application au contact bille/bague

Pour les roulements à billes, on peut identifier le contact bille/bague comme un contact ponctuel hertzien. La figure III.5 montre les variables utiles pour décrire la géométrie

FIG. III.4: *Contact ponctuel entre deux solides  $S_I$  et  $S_{II}$* 

d'un roulement à billes à contact oblique:  $D_i$  et  $D_e$  représentent le diamètre intérieur des bagues de roulement,  $r_i$  et  $r_e$  le rayon des pistes de roulement,  $D$  le diamètre des billes,  $d_m = (D_i + D_e)/2$  le diamètre moyen et  $\alpha_0$  l'angle de contact à vide. Cet angle est lié au jeu radial  $\delta$  du roulement par la formule

$$\alpha_0 = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{\delta}{A} \right) \quad (\text{III.12})$$

où  $A = r_e - r_i - D$  représente la distance séparant les centres de courbure des pistes de roulement (à vide, c'est-à-dire roulement non chargé).

En posant  $\gamma = D \cdot \cos(\alpha_0)/d_m$ , on trouve alors

$$\Sigma\rho = \frac{1}{D} \cdot \left( 4 - \frac{D}{r_e} - \frac{2\gamma}{1+\gamma} \right), \quad F(\rho) = \frac{\frac{D}{r_o} - \frac{2\gamma}{1+\gamma}}{\left( 4 - \frac{D}{r_e} - \frac{2\gamma}{1+\gamma} \right)} \quad (\text{III.13})$$

pour le contact bille / bague extérieure et

$$\Sigma\rho = \frac{1}{D} \cdot \left( 4 - \frac{D}{r_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma} \right), \quad F(\rho) = \frac{\frac{D}{r_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma}}{\left( 4 - \frac{D}{r_i} + \frac{2\gamma}{1-\gamma} \right)} \quad (\text{III.14})$$

pour le contact bille / bague intérieure, ce qui permet, via la formule III.8, de déterminer la valeur de  $K_H$  pour chacun des contacts.

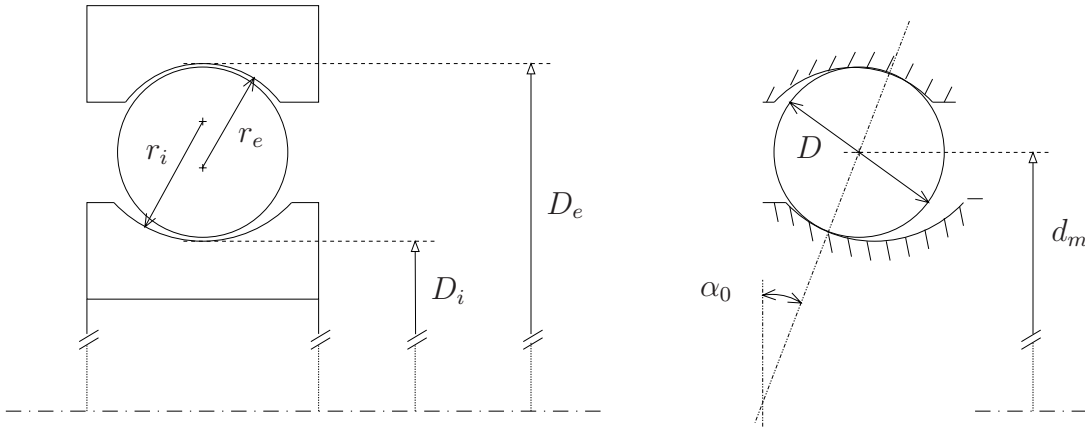


FIG. III.5: Géométrie d'un roulement à billes à contact oblique

Afin d'éviter le recours aux abaques, L. HOUPERT propose un ajustement de courbes. Au lieu de lisser la courbe  $\delta x^*$  en fonction  $F(\rho)$ , il définit d'abord un nouveau paramètre fonction de  $\delta x^*$  et  $\kappa$ , dont la variation vis-à-vis de  $\kappa$  est quasi-linéaire en échelle logarithmique. L'ajustement de cette courbe est alors aisé et conduit à l'expression suivante pour la constante de Hertz [62]

$$K_H \approx 0,5830 \cdot \kappa^{0,1290} \cdot \frac{E^*}{\rho_x} \quad (\text{III.15})$$

avec

$$\rho_x = \frac{2}{D} - \frac{2}{D_e}, \quad \kappa = \frac{2r_e}{D_e} \cdot \frac{D_e - D}{2r_e - D} \quad (\text{III.16})$$

pour le contact bille / bague extérieure et

$$\rho_x = \frac{2}{D} + \frac{2}{D_i}, \quad \kappa = \frac{2r_i}{D_i} \cdot \frac{D_i + D}{2r_i - D} \quad (\text{III.17})$$

pour le contact bille / bague intérieure.

### 1.2c Extension au contact rouleau/bague

La théorie du contact de Hertz peut être étendue au contact linéique, c'est-à-dire lorsque, sous charge nulle, les deux solides se touchent suivant une ligne droite ou courbe. Bien entendu pour qu'un tel type de contact existe il faut que la longueur du solide  $I$  égale celle du solide  $II$ . Dans ce contexte, la surface de contact est un rectangle de longueur  $l$  et de demi-largeur  $b$  et la contrainte normale à sa surface s'exprime simplement par

$$\sigma_n = \frac{2Q}{\pi b l} \cdot \sqrt{1 - (y/b)^2} \quad \text{avec} \quad b = \sqrt{\frac{4Q}{\Sigma \rho \cdot \pi l \cdot E^*}} \quad (\text{III.18})$$

Mais il n'est plus possible d'exprimer aussi facilement la relation entre l'inter-pénétration  $\delta x$  et la charge appliquée  $Q$ , la dépendance de  $\delta x$  vis-à-vis de  $Q$  étant en  $Q \ln(Q)$  [61].

Le contact linéique est cependant un cas idéaliste. En pratique les solides en contact n'ont pas la même largeur, et l'hypothèse d'un tel contact est alors mise en défaut. C'est le cas pour un contact rouleau/bague. Pour ce type de contact, on observe une zone de surtension aux extrémités du rouleau (pour limiter ce phénomène de concentration de contrainte, il est courant d'utiliser des rouleaux à surface légèrement courbée, ce qui permet d'uniformiser un peu plus la répartition de charge). La relation III.18 n'est donc pas applicable pour trouver la contrainte normale maximale, et aucune formule générale ne peut être avancée pour décrire les profils complexes de contrainte à la surface de contact.

Par contre, en ce qui concerne la relation effort/déformation, de nombreux auteurs ont proposé de l'approcher empiriquement par

$$Q = K_H \cdot \delta x^{\frac{10}{9}} \quad (\text{III.19})$$

La constante  $K_H$  est fonction des géométries et des caractéristiques des matériaux. Palmgren, par exemple, suggère à la suite d'essais de prendre [61]

$$\delta x = 3,13 \cdot 10^{-10} L^{-0,8} Q^{0,9} \quad (\text{III.20})$$

avec  $L$  largeur efficace du rouleau. Cette relation est en accord avec les travaux de Houpert [62] qui trouve toutefois des expressions quelque peu différentes pour les contacts rouleau / bague extérieure et rouleau / bague intérieure, notant une légère influence de la largeur de la piste de roulement pour le contact rouleau / bague extérieure et du diamètre moyen pour le contact rouleau / bague intérieure.

## 1.3 Modélisation 2D

On se propose de développer un modèle de roulement plus élaboré que le modèle de raideur radiale bi-linéaire à partir de l'expression des forces de contact entre éléments roulants et bagues. Cela demande d'abord de connaître la cinématique interne du roulement avant de pouvoir exprimer comment s'effectue la répartition de charge au sein des billes ou rouleaux.

### 1.3a Cinématique interne d'un roulement

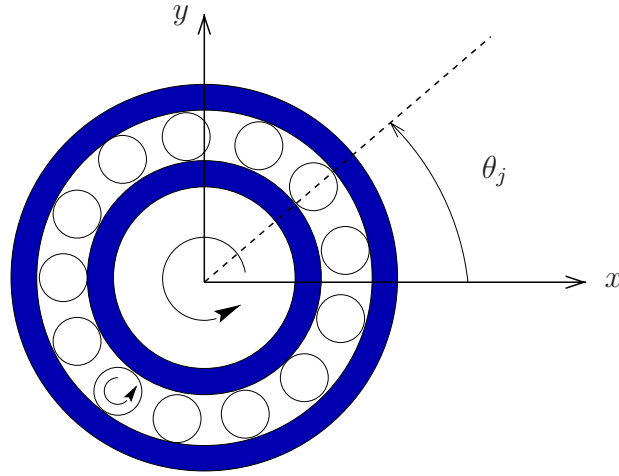


FIG. III.6: Repérage des billes dans le roulement

Dans un roulement, les éléments roulants (billes ou rouleaux) sont animés d'un mouvement de précession combiné à un mouvement de rotation propre. La précession est une rotation d'ensemble de pulsation  $\omega_c$ . Cette pulsation correspond à celle de la cage qui maintient les éléments roulants interdistant. En supposant un contact sans glissement entre les billes ou rouleaux et les pistes de roulement, on a [60]

$$\omega_c = \frac{\omega_i}{2} \cdot \left(1 - \frac{D \cos(\alpha_0)}{d_m}\right) + \frac{\omega_e}{2} \cdot \left(1 + \frac{D \cos(\alpha_0)}{d_m}\right) \quad (\text{III.21})$$

pour un roulement à billes à contact oblique et

$$\omega_c = \frac{R_i \cdot \omega_i + R_e \cdot \omega_e}{d_m} \quad (\text{III.22})$$

pour un roulement à rouleaux cylindrique. La pulsation de rotation  $\omega_i$  correspond à la rotation de la bague intérieure, *i.e.* du rotor ( $\omega_i = 60\Omega/(2\pi)$  avec  $\Omega$  vitesse de rotation du rotor exprimée en *tr/min*). Quant à  $\omega_e$ , elle est nulle si la bague extérieure est fixée au stator ou correspond à la rotation du deuxième rotor s'il s'agit d'un roulement inter-arbre.

Connaissant la vitesse de rotation de la cage et en supposant que les éléments roulants restent équi-distants les uns des autres (pas d'interaction entre les éléments roulants et la cage), il est alors possible de localiser leur position angulaire  $\theta_j$  (*cf.* figure III.6) par la formule

$$\theta_j(t) = \omega_c \cdot t + (j - 1) \cdot \frac{2\pi}{N} \quad (\text{III.23})$$

où  $N$  est le nombre de rouleaux ou billes.

### 1.3b Expressions des efforts transmis

Lorsque les bagues intérieure et extérieure subissent un déplacement radial induit par un balourd, certaines billes ou rouleaux se trouvent chargés. Pour savoir si l'élément roulant situé dans la direction  $\theta_j$  est chargé ou non, il suffit de calculer le déplacement relatif dans sa direction,  $\delta_j$ . Celui-ci s'exprime par

$$\delta_j = \cos(\theta_j).(u_i - u_e) + \sin(\theta_j).(v_i - v_e) \quad (\text{III.24})$$

où  $u_i$  ( $u_e$ ) et  $v_i$  ( $v_e$ ) représentent respectivement les déplacements dans les directions  $x$  et  $y$  de la bague intérieure (extérieure) : si  $\delta_j$  est supérieur au jeu radial  $\delta$  du roulement, alors on a contact, sinon l'élément n'est pas chargé.

Pour connaître la charge transmise au niveau de chaque élément roulant, on utilise les relations III.5 et III.19, ce qui nous permet d'écrire

$$Q_j = \begin{cases} K_c.(\delta_j - \delta)^n & \text{si } \delta_j > \delta \\ 0 & \text{si } \delta_j \leq \delta \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

avec  $n = 3/2$  pour un roulement à billes radial et  $10/9$  pour un roulement à rouleaux. La constante  $K_c$  s'exprime par

$$K_c = \left( \frac{1}{K_{H_e}^{1/n}} + \frac{1}{K_{H_i}^{1/n}} \right)^{-1/n} \quad (\text{III.26})$$

puisque la déformation locale  $\delta_j$  correspond à la somme de l'inter-pénétration entre l'élément roulant et la bague intérieure avec celle entre l'élément roulant et la bague extérieure (similitude avec des raideurs en série).

La force transmise au travers du roulement s'exprime alors par la sommation vectorielle de toutes les forces de contact  $Q_j$ , *i.e.*

$$\begin{cases} f_x^{s \rightarrow r} = - \sum_{j=1}^N K_r. \max(0, (\delta_j - \delta)^n). \cos(\theta_j) \\ f_y^{s \rightarrow r} = - \sum_{j=1}^N K_r. \max(0, (\delta_j - \delta)^n). \sin(\theta_j) \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

avec  $n = 3/2$  pour un roulement à billes et  $n = 10/9$  pour un roulement à rouleaux, si bien que  $K_r$ , relatif à la raideur radiale ( $K_r = K_c. \cos(\alpha)$  dans le cas d'un roulement à contact oblique), s'exprime en  $N/m^{3/2}$  ou en  $N/m^{10/9}$ .

Comparé au modèle de raideur radiale bi-linéaire, le modèle proposé se base sur des considérations un peu plus physiques. Il intègre le nombre de billes, la géométrie et la vitesse de rotation. L'effort transmis à travers le roulement correspond à la contribution de toutes les forces de contact entre éléments roulants et les bagues obtenues à partir de la théorie du contact de Hertz.

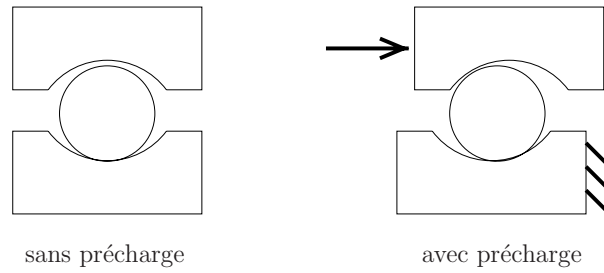


FIG. III.7: *Effet d'une charge axiale appliqué sur une bague de roulement*

### 1.3c Prise en compte d'une précharge axiale

Les roulements à billes à contact oblique sont en principe conçus pour travailler sous une charge axiale en fonctionnement usuel. Cela permet d'avoir deux points de contact par billes (utilisation normale) et limite leur usure prématurée. On lui applique donc en pratique une précharge axiale lors du montage. Dans un moteur d'avion, la charge axiale est assurée par la poussée aérodynamique. L'effet du chargement axial sur un tel roulement est schématisé figure III.7. Il permet de serrer plus ou moins les billes qui restent ainsi en contact avec les surfaces de roulement.

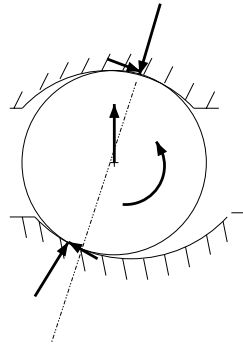
Cependant le modèle exposé au paragraphe précédent ne prend pas compte les degrés de liberté relatifs au déplacement axial. On ne peut donc pas lui appliquer cette précharge. Comme indiqué auparavant, l'effet de cette précharge étant de supprimer le jeu, un moyen simple de l'inclure dans le modèle est de modifier la force de contact bille / bagues selon

$$Q_j(\delta_j) = \begin{cases} K_H \cdot (\delta_j + \delta_{\text{pré}} - \delta)^{\frac{3}{2}} & \text{si } \delta_j > \delta - \delta_{\text{pré}} \\ 0 & \text{si } \delta_j \leq \delta - \delta_{\text{pré}} \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Le terme  $\delta_{\text{pré}}$  correspond à la diminution du jeu radial induite par la précharge.  $\delta_{\text{pré}}$  est inférieur à  $\delta$  si la précharge n'est pas suffisante pour assurer un contact billes / bagues, égal à  $\delta$  si les billes viennent juste en contact affleurant sur les bagues, et supérieur à  $\delta$  si la précharge est assez importante pour générer de la précontrainte dans les billes.

Il faut noter que le jeu est toujours bien pris en compte par cette nouvelle formulation. En effet sous l'effet combiné de cette précharge axiale et d'une charge radiale, il peut toujours y avoir perte de contact pour certaines billes.

## 1.4 Phénomènes annexes

FIG. III.8: *Influence des effets d'inertie*

Le modèle présenté ci-dessus émet plusieurs hypothèses simplificatrices. La première hypothèse avancée est que les bagues sont assez rigides pour que leurs déformations ne soient que locales (au niveau de la piste de roulement), *i.e.* qu'il n'y a pas de phénomène d'ovalisation. Cette hypothèse est celle la plus souvent avancée [37] et ne s'avère pertinente que lorsque le roulement est monté sur une structure assez rigide.

Dans cette étude, l'aspect dynamique n'est pas analysé : les forces centrifuges et moments gyroscopiques auxquels sont soumises les billes ne sont pas pris en compte. Ces efforts affectent l'équilibre quasi-statique des billes. Pour compenser la force centrifuge, les forces de contact bille / bague extérieure et bille / bague intérieure n'ont plus la même direction, *i.e.* l'angle de contact de la bague de la bille avec la bague intérieure diffère de celui avec la bague extérieure [36]. Le moment gyroscopique quant à lui entraîne l'apparition de forces de frottement au niveau des points de contact [121, 101]. Ces effets sont représentés sur la figure III.8. Toutefois, ils n'ont d'importance qu'en très grande vitesse. Pour des vitesses modérées, ils n'affectent pas de manière significative la répartition des charges dans le roulement [61]. Il est donc convenable de les négliger dans le contexte étudié.

En faisant abstraction des forces centrifuges, il s'avère donc que les angles de contact intérieur et extérieur sont égaux. Mais ces angles de contact dépendent de la géométrie du roulement. Ils sont donc fonction du chargement. Néanmoins, des études ont montré que la variation des angles de contact reste assez faible [61, 83], raison pour laquelle on les a considérés comme constant.

L'hypothèse faite en ce qui concerne le contact est qu'il s'agit d'un contact hertzien. Cependant, dans le cas des roulements à rouleaux, le contact est non-hertzien : la distribution des contraintes diffère sensiblement de la distribution uniforme du cas idéal. Une technique simple pour modéliser le contact linéique non-hertzien est ce qu'on appelle la technique de *découpage* [37, 63]. Cette technique, qui permet d'approcher correctement le champ de contrainte non uniforme à la surface de contact, s'avère particulièrement utile



pour les calculs de durée de vie. D'un point de vue global cependant (*i.e.* pour l'expression de la force de contact), une approche aussi fine ne se justifie pas : les études expérimentales ont montré que l'hypothèse d'une dépendance de  $Q$  vis-à-vis de la déformation locale  $\delta x$  en puissance  $10/9$  s'avère suffisante [61].

Enfin, ce modèle ne prend pas en compte les interactions entre les éléments roulants et la cage [100], la lubrification, le frottement interne ou encore le glissement [61]. Ces phénomènes ont une grande importance pour le calcul des champs de contrainte, des durées de vie, des couples résistants, des échanges thermiques. Les codes de calculs spécialisés dont disposent les roulementiers permettent de les modéliser plus ou moins bien. Cependant, de tels codes ne peuvent, vu leur complexité, être couplés avec des codes de calculs dynamiques. On est dès lors amené à les faire inter-agir. Le but n'est donc pas de disposer d'un modèle prenant en compte tous ces phénomènes mais d'un modèle qui se limite à la prise en compte des éléments essentiels pour une description correcte des efforts transmis par le biais des roulements, les calculs précis concernant la tenue des roulements étant par suite réalisés avec des codes spécifiques.

## III.2 La méthode de tir

L'utilisation d'un intégrateur temporel pour la recherche de solutions périodiques est toujours réalisable, mais le calcul obligé de la phase transitoire (sans intérêt dans ce cas et particulièrement longue pour les systèmes peu amortis) jusqu'à l'établissement d'un régime permanent, peut s'avérer très coûteux en temps (*cf.* figure III.9(a)). Le but de la méthode de tir est justement de s'abstenir du calcul de la partie transitoire.

Cette méthode, bien connue dans le domaine des Mathématiques pour la résolution de problèmes aux limites (*boundary value problems*) [126], consiste à rechercher directement une condition initiale se situant sur la solution périodique. L'intégration temporelle sur une seule période à partir de cette condition initiale (CI 2 sur la figure III.9(b)) conduit alors directement au régime permanent (plus de phase transitoire). Il faut noter que, pour les systèmes forcés (ou *non-autonomes*), l'information de phase est primordiale. Ainsi, intégrer sur une période en prenant un point quelconque de l'espace des phases situé sur le régime permanent (CI 3 par exemple) ne donnera pas la solution périodique recherchée.

Son application dans le domaine de la Mécanique Vibratoire est assez récente. C. PADMANABHAN et R. SINGH furent parmi les premiers à l'employer avec succès sur deux systèmes à 1 *ddl* traditionnels : un oscillateur de Duffing (non-linéarité cubique, *i.e.* raideur quadratique) et un oscillateur à impact (non-linéarité type jeu, *i.e.* raideur linéaire

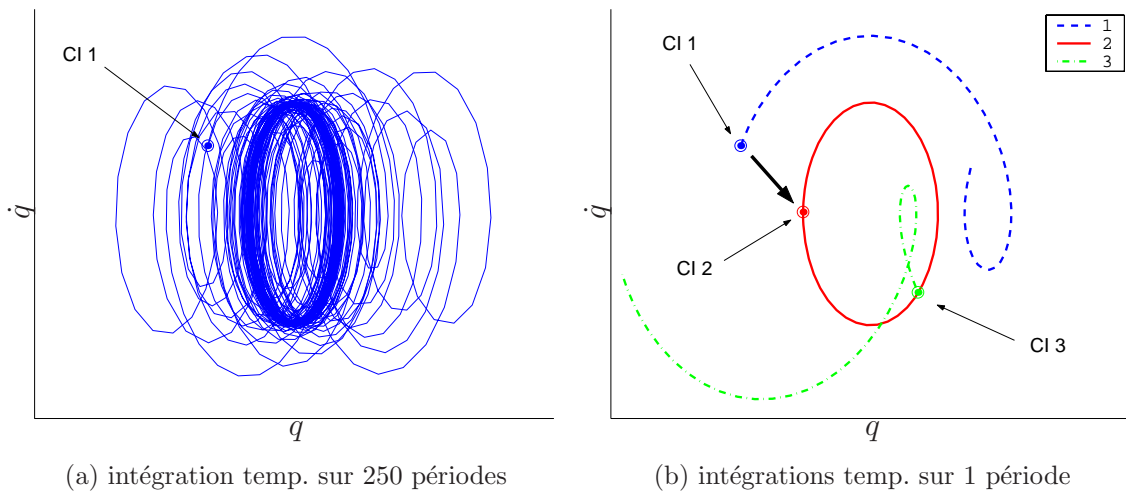


FIG. III.9: *Comparaison intégration temporelle / méthode de tir*

par morceaux) [103]. D'autres auteurs, en y adjoignant une superposition modale, l'ont également testée sur des systèmes provenant de petits modèles éléments finis de rotors incluant des amortisseurs à film d'huile (*squeeze film dampers*) [131, 130] ou supportés par paliers hydrodynamiques [159] avec éventuellement une prise en compte du décollement des pieds du support [31].

## 2.1 Formulation du problème

Lorsque l'on intègre l'équation différentielle du mouvement II.1 entre les instants  $t = t_0$  et  $t = t_0 + T$  (période présumée de la réponse) avec des conditions initiales  $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$  et  $\dot{\underline{y}}(0) = \dot{\underline{y}}_0$  quelconques, la réponse obtenue n'est pas a priori périodique (*cf.* solution 1 sur la figure III.9(b)). A l'instar de l'intégration temporelle classique avec laquelle on poursuivrait au-delà de l'instant  $t_0 + T$  jusqu'à l'obtention du régime périodique, avec la méthode de tir on recommence l'opération à partir d'une nouvelle condition initiale (CI). Il s'agit donc d'une méthode itérative pour laquelle chaque étape comporte une intégration sur une période (intégration communément appelée *tir*) suivie d'un ajustement de la condition initiale (*i.e.* une correction du tir), et dont l'inconnue n'est autre que la condition initiale  $\underline{y}_0 = {}^t [{}^t \underline{q}_0 \quad {}^t \underline{\dot{q}}_0]$ .

Pour utiliser la méthode de tir, il faut tout d'abord reformuler le problème en mettant

l'équation différentielle du mouvement sous sa forme d'état

$$\begin{cases} \dot{\underline{y}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{y}(t) + \underline{b}(t, \underline{y}) \\ \underline{y}(t_0) &= \underline{y}_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{\underline{y}}(t) &= \underline{F}(t, \underline{y}) \\ \underline{y}(t_0) &= \underline{y}_0 \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Si la solution de ce problème notée  $\underline{y}(t; t_0, \underline{y}_0)$  est périodique, la relation  $\underline{y}(t_0+T; t_0, \underline{y}_0) = \underline{y}_0$  doit être vérifiée. Ajuster la condition initiale se traduit donc par la recherche du zéro de la fonction vectorielle  $\underline{H}$  définie par

$$\underline{H}(\underline{y}_0) = \underline{y}(t_0 + T; t_0, \underline{y}_0) - \underline{y}_0 \quad (\text{III.30})$$

Certains auteurs définissent parfois la fonction  $\underline{H}$  en prémultipliant les termes de droite par une matrice de pondération  $\underline{E}$  [131, 130].

L'intérêt majeur de cette méthode vis-à-vis de toutes les autres est que d'une part le système algébrique qu'elle demande de résoudre, III.30, est de la même taille que l'équation de départ, III.29, à savoir  $2N$ , et d'autre part elle n'avance aucune hypothèse particulière hormis la périodicité de la solution.

## 2.2 La procédure de Newton-Fox

La résolution du système III.30 peut s'effectuer via la méthode de Newton-Rahpson [31]. Cela demande cependant de connaître la jacobienne de  $\underline{H}$ . Son expression

$$\underline{J}_{\underline{H}}(\underline{y}_0) = \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{y}_0}(\underline{y}_0) = \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_0}(t_0 + T; t_0, \underline{y}_0) - \underline{I} \quad (\text{III.31})$$

montre qu'il n'est pas possible de l'évaluer directement à cause de  $\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_0}$ . La différentiation de ce terme par rapport au temps  $t$  donnant

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \underline{y}_0} \left( \frac{\partial \underline{y}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}_0} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}} \cdot \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_0} \quad (\text{III.32})$$

on remarque qu'il vérifie l'équation différentielle matricielle

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_0}(t_0; t_0, \underline{y}_0) &= \underline{I} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_0} \right) (t; t_0, \underline{y}_0) &= \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}(t, \underline{y}(t; t_0, \underline{y}_0)) \cdot \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_0}(t; t_0, \underline{y}_0) \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

la condition initiale découlant de la relation triviale  $\underline{y}(t_0; t_0, \underline{y}_0) = \underline{y}_0$  et la jacobienne  $\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}} = \underline{A} + \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{y}}$  provenant de l'équation différentielle du mouvement (*cf.* III.29). L'intégration

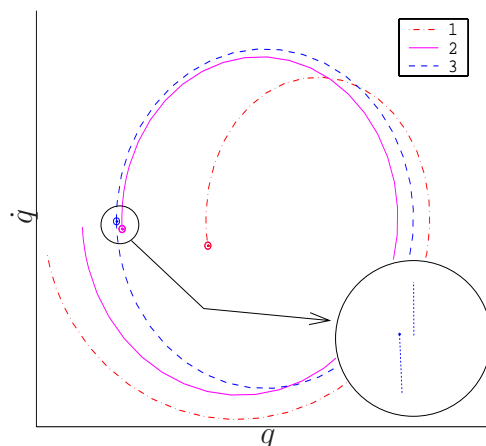


FIG. III.10: Convergence de la méthode de tir vers une solution instable

de III.33 permet donc d'obtenir au bout d'une période l'expression numérique de  $\frac{\partial y}{\partial y_0}(t_0 + T; t_0, y_0)$  et par suite celle de  $\underline{J}_H$  (via III.31). Cette technique est connue dans la littérature sous le nom de procédure de Newton-Fox.

Il est intéressant de constater que l'approximation de la jacobienne par différences finies nécessite d'intégrer  $N$  fois l'équation différentielle vectorielle du mouvement (*cf.* III.29), c'est-à-dire autant d'équations scalaires à intégrer que pour la résolution de l'équation différentielle matricielle III.33. Vu le nombre d'intégrations à mener pour calculer ou approximer la jacobienne, le temps calcul devient très vite exorbitant lorsque le nombre de  $ddl$  augmente, limitant l'utilisation de la méthode de tir à des systèmes de petite taille.

D'autres méthodes, telles que les méthodes quasi-newtoniennes (qui ne nécessitent pas d'évaluation de jacobienne mais qui l'approchent par une matrice mise à jour au cours des itérations), peuvent aussi être employées pour résoudre III.30. Cependant la convergence est détériorée, si bien qu'en principe la stratégie de mise à jour n'est appliquée qu'en phase finale (*i.e.* à partir du moment où la convergence est quadratique), la méthode de Newton-Raphson accompagnée d'une stratégie de relaxation étant préférée au départ [18].

Il est important de noter que la procédure de Newton-Fox ne sert pas uniquement à la recherche d'une solution  $\underline{y}_0^{sol}$ . Elle sert également lors de l'analyse de sa stabilité. En effet, la matrice obtenue grâce à cette procédure en fin de convergence, c'est-à-dire  $\frac{\partial y}{\partial y_0}$  évaluée en  $\underline{y}_0^{sol}$ , correspond à la matrice monodrôme, dont les valeurs propres permettent de déterminer la stabilité de la solution. L'approximation de la matrice jacobienne par des méthodes quasi-newtoniennes est quant à elle souvent trop imprécise pour pouvoir être utilisée lors de l'analyse de stabilité [103].

L'analyse de la stabilité est indispensable car, bien que basée sur l'intégration temporelle qui ne donne que les solutions stables, la méthode de tir est capable de trouver des

solutions instables. La figure III.10 montre la convergence sur un problème d'instabilité de type flottement (causée par un amortissement négatif). Pour chaque tir, l'intégration temporelle diverge, cette divergence étant d'autant plus rapide que la condition initiale se trouve loin de la solution instable. Cependant à chaque itération de la méthode la CI est ajustée pour se rapprocher de cette solution (qui est bien solution du problème puisque qu'elle vérifie la condition  $\underline{y}(t_0 + T; t_0, \underline{y}_0) = \underline{y}_0$ ), si bien qu'à partir d'un certain nombre d'itération, la divergence au bout d'une période est plus faible que la tolérance utilisée pour résoudre  $\underline{H}(\underline{y}_0) = \underline{0}$ .

### 2.3 Expression de la jacobienne relative à $\omega_f$

Pour la méthode tir, la jacobienne  $\frac{\partial \underline{H}}{\partial \lambda}$  s'obtient toujours par la procédure de Newton-Fox. A savoir, il faut d'abord intégrer le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{y}}{\partial \omega_f}(t_0; t_0, \underline{y}_0) = \underline{0} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \underline{y}}{\partial \omega_f} \right) (t; t_0, \underline{y}_0) = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}(t, \underline{y}(t; t_0, \underline{y}_0); \omega_f) \cdot \frac{\partial \underline{y}}{\partial \omega_f}(t; t_0, \underline{y}_0) + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \omega_f}(t, \underline{y}(t; t_0, \underline{y}_0); \omega_f) \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

La solution de cette équation différentielle à l'instant  $t_0 + T$  permet ensuite l'évaluation de

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial \omega_f}(\underline{y}_0, \omega_f) = \frac{\partial \underline{y}}{\partial \omega_f}(t_0 + T; t_0, \underline{y}_0) - \frac{T}{\omega_f} \cdot \underline{F}(t_0 + T, \underline{y}(t_0 + T; t_0, \underline{y}_0); \omega_f) \quad (\text{III.35})$$

où le deuxième terme provient de la dépendance de  $T = p.T_f = 2.\pi.p/\omega_f$  vis-à-vis de  $\omega_f$ . Dans les articles [103, 131, 130] combinant méthode de tir et continuation, ce terme n'intervient pas suite au changement de variable  $\tau = \omega_f.t$ .

### 2.4 Extension au tir multiple

La méthode de tir multiple est une extension de la méthode de tir présentée ci-dessus (appelée aussi méthode de tir simple). La seule différence est que la période présumée de la solution,  $T$ , est divisée en  $M$  intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i$  allant de 0 à  $M - 1$  (avec  $t_M = t_0 + T$ ). Le principe reste le même : l'équation du mouvement est intégrée non plus sur  $[t_0, t_0 + T]$  mais sur chaque intervalle à partir d'un ensemble de conditions initiales  $\underline{y}(t_i) = \underline{y}_i$  (cf. figure III.11).

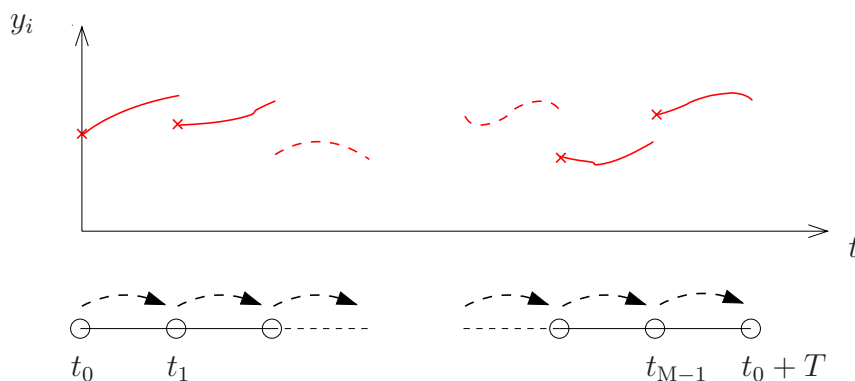


FIG. III.11: Principe du tir multiple

La solution continue par morceaux ainsi obtenue est notée  $y(t; y_i, t_i)$ . Pour la solution périodique recherchée, l'état final trouvé à la fin de l'intégration sur le  $i^{\text{ème}}$  intervalle doit être égal à l'état initial utilisé pour l'intégration sur le  $(i + 1)^{\text{ème}}$  intervalle. Pour  $i < M$  cette condition traduit la continuité de la solution, et pour  $i = M$  il s'agit d'une condition de périodicité, similaire à celle de la méthode de tir simple. Cela se traduit par la nullité de la fonction  $\underline{H}$  définie par

$$\underline{H}(\underline{X}) = \begin{pmatrix} \underline{H}_1(\underline{y}_0, \underline{y}_1) \\ \vdots \\ \underline{H}_i(\underline{y}_{i-1}, \underline{y}_i) \\ \vdots \\ \underline{H}_{M-1}(\underline{y}_{M-2}, \underline{y}_{M-1}) \\ \underline{H}_M(\underline{y}_{M-1}, \underline{y}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}(t_1; t_0, \underline{y}_0) - \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}(t_i; t_{i-1}, \underline{y}_{i-1}) - \underline{y}_i \\ \vdots \\ \underline{y}(t_{M-1}; t_{M-2}, \underline{y}_{M-2}) - \underline{y}_{M-1} \\ \underline{y}(t_0 + T; t_{M-1}, \underline{y}_{M-1}) - \underline{y}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.36})$$

où  $\underline{X} = {}^t[\underline{y}_0 \dots \underline{y}_{M-1}]$ .

La résolution de  $\underline{H}(\underline{X}) = \underline{0}$  peut se faire à l'aide de la méthode de Newton-Raphson qui nécessite la connaissance de la jacobienne de  $\underline{H}$  dont l'expression est donnée ci-dessous

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{H}_1}{\partial \underline{y}_0} & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \underline{H}_2}{\partial \underline{y}_1} & -I & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \underline{H}_{M-1}}{\partial \underline{y}_{M-2}} & -I \\ -I & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \underline{H}_M}{\partial \underline{y}_{M-1}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Les blocs diagonaux,  $\frac{\partial \underline{H}_i}{\partial \underline{y}_{i-1}} = \frac{\partial \underline{y}(t_i; t_{i-1}, \underline{y}_{i-1})}{\partial \underline{y}_{i-1}}$ , ne peuvent être évalués directement mais sont évalués numériquement via la procédure de Newton-Fox, c'est-à-dire en menant

l'intégration des systèmes III.38 entre les instants  $t_{i-1}$  et  $t_i$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{y}}{\partial y_{i-1}}(t_{i-1}; t_{i-1}, \underline{y}_{i-1}) & = \underline{I} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \underline{y}}{\partial y_{i-1}} \right) (t; t_{i-1}, \underline{y}_{i-1}) & = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}}(t, \underline{y}(t; t_{i-1}, \underline{y}_{i-1})) \cdot \frac{\partial \underline{y}}{\partial y_{i-1}}(t; t_{i-1}, \underline{y}_{i-1}) \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

L'intérêt de la méthode de tir multiple sur la méthode de tir simple est qu'elle se comporte mieux du point de vue de la convergence, le bassin d'attraction de la solution étant général agrandi [103]. Cela est en partie lié aux erreurs d'amplitudes et de périodicité introduites par l'intégration temporelle. Pour les minimiser, des intégrateurs assez performants niveau précision, comme la méthode de Runge-Kutta, sont en général employés [103, 31]. Scinder la période comme cela est fait pour la méthode de tir multiple permet en plus de limiter la propagation des erreurs d'intégration.

L'autre avantage indéniable de cette méthode réside dans le fait que chaque terme  $\underline{H}_i$  et  $\frac{\partial \underline{H}_i}{\partial y_{i-1}}$  peuvent être calculés indépendamment les uns des autres. Elle est donc appropriée pour des architectures informatiques de type parallèle.

## 2.5 Extraction de la matrice monodrome

Il est intéressant de souligner la similitude entre II.82 et III.33. La seule différence correspond au deuxième argument de  $\underline{J}_F$  : pour II.82, il s'agit de la solution périodique trouvée dont on souhaite analyser la stabilité, alors que pour III.33, cette jacobienne est évaluée en une approximation de la solution périodique recherchée. Par contre, une fois que le solveur a convergé, ces deux systèmes différentiels sont identiques, si bien qu'il avère inutile d'effectuer (à nouveau) l'intégration temporelle de l'équation linéarisée II.82. En résumé, lorsque l'on utilise la méthode de tir simple avec un calcul exact de la matrice jacobienne de  $\underline{H}$ , on a l'égalité  $\underline{\Phi} = \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_0}(T; \underline{y}_0, 0)$  une fois la solution périodique trouvée.

D'après III.31, on établit aussi la relation  $\underline{\Phi} = \underline{J}_H + \underline{I}$ . Si la matrice jacobienne de  $\underline{H}$  n'est pas évaluée explicitement mais approchée à partir de mises à jour de Broyden par exemple, elle peut être utilisée pour fournir une approximation de la matrice monodrome. En fin de convergence du solveur, *i.e.* une fois la solution  $\underline{y}_0$  trouvée, il est toutefois conseillé de s'assurer que la dernière mise à jour a bien convergé vers la jacobienne exacte  $\underline{J}_H$ . Si tel n'est pas le cas, il faut poursuivre les itérations ou effectuer le calcul par intégration temporelle.

En méthode de tir multiple, on montre que la matrice monodrome est encore un

sous-produit de la procédure de Newton-Fox. Pour cela, il suffit d'étudier la propagation d'une perturbation initiale  $\underline{y}_0$  intervalle par intervalle. La solution perturbée à l'instant  $t_i$ ,  $\underline{y}_i + \underline{\delta y}_i$ , donne à l'instant  $t_{i+1}$ ,  $\underline{y}(t_{i+1}; \underline{y}_i + \underline{\delta y}_i, t_i) = \underline{y}_{i+1} + \underline{\delta y}_{i+1}$ . Un développement de Taylor limité au premier ordre conduit alors à l'égalité  $\underline{\delta y}_{i+1} = \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_i}(t; \underline{y}_i, t_i) \cdot \underline{\delta y}_i$ . De proche en proche, il s'en suit que

$$\underline{\delta y}(T) = \prod_{i=0}^{M-1} \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_i}(t_{i+1}; \underline{y}_i, t_i) \cdot \underline{\delta y}_0, \quad \text{d'où} \quad \underline{\Phi} = \prod_{i=0}^{M-1} \frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{y}_i}(t_{i+1}; \underline{y}_i, t_i) \quad (\text{III.39})$$

Conformément à III.37, on déduit que, une fois la solution trouvée, la matrice jacobienne  $\underline{J}_H$  permet de construire la matrice monodrome sans intégration supplémentaire, mais juste par multiplication de ses blocs diagonaux.

### III.3 Application sur des modèles simplifiés

#### 3.1 Exemple avec le modèle radial bi-linéaire

On étudie dans un premier temps le modèle schématisé figure III.12. Celui-ci représente un rotor sur deux paliers. Un d'entre eux est supposé parfaitement rigide. Le second correspond à un roulement possédant un jeu radial de  $20 \mu m$ . Il est modélisé avec une raideur radiale bi-linéaire, avec  $k_b = 10^8 N/m$ . Le rotor et le stator sont modélisés par des systèmes masses/ressorts. L'amortissement considéré est visqueux. Le rotor est soumis à un balourd  $m_e \cdot e$  et on tient compte de la gravité. Le tableau donne les valeurs utilisées pour cet exemple.

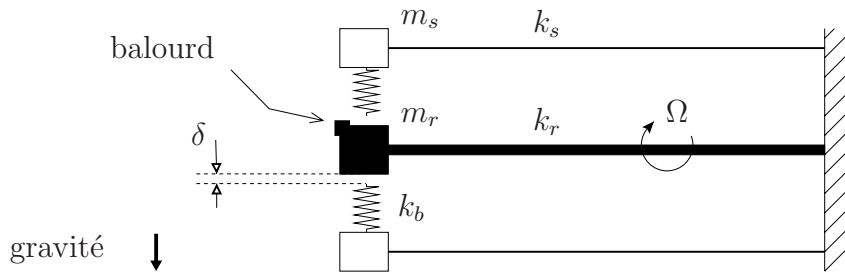
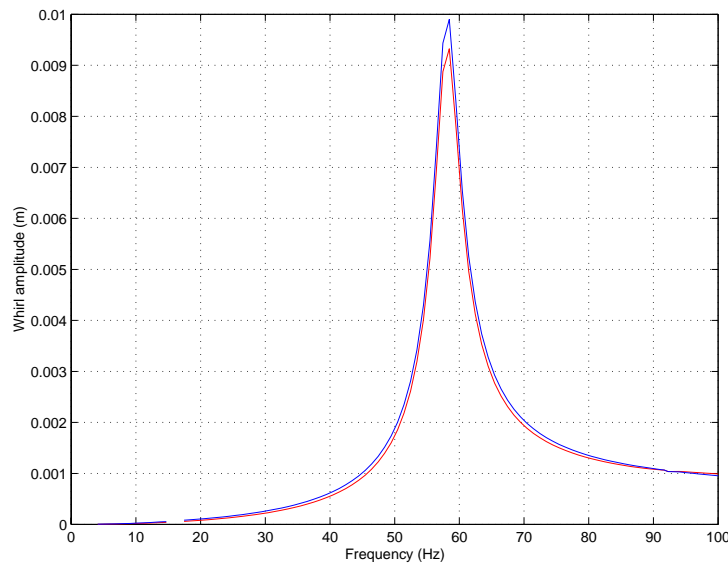
TAB. III.1: *Données utilisées*

$\omega_{0r}$	$\xi_r$	$\omega_{0s}$	$\xi_s$	$k_b$	$\delta$	$m_e \cdot e$	$g$
140 rad/s	0,02	580 rad/s	0,05	$10^8 N/m$	$20 \cdot 10^{-6} m$	$50 \cdot 10^{-3} kg \cdot m$	$10 m/s^2$

L'étude fréquentielle de ce système est réalisée entre 5 et 100 Hz à l'aide de la méthode de tir multiple en prenant une subdivision de la période en 7 intervalles.

La valeur de balourd choisie permet, pour le jeu considéré, d'assurer que le contact rotor/stator n'est jamais complètement perdu sous l'effet combiné des forces de balourd

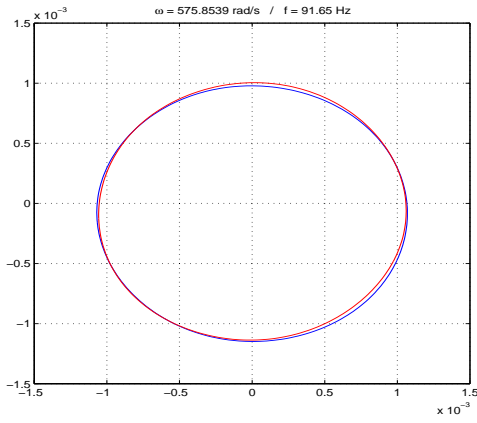


FIG. III.12: *Modèle simplifié à 4 ddl*FIG. III.13: *Amplitude de vibration du rotor et du stator*

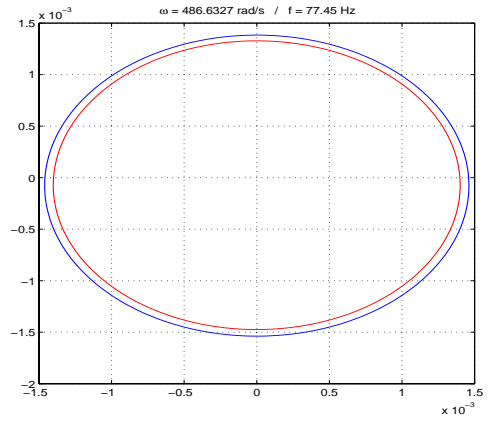
et de gravité. On pourrait donc penser que le système se comporte de manière linéaire. La figure III.13 représente la courbe de réponse à balourd pour des vitesses de rotation allant de 300 à 6000 *tr/min* (l'amplitude de vibration tracée est définie comme la moyenne entre les déplacements radiaux maximum et minimum). Cette réponse ressemble effectivement à celle d'un système linéaire. La fréquence à laquelle le pic de réponse intervient, 58 *Hz*, correspond bien à la fréquence de la vitesse critique du système linéaire associé (obtenu en prenant  $\delta = 0$ ).

Cependant dans certains intervalles de fréquence, la réponse n'est pas circulaire comme c'est le cas pour les systèmes rotor/stator linéaires axisymétriques. Cela est dû à la présence d'une force statique qui rend la raideur effective du roulement dissymétrique. La figure III.14 montre l'évolution des orbites du rotor et stator en fonction de la vitesse de rotation.

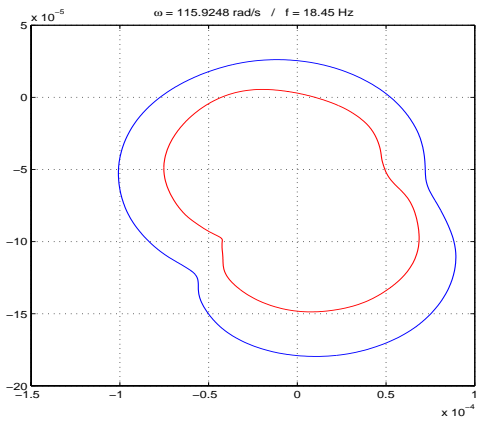
Dans l'intervalle de fréquence 40 *Hz* - 90 *Hz* (2400 - 5400 *tr/min*), le déplacement relatif entre le rotor et le stator est une harmonique pure de valeur moyenne beaucoup plus



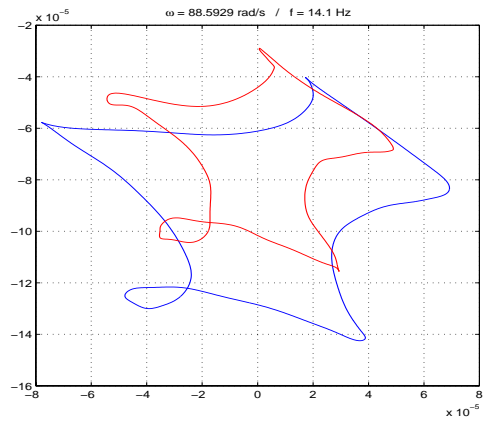
(a)  $f = 92 \text{ Hz}$



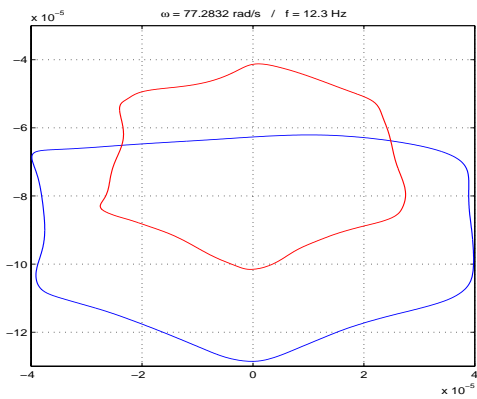
(b)  $f = 77 \text{ Hz}$



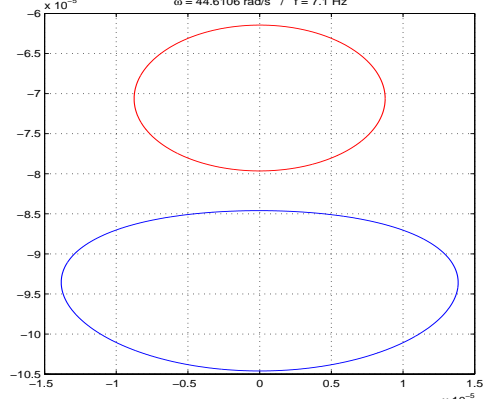
(c)  $f = 20 \text{ Hz}$



(d)  $f = 14 \text{ Hz}$



(e)  $f = 12 \text{ Hz}$



(f)  $f = 11 \text{ Hz}$

FIG. III.14: *Orbites à différentes vitesses de rotation*

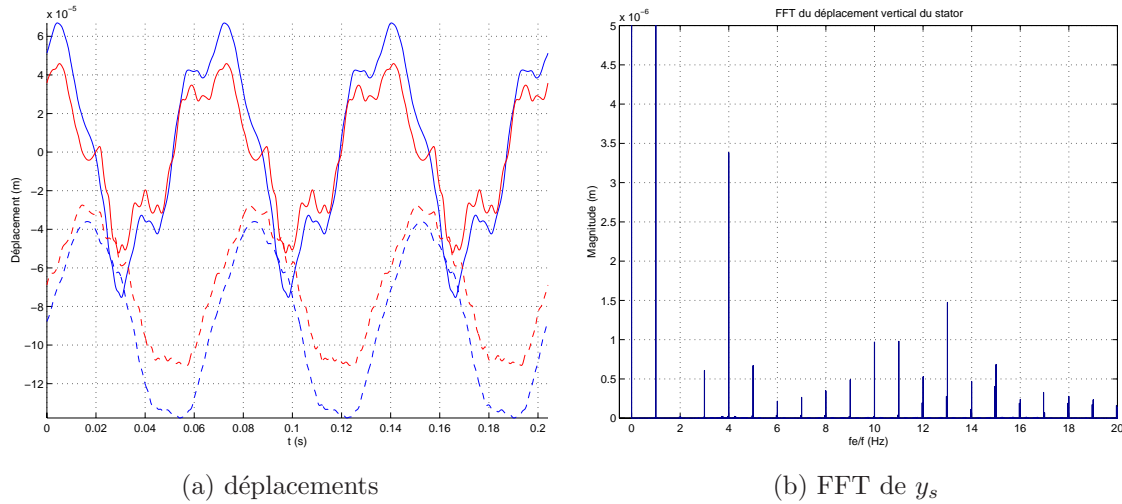
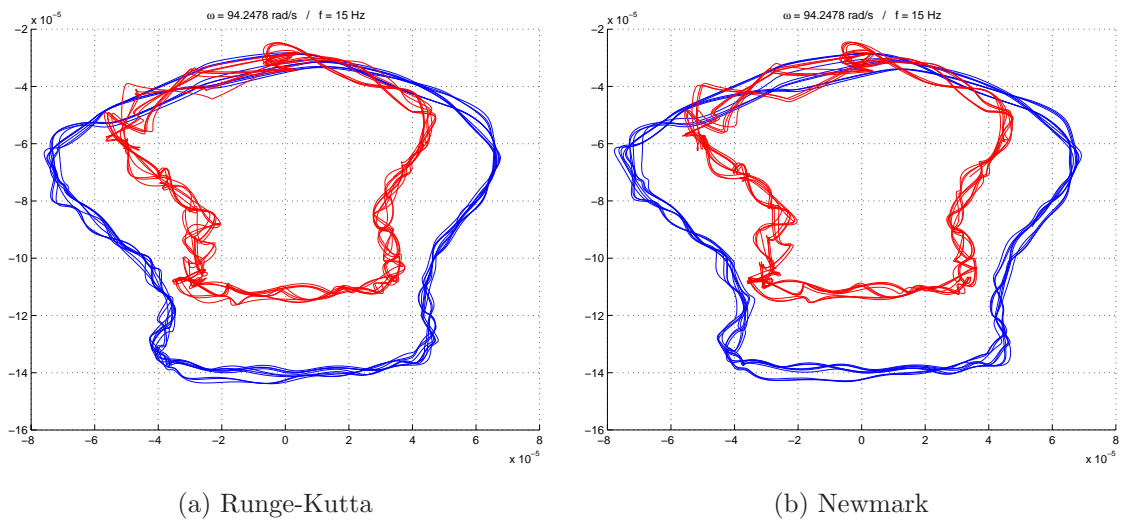
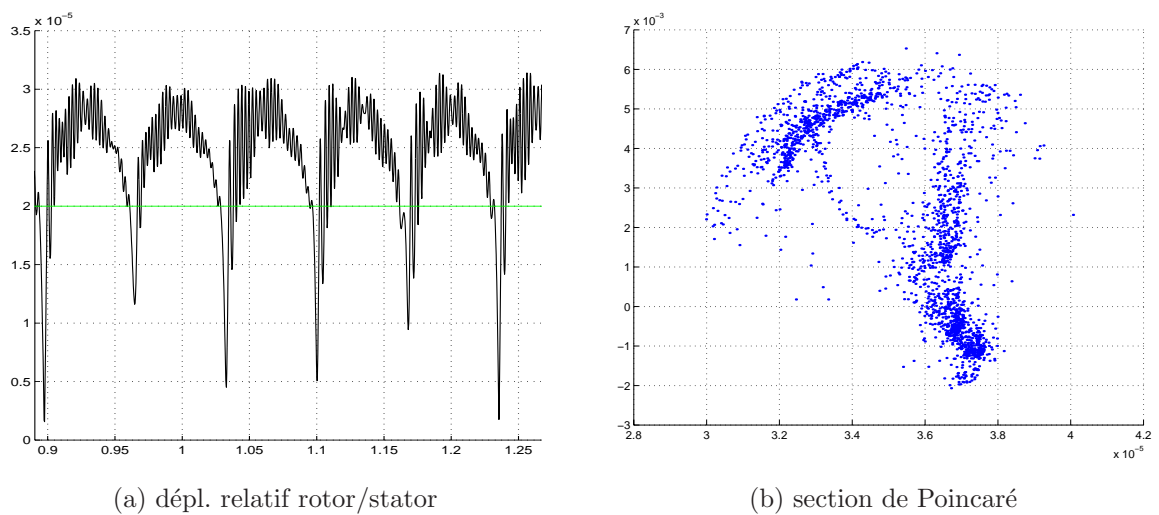


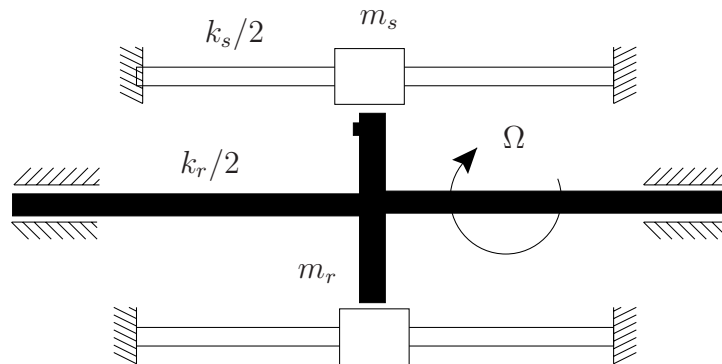
FIG. III.15: *Solution périodique à 14,7 Hz*

grande que celle du jeu. Le jeu n'a donc aucun effet et les orbites sont ainsi circulaires. La même remarque peut être faite pour les faibles fréquences (en dessous de  $5 \text{ Hz}$ ) puisqu'à ce niveau la force engendrée par le balourd est négligeable devant la gravité qui maintient alors le rotor toujours en contact avec le stator. Aux alentours de  $10 \sim 15 \text{ Hz}$ , les forces de gravité et de balourd sont du même ordre de grandeur (approximativement  $500 \text{ N}$ ). Il s'agit d'une zone de transition entre des orbites circulaires non concentriques et des orbites circulaires concentriques. Dans cette zone, les orbites sont très complexes. La figure III.15 montre les déplacements horizontaux (en traits continus) et verticaux (en traits pointillés) du rotor et du stator. Sur la transformée de Fourier du déplacement vertical du stator  $y_s$ , on peut noter la richesse fréquentielle de la réponse.

Vers  $15 \text{ Hz}$ , aucune solution périodique n'a été trouvée (pas de convergence de l'algorithme). L'intégration temporelle a donc été réalisée de manière classique pour analyser le comportement du système à cette fréquence. Deux schémas d'intégration ont été testés (l'algorithme  $(\beta, \gamma)$  de Newmark et la méthode de Runge-Kutta d'ordre  $4/5$ ). Ils n'ont pas permis de mettre clairement en évidence une solution périodique à cette fréquence. Comme le montre la figure III.16, le comportement du système est quelque peu erratique. Les orbites présentées correspondent à 10 périodes et ont été obtenues après un régime transitoire de 500 périodes.

La visualisation de la consommation de jeu (*cf.* figure III.17(a) où la ligne horizontale indique la valeur du jeu) révèle l'existence de nombreuses pertes et prises de contact très rapides, expliquant la réponse complexe du système. Sur la figure III.17(b) est représentée la section de Poincaré de relative au  $ddl$  de translation horizontale du stator, semblant indiquer la présence d'un attracteur étrange.

FIG. III.16: *Comparaison d'orbites obtenues par des intégrateurs différents*FIG. III.17: *Résultats trouvés à 15 Hz*

FIG. III.18: *Modèle simplifié à 4 ddl*

### 3.2 Etude du phénomène de prise de contact

Le deuxième modèle étudié est celui d'un rotor de Jeffcott (*cf.* figure III.18) posé sur des paliers supposés rigides. On étudie son interaction avec le stator. Comme précisé au paragraphe 1.1a de ce chapitre, le modèle de raideur radiale bi-linéaire peut servir pour modéliser la force de contact rotor / stator. On l'applique donc en prenant une raideur de contact de  $k_b = 10^8 \text{ N/m}$ . Le coefficient de frottement dynamique est supposé nul, hypothèse idéale qui peut être approchée si le contact s'effectue au niveau d'un coussinet. Le jeu radial considéré est de  $6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

Les données modales utilisées pour le rotor et le stator sont les mêmes que dans l'exemple précédent, ainsi que les données relatives aux forces appliquées au système (balourd et gravité).

Sur la figure III.19(a) est représentée la courbe de réponse à balourd entre 300 et 6000  $\text{tr/min}$ . En régime sous-critique, le déplacement du rotor est trop faible pour qu'il y ait contact. Au passage de la vitesse critique cela dit, l'amplification dynamique de la force de balourd est telle que le contact se produit. La présence du stator rigidifie le système. De ce fait, le pic de résonance du système couplé rotor / stator tend à se décaler vers des fréquences plus hautes. Arrivé à 50  $\text{Hz}$ , on observe une bifurcation de type *cyclic fold* : la réponse couplée disparaît et un saut de réponse se produit. Au delà de cette fréquence, on retrouve la même dynamique qu'en régime sous-critique.

Une seconde bifurcation de type *cyclic fold* existe à 25  $\text{Hz}$ . Elle s'accompagne d'un autre saut de réponse lors d'une phase de décélération quasi-statique. Celui-ci, bien que moins marqué que le premier, est tout aussi important, car le stator passe subitement d'un état de repos à un régime vibratoire. Entre 25 et 50  $\text{Hz}$ , deux solutions  $T$ -périodiques (stables) co-existent donc, et on observe un phénomène d'hystérésis lors de l'accélération

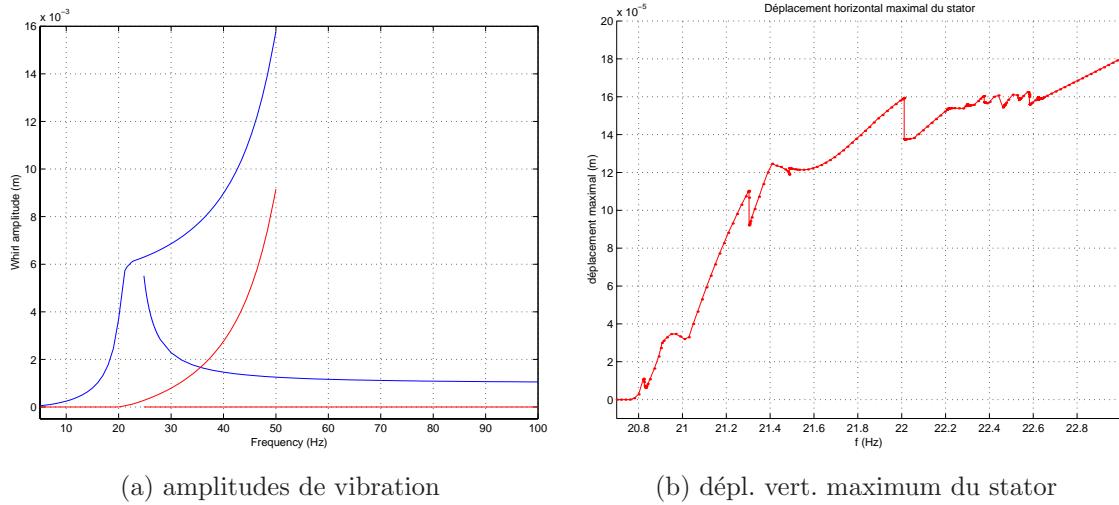


FIG. III.19: Amplitudes de vibration du rotor et du stator

puis décélération à travers la vitesse critique.

La figure III.19(b) est un agrandissement du maximum de déplacement horizontal du stator sur la plage 20,8 - 22,8  $Hz$ . Cet intervalle de fréquence est une zone de transition d'un état de non contact à un état de contact permanent. Cette transition est complexe, comme on peut le voir sur les figures III.20 et III.21 qui montrent l'évolution de l'orbite du stator dans cette zone. Cette complexité est liée à la présence d'une force statique, qui rend la prise de contact progressive.

En examinant le déplacement relatif entre le rotor et le stator (*cf.* figures III.20 et III.21), on remarque que le nombre de prise/perte de contact par période (dénnoté ici  $ncp$ ) évolue graduellement avec la vitesse de rotation. En effet, on distingue des intervalles de fréquence durant lesquels la courbe de réponse est continue, et dans chacun de ces intervalles le  $ncp$  est constant. Dans la partie supérieure de la figure III.22, on peut voir comment le  $ncp$  passe de 10 à 11. La valeur maximale de  $ncp$  observée est 11 : lorsque cette valeur est atteinte le  $ncp$  commence à décroître jusqu'à ce que le contact permanent soit établi (*cf.* la partie inférieure de la figure III.22).

La stabilité de la solution périodique obtenue par la méthode de tir multiple, étudiée grâce à la théorie de Floquet, a permis de mettre en évidence plusieurs bifurcations dans la zone de transition. Les multiplicateurs de Floquet principaux sont reportés sur la figure III.23.

A 21,1  $Hz$ , ceux-ci valent  $-0,0886 + 1,0388i$  et  $-0,0886 - 1,0388i$ , indiquant une bifurcation secondaire de Hopf. A cette fréquence, la solution synchrone devient donc instable et donne naissance à une solution quasi-périodique. L'orbite du stator à 21,1

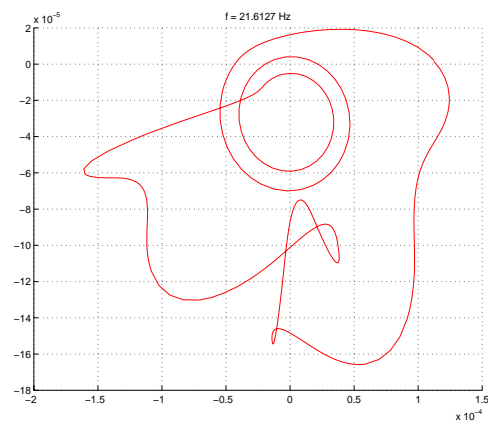
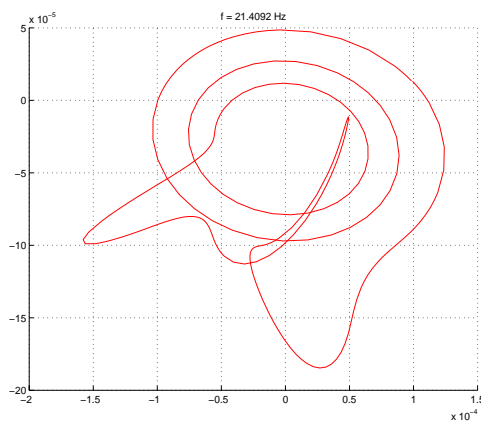
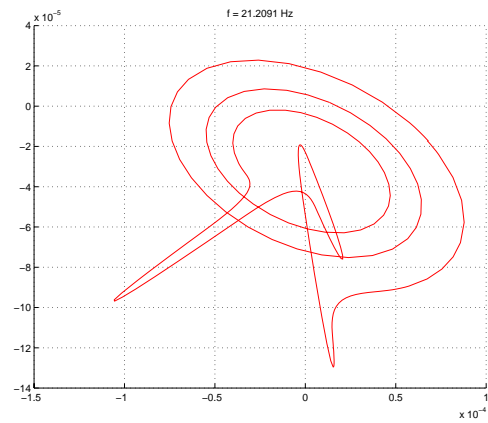
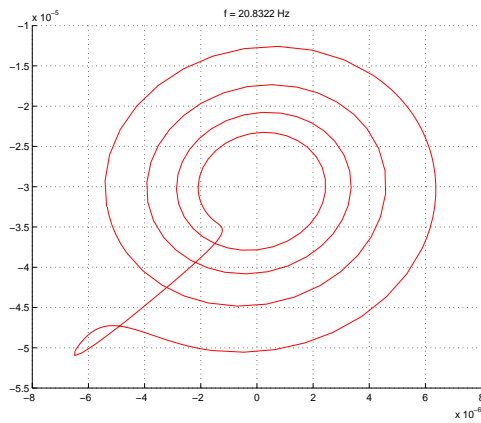
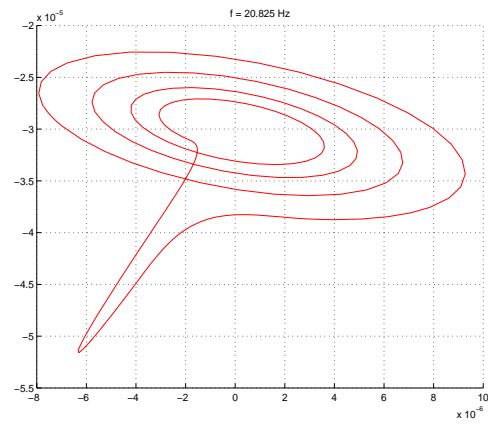
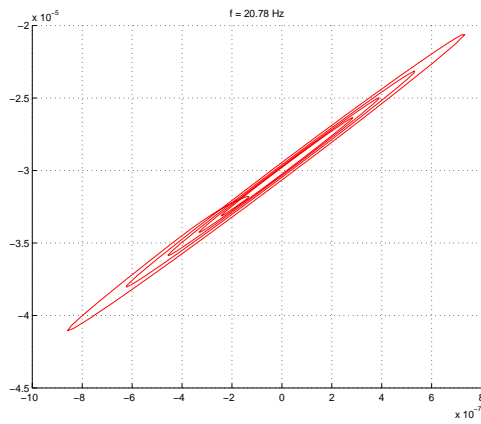
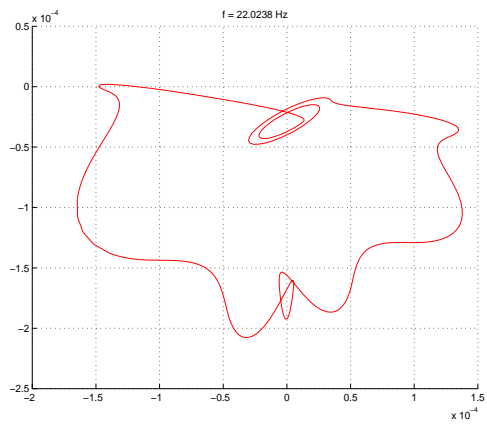
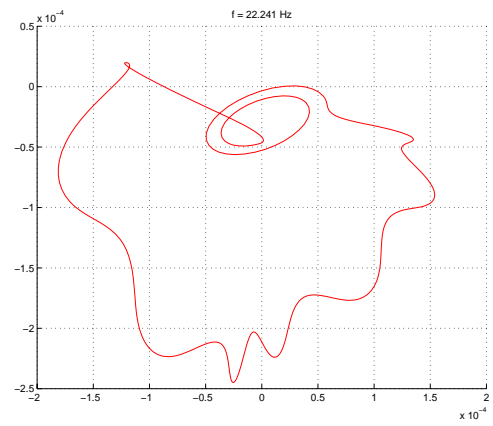


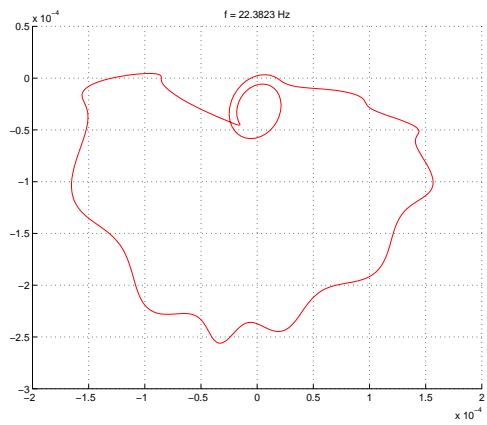
FIG. III.20: Evolution des orbites du stator ( $\dagger$  contact permanent)



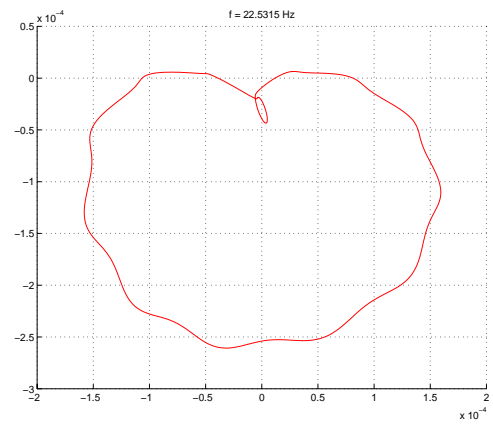
(a)  $n_{cp} = 8$



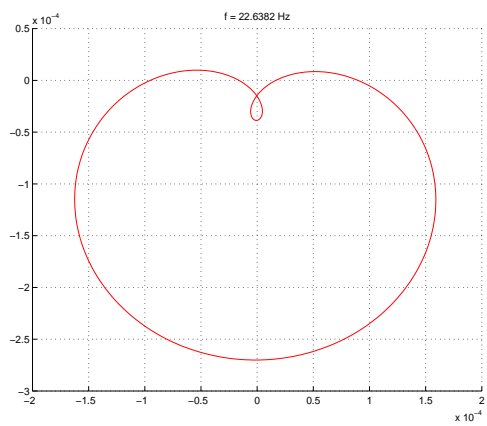
(b)  $n_{cp} = 10$



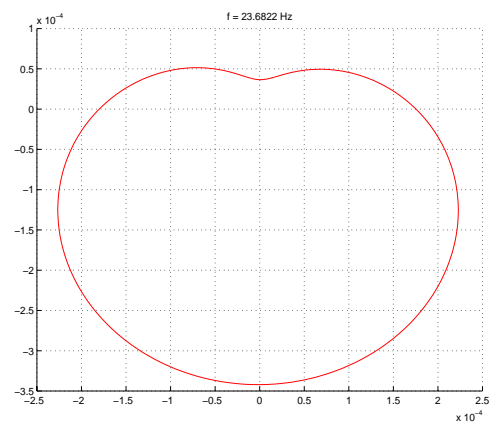
(c)  $n_{cp} = 11$



(d)  $n_{cp} = 3$



(e)  $C.P.^\dagger$



(f)  $C.P.^\dagger$

FIG. III.21: *Evolution des orbites du stator (suite) ( $\dagger$  contact permanent)*



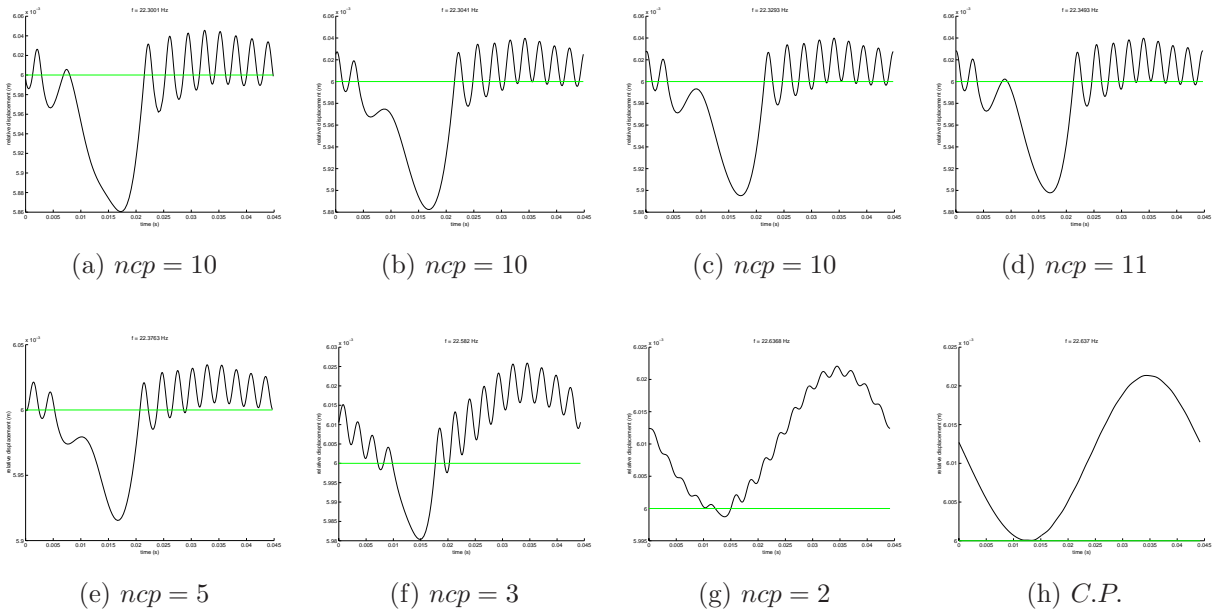


FIG. III.22: Evolution du déplacement relatif rotor/stator

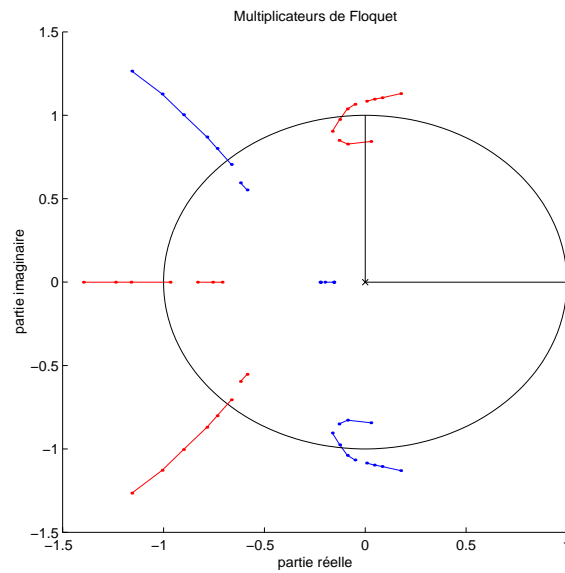
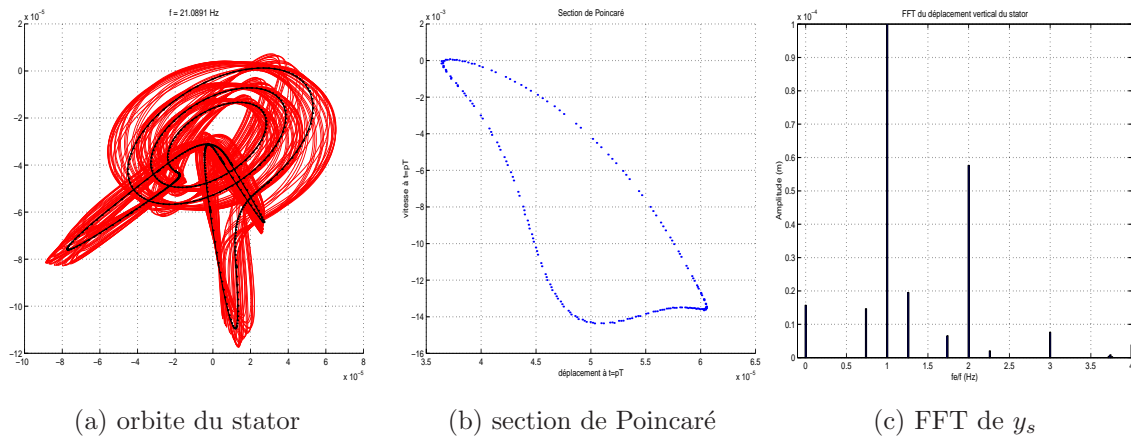


FIG. III.23: Multiplicateurs de Floquet principaux

FIG. III.24: *Solution quasi-périodique à 21,1 Hz*

$Hz$  (tracée figure III.24(a) sur 40 périodes) a été calculé par intégration temporelle. La solution périodique instable trouvée par la méthode de tir multiple est superposée pour comparaison (ligne continue avec des points). Le tracé de la section de Poincaré de la solution stable confirme sa quasi-périodicité. On note que la solution quasi-périodique stable est très proche de la solution périodique instable.

La transformée de Fourier du déplacement donnée figure III.24(c) indique la présence de fréquences multiples de  $15,6 Hz$  dans le signal (ratio de  $0,74$  avec la fréquence d'excitation du système). Cependant, le calcul à partir des multiplicateurs de Floquet révèle que la solution bifurquée admet comme deuxième fréquence  $31,3 Hz$ . La solution quasi-périodique émergeant de la bifurcation secondaire de Hopf a par conséquent subi un dédoublement de tore qui a conduit à une autre solution quasi-périodique stable, celle qui est représentée figure III.24.

Des bifurcations par dédoublement de période ont également été repérées. Une orbite  $2T$ -périodique stable, encore une fois de même ordre de grandeur que l'orbite synchrone instable, obtenue par intégration temporelle à une fréquence d'excitation de  $21 Hz$ , est tracée figure III.25(a). Dans la zone de transition, les bifurcations sont donc nombreuses et diverses, et elles apparaissent toutes sur une plage fréquentielle très réduite.

Il est intéressant de conclure en comparant le phénomène de prise de contact avec la génération des pics de réponses sur-harmoniques observés avec les oscillateurs possédant une raideur bi-linéaire dont la force de rappel s'exprime par

$$f(x) = \begin{cases} k_1 \cdot x & \text{si } x < 0 \\ k_2 \cdot x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

Une telle force de rappel s'obtient en adjoignant à un système masse/ressort une seconde raideur. Cette raideur supplémentaire n'est pas connectée à la masse et ne travaille par

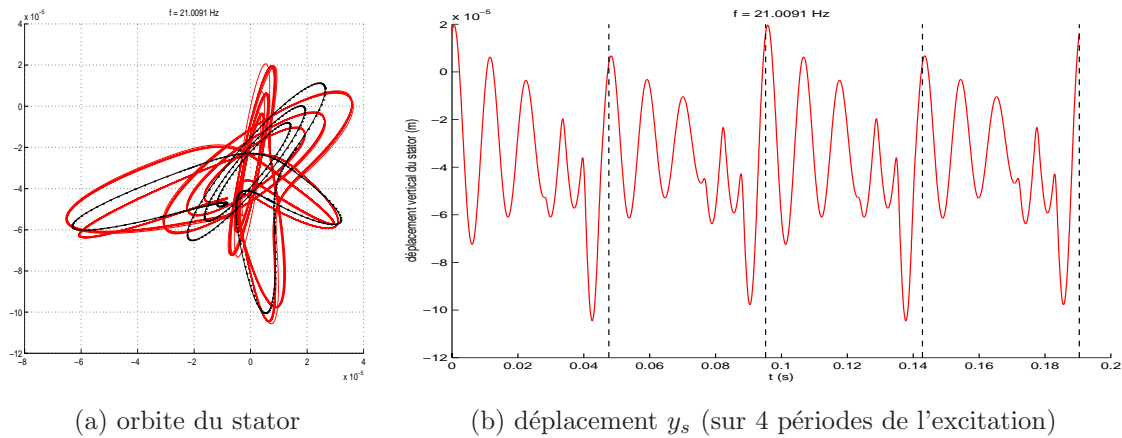


FIG. III.25: *Solution  $2T$ -périodique à 21 Hz*

conséquent qu'en compression. La figure III.26 donne la courbe de réponse classique obtenue pour un oscillateur comme celui-ci.

A basse fréquence, on note la présence de pics sur-harmoniques. Pour chacun de ces pics, le nombre de contact de la masse avec le second ressort est différent. Entre deux pics consécutifs, on observe alors une transition qui s'avère similaire à celle observée figure III.22.

### 3.3 Utilisation du modèle 2D

On considère à nouveau le modèle représenté figure III.12, mais cette fois le modèle  $2D$  est utilisé pour représenter le roulement. La figure III.27 montre la courbe de réponse à balourd trouvée avec la méthode de tir multiple. Les déplacements tracés sont les déplacements radiaux maximum et minimum (en trait pointillé) et leur moyenne (en trait continu). Cela permet de repérer rapidement les plages fréquentielles sur lesquelles les orbites ne sont pas circulaires, comme le montre l'agrandissement de la courbe entre 10 et 40 Hz.

On retrouve bien une même zone de transition, avec des orbites d'allures similaires à celles obtenues auparavant. Il faut cependant préciser que dans ce cas, aucun problème de convergence n'a été rencontré. Cela est lié au fait qu'avec la modélisation adoptée, la charge appliquée par le rotor sur le stator est répartie sur les billes, offrant ainsi des transitions moins rudes pour les vitesses de rotation où le contact non permanent existe.

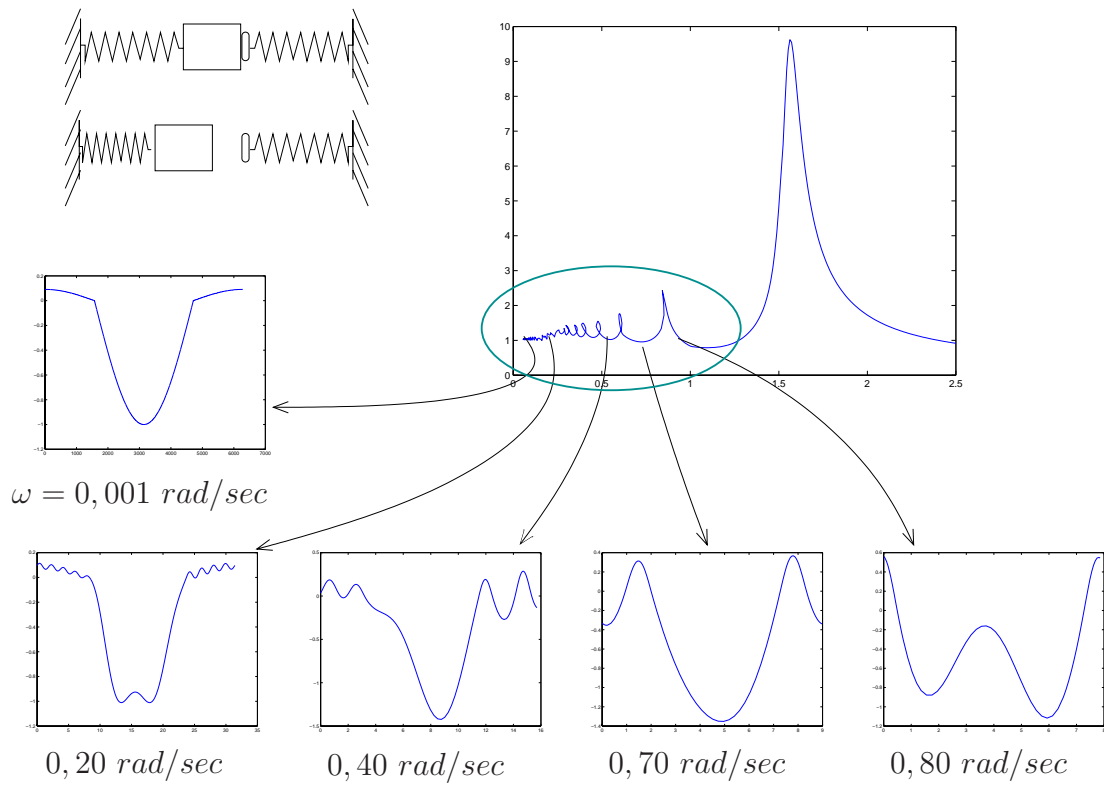


FIG. III.26: Courbe de réponse d'un système masse/ressort à raideur bi-linéaire

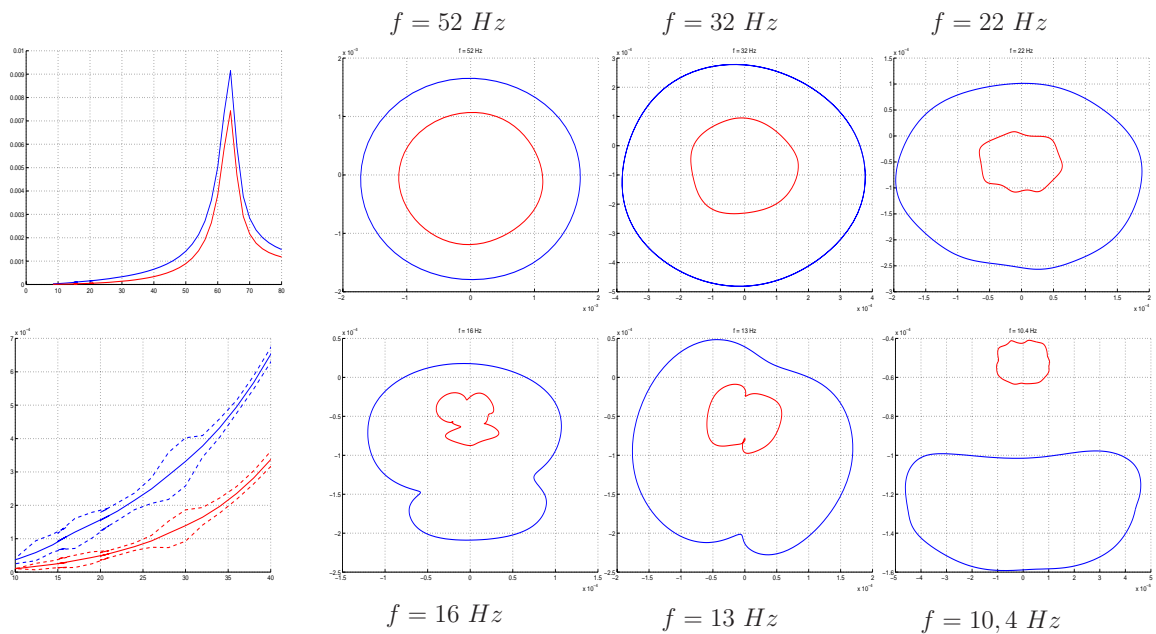


FIG. III.27: Amplitude de vibration et orbites du rotor et du stator

## Conclusion

Le modèle de roulement proposé offre l'avantage, par rapport au modèle de raideur radiale bi-linéaire, de s'appuyer un peu plus sur la physique. En effet, il prend en compte chaque contact entre les bagues et les éléments roulants, *i.e.* les billes ou les rouleaux, ainsi que la cinématique interne du roulement. Les non-linéarités qu'il fait intervenir correspondent au jeu radial de fonctionnement et la nature hertzienne du contact.

La méthode de tir multiple nous a alors permis d'analyser le comportement non-linéaire des rotors sur des modèles phénoménologiques qui ont montré la capacité de cette méthode à gérer des non-linéarités fortes comme les jeux. Son adaptation à des modèles plus conséquents n'est cependant pas envisageable, pour des questions de temps de calcul. Il faut donc nous tourner vers une autre méthode qui souffre moins de cet inconvénient de coût calcul : la méthode des éléments finis en temps.



# Chapitre IV

---

---

## Eléments finis en temps

*Théorie et application*

---

---

La perception dispose de l'espace dans l'exacte  
proportion où l'action dispose du temps.

Henri Bergson, *Matière et mémoire*

## Introduction

La méthode des éléments finis est bien connue dans le domaine spatial. Depuis les années 1950 où elle vit son apparition pour le calcul de contraintes, elle n'a cessé de se développer. Aujourd'hui, son champ d'application dépasse le cadre du génie mécanique. Désormais, on l'utilise aussi pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides ou de transferts de chaleur, voire des problèmes liés à l'électricité, au magnétisme ou à l'hydrologie [161]. Le principe est le même dans tous les cas de figures : dans un premier temps la structure étudiée est maillée, puis dans un second temps un ou plusieurs champs — déplacement, contrainte, température, pression, flux, intensité ou autre — sont approchés localement, *i.e.* sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation). Il s'agit d'une généralisation et amélioration de la méthode de Rayleigh-Ritz qui permet de traiter facilement des géométries ou circuits complexes [34].

En dynamique des structures, l'utilisation des éléments finis permet de transformer les équations aux dérivées partielles qui modélisent le mouvement en des équations différentielles temporelles (on passe du cas continu au cas discret pour les variables spatiales). Ces équations sont de la forme

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\ddot{q}}(t) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\dot{q}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}(t) + \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \underline{f}^{ext}(t) \quad (\text{IV.1})$$

On parle dans ce cas de semi-discrétisation, au sens où les nouvelles inconnues, *i.e.* les coordonnées généralisées  $\underline{q}$ , ne dépendent plus des variables d'espace mais sont toujours fonction du temps. Pour trouver la solution du problème, il faut donc avoir recours à l'intégration temporelle.

Cependant, il est concevable de conduire d'emblée la discrétisation simultanément en espace et en temps (le temps est en principe illimité mais on se restreint naturellement à un intervalle de temps  $[t_0, t_f]$  préalablement défini pour les besoins de la discrétisation). Cela s'effectue à l'aide d'éléments 4D — la quatrième dimension correspondant à l'espace métrique relatif au temps — et conduit à un système algébrique où les inconnues sont des valeurs nodales à divers instants. Cette idée n'est pas nouvelle et date du début de l'apparition des intégrateurs temporels. Mais le nombre d'inconnues mises en jeu par une discrétisation spatio-temporelle devient vite important. Elle n'a donc pas suscité l'attention face aux intégrateurs temporels qui permettent de traiter le problème dynamique non pas d'un seul bloc mais pas-à-pas [4].

De nombreux chercheurs se sont pourtant attachés à cette idée, en optant cependant pour des semi-discrétisations spatiales et temporelles effectuées successivement. Cette technique a alors donné naissance à la méthode des éléments des finis en temps.

## IV.1 Un bref historique

Le concept d'éléments finis en temps fût introduit dans le cadre de la mécanique vibratoire pour approximer le déplacement en tout instant grâce à une interpolation polynomiale en des instants particuliers issus d'une discrétisation temporelle. Le principe d'utilisation de ces éléments est similaire à celui des éléments finis en spatial, tant sur la mise en oeuvre que sur les questions d'ordre théorique. La motivation initiale de recourir aux éléments finis dans le domaine temporel était de tenter de remplacer les méthodes d'intégration classiques utilisées lors de l'analyse de problèmes transitoires [120].

La méthode des éléments finis en temps trouve son inspiration d'une méthode proposée par C. D. BAILEY en 1975 [6]. Cette dernière, basée sur la loi de variation de l'action d'Hamilton, permet d'approcher la solution transitoire d'un problème dynamique à l'aide de fonctions d'approximation définies sur l'intervalle de temps considéré et s'apparente à la méthode bien connue de Rayleigh-Ritz. Sa généralisation au cas où la base d'approximation est construite à partir de fonctions définies localement fût proposée par T. E. SIMKINS en 1981 [120] et poursuivie par R. RIFF et M. BARUCH [111] puis M. BORRI *et al.* [17] jusqu'à l'obtention de la méthode connue actuellement sous le nom de méthode des éléments finis en temps.

### 1.1 La formulation variationnelle

Dans le domaine spatial, la formulation par éléments finis se dérive à partir de la condition de stationnarité de certaines fonctionnelles, telles l'énergie potentielle ou encore la fonctionnelle de Reissner [161]. Les principes variationnels sont donc à la base de la méthode des éléments finis. Si de tels principes n'existent pas, comme c'est le cas pour certains problèmes de mécanique des fluides, la méthode des éléments finis se fonde alors sur des méthodes de résidus pondérés dont la plus connue est celle de Galerkin [34].

Dans le domaine temporel, la difficulté majeure pour pouvoir utiliser les éléments finis était donc de trouver un principe variationnel adéquat. Bien entendu, cela n'est pas indispensable mais offre, outre l'aspect élégant de la formulation, l'intérêt de s'appuyer sur des considérations physiques et évite ainsi le côté arbitraire du choix des fonctions de pondération inhérent aux méthodes de résidus pondérés [120].



### 1.1a La limitation du principe d'Hamilton

La première approche a consisté à utiliser le principe d'Hamilton. Ce dernier, aussi appelé principe de moindre action, s'écrit pour les systèmes conservatifs

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L} dt = 0 \quad (\text{IV.2})$$

où  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$  représente le Lagrangien ( $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{V}$  correspondent respectivement à l'énergie cinétique et l'énergie potentielle). Il stipule que la trajectoire réelle d'un système matériel est celle qui rend stationnaire l'intégrale d'action hamiltonienne  $\int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L} dt$  [123] par rapport à toute variation élémentaire de déplacement s'annulant aux instants  $t_0$  et  $t_f$ .

La difficulté rencontrée avec ce principe résidait dans la gestion des conditions aux limites auxquelles sont assujettis les déplacements virtuels,  $\delta \underline{q}(t_0) = \delta \underline{q}(t_f) = \underline{0}$ , conditions qualifiées d'*imposées* ou d'*essentiels* par analogie avec le domaine spatial.

### 1.1b La loi de variation de l'action d'Hamilton

C'est en 1975 que C. D. BAILEY précise que William R. Hamilton, dans ses deux essais publiés en 1834 et 1835 dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, a fourni non pas son principe de moindre action mais une loi de variation de l'action qui est à la base de la théorie d'Hamilton-Jacobi. Il rappelle aussi qu'Hamilton lui-même a affirmé que le principe de moindre action, à travers le calcul variationnel, ne servait qu'à écrire les équations différentielles du mouvement qui peuvent par ailleurs s'obtenir autrement [7].

Cette loi de variation de l'action d'Hamilton, ou plus simplement loi d'Hamilton, s'écrit, pour des systèmes non-conservatifs

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{T} - \mathcal{V}) dt + \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathcal{W} dt = [p_i \cdot \delta q_i]_{t_0}^{t_f} \quad (\text{IV.3})$$

avec  $\mathcal{W}$  qui représente le travail virtuel des forces non-conservatives et de celles ne dérivant pas d'un potentiel élastique, et  $\underline{p}$  le vecteur quantité de mouvement généralisée. Il ne s'agit non pas d'un principe variationnel, mais d'une formulation variationnelle de l'équilibre dynamique. Elle se retrouve aisément à partir du principe généralisé de D'Alembert (issu de l'extension du principe des travaux virtuels utilisé en statique au cas dynamique à partir du principe de D'Alembert) [89, 58]. Il suffit juste d'effectuer une intégration temporelle

par partie (*cf.* [8, 120]) pour la démonstration sur un système matériel composé d'un nombre fini de particules, le cas d'un système continu se traitant de manière identique).

On remarque que les conditions essentielles ne doivent plus être respectées puisqu'elles interviennent explicitement dans la formulation. C'est la raison pour laquelle la loi d'Hamilton fût préférée au principe du même nom (qui est un cas particulier).

## 1.2 D'une approche globale vers une approche locale

L'intérêt des formulations variationnelles est qu'elles se prêtent bien à la résolution numérique. L'idée est d'approcher les déplacements par des fonctions d'approximation et de vérifier l'équation variationnelle pour une famille de fonctions test prises comme déplacement virtuel.

Le premier qui a réussi à obtenir des solutions non stationnaires approchées à partir de la loi d'Hamilton semble être C. D. BAILEY [6]. L'idée est d'approximer le déplacement par une série entière tronquée dont les deux premiers termes sont connus puisqu'ils correspondent aux conditions initiales (en prenant  $t_0 = 0$ ). Il différencie alors l'expression pour obtenir un déplacement virtuel et conduit deux dérivations pour trouver les vitesses, d'où

$$\begin{aligned} \underline{q}(t) &\approx \underline{q}_0 + \underline{\dot{q}}_0 \cdot t + \sum_{i=2}^M \underline{a}_i \cdot t^i & \delta \underline{q}(t) &\approx \sum_{i=2}^M \delta \underline{a}_i \cdot t^i \\ \underline{\dot{q}}(t) &\approx \underline{\dot{q}}_0 + \sum_{i=2}^M i \cdot \underline{a}_i \cdot t^{i-1} & \delta \underline{\dot{q}}(t) &\approx \sum_{i=2}^M i \cdot \delta \underline{a}_i \cdot t^{i-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

La prise en compte de ces approximations dans la loi d'Hamilton conduit alors à une équation qui doit être vérifiée pour tout  $\delta \underline{a}_i$ . Il s'en suit un système algébrique de  $(M-2) \cdot N$  équations (avec  $N$  nombre de *ddl* du système) à  $(M-2) \cdot N$  inconnues (les coefficients de la série), dont la résolution fournit les  $\underline{a}_i$ .

On arrive donc à une expression analytique approchée de la solution entre 0 et  $t_f$ , sans avoir fait appel à la théorie des équations différentielles mais en partant uniquement de considérations énergétiques. Dans le principe, on reconnaît la célèbre méthode de Rayleigh-Ritz.

L'utilisation de la loi d'Hamilton pour la résolution de problèmes temporels a donc fait couler beaucoup d'encre, mais cela a permis d'aboutir à la conclusion qu'il était bel et bien possible de l'utiliser dans une méthode de type Rayleigh-Ritz pour obtenir une solution approchée. Le seul problème s'avère être d'ordre numérique. En effet, en utilisant de simples séries entières, le système algébrique à résoudre met en jeu une matrice de

Hilbert, célèbre pour son mauvais conditionnement [11]. C'est T. E. SIMKINS qui en premier proposa de remédier à cela en utilisant non plus des fonctions définies globalement mais localement, c'est-à-dire de recourir à la technique des éléments finis [120].

Si l'emploi des éléments finis spatiaux en calcul de structure a connu un essor considérable, c'est essentiellement parce qu'ils permettent d'effectuer les calculs dans le cas de géométries complexes. Dans le domaine temporel, cette complexité n'apparaît pas, mais l'utilisation d'éléments finis temporels se révèle tout autant motivée : outre les aspects purement numériques (meilleur conditionnement des matrices), ils sont bien adaptés pour gérer facilement les éventuels brusques changements de la force d'excitation ou encore pour poursuivre le calcul indéfiniment en ajoutant au fur et à mesure des éléments. La discrétisation temporelle a dès lors été mieux considérée et les études menées ont montré que l'utilisation d'éléments finis en temps conjointement avec la loi d'Hamilton permettait de retrouver la plupart des intégrateurs temporels.

Nous nous proposons ici d'utiliser cette technique pour analyser non pas des régimes transitoires mais des régimes permanents périodiques.

## IV.2 Description de la méthode

### 2.1 Principe de la méthode

Soit un champ de déplacement virtuel  $\delta \underline{q}$  défini de manière quelconque sur un intervalle  $[t_o, t_f]$ . Une fois le système étudié discrétisé spatialement, les expressions de  $\delta \mathcal{L}$  et  $\delta \mathcal{W}$  sont données par les relations

$$\delta \mathcal{L} = {}^t \delta \underline{\dot{q}}(t) \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\dot{q}}(t) - {}^t \delta \underline{q}(t) \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}(t) \quad (\text{IV.5})$$

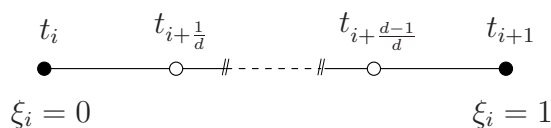
et

$$\delta \mathcal{W} = -{}^t \delta \underline{q}(t) \cdot (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\dot{q}}(t) + \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}, \underline{\dot{q}})) + {}^t \delta \underline{q}(t) \cdot \underline{f}^{ext}(t) \quad (\text{IV.6})$$

L'application de la loi d'Hamilton conduit alors à

$$\int_{t_o}^{t_f} \left( {}^t \delta \underline{\dot{q}}(t) \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\dot{q}}(t) - {}^t \delta \underline{q}(t) \cdot (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\dot{q}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}(t) + \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}, \underline{\dot{q}}) - \underline{f}^{ext}(t)) \right) dt = \left[ {}^t \delta \underline{q}(t) \cdot \underline{p} \right]_{t_o}^{t_f} \quad (\text{IV.7})$$

où le vecteur  $\underline{p} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\dot{q}}$  représente la quantité de mouvement généralisée.

FIG. IV.1: *Noeuds temporels de l'élément numéro i*

Pour la méthode des éléments finis en temps, on utilise cette équation avec une partition de la période présumée de la solution,  $T = p.T_f$  (un multiple de la période de la force d'excitation), en  $n$  intervalles

$$[0, T] = \bigcup_{i=1}^n [t_i, t_{i+1}] \quad \text{avec} \quad t_1 = 0 \quad \text{et} \quad t_{n+1} = T \quad (\text{IV.8})$$

Sur chacun de ces intervalles de temps, le déplacement généralisé de chaque *ddl* est ensuite approximé par des fonctions de forme polynomiales. On utilise par la suite la famille des polynômes de Lagrange. Mais il est possible d'utiliser d'autres familles [104]. De plus, par souci de clarté, on suppose qu'on garde la même famille pour chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ . En utilisant les polynômes de Lagrange de degré  $d$ , notés  $N_k$  ( $k = 1$  à  $d + 1$ ), on peut alors écrire pour chaque instant  $t$  compris entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$

$$\underline{q}_j(t) = \sum_{k=1}^{d+1} N_k(\xi_i(t)) \cdot \underline{q}_j(t_{i+\frac{k-1}{d}}) \quad \text{avec} \quad \xi_i(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (\text{IV.9})$$

où les  $t_{i+\frac{k-1}{d}}$  sont les instants d'interpolation (*cf.* figure IV.1). Les noeuds  $t_i$  et  $t_{i+1}$  sont appelés *noeuds limites*, et les autres *noeuds internes*. En posant  $\underline{N} = [N_1, \dots, N_{d+1}]$  et  ${}^t\underline{X}_i = [{}^t\underline{q}(t_i), \dots, {}^t\underline{q}(t_{i+\frac{k-1}{d}}), \dots, {}^t\underline{q}(t_{i+1})]$ , l'expression IV.9 se généralise à tous les *ddl* selon

$$\underline{q}(t) = (\underline{N}(\xi_i(t)) \otimes \underline{I}) \cdot \underline{X}_i \quad (\text{IV.10})$$

où le symbole  $\otimes$  représente le produit droit de Kronecker et  $\underline{I}$  la matrice identité d'ordre  $N$ . Le vecteur  $\underline{X}_i$  est le vecteur élémentaire des déplacements nodaux.

Les déplacements virtuels sont eux aussi approximés par des fonctions test polynomiales. On décide de prendre les mêmes fonctions que pour les déplacements (approche de type Galerkin), mais on pourrait très bien utiliser des familles différentes pour les fonctions de forme et les fonctions test.

### 2.1a Application de la loi d'Hamilton

On applique alors la loi d'Hamilton en considérant comme intervalle d'étude  $[t_i, t_{i+1}]$  et en remplaçant les déplacements généralisés, réels et virtuels, par leurs expressions ap-

prochées. Cela conduit à

$$\int_{t_0}^{t_f} {}^t\delta\underline{X}_i \cdot \left( \left( ({}^t\underline{\dot{N}} \cdot \underline{\dot{N}}) \otimes \underline{\underline{M}} - ({}^t\underline{N} \cdot \underline{\dot{N}}) \otimes \underline{\underline{B}} - ({}^t\underline{N} \cdot \underline{N}) \otimes \underline{\underline{K}} \right) \cdot \underline{X}_i - {}^t\underline{N} \otimes \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}, \underline{\dot{q}}) + {}^t\underline{N} \otimes \underline{f}^{ext}(t) \right) dt = {}^t\delta\underline{X}_i \cdot \underline{B}_i \quad (\text{IV.11})$$

où il n'est pas rappelé, par souci de concision, que les vecteurs des fonctions de formes ou de leurs dérivées temporelles sont évalués en  $\xi_i(t)$ .

Le vecteur  $\underline{B}_i$ , provenant du terme de droite de IV.7, a pour expression

$$\underline{B}_i = {}^t \left[ \begin{array}{cccc} -\underline{p}(t_i) & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{p}(t_{i+1}) \end{array} \right] \quad (\text{IV.12})$$

Il ne contient que les quantités de mouvement généralisées évaluées aux instants limites de l'intervalle de temps considéré.

Puisque le déplacement virtuel est arbitraire, la relation IV.11 conduit au système matriciel

$$\underline{\underline{A}}_i \cdot \underline{X}_i + \underline{b}_i(\underline{X}_i) = \underline{B}_i \quad (\text{IV.13})$$

Les matrices et vecteurs élémentaires  $\underline{\underline{A}}_i$  et  $\underline{b}_i$  sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}_i &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}^t\underline{\dot{N}} \cdot \underline{\dot{N}} dt \otimes \underline{\underline{M}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}^t\underline{N} \cdot \underline{\dot{N}} dt \otimes \underline{\underline{B}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}^t\underline{N} \cdot \underline{N} dt \otimes \underline{\underline{K}} \\ \underline{b}_i(\underline{X}_i) &= \underline{b}_i^{lin} + \underline{b}_i^{nl}(\underline{X}_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}^t\underline{N} \otimes \underline{f}^{ext}(t) dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}^t\underline{N} \otimes \underline{f}^{lia}(t, \underline{q}, \underline{\dot{q}}) dt \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

La matrice  $\underline{\underline{A}}_i$  ne dépend que des matrices structurales, de la fréquence d'excitation, de la vitesse de rotation des rotors et des fonctions de forme choisies. Via le changement de variable  $\xi(t) = (t - t_i)/\Delta t_i$  (avec  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ ), on remarque qu'elle s'écrit encore

$$\underline{\underline{A}}_i = \frac{1}{\Delta t_i} \underline{h}^{11} \otimes \underline{\underline{M}} - \underline{h}^{01} \otimes \underline{\underline{B}} - \Delta t_i \cdot \underline{h}^{00} \otimes \underline{\underline{K}} \quad (\text{IV.15})$$

avec les matrices de forme définies par

$$\underline{\underline{h}}^{11} = \int_0^1 {}^t\underline{N}' \cdot \underline{N}' d\xi \quad \underline{\underline{h}}^{01} = \int_0^1 {}^t\underline{N} \cdot \underline{N}' d\xi \quad \underline{\underline{h}}^{00} = \int_0^1 {}^t\underline{N} \cdot \underline{N} d\xi \quad (\text{IV.16})$$

La dérivation s'effectue non plus par rapport à  $t$  mais par rapport à la variable adimensionnelle  $\xi$ . Ces matrices ne dépendent que des fonctions de forme et non des caractéristiques du modèle spatial. On ne les évalue donc qu'une seule et unique fois. Cette évaluation peut se faire soit numériquement, soit analytiquement.

Le même changement de variable appliqué à  $\underline{b}_i^{lin}$  donne

$$\underline{b}_i^{lin} = \Delta t. \int_0^1 {}^t \underline{N}(\xi) \otimes \underline{f}^{ext}(t_i + \xi \cdot \Delta t_i) d\xi \quad (\text{IV.17})$$

Il est important de remarquer que si le temps dans la fonction d'excitation  $\underline{f}^{ext}$  n'intervient explicitement que sous la forme  $\omega t$  alors l'intégrale dans IV.17 est indépendante de la fréquence. En particulier, pour un maillage uniforme ( $\Delta t_i = \Delta t, \forall i$ ) et une force d'excitation de la forme  $\underline{f}^{ext}(t) = \underline{f}^0 + \underline{f}^c \cdot \cos(\omega t) + \underline{f}^s \cdot \sin(\omega t)$ , on obtient

$$\underline{b}_i^{lin} = \Delta t. \left( \int_0^1 {}^t \underline{N}(\xi) d\xi \otimes \underline{f}^0 + \int_0^1 {}^t \underline{N}(\xi) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n}(i-1+\xi)\right) d\xi \otimes \underline{f}^c + \int_0^1 {}^t \underline{N}(\xi) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}(i-1+\xi)\right) d\xi \otimes \underline{f}^s \right) \quad (\text{IV.18})$$

soit

$$\underline{b}_i^{lin} = \Delta t. (\underline{h}^0 \otimes \underline{f}^0 + \underline{h}^c \otimes \underline{f}^c + \underline{h}^s \otimes \underline{f}^s) \quad (\text{IV.19})$$

Les vecteurs  $\underline{h}^0$ ,  $\underline{h}^c$  et  $\underline{h}^s$  ne nécessitent eux aussi qu'un seul calcul. Il est préférable de recourir à des méthodes numériques, vu la complexité des intégrandes (pour  $\underline{h}^c$  et  $\underline{h}^s$ ). Cependant il est toujours possible grâce aux logiciels de calculs formels de disposer de leur expressions numériques. Il faut quand même préciser que ces expressions deviennent délicates à gérer pour des degrés élevés (car très longues).

## 2.1b Opération d'assemblage

L'équation IV.13 étant écrite pour chaque intervalle de temps, on effectue une opération d'assemblage similaire à celle réalisée avec les éléments finis spatiaux. Cette opération, notée symboliquement  $\sum_{ass.}$ , conduit au système algébrique global

$$\sum_{ass.} \underline{A}_i \cdot \underline{X} + \sum_{ass.} \underline{b}_i(\underline{X}) = \sum_{ass.} \underline{B}_i \quad (\text{IV.20})$$

Le vecteur  $\underline{X} = \sum_{ass.} \underline{X}_i$  englobe les déplacements généralisés aux instants nodaux

$$\underline{X} = \left[ {}^t \underline{q}(t_1) \quad {}^t \underline{q}(t_{1+\frac{1}{d}}) \quad \dots \quad {}^t \underline{q}(t_{n+\frac{d-1}{d}}) \quad {}^t \underline{q}(t_{n+1}) \right] \quad (\text{IV.21})$$

Compte tenu de la structure particulière des vecteurs  $\underline{B}_i$  (cf. IV.12) et des conditions de périodicité de la solution, à savoir  $\underline{q}(t_1) = \underline{q}(t_{n+1})$  et  $\underline{p}(t_1) = \underline{p}(t_{n+1})$ , le système assemblé s'écrit encore

$$\underline{A} \cdot \underline{X} + \underline{b}(\underline{X}) = \underline{0} \quad (\text{IV.22})$$

Ce système d'équations algébriques non-linéaires peut alors être résolu par un solveur classique, tel celui de Newton-Raphson. Il convient de noter que la matrice  $\underline{\underline{A}}$  possède une structure particulièrement creuse. En effet, elle est diagonale par blocs (autant de blocs que d'intervalles) avec cependant deux blocs extra-diagonaux qui traduisent la périodicité, et chaque bloc a lui-même une structure creuse (cela provient de la discrétisation par éléments finis spatiaux). Il est donc avantageux de tirer profit de cette structure en utilisant des algorithmes adaptés (gestion du format *creux*).

### 2.1c Condensation

Si les forces non-linéaires sont localisées, il est possible de condenser sur les *ddl* associés. En adoptant une nouvelle indexation, l'équation IV.22 se réécrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}^{11} & \underline{\underline{A}}^{12} \\ \underline{\underline{A}}^{21} & \underline{\underline{A}}^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{X}^1 \\ \underline{X}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b}^{lin 1} \\ \underline{b}^{lin 2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b}^{nl 1}(\underline{X}^1) \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

On emploie donc la technique de condensation exposée dans le paragraphe 5.2. L'idée est d'exprimer la dépendance linéaire de  $\underline{X}^2$ , vecteur des déplacements des *ddl* linéaires, vis-à-vis de  $\underline{X}^1$ , vecteur des déplacements des *ddl* non-linéaires. Le système réduit est

$$\tilde{\underline{\underline{A}}}. \underline{X}^1 + \tilde{\underline{b}} + \underline{b}^{nl 1}(\underline{X}^1) = \underline{0} \quad (\text{IV.24})$$

et ne comporte plus que  $n.d.N_2$  inconnues ( $N_2$  étant le nombre de *ddl* du modèle spatial associés à une non-linéarité) au lieu de  $n.d.N$ .

Cette technique s'avère donc très avantageuse, surtout lorsque  $N_2 \ll N$ , au point de vue résolution uniquement. Cependant, le point bloquant est la construction de  $\tilde{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{A}}^{11} - \underline{\underline{A}}^{12}.(\underline{\underline{A}}^{22})^{-1}.\underline{\underline{A}}^{21}$  et  $\tilde{\underline{b}} = \underline{b}^{lin 1} - \underline{\underline{A}}^{12}.(\underline{\underline{A}}^{22})^{-1}.\underline{b}^{lin 2}$  qui nécessite l'inversion de la matrice carrée  $\underline{\underline{A}}^{22}$  d'ordre  $n.d.N_1$ . Mais vu la structure creuse de celle-ci, l'opération d'inversion s'effectue à moindre coût en utilisant une décomposition LU adaptée aux matrices sauvegardées au format *creux*.

## 2.2 Gestion des non-linéarités

La difficulté rencontrée avec la méthode des éléments finis en temps porte sur le calcul du terme non-linéaire  $\underline{b}^{nl}$  qui nécessite l'évaluation de plusieurs intégrales définies.

### 2.2a Démarche usuelle

L'intégration numérique de fonctions s'effectue usuellement par des formules de quadrature. Parmi les plus connues on peut citer les règles de Newton-Cotes [126] dont la plus connue est la règle des trapèzes. On trouve aussi les sommes d'Euler-MacLaurin, . . . Cependant il s'agit d'algorithmes récursifs qui peuvent s'avérer très coûteux en terme de temps de calcul.

En éléments finis classiques, la méthode adoptée est la quadrature de Gauss, qui consiste à approcher l'intégrale définie par la sommation des valeurs prises par la fonction à intégrer en certains points (points de Gauss, notés  $\bar{x}_l$ , qui sont les racines de polynômes de Legendre) pondérées par des coefficients (poids de Gauss, notés  $\bar{\omega}_l$ ). La préférence pour cette méthode en éléments finis s'explique d'une part par son application simple et générale, et d'autre part parce qu'elle possède la propriété remarquable d'intégrer exactement toute fonction polynomiale de degré au plus égal  $2n_G - 1$  ( $n_G$  étant le nombre de points de Gauss utilisés). Cette méthode s'applique bien évidemment aussi dans le cadre des éléments finis en temps pour évaluer les matrices et vecteurs élémentaires.

En ce qui concerne les termes linéaires, on a déjà vu qu'il était possible de les exprimer analytiquement. Mais l'évaluation numérique présente une plus grande souplesse (si on change de base polynomiale pour les fonctions test et/ou d'approximation, la formule d'intégration reste la même).

Pour les termes non-linéaires, l'évaluation analytique est rarement réalisable. En effet, il n'est possible de conduire les calculs que pour des non-linéarités simples et localisées, sous réserve néanmoins que les fonctions test et d'approximation ne soient pas trop complexes et nombreuses.

Y. WANG détaille les calculs dans le cas d'une raideur asymétrique bi-linéaire [148]. Sa formulation peut être étendue au cas général d'une raideur linéaire par morceaux. Il serait aussi concevable de développer les expressions pour une non-linéarité quadratique ou cubique. Les calculs ne sont ni plus complexes ni plus simples que ceux menés par d'autres auteurs avec la méthode de balance harmonique incrémentale (*cf.* paragraphe 2.1c), la démarche adoptée par Y. WANG ressemble d'ailleurs énormément à celle de S. L. LAU et W. S. ZHANG [78].

La pratique générale est donc d'utiliser la quadrature de Gauss également pour les



vecteurs élémentaires relatifs aux forces non-linéaires [12]. On écrit ainsi

$$\underline{b}_i^{nl}(\underline{X}_i) \approx -\frac{\Delta t_i}{2} \sum_{l=1}^{n_G} \bar{\omega}_l \cdot {}^t \underline{N}(\xi_i(\bar{t}_l)) \otimes \underline{f}^{lia}(\bar{t}_l, \underline{q}(\bar{t}_l), \underline{\dot{q}}(\bar{t}_l)) \quad \text{avec} \quad \bar{t}_l = \frac{t_{i+1} + t_i + \bar{x}_l \cdot \Delta t_i}{2},$$

$$\underline{q}(\bar{t}_l) = {}^t \underline{N}(\xi_i(\bar{t}_l)) \cdot \underline{X}_i \quad \text{et} \quad \underline{\dot{q}}(\bar{t}_l) = \frac{1}{\Delta t_i} {}^t \underline{N}'_i(\xi_i(\bar{t}_l)) \cdot \underline{X}_i \quad (\text{IV.25})$$

L'inconvénient est qu'il faut d'abord évaluer le déplacement généralisé et la vitesse généralisée aux points de Gauss (*i.e.* à  $\bar{t}_l$ ) avant de pouvoir évaluer l'intégrande en ces mêmes points. Une nouvelle technique a donc été proposée pour palier à cette difficulté.

## 2.2b Interpolation des forces non-linéaires

L'approche proposée pour évaluer  $\underline{b}_i^{nl}$  repose sur l'idée d'interpolation des forces non-linéaires. Cette interpolation s'effectue de manière similaire à celle des déplacements. En prenant les mêmes fonctions de formes, il vient

$$\underline{f}^{lia}(t, \underline{q}, \underline{\dot{q}}) = ({}^t \underline{N}(\xi_i(t)) \otimes \underline{I}) \cdot \underline{F}_i \quad (\text{IV.26})$$

avec le vecteur élémentaire des forces non-linéaires défini par

$$\underline{F}_i = \begin{pmatrix} \underline{f}^{lia}(t_i, \underline{q}(t_i), \underline{\dot{q}}(t_i)) \\ \vdots \\ \underline{f}^{lia}(t_{i+\frac{k}{d}}, \underline{q}(t_{i+\frac{k}{d}}), \underline{\dot{q}}(t_{i+\frac{k}{d}})) \\ \vdots \\ \underline{f}^{lia}(t_{i+1}, \underline{q}(t_{i+1}), \underline{\dot{q}}(t_{i+1})) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

En reportant cela dans le terme non-linéaire, on obtient l'expression

$$\underline{b}_i^{nl}(\underline{X}_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}^t \underline{N}(\xi_i(t)) \otimes \left( ({}^t \underline{N}(\xi_i(t)) \otimes \underline{I}) \cdot \underline{F}_i \right) dt \quad (\text{IV.28})$$

qui, sous cette forme, n'apporte aucun avantage. En effet, le but est de pouvoir évaluer aisément l'intégrale. Il faut donc chercher à extraire les termes non-linéaires de l'intégrande.

Quelques relations existent pour les produits de Kronecker, notamment

$$(\underline{A} \otimes \underline{B}) \cdot (\underline{C} \otimes \underline{D}) = (\underline{A} \cdot \underline{C}) \otimes (\underline{B} \cdot \underline{D}) \quad (\text{IV.29})$$

$$(\underline{A} \otimes \underline{B}) \cdot \underline{C} = \underline{A} \otimes (\underline{B} \cdot \underline{C}) \quad (\text{IV.30})$$

valables  $\forall (\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}) \in (\mathcal{M}_{m,k} \times \mathcal{M}_{n,l} \times \mathcal{M}_{k,p} \times \mathcal{M}_{l,q})$  et  $\forall (\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}) \in (\mathcal{M}_{p,1} \times \mathcal{M}_{m,k} \times \mathcal{M}_{k,n})$  respectivement. On pourrait penser utiliser d'abord la seconde pour distribuer le

produit scalaire sur le produit de Kronecker et ensuite la propriété de distributivité pour se ramener à  $({}^t\underline{N} \otimes \underline{N}) \otimes (\underline{I}.F_i)$ . Malheureusement la distributivité n'est pas applicable ici (la matrice identité  $\underline{I}$  est d'ordre  $N$  alors que  $\underline{F}_i$  est un vecteur de longueur  $(d+1).N$ ). Il faut donc faire autrement.

En partant de la définition du travail virtuel des forces non-linéaires, il a été possible de trouver une nouvelle propriété du produit de Kronecker. Pour cela, on écrit le travail virtuel en discrétisant (temporellement) soit uniquement le déplacement généralisé virtuel, soit le déplacement généralisé virtuel et la force non-linéaire, *i.e.*

$$\begin{aligned} {}^t\underline{\delta q}.f^{lia} &= {}^t((\underline{N} \otimes \underline{I}).\underline{\delta X}_i).f^{lia} = {}^t\underline{\delta X}_i.{}^t(\underline{N} \otimes \underline{I}).f^{lia} = {}^t\underline{\delta X}_i.({}^t\underline{N} \otimes \underline{I}).f^{lia} \\ &= {}^t\underline{\delta X}_i.({}^t\underline{N} \otimes \underline{f}^{lia}) = {}^t\underline{\delta X}_i.({}^t\underline{N} \otimes ((\underline{N} \otimes \underline{I}).F_i)) \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

$$\begin{aligned} {}^t\underline{\delta q}.f^{lia} &= {}^t((\underline{N} \otimes \underline{I}).\underline{\delta X}_i).((\underline{N} \otimes \underline{I}).F_i) = {}^t\underline{\delta X}_i.{}^t(\underline{N} \otimes \underline{I}).(\underline{N} \otimes \underline{I}).F_i \\ &= {}^t\underline{\delta X}_i.({}^t\underline{N} \otimes \underline{I}).(\underline{N} \otimes \underline{I}).F_i = {}^t\underline{\delta X}_i.({}^t\underline{N}.\underline{N} \otimes \underline{I}).F_i \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Cette expression doit être valable quelque soit le déplacement généralisé virtuel, et donc pour tout  $\underline{\delta X}_i$ . On en déduit une égalité qui, reporté dans IV.28, donne

$$\underline{b}_i^{nl}(X_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} ({}^t\underline{N}.\underline{N} \otimes \underline{I}).F_i dt \quad (\text{IV.33})$$

On remarque que les termes non-linéaires, ainsi que la matrice identité, peuvent maintenant être extraits de l'intégrale, et que l'intégrale qui en résulte n'est autre que  $\underline{h}^{00}$  (cf. IV.16), d'où

$$\underline{b}_i^{nl}(X_i) = \Delta t_i.(\underline{h}^{00} \otimes \underline{I}).F_i \quad (\text{IV.34})$$

L'interpolation des forces non-linéaires évitent donc d'avoir une quadrature à effectuer à chaque évaluation de  $\underline{b}_i$ . Celle-ci est réalisée indirectement par le biais de  $\underline{h}^{00}$ . L'avantage sur la quadrature de Gauss est que l'évaluation des déplacements généralisés aux points de Gauss n'est plus nécessaire. De plus, l'expression des polynômes n'a pas besoin d'être rentrée, seules les matrices de forme sont nécessaires.

D'un point de vue algorithmique, il est préférable de travailler non pas au niveau élémentaire mais au niveau global : à partir du vecteur  $\underline{X}$ , on construit directement le vecteur  $\underline{F} = \sum_{ass.} \underline{F}_i$  défini par

$$\begin{aligned} {}^t\underline{F} &= \left[ {}^t\underline{f}^{lia}(t_1, \underline{q}(t_1), \underline{\dot{q}}(t_1)) \quad {}^t\underline{f}^{lia}(t_{1+\frac{1}{d}}, \underline{q}(t_{1+\frac{1}{d}}), \underline{\dot{q}}(t_{1+\frac{1}{d}})) \quad \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \quad {}^t\underline{f}^{lia}(t_{n+\frac{d-1}{d}}, \underline{q}(t_{n+\frac{d-1}{d}}), \underline{\dot{q}}(t_{n+\frac{d-1}{d}})) \quad {}^t\underline{f}^{lia}(t_{n+1}, \underline{q}(t_{n+1}), \underline{\dot{q}}(t_{n+1})) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

L'intérêt est de ne pas calculer en double les quantités  $\underline{f}^{lia}(t_i, \underline{q}(t_i), \underline{\dot{q}}(t_i))$  qui apparaissent à la fois dans l'élément  $i$  et l'élément  $i+1$ . Le principe est schématisé sur la figure IV.2.

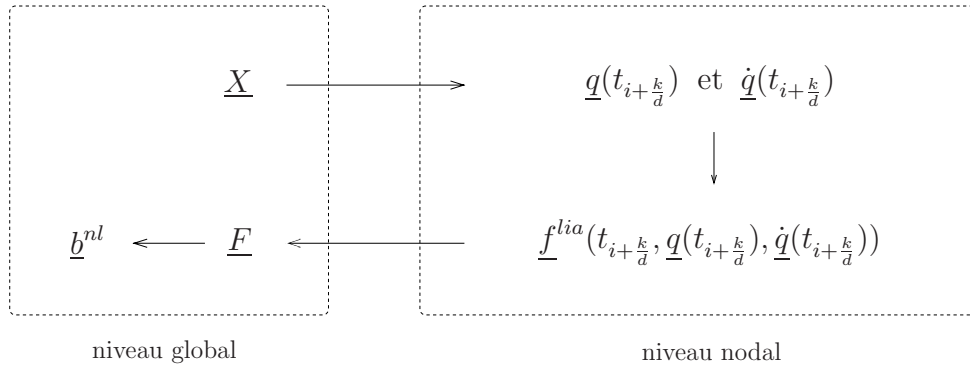


FIG. IV.2: *Technique de quadrature par interpolation*

On peut comparer cette technique à la technique *AFT* employée avec la méthode de balance harmonique incrémentale, car on arrive à déterminer la partie non-linéaire du système algébrique à partir de l'expression de la force non-linéaire en divers instants, qui pour la méthode de balance harmonique incrémentale sont les instants d'échantillonnage et pour la méthode des éléments finis en temps les instants nodaux.

### 2.2c Comparaison des méthodes de quadrature

Afin de comparer les différentes techniques disponibles pour évaluer le terme non-linéaire  $\underline{b}^{nl}$ , on utilise un modèle déjà traité par Wang [148]. Il s'agit de l'oscillateur à raideur bi-linéaire, représenté figure III.26, et dont l'équation du mouvement est

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + H(x).k_2x = f \cos(\omega t) \quad (\text{IV.36})$$

où  $H$  représente la fonction de Heavyside. Les valeurs prises sont  $m = 1$ ,  $c = 0, 2$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 4$  et  $f = 1$ . On recherche la solution périodique à l'aide de la méthode des éléments finis en temps.

Afin de rendre aisé le calcul analytique du terme non-linéaire, les polynômes de Lagrange de degré 1 sont utilisés:  $N_1(\xi) = 1 - \xi$  et  $N_2(\xi) = \xi$ . Pour le calcul de chaque

vecteur  $\underline{b}_i^{nl}$ , 4 cas sont donc à distinguer. Ils sont résumés ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 x_i < 0, x_{i+1} < 0 &\implies \underline{b}_i^{nl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 x_i > 0, x_{i+1} < 0 &\implies \underline{b}_i^{nl} = -k_2 \cdot \Delta t_i \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\tilde{\xi}^3 - \tilde{\xi}^2 + \tilde{\xi} & -\frac{1}{3}\tilde{\xi}^3 + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^2 \\ -\frac{1}{3}\tilde{\xi}^3 + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^2 & \frac{1}{3}\tilde{\xi}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix} \\
 x_i > 0, x_{i+1} > 0 &\implies \underline{b}_i^{nl} = -k_2 \cdot \frac{\Delta t_i}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix} \\
 x_i < 0, x_{i+1} > 0 &\implies \underline{b}_i^{nl} = -k_2 \cdot \Delta t_i \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\tilde{\xi}^3 - 1 + \tilde{\xi}^2 + 1 - \tilde{\xi} & sym. \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\tilde{\xi}^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tilde{\xi}^2 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\tilde{\xi}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

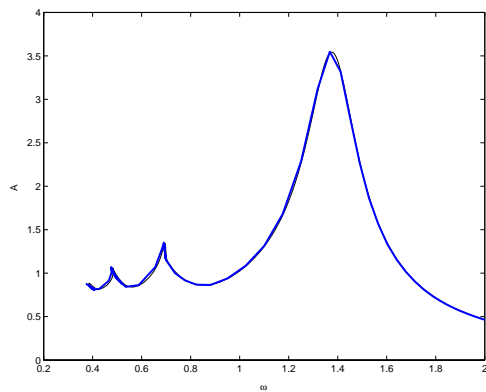
avec  $\tilde{\xi} = (\tilde{t} - t_i)/\Delta t_i$ , où  $\tilde{t} = t_i - x_i \cdot \Delta t_i / (x_{i+1} - x_i)$  représente l'instant du contact.

La figure IV.3 montre les courbes de réponse en fréquence obtenues avec chacune des techniques (l'amplitude de vibration reportée en fonction de la pulsation  $\omega$  de l'excitation est la moyenne entre les déplacements maximum et minimum). En ce qui concerne le calcul par quadrature de Newton-Cotes, la formule utilisée est celle de Weddle [126]. On note la présence de pics sur-harmoniques. Comme déjà évoqué auparavant, de telles réponses sont classiques pour des oscillateurs de ce type.

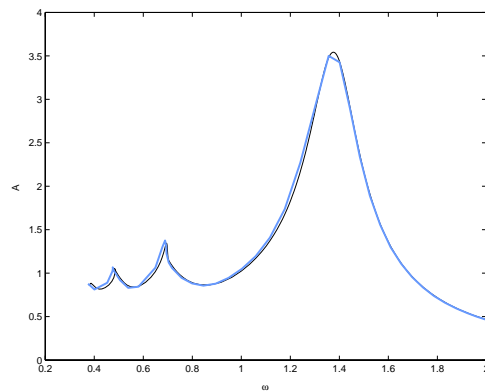
La solution exacte, calculée avec la méthode de tir, est superposée en trait fin à chacune des courbes obtenues. On observe une bonne corrélation entre les solutions trouvées par la méthode des éléments finis en temps et la solution exacte. Les temps de calcul ont révélé que l'intégration analytique et la quadrature de Gauss prennent approximativement le même temps. Comparativement, la quadrature par interpolation des forces non-linéaires demande un temps de calcul un peu moins important sans altérer la solution. Le gain de temps avec cette technique peut aller jusqu'à 30 %. La quadrature de Newton-Cotes quant à elle demande un temps de calcul exorbitant.

## 2.3 Expression des jacobiennes

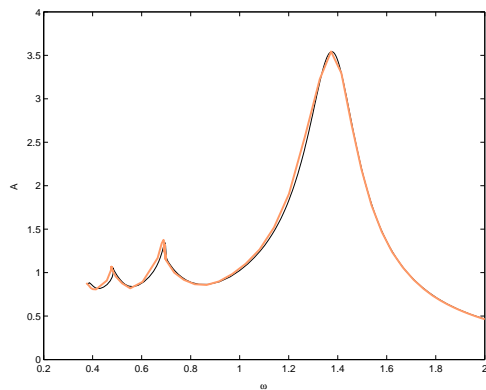
Pour la résolution de  $\underline{H}(\underline{X}, \lambda) = \underline{A}(\lambda) \cdot \underline{X} + \underline{b}^{nl}(\underline{X}, \lambda) = \underline{0}$ , il est avantageux de connaître l'expression de la jacobienne de  $\underline{H}$  par rapport à  $\underline{X}$ . Il est toujours possible de l'approcher par différentiation numérique. Mais la connaissance de son expression exacte est préférable. On fournit donc ici son expression. De plus, on peut avoir besoin d'autres jacobiennes, en particulier lorsque l'on applique une technique de continuation. Dans le contexte présent d'analyse fréquentielle, on donne alors aussi l'expression littérale de sa jacobienne par rapport à la pulsation propre de l'excitation.



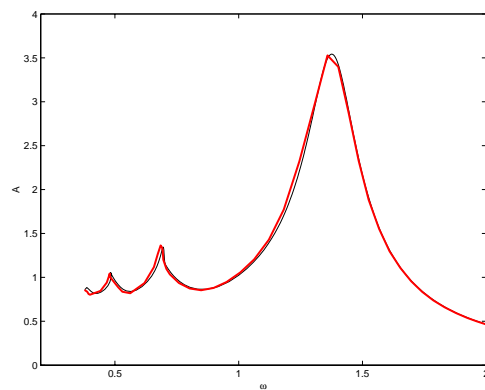
(a) intégration exacte (analytique)



(b) quadrature de Newton-Cotes



(c) quadrature de Gauss



(d) technique proposée

FIG. IV.3: Comparaison des résultats obtenus avec différentes techniques d'intégration

### 2.3a Jacobienne par rapport à $\underline{X}$

La jacobienne de  $\underline{H}$  par rapport à  $\underline{X}$  est constituée d'un terme linéaire,  $\underline{A}$ , et d'un terme non-linéaire,  $\frac{\partial b_i^{nl}}{\partial \underline{X}}$ . Ce dernier correspond à l'assemblage des jacobienes de  $\underline{b}_i^{nl}$  par rapport à  $\underline{X}_i$ , *i.e.* les jacobienes élémentaires, qui s'expriment par

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_i^{nl}}{\partial \underline{X}_i} &= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}^t \underline{N} \otimes \left( \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{X}_i} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}} \cdot \frac{\partial \underline{\dot{q}}}{\partial \underline{X}_i} \right) dt \\ &= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} {}^t \underline{N} \otimes \left( \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot (\underline{N} \otimes \underline{I}) + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}} \cdot (\underline{\dot{N}} \otimes \underline{I}) \right) dt \\ &= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( (({}^t \underline{N} \cdot \underline{N}) \otimes \underline{I}) \cdot \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} + (({}^t \underline{N} \cdot \underline{\dot{N}}) \otimes \underline{I}) \cdot \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Cette jacobienne élémentaire peut être évaluée par quadrature. Mais il est aussi possible d'utiliser l'interpolation des forces non-linéaires exposée précédemment. En dérivant IV.33 par rapport à  $\underline{X}_i$ , on trouve

$$\frac{\partial b_i^{nl}}{\partial \underline{X}_i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (({}^t \underline{N} \cdot \underline{N}) \otimes \underline{I}) \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \underline{X}_i} dt = \Delta t_i \cdot (\underline{h}^{00} \otimes \underline{I}) \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \underline{X}_i} \quad (\text{IV.38})$$

expression qui peut aussi être retrouvée à partir de IV.37. Le calcul se fait donc aisément et rapidement. Il suffit juste d'évaluer préalablement  $\frac{\partial F_i}{\partial \underline{X}_i}$ . Pour ce, on se reporte à la définition de  $\underline{F}_i$  (*cf.* IV.27). On établit alors que la dérivée cherchée est composée des termes

$$\frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{X}_i} = \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{X}_i} + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}} \cdot \frac{\partial \underline{\dot{q}}}{\partial \underline{X}_i} = \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}} \cdot (\underline{N} \otimes \underline{I}) + \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}} \cdot (\underline{\dot{N}} \otimes \underline{I}) \quad (\text{IV.39})$$

évalués aux différents instants nodaux  $t_{i+\frac{k}{a}}$ . Compte tenu de la propriété d'unisolvance des fonctions de formes, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial \underline{X}_i}(\underline{X}_i) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}}(t_i, \underline{q}(t_i), \underline{\dot{q}}(t_i)) & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{q}}(t_{i+1}, \underline{q}(t_{i+1}), \underline{\dot{q}}(t_{i+1})) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}}(t_i, \underline{q}(t_i), \underline{\dot{q}}(t_i)) \cdot (\underline{\dot{N}}(t_i) \otimes \underline{I}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f^{lia}}{\partial \underline{\dot{q}}}(t_{i+1}, \underline{q}(t_{i+1}), \underline{\dot{q}}(t_{i+1})) \cdot (\underline{\dot{N}}(t_{i+1}) \otimes \underline{I}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

avec la partie relative à  $\frac{\partial}{\partial \underline{q}}$  bloc-diagonale, ce qui n'est pas le cas pour celle relative à  $\frac{\partial}{\partial \underline{\dot{q}}}$ .

La jacobienne  $\frac{\partial \underline{b}^{nl}}{\partial \underline{X}}$  s'obtient ensuite par assemblage classique : elle possède de ce fait la même structure que  $\underline{A}$ . On peut donc utiliser les algorithmes adoptés pour gérer le format creux de  $\underline{A}$ . Il convient de remarquer que cette jacobienne possède la même structure que  $\underline{A}$ , contrairement à la jacobienne obtenue avec des méthodes fréquentielles. Avec la méthode de balance harmonique incrémentale par exemple, bien que  $\underline{A}$  possède une structure bloc-diagonale, la jacobienne de  $\underline{b}^{nl}$  est pleine. Cette différence s'explique par le fait que dans les méthodes fréquentielles la réponse est décomposée sur des fonctions définies sur la période entière, alors que dans la méthode des éléments finis en temps, la solution est décomposée sur des fonctions définies localement.

### 2.3b Jacobienne par rapport à $\omega_f$

Dans l'expression de  $\underline{H}$ , tous les termes sont dépendants de la pulsation. Afin d'alléger la présentation, on suppose que la partition IV.8 est uniforme :  $\Delta t = \frac{T}{n} = \frac{2\pi}{n\omega}$ . Il vient alors directement

$$\frac{\partial \underline{A}_i}{\partial \omega_f} = \frac{1}{\omega_f \Delta t} \underline{h}^{11} \otimes \underline{M} - \underline{h}^{01} \otimes \frac{\partial \underline{B}}{\partial \omega_f} - \underline{h}^{00} \otimes \frac{\partial \underline{K}}{\partial \omega_f} + \frac{\Delta t}{\omega_f} \underline{h}^{00} \otimes \underline{K} \quad (\text{IV.41})$$

qui, une fois assemblée, donne la matrice jacobienne globale  $\frac{\partial \underline{A}}{\partial \omega_f}$ .

En ce qui concerne la partie linéaire de  $\underline{b}$ , la dérivation de IV.17 conduit à

$$\frac{\partial \underline{b}_i^{lin}}{\partial \omega_f} = -\frac{1}{\omega_f} \Delta t \cdot \underbrace{\int_0^1 \underline{N} \otimes \underline{f}^{ext}(t_i + \xi \Delta t) d\xi}_{\underline{b}_i^{lin}} + \Delta t \cdot \int_0^1 \underline{N} \otimes \frac{\partial}{\partial \omega_f} (\underline{f}^{ext}(t_i + \xi \Delta t)) d\xi \quad (\text{IV.42})$$

En supposant que la force extérieure appliquée à la structure comporte une composante statique et une seule composante harmonique (de pulsation  $\omega_f$ ), cette expression se met alors sous la forme

$$\frac{\partial \underline{b}_i^{lin}}{\partial \omega_f} = -\frac{1}{\omega_f} \underline{b}_i^{lin} + \Delta t \cdot \underline{h}^c \otimes \frac{\partial \underline{f}^c}{\partial \omega_f} + \Delta t \cdot \underline{h}^s \otimes \frac{\partial \underline{f}^s}{\partial \omega_f} \quad (\text{IV.43})$$

puisque les arguments des fonctions sinusoïdales,  $\omega \cdot (t_i + \xi \Delta t) = \frac{2\pi}{n}(i - 1 + \xi)$ , sont indépendants de la pulsation. La jacobienne par rapport à  $\omega_f$  de la partie non-linéaire de  $\underline{b}$  se calcule de manière identique. En particulier, lorsque la force non-linéaire  $\underline{f}^{lia}$  est indépendante de  $\omega_f$ , on a

$$\frac{\partial \underline{b}_i^{nl}}{\partial \omega_f} = -\frac{1}{\omega_f} \underline{b}_i^{nl} \quad (\text{IV.44})$$

Etant donné le lien apparent avec les vecteurs élémentaires, l'évaluation de ces dérivées partielles par rapport à la pulsation de l'excitation nécessite un temps de calcul très faible.

## 2.4 Analyse de la stabilité

Une fois la solution du problème trouvée, il est indispensable d'étudier sa stabilité. Cette analyse est réalisée au moyen de la théorie de Floquet exposée au chapitre 4.1b. La solution est donc perturbée au début d'un cycle de vibration d'une quantité  $\underline{\delta q}_0$  et  $\underline{\delta p}_0$ . L'objectif est de déterminer la valeur de la perturbation à la fin du cycle.

La perturbation initiale évoluant au cours du temps, on se retrouve à chaque instant  $t_i$  avec  $\underline{\delta q}(t_i)$  et  $\underline{\delta p}(t_i)$  (par définition  $\underline{\delta q}(t_1) = \underline{\delta q}_0$  et  $\underline{\delta p}(t_1) = \underline{\delta p}_0$ ). Autrement dit, si on se replace au niveau local, l'équation IV.13 devient

$$\underline{A}_i \cdot (\underline{X}_i + \underline{\delta X}_i) + \underline{b}_i^{lin} + \underline{b}_i^{nl}(\underline{X}_i + \underline{\delta X}_i) = \underline{B}_i + \underline{\delta B}_i \quad (\text{IV.45})$$

les vecteurs perturbés étant définis par

$$\begin{cases} {}^t\underline{\delta X}_i = \left[ {}^t\underline{\delta q}(t_i) \quad {}^t\underline{\delta q}(t_{i+\frac{1}{d+1}}) \quad \dots \quad {}^t\underline{\delta q}(t_{i+\frac{d}{d+1}}) \quad {}^t\underline{\delta q}(t_{i+1}) \right] \\ {}^t\underline{\delta B}_i = \left[ -{}^t\underline{\delta p}(t_i) \quad {}^t\underline{0} \quad \dots \quad {}^t\underline{0} \quad {}^t\underline{\delta p}(t_{i+1}) \right] \end{cases} \quad (\text{IV.46})$$

### 2.4a Linéarisation

Puisque les perturbations en question sont faibles, on linéarise IV.45 en se limitant à un développement de Taylor au premier ordre de  $\underline{b}^{nl}$ , ce qui donne

$$\left( \underline{A}_i + \frac{\partial \underline{b}_i^{nl}}{\partial \underline{X}_i} \right) \cdot \underline{\delta X}_i = \underline{\delta B}_i \quad (\text{IV.47})$$

où la matrice  $\underline{K}_i = \underline{A}_i + \frac{\partial \underline{b}_i^{nl}}{\partial \underline{X}_i}$  représente une matrice de raideur dynamique tangente. Ce système peut être réorganisé de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_i^{LL} & \underline{K}_i^{LI} \\ \underline{K}_i^{IL} & \underline{K}_i^{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta X}_i^L \\ \underline{\delta X}_i^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\delta B}_i^L \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.48})$$

avec

$$\begin{cases} {}^t\underline{\delta X}_i^L = \left[ {}^t\underline{\delta q}(t_i) \quad {}^t\underline{\delta q}(t_{i+1}) \right] \\ {}^t\underline{\delta X}_i^I = \left[ {}^t\underline{\delta q}(t_{i+\frac{1}{d+1}}) \quad \dots \quad {}^t\underline{\delta q}(t_{i+\frac{d}{d+1}}) \right] \\ {}^t\underline{\delta B}_i^L = \left[ -{}^t\underline{\delta p}(t_i) \quad {}^t\underline{\delta p}(t_{i+1}) \right] \end{cases} \quad (\text{IV.49})$$

Les termes relatifs aux instants nodaux limites et internes, indicés respectivement par  $L$  et  $I$ , sont regroupés. Le vecteur  $\underline{\delta B}_i$  qui possède naturellement la même structure que



$\underline{B}_i$  a toutes ses composantes relatives aux instants nodaux internes nulles. On peut donc réaliser la condensation suivante

$$\underline{\tilde{K}}_i \cdot \begin{pmatrix} {}^t \underline{\delta q}(t_i) \\ {}^t \underline{\delta q}(t_{i+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^t \underline{\delta p}(t_i) \\ {}^t \underline{\delta p}(t_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.50})$$

avec

$$\underline{\tilde{K}}_i = \underline{K}_i^{LL} - \underline{K}_i^{LI} \cdot \left( \underline{K}_i^{II} \right)^{-1} \cdot \underline{K}_i^{IL} \quad (\text{IV.51})$$

Cette condensation est similaire à celle effectuée en éléments finis classiques pour éliminer les *ddl* internes ou ceux qui ne sont pas liés à un noeud mais une fonction de forme spéciale de type *fonction bulle* (cf. éléments finis hiérarchiques) ou encore ceux associés à une masse nulle (typiquement des *ddl* de rotation, avec des matrices de masse concentrées, la réduction permettant alors d'éviter une singularité).

## 2.4b Assemblage

Les équations condensées IV.50 peuvent alors être assemblées progressivement dans le temps. On considère les deux premiers intervalles de temps. On peut alors écrire

$$\begin{bmatrix} \underline{\tilde{\Phi}}_1^{11} & \underline{\tilde{\Phi}}_1^{12} \\ \underline{\tilde{\Phi}}_1^{21} & \underline{\tilde{\Phi}}_1^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta q}(t_1) \\ \underline{\delta q}(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{\delta p}(t_1) \\ \underline{\delta p}(t_2) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.52})$$

et

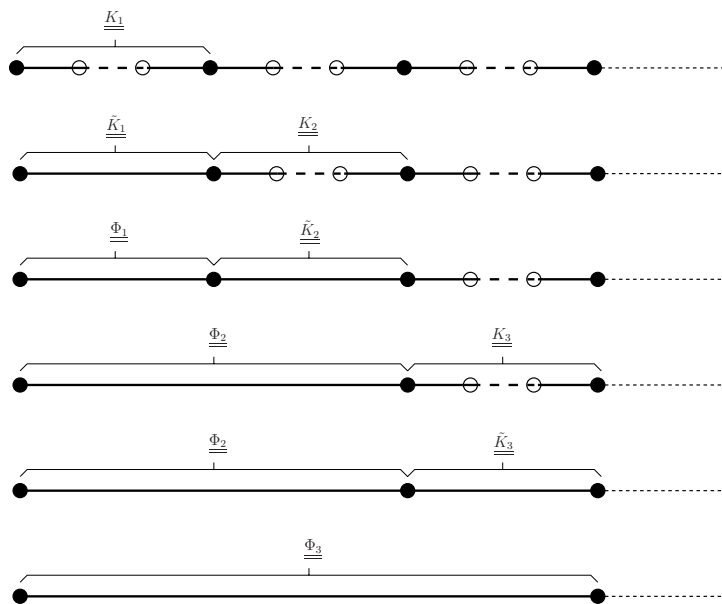
$$\begin{bmatrix} \underline{\tilde{K}}_2^{11} & \underline{\tilde{K}}_2^{12} \\ \underline{\tilde{K}}_2^{21} & \underline{\tilde{K}}_2^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta q}(t_2) \\ \underline{\delta q}(t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{\delta p}(t_2) \\ \underline{\delta p}(t_3) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.53})$$

La notation  $\underline{\Phi}_1$  à la place de  $\underline{\tilde{K}}_1$  est volontairement utilisée. La perturbation de la quantité de mouvement généralisée à l'instant  $t_2$  peut s'exprimer à partir de ces deux équations. En égalant les deux expressions, on obtient alors  $\underline{\delta p}(t_2)$  en fonction de  $\underline{\delta p}(t_1)$  et  $\underline{\delta p}(t_3)$ . Reportant le résultat obtenu dans les IV.52 et IV.53, on aboutit enfin à

$$\underline{\Phi}_2 \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta q}(t_1) \\ \underline{\delta q}(t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{\delta p}(t_1) \\ \underline{\delta p}(t_3) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.54})$$

avec la matrice  $\underline{\Phi}_2$  qui est donnée par

$$\underline{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_1^{11} - \underline{\Phi}_1^{12} \cdot \left( \underline{\Phi}_1^{22} + \underline{\tilde{K}}_2^{11} \right)^{-1} \cdot \underline{\Phi}_1^{21} & -\underline{\Phi}_1^{12} \cdot \left( \underline{\Phi}_1^{22} + \underline{\tilde{K}}_2^{11} \right)^{-1} \cdot \underline{\tilde{K}}_2^{12} \\ -\underline{\tilde{K}}_2^{21} \cdot \left( \underline{\Phi}_1^{22} + \underline{\tilde{K}}_2^{11} \right)^{-1} \cdot \underline{\Phi}_1^{21} & \underline{\tilde{K}}_2^{22} - \underline{\tilde{K}}_2^{21} \cdot \left( \underline{\Phi}_1^{22} + \underline{\tilde{K}}_2^{11} \right)^{-1} \cdot \underline{\tilde{K}}_2^{12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.55})$$

FIG. IV.4: *Condensations successives lors de l'analyse de la stabilité*

L'opération est alors reconduite avec cette nouvelle équation et l'équation IV.50 pour  $i = 3$ . Ces premières étapes sont schématisées dans le diagramme de la figure IV.4. D'un point de vue algorithmique, on notera que la réduction des matrices élémentaires de raideur dynamique tangente,  $\underline{\underline{K}}_i$ , est effectuée non pas préalablement à l'opération d'assemblage, mais durant celle-ci, afin de minimiser la demande de stockage en mémoire.

Arrivé au dernier intervalle de temps, l'équation trouvée relie ainsi  $\underline{\underline{\delta q}}_0$  et  $\underline{\underline{\delta q}}(T)$  à  $\underline{\underline{\delta p}}_0$  et  $\underline{\underline{\delta p}}(T)$ . Une simple manipulation matricielle conduit alors à

$$\underline{\underline{\tilde{\Phi}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{\delta q}}(0) \\ \underline{\underline{\delta p}}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\delta q}}(T) \\ \underline{\underline{\delta p}}(T) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.56})$$

avec

$$\underline{\underline{\tilde{\Phi}}} = \begin{bmatrix} -(\underline{\underline{\Phi}}_n^{12})^{-1} \cdot \underline{\underline{\Phi}}_n^{11} & -(\underline{\underline{\Phi}}_n^{12})^{-1} \\ \underline{\underline{\Phi}}_n^{21} - \underline{\underline{\Phi}}_n^{22} \cdot (\underline{\underline{\Phi}}_n^{12})^{-1} \cdot \underline{\underline{\Phi}}_n^{11} & -\underline{\underline{\Phi}}_n^{22} \cdot (\underline{\underline{\Phi}}_n^{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.57})$$

La construction de la matrice  $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}$  est donc relativement aisée, puisqu'elle ne demande qu'une succession d'opérations matricielles, dont la plus coûteuse en temps de calcul est la décomposition LU de matrices carrées d'ordre  $N \cdot (d - 1)$  (si  $d > 1$ ) ou  $N$ . En toute rigueur, cette matrice n'est pas la matrice monodrome, mais, compte tenu du changement de variable  $\underline{p} = \underline{M} \cdot \underline{\dot{q}}$ , elle lui est semblable. Elle admet de ce fait le même spectre. Pour conclure sur la stabilité de la solution, il ne reste donc plus qu'à rechercher ses valeurs propres, c'est-à-dire les multiplicateurs de Floquet.

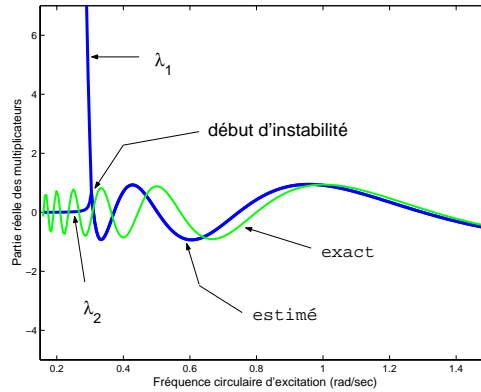


FIG. IV.5: *Instabilité numérique dans le calcul des multiplicateurs ( $n = 6$ )*

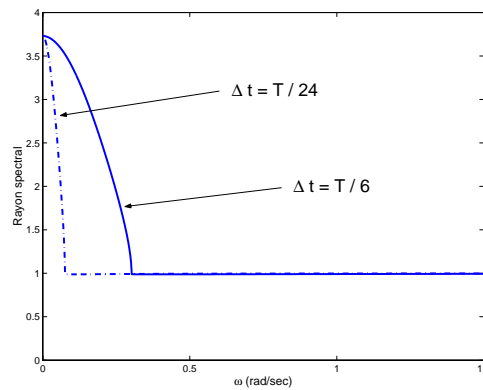
### 2.4c Problème d'instabilité

Nous avons constaté l'existence d'une borne pour la pulsation propre de l'excitation,  $\omega^{\text{cri}}$ , en dessous de laquelle le calcul des multiplicateurs de Floquet par la méthode décrite auparavant diverge. Cette borne dépend des pulsations propres du système et de nombreux calculs ont permis d'attester le caractère décroissant de  $\omega^{\text{cri}}$  par rapport au nombre  $n$  d'éléments finis temporels et au degré  $d$  des polynômes de Lagrange utilisés.

Pour exposer clairement ce phénomène, l'exemple de l'oscillateur linéaire,  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \cdot \cos(\omega t)$  est considéré (avec les valeurs  $\omega_0 = 1$  rad/sec,  $\xi = 1\%$ ) puisque pour celui-ci le calcul analytique des multiplicateurs est réalisable ( $\lambda_{1,2} = \exp(-2\pi(\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2})\omega_0/\omega)$ ), ce qui confirme bien la stabilité, tant toutefois que  $1 \geq \xi \geq 0$ ). La solution a été déterminée grâce à la méthode des éléments finis en temps, en utilisant des polynômes de degré 1 (pour lesquels le phénomène de divergence est le plus important) avec uniquement 6 éléments identiques. Sur la figure IV.5 sont représentés l'évolution des parties réelles des multiplicateurs exacts et de ceux calculés par la méthode décrite auparavant en fonction de la pulsation de l'excitation. On y observe clairement le phénomène d'instabilité numérique : à partir d'environ  $0,3$  rad/sec, la partie réelle de la première valeur propre commence à diverger de manière exponentielle.

Son explication réside dans le fait que le calcul des multiplicateurs s'effectue progressivement dans le temps, *i.e.* la technique utilisée pour construire la matrice  $\tilde{\Phi}$  n'est autre que l'intégration temporelle. En effet, dans le cas  $n = 2$ , on se trouve à chaque étape avec la relation

$$\underbrace{\left( \frac{m}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{c}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{k\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{K^e}}} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m\dot{x}_i \\ m\dot{x}_{i+1} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.58})$$

FIG. IV.6: *Stabilité conditionnelle du schéma d'intégration*

la matrice de raideur tangente dynamique, notée  $\underline{K}^e$  ici, étant identique pour tous les éléments dans le cas d'une équiartition pour un problème linéaire. Ce système peut encore s'écrire sous la forme

$$\underbrace{-\frac{1}{K_{12}^e} \begin{bmatrix} K_{11}^e & m \\ (K_{11}^e \cdot K_{22}^e - K_{12}^e \cdot K_{21}^e) / m & K_{22}^e \end{bmatrix}}_{\text{matrice d'amplification}} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.59})$$

où l'on retrouve la matrice d'amplification du schéma. Comme déjà évoqué au paragraphe 1.1c, ce sont les valeurs propres de cette matrice qui dictent la stabilité du schéma. La figure IV.6 montre l'évolution du rayon spectral de la matrice d'amplification en fonction de la pulsation de l'excitation pour deux valeurs de  $n$ . On remarque qu'il est supérieur à 1 à basse fréquence, indiquant le caractère conditionnellement stable du schéma d'intégration temporelle employé.

Avec  $n = 6$ , le critère de stabilité est  $\omega \geq 0,304 \dots$ . Cette valeur correspond bien avec la pulsation critique définie plus haut, attestant qu'il s'agit manifestement de la source du problème de divergence des multiplicateurs de Floquet. Pour  $n = 24$ , la zone d'instabilité diminue mais existe toujours, corroborant ainsi les premières observations faites.

#### 2.4d Quadrature réduite

Afin de remédier à ce problème de divergence des multiplicateurs, on effectue une intégration réduite. L'intégration réduite consiste à évaluer numériquement les intégrales en prenant un nombre de points de Gauss moins important. L'intégration est dans ce cas inexacte, mais il s'avère qu'elle permet de contourner de nombreux problèmes en éléments finis classiques, essentiellement le phénomène de verrouillage (*locking* dans la littérature anglo-saxonne) qui peut survenir avec les éléments poutre de type Mindlin

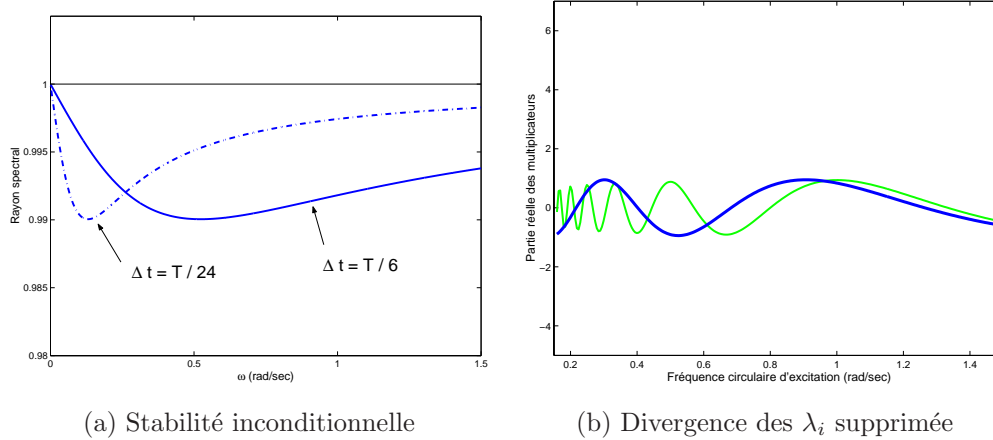


FIG. IV.7: Conséquence de l'intégration réduite ( $n = 6$ )

(prise en compte du cisaillement transversal) ou avec les matériaux incompressibles par exemple [34].

En utilisant l'intégration réduite, les matrices de forme  $\underline{\underline{h}}^{11}$  et  $\underline{\underline{h}}^{01}$  sont quand même intégrées exactement. Seule la matrice  $\underline{\underline{h}}^{00}$  est modifiée. Dans le cas des polynômes de Lagrange de degré 1, on trouve  $\hat{\underline{\underline{h}}}^{00} = \frac{1}{4}\underline{\underline{I}}$ . Avec cette approximation, la matrice d'amplification donnée en IV.59 s'avère avoir un rayon spectral toujours inférieur à l'unité, comme on peut le voir sur la figure IV.7(a). On a donc une stabilité inconditionnelle. Ainsi, le calcul des multiplicateurs ne diverge plus, comme le confirme les résultats donnés figure IV.7(b).

En utilisant l'intégration réduite de  $\underline{\underline{h}}^{00}$ , l'erreur d'amplitude du schéma n'est pas véritablement affectée. Le nouveau schéma possède toujours un faible taux d'amortissement numérique ( $0,99 < \rho < 1$ ), ce qui induit une légère erreur d'amplitude dans le calcul des exposants. L'erreur de périodicité est plus importante et se trouve doublée lorsqu'on utilise l'intégration réduite. Cette erreur de périodicité s'avère responsable du décalage fréquentiel entre les multiplicateurs de Floquet calculés et exacts (*i.e.* décalage des pics dans les courbes des figures IV.5 et IV.7(b)).

Si on augmente le nombre d'éléments finis temporels, l'erreur d'amplitude est sensiblement affectée (comme on peut le voir figure IV.7(a), passer de 6 à 24 éléments finis en temps améliore les résultats pour  $\omega > 0,2618$  et les dégrade pour  $\omega < 0,2618$ ). Cependant, l'erreur d'amplitude chute de manière importante, comme on le note sur la figure IV.8 qui montre l'évolution des parties réelles et imaginaires des multiplicateurs de Floquet calculés et exacts.

Il faut signaler que ce n'est pas parce que les coefficients de Floquet déterminés sont inexacts que la solution périodique est fautive. En effet, la figure IV.9 montre la compa-

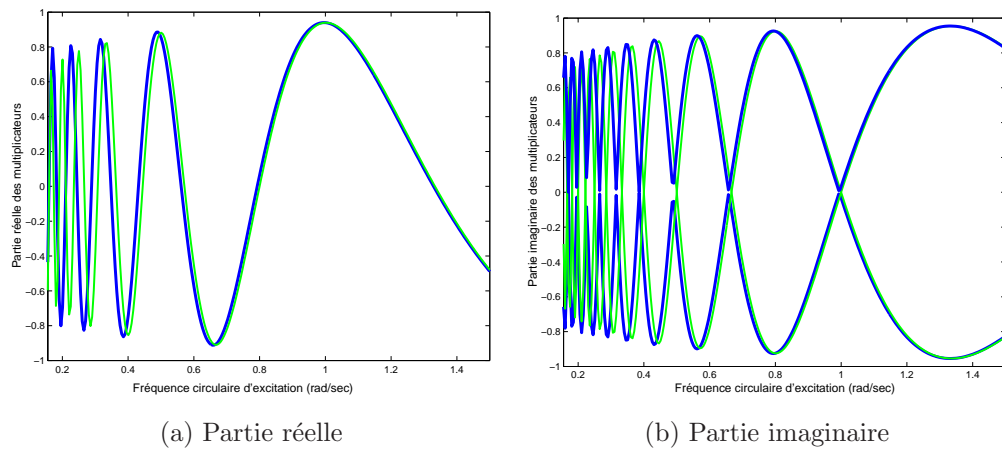


FIG. IV.8: *Evolution des multiplicateurs de Floquet ( $n = 24$ )*

raison entre la solution exacte à  $\omega = 0,5 \text{ rad/sec}$  et deux solutions approchées. Avec 24 éléments la solution approximée correspond parfaitement à la solution exacte. Avec 6 éléments, malgré l'inexactitude des multiplicateurs, la solution trouvée approche assez bien la solution exacte.

Le calcul des multiplicateurs de Floquet nécessite donc un traitement spécial au niveau de la quadrature pour éviter la divergence à partir d'un certain seuil de fréquence. Ce traitement est une intégration réduite de la matrice de forme relative à la raideur,  $\underline{h}^{00}$ . L'inexactitude de l'intégration permet de stabiliser numériquement le calcul des multiplicateurs sans affecter pour autant la précision de la réponse périodique. Elle accroît cela dit le déphasage en basse fréquence des multiplicateurs déjà observé avec l'intégration exacte, déphasage qui disparaît rapidement en augmentant le nombre d'éléments. Dans l'exemple considéré, on a pris des polynômes de degré 1 car il s'agit du pire des cas. Si on prend des polynômes de degré supérieur, le principe pour contourner le problème de divergence reste le même, et on remarque que les erreurs induites deviennent d'autant plus faibles que le degré est élevé.

## IV.3 Applications de la méthode

### 3.1 Exemples de validation

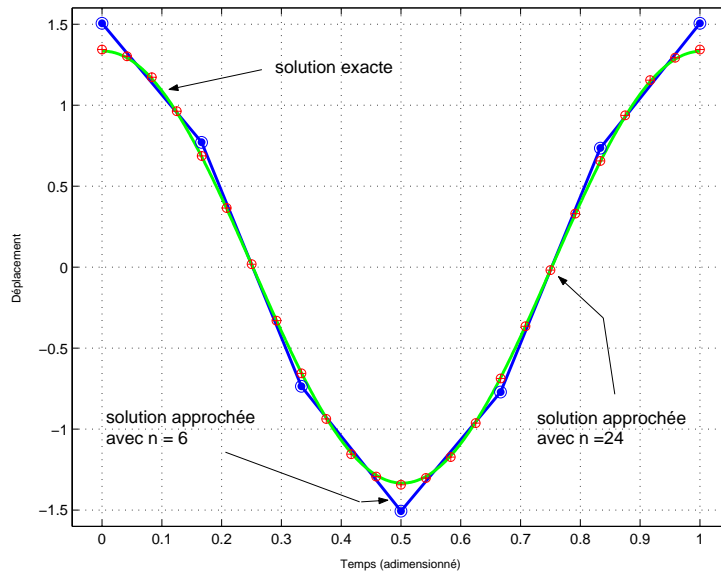


FIG. IV.9: *Solution obtenue à 0,5 rad/sec (avec des polynômes de degré 1)*

### 3.1a Calcul des multiplicateurs de Floquet

L'exemple de l'oscillateur à raideur bi-linéaire traité dans le paragraphe 2.2c de ce chapitre est repris ici. Mais on suppose qu'il existe un décalage  $\delta$ , si bien que l'équation du mouvement s'écrit maintenant

$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k_1.x + H(x - \delta).k_2.(x - \delta) = f.\cos(\omega.t) \quad (\text{IV.60})$$

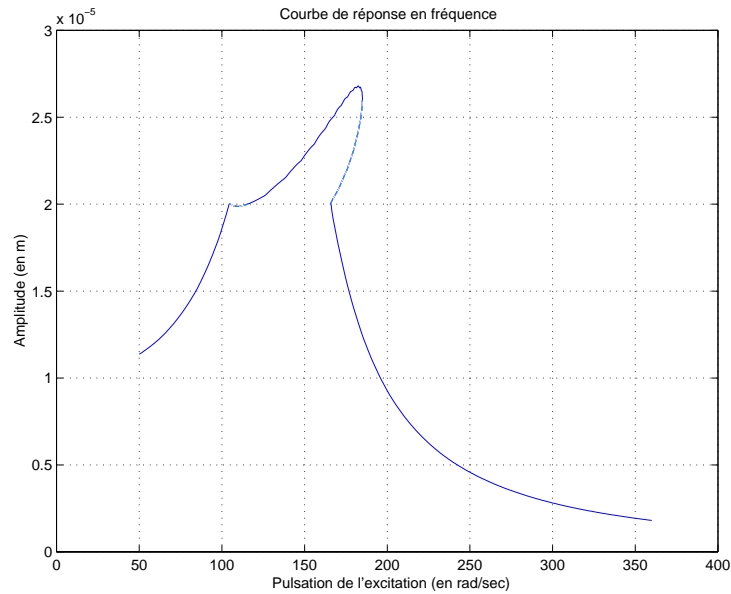
On utilise les valeurs suivantes pour les paramètres physiques

$$m = 50, \quad c = 2000, \quad k_1 = 10^6, \quad k_2 = 10^8, \quad \delta = 2.10^{-5}, \quad f = 10$$

La courbe de réponse en fréquence, calculée avec la méthode des éléments finis en temps en prenant 32 éléments et des polynômes de degré 1, est donnée figure IV.10.

La résonance apparaît à 180 *rad/sec* (30 *Hz*). A cause de la prise de contact de la masse avec le deuxième ressort de raideur plus importante, on observe un décalage du pic de résonance vers des fréquences plus élevées. La prise de contact s'établit vers  $\omega \approx 100$  *rad/sec* lorsque la fréquence augmente et 165 *rad/sec* lorsque la fréquence diminue. Quant à la perte de contact, elle s'effectue vers 180 *rad/sec* en augmentant et 100 *rad/sec* en diminuant. Les lignes en pointillés représentent les solutions instables.

La première solution instable est délimitée par deux bifurcations de type *cyclic fold* ayant lieu à  $\omega \approx 165$  et 180 *rad/sec*. Dans cette plage fréquentielle, deux solutions *T*-périodiques co-existent. La seconde solution instable se localise entre 105 et 115 *rad/sec*.

FIG. IV.10: *Courbe de réponse en fréquence*

Cette zone d'instabilité provient d'une bifurcation par dédoublement de période clairement mise en évidence par l'analyse de la stabilité et qui donne naissance à une solution  $2T$ -périodique.

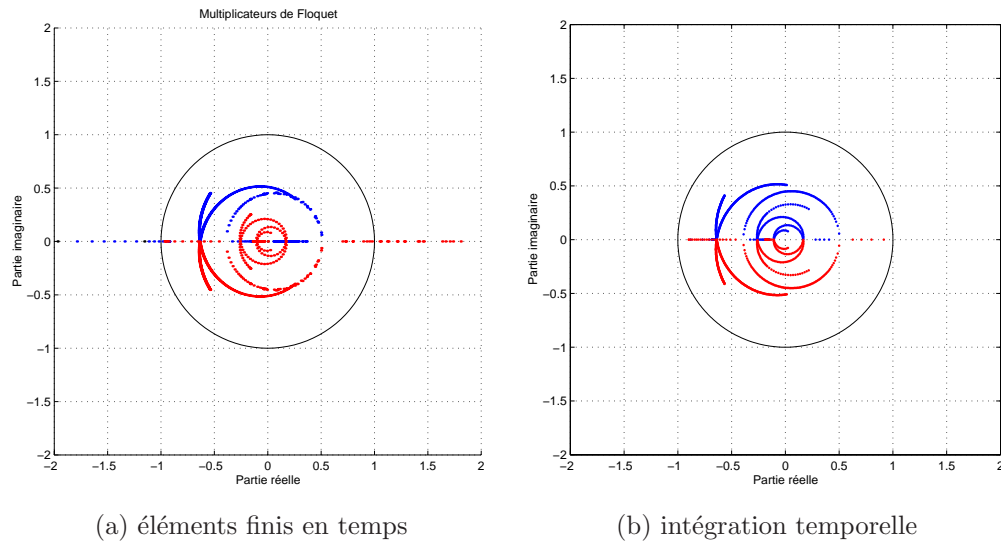
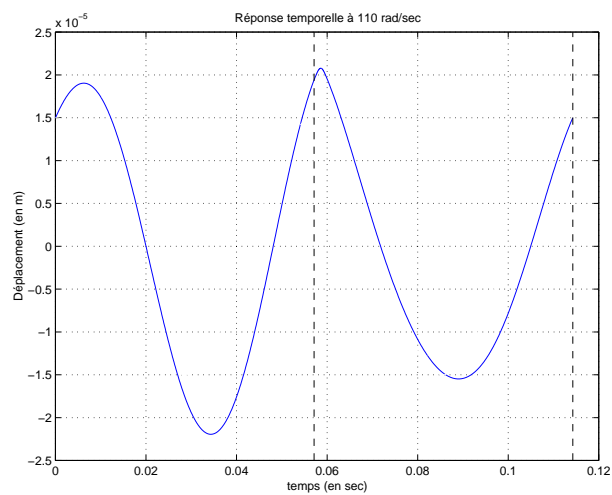
La figure IV.11(a) montre l'évolution des multiplicateurs de Floquet. Ces derniers ont été calculés à partir de la méthode des éléments finis en temps ainsi que par l'intégration temporelle afin de mettre en avant la bonne corrélation. On note effectivement l'existence des bifurcations de type *cyclic fold* et dédoublement de période.

L'existence d'une solution  $2T$ -périodique stable avant le résonance principale est assez rare. En effet, de telles solutions apparaissent en général à 2 fois la fréquence de résonance, fréquence à laquelle on trouve éventuellement des résonances sous-harmoniques. Mais l'intégration temporelle effectuée à  $\omega = 105 \text{ rad/sec}$  confirme bien la nature  $2T$ -périodique de la solution (*cf.* figure IV.12 où les lignes verticales sont ajoutées pour montrer les phases 0 modulo  $T$  de l'excitation).

### 3.1b Intégration de termes non-linéaires en vitesse

Afin de montrer l'application de la méthode des éléments finis en temps lorsque la force non-linéaire dépend de la vitesse, on traite ici le cas d'un rotor flexible de type Jeffcott supportés par deux paliers rigides équipés d'amortisseurs identiques de type *squeeze film*. Pour la discrétisation spatiale, trois noeuds sont utilisés (*cf.* figure IV.13). Etant donné



FIG. IV.11: *Multiplicateurs de Floquet*FIG. IV.12: *Réponse temporelle à 110 rad/sec*

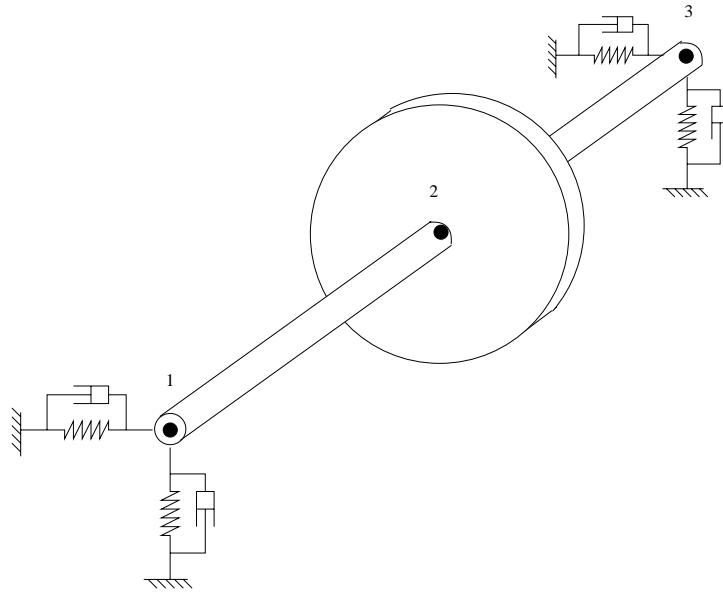


FIG. IV.13: Rotor de Jeffcott sur paliers rigides avec amortisseur à film d'huile

la symétrie du problème, on se limite aux *ddl* des noeuds 1 et 2 [149]. L'équation du mouvement s'écrit

$$\begin{cases} m_1.\ddot{x}_1 + k.(x_1 - x_2) = f_1^x(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1) \\ m_1.\ddot{y}_1 + k.(y_1 - y_2) = f_1^y(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1) \\ m_2.\ddot{x}_2 + c.\dot{x}_2 + k.(x_2 - x_1) = f^{bal}.\cos(\omega t) \\ m_2.\ddot{y}_2 + c.\dot{y}_2 + k.(y_2 - y_1) = f^{bal}.\sin(\omega t) \end{cases} \quad (\text{IV.61})$$

avec  $m_1 = 15 \text{ kg}$  et  $m_2 = 45 \text{ kg}$  (masses réparties sur les noeuds 1 et 2),  $c = 360 \text{ Nm/s}$  (amortissement visqueux au niveau du disque,) et  $k = 3.10^7 \text{ N/m}$  (demi-raideur de l'arbre).

Les forces  $f_1^x$  et  $f_1^y$  sont les forces non-linéaires générées par le film d'huile. Le champ de pression dans celui-ci s'obtient à partir de l'équation de Reynolds [143]. Sous l'hypothèse de palier court (hypothèse avancée en pratique pour des ratios de  $L/D$  inférieurs à 1/4), on peut considérer que la distribution de pression est parabolique (suivant la longueur). Dans le cas d'un régime à vitesse de rotation constante, l'équation de Reynolds donne alors

$$P(z, \theta) = \frac{12\mu}{h^3} \cdot \left( z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \cdot \left( e.\dot{\phi}.\sin(\theta) + \dot{e}.\cos(\theta) \right) \quad (\text{IV.62})$$

qui, intégrée sur la longueur, conduit à

$$P(\theta) = -2\mu.L^3 \cdot \frac{e.\dot{\phi}.\sin(\theta) + \dot{e}.\cos(\theta)}{(C + e.\cos(\theta))^3} \quad (\text{IV.63})$$

où  $\mu$  représente la viscosité dynamique de l'huile,  $e = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  le déplacement radial au niveau du palier,  $h = C + e.\cos(\theta)$  l'épaisseur du film d'huile,  $C$  le jeu radial,  $L$  la

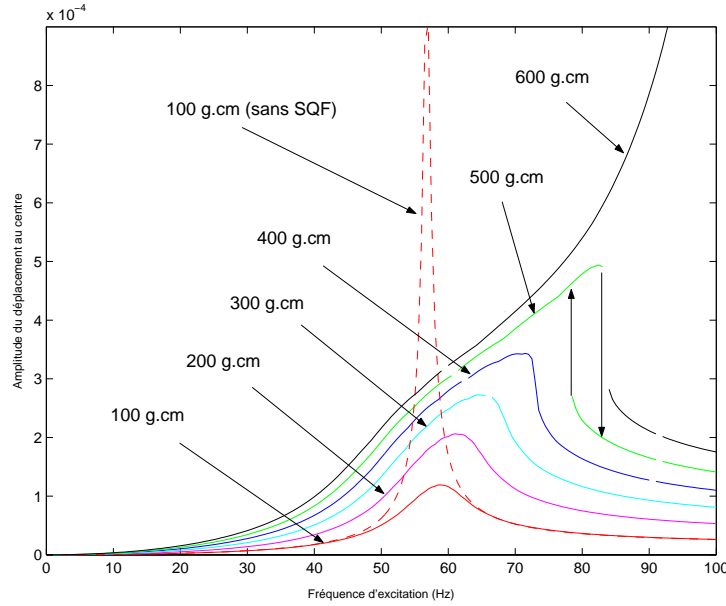


FIG. IV.14: Courbe de réponse à balourd

longueur du squeeze et  $R$  son rayon. Les forces radiales et tangentielles exercées sur le rotor sont donc

$$\begin{cases} f_r = \int_0^{2\pi} R.P(\theta). \cos(\theta) d\theta \\ f_t = \int_0^{2\pi} R.P(\theta). \sin(\theta) d\theta \end{cases} \quad (\text{IV.64})$$

Lors de l'intégration, réalisée par la règle des trapèzes (en prenant 200 intervalles), uniquement la contribution des pressions positives est prise en compte. Exprimées dans le repère fixe, ces forces s'écrivent encore

$$\begin{cases} f_1^x = (f_r \cdot x_1 - f_t \cdot y_1)/e \\ f_1^y = (f_r \cdot y_1 + f_t \cdot x_1)/e \end{cases} \quad (\text{IV.65})$$

Les valeurs utilisées sont les suivantes :  $L = 40 \text{ mm}$ ,  $R = 38 \text{ mm}$ ,  $C = 300 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$  et  $\mu = 0,0163$ .

Sur la figure IV.14 sont reportées plusieurs courbes de réponse pour différentes valeurs de balourd allant de 100 à 600  $g.cm$ . Toutes ces courbes ont été calculées en utilisant 6 éléments finis en temps avec des polynômes de degré 4. Seules les parties stables sont représentées.

La réponse au balourd minimal de 100  $g.cm$  est donnée sans et avec amortisseur à film d'huile (ligne en pointillé et ligne continu). L'utilisation de cet amortisseur permet dans ce cas de diminuer par 9 le niveau maximal de déplacement atteint à la vitesse critique. Au fur et à mesure que le niveau de balourd augmente, le pic de réponse tend

à se décaler vers la droite, traduisant la rigidification du système. Cela est lié au fait que les déplacements devenant plus importants le film d'huile se trouve plus en plus comprimé sur la circonférence où la distance radiale entre rotor et stator est minimale, cette surpression engendrant évidemment une augmentation de la raideur locale. A partir d'un certain niveau (un peu supérieur à 400  $g.cm$ ), des sauts de réponse apparaissent. Ces sauts sont précisés sur la courbe de réponse au balourd de 500  $g.cm$  par deux flèches qui délimitent une zone parfois dénommée zone de bistabilité. La flèche dirigée vers le bas (haut) indique le saut survenant lors d'une accélération (décélération). En augmentant le balourd jusqu'à 600  $g.cm$  on se rend compte que l'efficacité de l'amortisseur s'amointrit (évolution non-linéaire du niveau maximum de déplacement au centre du rotor en fonction du balourd).

## 3.2 Applications avec le modèle de roulement 2D

### 3.2a Cas d'un système rotor / stator à 4 $ddl$

Le modèle simplifié du paragraphe 3.1 est traité ici avec la méthode des éléments finis en temps. Le roulement est modélisé par le modèle 2D. Le roulement comporte 8 billes. Le diamètre externe de la bague intérieure est de 10  $cm$ , celui des billes de 1  $cm$ .

Le jeu radial du roulement est supposé égal à 20  $\mu m$ . La figure IV.15 montre les courbes de réponse à balourd obtenues pour deux valeurs de raideur de contact différentes:  $10^7$  et  $10^8$   $N/m$ . Les courbes en trait continu (respectivement pointillé) dont l'amplitude de vibration est la plus importante correspondent au déplacement horizontal (respectivement vertical) du rotor, les courbes de plus faible amplitude correspondent à celui du stator. Dans le cas  $K_c = 10^7$   $N/m$ , la fréquence critique se trouve aux alentours de 40  $Hz$  (2400  $tr/min$ ) et présente un effet durcissant. Pour une raideur plus importante,  $K_c = 10^8$   $N/m$ , le pic de résonance est bien entendu décalé vers la droite et se trouve maintenant à 50  $Hz$  (3000  $tr/min$ ). Il ne présente cependant plus d'effet durcissant. Les courbes en trait plein et en trait pointillé sont quasiment confondues. Cela signifie que les orbites sont ou restent globalement circulaires. Mais cela n'est pas vrai sur toute la plage de fréquence, comme il sera montré plus tard.

Sur la figure IV.16 sont représentées les courbes de réponse à balourd obtenues avec une raideur de contact de  $10^8$   $N/m$  et jeu radial de 20 et 60  $\mu m$ . Les courbes sont analysées sur l'intervalle 10 - 22  $Hz$  (600 - 1320  $tr/min$ ). L'allure de la courbe sur 10 - 100  $Hz$  (600 -

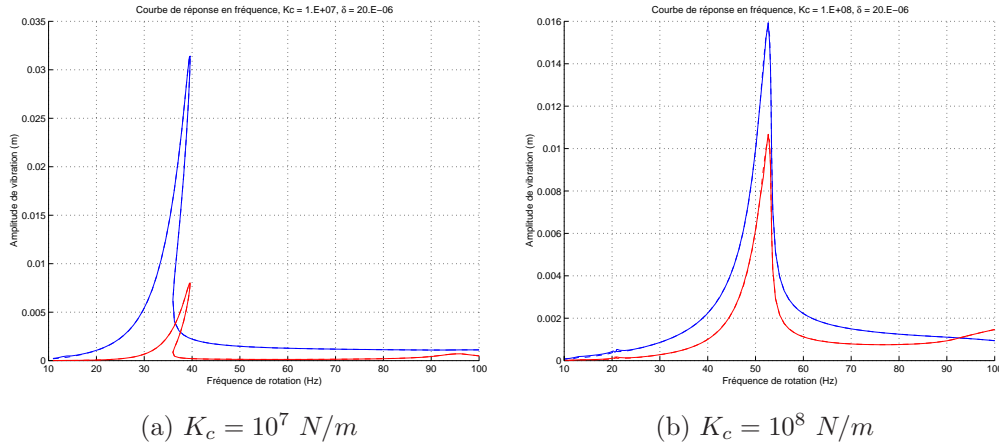


FIG. IV.15: Courbes de réponse à balourd pour un jeu radial de  $20 \mu\text{m}$

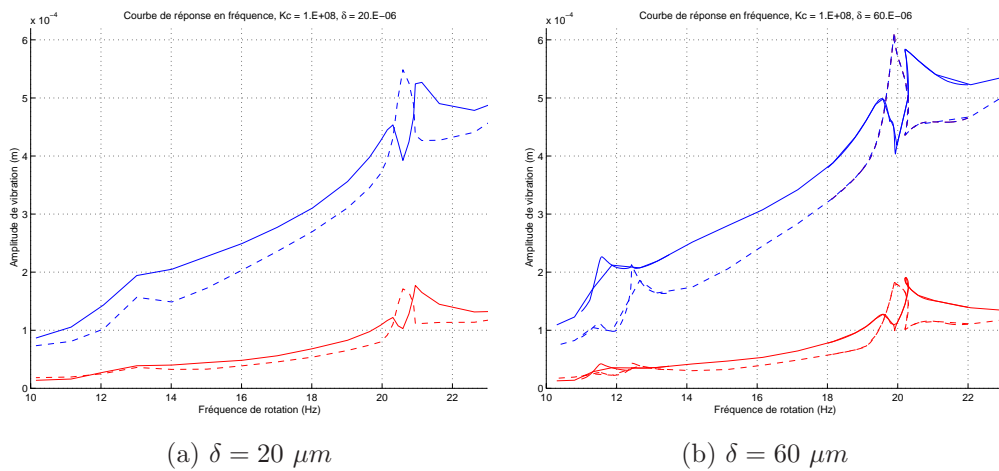


FIG. IV.16: Courbes de réponse à balourd pour une raideur de  $10^8 \text{ N/m}$

6000  $tr/min$ ) pour un jeu de  $60 \mu\text{m}$  est en effet identique à celle pour un jeu de  $20 \mu\text{m}$  (cf. figure IV.15). On remarque tout d'abord que les orbites ne sont pas du tout circulaires dans cette plage de fréquence, les amplitudes de vibration pour les déplacements horizontaux et verticaux étant bien distincts, surtout vers  $21 \text{ Hz}$  ( $1260 \text{ tr/min}$ ). Il apparaît ensuite que l'augmentation du jeu radial donne naissance à un nouveau pseudo-pic de réponse vers  $12 \text{ Hz}$  ( $720 \text{ tr/min}$ ). Quasi-inexistant dans le cas  $\delta = 20 \mu\text{m}$ , il est perceptible lorsque le jeu atteint  $\delta = 60 \mu\text{m}$ . Dans le même temps, cette augmentation du jeu amplifie l'effet non-linéaire sur le pseudo-pic présent à  $21 \text{ Hz}$ . Ce dernier présente maintenant des petites zones d'instabilité provenant de bifurcations de type *cyclic fold*.

Afin de valider les résultats obtenus avec la méthode des éléments finis en temps, une comparaison avec différents schémas d'intégration temporelle a été effectuée. La figure

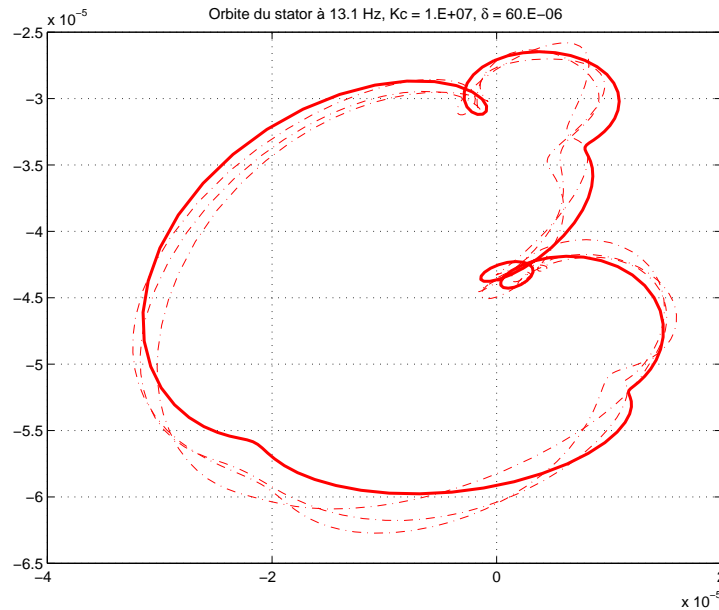


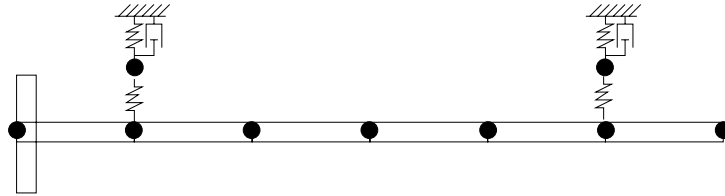
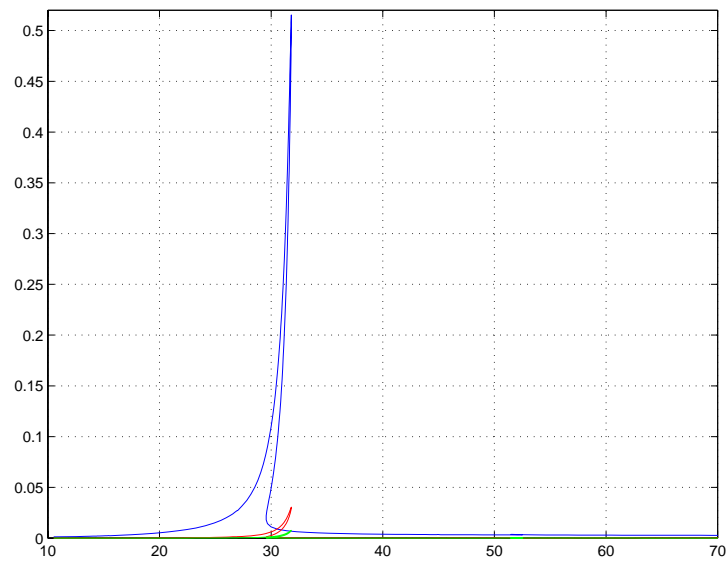
FIG. IV.17: *Orbite du stator à 13 Hz ( $K_c = 10^7$  N/m,  $\delta = 60$   $\mu$ m)*

IV.17 montre le résultat de l'intégration temporelle avec l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4/5 sur quelques périodes de rotation, après une transition d'une centaine de périodes (trait pointillé). Le régime permanent n'est pas encore totalement atteint. On constate que la solution périodique obtenue par la méthode des éléments finis en temps (en trait continu) est bien en accord avec les résultats d'intégration temporelle.

### 3.2b Cas d'un modèle éléments finis

Afin de montrer l'applicabilité de la méthode proposée sur des modèles éléments finis, on étudie maintenant un arbre flexible discrétisé en 7 éléments finis hermitiens de type poutre. Les supports-paliers sont modélisés par une masse, un ressort et un amortisseur visqueux, de valeurs respectives 7 kg, 15 MN/m et 40 N.s/M. Le modèle est représenté schématiquement figure IV.18. On considère 4 *ddl* par noeud : les deux translations horizontales et verticales et les deux rotations associées (déplacement axial et torsion non pris en compte). Le modèle est alors constitué de 36 *ddl*.

On suppose un jeu radial de 20  $\mu$ m et on prend une raideur de contact de  $10^7$  N/m. Les courbes de réponse à balourd sont montrées figure IV.19 (par ordre d'amplitude décroissante : amplitude de vibration du disque, celle du support-palier du roulement à billes, et celle du support-palier du roulement à rouleaux).

FIG. IV.18: *Modèle éléments finis utilisé*FIG. IV.19: *Courbes de réponse à balourd*

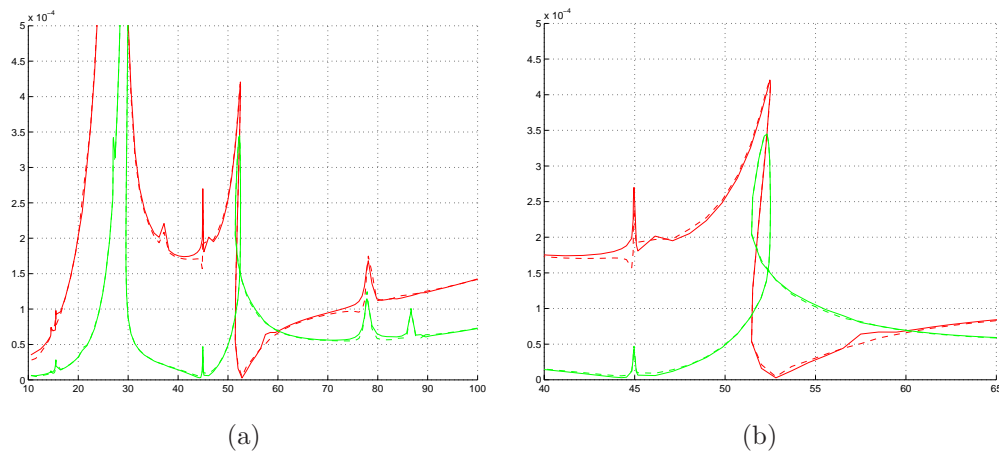
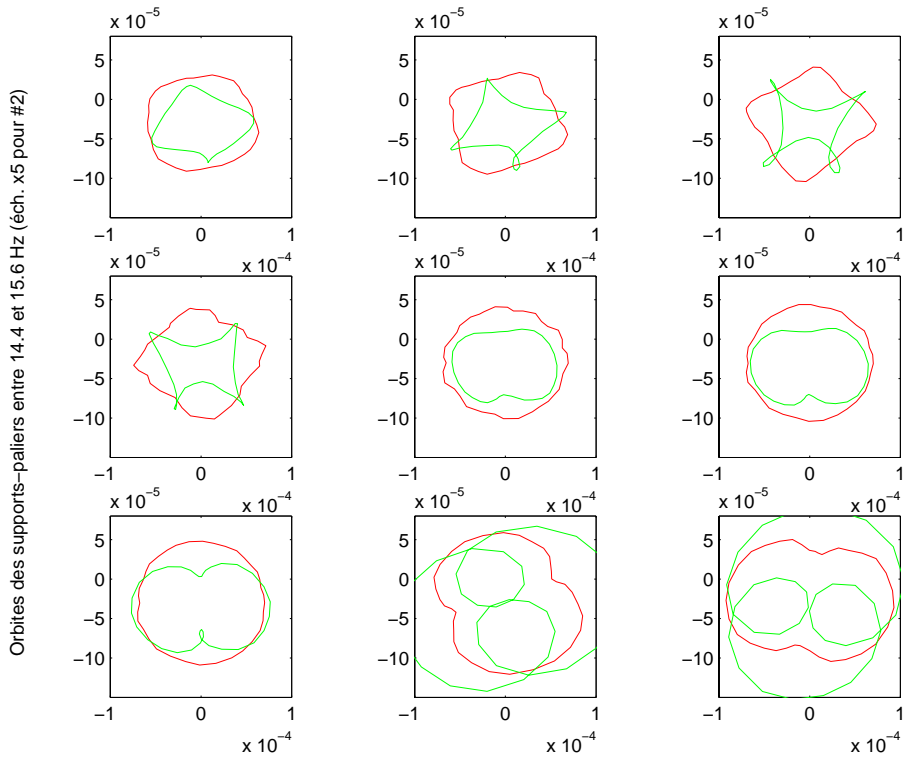
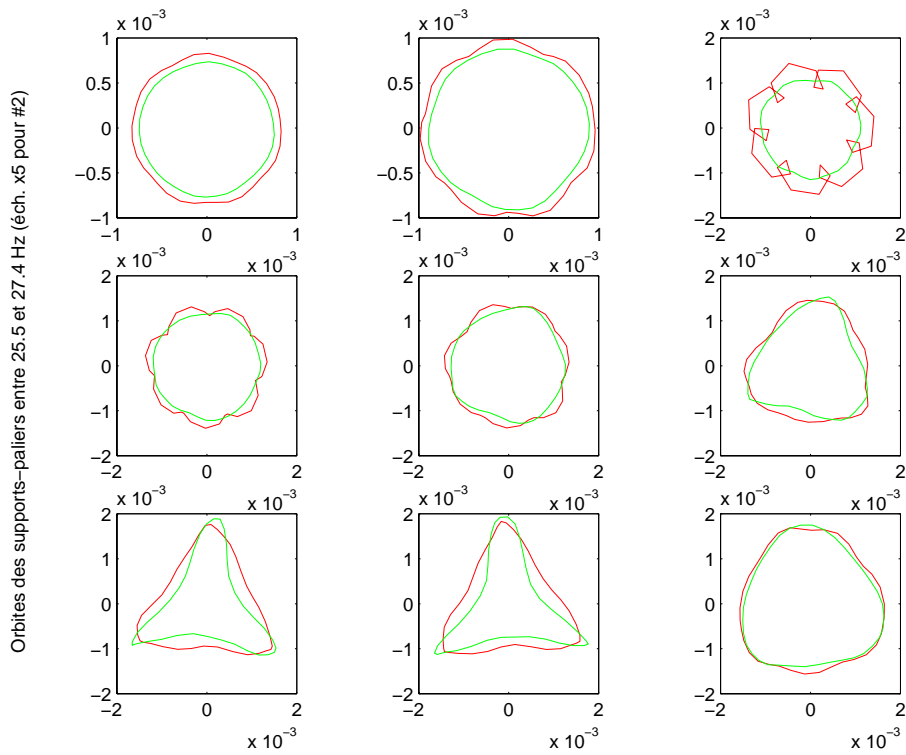


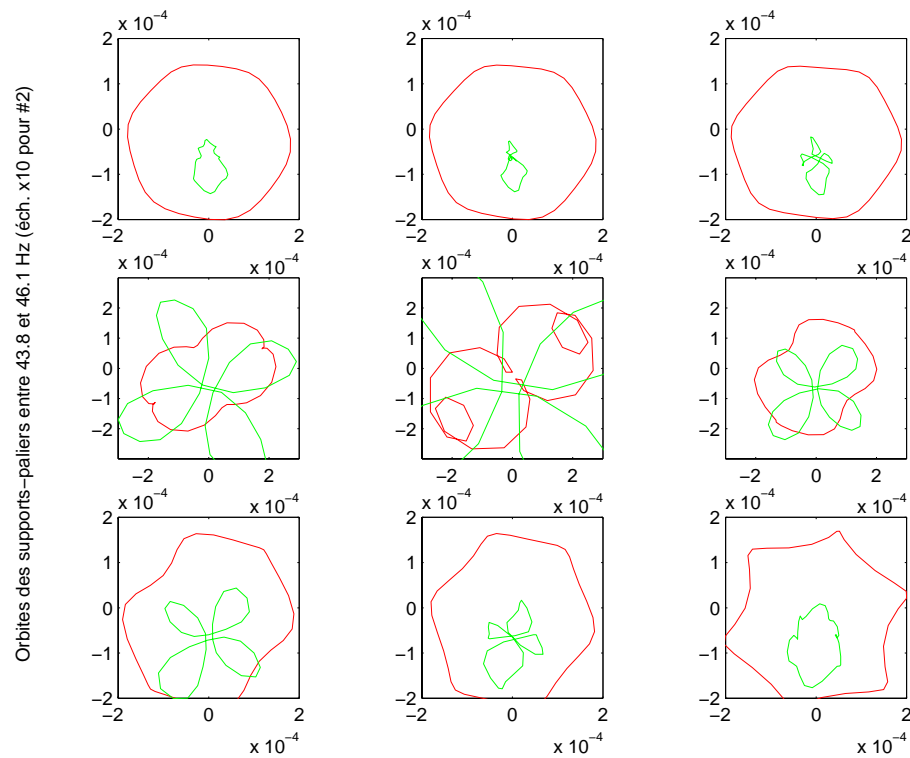
FIG. IV.20: *Courbes de réponse à balourd (supports-paliers)*

L'effet durcissant conduit à deux fréquences où l'on observe un saut de réponse, respectivement 29,6 et 31,8  $Hz$ . On remarque aussi deux autres sauts de réponse à 51,5 et 52,5  $Hz$  (*cf.* IV.20(b)). S'intéressant aux vibrations des paliers uniquement, on note que, bien que l'amplitude de vibration soit moins importante que celle du disque (ce qui est normal puisqu'il s'agit ici d'un mode d'arbre), il existe de nombreux faibles pics de réponse (*cf.* IV.20(a)).

Les figures IV.21 à IV.24 montrent l'évolution des orbites des supports-paliers au passage de ces pics de réponse.

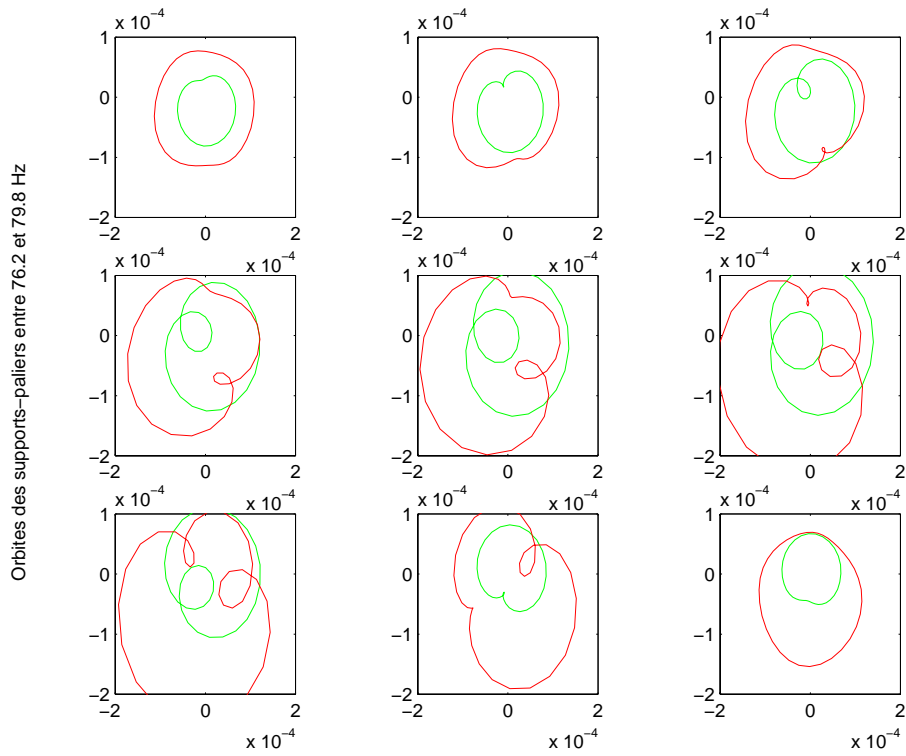
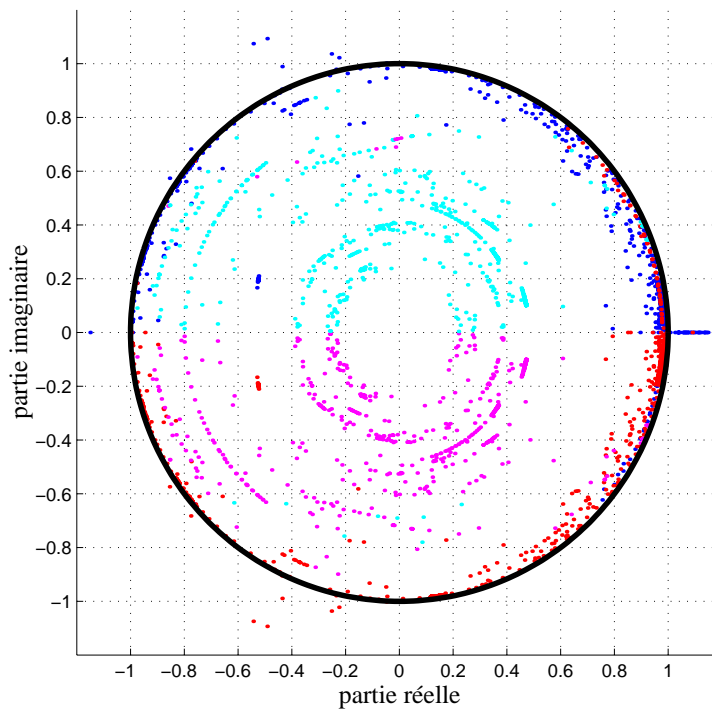


FIG. IV.21: *Orbites entre 14,4 et 15,6 Hz*FIG. IV.22: *Orbites entre 25,5 et 27,4 Hz*

FIG. IV.23: *Orbites entre 43,8 et 46,1 Hz*

Il est intéressant de noter que certaines orbites de la figure IV.21 présentent une forme à peu près similaire à celles trouvées lors de l'étude d'un système à 4 *ddl* (cf. figure III.14). Sur la figure IV.22 on remarque que vers 26 Hz l'orbite du support-palier du roulement à billes possède une géométrie assez complexe. Il en est de même vers 44 Hz pour celle du support-palier du roulement à rouleaux. Un nombre plus important d'éléments aurait permis d'obtenir une courbe un peu plus lissée.

Comme déjà évoqué, le système montre clairement des bifurcations de type *cyclic fold*. Celles-ci se retrouvent bien lors de l'étude de la stabilité. En effet, sur figure IV.25 où quelques multiplicateurs de Floquet sont affichés, on observe non seulement des bifurcations de type *cyclic fold*, mais aussi des bifurcations par dédoublement de période et des bifurcations secondaires de Hopf. Le système présente donc des solutions  $2T$ -périodiques et quasi-périodiques stables sur de faibles plages de fréquence.

FIG. IV.24: *Orbites entre 76,2 et 79,8 Hz*FIG. IV.25: *Multiplicateurs de Floquet*

## Conclusion

Ce chapitre a exposé les aspects théoriques et pratiques de la méthode des éléments finis en temps. Nous avons eu recours à des notations faisant intervenir le produit de Kronecker, ce qui nous a permis de la présenter de manière simple et élégante. Dans la pratique cependant, aucun produit de Kronecker n'est réalisé. Nous avons proposé une nouvelle technique pour gérer les termes non-linéaires. Celle-ci est basée sur l'interpolation des forces non-linéaires et permet d'améliorer sensiblement le temps de calcul sans perdre en précision. Cette méthode permet non seulement de trouver les solutions périodiques mais elle permet d'analyser de manière quasi-immédiate la stabilité de ces solutions. Des problèmes de divergence lors de l'analyse de la stabilité ont cependant été soulevés et expliqués. Mais il a été possible de les résoudre en utilisant l'intégration réduite.

La méthode des éléments finis en temps se prête sans problème à la technique de condensation classiquement utilisée avec les méthodes fréquentielles. Les systèmes algébriques auxquels elle conduit font de plus intervenir des matrices à structure très creuses. Elle est donc bien adaptée à l'étude des systèmes de grande taille. Il convient de souligner que même la matrice jacobienne possède une structure creuse, contrairement à la méthode de balance harmonique incrémentale pour laquelle la matrice jacobienne est, dans le cas général, pleine. L'explication réside dans le fait que pour la méthode des éléments finis en temps on travaille localement alors que pour les méthodes fréquentielles les fonctions d'interpolation utilisées, *i.e.* les fonctions harmoniques, sont définies sur la période entière : les non-linéarités couplent alors les harmoniques entre elles.

On peut d'ailleurs montrer que la méthode de balance harmonique incrémentale est un cas particulier de la méthode des éléments finis en temps. Dans ce cas, il s'agit d'un seul élément fini temporel (la période entière) et les fonctions de forme et test sont des harmoniques. Bien sûr, on se place dans ce cas dans une approche de type *éléments finis hiérarchiques*, le raffinement de maillage s'effectuant alors par ajout des fonctions supplémentaires (raffinement de type  $p$  et non  $h$ ).





# Chapitre V

---

---

## Partie expérimentale

### *le banc Dynamique D'Ensemble*

---

---

De toutes les choses auxquelles on ne croit pas,  
l'expérience est celle à laquelle on croit le moins.

**Félicité Robert de Lamennais**

## Introduction

Les roulements sont des éléments particulièrement sollicités. Leur durée de vie peut par conséquent être limitée. Cependant, il n'est pas réalisable d'ausculter avant chaque vol tous les roulements des moteurs, ni même de changer régulièrement les roulements, tâche qui demanderait de déposer entièrement le moteur. Il est donc intéressant de pouvoir remonter à la valeur du jeu interne à l'aide d'essais *in-situ*. Cela offrirait éventuellement la possibilité de mettre en évidence certaines avaries dans les roulements. On conçoit ainsi l'importance de disposer de modèles intégrant le jeu radial.

Après avoir apporté une modélisation mathématique des roulements qui prend bien en compte ce paramètre, il s'agit maintenant de voir si le modèle adopté est pertinent. Cela passe évidemment par une validation expérimentale. Nous avons de ce fait dimensionné un banc d'essais nommé banc *Dynamique D'Ensemble*. Ce chapitre présente successivement les caractéristiques principales de ce banc ainsi que les motivations de sa construction, les essais préliminaires d'analyse modale et les premiers résultats concernant son exploitation.

## V.1 Description générale

L'objectif principal du banc *Dynamique D'Ensemble* (DDE) est d'apporter une aide à la compréhension de phénomènes physiques observés sur moteur. Il s'agit donc de reproduire au mieux le comportement réel d'un moteur. Il ne faut pas perdre de vue que ce banc est avant tout une machine d'essais. A ce titre, sa conception demande qu'il reste le moins complexe possible tout en demeurant le plus représentatif de la réalité.

### 1.1 Motivations de sa construction

Les motivations de la construction du banc *dynamique d'ensemble* sont doubles. D'une part, il se doit de répondre à de nombreuses questions que soulèvent certains phénomènes observés sur moteur d'avion. D'autre part, il doit également permettre d'effectuer de la recherche à moyen terme, indispensable pour l'innovation technologique.

### 1.1a Les enjeux actuels

L'enjeu premier du banc DDE est l'étude de l'influence des jeux de roulement sur la dynamique des rotors. Il s'agit de relever la signature de ces non-linéarités, dans une optique d'identification. L'intérêt se porte plus particulièrement sur le roulement inter-arbre, élément majeur dans le moteur puisqu'il couple la dynamique des deux rotors et subit, vu sa localisation, des gradients thermiques importants qui influent sur son jeu interne. Ce banc aidera donc à la compréhension des phénomènes liés aux jeux de roulements et servira d'outil de validation des modèles de roulements.

L'exploitation du banc se découpe chronologiquement en trois phases distinctes : une phase mono-rotor BP, une phase mono-rotor HP et une phase bi-rotor. Pour la phase mono-rotor BP, on se soucie principalement du problème de passage de vitesse critique de modes d'arbres. Actuellement, sur moteur réel, les seules vitesses critiques passées correspondent à des modes de carters (faible participation des rotors). Cependant, la tendance est d'utiliser des rotors plus légers, plus souples, la question du passage d'un mode d'arbre devient donc une question importante. La version mono-rotor HP est juste une phase de transition qui servira au recalage du modèle du rotor HP avant de passer en version bi-rotor. Dans cette dernière phase, on s'attachera bien entendu à l'influence du jeu de roulement inter-arbre, mais aussi l'interaction BP/HP dans les cas co- et contra-rotatifs. A l'heure actuelle, les deux rotors sont co-rotatifs. Mais on s'oriente maintenant vers des moteurs à arbres contra-rotatifs qui offrent un meilleur rendement, ce qui soulève la question de l'excitation des modes rétrogrades d'un arbre par un balourd situé sur l'autre.

### 1.1b Un banc promis à évoluer

A moyen et long termes, le banc pourra être adapté pour analyser d'autres phénomènes physiques. Certains de ces aspects ont été pris en compte dès le début de la conception. Ce banc pourra servir à l'étude de l'influence de la dissymétrie des supports-paliers sur la dynamique des rotors, notamment l'excitabilité des modes rétrogrades. A ce titre, un support-palier en forme de treillis, représenté figure V.1, a été étudié. Le roulement vient se loger au centre du treillis qui repose sur deux ou quatre barres. Le treillis étant assez rigide, la raideur apparente au niveau de la fixation du palier n'est autre que celle apportée par les barres. L'avantage d'un tel support est de pouvoir ajuster les raideurs radiales en changeant juste les barres, il offre ainsi la possibilité d'avoir une raideur soit axisymétrique, soit dissymétrique, qui évolue entre  $10^6$  et  $10^8$   $N/m$ . L'utilisation de quatre barres permet



de rigidifier le support axialement. La raideur axiale évolue entre  $10^5$  et  $10^7$   $N/m$ .

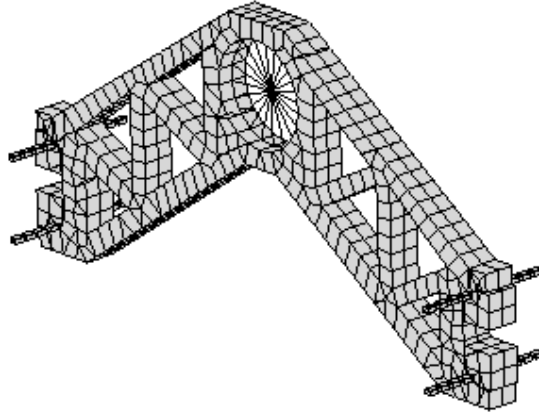


FIG. V.1: *Maillage 3D du support-palier type treillis*

A plus long terme, une autre étude envisageable est celle des contacts disques / carters. Il s'agit d'une part d'étudier les interactions entre le rotor et le stator qui peuvent engendrer divers phénomènes comme les sauts de réponses ou l'existence de réponses non synchrones voire apériodiques, et d'autre part d'étudier le comportement des liaisons de type brides boulonnées et à gorges en V, abondantes dans les carters d'un moteur d'avion.

## 1.2 Caractéristiques principales

Le banc DDE est composé, dans sa version bi-rotor, de deux rotors modélisant les rotors basse et haute pression (BP et HP) d'un moteur d'avion, entraînés par des moteurs électriques et supportés par des supports-paliers axisymétriques de type cage d'écureuil. Sa conception permet de pouvoir modifier la position axiale des supports-paliers pour changer la configuration modale. Les caractéristiques de chacun des éléments ont été choisies pour respecter certaines similitudes avec un moteur réel, de type turboréacteur à double flux.

### 1.2a Les rotors basse et haute-pression

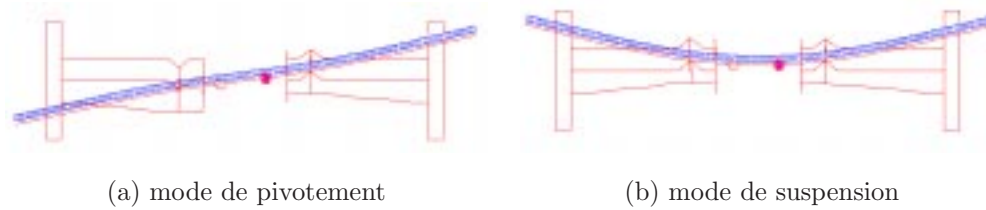


FIG. V.2: Configuration modale du rotor HP

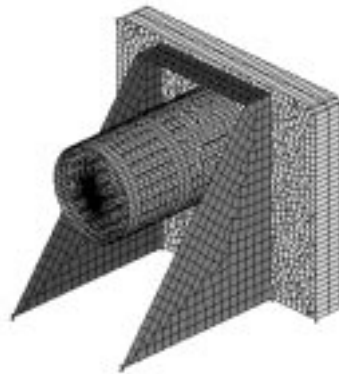
Le rotor BP est composé d'un arbre flexible et d'un disque d'inertie. Le disque représente le disque *fan* à l'entrée du moteur. Ces pièces sont réalisées en acier 35 CD 4. Ce matériau a été retenu pour sa haute limite élastique et bonne tenue en fatigue [9, 10]. L'arbre BP a une forme cylindrique pleine. Sa longueur totale est de 1,70 mètres pour un diamètre de 40 millimètres (excepté à ses extrémités). Ces dimensions proviennent de l'analyse modale théorique du rotor basse pression, étude dont un des objectifs était de dimensionner le rotor BP de manière à retrouver une homothétie entre le premier mode propre des arbres BP du moteur et du banc expérimental vis-à-vis de leur plage de fonctionnement. Les dimensions du disque sont 400 mm pour le diamètre et 20 mm pour l'épaisseur, ce qui permet d'avoir un évasement du diagramme similaire à celui du moteur pour le premier mode.

La non-uniformité de la section (*i.e.* réduction du diamètre aux extrémités) est nécessaire pour les connexions de l'arbre avec d'autres pièces. À une extrémité se trouve un épaulement pour la fixation de la pièce qui maintiendra le palier inter-arbre dans la version bi-rotor. L'autre extrémité se termine par une section d'un diamètre 30 millimètres imposé par le joint d'accouplement moteur. Le passage de la section de 30 à celle de 40 millimètres de diamètre se fait de manière linéaire. Cela forme un emmanchement conique qui permet de venir fixer le disque *fan*. Ce disque est alors maintenu serré grâce à une couronne qui se visse sur la partie filetée précédant le cône d'emmanchement.

Le rotor HP est constitué d'un arbre sur lequel viennent se fixer deux disques qui modélisent l'étage compresseur et l'étage turbine du corps haute pression. Le ratio masse du rotor sur son inertie latérale vaut 0,13, respectant ainsi une similitude avec le rotor HP du moteur. Cet arbre, plus rigide que l'arbre BP, permet d'observer successivement les modes de pivotement et de suspension dans la plage de fonctionnement (*cf.* figure V.2).

### 1.2b Les supports-paliers

Les supports-paliers se composent de deux pièces : la cage d'écureuil cylindrique et le



(a) modèle éléments finis

FIG. V.3: *Support-palier de type cage d'écureuil*

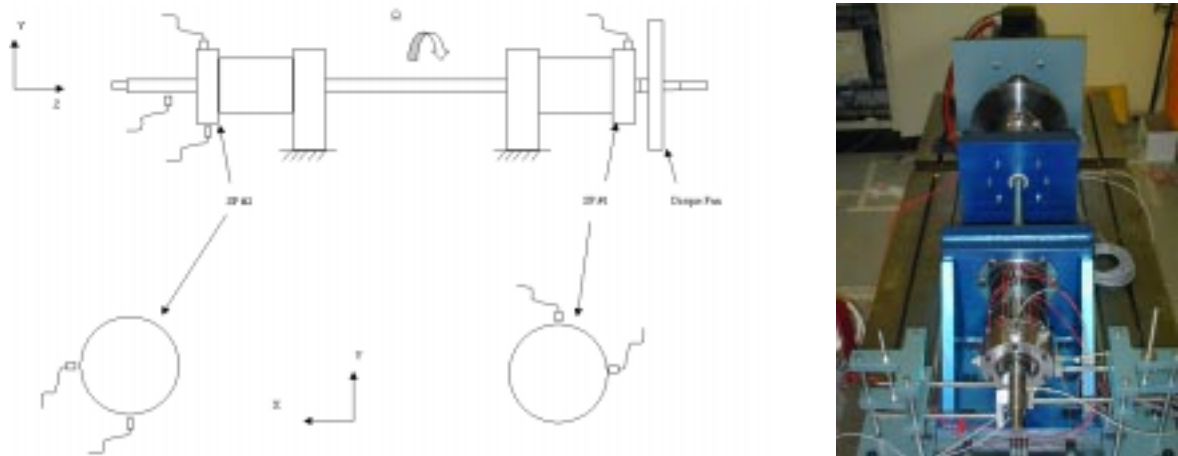
bâti (cf. figure V.3). Leur dimensionnement repose sur un critère de similitude en raideur entre le banc et le moteur d'avion.

La cage d'écureuil cylindrique, qui comporte des jours spécialement usinés pour diminuer la raideur, est solidement fixée sur son bâti par l'intermédiaire d'un ajustement serré et d'écrous. Le bâti se compose de 5 éléments : une plaque, deux raidisseurs en équerre, une entretoise et un socle. La plaque est percée en son centre pour permettre le passage de l'arbre. Les quatre autres éléments sont soudés sur cette plaque. Les équerres permettent d'augmenter considérablement la raideur en flexion de la plaque encastrée à sa base et d'éliminer de la plage fréquentielle de fonctionnement son mode de flexion. L'entretoise permet elle aussi d'augmenter la raideur de la plaque. Le socle est percé de 6 trous non taraudés avec encoche pour la fixation des supports-paliers sur la platine d'acier par l'intermédiaire de tés taraudés.

### 1.3 Equipements

L'instrumentation du banc se scinde en deux catégories. Une partie des capteurs sert aux mesures, réalisées à l'aide du logiciel d'acquisition *Ideas Test*. L'autre est dédiée à la surveillance active. Elle complète le dispositif de sécurité passive.

#### 1.3a Instrumentation

FIG. V.4: *Instrumentation*

La mesure de déplacement s'effectue à l'aide de 4 capteurs de proximité blindés de type *Kaman*, capteurs sans contact fonctionnant sur le principe de mutuelle inductance [5]. Deux d'entre eux visent l'arbre BP et les deux autres visent le support-palier #2 (cf. figure V.4). Pour chaque paire, un capteur est placé horizontalement et le second verticalement, permettant ainsi de reconstruire les orbites. Ces capteurs, étalonnés en usine sur une pièce à surface plane en aluminium, ont été recalibré *in-situ* pour pouvoir viser une pièce en acier de surface non plane [1]. La sensibilité finale des capteurs est de  $0,5 \text{ V/mm}$  pour une étendue de mesure de  $\pm 1 \text{ mm}$ .

Les signaux de mesure de déplacement de l'arbre sont doublés en sortie du conditionneur pour être envoyés non seulement à la baie d'acquisition mais aussi à des relais programmables pour la surveillance. Ces relais ont pour fonction de déclencher un arrêt d'urgence lorsque les seuils qu'on leur a imposé sont atteints. Le rôle de cette surveillance est double : il s'agit d'éviter l'endommagement de la structure ainsi que la détérioration des capteurs.

Des accéléromètres *Endevco*, 6 au total, sont fixés à l'extrémité de la cage d'écureuil cylindrique de chaque support-palier : 4 d'entre eux permettent de relever les accélérations verticales et horizontales à l'extrémité de la cage d'écureuil cylindrique de chaque support-palier, et les 2 autres, placés à  $45^\circ$  et reliés à des relais programmables, sont exclusivement dédiés à la surveillance du niveau vibratoire.

Chaque support-palier est percé au niveau de l'extrémité de la cage d'écureuil pour pouvoir relever la température des bagues extérieures de roulement à l'aide de thermocouples. Ces thermocouples sont destinés uniquement à la surveillance.

Enfin, le moteur électrique, piloté par un tableau de commande mural, est relié à un ordinateur dédié exclusivement à la gestion des paramètres et consignes fournis au mo-

teur. Equipé du logiciel *Parvex*, il offre la possibilité de tracer en temps réel les courbes d'évolution de la vitesse de rotation et du couple moteur, ainsi que leur valeur instantanée. Le suivi de l'évolution du couple moteur permet de détecter l'éventuelle apparition de frottement au niveau des paliers, et ainsi prédire une amorce de grippage. La valeur instantanée de rotation est également affichée sur le tableau de commande mural et envoyée à la baie d'acquisition. Il en est de même pour la valeur de la phase (déplacement angulaire). La mesure de celle-ci est principalement utilisée lors de l'équilibrage.

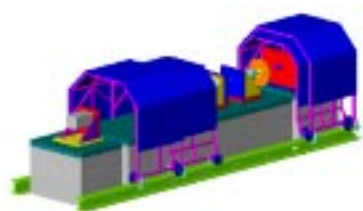
### 1.3b Dispositifs de sécurité

Les thermocouples utilisés sont directement reliés à des relais programmables. Le seuil en tension de ces relais correspond à une température de  $80^{\circ}\text{C}$ , température garantissant à l'utilisateur que la graisse assure toujours correctement sa fonction de lubrification (au-delà de  $85^{\circ}\text{C}$ , la graisse commence à se fluidifier). Ces mesures sont de plus affichées en permanence sur le tableau de contrôle. La visualisation en continu des températures permet d'anticiper tout problème de grippage. En effet, en aval du grippage, le gradient de température devient très élevé, i.e. la température augmente très rapidement. La personne chargée de la surveillance de la température peut donc stopper le moteur dès l'amorce du grippage.

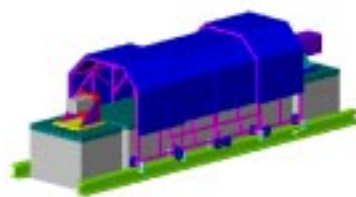
Pour stopper le moteur électrique en cas d'incident, on dispose d'un total de 7 boutons d'arrêt d'urgence, répartis dans la salle d'essais et dans la salle de commande. Ces boutons commandent non seulement l'arrêt immédiat de tous les moteurs mais empêchent la mise ou remise en route du système tant qu'un d'entre eux reste enclenché.

Lors d'un arrêt d'urgence, le couple de freinage du moteur électrique est volontairement limité. En effet, étant donné la grande inertie du rotor BP, le moteur électrique ne doit pas être stoppé trop rapidement afin d'assurer la non-destruction et le maintien du joint d'accouplement. En cas de rupture, les pièces endommagées pourraient être projetées et on se trouverait de plus dans l'impossibilité d'assurer l'arrêt instantané et contrôlé du rotor. La valeur du couple de freinage maximum fixée par la résistance du joint d'accouplement,  $70\text{ N.m}$  [2], a donc été intégrée au niveau des commandes qui contrôlent l'arrêt d'urgence. Le couple appliqué lors d'un arrêt d'urgence est ainsi volontairement limité à  $50\text{ N.m}$ .

En plus de ces arrêts d'urgence qui assurent une sécurité active, plusieurs capotages sont installés pour assurer une sécurité passive. Le premier capotage a pour fonction de stopper toute pièce tournante ou partie de pièce tournante qui se détacherait, une vis d'équilibrage ou un écrou principalement, ainsi que toute pièce qui serait susceptible d'être éjectée, tel un capteur. Il se compose de 4 éléments qui s'emboîtent en coulissant



(a) capotage ouvert



(b) capotage fermé



FIG. V.5: *Capotage principal*

sur des rails, comme montré sur la figure V.5.

Ce capotage principal est réalisé à partir de plaques de *Makrolon* solidement fixées à une ossature métallique en treillis. Le matériau *Makrolon* possède une bonne résistance aux chocs et offre vis-à-vis de l'acier, outre l'avantage d'une masse volumique plus faible, le privilège d'une visibilité totale sur le banc en fonctionnement. En effet, c'est au même titre que le Plexiglass un poly-carbonate et il possède donc la même propriété de transparence. Ces plaques de *Makrolon* sont capables de maintenir une masse de 50 g éjectée à 150 m/s et une masse de 500 g à 47 m/s, ce qui correspond à une énergie absorbée de l'ordre de 560 J.

Deux autres capotages sont installés autour du disque et du joint d'accouplement. Ces capotages locaux, en acier standard, sont destinés à maintenir ces éléments en cas de problème, étant donné que leur masse est trop importante pour qu'ils puissent être stoppés par le capotage principal.

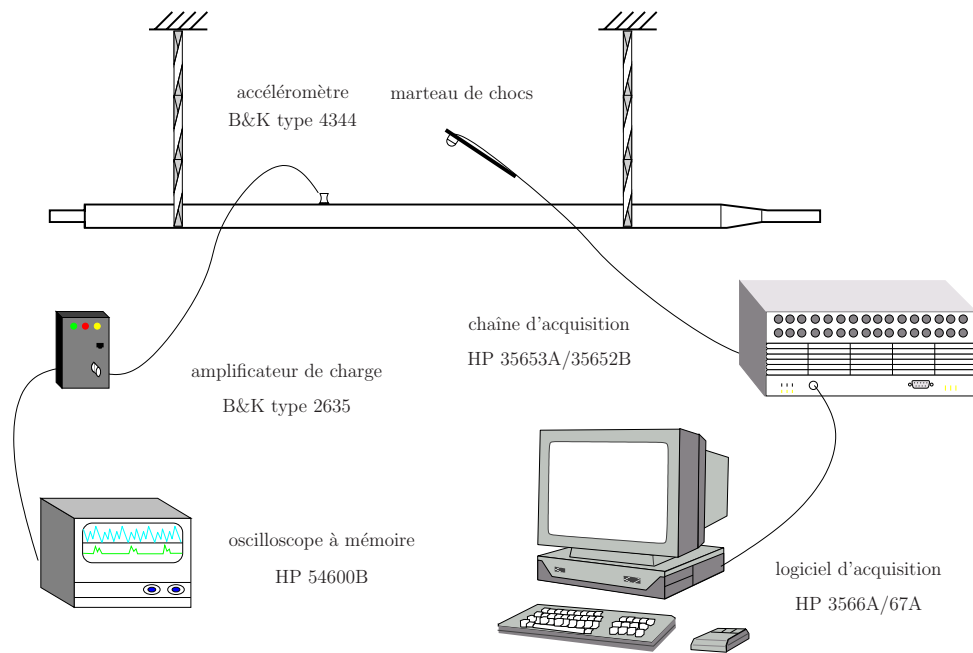
## V.2 Essais préliminaires

Des essais préliminaires d'analyse modale [48] ont été réalisés sur chaque composant du banc dans sa version mono-rotor BP. L'objectif de ces essais est de valider les modèles *métier* utilisés dans la phase de pré-dimensionnement et de caractériser les amortissements modaux.

### 2.1 Essais d'analyse modale

En ce qui concerne l'arbre, le disque, leur assemblage et les supports-paliers, les essais d'analyse modale ont été effectués avec une excitation ponctuelle transitoire (utilisation d'un marteau de choc) en condition d'appuis libre-libre (via des extenseurs suffisamment souples). Pour les supports-paliers, la condition d'appui encastré a aussi été testée. Les analyses modales du rotor monté sur les supports-paliers non accouplé puis accouplé au moteur ont nécessité l'emploi d'un pot vibrant pour obtenir un niveau d'excitation suffisant (essais en aléatoire et en sinus balayé).

La chaîne de mesures se compose principalement d'accéléromètres B&K type 4344 reliés à une chaîne d'acquisition HP 35653A/35652B. L'acquisition des mesures sur PC

FIG. V.6: *Synopsis de la chaîne de mesures utilisée pour les essais d'analyse modale*TAB. V.1: *Amortissements modaux*

Essais	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Arbre BP	$2.10^{-4}$	$7.10^{-4}$	$1.10^{-3}$	$3.10^{-4}$
Disque Fan	$3.10^{-4}$	$5.10^{-4}$	$4.10^{-4}$	-
Rotor BP	$9.10^{-4}$	$3.10^{-3}$	-	-
Supports-paliers	$3.10^{-5}$	$8.10^{-5}$	-	-
Banc non accouplé	$1.10^{-2}$	$1.10^{-2}$	-	-
Banc accouplé	$4.10^{-2}$	$5.10^{-2}$	$5.10^{-3}$	$3.10^{-2}$

s'effectue via l'utilisation du logiciel HP 3566A/67A. La synoptique de cette chaîne de mesures est représentée figure V.6 dans le cas de l'analyse modale de l'arbre.

Les figures ci-dessous indiquent les montages réalisés pour chaque élément ou assemblage et donnent les courbes de réponse en fréquence expérimentales.

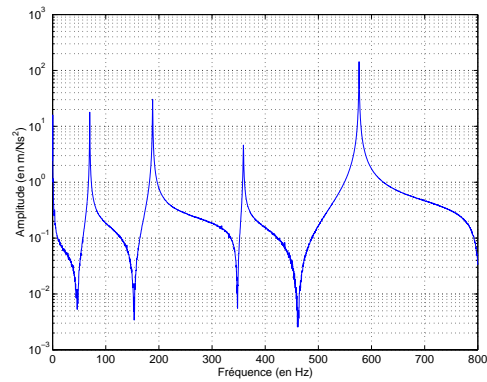
A chaque étape, des essais ont aussi été réalisés sur des plages fréquentielles centrées sur les premiers modes. Les courbes obtenues ont alors servi pour l'identification de l'amortissement modal par lissage de chaque pic de résonance. Les résultats sont regroupés dans le tableau V.1.

Pour chaque élément pris individuellement, l'amortissement est de l'ordre de  $10^{-4}$ , ce qui correspond à l'amortissement interne de l'acier. Pour le banc assemblé cependant,





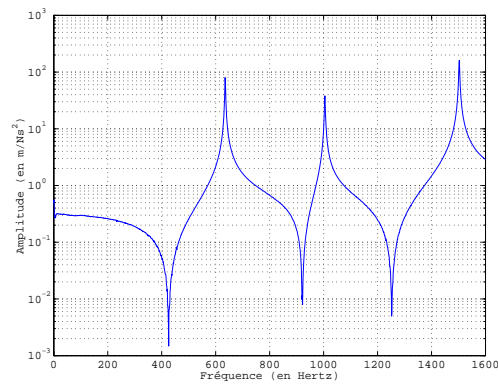
(a) montage



(b) frf expérimentale

FIG. V.7: *Essais d'analyse modale de l'arbre BP*

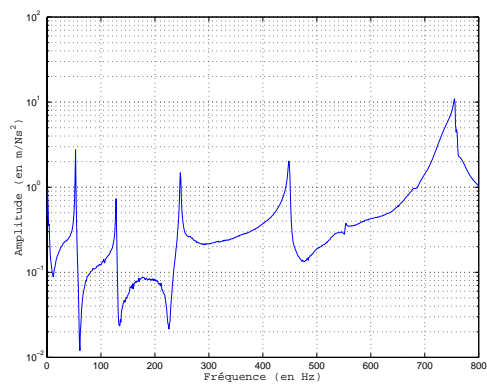
(a) montage



(b) frf expérimentale

FIG. V.8: *Essais d'analyse modale du disque fan*

(a) montage

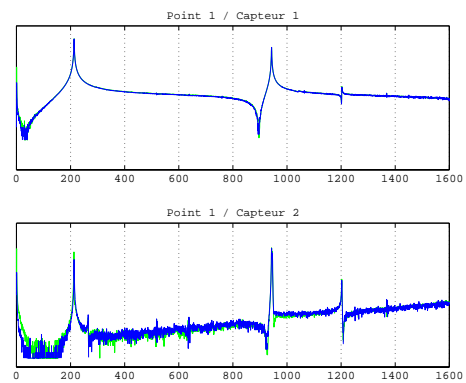


(b) frf expérimentale

FIG. V.9: *Essais d'analyse modale du rotor BP*



(a) montage

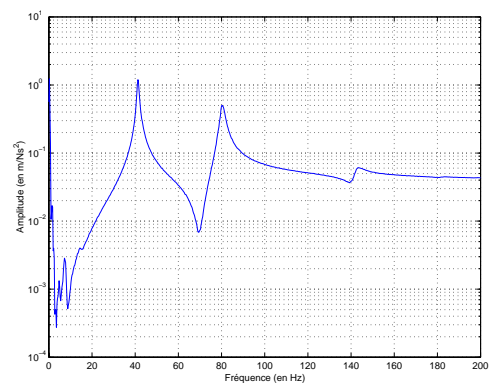


(b) frf expérimentale

FIG. V.10: Essais d'analyse modale des supports-paliers



(a) montage



(b) frf expérimentale

FIG. V.11: Essais d'analyse modale du banc non accouplé

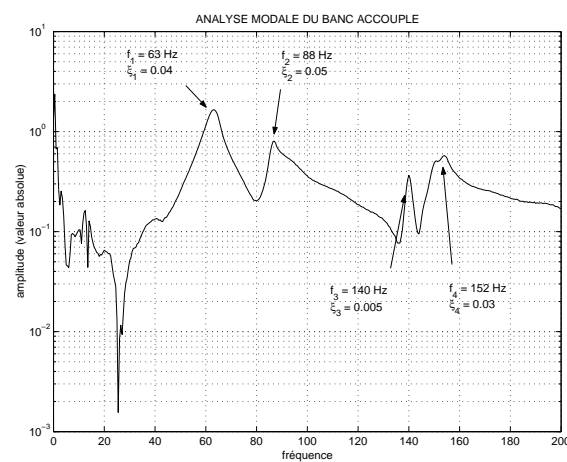
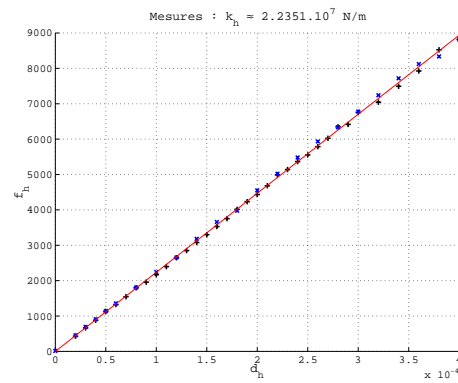


FIG. V.12: Essais d'analyse modale du banc accouplé



(a) montage



(b) frf expérimentale

FIG. V.13: Mesures de la raideur des supports-paliers

l'amortissement atteint est de l'ordre de  $10^{-2}$ .

## 2.2 Mesure de raideur des supports-paliers

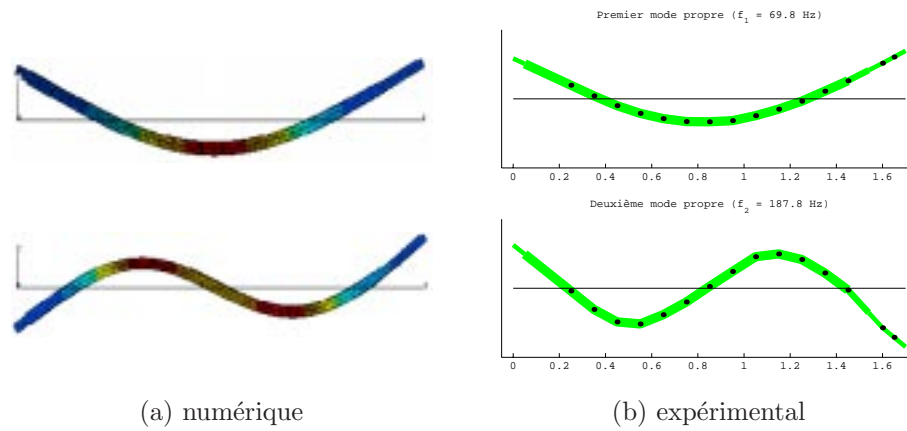
Comme on a pu le constater sur ces essais d'analyse modale, la dynamique des supports-paliers n'intervient pas de manière significative. Ils répondent quasiment de manière statique. Un dispositif spécial a permis, à l'aide d'un anneau de force, d'un capteur de force et d'un comparateur digital, de mesurer leur raideur radiale (*cf.* figure V.13).

La raideur trouvée est de l'ordre de  $2 \cdot 10^7 \text{ N/m}$ . Les supports-paliers, initialement modélisé en éléments finis (modèle condensé en super-élément), sont donc par la suite modélisés par un système simplifié masse/ressort, la raideur correspondant à la raideur mesurée et la masse à la masse modale du premier mode.

## 2.3 Recalage des modèles éléments finis

Grâce à ces essais préliminaires, il a été possible de recalibrer successivement les modèles éléments finis pour corréliser les premiers modes propres numériques, calculés avec le logiciel *Samcef*, et les modes propres expérimentaux.

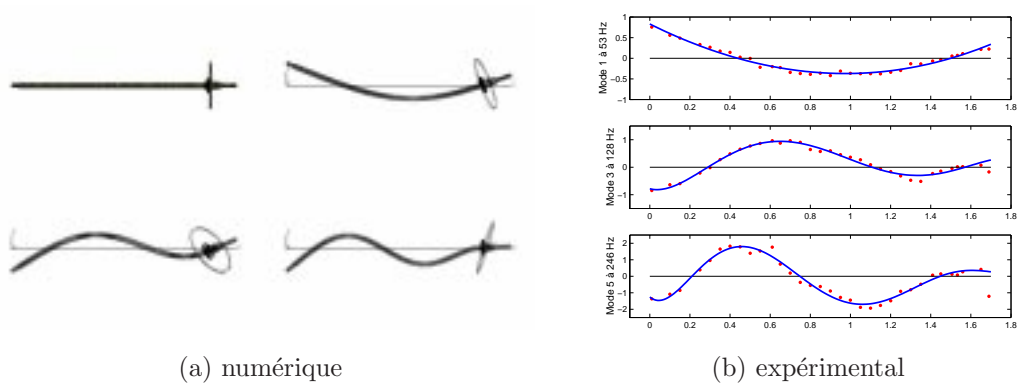
Le recalage a porté sur la modélisation plus fine des changements de section de l'arbre, l'ajout de masses et raideurs locales apportées par certaines pièces (éléments permettant



(a) numérique

(b) expérimental

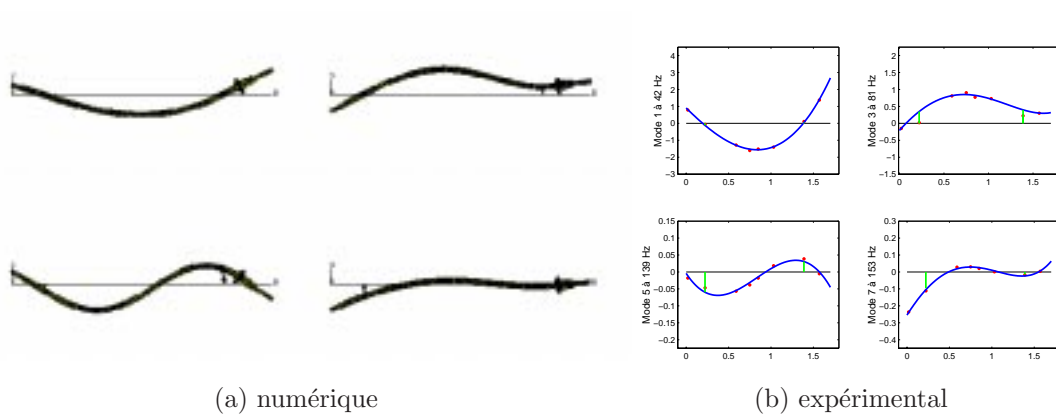
FIG. V.14: Déformées modales de l'arbre BP



(a) numérique

(b) expérimental

FIG. V.15: Déformées modales du rotor BP



(a) numérique

(b) expérimental

FIG. V.16: Déformées modales du banc non accouplé

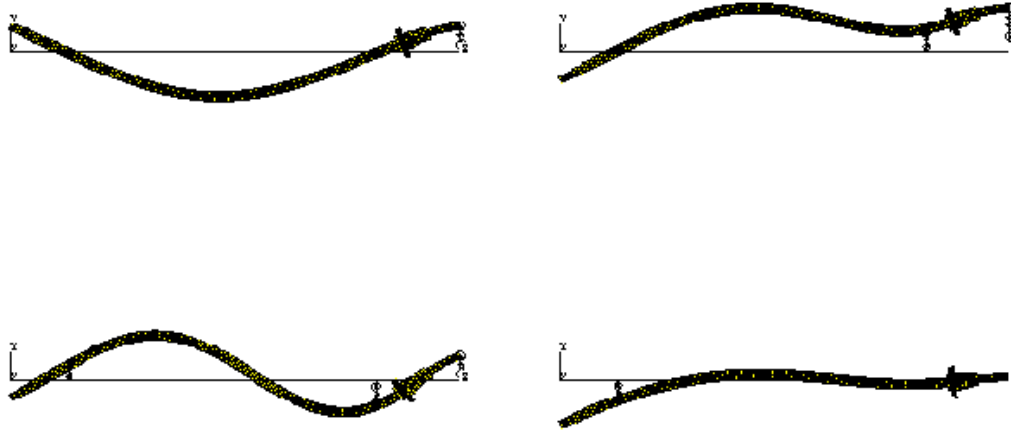


FIG. V.17: Déformées modales numériques du banc accouplé

TAB. V.2: Fréquences propres (en Hz)

	Mode 1		Mode 2		Mode 3		Mode 4	
	<i>exp.</i>	<i>num.</i>	<i>exp.</i>	<i>num.</i>	<i>exp.</i>	<i>num.</i>	<i>exp.</i>	<i>num.</i>
<b>Arbre BP</b>	69,9	70,0	188,2	188,1	359,0	358,1	576,5	573,3
<b>Rotor BP</b>	52,9	53,0	128,1	128,2	-	-	-	-
<b>Banc non accouplé</b>	41,9	41,6	81,1	82,8	-	-	-	-
<b>Banc accouplé</b>	63,3	63,3	88,0	88,0	140,6	141,4	152,6	152,8

la fixation du disque fan et des paliers) et l'ajustement des raideurs des roulements et du joint d'accouplement.

Comme on peut le voir sur les figures V.14 à V.17, les déformées modales numériques sont en accord avec les déformées modales expérimentales. En ce qui concerne les fréquences propres, les résultats sont reportés dans le tableau V.2.

Les valeurs des fréquences propres numériques du modèle éléments finis recalé sont en corrélation avec celles mesurées. Ce modèle peut ainsi servir à vérifier les calculs de pré-dimensionnement.

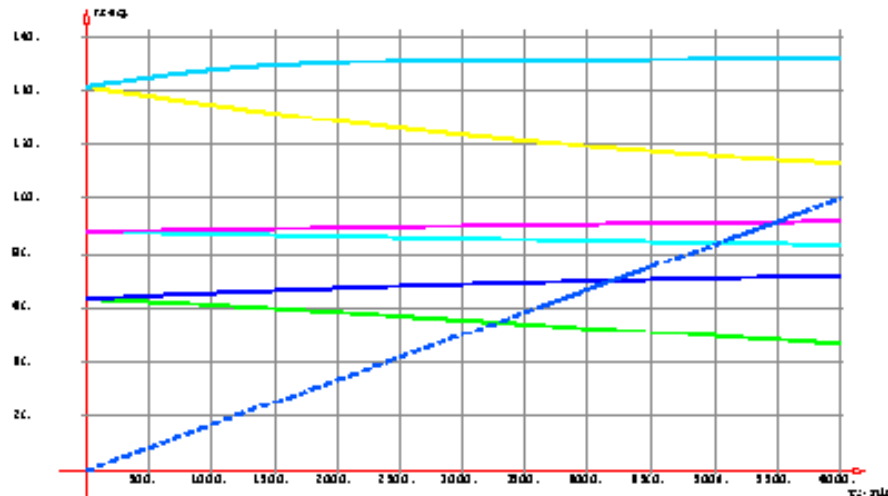


FIG. V.18: Diagramme de Campbell du banc accouplé

## 2.4 Vérification du dimensionnement

Le diagramme de Campbell (*cf.* figure V.18) montre que les premières vitesses critiques correspondant au premier mode de flexion (mode  $F1$ ) de l'arbre se situent vers 3300  $tr/min$  (55  $Hz$ ) pour le mode rétrograde et 4200  $tr/min$  (70  $Hz$ ) pour le mode direct. Les vitesses critiques suivantes, relatives à un mode de flexion  $F2$  de l'arbre couplé avec un mode du support-palier #1, se localisent à 5040  $tr/min$  (84  $Hz$ ) et 5520  $tr/min$  (92  $Hz$ ) en rétrograde et direct respectivement.

Un calcul de réponse à balourd de 100  $g.cm$  a été effectué en prenant différentes valeurs d'amortissement hystérétique. A la première vitesse critique directe, les contraintes maximales se localisent au niveau de l'arbre. La figure V.19 montre la répartition de celles-ci (le disque, les paliers et les supports-paliers ne sont pas représentés car ils sont modélisés par des masses et raideurs ponctuelles).

L'acier utilisé pour l'arbre possède une limite de fatigue de 581  $MPa$  en flexion rotative et 620  $MPa$  en flexion plane alternée. Compte tenu d'une marge de sécurité, on fixe la contrainte admissible égale à 50 % de la limite en fatigue en flexion rotative. Pour chaque valeur d'amortissement, les contraintes de Von-Mises maximales relevées dans l'arbre à la vitesse critique ont alors permis, en supposant un comportement linéaire de la structure, d'évaluer le balourd maximal autorisé. Les résultats sont reportés dans le tableau V.3.

Les résultats montrent l'importance et la nécessité d'un équilibrage avant tout passage de vitesse critique. En effet, pour un balourd résiduel de l'ordre de 150-200  $g.cm$ , on

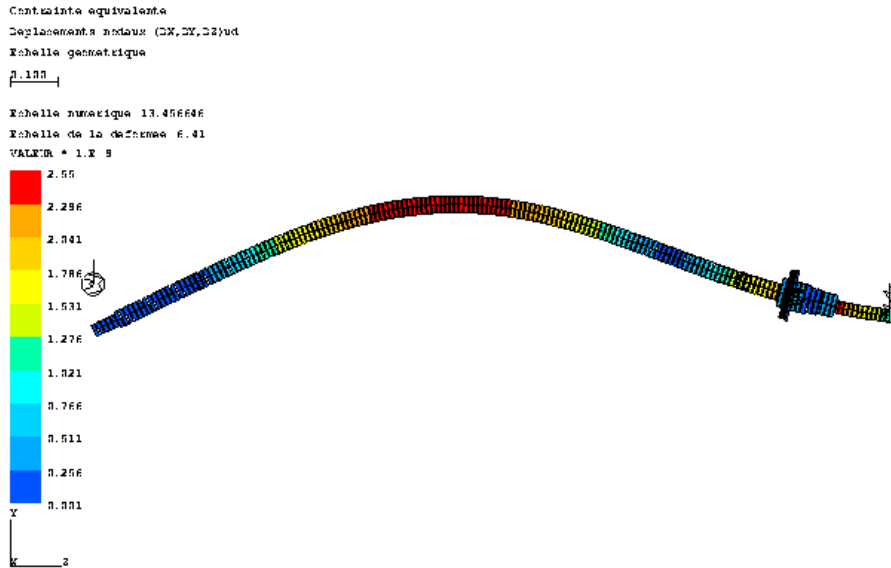


FIG. V.19: Contraintes équivalentes de Von-Mises dans l'arbre à la vitesse critique

TAB. V.3: Contraintes maximales à la vitesse critique et balourds admissibles

	$\eta = 10^{-3}$	$\eta = 5 \cdot 10^{-3}$	$\eta = 10^{-2}$
Contrainte maximale pour 100 g.cm	850 MPa	1700 MPa	85 MPa
Balourd admissible	35 g.cm	175 g.cm	350 g.cm

remarque que si l'amortissement structural est inférieur à  $5.10^{-3}$ , la tolérance imposée vis-à-vis de la limite en fatigue est amplement dépassée.

## V.3 Exploitation du banc

Pour la mise en œuvre d'un tel banc, plusieurs étapes sont nécessaires. Il y a tout d'abord l'étalonnage des capteurs puis la phase de montage, comme pour tout banc expérimental. La particularité avec les machines tournantes est qu'il est de plus indispensable d'effectuer l'alignement et l'équilibrage des rotors.

### 3.1 Procédure d'alignement

Le mésalignement est réputé pour être source de vibration dans les machines tournantes. Son influence sur la dynamique des rotors peut s'avérer non négligeable. Pour des mésalignements importants, on peut effectivement observer des décalages de fréquences propres voire des instabilités [80, 65]. Les vibrations engendrées par mésalignement sont dues à un problème de maintenance. Il convient donc d'aligner le banc après chaque montage.

Le mésalignement peut intervenir à deux niveaux. Le premier est un mésalignement des supports-paliers. Le deuxième est le mésalignement entre l'arbre BP et le rotor du moteur électrique. L'alignement des supports-paliers est réalisé lors de la phase de montage par l'intermédiaire de la rainure centrale de la platine d'acier sur laquelle ils sont fixés. Une fois le banc assemblé, l'alignement de l'arbre moteur sur l'arbre BP (servant de référence) est alors effectué. A cet effet, des pieds *Sanex* à hauteur réglable sont placés sous le bloc béton du moteur et permettent de régler son inclinaison et sa hauteur, *i.e.* de rattraper deux mésalignements en rotation et un en translation. Les autres mésalignements (translations dans le plan horizontal et rotation suivant la verticale) sont quant à eux corrigés en faisant glisser le moteur sur sa platine.

La mesure du mésalignement entre les deux arbres est effectuée à l'aide d'un comparateur digital monté sur un bras (*cf.* figure V.20). Ce bras est fixé sur un arbre et permet de venir faire une mesure sur l'autre arbre. Il est assez rigide pour que la flèche en extrémité ne vienne fausser les mesures.



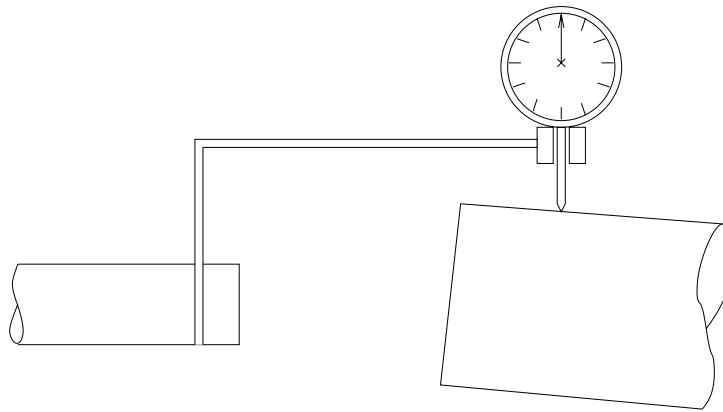


FIG. V.20: Schéma du dispositif utilisé pour la mesure de mésalignement

La procédure d'alignement suivie est détaillée dans le procès verbal de recettage du banc qui reprend aussi la procédure de montage [?]. Il s'agit d'une procédure itérative. A chaque itération, on effectue un total de 8 mesures : deux verticales et deux horizontales (comparateur placé successivement en haut, à droite, en bas puis à gauche) sur chacun des deux arbres. Cela permet de connaître la position relative des arbres dans les plans horizontal et vertical [93]. Les décalages en terme de translation et d'inclinaison sont alors calculés et corrigés à l'aide de vis de poussée. L'opération est ensuite recommencée jusqu'à ce que le mésalignement mesuré soit inférieur au mésalignement toléré par le joint d'accouplement [2].

### 3.2 Résultats sur l'équilibrage

Pour l'équilibrage, deux méthodes ont été successivement employées : la méthode des trois masselottes et la méthode des coefficients d'influence [46, 143]. La première est une méthode graphique particulièrement bien adaptée pour un équilibrage sur la vitesse critique, puisqu'elle ne nécessite pas d'informations concernant la phase. Cependant, elle demande d'effectuer 4 mesures. Sa mise en application est donc plus longue que la seconde pour laquelle deux mesures suffisent. Cette dernière présente en outre l'avantage de s'appliquer aussi pour l'équilibrage dans plusieurs plans. Mais on a alors besoin non seulement du déplacement mais aussi de la phase par rapport à une référence. Ainsi elle ne s'applique pour des équilibrages à des vitesses proches de la vitesse critique (variations de phase trop rapides vers la résonance) et on doit disposer d'un codeur incrémental ou équivalent (ici la phase de référence est celle donnée par le moteur électrique).

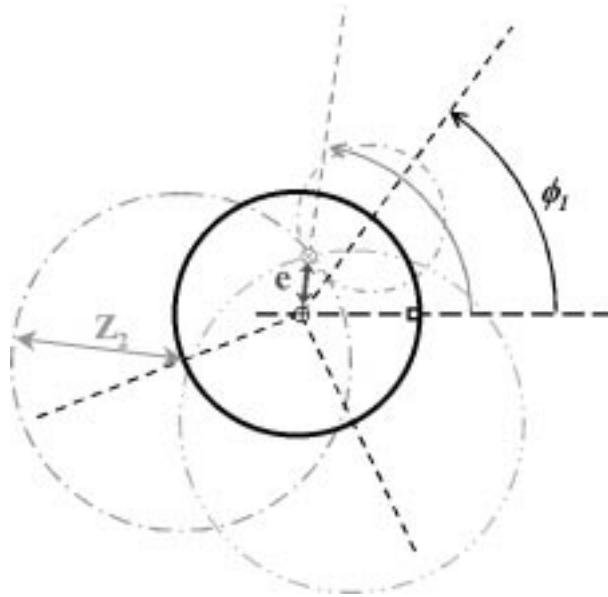


FIG. V.21: *Interprétation graphique de la méthode des trois masselottes*

### 3.2a Méthode des trois masselottes

Le rotor est d'abord mis en rotation sans balourd ajouté afin de relever l'amplitude initiale du rotor, noté  $Z_0$ . Un balourd test,  $U_t$ , est ensuite placé sur le rotor, à une position angulaire  $\Phi_1$ , ce qui donne une nouvelle amplitude de vibration, notée  $Z_1$ . L'opération est reconduite deux fois encore, toujours avec le même balourd test mais placé à des positions angulaires différentes,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ . Cela donne deux nouvelles amplitudes de vibration, respectivement  $Z_2$  et  $Z_3$ .

Pour déterminer le balourd d'équilibrage, on reporte alors sur un graphique un cercle de rayon  $Z_0$ , puis on trace trois autres cercles de rayon  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  dont les centres se trouvent sur le premier, à des positions  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  en coordonnées polaires (*cf.* figure V.21). Le voisinage où ces trois derniers cercles s'entrecoupent donne alors la position angulaire de l'endroit où il faut placer le balourd d'équilibrage. Sa valeur est quant à elle déterminée à partir de la distance  $e$  entre le centre du premier cercle et le point d'intersection par la formule  $U_b = U_t \cdot Z_0 / e$ .

Les essais d'équilibrage ont été réalisés en plaçant des vis comme balourd test sur le disque fan (percé de 48 trous). Les résultats obtenus par la méthode des trois masselottes n'ont pas permis d'équilibrer le banc. Les résultats d'un équilibrage à 3800 *tr/min* sont reportés figure V.22. Le balourd test est placé à 8 emplacements différents. On remarque qu'il est impossible de diminuer en même temps les vibrations au niveau du palier #1 et

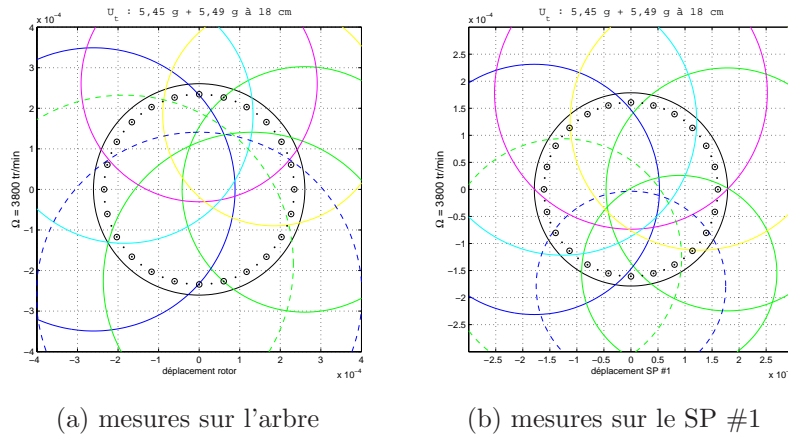


FIG. V.22: *Equilibrage au niveau du disque fan par la méthode des 3 masselottes*

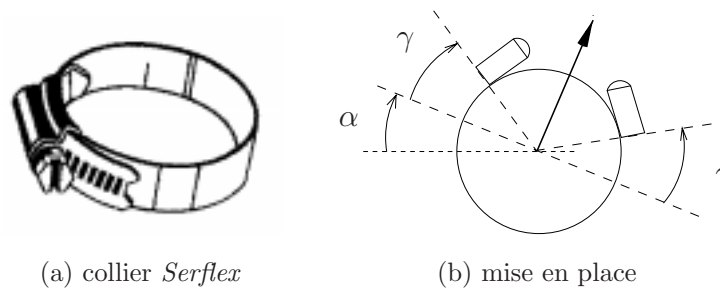


FIG. V.23: *Utilisation d'une paire de colliers Serflex pour l'équilibrage*

de l'arbre en plaçant le balourd d'équilibrage sur le disque fan. De plus, on observe que la zone d'intersection des cercles est mal définie, montrant la limitation de cette méthode graphique. Pour les essais suivants, on a donc utiliser des colliers *Serflex* comme balourd test et la méthode des coefficients d'influence pour estimer le balourd résiduel.

L'intérêt des colliers *Serflex* est de pouvoir placer un balourd test au centre de l'arbre (*i.e.* sur le ventre du mode). Deux colliers sont utilisés. Comme le montre la figure V.23, cela permet de pouvoir régler à la fois la position angulaire du balourd test (les deux colliers sont tournés d'un même angle  $\alpha$ ) et sa valeur (variation de l'angle  $\gamma$ ).

### 3.2b Méthode des coefficients d'influence

Cette méthode est une des plus répandues et utilisées aujourd'hui pour l'équilibrage *in situ* des machines tournantes. Elle consiste à réaliser deux essais, un sous balourd résiduel

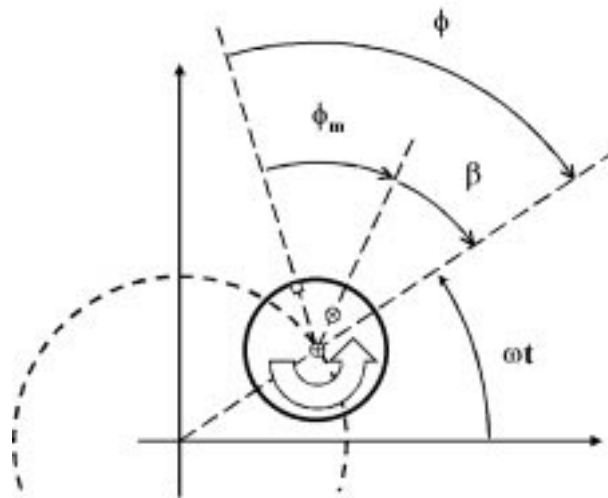


FIG. V.24: Repérage du balourd par rapport à un repère sur le rotor

uniquement et l'autre avec un balourd test. La comparaison des deux mesures permet alors de déterminer le balourd correctif à appliquer.

Le principe repose sur le fait que pour une structure linéaire, l'amplitude synchrone du rotor s'exprime, sous forme complexe, par une relation du type  $Z(\omega) = a(\omega).U_u = a(\omega).U. \exp(i.\Phi_m)$ . La notation complexe permet de gérer conjointement l'amplitude et le déphasage arrière  $\Phi$  par rapport à une référence située sur le rotor (cf. figure V.24). Le module et l'argument de  $U_u$  représente la valeur  $U$  et le déphasage arrière  $\Phi_m$  du balourd résiduel. Le coefficient  $a$  est ce qu'on appelle le coefficient d'influence. Il ne dépend que de la structure et de la vitesse de rotation. Si on note respectivement par  $Z_0$  et  $Z_t$  les amplitudes complexes relevées à vide et sous balourd test  $U_t$  à une même vitesse, on peut donc écrire

$$Z_0 = a.U_u \quad \text{et} \quad Z_t = a.(U_u + U_t) \quad (\text{V.1})$$

d'où la relation

$$a = (Z_t - Z_0)/U_t \quad (\text{V.2})$$

La valeur complexe relative au balourd correctif est alors

$$U_b = -U_u = -Z_0.U_t/(Z_t - Z_0) \quad (\text{V.3})$$

Plusieurs essais ont été réalisés en employant cette technique. Les différents résultats obtenus ont montré qu'il n'était pas possible d'équilibrer parfaitement le banc. Cependant, il a été possible via cette méthode d'optimiser la position du balourd correctif. A 3700 *tr/min*, le niveau minimal atteint avec celui-ci est de 210  $\mu\text{m}$  d'amplitude de déplacement sur l'arbre (au niveau du capteur placé à proximité du support-palier #2). Cela correspond à une diminution de 60  $\mu\text{m}$  par rapport au niveau sous balourd résiduel.

La raison expliquant le fait qu'on ne puisse équilibrer le banc réside dans la faible valeur d'amortissement pour le premier mode direct. En effet, les amortissements modaux ont été mesurés à l'arrêt, et compte tenu des résultats d'équilibrage, il est fort probable que l'amortissement du premier mode soit principalement localisé dans les parties tournantes, *i.e.* que l'amortissement effectif du système en rotation se trouve fortement diminué (puisque les forces d'amortissement tournant sont nulles pour un mouvement de précession synchrone et circulaire comme celui observé à proximité de la vitesse critique).

Le coefficient d'amplification dynamique est donc très important si bien qu'un balourd infime suffit à générer des vibrations conséquentes. Pour équilibrer, il faudrait donc équilibrer à la perfection le banc, condition physiquement impossible à réaliser étant donné les erreurs de mesures et la répartition du balourd résiduel sur toute la longueur de l'arbre.

### 3.3 Passage de la vitesse critique

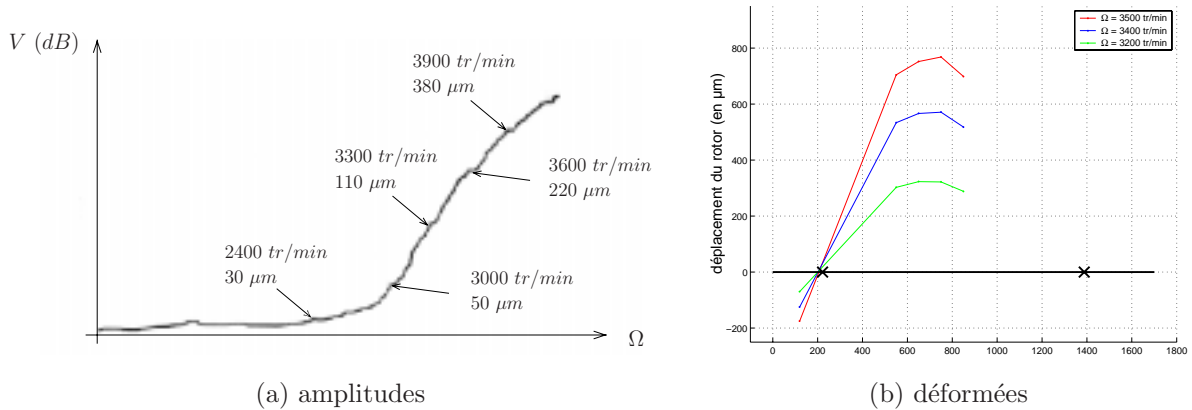
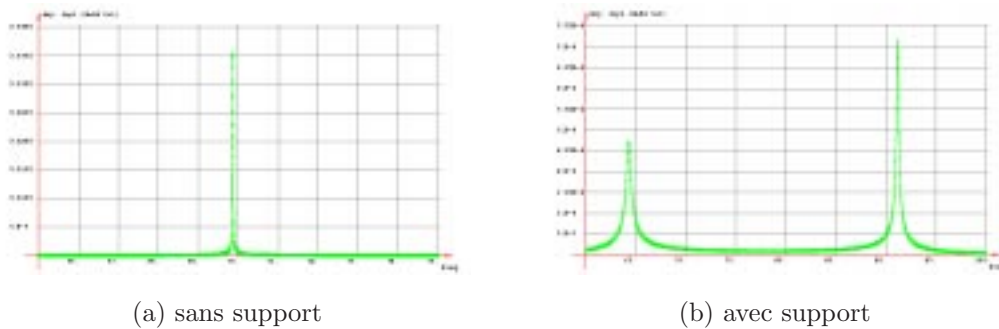
Des essais de montée en régime ont été effectués. Bien entendu, l'échauffement des roulements et les grandes amplitudes de vibrations causés par le balourd résiduel ont limité la vitesse de rotation maximale atteinte. Afin de pouvoir passer la vitesse critique, des solutions envisageables ont donc été proposées.

#### 3.3a Essais de montée en régime

Sur la figure V.25(a) est représenté le signal relevé au niveau du capteur de déplacement visant le rotor placé à proximité du support-palier #2 (exprimé en  $dB$ ) lors d'un essai de montée en régime. On remarque que la vitesse critique estimée avec le modèle éléments finis à  $4200 \text{ tr/min}$  a été dépassée. L'inexactitude sur cette valeur peut provenir des effets gyroscopiques, étant donné que le modèle a été recalé à l'arrêt. Mais cela est peu probable car les erreurs sur les répartitions d'inerties sont généralement faibles. L'hypothèse la plus vraisemblable est la variation des raideurs des roulements et éventuellement du joint d'accouplement avec la vitesse de rotation.

Par ailleurs, les capteurs de déplacement ont été répartis le long de l'arbre pour obtenir la déformée de l'arbre en rotation comme montré figure V.25(b), montrant ainsi qu'il s'agit bien du premier mode de flexion de l'arbre.

Des lissages de courbes de réponse à balourd ont été entrepris afin de recalibrer la valeur

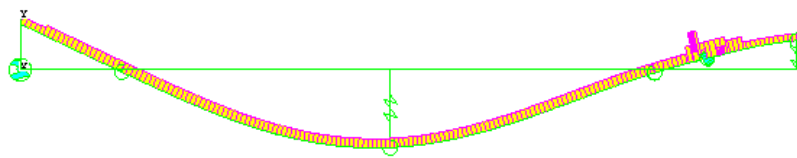
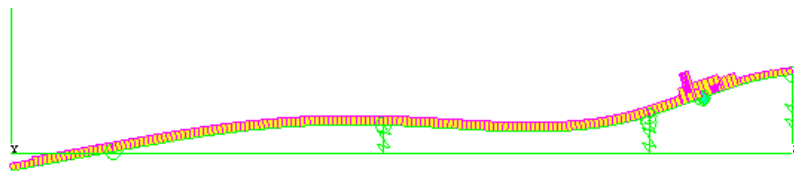
FIG. V.25: *Essais de montée en vitesse*FIG. V.26: *Comparaison des amplitudes de vibration*

de l'amortissement. Cependant les résultats obtenus ne sont pas probants. En effet, les points de mesure se situent tous en régime sous-critique. Suivant la valeur des paramètres initiaux, l'algorithme d'optimisation donne alors des coefficients très différents.

### 3.3b Utilisation d'un support-palier élastomère

Afin de pouvoir équilibrer et ainsi passer la vitesse critique, plusieurs solutions ont été imaginées. Les solutions retenues se basent sur l'ajout d'un *palier élastomère*, soit au centre de l'arbre, soit en parallèle sur chaque support-palier existant. Des calculs de réponse ont alors été effectués sur le modèle recalé du banc pour ces deux scénarios. L'introduction d'un palier élastomère au centre de l'arbre s'est avérée être la solution la plus efficace.

Comme le montre la figure V.26, l'amplitude de vibration à la vitesse critique est

(a) 1<sup>er</sup> mode propre(b) 2<sup>ème</sup> mode propreFIG. V.27: *Déformées modales*

fortement atténuée avec la présence du palier élastomère. La vitesse critique a également diminué : on passe de  $4200 \text{ tr/min}$  ( $70 \text{ Hz}$ ) à  $3840 \text{ tr/min}$  ( $64 \text{ Hz}$ ). Cela s'explique par le fait que le palier élastomère apporte une masse supplémentaire alors que sa raideur est négligeable comparativement à celle de l'arbre. L'analyse modale a montré cependant que les déformées propres ne sont pas affectées : on retrouve toujours bien le premier mode de flexion du rotor (*cf.* figure V.27).

Du point de vue conception, ce palier sera constitué d'une plaque d'élastomère maintenue serrée par un bâti fixé sur la platine, avec en son centre un roulement pour assurer la liaison avec l'arbre.

## Conclusion

Le banc *Dynamique D'Ensemble* est le fruit d'une collaboration étroite entre la société Snecma Moteurs et le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon. De nombreuses itérations ont été nécessaires avant d'aboutir au stade actuel. Tout au long de sa réception, nous avons réalisé les essais préliminaires nécessaires pour le recalage du modèle éléments finis qui avait servi au dimensionnement. Ainsi, nous avons pu vérifier ce dernier, ce qui a permis de fixer précisément les limites en terme de niveaux vibratoires. La phase de réception s'est accompagnée de la rédaction d'une procédure relative au montage/démontage et à l'alignement.

Les essais déjà réalisés ont permis de soulever certaines questions qui ont débouchées sur quelques adaptations et améliorations. Les premiers essais en rotation ont permis de déverminer le banc et ont montré la difficulté de passer un mode d'arbre. Un palier élastomère a donc été conçu et optimisé pour pouvoir franchir la vitesse critique. Les phases à venir concernent donc la validation de ce palier et la réalisation d'une campagne d'essais avec plusieurs roulements de gammes différentes qui permettra de valider le modèle 2D.







## Conclusion et perspectives

Dans cette étude réalisée en collaboration avec la société Snecma Moteurs, nous nous sommes intéressés au problème de calcul de réponses à balourd avec prise en compte du jeu de fonctionnement radial interne des roulements.

Nous avons dans un premier temps proposé un nouveau modèle de roulement. Celui-ci s'appuie sur la théorie du contact de Hertz et offre l'avantage de prendre en considération un minimum de paramètres physiques comme le jeu radial, la géométrie et le nombre d'éléments roulants. Ce modèle possède des non-linéarités fortes. Nous avons donc été amenés à développer des algorithmes de calcul dans le domaine fréquentiel capable de gérer ce type de non-linéarité.

La synthèse bibliographique réalisée traite non seulement des méthodes non-linéaires mais aussi des techniques classiquement utilisées avec celles-ci, ainsi que de l'analyse de la stabilité des solutions périodiques. En s'appuyant sur la méthode des résidus pondérés, nous avons pu, d'une part, donner une présentation unifiée pour les méthodes de balance harmonique incrémentale et de collocation trigonométrique et, d'autre part, proposer une nouvelle méthode pour analyser la stabilité directement dans le domaine fréquentiel, ce qui était usuellement fait en repassant dans le domaine temporel.

Les méthodes présentées possèdent chacune des inconvénients. En ce qui concerne les méthodes temporelles, elles souffrent soit d'un problème de temps de calcul, cas des méthodes d'intégration (qui sont adaptées à l'analyse en régime transitoire et non en régime permanent), soit d'un problème de taille, cas de la méthode des différences finies. Quant aux méthodes fréquentielles, elles font toutes l'hypothèse forte que la solution est décomposable en une série de Fourier tronquée. Notre intérêt s'est donc porté sur le développement d'autres méthodes temporelles.

La première méthode que nous avons implémentée est la méthode de tir multiple. Il s'agit d'une généralisation de la méthode de tir qui, comparée à cette dernière, possède de meilleures propriétés de convergence. L'avantage majeure de cette méthode est que premièrement, aucune hypothèse n'est avancée pour la solution (hormis bien entendu sa

périodicité), et secondement, elle est capable de traiter tous les types de non-linéarités (la base de cette méthode étant l'intégration temporelle).

Celle-ci nous a permis d'analyser divers modèles phénoménologiques. On a ainsi pu mettre en évidence la richesse des mécanismes de prises de contact en présence de jeu entre rotor et stator et l'importance de la prise en compte du jeu de roulement, principalement dans les plages de vitesse de rotation où les forces de balourd et les forces statiques sont du même ordre de grandeur. La méthode de tir multiple n'est malheureusement pas appropriée à l'étude de systèmes de grande taille. Nous nous sommes donc orientés dans une deuxième étape vers une autre méthode : la méthode des éléments finis en temps.

Son principe repose sur la notion d'interpolation dans le domaine temporel. Cette méthode fait intervenir des matrices à structure creuse et permet d'effectuer sans problème une condensation sur les degrés de liberté non-linéaires. Elle se prête donc à l'analyse de systèmes de taille plus conséquente. Nous l'avons de plus couplé avec une technique d'interpolation des forces non-linéaires, ce qui a permis de diminuer le temps de calcul nécessaire pour la quadrature des termes non-linéaires sans être préjudiciable à la précision de la solution. Quant à l'analyse de stabilité des solutions, un problème d'instabilité numérique a été soulevé et résolu par l'utilisation d'une quadrature réduite.

Les applications traitées ont montré la pertinence de cette méthode, notamment pour l'étude de systèmes rotors/stators incluant les nouveaux modèles de roulement. Il s'agit d'un outil général, servant à la fois pour la recherche de solutions périodique et pour la détermination de leur stabilité. Compte tenu du fait qu'elle utilise les procédures déjà développées pour les éléments finis spatiaux, son adaptation aux codes de calcul existants ne poserait *a priori* pas de difficultés majeures.

Afin de valider les modèles théoriques, un banc expérimental appelé banc *Dynamique D'Ensemble* a été dimensionné. Le cahier des charges, établi avec Snecma Moteurs, demandait au banc d'être représentatif d'un moteur réel. Nous avons tout d'abord réalisé l'ensemble des essais préliminaires de qualification modale indispensables pour le recalage de chaque sous-structure et l'établissement d'un modèle éléments finis réaliste. Aussi, des notes techniques concernant en particulier les procédures de montage/démontage, d'alignement et d'équilibrage ont été mises en place. Les premiers essais effectués sur banc tournant sont actuellement poursuivis et semblent confirmer l'aspect rigidification apporté par les roulements.

Les résultats de cette étude peuvent donc ouvrir sur les perspectives suivantes.

Le modèle de roulement proposé ne demande plus qu'à être validé et peut-être couplé par la suite avec un modèle d'amortisseur par film d'huile. L'amélioration qu'on pourrait lui apporter concerne son adaptation au cas 3D. Il faudrait pour cela trouver un autre

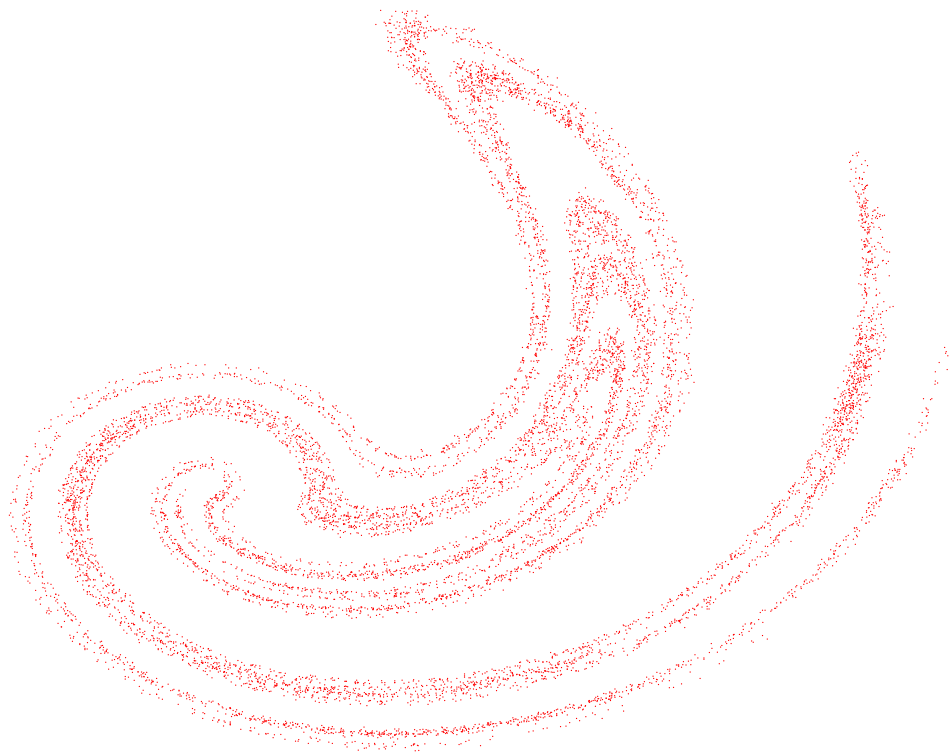
système que la roue de vélo. La prise en compte de l'ovalisation des bagues pourrait aussi devenir à l'avenir un axe de recherche.

D'autre part, la méthode des éléments finis en temps s'avère être un outil de calcul qui mérite attention. Il serait intéressant de voir dans un premier temps si, via une analyse spectrale de la matrice de raideur tangente dynamique, il ne serait pas possible de travailler avec la partie relative à ses valeurs propres de participation maximale. Du point de vue théorique, on pourrait dans un deuxième temps inclure aussi une discrétisation du champ de vitesse. Cette formulation duale permettrait sans doute d'obtenir des résultats avec une précision accrue et serait particulièrement utile pour traiter les problèmes avec rebond.

La prochaine étape concernant le banc *Dynamique D'Ensemble* est le passage du mode d'arbre. Cette phase sera suivie par une campagne d'essais avec plusieurs roulements de gammes différentes. Il s'agira alors de voir s'il est possible de trouver une technique d'identification des jeux de roulement. Le banc pourra alors être mis en place dans sa version bi-rotor. A plus long terme, il serait possible de se pencher sur la thématique contact aubes/carter ou l'introduction d'un amortisseur par film d'huile.









# Bibliographie

- [1] Kaman Instrumentation Corporation. *KDM-8200, Instruction manual*, 1991.
- [2] KTR France. *Rotex GS, Catalogue 3-GS-F-f-4/97*.
- [3] B. O. AL-BEDDOOR. Transient torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors with rotor-to-stator rubbing. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 229(3):627–645, 2000.
- [4] J. ARGYRIS and H. P. MLEJNEK. *Texts on computational mechanics. Volume V Dynamics of structure*. North-Holland, 1991.
- [5] G. ASCH. *Les capteurs en instrumentation industrielle*. Dunod, fourth edition, 1996.
- [6] C. D. BAILEY. Application of Hamilton’s law of varying action. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 13(9):1154–1157, Septembre 1975.
- [7] C. D. BAILEY. Comment on “When is Hamilton’s principle an extremum principle?”. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 13(11):1539–1540, Novembre 1975.
- [8] C. D. BAILEY. Comment on “Finite elements for initial value problems in dynamics”. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 21(1):159–160, Janvier 1983.
- [9] J. BARRAULT and S. LASSERRE. Caractérisation de la résistance à la fatigue en flexion ondulée de l’acier 35 cd 4.
- [10] J. BARRAULT and S. LASSERRE. Limites de fatigue de l’acier 35 cd 4 en flexion rotative et en flexion plane.
- [11] M. BARUCH and R. RIFF. Hamilton’s principle, Hamilton’s law — 6<sup>n</sup> correct formulations. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 20(5):687–692, Mai 1982.



- [12] O. A. BAUCHAU and C. H. HONG. Nonlinear response and stability analysis of beams using finite elements in time. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 26(9):1135–1142, Septembre 1988.
- [13] P. V. BAYLY. On the spectral signature of weakly bilinear oscillators. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118:352–361, Juillet 1996.
- [14] R. F. BEATTY. Differentiating rotor response due to radial rubbing. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 107:151–160, Avril 1985.
- [15] K. B. BLAIR, C. M. KROUSGRILL, and T. N. FARRIS. Harmonic balance and continuation techniques in the dynamic analysis of Duffing’s equation. *Journal of Sound and Vibration*, 202(5):717–731, 1997.
- [16] J. BONINI and M. BERTHILLIER. Méthodes en dynamique non-linéaire des rotors pour l’étude du comportement d’un moteur d’avion. *Revue Française de Mécanique*, 3:221–226, 1999.
- [17] M. BORRI, G. L. GHIRINGHELLI, M. LANZ, P. MANTEGAZZA, and T. MERLINI. Dynamic response of mechanical systems by a weak hamiltonian formulation. *Computers & Structures*, 20(1-3):495–508, 1985.
- [18] R. BULIRSCH, F. MONTRONE, and H. J. PESCH. Abort landing in the presence of a windshear as a minimax control problem, Part 2: Multiple shooting and homotopy. Note non publiée.
- [19] T. M. CAMERON and J. H. GRIFFIN. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56:149–154, Mars 1989.
- [20] R. S. CHANCELLOR, R. M. ALEXANDER, and S. T. NOAH. Detecting parameter changes using experimental nonlinear dynamics and chaos. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118:375–383, Juillet 1996.
- [21] C. S. CHEN, S. NATSIAVAS, and H. D. NELSON. Stability analysis and complex dynamics of a gear-pair system supported by a squeeze film damper. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119:85–88, Janvier 1997.
- [22] C. S. CHEN, S. NATSIAVAS, and H. D. NELSON. Coupled lateral-torsional vibration of a gear-pair system supported by a squeeze film damper. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120:860–867, Octobre 1998.
- [23] W. J. CHEN. Energy analysis to the design of rotor-bearing systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119:411–417, Avril 1997.

- 
- [24] Y. K. CHEUNG, S. H. CHEN, and S. L. LAU. Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems. *Journal of Sound and Vibration*, 140(2):273–286, 1990.
- [25] D. W. CHILDS. Fractional-frequency rotor motion due to nonsymmetric clearance effects. *Journal of Engineering for Power*, 104:533–541, Juillet 1982.
- [26] M. CHINTA and A. B. PALAZZOLO. Stability and bifurcation of rotor motion in a magnetic bearing. *Journal of Sound and Vibration*, 214(5):793–803, 1998.
- [27] S. K. CHOI and S. T. NOAH. Mode-locking and chaos in a Jeffcott rotor with bearing clearances. *Journal of Applied Mechanics*, 61:131–138, Mars 1994.
- [28] Y. S. CHOI and C. Y. BAE. Nonlinear dynamic analysis of partial rotor rub with experimental observations. In *Proceedings of the DETC*, number DETC2001/VIB-21634 in ASME 2001 Design Engineering Technical Conferences, Pittsburgh, PA, September 9-12, 2001.
- [29] Y. S. CHOI and S. T. NOAH. Nonlinear steady-state response of a rotor-support system. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 109:255–261, Juillet 1987.
- [30] A. CHOUDHURY and N. TANDON. A theoretical model to predict vibration response of rolling bearings to distributed defects under radial load. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120:214–220, Janvier 1998.
- [31] F. CHU and Y. TANG. Stability and non-linear responses of a rotor-bearing system with pedestal looseness. *Journal of Sound and Vibration*, 241(5):879–893, 2001.
- [32] F. CHU and Z. ZHANG. Bifurcation and chaos in a rub-impact Jeffcott rotor system. *Journal of Sound and Vibration*, 210(1):1–18, 1998.
- [33] R. J. COMPARIN and R. SINGH. Non-linear frequency response characteristics of an impact air. *Journal of Sound and Vibration*, 134(2):259–290, 1989.
- [34] R. D. COOK, D. S. MALKUS, and M. E. PLESHA. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, third edition, 1989.
- [35] R. R. CRAIG Jr and M. C. C. BAMPTON. Coupling of substructures for dynamic analyses. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 6(7):1313–1319, Juillet 1968.
- [36] J. M. DEMUL, J. M. VREE, and D. A. MAAS. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction — Part I: General theory and application to ball bearings. *Journal of Tribology*, 111:142–148, Janvier 1989.

- [37] J. M. DEMUL, J. M. VREE, and D. A. MAAS. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction — Part II: Application to roller bearings and experimental verification. *Journal of Tribology*, 111:149–155, Janvier 1989.
- [38] E. H. DOWELL. The behavior of a linear, damped modal system with a non-linear spring-mass-dry friction damper system attached. *Journal of Sound and Vibration*, 89(1):65–83, 1983.
- [39] J. DUGUNDJI and J. H. WENDELL. Some analysis methods for rotating systems with periodic coefficients. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 21(6):890–897, Juin 1983.
- [40] F. F. EHRICH. Spontaneous sidebanding in high speed rotordynamics. Number DE-Vol. 35 in Rotating Machinery and Vehicle Dynamics, ASME 1991, pages 25–31.
- [41] F. F. EHRICH. The dynamic stability of rotor/stator radial rubs in rotating machinery. *Journal of Engineering for Industry. Series B*, 91(4):1025–1028, Novembre 1969.
- [42] F. F. EHRICH. Sum and difference frequencies in vibration of a high speed rotating machinery. *Journal of Engineering for Industry. Series B*, 94(1):181–184, Février 1972.
- [43] F. F. EHRICH. High order subharmonic response of high speed rotors in bearing clearance. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110:9–16, Janvier 1988.
- [44] F. F. EHRICH. Some observations of chaotic vibration phenomena in high speed rotordynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 113:50–56, Janvier 1991.
- [45] F. F. EHRICH. Observations of subcritical superharmonic and chaotic response in rotordynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 114:93–100, Janvier 1992.
- [46] F. F. EHRICH. *Handbook of rotordynamics*. Krieger Publishing Company, second edition, 1999.
- [47] F. F. EHRICH and J. J. O’CONNOR. Stator whirl rotors in bearing clearance. *Journal of Engineering for Industry. Series B*, 89(3):381–390, Août 1967.
- [48] D. J. EWINS. *Modal testing : theory and practice*. John Wiley & Sons, 1984.
- [49] N. S. FENG and E. J. HAHN. Rolling element bearing non-linearity effects. Number 2000-GT-391 in Proceedings of ASME TURBOEXPO 2000, May 8-11, 2000, Munich, Germany.

- [50] J. M. FERRARD. *Maths et Maple*. Dunod, 1998.
- [51] A. FERRI. On the equivalence of the incremental harmonic balance method and the harmonic balance – Newton-Raphson method. *Journal of Applied Mechanics*, 53:455–456, Juin 1986.
- [52] A. A. FERRI and E. H. DOWELL. The behavior of a linear, damped modal system with a non-linear spring-mass-dry friction damper system attached, part II. *Journal of Sound and Vibration*, 101(1):55–74, 1985.
- [53] M. I. FRISWELL, J. E. T. PENNY, and S. D. GARVEY. The application of the IRS and balanced realization methods to obtain reduced models of structures with local non-linearities. *Journal of Sound and Vibration*, 196(4):453–468, 1996.
- [54] G. FRULLA. Rigid rotor dynamic stability using Floquet theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19(1):139–150, 2000.
- [55] R. GANESAN. Nonlinear vibrations and stability of a rotor-bearing system with nonsymmetric clearances. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119:418–424, Avril 1997.
- [56] C. GASQUET and P. WITOMSKI. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, Calcul numérique, Ondelettes*. Masson, 1990.
- [57] G. GENTA. A fast modal technique for the computation of the Campbell diagram of multi-degree-of-freedom rotors. *Journal of Sound and Vibration*, 155(3):385–402, 1992.
- [58] M. GERADIN and D. RIXEN. *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*. Masson, 1992.
- [59] T. GMÜR. *Dynamique des structure*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [60] C. GRUBER and W. BENOIT. *Mécanique générale*. Presses polytechniques et universitaires romandes, second edition, 1998.
- [61] T. A. HARRIS. *Rolling bearing analysis*. John Wiley & Sons, fourth edition, 2001.
- [62] L. HOUPERT. An engineering approach to hertzian contact elasticity — Part I. *Journal of Tribology*, 123:582–588, Juillet 2001.
- [63] L. HOUPERT. An engineering approach to non-hertzian contact elasticity — Part II. *Journal of Tribology*, 123:589–594, Juillet 2001.
- [64] C. S. HSU. Impulsive parametric excitation: Theory. *Journal of Applied Mechanics*, pages 551–558, Juin 1972.

- [65] W. HU, H. MIAH, and E. J. HAHN. A rig for testing lateral misalignment effects in a flexible rotor supported on three or more hydrodynamic journal bearings. *Tribology International*, 33:197–204, 2000.
- [66] M. IMREGUN and D. J. EWINS. Complex modes — Origins and limits. In *Proceedings of the 13th IMAC*, 1995.
- [67] Y. ISHIDA. Nonlinear vibrations and chaos in rotordynamics. *JSME International Journal. Series C*, 37(2):237–245, 1994.
- [68] A. N. JEAN and H. D. NELSON. Periodic response investigation of large order nonlinear rotordynamic systems using collocation. *Journal of Sound and Vibration*, 143(3):473–489, 1990.
- [69] A. N. JEAN and T. N. SHIAU. A reduction method for stability and dynamic response analysis of nonlinear mechanical systems. Number 93-GT-61 in International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition, Cincinnati, Ohio, May 24-27, 1993, pages 1–6.
- [70] A. KAHRAMAN and G. W. BLANKENSHIP. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters. *Journal of Applied Mechanics*, 64:217–226, Mars 1997.
- [71] Y. B. KIM. Multiple harmonic balance method for aperiodic vibration of a piecewise-linear system. *Journal of Applied Mechanics*, 61:131–138, Mars 1994.
- [72] Y. B. KIM and S. T. NOAH. Bifurcation analysis for a modified Jeffcott rotor with bearing clearances. *Nonlinear Dynamics*, 1:221–241, 1990.
- [73] Y. B. KIM and S. T. NOAH. Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise-linear characteristics: A general approach. *Journal of Applied Mechanics*, 58:545–553, Juin 1991.
- [74] Y. B. KIM, S. T. NOAH, and Y. S. CHOI. Periodic response of multi-disk rotors with bearing clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 144(3):381–395, 1991.
- [75] Y. B. KIM and S. T. NOAH. Quasi-periodic response and stability analysis for a non-linear Jeffcott rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 190(2):239–253, 1996.
- [76] M. LALANNE and G. FERRARIS. *Rotordynamics prediction in engineering*. John Wiley & Sons, 1990.
- [77] C. H. LAMARQUE and O. JANIN. Mechanical systems with impacts: comparison of several numerical methods. In *Proceedings of the DETC*, number DETC99/VIB-8347 in ASME Design Engineering Technical Conferences, September 12–15, 1999, Las Vegas, Nevada, pages 1–11.

- [78] S. L. LAU and W. S. ZHANG. Nonlinear vibrations of piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method. *Journal of Applied Mechanics*, 59:153–160, Mars 1992.
- [79] J. L. LAWEN and G. T. FLOWERS. Interaction dynamics between a flexible rotor and an auxiliary clearance bearing. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121:183–189, Avril 1999.
- [80] Y. S. LEE and C. W. LEE. Modelling and vibration analysis of misaligned rotor-ball bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, 224(1):17–32, 1999.
- [81] A. Y. LEUNG and S. K. CHUI. Non-linear vibration of coupled Duffing oscillators by an improved incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 181(4):619–633, 1995.
- [82] A. Y. LEUNG and T. C. FUNG. Construction of chaotic regions. *Journal of Sound and Vibration*, 131(3):445–455, 1985.
- [83] N. T. LIAO and J. F. LIN. A new method for the analysis of deformation and load in a ball bearing with variable contact angle. *Journal of Mechanical Design*, 123:304–312, Juin 2001.
- [84] C. Y. LIAW and C. G. KOH. Dynamic stability and chaos of system with piecewise linear stiffness. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(8):1542–1557, Août 1993.
- [85] F. H. LING. Quasi-periodic solutions calculated with the simple shooting technique. *Journal of Sound and Vibration*, 144(2):293–304, 1991.
- [86] K. H. LOW. Comments on “An assessment of time integration schemes for non-linear dynamic equations”. *Journal of Sound and Vibration*, 201(2):256–257, 1997.
- [87] G. W. LUO and J. H. XIE. Hopf bifurcation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 213(3):391–408, 1998.
- [88] R. H. MAC NEAL. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1:581–601, 1971.
- [89] L. MEIROVITCH. *Principles and techniques of vibrations*. Prentice-Hall, 1997.
- [90] G. MENG and R. GASCH. Stability and stability degree of a cracked flexible rotor supported on journal bearings. *Journal of Vibration and Acoustics*, 122:116–125, Avril 2000.
- [91] P. METALLIDIS and S. NATSIAVAS. Dynamics of a continuous system with clearance and motion limiting stops. In *Proceedings of the DETC*, number DETC99/VIB-8184 in ASME Design Engineering Technical Conferences, September 12–15, 1999, Las Vegas, Nevada, pages 1–9.

- [92] B. MEVEL and J. L. GUYADER. Routes to chaos in ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 162(3):471–487, 1993.
- [93] J. S. MITCHELL. *Introduction to machinery analysis and monitoring*. Pennwell Books, second edition, 1993.
- [94] A. MUSZYNSKA. Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1):207–222, 1996.
- [95] S. NARAYANAN and P. SEKAR. A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 211(3):409–424, 1998.
- [96] C. NATARAJ and H. D. NELSON. Periodic solutions in rotor dynamic systems with nonlinear supports: A general approach. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 111:187–193, Avril 1989.
- [97] S. NATSIAVAS. Periodic response and stability of oscillations with symmetric trilinear restoring force. *Journal of Sound and Vibration*, 134(2):315–331, 1989.
- [98] A. H. NAYFEH and B. BALACHANDRAN. *Applied nonlinear dynamics*. John Wiley & Sons, 1995.
- [99] A. H. NAYFEH and D.T. MOOK. *Nonlinear oscillations*. John Wiley, 1979.
- [100] D. NELIAS, P. SAINOT, and L. FLAMAND. Power loss of gearbox ball bearing under axial and radial loads. *Tribology Transactions*, 37(1):83–90, 1994.
- [101] D. NELIAS and T. YOSHIOKA. Location of an acoustic emission source in radially loaded deep groove ball bearing. *IMEchE Part J Journal of Engineering Tribology*, 212:33–45, 1998.
- [102] S. OKAMOTO, M. SAKATA, K. KIMURA, and H. OHNABE. Vibration analysis of a high speed and light weight rotor system subjected to a pitching or turning motion, II: A flexible rotor system on flexible suspensions. *Journal of Sound and Vibration*, 184(5):887–906, 1995.
- [103] C. PADMANABHAN and R. SINGH. Analysis of periodically excited non-linear systems by a parametric continuation technique. *Journal of Sound and Vibration*, 184(1):35–58, 1995.
- [104] S. PARK. *Development and applications of finite elements in time domain*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Décembre 1996.
- [105] C. PIERRE, A. A. FERRI, and E. H. DOWELL. Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method. *Journal of Applied Mechanics*, 52:958–964, Décembre 1985.

- 
- [106] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, and B. P. FLANNERY. *Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [107] A. RAGHOTHAMA and D. NARAYANAN. Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 226(3):469–492, 1999.
- [108] A. RAGHOTHAMA and D. NARAYANAN. Non-linear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 226(3):493–517, 1999.
- [109] C. RAO, R. B. BHAT, and G. XISTRIS. Experimental verification of simultaneous forward and backward whirling at different points of a Jeffcott rotor supported on identical journal bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 198(3):379–388, 1996.
- [110] Y. REN and C. F. BEARDS. On application of the harmonic balance method to structures containing one non-linear element. *Journal of Sound and Vibration*, 175(5):705–710, 1994.
- [111] R. RIFF and M. BARUCH. Time finite element discretization of Hamilton’s law of varying action. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 22(9):1310–1318, Septembre 1984.
- [112] T. J. ROYSTON and R. SINGH. Experimental study of a mechanical system containing a local continuous stiffness non-linearity under periodic excitation and a static load. *Journal of Sound and Vibration*, 198(3):279–298, 1996.
- [113] S. SAITO. Calculation of nonlinear unbalance response of horizontal Jeffcott rotors supported by ball bearings with radial clearances. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 107:416–420, Octobre 1985.
- [114] M. SAKATA, K. KIMURA, S. OKAMOTO, and K. OIKAWA. Vibration analysis of a high speed and light weight rotor system subjected to a pitching or turning motion, I: A rigid rotor system on flexible suspensions. *Journal of Sound and Vibration*, 184(5):871–885, 1995.
- [115] P. SEKAR. *Chaotic vibrations in systems with contact and impact nonlinearities*. PhD thesis, Machine Dynamics Laboratory, Department of Applied Mechanics, Indian Institute of Technology, Juillet 1995.
- [116] C. SEMLER, W. C. GENTLEMAN, and M. P. PAÏDOUSSIS. Numerical solutions of second order implicit non-linear ordinary differential equations. *Journal of Sound and Vibration*, 195(4):553–574, 1996.



- [117] R. SEYDEL. *Practical bifurcation and stability analysis. From equilibrium to chaos*. Springer-Verlag, second edition, 1994.
- [118] T. N. SHIAU and A. N. JEAN. Prediction of periodic response of flexible mechanical systems with nonlinear characteristics. *Journal of Vibration and Acoustics*, 112:501–507, Octobre 1990.
- [119] T. N. SHIAU and A. N. JEAN. Nonlinear transient analysis of large rotordynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 58:596–598, Juin 1991. Brief Note.
- [120] T. E. SIMKINS. Finite elements for initial value problems in dynamics. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 19(10):1357–1362, Octobre 1981.
- [121] Y. C. SIN. Bearing nonlinearity and stability analysis in high speed machining. *Journal of Engineering for Industry. Series B*, 114:23–30, Février 1992.
- [122] J. J. E. SLOTINE and W. T. LEE. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [123] C. V. SMITH Jr. Remarks on a Comment by C. D. BAILEY. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 22(8):1178–1179, Août 1984.
- [124] M. J. STALLONE, V. GALLARDO, A. F. STORACE, L. J. BACH, G. BLACK, and E. F. GAFFNEY. Blade loss transient dynamic analysis of turbomachinery. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 21(8):1134–1138, Août 1983.
- [125] H. B. STEWART, J. M. T. THOMPSON, Y. UEDA, and A. N. LANSBURY. Optimal escape from potential wells — patterns of regular and chaotic bifurcation. *Physica D*, 85:259–295, 1995.
- [126] J. STOER and R. BULIRSCH. *Introduction to numerical analysis*. Springer-Verlag, 1980.
- [127] Y. T. SU, M. H. LIN, and M. S. LEE. The effects of surface irregularities on roller bearing vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 165(3):455–466, 1993.
- [128] R. SUBBIAH, A. S. KUMAR, and T. S. SANKAR. Transient dynamic analysis of rotors using the combined methodologies of finite elements and transfer matrix. *Journal of Applied Mechanics*, 55:448–452, Juin 1988.
- [129] R. SUBBIAH and N. F. RIEGER. On the transient analysis of rotor-bearing systems. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110:515–520, Octobre 1988.
- [130] P. SUNDARARAJAN and S. T. NOAH. An algorithm for response and stability of large order non-linear systems — Application to rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, 214(4):695–723, 1998.

- [131] P. SUNDARARAJAN and S. T. SINGH. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method — Application to rotor systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119:9–20, Janvier 1997.
- [132] C. S. SUNNERSJO. Rolling bearing vibrations — The effects of geometrical imperfections and wear. *Journal of Sound and Vibration*, 98(4):455–474, 1985.
- [133] N. TANDON and A. CHOUDHURY. An analytical model for the prediction of the vibration response of rolling element bearings due to a localized defect. *Journal of Sound and Vibration*, 205(3):275–292, 1997.
- [134] B. TCHAMWA, T. CONWAY, and C. WIELGOSZ. An explicit scheme for structural dynamics analysis. In *Proceedings of the DETC*, number DETC99/VIB-8160 in ASME Design Engineering Technical Conferences, September 12–15, 1999, Las Vegas, Nevada, pages 1–8.
- [135] S. THEODOSSIADES and S. NATSIAVAS. Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash. *Journal of Sound and Vibration*, 229(2):287–310, 2000.
- [136] J. M. T. THOMPSON and H. B. STEWART. *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & Sons, 1986.
- [137] M. TIWARI, K. GUPTA, and O. PRAKASH. Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5):757–779, 2000.
- [138] M. TIWARI, K. GUPTA, and O. PRAKASH. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 238(5):723–756, 2000.
- [139] A. P. V. URGUEIRA, N. M. M. MAIA, and R. A. B. ALMEIDA. On the dynamic properties of reduced systems in structural coupling. 17th IMAC, pages 1445–1450, 1999.
- [140] E. L. B. VAN DE VORST, R. H. B. FEY, A. DE KRAKER, and D. H. VAN CAMPEN. Steady-state behaviour of nonlinear flexible rotor-bearing systems: Part I — An efficient numerical analysis method. *Machine Vibration*, 112(3):138–145, 1995.
- [141] E. L. B. VAN DE VORST, R. H. B. FEY, A. DE KRAKER, and D. H. VAN CAMPEN. Steady-state behaviour of nonlinear flexible rotor-bearing systems: Part II — Application: Influence of cavitation modelling. *Machine Vibration*, 112(3):146–155, 1995.

- [142] R. VAN DOOREN. Comments on “A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems”. *Journal of Sound and Vibration*, 226(4):799–805, 1999.
- [143] J. M. VANCE. *Rotordynamics of turbomachinery*. John Wiley & Sons, 1988.
- [144] G. VON GROLL and D. J. EWINS. Frequency domain analysis in rotor/stator contact problems. In *Proceedings of the IIAV*, number paper 660 in 7th international conference on Sound and Vibration, Garmisch-Partenkirchen, Germany, July 2000, pages 1–8.
- [145] G. VON GROLL and D. J. EWINS. On the dynamics of windmilling in aero-engines. ImechE, 7th International Conference on Vibrations of Rotating Machinery, Nottingham, September, 2000, pages 721–730.
- [146] G. VON GROLL and D. J. EWINS. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 241(2):223–233, 2001.
- [147] L. VU-QUOC, X. ZHANG, and L. LESBURG. A normal force-displacement model for contacting spheres accounting for plastic deformation: Force-driven formulation. *Journal of Applied Mechanics*, 67:363–371, Juin 2000.
- [148] Y. WANG. Dynamics of unsymmetric piecewise-linear/non-linear systems using finite elements in time. *Journal of Sound and Vibration*, 185(1):155–170, 1995.
- [149] Y. WANG. Prediction of periodic response of rotor dynamic systems with nonlinear supports. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119:346–353, Juillet 1997.
- [150] Z. WU and Y. CHEN. Prediction for the rub-impact phenomena in rotor systems. In *Proceedings of the DETC*, number DETC2001/VIB-21633 in ASME Design Engineering Technical Conferences, Pittsburgh, PA, September 9-12, 2001.
- [151] G. XIE and Y. K. LOU. Alternating frequency/coefficient (AFC) technique in the harmonic balance method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 31(4):517–529, 1996.
- [152] G. XIE and Y. K. LOU. Alternating frequency/coefficient (AFC) technique in the trigonometric collocation method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 31(4):531–545, 1996.
- [153] Y. M. XIE. An assessment of time integration schemes for non-linear dynamic equations. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1):321–331, 1996.
- [154] T. YAMAMOTO and Y. ISHIDA. *Linear and nonlinear rotordynamics*. John Wiley & Sons, 2001.

- 
- [155] E. YHLAND. A linear theory of vibrations caused by ball bearings with form errors operating at moderate speed. *Journal of Tribology*, 114:348–359, Avril 1992.
- [156] J. Y. ZHAO, I. W. LINNETT, and L. J. MCLEAN. Stability and bifurcation of unbalanced response of a squeeze film damped flexible rotor. *Journal of Tribology*, 116:361–368, Avril 1994.
- [157] J. Y. ZHAO, I. W. LINNETT, and L. J. MCLEAN. Subharmonic and quasi-periodic motions of an eccentric squeeze film damper-mounted rigid rotor. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116:357–363, Juillet 1994.
- [158] G. T. ZHENG. Vibration of a rotor system with a switching crack and detection of the crack. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 120:149–154, Janvier 1998.
- [159] T. ZHENG and N. HASEBE. An efficient analysis of high-order dynamical system with local nonlinearity. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121:408–416, Juillet 1999.
- [160] T. ZHENG and N. HASEBE. Nonlinear dynamic behaviors of a complex rotor-bearing system. *Journal of Applied Mechanics*, 67:485–495, Septembre 2000.
- [161] O. C. ZIENKIEWICZ and R. L. TAYLOR. *The finite element method. Volume 1. Basic formulation and linear problems*. McGraw-Hill, fourth edition, 1994.
- [162] E. S. ZORZI and H. D. NELSON. Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. *Journal of Engineering for Power*, (4):71–76, Janvier 1977.



En toute chose, il faut considérer la fin.

**Jean de La Fontaine,** *Le renard et le bouc*