



**HAL**  
open science

# Modélisation thermique de la turbulence de proche paroi en régime hypersonique

Stephane Galera

► **To cite this version:**

Stephane Galera. Modélisation thermique de la turbulence de proche paroi en régime hypersonique. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2005. Français. NNT: . tel-00587261v1

**HAL Id: tel-00587261**

**<https://theses.hal.science/tel-00587261v1>**

Submitted on 20 Apr 2011 (v1), last revised 22 Apr 2011 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER  
UNIVERSITÉ MONTPELLIER II  
- SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC -

# THÈSE

présentée pour obtenir le titre de  
DOCTEUR  
de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc

**Ecole doctorale :** Information, Structures et Systèmes  
**Formation doctorale :** Mathématiques  
**Spécialité :** Mathématiques Appliquées

par

STÉPHANE GALERA

---

**Modélisation thermique de la turbulence  
de proche paroi en régime hypersonique.**

---

soutenue le ... devant le jury composé de :

M. <b>P. Chassaing</b>	ENSICA (Toulouse)	Rapporteur
M. <b>L. Hallo</b>	CELIA (Bordeaux)	Examinateur
M. <b>B. Mohammadi</b>	Université Montpellier II	Directeur
M. <b>F. Nicoud</b>	Université Montpellier II	Examinateur
M. <b>O. Pironneau</b>	Université Paris VI	Rapporteur
M. <b>G. Puigt</b>	CEA/CESTA (Le Barp - Bordeaux)	Examinateur



# Table des matières

Table des figures	6
Table des symboles	8
Introduction	1
<b>1 Les équations de Navier-Stokes</b>	<b>7</b>
1 Notations . . . . .	7
2 Les équations instantanées . . . . .	8
2.1 Conservation de la masse . . . . .	8
2.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	8
2.3 Conservation de l'énergie . . . . .	9
2.4 Le système des équations de Navier-Stokes . . . . .	10
3 Fermeture du système d'équations instantanées . . . . .	10
3.1 Lois de comportement . . . . .	10
3.2 Lois d'états thermodynamiques . . . . .	14
4 Bilan . . . . .	16
<b>2 Les équations de la turbulence</b>	<b>17</b>
1 Nécessité de moyenner . . . . .	17
2 Les équations de Reynolds . . . . .	18
2.1 La moyenne de Favre . . . . .	19
2.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	20
2.3 Conservation de l'énergie . . . . .	20
2.3.1 La contribution de la diffusion par la turbulence de l'énergie totale . . . . .	21
2.3.2 Les corrélations pression-vitesse fluctuante et cisaillement-vitesse fluctuante . . . . .	22
2.3.3 Bilan . . . . .	23
2.4 Les équations de Navier-Stokes obtenus par le filtre de Favre . . . . .	23
2.5 La fermeture des équations . . . . .	24
3 La fermeture mécanique des équations de la turbulence . . . . .	25

3.1	Le flux de mouvement turbulent apparent . . . . .	25
3.2	Notion d'échelle de longueur . . . . .	26
3.3	Equation des contraintes de Reynolds . . . . .	27
3.4	Modèles à deux équations . . . . .	30
3.4.1	Equation de l'énergie cinétique de la turbulence $k$ . . . . .	30
3.4.2	L'équation du taux de dissipation $\varepsilon$ . . . . .	33
3.4.3	Bilan des équations de $k$ - $\varepsilon$ . . . . .	34
3.4.4	Choix des constantes . . . . .	34
3.4.5	Initialisation du champ de grandeurs turbulentes . . . . .	37
4	Fermeture thermique des équations de la turbulence . . . . .	37
4.1	Notion de flux de chaleur turbulent . . . . .	37
4.2	Une alternative à l'analogie de Reynolds . . . . .	38
4.3	Equation de transport pour la variance de l'enthalpie . . . . .	40
4.4	Modèles à deux équations . . . . .	42
4.4.1	Equation de l'énergie thermique de la turbulence . . . . .	42
4.4.2	Equation du taux de dissipation . . . . .	43
4.4.3	Bilan des équations de $k_h$ - $\varepsilon_h$ . . . . .	45
4.4.4	Choix des constantes . . . . .	46
4.4.5	Initialisation du champ de grandeurs turbulentes . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Etude de la modélisation bas Reynolds et réduction mathématique</b>	<b>49</b>
1	Variante bas-Reynolds du modèle $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$ . . . . .	49
2	Analyses asymptotiques . . . . .	51
2.1	Comportement à l'équilibre . . . . .	51
2.2	Comportement de proche paroi . . . . .	53
3	Analyse pratique de modèles "bas Reynolds" existants . . . . .	55
3.1	Quels modèles utiliser ? . . . . .	55
3.2	Présentation du cas d'étude . . . . .	58
3.3	Analyse des résultats et bilan . . . . .	59
4	Modélisation bi-couche thermique . . . . .	80
4.1	Technique bi-couche pour le champ dynamique . . . . .	81
4.2	Technique bi-couche pour le champ de température . . . . .	83
4.3	Correction de l'échelle de vitesse thermique . . . . .	84
4.4	Bilan . . . . .	87
4.4.1	Résolution du champ dynamique . . . . .	87
4.4.2	Résolution du champ thermique . . . . .	87
4.5	Fermeture du modèle . . . . .	89
4.6	Résultats . . . . .	89
4.6.1	Plaque plane . . . . .	90
4.6.2	Interaction onde de choc / couche limite . . . . .	92

<b>4</b>	<b>Applications à des lois de parois thermiques</b>	<b>97</b>
1	Introduction et principe des lois de paroi . . . . .	97
2	Intégrales de bord . . . . .	100
3	Equations pour les lois de paroi . . . . .	101
4	Les lois de paroi pour écoulements “fortement” compressibles : un état des lieux (cf [40]) . . . . .	103
4.1	Région à grand nombre de Reynolds . . . . .	103
4.2	Régions à faible nombre de Reynolds . . . . .	104
4.3	Expression générale . . . . .	104
4.4	Définition de la densité à la paroi $\rho_w$ . . . . .	104
4.5	Correction de la loi de Reichardt . . . . .	107
4.6	Flux de chaleur pariétal $\phi_w$ . . . . .	109
5	Les lois de parois thermiques . . . . .	110
5.1	Flux de chaleur pariétal $\phi_w$ . . . . .	110
5.2	Calculs des diffusivités de la turbulence . . . . .	111
5.3	Formulation thermique . . . . .	112
6	Conditions aux limites pour les champs turbulents . . . . .	113
7	Résultats . . . . .	114
7.1	Interaction onde de choc / couche limite . . . . .	114
7.2	La rampe de compression . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Résolution numérique</b>	<b>121</b>
1	Formulation vectorielle . . . . .	121
2	Éléments de discrétisation . . . . .	123
3	Formulation faible . . . . .	124
3.1	Formulation continue . . . . .	124
3.2	Formulation discrète . . . . .	126
4	Calcul des flux convectifs . . . . .	126
4.1	Propriétés de équations d'Euler . . . . .	126
4.2	Les flux décentrés . . . . .	127
4.3	Décomposition de Steger & Warming . . . . .	128
4.4	Solveur de Riemann approché de Roe . . . . .	129
4.5	Extension du schéma convectif à l'ordre 2 . . . . .	130
5	Traitement des termes diffusifs . . . . .	132
6	Schéma en temps . . . . .	133
6.1	Généralités . . . . .	133
6.2	Schéma explicite . . . . .	133
6.3	Schéma implicite . . . . .	133
7	Conditions aux limites . . . . .	136
7.1	Frontières amont et aval . . . . .	136
7.2	Frontières glissantes et axes de symétrie . . . . .	137
7.3	Parois solides . . . . .	138
8	Méthodes de résolution des systèmes linéaires . . . . .	141

---

8.1	Méthode de stockage compact de la métrique . . . . .	141
8.2	Méthodes de résolution . . . . .	142
8.2.1	Méthodes de type gradients conjugués . . . . .	142
8.2.2	Techniques de préconditionnement . . . . .	144
8.2.3	Choix d'un vecteur initial . . . . .	145
8.2.4	Résultat numérique . . . . .	145
 <b>Conclusions et perspectives</b>		<b>147</b>
 <b>Bibliographie</b>		<b>149</b>

# Table des figures

1.1	Comparaison des différentes lois de viscosité . . . . .	13
1.2	Variations de $e/RT$ en fonction de $Y$ . . . . .	16
3.1	Domaine utilisé pour modéliser le développement de la couche limite. . . . .	58
3.2	Profil de $f_\mu$ à $x = 0.25 m$ . . . . .	61
3.3	Profil de $f_\lambda$ à $x = 0.25 m$ . . . . .	62
3.4	Coefficient de frottement calculé avec les modèles dynamiques. . . . .	63
3.5	Coefficient de frottement calculé avec le modèle NK. . . . .	64
3.6	Coefficient de frottement calculé avec le modèle HNT. . . . .	65
3.7	Nombre de Stanton calculé avec les modèles dynamiques. . . . .	66
3.8	Nombre de Stanton calculé avec le modèle NK. . . . .	67
3.9	Nombre de Stanton calculé avec le modèle HNT. . . . .	68
3.10	Comparaison du profil de vitesse à travers la couche limite dynamique à différentes abscisses : $x = 0.11 m$ , $x = 0.1565 m$ et $x = 0.25 m$ . . . . .	70
3.11	Comparaison du profil de la diffusivité dynamique de la turbulence à travers la couche limite dynamique à différentes abscisses : $x = 0.11 m$ , $x = 0.1565 m$ et $x = 0.25 m$ . . . . .	71
3.12	Comparaison du profil de température à travers la couche limite thermique à différentes abscisses : $x = 0.11 m$ , $x = 0.1565 m$ et $x = 0.25 m$ . . . . .	72
3.13	Comparaison du profil de la diffusivité thermique de la turbulence à travers la couche limite thermique à différentes abscisses : $x = 0.11 m$ , $x = 0.1565 m$ et $x = 0.25 m$ . . . . .	73
3.14	Distribution du nombre de Prandtl turbulent à travers la couche limite thermique et à des abscisses différentes : $x = 0.11 m$ , $x = 0.1565 m$ , $x = 0.25 m$ . . . . .	74
3.15	Distribution du rapport des échelles de temps à travers la couche limite thermique et à des abscisses différentes : $x = 0.11 m$ , $x = 0.1565 m$ , $x = 0.25 m$ . . . . .	75
3.16	Comparaison du profil de temperature en fonction de $y^+$ à $x = 0.25 m$ . . . . .	76
3.17	Comparaison du profil de la diffusivité thermique de la turbulence en fonction de $y^+$ à $x = 0.25 m$ . . . . .	77
3.18	Profil du nombre de Prandtl turbulent en fonction de $y^+$ à $x = 0.25 m$ . . . . .	78
3.19	Profil du rapport des échelles de temps en fonction de $y^+$ à $x = 0.25 m$ . . . . .	79



3.20	Comparaison des coefficients de friction et des nombres de Stanton. . . . .	80
3.21	Domaine utilisé pour modéliser le développement de la couche limite. . . . .	90
3.22	Nombre de Stanton . . . . .	91
3.23	Coefficient de frottement . . . . .	92
3.24	Schéma expérimental de l'interaction onde de choc / couche limite. . . . .	93
3.25	Distributin de la pression à la paroi. . . . .	94
3.26	Distribution du flux de chaleur à la paroi. . . . .	95
4.1	Principes des cellules associées aux formulations cell centered et vertex centered. . . . .	98
4.2	A : Lois de paroi avec paroi fictive sur maillage non structuré triangulaire. B : Lois de paroi avec adhérence à la paroi sur maillage structuré (méthode ONERA [33]). . . . .	99
4.3	Comparaison de la loi de Reichardt avec les comportements linéaire et logarithmique. La loi de Reichardt peut être contrôlée par le choix de la constante $C_1$ . . . . .	105
4.4	Profil de pression le long de la paroi. . . . .	115
4.5	Profil du flux de chaleur le long de la paroi. . . . .	116
4.6	Rampe de compression de Delery. . . . .	117
4.7	Profil du coefficient de pression le long de la paroi. . . . .	118
4.8	Coefficient de frottement. . . . .	119
4.9	Nombre de Stanton. . . . .	120
5.1	Eléments de discrétisation : en trait plein les arêtes des triangles, en pointillé les médianes servant à la construction des cellules de contrôle et la zone grisée, une cellule de contrôle. . . . .	124
5.2	Eléments amont et aval pour le segment $[i, j]$ . . . . .	132
5.3	Comparaison de l'historique de convergence, plaque plane supersonique (cas test 3.2). . . . .	146

## Liste des symboles

$C_f$	coefficient de frottement
$C_h$	coefficient de transfert thermique pariétal
$C_p$	coefficient de pression pariétal ou capacité calorifique à pression constante ( $J.Kg^{-1}.K^{-1}$ )
$C_v$	capacité calorifique à volume constant ( $J.Kg^{-1}.K^{-1}$ )
$\delta$	paramètre des lois de paroi ( $m$ )
$\delta_d$	hauteur de la couche limite dynamique ( $m$ )
$\delta_{th}$	hauteur de la couche limite thermique ( $m$ )
$e$	énergie interne spécifique ( $J.Kg^{-1}$ )
$E$	énergie totale spécifique ( $J.Kg^{-1}$ )
$f_r$	fonction de Reichardt
$\gamma$	rapport des capacités calorifiques
$\Gamma_c$	bord du domaine de calcul avec lois de paroi (paroi fictive)
$\Gamma_w$	paroi réelle
$h$	enthalpie spécifique ( $J.Kg^{-1}$ )
$h_f$	enthalpie de frottement
$\vec{H}$	vecteur flux de chaleur turbulent
$k$	énergie cinétique de la turbulence ( $m^2.s^{-2}$ )
$k_h$	énergie thermique de la turbulence ( $J^2.Kg^{-2}$ )
$\kappa$	constante de Von Kármán
$L$	longueur caractéristique ( $m$ )
$\lambda$	conductivité thermique ( $Kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\lambda_t$	diffusivité thermique de la turbulence ( $Kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$M$	nombre de Mach
$\mu$	viscosité dynamique ( $Kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\mu_t$	diffusivité (viscosité) dynamique de la turbulence ( $Kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$n$	vecteur unitaire normal à la paroi
$p$	pression statique ( $Pa$ )
$Pr$	nombre de Prandtl laminaire (moléculaire)
$Pr_t$	nombre de Prandtl turbulent
$\phi$	flux de chaleur total ( $W.m^{-2}$ )
$q$	flux de chaleur laminaire (moléculaire) ( $W.m^{-2}$ )

$R$	rapport des échelles de temps caractéristiques
$\tilde{R}$	tenseur de Reynolds
$R_{gaz}$	constante des gaz parfaits ( $J.Kg^{-1}.K^{-1}$ )
$Re$	nombre de Reynolds
$\rho$	densité ( $kg.m^{-3}$ )
$S_t$	nombre de Stanton
$s$	constante de l'analogie de Reynolds
$t$	vecteur unitaire tangent à la paroi ou temps
$T$	température ( $K$ )
$T_i$	température au point d'arrêt
$T_f$	température de frottement
$\tau$	contrainte totale
$\tau_d$	échelle de temps dynamique
$\tau_h, \tau_{th}$	échelles de temps thermiques
$u$	champ des vitesses ( $m.s^{-1}$ )
$u_\tau$	vitesse de frottement
$U$	composante tangentielle de la vitesse ( $U = u \cdot t$ )
$\varepsilon$	taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence ( $m^2.s^{-3}$ )
$\varepsilon_h$	taux de dissipation de l'énergie thermique de la turbulence ( $J^2.Kg^{-3}$ )
$x, y$	directions tangentielle et normale ou coordonnées
$\nabla$	opérateur du gradient
$\nabla \cdot$	opérateur de la divergence
$\partial$	opérateur de la dérivée partielle

## Liste des notations

$( )^+$	relatif à l'adimensionnement de couche limite
$( )'$	fluctuation relative à la moyenne de Reynolds
$( )''$	fluctuation relative à la moyenne de Favre
$\overline{( )}$	moyenne de Reynolds
$\overline{\overline{( )}}$	moyenne de Favre
$( )_{eq}$	relatif aux grandeurs à l'équilibre locale de turbulence
$( )_w$	relatif aux grandeurs à la paroi
$( )_e$	relatif aux grandeurs à l'extérieur
$( )_\infty$	relatif aux grandeurs à l'infini amont
$( )_d$	relatif aux grandeurs dynamiques
$( )_{th}, ( )_h$	relatif aux grandeurs thermiques

## Liste des abréviations

$CHIEN$	modèle de Chien
$NK$	modèle de Nagano et Kim
$HNT$	modèle de Hattori, Nagano et Tagawa

# Introduction

Le mécanisme de transfert de chaleur convectif est présent dans tous les problèmes de fluides en mouvement soumis à des gradients de température. Depuis l'expérience de Reynolds (1894) sur le comportement d'un filament coloré injecté dans un écoulement, nous distinguons deux régimes d'écoulement : *le régime laminaire* et *le régime turbulent*.

La distinction se fait par l'intermédiaire d'un nombre sans dimension exprimant l'importance mutuelle des forces stabilisatrices et déstabilisatrices. Le plus usité est le nombre de Reynolds,  $Re$ , qui exprime le rapport entre les forces d'inertie et les forces de frottement visqueux.

Pour les faibles nombres de Reynolds, l'écoulement est dit laminaire. Le fluide s'écoule de façon reproductible. Les lignes de courant, qui permettent de suivre la trajectoire d'une particule fluide, suivent parfaitement les contours de l'objet. Ce régime se caractérise par la prépondérance des forces de frottement visqueux par rapport aux forces d'inertie et par des performances médiocres du point de vue du transfert de chaleur. Ceci s'explique par le fait qu'au sein du fluide, le transfert de chaleur s'effectue presque exclusivement par conduction thermique et que la conductivité thermique de la plupart des fluides est faible, à l'exception des métaux liquides.

Pour des nombres de Reynolds élevés, les forces d'inertie deviennent prépondérantes. Toute perturbation injectée en un point donné se développe en s'amplifiant pour rendre l'écoulement complètement chaotique, état que l'on qualifie de régime turbulent. Des tourbillons de toutes les tailles apparaissent et sont convectés, dissipés ou créés par l'écoulement. La turbulence est un phénomène physique très complexe. Contrairement à de nombreux phénomènes physiques, il n'existe pas de variable permettant de caractériser la turbulence, le nombre de Reynolds n'étant qu'un indicateur. Ce mouvement est évidemment très favorable au mécanisme de transfert de chaleur puisqu'il favorise le mélange intime de la matière. Il permet d'ajouter à la conduction, toujours présente comme pour les écoulements laminaires, un mécanisme de transport lié aux fluctuations du fluide. Ce mécanisme d'échange de chaleur est contrôlé par la *diffusivité thermique de la turbulence*.

La limite entre les régimes d'écoulement n'est pas bien définie, mais s'étend sur toute une gamme de nombre de Reynolds. De façon plus précise, c'est la zone où l'état du fluide est en transition entre le régime laminaire et le régime turbulent. Cette situation caractérise le régime de transition qui se rencontre, en général, dès que le nombre de Reynolds atteint une valeur critique. Le nombre de Reynolds critique dépend du problème considéré et de ses caractéristiques. De plus, il est encore difficile de prédire la transition

d'un écoulement laminaire vers le régime turbulent et c'est pourquoi nous continuons à mettre en place des modélisations distinctes pour les écoulements laminaires et pour les écoulements turbulents.

En pratique, les écoulements turbulents sont particulièrement courants dans le domaine de l'aéronautique. On peut citer l'écoulement autour d'un corps de rentré (CdR). L'effet de la turbulence pendant la rentrée atmosphérique de l'objet est important : les contraintes pariétales (cisaillement et flux thermique) sont fortement augmentées. Plus généralement, pour l'industriel qui construit un élément autour duquel se produisent des écoulements avec transfert thermique, il est important de connaître précisément et à moindre coût les champs de vitesse, de pression, et de température qui permettent de dimensionner cet élément, et éventuellement de l'optimiser.

Pour atteindre cet objectif, nous avons à notre disposition des dispositifs expérimentaux, où nous cherchons à reproduire les conditions de fonctionnement en vol du CdR à l'aide de paramètre de similitude. Néanmoins, dans la plupart des cas, il est impossible d'atteindre sur un banc d'essai ou en soufflerie l'ensemble des conditions de vol. Le problème de l'extrapolation au vol des résultats d'essai se pose alors. Il est d'autre part très coûteux de réaliser une série d'essais dédiés à l'étude paramétrique permettant l'optimisation du CdR. Enfin les moyens de mesure ne permettent pas toujours d'accéder précisément aux grandeurs recherchées comme le coefficient de frottement ou le coefficient de transfert thermique à la paroi.

Aussi la simulation numérique est-elle utilisée systématiquement à tous les stades de la conception d'un système, avec des approches plus ou moins complexes suivant le problème traité.

La modélisation et la simulation de la turbulence se basent sur diverses méthodes :

- *DNS pour Direct Numerical Simulation* : c'est le calcul de toutes les échelles de la turbulence. Les maillages nécessaires, extrêmement fins, ne permettent pas de calculer un écoulement turbulent sur un corps de grande taille. Le coût d'un tel calcul est largement supérieur aux possibilités des plus grands calculateurs.
- *LES pour Large Eddy Simulation* : c'est le calcul de toutes les échelles de turbulence de taille supérieure à la plus petite des mailles du maillage. La prise en compte des autres échelles est modélisée. Cette approche permet de traiter des écoulements à plus grand nombre de Reynolds et commence aujourd'hui à être utilisée industriellement. Néanmoins, les maillages nécessaires sont encore très volumineux et surtout, les temps de calculs sont prohibitifs pour une utilisation systématique dans un processus de conception.
- *RANS pour Reynolds Averaged Navier-Stokes* : c'est l'approche la plus intéressante aujourd'hui du point de vue industriel. Le problème de la turbulence est abordé sous un angle mathématique en supposant que *l'écoulement admet deux échelles*

*caractéristiques et que nous pouvons séparer la “moyenne” (partie non fluctuante de la quantité) des “fluctuations”. C’est l’approche que nous utilisons dans ce travail. Nous décrivons par la suite les échelles caractéristiques utilisées.*

L’utilisation de cette dernière méthode fait apparaître des termes inconnus provenant des fluctuations turbulentes comme le tenseur de Reynolds  $-\overline{\rho u'' \otimes u''}$ , ou le vecteur flux de chaleur turbulent  $-\overline{\rho u'' h''}$ . Ces quantités doivent être modélisées par l’intermédiaire de modèles de turbulence. Les méthodes RANS, bien que moins précises que les méthodes DNS ou LES du fait de la perte d’informations par l’opérateur de moyenne, permettent de calculer des configurations complexes à grand nombre de Reynolds et sont aujourd’hui utilisables au stade de la conception grâce à l’accroissement de la puissance de calcul et à l’amélioration des méthodes numériques.

Les modèles de turbulence les plus utilisés industriellement sont les modèles qui ne transportent que les échelles caractéristiques de la turbulence. Ces modèles relient les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents de façon linéaire respectivement au gradient de vitesse et au gradient d’enthalpie, en introduisant les notions dites de Boussinesq de diffusivité dynamique de la turbulence  $\mu_t$  et de diffusivité thermique de la turbulence  $\lambda_t$ . Ces diffusivités sont données par les échelles caractéristiques de la turbulence qui sont obtenues par la résolution de leurs équations de transport. Les diffusivités sont elles-même reliées entre elles par l’intermédiaire du nombre de Prandtl turbulent par analogie avec la définition du nombre de Prandtl moléculaire :

$$\frac{\mu_t}{\lambda_t} = P_{rt}. \quad (1)$$

L’élément clef qui sert généralement de support à la résolution du problème de transfert de chaleur par convection en régime turbulent réside dans le concept de l’analogie de Reynolds [72]. Cette analogie suppose que ce nombre de Prandtl turbulent est constant. Ainsi il suffit de ne transporter que deux échelles caractéristiques, celles de la turbulence dynamique, et de supposer que la diffusion thermique par la turbulence est égale, ou au moins proportionnelle à la diffusivité dynamique de la turbulence. Par conséquent, la seule connaissance du mécanisme de transport de quantité de mouvement permet de quantifier les mécanismes de diffusion par la turbulence. La base physique d’un tel raisonnement repose essentiellement sur le fait qu’en l’absence de diffusion moléculaire significative, un contaminant (chaleur, fumée, ...) suit les particules fluides et que la température se comporte comme une quantité transportée par le fluide.

Cette analogie est insuffisante pour plusieurs raisons :

- Tout d’abord, le contaminant est souvent considéré comme un scalaire passif, s’il n’a pas d’effets notables sur le champ des vitesses. Si de très petites quantités de chaleur peuvent être considérées comme telles, des variations de température, mêmes modérées, engendrent des variations de masse volumique notables : la chaleur ne peut être considérée comme passive.

- Cette analogie, s'exprime (Eq. 1) en utilisant un facteur de proportionnalité (ou nombre de Prandtl turbulent)  $P_{r_t}$ , unitaire. En fait, l'expérience montre qu'il n'en est rien [47] [71], mais qu'il varie très largement à travers la couche limite :
  - $P_{r_t} \sim 0.85$  dans la zone "pleinement turbulente", c'est-à-dire loin de la paroi.
  - Dans la zone de proche paroi, le problème reste ouvert.
  - La valeur du nombre de Prandtl turbulent dépend aussi des conditions aux limites. Lorsqu'elles ne sont pas homologues pour les champs de vitesse et de température moyenne, ce nombre perd tout son sens, du moins dans les zones concernées. Nous constatons par exemple, que dans un écoulement sur paroi rugueuse, la résistance de formes des rugosités, due aux chutes de pression qu'elles entraînent, augmente directement le frottement, alors que le transfert thermique n'augmente que dans une moindre proportion (dans le cas incompressible) par rapport au cas de la paroi lisse.
  - Dans les écoulements libres, le nombre de Prandtl turbulent est nettement inférieur à l'unité dans la zone centrale.

De plus, le nombre de Prandtl turbulent peut varier d'un écoulement à un autre. Par exemple, il est de l'ordre de 0.9 dans un sillage chauffé et plutôt de l'ordre de 0.5 dans une couche de mélange chauffée. Prendre un nombre de Prandtl turbulent constant égal à 0.9 dans ce dernier cas reviendrait à sous-estimer la diffusivité thermique de la turbulence et donc le flux de chaleur de plus de 40%. Ces tendances sont confirmées par les études de simulations numériques directes [71], qui restent cependant limitées à de très faibles nombres de Reynolds. Une énorme base de données a été établie sur  $P_{r_t}$  au cours de ces dernières décennies [10] [5]. Elle se limite cependant aux seuls cas de couches limites, écoulements de canal plan ou tubes, etc ... . Très peu de données existent pour des géométries plus complexes. Enfin, il existe une grande dispersion des valeurs expérimentales. Ceci résulte de la difficulté inhérente à la mesure de  $P_{r_t}$  qui doit être constituée à partir des mesures de plusieurs grandeurs de base :

$$P_{r_t} = \frac{\widetilde{u'' \otimes u''} / \nabla \tilde{u}}{\widetilde{u'' h''} / \nabla \tilde{h}} \quad (2)$$

Ces grandeurs de base ne sont mesurables qu'avec des erreurs relativement importantes, dépassant les 10 % pour les mesures de  $\widetilde{u'' h''}$  [35] [62].

Les remarques précédentes rendent toute hypothèse sur l'universalité d'une formule donnant le nombre de Prandtl turbulent, quasi-caduque [59]. Par conséquent,  $\lambda_t$  doit être évalué sans la connaissance *a priori* de  $P_{r_t}$ . L'idée adoptée est alors de modéliser les équations de transport gouvernant le phénomène de diffusivité thermique de la turbulence, comme nous l'avons fait pour introduire la diffusivité dynamique de la turbulence [74].

Les modèles à quatre équations de transport (2 pour la turbulence dynamique et 2 pour la turbulence thermique) présentent donc un intérêt certain. Ces modèles sont développés depuis de nombreuses années. Pour la partie dynamique, ils consistent généralement à

transporter l'énergie cinétique de la turbulence  $k$ , permettant de donner l'échelle caractéristique de la vitesse, et une autre échelle de turbulence ( $\varepsilon, \omega, l, \dots$  [23]) permettant de donner l'échelle caractéristique de longueur et obtenir ainsi la diffusivité dynamique de la turbulence. Pour la partie thermique, ces modèles consistent généralement à transporter l'énergie thermique de la turbulence  $k_h$  (demi-variance des fluctuations d'enthalpie) et une autre échelle de turbulence thermique qui est souvent le taux de dissipation de cette variance  $\varepsilon_h$  [17].

Le défaut des modèles de turbulence de type  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  (c'est-à-dire à quatre équations de transport) est qu'ils ne sont pas adaptés aux zones proches de la paroi, où les effets visqueux dominent. Ce problème est corrigé en mettant en place des fonctions d'amortissement des termes turbulents dans une zone proche de la paroi : c'est la technique employée dans les modèles de turbulence bas-Reynolds [26, 43, 60, 80–82]. L'étude des écoulements supersoniques du point de vue expérimental a démontré la complexité des phénomènes physiques de la couche limite qui se forment au voisinage de la paroi. Les gradients des variables  $y$  étant très élevés, nous utilisons de très petites mailles lors des simulations, ce qui engendre un coût numérique important. De plus, le pas de temps de calcul étant inversement proportionnel au carré de la taille des mailles

$$\Delta t \sim \frac{\mu + \mu_t}{\rho} \frac{1}{\Delta x^2}, \quad (3)$$

la dépendance en temps varie alors comme le carré de l'inverse de la plus petite taille de mailles. Cette contrainte peut être très restrictive dans la région de proche paroi.

C'est pour cette raison que nous avons cherché à utiliser un modèle standard de type  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  sans fonction d'amortissement, en le couplant à un modèle phénoménologique pour les parois. La solution adoptée ici consiste à utiliser au maximum la connaissance de l'écoulement afin de trouver de nouvelles conditions aux limites dans une zone interne à la couche limite. C'est le principe des *lois de paroi*. L'objectif de cette méthode est de simuler les écoulements en évitant la zone de proche paroi. De plus, le modèle de loi de paroi doit permettre de retrouver les coefficients de pression, de frottement et de flux thermique pariétaux qui permettent de connaître les sollicitations à la paroi.

Des travaux théoriques et numériques sur le développement de lois de parois prenant en compte des effets de compressibilité, de recirculation et du gradient de pression pour des écoulements de couche limite turbulente super- et hypersoniques, ont été menés par G. Puigt et B. Mohammadi [20, 21, 40], ... Ces travaux ne concernent que l'amélioration de la modélisation du champ dynamique des écoulements turbulents.

Cette démarche théorique n'a été appliquée que très récemment à l'amélioration de la modélisation du champ thermique [58].

Cette thèse se situe dans le cadre du développement et de l'extension de modèles thermiques pour les écoulements de couche limite super- et hypersoniques sur parois isothermes. L'objectif est de mettre en place une méthode de réduction mathématique des modèles de type  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  et de l'appliquer à des problèmes typiques de rentrée



atmosphérique.

La thèse est organisée de la façon suivante :

- Dans un premier temps, les équations de base de la modélisation de la turbulence sont présentées dans un cadre compressible. C'est ainsi que nous introduisons les modèles thermiques basés sur les fluctuations d'enthalpie.
- Dans un second temps, les modèles à quatre équations bas-Reynolds sont analysés. Ces travaux nous permettent de développer une technique bi-couche dans laquelle de nouvelles longueurs caractéristiques de la turbulence thermique sont proposées.
- Ces longueurs nous permettent enfin d'exhiber de nouvelles lois de paroi thermique satisfaisant les contraintes dynamique et thermique rencontrées dans les écoulements de couches limites turbulentes super- et hypersoniques.

Les différents modèles proposés ont été implantés dans le code **NSC2KE** [19]. La technique numérique utilisée est une combinaison de la méthode des volumes finis et de la méthode de Galerkin (éléments finis). Ce code permet de calculer des écoulements 2D et axisymétriques sur des maillages non-structurés. Certains aménagements ont été effectués afin d'adapter le code aux contraintes rencontrées lors de la modélisation thermique de la turbulence. En particulier, il a été nécessaire d'implémenter la méthode numérique, d'introduire des effets de gaz réel (lois d'état, solveur de Roe modifié, . . .) et de dimensionner le code.

La procédure complète est appliquée à plusieurs cas pratiques allant des simples écoulements de paroi jusqu'aux écoulements complexes avec recirculation. Une comparaison aux résultats expérimentaux est effectuée et met clairement en évidence les avantages des différents modèles.

# Chapitre 1

## Les équations de Navier-Stokes

### Introduction

Les équations de Navier-Stokes sont à la base du mouvement fluide et du transfert de chaleur par conduction en régime laminaire. Elles expriment le principe de conservation pour les différentes grandeurs caractérisant l'écoulement. Dans cette partie, nous nous attacherons à montrer les grandes lignes du développement et de la fermeture du système d'équations instantanées de Navier-Stokes.

### 1 Notations

Soient  $q$  une fonction scalaire,  $v$  et  $w$  des fonctions vectorielles et  $A$  et  $B$  des tenseurs de deuxième ordre (matrices).

Nous pouvons définir maintenant les objets mathématiques utiles :

$$\partial_t v = \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\partial_j v = \frac{\partial v}{\partial x_j},$$

$$\nabla q = \text{gradient de } q \text{ (vecteur)},$$

$$\nabla v = \text{tenseur de } 2^{\text{eme}} \text{ ordre } (\nabla v)_{ij} = \partial_i v_j,$$

$$\nabla \cdot v = \text{divergence de } v : \nabla \cdot v = \sum_i \partial_i v_i$$

$$\nabla \cdot A = \text{vecteur dont la } j^{\text{eme}} \text{ composante est } \sum_i \partial_i A_{ij},$$

$$u \cdot v = \text{produit scalaire},$$

$$v \nabla v = v_i \partial_i v,$$

$$A : B = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij},$$

$$v \otimes w = \text{tenseur de } 2^{\text{eme}} \text{ ordre } (v \otimes w)_{ij} = v_i w_j.$$

## 2 Les équations instantanées

Considérons un fluide contenu dans un ouvert  $\Omega$  borné connexe de  $\mathbb{R}^k$  ( $k = 2$  ou  $k = 3$ ) pendant un intervalle de temps  $[0, T']$ .

On notera par  $x$  un point de  $\Omega$  et  $t$  sera un instant (*i.e.* un élément de  $\mathbb{R}^+$ ).

### 2.1 Conservation de la masse

Soit  $A$  un sous-domaine régulier de  $\Omega$ . Le principe de conservation de la masse dit que la variation de masse dans  $A$  est égale au flux de masse à travers la frontière  $\partial A$  de  $A$ . Il en résulte :

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \rho dx = - \int_{\partial A(t)} \rho u \cdot \vec{n} ds,$$

où  $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  est un vecteur normal unitaire défini localement sur  $\partial A$  et dirigé vers l'extérieur de  $A$ .

Comme  $A$  est régulier, la formule de Stokes donne :

$$\int_{A(t)} \nabla \cdot (\rho u) dx = \int_{\partial A(t)} \rho u \cdot \vec{n} ds.$$

Donc nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \rho dx + \int_{A(t)} \nabla \cdot (\rho u) dx = 0.$$

Comme  $A$  est défini arbitrairement, le principe de conservation de la masse conduit à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \quad (1.1)$$

**Remarque 2.1** *Cette équation est nommée équation de continuité.*

### 2.2 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de la conservation de mouvement provient de la loi de Newton :

$$\sum \text{Forces} = \text{accélération suivant le mouvement du fluide.}$$

Soit une particule de fluide en  $x$  à l'instant  $t$  ; par définition de la vitesse, cette particule sera en  $x + u(x, t)\delta t$  à l'instant  $t + \delta t$  et son accélération est :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} (u(x + u(x, t) \delta t, t + \delta t) - u(x, t)) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u.$$

Maintenant, nous devons exprimer les forces qui agissent sur  $A$  :

- Les forces extérieures  $\int_{A(t)} f$  où  $f$  est la force extérieure par unité de volume.
- La force de pression et la force visqueuse due à la nature du fluide

$$\int_{\partial A(t)} (\tau - p\mathbf{I}) \vec{n} dx = \int_{A(t)} (\nabla \cdot p\mathbf{I} - \nabla \cdot \tau) dx,$$

où  $\tau$  est le tenseur des efforts. L'équation précédente vient de la formule de Stokes.

En conséquence, nous avons :

$$\int_{A(t)} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \int_{A(t)} f - \nabla \cdot p\mathbf{I} + \nabla \cdot \tau,$$

comme  $A$  est défini arbitrairement :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) + \nabla \cdot p\mathbf{I} - \nabla \cdot \tau = f.$$

Notons que :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) - \left( \frac{\partial u}{\partial t} \rho \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u) u = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \rho u \nabla u.$$

Il en résulte l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \cdot (p\mathbf{I} - \tau) = f. \quad (1.2)$$

### 2.3 Conservation de l'énergie

Considérons un élément de volume  $A$  bougeant avec le fluide. L'énergie totale massique  $E$  dans un élément de volume provient de :

- l'énergie interne massique  $e$ ,
- l'énergie cinétique  $\frac{u^2}{2}$ .

Donc,  $E = e + \frac{u^2}{2}$  et l'énergie dans un volume  $A$  est  $\int_A \rho E$ . De plus, l'énergie  $E$  est la somme des travaux des forces et de la quantité de chaleur reçue. Le travail des forces est  $\int_{A(t)} u \cdot (f + \tau - p\mathbf{I}) \vec{n}$ . Notons  $q$  la densité de flux d'énergie transporté par conduction thermique.

Nous obtenons donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \rho E = \int_{A(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho u E) \right) = \int_{A(t)} u \cdot f + \int_{\partial A(t)} \left( u(\tau - p\mathbf{I}) - q \right) \vec{n}.$$

A l'aide de la formule de Stokes et comme la relation précédente est vraie pour tout  $A$ , nous arrivons à l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (u(\rho E + p\mathbf{I})) = \nabla \cdot (u\tau + q) + u \cdot f. \quad (1.3)$$

## 2.4 Le système des équations de Navier-Stokes

Nous supposons enfin que le système dynamique n'est soumis à aucune force extérieure ( $f = 0$ ). Nous obtenons le système des équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \nabla \cdot \sigma \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho u E) = \nabla \cdot (u\sigma) - \nabla q. \quad (1.6)$$

où  $\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$ .

Tel qu'il a été établi, le système précédent est **ouvert** avec plus d'inconnues que d'équations. Pour le **fermer**, des relations supplémentaires sont donc nécessaires et relient les inconnues *intermédiaires*  $\sigma$  et  $q$  aux inconnues *principales*. Il nous faut alors préciser maintenant les lois de comportement et la loi d'état du modèle fluide.

## 3 Fermeture du système d'équations instantanées

Nous allons dans cette partie traiter la fermeture du système d'équations 1.4, 1.5 et 1.6 : la fermeture s'appuie sur la forme explicite de lois de comportements pour la viscosité et le transfert de chaleur et sur une loi d'état pour la pression.

### 3.1 Lois de comportement

Le cisaillement interne dans un fluide n'apparaît que lorsque les différentes portions de celui-ci s'écoulent avec des vitesses différentes et se déplacent donc les unes par rapport aux autres. Il s'ensuit [56] que  $\tau$  doit dépendre des dérivées spatiales de la vitesse. Si les gradients de la vitesse ne sont pas trop importants, nous pouvons admettre que le transport de mouvement déterminé par la viscosité ne dépend que des dérivées premières de la vitesse. Nous supposons de plus que la dépendance de  $\tau$  par rapport aux dérivées  $\nabla u$  est linéaire.

D'autre part,  $\tau$  doit aussi s'annuler lorsque le fluide effectue d'un bloc un mouvement de rotation uniforme, car alors le fluide n'est le siège d'aucun frottement interne. Dans le cas d'une rotation uniforme avec une vitesse angulaire  $\omega$  et de rayon  $r$ , la vitesse  $u$  est égale au produit vectoriel  $\omega \wedge r$ .

Les combinaisons linéaires des dérivées  $\nabla u$  qui s'annulent lorsque  $u = \omega \wedge r$  sont les sommes :

$$\nabla u + {}^t\nabla u. \quad (1.7)$$

Il s'ensuit que  $\tau$  doit comporter ces combinaisons symétriques des dérivées  $\nabla u$ . En usant de la notation tensorielle, les hypothèses précédentes conduisent à exprimer le tenseur des contraintes de viscosité sous la forme :

$$\tau = \mu(\nabla u + {}^t\nabla u) + \zeta \nabla \cdot u \mathbf{I}. \quad (1.8)$$

Les symboles  $\mu$  et  $\zeta$  désignent deux scalaires analogues aux coefficients de Lamé de l'élasticité linéaire. Le premier est encore appelé viscosité dynamique et l'autre, second coefficient de viscosité. Ils sont tous les deux positifs.

La relation précédente peut être explicitée différemment en faisant apparaître la décomposition en partie sphérique et déviateur [66] :

$$\tau = \mu(\nabla u + {}^t\nabla u - \frac{2}{3} \nabla \cdot u \mathbf{I}) + (\zeta + \frac{2}{3} \mu) \nabla \cdot u \mathbf{I}. \quad (1.9)$$

Cette forme montre que le regroupement :

$$\eta = \zeta + \frac{2}{3} \mu, \quad (1.10)$$

joue le rôle d'une viscosité de volume au sens où elle est associée à des variations de volumes de la particule fluide. Par suite, elle disparaît dans toute évolution isovolume.

De plus, dans toute la suite de ce travail, nous supposons vérifiée l'hypothèse de Stokes :

$$2\mu + 3\zeta = 0, \quad (1.11)$$

ce qui conduit à la forme la plus générale du tenseur d'ordre deux :

$$\tau = \mu(\nabla u + {}^t\nabla u - \frac{2}{3} \nabla \cdot u \mathbf{I}). \quad (1.12)$$

Cette expression est plus communément connue sous le nom de Loi de Newton de viscosité. Il est alors possible [2] de montrer, à l'aide de la théorie cinétique des gaz, qu'une condition nécessaire pour que l'équation 1.12 soit vraie, est :

$$\frac{\tau_m}{c} \left| \nabla u \right| \ll 1, \quad (1.13)$$

où  $\tau_m$  est le libre parcours moyen des molécules et  $c$  est une vitesse moléculaire caractéristique, par exemple la vitesse du son.

Nous adoptons dans la suite de la thèse la notation suivante :

$$\tau = \mu S \text{ avec } S = (\nabla u + {}^t\nabla u) - \frac{2}{3} \nabla \cdot u \mathbf{I}, \quad (1.14)$$

qui permet de séparer clairement les contributions de la viscosité et du gradient de vitesse dans le cisaillement. Pour expliciter complètement le cisaillement, il suffit maintenant de disposer d'une loi d'évolution de la viscosité.

Pour un écoulement dans l'air, il est possible d'expliciter  $\mu$  grâce à la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{1.5} \left( \frac{T_{ref} + 110.4}{T + 110.4} \right) \quad (1.15)$$

où  $T_{ref} = 273.15$  K et  $\mu_{ref} = 1.711 \cdot 10^{-5} \text{ Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ . La loi de Sutherland reste une très bonne approximation de la viscosité pour des températures ne dépassant pas 1 500 K.

Pour des températures plus élevées, il existe la loi de PANT (pour PAssice Nosetip Technology [61]) :

$$\mu = 3.334 \cdot 10^{-7} T^{0.7} \quad (1.16)$$

valable pour des températures plus élevées mais inapplicable pour des mélanges d'espèces arbitraires.

Il existe aussi une loi de PANT modifiée qui permet de raccorder (à l'ordre 0) la loi de PANT à celle de Sutherland :

$$\begin{cases} \mu = 4.464 \cdot 10^{-5} \left( \frac{T}{1111.11} \right) \frac{1221.44}{T + 110.33} & \text{si } T \leq 1111.11 \\ \mu = 2.7482 \cdot 10^{-5} \left( \frac{T}{555.56} \right)^{0.7} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.17)$$

La valeur 1111.11 est obtenue comme point de raccord entre les 2 lois originales. Pour  $T \leq 1111.11$ , la loi de Sutherland originale est modifiée en prenant comme valeurs de référence la température  $T = 1111.11$ K et la viscosité associée.

Nous pouvons comparer sur la figure 1.1 le détail des différentes lois de viscosité en fonction de la température.

Il ne reste plus maintenant qu'à expliciter la densité de flux d'énergie  $q$ . Le seul mode de transmission de chaleur envisagé dans ce travail est de type conductif. Lorsque le gradient de température dans le fluide n'est pas très important [56], nous pouvons développer  $q$  en une série de puissance du gradient. En se limitant au premier terme du développement, nous avons en première approximation que :

$$q = -\lambda \nabla h, \quad (1.18)$$

où  $\lambda$  est le coefficient de conductivité thermique. Cette expression est plus connue sous le nom de Loi de Fourier (écrite en enthalpie). Le critère de validité de la Loi de Fourier est le suivant [2] :

$$\frac{\tau_m}{h} \left| \nabla h \right| \ll 1 \quad (1.19)$$

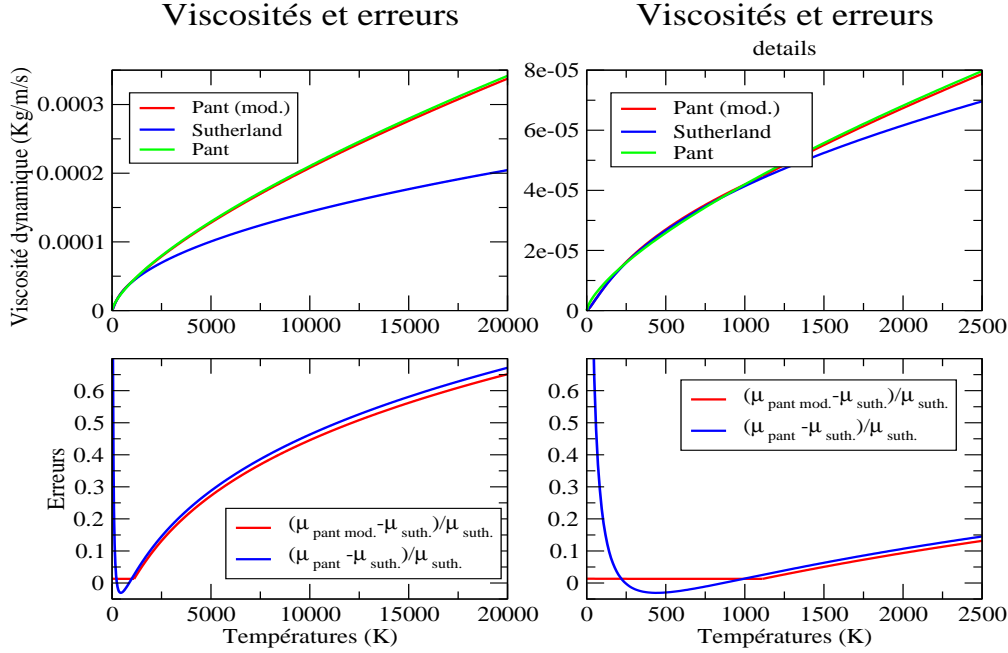


FIG. 1.1 – Comparaison des différentes lois de viscosité

où  $\tau_m$  est le libre parcours moyen des molécules.

Le coefficient de conduction thermique  $\lambda$  est toujours positif puisque le flux d'énergie doit être dirigé des régions de températures plus élevées vers les régions se trouvant à plus basses températures, ce qui signifie que  $q$  et  $\nabla h$  doivent être dirigés en sens contraires. Ce coefficient peut être relié à la viscosité par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{\mu}{P_r}, \quad (1.20)$$

où  $P_r$  est un nombre sans dimension, appelé nombre de Prandtl moléculaire. Ce nombre représente le rapport du temps de diffusion thermique sur le temps de diffusion dynamique. Bien qu'il varie avec la température selon la loi suivante [70] :

$$P_r(T) = 0.66 + 0.1 \exp - \frac{T - 123.15}{300}, \quad (1.21)$$

nous prendrons ce nombre constant. En général, pour des écoulements d'air,  $P_r = 0.72$ . Il est aussi possible d'explicitier le coefficient  $\lambda$  en fonction de la température et de la pression. Une forme approchée peut être [70] :

$$\lambda = \frac{4185.25}{C_p} \left( 6.325 \cdot 10^{-7} \frac{T^{1.5}}{T + 245.4 \cdot 10^{-12/T}} \right). \quad (1.22)$$



### 3.2 Lois d'états thermodynamiques

Pour fermer le système des équations de Navier-Stokes, il nous faut maintenant calculer la pression par une loi d'état. Dans le cadre d'un gaz mono-espèce, la loi d'état peut être définie comme suit :

$$p = \rho R_{gaz} T = (\gamma - 1) \rho e. \quad (1.23)$$

avec  $R_{gaz} = C_p - C_v$ ,  $\gamma = C_p/C_v$ .  $C_p$  et  $C_v$  sont les capacités calorifiques à pression et à volume constant, qui restent à définir.  $R_{gaz}$  et  $\gamma$  sont respectivement la constante des gaz parfaits et le coefficient polytropique.

- **Gaz parfait**

Par définition, un gaz parfait est un gaz pour lequel  $C_p$  et  $C_v$  sont constants. Ainsi  $R_{gaz}$  et  $\gamma$  sont constants :

- $R_{gaz}$  est la constante des gaz parfaits :  $R_{gaz} = 287.05 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,
- $\gamma = 5/3$  pour un gaz monoatomique,
- $\gamma = 7/5$  pour un gaz diatomique.

Pour un tel gaz, l'enthalpie  $h$  et l'énergie interne  $e$  sont des fonctions linéaires de la température et sont explicitement données par :

$$h = C_p T \text{ et } e = C_v T. \quad (1.24)$$

- **Gaz idéal**

Par définition, un gaz idéal est un gaz pour lequel  $C_p$  et  $C_v$  ne sont des fonctions que de la température, et par conséquent ne sont plus constants.

$$C_p = f_1(T) \text{ et } C_v = f_2(T). \quad (1.25)$$

A travers une écriture différentielle, nous pouvons toujours exprimer  $h$  et  $e$  en fonction de  $T$  :

$$dh = C_p dT \text{ et } de = C_v dT. \quad (1.26)$$

Ainsi,  $h$  et  $e$  ne dépendent que de la température, i.e. :

$$h = h(T) \text{ et } e = e(T). \quad (1.27)$$

- **Gaz réel**

Dans le cadre d'un gaz de type " réel ", nous devons prendre en compte les effets des forces intermoléculaires, de sorte que  $h$  et  $e$  soient fonctions de la température et de la pression :

$$h = h(T, p) \text{ et } e = e(T, p). \quad (1.28)$$

- **Equation d'état à l'équilibre thermodynamique de l'air à hautes températures**

Une telle équation d'état est définie par une relation entre les quantités thermodynamiques, par exemple :

$$S = f(\rho, e), \quad (1.29)$$

où  $S$  représente l'entropie.

Morreeuw [49], établit un lissage de l'équation d'état construit d'après le modèle de Hansen [27], de manière à respecter les caractères de régularité et de cohérence indispensables pour une utilisation dans les méthodes de type décentrées.

Plus précisément, nous commençons par définir les variables réduites suivantes :

$$S = 10^4 F(X, Y),$$

$$X = R_{gaz} 10^{-4} \ln(\rho/\rho_0),$$

$$Y = R_{gaz} 10^{-4} \ln(e).$$

où  $\rho_0$  est une densité de référence, et nous utilisons la relation fondamentale de la thermodynamique :

$$de = TdS - pd(1/\rho). \quad (1.30)$$

D'après l'équation 1.30 et en différentiant  $X$  et  $Y$ , nous obtenons :

$$F_y = e/RT \text{ et } F_x = -p/\rho RT. \quad (1.31)$$

La figure 1.2 représente les variations de  $e/RT$  en fonction de  $Y$ , c'est-à-dire les variations de  $C_v$  en fonction de l'énergie interne.

Différents comportements sont mis en évidence :

- pour  $Y < 0.38$  (température inférieure à 500 K),  $C_v = Cte$ , l'air se comporte comme un gaz parfait.
- pour des températures plus élevées,  $0.38 < Y < 0.4$ , c'est-à-dire  $T < 1500$  K, les effets de vibrations moléculaires modifient le bilan de l'énergie interne, nous avons  $C_v = C_v(T)$ , l'air se comporte comme un gaz idéal.
- pour  $Y > 0.4$ , c'est-à-dire  $T > 2500$  K, les effets de dissociation de l'oxygène apparaissent, l'air se comporte comme un gaz réel, nous avons donc  $C_v = f(\rho, e)$ . Ensuite apparaissent les phénomènes de dissociation de l'azote ( $T > 4000$  K) et d'ionisation de l'air à partir de 8000 K.

Cette approximation est valable pour des masses volumiques comprises entre  $10^{-6}$  et  $100 \text{ Kg.m}^{-3}$  et des énergies internes inférieures à  $7.10^7 \text{ J.Kg}^{-1}$ , ce qui correspond au domaine d'usage en aérodynamique hypersonique jusqu'à des Mach supérieurs à 30.

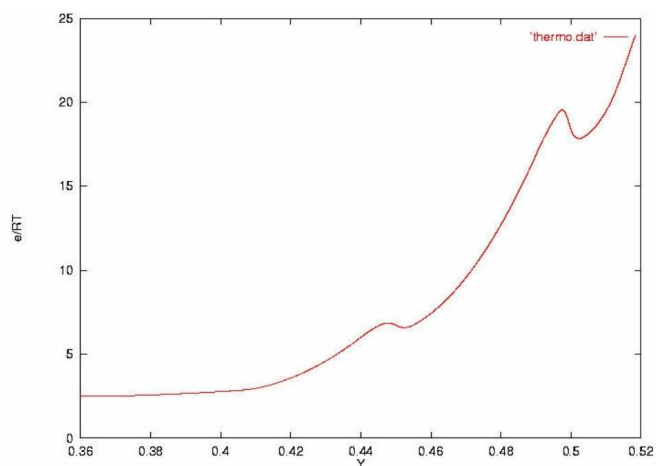


FIG. 1.2 – Variations de  $e/RT$  en fonction de  $Y$ .

## 4 Bilan

Le modèle de Navier-Stokes est celui auquel nous aboutissons en tenant compte des schémas de Newton-Stokes et de Fourier précédents, dans les équations générales de bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie 1.4, 1.5 et 1.6. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles de premier ordre en temps, second ordre en espace, non linéaires et à coefficients non constants. Pour conditionner le modèle à un écoulement particulier, il nous faut lui adjoindre un ensemble de conditions initiales et de conditions aux limites.

# Chapitre 2

## Les équations de la turbulence

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions de diffusivités dynamique et thermique de la turbulence, à partir desquelles nous construisons les modèles de type  $k - \varepsilon / k_h \varepsilon_h$ .

### 1 Nécessité de moyenner

Le caractère turbulent de l'écoulement est représenté par le comportement fluctuant, et *a priori* désordonné, des grandeurs caractéristiques de l'écoulement, qui apparaît lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est grand. Les échelles de temps et d'espace de tels écoulements sont petites, et la résolution directe à partir des équations de bilan 1.4, 1.5 et 1.6 est difficile compte tenu de l'importance des maillages à mettre en oeuvre. Si les équations de Navier-Stokes décrivent toujours le mouvement du fluide, leur résolution directe nécessite un temps de calcul et une place mémoire importants. Par exemple, dans le cas d'un écoulement confiné en conduite, et un nombre de Reynolds de  $10^5$ , le nombre de points nécessaire est de  $10^9$ , d'après une étude de Vandromme [2]. Il devient nécessaire de limiter le nombre d'informations à traiter, par exemple en ne calculant que le champ moyen. Les variables d'état sont alors considérées comme des fonctions aléatoires du temps et de l'espace, et décomposées en une partie moyenne calculée et une partie fluctuante modélisée. Cette approche est appelée décomposition de Reynolds [73]. En reportant cette décomposition dans les équations de bilan précédentes, on obtient les équations représentatives du comportement d'un fluide en écoulement turbulent. La non-linéarité des équations de Navier-Stokes entraîne alors l'apparition de nouveaux termes, appelés corrélations, qu'il faut modéliser.

L'idée centrale est d'avoir  $u = \langle u \rangle + u'$  où  $u'$  est la partie non calculable de l'écoulement,  $\langle \cdot \rangle$  est le filtre et  $\langle u \rangle$  est la partie principale de  $u$ . Il existe beaucoup de filtres dont voici les plus importants :

$$\begin{aligned}\langle u \rangle_B &= \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} u(y,t) dy : \text{moyenne spatiale,} \\ \langle u \rangle_E &= \int u(x,t,s) ds : \text{moyenne statistique,} \\ \bar{u} &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(x,\tau) d\tau : \text{moyenne temporelle,} \\ \langle \langle \bar{u} \rangle \rangle &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \langle u \rangle_B d\tau : \text{moyenne espace-temps,}\end{aligned}$$

où  $B(x,r)$  est la boule de centre  $x$  et de rayon  $r$  et  $s$  est une loi de probabilités.

La solution des équations de Navier-Stokes, bien que déterministe, ressemble à un processus aléatoire car d'une expérience à l'autre, il n'est pas possible de reproduire  $u(x,t)$  mais seulement la partie non oscillante pour un filtre donné. La solution est donc aléatoire et dépend d'une densité de probabilité  $ds$ . Nous venons ainsi de voir l'origine de la moyenne statistique qui apparaît donc comme étant la moyenne la plus naturelle. Ces filtres vérifient certaines propriétés mathématiques :

1. Les filtres sont généralement des opérateurs linéaires :

$$\langle u + \lambda v \rangle = \langle u \rangle + \lambda \langle v \rangle, \quad \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^3 \times ]0, T[), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Pour certains filtres, dérivation et moyenne commutent ; par exemple, le filtre de moyenne temporelle commute avec la dérivation spatiale :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \frac{\partial}{\partial x} (u(x,\tau)) d\tau = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(x,\tau) d\tau \right) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

3. Le filtre ne doit pas avoir d'effet sur des variables moyennées :  $\langle \langle u \rangle \rangle = \langle u \rangle$ .

Notons que le filtre spatial et le filtre temporel ne satisfont pas cette propriété.

4. Généralement, nous demandons aussi :

$$\langle u \langle v \rangle \rangle = \langle u \rangle \langle v \rangle.$$

Le très classique filtre de Fourier et le filtre statistique satisfont les propriétés 1, 2, et 3, mais seul le filtre statistique satisfait la propriété 4.

## 2 Les équations de Reynolds

Nous allons voir maintenant de quelle manière est pris en compte le principe de moyenne précédemment décrit, dans les équations de Navier-Stokes. Nous expliquons succinctement comment nous obtenons les nouvelles équations à partir des équations instantanées, ce qui mettra en évidence le problème de la fermeture.

## 2.1 La moyenne de Favre

Le but est de trouver une forme de système moyenné le plus proche possible de la forme originale des équations. Pour trouver les équations de Navier-Stokes moyennées, nous utiliserons les moyennes de Reynolds et de Favre.

### Définition 1 LA MOYENNE DE REYNOLDS :

Si  $f$  est une fonction quelconque, nous noterons  $\bar{f}$  la moyenne statistique (ou de Reynolds) de  $f$ . Par exemple, pour la masse volumique et le vecteur vitesse, nous noterons  $\bar{\rho}$  et  $\bar{u}$  respectivement les moyennes de Reynolds de  $\rho$  et  $u$ . La partie fluctuante de ces variables sera notée  $\rho'$  et  $u'$ . Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}\rho &= \bar{\rho} + \rho' \text{ où } \bar{\rho}' = 0, \\ u &= \bar{u} + u' \text{ où } \bar{u}' = 0.\end{aligned}$$

En n'utilisant que la moyenne de Reynolds, certains termes deviennent trop difficiles à utiliser dans le cas compressible. En effet, la même décomposition appliquée au produit  $\rho u$  donne :

$$\rho u = \bar{\rho} \bar{u} + \bar{\rho} u' + \rho' \bar{u} + \rho' u',$$

et donc :

$$\overline{\rho u} = \bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho' u'}.$$

En appliquant la moyenne de Reynolds à l'équation de conservation de la masse, il vient :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{u}) + \nabla \cdot (\overline{\rho' u'}) = 0.$$

Cette procédure introduit dans l'équation de continuité un nouveau terme à modéliser,  $\overline{\rho' u'}$ . La fermeture du plus simple système d'équations moyennées est donc conditionnée au moins par la connaissance de cette corrélation. C'est pour éviter cette difficulté qu'il faut utiliser la moyenne de Favre pour la modélisation mathématique des écoulements compressibles turbulents.

### Définition 2 MOYENNE DE FAVRE :

Si  $K$  est une quantité, nous noterons  $\tilde{K}$  la moyenne de Favre [8] de  $K$  et  $K'' = K - \tilde{K}$  les fluctuations de  $K$  pour la moyenne de Favre. De plus,  $\tilde{K}$  s'obtient à partir de la moyenne de Reynolds :

$$\tilde{K} = \frac{\overline{\rho K}}{\bar{\rho}}.$$

L'opérateur de Favre est linéaire, idempotent dans le sens que :

$$\widetilde{f\tilde{g}} = \tilde{f}\tilde{g}, \quad \overline{f\tilde{g}} = \overline{\tilde{f}g} = \tilde{f}\tilde{g}$$

Toutefois, il ne commute pas avec la dérivation.

Dans la suite, nous utiliserons la moyenne de Reynolds pour la densité  $\rho$  et le champ de

pression  $p$ , et la moyenne de Favre pour les autres variables.

Reprenons maintenant l'équation de conservation de la masse. En appliquant la moyenne de Favre pour la vitesse et la moyenne de Reynolds pour la densité, il ne reste plus pour l'équation moyennée, que

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u}) = 0, \quad (2.1)$$

forme strictement semblable à celle de l'équation instantanée 1.4.

Nous portons alors les relations de définitions des moyennes dans les équations instantanées 1.5, et 1.6, et nous prenons la moyenne statistique de ces équations.

## 2.2 Conservation de la quantité de mouvement

En utilisant une technique similaire à celle de l'équation de continuité, et en supposant que la viscosité fluctuante est nulle, l'équation de la quantité de mouvement se met sous la forme :

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} \otimes \tilde{u}) = -\nabla \cdot (\overline{\rho u'' \otimes u''}) - \nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\mu \bar{S}), \quad (2.2)$$

En plus des termes conventionnels qui existent déjà dans l'équation instantanée, nous avons fait apparaître un terme nouveau qui caractérise le frottement turbulent et dont l'existence est à la base du problème de fermeture.

Pour le bilan de quantité de mouvement moyenne suivant la direction advective du seul mouvement moyen, tout se passe comme si l'agitation turbulente, par les corrélations  $\tilde{R} = -\overline{\rho u'' \otimes u''}$ , étaient à l'origine de *contraintes supplémentaires*.

Ces corrélations sont de ce fait appelées contraintes de turbulence ou tensions de Reynolds.

## 2.3 Conservation de l'énergie

En ce qui concerne l'équation sur l'énergie, le passage à la moyenne laisse apparaître l'équation :

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} E \tilde{u}) = \nabla \cdot (\bar{\sigma} \tilde{u}) - \nabla \cdot (\bar{q}), \quad (2.3)$$

Deux termes nécessitent des calculs supplémentaires, le terme de convection et le travail des frottements.

## 2.3.1 La contribution de la diffusion par la turbulence de l'énergie totale

Tout d'abord, nous avons que

$$\overline{\rho E u} = \bar{\rho} \tilde{E} \tilde{u} + \tilde{E} \overline{\rho u''} + \tilde{u} \overline{\rho E''} + \overline{\rho E'' u''}. \quad (2.4)$$

Par définition de la moyenne de Favre

$$\overline{\rho u''} = \bar{\rho} \tilde{u}'' = 0, \quad (2.5)$$

$$\overline{\rho E''} = \bar{\rho} \tilde{E}'' = 0. \quad (2.6)$$

Exprimons maintenant  $\overline{\rho E'' u''}$  en fonction de  $\overline{\rho e'' u''}$ . Par définition de l'énergie totale

$$\rho E = \rho e + \frac{1}{2} \rho \|u\|^2. \quad (2.7)$$

En moyennant ce terme, nous avons

$$\begin{aligned} \overline{\rho E} &= \overline{\rho e} + \frac{1}{2} \overline{\rho \|u\|^2} \\ &= \bar{\rho} \tilde{e} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \|\tilde{u}\|^2 + \frac{1}{2} \overline{\rho \|u''\|^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Comme  $\overline{\rho E} = \bar{\rho} \tilde{E}$ , alors

$$\tilde{E} = \tilde{e} + \frac{1}{2} \|\tilde{u}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho \|u''\|^2}}{\bar{\rho}}. \quad (2.9)$$

D'autre part, par décomposition de l'énergie en partie fluctuante et partie moyennée, nous avons

$$\begin{aligned} E'' &= E - \tilde{E} \\ &= e'' + \frac{1}{2} (\|u\|^2 - \|\tilde{u}\|^2) - \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho \|u''\|^2}}{\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ce qui nous amène à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\rho E'' u''} &= \overline{\rho e'' u''} + \frac{1}{2} \overline{\rho \|u\|^2 u''} - \frac{1}{2} \overline{\|\tilde{u}\|^2 \rho u''} - \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho \|u''\|^2}}{\bar{\rho}} \overline{\rho u''} \\ &= \overline{\rho e'' u''} + \frac{1}{2} \overline{\rho \|\tilde{u} + u''\|^2 u''} + 0 + 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$= \overline{\rho e'' u''} + \tilde{u} \overline{\rho u'' \otimes u''} + \frac{1}{2} \overline{\rho \|u''\|^2 u''},$$



car

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}\|^2\overline{\rho u''} = \frac{1}{2}\|\tilde{u}\|^2\overline{\rho}\tilde{u}'' = 0.$$

Exprimons maintenant  $\overline{\rho e'' u''}$  en fonction de  $\overline{\rho h'' u''}$ , où  $h$ , enthalpie du système, est définie par :

$$h = e + \frac{p}{\rho}. \quad (2.12)$$

En appliquant le filtre, nous obtenons

$$\overline{\rho h} = \overline{\rho e} + \overline{p}, \quad (2.13)$$

c'est-à-dire

$$\tilde{h} = \tilde{e} + \frac{\overline{p}}{\rho}. \quad (2.14)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} h'' &= h - \tilde{h}, \\ &= e'' + \frac{p}{\rho} - \frac{\overline{p}}{\rho}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

et finalement,

$$\overline{\rho h'' u''} = \overline{\rho e'' u''} + \overline{p u''} - \frac{\overline{p}}{\rho} \overline{\rho u''}. \quad (2.16)$$

Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\overline{p}}{\rho} \overline{\rho u''} &= \frac{\overline{p}}{\rho} \overline{\rho} \tilde{u}'' \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En conclusion, nous obtenons pour la moyenne du produit des fluctuations de l'énergie totale et de la vitesse

$$\overline{\rho E'' u''} = \overline{\rho h'' u''} - \overline{p u''} + \tilde{u} \overline{\rho u''} \otimes \overline{u''} + \frac{1}{2} \overline{\rho \|u''\|^2 u''}. \quad (2.18)$$

### 2.3.2 Les corrélations pression-vitesse fluctuante et cisaillement-vitesse fluctuante

La moyenne du travail des forces de frottements s'écrit

$$\overline{\sigma u} = -\overline{p \tilde{u}} - \overline{p u''} + \overline{\tau u}, \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{\tau u} &= \mu \overline{S u} \\ &= \mu (\overline{\tilde{S} \tilde{u}} + \overline{S'' \tilde{u}} + \overline{S'' u''} + \overline{\tilde{S} u''}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 2.3.3 Bilan

Finalement, l'équation de conservation de l'énergie totale moyennée s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{E}\tilde{u}) &= \nabla \cdot (\tilde{u}(\mu\tilde{S} + \overline{\rho u'' \otimes u''}) - \tilde{u}\bar{p}) \\
&\quad - \nabla \cdot (\bar{q} + \overline{\rho h'' u''}) \\
&\quad + \nabla \cdot \left( \mu(\overline{S''\tilde{u}} + \overline{S''u''} + \tilde{S}u'') - \frac{1}{2}\overline{\rho\|u''\|^2 u''} \right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

De même que pour l'équation de quantité de mouvement, des termes nouveaux apparaissent :

- $\overline{S''u''}$ ,  $\overline{S''\tilde{u}}$ , et  $\tilde{S}u''$  correspondent à des termes de dissipation par frottement visqueux,
- $\tilde{R} = -\overline{\rho u'' \otimes u''}$ , qui caractérise le frottement turbulent,
- $\tilde{H} = -\overline{\rho u'' h''}$ , qui caractérise la diffusion par la turbulence de l'enthalpie,
- $\frac{1}{2}\overline{\rho\|u''\|^2 u''}$ , qui est une corrélation triple.

## 2.4 Les équations de Navier-Stokes obtenus par le filtre de Favre

Nous avons finalement obtenu les équations de Navier-Stokes moyennées par le filtre de Favre où de nouveaux termes doivent être modélisés :

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{u}) &= 0, \\
\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{u} \otimes \tilde{u}) &= -\nabla \cdot (\overline{\rho u'' \otimes u''}) - \nabla\bar{p} + \nabla \cdot (\mu\bar{S}), \\
\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{E}\tilde{u}) &= \nabla \cdot (\tilde{u}(\mu\tilde{S} + \overline{\rho u'' \otimes u''}) - \tilde{u}\bar{p}), \\
&\quad - \nabla \cdot (\bar{q} + \overline{\rho h'' u''}) \\
&\quad + \nabla \cdot \left( \mu(\overline{S''\tilde{u}} + \overline{S''u''} + \tilde{S}u'') - \frac{1}{2}\overline{\rho\|u''\|^2 u''} \right).
\end{aligned} \right. \tag{2.22}$$

Dans la suite du mémoire, nous ne nous intéressons qu'à la modélisation des inconnues suivantes, les autres étant négligées :

- $\tilde{R} = -\overline{\rho u'' \otimes u''}$ , qui caractérise le frottement turbulent,
- $\tilde{H} = -\overline{\rho u'' h''}$ , qui caractérise la diffusion par la turbulence de l'enthalpie.

Pour que le problème puisse être résolu, nous devons donc, d'une manière ou d'une autre, décrire ces inconnues par des moyens adéquats. C'est le problème bien connu du choix de la fermeture, et dont la résolution constitue la question centrale de toute la modélisation de la turbulence.

## 2.5 La fermeture des équations

L'établissement du système des équations 2.22 témoigne bien de l'apparition de termes supplémentaires qui s'expriment sous la forme de corrélations, qui traduisent l'effet de la turbulence sur l'évolution du mouvement moyen et qui rendent le système des équations ouvert. Se pose alors le problème de la fermeture du système, c'est-à-dire du lien entre les corrélations et le champ moyen.

La recherche d'équations ou de relations algébriques supplémentaires pour fermer le système d'équations constitue la procédure de modélisation qui doit s'appuyer sur une validation expérimentale. Si les développements récents de méthodes numériques performantes pour les systèmes d'équations non-linéaires aux dérivées partielles ont permis la résolution de problèmes d'écoulements de plus en plus complexes, le calcul d'écoulements compressibles turbulents souffre encore à l'heure actuelle de certaines faiblesses, inhérentes principalement aux difficultés rencontrées lors de la modélisation de la turbulence.

En effet, le modèle de turbulence universel n'existant pas à l'heure actuelle, de nombreux modèles ont été proposés et un problème de choix se pose. Les méthodes de fermetures opèrent sur les équations statistiques aux divers moments de fluctuations de vitesses. Ainsi, nous distinguons divers types de modèles selon "l'ordre" des moments retenus comme inconnues principales. Nous parlerons donc de :

- *modèles du premier ordre* : ils expriment les corrélations doubles en fonction du gradient du champ moyen et d'une viscosité de la turbulence à travers une hypothèse de Boussinesq [45]. Parmi ces modèles, nous distinguons encore les modèles algébriques [25, 46] exprimant directement ces corrélations, le tenseur de Reynolds et le vecteur flux de chaleur turbulent, en fonction des autres variables d'état. Nous distinguons de même, des modèles qui font intervenir des échelles de turbulence et qui nécessitent l'introduction d'équations supplémentaires [26, 43, 54, 60, 80–82]. Les modèles algébriques sont simples à mettre en œuvre mais les résultats ne sont pas toujours très précis et ces modèles nécessitent des adaptations suivant les cas étudiés. Les modèles à équations de transport sont plus coûteux mais ils ont l'avantage d'être valides sur un plus grand nombre de configurations (couches limites attachées, détachées,...).
- *modèles du second ordre* : ils sont obtenus en écrivant les équations exactes des termes du tenseur de Reynolds et du vecteur flux de chaleur turbulent, ainsi qu'en modélisant les corrélations d'ordre 3. Le coût de calcul est très élevé et pour des

écoulements où l'anisotropie est peu importante, ils n'apportent pas d'amélioration notable.

En complément de ce premier critère, s'en ajoute un second plus directement lié au degré de complexité de la procédure de fermeture elle-même.

Très schématiquement nous pouvons considérer que l'obtention d'un système fermé d'équations peut se faire à partir du système ouvert par :

- réduction du nombre d'inconnues,
- adjonction d'équations supplémentaires,
- combinaisons des deux procédures précédentes.

### 3 La fermeture mécanique des équations de la turbulence

Nous nous intéressons dans un premier temps à la détermination du tenseur de Reynolds :

$$\tilde{R} = -\overline{\rho u'' \otimes u''} = -\bar{\rho} \widetilde{u'' \otimes u''}.$$

#### 3.1 Le flux de mouvement turbulent apparent

Une première solution à ce problème fut avancée par Boussinesq en 1877 [45], qui suggéra en analogie à la loi de Newton pour les contraintes de viscosité, de relier le terme de flux de l'équation de quantité de mouvement au gradient de vitesse moyenne multiplié par une viscosité de la turbulence. En effet, un fluide s'écoulant avec turbulence peut être qualitativement décrit comme un fluide possédant une certaine viscosité de la turbulence  $\nu_t$  laquelle s'ajoute de la viscosité cinématique vraie  $\nu$ .

Nous avons alors l'approximation suivante :

$$-\overline{u' \otimes u'} = \nu_t \nabla \bar{u} \quad (2.23)$$

Dans un écoulement plus général que celui d'une couche limite, et pour un fluide compressible, la relation se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\overline{\rho u'' \otimes u''} = \mu_t \left( (\nabla \tilde{u} + {}^t \nabla \tilde{u}) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \tilde{u} \mathbf{I} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \\ \mu_t = \bar{\rho} \nu_t \end{cases} \quad (2.24)$$

où  $k$  est l'énergie cinétique de la turbulence :  $k = \frac{1}{2} \overline{\|u''\|^2}$ .

Le terme  $\frac{2}{3} \bar{\rho} k$  est analogue à une pression dynamique due à l'agitation turbulente.

### 3.2 Notion d'échelle de longueur

Cette modélisation dite “dynamique” concerne le traitement de la diffusivité dynamique de la turbulence,  $\mu_t$ , par le rajout d'équations de transport supplémentaires.

Puisque  $\mu_t$  caractérise l'écoulement turbulent, son ordre de grandeur peut être déterminé par les paramètres  $\bar{\rho}$ ,  $l_d$ , et  $\Delta u_d$  qui désignent respectivement la masse volumique, une longueur de mélange et une échelle de vitesse représentative de l'agitation turbulente. La seule quantité que l'on puisse former avec ces paramètres et qui possèdent les dimensions de la viscosité cinématique est le produit  $\Delta u_d l_d$ , autrement dit :

$$\mu_t \sim \bar{\rho} \Delta u_d l_d. \quad (2.25)$$

Pour constituer l'échelle de vitesse caractéristique des structures turbulentes  $\Delta u_d$ , nous relierons souvent cette échelle de vitesse à l'énergie transportée par la turbulence, donc nous avons par analyse dimensionnelle :

$$\Delta u_d \sim k^{1/2}. \quad (2.26)$$

En ce qui concerne l'échelle de longueur, elle joue un rôle primordial dans le processus de modélisation quel que soit le degré de sophistication adopté. Elle est définie par :

$$l_d \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \quad (2.27)$$

où  $\varepsilon$  représente le taux de dissipation de la turbulence.

D'autres caractéristiques de la turbulence que  $\varepsilon$  ont été introduites dans la littérature pour définir cette échelle [2]. La forme ci-dessus reste, cependant, la plus largement usitée et c'est elle qui a été la plus confrontée aux données expérimentales.

$\mu_t$  est donc proportionnelle à

$$\mu_t \sim \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (2.28)$$

et nous définissons

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (2.29)$$

où  $C_\mu$  est un coefficient de proportionalité.

De plus, il nous faut mettre en avant certains points :

- $k$  et  $\varepsilon$  apparaissent naturellement dans l'expression de la viscosité de la turbulence ci-dessus.
- de plus, nous verrons plus loin, que  $\varepsilon$  intervient directement dans l'équation de transport de  $k$  (Eq. 2.48).

C'est pour ces raisons que les modèles  $k - \varepsilon$  [23] ont été les modèles à deux équations de transport les plus étudiés et les plus courants.

Le problème se ramène maintenant à la détermination de  $k$  et de  $\varepsilon$ .

### 3.3 Equation des contraintes de Reynolds

Cette équation joue un rôle très important car elle se trouve dans toutes les fermetures avec équations de transport sous sa forme complète ou sous forme contractée (énergie cinétique de la turbulence).

Intéressons nous à l'équation de la composante  $\widetilde{u''_k u''_j}$  du tenseur des contraintes de Reynolds exprimée en moyenne pondérée par la masse.

Considérons le produit de l'équation instantanée de quantité de mouvement suivant  $x_j$  par la fluctuation  $u''_k$  :

$$u''_k \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + u''_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j) = u''_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu S_{ij}) - u''_k \frac{\partial}{\partial x_j} (p). \quad (2.30)$$

En permutant les indices  $k$  et  $j$  nous obtenons

$$u''_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + u''_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_k) = u''_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu S_{ik}) - u''_j \frac{\partial}{\partial x_k} (p). \quad (2.31)$$

La moyenne statistique de la somme des équations 2.30 et 2.31 est :

$$\begin{aligned} & \overline{u''_k \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{u}_j)} + \overline{u''_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{u}_k)} \\ & + \overline{u''_k \frac{\partial}{\partial t} (\rho u''_j)} + \overline{u''_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho u''_k)} \\ & + \overline{u''_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j)} + \overline{u''_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u''_i u''_j)} + \overline{u''_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \tilde{u}_i u''_j)} + \overline{u''_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u''_i \tilde{u}_j)} \\ & + \overline{u''_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_k)} + \overline{u''_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u''_i u''_k)} + \overline{u''_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \tilde{u}_i u''_k)} + \overline{u''_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u''_i \tilde{u}_k)} \\ & = -\overline{u''_k \frac{\partial}{\partial x_j} (p)} - \overline{u''_j \frac{\partial}{\partial x_k} (p)} + \overline{u''_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu S_{ij})} + \overline{u''_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu S_{ik})}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nous commençons par réécrire :

$$\overline{u''_k \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{u}_j)} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u''_k \tilde{u}_j}) - \overline{\rho \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial t} (u''_k)}, \quad (2.33)$$

par définition de la moyenne pondérée nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{\rho u_k'' \tilde{u}_j} &= \overline{\rho \frac{\rho u_j''}{\rho} u_k''} \\
&= \frac{\overline{\rho u_j''}}{\rho} \overline{\rho u_k''} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\overline{u_k'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{u}_j)} &= \overline{-\rho \tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial t} (u_k'')} \\
&= -\tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_k''}) + \tilde{u}_j u_k'' \overline{\frac{\partial}{\partial t} (\rho)} \\
&= \tilde{u}_j u_k'' \overline{\frac{\partial}{\partial t} (\rho)}.
\end{aligned}$$

La première ligne de l'équation 2.32 peut se mettre sous la forme :

$$\overline{\tilde{u}_j u_k'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho)} + \overline{\tilde{u}_k u_j'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho)}. \tag{2.35}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\overline{u_k'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j'')} &= \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_j'' u_k''}) - \overline{\rho u_j'' \frac{\partial}{\partial t} (u_k'')} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_j'' u_k''}) - u_j'' \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_k''}) + \overline{u_j'' u_k'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho)}.
\end{aligned}$$

La seconde ligne de l'équation 2.32 donne alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_j'' u_k''}) + \overline{u_j'' u_k'' \frac{\partial}{\partial t} (\rho)}. \tag{2.36}$$

De la même façon les deux lignes suivantes de l'équation 2.32 s'écrivent

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{u}_k u_j'' \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)} + \overline{\rho u_j'' u_i'' \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{u}_k)} + \overline{\tilde{u}_j u_k'' \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)} + \overline{\rho u_k'' u_i'' \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{u}_j)} \\
+ \overline{u_k'' u_j'' \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho u_j'' u_k'' \tilde{u}_i}).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

En tenant compte de l'équation de continuité 1.4, l'équation 2.32 se met donc sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho u_j'' u_k''}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho \tilde{u}_i u_j'' u_k''}) &= -\overline{\rho u_j'' u_i''} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{u}_k) - \overline{\rho u_k'' u_i''} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{u}_j) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''}) \\
&\quad - \overline{u_k''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} - \overline{u_j''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_k} \\
&\quad + \overline{u_k''} \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\mu S_{ij}}) + \overline{u_j''} \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\mu S_{ik}}).
\end{aligned}$$

La pression peut être décomposée en partie moyenne et fluctuation selon la définition de la moyenne de Reynolds, d'où :

$$\begin{aligned}
-\overline{u_k''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} &= -\overline{u_k''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} - \overline{u_k''} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \\
&= -\overline{u_k''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{p' u_k''}) + \overline{p'} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_k'').
\end{aligned}$$

En conclusion, l'équation de transport des contraintes de Reynolds en termes de moyennes pondérées par la masse volumique s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho u_j'' u_k''}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho \tilde{u}_i u_j'' u_k''}) = -\overline{\rho u_j'' u_i''} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{u}_k) - \overline{\rho u_k'' u_i''} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{u}_j) \quad (1)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} + \delta_{ij} \overline{u_k'' p'} + \delta_{ik} \overline{u_j'' p'} - \overline{\mu S_{ij} u_k''} - \overline{\mu S_{ik} u_j''}) \quad (2)$$

$$- \overline{u_k''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} - \overline{u_j''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_k} \quad (3)$$

$$+ \overline{p'} \left( \frac{\partial u_k''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} \right) \quad (4)$$

$$- \overline{\mu S_{ij}} \frac{\partial u_k''}{\partial x_i} - \overline{\mu S_{ik}} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \quad (5)$$

Les termes situés à gauche de l'égalité représentent le taux de variation temporel et la convection par le champ de vitesse moyenne.

Dans le membre de droite :



- le terme (1) est le taux de production par le mouvement moyen. Nous remarquons que ce terme apparaît avec un signe opposé dans l'équation de l'énergie cinétique du mouvement moyen où il a un rôle de destruction.
- les termes de (2) correspondent à la diffusion des contraintes de Reynolds par les fluctuations de vitesse, les fluctuations de pression et par le mouvement moléculaire.
- les termes de (3) représentent l'interaction du champ de pression moyenne avec les fluctuations de masse volumique.
- le terme (4) redistribue l'énergie de turbulence sur les trois composantes normales par l'intermédiaire des fluctuations de pression.
- les termes de (5) correspondent à la destruction de l'énergie de turbulence par l'effet de la viscosité.

### 3.4 Modèles à deux équations

#### 3.4.1 Equation de l'énergie cinétique de la turbulence $k$

De l'équation 2.32 nous pouvons obtenir une équation pour la trace du tenseur de Reynolds en contractant les indices  $j$  et  $k$  et en sommant sur les indices répétés.

Définissant l'énergie cinétique de la turbulence par

$$k = \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho u_j'' u_j''}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{2} \widetilde{u_j'' u_j''}, \quad (2.38)$$

l'équation de transport de  $k$  est

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \tilde{u}_i k) = -\bar{\rho} \widetilde{u_j'' u_i''} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{u}_i) \quad (1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''^2} + \delta_{ij} \overline{u_j'' p'} - \overline{\mu S_{ij} u_j''} \right) \quad (2)$$

$$-\overline{u_j''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$+\overline{p' \left( \frac{\partial u_j''}{\partial x_j} \right)} \quad (4)$$

$$-\overline{\mu S_{ij} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} \quad (5)$$

Cette équation fait apparaître de nombreuses corrélations qu'il faut modéliser.

- Modélisation du terme de production

Comme pour l'équation de quantité de mouvement (Eq. 2.2), les contraintes de Reynolds sont déterminées par une relation de type gradient moyen (Eq. 2.24) telle que :

$$\tilde{R}_{ij} = -\overline{\rho u_i'' u_j''} = \mu_t \left( \left( \frac{\partial(\tilde{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\tilde{u}_j)}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial(\tilde{u}_k)}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \overline{\rho} k \delta_{ij}. \quad (2.39)$$

- Modélisation du terme de diffusion moléculaire

$$\begin{aligned} \overline{\mu S_{ij} u_j''} &= \mu \left( \left( \frac{\partial(\tilde{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\tilde{u}_j)}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial(\tilde{u}_k)}{\partial x_k} \right) \overline{u_j''} \\ &+ \overline{\mu \left( \left( \frac{\partial(u_i'')}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j'')}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial(u_k'')}{\partial x_k} \right) u_j''} \\ &= \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\overline{u_j'' u_j''}}{2} \right) + \overline{u_j'' \left( \frac{\partial(u_i'')}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial(u_k'')}{\partial x_k} \right)} \right), \end{aligned} \quad (2.40)$$

En général, les deux derniers termes sont négligeables devant le premier [63], donc :

$$\overline{\mu S_{ij} u_j''} = \mu \frac{\partial k}{\partial x_i}. \quad (2.41)$$

- Modélisation du terme de diffusion turbulente

Les mécanismes de diffusion turbulente sont supposés analogues à ceux de la diffusion moléculaire. Bien entendu, le taux de ce mécanisme de diffusion peut être différent de celui de la quantité de mouvement. La modélisation des termes de diffusion turbulente emprunte ainsi très généralement une forme gradient.

Rappelons que si  $\phi = \bar{\phi} + \phi''$  représente une grandeur scalaire quelconque, la diffusion turbulente de celle-ci s'exprime par :

$$\overline{\rho \phi'' u_j''} = d_\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j}, \quad (2.42)$$

Autrement dit, le vecteur densité de flux diffusif est proportionnel au gradient de la propriété moyenne soumise à diffusion. Le coefficient  $d_\phi$  est appelé diffusivité par agitation turbulente et sera en première approximation mis sous la forme :

$$d_\phi = \frac{\mu_t}{\sigma_\phi}, \quad (2.43)$$

où  $\sigma_\phi$  est le nombre de Prandtl - Schmidt de turbulence relatif à la grandeur  $\phi$ .

Pour revenir à l'équation en  $k$  (Eq. 2.39), il figure dans cette équation une contribution due à la pression. En raison du caractère non transportable de la pression [67], il n'est pas réaliste de l'inclure dans la source de flux diffusif qui se réduit alors au seul bilan d'énergie cinétique de la turbulence.

Le modèle en gradient (Eq. 2.40) prend alors la forme particulière :

$$-\left(\frac{1}{2}\overline{\rho u_i'' u_j''^2} + \delta_{ij}\overline{u_j'' p'}\right) = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i}, \quad (2.44)$$

où  $\sigma_k$  est le nombre de Prandtl - Schmidt d'énergie cinétique de la turbulence, supposé en général constant.

### • Modélisation du terme de dissipation

Le terme

$$\overline{\mu S_{ij} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} \quad (2.45)$$

est appelé dissipation de  $k$ .

Sa densité volumique est  $\bar{\rho}\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\varepsilon &= \overline{\mu S_{ij} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} \\ &= \frac{1}{2} \overline{\mu \left( S_{ij} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} + S_{ji} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \overline{\mu \left( \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \right) S_{ij}}, \quad \text{car} \quad S_{ij} = S_{ji}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

### • Modélisation du terme de compressibilité

Les termes représentant les variations de vitesse par rapport à la pression moyennée et les interactions entre pression et variations de vitesse peuvent être modélisés.

Grasso [36] propose :

$$-\overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} + \overline{p' \left( \frac{\partial u_j''}{\partial x_j} \right)} = \frac{c_k \bar{\rho}}{\bar{p}} (\tilde{u}_j \cdot \tilde{R}_{ij} \tilde{u}_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j). \quad (2.47)$$

Cette modélisation est raisonnable seulement pour des écoulements statistiquement stables.

De plus, la dépendance explicite vis-à-vis de la vitesse moyennée  $\tilde{u}_j$  rend ce modèle clairement non galiléen.

Cela signifie que si  $w$  est un vecteur constant et si  $x_1 = x_2 + wt$ , l'équation obtenue pour  $v = dx_2/dt$  est différente de celle pour  $u = dx_1/dt$ .

Compte tenu des difficultés d'évaluation de  $c_k$ , ce terme sera omis dans la modélisation se l'équation sur  $k$ .

#### • Récapitulatif de l'équation sur $k$ :

En tenant compte de la modélisation et des approximations, nous obtenons l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\tilde{u}_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu + d_k) \frac{\partial(k)}{\partial x_i} + \tilde{R}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho}\varepsilon, \quad (2.48)$$

expression dans laquelle,

$$d_k = \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \quad (2.49)$$

où  $\sigma_k$  est le nombre de Prandtl - Schmidt de turbulence relatif à l'énergie cinétique de turbulence.

Dans la modélisation précédente n'apparaît pas la notion de paroi. Ce modèle ainsi établi n'est valide que loin des parois (grand nombre de Reynolds).

#### 3.4.2 L'équation du taux de dissipation $\varepsilon$

L'écriture explicite de l'équation pour  $\varepsilon$  tirée des travaux de Vandromme [2] est obtenue de la même façon que celle de  $k$  mais contient trop de termes pour être traitée numériquement.

Nous changeons donc la façon d'aborder cette équation en utilisant  $\tau_d$ , l'échelle de temps dynamique :

$$\tau_d = \frac{k}{\varepsilon}. \quad (2.50)$$

Nous supposons alors que le temps nécessaire aux petits tourbillons pour dissiper une quantité d'énergie donnée est égal au temps nécessaire à cette même quantité d'énergie pour être transportée des gros aux petits tourbillons. Nous devons donc pouvoir obtenir

l'équation pour  $\varepsilon$  à partir de celle sur  $k$  en utilisant alors la relation déduite de l'équation 2.50 :

$$k = \varepsilon \tau_d.$$

L'équation pour  $\varepsilon$  obtenue est alors

$$\frac{\partial \bar{\rho} \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} \varepsilon) = \nabla \cdot ((\mu + d_\varepsilon) \nabla \varepsilon) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R : \nabla \cdot \tilde{u} - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (2.51)$$

expression dans laquelle,

$$d_\varepsilon = \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}, \quad (2.52)$$

où  $\sigma_\varepsilon$  est le nombre de Prandtl - Schmidt de turbulence relatif au taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence.

Comme l'équation pour  $k$  n'est valide que dans les régions à grands nombres de Reynolds, celle pour  $\varepsilon$  a la même propriété.

### 3.4.3 Bilan des équations de $k$ - $\varepsilon$

Le modèle  $k - \varepsilon$  qui régit la turbulence s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} k) - \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) = S_k, \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} \varepsilon) - \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) = S_\varepsilon, \quad (2.54)$$

où,

$$S_k = P_k - \bar{\rho} \varepsilon, \quad (2.55)$$

$$S_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon),$$

et

$$P_k = -\bar{\rho} \widetilde{u'' \otimes u''} : \nabla \tilde{u}. \quad (2.56)$$

### 3.4.4 Choix des constantes

Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  établi ci-dessus fait intervenir un ensemble de constantes empiriques dont la détermination est indispensable pour utiliser ce modèle. Ces constantes doivent être les plus universelles possibles. Le choix de ces constantes n'est pas fortuit et se base sur des résultats expérimentaux. Pour le modèle  $k$ - $\varepsilon$ , nous dénombrons 5 constantes à estimer.

**Détermination de  $C_\mu$** 

La constante  $C_\mu$  peut être déterminée en adoptant l'hypothèse d'équilibre local valable dans des zones d'écoulements comme les couches de mélanges, les couches pariétales, etc.

Cette hypothèse consiste à exprimer que la production contrebalance parfaitement la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence

$$P_k = \bar{\rho}\varepsilon. \quad (2.57)$$

Dans les écoulements considérés, la production est donnée par la relation suivante :

$$P_k = -\bar{\rho}\widetilde{u'' \otimes u''} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}, \quad (2.58)$$

L'utilisation de cette dernière relation et de  $\varepsilon$ , déduite de la définition de  $\mu_t$  (Eq. 2.29), permet d'aboutir à l'expression suivante :

$$C_\mu = \left( \frac{\widetilde{u'' \otimes u''}}{k} \right)^2. \quad (2.59)$$

Des mesures montrent que le rapport  $\frac{\widetilde{u'' \otimes u''}}{k}$  est approximativement constant et sa valeur est de l'ordre de 0.3. La valeur de  $C_\mu$  est ainsi de l'ordre de 0.09.

**Détermination de  $C_{\varepsilon_2}$** 

Lorsque  $u = 1$  et  $\nabla u$  est nul (loi de décroissance de la turbulence de grille), le modèle devient :

$$\frac{\partial k}{\partial x} + \varepsilon = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} = 0. \quad (2.60)$$

Ce sont deux équations différentielles ordinaires que l'on peut résoudre analytiquement pour obtenir :

$$k \sim x^{-1/(C_{\varepsilon_2}-1)}. \quad (2.61)$$

Or l'expérience montre que, dans un écoulement au travers d'une grille, l'énergie cinétique de turbulence s'atténue comme  $x^{-1}$  approximativement.

Par identification avec la relation précédente, nous pouvons déduire la valeur de la constante  $C_{\varepsilon_2}$  et nous obtenons une valeur de l'ordre de 2.

**Détermination de  $C_{\varepsilon_1}$**

Pour une plaque plane, au voisinage des parois solides et dans le cadre d'un écoulement moyenné stationnaire, des observations ont montré un comportement de type logarithmique pour le champ de vitesse de l'écoulement moyenné.

Plus précisément, soit  $\vec{x}$  la direction de l'écoulement et  $\vec{y}$  la direction normale. Nous définissons :

$$u_\tau(x) = \sqrt{\nu \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 0)}, \quad y^* = \frac{\nu}{u_\tau}, \quad (2.62)$$

et

$$y^+ = \frac{y}{y^*}, \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}. \quad (2.63)$$

Les expériences montrent que lorsque  $20 \leq y^+ \leq 100$  (*i.e.* lorsqu'on est dans la région appelée "logarithmique"), nous avons :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5, \quad (2.64)$$

où  $\kappa = 0.419$  représente la constante de Von Karman.

Définissons  $E = (\partial_y u_1)^2$ . Les équations du modèle deviennent alors

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} E + \varepsilon = 0, \quad (2.65)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( C_{\varepsilon_1} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - C_{\varepsilon_1} C_\mu k E + C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} = 0. \quad (2.66)$$

Remarquons que la première équation est vérifiée par

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}, \quad E = \frac{u_\tau^2}{\kappa^2 y^2}. \quad (2.67)$$

En remplaçant les expressions précédentes dans la deuxième équation, nous obtenons :

$$C_{\varepsilon_1} = \frac{\sqrt{C_\mu}}{\kappa^2} (C_{\varepsilon_2} C_\mu - C_{\varepsilon_1} C_\mu) = 1.5. \quad (2.68)$$

### Détermination des constantes $\sigma_k$ et $\sigma_\varepsilon$

Les constantes  $\sigma_k$  et  $\sigma_\varepsilon$  sont choisies égales à 1 et 1.3 respectivement.

### Conclusion

En pratique, ce ne sont pas ces constantes qui sont utilisées car nous nous sommes rendus compte que de légères modifications de ces constantes permettaient d'obtenir de

meilleurs résultats. Chaque auteur calibre son modèle et obtient des coefficients qui lui sont propres (voir tableaux 3.2 et 3.3).

### 3.4.5 Initialisation du champ de grandeurs turbulentes

Le champ des variables de la turbulence  $\bar{\rho}k$  et  $\bar{\rho}\varepsilon$  est initialisé selon l'hypothèse de Boussinesq qui admet la proportionnalité entre l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  et le cisaillement turbulent  $-\overline{\rho u'' \otimes u''}$ .

Considérant que loin de la paroi et hors de la couche limite, nous avons  $\nabla \tilde{u} \sim 0$ , alors

$$-\overline{\rho u'' \otimes u''} = -\frac{2}{3}\bar{\rho}k \quad (2.69)$$

Il faut maintenant définir un niveau de turbulence amont qui se convecte vers l'aval au cours du processus itératif, ainsi nous pouvons réécrire l'équation 2.69 :

$$(\tilde{u}T_u)^2 = \frac{2}{3}k, \quad (2.70)$$

où  $T_u$  représente l'intensité de la turbulence.

Ainsi nous déterminons la valeur de  $k_\infty$  comme suit :

$$k_\infty = \frac{3}{2} (u_\infty T_u)^2. \quad (2.71)$$

De plus en supposant que  $\mu_t = 1.10^2 \mu_\infty$ , nous déterminons  $\varepsilon_\infty$  comme suit :

$$\varepsilon_\infty = \bar{\rho}_\infty C_\mu \frac{k_\infty^2}{1.10^2 \mu_\infty}. \quad (2.72)$$

## 4 Fermeture thermique des équations de la turbulence

Nous nous intéressons maintenant à la détermination du flux de chaleur turbulent :

$$\tilde{H} = -\overline{\rho u'' h''} = -\overline{\rho u'' \tilde{h}}. \quad (2.73)$$

### 4.1 Notion de flux de chaleur turbulent

Dans la zone de turbulence il se produit un intense échange de chaleur dû au brassage énergétique du fluide [56]. Ce mécanisme d'échange de chaleur est appelé "diffusivité thermique de la turbulence". Il est caractérisé par le coefficient de diffusivité thermique de la turbulence  $\lambda_t$ .

Les processus de transfert de chaleur en régimes d'écoulements laminaire et turbulent sont fondamentalement différents. Dans la prédiction du transfert de chaleur turbulent, l'approche la plus communément adoptée est identique à l'hypothèse de transport par



gradient de Boussinesq, dans laquelle nous pouvons relier le terme de flux de l'équation de l'énergie au gradient d'enthalpie moyenne multiplié par le coefficient de diffusivité thermique de la turbulence :

$$-\overline{\rho u'' h''} = \lambda_t \nabla \tilde{h} \quad (2.74)$$

Dans le cas d'un gaz parfait,  $h = C_p T$ , et la moyenne garde la même forme :

$$\tilde{h} = C_p \tilde{T} \quad (2.75)$$

Le flux d'enthalpie turbulent peut alors s'écrire :

$$\overline{\rho u'' h''} = C_p \overline{\rho u'' T''}. \quad (2.76)$$

## 4.2 Une alternative à l'analogie de Reynolds

Dans l'approche classique développée précédemment, le transfert de chaleur par convection ne constituait qu'un mécanisme secondaire, généralement considéré comme pouvant découler du champ hydrodynamique en faisant appel à l'analogie de Reynolds. Cette dernière n'est cependant que relative et ne s'applique que dans des cas très simple d'intérêt plus académique qu'industriel. Pour remédier à cet inconvénient, une nouvelle approche a vu le jour il y a quelques années. L'idée est de dissocier le mécanisme de transport de la chaleur de celui gouvernant le transport de quantité de mouvement. Cette idée n'est pas récente, ainsi Corsin (1952) [74] propose d'utiliser des échelles scalaires pour décrire le transport de chaleur dans une turbulence isotrope.

Cette démarche consiste à modéliser les équations gouvernant le phénomène de diffusion par la turbulence (au même titre que ce qui a été fait pour la turbulence dynamique, modèle à une équation,  $k - \varepsilon, \dots$ ).

En ce qui concerne les modèles à deux équations, la première tentative remonte à Nagano & Kim (1988) [81]. Il s'agit d'un modèle à faible nombre de Reynolds qui a été utilisé pour prédire des cas de convection turbulente le long de parois. Les auteurs montrent ainsi des concordances impressionnantes avec l'expérience pour les cas étudiés.

Cette méthode est basée sur l'hypothèse de Boussinesq adaptée au transfert thermique turbulent (Eq. 2.74). Cette relation fait intervenir la diffusivité thermique de la turbulence  $\lambda_t$ , qui peut s'exprimer en faisant appel à l'analyse dimensionnelle, utilisant pour cela les échelles intégrales de la turbulence :

$$\lambda_t \sim \bar{\rho} \Delta u_h l_h, \quad (2.77)$$

où  $\bar{\rho}$ ,  $l_h$ , et  $\Delta u_h$  désignent respectivement la masse volumique, une longueur de mélange, et une échelle de vitesse représentative de l'agitation turbulente.

Il faut maintenant déterminer ces deux échelles. Le problème est ici un peu plus compliqué qu'il ne l'était avec la viscosité de la turbulence à cause essentiellement des nombreuses possibilités permettant la modélisation de ces échelles. En effet, une transformation de l'équation 2.77 permet de mettre la diffusivité thermique de la turbulence sous la forme

$$\lambda_t \sim \bar{\rho} \Delta u_h (\Delta u_h \tau_h) = \bar{\rho} \Delta u_h^2 \tau_h, \quad (2.78)$$

où  $\tau_h$  est une échelle caractéristique du transport de chaleur turbulent.

L'échelle de vitesse thermique doit être déterminée en tenant compte des caractéristiques propres de la convection turbulente. Iritani et al. [6] ont montré que les structures porteuses du maximum d'énergie thermique de la turbulence étaient les mêmes que celles porteuses de l'énergie cinétique de la turbulence. Il semble donc normal de considérer que les deux phénomènes aient la même échelle de vitesse, soit

$$\Delta u_h \sim \sqrt{k}, \quad (2.79)$$

et d'injecter les éventuelles corrections qu'exigerait une telle simplification dans l'échelle de temps  $\tau_h$ .

Avant d'entrer dans les détails de ce problème, rapellons que l'approche "classique" consistait à identifier  $\tau_h$  avec l'échelle de temps dynamique ( $\tau_d = \tau_h = k/\varepsilon$ ). Ceci revient à considérer que les phénomènes de transport de la chaleur et de la quantité de mouvement par la turbulence, sont régis par les mêmes mécanismes. C'est le concept d'analogie de Reynolds détaillé plus haut.

L'échelle de temps  $\tau_h$  généralement considérée est une fonction à la fois de l'échelle de temps des phénomènes dissipatifs dynamiques  $\tau_d = k/\varepsilon$  et de l'échelle de temps des phénomènes dissipatifs thermiques définie par  $\tau_{th} = k_h/\varepsilon_h$ , où  $k_h = \frac{1}{2} \widetilde{h''^2}$  représente la demi-variance des fluctuations d'enthalpie, et  $\varepsilon_h$  apparaît naturellement dans l'équation de transport de  $k_h$  comme son taux de dissipation :

$$\varepsilon_h = \lambda \overline{(\nabla h'')^2}. \quad (2.80)$$

De manière générale :

$$\tau_h = \tau_d^m \times \tau_{th}^n \text{ avec } m + n = 1 \text{ et } m, n \in \mathbb{R}. \quad (2.81)$$

La diffusivité thermique de la turbulence peut alors être représentée par la relation :

$$\lambda_t = \bar{\rho} C_\lambda \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^m \left( \frac{\widetilde{h''^2}}{\varepsilon_h} \right)^n = \bar{\rho} C_\lambda \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^m \left( \frac{2k_h}{\varepsilon_h} \right)^n, \quad (2.82)$$

où  $C_\lambda$  est une constante à déterminer.

Une autre manière de voir les choses, est d'introduire le rapport des échelles de temps thermique et mécanique défini par :

$$R = \frac{k_h/\varepsilon_h}{k/\varepsilon}. \quad (2.83)$$

Ce paramètre joue un grand rôle dans la modélisation de la turbulence thermique. Il a été le plus souvent considéré comme constant en liaison avec un nombre de Prandtl turbulent constant. L'expérience montre, cependant, une large variation d'un écoulement à un autre et dans un même écoulement d'un point à un autre [84]. L'échelle de temps caractéristique peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\tau_h = \tau_d^n (2\tau_{th})^m = \tau_d (2R)^m. \quad (2.84)$$

Avec cette échelle généralisée, la diffusivité thermique de la turbulence s'écrit

$$\lambda_t = \rho C_\lambda k \tau_d (2R)^m. \quad (2.85)$$

Le cas  $m = 0$  revient à identifier l'échelle scalaire  $\tau_h$  à l'échelle mécanique classique  $\tau_d$ .

Le cas  $m = 1$  fait apparaître l'échelle thermique  $\tau_{th}$ .

Le cas  $m = 0.5$ , fait apparaître l'échelle mixte  $\tau_m$ .

Toute valeur réelle est théoriquement possible, mais d'une manière générale nous nous limitons à  $|m| < 2$ .

**Le problème du choix de l'échelle de temps adéquate se ramène ainsi au choix de  $m$ .**

### 4.3 Equation de transport pour la variance de l'enthalpie

Nous allons montrer comment l'équation bilan pour la variance de l'enthalpie fluctuante peut être obtenue à partir de l'équation de transport de l'enthalpie et d'un opérateur de moyenne.

Intéressons nous à l'équation de transport de l'enthalpie :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i h) = \frac{\partial q}{\partial x_i}. \quad (2.86)$$

Considérons le produit de l'équation de transport de l'enthalpie suivant  $x_j$  par la fluctuation  $h''$  :

$$h'' \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i h) = h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(q_{h_i}). \quad (2.87)$$

La moyenne statistique de l'équation 2.87 est

$$\begin{aligned}
& \overline{h'' \frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{h})} + \overline{h'' \frac{\partial}{\partial t}(\rho h'')} \\
& + \overline{h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{u}_i \tilde{h})} + \overline{h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i'' h'')} + \overline{h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{u}_i h'')} + \overline{h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i'' \tilde{h})} \\
& = \overline{h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(q_{h_i})}.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Usant des mêmes procédés que pour l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence, la première ligne de l'équation 2.88 se met sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{(\rho h''^2)} + \overline{h''^2 \frac{\partial}{\partial t}(\rho)}. \tag{2.89}$$

La deuxième ligne devient

$$\begin{aligned}
& \overline{\tilde{h} h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)} + \overline{\rho h'' u_i'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{h})} + \overline{\tilde{u}_j h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)} + \overline{\rho h'' u_i'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{h})} \\
& + \overline{h''^2 \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(\rho u_i'' h''^2)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(\rho h''^2 \tilde{u}_i)}.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Et la troisième ligne devient

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(h''^2)} - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(h''))}. \tag{2.91}$$

Finalement l'équation de l'énergie thermique de la turbulence se met sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \overline{(\rho \tilde{h}''^2)} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(\rho \tilde{u}_i \tilde{h}''^2)} &= -2 \overline{\rho h'' u_i'' \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{h})} \quad (1) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(\lambda \frac{\partial}{\partial x_i}(h''^2) - \rho u_i'' h''^2)} \quad (2) \\
&- \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(h'' \frac{\partial}{\partial x_i}(h''))} \quad (3).
\end{aligned}$$

Les termes situés à gauche l'égalité représentent le taux de variation temporelle et la convection par le champ de vitesse moyenne.

Dans le membre de droite :

- le terme (1) est le taux de production par le mouvement moyen. Nous remarquons que ce terme apparaît avec un signe opposé dans l'équation de l'énergie cinétique du mouvement moyen où il a un rôle de destruction.

- les termes de (2) représentent les phénomènes de diffusions dues aux fluctuations d'enthalpies, incluant les contributions moléculaires et turbulentes.
- le terme (3) correspond à la destruction de l'énergie de la turbulence par l'effet de la diffusivité.

## 4.4 Modèles à deux équations

### 4.4.1 Equation de l'énergie thermique de la turbulence

De l'équation 2.92, nous pouvons obtenir une équation de l'énergie thermique de la turbulence en posant

$$k_h = \frac{1}{2} \widetilde{h'' h''}. \quad (2.92)$$

L'équation de transport de  $k_h$  est alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} k_h) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \tilde{u}_i k_h) &= -\bar{\rho} \widetilde{h'' u_i''} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{h}) \quad (1) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\left( \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (h''^2/2) - \bar{\rho} u_i'' h''^2/2 \right)} \quad (2) \\ &- \frac{1}{2} \lambda \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} (h'') \frac{\partial}{\partial x_i} (h'')} \quad (3). \end{aligned}$$

Cette équation fait apparaître de nombreuses corrélations qu'il faut modéliser.

#### • Modélisation du terme de production

Comme pour l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence, les termes de production font appel à une relation de type gradient moyen (Eq. 2.74) telle que

$$\tilde{H}_i = -\overline{\rho u_j'' h''} = \lambda_t \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i}. \quad (2.93)$$

#### • Modélisation du terme de diffusion moléculaire

$$\overline{\lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (h''^2/2)} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (k_h). \quad (2.94)$$

- **Modélisation du terme de diffusion turbulente**

Les mécanismes de diffusion turbulente sont supposés analogues à ceux de la turbulence dynamique.

$$\overline{\rho u_i'' h''^2} / 2 = \frac{\lambda_t}{\sigma_h} \frac{\partial}{\partial x_i} (k_h), \quad (2.95)$$

où  $\sigma_h$  est le nombre de Prandtl - Schmidt d'énergie thermique de la turbulence, supposé en général constant.

- **Modélisation du terme de dissipation**

Le terme

$$\overline{\frac{1}{2} \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (h'') \frac{\partial}{\partial x_i} (h'')} \quad (2.96)$$

est appelé dissipation de  $k_h$ .

Sa densité volumique est  $\overline{\rho \varepsilon_h}$ , autrement dit :

$$\overline{\frac{1}{2} \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (h'') \frac{\partial}{\partial x_i} (h'')} = \overline{\rho \varepsilon_h} \quad (2.97)$$

- **Récapitulatif de l'équation sur  $k_h$  :**

En tenant compte de la modélisation et des approximations, nous obtenons l'équation de l'énergie thermique de la turbulence suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho k_h}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho \tilde{u}_i k_h}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda + d_h) \frac{\partial (k_h)}{\partial x_i} + \tilde{H}_i \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j} - \overline{\rho \varepsilon_h}, \quad (2.98)$$

expression dans laquelle

$$d_h = \frac{\lambda_t}{\sigma_h}, \quad (2.99)$$

où  $\sigma_h$  est le nombre de Prandtl - Schmidt de turbulence relatif à l'énergie thermique de turbulence.

Dans la modélisation précédente n'apparaît pas la notion de paroi. Ce modèle ainsi établi n'est valide que loin des parois (grand nombre de Reynolds).

#### 4.4.2 Equation du taux de dissipation

La détermination de l'équation de  $\varepsilon_h$  pourrait être conduite de la même manière que pour  $\varepsilon$  en supposant que les deux échelles de temps mécanique et thermique sont proportionnelles.

$$\tau_d = \frac{k}{\varepsilon} \sim \frac{k_h}{\varepsilon_h} = \tau_{th}. \quad (2.100)$$

Cette méthode consisterait à adopter un rapport des échelles de temps  $R$  ( $\tau_{th}/\tau_d$ ) constant.

Cependant, l'expérience montre que le rapport  $R$  ne peut être considéré comme constant malgré la grande incertitude qui pèse sur les trop rares résultats expérimentaux publiés à ce jour. Il faut alors déterminer une équation sur  $\varepsilon_h$ , directement à partir de l'équation instantanée de transport de l'enthalpie. Dans ce cas, les transformations mathématiques sont un peu plus complexes. En effet, pour obtenir une équation pour le taux de dissipation scalaire  $\varepsilon_h$ , il est nécessaire de dériver l'équation de transport de l'enthalpie par  $x_k$ , puis de multiplier cette dernière par  $(\lambda/\rho)\partial h''/\partial x_k$  [58].

Enfin, comme pour l'équation de la variance  $k_h$ , les différents termes de cette nouvelle équation peuvent être adaptés et moyennés, nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho\varepsilon_h}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho\tilde{u}_i\varepsilon_h}) &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\lambda u_j'' \frac{\partial h''}{\partial x_k} \frac{\partial h''}{\partial x_k}} - \lambda \frac{\varepsilon_h}{\partial x_j} \right) \quad (1) \\ &- 2\lambda \left( \overline{\frac{\partial u_j''}{\partial x_k} \frac{\partial h''}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial h''}{\partial x_j} \frac{\partial h''}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \right) + \overline{\lambda u_j'' \frac{\partial h''}{\partial x_k} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k}} \quad (2) \\ &- 2\lambda \overline{\frac{\partial u_j''}{\partial x_k} \frac{\partial h''}{\partial x_j} \frac{\partial h''}{\partial x_k}} \quad (3) \\ &- \frac{2}{\rho} \overline{\left( \lambda \frac{\partial^2 h''}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \quad (4) \end{aligned}$$

La modélisation des fermetures de l'équation gouvernant l'évolution du taux de dissipation de l'énergie thermique de la turbulence est une tâche beaucoup plus ardue à cause du grand nombre de corrélations inconnues présentes dans l'équation 2.101. Elle pose même plus de problèmes que ceux rencontrés lors de la modélisation de l'équation du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence. Ceci est dû essentiellement au dédoublement du nombre d'échelles caractéristiques possibles et à la nécessité de faire des choix sans base expérimentale solide. Ainsi, la démarche de modélisation ne peut être menée comme pour l'équation de  $\varepsilon$  à cause la combinaison de plusieurs échelles de temps.

Une autre démarche, pour la fermeture de l'équation 2.101, basée sur l'identification de chaque terme en se basant sur les échelles caractéristiques de chaque phénomène, est utilisée dans ce qui suit. Par exemple, le premier terme de l'équation 2.101 est le terme de diffusion turbulente que l'on modélise grâce à l'hypothèse de gradients généralisés.

$$-\lambda u_j'' \frac{\partial h''}{\partial x_k} \frac{\partial h''}{\partial x_k} = \frac{\lambda_t}{\sigma_{\varepsilon_h}} \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial x_j}. \quad (2.101)$$

Finalement, l'équation sur  $\varepsilon_h$  obtenue est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon_h) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\tilde{u}_i\varepsilon_h) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda + d_{\varepsilon_h}) \frac{\partial(\varepsilon_h)}{\partial x_i} \\ &+ \frac{\varepsilon_h}{k_h} \left( C_{\varepsilon_{h1}} \tilde{H}_i \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j} - C_{\varepsilon_{h3}} \bar{\rho}\varepsilon_h \right) \\ &+ \frac{\varepsilon_h}{k} \left( C_{\varepsilon_{h2}} \tilde{R}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon_{h4}} \bar{\rho}\varepsilon \right), \end{aligned}$$

Expression dans laquelle  $d_{\varepsilon_h} = \frac{\lambda_t}{\sigma_{\varepsilon_h}}$ , où  $\sigma_{\varepsilon_h}$  est le nombre de Prandtl - Schmidt de turbulence relatif au taux de dissipation de l'énergie thermique de la turbulence.

Comme l'équation pour  $k_h$  n'est valide que dans les régions à grands nombres de Reynolds, celle pour  $\varepsilon_h$  a la même propriété.

#### 4.4.3 Bilan des équations de $k_h$ - $\varepsilon_h$

Le modèle  $k_h - \varepsilon_h$  qui régit la turbulence s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k_h}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{u}k_h) - \nabla \cdot \left( \left( \lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{k_h}} \right) \nabla k_h \right) = S_{k_h}, \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\varepsilon_h}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\tilde{u}\varepsilon_h) - \nabla \cdot \left( \left( \lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{\varepsilon_h}} \right) \nabla \varepsilon_h \right) = S_{\varepsilon_h}, \quad (2.103)$$

où,

$$\begin{aligned} S_{k_h} &= P_{k_h} - \bar{\rho}\varepsilon_h, \\ S_{\varepsilon_h} &= \frac{\varepsilon_h}{k_h} \left( C_{\varepsilon_{h1}} P_{k_h} - C_{\varepsilon_{h3}} \bar{\rho}\varepsilon_h \right) \\ &+ \frac{\varepsilon_h}{k} \left( C_{\varepsilon_{h2}} P_k - C_{\varepsilon_{h4}} \bar{\rho}\varepsilon \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_k &= -\bar{\rho} \widetilde{u'' \otimes u''} : \nabla \tilde{u} \\ P_{k_h} &= -\bar{\rho} \widetilde{u'' h''} \nabla \tilde{h}. \end{aligned}$$



#### 4.4.4 Choix des constantes

Comme pour le modèle  $k - \varepsilon$ , les différentes constantes du modèle  $k_h - \varepsilon_h$  peuvent être déterminées par l'application du modèle à des cas expérimentaux simples pour lesquels les équations de la turbulence peuvent être réduites à des formes dégénérées que l'on peut résoudre analytiquement. Il faut signaler que les mêmes remarques énumérées lors de la détermination des constantes du modèle  $k - \varepsilon$  restent vraies ici.

##### Détermination de $C_\lambda$

La constante  $C_\lambda$  peut être déterminée en utilisant la définition du nombre de Prandtl turbulent que l'on rappelle être :

$$Pr_t = \frac{\mu_t}{\lambda_t} \quad (2.104)$$

En remplaçant  $\mu_t$  et  $\lambda_t$  par leurs expressions (Eq. 3.2) et (Eq. 3.3), on peut en déduire :

$$C_\lambda = \frac{C_\mu}{Pr_{teq} (2R_{eq})^m}, \quad (2.105)$$

les variables indicées  $_{eq}$  étant des valeurs à l'équilibre local (grand nombre de Reynolds).

En adoptant l'hypothèse d'équilibre local valable dans des zones d'écoulements comme les couches de mélanges, les couches pariétales, l'expérience montre que

$$R_{eq} \sim 0.5 \text{ et } Pr_{teq} \sim 0.9. \quad (2.106)$$

L'utilisation de cette dernière relation permet d'en déduire que  $C_\lambda$  est de l'ordre de 0.1.

##### Détermination de $C_{\varepsilon_{h_3}}$ et $C_{\varepsilon_{h_4}}$

Lorsque  $u = 1$  et  $\nabla u$  est nul (loi de décroissance de la turbulence grille), le modèle devient :

$$\frac{\partial k}{\partial x} + \varepsilon = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} = 0. \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial k_h}{\partial x} + \varepsilon_h = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial x} + C_{\varepsilon_{h_3}} \frac{\varepsilon_h^2}{k_h} - C_{\varepsilon_{h_4}} \frac{\varepsilon_h \varepsilon}{k} = 0. \quad (2.108)$$

Ce sont quatre équations différentielles ordinaires que l'on peut résoudre analytiquement sous certaines conditions.

L'expérience montre que le rapport des échelles de temps caractéristiques reste constant tout au long de l'écoulement [48],  $R = R_{eq}$ .

D'après la définition de  $R$ , nous pouvons écrire :

$$\varepsilon_h = \frac{k_h}{R_{eq}} \frac{\varepsilon}{k}. \quad (2.109)$$

La différentiation de cette dernière par rapport à la direction de l'écoulement conduit à :

$$\frac{d\varepsilon_h}{dx} = \frac{dk_h}{dx} + \frac{d\varepsilon}{dx} - \frac{dk}{dx}. \quad (2.110)$$

En remplaçant les différentes dérivées du second membre par leurs expressions tirées de (Eq. 2.107) et (Eq. 2.108) et après manipulations algébriques, on obtient :

$$\frac{d\varepsilon_h}{dx} = \frac{1}{R} \left( \frac{\varepsilon k_h}{k^2} - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon k_h}{k^2} - \frac{\varepsilon \varepsilon_h}{k} \right) = -\frac{\varepsilon_h \varepsilon_h}{k_h} - (C_{\varepsilon_2} - 1) \frac{\varepsilon \varepsilon_h}{k}. \quad (2.111)$$

L'identification de cette dernière avec l'équation 2.108 conduit aux expressions suivantes pour les deux constantes de dissipation de  $\varepsilon_h$  :

$$C_{\varepsilon_{h3}} = 1, \text{ et } C_{\varepsilon_{h4}} = C_{\varepsilon_2} - 1. \quad (2.112)$$

#### Détermination de $C_{\varepsilon_{h1}}$ et $C_{\varepsilon_{h2}}$

La détermination de ces constantes se fait en adoptant la même procédure mais appliquée cette fois-ci à un écoulement en distorsion rapide (couches cisillées minces, etc.). Dans le cadre de ce type d'écoulement, la dissipation et le transport par diffusion sont négligeables et seuls les termes de production et de transport convectif agissent pour établir le bilan des grandeurs en question. Les équations de la turbulence se présentent alors sous les formes réduites suivantes :

$$\frac{\partial k}{\partial x} - P_k = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - C_{\varepsilon_1} P_k \frac{\varepsilon}{k} = 0. \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial k_h}{\partial x} - P_{k_h} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial x} - C_{\varepsilon_{h1}} P_{k_h} \frac{\varepsilon_h}{k_h} + C_{\varepsilon_{h2}} P_k \frac{\varepsilon_h}{k} = 0. \quad (2.114)$$

La résolution analytique de ces équations en suivant la même démarche que pour les équations 2.107) et 2.108 et en adoptant la même hypothèse de rapports d'échelles de temps constants, permet d'obtenir :

$$\frac{d\varepsilon_h}{dx} = P_{k_h} \frac{\varepsilon_h}{k_h} + (C_{\varepsilon_1} - 1) \frac{\varepsilon_h}{k}, \quad (2.115)$$

L'identification de cette dernière l'équation 2.114 conduit aux expressions suivantes pour les deux constantes de production de  $\varepsilon_h$  :

$$C_{\varepsilon_{h1}} = 1 \text{ et } C_{\varepsilon_{h2}} = C_{\varepsilon_1} - 1. \quad (2.116)$$

#### Détermination des constantes $\sigma_{k_h}$ et $\sigma_{\varepsilon_h}$

Les constantes  $\sigma_{k_h}$  et  $\sigma_{\varepsilon_h}$  sont difficiles à approcher analytiquement, du moins en ce qui concerne la première. Il sont choisis égaux à 1.

### Conclusion

En pratique, et comme pour les modèles  $k - \varepsilon$ , ce ne sont pas ces constantes qui sont implémentées dans les programmes. Chaque auteur calibre son modèle et obtient des coefficients qui lui sont propres (voir tableaux 3.2 et 3.3).

#### 4.4.5 Initialisation du champ de grandeurs turbulentes

Le champ des variables de la turbulence  $\bar{\rho}k_h$  et  $\bar{\rho}\varepsilon_h$  est initialisé en supposant, comme pour le champ turbulent dynamique, que l'on admet une proportionalité entre l'énergie thermique de la turbulence  $k_h$  et l'enthalpie infinie amont.

Ainsi nous déterminons la valeur de  $k_{h_\infty}$  comme suit :

$$k_{h_\infty} = ((h_w - h_\infty)T_u)^2, \quad (2.117)$$

où  $T_u$  représente l'intensité de la turbulence.

De plus en supposant qu'à l'équilibre le rapport des temps caractéristique de la turbulence atteigne une certaine valeur  $R_{eq}$ , nous avons alors que :

$$\varepsilon_{h_\infty} = \frac{k_{h_\infty}}{R_{eq}} \frac{\varepsilon_\infty}{k_\infty}. \quad (2.118)$$

# Chapitre 3

## Etude de la modélisation bas Reynolds et réduction mathématique

L’objectif de ce chapitre est multiple. D’une part, vérifier l’influence de la modélisation thermique sur les performances dynamiques des modèles, et d’autre part se fixer un modèle de référence qui nous permet de valider nos résultats.

Pour le modèle dynamique, nous allons considérer un modèle  $k - \varepsilon$ . Il est certain que ce modèle complet ne sera pas capable de satisfaire toutes les contraintes dynamiques et thermiques. Ce sera une façon de vérifier la possibilité de satisfaire les contraintes thermiques indépendamment des contraintes dynamiques mais également de proposer un modèle  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  de référence.

Ce modèle est ensuite le point de départ de la réduction mathématique, nous amenant à développer une technique de type bi-couche, avec correction thermique.

### 1 Variante bas-Reynolds du modèle $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$

Tel qu’il a été développé dans le chapitre 2, le modèle  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  n’est valide que pour des régions à grands nombre de Reynolds, ce qui exclut la région proche de la paroi (car le nombre de Reynolds décroît jusqu’à 0 à la paroi). En effet, par rapport à la situation de turbulence libre pleinement développée, la présence d’une paroi, supposée fixe par rapport à l’écoulement, interdit de considérer que la condition de “grand nombre” de Reynolds *global* puisse s’appliquer *localement* en tout point du champ de l’écoulement. Une des spécificités qui est susceptible de remettre en cause les schématisations élaborées sous l’hypothèse de grand nombre de Reynolds en domaine infini est la perte de prépondérance de la diffusion par agitation turbulente sur celle par agitation moléculaire. C’est une conséquence directe de la condition d’adhérence qui impose l’annulation du vecteur vitesse à la paroi, tant en moyenne qu’en fluctuation. Ainsi les diffusivités de la turbulence,  $\mu_t \sim \rho\sqrt{k}l$  et  $\lambda_t \sim \rho\sqrt{k}l_{th}$  doivent-elles s’annuler à la paroi, les échelles de longueurs  $l$  et  $l_{th}$  restant nécessairement finies. Les diffusivités moléculaires  $\mu$  et  $\lambda$  conservant une

valeur strictement positive, les conditions  $\mu_t \gg \mu$  et  $\lambda_t \gg \lambda$  ne peuvent donc plus être assurées en tout point de l'écoulement. Ce modèle doit donc être modifié pour rendre compte de telles spécificités.

La forme générique de la variante ‘‘bas Reynolds’’ du modèle  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  qui régit la turbulence est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \bar{\rho} k + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} k) - \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) \\ \partial_t \bar{\rho} \varepsilon^* + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} \varepsilon^*) - \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon^* \right) \\ \partial_t \bar{\rho} k_h + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} k_h) - \nabla \cdot \left( \left( \lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{k_h}} \right) \nabla k_h \right) \\ \partial_t \bar{\rho} \varepsilon_h^* + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} \varepsilon_h^*) - \nabla \cdot \left( \left( \lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{\varepsilon_h}} \right) \nabla \varepsilon_h^* \right) \end{array} \right. = \begin{array}{l} P_k - \bar{\rho} \varepsilon^* + D_k \\ \frac{\varepsilon^*}{k} (f_{\varepsilon_1} C_{\varepsilon_1} P_k - f_{\varepsilon_2} C_{\varepsilon_2} \bar{\rho} \varepsilon^*) + E_k \\ P_{k_h} - \bar{\rho} \varepsilon_h^* + D_h \\ \frac{\varepsilon_h^*}{k_h} (f_{\varepsilon_{h_1}} C_{\varepsilon_{h_1}} P_{k_h} - f_{\varepsilon_{h_3}} C_{\varepsilon_{h_3}} \bar{\rho} \varepsilon_h^*) \\ + \frac{\varepsilon_h^*}{k} (f_{\varepsilon_{h_2}} C_{\varepsilon_{h_2}} P_k - f_{\varepsilon_{h_4}} C_{\varepsilon_{h_4}} \bar{\rho} \varepsilon^*) + E_h \end{array} \quad (3.1)$$

Pour des raisons de stabilité et de calculs numérique, nous choisisons de travailler avec un modèle écrit en terme de ‘‘pseudo-dissipation’’ [17] :

$$\varepsilon^* = \varepsilon + D_k \quad \text{et} \quad \varepsilon_h^* = \varepsilon_h + D_h$$

où  $D_k$  et  $D_h$  sont choisis tels que  $\varepsilon^* = \varepsilon_h^* = 0$  à la paroi.

**Remarque 1.1** Dans toute la suite de la thèse, et pour une meilleure lisibilité, nous enlèverons le signe ‘‘\*’’ des variables de dissipation.

Ainsi, les diffusivités dynamique et thermique de la turbulence sont définies par les expressions suivantes :

$$\mu_t = \bar{\rho} f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.2)$$

$$\lambda_t = \bar{\rho} f_\lambda C_\lambda \frac{k^2}{\varepsilon} (2R)^m, \quad (3.3)$$

où nous rappelons que  $R$ , le rapport des échelles de temps caractéristique de la turbulence est défini par :

$$R = \frac{k_h}{\varepsilon_h} \frac{\varepsilon}{k}. \quad (3.4)$$

Par rapport à la version à grand nombre de Reynolds, nous notons, outre la présence des termes de diffusion, l'introduction de fonctions d'amortissement ( $f_\mu$ ,  $f_{\varepsilon_1}$ ,  $f_{\varepsilon_2}$ ,  $f_\lambda$ ,  $f_{\varepsilon_{h_1}}$ ,  $f_{\varepsilon_{h_2}}$ ,  $f_{\varepsilon_{h_3}}$  et  $f_{\varepsilon_{h_4}}$ ) en pondération de certains coefficients, ainsi que la présence de termes

supplémentaires ( $D_k, E_k, D_h, E_h$ ) destinés à améliorer la représentativité du modèle en zone de proche paroi.

Les expressions des fonctions d'amortissement de quelques modèles, ainsi que celles des termes complémentaires et des valeurs des constantes sont données dans les tableaux 3.2 et 3.3, où il est fait l'usage des symboles suivants :

$$R_t = \frac{\bar{\rho}k^2}{\mu\varepsilon}, \quad R_y = \frac{\bar{\rho}\sqrt{ky}}{\mu}, \quad y^+ = \frac{\bar{\rho}u_\tau y}{\mu}. \quad (3.5)$$

## 2 Analyses asymptotiques

Ce qui caractérise les modèles de type  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$ , c'est l'utilisation d'une échelle de la turbulence non constante. Nous avons vu que le problème du choix de cette échelle se ramenait au choix de l'exposant  $m$ . De plus, si nous nous référons aux résultats obtenus par simulation numérique directe, Horviti [53] montre que  $m$  ne peut pas être constant à travers la couche limite. Pour déterminer le profil optimal de  $m$ , nous pouvons en première approximation découpler le problème en regardant ce qu'il se passe dans la zone de turbulence pleinement développée, puis dans la zone de proche paroi. Notons par  $y_{eq}^+$ , la valeur de  $y^+$  pour laquelle nous passons d'une zone à l'autre.

### 2.1 Comportement à l'équilibre

El Hayek [58] montre qu'une valeur de  $m = 1$  dans cette zone est nécessaire pour reproduire au mieux les résultats expérimentaux. Ce résultat peut aussi être démontré par la théorie, il suffit d'utiliser les relations entre les variables de la turbulence, obtenues à l'équilibre local. Dans un premier temps, rappelons les quelques hypothèses qui permettent de calculer ces variables à l'équilibre.

Si nous supposons l'égalité entre production et dissipation de la turbulence dynamique (zone de turbulence pleinement développée), nous pouvons écrire :

$$P_k = \bar{\rho}\varepsilon. \quad (3.6)$$

Dans les écoulement considérés, la production peut se réduire à la forme

$$P_k = \mu_t (\nabla \tilde{u})^2 = \tau \nabla \tilde{u}. \quad (3.7)$$

Or d'après l'hypothèse d'équilibre local (Eq. 3.6) nous avons

$$\bar{\rho}\varepsilon = \tau \nabla \tilde{u} = \bar{\rho}u_\tau^2 \nabla \tilde{u}. \quad (3.8)$$

En utilisant la définition de  $\mu_t$  (Eq. 3.2) et en remplaçant  $\varepsilon$  par son expression (Eq. 3.8) dans l'équation 3.7, nous trouvons

$$\bar{\rho}C_\mu k^2 (\nabla \tilde{u})^2 = \bar{\rho}\varepsilon^2 = u_\tau^4 (\nabla \tilde{u})^2, \quad (3.9)$$

d'où

$$k_{eq} = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}. \quad (3.10)$$

Si nous dérivons la loi logarithmique en vitesse par rapport à  $y$ , nous trouvons que

$$\nabla \tilde{u} = \frac{u_\tau}{\kappa y}. \quad (3.11)$$

Alors, si nous remplaçons le gradient de vitesse par son expression 3.11 dans l'équation 3.8, nous trouvons

$$\varepsilon_{eq} = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}. \quad (3.12)$$

Supposons maintenant l'égalité entre production et dissipation de la turbulence thermique, nous avons

$$P_{k_h} = \bar{\rho} \varepsilon_h. \quad (3.13)$$

Dans les écoulements considérés, la production peut se réduire à la forme suivante :

$$P_{k_h} = \lambda_t \left( \nabla \tilde{h} \right)^2 = q \nabla \tilde{h}. \quad (3.14)$$

Or d'après l'hypothèse d'équilibre local (Eq. 3.13) nous avons

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \varepsilon_h &= q \nabla \tilde{h} \\ &= \bar{\rho} u_\tau h_\tau \nabla \tilde{h}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

En utilisant la définition de  $\lambda_t$  (Eq. 3.3) et en remplaçant  $\varepsilon_h$ ,  $k$  et  $\varepsilon$  par leurs expressions (Eq. 3.15), (Eq. 3.10) et (Eq. 3.12), dans l'équation 3.14, nous trouvons

$$k_{heq}^m = 2^{-m} C_\lambda^{-1} C_\mu^{1-p/2} \kappa^{m-1} y^{m-1} h_\tau^{m+1} \nabla \tilde{h}^{m-1}. \quad (3.16)$$

Si nous dérivons la loi logarithmique en enthalpie par rapport à  $y$ , nous trouvons que

$$\nabla \tilde{h} = \frac{h_\tau}{\kappa_t y}. \quad (3.17)$$

Alors, si nous remplaçons le gradient d'enthalpie par son expression (Eq. 3.17) dans l'équation 3.15, nous trouvons

$$\varepsilon_{heq} = \frac{u_\tau h_\tau^2}{\kappa_t y}. \quad (3.18)$$

De plus, l'expérience montre qu'à l'équilibre local,  $R$  est constant. Or, par définition :

$$R_{eq} = \frac{k_{heq}}{\varepsilon_{heq}} \frac{\varepsilon_{eq}}{k_{eq}}. \quad (3.19)$$

Autrement dit, en utilisant les équations 3.10, 3.12) et 3.18), nous trouvons

$$k_{heq} = R_{eq} C_\lambda^{-1} \sqrt{C_\mu} h_\tau^2. \quad (3.20)$$

Lorsque nous identifions les équations 3.16 et 3.20, nous trouvons le couple de valeur

$$\begin{cases} m_{eq} = 1, \\ R_{eq} = 0.5. \end{cases} \quad (3.21)$$

Cette valeur de  $m$  revient à utiliser l'échelle scalaire  $\tau_h = 2\tau_{th}$  et semble confirmer quelque chose de naturel, à savoir que chaque phénomène est gouverné par ses propres échelles ( $\tau_h$  ne dépend pas de  $\tau_d$ ).

## 2.2 Comportement de proche paroi

Amenons maintenant quelques notes sur le développement asymptotique des grandeurs turbulentes en séries de Taylor dans la zone de proche paroi.

Considérons la direction d'axe  $y$  normale à la paroi [1] :

$$\begin{aligned} u_1'' &= a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots \\ u_2'' &= b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots \\ u_3'' &= c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \dots \\ h'' &= h_w'' + d_1 y + d_2 y^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Si nous négligeons les termes d'ordres supérieurs, nous déduisons du système d'équations 3.22 les produits suivants :

$$\widetilde{u_1'' u_2''} \sim y^3 \quad \text{et} \quad \widetilde{u_2'' h''} \sim y^{2+p/2} \quad (3.23)$$

où  $p = 2$  avec  $h_w'' \neq 0$  et  $p = 0$  avec  $h_w'' = 0$ . Les variables turbulentes se comportent à la paroi, comme

$$k \sim y^2, \quad \varepsilon \sim y^2, \quad k_h \sim y^p, \quad \varepsilon_h \sim y^2.$$

Quant aux fonctions d'amortissement, elles se comportent à la paroi de la manière suivante :

$$f_\mu \sim y^{l_\mu}, \quad f_\lambda \sim y^{l_\lambda}.$$

où nous supposons que  $l_\lambda$  n'est pas reliée au couple  $(m, n)$ .

En introduisant ces comportements dans l'équation 3.3 nous obtenons



$$\text{pour } p = 2 : \quad y^3 \sim y^{2+l_\lambda}, \quad (3.24)$$

$$\text{et pour } p = 0 : \quad y^2 \sim y^{2+l_\lambda-2m}. \quad (3.25)$$

Il vient alors

$$\begin{cases} l_\lambda = 1, \\ m_w = 0.5. \end{cases}$$

Dans le cadre d'une modélisation isotrope du flux de chaleur turbulent, seul cadre auquel nous nous intéressons dans cette thèse, plusieurs couples de valeurs pour  $(m, n)$  sont proposés dans la littérature :  $(m = 2, n = -1)$  [80],  $(m = 0.5, n = 0.5)$  [7, 81],  $(m = -1, n = 2)$  [77].

**Remarque 2.1** *Pour une modélisation anisotrope du flux, celui-ci peut être calculé comme suit [15] :*

$$-\bar{\rho} \widetilde{u_i'' h''} = \lambda_t \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i} + \lambda_{t_{ij}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}$$

où  $\lambda_{t_{ij}} = -C_\lambda f_\lambda k \tau_h^2 (\alpha_1 S_{ij} + \alpha_2 \omega_{ij})$ ,  $S_{ij}$  et  $\omega_{ij}$  sont respectivement les tenseurs des efforts et de vorticité.

En utilisant la même démarche que précédemment, nous montrons facilement que cette contrainte peut s'exprimer aussi comme :  $pm + 2n \geq 0$ , de sorte que si nous prenons en compte les conditions de fluctuations ou non de  $h_w''$  ( $p = 0$  ou  $p = 2$ ) cette contrainte se réduit à :  $n \geq 0$ .

En ce qui concerne la valeur de  $R$  à la paroi, elle peut être déterminée grâce aux comportements de  $\varepsilon$  et de  $\varepsilon_h$  à la paroi :

$$\varepsilon_w = \frac{2\mu k}{\rho y^2} \text{ et } \varepsilon_{h_w} = \frac{2\lambda k_h}{\rho y^2}, \quad (3.26)$$

de sorte que :

$$\lim_{y^+ \rightarrow 0} R = R_w = \frac{\mu}{\lambda} = Pr. \quad (3.27)$$

Nous pouvons alors définir un couple de valeur pour  $(m_w, R_w)$  tel que :

$$\begin{cases} m_w = 0.5, \\ R_w = Pr. \end{cases} \quad (3.28)$$

**Remarque 2.2** Une deuxième approche, plus fine, serait d’établir un profil de  $m$  ayant pour valeurs aux limites celles établies précédemment, à savoir  $m_w = 0.5$  et  $m_{eq} = 1$ .

Or trop d’incertitudes pèsent encore sur les valeurs expérimentales de  $m$  à travers la couche limite pour prétendre trouver le profil idéal.

Une solution possible est d’adopter les valeurs limites précédentes comme constantes dans chacune de leur zone respective (tableau 3.1)

$m_{eq}$	1.0	$m_w$	0.5
$R_{eq}$	0.5	$R_w$	$Pr$

TAB. 3.1 – Couples possibles pour une modélisation de type bas-Reynolds.

### 3 Analyse pratique de modèles “bas Reynolds” existants

Nous allons maintenant confronter études pratiques et théoriques de quelques modèles bas-Reynolds. Les objectifs sont multiples :

- Comparer les modèles thermiques à un modèle dynamique de référence,
- Comparer les modèles thermique à leur restriction dynamique,  $\lambda_t$  étant déduite de  $\mu_t$  par le nombre de Prandtl turbulent.

#### 3.1 Quels modèles utiliser ?

Nous allons comparer 2 modèles de type  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$ , ceux de Nagano et Kim [81] (que nous notons par la suite NK) et de Hattori, Nagano et Tagawa [43] (que nous notons par la suite HNT), à un modèle de type  $k - \varepsilon$ , celui de Chien [54] (que nous notons par la suite CHIEN).

Le choix de ces modèles n’est pas anodin. Il vient du fait que les équations de transport des modèles NK et HNT sont construites comme pour le modèle CHIEN, en terme de “pseudo-dissipation”, de sorte que  $\varepsilon_w = \varepsilon_{h_w} = 0$ . Nous serons amenés à utiliser les versions dynamiques des modèles NK et HNT (c’est-à-dire en version  $k - \varepsilon$ ), nous les nommerons NK-D et HNT-D.

Les constantes, fonctions d’amortissements et termes supplémentaires associés aux différents modèles sont résumés dans les tableaux 3.2 et 3.3.

	Hattori & Nagano & Tagawa	Nagano & Kim	Chien
$C_\mu$	0.09	0.09	0.09
$C_{\varepsilon_1}$	1.45	1.45	1.35
$C_{\varepsilon_2}$	1.9	1.9	1.8
$\sigma_k$	1.4	1.0	1.0
$\sigma_\varepsilon$	1.3	1.3	1.3
$f_\mu$	$[1 - \exp(-y^+/30)]^2$ $\times [1 + (20/R_t^{3/4}) \exp\{-(R_t/120)^2\}]$	$[1 - \exp(-y^+/26.5)]^2$	$1 - \exp(-0.0115y^+)$
$f_{\varepsilon_1}$	1.0	1.0	1.0
$f_{\varepsilon_2}$	$1 - 0.3 \exp(-R_t^2)$	$1 - 0.3 \exp(-R_t^2)$	$1 - \frac{0.4}{1.8} \exp(-R_t^2/36)$
$\lim_{y=0} \varepsilon$	0.0	0.0	0.0
$D_k$	$-2\mu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$-2\mu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$-2\mu \frac{k}{y^2}$
$E_k$	$\frac{\mu \mu_t}{\bar{\rho}} (1 - f_{w1}) \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)^2$ avec $f_{w1} = \{1 - \exp(-y^+/30)\}^2$	$\frac{\mu \mu_t}{\bar{\rho}} (1 - f_\mu) \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)^2$	$2\mu \frac{\varepsilon}{y^2} \exp(-y^2/2)$

TAB. 3.2 – Caractéristiques dynamiques des modèles HNT, NK et CHIEN.

	Hattori & Nagano & Tagawa	Nagano & Kim
$C_\lambda$	0.1	0.11
$C_{\varepsilon_{h_1}}$	0.85	0.9
$C_{\varepsilon_{h_2}}$	0.64	0.72
$C_{\varepsilon_{h_3}}$	1.0	1.1
$C_{\varepsilon_{h_4}}$	0.9	0.8
$\sigma_{k_h}$	1.0	1.0
$\sigma_{\varepsilon_h}$	1.0	1.0
$f_\lambda$	$[1 - \exp(-y^+/30)]$ $\times [1 - \exp(-y^+/(30/P_r^{1/3}))]$ $\times [1 + (7.9/R_t^{3/4}) \exp\{-(R_t/120)^2\}]$	$[1 - \exp(-\frac{\sqrt{P_r} y^+}{30.5} \frac{2S_t}{C_f})]^2$
$f_{\varepsilon_{h_1}}$	1.0	1.0
$f_{\varepsilon_{h_2}}$	1.0	1.0
$f_{\varepsilon_{h_3}}$	1.0	1.0
$f_{\varepsilon_{h_4}}$	$(1/C_{\varepsilon_{h_4}})(C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2} - 1)$	1.0
$\lim_{y=0} \varepsilon_h$	0.0	0.0
$D_h$	$-2\lambda \left( \frac{\partial \sqrt{k_h}}{\partial y} \right)^2$	$-2\lambda \left( \frac{\partial \sqrt{k_h}}{\partial y} \right)^2$
$E_h$	$\frac{\lambda \lambda_t}{\bar{\rho}} (1 - f_{w2}) \left( \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} \right)^2$ avec $f_{w2} = \{1 - \exp(-y^+/(30/P_r^{1/3}))\}^2$	$\frac{\lambda \lambda_t}{\bar{\rho}} (1 - f_\lambda) \left( \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} \right)^2$
$R_{eq}, m$	0.5, 0.5	0.44, 0.5

TAB. 3.3 – Caractéristiques thermiques des modèles HNT et NK.

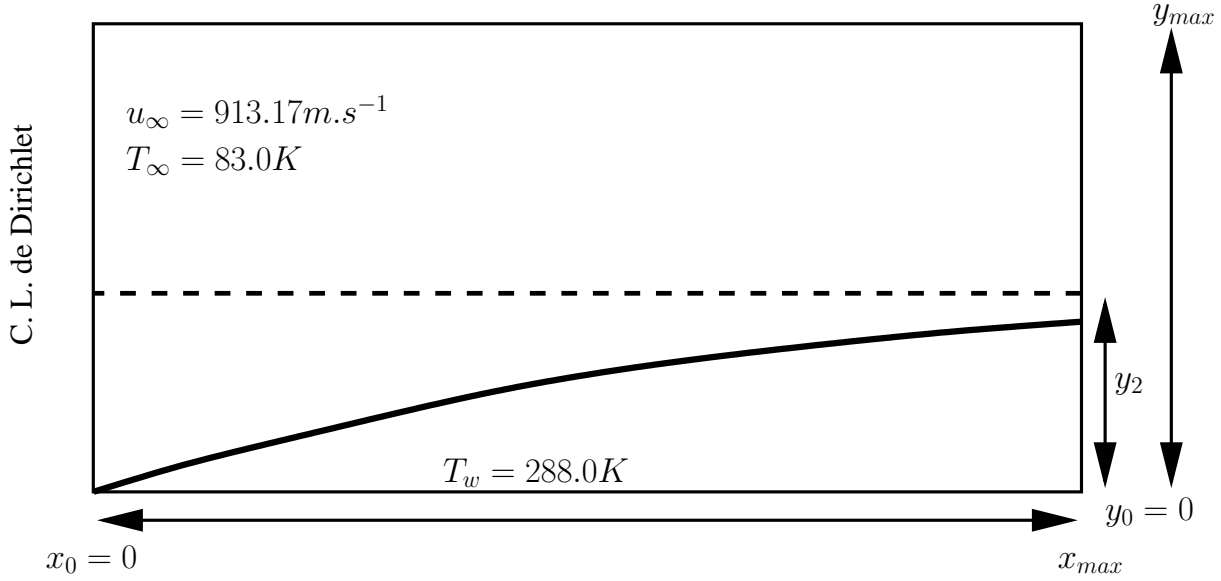


FIG. 3.1 – Domaine utilisé pour modéliser le développement de la couche limite.

### 3.2 Présentation du cas d'étude

Ces trois modèles sont testés sur un cas test dit “d'école” mais qui pose encore de nos jours certaines difficultés malgré tout. Il s'agit de simuler une couche limite se développant le long d'une plaque plane. Les écoulements de type couche limite se rencontrent très souvent dans la pratique industrielle et spécialement dans les problèmes de transfert de chaleur. De part sa simplicité géométrique, le développement d'une couche limite sur une paroi plane constitue un cas idéal pour tester les modèles de turbulence et plus particulièrement leurs capacités à traiter la zone de proche paroi. Les conditions géométriques de la simulation sont résumées sur la figure 3.1 et le tableau 3.4.

Le domaine est découpé en deux parties pour faciliter la précision et la convergence du calcul. En effet, connaissant en fin de plaque, la hauteur de la couche limite pleinement développée,  $h_{bl}$ , il est donc possible d'augmenter la raison géométrique ( $R_{y_2}$ ) appliquée aux mailles à partir d'une certaine hauteur  $y_2$  de sorte que nous puissions limiter le nombre de mailles à calculer en dehors de la couche limite, ce qui accélère la convergence. Ceci nous permet donc de diminuer la raison géométrique ( $R_{y_1}$ ) appliquée aux mailles situées dans la couche limite, et de rendre le calcul plus précis. Pour déterminer cette hauteur, nous utilisons la formule suivante [67] :

$$h_{bl}(x) = 0.37xR_{ey_x}^{-0.2} \quad (3.29)$$

Les conditions aux limites sont détaillées dans le workshop d'Antibes de 1991 [3]. Le nombre de Mach en entrée est  $M_\infty = 5.0$ , le nombre de Reynolds infini est  $R_{ey_\infty} = 4.10^7 m^{-1}$ . Le gaz est considéré comme étant un gaz parfait, c'est-à-dire que  $R_{gaz} = 287.05$

!htbp

$x_{max}$	0.25 m
$N_x$	100
$N_y$	160
$y_1$	$1 \cdot 10^{-7}$ m
$R_x$	1.0
$R_y$	1.05
$y_2$	$4 \cdot 10^{-3}$ m
$R_{y_2}$	1.09

TAB. 3.4 – Caractéristiques du domaine utilisé pour modéliser le développement de la couche limite.

$J.kg^{-1}.K^{-1}$ . La température du domaine est  $T_\infty = 83.0K$  et la température imposée à la paroi est  $T_w = 288.0K$ . Le coefficient de viscosité dynamique,  $\mu_\infty$ , est calculé à l’aide de la formule de Sutherland (Eq. 1.15), ce qui nous permet grâce aux quantités physiques connues, de déterminer la valeur aux limites de la masse volumique,  $\rho_\infty = 0.2489kg/m^3$ . Le coefficient de diffusivité thermique,  $\lambda_\infty$ , quant à lui, est donné par l’équation 1.20. Les valeurs utilisées comme conditions aux limites des variables de la turbulence sont les suivantes :  $k_\infty = 125 m^2/s^2$ ,  $\varepsilon_\infty = 616632 m^2/s^3$ ,  $k_{h_\infty} = 2 \cdot 10^6 J^2.Kg^{-2}$ . La valeur de  $\varepsilon_{h_\infty}$  est calculée grâce à l’équation 3.4 et à la valeur donnée à  $R_\infty$ .

### 3.3 Analyse des résultats et bilan

Avant d’entamer la discussion, il faut clarifier certains points quant à l’intérêt d’un tel cas test. Etant donnée la nature de l’écoulement considéré, à savoir un écoulement supersonique sur plaque isotherme, cette simulation ne correspond pas aux cas classiquement simulés dans les études faites sur les modèles à 4 équations. En effet, la littérature correspondant à l’étude des modèles  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  nous propose en particulier des simulations d’écoulements à faible nombre de Mach, et sur parois chauffées, ce qui, dans une problématique de type rentrée atmosphérique n’est pas très représentatif.

C’est pourquoi, notre objectif étant la simulation d’écoulement sur parois isothermes, en régime super- et hypersonique, il est important de bien comprendre comment se comporte un tel modèle, avant de développer telle ou telle modélisation mathématique réduite. En particulier, il est important de bien comprendre l’effet de paroi et sa prise en compte dans les différents modèles.

Précisons que, dans cette partie, nous nous intéressons à comprendre les mécanismes de la modélisation thermique et son influence sur une modélisation dynamique. De ce fait, nous ne comparons que les modèles entre eux. Le travail de confrontation à l’expérience est fait dans les parties suivantes, lorsque nous développons la modélisation mathématique réduite.

A ce titre, nous commençons cette discussion par l'étude des fonctions d'amortissements  $f_\mu$  et  $f_\lambda$ . Elles sont introduites dans la modélisation bas-Reynolds pour "mimer" les effets des diffusivités moléculaires sur le cisaillement et le flux thermique. Ces fonctions doivent respecter le comportement de proche paroi prescrit par les équations 3.23. De plus, un développement asymptotique en  $y$  de  $f_\mu$  et de  $f_\lambda$  des différents modèles étudiés permet de calculer les puissances de  $l_\mu$  et  $l_\lambda$ , que nous avons résumées dans le tableau 3.5 ci-dessous :

Modèles	Chien	NK	HNT
$f_\mu$	1	2	-1
$\mu_t$	3	4	3
$f_\lambda$		2	-1
$\lambda_t$ (paroi isotherme)		4	3

TAB. 3.5 – Exposants liés au comportement de proche paroi des fonctions  $f_\mu$  et  $f_\lambda$ .

Ce que nous remarquons, c'est que les modèles CHIEN et HNT respectent les contraintes demandées par les équations 3.23. Cependant, les fonctions d'amortissement de HNT se comportent près de la paroi comme  $y^{-1}$ , ce qui est numériquement difficile et raide. Les comportements de proche paroi des diffusivités de la turbulence de NK sont quant à eux proportionnels à  $y^4$ , ce qui est demandé dans les équations 3.23 si les coefficients de corrélation entre  $u_1''$  et  $u_2''$  et entre  $u_2''$  et  $h''$  tendent vers zero à la paroi [4].

Nous pouvons voir sur les figures 3.2 et 3.3 le comportement asymptotique de  $f_\mu$  et  $f_\lambda$  des différents modèles, calculés à  $x = 0.25 m$ .

Cette première analyse nous montre que NK est numériquement mieux posé que HNT en ce qui concerne le comportement asymptotique des diffusivités de la turbulence.

Poursuivons cette étude afin de choisir au mieux un modèle de référence. Un critère simple pour montrer les capacités des différents modèles dans une couche limite, consiste à calculer l'évolution du coefficient de frottement le long de la plaque :

$$C_f = \frac{\tau_w}{0.5\rho_\infty u_\infty^2}. \quad (3.30)$$

Une telle évolution est montrée sur la figure 3.4 où nous voyons les résultats des modèles, version dynamique, et où nous les comparons à une loi empirique :  $C_f = 0.0368 R_{ey_x}^{-1/6} f_{comp}$ ,  $f_{comp}$  étant un facteur de correction lié à la compressibilité [46]. Il faut remarquer tout d'abord le comportement identique des trois modèles entre eux, ainsi qu'un bon accord avec la loi de décroissance en  $x^{-1/6}$ .

Les figures 3.5 et 3.6 nous montrent quant à elles, l'évolution du coefficient de frottement calculé par chacun des modèles dynamiques en comparaison avec leur version

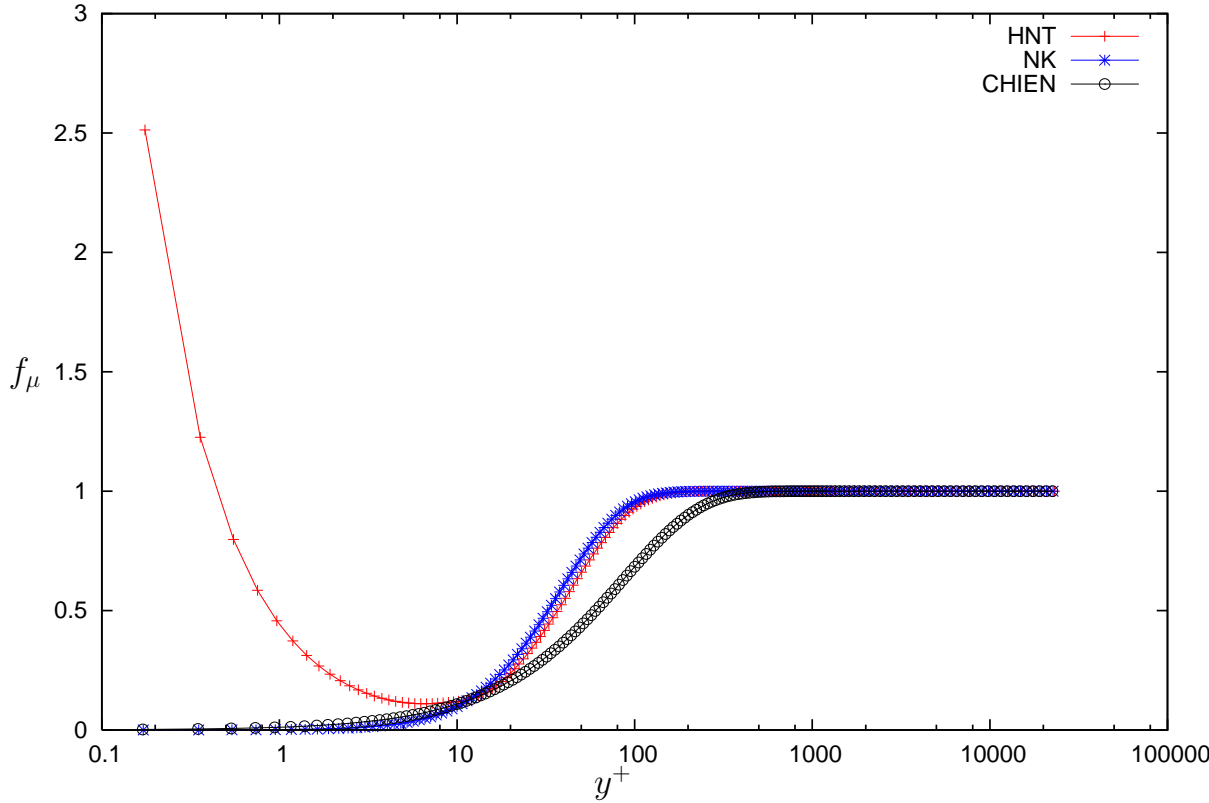
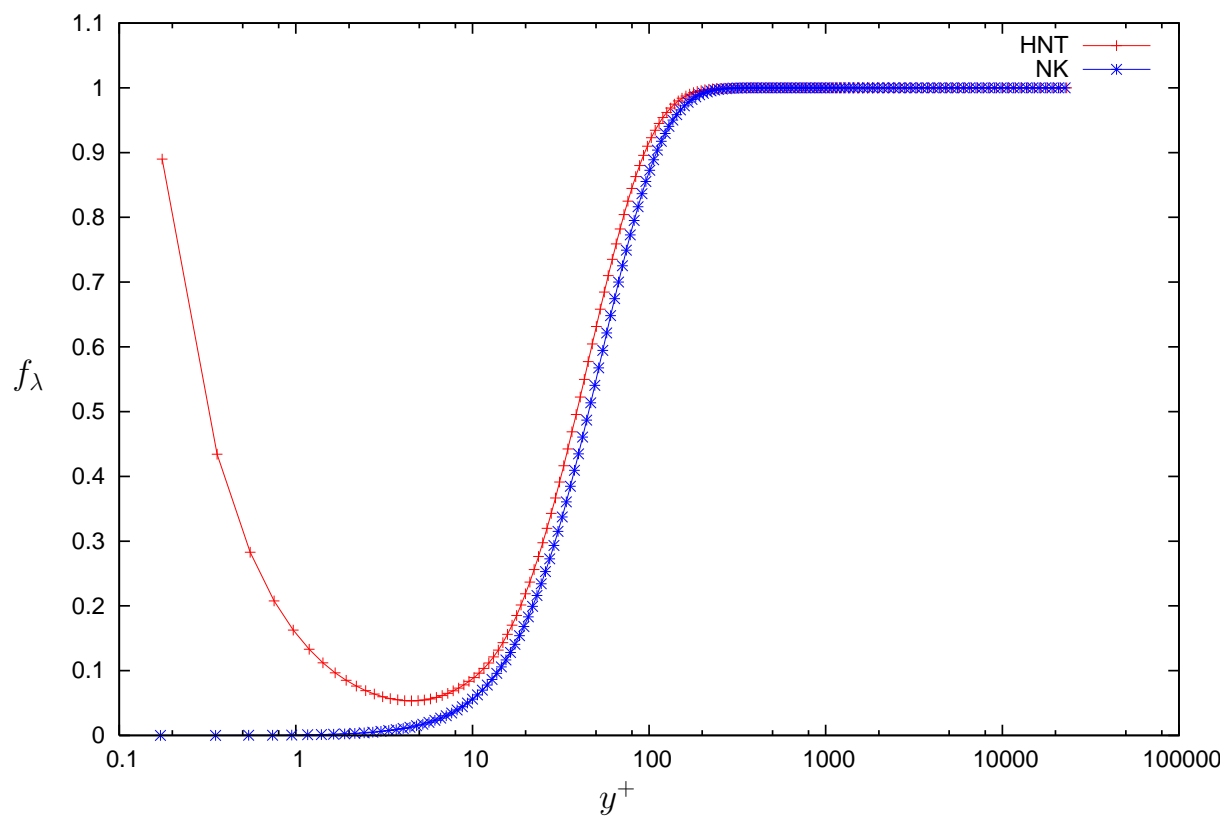


FIG. 3.2 – Profil de  $f_\mu$  à  $x = 0.25 m$ .



FIG. 3.3 – Profil de  $f_\lambda$  à  $x = 0.25 m$ .

complète. Les résultats obtenus avec le modèle NK (Fig. 3.5) ne sont pas affectés par la correction thermique, ce qui est en accord avec les observations. D’un autre côté, le modèle HNT (Fig. 3.6) se trouve fortement perturbé par la correction thermique, ce qui n’est pas physiquement acceptable pour le calcul du coefficient de frottement.

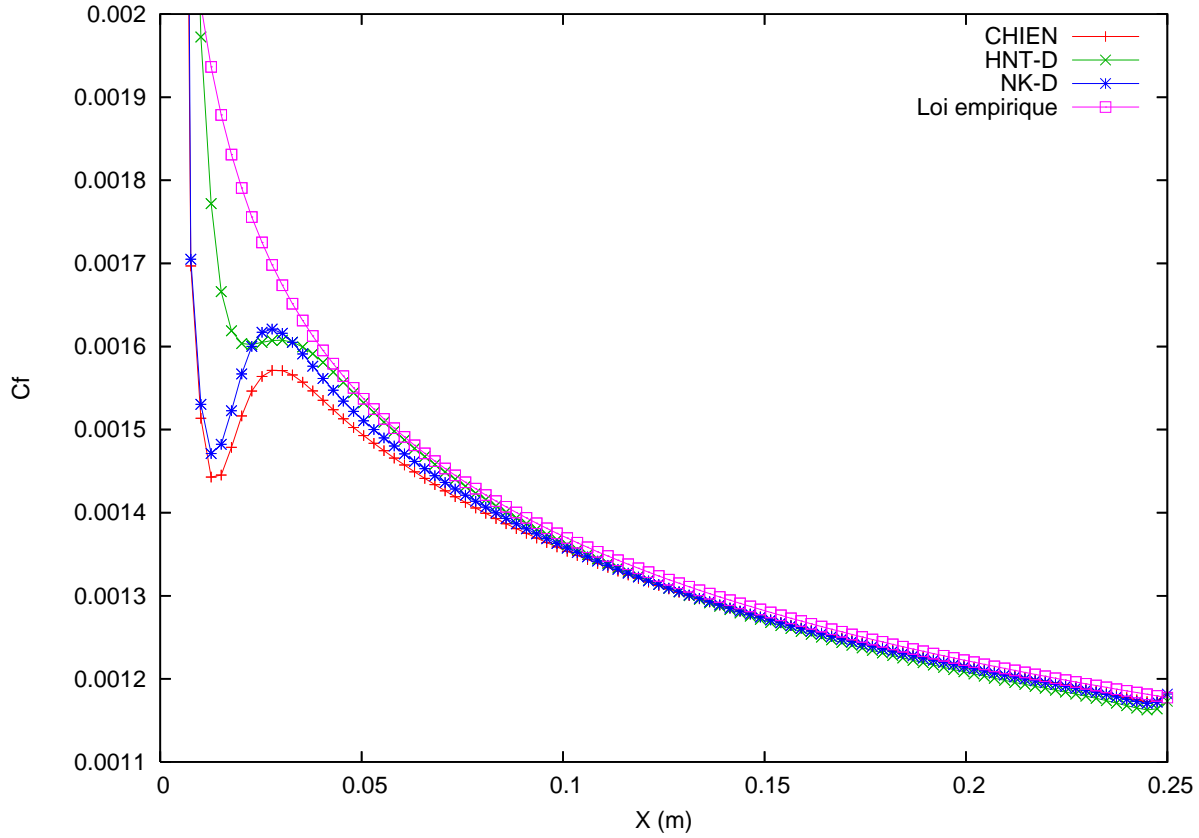


FIG. 3.4 – Coefficient de frottement calculé avec les modèles dynamiques.

De la même manière, nous avons calculé l’évolution du nombre de Stanton, qui représente le flux de chaleur adimensionné, à la paroi :

$$S_t = \frac{\phi_w}{\rho_\infty u_\infty (h_f - h_w)}, \quad (3.31)$$

où  $h_f$  représente l’enthalpie de frottement, définie par

$$h_f = h_\infty \left( 1 + Pr^{1/3} \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right). \quad (3.32)$$

Une telle évolution est montrée sur la figure 3.7 où nous voyons les résultats des modèles, version dynamique, et où nous les comparons à une loi empirique venant de

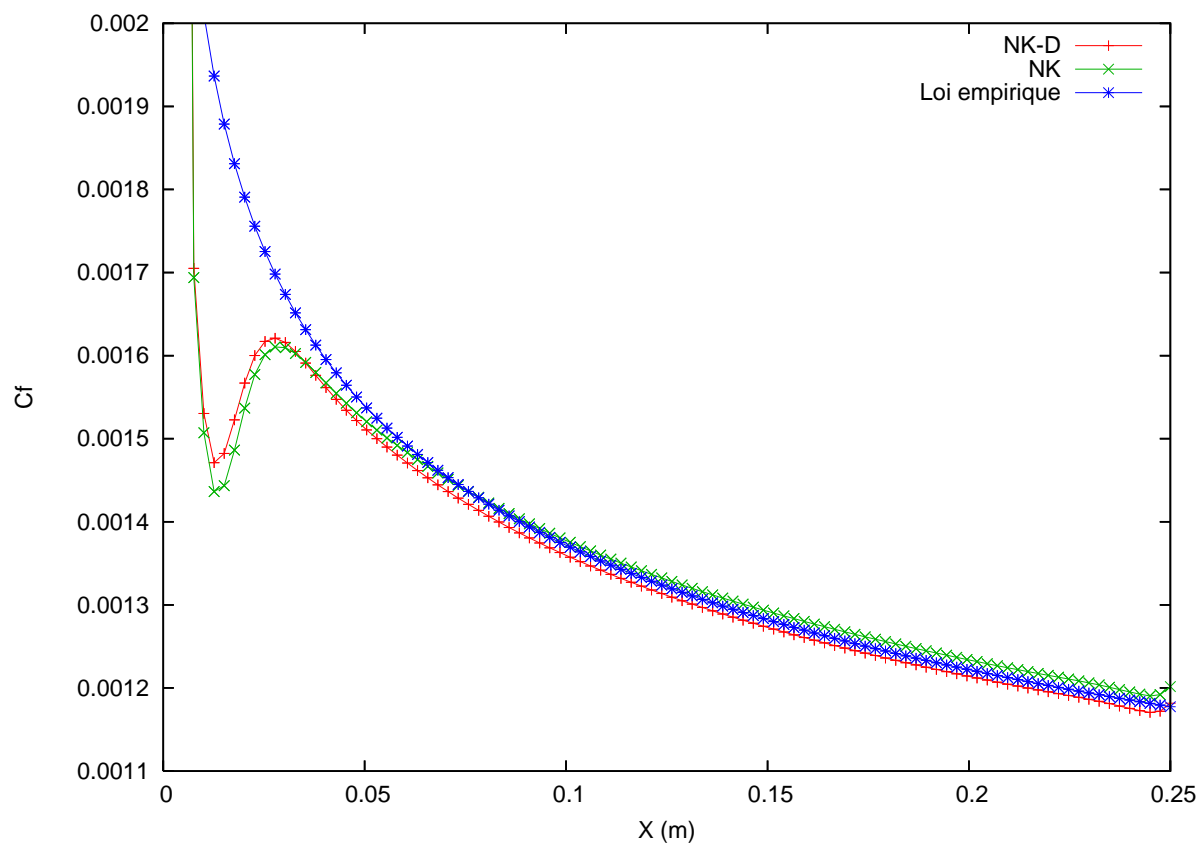


FIG. 3.5 – Coefficient de frottement calculé avec le modèle NK.

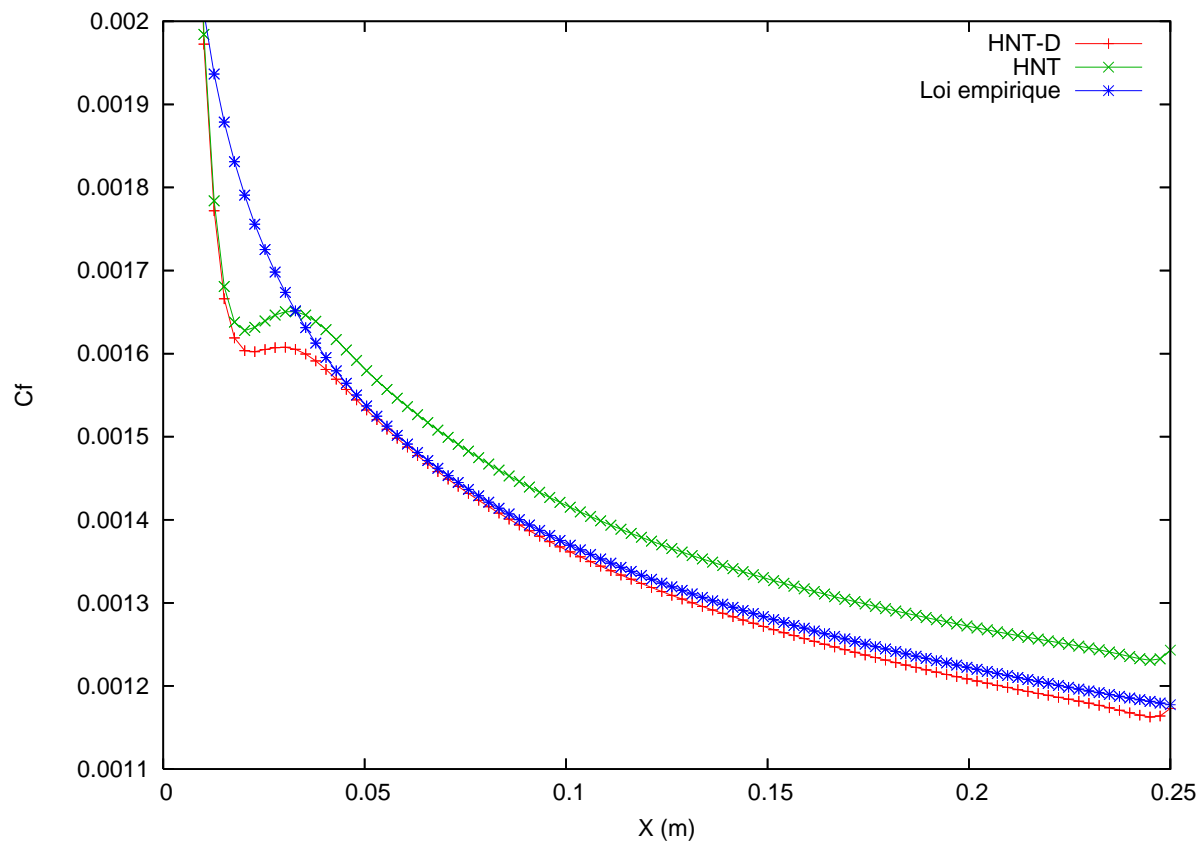


FIG. 3.6 – Coefficient de frottement calculé avec le modèle HNT.

l'analogie de Reynolds et qui peut s'écrire sous la forme [46] :

$$S_t = s \frac{C_f}{2},$$

où  $s$  est définie comme étant le facteur d'analogie.

- $s = 1$  renvoie à l'analogie forte de Reynolds (O. Reynolds 1874 [64]),
- $s = P_r^{-2/3}$ , calibrée pour des écoulements compressibles (Colburn 1930 [11]).

Cette expression doit être utilisée avec précaution, car ce n'est qu'une correction, calibrée sur les expériences. Nous pouvons voir que les modèles CHIEN et NK-D donnent des résultats identiques. Le modèle HNT-D surestime le nombre de Stanton en comparaison des deux autres modèles. Les figures 3.8 et 3.9 nous montrent quant à elles, l'évolution du nombre de Stanton calculée par chacun des modèles dynamiques en comparaison avec leur version complète.

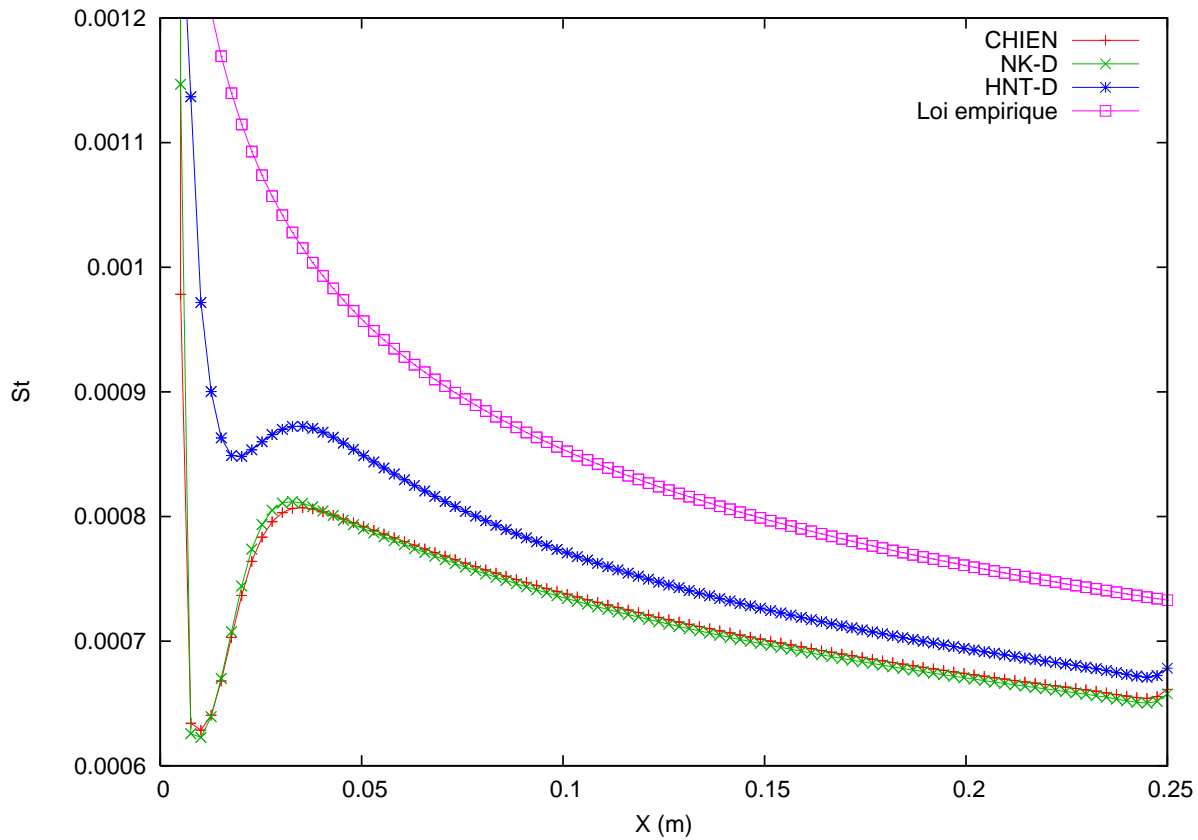


FIG. 3.7 – Nombre de Stanton calculé avec les modèles dynamiques.

Le modèle NK (Fig. 3.8), quant à lui, sous-estime le nombre de Stanton en comparaison à sa prédiction avec la version dynamique. Ce résultat peut s'expliquer *a posteriori*

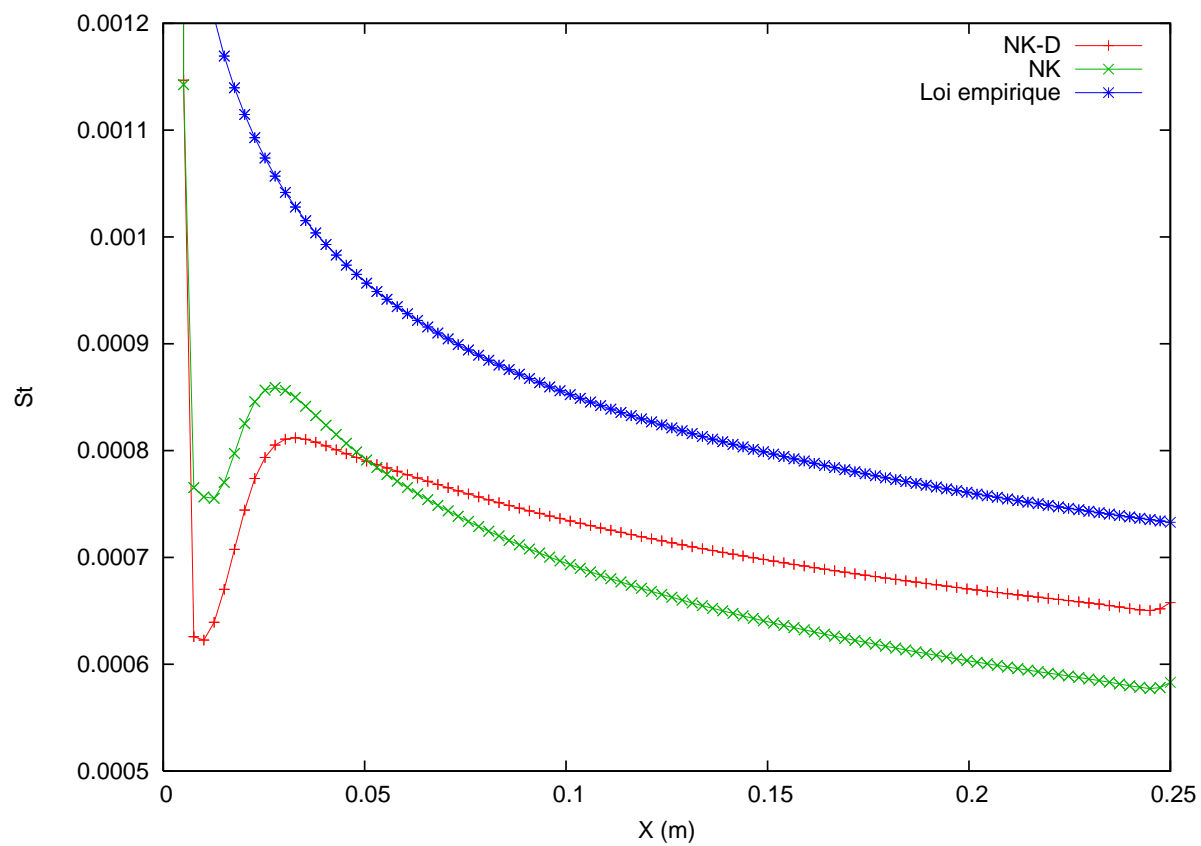


FIG. 3.8 – Nombre de Stanton calculé avec le modèle NK.

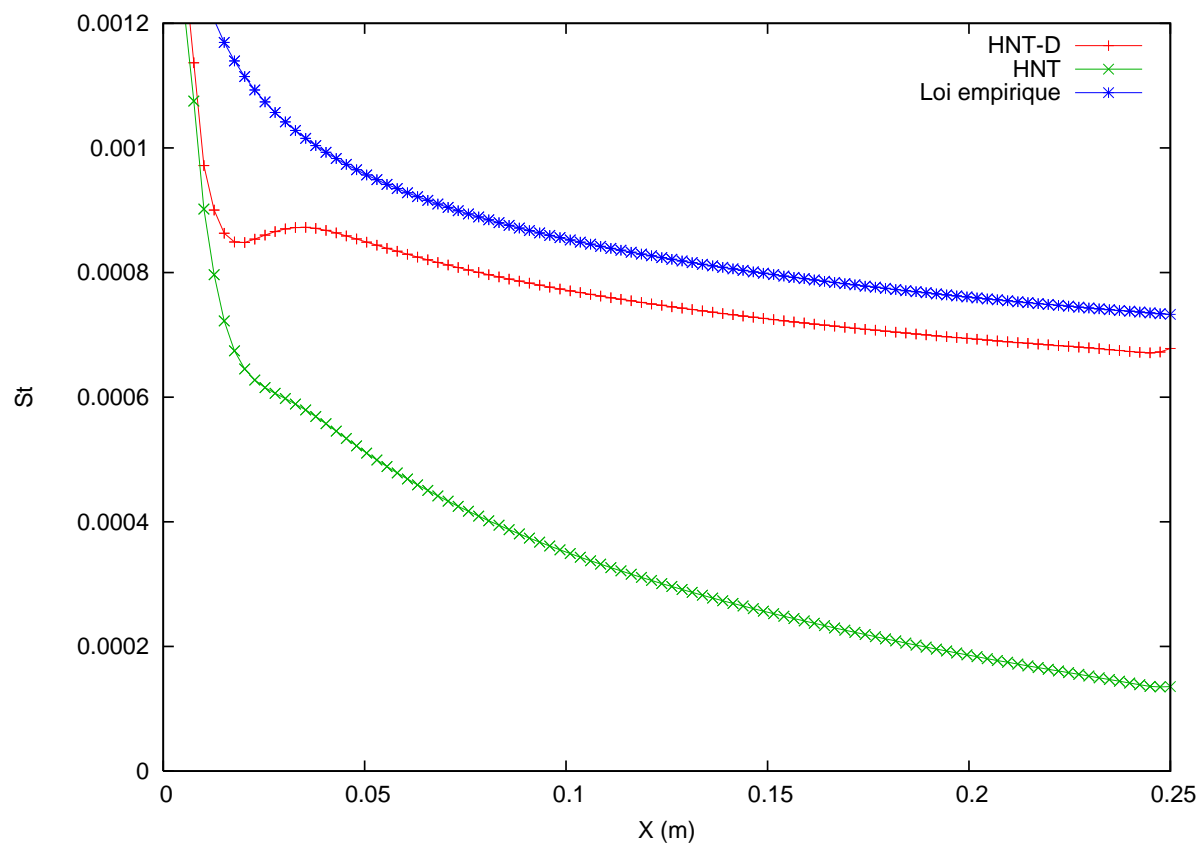


FIG. 3.9 – Nombre de Stanton calculé avec le modèle HNT.

par de simples arguments. Nous savons que le nombre de Prandtl turbulent dans la couche limite est plus grand que sa valeur à l'équilibre [26], ce qui signifie que le flux de chaleur turbulent calculé par un modèle thermique, qui est inversement proportionnel au nombre de Prandtl turbulent, doit être inférieur aux prédictions faites par l'analogie de Reynolds. De plus, il faut remarquer que le modèle NK respecte mieux la loi de décroissance de la turbulence que sa version dynamique.

Il faut de plus observer la très mauvaise performance du modèle HNT (Fig. 3.9) , qui ne respecte pas la loi de décroissance de la turbulence et qui sous-estime très largement le nombre de Stanton. Ce comportement non-physique peut être expliqué par le mauvais comportement asymptotique des fonctions d'amortissement associées (Fig. 3.2 et 3.3).

**Cette seconde analyse faite sur l'évolution “globale” de l'écoulement nous amène à adopter le modèle NK comme modèle de référence dans le présent travail.**

A présent, nous allons nous intéresser à la contribution thermique du modèle NK, en particulier à la correction apportée par les équations de transports supplémentaires  $k_h - \varepsilon_h$ . Nous commençons par montrer les résultats concernant l'aspect dynamique du problème. Un premier résultat concerne évidemment le champ de vitesse. La figure 3.10 montre le profil de vitesse dans la couche limite et à différentes positions le long de la plaque. Nous comparons en particulier sur ces figures, le calcul fait à l'aide de la modélisation thermique au calcul fait à l'aide de la version dynamique du modèle. Nous observons un accord parfait entre le champ de vitesse calculé avec la version dynamique du modèle et avec le modèle complet.

Les mêmes constatations peuvent être faites si nous regardons le calcul de la diffusivité dynamique de turbulence (Fig. 3.11). Nous en déduisons que la correction thermique ne change pas le comportement dynamique de l'écoulement.

La partie que nous abordons maintenant concerne le développement de la couche limite thermique. Le premier résultat concerne le champ de température. La figure 3.12 nous montre que le calcul de la température dans la couche limite thermique n'est pas le même si nous utilisons le modèle NK-D ou sa version complète.

Si nous regardons les figures 3.12 et 3.13, nous constatons que la modélisation thermique a une influence sur la distribution de la température et sur la diffusivité thermique de la turbulence, principalement dans la couche limite thermique.

Nous pouvons préciser cependant que cette correction, qui a lieu dans la couche limite thermique ne modifie pas la hauteur de celle-ci, ce que nous voyons très nettement sur la figure 3.13. Un paramètre important à considérer dans ce travail est le nombre de Prandtl turbulent. C'est une quantité très difficile à mesurer car elle fait intervenir plusieurs grandeurs dont la mesure est tout aussi difficile comme les gradients de vitesse et d'enthalpie. La difficulté réside dans la nécessité d'évaluer toutes ces grandeurs en des points différents



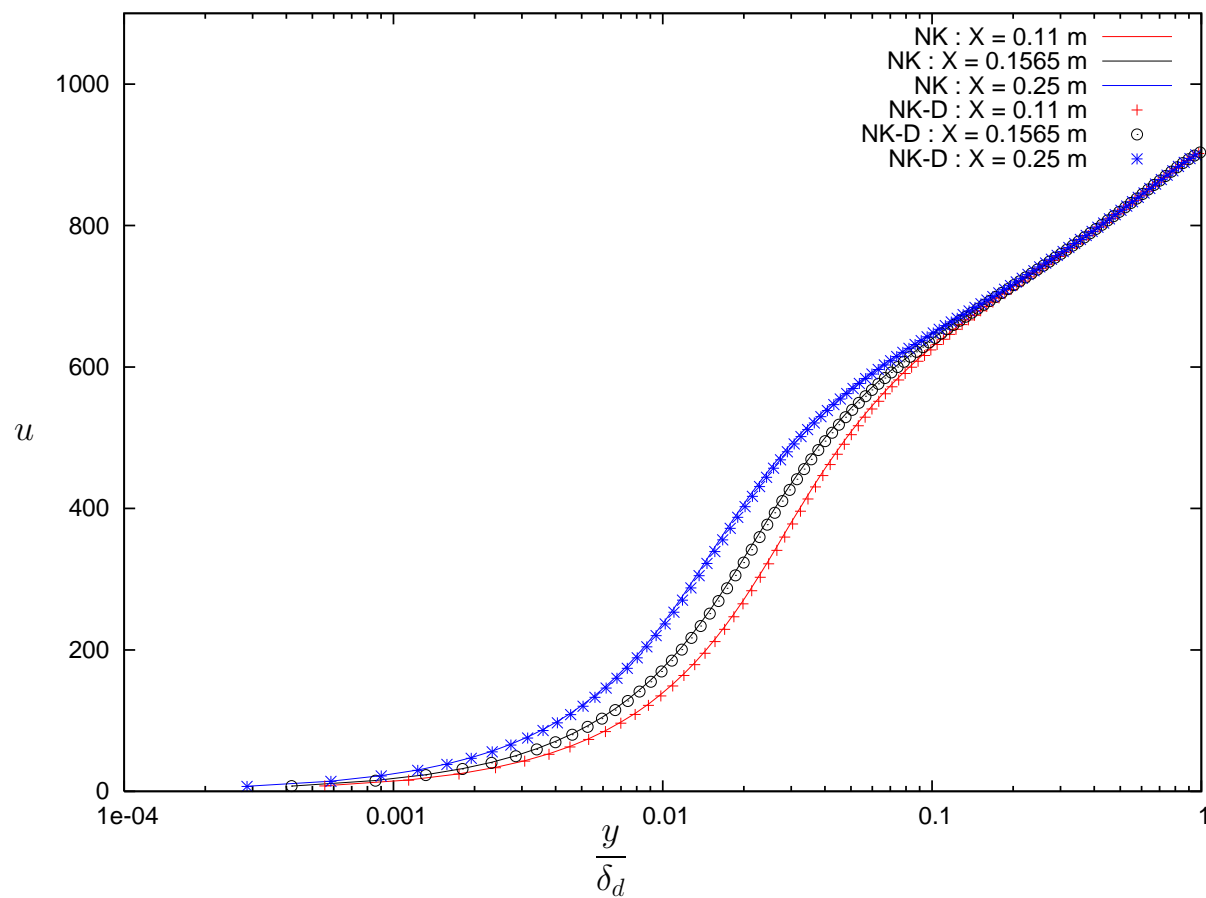


FIG. 3.10 – Comparaison du profil de vitesse à travers la couche limite dynamique à différentes abscisses :  $x = 0.11$  m,  $x = 0.1565$  m et  $x = 0.25$  m.

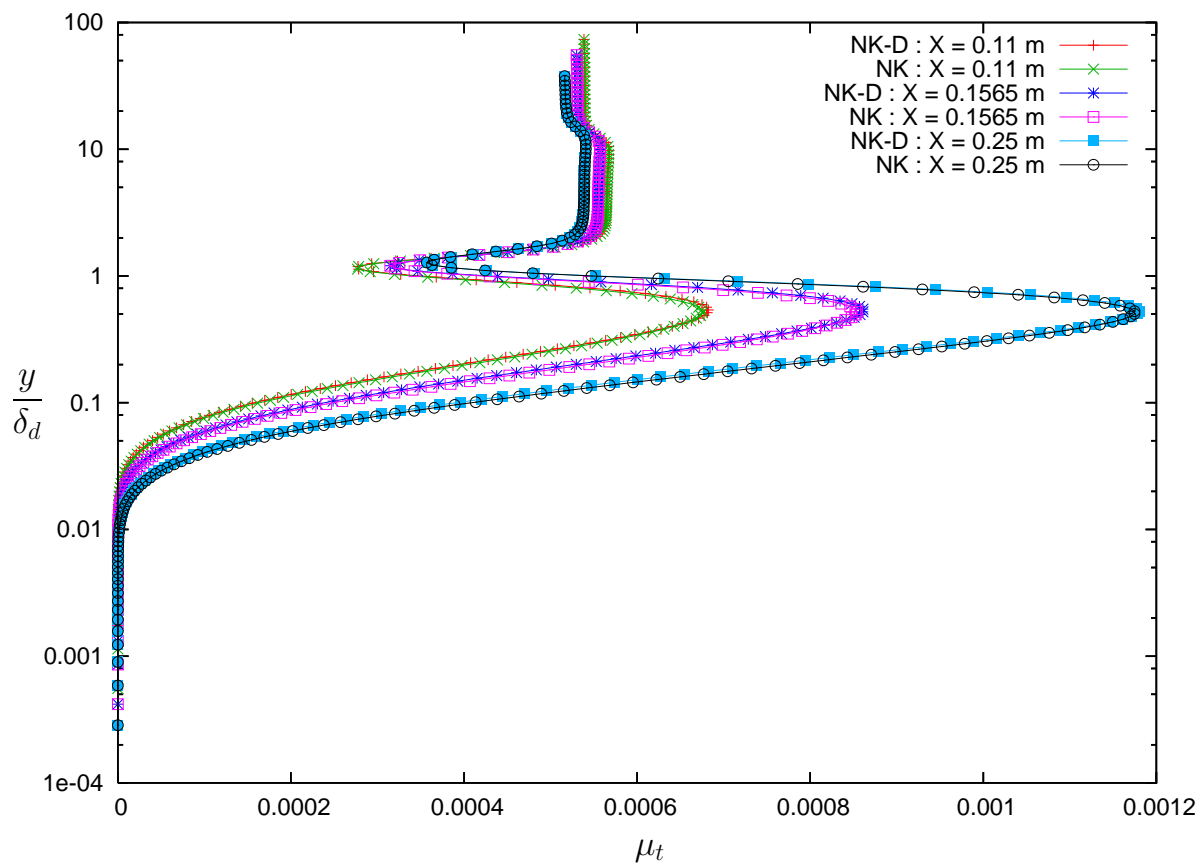


FIG. 3.11 – Comparaison du profil de la diffusivité dynamique de la turbulence à travers la couche limite dynamique à différentes abscisses :  $x = 0.11 m$ ,  $x = 0.1565 m$  et  $x = 0.25 m$ .

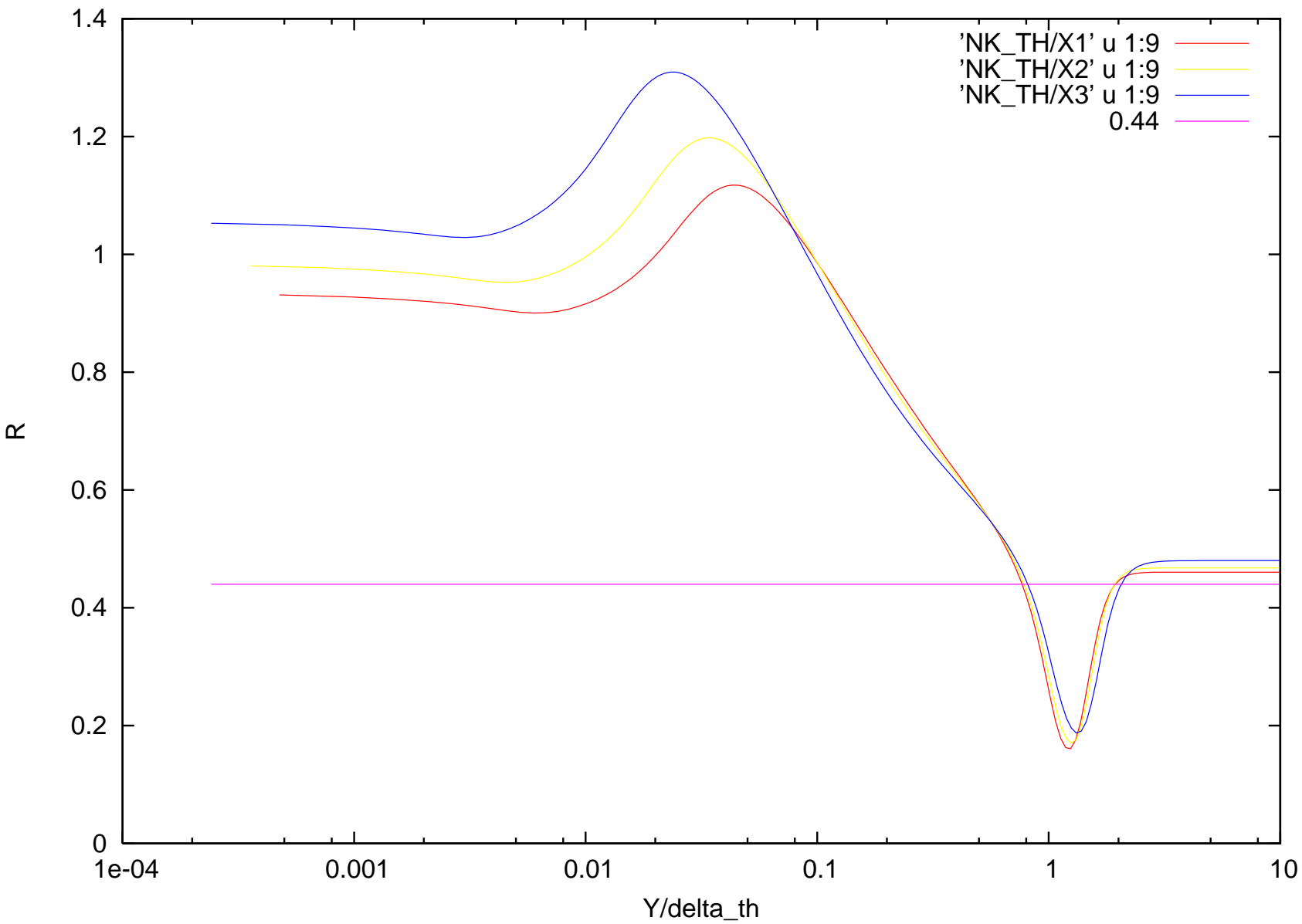


FIG. 3.12 – Comparaison du profil de température à travers la couche limite thermique à différentes abscisses :  $x = 0.11$  m,  $x = 0.1565$  m et  $x = 0.25$  m.

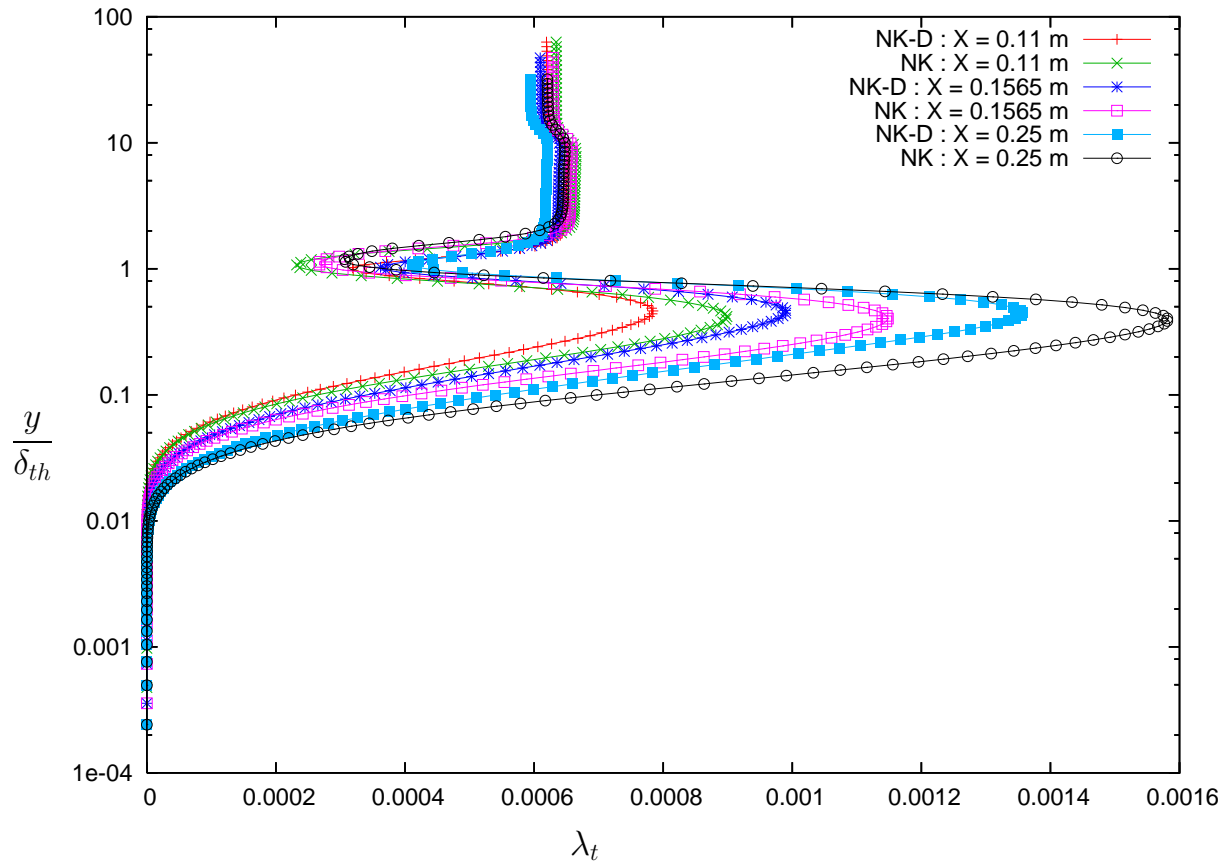


FIG. 3.13 – Comparaison du profil de la diffusivité thermique de la turbulence à travers la couche limite thermique à différentes abscisses :  $x = 0.11$  m,  $x = 0.1565$  m et  $x = 0.25$  m.

et au même moment. Nous pensons que c'est ce qui explique la très grande dispersion sur les valeurs de  $Pr_t$  que nous constatons dans plusieurs publications [26, 43, 60, 80–82]. La figure 3.14 montre différents profils du nombre de Prandtl turbulent le long de la plaque. Le moins que nous puissions dire est que ce nombre est loin d'être constant à travers la couche limite, mais aussi le long de la plaque, c'est-à-dire au fur et à mesure que la couche limite thermique se développe. Ce comportement rend difficile tout établissement d'une loi universelle pour calculer le profil de ce nombre.

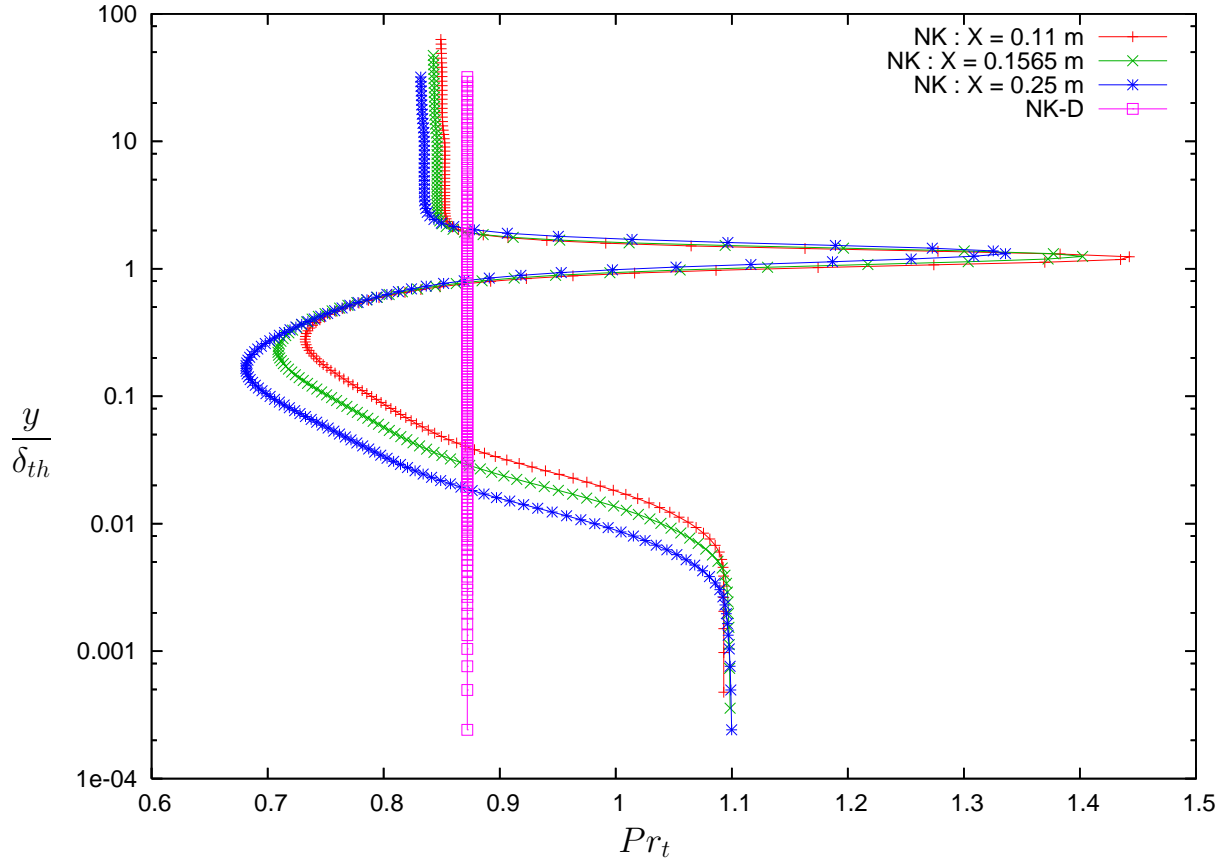


FIG. 3.14 – Distribution du nombre de Prandtl turbulent à travers la couche limite thermique et à des abscisses différentes :  $x = 0.11 \text{ m}$ ,  $x = 0.1565 \text{ m}$ ,  $x = 0.25 \text{ m}$ .

Une dernière quantité concernant l'aspect thermique de la couche limite est représentée sur la figure 3.15, où nous voyons les profils du rapport des échelles de temps  $R = \tau_{th}/\tau_d$ , à travers l'écoulement. Comme pour le nombre de Prandtl turbulent, ce rapport est loin d'être constant à travers la couche limite et le long de l'écoulement.

Un aspect essentiel de cette étude concerne l'évolution de la correction au fur et à

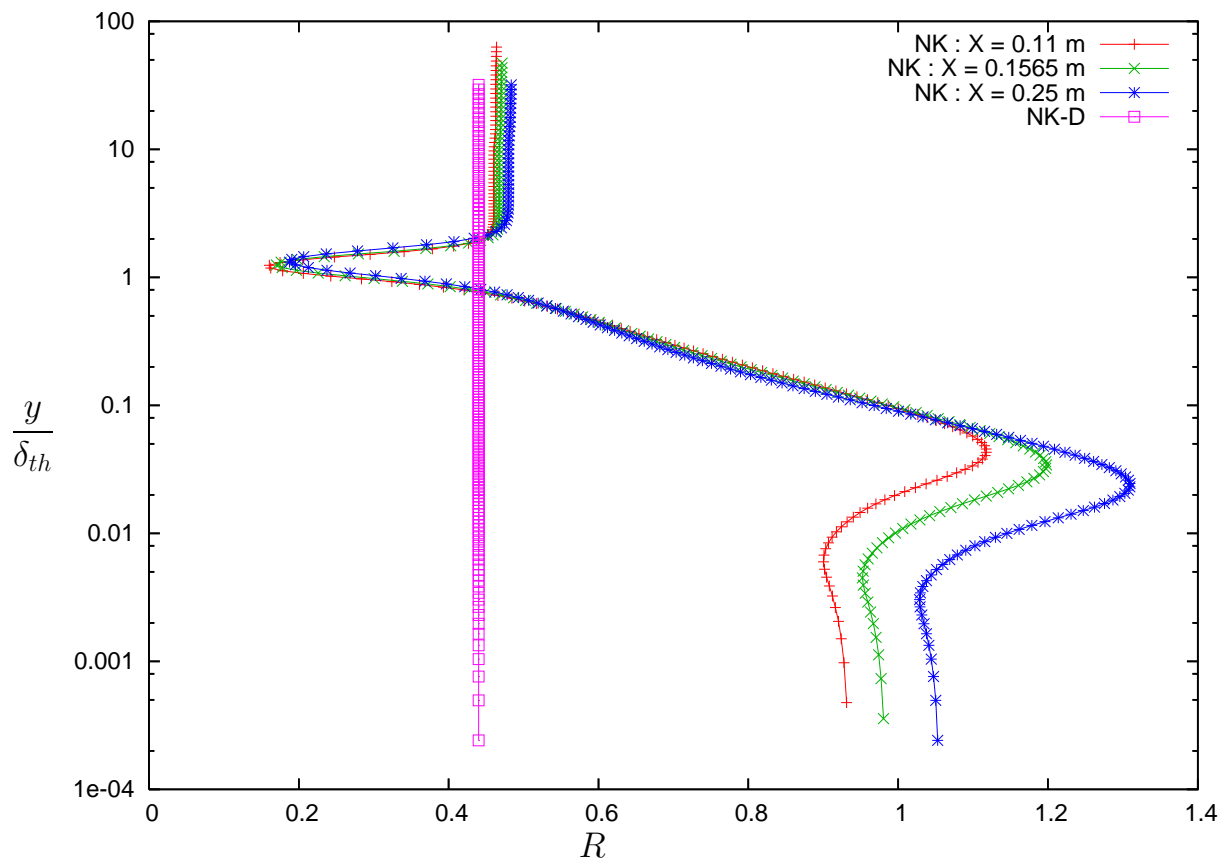


FIG. 3.15 – Distribution du rapport des échelles de temps à travers la couche limite thermique et à des abscisses différentes :  $x = 0.11$  m,  $x = 0.1565$  m,  $x = 0.25$  m.

mesure que nous nous éloignons de la paroi pour rentrer dans la zone à grand nombre de Reynolds. En effet, si nous observons attentivement les figures 3.16 à 3.19, nous constatons que l'influence notable de la correction thermique ne se fait sentir que dans la zone de couche limite, c'est-à-dire, pour une valeur de  $y^+ < y_{eq}^+$ .  $y_{eq}^+$  correspond au passage de la zone d'influence de la paroi à une zone d'équilibre (grand nombre de Reynolds).

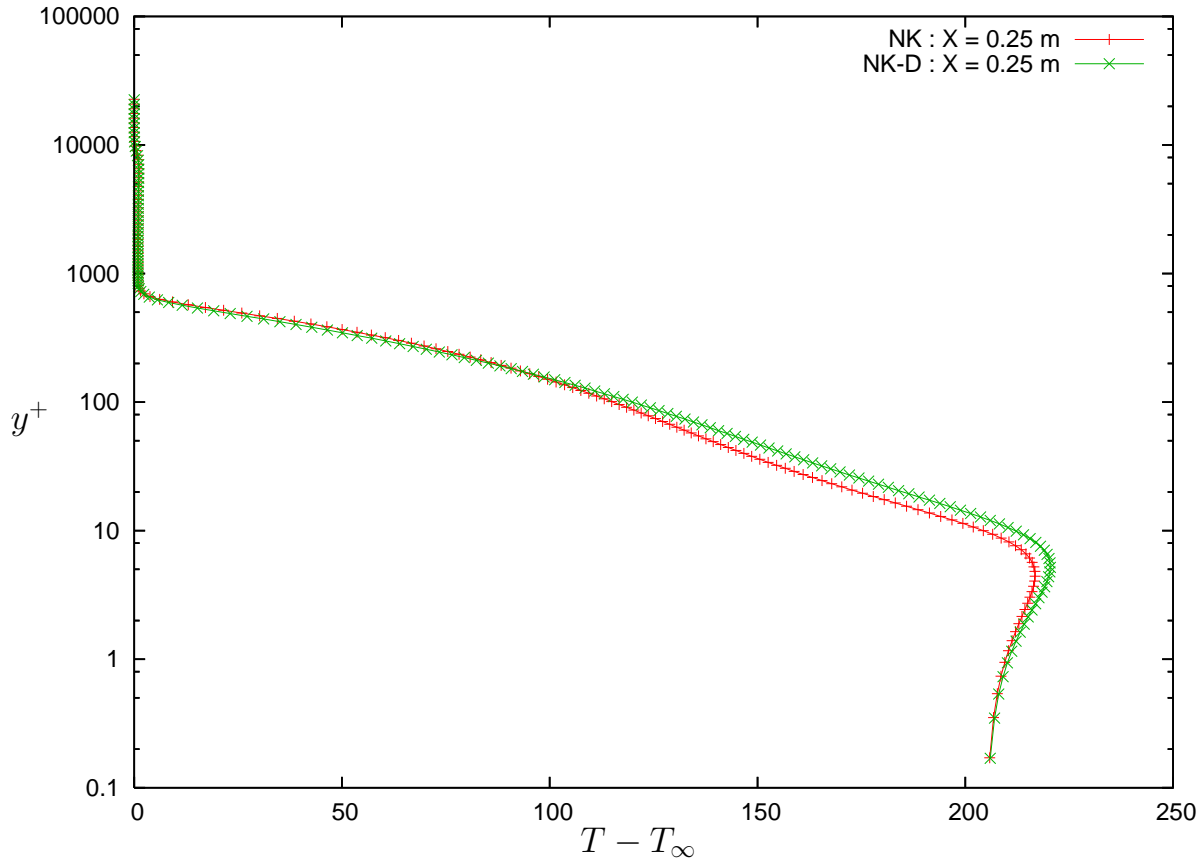


FIG. 3.16 – Comparaison du profil de température en fonction de  $y^+$  à  $x = 0.25 \text{ m}$ .

En effet, pour  $y^+ > y_{eq}^+$ , les variables calculées tendent vers une valeur constante, celle que nous obtenons avec une modélisation uniquement dynamique (analogie de Reynolds).

**Remarque 3.1** *Il faut aussi signaler que la différence entre le calcul et la valeur donnée par la théorie (ou par la version dynamique du modèle) dans la zone pleinement développée vient du choix des constantes de dissipation (voir section 4.4.4).*

**Il est donc inutile de vouloir plus finement modéliser dans la zone à grand nombre de Reynolds l'aspect thermique de la turbulence, dans le cadre d'un calcul de flux thermique à la paroi.**

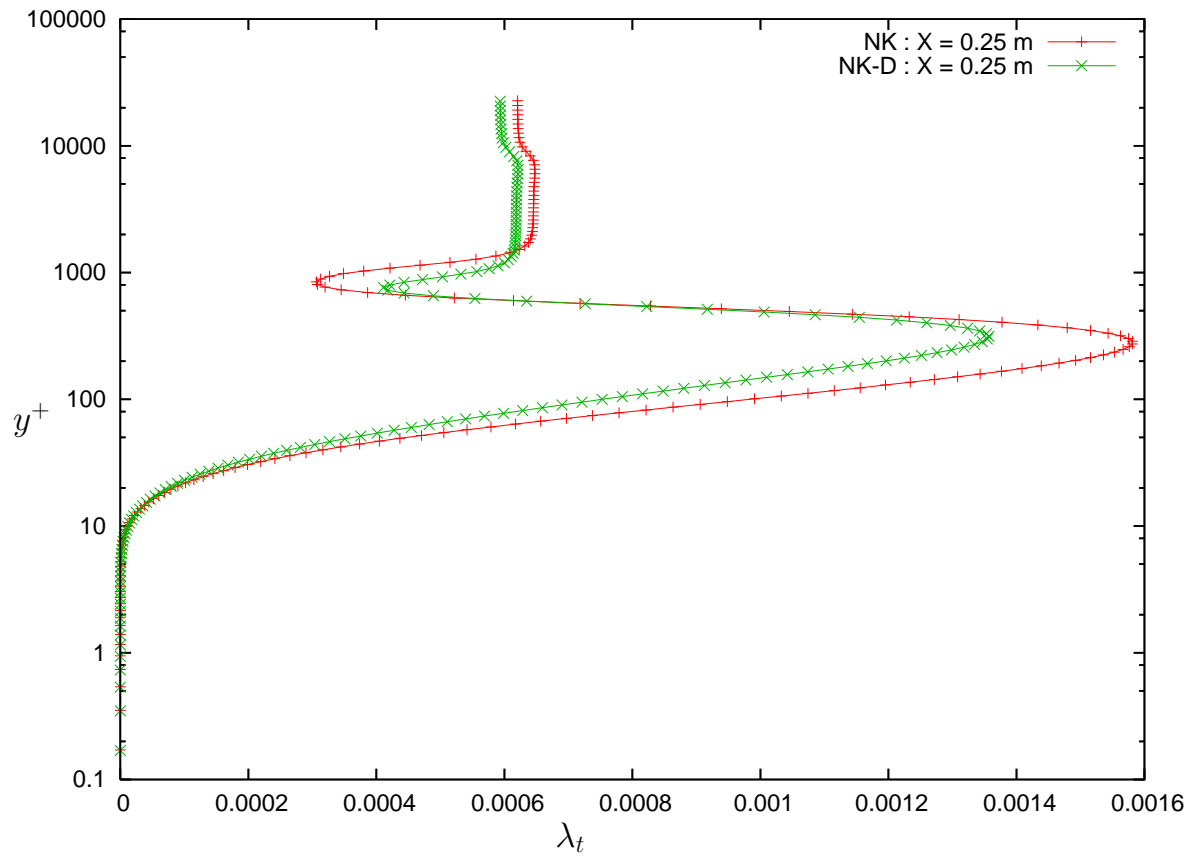


FIG. 3.17 – Comparaison du profil de la diffusivité thermique de la turbulence en fonction de  $y^+$  à  $x = 0.25$  m.



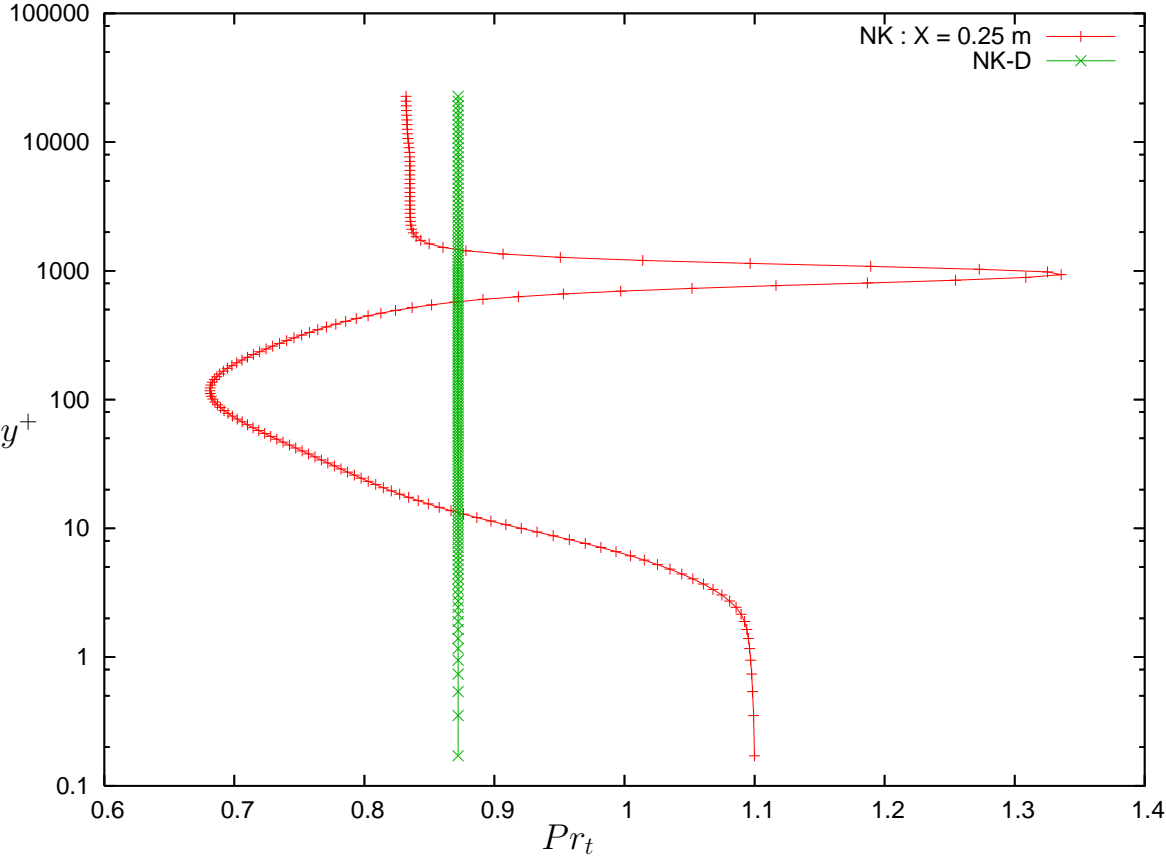
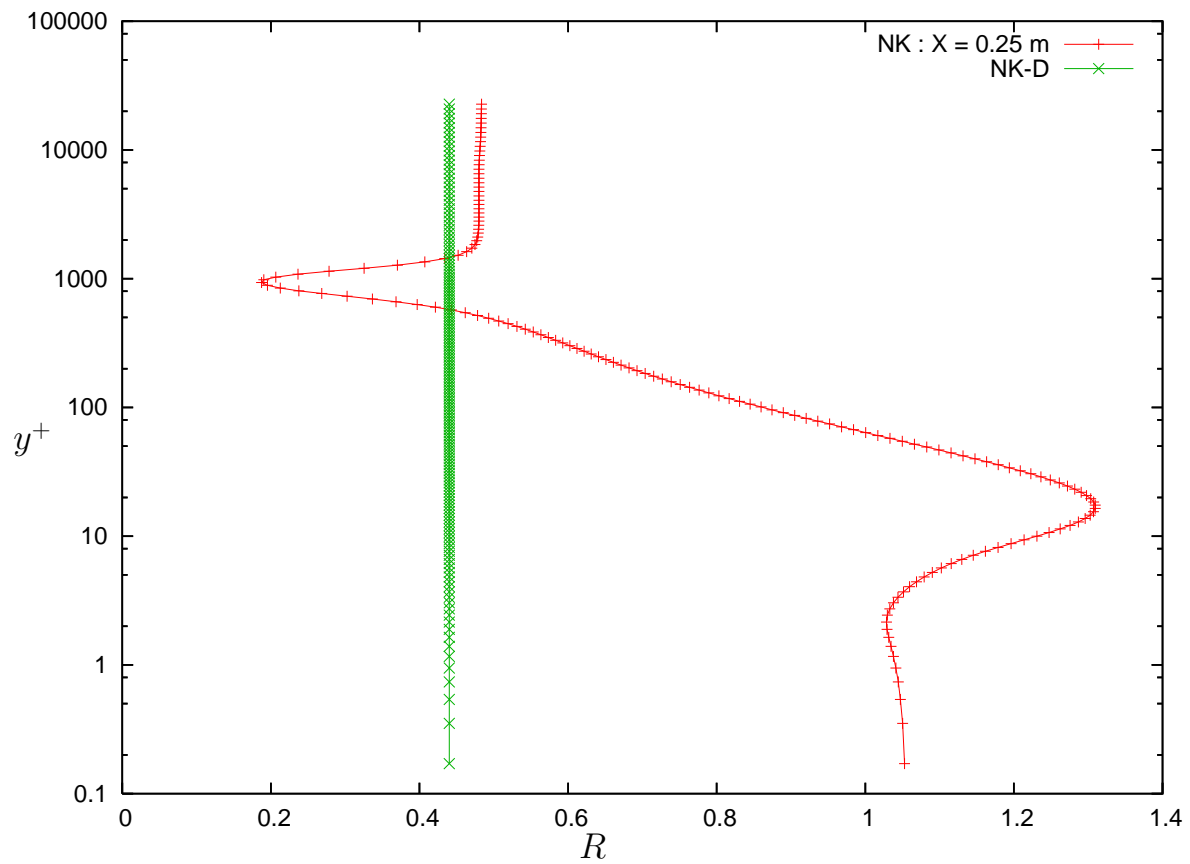


FIG. 3.18 – Profil du nombre de Prandtl turbulent en fonction de  $y^+$  à  $x = 0.25 m$ .

FIG. 3.19 – Profil du rapport des échelles de temps en fonction de  $y^+$  à  $x = 0.25$  m.

Devant ce constat, nous proposons dans un premier objectif de réduction de modèle, de couper le domaine de calcul en deux. La partie située au-dessus de  $y_{eq}^+$  est calculée en utilisant un modèle dynamique  $k - \varepsilon$ , et dans la zone de  $y^+ < y_{eq}^+$  nous utilisons un modèle complet  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$ . Nous choisissons pour ce cas test une valeur de  $y_{eq}^+ = 200$ .

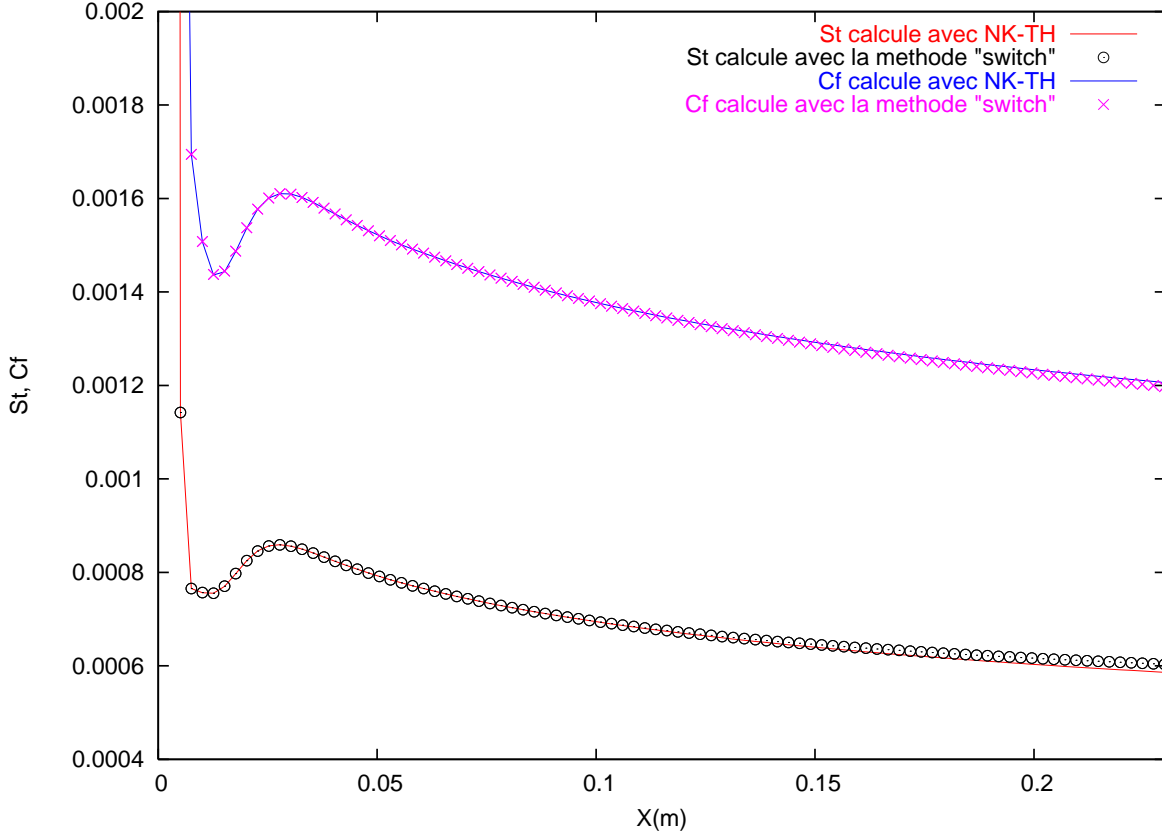


FIG. 3.20 – Comparaison des coefficients de friction et des nombres de Stanton.

Nous constatons alors sur la figure 3.20, qu’il n’y a aucune différence avec les calculs précédents où nous utilisons un modèle complet  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  sur tout le domaine. La modélisation thermique de la turbulence peut alors se restreindre au calcul de la zone à faible nombre de Reynolds.

## 4 Modélisation bi-couche thermique

Dans cette partie, nous développons et étudions des points de vue physique et numérique un modèle de type bi-couche “thermique”. La technique bi-couche a été introduite dans le cas incompressible par Patel *et al.* [41], puis étendu au cas compressible par Mohammadi *et al.* [18, 22, 24]. Nous l’étendons à notre tour pour une modélisation plus fine

de la diffusivité thermique de la turbulence dans la zone à faible nombre de Reynolds. Le modèle bi-couche est un modèle simple pour prendre en compte la zone à faible nombre de Reynolds, la zone à grand nombre de Reynolds étant calculée par un modèle de type  $k - \varepsilon$ . Ce développement a pour objectif l'écriture de nouvelles longueurs caractéristiques de la turbulence thermique.

#### 4.1 Technique bi-couche pour le champ dynamique

Nous définissons classiquement la diffusivité dynamique de la turbulence comme étant le produit de ses échelles caractéristiques :

$$\mu_t \sim \rho \Delta u_d L_d, \quad (3.33)$$

où nous rappelons que  $\Delta u_d = \sqrt{k}$  et  $L_d$  sont l'échelle de vitesse et l'échelle de longueur caractéristiques de la turbulence dynamique. Si nous utilisons le formalisme de technique bi-couche,  $\mu_t$  peut alors être modélisée de la manière suivante :

$$\mu_t = \rho C_\mu \sqrt{k} L_\mu. \quad (3.34)$$

La longueur  $L_\mu$ , contient les effets d'amortissement de proche paroi, liés à la diffusivité de la turbulence [41] :

$$L_\mu = C_d y (1 - \exp[-R_y/A_\mu]) , \quad (3.35)$$

où nous avons vu que  $R_y = \frac{\bar{\rho} \sqrt{k} y}{\mu}$ . Cette définition ne fait pas intervenir le frottement à la paroi, comme celle de  $y^+$ , mais la racine de  $k$ .

Notons que  $L_\mu$  tend vers  $C_d y$  lorsque nous nous éloignons de la paroi. Or pour assurer une transition continue avec le calcul dans la zone à grand nombre de Reynolds, nous avons l'égalité suivante :

$$C_d y = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}. \quad (3.36)$$

De plus, dans la zone de turbulence pleinement développée, nous avons vu (Eq. 3.10, Eq. 3.12) que  $k$  et  $\varepsilon$  peuvent se réécrire sous la forme :

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \text{ et } \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}. \quad (3.37)$$

Nous obtenons alors que

$$C_d = \kappa C_\mu^{-3/4}. \quad (3.38)$$

En ce qui concerne  $A_\mu$  nous trouvons la valeur de 70, déterminée à partir de tests numériques [41], de sorte que nous retrouvons la constante additive  $B \simeq 5$ , qui intervient dans la loi logarithmique :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B. \quad (3.39)$$

Nous devons maintenant résoudre une équation de transport sur  $k$  pour fermer la relation précédente (Eq. 3.34) :

$$\partial_t \bar{\rho} k + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} k) - \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) = P_k - \bar{\rho} \varepsilon. \quad (3.40)$$

Nous rappelons que  $P_k$  est le terme classique de production de la turbulence dynamique :

$$P_k = -\bar{\rho} \widetilde{u'' \otimes u''} : \nabla \tilde{u}. \quad (3.41)$$

En ce qui concerne le taux de dissipation  $\varepsilon$ , qui apparaît dans l'équation sur  $k$ , il est défini par la formule suivante :

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{L_\varepsilon}. \quad (3.42)$$

La longueur  $L_\varepsilon$ , contient les effets d'amortissement de proche paroi, liée au taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence [41] :

$$L_\varepsilon = C_d y (1 - \exp[-R_y/A_\varepsilon]), \quad (3.43)$$

Ici, il faut noter que nous retrouvons la même constante  $C_d$  (Eq. 3.36).

Il nous reste maintenant à déterminer la valeur de  $A_\varepsilon$ . Pour cela, il nous faut maintenant nous placer dans la zone de proche paroi, zone dans laquelle il est possible de développer la fonction d'amortissement de  $L_\varepsilon$  en série de Taylor, ce qui à l'ordre 1 en  $y$  donne :

$$\left( 1 - \exp\left(-\frac{R_y}{A_\varepsilon}\right) \right) = \frac{R_y}{A_\varepsilon}. \quad (3.44)$$

L'expression de  $L_\varepsilon$  devient alors :

$$L_\varepsilon = \frac{\rho \kappa C_\mu^{-3/4} y^2 \sqrt{k}}{\mu A_\varepsilon}. \quad (3.45)$$

Lorsque nous remplaçons maintenant l'expression de  $L_\varepsilon$  dans l'équation 3.42, nous obtenons :

$$\varepsilon = \frac{\mu k}{\rho y^2 \kappa C_\mu^{-3/4}}. \quad (3.46)$$

Or, le comportement asymptotique de  $\varepsilon$  près de la paroi est (Eq. 3.26) :

$$\varepsilon = 2\mu \frac{k}{\rho y^2}. \quad (3.47)$$

En identifiant alors les expressions 3.46 et 3.47, nous trouvons :

$$A_\varepsilon = 2\kappa C_\mu^{-3/4} = 2C_d. \quad (3.48)$$

## 4.2 Technique bi-couche pour le champ de température

Nous définissons maintenant la diffusivité thermique de la turbulence comme étant le produit de ses échelles caractéristiques :

$$\lambda_t \sim \rho \Delta u_h L_h, \quad (3.49)$$

où nous rappelons que  $\Delta u_h$  et  $L_h$  sont une échelle de vitesse et une échelle de longueur caractéristiques de la turbulence thermique. Le problème est maintenant un peu plus délicat que pour le calcul du champ de vitesse. En effet, il existe de nombreuses possibilités quant aux échelles de vitesses thermiques, mais ce choix peut se ramener à ne considérer que l'échelle des vitesses associée au champ dynamique [6] :

$$\Delta u_h = \Delta u_d \simeq \sqrt{k}. \quad (3.50)$$

Une telle simplification nous oblige alors à introduire dans  $L_h$  les corrections thermiques adéquates. Si nous utilisons maintenant le même formalisme que pour la technique associée au champ dynamique,  $\lambda_t$  peut alors modélisée de la manière suivante :

$$\lambda_t = \rho C_\lambda \sqrt{k} L_\lambda. \quad (3.51)$$

La longueur  $L_\lambda$ , contient à la fois les effets d'amortissement à la paroi, ainsi que les corrections thermiques associées à une telle simplification de l'échelle de vitesse  $\Delta u_h$  :

$$L_\lambda = C_{th} y (1 - \exp[-y^+/A_\lambda]). \quad (3.52)$$

Avant de commencer les discussions qui nous permettront de déterminer les différentes fermetures de ce nouveau modèle, rappelons la relation essentielle qui relie les modélisations dynamique et thermique entre elles :

$$\lambda_t = \frac{C_\lambda}{C_\mu} \mu_t (2R)^m. \quad (3.53)$$

Commençons alors par déterminer  $L_\lambda$ . Notons qu'elle tend vers  $C_{th} y$  lorsque nous nous éloignons de la paroi. Nous avons montré au chapitre précédent que l'utilisation d'un modèle complet à quatre équations pour le calcul de la zone "à grand nombre de Reynolds" est inutile dans une problématique aérodynamique, où nous cherchons en particulier à prédire le flux thermique à la paroi. Alors, dans cette logique et pour assurer une transition continue à la frontière des deux domaines ( $y^+ = y_{eq}^+$ ), nous devons vérifier l'analogie de Reynolds :

$$C_{th} = C_d. \quad (3.54)$$

Plaçons nous maintenant dans un cas où nous utilisons un modèle à quatre équations pour calculer la zone “à grand nombre de Reynolds”. Pour assurer une transition continue, il nous faut alors utiliser la formule 3.53 et nous obtenons alors que :

$$C_{th} = C_d(2R_{eq})^{m_{eq}}. \quad (3.55)$$

Nous avons montré au chapitre précédent que de choisir  $R_{eq} = 0.5$  et  $m_{eq} = 1$  était le plus approprié. En particulier, cela correspond exactement au cas précédent.

Nous fermons entièrement ce système en déterminant  $A_\lambda$ . Nous nous plaçons alors dans la zone de proche paroi, zone dans laquelle nous développons  $L_\lambda$  en série de Taylor.

$$L_\lambda = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}} \rho \kappa C_\mu^{-3/4} y^2 \sqrt{k}}{\mu A_\lambda}. \quad (3.56)$$

Il nous faut à nouveau utiliser la formule 3.53, dans laquelle nous remplaçons  $L_\mu$  et  $L_\lambda$  par leur développements limités, ce qui donne :

$$A_\lambda = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}}}{(2R_w)^{m_w}} A_\mu. \quad (3.57)$$

La valeur de  $A_\lambda$  est trouvée dans le cas général d’une modélisation à quatre équation, dans la zone à grand nombre de Reynolds. Cette expression générale peut s’adapter en fonction du choix que nous faisons quant au calcul dans cette zone, à savoir l’utilisation d’un modèle à deux ou quatre équations.

Il est essentiel de remarquer qu’à ce stade du développement du modèle, aucune variable thermique de la turbulence n’est apparue. En effet, pour ce qui concerne le calcul du champ dynamique, la résolution d’une équation de transport sur  $k$ , vient du fait que cette variable dynamique de la turbulence apparaît dans le choix de l’échelle de vitesse,  $\Delta u_d = \sqrt{k}$ . Dans la modélisation développée pour le calcul du champ thermique, ce même choix étant utilisé ( $\Delta u_h = \Delta u_d$ ), il est inutile de vouloir résoudre toute autre équation de transport, et en particulier celle sur  $k_h$ .

### 4.3 Correction de l’échelle de vitesse thermique

Pour prendre en compte de manière plus fine, les effets des quantités thermiques de la turbulence dans la couche limite, nous devons introduire plus de modélisation thermique dans le choix de l’échelle de vitesse thermique. Ainsi, combinant les échelles caractéristiques thermique et dynamique de la convection turbulente, nous proposons la formule suivante pour  $\Delta u_h$  :

$$\Delta u_h = \frac{y^+}{y_{eq}^+} \alpha \sqrt{k} + \left(1 - \frac{y^+}{y_{eq}^+} \alpha\right) \sqrt{2k_h}, \quad (3.58)$$

avec

$$\alpha = \frac{R}{R_{eq}}. \quad (3.59)$$

Nous voyons dans les équations 3.58 et 3.59, que  $\alpha$  est un facteur qui contrôle l'évolution de  $\Delta u_h$ , de sorte qu'il soit en accord avec le développement de la couche limite thermique.

Regardons de plus près cette formule, et faisons une rapide analyse asymptotique. Lorsque nous nous éloignons de la paroi, et que nous tendons vers la zone à grand nombre de Reynolds, nous avons alors  $\alpha = 1$  et l'équation 3.58 devient :

$$\lim_{y^+ = y_{eq}^+} \Delta u_h = \Delta u_d, \quad (3.60)$$

ce qui assure une transition continue du calcul entre les zones à grand nombre de Reynolds et à faible nombre de Reynolds de la couche limite.

Si nous nous plaçons maintenant à la paroi, un tel choix concernant l'échelle de vitesse thermique, nous assure une totale cohérence avec la théorie pour le comportement asymptotique de  $\lambda_t$  à la paroi, que la paroi soit isotherme ou à flux imposé. En effet, lorsque nous tendons vers la paroi, la formule 3.58 devient :

$$\lim_{y^+ = 0} \Delta u_h = \sqrt{2k_h}. \quad (3.61)$$

Or, comme nous avons vu précédemment,  $k_h$  se comporte comme  $y^2$  dans le cas d'une paroi isotherme, et comme  $y^0$  dans le cas d'une paroi où nous imposons le flux thermique. Nous trouvons alors, en développant  $\lambda_t$  en puissances de  $y$  :

$$\begin{cases} \lambda_t \sim y^3, & \text{avec } h_w'' = 0 \\ \lambda_t \sim y^2, & \text{avec } h_w'' \neq 0, \end{cases} \quad (3.62)$$

ce qui correspond exactement au comportement théorique désiré (voir chapitre précédent).

Notons que cela n'est pas le cas si nous supposons que  $\Delta u_h = \Delta u_d$  à travers toute la couche limite.

Une telle correction de la vitesse conduit à une nouvelle expression pour la diffusivité thermique de la turbulence :

$$\lambda_t = \rho C_\lambda \left( \frac{y^+}{y_{eq}^+} \alpha \sqrt{k} + \left(1 - \frac{y^+}{y_{eq}^+} \alpha\right) \sqrt{2k_h} \right) L_\lambda. \quad (3.63)$$

Il faut noter que cette nouvelle échelle peut modifier deux aspects de la précédente modélisation.

Tout d'abord, il nous faut reconsidérer les valeurs des constantes  $C_{th}$  et  $A_\lambda$  dans l'expression de  $L_\lambda$ . Comme la transition entre les deux domaines de calcul ne change pas (Eq. 3.60), la valeur de  $C_{th}$  ne change pas non plus. En ce qui concerne la valeur de  $A_\lambda$ ,



il nous faut reconsidérer le développement limité de  $\lambda_t$ , dans la zone de proche paroi car la vitesse caractéristique utilisée est maintenant  $\sqrt{2k_h}$ . En introduisant maintenant cette nouvelle donnée dans la formule 3.53, nous trouvons pour valeur de  $A_\lambda$  :

$$A_\lambda = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}}}{(2R_w)^{m_w}} \sqrt{\frac{k}{2k_h}} A_\mu. \quad (3.64)$$

De plus, cette nouvelle échelle fait maintenant apparaître le terme d'énergie thermique de la turbulence  $k_h$ , pour lequel il nous faut résoudre une équation de transport :

$$\partial_t \bar{\rho} k_h + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} k_h) - \nabla \cdot \left( \left( \lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{k_h}} \right) \nabla k_h \right) = P_{k_h} - \bar{\rho} \varepsilon_h. \quad (3.65)$$

Nous rappelons que  $P_{k_h}$  est le terme classique de production de la turbulence thermique :

$$P_{k_h} = -\bar{\rho} \widetilde{h'' u''} \nabla \tilde{h}. \quad (3.66)$$

En ce qui concerne le taux de dissipation  $\varepsilon_h$ , qui apparaît dans l'équation sur  $k_h$ , il est défini à l'aide de la formule 3.53, qui donne :

$$\lambda_t = \bar{\rho} C_\lambda \sqrt{k} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} (2R)^m, \quad (3.67)$$

or,  $\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{L_\varepsilon}$ , donc

$$L_{\varepsilon_h} = L_\varepsilon (2R)^m. \quad (3.68)$$

Sachant que  $R = \frac{k_h \varepsilon}{\varepsilon_h k}$  nous avons alors :

$$\varepsilon_h = \left( \frac{L_\varepsilon^{1-m}}{L_{\varepsilon_h}} \right)^{1/m} 2k_h \sqrt{k}. \quad (3.69)$$

La longueur  $L_{\varepsilon_h}$  contient les effets d'amortissement à la paroi, liés au taux de dissipation de l'énergie thermique de la turbulence :

$$L_{\varepsilon_h} = C_{thy} (1 - \exp[-y^+ / A_{\varepsilon_h}]). \quad (3.70)$$

Pour déterminer la valeur de  $A_{\varepsilon_h}$ , nous nous plaçons dans la zone de proche paroi, zone dans laquelle nous développons la fonction d'amortissement de  $L_{\varepsilon_h}$  en série de Taylor à l'ordre 1 en  $y$  :

$$\left( 1 - \exp \left( -\frac{R_y}{A_{\varepsilon_h}} \right) \right) = \frac{R_y}{A_{\varepsilon_h}}. \quad (3.71)$$

L'expression de  $L_\varepsilon$  devient alors :

$$L_{\varepsilon_h} = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}} \rho \kappa C_\mu^{-3/4} y^2 \sqrt{k}}{\mu A_{\varepsilon_h}}. \quad (3.72)$$

En remplaçant maintenant les développements limités de  $L_\varepsilon$  (Eq. 3.45) et de  $L_{\varepsilon_h}$  (Eq. 3.72) dans l'équation 3.68, nous trouvons

$$A_{\varepsilon_h} = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}}}{(2R_w)^{m_w}} A_\varepsilon. \quad (3.73)$$

## 4.4 Bilan

Dans la zone à faible nombre de Reynolds, c'est-à-dire pour  $y^+ < y_{eq}^+$ , la couche limite est calculée par le modèle bi-couche thermique ci-dessous.

### 4.4.1 Résolution du champ dynamique

La diffusivité dynamique de la turbulence est modélisée par l'expression suivante :

$$\mu_t = \rho C_\mu \sqrt{k} L_\mu. \quad (3.74)$$

Dans cette expression, nous modélisons la longueur caractéristique  $L_\mu$  par :

$$L_\mu = C_d y (1 - \exp[-y^+/A_\mu]), \quad (3.75)$$

avec  $C_d = \kappa C_\mu^{-3/4}$  et  $A_\mu = 70$ .

L'équation de transport ci-dessous nous permet de calculer l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  :

$$\partial_t \bar{\rho} k + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} k) - \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) = P_k - \bar{\rho} \frac{k^{3/2}}{L_\varepsilon}. \quad (3.76)$$

Dans cette équation, nous calculons la longueur caractéristique  $L_\varepsilon$  par :

$$L_\varepsilon = C_d y (1 - \exp[-y^+/A_\varepsilon]), \quad (3.77)$$

avec  $A_\varepsilon = 2C_d$ .

### 4.4.2 Résolution du champ thermique

La diffusivité thermique de la turbulence est modélisée par l'expression suivante :

$$\lambda_t = \rho C_\lambda \Delta u_h L_\lambda. \quad (3.78)$$

Dans cette expression, nous modélisons la longueur caractéristique  $L_\lambda$  par :

$$L_\lambda = C_{th} y (1 - \exp[-y^+/A_\lambda]), \quad (3.79)$$

avec  $C_{th} = C_d(2R_{eq})^{m_{eq}}$ . En fonction de l'échelle de vitesse thermique que nous choisissons, deux chemins de modélisation sont possibles :

- Si nous prétendons que les échelles de vitesses dynamique et thermique sont semblables, c'est-à-dire  $\Delta u_h = \Delta u_d = \sqrt{k}$ , alors il vient :

$$A_\lambda = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}}}{(2R_w)^{m_w}} A_\mu.$$

- Si nous prétendons que les échelles de vitesses dynamique et thermique ne sont pas semblables, et que nous avons pour expression de la vitesse caractéristique de la turbulence thermique :

$$\Delta u_h = \frac{y^+}{y_{eq}^+} \alpha \sqrt{k} + \left(1 - \frac{y^+}{y_{eq}^+} \alpha\right) \sqrt{2k_h},$$

alors  $A_\lambda$  vaut désormais

$$A_\lambda = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}}}{(2R_w)^{m_w}} \sqrt{\frac{k}{2k_h}} A_\mu.$$

Il faut en plus résoudre l'équation de transport sur  $k_h$  suivante :

$$\partial_t \bar{\rho} k_h + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{u} k_h) - \nabla \cdot \left( \left( \lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{k_h}} \right) \nabla k_h \right) = P_{k_h} - \bar{\rho} \left( \frac{L_\varepsilon^{1-m}}{L_{\varepsilon_h}} \right)^{1/m} 2k_h \sqrt{k}. \quad (3.80)$$

Dans cette équation, nous calculons la longueur caractéristique  $L_{\varepsilon_h}$  par :

$$L_{\varepsilon_h} = C_{thy} \left( 1 - \exp[-y^+/A_{\varepsilon_h}] \right), \quad (3.81)$$

avec  $A_{\varepsilon_h} = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}}}{(2R_w)^{m_w}} A_\varepsilon.$

Dans ces expressions, les valeurs des constantes aux limites sont résumées dans le tableau 3.6.

$m_{eq}$	1.0
$R_{eq}$	0.5
$R_w$	$Pr$

TAB. 3.6 – Valeurs des constantes aux limites.

## 4.5 Fermeture du modèle

A ce stade du développement, il ne nous reste plus qu'à déterminer la valeur de l'exposant  $m$  à la paroi. Ce paramètre joue un grand rôle dans la modélisation de la turbulence thermique, que ce soit pour des modèles haut-Reynolds, bas-Reynolds ou toute autre réduction mathématique, comme le modèle bi-couche thermique que nous proposons. En effet, le problème du choix de l'échelle de temps adéquate se ramène au choix de l'exposant  $m$ , et en particulier de  $m_w$  lorsque nous cherchons à modéliser les effets thermiques de proche paroi. Nous avons vu que pour un modèle de type bas-Reynolds à quatre équations, un choix théorique judicieux pour  $m$  à la paroi est  $m_w = 0.5$ . Le problème ici réside dans le fait que nous n'avons pas accès à  $m$  dans les développements limités des variables de turbulence à la paroi. Nous ne pouvons donc pas tout aussi facilement que pour les modèles à quatre équations, déterminer ce paramètre.

Cependant, la valeur de cet exposant est fortement couplée au comportement du nombre de Prandtl turbulent à la paroi :

$$Pr_{t_w} = \lim_{y^+=0} \frac{\mu_t}{\lambda_t} = Pr_{teq} \frac{(2Re_q)^{m_{eq}}}{(2Re_w)^{m_w}} = \frac{Pr_{teq}}{(2Pr)^{m_w}}. \quad (3.82)$$

Ce que nous pouvons dire à l'heure actuelle, si nous regardons tous les modèles thermiques existants, ou ce que montre les expériences, c'est qu'à la paroi, ce nombre est supérieur à l'unité :  $Pr_{t_w} > 1$ . Nous pouvons donc déduire de l'équation 3.82 l'inégalité suivante :

$$m_w < \frac{\ln(Pr_{teq})}{\ln 2Pr} < 0. \quad (3.83)$$

En fonction de tout ce qui précède et des incertitudes qui pèsent encore sur la valeur adéquate, nous adoptons comme valeur de  $m$  à la paroi celle proposée par Horiuti [53] :

$$m_w = -1. \quad (3.84)$$

Il est important de remarquer ici, que la valeur de  $Pr_t$  à la paroi, donnée par notre modèle, dépend fortement de celle de  $Pr$ , ce qui est en accord avec ce que nous montre l'expérience [80].

Cette remarque n'est pas sans conséquence sur la difficulté de prise en compte du nombre de Prandtl turbulent à la paroi, car cela signifie qu'il dépend à la fois de l'écoulement, mais aussi du fluide.

## 4.6 Résultats

Nous étudions dans cette section le développement de deux couches limites turbulentes supersoniques, dont l'une est en interaction avec une onde de choc. Ces simulations ont plusieurs objectifs :

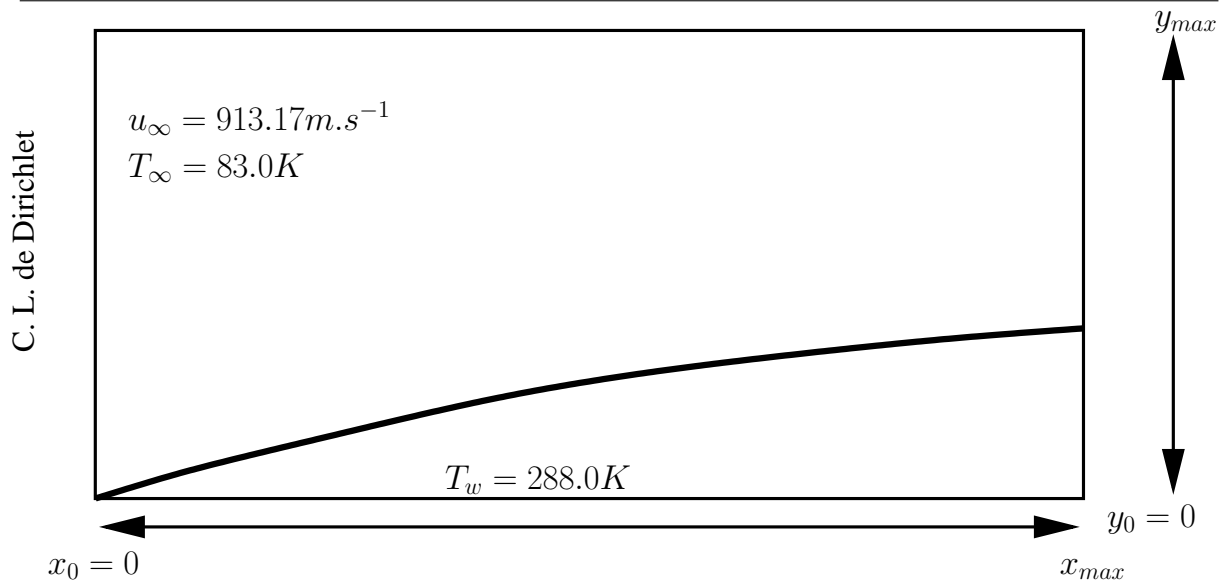


FIG. 3.21 – Domaine utilisé pour modéliser le développement de la couche limite.

- montrer les capacités du modèle thermique réduit en le comparant à la modélisation bas-Reynolds de NK,
- confronter la modélisation thermique à la version dynamique du modèle réduit,
- confronter la réduction mathématique proposée à l'expérience.

#### 4.6.1 Plaque plane

Le premier cas test est celui de la couche limite déjà étudiée précédemment (§ 3.2). Seul le maillage est différent, car il est cette fois-ci adapté à la technique bi-couche. Les conditions géométriques de cette simulation sont résumées sur la figure 3.21 et le tableau 3.7.

$x_{max}$	0.25 m
$N_x$	100
$N_y$	107
$y_1$	$1 \cdot 10^{-7}$ m
$R_x$	1.0
$R_y$	1.12

TAB. 3.7 – Caractéristiques du domaine utilisé pour modéliser le développement de la couche limite.

Dans [3], nous avons accès aux données expérimentales concernant le nombre de Stanton, dont nous pouvons voir les résultats du calcul sur la figure 3.22.

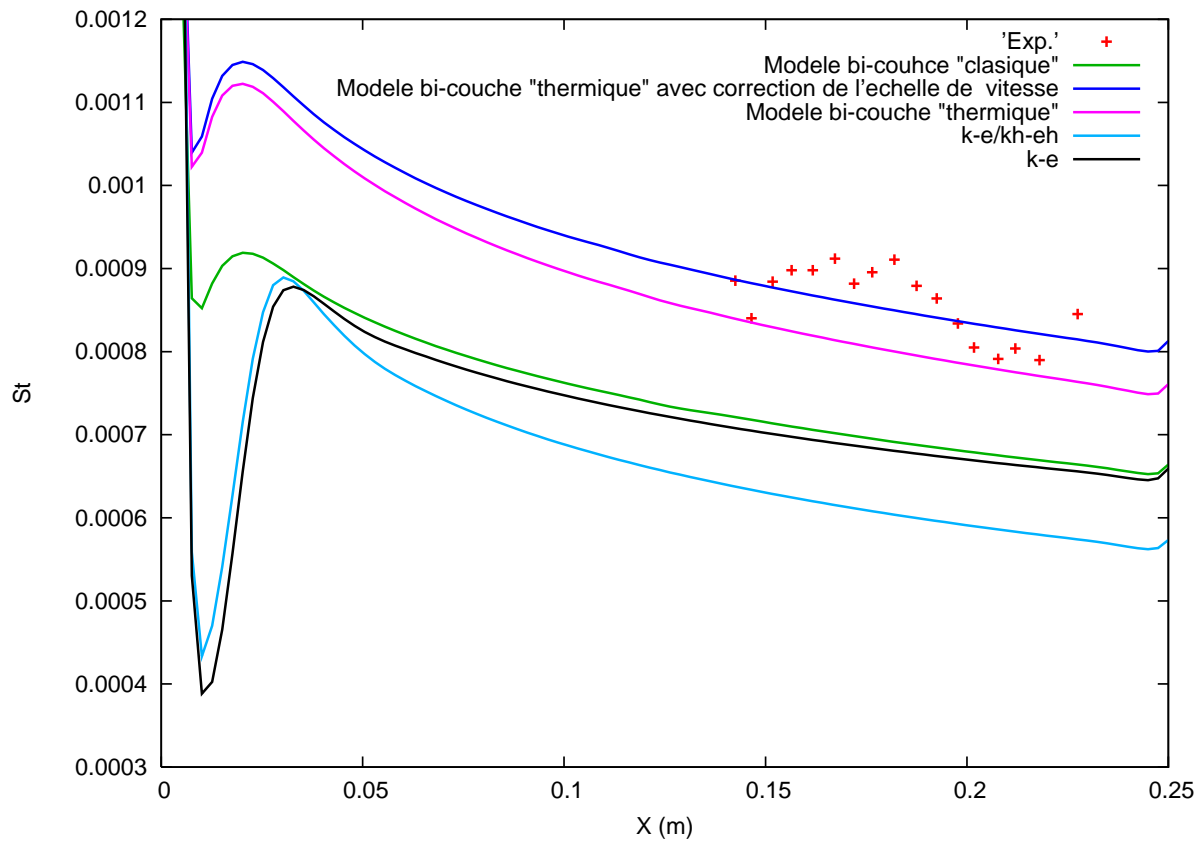


FIG. 3.22 – Nombre de Stanton

Sur cette figure (Fig. 3.22), nous notons plusieurs résultats intéressants. Remarquons en premier lieu l'efficacité de la technique bi-couche en comparaison aux modèles bas-Reynolds, qu'elle soit classique ou thermique. Le second point est de noter que le modèle bi-couche thermique donne des résultats nettement meilleurs que sa version dynamique. Enfin nous notons de plus que la modification apportée à l'échelle de vitesse thermique permet d'améliorer la précision du calcul, et d'être en bon accord avec l'expérience.

Sur la figure 3.23, qui représente le calcul du coefficient de frottement, nous avons un bon accord entre les calculs et la loi empirique [46], de plus nous constatons la non rétroaction de la correction thermique sur le champ des vitesses, ce qui est souhaité.

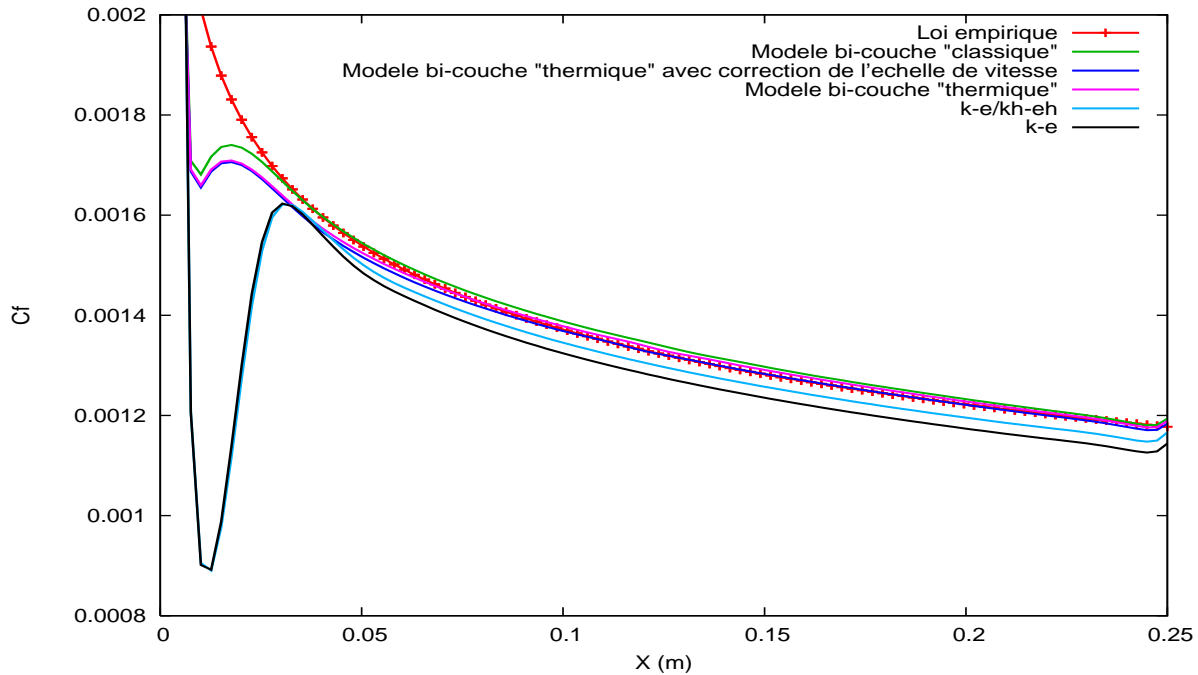


FIG. 3.23 – Coefficient de frottement

#### 4.6.2 Interaction onde de choc / couche limite

Ce second cas test a pour objectif de confronter le modèle bi-couche thermique à une simulation plus raide, et de comparer les résultats à ceux de la version dynamique. Ce cas test est celui de la couche limite en interaction avec une onde de choc, proposé par Schülen [76]. Le dispositif expérimental est montré sur la figure 3.24. Un générateur de choc est monté au-dessus de la paroi, de sorte que l'onde de choc résultante puisse interagir avec la couche limite turbulente qui se développe le long de la plaque plane. L'angle de la plaque provoquant le choc  $\beta$  est de 10 degrés.

Le nombre de Mach en entrée est  $M_\infty = 5.0$ , le nombre de Reynolds infini est  $Re_{y_\infty} = 3.7 \cdot 10^7 m^{-1}$ . Le gaz est considéré comme étant un gaz parfait, c'est-à-dire que  $R_{gaz} = 287.05 J.kg^{-1}.K^{-1}$ . La température du domaine est  $T_\infty = 68.33K$  et la température imposée à la paroi est  $T_w = 300.0K$ .

Le coefficient de viscosité dynamique,  $\mu_\infty$ , est calculé à l'aide de la formule de Sutherland (Eq. 1.15), ce qui nous permet grâce aux quantités physiques connues, de déterminer la valeur de la masse volumique,  $\rho_\infty = 0.2051 kg/m^3$ .

La diffusivité thermique,  $\lambda_\infty$  est donnée par l'équation 1.20.

Les valeurs utilisées comme conditions aux limites des variables de la turbulence sont les suivantes :  $k_\infty = 102.9 m^2/s^2$ ,  $\varepsilon_\infty = 426169.44 m^2/s^3$ .

Le maillage utilisé est de 100000 noeuds, et est adapté à la nature de l'écoulement et de l'interaction. Ce nombre impressionnant de mailles est la conséquence d'un raffinement en  $x$  autour de la zone choquée. La hauteur de première maille est de  $5 \cdot 10^{-7} m$ .

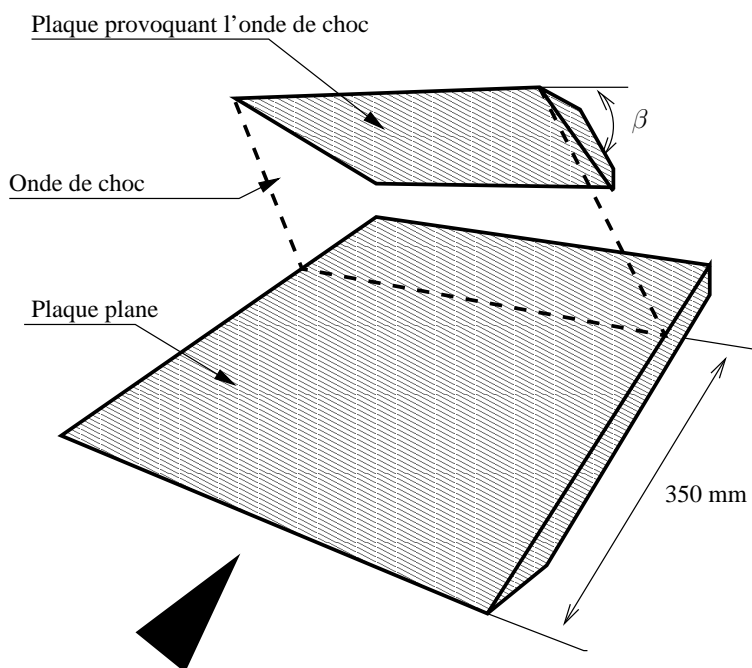


FIG. 3.24 – Schéma expérimental de l'interaction onde de choc / couche limite.

Sur les figures 3.25 et 3.26 nous pouvons voir le résultat du calcul des modèles bi-couche, pour ce qui est de la distribution de la pression le long de la paroi et du flux thermique respectivement.

Sur la figure 3.25, qui représente la distribution de la pression le long de la paroi, nous constatons à nouveau que la non-rétroaction de la correction du champ de température sur le champ de vitesse est respectée. En ce qui concerne le flux de chaleur (Fig. 3.26), une amélioration notable du calcul sur la partie plaque non choquée est à relever. Dans la zone choquée, ni le modèle classique, ni le modèle thermique ne parviennent à éva-



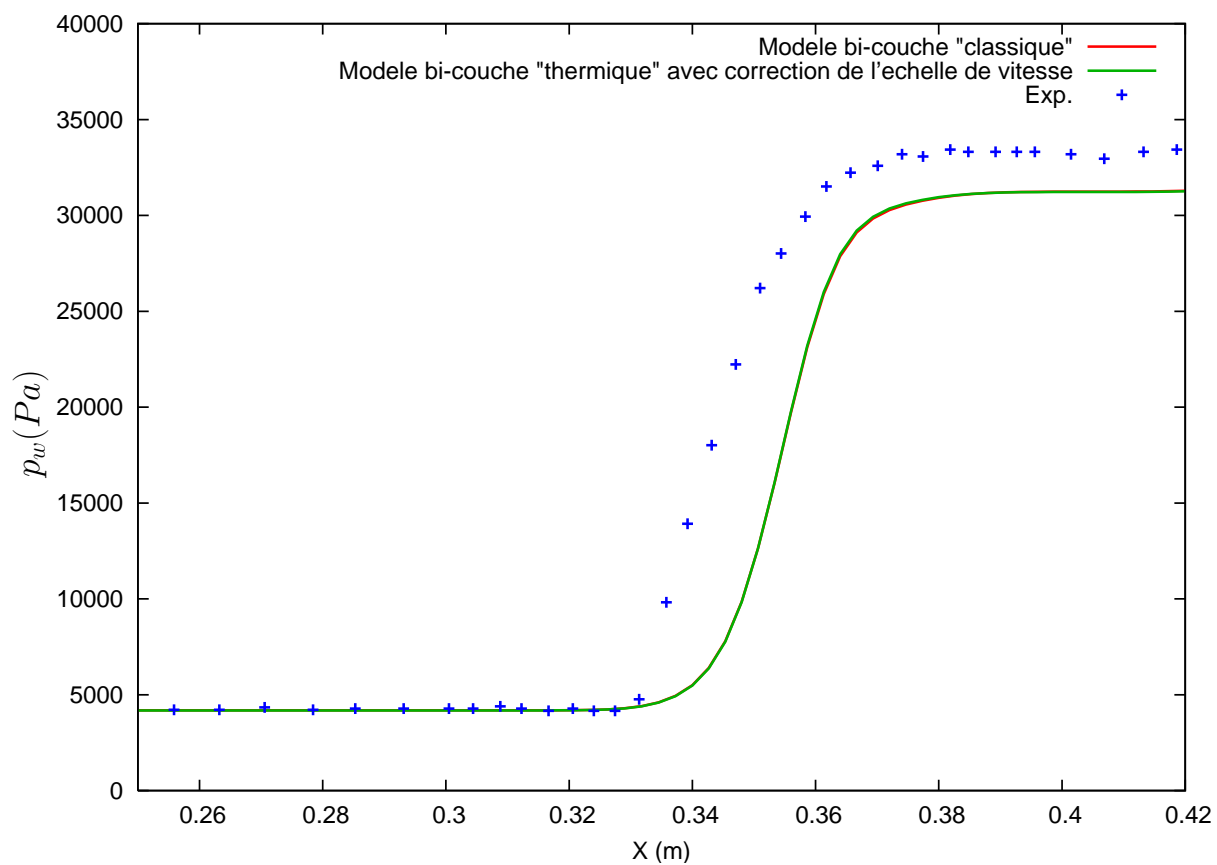


FIG. 3.25 – Distributin de la pression à la paroi.

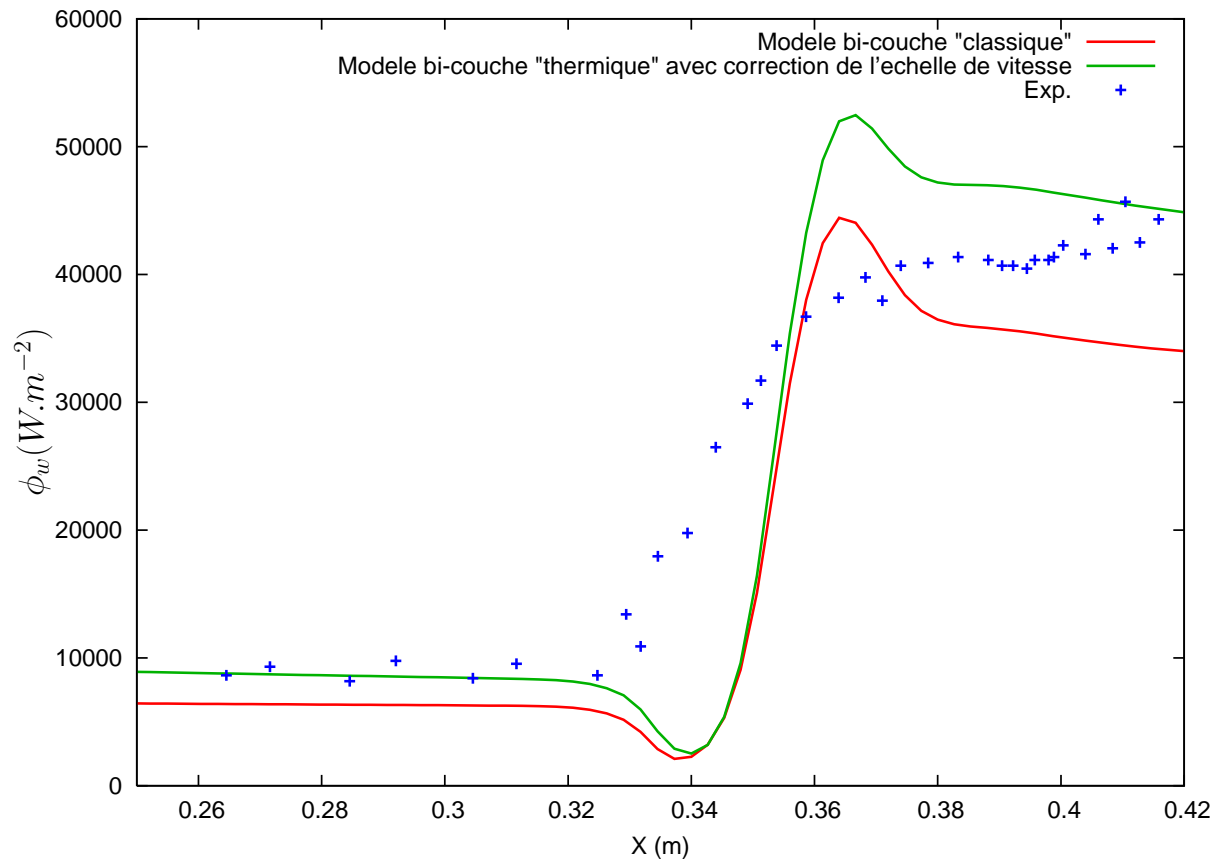


FIG. 3.26 – Distribution du flux de chaleur à la paroi.

---

luer correctement le flux de chaleur pariétal. Ce flux est ensuite surestimé par le modèle thermique et sous-estimé par le modèle classique, derrière la zone choquée.

# Chapitre 4

## Applications à des lois de parois thermiques

Cette partie est consacrée à l’extension thermique des lois de paroi issues des travaux de Puigt [40].

Avant d’entamer le développement de la correction thermique apportée à ces lois de parois, nous commençons par rappeler leur construction.

### 1 Introduction et principe des lois de paroi

L’idée générale des lois de paroi est de supprimer le calcul de la partie “raide” de la couche limite : la condition d’adhérence est remplacée par des relations plus sophistiquées entre les variables et leurs dérivées. Lorsque nous parlerons de fonctions de paroi ou de lois de paroi, nous voudrions parler de réduction des échelles d’espace et de temps des modèles originaux.

Du point de vue historique, les lois de paroi existent depuis plus de 30 ans, c’est-à-dire que les lois de paroi ont été utilisées pour la première fois à une époque où les capacités numériques n’étaient pas aussi grandes que maintenant. A cette époque, il fallait faire des calculs peu gourmands en mémoire et en temps. Aujourd’hui, la problématique est différente : les lois de paroi permettent de prendre en compte des phénomènes encore inaccessibles aux modèles de turbulence bas-Reynolds (rugosités, ...). Utiliser les lois de paroi, c’est donc d’une part se permettre de calculer sur des maillages assez lâches des écoulements qui nécessitent normalement un nombre important de mailles, et d’autre part accéder à une physique complexe, comme la rugosité pariétale. C’est aussi, comme nous le verrons, obtenir un problème nettement mieux conditionné, c’est-à-dire plus facile à résoudre.

Les lois de paroi peuvent être mises en œuvre dans tout code de calcul de mécanique des fluides, que ce dernier soit construit pour utiliser des maillages structurés (comme bien souvent dans l’industrie) ou des maillages non-structurés (plutôt dans le domaine universitaire, mais aussi chez quelques industriels comme Dassault ou SNECMA). De

même, le fait que le code utilise une formulation “cell centered” ou “vertex centered” ne pose pas de problème (voir Fig. 4.1)

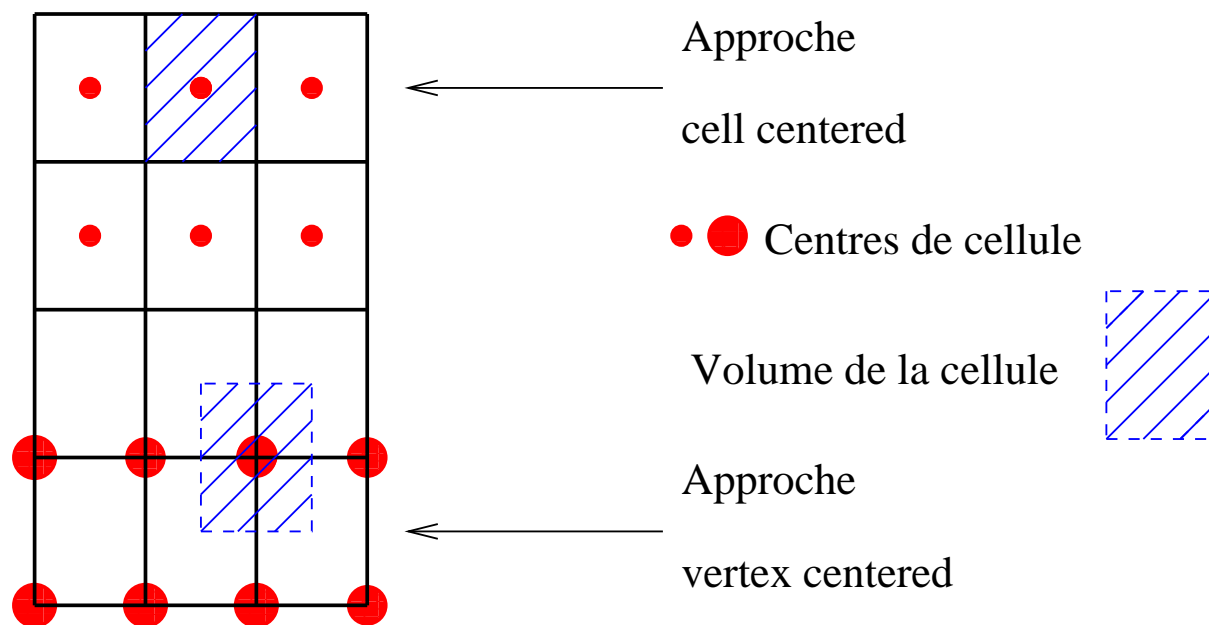


FIG. 4.1 – Principes des cellules associées aux formulations cell centered et vertex centered.

La formulation vertex centered est utilisée dans le code de recherche NSC2KE dont nous présentons les résultats dans cette thèse. Pour plus de résultats, nous renvoyons à [33] pour les écoulements transoniques et à [40] pour les écoulements supersoniques à hypersoniques.

Comme nous l’avons dit, le principe des lois de paroi est de ne pas calculer la partie de la couche limite très proche de la paroi, bien que cette dernière contienne la plupart la physique de l’écoulement. Sur la figure 4.2, nous pouvons voir qu’il y a deux manières de procéder pour utiliser les lois de paroi :  $\Gamma_w$  est la paroi réelle.  $\Gamma_c$  est une paroi fictive, translatée de  $\delta\vec{n}$  de la paroi réelle ( $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal et dirigé vers l’écoulement). C’est sur  $\Gamma_c$  que nous appliquerons la loi de paroi pour les solveurs non-structurés utilisant les formulations hybrides.

La méthode ONERA, à droite, a été implantée dans les solveurs aérodynamiques CANARI et elsA<sup>1</sup>. Cette implémentation présente plusieurs inconvénients :

- Génération de maillages : il faut créer un maillage bas-Reynolds, puis concaténer un certain nombre de rangées de cellules. Ceci implique que si trop de cellules ont été concaténées, il faut reprendre la génération de maillages et recommencer.

<sup>1</sup>code de recherche de l’ONERA et code de calcul d’EADS-Airbus

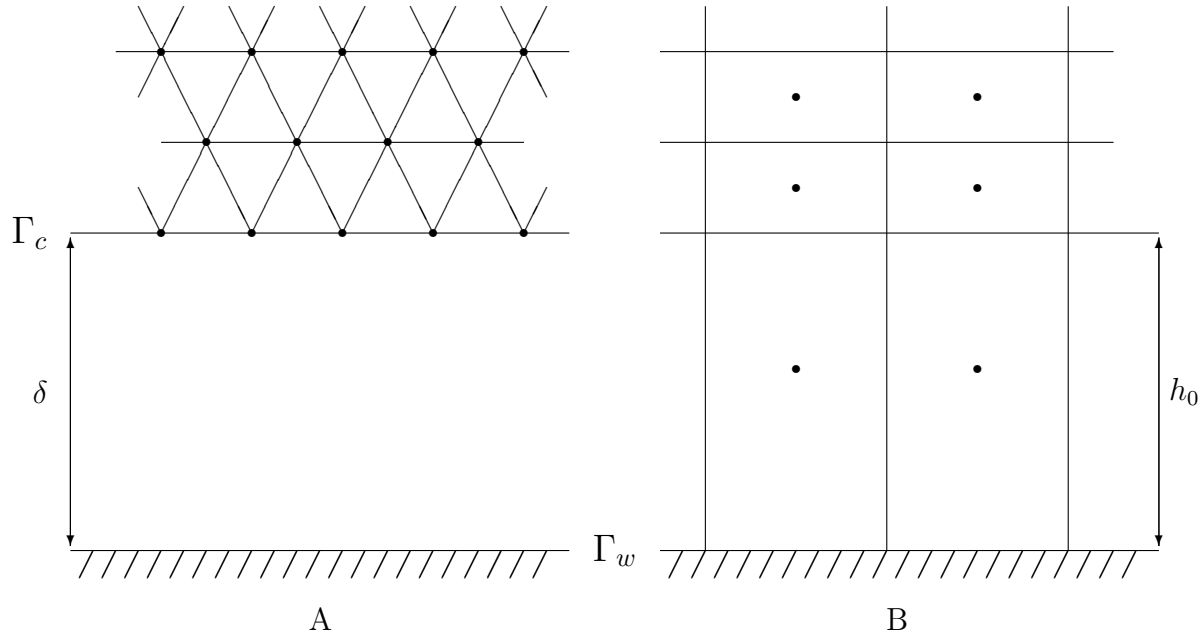


FIG. 4.2 – A : Lois de paroi avec paroi fictive sur maillage non structuré triangulaire. B : Lois de paroi avec adhérence à la paroi sur maillage structuré (méthode ONERA [33]).

- Compatibilité avec les méthodes d’accélération de convergence : cette technique est difficile à coupler avec les méthodes “grid-sequencing” ou multigrille<sup>2</sup>.

Dans NSC2KE, c’est la technique par paroi fictive qui a été utilisée. Par ailleurs, le paramètre  $\delta$  des lois de paroi étant petit, et dans tous les cas beaucoup plus petit que la longueur caractéristique de l’écoulement, nous négligeons la translation pour construire  $\Gamma_c$ . Ainsi, en pratique :

$$\Gamma_c = \Gamma_w.$$

Normalement, la longueur de référence étant changée, il faut en tenir compte dans le nombre de Reynolds :

$$Re' = Re \frac{L + \delta}{L}. \quad (4.1)$$

Toutefois, pour un corps de rentrée (CdR) qui mesure plus d’un mètre, la modification du nombre de Reynolds de l’équation 4.1 est négligée car généralement :

$$\delta \simeq 10^{-4} m.$$

En conséquence, la construction des maillages est très simple : nous construisons un maillage jusqu’à la paroi qui ne serait pas assez fin pour ce type de simulations.

<sup>2</sup>La technique de grid sequencing consiste à faire converger les calculs sur des grilles de plus en plus fines. La technique multigrille consiste à projeter la solution sur des grilles emboîtées

En pratique, pour construire un maillage lois de paroi, nous commençons par évaluer le nombre de Reynolds par mètre  $Re$ . Ensuite,  $\delta$  est pris tel que :

$$\delta \simeq \frac{1}{\sqrt{Re}},$$

puis la hauteur de première maille  $h$  est telle que :

$$\frac{\delta}{3} < h < \frac{\delta}{2}$$

Nous pouvons maintenant nous intéresser à l'obtention des lois de paroi. Les ingrédients nécessaires à l'écriture et à l'utilisation des lois de paroi sont :

- Formulation globale en  $y^+$  : validité jusqu'à la paroi.
- Formulation mathématique faible : la formulation choisie (volume finis ou éléments finis) implique des intégrales de bord.
- Choix du  $\delta$  dans les lois de paroi :  $\delta$  qui représente la distance entre la paroi réelle et la frontière de calcul ne doit pas être trop grand.
- Maillage assez fin : le maillage doit être assez fin pour que les résultats soient convergés en maillage. Cela n'a pas toujours été le cas avec les lois de paroi.
- Lois valables pour tout nombre de Mach : pour pouvoir prendre en compte les effets de compressibilité.
- Effets thermiques : paroi adiabatique ou isotherme.

## 2 Intégrales de bord

Le système des équations de Navier-Stokes couplé au modèle de turbulence  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  s'écrit sous forme conservative :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot (F(W) - N(W)) = S(W), \quad (4.2)$$

où  $W = (\rho, \rho \vec{u}, \rho E, \rho k, \rho \varepsilon, \rho k_h, \rho \varepsilon_h)^T$  est le vecteur des champs conservatifs,  $F$  et  $N$  sont respectivement les opérateurs de convection et de diffusion et  $S = (0, \dots, 0, S_k, S_\varepsilon, S_{k_h}, S_{\varepsilon_h})$  contient les termes source du modèle de turbulence. Il est facile de voir que nous obtenons les intégrales de bord suivantes à partir de l'équation 4.2 :

$$\int_{\Gamma_c} W(\vec{u} \cdot \vec{n}) d\sigma, \quad (4.3)$$

$$\int_{\Gamma_c} p \vec{n} d\sigma, \quad (4.4)$$

$$\int_{\Gamma_c} p(\vec{u} \cdot \vec{n}) d\sigma, \quad (4.5)$$

$$\int_{\Gamma_c} (\sigma \cdot \vec{n}) d\sigma, \quad (4.6)$$

$$\int_{\Gamma_c} (\vec{u}\sigma) \vec{n} d\sigma, \quad (4.7)$$

$$\int_{\Gamma_c} (\lambda + \lambda_t) \frac{\partial h}{\partial n} d\sigma, \quad (4.8)$$

$$\int_{\Gamma_c} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial k}{\partial n} d\sigma \text{ et } \int_{\Gamma_c} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} d\sigma. \quad (4.9)$$

où  $(\vec{t}, \vec{t}', \vec{n})$  est une base locale orthornormée sur le bord, avec  $\vec{n}$  vecteur unitaire normal à la paroi et  $(\vec{t}, \vec{t}')$  est une base locale du plan tangent.

Nous avons vu au chapitre précédent qu'il était inutile de vouloir modéliser de manière plus fine le champ de température dans la zone "haut Reynolds", et qu'un simple modèle de type  $k - \varepsilon$  était suffisant. C'est pourquoi seules les intégrales de bords concernant les variables de la turbulence dynamique  $k$  et  $\varepsilon$  sont pris en considération. Cependant, dans un souci de généralité, si nous utilisons un modèle de type  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  nous obtenons alors les intégrales de bord supplémentaires :

$$\int_{\Gamma_c} \left(\lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{k_h}}\right) \frac{\partial k_h}{\partial n} d\sigma \text{ et } \int_{\Gamma_c} \left(\lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{\varepsilon_h}}\right) \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial n} d\sigma. \quad (4.10)$$

Sur la paroi solide, nous faisons le choix particulier d'avoir  $\vec{t} \parallel \vec{u}$ ,  $\vec{t}' \perp \vec{t}$  ainsi que la condition  $\vec{u} \cdot \vec{n} = g$ .  $g = 0$  représente la condition de non pénétration mais l'injection/succion ou la transpiration peuvent être introduites grâce à  $g \neq 0$ . Par souci de simplicité, nous supposons  $g = 0$ .

Nous obtenons donc le système des équations 4.6, 4.7, 4.8 et 4.10 pour la quantité de mouvement, l'énergie et les champs turbulents.

### 3 Equations pour les lois de paroi

En présence d'anisotropie, il est mathématiquement consistant d'utiliser à profit les différents ordres de grandeur des phénomènes. Ainsi, la complexité du modèle est réduite suivant les directions spatiales. Comme les variables dans une couche limite de plaque plane varient essentiellement dans la direction normale à la paroi, les équations pour obtenir les lois de paroi consistent à une réduction d'échelle suivant la direction normale à la paroi. C'est l'hypothèse réductrice pour obtenir les équations dont les lois de paroi sont solutions. L'hypothèse réductrice doit être remise en question dans les régions de détachement ou de réattachement, mais les lois de paroi fonctionnent bien aussi dans ces zones et la validation de l'hypothèse sera faite *a posteriori* [40].

Pour exprimer l'équation 4.6, nous décomposons  $\sigma \cdot \vec{n}$  sur la base  $(\vec{t}, \vec{t}', \vec{n})$  :

$$\sigma \cdot \vec{n} = (\sigma \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\sigma \cdot \vec{n} \cdot \vec{t}) \vec{t} + (\sigma \cdot \vec{n} \cdot \vec{t}') \vec{t}' \quad (4.11)$$



Compte tenu du choix particulier de la base, nous faisons la première approximation suivante : nous négligeons les termes  $\sigma \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}$  et  $\sigma \cdot \vec{n} \cdot \vec{t}'$  dans l'équation 4.11 :

$$\sigma \cdot \vec{n} \simeq (\sigma \cdot \vec{n} \cdot \vec{t}) \cdot \vec{t} = \sigma_{nt} \vec{t}.$$

A partir de maintenant, notons  $u$  tel que :

$$u = \vec{u} \cdot \frac{\vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{n} \vec{n}}{\|\vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{n} \vec{n}\|} = \vec{u} \cdot \vec{t}.$$

Nous introduisons alors la direction normale à la paroi  $y$ , la vitesse de frottement  $u_\tau$  et la densité à la paroi  $\rho_w$  qui sont telles que

$$\rho_w u_\tau |u_\tau| = \sigma_{nt} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.12)$$

Les équations obtenues sont alors :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( u(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (\lambda + \lambda_t) \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \quad (4.14)$$

où  $x = u/|u|$  est le vecteur unitaire tangentiel à la paroi. Dans Eq. 4.13, le gradient de pression longitudinal est généralement négligé, même s'il est possible d'en tenir compte. En général, les lois de paroi sont donc établies pour une plaque plane avec très faible gradient de pression.

En intégrant l'équation 4.13, il vient que si  $\partial p / \partial x = 0$ , alors :

$$(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} = Cste = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \rho_w u_\tau^2, \quad (4.15)$$

et comme  $\mu_t$  dépend de la vitesse de frottement  $u_\tau$ , il faut intégrer l'équation 4.15.

En intégrant l'équation 4.14, il vient, compte tenu de la condition d'adhérence à la paroi :

$$u(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} + (\lambda + \lambda_t) \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (4.16)$$

Ainsi, pour les paroi adiabatiques, l'équation 4.16 indique que la condition aux limites à la paroi fictive est une somme nulle d'intégrales de bord non nulles. Toutefois, comme il faut disposer de  $\rho_w$  pour l'équation 4.15, nous devons disposer d'une température de paroi dans le cas adiabatique. Dans le cas de paroi isotherme, il faut pouvoir calculer  $\partial h / \partial y \Big|_{y=0}$  ou corréler terme aux autres champs.

**Remarque 3.1** Retenons qu'il faut savoir évaluer les quantités :

$$\rho_w, u_\tau, h_w \text{ (paroi adiabatique)}, \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_0 \text{ (paroi isotherme)}.$$

## 4 Les lois de paroi pour écoulements “fortement” compressibles : un état des lieux (cf [40])

Le premier niveau de modélisation consiste à étudier un écoulement attaché (pas de décollement) sur une paroi adiabatique (i.e.  $\partial_n h = 0$ ). Nous cherchons une formulation valide jusqu’à la paroi : nous voulons donc inclure autant que possible la physique représentée dans le modèle de turbulence bas-Reynolds.

Reprenons l’équation simplifiée pour la quantité de mouvement ( $x$  et  $y$  représentent les directions tangentielles et normales respectivement) :

$$\partial_y((\mu + \mu_t)\partial_y u) = 0, \quad (4.17)$$

avec

$$\mu_t = \kappa\sqrt{\rho\rho_w}y u_\tau (1 - e^{-y^+/70}) \text{ et } y^+ = \frac{\rho_w u_\tau y}{\mu_w}. \quad (4.18)$$

L’équation 4.17 signifie que le cisaillement est constant et comme pour l’incompressible, nous définissons la vitesse de frottement  $u_\tau$  par :

$$u_\tau = \left(\frac{\mu + \mu_t}{\rho_w} \partial_y u\right)^{1/2},$$

où  $w$  signifie à la paroi (réelle).

### 4.1 Région à grand nombre de Reynolds

Dans les zones à grands nombres de Reynolds, la viscosité de la turbulence devient :  $\mu_t = \kappa\sqrt{\rho\rho_w}y u_\tau$  et domine la viscosité laminaire. Ce fait conduit à la loi logarithmique (modifiée) :

$$\partial_y u = \frac{u_\tau}{\kappa y} \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}}, \quad u = u_\tau \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}} \left(\frac{1}{\kappa} \log(y) + C\right),$$

qui est valide si  $\partial_y \rho \ll \partial_y u$ . Cette hypothèse est réaliste car  $\partial_y p \sim 0$  et  $\partial_y T = 0$  (puisque la paroi est adiabatique) et en conséquence,  $\partial_y \rho \sim 0$ . A ce niveau, la présence du nombre de Reynolds de l’écoulement est masquée dans la constante  $C$ . Pour obtenir une expression universelle, nous écrivons :

$$u = u_\tau \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}} \left(\frac{1}{\kappa} \log(y^+) + \beta\right),$$

où  $\beta = -\frac{1}{\kappa} \log\left(\frac{u_\tau \rho_w}{\mu_w}\right) + C$  est une constante qui a une valeur voisine de 5 pour les écoulements incompressibles.

## 4.2 Régions à faible nombre de Reynolds

Dans les régions à faible nombre de Reynolds,  $\mu_t$  est négligée dans l'équation 4.17, ce qui permet de retrouver par le calcul le comportement linéaire de  $u$  dans la région proche paroi :

$$\rho_w u_\tau^2 = \mu \partial_y u \sim \frac{\mu u}{y}.$$

Cela signifie que :

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{\mu_w}{\mu} \frac{y u_\tau \rho_w}{\mu_w} = \frac{\mu_w}{\mu} y^+.$$

Généralement, les variations de la viscosité sont négligées :

$$u^+ = y^+.$$

## 4.3 Expression générale

Pour obtenir une expression générale, nous définissons la vitesse de frottement  $u_\tau$  comme solution de

$$u = u_\tau \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}} f(y^+), \quad (4.19)$$

où  $f$  est telle que  $w = u_\tau \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}} f(y^+)$  est solution de l'équation 4.17 avec  $\mu_t$  issue de l'équation 4.18. La loi de paroi n'est donc pas connue explicitement et dépend de la distribution de densité dans la couche limite. Malheureusement, il n'est pas facile d'intégrer le système précédent pour obtenir un loi valide dans les zones linéaire et logarithmique. Nous proposons donc d'utiliser une hiérarchie de lois, en prenant en compte l'aspect compressible de l'écoulement, en partant des écoulements à faible nombre de Mach.

Pour les écoulements incompressibles, nous voulons que les nouvelles lois de paroi dégénèrent sur les lois de paroi classiques de l'incompressible et avec la loi de Reichardt  $f_r$  (Fig. 4.3) interpolant les profils linéaire et logarithmique :

$$f_r(y^+) = 2.5 \log(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-0.33 y^+}\right), \text{ avec } y^+ = \frac{y u_\tau \rho_w}{\mu_w}.$$

## 4.4 Définition de la densité à la paroi $\rho_w$

Soit  $r$  le facteur de récupération [46] :

$$r = \frac{h_f - h_e}{h_{ie} - h_e},$$

où  $h_f$  est appelée enthalpie de récupération ou enthalpie de frottement et  $h_{ie}$  est donnée par :

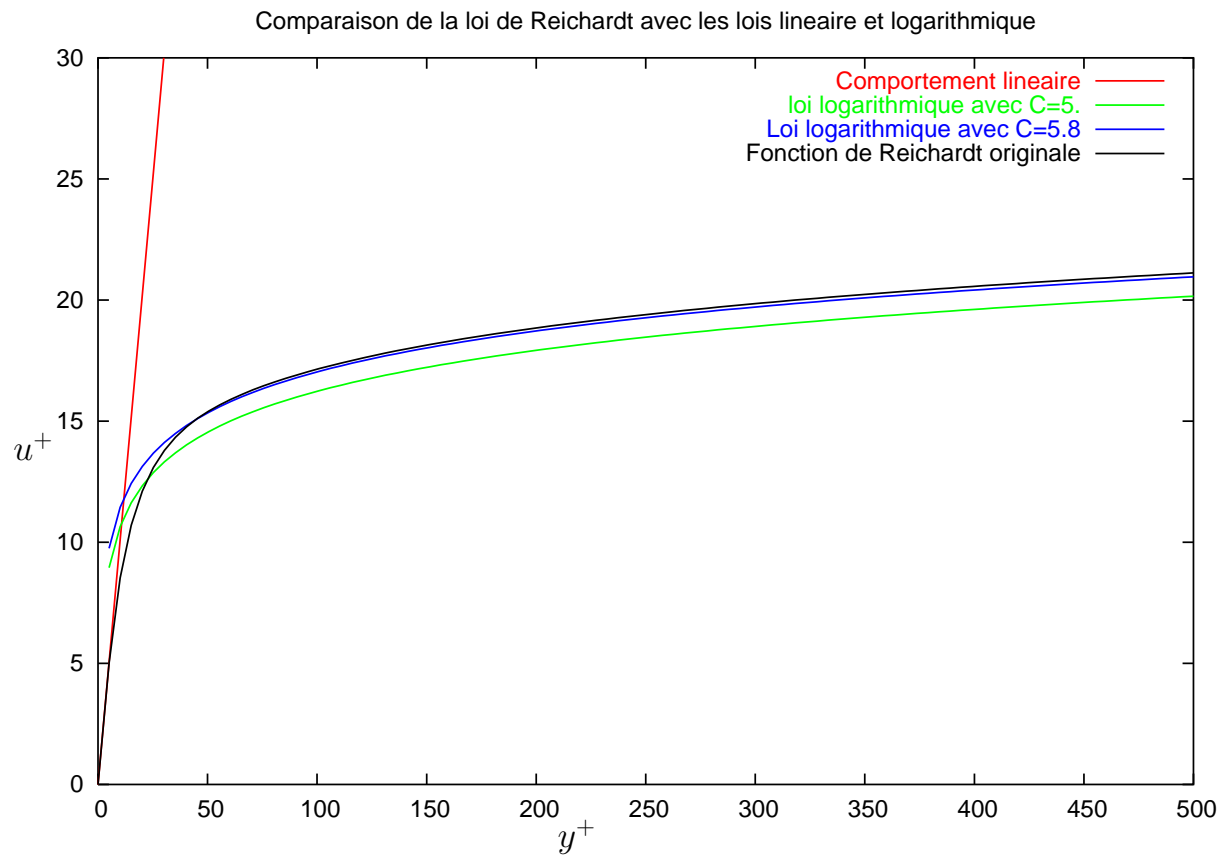


FIG. 4.3 – Comparaison de la loi de Reichardt avec les comportements linéaire et logarithmique. La loi de Reichardt peut être contrôlée par le choix de la constante  $C_1$ .

$$h_{ie} = h_e \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right).$$

Pour les écoulements turbulents, nous avons  $r = Pr^{1/3}$  [46]. Nous obtenons :

$$h_f = h_e \left(1 + Pr^{1/3} \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right).$$

L'enthalpie atteinte par une paroi adiabatique est donnée par l'enthalpie de frottement  $h_f$  [46] (i.e.  $h_w = h_f$ ).

Pour fermer l'équation 4.18 dans le cadre de la paroi adiabatique, nous devons exprimer  $\mu_w$  et  $\rho_w$ . La viscosité du fluide à la paroi est donnée par la loi de Sutherland :

$$\mu_w = \mu_{\text{ref}} \left(\frac{T_w}{T_{\text{ref}}}\right)^{1/2} \frac{1 + 110.4/T_{\text{ref}}}{1 + 110.4/T_w}, \quad (4.20)$$

les variables indicées  $_{\text{ref}}$  étant des valeurs de référence.

Pour la seconde quantité, nous utilisons la relation de Crocco [46]. La loi de Crocco exprime que :

$$h = h_w + (h_{ie} - h_w) \frac{u}{u_e} - (h_{ie} - h_e) \left(\frac{u}{u_e}\right)^2.$$

En conséquence, nous avons :

$$\frac{h}{h_w} = 1 + \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right) \frac{h_e}{h_w} - 1\right] \frac{u}{u_e} - \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \frac{h_e}{h_w} \left(\frac{u}{u_e}\right)^2.$$

Nous supposons que la pression statique est constante dans la direction normale à la paroi (i.e.  $\partial_y p = 0$ ). Grâce à l'expression de la loi d'état, nous obtenons :

$$\frac{\rho_w}{\rho} = \frac{h}{h_w}.$$

Finalement,  $\rho_w$  est donnée par :

$$\rho_w = \rho \left[1 + \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right) \frac{h_e}{h_w} - 1\right] \frac{u}{u_e} - \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \frac{h_e}{h_w} \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right]. \quad (4.21)$$

**Remarque 4.1** La mise en œuvre numérique des équations 4.20 et 4.21 n'est pas simple sur les maillages non-structurés car il n'est pas facile de déterminer les quantités en haut de la couche limite ( $u_e, h_e, M_e$ ). Nous avons décidé, afin de pouvoir utiliser les lois de paroi dans tous les solveurs, d'utiliser des quantités disponibles, c'est-à-dire à la paroi fictive ou en entrée. En particulier,  $M_e$  est remplacé par  $M_\delta$  (nombre de Mach calculé localement, à la paroi fictive). Plus précisément, connaissant  $(\rho_\delta, h_\delta, M_\delta, u_\infty, h_w)$ , nous calculons  $\rho_w$  par :

$$\rho_w = \rho_\delta \left[ 1 + \left( \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \right) \frac{h_\delta}{h_w} - 1 \right) \frac{u_\delta}{u_\infty} - \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \frac{h_\delta}{h_w} \left( \frac{u_\delta}{u_\infty} \right)^2 \right]. \quad (4.22)$$

Cette expression n'utilise que des informations locales disponibles à la paroi fictive.

## 4.5 Correction de la loi de Reichardt

L'étape suivante consiste à introduire une correction à la loi de Reichardt. Deux approches sont possibles.

**A** - Suivant la méthode présentée dans [46], nous exprimons la tension turbulente en utilisant une loi de longueur de mélange pour les régions à grand nombre de Reynolds ( $\kappa y \partial_y u = u_\tau$ ) :

$$\rho_w u_\tau^2 = \rho \kappa^2 y^2 (\partial_y u)^2,$$

et ainsi :

$$\partial_y u = \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}} \frac{u_\tau}{\kappa y}.$$

Nous exprimons  $\rho_w/\rho$  par la loi de Crocco pour finalement obtenir :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \left( 1 + b \frac{u}{u_\infty} - a^2 \left( \frac{u}{u_\infty} \right)^2 \right), \quad (4.23)$$

avec  $a^2 = \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \frac{h_\delta}{h_w}$  et  $b = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \right) \frac{h_\delta}{h_w} - 1$ .

La faiblesse de cette approche vient de la non validité de la méthode près de la paroi : une correction globale nécessite une loi de longueur de mélange comme point de départ, en utilisant l'équation 4.19 :

$$\partial_y u = u_\tau (\partial_y f(y^+) \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}} + f(y^+) \partial_y (\sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}})), \quad (4.24)$$

ce qui est difficilement calculable.

**Remarque 4.2** Une approche similaire est obtenue à partir de la méthode de Van Driest [34, 46], avec la loi logarithmique comme point de départ dans l'équation 4.26. Toutefois, cette loi conduit aussi à une relation seulement valide dans les régions à grand nombre de Reynolds.

**B** - Pour éviter les difficultés précédentes, nous repartons des équations 4.17 et 4.18 :

$$\left( \mu + \sqrt{\rho \rho_w} \kappa u_\tau y (1 - e^{-y^+/70}) \right) \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_w u_\tau^2. \quad (4.25)$$

Maintenant, supposons que la loi de Reichardt est obtenue après intégration de :

$$u_\tau = \partial_y u \left( \mu + \kappa y (1 - e^{-y^+/70}) \right). \quad (4.26)$$

Pour commencer, supposons que  $y^+ > 70$  et négligeons la viscosité laminaire.

En remplaçant  $u_\tau$  par l'équation 4.26 dans le membre de gauche de l'équation 4.25, l'équation 4.25 donne :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt[4]{\frac{\rho_w}{\rho}} \frac{u_\tau}{\kappa y (1 - e^{-y^+/70})}. \quad (4.27)$$

La loi de Crocco relie les variations de densité et de température et l'équation 4.27 devient :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt[4]{1 + b \frac{u}{u_e} - a^2 \left( \frac{u}{u_e} \right)^2} \frac{u_\tau}{\kappa y (1 - e^{-y^+/70})}, \quad (4.28)$$

L'intégration de l'équation 4.28 n'étant pas possible, nous utilisons à ce niveau :

$$u \left( \frac{1}{a} \left( \arcsin \frac{2a^2 u/u_\infty - b}{\sqrt{b^2 + 4a^2}} + \arcsin \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4a^2}} \right) \right)^{-1/4} = u_\tau f_r(y^+). \quad (4.29)$$

Deux raisons expliquent cette approximation. Tout d'abord, grâce à l'équation 4.26, la loi de Reichardt apparaît dans l'équation 4.29. Ensuite, la difficulté consiste à expliquer la correction dans le membre de gauche.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \sqrt[4]{1 + b \frac{u}{u_e} - a^2 \left( \frac{u}{u_e} \right)^2} \frac{u_\tau}{\kappa y (1 - e^{-y^+/70})}, \\ \frac{\partial u}{\sqrt[4]{1 + b \frac{u}{u_e} - a^2 \left( \frac{u}{u_e} \right)^2}} &= \frac{u_\tau \partial y}{\kappa y (1 - e^{-y^+/70})}, \\ u_e \frac{\partial \frac{u}{u_e}}{\sqrt[4]{1 + b \frac{u}{u_e} - a^2 \left( \frac{u}{u_e} \right)^2}} &= \frac{u_\tau \partial y}{\kappa y (1 - e^{-y^+/70})}. \end{aligned}$$

L'intégration dans le membre de gauche n'étant pas possible, nous appliquons la relation suivante :

$$u_e \left( \frac{1}{a} \left( \arcsin \frac{2a^2 u/u_e - b}{\sqrt{b^2 + 4a^2}} + \arcsin \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4a^2}} \right) \right)^{-1/4} = u_\tau f_r(y^+). \quad (4.30)$$

Toutefois, les variables en haut de la couche limite restant inconnues, la valeur de  $u_e$  n'est pas définie. La solution a été de remplacer  $u_e$  par la vitesse locale dans le membre de gauche de l'équation 4.30 et par  $u_\infty$  dans :

$$\arcsin \left( \frac{2a^2 u/u_e - b}{\sqrt{b^2 + 4a^2}} \right),$$

ce qui donne l'équation 4.29.

Si la viscosité laminaire domine la viscosité turbulente ( $y^+ < 5$ ),

$$\mu \partial_y u = \rho_w u_\tau^2.$$

Pour  $5 < y^+ < 100$ , nous pouvons utiliser une interpolation linéaire entre les deux expressions. En pratique,  $\delta$  est choisit de telle sorte que seule l'équation 4.29 soit applicable.

#### 4.6 Flux de chaleur pariétal $\phi_w$

Pour une paroi isotherme ( $h_w = h_{\text{imposée}}$ ), nous devons donner une loi pour la température, comme cela a été fait pour la vitesse. Grâce à la formulation faible, il ne faut définir que  $\lambda \frac{\partial h}{\partial y}$ .

Puigt [40] utilise dans sa version des lois de parois différentes méthodes pour calculer le flux thermique à la paroi :

- La relation de Reynolds :

Cette relation consiste à utiliser l'analogie de Reynolds qui relie le flux thermique et le cisaillement à la paroi [46] :

$$C_h = \frac{s C_f}{2} = \frac{1.24}{2} C_f = 0.62 C_f,$$

ainsi

$$-\frac{\lambda \partial_y h}{\rho u (h_w - h_f)} = C_h = 0.62 C_f = 1.24 \frac{\rho_w u_\tau^2}{\rho u^2},$$

donc

$$\lambda \partial_y h |_{0=} = -1.24 \rho_w u_\tau^2 \frac{h_w - h_f}{u}. \quad (4.31)$$

- La méthode de Crocco :

Plutôt que d'utiliser la relation de Reynolds entre les coefficients de flux thermique pariétal et de frottement, comme le seul terme que nous avons à évaluer est  $\partial_y h$ , nous pouvons obtenir ce gradient par la loi de Crocco :

$$\frac{h}{h_w} = 1 + \left[ \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \right) \frac{h_\delta}{h_w} - 1 \right] \frac{u}{u_\infty} - \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \frac{h_\delta}{h_w} \left( \frac{u}{u_\infty} \right)^2. \quad (4.32)$$

En utilisant  $u(y = 0) = 0$ , il vient :

$$\partial_y h |_{0=} = \left( h_\delta + \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 h_\delta - h_w \right) \partial_y (u/u_\infty) |_0$$



et

$$\lambda \partial_y h|_0 = \frac{\lambda}{\mu} \left( h_\delta + \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 h_\delta - h_w \right) \frac{\rho_w u_\tau^2}{u_\infty}. \quad (4.33)$$

Malheureusement ces méthodes utilisent des relations directement applicables à la paroi réelle, paroi sur laquelle  $\lambda_t = 0$ . La correction thermique intervenant directement dans le calcul de la diffusivité thermique de la turbulence, il nous faut d'abord trouver une méthode de calcul agissant sur la paroi fictive.

Nous pourrions donc repartir de la méthode de Crocco en calculant  $\partial_y h$  à la paroi fictive ( $y = \delta$ ) grâce à la relation 4.32.

Pour cela, nous supposons  $b$  et  $a$  (définis dans l'équation 4.23) constants (indépendants de  $y$ ), et ainsi :

$$(\lambda + \lambda_t) \partial_y h|_\delta = (\lambda + \lambda_t) h_w \left( \frac{b}{u_\infty} - 2a^2 \frac{u}{u_\infty^2} \right) \partial_y u|_\delta = \frac{\lambda + \lambda_t}{\mu + \mu_t} h_w \left( \frac{b}{u_\infty} - 2a^2 \frac{u}{u_\infty^2} \right) \rho_w u_\tau^2$$

En conséquence, la condition aux limites pour l'équation de l'énergie devient :

$$(\lambda + \lambda_t) \partial_y h|_\delta + u \rho_w u_\tau^2 = \rho_w u_\tau^2 \left( \frac{\lambda + \lambda_t}{\mu + \mu_t} h_w \left( \frac{b}{u_\infty} - 2a^2 \frac{u}{u_\infty^2} \right) + u \right). \quad (4.34)$$

**Remarque 4.3** *En pratique, la première équation 4.33 conduit à de meilleurs résultats, les niveaux de flux thermique prédits étant trop faibles avec la seconde approche.*

## 5 Les lois de parois thermiques

Ce chapitre partie est consacrée à l'extension thermique des lois de parois précédemment décrites.

### 5.1 Flux de chaleur pariétal $\phi_w$

Pour le calcul du flux de chaleur à la paroi, nous utilisons la méthode issue de Goncalves [33]. Cette méthode nous permet d'évaluer le flux en fonction des diffusivités de la turbulence. Ces diffusités étant évaluées en  $\delta$ , cela nous permet d'inclure la correction thermique désiré.

Par définition, le flux de chaleur pariétal est défini par

$$\phi_w = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Avec cette définition, il vient aisément à partir de l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial n}(u\sigma_{nt} - \phi_n) = 0,$$

d'où

$$\phi_n = \phi_w + u\tau_w. \quad (4.35)$$

De plus, comme

$$\sigma_{nt} = \tau_w = (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.36)$$

$$\phi_n = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (4.37)$$

il vient

$$\frac{dh}{du} = -Au - A \frac{\phi_w}{\tau_w}, \quad (4.38)$$

expression dans laquelle

$$A = \frac{\mu + \mu_t}{(\lambda + \lambda_t)}. \quad (4.39)$$

Pour intégrer l'équation 4.38, il nous faut maintenant proposer une fermeture adéquate pour  $\mu_t$  et  $\lambda_t$ .

## 5.2 Calculs des diffusivités de la turbulence

Le principe que nous utilisons ici, est celui de la technique bi-couche décrite au chapitre précédent. La diffusivité dynamique de la turbulence est alors exprimée comme suit :

$$\mu_t = \rho C_\mu \sqrt{k} L_\mu,$$

où

$$L_\mu = C_d y (1 - \exp[-y^+/A_\mu]),$$

et les constantes  $C_d$  et  $A_\mu$  valent respectivement  $C_d = \kappa C_\mu^{-3/4}$  and  $A_\mu = 70$ .

En ce qui concerne le calcul de la diffusivité thermique de la turbulence, une formulation classique serait de prendre pour valeur de  $\lambda_t$  :

$$\lambda_t = \frac{\mu_t}{Pr_t}. \quad (4.40)$$

L'étude faite au chapitre précédent, montre que pour une meilleure prise en compte de la diffusivité thermique de la turbulence, il nous faut exprimer  $\lambda_t$  comme suit :

$$\lambda_t = \rho C_\lambda \sqrt{k} L_\lambda, \quad (4.41)$$

où  $C_\lambda = C_\mu / Pr_{teq} / (2R_{eq})^{m_{eq}}$ .

$L_\lambda$  est définie par

$$L_\lambda = C_{th} y (1 - \exp[-y^+ / A_\lambda]), \quad (4.42)$$

expression dans laquelle nous avons

$$C_{th} = C_d (2R_{eq})^{m_{eq}} \text{ and } A_\lambda = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}}}{(2R_w)^{m_w}} A_\mu. \quad (4.43)$$

Dans l'équation 4.43, nous rappelons que :  $R_w = P_r$ ,  $m_w = -1$ ,  $R_{eq} = 0.5$  et  $m_{eq} = 1$ .

La formulation utilisée pour le calcul de la diffusivité thermique de la turbulence ne met en avant que l'utilisation de la nouvelle échelle de longueur proposée par la technique bi-couche thermique du chapitre précédent. Nous pouvons utiliser de même la nouvelle échelle de vitesse proposée par cette technique, et en déduire une fermeture pour les lois de paroi.

Rappelons la formulation utilisant cette nouvelle échelle de vitesse (Eq. 3.58 et Eq. 3.63) :

$$\lambda_t = \rho C_\lambda \left( \frac{y^+}{y_{eq}^+} \alpha \sqrt{k} + \left(1 - \frac{y^+}{y_{eq}^+} \alpha\right) \sqrt{2k_h} \right) L_\lambda. \quad (4.44)$$

avec

$$\alpha = \frac{R}{R_{eq}}. \quad (4.45)$$

Pour intégrer l'équation 4.38, il nous faut supposer que  $A$  est une constante [33], évaluée en  $\delta$ .

### 5.3 Formulation thermique

Utilisant l'hypothèse précédente, nous pouvons intégrer l'équation suivante :

$$\frac{dh}{du} = -Au - A \frac{\phi_w}{\rho_w u_\tau^2},$$

où

$$A = \frac{\mu + \mu_t}{\lambda + \lambda_t} \Big|_\delta.$$

Dans cette formulation,  $\lambda_t$  et  $\mu_t$  s'expriment à la paroi fictive ( $y = \delta$ ) de la manière suivante :

$$\mu_t |_{\delta=} = \rho C_\mu \sqrt{k_\delta} C_d \delta (1 - \exp[-\delta^+/A_\mu]) \text{ et}$$

$$\lambda_t |_{\delta=} = \rho C_\lambda \Delta u_h |_{\delta=} C_{th} \delta (1 - \exp[-\delta^+/A_\lambda]).$$

En fonction de l'échelle de vitesse thermique que nous choisissons, deux chemins de modélisation nous sont possibles :

- Si nous prétendons que les échelles de vitesses dynamique et thermique sont semblables, c'est-à-dire  $\Delta u_h |_{\delta=} = \Delta u_d |_{\delta=} = \sqrt{k |_{\delta=}}$ , alors il vient :

$$A_\lambda = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}}}{(2R_w)^{m_w}} A_\mu.$$

- Si nous prétendons que les échelles de vitesses dynamique et thermique ne sont pas semblables, et que nous avons pour expression de la vitesse thermique :

$$\Delta u_h |_{\delta=} = \frac{\delta^+}{y_{eq}^+} \alpha \sqrt{k |_{\delta=}} + (1 - \frac{\delta^+}{y_{eq}^+} \alpha) \sqrt{2k_h |_{\delta=}},$$

alors  $A_\lambda$  vaut désormais

$$A_\lambda = \frac{(2R_{eq})^{m_{eq}}}{(2R_w)^{m_w}} \sqrt{\frac{k |_{\delta=}}{2k_h |_{\delta=}}} A_\mu.$$

**Remarque 5.1** *En pratique,  $\delta^+$  étant choisi assez haut dans la couche limite, nous supposons que  $\delta^+ = y_{eq}^+$ , ainsi que  $R |_{\delta=} = R_{eq}$ . Ce qui signifie que  $\Delta u_h |_{\delta=} = \Delta u_d |_{\delta=} = \sqrt{k |_{\delta=}}$ .*

L'intégration [33] donne alors :

$$\phi_w = -\lambda \frac{\partial h}{\partial y} |_{0=} = \frac{\rho_w u_\tau^2}{Au} \left( h_w - h - A \frac{u^2}{2} \right). \quad (4.46)$$

## 6 Conditions aux limites pour les champs turbulents

Il existe plusieurs manières de déterminer les conditions aux limites sur les champs turbulents. Le principe des lois de paroi étant de ne pas pénaliser les temps de calculs par rapport à un calcul bas-Reynolds (jusqu'à la paroi), la méthode la plus simple a été choisie : nous nous situons assez haut dans la couche limite (zone logarithmique) et nous utilisons les relations classiques reliant les champs turbulents à la vitesse de frottement  $u_\tau$  et à l'enthalpie de friction  $h_f$  calculées précédemment.

Toutefois, nous pouvons aussi procéder différemment : calculer les conditions aux limites sur les champs moyens comme expliqué précédemment, puis évaluer les conditions aux limites sur les champs turbulents en intégrant un système d'équations simplifiées grâce à l'hypothèse de réduction d'échelle (résolution 1D). Toutefois, cela pose au moins 2 problèmes :

- même avec une hypothèse simplificatrice, le coût numérique reste élevé,
- le branchement dans un code de calcul est difficile (critère d'arrêt des calculs du système turbulent, problèmes de respect de la positivité des valeurs au cours du processus itératif<sup>3</sup>, ...)

Nous appliquons les formules suivantes pour  $k$  et  $\varepsilon$  :

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \min \left( 1, \frac{y^+}{10} \right)^2, \quad (4.47)$$

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{L_\varepsilon}, \quad (4.48)$$

où  $L_\varepsilon = C_{dy} (1 - \exp[-y^+/A_\varepsilon])$ .

Dans le cadre d'une résolution complète des 4 équations de la turbulence dans la partie "haut-Reynolds", il nous faut aussi déterminer les valeurs de  $k_h$  et de  $\varepsilon_h$ . Nous leur appliquons alors le même processus que les variables de la turbulence dynamique :

$$k_h = R_{eq} C_\lambda^{-1} \sqrt{C_\mu} h_f^2, \quad (4.49)$$

$$\varepsilon_h = \left( \frac{L_\varepsilon^{1-m}}{L_{\varepsilon_h}} \right)^{1/m} 2k_h \sqrt{k}, \quad (4.50)$$

où  $L_{\varepsilon_h} = C_{th} y (1 - \exp[-y^+/A_{\varepsilon_h}])$ .

Les valeurs des différentes constantes intervenant dans ces fermetures, sont celles établies dans le chapitre précédent sur la technique bicouche.

## 7 Résultats

Cette partie est consacrée aux tests des lois de paroi. Nous nous sommes intéressés à deux cas tests réputés difficiles pour les lois de paroi :

- la couche limite turbulente en interaction avec une onde de choc (cas test vu au § 4.6.2),
- la rampe de compression de Delery, proposé au Workshop Hermes [3].

### 7.1 Interaction onde de choc / couche imite

Le premier cas test est celui de la couche limite déjà étudiée précédemment 4.6.2. Seul le maillage est différent, car il est cette fois-ci adapté à la technique loi de paroi. Le maillage utilisé contient 54400 noeuds. Une hauteur de  $5 \cdot 10^{-5} m$  a été choisi pour le premier point, ainsi que de  $3 \cdot 10^{-4} m$  pour  $\delta$ .

<sup>3</sup>les modèles de turbulence sont en général mal conditionnés et ne préservent pas la positivité des champs au cours du calcul

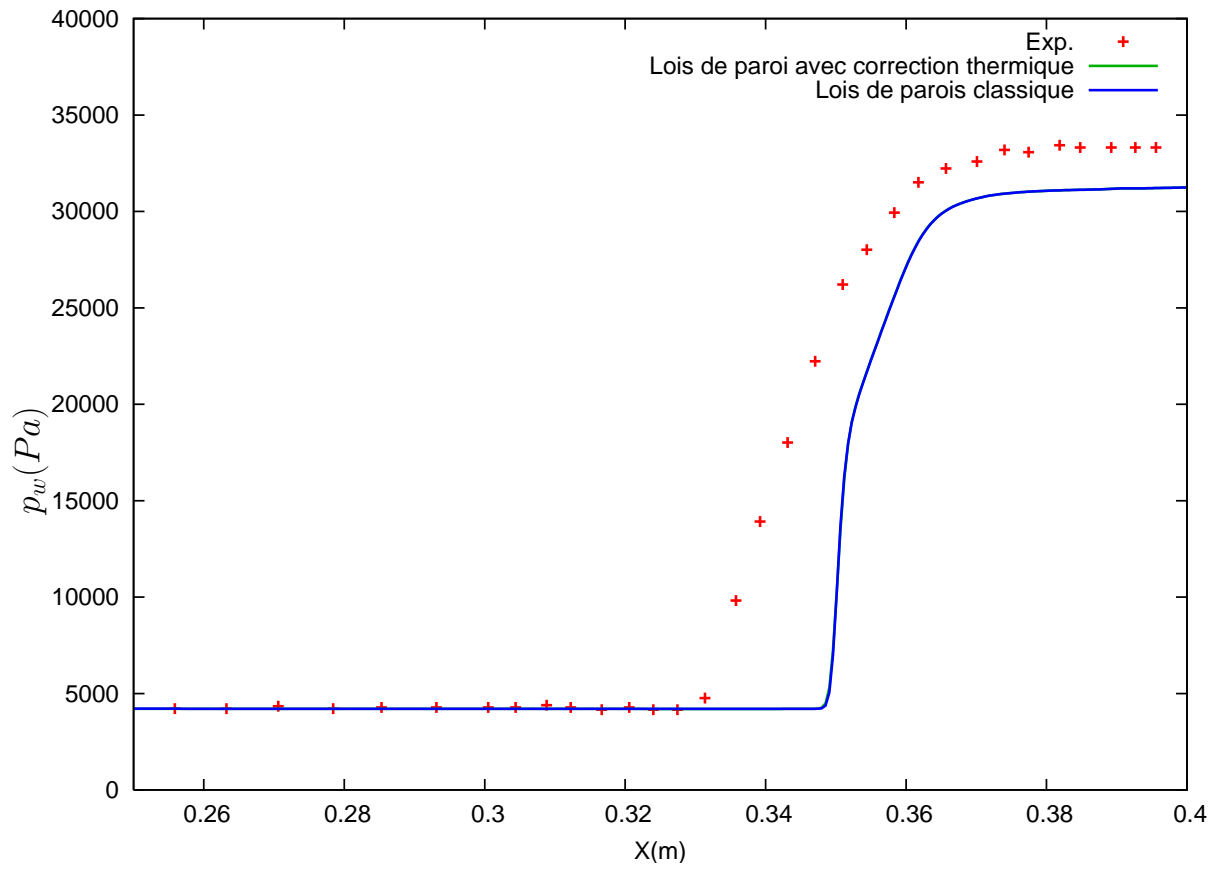


FIG. 4.4 – Profil de pression le long de la paroi.

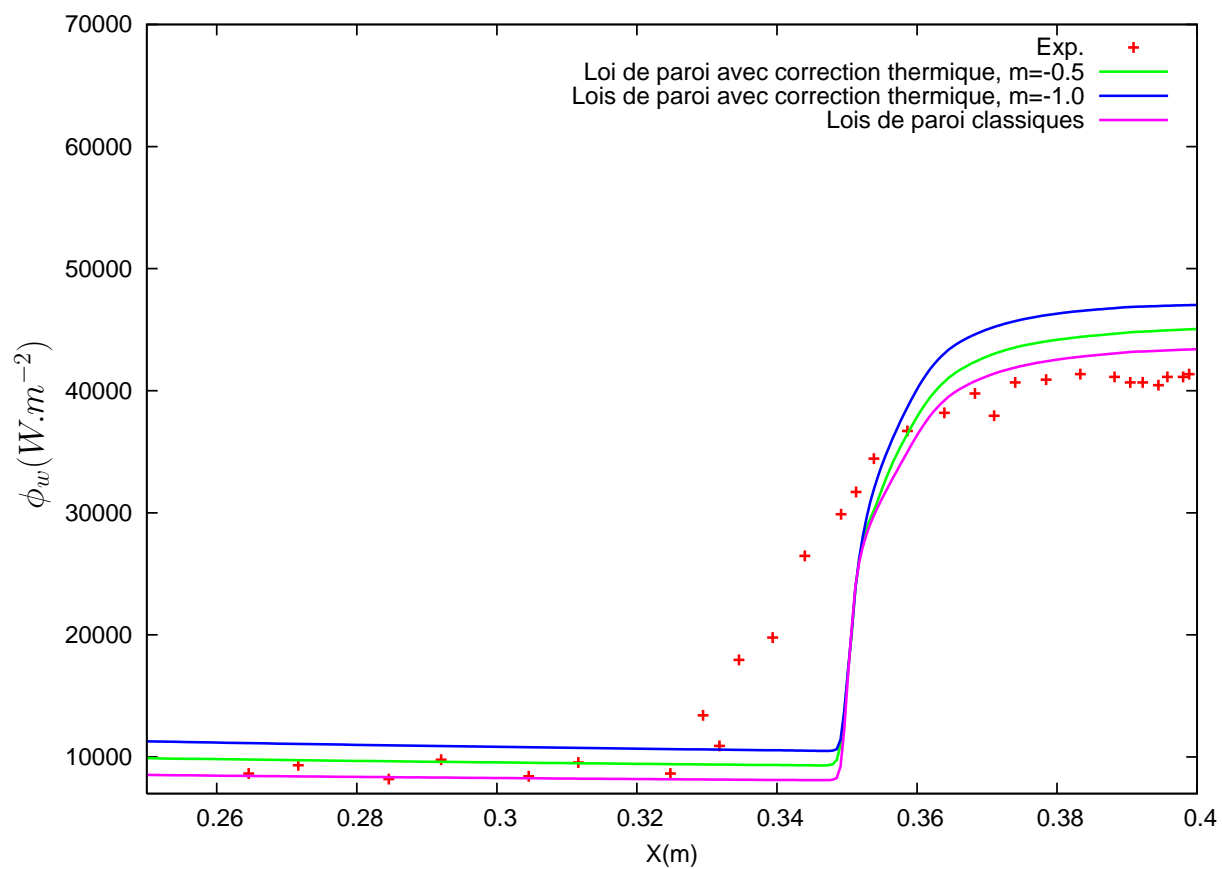


FIG. 4.5 – Profil du flux de chaleur le long de la paroi.

## 7.2 La rampe de compression

Il s'agit d'étudier l'écoulement d'un gaz parfait sur une rampe inclinée à 35 degrés. Les conditions en amont sont les mêmes que celles de la plaque plane étudiée au chapitre précédent 3. La distance à la paroi choisie est  $\delta = 2 \cdot 10^{-4}m$ , et la hauteur de première maille est de  $5 \cdot 10^{-6}m$ .

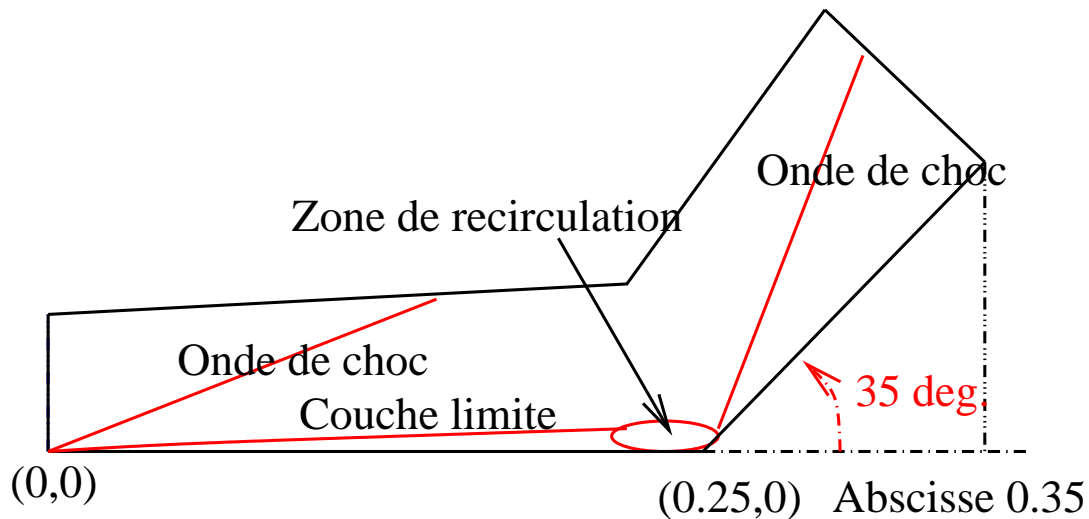


FIG. 4.6 – Rampe de compression de Delery.

Nous pouvons voir sur les figures 4.7, 4.8 et 4.9 les résultats des calculs en ce qui concerne le coefficient de pression, de frottement et de chaleur.

Les figures 4.7 et 4.8 nous montre que la correction thermique n'a aucune influence sur les calculs dynamiques.

Contrairement au cas précédent, la figure 4.9 nous montre que la correction thermique permet une meilleure prédiction de flux de chaleur dans la zone de recirculation. De plus, le changement d'échelle de vitesse améliore le calcul du flux derrière la zone de recirculation, au niveau de la rampe.



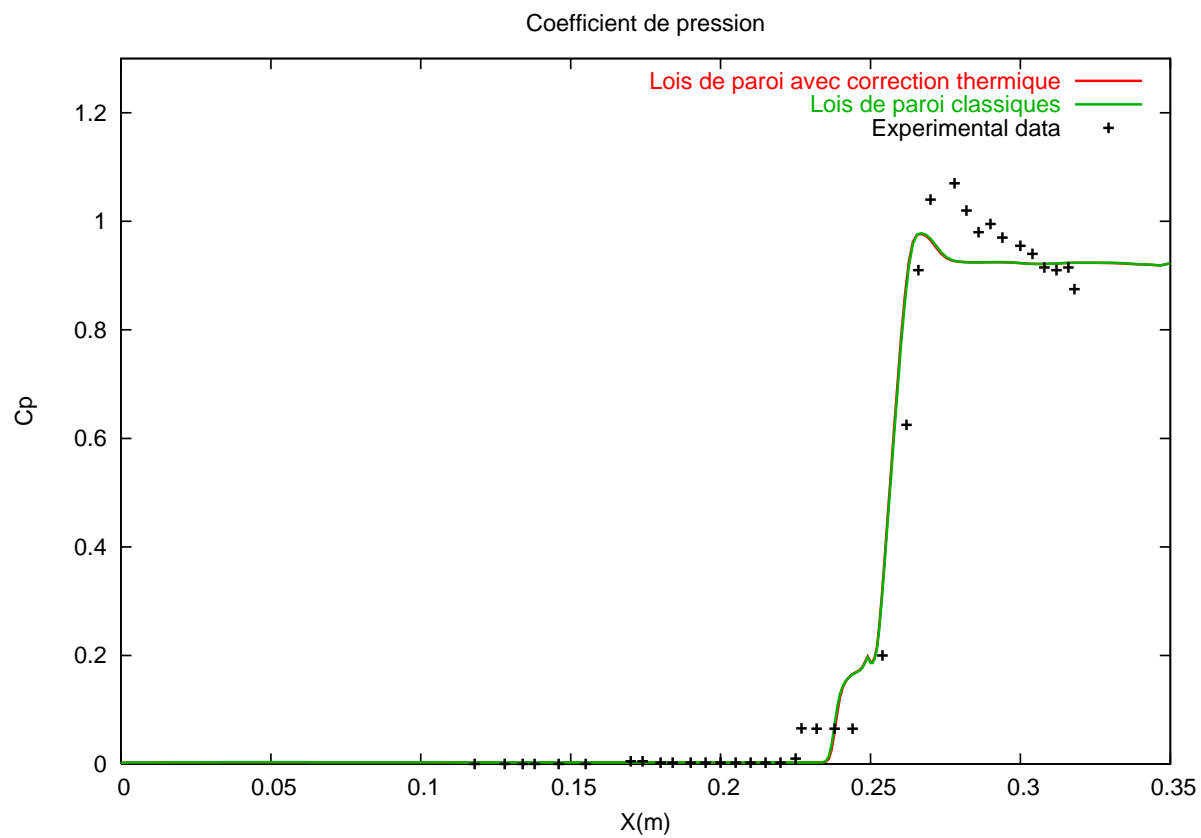


FIG. 4.7 – Profil du coefficient de pression le long de la paroi.

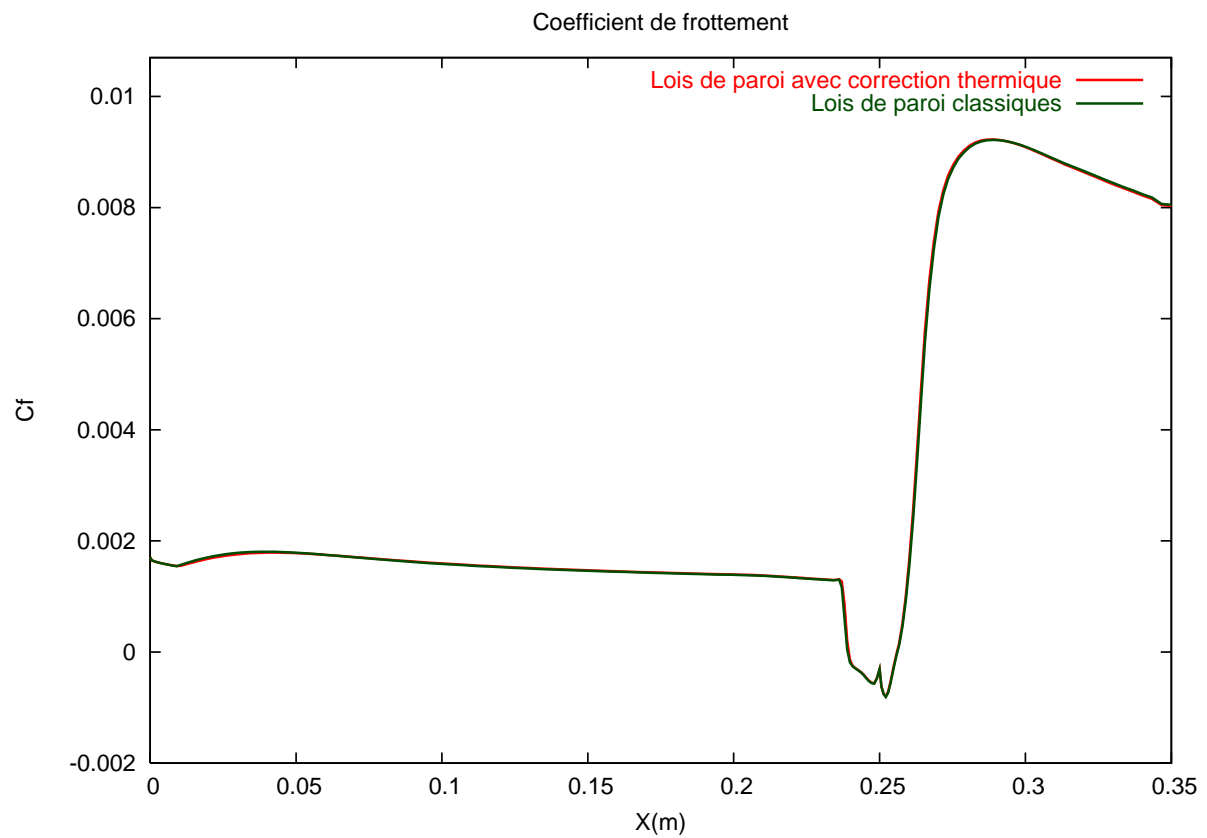


FIG. 4.8 – Coefficient de frottement.

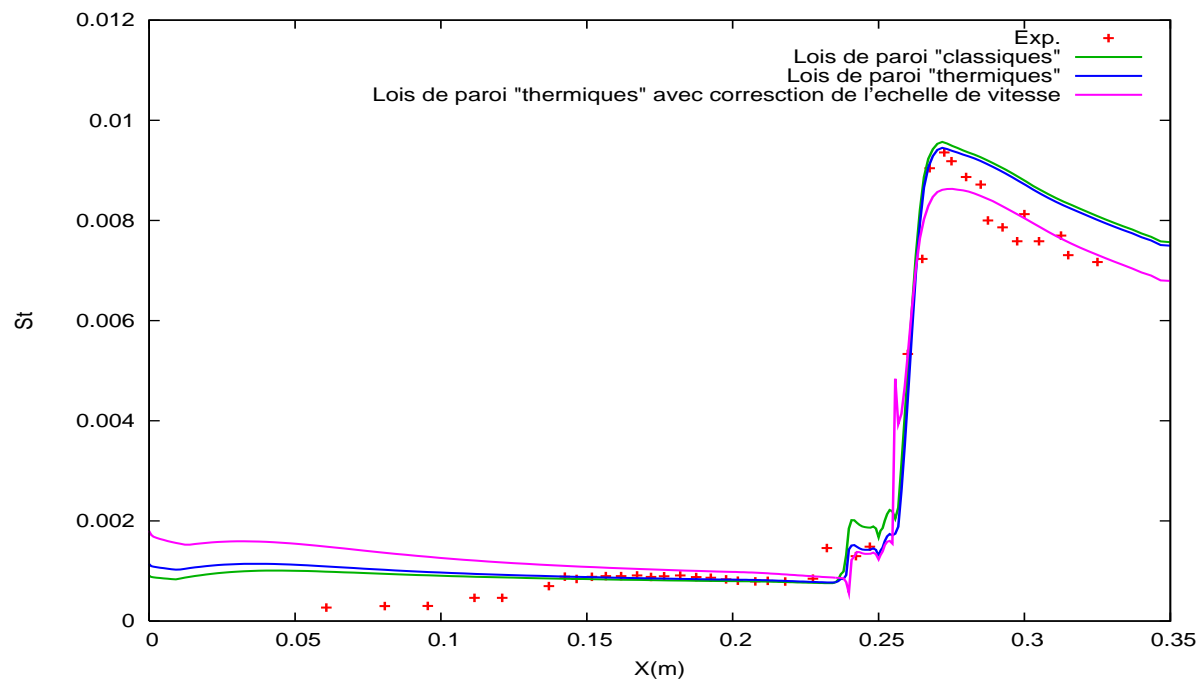


FIG. 4.9 – Nombre de Stanton.

# Chapitre 5

## Résolution numérique

NSC2KE [19] est un solveur utilisant une combinaison de la méthode des volumes finis et de la méthode de Galerkin (éléments finis). Il permet de calculer des écoulements 2D et axisymétriques sur des maillages non-structurés. Pour le calcul des écoulements turbulents, plusieurs versions du modèle de turbulence  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  ont été introduits. Le dimensionnement du code a été nécessaire pour la prise en compte des multiples échelles caractéristiques de la turbulence dynamique et thermique mises en jeu. L'avance en temps du code a été implicite avec une méthode linéaire de gradients bi-conjugués couplée à un préconditionneur de type SSOR. Pour la prise en compte des effets de gaz réel, le solveur pour les termes convectifs ainsi que la loi d'état ont été modifiés. Nous rentrons plus en détail sur les méthodes numériques dans les paragraphes suivants.

### 1 Formulation vectorielle

Pour simplifier les notations, nous employons des fonctions vectorielles pour désigner les variables conservatives, les flux diffusifs et les flux convectifs.

Le système d'équations est hyperbolique. En deux dimensions d'espace, il s'écrit en formulation conservative :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot (F(W) - G(W, \nabla W)) = S(W, \nabla W) \quad (5.1)$$

pour  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ , ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma$ , et  $t \in \mathbb{R}^+$ ;  $W(x, t)$  est une fonction vectorielles de  $\mathbb{R}^8$  définie par :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \\ \rho k_h \\ \rho \varepsilon_h \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $u_1$  et  $u_2$  sont les composantes du vecteur vitesse,  $E$  est l'énergie totale par unité de masse,  $k$  est l'énergie cinétique de la turbulence,  $k_h$  est l'énergie thermique de la turbulence,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_h$  leurs taux de dissipation respectifs.

De plus nous avons :

$$F(W) = F_1(W)\vec{n}_1 + F_2(W)\vec{n}_2 \quad (5.3)$$

où  $F_1(W)$  et  $F_2(W)$  représentent les composantes du flux convectifs en projection sur  $x_1$  et  $x_2$ , et  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  les composantes du vecteur normal unitaire sortant  $\vec{n}$ .

$$F_1(W) = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1^2 + p \\ \rho u_1 u_2 \\ (\rho E + p)u_1 \\ \rho u_1 k \\ \rho u_1 \varepsilon \\ \rho u_1 k_h \\ \rho u_1 \varepsilon_h \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_2(W) = \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_2^2 + p \\ (\rho E + p)u_2 \\ \rho u_2 k \\ \rho u_2 \varepsilon \\ \rho u_2 k_h \\ \rho u_2 \varepsilon_h \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

En ce qui concerne les flux diffusifs, nous avons

$$G(W, \nabla W) = G_1(W, \nabla W)\vec{n}_1 + G_2(W, \nabla W)\vec{n}_2 \quad (5.5)$$

où  $G_1(W, \nabla W)$  et  $G_2(W, \nabla W)$  représentent les composantes du flux diffusif en projection sur  $x_1$  et  $x_2$  :

$$G_1(W, \nabla W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ u_1\tau_{11} + u_2\tau_{12} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial k}{\partial x_1} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \\ \left(\lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{k_h}}\right) \frac{\partial k_h}{\partial x_1} \nabla k_h \\ \left(\lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{\varepsilon_h}}\right) \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_2(W, \nabla W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{12} \\ \tau_{22} \\ u_1\tau_{12} + u_2\tau_{22} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial k}{\partial x_2} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \\ \left(\lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{k_h}}\right) \frac{\partial k_h}{\partial x_2} \\ \left(\lambda + \frac{\lambda_t}{\sigma_{\varepsilon_h}}\right) \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

où  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{12}$  et  $\tau_{22}$  sont les composantes du tenseur de Cauchy :

$$\tau_{11} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right), \tau_{22} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right), \tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \quad (5.7)$$

Enfin,  $S(W, \nabla W)$ , le terme source s'écrit :

$$S(W, \nabla W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_k \\ S_\varepsilon \\ S_{k_h} \\ S_{\varepsilon_h} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

où  $S_k$ ,  $S_\varepsilon$ ,  $S_{k_h}$  et  $S_{\varepsilon_h}$  sont définis suivant le modèle de turbulence choisi.

## 2 Éléments de discrétisation

Le domaine d'étude  $\bar{\Omega}$  est approché par un polygone  $\bar{\Omega}_h$ . La discrétisation spatiale repose sur une triangulation  $\tau_h$  du domaine  $\bar{\Omega}_h$ .

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{j=1}^{nt} T_j, \quad T_j \in \tau_h \quad (5.9)$$

où les triangles  $T_j$  sont les éléments de la triangulation ( $nt$  est le nombre d'éléments de  $\tau_h$ ). A chaque sommet  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, ns$  ( $ns$  est le nombre total de noeuds du maillage),

nous associons une cellule  $C_i$ . La cellule  $C_i$  se construit en joignant successivement les centres de gravité des triangles contenant le noeud  $a_i$  (voir Fig. 5.1). L'ensemble des cellules forme alors un autre recouvrement de  $\bar{\Omega}_h$  :

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{i=1}^{ns} C_i. \quad (5.10)$$

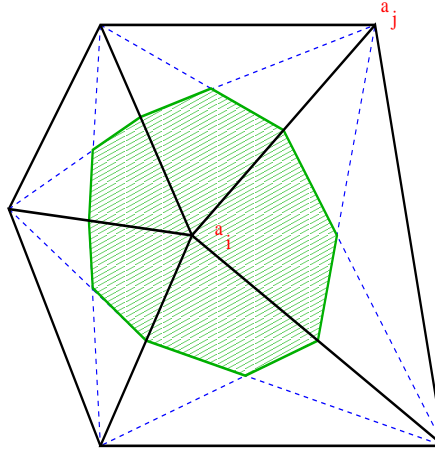


FIG. 5.1 – Éléments de discrétisation : en trait plein les arêtes des triangles, en pointillé les médianes servant à la construction des cellules de contrôle et la zone grisée, une cellule de contrôle.

### 3 Formulation faible

#### 3.1 Formulation continue

La formulation variationnelle s'écrit de façon classique en multipliant l'équation 5.1 par une fonction test, et en intégrant sur le domaine  $\bar{\Omega}$  :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot F(W) \right) \Psi \, d\sigma = \int_{\Omega} \nabla \cdot G(W, \nabla W) \Psi \, d\sigma + \int_{\Omega} S(W, \nabla W) \Psi \, d\sigma, \quad (5.11)$$

Nous recherchons les solutions faibles du problème continu (Eq. 5.1) des équations de Navier-Stokes. Nous approchons le problème continu défini sur  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+$  par le problème discret défini sur  $\bar{\Omega}_h \times [0, T']$ .

Deux formulations faibles discrètes sont alors possible :

- pour les flux convectifs, nous utilisons une formulation volumes finis qui consiste à chercher la solution approchée  $W'_h$ , définie sur  $\tau_h$  de  $\bar{\Omega}_h$ , constante par morceaux sur chacun des éléments de  $\tau_h$  :

$$W'_h(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{ns} W'_i \Psi_i(x_1, x_2), \quad (5.12)$$

où les  $\Psi_i(x_1, x_2)$  sont les fonctions caractéristiques de la cellule de contrôle :

$$\Psi_i = \chi(C_i), \quad (5.13)$$

- pour les flux diffusifs, nous utilisons par contre une formulation éléments finis qui consiste à chercher la solution approchée  $W_h$ , définie sur  $\tau_h$  de  $\bar{\Omega}_h$ , continue et linéaire par morceaux sur chacun des éléments de  $\tau_h$  :

$$W_h(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{nt} W_i \Psi_i(x_1, x_2), \quad (5.14)$$

où les  $\Psi_i(x_1, x_2)$  sont les fonctions de base éléments finis  $P_1$  :

$$\Psi_i = \phi_i, \quad (5.15)$$

L'équivalence des deux formulations se traduit géométriquement par le fait que le volume sous la fonction caractéristique associé au noeud  $i$  doit être la même que la somme des volumes sous les fonctions test associées au noeud  $i$ . Nous pouvons donc associer à toute fonction continue  $W_h$ , linéaire par morceaux, définie sur  $\tau_h$ , une fonction  $W'_h$  constante par morceaux sur chaque cellule  $C_i$  :

$$\int_{\bar{\Omega}_h} W'_h \chi(C_i) dv = \int_{\bar{\Omega}_h} W_h \phi_i dv, \quad (5.16)$$

d'où

$$W'_h = \frac{1}{\int_{C_i} dv} \int_{C_i} W_h dv. \quad (5.17)$$

En pratique, nous utilisons l'approximation simplifiée,  $W'_h = W_h$

Rappelons qu'à chaque sommet  $a_i$ , nous associons une fonction de base  $\phi_i$  qui est continue, linéaire sur chaque élément, et vérifie :

$$\phi_i(a_j) = \delta_{ij}. \quad (5.18)$$

Une fonction quelconque  $P_1$  est alors interpolée sur un triangle  $T$  par :

$$f(x_1, x_2)|_T = \sum_{a_k \in T} f(a_k) \phi_k|_T(x_1, x_2), \quad (5.19)$$



et le gradient de cette fonction est donné par

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2)|_T = \sum_{a_k \in T} f(a_k) \vec{\nabla} \phi_k|_T(x_1, x_2) = Cste. \quad (5.20)$$

### 3.2 Formulation discrète

En introduisant les fonctions test et les supports correspondants dans l'équation 5.11 nous obtenons :

$$\underbrace{\int_{C_i} \frac{\partial W_h}{\partial t} d\sigma}_{(1)} + \underbrace{\int_{C_i} \nabla \cdot F(W_h) d\sigma}_{(2)} = \underbrace{\int_{\Omega_h} \nabla \cdot G(W_h, \nabla W_h) \phi_i d\sigma}_{(3)} + \underbrace{\int_{\Omega_h} S(W_h, \nabla W_h) \phi_i d\sigma}_{(4)}, \quad (5.21)$$

et en appliquant la formule de Green nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{C_i} \frac{\partial W_h}{\partial t} + \oint_{\partial C_i} F(W_h) \cdot \vec{n} ds &= - \int_{\Omega_h} G(W_h, \nabla W_h) \nabla \Phi_i ds \\ &+ \oint_{\Gamma_{\Omega_h}} G(W_h, \nabla W_h) \cdot \vec{n} \Phi_i d\sigma \\ &+ \int_{\Omega_h} S(W_h, \nabla W_h) \Phi_i d\sigma, \end{aligned} \quad (5.22)$$

## 4 Calcul des flux convectifs

### 4.1 Propriétés de équations d'Euler

Nous nous intéressons aux équations d'Euler à plusieurs dimensions d'espace, c'est-à-dire aux termes (1) et (2) de l'équation 5.21 :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot F(W) = 0 \quad (5.23)$$

Les fonctions  $F(W)$  étant des fonctions homogènes de degré un, nous pouvons écrire l'équation 5.23 sous la forme d'un système quasi-linéaire :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial W} \cdot \nabla W = 0 \quad (5.24)$$

où les matrices  $\frac{\partial F(W)}{\partial W}$  sont les jacobiennes de flux d'Euler  $F(W)$ .

Notons alors le flux dans la direction  $\vec{n}$  :  $F(W) \cdot \vec{n}$

Nous rappelons que le système quasi-linéaire est hyperbolique [28], c'est-à-dire que la matrice jacobienne du flux d'Euler dans la direction  $\vec{n}$ ,  $A(W, \vec{n}) = \frac{\partial F}{\partial W} \cdot \vec{n}$  est diagonalisable, et que toutes ses valeurs propres sont réelles.

Les valeurs propres de la matrice  $A(W, \vec{n})$ , notées  $\lambda_p(W, \vec{n})$ , sont :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{n} - c &: \text{valeur propre simple} \\ \vec{u} \cdot \vec{n} &: \text{valeur propre simple en 1D, double en 2D et triple en 3D} \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + c &: \text{valeur propre simple} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Soit  $\Lambda(W, \vec{n})$  la matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_p$  de  $A(W, \vec{n})$ , et  $P(W, \vec{n})$  la matrice des vecteurs propres en colonne de  $A(W, \vec{n})$  :

$$A(W, \vec{n})P(W, \vec{n}) = P(W, \vec{n})\Lambda(W, \vec{n}) \quad (5.26)$$

En notant  $\Lambda^\pm(W, \vec{n})$  les matrices diagonales des parties positives ou négatives des valeurs propres, nous définissons :

$$\begin{aligned} A^\pm(W, \vec{n}) &= P(W, \vec{n})\Lambda^\pm(W, \vec{n})P^{-1}(W, \vec{n}) \\ |A|(W, \vec{n}) &= A^+(W, \vec{n}) - A^-(W, \vec{n}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Les matrices  $P(W, \vec{n})$  et  $P^{-1}(W, \vec{n})$  ne sont pas uniques car  $\vec{u} \cdot \vec{n}$  est une valeur propre multiple.

## 4.2 Les flux décentrés

Nous considérons le système des équations d'Euler (Eq. 5.23) en une dimension d'espace,  $p = 1$ , nous notons  $x_i = i\Delta x$ ,  $t^n = n\Delta t$ , et  $W_i^n = W(x_i, t^n)$ , et nous définissons un schéma explicite volume fini conservatif à trois points, du premier ordre en temps et en espace :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi(W_i^n, W_{i+1}^n) - \phi(W_{i-1}^n, W_i^n)) \quad (5.28)$$

Une discrétisation identique correspond à l'intégration par volumes finis du terme (2) de l'équation 5.21, dans la direction  $\vec{n}$ .

Le schéma ci-dessus (Eq. 5.28) est dit consistant avec le flux  $F$  si la fonction de flux numérique  $\phi$  vérifie :

$$\phi(W, W) = F(W) \quad (5.29)$$

Notons  $W_l$  et  $W_r$  les vecteurs des variables d'état à gauche et à droite d'une frontière de cellule volume fini.

Un schéma de la forme (Eq. 5.28) est dit décentré s'il vérifie les trois propriétés énoncées par Harten et al. [9] :

- Pour tout état  $W^*$  voisin de  $W_l$  et  $W_r$ ,

$$\phi(W, W) = F(W^*) + A^+(W^*)(W_l - W^*) + A^-(W^*)(W_r - W^*) + o(|W_l - W^*| + |W_r - W^*|). \quad (5.30)$$

- Quand les valeurs propres caractéristiques associées à  $\phi$  sont toutes positives, alors nous avons  $\phi(W_l, W_r) = F(W_l)$ .
- Quand les valeurs propres caractéristiques associées à  $\phi$  sont toutes négatives, alors nous avons  $\phi(W_l, W_r) = F(W_r)$ .

Un choix possible pour  $W^*$  est de prendre  $W^* = (W_l + W_r)/2$ , ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} \phi(W_l, W_r) &= \frac{1}{2}(F(W_l) + F(W_r)) - \frac{1}{2} \left| A \frac{(W_l + W_r)}{2} \right| (W_l - W_r) + o(|W_r - W_l|) \\ &= \frac{1}{2}(F(W_l) + F(W_r)) - \frac{1}{2} d(W_l, W_r), \end{aligned} \quad (5.31)$$

où  $d(W_l, W_r)$  contient les termes de décentrement correspondant à la viscosité numérique, spécifiques au type de schéma utilisé :

$$d(W_l, W_r) = \frac{1}{2} \left| A \frac{(W_l + W_r)}{2} \right| (W_l - W_r) + o(|W_r - W_l|) \quad (5.32)$$

La relation de consistance (Eq. 5.29) donne alors :  $d(W, W) = 0$ .

Nous trouvons dans la littérature deux classes principales de schémas qui vérifient ces propriétés : les schémas basés sur la résolution exacte ou approchée du problème de Riemann (*flux difference splitting*), et les schémas basés sur une décomposition de flux (*flux vector splitting*). Une revue de ces différentes méthodes est faite par Yee [42]. Nous utilisons par la suite deux types de flux : la décomposition de flux de Steger & Warming [50], et le solveur de Riemann approché de Roe [16, 68].

### 4.3 Décomposition de Steger & Warming

Ce flux est construit en généralisant à des systèmes non linéaires la décomposition de flux naturelle pour une équation scalaire linéaire du type  $F(W) = aW$  :

$$\phi(W_l, W_r) = \begin{cases} a W_l & \text{si } a > 0 \\ a W_r & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.33)$$

Dans le cas non linéaire, ces flux numériques s'écrivent :

$$\phi(W_l, W_r) = F^+(W_l) + F^-(W_r) \quad (5.34)$$

et vérifient la propriété de consistance :

$$F(W) = F^+(W) + F^-(W) \quad (5.35)$$

Le flux de Steger & Warming est construit en utilisant la propriété d'homogénéité des flux d'Euler, i.e.  $F(W) = A(W)W$ , et l'expression (5.34). Nous retrouvons le terme de viscosité numérique, en écrivant ce flux sous la forme :

$$\phi(W_l, W_r) = \frac{1}{2} (|A(W_l)| + |A(W_r)|) (W_r - W_l) + \frac{1}{2} (|A(W_l)| + |A(W_r)|) (W_r + W_l) \quad (5.36)$$

L'intérêt d'un tel flux est le caractère complètement décentré suivant le signe des valeurs propres correspondantes.

#### 4.4 Solveur de Riemann approché de Roe

On utilise une solution approchée du problème de Riemann, pour mettre le terme de viscosité numérique sous la forme :

$$d(W_l, W_r) = \left| \tilde{A}(W_l, W_r) \right| (W_r - W_l) \quad (5.37)$$

où  $\tilde{A}(W_l, W_r)$  est une matrice dont la construction fait appel à des conditions d'unicité et d'entropie de la solution. Une telle matrice a été établie par Roe [68] :

$$\tilde{A}(W_l, W_r) = A(\tilde{W}) \quad (5.38)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\rho} &= \sqrt{\rho_l \rho_r} \\ \tilde{f} &= \frac{\sqrt{\rho_l} f_l + \sqrt{\rho_r} f_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}} \end{cases} \quad (5.39)$$

où  $f$  représente l'une des variables de Roe  $\vec{u}$ ,  $H$ .  $H$  est l'enthalpie totale par unité de volume :

$$H = C_p T + \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Toutes les autres variables caractéristiques de l'état thermodynamique et dynamique du fluide peuvent être déduites des variables de Roe.

Le flux de Roe n'est pas différentiable, ce qui peut affecter la qualité de la solution instationnaire. D'autre part, pour évaluer les chocs forts, il est nécessaire d'ajouter au schéma une correction entropique, qui consiste à modifier les valeurs propres de  $\tilde{A}$ . La correction de Harten-Hyman [9] a été utilisée, ce qui revient à modifier les valeurs propres proches de zéro de la façon suivante :

$$\lambda_p = \begin{cases} |\lambda_p| & \text{si } |\lambda_p| > \delta \\ \frac{\lambda_p^2 + \delta^2}{2\delta} & \text{si } |\lambda_p| \leq \delta \end{cases} \quad \text{avec } \delta = \epsilon (|\vec{u} \cdot \vec{n}| + c) \quad (5.40)$$

Le petit paramètre  $\epsilon$  est de l'ordre de 0.25.

## 4.5 Extension du schéma convectif à l'ordre 2

On s'intéresse dans cette partie à une approximation d'ordre deux du calcul des flux convectifs basée sur la technique d'interpolation MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) introduite par van Leer [78] et étendue aux éléments finis par Fezoui [38].

Pour augmenter la précision spatiale dans l'approximation du terme convectif, nous élevons le degré d'interpolation du vecteur d'état  $W$  à la frontière de la cellule. La solution devient polynomiale par morceaux. Cette technique nécessite le calcul des gradients du vecteur d'état aux noeuds du maillage. On note  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$  les champs interpolés à l'interface  $I$  de la cellule à partir des noeuds  $i$  et  $j$ . Le flux numérique à l'interface entre  $i$  et  $j$  s'écrit en fonction de ces nouveaux arguments :

$$\Phi_{ij} = \Phi(W_{ij}, W_{ji}, \vec{n}_{ij}) \quad (5.41)$$

Le choix des variables à interpoler est encore un problème ouvert à l'heure actuelle et fait l'objet de nombreuses controverses. En pratique, on interpole les variables sur lesquelles peuvent apparaître des gradients importants : pour les équations d'Euler on utilise généralement les variables physiques.

Les arguments du flux numérique à l'interface,  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$ , sont les valeurs obtenues par interpolation à partir des valeurs en  $i$  et  $j$ , en utilisant un gradient estimé au milieu du segment  $[i, j]$ .

Ce gradient estimé est noté  $(\nabla W)_i$  :

$$\begin{aligned} W_{ij} &= W_i + \frac{1}{2} (\nabla W)_i \\ W_{ji} &= W_j - \frac{1}{2} (\nabla W)_j \end{aligned} \quad (5.42)$$

Le gradient estimé peut être un gradient évalué en  $i$  ou  $j$ , ou bien encore une combinaison des deux.

On définit le gradient extrapolé à l'aide d'une moyenne arithmétique entre le gradient calculé aux noeuds  $i$  ou  $j$ , et le gradient au milieu du segment  $[i, j]$ .

$$\begin{aligned} 2(\nabla W)_i &= \underbrace{\nabla W|_i \cdot \vec{n}_{ij}}_{(1)} + \underbrace{\nabla W|_{ij}}_{(2)} \\ 2(\nabla W)_j &= \underbrace{\nabla W|_j \cdot \vec{n}_{ij}}_{(1)} + \underbrace{\nabla W|_{ij}}_{(2)} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Les termes (1) et (2) sont évalués de la façon suivante :

(1) Un gradient moyen, de type *hermitien*, calculé en chaque noeud  $i$  :

$$\begin{aligned} \nabla W|_i &= \frac{\int_{C_i} \nabla(W) \Psi \, dv}{\int_{C_i} \Psi \, dv} \\ &= \frac{1}{\text{supp}C_i} \sum_{\cup T_j \in i} \left( \frac{\text{supp}(T_j)}{\text{dim}} \sum_{k=1}^{\text{dim}} W_{j^k} \nabla \Psi_{j^k} \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

où les  $j^k$ ,  $k = 1, \dots, \dim$  sont les sommets de l'élément  $T_j$  dont l'un d'entre eux est le noeud  $i$ , et  $\nabla \Psi_{j^k}$  est le gradient de la fonction test élément fini P1 constant sur  $T_j$ .

(2) Un gradient centré, calculé au milieu du segment  $[i, j]$  par la relation :

$$\nabla W|_{ij} = W_j - W_i \quad (5.45)$$

Finalement, les variables extrapolées s'écrivent :

$$\begin{aligned} W_{ij} &= W_i + \frac{1}{4} (\nabla W|_i - (W_j + W_i)) \\ W_{ji} &= W_j - \frac{1}{4} (\nabla W|_j - (W_j + W_i)) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ce schéma est dit demi-totalement décentré, ou encore schéma de Fromm.

Cette méthode ne préserve pas la monotonie de l'interpolation, car elle autorise la création d'extrema entre les noeuds. Le concept de monotonie est plus faible que celui de TVD [12, 75], mais traduit également le caractère entropique et l'unicité de la solution. Pour préserver la monotonie, on compare le gradient ainsi extrapolé en  $i$  avec le gradient centré sur le segment  $[i, j]$ , et l'on repasse à l'ordre 1 si l'information est en désaccord. Ceci est mené à bien par l'intermédiaire de fonctions de limitation, appelées limiteurs.

Par exemple, pour le limiteur van Albada-van Leer [79], si  $a$  désigne le gradient moyen, et  $b$  le gradient centré sur le segment, on peut tester la différence de signe entre ces deux gradients. Si les signes sont différents on n'interpole pas, et l'on assure une transition douce entre les pentes des deux gradients. Si ils sont de même signe mais de pentes différentes. Ceci est assuré par l'intermédiaire d'un petit paramètre ajustable  $\epsilon$ . Le limiteur van Albada-van Leer s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{LimVAL}(a, b) &= \frac{(a^2 + \epsilon)b + (b^2 + \epsilon)a}{a^2 + b^2 + 2\epsilon} \quad \text{si } ab > 0 \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Revenons sur le type de gradients utilisables (c.f. équation 5.43). Pour obtenir un gradient plus ou moins décentré, on utilise les gradients calculés en amont et en aval de  $i$  et  $j$ , suivant les notations de la figure 5.2.

De façon générale, les schémas MUSCL s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} W_{ij} &= W_i + \left( \frac{1 - \kappa}{4} (\nabla W)_i \cdot \vec{i}\vec{j} + \frac{1 + \kappa}{4} (\nabla W)_{ij} \right) \cdot \vec{i}\vec{j} \\ W_{ji} &= W_j - \left( \frac{1 - \kappa}{4} (\nabla W)_j \cdot \vec{i}\vec{j} + \frac{1 + \kappa}{4} (\nabla W)_{ij} \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

où  $\kappa \in [-1, 1]$  est un paramètre déterminant le degré de décentrement de l'interpolation :

- $\kappa = 1$ , approximation centrée, instable,
- $\kappa = 1/3$ , approximation d'ordre 3 (théorie unidimensionnelle),
- $\kappa = 0$ , approximation demi-totalement décentrée (dite de Fromm),

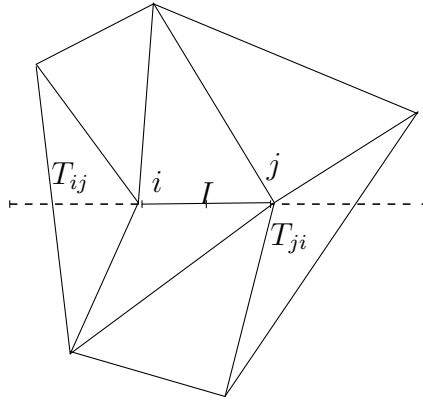


FIG. 5.2 – Éléments amont et aval pour le segment  $[i, j]$

- $\kappa = -1$ , approximation totalement décentrée.

En une dimension d'espace, et sur des maillages réguliers, on peut montrer que tous ces schémas sont formellement au moins d'ordre 2 en espace [29], mais avec des erreurs de troncature  $ET$  différentes, reliées à  $\kappa$  par la relation :

$$ET = -\frac{(\kappa - \frac{1}{3})}{4} (\Delta x)^2 \partial_x^3 W + O(\Delta x^3) \quad (5.49)$$

Ainsi, l'approximation d'ordre 3 est la plus précise (erreur de troncature d'ordre 2 nulle), mais l'approximation de Fromm est plus robuste.

## 5 Traitement des termes diffusifs

Les gradients visqueux, correspondant aux termes (3) de l'équation 5.21, sont intégrés avec une formulation élément fini. Le calcul se ramène à une intégrale sur les éléments  $T$ , supports de la fonction de base  $\Psi_i$  :

$$\int_{\Omega_h} \nabla \cdot G(W, \nabla W) \Psi_i d\sigma = \sum_{\cup T_j \in i} \int_{T_j} (G(W) \cdot \nabla \Psi_i) d\sigma \quad (5.50)$$

L'approximation de  $W$  étant linéaire par morceaux, son gradient est constant sur chaque élément fini  $T_j$ . Les termes intervenant dans les gradients visqueux  $G(W)$  sont évalués à partir des valeurs moyennes sur l'élément  $T_j$ , ce qui permet une évaluation simple des termes visqueux non-linéaires.

## 6 Schéma en temps

### 6.1 Généralités

Rappelons que nous nous intéressons au calcul de solutions instationnaires. Celles-ci étant indépendantes de la précision du discrétisation de l'opérateur temporel, une discrétisation d'ordre 1 en temps à été choisie.

Deux types de schémas d'intégration ont été utilisé : un schéma explicite de type Runge et Kutta, dont le principal avantage est sa simplicité de mise en oeuvre, et un schéma implicite, coûteux à programmer mais qui autorise l'utilisation de grands pas de temps.

Notons  $W_i^n$  la valeur du vecteur d'état au noeud  $i$  et au temps  $t^n$ , et  $\Delta t^n$  le pas de temps variables entre deux instants  $n$  et  $n + 1$ .

Récrivons l'équation (5.1) sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(W) = 0 \quad (5.51)$$

### 6.2 Schéma explicite

Nous utilisons un schéma explicite de type Runge et Kutta pouvant aller jusqu'à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned} W^0 &= W^n \\ W^k &= W^0 - \alpha_k \Delta t^k H(W^{k-1}) \text{ pour } k = 1, \dots, 4 \\ W^{n+1} &= W^4 \end{aligned} \quad (5.52)$$

avec le jeu des  $\alpha_k$  suivant :

$$\alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.2766, \alpha_3 = 0.5 \text{ et } \alpha_4 = 1.0.$$

La stabilité de ce schéma est conditionné par un critère de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) limitant les pas de temps.

### 6.3 Schéma implicite

L'utilisation de schémas implicites conduit à des méthodes de résolution plus efficaces ; en contrepartie, leur implémentations nécessitent la mise au point d'algorithmes plus complexes. Reprenons ici le développement présenté par Hallo [55].

Le schéma totalement implicite s'écrit après discrétisation temporelle :

$$\frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t^n} + H(W^{n+1}) = 0 \quad (5.53)$$

La linéarisation du flux s'écrit à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$H(W^{n+1}) = H(W^n) + H'(W^n)(W^{n+1} - W^n) + O(\Delta W^2) \quad (5.54)$$

où  $H'(W^n)$  représente la matrice jacobienne de  $H(W^n)$ .



Nous obtenons alors la version linéarisé du schéma implicite sous la forme d'un  $\delta$ -schéma :

$$\left( \frac{\mathbf{I}}{\Delta t^n} + H'(W^n) \right) \delta W^{n+1} = -H(W^n), \quad (5.55)$$

où  $\mathbf{I}$  représente la matrice identité et  $\delta W^{n+1} = W^{n+1} - W^n$ .

Pour  $\Delta t$  grand, ce schéma a une convergence quadratique au voisinage de la solution du problème  $H(W) = 0$ .

La précision spatiale de cette méthode appliquée à la résolution stationnaire de (5.51) est donnée par l'ordre de précision du calcul du flux  $H(W)$ . Lorsque le flux  $H(W)$  n'est pas différentiable et que l'on ne veut pas calculer tous les termes nous introduisons un opérateur linéaire noté  $P^n$  qui approche la matrice jacobienne  $H'(W)$ . Le système (5.55) s'écrit alors :

$$\left( \frac{\mathbf{I}}{\Delta t^n} + P^n \right) \delta W^{n+1} = -H(W^n), \quad (5.56)$$

L'introduction d'un tel opérateur s'impose pour le calcul de la matrice jacobienne des flux convectifs.

- **Linéarisation des termes convectifs :**

Le flux implicite convectif s'écrit :

$$\tilde{\phi}_{ij}^{n+1} = \tilde{\phi}(W_i^n, W_j^n, W_i^{n+1}, W_j^{n+1}, \vec{n}) \quad (5.57)$$

Basé sur un développement de Taylor à l'ordre 1 en temps,  $\tilde{\phi}$  s'écrit :

$$\tilde{\phi}(U, V, W, Z, \vec{n}) = \phi(U, V, \vec{n}) + \frac{\partial \phi}{\partial U}(W - U) + \frac{\partial \phi}{\partial V}(Z - V), \quad (5.58)$$

où  $\phi(U, V, \vec{n})$  est la fonction de flux utilisée pour le schéma décentré explicite.

Dans la cas de fonctions de flux décentrée, nous simplifions cette expression :

$$\phi(U, V, \vec{n}) = H_1(U, V, \vec{n})U + H_2(U, V, \vec{n})V \quad (5.59)$$

en particulier dans le cas d'un schéma de Roe nous écrivons :

$$\begin{aligned} H_1(U, V, \vec{n}) &= \tilde{A}^+(U, V, \vec{n}) \\ H_2(U, V, \vec{n}) &= \tilde{A}^-(U, V, \vec{n}) \end{aligned} \quad (5.60)$$

De la même façon, dans le cas du flux de Steger et Warming, nous avons :

$$\begin{aligned} H_1(U, V, \vec{n}) &= A^+(U, V, \vec{n}) \\ H_2(U, V, \vec{n}) &= A^-(U, V, \vec{n}) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Pour calculer les dérivées partielles du flux  $\phi(U, V, \vec{n})$  qui intervient dans la linéarisation du flux ci-dessus, on utilise les jacobienne approchées suivantes (car le flux n'est pas différentiable) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial U} &\simeq H_1(U, V, \vec{n}) \\ \frac{\partial\phi}{\partial V} &\simeq H_2(U, V, \vec{n})\end{aligned}\quad (5.62)$$

Ainsi la linéarisation des flux convectifs s'écrit :

$$\tilde{\phi}_{ij}^{n+1} = \phi(W_i^n, W_j^n, \vec{n}) + H_1(W_i^n, W_j^n, \vec{n})(W_i^{n+1} - W_i^n) + H_2(W_i^n, W_j^n, \vec{n})(W_j^{n+1} - W_j^n). \quad (5.63)$$

- **Linéarisation des termes diffusifs :**

Une démarche similaire, conduit à la linéarisation des flux visqueux, avec l'avantage d'être exactement différentiable, en adoptant la démarche de C. Olivier [65]. Notons  $\tilde{R}$  les termes visqueux linéarisés, nous obtenons :

$$\tilde{R}_{T,i}^{n+1} = \tilde{R}(W_{k1}^n, W_{k2}^n, W_{k3}^n, W_{k1}^{n+1}, W_{k2}^{n+1}, W_{k3}^{n+1}) \quad (5.64)$$

où  $k1$ ,  $k2$  et  $k3$  sont les sommets du triangle  $T$  :

$$\tilde{R}(U, V, W, X, Y, Z) = R(U, V, W) + \frac{\partial R}{\partial U}(X - U) + \frac{\partial R}{\partial V}(Y - V) + \frac{\partial R}{\partial W}(Z - W), \quad (5.65)$$

où  $R(U, V, W)$  est le terme intervenant dans le schéma centré explicite.

- **Linéarisation des termes sources :**

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux termes source introduits par les modèles de turbulence dynamique et thermique, c'est-à-dire le vecteur  $S(W)$ .

Rapellons que nous cherchons à résoudre le système des quatres échelles de la turbulence,  $\bar{\rho}k$ ,  $\bar{\rho}\varepsilon$ ,  $\bar{\rho}k_h$  et  $\bar{\rho}\varepsilon_h$  indépendamment du champ aérodynamique. Cela signifie que nous écrivons par exemple le développement des termes sources thermiques de

la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{k_h}}{\partial \bar{\rho} k_h} &= m \left( \nabla \tilde{h} \right)^2 2^m C_{\lambda} f_{\lambda} \frac{k_h^{m-1} \varepsilon^{m-1}}{\varepsilon_h^m k^{m-2}} - 2 \frac{\lambda}{\bar{\rho} y^2} \\
\frac{\partial S_{k_h}}{\partial \bar{\rho} \varepsilon_h} &= -1 - m C_{\lambda} f_{\lambda} \left( \nabla \tilde{h} \right)^2 2^m \frac{k_h^m \varepsilon^{m-1}}{\varepsilon_h^{m+1} k^{m-2}} \\
\frac{\partial S_{\varepsilon_h}}{\partial \bar{\rho} k_h} &= C_{\varepsilon_{h_1}} C_{\lambda} f_{\varepsilon_{h_1}} f_{\lambda} \left( \nabla \tilde{h} \right)^2 2^m (m-1) \frac{k_h^{m-2} \varepsilon^{m-1}}{\varepsilon_h^{m-1} k^{m-2}} + C_{\varepsilon_{h_3}} f_{\varepsilon_{h_3}} \frac{\varepsilon_h^2}{k_h^2} \\
&\quad + \frac{(1-f_{\lambda}) \mathbf{B} \lambda}{\bar{\rho}} m 2^m C_{\lambda} f_{\lambda} \frac{k_h^{m-1} \varepsilon^{m-1}}{\varepsilon_h^m k^{m-2}} \\
\frac{\partial S_{\varepsilon_h}}{\partial \bar{\rho} \varepsilon_h} &= -C_{\varepsilon_{h_1}} C_{\lambda} f_{\varepsilon_{h_1}} f_{\lambda} \left( \nabla \tilde{h} \right)^2 2^m (m-1) \frac{k_h^{m-1} \varepsilon^{m-1}}{\varepsilon_h^m k^{m-2}} \\
&\quad + C_{\varepsilon_{h_2}} C_{\mu} f_{\varepsilon_{h_2}} f_{\mu} \mathbf{A} \frac{k}{\varepsilon} - \frac{2}{3} C_{\varepsilon_{h_2}} f_{\varepsilon_{h_2}} \mathbf{C} - 2 C_{\varepsilon_{h_1}} f_{\varepsilon_{h_1}} \frac{\varepsilon_h}{k_h} - C_{\varepsilon_{h_2}} f_{\varepsilon_{h_2}} \frac{\varepsilon}{k} \\
&\quad - \frac{(1-f_{\lambda}) \mathbf{B} \lambda}{\bar{\rho}} m 2^m C_{\lambda} f_{\lambda} \frac{k_h^m \varepsilon^{*m-1}}{\varepsilon_h^{*m+1} k^{m-2}}
\end{aligned}$$

où  $S_{k_h}$  et  $S_{\varepsilon_h}$  sont les termes sources thermiques du modèle de turbulence,  $\mathbf{A} = (\nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^T) : \nabla \tilde{u}$ ,  $\mathbf{B} = \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2}$  et  $\mathbf{C} = \nabla \cdot \tilde{u}$ .

## 7 Conditions aux limites

Dans ce paragraphe, les conditions aux limites ainsi que les relation de compatibilité sont développées, pour la phase explicite ainsi que la linéarisation approchée pour la phase implicite. Une linéarisation exacte n'est pas indispensable dans la mesure où l'on s'intéresse à des solutions stationnaires, pour lesquelles des différences de phase entre le champ interne et les conditions aux limites ne peuvent que ralentir la convergence.

Nous supposons par la suite que la frontière  $\Gamma_h$  du domaine  $\Omega_h$  se décompose en  $\Gamma_w$ , qui représente une paroi solide, et  $\Gamma_{\infty}$  constituée des frontières amont et aval de l'écoulement :

$$\Gamma_h = \Gamma_w \cup \Gamma_{\infty}. \quad (5.66)$$

### 7.1 Frontières amont et aval

De façon générale, nous utilisons la formulation faible pour le traitement des termes de bord correspondant aux frontières amont et aval ; autrement dit nous ne cherchons pas à imposer les valeurs de la solution (ou de certaines variables) aux noeuds situés sur  $\Gamma_{\infty}$ , mais à évaluer les termes de flux à travers  $\Gamma_{\infty}$  (i. e. les intégrales sur  $\partial C_i \cap \Gamma_{\infty}$ ).

Les flux à travers  $\Gamma_{\infty}$  sont calculés en supposant que l'intégrale de bord  $\oint_{\Gamma_{\infty}} G(W_h, \nabla W_h) \cdot \vec{n} \Psi_i d\sigma$  est négligée ce qui correspond à l'application de conditions aux limites du type Neumann

pour les flux visqueux aux frontières amont et aval de l'écoulement. Cette simplification est notamment justifiée dans le cas d'un écoulement externe (si la frontière  $\Gamma_\infty$  est située suffisamment loin de l'obstacle), où les effets visqueux sont négligeables loin des parois.

Il reste à évaluer l'intégrale des flux convectifs :

$$\oint_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} F(W_h) \cdot \vec{n}. \quad (5.67)$$

Nous étendons l'utilisation des techniques de décentrage aux frontières du domaine de la façon suivante : pour un sommet  $a_i$  situé sur une des frontières amont ou aval, nous connaissons la solution  $W_i$  ; nous nous donnons de plus le champ  $W_\infty$  représentatif de l'écoulement à l'extérieur du domaine  $\Omega_h$  dans la région considérée. Le problème de Riemann défini par les valeurs  $W_i$  et  $W_\infty$  est résolu en utilisant, comme pour les flux internes au domaine de calcul, un solveur de Riemann approché :

$$\oint_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} F(W_h) \cdot \vec{n} = \phi(W_i, W_\infty, \vec{n}_{i\infty}), \quad (5.68)$$

avec

$$\vec{n}_{i\infty} = \oint_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \vec{n} d\sigma. \quad (5.69)$$

Nous utilisons ici une décomposition de flux de type Steger et Warming ou de Roe : les échanges avec le milieu extérieur sont calculés à partir de l'une des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1^{SW}(W_i, W_\infty, \vec{n}) &= A^+(W_i, \vec{n})W_i + A^-(W_\infty, \vec{n})W_\infty \\ \phi_2^{SW}(W_i, W_\infty, \vec{n}) &= A^+(W_i, \vec{n})W_i + A^-(W_i, \vec{n})W_\infty \\ \phi^{Roe}(W_i, W_\infty, \vec{n}) &= \frac{1}{2} \left( (F(W_i, \vec{n}) + F(W_\infty, \vec{n})) - |\tilde{A}(W_i, W_\infty, \vec{n})|(W_\infty - W_i) \right) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Pour la phase implicite cette formulation doit être linéarisée, il suffit d'utiliser les mêmes jacobiniennes que pour la linéarisation des flux interne au domaine, à ceci près que  $\delta W_\infty^{n+1} = 0$ .

## 7.2 Frontières glissantes et axes de symétrie

Une façon pratique d'imposer des conditions de symétrie, ou de glissement (les deux sont parfaitement équivalentes), est d'imposer un flux numérique tel que la vitesse débitante sur cette frontière soit nulle :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (5.71)$$

Cette condition annule la première et la quatrième composante du flux ; seule reste une contribution de la pression sur le flux à imposer à la paroi dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, soit :

$$F(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ p\vec{n}_1 \\ p\vec{n}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

Pour la phase implicite cette formulation doit être linéarisée, nous écrivons alors :

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad (5.73)$$

d'où la linéarisation suivante :

$$F^{n+1}(W).\vec{n} = F^n(W).\vec{n} + \frac{\partial F^n(W).\vec{n}}{\partial W}(W^{n+1} - W^n) \quad (5.74)$$

et

$$\frac{\partial F^n(W)}{\partial W} = (\gamma - 1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e\vec{n}_1 & -u_1\vec{n}_1 & -u_2\vec{n}_1 & \vec{n}_1 \\ e\vec{n}_2 & -u_1\vec{n}_2 & -u_2\vec{n}_2 & \vec{n}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.75)$$

### 7.3 Parois solides

- **Les écoulements laminaires :**

Sur les parois, nous appliquons des conditions d'adhérence du fluide (mise à zéro du vecteur vitesse). Si la paroi est isotherme, nous utilisons la température de paroi pour évaluer l'énergie totale, si la paroi est adiabatique, on applique un flux d'énergie nul sur la portion de frontière considérée.

En ce qui concerne la phase implicite d'une paroi adiabatique, le traitement est identique à la phase explicite, si ce n'est que pour un noeud  $i$  frontière nous annulons toute la ligne  $i$  du système matriciel, et l'on met l'élément diagonal à 1 :

$$\frac{\partial G^n(W)}{\partial W} = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} \quad (5.76)$$

En ce qui concerne la phase implicite d'une paroi isotherme la jacobienne s'écrit :

$$\frac{\partial G^n(W)}{\partial W} = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -C_v T_w & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.77)$$

- **Les écoulements turbulents :**

En ce qui concerne les écoulements turbulents deux techniques sont utilisées :

- Si nous utilisons le modèle bas Reynolds, il suffit d'annuler les variables turbulentes,
- Si nous utilisons l'approche lois de paroi, la contrainte pariétale  $\tau_w$  est calculée en fonction des lois de paroi, et ensuite imposée faiblement en utilisant l'approximation suivante pour les flux hyperboliques et visqueux à la frontière :

$$\oint_{\partial C_i} F \cdot \vec{n} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ p\vec{n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

et

$$\oint_{\partial C_i} G \cdot \vec{n} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_w \vec{t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

Les valeurs  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_t$  et  $\varepsilon_t$  sont déduites des loi de parois.

La phase implicite nécessite la linéarisation des expression précédentes. La linéarisation des flux hyperbolique se fait par une démarche identique à celle utilisée pour les parois glissante. En ce qui concerne la linéarisation des flux pariétaux, nous écrivons

$$G^{n+1}(W) \cdot \vec{n} = G^n(W) \cdot \vec{n} + \frac{\partial G^n(W) \cdot \vec{n}}{\partial W} (W^{n+1} - W^n) \quad (5.80)$$

Le système des équation de Navier-Stokes étant découplé des équations de transport de la turbulence, la contribution implicite pour  $k$  et  $\varepsilon$  est nulle. Il reste seulement une contribution due aux termes  $\frac{\partial \tau_w}{\partial W}$ .

Nous récrivons d'abords :

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \text{sign}(1, u_\tau), \quad (5.81)$$

nous avons alors la linéarisation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_w}{\partial \rho} &= \left( u_\tau^2 + 2\rho u_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \rho} \right) \text{sign}(1, u_\tau) \\ \frac{\partial \tau_w}{\partial \rho \vec{u}} &= \left( 2\rho u_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \rho \vec{u}} \right) \text{sign}(1, u_\tau) \\ \frac{\partial \tau_w}{\partial \rho E} &= \left( 2\rho u_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial \rho E} \right) \text{sign}(1, u_\tau) \end{aligned} \quad (5.82)$$

Pour compléter le système il nous faut calculer  $\frac{\partial u_\tau}{\partial W}$ .

En utilisant la relation

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial W} = \frac{\frac{\partial \left( \frac{\rho(\vec{u} \cdot \vec{t})}{\rho} \right)}{\partial W}}{\frac{\partial \left( \frac{\rho(\vec{u} \cdot \vec{t})}{\rho} \right)}{\partial u_\tau}}, \quad (5.83)$$

nous obtenons

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial \rho} = \frac{\frac{\partial \left( \frac{\rho(\vec{u} \cdot \vec{t})}{\rho} \right)}{\partial \rho}}{\frac{\partial \left( \frac{\rho(\vec{u} \cdot \vec{t})}{\rho} \right)}{\partial u_\tau}} \quad (5.84)$$

$$= \frac{-\frac{1}{\rho} \vec{u} \cdot \vec{t}}{\frac{\partial \vec{u} \cdot \vec{t}}{\partial u_\tau}}$$

or,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u} \cdot \vec{t}}{\partial u_\tau} &= \frac{\partial}{\partial u_\tau} (u_\tau \cdot fr(y^+)) \\ &= fr(y^+) + u_\tau \frac{\partial fr(y^+)}{\partial u_\tau} \\ &= fr(y^+) + u_\tau fr'(y^+) \end{aligned} \quad (5.85)$$

d'où

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial \rho} = \frac{-\frac{1}{\rho} \vec{u} \cdot \vec{t}}{fr(y^+) + u_\tau fr'(y^+)} \quad (5.86)$$

De la même manière nous calculons :

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial \rho \vec{u}} = \frac{\frac{1}{\rho} \vec{t}}{fr(y^+) + u_\tau fr'(y^+)} \quad (5.87)$$

et

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial \rho E} = 0 \quad (5.88)$$

Si nous posons  $C = \frac{1}{fr(y^+) + u_\tau fr'(y^+)}$ , nous avons alors la matrice jacobienne suivante, pour la linéarisation de la contrainte pariétale :

$$\frac{\partial G^n(W) \cdot \vec{n}}{\partial W} = \text{sign}(1, u_\tau) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (u_\tau^2 - 2u_\tau \vec{u} \cdot \vec{t}C) \vec{n}_1 & 2u_\tau \vec{t}C \vec{n}_1 & 0 \\ (u_\tau^2 - 2u_\tau \vec{u} \cdot \vec{t}C) \vec{n}_2 & 2u_\tau \vec{t}C \vec{n}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.89)$$

## 8 Méthodes de résolution des systèmes linéaires

Nous étudions dans cette partie la résolution numérique du  $\delta$ -schéma implicite qui conduit à la résolution d'un système linéaire de la forme

$$A x = b \quad (5.90)$$

dans lequel  $A$  désigne la matrice des flux implicites, ou métrique, et  $b$  désigne la prédiction explicite de la correction  $W^{n+1} - W^n$ .

$A$  est une matrice carrée par blocs, creuse, mais de très grande taille avec  $N$  blocs par lignes et  $N$  blocs par colonne, où  $N$  désigne le nombre de noeuds du maillage. Les lignes et les colonnes de  $A$  désignent les lignes et les colonnes par blocs. Dans cette étude,  $m$  désignera l'ordre des blocs, avec par exemple  $m = 5$  en trois dimensions pour le stockage du vecteur d'état des variables thermodynamiques.

Pour résoudre ce système d'équations, on utilise des méthodes itératives qui permettent de conserver la structure creuse de la matrice, ce qui n'est pas le cas des méthodes directes. Si  $m$  désigne le nombre de voisins qui échangent une information avec un noeud  $i$ , un stockage compact nécessite le stockage de  $m N m^2$  termes alors qu'il en faudrait  $N^2 m^2$  si l'on stockait tous les termes. Le stockage complet est donc impossible pour les maillages employés en 3D (de l'ordre de 50000 noeuds).

### 8.1 Méthode de stockage compact de la métrique

Lorsque nous prenons en compte la structure creuse de la métrique, il est nécessaire d'utiliser une méthode de stockage adaptée. L'encombrement mémoire de la méthode de stockage comprend alors :

- La place nécessaire au stockage des blocs dans la métrique,
- La place nécessaire au stockage des indices de ligne et de colonne de chaque bloc,
- L'information nécessaire pour connaître la position des blocs non nuls d'une même ligne ou même colonne.



La technique de stockage utilisée est une variante de la méthode développée par Dutto [32] pour des blocs de taille constante [44]. Seuls les blocs logiquement non nuls sont stockés, mais sans tenir compte des éléments éventuellement nuls à l'intérieur des blocs. Les blocs logiquement non nuls ont pour support un noeud qui échange une, ou plusieurs, informations avec d'autres noeuds du domaine. Tous ces blocs sont stockés successivement ligne par ligne dans un grand vecteur  $A_k$ . La correspondance univoque entre  $A_k$  et  $A_{ij}$  est stockée dans deux vecteurs auxiliaires :  $IA$  et  $JA$ . Les composantes de  $IA$  sont numérotées de 0 au nombre de noeuds  $N$ , et celles de  $JA$  de 1 à  $IA(N)$ . La donnée contenue à la position  $i$  de  $IA$  est le nombre de blocs non nuls contenus dans les  $i$  premières lignes. La donnée contenue à la position  $IR$  du vecteur  $JA$  est l'indice de la colonne à laquelle appartient le bloc  $IR$ .

Compte tenu de ces définitions, un bloc  $A_{ij}$  logiquement non nul occupe la position  $IR$  si

$$IA(i-1) < IR \leq IA(i), \text{ et } JA(IR) = j$$

D'autre part, on peut localiser un élément  $A_{ij}(k, l)$  de la métrique  $M$  dans le vecteur  $A$  de la façon suivante :

$$\text{adresse}(A_{ij}(k, l)) = (IR - 1)m^2 + (k - 1)m + 1$$

où  $IR$  est le numéro du bloc  $A_{ij}$ .

## 8.2 Méthodes de résolution

Dans cette partie, on présente les méthodes numériques qui permettent de résoudre un système linéaire de la forme (Eq. 5.90). Les problèmes à résoudre étant de grande dimension, il est clair qu'il faut préférer les méthodes itératives aux méthodes directes. En effet, le coût en place mémoire et en temps devient rapidement prohibitif avec l'accroissement de la taille des problèmes à résoudre. Des méthodes classiques, telles que les méthodes de Jacobi ou Gauss-Seidel [69], et des méthodes plus élaborées, telles que les méthodes de gradients conjugués [52, 57] et celles basées sur les espaces de Krylov [37, 83], sont classiquement utilisées.

Nous choisissons d'utiliser dans ce travail, les méthodes de gradients.

Les performances de ces méthodes sont liées à la qualité du préconditionnement du système linéaire à résoudre. Nous présentons dans ce chapitre les méthodes de résolution, ainsi que les techniques permettant de diminuer le temps de calcul, comme le choix du préconditionnement, ou le choix du vecteur initial.

### 8.2.1 Méthodes de type gradients conjugués

Soient  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique définie positive, et  $b \in \mathfrak{R}^n$  un vecteur quelconque. On veut résoudre le système linéaire  $Ax = b$ . Pour cela, on construit la fonctionnelle  $J$  définie par :

$$J(r) = J(r, A^{-1}r) = (Ax, x) - 2(b, x) + (b, A^{-1}b)$$

où  $r = b - Ax$  est le résidu, et  $(.,.)$  désigne le produit scalaire dans  $\mathfrak{R}^n$ . Si  $A$  est une matrice symétrique définie positive, on montre que :

- $J$  est une fonctionnelle quadratique,
- La solution unique de  $Ax = b$  est le minimum de la fonctionnelle  $J$ .

Pour calculer le vecteur solution  $x$ , on construit une méthode de descente qui va permettre de minimiser  $J$ . Si  $x^k$  est le vecteur solution obtenu à la  $k$ -ième itération de l'algorithme, on choisit une direction de descente  $d^k$ , et on cherche à minimiser  $J$ . Cela revient à déterminer  $\alpha$  tel que  $J(x^k + \alpha d^k)$  soit minimum, et on a  $x^{k+1} = x^k + \alpha d^k$ . La méthode du gradient conjugué consiste à choisir  $d^{k+1}$  aussi près que possible de la direction du gradient de  $J$ , qui est égale à  $r^{k+1}$ , mais soumise à la condition supplémentaire  $(d^{k+1}, Ad^k) = 0$ , dite relation de conjugaison et qui justifie le nom de la méthode. Cette condition est satisfaite si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $d^{k+1} = -r^{k+1} + \beta^{k+1}d^k$ ,
- $\beta^{k+1} = - (r^{k+1}, Ad^k) / (d^k, Ad^k)$ .

On construit ainsi une base  $\{d^0, d^1, \dots, d^{N-1}\}$  orthogonale par rapport au produit scalaire défini par  $A$ , et on minimise  $J$  dans chacune de ces directions de descente. Après au maximum  $N$  étapes, on obtient le minimum de  $J$ .

La méthode utilisée est une extension de la méthode des gradients conjugués [52], pour des systèmes non symétriques. Elle est basée sur un algorithme de gradients bi-conjugués (BCG), qui applique la méthode de gradients conjugués pour inverser le système symétrique mais non-défini suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b \\ b \end{vmatrix} \quad (5.91)$$

où  $A$  est une matrice non-symétrique.

Le résidu de la méthode BCG,  $r^n$ , s'exprime comme le produit d'un polynôme  $\psi_n(A)$  de degré  $n$  en  $A$  par le résidu initial  $r^0$ . La méthode BCG peut être accélérée d'un facteur 2, en utilisant l'algorithme de gradients conjugués carrée (CGS). Avec cet algorithme, le résidu est calculé par  $\psi_n^2(A)r^0$  à la place de  $\psi_n(A)r^0$  [31].

L'algorithme CGS s'écrit :

(1) initialisation :

$$\begin{aligned} &\text{pour } x^0 \text{ donné, } r^0 = b - Ax^0, s^0 = r^0 \\ &q^0 = p^{-1} = 0, r^{-1} = 1 \end{aligned}$$

(2) itérations : on calcule successivement

$$\begin{aligned} \varrho^n &= (r^n, s^0) \\ \beta^n &= \varrho^n / \varrho^{n-1} \\ u^n &= r^n + \beta^n q^n \\ p^n &= u^n + \beta^n (q^n + \beta^n p^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^n &= Ap^n \\
\sigma^n &= (v^n, s^0) \\
\alpha^n &= \varrho^n / \sigma^n \\
q^n &= u^n - \alpha^n v^n \\
r^{n+1} &= r^n - \alpha^n A(u^n + q^{n+1}) \\
x^{n+1} &= x^n + \alpha^n (u^n + q^{n+1}) \\
\text{on pose } n &= n + 1 \\
\text{si } \|\text{abs}\| (r^{n+1}) &> \varepsilon \text{ alors (2), sinon fin}
\end{aligned}$$

On ne possède pas de théorie générale sur la convergence de l'algorithme CGS pour des matrices  $A$  quelconques, mais si il converge ce sera en au plus  $N$  itérations.

### 8.2.2 Techniques de préconditionnement

Pour des méthodes de type gradients conjugué, nous montrons que la décroissance du résidu est une fonction inverse du préconditionnement de  $A$  [14]. A partir du système  $Ax = b$ , nous construisons un système équivalent, mais qui admet un nombre de conditionnement plus faible. Puisque nous savons que le meilleur préconditionnement est celui d'une matrice diagonale, on va construire un système dont la matrice est la plus proche possible de la matrice identité. Le système initial  $Ax = b$  est transformé en :

$$L^{-1}AU^{-1}(Ux) = L^{-1}b \quad (5.92)$$

auquel nous appliquons l'algorithme de résolution choisi.

Les techniques de préconditionnement mises en oeuvre sont classiques, et une description assez complète peut être trouvée dans les travaux de Joly [52]. Le choix retenu est celui du préconditionnement SSOR généralisé, avec différentes techniques pour déterminer le coefficient de relaxation.

Ce préconditionnement est préconisé par van Der Vorst [14]. Les matrices  $L$  et  $U$  sont définies par  $L = (l + \Delta) \Delta^{-1}$ , et  $U = (\Delta + u)$ . Où  $l$  est la matrice triangulaire inférieure de  $A$ , et  $u$  la matrice triangulaire supérieure.  $\Delta$  est la matrice diagonale telle que  $\text{diag}(LU) = \text{diag}(A)$ . Les composants de  $\Delta$  sont évaluées par la relation  $\Delta_{ii} = A_{ii} - \sum_{j < i} A_{ij} \Delta_{jj}^{-1} A_{jj}$   $1 \leq i \leq N$ .

#### Préconditionnement de Manteuffel

Le préconditionnement SSOR peut être amélioré dans le cas de matrices très mal conditionnées en introduisant un paramètre  $\sigma$ . Ce paramètre vise à donner plus de poids à la diagonale dans le calcul de  $\Delta$ , ce qui donne :

$$\Delta_{ii} = \sigma A_{ii} - \sum_{j < i} A_{ij} \Delta_{jj}^{-1} A_{jj} \quad 1 \leq i \leq N.$$

### Préconditionnement de Axelsson

Axelsson [13] a proposé une amélioration du preconditionnement SSOR. Il a choisi d'introduire un paramètre de relaxation  $\omega$  tel que :

$$L = \frac{1}{2 - \omega} \left( l + \frac{\Delta}{\omega} \right) \omega \Delta^{-1}$$
$$U = \left( u + \frac{\Delta}{\omega} \right)$$

Le choix de  $\omega$  est toujours un problème ouvert dans le cas général. Miellou et al. [51] ont montré qu'il existait dans certains cas un paramètre optimal pour lequel la convergence était la plus rapide. Leurs résultats montrent que ce paramètre est proche de celui donné par la théorie de Young pour la méthode de relaxation [30].

#### 8.2.3 Choix d'un vecteur initial

Pour obtenir une convergence rapide, il faut initialiser les méthodes de résolution des systèmes linéaires avec un vecteur relativement proche du vecteur solution final. Le vecteur  $x^0 = D^{-1}b$  a été choisi.

#### 8.2.4 Résultat numérique

Sur la figure 5.3 nous comparons l'historique de la convergence des méthodes implicite et explicite de la simulation d'écoulement turbulent de couche limite sur plaque plane supersonique (cas test 3.2) par le modèle CHIEN. Le temps CPU y est divisé par 10 en implicite. Nous constatons donc sur ce cas test la performance de l'algorithme implicite sur l'algorithme explicite (méthode de Runge-Kutta d'ordre 4).

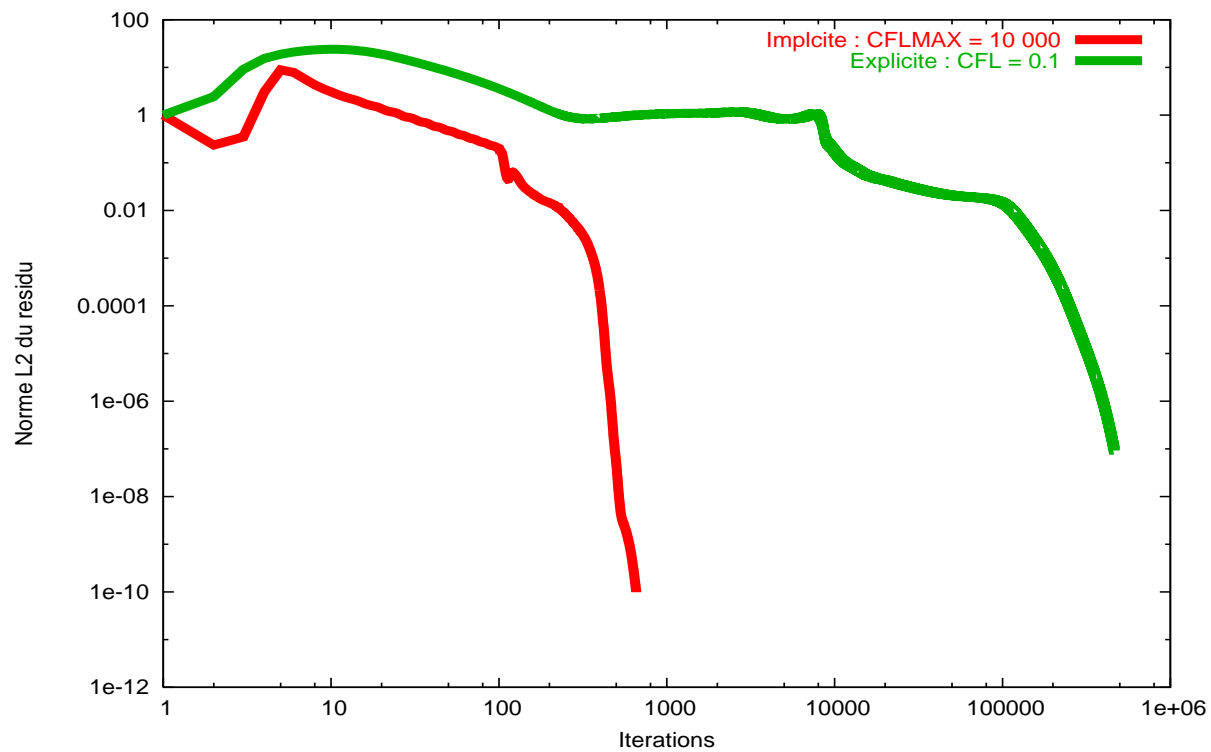


FIG. 5.3 – Comparaison de l'historique de convergence, plaque plane supersonique (cas test 3.2).

# Conclusions et perspectives

Cette thèse avait pour objectif le développement et l’extension de modèles thermiques pour la couche limite en régime super- et hypersonique sur parois isothermes. L’objectif était de mettre en place une réduction mathématique des modèles de type  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  et de l’appliquer à des problèmes typiques de rentrée atmosphérique.

Dans un premier temps, nous avons présenté les équations de base de la modélisation de la turbulence, dans un cadre compressible. Ainsi, nous avons introduit les notions de diffusivité dynamique de la turbulence  $\mu_t$  et de diffusivité thermique de la turbulence  $\lambda_t$ . La diffusivité dynamique de la turbulence  $\mu_t$  est déterminée par la résolution de deux équations de transport basées sur les fluctuations de vitesses. La diffusivité thermique de la turbulence  $\lambda_t$  est, quant à elle, déterminée par la résolution de deux équations de transport supplémentaires basées sur les fluctuations d’enthalpies.

Nous avons alors mené une étude théorique et pratique sur les modèles thermiques à quatre équations de type  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  bas-Reynolds. Cette étude a mis en évidence la nécessité de ne prendre en compte l’information thermique que dans la zone “bas Reynolds”, pour une meilleure évaluation des flux à la paroi. C’est dans cette optique que nous avons ensuite continué à modéliser la zone “haut Reynolds” avec un modèle de type  $k - \varepsilon$ , c’est-à-dire en utilisant l’analogie de Reynolds (nombre de Prandtl turbulent constant).

Malgré la performance de cette technique, nous comprenons qu’elle engendre un coût numérique énorme, directement proportionnel au nombre de mailles et à la taille du maillage. En plus, n’oublions pas que le pas de temps de calcul dépend quadratiquement de la taille des mailles. Il fallait donc développer des outils performants et efficaces pour une utilisation systématique. La méthode des lois de paroi apparaît comme le meilleur moyen pour parvenir à diminuer de manière drastique ce coût numérique, sans pour autant perdre la qualité de la physique de la solution.

Nous nous sommes rendus compte que l’extension des lois de paroi nécessitait de nouvelles conditions aux limites de type thermique. Alors, par analogie au travail effectué pour les conditions aux limites de type dynamique, nous avons étudié les différentes étapes permettant l’extension de la technique bi-couche pour la prise en compte de la turbulence thermique. Nous avons proposé alors de nouvelles échelles caractéristiques de la turbulence thermique : deux échelles de longueurs ( $L_\lambda, L_{\varepsilon_h}$ ) et une échelle de vitesse ( $\Delta u_h$ ).

Nous en avons déduit de nouvelles lois de paroi “thermiques”.

Une description du traitement numérique du solveur a été ensuite présentée. Une attention toute particulière a été prortée sur les modifications à adopter afin d’adapter le code aux contraintes rencontrées lors de la modélisation thermique de la turbulence. En particulier, il a été nécessaire d’impliciter la méthode numérique, d’introduire des effets de gaz réel (lois d’état, solveur de Roe modifié, ...) et de dimensionner le code.

Les différentes propositions de modèles ont été testées sur des cas pratiques faisant intervenir une large gamme de phénomènes complexes d’écoulements : zone pariétales (couche limite), zones de recirculations, interaction onde de choc / couche limite.

Nous avons constaté que les différentes extensions thermiques, apportées aux techniques classiques bi-couche et lois de parois amélioreraient l’évaluation du flux de chaleur à la paroi, sans détériorer la modélisation dynamique.

Pour clôre ce travail, plusieurs conclusions peuvent être maintenant dégagées. La plus importante est évidemment la confirmation de l’idée de base : *il est indispensable de faire gouverner chaque mécanisme de transport par ses propres échelles ...*

Les perspectives de ce travail sont les suivantes :

En premier lieu, il faudra faire une étude paramétrique de la puissance de  $m$  à l’aide d’une série de cas tests, ce qui permettra de palier le manque de résultats expérimentaux. Cette étude paramétrique pourra aussi s’appuyer sur des calculs de DNS.

En second lieu, combinée à une linéarisation de la loi d’état, une application originale de cette technique, sera la modélisation du terme de “production enthalpique”. En effet, ce terme de production joue un rôle important dans des applications aussi diverses que les couches de mélanges thermique soumises à une accélération, que les interactions choc/zone de gradient thermique, ...

Enfin, la base de données pour lois de parois sur parois rugueuses initialement développée par Puigt [40] est actuellement en cours d’extension pour la prise en compte des effets thermiques de l’écoulement : loi d’état de type gaz réel et modélisation thermique de la turbulence. Ce travail se fait actuellement en collaboration avec le CESTA [39].

# Bibliographie

- [1] B. E. Launder. *Second Moment Closure : Methodology and Practice*. Proceedings of the Ecole d'Eté d'Analyse Numérique - Modélisation Numérique de la Turbulence, 1982.
- [2] D. Vandromme. *Contribution à la modélisation et à la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable*. PhD thesis, Université de Lille, 1983.
- [3] J. Delery and M.C. Coet. Experiments on shock-wave/boundary-layer interactions produced by two-dimensional ramps and three-dimensional obstacles. *Prod. of Workshop on Hypersonic Flows for Reentry Problems, Antibes 22-26, Wiley Ed.*, 25 :1241–1261, 1990.
- [4] V. C. Patel, W. Rodi, and G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low reynolds number flows : A review. *AIAA Journal*, 23(9) :1308–1319, 1984.
- [5] W. M. Kays. Turbulent prandtl numbers - where are we? *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, 116 :284–295, 1947.
- [6] Y. Iritani, N. Kasagi, and M. Hirata. Heat transfer mechanism and associated turbulence structure in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *Turbulent Shear Flows*, 3 :223–234, 1983.
- [7] Y. Nagano, M. Hishida, and M. Tagawa . Turbulent heat transport process in the thermal entrance region of a pipe. *Proceedings, 22nd National Heat Transfer Symposium of Japan*, pages 232–234, 1985.
- [8] A. Favre, L. S. G. Kovasnay, R. Dumas, J. Gaviglio, and M. Coantic. *La turbulence en mécanique des fluides*. Gauthier Villars ED., 1976.
- [9] A. Harten and J. M. Hyman . *J. Comp.Phys.*, 50 :253–269, 1983.
- [10] A. J. Reynolds. The prediction of turbulent prandtl and schmidt numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18 :1055–1069, 1975.
- [11] A. P. Colburn. *AICHE Journal*, 29 :174, 1933.
- [12] A. Y. Le Roux. PhD thesis, Université de Rennes, 1974.
- [13] O. Axelsson. A generalized ssor method. *j-BIT*, 13, 1972.
- [14] O. Axelsson. A class of iterative methods for finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineerin*, 9 :132–137, 1976.



- [15] B. D. Wu and W. Wu and S. Xi. An anisotropic two-equation heat transfer model for turbulent heat transport under arbitrary wall thermal condition. *Num. Heat Transfer, Part B*, 38 :389–404, 2000.
- [16] B. Dubroca. An extension of roe’s approximate riemann solver for the approximation of navier-stokes equations in chemical non equilibrium cases. In *10th Conf. on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*. 1990.
- [17] B. E. Launder. *Turbulence : Heat and Mass Transport*. Springer-Verlag, 1976.
- [18] B. Mohammadi. Complex turbulent flows computations with a two-layer approach. *Inter. J. Num. Meth. Fluids*, 15 :747–771, 1992.
- [19] B. Mohammadi. Cfd with nsc2ke : an user guide. Technical Report RT-164, INRIA, 1994.
- [20] B. Mohammadi and G. Puigt. Generalized wall functions for high-speed flows over adiabatic and isothermal walls. *Inter. Jour. of Comp. Fluid Dynamics*, 14 :20–41, 2000.
- [21] B. Mohammadi and G. Puigt. Generalized wall functions for rough walls based on data assimilation. *Inter. Jour. of Comp. Fluid Dynamics*, 17(6) :453–465, 2003.
- [22] B. Mohammadi and J. H. Saiac. Turbulent compressible axisymmetric flows computations with the  $k - \varepsilon$  model. *Comp. Fluid Dyn.*, 2(1) :115–133, 1993.
- [23] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*. Wiley, 1994.
- [24] B. Mohammadi and O. Pironneau. Compressibility corrections and two-layer  $k - \varepsilon$  model for hypersonic turbulent flows on unstructured grid. *Comp. Fluid Dyn.*, 4 :285–306, 1995.
- [25] B. S. Baldwin and H. Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper*, 78(257), 1978.
- [26] C. B. Hwang and C. A. Lin . A low reynolds number two-equation  $k_\theta - \tilde{\varepsilon}_\theta$  model to predict thermal fields. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 42 :3217–3320, 1999.
- [27] C. F. Hansen. Approximations for the thermodynamic and transport properties of high-temperature air. Technical Report R-50, NASA, 1958.
- [28] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows, Fundamentals of numerical discretization, Vol. 1*. John Wiley and sons, 1989.
- [29] S.R. Chakravarthy. A new class of high accuracy tvd schemes for hyperbolic conservation law. *AIAA Paper*, (85-0363), 1985.
- [30] D.M. Youn. A bound on the optimum relaxation factor for the successive overrelaxation method. *Numer. Math*, 16 :408–413, 191.
- [31] D.M. Young and K.C. Jea. Generalized conjugate-gradient acceleration of non symmetrizable iterative methods. *Linear Algebra and its applications*, 34 :159–194, 1980.
- [32] L.C. Dutto. PhD thesis.

- [33] E. Goncalvez and R. Houdeville. Reassessment of the wall function approach for rans computations. *Aerosp. Sci. Technol.*, 5 :1–14, 2001.
- [34] E. R. Van Driest. Turbulent boundary layers in compressible fluid. *J. of Aeronautics Science*, 18(145), 1951.
- [35] E. V. Shishov, P. S. Roganov , S. I. Grabarnik, and V. P. Zabolotsky . Heat transfer in the recirculating region formed by backward-facing step. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 31 :1557–1562, 1988.
- [36] F. Grasso and C. Speziale. Supersonic flow computations by two equations modelling. *AIAA Paper*, 89(1951), 1989.
- [37] F. Shakib, T.J.R. Hugues, and Z. Johan. A multi-element group preconditioned gmres algorithm for non symmetric systems arising in finite element analysis. *Comp. Meth. in Appl. and Eng*, 75, 1989.
- [38] F. Fezoui. Résolution des équations d’euler par un schéma de van leer en éléments finis. Technical Report 358, INRIA, 1985.
- [39] O. Frayssinet. Lois de paroi pour écoulements hypersoniques sur parois rugueuses. Technical report, Mines de Nancy, 2004.
- [40] G. Puigt. *Modélisation, étude mathématique et validation de lois de paroi pour les écoulements hypersoniques our parois lisses et rugueuses*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2001.
- [41] H. C. Chen and V. C. Patel. Near-wall turbulence models for complex flows including separation. *AIAA J.*, 26(6) :641–648, 1988.
- [42] H. C. Yee. Technical Report 81265, NASA Technical Memo, 1981.
- [43] H. Hattori, Y. Nagano, and M. Tagawa . Turbulent heat transfer under various thermal conditions with two-equation models. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, 2 :43–52, 1993.
- [44] L. Hallo. *Etude de schémas numériques pour la simulation des écoulements tridimensionnels turbulents compressibles réactifs*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, 1995.
- [45] J. Boussinesq. *Théorie de l’écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section*, volume I-II. Gauthier-Villars, 1897.
- [46] J. Cousteix. *Turbulence et couche limite*. Cepadues Ed., 1990.
- [47] J. Kim and P. Moin. Transport of passive scalars in a turbulent channel flow. *Turbulent Shear Flows*, 6 :85–86, 1989.
- [48] J. L. Lumley. Computational modeling of turbulent flows. *Advances in Applied Mechanics*, 18 :123–176, 1978.
- [49] J. P. Morreeuw. imulation numérique en aérodynamique hypersonique : prise en compte de la chimie de l’air à l’équilibre au moyen d’une équation d’état “ vectorisée “. Technical report, Revue scientifique et technique de la défense, DGA, 1990.

- [50] J. Steger and R.F. Warming. Flux vector splitting for the invicid gas dynamics with applications to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, 40(2) :263–293, 1981.
- [51] J.C Miellou, P. Spitteri, and D. Evans. Préconditionnement ssor : optimisation du conditionnement obtenu en fonction du paramètre de relaxation. *Int. J. Comp. Math.*, 41 :189–200, 1992.
- [52] P. Joly. Méthodes de gradients conjugués. Technical Report 84016, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI, 1984.
- [53] K. Horiuti. Assessment of two-equation models of turbulent passive-scalar diffusion in channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 283 :405–433, 1992.
- [54] K. Y. Chien . Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-reynolds-number turbulence model. *AIAA Journal*, 20 :33–38, 1982.
- [55] L. Hallo, C. Le Ribault, and M. Buffat. An implicite mixed finite-volume/finite-element method for solving 3d turbulent compressible flows. *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 25 :1241–1261, 1997.
- [56] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique : Mécanique des fluides*. Mir Ed, 1971.
- [57] M. Buffat. *Etude de la simulation numérique par une méthode d'éléments finis des écoulements internes subsoniques instationnaires bi et tridimensionnels*. PhD thesis, Université de Lyon I, 1991.
- [58] M. El Hayek. *Transfert de chaleur par convection en régime turbulent : Aspect physiques et numérique*. PhD thesis, Faculté Polytechnique de Mons, 1996-1997.
- [59] M. Jisha and H. B. Rieke . About the prediction of turbulent prandtl an schmidt numbers from modeled transport equations. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 22 :1547–1555, 1979.
- [60] M. S. Youssef, Y. Nagano, and M. Tagawa . A two-equation heat transfer model for predicting turbulent thermal fields under arbitrary wall thermal conditions. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 35 :3095–3104, 1992.
- [61] M.R. Wool. Summary of experimental and analytical results. Technical Report SAMSO-TR-74-86, Passive Nosetip Technology (PANT) Program, 1975.
- [62] N. Bagheri, C. J. Strataridakis, and B. R. White . Measurements of turbulent boundary layer prandtls numbers and space-time temperature correlations. *AIAA Journal*, 30 :35–42, 1992.
- [63] N.T. H. Nguyen-Bui. *Physique, modélisation et simulation des écoulements compressibles turbulents d'arrière-corps*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1999.
- [64] O. Reynolds. On the extent and action of the heating surface of steam boilers. *Scientific Papers of O. Reynolds*, 1 :81–85, 1901.
- [65] C. Olivier. *Méthodes numériques d'écoulements visqueux compressibles laminaires et turbulents*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1992.

- [66] P. Chassaing. *Mécanique des fluides*. Cepadues Ed., 1995.
- [67] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides*. Cepadues Ed., 2000.
- [68] P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameters vectors and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 43, 1981.
- [69] P. Lascaux and R. Theodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Masson, 1987.
- [70] M. Papin. *Contribution à la modélisation d'écoulement hypersoniques particulières. Etude et validation d'un modèle diphasique discret*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 2005.
- [71] R. A. Antonia and J. Kim. Turbulent prandtl number in the near-wall region of a turbulent channel flow. *Journal of Heat Transfert*, 34 :1905–1908, 1991.
- [72] A. J. Reynolds. *Turbulent Flows in Engineering*. John Wiley & Sons, London (UK), 1974.
- [73] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. In *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, volume 186 of A, pages 123–164. 1894.
- [74] S. Corsin. Heat transfer in isotropic turbulence. *Journal of Applied Physics*, 23 :113–118, 1952.
- [75] S. F. Davis. Tvd finite difference scheme and artificial viscosity. Technical Report 84-20, ICASE, 1984.
- [76] S. Schülen . Documentation of two-dimensional impinging scock/turbulent boundary layer interaction flows. Technical Report 1 B 223-96 A 49, DLR, 1996.
- [77] V. S. Arpaci and P. S. Larsen. *Convection Heat Transfer*. Prentice-Hall, New Jersey (USA, 1984.
- [78] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. I. volume 18 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [79] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *J. Comput. Phys.*, 14 :361–370, 1974.
- [80] Y. Nagano. Modelling heat transfer in near-wall flows. *Closure Strategies For Modelling Turbulent And Transitional Flows*, pages 6–17, 1999.
- [81] Y. Nagano and C. Kim. A two-equation model for heat transport in wall turbulent shear flows. *ASME, J. Heat Mass Transfer*, 33 :2387–2395, 1988.
- [82] Y. Nagano, M. Tagawa, and T. Tsuji. An improved heat transfer model for wall turbulent shear flows. *ASME/JSME*, 3 :233–240, 1991.
- [83] Y. Saad and M.H. Schultz. Gmres : a generalized minimum residual algorithm for solving non symmetric linear system. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 7(3), 1986.
- [84] Z. Warhaft and J. L. Lumley. An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence. *J. of Fluis Mechanics*, 88 :559–584, 1978.

Nous sommes intéressés par une modélisation fine des échanges thermiques dans la couche limite turbulente et à la paroi car le flux thermique est un paramètre dimensionnant des corps de rentrée atmosphérique en régime hypersonique. Jusqu'à présent, les phénomènes de transport de la chaleur par la turbulence étaient supposés régis par les mêmes mécanismes que ceux pour la quantité de mouvement : c'est l'analogie bien connue de Reynolds. Ainsi, les modèles de turbulence ne prennent généralement en compte que les échelles de turbulence dynamique. Les hypothèses adoptées dans ce cas sont restrictives (écoulement incompressible, plaque plane, ...).

Dans cette thèse, nous mettons en œuvre une modélisation propre pour les phénomènes de turbulence thermique, indépendante de celle pour les phénomènes dynamiques. Le couplage entre les champs moyens et les échelles de turbulence passe ainsi par le calcul de  $\mu_t$  et de  $\lambda_t$ , ces 2 quantités étant elles-même évaluées à l'aide de modèles à 4 équations de type  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$ . Une étude théorique et pratique, basée sur une analyse asymptotique des modèles "bas-Reynolds" à 4 équations existants dans la littérature, nous a permis de développer de nouveaux modèles "thermiques" de type bi-couche et lois de paroi. Ces modèles sont construits à partir de nouvelles échelles de longueurs caractéristiques de la turbulence thermique. Ainsi, chaque phénomène de transport a ses propres échelles caractéristiques. De plus, une utilisation systématique pour des écoulements super- et hypersoniques autour d'objets complexes peut être envisagée.

Ces modèles ont été testés avec une version modifiée du code NSC2KE et confrontés à des expériences. Ils ont montré une amélioration de la prédiction du flux de chaleur à la paroi.

---

**Mots clé :** Turbulence, Transfert thermique, Technique bi-couche, Lois de paroi.

---

We are interested in the modeling of heat transfer in the turbulent boundary layer and at the wall : heat flux is a dimensioning parameter of the atmospheric re-entry vehicle at hypersonic regime. Up to now, the phenomena of transport of heat by turbulence were supposed to be governed by the same mechanisms as those for the momentum : it is the well-known Reynolds analogy. Thus, the models of turbulence generally take into account only the dynamic turbulent scales. The assumptions adopted in this case are restrictive (incompressible flow, flat plate...).

In this thesis, we implement a thermal modeling of turbulence. The coupling between the averaged fields and the turbulent scales is done by the calculation of  $\mu_t$  and  $\lambda_t$ , these 2 quantities being evaluated using a  $k - \varepsilon / k_h - \varepsilon_h$  4-equation model. A theoretical and practical study, based on an asymptotic analysis of the existing 4 equations low-Reynolds models in the literature, enabled us to develop new thermal models based on two-layer technique and wall functions. These models are built with new thermal turbulent scales. Thus, each phenomenon of transport has its own characteristic scales. Moreover, one systematic use for super- and hypersonic flows around complex objects can be considered. These models were tested with a modified version of the computational fluid dynamic software NSC2KE and were confronted with experiments. They showed an improvement of the prediction of the heat transfer at the wall.