



**HAL**  
open science

# Contribution à l'identification des systèmes à retards et d'une classe de systèmes hybrides

Kaouther Ibn Taarit

► **To cite this version:**

Kaouther Ibn Taarit. Contribution à l'identification des systèmes à retards et d'une classe de systèmes hybrides. Autre. Ecole Centrale de Lille; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2010. Français. NNT : 2010ECLI0023 . tel-00587336v2

**HAL Id: tel-00587336**

**<https://theses.hal.science/tel-00587336v2>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N d'ordre :130

**ECOLE CENTRALE DE LILLE  
UNIVERSITE DE TUNIS EL MANAR  
ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS**

**THESE**

Présentée en vue d'obtenir le grade de

**DOCTEUR**

en

**Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle**

par

**Kaouther IBN TAARIT**

Ingénieur - ENIT

**Doctorat délivré conjointement par l'Ecole Centrale de Lille  
et l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis**

Titre de la thèse :

**Contribution à l'identification des systèmes  
à retards et d'une classe de systèmes  
hybrides**

**Soutenue le 17 décembre 2010 devant le jury d'examen**

<b>Président :</b>	EL FEKIH Henda	Pr., Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
<b>Rapporteur :</b>	MBOUP Mamadou	Pr., Université de Reims-Champagne Ardenne
<b>Rapporteur :</b>	BEN ABDENNOUR Ridha	Pr., Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
<b>Directeur :</b>	RICHARD Jean-Pierre	Pr., Ecole Centrale de Lille
<b>Directeur :</b>	KSOURI Mekki	Pr., Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
<b>Co-Directeur :</b>	BELKOURA Lotfi	HdR., Université Lille1, Sciences et Technologies

Thèse préparée dans le laboratoire LAGIS de l'Ecole Centrale de Lille et au LACS de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, sous la direction des messieurs J-P Richard, M. Ksouri et L. Belkoura



*A la mémoire de mes grands parents,  
A toute ma famille,  
A tous ceux qui m'aiment,  
Et à toi.*



# REMERCIEMENTS

C'est avec un grand plaisir que je réserve cette page, en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Mlle. Henda El FEKIH, Professeur à l'Ecole Nationale d'ingénieurs de Tunis, pour m'avoir fait le grand honneur d'accepter de présider le jury d'examen.

Je tiens à témoigner ma sincère reconnaissance à M. Mamadou MBOUP, Professeur à l'Université de Reims-Champagne Ardenne et M. Ridha BEN ABDENNOUR, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès pour avoir accepté de rapporter sur ce manuscrit et d'avoir examiné minutieusement ce travail.

Je remercie M. Jean-Pierre RICHARD, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, de m'avoir accepté dans son équipe et pour sa confiance, sa disponibilité et son soutien continuels durant toute la période d'encadrement. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour ses précieux conseils et toute l'aide qu'il m'a procurée durant l'élaboration de ce travail.

Je remercie M. Mekki KSOURI, Professeur à l'Ecole Nationale d'ingénieurs de Tunis, pour son encouragement incessant, pour son soutien dans les moments de doute et pour s'être toujours inquiété de mon avenir. Je tiens aussi à lui exprimer mon admiration pour sa compétence, son caractère modeste et aimable.

Ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans la contribution de M. Lotfi BELKOURA, Maître de Conférences à l'Université Lille1, Sciences et Technologies. Je tiens à lui exprimer ma reconnaissance pour son aide précieuse durant mon travail. Il m'a toujours conseillé, me faisant profiter ainsi de ses compétences théoriques et de son expérience.

J'aimerais exprimer aussi toute ma gratitude envers tous les membres du LAGIS et de LACS pour leur sympathie et leur soutien. J'adresse mes remerciements aux doctorants qui sont devenus plus que des collègues de travail. Je n'oublie pas non plus de remercier tous mes enseignants pour leurs efforts et la richesse de leurs interventions durant mes études universitaires. Je remercie, enfin, toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Identification des systèmes à retards et d'une classe de systèmes hybrides : un état de l'art</b>	<b>17</b>
1.1	Introduction . . . . .	18
1.2	Principe de l'identification . . . . .	18
1.3	Intérêt de l'identification des systèmes à temps continu . . . . .	20
1.4	Solutions au problème de dérivation posé par les modèles à temps continu . . . . .	24
1.4.1	Les fonctions modulatrices . . . . .	25
1.4.2	Les filtres linéaires . . . . .	26
1.4.3	Les méthodes intégrales . . . . .	28
1.5	Classification des méthodes d'identification à temps continu . . . . .	30
1.5.1	Les méthodes du gradient . . . . .	31
1.5.2	Les méthodes des moindres carrés . . . . .	32
1.5.3	Les méthodes de variables instrumentales . . . . .	33
1.6	Identification des systèmes à retards . . . . .	33
1.6.1	Intérêt de l'identification des systèmes à retards . . . . .	33
1.6.2	Identifiabilité . . . . .	35
1.6.3	Classification des méthodes d'estimation du retard . . . . .	39
1.7	Systèmes dynamiques hybrides . . . . .	59
1.7.1	Présentation . . . . .	59
1.7.2	Principales classes des phénomènes hybrides : classification de Branicky . . . . .	60
1.7.3	Systèmes à commutations . . . . .	62
1.7.4	Systèmes à impulsions . . . . .	63
1.7.5	Identification . . . . .	64
1.8	Conclusion . . . . .	67
<b>2</b>	<b>Outils mathématiques : distributions et entrées structurées</b>	<b>69</b>
2.1	Motivations . . . . .	69
2.2	Distributions . . . . .	70
2.2.1	Notations . . . . .	70
2.2.2	Ordre d'une distribution . . . . .	71
2.2.3	Support d'une distribution . . . . .	71
2.2.4	Multiplication . . . . .	72



2.2.5	Convolution . . . . .	72
2.2.6	Multiplication par $t^n$ , $e^{at}$ et convolution . . . . .	73
2.3	Entrées structurées . . . . .	74
2.4	Conclusion . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Identification algébrique des systèmes linéaires et à retards</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	77
3.2	Cadre de l'étude . . . . .	78
3.3	Procédure générale d'identification . . . . .	79
3.4	Système linéaire du premier ordre à retard . . . . .	80
3.4.1	Formulation du problème d'identification . . . . .	80
3.4.2	Etude en simulation . . . . .	82
3.4.3	Robustesse . . . . .	84
3.5	Système avec succession de retards . . . . .	85
3.5.1	Formulation du problème . . . . .	85
3.5.2	Etude en simulation . . . . .	86
3.6	Problème d'identification conjointe et formulation en terme de problème de valeurs propres généralisées . . . . .	87
3.6.1	Formulation du problème . . . . .	87
3.6.2	Etude en simulation . . . . .	88
3.6.3	Résolution du problème spectral . . . . .	89
3.7	Application au procédé d'asservissement de température . . . . .	91
3.7.1	Description du système . . . . .	91
3.7.2	Identification . . . . .	92
3.8	Conclusion . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Identification algébrique pour une classe de systèmes hybrides</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Systèmes impulsifs . . . . .	96
4.2.1	Présentation des systèmes impulsifs . . . . .	96
4.2.2	Exemples de systèmes impulsifs . . . . .	96
4.2.3	Phénomène de Zénon . . . . .	99
4.3	Formulation du problème d'estimation . . . . .	99
4.3.1	Robustesse et identifiabilité . . . . .	100
4.3.2	Identification des instants de commutation . . . . .	101
4.3.3	Identification des paramètres indépendamment des instants de commutation . . . . .	102
4.3.4	Problème de valeurs propres généralisées . . . . .	102
4.4	Application au pendule simple avec frottement . . . . .	103
4.4.1	Identification des instants de commutation . . . . .	104
4.4.2	Identification des paramètres indépendamment des instants de commutation . . . . .	105
4.4.3	Identification simultanée des instants de commutation et des paramètres . . . . .	106
4.4.4	Critère de sélection . . . . .	108

## TABLE DES MATIÈRES

4.5	Conclusion . . . . .	110
<b>A</b>	<b>Annexe A :</b>	
	<b>Outils mathématiques pour l'identification algébrique :</b>	
	<b>Les distributions</b>	<b>115</b>
A.1	Formalisme mathématique . . . . .	116
A.1.1	Espace vectoriel $\mathcal{D}$ . . . . .	116
A.1.2	Distributions . . . . .	117
A.1.3	Opérations sur les distributions . . . . .	122
A.1.4	Convolution . . . . .	127
A.2	Distributions et systèmes dynamiques . . . . .	131
A.2.1	Algèbre de convolution . . . . .	132
A.2.2	Équations différentielles . . . . .	132
<b>B</b>	<b>Annexe B :</b>	
	<b>Liste des publications</b>	<b>137</b>

*TABLE DES MATIÈRES*

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce travail de doctorat a été préparé dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'École Centrale de Lille, au sein de l'équipe SyNeR<sup>1</sup> (Systèmes Non linéaires et à Retards) du laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS, CNRS FRE 3033)<sup>2</sup> et l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, au sein de l'unité de recherche Analyse et Commande des Systèmes (ACS)<sup>3</sup>. Mon travail de recherche s'inscrit dans le cadre du projet ALIEN<sup>4</sup> (ALgèbre pour Identification et Estimation Numériques) soutenu par l'INRIA (Institut national de recherche en informatique et automatique).

Comme le suggère le titre de ce mémoire, l'enjeu de ce travail de recherche est double. Il considère, d'une part, l'identification des systèmes différentiels à retards. Ici, le cadre est essentiellement linéaire et stationnaire, au moins en ce qui concerne la façon dont interviennent les paramètres à identifier. D'autre part, il développe une nouvelle technique d'identification et d'estimation des instants de commutation d'une certaine classe de systèmes hybrides appelés systèmes "impulsifs". Cette introduction sera divisée en deux parties afin de motiver l'ensemble de notre étude et d'appréhender au mieux la problématique.

Cependant, il faut dès à présent remarquer que ces deux classes de systèmes, apparemment distinctes, seront traitées au moyen des mêmes outils, d'inspiration algébrique<sup>5</sup>, qui sont ceux développés dans le cadre du projet ALIEN selon une approche initiée par Fliess et Sira-Ramirez [Fliess and Sira-Ramirez, 2003]. Leur caractéristique est de conduire à des algorithmes rapides, de faible complexité : les solutions sont données par des formules explicites, avec une mise en œuvre simple, utilisant des outils de l'analyse numérique classique. Contrairement aux méthodes usuelles, relevant pour la plupart de la statistique asymptotique, les estimateurs développés ici sont "non asymptotiques". Ceci permet de viser des applications en temps réel (estimation en ligne), par opposition à un traitement qui aurait lieu en différé, après l'expérience.

---

1. <http://syner.free.fr/>

2. <http://lagis.ec-lille.fr/>

3. <http://www.enit.rnu.tn/>

4. <http://www.inria.fr/recherche/equipes/alien.fr.html>

5. Calcul opérationnel, algèbre différentielle ou, comme dans ce travail, théorie des distributions.

## Systèmes à retards

L'étude des systèmes à retards a été l'objet de nombreux travaux en automatique durant ces dernières décennies. Ces systèmes, qui portent aussi le nom de systèmes héréditaires car ils ne sont pas réductibles à une expression d'état instantanée, sont décrits par des équations différentielles à retards, qui appartiennent à la classe des équations différentielles fonctionnelles [Kolmanovskii and Myshkis, 1999a, Kolmanovskii and Myshkis, 1999b, Balachandran et al., 2009]. Elles expriment une relation entre une fonction vectorielle et ses dérivées pour des valeurs présentes et passées de son argument, qui représente dans notre cas le temps, sous la forme [Dambrine, 1994] :

$$f(t, t', x(t), \dot{x}(t), x(t'), \dot{x}(t')) = 0, \quad t' < t, \quad (1.1)$$

où  $f$  est une fonctionnelle et  $x$  est une fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  caractérisant l'évolution du système et qui, considérée sur un certain intervalle du temps, constituera l'état (fonctionnel) du système.

Même si l'étude des systèmes à retard date de près d'un siècle, ce domaine reste toujours l'objet d'une recherche très active, comme le montrent plusieurs monographies qui lui ont été consacrées : on peut citer [Malek-Zavarei and Jamshidi, 1987, Gorecki, 1989, Niculescu, 2001, Gu et al., 2003, Niculescu and Gu, 2004, Zhong, 2006, Chiasson and Loiseau, 2007, Balachandran et al., 2009, Atay, 2010]. Parmi les articles de synthèse, on peut également citer [Watanabe et al., 1996, Conte and Perdon, 1998, Richard, 1998, Kolmanovskii et al., 1999, Richard, 2000, Carvalho and Nussenzveig, 2002, Fridman and Shaked, 2003, Richard, 2003, Loiseau et al., 2009]. Les systèmes à retards sont présents dans des domaines très variés et la compréhension des processus qui régissent leur dynamique est un point fondamental de recherche, notamment pour améliorer leur commande. D'un point de vue pragmatique, tous les processus physiques comportent des retards, même s'ils peuvent éventuellement être négligés face aux autres dynamiques du processus. Ces retards interviennent dès que le procédé comporte des phénomènes de transport (mélanges chimiques, tapis roulants...), des phénomènes de transmission d'information, des acquisitions de mesures, etc. Les ouvrages [Malek-Zavarei and Jamshidi, 1987, Kolmanovskii and Myshkis, 1999b, Niculescu, 2001, Gu et al., 2003, Zhong, 2006, Chiasson and Loiseau, 2007, Loiseau et al., 2009, Atay, 2010] donnent des exemples de systèmes à retards en biologie, chimie, économie, physique, dynamique des populations et techniques de l'ingénieur.

De plus, en sciences de l'ingénieur, même si un processus à réguler ne contient pas de retards intrinsèques, des retards peuvent apparaître dans la boucle de commande par l'intermédiaire des temps de réaction des capteurs ou des actionneurs, des temps de transmission des informations (réseaux) ou des temps de calcul [Seuret, 2006, Hespanha et al., 2007, Richard and Divoux, 2007, Zampieri, 2008]. Ainsi, ils sont fortement présents dans les domaines stimulants de la technologie de l'information et de la communication. On peut citer [Bushnell, 2001] pour la stabilité des systèmes de commande en réseau, [Mascolo, 1999, Bushnell, 2001, Abdallah and Chiasson, 2001] sur les réseaux de commande à haute vitesse, [Niemeyer, 1996, Niemeyer and Slotine, 1998] pour les systèmes téléopérés.

Dans certains cas, les retards se révèlent largement inférieurs aux constantes du

temps du système et aux dynamiques qui en sont attendues après asservissement : ils peuvent être alors négligés dans la modélisation. En revanche, si les retards sont négligés à tort, ils peuvent remettre en question toute la synthèse de commande en boucle : leur présence dégrade les performances attendues et peut même conduire à une déstabilisation. Dans tous les cas, l'identification du retard est une tâche indispensable : soit pour choisir de les négliger, soit pour construire une loi de commande adéquate. Pourtant, comme montré dans [Richard, 2003], l'identification en ligne des systèmes à retards représente encore un problème ouvert.

Dans la littérature, comme nous le verrons, plusieurs travaux se sont penchés sur l'identification des systèmes à retards. Jusqu'à récemment, les résultats les plus significatifs avaient été obtenus par des approches essentiellement asymptotiques, au sens où la solution est obtenue après convergence d'une série récursive, menant à une mise en œuvre complexe et assez consommatrice en temps (voir Chapitre 2).

C'est ainsi que l'identification en ligne (en temps réel) du retard est restée un problème ouvert jusqu'aux récents travaux menés dans [Belkoura et al., 2006, Belkoura and Richard, 2006, Belkoura et al., 2007], qui proposent une approche non asymptotique, basée sur la théorie des distributions, pour l'identification simultanée des paramètres et des retards des systèmes dynamiques continus. Cette technique s'inscrit dans la droite ligne de l'approche algébrique initiée par les travaux de [Fliess and Sira-Ramirez, 2003] dans le cadre des systèmes de dimension finie. Nous pensons qu'elle devrait s'imposer progressivement car elle vise l'identification en temps réel, obtenue au moyen d'algorithmes rapides, de faible complexité. En effet, même si les méthodes mathématiques sous-jacentes pourront sembler complexes du point de vue de l'ingénieur (elles se basent sur la théorie des distributions), leur implantation concrète reste d'une mise en œuvre simple, basée sur les opérations d'intégration, de multiplication ou de filtres à réponse implusionnelle finie.

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité de ces premières recherches effectuées sur l'identification en ligne des systèmes continus et à retards en vue d'estimer simultanément les retards ainsi que les paramètres du système. Une première analyse effectuée dans [Belkoura et al., 2006, Belkoura and Richard, 2006] montre que ce problème peut être appréhendé par la résolution d'un système d'équations linéaires ou par une simple technique de moindres carrés (ou de ses variantes). Cependant, comme nous le verrons, ces deux solutions se heurtent à un problème de redondance. Nous proposerons une alternative basée sur une formulation redondante qui considère une série de filtres. Nous nous ramènerons ainsi à un problème d'identification de la forme :

$$(A - \lambda B)\Theta = 0, \tag{1.2}$$

dans lequel les matrices carrées  $A$  et  $B$  dépendent des trajectoires du système, tandis que  $\lambda$  et  $\Theta$  informent respectivement sur le retard et sur les paramètres du système. En revanche, cette formulation a une fâcheuse propriété : le nombre de valeurs propres estimées est égal à l'ordre du système étudié. Nous proposerons une méthode efficace, basée sur la stationnarité du couple retard-paramètres, permettant la sélection des bons paramètres. Parallèlement, et dans un même objectif de robus-

tesse des estimations, une étude portant sur le choix des filtres dans la génération des matrices  $A$  et  $B$  sera menée.

## Systèmes impulsifs

La deuxième partie de cette thèse sera consacrée à une nouvelle piste de recherche pour l'identification d'une classe de systèmes hybrides. Le développement de l'automatisation a longtemps fait intervenir deux types de technologies : les systèmes continus et les systèmes à événements discrets. Ces technologies ont été également associées à deux classes de modélisation, correspondant respectivement à des équations à état continu (dynamiques concernant des variables continues, que les relations soient différentielles ou aux différences) et à une logique d'événements (variables booléennes, que les évolutions soient asynchrones ou synchrones). Cependant, cette répartition de systèmes n'est pas parfaite puisque la plupart des systèmes réels sont aujourd'hui composés de sous-processus à technologie continue (basés sur des échanges énergétiques) qui sont démarrés, reconfigurés et arrêtés par une commande logique, à état discret (ordinateur, automate programmable...). Dans les applications modernes et avec le développement numérique massif, cette interaction de plus en plus importante entre les phénomènes de nature à la fois continue et événementielle, a conduit à l'apparition et à la formalisation des systèmes hybrides [Zaytoon, 2001, Bertrand et al., 2004, Bako, 2008]. Plusieurs travaux se sont penchés sur l'étude des systèmes hybrides, parmi lesquels on peut citer quelques livres récents [Zaytoon, 2001, Haddad et al., 2006, Engell et al., 2002, Matveev and Savkin, 2000] et des numéros spéciaux dans des journaux [Henzinger and Sastry, 1998, Alur et al., 1993, Antsaklis et al., 1995, Antsaklis et al., 1999, Benedetto and Sangiovanni-Vincentelli, 2001, Engell et al., 2003, Carloni et al., 2006].

Nous allons proposer dans ce mémoire une modélisation particulière d'une certaine classe de systèmes hybrides [Belkoura et al., 2010, Tian et al., 2009, Taarit et al., 2010a]. En se basant sur le formalisme distributionnel, la description mathématique de ces systèmes consiste à des équations différentielles soumis dans leurs membres droit à des impulsions (discontinuités). Cette modélisation peut toucher des systèmes à commutations et des systèmes à impulsions. Dans [Belkoura et al., 2010], les auteurs ont appelé cette classe de systèmes : les systèmes "impulsifs". Les systèmes dynamiques impulsifs peuvent décrire un large éventail d'applications pratiques. Ils permettent de modéliser des problèmes économiques, biologiques, de la dynamique de population, du réseau informatique, ... [Li et al., 2005].

L'exemple motivant derrière cette présente étude vient de la modélisation d'un pendule simple soumis à des frottements secs qui est régit par une équation différentielle ordinaire soumis dans son membre droit au terme modélisant le frottement sec (non linéarité discontinue). La nouvelle modélisation de ce système à discontinuités permet de faire apparaître explicitement ces discontinuités qui représentent dans ce cas les instants de commutation de ce pendule (ou les instants d'impacts pour d'autre cas d'étude). Il n'est pas difficile de trouver d'autre exemple motivants pour cette

étude. Plusieurs autres exemples modélisant cette classe particulière des systèmes hybrides peuvent être trouvés dans [Alur et al., 1993, Brogliato, 1999, Bemporad et al., 2000, Lygeros et al., 2003, Lygeros, 2004, Attia, 2005, Chareyron, 2005]. Cependant, l'identification en ligne des paramètres de cette classe de systèmes ainsi que des instants de commutation (ou impacts) représente un problème stimulant. L'approche d'identification proposée est basée sur l'extension de la méthode algébrique utilisée dans la première partie de la thèse. Dans cette partie, une procédure d'annihilation des termes singuliers présents dans les équations différentielles représentatives de ces systèmes est proposée dans un cadre déterministe.

## Organisation du mémoire

Cette thèse vise à proposer un ensemble de solutions contribuant à résoudre les deux problématiques énoncées précédemment : *l'identification des systèmes à retards en temps continu* et *l'identification d'une classe de systèmes hybrides*. Pour présenter ces résultats, la démarche s'articule autour de quatre chapitres, structurés comme suit :

- Le premier chapitre de ce mémoire présente un état de l'art de ces deux domaines liés à l'identification. Une première partie présente l'identification des systèmes en temps continu, en général, ses particularités et ses avantages par rapport à l'identification en temps discret. Tout en renvoyant le lecteur à une série de travaux de synthèse existants, un bref tour d'horizon des méthodes s'appuyant sur les techniques de filtrage en temps continu est effectué. Une deuxième partie s'intéresse plus particulièrement à l'identification des systèmes à retards à temps continu : après avoir montré l'intérêt général de ce sujet, une étude bibliographique des méthodes présentes dans la littérature est menée, donnant les avantages ainsi que les limites de chacune d'elles. Une dernière partie présente la classe de systèmes hybrides à laquelle nous nous intéressons par la suite, ainsi qu'une discussion des travaux récents sur l'identification de ces systèmes.
- Le deuxième chapitre est principalement consacré aux outils mathématiques qui seront utilisés dans l'ensemble du mémoire pour formuler les problèmes d'identification sur une forme algébrique. Tout d'abord, nous nous intéresserons plus particulièrement aux notions fondamentales de la théorie des distributions, afin de familiariser le lecteur avec le formalisme mathématique de cette étude (une présentation plus complète sur ce sujet est disponible en fin de mémoire, en Annexe A). Une deuxième partie de ce deuxième chapitre rappelle la définition et les propriétés des entrées dites "structurées", qui seront reprises tout au long de cette étude.
- L'objectif du troisième chapitre est d'introduire une contribution fondamentale de la thèse. Nous présenterons les concepts de base de la méthode d'identification algébrique adoptée dans [Fliess and Sira-Ramirez, 2003]. Puis, nous montrerons



son extension au cas des systèmes à retards. Trois classes illustratives seront étudiées. La première représente un modèle très classique en matière d'identification de procédés industriels : il s'agit d'un système du premier ordre avec retard sur l'entrée. Le deuxième exemple est celui des systèmes avec série de retards. Le troisième et dernier cas montre comment l'identification simultanée du retard et des paramètres peut se formuler par un problème de valeurs propres généralisées. Une étude expérimentale de cette méthode est réalisée sur une maquette d'asservissement de température bien connue des enseignants d'automatique : le "feedback process trainer" PT326.

- Le quatrième chapitre s'appuie sur les techniques développées au chapitre 4, pour proposer une solution au problème d'identification d'une classe particulière des systèmes hybrides. Nous proposerons des solutions pour l'estimation simultanée des instants de commutation (ou discontinuités) et des paramètres. Nous étudierons tout d'abord le cas général, donnerons ensuite trois structures du problème d'identification et finalement, illustrerons ces nouvelles techniques sur un exemple de systèmes mécaniques soumis à des frottements secs.

La conclusion rappellera les différentes contributions apportées par cette thèse puis proposera plusieurs axes de recherche pouvant contribuer à compléter l'ensemble des travaux présentés ici. En annexe, on peut trouver un rappel sur la théorie des distributions sur laquelle se base la méthode d'identification étudiée.

Finalement, après l'annexe A sur les distributions, l'annexe B présentera les différentes publications réalisées au cours de cette thèse, incluant notre première communication en conférence : celle-ci traitait de l'application à une soufflerie de séchage. Pour des raisons de concision nous ne l'avons pas intégrée au chapitre 4, mais elle nous a semblé néanmoins intéressante à titre d'annexe.

# IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS ET D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES HYBRIDES : UN ÉTAT DE L'ART

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Principe de l'identification</b>	<b>18</b>
<b>1.3</b>	<b>Intérêt de l'identification des systèmes à temps continu</b>	<b>20</b>
<b>1.4</b>	<b>Solutions au problème de dérivation posé par les modèles à temps continu</b>	<b>24</b>
1.4.1	Les fonctions modulatrices	25
1.4.2	Les filtres linéaires	26
1.4.3	Les méthodes intégrales	28
<b>1.5</b>	<b>Classification des méthodes d'identification à temps continu</b>	<b>30</b>
1.5.1	Les méthodes du gradient	31
1.5.2	Les méthodes des moindres carrés	32
1.5.3	Les méthodes de variables instrumentales	33
<b>1.6</b>	<b>Identification des systèmes à retards</b>	<b>33</b>
1.6.1	Intérêt de l'identification des systèmes à retards	33
1.6.2	Identifiabilité	35
1.6.3	Classification des méthodes d'estimation du retard	39
<b>1.7</b>	<b>Systèmes dynamiques hybrides</b>	<b>59</b>
1.7.1	Présentation	59
1.7.2	Principales classes des phénomènes hybrides : classification de Branicky	60
1.7.3	Systèmes à commutations	62
1.7.4	Systèmes à impulsions	63
1.7.5	Identification	64
<b>1.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>67</b>

---

## 1.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà mentionné, dans l'introduction générale, le travail réalisé dans cette thèse porte sur l'identification des systèmes à retards à temps continu et par extension, à une classe de systèmes hybrides. Si on se réfère à l'attention croissante portée à l'analyse de stabilité ou au contrôle des systèmes à retards dans la littérature internationale, on peut dire que l'identification de ces systèmes représente une piste de recherche finalement assez peu explorée. Ce chapitre propose un tour d'horizon des différentes méthodes d'identification des systèmes à retards à temps continu existant dans la littérature.

La première partie sera consacrée à une discussion de l'intérêt de l'identification en temps continu par rapport à l'identification en temps discret. Nous verrons ensuite comment la dérivation de signaux d'entrée-sortie bruités constitue un problème généralement posé par cette identification en temps continu, et que cet obstacle pousse les chercheurs à identifier en temps discret les systèmes (en général et à retards en particulier). Une présentation de quelques méthodes permettant de remédier à ce problème est également proposée.

Dans la seconde partie, nous passerons en revue les différentes méthodes d'estimation des systèmes des paramètres et des retards à temps continu, dans le but de donner les principes ainsi que les avantages et les inconvénients de chaque méthode.

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à la présentation d'une classe de systèmes hybrides et, plus précisément, d'une classe de systèmes à commutations et à impulsions. Quelques travaux portant sur l'identification de ces systèmes y seront rappelés.

## 1.2 Principe de l'identification

L'identification est l'opération de détermination des caractéristiques dynamiques d'un procédé (système) dont la connaissance est nécessaire pour la conception et la mise en œuvre d'un système performant de régulation [Landau, 1993]. La notion de modèle mathématique d'un système ou d'un phénomène, c'est-à-dire d'un ensemble d'équations liant ses entrées et ses sorties, est un concept fondamental. Un modèle dynamique, c'est-à-dire un modèle représentant une évolution temporelle, peut appartenir soit au domaine du temps continu ("système à temps continu" ou "système continu") si les équations qui décrivent le comportement du système sont des équations différentielles, soit au domaine du temps discret si ce sont des équations aux différences ("système à temps discret" ou "système discret").

En général, il existe trois classes de modèles, chaque type de modèle étant destiné à une application particulière. La première consiste à utiliser les principes phénoménologiques (lois de la physique, de la biologie, etc.) gouvernant le système. On parle alors de *modèles phénoménologiques*, de *modèles de connaissance* ou encore de *modèle "boîte blanche"*. Une alternative à cette approche est fondée sur une procédure

## 1.2. PRINCIPE DE L'IDENTIFICATION

expérimentale consistant à mesurer, à analyser et à corrélérer les entrées et les sorties du système. Il s'agit alors de *modèles comportementaux* (ou *modèles "boîte noire"*). La troisième est une combinaison des deux précédentes : quelquefois appelée *boîte grise*, elle utilise, dans le modèle boîte noire, les connaissances phénoménologiques disponibles afin de mieux adapter les paramètres du modèle mathématique aux données expérimentales.

Dans les deux premiers cas, certains paramètres peuvent être inconnus (ou mal connus). La détermination d'un modèle à partir des données entrée-sortie, c'est-à-dire l'identification du modèle, constitue un problème inverse, par opposition au problème direct qui consiste à déterminer la (ou les) sortie(s), connaissant la (ou les) entrée(s) et les paramètres du modèle (ce que l'on fait en simulation).

Dans la pratique, l'objectif général de l'identification est la détermination de modèles de conduite afin de simuler, d'analyser ou de commander un système. Pour cela, certains auteurs [Borne et al., 1993] considèrent que la détermination des modèles de connaissance est une tâche qui intéresse plus les physiciens (ou les biologistes, etc.) que les automaticiens. Ainsi, nous sommes amenés à mettre en œuvre une méthodologie d'identification directe de ces modèles dynamiques (de commande) qui sont sous deux types :

- les modèles *non paramétriques* (réponse fréquentielle, réponse à un échelon, etc.),
- les modèles *paramétriques* (fonction de transfert, équation différentielle ou aux différences, etc.).

Expérimentalement, l'identification comporte quatre étapes :

1. acquisition des entrées/sorties sous protocole d'expérimentation ;
2. choix d'une structure de modèle ;
3. estimation des paramètres du modèle ;
4. validation du modèle identifié.

Le travail présenté dans cette thèse porte essentiellement sur la phase d'estimation des paramètres d'un modèle préalablement établi.

Les contributions réalisées pour l'identification des systèmes continus ont commencé dans les années 50, mais elles ont été éclipsées par un vent complètement numérique. Durant les deux décennies suivantes, la théorie de l'identification s'est principalement intéressée pour les modèles en temps discret et les contributions effectuées ont été stimulées par le développement des calculateurs numériques. Ljung [Ljung, 1999] a développé une boîte à outils "System Identification" de Matlab regroupant aussi les approches les plus populaires à savoir les algorithmes des moindres carrés et les variables instrumentales. Il existe un nombre important d'ouvrages dans la littérature qui synthétisent la majorité des travaux effectués sur l'identification dans le domaine discret, parmi lesquels, on peut citer [Eykhoff, 1974, Goodwin and Payne, 1977, Ljung, 1999, Soderstrom and Stoica, 1989, Richalet et al., 1991, Landau, 1993, Borne et al., 1992, Abdennour et al., 2001].

Les années 70 ont été témoins d'une réapparition d'un esprit temps continu et le domaine d'identification des systèmes à temps continu a maintenant mûri pour mériter plusieurs vue générale comme [Sinha and Rao, 1991, Unbehauen and Rao, 1998, Mensler, 1999, Landau and Besançon-Voda, 2001, Garnier et al., 2003, Rao and Unbehauen, 2006, Garnier et al., 2006, Garnier et al., 2008].

On distingue deux principales approches pour l'identification des systèmes à temps continu dans la littérature : l'approche indirecte et l'approche directe [Unbehauen and Rao, 1998, Landau, 1993, Mensler, 1999, Rao and Unbehauen, 2006]. Ces deux approches utilisent les données entrée-sortie échantillonnées puisque ces données sont recueillies en temps discret par des moyens de mesures numériques.

L'approche indirecte consiste en une identification en temps discret, en mettant des hypothèses sur le comportement du signal d'entrée sur une période d'échantillonnage, suivie d'une étape de retour au temps continu pour déterminer le modèle estimé final.

L'approche directe consiste à identifier directement le modèle continu à partir des données échantillonnées en faisant recours à un étage de calculs intermédiaires des dérivées successives des signaux E/S. Cet étage s'appelle les transformations linéaires qui seront détaillés dans la section 1.4.

Bien que l'identification par l'approche indirecte (identification discrète) ait connu un grand succès durant les dernières décennies, l'approche directe, basée sur la modélisation et l'estimation dans un cadre continu, présente des avantages décisifs développés dans le paragraphe qui suit.

### 1.3 Intérêt de l'identification des systèmes à temps continu

Plusieurs travaux ont discuté de l'importance de l'analyse, de l'identification et de la commande des systèmes à temps continu [Sinha and Rao, 1991, Unbehauen and Rao, 1998, Mensler, 1999, Rao and Unbehauen, 2006, Garnier et al., 2006]. Nous allons donner les principales limitations de l'approche indirecte (identification discrète) qui peuvent être palliées par l'approche directe. Ainsi, on va mettre en évidence les avantages qu'apporte l'identification continue :

1. **Perte de la signification physique des paramètres :** Lorsque les algorithmes d'identification sont véritablement utilisés pour accéder à une connaissance physique du système, alors l'utilisation de la représentation continue s'avère indispensable [Landau and Besançon-Voda, 2001]. En effet, la modélisation en temps continu est souvent couplée à un modèle phénoménologique élaboré à partir de lois et de principes physiques continus dans le temps. C'est le cas par exemple des modèles mécaniques obtenus par des équations de Lagrange, ou de bien d'autres modèles issus de considérations énergétiques. Dans ce cas, le modèle est étroitement lié aux propriétés constitutives du système et à la compréhension de ses comportements. Tandis que, la modélisation en temps continu garde explicitement ces paramètres, la discrétisation fait perdre cette

### 1.3. INTÉRÊT DE L'IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À TEMPS CONTINU

connaissance en liant les paramètres inconnus et connus par des relations non linéaires. Nous allons donner un exemple illustratif d'une discrétisation d'un modèle linéaire et stationnaire à temps continu [Mensler, 1999]. Il s'agit d'un système électrique simple composé d'une résistance  $R$  et d'un condensateur  $C$ . Les tensions d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  sont mesurées respectivement au borne du générateur et du condensateur. Le système est donc régi par l'équation suivante :

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t). \quad (1.1)$$



$\mathcal{L}$ (Transformation de Laplace)

$\mathcal{Z}$ (Transformation en  $z$ )

$$\frac{s(t)}{e(t)} = \frac{K}{1 + \tau s}$$

$$\frac{s(z)}{e(z)} = \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \tau = RC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 - e^{-\frac{T_e}{RC}} \\ a = -e^{-\frac{T_e}{RC}} \end{cases}$$

Les paramètres du modèle discret sont des combinaisons des paramètres du modèle continu ainsi que de la période d'échantillonnage. Il est clair que les paramètres du modèle continu ont conservé leurs significations physiques contrairement à ceux du modèle discret qui ont perdu le caractère physique de l'équation de fonctionnement du système.

2. **Sensibilité au choix de la période d'échantillonnage :** Une des limites principales de l'approche indirecte est le choix délicat de la période d'échantillonnage lorsque le système étudié possède des constantes de temps éloignées. Si la période d'échantillonnage est choisie trop grande, les constantes de temps rapides ne seront pas prises en compte. A l'inverse, une sous-estimation de celle-ci provoque une migration des pôles estimés (discrets) vers le point  $z = 1$  ( $z = e^{sT_e}$ ) [Sinha and Rao, 1991, Rao and Unbehauen, 2006, Mercère et al., 2006].
3. **La discrétisation peut rendre les modèles à temps continu à non minimum de phase :** La discrétisation d'un modèle continu fait apparaître des zéros dans le modèle discret correspondant et peut donner lieu à un phénomène gênant de non minimum de phase. Pour mettre en évidence le problème, on considère par exemple le modèle suivant :

$$G(s) = \frac{a}{s^2(s + a)}. \quad (1.2)$$

Il est facile de trouver sa fonction de transfert discrète avec la méthode du bloqueur d'ordre zéro qui est donnée par :

$$G_z(z) = \frac{Az + B}{C(z - 1)(z - D)}, \quad (1.3)$$

avec,

$$\begin{cases} A = 3a^2T_e^2 - 2aT_e + 2 - 2e^{-aT_e}, \\ B = 2e^{-aT_e} - 3a^2T_e^2e^{-aT_e} + 2aT_ee^{-aT_e} - 2, \\ C = 2a^2, \\ D = e^{-aT_e}. \end{cases}$$

Le zéro de  $G_z(z)$  est  $z_1 = -\frac{B}{A}$ . Dans le cas où  $a = 1$ , il suit que  $z_1$ , se trouve à l'intérieur du cercle unité pour  $T_e > 0.7$  et sort à l'extérieur du cercle quand  $T_e < 0.7$  comme le montre la figure 1.1. Cet exemple prouve que la discrétisation

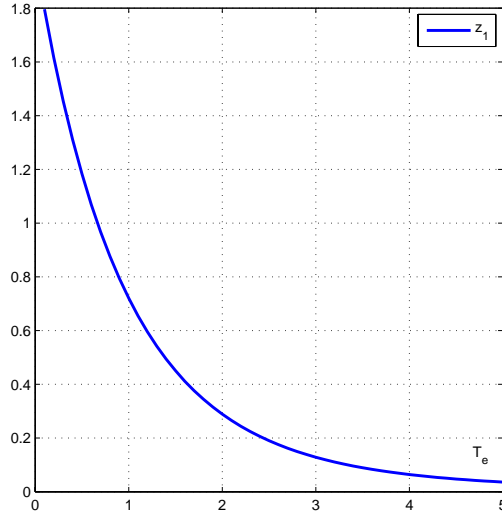


FIGURE 1.1 – Dépendance du zéro  $z_1$  de  $G_z(z)$  de la période d'échantillonnage.

sation d'un système continu sain peut provoquer l'apparition du problème de non minimum de phase. Une discussion détaillée de cet aspect est disponible dans [Sinha and Rao, 1991, Rao and Unbehauen, 2006].

4. **Conversion modèle à temps discret/modèle à temps continu** : Le problème de passage inverse du modèle continu n'est pas une tâche triviale. Ce passage nécessite la résolution des équations complexes reliant les paramètres du modèle continu à ceux du modèle discret. Pour s'en convaincre, on va donner un exemple d'un circuit RLC décrit par la fonction de transfert suivante [Mensler, 1999] :

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \quad (1.4)$$

La procédure classique d'identification se pose sur la discrétisation de la fonction de transfert  $H(s)$  avec la méthode du bloqueur d'ordre zéro. On obtient,

### 1.3. INTÉRÊT DE L'IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À TEMPS CONTINU

ainsi :

$$H(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \xrightarrow{s \rightarrow z} H(z) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}. \quad (1.5)$$

On remarque l'apparition d'un zéro dans la fonction de transfert discrète. Le but principal est de déterminer les paramètres physiques  $R$ ,  $L$  et  $C$  à partir des paramètres estimés de  $H(z)$ , plus précisément, à partir des relations qui lient les paramètres du modèle discret et ceux du modèle continu qui sont les suivantes :

$$\begin{cases} a_1 = -2e^{-\xi\omega_0T_e} \cos(\omega T_e), \\ a_2 = e^{-2\xi\omega_0T_e}, \\ b_1 = 1 - e^{-\xi\omega_0T_e} (\cos(\omega T_e) + \frac{\xi\omega_0}{\omega} \sin(\omega T_e)), \\ b_2 = e^{-2\xi\omega_0T_e} + e^{-\xi\omega_0T_e} (\frac{\xi\omega_0}{\omega} \sin(\omega T_e) - \cos(\omega T_e)), \\ \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}, \xi < 1. \end{cases}$$

Cependant, trouver les expressions de  $\omega_0$  et de  $\xi$  en fonction de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$ , n'est pas trivial. Par ailleurs, une solution qui peut être adoptée consiste à convertir le modèle discret estimé en un modèle continu et identifier termes à termes les paramètres estimés et les paramètres physiques continus. Mais, le problème de la présence du zéro discret demeure. Une fois l'estimation discrète est effectuée et le modèle continu correspondant est déterminé, il reste alors à retrouver les valeurs de  $R$ ,  $L$  et  $C$ . L'identification termes à termes des deux fonctions de transfert suivantes :

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_2}, \quad (1.6)$$

permet d'aboutir à :

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{LC}, \\ a_1 = \frac{R}{L}, \\ a_2 = \frac{1}{LC}. \end{cases} \implies \begin{cases} b_0 = a_2 = \frac{1}{LC}, \\ a_1 = \frac{R}{L}. \end{cases}$$

Ce système d'équations représente en fait deux équations indépendantes à trois inconnus. Il n'a y donc pas de solution unique et un problème d'identifiabilité se pose. Il suffit, alors, de mesurer la résistance  $R$  pour rendre le système solvable. Cette méthode s'appelle l'incorporation du système [Saccomani and Cobelli, 1992].

- 5. Choix de l'entrée :** Le choix de l'entrée joue un rôle fondamental dans la formulation d'un problème d'identification. Pour l'estimation des systèmes continus, l'entrée échelon constitue une entrée classique et très utilisée dans la pratique. Bien qu'elle soit satisfaisante pour l'estimation continue, cette entrée pose des problèmes pour l'identification d'un modèle discret. En effet, l'utilisation d'un signal constant pour identifier un modèle échantillonné permet la convergence vers zéro de l'erreur de prédiction sans pour autant que les paramètres estimés convergent vers les vrais paramètres du modèle. Ce problème



provient du faible degré de persistance de l'échelon pour une estimation consistante d'un modèle discret. Une étude détaillée a été faite dans [Soderstrom and Stoica, 1989, Landau, 1993, Landau, 1998, Landau and Besançon-Voda, 2001].

Même pour des entrées échantillonnées, la qualité de l'identification discrète reste toujours liée aux hypothèses prises en compte lors de la discrétisation à savoir : le choix de la période d'échantillonnage et la vérification de l'hypothèse BOZ entre deux périodes successives d'échantillonnage. Si l'entrée du système à estimer ne vérifie pas l'hypothèse de BOZ, qui consiste à avoir un signal bloqué (constant) entre deux échantillons, alors, identifier dans le domaine discret conduit à des erreurs [Schoukens et al., 1994, Evans et al., 1998, Mensler, 1999]. Cependant, la diminution de la période d'échantillonnage afin de se rapprocher d'un signal continu reste une solution mais à double tranchant puisqu'elle augmente la sensibilité numériques des paramètres.

6. **Filtrage intrinsèque** : Les méthodes d'identification continue comportent une étape de filtrage intrinsèque. Cette étape a pour but principal de s'affranchir de toutes dérivations sur les signaux d'entrée sortie évitant ainsi leur estimation. Cet apport des méthodes d'identification continue sera l'objet de la section 1.4 suivante.

## 1.4 Solutions au problème de dérivation posé par les modèles à temps continu

Considérons une équation différentielle à coefficients constants :

$$y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 u(t) + b_1 u'(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t), \quad (1.7)$$

où,  $' = \frac{d}{dt}$ ,  $^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n}$  et  $^{(m)} = \frac{d^m}{dt^m}$ .  
Alors, on peut écrire facilement :

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta, \quad (1.8)$$

avec,

$$\begin{aligned} \varphi^T(t) &= [-y'(t) \dots - y^{(n)}(t) \quad u(t) \dots u^{(m)}(t)], \\ \theta &= [a_1 \dots a_n \quad b_0 \dots b_m]^T. \end{aligned}$$

Ce modèle est linéaire par rapport au vecteur des paramètres  $\theta$ . La principale difficulté qui se pose est la présence des dérivées temporelles des signaux entrée-sortie dont la génération dans un contexte bruité conduit à une amplification des bruits stochastiques. Pour cela, le modèle décrit par l'équation (1.8) n'est pas utilisable en pratique. Pour remédier à ce problème, une étape intermédiaire de filtrage, appelée transformations linéaires, permet ainsi d'éviter la dérivation des données entrée-sortie et permet aussi de construire des régresseurs réalistes formés par des grandeurs filtrées. On se référera pour cela à de nombreux *surveys* et études comparatives [Young, 2007, Unbehauen and Rao, 1998, Johansson, 1994, Mensler, 1999, Sinha,

#### 1.4. SOLUTIONS AU PROBLÈME DE DÉRIVATION POSÉ PAR LES MODÈLES À TEMPS CONTINU

2000, Sibille et al., 2000, Landau and Besançon-Voda, 2001, Garnier et al., 2003, Garnier and Young, Rao and Unbehauen, 2006, Garnier et al., 2006, Young and Garnier, 2006, Garnier et al., 2008, Garnier and Wang, 2008]. Dans la littérature, ces transformations ont été classées comme suit et sont discutées ci-dessous :

- les fonctions modulatrices ;
- les filtres linéaires ;
- les méthodes intégrales.

##### 1.4.1 Les fonctions modulatrices

Ce sont les premières techniques de filtrage apparues dans les années cinquante [Sinbrot and Field, 1957] :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sin^n\left(\frac{n\pi t}{T}\right) & t \in [0, T], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (1.9)$$

Elles peuvent être considérées à l'origine de la plupart des méthodes de filtrage. L'idée principale de cette méthode est de ramener les opérations dérivées  $\frac{d^k}{dt^k}(\cdot)$  appliquées au couple de données entrée-sortie sur une fonction, souvent notée par  $\varphi_n(t)$ , à l'aide de quelques opérations d'intégrations par parties et des factorisations faites en respectant les hypothèses sur le choix de ces fonctions. Une fonction modulatrice est, en général, une fonction vérifiant :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi_n(t) & t \in [0, T], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\frac{d^k \varphi_n(t)}{dt^k} \text{ existe pour } k = 1, \dots, n-1, \quad (1.11)$$

$$\frac{d^k \varphi_n(t)}{dt^k} \Big|_0 = \frac{d^k \varphi_n(t)}{dt^k} \Big|_T = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (1.12)$$

avec  $n$  l'ordre du système étudié et les dérivées de la fonction  $\varphi_n(t)$  sont connues. Afin de mieux illustrer l'apport de ces fonctions, nous allons prendre l'exemple d'un système du premier ordre décrit par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$a \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = bu(t). \quad (1.13)$$

Seul le couple entrée-sortie  $(u, y)$  est connu sur un intervalle d'acquisition  $[0, T]$ . La multiplication de l'équation différentielle (1.13) par une fonction  $\varphi_n(t)$ , vérifiant les équations (1.10), (1.11) et (1.12), suivie d'une intégration sur l'intervalle d'acquisition, permet d'aboutir à la relation suivante :

$$a \int_0^T \varphi_n(t) \frac{dy}{dt} dt + \int_0^T \varphi_n(t) y(t) dt = b \int_0^T \varphi_n(t) u(t) dt. \quad (1.14)$$

En tenant compte des conditions sur les bornes de l'intégrale, les intégrations par parties des derniers termes permettent de s'affranchir des dérivations sur les signaux entrée-sortie. On obtient alors :

$$-a \int_0^T \frac{d\varphi_n(t)}{dt} y(t) dt + \int_0^T \varphi_n(t) y(t) dt = b \int_0^T \varphi_n(t) u(t) dt. \quad (1.15)$$

Le problème est donc résolu et les dérivations sont déplacées des signaux sur les fonctions modulatrices. Il est facile maintenant de se ramener à la formule générique permettant l'estimation des paramètres inconnus  $[a \ b]^T$ . On trouve plusieurs fonctions modulatrices dans la littérature à savoir :

- les fonctions modulatrices de Fourier FMF (*Fourier Modulating Function*) sont données par :

$$\varphi_{\mu,n}(t) = \frac{1}{T} e^{-i\mu\omega_0 t (e^{-i\omega_0 t} - 1)^n}, \quad (1.16)$$

où  $\mu = 0 \dots M$ , est appelé index de pulsation modulatrice,  $M$  étant le paramètre de synthèse de la méthode,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  est la pulsation de résolution,  $n$  est l'ordre du système et  $T$  est l'intervalle de temps d'observation du système.

- les fonctions splines :

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \delta_D(iT - t), \quad t \in [0, nT]. \quad (1.17)$$

- les fonctions d'Hermite  $H_n(t)$  [Jordan et al., 1990, Jalali and Jordan, 1991] :

$$\begin{aligned} H_n(t) &= (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2/2}}{dt^n}, \\ \varphi_n(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-t^2/2} H_n(t). \end{aligned} \quad (1.18)$$

- et plus récemment, les fonctions de Hartley, HMF (*Hartley Modulating Function*), sont alors données par [Unbehauen and Rao, 1997] :

$$\begin{aligned} \psi_{\mu,n}(t) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \text{cas}((n + \mu - k)\omega_0 t), \\ \text{cas}(t) &\triangleq \cos(t) + \sin(t), \end{aligned} \quad (1.19)$$

où,  $\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm M$ , index de pulsation modulatrice,  $\omega_0 = 2\pi/T$  représente la pulsation de résolution.

Les fonctions modulatrices de Fourier et les fonctions de Hartley sont les plus utilisées dans la littérature. Outre la nature complexe des fonctions FMF, elles offrent un principal avantage qui est l'utilisation des transformées rapides de Fourier. A la différence des fonctions modulatrices de Fourier, les fonctions de Hartley se basent sur la transformation de Hartley qui s'effectue dans l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$ . Cette différence est considérée comme un avantage puisque les signaux filtrés sont réels.

## 1.4.2 Les filtres linéaires

Comme l'indique leur nom, les filtres linéaires ont pour rôle fondamental d'effectuer un filtrage linéaire de l'équation différentielle représentative du système à identifier, afin d'éviter le calcul ou l'estimation des dérivées des signaux entrée-sortie. Pour expliquer leur principe de base, on considère un filtre  $F(s)$  de réponse impulsionnelle  $f(t)$  [Landau and Besançon-Voda, 2001]. En convoluant l'équation (1.7) avec  $f(t)$ , on obtient alors :

$$y * f + a_1 y' * f + \dots + a_n y^{(n)} * f = b_0 u * f + b_1 u' * f + \dots + b_m u^{(m)} * f, \quad (1.20)$$

#### 1.4. SOLUTIONS AU PROBLÈME DE DÉRIVATION POSÉ PAR LES MODÈLES À TEMPS CONTINU

sachant que

$$\frac{d^n y}{dt^n} * f = \frac{d^n}{dt^n} (y * f) = y_F^{(n)}(t),$$

alors l'équation (1.20) peut être écrite comme suit :

$$y_F(t) = \varphi_F^T(t)\theta, \quad (1.21)$$

avec  $\varphi_F^T(t) = [-y_F'(t) \cdots -y_F^{(n)}(t) \ u_F(t) \cdots u_F^{(m)}(t)]$ .

Les deux équations (1.7) et (1.20) sont analogues. Par contre, le régresseur  $\varphi_F(t)$  est réalisable puisque les données  $u$  et  $y$  sont maintenant remplacées par les données filtrées  $u_F$  et  $y_F$ .

Les filtres linéaires peuvent avoir plusieurs formes dont les plus connues sont les filtres de variable d'état SVF (*State Variable Filter*) [Young, 2007, Garnier et al., 2007, Garnier and Wang, 2008] et les fonctionnelles des moments de poisson PMF (*Poisson Moment Functionals*) [Saha et al., 1991].

Les filtres de variable d'état est le plus général et plusieurs simplifications effectuées aboutissent à l'utilisation d'une cascade de  $n$  filtres du 1<sup>er</sup> ordre de la forme suivante :

$$F(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}, \quad (1.22)$$

avec  $\lambda$  représentant la pulsation de coupure du filtre. La structure chaînée particulière des SVF, illustrée par la figure 1.2, permet d'obtenir les données entrée-sortie filtrées à l'ordre désiré.

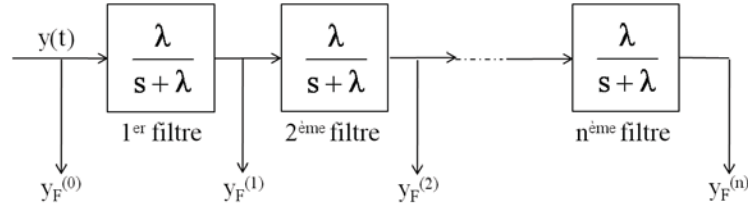


FIGURE 1.2 – Chaîne de filtres de variables d'état.

Les termes  $y_F^{(i)}$ ,  $i = 0 \cdots n$ , sont déterminés à partir de la relation suivante :

$$y_F^{(i)} = \int_0^t y(\tau) P_i(t - \tau) d\tau, \quad (1.23)$$

où  $P_i(t) = \lambda^{i+1} \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}$ . Bien que les filtres SVF possèdent une réponse impulsionnelle infinie, cette réponse décroît quand  $t$  croît permettant de faire disparaître rapidement l'influence de la condition initiale [Garnier et al., 2003].

Quant aux fonctionnelles des moments de poisson, elles sont considérées comme un cas particulier des SVF [Unbehauen and Rao, 1987, Bastogne et al., 2001]. Elles ont recours à  $(n + 1)$  filtre du 1<sup>er</sup> ordre de la forme suivante :

$$F(s) = \frac{\beta}{s + \lambda}, \quad (1.24)$$

avec  $\lambda$  représentant la constante de poisson ( $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ) et  $\beta$  appelé facteur de gain. Si  $\beta = \lambda$ , les moments de poisson sont appelés normalisés. A la différence des SVF,  $y_F^{(0)}$  est issue de 1<sup>er</sup> filtre de la chaîne de poisson et  $y_F^{(n)}$  est la sortie  $(n + 1)^e$  filtre comme le montre la figure 1.3 suivante :

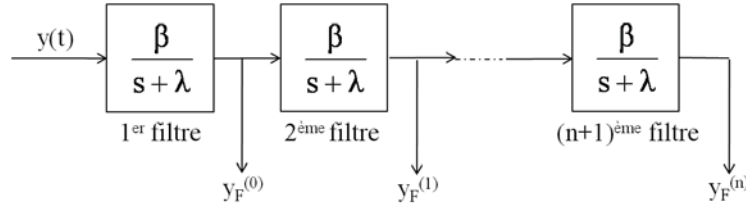


FIGURE 1.3 – Chaîne de filtres de Poisson.

### 1.4.3 Les méthodes intégrales

Le principe des méthodes intégrales est d'appliquer, sur l'équation différentielle du système à estimer, autant d'intégrations successives que nécessaires pour enlever les dérivées. Les méthodes intégrales se divisent en deux groupes. Le premier groupe présente les méthodes d'intégrations numériques et les méthodes des fonctions orthogonales [Datta, 1991]. Ces méthodes effectuent les intégrations sur tout l'horizon de l'observation. Le deuxième groupe inclut la méthode du filtre intégral linéaire LIF (*Linear Integral Filter*) [Sagara and Zhao, 1991] et les moments partiels réinitialisés MPR [Trigeassou, 1987]. Leur principe est d'appliquer des intégrations successives sur une fenêtre glissante.

- **Les méthodes intégrales sur un horizon d'observation :** L'intégration  $n$  fois de l'équation (1.7) entre 0 et  $t$  permet d'aboutir à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} y^{[n]}(t) + a_1 y^{[n-1]}(t) + \dots + a_n y(t) = \\ b_0 u^{[n]}(t) + b_1 u^{[n-1]}(t) + \dots + b_m u^{[n-m]}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{t^i}{i!}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

où, les termes  $C_i$  représentent une combinaison linéaire des conditions initiales des signaux d'entrée-sortie. Cependant, le problème qui se pose est comment calculer les termes intégrés sachant que ce calcul n'est pas toujours évident surtout que dans la plupart du temps les signaux à intégrer n'ont pas une expression analytique explicite. Pour remédier à ce problème, quelques techniques numériques d'intégration sont utilisées. Les plus connues sont la méthode du trapèze TPF (*Trapezoidal Pulse Function*) [Dai and Sinha, 1991, Quarteroni et al., 2000], la méthode du rectangle BPF (*Block Pulse Function*) [Quarteroni et al., 2000, Demailly, 2006] et la méthode de Simpson [Clenshaw and Curtis, 1960, Quarteroni et al., 2000, Demailly, 2006]. La différence entre ces trois méthodes réside dans l'hypothèse adoptée sur le signal à filtrer : il varie linéairement en deux pas d'échantillonnage pour la TPF, soit constant entre deux pas d'échantillonnage pour la BPF et une parabole pour la méthode de Simpson.

Quant aux méthodes des fonctions orthogonales, elles servent à décomposer les signaux d'entrée-sortie sur une base formée par des fonctions orthogonales et ce

#### 1.4. SOLUTIONS AU PROBLÈME DE DÉRIVATION POSÉ PAR LES MODÈLES À TEMPS CONTINU

sont leurs coordonnées sur la bases des fonctions qui vont être par la suite utilisées [Unbehauen and Rao, 1987, Datta and Mohan, 1995]. Ces fonctions peuvent être regroupées en trois classes : les fonctions sinus-cosinus SCF (*Sine-Cosine Functions*), les fonctions constantes par morceaux PWOFF (*Piece Wise Orthogonal Functions*) et les polynômes orthogonaux OP (*Orthogonal Polynomials*).

- **Les méthodes intégrales sur une fenêtre glissante** : L'idée principale du filtre intégral linéaire est d'appliquer des intégrations successives sur l'équation différentielle du système étudié. Néanmoins, à la différence des méthodes intégrales présentées précédemment, les intégrations sont effectuées sur une fenêtre glissante de largeur  $lT_e$  [Sagara and Zhao, 1991]. L'équation (1.25) devient alors :

$$I_n y(t) + a_1 I_{n-1} y(t) + \dots + a_n I_0 y(t) = b_0 I_n u(t) + b_1 I_{n-1} u(t) + \dots + b_m I_{n-m} u(t), \quad (1.26)$$

avec  $I_n x(t) \triangleq \int_{t-lT_e}^t \int_{\tau_1-lT_e}^{\tau_1} \dots \int_{\tau_{n-1}-lT_e}^{\tau_{n-1}} x(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1$ . D'un point de vue filtrage, l'opération d'intégration peut être interprétée comme une opération de filtrage des données par un filtre :

$$F(s) = \left( \frac{1 - e^{lT_e s}}{s} \right)^n. \quad (1.27)$$

Cette méthode de filtrage présente en réalité deux avantages : le premier est qu'elle permet la disparition des conditions initiales une fois que le filtre est appliqué. Le deuxième avantage est que le filtrage est effectué à l'aide d'un filtre ayant une réponse impulsionnelle finie.

En ce qui concerne les moments partiels réinitialisés MPR, ils sont issus de la théorie générale des moments [Trigeassou, 1987, Trigeassou and Pointot, 2001]. Leur principe repose sur le calcul d'intégrales des signaux entrée-sortie pondérés par une fonction adéquate. Cette approche est fondée à la fois sur le principe des méthodes des filtres linéaires et des méthodes d'intégrations numériques [Sibille et al., 2000, Tohome, 2008]. Pour expliquer leur principe, soit l'équation différentielle  $y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$  dont la paramétrisation est différente de l'équation (1.7) [Trigeassou and Pointot, 2001]. On multiplie cette equation par  $t$  et on intègre par la suite de 0 à  $T$ .

En intégrant par partie :

$$\int_0^T t y'(t) dt,$$

on obtient finalement :

$$y(T) = -\frac{a_0}{T} \int_0^T t y(t) dt + \frac{b_0}{T} \int_0^T t u(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad (1.28)$$

qui peut être réécrit comme suit :

$$y(T) = a_0 \alpha_{0,T}(y) + b_0 \beta_{0,T}(u) + \alpha_{1,T}(y). \quad (1.29)$$

Soit :

$$y(T) = \varphi^T(t) \theta + \alpha_{1,T}(y). \quad (1.30)$$

Dans le cas général, les coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_m$  dépendent des intégrations pondérées par  $t^n$ , de la forme :

$$\int_0^T \frac{t^n}{n!} f(t) dt, \quad (1.31)$$

qui sont par définition les moments partiels réinitialisés. Ces intégrales jouent le rôle de filtrage quand les données sont bruitées. Cependant, ce filtrage dépend de l'intervalle d'intégration  $T$ . Une étude menée dans [Trigeassou, 1987] montre qu'il existe une valeur optimale de  $\hat{T}$ . La nouvelle expression des moments partiels est donnée par l'équation (1.32) à la place de l'équation (1.31) :

$$\int_0^{\hat{T}} \frac{\mu^n}{n!} f(t - \hat{T} + \mu) d\mu. \quad (1.32)$$

Cette expression montre que pour effectuer un filtrage quel que soit le point considéré, le calcul de l'intégral est réinitialisé à chaque instant. Et donc,

$$y(T) = \varphi^T(t)\hat{\theta} + \alpha_{1,\hat{T}}(y). \quad (1.33)$$

## 1.5 Classification des méthodes d'identification à temps continu

Une fois l'étape des transformations linéaires accomplie, il faut déterminer les valeurs des paramètres de la structure choisie par la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur (appelé aussi critère). Le choix du critère à minimiser permet de juger de la confiance à attribuer à ces valeurs [Borne et al., 1992]. Les critères de sélection de modèles que l'on rencontre dans la littérature ont souvent une expression qui fait intervenir le nombre d'observations  $N$  et le nombre de paramètres  $p$  du modèle pondérant une fonction comme la somme des erreurs de prédiction au carré. Nous allons présenter trois critères [Mensler, 1999] :

- l'erreur de simulation quadratique :

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (y_{vrai}(k) - y_{simulé}(k))^2. \quad (1.34)$$

- l'écart en % entre le paramètre vrai  $\theta$  et le paramètre estimé  $\hat{\theta}$  :

$$\text{écart}(\%) = 100 * \frac{|\theta - E(\hat{\theta})|}{|\theta|}. \quad (1.35)$$

- l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur  $\hat{\theta}$  :

$$EQM = E(\theta - \hat{\theta})^2 = (\text{écarttype}(\hat{\theta}))^2 + (\text{biais}(\hat{\theta}))^2, \quad (1.36)$$

avec :

$$\begin{aligned} \text{écarttype}(\hat{\theta}) &= \sqrt{E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2]}, \\ \text{biais}(\hat{\theta}) &= \theta - E(\hat{\theta}), \\ E(\hat{\theta}) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Dans la plupart des cas, on ne peut pas trouver une solution analytique pour le minimum du critère adopté. Dans ces conditions, on fait appel aux méthodes d'optimisation qui engendrent les algorithmes d'estimation non récursifs ou à des algorithmes récursifs [Landau and Besançon-Voda, 2001].

Les algorithmes non récursifs d'optimisation sont des algorithmes hors ligne puisqu'ils supposent que l'ensemble des données entrée-sortie sur l'horizon d'observation  $N$  est disponible et qu'il peut être utilisé globalement. En revanche, les algorithmes récursifs permettent la mise à jour progressive des paramètres estimés en utilisant à chaque pas une paire d'entrée-sortie. Ces méthodes sont utilisées pour l'identification en ligne.

Dans les deux cas, plusieurs algorithmes de minimisation du critère sont étudiés dans la littérature. On peut trouver les méthodes du gradient, les méthodes des moindres carrés et les méthodes de variables instrumentales.

### 1.5.1 Les méthodes du gradient

Le principe général de la méthode du gradient consiste à chercher la valeur de l'estimée des paramètres  $\hat{\theta}$  qui minimise une fonction de coût quadratique  $J(\hat{\theta})$  de l'erreur de prédiction [de Mathelin, 2001]. Cette recherche se fait de manière récursive en suivant la plus grande pente entre isocritères ( $J(\hat{\theta}) = \text{constante}$ ) c'est à dire que nous prenons la direction opposée au gradient du critère comme direction instantanée de variation pour les paramètres estimés :

$$\dot{\hat{\theta}} = -F\nabla J(\hat{\theta}), \quad (1.38)$$

où,  $J(\hat{\theta})$  est une fonction de coût quadratique convexe sur l'espace des  $\hat{\theta}$  et  $F = F^T > 0$  est une matrice de gain définie positive. Il existe plusieurs types de méthodes du gradient. Les plus utilisées sont la méthode de Newton-Raphson, la méthode de Gauss-Newton et la méthode de descente du gradient qui diffèrent par la formule de mise à jour des paramètres. La formule la plus générale, celle de l'algorithme de Newton-Raphson, est fonction du coût, de la dérivée partielle de la fonction coût par rapport au vecteur des paramètres  $\theta$  et de la dérivée seconde partielle de la fonction coût par rapport au vecteur des paramètres. Les deux autres algorithmes sont considérés comme des cas particuliers de ce dernier.

Plusieurs travaux ont présenté les méthodes du gradient, parmi lesquels : [Ljung, 1987, Soderstrom and Stoica, 1989, Landau, 1993, Borne et al., 1993, O'Dwyer, 2000b]. Le choix de l'utilisation de l'une de ces trois méthodes dépend essentiellement de la vitesse de convergence souhaitée et des mesures disponibles.

L'application de la méthode de Newton-Raphson nécessite l'estimation des dérivées première et seconde de la fonction coût, qui sont parfois complexes à calculer. Par contre, le grand avantage de cette méthode est sa rapidité de convergence compte tenu de la nature quadratique du critère à minimiser.



La méthode de Gauss-Newton ne nécessite pas l'évaluation de la dérivée seconde du coût et se caractérise par un calcul moins intensif que la méthode de Newton-Raphson. Bien-sûr, la contrepartie est une vitesse de convergence plus lente que par Newton-Raphson.

La méthode de descente du gradient, quoique directe et simple, est en général sensible au type de la fonction à minimiser et converge lentement vers la solution optimale après un départ initial rapide. La méthode de Gauss-Newton combine les meilleures caractéristiques de la méthode de Newton-Raphson et de la méthode de descente du gradient [Draper and Smith, 1981].

On peut dire généralement que la limite majeure de ces méthodes est qu'elles sont sensibles à l'initialisation et qu'elles peuvent ne pas converger si le point de départ de l'algorithme est mal choisi.

### 1.5.2 Les méthodes des moindres carrés

Ces méthodes sont très populaires compte tenu de leur simplicité d'implémentation et de leur utilisation courante dans les algorithmes de commande adaptative. Le principe des méthodes de moindres carrés est le même que celui des algorithmes du gradient. Elles offrent néanmoins la possibilité de variation du gain d'adaptation, permettant ainsi une convergence plus rapide vers l'optimum recherché. Elles peuvent être récursives ou non récursives. Les algorithmes récursifs offrent, entre autres, la possibilité d'une identification en ligne, alors que les algorithmes non récursifs traitent en bloc les données mesurées sur tout l'horizon de temps.

La méthode des moindres carrés consiste à calculer la valeur des paramètres estimés  $\hat{\theta}$  qui minimise à chaque instant une fonction de coût quadratique  $J(\hat{\theta})$  :

- en temps continu :

$$J(\hat{\theta}(t)) = \int_0^t (y(\tau) - \varphi^T(\tau)\hat{\theta}(t))^2 d\tau. \quad (1.39)$$

- en temps discret :

$$J(\hat{\theta}(t)) = (y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1))^2. \quad (1.40)$$

Cette fonction du coût,  $J(\hat{\theta})$ , est convexe en  $\hat{\theta}$  à chaque instant  $t$  et est minimisée en cherchant la valeur de  $\hat{\theta}$  qui annule son gradient. La relation donnant le vecteur  $\hat{\theta}$  minimisant le critère quadratique précédent s'écrit comme suit :

$$\hat{\theta} = (\varphi\varphi^T)^{-1}\varphi^T y. \quad (1.41)$$

Toutefois, cet algorithme, qui n'est que des moindres carrés ordinaires, souffre d'un inconvénient majeur lors de son utilisation dans un contexte bruité qui est la présence d'un biais sur les paramètres estimés. Ce biais est dû à la corrélation entre le régresseur (voir la section 1.4) et le bruit de mesure. Pour cela, deux classes de méthodes permettent de contourner ce problème [Landau, 1993, Borne et al., 1992, Borne et al., 1993, Zito, 2005] :

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

- méthodes d'identification basées sur le blanchissement de l'erreur de prédiction (moindres carrés récurrents, moindres carrés pondérés, moindres carrés généralisés, erreur de sortie avec modèle de prédiction étendue). Dans ce cas, il est nécessaire de vérifier que l'erreur de prédiction, obtenue comme différence entre la sortie réelle du système  $y(t)$  et la sortie du modèle identifié  $\hat{y}(t)$ , est assimilable au bruit blanc. Si on note avec  $\varepsilon(t)$  l'erreur de prédiction, cela implique :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)\varepsilon(t-1) = 0. \quad (1.42)$$

- méthodes d'identification basées sur la décorrélation du vecteur des observations et de l'erreur de prédiction (variables instrumentales, erreur de sortie filtrée).

### 1.5.3 Les méthodes de variables instrumentales

Les méthodes de type variables instrumentales ont pour rôle essentiel de diminuer le biais des paramètres estimés par la méthode des moindres carrés [Söderström and Mahata, 2000, Söderström and Stoica, 2000]. Elles s'avèrent robustes dans le cas d'identification à partir des données bruitées. Le principe de la méthode des variables instrumentales consiste à modifier l'équation de régression linéaire,

$$y(t) = \varphi^T \theta + e(t), \quad (1.43)$$

en multipliant chacun des termes par un vecteur  $z(t)$ , dit vecteur instrumental. On obtient alors la régression linéaire suivante :

$$z(t)y(t) = z(t)\varphi^T \theta + z(t)e(t). \quad (1.44)$$

Pour  $N + 1$  mesures et lorsqu'on choisit la matrice instrumentale, notée  $Z$ , telle que  $Z\varphi^T$  soit inversible, on obtient l'estimation des paramètres comme suit :

$$\hat{\theta} = (Z\varphi^T)^{-1}ZY. \quad (1.45)$$

Cet estimateur sera sans biais si on a la propriété de décorrélation entre les variables instrumentales et l'erreur de prédiction :

$$E\{z(t)e(t)\} = 0,$$

et si  $E\{z(t)\varphi^T(t)\}$  est non singulière.

## 1.6 Identification des systèmes à retards

### 1.6.1 Intérêt de l'identification des systèmes à retards

Nous avons déjà mentionné dans l'introduction générale que les systèmes à retards étaient le sujet de plusieurs monographies qui montrent l'attention apportée à l'étude de ces systèmes. Ainsi, on peut redonner ces quelques travaux [Malek-Zavarei and Jamshidi, 1987, Kolmanovskii and Myshkis, 1999b, Niculescu, 2001, Carvalho and

Nussenzveig, 2002, Gu et al., 2003, Richard, 2003, Zhong, 2006, Chiasson and Loiseau, 2007, Loiseau et al., 2009, Atay, 2010] qui présentent de nombreux exemples de systèmes à retards issus de domaines très variés.

Le phénomène de retard apparaît couramment, soit parce que les capteurs, les actionneurs ou le calcul de la loi de commande introduisent un tel décalage temporel, soit parce que le processus lui-même présente naturellement un transport de matière, une transmission d'énergie ou d'information, un temps d'attente se traduisant par un retard, soit encore parce que l'utilisation d'un modèle retardé permet de garder une fonction de transfert crédible tout en restant de degré faible.

Cependant, l'identification du (ou des) retard(s) s'avère une tâche importante, souvent indispensable, pour la conception d'une commande. En effet, la présence de retards en boucle ouverte a souvent une influence considérable sur le comportement du système bouclé. C'est ainsi que bien souvent l'existence de mouvements oscillatoires, voire instables, peut être expliquée en introduisant une modélisation retardée dans la chaîne d'action ou de rétroaction. Les méthodes les plus classiques, comme le prédicteur de Smith qui a pour rôle de réduire l'effet du retard et d'éviter l'apparition des oscillations, demandent la connaissance de ce retard. Dans d'autres cas, l'estimation du retard entre deux signaux est un problème important dans de nombreux domaines : sismique, biomédical, sonar, radar, télécommunications, . . . . Dans le cas du sonar en mode passif, la mesure du retard est utilisée pour estimer la position et la vitesse d'une source acoustique [Emile et al., 1995]. Une étude menée dans [Diop et al., 2001] s'intéresse aux contrôleurs embarqués, qui, utilisés en temps réel, sont souvent l'objet d'un retard variant dans le temps. Ce retard est dû à la priorisation des tâches où à la communication sur des réseaux de communication prioritaires. Selon le microprocesseur ou la charge du réseau, la valeur du retard peut varier. Pour cela, la prise en compte de cette valeur est indispensable pour la conception d'une commande.

Un dernier point qui doit être mis en relief est l'estimation des systèmes du premier et du second ordre à retard pur, appelés dans la littérature respectivement par FOPDT (*First Order Plus Time Delay*) et SOPDT (*Second Order Plus Time Delay*). Les modèles de ces systèmes ont reçu une grande attention en raison de l'utilisation répandue dans les techniques de réglage des contrôleurs PID. Souvent la détermination d'un modèle rigoureux est difficile en raison de la nature complexe de certains processus. Par conséquent, identifier ces systèmes par des modèles d'ordre inférieur à partir des données entrée-sortie est une solution très adoptée. Un modèle simple du FOPDT sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + Ts}, \quad (1.46)$$

où  $K$ ,  $T$  et  $\tau$  représentent respectivement le gain, la constante du temps et le retard, domine pour la conception d'une commande dans les applications industrielles [Ljung, 1987, Ljung, 2002, Ljung, 2003]. En revanche, le modèle du FOPDT reste limité lorsque le système est non amorti ou la dynamique est d'ordre élevé.

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

C'est ainsi que les modèles du SOPDT peuvent mieux décrire ces processus. Certains modèles d'ordre élevé lorsqu'ils sont approximés par un modèle du FOPDT donne une constante du temps négative et donc le modèle du second ordre s'avère nécessaire [Ramakrishnan and Chidambaram, 2006]. Plusieurs travaux existants dans la littérature se sont concentrés sur l'identification de ces modèles, parmi lesquels on peut citer [Ziegler et al., 1942, Strejc, 1959, Unbehauen and Rao, 1987, Borne et al., 1993, Bi et al., 1999, Wang et al., 2001b, Wang et al., 2001a, Liu et al., 2007, Ahmed et al., 2006, Wang et al., 2008]. On peut donner l'exemple des deux premières méthodes apparues pour l'identification de tels systèmes : la méthode de Broïda qui cherche a priori un modèle du premier ordre à retard pur et la méthode de Strejc qui permet d'identifier une réponse indicielle par un modèle à retard d'ordre élevé. Ces deux méthodes ainsi que d'autres plus efficaces vont être étudiées par la suite dans la section 1.6.3.

En conclusion, on peut dire que la présence du retard rend le problème d'identification plus complexe. La difficulté vient de la façon de faire apparaître le retard, qui est un paramètre non linéaire, dans le vecteur des paramètres à estimer lors de la formulation du problème d'identification. Un exposé des différentes méthodes utilisées dans la littérature sera présenté dans la section 1.6.3.

### 1.6.2 Identifiabilité

L'identifiabilité est un concept fondamental dans les problèmes d'identification. Il consiste à s'assurer que la procédure d'identification donnera une valeur unique des paramètres  $\theta$  à partir du couple de données entrées sorties et que le modèle qui en résulte correspond au système réel [Ljung, 1987].

L'identifiabilité est liée principalement à deux facteurs : le choix du modèle et de sa complexité, d'une part, et la disponibilité des données (en général, des mesures), d'autre part. Cette disponibilité conduit à deux notions :

- **l'identifiabilité a priori** : appelée encore identifiabilité théorique, elle revient à tester l'injectivité du comportement entrée-sortie de la structure et représente une condition préalable à l'identification a posteriori.
- **identifiabilité a posteriori**, appelée aussi identifiabilité pratique. Une fois l'identifiabilité a priori vérifiée, l'objectif de l'identifiabilité a posteriori est de montrer que la condition d'unicité de la solution du problème d'estimation est vérifiée à partir des mesures disponibles.

Les premiers travaux sur l'identifiabilité des systèmes à retards ont été menés dans [Nakagiri and Yamamoto, 1995, Ljung, 1997, Lunel, 2001]. Cependant, ces travaux se sont limités aux systèmes sans entrée (régime autonome) décrits par des équations différentielles à retards. Les conditions d'identifiabilité des paramètres et des retards ont été déterminées suite à une analyse spectrale des opérateurs étudiés en supposant la connaissance des solutions particulières sur un intervalle de temps fini.

Dans le cas des systèmes non retardés, il existe plusieurs travaux (voir par exemple [Ljung, 1987, Diop and Fliess, 1991, Walter and Pronzato, 1996, Noiret, 2000, Tho-

massin, 2005]) donnant un panorama des différents test d'identifiabilité. Parmi les approches d'identifiabilité, on trouve l'identifiabilité structurelle [Bemporad et al., 1970, Reid, 1977, Distefano and Cobelli, 1980] et l'identifiabilité algébrique [Fliess and Sira-Ramirez, 2003] qui ont pour but d'étudier un système linéaire sans retards et où le vecteur des paramètres est de dimension finie.

L'identifiabilité structurelle est indépendante des conditions expérimentales et traduit l'unicité du vecteur des paramètres  $\theta$  dans les expressions des fonctions de transfert des systèmes, c'est-à-dire :

$$H(s, \theta) = H(s, \theta^*) \implies \theta = \theta^*. \quad (1.47)$$

De façon équivalente, ceci signifie que deux vecteurs de paramètres différents donnent forcément deux comportements entrée-sortie différents.

L'identifiabilité algébrique, définie dans [Fliess and Sira-Ramirez, 2003], est plus récente. Très schématiquement, elle définit une "identifiabilité linéaire" du vecteur des paramètres  $\theta$  à travers une relation du type :

$$P\theta = Q, \quad \det P \neq 0, \quad (1.48)$$

où les matrices  $P(n \times n)$  et  $Q(n \times 1)$  sont formées à partir des données mesurées. Nous la reprendrons dans le cadre du formalisme distributionnel qui sera le sujet du chapitre suivant.

L'approche utilisée dans [Orlov et al., 2002, Belkoura and Orlov, 2002, Belkoura et al., 2004, Belkoura, 2005, Drakunov et al., 2006] étend l'analyse d'identifiabilité à des systèmes à retards plus généraux décrits par des équations de convolution de la forme :

$$R * \omega = 0, \quad R = [P, -Q], \quad \omega = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

avec les matrices  $P(n \times n)$  et  $Q(n \times q)$  formées à partir des données entrée-sortie mesurées dans l'espace  $\mathcal{E}'$  des distributions à support compact. L'équation (1.49) correspond à l'approche comportementale des systèmes décrits par des équations de convolution. Dans ce qui suit,  $R(s)$ , représente la transformée de Laplace de  $R$ , fournit la représentation du noyau du comportement  $\mathcal{B}$ , définie comme étant l'ensemble de toutes trajectoires  $\omega \in \mathcal{E}^{n+q}$ , où  $\mathcal{E}$  représente l'espace des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\omega = \ker_{\mathcal{E}} R(s)$ .

Le concept de l'identifiabilité est basé sur la comparaison du système d'origine et son modèle de référence associé gouverné par l'équation (1.49) et dans lequel  $R$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $y$  sont remplacés respectivement par  $\hat{R}$ ,  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$  et  $\hat{y}$ . Le système est dit identifiable s'il existe une commande  $u$  tel que  $\hat{y} = y$  résulte à  $\hat{R} = R$ , ce qui assure l'unicité de la matrice des coefficients aussi bien que celui des retards.

L'analyse d'identifiabilité présentée dans ce manuscrit s'articule autour de deux étapes. La première étape fait appel à la notion d'un signal de commande suffisamment riche. Le choix de ce type d'entrée renforce l'identifiabilité et assure que

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

deux trajectoires différentes correspondent obligatoirement à deux transferts différents. Dans la deuxième étape, on donne les conditions suffisantes sur  $P$  et  $Q$  (ou  $R$ ) sous lesquelles un transfert donné  $T$  a une représentation unique. Il est à noter que cette analyse suppose que la trajectoire du système est sur un intervalle de temps fini.

L'identification requiert le choix d'une entrée qui soit assez variée pour permettre d'exciter les différentes dynamiques du système. Pour définir cette notion d'entrée "suffisamment riche", on note  $[0, \omega_u]$  l'intervalle d'analyse, qui dépend essentiellement de l'entrée  $u$  et de son support, et par  $T$  le transfert.

**Définition 1** Une entrée  $u$  est dite suffisamment riche s'il existe  $\omega_u > 0$  tel que  $\hat{y}|_{[0, \omega_u]} = y|_{[0, \omega_u]}$  implique que  $\hat{T} = T$ .

La présence d'une entrée suffisamment riche garantit donc qu'à deux transferts différents correspondent nécessairement deux trajectoires de sortie différentes. D'où, la définition suivante :

**Définition 2** Le système décrit par l'équation (1.48), est dit identifiable si, pour toute entrée  $u$  suffisamment riche,  $\hat{y}|_{[0, \omega_u]} = y|_{[0, \omega_u]}$  entraîne  $\hat{R} = R$ .

Une fois que l'unicité du transfert  $T$  est déduite, l'objectif suivant est de fournir des conditions suffisantes sous lesquelles ce transfert, à son tour, détermine d'une façon unique les opérateurs  $P$  et  $Q$  (ou  $R$ ). L'égalité entre deux transferts  $\hat{T} = T$  se traduit par :

$$\hat{R} = \alpha R, \quad (1.50)$$

$$\alpha = \hat{P} * P^{-1}. \quad (1.51)$$

Le système est alors identifiable si  $\alpha$  se réduit à l'unité  $\delta I$ . Le théorème suivant tiré de [Belkoura, 2005] propose une solution et l'identifiabilité du système (1.49) se réduit à :

**Théorème 3** 1.  $\text{rank } R(s) = n, s \in \mathbb{C}$ ,  
2.  $\text{conv det } P = n \text{ conv } R$ ,

où  $\text{conv } R$  représente le plus petit intervalle fermé qui contient le support de  $R$  (c'est à dire l'enveloppe convexe de  $\text{supp } R$ ) et où  $\text{det } P$  est le déterminant de  $P$  dans l'algèbre de convolution. Ces conditions sont étroitement liées à la propriété de contrôlabilité approchée [Yamamoto, 1984]. L'exemple suivant, tiré de [Belkoura, 2005], montre l'applicabilité des résultats précédents aux systèmes à retards distribués. On considère le système multivariable et à retard :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + \int_{-1}^0 x_2(t + \tau) d\tau, \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t - 1) + x_2(t) + \int_{-1}^0 u(t + \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.52)$$

On note  $\pi(t) = H(t) - H(t-1)$ , où  $H$  est la fonction de Heaviside. On a  $\text{supp } \pi = [0, 1]$  et, en appliquant quelques manipulations simples, on montre que le système (1.52) admet une représentation  $R * \omega = 0$  avec  $w = (x_1, x_2, u)^T$  et :

$$R = [P, -Q] = \left[ \begin{array}{cc|c} \delta' - \delta & -\pi & 0 \\ -\delta_1 & \delta' - \delta & -\pi \end{array} \right]. \quad (1.53)$$

Il est clair que  $\text{conv } R = [0, 1]$  tandis que  $\det P = \delta'' - 2\delta' + \delta - \delta_1 * \pi$ . A partir de là, on obtient  $\text{conv det } P = [0, 2]$  et la condition 2 est alors satisfaite.

D'autre part,  $R(s)$  s'exprime par :

$$R(s) = \begin{bmatrix} s - 1 & -\frac{e^{-s}-1}{s} & 0 \\ -e^{-s} & s - 1 & -\frac{e^{-s}-1}{s} \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Le déterminant de la matrice formée par la deuxième et la troisième colonne de  $R(s)$  est non nul pour  $s \neq 0$  et pour  $s = 0$ , la matrice formée par la première et la seconde colonne de  $R(0)$  est non singulière. La condition 1 est également satisfaite et le système (1.52) est identifiable pour toute entrée suffisamment riche.

En conclusion, la fonction de transfert est identifiable si et seulement si la coïncidence de la sortie du système et celle du modèle implique la coïncidence des fonctions de transfert correspondant.

Les structures des modèles étudiées dans cette thèse seront toutes mono-entrée / mono-sortie et de type canonique. Une structure est dite canonique si elle est sous une forme telle qu'il existe une façon unique de l'écrire. On obtient, par exemple, une forme canonique en écrivant la fonction de transfert comme le rapport de deux polynômes ordonnés en  $s$ , à condition de simplifier le numérateur et le dénominateur par leur PGCD et de normaliser (fixer à un) le coefficient de plus bas (ou de plus haut) degré en  $s$  du dénominateur [Thomassin, 2005]. Ce type de modèle est toujours identifiable lorsqu'il est soumis à une entrée d'excitation suffisamment riche. Les signaux d'entrée utilisés dans notre étude sont les entrées échelon, constantes par morceaux et sinusoïdales, de durée ( $\omega_u$ ) finie arbitraire. Ils répondent ainsi au cadre de la définition 1. C'est pourquoi le problème d'identifiabilité ne sera pas plus soulevé dans notre cas d'étude.

### Entrée suffisamment riche

Dans les procédures d'identification, la conception d'une entrée suffisamment riche qui renforce la capacité d'identification est également une question importante. Etant donné un modèle de référence associé au système étudié, il faut savoir si les résultats de l'égalité des sorties aboutit à celle des fonctions de transfert. Dans [Belkoura, 2005, Orlov et al., 2002], la conception de l'entrée est considérée dans le domaine temporel et non dans le domaine fréquentiel et les approches sont principalement basées sur la non régularité de l'entrée. Plus précisément, une entrée "riche" peut être conçue à partir des fonctions polynomiales par morceaux ayant un ordre inférieur ou égal à un entier fixe  $K$ . On note par

$$\Lambda_u = \{s_0, s_1, \dots, s_L, \dots\}, \quad (1.55)$$

le support singulier de  $u$  (les extrémités des intervalles sur lesquels les polynômes sont définis) et par  $\sigma_u^k(s_l)$  le saut de  $u^{(k)}$  en  $s_l$ . L'ensemble des sauts de  $u^{(k)}$  forme la matrice de dimension  $q \times L$  suivante :

$$\sigma_u^k = [\sigma_u^k(s_0), \dots, \sigma_u^k(s_l)], \quad k = 0, \dots, K + 1. \quad (1.56)$$

Cependant, cette entrée est suffisamment riche si, d'une part, elle a suffisamment de discontinuités dans le sens qu'une matrice polynomiale formée à partir de ces sauts

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

soit de rang plein et d'autre part ces discontinuités sont suffisamment espacées. D'où la proposition suivante :

**Proposition 4** [Belkoura, 2003] *Toute fonction (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) polynomiale par morceaux, à support compact, et vérifiant les deux conditions ci-dessous, constitue une entrée suffisamment riche dans le sens de la définition 1 :*

1.  $\text{rank} \sum_{i=0}^K \sigma_u^{k-i} s^i = q$ ,
2.  $s_l - s_{l+1} > (n+1)h$ ,  $l = 1, \dots, L$ ,

où  $h$  est le retard qui doit être connu a priori.

### 1.6.3 Classification des méthodes d'estimation du retard

Quelques auteurs ont déjà entrepris des synthèses concernant les différentes méthodes d'identification des systèmes à retards, parmi lesquels [O'Dwyer, 1996, Ferreira and Fernandes, 1997, O'Dwyer, 1999, O'Dwyer, 2000a, Bjorklund, 2003b, Bjorklund, 2003a].

Dans cette présente étude, une synthèse des méthodes d'identification des paramètres et des retards d'une structure de modèle à temps continu les plus utilisées dans la littérature sera réalisée. Cette présentation sera limitée aux techniques d'identification dans le domaine temporel. Nous allons mettre l'accent sur les cas des systèmes à retards sur l'entrée qui est le cas de notre présente étude. A la fin de cette partie, nous reprendrons une synthèse, sous forme de deux tableaux. Le tableau 1.1 donne les différentes méthodes d'identification des systèmes à retards à temps continu dans la littérature. Quant au deuxième tableau 1.2, il regroupe les temps de réponse des algorithmes d'identification, lorsque ceux-ci ont été présentés par leurs auteurs.

#### Méthodes graphiques

Ces méthodes se basent sur l'analyse indicielle d'un système en boucle ouverte soumis à une entrée échelon retardée et initialement au repos. Le principe de ces méthodes est de proposer, à partir de l'étude graphique de la forme de la réponse du système, un modèle permettant de donner une réponse voisine de la sortie mesurée. Il existe plusieurs méthodes dans la littérature [Ziegler et al., 1942, Strejc, 1959, Rake, 1980, Huang and Clement, 1982, Unbehauen and Rao, 1987, Borne et al., 1993, Huang and Clement, 1993, Rangaiah and Krishnaswamy, 1994, Cordon and Ballois, 1998, O'Dwyer, 2000a], parmi lesquelles, on peut citer la méthode de Strejc, celle de Broïda et celle de Ziegler-Nichols :

- La méthode de Strejc permet d'identifier un système, dont la réponse indicielle ne présente pas de dépassement, à un système de la forme suivante :

$$H(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{(1 + as)^n}, \quad (1.57)$$

où  $K$  est le gain statique,  $a$  représente la constante du temps,  $\tau$  est le retard et  $n$  est l'ordre du système. Le principe consiste à tracer une tangente à la réponse



indicielle en boucle ouverte à son point d'inflexion pour déterminer deux valeurs  $T_1$  et  $T_2$  comme le montre la figure 1.4. L'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses permet de déterminer une distance  $T_1$  entre ce point et l'origine de l'axe des abscisses. En traçant une droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point d'intersection de la tangente et de la tangente à la réponse indicielle lorsqu'elle atteint sa valeur finale, la distance  $T_2$  sera mesurée entre son point d'intersection avec l'axe des abscisses et l'intersection de la tangente au point d'inflexion avec l'axe des abscisses. En utilisant un tableau de valeurs existant dans la littérature, ces deux valeurs permettent de calculer l'ordre, la constante du temps et le retard. Quant au gain statique, il est directement déterminé à partir de la valeur finale de la sortie.

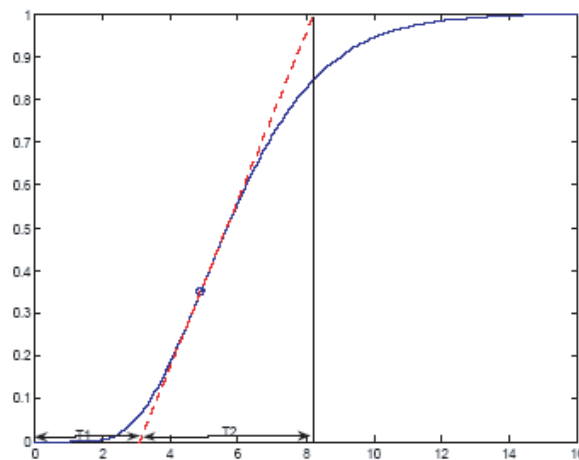


FIGURE 1.4 – Méthode générale pour obtenir  $T_1$  et  $T_2$ .

- La réponse à un échelon retardé sera assimilée à celle d'un premier ordre à retard. La méthode de Ziegler-Nichols, décrite par la figure 1.5, permet de déterminer le retard et la constante du temps en traçant la tangente à un point d'inflexion de la réponse du système. La constante du temps est obtenue, après le calcul de la pente de cette tangente notée  $p$  et la mesure de la valeur finale notée  $M$ , à partir de la relation  $a = \frac{M}{p}$  alors que le retard est obtenu par la mesure de la distance entre l'origine du temps et l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses.
- La méthode de Broïda permet d'identifier la réponse d'un système en boucle ouverte à un système du premier ordre avec un retard pur de la forme :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1 + as}, \quad (1.58)$$

où  $\tau$ ,  $a$  et  $K$  représentent respectivement le retard, la constante de temps et le gain statique.

Son principe est de trouver deux points qui correspondent respectivement à 28% et 40% de la valeur finale. A partir de leur projection sur l'axe des abscisses, on détermine respectivement deux temps  $t_1$  et  $t_2$ . Le retard et la constante du temps

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

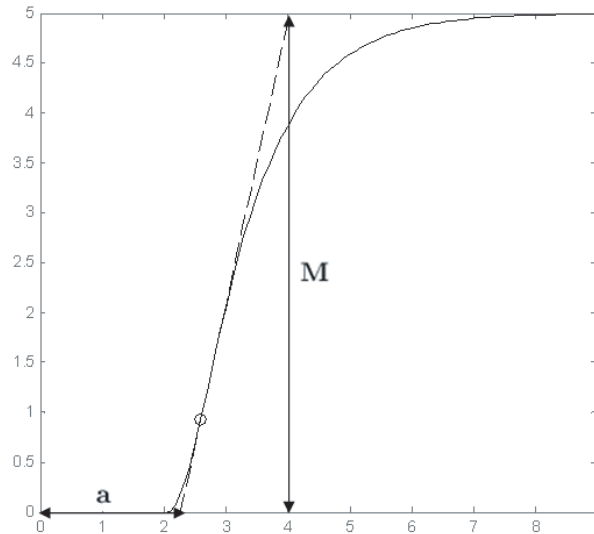


FIGURE 1.5 – Identification pour Ziegler-Nichols.

peuvent être ainsi déterminés à partir des deux équations suivantes :

$$a = 5.5(t_2 - t_1), \quad (1.59)$$

$$\tau = 2.8t_1 - 1.8t_2. \quad (1.60)$$

Le gain est aussi déterminé à partir de la valeur finale de la sortie. L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode de Strejc et de Ziegler-Nichols est qu'elle n'a pas recours au point d'inflexion souvent difficile à déterminer.

L'avantage des méthodes d'identification graphique est qu'elles sont simples lorsqu'on dispose de la réponse indicielle obtenue dans un contexte non ou peu bruité. Néanmoins, ces méthodes sont imprécises (détermination du point d'inflexion pour les deux premières méthodes), se limitent à une classe de modèle, nécessitent des signaux de grandes amplitudes, sensibles aux perturbations et possèdent des procédures longues. De plus, leur principal inconvénient est la nécessité de déconnecter le système de son environnement (méthodes en boucle ouverte) et d'attendre que le système soit au repos. Par conséquent, des méthodes d'identification en boucle fermée ont été proposées dans la littérature, parmi lesquelles, on peut citer la méthode de Strejc, la méthode de Broïda et la méthode de Ziegler-Nichols. Ces méthodes permettent de régler un correcteur à partir d'un essai en *limite de pompage*. La limite de pompage est déterminée en faisant croître son gain de boucle jusqu'à l'apparition des oscillations auto-entretenues à la limite de stabilité [Borne et al., 1993].

Quelques autres méthodes d'estimation à partir de la réponse indicielle basées sur le calcul d'aire ont été proposées dans la littérature [Astrom and Hagglund, 1995, Rake, 1980, Bi et al., 1999, Wang et al., 2001a]. Leur principe consiste à identifier la réponse d'un système à un système du premier ordre à retard pur soumis à une condition initiale nulle. Parmi ces méthodes, on décrit brièvement celle proposée par [Astrom and Hagglund, 1995] et décrite par la figure 1.6.

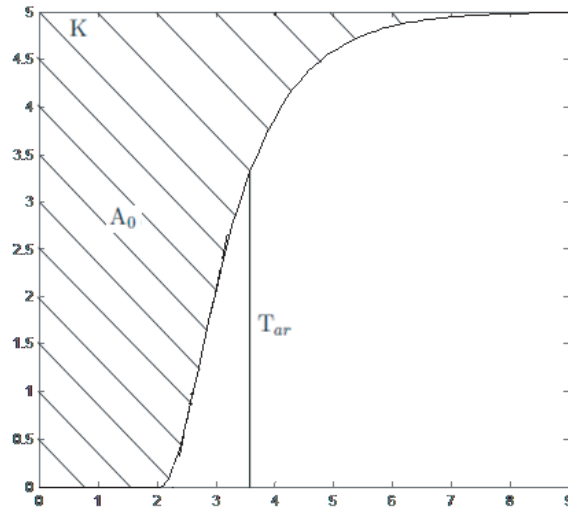


FIGURE 1.6 – Méthode de calcul d'aire.

Le gain est supposé connu ou pouvant être déterminé à partir de la valeur finale de la sortie. La durée moyenne de séjour, notée  $T_{ar}$ , est calculée à partir de la division de l'aire  $A_0$  par le gain  $K$ , où  $A_0$  est l'aire de la surface délimitée par la réponse du système, l'axe des ordonnées et la tangente à la réponse indicielle à la valeur finale. Pour déterminer la constante du temps  $a$ , il est nécessaire de calculer l'aire  $A_1$  de la surface en dessous de la réponse indicielle et limitée par l'axe des abscisses et par  $T_{ar}$ .  $a$  sera déterminé à partir de :  $a = \frac{eA_1}{K}$  et le retard  $\tau$  sera déduit directement à partir de  $\tau = T_{ar} - a$ . Cette méthode semble moins sensible au bruit de hautes fréquences comparant aux trois méthodes précédentes [Astrom and Hagglund, 1995, Bi et al., 1999, Wang et al., 2001b].

### Méthodes basées sur l'approximation rationnelle du retard

Une alternative très étudiée dans la littérature permettant d'identifier un système avec retard est l'approximation rationnelle du retard, représenté dans le domaine de Laplace par  $e^{-\tau s}$  [Luke, 1975, Gawthrop and Nihtila, 1985, Piché, 1990, Bai and Chyung, 1991, Piché, 1990, Elnagger, 1997, Fernandes and Ferreira, 1996, O'Dwyer, 1996]. L'intérêt principal de ces méthodes réside dans l'espoir de traiter un système de dimension infini comme un système de dimension fini. Plusieurs approximations peuvent être utilisées, parmi lesquelles, on trouve : l'approximation polynomiale [Gawthrop and Nihtila, 1985, Smyth, 1998], l'approximation de Padé [Brezinski, 1980, Piché, 1990, Bai and Chyung, 1991] et l'approximation de Laguerre [Piché, 1990, Elnagger, 1997, Makila and Partington, 1999]. Nous rappelons brièvement la définition de chaque approximation :

- L'approximation polynomiale : il s'agit d'approcher la fonction exponentielle par un polynôme. Plusieurs polynômes sont proposés dans la littérature [Jedrzejewski, 2005] pour répondre à cet objectif, le plus simple étant le développement de Tay-

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

lor :

$$e^{-\tau s} \cong 1 - \tau s + \frac{\tau^2}{2!} s^2 - \frac{\tau^3}{3!} s^3 + \frac{\tau^4}{4!} s^4 - \frac{\tau^5}{5!} s^5 + \dots$$

- L'approximation de Padé : Elle est définie par un quotient de polynômes de degré  $n$  au dénominateur et au numérateur. La forme générale est donnée par :

$$e^{-\tau s} \cong \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k C_k \tau^k s^k}{\sum_{k=0}^n C_k \tau^k s^k},$$

avec,

$$C_k = \frac{(2n - k)! n!}{2n! k! (n - k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- L'approximation de Laguerre : l'approximation de Laguerre de la fonction exponentielle a la forme suivante :

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-\tau s/2}}{e^{\tau s/2}} \cong L_n(s) := \frac{(1 - \tau s/2n)^n}{(1 + \tau s/2n)^n},$$

avec  $L_n(s)$  est le  $n^{ime}$  polynôme de Laguerre.

La plupart des travaux existants dans la littérature [Seborg et al., 1989, O'Dwyer, 1996, Rad et al., 1995, Ferretti et al., 1995, Roy et al., 1991, Sinha, 1991] s'intéressent à l'approximation du retard constant à partir de ces propriétés en boucle ouverte, c'est à dire, à partir de l'opérateur  $e^{-\tau s}$ . Quelques études menées dans [Beghi et al., 1997, Battle and Miralles, 2000] ont utilisé une méthode d'approximation rationnelle du retard à partir de l'analyse en boucle fermée de l'opérateur  $\frac{e^{-\tau s}}{1+ae^{-\tau s}}$  avec une commande constante [Beghi et al., 1997] ou polynomiale [Battle and Miralles, 2000].

En revanche, remplacer un retard par une approximation de dimension fini peut être une source de problèmes et présente des limitations [Richard, 2003]. Dans le cas où le retard est constant, qui est le domaine favori de l'application de ces méthodes, la conception d'un contrôleur qui stabilise l'approximation de Padé peut conduire à des comportements instables du système d'origine [Silva et al., 2001]. Le problème du choix de l'ordre d'approximation a priori permettant de s'assurer de la stabilité en boucle fermée sur la base d'un modèle réduit en boucle ouverte reste encore ouvert. Par ailleurs, l'approximation du retard pose un compromis entre une approximation fidèle du retard et son ordre élevé qui constitue le principal inconvénient de ces méthodes. Dans [Glover and Partington, 1987, Makila and Partington, 1999], les auteurs ont discuté le problème de l'erreur d'approximation dans le sens de la norme  $H_\infty$ . Si on tente de rapprocher  $\frac{1}{s+a} e^{-\tau s}$ , pour  $\forall a > 0$  alors l'erreur optimale  $H_\infty$  de l'approximation rationnelle d'ordre  $n$  est  $O(\frac{1}{n})$ . L'approximation de Laguerre du même exemple,  $(\frac{1}{s+a} e^{-\tau s}) (\frac{2n-\tau s}{2n+\tau s})^n$ , réalise une convergence plus lente, dans  $O(n^{-\frac{2}{3}})$  [Makila and Partington, 1999]. Une étude menée dans [Seborg et al., 1989] a proposé une règle pratique à suivre pour choisir un ordre d'approximation de Padé en fonction de l'ordre de grandeur respectif du retard et de la constante du temps. Quand le retard est inférieur ou égal au dixième de la constante du temps, une approximation du Padé du premier ordre donne une approximation satisfaisante du retard pour un système du premier ordre avec retard. Une approximation de Padé du second ordre

pour un retard inférieur à la cinquième de la constante du temps peut être appliquée même pour un système d'ordre général.

La plupart des travaux menés sur l'identification du retard constant approximé par des polynômes rationnels ont recours aux algorithmes récursifs [O'Dwyer, 1996, Rad et al., 1995, Ferretti et al., 1995, Roy et al., 1991, Sinha, 1991] afin de déterminer en ligne le retard ainsi que les paramètres du système étudié. Ces travaux passent généralement par une étape de discrétisation du modèle résultant et la tâche d'identification passe alors au domaine discret, qui pose à son tour des problèmes gênants tels que : la surparamétrisation, la perte de la structure de la fonction rationnelle et de la signification physique des paramètres, etc. L'utilisation des méthodes d'approximation du retard, bien qu'elles soient simples à manipuler, augmente l'ordre du système à identifier et exigent, par la suite, l'estimation d'un nombre de paramètres plus important que celui du modèle initial. De plus, les techniques d'estimation et de commande deviennent plus lourdes plus que l'ordre d'approximation augmente et l'étude du système approximé peut devenir plus compliquée que l'étude directe du modèle initial à retard.

### **Méthodes de surparamétrisation**

La discrétisation d'un système continu afin d'utiliser des méthodes d'identification dans le domaine discret reste toujours une solution adoptée par plusieurs travaux dans la littérature [Kurz and Goedecke, 1981, Wong and Bayoumi, 1982, Keyser, 1986, Teng and Sirisena, 1988, Landau, 1993, O'Dwyer, 1992, O'Dwyer, 1993, O'Dwyer, 1996, O'Dwyer, 1999, Gao and O'Dwyer, 2001, Roe et al., 2007]. L'idée principale de ces méthodes est connue sous le nom de "surparamétrisation". Son principe est de faire entrer un terme retard  $z^{-d}$  dans le numérateur du modèle discrétisé. Les paramètres sont estimés récursivement et le retard est calculé à partir des paramètres identifiés du numérateur. En absence du bruit, tous les paramètres du numérateur dont les indices sont plus petit que l'indice  $d$  du retard doivent être identifiés à zéro. Dans un contexte bruité, un réglage, toujours délicat, d'un seuil au dessous duquel ces paramètres peuvent être maintenus à zéro. Seul le retard multiple de la période d'échantillonnage  $T$  est directement estimé par cette méthode. Par ailleurs, le retard ainsi estimé est toujours proportionnel à la période d'échantillonnage : une augmentation de la précision sur sa valeur, obtenue en diminuant la période, se fait au détriment de l'ordre du transfert obtenu (autrement dit, pour un même retard, la diminution de  $T$  se traduit par une augmentation de  $d$ ). Pour la même raison, le cas d'un retard variable, même lentement, conduit aussi à un système d'ordre variable. Quand le retard est une fraction de la période d'échantillonnage  $\tau = dT + hT$ , la portion  $h$  du retard peut être déduite à partir des paramètres identifiés du numérateur. Cependant, dans les deux cas, la robustesse de cette méthode d'estimation dans un contexte bruité reste discutable.

Deux méthodes de surparamétrisation qui semblent robustes sont proposées par [Kurz and Goedecke, 1981, Teng and Sirisena, 1988, Gao and O'Dwyer, 2001]. La première méthode [Kurz and Goedecke, 1981] consiste à estimer les paramètres du numé-

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

teur et à chercher la valeur maximale de ces paramètres. L'indice du retard, qui n'est que le retard divisé par la période d'échantillonnage, est supposé inférieur ou égal à cette valeur. La valeur finale de l'indice du retard sera déterminée récursivement par la minimisation d'une fonction quadratique. Cette méthode, bien que robuste, demande un calcul intensif et pose donc un problème pour une estimation en ligne. L'idée principale de la seconde méthode [Teng and Sirisena, 1988] est de minimiser une fonction coût en calculant la différence entre la somme des paramètres du modèle surparamétrisé et ceux du modèle estimé pour chaque valeur d'indice du retard. Sa simplicité d'implémentation donne la faveur à cette deuxième méthode, bien que sa robustesse vis-à-vis les bruits reste un problème ouvert.

L'inconvénient majeur de ces deux méthodes est la nécessité d'une connaissance a priori et exacte de l'ordre du système à identifier. Dans le cas où l'ordre choisi dans l'algorithme d'identification est inférieur à l'ordre du système, la première méthode est plus efficace que la deuxième. Dans le cas contraire, les deux méthodes donnent les mêmes résultats [Gao and O'Dwyer, 2001].

D'autres méthodes (voir [Wong and Bayoumi, 1982, Keyser, 1986, Roe et al., 2007]) offrent un compromis entre la robustesse et la simplicité du calcul. Elles montrent l'extension possible de la méthode de [Wong and Bayoumi, 1982] pour identifier un système dans le cas où le retard est une fraction de la période d'échantillonnage. Dans [O'Dwyer, 1993], ces méthodes ont été utilisées pour identifier le procédé d'asservissement de température "Feedback PT326", bien connu par la communauté scientifique, à un système du premier ordre à retard pur ou un système du second ordre à retard pur. L'estimation a été faite dans un contexte bruité et le système est initialement au repos et soumis à une entrée échelon. Les résultats de simulation ont montré un problème de robustesse dû au choix du signal d'excitation et à la présence du bruit et l'erreur quadratique d'estimation est de l'ordre de 33%.

En conclusion, on peut dire que malgré ces études effectuées sur la surparamétrisation, ce type de méthode souffre en général des inconvénients suivants :

- L'augmentation du nombre de paramètres à estimer alourdit le calcul et exclut par la suite toute alternative d'estimation en ligne ;
- La condition d'excitation persistante doit être vérifiée pour donner satisfaction aux modèles surparamétrés [O'Dwyer, 1993, Gao and O'Dwyer, 2001] ;
- Le risque d'avoir des facteurs communs entre le numérateur d'ordre élevé et le dénominateur [Roe et al., 2007] ;
- La présence d'un bruit important met la robustesse de ces algorithmes en question.

Les limitations des méthodes graphiques, des méthodes basées sur l'approximation rationnelle du retard ainsi que des méthodes de surparamétrisation constituent une véritable motivation pour développer des techniques d'identification spécialement conçues pour les systèmes à retards.

## Méthodes paramétriques

Les méthodes d'identification récursive des systèmes sans retards s'étendent assez naturellement à l'identification conjointe des paramètres ainsi que d'un retard additionnel sur l'entrée. La majorité des travaux effectués sur l'identification des systèmes à retards à temps continu s'est basée sur des méthodes du gradient, des algorithmes de moindres carrés ainsi que sur la méthode des variables instrumentales [Marshall, 1979, Marshall, 1980, Liu, 1990, Elnagger et al., 1990, O'Dwyer, 1996, O'Dwyer, 1999, Bi et al., 1999, O'Dwyer, 2000a, Wang et al., 2001b, Yang et al., 2003, Wang et al., 2001a, Liu et al., 2007, Wang et al., 2008, Gawthrop et al., 1989, Tuch et al., 1994, Ren et al., 2005, Ahmed et al., 2006, Yang et al., 2007].

Plusieurs travaux [Marshall, 1979, Marshall, 1980, O'Dwyer, 1996, O'Dwyer, 1999, O'Dwyer, 2000a, Nuninger et al., 2007] se sont concentrés sur l'identification du retard par les méthodes du gradient. Ils sont basés sur la discrétisation du modèle continu et le remplacement de l'erreur sur le retard par son approximation de Taylor ou de Padé. Dans [O'Dwyer, 1996, O'Dwyer, 2000a], l'auteur a montré l'efficacité de la méthode du gradient pour l'estimation en boucle ouverte du retard ainsi que des paramètres d'un système à retard pur, connu ou non, soumis à un signal d'entrée carré ou à un bruit blanc lorsque le retard est un entier multiple de la période d'échantillonnage. Cependant, bien que ces méthodes se montrent robustes vis à vis les données bruitées, elles restent limitées. En effet, elles sont incapables d'estimer un retard inconnu et fraction de la période d'échantillonnage. De plus, elles posent toujours le problème du choix des valeurs des variables d'initialisation qui reste ouvert puisque les travaux présentés supposent que les valeurs initiales sont suffisamment proches de minimum global. Quant au temps de convergence, il reste variable d'un cas d'étude à un autre puisqu'il dépend essentiellement de la connaissance a priori du retard et de l'initialisation des algorithmes du gradient. Dans [O'Dwyer, 1996], l'auteur a étudié suivant le même principe les méthodes du gradient, proposées initialement par [Marshall, 1979] et [Marshall, 1980], afin d'estimer le retard d'un système à retard pur en boucle fermée dans une structure de prédicteur de Smith. Les algorithmes implémentés sont basés sur la méthode de Gauss-Newton et celle de Newton-Raphson. La première s'avère plus efficace étant donnée qu'elle possède un temps de calcul moins intensif et un temps de convergence modéré.

Les méthodes des moindres carrés et des variables instrumentales ont été utilisées pour l'identification des systèmes à retards, sous forme non récursive ou récursive, dans plusieurs travaux [Gawthrop and Nihtila, 1985, Gawthrop et al., 1989, Tuch et al., 1994, Bi et al., 1999, Wang et al., 2001b, Wang et al., 2001a, Yang et al., 2003, Ren et al., 2005, Ahmed et al., 2006, Liu et al., 2007, Yang et al., 2007, Wang et al., 2008]. Dans certains d'entre eux [Bi et al., 1999, Wang et al., 2001b, Wang et al., 2001a], elles ont été appliquées à l'équation de régression linéaire obtenue à la suite de l'application de la méthode intégrale (section 1.4) afin de déterminer les paramètres de régression. Cette procédure d'identification non récursive a été initialement proposée dans [Bi et al., 1999] pour l'identification d'un système du premier ordre continu et à retard pur initialement au repos et soumis à une entrée échelon. Elle a été améliorée dans [Wang et al., 2001b] et détaillée pour un système

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

du second ordre avec un zéro et à retard pur soumis à une entrée échelon et sous une condition initiale nulle puis généralisée dans [Wang et al., 2001a] pour un système d'ordre  $n$ . Dans les trois travaux, la première étape consistait à utiliser la méthode des moindres carrés ordinaires qui pose un problème dans le cas de présence de données bruitées. Pour cela, une deuxième alternative était d'appliquer la méthode des variables instrumentales qui a renforcé la robustesse de l'algorithme d'identification. Un test de la robustesse de cette méthode vis à vis des bruits d'amplitude différentes allant d'un  $RBS$  égale à 3% jusqu'à 50% ainsi qu'une comparaison avec la méthode de calcul d'aire [Rake, 1980, Astrom and Hagglund, 1995, Bi et al., 1999, Wang et al., 2001a] (voir section 1.6.3) on été faite prouvant ainsi la robustesse et l'efficacité de la méthode proposée.

Bien que la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure représente un avantage mettant en faveur cette procédure, elle reste limitée par l'exigence de deux hypothèses, difficiles à satisfaire dans la pratique, qui sont : (1) des conditions initiales nulles et (2) l'absence de perturbation durant le test. Dans [Liu et al., 2007], cette procédure a été améliorée afin d'estimer les systèmes continus et à retard à partir d'une condition initiale arbitraire et en présence d'une perturbation quelconque mais soumis à une entrée constante par morceau. [Wang et al., 2008] a proposé une nouvelle méthode intégrale pour l'identification des systèmes continus et à retard pur soumis à une entrée échelon à partir d'une condition initiale arbitraire inconnue et en présence d'une perturbation constante. Un changement de variable des bornes des intégrales effectué lors de l'intégration de l'équation de fonctionnement du système étudié a permis d'éliminer les conditions initiales et l'algorithme d'identification ne requiert alors que le couple entrée-sortie mesuré. Cette méthode semble robuste vis à vis un bruit additionnel à l'entrée dont le  $RBS = 25\%$ .

En général, l'efficacité des méthodes non récursives est liée principalement à la disponibilité d'un nombre de mesures suffisant. Pour tenir compte des nouvelles mesures, ces méthodes nécessitent la réalisation de plusieurs calculs. Cependant, des méthodes récursives [Ljung, 1987, Borne et al., 1992, Borne et al., 1993, Landau, 1993, Landau and Besançon-Voda, 2001, Abdennour et al., 2001] peuvent être une solution pour remédier à ce problème. Plusieurs travaux se sont penchés sur le développement de tels algorithmes récursifs. Une méthode d'identification polynomiale a été proposée dans [Gawthrop and Nihtila, 1985, Gawthrop et al., 1989], permettant d'identifier le retard ainsi que les paramètres d'un système à retard additionnel à l'entrée soumis à une condition initiale non nulle. Le retard est remplacé par son approximation polynomiale et la résolution du problème d'estimation a été effectuée grâce à la méthode des moindres carrés non linéaires. Cependant, son application à des systèmes d'ordre supérieur pose un problème de calcul intensif. Suite à son application dans un contexte bruité à un système du troisième ordre à retard pur soumis à une entrée sinusoïdale et initialement au repos, cette méthode présente un temps de convergence assez important puisque le rapport temps de convergence et retard, noté  $RCR$ , est égal environ à 40. Dans [Tuch et al., 1994], un algorithme d'identification adaptative basé sur la méthode des moindres carrés non linéaires a été proposé pour identifier, dans une première étape, le retard pur d'un système à retard soumis



à une entrée échelon ou sinusoïdale et initialement au repos. Néanmoins, pour les deux types d'entrée et dans un contexte non bruité, cet algorithme d'identification du retard seul connaissant les paramètres souffre d'une vitesse de convergence assez lente, puisque le  $RCR \simeq 4$  pour un système du premier ordre à retard pur. Dans une deuxième étape, des modifications apportées à l'algorithme des moindres carrés non linéaires permet l'identification simultanée des paramètres ainsi que du retard dans un contexte non bruité, avec une entrée sinusoïdale et des conditions initiales nulles. Pour cet exemple de simulation, le  $RCR \simeq 15$  est assez important. Dans [Ren et al., 2005], l'algorithme des moindres carrés modifiés non linéaires, proposé dans [Tuch et al., 1994] est amélioré. Comme il reste difficile de l'implémenter pour des applications en temps réel, deux cas simplifiés (moindres carrés normalisés et non normalisés) peuvent être dérivés. Un exemple de simulation consistant en un système du troisième ordre à retard pur soumis à une entrée sinusoïdale et une condition initiale nulle a été étudié dans un contexte bruité. Une comparaison avec la méthode polynomiale a été menée, prouvant l'efficacité des deux méthodes. Cependant, pour un facteur de normalisation fixé le  $RCR \simeq 30$  est légèrement inférieur à celui de la méthode polynomiale. On peut dire qu'ici non plus, le problème de la faible vitesse de convergence de l'algorithme n'a pas été résolu. Néanmoins, la variation du facteur de normalisation de l'algorithme proposé dans [Ren et al., 2005] peut améliorer le temps de convergence du retard ainsi que des paramètres.

Quelques travaux basés sur les filtres linéaires ont été réalisés dans [Yang et al., 2003] pour les systèmes avec un seul retard à l'entrée, puis étendus dans [Yang et al., 2007] pour des systèmes à retards multiples. La méthode des moindres carrés non linéaire et la méthode des variables instrumentales ont été utilisées respectivement en absence et en présence de bruits de mesure. Ces algorithmes sont sensibles aux conditions initiales. Dans [Ahmed et al., 2006], les auteurs ont utilisé les filtres des variables d'état et la méthode des moindres carrés ordinaires. L'estimation des paramètres ainsi que du retard d'un système continu à retard pur à partir d'une condition initiale nulle et dans un contexte bruité est faite à partir des données échantillonnées. Cependant, les performances de cet algorithme dépend essentiellement de la valeur initiale du retard et des paramètres du filtre.

## **Méthodes heuristiques**

Nous l'avons vu, l'identification peut aussi être vue comme un problème d'optimisation. Le problème de la convergence vers un optimum global n'est pas toujours un enjeu réalisable. Dans les cas non convexes difficiles, c'est-à-dire ceux où une multitude d'optima locaux coexistent, l'appel à l'utilisation des méthodes heuristiques d'optimisation est une alternative qui s'est imposée depuis plusieurs années. Les algorithmes évolutionnistes, ou algorithmes génétiques [Vose, 1999, Man et al., 1999, Reeves and Rowe, 2003, Eiben and Smith, 2003, Sivanandam and Deepa, 2007], ont reçu une attention considérable dans plusieurs domaines, puisqu'ils présentent un grand potentiel dans les problèmes d'optimisation non convexe. En particulier, certains travaux les ont appliqués à l'identification des systèmes à retard.

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

Quelques études ont proposé de nouvelles méthodes basées sur les algorithmes génétiques pour l'identification en ligne des systèmes linéaires continus et à retard variable additionnel à l'entrée [Hachino et al., 1996, Yang et al., 1997]. Pour suivre la trace du retard variable dans le temps et des paramètres du système, la méthode des moindres carrés récurrentes et linéaires est combinée avec les algorithmes génétiques appelée *GALS*. En outre, une méthode hybride combinant la méthode *GALS* et celle des moindres carrés récurrentes et non linéaire a été proposée dans le but d'améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme d'identification. La procédure d'identification dans les deux cas est faite après la discrétisation du modèle à identifier. Dans la première méthode *GALS*, l'identification des paramètres est effectuée à l'aide de l'algorithme des moindres carrés, tandis que l'ajustement du retard est fait par les algorithmes génétiques en minimisant l'erreur quadratique comme une fonction d'évaluation (ou *fitness*). Quant à la deuxième méthode, elle prend comme valeurs initiales les paramètres et le retard estimés par l'*GALS*. Une comparaison entre les valeurs de la fonction fitness pour les valeurs estimées à partir de la méthode *GALS* et les valeurs de la fonction fitness pour les valeurs estimées à partir de la méthode *SNLS* permet de déterminer la solution optimale. Les exemples présentés ont montré, dans un contexte bruité, que l'algorithme hybride peut présenter de meilleures performances puisqu'il a permis pour les différents exemples étudiés d'identifier le retard ainsi que les paramètres contrairement au *GALS* qui peut ne pas déterminer la solution optimale. De plus, la vitesse de convergence de l'algorithme hybride est légèrement inférieure à celle des *GALS*.

Dans [Shin et al., 2007], seuls les algorithmes génétiques sont utilisés pour identifier hors ligne des systèmes continus d'ordre supérieur à un système du premier et du second ordre sans zéro à retard pur soumis à une entrée échelon ou un système du premier et du second ordre sans zéro à retard pur à partir de sa réponse indicielle. La recherche de la solution optimale (c'est à dire les paramètres et le retard) est effectuée suite à l'optimisation de l'erreur quadratique de prédiction. Sur plusieurs exemples, cette méthode a permis de déterminer la solution optimale et semble robuste vis à vis des bruits de moyenne amplitude. Une comparaison avec la méthode basée sur le calcul d'aire [Bi et al., 1999] et la méthode directe [Wang et al., 2001a, Wang et al., 2001b] a été effectuée. En se basant sur la valeur de la moyenne de l'erreur quadratique en absence du bruit, les auteurs affirment que la méthode proposée est plus efficace bien qu'il y a une légère différence entre les résultats donnés par cette méthode et les deux autres. De plus, les auteurs n'ont pas précisé le nombre d'exécution de l'algorithme d'identification pour trouver la solution optimale. En conclusion, on peut dire que les algorithmes génétiques bien qu'ils sont fiables pour déterminer la solution optimale, ils exigent un calcul intensif qui peut exclure généralement toute exploitation en ligne.

D'autres approches métaheuristiques ont été utilisées pour identifier le retard [Chen and Wang, 2004, Wang et al., 2004]. [Chen and Wang, 2004] propose deux algorithmes, la recherche tabou et le recuit simulé, comme méthodes d'identification du retard. Le problème d'identification y est transformé en un problème de minimisation de l'erreur quadratique moyenne. L'étude a été faite sur une fonction appelée *Rastrigin* qui est une fonction test tirée du Toolbox "*Global Optimization Toolbox*"

de *Matlab*. Cette fonction a de nombreux minima locaux et un minimum global et pour notre cas d'étude, elle possède deux variables d'entrées retardées. Les deux algorithmes sont exécutés 10 fois pour estimer des retards constants en présence et en absence du bruit. Les résultats de simulation ont montré que la recherche tabou a pu déterminer le minimum global et qu'elle présente pour cette exemple d'étude de meilleures performances pour trouver le vecteur des paramètres optimaux, en l'absence comme en présence du bruit. Contrairement à la recherche tabou, l'algorithme du recuit simulé n'a pas pu déterminer le minimum global, en absence du bruit, que pour 2 exécutions seulement. Pour les deux méthodes, les valeurs initiales sont choisies proches des valeurs à estimer et ceci présente une limitation de ces algorithmes. [Wang et al., 2004] compare aussi les méthodes tabou et recuit simulé avec la méthode de Programmation Quadratique Successive (SQP) mais cette fois ci pour un système du second ordre avec un zéro, à retard pur, soumis à une entrée échelon et dans un contexte bruité. Les algorithmes de la recherche tabou et du recuit simulé ont présentés des résultats de simulations proches et ont réussie à déterminer la solution optimale et confirme la robustesse de l'algorithme de Tabou. Quant à la méthode de Programmation Quadratique Successive, elle n'a réussie que 2 fois sur 10 à converger vers la solution désirée.

L'utilisation des réseaux de neurones pour l'identification en ligne des systèmes à retard présente une autre piste de recherche. Une récente recherche à été faite par dans [Tan, 2004] pour identifier en ligne un système non linéaire avec un retard lentement variable additionnel à une entrée sinusoïdale. Le nombre d'opérations demandé par l'algorithme proposé est assez important. De plus, l'algorithme prend 80 secondes, en absence du bruit, pour suivre la variation du retard. Une autre recherche a été menée dans [Ren and Rad, 2007] pour les systèmes non linéaires mais à retard constant additionnel à l'entrée. L'exemple présenté montre que cette méthode d'identification en ligne souffre d'une vitesse de convergence lente puisque le  $RCR \simeq 9$  et ceci en l'absence de bruit de mesure.

## **Méthode algébrique**

La méthode algébrique est une méthode d'identification non asymptotique initiée par les travaux de Fliess et Sira-Ramirez [Fliess and Sira-Ramirez, 2003] pour les systèmes linéaires en les paramètres (non nécessairement linéaires vis-à-vis des entrées, états, sorties) et de dimension finie. Cette méthode est basée sur des outils algébriques (l'algèbre différentielle, la théorie des modules, le calcul opérationnel) et conduit à une estimation paramétrique en temps fini en l'absence de bruit. Elle traduit les problèmes d'identification en des formules algébriques explicites, susceptibles d'être résolues en utilisant des méthodes exactes, et facilement mises en œuvre. Cette méthode a montré une flexibilité d'applicabilité à d'autres problèmes importants. On trouve par exemple [Fliess et al., 2004, Ali et al., 2009a, Ali et al., 2009b] pour le diagnostic de défaut, [Barbot et al., 2007, Fliess, 2008] pour l'estimation des systèmes non linéaires avec entrées inconnues dans [Barbot et al., 2007] et perturbations inconnues dans [Fliess, 2008], aux problèmes d'estimation paramétrique en boucle fermée dans [Fliess and Sira-Ramirez, 2003, Fliess and Sira-Ramirez, 2008, Tian et al., 2008]

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

pour l'estimation d'état des systèmes linéaires avec des paramètres variant dans le temps et l'estimation du retard et des paramètres des systèmes à retard pur [Belkoura et al., 2007] et enfin, l'identification d'une certaine classe de systèmes linéaires en dimension infinie régis par des équations différentielles partielles dans [Rudolph and Woittennek, 2008].

Afin de comprendre le principe de cette méthode, nous allons présenter un exemple illustratif simple tiré de [Fliess and Sira-Ramirez, 2003]. Nous considérons un système du premier ordre décrit dans le domaine opérationnel par l'équation suivante :

$$sy - ay = u + y_0, \quad (1.61)$$

où,  $a$  un paramètre inconnu et  $y_0$  la condition initiale.

En multipliant l'équation (1.61) des deux cotés par  $d/ds$ , on obtient :

$$\frac{d(sy)}{ds} - a \frac{dy}{ds} = \frac{du}{ds}. \quad (1.62)$$

Cette étape qui n'est qu'une dérivation de l'équation (1.61) permet d'annihiler la condition initiale. La multiplication par  $1/s$  permet d'aboutir à :

$$a \frac{1}{s} \left[ \frac{dy}{ds} \right] = \frac{1}{s} \left[ \frac{d(sy)}{ds} - \frac{du}{ds} \right]. \quad (1.63)$$

L'identification en ligne de  $a$  est donnée alors par l'équation suivante :

$$a = \frac{\frac{1}{s} \left[ \frac{d(sy)}{ds} - \frac{du}{ds} \right]}{\frac{1}{s} \left[ \frac{dy}{ds} \right]}. \quad (1.64)$$

En 2006, cette méthode a été généralisée par Belkoura, Richard et Fliess dans [Belkoura et al., 2006, Belkoura and Richard, 2006] en posant les bases d'une méthode non asymptotique pour l'identification simultanée des retards et des paramètres dans le cadre de systèmes dynamiques continus. Basées sur un formalisme distributionnel, ces deux références ont présenté cette méthode d'identification à travers un système du premier ordre avec retard sur l'entrée, permettant, en premier lieu, d'identifier le retard en connaissant les paramètres du système étudié et, en deuxième lieu, d'identifier simultanément le retard et les paramètres à partir de la résolution d'un système d'équations linéaires.

La majorité des travaux réalisés s'intéressent à l'identification des systèmes à retards soumis à des entrées structurées et, plus précisément, avec une entrée de type échelon. Certes, la nature du signal d'entrée peut avoir une influence sur les résultats et la qualité d'estimation. Les signaux d'entrée les plus connus sont les entrées de type pseudo-aléatoire, sinusoïdal, échelon et rampe. L'entrée échelon est souvent simple à mettre en œuvre (à l'occasion d'un changement de régime par exemple) et elle est assez dominante dans les applications de commande des processus réels. Les travaux de [Belkoura et al., 2006, Belkoura and Richard, 2006, Belkoura et al., 2009, Taarit et al., 2007] ont largement étudié, le plus souvent en simulation, l'apport de la méthode d'identification algébrique pour ce type d'entrée.

L'identification des systèmes à retards avec une entrée arbitraire représente ainsi un enjeu intéressant pour les travaux menés sur l'estimation par l'approche algébrique. Pour ce qui concerne l'identification d'un système linéaire soumis à une entrée constante par morceaux [Belkoura et al., 2006, Belkoura et al., 2009] ou à des entrées sinusoïdales, la généralisation à partir du cas échelon peut être en faite aisément.

Le problème qui se pose pour des entrées plus générales, non nécessairement structurées, est que la procédure d'identification algébrique simultanée (retard et paramètres) utilisée dans le cas d'une entrée structurée n'est plus applicable. Pour cela, une seconde approche, basée principalement sur les propriétés du produit de convolution, a été initialisée. A travers une étude pour des cas simples (un intégrateur retardé ou un système du premier ordre à retard), cette approche permet d'identifier le retard ainsi que les paramètres du système dans le cas où la condition initiale est nulle [Belkoura et al., 2006, Belkoura et al., 2008] et même dans le cas où la condition initiale est arbitraire. Ce dernier cas est souvent rencontré dans les applications réelles. Dans [Belkoura et al., 2008], le problème a été résolu en passant par des approximations en série de Fourier.

Dans tous ces travaux, le seul coefficient pour lequel la valeur explicite du retard est exigée est le gain statique, qui ne peut pas être estimé simultanément par cette méthode. Il ne pourra l'être que de façon récursive au sens où une deuxième boucle est exécutée en parallèle avec la première qui permet l'identification des paramètres ainsi que du retard. Cette deuxième boucle requiert comme variable d'entrée le retard identifié.

Ces travaux d'identification se situent dans un cadre essentiellement linéaire et stationnaire. Quelques travaux se sont penchés sur l'identification d'un retard lentement variable ou de paramètres variables par morceaux [Belkoura et al., 2008, Belkoura et al., 2009].

Une des problématiques très rencontrées pour la commande des systèmes en réseau, qui est devenue récemment un enjeu de recherche intéressant [Hespanha et al., 2007, Zampieri, 2008], est d'établir une loi de commande en temps réel en tenant compte des effets dynamiques générés par le réseau. La plupart de ces effets (retards de communication, temps d'accès au réseau, pertes de paquets, échantillonnage asynchrone) peuvent se modéliser par la présence des retards multiples. Dans [Belkoura et al., 2006] puis dans nos travaux [Taarit et al., 2011], l'approche algébrique a permis l'identification de retards multiples.

De plus, en s'inspirant de cette dernière procédure d'identification, l'approche a été étendue à l'estimation des instants de commutations ainsi que des paramètres de certaines classes de systèmes hybrides [Belkoura et al., 2009, Tian et al., 2009], à la détection de rupture (discontinuités) [Belkoura, 2009a, Mboup et al., 2008, Fliess et al., 2010] et, dans nos travaux, à l'identification de systèmes soumis à des frottements secs (non linéaires) [Taarit et al., 2010]. La flexibilité et l'efficacité de cette approche d'identification ont été prouvées en l'appliquant sur des procédés réels [Bel-

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

koura et al., 2006, Taarit et al., 2007, Belkoura et al., 2009, Pereira et al., 2009, Villagra et al., 2009, Gedouin et al., 2009].

Nous allons donner maintenant deux tableaux récapitulatifs de la monographie effectuée. Le premier tableau 1.1 représente une synthèse des différentes méthodes d'identification des systèmes à retards trouvées dans la littérature et donne une vue d'ensemble sur leurs domaines d'applications. Quant au deuxième tableau 1.2, il regroupe les vitesses de convergences de ces différents algorithmes d'identification.

*Identification des systèmes à retards et d'une classe de systèmes hybrides : un état de l'art*

TABLE 1.1: Différentes méthodes d'identification des systèmes à retards trouvées dans la littérature

Méthodes d'identification	Références	Lin.	Non Lin.	En ligne	Hors ligne	C.I.	Type d'entrée	BO	BF
<b>Méthodes graphiques</b>									
Méthode de Brodia	[Borne et al., 1992, Borne et al., 1993]	×	---	---	×	null	échelon	×	---
Méthode de Strejc	[Gordon and Ballots, 1998] [Strejc, 1959, Borne et al., 1992] [Gordon and Ballots, 1998]								
Méthode de Z-N	[Ziegler et al., 1942, Ksouri and Borne, 1999]								
Méthode de calcul d'aire	[Longchamp, 2006, Hubert, 2008]								
Méthode de Z-N	[Astrom and Hagglund, 1995, Rake, 1980, Bi et al., 1999] [Ziegler et al., 1942, Ksouri and Borne, 1999] [Longchamp, 2006, Hubert, 2008]	×	---	---	×	null	échelon	—	×
<b>Méthodes basées sur la rationalisation du retard</b>									
	[Gawthrop and Nihitla, 1985]	×	---	×	---	non précisé	non précisé non précisé	×	---
	[Gawthrop et al., 1989]	×	---	×	---	non précisé	non précisé non précisé	×	---
	[Ferretti et al., 1991]	×	---	×	---	non précisé	non précisé	×	---
<b>Méthodes de surparamétrisation</b>									
Méthode de Wong et Keyser	[Roe et al., 2007] [Wong and Bayoumi, 1982] [Keyser, 1986] [O'Dwyer, 1993]	×	---	×	---	non précisé	non précisé	×	---
Méthode de Kurz et Teng	[Gao and O'Dwyer, 2001] [Kurz and Goedecke, 1981] [Teng and Sitsenra, 1988]	×	---	×	---	non précisé	non précisé	×	---
<b>Méthodes paramétriques</b>									
	[O'Dwyer, 1996]	×	---	×	---	non précisé	bruit blanc entrée constante par morceaux	×	---
	[O'Dwyer, 2000a]								
<b>Méthodes des moindres carrés et des variables instrumentales</b>									
Non récurrentes	[Bi et al., 1999] [Wang et al., 2001a] [Wang et al., 2001b] [Liu et al., 2007] [Wang et al., 2008]	×	---	---	×	non précisé	échelon	×	---
Récurrentes	[Gawthrop and Nihitla, 1985] [Gawthrop et al., 1989] [Tuch et al., 1994]	×	---	---	×	non précisé	entrée constante par morceaux échelon	×	---

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

Méthodes d'identification	Références	Lin.	Non Lin.	En ligne	Hors ligne	C.I	Type d'entrée	BO	BF
<b>Méthode heuristique</b> Algorithmes génétiques	[Ren et al., 2005]	×	---	---	×	non précisé	change de signe signal aléatoire	×	---
	[Yang et al., 2003]	×	---	---	×	non précisé	signal aléatoire	×	---
	[Yang et al., 2007]	×	---	---	×	non précisé	PRBS	×	---
	[Ahmed et al., 2006]	×	---	---	×	non précisé	échelon	×	---
	[Shin et al., 2007]	×	---	---	---	non précisé	échelon discret	×	---
	[Hachino et al., 1996]	×	---	×	---	non précisé	échelon discret	×	---
	[Yang et al., 1997]	×	---	---	---	non précisé	échelon discret	×	---
	[Wang et al., 2004]	×	---	---	---	non précisé	échelon	×	---
	[Chen and Wang, 2004]	---	×	---	---	non précisé	non précisé	×	---
	[Tan, 2004]	---	×	---	---	non précisé	non précisé	×	---
<b>Méthode algébrique</b>	[Ren and Rad, 2007]	---	×	×	---	non précisé	entrée constante par morceaux quelconque	×	---
	[Belkoura et al., 2006]	×	---	×	---	non précisé	entrée suffisamment riche	×	---
	[Belkoura and Richard, 2006]	×	---	×	---	non précisé	entrée structurée	×	---
	[Belkoura et al., 2007]	×	---	×	---	non précisé	entrée structurée	×	---
	[Belkoura et al., 2008]	×	---	×	---	non précisé	entrée structurée	×	---
	[Belkoura et al., 2009]	×	---	×	---	non précisé	entrée structurée	×	---



TABLE 1.2: Comparaison des temps de convergence des algorithmes d'identification des systèmes à retards

Méthodes d'identification	Références	Exemples	C.I	Type d'entrée	Condition de bruit	RCR
<b>Méthodes graphiques</b>						
Méthode de Strejc	[Chemla, 2004]	$\frac{100}{(s+4)(s+3)(s+1)}$	nulle	échelon	sans	---
Méthode de Broïda	[Chemla, 2004]	$\frac{100}{(s+4)(s+3)(s+1)}$	nulle	échelon	sans	---
Méthode de calcul d'aire	[Bi et al., 1999]	$\frac{e^{-s}+1}{(s+1)^5}$	nulle	échelon	sans	---
<b>Méthodes basées sur l'approximation rationnelle du retard</b>						
	[Gawthrop and Nithila, 1985]	$e^{-0.5s}$	nulle	sinusoïdale	sans	2
	[Gawthrop et al., 1989]	$e^{-0.5s}$	nulle	entrée constante par morceaux	sans	10
		$\frac{e^{-s}}{2s^2+3}$	nulle	entrée constante par morceaux	avec	10
<b>Méthodes de surparamétrisation</b>						
Méthode de Teng	[Gao and O'Dwyer, 2001]	$\frac{e^{-s}}{1+s}$	non	non	avec	non
Méthode de Kurz	[Gao and O'Dwyer, 2001]	$\frac{e^{-s}}{1+s}$	nulle	précisé	avec	précisé
		$\frac{e^{-s}}{1+s}$	nulle	précisé	avec	non
		$\frac{2e^{-3s}}{1+0.7s}$	non	bruit blanc	avec	45
		$\frac{2e^{-3s}}{1+0.7s}$	précisé	entrée constante par morceaux	sans	130
		$\frac{1+0.7s}{1+0.7s}$	précisé	entrée constante par morceaux	sans	130
<b>Méthodes paramétriques</b>						
Méthode du gradient	[O'Dwyer, 2000a]	$\frac{e^{-s}}{1+s}$	non	bruit blanc	avec	45
		$\frac{1+0.7s}{1+0.7s}$	précisé	entrée constante par morceaux	sans	130
		$\frac{2e^{-3s}}{1+0.7s}$	non	bruit blanc	avec	45
		$\frac{2e^{-3s}}{1+0.7s}$	précisé	entrée constante par morceaux	sans	130
		$\frac{1+0.7s}{1+0.7s}$	précisé	entrée constante par morceaux	sans	130
<b>Méthodes non récursives</b>						
	[Bi et al., 1999]	$\frac{e^{-s}}{1+s}$	nulle	échelon	sans	---
		$\frac{e^{-s}}{1+s}$	nulle	échelon	avec	---
		$\frac{e^{-s}}{1+s}$	nulle	échelon	sans	---
		$\frac{e^{-s}}{1+s}$	nulle	échelon	avec	---
		$\frac{(1+s)^8}{(1+s)^8}$	nulle	échelon	avec	---
		$\frac{(1+s)^8}{(1+s)^8}$	nulle	échelon	sans	---
		$\frac{(-4s+1)e^{-s}}{1+2.4s+9s^2}$	nulle	échelon	avec	---
	[Wang et al., 2001a]	$\frac{(-4s+1)e^{-s}}{1+2.4s+9s^2}$	nulle	échelon	sans	---
		$\frac{(-4s+1)e^{-s}}{1+2.4s+9s^2}$	nulle	échelon	avec	---
	[Wang et al., 2001b]	$\frac{(-4s+1)e^{-s}}{1+2.4s+9s^2}$	nulle	échelon	sans	---
		$\frac{1.25e^{-s}}{1+0.7s+0.25s^2}$	non	entrée constante par morceaux	avec	---
	[Lin et al., 2007]	$\frac{1.25e^{-s}}{1+0.7s+0.25s^2}$	nulle	entrée constante par morceaux	avec	---
		$\frac{e^{-2s}}{(1+s)^4}$	non	entrée constante par morceaux	sans	---
	[Wang et al., 2008]	$\frac{e^{-2s}}{(1+s)^4}$	nulle	entrée constante par morceaux	sans	---
		$\frac{(0.5-0.5s)e^{-s}}{0.5+1.5s+s^2}$	non	échelon	avec	---
		$\frac{(0.5-0.5s)e^{-s}}{0.5+1.5s+s^2}$	nulle	échelon	avec	---

## 1.6. IDENTIFICATION DES SYSTÈMES À RETARDS

Méthodes d'identification	Références	Exemples	C.I	Type d'entrée	Condition de bruit	RCR	
Méthodes récursives	[Gawthrop and Niihila, 1985] [Gawthrop et al., 1989] [Tuch et al., 1994]	$\frac{e^{-0.8s}}{1+0.5s+2.2s^2+s^3}$ $\frac{1.5e^{-1.5s}}{1+s}$	nulle non précisé	sinusoïdale signal carré signal carré	sans avec sans	2 40 15	
	[Ren et al., 2005] [Yang et al., 2003]	$\frac{(1.5s-1)e^{-1.3s}}{1+0.5s+2.2s^2+s^3}$ $\frac{2e^{-3.13s}}{4+3s+s^2}$	nulle	signal carré aléatoire	avec avec	30 non	
	[Yang et al., 2007] [Ahmed et al., 2006]	$Y(s) = \frac{e^{-8.83s}}{1+s} U_1(s)$ $+ \frac{2e^{-2.32s}}{2+s} U_2(s)$ $\frac{e^{-6.8s}}{1+20s}$ $\frac{1}{(1+s)^5}$	non précisé nulle non nulle	signal blanc sinusoïdale signal binaire aléatoire	avec avec avec avec	précisé non précisé non précisé non précisé	
	Méthodes heuristiques Algorithmes génétiques	[Shin et al., 2007]	$\frac{1}{(1+s)^8}$	nulle	échelon	avec	non précisé
		[Hachino et al., 1996]	$\frac{1.08e^{-10s}}{(1+s)^2(1+2s)^3}$ $\frac{b_1e^{-\tau s}}{a_2+a_1s+s^2}$	nulle nulle	échelon échelon	sans sans	non précisé non
		[Yang et al., 1997] GALS Hybrid	$a_1, a_2, \tau$ constants par morceaux constants par morceaux	non précisé	signal blanc signal blanc	avec avec	40 20
		[Wang et al., 2004] [Ren and Rad, 2007]	$\frac{(1+s)e^{-5s}}{1.2+0.6s+s^2}$ $\dot{y} = -\frac{y}{1+0.1y^2}$ $-9.8 \cos(y) + (1 - 0.2 \sin^2(y))u(t - 4)$	non nulle nulle	échelon entrée constante par morceaux	avec avec sans	non précisé 9
	Recherche de Tabou Recuit simulé Réseaux de neurones	[Belkoura et al., 2006]	$\frac{0.5e^{-0.6s}}{1+0.5s}$ $\frac{0.5e^{-0.6s}}{1+0.5s}$	non nulle non	échelon échelon	sans avec	1 1.5
		Méthode algébrique					

Nous avons déjà mentionné que le tableau 1.1 donne une vue d'ensemble sur les domaines d'applications ainsi que des conditions d'études des différentes méthodes d'identification des systèmes à retards trouvées dans la littérature. Il est indispensable de noter que le problème d'identification de ces systèmes à partir d'une condition initiale arbitraire est encore ouvert. En effet, dans la plupart des travaux menés, les auteurs ne précisent pas si la condition initiale est nulle ou non lors de la formulation générale du problème d'identification mais les résultats de simulations pour un exemple de système donné sont faites en supposant qu'il est initialement au repos (voir tableau 1.2). Le même problème s'est posé pour le type d'entrée. Pour cela, nous avons choisi de mettre le terme "non précisé" si les auteurs se contentent de donner seulement le type d'entrée adopté pour l'étude en simulation et non pour le cas d'étude général. A partir de cette étude, on peut dire que le type d'entrée dominant est l'échelon, l'entrée constante par morceaux et l'entrée sinusoïdale.

Dans le tableau 1.2, nous avons tiré des exemples des systèmes étudiés dans la littérature. Le but de ce tableau est d'effectuer une comparaison entre les temps de convergence et plus précisément entre les  $RCR = (Temps\ de\ convergence)/Retard$  des différents algorithmes d'identification en absence et en présence du bruit. Notre méthode d'identification algébrique est notre référence par rapport à laquelle cette comparaison est faite. Comme le montre le tableau 1.2, les différentes méthodes d'identification sont divisibles en deux groupes. Dans un premier temps, on trouve des méthodes pour lesquelles on ne peut même pas parler d'un temps de convergence puisqu'il s'agit des méthodes graphiques ou des méthodes paramétriques non récursives. Ces deux classes de méthodes excluent toute alternative d'exploitation en ligne. Dans un deuxième temps, on peut distinguer des méthodes récursives pour lesquelles le calcul du  $RCR$  est faisable et même envisageable afin de prouver la rapidité de convergence de l'algorithme d'identification proposé. Cependant, le tableau 1.2 montre que dans la plus part des travaux, les auteurs ne s'intéressent pas à déterminer le  $RCR$  et présentent directement le modèle estimé. Parmi lesquels, on peut citer [Gao and O'Dwyer, 2001, Yang et al., 2003, Yang et al., 2007, Ahmed et al., 2006, Shin et al., 2007, Yang et al., 1997, Wang et al., 2004]. Quant aux travaux restants, on remarque qu'ils présentent des temps de convergence assez importants variants d'une méthode à une autre. On peut citer l'exemple de l'algorithme du gradient proposé par [O'Dwyer, 2000a] dont le  $RCR \simeq 130$  pour un système du premier ordre à retard pur étudié dans un contexte non bruité et celui de [Ren et al., 2005] qui souffre d'un  $RCR \simeq 30$  pour un système du second ordre à retard pur évoluant dans un contexte bruité. Toutefois, la méthode d'identification algébrique présente un  $RCR$  remarquable et incomparable qui est égale presque à l'unité dans un contexte non bruité et peut atteindre 2 en présence du bruit pour l'exemple présenté dans le tableau 1.2 et pour d'autres étudiés dans [Belkoura et al., 2006, Belkoura et al., 2008, Belkoura et al., 2009]. Cette constatation est très stimulante pour approfondir l'étude de la méthode algébrique. La rapidité de convergence offerte par cette méthode sera bien montrée et discutée dans la suite de cette thèse.

## 1.7 Systèmes dynamiques hybrides

### 1.7.1 Présentation

Les approches de modélisation en automatique sont basés sur des modèles d'équations différentielles et aux différences (états continu, à temps continu ou discret) et des modèles fréquentiels pour les systèmes continus, soit sur des modèles états-transitions et des modèles markoviens pour les systèmes événementiels. Or, la plupart des systèmes réels sont composés de sous-processus continus (moteurs, procédés chimiques, systèmes de freinage) qui sont démarrés, reconfigurés et arrêtés par une commande logique, à état discrets (ordinateur, automate programmable). L'évolution de ces systèmes est alors à la fois continue et événementielle. On peut donner l'exemple des processus *batch* [Bertrand et al., 2004]. Ces processus existants dans l'industrie, élaborant les matières premières qui seront travaillées par les industries manufacturières, la production peut se faire en continu (verreries, cimenteries...) ou par traitements successifs (sucreries, savonneries...). Ils comportent des séquences de transfert et de conditionnement relevant de systèmes à événements discrets et des opérations continues pendant un certain temps.

Les méthodes d'analyse "classiques" prennent en compte un seul aspect à la fois, l'aspect continu ou l'aspect événementiel. Cependant, pour garantir le bon fonctionnement d'un ensemble automatisé réel, il est nécessaire de prendre en compte simultanément les aspects continus et événementiels de sa dynamique. Les systèmes dynamiques hybrides (*SDH*) ont été introduits pour répondre à cette demande [Zaytoon, 2001].

Les systèmes hybrides sont des systèmes dynamiques faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continu et événementiel. Ces systèmes sont classiquement constitués de processus continus interagissant avec ou supervisés par des processus discrets. Ils résultent également de l'organisation hiérarchique des systèmes de contrôle/commande complexes, ou de l'interaction entre des algorithmes discrets de planification et des algorithmes continus de commande. On peut également rencontrer des systèmes continus auxquels sont associées des commutations discrètes [Quenec'Hdu and Zaytoon, 2001].

De nombreux problèmes mal traités par les approches homogènes sont résolus par l'approche hybride. Parmi lesquels, on peut citer les problèmes suivants :

- variation de structure liée aux différents modes de marche,
- commandes discontinues, par exemple par relais ou impulsions,
- discontinuités du fonctionnement physique en robotique par exemple,
- systèmes à non linéarité discontinue, par exemple les frottements secs,
- description des procédés manufacturiers impliquant des états mixtes de la matière,
- modélisation de phénomènes transitoires rapides par des commutations de modèles.

Les premiers modèles hybrides ont été proposé par les travaux ancestraux de [Wit-

senhausen, 1966, Johnson, 1981]. Plus récemment, avec les contributions de [Gollu and Varaiya, 1989, Peleties and and, 1989, Benveniste and Guernic, 1990] ont montré l'importance applicatifs de ces systèmes. En tant que discipline de l'automatique, l'étude des systèmes dynamiques hybrides représente un axe relativement récent [Quenec'Hdu et al., 1994, Antsaklis et al., 1995, Alur et al., 1993, Branicky, 1995, Henzinger and Sastry, 1998, Antsaklis et al., 1999, Matveev and Savkin, 2000, Benedetto and Sangiovanni-Vincentelli, 2001, Zaytoon, 2001, Engell et al., 2002, Engell et al., 2003, Bertrand et al., 2004, Lygeros, 2004, Haddad et al., 2006, Carloni et al., 2006, Chamroo, 2006, Bako, 2008]. L'émergence et la formalisation de ces systèmes est dû principalement à l'interaction de plus en plus importante entre les systèmes numériques (ordinateurs, logiciels, composants logiques, etc.) et les processus physiques (équations différentielles impliquant des signaux continus). La section suivante 1.7.2 fournit les principales classes des phénomènes hybrides selon Branicky [Branicky, 1995, Branicky, 1998].

## 1.7.2 Principales classes des phénomènes hybrides : classification de Branicky

De manière générale, un système hybride a une dynamique continue peut être représentée par une équation différentielle [Chamroo, 2006]

$$\dot{x}(t) = \zeta(t), \quad t \geq 0 \quad (1.65)$$

qui dépend de certains phénomènes discrets. Dans cette équation,  $x(t)$  représente la composante continue et prends ses valeurs dans un sous espace de l'espace Euclidien.  $\zeta(t)$  est un champ de vecteur dépendant généralement de  $x(t)$ , de la composante continue  $u(t)$  de la commande et du phénomène discret.

Branicky a proposé une classification dans [Branicky, 1995, Branicky, 1998] en fonction des phénomènes discrets comme le montre la figure 1.7 :

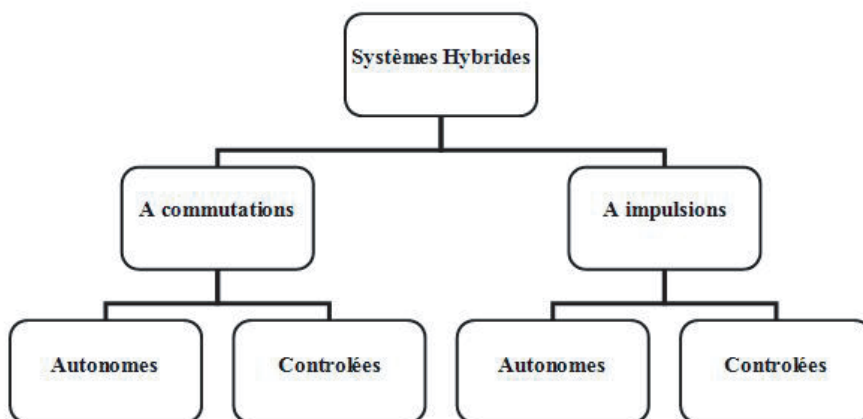


FIGURE 1.7 – Classification des systèmes hybrides.

Dans la suite, nous allons présenter brièvement ces quatre phénomènes physiques [Branicky, 1995, Branicky, 1998, Zaytoon and Quenec'Hdu, 2001, Chamroo, 2006].

### Commutations autonomes

Une commutation autonome est caractérisée par un changement discontinu du champ de vecteur  $\zeta(t)$  quand l'état atteint certains seuils [Zaytoon and Quenec'Hdu, 2001]. Ce phénomène peut être illustré par un exemple d'un système régi par l'équation suivante :

$$\dot{x} = -H(x) + u,$$

avec,  $H(x)$  la fonction d'hystérésis présentée par la figure 1.8. Quand la valeur de  $x$

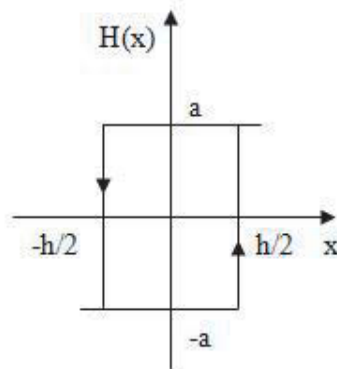


FIGURE 1.8 – Fonction d'hystérésis

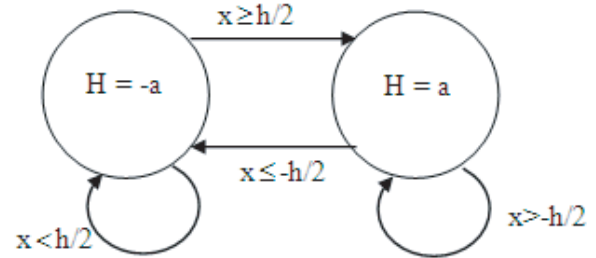


FIGURE 1.9 – Automate hybride associé

atteint le seuil  $-h/2$  ou  $+h/2$ , le champ de vecteur est commuté de façon discontinu. Pour la modélisation de ce système, il faut prendre en compte de son passé (effet mémoire de l'hystérésis). Pour cela, il ne peut pas être modéliser par une équation différentielle avec un second membre discontinu mais par un automate hybride à deux états décrit par la figure 1.9.

### Commutations contrôlées

Dans ce cas, le champ de vecteur  $\zeta(t)$  commute en réponse à une loi de commande. Un exemple d'un tel phénomène peut être donné par un modèle simplifié d'une transmission manuelle [Zaytoon and Quenec'Hdu, 2001] :

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{[-a(x_2/v) + u]}{1 + v},$$

où,  $x_1$  la vitesse relative par rapport à un point fixe,  $x_2$  la vitesse de rotation de l'engin,  $u \in \{0, 1\}$  la position d'accélérateur,  $a$  un paramètre du système et  $v \in \{1, 2, 3, 4\}$  la position du levier de vitesse.

### Impulsions autonomes

Lorsque l'état atteint certaines zones prédéfinies de l'espace d'état, il effectue un saut (discontinuité ou impulsion) de sa valeur courante à une autre. Un exemple très connu de ce phénomène est le choc entre deux corps où la vitesse change brutalement et subit un saut.

### Impulsions contrôlées

Dans le cas des impulsions contrôlées, la valeur de l'état change impulsivement (saut) en réponse à une commande. Considérons par exemple un modèle simple d'un stock où on dépose les quantités  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , de matière aux instants  $t_1 < t_2 < \dots$ . L'évolution de la matière est régie par l'équation suivante [Zaytoon and Quenec'Hdu, 2001] :

$$\dot{y} = -Q(t) + \sum_i \delta(t - t_i)\alpha_i,$$

avec  $y$  le niveau de la matière dans le stock,  $Q$  une fonction de dégradation ou d'utilisation, et  $\delta$  l'impulsion de Dirac.

### 1.7.3 Systèmes à commutations

Les systèmes à commutations représentent une catégorie importante des systèmes dynamiques hybrides [Zaytoon, 2001] dont l'évolution est à la fois continue (dynamique différentielle) et événementielle (commutations). Les commutations provoquent des changements abrupts de modes de fonctionnement et peuvent dépendre de l'état et/ou entrées du système, de la structure du système ou encore, peuvent être aléatoires.

Un système à commutation est composé d'une famille de sous-systèmes à dynamique continue (de type équation différentielle ou équation récurrente) et une loi logique qui indique un sous-système actif. Un système à commutation est défini par [Liberzon, 2003] :

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(t, x(t), u(t)), \tag{1.66}$$

avec,

- $\sigma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$  étant une fonction constante par morceaux, nommée signal de commutation,
- $\mathcal{I}$  est un ensemble d'indices,
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente l'état du système,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est la commande,
- $f_i(\cdot, \cdot, \cdot), \forall i \in \mathcal{I}$  sont des champs de vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement du système.

La fonction de commutation  $\sigma(t) \in \mathcal{I}$  spécifie le sous système actif. Le choix du sous-système actif peut être lié à un critère temporel, à des régions ou surfaces déterminées dans l'espace d'état, ou à un paramètre extérieur. On peut identifier deux aspects pour les systèmes à commutations : un aspect contrôlé quand la fonction de commutation représente une commande ou un aspect autonome dans le cas contraire.

Il existe plusieurs monographies qui s'intéressent à l'étude de cette classe de systèmes. Parmi lesquelles, on peut citer les plus récentes [Zaytoon, 2001, Liberzon, 2003, Li et al., 2005, Sun and Ge, 2005, Bako, 2008]

### 1.7.4 Systèmes à impulsions

Les systèmes à impulsions sont considérés comme des systèmes hybrides spécifiques [Lakshmikantham et al., 1989, Haddad et al., 1999, Attia, 2005, Li et al., 2005, Zabic, 2005, Haddad et al., 2006, Chamroo, 2006]. Ces systèmes sont caractérisés par des impulsions singulières ou généralisées et constitués de trois éléments :

1. un ensemble d'équations différentielles (états continus), dont chacune régit le mode de mouvement du système dynamique global entre deux impulsions (les impulsions sont les évènements) ;
2. un critère régissant l'évolution temporelle des impulsions (évolution des évènements) ;
3. une équation aux différences qui régit la façon dont les états du système changent au moment de l'impulsion. Par hypothèse de modélisation, ce changement est simultané.

C'est ce troisième point, correspondant à une discontinuité des états analogue à un changement instantané de conditions initiales, qui rend les systèmes à impulsions plus généraux que les systèmes dont les paramètres ou les entrées commutent, mais pour lesquels les états restent continus (modes glissants par exemple [Utkin, 2002, Perruquetti and Barbot, 2002]).

Dans ces conditions, les systèmes dynamiques à impulsions ont la forme suivante [Chamroo, 2006] :

$$\dot{x}(t) = f_c \cdot x(t) + G_c(x(t)) \cdot u_c(t), \quad (t, x(t), u_c(t)) \notin \mathcal{S}, \quad (1.67)$$

$$\Delta x(t) = f_d \cdot x(t) + G_d(x(t)) \cdot u_d(t), \quad (t, x(t), u_d(t)) \in \mathcal{S}. \quad (1.68)$$

L'ensemble des commutations est représenté par  $\mathcal{S} \subset [0, \infty[ \times \mathbb{R}^n \times U_c$ . L'équation (1.67) représente la dynamique continue du système, où :

- $f_c : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , Lipschitz-continue vérifiant  $f_c(0) = 0$ ,
- $u_c(t) \in U_c \subseteq \mathbb{R}^{m_c}$ , commande continue,
- $G_c : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m_c}$ , matrice de commande continue.

L'équation (1.68) représente la loi de commutation de l'état aux instants de sauts (commutations) :

- $f_d : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,
- $u_d(t) \in U_d \subseteq \mathbb{R}^{m_d}$ , commande discrète,
- $G_d : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m_d}$ , matrice de commande discrète.

Nous allons donner par la suite un exemple de système à impulsions, un système à deux bacs modélisé par les équations (1.67) et (1.68).

#### Exemple d'un système à deux bacs [Attia, 2005]

On considère le système à deux bacs décrit par la figure 1.10.



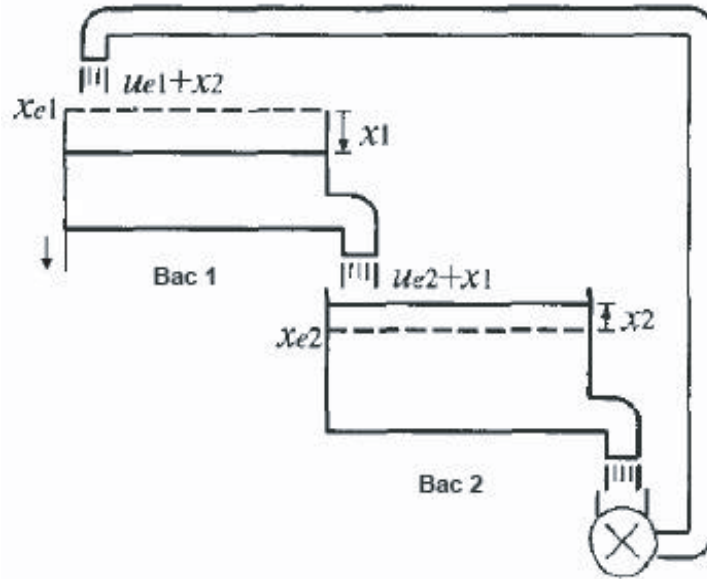


FIGURE 1.10 – Systèmes à deux bacs.

Le système est formé par une pompe située sous le bac 2 qui ré-alimente le bac 1. Le bac 1 peut être partiellement vidé par un système *chasse eau*. On note par  $x_i$  la déviation par rapport au niveau d'équilibre  $x_{ei}$  correspondant au bac  $i$ . Dès que la déviation  $x_1$  du niveau du bac 1 devient nulle le système chasse d'eau intervient en vidant partiellement le bac 1 et agit de ce fait comme un contrôleur. Ce système est décrit alors par :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t), \quad (1 \ 0) x(t) < 0 \quad (1.69)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t^-), \quad (1 \ 0) x(t^-) = 0 \quad (1.70)$$

avec  $x(t^-)$  étant l'état juste avant que la contrainte sur  $x_1$  ne soit active. On peut ramener ce système à la forme générique d'un système impulsif donnée par les deux équations (1.67) et (1.68) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & Cx(t) < 0 \\ x(t) = Jx(t^-), & Cx(t^-) = 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.71)$$

Ce système impulsif avec dynamique linéaire peut être aussi vu comme un système hybride composée de deux systèmes. La dynamique induite par  $A$  représente le système continu, alors que le second discret est représenté par  $J$ .

### 1.7.5 Identification

Les systèmes à commutations ont suscité beaucoup d'études dans les domaines de la stabilisation, de la commande et du diagnostic, plutôt que dans celui de l'identifica-

## 1.7. SYSTÈMES DYNAMIQUES HYBRIDES

tion qui est resté moins exploré. L'estimation des paramètres, de l'état ou du mode actif est pourtant les plus cruciales, puisqu'elle influence la capacité à contrôler ou superviser le système. Parmi les difficultés posées par la présence de commutations, il faut noter que l'estimation du mode actif et celle de l'état doivent préférentiellement être menées dans un même intervalle de temps fini.

Durant ces dernières années, l'identification des systèmes à commutations a suscité l'intérêt de la communauté scientifique et, parmi les états de l'art sur ce sujet, on trouve [Pekpe, 2004, Hocine, 2006, Paoletti et al., 2007, Bako, 2008]. Le grand défi du problème d'identification des systèmes à commutations est que les mesures acquises sont seulement disponibles comme un mélange de données générées par des sous-modèles différents, de sorte qu'on ne sait pas a priori distinguer quel sous-modèle a généré quelle donnée [Bako, 2008]. Ainsi, dans la tâche d'identification, une étape cruciale de classification consiste à séparer les données de régression selon leur sous-modèle générateur respectif. Plus généralement, le problème d'identification des systèmes à commutations s'articule autour de trois étapes [Pekpe, 2004] :

1. déterminer le nombre de modèles locaux ;
2. séparer les données en classes correspondant aux différents modèles locaux ;
3. identifier chaque modèle local.

Les deux premières étapes constituent la classification de données mentionnée. Si cette classification peut être réalisée, le problème d'estimation devient ensuite un problème résolu à l'aide des méthodes classiques d'identification pour estimer l'ensemble des modèles locaux constitutifs du système étudié. Parmi les méthodes basées sur la classification, on peut citer la méthode de détermination des hyperplans cachés [Bako, 2008].

Une méthode algébrique a été développée dans [Vidal et al., 2003] pour l'identification de modèles commutant à partir de données non bruitées. Le problème d'identification est reformulé en un problème d'estimation puis de différentiation d'un polynôme homogène. A partir de ce polynôme, le nombre d'états discrets ainsi que des paramètres sont ensuite déterminés. Cette méthode possède quelques limites du fait qu'elle suppose la connaissance a priori de deux caractéristiques importantes : les ordres des différents sous-modèles (qui de plus doivent être égaux), ainsi que le nombre de modes (c'est-à-dire de sous-modèles). Un autre problème lié à cette méthode est que, d'une part, la dimension du vecteur de coefficients qui définit le polynôme homogène augmente exponentiellement avec les dimensions du système à estimer et que, d'autre part, elle ne permet pas de déterminer directement les instants de commutations entre les différents modes.

Parmi les méthodes d'identification des instants de commutations disponibles dans la littérature, on trouve aussi des techniques de détection de ruptures (voir [Oku, 2003, Pekpe, 2004]). Connaissant le couple de mesures entrée-sortie, ces techniques visent à déterminer les changements de la dynamique du système étudié, qui correspondent aux instants de commutation recherchés. Bien qu'elles soient robustes en présence de données bruitées, ces méthodes souffrent généralement d'un retard à la

détection.

En lien avec la procédure d'identification en ligne proposée dans cette thèse, notre principale contribution en matière de systèmes à commutations (et/ou à impulsions) sera l'estimation rapide et exacte des instants de commutation (impulsions ou discontinuités), en supposant qu'il existe un temps minimum (temps de séjour) entre deux commutations. La majorité des méthodes proposées dans la littérature pour l'identification des systèmes à commutations sont basées sur des représentations d'état, commodes pour décrire un système multivariable. L'identification des systèmes à commutations peut être aussi faite à partir des modèles entrée-sortie auxquels nous nous intéressons essentiellement dans notre présente étude.

La classe des systèmes hybrides que nous envisagerons ici regroupe les systèmes à commutations et les systèmes à impulsions. On l'a appelé classe de systèmes "impulsifs". Le modèle représentant cette classe de systèmes est proposé par [Belkoura et al., 2010]. Il consiste à des équations différentielles continues avec paramètres discontinus. Ce modèle va être adopté dans le chapitre 4 dans le but d'identifier les instants de commutation (ou discontinuités) et les paramètres de ces systèmes. Ce modèle permet de représenter de nombreux systèmes tels que la balle rebondissante, le pendule inverse, le *rocking block*... Plusieurs autres exemples peuvent être trouvés dans [Brogliato, 1999]. On se place dans le cas où chaque sous-modèle (correspondant à un mode après commutation) est décrit en temps continu et peut être linéaire ou non linéaire.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction générale que l'étude d'un système pendule soumis à des frottements secs était le système motivant pour développer cette technique d'identification. Ce système, à non linéarité discontinue, constitue un exemple classique largement étudié par la communauté physicienne et automatique. Il a été très souvent étudié en tant que système soumis à des frottements visqueux (linéaires) et par des méthodes essentiellement asymptotiques, au sens où la solution est obtenue après convergence d'une série récursive, pouvant mener à une mise en œuvre complexe : par exemple, citons [Chen and Thomlinson, 1966] qui utilise des séries temporelles, [Liang and Feeny, 2006] avec des moindres carrés récursifs, [Qian et al., 2008] par des algorithmes génétiques. La méthode que nous développerons ici sera de nature non asymptotique, en ceci qu'elle donne les valeurs à identifier sous forme exacte (en l'absence de bruit) et après un temps fini.

Il existe quelques travaux sur l'identification algébrique des systèmes mécaniques. Parmi ceux-ci, on trouve [Becedas et al., 2007] sur l'estimation des paramètres d'un système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté et [Beltrán-Carvajal et al., 2005] pour l'identification algébrique de la fréquence et de l'amplitude de vibrations exogènes affectant le système mécanique sans frottement (en utilisant seulement les mesures de la position). Une autre recherche dans [Zglimbea et al., 2008] traite ce problème en se basant sur la théorie des distributions. Son objectif était l'estimation des paramètres des systèmes soumis à des frottements, modélisés par le modèle de Dahl, en supposant que le couple entrée-sortie ainsi que la dérivée de la sortie sont

## 1.8. CONCLUSION

mesurés. Nous nous intéresserons quant à nous à l'identification des paramètres et des instants de commutation de ces systèmes à partir du seul couple entrée-sortie. La reformulation et l'extension de la méthode algébrique à l'identification des instants de commutations ainsi que ses paramètres sera la contribution du chapitre 4.

## 1.8 Conclusion

Ce chapitre a montré une certaine variété de techniques d'identification des systèmes à retard en temps continu. La monographie faite montre que la rapidité de convergence, le temps de calcul et la robustesse au bruit restent jusqu'à maintenant des problèmes ouverts. Les méthodes les plus récentes s'intéressent à l'identification en ligne du retard. Cependant, la plupart des méthodes nécessitent encore un temps de calcul important, compromettant une utilisation "en ligne" aisée. La méthode algébrique présentée dans la section 1.6.3 propose une solution à ce problème.

La dernière section a été consacrée à la présentation des systèmes hybrides en général et des systèmes à commutations et à impulsions en particulier. Nous avons mis l'accent sur quelques méthodes d'identification des systèmes à commutations. La présentation de la classe adoptée et le modèle qui la décrit ainsi que l'extension de la méthode algébrique à l'identification des systèmes impulsifs sera le sujet du chapitre 4.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la méthode algébrique adoptée est basée sur la théorie des distributions. Pour cela, le deuxième chapitre sera consacré au rappel des concepts théoriques nécessaires pour la formulation du problème d'identification.



# OUTILS MATHÉMATIQUES : DISTRIBUTIONS ET ENTRÉES STRUCTURÉES

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Motivations</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>2.2</b>	<b>Distributions</b> . . . . .	<b>70</b>
2.2.1	Notations . . . . .	70
2.2.2	Ordre d'une distribution . . . . .	71
2.2.3	Support d'une distribution . . . . .	71
2.2.4	Multiplication . . . . .	72
2.2.5	Convolution . . . . .	72
2.2.6	Multiplication par $t^n$ , $e^{at}$ et convolution . . . . .	73
<b>2.3</b>	<b>Entrées structurées</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>75</b>

---

## 2.1 Motivations

La théorie des distributions a été établie par Laurent Schwartz dans les années cinquante [Schwartz, 1966]. Il a posé les bases d'une théorie mathématique rigoureuse qui permet de résoudre de nombreuses problèmes de la physique, plus précisément, les équations issues de la physique, de la mécanique des fluides et du traitement du signal. Son utilisation permet d'éviter la plupart des difficultés de la théorie des fonctions. En effet, il existe quelques opérations qui sont légitimes au sens de distributions et non au sens des fonctions tel que la dérivation d'une fonction localement sommable qui n'est pas dérivable au sens des fonctions [Rodier, 1993, Belkoura, 2009b].

Ce chapitre est une brève introduction aux distributions regroupant quelques définitions et propriétés auxquelles la méthode d'identification algébrique fait appel pour formuler nos problèmes d'identifications. Ces notions sont extraites des ouvrages suivants [Schwartz, 1966, Dupraz, 1977, Petit, 1995, Boccara, 1997, Rodier, 1993] et

récemment [Belkoura, 2009b] et elles sont exposées en détails dans l'annexe A.

Le formalisme des distributions offre une large souplesse et un cadre unifié dans l'énoncé et le traitement des différents problèmes abordés. L'identification des systèmes à retard est l'un de ces problèmes. En général, le formalisme des distributions simplifie considérablement l'étude des équations différentielles. Dans ce mémoire, cette théorie est adoptée pour étudier les équations différentielles à retard. Ce choix est principalement motivé par les observations suivantes :

- Le phénomène du retard d'un système est très lié à la notion de support d'une distribution.
- Les distributions sont bien adaptées pour représenter une réalité physique tels que les propriétés des signaux d'entrées, les singularités (discontinuités) et leurs dérivées.
- Les conditions initiales sont représentées explicitement dans les équations différentielles représentatives du système.
- Dans le cadre de l'identification du retard et des paramètres, le formalisme de distributions offre une alternative au formalisme opérationnel. Des propriétés importantes sur la multiplication des distributions offrent une alternative à la multiplication par des fonctions polynomiales en  $t$  tel que proposé dans le cadre opérationnel.

Ces motivations vont être justifiées dans les sections qui suivent qui regroupent les définitions, les propriétés ainsi que les applications des distributions auxquelles nous faisons appel par la suite pour l'analyse d'identification.

## 2.2 Distributions

### 2.2.1 Notations

Nous donnons, d'abord, quelques notations adoptées dans ce mémoire :

$C_0^\infty(\Omega)$  représente l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support dans un ouvert  $\Omega$  et on appelle distribution toute forme linéaire et continue sur  $C_0^\infty(\Omega)$ . Les distributions forment un espace vectoriel appelé  $\mathcal{D}'$ , et on note  $\mathcal{D}'_+$  l'espace des distributions à support borné à gauche, appelées aussi les distributions causales qui représentent des phénomènes ayant lieu avant la cause qui les produit et par conséquent sont nulles pour  $t < 0$ . Tous les signaux considérés sont à support borné à gauche (appartiennent à  $\mathcal{D}'_+$ ) et on notera  $\mathcal{E}'$  l'espace des distributions à support compact. Toute fonction  $y$ , vue comme distribution, est indéfiniment dérivable et on se situe dans une algèbre de convolution avec unité  $\delta$ . Les principales transformations telles que la dérivation, la translation et l'intégration peuvent être formées de produits de convolution, notés "  $*$  ", et dans lesquels l'impulsion de Dirac joue le rôle de l'unité dans le produit de convolution,  $\delta_\tau$  est l'impulsion retardée  $\delta(t - \tau)$  et  $H$  est la fonction de Heaviside (échelon) :

$$y^{(1)} = \delta^{(1)} * y, \quad y^{(m)} = \delta^{(m)} * y, \quad y(t - \tau) = \delta_\tau * y, \quad \int y = H * y. \quad (2.1)$$

## 2.2. DISTRIBUTIONS

$H^k y$  désigne la convolution itérée  $H * \dots * H * y$  et, plus généralement,  $H^k$  représente le produit de convolution d'ordre  $k$ .  $\text{supp } T$  représente le support de la distribution  $T$ , et dans le cas où  $T$  est à valeur vectorielle,  $\text{supp } T$  sera l'union des supports de chacune des ses entrées. Enfin,  $T(s)$  désigne la transformée de Laplace de  $T$ .

### 2.2.2 Ordre d'une distribution

**Définition 5** On appelle distribution d'ordre fini toute distribution  $T$  de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  pour laquelle il existe  $k \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout compact  $K$  inclus dans  $\Omega$ , on ait la relation suivante. L'entier  $k$ , qui ne dépend pas de  $K$ , est appelée ordre de la distribution  $T$ .

$$\exists C_K > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad | \langle T, \varphi \rangle | \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{t \in \Omega} |D^\alpha \varphi(t)|. \quad (2.2)$$

Une notion générale d'ordre  $\geq 0$  et  $< 0$  est introduite dans [Yamamoto, 1984] qui donne une définition plus simple mais plus générale que celle donnée par la définition 5.

**Définition 6** Une distribution est d'ordre  $r > 0$ , si elle agit continûment sur les fonctions de classe  $C^r$  et non  $C^{r-1}$ . Une fonction  $\psi$  est d'ordre  $-r$  si  $r$  est le plus petit entier tel que  $\frac{d^r \psi}{dx^r}$  soit une mesure.

Exemples :

$$\text{ord}(\delta^{(2)}) = 2, \quad \text{ord}(H(t).t) = -2. \quad (2.3)$$

Un autre résultat faisant appel au propriété du produit de convolution est donné par le théorème suivant, dans lequel  $P^{-1}$  désigne l'inverse de convolution et peut être étendu pour le cas matriciel où l'ordre de la matrice  $P$  sera égale à l'ordre maximal de ces éléments.

**Théorème 7** [Yamamoto, 1984]

$$\text{ord}(P^{-1}) = -\text{ord}(P) \implies \text{ord}(P * Q) = \text{ord}(P) + \text{ord}(Q), \forall Q. \quad (2.4)$$

### 2.2.3 Support d'une distribution

On considère tous les ensembles ouverts pour lesquels une distribution  $T$  est nulle, c'est à dire telle que  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  pour tout  $\varphi$  à support dans un de ces ouverts. La réunion de tous ces ouverts forme un ouvert. La distribution  $T$  est nulle sur cet ouvert, c'est le plus grand ouvert où  $T$  est nulle. Son complémentaire, qui est fermé, est appelé *support de la distribution*  $T$ .

**Définition 8** Le support de  $T$ , noté  $\text{supp } T$  est le complémentaire dans  $\Omega$  du plus grand ouvert  $\omega$  de  $\Omega$  tel que la restriction de  $T$  à  $\omega$  soit nulle.

On donne par exemple :  $\text{supp } \delta = 0$  et  $\text{supp } \delta_a = a$ .



## 2.2.4 Multiplication

La multiplication de deux distributions quelconques n'est pas toujours définie. Cependant, le produit de deux distributions est défini dans certains cas. Le cas le plus courant est la multiplication d'une distribution  $T$  par une fonction par une fonction indéfiniment dérivable  $\alpha$ . Ceci est facilement justifié puisque, d'une part, la fonction  $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$  est indéfiniment dérivable et d'autre part, elle a un support contenu dans le support de  $\varphi$  et donc un support borné.

La règle de dérivation de Leibniz s'applique :

$$D^m(\alpha T) = \sum_{k \leq m} C_m^k (D^{(m-k)}\alpha) D^k T. \quad (2.5)$$

avec,  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ . Le théorème suivant énonce une propriété très utilisée dans certaines applications qui porte sur l'annihilation d'une distribution par multiplication :

**Théorème 9** [Schwartz, 1966] *Si  $T$  a support compact  $K$ , et est d'ordre (nécessairement fini)  $m$ ,  $\alpha T$  est nulle toutes les fois que  $\alpha$  et ses dérivées d'ordre  $\leq m$  sont nulles sur  $K$  ; si  $T$  a un support et est d'ordre quelconque, fini ou infini,  $\alpha T$  est nulle ainsi que toute ses dérivées sur le support de  $T$ .*

Ce théorème est illustré par les exemples suivants quand  $T$  est une distribution singulière et  $\alpha$  respectivement une fonction polynôme et une fonction exponentielle dans laquelle  $\lambda = e^{\gamma\tau}$  :

$$(t - \tau)\delta_\tau = 0, \quad t^2(t - \tau)(a\delta^{(1)} + b\delta_\tau) = 0, \quad (2.6)$$

$$(1 - \lambda e^{-\gamma t})\delta_\tau = 0, \quad (1 - \lambda e^{-\gamma t})^2(1 - \lambda e^{-\gamma t})(a\delta^{(1)} + b\delta_\tau) = 0. \quad (2.7)$$

Ces deux cas montrent que le terme  $\tau$  est passé du statut d'argument à celui d'argument et de coefficient d'une manière explicite dans le cas des polynômes et via le terme  $\lambda = e^{\gamma\tau}$  pour les fonctions exponentielles.

Grâce au théorème 9, le produit  $t\delta$  peut être étendu

$$t^l \delta^{(n)} = \begin{cases} 0 & l > n, \\ (-1)^l \frac{n!}{(n-l)!} \delta^{(n-l)} & l \leq n. \end{cases} \quad (2.8)$$

et plus généralement :

$$\alpha \delta^{(n)} = \sum_{q \leq n} (-1)^{(n-q)} C_n^q \alpha^{(n-q)}(0) \delta^{(q)}. \quad (2.9)$$

## 2.2.5 Convolution

Le produit de convolution de deux distributions n'a pas toujours un sens. Cependant, trois cas peuvent être rencontrés dans la pratique pour lesquels le produit de convolution a un sens, sont :

- l'une des deux distributions soit à support borné,

## 2.2. DISTRIBUTIONS

- les distributions à support borné,
- les distributions à support borné à gauche (respectivement à droite).

Le produit de convolution de deux distributions est commutatif, distributif par rapport à l'addition et associatif lorsque tous les produits deux à deux ont un sens. La distribution de Dirac  $\delta$  à l'origine joue le rôle d'unité pour le produit de convolution. Pour translater une distribution de  $\tau$ , il suffit de la convoluer par la translaté  $\delta(t - \tau)$  de la distribution de Dirac  $\delta$ . Et pour translater un produit de convolution, il suffit de translater un de ses facteurs. La convolution d'une distribution  $T$  par la dérivée de la distribution de Dirac  $\delta'$  revient à dériver une fois la distribution  $T$ . Plus généralement, la convolution de la distribution  $T$  par la dérivée d'ordre  $m$  de la distribution de Dirac est équivalente à la dérivation  $m$  fois de la distribution  $T$  :

$$\delta^{(m)} * T = T^{(m)}. \quad (2.10)$$

L'étude du problème d'identification est très lié à la notion de support d'une distribution. Dans le cadre du produit de convolution, un résultat très utile est donné par l'inclusion suivante :

$$\text{supp } S * T \subset \text{supp } S + \text{supp } T, \quad (2.11)$$

dans laquelle, la somme dans le côté droit est définie par :

$$\{u + v; u \in \text{supp } S, v \in \text{supp } T\}. \quad (2.12)$$

A titre d'exemple, soit  $S$  et  $T$  deux distributions de supports inclus respectivement dans  $[a, \infty)$  et  $[b, \infty)$ , le support de leur produit de convolution est inclus dans  $[a+b, \infty)$ . Il existe un autre résultat plus précis énoncé par le Théorème des supports suivant et dans lequel  $\text{conv}(\text{supp } X)$  représente l'enveloppe convexe du support de  $X$  :

### Théorème 10

$$\text{conv}(\text{supp } S * T) = \text{conv}(\text{supp } S) + \text{conv}(\text{supp } T). \quad (2.13)$$

### 2.2.6 Multiplication par $t^n$ , $e^{at}$ et convolution

La combinaison de la multiplication par des fonctions polynomiales ou exponentielles avec le produit de convolution conduisent à deux propriétés très utiles dans la pratique. Pour cela, si l'une des distributions  $S$  ou  $T$  est à support compact, la multiplication du produit de convolution  $S * T$  permet d'aboutir à :

$$t^n(S * T) = \sum_{k=0}^n C_n^k (t^k S) * (t^{n-k} T). \quad (2.14)$$

A titre d'exemple, en combinant cette relation et celle donnée par l'équation (2.8), on peut transformer, par exemple, les termes de la forme  $t^n y^{(p)}$  en somme linéaire des dérivées du produit  $t^k y$  :

$$t^3 y^{(2)} = -6z_1 + 6z_2^{(1)} - z_3^{(2)}, \quad (2.15)$$

où,  $z_i = t^i y$ . De même pour le cas d'une fonction exponentielle  $e^{at}$ , il vient alors :

$$e^{at}(S * T) = (e^{at}S) * (e^{at}T). \quad (2.16)$$

A titre d'exemple, en posant  $z = e^{-\gamma t}y$  et  $\lambda = e^{\gamma\tau}$ , on aura :

$$e^{-\gamma t}y^{(2)} = \gamma^2 z + 2\gamma z^{(1)} + z^{(2)}. \quad (2.17)$$

Les membres de droite des exemples donnés par les équations (2.15) et (2.17) fournissent les décompositions correspondants aux formules d'intégration par partie. Ces intégrations pourront être avantageusement remplacées par tout transfert causal jouant le rôle d'un filtre. On note par la suite,  $H^k y$  la convolution itérée et  $T^k$  représente le produit de convolution d'ordre  $k$ .

## 2.3 Entrées structurées

Les entrées structurées sont définies pour se référer aux entités qui peuvent être annihilées grâce à des multiplications et à des dérivations simples [Fliess and Sira-Ramirez, 2003]. Un exemple typique est donné par la fonction de Heaviside  $H(t)$ , pour lequel, on obtient dans le domaine temporel et son équivalent dans le domaine opérationnel les deux relations suivantes :

$$t \times \frac{dH}{dt} = 0, \quad \frac{d}{ds} sH(s) = 0. \quad (2.18)$$

Dans cet exemple, l'annihilation a été faite par la multiplication par un polynôme en  $t$  mais elle peut être étendue à des fonctions exponentielles. Cette extension peut éviter la multiplication des données bruitées avec des termes non bornés comme des polynômes. Cependant, le terme "structuré" ne fait pas référence uniquement aux perturbations mais il peut aussi concerner les conditions initiales, les entrées ou les paramètres variables dans le temps.

Pour une définition formelle, on peut dire que la distribution  $X$  est dite structurée, si on peut écrire que [Belkoura et al., 2009] :

$$P * X = Q, \quad (2.19)$$

avec  $P \in \mathcal{E}'$  et  $Q \in \mathcal{D}'_+$ , toutes deux à support discret. Cette définition est suffisante pour la plupart des cas pratiques et comprend aussi les polynômes, les fonctions exponentielles et harmoniques, les fonctions impulsives et leurs dérivées qui peuvent être les fonctions de Dirac utilisées afin de tenir compte des conditions initiales dans le cadre de distribution. On peut remarquer qu'un contre exemple peut être trouvé pour une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  avec un support compact, dont la convolution avec n'importe quelle distribution  $P$  permet d'aboutir à une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  pour le membre de droite  $Q$ .

Cette définition offre un large choix pour la fonction candidate de multiplication, puisque, en vertu du théorème de Schwartz 9, le produit  $\alpha Q = 0$  pour n'importe

## 2.4. CONCLUSION

quelle fonction  $\alpha$  dont les dérivées s'annulent sur le support de  $Q$ , ce qui permet l'annihilation du membre gauche de l'équation (2.19) :

$$\alpha \times (P * X) = 0. \quad (2.20)$$

On note qu'avec la formulation de l'équation (2.19), la fonction candidate  $\alpha$  dépend seulement de la structure de  $Q$ . Si  $Q$  admet une décomposition de la forme  $Q = Q_i$ , où  $Q_i$  ont des supports disjoints, alors leurs annihilation exige le produit  $\alpha = \prod \alpha_i$ . Dans le cas pratique, on se situe dans les deux points suivants :

- Le terme structuré  $X$  est impliqué par l'équation de la forme :

$$R * \omega = X, \quad (2.21)$$

où  $R$  est un opérateur différentiel (peut être retardé) et  $\omega$  un vecteur (ou fonction) des mesures. Combiné avec l'équation (2.20), ceci mène à une relation basée sur les mesures :

$$\alpha \times (P * R * \omega) = 0. \quad (2.22)$$

- La fonction candidate  $\alpha$  est choisie comme une combinaison linéaire des fonctions polynomiales ou exponentielles. Ce choix permet d'écrire le produit de la forme  $t^p y^{(q)}$  (resp.  $e^{-\gamma t} y^{(q)}$ ) sous la forme  $(t^k y)^q$  (resp.  $(e^{-\gamma t})^q$ ).

L'annihilation du terme structuré  $X$  n'implique pas nécessairement que toutes les informations sur ce terme sont perdues. La procédure d'estimation, qui va être présentée dans le chapitre suivant, est basée sur l'idée que les termes inconnus à identifier et contenus dans le terme structuré peuvent être déterminés à partir de la procédure d'annihilation. Selon les coefficients à estimer, on peut aboutir à différentes formulations du problème d'estimation.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons explicité le formalisme mathématique utilisé pour l'analyse de l'identification des systèmes à retard. Pour cela, nous avons procédé à la présentation des principales définitions, théorèmes et propriétés nécessaires pour la formulation de nos problèmes d'identification. La contribution présentée dans ce mémoire se base essentiellement sur deux théorèmes fondamentaux : le théorème 9 de Schwartz sur la multiplication de deux distributions et le théorème 10 de support. Le prochain chapitre sera consacré à la présentation de l'approche algébrique et à son application à différents cas d'étude.



# IDENTIFICATION ALGÈBRIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES ET À RETARDS

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>77</b>
<b>3.2</b>	<b>Cadre de l'étude</b>	<b>78</b>
<b>3.3</b>	<b>Procédure générale d'identification</b>	<b>79</b>
<b>3.4</b>	<b>Système linéaire du premier ordre à retard</b>	<b>80</b>
3.4.1	Formulation du problème d'identification	80
3.4.2	Etude en simulation	82
3.4.3	Robustesse	84
<b>3.5</b>	<b>Système avec succession de retards</b>	<b>85</b>
3.5.1	Formulation du problème	85
3.5.2	Etude en simulation	86
<b>3.6</b>	<b>Problème d'identification conjointe et formulation en terme de problème de valeurs propres généralisées</b>	<b>87</b>
3.6.1	Formulation du problème	87
3.6.2	Etude en simulation	88
3.6.3	Résolution du problème spectral	89
<b>3.7</b>	<b>Application au procédé d'asservissement de température</b>	<b>91</b>
3.7.1	Description du système	91
3.7.2	Identification	92
<b>3.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>94</b>

---

## 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de développer la méthode d'identification algébrique pour les systèmes à retards. Pour cela, nous allons commencer par expliquer la procédure d'identification. Une telle technique mène à des schémas de réalisation simples, impliquant des intégrateurs, des multiplicateurs et des fonctions continues par morceaux polynomiales ou exponentielles. Dans le but de généraliser cette approche pour les systèmes à retards, nous allons présenter trois exemples illustratifs.

Le premier représente un système du premier ordre soumis à une entrée retardée et bruitée pour lequel nous allons identifier, d'abord, le retard seulement et ensuite le retard et les paramètres. Le deuxième exemple est celui des systèmes avec série de retards alors que le dernier exemple montre le lien entre l'identification simultanée du retard ainsi que des paramètres et le problème de valeurs propres généralisées.

La dernière section de ce chapitre sera consacrée à l'identification par approche algébrique à partir des données expérimentales. Des résultats de simulations sont obtenus suite à l'application à la maquette d'asservissement de température PT326.

## 3.2 Cadre de l'étude

Les travaux d'identification des systèmes à retards présentés se situent dans un cadre essentiellement linéaire et stationnaire (au moins en ce qui concerne la façon dont interviennent les paramètres à identifier). La technique algébrique d'identification en ligne de retards présente en réalité une extension de l'approche opérationnelle initiée par les travaux de Fliess et Sira-Ramirez [Fliess and Sira-Ramirez, 2003] dans le cadre des systèmes linéaires par rapport aux paramètres, non nécessairement linéaires vis-à-vis des entrées-sorties, mais sans retards et de dimension finie.

Dans ce cadre, l'identification des retards apparaît comme un prolongement naturel de la démarche algébrique citée. La technique algébrique est, en fait, une méthode à temps continu, non asymptotique et déterministe. Elle ne s'appuie pas ainsi sur des propriétés statistiques des bruits et ne nécessite pas l'hypothèse restrictive de retards égaux en durée à un nombre entier de périodes d'échantillonnage (appelé retard commensurable). Comme nous l'avons déjà mentionné dans le premier et le deuxième chapitre, nous adoptons dans cette étude une formulation distributionnelle [Fliess and Sira-Ramirez, 2003] pour les raisons présentées dans la section 2.1 du deuxième chapitre permettant ainsi une estimation du retard et des paramètres. Nous donnons en résumé quelques équivalences entre le domaine opérationnel (ou encore par la transformée de Laplace) et le domaine temporel pour un exemple d'un signal considéré  $\omega(t)$  discontinu à l'origine et nul aux temps négatifs :

Domaine opérationnel $\omega(s)$		Domaine temporel $\omega(t)$
$s\omega(s) - \omega(0)$	$\iff$	$\frac{d\omega}{dt} - \omega(0)\delta$
$\frac{d\omega}{ds}$	$\iff$	$-t\omega(t)$
$\omega(s) - \omega(s + \gamma)$	$\iff$	$(1 - e^{-\gamma t})\omega(t)$

Le choix du signal d'entrée est une tâche indispensable pour l'identification d'un système puisqu'il présente une influence significative sur les résultats d'estimation. Les signaux les plus populaires sont les entrées échelon, constante par morceaux, pseudo aléatoire, rampe et les fonctions sinusoïdales. Dans ce chapitre, notre étude se restreint au cas des entrées spécifiques dites structurées de type retardées et bloquées tel que l'entrée échelon et l'entrée constante par morceaux. La définition des entrées structurées et la justification du choix de ces entrées ont été données dans la section 2.3 du deuxième chapitre.

### 3.3 Procédure générale d'identification

La procédure d'identification se décompose principalement en trois étapes suivantes :

1. **Dérivation** : cette opération permet de réduire à des impulsions de Dirac, éventuellement retardées ainsi que leurs dérivées, les perturbations et les entrées dites structurées qui apparaissent dans l'équation représentative du système.
2. **Multiplication par une fonction  $C^\infty$**  : cette étape a pour but d'annihiler les singularités formées suite à la dérivation et ceci en appliquant le théorème 9 de Schwartz comme le montrent les exemples fournis par les équations (2.6 et 2.7). Ces fonctions sont choisies polynomiales et/ou exponentielles afin de permettre une décomposition du type intégration par parties, prévue dans la phase ultérieure.  
 Bien qu'elles soient simples à manipuler, les fonctions polynomiales ne sont pas conseillées dans un contexte bruité. Pour cela, le choix sera plutôt orienté vers la multiplication des signaux bruités par des fonctions exponentielles de la forme  $(1 - e^{-\gamma t})$  (convergeant vers 1 contrairement à  $t$ ) ainsi de plus la présence d'une pondération ajustable  $\gamma$  permet d'éviter l'amplification du bruit.
3. **Intégration/convolution** : dans le cas d'entrées spécifiques (par exemple bloquée), cette opération permet de s'affranchir de toute dérivation. Elle correspond à la dernière étape qui permet d'aboutir au système final à partir duquel le retard ainsi que les paramètres seront estimés.

#### Exemple introductif

L'exemple suivant d'un système du premier ordre sans retard permet d'illustrer cette procédure. On s'intéresse ainsi à l'identification de la constante du temps par une approche opérationnelle et son équivalent dans le domaine temporel :

Opérationnelle	Temporelle
$sy - ay = u + y_0$	$\dot{y} - ay = u + y_0\delta$
$\frac{d}{ds} \longrightarrow \frac{d(sy)}{ds} - a \frac{dy}{ds} = \frac{du}{ds}$	$\times t \longrightarrow ty - aty = tu$
$\longrightarrow a = \frac{\frac{d(sy)}{ds} - \frac{du}{ds}}{\frac{dy}{ds}}$	$\longrightarrow a = \frac{ty - tu}{ty}$
$\frac{1}{s} \longrightarrow a = \frac{\frac{1}{s} \left[ \frac{d(sy)}{ds} - \frac{du}{ds} \right]}{\frac{1}{s} \left[ \frac{dy}{ds} \right]}$	$\int \longrightarrow a = \frac{\int_0^t (\theta \dot{y} - \theta u) d\theta}{\int_0^t \theta y d\theta}$

Ces deux approches permettent de déterminer la constante du temps  $a$  à partir d'une formule non asymptotique qui est valable pour tout  $t > 0$ . On peut remarquer la



présence de la dérivée de la sortie dans l'expression finale de  $a$  dans le cas temporel. L'utilisation de la formule des intégrations par parties permet d'aboutir à une expression faisant seulement appel aux données mesurées  $(u, y)$  et on donne par exemple  $\int_0^t \theta \dot{y} d\theta = ty - \int_0^t y(\theta) d\theta$ .

Dans les deux cas, l'estimation de  $a$  a été effectuée indépendamment de la condition initiale. Outre la condition initiale, cette procédure reste valable même en présence de perturbations constantes ou polynomiales appelées perturbations structurées. Ce cas de figure sera étudié dans la prochaine section.

### 3.4 Système linéaire du premier ordre à retard

Nous nous intéressons dans cette section à expliquer la méthode d'identification algébrique à partir de son application sur un système du premier ordre à retard. Bien qu'il représente un exemple académique, le modèle du premier ordre à retard est capable de représenter la dynamique de plusieurs processus. Les systèmes où les retards apparaissent seulement dans les variables de commande, sont très utilisés en pratique (Voir Fliess et al. (2002) pour leur contexte théorique et leur commande). Même si le processus n'a pas de retard physique, il est possible de modéliser un tel système (qui peut être d'ordre plus élevé) par un modèle d'ordre petit et à retard. Dans ce cas, le retard estimé peut être une combinaison du retard actuel et des contributions dues à l'ordre élevé des termes dynamiques dans la fonction de transfert.

Il existe certainement d'autres processus pour lesquels le modèle du premier ordre à retard n'est pas adéquat pour décrire la dynamique, ou pour lesquels un modèle d'ordre élevé peut améliorer la précision de façon significative. Cependant, même dans ce cas d'étude, notre méthode d'identification algébrique peut être facilement généralisée aux systèmes d'ordre supérieur (voir par exemple les sections 3.5 et 3.6 pour un système d'ordre 2).

Le système étudié est soumis à une entrée échelon qui est probablement le plus simple des signaux de test connus. Elle a besoin d'un minimum d'équipement et peut être effectuée manuellement. Un test échelon peut être implémenté facilement sur des API (Automates Programmables Industriels) ou des SCD (Systèmes de Contrôle Distribués). Cependant, le test à un échelon est dominant pour les applications dans la commande des systèmes.

#### 3.4.1 Formulation du problème d'identification

On considère un système du premier ordre à retard régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} + ay = y(0)\delta + \gamma_0 H + bu(t - \tau). \quad (3.1)$$

Ce système est soumis à une perturbation (ou un biais) constante d'amplitude  $\gamma_0$  et pour lequel la commande  $u$  est supposée aussi constante (échelon) d'amplitude

### 3.4. SYSTÈME LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE À RETARD

$u_0$  et retardée du paramètre constant  $\tau$  à identifier. Les paramètres  $a$  et  $b$  sont des paramètres constants. L'entrée échelon s'écrit sous la forme  $u = u_0 H$ .

#### Identification du retard

On suppose que le coefficient  $a$  est connu pour l'instant et on s'intéresse à l'identification du retard uniquement. En dérivant une seule fois l'équation (3.1), on obtient

$$\dot{y} + ay = \varphi_0 + \gamma_0 \delta + b u_0 \delta_\tau, \quad (3.2)$$

où  $\varphi_0 = (\dot{y}(0) + ay(0)) \delta + y(0) \delta^{(1)}$ , d'ordre 1 et de support  $\{0\}$ . En vertu du Théorème 9, la multiplication de l'équation (3.2) par une fonction  $\alpha$  vérifiant  $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$  et  $\alpha(\tau) = 0$  annule son membre de droite. Le choix de la fonction polynomiale  $\alpha(t) = t^3 - \tau t^2$  permet d'obtenir les relations suivantes :

$$t^3 [\dot{y} + ay] = \tau t^2 [\ddot{y} + a\dot{y}] \quad (3.3)$$

$$b u_0 t^3 \delta_\tau = b u_0 \tau t^2 \delta_\tau \quad (3.4)$$

Le retard  $\tau$  devient accessible après l'application de  $k \geq 2$  intégrations successives. Plus précisément, en tenant compte de la propriété des supports des produits de convolutions,  $\text{supp } H^k \delta_\tau \subset (\tau, \infty)$ , l'équation (3.4) montre que toutes les fonctions obtenues s'annulent sur  $(0, \tau)$ . Par conséquent, le retard sera non identifiable sur cet intervalle. Néanmoins, ces fonctions sont non nulles pour tout  $t > \tau$ , rendant le retard identifiable sur tout l'intervalle  $(\tau, \infty)$ . On obtient donc à partir (3.3) :

$$\tau = \frac{H^k(w_0 + a w_3)}{H^k(w_1 + a w_2)}, \quad t > \tau \quad (3.5)$$

où, en s'inspirant de l'équation (2.14) et de la notation  $z_i = t^i y$  de la section 2.2.5, on pose :

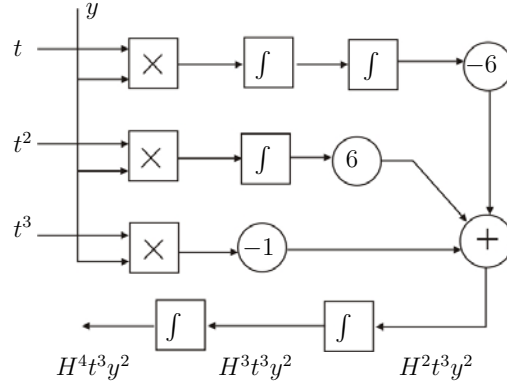
$$\begin{aligned} w_0 &= t^3 y^{(2)} = -6 z_1 + 6 z_2^{(1)} - z_3^{(2)}, \\ w_1 &= t^2 y^{(2)} = -2 z_0 + 4 z_1^{(1)} - z_2^{(2)}, \\ w_2 &= t^2 y^{(1)} = 2 z_1 - z_2^{(1)}, \\ w_3 &= t^3 y^{(1)} = 3 z_2 - z_3^{(1)}. \end{aligned}$$

Ces coefficients montrent que  $k \geq 2$  intégrations permet de se débarrasser de toute dérivation dans l'algorithme (3.5). La figure 3.1 montre le schéma partiel de réalisation des  $H^k w_0$ . Notons que l'algorithme donné par (3.5) requiert seulement la valeur de  $a$  et de la sortie  $y$ .

#### Identification simultanée du retard et de la constante du temps

Si  $a$  est inconnu, la même approche peut être utilisée pour l'identification simultanée. La relation suivante est dérivée de l'équation (3.3) :

$$\tau(H^k w_1) + a \tau(H^k w_2) - a(H^k w_3) = H^k w_0. \quad (3.6)$$


 FIGURE 3.1 – Schéma de réalisation de  $H^k w_0$ .

En utilisant différents ordres d'intégration, on obtient le système linéaire suivant avec les paramètres  $(\tau, a, \tau, a)$  :

$$\begin{pmatrix} H^2 w_1 & H^2 w_2 & H^2 w_3 \\ H^3 w_1 & H^3 w_2 & H^3 w_3 \\ H^4 w_1 & H^4 w_2 & H^4 w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{a}\tau \\ -\hat{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^2 w_0 \\ H^3 w_0 \\ H^4 w_0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Les paramètres  $a$  et  $\tau$  peuvent être, alors, déterminés à partir de la résolution de ce système d'équations.

La multiplication de (3.2) par une autre fonction indéfiniment dérivable permet l'estimation d'autres combinaisons de paramètres. En choisissant la fonction candidate  $\alpha(t) = t(t - \tau)$  et en utilisant la même technique que précédemment, on obtient :

$$H^k t(\ddot{y} + ay) \tau - H^k \tau y(0) = H^k t^2(\ddot{y} + ay), \quad (3.8)$$

à partir duquel le retard ainsi que la condition initiale peuvent être identifiés. Le problème d'identification de la condition initiale n'est pas étudié dans ce mémoire. La résolution de ce problème a été le sujet des travaux de Belkoura dans [Belkoura, 2003].

### 3.4.2 Etude en simulation

Les résultats de simulation sont illustrés par la figure 3.2 pour les paramètres  $y(0) = 0.3$ ,  $a = 2$ ,  $\tau = 0.6$ ,  $\gamma_0 = 2$ ,  $b = 1$ ,  $u_0 = 1$  et  $k = 2$ .

A cause de la non identifiabilité sur  $(0, \tau)$ , le retard  $\tau$  est maintenu à zéro jusqu'à ce que le numérateur et le dénominateur de l'équation (3.5) atteignent une valeur significative. La figure 3.3 suivante illustre les résultats en simulation de l'algorithme (3.7) pour les mêmes valeurs des paramètres et pour  $k = 2, 3, 4$  intégrations.

Pour la raison d'identifiabilité expliquée précédemment, le système linéaire obtenu peut être non consistant pour  $t < \tau$ . De plus, et à la différence au cas d'identification du retard seul, une perte locale d'identifiabilité (voir [Belkoura, 2005]) s'est produite

### 3.4. SYSTÈME LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE À RETARD

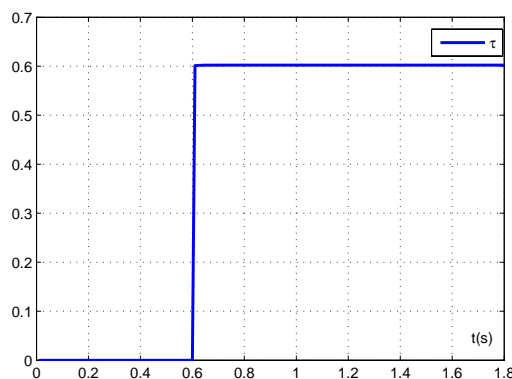


FIGURE 3.2 – Identification du retard à partir de (3.5).

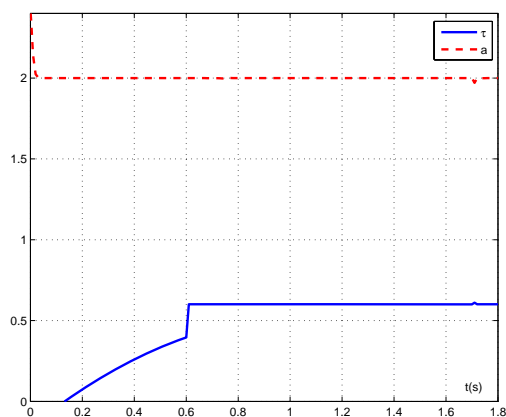


FIGURE 3.3 – Identification simultanée à partir de (3.6).

pour  $t > \tau$  comme le montre la figure 3.3 pour  $t \approx 1.5$ s. Le seul coefficient qui n'est pas identifiable à partir de ces différentes formulations est le paramètre  $b$ . Dans le cas où on s'intéresse à son identification, et grâce à la rapidité de convergence de ces algorithmes, on peut aussi considérer une procédure séparée dans laquelle les termes non retardés sont d'abord estimés puis utilisés par la suite pour l'identification du retard.

**Remarque 11** Dans le cas où l'entrée échelon est retardée d'un retard variable  $\tau(t)$ , l'algorithme (3.5) converge malgré tout vers une valeur fixe. Notons que dans ce cas, la contribution de l'entrée dans l'exemple (3.1) peut être écrite  $bu_0 H \circ \varphi$ ,  $\varphi(t) = t - \tau(t)$ , où  $\circ$  représente le symbole de la composition de fonctions. Si  $\varphi(t_0) = 0$ ,  $\varphi'(t_0) \neq 0$ , et en tenant compte de quelques hypothèses de régularité sur  $\tau(t)$ , nous obtenons :

$$(H \circ \varphi)' = \varphi' H' \circ \varphi = \varphi' \delta \circ \varphi = (\varphi' / \varphi'(t_0)) \delta_{t_0} = \delta_{t_0}.$$

L'algorithme converge alors vers  $t_0$ . Cependant, l'entrée échelon est inadéquate pour l'identification d'un retard variant dans le temps et le retard constant est, dans un sens, un cas particulier de la présente approche.

### 3.4.3 Robustesse

Comme mentionné dans la Section 2.2.1 du chapitre 2, faire des produits de convolutions itérés en utilisant  $H^k$  revient à appliquer les formules d'intégration par parties. Dans un contexte bruité, l'intégration avec  $H(s) = 1/s$  peut être remplacée par une fonction de transfert appropriée et plus particulièrement par des filtres passe bas de la forme  $T(s) = 1/(\gamma s + 1)$ . Des bruits blancs d'entrée et de sortie ont été pris respectivement d'amplitude  $2 \times 10^{-6}$  et  $4 \times 10^{-6}$ . Les simulations suivantes, pour  $\gamma = 2$ , montrent la robustesse de l'algorithme d'identification du retard proposé vis à vis les bruits.

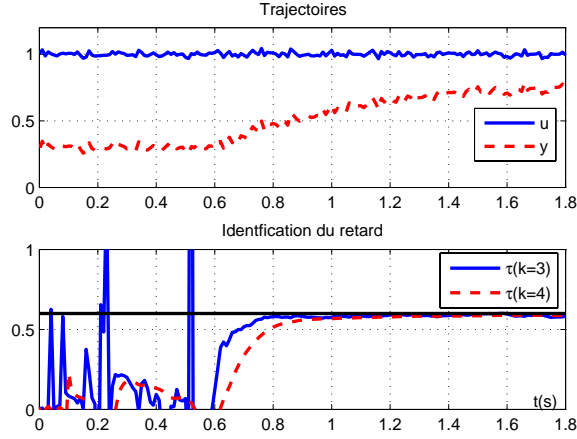


FIGURE 3.4 – Identification du retard en présence du bruit.

**Remarque 12** Voir [Fliess, 2006] pour une analyse non standard du bruit qui explique les résultats de robustesse ci dessus. Une autre explication possible de la convergence peut être déduite à partir de la puissance du spectre des termes supplémentaires qui apparaissent dans (3.5) quand la sortie  $y$  est remplacée par une mesure  $m = y + \nu$ . La contribution du bruit  $\nu$  est faite par les termes de la forme  $T^k((t^p \nu)^{(q)})$  pour lesquels on donne la puissance du spectre

$$|T(j\omega)|^k (j\omega)^q \frac{d^p \phi_{\nu\nu}(\omega)}{d\omega^p}. \quad (3.9)$$

Si le spectre du bruit  $\phi_{\nu\nu}(\omega)$  est supposé constant sur un intervalle suffisamment large  $-L < \omega < L$  (ce qui est le cas pour l'approximation du bruit blanc), et en vertu de la causalité obtenue pour  $k > q$ , ces quantités et les effets du bruit restent alors négligeables.

### 3.5. SYSTÈME AVEC SUCCESSION DE RETARDS

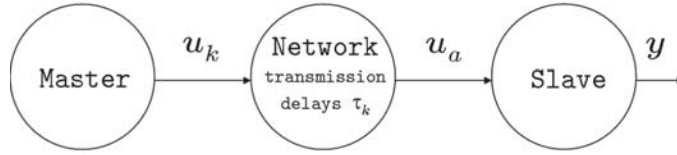


FIGURE 3.5 – La structure générale des systèmes avec retards de transmission.

## 3.5 Système avec succession de retards

### 3.5.1 Formulation du problème

Dans la section précédente, le retard a été estimé parce qu'il correspondait à un instant de commutation (discontinuité) de la partie droite de  $\gamma_0 H + b u_0 H(t - \tau)$  de l'équation (3.1) du fonctionnement du système. Basé sur cette observation, nos techniques peuvent être étendues à l'estimation d'un nombre fini ou infini de retards au moyen de l'une des trois approches suivantes :

- Une multiplication avec une fonction candidate  $C^\infty$ ,  $t^2(t - h_1) \cdots (t - h_k)$ , si  $k$  est fini et ceci en vertu du Théorème 9. Cette solution est efficace pour un nombre petit de retards alors que pour un nombre important de retards, elle nous mène à un système d'équations linéaire de grande taille consistant pour  $t > h_k$ .
- Une estimation récursive qui, bien qu'elle soit robuste dans le cas des données bruitées, présente un risque de propagation des erreurs.
- Une identification locale, si on suppose qu'il existe un temps minimum (temps de séjour) entre deux commutations consécutives (appelé un retard incompressible)  $\Delta < h_{k+1} - h_k$  où  $k$  peut être non borné.

En raison des inconvénients des deux premières solutions, nous considérons, alors, le troisième cas appliqué au processus décrit par la figure 3.5 et supposons qu'un signal de commande (d'entrée) discret  $\{u_k\}$  de période fixe  $T$  est envoyé du Maître à l'Esclave aux instants  $h_k = \tau_k + kT$ .

Le signal d'entrée consiste alors en un signal constant par morceaux de la forme suivante :

$$u_a = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \chi_k, \quad (3.10)$$

où  $\chi_k$  représente la fonction caractéristique de l'intervalle  $[kT + \tau_k, (k+1)T + \tau_{k+1}]$ . Basé sur l'observation de la sortie, nous proposons une méthode d'identification en ligne des instants de commutation  $kT + \tau_k$ . En fait, si la période  $T$  est connue et si le Maître et l'Esclave ont la même origine de temps alors les retards de transmission deviennent accessibles seulement à partir de la mesure de la sortie  $y$ .

L'estimation des retards de transmission est importante pour les systèmes de commande en réseau. Quand les paquets de données sont envoyés, auxquels sont associés les horodatages (time-stamp), le récepteur peut estimer la durée du retard et prendre

par la suite les actions correctives appropriées (voir par exemple [Hespanha et al., 2007], [Zampieri, 2008, Yang et al., 2008, Zhang et al., 2008]). Dans le cas où les horodatages ne sont pas disponibles (par exemple, dans quelques dispositifs Bluetooth, le contenu de paquets n'est pas modifiable par l'utilisateur), notre méthode reste applicable. Pour des raisons de simplicité, nous prendrons ici l'exemple d'un système linéaire du second ordre décrit par l'équation suivante :

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = \varphi_0 + \gamma_0 H + b u_a, \quad (3.11)$$

où  $\gamma_0 H$  est une perturbation constante, et  $\varphi_0$  (d'ordre 1 et de support  $\{0\}$ ) regroupent les conditions initiales. En se basant sur la section précédente, dérivation et multiplication par  $t^3(t - \lambda)$  conduisent à

$$t^3(t - \lambda)(y^{(3)} + a_1 y^{(2)} + a_0 y^{(1)}) = b \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k (h_k^4 - \lambda h_k^3) \delta_{h_k}, \quad (3.12)$$

où  $h_k = kT + \tau_k$  et  $\sigma_k$  désigne les sauts de discontinuité de  $u_a$  aux instants  $h_k$ . En utilisant l'hypothèse  $h_{k+1} - h_k > \Delta$ , une intégration locale est maintenant considérée avec un filtre de la forme  $T(s) = (1 - e^{-\Delta s/3})/s$  au lieu de  $H(s) = 1/s$ . Avec,  $\text{supp } T \subset (0, \Delta/3)$  et le coefficient 3 représente aussi le nombre d'intégrations permettant ainsi de s'affranchir de toute dérivation. On obtient

$$T^3 t^3(t - \lambda)(y^{(3)} + a_1 y^{(2)} + a_0 y^{(1)}) \triangleq N - \lambda D, \quad (3.13)$$

où, à partir du membre droit de l'équation (3.12) et en vertu des propriétés du support du produit de convolution données par la Section 2.2.3, on a

$$\text{supp } T^3 \delta_{h_k} \subset (h_k, h_k + \Delta), \quad (3.14)$$

$$\text{supp } (N, D) \subset \{(h_k, h_k + \Delta) \mid k = 1, 2, \dots\}. \quad (3.15)$$

Sur chacun des derniers intervalles, l'instant de commutation  $h_k$  et donc le retard  $\tau_k$  est obtenu à partir de la relation

$$\lambda = h_k = kT + \tau_k = N/D. \quad (3.16)$$

Comme dans la section précédente, les termes de la forme  $T^k t^l y^{(q)}$  apparus dans les expressions de  $N$  and  $D$  sont implémentés en considérant d'abord le développement de  $t^l y^{(q)}$  décrit par l'équation (2.14) puis en appliquant des intégrations avec  $T^k$ .

### 3.5.2 Etude en simulation

Les résultats de simulation sont donnés par la Figure 3.6 pour les paramètres  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b = 1$ ,  $y(0) = 1.3$ ,  $\dot{y}(0) = -2.3$ ,  $T = 2$ ,  $\Delta = 0.75$  et les valeurs des retards  $\{\tau_k\} = \{0.3, 0.5, 0.2, 0.3\}$ . Notons que la même étude pourrait être faite en supposant que les paramètres  $a_0$  et  $a_1$  sont aussi inconnus.

### 3.6. PROBLÈME D'IDENTIFICATION CONJOINTE ET FORMULATION EN TERME DE PROBLÈME DE VALEURS PROPRES GÉNÉRALISÉES

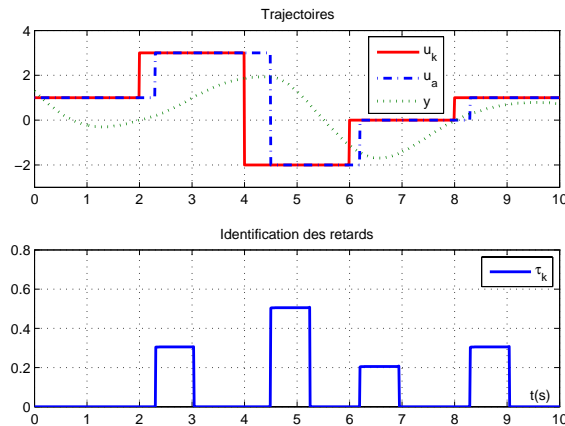


FIGURE 3.6 – Trajectoires and retards estimés.

## 3.6 Problème d'identification conjointe et formulation en terme de problème de valeurs propres généralisées

Les valeurs propres de matrices interviennent dans un très grand nombre d'applications, à la fois théoriques et pratiques. Plusieurs exemples ont été présentés dans [Chatelin, 1988] allant des mathématiques à la chimie et la dynamique des structures, en passant par l'économie. L'étude suivante va ajouter un nouveau domaine d'application des problèmes de valeurs propres et montre comment l'étude de l'identification simultanée du retard et des paramètres peut nous ramener à celle d'un problème de valeurs propres généralisées.

### 3.6.1 Formulation du problème

Cet exemple, tiré de [Veysset, 2006], représente une application d'aéronautique et nous nous sommes intéressés dans cette thèse à améliorer la procédure d'identification. L'exemple consiste en un système à deux entrées dont l'une est retardée, chaque transfert correspondant à une fonction du premier ordre :

$$y = \left[ \frac{k_{w0} + k_{w1}s}{1 + \tau_{ws}} + \frac{k_{t0} + k_{t1}s}{1 + \tau_{ts}} e^{-\tau s} \right] u. \quad (3.17)$$

Quelques manipulations montrent que le membre de droite de l'équation différentielle correspondante peut être annulé en le multipliant par une fonction  $\alpha$  vérifiant  $\alpha^{(k)}(0) = \alpha^{(k)}(\tau) = 0$  pour  $k = 0, 1, 2$ . Le choix de la fonction exponentielle

$$\alpha(t) = (1 - e^{-\gamma t})^3 (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})^3 \quad (3.18)$$

conduit à

$$(1 - e)^3 (1 - \lambda e)^3 (a_2 y^{(3)} + a_1 y^{(2)} + y^{(1)}) = 0, \quad (3.19)$$



où, pour faciliter les notations, nous avons posé  $e = e^{-\gamma t}$ ,  $\lambda = e^{-\gamma\tau}$ , et  $a_2 = \tau_t \tau_w$ ,  $a_1 = \tau_t + \tau_w$ . Notons que la dernière équation nécessite la connaissance des gains  $k_{w0}$ ,  $k_{w1}$ ,  $k_{t0}$  et  $k_{t1}$ . L'application de  $k \geq 3$  intégrations successives (ou une convolution avec  $H^k$ ) aboutissent à l'égalité de fonctions où le retard  $\tau$  et les coefficients  $\tau_w$ ,  $\tau_t$  deviennent disponibles. Plus précisément, l'équation (3.19) combinée avec des intégrations mène à la formulation suivante :

$$(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3) \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.20)$$

où les entrées de matrices décrites ci-dessous sont réalisées à l'aide de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} A_0(i, j) &= +1H^{i+3}(1-e)^3y^{(4-j)} \\ A_1(i, j) &= -3H^{i+3}e(1-e)^3y^{(4-j)} \\ A_2(i, j) &= +3H^{i+3}e^2(1-e)^3y^{(4-j)} \\ A_3(i, j) &= -1H^{i+3}e^3(1-e)^3y^{(4-j)} \end{aligned}$$

Le problème d'identification est donc transformé en un problème de valeurs propres généralisées dans l'équation (3.20) pour lequel le retard est déduit à partir de l'une des valeurs propres (c'est à dire  $\tau = -\log(\lambda)/\gamma$ ), tandis que les coefficients  $a_2$  et  $a_1$  sont obtenus à partir du vecteur propre correspondant.

### 3.6.2 Etude en simulation

Les figures 3.7 et 3.8 illustrent respectivement les valeurs propres généralisées de l'équation (3.20) (et plus précisément  $-\log(\lambda)/\gamma$ ) et les vecteurs propres correspondants résolus en utilisant la fonction `polyeig` de Matlab pour les paramètres  $\tau_w = 0.6$ ,  $k_{w0} = 2$ ,  $k_{w1} = 0.5$ ,  $\tau_t = 0.4$ ,  $k_{t0} = 0.7$ ,  $k_{t1} = 0.1$ ,  $\tau = 0.5$  et  $\gamma = 0.2$ .

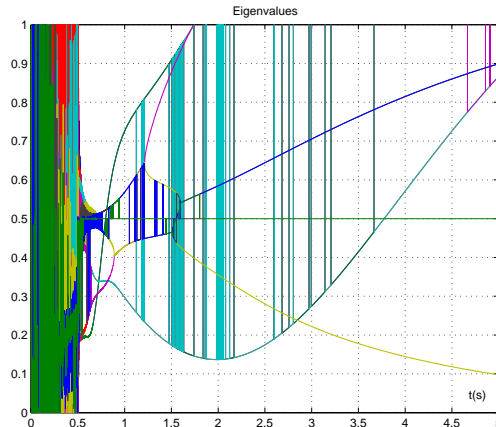


FIGURE 3.7 – Valeurs propres du problème (3.20).

### 3.6. PROBLÈME D'IDENTIFICATION CONJOINTE ET FORMULATION EN TERME DE PROBLÈME DE VALEURS PROPRES GÉNÉRALISÉES

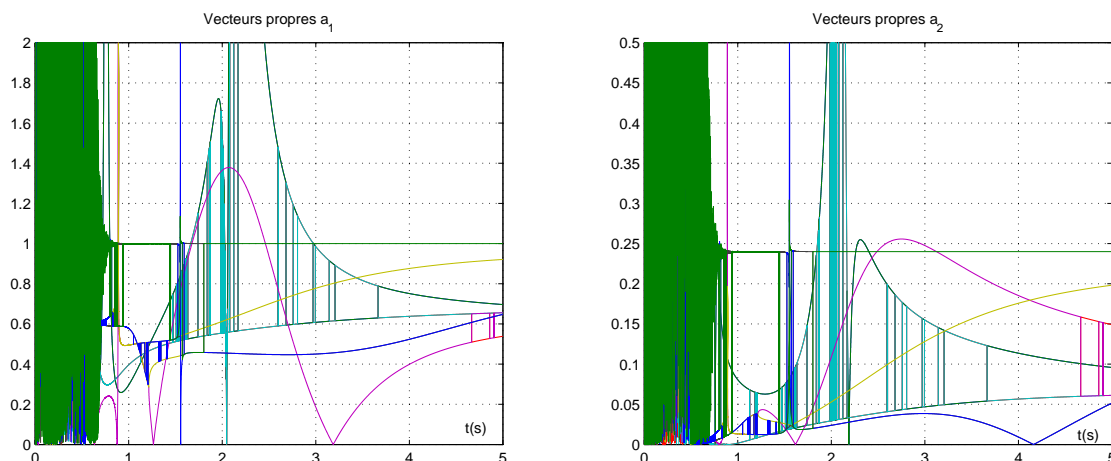


FIGURE 3.8 – Vecteurs propres du problème (3.20).

Les résultats de simulations montrent clairement qu'il existe une valeur propre (resp. un vecteur propre) constante correspondante au retard inconnu  $\tau$  (resp. aux coefficients  $a_2$  et  $a_1$ ). Cette valeur apparaît après une phase transitoire pour laquelle le retard n'est pas identifiable.

Nous obtenons donc neuf valeurs propres possibles (resp. vecteurs propres) dont l'une correspond au retard (resp. aux coefficients  $a_2$  et  $a_1$ ) et les autres doivent être rejetés. Il est donc nécessaire de concevoir un algorithme d'identification en ligne qui permet de choisir la paire valeur propre et vecteur propre désirée. Cette procédure est une suite directe de [Belkoura et al., 2008] et sera développée dans la section suivante.

#### 3.6.3 Résolution du problème spectral

La section précédente montre que la valeur propre désirée satisfait l'équation (3.20) pour tout  $k \geq 3$ . Pour cela, trouver cette valeur propre revient à sélectionner la valeur propre  $(\lambda, v)$  qui minimise  $\|(A_0 + \hat{\lambda} A_1 + \hat{\lambda}^2 A_2 + \hat{\lambda}^3 A_3)\hat{v}\|_2$ , où  $A_{i=0,\dots,3}$  sont des matrices rectangulaires typiquement  $m \times n$  où  $m > n$ .

Il est clair que plus on ajoute des mesures (et ainsi des lignes) aux matrices  $A_i$  plus on obtient de meilleurs résultats d'estimation du retard ainsi que des paramètres. Afin de mieux comprendre l'aspect physique de ces valeurs propres, il est intéressant de faire le calcul analytique des valeurs propres pour le cas du système du premier ordre à retard régi par l'équation (3.1) pour une fonction candidate simple  $\alpha(t) = (t - \tau)$ . Pour simplifier le calcul, on suppose que la condition initiale ainsi que la perturbation constante sont nulles. Les résultats de ce calcul pour un faisceau de matrices carrées  $(A, B)$  formé par les lignes (1, 2) et les lignes (2, 3) sont

respectivement donnés par les systèmes d'équations (S1) et (S2).

$$(S1) = \begin{cases} \lambda_1 = \tau \\ \lambda_2 = \frac{t\tau + 2ta_0 - 4a_0\tau - 6a_0^2 - \tau^2}{\Delta_1} + \frac{(t^2 + 4ta_0 - t\tau + 6a_0^2 - 2a_0\tau) \exp(-\frac{t-\tau}{a_0})}{\Delta_1} \end{cases} \quad (3.21)$$

où,  $a_0$  est la constante du temps du système et  $\Delta_1 = (t + 2a_0 - \tau) \exp(-\frac{t-\tau}{a_0}) + t - \tau - 2a_0$ , et

$$(S2) = \begin{cases} \lambda_3 = \tau \\ \lambda_4 = \frac{(2t^2a_0 + 12ta_0^2 - 2ta_0\tau) \exp(-\frac{t-\tau}{a_0})}{\Delta_2} + \frac{(24a_0^3 - 6a_0^2\tau) \exp(-\frac{t-\tau}{a_0}) - t\tau - 2a_0t^2}{\Delta_2} \\ + \frac{8ta_0\tau + 2\tau^2t + 12ta_0^2 - \tau^3 - 6a_0\tau^2}{\Delta_2} + \frac{-6a_0\tau^2 - 24a_0^3 - 18a_0^2\tau}{\Delta_2} \end{cases} \quad (3.22)$$

où,  $\Delta_2 = (2ta_0 - 2a_0\tau + 6a_0^2) \exp(-\frac{t-\tau}{a_0}) - t^2 + 4ta_0 + 2\tau t - 4a_0\tau - 6a_0^2 - \tau^2$ . Le calcul analytique des valeurs propres des deux faisceaux de matrices carrées montre clairement qu'il existe deux valeurs propres distinctes. Pour les deux cas, la première valeur propre est constante et correspond au retard  $\tau$  alors que l'autre valeur propre est non stationnaire. Pour mieux illustrer ce résultat, la figure 3.9 montre les résultats de simulations des solutions de ces deux systèmes pour les valeurs numériques suivantes :  $a = 2$ ,  $\tau = 0.6$ ,  $b = 1$ , et  $u_0 = 1$

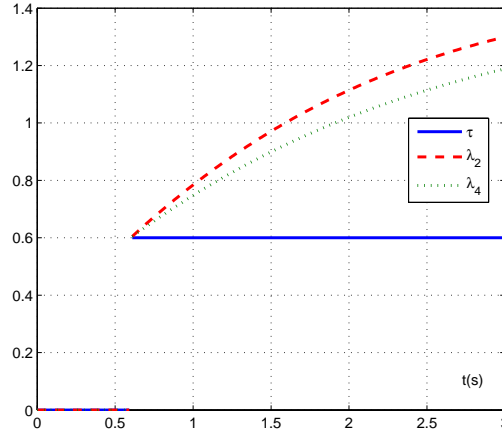


FIGURE 3.9 – Calcul analytique des valeurs propres

Cet exemple montre que la valeur propre non stationnaire ne vérifie pas le faisceau de matrice rectangulaire. Le choix de la valeur propre qui correspond au retard peut être alors effectué par l'addition d'une ligne au faisceau de matrice carrée. Nous savons très bien que le retard satisfait cette équation et donc il annule le faisceau de matrice rectangulaire. Pour cela, nous choisissons la valeur propre qui minimise  $\|(A - \hat{\lambda}B)\hat{v}\|_2$  avec  $A$  et  $B$  sont des matrices rectangulaires. La figure 3.10 montre les résultats de simulations pour  $k = 5$  intégrations successives.

Dû à la non identifiabilité sur  $(0, \tau)$ , les paramètres  $\tau$ ,  $a_1$  et  $a_2$  n'ont pas de valeurs significatives tandis qu'en dehors de cet intervalle ces coefficients convergent vers les valeurs désirées. Notons qu'une singularité apparaît pour  $t \simeq 1.5$ s.

### 3.7. APPLICATION AU PROCÉDÉ D'ASSERVISSEMENT DE TEMPÉRATURE

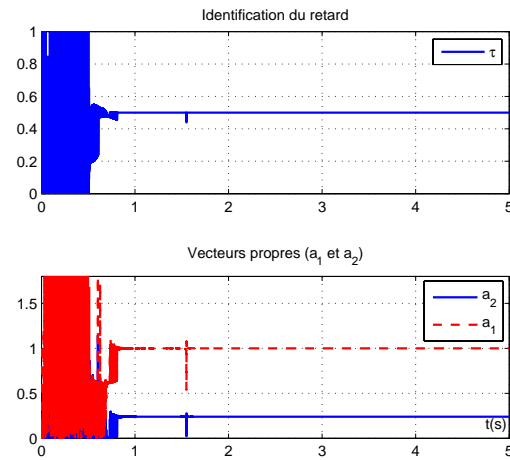


FIGURE 3.10 – Les paramètres estimés  $\tau$ ,  $a_1$  and  $a_2$ .

## 3.7 Application au procédé d'asservissement de température

### 3.7.1 Description du système

Le processus thermique Feedback PT326, illustré par la figure 3.11, étudié dans ce paragraphe est très connu par la communauté automatique et enseignante. Il est largement étudié et principalement utilisé pour la compréhension des notions de l'automatique tel que l'identification et l'élaboration des lois de commande. Il



FIGURE 3.11 – Vue de la maquette Feedback PT326.

est constitué d'un tube parcouru par un flux d'air produit par un ventilateur et chauffé initialement par une grille qui dégage une puissance fonction de la tension de commande appliquée (voir la figure 3.12). Une mesure par thermistance fournit une tension proportionnelle à la température de l'air. Le capteur de température

peut être positionné dans trois logements différents répartis le long du tube. Le

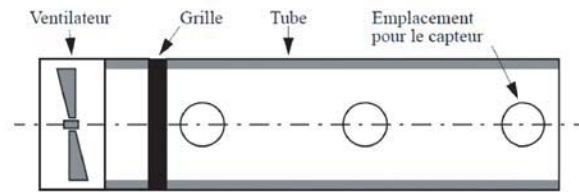


FIGURE 3.12 – Schéma de principe du canal aérothermique.

débit d'air peut être modifié en changeant la vitesse du ventilateur.

### 3.7.2 Identification

La réponse indicielle obtenue pour un échelon d'amplitude 2 est donné par la figure 3.13 suivante. L'allure de la courbe d'évolution de la sortie montre que cette réponse

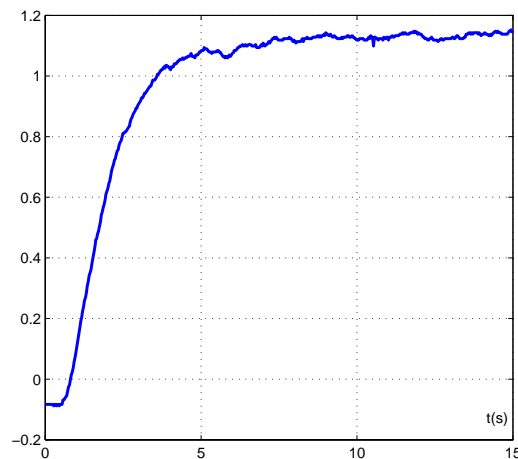


FIGURE 3.13 – Réponse indicielle de la maquette Feedback PT326.

peut être identifiée à celle d'un système du 1<sup>er</sup> ordre avec retard ou à celle d'un système du 2<sup>nd</sup> ordre avec retard et sans dépassement. L'identification a été faite dans [Belkoura et al., 2009] pour un modèle d'ordre 2 mais le coefficient d'ordre 2 de notre maquette s'avère négligeable. Pour cela, nous allons nous limiter ici à l'ordre 1. Notons que cette démarche illustre une certaine robustesse de nos algorithmes vis à vis des dynamiques négligées.

Le premier exemple d'application, étudié dans le paragraphe précédent, a été identifié en utilisant des fonctions candidates polynomiales. Ici, à cause de la sensibilité de ces fonctions dans un contexte bruité, nous choisissons des fonctions exponentielles, de

### 3.7. APPLICATION AU PROCÉDÉ D'ASSERVISSEMENT DE TEMPÉRATURE

type  $(1 - e^{-\gamma t})$ , vu leur convergence vers 1 et la présence d'un coefficient  $\gamma$  ajustable. Le modèle du premier ordre a priori choisi est de la forme suivante :

$$a\dot{y} + y = bu(t - \tau) + y(0)\delta, \quad (3.23)$$

avec  $a$  est la constante du temps,  $\tau$  est le retard à l'entrée échelon  $u$ ,  $b$  représente le gain et  $y(0)$  est la condition initiale. Dérivation, multiplication par  $\alpha(t) = (1 - e^{-\gamma t})^2(1 - e^{-\lambda\gamma t})$ , où  $\lambda = e^{\gamma\tau}$  contient le retard à estimer et intégrations successives, conduisent à une formulation spectrale du problème :

$$(A(t) - \lambda B(t)) \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A(i, j) = H^{i+2}(1 - e)^2 y^{(3-j)}, \\ B(i, j) = H^{i+2} e(1 - e)^2 y^{(3-j)}, \end{cases}$$

dans laquelle  $e = e^{-\gamma t}$  et  $H_i, i = 0, 1$ , représentent des filtres linéaires de degré  $\geq 2$ . Ces filtres peuvent être des simples intégrations ou des filtres différents.

Le problème d'identification est transformé en problème de valeurs propres généralisées. Le retard est identifié à partir des valeurs propres, via  $\lambda = e^{\gamma\tau}$ , indépendamment de la constante du temps, tandis que la constante du temps est déterminée à partir du vecteur propre correspondant. Comme nous l'avons déjà mentionné dans les exemples introductifs, le gain peut être déterminé connaissant le retard.

La résolution du problème spectral a été faite à l'aide du logiciel MATLAB par la fonction *polyeig*. La figure 3.14 suivante illustre l'analyse spectrale du modèle du premier ordre et compare les réponses indicielles réelle et identifiée sur la base des coefficients identifiés à l'ordre 1. Seuls la valeur propre stable et son vecteur propre

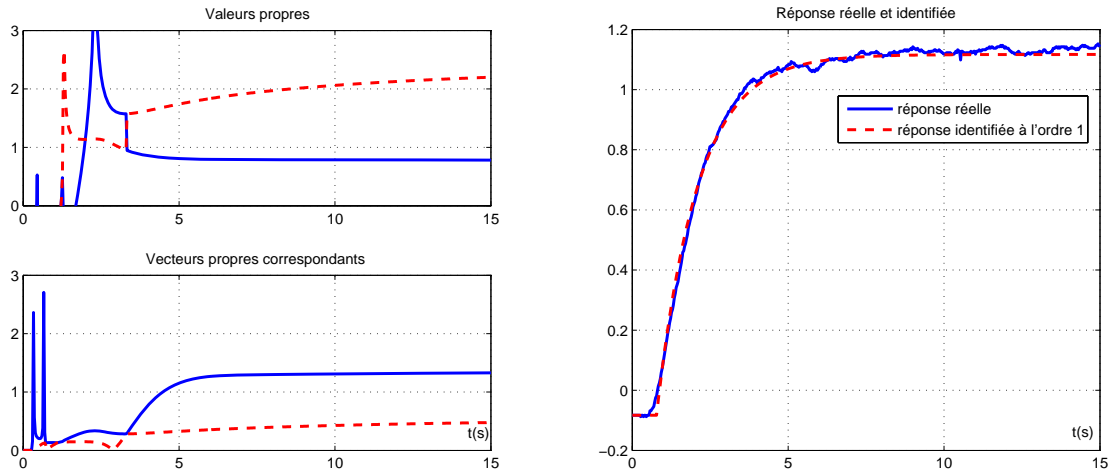


FIGURE 3.14 – Analyse spectrale du modèle estimé à l'ordre 1 et comparaison des réponses indicielles réelle et identifiée.

correspondant sont à conserver. L'autre solution, correspondant à une transfert instable, est à rejeter grâce à l'algorithme de sélection donné dans la section 3.6.3.

Ceci conduit au modèle du premier ordre correspond le transfert estimé suivant :

$$H(s) = \frac{0.6e^{-0.78s}}{1.3s + 1}. \quad (3.24)$$

## 3.8 Conclusion

Ce chapitre a proposé une méthode permettant d'identifier simultanément le retard et les paramètres d'une classe de systèmes très répandue dans la pratique. Une présentation de la méthode d'identification algébrique qui est basée sur un formalisme distributionnel a été faite sur plusieurs cas d'étude.

Les exemples de simulation étudiés donnent plusieurs formulations du problème d'estimation. La formulation spectrale est la plus générale et offre la possibilité d'identifier le retard indépendamment des paramètres.

La dernière section a traité l'identification algébrique du processus Feedback PT326 décrit par un modèle mathématique de type entrée-sortie, linéaire, continu, monovarié, du premier ordre, avec retard, opérant dans un cadre essentiellement stationnaire. Les résultats d'estimation obtenus à partir des données expérimentales sont satisfaisants et prouvent la rapidité de la convergence des algorithmes d'identification algébrique et leur robustesse vis-à-vis des bruits. Ils devraient donc permettre de traiter simultanément l'identification et la commande en ligne des systèmes à retards. L'étude de l'estimation des systèmes à entrées quelconques et état retardé, aussi bien que des extensions au cas des systèmes discrets reste à envisager.

# IDENTIFICATION ALGÈBRIQUE POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES HYBRIDES

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>95</b>
<b>4.2</b>	<b>Systèmes impulsifs</b>	<b>96</b>
4.2.1	Présentation des systèmes impulsifs	96
4.2.2	Exemples de systèmes impulsifs	96
4.2.3	Phénomène de Zénon	99
<b>4.3</b>	<b>Formulation du problème d'estimation</b>	<b>99</b>
4.3.1	Robustesse et identifiabilité	100
4.3.2	Identification des instants de commutation	101
4.3.3	Identification des paramètres indépendamment des instants de commutation	102
4.3.4	Problème de valeurs propres généralisées	102
<b>4.4</b>	<b>Application au pendule simple avec frottement</b>	<b>103</b>
4.4.1	Identification des instants de commutation	104
4.4.2	Identification des paramètres indépendamment des instants de commutation	105
4.4.3	Identification simultanée des instants de commutation et des paramètres	106
4.4.4	Critère de sélection	108
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>110</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'estimation en ligne d'une certaine classe de systèmes hybrides dont le modèle est vu comme celui d'un système à temps continu soumis à des impulsions (discontinuités). L'identification se limite ici au cas des paramètres invariants dans le temps. Bien que présentant une formulation simple et académique, l'objectif de ce travail est double : d'une part, il souligne que l'extension à une certaine classe de systèmes non linéaires en l'état est immédiate, dans la mesure où rien n'est changé dans la méthode, si ce n'est qu'à la mesure  $y$



est substituée une autre mesure  $f(y)$ . D'autre part, il montre comment appréhender les singularités dépendant implicitement du temps. Pour ce faire, une procédure d'annihilation des termes singuliers dans un cadre déterministe est proposée.

En résolvant un problème de valeurs propres généralisées, cette procédure mène à l'estimation en ligne, non asymptotique et simultanée des paramètres inconnus ainsi que des instants de commutation (discontinuités). Pour cela, nous visons ici à concevoir des algorithmes d'identification des instants de commutation (discontinuités) et des paramètres à partir du couple de mesures entrée-sortie sans avoir besoin d'estimer ou de mesurer leurs dérivées.

Ce chapitre est organisé comme suit : la deuxième section est réservée à la présentation de la classe de systèmes étudiés. La formulation du problème d'estimation est décrite dans la troisième section. Les résultats de simulations de l'estimation des instants de commutation et des paramètres d'un système mécanique soumis à des frottements secs sont donnés dans la section 4.4.

## 4.2 Systèmes impulsifs

### 4.2.1 Présentation des systèmes impulsifs

Nous considérons dans ce chapitre une classe de système décrite par l'équation (4.1) où il s'agit des équations différentielles ordinaires non linéaires d'ordre  $n$  soumises dans son membre droit à des impulsions [Belkoura et al., 2010]. On suppose que l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  sont des signaux à support borné à gauche (appartiennent à  $\mathcal{D}'_+$ ) :

$$\sum_{i=0}^n a_i g_i^{(i)}(u, y) = \psi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \delta(t - \tau_i), \quad (4.1)$$

avec  $a_i$  constants et inconnus (avec  $a_n = 1$ ) et  $g_i^{(i)}(u, y)$  connus et peuvent être des fonctions non linéaires de  $u$  et de  $y$ .  $\psi_0$ , d'ordre  $n - 1$  et de support 0, regroupe les conditions initiales et les coefficients  $b_i$  sont liés aux instants de commutation  $\tau_i$  :

$$b_i = b_i(\tau_i, u(\tau_i), \frac{du}{dt}(\tau_i \pm), \dots, \frac{d^n u}{dt^n}(\tau_i \pm), y(\tau_i), \frac{dy}{dt}(\tau_i \pm), \dots, \frac{d^n y}{dt^n}(\tau_i \pm)). \quad (4.2)$$

En utilisant le formalisme de distribution, la description du membre de droite de l'équation (4.1) permet de faire apparaître les instants de commutation d'une façon explicite dans l'équation de fonctionnement du système. Les instants de commutation, qui sont a priori inconnus, peuvent être alors identifiés.

### 4.2.2 Exemples de systèmes impulsifs

Nous allons donner par la suite deux exemples de systèmes impulsifs. Ces exemples montrent que les systèmes impulsifs peuvent décrire un grand nombre d'applications [Alur et al., 1993, Bemporad et al., 2000, Lygeros et al., 2003, Lygeros, 2004, Cha-

## 4.2. SYSTÈMES IMPULSIFS

reyron, 2005, Belkoura et al., 2010]. Un troisième exemple, qui est le pendule simple soumis à des frottements secs, sera étudié dans la section 4.4.

### Thermostat : modèle d'un régulateur de température

On présente l'exemple académique d'un régulateur de température [Lygeros, 2004, Chareyron, 2005, Belkoura et al., 2010]. On désire réguler la température  $y$  d'une chambre à l'aide d'un thermostat qui met en marche ou éteint un radiateur en fonction de la température mesurée dans la pièce. Lorsque la température est entre  $max_1$  et  $max_2$ , le radiateur est éteint, la dynamique de la température correspond à un système du premier ordre :

$$\dot{y} = -ay, \quad (4.3)$$

avec  $a > 0$ . Quand la température est entre  $min_1$  et  $min_2$ , le radiateur se met en marche et la température augmente exponentiellement selon l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} = -ay + b, \quad (4.4)$$

où  $b > max_1$ . Ce système de chauffage peut être décrit par un automate hybride non-déterministe dans la figure 4.1. Cette figure décrit ainsi la dynamique globale du système, ses états possibles et ses transitions. A cause des incertitudes dans la

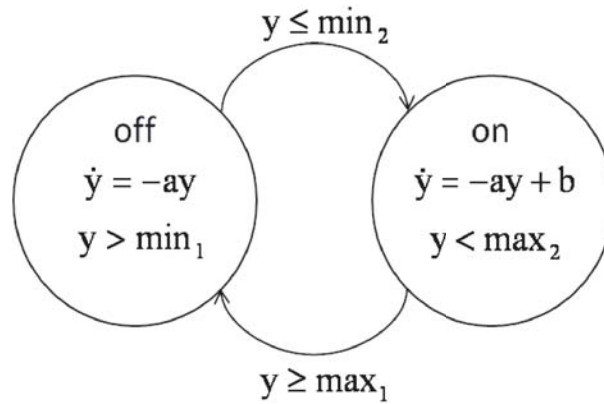


FIGURE 4.1 – Fonctionnement du régulateur en température.

dynamique du radiateur, il n'est pas possible de résoudre les équations du système. Cependant, si on suppose que les instants de commutation entre un état et un autre  $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$  sont inconnus a priori et que le radiateur est initialement éteint à  $y_0$ , le fonctionnement de ce processus sera décrit par l'équation suivante :

$$\dot{y} = -ay + y_0\delta + b \sum_{i=0}^{\infty} \chi_{[\tau_{2i+1}, \tau_{2i+2}]}(t), \quad (4.5)$$

avec  $\chi_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}(t)$  représente la fonction caractéristique sur l'intervalle  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ . Dans le cadre du formalisme distributionnel,  $\dot{\chi}_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}(t) = \delta(t - \tau_i) - \delta(t - \tau_{i+1})$ . On obtient

par dérivation de l'équation (4.5) :

$$\begin{aligned}\ddot{y} + a\dot{y} &= y_0\dot{\delta} + b \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t - t_{2i+1}) - \delta(t - t_{2i+2}) \\ &= y_0\dot{\delta} - b \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i b \delta(t - t_i),\end{aligned}\quad (4.6)$$

ce qui correspond au modèle donné par l'équation (4.1).

### Balle rebondissante

On considère une balle de masse  $m$  qui rebondit verticalement sur le sol sous l'action de la gravité, comme montré par la figure 4.2 [Lygeros, 2004, Chareyron, 2005]. La dynamique de la balle entre les rebonds est régie par l'équation différentielle

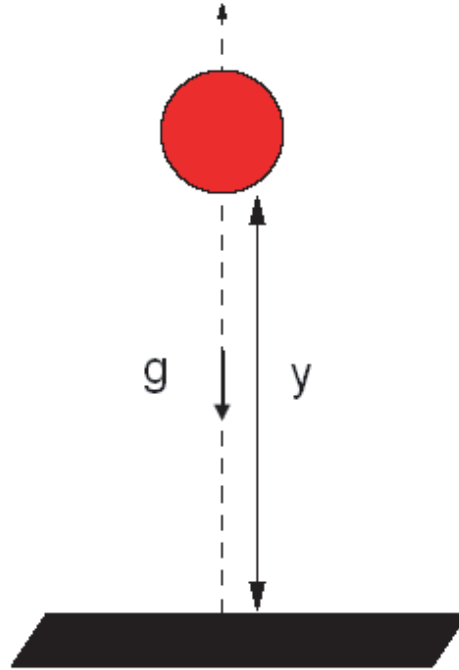


FIGURE 4.2 – Balle rebondissante soumise à l'action de la gravité.

suivante :

$$\ddot{y} = -mg. \quad (4.7)$$

Nous considérons que les comportements impulsionnels liés au rebondissement de la balle sur le sol obéissent à une loi de restitution :

$$\frac{dy}{dt}(\tau_i^+) = \gamma \frac{dy}{dt}(\tau_i^-), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.8)$$

avec  $\gamma < 0$  étant le coefficient de restitution de la vitesse (perte d'une fraction d'énergie à chaque rebond) et  $\tau_i$  les instants d'impacts.

En écrivant  $y$  dans le sens de distribution avec la formule des sauts et en notant par  $\sigma_i = \frac{dy}{dt}(\tau_i^+) - \frac{dy}{dt}(\tau_i^-)$  les sauts dans la vitesse, l'équation (4.7) devient :

$$\ddot{y} + mg = \psi_0 + \sum_i \sigma_i \delta(t - \tau_i), \quad \psi_0 = y_0\dot{\delta} + \dot{y}_0\delta, \quad (4.9)$$

### 4.3. FORMULATION DU PROBLÈME D'ESTIMATION

ce qui correspond au modèle décrit par l'équation (4.1).

#### 4.2.3 Phénomène de Zénon

Ce phénomène spécifique des systèmes dynamiques hybrides se réfère au nombre infini de commutations (ou accumulation d'impacts dans le cas des systèmes mécaniques) en un temps fini (voir [Zhang et al., 2001] et ses références pour une introduction au phénomène de Zénon). Pour illustrer ce comportement, on considère l'exemple de la balle qui rebondit de la section précédente. Les courbes d'évolution de la position et de la vitesse de la balle sont présentées par la figure 4.3. On peut remarquer que la balle s'immobilise sur le sol en un temps fini. Une démonstration

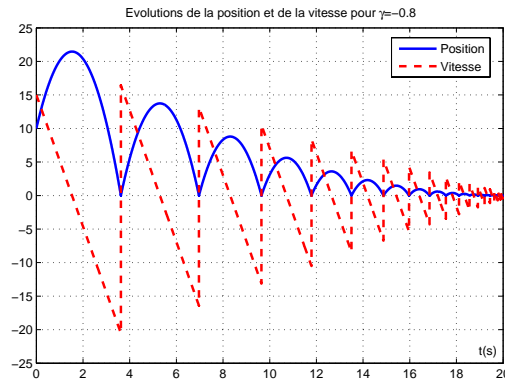


FIGURE 4.3 – Trajectoires de la position et de la vitesse de la balle en fonction du temps (*Démo MATLAB* ©7.3).

mathématique faite dans [Chareyron, 2005, Attia, 2005] permet de montrer que la vitesse de la balle tend vers 0 en temps fini à travers une infinité d'impacts.

### 4.3 Formulation du problème d'estimation

Trois principales formulations pour l'identification de ce type de systèmes seront développées dans cette section. Ces formulations sont basées sur une application de la méthode d'identification algébrique décrite dans le chapitre 3.

A partir des propriétés de multiplication des distributions, la multiplication de l'équation (4.1) par deux fonctions  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2$ , telles que  $\alpha_j^{(i)}(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , permet d'annihiler les conditions initiales. On aboutit alors à l'équation (4.10) suivante :

$$\alpha_j \times \sum_{i=0}^n a_i g_i^{(i)}(u, y) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha_j(\tau_i) \delta(t - \tau_i), \quad j = 1, 2. \quad (4.10)$$

La convolution avec un filtre  $H$  conduit à :

$$H * [\alpha_j \times \sum_{i=0}^n a_i g_i^{(i)}(u, y)] = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha_j(\tau_i) H(t - \tau_i), \quad j = 1, 2. \quad (4.11)$$

On suppose que le filtre  $H$  possède un support inclus dans l'intervalle  $[0, \Delta]$ , avec  $\Delta < \min_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$ , et définit une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ . Le principal but consiste à déterminer les instants de commutation  $\tau_i$  à partir du membre gauche de l'équation (4.11) pour  $j = 1, 2$  et plus précisément à partir de la relation entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Si par exemple  $\alpha_2 = t\alpha_1$ , le quotient des deux membres de gauche de l'équation (4.11), quand ils sont définis, permet de déterminer les instants de commutation. Plus généralement, introduisons la fonction de commutation  $\lambda(t)$  ci-dessous :

$$\lambda(t) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \chi_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}(t), \quad \lambda_i = \frac{\alpha_1(\tau_i)}{\alpha_2(\tau_i)}, \quad (4.12)$$

où  $\chi_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}(t)$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ .

En posant  $0 = \lambda(t)0$  en dehors des supports de  $H(t - \tau_i)$ , l'équation (4.11) pour  $j = 1, 2$  peut être étendue à tout  $t$  positif par :

$$H * [\alpha_1 \times \sum_{i=0}^n a_i g_i^{(i)}(u, y)] = \lambda(t) H * [\alpha_2 \times \sum_{i=0}^n a_i g_i^{(i)}(u, y)]. \quad (4.13)$$

La procédure d'identification utilisée a permis d'éliminer les coefficients  $b_i$  évitant ainsi la nécessité de la connaissance a priori des lois de commutations. En tenant compte des propriétés du support, cette relation n'est consistante que sur les supports de  $H(t - \tau_i)$  alors que  $0 = \lambda(t)0$  en dehors de ces intervalles. On remarque que l'équation (4.13) est non linéaire par rapport à la fonction de commutation  $\lambda(t)$  et aux paramètres inconnus  $a_i$  et elle n'est pas suffisante pour réaliser une estimation simultanée des paramètres et des instants de commutation. Cependant, des relations supplémentaires peuvent être obtenues si le filtre  $H$  est remplacé par une série de filtres  $H_k$  ayant la même propriété sur les supports.

Selon la factorisation et les hypothèses adoptées, on obtient trois structures différentes du problème d'identification. La première, présentée dans la section 4.3.2, vise l'estimation des instants de commutation uniquement connaissant les paramètres du système étudié. Dans la seconde approche, détaillée dans la section 4.3.3, l'estimation des paramètres indépendamment des instants de commutation est étudiée. Quant à la troisième approche, elle s'intéresse à l'estimation simultanée des instants de commutation et des paramètres.

### 4.3.1 Robustesse et identifiabilité

Les algorithmes d'estimations donnés par les équations (4.15), (4.17), (4.21) et (4.22) sont tirés de l'équation (4.13). La robustesse de telles procédures dans un contexte bruité dépend fortement des capacités des filtres, de la réduction de leurs temps de repos (*dwell time*) ainsi que des fonctions candidates  $\alpha_j$  pour la multiplication. La multiplication par une fonction régulière  $\alpha_j$  suivie d'une convolution par un filtre de support compact ainsi que la sélection des filtres  $H_k$  et de la paire optimale des fonctions  $\alpha_j$  restent toujours des problèmes ouverts. Dans la partie suivante de cette section, on fournit quelques commentaires et conseils pour le choix des fonctions multiplicatives et une discussion sur l'identifiabilité des instants de commutation est

### 4.3. FORMULATION DU PROBLÈME D'ESTIMATION

aussi présentée.

Nous avons déjà mentionné que les instants de commutation  $\tau_i$  sont déterminés à partir des coefficients  $\lambda_i$  donnés par l'équation (4.12). Si on suppose que la fonction de commutation  $\lambda(t)$  n'est pas bornée, les fonctions multiplicatives  $\alpha_j$  sont à leur tour non bornées, posant ainsi un problème de robustesse non trivial dans le cas des données bruitées. Pour illustrer cet aspect, on considère le modèle décrit par l'équation (4.1) et on suppose que nous avons une estimation explicite des instants  $\tau_i$  en posant dans l'équation (4.12)  $\lambda_i = \tau_i$ . En vertu de la seconde équation (4.12), ceci implique que  $\alpha_1(t) = t\alpha_2(t)$ . Ainsi, la multiplication par  $H$  des termes de la forme  $\alpha_2 ty$  pose un problème de robustesse dans un contexte bruité en raison de la multiplication par  $t$  des données bruitées  $y$ . Pour contourner ce problème, il est recommandé d'utiliser des fonctions multiplicatives  $\alpha_j$  bijectives, bornées et périodiques évitant l'amplification du bruit.

En vertu des propriétés du support du produit de convolution et de l'équation (4.11), le problème d'estimation n'est pas consistant pour  $\forall t > 0$ . Autrement dit, il y a une perte locale d'identifiabilité. Ceci peut être considéré comme un inconvénient qui exige l'utilisation d'une fonction informative (seuil) testant la consistance de l'équation (4.11). Ce problème sera discuté dans la section 4.3.4 où on s'intéresse à l'estimation simultanée des instants de commutation et des paramètres de cette classe de systèmes.

#### 4.3.2 Identification des instants de commutation

On suppose que les paramètres  $a_i, i = 0, \dots, n$ , sont connus a priori et on s'intéresse à identifier les instants de commutation seuls. A partir de la relation donnée par l'équation (4.13), on obtient :

$$\underbrace{H * [\alpha_1 \times \sum_{i=0}^n a_i g_i^{(i)}(u, y)]}_N = \lambda(t) \underbrace{H * [\alpha_2 \times \sum_{i=0}^n a_i g_i^{(i)}(u, y)]}_D. \quad (4.14)$$

Ce qui conduit à l'algorithme final :

$$\lambda_i = \frac{N}{D} \quad \text{sur } (\tau_i, \tau_i + \Delta), \quad (4.15)$$

$$N = D = 0 \quad \text{sur } \mathfrak{R} \setminus (\tau_i, \tau_i + \Delta). \quad (4.16)$$

En tenant compte des propriétés du support, l'équation (4.14) n'est pas consistante sur tout  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, l'équation (4.15) montre que les instants de commutation  $\tau_i$  ne sont identifiables que sur le support du filtre  $H$  et plus explicitement sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \text{support de } H)$ . Ces instants sont identifiés à partir de l'équation (4.15) et maintenus à leurs valeurs sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ .

### 4.3.3 Identification des paramètres indépendamment des instants de commutation

Une autre alternative représentant le problème d'estimation peut être obtenue en effectuant différentes factorisations de l'équation (4.13). Cette formulation est décrite par l'équation (4.17) pour  $\zeta = (1, -\lambda(t))^T$  :

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i M_i(u, y) \zeta(t) \right) = 0, \quad (4.17)$$

$$M_i(u, y) := H_{k,j}(u, y) = H_k * [\alpha_j \times g_i^{(i)}(u, y)] \quad (4.18)$$

$$i = 0, \dots, n, j = 1, 2, k = 1, 2, \dots, n$$

dans laquelle les matrices  $M_i$  sont de dimension  $(k \times 2)$ . En observant que  $\text{rank} \sum a_i M_i < 2$ , cette relation montre que l'estimation des coefficients  $a_i$  peut être faite indépendamment de la fonction de commutation  $\zeta(t)$ . Le principe d'estimation consiste à extraire des  $M_i(u, y)$  des matrices carrées  $Q_i(u, y) (2 \times 2)$ . Le calcul du déterminant :

$$\det \sum_{i=0}^n a_i Q_i(u, y) = 0, \quad (4.19)$$

permet d'aboutir à une équation non linéaire dont la résolution n'est cependant pas triviale. La solution, proposée par [Belkoura et al., 2010], est de transformer ce problème en un problème de moindres carrés :

$$Y = X\beta, \quad (4.20)$$

avec une redondance dans le vecteur des paramètres à estimer qui sont donnés par  $\beta = (a_1, a_2, a_1^2, a_2^2, a_1 a_2, \dots)^T$ . Bien que cette structure du problème d'estimation fasse augmenter le nombre de paramètres à estimer, son avantage principal est que le support des matrices  $M_i(u, y)$  définies dans l'équation (4.17) n'est pas limité aux intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ . Dans le cas où on veut estimer un seul paramètre, le problème (4.17) se transforme en un problème de valeur propre généralisée. Ce cas sera étudié dans la section 4.3.4 suivante.

### 4.3.4 Problème de valeurs propres généralisées

Le remplacement du filtre  $H$  par la série de filtre  $H_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , suivi de quelques manipulations permet d'aboutir à la formulation suivante :

$$[A(u, y) - \lambda(t)B(u, y)]\Theta = 0 \quad \text{sur } (\tau_i, \tau_i + \Delta), \quad (4.21)$$

$$A(u, y)\Theta = B(u, y)\Theta = 0 \quad \text{sur } \mathfrak{R} \setminus (\tau_i, \tau_i + \Delta), \quad (4.22)$$

avec,

$$\begin{cases} A = H_k * [\alpha_1 \times g_i^{(i)}(u, y)], \\ B = H_k * [\alpha_2 \times g_i^{(i)}(u, y)], \\ \Theta = (1, a_{n-1}, \dots, a_0)^T. \end{cases}$$

#### 4.4. APPLICATION AU PENDULE SIMPLE AVEC FROTTEMENT

Les matrices  $A$  et  $B$  dépendent seulement du couple entrée-sortie. Aucune dérivée par rapport au temps de  $u$  ou de  $y$  ne doit être calculée.

Le problème d'estimation est ainsi transformée en un problème de valeurs propres généralisées où pour chaque instant  $t$ , la fonction de commutation  $\lambda(t)$  correspond à l'une des valeurs propres généralisées du problème (4.21). Quant aux coefficients  $a_i$ , ils peuvent être déterminés à partir du vecteur propre correspondant. Leur identification peut être faite indépendamment des instants de commutation. L'intérêt d'une telle formulation réside dans la simplicité de la mise en oeuvre de l'algorithme. Cependant, comme mentionné précédemment, cette formulation possède principalement une limite due à la perte d'identifiabilité de  $\lambda(t)$ . En effet, à partir des propriétés du support décrites dans la section 2.2.5 du chapitre 2 ou à partir de l'équation (4.21), on peut remarquer que  $A\Theta = B\Theta = 0$  en dehors des intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ , ce qui fait que le problème de valeur propre généralisée décrit par l'équation (4.21) n'est pas consistant pour tout  $t > 0$ . Autrement dit, à partir de l'équation (4.13),  $0 = \lambda_i 0$  en dehors de ces intervalles, mène ainsi à une perte d'identifiabilité de  $\tau_i$ . Cet inconvénient nécessite l'utilisation d'un seuil connu a priori  $\varepsilon$  permettant de tester la perte de rang du faisceau de matrices  $(A, B)$ . Cela peut être basé sur une fonction informative,

$$s(t) = \sqrt{(\det A(t))^2 + (\det B(t))^2}, \quad (4.23)$$

permettant de sélectionner la formulation d'estimation appropriée : système d'équations linéaires  $A\Theta = B\Theta = 0$  si  $s(t) \leq \varepsilon$  ou problème de valeur propre généralisée  $(A - \lambda B)\Theta = 0$  quand  $s(t) \geq \varepsilon$ . Cette fonction est basée sur l'hypothèse de stationnarité des valeurs estimées des instants de commutation sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ .

## 4.4 Application au pendule simple avec frottement

On étudie ici le balancement d'une tige rigide soumise à des frottements secs, dont le comportement est régi par l'équation suivante :

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 \sin y = b \operatorname{sgn}(\dot{y}) + \psi_0 + u, \quad (4.24)$$

dans laquelle les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  sont constants.  $b$  représente le coefficient du frottement sec et  $\psi_0$  (d'ordre 1 et de support 0) regroupe les termes relatifs à la condition initiale.

L'objectif de ce travail est d'identifier les paramètres  $a_1, a_0$  ainsi que les instants de commutation, notés  $\tau_i$ , qui représentent les instants de passage de la dérivée  $\dot{y}$  par 0. Une difficulté rencontrée dans ce genre de situation réside dans l'estimation de la dérivée  $\dot{y}$  intervenant dans la fonction *signe*.

Pour illustrer l'apport de cette nouvelle méthode d'identification, le modèle de frottement utilisé est suffisamment simple pour être simulé et identifié en temps réel [Nuninger et al., 2006]. Dans cet exemple, la dérivée de la fonction  $\operatorname{sgn}(\dot{y})$  se traduit par des impulsions de Dirac aux instants de passage de  $\dot{y}$  par 0. Le terme



du frottement sec  $b \operatorname{sgn}(\dot{y})$  s'exprime alors par  $2b \sum \delta_{\tau_i}$ . Ceci montre que les termes d'impulsions dans la formulation proposée dans l'équation (4.1) peuvent être obtenus par une simple dérivation de l'équation de fonctionnement du système étudié. On obtient ainsi :

$$y^{(3)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)} = 2b \sum \delta_{\tau_i} + (\psi_0)^{(1)} + u^{(1)}, \quad (4.25)$$

qui correspond au modèle décrit par l'équation (4.1) avec  $a_2 = a_1$ ,  $a_1 = a_0$ ,  $g_3(u, y) = y - H^2 * u$  ( $H$  la fonction de Heaviside),  $g_2(u, y) = y$ ,  $g_1(u, y) = \sin y$ ,  $g_0(u, y) = 0$  et  $b_i = 2b$ .

En vertu du théorème de Schwartz 9, la multiplication de l'équation (4.25) par toute fonction  $\alpha_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , vérifiant  $\alpha_j(\tau_i) = 0$  et  $\alpha_j^{(i)}(0) = 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ , permet d'annihiler son membre de droite :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \times [y^{(3)} - u^{(1)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)}] = \\ \lambda_i \alpha_2 \times [y^{(3)} - u^{(1)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)}]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

#### 4.4.1 Identification des instants de commutation

Afin d'aboutir à un ensemble d'égalités donnant accès aux instants de commutation  $\tau_i$ , on suppose que l'on se place dans une zone de fonctionnement dans laquelle les balancements sont suffisamment espacés. Cette hypothèse est confortée par l'introduction d'une commande  $u$  non nulle, évitant l'apparition du phénomène Zénon pour lequel la formulation en termes de distributions n'est plus valable. Pour cela, l'absence de ce phénomène est crucial pour l'identification des instants de commutation. Le produit de convolution par un filtre  $H$  de degré  $\geq 3$  et de support  $\subset (0, \Delta)$  avec  $\Delta < \tau_{i+1} - \tau_i$ , permet de former la relation suivante :

$$\begin{aligned} \underbrace{H * \alpha_1 \times [y^{(3)} - u^{(1)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)}]}_{\lambda_i \underbrace{H * \alpha_2 \times [y^{(3)} - u^{(1)} + a_1 y^{(2)} + a_0 (\sin y)^{(1)}]}_D} = \end{aligned} \quad (4.27)$$

ce qui conduit à l'algorithme final :

$$\lambda_i = \frac{N}{D} \quad \text{sur } (\tau_i, \tau_i + \Delta), \quad (4.28)$$

$$N = D = 0 \quad \text{sur } \mathfrak{R} \setminus (\tau_i, \tau_i + \Delta). \quad (4.29)$$

On suppose pour simplifier que les conditions initiales sont nulles. Le choix des fonctions exponentielles  $\alpha_1 = e^{j\gamma t}$  et  $\alpha_2 = e^{-j\gamma t}$  ( $\lambda_i = e^{2j\gamma\tau_i}$ ) répond aux objectifs décrits précédemment, et la réalisation effective des termes ci-dessus s'effectue selon le principe de l'intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} \alpha_1 y^{(3)} = (\alpha_1 y)^{(3)} - 3j\gamma(\alpha_1 y)^{(2)} - 3\gamma^2(\alpha_1 y)^{(1)} + j\gamma^3(\alpha_1 y), \\ \alpha_1 y^{(2)} = (\alpha_1 y)^{(2)} - 2j\gamma(\alpha_1 y)^{(1)} - \gamma^2(\alpha_1 y), \\ \alpha_1 u^{(1)} = (\alpha_1 u)^{(1)} - j\gamma(\alpha_1 u), \\ \alpha_1 (\sin y)^{(1)} = (\alpha_1 \sin y)^{(1)} - j\gamma(\alpha_1 \sin y). \end{cases}$$

#### 4.4. APPLICATION AU PENDULE SIMPLE AVEC FROTTEMENT

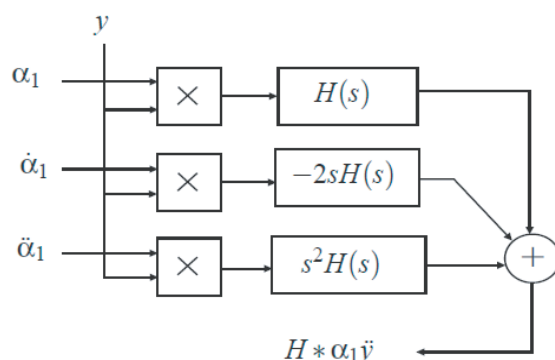


FIGURE 4.4 – Schéma de réalisation de  $H * \alpha_1 \ddot{y}$

La Figure 4.4 représente le schéma partiel de réalisation. Les résultats de simulation illustrés par la figure (4.5) ont été obtenus pour un  $H_1(s) = \left(\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{4}s}}{s}\right)^4 e^{-\frac{\Delta}{4}s}$ , une entrée sinusoïdale de la forme  $u(t) = u_0 \sin(\beta t)$  et les valeurs  $a_0 = 0.2$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b = 0.5$ ,  $u_0 = 3$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.01$  et  $\Delta = 4$ .

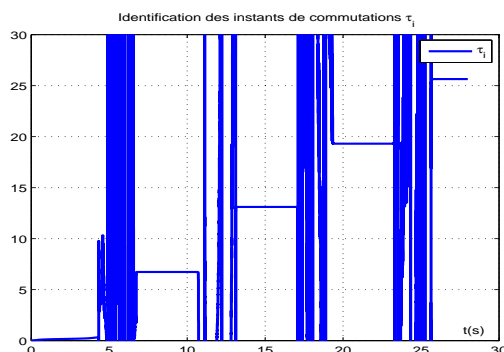


FIGURE 4.5 – Identification des instants de commutation  $\tau_i$

La figure 4.5 montre que les instants de commutation,  $\tau_i = \{6.73, 13.11, 19.31, 25.64\}$ , sont déterminés et maintenus à leurs valeurs sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ . En revanche, en dehors de ces intervalles, il y a une perte d'identifiabilité et les instants  $\tau_i$  ne prennent pas de valeurs significatives et peuvent être maintenus à 0. Ces résultats sont conformes à la discussion théorique effectuée dans la section 4.3.2.

#### 4.4.2 Identification des paramètres indépendamment des instants de commutation

On s'intéresse dans cette section à l'identification des paramètres  $a_0$  et  $a_1$  du pendule indépendamment des instants de commutation  $\tau_i$ . Pour cela, on adopte la formula-

tion décrite dans la section 4.3.3 avec :

$$\begin{cases} M_0(u, y) = 0, \\ M_1(u, y) = H_k * [\alpha_j \times (\sin y)^{(1)}], \\ M_2(u, y) = H_k * [\alpha_j \times y^{(2)}], \\ M_3(u, y) = H_k * [\alpha_j \times y^{(3)}]. \end{cases} \quad (4.30)$$

Les résultats de simulation, obtenus pour  $\Delta = 5$  (fixe), les filtres  $H_k$  suivants :

$$H_1 = \left( \frac{1 - e^{-\frac{\Delta}{6}s}}{s} \right)^6, \quad H_2 = sH_1 \quad (4.31)$$

et un bruit blanc gaussien ajouté à la sortie du système, dont le  $RSB \simeq 93dB$ , sont donnés par la figure 4.6.

La figure 4.6 montre l'estimation des paramètres  $a_0$  et  $a_1$  indépendamment de la

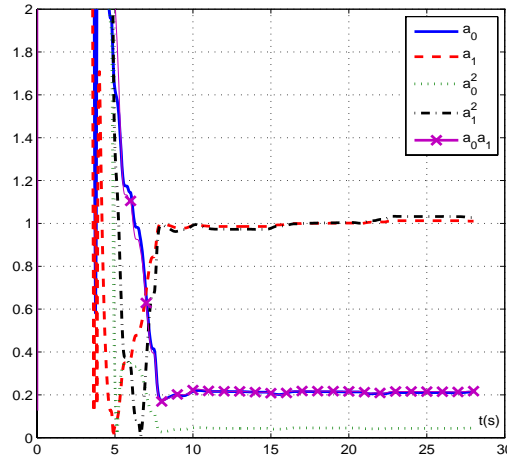


FIGURE 4.6 – Identification des paramètres  $a_0$  et  $a_1$

séquence de commutation inconnue. Cette exemple d'estimation a été résolu par l'algorithme des moindres carrés. Ainsi, dans un contexte bruité, un biais sur les paramètres estimés peut se produire.

#### 4.4.3 Identification simultanée des instants de commutation et des paramètres

Dans le cas où les paramètres  $a_1$  et  $a_0$  sont inconnus, la formulation spectrale décrite dans la section 4.3.4 permet une identification simultanée des instants de commutation  $\tau_i$  ainsi que de ces paramètres. Les lignes des matrices  $A$  et  $B$  sont données, dans ce cas, par :

$$\begin{cases} A = H_k * \alpha_1 \times (y^{(3)} - u^{(1)}, y^{(2)}, (\sin y)^{(1)}), \\ B = H_k * \alpha_2 \times (y^{(3)} - u^{(1)}, y^{(2)}, (\sin y)^{(1)}), \\ \Theta = (1, a_1, a_0)^T. \end{cases} \quad (4.32)$$

#### 4.4. APPLICATION AU PENDULE SIMPLE AVEC FROTTEMENT

Les paires valeurs propres et vecteurs propres, solutions de l'équation (4.21), sont illustrées respectivement par les figures (4.7) et (4.8) pour les mêmes valeurs des paramètres de la formulation précédente et pour  $H_2 = (\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{6}s}}{s})^6$  et  $H_3 = sH_2$ .

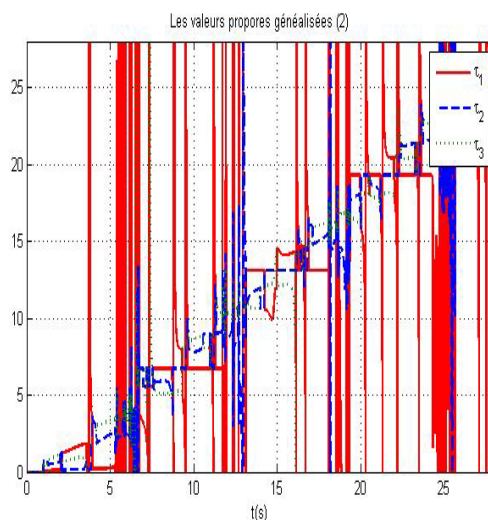


FIGURE 4.7 – Les valeurs propres généralisées (4.21)

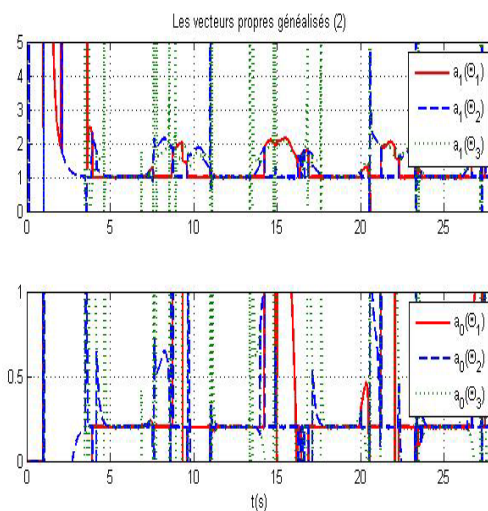


FIGURE 4.8 – Les vecteurs propres généralisés (4.21)

Nous obtenons donc trois valeurs propres possibles (resp. vecteurs propres) dont l'une correspond aux instants de commutation (resp. aux coefficients  $a_0$  et  $a_1$ ) et les autres doivent être rejetées. Il est donc nécessaire de concevoir un algorithme d'identification en ligne, sujet du paragraphe suivant, qui permet de choisir la paire (valeur propre et vecteur propre) désirée.

Nous avons mentionné dans la section 4.3.4 que la résolution du problème spectral permet de déterminer les paramètres  $a_0$  et  $a_1$  seulement sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$

alors qu'en dehors des ces intervalles, ces paramètres sont obtenus à partir de la résolution du système d'équations linéaires décrit par l'équation (4.22). Les solutions de l'équation (4.22), déterminées par simulation, sont illustrées par la figure 4.9.

On remarque qu'en dehors des intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$ , les paramètres  $a_0$  et  $a_1$  sont

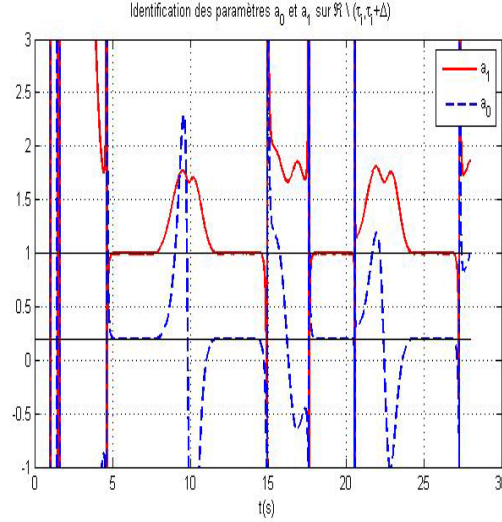


FIGURE 4.9 – Identification des paramètres  $a_0$  et  $a_1$  sur  $\mathbb{R} \setminus (\tau_i, \tau_i + \Delta)$  (4.22)

identifiés. À l'inverse du problème de valeur propre généralisée, une perte d'identifiabilité s'est produite comme le montre la figure 4.9 pour  $t \in (\tau_i, \tau_i + \Delta)$ .

#### 4.4.4 Critère de sélection

La sélection de la paire (valeur propre, vecteur propre) associée qui correspond respectivement aux instants  $\tau_i$  et aux paramètres  $a_0$  et  $a_1$  sur les intervalles  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$  est faite en ajoutant d'autres lignes au faisceau matriciel  $(A, B)$  qui devient rectangulaire. La paire (valeur propre, vecteur propre) désirée est celle qui minimise  $\|(A - \lambda_i B)\Theta\|_2$ . Ce critère de sélection a été discuté dans la section 3.6.3. Il a été principalement proposé dans [Belkoura et al., 2008] et prouvé dans [Taarit et al., 2011]

Le faisceau de matrices utilisé pour la sélection de la paire (valeur propre, vecteur propre) désirée est formé par l'addition de trois lignes supplémentaires construites en utilisant les filtres  $H_4 = (\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{5}s}}{s})^5$ ,  $H_5 = sH_4$  et  $H_6 = (\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{4}s}}{s})^4$ . Les résultats de simulations donnés par la figure 4.10 montrent l'efficacité de ce critère de sélection. Nous avons mentionné dans la section 4.3.4 qu'il était nécessaire de trouver un critère de commutation  $s(t)$  entre les deux formulations à savoir le problème de valeur généralisée (4.21) et le système d'équations linéaires (4.22) afin de déterminer les valeurs des paramètres recherchés. Le critère  $s(t) = \sqrt{(\det A(t))^2 + (\det B(t))^2}$ , ne dépendant que des données mesurées, est inspiré du résultat trouvé dans l'équation (4.27) et qui est basé essentiellement sur les propriétés du support du filtre choisi. Les résultats de simulations sont illustrés par la figure (4.11) pour un seuil d'ordre

#### 4.4. APPLICATION AU PENDULE SIMPLE AVEC FROTTEMENT

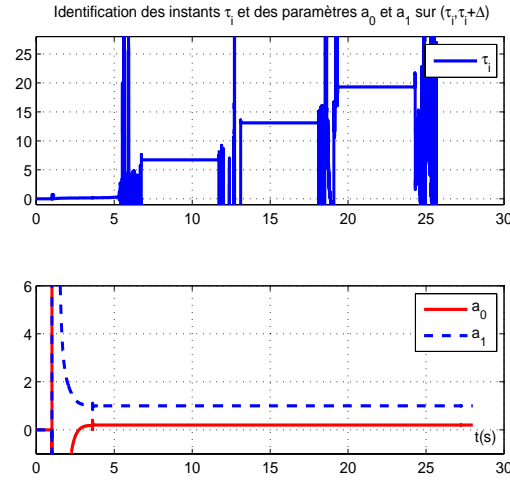


FIGURE 4.10 – Identification des instants  $\tau_i$  et des paramètres  $a_0$  et  $a_1$  sur  $(\tau_i, \tau_i + \Delta)$

$10^{-5}$ .

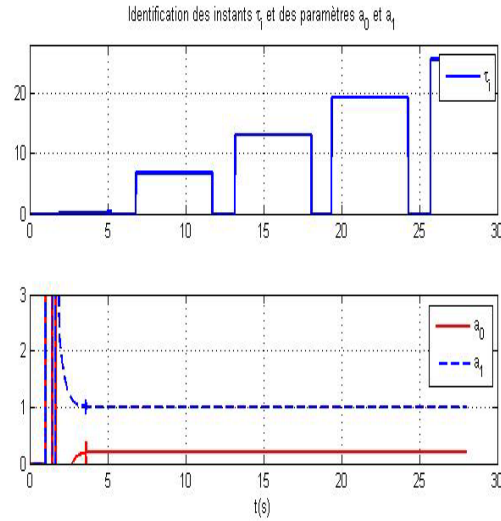
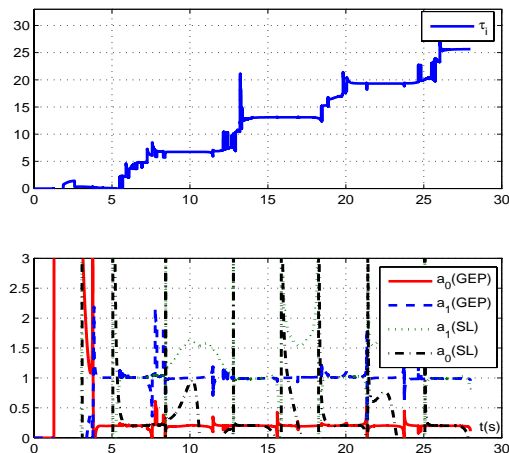


FIGURE 4.11 – Identification des instants  $\tau_i$  et des paramètres  $a_0$  et  $a_1$

Afin de tester la robustesse de nos algorithmes d'identification, un bruit blanc gaussien, dont le  $RSB \simeq 93dB$ , est ajouté à la sortie du système. Cette étude sera approfondie pour des bruits plus importants dans les futurs travaux. Les résultats de simulation présentés par la figure 4.12 sont obtenus pour les mêmes valeurs  $\Delta = 5$  et illustrent les instants de commutation  $\tau_i$  estimés ainsi que des paramètres  $a_0$  et  $a_1$  à partir de la résolution du problème spectral ( $PS$ ) et du système d'équations linéaires (noté( $SL$ )).

Dans un contexte bruité, la détermination d'un seuil permettant la commutation entre la formulation spectrale et le système linéaire n'est pas triviale. Cependant, le critère  $s(t)$  reste fragile à l'heure actuelle. L'une des perspectives de ce travail sera l'amélioration de ce critère.


 FIGURE 4.12 – Identification des instants  $\tau_i$  et des paramètres  $a_0$  et  $a_1$ 

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthode pour l'estimation en ligne des systèmes linéaires impulsifs. Cette technique peut être facilement appliquée à certains cas de non linéarité. La formulation du problème étudié nous a permis d'aboutir à un problème spectral à partir duquel les instants de commutation ainsi que des paramètres peuvent être déterminés simultanément. Une illustration pratique a permis d'identifier les paramètres d'un pendule simple soumis à des frottements secs en s'appuyant sur une technique d'identification basée sur le formalisme des distributions, l'annihilation des singularités et les intégrations. Les résultats de simulations montrent que l'efficacité de la méthode proposée et sa robustesse face aux bruits sont fortement liées au choix des filtres et des fonctions candidates  $\alpha_j$  pour la multiplication. Pour cela, une étude portant sur le choix des filtres dans la génération des matrices  $A$  et  $B$  est donc à envisager. Outre les validations réalisées en simulation, cette démarche devra être confortée par des essais expérimentaux sur les plates-formes disponibles dans nos laboratoires. L'exemple d'application étudié soulève la question du choix de la meilleure approche entre une sensibilité aux bruits du problème de valeur propre généralisée et une formulation non linéaire et redondante du système d'équations linéaires. Selon ces études, la capacité d'estimer des paramètres et des instants de commutation, en utilisant des méthodes non asymptotiques, peuvent fournir de nouvelles perspectives pour les techniques de commande en temps réel.

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent dans une première partie l'identification des systèmes linéaires continus et à retards et dans une seconde partie l'identification des instants de commutation ou discontinuités ainsi que des paramètres d'une certaine classe de systèmes hybrides. Ils sont motivés par leurs applications variées et par la compréhension des processus qui régissent leur dynamique et qui représentent un point fondamental de recherche pour leur commande.

Dans le premier chapitre, nous avons effectué un état de l'art des différentes méthodes d'identification des systèmes à retards à temps continu et de la classe des systèmes impulsifs adoptée. Après avoir présenté l'identification des systèmes en temps continu, en général, ses particularités et ses avantages par rapport à l'identification en temps discret, une étude bibliographique des techniques existantes dans la littérature est menée. L'analyse des avantages et des limites de chacune d'elles ainsi qu'une comparaison entre ces méthodes pour des exemples présentés par leurs auteurs, montrent qu'il existe un problème impérieux dû à leurs faibles vitesses de convergence. Cela nous a conduit à retenir la méthode d'identification algébrique initiée par [Fliess and Sira-Ramirez, 2003] qui, d'après les travaux trouvés dans la littérature, présente des résultats prometteurs et motivants pour approfondir son étude. Une seconde piste de recherche sur l'identification des systèmes impulsifs a été le sujet de la dernière partie. Pour cela, nous avons présenté la classe de systèmes à laquelle nous nous intéressons, ainsi qu'une discussion des travaux récents sur l'identification de ces systèmes a été effectuée.

Le chapitre 2 a permis de présenter les bases théoriques relatives à la théorie des distributions, le cadre mathématique de notre présente étude. Nous avons notamment donné un rappel, définition et propriétés, sur les entrées appelées "structurées", qui seront reprises tout au long de cette étude.

Au troisième chapitre, nous avons expliqué, tout d'abord, la procédure d'identification algébrique à travers un exemple simple d'un système linéaire du premier ordre sans retard [Fliess and Sira-Ramirez, 2003]. Dans le but de généraliser cette approche pour les systèmes à retards, nous avons étudié trois types de systèmes qui couvrent une gamme importante des systèmes réels. Le premier est celui d'un système du premier ordre à retard pur, très populaire dans les applications industrielles et pour lequel nous avons identifié le retard ainsi que les paramètres à travers la résolution



d'un système d'équations linéaires en présence et en absence du bruit. Le deuxième type de problème est celui de l'identification d'une série de retards largement trouvée dans les systèmes en réseaux. Quant au dernier exemple, il montre le lien entre l'identification simultanée du retard ainsi que des paramètres et le problème de valeurs propres généralisées à travers une formulation spectrale (redondante) proposée. Une méthode efficace permettant la sélection en ligne des bons paramètres a été développée. Pour les trois types de systèmes étudiés, la rapidité de la vitesse de convergence offerte par les algorithmes d'identification met en exergue notre technique d'identification algébrique par rapport aux techniques présentées dans le chapitre 1 et permet d'aborder en ligne le problème d'identification des systèmes à retards. La robustesse des algorithmes d'identification restent toujours liés aux choix des fonctions multiplicatives et des filtres.

L'objectif du quatrième chapitre a été d'étendre notre méthode d'identification algébrique à l'identification d'une certaine classe des systèmes hybrides appelés systèmes "impulsifs" décrite par l'équation (4.1). La résolution du problème d'identification spectral a permis d'identifier en ligne et simultanément les instants de commutation (ou de discontinuités) ainsi que des paramètres de ces systèmes. L'application de cette méthode au cas des systèmes à non linéarité discontinue, le cas des frottements secs, a prouvé l'efficacité de la formulation spectrale proposée. Cette identification a été faite en supposant que chaque deux commutations successives sont séparées par un temps de séjour connu a priori. Le choix du support des filtres utilisés joue un rôle fondamental pour améliorer la qualité des résultats d'estimation.

Comme dans tout les travaux de recherche, plusieurs problèmes restent encore ouverts. L'amélioration des algorithmes d'identification conçus sera notre objectif en cours terme :

- L'identification du retard et des paramètres à partir d'une condition initiale et avec une entrée structurée a été abordée pour les trois exemples étudiées. Cependant, la généralisation de ces algorithmes au cas des systèmes avec des entrées quelconques sera notre perspective à court terme. Des travaux antérieurs sur l'identification en boucle fermée d'un système à retards à partir d'une condition initiale et une entrée arbitraires sont en cours.
- En terme de robustesse, le choix des filtres ainsi que des fonctions multiplicatives pourrait être approfondi. Jusqu'à maintenant, nous avons essayé de déterminer une gamme de fonctions multiplicatives se caractérisant par des propriétés spécifiques permettant de réduire l'effet des bruits. En effet, ces fonctions sont de préférences périodiques, bornées, exponentielles et fonctions d'un facteur d'ajustement variable. Quant au choix des filtres, les premiers résultats présentés ont été trouvés pour des intégrateurs. En revanche, ces filtres posent de problème dans le cas d'un bruit important. La proposition des filtres passe-bas et des filtres à support compact ont apporté des résultats intéressants.
- L'identification des systèmes avec retards variables représente un enjeu industriel

et une piste de recherche intéressante. Quelques résultats ont été présentés dans les travaux de [Belkoura et al., 2008, Belkoura et al., 2009] pour un retard lentement variable.

- L'extension de cette méthode d'identification à des situations non linéaires, dans le cas où  $m^{(k)}(y)$  est substituée à  $y^{(k)}$ , est immédiate. Toutefois, il sera intéressant de l'étendre à des cas de non linéarités plus complexes.
- Le formalisme de distribution adopté permet de tenir compte des phénomènes essentiels tels que les discontinuités. Cette propriété a permis d'étendre la technique d'identification développée à l'identification d'une classe de système hybride couvrant un large éventail de systèmes réels. La formulation du problème étudié nous a permis d'aboutir à un problème spectral à partir duquel les instants de commutation (ou discontinuités) ainsi que des paramètres ont été déterminés simultanément. Cependant, le critère de commutation entre le problème de valeur propre généralisée et le système linéaire reste sensible aux bruits et constitue une perspective de recherche intéressante. L'exemple d'application d'un pendule simple soumis à des frottements secs soulève la question du choix de la meilleure approche entre une sensibilité aux bruits du problème de valeur propre généralisée et une formulation non linéaire et redondante du système d'équations linéaires. Une autre perspective de recherche sera la validation de l'approche développée sur des essais expérimentaux sur les plates-formes disponibles dans nos laboratoires (pendule inverse).



# ANNEXE A :

## OUTILS MATHÉMATIQUES POUR L'IDENTIFICATION ALGÈBRIQUE :

### LES DISTRIBUTIONS

La théorie de distribution a été établie par Laurent Schwartz dans les années cinquante [Schwartz, 1966]. Il a posé les bases d'une théorie mathématique rigoureuse qui permet de résoudre de nombreuses problèmes de la physique, plus précisément, les équations issues de la physique, de la mécanique des fluides et du traitement du signal. Son utilisation permet d'éviter la plupart des raffinements de la théorie des fonctions. En effet, la notion de distribution est une généralisation de la notion de fonction qui s'est révélée être une nécessité pour le progrès de plusieurs théories physiques. La théorie assure un certain nombre d'opérations indispensables auxquelles les fonctions ne se prêtent pas toujours. L'exemple le plus connu de distribution est l'impulsion de Dirac, indispensable aussi bien pour la formulation de la mécanique quantique qu'en traitement du signal et dans ce document pour l'identification des systèmes à retards et d'une classe de systèmes à commutations. Le document suivant est une brève introduction aux distributions regroupant quelques définitions et propriétés auxquelles la méthode d'identification algébrique fait appel pour formuler nos problèmes d'identifications. Les définitions, notations, propositions, remarques, exemples et exercices sont extraits des ouvrages suivants [Schwartz, 1966, Dupraz, 1977, Petit, 1995, Boccara, 1997, Rodier, 1993, Belkoura, 2009b, Rioul, 2008]. Un bon résumé de ces techniques est donné par [Rodier, 1993, Belkoura, 2009b] et cet annexe s'inspire largement de ces dernières références. La synthèse faite, dans ce chapitre, se limite aux distributions à une dimension qui peuvent être généralisées facilement pour le cas des distributions à plusieurs dimensions.

## A.1 Formalisme mathématique

### A.1.1 Espace vectoriel $\mathcal{D}$

#### Définition

Une distribution est une forme linéaire continue sur un espace vectoriel de fonctions, dites fonctions tests  $\varphi(t)$ .

Une grande variété de fonctions tests peuvent être utilisées. Plus les conditions de régularités imposées aux fonctions tests sont sévères, plus les fonctionnelles ainsi définies seront générales. C'est pour cela, les distributions, généralisant la notion de mesure, sont définies à partir d'un ensemble de fonctions test plus restreint que l'espace des fonctions continues à support borné  $\mathcal{D}_0$  :

On choisit l'ensemble des fonctions  $\varphi(t) \in C$ ,  $t \in \mathbb{R}^n$  indéfiniment dérivables, à support borné. Cet ensemble forme un espace vectoriel appelé espace  $\mathcal{D}$ .

**Définition 13** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans  $\Omega$ .

Rappelons la définition du support d'une fonction. Soit  $A$  un ensemble de  $t$  et  $\varphi(t)$  une fonction non nulle pour tout  $t \in A$ . Le support de la fonction  $\varphi$ , noté  $\text{supp } \varphi$ , est le sous ensemble fermé  $\bar{A}$ .

Quelques exemples typiques de fonctions appartenant à l'espace  $\mathcal{D}$  sont fournis par les fonctions suivantes :

- La fonction porte de largeur  $T > 0$ , définie par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

de support  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

- Les fonctions transcendantes : La fonction la plus simple est l'exponentielle, et toutes les autres peuvent s'en déduire, définie par :

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq 1 \\ \exp\frac{1}{t^2-1} & |t| < 1 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

de support  $[-1, +1]$ . Elle s'écrit également, en utilisant la fonction porte  $\Pi(t)$ , comme suit :

$$\zeta(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \exp\frac{1}{t^2-1} \quad (\text{A.3})$$

Plus généralement, toute fonction  $\zeta_{ab}(t)$  définie par :

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \notin ]a, b[ \\ \exp\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-b} - \frac{1}{t-a}\right] & \text{pour } t \in ]a, b[ \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

est une fonction de  $\mathcal{D}$  ayant pour support  $[a, b]$ .

Une autre famille de fonction dérivée de la fonction exponentielle est donnée par :

$$\zeta_k(t) = k\Pi\left(\frac{kt}{2}\right) \frac{1}{k^2t^2-1} \quad (\text{A.5})$$

## A.1. FORMALISME MATHÉMATIQUE

est normée, c'est à dire que  $\int \zeta_k(t)dt = 1$  et est de support  $[-\frac{1}{k}, +\frac{1}{k}]$ .

Un exemple de fonction connu est dérivée de la fonction porte est défini par :

$$\gamma_k(t) = k\Pi(kt). \quad (\text{A.6})$$

Plus généralement, d'autres fonctions peuvent être construites à partir de ces fonctions grâce au théorème suivant :

**Théorème 14** *Si  $\varphi \in \mathcal{D}$  et si  $f$  est une fonction sommable à support borné, alors :  $\psi(t) = \int f(x)\varphi(t-x)dx$ , est une fonction de  $D$ . Ces deux suites de fonctions sont illustrées par la figure suivante :*

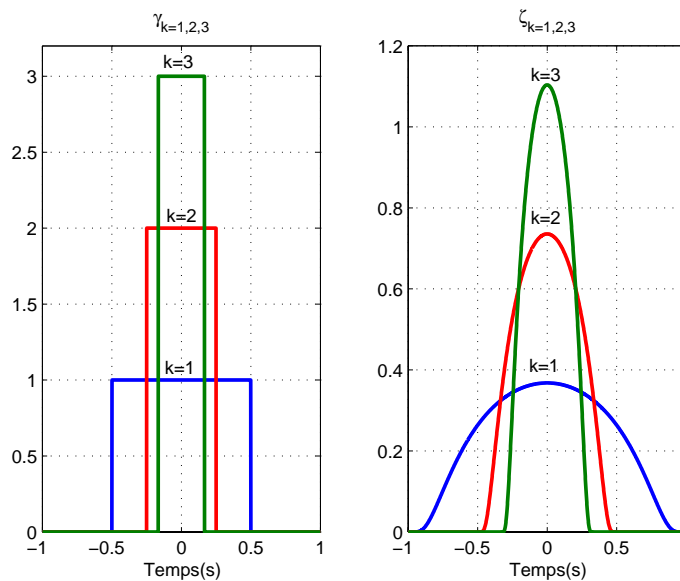


FIGURE A.1 – Allure des fonctions  $\gamma_k$  et  $\zeta_k$  pour  $k = 1, 2$  et  $3$

### Notion de Convergence dans $\mathcal{D}$

**Définition 15** *On dit qu'une suite de fonction  $\varphi_k(t) \in \mathcal{D}$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) converge dans  $D$  vers une fonction  $\varphi(t)$  lorsque  $k$  tend vers l'infini si :*

- Les supports des  $\varphi_k$  sont contenus dans un même ensemble borné indépendant de  $k$ ,
- Les dérivées de chaque ordre des  $\varphi_k$  convergent uniformément vers les dérivées correspondantes de  $\varphi$ .

### A.1.2 Distributions

**Définition 16** *Une distribution sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}$  est une forme linéaire continue sur l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Les distributions forment un espace vectoriel appelé  $\mathcal{D}'$ .*

Une distribution  $T$  est une application de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathbb{C}$  faisant correspondre à une fonction test  $\varphi$  un nombre complexe noté  $\langle T(t), \varphi(t) \rangle$ , ou plus simplement  $\langle T, \varphi \rangle$

lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté sur la variable. C'est la valeur prise par la distribution sur la fonction  $\varphi$ .

On exige donc deux propriétés :

- linéarité : Si  $T$  est une distribution,  $\langle T, \varphi \rangle$  le scalaire correspondant à la fonction  $\varphi$  :

$$\begin{cases} \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle, \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{C} : \langle T, \lambda \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

- continuité : Si  $\varphi_k$  converge dans  $\mathcal{D}$  vers  $\varphi$ , la suite  $\langle T, \varphi_k \rangle$  converge au sens usuel vers  $\langle T, \varphi \rangle$ , c'est à dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon), k \geq N \quad |\langle T, \varphi \rangle - \langle T, \varphi_k \rangle| \leq \epsilon. \quad (\text{A.8})$$

La condition de continuité peut être remplacée par une majoration et ceci comme suit :  $\forall K$  compact et  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  de support dans  $K$ , il existe une constante  $C_K$  et un entier  $p_K$  tels que :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{n \leq p_K} \sup_{t \in K} |\varphi^n(t)|. \quad (\text{A.9})$$

Il existe deux types de distributions :

### Distributions régulières

Les distributions régulières sont définies par une intégrale qui permettent de faire correspondre une distribution à toute fonction localement sommable (c'est à dire sommable sur tout ensemble borné). La distribution est définie par, pour  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(t)\varphi(t)dt \quad (\text{A.10})$$

qui a toujours un sens puisque  $\varphi$  est à support borné.

Nous notons par  $f(t)$  ou  $f$  pour désigner une fonction ou une distribution, le sens est fixé dans le contexte et  $f(t)$  peut signifier :

- $f(t)$  représente la valeur que prend la fonction  $f$  pour le valeur de  $t$  de la variable ;
- $f(t)$  est la fonction de la variable  $t$  ;
- $f(t)$  définit une distribution,  $t$  est la variable des fonctions test.

Dans le dernier cas, on ne peut attribuer à la distribution  $f$  une valeur pour chaque  $t$  même si  $f(t)$  est une distribution régulière. En effet, deux distributions  $f$  et  $g$  seront identiques, lorsque  $f$  et  $g$ , si pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle. \quad (\text{A.11})$$

Lorsque ces deux fonctions sont des fonctions localement sommables quelconques, nous faisons recours au théorème suivant :

**Théorème 17** *Deux fonctions localement sommables  $f$  et  $g$  définissent la même distribution si, et seulement si, elles sont presque partout égales.*

## A.1. FORMALISME MATHÉMATIQUE

Si on considère par exemple la fonction de Heaviside définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Il n'est pas nécessaire de définir la valeur de  $H$  en 0 au sens de distribution.

### Distributions singulières

On appelle distribution singulière toute distribution qui n'est pas régulière. L'exemple le plus fréquent est la distribution de Dirac  $\delta$  ou  $\delta(t)$  si la variable est  $t$ . Sa définition à l'origine est,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad (\text{A.13})$$

au point  $a$  :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad (\text{A.14})$$

et ses dérivées  $\delta_a^k$  sont définies par :

$$\langle \delta_a^k, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(a). \quad (\text{A.15})$$

Cette distribution a été introduite par Dirac pour des besoins du formalisme quantique et peut porter aussi le nom de l'impulsion de Dirac. Elle décrit un signal de durée théoriquement nulle et d'amplitude infinie de sorte que  $\int \delta(t)dt = 1$  et elle est définie par :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

La notion d'impulsion de Dirac n'avait pas réellement un fondement mathématique bien défini. En effet, d'après la théorie de l'intégration de Lebesgue, cette fonction doit posséder une intégrale nulle puisqu'elle est presque partout nulle. La théorie de distribution, inventée par Schwartz, offre l'outillage adéquat pour présenter rigoureusement cet objet singulier.

Communément, la distribution de Dirac définit une mesure si toute la densité est concentrée en un point unique.

D'une façon générale, toute combinaison linéaire  $\sum b_i \delta_{a_i}$  est une distribution singulière. Il existe une autre distribution singulière très utilisée par les physiciens. Elle porte le nom de peigne de Dirac, et est définie par :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n \quad (n \text{ entier}). \quad (\text{A.17})$$

### Support d'une distribution

**Restriction d'une distribution à un ouvert :** Considérons deux ouverts  $\Omega \subset \Omega'$  de  $\mathfrak{R}$ . Soit  $T \in \mathcal{D}'(\Omega')$ . Nous pouvons associer à  $T$  une distribution  $T_\Omega$  appelée restriction  $T$  à  $\Omega$ , définie pour toute  $\varphi \in D(\Omega)$  par :

$$\langle T_\Omega, \varphi \rangle = \langle T, \bar{\varphi} \rangle, \quad (\text{A.18})$$



où,  $\bar{\varphi}$  est le prolongement par 0 de  $\varphi$  à  $\Omega'$ .

A titre d'exemple,  $\Omega' = \Omega - a$ , la distribution nulle et la mesure de Dirac  $\delta - a$  ont même restriction à  $\Omega$ .

On considère tous l'ensemble ouverts pour lesquels une distribution  $T$  est nulle, c'est à dire telle que  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  pour tout  $\varphi$  à support dans un de ces ouverts. La réunion de tous ces ouverts forme un ouvert. La distribution  $T$  est nulle sur cet ouvert, c'est le plus grand ouvert où  $T$  est nulle. Son complémentaire, qui est fermé, est appelé *support de la distribution  $T$* .

**Définition 18** *Le support de  $T$ , noté  $\text{supp } T$  est le complémentaire dans  $\Omega$  du plus grand ouvert  $\omega$  de  $\Omega$  tel que la restriction de  $T$  à  $\omega$  soit nulle.*

A partir de la définition de la notion de support d'une fonction, donnée dans la section A.1.1, on trouve qu'il y a cohérence entre cette définition et celle établie par la théorie des distributions puisque le support d'une fonction correspond avec celui de la distribution qu'elle définit.

On donne par exemple, le  $\text{supp } \delta = 0$  et le  $\text{supp } \delta_a = 0$ .

Les distributions à support ponctuel font l'objet d'un théorème très utilisé et énoncé comme suit :

**Théorème 19** *Toute distribution de support l'origine admet une décomposition unique comme combinaison linéaire finie de dérivées de la distribution de Dirac :*

$$T = \sum_{p \leq m} c_p \delta^{(p)}, \quad (\text{A.19})$$

les  $c_p$  étant des constantes.

Il existe deux classes importantes de distributions auxquelles nous faisons appel pour la formulation de nos problèmes d'identification, qui sont les distributions à support borné et celles à support contenu dans  $[0, \infty)$ . Ces deux classes forment des espaces vectoriels notés respectivement  $\mathcal{E}'$  et  $\mathcal{D}'_+$ . Les distributions à support borné à gauche sont appelées les distributions causales qui représentent des phénomènes ayant lieu avant la cause qui les produit et par conséquent sont nulles pour  $t < 0$ .

### Ordre d'une distribution

**Définition 20** *On appelle distribution d'ordre fini toute distribution  $T$  de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  pour laquelle il existe  $k \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout compact  $K$  inclus dans  $\Omega$ , on ait la relation suivante. L'entier  $k$ , qui ne dépend pas de  $K$ , est appelée ordre de la distribution  $T$ .*

$$\exists C_K > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{t \in \Omega} |D^\alpha \varphi(t)|. \quad (\text{A.20})$$

L'entier  $k$  est appelé ordre de distribution.

## A.1. FORMALISME MATHÉMATIQUE

Une notion générale d'ordre  $\geq 0$  et  $< 0$  est introduite dans [Yamamoto, 1984] qui donne une définition plus simple mais plus générale que celle donnée par la définition 20.

**Définition 21** *Une distribution est d'ordre  $r > 0$ , si elle agit continûment sur les fonctions de classe  $C^r$  et non  $C^{r-1}$ . Une fonction  $\psi$  est d'ordre  $-r$  si  $r$  est le plus petit entier tel que  $\frac{d^r \psi}{dx^r}$  soit une mesure.*

Exemples :

$$\text{ord}(\delta^{(2)}) = 2, \quad \text{ord}(H(t).t) = -2. \quad (\text{A.21})$$

Plus généralement, les fonctions localement sommables et les combinaisons linéaires de Dirac définissent les distributions d'ordre 0. Un autre exemple très rencontré dans la pratique est les distributions de la forme  $\sum_0^r a^r \delta^{(r)}$  + fonctions sont d'ordre  $r$ . Cette dernière propriété est très utile pour l'analyse d'identifiabilité.

Un autre résultat faisant appel au propriété du produit de convolution est donné par le théorème suivant, dans lequel  $P^{-1}$  désigne l'inverse de convolution et peut être étendu pour le cas matriciel où l'ordre de la matrice  $P$  sera égale à l'ordre maximal de ces éléments.

**Théorème 22** [Yamamoto, 1984]

$$\text{ord}(P^{-1}) = -\text{ord}(P) \implies \text{ord}(P * Q) = \text{ord}(P) + \text{ord}(Q), \forall Q. \quad (\text{A.22})$$

### Sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$

Si on prend des espaces de fonctions tests moins restreints que  $\mathcal{D}$ , on obtient des sous espaces de  $\mathcal{D}'$ .

Plusieurs sous espaces de fonctions tests sont les plus utilisés, à savoir :

- espace  $\mathcal{C}$  : Espace des fonctions indéfiniment dérivables décroissant à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées, plus vite que toute puissance de  $\frac{1}{|x|}$ .
- espace  $\varepsilon$  : Espace des fonctions indéfiniment dérivables quelconques.

Ces deux espaces vérifient la relation d'inclusion suivante :

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{C} \subset \varepsilon.$$

Deux sous espaces de  $\mathcal{D}'$  sont ainsi obtenus :

- espace  $\mathcal{C}'$  : Espace des distributions tempérées ou à croissance lente qui sont par définition toutes fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{C}$ .
- espace  $\varepsilon'$  : Espace des distributions à support borné.

avec les inclusions  $\mathcal{D}' \supset \mathcal{C}' \supset \varepsilon'$ .

Les distributions tempérées jouent un rôle particulièrement important pour la transformation de Fourier. Ainsi, toute distribution tempérée a une transformée de Fourier qui est également une distribution tempérée.

### Convergence dans l'espace $\mathcal{D}'$

Définition

On dit qu'une suite de distributions  $T_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) converge dans  $\mathcal{D}'$  si, quelque soit  $\varphi \in \mathcal{D}$ , la suite de nombres  $\langle T_k, \varphi \rangle$  converge au sens ordinaire.

**Théorème 23** *Si une suite de distribution  $T_k$  converge dans  $\mathcal{D}'$  vers une fonctionnelle  $T$ ,  $T$  est une distribution.*

Par conséquent, on peut vérifier que si  $T_k \longrightarrow T$  alors les dérivées  $T_k^{(m)} \longrightarrow T^{(m)}$ . La dérivation est une opération linéaire et continue dans  $\mathcal{D}'$ . Au sens des distributions, on peut toujours commuter le signe dérivation et le signe limite.

Le théorème suivant montre que la convergence presque partout d'une fonction localement sommable n'implique pas la convergence de la distribution correspondante dans  $\mathcal{D}'$ . A titre d'exemple, on donne :

$$k\Pi(kt) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{convergence p.p} \\ \delta & \text{convergence dans } \mathcal{D}' \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

**Théorème 24** *Si les fonctions localement sommables  $f_k$  convergent simplement presque partout vers la fonction localement sommable  $f$ , lorsque  $k \longrightarrow \infty$ , et si les fonctions  $f_k$  sont toutes majorées en module par une même fonction  $g \geq 0$  localement sommable, alors les distributions régulières  $f_k$  convergent dans  $\mathcal{D}'$  vers la distributions  $f$ .*

Convergence vers  $\delta$

En particulier, la distribution  $\delta$  peut être aussi vue comme limite (dans  $\mathcal{D}'$ ) de fonctions sommables :

**Théorème 25** *Si la suite des fonctions localement sommables  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) a les propriétés suivantes :*

1.  $\exists A > 0$  tel que pour tout  $|t| \leq A$ ,  $f_k(t) \geq 0$  ;
2.  $\forall a > 0$ ,  $\int_{|t| \leq a} f_k(t) dt \longrightarrow 1$  lorsque  $k \longrightarrow \infty$  ;
3.  $f_k(t) \longrightarrow 0$  uniformément dans tout ensemble  $0 < a < |t| < \frac{1}{a} < \infty$  ;

alors la suite de distributions régulières  $f_k(t)$  converge dans  $\mathcal{D}'$  vers  $\delta$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Plus particulièrement, si  $f_k$  tel que  $\int f_k(t) dt = 1$ , vérifie (3) alors la distributions  $f_k$  tend vers  $\delta$ . Deux exemples de suites de fonctions sont très connues,  $\gamma_k$  et  $\zeta_k$ , définies dans la section A.1.1, convergent dans  $\mathcal{D}'$  vers  $\delta$ .

### A.1.3 Opérations sur les distributions

En résumé, les distributions peuvent être considérées comme une généralisation des classes de fonctions localement sommables presque partout égale. Pour compléter cette généralisation, on donne dans la section suivante les différentes opérations applicables sur les distributions.

### Translation d'une distribution et changement d'échelle

Soit  $f(t)$  une fonction localement sommable et  $\tau$  une constante. La distribution correspondante à  $f(t - \tau)$  est donnée par la relation suivante :

$$\langle f(t - \tau), \varphi(t) \rangle = \int f(t - \tau) \varphi(t) dt.$$

En appliquant le changement de variables  $x = t - \tau$ , on obtient :

$$\langle f(t - \tau), \varphi(t) \rangle = \int f(x) \varphi(x + \tau) dx = \langle f(x), \varphi(x + \tau) \rangle.$$

On définira donc  $T(t - \tau)$ , appelé le translatée de  $T(t)$ , par :

$$\langle T(t - \tau), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(t + \tau) \rangle. \quad (\text{A.24})$$

Un exemple très rencontré dans la pratique est la distribution de Dirac  $\delta_\tau$  au point  $\tau$  qui est défini par :

$$\langle \delta_\tau, \varphi \rangle = \varphi(\tau).$$

La notion de translation d'une distribution permet de déduire deux autres propriétés des distributions qui sont :

- La périodicité des distributions : La notion de translation d'une distribution permet de définir les distributions périodique de période  $\tau$  par :

$$T(t - \tau) = T(t). \quad (\text{A.25})$$

- La parité des distributions : Comme pour les fonctions, une distribution peut être paire si  $T(t) = T(-t)$  et impaire lorsque  $T(t) = -T(-t)$ .

On peut également faire un changement d'échelle du temps et ceci en multipliant  $t$  par une constante  $a$  non nulle. Si  $f(t)$  est une fonction localement sommable, il vient :

$$\int f(at) \varphi(t) dt = \frac{1}{|a|} \int f(t) \varphi\left(\frac{t}{a}\right) dt.$$

On posera donc par définition :

$$\langle T(at), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T(t), \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle. \quad (\text{A.26})$$

A titre d'exemple, on a  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$ .

### Dérivation

Une des propriétés fondamentales des distributions est qu'elles sont indéfiniment dérivables et que toutes les dérivées successives sont encore des distributions.

Pour définir la dérivée d'une distribution, il faut passer par la définition usuelle de la dérivée pour une fonction localement sommable  $f$ , dérivable et à dérivée  $f'$  continue.

En intégrant par parties, on aura :

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int f'(t) \varphi(t) dt = - \int f(t) \varphi'(t) dt = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle. \quad (\text{A.27})$$

Annexe A :  
Outils mathématiques pour l'identification algébrique :  
Les distributions

Ceci définit bien une distribution régulière puisque  $\varphi' \in (D)$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ . On est amené ainsi à définir :

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle, \quad (\text{A.28})$$

et plus généralement, la dérivée d'ordre  $m$  est donnée par :

$$\langle T^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \langle T, \varphi^{(m)} \rangle. \quad (\text{A.29})$$

Nous donnons par la suite quelques exemples de dérivation auxquels nous faisons appel pour notre étude sur l'identification :

Dérivée de la distribution de Dirac  $\delta$

La dérivée de la distribution de Dirac est donnée par l'expression suivante :

$$\langle \delta', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0). \quad (\text{A.30})$$

Dérivée de la distribution de Heaviside  $H(t)$

La fonction d'Heaviside  $H(t)$  est définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

$H(t)$  est une fonction localement sommable et définit donc une distribution par :

$$\langle H(t), \varphi(t) \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(t) dt. \quad (\text{A.32})$$

Au sens de distribution, la définition de la valeur de  $H(t)$  à l'origine n'est pas nécessaire puisqu'elle représente un ensemble de mesure nulle. La dérivée de la distribution  $H(t)$  s'écrit :

$$\langle H'(t), \varphi(t) \rangle = - \langle H(t), \varphi'(t) \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(t) dt = -[\varphi(t)]_0^{\infty} = \varphi(0). \quad (\text{A.33})$$

En conclusion,

$$H'(t) = \delta(t). \quad (\text{A.34})$$

Dérivation d'une fonction discontinue à l'origine

L'exemple précédent peut être généralisé pour une  $f$  est une fonction indéfiniment dérivable pour  $t < 0$  et  $t > 0$  et chacune des dérivées admet une limite à gauche et à droite à  $t = 0$ . Le saut de la dérivée d'ordre  $m$  à l'origine, appelé  $\sigma_m$ , est donné par :

$$\sigma_m = f^{(m)}(0^+) - f^{(m)}(0^-). \quad (\text{A.35})$$

La fonction  $f^{(m)}$  est définie partout sauf à l'origine. On note  $D^m f$  la dérivée distribution d'ordre  $m$  de la fonction  $f$ . Par définition, la dérivée distribution  $Df$  de  $f$  s'écrit :

$$\langle Df, \varphi(t) \rangle = - \langle Df, \varphi' \rangle = - \int f(t) \varphi'(t) dt. \quad (\text{A.36})$$

## A.1. FORMALISME MATHÉMATIQUE

En appliquant une intégration par partie à l'équation précédente, on obtient :

$$\langle Df, \varphi(t) \rangle = - \int f'(t)\varphi(t)dt + \sigma_0\varphi(0). \quad (\text{A.37})$$

D'où la relation suivante :

$$\langle Df, \varphi(t) \rangle = f' + \sigma_0\delta. \quad (\text{A.38})$$

Par conséquent, les discontinuités de  $f$  se traduisent en dérivation par des Diracs pondérées par l'amplitude des sauts. La généralisation à la dérivée d'ordre  $m$  se fait suite à des dérivations successives de l'équation (A.38) et se traduit par :

$$\langle D^m f, \varphi(t) \rangle = f^{(m)} + \sigma_{m-1}\delta + \dots + \sigma_0\delta^{(m-1)}. \quad (\text{A.39})$$

En conclusion, par dérivation, on ne perd pas d'informations essentielles sur le signal telles que ses discontinuités.

### Multiplication

La section précédente montre que la généralisation de certaines opérations effectuées sur les fonctions localement sommables au cas des distributions est naturelle. Par contre, pour la multiplication de deux distributions quelconques, qui n'est pas toujours définie, les difficultés commencent. En effet, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions localement sommables, leur produit n'est pas forcément une fonction localement sommable.

On donne l'exemple de la fonction  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}$  qui est localement sommable mais  $(f(t))^2 = \frac{1}{|t|}$  n'est pas sommable sur un intervalle contenant 0.

Cependant, le produit de deux distributions est défini dans certains cas. Le cas le plus courant est la multiplication d'une distribution  $T$  par une fonction par une fonction indéfiniment dérivable  $\alpha$ . Le produit  $\alpha T$  est donné par :

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (\text{A.40})$$

Ceci est facilement justifié puisque, d'une part, la fonction  $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$  est indéfiniment dérivable et d'autre part, elle a un support contenu dans le support de  $\varphi$  et donc un support borné.

Pour certains cas, la définition de ce produit reste applicable même si la fonction  $\alpha$  n'est pas indéfiniment dérivable. Par exemple, si  $\alpha$  est continue en 0,

$$\langle \alpha(t)\delta(t), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \alpha(t)\varphi(t) \rangle = \alpha(0)\varphi(0) = \langle \delta(t), \alpha(0)\varphi(t) \rangle. \quad (\text{A.41})$$

Il vient alors :

$$\alpha(t)\delta(t) = \alpha(0)\delta(t). \quad (\text{A.42})$$

Dans le cas général, pour un point  $a$  quelconque où  $\alpha$  est continue, on a donc :

$$\alpha(t)\delta(t-a) = \alpha(0)\delta(t-a), \quad (\text{A.43})$$

et en particulier :

$$t\delta = 0. \quad (\text{A.44})$$

Si le produit multiplicatif  $\alpha T$  a un sens, quelques propriétés peuvent être dérivées de ce produit. La première relative aux supports est donné par l'inclusion suivante :

$$\text{supp } \alpha T \subset \text{supp } \alpha \cap \text{supp } T. \quad (\text{A.45})$$

Deux autres propriétés sont illustrées par le théorème suivant :

**Théorème 26** *Le produit de plusieurs distributions, lorsque toutes, sauf une au plus, sont des fonctions indéfiniment dérivables au sens usuel, est associatif et commutatif.*

$$(\alpha_1 + \alpha_2)T = \alpha_1 T + \alpha_2 T, \quad (\text{A.46})$$

$$(\alpha_1 \alpha_2)T = \alpha_1 (\alpha_2 T), \quad (\text{A.47})$$

$$\alpha(T_1 + T_2) = \alpha T_1 + \alpha T_2. \quad (\text{A.48})$$

Une propriété concerne la règle de dérivation, obtenue à partir de la règle usuelle de Leibniz, qui est définie par :

$$D^m(\alpha T) = \sum_{k \leq m} C_m^k (D^{(m-k)} \alpha) D^k T. \quad (\text{A.49})$$

avec,  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ .

Le théorème suivant énonce une propriété très utilisée dans certaines applications qui se porte sur l'annihilation d'une distribution par multiplication :

**Théorème 27** *Si  $T$  a support compact  $K$ , et est d'ordre (nécessairement fini)  $m$ ,  $\alpha T$  est nulle toutes les fois que  $\alpha$  et ses dérivées d'ordre  $\leq m$  sont nulles sur  $K$  ; si  $T$  a un support et est d'ordre quelconque, fini ou infini,  $\alpha T$  est nulle ainsi que toute ses dérivées sur le support de  $T$ .*

Ce théorème est illustré par les exemples suivants quand  $T$  est une distribution singulière pour  $\alpha$  une fonction polynôme et une fonction exponentielle dans laquelle  $\lambda = e^{\gamma\tau}$  :

$$(t - \tau)\delta_\tau = 0, \quad t^2(t - \tau)(a\delta^{(1)} + b\delta_\tau) = 0, \quad (\text{A.50})$$

$$(1 - \lambda e^{-\gamma t})\delta_\tau = 0, \quad (1 - \lambda e^{-\gamma t})^2(1 - \lambda e^{-\gamma t})(a\delta^{(1)} + b\delta_\tau) = 0. \quad (\text{A.51})$$

Ces deux cas montrent que le terme  $\tau$  est passé du statut d'argument à celui d'argument et de coefficient d'une manière explicite dans le cas des polynômes et via le terme  $\lambda = e^{\gamma\tau}$  pour les fonctions exponentielles.

Grâce au théorème 27, le produit  $t\delta$  peut être étendu

$$t^l \delta^{(n)} = \begin{cases} 0 & l > n, \\ (-1)^l \frac{n!}{(n-l)!} \delta^{(n-l)} & l \leq n. \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

et plus généralement :

$$\alpha \delta^{(n)} = \sum_{q \leq n} (-1)^{(n-q)} C_n^q \alpha^{(n-q)}(0) \delta^{(q)}. \quad (\text{A.53})$$

La multiplication de deux distributions peut également faire appel à la notion de support singulier :

## A.1. FORMALISME MATHÉMATIQUE

**Définition 28** Soit  $T$  une distribution sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathfrak{R}$ . Le support singulier de  $T$  est par définition le complémentaire du plus grand ouvert  $\omega$  de  $\Omega$  tel que la restriction de  $T$  à  $\mathcal{D}(\omega)$  coïncide avec la distribution associée à une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\omega$ .

**Proposition 29** Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux distributions de supports singuliers disjoints. On peut alors donner un sens au produit  $T_1 T_2$  en tant que distribution.

Le problème de la division

La formule donnée par l'équation (A.44) ( $t\delta = 0$ ) montre que le produit de deux distributions non nulles peut être nul. Le problème peut se inverser, qu'en est-il d'une distribution  $T$  telle que  $tT = 0$ ? La proposition suivante donne une solution à ce problème.

**Proposition 30** Les solutions de l'équation  $tT = 0$  sont les distributions  $T = c\delta$ , où  $c \in \mathbb{C}$ .

En général, si  $\alpha \in C^\infty$  n'admet que des racines simples  $a_i$  à l'équation  $\alpha = 0$ , alors, les solutions de l'équation  $\alpha T = 0$  ont la forme suivante :

$$T = \sum c_i \delta(t - a_i), \quad (\text{A.54})$$

où,  $c_i$  sont des constantes arbitraires. Plus généralement, pour la fonction  $\alpha$  précédente, un second membre donné  $S$  et connaissant une solution particulière  $T_0$ , les solutions du problème suivant :

$$\alpha T = S, \quad (\text{A.55})$$

sont données par :

$$T = T_0 + \sum c_i \delta(t - a_i). \quad (\text{A.56})$$

Ainsi par exemple, soit à résoudre l'équation  $tT = \delta$ . Pour déterminer une solution particulière, une astuce consiste à dériver  $t\delta = 0$  pour avoir immédiatement  $\delta + t\delta' = 0$ . La solution particulière est alors  $T_0 = -\delta'$  et par suite, la solution générale est  $T = \delta' + c\delta$ .

Dans le cas où la fonction  $\alpha$  admet des racines multiples, la solution est alors donnée par la proposition suivante :

**Proposition 31** Pour toute distribution  $S$ , il existe une infinité de distributions  $T$  vérifiant  $t^k T = S$ . Deux d'entre elles quelconques diffèrent d'une combinaison linéaire de dérivées  $\delta^{(m)}$ ,  $m \leq k$ .

### A.1.4 Convolution

Le but de cette section est d'étendre la notion ainsi que les propriétés du produit de convolution de deux fonctions au produit de convolution de distributions.



### Définition

On rappelle, d'abord, le produit de convolution de deux fonctions localement sommables  $f$  et  $g$ . Lorsqu'il existe le produit de convolution de  $f$  et  $g$  est la fonction  $h$  définie par :

$$h(t) = \int f(t - \theta)g(\theta)d\theta, \quad (\text{A.57})$$

noté symboliquement par :  $h(t) = f(t) * g(t)$ . Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}$ , on calcul la distribution associée à  $h$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \langle h, \varphi \rangle = \int h(t)\varphi(t)dt \\ &= \int \int f(t - \theta)g(\theta)\varphi(t)d\theta dt, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

ou encore, en posant  $v = \theta$  et  $u = t - \theta$  :

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int \int f(u)g(v)\varphi(u + v)dudv. \quad (\text{A.59})$$

Ceci permet de définir le produit de convolution de deux distributions  $S$  et  $T$  par :

**Définition 32** On appelle produit de convolution de deux distributions  $S$  et  $T$ , la distribution  $S * T$ , telle que pour toute  $\varphi \in D$  :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(u)T(v), \varphi(u + v) \rangle, \quad (\text{A.60})$$

où  $S(u).T(v)$  est le produit direct des distributions  $S$  et  $T$ .

### Conditions d'existence

La définition précédente n'est pas valable pour des distributions quelconques. En effet, si  $\varphi(t)$  est à support borné dans  $\mathfrak{R}$ ,  $\varphi(u + v)$  n'est pas à support borné dans  $\mathfrak{R}^2$ .

Soit  $E$  le support de  $\varphi(u + v)$  dans  $\mathfrak{R}^2$ ,  $A$  le support de  $S(u)$  et  $B$  le support de  $T(v)$ . Le produit de convolution n'aura un sens que si l'intersection de  $E$  avec le support  $A \times B$  de  $S(u).T(v)$  soit bornée. D'où le théorème suivant :

**Théorème 33** Le produit de convolution d'une distribution  $S(u)$  de support  $A$  par une distribution  $T(v)$  de support  $B$  a un sens si, pour  $u \in A$  et  $v \in B$ ,  $u + v$  borné entraîne que  $u$  et  $v$  sont séparément bornés.

Cependant, trois cas souvent rencontrés dans la pratique pour lesquels le produit de convolution a un sens :

- l'une des deux distributions soit à support borné,
- les distributions à support borné,
- les distributions à support borné à gauche (respectivement à droite).

## Propriétés

Commutativité et distributivité

Le produit de convolution de deux distributions est commutatif. Cela peut être déduit directement à partir de la définition donnée par l'équation (A.60) et de la commutativité du produit direct.

De plus, le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition puisque le produit direct est distributif.

Associativité

Le produit de convolution de trois distributions  $R$ ,  $S$  et  $T$  (extension à plusieurs distributions est possible) défini par :

$$\langle R * S * T, \varphi \rangle = \langle R(u)S(v)T(w), \varphi(u + v + w) \rangle, \quad (\text{A.61})$$

n'a un sens que si  $u + v + w$  borné implique que  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont bornés et l'associativité du produit de convolutions de ces trois distributions se déduit à partir de l'associativité de leur produit direct.

Ceci peut s'énoncer comme suit :

**Théorème 34** *Le produit de convolution est associatif si tous les produits deux à deux ont un sens.*

L'exemple suivant montre que  $(R * S) * T$  et  $R * (S * T)$  peuvent avoir un sens mais avec deux résultats différents :

$$(1 * \delta') * H = 0 * H = 0. \quad (\text{A.62})$$

$$1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1. \quad (\text{A.63})$$

Support

L'étude du problème d'identification est très lié à la notion de support d'une distribution. Dans le cadre du produit de convolution, un résultat très utile est donné par l'inclusion suivante :

$$\text{supp } S * T \subset \text{supp } S + \text{supp } T, \quad (\text{A.64})$$

dans laquelle, la somme dans le côté droit est définie par :

$$\{u + v; u \in \text{supp } S, v \in \text{supp } T\}. \quad (\text{A.65})$$

A titre d'exemple, soit  $S$  et  $T$  deux distributions de supports inclus respectivement dans  $[a, \infty)$  et  $[b, \infty)$ , le support de leur produit de convolution est inclus dans  $[a + b, \infty)$ .

Il existe un autre résultat plus précis énoncé par le Théorème des supports suivant et dans lequel  $\text{conv}(\text{supp } X)$  représente l'enveloppe convexe du support de  $X$  :

**Théorème 35**

$$\text{conv}(\text{supp } S * T) = \text{conv}(\text{supp } S) + \text{conv}(\text{supp } T). \quad (\text{A.66})$$

## Applications

Convolution par  $\delta$

Soit  $T$  une distribution quelconque et  $\delta$  la distribution de Dirac à support compact, le produit de convolution  $\delta * T$  existe et est défini par :

$$\begin{aligned} \langle \delta * T, \varphi \rangle &= \langle \delta(u)T(v), \varphi(u+v) \rangle = \langle T(v) \langle \delta(u), \varphi(u+v) \rangle \rangle \\ &= \langle T(v), \varphi(u+v) \rangle . \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Il vient, alors :

$$\delta * T = T. \quad (\text{A.68})$$

**Théorème 36** *La distribution de Dirac  $\delta$  à l'origine joue le rôle d'unité pour le produit de convolution.*

Convolution par  $\delta(t - \tau)$

Par définition :

$$\begin{aligned} \langle \delta(t - \tau) * T, \varphi(t) \rangle &= \langle \delta(u - \tau)T(v), \varphi(u+v) \rangle \\ &= \langle T(v) \langle \delta(u - \tau), \varphi(u+v) \rangle \rangle \\ &= \langle T(v), \varphi(\tau + v) \rangle \\ &= \langle T(v - \tau), \varphi(v) \rangle . \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

ce qui montre que pour translater une distribution de  $\tau$ , il suffit de la convoluer par la translaté  $\delta(t - \tau)$  de la distribution de Dirac  $\delta$ . Si en suppose que  $T = R * S$ , il vient :

$$T(t - \tau) = \delta(t - \tau) * T(t) = \delta(t - \tau) * R(t) * S(t). \quad (\text{A.70})$$

Le double produit a un sens, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} T(t - \tau) &= [\delta(t - \tau) * R(t)] * S(t) = R(t - \tau) * S(t) \\ &= R(t) * [\delta(t - \tau) * S(t)] = R(t) * S(t - \tau). \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

D'ou, on peut conclure que pour translater un produit de convolution, il suffit de translater un de ses facteurs.

Convolution par  $\delta'$

La convolution d'une distribution  $T$  par la dérivée de la distribution de Dirac  $\delta'$  est par définition :

$$\begin{aligned} \langle \delta' * T, \varphi \rangle &= \langle \delta'(u)T(v), \varphi(u+v) \rangle = \langle T(v) \langle \delta'(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle \\ &= - \langle T(v), \varphi'(v) \rangle = \langle T', \varphi \rangle . \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Ce qui montre que

$$\delta' * T = T'. \quad (\text{A.73})$$

De même la convolution de la distribution  $T$  par la dérivée d'ordre  $m$  de la distribution de Dirac est équivalente à la dérivation  $m$  fois de la distribution  $T$  :

$$\delta^{(m)} * T = T^{(m)}. \quad (\text{A.74})$$

## A.2. DISTRIBUTIONS ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

On suppose que  $T = R * S$ . Pour dériver  $m$  fois ce produit de convolution, il suffit de dériver  $m$  fois un de ses facteurs. Ce résultat est obtenu en tenant compte de l'associativité du produit de convolution, on aura alors :

$$(R * S)^{(m)} = R * S^{(m)} = R^{(m)} * S. \quad (\text{A.75})$$

Multiplication par  $t^n$ ,  $e^{at}$  et convolution

La combinaison de la multiplication par des fonctions polynomiales ou exponentielles avec le produit de convolution conduisent à deux propriétés très utiles dans la pratique. Pour cela, si l'une des distributions  $S$  ou  $T$  est à support compact, la multiplication du produit de convolution  $S * T$  permet d'aboutir à :

$$t^n(S * T) = \sum_{k=0}^n C_n^k (t^k S) * (t^{n-k} T), \quad (\text{A.76})$$

A titre d'exemple, en combinant cette relation et celle donnée par l'équation (A.52), on peut transformer, par exemple, les termes de la forme  $t^n y^{(p)}$  en somme linéaire des dérivées du produit  $t^k y$  :

$$t^3 y^{(2)} = -6z_1 + 6z_2^{(1)} - z_3^{(2)} \quad (\text{A.77})$$

où,  $z_i = t^i y$ .

De même pour le cas d'une fonction exponentielle  $e^{at}$ , il vient alors :

$$e^{at}(S * T) = (e^{at}S) * (e^{at}T). \quad (\text{A.78})$$

A titre d'exemple, en posant  $z = e^{-\gamma t} y$  et  $\lambda = e^{\gamma \tau}$ , on aura :

$$e^{-\gamma t} y^{(2)} = \gamma^2 z + 2\gamma z^{(1)} + z^{(2)}. \quad (\text{A.79})$$

Les membres de droite des exemples donnés par les équations (A.77) et (A.79) fournissent les décompositions correspondants aux formules d'intégration par partie. Ces intégrations pourront être avantageusement remplacées par tout transfert causal jouant le rôle d'un filtre.

On note par la suite,  $H^k y$  la convolution itérée  $H * \dots * H y$ , c'est à dire effectuer  $k$  intégrations successives de  $y$  et, plus généralement,  $T^k$  représente le produit de convolution d'ordre  $k$ .

En conclusion, afin d'éviter toute confusion,  $T(s)$  désigne la transformée de Laplace de  $T$ .

## A.2 Distributions et systèmes dynamiques

Un très grand nombre d'équation correspondants à des problèmes physiques sont mises sous forme d'équation de convolution :

$$T * X = W, \quad (\text{A.80})$$

où  $T$  et  $W$  sont deux distributions données et  $X$  est une distribution inconnue. Pour résoudre ces équations, nous devons faire appel à la notion d'algèbre de convolution.

## A.2.1 Algèbre de convolution

Une algèbre de convolution est tout espace vectoriel de distribution contenant  $\delta$  (un élément unité), et sur lequel on peut définir le produit de convolution d'un nombre fini quelconque de distribution. Nous avons déjà défini deux types de distributions : les distributions à support borné (espace  $\mathcal{E}'$ ) et les distributions à support borné à gauche (respectivement à droite) noté  $\mathcal{D}'_+$  ( respectivement  $\mathcal{D}'_-$  ).

On s'intéresse plus particulièrement à l'algèbre  $\mathcal{D}'_+$  des distributions à support dans  $[0, \infty)$ , pour lesquelles :

- $\mathcal{D}'_+$  muni de la somme et du produit par un scalaire est un espace vectoriel,
- le produit de convolution est une application bilinéaire de  $\mathcal{D}'_+ \times \mathcal{D}'_+$  dans  $\mathcal{D}'_+$ ,
- le produit est associatif.

Pour résoudre l'équation de convolution donnée par l'équation (A.80), le théorème suivant s'énonce comme suit :

**Théorème 37** *Pour que l'équation de convolution :*

$$T * X = W \tag{A.81}$$

*ait toujours au moins une solution dans une algèbre de convolution, quel que  $W$  dans cette algèbre, il faut et il suffit que  $T$  possède un inverse  $T^{*-1}$  (noté aussi  $T^{-1}$ ) dans cette algèbre tel que  $T * T^{*-1} = \delta$ . Dans ce cas  $T^{*-1}$  est unique et la solution unique est donnée par :*

$$X = T^{*-1} * W. \tag{A.82}$$

Compte tenu de l'associativité le produit de convolution, si  $T_1, \dots, T_m$  admettent  $T_1^{-1}, \dots, T_m^{-1}$  pour inverses, on aura :

$$(T_1 * \dots * T_m)^{-1} = T_1^{-1} * \dots * T_m^{-1}. \tag{A.83}$$

Pour illustrer le dernier théorème, on propose deux exemples d'application :

1. Soit  $w \in \mathcal{D}'_+$  et soit à résoudre dans  $\mathcal{D}'_+$  l'équation  $X' = W$  qui peut s'écrire :

$$X' = \delta' * X = W. \tag{A.84}$$

Or, on sait que  $\delta' * H = \delta$ , ce qui montre que la fonction de Heaviside  $H$  est l'inverse de convolution de  $\delta'$ , si bien la solution unique  $X$  est  $X = H * W$  ce n'est que la primitive de  $W$ .

2. L'inverse dans  $\mathcal{D}'_+$  de  $\delta' - \lambda\delta$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}$  est égale à  $H(t)e^{\lambda t}$ . On peut facilement montrer que  $(H(t)e^{\lambda t})' = \delta' + \lambda H(t)e^{\lambda t}$ , pour obtenir :

$$(\delta' - \lambda\delta) * H(t)e^{\lambda t} = \delta. \tag{A.85}$$

## A.2.2 Équations différentielles

Il existe plusieurs applications de l'algèbre de convolution tel que : la résolution des équations différentielles, la résolution de certaines équations intégrales ainsi que la résolution des équations matricielles. Dans cette section, nous nous intéressons particulièrement aux équations différentielles.

## A.2. DISTRIBUTIONS ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

En effet, toute équation différentielle à coefficients constants peut admettre la représentation suivante :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = f, \quad (\text{A.86})$$

qui s'écrit aussi :

$$P(\delta) * y = f, \quad (\text{A.87})$$

où  $P(\delta)$  est le polynôme symbolique en  $\delta$  :

$$P(\delta) = \delta^{(n)} + a_{n-1}\delta^{(n-1)} + \dots + a_0\delta. \quad (\text{A.88})$$

Si on suppose que le polynôme  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0x$  admet des racines, distinctes ou non, notées  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ , l'équation (A.88) devient :

$$P(\delta) = (\delta^{(1)} - \lambda_0\delta) * \dots * (\delta^{(1)} - \lambda_n\delta). \quad (\text{A.89})$$

Résoudre cette équation différentielle revient donc à chercher l'inverse de convolution de  $P(\delta)$  qui nous ramène à chercher les inverses des  $(\delta^{(1)} - \lambda_i\delta)$  en utilisant la règle donnée par l'équation (A.83). Cet inverse a été déjà donné par le résultat du deuxième exemple traité dans la section précédente donné par l'équation (A.85). Il vient, alors :

$$(P(\delta))^{*-1} = H(t)e^{\lambda_0 t} * \dots * H(t)e^{\lambda_n t}. \quad (\text{A.90})$$

Dans le cas où les racines sont multiples,  $\lambda_0 = \dots = \lambda_m = \lambda$ , l'inverse de la convolution sera égale à :

$$((\delta^{(1)} - \lambda\delta)^m)^{-1} = \frac{H(t)t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}. \quad (\text{A.91})$$

Un exemple d'application très rencontré par les physiciens, le filtre  $RC$  passe-bas, est étudié afin d'illustrer le principe de cette méthode.

### Exemple d'application

Soit le circuit  $RC$  décrit par la figure suivante. On suppose que la capacité est

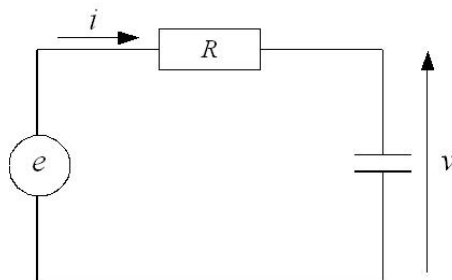


FIGURE A.2 – Circuit RC

initialement non chargée. Le courant  $i(t)$  et la force électromotrice de charge  $e(t)$  sont liés par la relation suivante :

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\theta) d\theta = e(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{A.92})$$

Au sens des distributions dans  $\mathcal{D}'_+$ , on trouve :

$$(R\delta + \frac{1}{C}H) * i = e. \quad (\text{A.93})$$

La tension de sortie aux bornes de la capacité est égale à  $v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\theta) d\theta$ , cela s'écrit au sens de distribution  $v = \frac{1}{C}H * i$ . Le courant  $i$  devient  $i = C\delta' * v$  et en la remplaçant par la suite dans l'équation (A.93), on obtient :

$$(RC\delta' + \delta) * v = T * v = e. \quad (\text{A.94})$$

Pour déterminer l'expression de la tension  $v(t)$  pour toute entrée  $e(t)$ , il suffit de trouver l'inverse de convolution de la distribution  $T = (RC\delta' + \delta)$ , on aura :

$$T^{-1} = \frac{1}{RC} H e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (\text{A.95})$$

La solution obtenue correspond à la solution de l'équation (A.94) quand l'entrée  $e(t)$  est une distribution (ou appelée encore une impulsion) de Dirac. Pour cela, la distribution  $T^{-1}$  sera la réponse impulsionnelle du système.

Dans le cas où l'entrée  $e(t)$  est une fonction de Heaviside, l'expression de la tension  $v$  sera déterminée à partir de :

$$v = T^{-1} * H = \frac{1}{RC} H e^{-\frac{t}{RC}} * H. \quad (\text{A.96})$$

Pour déterminer le résultat définitif, nous devons faire appel à la propriété suivante :

$$H(t)e^{\lambda_1 t} * H(t)e^{\lambda_2 t} = H(t) \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (\text{A.97})$$

Compte tenu de cette propriété, avec  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, -\frac{1}{RC})$ , il vient :

$$v = H(t)[1 - e^{-\frac{t}{RC}}]. \quad (\text{A.98})$$

### Présence des conditions initiales

Pour traiter le cas général des équations différentielles, au sens des fonctions, on cherche à résoudre une équation différentielle en  $y$ , d'ordre  $n$  en prenant compte des conditions initiales. On suppose que les conditions initiales,  $y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ , sont connues. L'idée consiste alors à :

1. multiplier l'équation par  $H(t)$ ,
2. poser  $z(t) = H(t)y(t)$ ,

## A.2. DISTRIBUTIONS ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

3. former l'équation différentielle en  $z$  par dérivation ou en utilisant la formule des sauts donnée dans la section A.38.

L'exemple illustratif suivant permet de mieux expliquer cette méthode. Soit l'équation différentielle du second ordre définie par :

$$y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = f. \quad (\text{A.99})$$

On multiplie cette équation par  $H(t)$ . La substitution de  $z(t) = H(t)y(t)$ ,  $z^{(1)} = Hy^{(1)} + y_0\delta$  et  $z^{(2)} = Hy^{(2)} + y_0\delta^{(1)} + y_0^{(1)}\delta$  permet d'obtenir la relation :

$$z^{(2)} + a_1 z^{(1)} + a_0 z = Hf + y_0\delta^{(1)} + y_0^{(1)}\delta + a_1 y_0\delta. \quad (\text{A.100})$$

$$P(\delta) * z = Hf + y_0\delta^{(1)} + y_0^{(1)}\delta + y_0\delta. \quad (\text{A.101})$$

où le polynôme  $P(\delta) = \delta^{(2)} + a_1\delta^{(1)} + a_0\delta$ . Il suffit alors de calculer l'inverse de convolution de l'opérateur  $P(\delta)$  pour obtenir :

$$z = (P(\delta))^{-1} * [Hf + y_0\delta^{(1)} + y_0^{(1)}\delta + a_1 y_0\delta]. \quad (\text{A.102})$$



*Annexe A :*  
*Outils mathématiques pour l'identification algébrique :*  
*Les distributions*

# ANNEXE B :

## Liste des publications

### Publications dans des conférences internationales

1. K.Ibn Taarit, K.Laabidi, L. Belkoura, M. Ksouri, and J.-P. Richard. Identification algébrique des systèmes à retard : Application à une soufflerie de séchage. In *STA'07, 8th international conference on Sciences and Techniques of Automatic control, Hammamet, Tunisie*, Hammamet, Tunisie, 2007.
2. K. Ibn Taarit, L. Belkoura, and M. Ksouri. Estimation en ligne par approche algébrique : application au cas des frottements secs. In *CIFA 2010, Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Nancy, France, 2010.

### Publications dans des revues internationales

1. K. Ibn Taarit, L. Belkoura, M. Ksouri, and J.-P. Richard. A fast identification algorithm for systems with delayed inputs. *International Journal of System Sciences*, 42 : 3, 449-456, 2011.
2. L. Belkoura, T. Floquet, K. Ibn Taarit, W. Perruquetti, and Y.Orlov. Estimation problems for a class of impulsive systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2010.

*Annexe B :*  
*Liste des publications*

# BIBLIOGRAPHIE

- [Abdallah and Chiasson, 2001] Abdallah, C. and Chiasson, J. (2001). Stability of communication networks in the presence of delays. In *Third IFAC workshop on time delay systems*.
- [Abdenmour et al., 2001] Abdenmour, R. B., Borne, P., Ksouri, M., and M'sahli, F. (2001). *Identification et commande numérique des procédés industriels*. Editions Technip, Paris.
- [Ahmed et al., 2006] Ahmed, S., Huang, B., and Shah, S. (2006). Parameter and delay estimation of continuous-time models using a linear filter. *Journal of Process Control*, 16 :323–331.
- [Ali et al., 2009a] Ali, A. M., Join, C., and Hamelin, F. (2009a). Fault diagnosis of uncertain linear system using structural knowledge. In *7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, Safeprocess 2009*, Barcelone, Spain.
- [Ali et al., 2009b] Ali, A. M., Join, C., and Hamelin, F. (2009b). Une méthode algébrique de diagnostic de défauts. In *3<sup>e</sup> journées doctorales/Journées nationales MACS, JD-JN-MACS 2009*, Angers, France.
- [Alur et al., 1993] Alur, R., Courcoubetis, C., Henzinger, T., and Ho, P. (1993). Hybrid automata : An algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems. In *Hybrid Systems, LNCS, Springer*, 736 :209–229.
- [Antsaklis et al., 1999] Antsaklis, P., Kohn, W., Lemmon, M., Nerode, A., and Sastry, S., editors (1999). *Hybrid Systems V*, volume 1567 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.
- [Antsaklis et al., 1995] Antsaklis, P., Kohn, W., Nerode, A., and Sastry, S., editors (1995). *Hybrid Systems II*, volume 999 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.
- [Astrom and Hagglund, 1995] Astrom, K. and Hagglund, T. (1995). *PID controllers : theory, design, and tuning*. Instrument Society of America.
- [Atay, 2010] Atay, F. (2010). *Complex Time-Delay Systems : Theory and Applications*. Understanding Complex Systems. Springer.
- [Attia, 2005] Attia, S. (2005). *Sur la commande des systèmes non linéaires à dynamique hybride*. PhD thesis, Institut National Polytechnique De Grenoble.
- [Bai and Chyung, 1991] Bai, E. and Chyung, D. (1991). Improving delay estimation using the pade approximation. In *Proceedings of the 30th Conference on Decalation and Control*, Brighton, England.

- [Bako, 2008] Bako, L. (2008). *Contribution à l'identification de systèmes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [Balachandran et al., 2009] Balachandran, B., Kalmár-Nagy, T., and Gilsinn, D. (2009). *Delay Differential Equations : Recent Advances and New Directions*. Springer Science+Business Media.
- [Barbot et al., 2007] Barbot, J., Fliess, M., and Floquet, T. (2007). An algebraic framework for the design of nonlinear observers with unknown inputs. In *In 46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, Louisiana, USA.
- [Bastogne et al., 2001] Bastogne, T., Garnier, H., and Sibille, P. (2001). A pmf-based subspace method for continuous-time model identification. application to a multivariable winding process. *International Journal of Control*, 74 :118–132.
- [Battle and Miralles, 2000] Battle, C. and Miralles, A. (2000). On the approximation of delay elements by feedback. *Automatica*, 36 :659–664.
- [Becedas et al., 2007] Becedas, J., Mamani, G., Feliu-Batlle, V., and Sira-Ramirez, H. (2007). Algebraic identification method for mass-spring-damper system. In *WCECS 2007, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2007*, San Francisco, USA.
- [Beghi et al., 1997] Beghi, A., Lepschy, A., and Viaro, U. (1997). Approximating delay elements by feedback. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 44 :824–828.
- [Belkoura, 2003] Belkoura, L. (2003). Parameter and initial function identifiability of linear delay differential equations. In *4th IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS'03)*, Rocquencourt, France.
- [Belkoura, 2005] Belkoura, L. (2005). Identifiability of systems described by convolution equations. *Automatica*, 41 :505–512.
- [Belkoura, 2009a] Belkoura, L. (2009a). Change point detection with application to the identification of a switching process. In *International conference on systems theory : Modelling, Analysis and Control*, Fes, Morocco.
- [Belkoura, 2009b] Belkoura, L. (2009b). *Mathématiques pour l'ingénieur*, chapter 1 : Introduction aux Distributions. Association Tunisienne d'Automatique et de Numérisation ATAN.
- [Belkoura et al., 2004] Belkoura, L., Dambrine, M., Orlov, Y., and Richard, J.-P. (2004). Identifiability and identification of linear systems with delays. *Springer, LNCSE Advances in Time Delay Systems*, 38 :123–135.
- [Belkoura et al., 2010] Belkoura, L., Floquet, T., Taarit, K. I., Perruquetti, W., and Orlov, Y. (2010). Estimation problems for a class of impulsive systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, to appear.
- [Belkoura and Orlov, 2002] Belkoura, L. and Orlov, Y. (2002). Identifiability analysis of linear delay-differential systems. *IMA J. Mathematical Control and Information*, 19 :73–81.
- [Belkoura and Richard, 2006] Belkoura, L. and Richard, J.-P. (2006). A distribution framework for the fast identification of linear systems with delays. In *6th IFAC Workshop on Time Delay System*.

## B.0. BIBLIOGRAPHIE

- [Belkoura et al., 2006] Belkoura, L., Richard, J.-P., and Fliess, M. (2006). On line identification of systems with delayed inputs. In *MTNS'06, 16th Conference on Mathematical Theory of Networks and Systems, invited session Networked systems*, Kyoto, Japan.
- [Belkoura et al., 2007] Belkoura, L., Richard, J.-P., and Fliess, M. (2007). Real time identification of delay systems. In *IFAC Workshop on Time Delay Systems, TDS'07*, Nantes, France.
- [Belkoura et al., 2008] Belkoura, L., Richard, J.-P., and Fliess, M. (2008). A convolution approach for delay systems identification. In *17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea.
- [Belkoura et al., 2009] Belkoura, L., Richard, J.-P., and Fliess, M. (2009). Parameters estimation of systems with delayed and structured entries. *Automatica*, 45 :1117–1125.
- [Beltrán-Carvajal et al., 2005] Beltrán-Carvajal, F., Silva-Navarro, G., Sira-Ramírez, H., and Quezada-Andrade, J. (2005). Active vibration control using on-line algebraic identification of harmonic vibrations. In *Proc. Amer. Control Conf.*, Portland, OR.
- [Bemporad et al., 1970] Bemporad, A., Ferrari-Trecate, G., and Morari, M. (1970). On structural identifiability. *Mathematical Biosciences*, 7 :329–339.
- [Bemporad et al., 2000] Bemporad, A., Ferrari-Trecate, G., and Morari, M. (2000). Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 :1846–1876.
- [Benedetto and Sangiovanni-Vincentelli, 2001] Benedetto, M. D. and Sangiovanni-Vincentelli, A., editors (2001). *Hybrid Systems : Computation and Control, 4th International Workshop, HSCC 2001, Rome, Italy, March 28-30, 2001, Proceedings*, volume 2034 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.
- [Benveniste and Guernic, 1990] Benveniste, A. and Guernic, P. L. (1990). Hybrid dynamical systems theory and the signal language. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(5) :535–546.
- [Bertrand et al., 2004] Bertrand, M., Iung, C., and Zaytoon, J. (2004). Systèmes dynamiques hybrides : Modélisation et simulation. *Techniques de l'ingénieur, Informatique industrielle*, S1(S7105).
- [Bi et al., 1999] Bi, Q., Cai, W., Lee, E., Wang, Q., Hang, C., and Zhang, Y. (1999). Robust identification of first-order plus dead-time model from step response. *Control Engineering Practice*, 7 :71–77.
- [Bjorklund, 2003a] Bjorklund, S. (2003a). A review of time-delay estimation techniques. In *Technical reports from the Control & Communication group in Linköping*.
- [Bjorklund, 2003b] Bjorklund, S. (2003b). *A Survey and Comparison of Time-Delay Estimation Methods in Linear Systems*. PhD thesis, Linköpings universitet, Linköping, Sweden.
- [Boccarda, 1997] Boccarda, N. (1997). *Distributions*. Mathématiques pour l'ingénieur, Ellipses.

- [Borne et al., 1992] Borne, P., Tanguy, G. D., Richard, J.-P., Rotella, F., and Zambettahis, I. (1992). *Modélisation et identification des processus*. Editions Technip, Paris.
- [Borne et al., 1993] Borne, P., Tanguy, G. D., Richard, J.-P., Rotella, F., and Zambettahis, I. (1993). *Analyse et régulation des processus industriels*. Editions Technip, Paris.
- [Branicky, 1995] Branicky, M. (1995). *Studies in Hybrid Systems : Modeling, Analysis, and Control*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technologie.
- [Branicky, 1998] Branicky, M. (1998). Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 43 :475–482.
- [Brezinski, 1980] Brezinski, C. (1980). *The long history of continued fractions and Padé approximants*. Springer-Verlag.
- [Brogliato, 1999] Brogliato, B. (1999). *Nonsmooth Mechanics, Second edition*. Springer, London.
- [Bushnell, 2001] Bushnell, L. (2001). Editorial :networks and control. *IEEE Control System Magazine, special section on networks and control*, 21 (1) :22–99.
- [Carloni et al., 2006] Carloni, L., Passerone, R., and Pinto, A. (2006). *Languages and Tools for Hybrid Systems Design*. Foundations and Trends in Electronic Design Automation.
- [Carvalho and Nussenzveig, 2002] Carvalho, C. D. and Nussenzveig, H. (2002). *Time delay*. North-Holland.
- [Chamroo, 2006] Chamroo, A. (2006). *Contribution à l'étude des Systèmes à Fonctionnement par Morceaux : Application à l'Identification en Ligne et à la commande en Temps Réel*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologie de Lille.
- [Chareyron, 2005] Chareyron, S. (2005). *Stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers, application aux robots marcheurs*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Chatelin, 1988] Chatelin, F. (1988). *Valeurs propres de matrices*. Masson.
- [Chemla, 2004] Chemla, J. (2004). Identification des systèmes linéaires. Technical report, Polytech'Tours Département Productique.
- [Chen and Thomlinson, 1966] Chen, Q. and Thomlinson, G.-R. (1966). Parametric identification of systems with dry friction and nonlinear stiffness using a time series model. *Journal of vibration and acoustics*, 118 :252–263.
- [Chen and Wang, 2004] Chen, X. and Wang, M. (2004). Global optimization methods for time delay estimation. *The 5th World Congress on Intelligent Control and Automation, in press*, pages 212–215.
- [Chiasson and Loiseau, 2007] Chiasson, J. and Loiseau, J. (2007). *Applications of time delay systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Spring.
- [Clenshaw and Curtis, 1960] Clenshaw, C. and Curtis, A. (1960). A method for numerical integration on an automatic computer. *Numerische Mathematik*, 2 :197–205.

## B.0. BIBLIOGRAPHIE

- [Conte and Perdon, 1998] Conte, G. and Perdon, A. (1998). Systems over rings :theory and applications. In *In First IFAC workshop on linear time delay systems*, pages 223–234, Grenoble, France.
- [Cordon and Ballois, 1998] Cordon, P. and Ballois, S. L. (1998). *Automatique : Système linéaire et continuus*. Dunod, Paris.
- [Dai and Sinha, 1991] Dai, H. and Sinha, N. (1991). *Identification of continuous-time systems, methodology and computer implementation*, chapter Use of numerical integration methods, pages 259–288. Kluwer Academic Publishers.
- [Dambrine, 1994] Dambrine, M. (1994). *Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille.
- [Datta, 1991] Datta, K. (1991). *Identification of continuous-time systems, methodology and computer implementation*, chapter Continuous model identification via orthogonal polynomials, pages 227–255. Kluwer Academic Publishers.
- [Datta and Mohan, 1995] Datta, K. and Mohan, B. (1995). *Orthogonal functions in systems and control*. World Scientific Publishing Company.
- [de Mathelin, 2001] de Mathelin, M. (2001). *Commande Adaptative et Applications*. Hermès Science.
- [Demailly, 2006] Demailly, J. (2006). *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences.
- [Diop et al., 2001] Diop, S., ans P. Moraal, I. K., and van Nieuwstadt, M. (2001). Preserving stability/performance when facing an unknown time delay. *Control Engineering Practice*, 9 :1319–1325.
- [Diop and Fliess, 1991] Diop, S. and Fliess, M. (1991). Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. In *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pages 714–719.
- [Distefano and Cobelli, 1980] Distefano, I. and Cobelli, C. (1980). On parameter and structural identifiability : nonunique observability / reconstructibility for identifiable systems, others ambiguities, and news definitions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25 :830–833.
- [Drakunov et al., 2006] Drakunov, S., Perruquetti, W., Richard, J.-P., and Belkoura, L. (2006). Delay identification in time-delay systems using variable structure observers. *Annual Reviews in Control*, 30 :143–158.
- [Draper and Smith, 1981] Draper, N. and Smith, H. (1981). *Applied Regression Analysis*. Second Edition, John Wiley and Sons.
- [Dupraz, 1977] Dupraz, J. (1977). *La théorie des distributions et ses applications*. Cepadues-Editions.
- [Eiben and Smith, 2003] Eiben, A. and Smith, J. (2003). *Introduction to evolutionary computing*. Spring.
- [Elnagger, 1997] Elnagger, A. (1997). On line parameter estimation of the laguerre functions. In *Proceedings of the 36th, Conference on Decision and Control*, pages 1273–1276, San Diego, California, USA.



- [Elnagger et al., 1990] Elnagger, A., Dumont, G., and Elshafei, A.-L. (1990). System identification and adaptive control based on a variable regression for systems having unknown delay. In *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 1445–1450, Honolulu, Hawaii, U.S.A.
- [Emile et al., 1995] Emile, B., Comon, P., and Leroux, J. (1995). Estimation of time delays between wide-band sources. In *Proc. of the IEEE-ATHOS workshop on High-Order Statistics*, pages 111–115, Begur, Girona, Spain.
- [Engell et al., 2002] Engell, S., Frehse, G., and Schnieder, E. (2002). *Modelling, analysis, and design of hybrid systems*. Springer.
- [Engell et al., 2003] Engell, S., Guéguen, H., and Zaytoon, J., editors (2003). *Analysis and design of hybrid systems*, Lecture Notes in Computer Science. Springer.
- [Evans et al., 1998] Evans, C., Rees, D., and Hill, D. (1998). Frequency-domain identification of gas turbine dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(5) :651–662.
- [Eykhoff, 1974] Eykhoff, P. (1974). *System identification - Parameter and state estimation*. Wiley and Sons.
- [Fernandes and Ferreira, 1996] Fernandes, J. and Ferreira, A. (1996). An all-pass approximation to time delay. In *UKACC International Conference on Control. Control '96*, volume 2, pages 1208–1213.
- [Ferreira and Fernandes, 1997] Ferreira, A. and Fernandes, J. (1997). A survey on time delay system estimation. In *Proceedings of the European Control Conference*, Bruxelles, Belgium.
- [Ferretti et al., 1991] Ferretti, G., Maffezzoni, C., and Scattolini, R. (1991). Recursive estimation of time delay in sampled systems. *Automatica*, 27(4) :653–661.
- [Ferretti et al., 1995] Ferretti, G., Maffezzoni, C., and Scattolini, R. (1995). The recursive estimation of time delay in sampled-data control systems. *Control and Dynamic Systems*, 73 :159–206.
- [Fliess, 2006] Fliess, M. (2006). Analyse non standard du bruit. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 342 :797–802.
- [Fliess, 2008] Fliess, M. (2008). Non-linear estimation is easy. *Int.J. Modelling Identification and Control*, 4(1) :12–27.
- [Fliess et al., 2010] Fliess, M., Join, C., and Mboup, M. (2010). Algebraic change-point detection. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 21(2) :131–143.
- [Fliess et al., 2004] Fliess, M., Join, C., and Sira-Ramirez, H. (2004). Robust residual generation for linear fault diagnosis : an algebraic setting with examples. *International Journal of Control*, 77 :1223–1242.
- [Fliess and Sira-Ramirez, 2003] Fliess, M. and Sira-Ramirez, H. (2003). An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim.*, 9 :151–168.
- [Fliess and Sira-Ramirez, 2008] Fliess, M. and Sira-Ramirez, H. (2008). Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques. *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data Springer (Ed.)*, pages 363–391.

## B.0. BIBLIOGRAPHIE

- [Fridman and Shaked, 2003] Fridman, F. and Shaked, U. (2003). Special issue on time-delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(9) :791–192.
- [Gao and O’Dwyer, 2001] Gao, R. and O’Dwyer, A. (2001). Comparison of two b-polynomial methods : application to the identification of time delayed processes. In *Proceedings of the Irish Signals and Systems Conference, NUI Maynooth*, Ireland, June.
- [Garnier et al., 2006] Garnier, H., Gilson, M., and Bastogne, T. (2006). Identification de modèles paramétriques à temps continu. méthodes, outil logiciel et avantages. In *Journées Identification et Modélisation Expérimentale, JIME’2006*, Poitiers, France.
- [Garnier et al., 2008] Garnier, H., Gilson, M., and Bastogne, T. (2008). Identification de modèles à temps continu. méthodes et développements récents. *Journal Européen des Systèmes Automatisés, nsécial "Identification des Systèmes"*, 42(2-3) :233–260.
- [Garnier et al., 2003] Garnier, H., Mensler, M., and Richard, A. (2003). Continuous-time model identification from sampled data : implementation issues and performance evaluation. *Int. J. Control*, 76(13) :1337–1357.
- [Garnier et al., 2007] Garnier, H., Mensler, M., T.Bastogne, and Richard, A. (2007). Identification de modèles paramétriques à temps continu. *Techniques de l’ingénieur*, S 7140 :1–17.
- [Garnier and Wang, 2008] Garnier, H. and Wang, L. (2008). *Identification of Continuous-Time Model Identification from Sampled Data*. Springer.
- [Garnier and Young, ] Garnier, H. and Young, P. Time-domain approaches to continuous-time model identification of dynamical systems from sampled data. Technical report, Centre de Recherche en Automatique de Nancy.
- [Gawthrop and Nihtila, 1985] Gawthrop, P. and Nihtila, M. (1985). Identification of time delays using a polynomial identification method. *Systems & Control Letters, North-Holland*, 5 :267–271.
- [Gawthrop et al., 1989] Gawthrop, P., Nihtila, M., and Rad, A. (1989). Recursive parameter estimation of continuous systems with unknown time delay. *Control Theory Adv. Technol.*, 5 :227–248.
- [Gedouin et al., 2009] Gedouin, P., Join, C., Delaleau, E., Bourgeot, J., Chirani, S., and Calloch, S. (2009). A new control strategy for shape memory alloys actuators. In *8th European Symposium on Martensitic Transformations (ESOMAT 2009)*, Prague, Czech Republic.
- [Glover and Partington, 1987] Glover, K. and Partington, J. (1987). Bounds on the achievable accuracy in model reduction. In *Proceedings of NATO Advanced Research Workshop on Modelling, robustness and sensitivity reduction in control systems*.
- [Gollu and Varaiya, 1989] Gollu, A. and Varaiya, P. (1989). Hybrid dynamical systems. In *28th IEEE Conference on Decision and Control*.

- [Goodwin and Payne, 1977] Goodwin, G. and Payne, R. (1977). *Dynamic system identification. Experiment design and data analysis*. Academic Press.
- [Gorecki, 1989] Gorecki, H. (1989). *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. John Wiley Sons.
- [Gu et al., 2003] Gu, K., Kharitonov, V., and Chens, J. (2003). *Stability of time-delay systems*. Birkhauser, Boston.
- [Hachino et al., 1996] Hachino, T., Yang, Z., and Tsuji, T. (1996). On-line identification of continuous time-delay systems using the genetic algorithm. *Electrical Engineering in Japan*, 116 :115–126.
- [Haddad et al., 1999] Haddad, W., Chellaboina, V., and Kablar, N. (1999). Nonlinear impulsive dynamical systems. i. stability and dissipativity. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference*, volume 5, pages 4404–4422, Phoenix, AZ, USA.
- [Haddad et al., 2006] Haddad, W., Chellaboina, V., and Nersesov, G. (2006). *Impulsive and hybrid dynamical systems : stability, dissipativity, and control*. Princeton Series in Applied Mathematics.
- [Henzinger and Sastry, 1998] Henzinger, T. and Sastry, S., editors (1998). *First International Workshop, HSCC'98, Berkeley, California, USA, April 13-15, 1998, Proceedings*, volume 1386 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.
- [Hespanha et al., 2007] Hespanha, J., Naghshtabrizi, P., and Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1) :138–162.
- [Hocine, 2006] Hocine, A. (2006). *Estimation d'état et diagnostic de systèmes à commutation par filtrage multi-modèle*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [Huang and Clement, 1982] Huang, C. and Clement, W. (1982). Parameter estimation for the second-order-plus-dead-time model. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 21 :601–603.
- [Huang and Clement, 1993] Huang, C. and Clement, W. (1993). Estimation of the second order parameters from the process transients by simple calculation. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 32 :228–230.
- [Hubert, 2008] Hubert, A. (2008). *Commande des systèmes : introduction à la modélisation et au contrôle des systèmes automatiques*. Presses Universitaires de Franche-Comté.
- [Jalali and Jordan, 1991] Jalali, S. and Jordan, J. (1991). Identification of all pole systems with hermite modulating functions continuous time models. In *IEEE Control*.
- [Jedrzejewski, 2005] Jedrzejewski, F. (2005). *Introduction aux méthodes numériques*. Springer Verlag.
- [Johansson, 1994] Johansson, R. (1994). Identification of continuous time models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42 :887–897.
- [Johnson, 1981] Johnson, T. (1981). Analytic models of multistage processes. In *IEEE Conference of Decision and Control*, San Diego, Californie.

## B.0. BIBLIOGRAPHIE

- [Jordan et al., 1990] Jordan, J., Jalali, S., and Mackie, R. (1990). System identification with hermite modulating functions. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 137(2) :87–93.
- [Keyser, 1986] Keyser, R. D. (1986). Adaptive dead-time estimation. In *2nd IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, Lund, Sweden.
- [Kolmanovskii and Myshkis, 1999a] Kolmanovskii, V. and Myshkis, A. (1999a). *Applied theory of functional differential equations*, volume 85. Dordrecht, Boston, Kluwer Academic Publishers.
- [Kolmanovskii and Myshkis, 1999b] Kolmanovskii, V. and Myshkis, A. (1999b). *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Dordrecht, Boston, Kluwer Academic Publishers.
- [Kolmanovskii et al., 1999] Kolmanovskii, V., Niculescu, S., and Gu, K. (1999). Delay effects on stability :a survey. In *In 38th IEEE CDC'99, Conference on decision and control*, pages 1993–1998, Phoenix, AZ.
- [Ksouri and Borne, 1999] Ksouri, M. and Borne, P. (1999). *La commande par calculateur : application aux procédés industriels*. Editions Technip, Paris.
- [Kurz and Goedecke, 1981] Kurz, H. and Goedecke, W. (1981). Digital parameter-adaptive control of process with unknown dead time. *Automatica*, 7 :245–252.
- [Lakshmikantham et al., 1989] Lakshmikantham, V., Bainov, D., and Simeonov, P., editors (1989). *Theory of impulsive differential equations*, volume 6 of *Modern Applied Mathematics*. World Scientific Pub Co Inc.
- [Landau, 1993] Landau, I. (1993). *System Identification and Control Design*. Hermès.
- [Landau, 1998] Landau, I. (1998). *Identification Des Systèmes*. Hermès, Paris.
- [Landau and Besançon-Voda, 2001] Landau, I. and Besançon-Voda, A. (2001). *Identification des systèmes*. Hermès, Paris.
- [Li et al., 2005] Li, Z., Soh, Y., and Wen, C., editors (2005). *Switched and impulsive systems : analysis, design and applications*, volume 2034 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.
- [Liang and Feeny, 2006] Liang, Y. and Feeny, B. (2006). Parametric identification of a base-excited single pendulum. *Nonlinear Dynamics*, 46 :17–29.
- [Liberzon, 2003] Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control, Systems and Control : Foundation and Applications*. Birkhäuser.
- [Liu, 1990] Liu, G. (1990). Adaptive predictor control for slowly time-varying systems with variable time delay. *Advances in Modelling and Simulation*, 20 :9–21.
- [Liu et al., 2007] Liu, M., Wang, Q., B.Huang, and Hang, C. (2007). Improved identification of continuous-time delay processes from piecewise step tests. *Journal of Process Control*, 17 :51–57.
- [Ljung, 1987] Ljung, L. (1987). *System identification : theory for the user*. Prentice-Hall Inc.
- [Ljung, 1997] Ljung, L. (1997). Identification problems in fonctionnal differential equations. In *Proc. 36th conf. on Decision and Control*, pages 4409–4413.

- [Ljung, 1999] Ljung, L. (1999). *System Identification - Theory For the User (2nd Edition)*. PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.
- [Ljung, 2002] Ljung, L. (2002). Identification for control : simple process models. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 4652–4657, Las Vegas, Nevada USA.
- [Ljung, 2003] Ljung, L. (2003). Identification for control : Simple process models. Technical report, Linkopings universitet, Linkoping, Sweden.
- [Loiseau et al., 2009] Loiseau, J., Michiels, W., Niculescu, S., and Sipahi, R. (2009). *Topics in Time Delay Systems*, volume 388. Lecture Notes in Control and Information Sciences.
- [Longchamp, 2006] Longchamp, R. (2006). *Commande numérique des systèmes dynamiques : cours d'automatique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [Luke, 1975] Luke, Y. (1975). *Mathematical functions and their approximations*. Academic Press.
- [Lunel, 2001] Lunel, S. (2001). Parameter identifiability of differential delay equations. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 15 :655–678.
- [Lygeros, 2004] Lygeros, J., editor (2004). *Lecture Notes on Hybrid Systems*, volume 2034. Department of Electrical and Computer Engineering University of Patras.
- [Lygeros et al., 2003] Lygeros, J., Johansson, K., Simic, S., Zhang, J., and Sastry, S. (2003). Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48 :2–17.
- [Makila and Partington, 1999] Makila, P. and Partington, J. (1999). Laguerre and kautz shift approximations of delay systems. *International Journal of Control*, 72 :932–946.
- [Malek-Zavarei and Jamshidi, 1987] Malek-Zavarei, M. and Jamshidi, M. (1987). *Time-delay systems : analysis, optimization, and applications*. North-Holland.
- [Man et al., 1999] Man, K., Tang, K., and Kwong, S. (1999). *Genetic algorithms : concepts and designs*, volume 1. Springer.
- [Marshall, 1979] Marshall, J. (1979). *Control of time-delay systems*. 10. IEE Control Engineering, Peter Peregrinus Ltd.
- [Marshall, 1980] Marshall, J. (1980). Identification strategies for time delay systems. In *H. Unbehauen (Ed.), Lecture Notes in Control and Information Sciences : Methods and Applications of Adaptive Control*, Springer-Verlag, Berlin, 24.
- [Mascolo, 1999] Mascolo, S. (1999). Congestion control in high speed communication networks using the smith principle. *Automatica*.
- [Matveev and Savkin, 2000] Matveev, A. and Savkin, A. (2000). *Qualitative theory of hybrid dynamical systems*. Birkhauser Boston.
- [Mboup et al., 2008] Mboup, M., Join, C., and Fliess, M. (2008). A delay estimation approach to change point detection. In *16th Medit. Conf. Control Automat.*

## B.0. BIBLIOGRAPHIE

- [Mensler, 1999] Mensler, M. (1999). *Analyse et étude comparative de méthodes d'identification des systèmes à représentation continue. Développement d'une boîte à outils logicielle*. PhD thesis, Université de Nancy 1, Nancy, FRANCE.
- [Mercère et al., 2006] Mercère, G., Ouvrard, R., Gilson, M., and Garnier, H. (2006). Identification de systèmes multivariables à temps continu par approche des sous-espaces. In *Journées Identification et Modélisation Expérimentale JIME'2006*, Poitiers.
- [Nakagiri and Yamamoto, 1995] Nakagiri, S. and Yamamoto, M. (1995). Unique identification of coefficient matrices, time delay and initial functions of functional differential equations. *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control*, 5(3) :323–344.
- [Niculescu, 2001] Niculescu, S. (2001). *Delay effects on stability : a robust control approach*. Springer Verlag, London.
- [Niculescu and Gu, 2004] Niculescu, S. and Gu, K. (2004). *Advances in Time-Delay Systems*, volume 38. Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
- [Niemeyer, 1996] Niemeyer, G. (1996). *Using wave variables intime delayed force reHecting teleoperation*. PhD thesis, MIT.
- [Niemeyer and Slotine, 1998] Niemeyer, G. and Slotine, J. (1998). Towards force-revecting teleoperation over the internet. In *In IEEE international conference on robotics and automation*, pages 1909–1915, Leuven, Belgium.
- [Noiret, 2000] Noiret, C. (2000). *Utilisation du calcul formel pour l'identifiabilité de modèles paramétriques et nouveaux algorithmes en estimation de paramètres*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne.
- [Nuninger et al., 2006] Nuninger, W., Perruquetti, W., and Richard, J.-P. (2006). Bilan et enjeux des modèles de frottements : tribologie et contrôle au service de la sécurité des transports. In *5e Journées Européennes du Freinage, JEF'06*, Lille, France.
- [Nuninger et al., 2007] Nuninger, W., Perruquetti, W., and Richard, J.-P. (2007). Parametric identification of input-delay systems with unknown time delay. In *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*, Zhangjiajie, Hunan, China.
- [O'Dwyer, 1992] O'Dwyer, A. (1992). A comparison of techniques for time delay estimation. Master's thesis, Dublin City University, Dublin 9, Ireland.
- [O'Dwyer, 1993] O'Dwyer, A. (1993). A comparison of techniques for time delay estimation. In *Proceedings of the Irish Colloquium on DSP and Control*, Cambridge, England.
- [O'Dwyer, 1996] O'Dwyer, A. (1996). *The estimation and compensation of processes with time delays*. PhD thesis, Dublin City University, Dublin 9, Ireland.
- [O'Dwyer, 1999] O'Dwyer, A. (1999). A classification of techniques for the estimation of the model parameters of a time delayed process. In *Proceedings of the Irish Signals and Systems Conference, National University of Ireland*, Galway, Ireland.
- [O'Dwyer, 2000a] O'Dwyer, A. (2000a). Open loop time domain gradient methods for parameter and delay estimation. In *Technical Report, Dublin Institute of Technology, Kevin St., Dublin, Ireland*.

- [O'Dwyer, 2000b] O'Dwyer, A. (2000b). Time delayed process model parameter estimation : a classification of techniques. In *Proceedings of the UKACC International Conference on Control 2000*, Cambridge, England.
- [Oku, 2003] Oku, H. (2003). Application of a recursive subspace identification algorithm to change detection. In *13th IFAC Symposium on System Identification*.
- [Orlov et al., 2002] Orlov, Y., Belkoura, L., Dambrine, M., and Richard, J.-P. (2002). On identifiability of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :1319–1324.
- [Paoletti et al., 2007] Paoletti, S., Juloski, A., Ferrari-Trecate, G., and Vidal, R. (2007). Identification of hybrid systems : a tutorial. *European journal of control*, 13 :249–268.
- [Pekpe, 2004] Pekpe, K. (2004). *Identification par les techniques des sous-espaces : application au diagnostic*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [Peleties and and, 1989] Peleties, P. and and, R. D. (1989). A modelling strategy with event structures for hybrid systems. In *28th IEEE Conference on Decision and Control*.
- [Pereira et al., 2009] Pereira, E., Trapero, J., Daz, I., and Feliu, V. (2009). Adaptive input shaping for manoeuvring flexible structures using an algebraic identification technique. *Automatica*, 45 :1046–1051.
- [Perruquetti and Barbot, 2002] Perruquetti, W. and Barbot, J. (2002). *Sliding mode control in engineering*. Marcel Dekker, Inc. New York, NY, USA.
- [Petit, 1995] Petit, R. (1995). *L'outil mathématique*. Enseignement de la physique, Masson.
- [Piché, 1990] Piché, R. (1990). Low-order rational all pass approximations to e-s. In *Proceedings of the 11th IFAC World Congress on Automatic Control*, volume 2, pages 134–137, Tallinn, Estonia.
- [Qian et al., 2008] Qian, Q., Wei, H., Yixin, Z., Qiang, H., Qiaoli, H., and Lin, X. (2008). System identification of the double inverted pendulum based on genetic algorithm. In *2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA 2008*.
- [Quarteroni et al., 2000] Quarteroni, A., Sacco, R., and Saleri, F. (2000). *Méthodes numériques pour le calcul scientifique : programmes en MATLAB*. Springer.
- [Quenec'Hdu et al., 1994] Quenec'Hdu, Y., Gueguen, H., and Buisson, H. (1994). Les systèmes hybrides : une nouvelle problématique. In *ADPM'94 Symposium*.
- [Quenec'Hdu and Zaytoon, 2001] Quenec'Hdu, Y. and Zaytoon, J. (2001). *Systèmes dynamiques hybrides*, chapter Introduction, pages 23–27. Hermès Science publications, Paris.
- [Rad et al., 1995] Rad, A., Tsang, K., and Lo, W. (1995). Adaptive control of dominant time delay systems via polynomial identification. *IEE Proc : Control Theory Appl*, 142 :433–438.
- [Rake, 1980] Rake, H. (1980). Step response and frequency response methods. *Automatica*, 16 :519–526.

## B.0. BIBLIOGRAPHIE

- [Ramakrishnan and Chidambaram, 2006] Ramakrishnan, V. and Chidambaram, M. (2006). Estimation of a soptd transfer function model using a single asymmetrical relay feedback test. *Computers and Chemical Engineering*, 27 :1779–1784.
- [Rangaiah and Krishnaswamy, 1994] Rangaiah, G. and Krishnaswamy, P. (1994). Estimating second-order plus dead time model parameters identification of continuous-time systems. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 33 :1867–1971.
- [Rao and Unbehauen, 2006] Rao, G. and Unbehauen, H. (2006). Identification of continuous-time systems. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, 153(2) :185–219.
- [Reeves and Rowe, 2003] Reeves, C. and Rowe, J. (2003). *Genetic algorithms : principles and perspectives : a guide to GA theory*. Kluwer Academic Publishers.
- [Reid, 1977] Reid, J. (1977). Structural identifiability in linear time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :1418–1422.
- [Ren and Rad, 2007] Ren, X. and Rad, A. (2007). Identification of nonlinear systems with unknown time delay based on time-delay neural networks. *IEEE transactions on neural networks*, 18(9) :1536–1541.
- [Ren et al., 2005] Ren, X., Rad, A., Chan, P., and Lo, W. (2005). On line identification of continuous-time systems with unknown time delay. *IEEE Tac*, 50(9) :1418–1422.
- [Richalet et al., 1991] Richalet, J., Rault, A., and Pouliquen, R. (1991). *Identification des processus par la méthode du modèle*. Gordon Breach, Londres.
- [Richard and Divoux, 2007] Richard, J. and Divoux, T. (2007). *Systèmes commandés en réseau*. Hermès-Lavoisier.
- [Richard, 1998] Richard, J.-P. (1998). Some trends and tools for the study of time delay systems. In *In Second conference IMACS-IEEE CESA '98, computational engineering in systems applications, Plenary lecture*, pages 27–43.
- [Richard, 2000] Richard, J.-P. (2000). Linear time delay systems :some recent advances and open problems. In *In Second IFAC workshop on linear time delay systems, Plenary lecture*.
- [Richard, 2003] Richard, J.-P. (2003). Time delay systems : An overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39 :1667–1694.
- [Rioul, 2008] Rioul, O. (2008). Théorie des distributions, transformée de fourier et convolution. Technical report, cours abrégé, Dépt. Comelec, TELECOM Paris-Tech.
- [Rodier, 1993] Rodier, F. (1993). *Distributions et Transformation de Fourier*. Ediscience international.
- [Roe et al., 2007] Roe, J., Gaoy, R., and O'Dwyer, A. (2007). Identification of a time-delayed process model using an overparameterisation method. In *IET Conference Publications*.
- [Roy et al., 1991] Roy, S., Malik, O., and Hope, G. (1991). Adaptive control of plants using all-zero model for dead-time identification. In *IEE PROCEEDINGS-D*, volume 138.



- [Rudolph and Woittennek, 2008] Rudolph, J. and Woittennek, F. (2008). An algebraic approach to parameter identification in linear infinite dimensional systems. In *In IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 332–337, Ajaccio, France.
- [Saccomani and Cobelli, 1992] Saccomani, M. and Cobelli, C. (1992). *Qualitative Experiment Design in Physiological System Identification*. IEEE Control Systems.
- [Sagara and Zhao, 1991] Sagara, S. and Zhao, Z. (1991). *Identification of continuous-time systems, methodology and computer implementation*, chapter Application of digital filtering techniques, pages 291–324. Kluwer Academic Publishers.
- [Saha et al., 1991] Saha, D., Bapat, V., and Roy, B. (1991). *Identification of continuous-time systems, methodology and computer implementation*, chapter The poisson moment functional technique—Some new results, pages 327–361. Kluwer Academic Publishers.
- [Schoukens et al., 1994] Schoukens, J., Pintelon, R., and hamme, H. V. (1994). Identification of linear dynamic systems using piecewise constant excitations : Use, misuse and alternatives. *Automatica*, 30(7) :1153–1169.
- [Schwartz, 1966] Schwartz, L. (1966). *Théorie des distributions*. 2nd ed. Hermann, Paris.
- [Söderström and Mahata, 2000] Söderström, T. and Mahata, K. (2000). On instrumental variable and total least squares approaches for identification of noisy systems. *International Journal of Control*, 75(6) :381–389.
- [Söderström and Stoica, 2000] Söderström, T. and Stoica, P. (2000). Instrumental variable methods for system identification. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 21(1) :1–9.
- [Seborg et al., 1989] Seborg, D., Edgar, T., and Mellichamp, D. (1989). *Process dynamics and control*. John Wiley and Sons.
- [Seuret, 2006] Seuret, A. (2006). *Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille.
- [Shin et al., 2007] Shin, G., Song, Y., Lee, T., and Choi, H. (2007). Genetic algorithm for identification of time delay systems from step responses. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 5(1) :79–85.
- [Sibille et al., 2000] Sibille, P., Mensler, M., and Garnier, H. (2000). Evaluation comparative des performances de la méthode des moments partiels r einitialis es pour l’identification de modèles à temps continu. In *1 ere Conférence Internationale Francophone d’Automatique (CIFA’2000)*, pages 724–729, Lille.
- [Silva et al., 2001] Silva, G., Datta, A., and Bhattacharyya, S. (2001). Controller design via pade approximation can lead to instability. In *In 40th IEEE CDC’01, Conference on decision and control*, pages 4733–4737, Orlando, FL.
- [Sinbrot and Field, 1957] Sinbrot, M. and Field, M. (1957). On the analysis of linear and non linear systems. *Trans. on the ASME*, 79 :547–552.
- [Sinha, 1991] Sinha, N. (1991). A least square based model-fitting identification technique for diesel prime movers with unknown dead time. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 6(2) :251–256.

## B.0. BIBLIOGRAPHIE

- [Sinha, 2000] Sinha, N. (2000). Identification of continuous-time systems from samples of input/output data : An introduction. *Sadhana*, 25(2) :75–83.
- [Sinha and Rao, 1991] Sinha, N. and Rao, G. (1991). *Identification of continuous-time systems, methodology and computer implementation*. Kluwer Academic Publishers.
- [Sivanandam and Deepa, 2007] Sivanandam, S. and Deepa, S. (2007). *Introduction to genetic algorithms*. Springer.
- [Smyth, 1998] Smyth, G. (1998). Polynomial approximation. *Encyclopedia of Biostatistics*.
- [Soderstrom and Stoica, 1989] Soderstrom, T. and Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice-Hall.
- [Strejc, 1959] Strejc, V. (1959). Näherungsverfahren für aperiodische Übergangskarakteristiken. *Regelungstechnik*, 7 :124–128.
- [Sun and Ge, 2005] Sun, Z. and Ge, S. (2005). *Switched Linear Systems : Control And Design*. Springer-Verlag, London.
- [Taarit et al., 2010] Taarit, K. I., Belkoura, L., and Ksouri, M. (2010). Estimation en ligne par approche algébrique : application au cas des frottements secs. In *CIFA 2010, Sixième Conférence Internationale Francophone d’Automatique*, Nancy, France.
- [Taarit et al., 2011] Taarit, K. I., Belkoura, L., Ksouri, M., and Richard, J.-P. (2011). A fast identification algorithm for systems with delayed inputs. *International Journal of System Sciences*, 42(3) :449–456.
- [Taarit et al., 2007] Taarit, K. I., Laabidi, K., Belkoura, L., Ksouri, M., and Richard, J.-P. (2007). Identification algébrique des systèmes à retard : Application à une soufflerie de séchage. In *STA’07, 8th international conference on Sciences and Techniques of Automatic control, Hammamet, Tunisie*, Hammamet, Tunisie.
- [Tan, 2004] Tan, Y. (2004). Time varying time delay estimation for nonlinear systems using neural networks. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 14 :63–68.
- [Teng and Sirisena, 1988] Teng, F. and Sirisena, H. (1988). Self-tuning pid controllers for dead time process. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 35 :119–125.
- [Thomassin, 2005] Thomassin, M. (2005). *Estimation de retard dans des conditions expérimentales passives ; application à l’identification de bief de rivière*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy 1.
- [Tian et al., 2009] Tian, Y., Floquet, T., Belkoura, L., and Perruquetti, W. (2009). Algebraic switching time identification for a class of linear hybrid systems. In *ADHS’09*.
- [Tian et al., 2008] Tian, Y., Floquet, T., and Perruquetti, W. (2008). Fast state estimation in linear time-varying systems : an algebraic approach. In *47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 332–337, Cancun, Mexico.
- [Tohome, 2008] Tohome, E. (2008). *Initialization of Output Error Identification Algorithms*. PhD thesis, Ecole Supérieure d’Ingénieurs de Poitiers.

- [Trigeassou, 1987] Trigeassou, J. (1987). *Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique. Application à l'identification des systèmes linéaires*. PhD thesis, Université de Poitiers, France.
- [Trigeassou and Poinot, 2001] Trigeassou, J. and Poinot, T. (2001). *Identification des systèmes*, chapter Identification des systèmes à représentation continue, pages 177–212. Hermès, Paris.
- [Tuch et al., 1994] Tuch, J., A. Feuer, and Palmor, Z. (1994). Time delay estimation in continuous linear timeinvariant systems. *I.E.E.E. Trans.on Automatic control*, 39 :823–827.
- [Unbehauen and Rao, 1987] Unbehauen, H. and Rao, G. (1987). *Identification of continuous systems*. Systems and control series, North-Holland, Amsterdam.
- [Unbehauen and Rao, 1997] Unbehauen, H. and Rao, G. (1997). Identification of continuous-time systems : a tutorial. In *11th IFAC Symposium on System Identification*, pages 1023–1049, Fukoka, Japan.
- [Unbehauen and Rao, 1998] Unbehauen, H. and Rao, G. (1998). A review of identification in continous-time systems. *Annual Reviews in Control*, 22 :145–171.
- [Utkin, 2002] Utkin (2002). *Sliding mode control in engineering*. Marcel Dekker, Inc. New York, NY, USA.
- [Veysset, 2006] Veysset, F. (2006). *Modélisation et identification de comportements de l'avion en vol turbulent par modèles à retards*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, France.
- [Vidal et al., 2003] Vidal, R., Soatto, S., Ma, Y., and Sastry, S. (2003). An algebraic geometric approach to the identification of a class of linear hybrid systems. In *n Proc. of the 42nd IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*.
- [Villagra et al., 2009] Villagra, J., Dandrhea-novel, B., Choi, S., M.Fliess, and Mounier, H. (2009). Robust stop-and go control strategy : an algebraic approach for nonlinear estimation and control. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 7 :270–291.
- [Vose, 1999] Vose, M. (1999). *The simple genetic algorithm : foundations and theory*. The MIT Press.
- [Walter and Pronzato, 1996] Walter, E. and Pronzato, L. (1996). On the identifiability and distinguishability of nonlinear parametric models. *Mathematics and Computers in Simulation*, 42 :125–134.
- [Wang et al., 2004] Wang, M., Chen, X., and Qian, J. (2004). Delay system identification using global optimization methods. In *Proceedings of the Third International Conference on Machine Learning and Cyhematics*, volume 2, pages 701–705, Shanghai.
- [Wang et al., 2001a] Wang, Q., Guo, X., and Zhang, Y. (2001a). Direct identification of continous time delay systems from step responses. *Journal of Process Control*, 11 :531–542.
- [Wang et al., 2001b] Wang, Q., Guo, X., and Zhang, Y. (2001b). Robust identification of continuous systems with dead-time from step responses. *Annual Reviews in Control*, 37 :377–390.

## B.0. BIBLIOGRAPHIE

- [Wang et al., 2008] Wang, Q., Liu, M., and Hang, C. (2008). Integral identification of continuous-time delay systems in the presence of unknown initial conditions and disturbances from step tests. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 47 :4929–4936.
- [Watanabe et al., 1996] Watanabe, K., Nobuyama, E., and Kojima, K. (1996). Recent advances in control of time-delay systems a tutorial review. In *In 35th IEEE CDC'96, Conference on decision and control*, pages 1193–1198, Kobe, Japan.
- [Witsenhausen, 1966] Witsenhausen, H. (1966). A class of hybrid state continuous time dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2) :161–167.
- [Wong and Bayoumi, 1982] Wong, K. and Bayoumi, M. (1982). A self-tuning control algorithm for systems with unknown time delay. In *Proc. IFAC Identification and System Parameter Estimation Conference*, pages 1193–1198, Washington, DC ; United Kingdom.
- [Yamamoto, 1984] Yamamoto, Y. (1984). A note on linear input/output maps of boundedtype. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29 :733–734.
- [Yang et al., 2008] Yang, Y., Wang, Y., and Shuang-Hua, Y. (2008). Design of a networked control system with random transmission delay and uncertain process parameters. *International Journal of Systems Science*, 39 :1065–1074.
- [Yang et al., 1997] Yang, Z., Hachino, T., and Tsuji, T. (1997). On-line identification of continuous time-delay systems combining leastsquares techniques with a genetic algorithm. *International Journal of Control*, 66(1) :23–42.
- [Yang et al., 2003] Yang, Z., Iemura, H., Shunshoku, K., and Wada, K. (2003). Identification of continous time systems with unknown time delay by non linear least square and instrumental variable methods. In *IFAC*.
- [Yang et al., 2007] Yang, Z., Iemura, H., Shunshoku, K., and Wada, K. (2007). Identification of continuous-time systems with multiple unknown time delays by global nonlinear least-squares and instrumental variable methods. *Automatica*, 43 :1257–1264.
- [Young, 2007] Young, P. (2007). Parameter estimation for continuous-time models - a survey. *Automatica*, 17(1) :23–39.
- [Young and Garnier, 2006] Young, P. and Garnier, H. (2006). Identification and estimation of continuous-time data-based mechanistic models for environmental systems. *Environmental Modelling and Software*, 21(8) :1055–1072.
- [Zabic, 2005] Zabic, S. (2005). *Impulsive systems*. PhD thesis, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana, USA.
- [Zampieri, 2008] Zampieri, S. (2008). Trends in networked control systems. In *Proceedings of the 17th World Congress, the International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea.
- [Zaytoon, 2001] Zaytoon, J. (2001). *Systèmes dynamiques hybrides*. Hermes Science.
- [Zaytoon and Quenec'Hdu, 2001] Zaytoon, J. and Quenec'Hdu, Y. (2001). *Systèmes dynamiques hybrides*, chapter Sur la modélisation des systèmes hybrides, pages 87–91. Hermès Science publications, Paris.

- [Zglimbea et al., 2008] Zglimbea, R., Finca, V., and Marin, C. (2008). Identification of systems with friction via distributions using simplified dahl model. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2 :269–276.
- [Zhang et al., 2001] Zhang, J., Johansson, K., Lygeros, J., and Sastry, S. (2001). Zeno hybrid systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 11 :435–451.
- [Zhang et al., 2008] Zhang, Y., Chen, Y., Sheng, T., and Hesketh, T. (2008). Fault detection and diagnosis of networked control system. *International Journal of Systems Science*, 39 :1017–1024.
- [Zhong, 2006] Zhong, Q. (2006). *Robust control of time-delay systems*. Springer Verlag, London.
- [Ziegler et al., 1942] Ziegler, J., Nichols, N., and Rochester, N. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Trans. ASME*, 64 :759–768.
- [Zito, 2005] Zito, G. (2005). *Contribution à une méthodologie d'identification et commande des systèmes industriels intégrée d'identification et commande des systèmes industriels*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.

## Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse concernent le problème d'identification des systèmes à retards et d'une certaine classe de systèmes hybrides appelés "impulsifs". Dans la première partie, un algorithme d'identification rapide a été proposé pour les systèmes à entrée retardée, considérés en boucle ouverte, avec un ou plusieurs retards. Il est basé sur une méthode algébrique d'estimation non asymptotique initiée en 2003 par Fliess et Sira-Ramirez pour les systèmes sans retard. Une telle technique, ici présentée dans un cadre distributionnel, mène à des schémas de réalisation simples, impliquant des intégrateurs, des multiplicateurs et des fonctions continues par morceaux, polynomiales ou exponentielles. Plusieurs exemples représentatifs de systèmes à retards sont étudiés. La deuxième partie a été consacrée à l'identification des systèmes impulsifs. En se basant sur le formalisme des distributions, une procédure d'identification a été élaborée afin d'annihiler les termes singuliers des équations différentielles représentant ces systèmes. Ceci rend possible, une estimation en ligne des instants de commutation et des paramètres inconnus, sans que la connaissance des lois de commutation soit nécessaire. Des simulations numériques d'un pendule simple soumis à des frottements secs illustrent notre méthodologie.

**Mots clés :** Systèmes à retards, identification, identification algébrique, estimation en ligne, systèmes hybrides, systèmes impulsifs, théorie des distributions, valeurs propres généralisées.

## Abstract

This PhD thesis concerns the problem of identification of the delay systems and the continuous-time systems subject to impulsive terms. Firstly, a fast identification algorithm is proposed for systems with delayed inputs. It is based on an algebraic, non-asymptotic estimation technique initiated in the framework of systems without delay by Fliess and Sira-Ramirez in 2003. Such technique, developed here in the distributional framework, leads to simple realization schemes involving integrators, multipliers and piecewise polynomial or exponential time functions. Thus, it allows for a real-time implementation. Several representative examples of delay systems are studied. The second part deals with on-line identification of a class of impulsive systems. Again in the framework of distributions, a scheme is proposed in order to annihilate singular terms in the corresponding differential equations. As a result, an online estimation of the unknown parameters is provided, regardless of the switching times or the impulse rules. Numerical simulations of simple pendulum subject to dry friction are illustrating our methodology.

**Keywords :** Time delay system, identification, algebraic identification, online estimation, hybrid systems, impulsive systems, distributions theory, generalized eigenvalue problem.