



**HAL**  
open science

# COMMANDE PID DES SYSTÈMES À RETARD

Rihem Farkh

► **To cite this version:**

Rihem Farkh. COMMANDE PID DES SYSTÈMES À RETARD. Automatique / Robotique. École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 2011. Français. NNT: . tel-00587529v1

**HAL Id: tel-00587529**

**<https://theses.hal.science/tel-00587529v1>**

Submitted on 20 Apr 2011 (v1), last revised 21 Apr 2011 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique  
Uuiversité de Tunis-El Manar

# THÈSE de DOCTORAT

présentée à :

**L'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis**

pour l'obtention du titre

**Docteur en Génie Électrique**

présentée par :

**Rihem FARKH**

**Ingénieur ENIT**

Titre de la thèse :

**COMMANDE PID DES SYSTÈMES  
À RETARD**

Soutenue le 26 Janvier 2011 devant la commission d'examen :

<i>Président :</i>	Mr. Faouzi BOUANI	- Maitre de conférences ENIT
<i>Directeur :</i>	Mr. Mekki KSOURI	- Professeur ENIT
<i>Rapporteurs :</i>	Mr. Jean Pierre RICHARD	- Professeur EC-LILLE
	Mr. Ridha BEN ABDENNOUR	- Professeur ENIG
<i>Examineur :</i>	Mr. Moncef GOSSA	- Professeur ESSTT

Thèse préparée à l'unité de recherche Analyse et Commande des Systèmes (ACS)



*À mes parents Hamadi et Safia ;  
Qui n'ont jamais cessé de m'aimer, de veiller à  
mon bonheur et de m'encourager pour accomplir  
mon devoir, qu'ils trouvent aujourd'hui dans ce  
travail le témoignage de mon profond attachement.  
À la mémoire de ma grande mère Zoubaida  
À ma grande mère Algia  
À mes frères Islem et Jaouher ;  
À ma fiancé Marwa ;  
À toute ma famille ;  
À tous mes amis ;  
À tous ceux qui me sont chers ;*



# Remerciements

---

Je tiens d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Mekki KSOURI, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis et directeur de cette thèse, pour son encadrement consciencieux, la grande autonomie qu'il a su m'accorder ainsi que sa présence et son soutien scientifique et moral tout au long de ces trois années au sein de l'unité de recherche ACS. Merci pour la confiance dont vous avez fait preuve à mon égard.

Mes sincères remerciements vont aussi à Monsieur Faouzi BOUANI, Maître de conférences à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.

J'exprime ma gratitude à Mademoiselle Kaouther LAABIDI, Maître assistante Habilitée à l'École Supérieure de Technologie et d'Informatique, pour ses conseils et pour l'efficacité remarquable de ses interventions.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Jean Pierre RICHARD, Professeur à l'École Centrale de Lille et à Monsieur Rida Ben ABDENNOUR, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Gabès, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail, pour le temps qu'ils ont bien voulu consacrer à cette tâche et les enrichissements divers qu'ils ont apportés à mon mémoire de thèse. Je leurs en suis reconnaissant.

Je tiens également à remercier Monsieur Moncef GOSSA Professeur à l'École Supérieure des Sciences et Techniques et directeur de ISET Rades, d'avoir examiné mon mémoire de thèse et pour ses remarques subtiles et enrichissantes.

C'est avec sympathie que je souhaite témoigner ma reconnaissance à Madame Moufida KSOURI pour la pertinence de ses remarques et ses conseils. Je lui adresse mes sincères remerciements.

Je souhaite également exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué, directement ou indirectement, au bon déroulement de cette thèse au travers de leur aide, leur soutien, leurs encouragements.

Enfin, j'aimerais conclure en remerciant particulièrement mes parents, Hamadi et Safia, pour m'avoir toujours encouragé à poursuivre mes études et m'avoir permis d'arriver là où j'en suis.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Stabilité des Systèmes à Retards</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Exemples de systèmes à retards . . . . .	8
1.3	Définitions et Notations . . . . .	11
1.3.1	Le choix de l'état . . . . .	11
1.3.2	Définitions . . . . .	12
1.4	Classification des systèmes à retards . . . . .	13
1.4.1	Les systèmes de type neutre . . . . .	13
1.4.2	Les systèmes de type retardé . . . . .	13
1.4.3	Les systèmes linéaires invariants à retards discrets . . . . .	14
1.5	Stabilité des systèmes à retards . . . . .	14
1.5.1	Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	14
1.5.2	Stabilité des systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov . . . . .	18
1.6	Stabilité des Quasi-polynômes . . . . .	21
1.6.1	Les zéros d'un quasi-polynôme . . . . .	23
1.6.2	Stabilité des quasi-polynômes . . . . .	28
1.7	Conclusion . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Commande PID des Systèmes à Retards</b>	<b>37</b>
2.1	Introduction . . . . .	37
2.2	Résultats préliminaires pour l'analyse des systèmes à retards . . . . .	39
2.3	Commande des systèmes à retards du premier ordre par régulateur PI	40
2.4	Commande des systèmes à retards du premier ordre par régulateur PID . . . . .	44
2.5	Commande par régulateur PI pour un système du second ordre à retard	50
2.6	Commande par régulateur PID pour un système du second ordre à retard . . . . .	59
2.7	Conclusion . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Robustesse et Performances de la Commande PID des Systèmes à Retards</b>	<b>71</b>
3.1	Introduction . . . . .	71
3.2	Théorème de Kharitonov généralisé . . . . .	73
3.2.1	Théorème de Kharitonov généralisé pour les polynômes . . . . .	73
3.2.2	Théorème de Kharitonov généralisé pour les quasi-polynômes . . . . .	78
3.3	Commande PID robuste des systèmes incertains à retards . . . . .	79
3.3.1	Synthèse d'un régulateur PI robuste . . . . .	79
3.3.2	Synthèse d'un régulateur PID robuste . . . . .	81

3.4	Application à la commande robuste des systèmes incertains à retards du premier et du second ordre . . . . .	82
3.4.1	Commande robuste des systèmes du premier ordre à retard . . . . .	82
3.4.2	Commande robuste des systèmes du second ordre à retard . . . . .	87
3.5	Application pratique au cas du $PT - 326$ . . . . .	91
3.6	Performances de la commande des systèmes à retards . . . . .	100
3.6.1	Algorithmes génétiques . . . . .	101
3.6.2	Exemple de simulation . . . . .	104
3.7	Conclusion . . . . .	106

# Table des figures

1.1	Véhicule sous-marin [Zhong, 00] . . . . .	9
1.2	Système physique de véhicule sous-marin [Zhong, 00] . . . . .	9
1.3	Grue [Ernuex, 09] . . . . .	10
1.4	Échangeur de chaleur de vapeur-eau [Normey-Rico, 07] . . . . .	10
1.5	Chaque segment de longueur $\tau$ est vu sur $[-\tau, 0]$ . . . . .	12
1.6	Stabilité au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre $x_e$ . . . . .	16
1.7	Stabilité exponentielle au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre $x_e$ . . . . .	18
1.8	Diagramme exponentiel . . . . .	24
1.9	Diagramme exponentiel de l'exemple 1.4 . . . . .	25
1.10	Diagramme de puissance . . . . .	26
1.11	Diagramme de puissance de l'exemple 1.5 . . . . .	27
1.12	Croissance de la phase de $\delta(j\omega)$ . . . . .	28
1.13	Vérification de la propriété d'entrelacement pour les polynômes de Hurwitz . . . . .	29
1.14	Échec de la propriété d'entrelacement pour les polynômes instables . . . . .	30
2.1	Illustration de la provenance des retards dans une boucle de commande	38
2.2	Commande d'un système du premier ordre à retard . . . . .	41
2.3	Région de stabilité pour l'Exemple 2.1 . . . . .	44
2.4	Région de stabilité dans le plan $(K_i, K_d)$ pour : (a) $K_p \in [-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}]$ , (b) $K_p = \frac{1}{K}$ et (c) $K_p = K_u = \frac{1}{K} [\frac{T}{L}\alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)]$ . . . . .	45
2.5	Frontières de la région de stabilité $(K_i, K_d)$ pour l'Exemple 2.2 . . . . .	48
2.7	Représentation des courbes de $f(z)$ , de $g(z)$ et de $h$ (Cas : $-\frac{a_0}{K} <$ $K_p < K_u$ ) . . . . .	53
2.8	Représentation des courbes de $f(z)$ , de $g(z)$ et de $h$ (Cas : $K_p = K_u$ )	54
2.9	Représentation des courbes de $f(z)$ , de $g(z)$ et de $h$ (Cas : $K_p > K_u$ )	54
2.10	Domaine de stabilité du contrôleur PI de l'Exemple 2.4 . . . . .	59
2.11	Réponse indicielle en boucle fermée de l'Exemple 2.4 . . . . .	59
2.13	Courbe de $\delta_i(z)$ (en pointillé), courbe de $-a_1 \frac{z}{L} \cos(z)$ (en vert), courbe de $\sin(z)(\frac{z^2}{L^2} - a_0)$ (en bleu) et courbe de $b(z)$ (en rouge) . . . . .	63
2.14	Frontières de la région de stabilité $(K_i, K_d)$ pour $K_p = 1.3$ correspon- dant à l'exemple 2.5 . . . . .	66
2.16	Frontières de la région de stabilité $(K_i, K_d)$ pour $K_p = 0.5$ correspon- dant à l'exemple 2.6 . . . . .	68
2.17	Réponse indicielle en boucle fermée de l'exemple 2.6 . . . . .	68
3.1	Région de stabilité dans le plan $(K_p, K_i)$ pour $g_2$ . . . . .	83
3.2	Région de stabilité dans le plan $(K_p, K_i)$ pour $G(s)$ . . . . .	84
3.3	Région de stabilité finale dans le plan $(K_p, K_i)$ pour $G(s)$ . . . . .	84

3.4 Réponses indicielles du système intervalle à retard ( $K_p = 0.5, K_i = 0.15$ ) . . . . .	85
3.5 Région de stabilité dans le plan ( $K_i, K_d$ ) pour $K_p = 0.6$ . . . . .	86
3.6 Région de stabilité finale dans le plan ( $K_i, K_d$ ) pour $K_p = 0.6$ . . . . .	87
3.7 Réponses indicielles du système intervalle à retard ( $K_p = 0.6, K_i = 0.2, K_d = 0.5$ ) . . . . .	88
3.8 Région de stabilité dans le plan ( $K_p, K_i$ ) pour $G(s)$ . . . . .	89
3.9 Région de stabilité finale dans le plan ( $K_p, K_i$ ) pour $G(s)$ . . . . .	90
3.10 Région de stabilité dans le plan ( $K_i, K_d$ ) du système intervalle $G(s)$ pour $K_p = 0.5$ . . . . .	91
3.11 Région de stabilité finale dans le plan ( $K_i, K_d$ ) du système intervalle $G(s)$ pour $K_p = 0.5$ . . . . .	92
3.12 Procédé $PT - 326$ . . . . .	92
3.13 Schéma du procédé . . . . .	93
3.15 Réponse à un échelon du $PT - 326$ . . . . .	94
3.16 Région de stabilité dans le plan ( $K_p, K_i$ ) pour $G(s)$ . . . . .	96
3.17 Région de stabilité finale dans le plan ( $K_p, K_i$ ) pour $G(s)$ . . . . .	96
3.18 Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 0.1, K_i = 0.1$ ) . . . . .	97
3.19 Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 1, K_i = 0.33$ ) . . . . .	98
3.20 Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 1, K_i = 0.65$ ) . . . . .	98
3.21 Évolution de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 1.37, K_i = 2.77$ ) . . . . .	98
3.22 Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 1.54, K_i = 1.18$ ) . . . . .	99
3.23 Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 2.94, K_i = 4.04$ ) . . . . .	99
3.24 Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 3.95, K_i = 4.33$ ) . . . . .	99
3.25 Evolution d'un algorithme génétique . . . . .	102
3.26 Principe de l'optimisation par algorithme génétique . . . . .	103
3.27 Domaine de stabilité de l'exemple 3.6 . . . . .	104
3.28 Réponses indicielles des différents régulateurs PI . . . . .	105
3.29 Région de stabilité dans le plan ( $K_p, K_i, K_d$ ) correspondant à l'exemple 3.6 . . . . .	105
3.30 Réponses indicielles des différents régulateurs PID optimaux . . . . .	106

# Liste des tableaux

3.1	Identification des paramètres du $PT - 326$ . . . . .	95
3.2	Régulateurs PI . . . . .	96
3.3	Comparison des performances . . . . .	100
3.4	Paramètres optimaux du régulateur PI . . . . .	105
3.5	Paramètres optimaux du régulateur PID . . . . .	106



# Liste des Publications

## Conférences internationales avec comité de lecture :

1. R.Farkh,K.Laabidi and M.Ksouri, "Real Time Control for Time Delay System", Proceedings 23rd European Conference on Modelling and Simulation, ECMS, Madrid, Espagne 2009.
2. R.Farkh,K.Laabidi and M.Ksouri, "PI Stabilization of Time Delay System ", International Conference of Modeling and Simulation - MOSIM'10 - May10-12, 2010 - Hammamet - Tunisia.

## Reuves internationales avec comité de lecture :

1. R. Farkh, K. Laabidi, M. Ksouri, "PI Control for Second Order Delay System With Tuning Parameter Optimization", International Journal of Electrical and Electronics Engineering,vol.3, pp. 1-7, 2009.(Ebesco,Compendex, Doaj, CiteSeerX)
2. R. Farkh, K. Laabidi, M. Ksouri,, "Computation of All Stabilizing PID Gain for Second-Order Delay System", Mathematical Problems in Engineering, vol. 2009, Article ID 212053, 17 pages, 2009. doi :10.1155/2009/212053.(Scopus, ISI, IF :0.553)
3. R. Farkh, K. Laabidi, M. Ksouri, "Robust Stabilization for Uncertain Second Order Time-Lag System" The Mediterranean Journal of Measurement and Control, Vol. 5, No. 4, 2009.(Scopus, Inspec, Compendex)
4. R. Farkh, K. Laabidi, M. Ksouri, "Robust PI/PID Controller for Interval First Order System with Time Delay", International journal of modelling identification and control, (acceptée).(Scopus, Inspec, Scirus)



# Introduction Générale

---

Jusqu'aux années cinquante plusieurs problèmes pratiques de commande n'avaient pas de solutions théoriques. C'est à partir des années soixante que des méthodes intéressantes de commande à caractère analytique sont apparues. Le développement de ces méthodes a été réalisé grâce au travail innovateur de Kalman sur le régulateur linéaire quadratique [Kalman, 60]. Cette nouvelle tendance a relancé des recherches auparavant abandonnées. Les contrôleurs ainsi obtenus sont généralement d'ordre élevé comparable à celui du système. Ces nouvelles méthodes de synthèse sont justifiées par la facilité de mise en oeuvre dans des calculateurs numériques, en prenant en considération le faible coût des mémoires et l'augmentation de la vitesse de traitement.

Cependant, il est bien connu que la plupart des contrôleurs utilisés dans les systèmes industriels sont d'ordre réduit. La popularité de ces contrôleurs provient du fait que malgré leurs structures relativement simples, il est souvent possible d'obtenir des performances satisfaisantes et une robustesse acceptable pour une large classe de systèmes.

Plusieurs approches empiriques ont été développées pour la synthèse des PID connus par leurs popularités dans les milieux industriels [Astrom, 95]. Elles reposent sur la représentation des processus par un modèle du premier ordre avec retard et permettent à partir d'essais pratiques d'ajuster les paramètres du régulateur PID [Ziegler, 42 ; Cohen, 76].

Il existe de nos jours un grand nombre de recherche et une littérature étendue sur les contrôleurs PID. La détermination de l'ensemble de contrôleurs PID qui stabilisent un système quelconque sans retard est un premier pas dans la réduction de l'écart entre la pratique et la théorie de la commande. Un axe de recherche consacré à la résolution de ce problème a pris comme point de départ l'utilisation du théorème de Hermite-Biehler comme critère de stabilité.

En effet, le problème de la détermination des conditions sous lesquelles toutes les racines d'un polynôme à coefficients réels sont dans le demi-plan complexe ouvert gauche joue un rôle important dans la théorie de stabilité de systèmes linéaires. Un tel polynôme est dit polynôme de Hurwitz. Beaucoup de conditions ont été proposées pour vérifier la stabilité d'un polynôme à coefficients réels sans chercher à calculer ses racines. Des résultats ont été d'abord obtenus par Routh, Hurwitz et Hermite au 19ème siècle.

Le théorème de Hermite-Biehler montre qu'un polynôme à coefficients réels est Hurwitz (stable) si et seulement s'il satisfait une certaine propriété d'entrelacement. Cependant, quand un polynôme est instable, le théorème de Hermite-Biehler ne fournit pas d'informations sur la distribution de ses racines.

Une généralisation du théorème de Hermite-Biehler, réalisée par Ozguler et Kocan [Ozguler, 94], a donné une formule pour déterminer une signature (différence entre le nombre des racines qui sont localisées dans la partie gauche du plan complexe et celles localisées dans partie droite) d'un polynôme réel non nécessairement de Hurwitz et sans racines sur l'axe imaginaire sauf une seule racine éventuelle à l'origine. Cette formule a été utilisée pour résoudre le problème de stabilisation par gain constant.

Récemment, des autres extensions applicables aux polynômes réels et complexes mais sans restrictions sur la localisation des racines ont été détaillées dans [Ho, 99, 00]. Ces généralisations sont non seulement d'intérêt académique mais ont également des implications pratiques dans la théorie de la commande. Un cas particulier de ces résultats a été employé avec succès pour obtenir de nouveaux résultats dans la synthèse des contrôleurs P, PI et PID [Ho, 97 ; Datta, 00].

Dans tout ce qui précède, les modèles considérés sont sans retard, or sur le plan pratique le retard est toujours présent surtout avec l'avènement de la commande à distance via un réseau [Richard, 07]. Le comportement dynamique de la plupart des procédés industriels peut être mathématiquement décrit par des systèmes linéaires à retards.

L'étude de la stabilité de ces systèmes commandés en boucle fermée revient de manière générale à l'étude et l'analyse des racines de l'équation caractéristique associée. Il ne s'agit plus de résoudre une équation polynomiale en variable de Laplace  $s$  mais de résoudre une équation polynomiale ayant comme variables  $s$  et  $e^{-Ls}$ , où  $L$  est le retard. Cette équation qui est connue sous le nom de quasi-polynôme ou polynôme exponentiel. Un quasi-polynôme possède dans le cas général, une infinité de racines du fait de la présence du terme  $e^{-Ls}$  dans son expression, ce qui implique que la stabilité du système dépend de la localisation de ces racines dans le plan complexe. Le nombre des racines à partie réelle positive est fini dans les cas des systèmes retardés et infini dans le cas des systèmes neutres.

Une extension du théorème de Hermite-Biehler a été proposée par Pontryagin [Pontryagin, 55] pour étudier la stabilité des quasi-polynômes. Ce théorème a contribué à la détermination d'un domaine de stabilité en boucle fermée d'un système du premier ordre à retard commandé par des régulateur P, PI et PID [Silva, 05 ; Bhattacharyya, 09]. En effet, le point fort de cette technique qu'elle reste applicable aux systèmes instables en boucle ouverte alors que plusieurs autres méthodes de synthèse de contrôleurs basées sur un principe de prédicteur (prédicteur de Smith, placement de spectre...) ne sont applicables que dans le cas des systèmes linéaires à retards stables en boucle ouverte.

Notre travail de thèse s'intéresse aux problématiques suivantes : la stabilité des systèmes à retards, la stabilité des quasi-polynômes, la synthèse des régulateurs PI et PID pour la commande d'un système du second ordre à retard et enfin la détermination des régions de stabilité robustes de différents contrôleurs pour la stabilisation des systèmes à retards avec des incertitudes paramétriques.

Le premier chapitre de ce mémoire présente un état de l'art sur les systèmes à retards. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la notion de stabilité pour cette classe de systèmes et pour les quasi-polynômes. Pour cela, nous rappellerons quelques concepts théoriques tels que les méthodes de Lyapunov-Krasovskii et de Razumikhin, d'autres outils pour l'analyse de la distribution dans le plan complexe des racines des quasi-polynômes et une introduction sur le théorème Hermite-Biehler pour l'analyse de la stabilité des quasi-polynômes. Ce chapitre nous permettra ainsi d'introduire les bases nécessaires à la bonne compréhension de nos travaux.

Le deuxième chapitre est consacré à l'application du théorème de Hermite-Biehler pour la commande des systèmes à retards. Dans une première partie, nous rappelons les anciens travaux qui portent sur la synthèse des contrôleurs PI et PID pour un système du premier ordre à retard [Silva, 01a, 01b, 02, 05; Bhattacharyya, 09]. Dans la deuxième partie nous présentons notre contribution qui consiste en la détermination de l'ensemble de tous les contrôleurs PI et PID pour la commande d'un système du second ordre à retard.

Le troisième chapitre s'intéresse à la commande robuste des systèmes à retards. Motivé par le théorème généralisé de Kharitonov, nous proposons de déterminer des contrôleurs PI et PID qui stabilisent un système à retard à paramètres incertains bornés.

Une conclusion générale et des perspectives sont données à la fin de ce mémoire.



# Stabilité des Systèmes à Retards

---

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Exemples de systèmes à retards</b>	<b>8</b>
<b>1.3</b>	<b>Définitions et Notations</b>	<b>11</b>
1.3.1	Le choix de l'état	11
1.3.2	Définitions	12
<b>1.4</b>	<b>Classification des systèmes à retards</b>	<b>13</b>
1.4.1	Les systèmes de type neutre	13
1.4.2	Les systèmes de type retardé	13
1.4.3	Les systèmes linéaires invariants à retards discrets	14
<b>1.5</b>	<b>Stabilité des systèmes à retards</b>	<b>14</b>
1.5.1	Stabilité au sens de Lyapunov	14
1.5.2	Stabilité des systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov	18
<b>1.6</b>	<b>Stabilité des Quasi-polynômes</b>	<b>21</b>
1.6.1	Les zéros d'un quasi-polynôme	23
1.6.2	Stabilité des quasi-polynômes	28
<b>1.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>

---

## 1.1 Introduction

Le retard est défini comme étant la propriété d'un système physique pour lequel la réponse à une action appliquée est retardée dans son effet [Xia, 09]. Les systèmes à retards, appelés aussi systèmes héréditaires ou encore systèmes décrits par des équations différentielles aux différences, représentent une classe de systèmes de dimension infinie largement rencontrée lors de la modélisation de phénomènes de transport et de propagation de matière, d'énergie ou d'information [Chiasson,07]. Le retard est rencontré naturellement en biologie, physiologie, économie, dynamique des populations, chimie, aéronautique, aérospatial etc... [Balachandran ,09].

Par ailleurs, même si le procédé lui-même ne contient pas de retards, les capteurs, les actionneurs et les temps de calcul nécessaire à sa commande peuvent engendrer des retards non négligeables [Mahmoud, 00 ; Niculescu, 01]. Le retard a été toujours considéré comme un des problèmes les plus difficiles rencontrés dans la commande des systèmes. Sa présence a une influence considérable sur le comportement d'un

système bouclé et peut même être à l'origine d'instabilité ou d'oscillations indésirables.

Le retard peut avoir plusieurs origines, il peut être attribué soit aux capteurs ou aux actionneurs soit au système lui-même (cas d'un transport d'information ou de matière). Les dispositifs de déclenchement eux mêmes sont physiquement limités de sorte que l'action n'est pas instantanément réalisable [Zhong, 00].

Les systèmes à retards sont des systèmes dont la dynamique dépend non seulement de la valeur de l'état en temps courant  $t$ , mais aussi des valeurs passées de la commande et/ou de l'état prises sur un certain horizon temporel. On peut alors considérer que l'état du système est en fait une fonction définie sur un intervalle de temps égal au retard. Ainsi ce type de système peut être modélisé dans un espace fonctionnel de dimension infinie [Niculescu, 2000].

Ce premier chapitre est consacré à une présentation générale des systèmes à retards et à l'analyse de leurs équations caractéristiques décrites généralement par des quasi-polynômes.

## 1.2 Exemples de systèmes à retards

Beaucoup d'installations et dispositifs industriels pratiques possèdent des retards qui ne peuvent pas être ignorés, nous présentons dans cette section des exemples de quelques systèmes physiques de second ordre à retard.

### **Véhicule sous-marin** [Riantafyllou, 91 ; Zhong, 00]

Parmi les différents types de véhicules sous-marins, on trouve les véhicules commandés à distance (Remotely Operated Vehicle : ROV). Un ROV est connecté au bateau de support par l'intermédiaire d'un câble ombilical, qui fournit l'alimentation d'énergie et une liaison de communication, et par conséquent la portée du fonctionnement est en quelque sorte limitée. Un deuxième type est le véhicule sous-marin autonome (autonomous underwater vehicle : AUV), qui comporte une unité d'alimentation à bord et qui est équipé de capacités avancées de contrôle pour effectuer des tâches avec le minimum d'intervention humaine. La communication est assurée par une liaison acoustique. La figure 1.1 présente l'odyssée II Xanthos qui est un AUV équipé de divers capteurs comprenant les sonars, les capteurs de profondeur, les caméras vidéo, les capteurs à inertie, le modem acoustique, l'outil de navigation acoustique, etc ....L'odyssée II Xanthos peut opérer dans des profondeurs allant jusqu'à 3 Km.



FIGURE 1.1 – Véhicule sous-marin [Zhong, 00]

Les problèmes de commande rencontrés dans ces véhicules incluent la navigation, la planification de tâches et le pilotage automatique de bas niveau. En raison du long câble ou de la distance, il existe un retard non négligeable dans ces systèmes. Pour les AUV, le retard est provoqué par la vitesse sonore finie dans l'eau.

Un système physique est montré par la figure 1.2, où un bateau extérieur est entrain de placer un véhicule sous-marin par un long câble de 2 500 m. Un modèle approximatif est donné par [Riantafyllou, 91] :

$$G(s) = \frac{ce^{-s\tau}}{as^2+bs+c}$$

avec  $a = 1, b = 1.110^{-4}, c = 2.5810^{-4}$ .

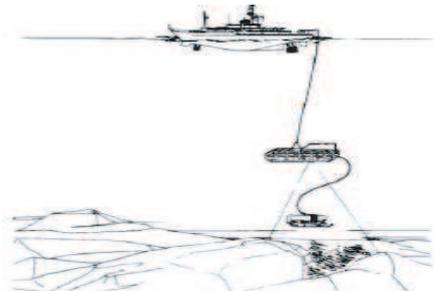


FIGURE 1.2 – Système physique de véhicule sous-marin [Zhong, 00]

### Grue [Erneux, 09]

Les grues portiques peuvent soulever plusieurs centaines de tonnes et peuvent avoir des envergures de plus de 50 mètres. Pour les applications de chargement et de transfert, il est important que la grue déplace les charges utiles rapidement et facilement. Si le portique se déplace rapidement, la charge utile peut commencer à balancer, et il est possible que le grutier perde le contrôle. Plusieurs auteurs [Masoud, 03, 05] proposent une commande par retour de sortie retardée qui a pour but de réduire de

manière significative le balancement à l'fin du mouvement.

Le modèle du pendule de la grue est donné par :

$$y''(t) + \varepsilon y'(t) + \sin(y(t)) = -k \cos(y(t))[y(t - \tau) - y(t)]$$

Où  $y$  représente l'angle que forme le pendule avec la verticale. L'effet du retard apparaît dans le coefficient d'atténuation représenté au second membre de l'équation.



FIGURE 1.3 – Grue [Ernuex, 09]

#### Echangeur [Normey-Rico, 07]

On considère l'échangeur de chaleur de figure 1.4, le but est de contrôler la température  $T_s$  de l'eau à l'aide de la valve  $V_1$  qui manipule le flux d'entrée ( $F_e$ ). La température de vapeur ( $T_{vs}$ ) et le flux de vapeur ( $F_v$ ) dans l'échangeur sont maintenus à un point de fonctionnement défini par un contrôleur indépendant.

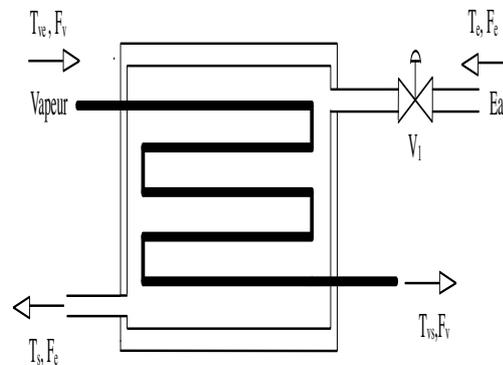


FIGURE 1.4 – Échangeur de chaleur de vapeur-eau [Normey-Rico, 07]

Dans ce système  $T_s$  est la sortie de processus,  $V_1$  la variable de commande alors que  $T_{ve}$  et  $F_v$  sont des perturbations. Le comportement de ce processus autour du point de fonctionnement peut être représenté par :

$$\frac{T_s(s)}{V_1(s)} = \frac{K e^{-\tau s}}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

où la température  $T$  est en  $^{\circ}C$ , l'ouverture de  $V_1$  en  $\%$ . Il s'agit ici d'un modèle local, car en fait le retard  $\tau$  est fonction de  $F_e$  elle-même fonction de  $V_1$ .

On se limitera à ces trois exemples sachant que plusieurs systèmes rencontrés en pratique présentent des retards, et ceci dans plusieurs activités industrielles : transport de l'énergie, biologie, écologie, économétrie, régulation des marchés, . . .

### 1.3 Définitions et Notations

Afin de bien préciser les notations et les définitions introduites dans ce paragraphe, on présente un exemple d'équation différentielle à retard.

Soit le système suivant :

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t - \tau) \quad (1.1)$$

où  $a_0$  et  $a_1$  sont des réels et  $\tau$  représente le retard.

Résolvons cette équation à partir de l'instant  $t = 0$ . Pour déterminer la valeur de la dérivée  $\dot{x}(t)$  à  $t = 0$ , on a besoin respectivement des valeurs de  $x(t)$  à  $t = 0$  et à  $t = -\tau$ .

Similairement, pour déterminer la valeur de  $\dot{x}(t)$  à l'instant  $t = \xi$  où  $0 \leq \xi < \tau$ , il faut connaître les valeurs de  $x(\xi)$  et de  $x(\xi - \tau)$ .

Il est alors clair que pour résoudre l'équation (1.1) qu'on a besoin de la connaissance de  $x(t)$  sur tout l'intervalle  $-\tau \leq t < 0$ .

Contrairement aux équations différentielles ordinaires, la donnée d'un vecteur caractérisant les conditions initiales ne suffit donc pas pour trouver une solution, il faut y ajouter une infinité de points appartenant au segment  $[-\tau, 0]$ . C'est-à-dire qu'il est nécessaire de spécifier une condition initiale de la forme :  $x(t) = \varphi(t)$  pour  $t \in [-\tau, 0]$  où  $\varphi(t)$  est une fonction continue :  $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ .

La méthode dite "pas à pas" a été proposée dans [Bellman, 63] pour résoudre l'équation (1.1).

#### 1.3.1 Le choix de l'état

Soit l'équation fonctionnelle suivante [Yeganefar, 06] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) , & t \geq t_0 \\ x_{t_0} = \varphi_0 \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $t$  représente le temps,  $x$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x}$  est la dérivée de  $x$  par rapport au temps ;  $x_t$  et  $\varphi_0$  sont des fonctions de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  est une "fonction de fonction" dite fonctionnelle comme il sera précisé juste après.

On va considérer que l'égalité  $x_{t_0} = \varphi_0$  définit les conditions initiales du problème à l'instant  $t_0$ .

L'idée consiste à "ramener" les valeurs que prend le vecteur  $x$  sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$  pendant un temps  $\tau$  représentant le retard maximum, comme le montre la figure 1.5 :

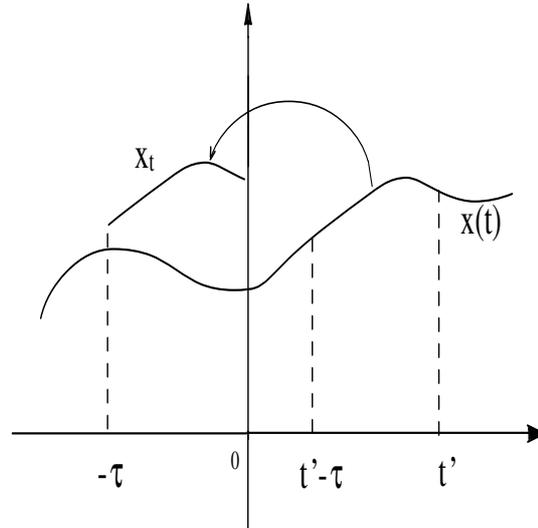


FIGURE 1.5 – Chaque segment de longueur  $\tau$  est vu sur  $[-\tau, 0]$

Il s'agit donc de "couper" chaque tranche de la courbe et de la "ramener" sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$ . On définit alors une fonction représentant l'état du système qui prend ses valeurs sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$  et coïncide avec  $x$  "à l'arrivée". Cette fonction est notée  $x_t$  et elle est définie par :  $x_t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$  pour tout réel  $\theta \in [-\tau, 0]$ . Ainsi le système évolue dans l'ensemble  $\mathcal{C}$  des fonctions continues de  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

La solution du système (1.2) est notée  $x(t; t_0, \varphi_0)$  pour faire apparaître les conditions initiales explicitement.

La fonction  $f$  définie dans l'équation (1.2) est une fonction qui admet comme variables un réel  $t$  et une autre fonction  $x_t$ . C'est donc une "fonction de fonction" qu'on appelle *fonctionnelle* [Yeganefar, 06].

### 1.3.2 Définitions

Nous étudions ici des systèmes retardés donnés par :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)); \quad t \geq t_0 \quad (1.3)$$

où  $x$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , sa valeur à l'instant  $t$  est notée  $x(t)$ ,  $f$  une fonction vectorielle, et où  $\tau_i$  (retards) sont soit des réels positifs, soit des fonctions positives du temps, continues (ou continues par morceaux) sur  $[t_0, +\infty[$ , bornées, c'est-à-dire telles qu'il existe un nombre réel  $\tau > 0$  pour lequel  $\tau_i(t)$  vérifient :

$$0 \leq \tau_i(t) \leq \tau, \quad \forall t \geq t_0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.4)$$

Le vecteur  $x(t)$  de (1.3) est appelé l'état instantané ou le vecteur état du système. Par contre *l'état du système* à l'instant  $t$  est donné par la fonction  $x_t$  définie par :

$$\begin{cases} x_t(\theta) = x(t + \theta) \\ \theta \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

## 1.4 Classification des systèmes à retards

Cette partie est dédiée à la présentation des différents types de systèmes à retards cités dans la littérature à savoir les systèmes neutres, retardés et à retards discrets.

### 1.4.1 Les systèmes de type neutre

Les systèmes neutres se différencient des systèmes de type retardés par les arguments du champ de vecteur  $f$ . Ce dernier fait intervenir la dérivée de l'état  $x_t$  c'est à dire les dérivées retardées de  $x_t$  [Seuret, 06]. Ils sont décrits par des équations différentielles de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t, u_t) \\ x_{t_0} = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0] \\ u_{t_0} = \zeta(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (1.5)$$

le terme  $\dot{x}_t$  rend l'analyse de ces systèmes plus complexe.

### 1.4.2 Les systèmes de type retardé

Les systèmes retardés sont définis par des équations différentielles fonctionnelles qui sont composées par des valeurs passées et présentes du temps [Seuret, 06]. Ces systèmes sont décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t) \\ x_{t_0} = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0] \\ u_{t_0} = \zeta(\theta) \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0] \end{cases} \quad (1.6)$$

$\tau$  étant positif,  $\varphi$  et  $\zeta$  représentent les conditions initiales. Il s'agit de fonctions continues par morceaux, application de  $[t_0 - \tau, t_0]$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Les fonctions  $x_t$  et  $u_t$  sont définies par :

$$x_t \quad : \quad \begin{cases} [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \theta \mapsto x_t(\theta) = x(t + \theta). \end{cases} \quad (1.7)$$

$$u_t \quad : \quad \begin{cases} [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \theta \mapsto u_t(\theta) = u(t + \theta). \end{cases} \quad (1.8)$$

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions continues de  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$ .  $u_t$  et  $x_t \in \mathcal{C}$  représentent respectivement l'entrée et l'état du système à l'instant  $t$ .

### 1.4.3 Les systèmes linéaires invariants à retards discrets

Les équations différentielles à retards discrets sont exprimées par [Seuret, 2006] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^q D_i \dot{x}(t - w_i) + \sum_{j=0}^r A_j x(t - \tau_j) + B_j u(t - \tau_j) \\ y(t) = \sum_{j=0}^r C_j x(t - \tau_j) \end{cases} \quad (1.9)$$

où le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état instantané,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande et  $y \in \mathbb{R}^p$  représente le vecteur de sortie du système.  $\tau_j > 0$  et  $w_i > 0$  représentent des retards discrets (ou "ponctuels"). Les matrices d'état  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , de commande  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , de sortie  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et les termes neutres  $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des matrices constantes.

Dans le cas des systèmes de type retardé, le système (1.9) s'exprime par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^r A_i x(t - \tau_i) + B_i u(t - \tau_i) \\ y(t) = \sum_{i=0}^r C_i x(t - \tau_i) \end{cases} \quad (1.10)$$

## 1.5 Stabilité des systèmes à retards

Dans un premier temps on va s'intéresser aux différentes définitions liées à la stabilité des systèmes à retards, ensuite on présentera la seconde méthode de Lyapunov avec les approches de Razumikhin et de Krasovskii.

### 1.5.1 Stabilité au sens de Lyapunov

L'objectif de cette partie est de définir les notions d'état d'équilibre, de point d'équilibre ainsi que les différents concepts de stabilité associés au cas des systèmes à retards. On considère dans la suite que les systèmes étudiés sont décrits sous la forme d'une équation d'état donnée par :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (1.11)$$

où  $x(t)$  est un élément de  $\mathbb{R}^n$ , l'instant initial et l'état initial sont respectivement  $t_0$  et  $\phi_0$ . Le retard est noté  $\tau$ .

La solution à l'instant  $t$  est notée  $x(t; t_0, \phi_0)$ , la fonction d'état solution à l'instant  $t$  étant  $x_t(t_0, \phi_0)$ .

$x_t(t_0, \phi_0)$  désigne l'état  $x_t$  à l'instant  $t$  qui passe par la fonction initiale  $\phi_0$  à l'instant  $t_0$ .

#### 1.5.1.1 Notion d'état d'équilibre et de point d'équilibre

Un état  $\phi_e$ , élément de  $\mathcal{C}$ , est appelé état d'équilibre du système (1.11) si la solution  $x(t; t_0, \phi_e)$  existe et vérifie  $x_t(t_0, \phi_e) = \phi_e$  pour  $t > t_0$  [Dambrine, 94].

Si  $\phi_e$  est un état d'équilibre alors il existe  $x_e \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\phi_e(\theta) = x_e$  pour  $\theta$  appartenant à l'intervalle  $[-\tau, 0]$ . Par définition,  $x_e$  est un point d'équilibre de (1.11).

### 1.5.1.2 Stabilité d'une solution générale

Soit  $x(t; t_0, \phi_0)$  la solution de l'équation (1.11) ayant pour état initial  $\phi_0$  à l'instant  $t_0$ .

#### Définition 1.1

La solution  $x(t; t_0, \phi_0)$  est dite stable par rapport à  $t_0$  si, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$  dépendant de  $t_0$  et de  $\varepsilon$  tel que l'inégalité  $\|x(t; t_0, \phi) - x(t; t_0, \phi_0)\| < \varepsilon$  soit vérifiée pour toute condition initiale  $\phi$  vérifiant  $\|\phi - \phi_0\|_\tau < \delta(t_0, \varepsilon)$  et pour tout instant  $t \geq t_0$  [Dambrine, 94; Goubet, 96].

Soit  $y(t)$  l'écart entre la solution  $x(t; t_0, \phi)$  de (1.11) et la trajectoire étudiée  $x(t; t_0, \phi_0)$  :  $y(t) = x(t; t_0, \phi) - x(t; t_0, \phi_0)$  alors  $y(t)$  est la solution du problème :

$$\dot{y}(t) = g(t, y_t) \quad (1.12)$$

où  $g(t, y_t) = f(t, y_t + x_t(t_0, \phi_0)) - f(t, x_t(t_0, \phi_0))$  et on vérifie que  $g(t, 0) = 0$ .

La stabilité de la solution  $x(t; t_0, \phi_0)$  de l'équation (1.11) est équivalente à celle de la solution nulle de l'équation (1.12). C'est pourquoi on suppose par la suite que  $f(t, 0) = 0$  pour tout instant supérieur ou égal à  $t_0$ , et on se restreint à l'étude de la trajectoire nulle (ou du point d'équilibre 0).

### 1.5.1.3 Stabilité du point origine

Le système (1.11) étudié n'étant pas nécessairement stationnaire, les définitions sont relatives à l'instant initial  $t_0$  ou à un intervalle d'instant initial  $T_i \subseteq \mathbb{R}$ .

#### Définition 1.2

L'origine du système (1.11) est un équilibre stable par rapport à  $t_0$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$  dépendant de  $t_0$  et de  $\varepsilon$  tel que pour toute condition initiale  $\phi$  :  $\|\phi\|_\tau < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow \|x(t; t_0, \phi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$  [Hale, 93].

Cette définition est illustrée par le schéma de la figure 1.6.

#### Définition 1.3

1. L'origine du système (1.11) est uniformément stable par rapport à  $t_0$  si, pour tout réel  $\varepsilon \geq 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$  dépendant de  $\varepsilon$  tel que pour toute condition initiale  $\phi$  :  $\|\phi\|_\tau < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t; t_0, \phi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$  [Hale, 93].

$D_s(t_0)$  est le domaine de stabilité de la solution nulle de (1.11) si ([Hale, 93]) :

- (a)  $D_s(t_0, \varepsilon)$  est le plus grand voisinage connexe de  $\phi = 0$  inclus dans le domaine suivant :  $\{\phi \in \mathcal{C} : (\forall t \geq t_0) (\|x(t; t_0, \phi)\| < \varepsilon)\}$
- (b)  $D_s(t_0) = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_s(t_0, \varepsilon)$
2. Dans le cas où  $D_s(t_0) = \mathcal{C}$ , alors l'origine du système (1.11) est dite globalement stable.
  3. L'origine est stable par rapport à  $T_i$  si elle est par rapport à tout instant de l'ensemble  $T_i$ .
  4. Elle est stable si elle est par rapport à  $\mathbb{R}$ .
  5. La stabilité est dite *i.o.d* ("independent of delay") si elle est prouvée pour toute valeur du retard. Elle est dite *d.d* ("delay dependent") si elle n'est vérifiée que pour certaines valeurs de retard.

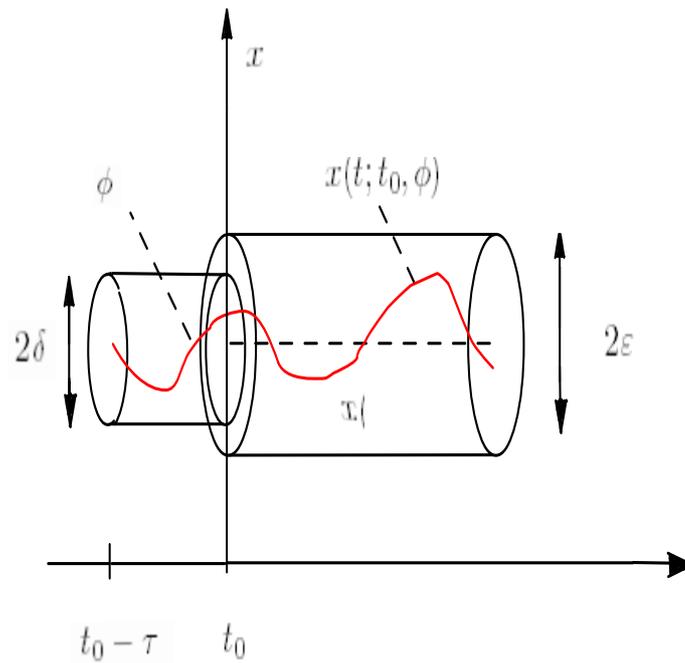


FIGURE 1.6 – Stabilité au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre  $x_e$

#### Remarque concernant les fonctions initiales considérées

Dans les différentes définitions de stabilité, il est supposé que les conditions initiales sont continues par morceaux mais afin de simplifier l'étude on peut les considérer comme continues.

### 1.5.1.4 Attractivité

1. L'origine du système (1.11) est un équilibre attractif par rapport à  $t_0$  ([Dambrine, 94; Goubet, 96]), s'il existe un réel positif  $\delta$  dépendant de  $t_0$  tel que pour toute condition initiale  $\phi$  :

$$\|\phi\|_\tau < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, \phi)\| = 0$$

$D_s(t_0)$  est le plus grand voisinage connexe de  $\phi = 0$  tel que :

$$\forall \phi \in D_a(t_0), \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, \phi)\| = 0.$$

2. L'origine du système (1.11) est *attractive* par rapport à  $T_i$  si elle est attractive par rapport à tout instant de l'ensemble  $T_i$ .
3. L'origine du système (1.11) est *attractive* si elle est attractive par rapport à  $\mathbb{R}$ .

### 1.5.1.5 Stabilité asymptotique

L'origine du système (1.11) est asymptotiquement stable par rapport à  $t_0$  (respectivement  $T_i$  ou  $\mathbb{R}$ ) si elle est stable et attractive par rapport à  $t_0$  (respectivement  $T_i$  ou  $\mathbb{R}$ ) [Hale, 93].

Le domaine de stabilité asymptotique  $D_{sa}(t_0)$  est l'intersection des domaines de stabilité et d'attractivité  $D_{sa}(t_0) = D_s(t_0) \cap D_a(t_0)$ .

Si ce domaine est l'espace  $\mathcal{C}$  alors l'origine est dite globalement asymptotiquement stable [Dambrine, 94; Goubet, 96].

### 1.5.1.6 Stabilité exponentielle

L'origine du système (1.11) est exponentiellement stable par rapport à  $t_0$  ([Hale, 93]) s'il existe trois constantes  $\delta$ ,  $a$  et  $b$  strictement positives telles que pour tout  $\phi$  et pour tout  $t \geq t_0$  :

$$\|\phi\|_\tau < \delta \Rightarrow \|x(t; t_0, \phi)\| < a \|\phi\|_\tau \exp(-b(t - t_0))$$

Les constantes  $\delta$ ,  $a$  et  $b$  dépendent éventuellement de  $t_0$ . On appelle  $b$  le taux de convergence exponentielle.

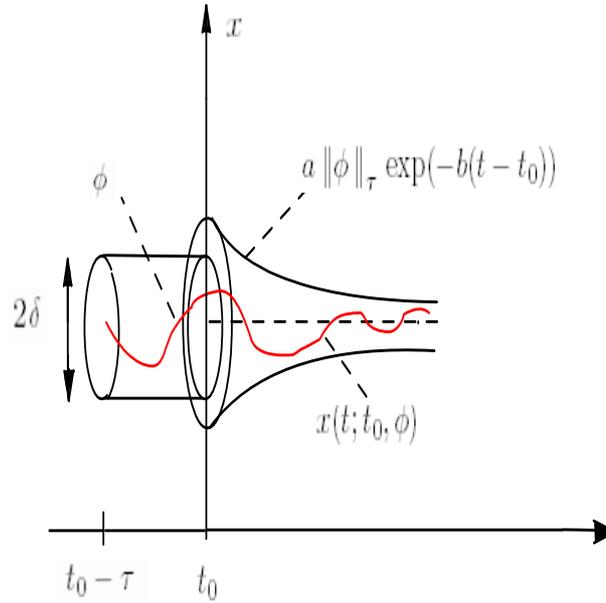


FIGURE 1.7 – Stabilité exponentielle au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre  $x_e$

Le domaine de stabilité exponentielle  $D_e(t_0, a, b)$  de l'équilibre  $x_e = 0$  est défini comme le plus grand voisinage connexe de cet équilibre tel que pour tout  $\phi \in D_e(t_0, a, b)$  et pour tout  $t > t_0$  :

$$\|x(t; t_0, \phi)\| < a \|\phi\|_\tau \exp(-b(t - t_0))$$

### 1.5.1.7 Stabilité robuste

La notion de "stabilité robuste" peut faire référence à différents types de robustesse. Un système à retard est dit *H-robustement* stable si son équilibre est asymptotiquement stable et ceci pour toute fonction  $\tau(t)$  dans un domaine  $H$ . Un système incertain est dit robustement stable si son équilibre est asymptotiquement stable pour toutes les incertitudes admissibles sur les paramètres du modèle. La stabilité robuste peut être définie aussi comme la propriété d'un système à maintenir son équilibre asymptotiquement stable sous de "petites perturbations" [Goubet, 96].

## 1.5.2 Stabilité des systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov

Dans cette partie, on rappelle quelques résultats concernant la stabilité asymptotique des systèmes à retards par des approches temporelles liées à la seconde méthode de Lyapunov.

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t) \\ x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1.13)$$

et on suppose qu'il admet une solution unique et un état d'équilibre  $x_t = 0$ . La seconde méthode de Lyapunov nécessite l'existence d'une fonction  $V$  définie positive telle que  $\frac{dV}{dt} < 0$ , si  $x \neq 0$ .

Cependant cette méthode présente dans le cas général un inconvénient majeur car on doit imposer des conditions sévères sur le système pour prouver que cette dérivée est négative puisqu'elle n'est plus une fonction ordinaire mais une fonctionnelle qui dépend de certaines valeurs passées de l'argument  $t$ .

Pour cela deux extensions ont été développées dans ce cadre, la première réalisée par Krasovskii et qui conduit à l'utilisation des fonctionnelles. Son principal inconvénient est lié à la difficulté de la détermination de telles fonctionnelles permettant de démontrer la stabilité de la solution nulle du système. La deuxième est développée par Razumikhin qui a proposé d'utiliser des fonctions plutôt que des fonctionnelles.

### 1.5.2.1 Approche par fonctionnelle de Krasovskii

L'approche de Krasovskii consiste à rechercher des fonctionnelles  $V(t, x_t)$  qui sont décroissantes le long des solutions de l'équation (1.13).

Soit  $V(t, \phi)$  une fonctionnelle, la dérivée supérieure à droite au sens de Dini est définie comme suit :

$$\dot{V}(t, \phi) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(t+\varepsilon, x_{t+\varepsilon}) - V(t, x_t)}{\varepsilon}$$

**Théorème 1.1**[Krasovskii, 63 ; Halle, 77]

On suppose que la fonction  $f$  de (1.13) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments.

Soient  $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  des fonctions continues, définies positives, croissantes telles que  $u(\theta) > 0$  et  $v(\theta) > 0$  et  $u(0) = v(0) = 0$ .

S'il existe une fonctionnelle continue  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

1.  $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_\tau)$ ,
2.  $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$  pour tout  $t \geq t_0$  le long des trajectoires de (1.13),

alors la solution nulle de (1.13) est uniformément stable.

Si de plus  $w(\theta) > 0$  pour tout  $\theta > 0$  alors la solution nulle de (1.13) est uniformément asymptotiquement stable.

Si  $V$  vérifie les conditions :

1.  $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|)$ ,
2.  $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$ , pour tout  $t \geq t_0$  et  $w(\theta) > 0$  pour tout  $\theta > 0$
3.  $V$  est lipschitzienne par rapport à son second argument,

alors la solution nulle de (1.13) est exponentiellement stable.

Pour plus de détails on peut se référer à [Kolmanovskii, 86, 92, 99; Mahmoud, 00; Niculescu, 01; Gu, 03; Arino, 06].

**Exemple 1.1**[Richard, 09]

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h)$$

On considère la fonctionnelle  $V(x_t)$  :

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{-h}^0 x(t + \theta)^T S x(t + \theta) d\theta$$

Le système précédent est asymptotiquement stable pour tout  $h \geq 0$  s'il existe des matrices  $P, S, R$  positives et symétriques telles que :

$$A_0^T P + P A_0 + P A_1 S^{-1} A_1^T P + S + R = 0$$

Cette équation est équivalente à la LMI (inégalité matricielle linéaire) suivante :

$$\begin{pmatrix} A_0^T P + P A_0 + S & P A_1 \\ A_1^T P & -S \end{pmatrix} < 0.$$

Plusieurs autres généralisations de cette fonctionnelle ont été proposées dans la littérature comme :

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &= x(t)^T \int_{-h}^0 Q_i x(t + \theta) d\theta \\ V_2(x_t) &= \int_{-h}^0 x(t + \theta)^T S x(t + \theta) d\theta \\ V_3(x_t) &= \int_{-\tau_i}^0 \int_{t+\theta}^t x(\theta)^T R_i x(\theta) d\theta ds \end{aligned}$$

### 1.5.2.2 Approche par fonction de Razumikhin

Dans cette approche, on considère une fonction de Lyapunov  $V(t, x(t))$  classique pour les équations différentielles ordinaires en se plaçant dans  $\mathbb{R}^n$ . Le théorème suivant montre qu'il est inutile de vérifier  $\dot{V}(t, x(t)) \leq 0$  le long de toutes les trajectoires du système mais seulement pour les trajectoires de l'état qui ont "tendance" à s'éloigner du point d'équilibre.

**Théorème 1.2** [Krasovskii, 56 ; Razumikhin, 56]

On suppose que la fonction  $f$  de (1.13) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments.

Soient  $u, v$  et  $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  des fonctions continues, définies positives, croissantes telles que  $u(\theta) > 0$  et  $v(\theta) > 0$  et  $u(0) = v(0) = 0$ .

On suppose qu'il existe une fonctionnelle  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue telle que :

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), \text{ où } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n$$

On a les énoncées suivantes :

1.  $\dot{V}(t, x) \leq -w(\|x\|)$  le long des trajectoires de (1.13),  
Si  $V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t))$  pour tout  $\theta \in [-\tau, 0]$ , alors la solution nulle de (1.13) est uniformément stable.
2. Si il existe une fonction  $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue strictement croissante avec  $p(\theta) > \theta$  pour tout  $\theta > 0$  telle que :
  - (a)  $\dot{V}(t, x) \leq -w(\|x\|)$  le long des trajectoires de (1.13),
  - (b) Si  $V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t)))$  pour tout  $\theta \in [-\tau, 0]$  alors la solution nulle de (1.13) est uniformément asymptotiquement stable.

Dans cette approche, la condition de négativité de la fonction candidate de Lyapunov n'est sollicitée que pour des trajectoires appartenant à certains espaces définis par l'évolution du système dans l'intervalle  $[t - \tau, t]$ .

Pour plus de détails on peut se référer à [Kolmanovskii, 86, 92, 99 ; Mahmoud, 00 ; Niculescu, 01 ; Gu, 03 ; Arino, 06].

## 1.6 Stabilité des Quasi-polynômes

On considère un système linéaire à retard décrit par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t - \tau_i) \quad (1.14)$$

où  $A$  et  $A_i$  ainsi que les retards  $\tau_i$  sont supposés constants.

**Définition 1.4** [Niculescu, 01 ; Michiels, 07]

La fonction  $\mathcal{F}$  donnée par :

$$\mathcal{F}(s) = \det(sI_n - A - \sum_{i=1}^n A_i e^{-s\tau_i}) \quad (1.15)$$

est appelée *fonction caractéristique* du système linéaire (1.14) ; c'est un quasi-polynôme, c'est-à-dire un polynôme en  $s$  et en  $e^{-s\tau_i}$ . L'équation  $\mathcal{F}(s) = 0$  est

nommée *l'équation caractéristique* associée au système (1.14).

Si les retards  $\tau_i$  sont tous multiples d'un même réel positif  $\tau$ , le system est dit à retards commensurables.  $\tau$  est appelé retard de base. Le système (1.14) et l'équation caractéristique associée  $\mathcal{F}(s)$  seront décrits respectivement par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t-i\tau) \\ \mathcal{F}(s) &= \det(sI_n - A - \sum_{i=1}^n A_i e^{-si\tau})\end{aligned}$$

Dans ce cas,  $\mathcal{F}(s)$  est un polynômes à deux variables alors que pour les systèmes à retards incommensurables où les retards sont pris d'une façon arbitraire ("free parameters" [Niculescu, 01]) les équations caractéristiques sont décrites par des polynômes en plus que deux variables.

### Exemple 1.2

Soit le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t - \tau)$$

L'équation caractéristique est donnée par :

$$\mathcal{F}(s) = s^2 - 2s - 1 + 2e^{-\tau s}(1 - s) + e^{-2\tau s}$$

Dans la suite on s'intéresse à l'analyse des quasi-polynômes ainsi que de leurs racines.

### Définition 1.5

On appelle quasi-polynômes les fonctions entières de la forme suivante [Richard, 02; Gu, 03] :

$$f(s) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N c_{hk} s^h e^{\tau_k s} \quad (1.16)$$

où les coefficients  $c_{hk} = a_{hk} + jb_{hk}$  et  $\tau_k = \alpha_k + j\beta_k$  sont des réels ou complexes nommés respectivement *coefficients* d'exposants et *facteurs* d'exposants.

La fonction  $f(s)$  peut être écrite de deux façons :

$$f(s) = \sum_{k=0}^N p_k(s) e^{\tau_k s} \quad (1.17)$$

$$f(s) = \sum_{h=0}^M \psi_h(s) s^h \quad (1.18)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_k(s) = \sum_{h=0}^M c_{hk} s^h, k = 0, 1, \dots, N \\ \text{et} \\ \psi_h(s) = \sum_{k=0}^N c_{hk} e^{\tau_k s}, h = 0, 1, \dots, M \end{array} \right.$$

**Exemple 1.3**

Soit le quasi-polynôme de l'exemple précédent :

$$\mathcal{F}(s) = s^2 - 2s - 1 + 2e^{-\tau s}(1 - s) + e^{-2\tau s}.$$

Ce quasi-polynôme peut s'écrire sous les formes données par (1.17) et (1.18) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s) &= (s^2 - 2s - 1)e^{-0s} + 2(1 - s)e^{-\tau s} + e^{-2\tau s} \\ \mathcal{F}(s) &= (e^{-2\tau s} + 2e^{-\tau s} - 1)s^0 + (-2 - 2e^{-\tau s})s + s^2 \end{aligned}$$

**1.6.1 Les zéros d'un quasi-polynôme**

Soit le quasi-polynôme :

$$f(s) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N (a_{hk} + jb_{hk}) s^h e^{(\alpha_k + j\beta_k)s} \quad (1.19)$$

où  $a_{hk}$ ,  $b_{hk}$ ,  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont des réels. Ce quasi-polynôme peut être écrit comme suit :

$$f(s) = \sum_{k=0}^N p_k(s) e^{(\alpha_k + j\beta_k)s} = \sum_{h=0}^M \psi_h(s) s^h \quad (1.20)$$

où :

$$\begin{aligned} p_k(s) &= \sum_{h=0}^M (a_{hk} + jb_{hk}) s^h, k = 0, 1, \dots, N. \\ &\text{et} \\ \psi_h(s) &= \sum_{k=0}^N (a_{hk} + jb_{hk}) e^{(\alpha_k + j\beta_k)s}, h = 0, 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Dans la suite on suppose que :

- Les  $(\alpha_k + j\beta_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  sont des complexes distincts.
- Les polynômes  $p_k(s)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  sont supposés non triviaux.

Sous ces conditions  $f(s)$  possède un nombre infini et dénombrable de racines sauf dans le cas où  $k = 0$ . Dans ce dernier cas,  $f(s) = p_0(s)e^{(\alpha_0 + j\beta_0)s}$  et les zéros de  $f(s)$  sont ceux de  $p_0(s)$ .

Les racines de  $f(s)$  dont le module est assez grand présentent une certaine régularité dans le plan complexe. Cette régularité peut être déterminée par deux diagrammes particuliers : le diagramme de puissance et le diagramme exponentiel [Richard, 02; Gu, 03].

### Diagramme exponentiel

Soient les points  $(\alpha_k - j\beta_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , les conjugués des facteurs d'exposants qui sont placés dans le plan complexe. À partir de ces points l'enveloppe convexe définie par l'ensemble  $\left\{ \sum_{k=0}^N \mu_k (\alpha_k - j\beta_k) \text{ tel que } \mu_k > 0; \sum_{k=0}^N \mu_k = 1 \right\}$  est tracée. Cette enveloppe nommée *diagramme exponentiel* du quasi-polynôme  $f(s)$  est délimitée par un ensemble fini de segments. À chacun de ces segments est associé un rayon partant de l'origine en direction du vecteur qui est perpendiculaire au segment et dirigé vers l'extérieur.

Dans le cas où le diagramme exponentiel se réduit à un segment, on trouve deux rayons de directions opposées. On considère un secteur d'angle  $\varepsilon > 0$  (voir figure 1.8) appelé  $\varepsilon$ -secteur situé sur chacun de ces rayons.

#### **Théorème 1.3** [Schwengeler, 25]

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $R(\varepsilon) > 0$  tel que toutes les racines de  $f(s)$  dont le module est supérieur à  $R(\varepsilon) > 0$  sont localisées dans l'union des  $\varepsilon$ -secteurs. Il existe aussi un nombre fini de racines dans chacun de ces secteurs.

Pour la démonstration on peut se référer à [Gu, 03]. Un exemple de diagramme exponentiel formé par cinq  $\varepsilon$ -secteurs est donné par la figure 1.8.

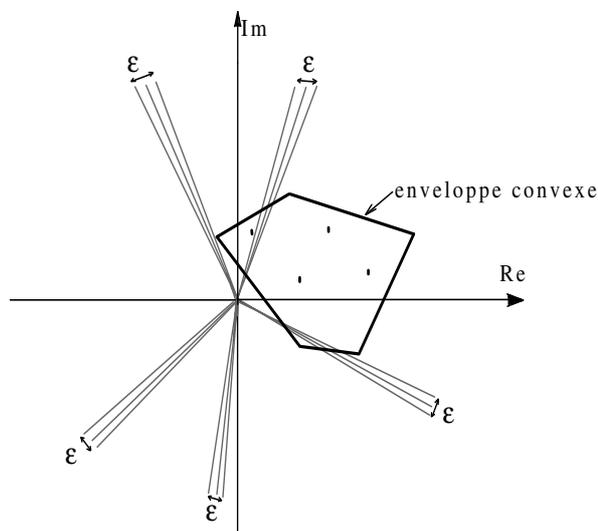


FIGURE 1.8 – Diagramme exponentiel

#### **Corollaire**

Si parmi les facteurs d'exposants  $(\alpha_k + j\beta_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , il existe au moins deux exposants avec des parties imaginaires distinctes, alors  $f(s)$  possède des racines à partie réelle positive.

Ce corollaire implique que le seul cas où les racines de  $f(s)$  se trouvent dans la partie gauche du plan complexe est celui où tous les facteurs d'exposants ont la même partie imaginaire. Dans ce cas on peut supposer que tous les facteurs d'exposants sont des réels.

#### Exemple 1.4

Soit le quasi-polynôme  $f(s) = e^{-3is} + e^{-(1+2i)s} + e^{(3+0.5i)s} + e^s$ , nous prenons respectivement les  $\mu_k$  suivants :  $\mu_k = 0.2, 0.3, 0.3, 0.2$  afin de construire l'enveloppe convexe donnée par la figure 1.9.

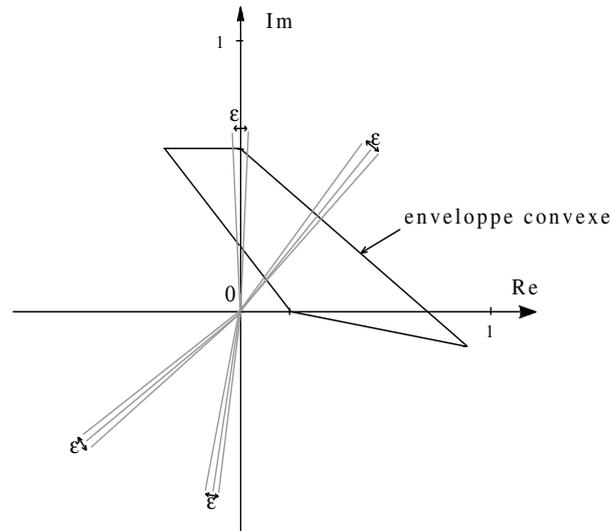


FIGURE 1.9 – Diagramme exponentiel de l'exemple 1.4

#### Diagramme de puissance

Comme il est mentionné précédemment, seul un quasi-polynôme avec des exposants réels ( $\beta_k = 0$ ) est caractérisé par la localisation de toutes ses racines dans la partie gauche du plan complexe.

Soit :

$$f(s) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N (a_{hk} + jb_{hk}) s^h e^{\alpha_k s} \quad (1.21)$$

où  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_N$ . Ceci peut être écrit sous la forme suivante :

$$f(s) = \sum_{h=0}^n c_h s^{k_h} e^{\alpha_h s} \quad (1.22)$$

avec les coefficients complexes  $c_h$  non tous nuls et les facteurs d'exposants ou les puissances en  $s$  distincts.

Dans le plan complexe on place les points de coordonnées  $(\alpha_h, k_h)$  (soit  $\alpha_h + jk_h$ ). On construit la partie supérieure de l'enveloppe convexe de ces points qui

est présentée par la partie de concavité dirigée vers les imaginaires négatives. On obtient une ligne composée d'un nombre fini de segments. Cette ligne est appelée *diagramme de puissance* du quasi-polynôme  $f(s)$ . Pour chaque segment on associe une droite logarithmique définie par :

$$x = -\mu \ln(y), y \geq 1$$

où  $x$  et  $y$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires de  $s$  et  $\mu = \frac{\alpha_l - \alpha_h}{k_l - k_h}$  avec  $(k_h, \alpha_h)$  et  $(k_l, \alpha_l)$ , sont les extrémités de l'un des segments.

On obtient finalement un nombre fini de droites logarithmiques correspondant au diagramme de puissance. Pour  $\mu = 0$  la droite coïncide avec l'axe imaginaire et part du point  $(0, 1)$ .

Pour chacune de ces droites on associe le secteur logarithmique défini par :

$$S(\varepsilon) = \{\xi \ln(y) + jy/\xi \in [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon], y \geq 1\}$$

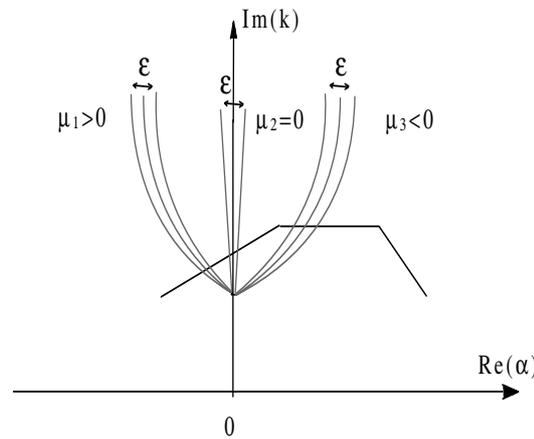


FIGURE 1.10 – Diagramme de puissance

**Théorème 1.4** [Schwengeler, 25]

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $R_1(\varepsilon) > 0$  tel que toutes les racines de  $f(s)$  du demi plan complexe supérieur et dont le module est supérieur à  $R_1(\varepsilon) > 0$  sont localisées dans l'union des  $\varepsilon$  – secteurs logarithmiques.

Pour la démonstration on peut se référer à [Gu, 03].

**Remarques**

- il existe aussi un nombre infini de racines dans chacun des secteurs logarithmiques.
- les racines de  $f(s)$  du demi plan complexe inférieur et dont le module est plus grand que  $R_1(\varepsilon) > 0$  sont localisées dans l'image par rapport à l'axe des réels de l'union des  $\varepsilon$  – secteurs logarithmiques.

D'après ce théorème  $f(s)$  a des racines avec des parties réelles positives si au moins un des  $\mu$  est négatif. En utilisant le diagramme de puissance de  $f(s)$ , on

conclut que  $\mu$  négatif existe seulement si la normale externe d'un des segments formant le diagramme se dirige vers la partie droite du plan complexe.

Pour garantir l'absence des racines avec des parties réelles positives il faut que l'un des termes de (1.22) par exemple  $c_0 s^{k_0} e^{\alpha_0 s}$  satisfasse les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} k_0 \geq k_h, h = 1, \dots, n \\ \alpha_0 \geq \alpha_h, h = 1, \dots, n \end{cases}$$

Si un tel terme existe alors il est appelé *terme principal* du quasi-polynôme (1.22).

### Corollaire

Toutes les racines du quasi-polynôme (1.22) se trouvent dans la partie gauche du plan complexe si ce quasi-polynôme possède un terme principal.

### Exemple 1.5

Soit le quasi-polynôme :  $f(s) = 1 + 2s + e^{-2s} + se^{-s} + e^s$ . Le diagramme de puissance est donné par la figure 1.11 :

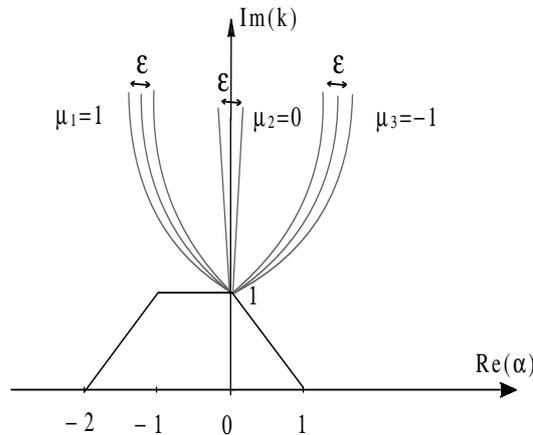


FIGURE 1.11 – Diagramme de puissance de l'exemple 1.5

### Classification des quasi-polynômes

1. **Retardé** : un quasi-polynôme est de type retardé si toutes les droites logarithmiques associées à son diagramme de puissance sont localisées dans la partie gauche du plan complexe (tous les  $\mu$  sont strictement positifs)
2. **Neutre** : un quasi-polynôme est de type neutre si toutes les droites logarithmiques associées à son diagramme de puissance sont localisées dans la partie gauche du plan complexe sauf une qui est verticale (tous les  $\mu$  sont strictement positifs sauf un qui est nul)

3. **Avancé** : un quasi-polynôme est de type avancé si au moins l'une des droites logarithmiques associées à son diagramme de puissance est localisée dans la partie droite du plan complexe (il existe au moins un  $\mu$  strictement négatif)

### 1.6.2 Stabilité des quasi-polynômes

**Définition 1.6** [Richard, 02 ; Gu, 03]

Un quasi-polynôme de type retardé est dit stable si toutes ses racines sont à parties réelles négatives.

Plusieurs méthodes sont utilisées dans la littérature afin d'analyser la stabilité des quasi-polynômes, parmi celles-ci nous détaillerons celle qui utilise le théorème de Hermite-Biehler. Ce dernier a été initialement développé pour vérifier la stabilité des polynômes et ensuite il a été étendu pour les quasi-polynômes.

Avant de présenter les résultats sur la stabilité des quasi-polynômes, on propose de rappeler le théorème de Hermite-Biehler sur la stabilité des polynômes à coefficients réels ou complexes.

#### 1.6.2.1 Théorème de Hermite-Biehler pour les polynômes de Hurwitz

**Définition 1.7** [Bhattacharyya, 95 ; Silva, 05]

Soit  $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$  un polynôme réel de degré  $n$ ,  $\delta(s)$  est dit polynôme de Hurwitz si toutes ses racines sont situées dans la partie gauche du plan complexe.

**Propriétés** [Bhattacharyya, 95 ; Silva, 05]

-Si  $\delta(s)$  est un polynôme de Hurwitz alors tous ses coefficients sont non nuls et possèdent le même signe.

-Si  $\delta(s)$  est un polynôme de Hurwitz de degré  $n$  alors la phase de  $\delta(j\omega)$  est une fonction continue et strictement croissante en  $\omega$ .

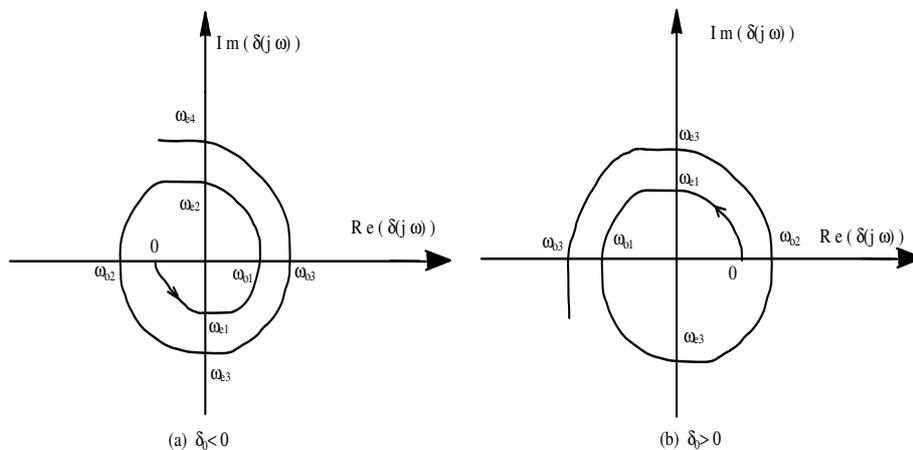


FIGURE 1.12 – Croissance de la phase de  $\delta(j\omega)$

**Définition 1.8** [Bhattacharyya, 95 ; Silva, 05]

Soit  $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$  un polynôme réel de degré  $n$  qui peut s'écrire sous la forme :  $\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2)$

où  $\delta_e(s^2)$  et  $s\delta_o(s^2)$  sont respectivement les deux composants de  $\delta(s)$  d'exposant pair et impair.

Pour chaque pulsation  $\omega \in \mathbb{R}$ , soit  $\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$  où  $p(\omega) = \delta_e(-\omega^2)$  et  $q(\omega) = \omega\delta_o(-\omega^2)$ .

On pose dans la suite  $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \dots$  et  $\omega_{o1}, \omega_{o2}, \dots$  respectivement les racines positives réelles de  $\delta_e(-\omega^2)$  et de  $\delta_o(-\omega^2)$  arrangées par ordre croissant.

**Théorème 1.5** [Silva, 05]

Soit  $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$  un polynôme réel de degré  $n$  tel que  $\delta_n$  et  $\delta_{n-1}$  ont le même signe,  $\delta(s)$  est Hurwitz (stable) si et seulement si toutes les racines de  $\delta_e(-\omega^2)$  et de  $\delta_o(-\omega^2)$  sont réelles, simples et celles qui sont positives vérifient la propriété d'entrelacement ci-dessous :  $0 < \omega_{e1} < \omega_{o1} < \omega_{e2} < \omega_{o2} \dots$ . La propriété d'entrelacement peut être vérifiée en traçant les courbes de  $\delta_e(\omega)$  et  $\delta_o(\omega)$ .

**Exemple 1.6**

Soit un polynôme réel  $\delta(s) = s^7 + 4s^6 + 11s^5 + 29s^4 + 36s^3 + 61s^2 + 34s + 36$  qui peut se mettre sous la forme :

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$$

où :

$$\begin{cases} p(\omega) = -4\omega^6 + 29\omega^4 - 61\omega^2 + 36 \\ q(\omega) = \omega(-\omega^6 + 11\omega^4 - 36\omega^2 + 34) \end{cases}$$

La figure suivante présente les courbes de  $p(\omega)$  et de  $q(\omega)$ .

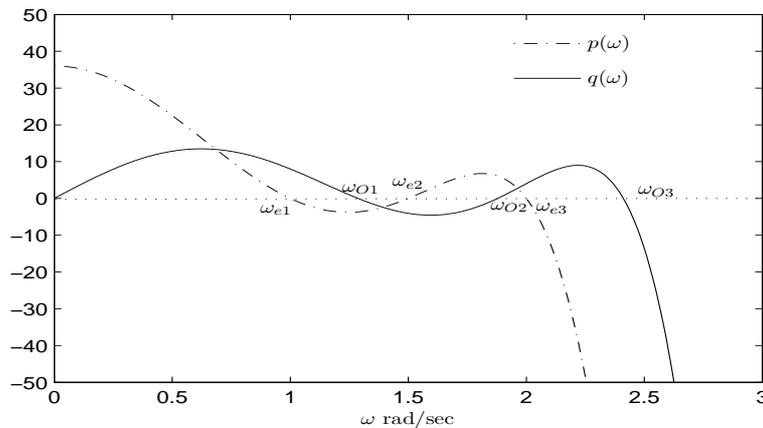


FIGURE 1.13 – Vérification de la propriété d'entrelacement pour les polynômes de Hurwitz

Il est clair que le polynôme  $\delta(s)$  satisfait la propriété d'entrelacement. Pour vérifier que  $\delta(s)$  est Hurwitz, on détermine ses racines qui sont toutes à parties

$$\text{réelles négatives : } \begin{cases} -2.9233 \\ -0.0477 \pm 1.9883i \\ -0.2008 \pm 1.4200i \\ -0.2898 \pm 1.1957i \end{cases}$$

### Exemple 1.7

Soit un polynôme réel  $\delta(s) = s^9 + 21s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$$

où :

$$\begin{cases} p(\omega) = 21\omega^8 - 145\omega^6 + 33\omega^4 - 155\omega^2 + 6 \\ q(\omega) = \omega(\omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49) \end{cases}$$

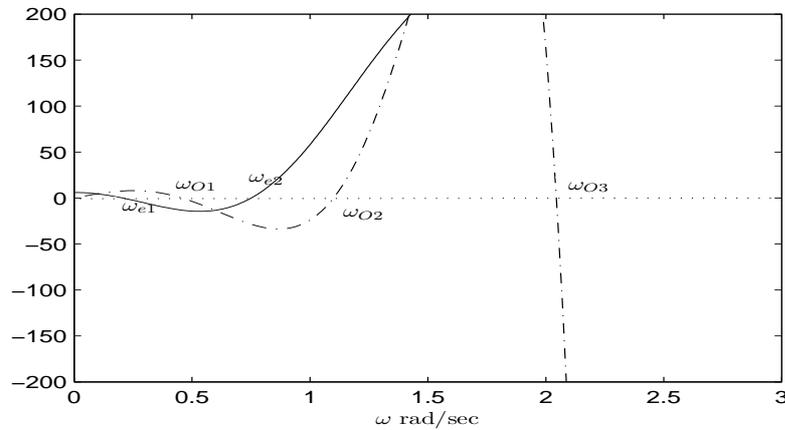


FIGURE 1.14 – Échec de la propriété d'entrelacement pour les polynômes instables

$$\text{Les racines de } \delta(s) \text{ sont : } \begin{cases} -18.5828 \\ 0.1766 \pm 2.0007i \\ -0.3184 \pm 0.8424i \\ -0.6077 \pm 0.4441i \\ -0.6501 \\ -0.2680 \end{cases}$$

La figure 1.14 montre que le polynôme ne vérifie pas la propriété d'entrelacement puisqu'il est instable.

### 1.6.2.2 Théorème de Hermite-Biehler pour les quasi-polynômes

La stabilité des systèmes sans retard est relativement facile à étudier puisque le nombre de racines de leurs équations caractéristiques est fini. Néanmoins, cette facilité disparaît par l'introduction des retards puisque le nombre de racines devient infini. Dans la suite on présentera une extension du théorème de Hermite-Biehler pour l'étude de la stabilité des systèmes à retards.

Soit  $h(s, t)$  un polynôme à deux variables avec des coefficients  $c_{hk}$  complexes ou réels :

$$h(s, t) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N c_{hk} s^h t^k, \quad M \text{ et } N > 0 \quad (1.23)$$

#### Définition 1.9

On dit que  $h(s, t)$  admet un terme principal s'il existe un coefficient non nul  $c_{hk}$  tel que ses deux indices ont des valeurs maximales. Ce terme est donné par  $c_{MN} s^M t^N$  ceci veut dire que pour tout autre terme  $c_{hk} s^h t^k$  on a ou bien  $M > h$ ,  $N > k$ ; ou  $M = h$ ,  $N > k$ ; ou  $M > h$ ,  $N = k$  [Silva, 05; Bhattacharyya, 09].

#### Exemple 1.8

- $f(s, t) = 3s + t^2$  n'a pas de terme principal.
- $f(s, t) = s + t^2 + 2st^2$  possède un terme principal qui est  $2st^2$ .

Le quasi-polynôme  $H(s, e^s) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N c_{hk} s^h e^{sk}$  peut s'écrire comme un polynôme à deux variables en posant  $e^s = t$  d'où :

$$h(s, t) = [H(s, e^s)]_{e^s=t}$$

#### **Théorème 1.6** [Silva, 05; Bhattacharyya, 09]

Si le polynôme  $h(s, t)$  n'a pas de terme principal alors la fonction  $H(s, e^s)$  a un nombre infini de zéros dans le demi-plan complexe droit.

Ce théorème peut être démontré en se référant au paragraphe 6.1 précédent.

Soit la fonction  $h(s, t)$  de (1.23), elle peut s'écrire comme suit :

$$h(s, t) = s^M X^{*(N)}(t) \sum_{h=0}^{M-1} \sum_{k=0}^N c_{hk} s^h t^k$$

où  $X^{*(N)}(t)$  est le coefficient de  $s^M$ , il est exprimé par :

$$X^{*(N)}(t) = \sum_{k=0}^N c_{Mk} t^k \quad (1.24)$$

**Théorème 1.7** [Silva, 05]

Soit  $H(s) = h(s, e^s)$  avec  $h(s, t)$  le polynôme défini en (1.23), si la fonction  $X^{*(N)}(e^s)$  a des racines dans le demi plan complexe droit, alors la fonction  $H(s)$  a un ensemble infini de racines dans le demi plan complexe droit. Si les racines de  $X^{*(N)}(e^s)$  se trouvent dans le demi plan complexe gauche, alors la fonction  $H(s)$  peut avoir seulement un ensemble fini de racines dans le demi plan complexe droit.

On introduit maintenant la définition suivante :

**Définition 1.10** [Silva, 05 ; Bhattacharyya, 09]

Soit  $H(s) = h(s, e^s)$  avec  $h(s, t)$  un polynôme ayant un terme principal et soient  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$  respectivement les parties réelles et imaginaires de  $H(j\omega)$ .

$$H(j\omega) = H_r(\omega) + jH_i(\omega) \quad (1.25)$$

Soient  $\omega_{r1}, \omega_{r2}, \dots$  et  $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots$  respectivement les racines réelles de  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$ , rangées en ordre croissant de module.

On dit que les racines de  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$  sont alternées si elles satisfont la propriété suivante :

$$\omega_{r1} < \omega_{i1} < \omega_{r2} < \omega_{i2} \dots \quad (1.26)$$

Dans cette définition on a :

$$H_r(\omega) = g_r(\omega, \cos(\omega), \sin(\omega)) \text{ et } H_i(\omega) = g_i(\omega, \cos(\omega), \sin(\omega))$$

où  $g_r$  et  $g_i$  sont des polynômes.

**Exemple 1.9**

Soit le quasi-polynôme  $H(s) = (2s^2 + s)e^s + 1.8s + 0.2$  qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$H(j\omega) = H_r(\omega) + jH_i(\omega)$$

avec :

$$\begin{aligned} H_r(\omega) &= -2\omega^2 + 0.2\omega \cos(\omega) + 1.8\omega \sin(\omega) \\ H_i(\omega) &= \omega + 1.8\omega \cos(\omega) - 0.2 \sin(\omega) \end{aligned}$$

**Théorème 1.8** [Silva, 05 ; Bhattacharyya, 09]

Soit  $H(s) = h(s, e^s)$ , avec  $h(s, t)$  un polynôme ayant un terme principal, écrit sous la forme :

$$H(j\omega) = H_r(\omega) + jH_i(\omega) \quad (1.27)$$

avec  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$  respectivement les parties réelles et imaginaires de  $H(j\omega)$ .

Si toutes les racines de  $H(s)$  se trouvent dans le demi plan complexe gauche, alors les racines de  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$  sont réelles, simples, alternées, de plus  $\forall \omega \in ]-\infty, +\infty[$  :

$$H'_i(\omega)H_r(\omega) - H_i(\omega)H'_r(\omega) > 0 \quad (1.28)$$

$H'_r(\omega)$  et  $H'_i(\omega)$  représentent respectivement la première dérivée par rapport à  $\omega$  de  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$ .

Pour que toutes les racines de  $H(s)$  soient dans le demi plan complexe gauche, il est suffisant que l'une des conditions suivantes soit satisfaites :

1. Toutes les racines de  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$  sont réelles, simples, alternées et l'égalité (1.28) est satisfaite pour au moins une valeur de  $\omega$ .
2. Toutes les racines de  $H_r(\omega)$  sont réelles et pour chaque racine  $\omega = \omega_r$  l'égalité (1.28) est satisfaite c'est-à-dire  $H_i(\omega)H'_r(\omega) < 0$ .
3. Toutes les racines de  $H_i(\omega)$  sont réelles et pour chaque racine  $\omega = \omega_i$  l'égalité (1.28) est satisfaite c'est-à-dire  $H'_i(\omega)H_r(\omega) > 0$ .

En fait, l'égalité (1.28) traduit la croissance de la phase de  $H(j\omega)$   $\forall \omega \in ]-\infty, +\infty[$ .

**Théorème 1.9** [Silva, 05 ; Bhattacharyya, 95, 09]

Soit  $H(s) = h(s, e^s)$  avec  $h(s, t)$  un polynôme ayant un terme principal. Pour que toutes les racines de  $H(s)$  soient dans le demi plan complexe gauche, il est nécessaire et suffisant que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. Les racines de  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$  définis par la relation (1.27) sont réelles, simples et alternées.
2. La relation (1.28) est vérifiée pour une certaine valeur quelconque  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ .

Soit  $H(s)$  une fonction entière de la forme :

$$H(s) = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k s} P_k(s) \quad (1.29)$$

avec  $P_k(s)$ ,  $k = 1..n$ , un polynôme à coefficients réels ou complexes et  $\lambda_k$  des réels vérifiant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n, \text{ et } |\lambda_1| < \lambda_n \quad (1.30)$$

Le théorème de Hermite-Biehler a été étendu pour cette classe de fonctions entières.

**Théorème 1.10** [Bhattacharyya, 95]

Soit  $H(s)$  une fonction entière donnée par (1.29). Pour que toutes les racines de  $H(s)$  soient dans le demi plan complexe gauche, il est nécessaire et suffisant que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. Les racines de  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$  définis par la relation (1.27) sont réelles, simples et alternées.
2. La relation (1.28) est vérifiée pour une valeur quelconque  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ .

Afin de vérifier que les racines de  $H_r(\omega)$  et  $H_i(\omega)$  sont réelles, on a besoin d'étudier les zéros de fonctions de la forme  $g(x, \cos(z), \sin(z))$ . On considère  $g(x, u, v)$  un polynôme à coefficients réels de la forme suivante :

$$g(x, u, v) = \sum_{h=0}^M \sum_{k=0}^N x^h \varphi_h^{(k)}(u, v) \quad (1.31)$$

où  $\varphi_h^{(k)}(u, v)$  est un polynôme de degré  $k$  homogène en  $u$  et  $v$ . On suppose que  $\varphi_h^{(k)}(u, v)$  n'est pas divisible par  $u^2 + v^2$  c'est-à-dire  $\varphi_h^{(k)}(1, \pm j) \neq 0$ .

Le terme principal du polynôme (1.31) est donné par  $x^M \varphi_h^{(N)}(u, v)$  où  $h$  et  $k$  atteignent leurs valeurs maximales simultanément. En plus, soit  $\varphi^{*(N)}(u, v)$  le coefficient de  $x^M$  dans (1.31) :

$$\varphi^{*(N)}(u, v) = \sum_{k=0}^N \varphi_M^{(k)}(u, v) \quad (1.32)$$

On considère la fonction transcendante suivante :

$$G(x) = g(x, \cos(x), \sin(x)) \quad (1.33)$$

On va présenter des conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction  $G(x)$  ne possède que des zéros réels. Pour cela, soit la fonction périodique suivante (de période  $2\pi$ ) :

$$\varphi^{*(N)}(x) = \varphi^{*(N)}(\cos(x), \sin(x)) \quad (1.34)$$

**Théorème 1.11** [Silva, 05 ; Bhattacharyya, 09]

Soit  $g(x, u, v)$  un polynôme avec un terme principal donné par  $x^M \varphi_h^{(N)}(u, v)$ . Si  $\eta$  est tel que  $\varphi^{*(N)}(\eta + j\omega)$  ne s'annule pas pour  $\omega$  réelle, alors la fonction  $G(x)$  aura exactement  $4lN + M$  racines dans l'intervalle  $-2l\pi + \eta \leq \text{Re}(x) \leq 2l\pi + \eta$  en commençant par quelques valeurs suffisamment grandes de  $l$ . Ainsi pour que la fonction  $G(x)$  ne possède que des racines réelles, il est nécessaire et suffisant qu'elle ait exactement  $4lN + M$  racines réelles, dans l'intervalle  $-2l\pi + \eta \leq \text{Re}(x) \leq 2l\pi + \eta$  pour des valeurs suffisamment grandes de  $l$ .

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre introductif nous avons rappelé quelques définitions et propriétés sur les systèmes à retards qui sont présents naturellement dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur.

Après avoir présenté quelques modèles de systèmes à retards, nous avons développé quelques notions et définitions relatives à l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov de tels systèmes. La stabilité au sens de Lyapunov s'intéresse au comportement d'un système autour d'un point d'équilibre. La seconde méthode de Lyapunov étudie la convergence de l'état vers l'origine à travers une fonction scalaire  $V$ . Cependant, elle n'est généralement pas applicable aux systèmes à retards. Deux extensions ont alors été développées dans ce cadre : la méthode de Lyapunov-Krasovskii et la méthode de Lyapunov-Razumikhin.

La première méthode consiste à utiliser des fonctions candidates de type fonctionnelles, le problème majeur réside dans la détermination d'une telle fonctionnelle qui doit vérifier la condition de décroissance le long des trajectoires du système. À la différence, la méthode de Razumikhin consiste à déterminer une fonction de Lyapunov classique et non plus une fonctionnel. Il s'agit de tester la décroissance de la fonction candidate seulement pour les trajectoires de l'état qui ont "tendance" à s'éloigner du point d'équilibre.

Dans le cas des systèmes linéaires et stationnaires, certaines approches d'étude de stabilité reviennent à l'analyse des racines des équations caractéristiques associées. Pour les systèmes à retards, il ne s'agit pas de résoudre des polynômes ordinaires mais de résoudre des quasi-polynômes.

Les quasi-polynômes sont caractérisés par une infinité de zéros ce qui rend difficile l'étude de leurs stabilité. Nous avons présenté certaines propriétés liées à l'emplacement et la distribution de ces racines comme le diagramme de puissance et le diagramme exponentiel ce qui conduit à une classification des quasi-polynômes en type retardé, neutre et avancé. Dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées pour l'étude de la stabilité des quasi-polynômes. Éventuellement, il existe plusieurs versions du théorème de Hermite-Biehler afin d'étudier cette stabilité. En effet, ce théorème a été proposé la première fois pour étudier la stabilité des polynômes, ensuite il a été étendu pour les quasi-polynômes par Pontryagin en 1955.

La commande par PID des systèmes linéaires à retards conduit justement à l'étude des équations caractéristiques de type quasi-polynômes. Dans la suite, Nous proposons d'exploiter le théorème de Hermite-Biehler pour l'étude de la stabilité et de la synthèse des contrôleurs stabilisants des systèmes à retards.



# Commande PID des Systèmes à Retards

---

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>37</b>
<b>2.2</b>	<b>Résultats préliminaires pour l'analyse des systèmes à retards</b>	<b>39</b>
<b>2.3</b>	<b>Commande des systèmes à retards du premier ordre par régulateur PI</b>	<b>40</b>
<b>2.4</b>	<b>Commande des systèmes à retards du premier ordre par régulateur PID</b>	<b>44</b>
<b>2.5</b>	<b>Commande par régulateur PI pour un système du second ordre à retard</b>	<b>50</b>
<b>2.6</b>	<b>Commande par régulateur PID pour un système du second ordre à retard</b>	<b>59</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>69</b>

---

## 2.1 Introduction

En sciences de l'ingénieur, on constate que la plupart des commandes sont actuellement implantées sur des calculateurs numériques. Par conséquent, même si le processus à réguler ne contient pas de retard intrinsèque, bien souvent, comme le montre la figure 2.1, des retards apparaissent dans la boucle de commande par l'intermédiaire des temps de réaction des capteurs  $\tau_1$  ou des actionneurs  $\tau_2$ , des temps de transmission des informations  $\tau_3$  ou des temps de calcul  $\tau_4$ .

Ces retards sont souvent négligés, mais lorsque leurs tailles deviennent significatives par rapport aux dynamiques du système (en boucles ouverte et fermée), il n'est plus possible de les ignorer. On retrouve ici la problématique classique de la "dynamique des actionneurs", mais avec une complexité supplémentaire provenant de la nature des équations des systèmes héréditaires [Seuret, 06].

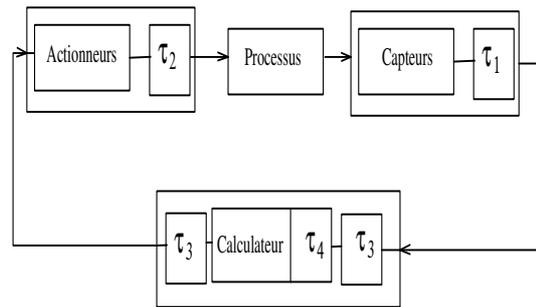


FIGURE 2.1 – Illustration de la provenance des retards dans une boucle de commande

Le régulateur proportionnel intégral dérivé (PID) s'est imposé dans plus de 90% des boucles de commande [Astrom, 95]. La prédominance incontestée de ce type de commande provient, outre de sa simplicité extrême, des performances qu'il peut offrir aux systèmes en boucle fermée, satisfaisant très souvent les cahiers des charges, si ses paramètres sont choisis judicieusement [Astrom, 01a].

Plusieurs études ont montré les limites des techniques traditionnelles et empiriques telles que des méthodes d'ajustement des paramètres PID par l'approche de Ziegler-Nichols ou celle de Cohen et Coon dans les applications industrielles [Astrom, 01b; Silva, 03]. De ce fait, beaucoup de recherches académiques et industrielles se sont intéressées à l'amélioration de l'ajustement des paramètres des régulateurs PID pour diminuer l'écart entre la théorie du contrôle et la pratique en matière d'ingénierie. Des travaux récents [Datta, 00] se sont servis de la généralisation du théorème de Hermite-Biehler pour déterminer l'ensemble de tous les contrôleurs PID stabilisants pour un système décrit par une fonction de transfert d'ordre quelconque.

Puisque la plupart des processus rencontrés dans le milieu industriel contiennent des retards, alors la détermination de l'ensemble complet de contrôleurs PID qui stabilisent un système à retard est d'une importance considérable. Xiang [Xiang, 07] propose d'étudier la stabilisation par des régulateurs PID de quelques systèmes typiques instable et à retards en se basant sur le critère de Nyquist, où pour chaque processus le retard maximal stabilisable est déterminé et les autres gains de sont dérivés par la suite. Une analyse de la fragilité et de l'influence des variations des paramètres du contrôleur (PID) sur la robustesse de la commande en boucle fermée est proposée dans [Alfaro, 09]. Roy et Iqbal [Roy, 05] ont exploré l'ajustement des paramètres d'un PID pour des systèmes à retards en utilisant une approximation de Padé de premier ordre et le théorème de Hermite-Biehler. Bien que l'ensemble stabilisant du gain proportionnel n'ait pas pu être trouvé, la stabilisation PID pour un système à retard en utilisant le critère généralisé de Nyquist a été développée dans [Xu, 03]. L'ensemble de tous les paramètres stabilisants P/PI/PID est déterminé pour une classe de systèmes à retard qui vérifie la propriété d'entrelacement aux hautes fréquences utilisant le théorème de Hermite-Biehler pour les polynômes [Oliveira, 03, 05, 09]. Cependant, cette méthode est complexe et il y a des difficultés pour déterminer toutes les valeurs stabilisantes du paramètre proportionnel.

L'analyse de la stabilité des systèmes à retards trouve une avancée significative grâce à l'approche analytique développée dans [Silva, 00, 01a, 01b, 02, 05; Bhattacharyya, 09] qui permet la caractérisation du domaine de stabilité des systèmes à retards commandés par régulateurs PI et PID. En effet, en utilisant l'extension du théorème de Hermite-Biehler applicable aux quasi-polynômes, une caractérisation analytique complète de toutes les valeurs des gains de stabilisation ( $K_p, K_i, K_d$ ) du régulateur est fournie uniquement dans le cas d'un système du premier ordre à retard. Dans [Silva, 01c], les auteurs ont déterminé toutes les valeurs de gain proportionnel qui stabilisent un système du deuxième ordre à retard.

Dans ce chapitre, le problème de stabilisation des systèmes à retards du premier et du deuxième ordre par des régulateurs PI et PID est étudié en utilisant une extension du théorème de Hermite-Biehler pour les quasi-polynômes.

## 2.2 Résultats préliminaires pour l'analyse des systèmes à retards

Plusieurs auteurs [Silva, 01, 02, 05; Bhattacharyya, 09] se sont intéressés aux systèmes à retards possédant des équations caractéristiques de la forme (2.1) :

$$\delta(s) = d(s) + e^{-L_1 s} n_1(s) + e^{-L_2 s} n_2(s) + \dots + e^{-L_m s} n_m(s) \quad (2.1)$$

Avec  $d(s), n_i(s)$  des polynômes à coefficients réels et  $L_i$  des retards. Ces équations caractéristiques sont des quasi-polynômes. L'équation (2.1) est un cas particulier de la fonction entière donné par (1.29). Nous admettons que :

$$\begin{aligned} A_1 : & \quad 0 < L_1 < L_2 < \dots < L_m \\ A_2 : & \quad \deg(d(s)) = n \text{ et } \deg(n_i(s)) < n \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.2)$$

Soit  $\delta^*(s) = e^{sL_m} \delta(s)$ , il vient alors :

$$\delta^*(s) = e^{sL_m} d(s) + e^{s(L_m-L_1)} n_1(s) + e^{s(L_m-L_2)} n_2(s) + \dots + n_m(s) \quad (2.3)$$

Les zéros de  $\delta(s)$  sont identiques à ceux de  $\delta^*(s)$  puisque  $e^{sL_m}$  n'a pas de zéros finis. Cependant, le quasi-polynôme  $\delta^*(s)$  a un terme principal puisque le coefficient du terme contenant les puissances les plus élevées de  $s$  et de  $e^s$  est non nul.

La stabilité du système, d'équation caractéristique (2.3), est alors équivalente à la condition que tous les zéros de  $\delta^*(s)$  soient dans la moitié gauche ouverte du plan complexe. Nous dirons que  $\delta^*(s)$  est Hurwitz ou stable [Bhattacharyya, 95; Silva, 05].

Le théorème 2.1 donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de  $\delta^*(s)$ .

**Théorème 2.1** [Silva, 01, 02, 05; Bhattacharyya, 09]

Soit  $\delta^*(s)$  donnée par (2.3), on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\delta^*(j\omega) = \delta_r(\omega) + j\delta_i(\omega) \quad (2.4)$$

où  $\delta_r(\omega)$  et  $\delta_i(\omega)$  représentent respectivement les parties réelles et imaginaires de  $\delta^*(j\omega)$ .

Sous les conditions  $A_1$  et  $A_2$ ,  $\delta^*(j\omega)$  est stable si et seulement si les deux règles suivantes sont vérifiées :

R1 :  $\delta_r(\omega)$  et  $\delta_i(\omega)$  ne possèdent que des racines simples, réelles et alternées

R2 : il existe  $\omega_0$  tel que  $\delta'_i(\omega_0)\delta_r(\omega_0) - \delta_i(\omega_0)\delta'_r(\omega_0) > 0$

$\delta'$  étant la dérivée de  $\delta$  par rapport à  $\omega$ .

Une étape cruciale dans l'application du théorème précédent est de s'assurer que  $\delta_r(\omega)$  et  $\delta_i(\omega)$  ont seulement des racines réelles. Une telle propriété peut être vérifiée en utilisant le théorème 2.2.

**Théorème 2.2** [Silva, 00, 01, 05]

Soit  $M$  et  $N$  les plus hautes puissances de  $s$  et de  $e^s$  qui apparaissent dans  $\delta^*(s)$ .

Soit  $\eta$  une constante appropriée qui n'est racine ni de  $\delta_r(\omega)$  ni de  $\delta_i(\omega)$ . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $\delta_r(\omega)$  et  $\delta_i(\omega)$  ne possèdent que des racines réelles est que pour  $\omega$  appartenant à l'intervalle :  $-2l\pi + \eta < \omega < 2l\pi + \eta$ ,  $l = l_0, l_0+1, l_0+2, \dots$ ,  $\delta_r(\omega)$  et  $\delta_i(\omega)$  possèdent exactement  $4lN + M$  racines réelles,  $l_0$  étant un entier suffisamment grand.

## 2.3 Commande des systèmes à retards du premier ordre par régulateur PI

On considère le schéma fonctionnel de la figure 2.2, dans lequel  $G(s)$  représente la fonction du transfert du système retardé donnée par (2.5).

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1 + Ts} \quad (2.5)$$

où  $K$  est le gain statique du système,  $T$  sa constante de temps et  $L$  le retard de la chaîne d'action. Ces trois paramètres sont supposés positifs.

Le contrôleur PI est donné par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (2.6)$$

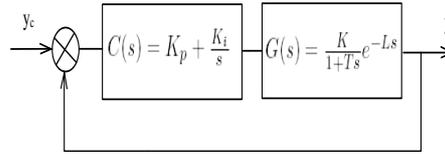


FIGURE 2.2 – Commande d'un système du premier ordre à retard

L'objectif est de déterminer analytiquement les valeurs des paramètres  $(K_p, K_i)$  pour lesquelles le système en boucle fermée est stable.

**Théorème 2.3** [Silva, 01, 05]

Conformément aux suppositions précédentes sur  $K$ ,  $T$  et  $L$ , les valeurs de  $K_p$  pour lesquelles il existe une solution au problème de stabilisation du régulateur PI vérifient :

$$-\frac{1}{K} < K_p < \frac{T}{KL} \sqrt{\alpha_1^2 + \frac{L^2}{T^2}} \quad (2.7)$$

où  $\alpha_1$  est la solution de l'équation  $\tan(\alpha) = -\frac{T}{L}\alpha$  dans l'intervalle  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

**Démonstration**

L'équation caractéristique en boucle fermée du système est donnée par :

$$\delta(s) = (KK_i + KK_p s)e^{-Ls} + (1 + Ts)s \quad (2.8)$$

On en déduit le quasi-polynôme  $\delta^*(s)$  :

$$\delta^*(s) = e^{Ls}\delta(s) = (KK_i + KK_p s) + (1 + Ts)se^{Ls} \quad (2.9)$$

En substituant l'opérateur  $s$  par  $j\omega$ , on obtient :

$$\delta^*(j\omega) = \delta_r(\omega) + j\delta_i(\omega) \quad (2.10)$$

avec :

$$\begin{cases} \delta_r(\omega) = KK_i - \omega \sin(L\omega) - Tw^2 \cos(L\omega) \\ \delta_i(\omega) = w [KK_p + \cos(L\omega) - Tw \sin(L\omega)] \end{cases} \quad (2.11)$$

Clairement, le paramètre  $K_i$  affecte seulement la partie réelle de  $\delta^*(j\omega)$  tandis que le paramètre  $K_p$  affecte la partie imaginaire.

Selon la première condition du théorème 2.1, il faut vérifier que les racines de  $\delta_r$  et  $\delta_i$  sont simples. En utilisant le théorème 2.2, tout en choisissant  $M = 2, N = l = 1$  et  $\eta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\delta_i(\omega)$  ne possède que des racines simples pour tout  $K_p$  vérifiant (2.7) [Silva, 05].

L'application de la deuxième condition du théorème 2.1 nous conduit à :

$$E(\omega_0) = \delta'_i(\omega_0)\delta_r(\omega_0) - \delta_i(\omega_0)\delta'_r(\omega_0) > 0$$

Pour  $\omega_0 = 0$  (valeur qui annule  $\delta_i(\omega)$ ), on trouve :

$$E(\omega_0) = \left(\frac{KK_p+1}{L}\right)KK_i > 0$$

Ce qui implique que :  $K_p > \frac{-1}{K}$  et  $K_i > 0$ .

On pose  $L\omega = z$ , il vient que :

$$\delta_r(z) = K \left[ K_i - \frac{z}{KL} (\sin(z) + \frac{T}{L} z \cos(z)) \right] \quad (2.12)$$

Soit  $a(z) = \frac{z}{KL} (\sin(z) + \frac{T}{L} z \cos(z))$  d'où :

$$\delta_r(z) = K [K_i - a(z)] \quad (2.13)$$

Pour  $z_0 = 0$ , on obtient :

$$\delta_r(z_0) = K(K_i - a(0)) = KK_i > 0 \quad (2.14)$$

Pour  $z_j \neq z_0$ , où  $j = 1, 2, 3, \dots$  on trouve :

$$\delta_r(z_j) = K(K_i - a(z_j)) \quad (2.15)$$

L'entrelacement des racines de  $\delta_r(z)$  et  $\delta_i(z)$  est équivalent à  $\delta_r(z_0) > 0$  (puisque  $K_i > 0$ ),  $\delta_r(z_1) < 0$ ,  $\delta_r(z_2) > 0, \dots$

On peut se servir de la propriété d'entrelacement et le fait que  $\delta_i(z)$  possède uniquement des racines réelles pour établir aussi que  $\delta_r(z)$  possède elle aussi seulement des racines réelles.

À partir des équations (2.14) et (2.15) on obtient les inégalités (2.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_r(z_0) > 0 \\ \delta_r(z_1) < 0 \\ \delta_r(z_2) > 0 \\ \delta_r(z_3) < 0 \\ \delta_r(z_4) > 0 \\ \vdots \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_i > 0 \\ K_i < a_1 \\ K_i > a_2 \\ K_i < a_3 \\ K_i > a_4 \\ \vdots \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où les limites  $a_j$  pour  $j = 1, 2, 3, \dots$  sont exprimées par :

$$a_j = a(z_j) \quad (2.17)$$

D'après ces inégalités il est clair qu'il est nécessaire que les limites impaires (c'est-à-dire  $a_1, a_3, \dots$ ) doivent être strictement positives pour obtenir une gamme faisable pour le paramètre  $K_i$  du contrôleur PI. D'après [Silva, 00, 05],  $a_j$  est positif pour les valeurs impaires de  $j$  et négative pour les valeurs paires pour tout  $K_p$  vérifiant (2.7).

Ainsi, les conditions données par (2.16) se réduisent à :

$$0 < K_i < \min_{j=1,3,5\dots} \{a_j\} \quad (2.18)$$

**Lemme 2.1** [Silva, 01b, 05]

Si  $\cos(z_j) > 0$  alors  $a_j < a_{j+2}$  pour les valeurs impaires de  $j$ .

**Algorithme pour la détermination des paramètres du PI** [Silva, 01b, 05]

1. Étape 1 : Initialiser  $K_p = -\frac{1}{K}$ ,  $pas = \frac{1}{N+1}(\frac{T}{KL}\sqrt{\alpha_1^2 + \frac{L^2}{T^2}} + \frac{1}{K})$  et  $j = 1$  où  $N$  présente le nombre de points désirés.
2. Étape 2 : Incrémenter  $K_p = K_p + pas$ .
3. Étape 3 : Si  $K_p < \frac{T}{KL}\sqrt{\alpha_1^2 + \frac{L^2}{T^2}}$  alors passer à l'étape 4; sinon fin de l'algorithme.
4. Étape 4 : Trouver la racine  $z_j$  de  $\delta_i(z)$ .
5. Étape 5 : Calculer les paramètres  $a_j$  associés au  $z_j$  précédemment trouvés en utilisant l'équation (2.17).
6. Étape 6 : Si les  $\cos(z_j) > 0$  alors passer à l'étape 7. Sinon,  $j = j + 2$  et retourner à l'étape 4.
7. Étape 7 : Déterminer les limites inférieures et supérieures de  $K_i$  comme suit :  

$$0 < K_i < \min_{j=1,3,5\dots} \{a_j\}.$$
8. Étape 8 : Aller à l'étape 2.

### Exemple 2.1

Soit un système du premier ordre à retard avec les paramètres suivants :  $K = 1$ ,  $T = 2s$  et  $L = 4s$ . On cherche à le commander avec un régulateur proportionnel intégral, il s'agit de déterminer le domaine de stabilité par rapport aux paramètres  $(K_p, K_i)$ .

En exploitant l'algorithme précédent, la frontière de stabilité du système, tracée dans le plan  $(K_p, K_i)$ , est présentée par la figure 2.3 :

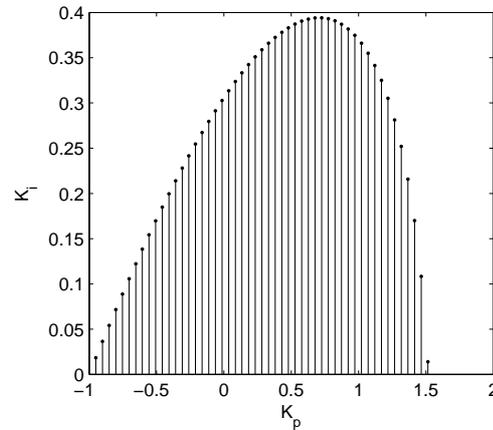


FIGURE 2.3 – Région de stabilité pour l'Exemple 2.1

## 2.4 Commande des systèmes à retards du premier ordre par régulateur PID

Dans cette partie on étudie le problème de stabilisation d'un système du premier ordre à retard en utilisant un contrôleur PID. Ce régulateur est décrit par plusieurs structures, dans notre cas on utilise :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2.19)$$

où  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  représentent respectivement le gain proportionnel, intégral et dérivé. L'objectif est de déterminer analytiquement les valeurs des paramètres  $(K_p, K_i, K_d)$  pour lesquelles la stabilité en boucle fermée est garantie.

**Théorème 2.4** [Silva, 05 ; Bhattacharyya, 09]

Conformément aux hypothèses précédentes sur  $K$ ,  $T$  et  $L$ , les valeurs de  $K_p$  pour lesquelles il existe une solution au problème de stabilisation du régulateur PID vérifient :

$$-\frac{1}{K} < K_p < \frac{1}{K} \left[ \frac{T}{L} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) \right] \quad (2.20)$$

où  $\alpha_1$  est la solution de l'équation  $\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{T}{T+L} \alpha$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .

Pour  $K_p$  en dehors de ces bornes, il n'existe pas de contrôleur PID stabilisant. Les régions de stabilité sont décrites par la figure 2.4.

1. Pour  $K_p \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ , La région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  est un trapèze  $T$  (figure 2.4 (a)).
2. Pour  $K_p = \frac{1}{K}$ , La région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  est un triangle  $\Delta$  (figure 2.4 (b)).
3. Pour  $K_p \in (\frac{1}{K}, K_u = \frac{1}{K} [\frac{T}{L}\alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)])$ , La région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  est un quadrilatérale  $Q$  (figure 2.4 (c)).

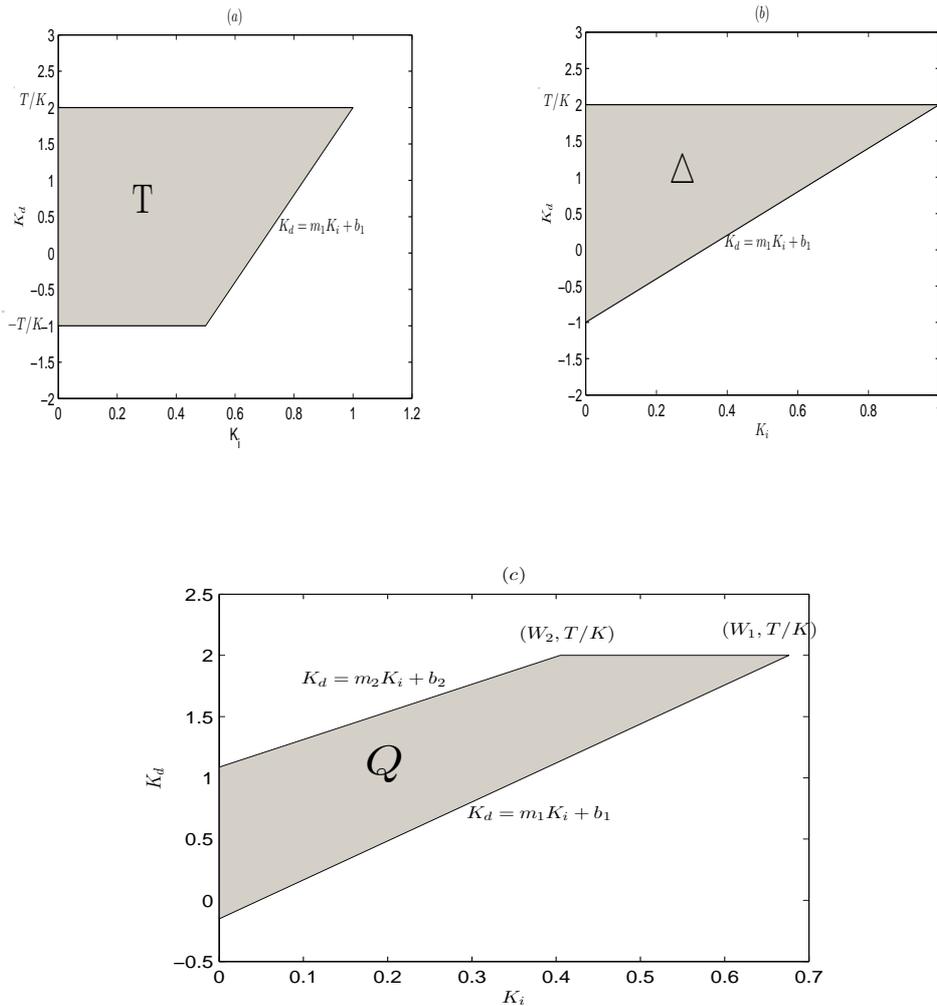


FIGURE 2.4 – Région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour : (a)  $K_p \in [-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}]$ , (b)  $K_p = \frac{1}{K}$  et (c)  $K_p = K_u = \frac{1}{K} [\frac{T}{L}\alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)]$

Les limites des domaines montrés plus hauts sont des droites caractérisées par une pente  $(0, m_1, m_2)$  et une ordonnée à l'origine  $(b_1, b_2, \pm \frac{T}{K})$ .

Ces coefficients dépendent de  $z_j, j = 1, 2$  racines réelles de l'équation :

$$K K_p + \cos(z) - \frac{T}{L} z \sin(z) = 0$$

rangées en ordre croissant d'amplitude.

On note par :  $m(z) = \frac{z^2}{L^2}$ ,  $b(z) = -\frac{L}{Kz} [\sin(z) + \frac{T}{L} z \cos(z)]$  et  $m_j = m(z_j)$ ,  $b_j = b(z_j)$  pour  $j = 1, 2$ .

$w_j = \frac{z_j}{KL} [\sin(z) + \frac{T}{L} z_j (\cos(z_j) + 1)]$ ,  $j = 1, 2$  représentent les coordonnées sur l'axe  $K_i$  des intersections des droites  $m_j K_i + b_j$ ,  $j = 1, 2$  avec la droite  $K_d = \frac{T}{K}$ .

**Démonstration**

L'équation caractéristique en boucle fermée est exprimée par :

$$\delta(s) = K(K_i + K_p s + K_d s^2) e^{-Ls} + (1 + Ts)s \quad (2.21)$$

On en déduit le quasi-polynôme  $\delta^*(s)$  :

$$\delta^*(s) = e^{Ls} \delta(s) = K(K_i + K_p s + K_d s^2) + (1 + Ts) s e^{Ls} \quad (2.22)$$

En substituant  $s$  par  $j\omega$ , on trouve :

$$\delta^*(j\omega) = \delta_r(\omega) + j\delta_i(\omega)$$

avec :

$$\begin{cases} \delta_r(\omega) = KK_i - KK_d \omega^2 - \omega \sin(L\omega) - T\omega^2 \cos(L\omega) \\ \delta_i(\omega) = \omega [KK_p + \cos(L\omega) - T\omega \sin(L\omega)] \end{cases} \quad (2.23)$$

Les paramètres  $K_i$  et  $K_d$  affectent seulement la partie réelle de  $\delta^*(j\omega)$  tandis que le paramètre  $K_p$  affecte la partie imaginaire.

Selon la première condition du théorème 1, il faut vérifier que les racines de  $\delta_r(\omega)$  et  $\delta_i(\omega)$  sont simples. En utilisant le théorème 2.2, tout en choisissant  $M = 2, N = l = 1$  et  $\eta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\delta_i(\omega)$  ne possède que des racines simples pour tout  $K_p$  vérifiant (2.20) [Silva, 05; Bhattacharyya, 09].

L'application de la deuxième condition du théorème 2.1 conduit à :

$$E(\omega_0) = \delta'_i(\omega_0)\delta_r(\omega_0) - \delta_i(\omega_0)\delta'_r(\omega_0) > 0$$

Pour  $\omega_0 = 0$  (valeur qui annule  $\delta_i(\omega_0)$ ), on trouve :

$$E(\omega_0) = \left(\frac{KK_p+1}{L}\right)KK_i > 0$$

Ce qui implique que :  $K_p > \frac{-1}{K}$  et  $K_i > 0$ .

on pose  $L\omega = z$ , il vient :

$$\begin{cases} \delta_i(z) = \frac{z}{L} [KK_p + \cos(z) - \frac{T}{L}z \sin(z)] \\ \delta_r(z) = KK_i - \frac{KK_d}{L^2}z^2 - \frac{z}{L} \sin(z) + \frac{T}{L^2}z^2 \cos(z) \\ \quad = \frac{K}{L^2}z^2 [-K_d + m(z)K_i + b(z)] \end{cases} \quad (2.24)$$

avec :

$$\begin{cases} m(z) = \frac{z^2}{L^2} \\ b(z) = -\frac{L}{Kz} [\sin(z) + \frac{T}{L}z \cos(z)] \end{cases} \quad (2.25)$$

Pour  $z_0 = 0$ , on obtient :

$$\delta_r(z_0) = KK_i > 0 \quad (2.26)$$

Pour  $z_j \neq z_0$ , où  $j = 1, 2, 3, \dots$  il vient :

$$\delta_r(z_j) = \frac{K}{L^2} z_j^2 [-K_d + m(z_j)K_i + b(z_j)] \quad (2.27)$$

L'entrelacement des racines de  $\delta_r(z)$  et  $\delta_i(z)$  est équivalent à  $\delta_r(z_0) > 0$  (puisque  $K_i > 0$ ),  $\delta_r(z_1) < 0$ ,  $\delta_r(z_2) > 0 \dots$

On peut se servir de la propriété d'entrelacement et le fait que  $\delta_i(z)$  a seulement des racines réelles pour établir aussi que  $\delta_i(z)$  possède seulement des racines réelles aussi.

À partir des équations (2.24) et (2.25) on obtient les inégalités (2.28) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_r(z_0) > 0 \\ \delta_r(z_1) < 0 \\ \delta_r(z_2) > 0 \\ \delta_r(z_3) < 0 \\ \delta_r(z_4) > 0 \\ \vdots \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_i > 0 \\ K_d > m_1 K_i + b_1 \\ K_d < m_2 K_i + b_2 \\ K_d > m_3 K_i + b_3 \\ K_d < m_4 K_i + b_4 \\ \vdots \end{array} \right. \quad (2.28)$$

L'intersection de toute ces régions dans le plan  $(K_i, K_d)$  détermine l'ensemble des paramètres  $K_i$  et  $K_d$  tel que les racines de la partie imaginaire  $\delta_i(z)$  vérifient la propriété d'entrelacement pour une valeur donnée du gain  $K_p$  vérifiant (2.20).

### Exemple 2.2

Soit un système du premier ordre à retard avec les paramètres suivants :  $K = 1$ ,  $T = 2s$  et  $L = 4$ . On cherche à le commander avec un régulateur proportionnel intégral dérivé, il s'agit de déterminer le domaine de stabilité par rapport aux paramètres  $(K_p, K_i, K_d)$ .

D'après le théorème 2.4,  $\delta_i(z)$  ne possède que des racines réelles si et seulement si :  $-1 < K_p < 1.5515$ .

On fixe le paramètre  $K_p$  du contrôleur à 0.8, la partie imaginaire est exprimée par :

$$0.8 + \cos(z) - 0.5z \sin(z) = 0$$

Les racines positives de cette équation sont :  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 1.5806$ ,  $z_2 = 3.2602$ ,  $z_3 = 6.7971$ ,  $z_4 = 9.4669, \dots$

En utilisant (2.23) les paramètres  $m_j$  et  $b_j$  pour  $j = 1 \dots 4$  sont exprimés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 6.4044 \\ m_2 = 1.5053 \\ m_3 = 0.3463 \\ m_4 = 0.1785 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} b_1 = -2.511 \\ b_2 = 2.1311 \\ b_3 = -2.0309 \\ b_4 = 2.016 \end{array} \right. \quad (2.29)$$

L'entrelacement des racines de  $\delta_r(z)$  et  $\delta_i(z)$  se produit si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} K_i > 0 \\ K_d > 6.4044K_i - 2.511 \\ K_d < 1.5053K_i + 2.1311 \\ K_d > 0.3463K_i - 2.0309 \\ K_d < 0.1785K_i + 2.016 \\ \vdots \end{cases} \quad (2.30)$$

La figure suivante présente les frontières de la région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour  $K_p = 0.8$ .

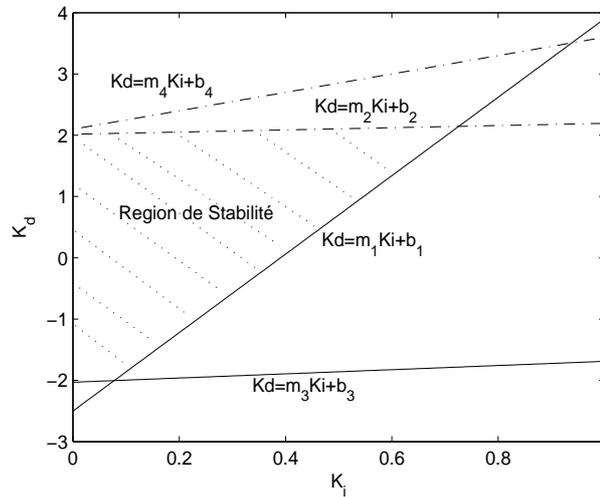


FIGURE 2.5 – Frontières de la région de stabilité  $(K_i, K_d)$  pour l'Exemple 2.2

Soient  $v_j, j = 1, 2, 3, \dots$  les coordonnées sur l'axe  $K_i$  des intersections des droites  $m_j K_i + b_j, j = 1, 2$  avec la droite  $K_d = -\frac{T}{K}$ .

On note par  $w_j, j = 1, 2, 3, \dots$  les coordonnées sur l'axe  $K_i$  des intersections des droites  $m_j K_i + b_j, j = 1, 2$  avec la droite  $K_d = \frac{T}{K}$ .

On rappelle maintenant un lemme qui permet de développer un algorithme pour résoudre le problème de stabilisation PID pour un système du premier ordre à retard.

Ce lemme décrit le comportement des paramètres  $b_j, v_j$  et  $w_j$  avec  $j = 1, 2, 3, \dots$  pour différentes valeurs de  $K_p$  vérifiant (2.20).

**Lemme 2.2** [Silva, 05 ; Bhattacharyya, 09]

1. Si  $K_p \in [-\frac{1}{K}, \frac{1}{K}]$  alors : 
$$\begin{cases} b_j < b_{j+2} < -\frac{T}{K} & \text{pour des valeurs impaires de } j \\ b_j > \frac{T}{K} \text{ et } b_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{T}{K} & \text{pour des valeurs paires de } j \\ 0 < v_j < v_{j+2} & \text{pour des valeurs impaires de } j \end{cases}$$
2. Si  $K_p = \frac{1}{K}$  alors : 
$$\begin{cases} b_j = -\frac{T}{K} & \text{pour des valeurs impaires de } j \\ b_j = \frac{T}{K} & \text{pour des valeurs paires de } j \end{cases}$$
3. Si  $K_p \in [\frac{1}{K}, K_u]$  alors : 
$$\begin{cases} b_j > b_{j+2} > -\frac{T}{K} & \text{pour des valeurs impaires de } j \\ b_j < b_{j+2} < \frac{T}{K} & \text{pour des valeurs paires de } j \\ w_j > w_{j+2} > 0 & \text{pour des valeurs paires de } j \\ b_1 < b_2, w_1 > w_2 & \end{cases}$$

**Algorithme pour la détermination des paramètres du PID** [Silva, 02, 05]

1. Étape 1 : Initialiser  $K_p = -\frac{1}{K}$ ,  $pas = \frac{1}{N+1}(\frac{T}{KL}\sqrt{\alpha_1^2 + \frac{L^2}{T^2}} + \frac{1}{K})$  et  $j = 1$  où  $N$  présente le nombre de points désirés.
2. Étape 2 : Incréments  $K_p = K_p + pas$ .
3. Étape 3 : Si  $K_p < K_u$  alors passer à l'étape 4 ; sinon fin de l'algorithme.
4. Étape 4 : Trouver les racines  $z_1$  et  $z_2$  de  $\delta_i(z)$ .
5. Étape 5 : Calculer les paramètres  $m_j$  et  $b_j$  associés au  $z_j$  précédemment trouvé en utilisant l'équation (2.25).
6. Étape 6 : Déterminer les regions de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  en utilisant la figure 2.4.
7. Étape 7 : Aller à l'étape 2.

### Exemple 2.3

Soit un système de l'exemple 2.2, on s'intéresse à déterminer tous paramètres  $(K_p, K_i, K_d)$  qui le stabilisent. En utilisant l'algorithme précédent, la region de stabilité pour tous les  $K_p$  est donnée par la figure 2.6.

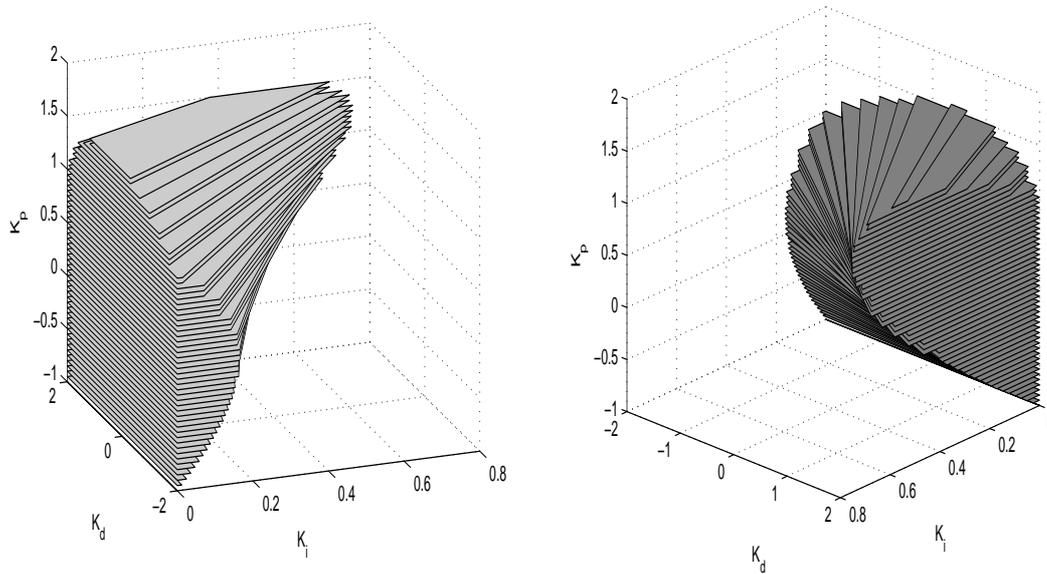


FIGURE 2.6 – Région de stabilité  $(K_i, K_d)$  pour tous les  $K_p$  correspondant à l'exemple 2.2

## 2.5 Commande par régulateur PI pour un système du second ordre à retard

Nous allons proposer un théorème permettant de délimiter les valeurs de  $(K_p, K_i)$  qui stabilisent un système du second ordre à retard.

### Théorème 2.5 [Farkh, 09a]

On considère la commande PI d'un système de deuxième ordre à retard écrit par une fonction de transfert de la forme suivante :

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + a_1s + a_0} e^{-Ls} \quad (2.31)$$

avec  $K > 0$  est le gain statique du système,  $L > 0$  le retard de la chaîne d'action,  $a_0 \geq 0$  et  $a_1 > 0$  sont les paramètres du système.

Le contrôleur PI est donné par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (2.32)$$

L'ensemble des contrôleurs PI préservant la stabilité du système (2.31) est défini par les valeurs admissibles suivantes :

**R1** Il est nécessaire et suffisant que  $K_p$  vérifie :

$$-\frac{a_0}{K} < K_p < Ku = \frac{1}{K} \left( a_1 \frac{\alpha}{L} \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \left( a_0 - \frac{\alpha^2}{L^2} \right) \right) \quad (2.33)$$

où  $\alpha$  est l'unique racine sur l'intervalle  $[0, \pi]$  de l'équation :

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\alpha(2+a_1L)}{(\alpha^2 - a_1L - a_0L^2)}.$$

Pour  $K_p$  en dehors de ces bornes, il n'existe pas de contrôleur PI stabilisant.

**R2** Une fois  $K_p$  choisi dans ces bornes, il faut et il suffit de choisir  $K_i$  comme suit :

$$0 < K_i < \min_{j=1,3,5,\dots} \{a_j\} \quad (2.34)$$

Avec  $a(z_j)$  est donné par :  $a(z_j) = \frac{z_j}{KL} \left[ \sin(z_j) \left( a_0 - \frac{z_j^2}{L^2} \right) + a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z) \right]$  et  $z_j, j = 1, 2, 3, \dots$  sont les racines réelles positives classées par ordre croissant de l'équation :

$$\delta_i(z) = \frac{z}{L} (KK_p + \cos(z) \left( a_0 - \frac{z^2}{L^2} \right) - a_1 \frac{z}{L} \sin(z))$$

#### Démonstration du résultat $R_1$

L'équation caractéristique en boucle fermée du système est donnée par :

$$\delta(s) = K(K_i + K_p s)e^{-Ls} + (s^2 + a_1 s + a_0)s \quad (2.35)$$

Nous en déduisons le quasi-polynôme  $\delta^*(s)$  :

$$\delta^*(s) = e^{Ls} \delta(s) = K(K_i + K_p s) + s(s^2 + a_1 s + a_0)e^{Ls} \quad (2.36)$$

En substituant  $s$  par  $j\omega$ , nous obtenons :

$$\delta^*(j\omega) = \delta_r(\omega) + j\delta_i(\omega)$$

avec :

$$\begin{cases} \delta_r(\omega) = KK_i + (\omega^3 - a_0\omega) \sin(L\omega) - a_1\omega^2 \cos(L\omega) \\ \delta_i(\omega) = \omega [KK_p + (a_0 - \omega^2) \cos(L\omega) - a_1\omega \sin(L\omega)] \end{cases} \quad (2.37)$$

Clairement, le paramètre  $K_i$  affecte seulement la partie réelle de  $\delta^*(j\omega)$  tandis que le paramètre  $K_p$  affecte la partie imaginaire.

Nous posons  $L\omega = z$ , alors nous trouvons :

$$\begin{cases} \delta_r(z) = KK_i + \sin(z)\left(\frac{z^3}{L^3} - a_0\frac{z}{L}\right) - a_1\frac{z^2}{L^2}\cos(z) \\ \delta_i(z) = \frac{z}{L}(KK_p + \cos(z)(a_0 - \frac{z^2}{L^2}) - a_1\frac{z}{L}\sin(z)) \end{cases} \quad (2.38)$$

L'application de la deuxième condition du théorème 2.1 nous conduit à :

$$E(z_0) = \delta'_i(z_0)\delta_r(z_0) - \delta_i(z_0)\delta'_r(z_0) > 0$$

À partir de (2.38) nous obtenons :

$$\delta'_i(z) = \frac{KK_p}{L} - \sin(z)\left(a_0 + \frac{2a_1z}{L^2} - \frac{z^3}{L^3}\right) + \cos(z)\left(\frac{a_0}{L} - \frac{3z^2}{L^3} - a_1\frac{z^2}{L^2}\right)$$

Pour  $z_0 = 0$  (valeur qui annule  $\delta_i(\omega)$ ), nous trouvons :

$$E(z_0) = \delta'_i(z_0)\delta_r(z_0) = \left(\frac{KK_p + a_0}{L}\right)KK_i > 0$$

Ce qui implique que :  $K_p > \frac{-a_0}{K}$  si  $K > 0$  et  $K_i > 0$ . Ceci prouve la première inégalité donnée par (2.33) du théorème 2.5.

Nous passons à la vérification de la condition d'entrelacement des racines de  $\delta_r(z)$  et  $\delta_i(z)$ . Pour cela, nous allons déterminer les racines de la partie imaginaire données par la relation suivante :

$$\delta_i(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ KK_p + \cos(z)\left(a_0 - \frac{z^2}{L^2}\right) - a_1\frac{z}{L}\sin(z) = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

qui peut s'exprimer par :

$$\delta_i(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ f(z) = g(z) \end{cases} \quad (2.40)$$

avec :

$$f(z) = KK_p + \cos(z)\left(a_0 - \frac{z^2}{L^2}\right) \text{ et } g(z) = a_1\frac{z}{L}\sin(z).$$

Nous notons que  $z_0 = 0$  est une racine triviale de la partie imaginaire. Il est difficile de calculer les autres analytiquement mais il est cependant possible de les positionner graphiquement. Deux cas sont présentés :

**Premier cas :**  $\frac{-a_0}{K} < K_p < K_u$

Dans ce cas-ci, nous traçons graphiquement les courbes de  $f(z)$ , de  $g(z)$  et de la droite verticale  $h$  définie par  $z = L\sqrt{a_0}$  comme l'indique la figure 2.7.

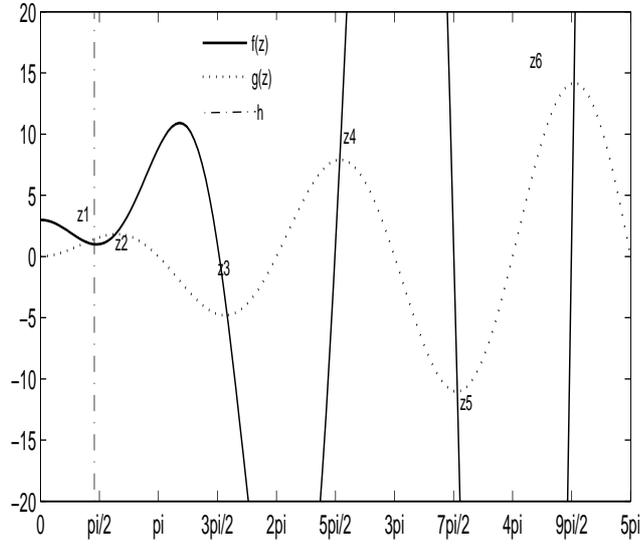


FIGURE 2.7 – Représentation des courbes de  $f(z)$ , de  $g(z)$  et de  $h$  (Cas :  $-\frac{a_0}{K} < K_p < K_u$ )

$K_u$  sera défini plus tard dans le deuxième cas. Nous notons que pour  $-\frac{a_0}{K} < K_p$ , la courbe de  $f(z)$  coupe la courbe de  $g(z)$  deux fois dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . De plus, nous pouvons voir les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 \in [0, \pi/2] \\ z_3 \in [3\pi/2, 2\pi] \\ z_5 \in [7\pi/2, 4\pi] \\ \vdots \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_2 \in [\pi/2, \pi] \\ z_4 \in [5\pi/2, 3\pi] \\ z_6 \in [9\pi/2, 5\pi] \\ \vdots \end{array} \right.$$

C'est à dire les  $z_j$  vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 \in [0, \pi/2] \\ \text{et} \\ z_j \in [(2j-3)\frac{\pi}{2}, (j-1)\pi] \quad \text{for } j \geq 2 \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Et nous avons aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 < z = L\sqrt{a_0} \\ \text{et} \\ z_j > z = L\sqrt{a_0}, \quad \text{for } j \geq 2 \end{array} \right. \quad (2.42)$$

**Deuxième cas :**  $K_p \geq K_u$

La figure 2.8 représente le cas où  $K_p = K_u$ .  $K_u$  étant la valeur maximale de  $K_p$  tel que les courbes de  $f(z)$  et de  $g(z)$  ont un seul point de tangence dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .

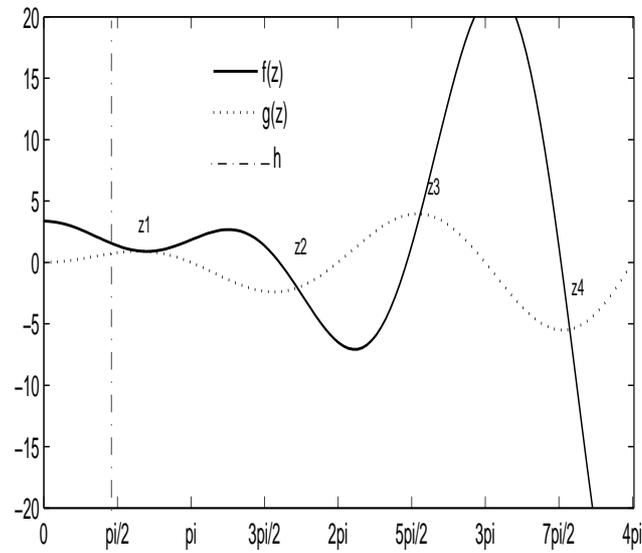


FIGURE 2.8 – Représentation des courbes de  $f(z)$ , de  $g(z)$  et de  $h$  (Cas :  $K_p = K_u$ )

Les courbes de la figure 2.9 correspondent au cas  $K_p > K_u$  où la courbe de  $f(z)$  ne coupe pas la courbe de  $g(z)$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .

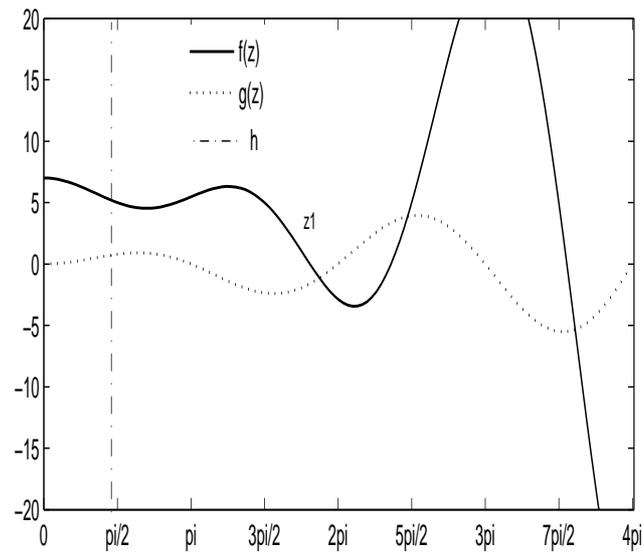


FIGURE 2.9 – Représentation des courbes de  $f(z)$ , de  $g(z)$  et de  $h$  (Cas :  $K_p > K_u$ )

Pour vérifier que  $\delta_i(z)$  possède seulement des racines simples nous utilisons le théorème 2.1. Remplaçant  $Ls$  par  $s_1$  dans (2.35) et nous écrivons  $\delta^*(s)$  comme suit :

$$\delta^*(s) = e^{s_1} \left( \left( \frac{s_1}{L} \right)^3 + a_1 \left( \frac{s_1}{L} \right)^2 + a_0 \frac{s_1}{L} \right) + K \left( K_p \frac{s_1}{L} + K_i \right) \quad (2.43)$$

Pour ce nouveau quasi-polynôme, nous voyons que  $M = 3$  et  $N = 1$  où  $M$  et  $N$  désignent respectivement les plus hautes puissances de  $s_1$  et de  $e^{s_1}$  qui apparaissent dans  $\delta^*(s)$ . Nous choisissons  $\eta = \frac{\pi}{4}$  qui satisfait la condition donnée par le théorème 2.2 tel que  $\delta_r(\eta) \neq 0$  et  $\delta_i(\eta) \neq 0$ .

Selon la figure 2.7, nous notons que pour  $-\frac{a_0}{K} < K_p < K_u$ ,  $\delta_i(z)$  possède quatre racines dans l'intervalle  $[0, 2\pi - \frac{\pi}{4}] = [0, \frac{7\pi}{4}]$  y compris la racine à l'origine. Comme  $\delta_i(z)$  est une fonction impaire alors elle possède 7 racines dans l'intervalle  $[-2\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}] = [-\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ .

Par conséquent, nous pouvons affirmer que  $\delta_i(z)$  a exactement  $4N + M = 7$  racines sur l'intervalle  $[-2\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}] = [-\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ . De plus, nous pouvons voir que  $\delta_i(z)$  possède aussi deux racines réelles sur chacun des intervalles  $[2l\pi + \frac{\pi}{4}, 2(l+1)\pi + \frac{\pi}{4}]$  et  $[-2(l+1)\pi + \frac{\pi}{4}, -2l\pi + \frac{\pi}{4}]$  pour  $l = 1, 2, \dots$

Il résulte que  $\delta_i(z)$  possède exactement  $4lN + M$  racines réelles sur  $[-2l\pi + \frac{\pi}{4}, 2l\pi + \frac{\pi}{4}]$  pour  $-\frac{a_0}{K} < K_p < K_u$ .

Finalement, d'après le théorème 2.2 la partie imaginaire  $\delta_i(z)$  ne possède que des racines réelles pour chaque  $K_p$  dans  $(-\frac{a_0}{K}, K_u)$ . Pour  $K_p \geq K_u$ , correspondant aux figures 2.8 et 2.9, les racines de  $\delta_i(z)$  ne sont pas réelles. D'après la définition du terme  $K_u$ , si  $K_p = K_u$  alors les courbes de  $f(z)$  et de  $g(z)$  sont tangentes en un point  $\alpha$ , ce qui se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} KK_u + \cos(\alpha)(a_0 - \frac{\alpha^2}{L^2}) = a_1 \frac{\alpha}{L} \sin(\alpha) \\ \text{et} \\ \left[ \frac{d(KK_u + \cos(z)(a_0 - \frac{z^2}{L^2}))}{dz} \right]_{z=\alpha} = \left[ \frac{d(a_1 \frac{z}{L} \sin(z))}{dz} \right]_{z=\alpha} \end{array} \right.$$

d'où :

$$-2\alpha \cos(\alpha)(1 + a_1 L) + \sin(\alpha)(\alpha^2 - a_0 L^2 - a_1 L) = 0$$

Soit :

$$tg(\alpha) = \frac{\alpha(2 + a_1 L)}{(\alpha^2 - a_0 L^2 - a_1 L)} \quad (2.44)$$

Une fois le paramètre  $\alpha$  déterminé,  $K_u$  est donné par :

$$K_u = \frac{1}{K} \left( a_1 \frac{\alpha}{L} \sin(\alpha) - \cos(\alpha)(a_0 - \frac{\alpha^2}{L^2}) \right) \quad (2.45)$$

Ce qui accomplit la preuve du résultat  $R_1$  du théorème 2.5.

**Démonstration du résultat  $R_2$**

Après la détermination des racines réelles de la partie imaginaire  $\delta_i(z)$ , nous passons à l'évaluation de ces racines par la partie réelle  $\delta_r(z)$ .

$$\begin{aligned}\delta_r(z) &= KK_i + \sin(z)\left(\frac{z^3}{L^3} - a_0\frac{z}{L}\right) - a_1\frac{z^2}{L^2}\cos(z) \\ &= K[K_i - a(z)]\end{aligned}\quad (2.46)$$

$$\text{où : } a(z) = \frac{z}{KL} \left[ \sin(z)\left(a_0 - \frac{z^2}{L^2}\right) + a_1\frac{z}{L}\cos(z) \right].$$

Soit  $z_j, j = 1, 2, 3, \dots$  les racines de  $\delta_i(z)$ , pour  $z_0$  nous avons :

$$\delta_r(z_0) = K(K_i - a(0)) = KK_i > 0 \quad (2.47)$$

Pour  $z_j \neq z_0, j = 1, 2, 3, \dots$  nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta_r(z_j) &= K(K_i - a(z_j)) \\ &= K(K_i - a_j)\end{aligned}\quad (2.48)$$

avec :  $a(z_j) = a_j$ .

L'entrelacement des racines de  $\delta_r(z)$  et  $\delta_i(z)$  est équivalent à  $\delta_r(z_0) > 0$  (puisque  $K_i > 0$ ),  $\delta_r(z_1) < 0, \delta_r(z_2) > 0, \dots$

Nous pouvons se servir de la propriété d'entrelacement et le fait que  $\delta_i(z)$  a seulement des racines réelles pour établir aussi que  $\delta_r(z)$  possède seulement des racines réelles.

D'après des équations précédentes nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_r(z_0) > 0 \\ \delta_r(z_1) < 0 \\ \delta_r(z_2) > 0 \\ \delta_r(z_3) < 0 \\ \delta_r(z_4) > 0 \\ \vdots \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_i > 0 \\ K_i < a_1 \\ K_i > a_2 \\ K_i < a_3 \\ K_i > a_4 \\ \vdots \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Maintenant, d'après ces inégalités il est clair que nous n'avons besoin que des limites impaires (c'est-à-dire  $a_1, a_3, \dots$ ) qui doivent être strictement positives pour obtenir une gamme faisable pour le paramètre  $K_i$  du contrôleur PI.

Dans la suite, Nous nous intéressons à montrer que les  $a_j$  impaires sont strictement positives et que les  $a_j$  paires sont strictement négatives pour affirmer la relation (2.50) c'est à dire :

$$a(z_j) > 0, \text{ pour } j = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (2.50)$$

et

$$a(z_j) < 0, \text{ pour } j = 2, 4, 6, 8, \dots \quad (2.51)$$

À partir de la figure 2.7, les racines  $z_j$  de  $\delta_i(z)$  vérifient :

$$\begin{cases} z_1 \in [0, \pi/2] \\ \text{et} \\ z_j \in [(2j-3)\frac{\pi}{2}, (j-1)\pi] \text{ for } j \geq 2 \end{cases} \quad (2.52)$$

De plus nous avons :

$$\begin{cases} z_1 < L\sqrt{a_0} \\ \text{et} \\ z_j > L\sqrt{a_0}, \text{ for } j \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_0 - \frac{z_1^2}{L^2}) > 0 \\ \text{et} \\ (a_0 - \frac{z_j^2}{L^2}) < 0, \text{ for } j \geq 2 \end{cases}$$

### Preuve de la relation (2.50)

Nous nous intéressons à démontrer que  $a(z_j) > 0$  pour  $j = 1, 3, 5, 7, \dots$

– Étape 1 : d’après (2.52), pour  $z_j$  nous avons  $\cos(z_1) > 0$  et  $\text{tg}(z_1) > 0$ .

Effectuons un raisonnement par absurde, nous supposons que :

$$\begin{aligned} a(z_1) &< 0 \\ \Rightarrow \left[ \sin(z_1)\left(a_0 - \frac{z_1^2}{L^2}\right) + a_1 \frac{z_1}{L} \cos(z_1) \right] &< 0 \\ \Rightarrow \sin(z_1)\left(a_0 - \frac{z_1^2}{L^2}\right) &< -a_1 \frac{z_1}{L} \cos(z_1) \\ \Rightarrow \text{tg}(z_1)\left(a_0 - \frac{z_1^2}{L^2}\right) &< -a_1 \frac{z_1}{L} \\ \Rightarrow \text{tg}(z_1) &< \frac{-a_1 \frac{z_1}{L}}{\left(a_0 - \frac{z_1^2}{L^2}\right)} < 0 \end{aligned}$$

Ce qui est absurde, d’où le résultat :

$$\left[ \sin(z_1)\left(a_0 - \frac{z_1^2}{L^2}\right) + a_1 \frac{z_1}{L} \cos(z_1) \right] > 0 \Rightarrow a(z_1) > 0$$

– Étape 2 : d’après (2.52), nous avons  $\cos(z_j) > 0$  et  $\text{tg}(z_j) < 0$  pour  $z_j$  où  $j = 3, 5, 7, 9, \dots$

Nous supposons que :

$$\begin{aligned} a(z_j) &< 0 \\ \Rightarrow \left[ \sin(z_j)\left(a_0 - \frac{z_j^2}{L^2}\right) + a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z_j) \right] &< 0 \\ \Rightarrow \sin(z_j)\left(a_0 - \frac{z_j^2}{L^2}\right) &< -a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z_j) \\ \Rightarrow \text{tg}(z_j)\left(a_0 - \frac{z_j^2}{L^2}\right) &< -a_1 \frac{z_j}{L} \\ \Rightarrow \text{tg}(z_j) &> \frac{-a_1 \frac{z_j}{L}}{\left(a_0 - \frac{z_j^2}{L^2}\right)} > 0 \end{aligned}$$

Ce qui est absurde, d’où :

$$\left[ \sin(z_j)\left(a_0 - \frac{z_j^2}{L^2}\right) + a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z_j) \right] > 0 \Rightarrow a(z_j) > 0 \text{ pour } j = 3, 5, 7, \dots$$

### Preuve de la relation (2.51)

Nous cherchons à démontrer que  $a(z_j) < 0$  pour  $j = 2, 4, 6, 8, \dots$

Pour  $z_j, j = 2, 4, 6, 8, \dots$  nous avons  $\cos(z_j) < 0$  et  $\text{tg}(z_j) < 0$  d’après (2.52), nous supposons que :

$$\begin{aligned}
& a(z_j) > 0 \\
& \Rightarrow \left[ \sin(z_j) \left( a_0 - \frac{z_j^2}{L^2} \right) + a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z_j) \right] > 0 \\
& \Rightarrow \sin(z_j) \left( a_0 - \frac{z_j^2}{L^2} \right) > -a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z_j) \\
& \Rightarrow \operatorname{tg}(z_j) \left( a_0 - \frac{z_j^2}{L^2} \right) < -a_1 \frac{z_j}{L} \\
& \Rightarrow \operatorname{tg}(z_j) > \frac{-a_1 \frac{z_j}{L}}{\left( a_0 - \frac{z_j^2}{L^2} \right)} > 0
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde et par conséquent nous obtenons :

$$\left[ \sin(z_j) \left( a_0 - \frac{z_j^2}{L^2} \right) + a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z_j) \right] < 0 \Rightarrow a(z_j) < 0 \text{ pour } j = 2, 4, 6, 8, \dots$$

Pour déterminer les paramètres stabilisants dans le plan  $(K_p, K_i)$  pour un système du second ordre à retard nous proposons l'algorithme suivant :

**Algorithme : Détermination des paramètres du PI** [Farkh, 09a]

- Étape 1 : Initialiser  $K_p = -\frac{a_0}{K}$  et fixer *pas* à une valeur suffisamment petite,
- Étape 2 : Incrémenter  $K_p = K_p + pas$ ,
- Étape 3 : Si  $K_p < \frac{1}{K} \left( a_1 \frac{\alpha}{L} \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \left( a_0 - \frac{\alpha^2}{L^2} \right) \right)$  alors aller à l'étape 4 ; sinon fin de l'algorithme,
- Étape 4 : Trouver les racines  $z_j$  de  $\delta_i(z)$ ,
- Étape 5 : Calculer les paramètres  $a_j$  associés au  $z_j$  précédemment trouvés,
- Étape 6 : Déterminer les limites inférieures et supérieures de  $K_i$  comme suit :
$$0 < K_i < \min_{j=1,3,5} \{a_j\}$$
- Étape 7 : Retour à l'étape 2.

#### Exemple 2.4

Soit un système du deuxième ordre à retard décrit par la fonction de transfert suivante [Silva, 01c]. Nous nous intéressons à le commander avec un régulateur PI, il s'agit de déterminer le domaine de stabilité par rapport aux paramètres  $(K_p, K_i)$ .

$$G(s) = \frac{5e^{-3s}}{s^2 + 2s + 5} \quad (2.53)$$

pour déterminer les valeurs de  $K_p$ , nous cherchons  $\alpha$  dans  $[0, \pi]$  satisfaisant :

$$\tan(\alpha) = \frac{8\alpha}{(51-\alpha^2)} \Rightarrow \alpha = 2.685.$$

En utilisant (2.33)  $K_p$  est donné par :  $-1 < K_p < 0.9116$ . Il est à remarquer que cet intervalle est légèrement différent de celui obtenu par [Silva, 01c] qui trouve  $-0.8015 < K_p < 0.9186$ . Cet écart se justifie par la présence de l'action intégrale considérée dans notre cas, [Silva, 01c] n'envisage quand à lui que l'action proportionnelle. La frontière de stabilité du système, tracée dans le plan  $(K_p, K_i)$  est présentée par la figure 2.10.

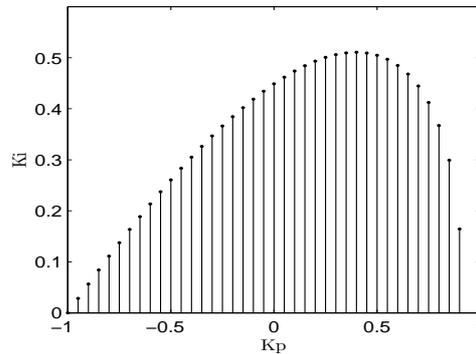


FIGURE 2.10 – Domaine de stabilité du contrôleur PI de l'Exemple 2.4

La figure 2.11 présente l'évolution de la consigne, de la sortie de certains régulateurs PI choisis à partir du domaine de stabilité. Dans cette figure aucune contrainte sur les performances n'a été envisagée. Nous verrons par la suite ( chapitre 3) une approche d'optimisation.

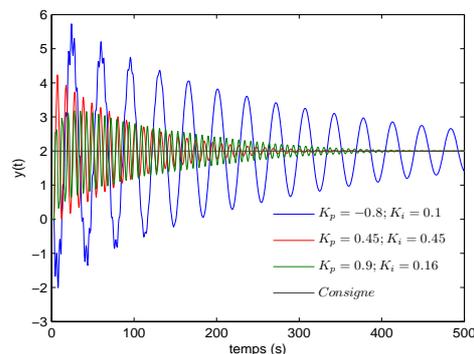


FIGURE 2.11 – Réponse indicielle en boucle fermée de l'Exemple 2.4

Dans le paragraphe suivant nous nous intéressons au cas de la commande PID d'un système du second ordre à retard.

## 2.6 Commande par régulateur PID pour un système du second ordre à retard

Dans cette partie nous énonçons un théorème pour la commande PID d'un système du second ordre à retard.

**Théorème 2.6** [Farkh, 09b]

Soit un système du second ordre à retard donné par l'équation (2.31) et soit une commande par régulateur PID donnée par :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2.54)$$

Nous admettons que les coefficients vérifient  $K > 0$ ,  $L > 0$ ,  $a_0 \geq 0$  et  $a_1 \geq 0$ , alors l'ensemble des contrôleurs PID préservant la stabilité du système (2.31) est défini par les valeurs admissibles suivantes :

**R1** Il est nécessaire et suffisant que  $K_p$  vérifie la relation (2.55) :

$$-\frac{a_0}{K} < K_p < \frac{1}{K} \left( a_1 \frac{\alpha}{L} \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \left( a_0 - \frac{\alpha^2}{L^2} \right) \right) \quad (2.55)$$

où  $\alpha$  est la solution de l'équation  $tg(\alpha) = \frac{\alpha(2+a_1L)}{(\alpha^2 - a_1L - a_0L^2)}$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . Pour  $K_p$  en dehors de ces bornes, il n'existe pas de contrôleur PID stabilisant.

**R2** Une fois  $K_p$  choisi dans ces bornes, il faut et il suffit pour stabiliser (2.31) de choisir  $K_i$  et  $K_d$  de telle sorte qu'ils appartiennent au domaine défini par :

1- Un triangle  $\Delta$  délimité par les deux droites d'équations :

$$\begin{cases} K_d = m_1 K_i + b_1 \\ \text{et} \\ K_d = m_2 K_i + b_2 \end{cases}$$

et ceci pour  $b_1 > b_3$  avec  $b_i = b(z_j) = \frac{L}{K z_j} \left[ -a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z_j) + \sin(z_j) \left( \frac{z_j^2}{L^2} - a_0 \right) \right]$ ,  $m_i = m(z_j) = \frac{L^2}{z_j^2}$  où  $z_j$  sont les racines réelles positives classées par ordre croissant de l'équation :

$$\delta_i(z) = \frac{z}{L} (K K_p + \cos(z) (a_0 - \frac{z^2}{L^2}) - a_1 \frac{z}{L} \sin(z))$$

2- Un trapèze T délimité par les trois droites d'équations :

$$\begin{cases} K_d = m_1 K_i + b_1 \\ K_d = m_2 K_i + b_2 \\ K_d = m_3 K_i + b_3 \end{cases}$$

et ceci pour  $b_1 < b_3$  avec les mêmes définitions que précédemment.

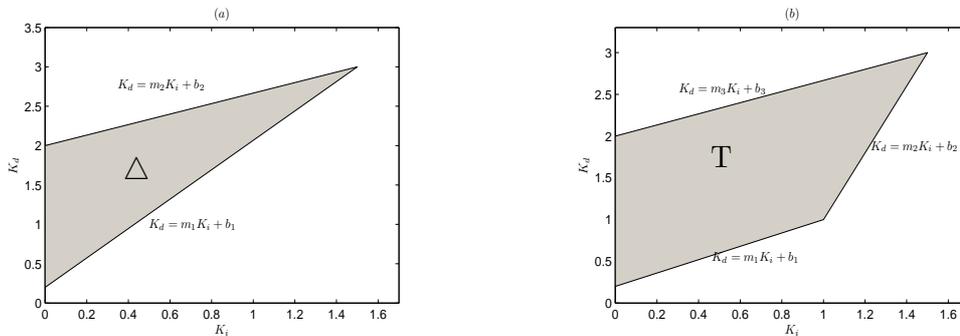


FIGURE 2.12 – Région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour :(a)  $b_1 > b_3$ , (b)  $b_3 > b_1$

**Démonstration du résultat  $R_1$**

**Remarque :**

La relation (2.55) est identique à celle du théorème 2.5 comme nous allons le prouver. L'équation caractéristique en boucle fermée du système est donnée par :

$$\delta(s) = K(K_i + K_p s + K_d s^2) e^{-Ls} + (s^2 + a_1 s + a_0) s \quad (2.56)$$

Nous en déduisons le quasi-polynôme  $\delta^*(s)$  :

$$\delta^*(s) = K(K_i + K_p s + K_d s^2) + s(s^2 + a_1 s + a_0) e^{Ls} \quad (2.57)$$

En substituant  $s$  par  $j\omega$ , nous obtenons :

$$\delta^*(j\omega) = \delta_r(\omega) + j\delta_i(\omega)$$

avec :

$$\begin{cases} \delta_r(\omega) = KK_i - KK_d \omega + (\omega^3 - a_0 \omega) \sin(L\omega) - a_1 \omega^2 \cos(L\omega) \\ \delta_i(\omega) = \omega [KK_p + (a_0 - \omega^2) \cos(L\omega) - a_1 \omega \sin(L\omega)] \end{cases} \quad (2.58)$$

Clairement, les paramètres  $K_i$  et  $K_d$  affectent seulement la partie réelle de  $\delta^*(j\omega)$  tandis que le paramètre  $K_p$  affecte la partie imaginaire.

Nous remarquons que la partie imaginaire  $\delta_i(\omega)$  de l'expression (2.58) est identique à celle de l'expression (2.37). Il s'en suit la même condition sur  $K_p$ , ce qui fait la même démonstration.

**Démonstration du résultat  $R_2$**

Après la détermination des racines réelles de la partie imaginaire  $\delta_i(z)$ , nous passons à l'évaluation de ces racines par la partie réelle  $\delta_r(z)$ .

$$\begin{aligned} \delta_r(z) &= KK_i - KK_d \frac{z^2}{L^2} + \sin(z) \left( \frac{z^3}{L^3} - a_0 \frac{z}{L} \right) - a_1 \frac{z^2}{L^2} \cos(z) \\ &= K \frac{z^2}{L^2} \left[ -K_d + K_i \frac{L^2}{z^2} + \frac{L}{Kz} \left[ -a_1 \frac{z}{L} \cos(z) + \sin(z) \left( \frac{z^2}{L^2} - a_0 \right) \right] \right] \\ &= K \frac{z^2}{L^2} [-K_d + m(z)K_i + b(z)] \end{aligned} \quad (2.59)$$

où :

$$\begin{cases} m(z) = \frac{L^2}{z^2} \\ b(z) = \frac{L}{Kz} \left[ -a_1 \frac{z}{L} \cos(z) + \sin(z) \left( \frac{z^2}{L^2} - a_0 \right) \right] \end{cases} \quad (2.60)$$

D'après la première condition du théorème 2.1, les racines de  $\delta_r(z)$  et de  $\delta_i(z)$  doivent vérifier la propriété d'entrelacement pour que  $\delta^*(s)$  soit stable.

Soit  $z_j$  les racines de la partie imaginaire  $\delta_i(z)$ , pour  $z_0 = 0$  nous avons :

$$\delta_r(z_0) = KK_i > 0 \quad (2.61)$$

Pour  $z_j \neq z_0$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta_r(z_j) &= K \frac{z_j^2}{L^2} [-K_d + m(z_j)K_i + b(z_j)] \\ &= K \frac{z_j^2}{L^2} [-K_d + m_j K_i + b_j] \end{aligned} \quad (2.62)$$

avec :

$$\begin{cases} m(z_j) = m_j \\ b(z_j) = b_j \end{cases} \quad (2.63)$$

L'entrelacement des racines de  $\delta_r(z)$  et  $\delta_i(z)$  est équivalent à  $\delta_r(z_0) > 0$  (puisque  $K_i > 0$ ),  $\delta_r(z_1) < 0$ ,  $\delta_r(z_2) > 0$ ...

Nous pouvons se servir de la propriété d'entrelacement et le fait que  $\delta_i(z)$  a seulement des racines réelles pour établir aussi que,  $\delta_r(z)$  possède aussi seulement des racines réelles.

À partir des équations précédentes nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \delta_r(z_0) > 0 \\ \delta_r(z_1) < 0 \\ \delta_r(z_2) > 0 \\ \delta_r(z_3) < 0 \\ \delta_r(z_4) > 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_i > 0 \\ K_d > m_1 K_i + b_1 \\ K_d < m_2 K_i + b_2 \\ K_d > m_3 K_i + b_3 \\ K_d < m_4 K_i + b_4 \\ \vdots \end{cases} \quad (2.64)$$

En faisant l'intersection de toute ces régions dans le plan  $(K_i, K_d)$ , nous obtenons l'ensemble des paramètres  $(K_i, K_d)$  tels que les racines de la partie imaginaire  $\delta_i(z)$  vérifient la propriété d'entrelacement pour une valeur donnée du gain  $K_p$ .

Les inégalités données par (2.64) représentent des demi plans dans l'espace de  $K_i$  et  $K_d$ . Leurs frontières sont données par des lignes décrites par les équations suivantes :

$$K_d = m_j K_i + b_j \text{ for } j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.65)$$

Nous énonçons maintenant un lemme technique important qui nous permet de développer un algorithme pour résoudre le problème de stabilisation PID.

**Lemme 2.3** [Farkh, 09b]

Pour des valeurs de  $K_p$  stabilisant le système (2.31), il vient :

$$\begin{cases} 1 - b_j < b_{j+2} \text{ pour } j = 2, 4, 6, \dots \\ 2 - b_j > b_{j+2} \text{ pour } j = 3, 5, 7, \dots \\ 3 - m_j > m_{j+2} \text{ pour } j \geq 1 \text{ et } \lim_{j \rightarrow \infty} m_j = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

**Démonstration du Lemme 2.3**

D'après l'équation (2.60) nous avons :  $m(z_j) = \frac{L^2}{z_j^2}$ ,  $0 < z_j < z_{j+2} \Rightarrow \frac{L^2}{z_j^2} > \frac{L^2}{z_{j+2}^2}$  pour  $j \geq 1$  alors  $m(z_j) > m(z_{j+2})$  et  $\lim_{j \rightarrow \infty} m(z_j) = 0$ .

**Remarque 1**

Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.7, les racines impaires de  $\delta_i(z)$  c'est-à-dire les  $z_j$  pour  $j = 3, 5, 7, \dots$  vérifient  $z_j \in [(2j-3)\frac{\pi}{2}, (j-1)\pi]$ .

Par ailleurs, ces racines s'approchent de  $(2j - 3)\frac{\pi}{2}$  quand  $j$  augmente. Ainsi nous avons :  $\lim_{j \rightarrow \infty} \cos(z_j) = 0$  et  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sin(z_j) = -1$ .

D'ailleurs, puisque les fonctions cosinus et sinus sont croissantes sur les intervalles  $[(2j - 3)\frac{\pi}{2}, (j - 1)\pi]$  pour  $j = 3, 5, 7, \dots$  alors nous obtenons :

$$\begin{cases} \cos(z_3) > \cos(z_5) > \cos(z_7) > \dots \\ \sin(z_3) > \sin(z_5) > \sin(z_7) > \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(z_j) > \cos(z_{j+2}) > 0 \\ \sin(z_{j+2}) < \sin(z_j) < 0 \end{cases}$$

**Remarque 2**

Comme le montre la figure 2.7, les racines paires de  $\delta_i(z)$ , c'est-à-dire les  $z_j$  pour  $j = 2, 4, 6, \dots$  vérifient  $z_j \in [(2j - 3)\frac{\pi}{2}, (j - 1)\pi]$ .

Par ailleurs, ces racines s'approchent de  $(2j - 3)\frac{\pi}{2}$  quand  $j$  augmente. Ainsi nous avons :  $\lim_{j \rightarrow \infty} \cos(z_j) = 0$  et  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sin(z_j) = 1$ .

D'ailleurs, puisque les fonctions cosinus et sinus sont décroissantes sur les intervalles  $[(2j - 3)\frac{\pi}{2}, (j - 1)\pi]$  pour  $j = 2, 4, 6, \dots$  alors nous obtenons :

$$\begin{cases} \cos(z_2) < \cos(z_4) < \cos(z_6) < \dots \\ \sin(z_2) < \sin(z_4) < \sin(z_6) < \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(z_j) < \cos(z_{j+2}) < 0 \\ 0 < \sin(z_j) < \sin(z_{j+2}) \end{cases}$$

Le signe de  $b(z_j)$  peut être déduit de manière graphique ; soit un  $K_p$  donné à partir de l'intervalle déterminé par le théorème 2.7. Nous allons tracer la courbe de  $\delta_i(z)$  ainsi que ces racines notées  $z_j, j = 1, 2, 3, \dots$ . Afin d'analyser les variations de  $\delta_i(z)$ , nous traçons aussi les deux composantes  $-a_1 \frac{z}{L} \cos(z)$  et  $\sin(z)(\frac{z^2}{L^2} - a_0)$ .

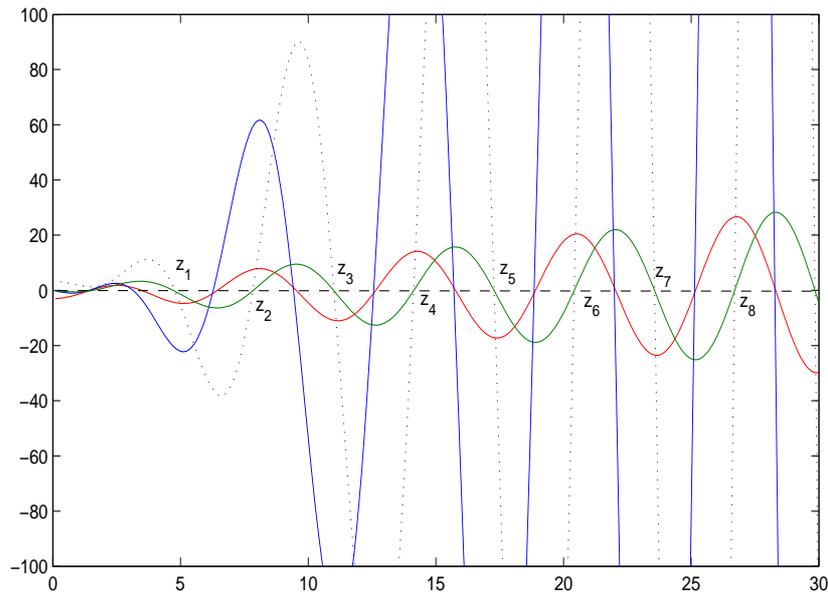


FIGURE 2.13 – Courbe de  $\delta_i(z)$  (en pointillé), courbe de  $-a_1 \frac{z}{L} \cos(z)$  (en vert), courbe de  $\sin(z)(\frac{z^2}{L^2} - a_0)$  (en bleu) et courbe de  $b(z)$  (en rouge)

Nous nous intéressons aux racines impaires de  $\delta_i(z)$ , l'image de ces racines par  $\sin(z)(\frac{z^2}{L^2} - a_0)$  est décroissante en amplitude alors qu'elle est croissante pour les racines paires ; Cependant, comparé au changement de  $\sin(z_j)(\frac{z_j^2}{L^2} - a_0)$ , la différence entre les valeurs de  $-a_1 \frac{z_{j+2}}{L} \cos(z_{j+2})$  et de  $-a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z_j)$  est beaucoup plus petite pour les valeurs impaires que pour les valeurs paires de  $j$ . Ainsi,  $b(z)$  possède un comportement semblable à celui de  $\sin(z_j)(\frac{z_j^2}{L^2} - a_0)$ .  
en effet :

$$\begin{aligned} b_{j+2} - b_j &= \frac{L}{Kz_{j+2}} \left[ -a_1 \frac{z_{j+2}}{L} \cos(z_{j+2}) + \sin(z_{j+2}) \left( \frac{z_{j+2}^2}{L^2} - a_0 \right) \right] \\ &\quad - \frac{L}{Kz_j} \left[ -a_1 \frac{z_j}{L} \cos(z_j) + \sin(z_j) \left( \frac{z_j^2}{L^2} - a_0 \right) \right] \\ b_{j+2} - b_j &= \frac{a_1}{K} [\cos(z_j) - \cos(z_{j+2})] \\ &\quad + \frac{L}{K} \left[ \frac{\sin(z_{j+2})}{z_{j+2}} \left( \frac{z_{j+2}^2}{L^2} - a_0 \right) - \frac{\sin(z_j)}{z_j} \left( \frac{z_j^2}{L^2} - a_0 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

En utilisant les remarques 1 et 2, nous pouvons affirmer que :

$$\begin{aligned} b_j &> b_{j+2} \text{ et } b_j \rightarrow -\infty \text{ quand } j \rightarrow +\infty \text{ pour les valeurs impaires de } j \\ b_j &< b_{j+2} \text{ et } b_j \rightarrow +\infty \text{ quand } j \rightarrow +\infty \text{ pour les valeurs paires de } j \end{aligned} \quad (2.68)$$

Pour déterminer les paramètres stabilisant d'un PID pour un système du second ordre à retard nous proposons l'algorithme suivant :

**Algorithme : Détermination des paramètres du PID [Farkh, 09b]**

1. Étape 1 : Initialiser  $K_p = -\frac{a_0}{K}$  et fixer  $pas$  à une valeur suffisamment petite,
2. Étape 2 : Incrémenter  $K_p = K_p + pas$ ,
3. Étape 3 : Si  $K_p < \frac{1}{K} (a_1 \frac{\alpha}{L} \sin(\alpha) - \cos(\alpha)(a_0 - \frac{\alpha^2}{L^2}))$  alors aller à l'étape 4 ; sinon fin d'algorithme,
4. Étape 4 : Trouver la racine  $z_j$  de  $\delta_i(z)$
5. Étape 5 : Calculer les paramètres  $b_j, m_j$  associés au  $z_j$  précédemment trouvé pour  $j = 1, 2, 3$ ,
6. Étape 6 : Déterminer la région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  en utilisant le théorème 2.6,
7. Étape 7 : Retourner à l'étape 2.

**Exemple 2.5**

Nous considérons le système du second ordre à retard caractérisé par les paramètres suivants :  $K = L = a_1 = 1$  et  $a_0 = 2$ .

On s'intéresse à le commander avec un régulateur PID, il s'agit de déterminer le domaine de stabilité par rapport aux paramètres  $(K_i, K_d)$  pour un  $K_p$  donné par l'intervalle (2.55) et ceci en exploitant l'algorithme précédent.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2} e^{-s} \quad (2.69)$$

La partie imaginaire  $\delta_i(z)$  est exprimée par :

$$\delta_i(z) = z(K_p + \cos(z)(2 - z^2) - z \sin(z)) = 0.$$

D'après le théorème 2.6,  $\delta_i(z)$  ne possède que des racines réelles si et seulement si :  $-2 < K_p < 1.58$ .

Nous fixons le paramètre  $K_p$  du contrôleur à 1.3, la partie imaginaire est alors exprimée par :

$$z(1.3 + \cos(z)(2 - z^2) - z \sin(z)) = 0.$$

Les racines positives de cette équation sont :  $z_0 = 0, z_1 = 1.3608, z_2 = 1.8905, z_3 = 4.9829, z_4 = 7.9619, z_5 = 11.0976, z_6 = 14.2017\dots$

En utilisant (2.60) et (2.63) les paramètres  $m_j$  et  $b_j$  pour  $j = 1\dots 6$  sont exprimés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0.54 \\ m_2 = 0.2798 \\ m_3 = 0.0403 \\ m_4 = 0.0158 \\ m_5 = 0.0081 \\ m_6 = 0.0050 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} b_1 = -0.3150 \\ b_2 = 1.1047 \\ b_3 = -4.6821 \\ b_4 = 7.7736 \\ b_5 = -10.9628 \\ b_6 = 14.0964 \end{array} \right. \quad (2.70)$$

L'entrelacement des racines de  $\delta_r(z)$  et  $\delta_i(z)$  se produit si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i > 0 \\ K_d > 0.54K_i - 0.3150 \\ K_d < 0.2798K_i + 1.1047 \\ K_d > 0.0403K_i - 4.6822 \\ K_d < 0.0158K_i + 7.7736 \\ K_d > 0.0081K_i - 10.9628 \\ K_d < 0.005K_i + 14.0964 \end{array} \right. \quad (2.71)$$

La figure 2.14 présente les frontières de la région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour  $K_p = 1.3$ .

Dans ce cas, la région de stabilité est définie par seulement deux frontières :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_d = m_1 K_i + b_1 \\ \text{et} \\ K_d = m_2 K_i + b_2 \end{array} \right.$$

puisque nous avons les inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_j < b_{j+2} \text{ pour } j = 2, 4, 6\dots \\ b_j > b_{j+2} \text{ pour } j = 1, 3, 5, 7\dots \\ m_j < m_{j+2} \text{ pour } j \geq 1 \end{array} \right. \quad (2.72)$$

La région de stabilité finale pour tous les  $K_p$  est donnée par la figure 2.15.

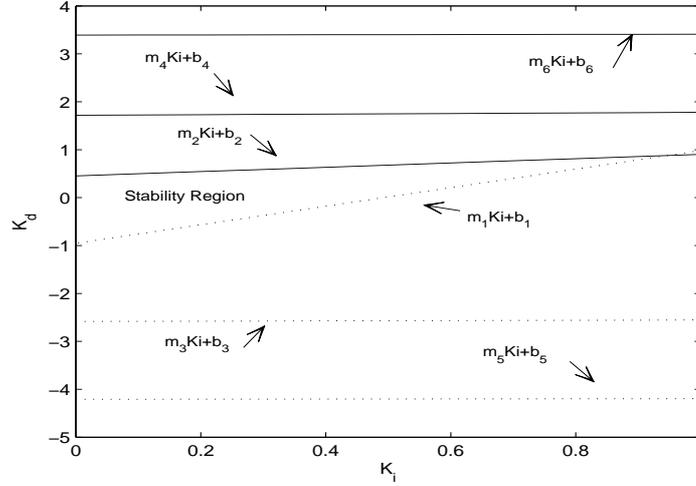


FIGURE 2.14 – Frontières de la région de stabilité  $(K_i, K_d)$  pour  $K_p = 1.3$  correspondant à l'exemple 2.5

### Exemple 2.6

Nous considérons un système à retard du second ordre avec les paramètres suivants  $K = 2, a_0 = 3, a_1 = 1, L = 2$ .

On cherche à le commander avec un régulateur PID, il s'agit de déterminer un domaine de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour un  $K_p$  donné par l'intervalle (2.55).

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + s + 3} e^{-2s} \quad (2.73)$$

La partie imaginaire  $\delta_i(z)$  est exprimée par :

$$\delta_i(z) = \frac{z}{2}(2K_p + \cos(z)(3 - \frac{z^2}{4}) - 0.5z \sin(z)) = 0.$$

D'après le théorème 2.6,  $\delta_i(z)$  ne possède que des racines réelles si et seulement si :  $-1.5 < K_p < 0.9881$ .

Nous fixons le paramètre  $K_p$  du contrôleur à 0.5, la partie imaginaire est exprimée par :

$$\delta_i(z) = \frac{z}{2}(1 + \cos(z)(3 - \frac{z^2}{4}) - 0.5z \sin(z)) = 0.$$

Les racines positives de cette équation sont :  $z_0 = 0, z_1 = 1.6480, z_2 = 2.9830, z_3 = 5.4560, z_4 = 8.077, z_5 = 11.22, z_6 = 14.26, z_7 = 17.41...$

En utilisant (2.60) et (2.63) nous calculons les paramètres  $m_j$  et  $b_j$  pour  $j = 1...7$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 1.4728 \\ m_2 = 0.4495 \\ m_3 = 0.1344 \\ m_4 = 0.0613 \\ m_5 = 0.0318 \\ m_6 = 0.0197 \\ m_7 = 0.0132 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} b_1 = -1.3656 \\ b_2 = 0.4527 \\ b_3 = -0.9377 \\ b_4 = 1.7176 \\ b_5 = -2.5853 \\ b_6 = 3.3906 \\ b_7 = -4.2097 \end{array} \right. \quad (2.74)$$

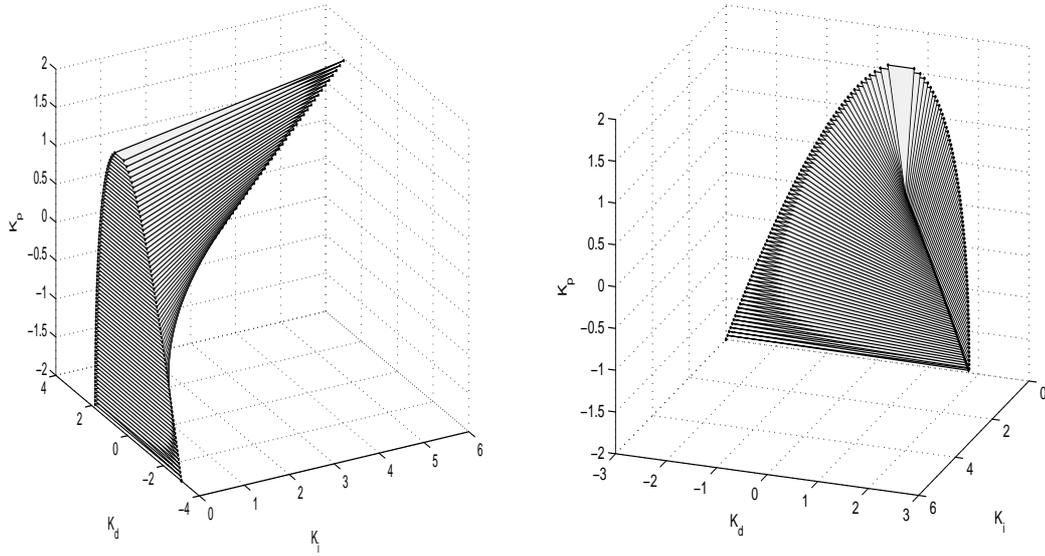


FIGURE 2.15 – Frontières de la région de stabilité  $(K_i, K_d)$  pour tous les  $K_p$  correspondant à l'exemple 2.5

L'entrelacement des racines de  $\delta_r(z)$  et  $\delta_i(z)$  se produit si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i > 0 \\ K_d > 1.4728K_i - 1.3656 \\ K_d < 0.4495K_i + 0.4527 \\ K_d > 0.1344K_i - 0.9377 \\ K_d < 0.0613K_i + 1.7176 \\ K_d > 0.0318K_i - 2.5853 \\ K_d < 0.0197K_i + 3.3906 \\ K_d > 0.0132K_i - 4.2097 \end{array} \right. \quad (2.75)$$

La figure 2.16 présente les frontières de la région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour  $K_p = 0.5$ .

Dans ce cas, la région de stabilité est définie par trois frontières :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_d = m_1 K_i + b_1 \\ K_d = m_2 K_i + b_2 \\ K_d = m_3 K_i + b_3 \end{array} \right.$$

puisque les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_j < b_{j+2} \text{ pour } j = 2, 4, 6... \\ b_j > b_{j+2} \text{ pour } j = 3, 5, 7... \\ b_1 < b_3 \\ m_j < m_{j+2} \text{ pour } j \geq 1 \end{array} \right. \quad (2.76)$$

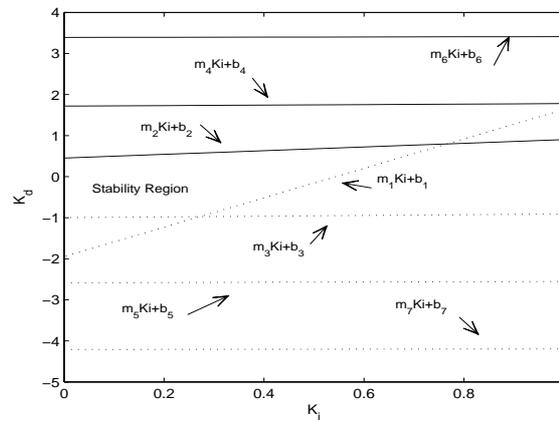


FIGURE 2.16 – Frontières de la région de stabilité  $(K_i, K_d)$  pour  $K_p = 0.5$  correspondant à l'exemple 2.6

La figure 2.17 présente l'évolution de la consigne, de la sortie et de la commande de certains régulateurs PID choisis à partir du domaine de stabilité de la figure 2.16.

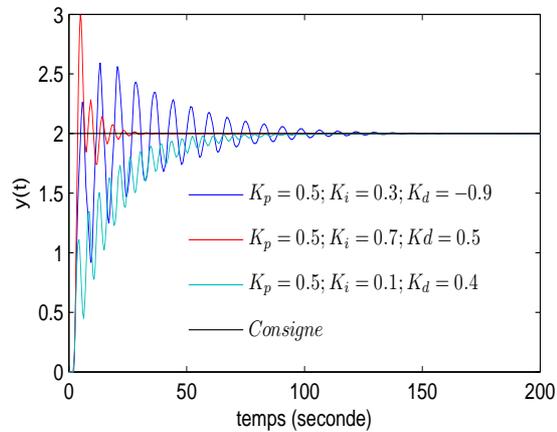


FIGURE 2.17 – Réponse indicielle en boucle fermée de l'exemple 2.6

La région de stabilité finale pour tous les  $K_p$  est donnée par la figure 2.18.

Nous notons que la différence entre l'Exemple 2.5 et 2.6 réside dans le changement du signe de  $(b_1 - b_3)$  ce qui est expliqué par la localisation de  $z_1$  et de  $z_3$  dans des différents intervalles donnés par (2.41).

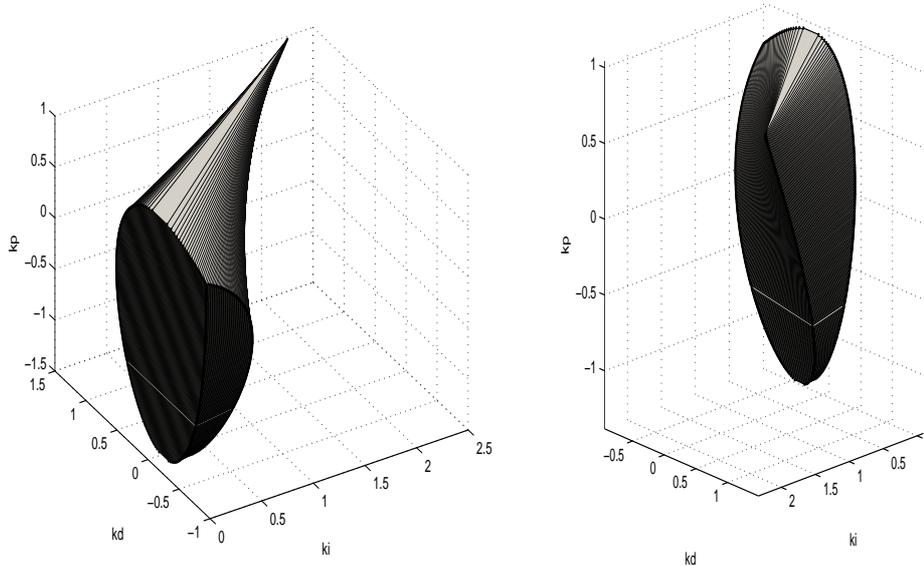


FIGURE 2.18 – Frontières de la région de stabilité  $(K_i, K_d)$  pour tous les  $K_p$  correspondant à l'exemple 2.6

## 2.7 Conclusion

Le problème de la stabilisation des systèmes à retards a attiré beaucoup d'attention puisqu'ils sont couramment rencontrés en industrie. Dans ce chapitre, nous avons étudié la commande des systèmes à retard par régulateur PID en utilisant une extension du théorème de Hermite-Biehler pour les quasi-polynômes. Nous avons proposé des résultats théoriques importants qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir la stabilité en boucle fermée en utilisant un tel contrôleur. Les démonstrations font appel à des résultats d'analyse complexe permettant de qualifier la négativité des racines d'un quasi-polynôme sans les calculer.

En premier lieu, nous avons rappelé le théorème de Hermite-Biehler pour l'étude de la stabilité des quasi-polynômes. L'application de ce théorème conduit à la détermination des contrôleurs PI et PID stabilisants pour la commande des systèmes du premier ordre à retard. Ces résultats ont été obtenus grâce aux travaux de Silva et al [Silva, 05] en se basant sur des algorithmes à balayage plan ("plane sweeping algorithm") dans l'espace des paramètres des contrôleurs PI et PID.

En second lieu, nous avons développé deux théorèmes pour la commande des systèmes du second ordre à retard sur l'entrée. Le premier théorème traite la commande PI où il s'agit de déterminer l'ensemble des paramètres proportionnel

et intégral pour obtenir un domaine de stabilité. Cette approche repose sur la propriété d'entrelacement de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'équation caractéristique du système commandé en boucle fermée. Nous avons réussi à mettre au point un algorithme pour la synthèse de ce type de régulateurs. Le deuxième théorème envisage de délimiter l'ensemble des paramètres PID stabilisants pour ce même type de système où le domaine de stabilité est donné en 3-D dans le plan  $(K_p, K_i, K_d)$ . Tout d'abord, nous avons proposé de déterminer l'intervalle des gains proportionnel, l'ensemble des paramètres intégral et dérivé stabilisants est alors évalué par la suite. Pour répondre à ce besoin nous avons proposé un algorithme à balayage plan. Des exemples de simulations ont montré l'intérêt et l'efficacité de cet algorithme pour la commande PID des systèmes du second ordre à retard.

Le chapitre suivant présente la propriété de stabilité robuste des quasi-polynômes sujets à des incertitudes bornées. Cette étude conduit à la synthèse des régions de stabilité robuste des contrôleurs PI et PID pour la commande des systèmes à retards avec incertitudes paramétriques.

# Robustesse et Performances de la Commande PID des Systèmes à Retards

---

## Sommaire

<b>3.1 Introduction</b>	<b>71</b>
<b>3.2 Théorème de Kharitonov généralisé</b>	<b>73</b>
3.2.1 Théorème de Kharitonov généralisé pour les polynômes	73
3.2.2 Théorème de Kharitonov généralisé pour les quasi-polynômes	78
<b>3.3 Commande PID robuste des systèmes incertains à retards</b>	<b>79</b>
3.3.1 Synthèse d'un régulateur PI robuste	79
3.3.2 Synthèse d'un régulateur PID robuste	81
<b>3.4 Application à la commande robuste des systèmes incertains à retards du premier et du second ordre</b>	<b>82</b>
3.4.1 Commande robuste des systèmes du premier ordre à retard	82
3.4.2 Commande robuste des systèmes du second ordre à retard	87
<b>3.5 Application pratique au cas du <math>PT - 326</math></b>	<b>91</b>
<b>3.6 Performances de la commande des systèmes à retards</b>	<b>100</b>
3.6.1 Algorithmes génétiques	101
3.6.2 Exemple de simulation	104
<b>3.7 Conclusion</b>	<b>106</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la robustesse et aux performances de la commande PID des systèmes à retards constants et à incertitudes paramétriques bornées. Il est alors important de considérer dans cette introduction l'état de l'art, d'une part, de l'étude de stabilité des systèmes incertains avec et sans retards et, d'autre part, de rappeler quelques résultats sur la commande des systèmes incertains.

La robustesse a toujours été considérée comme étant une question clé dans l'analyse et la commande des systèmes. Un système est dit robuste s'il garantit un certain degré de stabilité ou de performance en présence de perturbations et/ ou de

variations des paramètres. Afin de décrire de telles perturbations, différents modèles d'incertitudes ont été adoptés conduisant à différents axes de recherches.

À la fin des années 70, l'intérêt à la robustesse a mené au développement d'une théorie complète pour la commande des systèmes sujets à des perturbations non structurées. Ces perturbations représentent l'effet des dynamiques non modélisées, des non linéarités négligées, des erreurs dues à la linéarisation, des erreurs de troncature etc...[Vidyasagar, 85]. Pour ce type d'incertitude, la stabilité en boucle fermée de ces systèmes perturbés a été abordé par le théorème des petits gains.

Un autre axe de recherche concerne la robustesse en présence d'incertitudes paramétriques. Il s'agit du cas des modèles à paramètres inconnus mais bornés.

Pendant plusieurs années, le problème de la stabilité paramétrique robuste (notamment, garantissant la stabilité des systèmes avec incertitudes paramétriques) a été considéré comme très difficile à aborder, jusqu'à l'apparition des résultats du théoricien russe V. Kharitonov [Kharitonov, 78].

Le théorème de Kharitonov est connu par sa simplicité de formulation et son énorme contribution au développement de la théorie de la commande robuste. Ce théorème montre que pour un polynôme donné dont les coefficients constantes se trouvent dans des intervalles connus, appelé aussi polynôme intervalle [Arzelier, 2006], il suffit seulement de vérifier la stabilité de quatre polynômes extrêmes pour garantir la stabilité de la famille entière.

Stimulés par le théorème de Kharitonov, les automaticiens ont cherché des extensions à des familles plus larges de polynômes. En particulier, dans le cas de la présence des dépendances linéaires entre les coefficients du polynôme, et celui de l'analyse de robustesse pour des familles polytopiques de polynômes. Cependant le théorème de Kharitonov souffre d'un problème de conservatisme et se limite aux paramètres constants. En effet, il suppose que les coefficients du polynôme caractéristique sont indépendants ce qui n'est pas vrai dans la plupart des cas.

Il y a deux manières pour traiter le cas des paramètres interdépendants. La première utilise le théorème des arêtes (the Edge Theorem) [Bartlett, 88] et la seconde exploite le théorème de Kharitonov généralisé.

Le théorème des arêtes montre que la stabilité d'un polytope de polynômes peut être garantie par la stabilité de ses polynômes associés aux arêtes. Le problème avec cette approche est de vérifier la stabilité sur un grand nombre de polynômes.

L'autre approche est le théorème de Kharitonov généralisé (TKG), présenté dans [Bhattacharyya, 95]. Le TKG, comme nous allons le montrer par la suite, considère une structure particulière de l'équation caractéristique où apparaissent des polynômes à coefficients constants avec d'autres à coefficients incertains. L'étude de la stabilité revient dans ce cas à considérer les segments (arêtes) de Kharitonov de la deuxième famille.

La stabilité robuste des systèmes à retards a également intéressé beaucoup de chercheurs. Dans [Kharitonov, 79], l'auteur a analysé la stabilité robuste d'une famille incertaine de quasi-polynômes en se basant sur le théorème de Pontryagin. Dans [Fu, 89], le théorème des arêtes, obtenu dans [Bartlett, 88], a été étendu à des systèmes à retards; les auteurs ont prouvé que pour un polytope produit par

la combinaison convexe d'un certain nombre de quasi-polynômes, tous les zéros de cette famille de polytopes des quasi-polynômes se trouvent dans la partie gauche du plan si et seulement si tous les zéros des quasi-polynômes associés aux arêtes du polytope sont contenus dans la moitié gauche du plan complexe. Kharitonov a montré que la stabilité d'un intervalle quasi-polynomial (quasi-polynôme dont les coefficients se trouvent dans des intervalles connus [Richard, 01])<sup>1</sup> se réduit à la stabilité d'un ensemble fini de quasi-polynômes [Kharitonov, 94; Gu, 03].

La commande des systèmes avec incertitudes paramétriques bornées a été considérée par plusieurs auteurs. Barmish *et al* [Barmish, 00] montrent qu'un contrôleur du premier ordre généralisé stabilise un système intervalle (système dont les coefficients des polynômes de sa fonction de transfert sont définis par des intervalles) si et seulement s'il stabilise simultanément une famille de seize systèmes de Kharitonov. Huang *et al* [Huang, 98] utilisent le plan des paramètres basés sur une méthode de test de marge de phase et de gain et le théorème de Kharitonov pour obtenir un contrôleur PID qui stabilise un système intervalle. Dans [Tan, 06], une méthode basée sur les frontières de stabilité est employée pour trouver la région stabilisante des paramètres d'un régulateur PI pour la commande d'un système avec des paramètres incertains. Patre *et al* [Patre, 07] proposent une méthodologie de deux-degrés-de-liberté garantissant la stabilité robuste et des performances pour un système intervalle. Basée sur une modélisation dans le domaine temporel, et en utilisant la méthode de Kronecker, la détermination de tous les contrôleurs PI et PID stabilisants pour un système incertain a été présentée dans [Fang, 93]. Dans [Ho, 98], le théorème de Hermite-Biehler a été employé pour la détermination des régulateurs P/PI/PID pour la stabilisation d'un système intervalle. Nous remarquons que les méthodes précédentes sont seulement appliquées à la synthèse d'un contrôleur robuste stabilisant pour un système intervalle sans retard.

Motivé par le théorème de Kharitonov généralisé, nous proposons d'étudier la commande par PID qui stabilise système à retard ayant des paramètres inconnus constants et bornés.

## 3.2 Théorème de Kharitonov généralisé

Avant de présenter le théorème de Kharitonov généralisé qui est exploité par la suite, il est nécessaire de présenter quelques définitions et notations.

### 3.2.1 Théorème de Kharitonov généralisé pour les polynômes

Soit un polynôme de la forme :

$$\delta(s) = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \dots + F_m(s)P_m(s) \quad (3.1)$$

On considère les m-uplets de polynômes suivants :

---

1. appellation introduite par V. Kharitonov dans [Richard, 01] page 209

$$\begin{aligned}\underline{F}(s) &= (F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s)) \\ \underline{P}(s) &= (P_1(s), P_2(s), \dots, P_m(s))\end{aligned}\tag{3.2}$$

On introduit la notion suivante :

$$\langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle = F_1(s)P_1(s) + F_2(s)P_2(s) + \dots + F_m(s)P_m(s)\tag{3.3}$$

On dit que  $\underline{F}(s)$  stabilise  $\underline{P}(s)$  si  $\delta(s) = \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle$  est stable.

Pour ce qui suit, les  $F_i(s)$  sont des polynômes réels à coefficients fixes alors que les  $P_i(s)$  sont des polynômes réels dont les coefficients sont indépendants et compris dans des intervalles donnés.

Soit un polynôme  $P_i(s)$  donné par la forme suivante :

$$P_i(s) = p_{i,0} + p_{i,1}s + \dots + p_{i,d^\circ(P_i)}s^{d^\circ(P_i)}$$

Chaque  $P_i(s)$  appartient à la famille de polynômes intervalles  $\mathbf{P}_i(s)$  où les coefficients  $p_{i,j}$  appartiennent aux intervalles  $p_{i,j} \in [\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}]$  avec  $i \in [1, 2, \dots, m]$  et  $j = 0, 1, \dots, d^\circ(P_i)$ .

Soit la famille de m-uplet de polynômes intervalles :

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}_1(s) \times \mathbf{P}_2(s) \times \dots \times \mathbf{P}_m(s)$$

On s'intéresse par la suite à l'étude de la stabilité de la familles des polynômes définis par :

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}(s) \right\} \\ &= F_1(s)\mathbf{P}_1(s) + F_1(s)\mathbf{P}_2(s) + \dots + F_m(s)\mathbf{P}_m(s)\end{aligned}\tag{3.4}$$

$\Delta(s)$  est stable si chaque polynôme dans  $\Delta(s)$  est stable, ceci est équivalent à  $\underline{F}(s)$  stabilise chaque  $\underline{P}(s) \in \mathbf{P}(s)$ .

La solution proposée par [Chapellat, 89 ; Bhattacharyya, 95] est de construire un ensemble extrémal de segments polynômiaux  $\Delta_E(s) \subset \Delta(s)$  tel que sa stabilité implique celle de  $\Delta(s)$ .

On considère la famille  $\mathbf{P}_i(s)$  de polynômes intervalles réels, les quatres polynômes de Kharitonov associé à  $\mathbf{P}_i(s)$  sont :

$$\begin{aligned}K_i^1(s) &= \underline{p}_{i,0} + \underline{p}_{i,1}s^1 + \bar{p}_{i,2}s^2 + \bar{p}_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^2(s) &= \underline{p}_{i,0} + \bar{p}_{i,1}s^1 + \bar{p}_{i,2}s^2 + \underline{p}_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^3(s) &= \bar{p}_{i,0} + \underline{p}_{i,1}s^1 + \underline{p}_{i,2}s^2 + \bar{p}_{i,3}s^3 + \dots \\ K_i^4(s) &= \bar{p}_{i,0} + \bar{p}_{i,1}s^1 + \underline{p}_{i,2}s^2 + \underline{p}_{i,3}s^3 + \dots\end{aligned}\tag{3.5}$$

On note par  $\mathcal{K}_i(s)$  l'ensemble des polynômes de Kharitonov.

$$\mathcal{K}_i(s) = \{K_i^1(s), K_i^2(s), K_i^3(s), K_i^4(s)\} \quad (3.6)$$

Pour chaque  $\mathbf{P}_i(s)$  on introduit les quatre segments, qui joignent des paires de polynômes de Kharitonov, définies par :

$$\mathcal{S}_i(s) = \{[K_i^1(s), K_i^2(s)], [K_i^1(s), K_i^3(s)], [K_i^2(s), K_i^4(s)], [K_i^3(s), K_i^4(s)]\} \quad (3.7)$$

Ces quatre segments sont appelés *les segments de Kharitonov*. Le segment  $[K_l^1, K_l^2]$  est défini par toutes les combinaisons convexes de la forme  $\lambda K_l^1 + (1 - \lambda)K_l^2$  où  $\lambda \in [0, 1]$ .

Pour  $l \in \{1, \dots, m\}$ , on définit l'ensemble :

$$\mathbf{P}_E^l(s) = \mathcal{K}_1(s) \times \dots \times \mathcal{K}_{l-1}(s) \times \mathcal{S}_l(s) \times \mathcal{K}_{l+1}(s) \times \dots \times \mathcal{K}_m(s) \quad (3.8)$$

Un élément typique de  $\mathbf{P}_E^l(s)$  est :

$$\left( K_i^{j_1}(s), K_2^{j_2}(s), \dots, K_{l-1}^{j_{l-1}}(s), (1 - \lambda)K_l^1(s) + K_l^2(s), K_{l+1}^{j_{l+1}}(s), \dots, K_m^{j_m}(s) \right) \quad (3.9)$$

On introduit la famille de polynômes  $\Delta_E^l(s)$  correspondant à  $\mathbf{P}_E^l(s)$  :

$$\Delta_E^l(s) = \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}_E^l(s) \right\} \quad (3.10)$$

L'ensemble  $\Delta_E^l(s)$  peut être décrit aussi par :

$$\Delta_E^l(s) = F_1(s)\mathcal{K}_1(s) + \dots + F_{l-1}(s)\mathcal{K}_{l-1}(s) + F_l(s)\mathcal{S}_l(s) + F_{l+1}(s)\mathcal{K}_{l+1}(s) + \dots + F_m(s)\mathcal{K}_m(s) \quad (3.11)$$

Un élément typique de  $\Delta_E^l(s)$  est donné par :

$$\begin{aligned} & F_1(s)K_i^{j_1}(s), F_2(s)K_2^{j_2}(s), \dots, F_{l-1}(s)K_{l-1}^{j_{l-1}}(s), \\ & F_l(s) [(1 - \lambda)K_l^1(s) + K_l^2(s)], F_{l+1}(s)K_{l+1}^{j_{l+1}}(s), \dots, F_m(s)K_m^{j_m}(s) \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec  $\lambda \in [0, 1]$ .

Soit  $\mathbf{P}_E(s)$  le sous ensemble extrémal (the extremal subset) de  $\mathbf{P}(s)$  défini par :

$$\mathbf{P}_E(s) = \cup_{l=1}^m \mathbf{P}_E^l(s) \quad (3.13)$$

L'ensemble  $\mathbf{P}_E(s)$  contient  $m4^m$  éléments. On lui associe l'ensemble  $\Delta_E(s)$  suivant appelé *les segments polynômiaux généralisés de Kharitonov* (generalized Kharitonov segment polynomials)

$$\Delta_E(s) = \cup_{l=1}^m \Delta_E^l(s) = \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}_E(s) \right\} \quad (3.14)$$

L'ensemble de m-uplet de polynômes de Kharitonov est exprimé par :

$$\mathbf{P}_K(s) = \mathcal{K}_1(s) \times \mathcal{K}_2(s) \times \dots \times \mathcal{K}_m(s) \quad (3.15)$$

L'ensemble de famille de *polynômes extrémaux de Kharitonov* (Kharitonov vertex polynomials) associé à  $\mathbf{P}_K(s)$  est donné par :

$$\Delta_K(s) = \left\{ \langle \underline{F}(s), \underline{P}(s) \rangle : \underline{P}(s) \in \mathbf{P}_K(s) \right\} \quad (3.16)$$

$\mathbf{P}_K(s)$  contient  $4^m$  élément. Un élément typique de  $\Delta_K(s)$  est :

$$F_1(s)K_i^{j_1}(s) + F_2(s)K_2^{j_2}(s) + \dots + F_m(s)K_m^{j_m}(s) \quad (3.17)$$

Le théorème de Kharitonov généralisé est énoncé par la suite [Chapellat, 89 ; Bhattacharyya, 95, 09 ; Keel, 94 ; Silva, 05].

**Théorème 3.1** (Théorème de Kharitonov généralisé) Soit un m-uplet de polynômes réels  $(F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s))$

1.  $\underline{F}(s)$  stabilise la famille entière de m-uplet  $\mathbf{P}(s)$  si et seulement si  $\underline{F}(s)$  stabilise chaque m-uplet segment de  $\mathbf{P}_E(s)$ . Autrement dit  $\Delta(s)$  est stable si et seulement si  $\Delta_E(s)$  est stable.
2. Si les polynômes  $F_i(s)$  sont de la forme  $s^{t_i}(a_i s + b_i)U_i(s)Q_i(s)$  où  $t_i \geq 0$  est un entier arbitraire,  $a_i$  et  $b_i$  sont des réels,  $U_i(s)$  est un polynôme anti-Hurwitz et  $Q_i(s)$  est un polynôme pair ou impaire alors il suffit que  $\underline{F}(s)$  stabilise un ensemble fini de m-uplet  $\mathbf{P}_K(s)$ . Autrement dit l'ensemble  $\Delta_K(s)$  est stable.
3. La stabilité de  $\mathbf{P}_K(s)$  n'est pas suffisante pour confirmer la stabilité de  $\mathbf{P}(s)$  si les polynômes  $F_i(s)$  ne satisferont pas la condition 2.

**Exemple 3.1**

Soit un système incertain

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} = \frac{s^3 + \alpha s^2 - 2s + \beta}{s^4 + 2s^3 - s^2 + \gamma s + 1}$$

avec  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  des constantes vérifiant  $\alpha \in [-1, 2], \beta \in [0.5, 1]$  et  $\gamma \in [0, 1]$ .

Soient  $\mathbf{P}_1(s)$  et  $\mathbf{P}_2(s)$  les polynômes intervalles associés respectivement aux polynômes  $P_1(s)$  et  $P_2(s)$ .

Soit  $C(s)$  un contrôleur de forme :

$$C(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$$

Pour déterminer si  $C(s)$  stabilise la famille  $G(s)$  on doit vérifier la stabilité de la famille de polynômes caractéristiques définie par :

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= F_1(s)\mathbf{P}_1(s) + F_2(s)\mathbf{P}_2(s) \\ &= F_1(s)(s^3 + \alpha s^2 - 2s + \beta) + F_2(s)(s^4 + 2s^3 - s^2 + \gamma s + 1)\end{aligned}$$

On procède par construire les segments généralisés de Kharitonov tout en commençant par la détermination des polynômes de Kharitonov associés à chacun des polynômes  $P_1(s)$  et  $P_2(s)$ .

Pour  $P_1(s)$  on trouve les 2 polynômes extrémaux suivant :

$$\begin{aligned}K_1^1 &= K_1^2 = 0.5 - 2s - s^2 + s^3 \\ K_1^3 &= K_1^4 = 1 - 2s - 2s^2 + s^3\end{aligned}$$

Pour  $P_2(s)$  on trouve aussi 2 polynômes extrémaux donnés par :

$$\begin{aligned}K_2^1 &= K_2^3 = 1 - s^2 + 2s^3 + s^4 \\ K_2^2 &= K_2^4 = 1 + s - s^2 + 2s^3 + s^4\end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathbf{P}_E^1(s)$  est formé par les segments polynômiaux suivants :

$$\begin{aligned}P_E^1(s) &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda K_1^l(s) + (1 - \lambda)K_1^k(s)}{K_2^h(s)} \\ \lambda \in [0, 1]; h = 1, 2, 3, 4; \\ [l, k] = [1, 2], [1, 3], [2, 4], [3, 4] \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K_2^1}, \frac{1}{K_2^2} \\ \frac{\lambda K_1^1 + (1 - \lambda)K_1^3}{K_2^1}, \frac{\lambda K_1^1 + (1 - \lambda)K_1^3}{K_2^2} \\ \frac{\lambda K_1^2 + (1 - \lambda)K_1^4}{K_2^1}, \frac{\lambda K_1^2 + (1 - \lambda)K_1^4}{K_2^2} \end{array} \right\}\end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathbf{P}_E^2(s)$  est formé par :

$$\begin{aligned}P_E^2(s) &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_1^h(s)}{\lambda K_2^l(s) + (1 - \lambda)K_2^k(s)} \\ \lambda \in [0, 1]; h = 1, 2, 3, 4; \\ [l, k] = [1, 2], [1, 3], [2, 4], [3, 4] \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} K_1^1, K_1^3, \\ \frac{K_1^1}{\lambda K_2^1 + (1 - \lambda)K_2^2}, \frac{K_1^3}{\lambda K_2^1 + (1 - \lambda)K_2^2}, \\ \frac{K_1^1}{\lambda K_2^3 + (1 - \lambda)K_2^4}, \frac{K_1^3}{\lambda K_2^3 + (1 - \lambda)K_2^4} \end{array} \right\}\end{aligned}$$

alors le sous ensemble extrémal  $\mathbf{P}_E(s)$  est formé par :

$$\mathbf{P}_E(s) = \cup_{l=1}^2 \mathbf{P}_E^l(s)$$

La stabilité robuste de  $\Delta(s)$  peut être vérifiée par la stabilité de  $\Delta_E(s)$ . Un exemple de polynôme segment de  $\Delta_E(s)$  est :

$$\begin{aligned} & F_1(\lambda K_1^1 + (1 - \lambda)K_1^3) + F_2 K_2^1 \\ &= F_1(s) [0.5(1 + \lambda) - 2s - (1 + \lambda)s^2 + s^3] + F_2(s) [1 - s^2 + 2s^3 + s^4] \end{aligned}$$

On peut dire que le contrôleur stabilise toute la famille  $\mathbf{P}(s)$  s'il stabilise tous les systèmes extrémaux (extremal plants) de  $\mathbf{P}_E(s)$ .

### 3.2.2 Théorème de Kharitonov généralisé pour les quasi-polynômes

Le théorème de Kharitonov généralisé a été étendu pour les polynômes complexes et les quasi-polynômes.

On considère la famille de quasi-polynômes suivante :

$$\Delta(s) = F_1(s)\mathbf{P}_1(s) + F_2(s)\mathbf{P}_2(s) + \dots + F_m(s)\mathbf{P}_m(s) \quad (3.18)$$

où les  $\mathbf{P}_i(s)$  sont des polynômes intervalles réels et soit  $\underline{F}(s)$  un m-uplet de quasi-polynômes complexes.

$$\underline{F}(s) = (F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s))$$

Chaque  $F_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  est de la forme :

$$F_i(s) = F_i^0(s) + F_i^1(s)e^{-sL_i^1} + F_i^2(s)e^{-sL_i^2} + \dots \quad (3.19)$$

où les  $L_i^j$  sont des réels positifs et les  $F_i^j(s)$  sont des polynômes complexes vérifiant :

$$\deg [F_i^0(s)] > \deg [F_i^j(s)], \quad j \neq 0 \quad (3.20)$$

On suppose que tous les polynômes dans la famille suivante sont de même degré.

$$\Delta(s) = F_1^0(s)\mathbf{P}_1(s) + F_2^0(s)\mathbf{P}_2(s) + \dots + F_m^0(s)\mathbf{P}_m(s) \quad (3.21)$$

Le théorème 3.2 représente une extension du théorème de Kharitonov généralisé pour les quasi-polynômes.

**Théorème 3.2** [Bhattacharyya, 95]

Soit un m-uplet de quasi-polynômes complexes  $(F_1(s), F_2(s), \dots, F_m(s))$  satisfaisant la condition précédente (3.20) et soient  $P_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  des polynômes intervalles réels satisfaisant la condition (3.21), alors  $\underline{F}(s)$  stabilise la famille entière de m-uplets  $\mathbf{P}(s)$  si et seulement si  $\underline{F}(s)$  stabilise chaque m-uplet segment de  $\mathbf{P}_E(s)$ . Autrement dit  $\Delta(s)$  est stable si et seulement si  $\Delta_E(s)$  est stable.

Le cas des polynômes complexes peut être déduit en prenant les  $F_i^j(s) = 0$  pour  $i = 1, \dots, m$  et  $j \neq 0$ .

Dans la suite, nous exploiterons le théorème 3.2 pour la synthèse des contrôleurs robustes pour des systèmes à retards sujets à perturbations paramétriques constantes.

Nous considérons la commande en boucle fermée par un contrôleur  $C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$  d'un système intervalle à retard donné par la fonction de transfert ci-dessous :

$$G(s) = \frac{\mathbf{n}(s)}{\mathbf{d}(s)} e^{-Ls} \quad (3.22)$$

où  $\mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{d}(s)$  sont les polynômes intervalles.  $L$  représente un retard constant connu. L'équation caractéristique en boucle fermée est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \mathbf{n}(s)e^{-Ls}n_c(s) + \mathbf{d}(s)d_c(s) \\ &= \mathbf{n}(s)n_c(s)e^{-Ls} + \mathbf{d}(s)d_c(s) \end{aligned} \quad (3.23)$$

De point de vue mathématique, la localisation exacte du retard dans l'équation caractéristique (3.23) n'a pas importance puisque le terme  $e^{-Ls}$  peut être attribuer à  $n(s)$  où à  $n_c(s)$ . Si ce retard " $e^{-Ls}$ " passe du système au contrôleur alors on obtient une équation caractéristique identique à celle (3.23). Le schéma de commande consiste alors à utiliser un contrôleur retardé et un système  $G(s)$  considéré comme un système intervalle sans retard.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\mathbf{n}(s)}{\mathbf{d}(s)} \\ C(s) &= \frac{n_c(s)}{d_c(s)} e^{-Ls} \end{aligned}$$

Selon le théorème 3.2,  $\Delta(s)$  est stable si et seulement si le 2-uplet de quasi-polynômes  $C(s) = (n_c(s)e^{-Ls}, d_c(s))$  stabilise la famille entière  $(\mathbf{n}(s), \mathbf{d}(s))$ . Par conséquent, nous pouvons déterminer tous les régulateurs stabilisants pour un système intervalle avec retard.

### 3.3 Commande PID robuste des systèmes incertains à retards

#### 3.3.1 Synthèse d'un régulateur PI robuste

Nous considérons la synthèse d'un régulateur PI robuste qui stabilise un système intervalle à retard  $G(s) = \frac{\mathbf{n}(s)}{\mathbf{d}(s)} e^{-Ls}$ .

Pour obtenir tous les gains du contrôleur PI qui stabilisent  $G(s)$  en utilisant le TKG pour les quasi-polynômes, nous prenons la nouvelle fonction de transfert  $G(s)$  comme :  $G(s) = \frac{\mathbf{n}(s)}{\mathbf{d}(s)}$  et le nouveau contrôleur retardé :

$$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)} e^{-Ls} = (K_p + \frac{K_i}{s}) e^{-Ls}.$$

La famille des quasi-polynômes caractéristiques en boucle fermée  $\Delta(s, K_p, K_i)$  devient :

$$\Delta(s, K_p, K_i) = \mathbf{n}(s)n_c(s)e^{-Ls} + \mathbf{d}(s)d_c(s) \quad (3.24)$$

Le problème réside dans la détermination de tous les gains de  $K_p$  et de  $K_i$  pour lesquels la famille entière des quasi-polynômes caractéristiques en boucle fermée est stable.

Soit  $K_1^i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  et  $K_2^i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  les polynômes de Kharitonov correspondant respectivement à  $\mathbf{n}(s)$  et  $\mathbf{d}(s)$ .

Soit  $G_E(s, \lambda)$  la famille de 32 systèmes segments (plant segment) qui est formée par l'ensemble suivant :

$$G_E(s, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} G_{lkh}(s, \lambda) / \\ G_{lkh}(s, \lambda) = \frac{\lambda K_1^l(s) + (1 - \lambda) K_1^k(s)}{K_2^h(s)} \\ \cup \\ G_{lkh}(s, \lambda) = \frac{K_1^h(s)}{\lambda K_2^l(s) + (1 - \lambda) K_2^k(s)}, \\ \lambda \in [0, 1], [l, k] = [1, 2], [1, 3], [2, 4], [3, 4], \\ h = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

Le quasi-polynôme caractéristique en boucle fermée pour chacun de ces 32 systèmes segments  $G_{lkh}(s, \lambda)$  est noté par  $\delta_{lkh}(s, K_p, K_i, \lambda)$  et défini par :

$$\delta_{lkh}(s, K_p, K_i, \lambda) = sDen(G_{lkh}(s, \lambda)) + (K_i + K_p s) e^{-Ls} Num(G_{lkh}(s, \lambda)) \quad (3.26)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} Num(G_{lkh}(s, \lambda)) = \lambda K_1^l(s) + (1 - \lambda) K_1^k(s) \cup K_1^h(s) \\ Den(G_{lkh}(s, \lambda)) = K_2^h(s) \cup \lambda K_2^l(s) + (1 - \lambda) K_2^k(s) \\ \lambda \in [0, 1], [l, k] = [1, 2], [1, 3], [2, 4], [3, 4], h = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Nous énonçons le lemme suivant sur la stabilisation d'un système intervalle du premier ordre à retard par un contrôleur PI.

**Lemme 3.1**

Soit  $G(s)$  un système intervalle à retard constant, toute la famille  $G(s)$  est stabilisable par un contrôleur PI si et seulement si chaque  $G_{lkh}(s, \lambda) \in G_E(s, \lambda)$  est stabilisable par le même contrôleur PI.

**Démonstration**

En utilisant le théorème 3.2, toute la famille  $\Delta(s, K_p, K_i)$  est stable si et seulement si les  $\delta_{lkh}(s, K_p, K_i, \lambda)$  sont tous stables. Ainsi, la famille entière  $G(s)$  est stabilisable par un contrôleur PI si et seulement si chaque élément  $G_{lkh}(s, \lambda)$  est stabilisable simultanément par le même contrôleur PI.

**3.3.2 Synthèse d'un régulateur PID robuste**

Dans cette partie, on considère le problème de la détermination des contrôleurs PID qui stabilisent un système intervalle à retard  $G(s) = \frac{\mathbf{n}(s)}{\mathbf{d}(s)}e^{-Ls}$ .

Le contrôleur est donné par :  $C(s) = (K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s)$ . Pour obtenir tous les gains PID, qui stabilisent  $G(s)$  en utilisant le TKG pour les quasi-polynômes, on considère la fonction de transfert  $G(s) = \frac{\mathbf{n}(s)}{\mathbf{d}(s)}$  et le régulateur retardé  $C(s)$  qui est exprimé par :  $C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}e^{-Ls} = (K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s)e^{-Ls}$ .

La famille des quasi-polynômes caractéristique en boucle fermée  $\Delta(s, K_p, K_i, K_d)$  devient :

$$\Delta(s, K_p, K_i, K_d) = \mathbf{n}(s)n_c(s)e^{-Ls} + \mathbf{d}(s)d_c(s) \quad (3.28)$$

Le problème de la caractérisation de tous les contrôleurs PID stabilisants réside dans la détermination de toutes les valeurs de  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  pour lesquelles la famille entière des quasi-polynômes caractéristiques en boucle fermée est stable.

Le quasi-polynôme caractéristique en boucle fermée pour chacun de ces 32 systèmes segments  $G_{lkh}(s, \lambda)$  est noté par  $\delta_{lkh}(s, K_p, K_i, K_d, \lambda)$  et il est défini par :

$$\delta_{lkh}(s, \lambda) = sDen(G_{ij}(s, \lambda)) + (K_i + K_p s + K_d s^2)e^{-Ls}Num(G_{ij}(s, \lambda)) \quad (3.29)$$

où :

$$\begin{cases} Num(G_{lkh}(s, \lambda)) = \lambda K_1^l(s) + (1 - \lambda)K_1^k(s) \cup K_1^h(s) \\ Den(G_{lkh}(s, \lambda)) = K_2^h(s) \cup \lambda K_2^l(s) + (1 - \lambda)K_2^k(s) \\ \lambda \in [0, 1], [l, k] = [1, 2], [1, 3], [2, 4], [3, 4], h = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (3.30)$$

Nous énonçons le Lemme 3.2 sur la stabilisation d'un système intervalle à retard constant par un contrôleur PID.

**Lemme 3.2**

Soit  $G(s)$  un système intervalle à retard constant, toute la famille  $G(s)$  est stabilisable par un contrôleur PID si et seulement si chaque  $G_{lkh}(s, \lambda) \in G_E(s, \lambda)$  est stabilisable par le même contrôleur PID.

**Démonstration**

En utilisant le théorème 3.2, toute la famille  $\Delta(s, K_p, K_i, K_d)$  est stable si et

seulement si les  $\delta_{lkh}(s, K_p, K_i, K_d, \lambda)$  sont tous stables. Ainsi, la famille entière  $G(s)$  est stabilisable par un contrôleur PID si et seulement si chaque élément  $G_{lkh}(s, \lambda)$  est stabilisable simultanément par le même contrôleur PID.

### 3.4 Application à la commande robuste des systèmes incertains à retards du premier et du second ordre

Dans cette section, nous allons appliquer les lemmes 3.1 et 3.2 précédents à la synthèse des régulateurs PI et PID pour des systèmes à retards constants du premier et du second ordre avec incertitudes bornées .

#### 3.4.1 Commande robuste des systèmes du premier ordre à retard

Pour obtenir une caractérisation de tous les contrôleurs PI et PID qui stabilisent un système incertain du premier ordre et à retard fixe  $G(s)$ , les résultats développés dans [Silva, 00, 01,01b, 02 05] seront utilisés et appliqués pour chaque  $G_{lkh}(s, \lambda)$  appartenant à  $G_E(s)$ .

**Exemple 3.2** [Farkh, 09d]

Considérons un système intervalle  $G(s) = \frac{K}{1+Ts}e^{-Ls}$  où le retard est connu et fixé à  $L = 4s$ .

On admet que les paramètres  $K$  et  $T$  sont inconnus et se trouvent dans les intervalles suivants  $1.2 < K < 1.7$  et  $1.7 < T < 2.2$ .

Les polynômes de Kharitonov qui correspondent à  $\mathbf{n}(s)$  et à  $\mathbf{d}(s)(s)$  sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} K_1^1(s) = K_1^2(s) = \underline{K} = 1.2 \\ K_1^3(s) = K_1^4(s) = \overline{K} = 1.7 \\ K_2^1(s) = K_2^3(s) = 1 + \underline{T}s = 1 + 1.7s \\ K_2^2(s) = K_2^4(s) = 1 + \overline{T}s = 1 + 2.2s \end{cases} \quad (3.31)$$

En utilisant (3.25), La famille totale de  $G_E$  est exprimée par :

$$G_E(s, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 + \underline{T}s}, \frac{1 + \lambda(\overline{K} - \underline{K})}{1 + \underline{T}s}, \frac{1}{1 + \overline{T}s}, \frac{1 + \lambda(\overline{K} - \underline{K})}{1 + \overline{T}s} \\ \cup \\ \frac{\underline{K}}{1 + \underline{T}s}, \frac{\overline{K}}{1 + \underline{T}s}, \frac{\underline{K}}{1 + \overline{T}s}, \frac{\overline{K}}{1 + \overline{T}s}, \\ \frac{\underline{K}}{1 + s(\underline{T} + \lambda(\overline{T} - \underline{T}))}, \frac{\overline{K}}{1 + s(\underline{T} + \lambda(\overline{T} - \underline{T}))} \\ \lambda \in [0, 1] \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

$$G_E(s, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} g_1 = \frac{1}{1 + 1.7s}, g_2 = \frac{1 + 0.5\lambda}{1 + 1.7s}, g_3 = \frac{1}{1 + 2.2s}, \\ g_4 = \frac{1 + 0.5\lambda}{1 + 2.2s} \\ \cup \\ g_5 = \frac{1.2}{1 + 1.7s}, g_6 = \frac{1.7}{1 + 1.7s}, g_7 = \frac{1.2}{1 + 2.2s}, \\ g_8 = \frac{1.7}{1 + 2.2s}, \\ g_9 = \frac{1.2}{1 + s(1.7 + 0.5\lambda)}, g_{10} = \frac{1.7}{1 + s(1.7 + 0.5\lambda)} \\ \lambda \in [0, 1] \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

On remarque que chacun des systèmes  $g_2$ ,  $g_4$ ,  $g_9$  et  $g_{10}$  possède une infinité de fonctions de transfert due à leur dépendance au paramètre  $\lambda$  qui varie dans  $[0, 1]$ . Par balayage de  $\lambda$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  avec un pas de 0.1, on obtient tous les gains stabilisants dans le plan  $(K_p, K_i)$  pour la fonction de transfert  $g_2$  comme le montre la figure suivante.

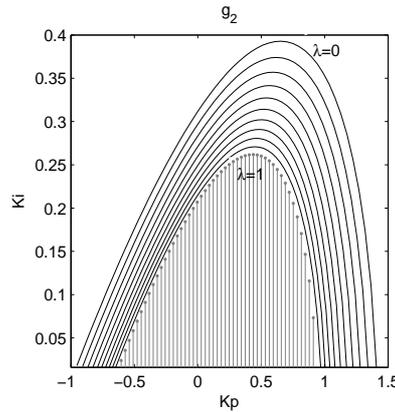


FIGURE 3.1 – Région de stabilité dans le plan  $(K_p, K_i)$  pour  $g_2$

Pour réduire la complexité de ce problème, on fixe la variable  $\lambda$  à 0, 0.2, 0.5, 0.7 et 1 comme différentes valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

On définit alors les fonctions  $g_{np} = g_n(s, \lambda_p)$  où  $\lambda_p \in \{0, 0.2, 0.5, 0.7, 1\}$  pour  $n = 1, \dots, 10$  et  $p = 1, \dots, 5$ . On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{n1} = g_n(s, \lambda = 0) \\ g_{n2} = g_n(s, \lambda = 0.2) \\ g_{n3} = g_n(s, \lambda = 0.5) \\ g_{n4} = g_n(s, \lambda = 0.7) \\ g_{n5} = g_n(s, \lambda = 1) \end{array} \right. \quad (3.34)$$

La figure 3.2 présente les valeurs  $(K_p, K_i)$  stabilisantes pour la famille  $G(s)$  entière en invoquant l'algorithme présenté dans [Silva, 00, 01a] et en l'appliquant à chaque fonction de transfert appartenant à  $G_E(s)$ .

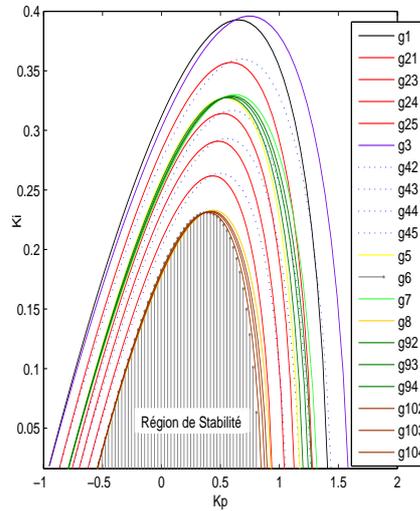


FIGURE 3.2 – Région de stabilité dans le plan  $(K_p, K_i)$  pour  $G(s)$

L'intersection de ces régions de stabilité présente une zone superposée des frontières qui constitue l'ensemble entier des contrôleurs qui stabilisent toute la famille  $G(s)$ .

La figure 3.3 présente un zoom de la figure 3.2 où la partie hachée présente la région finale de stabilité.

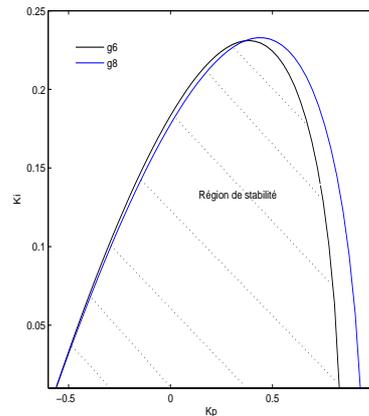


FIGURE 3.3 – Région de stabilité finale dans le plan  $(K_p, K_i)$  pour  $G(s)$

La figure 3.3 montre que la région de stabilité finale de  $G(s)$  est limitée par des parties de celles obtenues en appliquant la procédure décrit en [Silva, 00, 01a] aux fonctions de transferts  $g_6$  et  $g_8$ .

On fixe les paramètres du régulateur PI à  $K_p = 0.5$  et  $K_i = 0.15$  afin d'illustrer que la zone de stabilité obtenue par ce contrôleur peut efficacement commander le système incertain. La figure 3.4 montre les réponses indicielles de quelques systèmes en boucle fermée.

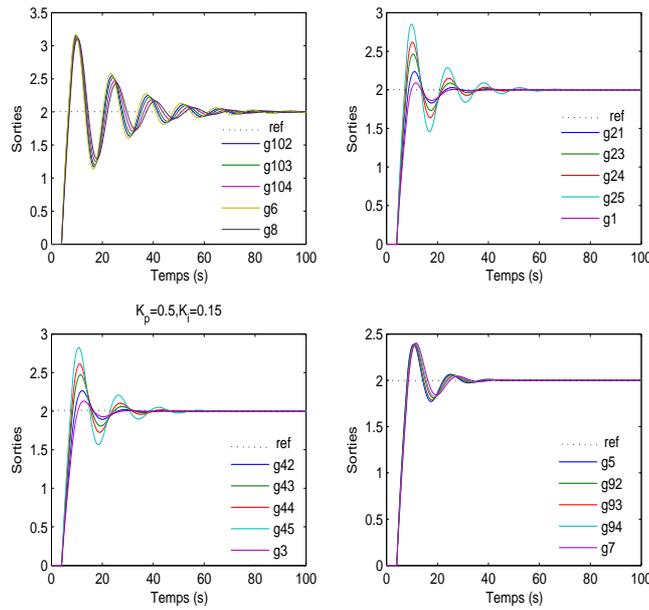


FIGURE 3.4 – Réponses indicielles du système intervalle à retard ( $K_p = 0.5$ ,  $K_i = 0.15$ )

Dans cet exemple ainsi que les exemples suivants ( exemple 3.3 et 3.4) aucune contrainte sur les performances n'a été envisagée. Nous verrons dans la dernière section de ce chapitre une approche d'optimisation par les algorithmes génétiques.

**Exemple 3.3** [Farkh, 09d]

Nous illustrons le cas de la stabilisation PID pour le même système à retard donné par l'exemple 3.2. Pour calculer tous les gains stabilisants du PID, nous déterminons d'abord tous les gains  $K_p$  qui stabilisent  $G_E(s)$ .

On note par  $K_p(g_{np})$  pour  $n = 1, \dots, 10$ ,  $p = 1, \dots, 5$  l'ensemble des gains  $K_p$  qui correspondent à chaque  $g_{np} \in G_E(s)$ . On trouve les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
 K_p(g_1) &= [-0.952, 1.415]; & K_p(g_{21}) &= [-0.866, 1.286]; & K_p(g_{22}) &= [-0.762, 1.132]; \\
 K_p(g_{23}) &= [-0.762, 1.132]; & K_p(g_{24}) &= [-0.705, 1.048]; & K_p(g_{25}) &= [-0.635, 0.933]; \\
 K_p(g_{31}) &= [-0.949, 1.591]; & K_p(g_{32}) &= [-0.862, 1.446]; & K_p(g_{33}) &= [-0.759, 1.273];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_p(g_{34}) &= [-0.703, 1.787]; K_p(g_{35}) = [-0.632, 1.06]; K_p(g_{41}) = K_p(g_3); \\
 K_p(g_{42}) &= [-0.909, 1.446]; K_p(g_{43}) = [-0.8, 1.273]; K_p(g_{44}) = [-0.740, 1.178]; \\
 K_p(g_{45}) &= [-0.666, 1.06]; K_p(g_5) = [-0.793, 1.179]; K_p(g_6) = [-0.56, 0.832]; \\
 K_p(g_7) &= [-0.791, 1.326]; K_p(g_8) = [-0.558, 0.936]; K_p(g_{92}) = [-0.793, 1.208], \\
 K_p(g_{93}) &= [-0.792, 1.251]; K_p(g_{94}) = [-0.791, 1.281]; K_p(g_{95}) = K_p(g_7); \\
 K_p(g_{101}) &= K_p(g_6); K_p(g_{102}) = [-0.56, 0.852]; K_p(g_{103}) = [-0.559, 0.883]; \\
 K_p(g_{104}) &= [-0.559, 0.904]; K_p(g_{104}) = K_p(g_8)
 \end{aligned}$$

Par conséquent l'ensemble final des gains  $K_p$  qui stabilisent toute la famille entière  $G(s)$  est donné par :

$$\begin{aligned}
 K_p(G_E(s, \lambda)) &= \cap K_p(g_{np}), n = 1, \dots, 10, p = 1..5. \\
 &= [-0.5583, 0.8324]
 \end{aligned}$$

Pour un  $K_p$  fixé à 0.6, on obtient les gains stabilisants dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour  $G_E(s)$  en appliquant l'algorithme développé en [Silva, 01b] à chaque  $g_{np}$  ( $G_{lkh}(s)$ ) appartenant à  $G_E(s)$ . La figure 3.5 présente ces régions de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$ .

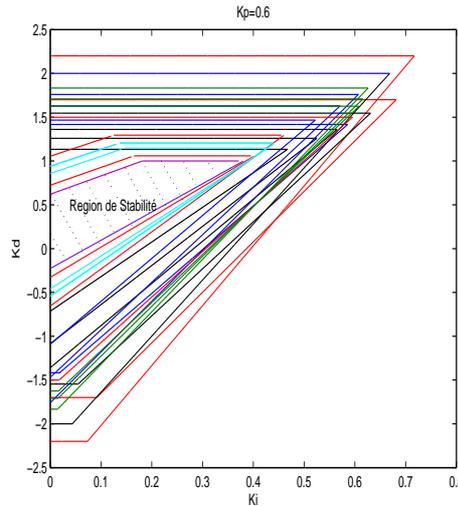


FIGURE 3.5 – Région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour  $K_p = 0.6$ .

La figure 3.5 illustre la région de stabilité finale dans le plan  $(K_i, K_d)$  obtenue en appliquant l'algorithme décrit en [Silva, 01b, 02, 05] à  $G_E(s)$ . L'intersection de ces régions de stabilité constituent toutes les valeurs  $(K_i, K_d)$  qui stabilisent toute la famille entière  $G(s)$  pour  $K_p = 0.6$ . La figure 3.6 présente un zoom de la figure 3.5 où la région de stabilité finale est obtenue par la fonctions de transfert  $g_6$ .

La figure 3.7 présente les réponses indicielles de certains systèmes en boucle fermée appartenant à  $G_E(s)$ .

Il est évident que le PID considéré stabilise tous les systèmes segments avec retard qui garantissent la stabilité de toute la famille entière  $G(s)$ . Finalement, en

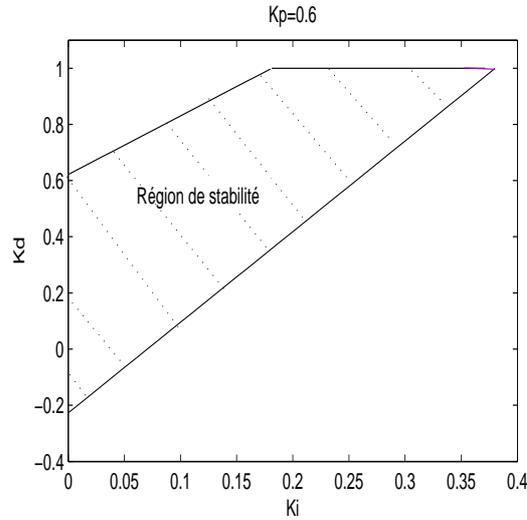


FIGURE 3.6 – Région de stabilité finale dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour  $K_p = 0.6$ .

faisant un balayage de  $K_p \in [-0.5583, 0.8324]$  et en répétant la procédure précédente on obtient tous les gains stabilisants  $(K_p, K_i, K_d)$ .

### 3.4.2 Commande robuste des systèmes du second ordre à retard

Afin de déterminer une caractérisation de tous les contrôleurs PI et PID qui stabilisent un système incertain du second ordre et à retard fixe, les algorithmes développés dans [Farkh, 09a, 09b] seront appliqués à chaque  $G_{lkh}(s, \lambda)$  appartenant à  $G_E(s)$  pour obtenir des régions de stabilité dans le plan  $(K_p, K_i, K_d)$ .

**Exemple 3.4** [Farkh, 09c]

Considérant un système intervalle  $G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{a_0 + a_1s + s^2}$  où le retard est connu et fixé à  $L = 2s$ . On admet que les paramètres  $a_0$ ,  $a_1$  et  $K$  sont inconnus et se trouvent dans les intervalles suivants  $2 < K < 3$ ,  $1.5 < a_1 < 2.5$  et  $4 < a_0 < 6$ .

Les polynômes de Kharitonov qui correspondent à  $\mathbf{n}(s)$  et  $\mathbf{d}(s)$  sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} K_1^1(s) = K_1^2(s) = 2 \\ K_1^3(s) = K_1^4(s) = 3 \\ K_2^1(s) = 4 + 1.5s + s^2 \\ K_2^2(s) = 4 + 2.5s + s^2 \\ K_2^3(s) = 6 + 1.5s + s^2 \\ K_2^4(s) = 6 + 2.5s + s^2 \end{cases} \quad (3.35)$$

La famille totale de  $G_E(s)$  est exprimée par :

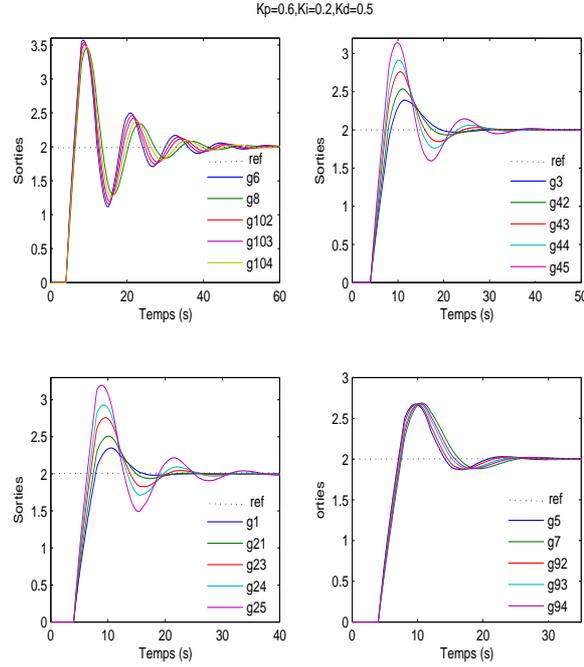


FIGURE 3.7 – Réponses indicielles du système intervalle à retard ( $K_p = 0.6, K_i = 0.2, K_d = 0.5$ )

$$G_E(s) = \left. \begin{array}{l} g_1 = \frac{1}{4+1.5s+s^2}, g_2 = \frac{1}{4+2.5s+s^2} \\ g_3 = \frac{1}{6+1.5s+s^2}, g_4 = \frac{1}{6+2.5s+s^2} \\ g_5 = \frac{1+\lambda}{4+1.5s+s^2}, g_6 = \frac{1+\lambda}{4+2.5s+s^2} \\ g_7 = \frac{1+\lambda}{6+1.5s+s^2}, g_8 = \frac{1+\lambda}{6+2.5s+s^2} \\ \cup \\ h_1 = \frac{2}{4+(1.5+\lambda)s+s^2}, h_2 = \frac{2}{(4+2\lambda)+1.5s+s^2} \\ h_3 = \frac{2}{(4+2\lambda)+2.5s+s^2}, h_4 = \frac{2}{6+(1.5+\lambda)s+s^2} \\ h_5 = \frac{3}{4+(1.5+\lambda)s+s^2}, h_6 = \frac{3}{(4+2\lambda)+1.5s+s^2}, \\ h_7 = \frac{3}{(4+2\lambda)+2.5s+s^2}, h_8 = \frac{3}{6+(1.5+\lambda)s+s^2} \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

On remarque que chacun des systèmes  $g_5, g_6, g_7, g_8, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7$  et  $h_8$  possèdent une infinité de fonction de transfert due à leur dépendance au paramètre  $\lambda$  qui est variable dans  $[0, 1]$ . Pour réduire la complexité de ce problème, on fixe la variable  $\lambda$  à 0, 0.2, 0.5, 0.7 et 1 comme des valeurs différentes situant dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

On définit alors les fonctions  $g_{lp} = g_l(s, \lambda_p)$  et  $h_{lp} = h_l(s, \lambda_p)$  où  $\lambda_p \in \{0, 0.2, 0.5, 0.7, 1\}$  pour  $l = 1, \dots, 8$  et  $p = 1, \dots, 5$ . On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{l1} = g_l(s, \lambda = 0) \\ g_{l2} = g_l(s, \lambda = 0.2) \\ g_{l3} = g_l(s, \lambda = 0.5) \\ g_{l4} = g_l(s, \lambda = 0.7) \\ g_{l5} = g_l(s, \lambda = 1) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{l1} = h_l(s, \lambda = 0) \\ h_{l2} = h_l(s, \lambda = 0.2) \\ h_{l3} = h_l(s, \lambda = 0.5) \\ h_{l4} = h_l(s, \lambda = 0.7) \\ h_{l5} = h_l(s, \lambda = 1) \end{array} \right. \quad (3.37)$$

La figure 3.8 présente les valeurs  $(K_p, K_i)$  stabilisantes pour la famille  $G(s)$  entière en appliquant l'algorithme présenté dans [Farkh, 09a] à chaque fonction de transfert appartenant à  $G_E(s)$ .

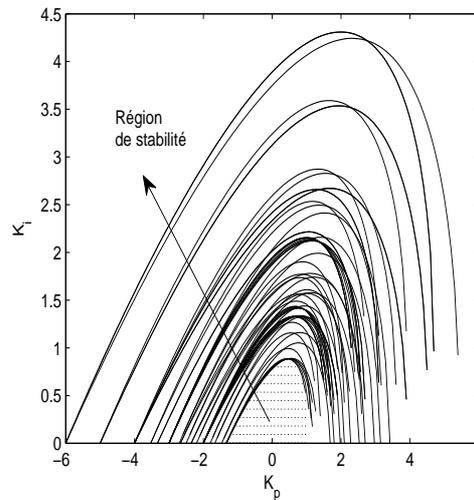


FIGURE 3.8 – Région de stabilité dans le plan  $(K_p, K_i)$  pour  $G(s)$

L'intersection de ces régions de stabilité présente l'ensemble finale et entier des contrôleurs qui stabilisent toute la famille  $G(s)$ . La figure 3.9 présente un zoom de la figure 3.8.

La figure 3.9 montre que la région de stabilité finale de  $G(s)$  est limitée par des parties de celles obtenues en appliquant l'algorithme décrit en [Farkh, 09a] aux fonctions de transferts  $h_{55}$  et  $h_{81}$ .

Pour obtenir une caractérisation complète de tous les contrôleurs PID qui stabilisent le système intervalle  $G(s)$ , le résultat développé dans [Farkh, 09b] sera utilisé en appliquant cette procédure pour chaque  $\delta_{ij}(s, K_p, K_i, K_d, \lambda)$  appartenant à  $G_E(s, \lambda)$ .

**Exemple 3.5** [Farkh, 09c]

On considère le même système intervalle à retard donné dans l'Exemple 3.4. Pour déterminer tous les gains stabilisants du PID, on commence par chercher tous les gains  $K_p$  qui stabilisent la famille entière  $G_E(s)$ .

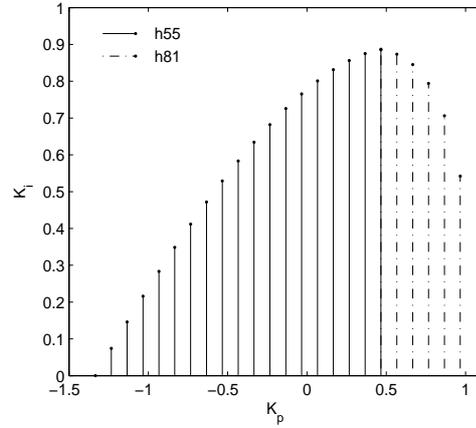


FIGURE 3.9 – Région de stabilité finale dans le plan  $(K_p, K_i)$  pour  $G(s)$

On note par  $K_p(g_{lp})$  et  $K_p(h_{lp}), l = 1, \dots, 8, p = 1, \dots, 5$ , l'ensemble des gains  $K_p$  qui correspondent à chaque  $g_{lp} \in G_E(s)$  et chaque  $h_{lp} \in G_E(s)$ . On trouve les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
 &K_p(g_1) = [-4, 3.1] ; K_p(g_2) = [-4, 3.9] ; K_p(g_3) = [-6, 4.7] , \\
 &K_p(g_4) = [-6, 5.4] , K_p(g_{51}) = [-4, 3.1] ; K_p(g_{52}) = [-3.33, 2.56] ; \\
 &K_p(g_{53}) = [-2.66, 2.03] ; K_p(g_{54}) = [-2.35, 1.74] ; K_p(g_{55}) = [-2, 1.55] ; \\
 &K_p(g_{61}) = [-4, 3.9] ; K_p(g_{62}) = [-3.33, 2.56] , K_p(g_{63}) = [-2.66, 2.53] , \\
 &K_p(g_{64}) = [-2.35, 2.24] ; K_p(g_{65}) = [-2, 1.9] ; K_p(g_{71}) = [-6, 4.7] ; \\
 &K_p(g_{72}) = [-5, 3.91] ; K_p(g_{73}) = [-4, 3.13] ; K_p(g_{74}) = [-3.52, 2.76] ; \\
 &K_p(g_{75}) = [-3, 2.35] ; K_p(g_{81}) = [-6, 5.42] ; K_p(g_{82}) = [-5, 4.52] ; \\
 &K_p(g_{83}) = [-4, 3.61] ; K_p(g_{84}) = [-3.52, 3.19] ; K_p(g_{85}) = [-3, 2.71] ; \\
 &K_p(h_{11}) = [-2, 1.5] ; K_p(h_{12}) = [-2, 1.6] , K_p(h_{13}) = [-2, 1.7] ; \\
 &K_p(h_{14}) = [-2, 1.8] ; K_p(h_{15}) = [-2, 1.9] ; K_p(h_{21}) = [-2, 1.5] ; \\
 &K_p(h_{22}) = [-2.2, 1.7] ; K_p(h_{23}) = [-2.5, 1.9] ; K_p(h_{24}) = [-2.7, 2.1] ; \\
 &K_p(h_{25}) = [-3, 2.3] ; K_p(h_{31}) = [-1.91, 2.53] ; K_p(h_{32}) = [-2.1, 2.7] ; \\
 &K_p(h_{33}) = [-2.39, 2.97] ; K_p(h_{34}) = [-2.58, 3.15] ; K_p(h_{35}) = [-2.87, 3.42] ; \\
 &K_p(h_{41}) = [-3, 2.3] ; K_p(h_{42}) = [-3, 2.4] ; K_p(h_{43}) = [-3, 2.5] ; \\
 &K_p(h_{44}) = [-3, 2.6] ; K_p(h_{45}) = [-3, 2.7] ; K_p(h_{51}) = [-1.33, 0.96] ; \\
 &K_p(h_{52}) = [-1.33, 1.06] ; K_p(h_{53}) = [-1.33, 1.16] ; K_p(h_{54}) = [-1.33, 1.16] ; \\
 &K_p(h_{55}) = [-1.33, 1.26] ; K_p(h_{61}) = [-1.33, 0.96] ; K_p(h_{62}) = [-1.46, 1.13] ; \\
 &K_p(h_{63}) = [-1.66, 1.23] ; K_p(h_{64}) = [-1.8, 1.4] ; K_p(h_{65}) = [-2, 1.5] ; \\
 &K_p(h_{71}) = [-1.27, 1.68] ; K_p(h_{72}) = [-1.4, 1.8] ; K_p(h_{73}) = [-1.59, 1.98] ; \\
 &K_p(h_{74}) = [-1.72, 2.1] ; K_p(h_{75}) = [-1.91, 2.28] ; K_p(h_{81}) = [-1.33, 0.96] ; \\
 &K_p(h_{82}) = [-2, 1.6] ; K_p(h_{83}) = [-2, 1.6] ; K_p(h_{84}) = [-2, 1.7] ; K_p(h_{85}) = [-2, 1.8]
 \end{aligned}$$

Par conséquent l'ensemble final des gains  $K_p$  qui stabilisent toute la famille entière  $G(s)$  est donné par :

$$K_p(G_E(s)) = \cap K_p(g_{lp}(s)) \cap K_p(h_{lp}(s)), l = 1, \dots, 8, p = 1, \dots, 5. \\ = [-1.27, 0.96]$$

Pour un  $K_p$  fixé à 0.5, on obtient les gains stabilisants dans le plan  $(K_i, K_d)$  pour  $G_E(s)$  en appliquant l'algorithme développé en [Farkh, 09b] à chaque  $g_{lp}(s)$  et chaque  $h_{lp}(s)$  appartenant à  $G_E(s)$ . La figure 3.10 présente ces régions de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$ .

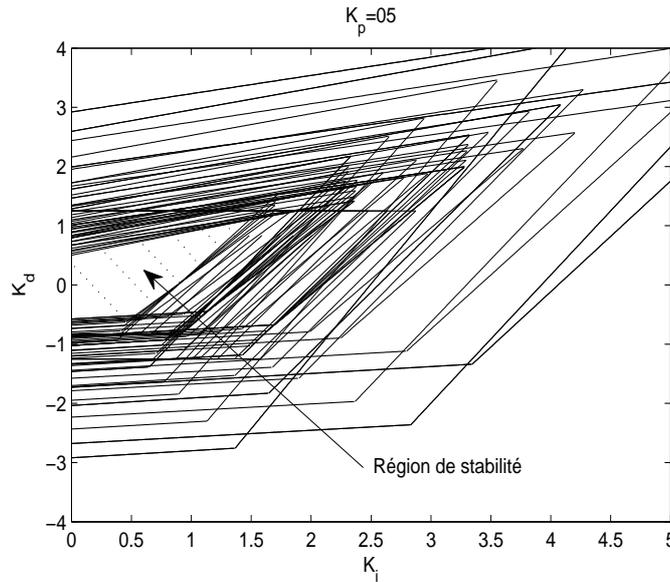


FIGURE 3.10 – Région de stabilité dans le plan  $(K_i, K_d)$  du système intervalle  $G(s)$  pour  $K_p = 0.5$

La figure 3.10 illustre la région de stabilité finale dans le plan  $(K_i, K_d)$  obtenue en appliquant l'algorithme décrit en [Farkh, 09b] à  $G_E(s)$ . L'intersection de ces régions de stabilité constituent toutes les valeurs  $(K_i, K_d)$  qui stabilisent toute la famille entière  $G(s)$  pour  $K_p = 0.5$ . La figure 3.11 présente un zoom de la figure 3.10.

On remarque que la région de stabilité finale est obtenu par les fonctions de transfert  $h_{55}, h_{51}$  et  $h_{65}$ . Finalement, en faisant un balayage de  $K_p \in [-1.27, 0.96]$  et en répétant la procédure précédente on obtient tous les gains stabilisants  $(K_p, K_i, K_d)$ .

### 3.5 Application pratique au cas du *PT* – 326

Le procédé du transfert thermique PT-326 utilisé dans cette expérience a les caractéristiques de base d'un système complexe et il est rencontré dans beaucoup de systèmes industriels tels que les fours, la climatisation, etc [Ollero, 89; Ljung, 91; Victor, 99].

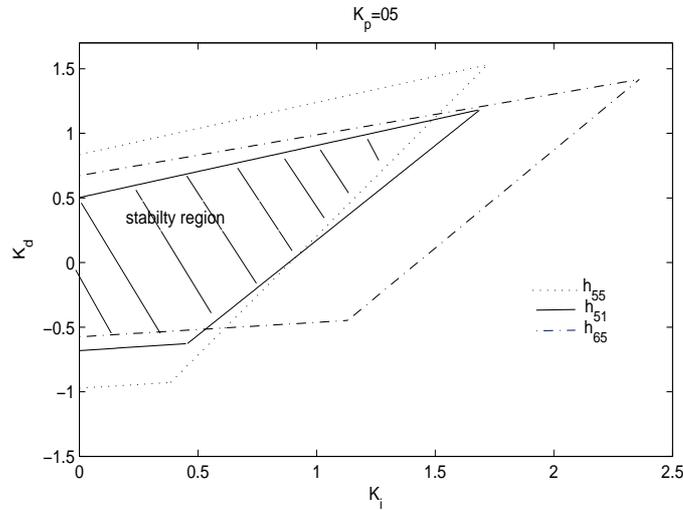


FIGURE 3.11 – Région de stabilité finale dans le plan  $(K_i, K_d)$  du système intervalle  $G(s)$  pour  $K_p = 0.5$



FIGURE 3.12 – Procédé  $PT - 326$

L'air ambiant est prélevé par un ventilateur centrifuge, par la suite il est chauffé lors de son passage à travers une grille chauffante avant d'être libéré dans l'atmosphère. L'objectif de commande pour la  $PT - 326$  est de régler la température de l'air. Ceci est réalisé en agissant sur le courant électrique appliqué à la grille chauffante. L'air est forcé de circuler par un ventilateur à travers un tube et chauffé à l'admission.

L'écoulement du flux d'air par le conduit peut être ajusté par un clapet. Il y a une résistance électrique à l'intérieur du tube, et par l'effet Joule, la chaleur dégagée par la résistance et transmise par la convection à l'air de circulation.

Ce processus peut être modélisé comme un système linéaire à retard.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{1 + Ts} e^{-Ls} \quad (3.38)$$

Le retard dépend de la position de capteur de température qui peut être inséré dans le canal en trois logements différents le long du tube, espacés de 28, 140 et 280 millimètres de la grille chauffante.

L'entrée de système  $u(t)$  est la tension appliquée au circuit d'alimentation électrique de la résistance thermique alors que la sortie  $y(t)$  représente la température de l'air de sortie qui est exprimée par une tension entre  $-10V$  et  $10V$ . Un schéma de la *PT* – 326 est montré dans la figure 3.13 ;

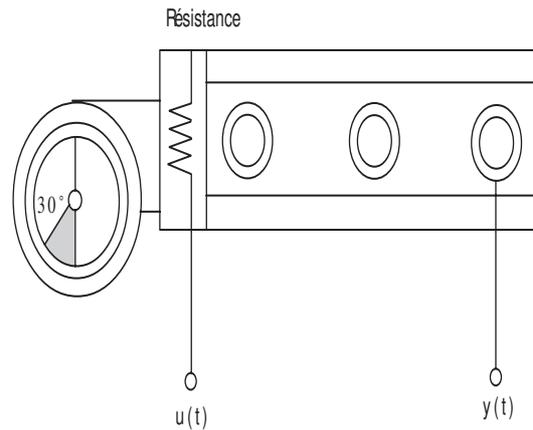


FIGURE 3.13 – Schéma du procédé

Pour l'expérience, la position du clapet est placée à  $30^\circ$  et le capteur de température est mis dans la troisième position. L'acquisition de mesures est faite par la carte "PCI – das1002". Le temps d'échantillonnage est pris égal à  $T_e = 0.03$  seconde. Ce choix tient compte du temps de calcul et de la constante de temps du système.

Nous relevons à quatre reprises la réponse indicielle du système pour la même entrée en échelon  $2V$ . Nous disposons ainsi de quatre fichiers de mesure sur lesquels nous avons procédé à une identification.

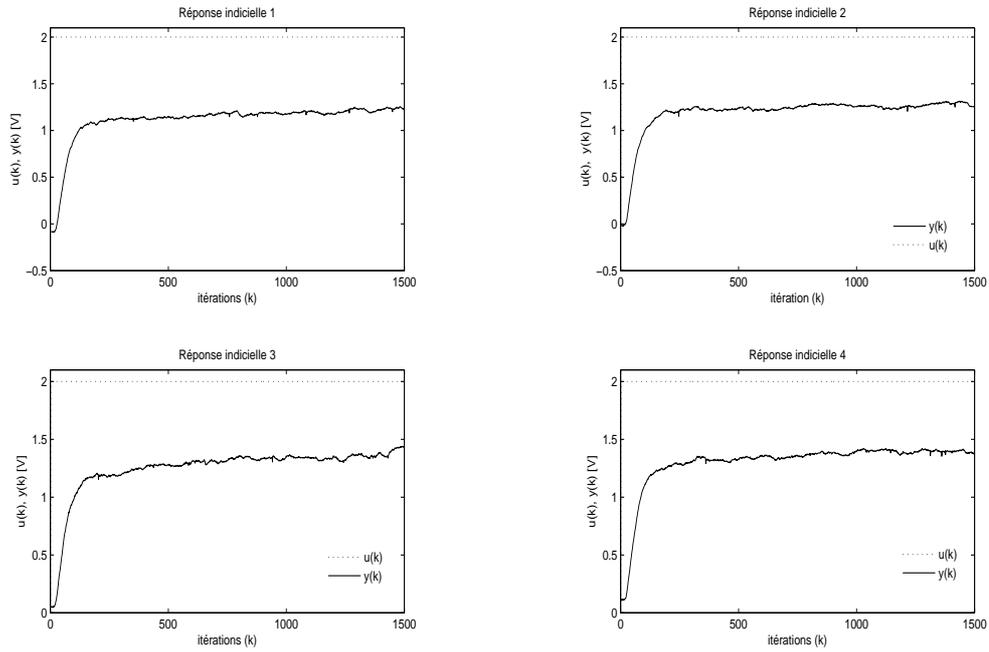


FIGURE 3.14 – Différentes réponses indicielles du  $PT - 324$

Un zoom sur la première réponse à un échelon d'entrée est montré dans la figure 3.15.

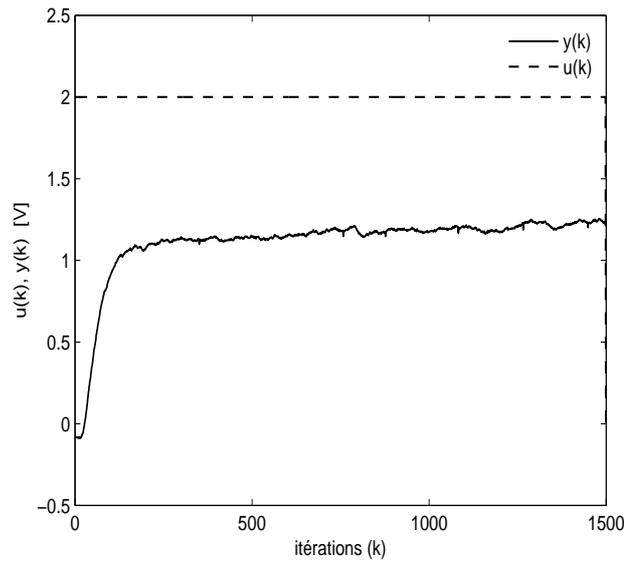


FIGURE 3.15 – Réponse à un échelon du  $PT - 326$

En utilisant le System Identification Toolbox de Matlab, on trouve les paramètres décrits par le tableau 3.1.

	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3	Réponse 4
$L$	0.57	0.6	0.57	0.57
$K$	0.58747	0.62566	0.65964	0.68255
$T$	1.6201	1.5671	1.9205	1.7265

TABLE 3.1 – Identification des paramètres du  $PT - 326$

À partir de ce tableau, le gain statique varie dans l'intervalle  $0.58 < K < 0.68$  et la constante de temps du système varie dans l'intervalle  $1.56 < T < 1.92$ .

On s'intéresse dans cette partie à la détermination d'une région de stabilité robuste d'un contrôleur PI pour la commande du procédé  $PT - 326$ .

Soit le système intervalle  $G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1+Ts}$  où  $0.58 < K < 0.68$ ,  $1.56 < T < 1.92$  et le retard est pris égale à la valeur maximale  $L = 0.6$ .

Selon les résultats développés dans la section précédente, on commence par la détermination de la famille des systèmes segments associée à la fonction de transfert du procédé.

En utilisant (3.30),  $G_E(s, \lambda)$  est exprimée par :

$$G_E(s, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} G_{ij}(s, \lambda) / \\ G_{11} = G_{13} = G_{41} = G_{43} = \frac{1}{1+1.56s} = g_1, \\ G_{12} = G_{14} = G_{42} = G_{44} = \frac{1}{1+1.92s} = g_2, \\ G_{21} = G_{23} = G_{31} = G_{33} = \frac{1+0.1\lambda}{1+1.56s} = g_3, \\ G_{32} = G_{34} = G_{32} = G_{34} = \frac{1+0.1\lambda}{1+1.92s} = g_4, \\ \cup \\ G_{12} = G_{22} = \frac{0.58}{1+1.56s} = g_5, \\ G_{32} = G_{42} = \frac{0.68}{1+1.56s} = g_6, \\ G_{13} = G_{23} = \frac{0.58}{1+1.92s} = g_7, \\ G_{33} = G_{43} = \frac{0.68}{1+1.92s} = g_8, \\ G_{11} = G_{14} = G_{21} = G_{24} = \frac{0.58}{1+s(1.56+0.36\lambda)} = g_8, \\ G_{31} = G_{34} = G_{41} = G_{44} = \frac{0.68}{1+s(1.56+0.36\lambda)} = g_9, \\ \lambda \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Les figures 3.16 et 3.17 présentent les valeurs  $(K_p, K_i)$  stabilisantes pour la famille  $G(s)$  entière.

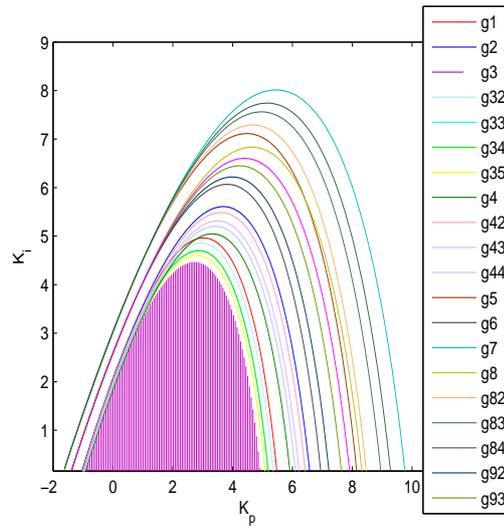


FIGURE 3.16 – Région de stabilité dans le plan  $(K_p, K_i)$  pour  $G(s)$

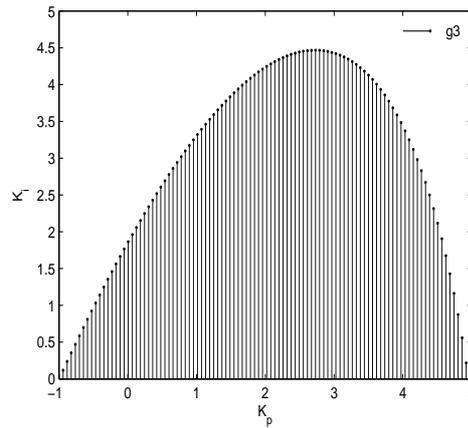


FIGURE 3.17 – Région de stabilité finale dans le plan  $(K_p, K_i)$  pour  $G(s)$

Par la suite on choisi quelques paramètres de régulateur PI qui sont résumés par le tableau 3.2 suivant :

	cas 1	cas 2	cas 3	cas 4	cas 5	cas 6	cas 7
$K_p$	0.1	1	1	1.37	1.54	2.94	3.95
$K_i$	0.1	0.33	0.65	2.77	1.18	4.04	4.33

TABLE 3.2 – Régulateurs PI

L'algorithme suivant décrit la procédure d'implémentation temps réel de la commande par un régulateur PI.

1. Initialisation  $k = 1$ ,
2. Acquisition de la sortie  $y(k)$ ,
3. Calcul de l'erreur  $e(k) = y_c(k) - y(k)$ ,
4. Calcul de la loi de commande  $u(k) = u(k-1) + K_p e(k) + (K_i T_e - K_p) e(k-1)$ ,
5. Application de la commande  $u(k)$  au procédé,
6. Attente de la fin de la période d'échantillonnage,  $k = k + 1$  et retour à l'étape 2.

Les figures suivantes présentent l'évolution de la consigne, de la sortie du canal et de la commande obtenus par les régulateur PI correspondants au tableau 3.2.

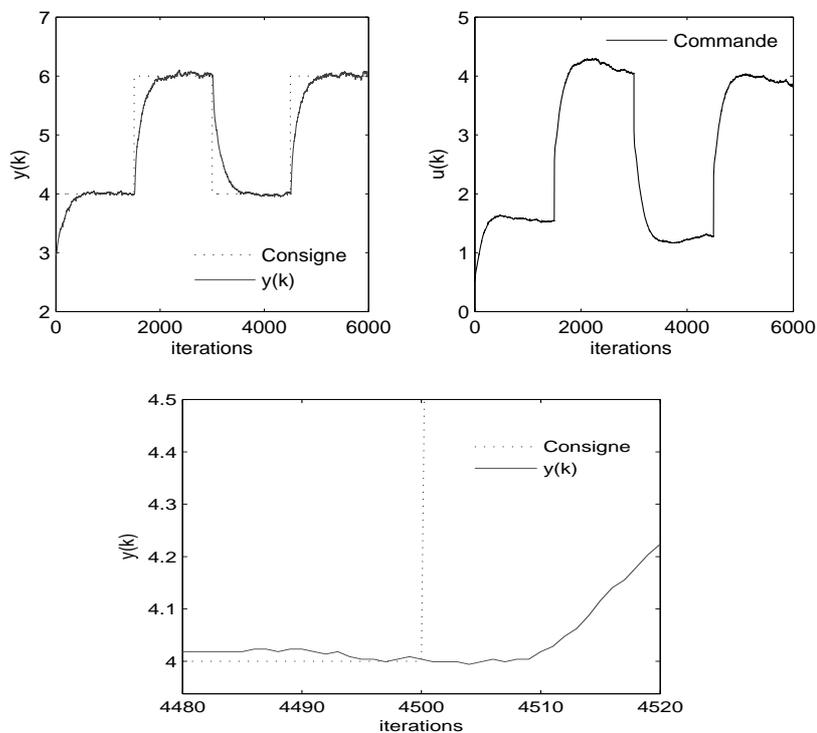


FIGURE 3.18 – Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 0.1$ ,  $K_i = 0.1$ )

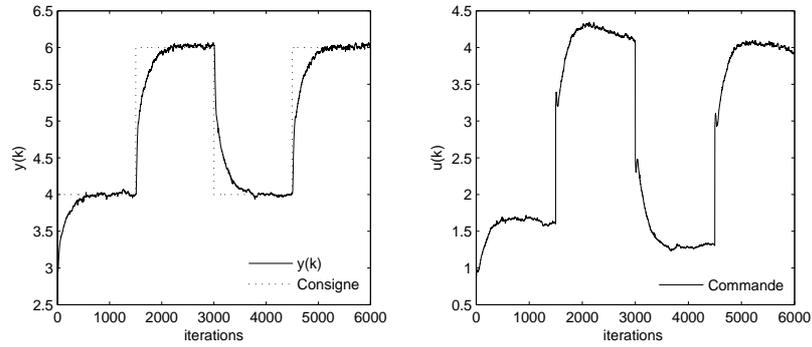


FIGURE 3.19 – Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 1, K_i = 0.33$ )

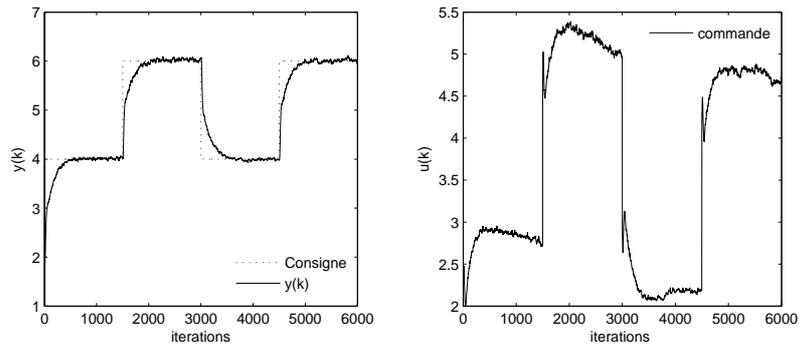


FIGURE 3.20 – Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 1, K_i = 0.65$ )

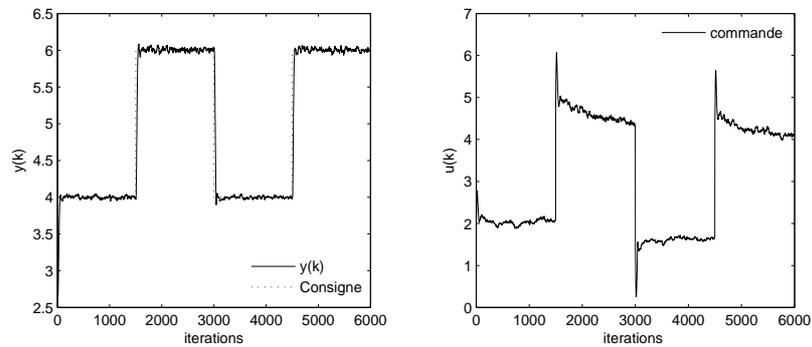


FIGURE 3.21 – Évolution de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 1.37, K_i = 2.77$ )

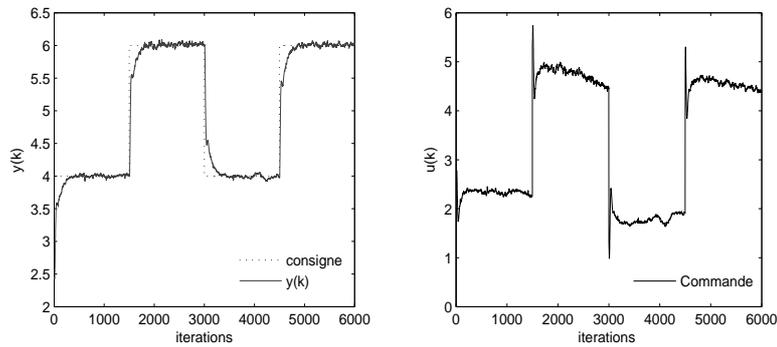


FIGURE 3.22 – Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 1.54, K_i = 1.18$ )

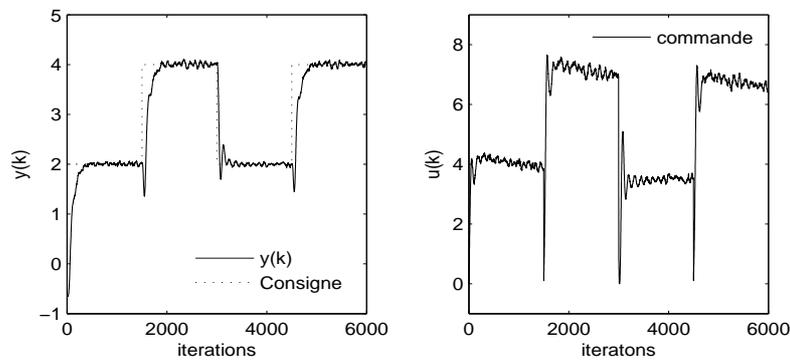


FIGURE 3.23 – Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 2.94, K_i = 4.04$ )

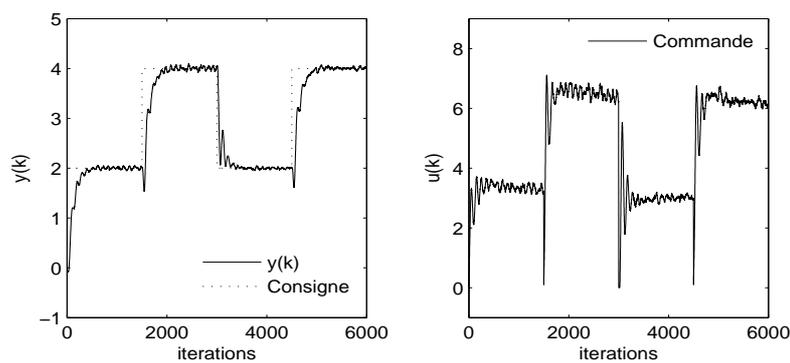


FIGURE 3.24 – Évolutions de la consigne, de la sortie et de la commande ( $K_p = 3.95, K_i = 4.33$ )

D'après ces figures il est clair que le système en boucle fermée est stable et que les sorties  $y(k)$  suivent convenablement la trajectoire de référence.

Le tableau 3.3 indique que le troisième contrôleur PI possède la meilleure variance. En effet, minimiser la variance de la commande constitue un critère permettant de préserver la vie d'un actionneur [BenAbdennour, 01].

	cas 1	cas 2	cas 3	cas 4	cas 5	cas 6	cas 7
$var(u(k))$	1.6675	1.6402	1.5501	1.821	1.7338	2.9395	2.8628

TABLE 3.3 – Comparaison des performances

### 3.6 Performances de la commande des systèmes à retards

Nous nous intéressons dans cette partie à la détermination des paramètres optimaux du régulateur PID qui appartiennent à la région de stabilité dans le plan  $(K_p, K_i, K_d)$ . Afin d'optimiser ces paramètres, on propose d'utiliser les algorithmes génétiques puisque le problème d'optimisation ici est non convexe. En effet pour montrer ceci, il suffit de prouver que l'expression du critère d'optimisation en fonction des paramètres à optimisés est non linéaire ou complexe.

Nous considérons la commande d'un système de seconde ordre à retard commandé par contrôleur PI, pour simplifier les calculs nous utilisons une approximation de Padé de premier ordre :

$$e^{-Ls} \simeq \frac{2-Ls}{2+Ls}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est exprimée par :

$$H_{BF}(s) = \frac{y(s)}{y_c(s)} = \frac{(KK_p s + KK_i)(2-Ls)}{s(2+Ls)(s^2+a_1s+a_0) + (KK_p s + KK_i)(2-Ls)}$$

La sortie du système  $y(s)$  est donnée par :

$$y(s) = \frac{(KK_p s + KK_i)(2-Ls)}{s(2+Ls)(s^2+a_1s+a_0) + (KK_p s + KK_i)(2-Ls)} y_c(s)$$

Pour une consigne de type échelon unitaire, on retrouve :

$$y(s) = \frac{(KK_p s + KK_i)(2-Ls)}{s(2+Ls)(s^2+a_1s+a_0) + (KK_p s + KK_i)(2-Ls)} * \frac{1}{s}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient l'expression suivante de la sortie :

$$y(t) = \frac{(K_p + K_i)}{K_i} \left[ 1 + \sum_{\alpha} \left( \frac{e^{\alpha t} (-L\alpha^3 - 2\alpha^2 - La_1\alpha^2 + KK_p\alpha L - 2a_1\alpha + 2a_0 - La_0\alpha - 2KK_p)}{\alpha - 6\alpha^2 - 4a_1\alpha - 2a_0 - 4L\alpha^3 - 3L\alpha^2 a_1 - 2La_0\alpha - 2KK_p + 2\alpha LK K_p + LK K_i} \right) \right]$$

Soit un critère  $J$  exprimé par :

$$J = \sum e^2 = \sum (y_c(t) - y(t))^2$$

L'expression du critère  $J$  est très complexe et non linéaire par rapport aux paramètres  $K_p$  et  $K_i$  ce qui implique que le problème d'optimisation est non convexe d'où la justification du choix de l'algorithme génétique comme une méthode heuristique.

### 3.6.1 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes évolutionnistes d'optimisation stochastique inspirés des mécanismes de l'évolution naturelle (sélection, adaptation, reproduction, recombinaison, mutation) élaborés par Charles Darwin [Goldberg, 91]. Ils sont des algorithmes itératifs de recherche globale dont le but est d'optimiser une fonction prédéfinie appelée critère ou fonction coût "fitness". Ils permettent de faire évoluer un ensemble initial de solutions vers un ensemble final.

Afin de trouver la solution optimale d'un problème en utilisant un algorithme génétique, on commence par générer un ensemble de solutions (population d'individus) de façon aléatoire. L'évolution d'une génération à la suivante, utilise les trois opérations (Sélection, Croisement, Mutation) qui sont appliquées à tous les éléments de populations [Goldberg, 91].

Des couples de parents  $P_1$  et  $P_2$  sont sélectionnés en fonction de leur adaptations. L'opérateur de croisement est appliqué avec une probabilité  $P_c$  et génère des couples d'enfants  $E_1$  et  $E_2$ . Ensuite, l'opérateur de mutation est appliqué aux enfants avec la probabilité  $P_m$  et génère des individus mutés  $E_1'$  et  $E_2'$  qui vont être insérés dans la nouvelle population.

Parmi les critères d'arrêt qui peuvent être choisis pour l'algorithme, on peut citer :

- L'atteinte d'un nombre maximal de générations fixé a priori.
- L'obtention après un certain nombre de générations, d'un degré d'uniformité des individus de la population supérieur à un seuil souhaité.

#### 1. Fonction fitness

Quatre critères d'optimisation seront considérés comme fonction coût (fitness).

- (a) le critère *ISE* (Integral of the Squared Error)

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt$$

Ce critère est relativement peu sensible aux faibles erreurs par rapport aux fortes. Par conséquent, il conduit souvent à une réponse avec peu de dépassement mais avec une déstabilisation assez longue.

- (b) le critère *IAE* (Integral of the Absolute Value Error)

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

Par rapport au critère *ISE*, ce critère donne plus de poids aux faibles erreurs.

- (c) le critère *ITAE* (Integral of the Time-Weighted Absolute Error)

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

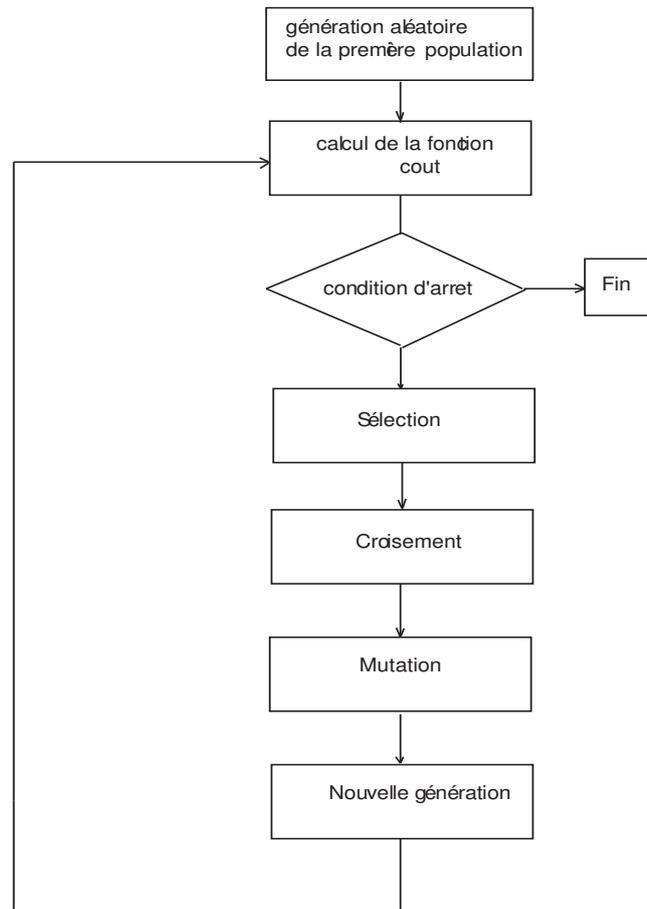


FIGURE 3.25 – Evolution d’un algorithme génétique

Ce critère privilégie une faible erreur statique au prix d’un dépassement initial qui peut être important puisqu’il a lieu pour des faibles valeurs de  $t$ .

(d) le critère *ITSE* (Integral of the Time-Weighted Squared Error)

$$ITSE = \int_0^{\infty} t |e(t)|^2 dt$$

**2. La sélection**

La sélection permet d’identifier statistiquement les meilleurs individus d’une population et d’éliminer le mauvais.

**3. Le croisement**

Lors de cette opération, deux chromosomes s’échangent des informations en donnant des nouveaux chromosomes (enfants) qui héritent certaines caractéristiques de leurs parents.

**4. La mutation**

Après le croisement, les individus retenus (parents ou enfants) subissent la mu-

tation selon une probabilité dite de mutation. La mutation classique consiste à sélectionner aléatoirement un gène de chromosome et à modifier sa valeur.

Le principe de l'optimisation des paramètres du régulateur par les algorithmes génétiques est donné par la figure 3.26.

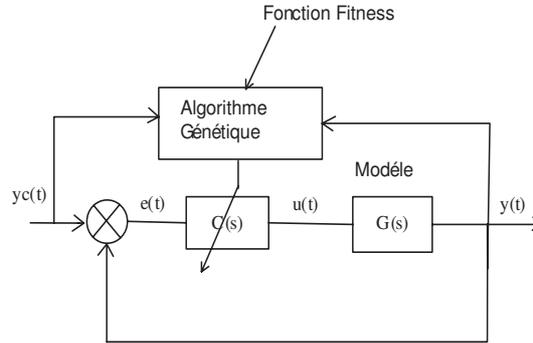


FIGURE 3.26 – Principe de l'optimisation par algorithme génétique

Il s'agit de la recherche des paramètres  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  dans la région de stabilité et ceci en faisant la sélection selon un critère d'optimisation  $J$  décrit par l'expression suivante :

$$J = \begin{cases} ISE = \sum_0^{t_{\max}} e(t)^2 \\ IAE = \sum_0^{t_{\max}} |e(t)| \\ ITAE = \sum_0^{t_{\max}} t |e(t)| \\ ITSE = \sum_0^{t_{\max}} te(t)^2 \end{cases}$$

Les étapes de calcul de la loi de commande sont résumées dans l'algorithme suivant :

1. introduction des paramètres suivant :
  - nombre d'individus par population  $max_{pop}$
  - population initiale
  - nombre de génération  $gen_{max}$
2. initialisation du compteur de génération ( $gen = 1$ )
3. initialisation du compteur d'individu ( $j = 1$ )
4. de  $t = 1$  jusqu'à  $t = t_{max}$ 
  - Évaluation de l'efficacité du  $j^{me}$  individu de la population :  $fitness(J) = \frac{1}{1+J}$
5. incrémentation du compteur d'individu ( $j=j+1$ )
  - Si  $J < max_{pop}$  ; retour à l'étape 4.

- Si non : application des opérateurs génétiques (Sélection, Croisement, Mutation) pour la formation de la nouvelle population.
- 6. incrémentation du compteur de génération ( $gen = gen + 1$ )
- 7. Si  $gen < gen_{max}$  ; retour à l'étape 3.
- 8. prendre  $K_{popt}$ ,  $K_{iopt}$  et  $K_{dopt}$  qui correspond au meilleur individu de la dernière population (l'individu qui engendre le meilleur fitness).

### 3.6.2 Exemple de simulation

Pour notre cas nous avons utilisé la boîte à outils "GATOOL" sous matlab, nous avons considéré un nombre maximal de générations égal à 100, une probabilité de croisement  $P_c = 0.8$ , une probabilité de mutation  $P_m = 0.04$  et un nombre d'individus par population égale à 20.

#### Exemple 3.6 [Farkh, 09a]

Nous considérons le même système du second ordre à retard que celui de l'exemple 2.4 du chapitre précédent :

$$G(s) = \frac{5e^{-3s}}{s^2 + 2s + 5} \quad (3.40)$$

La region de stabilité du système, tracée dans le plan  $(K_p, K_i)$  est présentée par la figure suivante.

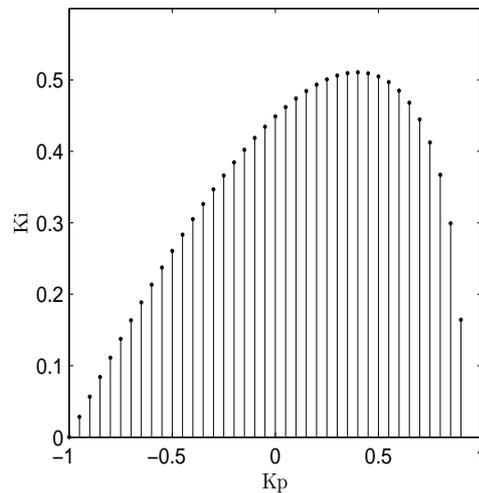


FIGURE 3.27 – Domaine de stabilité de l'exemple 3.6

À partir de la figure 3.27, les individus de notre population  $K_p$  et  $K_i$  sont choisis entre  $[-1, 0.911]$  et  $[0, 0.5]$ . Les paramètres optimaux du régulateur PI fournis par les algorithmes génétiques sont résumés par le tableau suivant :

critère	$ISE$	$IAE$	$ITAE$	$ITSE$
$K_{p,opt}$	0.3709	0.3286	0.3233	0.3609
$K_{i,opt}$	0.2453	0.2181	0.2156	0.2382

TABLE 3.4 – Paramètres optimaux du régulateur PI

La figure 3.28 présente les réponses de  $G(s)$  commandée par les différents contrôleurs PI optimaux donnés par tableau 3.4.

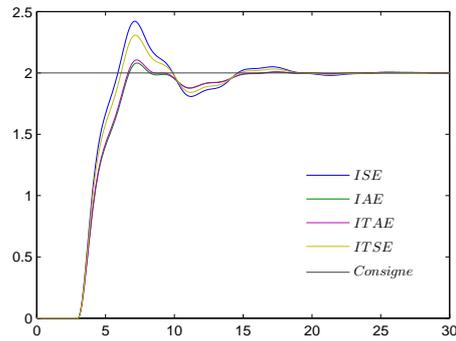
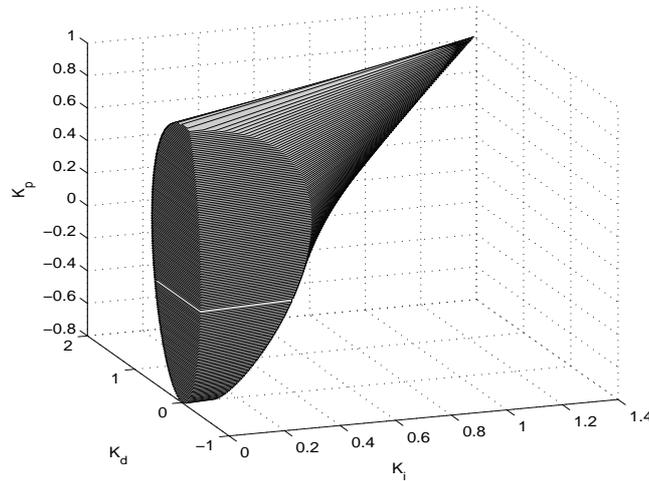


FIGURE 3.28 – Réponses indicielles des différents régulateurs PI

Nous nous intéressons par la suite à la commande PID optimal d'un système du second ordre à retard. La région de stabilité du contrôleur PID dans le plan  $(K_p, K_i, K_d)$  de l'exemple 3.6 est présentée par la figure 3.29.

FIGURE 3.29 – Région de stabilité dans le plan  $(K_p, K_i, K_d)$  correspondant à l'exemple 3.6

À partir de la figure 3.29, les individus de notre population  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  sont

choisis entre  $[-1, 0.911]$ ,  $[0, 1.29]$  et  $[-3.4, 0.6444]$ .

Les paramètres optimaux du régulateur PID fournis par les algorithmes génétiques sont résumés par le tableau suivant :

critère	<i>ISE</i>	<i>IAE</i>	<i>ITAE</i>	<i>ITSE</i>
$K_p^{opt}$	0.4461	0.3818	0.3118	0.4232
$K_i^{opt}$	0.256	0.2285	0.2418	0.2456
$K_d^{opt}$	0.2699	0.2382	0.2992	0.2321

TABLE 3.5 – Paramètres optimaux du régulateur PID

La figure 3.30 présente les réponses indicielles des différents contrôleurs PID optimaux.

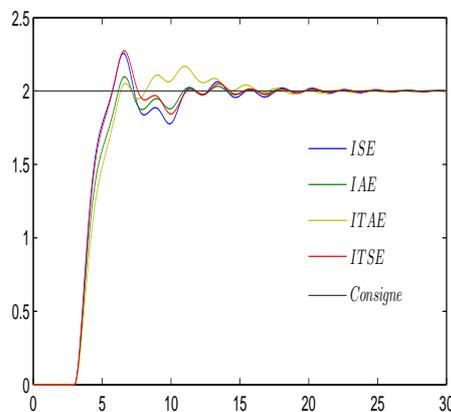


FIGURE 3.30 – Réponses indicielles des différents régulateurs PID optimaux

### 3.7 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, une version du théorème de Kharitonov généralisé étendue pour les quasi-polynômes est présentée permettant de déterminer les régions de stabilité de différents contrôleurs pour la stabilisation des systèmes à retards avec des incertitudes paramétriques bornées. Les régions de stabilité sont déterminées par l'exploitation des algorithmes qui sont développés dans le chapitre 2 en se basant sur le théorème de Hermite-Biehler. Le théorème de Kharitonov généralisé traite la stabilité des polynômes et des quasi-polynômes à paramètres inconnus, bornés et interdépendants.

Deux lemmes ont été proposés, le premier concerne la détermination de tous les gains proportionnel et intégral qui stabilisent un système avec incertitudes bornées et à retard connu. Le deuxième propose une commande robuste par PID de même

système incertain à retard connu et fixe.

Une application de ces lemmes a été présentée pour la commande des systèmes du premier et du second ordre incertains et à retard. Ce problème de stabilisation s'est réduit à la stabilisation d'un nombre fini de systèmes segments à savoir 10 pour le premier type et à 16 systèmes segments pour le deuxième. Une validation expérimentale est obtenue par une application à la régulation de température du procédé  $PT-326$  qui montre l'efficacité et la robustesse de cette approche.

La deuxième partie de ce chapitre s'intéresse à la commande PID optimale des systèmes à retards. Il s'agit de déterminer les paramètres optimaux du régulateur à l'intérieur du domaine de stabilité qui garantissent des bonnes performances en boucle fermée. Les algorithmes génétiques, qui sont connu comme des outils puissants pour l'optimisation globale, sont proposés pour répondre à ce besoin et pour minimiser certains critères de performance comme les critères  $ISE$ ,  $IAE$ ,  $ITAE$  et  $ITSE$ .

Comme perspective nous proposons de combiner les deux approches présentées dans ce chapitre pour la synthèse des contrôleurs PI et PID robustes et optimaux pour les systèmes à retards avec incertitudes bornées. Nous suggérons aussi la détermination des contrôleurs PID pour la commande des systèmes avec incertitudes bornées et à retard incertain.



# Conclusion générale et perspectives

---

Les travaux que nous avons menés au cours de cette thèse ont eu pour but de développer une commande PID robuste pour les systèmes à retards. L'approche considérée tout au long de ce travail repose principalement sur la notion de la stabilité des quasi-polynômes.

Le premier chapitre a permis de situer notre étude, en dressant un état d'art sur les systèmes à retards. Par ailleurs, nous avons rappelé tout d'abord divers résultats concernant la stabilité des systèmes à retards notamment les définitions et les théorèmes usuels de Lyapunov-Krasovskii et de Razumikhin. La première approche repose sur la détermination d'une fonctionnelle qui dépend à la fois de l'état instantané et de son "passé". La seconde consiste à employer une fonction de Lyapunov classique.

Ensuite, nous avons décrit les méthodes utilisées dans la littérature pour l'étude des quasi-polynômes et pour l'analyse de la distribution de leurs racines. Nous nous sommes alors penchés plus particulièrement sur le théorème Hermite-Biehler pour l'analyse de la stabilité des quasi-polynômes.

Notre contribution apparaît à partir du deuxième chapitre de cette thèse. En effet, dans sa première partie nous avons évoqué quelques résultats existants permettant la synthèse des régulateurs PID pour la commande des systèmes du premier ordre à retard. En se basant sur une extension du théorème de Hermite-Biehler, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'étude de la stabilité des systèmes à retards ont été déduites et ont abouti à la synthèse des théorèmes et des algorithmes pour la commande PI et PID d'un système de second ordre à retard.

Le troisième chapitre a été consacré à la commande robuste paramétrique des systèmes à retards. Dans la première partie, nous avons appliqué le théorème de Kharitonov généralisé pour commande robuste des systèmes à retards sujets à des perturbations paramétriques constantes. Deux lemmes ont été proposés pour la synthèse des régulateurs PI et PID robustes des systèmes incertains et à retard constant. Nous avons montré aussi qu'il suffit de stabiliser un nombre fini de systèmes segments pour garantir la stabilité d'un système intervalle à retard.

La robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques est validée expérimentalement par la régulation de température de la maquette  $PT - 326$ . Ce procédé, modélisé par un système incertain de premier ordre et avec retard, est commandé par un contrôleur PI. La commande de la température est assurée par le contrôle de la puissance électrique des résistances chauffantes.

La deuxième partie de ce chapitre a été réservée à la détermination des contrôleurs PI et PID optimaux qui ont été choisis dans la zone de stabilité. Ceci a été réalisé par l'utilisation des algorithmes génétiques, qui sont des algorithmes itératifs d'optimisation globale, les critères de performances étant de différents types (*ISE, IAE, ITAE, ITSE*).

En perspective, plusieurs points sont à approfondir et ouvrent la voie vers de nouveaux axes de recherche :

- La synthèse des régulateurs PID pour des systèmes d'ordre quelconque et à retards commensurables en utilisant le théorème de Hermite-Biehler.
- La synthèse des régulateurs PID pour des systèmes multivariables et à retards.
- La commande robuste des systèmes à retards où le retard et les coefficients varient dans des intervalles prescrits.

# Bibliographies

---

[Alfaro, 09]

V. M. Alfaro, R. Vilanovay, O. Arrieta , "Fragility Analysis of PID Copntrollers", 18th IEEE International Conference on Control Applications (IEEE CCA 2009), San Petersburgo, Rusia, 8-10 Julio 2009.

[Arino, 06]

O. Arino, J.K. Hale, E. Ait Dads, Franz Kappel, M.L. Hbid, M. Ait Babram, T. Faria, K. Ezzinbi, S. Ruan, J. Arino, "Delay Differential Equations and Applications", Springer, 2006.

[Astrom, 95]

K. J. Astrom and T. Hagglund, "PID Controllers : Theory, Design, and Tuning", 2nd ed. Research Triangle Park, NC : Instrument Society of America, 1995.

[Astrom, 01b]

K. J. Astrom, P. Albertos, and J. Quevedo, "PID control", Control Engineering Practice, vol. 9, pp. 1159-1161, 2001.

[Atay, 2010]

F.M. Atay, "Complex Time-Delay Systems, Understanding Complex Systems", Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.

[Arzelier, 2006]

D. Arzelier, "Théorie de Lyapunov, commande robuste et optimisation", Habilitation à diriger des recherches, Toulouse, June 2004.

[Balachandran, 09]

B. Balachandran et al. (eds.), "Delay Differential Equations : Recent Advances and New Directions", DOI 10.1007/978-0-387-85595-0 1, Springer Science+Business Media LLC 2009.

[Barmish, 00]

B.R Barmish, C.V Holot, F.J Kraus, R. Tempo, "Extreme points results for robust stabilization of interval plants with first order compensators ", IEEE Trans Automat Contr 1993;38 :1734-5.

[Bartlett, 88]

A. C. Bartlett, C. V. Hollot, L. Huang, "Root locations of an entire polytope of polynomials : It suffices to check the edges ", Mathematics of Control, Signals, and Systems 1 (1988) 61-71.

[Bellman, 63]

R. Bellman, K.L. Cooke, "Differential-Difference Equation"s, Academic Press, London, UK, 1963.

[Bhattacharyya, 91]

S. P. Bhattacharyya, L. H. Keel, "Robust parametric stability : The role of the CB segments," in Control of Uncertain Dynamic Systems, Eds. Littleton, MA : CRC Press, Sept. 1991.

[Bhattacharyya, 92]

S. P. Bhattacharyya, "recent results in robust parametric stability and control", International Symposium on Circuits and Systems, 1992. ISCAS Volume 6, 3-6 May 1992 Page(s) :2707 - 2711 vol.6.

[Bhattacharyya, 95]

S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L. H. Keel, "Robust Control : The Parametric Approach, Upper Saddle River", NJ : Prentice-Hall, 1995.

[Bhattacharyya, 09]

S. P. Bhattacharyya, A. Datta, L. H. Keel, "Linear Control Theory : Structure, Robustness and Optimization ", CRC Press, 2009.

[BenAbdenmour, 01]

R. BenAbdenmour, M. Ksouri, F. Msahli, " Identification et commande numérique des procédés industriels", Technip, 2001.

[Chapellat, 89]

H. Chapellat, S. P. Bhattacharyya, "A generalization of Kharitonov's theorem : robust stability of interval plants ", IEEE Trans Automat Contr vol AC-34,no.3,1989,pp .306-311.

[Chapellat, 90]

H. Chapellat, M. Dahleh, S. P. Bhattacharyya, "Robust Stability of Interval Plants : A Review" American Control Conference, 1990 23-25 May 1990 Page(s) :2548 - 2553.

[Chapellat, 91]

H. Chapellat, M. Dahleh, S. P. Bhattacharyya, "On robust stability of interval control systems", Automatic Control, IEEE Transactions on Volume 36, Issue 1, Jan. 1991 Page(s) :59 - 67.

[Chiasson,07]

J. Chiasson, J.J. Loiseau (Eds.), "Application of Time Delay Systems", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[Cohen, 76]

G.H.Cohen and, G. A. Coon, "Theoretical Consideration of Retarded Control," Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 76, pp. 827-834, 1953.

[Dambrine, 94]

M. Dambrine, "Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards " Thèse de doctorat, Université de Lille ,1994.

[Datta, 00]

A. Datta, M. T. Ho, and S. P. Bhattacharyya, "Structure and Synthesis of PID Controllers", London, UK : Springer-Verlag, 2000.

[Dugard, 05]

L.Dugard and E.I Verriest, "Stability and control for time delay system ", New York, Springer, 1998.

[Erneux, 09]

T. Erneux, "Applied Delay Differential Equations", London, Springer, 2009.

[Fang, 93]

J. Fang, D. Zheng , Z. Ren, "Computation of stabilizing PI and PID controllers by using Kronecker summation method ", IEEE Trans Automat Contr 1993 ;38 :1734-5.

[Farkh, 09a]

R. Farkh, K. Laabidi, M. Ksouri, "PI control of second order delay system with tuning parameter optimization", International Journal of Electrical and Electronics Engineering, vol.3, pp. 1-7, 2009.

[Farkh, 09b]

R. Farkh, K. Laabidi, M. Ksouri,, "Computation of All Stabilizing PID Gain for Second-Order Delay System", Mathematical Problems in Engineering, vol. 2009, Article ID 212053, 17 pages, 2009. doi :10.1155/2009/212053.

[Farkh, 09c]

R. Farkh, K. laabidi, M. Ksouri, "Robust stabilization for uncertain second order delay system" The Mediterranean Journal of Measurement and Control, Vol.5, No.4, 2009.

[Farkh, 09d]

R. Farkh, K. laabidi, M. Ksouri, "Real time control for time delay system", European Conference on modelling and simulation ECMS 2009.

[Farkh, 10]

R. Farkh, K. laabidi, M. Ksouri, "Robust PI/PID Controller for Interval First Order System with Time Delay", International journal of modelling identification and control, accepté.

[Fu, 89]

M. Fu, A. W. Olbrot, M. P. Polis, "Robust stability for time-delay systems : the edge theorem and graphical tests ", IEEE Tran. Automat. Contr. 34 (1989) 813-820.

[Hale, 93]

J. K. Hale and S. M. Verduyn-Lunel, "Introduction to Functional Differential Equations", Springer, 1993.

[Ho, 97]

M.T Ho, A. Datta, S.P Bhattacharyya, "A Linear Programming Characterization of All Stabilizing PID Controllers," Proceedings of the American Control Conference, pp. 3922-3928, June 1997.

[Ho, 98]

M.T Ho, A. Datta, S.P Bhattacharyya, "Design of P, PI and PID controllers for interval plants ", Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, 1998.

[Ho, 99]

M.T Ho, A. Datta, S.P Bhattacharyya, "Generalizations of the Hermite-Biehler Theorem," Linear Algebra and its Applications, Vol. 302-303, pp. 135-153, 1999.

[Ho, 00]

M.T Ho, A. Datta, S.P Bhattacharyya, "Generalizations of the Hermite-Biehler Theorem : the complex case", Linear Algebra and its Applications, Vol. 320, pp. 23-36, 2000.

[Huang, 98]

Y.J. Huang, Y. J Wang, "Robust PID tuning strategy for uncertain plants based on the Kharitonov theorem plants", ISA Transaction 39 (2000) 419-431.

[Goubet, 96]

A. Goubet, "Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes retardés :critères dépendant des retards ", Thèse de doctorat, Université de Lille ,1996.

[Gu, 03]

---

K. Gu, V. Kharitonov, J. Chen, "stability of time-delay systems ", Boston, MA : Birkhäuser, 2003.

[Kalman, 60]

R.E. Kalman, "Contribution to the theory of optimal control", Bol.Soc.Matem, Mexicana, pp.102-106, 1960.

[Keel, 94]

Keel, L.H.; Bhattacharyya, S.P.; "Robust parametric classical control design", IEEE Transactions on Automatic Control, Volume 39, Issue 7, July 1994 Page(s) :1524 - 1530.

[Kharitonov, 78]

V. L. Kharitonov, "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations", Differential Equations, 14, 2086-2088, 1978.

[Kharitonov, 79]

V. L. Kharitonov, "The Routh-Hurwitz problem for families of polynomials and quasipolynomials", Math. Phis. 26 (1979) 69-79.

[Kharitonov, 91]

V. L. Kharitonov, "Interval stability of quasipolynomials ", Robust Stability and Control, CRC Press, 439-446, 1991.

[Kharitonov, 94]

V. L. Kharitonov, A. P. Zhabko, "Robust stability of time-delay systems ", IEEE Tran. Automat. Contr. 39 (1994) 2388-2397.

[Kharitonov, 08]

V.L Kharitonov, J.A Torres-Muñoz, M.B Ortiz-Moctezuma, "Stability of a multi-diamond type family of quasipolynomials", Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, 2008.

[Kolmanovskii, 86]

V. Kolmanovskii et V. Nosov, "Stability of Functional Differential Equations", Academic Press, London,(1986).

[Kolmanovskii, 92]

V. Kolmanovskii, A. Myshkis, "Applied Theory of Functional Differential Equations". Kluwer Acad. Pub,(1992).

[Kolmanovskii, 99]

V. Kolmanovskii, S.Niculescu, et K. Gu, " Delay effects on stability : A survey".

Dans 38th IEEE CDC'99, Phoenix, AZ, (1999).

[Krasovskii, 56]

N.N. Krasovskii, "On asymptotic stability of system with after effect", Prikl.Math.Mech, Vol.20, No.4, pp.513-518.

[Krasovskii, 63]

N.N. Krasovskii, "Stability of motion :application of lyapunov's second method to differentiel systems and equations with delay", Standford university press, stanford.

[Ljung, 91]

L. Ljung, "System Identification : Theory for the User", Prentice-Hall Inc., 1991.

[Mahmoud, 00]

M. S. Mahmoud, "Robust control and filtering for time-delay systems ", New York, Marcel Dekker, 2000.

[Masoud, 03]

Z.N. Masoud, A.H. Nayfeh, and A. Al-Mousa, "Delayed positionfeedback controller for the reduction of payload pendulations of rotary cranes", J. Vibration Control 9, 257-277 (2003).

[Masoud, 05]

Z.N. Masoud, A.H. Nayfeh, and N.A. Nafeh, "Sway reduction on quayside container cranes using delayed feedback controller : Simulations and experiments", J. Vibration Control 11, 1103-1122 (2005).

[Michiels, 07]

W. Michiels , S.I. Niculescu, " Stability and stabilization of time-delay systems", SIAM 2007 - ISBN 0898716322

[Mondié, 05]

S. Mondié, J. Santos, and V. L. Kharitonov "Robust Stability of Quasi-Polynomials and the Finite Inclusions Theorem", IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 50, NO. 11, 2005.

[Niculescu, 01]

S.I. Niculescu, "Delay effets on stability : A robust control approach", Heidelberg, Germany, Springer, vol. 269, 2001

[Normey-Rico, 07]

J.E. Normey-Rico, E.F. Camacho, "Control of Dead Time Processes ", London, Springer-Verlag, 2007

[Ollero , 89]

A. Ollero and A. Garcia-Cerezo, "Direct Digital Control, Auto-Tuning and Supervision using Fuzzy Logic", *Fuzzy Sets and Systems*, 30 :135-153, 1989.

[Oliveira, 03]

V. A. Oliveira , M. C.M. Teixeira , L.V Cossi, "Stabilizing a class of time delay systems using the Hermite-Biehler theorem", *Linear Algebra and its Applications* 369 (2003) 203-216.

[Oliveira, 05]

V. A. Oliveira, L.V Cossi, A. M. F. Silva, M. C.M. Teixeira, "PID Stabilization of a Class of Time Delay Systems ", *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*.

[Oliveira, 09]

V. A. Oliveira, L.V Cossi, A. M. F. Silva, M. C.M. Teixeira, "Synthesis of PID controllers for a class of time delay systems", *Automatica* (2009), doi :10.1016/j.automatica. 2009.03.018.

[Özguler, 94]

A. Bülent Özguler, A. Aydın Koçan, "An Analytic Determination of Stabilizing Feedback Gains," Report 321, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, Sept. 1994.

[Patre, 07]

B.M. Patre, P.J Deore, "Robust stability and performance for interval process plants ", *ISA Transactions* 46 (2007) 343-349.

[Pontryagin, 55]

Pontryagin, L. S. "On the Zeros of Some Elementary Transcendental Function", *American Mathematical Society Translation*, Vol. 2, pp. 95-110, 1955.

[Razumikhin, 56]

B.S. Razumikhin,"On the stability of system with a delay", *Prikl.Math.Mech*, Vol.20,No.4,pp.500-512.

[Riantafyllou, 91]

M.S. Riantafyllou and M.A. Grosenbaugh, "Robust control for underwater vehicle systems with time delays", *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 16(1) :146-151, 1991.

[Richard, 01]

J.P.Richard, "Algèbre et Analyse pour l'automatique ", *Traité IC2 : Information, Commande, communication*. Hermès-Lavoisier, 2001.

[Richard, 02]

J.P.Richard , " Mathématiques pour les systèmes dynamiques", Traité IC2 : Information, Commande, communication. Hermès-Lavoisier, 2002.

[Richard, 03]

J.P. Richard, "Time delay systems : An overview of some recent advances and open problems", Automatica, vol. 39(10) :1667-1694,2003.

[Richard, 07]

J.P. Richard et T. Divoux," Systèmes commandés en réseau ", Traité IC2 : Information, Commande, communication. Hermès-Lavoisier, 2007.

[Richard, 09]

J.P.Richard, A. Achour, L.Belkoura, M. Dambrine, M. Ksouri, H.Mounier, W.Perruquetti, J.Rudolph,F.Woittennek, S.Salhi, S. ben Attia, "Mathématiques pour l'ingénieur ",ISBN :978-9973-0-0852-7,2009

[Roy, 05]

A. Roy, K. Iqbal, "PID controller tuning for the first-order-plus-dead-time process model via Hermite-Biehler theorem", ISA Transaction 44 (2005) 362-378.

[Schwengeler, 25]

E. Schwengeler,"Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen spezieller ganzer Funktionen (exponentialsummen)", Thèse Doctorale, ETH, Zurich, 1925.

[Seuret, 06]

A. Seuret, "Commande et observation des systèmes à retard variables : théorie et applications ", Thèse de doctorat, Université de Lille ,2006.

[Silva, 00]

G. J. Silva, A. Datta and S. P. Bhattacharyya, "Stabilization of Time Delay Systems", Proceedings of the American Control Conference, pp. 963-970, 2000.

[Silva, 01a]

"Stabilization of First-order Systems with Time Delay using the PID controller", Proceedings of the American Control Conference, pp. 4650-4655, 2001.

[Silva, 01b]

G. J. Silva, A. Datta and S. P. Bhattacharyya, "PI stabilization of first-order systems with time-delay", Automatica, 37(12) :2025-2031, 2001.

[Silva, 01c]

G. J. Silva, A. Datta and S. P. Bhattacharyya, "Determination of Stabilizing gains

---

for Second-order Systems with Time Delay", Proceedings of the American Control Conference, pp. 25-27, 2001.

[Silva, 02]

G. J. Silva, A. Datta and S. P. Bhattacharyya, "New results on the synthesis of PID controller", IEEE transactions on automatic control, vol.47,No.2, February 2002.

[Silva, 03]

G. J. Silva, A. Datta, and S. P. Bhattacharyya, "On the stability and controller robustness of some popular PID tuning rules", IEEE transactions on automatic control, vol. 48, no. 9, pp. 1638- 1641, 2003.

[Silva, 05]

G. J. Silva, A. Datta and S. P. Bhattacharyya, "PID controllers for time delay systems", Birkhäuser, MA, Boston, 2005.

[Tan, 06]

N.Tan , I. Kaya , C. Yeroglu , D. P. Atherton, "Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus ", Energy Conversion and Management 47 (2006) 3045-3058, Elsevier.

[Victor, 99]

José Victor, Antonio Dourado, "Adaptive Scaling Factors Algorithm for the Fuzzy Logic Controller", FUZZ-IEEE'99.

[Vidyasagar, 85]

M. Vidyasagar, "Control System Synthesis : A Factorization Approach. Cambridge", MA : M.I.T. Press, 1985.

[Xu, 03]

H. Xu, A. Datta and S.P. Bhattacharyya, "PID Stabilization of LTI Plants with Time-Delay", Proceedings of the 42nd IEEE, Conference on Decision and Control,2003.

[Xia, 09]

Yuanqing Xia, Mengyin Fu, Peng Shi, "Analysis and Synthesis of Dynamical Systems with Time-Delays", Springer-Verlag Berlin Heidelberg,ISBN 978-3-642-02695-9.

[Xiang, 06]

L.Xiang, "Advances in PID, Smith and Deadbeat Control",Thèse de doctorat, université centrale de Singapore, 2006.

[Yeganefar, 06]

N.Yeganefar, "Définitions et analyse de stabilités pour les systèmes à retard non linéaires", Thèse de doctorat, Université de Lille ,2006.

[Zhong, 00]

Q.C. Zhong, "Robust control of time-delay system ", London, Springer, 2006.

[Ziegler, 42]

J.G. Ziegler and N.B. Nichols, "Optimum Settings for Automatic Controllers," Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 64, pp. 759-768, 1942.

