



Sur quelques problèmes d'observateurs, Applications à certains modèles d'écosystème aquatique

Aboudramane Guiro

► To cite this version:

Aboudramane Guiro. Sur quelques problèmes d'observateurs, Applications à certains modèles d'écosystème aquatique. Mathématiques [math]. Université de Ouagadougou, 2009. Français. NNT : . tel-00587949

HAL Id: tel-00587949

<https://theses.hal.science/tel-00587949>

Submitted on 22 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur quelques problèmes d'observateurs,
Applications à certains modèles
d'écosystème aquatique

Dédicace

À la mémoire de mes pères

**El Hadj Zakaria GUIRO
Moulaye TRAORE
Issa GUIRO**

Puisse le seigneur, le tout puissant vous accueillir dans son royaume.

À mes Mamans

Haoua GUIRO/DIABATE

Awa GUIRO/OUEDAOGO

Abibou GUIRO/TINTO

Kadidiatou TRAORE/ BARRO

Elizabeth ZABRE/KOUDOUGOU

Nathalie ZABRE/PITROIPA

À Papa Barthélémy Tiga ZABRE

À mes frères et soeurs

À toute la famille GUIRO

À mes amis

À mon épouse Jeannine K. GUIRO/BADO

Remerciements

Ce travail est le fruit d'une convention de co-encadrement de thèses entre le Laboratoire d'Analyse Mathématique des Equations (LAME) de l'université de Ouagadougou (Burkina Faso) et l'équipe MASAIE de l'INRIA-Lorraine (antenne de Metz) situé au sein de l'université Paul Verlaine de Metz.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance envers les membres du jury, dont la renommée et les qualités scientifiques honorent pleinement ce travail :

– Monsieur Moussa OUATTARA de l'université de Ouagadougou (Burkina Faso) a été mon professeur en DEA où nous nous sommes initié à l'Algèbre génétique ; il nous a toujours encouragé au travail et à la persévérance. Je tiens ici à le remercier non seulement pour ses nombreux conseils, mais aussi pour le fait qu'il accepte de présider ce jury.

– Monsieur Tewfik SARI de l'Université de haute Alsace à Mulhouse (France) est un professeur que j'ai rencontré pour la première fois à Saint Louis au Sénégal lors de la première école doctorale (WATS) organisée par le Réseau EDP-MC, c'est aussi avec lui que j'ai fait mes premiers pas dans la théorie des EDOs ; merci encore pour l'honneur que vous me faites en acceptant rapporter sur cette thèse.

– Monsieur Sallet GAUTHIER de l'IRD, INRIA-Lorraine et de l'Université Paul Verlaine de Metz (France) ; je l'ai également rencontré pour la première fois lors du premier WATS où il a assuré un cours sur SCILAB, ce fut aussi mes débuts d'apprentissage de ce logiciel que j'ai beaucoup utilisé tout au long de ma thèse. Je lui suis reconnaissant pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse.

– Monsieur Stanislas OUARO de l'Université de Ouagadougou (Burkina Faso) est l'un de mes devancier dans la recherche mathématiques. A ce titre, il m'a conseillé à m'orienter dans cette direction dont l'issue n'était pas évidente. Par ailleurs il m'a beaucoup motivé durant ces années de thèse ; je le remercie pour sa franchise et son amitié à mon égard et sa disponibilité à rapporter sur cette thèse.

Mes sincères remerciements vont à l'endroit de mes encadreur : Monsieur Abderrahman IGGIDR et de monsieur Hamidou TOURÉ. Le premier pour ses directions scientifiques, sa sagacité intellectuelle, son omniscience et son optimisme ; je voudrais ici lui témoigner ma reconnaissance pour son esprit social en plus de ses qualités scientifiques. Le second pour m'avoir conseillé d'embrasser cette branche de recherche en mathématiques appliquées ; je lui dis sincèrement merci pour ses directions scientifiques et les nombreuses possibilités qui m'ont été offertes durant cette thèse, notamment à travers le Réseau EDP-MC dont il est le coordinateur.

J'exprime mes sincères remerciements à mes anciens professeurs et maintenant collègues messieurs Bernard K. BONZI et Sado TRAORE pour leur encouragement, leurs multiples conseils, et aussi pour leurs disponibilités pour mes différentes sollicitations. Je vous dis infiniment merci.

Que mes collègues et amis Adama OUEDRAOGO, Jean de Dieu ZABSONRE, Ismaël NYANQUINI, Gilbert BAYILI, Younoussa MILLOGO, Joseph BAYARA, Amed SERE, Idrissa KABORE, Sadouanouam MALO, Jean Louis ZERBO ainsi que tous les autres collègues de l'Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso acceptent mes remerciements pour leurs soutiens et encouragements multiformes.

Ces dernières années de thèses n'ont pas été du tout facile pour moi, mais avec l'encouragement de mes amis et ma famille, beaucoup de difficultés ont été résolues. Je tiens alors ici à remercier Le docteur Sidkiéta Eric ZABRE et sa femme Alice, Monsieur Alexis KOALLA et sa femme Eléonore pour leur soutien combien inestimable pendant mes séjours en France. Je remercie Monsieur Malik TRAORE et sa femme Fati, Alassane TRAORE, Salif PORGO, Ally Adama GANAME et Hermann SORÉ pour leur intérêt constant pour l'avancée de mes travaux de recherches. Vous m'avez été d'un très grand soutien moral. Mes remerciements vont également à l'endroit de ma famille (toute la grande famille GUIRO), à la famille ZABRE à Ouagadougou, à la famille TRAORE à Bobo Dioulasso, à mon épouse Jeannine ainsi que ma belle famille (la famille BADO).

Les travaux présentés dans cette thèse sont le fruit d'une collaboration très fructueuse entre l'université de Ouagadougou à travers le Réseau EDP-MC et l'INRIA-Lorraine Au sein du LMAM de l'Université Paul Verlaine de Metz. L'ambiance à Metz avec mes collègues doctorants était des plus conviviales ; je dis alors merci à l'assistante du Loria à Metz, madame Christel WIERMERT, à mes collègues Diène NGOM, Papa Ibrahima NDIAYE, Abdoul Aziz FALL, Joseph MBANG et Jean Jules TEWA ainsi que le doyen Jean Luc DIMI ; avec vous j'ai passé de meilleurs moments à Metz.

Mes différents séjours de recherche en France ont été possibles grâce aux appuis financiers de SARIMA et de l'AUF. Je tiens particulièrement à remercier ces organismes pour leurs soutiens qui permettent à la jeunesse africaine d'accéder à la connaissance et au savoir.

Je voudrais enfin remercier madame Zoé OUEDRAOGO du CNFO pour les facilités de mise en route lors de mes différents séjours AUF.

Résumé

Cette thèse a un double objectif ; en effet, dans un premier temps, le but est d'utiliser les outils de l'Automatique moderne (La théorie du contrôle en mathématique) pour résoudre des problèmes liés à la gestion des ressources de la bio-diversité en général, et de manière particulière à la gestion des ressources halieutiques pour ce qui concerne l'estimation des stocks. Nous avons considéré deux modèles de pêches, l'une structurée en stades et l'autre issue des modèles globaux. Nous avons utilisé sur ces deux modèles des techniques mathématiques pour construire des estimateurs d'état appelés Observateurs pour estimer l'état réel des systèmes que nous considérons. Ces techniques sont bien connues dans l'étude des systèmes modélisant les phénomènes physiques, mais rares sont les documents qui font état de l'utilisation des observateurs dans les systèmes modélisant certains écosystèmes telles les populations de poissons. Nous avons ici tenté d'associer la rigueur mathématique dans l'estimation des états des ces systèmes qui sont construits très souvent de manière empirique et complexe.

La seconde partie de cette thèse traite des observateurs adaptatifs d'une classe de systèmes dont la sortie est à temps discret. En effet, nous considérons une classe de systèmes pouvant se mettre sous une forme particulière appelée *forme adaptative*, après une transformation via l'injection de sortie. Nous développons un algorithme récursif permettant d'estimer aussi bien l'état que quelques paramètres du système. La particularité de cette étude des observateurs adaptatifs est liée au fait qu'ici nous avons une sortie discrète, contrairement à ce que nous pourrions rencontrer dans la littérature pour les observateurs adaptatifs. Dans notre approche de ces observateurs adaptatifs continus discrets, nous avons d'abord construit l'estimateur d'état et de paramètres en trouvant un gain constant qui permet la convergence de l'algorithme ; ensuite nous considérons le même problème d'estimations d'état et de paramètres, mais sous un autre angle. Nous avons donc utilisé des techniques de l'excitation persistante pour permettre la convergence de l'algorithme.

Mots-clés : Systèmes non-linéaires, Systèmes continus-discrets, Observateurs non-linéaires, Observateurs adaptatifs, Estimations d'états, estimation de paramètres, Grand Gain, Halieutique et pêche, Dynamique de population.

Abstract

The goal of this thesis is twofold. First we show that some tools from control theory are helpful to address the stock estimation problem for an exploited fish population. The stock estimation is one of the most important problem in fishery science. To make a policy decision about the exploitation of renewable resources, it is necessary to take into account the state of the resource stocks. This implies the need of a good estimate of the available resource. Mathematical models are more and more used to describe the evolution of biological systems. In the first part of this work, we consider two mathematical models for fishery resources. The first one is a « stage structured » model that describes the dynamics of a population divided in stage-classes (according to age, length or weight) and submitted to the fishing action. The second model is a « global » model that describes the evolution of a fish population that can move between an area where it can be harvested and a reserve area where no fishing is allowed. Both models are given by systems of ordinary differential equations. For our work, we show that a tool from nonlinear control theory called « observer » can be helpful to deal with the resource stock estimation in the field of renewable resource management. More precisely we built a dynamical systems that uses the available data (fishing effort and the total or partial of caught fish) and which produces a dynamical estimation of the stock state.

In the second part of this thesis, an adaptive observer for continuous-discrete systems is proposed. It is well known that adaptive observer is very important for joint state and parameters estimation ; most of known results concern continuous systems with continuous-output or discrete-time systems with discrete output. In our work, we consider a linear system (obtained after some output injection transformation) with discrete outputs and we propose an algorithm to estimate both the state and the parameter. We use first the persistence conditions to show the convergence of the proposed algorithm, after, we propose an algorithm for the joint state and parameter estimation without any persistence condition. The proposed adaptive observer are shown to quite promising due to the exponential error convergence.

Keywords : Nonlinear systems, Continuous-discrete systems, Nonlinear observer, Adaptive observer, State estimation, Parameters estimation, High Gain, Fishery, Population dynamic.

Table des matières

I	Rappels et généralités	1
1	Rappels et généralités	3
1.1	Introduction	3
1.2	Notions halieutiques	3
1.3	Equations différentielles ordinaires et stabilité	6
1.3.1	Introduction	6
1.3.2	Notions de stabilité	7
1.4	Notion d'observateur et d'observabilité	9
1.4.1	Observabilité et observateurs des systèmes linéaires	11
1.4.2	Observateurs pour les systèmes non linéaires	12
1.4.3	Observateurs Grand Gain	12
1.5	Observateurs adaptatifs	20
1.5.1	Introduction	20
1.5.2	Forme adaptative de type Marino et al	21
II	Observateurs et écosystème aquatique (Halieutique)	23
2	Observateur non-linéaire pour un système de pêche	25
2.1	Introduction	25
2.1.1	Notations et hypothèses	27
2.2	Observabilité et Observateur	29
2.2.1	Observabilité du système de pêche	29
2.2.2	Observateur pour un système de pêche à 3 classes dont la sortie est constituée de la dernière classe	30
2.2.3	Observateur pour un système de pêche avec rejet	44
2.2.4	Conclusion	50
3	Observateur Grand Gain et estimation de stocks en pêche	51
3.1	Introduction	51
3.2	Modèle structuré en stades	53
3.2.1	Observateur Grand Gain pour le système (3.3)	54

3.2.2	Simulations et commentaires	57
3.3	Modèle global	62
3.3.1	Présentation du modèle et estimation d'état	62
3.3.2	Observabilité et observateur du modèle	62
3.3.3	Simulation	64
3.4	Conclusion	67
III	Observateurs adaptatifs continus-discrets	69
4	Observateurs adaptatifs à gain constant pour une classe de systèmes linéaires à sortie discrète	71
4.1	Introduction	71
4.2	Sur la construction de l'observateur adaptatif	72
4.3	Etude du cas $n=2$	77
4.4	Exemple et simulation	78
4.5	Conclusion	81
5	Observateurs adaptatifs à gain variable pour une classe de systèmes linéaires à sortie discrète	83
5.1	Introduction	83
5.2	Proposition d'un observateur adaptatif	84
5.3	Exemple et simulation	89
5.4	conclusion	90
IV	Conclusion, références bibliographiques et Annexes	93
	Conclusion générale et perspectives	95
A	Construction du prolongement de la fonction φ de D à $\mathbb{R}^3$	103
B	Preuve du Lemme 5.2.2	107
C	Invariance positive de D_w	111

Introduction Générale

L'objectif de ce travail consiste d'une part à la résolution de certains problèmes d'Automatique et/ou de Mathématiques appliquées issus des modèles de pêche.

Beaucoup de phénomènes naturels et même de la vie courante peuvent être décrits par les modèles mathématiques. L'utilisation des équations différentielles ordinaires est un procédé de description des processus dynamiques où une ou plusieurs variables dépendent sans interruption du temps. La description d'un processus dans une terminologie mathématique tient compte d'un cadre uniforme d'analyse et de synthèse, la théorie de systèmes, malgré le fait que les problèmes originaux peuvent venir des secteurs largement différents tels que la robotique, la biochimie, les sciences économiques, les télécommunications, l'environnement (halieutique), etc...

Les sciences halieutiques occupent de nos jours de plus en plus de chercheurs dans le but de mieux comprendre l'évolution des écosystèmes marins. Bien qu'elle constitue une activité très ancienne, la pêche n'est reconnue comme objet d'intérêt scientifique que depuis une soixantaine d'années, lorsque la nécessité d'une gestion des pêches industrielles maritimes s'est imposée dans les pays développés.

Jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle, les biologistes considéraient que les prélèvements effectués sur les pêcheries étaient dérisoires et donc sans influence sur les stocks marins ; la pêche à la morue, la pêche au hareng, la pêche à la sardine, la pêche au maquereau et probablement les grandes pêches maritimes sont inépuisables : cela signifie que tout ce que nous puissions faire n'affectera pas sérieusement la quantité des poissons. Par conséquent, toute tentative pour réguler ces pêcheries semble inutile étant donné la nature du problème.

Vers le début du 20^{ème} siècle, l'on a pris conscience que les effets du développement technologique considérable de la pêche maritime n'étaient pas négligeables sur les ressources. Mais c'est seulement à l'issue de la seconde guerre mondiale qu'on évalua la dimension réelle de l'impact de la pêche industrielle : en provoquant une diminution considérable des efforts de pêche, le conflit mondial avait permis une restauration spectaculaire des stocks marins.

La découverte du caractère limité des ressources imposa alors la nécessité d'une réglementation. Cette dernière sera dans ses principes, le reflet de la culture sociale et des mythes de l'époque : productivité efficace, maîtrise de la nature. Au sortir de la guerre, la pêche devient, par définition, maritime et industrielle et comme telle, elle doit être optimisée.

Cette perception de la pêche a entraîné de nouvelles positions théoriques. Scientifiquement parlant, « optimiser la pêche » signifie identifier une fonction dérivable représentative et définir son extremum.

Quelle fonction peut résumer l'essence de l'activité halieutique ?

Pour les fondateurs de l'école halieutique américaine, il ne fait nul doute que

le potentiel à maximiser est naturellement la production autorisée par le stock et son extremum la production maximale équilibrée (Maximum Sustained Yield : MSY (voir [GETZ89])). Les dix années qui ont suivi la seconde guerre mondiale furent l'âge d'or du concept de MSY et de tous ceux qui en dérivent tels que la sur-pêche, la sous-exploitation, etc.

Ce n'est que lorsque l'on constate que ni les océans ni les fleuves ou les forêts ne sont inépuisables que la notion de rente développée précédemment pour l'agriculture est étendue aux ressources renouvelables que sont les stocks exploités. Les premiers travaux qui introduisent explicitement les aspects biologiques et économiques dans un corps théorique datent du début des années cinquante. L'inclusion des ressources renouvelables (la pêche plus concrètement) dans l'analyse néoclassique commence vraiment avec les travaux de H. Gordon Scott [SCOT54] en 1953 et 1954 et M. Schaeffer [SCH54] en 1954.

Depuis les années cinquante jusqu'à nos jours, la modélisation mathématique des espèces naturelles et particulièrement les stocks de poissons dans les différentes mers et les différents cours d'eaux ou lacs a fait l'objet de nombreux travaux et de publications ([GUL83], [GETZ89]). Mais on peut bien deviner que la modélisation de telles espèces a pour objet de donner une idée de comment évolue un stock et non de décrire de manière exacte le comportement d'un quelconque stock. Certes la modélisation des systèmes biologiques n'est pas aussi exacte que celle des phénomènes physiques qui sont bien connus depuis des siècles. Le déficit ici est d'aider à la compréhension de ces phénomènes biologiques (en halieutique) et de permettre la prise de « bonnes » décisions quand à la gestion des ressources renouvelables notamment les populations de poissons.

Un problème assez courant dans les sciences halieutiques est l'estimation de l'état des ressources. On se heurte le plus souvent à un nombre réduit de données exploitables ; ainsi des techniques liées aux observateurs (estimation d'état) seraient une application intéressante de l'automatique en halieutique. Dans une partie de cette thèse, nous traiterons des questions liées à l'estimation d'état de systèmes modélisant une population de poissons.

La commande et la supervision des systèmes dynamiques (les modèles en physique et en mécanique) requièrent très souvent la connaissance de grandeurs physiques non mesurées ; d'où la nécessité de disposer d'algorithmes (capteurs logiciels) pour estimer ces grandeurs inconnues à partir de signaux mesurés (sorties). La conception de tels algorithmes suppose l'existence de modèles mathématiques décrivant les relations entre les grandeurs inconnues et les signaux mesurés.

L'attention portée aux problèmes non linéaires se montre de nos jours de plus en plus indispensable dans presque tous les domaines de science. Les processus physiques, chimiques, biologiques, épidémiologiques,... sont représentés par des modèles mathématiques, linéaires ou non linéaires. Pendant les décennies passées, de nom-

breuses méthodes ont été développées pour les systèmes linéaires par approximation à ces processus. Dans le souci de précision et d'efficacité, il était indispensable de développer des méthodes propres aux systèmes non linéaires, c'est alors que la théorie des systèmes non linéaires a connu des développements considérables au cours des deux dernières decenies. Il existe une grande variété d'approches et d'outils mathématiques pour l'analyse des systèmes non linéaires. La raison principale de la diversité des méthodes est qu'aucun outil ou méthodologie n'est universellement applicable dans l'analyse des systèmes non linéaires. Le contrôle (entre autre l'Automatique) occupe une part importante dans l'analyse de ces modèles. Très souvent on est confronté à des problèmes d'estimation de grandeurs non mesurées, d'où la nécessité de développer des algorithmes permettant d'estimer des variables d'état et/ou de paramètres dans un système modélisant un phénomène biologique.

L'estimation de grandeurs constantes ou ayant peu d'évolution, appelées *paramètres* relève principalement du domaine de l'identification ([LJU87, SS89]). A l'opposé des *paramètres*, les *variables* sont des grandeurs qui évoluent significativement. Dans les études d'estimation, les variables sont typiquement considérées comme des variables d'état dans une modélisation sous forme d'état. Les algorithmes pour l'estimation des variables d'état portent le nom d'*observateur* [JPG92] dans le cadre déterministique et de *filtre* dans le cadre stochastique [JAZ70].

Le mémoire de thèse est structuré de la façon suivante :

Dans le chapitre 1, nous faisons un rappel général sur les définitions en halieutiques et présentons des résultats bien connus de stabilité sur les systèmes dynamiques gouvernés par des EDOs. En effet, après les définitions sur des termes en sciences halieutiques, nous revisitons dans un premier temps, les notions de stabilité de points d'équilibre pour les systèmes dynamiques régis par des équations différentielles ordinaires, dans un second temps, nous faisons une introduction dans la théorie des observateurs linéaires et non linéaires où nous portons une attention particulière aux observateurs Grand gain ([JPG92, DEZ92]). A la fin de ce chapitre, nous abordons des observateurs adaptatifs, en faisant l'état de l'art de cette partie de l'automatique (contrôle pour les mathématiciens) qui depuis les années soixante dix fait l'objet d'intenses activités de recherches.

Le chapitre 2 est consacré dans une première partie à la présentation d'un modèle de pêche structuré en stade dû à S. Touzeau ([TOUZ97]). La deuxième partie de ce chapitre traite de la construction de l'observateur pour le modèle présenté. Il s'est agi de montrer que le système est observable selon les théories mathématiques présentées dans le chapitre 1. Ensuite nous présentons un système dynamique auxiliaire qui estime l'état du système réel modélisant le système de pêche. Pour ce faire, nous avons considéré d'une part, une sortie où seule la dernière classe (la classe 3) est soumise à la pêche ; d'autre part nous avons regardé la situation où toutes les classes matures sont soumises à la pêche mais que seule la dernière est accessible à la mesure

au regard de la situation de rejets de poissons dans la mer.

Dans le chapitre 3, nous traitons toujours du problème d'estimation d'état de systèmes halieutiques. Dans sa première partie, ce chapitre reprend le système décrit dans le chapitre 2 et considère une sortie $y(t)$ constituée de l'ensemble des captures et dont on a accès par mesure. Cette considération diffère de celle du chapitre 3 compte tenu de la disponibilité d'informations en terme de mesure de capture. Ce chapitre est enrichi par un autre modèle ([DUB03]) qui décrit la dynamique d'une population de poissons dont le gîte est partagé entre deux zones : l'une est accessible à la pêche et l'autre interdite à la pêche. Avec les informations dont on dispose (avec les captures dans la zone où la pêche est autorisée), nous arrivons, avec la théorie mathématique aidant, à estimer la densité des populations dans les deux zones ; aussi par des simulations numériques, nous corroborons l'utilité de certaines mathématiques pour les systèmes des modèles biologiques et en particulier les systèmes halieutiques.

Les chapitres 4 et 5 sont consacrés aux observateurs adaptatifs d'une classe de systèmes linéaires avec des sorties discrètes, ce que nous avons appelé *Observateurs adaptatifs continu-discrets*. Dans le chapitre 4, nous considérons un système continu-discret et nous construisons un estimateur d'état et de paramètre qui puisse à partir d'un certain temps converger vers l'état et le paramètre du système. Cette construction est faite en utilisant un gain constant. Par contre, dans le chapitre 5, en utilisant le même système avec toujours une sortie discrète, nous proposons un observateur adaptatif avec d'autres techniques de construction. Nous avons pour ce faire introduit un gain variable satisfaisant la condition classique d'excitation persistante.

Pour terminer, nous tirons une conclusion des travaux déjà faits tout en dégagant des perspectives pour des travaux futurs.

Première partie

Rappels et généralités

Chapitre 1

Rappels et généralités

1.1 Introduction

De manière générale, dans les sciences appliquées ou expérimentales il est souvent nécessaire de décrire les phénomènes naturels, sociaux, ..., par des équations mathématiques (modèles mathématiques). En effet, la donnée d'un modèle mathématique peut servir en simulation (dans le but de comprendre et de prédire le comportement d'un système, de remplacer une expérimentation sur un site donné, ...). Les processus physiques, chimiques, biologiques, épidémiologiques, de pêche, ... sont représentés par des modèles mathématiques non linéaires.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats que nous utiliserons tout au long de cette thèse. Tout d'abord, nous rappelons quelques définitions dans le langage de la pêche mathématique, ensuite, des définitions mathématiques de l'observabilité des systèmes différentiels non linéaire sont rappelés, enfin des définitions sur la notion d'observateurs adaptatifs.

1.2 Notions halieutiques

La nécessité d'une politique de gestion des pêches est aujourd'hui reconnue. Son but est d'assurer un développement durable de la ressource, compromis entre la maximisation des revenus de la pêche et la pérennité des stocks. Pour mettre en place cette gestion des stocks halieutiques, les « décideurs » s'appuient le plus souvent sur des études de scientifiques halieutes. L'**halieutique** est la science qui étudie les relations entre l'homme et les populations qu'il exploite par la pêche. Par des avis scientifiques sur les mesures de gestion à mettre en place et par des études destinées à mieux connaître et comprendre le fonctionnement du système de pêche, elle cherche à améliorer la situation des pêches.

Comme toute science, les sciences halieutiques ont un langage propre à elles, ainsi dans cette partie du chapitre, nous allons donner quelques vocabulaires qui permet-

tront la bonne compréhension des termes que nous utiliserons dans la suite de cette thèse.

Population : Une population en halieutique est l'ensemble des individus vivant dans un écosystème déterminé et possédant des caractères communs transmissibles par hérédité; il apparaît ainsi une double exigence d'*isolement* et d'*homogénéité*, le terme homogénéité peut avoir deux sens : uniformité des caractéristiques individuelles ou brassage; le second plus réaliste est généralement retenu.

Cohorte : Une cohorte est une population constituée par l'ensemble des animaux nés une année donnée, elle traverse au cours de sa vie des périodes successives pendant lesquelles ses caractéristiques (mortalité, fécondité, croissance,...) sont indépendantes du temps et de la densité de la population.

Stock : Le stock est défini comme l'ensemble des animaux exploitables. Il est associé dans le cas idéal à une population biologique mais dans la pratique il peut être plurispécifique. Le stock est plus une *unité de gestion* liée à l'exploitation qu'une unité *biologique*.

Modèle de pêche : La science construit des modèles et théories pour expliquer les phénomènes. Les phénomènes sont observés, et des relations, des causes et des explications sont recherchées. Les observations sont réalisées sur l'évolution des grandeurs (caractéristiques) par rapport au temps (ou autres caractéristiques) et en tenant compte des causes (facteurs) possibles.

Les types de modèles couramment utilisés en évaluation des pêches sont :

- Les modèles de production.

Les modèles de production sont aussi appelés des modèles de production générale, modèles globaux, modèles synthétiques ou des modèles du type Lotka-Volterra. Ces modèles considèrent le stock dans sa globalité, en particulier l'abondance totale (en poids ou en nombre) et étudient son évolution, les effets de l'effort de pêche, etc. Ils ne considèrent pas la structure par âges ou par longueur du stock.

- Les modèles structuraux.

Ces modèles considèrent la structure du stock par âges et l'évolution de cette structure avec le temps. Mais, ils reconnaissent principalement que le stock dans une certaine période de temps est composée par des individus de différentes cohortes, et donc de différents âges et longueurs. Ainsi, ils permettent des analyses et des prévisions de ce qui peut arriver au stock et aux captures, en accompagnant l'évolution des différentes cohortes qui le composent.

Classe d'âge : La classe d'âge à laquelle appartient un poisson est définie par référence au nombre de premier janvier qu'à connu l'animal. La population comporte en général à tout moment des animaux d'âges différents. Dans le cas le plus favorable,

la reproduction prend place chaque année sur une unique et courte période, ce qui permet de distinguer facilement des groupes d'animaux nés à la même année. À chaque année on associe ainsi une classe d'âge (ou groupe d'âge). Dans la réalité, les dates de naissance ne sont pas connues avec une grande précision, d'autant plus que la reproduction peut s'étaler sur plusieurs semaines, voire plusieurs mois. Il est également difficile de déterminer l'âge des vieux animaux. La dernière classe n comprend donc généralement tous les animaux d'âge supérieur ou égal à n .

Métier : Un métier correspond à une pratique d'une pêche donnée, il se caractérise en général par le choix d'un engin, d'une espèce cible et d'un lieu de pêche à un moment donné. Il peut y avoir sur un lieu de pêche plusieurs métiers définissant chacun une entrée en phase exploitable différente. Un âge au recrutement est associé à chacun.

Capture : La capture ou prise est définie comme le nombre ou la masse de poissons pêchés par une flottille déterminée pendant une période donnée.

Capturabilité : la capturabilité est la probabilité d'être capturé par une unité d'effort, pour un poisson pris au hasard dans un ensemble donné ; elle est souvent notée q .

Effort de pêche : Nous considérons qu'il s'agit de l'**effort nominal**, soit le point de vue du pêcheur sur l'exploitation. L'effort de pêche appliqué à un stock d'animaux aquatiques est une mesure de l'ensemble des moyens de capture mis en oeuvre par les pêcheurs sur le stock, pendant un intervalle de temps donné. L'effort est donc mesuré en longueur de ligne déployée, de traits de chalut, etc.

Cpue : La cpue, **capture par unité d'effort** (ou **catch per unit effort**), traduit le rendement de la pêche. Elle est définie comme le rapport de la capture réalisée pendant un intervalle de temps donnée et de l'effort déployé à cet effet.

Recrutement : C'est le processus par lequel la fraction la plus jeune de la population s'intègre pour la première fois à l'ensemble des poissons accessibles à la pêche. Le recrutement ne s'accompagne pas toujours d'un phénomène biologique marqué comme une migration. Plus généralement, on définit l'*âge au recrutement* comme étant l'âge du plus petit animal exploitable pour un ensemble de métiers donnés.

Mortalité par pêche : La mortalité par pêche m est vue comme le *point de vue du poisson* sur l'exploitation. Elle se définit comme le rapport entre la capture réalisée par unité de temps et la valeur du stock à cet instant.

MSY : MSY est la valeur de F (taux instantané de mortalité par pêche) où la capture totale à long terme sera maximale (voir [GETZ89]).

1.3 Equations différentielles ordinaires et stabilité

1.3.1 Introduction

Considérons un système différentiel ordinaire

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$

- Le système (1.1) est dit **Autonome** quand la fonction f ne dépend pas explicitement du temps t , c'est -à-dire que :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

et **non-autonome** sinon.

- Le système (1.1) est dit **Linéaire** si

$$f(x, t) = A(t)x$$

avec $A(t)$ une matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$, et **non linéaire** dans le cas contraire.

Une solution de (1.1) sur un intervalle $[0, T]$ est désignée par $p(t_0 + t, t_0, x_0)$, $t_0 \geq 0$: $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, et satisfaisant à :

$$(i) \quad p(t_0, t_0, x_0) = x_0$$

$$(ii) \quad \frac{dp(t_0 + t, t_0, x_0)}{dt} = f(p(t_0 + t, t_0, x_0), t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Une solution de (1.2) sur l'intervalle $[t_0, T]$ est notée par $p(t, x_0)$ avec $x(t_0) = x_0$.

Théorème 1.3.1 (*Existence et unicité de solution locale de Cauchy-Lipschitz*) ([KHAL02]).

Supposons que la fonction $f(x, t)$ est continue par rapport à t et satisfait la condition de lipschitz

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Alors il existe $\delta > 0$ tel que l'équation (1.1) ait une unique solution sur $[t_0, t_0 + \delta]$.

Théorème 1.3.2 (*Existence et unicité de solution globale de Cauchy-Lipschitz*) ([KHAL02])

Supposons que la fonction $f(x, t)$ est continue par rapport à t et satisfait la condition de lipschitz

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Alors l'équation (1.1) admet une unique solution sur $[t_0, t_1]$.

Preuve des Théorèmes 1.3.1 et 1.3.2

Pour la preuve de ces théorèmes, confère [KHAL02] pages 657– 659 **annexe C₁**.

1.3.2 Notions de stabilité

Supposons que l'état x^* est un point d'équilibre du système (1.1), c'est-à-dire que $f(x^*, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Définition 1.3.1 (Stabilité)

On dira que le point x^* est un point d'équilibre stable si :

$\forall \epsilon > 0, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \delta(t_0, \epsilon) > 0$ tel que

$$\forall x_0, \quad \|x_0 - x^*\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow \forall t \geq 0, \quad \|p(t + t_0, t_0, x_0) - x^*\| < \epsilon.$$

Si δ peut être choisi indépendamment de t_0 , alors le point d'équilibre x^* est dit **uniformément stable**. Un point d'équilibre qui n'est pas stable est dit **instable**.

Définition 1.3.2 (Attractivité)

On dit que le point d'équilibre x^* est un point attractif pour le système (1.1) s'il existe un réel strictement positif $\gamma(t_0) > 0$ tel que

$$\|x_0 - x^*\| < \gamma(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t + t_0, t_0, x_0) - x^*\| = 0.$$

Si γ peut être choisi indépendamment de t_0 , alors le point d'équilibre est dit **uniformément attractif**.

Le domaine d'attractivité $D(x^*)$ du point d'équilibre x^* est défini par

$$D(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t, 0, x) - x^*\| = 0\}.$$

Définition 1.3.3 Le point d'équilibre x^* est dit **(uniformément) asymptotiquement stable** s'il est à la fois (uniformément) stable et (uniformément) attractif.

Le point d'équilibre sera dit **exponentiellement stable** s'il existe des constantes positives c, α et r telles que

$$\forall x_0, \quad \|x_0 - x^*\| < r \quad \Rightarrow \quad \forall t \geq t_0, \quad \|p(t + t_0, t_0, x_0) - x^*\| \leq c\|x_0\|e^{-\alpha t}. \quad (1.3)$$

Le point d'équilibre est dit **globalement exponentiellement stable** si l'inégalité (1.3) est satisfaite pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

La stabilité exponentielle implique la stabilité uniforme. Dans le cas des systèmes linéaires, les deux notions sont équivalentes.

Stabilité au sens de Lyapunov

Avant d'énoncer le célèbre théorème de Lyapunov pour la stabilité des systèmes dynamiques, nous donnons quelques définitions y afférentes.

- Une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite de classe K si elle est continue, strictement croissante et $\phi(0) = 0$.
- Une fonction $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite définie positive si elle est continue, $V(t, 0) = 0$, $\forall t \geq t_0$ et il existe une constante $r > 0$ et une fonction ϕ de classe K telles que

$$\phi(\|x\|) \leq V(t, x), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in B_r. \quad (1.4)$$

avec B_r une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ centrée en zéro et de rayon r .

La fonction V est définie négative si $-V$ est définie positive.

- La fonction V est dite radialement non bornée si pour une certaine fonction continue $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe K , telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \infty$, on a

$$\psi(\|x\|) \leq V(t, x), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- Une fonction V est dite décroissante (au sens de Lyapunov) s'il existe une constante $r > 0$ et une fonction ϕ de classe K telles que

$$V(t, x) \leq \phi(\|x\|), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in B_r. \quad (1.5)$$

Théorème 1.3.3 (Lyapunov 1892)

Considérons x^* le point d'équilibre du système (1.1). Soit $V(t, x)$ une fonction de classe C^1 définie positive telle que :

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i} f_i(x, t).$$

- (a) Si $\dot{V}(t, x) \leq 0$, $\forall t \geq t_0, \forall x \in B_r$, alors x^* est stable.
- (b) Si $V(t, x)$ est définie positive et décroissante, et $\dot{V}(t, x) \leq 0$, $\forall t \geq t_0, \forall x \in B_r$, alors x^* est uniformément stable.
- (c) Si $V(t, x)$ est définie positive, décroissante et $\dot{V}(t, x)$ est définie négative alors x^* est uniformément asymptotiquement stable.
- (d) Si $V(t, x)$ est définie positive, décroissante dans $\mathbb{R}^n$, radialement non bornée et $\dot{V}(t, x)$ définie négative dans $\mathbb{R}^n$ alors le point d'équilibre x^* est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Une fonction $V(t, x)$ satisfaisant la condition (a) ci-dessus est appelée **fonction de Lyapunov** pour le système (1.1).

Théorème 1.3.4 *Soit x^* le point d'équilibre du système (1.1). Supposons qu'il existe des constantes positives $a, b, c, p \geq 1$ et une fonction de classe C^1 , $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in B_r, r > 0$:*

$$(i) \ a\|x\|^p \leq V(t, x) \leq b\|x\|^p, \quad \forall t \geq t_0,$$

$$(ii) \ \dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_i} f_i(x, t) \leq -c\|x\|^p, \quad \forall t \geq t_0.$$

alors le point d'équilibre x^ est exponentiellement stable. Si en plus, les conditions (i) et (ii) sont satisfaites pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors x^* est globalement asymptotiquement stable.*

1.4 Notion d'observateur et d'observabilité

Il s'avère souvent très coûteux de mesurer en pratique, l'état complet d'un système (exemple de capteurs de position et de vitesses pour un système mécanique). On se demande alors si la connaissance d'une certaine partie de l'état permettrait de reconstituer l'état complet du système. Ce fait correspond à la propriété d'observabilité du système dont nous rappelons quelques définitions et propriétés dans la suite du chapitre.

Considérons alors le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) & x(t) \in \mathbb{R}^n, & u(t) \in \mathbb{R}^m & \text{avec } m < n \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) & y(t) \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (1.6)$$

- Les variables $u(t)$ sont appelées variables d'entrées; ce sont des commandes appliquées au système (elles sont aussi appelées »entrées«).
- Les variables $y(t)$ sont appelées variables de sorties (variables observées)

A partir des sorties du système (informations mesurées), on tente de construire un système auxiliaire qui est une approximation du système (1.6). En effet, le but de l'observateur est de fournir la valeur estimée de l'état non mesuré à un instant t donné à partir des états mesurés (sorties); cette estimation se fait en temps réel et par conséquent un observateur doit avoir la forme d'un système dynamique.

Définition 1.4.1 *Un observateur du système dynamique (1.6) est un système dynamique auxiliaire (1.7) dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrées et*

de sorties du système à observer (1.6) et dont le vecteur de sortie, noté $\hat{x}(t)$ est l'état estimé du système :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) &= \hat{h}(z(t), u(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.7)$$

ce système étant tel que :

1. $\|e(t)\| = \|\hat{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.
2. Si à l'état initial t_0 on a $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$, alors pour tout $t \geq t_0$, on a : $\hat{x}(t) = x(t)$.

Remarque 1.4.1 : L'observateur (1.7) est appelé « observateur exponentiel » lorsque la convergence de $\hat{x}(t)$ vers $x(t)$ est exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ et pour toutes conditions initiales $(x(0), \hat{x}(0))$, les solutions correspondantes aux systèmes (1.6) et (1.7) satisfont à

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \exp(-\lambda t) \|\hat{x}(0) - x(0)\|.$$

On pourrait alors schématiser un ensemble système-observateur de la manière suivante :

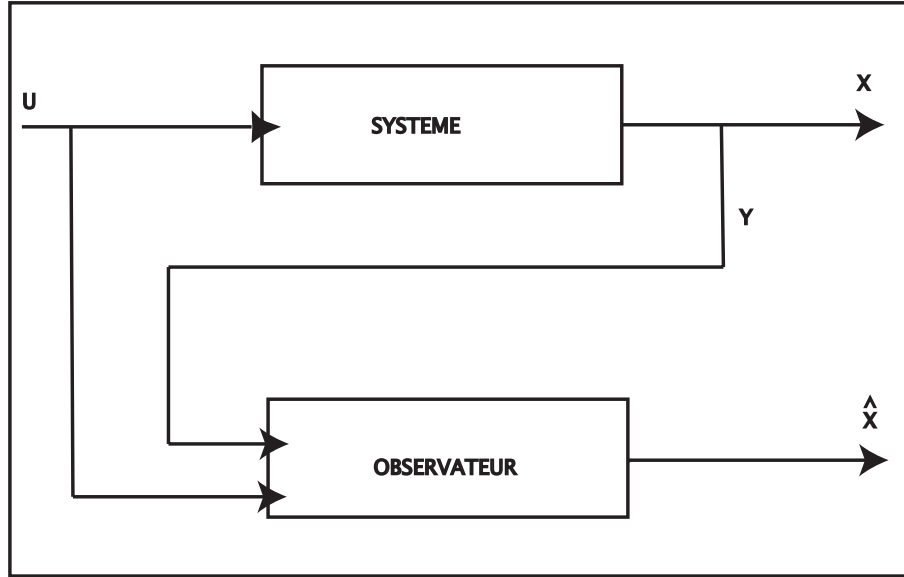


FIG. 1.1 – Ensemble système-observateur

Définition 1.4.2 ([KRE81])

Le système (1.6) est dit observable si, étant donné un instant t_0 , il existe un instant t_1 fini tel que la connaissance de $y(t)$ et $u(t)$ pour $t \in [t_0, t_1]$ permet de déterminer de manière unique l'état $x(t_0) = x_0$ et ce quelque soit l'entrée du système.

Définition 1.4.3 Pour ces définitions, on peut se référer à ([SONT98]; [SAL98]; [IGG04]).

- **Observabilité** : Le système couplé (3.4) est dit observable si pour toute paire d'états initiaux différents (x_{00}, x_{01}) telle que $x_{00} \neq x_{01}$, il existe un contrôle admissible $u(\cdot)$ et un temps $t \geq 0$ tels que :

$$h(x_{00}, u(\cdot), t) \neq h(x_{01}, u(\cdot), t)$$

- **Observabilité uniforme** : Le système couplé (3.4) est dit uniformément observable si pour toute entrée $u(\cdot)$ et pour tout couple d'états initiaux (x_{00}, x_{01}) tel que $x_{00} \neq x_{01}$, il existe un temps $t \geq 0$ tel que :

$$h(x_{00}, u(\cdot), t) \neq h(x_{01}, u(\cdot), t)$$

1.4.1 Observabilité et observateurs des systèmes linéaires

Cas de systèmes autonomes

Pour les systèmes linéaires autonomes, la construction des observateurs est basée sur l'approche de Luenberger ([LUE66], [LUE79]).

Considérons le système linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (1.8)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

La paire de matrices (A, C) est supposée observable (détectable), c'est-à-dire que la matrice $\Delta = (C, CA, \dots, CA^{n-1})^T$ est de rang maximal. La paire (A, C) étant détectable, on peut trouver un vecteur $K \in \mathbb{R}^n$ tel que le spectre de la matrice $A - KC$ soit dans le demi-plan complexe gauche. Cette opération est appelée « placement de pôles ».

Un observateur de type Luenberger pour le système (1.8) est défini par le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \\ \hat{x}(t_0) &= \hat{x}_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Ainsi, le problème de l'observateur se résume à trouver le vecteur $K \in \mathbb{R}^n$ de manière à rendre la matrice $A - KC$ stable.

Pour les systèmes linéaires, le signal d'entrée u n'influence pas la propriété d'observabilité. En outre, l'observabilité du système assure l'existence d'un observateur d'état.

Cas des systèmes non autonomes

Dans le cas des systèmes linéaires variant avec le temps, le placement de pôle ne servirait pas, car la matrice varie dans le temps. Une solution au problème d'observabilité pour de tels systèmes linéaires variant avec le temps est donnée par l'observateur de type Kalman étendu. Cette approche consiste en une extension du filtre de Kalman pour les systèmes dynamiques déterministes.

Considérons le système linéaire non autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u(t) \\ y &= C(t)x \end{cases} \quad (1.10)$$

où $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

Théorème 1.4.1 [BOR89]

Si le système (1.10) est complètement uniformément observable et si les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont bornées, alors le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A(t)\hat{x} + B(t)u(t) + PC^T(t)R(t)^{-1}(y - C(t)\hat{x}) \\ \dot{P} &= A(t)P + PA^T(t) - PC^T(t)R(t)^{-1}C(t)P + Q(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

est un observateur exponentiel global pour le système (1.10), avec $P(t_0) = P_0$ une matrice semi-définie positive. Les matrices $R(t)$ et $Q(t)$ sont des matrices respectivement définies et semi-définies positives et sont choisies de façon appropriée.

1.4.2 Observateurs pour les systèmes non linéaires

Contrairement aux systèmes dynamiques linéaires, il n'y a pas de méthodes standard pour la construction des observateurs pour les systèmes non linéaires. Plusieurs travaux ont été faits pour la construction des observateurs non linéaires ; entre autres on pourrait citer les travaux sur les *observateurs de Kalman étendu*, les travaux sur les *observateurs avec injection de sortie*, et les travaux sur les *observateur Grand Gain* (voir [DEZ92], [BES00], [JPG01], [KHAL02]), etc.

Dans la suite de cette thèse, nous nous basons sur les travaux de J. P. Gauthier et al ([JPG92], [DEZ92]) pour la construction des observateurs (estimateurs d'états) pour des systèmes décrivant la dynamique d'évolution de populations de poissons. Pour ce faire, nous faisons des rappels sur la théorie de construction des observateurs Grand Gain.

1.4.3 Observateurs Grand Gain

Avant de présenter la construction des observateurs Grand gain, nous allons donner quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite de cette thèse. Pour ce faire, considérons le système (1.6).

Définition 1.4.4 *Considérons le système (1.6). On appelle espace d'observabilité, le plus petit sous-espace vectoriel de fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'espace qui contient $h_1, \dots, h_p$, et qui soit fermé pour la dérivée au sens de Lie par rapport au champ de vecteurs $f(x, u)$, $u \in \mathbb{R}^m$ fixé.*

La dérivée de Lie de h le long du champs de vecteur f est définie par

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i}$$

La Lie dérivée successive de h le long du même champs de vecteur f est définie par :

$$L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h), \quad L_f^1 h = L_f h, \quad L_f^0 h = h.$$

Un système sera dit uniformément observable s'il l'est pour toute entrée donnée. l'observabilité dépend de l'entrée $u(t)$; et l'existence d'entrée singulière entraîne la perte d'observabilité. Ainsi, il est important de garantir l'uniforme observabilité pour les entrées non singulières ou de préciser les entrées pour lesquelles l'observateur fonctionne.

Définition 1.4.5 *Une entrée $u(\cdot)$ est dite singulière pour le système (1.6) sur un intervalle $[0, T]$; avec $T > 0$, si elle distingue $y(x(t, x_0, u))$ et $y(x(t, \bar{x}_0, u))$ pour tout couple $(x_0, \bar{x}_0)$, tel que $x_0 \neq \bar{x}_0$; en d'autres termes si elle ne permet pas l'observabilité du système.*

Théorie générale

Considérons le système autonome affine par rapport à la commande u ([JPG92], [DEZ92]) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Dans la pratique on considère un espace physique $\Omega \in \mathbb{R}^n$ dans lequel, le problème d'observation est posé; généralement Ω est un compact positivement invariant de $\mathbb{R}^n$.

Considérons ensuite la fonction ϕ (assez régulière) définie par :

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \phi(\mathbb{R}^n)$$

$$\zeta \mapsto \begin{pmatrix} h(\zeta) \\ L_f h(\zeta) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(\zeta) \end{pmatrix}.$$

On suppose que le système (1.12) appelé système SISO (Single Input Single Output) est uniformément observable c'est-à-dire observable pour toute entrée $u(t)$. Pour obtenir l'uniforme observabilité du système (1.12), nous supposons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.4.1 : La fonction ϕ est un difféomorphisme de Ω dans $\phi(\Omega)$.

ϕ étant un difféomorphisme, le système (1.12) peut s'écrire dans Ω sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ \varphi(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(z_1) \\ g_2(z_1, z_2) \\ \vdots \\ g(z) \end{pmatrix} u \\ \\ = F(z) + G(z)u \\ y = z_1 = Cz \quad \text{avec } C = (1, 0, \dots, 0) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

où

$$F(z) = Az + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi(z) \end{pmatrix}, \quad G(z) = \begin{pmatrix} g_1(z_1) \\ g_2(z_1, z_2) \\ \vdots \\ g(z) \end{pmatrix}$$

avec A une matrice anti-shift, c'est-à-dire $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Hypothèse 1.4.2 *les g_i sont des fonctions C^∞ , globalement lipschitziennes et définies par :*

$$g_i : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \end{pmatrix} \mapsto g_i(z_1, z_2, \dots, z_i).$$

Hypothèse 1.4.3 *La fonction φ peut être prolongée de Ω à $\mathbb{R}^n$ en une fonction C^∞ et globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.*

• **Observateur Grand gain à gain statique**

Théorème 1.4.2 ([JPG92])

Supposons que le système (1.13) est uniformément observable et satisfait aux hypothèses (1.4.2) et (1.4.3), alors :

$$\dot{\hat{z}} = F(\hat{z}) + G(\hat{z}) - S_\theta^{-1} C^T (C\hat{z} - y) \quad (1.14)$$

est un observateur pour le système (1.13), c'est-à-dire pour θ assez grand,

$$\|\hat{z}(t) - z(t)\| \leq K_\theta \exp\left(\frac{-\theta t}{3}\right) \|\hat{z}_0 - z_0\|.$$

$S_\theta(t)$ est la solution stationnaire de l'équation :

$$\dot{S}_\theta(t) = -\theta S_\theta(t) - A^T \theta S_\theta(t) - \theta S_\theta(t) A + C^T C. \quad (1.15)$$

La résolution de l'équation (1.15) pour $\dot{S}_\theta(t) = 0$ permet de donner une expression de la matrice S_θ dont les composantes sont exprimées par :

$$S_{\theta(i,j)} = S_{1(i,j)} \frac{1}{\theta^{i+j-1}} \quad (1.16)$$

Remarque 1.4.2 $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve du Théorème 1.4.2

Considérons $e = \hat{z} - z$, l'erreur entre l'état estimé $\hat{z}$ et l'état réel z , la dynamique de l'erreur est alors donnée par :

$$\dot{e} = (A - S_\theta^{-1}C^TC)e + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi(\hat{z}) - \varphi(z) \end{pmatrix} + (G(\hat{z}) - G(z))u(t). \quad (1.17)$$

Soit

$$\frac{d}{dt}(e^T S_\theta e) = 2e^T S_\theta \dot{e} = 2e^T S_\theta A e - 2(Ce)^2 + 2e^T S_\theta (K(\hat{z}, u) - K(z, u)) \quad (1.18)$$

avec $K(z, u) = \begin{pmatrix} K_1(z_1, u) \\ \vdots \\ K_n(z_1, \dots, z_n, u) \end{pmatrix}$ et $K_i(\underline{z}_i, u) : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschit-

zienne par rapport au vecteur $\underline{z}_i = (z_1, z_2, \dots, z_i)$ et uniformément par rapport à u , avec une constante de lipschitz k_i .

En tirant $S_\theta A$ de l'équation stationnaire (1.15), on obtient :

$$\frac{d}{dt}(e^T S_\theta e) = -\theta e^T S_\theta e - (Ce)^2 + 2e S_\theta (K(\hat{z}, u) - K(z, u)).$$

Considérons le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ défini par $(x, y)_{S_\theta} = x S_\theta y$;

d'où $\|z\|_{S_\theta} = (z^T S_\theta z)^{\frac{1}{2}}$.

En utilisant l'inégalité de Schwartz, on a :

$$\frac{d}{dt}(e^T S_\theta e) \leq -\theta e^T S_\theta e + 2\|e\|_{S_\theta} \|K(\hat{z}, u) - K(z, u)\|_{S_\theta}.$$

$$2\frac{d}{dt}\|e\|_{S_\theta} \leq -\theta\|e\|_{S_\theta} + 2\left(\sum_{i,j} S_{\theta(i,j)} (K_i(\hat{\underline{z}}_i, u) - K_i(\underline{z}_i, u))(K_i(\hat{\underline{z}}_j, u) - K_i(\underline{z}_j, u))\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la relation (1.16), en posant $k = \sup_i k_i$ et $S = \sup_{i,j} |S_{1(i,j)}|$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|e\|_{S_\theta} &\leq -\frac{\theta}{2}\|e\|_{S_\theta} + \left(k^2 \sum_{i,j} |S_{1(i,j)}| \|\underline{e}_i\|_{\mathbb{R}^i} \|\underline{e}_j\|_{\mathbb{R}^j} \frac{1}{\theta^{i+j-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq -\frac{\theta}{2}\|e\|_{S_\theta} + \left(k^2 S \theta \sum_{i,j} \left\|\frac{1}{\theta^i} \underline{e}_i\right\|_{\mathbb{R}^i} \left\|\frac{1}{\theta^j} \underline{e}_j\right\|_{\mathbb{R}^j}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Posons $\xi_i = \frac{e_i}{\theta^i}$, alors, on a :

$$\|\underline{e}_i\|_{\mathbb{R}^i} \leq \|\underline{\xi}_i\|_{\mathbb{R}^i} \leq \|\xi\|_{\mathbb{R}^n} \text{ pour tout } \theta \geq 1$$

où $\|x\|_{\mathbb{R}^i}$ désigne la norme de x sur $\mathbb{R}^i$.

Ainsi

$$\frac{d}{dt}\|e\|_{S_\theta} \leq -\frac{\theta}{2}\|e\|_{S_\theta} + (k^2 n^2 S \theta \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.19)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C_1 \|\xi\|_{S_1}^2 \text{ et } \|\xi\|_{S_\theta}^2 = \frac{1}{\theta} \|\xi\|_{S_1}^2, \quad (1.20)$$

par suite, des relations (1.19) et (1.20) on tire

$$\frac{d}{dt}\|e\|_{S_\theta} \leq -\frac{\theta}{2}\|e\|_{S_\theta} + C_1 k n \sqrt{S} \|e\|_{S_\theta}.$$

De cette inégalité, il s'en suit que θ peut être choisi suffisamment grand de sorte à rendre stable l'état des erreurs e ; ainsi pouvons nous choisir θ tel que :

$$\frac{d}{dt}\|e\|_{S_\theta} \leq -\gamma \|e\|_{S_\theta}, \text{ pour tout } \gamma > 0.$$

■

L'observateur ainsi obtenu est appelé observateur grand gain où θ est le gain.

• Observateur Grand gain à gain variable (Kalman étendu)

L'observateur Grand Gain à gain statique assure une convergence rapide pour un choix de θ assez grand. Par ailleurs, cet observateur nécessite un choix d'une condition initiale de l'observateur assez proche de la condition initiale du système réel. Dans [DEZ92], les auteurs améliorent la construction de l'observateur Grand gain mais en y introduisant un gain dynamique (qui s'adapte à chaque instant au cours de l'intégration du système).

Considérons le système (1.12) du paragraphe ci-dessus et posons la matrice diagonale $\Delta = \text{diag}(1, \frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^{n-1}})$. On définit $Q_\theta = \theta^2 \Delta^{-1} Q \Delta^{-1}$, où Q est une matrice symétrique définie positive. Le système (1.12) est supposé observable et par un changement de coordonnées Φ définie plus haut, il peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} &= Az + a(z) + b(z)u \\ y &= z_1 = Cz, \end{cases} \quad (1.21)$$

où A est une matrice anti-shift, $a(z) = (a_1(z_1), a_2(z_1, z_2), \dots, a_n(z_1, z_2, \dots, z_n))^T$, et $b(z) = (b_1(z_1), b_2(z_1, z_2), \dots, b_n(z_1, z_2, \dots, z_n))^T$ des fonctions à structure triangulaire caractérisant l'observabilité uniforme du système.

Hypothèse 1.4.4 *Les fonctions a et b sont globalement lipschitziennes et $u \in U$ un sous ensemble compact.*

posons $a^* = \frac{da}{dx}$ et $b^* = \frac{db}{dx}$ et $r > 0$ un réel donné.

Théorème 1.4.3 ([DEZ92])

Pour θ assez grand, le Filtre Etendu de Kalman suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + a(\hat{z}) + b(\hat{z})u - \frac{1}{r}S^{-1}C^T(C\hat{z} - y) \\ \dot{S} &= -SQ_\theta S - (A + a^*(\hat{z}) + b^*(\hat{z})u)^T S - S(A + a^*(\hat{z}) + b^*(\hat{z})u) + \frac{1}{r}C^T C \end{cases} \quad (1.22)$$

est un observateur exponentiel pour le système (1.21) □

Idée de la preuve du Théorème 1.4.3 (voir [DEZ92])

La preuve est basée sur la fonction de Lyapunov $e^T S e$, où $e = \hat{z} - z$ est l'erreur d'estimation et utilise les notations suivantes :

$$\Gamma = a(\hat{z}) + b(\hat{z})u - a(x) - b(x)u - (a^*(\hat{z}) + b^*(\hat{z})u)e;$$

$$\delta(t, \theta) = \frac{1}{\theta} \Delta(a^*(\hat{z}) + b^*(\hat{z})u) \Delta^{-1};$$

$$x = \Delta e;$$

$$\tilde{S} = \theta \Delta^{-1} S \Delta^{-1}.$$

On a ainsi :

$$\frac{d}{dt}(x^T S x) = -\theta x^T \tilde{S} Q \tilde{S} x + 2x^T \tilde{S} \Delta \Gamma x - \frac{\theta}{r}(Cx)^2 \quad (1.23)$$

et

$$\frac{d\tilde{S}}{dt} = \theta(-\tilde{S} Q \tilde{S} - (A + \delta(t, \theta))^T \tilde{S} - \tilde{S}(A + \delta(t, \theta)) + \frac{1}{r}C^T C) \quad (1.24)$$

De part la structure triangulaire des fonctions a et b , aussi le fait qu'elles soient globalement lipschitziennes, on veut alors majorer le terme positif dans l'équation de la dérivée de la fonction de Lyapunov. On peut alors écrire :

$$|x^T \tilde{S} \Delta \Gamma| \leq \|x^T \tilde{S}\| \|\Delta \Gamma\| \quad (1.25)$$

$$\leq \|x^T \tilde{S}\| P(\theta) \|x\| \quad (1.26)$$

$$\leq B(\tilde{S}) P\left(\frac{1}{\theta}\right) x^T \tilde{S} x \quad (1.27)$$

où P est une fonction polynomiale et $B(\tilde{S})$ le nombre de conditionnement de la matrice $\tilde{S}$, c'est-à-dire la racine carrée du rapport des valeurs propres extrémales. Par la suite

$$\frac{d}{dt}(x^T \tilde{S} x) \leq -\theta x^T \tilde{S} Q \tilde{S} x + 2B(\tilde{S})P\left(\frac{1}{\theta}\right)x^T \tilde{S} x \quad (1.28)$$

Aussi, $B(\tilde{S})$ est majoré. En effet :

posons $\bar{S} = \tilde{S}\left(\frac{t}{\theta}\right)$, on a alors

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = -\bar{S}Q\bar{S} - (A + \delta(\frac{t}{\theta}, \theta))^T \bar{S} - \bar{S}(A + \delta(\frac{t}{\theta}, \theta)) + \frac{1}{r}C^T C. \quad (1.29)$$

Par le résultat standard sur la bornitude des solutions de l'équation de Riccati ([JAZ70]), on a :

$\exists \theta_0 > 0, T > 0, \alpha > 0$, et $\beta > 0$ tels que $\forall \theta \geq \theta_0, \forall t \geq T, \alpha I \leq \bar{S}(t) \leq \beta I$.

Par suite, en posant $\lambda_{min} = \alpha$ et $\lambda_{max} = \beta$ comme la plus petite et la plus grande valeur propre de $\tilde{S}$, on a $B = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$.

On écrit alors que $\forall \theta \geq \theta_0, \forall t \geq T, B(\tilde{S}) \leq B$.

Par ailleurs, il existe $\lambda > 0$ et indépendant de θ tel que $\lambda \bar{S} \leq \bar{S} Q \bar{S}$, alors $\forall t \geq T$

$$\frac{d}{dt}(x^T \tilde{S} x) \leq \theta x^T \tilde{S} Q \tilde{S} x + 2x^T \tilde{S} \Delta \Gamma \quad (1.30)$$

$$\leq \left(-\lambda\theta + 2BP\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)(x^T \tilde{S} x). \quad (1.31)$$

Par conséquent,

$$\forall t \geq T \quad (x^T \tilde{S} x)(t) \leq e^{-(\lambda\theta - 2BP(\frac{1}{\theta}))(t-T)} (x^T \tilde{S} x)(T) \quad (1.32)$$

et par la suite

$$\forall t \geq T, \quad \|x(t)\| \leq e^{-\frac{(\lambda\theta - 2BP(\frac{1}{\theta}))(t-T)}{2}} \|x(t)\|. \quad (1.33)$$

Finalement,

$$\forall t \geq T \quad \|e_i(t)\| \leq B\theta^{i-1} e^{-\frac{(\lambda\theta - 2BP(\frac{1}{\theta}))(t-T)}{2}} L\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.34)$$

où $L\left(\frac{1}{\theta}\right) = e^T(T) \Delta^2 e(T)$.

D'où la convergence de l'erreur d'estimation e . ■

1.5 Observateurs adaptatifs

1.5.1 Introduction

Des lois physiques sont très souvent utilisées pour la modélisation des systèmes faisant intervenir des phénomènes bien connus, on peut entre autre citer les lois de conservation de l'énergie et de la matière, ou encore les lois d'Ohm et de Newton. La majeure partie de ces modèles décrivant les phénomènes physiques ou mécaniques sont souvent paramétrés par diverses valeurs : des valeurs de masse, de résistance électrique, etc. La classe de modèles correspondant à différentes valeurs de paramètres est dite paramétrique.

Dans la pratique, les ingénieurs ont souvent besoin d'estimer en même temps l'état et les paramètres inconnus du modèle. L'algorithme permettant de telles estimations conjointes porte le nom d'*observateur adaptatif* ([KREI77], [BAST88], [MAR95], [BES00] et [ZHA02]).

Le concept de l'observateur adaptatif est un concept qui date des années 1970 et depuis ce temps, plusieurs études ont été faites surtout pour les systèmes linéaires autonomes. Dans ses travaux de recherche, G. Kreisselmeier [KREI77] a proposé des observateurs adaptatifs à convergence exponentielle, chacun étant basé sur la minimisation d'un critère spécifique.

Durant ces dernières années, des travaux relatifs aux observateurs adaptatifs ont été faits en rapport avec les systèmes non linéaires, mais il s'est agi des systèmes non linéaires nécessitant des transformations du système en une certaine forme canonique. Parmi ces formes canoniques, on peut citer entre autres les systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(t)\theta \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.35)$$

avec la matrice A et le vecteur C sous une forme spécifique, $\varphi(t)$ étant un vecteur de signaux filtrant l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$. θ est un vecteur constant et affecte l'état du système par le produit scalaire $\varphi(t)\theta$.

On pourrait aussi parler des systèmes non linéaires et linéarisables après une transformation de coordonnées non linéaires et une injection de sortie ([MAR95], [BES00])

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \phi(u(t), y(t), t) + \varphi(t)\theta \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.36)$$

où A est une matrice anti-shift, $x \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}$ et ϕ est une fonction non linéaire connue. $\varphi(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à composantes bornées.

1.5.2 Forme adaptative de type Marino et al

Comme indiqué plus haut, il n'y a pas de théorie standard pour la construction des observateurs pour les systèmes non linéaires, encore moins pour ce qui concerne les observateurs adaptatifs. Pour ce faire, nous présentons ici une méthode due à Marino et al (voir [MAR95]), qui permet de mettre une classe de systèmes non linéaires sous une forme linéarisée que l'on appelle forme adaptative.

On considère un système non linéaire dont la sortie est dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + q_0(x, u) + \sum_{i=1}^p \theta_i q_i(x, u) \\ \quad = f(x) + q_0(x, u) + Q(x, u) \\ y = h(x), \quad y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.37)$$

avec $q_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq i \leq p$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions régulières, $h(x_0) = 0$, $q_0(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$; x est l'état du système, $u(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ le contrôle appelé entrée, θ est le paramètre du système qui est supposé être constant, et y est la sortie du système. On considère maintenant le système (1.37) avec $u = 0$ et $\theta = 0$; c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x), \end{cases}$$

et on suppose que la condition

$$\text{rang}\{d(L_f^j h(x) : 0 \leq j-1\} = n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

est satisfaite, ce qui implique l'observabilité locale du système.

On suppose que le système (1.37) peut être transformé ([MAR95]) via un changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ sous la forme suivante :

on pose

$$\zeta = T(x), \quad T(x_0) = 0,$$

le système (1.37) se transforme sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = A_c \zeta + \psi_0(y, u) + \sum_{i=1}^p \theta_i \psi_i(x, u) \\ \quad = A_c \zeta + \psi_0(y, u) + \Psi(x, u) \theta \\ y = C_c \zeta, \end{cases} \quad (1.38)$$

où

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_c = [1, 0, \dots, 0].$$

Dans la partie de cette thèse traitant des observateurs adaptatifs, nous utilisons des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\theta \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1.39)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^i$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ des matrices connues de dimensions appropriées, $\theta \in \mathbb{R}$ un paramètre réel constant, $\Phi(t) \in \mathbb{R}^n$ une matrice supposée continue et uniformément bornée. La classe de systèmes considérée (1.39) prend en compte les systèmes non linéaires affines en l'état de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t, u, y)x(t) + B(t, u, y)u(t) + \Phi(t, u, y)\theta + \varphi(t, u, y) \\ y(t) = C(t, u, y)x(t) + D(t, u, y) \end{cases} \quad (1.40)$$

où la dépendance de A , B , C , D , Ψ , et φ de t , u et y peut être non linéaire. Aussi de cette dépendance des entités connues u et y , on pourrait tout simplement voir une dépendance par rapport au temps. Un cas particulier de cette classe de systèmes avec A , C constants et y réel est considéré par Marino et al [MAR95]. On suppose que la paire (A, C) est observable et qu'il existe un changement de coordonnées avec injection de sortie, qui transforme le système (1.39) ou (1.40) en un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c(t)x(t) + B(t)u(t) + \Phi(t)\theta \\ y(t) = C_c x(t). \end{cases} \quad (1.41)$$

Cette forme appelée *forme adaptative* est ce que nous considérons dans la partie de cette thèse traitant des observateurs adaptatifs avec sorties discrètes.

Deuxième partie

Observateurs et écosystème
aquatique (Halieutique)

Chapitre 2

Observateur non-linéaire pour un système de pêche

2.1 Introduction

La gestion courante des stocks dans la pêche est un problème qui a suscité la plus grande attention actuellement. Le développement de politiques de gestion dans l'exploitation des ressources renouvelables a besoin d'avoir de bonnes informations (informations fiables) quant-à l'état réel des stocks disponibles. De nos jours, les modèles mathématiques ainsi que les simulations par le biais de l'automatique et de l'informatique sont utilisés pour décrire l'évolution des systèmes complexes. Un des problèmes importants dans la théorie du contrôle est de réconcilier les données disponibles par mesure avec les modèles mathématiques utilisés. Ce problème est connu sous le nom de problème d'observateur et est relatif à la reconstitution d'état « observateur »(souvent appelé capteur logiciel) pour les systèmes dynamiques. Dans ce chapitre nous montrons comment appliquer cette théorie afin de pallier le problème courant d'évaluation des stocks d'une population exploitée de poissons. En effet, il n'est souvent pas possible de mesurer toutes les variables d'état. Ainsi est-il nécessaire d'avoir un algorithme pour estimer les variables d'état non mesurées.

Considérons un système non linéaire donné :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= f(X(t), u(t)) & X(t_0) = X_0 \\ Y(t) &= h(X(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $Y \in \mathbb{R}^p$; X_0 l'état initial pour un temps initial t_0 , f une fonction continue et h une fonction suffisamment régulière. u est appelée *entrée* (input) et Y est appelée *sortie* (output).

Un observateur est un système auxiliaire dépendant des entrées et des sorties du système dont on veut estimer les états. Cette tâche est une estimation asymptotique de l'état réel. La théorie d'estimation d'état est un des thèmes essentiels aussi bien sur le plan théorique que pratique dans l'étude des systèmes dynamiques. Les observateurs non linéaires à temps continu ont fait l'objet d'études dans plusieurs travaux ([JPG92] ; [DEZ92] ; [CICA93], ...). Dans ce chapitre nous proposons la construction d'un observateur global pour le système décrivant le processus d'évolution d'une population de poissons ([TOUZ97], [AOU03]) en nous inspirant des méthodes utilisées dans ([JPG92], [DEZ92]).

On considère un système différentiel structuré à $(n + 1)$ classes ; la classe X_0 est constituée par les oeufs, les larves et les juvéniles, c'est la classe appelée classe des **pré-recrutées** (cette classe n'est jamais soumise à la pêche).

Les n autres classes X_i , $i = 1 \dots n$, sont constituées par des poissons matures c'est-à-dire susceptibles d'être soumis à la pêche, le recrutement commence à partir de la classe X_1 .

Ainsi, la dynamique du modèle est décrite par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}_0 &= -\alpha_0 X_0 + \sum_{i=1}^n f_i l_i X_i - \sum_{i=1}^n p_i X_i X_0 - p_0 X_0^2 \\ \dot{X}_1 &= \alpha X_0 - (\alpha_1 + q_1 E) X_1 \\ &\vdots \\ \dot{X}_n &= \alpha X_{n-1} - (\alpha_n + q_n E) X_n, \end{cases} \quad (2.2)$$

où :

- X_i est l'abondance de la classe i (en nombre)
- $\alpha_i = \alpha + m_i$; $i = 0, \dots, n$ (en temps⁻¹)
- m_i est le taux de mortalité naturelle (en temps⁻¹)
- α est le taux de passage (en temps⁻¹)
- p_0 est le taux de compétition interjuvenile (en temps⁻¹ × nombre⁻¹)
- p_i est le taux de prédation de la classe i sur la classe 0 (en temps⁻¹ × nombre⁻¹)
- f_i est le taux de fécondité de la classe i (sans dimension)
- l_i est le coefficient de productivité de la classe i (en temps⁻¹)
- q_i est le taux de capturabilité de la classe i (en unité d'effort⁻¹)
- E est l'effort de pêche. (en unité d'effort⁻¹)

Remarque 2.1.1

• *L'effort de pêche est un effort nominal, c'est-à-dire le point de vue du pêcheur sur l'exploitation. L'effort de pêche appliqué à un stock d'animaux aquatiques est une mesure de l'ensemble des moyens de capture mis en oeuvre par les pêcheurs sur ce stock pendant un intervalle de temps donné. L'effort est donc mesuré en longueur de*

lignes déployées, traits de chalut,... ; l'effort de pêche est considéré dans ce chapitre comme étant le contrôle.

• Aussi comme expliqué dans [GUL83], la mortalité de pêche produite (c'est-à-dire. la proportion de toutes les quantités enlevées) par une unité peut être déterminée comme le produit de :

- (i) La taille du secteur influencé par les attirails de pêche dans une unité d'effort ;
- (ii) la proportion des poissons dans ce secteur qui est maintenue par les attirails de pêche ;
- (iii) le ratio de la densité dans le secteur (zone) de pêche à la densité moyenne dans le secteur (zone) entier habité par le stock.

Par conséquent, l'effort de pêche est l'effort nominal, c'est en fait le point de vue du pêcheur sur les stocks. Ainsi, l'effort de pêche appliqué sur des stocks d'une population de poissons est l'ensemble des moyens de production employé par le pêcheur. L'effort de pêche peut être considéré comme la somme de toutes les unités de production, de la puissance de pêche sur chaque unité et du temps de pêche. Ces facteurs sont équivalents au produit des éléments (i) et (ii) ci-dessus.

2.1.1 Notations et hypothèses

Nous considérons dans toute la suite que l'effort de pêche E est une valeur constante et ensuite nous faisons les hypothèses suivantes [TOUZ97] :

$$(H_1) \alpha_0 < \sum_{i=1}^n f_i l_i \pi_i ;$$

$$(H_2) p_0 + p_1 + \dots + p_n \neq 0 ;$$

avec :

$$\pi_i = \frac{\alpha^i}{\prod_{j=1}^i (\alpha_j + q_j E)}, \text{ pour } i > 0 \text{ et } \pi_0 = 1.$$

D'un point de vue Biologique, la condition (H_1) traduit une condition de survie de l'espèce, le taux de ponte des autres doit être largement supérieur au taux de mortalité de la classe 0. La seconde condition (H_2) garantie la non linéarité du système. Par le souci de garantir la stabilité asymptotique du système, le domaine d'étude a été réduit à un domaine D défini comme suit :

$$D = \prod_{i=0}^n [a_i, b_i], \quad 0 < a_i < b_i$$

avec

$$\begin{aligned} b_i &= (1 + \nu_i)\pi_i\mu \\ \text{et } 0 &= \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_n < 1, \\ \mu &= \min_{f_i l_i p_i \neq 0} \left\{ \frac{f_i l_i}{p_i} \right\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Remarque 2.1.2 *Le domaine D est construit de sorte à contenir strictement un unique point d'équilibre X^* qui soit asymptotiquement stable sur le domaine D . Pour plus de détail confère [TOUZ97].*

Notons $Y(t)$ la capture totale de poissons :

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n q_i X_i(t) E \tag{2.4}$$

On suppose ici que toutes les classes (à l'exception de la classe 0) sont susceptibles d'être soumises à la pêche avec un taux de capturabilité $q_i \geq 0$, c'est-à-dire qu'on choisit les classes d'âge qu'on désire capturer.

En couplant (2.2) et (2.4) on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_0 = -\alpha X_0 + \sum_{i=1}^n f_i l_i X_i - \sum_{i=1}^n p_i X_i X_0 - p_0 X_0^2 \\ \dot{X}_1 = \alpha X_0 - (\alpha_1 + q_1 E) X_1 \\ \vdots \\ \dot{X}_n = \alpha X_{n-1} - (\alpha_n + q_n E) X_n \\ Y(t) = \sum_{i=1}^n q_i X_i(t) E. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Dans ce chapitre, notre objectif est de construire à partir de la capture totale (sortie) $Y(t)$, un état auxiliaire $\hat{X} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n)$ qui puisse à l'horizon estimer l'état réel $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{X}(t) - X(t)\| = 0$. Il s'agit en fait de trouver un système dynamique auxiliaire :

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = g(\hat{X}(t), E(t), Y(t)), \tag{2.6}$$

et dont l'état $\hat{X}(t)$ donne une assez « bonne » estimation asymptotique de l'état réel $X(t)$ du système (2.2), c'est-à-dire que les solutions des systèmes (2.2-2.6) satisfont $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{X}(t) - X(t)\| = 0$, pour tous les états initiaux $X(0)$ et $\hat{X}(0)$.

Pour ce faire, nous utiliserons des méthodes bien connues que sont l'observateur Grand Gain [JPG92] et l'observateur de Kalman pour la construction des états estimateurs.

2.2 Observabilité et Observateur

2.2.1 Observabilité du système de pêche

Pour la construction de l'observateur, nous utilisons la méthode de construction de l'observateur Grand Gain ([JPG92]) et la méthode de construction de l'observateur de type Kalman-like observer ([DEZ92]).

On considère la sortie $Y(t) = \sum_{i=1}^n q_i X_i(t) E$ et les fonctions Φ et $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telles que :

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} h(X) \\ L_f h(X) \\ \vdots \\ L_f^n h(X) \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n+1} \end{pmatrix}$$

et

$$f(X) = \begin{pmatrix} -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^n f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^n p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t) \\ \alpha X_0(t) - (\alpha_1 + q_1 E) X_1(t) \\ \vdots \\ \alpha X_{n-1}(t) - (\alpha_n + q_n E) X_n(t) \end{pmatrix}$$

où L_f désigne la dérivée de Lie le long des trajectoires du champ f du système dynamique et h la sortie du système c'est-à la capture pour ce système de pêche.

Si la fonction Φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\Phi(\mathbb{R}^{n+1})$, i.e si $\det\left(\frac{d\Phi}{dX}\right) \neq 0$; alors le système (2.2) est uniformément observable [JPG92], [CICA93]. En faisant un changement de coordonnées dans la nouvelle base $(\mathbb{R}^{n+1}, \Phi(\mathbb{R}^{n+1}))$, le système (2.5) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{Z} &= AZ + \psi(Z) \\ Y &= CZ, \end{cases} \quad (2.7)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1, 0, \dots, 0) \text{ et } \psi(Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_f^{n+1} h(\Phi^{-1}(Z)). \end{pmatrix}$$

Posons $\varphi(Z) = L_f^{n+1} h(\Phi^{-1}(Z))$.

La fonction φ est une fonction régulière (continue) sur l'intérieur du compact D ; ainsi elle est globalement lipschitzienne sur D . Cependant, elle peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par la fonction $\tilde{\varphi}$ telle que $\tilde{\varphi}(X) = \varphi(X)$.

Remarque 2.2.1 *La fonction f est lipschitzienne sur le domaine D , par contre elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour ce faire on la prolonge par continuité dans le but de la rendre globalement lipschitzienne.*

On note $\tilde{f}$ la fonction prolongée de f sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et π la projection métrique sur le domaine D .

On pose $\tilde{f} = f \circ \pi$; ainsi la fonction prolongée $\tilde{f}$ a le même coefficient de lipschitz que f . Pour tout $X \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a $\pi(X) = \bar{X}$ où $\bar{X} \in D$ tel que $\text{Dist}(X, D) = \|X - \bar{X}\|$. En d'autres termes $\bar{X}$ satisfait $\min_{Y \in D} \|Y - X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $Y \in D$.

Dans la suite de ce chapitre consacré à la construction d'observateur pour un système de pêche, nous allons considérer un système à trois classes et une sortie $Y(t) = q_2 EX_2(t)$, c'est-à-dire que la première classe des matures n'est pas soumise à la pêche.

2.2.2 Observateur pour un système de pêche à 3 classes dont la sortie est constituée de la dernière classe

Dans cette partie, nous considérons les systèmes de pêche (2.2) mais avec seulement trois classes i.e $n = 2$.

En effet, ce choix de $n = 2$ ne diminue en rien l'intérêt du modèle, puisque l'on peut toujours agréger des classes de façon à obtenir une classe de juvéniles, une classe de jeunes adultes et enfin une classe d'adultes matures.

Nous considérons ensuite une sortie $Y(t) = q_2 E X_2(t)$ qui constitue la capture i.e la quantité de poissons pêchée (quantité mesurable).
Considérons alors le système suivant à trois classes couplé de la sortie $Y(t)$ (ceci voudrait tout simplement signifier que seule la dernière classe est soumise à la pêche c'est-à-dire que $q_1 = 0$) :

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) &= -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t) \\ \dot{X}_1(t) &= \alpha X_0(t) - \alpha_1 X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) &= \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t) \\ Y(t) &= q_2 E X_2(t). \end{cases} \quad (2.8)$$

La population de poissons est ici constituée de trois classes : la classe X_0 constituée par les oeufs et les larves, la classe X_1 est constituée par les jeunes immatures et la classe X_2 constituée par des matures, c'est-à-dire la classe soumise à la pêche. Le but de ce travail est de construire un estimateur d'état (observateur) pour le système de pêche à trois classes et dont on dispose de la capture $Y(t) = q_2 E X_2(t)$. Pour l'observabilité du système (2.8), considérons :

$Y(t) = h(X(t)) = q_2 E X_2(t)$ et la fonction $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, telles que

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} h(X) \\ L_f h(X) \\ L_f^2 h(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 E X_2 \\ q_2 E \alpha X_1 - q_2 E (\alpha_1 + q_2 E) X_2 \\ \alpha^2 q_2 E X_0 + q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2 X_2 \\ -(\alpha \alpha_1 q_2 E + \alpha q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)) X_1 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}$$

et

$$f(X(t)) = \begin{pmatrix} -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t) \\ \alpha X_0(t) - \alpha_1 X_1(t) \\ \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t) \end{pmatrix}.$$

L_f désigne toujours la dérivée de Lie le long des trajectoire de f et h représente la fonction de sortie.

La fonction Φ telle que définie ci dessus est un diffeomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\Phi(\mathbb{R}^3)$; en effet :

$$\frac{d\Phi}{dX} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_2 E \\ 0 & \alpha q_2 E & -q_2 E(\alpha_2 + q_2 E) \\ \alpha^2 q_2 E & -\alpha \alpha_1 q_2 E & q_2 E(\alpha_2 + q_2 E)^2 \\ & -\alpha q_2 E(\alpha_2 + q_2 E) & \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{d\Phi}{dX} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 q_2 E + \alpha_1 \alpha_2}{\alpha^2 q_2 E} & \frac{q_2 E + \alpha_1 + \alpha_2}{\alpha^2 q_2 E} & \frac{1}{\alpha^2 q_2 E} \\ \frac{q_2 E + \alpha_2}{\alpha q_2 E} & \frac{1}{\alpha q_2 E} & 0 \\ \frac{1}{q_2 E} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Det} \left(\frac{d\Phi}{dX} \right) = -\alpha^3 q_2^3 E^3 \neq 0$$

Φ étant un diffeomorphisme alors le système (2.8) est uniformément observable ([JPG92], [DEZ92]).

En exprimant le système (2.8) dans de nouvelles coordonnées par un changement de base $Z = \Phi(X) = (h(X), L_f h(X), L_f^2(X))^T$, on a :

$$\begin{cases} \dot{Z} &= AZ + \psi(Z) \\ Y &= CZ, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\text{où : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = (1, 0, 0), \psi(Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_f^3 h(\Phi^{-1}(Z)) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(Z) &= L_f^3 h(\Phi^{-1}(Z)) \\ &= \left(-\alpha_0 \alpha q_2 E - \alpha^2 q_2 E \alpha_1 - \alpha^2 q_2 E(\alpha_2 + q_2 E) \right) X_0 \\ &\quad + \left(\alpha q_2 E f_1 l_1 + \alpha \alpha_1^2 q_2 E + \alpha \alpha_1 q_2 E(\alpha_2 + q_2 E) + \alpha q_2 E(\alpha_2 + q_2 E)^2 \right) X_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\alpha q_2 E f_2 l_2 - \alpha_1 q_2 E (\alpha_2 + q_2 E) \right) X_2 - \alpha q_2 p_0 E X_0^2 - \alpha q_2 p_1 E X_0 X_1 \\
 & - \alpha q_2 p_2 E X_0 X_2 \\
 & = \varphi(X).
 \end{aligned}$$

La fonction φ est une fonction régulière sur le domaine compact D décrit au paragraphe (2.1.1) ; ainsi, la fonction φ est globalement lipschitzienne sur le domaine D , par conséquent elle peut être prolongée en une fonction lipschitzienne $\tilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}^3$ tout entier telle que $\tilde{\varphi}(X) = (0, 0, \varphi(X))^T$, pour tout $X \in D$. De façon analogue, on prolonge ψ en une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}^3$ $\tilde{\psi}$ telle que

$$\tilde{\varphi}(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi(X) \end{pmatrix} = \tilde{\psi}(Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_f^3 h(\Phi^{-1}(Z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\varphi}_1(Z) \end{pmatrix}.$$

Ainsi le système (2.9) peut être considéré dans $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Observateur de type Grand Gain

La terminologie « observateur type grand gain » signifie tout simplement observateur grand gain de « type Luenberger », où le terme correctif (dépendant de θ fixé en avance) $K_\theta = S(\theta)^{-1}C^T$ est constant.

Proposition 2.2.1 ([JPG92], [DEZ92])

Sous les conditions suivantes :

- i) Φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\Phi(\mathbb{R}^3)$.
 - ii) φ peut être prolongée du domaine D à $\mathbb{R}^3$ en une fonction C^∞ $\tilde{\varphi}$, globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^3$ tout entier,
- le système :

$$\dot{Z} = AZ + \psi(Z) + S^{-1}(\theta)(Y - CZ). \quad (2.10)$$

est un observateur Grand gain pour le système (2.8), pour θ assez grand, où $S(\theta)$ est la solution de l'équation :

$$0 = -\theta S(\theta) - A^T S(\theta) - S(\theta)A^T + C^T C.$$

en d'autres termes,

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \theta^{-1} & -\theta^{-2} & \theta^{-3} \\ -\theta^{-2} & 2\theta^{-3} & -3\theta^{-4} \\ \theta^{-3} & -3\theta^{-4} & 6\theta^{-5} \end{pmatrix}.$$

A est une matrice anti-shift de degré 3 et $C = (1, 0, 0)$.

En exprimant (2.10) dans l'ancienne base, on a l'observateur suivant exprimé de manière explicite par :

$$\dot{\hat{X}} = \tilde{f}(\hat{X}) + \left[\frac{d\Phi}{dX} \right]_{X=\hat{X}}^{-1} S(\theta)^{-1} C^T (Y - h(\hat{X}))$$

($\tilde{f}$ étant le prolongement de f de D à $\mathbb{R}^3$) tel que sa restriction dans le domaine D donne :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_0 = -\alpha_0 \hat{X}_0 + \sum_{i=1}^2 f_i l_i \hat{X}_i - \sum_{i=1}^2 p_i \hat{X}_i \hat{X}_0 - p_0 \hat{X}_0^2 + \\ \quad \frac{3\theta\alpha_1(q_2 E + \alpha_2) + 3\theta^2(q_2 E + \alpha_1 + \alpha_2) + \theta^3}{\alpha^2} (X_2 - \hat{X}_2) \\ \dot{\hat{X}}_1 = \alpha \hat{X}_0 - \alpha_1 \hat{X}_1 + \frac{3\theta(q_2 E + \alpha_2) + 3\theta^2}{\alpha} (X_2 - \hat{X}_2) \\ \dot{\hat{X}}_2 = \alpha \hat{X}_1 - (\alpha_2 + q_2 E) \hat{X}_2 + 3\theta (X_2 - \hat{X}_2). \end{cases} \quad (2.11)$$

Ce système auxiliaire (2.11) est un estimateur (observateur) du système (2.8). Cet observateur est particulièrement simple car il est en fait une copie du système à estimer plus un terme correctif qui permet de réduire l'écart entre les deux systèmes et de permettre la convergence de l'observateur.

Un point important à noter est la structure du gain $S(\theta)^{-1} C^T$:

$$K_\theta = S(\theta)^{-1} C^T = (\theta k_1, \theta^2 k_2, \dots, \theta^n k_n)^T,$$

avec $k_i = C_n^i$ (nombre de combinaisons), $i = 1, 2, \dots, n$.

On constate que ce vecteur de gain augmente avec θ , d'où l'appellation d'observateur à Grand Gain. Il est à signaler que l'utilisation d'un observateur Grand gain peut conduire à une grande sensibilité au bruit d'observation, car ceci amplifie l'erreur d'observation ; ainsi, on fait un compromis classique lors du choix de θ entre performance et robustesse de l'observateur. Un θ suffisamment grand assure la convergence sûre et rapide certes, mais amplifie les erreurs d'observation.

Observateur à la Kalman

Contrairement à l'observateur Grand Gain où le vecteur de gain $S(\theta)^{-1} C^T$ peut être pré-calculé, le gain pour l'observateur de type Kalman-like doit être mis à jour de manière dynamique par l'intermédiaire de la solution de l'équation différentielle de Riccati $\dot{S}(\theta) = -\theta S(\theta) - A^T S(\theta) - S(\theta) A^T + C^T C$.

Considérons la fonction ψ définie dans le système (2.9) ; soit A^* la matrice définie par :

$$A^*(\hat{X}) = A + \left[\frac{d\psi}{dZ} \right]_{Z=\Phi(\hat{X})}$$

En revenant aux coordonnées de la variable d'état X , on a :

$$\varphi(X) = \varphi_1(Z) = \varphi_1(\Phi(X))$$

ainsi

$$\frac{d\varphi}{dX} = \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dX} \right) \left(\frac{d\Phi}{dX} \right)^{-1}$$

et par suite on a :

$$A^*(X) = A + \left(\frac{d\tilde{\varphi}}{dX} \right) \left(\frac{d\Phi}{dX} \right)^{-1}.$$

$$\text{avec } \frac{d\tilde{\varphi}}{dX} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \text{ où}$$

$$\beta_{31} = -\alpha_0\alpha q_2 E - \alpha^2\alpha_1 q_2 E - \alpha^2 q_2 E(\alpha_2 + q_2 E) - 2\alpha q_2 p_0 E X_0 - \alpha q_2 p_1 E X_1 - \alpha q_2 p_2 E X_2$$

$$\beta_{32} = \alpha q_2 E f_1 l_1 + \alpha q_2 E \alpha_1^2 + \alpha \alpha_1 q_2 E(\alpha_2 + q_2 E) + \alpha q_2 E(\alpha_2 + q_2 E)^2 - \alpha q_2 p_1 E X_0$$

$$\beta_{33} = \alpha q_2 E f_2 l_2 - \alpha_1 q_2 E(\alpha_2 + q_2 E) - \alpha q_2 p_2 E X_0.$$

finalemt A^* peut être exprimée de manière explicite par :

$$A^*(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix},$$

où :

$$\gamma_{31} = \beta_{31} \left(\frac{\alpha_1 q_2 E + \alpha_1 \alpha_2}{\alpha^2 q_2 E} \right) + \beta_{31} \left(\frac{\alpha_2 + q_2 E}{\alpha q_2 E} \right) + \frac{\beta_{33}}{q_2 E}$$

$$\gamma_{32} = \beta_{31} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + q_2 E}{\alpha^2 q_2 E} \right) + \frac{\beta_{32}}{\alpha q_2 E}$$

$$\gamma_{33} = \frac{\beta_{31}}{\alpha^2 q_2 E}.$$

Proposition 2.2.2 ([DEZ92])

Supposons :

i) la fonction Φ est un diffeomorphisme de $\overset{\circ}{D}$ dans $\Phi(\overset{\circ}{D})$. ($\overset{\circ}{D}$ est l'intérieur de D).

ii) la fonction φ peut être prolongée sur $\mathbb{R}^3$ par une fonction C^∞ et globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^3$.

Alors pour θ assez grand, le système différentiel suivant est un observateur exponentiel pour le système (2.8).

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} &= \tilde{f}(\hat{X}) - \frac{1}{r} \left[\frac{d\Phi}{dX} \right]_{X=\hat{X}}^{-1} \times S^{-1} C^T (h(\hat{X}) - Y) \\ \dot{S} &= -SQ_\theta S - A^{*T}(\hat{X})S - SA^*(\hat{X}) + \frac{1}{r} C^T C. \end{cases} \quad (2.12)$$

avec $r > 0$, Q_θ est définie selon Q une matrice symétrique définie positive, par la relation suivante :

$$Q_\theta = \Delta_\theta Q \Delta_\theta \quad (\Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \theta^3)).$$

Simulations et commentaires

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats de simulations avec des données non réelles mais assez intéressantes généralement utilisées dans la littérature ([TOUZ97], [AOU03]). Leurs valeurs dépendent des unités retenues pour les variables du modèle.

$$\alpha_0 = 1.3; \quad \alpha_1 = 0.9; \quad \alpha_2 = 0.85;$$

$$p_0 = 0.2; \quad p_1 = 0.1; \quad p_2 = 0.1;$$

$$q_1 = 0; \quad q_2 = 0.15;$$

$$f_1 = 0.5; \quad f_2 = 0.5; \quad l_1 = 5; \quad l_2 = 10;$$

$$E = 1; \quad \alpha = 0.8$$

Utilisant ces paramètres, on calcule le coin supérieur $B(b_0, b_1, b_2)$ du domaine compact D en utilisant les relations de la formule (2.3) ; ainsi on a $B = (25; 22, 444; 18, 1333)$ c'est-à-dire $0 < X_i \leq b_i$.

Le point d'équilibre correspondant est alors $X^* = (12.438, 11.056, 8.845)$.

Pour l'observateur de type Grain Gain (gain fixé), nous prenons :

$\theta = 30$, $X(0) = [21; 20; 15]$ et $\hat{X}(0) = [35; 12; 8]$ pour les conditions initiales de l'état X et de l'état estimé $\hat{X}$.

Pour l'observateur grand Gain de type kalman-like, nous prenons :

$\theta = 5$, $X(0) = [25; 20; 15]$ et $\hat{X}(0) = [30; 14; 10]$ pour les conditions initiales de l'état X et de l'état estimé $\hat{X}$.

La matrice symétrique définie positive Q a été choisie comme $Q = I$, et $r = 0.2$, la matrice S est initialisée à $S_0 = 10^{-10}I$, avec $I = \text{diag}(1, 1, 1)$.

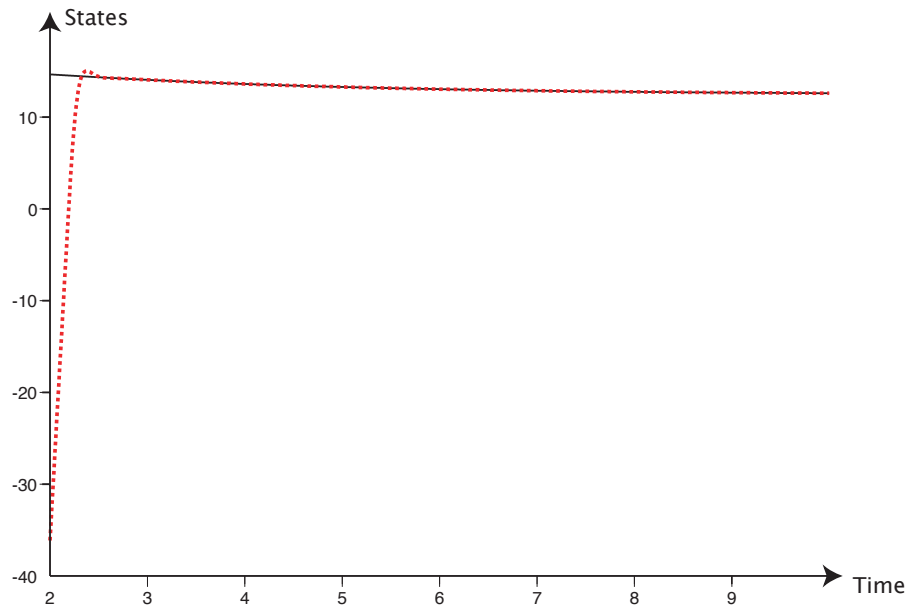


FIG. 2.1 – **Stade 0 : cas où φ est prolongée.** $-X_0$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_0$ (ligne en pointillé).

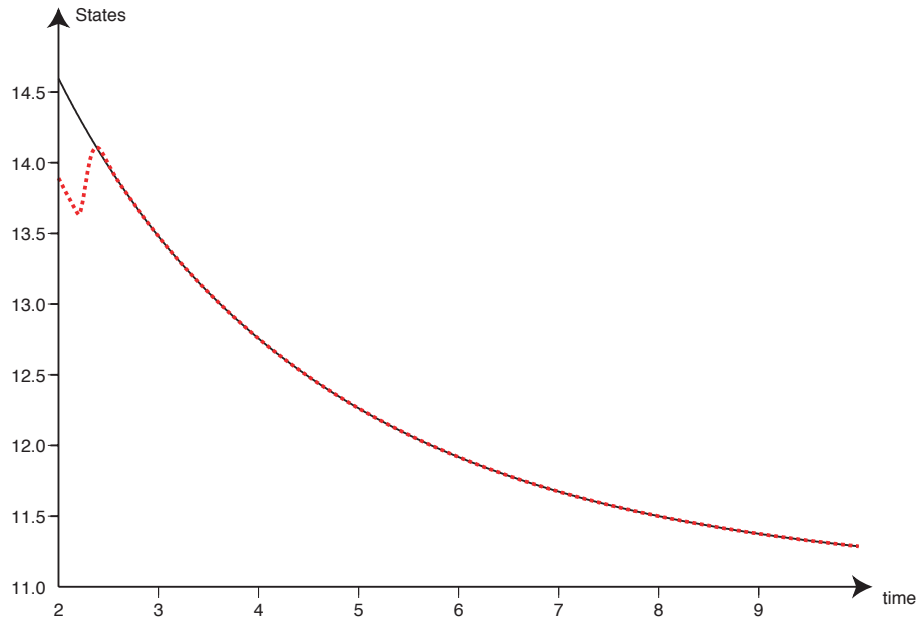


FIG. 2.2 – **Stade 1 : cas où φ est prolongée.** $-X_1$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_1$ (ligne en pointillé).

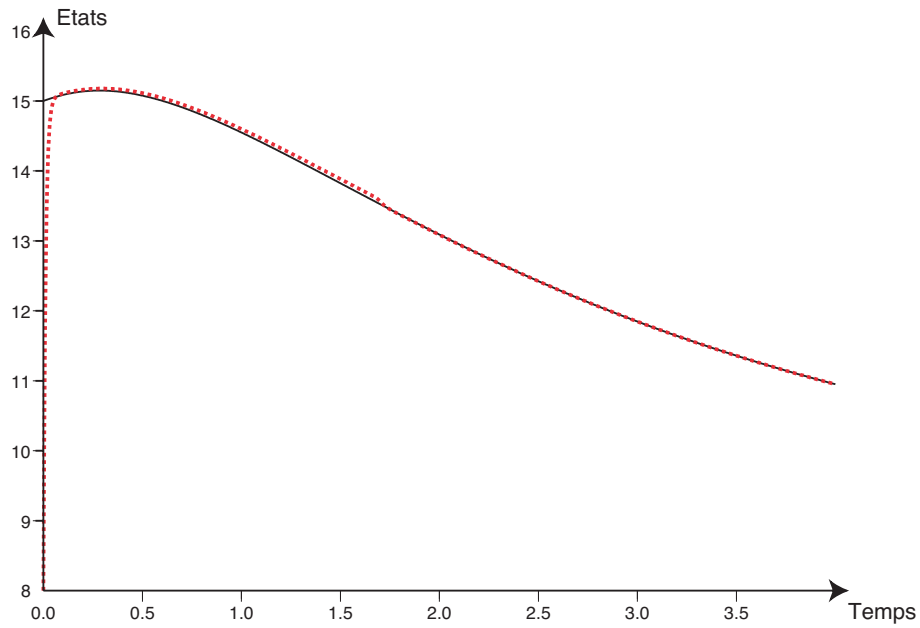


FIG. 2.3 – **Stade 2 : cas où φ est prolongée.** $-X_2$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_2$ (ligne en pointillé).

En utilisant les mêmes paramètres que précédemment, sans le prolongement de la fonction φ à $\mathbb{R}^3$, l'estimateur d'état $\hat{X}(t)$ généré par l'observateur explose au bout de quelques temps. Cette situation apparaît dès le début de l'intégration du système observateur comme on peut le voir dans les figures 2.4, 2.5, et 2.6.

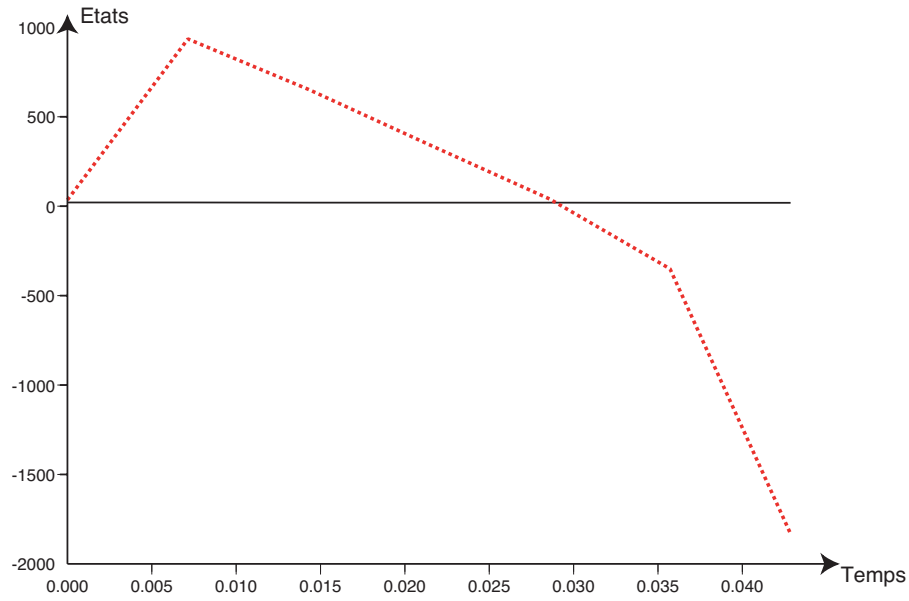


FIG. 2.4 – **Stade 0 : cas où φ est non prolongée.** $-X_0$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_0$ (ligne en pointillé)

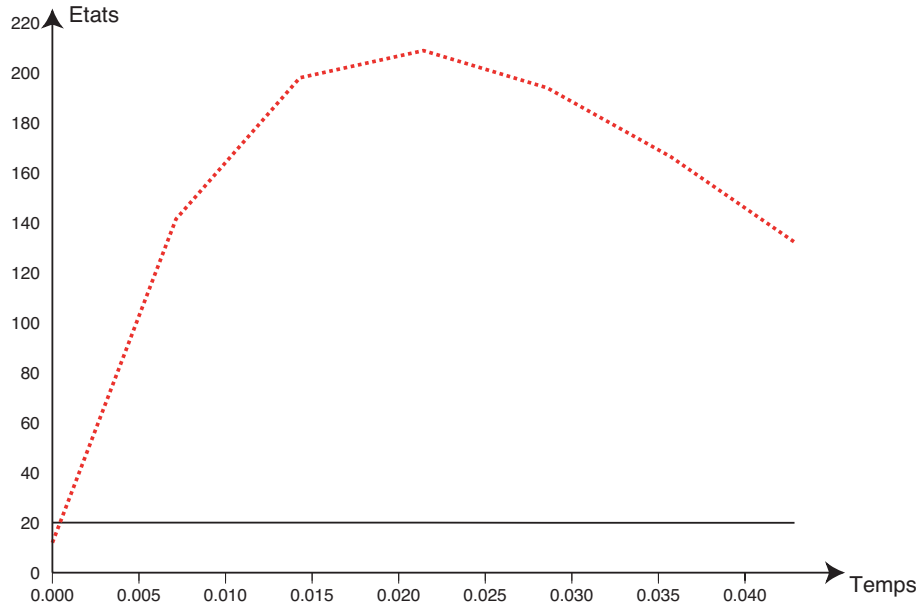


FIG. 2.5 – **Stade 1 : cas où φ est non prolongée.** $-X_1$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_1$ (ligne en pointillé)

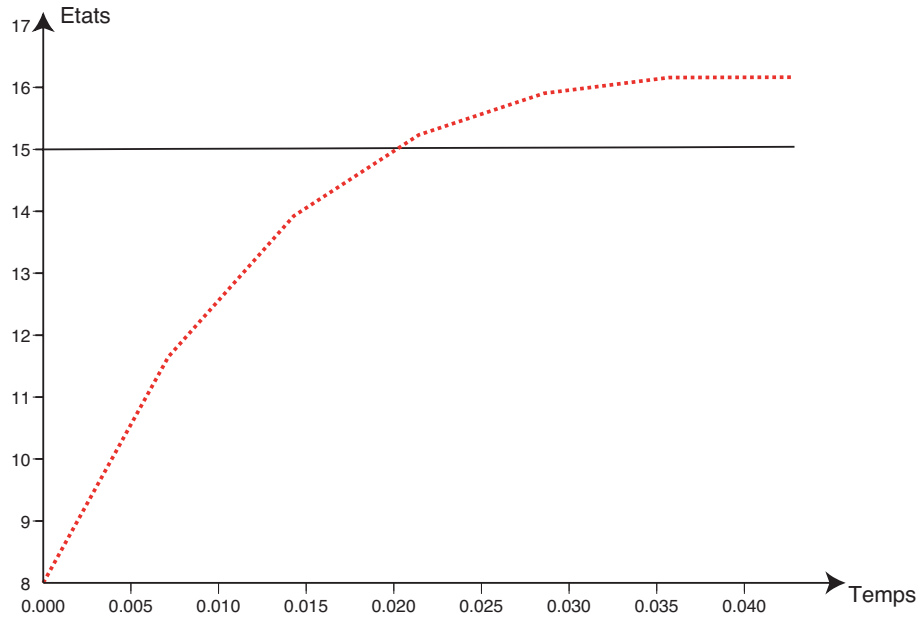


FIG. 2.6 – **Stade 2 : cas où φ est non prolongée.** $-X_2$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_2$ (ligne en pointillé)

Pour les courbes correspondantes à la construction de l'observateur grand gain à la Kalman (courbes en dessous), l'observateur explose de l'observateur dès le début de l'intégration si la fonction f n'est pas prolongée (voir figures 2.10, 2.11, 2.12). Par contre, lorsque les fonctions sont prolongées, on obtient une meilleure estimation de l'état par rapport à l'observateur de type grand gain (gain fixé). L'observateur grand gain de type Kalman-like est beaucoup plus précis ; cela est dû au fait que le vecteur gain n'est pas fixé à l'avance mais calculé en fonction des informations au cours du temps comme on peut le voir dans la formule (2.12).

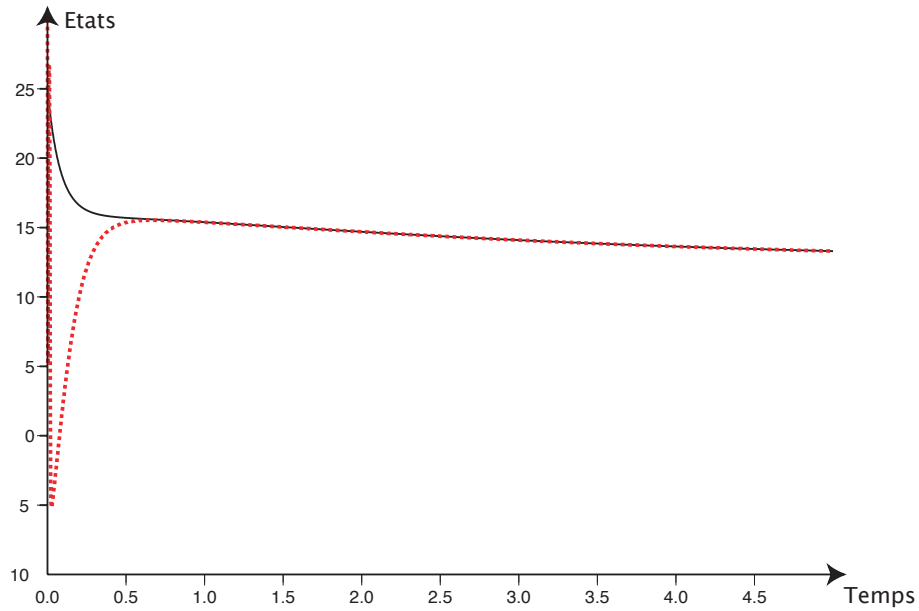


FIG. 2.7 – **Stade 0 : cas où φ est prolongée.**— X_0 (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_0$ (ligne en pointillé).

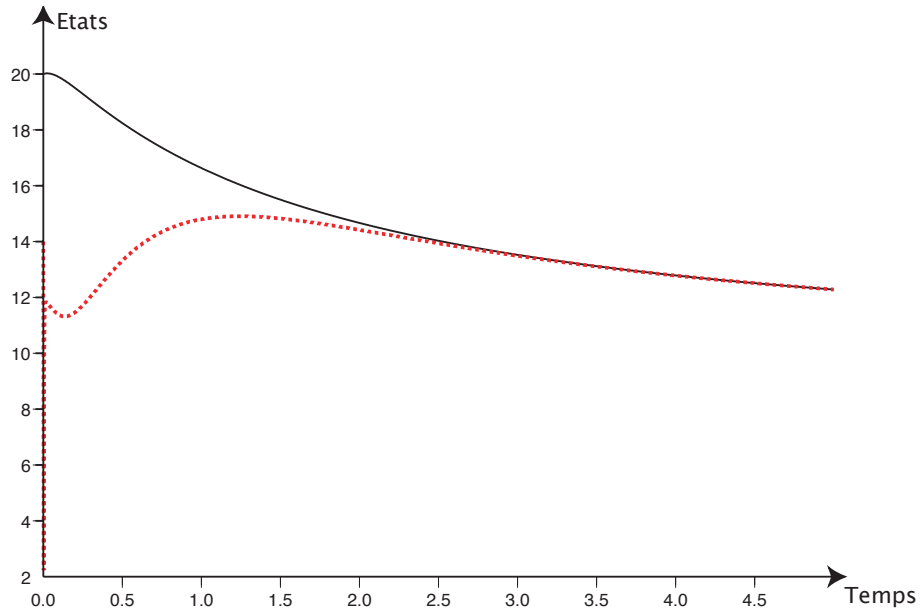


FIG. 2.8 – **Stade 1 : cas où φ est prolongée.** $-X_1$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_1$ (ligne en pointillé).

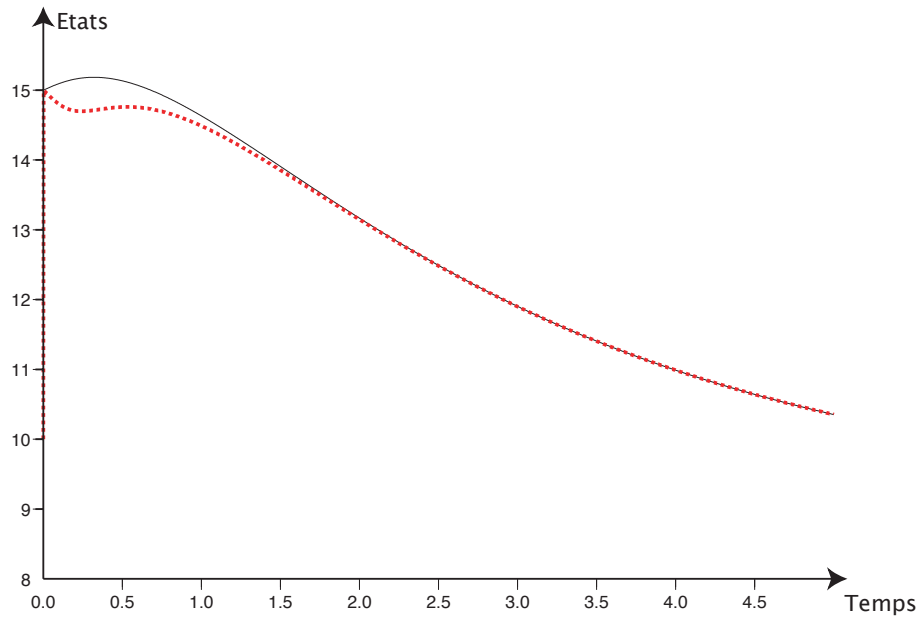


FIG. 2.9 – **Stade 2 : cas où φ est non prolongée.** $-X_2$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_2$ (ligne en pointillé).

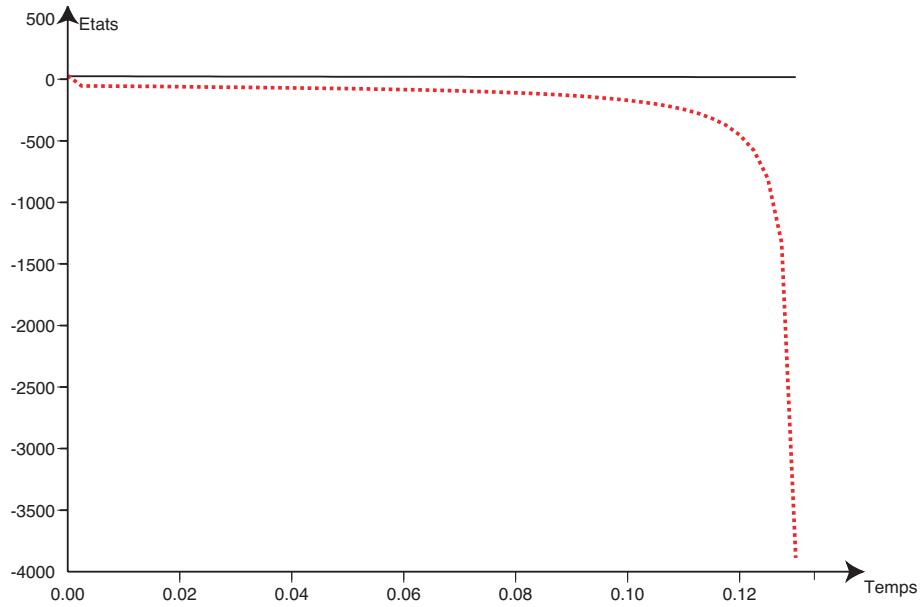


FIG. 2.10 – **Stade 0** : cas où φ est non prolongée. $-X_0$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_0$ (ligne en pointillé) quand φ n'est pas prolongée

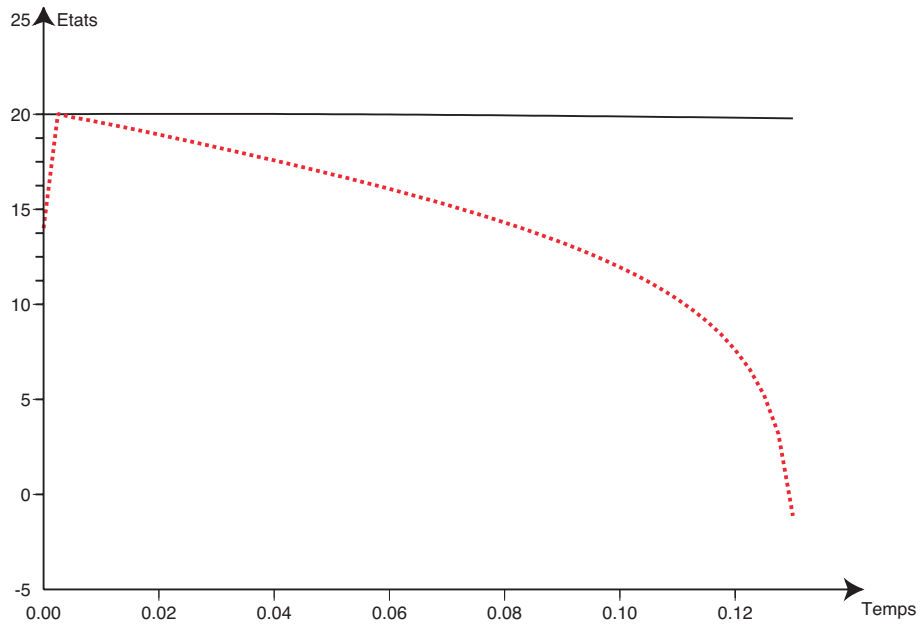


FIG. 2.11 – **Stade 1** : cas où φ est non prolongée. $-X_1$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_1$ (ligne en pointillé) quand φ n'est pas prolongée

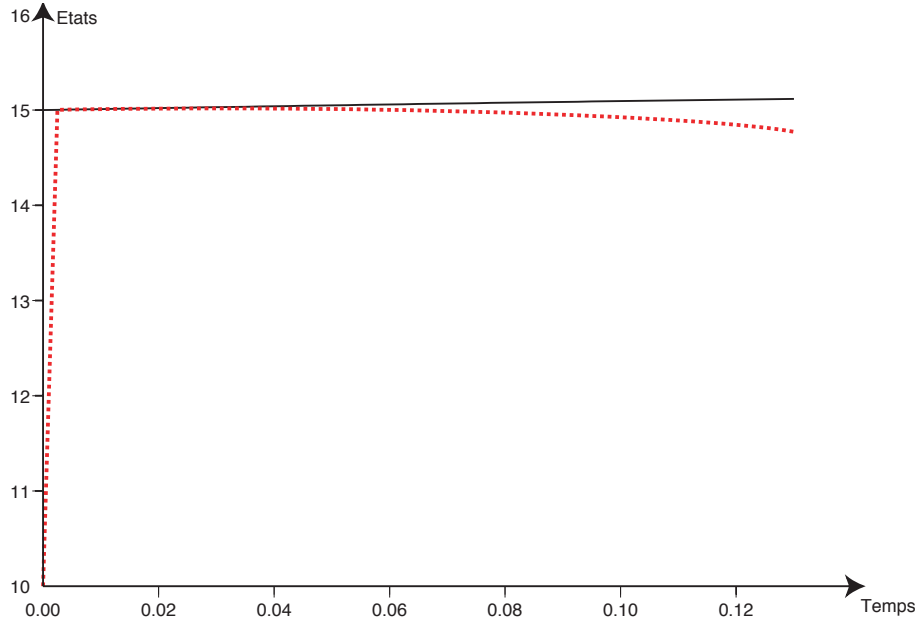


FIG. 2.12 – **Stade 2 : cas où φ est non prolongée.** – X_2 (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_2$ (ligne en pointillé) quand φ n'est pas prolongée

2.2.3 Observateur pour un système de pêche avec rejet

On considère ici le système (2.2) avec 3 stades ; on considère que les deuxièmes et troisièmes stades sont soumis à la pêche, mais seul le troisième stade est accessible à la mesure. Contrairement au paragraphe (2.2.2), le second stade est aussi soumis à la pêche, mais on n'est pas en mesure de connaître cette capture par mesure, c'est-à-dire que $q_1 \neq 0$. cette situation s'explique par le fait que les pêcheurs ne déclarent que la prise du dernier stade (phénomène de rejet des petits poissons après la pêche). La sortie est alors donnée par $Y(t) = q_2 E X_2(t)$.

Ainsi, on a le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) &= -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t) \\ \dot{X}_1(t) &= \alpha X_0(t) - (\alpha_1 + q_1 E) X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) &= \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t) \\ Y(t) &= q_2 E X_2(t). \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2. OBSERVABILITÉ ET OBSERVATEUR

Dans ce système, toutes les classes matures (X_1 et X_2) sont soumises à la pêche. Nous utilisons les mêmes techniques que dans le chapitre précédent pour construire un système auxiliaire qui servira d'estimation (observateur) pour le système (2.13)

Soit $h(X) = Y(t) = q_2 E X_2(t)$, la quantité de poissons de la classe 3 capturée et dont on a les mesures. Pour la construction de l'observateur lié à ce système, nous avons besoin de montrer que le système (2.13) est observable.

Considérons la fonction $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, telles que

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} h(X) \\ L_f h(X) \\ L_f^2 h(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 E X_2 \\ q_2 E \alpha X_1 - q_2 E (\alpha_1 + q_2 E) X_2 \\ \alpha^2 q_2 E X_0 + q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2 X_2 \\ -(\alpha q_2 E (\alpha_1 + q_1 E) + \alpha q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)) X_1 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}$$

et

$$f(X(t)) = \begin{pmatrix} -\alpha_0 X_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i X_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i X_i(t) X_0(t) - p_0 X_0^2(t) \\ \alpha X_0(t) - (\alpha_1 + q_1 E) X_1(t) \\ \alpha X_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) X_2(t) \end{pmatrix}.$$

L_f désigne toujours la dérivée de Lie le long des trajectoires de f et h représente la fonction de sortie.

La fonction Φ ainsi définie ci-dessus est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\Phi(\mathbb{R}^3)$.

En effet, $\text{Det} \left(\frac{d\Phi}{dX} \right) = \alpha^3 q_2^3 E^3$, vu que les paramètres α , q_2 et E sont non nuls alors le jacobien de Φ est non nul. Ainsi, le système (2.13) est uniformément observable.

Se référant à la proposition (2.2.1),

$$\dot{\hat{X}} = \tilde{f}(\hat{X}) + \left[\frac{d\Phi}{dX} \right]_{X=\hat{X}}^{-1} S(\theta)^{-1} C^T (Y - h(\hat{X}))$$

est un observateur exponentiel pour le système (2.13), $\tilde{f}$ étant le prolongement de la fonction f de D à $\mathbb{R}^3$.

De façon explicite, cet observateur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_0 = -\alpha_0 \hat{X}_0 + \sum_{i=1}^2 f_i l_i \hat{X}_i - \sum_{i=1}^2 p_i \hat{X}_i \hat{X}_0 - p_0 \hat{X}_0^2 + \\ \quad \frac{3\theta(\alpha_1 + q_1 E)(q_2 E + \alpha_2) + 3\theta^2(\alpha_1 + \alpha_2 + q_1 E + q_2 E) + \theta^3}{\alpha^2} (X_2 - \hat{X}_2) \\ \dot{\hat{X}}_1 = \alpha \hat{X}_0 - (\alpha_1 + q_1 E) \hat{X}_1 + \frac{3\theta(q_2 E + \alpha_2) + 3\theta^2}{\alpha} (X_2 - \hat{X}_2) \\ \dot{\hat{X}}_2 = \alpha \hat{X}_1 - (\alpha_2 + q_2 E) \hat{X}_2 + 3\theta(X_2 - \hat{X}_2). \end{cases} \quad (2.14)$$

Simulation et commentaires

Pour les simulations, nous prenons les paramètres suivants afin de corroborer la convergence de l'observateur lorsque la fonction f est prolongée, et la non convergence de l'observateur lorsque la fonction f n'est pas prolongée.

$$\alpha_0 = 1.3; \quad \alpha_1 = 0.9; \quad \alpha_2 = 0.85;$$

$$p_0 = 0.2; \quad p_1 = 0.1; \quad p_2 = 0.1;$$

$$q_1 = 0.1; \quad q_2 = 0.15;$$

$$f_1 = 0.5; \quad f_2 = 0.5; \quad l_1 = 5; \quad l_2 = 10;$$

$$E = 1; \quad \alpha = 0.8.$$

Utilisant ces paramètres, on calcule le coin supérieur $B(b_0, b_1, b_2)$ du domaine compact D en utilisant les relations dans la formule (5.4). Ainsi, on a $B = (25; 20.2; 16.32)$ c'est-à-dire $0 < X_i \leq b_i$.

Le point d'équilibre correspondant est alors $X^* = (11.337, 9.0697, 7.250)$.

Pour cet observateur de type Grain Gain (gain fixé), nous prenons :

$\theta = 15$, $X(0) = [21; 20; 15]$ et $\hat{X}(0) = [35; 40; 10]$ pour les conditions initiales de l'état X et de l'état estimé $\hat{X}$.

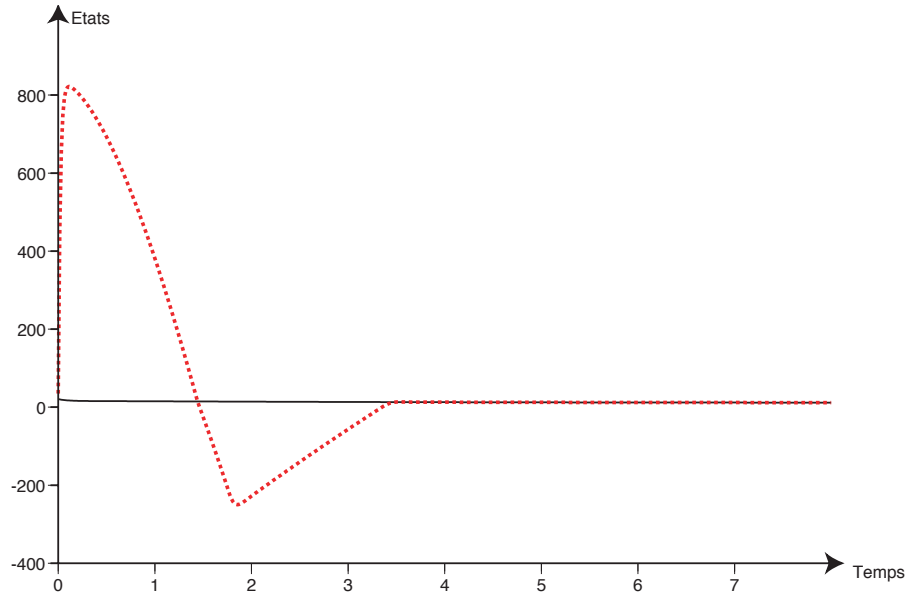


FIG. 2.13 – **Stade 0** : cas où φ est prolongée. $-X_0$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_0$ (ligne en pointillé).

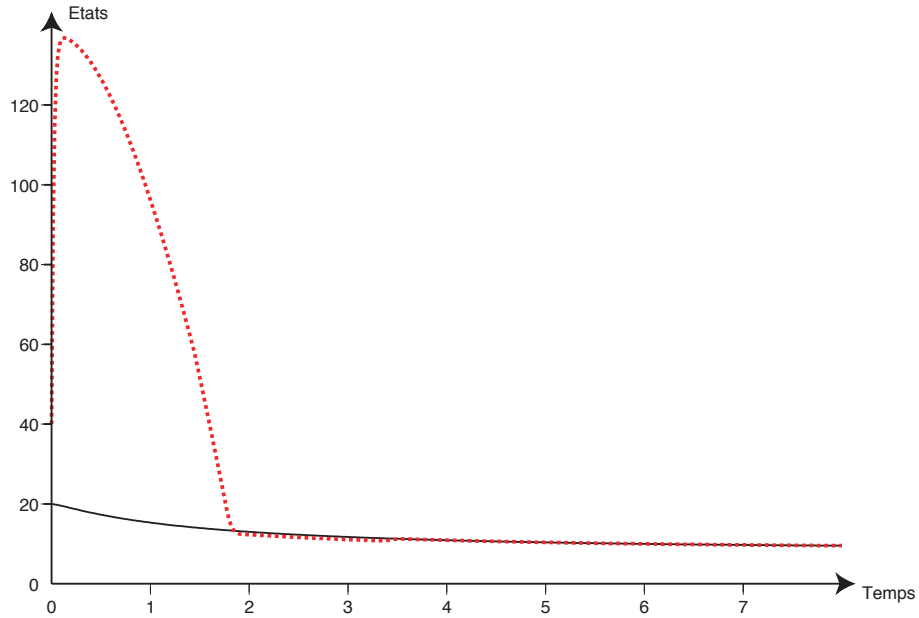


FIG. 2.14 – **Stade 1** : cas où φ est prolongée. $-X_1$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_1$ (ligne en pointillé).

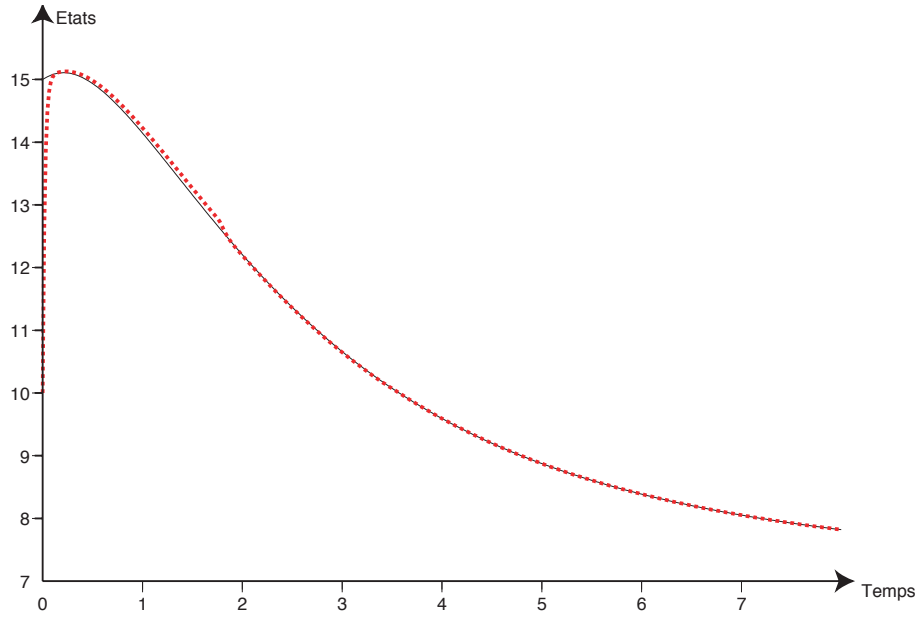


FIG. 2.15 – **Stade 2 : cas où φ est non prolongée.** $-X_2$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_2$ (ligne en pointillé).

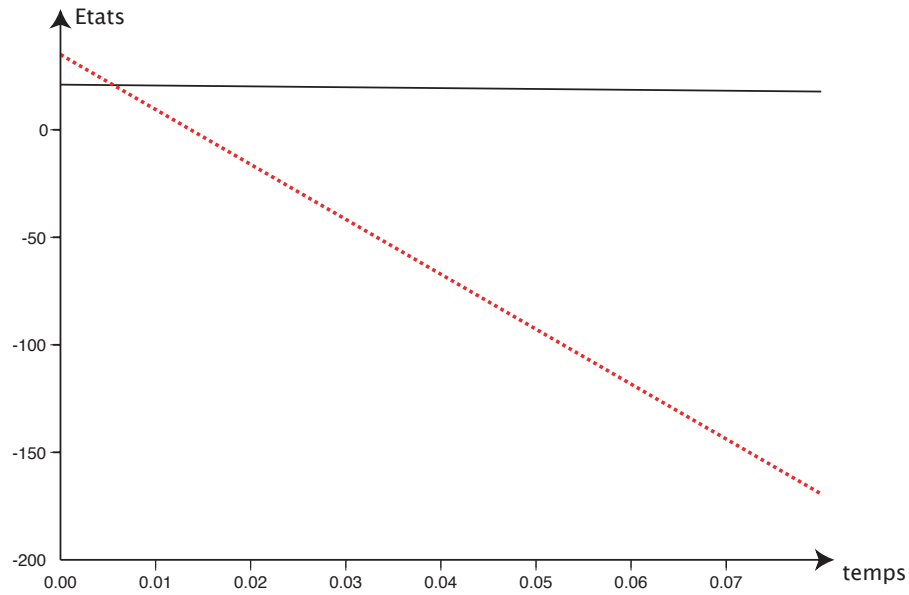


FIG. 2.16 – **Stade 0 : cas où φ est non prolongée.** $-X_0$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_0$ (ligne en pointillé).

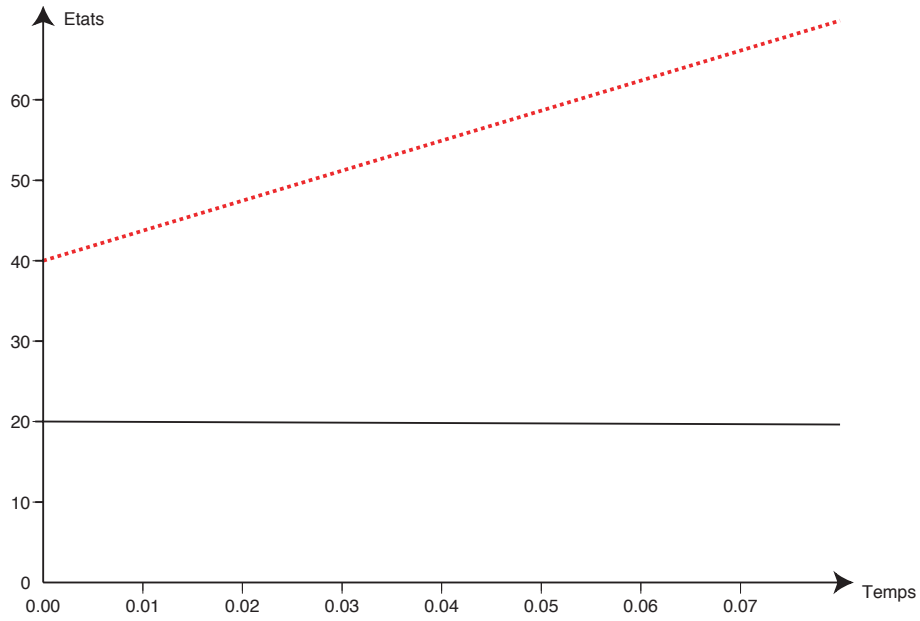


FIG. 2.17 – **Stade 1** : cas où φ est non prolongée. $-X_1$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_1$ (ligne en pointillé).

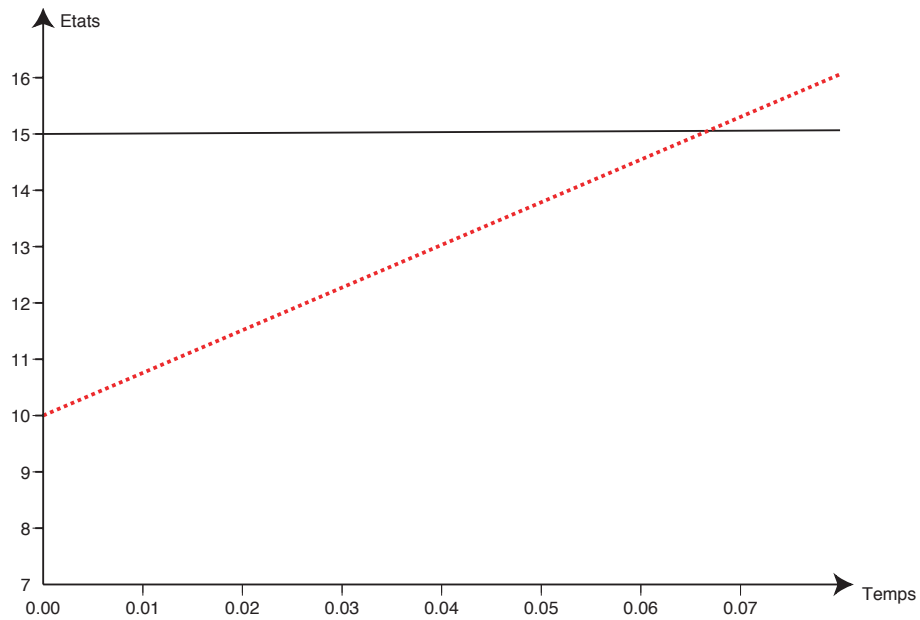


FIG. 2.18 – **Stade 2** : cas où φ est non prolongée. $-X_2$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_2$ (ligne en pointillé).

2.2.4 Conclusion

Il n'est pas courant de voir l'utilisation de l'Automatique dans les Sciences de l'environnement comme l'Halieutique; mais vu le développement en terme de modélisation mathématique autour de cette science, il est paru nécessaire d'associer ces deux théories afin d'améliorer la contribution de ces modèles dans la gestion des ressources halieutiques afin de permettre une bonne estimation des stocks.

Ainsi, dans ce chapitre, nous avons construit un observateur de type Grand Gain et de type Kalman-like pour un système modélisant une pêcherie. Nous avons considéré dans un premier temps un système à trois stades dont la partie accessible à la pêche et à la mesure est constituée par la classe des matures (ici il s'agit de la dernière classe X_2). A partir de la capture $y(t) = q_2 E X_2(t)$, on arrive à estimer toutes les classes qui constituent l'état du stock de poissons. Dans un second temps, nous avons imaginé un système à trois stades dont les deux derniers stades sont accessibles à une pêcherie donnée; seulement on estime que pour cause de rejets, seule la troisième classe est accessible à la mesure.

Il faut dire qu'à notre connaissance, nous n'avons pas rencontré dans la littérature des observateurs construits pour des modèles de pêche; par conséquent les méthodes du chapitre 2 représentent une des premières tentatives dans cette science Halieutique ([GUI08a]).

Au delà de la construction d'observateurs, nous avons utilisé deux méthodes dans la partie 3.2.1, afin de comparer la convergence de l'état estimé par rapport à ce système de pêche, il ressort d'après les courbes ci dessus que la méthode de type Kalman-like est beaucoup plus intéressante, cette situation est normale, car le vecteur gain est calculé et actualisé à chaque instant t au cours de l'intégration du système.

Par ailleurs, en considérant que les deux dernières classes sont soumises à la pêche, mais que seule la capture de la seconde classe est accessible à la mesure, on arrive à estimer l'état du système par la construction d'un observateur grand Gain.

Chapitre 3

Observateur Grand Gain et estimation de stocks en pêche

Ce chapitre, comme le précédent traite des problèmes d'estimation de stocks en halieutique. La première partie est une extension de ce qui a été fait dans le chapitre précédent c'est-à-dire la construction d'un observateur pour un modèle de pêche structuré en stade (trois stades) et dont la sortie est la capture totale $y(t) = q_1 E x_1(t) + q_2 E x_2(t)$. La seconde partie traite de la construction d'un observateur pour un modèle de pêche global, il s'agit ici d'une population de poissons répartie entre deux zones d'habitat dont l'une des zones est interdite à la pêche (zone protégée).

3.1 Introduction

L'estimation des stocks en pêche est l'un des problèmes les plus importants. Plusieurs recherches ont été menées en vue de résoudre ce problème. On pourrait par exemple citer le travaux de J. A. Gulland ([GUL83]).

Pour développer des politiques dans le cadre de la gestion des ressources renouvelables, il est nécessaire de prendre en compte l'état des stocks de ces ressources. Ceci impliquerait alors une bonne estimation de ces stocks. Des modèles Mathématiques sont de plus en plus utilisés pour décrire l'évolution de ces ressources renouvelables.

Nous considérons deux modèles Mathématiques de pêche ; le premier modèle est le modèle traité en partie dans le chapitre précédent, le second modèle est un modèle dit global. Ce dernier modèle décrit l'évolution d'une population de poissons migrant entre deux zones dont l'une est accessible à la pêche et l'autre interdite à la pêche ([DUB03]). Tous les deux modèles sont gouvernés par un système différentiel de la forme

$$\dot{x} = f(x, E) \tag{3.1}$$

où E désigne l'effort de pêche (cet effort de pêche peut être vu comme un terme de contrôle ou une entrée) et $x(t)$ est l'état du système au temps t . La variable d'état $x(t)$ représente la densité de la population de poissons ou le nombre d'individus par stade. Pour tous les deux modèles, l'état $x(t)$ n'est pas accessible à la mesure. En pratique, la seule information disponible à chaque instant t est la valeur de la capture; c'est-à-dire que l'on mesure la capture totale. Cette capture peut être considérée comme la sortie du système (3.1). En général, la sortie est une fonction de la variable d'état et de l'entrée, $y(t) = h(x, E)$.

Considérons que le système (3.1) est un « bon » modèle de la population que l'on voudrait étudier, s'il est possible d'avoir l'état du stock $x(t_0)$ en un temps t_0 donné, alors il est possible de calculer $x(t)$ pour tout $t \geq t_0$ en intégrant le système différentiel avec pour condition initiale $x(t_0)$. Malheureusement, il n'est pas possible de mesurer l'état du système en un temps donné et il n'est pas non plus possible d'intégrer l'équation différentielle parce qu'on ne connaît pas la condition initiale. Dans la pratique, on ne peut qu'avoir des informations partielles sur l'état $x(t)$ et ces informations partielles sont données par $y(t)$ la sortie du système. Nous montrerons dans la suite du chapitre comment avec l'information partielle $y(t)$ couplée avec le système, on peut trouver un état estimé qui est une estimation dynamique $\hat{x}(t)$ de l'état inconnu $x(t)$. Cet état estimé serait généré par un système dynamique auxiliaire qui utilise l'information disponible du système (3.1) c'est-à-dire $y(t)$. Ce système dynamique est de la forme

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, E, y), \quad (3.2)$$

où la fonction g est à déterminer de sorte que les systèmes (3.1) et (3.2) satisfassent $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$ quelles que soient les conditions initiales des systèmes (3.1) et (3.2). Un système dynamique (système (3.2)) satisfaisant ces conditions est appelé « Observateur » pour le système (3.1). On rappelle que lorsque la convergence de $\hat{x}(t)$ vers $x(t)$ est exponentielle, le système (3.2) est appelé « Observateur exponentiel » ; ceci voudrait tout simplement dire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ et pour toutes conditions initiales $(x(0), \hat{x}(0))$, les solutions correspondantes aux systèmes (3.1) et (3.2) satisfont à

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \exp(-\lambda t) \|\hat{x}(0) - x(0)\|.$$

Dans ce cas, une bonne estimation de l'état inconnu x est obtenue. Il faut remarquer que nous n'avons pas besoin d'un choix particulier de l'état initial de l'observateur car la convergence de $\hat{x}(t)$ vers $x(t)$ ne dépend pas de ce choix.

La construction des observateurs occupe de nos jours une part importante dans les recherches en théorie du contrôle. Ainsi, plusieurs méthodes sont développées ([JPG92, KRE85, KRE02, KREI03, LUE71, ZIM94]). Quelques uns traitent de la construction des observateurs pour les systèmes biologiques [SAL98, JPG92, FAR98, GUI08a, DIEN08].

Dans ce chapitre, nous montrons premièrement que certaines applications de la théorie du contrôle sont très importantes pour l'estimation des stocks dans les modèles de pêche. Plus précisément, nous construisons un observateur pour des modèles considérés dans la suite du chapitre ; ces observateurs permettront de prévoir en perspective l'état des stocks. Dans un second temps, nous montrons que l'utilisation de la théorie du contrôle dans les bio-mathématiques doit être faite avec beaucoup de prudence ; ainsi, une des méthodes pratiques est donnée dans [JPG92].

La théorie de l'observateur grand gain que nous utilisons est largement expliquée dans le chapitre 2 (dans sa partie 2.4.3). Par ailleurs cette théorie nécessite la globale lipschitzité des fonctions intervenant dans les systèmes. Toutefois cette globale lipschitzité est très restrictive. Les systèmes biologiques évoluent le plus souvent dans un domaine borné $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ et donc la globale lipschitzité est satisfaite dans $\mathcal{D}$. Cependant, le fait que le domaine $\mathcal{D}$ soit positivement invariant pour le système (3.1) et que la fonction f soit globalement lipschitzienne sur $\mathcal{D}$ ne garantit pas la convergence de l'observateur même si sa condition initiale est prise dans $\mathcal{D}$. Par conséquent, le domaine $\mathcal{D}$ est positivement invariant pour le système (3.1) mais non pour le système (3.2) décrivant la dynamique de l'observateur. En effet, pour des conditions initiales $(x(0), \hat{x}(0)) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, les solutions correspondantes $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ des systèmes (3.1) et (3.2) peuvent quitter le domaine $\mathcal{D}$ en un temps fini : $x(t)$ va certes rester dans le domaine pour $t > 0$, mais il n'y a pas de raison que ce soit le cas pour $\hat{x}(t)$. Pour la construction d'un observateur à convergence exponentielle, nous devons d'abord prolonger la fonction f de $\mathcal{D}$ à tout l'espace $\mathbb{R}^n$ par une fonction $\tilde{f}$ qui soit globalement lipschitzienne dans $\mathbb{R}^n$, puis considérer les systèmes (3.1) et (3.2) définis sur $\mathbb{R}^n$ tout en remplaçant f par $\tilde{f}$.

3.2 Modèle structuré en stades

Pour le modèle structuré en stades, on considère le même système que dans le chapitre précédent avec trois stades décrits comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = -\alpha_0 x_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i x_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i x_i(t) x_0(t) - p_0 x_0^2(t) \\ \dot{x}_1(t) = \alpha x_0(t) - (\alpha_1 + q_1 E) x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) x_2(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Les paramètres sont exactement définis comme dans le chapitre 2 ; la particularité de la construction de l'observateur dans cette partie est liée au fait que la totalité de la capture est accessible à la mesure et que l'observabilité du système n'est pas toujours garantie. On considère alors la sortie donnée par :

$$y(t) = q_1 E x_1(t) + q_2 E x_2(t) \quad (3.4)$$

Au système (3.3) on couple la sortie (3.4) et on obtient le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = -\alpha_0 x_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i x_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i x_i(t) x_0(t) - p_0 x_0^2(t) \\ \dot{x}_1(t) = \alpha x_0(t) - (\alpha_1 + q_1 E) x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) x_2(t) \\ y(t) = q_1 E x_1(t) + q_2 E x_2(t). \end{cases} \quad (3.5)$$

L'objectif est de construire un observateur (estimateur d'état) c'est-à-dire un système auxiliaire qui puisse donner une estimation dynamique $(\hat{x}_0(t), \hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))$ de l'état $(x_0(t), x_1(t), x_2(t))$ du système (3.3). Pour la construction de l'observateur nous utilisons la méthode décrite dans le chapitre 2 ; cette méthode permet la construction d'un observateur à convergence exponentielle, c'est-à-dire,

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \exp(-\lambda t) \|\hat{x}(0) - x(0)\|.$$

3.2.1 Observateur Grand Gain pour le système (3.3)

Le système (3.5) est en fait le système (3.3) couplé avec la sortie (3.4). Dans [TOUZ97, TOUZ98], les auteurs ont montré qu'il existe un domaine invariant D où le système est positivement invariant. Le domaine D est défini de la manière suivante : $D = [a_0, b_0] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, où les réels a_i peuvent être choisis aussi petit que l'on veut et les réels b_i sont fonction des paramètres f_i , l_i et p_i , plus précisément :

$$\begin{aligned} b_i &= (1 + \nu_i) \pi_i \mu \\ \text{avec } 0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n < 1, \pi_i &= \frac{\alpha^i}{\prod_{j=1}^i (\alpha_j + q_j E)}, \\ \text{et } \mu &= \min_{f_i l_i p_i \neq 0} \left\{ \frac{f_i l_i}{p_i} \right\}. \end{aligned}$$

Notons F le champ de vecteurs définissant la dynamique du système (3.3), et h la fonction de sortie. On a alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= h(x(t)) = q_1 E x_1(t) + q_2 E x_2(t) \\ \text{et } F(x(t)) &= \begin{pmatrix} -\alpha_0 x_0(t) + \sum_{i=1}^2 f_i l_i x_i(t) - \sum_{i=1}^2 p_i x_i(t) x_0(t) - p_0 x_0^2(t) \\ \alpha x_0(t) - (\alpha_1 + q_1 E) x_1(t) \\ \alpha x_1(t) - (\alpha_2 + q_2 E) x_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soit Φ la fonction définie par

$$\Phi : \overset{\circ}{D} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (}\overset{\circ}{D} \text{ est l'intérieur de } D\text{) et } \Phi(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_F h(x) \\ L_F^2 h(x) \end{pmatrix},$$

où L_f désigne l'opérateur de la dérivée de Lie de la fonction h le long du champ de vecteurs F . Par conséquent :

$$\Phi(x) = E \begin{pmatrix} q_1 x_1 + q_2 x_2 \\ \alpha q_1 x_0 + (\alpha q_2 - q_1(\alpha_1 + q_1 E))x_1 - q_2(\alpha_2 + q_2 E)x_2 \\ (-\alpha_0 \alpha q_1 + \alpha^2 q_2 - \alpha q_1(\alpha_1 + q_1 E))x_0 \\ + (\alpha q_1 f_1 l_1 - \alpha q_2(\alpha_1 + q_1 E) + q_1(\alpha_1 + q_1 E)^2 - \alpha q_2(\alpha_2 + q_2 E))x_1 \\ + (\alpha q_1 f_2 l_2 + q_2(\alpha_2 + q_2 E)^2)x_2 \\ - \alpha q_1 p_0 x_0^2 - \alpha q_1 p_1 x_1 x_0 - \alpha q_1 p_2 x_2 x_0 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\frac{d\Phi}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 E & q_2 E \\ \alpha q_1 E & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{pmatrix},$$

et

$$\left[\frac{d\Phi}{dx} \right]^{-1} = \frac{1}{\Gamma} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \end{pmatrix},$$

où

$$\Gamma = \text{Det}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = q_1 E \gamma_2 \gamma_3 + \alpha q_1 q_2 E^2 \gamma_4 - q_2 E \gamma_1 \gamma_3 - \alpha q_1^2 E^2 \gamma_5$$

$$\gamma_1 = \alpha q_2 E - q_1 E(\alpha_1 + q_1 E)$$

$$\gamma_2 = -q_2 E(\alpha_2 + q_2 E)$$

$$\gamma_3 = \alpha^2 q_2 E - \alpha_0 \alpha q_1 E - \alpha q_1 E(\alpha_1 + q_1 E) - 2\alpha q_1 E p_0 x_0 - \alpha q_1 E p_1 x_1 - \alpha q_1 E p_2 x_2$$

$$\gamma_4 = q_1 E(\alpha_1 + q_1 E)^2 - \alpha q_2 E(\alpha_1 + q_1 E) - \alpha q_2 E(\alpha_2 + q_2 E) + \alpha q_1 f_1 l_1 E - \alpha q_1 E p_1 x_0$$

$$\begin{aligned}
\gamma_5 &= \alpha q_2 E (\alpha_2 + q_2 E)^2 + \alpha q_1 f_2 l_2 E - \alpha q_1 E p_2 x_0 \\
\beta_1 &= \gamma_1 \gamma_5 - \gamma_2 \gamma_4 \\
\beta_2 &= q_1 E \gamma_5 - q_2 E \gamma_4 \\
\beta_3 &= q_1 E \gamma_2 - q_2 E \gamma_1 \\
\beta_4 &= \alpha q_1 E \gamma_5 - \gamma_2 \gamma_3 \\
\beta_5 &= -q_2 E \gamma_3 \\
\beta_6 &= -\alpha q_1 q_2 E^2 \\
\beta_7 &= \alpha q_1 E \gamma_4 - \gamma_1 \gamma_3 \\
\beta_8 &= -q_1 E \gamma_3 \\
\beta_9 &= -\alpha q_1^2 E^2.
\end{aligned}$$

Notons $\Gamma(x_0, x_1, x_2)$ le déterminant de $\frac{d\Phi}{dx}$, on a :

$$\Gamma(x_0, x_1, x_2) = \text{Det}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = (c + a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2) E^3,$$

où les coefficients c et a_i sont fonction des paramètres du modèles décrivant le système (3.3). L'application $(x_0, x_1, x_2) \mapsto \Gamma(x_0, x_1, x_2)$ est affine sur le polygone D . Ainsi cette application atteint ses extremas aux sommets du polygone. Pour des paramètres donnés, il suffit de calculer $\Gamma(x_0, x_1, x_2)$ au niveau des sommets pour voir s'il s'annule ou pas.

On considère maintenant les paramètres pour lesquels Φ est un difféomorphisme de $\overset{\circ}{D}$ dans $\Phi(\overset{\circ}{D})$. Ceci implique que le système (3.5) est observable. Dans un changement de coordonnées (comme explicité dans le chapitre 2) définie par $(z_1, z_2, z_3)^T = z = \Phi(x) = (h(x), L_F h(x), L_F^2(x))^T$, le système (3.5) s'écrit sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(z(t)) \end{pmatrix} \\ y(t) = z_1(t) = \underbrace{(1, 0, 0)}_C z(t). \end{cases} \quad (3.6)$$

où : $\psi(z) = L_F^3 h(\Phi^{-1}(z)) = L_F^3 h(x) = \varphi(x)$

La fonction φ est continue (c'est un polynôme fonction de $x = (x_0, x_1, x_2)$) sur la compact D , ainsi φ est globalement lipschitzienne sur D . Alors la fonction φ peut être prolongée par une fonction globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ $\tilde{\varphi}$, telle que $\tilde{\varphi} = \varphi$ pour tout $x \in D$. de la même manière, on prolonge la fonction ψ en une fonction globalement lipschitzienne $\tilde{\psi}$.

On obtient ainsi le système (3.7) défini sur $\mathbb{R}^n$ dont la restriction au domaine D est le système (3.5)

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\psi}(z) \end{pmatrix}, \\ y = Cz. \end{cases} \quad (3.7)$$

Ce système satisfait aux conditions du **théorème 1.4.2** qui permet la construction d'un observateur. On a alors l'observateur défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\dot{\hat{x}} = \tilde{F}(\hat{x}) + \left[\frac{d\Phi}{dx} \right]_{x=\hat{x}}^{-1} \times S(\theta)^{-1} C^T (y - h(\hat{x})) \quad (3.8)$$

dont la restriction au domaine D est

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_0 = -\alpha_0 \hat{x}_0 + \sum_{i=1}^2 f_i l_i \hat{x}_i - \sum_{i=1}^2 p_i \hat{x}_i \hat{x}_0 - p_0 \hat{x}_0^2 \\ \quad + (3\theta\beta_1 + 3\theta^2\beta_2 + \theta^3\beta_3)(y - q_1 E \hat{x}_1 - q_2 E \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_1 = \alpha \hat{x}_0 - (\alpha_1 + q_1 E) \hat{x}_1 \\ \quad + (3\theta\beta_4 + 3\theta^2\beta_5 + \theta^3\beta_6)(y - q_1 E \hat{x}_1 - q_2 E \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha \hat{x}_1 - (\alpha_2 + q_2 E) \hat{x}_2 \\ \quad + (3\theta\beta_7 + 3\theta^2\beta_8 + \theta^3\beta_9)(y - q_1 E \hat{x}_1 - q_2 E \hat{x}_2). \end{cases} \quad (3.9)$$

Cet observateur est en fait un système auxiliaire estimant le système (3.3).

3.2.2 Simulations et commentaires

Dans cette partie, nous présentons les simulations faites avec le logiciel libre SCI-LAB, ces simulations permettent de corroborer les résultats théoriques développés dans les chapitre 2.

Remarque 3.2.1 *Pour les simulations, nous prolongeons la fonction φ par continuité afin de la rendre globalement lipschitzienne dans $\mathbb{R}^3$. Désignons par $\tilde{\varphi}$ le prolongement de de la fonction φ de D à $\mathbb{R}^3$ et par π la fonction projection sur le domaine D . On pose $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$, ainsi $\tilde{\varphi}$ a le même coefficient de Lipschitz que la fonction φ . La fonction projection π est définie comme suit : pour $x \in \mathbb{R}^3$, $\pi(x) = \bar{x}$, où $\bar{x} \in D$ est tel que $\text{dist}(x, D) = \|x - \bar{x}\|$, i.e., $\bar{x}$ satisfait $\|x - \bar{x}\| = \min_{u \in D} \|u - x\|$. L'algorithme de prolongement est décrit dans l'Annexe A.*

Pour les simulations, on utilise les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1.3; \quad \alpha_1 = 0.9; \\ \alpha_2 &= 0.85; \quad p_0 = 0.2; \\ p_1 &= 0.1; \quad p_2 = 0.1; \\ q_1 &= 0.07; \quad q_2 = 0.15; \\ f_1 &= 0.5; \quad f_2 = 0.5; \\ l_1 &= 10; \quad l_2 = 10; \\ E &= 0.5; \quad \alpha = 0.8.\end{aligned}$$

Pour ces paramètres, la matrice Jacobienne correspondant à la fonction Φ est donnée par :

$$\frac{d\Phi}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 0.035 & 0.075 \\ 0.028 & 0.027275 & -0.069375 \\ -0.01458 - 0.0112x_0 & 0.0589979 - 0.0028x_0 & 0.191338 - 0.0028x_0 \\ -0.0028x_1 - 0.0028x_2 & & \end{pmatrix},$$

et

$$\text{Det}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = 1.612 \times 10^{-6} + 0.00004697x_0 + 0.0000125265x_1 + 0.0000125265x_2.$$

Les états x_0 , x_1 et x_2 varient en fonction du temps mais restent toujours dans l'orthant positif, donc $\text{Det}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)$ ne s'annule pas. Par conséquent, Φ est un difféomorphisme.

Avec les paramètres du système considéré plus haut, on calcule les coordonnées du coin supérieur du polygone D ([TOUZ97]; on obtient alors $B = (50; 43.21; 37.74)$ et $x^* = (18.572; 15.89; 13.743)$. On prend par la suite $\theta = 17$, $x(0) = [21; 20; 15]$ et $\hat{x}(0) = [35; 40; 10]$.

Remarque 3.2.2 *En utilisant les paramètres ci-dessus, sans faire de prolongement Lipschitzien de la fonction φ (et par ricochet la fonction ψ) dans $\mathbb{R}^3$, l'état estimé $\hat{x}(t)$ généré par l'observateur explose en un temps fini. C'est ce qu'on aperçoit dès le début du processus d'intégration dans les Figures 3.1, 3.2 et 3.3. Mais lorsque le prolongement Lipschitzien à $\mathbb{R}^n$ de la fonction φ est pris en compte, la convergence de l'état estimé $\hat{x}(t)$ vers l'état réel $x(t)$ est rapide comme le montrent les Figures 3.4, 3.5 et 3.6.*

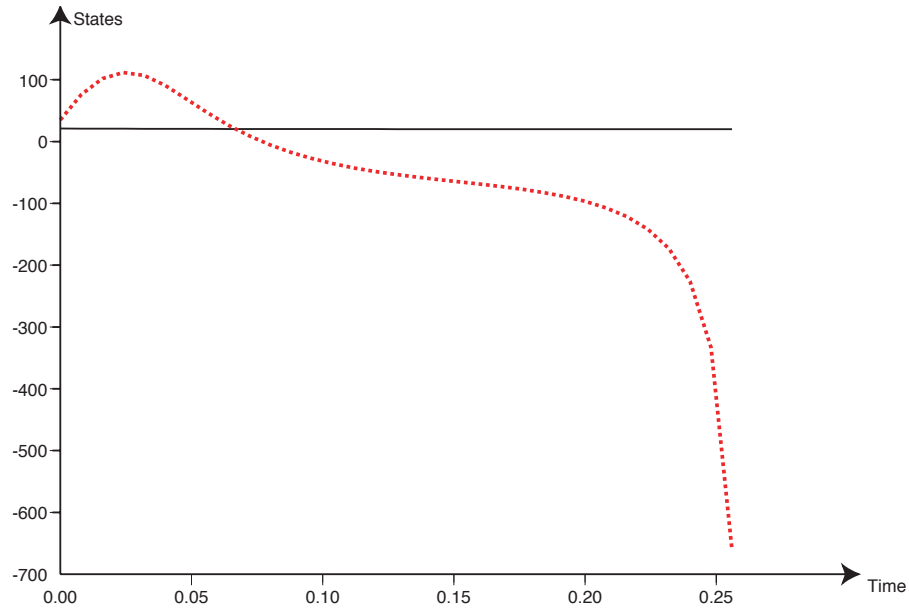


FIG. 3.1 – **Stade 0** : cas où φ est non prolongée. $-x_0$ (ligne continue) et son estimation $\hat{x}_0$ (ligne en pointillé).

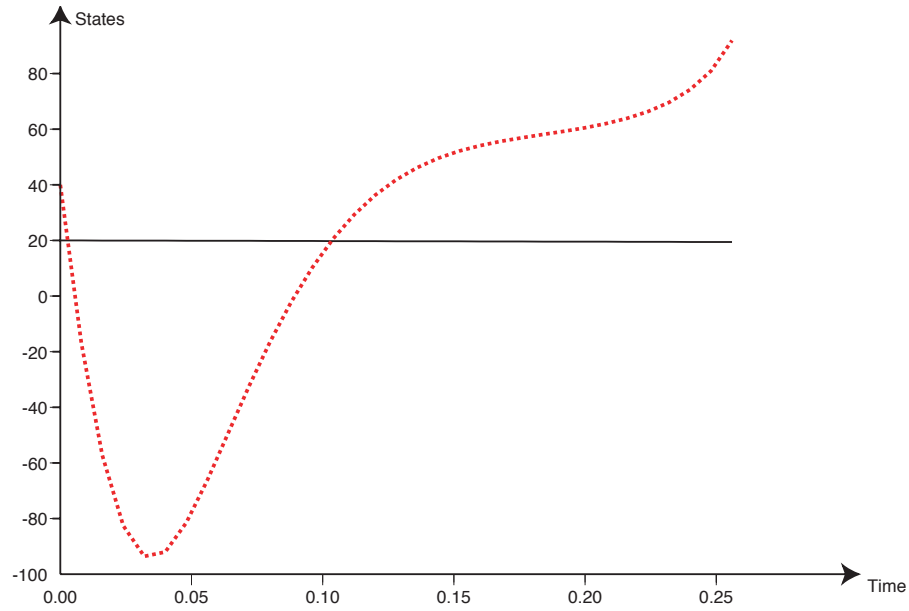


FIG. 3.2 – **Stade 1** : cas où φ est non prolongée. $-x_1$ (ligne continue) et son estimation $\hat{x}_1$ (ligne en pointillé).

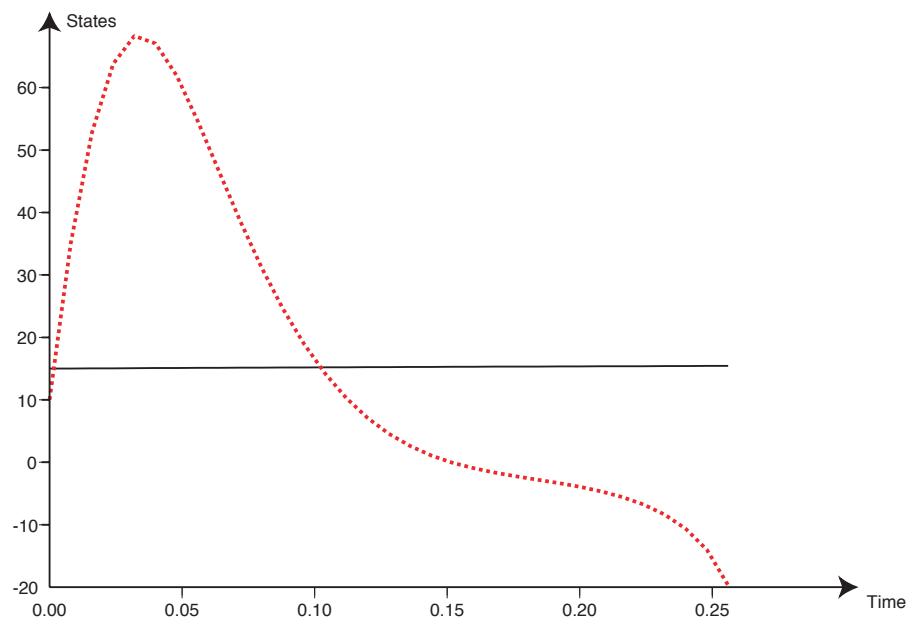


FIG. 3.3 – **Stade 2** : cas où φ est non prolongée. $-x_2$ (ligne continue) et son estimation $\hat{x}_2$ (ligne en pointillé).

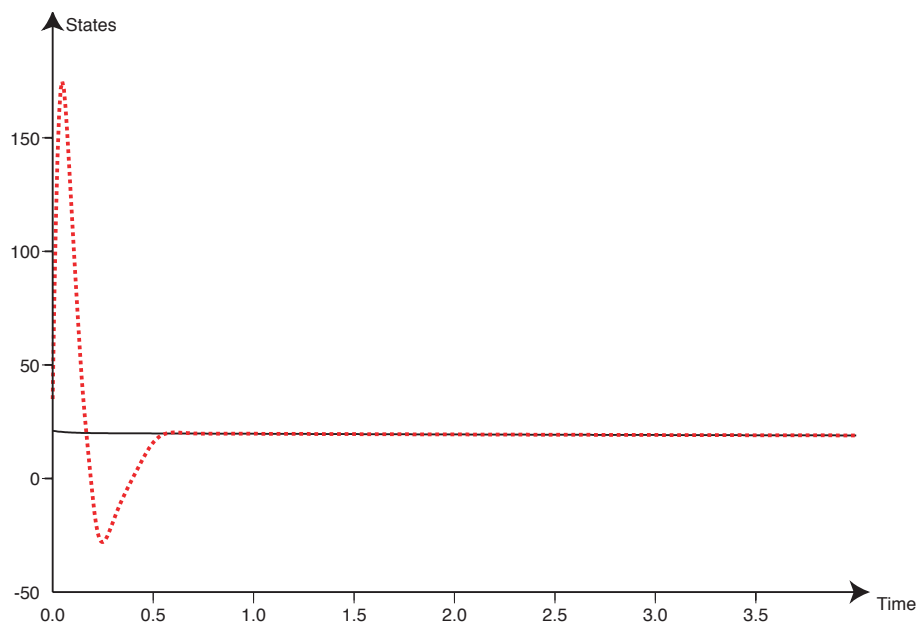


FIG. 3.4 – **Stade 0** : cas où φ est prolongée. $-x_0$ (ligne continue) et son estimation $\hat{x}_0$ (ligne en pointillé).

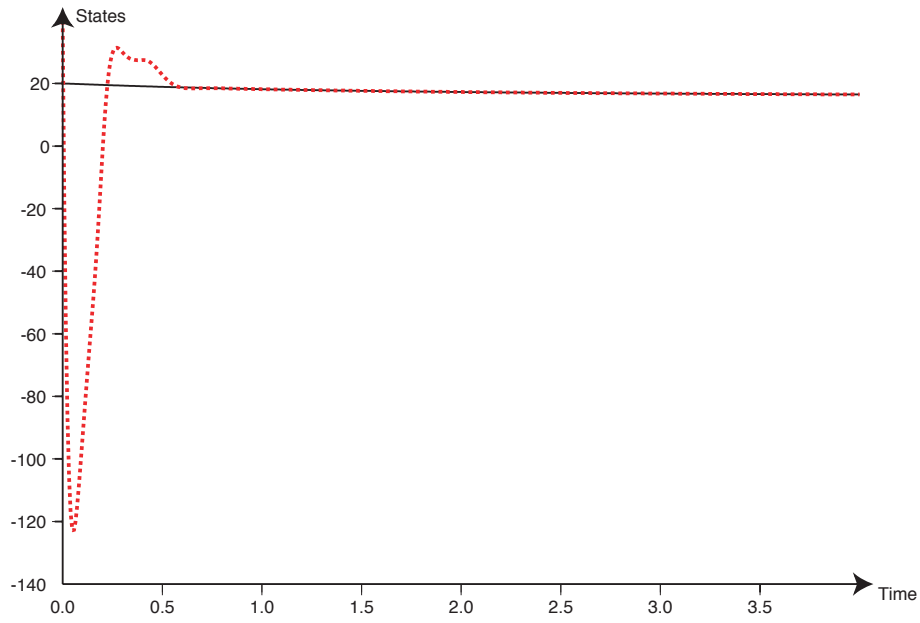


FIG. 3.5 – **Stade 1 : cas où φ est prolongée.** $-x_1$ (ligne continue) et son estimation $\hat{x}_1$ (ligne en pointillé).

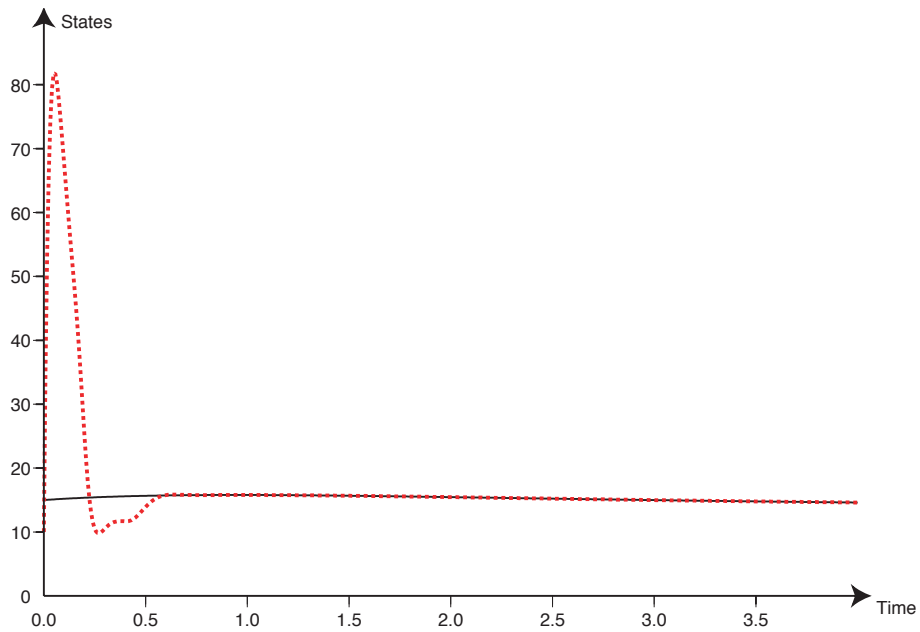


FIG. 3.6 – **Stade 2 : cas où φ est prolongée.** $-x_2$ (ligne continue) et son estimation $\hat{x}_2$ (ligne en pointillé).

3.3 Modèle global

3.3.1 Présentation du modèle et estimation d'état

Nous considérons ici un système modélisant la dynamique d'évolution d'une population de poissons évoluant entre deux zones ([DUB03]). La première zone (zone 1) est une zone autorisée à la pêche et la seconde (zone 2) est une zone réservée (zone interdite à la pêche). Il s'agit d'un modèle de métapopulation où les individus sont repartis entre deux tâches d'habitats (patches). Une métapopulation est un ensemble de population qui occupe un réseau de tâches d'habitat et connectées les unes aux autres par des mouvements d'individus.

Soit $x_1(t)$ la biomasse de la population au temps t dans la zone où la pêche est autorisée et $x_2(t)$ la biomasse de la population de poissons dans la zone où la pêche est interdite. Pour $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, on désigne par m_{ij} le taux de migration de la population de poissons de la zone i à la zone j . Dans la zone où la pêche est autorisée, on note par E l'effort de pêche. On suppose que la croissance est logistique dans chaque sous population. La dynamique d'évolution des deux sous populations est alors décrite par le système dynamique (3.10) [DUB03].

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = r_1 X_1 \left(1 - \frac{X_1}{K_1}\right) - m_{12} X_1 + m_{21} X_2 - q E X_1 \\ \dot{X}_2 = r_2 X_2 \left(1 - \frac{X_2}{K_2}\right) + m_{12} X_1 - m_{21} X_2. \end{cases} \quad (3.10)$$

r_1 et r_2 représentent le taux intrinsèque de croissance de chaque sous population. K_1 et K_2 représentent respectivement les capacités de charge des sous populations dans les zones autorisées et non autorisées à la pêche ; q est le taux de capturabilité dans la zone de pêche. Les paramètres r_1 , r_2 , q , m_{12} , m_{21} , K_1 et K_2 sont tous des constantes réelles positives.

3.3.2 Observabilité et observateur du modèle

Dans [DUB03] et récemment dans [GUI09], les auteurs ont montré l'existence d'un domaine compact dans lequel le système (3.10) reste positivement invariant (cf Annexe C). Ce domaine est donnée par :

$$D_\omega = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}_+^2 : X_1 + X_2 \leq \omega\}$$

où $\omega \geq \omega_0$ avec

$$\omega_0 = \frac{r_1 r_2 (K_1 + K_2) - q u K_1 r_2 + \sqrt{r_2 (K_2 r_1 + K_1 r_2) (K_1 (-q u + r_1)^2 + K_2 r_1 r_2)}}{2 r_1 r_2}$$

Au système (3.10), on associe la capture (la sortie) $y = qEX_1$ (la capture totale dans la zone où la pêche est autorisée) :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = r_1 X_1 \left(1 - \frac{X_1}{K_1}\right) - m_{12} X_1 + m_{21} X_2 - qEX_1 \\ \dot{X}_2 = r_2 X_2 \left(1 - \frac{X_2}{K_2}\right) + m_{12} X_1 - m_{21} X_2 \\ y(t) = qEX_1; \end{cases} \quad (3.11)$$

avec cette sortie, nous montrons l'observabilité du système (3.10) et nous construisons un système auxiliaire qui donne une estimation dynamique de l'état du système (3.10).

Notons par f le champ de vecteur décrivant le système (3.10) :

$$f(X) = \begin{pmatrix} r_1 X_1 \left(1 - \frac{X_1}{K_1}\right) - (m_{12} + qE)X_1 + m_{21} X_2 \\ r_2 X_2 \left(1 - \frac{X_2}{K_2}\right) + m_{12} X_1 - m_{21} X_2 \end{pmatrix}.$$

Soit $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $y(t) = h(X) = qEX_1(t)$ et

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qEX_1 \\ r_1 qEX_1 \left(1 - \frac{X_1}{K_1}\right) - (m_{12} + qE)qEX_1 + m_{21} qEX_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi nous avons

$$\frac{d\Phi}{dX} = \begin{pmatrix} qE & 0 \\ r_1 qE - \frac{2r_1 qEX_1}{K_1} - (m_{12} + qE)qE & qEm_{21} \end{pmatrix}$$

et par suite

$$\text{Det}\left(\frac{d\Phi}{dX}\right) = q^2 E^2 m_{21}.$$

Les paramètres q , E et m_{21} étant positifs ($\neq 0$), on conclut que $\text{Det}\left(\frac{d\Phi}{dX}\right) \neq 0$. Par conséquent, Φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $\Phi(\mathbb{R}^2)$. On déduit que le système (3.10) est observable.

Se référant au chapitre 1 (cf paragraphe 1.4.3), l'observateur s'exprime comme suit :

$$\dot{\hat{X}} = \tilde{f}(\hat{X}) + \left(\frac{d\Phi}{dX}\right)^{-1} \times S(\theta)^{-1} C^T (y - h(\hat{X})), \quad (3.12)$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement Lipschitzien de la fonction f du domaine invariant D à l'espace $\mathbb{R}^2$, $C = (1, 0)$ et $S(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} 2\theta & \theta^2 \\ \theta^2 & \theta^3 \end{pmatrix}$, où $\theta \geq 1$.

La restriction de l'estimateur au domaine D est donnée par les système

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_1 = r_1 \hat{X}_1 \left(1 - \frac{\hat{X}_1}{K_1}\right) - m_{12} \hat{X}_1 + m_{21} \hat{X}_2 - qE \hat{X}_1 + 2\theta(X_1 - \hat{X}_1) \\ \dot{\hat{X}}_2 = r_2 \hat{X}_2 \left(1 - \frac{\hat{X}_2}{K_2}\right) + m_{12} \hat{X}_1 - m_{21} \hat{X}_2 \\ \quad + 2\theta \left(\frac{qE}{m_{21}} - \frac{1}{m_{21}} + \frac{m_{12}}{qEm_{21}} + \frac{2r_1 X_1}{m_{21}} + \frac{\theta}{m_{21}} \right) (X_1 - \hat{X}_1) \end{cases} \quad (3.13)$$

qui est un observateur exponentiel pour le système (3.10).

3.3.3 Simulation

Pour générer les courbes issues des systèmes (3.10) et de l'observateur (3.13), nous utilisons les paramètres suivant [DUB03] :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{7}{10}; \quad r_2 = \frac{5}{10}; \\ q &= \frac{25}{100}; \quad E = \frac{9}{10}; \\ K_1 &= 10; \quad K_2 = \frac{22}{10}; \\ m_{12} &= \frac{2}{10}; \quad m_{21} = \frac{1}{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{r_1 r_2 (K_1 + K_2) - qu K_1 r_2 + \sqrt{r_2 (K_2 r_1 + K_1 r_2) (K_1 (-qu + r_1)^2 + K_2 r_1 r_2)}}{2r_1 r_2} \\ &= 10.74 \end{aligned}$$

Utilisant ces paramètres, le domaine invariant D_ω qui est un triangle est délimité par ses sommets O , A et B dont les coordonnées sont :

$O(0; 0)$, $A(\omega; 0) = A(20; 0)$ et $B(0; \omega) = B(0; 20)$ c'est-à-dire $\omega = 20$; nous prenons $\theta = 4$ pour la valeur réelle du paramètre.

Avec le logiciel SCILAB, l'évolution en fonction du temps de l'état $X(t)$ et de l'état estimé $\hat{X}(t)$ lorsque le prolongement Lipschitzien est fait est donné par les Figures 3.7 et 3.8; lorsque le prolongement n'est pas fait, on a les résultats tels que le montrent les Figures 3.9 and 3.10.

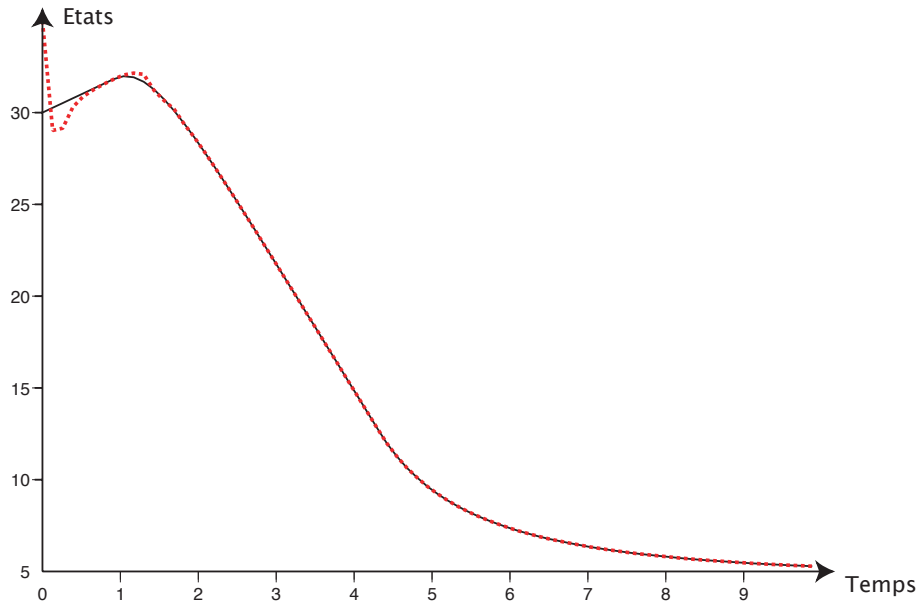


FIG. 3.7 – **Population de la zone 1 : cas où f est prolongée.**– X_1 (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_1$ (ligne en pointillé).

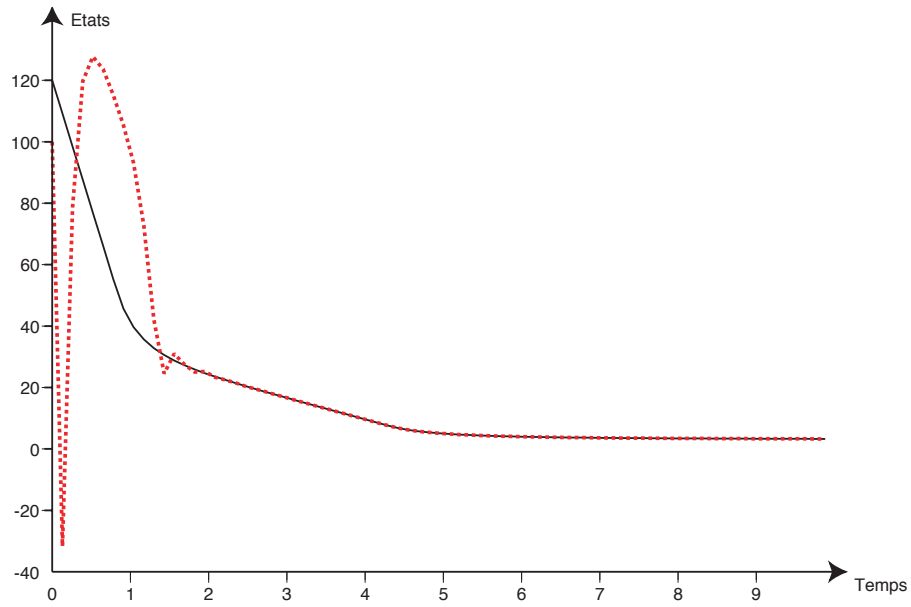


FIG. 3.8 – **Population de la zone 2 : cas où f est prolongée.**– X_2 (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_2$ (ligne en pointillé).

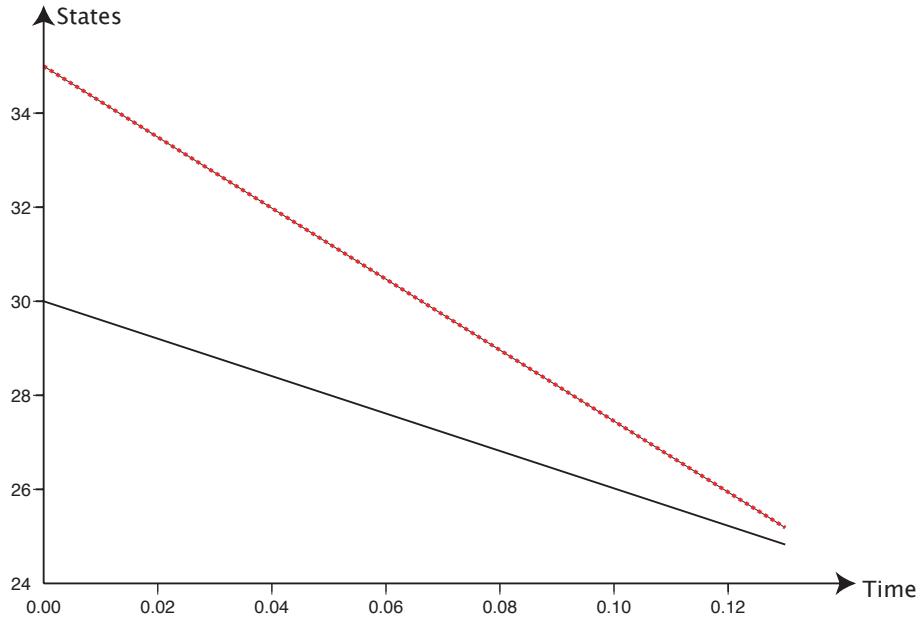


FIG. 3.9 – **Population de la zone 1** : cas où f est non prolongée. $-X_1$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_1$ (ligne en pointillé).

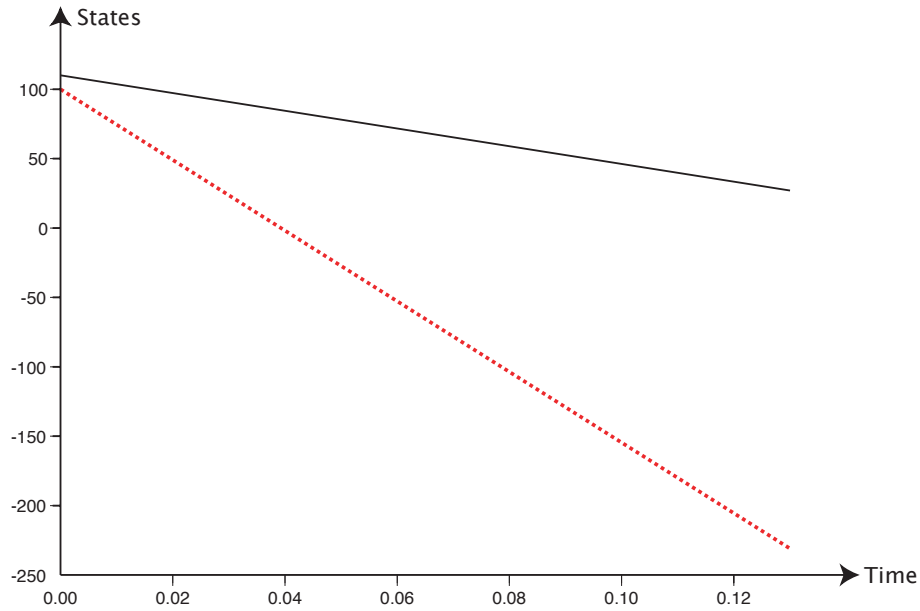


FIG. 3.10 – **Population de la zone 2** : cas où f est non prolongée. $-X_2$ (ligne continue) et son estimation $\hat{X}_2$ (ligne en pointillé).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la technique de construction de l'observateur Grand Gain pour estimer l'état de certains systèmes modélisant des populations de poissons. Avec un choix judicieux du vecteur gain $S(\theta)^{-1}C^T$, nous arrivons à obtenir une estimation satisfaisante des états réels des systèmes étudiés car la convergence a lieu au bout d'un temps bref.

Il est important de noter que les techniques utilisées dans la théorie du contrôle non linéaire (techniques de l'observabilité) sont très importantes dans l'étude de certains systèmes complexes tels que les modèles de pêche qui sont généralement construits sur des bases d'observations empiriques.

Nous avons essayé de combiner la théorie de l'Automatique moderne, l'Informatique et des Mathématiques pour pouvoir estimer ces modèles qui décrivent la dynamique d'évolution de populations de poissons soumises à une action de pêche. Certes, un des problèmes majeurs dans les sciences halieutiques est l'estimation des stocks en utilisant des données disponibles de pêches. L'estimation des stocks est d'autant plus importante qu'elle aide dans les prises de décisions dans les politiques de gestion en pêche.

Troisième partie

Observateurs adaptatifs
continus-discrets

Chapitre 4

Observateurs adaptatifs à gain constant pour une classe de systèmes linéaires à sortie discrète

4.1 Introduction

L'estimation des états (Observateurs) et l'estimation conjointe des états et des paramètres (observateurs adaptatifs) restent toujours un sujet de grand intérêt dans la théorie du contrôle automatique. Dans ce chapitre nous nous consacrons aux observateurs adaptatifs, autrement dit « restructeur » d'état et de paramètres. Dans ce qui suit, nous proposons la construction d'un observateur adaptatif pour un système continu à sortie discrète. Il est bien connu que les observateurs adaptatifs jouent un rôle important dans l'estimation des états et des paramètres. Beaucoup de résultats sont connus sur la théorie des observateurs adaptatifs pour les systèmes continus à sortie continue ([AIP02], [NAR89], [MAR95], [ZHA02]). Dans ce travail, nous avons considéré un système linéaire continu avec une sortie discrète dont nous proposons un algorithme pour estimer les états et le paramètre sans la condition d'excitation persistante. L'observateur proposé est assez intéressant du fait de la convergence exponentielle des erreurs d'états et de paramètres.

Depuis les années 1970, beaucoup de travaux ont été effectués sur les observateurs adaptatifs dans le cas des systèmes continus avec les sorties continues et des systèmes discrets avec les sorties discrètes, nous pouvons retrouver certains de ces travaux, dans ([CAR73], [SONT98], [SHA82], [MAR01], [ZHA02], [AIP02]). La majorité de ces travaux sont en rapport avec les systèmes linéaires variants ou invariants dans le temps. Pour les systèmes non linéaires, des approches plus récentes nécessitent de transformer les systèmes en une certaine forme canonique. Dans notre approche, nous considérons des systèmes déjà sous ces formes canoniques particulières mais avec des sorties (output) discrètes.

Considérons le système linéaire couplé avec une sortie y_k discrète disponible aux temps $0, 1, \dots, k, k+1, \dots$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(t)\theta \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce système est sous la forme adaptative ([MAR95, MAR01]) et le contrôle est noté U . Aussi A est une matrice anti-shift, $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur borné variant dans le temps et θ un paramètre réel constant. La matrice d'observation est donnée par $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Dans la suite du chapitre nous supposons que le contrôle $u(t) = 0$.

Le but de ce travail est de donner un algorithme permettant d'estimer de manière dynamique, aussi bien les états x que le paramètre θ du système. Dans [ZHA02] et [AIP02], le même problème a été considéré pour le système continu avec une sortie continue, par contre dans [GUY03] ; les auteurs considèrent des systèmes discrets avec une sortie discrète pour lesquels ils construisent des observateurs adaptatifs si une condition de persistance est satisfaite. De telles conditions sont souvent difficiles à satisfaire dans la pratique. Ainsi, nous considérons un système continu avec une sortie discrète et nous proposons d'estimer l'état et le paramètre du système sans pour autant utiliser la condition d'excitation persistante.

Les solutions du système (4.1) s'expriment comme suit :

$$x = e^{(t-t_0)A}x_0 + \theta \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}\varphi(s)ds, \quad t \geq t_0.$$

En posant $t_0 = k$ et $t = k+1$, on a alors :

$$x = e^A x_0 + \theta \int_k^{k+1} e^{(t-s)A}\varphi(s)ds.$$

Dans la suite du chapitre, on posera $H_k = \int_k^{k+1} e^{(k-s)A}\varphi(s)ds$.

On a donc $x_{k+1} = e^A x_k + \theta e^A H_k$.

4.2 Sur la construction de l'observateur adaptatif

Considérons z l'état estimé de l'état x , $\hat{\theta}$ l'estimation du paramètre θ et le candidat observateur (estimateur) suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \varphi(t)\hat{\theta}_k & t \in [k, k+1[, \\ z_{k+1} = z_{k+1}^- - K(Cz_{k+1}^- - y_{k+1}), \\ \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \Gamma(Cz_k - y_k). \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2. SUR LA CONSTRUCTION DE L'OBSERVATEUR ADAPTATIF

où

- $z_{k+1}^- = e^A z_k + \hat{\theta} e^A \int_k^{k+1} e^{(k-s)A} \varphi(s) ds.$
- $\Gamma \in \mathbb{R}$ et $K \in \mathbb{R}^n$ seront déterminés dans la suite du chapitre..

Pour prouver que le système (4.2) est un observateur adaptatif pour le système (4.1), nous avons besoin de prouver que l'erreur d'estimation de l'état $e = z - x$ et celle du paramètre $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ tendent vers zero lorsque k tend vers $+\infty$. Pour ce faire, nous utiliserons le résultat de la proposition (4.2.1). La version discrète de la proposition (4.2.1) se trouve dans ([NAR89], page 48–49).

Analysons alors la dynamique des erreurs d'estimation ; considérant $e = z - x$ et $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$, on a :

pour $t \in [k, k+1[$,

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Az + \varphi \hat{\theta}_k - Ax - \varphi \theta \\ &= Ae + \varphi(\hat{\theta}_k - \theta) \\ &= Ae + \varphi \tilde{\theta}_k \end{aligned}$$

pour $t = k+1$,

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= z_{k+1} - x_{k+1} \\ &= z_{k+1}^- - KC(z_{k+1}^- - x_{k+1}) - x_{k+1} \\ &= (I - KC)e_{k+1}^- \end{aligned}$$

et

$$\tilde{\theta}_{k+1} = \tilde{\theta}_k - \Gamma C e_k;$$

où $e_{k+1}^- = e^A e_k + e^A H_k \tilde{\theta}_k$.

Considérons ensuite la dynamique des erreurs aux extrémités de l'intervalle $[k, k+1[$, on obtient alors la dynamique discrète suivante :

$$\begin{cases} e_{k+1} = (I - KC)e^A e_k + (I - KC)e^A H_k \tilde{\theta}_k \\ \tilde{\theta}_{k+1} = -\Gamma C e_k + \tilde{\theta}_k. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce système s'exprime sous la forme matricielle de la manière suivante :

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} (I - KC)e^A & (I - KC)e^A H_k \\ -\Gamma C & 1 \end{pmatrix} v_k, \quad \text{où } v_k = \begin{pmatrix} e_k \\ \tilde{\theta}_k \end{pmatrix}$$

Par suite, le système (4.3) s'exprime sous la forme :

$$v_{k+1} = (U + W(k))v_k, \quad (4.4)$$

où

$$U = \begin{pmatrix} (I - KC)e^A & (I - KC)e^A H_0 \\ -\Gamma C & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } W(k) = \begin{pmatrix} 0 & (I - KC)e^A(H_0 - H_k) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour l'étude de ce système, on utilise la proposition suivante :

Proposition 4.2.1 *Considérons un système discret non autonome variant en fonction du temps et s'écrivant sous la forme :*

$$v_{k+1} = (U + W(k))v_k, \quad (4.5)$$

où U est une matrice constante et $W(k)$ une matrice variant en fonction du temps. Supposons que toutes les valeurs propres de la matrice U appartiennent au disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que le système $v_{k+1} = Uv_k$ est exponentiellement stable. Soit $M > 0$ tel que $\|U^k\| \leq M\lambda^k$, avec $M \in \mathbb{R}^+$ et $\lambda \in]0, 1[$.

Si l'une des conditions suivantes :

- (i) S'il existe b_0 et $k_0 \geq 1$ tels que $b_0 < \frac{1-\lambda}{M}$ et $\|W(k)\| \leq b_0$, pour tout $k \geq k_0$
- (ii) s'il existe $b_1 > 0$ tel que $\sum_{k_0}^{\infty} \|W(k)\| \leq b_1$,

est vérifié, alors le système (4.5) est exponentiellement stable.

Pour la démonstration de cette proposition, nous utilisons la version discrète du lemme de Gronwall.

Lemme 4.2.1 (version discrète de l'inégalité de Gronwall, [SAB91])

Soient z_n et h_n deux séries réelles avec $n \geq n_0 \geq 0$ et $h_n \geq 0$. Si

$$z_n \leq M \left[z_{n_0} + \sum_{j=n_0}^{n-1} h_j z_j \right], \quad \text{pour un certain } M > 0$$

alors

$$z_n \leq z_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} [1 + Mh_j], \quad n \geq n_0.$$

et

$$z_n \leq z_{n_0} \exp \left[\sum_{j=n_0}^{n-1} Mh_j \right], \quad n \geq n_0.$$

Preuve de la Proposition 4.2.1

Les solutions du système (4.5) s'expriment sous la forme :

$$v_k = U^k v_0 + \sum_{i=0}^{k-1} U^{k-1-i} W(i) v_i,$$

par suite, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|v_k\| &\leq \|U^k\| \|v_0\| + \sum_{i=0}^{k-1} \|U^{k-1-i}\| \|W(i)\| \|v_i\| \\ \|v_k\| &\leq \|U\|^k \|v_0\| + \sum_{i=0}^{k-1} \|U\|^{k-1-i} \|W(i)\| \|v_i\| \end{aligned}$$

Pour une matrice U stable, il existe une constante $\lambda \in [0, 1[$ telle que $\|U^k\| \leq M\lambda^k$, $\forall k \geq k_0 > 0$.

Ainsi on a :

$$\|v_k\| \leq M\lambda^k \left[\|v_0\| + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-i-1} \|W(i)\| \|v_i\| \right],$$

en faisant un changement de variable $y_k = \lambda^{-k} \|v_k\|$, on obtient :

$$y_k \leq M \left[y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-1} \|W(i)\| y_i \right].$$

• Supposons que les $W(i)$ sont bornées, c'est-à-dire que $\|W(i)\| \leq b_0, \forall i \geq 0$ et utilisons le **Lemme 4.2.1**, pour obtenir :

$$y_k \leq y_0 \prod_{i=0}^{k-1} (1 + M\lambda^{-1}b_0) = y_0 (1 + M\lambda^{-1}b_0)^k,$$

d'où

$$\|v_k\| \leq (\lambda + Mb_0)^k \|v_0\|.$$

Pour b_0 satisfaisant la condition $b_0 < \frac{1-\lambda}{M}$, on obtient la stabilité exponentielle de la suite $(v_k)_k$.

• Supposons maintenant que $\sum_{i=0}^{k-1} \|W(i)\| \leq b_1$ et utilisons le **Lemme 4.2.1**, pour obtenir :

$$y_k \leq y_0 \exp(\lambda^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} \|W(i)\|);$$

par conséquent,

$$\|v_k\| \leq B\lambda^k \|v_0\|, \text{ avec } B > 0.$$

Ainsi, on a la stabilité exponentielle de $(v_k)_{k \geq 0}$. ■

Pour un système de dimension n , la matrice U est de dimension $n + 1$, l'objectif est alors de trouver $\tilde{K} = (K, 0)^T$ (en d'autres terme K) et Γ de sorte à rendre la matrice U stable.

Remarque 4.2.1 *Comment calculer le vecteur K et la constante Γ ?*

Pour les systèmes mono entrée ($\dot{X} = AX - Bu$), il est possible de donner une formule explicite pour les valeurs propres pour un polynôme donné. Une de ces formules est celle d'Ackermann qui permet de donner les composantes du vecteur K correspondant à des valeurs propres choisies. K est donné par la formule suivante ([SONT98], page 136).

$$K = (0, \dots, 1) \mathcal{R}(A, B)^{-1} \chi(A)$$

où χ est le polynôme caractéristique correspondant au spectre voulu et $\mathcal{R}(A, B)$ est la matrice de contrôlabilité de la paire (A, B) .

Dans ce chapitre, notre objectif est de stabiliser la matrice U que l'on décompose sous la forme $U = \tilde{U} - \tilde{K}\tilde{C}$, où $(\tilde{U}, \tilde{C})$ est observable. Ainsi, nous devons trouver le vecteur $\tilde{K}$ tel que la matrice U ait son spectre dans le disque unité de $\mathbb{C}$.

Soit $\mathcal{R}(\tilde{U}^T, \tilde{C}^T)$ la matrice de contrôlabilité de la paire $(\tilde{U}^T, \tilde{C}^T)$ et $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ le spectre désiré de la matrice U ; on a alors

$$\chi(X) = \prod_{i=0}^n (X - \lambda_i)$$

le polynôme caractéristique correspondant.

Pour déterminer $\tilde{K}$, on utilise la formule d'Ackermann

$$\tilde{K} = (0, \dots, 1) \mathcal{R}(\tilde{U}^T, \tilde{C}^T)^{-1} \chi(\tilde{U}^T).$$

Avec le vecteur $\tilde{K}$ trouvé ci dessus, on choisit la constante Γ de sorte à annuler la dernière composante de $\tilde{K}$; ce qui permet d'obtenir le vecteur K .

Ayant décrit la démarche de construction du vecteur K et de la constante Γ , nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.2.2 *S'il existe une constante $\Gamma \in \mathbb{R}$ et $K \in \mathbb{R}^n$ tels que la matrice U ait toutes ses valeurs propres dans le disque unité ouvert et si $W(k)$ satisfait à l'une des conditions (i) et (ii) de la **Proposition 4.2.1**, alors le système (4.2) est un observateur adaptatif pour le système (4.1). c'est-à-dire que $z_k - x_k$ tend vers 0 et θ_k tend vers θ lorsque k tend vers $+\infty$.*

Pour illustrer le calcul de $\Gamma \in \mathbb{R}$, de $K \in \mathbb{R}^n$ et de la convergence de l'observateur nous envisageons le cas où $n = 2$. Le calcul pour une dimension $n > 2$ se fait sur la base du même principe.

4.3 Etude du cas $n=2$

Pour $n = 2$, nous calculons la constante $\Gamma \in \mathbb{R}$ et $K \in \mathbb{R}^n$ tels que la matrice U ait son spectre dans le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = [0, 1], K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}, \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \text{ et on note } H_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On considère ensuite la suite

$$v_{k+1} = (U + W(k))v_k,$$

où

$$U = \begin{pmatrix} 1-K_1 & -K_1 & (1-K_1)a - K_1b \\ 1-K_2 & 1-K_2 & (1-K_2)(a+b) \\ 0 & -\Gamma & 1 \end{pmatrix} \text{ et } W(k) = \begin{pmatrix} 0 & (I-KC)e^A(H_k-H_0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En considérant la matrice U , on doit choisir un vecteur $\bar{K} = (K_1, K_2, 0)^T$ et Γ dans le but de la rendre stable. Pour ce faire, on décompose la matrice U de la manière suivante :

$$U = \tilde{U} - \bar{K}\tilde{C}, \text{ où } \tilde{C} = (1, 1, a+b) \text{ et } \tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a+b \\ 0 & -\Gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans un premier temps, nous construisons un vecteur $\tilde{K} = (K_1, K_2, K_3)^T$ tel que $\tilde{U} - \tilde{K}\tilde{C}$ ait son spectre dans le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, dans un second temps on choisit une constante Γ de sorte à annuler la dernière composante de $\tilde{K}$, c'est-à-dire $K_3 = 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un tel $\tilde{K}$ est que la paire $(\tilde{U}, \tilde{C})$ soit observable ou que la paire $(\tilde{U}^T, \tilde{C}^T)$ soit contrôlable.

Soient $B = \tilde{C}^T$ et $H_c = (B, \tilde{U}^T B, \tilde{U}^{T^2} B)$ la matrice de contrôlabilité de la paire $(\tilde{U}^T, \tilde{C}^T)$, alors

$$H_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 - \Gamma(a+b) \\ 1 & 1 - \Gamma(a+b) & 1 - 4\Gamma a - 3\Gamma b \\ a+b & 3a+2b & 5a+2b + (a+b)(1 - \Gamma(a+b)) \end{pmatrix}$$

et $\text{Det}(Hc) = -a(1 + b\Gamma)$. La paire $(\tilde{U}^T, \tilde{C}^T)$ est contrôlable si et seulement si $a(1 + b\Gamma) \neq 0$; a et b sont constants et pour $a \neq 0$, on peut trouver Γ tel que la condition de contrôlabilité soit satisfaite.

Soient $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ le spectre voulu de la matrice U ; $Q(x)$ le polynôme caractéristique correspondant; en utilisant la formule d'Ackermann décrite plus haut on trouve explicitement $\tilde{K} = (\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3)$ avec :

$$\tilde{K}_1 = \frac{\Gamma \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a^2 + (b\Gamma + 1)(-\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1(\lambda_2(2\lambda_3 - 1) - \lambda_3) + 1)a + b(b\Gamma + 1)(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)}{b\Gamma a + a},$$

$$\tilde{K}_2 = \frac{b\Gamma - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 1}{b\Gamma + 1},$$

et

$$\tilde{K}_3 = \frac{-b\Gamma(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1) + (\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1) + \lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2(a\Gamma\lambda_3 + \lambda_3 - 1) - 1)}{b\Gamma a + a}.$$

$$\text{En prenant } \Gamma = \frac{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)}{-b(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1) + a\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{Q(1)}{-bQ(1) + a\lambda_1\lambda_2\lambda_3},$$

on obtient : $\tilde{K}_3 = 0$. ■

4.4 Exemple et simulation

Dans cette partie, nous présentons une simulation numérique dans le cas où le système est dans $\mathbb{R}^2$, pour ce faire, nous considérons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = [0, 1], \varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{t+1}{t+2} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ en calculant la valeur de } H_0, \text{ on a}$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 - \ln \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \ln \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs,

$$W(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1 - K1)(\ln \frac{3}{2} - \ln \frac{k+3}{k+2}) - K1(\ln \frac{9}{4} - (k+2) \ln \frac{k+3}{k+2}) \\ 0 & 0 & (1 - K2)(3 \ln \frac{3}{2} - (k+3) \ln \frac{k+3}{k+2}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$U = \begin{pmatrix} 1 - K_1 & -K_1 & (1 - K_1)(1 - \ln \frac{3}{2}) - K_1(\frac{1}{2} - \ln \frac{9}{4}) \\ 1 - K_2 & 1 - K_2 & (1 - K_2)(\frac{3}{2} - 3 \ln \frac{3}{2}) \\ 0 & -\Gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

On utilise comme norme matricielle, la norme définie comme suit :

$$\|W(k)\| = [\rho(W^T W)]^{1/2}.$$

Les valeurs propres souhaitées pour la matrice U sont $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $\lambda_2 = \frac{3}{5}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{5}$.

Pour un tel choix du spectre de U , les valeurs des composantes du vecteur K et de la constante Γ obtenues permettent effectivement de confirmer le choix du spectre ; ainsi on obtient :

$$K = \begin{pmatrix} 0.8436769 \\ 0.8563231 \end{pmatrix} \text{ et } \Gamma = 18.730773.$$

Dans la simulation suivante, la valeur du paramètre θ est fixée à 5 et la figure 4.3 montre bien que l'estimation du paramètre θ_k converge bien vers la valeur 5. Les figures 4.1 et 4.2 montrent la convergence des états estimés $z_1(k)$ et $z_2(k)$ vers les états réels $x_1(k)$ et $x_2(k)$. Les simulations ont été faites en prenant pour conditions initiales :

$$x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \text{and } \theta_0 = 1.$$

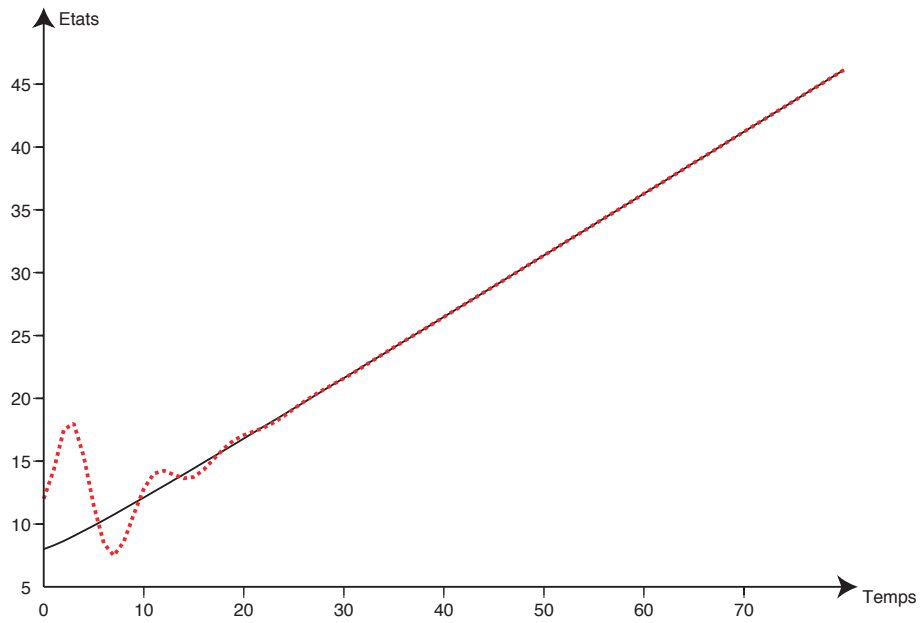


FIG. 4.1 – **Etat du système.** $-x_1(k)$ (ligne continue) et son estimation $z_1(k)$ (ligne en pointillé)

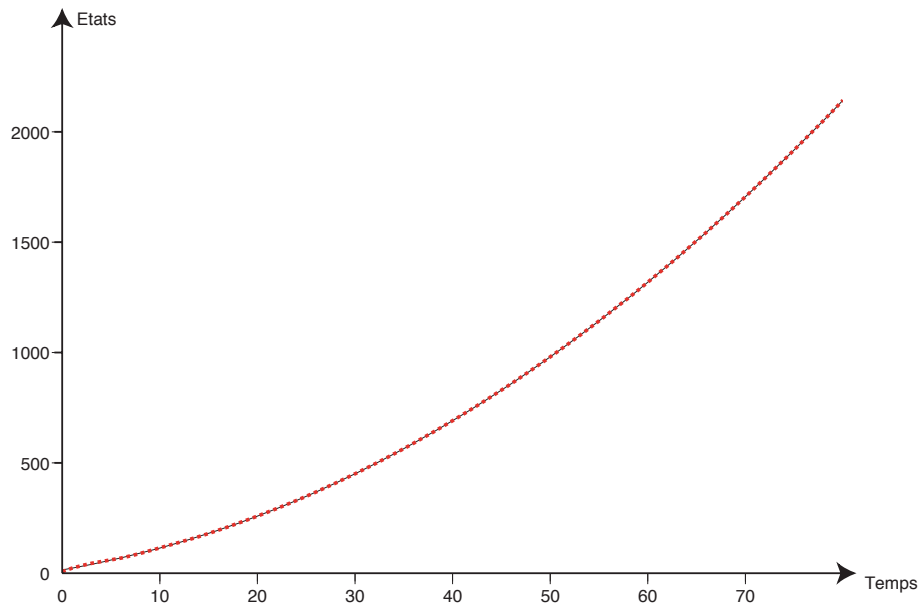
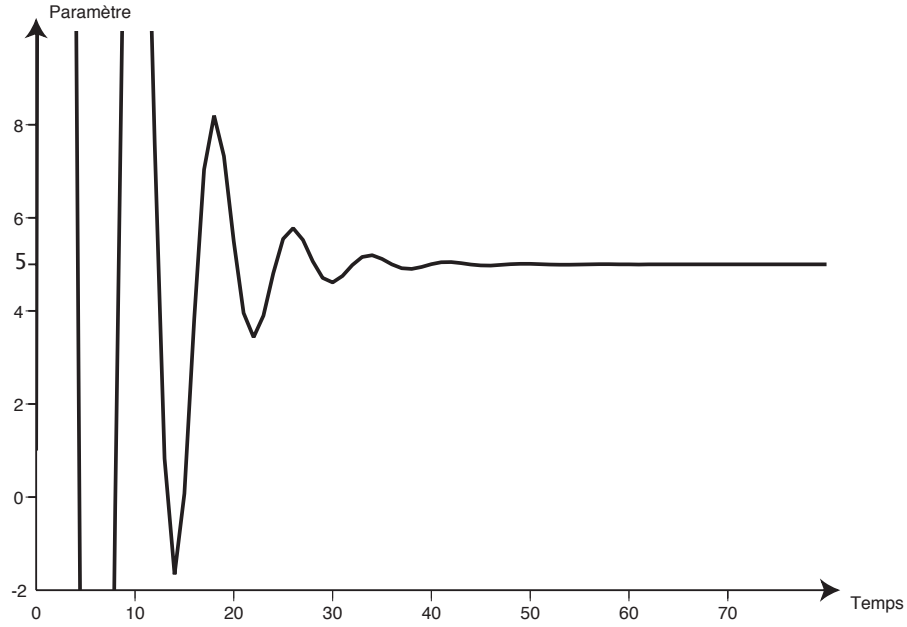


FIG. 4.2 – **Etat du système.** $-x_2(k)$ (ligne continue) et son estimation $z_2(k)$ (ligne en pointillé)

FIG. 4.3 – Estimation θ_k du paramètre θ

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre consacré à la construction d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes linéaires continu-discrets, nous avons proposé un observateur adaptatif pour des systèmes non linéaires (linéarisables sous une certaine forme canonique). Dans la littérature, des travaux ont été menés dans le cadre linéaire pour des systèmes continus à sorties continues et pour des systèmes discrets à sorties discrètes mais aussi pour des systèmes non linéaires linéarisables via une certaine transformation par injection de sortie ([MAR95], [AIP02], [ZHA02]).

Dans ce travail, nous avons considéré des systèmes déjà transformés sous la forme canonique dite forme adaptative et nous avons ensuite considéré une sortie discrète ([GUI08b]). Ceci dans un souci de nous rapprocher de la réalité étant donné que dans la pratique, les mesures se font de manière séquentielle et non de manière continue comme c'est le cas dans les systèmes continus à temps de sortie continue.

Dans ce chapitre, notre souci était de construire un observateur adaptatif sans pour autant utiliser la condition d'excitation persistante qui est souvent très difficile à vérifier. Le système considéré dans ce chapitre est restrictif compte tenu de la forme de la matrice A , mais nous envisageons dans des travaux futurs, de généraliser cette étude pour les systèmes linéaires à matrices constantes et les systèmes linéaires à matrices bornées dans le temps.

*CHAPITRE 4. OBSERVATEURS ADAPTATIFS À GAIN CONSTANT
POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES LINÉAIRES À SORTIE
DISCRÈTE*

Chapitre 5

Observateurs adaptatifs à gain variable pour une classe de systèmes linéaires à sortie discrète

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons du même problème d'estimation d'états et de paramètres pour une classe de systèmes linéaires couplée avec une sortie discrète. Comme mentionné dans le chapitre précédent, plusieurs travaux sur les observateurs adaptatifs dans la littérature ont été visités, mais la quasi totalité ne concernent que des systèmes continus à sorties continus ou des systèmes continus à sorties discrètes. Nous considérons un système sous sa forme adaptative dont nous avons associé une sortie discrète, par le biais d'un gain variable que nous construisons, nous proposons un observateur adaptatif (un système auxiliaire estimant à la fois les états et le paramètres du système) en utilisant une certaine condition que l'on pourrait qualifier de condition d'excitation persistante.

Depuis les années mille neuf cents soixante dix, plusieurs travaux ont été faits concernant les observateurs adaptatifs (systèmes continus avec sortie continues, systèmes discret avec sortie discret), on peut trouver certain de ces travaux dans les références suivantes : [CAR73], [GUY03], [SHA82], [ZHA05]; ces travaux sont basés sur des systèmes linéaires avec des matrices constantes ou variant dans le temps; d'autres travaux basés sur la linéarisation via une certaine transformation de système non linéaires ont aussi fait l'objet de publications, voir par exemple [MAR95] et [MAR01].

Nous considérons dans ce chapitre le système linéaire suivant couplé avec une sortie discrète y_k mesurée aux temps $0, 1, \dots, k, k + 1, \dots$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(t)\theta \\ y(k) = Cx(k) = y_k \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans ce travail, nous nous inspirons des méthodes développées dans ([GUY03]) et proposons un observateur adaptatif qui estime l'état et le paramètre du système (5.1). Dans la suite du chapitre, nous supposons $u(t) = 0$. Le paramètre inconnu θ est une constante réelle, la matrice A est une matrice anti-shift ; $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur borné dans le temps. Le vecteur de sortie $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ est appelé matrice d'observation.

On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(t)\theta \\ y(k) = Cx(k) = y_k \end{cases} \quad (5.2)$$

le but ici est de décrire un algorithme permettant d'estimer aussi bien l'état du système que le paramètre constant θ . Considérant la première équation du système (5.2) on exprime la solution $x(t)$ par :

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \theta \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}\varphi(s)ds.$$

On s'intéresse ici aux solutions au temps $0, 1, \dots, k, k+1, \dots$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= e^{(t-t_0)A}x_k + \theta \int_k^{k+1} e^{(k+1-s)A}\varphi(s)ds \\ &= e^A x_k + \theta e^A \int_k^{k+1} e^{(k-s)A}\varphi(s)ds. \end{aligned}$$

En posant

$$H_k = \int_k^{k+1} e^{(k-s)A}\varphi(s)ds,$$

on peut aussi écrire :

$$x_{k+1} = e^A x_k + \theta e^A H_k.$$

5.2 Proposition d'un observateur adaptatif

Considérons z l'état estimé de l'état x et $\hat{\theta}$ l'estimation du paramètre θ . Nous considérons ensuite le système

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= Az(t) + \varphi(t)\hat{\theta} & t \in [k, k+1[\\ z_{k+1} &= z_{k+1}^- - K(Cz_{k+1}^- - y_{k+1}) + \Gamma_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k). \end{cases} \quad (5.3)$$

5.2. PROPOSITION D'UN OBSERVATEUR ADAPTATIF

où $z_{k+1}^- = e^A z_k + \hat{\theta} e^A H_k$, $K = (K_1, K_2, \dots, K_2)^T$, le vecteur K sera choisi de manière à rendre la paire $(e^A, e^A C)$ observable, c'est-à-dire $(I - KC)e^A$ stable. Ainsi, en remplaçant z_{k+1}^- dans la seconde équation du système (5.3), on obtient

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= e^A z_k + e^A H_k \hat{\theta}_k + \Gamma_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) \\ &= (I - KC)e^A z_k + (I - KC)e^A H_k \hat{\theta}_k \\ &\quad + KC(e^A x_k + e^A H_k \hat{\theta}_k) + \Gamma_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Pour chaque instant k , on exprime $\hat{\theta}$ et Γ_k comme suit :

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \mu_k \Gamma_k^T C^T (C z_k - y_k), \quad (5.5)$$

et

$$\Gamma_{k+1} = (I - KC)e^A \Gamma_k + (I - KC)e^A H_k. \quad (5.6)$$

μ_k est choisie de manière à satisfaire l'hypothèse (5.2.1), il faut noter que nous adaptons ici les hypothèses et les preuves de [GUY03]

Hypothèse 5.2.1 *La suite de scalaire μ_k est telle que $\|\sqrt{\mu_k} C \Gamma_k\| < 1$ pour tout $k \geq 0$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme spectrale.*

Pour assurer la convergence de l'observateur adaptatif nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 5.2.2 *Le vecteur φ satisfait la condition d'excitation persistante, par conséquent la suite de vecteurs $(\Gamma_k)_k$ ainsi que la suite de scalaire μ_k satisfont pour $\alpha > 0$, pour un certain entier $L > 0$ et pour tout $k \geq 0$, la condition suivante,*

$$\frac{1}{L} \sum_{i=k}^{k+L-1} \mu_i \Gamma_i^T C^T C \Gamma_i \geq \alpha I. \quad (5.7)$$

Hypothèse 5.2.3 *La paire $(e^A, C e^A)$ est observable, ceci voudrait dire qu'il existe un vecteur K tel que la matrice $(e^A - K C e^A)$ soit stable, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de cette matrice sont dans le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$*

Théorème 5.2.1 *Sous les conditions des hypothèses (5.2.1), (5.2.2) et (5.2.3), l'algorithme suivant (le système (5.8)) est un observateur adaptatif pour le système*

(5.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) = Az(t) + \varphi(t)\hat{\theta}_k \quad t \in [k, k+1[, \\ z_{k+1} = z_{k+1}^- - K(Cz_{k+1}^- - y_{k+1}) \\ \quad + \Gamma_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k), \\ \hat{\theta}_{k+1} = \theta_k - \mu_k \Gamma_k^T C^T (Cz_k - y_k), \\ \Gamma_{k+1} = (I - KC) e^A \Gamma_k + (I - KC) e^A H_k, \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Pour montrer la convergence de l'observateur, nous allons montrer que la dynamique des erreurs ($e = z - x$ et $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$) tend vers zéro lorsque $k \rightarrow \infty$. Pour ce faire, il suffit de montrer que e_k et $\tilde{\theta}_k$ tendent vers zéro lorsque $k \rightarrow \infty$. Part ailleurs, la démonstration du théorème requiert l'utilisation des lemmes suivants :

Lemme 5.2.1 *Si le système linéaire $\eta_{k+1} = F_k \eta_k$, avec $\eta_k \in \mathbb{R}^n$, $F_k \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, est exponentiellement stable, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $r > 0$ et $0 < q < 1$ telles que $\| \prod_{i=k_0}^{k-1} F_i \| \leq r q^{k-k_0}$ pour tout $k > k_0$ ($\|\eta_k\| \leq r q^{k-k_0} \|\eta_{k_0}\|$) ; alors*

(1) *pour tout suite bornée de vecteurs $g_k \in \mathbb{R}^n$, la suite définie par $z_{k+1} = F_k z_k + g_k$ est bornée.*

(2) *pour toute suite de vecteurs g_k tendant exponentiellement vers zéro, la suite z_k définie ci-dessus converge aussi exponentiellement vers zéro.*

Preuve : Pour la preuve de ce Lemme, voir ([FREE65] page 168).

Lemme 5.2.2 *Soit $\phi_k \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ une suite matricielle dont la norme spectrale $\|\phi_k\| \leq 1$ pour tout $k \geq 0$. S'il existe une constante réelle $\alpha > 0$ et un entier $L > 0$ tels que l'inégalité*

$$\frac{1}{L} \sum_{i=k}^{k+L-1} \phi_i^T \phi_i \geq \alpha I \quad (5.9)$$

est satisfaite, alors le système linéaire

$$z_{k+1} = (I - \phi_k^T \phi_k) z_k$$

est exponentiellement stable.

Preuve : confère **Annexe B** ou [GUY03].

Preuve du Théorème 5.2.1

Pour $t \in [k, k+1[$ on a l'estimation d'erreur

$$\begin{aligned}\dot{e} &= Az + \varphi \hat{\theta}_k - Ax - \varphi \theta \\ &= Ae + \varphi(\hat{\theta}_k - \theta) \\ &= Ae + \varphi \tilde{\theta}_k;\end{aligned}$$

ainsi, pour $t \in [k, k+1[$ on exprime l'erreur par $e(t) = e^{(t-k)A}e_k + \tilde{\theta}_k \int_k^t e^{(t-s)A}\varphi(s)ds$

qui tend vers zéro lorsque e_k et $\tilde{\theta}_k$ tendent vers zéro.

pour $t=k+1$, on a

$$\begin{aligned}e_{k+1} &= z_{k+1} - x_{k+1} \\ &= z_{k+1}^- - KC(z_{k+1}^- - x_{k+1}) + \Gamma_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k) - x_{k+1} \\ &= (I - KC)e_{k+1}^- + \Gamma_{k+1}(\hat{\theta}_{k+1} - \theta + \theta - \hat{\theta}_k) \\ &= (I - KC)e_{k+1}^- + \Gamma_{k+1}(\tilde{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}_k)\end{aligned}$$

où

$$e_{k+1}^- = e^A e_k + e^A H_k \tilde{\theta}_k$$

et

$$\tilde{\theta}_{k+1} = \tilde{\theta}_k - \mu_k \Gamma^T C^T C e_k.$$

Posons $v_k = e_k - \Gamma_k \tilde{\theta}_k$.

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}v_{k+1} &= e_{k+1} - \Gamma_k \tilde{\theta}_{k+1} \\ &= (I - KC)e^A e_k + (I - KC)e^A H_k \tilde{\theta}_k + \Gamma_{k+1}(\tilde{\theta}_{k+1} - \tilde{\theta}_k) - \Gamma_k \tilde{\theta}_{k+1} \\ &= (I - KC)e^A e_k + (I - KC)e^A H_k \tilde{\theta}_k - \Gamma_{k+1} \tilde{\theta}_k \\ &= (I - KC)e^A e_k + ((I - KC)e^A H_k - \Gamma_{k+1}) \tilde{\theta}_k.\end{aligned}$$

En utilisant la définition de $(\Gamma_k)_k$ dans l'équation (5.6), on simplifie l'expression de v_{k+1} par :

$$\begin{aligned}v_{k+1} &= (I - KC)e^A e_k - (I - KC)e^A \Gamma_k \tilde{\theta}_k \\ &= (I - KC)e^A (e_k - \Gamma_k \tilde{\theta}_k) \\ &= (I - KC)e^A v_k;\end{aligned}\tag{5.10}$$

et par suite en remplaçant e_k par $v_k + \Gamma_k \tilde{\theta}_k$ dans l'expression de $\tilde{\theta}_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{k+1} &= \tilde{\theta}_k - \mu_k \Gamma^T C^T C e_k \\ &= \tilde{\theta}_k - \mu_k \Gamma^T C^T C (v_k + \Gamma_k \tilde{\theta}_k) \\ &= (I - \mu_k \Gamma_k^T C^T C \Gamma_k) \tilde{\theta}_k - \mu_k \Gamma^T C^T C v_k.\end{aligned}\tag{5.11}$$

De l'hypothèse 5.2.3, on peut choisir un vecteur K de sorte à rendre la matrice $(I - KC)e^A$ stable ; ceci permet d'assurer la stabilité de la suite $(v_k)_k$.

Selon les hypothèses 5.2.1 et 5.2.2 et le **Lemme 5.2.2**, la partie homogène de l'équation (5.11), c'est-à-dire le système linéaire

$$\tilde{\theta}_{k+1} = (I - \mu_k \Gamma_k^T C^T C \Gamma_k) \tilde{\theta}_k$$

est exponentiellement stable. Par ailleurs, comme v_k tend vers zéro, alors $\tilde{\theta}_k$ tend vers zéro lorsque $k \rightarrow \infty$; ainsi on conclut que $e_k = v_k + \Gamma_k \tilde{\theta}_k$ tend vers zéro. ■

Remarque 5.2.1 : Quelques mots sur le choix de μ_k

La fonction φ définie dans (5.2) est bornée, par conséquent, $H_k = \int_k^{k+1} e^{(k-s)A} \varphi(s) ds$ est une suite de vecteurs bornés.

En posant $B = (I - KC)e^A$ (le vecteur K est choisi pour rendre B stable) ; l'équation (5.6) s'exprime sous la forme :

$$\Gamma_{k+1} = B\Gamma_k + BH_k$$

ce qui permet d'exprimer explicitement Γ_n par :

$$\Gamma_n = B^{n-1}\Gamma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} B^{n-i}H_i \quad \text{pour } n > 1.$$

La matrice B étant stable, la suite de vecteurs $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \|B^{n-i}H_i\| < \infty.$$

Notons $\Gamma_k = (\Gamma_{1k}, \Gamma_{2k}, \dots, \Gamma_{nk})^T$, $H_k = (H_{1k}, H_{2k}, \dots, H_{nk})^T$ les vecteurs Γ_k et H_k pour tout $k \geq 0$. En considérant que A est une matrice anti-shift, on exprime chaque composante des vecteurs Γ_k et H_k par :

$$H_{jk} = \sum_{i=1}^j \frac{1}{(j-i)!} \int_k^{k+1} (k-s)^{j-i} \varphi_i(s) ds, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$$\Gamma_{jk+1} = \sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{(j-i)!} - \frac{K_j}{(n-i)!} \right) (\Gamma_{ik} + H_{ik}), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Par conséquent,

$$\Gamma_{nk+1} = (1 - K_n) \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-i)!} (\Gamma_{ik} + H_{ik}).$$

Γ_k étant bornée, alors toutes ses composantes sont bornées, en particulier Γ_{nk+1} . L'objectif est de choisir μ_k tel que

$$\tilde{\theta}_{k+1} = (I - \mu_k \Gamma_k^T C^T C \Gamma_k) \tilde{\theta}_k \quad (5.12)$$

soit exponentiellement stable. Par contre, un calcul simple nous permet d'écrire que

$$\Gamma_k^T C^T C \Gamma_k = \Gamma_{nk}^2.$$

Le choix qui nous paraît évident est de prendre (satisfaisant) $\mu_k = a(\Gamma_k^T C^T C \Gamma_k)^{-1} = a(\Gamma_{nk}^2)^{-1}$ avec $0 < a < 1$, si la dernière composante du vecteur Γ_k demeure non nulle. Par contre, si la dernière composante s'annule en un nombre fini de points, on prend alors $\mu_k = (\Gamma_k^T C^T C \Gamma_k + 1)^{-1} = (\Gamma_{nk}^2 + 1)^{-1}$.

5.3 Exemple et simulation

Pour illustrer l'utilisation du gain variable Γ_k , nous considérons un système bi-dimensionnel avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = [0, 1], \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{t+1}{t+2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

Après des calculs assez simples d'intégration, on trouve explicitement

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 - \ln \frac{k+3}{k+2} \\ \frac{1}{2} - (k+2) \ln \frac{k+3}{k+2} \end{pmatrix}, \text{ on choisit ensuite le vecteur } K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix},$$

de manière à rendre la matrice $(I - KC)e^A$ stable. Pour ce faire, nous avons choisi

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \text{ avec ce choix du vecteur } K, \text{ on a } (I - KC)e^A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ dont le}$$

spectre est $\left\{ \frac{1}{6} (3 + i\sqrt{3}), \frac{1}{6} (3 - i\sqrt{3}) \right\}$ et donc appartient au disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Pour ce exemple, nous avons $\Gamma_k^T C^T C \Gamma_k = \Gamma_{2k}^2$, et nous voyons avec les courbes d'évolution de Γ_k (voir Fig. 5.1) que les composantes sont bornées et positives. par conséquent, nous pouvons choisir la suite de constantes μ_k (suite de gain) :

$$\mu_k = \alpha(\Gamma_k^T C^T C \Gamma_k)^{-1} = \alpha(\Gamma_{2k}^2)^{-1}, \text{ où } 0 < \alpha < 1.$$

Les Figures 5.2 et 5.3 montrent la convergence des états estimés z_1 et z_2 vers les états réels x_1 et x_2 , tandis que la Figure 5.4 montre la convergence de θ_k vers le paramètre inconnu θ qui vaut 10 dans cet exemple.

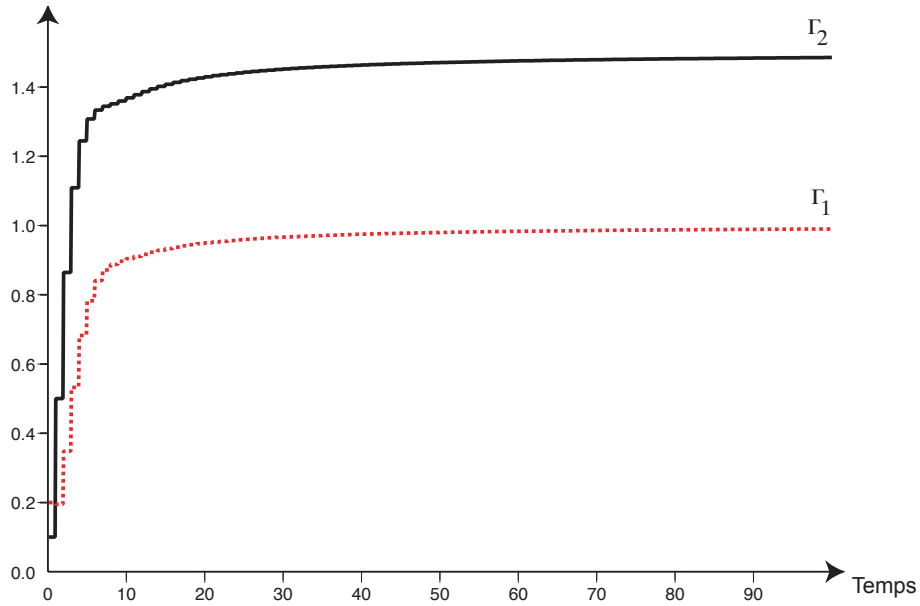


FIG. 5.1 – Courbes décrivant l'évolution de Γ

5.4 conclusion

Dans ce chapitre consacré à la construction d'un observateur adaptatif pour une classe de systèmes linéaires dont la sortie (output) est discrète, nous avons proposé un système auxiliaire (un algorithme) qui permet d'estimer aussi bien l'état du système que le paramètre inconnu. Cette étude a été faite en utilisant un gain variable dépendant de la condition classique d'excitation persistante. La particularité de cette étude réside dans le fait que la sortie du système est discrète bien que le système soit continu. Nous avons travaillé avec des matrices particulières ; ces résultats sont à améliorer, au regard de l'extension pour des cas plus généraux en cours.

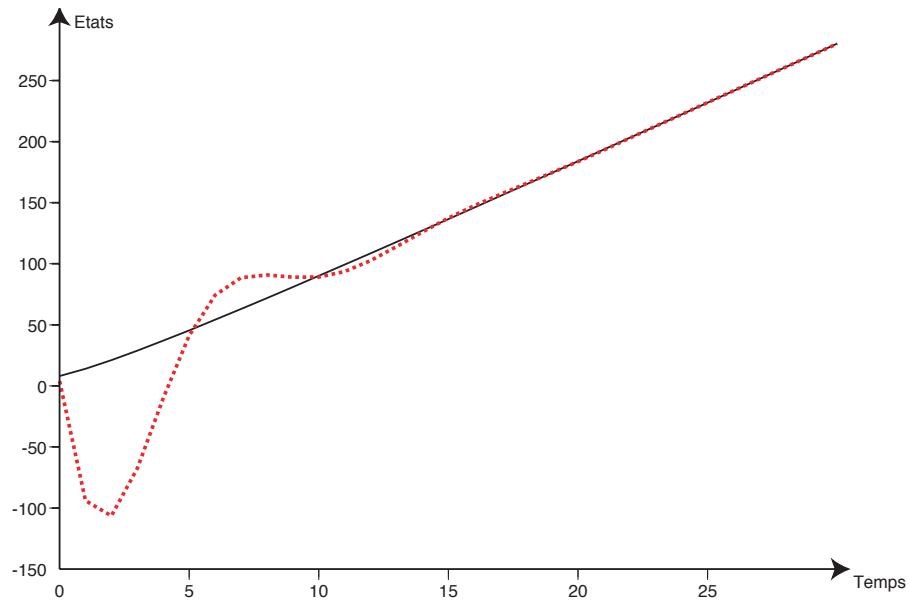


FIG. 5.2 – **Etat du système.** $-x_1$ (ligne continue) et son estimation z_1 (ligne en pointillé)

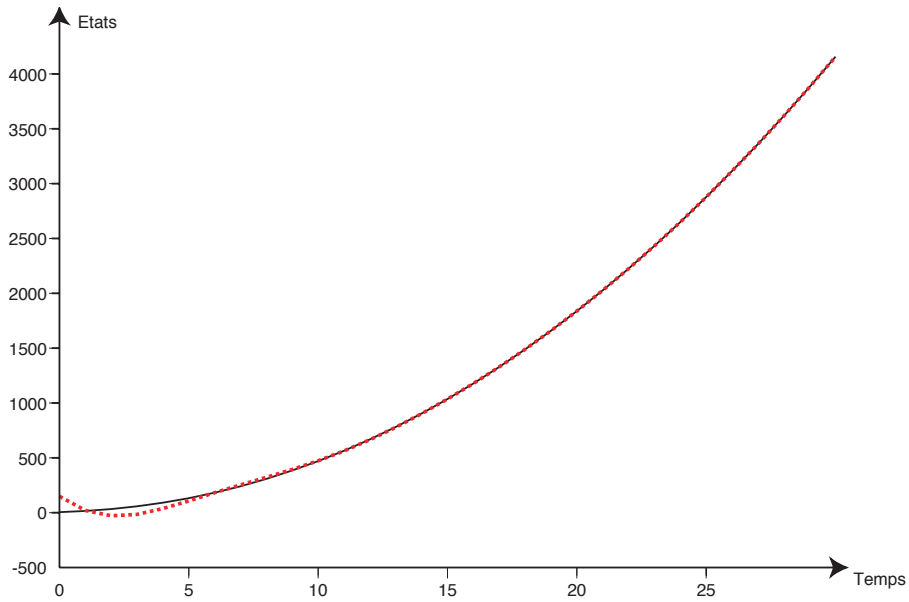


FIG. 5.3 – **Etat du système.** $-x_2$ (ligne continue) et son estimation z_2 (ligne en pointillé)

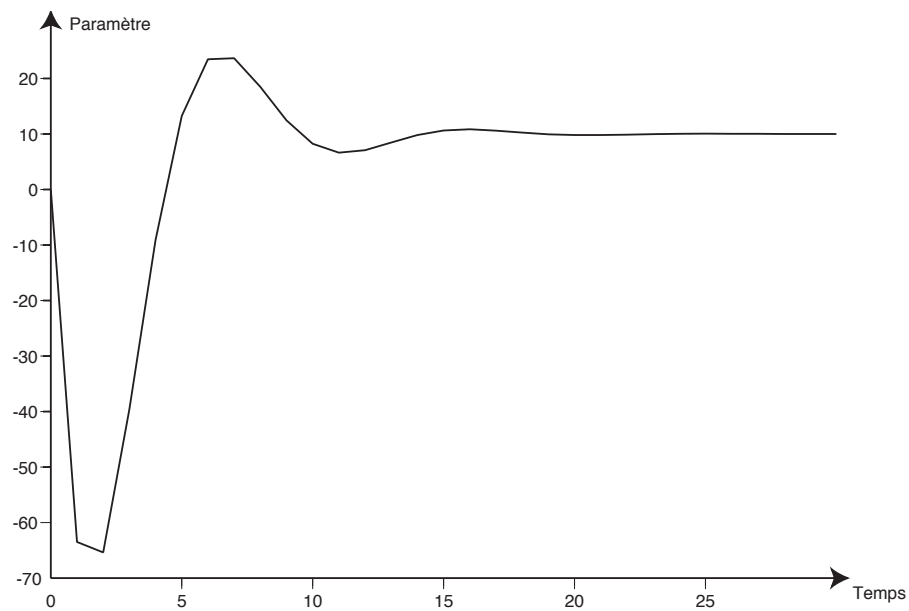


FIG. 5.4 – **Paramètre.**—Estimation θ_k du paramètre θ

Quatrième partie

**Conclusion, références
bibliographiques et Annexes**

Conclusion générale et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'utilisation de l'automatique dans la gestion des pêches d'une part et à l'étude de quelques problèmes théoriques d'automatique d'autre part. Un des buts d'un observateur est de donner une estimation des variables d'état d'un système considéré ; et ensuite utiliser ces estimations pour calculer une commande qui serait appliquée au système.

Dans une première partie (partie 2), notamment dans les chapitres 2 et 3, nous avons traité des problèmes d'estimation d'états pour des modèles de pêche. il est bien connu en halieutique que la connaissance des états des stocks permet une bonne prise de décision dans les politiques de gestion des pêches. Nous avons considéré un modèle existant dû à S. Touzeau et al [TOUZ97], et nous avons par la théorie des observateurs Grand gain construit un état auxiliaire qui estime de manière dynamique le système réel modélisant la population de poissons. Nous avons fait des simulations permettant de corroborer la convergence de ces observateurs. Dans le chapitre 2, nous avons considéré deux situations ; d'une part la situation d'un système à trois classes et où seule la dernière classe est pêchée et accessible à la mesure ; d'autre part une seconde situation où on a les deux dernières classes soumises à la pêche et dont seule la dernière est accessible à la mesure pour cause de rejets d'une partie de la capture. Dans le chapitre 3, nous considérons dans un premier temps le système décrit dans le chapitre 2 avec une sortie constituée par les deux dernières classes ; ensuite nous avons considéré un système modélisant la dynamique d'une population de poissons vivant à cheval entre deux zones dont l'une est accessible à la pêche et l'autre interdite à la pêche (zone de réserve) ; pour ce système, nous avons aussi construit un observateur grand gain et avec les simulations, montré la convergence des observateurs pour un certain nombre de conditions mathématiques satisfaites à savoir le prolongement des fonctions décrivant les dynamiques des systèmes dans un domaine invariant compact D de $\mathbb{R}^3$ (respectivement de $\mathbb{R}^2$) à l'espace $\mathbb{R}^3$ (respectivement $\mathbb{R}^2$).

Dans une deuxième partie (partie 3) de cette thèse : les chapitres 4 et 5 ; nous avons traité des problèmes d'observateurs adaptatifs continus à temps discrets. Nous

nous sommes intéressés à des systèmes non linéaires (linéarisables sous une forme particulière), par une transformation via une injection de sortie et par suite, nous avons considéré des sorties discrètes pour construire des systèmes auxiliaires permettant d'estimer aussi bien l'état et le paramètre du système. Dans le chapitre 4, un système continu avec une sortie à temps discrets à été considéré et nous avons par le biais d'un gain constant, construit un observateur adaptatif. Dans le chapitre 5, nous avons considéré le même système que dans le chapitre 4, mais nous proposons un autre algorithme en utilisant une suite de gains variables satisfaisant à la condition classique d'excitation persistante.

Les chapitres 2, 3, 4 et 5 ont fait l'objet de publications ([GUI08a], [GUI08b]), ou de soumission dans des revues pour d'éventuelles publications.

Comme perspective pour la suite des travaux de cette thèses, il faudra pour l'estimation d'état dans les modèles de pêches, trouver des données réelles qui pourront être appliquées à ces modèles. La difficulté dans l'étude des modèles mathématiques en halieutique réside dans l'acquisition des données réelles car, en général les données dites réelles disponibles ne sont pas fiables. Un aspect critique concernant les observateurs construits est que, celui dont le gain est constant dans le cadre de l'observateur Grand gain est très sensible au bruit et cela ne permet pas lorsque l'erreur initiale est grande d'avoir une convergence dès les premiers instants.

Pour ce qui concerne les observateurs adaptatifs, nous avons considéré une classe de systèmes linéaires particuliers avec une sortie ($y \in \mathbb{R}$) discrète. Il serait intéressant de généraliser cette méthode moyennant des conditions supplémentaires pour des systèmes linéaires de manière générale avec une sortie à temps discrets. Par ailleurs, les paramètres à estimer dans les chapitres 4 et 5 sont des nombres réels ; il serait intéressant dans les investigations futures de prendre des paramètres θ constants de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ pour une première étude et ensuite envisager le cas où le paramètre $\theta \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ varie en fonction du temps.

Bibliographie

- [AIP02] Aiping Xu, Observeur adaptatifs non-linéaires et diagnostic de pannes. *Thèse de l'Université de Rennes 1*, 2002.
- [AOU03] A. Ouahbi, A. Iggidr, M. El Bagdouri. Stabilization of an exploited fish population. *Systems Analysis Modelling simulation*, **43** :513–524, 2003.
- [BAST88] G. Bastin et M. Gervers. Stable adaptive observer for nonlinear time varying systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. **33**, n° 7, pp 650–658, 1988.
- [BES00] G. Besançon. Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systes and Controls Letters*, vol. **41**, n° 4, pp 271–280, 2000.
- [BOR89] G. Bornard, N. Couenne, and F. Celle. Regularly persistent observer for bilinear system new trend in nonnonlinear control theory. *In Lecteur note in Control information sciences*. Springer Verlag Berlin New York, 1989.
- [CAR73] L. Carroll Robert, David P. Lindorff, An Adaptive Observer for Single-Input Single-Output Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. **18**, N°. 5, 1973.
- [CICA93] M. D. M. G. Ciccarella and A. Germani. Luenberger-like observer for nonlinear systems. *Int. J. Control*, **57** (3) :537–556, 1993.
- [CLARK90] W.C. Clark. *Mathematical bioeconomics : the optimal management of renewable ressources. 2nd ed.* Wiley-Interscience Publication. New York, 1990.
- [DIEN08] D. Ngom, A. Iggidr, A. Guiro, A. Ouahbi An observer for a nonlinear age-structured model of a harvested fish population *Mathematical Biosciences and Engineering* **5** (2) : 337–354, april 2008.
- [DEZ92] F. Deza, E. Busvelle, J. Gauthier, and D. Rakotopara. High gain estimation for nonlinear system. *Syst. Control Lett.*, **18** :292–299, 1992.

- [DUB03] B. Dubey, P. Chandra and P. Sinha A model for fishery resource with reserve area. *Nonlinear Anal. real World appl.*, **4** (4) :625–637, 2003.
- [FAR98] M. Farza, K. Busawon, and H. Hammouri, Simple nonlinear observer for online estimation of kinetic in bioreactors, *Automatica*, **34**, 301–318, 1998.
- [FREE65] Freeman, Herbert. *Discrete-time systems– an introduction to the theory*. John Wiley and Sons. New York 1965.
- [GETZ89] W.M. Getz and R.G. Haight. *Population harvesting, demographic models of fish, forest, and animal resources*. Princeton, New Jersey, 1989.
- [GUL83] J.A. Gulland, *Fish Stock Assessment, a manual of basic methods*, Wiley, Chichester (UK), 1983.
- [GUI08a] A. Guiro, A. Iggidr, D. Ngom, and H. Touré. A non Linear Observer for a fishery model. In *Proc. 17th Triennial IFAC World Congress*, Seoul, Korea, July 6–11, 676–681, 2008.
- [GUI08b] A. Guiro, A. Iggidr, D. Ngom, and H. Touré. A simple adaptive observer for a class of continuous linear time varying system with discrete output. In *Proc. 9th Biennial CARI Congress*, Rabat, Morocco, Oct. 27–30, 2008.
- [GUI08c] A. Guiro, A. Iggidr, and D. Ngom. Interval numerical observer : Application to a discrete time nonlinear fish model. In *Proc. 9th Biennial CARI Congress*, Rabat, Morocco, Oct. 27–30, 2008.
- [GUI09] A. Guiro, A. Iggidr, D. Ngom, and H. Touré. On the stock estimation for some fishery models. *Apear online Feb. 09 in Reviews in Fish Biology and Fisheries (RFBF)* .
- [GUY03] A. Guyard, Q. Zhang, Adaptive observer for discrete time linear time varying systems. *13th IFAC / IFORS Symposium on System Identification (SYSID'2003)*, Rotterdam, pages 1743-1748, 2003.
- [IGG92] A. Iggidr. *Sur quelques problèmes de stabilisation de systèmes non linéaires*. Thesis, University de Metz, France, 1992.
- [IGG04] A. Iggidr. *Controllability, observability and stability of mathematical models*, in Mathematical Models. In Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS). Ed. Jerzy A. Filar. Developed under the auspices of the UNESCO, Eolss Publishers, Oxford,UK, [[http ://www.eolss.net](http://www.eolss.net)].

- [JAC93] J. Quensière. De la modélisation halieutique à la gestion systémique des pêches. *Natures- Sciences - Sociétés*, **1** (3) :211, 219 1993.
- [JAZ70] A. H. Jazwinski. Stochastic Processes and Filtering Theory. *Mathematics in Science and Engineering*, New York, Academic Press, volume **64**, 1970.
- [JPG92] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for non linear system, application to bioreactor. *IEEE Trans. Automat. Control*, **37** :875–880, 1992.
- [JPG94] J. P. Gauthier and I. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. Control Optimization*, **32**(4) :975–994, 1994.
- [JPG01] J. P. Gauthier, I. Kupka. *Deterministic observation Theory and Applications*. Cambridge university press 2001.
- [KHAL02] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Third edition , Prentice Hall, 2002.
- [KREI03] G. Kreisselmeir and R. Engel. Nonlinear observer for autonomous Lipschitz continuous systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. **48**, pp 451–464, 2003.
- [KREI77] Kreisselmeir G. Adaptive observer with exponential rate of convergence. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. **22**, n° 1, pp 2–8, fev 1977.
- [KRE81] R. Hermann, A. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Automat. Control*, **22** :728–740, 1981.
- [KRE85] A. J. Krener and W. Respondeck Nonlinear observer with linearisable error dynamics, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **23**, 197–216, 1995.
- [KRE02] A. J. Krener and M. Xiao? Nonlinear observer design in the Siegel domain, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **41** (2003) 932–953.
- [LJU87] L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. Prentice Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, 1987, Second edition 1999.
- [LUE66] D. G. Luenberger. Observer for multivariable systems *IEEE Trans. Automat. Control*, **16** :596–602, 1971.
- [LUE71] D. G. Luenberger. An introduction to observer *IEEE Trans. Automat. Control*, **11** :190–197, 1966.

- [LUE79] D. G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*. John Wiley. New York, 1979.
- [MAR95] R. Marino, P. Tomei, Adaptive observers with Arbitrary Exponential Rate of Convergence for Nonlinear Systems. *IEEE transaction on Automatic Control*, vol. **40**, N°. 7, 1995.
- [MAR01] R. Marino, G. Santosuosso, P. Tomei, Robust adaptive Observer for Nonlinear System with Bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. **46**, N°. 6, 2001.
- [NAD03] M. Nadri, H. Hammouri, Design of a continuous-discrete observer for state affine systems. *Appl. Math. Lett.*, vol. **16**, N°. 6, 2003.
- [NAR89] K. S. Narendra, A. M. Annaswamy, *Stable adaptive systems*. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1989.
- [PENG98] M. Pengov Application des observateurs non linéaires à la commande des bioprocédés. *Thesis, Université de Metz, France, 1998*
- [RACH06] R. Mchich, N. Charouki, P. Auger, N. Raissi, and O. Ettahiri. Optimal spatial distribution of the fishing effort in a multi fishing zone model. *Ecological Modelling*, **197** (3-4) :274–280, 2006.
- [RAPA04] A. Rapaport and A. Maloum. Design of exponential observers for nonlinear systems by embedding. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **14** (3) :273–288, 2004.
- [RIC54] W. E. Ricker. Stock and recruitment *J. Fish. Res. Board Can.* **11** 559–623, 1954.
- [RIC80] W. E. Ricker. Calcul et interprétation des statistiques biologiques des populations de poissons. *Bulletin 191F, Fish. Res. Board Can.* 1980.
- [SAB91] Saber N. Elaydi, *An introduction to difference equations*. Springer, New York, 1991.
- [SAL98] O. Bernard, G. Sallet, and A. Sciandra. Nonlinear observer for a class of biological systems : application to validation of a phytoplanktonic growth model. *IEEE Trans. Automat. Control*, **43** :1056–1065, 1998.
- [SCH54] M. B. Schaeffer. Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisherie. *Bulletion of the inter-American tropical tuna commission* **1** (2), 27–56, 1954.

- [SCOT54] H. G. SCOTT The Economic Theory of a Common-Property Resource : The Fishery *Journal of Political Economy*. **62**, 2, 124-142, April 1954.
- [SHA82] M. Shahrokhi, M. Morari, A Discrete Adaptive Observer and Identifier with Arbitrarily Fast Rate of Convergence. *IEEE transaction on Automatic Control*, vol. **27**, N°. 2, 1982.
- [SONT98] E. D. Sontag. *Mathematical control theory. Deterministic finite dimensional systems. 2nd ed.* In Applied Mathematics. 6. New York, NY : Springer, 1998.
- [SS89] T. Söderström et P. Stoica. *System identification*. Prentice-Hall International series in systems and control engineering. Prentice Hall, 1989.
- [TOUZ97] S. Touzeau. *Modèles de contrôle en gestion des pêches*. Thesis, University of Nice-Sophia Antipolis, France, 1997.
- [TOUZ98] S. Touzeau and J.-L. Gouzé. On the stock–recruitment relationships in fish population models. *Environmental Modeling and Assessment*, **3** :87–93, 1998.
- [XIA03] M. Xiao, N. Kazantzis, C. Kravaris, and A. J. Krener, Nonlinear discrete-time observer design with linearizable error dynamics, *IEEE Trans. Autom. Control*, **48**, 622–626, 2003.
- [ZHA02] Q. Zhang, Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (mimo) linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. **47**, N°. 3, 2002.
- [ZIM94] G. Zimmer, State observation by on-line minimization *Int. J. Control*, **60**, 595–606, 1994.
- [ZHA05] Q. Zhang. Revisiting different adaptive observers through a unified formulation. In *Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05.*, pages 3067–3072, 12-15 Dec., 2005.

Annexe A

Construction du prolongement de la fonction φ de D à $\mathbb{R}^3$

The function φ is Lipschitz on the compact set $D = [a_0, b_0] \times [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Our aim is to extend it to a function $\tilde{\varphi}$ which is Lipschitz with the same Lipschitz coefficient in the whole $\mathbb{R}^3$.

Let $a(a_0, a_1, a_2)$, (respectively $b(b_0, b_1, b_2)$), the lower corner, (respectively the upper corner) of the domain D and $x(x_0, x_1, x_2)$ an unspecified point of $\mathbb{R}^3$.

The problem of the extension is set for point $x \notin D$; in this situation we have 26 possibilities according to the situation of x . The different situations correspond to $x_i \leq a_i$, $a_i \leq x_i \leq b_i$, or $x_i \geq b_i$.

The principle of this prolongation is to compose the function φ with the function π (the projection function of the point x on the domain D).

The extension of function φ is described by the following algorithm :

```
if  $x_0 \leq a_0$  then
  if  $x_1 \leq a_1$  then
    if  $x_2 \leq a_2$  then
       $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(a_0, a_1, a_2)$ 
    else
      if  $x_2 \leq b_2$  then
         $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(a_0, a_1, x_2)$ 
      else
         $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(a_0, a_1, b_2)$ 
      end.
    end.
  else
    if  $x_1 \leq b_1$  then
      if  $x_2 \leq a_2$  then
         $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(a_0, x_1, a_2)$ 
      else
        if  $x_2 \leq b_2$  then
```



```

                                 $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(a_0, x_1, x_2)$ 
                            else
                                 $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(a_0, x_1, b_2)$ 
                            end.
                        end.
                    else
                        if  $x_2 \leq a_2$  then
                             $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(a_0, b_1, a_2)$ 
                        else
                            if  $x_2 \leq b_2$  then
                                 $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(a_0, b_1, x_2)$ 
                            else
                                 $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(a_0, b_1, b_2)$ 
                            end.
                        end.
                    end.
                end.
            else
                if  $x_0 \leq b_0$  then
                    if  $x_1 \leq a_1$  then
                        if  $x_2 \leq a_2$  then
                             $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(x_0, a_1, a_2)$ 
                        else
                            if  $x_2 \leq b_2$  then
                                 $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(x_0, a_1, x_2)$ 
                            else
                                 $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(x_0, a_1, b_2)$ 
                            end.
                        end.
                    end.
                else
                    if  $x_1 \leq b_1$  then
                        if  $x_2 \leq a_2$  then
                             $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(x_0, x_1, a_2)$ 
                        else
                            if  $x_2 \leq b_2$  then
                                 $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(x_0, x_1, x_2)$ 
                            else
                                 $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(x_0, x_1, b_2)$ 
                            end.
                        end.
                    end.
                else
                    si  $x_2 \leq b_2$  then

```

```

         $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(x_0, b_1, x_2)$ 
      else
         $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(x_0, b_1, b_2)$ 
      end.
    end.
  end.
else
  if  $x_1 \leq a_1$  then
    if  $x_2 \leq a_2$  then
       $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(b_0, a_1, a_2)$ 
    else
      if  $x_2 \leq b_2$  then
         $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(b_0, a_1, x_2)$ 
      else
         $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(b_0, a_1, b_2)$ 
      end.
    end.
  else
    if  $x_1 \leq b_1$  then
      if  $x_2 \leq a_2$  then
         $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(b_0, x_1, a_2)$ 
      else
        if  $x_2 \leq b_2$  then
           $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(b_0, x_1, x_2)$ 
        else
           $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(b_0, x_1, b_2)$ 
        end.
      end.
    else
      if  $x_2 \leq a_2$  then
         $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(b_0, b_1, a_2)$ 
      else
        if  $x_2 \leq b_2$  then
           $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(b_0, b_1, x_2)$ 
        else
           $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, x_2) = \varphi(b_0, b_1, b_2)$ 
        end.
      end.
    end.
  end.
end.
end.
end.

```

*ANNEXE A. CONSTRUCTION DU PROLONGEMENT DE LA
FONCTION φ DE D À $\mathbb{R}^3$*

Annexe B

Preuve du Lemme 5.2.2

On part du fait que la condition (5.9) du Lemme 5.2.2 est équivalente à

$$\frac{1}{L} \sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i w\| \geq \beta \quad (\text{B.1})$$

pour une certaine constante positive et pour tout vecteur unitaire $w \in \mathbb{R}^p$. Cette équivalence est en fait basée sur l'inégalité suivante :

$$w^T \phi_k^T \phi_k w \leq \|\phi_k^T \phi_k w\| \leq \phi_{\max} \|\phi_k w\|$$

avec $\phi_{\max} = \sup_k \|\phi_k\|$ et w un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=k}^{k+L-1} w^T \phi_k^T \phi_k w \geq \frac{1}{L} \left(\sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_k w\| \right)^2.$$

Considérons la fonction (candidate) de Lyapunov suivante :

$$V_k = z_k^T z_k.$$

On a alors

$$\begin{aligned} V_k - V_{k+1} &= z_k^T z_k - z_{k+1}^T z_{k+1} \\ &= z_k^T z_k - z_k^T (I - \phi_k^T \phi_k)^T (I - \phi_k^T \phi_k) z_k \\ &= z_k^T (\phi_k^T \phi_k) z_k + z_k^T \left(\phi_k^T \phi_k - (\phi_k^T \phi_k)^2 \right) z_k \\ &\geq z_k^T (\phi_k^T \phi_k) z_k. \end{aligned}$$

Cette inégalité est due au fait que la matrice ϕ_k est telle que $\|\phi_k\| \leq 1$. Ainsi on peut alors écrire que

$$\begin{aligned} V_k - V_{k+L} &= \sum_{i=k}^{k+L-1} z_i^T (\phi_i^T \phi_i) z_i \\ &\geq \frac{1}{L} \left(\sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_i\| \right)^2 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Nous avons maintenant besoin de la borne inférieure de $\sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_i\|$.

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$ on a $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$; ainsi avons nous

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_i\| &= \sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_k - \phi_i(z_k - z_i)\| \\ &\geq \sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_i\| - \sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i(z_k - z_i)\|. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Le premier terme à droite de l'inégalité est borné, en utilisant (B.1), d'où

$$\sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_i\| \geq \beta L \|z_k\|.$$

Pour le second terme,

$$\sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i(z_k - z_i)\| \leq \phi_{\max} L \sup_{k \leq i \leq k+L-1} \|z_k - z_i\|,$$

par ailleurs

$$\begin{aligned} \sup_{k \leq i \leq k+L-1} \|z_k - z_i\| &\leq \sum_{i=k}^{k+L-1} \|z_i - z_{i+1}\| \\ &= \sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i^T \phi_i z_i\| \\ &\leq \phi_{\max} \sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_i\|. \end{aligned}$$

Revenant à l'équation (B.2), alors on obtient

$$\sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_i\| \geq \beta L \|z_k\| - \phi_{\max}^2 L \sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_i\|.$$

On tire alors

$$\sum_{i=k}^{k+L-1} \|\phi_i z_i\| \geq \frac{\beta L}{1 + \phi_{\max}^2 L} \|z_k\|$$

et il s'en suit que

$$V_k - V_{k+L} \geq \frac{\beta^2 L}{(1 + \phi_{\max}^2 L)^2} \|z_k\|^2.$$

L'inégalité (B.2) implique que $\beta \leq \phi_{\max}$, et par conséquent,

$$0 < \gamma = \frac{\beta^2 L}{(1 + \phi_{\max}^2 L)^2} < 1.$$

Par suite

$$V_{k+L} \leq (1 - \gamma) V_k,$$

d'où la convergence de V_k .

Annexe C

Invariance positive de D_w

Soit $N = x_1 + x_2$.

$$\dot{N} = -qEx_1 + r_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) x_1 + (N - x_1) \left(1 - \frac{N - x_1}{K_2}\right) r_2.$$

Soit w un réel positif, pour $N = w$, on a :

$$\dot{N} = -qEx_1 + r_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) x_1 + (w - x_1) \left(1 - \frac{w - x_1}{K_2}\right) r_2 = g(x_1)$$

La fonction g est définie pour $0 \leq x_1 \leq w$.

$$g(0) = w \left(1 - \frac{w}{K_2}\right) r_2$$

$$g(w) = -quw + w \left(1 - \frac{w}{K_1}\right) r_1$$

$$g'(x_1) = r_1 - r_2 - qu + \frac{2wr_2}{K_2} - 2 \left(\frac{r_1}{K_1} + \frac{r_2}{K_2}\right) x_1$$

$$g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \bar{x}_1 = \frac{K_1(K_2r_1 - K_2r_2 - quK_2 + 2wr_2)}{2(K_2r_1 + K_1r_2)}$$

Le maximum de la fonction g est alors donné par l'expression suivante :

$$\frac{K_1K_2(qu - r_1 + r_2)^2 + (4K_2r_1r_2 + K_1(-4qur_2 + 4r_1r_2))w - 4(r_1r_2)w^2}{4(K_2r_1 + K_1r_2)}.$$

Par ailleurs ce maximum est négatif si $w \geq w_0$ avec :

$$w_0 = \frac{r_1r_2(K_1 + K_2) - quK_1r_2 + \sqrt{r_2(K_2r_1 + K_1r_2)(K_1(-qu + r_1)^2 + K_2r_1r_2)}}{2r_1r_2} \quad (\text{C.1})$$

ceci montre que pour tout nombre réel $w \geq w_0$, l'ensemble compact

$$D_w = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 \leq w\}$$

est positivement invariant pour le système (3.10).