



HAL
open science

**ÉTUDE DES INTERRELATIONS ENTRE LES
DOMAINES NUMÉRIQUE, ALGÈBRIQUE ET
GÉOMÉTRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES
MATHÉMATIQUES AU SECONDAIRE: Une analyse
des pratiques enseignantes en classes de troisième et de
seconde.**

Luiz Marcio Santos Farias

► **To cite this version:**

Luiz Marcio Santos Farias. ÉTUDE DES INTERRELATIONS ENTRE LES DOMAINES NUMÉRIQUE, ALGÈBRIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU SECONDAIRE: Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde.. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2010. Français. NNT: . tel-00588484

HAL Id: tel-00588484

<https://theses.hal.science/tel-00588484>

Submitted on 23 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*« Quem mata o que não se come
Não perde por esperar »
Antônio Carlos e Jocaí*

*En écoutant parler, je pourrais comprendre
Voyant faire, je pourrai saisir
En faisant, j'apprends et donc, c'est plus difficile d'oublier.*

REMERCIEMENTS

Ayant enseigné pendant de nombreuses années au Brésil sans avoir eu de « formation en didactique des mathématiques », j'ai ressenti le besoin de développer une recherche dans le domaine de la Didactique des Mathématiques. Pour cela, j'ai été accueilli, en France, par le laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique Education et Formation (LIRDEF) et l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Université de Montpellier II dans lequel le laboratoire a ses locaux. J'ai travaillé sur un sujet de thèse qui ne pouvait manquer d'être passionnant car répondant à des questions socialement vives, mais qui s'est révélé pour moi parfois difficile et même douloureux à explorer, car il renvoyait à des questions épineuses, d'antan ou historiques ou de faits actuels.

Je voudrais ici remercier très chaleureusement Alain Bronner qui, tout en dirigeant avec compétence mon travail, a su tenir compte des difficultés que j'ai rencontrées, ce qui, de ce fait, m'a aidé à les affronter. Là, bien sûr, ne s'arrêtent pas les remerciements que je lui adresse : j'ai beaucoup appris, à la fois, des nombreuses séances de travail – toujours très riches – que nous avons eues ensemble et des différents travaux qu'il m'a suggéré d'effectuer. Ses compétences scientifiques et la confiance qu'il m'a manifestée, jointes à un engagement fort et une disponibilité à toute épreuve, ont permis à cette thèse de s'élaborer au fil du temps.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux membres du jury : Merci à Madame Michèle Artaud, Madame Teresa Assude, Monsieur Saddo Ag Almouloud et Monsieur Alain Kuzniak d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens à remercier très sincèrement les membres du laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique Education et Formation (LIRDEF) pour m'avoir accueilli dans leurs locaux lors de ma thèse. J'adresse mes remerciements, tout particulièrement, à Madame Dominique Bucheton et à tous les membres de l'équipe ERES, au sein de laquelle j'ai effectué cette recherche. Je remercie Monsieur Jean-Michel Dusseau, responsable d'équipe, les chercheurs, Madame Mirène Larguier, Madame Muriel Guedj, Monsieur Jean-François Favrat, les doctorants et les jeunes chercheurs Nathalie, Dominique, Oumar pour leurs soutiens et nos discussions qui ont tellement fait avancer ma recherche. Je remercie aussi Madame Marlène Lasne, Madame Nayma Romy, Madame Amel Salhi pour toute leur aide.

Je suis profondément reconnaissant à Madame Brigitte Villers et à Monsieur Jacques Sicard pour avoir toujours trouvé du temps pour m'aider dans les corrections dans ce travail. Je remercie aussi Madame Henriette Chevallier, Monsieur Edmond Prunier et Monsieur Bernard Prudhomme.

Je souhaite remercier aussi les enseignants pour avoir accepté les observations à propos de ce travail. Merci aussi aux élèves y ayant participé.

J'aimerais remercier également l'Institut des Mathématiques de l'Université Catholique de Salvador pour le soutien, depuis le Brésil, au cours des années de mes études en France. Mes remerciements s'adressent, en particulier, à Monsieur Antônio dos Santos Filho, Madame Maria Auxiliadora Lisboa Moreno Pires et à Madame Maria das Graças Auxiliadora Fidelis Barboza qui m'a, la première, proposé de commencer une recherche. C'est sûrement grâce à elle que je suis parti pour la France.

Mes remerciements s'adressent aussi au Gouvernement Brésilien, notamment, à CAPES, au Gouverneur de l'État de Bahia, Monsieur Paulo Ganem Souto, à la Rectrice de l'Université de l'État de Bahia, Madame Ivete Alves do Sacramento et au commandement de la Police Militaire de l'État de Bahia, pour m'avoir donné une opportunité d'étudier en France.

J'aimerais remercier encore mes parents, mes frères, mes sœurs et mes amis au Brésil et en France, dont le soutien constant m'a été précieux : Samuel, Nilza, Heverton, Chico, Ana Paula, Bernard, Marie-Laure, Vincent, Stéphanie, Cédric, David, Laurent,... Ils ont su trouver les moyens et les mots pour me soutenir pendant ces années de thèse.

Un grand merci à Tia Maria, Tia Carminha et Tio Deraldo pour m'avoir épaulé, sans faillir, au cours de mes différentes années de thèse, pour m'avoir aidé dans les moments les plus épineux de mon travail. Merci...

Pour terminer, je voudrais remercier mes enfants Maria et Victor, et mon épouse, Virginia, qui ne savent, que trop, ce que veut dire « absence en présence ». Ils m'auront soutenu, chacun à sa façon, mais en permanence et sans jamais rechigner, durant ces nombreuses années pendant lesquelles notre vie familiale a été quelque peu perturbée. Qu'ils en soient, ici, une fois encore, plus que remerciés.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	15
PARTIE A	21
CHAPITRE A1: PROBLEMATIQUE	22
1 INTRODUCTION AU CONTEXTE DE RECHERCHE.....	22
1.1 La discipline mathématique.....	22
1.2 Les raisons d'être	23
1.2.1 Une pratique problématique.....	23
1.2.2 Une situation révélatrice	23
1.3 Nos premières questions dans le champ didactique.....	25
2 RECHERCHES ANTERIEURES	26
2.1 Les agrégats	27
2.1.1 Les agrégats de connaissances et de situations	27
2.1.1.1 Les agrégats formels	27
2.1.1.2 Les agrégats fonctionnels	28
2.2 Les cadres et les registres	28
2.2.1 Cadres	28
2.2.2 Registres	28
2.3 Conceptualisation des objets mathématiques	29
2.3.1 Schème et Concept	29
2.4 Interactions du savoir	29
2.4.1 Les assortiments didactiques.....	29
2.4.2 Les assortiments.....	30
2.5 Vers les praxéologies	31
3 PROBLEMATIQUE.....	31
3.1 L'état de lieux du NAG dans l'EMS.....	31
3.1.1 Les domaines mathématiques	32
3.1.1.1 Le numérique	32
3.1.1.2 L'algèbre	32
3.1.1.3 La géométrie	33
3.1.2 Dans les programmes.....	33
3.1.2.1 Au collège.....	34
3.1.2.2 Au lycée	35
3.1.3 Une importance accordée aux interrelations	36
3.1.4 Objet d'étude.....	37
3.1.4.1 Le champ de recherche.....	37
3.1.4.2 Les domaines mathématiques étudiés et leurs interrelations	37
3.1.5 Questions de la recherche et hypothèses.....	38
3.1.5.1 Hypothèses de recherche	39
CHAPITRE A2 : CADRE THEORIQUE.....	41
4 CHANGEMENTS DE CADRES ET DE REGISTRES.....	41
4.1 Cadres.....	41
4.2 Registres de représentations sémiotiques	41

5	LA THEORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE	43
5.1	La TAD et les mathématiques	43
5.2	Une écologie pour le savoir	43
5.3	La transposition didactique.....	45
5.4	Le rapport personnel et institutionnel	46
5.5	Les praxéologies	47
5.6	Les cadres et la TAD.....	48
6	LE FILTRE DU NUMERIQUE	50
6.1	Le type de nombre.....	50
6.2	Les opérateurs.....	50
6.3	Les comparateurs	51
6.4	Le filtre	51
	CHAPITRE A3 : METHODOLOGIE.....	53
7	METHODOLOGIE GENERALE.....	53
7.1	Partie B : Éléments historiques et épistémologiques	53
7.2	Partie C : Analyse institutionnelle.	53
7.3	Partie D : Analyse des pratiques.....	54
7.4	Partie E : Analyse des interviews des enseignants.....	54
8	CHOIX ET PROCEDURES METHODOLOGIQUES	54
8.1	Les observables, le recueil de données et les outils	55
8.1.1	Les classes	55
8.1.2	Les enseignants.....	56
8.1.3	Description des classes	57
8.1.3.1	La troisième	57
8.1.3.2	La seconde	58
8.1.4	La procédure.....	59
8.1.5	Les observables	60
8.1.5.1	L'ensemble des observations au collège.....	61
8.1.5.1.1	<i>L'ensemble des observations du premier trimestre.....</i>	<i>61</i>
8.1.5.1.2	<i>L'ensemble des observations du deuxième trimestre.....</i>	<i>62</i>
8.1.5.1.3	<i>L'ensemble des observations du troisième trimestre</i>	<i>63</i>
8.1.5.2	L'ensemble des observations au lycée	64
8.1.5.2.1	<i>L'ensemble des observations du premier trimestre</i>	<i>64</i>
8.1.5.2.2	<i>L'ensemble des observations du deuxième trimestre</i>	<i>65</i>
8.1.5.2.3	<i>L'ensemble des observations du troisième trimestre</i>	<i>66</i>
8.1.6	Les dispositifs de recueils de données et les outils.....	67
8.1.6.1	Le dispositif.....	67
8.1.6.2	Les outils.....	68
8.2	Conclusion	70
	PARTIE B.....	71
	CHAPITRE B1:ASPECTS HISTORIQUES	72
9	ASPECTS HISTORIQUES ET EPISTEMOLOGIQUE SUR LES INTERRELATIONS NUMERIQUES, ALGEBRIQUES ET GEOMETRIQUES.....	72
9.1	Les interrelations et le développement des mathématiques	72
9.2	Quelques écologies pour les interrelations entre les grands domaines mathématiques.....	72

9.2.1	Le problème du doublement de volume du cube	72
9.2.2	Les nombres constructibles	75
9.2.2.1	Opérations avec les nombres constructibles	76
9.2.3	Les équations du deuxième degré	77
9.2.4	Les formulations de Descartes et Hilbert	78
9.2.4.1	Les constructions géométriques chez Descartes	79
9.2.4.1.1	<i>La multiplication</i>	80
9.2.4.1.2	<i>La division</i>	80
9.2.4.1.3	<i>L'extraction de la racine carrée</i>	81
9.2.4.1.4	<i>Les équations</i>	81
9.2.4.2	David Hilbert et l'axiomatisation de la géométrie.....	82
9.2.4.2.1	<i>Le calcul de l'addition de segments</i>	83
9.2.4.2.2	<i>Le calcul de la multiplication de segments</i>	83
9.2.4.2.3	<i>Le calcul du quotient de segments</i>	83
9.3	Analyse praxéologique des éléments historiques	84
9.4	Conclusion	86
PARTIE C		89
CHAPITRE C1 : ETUDE DES PROGRAMMES		90
10 NOTRE QUESTIONNEMENT.....		90
10.1	Une méthodologie basée sur deux approches.....	90
CHAPITRE C2 : L'ANALYSES DES PROGRAMMES.....		92
11 LES PROGRAMMES.....		92
11.1	LES PROGRAMMES EN FRANCE.....	92
11.1.1	Le Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale	92
11.1.2	Analyse des programmes au collège	93
11.1.2.1	Une vue générale des programmes au collège en France	93
11.1.2.1.1	<i>La sixième</i>	93
11.1.2.1.2	<i>La cinquième</i>	95
11.1.2.1.3	<i>La quatrième</i>	95
11.1.2.1.4	<i>La troisième</i>	96
11.1.2.2	Utilisation générale du NAG au collège.....	97
11.1.3	Analyse des programmes au lycée	97
11.1.4	Les programmes par niveau	97
11.1.4.1	La Seconde	98
11.1.4.2	La Première.....	98
11.1.4.3	La Terminale.....	99
11.1.5	Utilisation générale du NAG au lycée	99
11.1.6	Conclusion de l'analyse des programmes.....	99
PARTIE D		103
CHAPITRE D1 : PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT		104
12 LA PRATIQUE		104
12.1	Une première notion.....	104
12.1.1	En vue d'une définition de la pratique.....	104
12.1.1.1	Une pratique dans un métier évolutif.....	104
12.1.1.2	La recherche et la pratique pédagogiques contemporaines	105

12.1.1.3	Les dimensions de la pratique.....	105
12.1.1.4	Quelques définitions de la pratique.....	106
12.1.2	Notre définition de la pratique.....	107
CHAPITRE D2 : METHODOLOGIE GENERALE		108
13 CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE D'ANALYSE.....		108
13.1	Cadre théorique.....	108
13.1.1.1	Les praxéologies.....	109
13.1.1.2	Les organisations mathématiques et didactiques.....	111
13.1.2	Le filtre du numérique.....	111
13.2	Méthodologie d'analyse des séances.....	111
13.2.1	La trame.....	112
13.2.2	Description de l'organisation mathématique.....	113
13.2.3	Analyse de l'organisation didactique.....	114
CHAPITRE D3 : POUR DECRIRE LES PRATIQUES.....		116
14 LE STYLE DIDACTIQUE ET LE DISCOURS.....		116
14.1	Le style.....	116
14.1.1	Style didactique.....	117
14.2	Le discours.....	117
14.3	La grille d'analyse.....	120
CHAPITRE D4 : ANALYSE GENERALE AU COLLEGE.....		122
15 L'ENSEMBLE DE SEANCES.....		122
15.1	Les séances au collège.....	122
15.1.1	Description des principales tâches.....	124
15.2	Les principaux types de tâches.....	126
15.3	L'ensemble de séances et un style didactique.....	128
15.3.1	Le style didactique de P1.....	128
15.3.1.1	La progression et le cahier de textes.....	128
15.3.1.2	Déroulement général des séances.....	129
15.3.1.3	Les écrits dans les cahiers des élèves.....	130
15.4	Les phases et les catégories de séances.....	131
15.4.1	Les phases.....	131
15.4.1.1	Les phases magistrales – CU.....	132
15.4.1.2	Les phases d'exercices – EX.....	132
15.4.1.3	Les phases de correction – CO.....	133
15.4.1.4	Les phases de remédiation –TG.....	133
15.4.2	Les catégories de séances.....	134
15.4.3	Utilisation potentielle du NAG par catégories de séances.....	134
15.4.4	Les séances de catégorie 06.....	135
15.4.4.1	Un lieu pour une praxéologie plus complète pour le NAG.....	136
15.4.4.2	Le NAG dans les praxéologies de la catégorie 06.....	136
15.4.4.3	Une utilisation implicite du NAG.....	137
15.4.4.4	Le NAG dans les discours de P1 et des élèves.....	138
15.5	D'un bilan général vers les séances choisies.....	138
15.5.1	Un bilan statistique.....	139
15.5.1.1	L'utilisation potentielle du NAG.....	140
15.5.1.2	D'une utilisation potentielle à une utilisation effective.....	140

15.5.1.3	Le temps et la quantité d'utilisation du NAG	142
15.5.2	Une séance spécifique du NAG.....	143
CHAPITRE D6 : LES ANALYSES DES SITUATIONS DU NAG EN TROISIEME..		144
16	LA SEANCE C21	144
16.1	La séance C21 dans le chapitre 03	144
16.2	Une situation du NAG dans la séance C21	147
16.3	Le problème périmètre	149
16.4	Trame et description générale de la <i>situation périmètre</i>	151
16.4.1	Organisation mathématique dynamique de la situation	157
16.5	Description des organisations mathématiques.....	159
16.5.1	L'organisation mathématique visée par P1	159
16.5.2	L'organisation mathématique qui va apparaître dans la séance.....	161
16.6	Analyse de l'organisation didactique de la situation périmètre.....	166
16.6.1	Analyse globale de l'organisation didactique.....	170
16.6.2	Analyse de l'organisation didactique par phases	172
16.6.2.1	Phase 0 - Synthèse sur la résolution des inéquations.....	172
16.6.2.2	Phase I - Construction géométrique de la figure.....	173
16.6.2.3	Phase II - Mise en évidence de la question à résoudre.....	175
16.6.2.4	Phase III - Exploration de quelques configurations à l'aide du Cabri.	176
16.6.2.5	Phase IV - Mise en équation du problème.....	177
16.6.2.6	Phase V - Résolution de l'inéquation par les élèves.	181
16.6.2.7	Phase VI - Résolution de l'inéquation par P1 (correction).....	182
16.6.2.8	Phase VII - Retour au problème périmètre.....	184
16.6.3	Le problème périmètre dans le programme et le manuel de la classe.....	186
16.6.4	Synthèse de l'analyse de la situation périmètre.	189
16.6.4.1	Le savoir en jeu	189
16.6.4.2	A propos des interactions P1-élèves	191
16.6.4.3	L'enchaînement des tâches dans la séance	191
16.6.4.4	Les changements de cadres.....	193
CHAPITRE D7 : ANALYSE GENERALE AU LYCEE		194
17	ENSEMBLE DES SEANCES	194
17.1	Les séances au lycée.....	194
17.1.1	Description des principales tâches	196
17.2	L'ensemble des séances et un style didactique	199
17.2.1	Le style didactique de P2	199
17.2.1.1	La progression et l'utilisation du NAG	200
17.2.1.2	La séance n'est pas seulement magistrale	201
17.2.1.3	Les dialogues dans le miroir.....	202
17.2.1.4	Déroulement général des séances	202
17.2.1.4.1	<i>Une présence considérable du NAG</i>	203
17.2.1.4.2	<i>L'erreur et le devoir</i>	203
17.2.1.4.3	<i>L'utilisation des manuels</i>	204
17.2.2	Une modélisation pour les séances chez P2	204
17.2.2.1	Les étapes des séances	204
17.2.2.2	Début de la séance.....	206
17.2.2.2.1	<i>Tâche d'organisation</i>	206
17.2.2.2.2	<i>Correction 1</i>	206
17.2.2.3	Noyau ou cœur de la séance	206

17.2.2.3.1	<i>Introduction d'un contenu nouveau</i>	206
17.2.2.3.2	<i>Tâches coopératives</i>	206
17.2.2.3.3	<i>Travail individuel</i>	207
17.2.2.3.4	<i>Correction 2</i>	207
17.2.2.4	Clôture de la séance	207
17.2.2.4.1	<i>Devoir à la maison</i>	207
17.2.2.4.2	<i>Tâche de structuration</i>	207
17.3	D'un bilan général vers les séances choisies	209
17.3.1	Un bilan statistique	210
17.3.1.1	L'utilisation potentielle du NAG	211
17.3.1.2	D'une utilisation potentielle à une utilisation effective	212
17.3.2	Les séances pour une analyse plus fine	214

CHAPITRE D9 : LES ANALYSES DES SITUATIONS DU NAG EN SECONDE .216

18 LA SEANCE L5 : LA DIFFERENCE ENTRE LES CARRÉS DE DEUX NOMBRES ... 216

18.1	Positionnement de la situation du NAG dans son chapitre	216
18.2	Description générale et trame de la séance L5	221
18.2.1	Description générale de la séance L5.....	221
18.2.2	La trame de la séance L6	223
18.3	Description des organisations mathématiques.....	225
18.3.1	L'organisation mathématique visée par l'enseignant	226
18.3.2	L'organisation mathématique qui va apparaître dans la séance.....	228
18.4	Analyse de l'organisation didactique	229
18.4.1	Un complexe praxéologie.....	230
18.4.1.1	Le premier moment de l'étude	232
18.4.1.2	L'exploration de $t_{carré2}$ et début de l'élaboration de la technique	233
18.4.1.2.1	<i>Recherche d'une technique pour $t_{carré2}$</i>	233
18.4.1.2.2	<i>Travail sur de t_{d1} et t_{v1}, l'élaboration technologico-théorique</i>	235
18.4.1.3	Le travail d'amélioration de la technique	239
18.4.1.4	L'organisation mathématique élaborée.....	242
18.4.1.5	Le moment de l'évaluation.....	244
18.4.1.6	L'Organisation Mathématique présente dans le manuel.....	246
18.4.1.7	Synthèse	250
18.4.1.7.1	<i>Le savoir en jeu</i>	250
18.4.1.7.2	<i>A propos les interactions P2-élèves</i>	252
18.4.1.7.3	<i>L'enchaînement de la séance</i>	252
18.4.1.7.4	<i>Les changements de registres</i>	253

PARTIE E.....255

CHAPITRE E1 : OUTILS D'ANALYSE256

19 LES OUTILS.....256

19.1	Séance préparée à notre demande	256
19.1.1	L'entretien sur le NAG	256
19.1.1.1	La méthodologie utilisée dans les entretiens.....	256
19.1.1.2	La méthodologie de conduite des interviews.....	257
19.1.1.3	Conception du guide d'entretien	259
19.1.1.3.1	<i>Contenu du guide d'entretien</i>	259
19.1.1.3.2	<i>Les questions générales du guide</i>	260
19.1.1.3.3	<i>Thème 1 : Informations générales</i>	261

19.1.1.3.4	<i>Thème 2 : Rapport de l'enseignant au NAG concernant le programme</i>	261
19.1.1.3.5	<i>Thème 3 : Rapport de l'enseignant au NAG du point de vue des manuels....</i>	262
19.1.1.3.6	<i>Thème 4 : Rapport de l'enseignant au NAG du point de vue de l'élève.....</i>	263
19.1.1.3.7	<i>Thème 5 : Rapport de l'enseignant au NAG du point de vue de sa pratique.</i>	263
19.1.1.3.8	<i>Thème 6 : Rapport de l'enseignant au NAG du point de vue épistémologique..</i>	264
19.1.1.4	L'analyse - a priori - de l'entretien sur le NAG.....	265
19.1.1.5	Les questions spécifiques posées à l'enseignant.....	269
	CHAPITRE E2 : ANALYSE DES INTERVIEWS	270
	20 METODOLOGIE D'ANALYSE DES ENTRETIENS.....	270
20.1	Une analyse thématique par parties	270
20.1.1	Informations générales	271
20.1.2	Le rapport de l'enseignant au NAG du point de vue des programmes.	271
20.1.3	Le rapport de l'enseignant au NAG du point de vue des manuels ;	272
20.1.4	Le rapport de l'enseignant au NAG du point de vue de l'élève	273
20.1.5	Le rapport de l'enseignant au NAG du point de vue de sa pratique	274
20.1.6	Le rapport de l'enseignant au NAG du point de vue épistémologique	275
	BIBLIOGRAPHIES	283
	21 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	284
	22 LES ANNEXES.....	294

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude didactique des interrelations entre les grands domaines mathématiques dans les pratiques de l'enseignement. Dans notre étude, les domaines mathématiques sont réduits au **numérique-algébrique** et au **géométrique** dans l'enseignement des mathématiques au secondaire – **EMS** - en France.

L'utilisation des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique relève d'une écologie spécifique encore peu étudiée et fortement limitée par des contraintes transpositives émanant des différents niveaux de codétermination didactique (Bronner 1997 ; 2007).

Ces interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique seront désignées, dans la suite de notre travail, par le sigle **NAG**. En fait, le **NAG** est un sujet complexe qui se décline sous divers aspects selon le contexte et les époques.

La question des interrelations entre les domaines mathématiques est, en premier lieu, une question d'ordre épistémologique et historique :

« Repérer les obstacles géométriques et numériques du Numérique chez les Grecs, mesurer les avancées des civilisations babylonienne et grecque, étudier les formes de vie des objets nombre, nombre rationnel, racine carrée chez les mathématiciens à diverses époques, permet de caractériser l'environnement scientifique et culturel. Cet environnement induit des contraintes fortes sur l'épistémologie des savoirs à enseigner. » (Bronner, 1997, p.6)

En considérant l'histoire des mathématiques (Boyer, 1996), même de façon succincte, nous relevons des événements qui montrent des interrelations entre les domaines mathématiques. Ces épisodes, repérés au long de l'histoire des mathématiques, ont contribué au développement de celles-ci.

Les relations entre l'Algèbre et la Géométrie ont une histoire très ancienne (peut-être depuis le troisième millénaire avant J.C. en Mésopotamie). Ces relations ont été réciproques et ont marqué l'histoire des mathématiques. Dans ce contexte, nous pouvons citer par exemple la résolution des problèmes d'algèbre - comme résoudre une équation du second ou du troisième degré – en utilisant des techniques issues de la géométrie élémentaire. Ainsi, on peut constater ces relations dans la méthode proposée par Omar Khayyam pour résoudre des équations cubiques par intersection entre un cercle et une parabole : il combina la trigonométrie et les approximations fonctionnelles pour obtenir des méthodes de résolution géométrique des équations algébriques. De même, nous pouvons citer les démonstrations de certaines identités algébriques à l'aide de la géométrie euclidienne ; c'est le cas des égalités définissant les règles d'addition et de multiplication des fractions, ou encore des identités remarquables les plus élémentaires. De façon plus problématique, des méthodes algébriques de résolution de problèmes géométriques ont aussi été utilisées à la fin de la Renaissance (Boyer, 1996).

La géométrie a, pendant longtemps, été au service de l'étude de l'algèbre. Mais, au début du XVI^e siècle, René Descartes a inversé cette situation. L'application de la méthode cartésienne a rendu possible la résolution de nombreux problèmes de géométrie. René Descartes, en 1637, a forgé une relation entre la géométrie et l'algèbre, qui reste l'un des fondements de la géométrie analytique dans laquelle on représente les figures à travers des expressions algébriques. Ainsi, nous trouvons dans les travaux de Descartes, sur lesquels nous reviendrons, des interrelations entre les domaines mathématiques vus sous deux aspects. D'une part, ce mathématicien ouvre la voie à une utilisation plus intensive du cadre algébrique en géométrie, en montrant comment tout

nombre, même exprimant une aire ou un volume, peut être représenté par une longueur. La droite numérique absorbe ainsi tous les nombres. D'autre part, ceci lui permet d'introduire le cadre de la géométrie cartésienne (avec des coordonnées), et donc, l'utilisation de l'outil algébrique avec lequel on peut calculer, plus ou moins automatiquement, en géométrie. Descartes inaugure ainsi une grande évolution par rapport à la géométrie des Grecs. En fait, les travaux de Descartes montrent bien la présence du **NAG** dans l'histoire des mathématiques au XVII^e siècle, et permettent de bien comprendre le lien utile de ces interrelations dans le développement des mathématiques.

Nous pouvons trouver aussi des interrelations entre l'analyse, l'arithmétique et l'algèbre avec l'invention du calcul différentiel et intégral qui a entraîné plusieurs avancées dans la pensée occidentale. Le mathématicien Leonhard Euler a été l'un des pionniers dans l'application des méthodes du calcul différentiel à des problèmes de Théorie des nombres, donnant naissance à la Théorie Analytique des Nombres (Taton, 1969). Le mathématicien allemand G.F.B. Riemann est reconnu comme le fondateur de la Théorie Analytique des Nombres. La fonction ζ de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

est une fonction analytique complexe qui est apparue essentiellement dans la théorie des nombres premiers. Elle est importante comme fonction modèle dans la théorie des séries de Dirichlet et se trouve au carrefour d'un grand nombre d'autres théories (Boyer, 1996). Il a montré que des propriétés de cette fonction sont intimement liées à la distribution des nombres premiers. La position de ses zéros complexes est liée à la répartition des nombres premiers. En 1896, le mathématicien français J. Hadamard et le mathématicien belge C.J. De La Vallée Poussin ont démontré, indépendamment, le Théorème du nombre premier : « le nombre de nombres premiers

inférieurs ou égaux à n est équivalent à $\frac{n}{\ln n}$ quand n tend vers plus l'infini » en utilisant les

idées développées par Riemann. La fonction zêta a permis de faire évoluer la connaissance des nombres premiers. Par la suite, cette fonction a été étudiée pour elle-même, passant ainsi d'outil d'analyse au statut d'objet mathématique d'analyse (Dahan-Dalmedico & Peiffer, 1986). En fait, des propriétés sur les nombres premiers ont été étudiées par des mathématicien en utilisant des éléments d'analyse (fonction zêta.) et ce, dans le domaine de l'arithmétique. En utilisant ces outils d'analyse, ils démontrèrent ainsi les propriétés des nombres premiers. Cette époque de l'histoire des mathématiques nous semble particulièrement représentative de la présence des interrelations entre les différents domaines mathématiques, plus précisément, l'analyse et l'arithmétique, dans les grandes transformations, et même, les véritables mutations que connurent les mathématiques.

Ces multiples interrelations entre les différents domaines mathématiques ont aidé les mathématiques à résoudre des problèmes, à dépasser certains obstacles, etc. En fait, le savoir mathématique de référence n'a pas cessé d'utiliser les interrelations existant entre les domaines mathématiques dans l'organisation de cette discipline de façon de plus en plus sophistiquée.

Depuis de nombreuses années, la didactique des mathématiques a mis en évidence, l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné. Selon Chevallard (1985), cet écart est dû à des reformulations subies par les objets du savoir savant, afin de les rendre « enseignables », par la noosphère¹ avec des influences croisées des professeurs, des inspecteurs, des militants pédagogiques et des associations de professeurs, des syndicats et des commissions ministérielles qui élaborent les programmes. Les mathématiques enseignées aujourd'hui sont, de façon générale, une mise en forme de savoirs spécifiques à l'enseignement, pour rendre possible le

¹ La noosphère est la « sphère où l'on pense le fonctionnement didactique » qui est constituée des « représentants du système d'enseignement » et des « représentants de la société » (Chevallard 1991, p.25).

processus d'enseignement, sous l'influence de différentes institutions cherchant à imposer leurs points de vue en fonction de leurs intérêts.

Au cours de ces opérations, le savoir subit une « décontextualisation », dans la mesure où il est extrait du contexte qui lui donnait sa signification. Par exemple, l'utilisation du **NAG**, dont nous avons donné quelques exemples précédemment, peut ne pas avoir la même signification dans le contexte scolaire d'aujourd'hui où l'enjeu de la pratique bascule vers les apprentissages de concepts, l'élaboration d'outils, les résolutions de problèmes, etc. Car les objets mathématiques, pour pouvoir être enseignés, doivent être « recontextualisés », c'est-à-dire, retrouver une signification dans le cadre scolaire. Le passage du « savoir savant » au « savoir à enseigner » sera aussi à interroger au niveau de l'utilisation du **NAG**. Ainsi le **NAG** ne va pas échapper aux phénomènes de la transposition didactique, que Chevallard a mis en évidence. Une des questions qui se posent sera d'étudier la prise en charge du **NAG** dans l'enseignement des mathématiques d'aujourd'hui et comment celui-ci est pris en compte dans les pratiques des enseignants de mathématiques au secondaire.

L'utilisation des interrelations entre les domaines mathématiques, dans les recommandations officielles, semble implicite, les interrelations mentionnées concernent plutôt les mathématiques et d'autres disciplines et non les interrelations entre les différents domaines mathématiques. Le programme des mathématiques insiste plutôt sur l'importance de montrer aux élèves les interrelations entre les mathématiques et d'autres disciplines :

« Cependant, les mathématiques ont leur autonomie propre et l'efficacité des concepts qu'elles étudient, due à leur universalité, leur permet d'intervenir dans des domaines aussi divers que la physique - chimie, les sciences de la Vie et de la Terre, la technologie, la géographie... Certaines de ces disciplines entretiennent des liens très étroits avec la discipline mathématique qui leur apporte l'efficacité de ses outils et, en retour, nourrit sa réflexion des problèmes qu'elles lui soumettent. L'enseignement tend à la fois à développer la prise de conscience de cette autonomie par les élèves et à montrer que l'éventail des utilisations est très largement ouvert. » (BO N° 4 du 9 septembre 2004, p.5)

Chevallard (2000) attire l'attention sur une évolution sensible des interrelations entre les domaines mathématiques et d'autres domaines dans l'EMS :

« Tout au long de ce siècle (vingtième siècle), les mathématiques enseignées au secondaire n'ont en fait pas cessé d'être progressivement épurées de leurs organisations « mixtes », c'est à dire des organisations praxéologique mettant en jeu, à côté d'objets mathématiques, un certain nombre d'objets non mathématiques. »

Dans le même ordre d'idées Chevallard (2001) signale que :

« La situation actuelle résulte d'un long processus de purification épistémologique, en rupture avec une tradition pluriséculaire de métissage culturel et d'hybridation épistémologique. Cette tradition d'ouverture et de mélange s'est longuement appuyée sur un concept qui lui-même est aujourd'hui perdu, celui de mathématiques mixtes. »

Mais dans la noosphère actuelle en France, qui prône un enseignement des mathématiques accessible à tous les citoyens, nous ne savons pas comment les interrelations entre les domaines mathématiques sont prises en compte au niveau des pratiques des enseignants dans l'EMS. Là aussi des évolutions importantes semblent se faire jour. Bronner (2007) souligne qu'à des périodes anciennes « en lien avec d'autres champs de connaissances mathématiques, l'arithmétique se spécifie en de nombreuses organisations de savoirs mathématiques, arithmétique décimale, arithmétique binaire, etc. jusqu'à voir l'algèbre comme une arithmétique universelle employée comme synonyme d'algèbre par Newton ». Dans le même sens, Bronner

insiste sur le fait que « l'arithmétique donnera aussi naissance à des organisations mixtes de savoirs dont un exemple représentatif est l'Arithmétique commerciale [...] »

Il nous semble, qu'à présent et de plus en plus, l'enseignement des mathématiques évolue dans un sens, plutôt inverse, vers un cloisonnement de la discipline et de ses domaines. Nous allons montrer qu'il y a, aujourd'hui, un problème de transposition didactique relatif au **NAG**. Nous considérons ce cloisonnement comme un problème de transposition, car ces interrelations anciennes entre les objets mathématiques et les objets non mathématiques, signalées précédemment par Chevallard, permettaient de mettre en avant des raisons d'être, des justifications, pour savoir pourquoi on utilisait telle mathématique. Par exemple, pourquoi utilise-t-on la fonction exponentielle en économie ? Pourquoi utilise-t-on le logarithme dans le calcul ? etc. A présent, la tendance est au cloisonnement avec des mathématiques enseignées épurées. Il semble que les interrelations entre les mathématiques et les autres disciplines ne sont pas prises en compte dans l'enseignement.

La question est de savoir s'il n'y a pas, également, un cloisonnement entre les grands domaines de l'EMS. C'est-à-dire, est-ce que le phénomène que pointe Chevallard sur le cloisonnement, concerne aussi les domaines mathématiques eux-mêmes : l'algèbre d'un côté, la géométrie de l'autre, etc., sans aucune relation entre elles. Ceci poserait des problèmes au niveau des pratiques des enseignants, car pour l'enseignement de certaines notions, il est utile, voire nécessaire de sortir des thèmes et des domaines, comme le souligne Chevallard :

« En nombre de cas, la difficulté, voire la quasi-impossibilité d'organiser l'étude d'un sujet ou d'un thème donné en y faisant intervenir autre chose que les moyens d'étude sur lesquels l'activité mathématique scolaire est aujourd'hui repliée – l'espace chorographique et les ostensifs que l'on peut y tracer –, tient à des contraintes installées au niveau de la discipline... » (Chevallard, 2000)

En réalité, aujourd'hui, les mathématiques sont repliées sur elles-mêmes au niveau de la discipline, parfois même au niveau d'un sujet, d'un thème, d'un secteur ou d'un domaine, sans prendre en charge les interrelations qu'ils peuvent avoir entre eux. Et d'ailleurs, cet enseignement se décompose encore plus, en traitant les mathématiques, sujet par sujet, comme le souligne Chevallard :

« Mais la remarque essentielle qu'appelle l'échelle des niveaux est la suivante : dans l'opération de détermination des organisations mathématiques qu'ils tenteront de mettre en place dans les classes, les professeurs tendent à ne se repérer que sur les niveaux de plus grande spécificité, sujets et thèmes. Ce qui mobilisera un professeur intervenant en classe de seconde, ainsi, ce sera le fait de devoir "traiter", dans la période en cours, le thème "mesures de tendance centrale et de dispersion", et, plus précisément, de se préparer à traiter, lors de la prochaine séance, le sujet intitulé "propriétés de linéarité de la moyenne" » (Chevallard, 2002, p.2-3)

Dans les derniers programmes français, il a y quelques éléments sur le **NAG**. Ces éléments sont souvent présentés de manière implicite, comme nous pouvons le voir dans l'extrait suivant :

« Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration. » (Programme défini par l'Arrêté du 10 juillet 2001, B.O. hors série n°2 du 30 août 2001.)

En fait, dans cet extrait du programme de seconde, on peut voir qu'il y a une demande pour enseigner les notions mathématiques à travers des interrelations entre leurs domaines, c'est-à-dire, de ne pas retravailler le calcul numérique, le calcul algébrique dans un domaine seul, mais en lien avec d'autres domaines comme par exemple, celui des fonctions.

De façon générale, à travers les recommandations officielles, nous pouvons voir que le **NAG** est relativement absent dans les programmes de mathématiques français. Pourtant, dans le domaine de la didactique de mathématiques, des contributions tant théoriques que pratiques, comme celles de Régine Douady (1984) et de Raymond Duval (1988 ; 1993), montrent l'intérêt d'un travail sur l'utilisation des interrelations entre les domaines mathématiques.

Les notions introduites en didactique des mathématiques par Régine Douady s'entrecroisent et sont aussi repérées dans les travaux des mathématiciens comme le souligne Rogalski :

« Régine Douady a introduit en didactique des mathématiques la notion de changement de cadre, de jeu de cadre et de dialectique outil - objet. C'est d'abord la pratique passée et présente des mathématiques et des mathématiciens qui a inspiré ces notions. [...]. » (Rogalski, 2001. p.13)

Dans son travail de thèse, Régine Douady a proposé une ingénierie s'appuyant sur la dialectique outil/objet. Elle a précisément eu l'idée de proposer aux élèves des problèmes où un changement de cadres ou un jeu de cadres permet un double travail sur différents domaines. En effet, la connaissance, acquise dans un certain cadre, ne permet pas toujours à l'élève de traiter le problème proposé, mais en passant dans un autre cadre, la connaissance nouvelle facilite parfois la résolution. En fait, par rapport à un problème, le changement de cadre peut amener de nouveaux apports, de nouveaux points de vue et de nouvelles méthodes de résolutions.

Pendant, malgré l'importance des jeux de cadre proposés par Douady, leur utilisation dans le processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, reste souvent encore très floue, implicite, même chez les mathématiciens, l'utilisation de ces interrelations reste parfois inconsciente comme l'indique Rogalski (2001) :

« De plus, l'utilisation de ces changements a sans doute été souvent inconsciente chez les mathématiciens du passé, mais il semble que ce ne soit plus toujours le cas aujourd'hui : des mathématiciens actuels pratiquent consciemment et volontairement les changements de cadre ou de niveau de conceptualisation, tant dans leur recherche que pour l'enseignement. Néanmoins, bien des mathématiciens, qui utilisent effectivement des changements de cadre, le font implicitement et ne sentent pas le besoin de l'explicitier. » (Rogalski, 2001. p.13)

Une question se pose, alors : comment le **NAG** peut-il intervenir effectivement dans ce processus ?

En s'inscrivant dans ces perspectives, nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier le **NAG** au niveau de la transposition didactique et des pratiques d'enseignement.

En fait, d'autres auteurs ont senti la nécessité de définir les différents domaines ou cadres et leurs articulations. Nous retrouvons cela dans les travaux de Chevallard (2002) à travers des définitions et des articulations qu'il propose entre différents éléments de ce qu'il appelle les « niveaux de détermination didactique » : sujets, thèmes, secteurs et domaines, disciplines.

Ainsi, notre travail cherche à étudier la place et le rôle des interrelations existant entre les différents cadres ou domaines², secteurs, thèmes, sujets mathématiques dans le contexte des pratiques des enseignants.

L'enseignement au secondaire propose de mettre en place des connaissances mathématiques organisées à travers des domaines différents (de façon générale : numérique, algébrique, géométrique, analyse, ...). Les domaines du numérique et de l'algébrique ont des liens assez naturels, fondés sur les nombres et le calcul, et ces liens nourrissent les activités, tant

² Dans ce travail, les mot domaine, secteur, thème, sujet seront pris au sens de Chevallard (2002).

dans le domaine numérique que dans l'algébrique, ce qui nous a conduit à considérer un seul domaine : le domaine numérique-algébrique.

Depuis les traditions géométriques grecques, des relations évidentes entre les trois domaines ont surgi inévitablement comme dans le cas de l'exposition des théorèmes de Pythagore et de Thalès.

Mais on ne sait pas très bien comment les enseignants utilisent ces interrelations entre les domaines et font travailler leurs élèves sur les liens complexes entre ces domaines. Dans cette perspective, il nous a paru important de mener une étude didactique sur les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique. Notre étude envisage, dans le cadre d'une perspective anthropologique, d'analyser cette question sur le plan des conditions actuelles d'enseignement des mathématiques au secondaire. Ces éléments nous permettront ensuite d'analyser, plus précisément, les rapports des enseignants à l'objet **NAG** et les travaux qu'ils réalisent en classe de troisième et de seconde. Partant de cette idée, nous nous sommes alors posé la question de savoir si certaines difficultés rencontrées dans l'EMS, au niveau des pratiques des enseignants lors des processus d'études, ne sont pas, au moins en partie, générées par un manque de connaissance et de prise en compte du **NAG**. Ce qui nous amènera au questionnement suivant :

Quelles sont les conditions et les contraintes qui vont influencer la mise en place et l'utilisation des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique dans l'Enseignement des Mathématiques au Secondaire ?

Le présent travail a pour ambition de tenter de répondre, au moins partiellement, à cette problématique. Pour ce faire, nous nous appuyons essentiellement sur l'approche anthropologique en didactique des mathématiques telle qu'elle a été élaborée par Chevallard (1992), afin d'étudier les rapports institutionnels du **NAG** et les rapports personnels des enseignants au **NAG** dans l'institution EMS en France, au niveau du collège et lycée.

Nous présentons notre étude à travers cinq parties.

La **partie A** est consacrée à notre cadre théorique et méthodologique.

Dans la **partie B** nous présentons quelques aspects historiques et épistémologiques à propos de l'utilisation du **NAG**.

L'analyse institutionnelle du **NAG** est présentée dans la **partie C**.

Dans les **partie D** et **E** nous présentons les analyses des rapports personnels des enseignants à l'objet **NAG** à travers les analyses de séances mettant en jeu le **NAG** et d'entretiens menés auprès d'enseignants.

Dans le chapitre suivant, nous revenons sur notre problématique.

PARTIE

A

**PROBLEMATIQUE ET CADRE
THEORIQUE**

CHAPITRE A1: PROBLEMATIQUE

1 INTRODUCTION AU CONTEXTE DE RECHERCHE

1.1 La discipline mathématique

Les mathématiques sont une science de la modélisation, de la démonstration et du calcul. On peut les étudier pour elles-mêmes, pour les appliquer à d'autres sciences, ou comme un exercice de l'esprit. Les principes fondamentaux de cette discipline remontent à l'antiquité.

Nous pouvons trouver plusieurs définitions des mathématiques, d'ailleurs souvent complémentaires, à l'exemple de celle-ci : ce sont “la science des nombres et de l'espace ” ; “la science des formes de déduction ” et “la science des structures, des modèles ou de tous les mondes possibles ”. Nous pouvons aussi trouver les mathématiques définies - “comme domaine de connaissances abstraites construites à l'aide de raisonnements logiques sur des concepts tels que les nombres, les figures, les structures et les transformations ” - pour souligner que les diverses composantes de celles-ci (analyse, algèbre, géométrie, etc.) sont, en fait, seulement des façons différentes d'étudier ou de créer des systèmes structurés par des relations. Cela signifie qu'il existe une logique interne et inéluctable propre à l'évènement ou à la série d'évènements en mathématiques. Dans cette optique, les mathématiques sont vues comme tout un corps qui qualifie tout objet, concept ou terme relatifs aux mathématiques : en fait, un ensemble de connaissances, une spécialité dans le domaine du savoir et de la connaissance - une discipline. En ce sens, la discipline mathématique regroupe les mathématiques abordées et abordables dans l'enseignement secondaire (dans le cas de cette recherche).

Les mathématiques contemporaines ne se contentent pas des objets classiques comme les nombres entiers ou réels et l'espace euclidien, etc. De nouveaux types de nombres, d'espaces et d'éléments abstraits sont apparus. Ainsi, comme nous le montrerons dans notre analyse institutionnelle, les grands domaines mathématiques (numérique, algébrique et géométrique) de l'institution EMS se sont regroupés dans les programmes en quatre grands blocs au collège et trois au lycée.

Nous postulons que le **NAG** va participer à la formation de tels blocs, compte tenu du fait que ces grands domaines apparaissent articulés dans chaque bloc. Une telle articulation donne parfois l'impression que les blocs constituent des nouveaux domaines. L'étude des mathématiques dans le secondaire – les mathématiques élémentaires - commence avec les nombres, et tout d'abord avec les nombres naturels et les nombres entiers. Les règles gouvernant les opérations usuelles sur les nombres font partie de l'arithmétique élémentaire. L'algèbre élémentaire est fondée sur l'abstraction de ces règles. La géométrie tente de comprendre, en premier lieu, les objets dans l'espace, puis par extension s'intéresse aux propriétés d'objets plus abstraits, à plusieurs dimensions, introduites selon plusieurs approches, relevant autant de l'analyse que de l'algèbre. En fait, les grands domaines mathématiques sont en interrelations tout au long de l'enseignement au secondaire.

Jusqu'à présent peu développée dans la didactique des mathématiques, l'étude des interrelations entre les domaines mathématiques lors du processus de transposition didactique et des pratiques des enseignants constitue le point de départ de notre recherche.

Avant de décrire le cadre théorique de notre travail et notre problématique détaillée, nous commencerons par donner les raisons qui nous ont influencé pour mener cette recherche en France.

Différents travaux en didactique des mathématiques, se sont intéressés aux interrelations entre les différents secteurs, thèmes, objets, etc. à partir des notions telles que les agrégats, les assortiments, les cadres et des registres. Cependant, dans ce travail-ci, nous aborderons la question des interrelations essentiellement au niveau des cadres ou domaines.

1.2 Les raisons d'être

1.2.1 Une pratique problématique

Notre intérêt pour ce travail est parti d'une part, de notre expérience d'enseignant à l'Universidade Católica do Salvador (UCSAL) au Brésil, et d'autre part, de notre intérêt pour l'un des axes de recherche apparu dans la continuité des travaux de recherche sur le numérique développés par Alain Bronner (1997 ; 2007).

En effet, dans notre enseignement et dans nos discussions à la fois avec des étudiants³ et des enseignants, nous avons pu faire le constat empirique de nombreuses difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques dans le secondaire. En particulier, celles de l'utilisation et de la mise en place des interrelations entre les domaines mathématiques ont surtout attiré notre attention. Ces difficultés touchent :

- d'abord les élèves, qui ont du mal à mettre en place le **NAG** dans les démarches mathématiques et surtout, à trouver des moyens de contrôle et de validation de leur travail

-et d'autre part les enseignants qui n'arrivent pas toujours (quand ils le font) à expliciter l'utilisation du **NAG** au moment où ils l'utilisent en classe, ce qui n'aide pas leurs élèves à surmonter leurs difficultés et leurs blocages.

Dans le but de montrer que des connaissances mathématiques pourront être mobilisées et conçues à partir d'un milieu capable de mettre en relations les domaines mathématiques et les représentations sémiotiques, sont nées les idées de changement de cadres et de registres de représentations. Mais les tentatives d'intégration de ces idées dans l'enseignement des mathématiques restent difficiles et problématiques.

1.2.2 Une situation révélatrice

Voici, par exemple un extrait d'une situation⁴ vécue par un stagiaire en mathématiques de « 2^o série do ensino médio⁵ » au Brésil, racontée par ce stagiaire pendant un cours à l' UCSAL qui montre bien ce fait :

³Étudiants de quatrième année de mathématique à l'UCSAL, équivalant au PLC2 en mathématiques des IUFMs en France.

⁴La tâche (a) a été présentée au professeur de l'UCSAL, pendant une séance, par un stagiaire de 4^e année de cours de « *Licenciatura* » en mathématiques de l'UCSAL. En fait le stagiaire a présenté une tâche qui a posé des problèmes lorsqu'elle a été proposée aux élèves d'un lycée au Brésil en 2004.

⁵Équivalent à la 1^{ère} scientifique du lycée en France.

(a) U_n est l'aire du domaine vert de la figure. Calculer U_n en fonction de n et vérifier si la suite (U_n) est arithmétique.

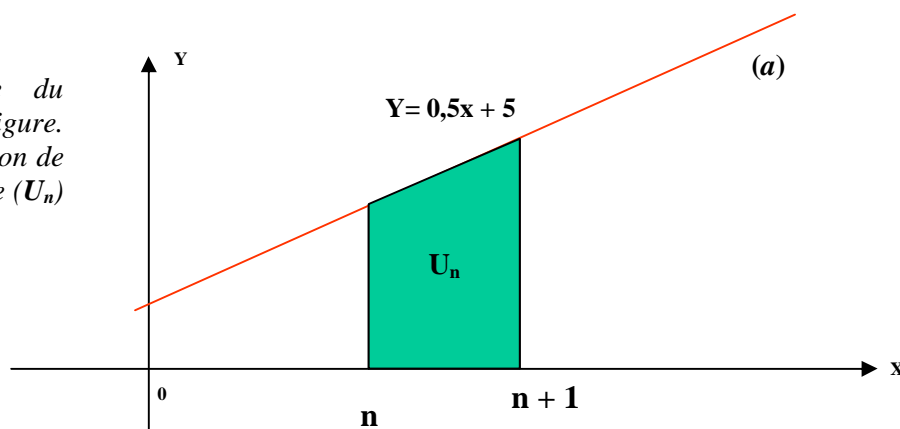


Figure 1: Graphique qui accompagne la tâche.

En fait, le stagiaire indique :

Cette tâche a été proposée à tous les élèves du lycée où j'enseigne et aucun élève n'a réussi à la résoudre. Ils ont déclaré qu'ils n'avaient pas réussi à établir de rapports entre les différentes données de la tâche et à comprendre ce qu'ils devaient faire pour travailler simultanément avec les données fournies, car ces données apparaissent soit à travers le graphique de la fonction, soit à travers l'aire représentée dans le graphique, soit à travers les suites U_n . Pourtant, les enseignants du lycée et moi-même, sommes convaincus que les sujets : aires, fonctions du premier degré, suites numériques avaient été bien abordés. Alors, pourquoi les élèves ne réussissent pas à résoudre le problème ? Toujours est-il que, dans des tâches comme celle-ci, soit lors d'examens, soit lors des séances en classe, les élèves rencontrent des difficultés, surtout pour comprendre ce qu'ils doivent faire pour travailler simultanément avec plusieurs domaines. Alors, comment appliquer les recommandations officielles se rapportant aux interrelations entre les domaines, si les élèves rencontrent toujours des difficultés ?

La tâche proposée aux élèves n'est pas facile, car, même si l'élève connaît bien les " théories " (aires, fonctions du premier degré, suites numériques), l'élève a besoin de savoir comment se servir simultanément de plusieurs domaines mathématiques. Cela dépendra essentiellement de la façon dont les « théories » auront été enseignées aux élèves. Ce passage est bien compliqué, car, en général, les élèves de l'enseignement secondaire traitent les objets, les thèmes dans des domaines isolés, sans avoir cette vision de « rôles réciproques, d'interrelations » qui apparaît dans cette tâche.

Donc, à travers ce que dit le stagiaire, nous remarquons qu'il existe une réelle difficulté pour les élèves à appréhender et à utiliser ces interrelations, à établir des rapports entre les données d'une tâche (dès qu'ils sont dans des domaines différents) et à comprendre ce qu'ils doivent faire pour travailler simultanément avec les données fournies dans plusieurs domaines à la fois.

L'extrait précédent peut être multiplié à travers de nombreuses autres situations et problèmes qui peuvent être repérés au secondaire, et ces situations nous aident à montrer notre intérêt pour une telle étude. Il s'agit, plus précisément, d'étudier les conditions et les contraintes dans lesquelles les enseignants des mathématiques travaillent et font travailler leurs élèves à propos du **NAG**.

Et donc, à propos de ces interrelations, nous nous posons plusieurs questions :

Peuvent-elles être travaillées de la même façon, en partant de n'importe quel domaine (numérique, algébrique ou géométrique) ou y a-t-il des domaines plus adéquats ? Et si oui, lesquels ?

De plus, lorsque ce stagiaire se retranche derrière les lacunes du secondaire, à quel type d'interrelations fait-il allusion ?

Répondre à ces questions nécessite bien sûr de se pencher plus avant sur la pratique des élèves - sur la pratique des enseignants - dans l'utilisation du **NAG** pour mieux comprendre les enjeux d'une telle utilisation.

En nous plaçant dans la continuité des travaux de recherche sur le numérique développés par Alain Bronner (1997 ; 2007), nous repérons des interrogations sur le point de vue historique des interrelations entre les différents cadres et sur la dynamique inter-domaines :

«Nous allons étudier les solutions proposées par les Grecs de l'époque classique au problème de l'incommensurabilité. Nous allons montrer que ces solutions s'inscrivent dans une problématique de la mesure des grandeurs. Le système de nombres se réduit aux entiers : il n'y avait pas de mesure correspondant à la diagonale du carré, et plus généralement pas de nombres correspondant aux grandeurs irrationnelles. Des théories et des méthodes géométriques sont élaborées pour traiter certains problèmes géométriques, mais on ne trouve pas de méthodes numériques sur les irrationnelles.» (Bronner, 1997, p.24)

Dans cette perspective Bronner insiste sur l'importance de concevoir une ouverture aux interrelations dans l'étude des domaines, en faisant référence au domaine numérique :

« Le numérique n'est pas un domaine fermé, non plus un ensemble de faits bruts ou un champ de connaissances achevées, [...] Le numérique est, pour nous, le produit d'une fabrication sociale inscrite dans le temps et réalisée en établissant une relation avec des objets comme on construit un rapport à l'espace. » (Bronner, 2007, p.4)

Il considère que la prise en charge des interrelations peut produire des effets dans l'enseignement des mathématiques :

« L'étude du curriculum du numérique peut ainsi être « poussée » pour repérer au moins les dynamiques inter-domaines ou inter-cadres, les interrelations avec les domaines algébrique, géométrique, et celui de l'analyse. Chacune de ces interrelations inter-domaines peut modeler le contrat institutionnel de calcul à travers des composantes spécifiques aux domaines. » (Bronner, 2007, p.26)

Notre propre expérience d'enseignant nous a conduit à avancer l'hypothèse que le **NAG** peut être une aide indéniable dans l'enseignement des mathématiques, en assurant mieux les possibilités d'échanges entre les cadres et les registres de représentations.

A la lumière de ces premières interrogations nous pouvons d'ores et déjà resserrer notre objet d'étude en nous centrant sur l'étude des rôles des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique dans le processus d'enseignement et apprentissage des mathématiques dans les classes de troisième et de seconde.

Cette étude pourra permettre d'apporter des arguments aux diverses initiatives mises en place dans les années récentes au Brésil. Elle peut s'inscrire dans les propositions du Ministère de l'Éducation Nationale brésilien. Ce que nous présenterons de façon très brève dans la partie qui suit.

1.3 Nos premières questions dans le champ didactique

L'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques a rendu nécessaire le développement des modèles théoriques pouvant caractériser les connaissances et les savoirs, ainsi que leurs évolutions, du point de vue de l'histoire et du développement des élèves. Ainsi, est né en France le mouvement théorique didactique des mathématiques, qui s'intéresse aux processus de transmission et d'acquisition des savoirs relatifs à cette discipline. Il se préoccupe des interactions entre les processus d'enseignement et d'apprentissage à propos des

mathématiques, portant également un intérêt particulier aux diverses transformations que subit le savoir pour devenir un objet d'enseignement, puis de connaissance

La didactique a comme principal objet d'étude le rapport qui s'établit entre le savoir institutionnalisé et les connaissances de l'apprenant. Elle considère « qu'il est possible de décrire, d'expliquer de façon rationnelle, les phénomènes d'enseignement, phénomènes qui suscitent, en général, davantage l'empirisme ou l'opinion que le discours raisonné ». De cette façon, la recherche en didactique des mathématiques en France affirme sa spécificité par rapport aux autres domaines proches, comme le signale Brousseau :

« Pour produire, améliorer, reproduire, décrire et comprendre les situations d'enseignement des mathématiques, il est devenu nécessaire - et possible - de théoriser cette activité d'enseignement en tant qu'objet original d'étude et non pas en tant que simple conjonction de faits théorisables uniquement dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie. » (Brousseau, 1986).

Le domaine d'étude de la didactique des mathématiques comprend tout ce qui est relatif à la transmission intentionnelle des mathématiques. Les théories issues de ce domaine font le lien, de l'enseignement à l'apprentissage, par l'observation des pratiques techniques concrètes observables en classe dans le travail mathématique réel des élèves et des enseignants. Considérant que notre travail porte sur la pratique des enseignants, nous avons ainsi décidé de nous intéresser à l'usage d'un objet mathématique – le **NAG** – pour identifier les conditions et contraintes de l'enseignement des mathématiques liées au **NAG** et pour analyser le rôle de cet outil lors de la résolution d'une tâche donnée.

Nous nous interrogerons plus précisément sur les points suivants :

- Quelles contraintes l'institution EMS impose-t-elle ?
- Quelles conditions offre-t-elle à l'enseignement des mathématiques à propos du **NAG** ?
- Quelles sont les pratiques émergeant dans le secondaire sur le **NAG** ?
- Est-ce qu'une prise en charge de l'utilisation du **NAG**, peut permettre à l'enseignant et aux élèves, une meilleure utilisation des changements de cadres et registres dans les activités mathématiques ?
- Comment, à travers l'utilisation du **NAG**, des techniques de résolutions de certaines tâches vont-elles apparaître ?
- Quelles sont les connaissances des élèves, mobilisées lors des tâches relatives au **NAG** ?

Ces premières questions sont à l'origine de notre problématique et ont suscité les choix théoriques et méthodologiques de notre recherche.

2 RECHERCHES ANTERIEURES

Dans ces paragraphes, nous passerons en revue quelques travaux importants. Nous n'entreprendrons néanmoins pas de présenter en détail ces différentes études qui nourrissent notre travail, mais plutôt d'en pointer les éléments qui font référence à notre objet d'étude. Nous reviendrons à quelques-uns à chaque fois que nous en ressentirons le besoin. L'objectif essentiel de ces paragraphes est donc de regarder comment les interrelations entre les domaines mathématiques peuvent être vues à partir de ces travaux et d'en tirer quelques conclusions utiles par la suite.

2.1 Les agrégats

Dans le domaine de la didactique des mathématiques nous pouvons repérer, à travers quelques recherches, des caractéristiques, des significations se rattachant au **NAG** et leurs utilisations. Parmi celles-ci, l'attention portée par Guy Brousseau sur les agrégats, nous a servi de point de départ.

Brousseau considère que les savoirs complexes s'articulent autour d'agrégats. La reconstitution de ces savoirs dans des situations didactiques ne recouvre pas nécessairement le savoir savant de référence. Ainsi, apparaît la nécessité d'une réflexion à long terme sur l'organisation de l'enseignement du savoir et des connaissances dans un contexte institutionnel donné.

L'approche de Brousseau donne des possibilités à l'enseignant de s'investir davantage dans la conception et la création de cette progression.

2.1.1 Les agrégats de connaissances et de situations

Guy Brousseau a mis en regard des agrégats de connaissances et des agrégats de situations. Il a décrit ces deux types d'objets de la même façon : « une connaissance » est dans la culture, un énoncé bien formé **C**,

et « une situation » est un ensemble de conditions et de règles **S** - dont il suppose qu'elles sont formulables sous forme d'un agencement particulier d'énoncés – et telles qu'elles définissent un ensemble d'énoncés – solution **C**.

Brousseau considère les agrégats comme des objets – situations ou connaissances - qui peuvent être agrégés, c'est-à-dire réunis, rattachés. A partir de cette définition, on peut poser la question sur les interrelations existant entre les objets. Car nous considérons qu'elles jouent des rôles importants dans les constructions des agrégats formels, comme dans celles des agrégats fonctionnels.

2.1.1.1 Les agrégats formels

Les objets **a** et **b** d'une même classe présentent des « similitudes » de forme : organisation commune, ou même, variable. Autrement dit, il existe une relation **R** d'équivalence **aRb** qui est déterminée par les formulations de leurs énoncés dans une même théorie. Ces équivalences sont, évidemment, modulées par un certain énoncé qui est caractéristique de **R** et **a** ressemble à **b**, du point de vue **R**. Ce point de vue est quelconque, a priori. Brousseau souligne que ces agrégats produisent des collections amorphes d'énoncés et il cite comme exemple les connaissances du cadre géométrique.

2.1.1.2 Les agrégats fonctionnels

Les deux objets **a** et **b** figurent dans la construction d'un même objet (différent ou non de **a** et de **b**). On pourrait dire qu'ils figurent ensemble dans la résolution d'une situation⁶. Ces agrégats sont constitués par des chaînes d'énoncés.

A partir de ces réflexions, Brousseau indique qu'à une situation, sont associées en général plusieurs connaissances et qu'à une connaissance, sont associées plusieurs situations.

Nous mettons l'accent sur le répertoire de connaissances, car la structuration de ce répertoire fait apparaître un emboîtement de situations correspondant à des projets distincts et dont chacune sert de milieu à la suivante. Le milieu d'un concept mathématique est l'agrégat des milieux de situations où les connaissances liées à ce concept apparaissent comme moyen de résolution. En fait, ces réflexions de Brousseau révèlent déjà la présence des interrelations dans les constructions des agrégats.

2.2 Les cadres et les registres

2.2.1 Cadres

Un « cadre » selon Douady (1986), « est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations ». En fait, la définition du cadre, donnée par Douady, parle des interrelations entre les objets à l'intérieur d'un domaine. Cependant, dans les travaux de Douady, ce ne sont pas les interrelations entre les différents objets ou domaines qui occupent la place centrale.

2.2.2 Registres

La notion de registre sémiotique introduite par Duval (1993) est associée à l'hypothèse que la conceptualisation mathématique passe par la capacité d'identifier un concept dans diverses représentations sémiotiques et qu'elle nécessite un travail spécifique sur l'articulation de ces registres.

La notion de représentation sémiotique définie par Raymond Duval est intéressante pour comprendre comment les élèves manipulent les objets mathématiques. Les objets mathématiques tels que droites, cercles, nombres, fonctions, ne sont pas, selon Duval, des objets réels ou physiques. Pour les manipuler, les élèves doivent passer par leurs représentations mentales et sémiotiques. Les travaux de Duval signalent l'importance de l'articulation entre les différents cadres et registres. Ils montrent qu'il existe des concepts, des objets mathématiques qui fonctionnent dans plusieurs cadres : algébrique, numérique et géométrique. Ils peuvent admettre aussi plusieurs registres de représentation : le langage naturel, les expressions algébriques, les courbes solutions, les tableaux numériques, etc. Le travail dans un même cadre peut faire appel à plusieurs registres de représentation et le changement de cadres implique nécessairement des passages entre registres. Les travaux de Duval s'impliquent en articulant les différents cadres et

⁶ Par exemple : (**a** et **b** servent dans la démonstration de **c**. Ou bien, par exemple, $a \Rightarrow b$. Ici aussi, cette relation est subordonnée à ces conditions ; - Ou **a** et **b** sont des conditions ou même des étapes de la construction d'un même objet.)

registres, et cela nous amène à nous questionner sur la place du **NAG** dans l'aboutissement de telles articulations.

Selon Duval, une activité conceptuelle implique la coordination de registres de représentation. La maîtrise d'un concept suppose d'être en mesure d'articuler les différents registres qui entrent en jeu. Un registre se reconnaît par le biais de trois activités cognitives fondamentales :

- ✓ L'identification d'une représentation, identifiable comme une représentation d'un registre donné ;
- ✓ La transformation d'une représentation en une autre représentation appartenant au même registre, à l'aide de règles propres : le traitement ;
- ✓ La transformation d'une représentation en une représentation du tout ou d'une partie dans un autre registre : la conversion.

Comprendre un concept, c'est pouvoir le reconnaître dans différents registres, pouvoir effectuer des traitements dans chacun des registres et pouvoir effectuer une conversion d'un registre à un autre.

2.3 Conceptualisation des objets mathématiques

2.3.1 Schème et Concept

Selon Gérard Vergnaud (1990), un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Il appelle Schème, l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données et Concept, un triplet de trois ensembles :

« L'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence), l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié), l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). » (Vergnaud, 1990).

Dans cette perspective, G. Vergnaud estime un champ conceptuel comme étant un ensemble de situations dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes, en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter. Nous remarquons une présence des interrelations dans la formation des concepts des objets mathématiques.

En fait, G. Vergnaud affirme qu'un concept prend vraiment un sens lorsqu'il opère dans différentes classes de situations. Donc, un champ conceptuel est un ensemble de concepts et de théorèmes. Le processus de conceptualisation ne peut se résumer à conduire et contrôler sans considérer les interrelations entre les objets contenus dans ces situations.

2.4 Interactions du savoir

2.4.1 Les assortiments didactiques

Florence Genestoux (2000) aborde la question " comment penser et organiser l'étude personnelle de l'élève ? " à partir de l'étude des interactions qui accompagne la réalisation des

devoirs du savoir : relations entre l'école et la famille ou entre l'école et autres "accompagnateurs d'étude". Un modèle des différentes fonctions et des contrats d'accompagnement est proposé, modèle dans lequel les assortiments didactiques apparaissent comme une médiation entre la classe et les devoirs à la maison. Elle considère qu'un assortiment didactique est une suite ordonnée d'exercices réunis selon une même intention didactique, et réalisables dans une unité de temps didactique :

« En Théorie des Situations, il est habituel de considérer les situations in abstracto⁷ de manière isolée. Nous nous intéressons ici aux collections de situations (qui induisent un ordre, des relations entre éléments, plusieurs connaissances mises en œuvre, des intentions didactiques relatives à ces collections de connaissances). Ces collections peuvent présenter des propriétés diverses (qui se distinguent des propriétés de chaque élément qui la compose). Pour cela, nous proposons d'introduire dans la terminologie théorique un nouveau terme : « assortiment didactique ». La conceptualisation de l'objet qu'il désigne ne sera pas ici établie. Nous nous limiterons à une présentation de l'intérêt qu'un tel concept, s'il était pertinent dans la Théorie des Situations, pourrait selon nous offrir à l'ingénierie qui s'en inspire. Cette formulation se veut de portée suffisamment générale pour uniformiser plusieurs spécifications de nature didactique, et en même temps suffisamment technique pour désigner des collections qui renvoient à une même intention didactique (relative à une collection de connaissances), et qui correspondent à une unité de temps didactique (susceptibles d'être présentées au cours d'une même séquence didactique). » (Genestoux, 2000. p. 450).

L'étude réalisée par Florence Genestoux concerne un objet de savoir relativement réduit (les produits élémentaires), mais il soulève des questions théoriques très générales, qui se posent pour des organisations bien plus complexes, comme par exemple, les secteurs, voire les grands domaines mathématiques. Dans ce contexte, des interrogations sur le statut des interrelations dans les hiérarchisations peuvent être soulevées. Plus généralement, sur les liens entre les définitions, objets, algorithmes, théorèmes, etc. qui ont pour fonction de constituer les assortiments. Il s'agit de faciliter le placement des assortiments dans un corpus de portée plus générale, en améliorant la circulation des connaissances dans ce corpus.

2.4.2 Les assortiments

Dans le contexte plus précis de l'étude de Florence Genestoux, elle appelle assortiment didactique « a » une collection de formules, potentiellement reliées entre elles par des relations de nature logique, mathématique ou didactique, et spécifiquement et effectivement rassemblées dans une perspective didactique précise et pour une unité de temps didactique.

Selon cette chercheuse, la constitution des collections de formules s'appuie sur la reconnaissance de liens mathématiques. Mais les théorèmes généraux sont des générateurs trop puissants : ils ne permettent pas de petites agrégations « closes » de formules (un fonctionnement interne). Les théorèmes opportunistes (propriétés des nombres et pas des opérations) sont plus fonctionnels pour déterminer les groupements. La construction des assortiments didactiques requiert, par conséquent, des connaissances didactiques pour trier les liens les plus adaptés au projet didactique et éventuellement établir certaines clôtures (cognitives ou relatives à des chronogenèses et des topogenèses).

Nous considérons les assortiments comme une première introduction sur les interrelations. Cette introduction peut être considérée soit, du point de vue interne aux domaines, c'est-à-dire

⁷ Le terme a été précisé au chapitre 4. Il distingue les ébauches théoriques des produits techniques de l'ingénierie qui prennent en compte un grand nombre de caractères des réalisations effectives.

les assortiments des objets, sujet, thèmes, soit du point de vue externe aux domaines, c'est-à-dire les assortiments de domaines.

2.5 Vers les praxéologies

Les réflexions que nous présentons viennent du fait que l'enseignement consiste à choisir pour les élèves, les voies les plus rapides, pour obtenir les savoirs les plus puissants. Les voies sont les suites de situations « d'apprentissage », les savoirs sont les réponses aux situations d'apprentissage. Les propriétés des unes et des autres dans ce processus, interviennent pour différencier les voies optimales en fonction des efforts demandés et des résultats obtenus.

En fait, un milieu effectif rassemble des familles de situations qui mobilisent des connaissances structurées par des relations logiques, des relations de convenance, de co-présence fréquente etc. Les connaissances fonctionnent par agrégats appelés conceptions et les situations se regroupent de même en milieux. Des milieux et des groupements de situations s'appellent des agrégats de connaissances adéquates, pouvant se structurer en théories mathématiques. De même que les connaissances se regroupent autour de théories et de concepts dans les savoirs des institutions savantes, les connaissances des élèves se regroupent en " conceptions " qui caractérisent une certaine manière de comprendre et d'utiliser une notion mathématique dans un certain champ de situations. L'étude des formes de dépendances qui lient ces connaissances, celle des procédés théoriques d'agrégation et celle des modes de mise en évidence des conceptions, se poursuivent depuis vingt cinq ans et elles se prolongent aujourd'hui par l'étude d'écosystèmes et de praxéologies dans l'approche anthropologique.

« Pour décrire la genèse et l'évolution des objets de savoir dans une institution, pour décrire les rapports institutionnels et personnels à un objet de savoir, il est nécessaire d'avoir un modèle descriptif de ces savoirs, savoir-faire, connaissances. Mais il n'existe pas de connaissance isolée, toute connaissance est un agrégat. C'est la modélisation en termes de praxéologie qui décompose en praxis et en logos ces agrégats qui va permettre une avancée significative pour décrire et expliquer les savoirs en fonctionnement. Ce modèle a d'abord vu le jour à propos de l'activité mathématique, principalement dans le but d'analyser des rapports institutionnels. » (Brousseau, 2000).

Donc, la question génératrice de la théorie de la transposition didactique est une meilleure détermination de l'objet d'étude, qui n'est pas tout à fait le même et qui ne vit pas de la même manière d'une institution à une autre, puisqu'on ne l'utilise pas pour faire la même chose.

3 PROBLEMATIQUE

3.1 L'état de lieux du NAG dans l'EMS

Notre objectif dans cette partie est, dans un premier temps, la mise à jour, à travers une analyse générale des programmes de l'institution EMS française et quelques recherches, les grands domaines mathématiques étudiés dans cette institution à l'heure actuelle.

3.1.1 Les domaines mathématiques

En principe dans cette recherche nous nous rapporterons à trois grands domaines des mathématiques, mais ci-après, nous nous limiterons en fait à deux, le numérique-algébrique d'une part et géométrique d'autre part.

La distinction entre algèbre, analyse et géométrie peut être réelle, tant dans les résultats et les méthodes qu'au niveau des mathématiciens. Cependant les liens entre ces trois branches et les utilisations que les mathématiciens en font, sont profonds, fondamentaux et peuvent être perçus tout au long de l'histoire des mathématiques. La question qui se pose est celle de savoir comment les programmes et les manuels présentent ces grands domaines actuellement.

Donc, nous préciserons tout d'abord, pour commencer cette analyse, une première définition générale pour les domaines numérique, algébrique et géométrique.

3.1.1.1 Le numérique

L'arithmétique (ou théorie des nombres) est une des branches les plus anciennes des mathématiques. Cette branche étudie et utilise des techniques et théories des nombres. A une certaine période, ce domaine se limitait à l'étude des propriétés des entiers naturels, des entiers relatifs, et des nombres sous forme de fractions (rationnels), et aux propriétés des opérations sur ces nombres. Les opérations arithmétiques traditionnelles sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Ce domaine fut ensuite élargi par l'étude d'autres nombres comme les réels ou même de concepts plus avancés, comme les puissances. Dans l'école pythagoricienne, à la deuxième moitié du VI^e siècle avant J.C., le numérique était lié avec l'astronomie, la musique et la géométrie. Actuellement le calcul arithmétique est enseigné à l'école primaire, mais l'arithmétique elle-même est un domaine extraordinairement riche et complexe. Ainsi, un énoncé élémentaire conjecturé par Fermat au XVII^e siècle ne fut démontré qu'à la fin du XX^e siècle par Andrew Wiles.

3.1.1.2 L'algébrique

L'algèbre est la théorie générale des opérations qui apparaissent notamment en arithmétique et en géométrie. La théorie des équations algébriques est à l'origine de deux notions fondamentales des mathématiques : les nombres complexes (ou imaginaires) et les groupes. L'algèbre joue un rôle essentiel en arithmétique et en géométrie analytique, ainsi que dans deux branches importantes de la géométrie moderne : la géométrie algébrique et la topologie algébrique. Ce domaine des mathématiques va, par son objet, résoudre, d'une manière générale, les questions relatives aux structures algébriques ou plus simplement, pour s'en tenir à l'algèbre élémentaire, aux nombres, aux relations que l'on peut établir entre les quantités connues et les inconnues qui entrent dans une question. On ajoutera à cet effet qu'on emploie les lettres de l'alphabet pour désigner les grandeurs sur lesquelles on doit raisonner, et on représente par des caractères particuliers, appelés signes algébriques, les opérations à faire sur ces grandeurs. On facilite ainsi les raisonnements et on les abrège en même temps qu'on en augmente la généralité. Donc, l'algébrique que nous considérons est le domaine qui étudie les structures algébriques Lafont, (2006).

3.1.1.3 Le géométrique

La géométrie est à l'origine une théorie de la mesure des longueurs, des aires, et des angles. Plus généralement, c'est la théorie du plan, de l'espace, et de toutes les formes qui peuvent se concevoir au-delà de notre espace en trois dimensions. Ce domaine a pour objet la modélisation de l'espace physique. Les progrès des connaissances ont rendu la définition classique de la géométrie beaucoup trop restrictive. On peut parler de la géométrie de l'espace-temps et de nombreux espaces abstraits. La distinction entre ce qui est et ce qui n'est pas géométrique est alors délicate. Toute structure, tout modèle, tout univers possible, peut être étudié, d'une façon géométrique. On peut alors définir la géométrie comme la science des positions. Cette définition est moins précise que la précédente parce que la notion de position est d'abord intuitive, position dans l'espace, dans le temps, dans un réseau, etc. Dahan-Dalmedico & Peiffer, (1986).

Les définitions des domaines (numériques, algébriques et géométriques) ont été choisies de manière à ce qu'elles ne s'éloignent pas trop de celles qui apparaissent actuellement dans les programmes de l'institution EMS.

3.1.2 Dans les programmes

Sans entrer dans tous les détails, nous essaierons de donner une vue d'ensemble, aussi fidèle que possible, de l'organisation des mathématiques dans le système éducatif français⁸ au niveau des organisations des programmes du collège et du lycée.

Ces trois branches des mathématiques que nous définissons, partagent un corpus de notions et de méthodes, que l'on découpe actuellement en grands blocs ou nouveaux domaines

Nous pouvons observer, d'une manière générale, que, dans les programmes officiels du secondaire français, l'organisation des contenus mathématiques est divisée en quatre grands blocs au collège et trois au lycée, lesquels s'organisent chacun autour des objets, des secteurs et des thèmes spécifiques.

⁸ Pour cela nous nous sommes appuyés sur le document de la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques – CFEM, Publié par l'IREM de Paris.

3.1.2.1 Au collège

Les nouveaux programmes de mathématiques pour le collège sont en train d'être mis en place. Pour l'essentiel, les contenus ne devraient subir que des aménagements mineurs. Les programmes présentés ici sont les anciens programmes, ils ont été publiés en 1996. Dans ces programmes, les mathématiques sont situées comme « discipline de formation générale » où « la résolution de problèmes, la modélisation de situations et l'apprentissage progressif de la démonstration » permettent aux élèves de « prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique ».

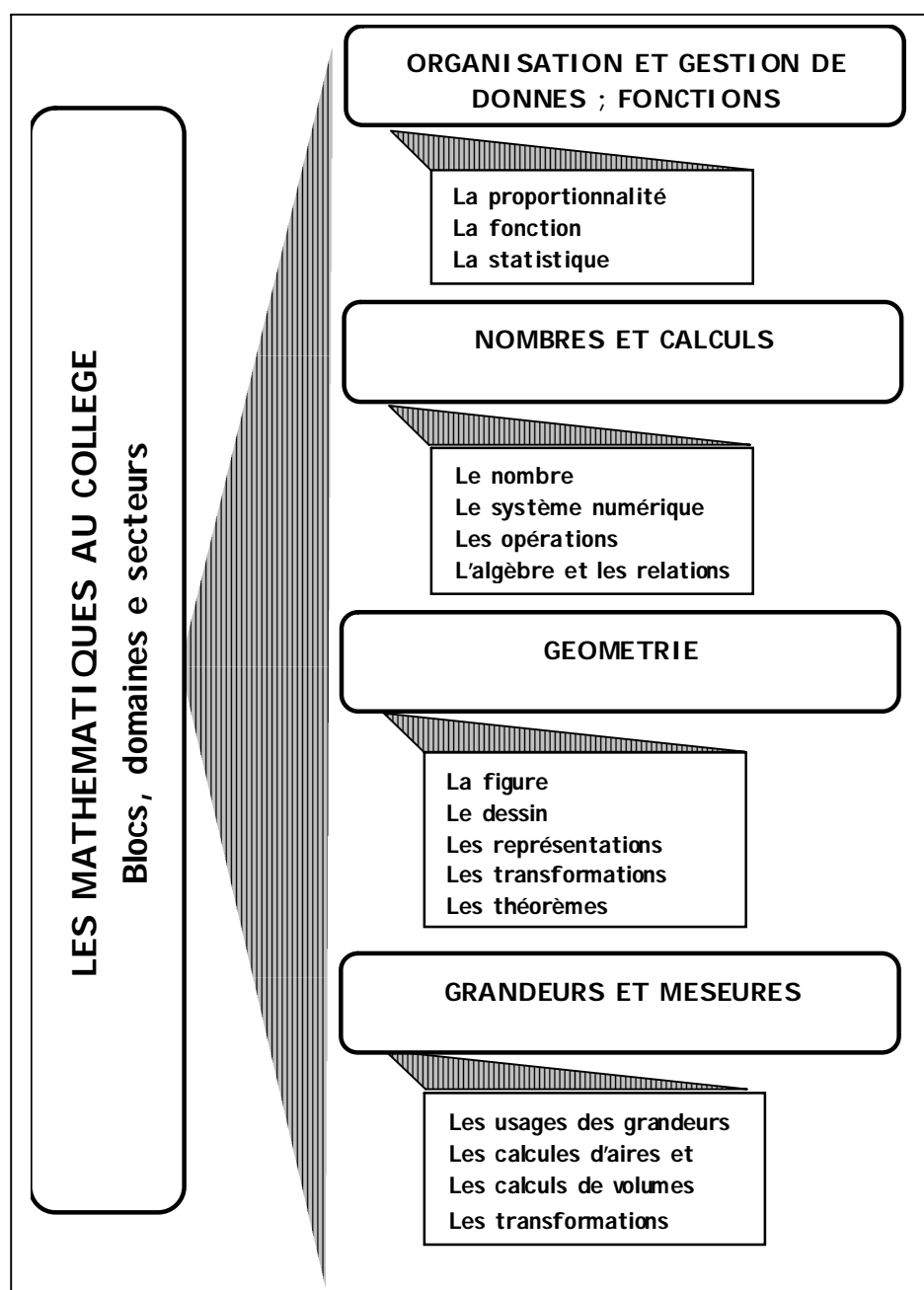


Figure 2 : Les blocs, domaines et secteurs au collège.

Dans ce contexte au collège, les mathématiques doivent apparaître, à la fois, comme discipline fournissant des outils utiles dans la vie courante ou dans d'autres domaines et comme

discipline ayant sa propre autonomie. Durant les quatre années du collège (figure 3), organisées en trois cycles, les programmes sont découpés en organisation et gestion de données, fonctions ; nombres et calcul ; géométrie ; grandeurs et mesure.

Comme nous pouvons voir dans cette vue générale, les blocs font un mélange de plusieurs domaines mathématiques. Les domaines sont distribués à partir de ces secteurs qui vont constituer les grands blocs. En fait, nous remarquons que c'est à partir de secteurs que les grands domaines mathématiques sont réorganisés dans des grands blocs. Donc, c'est à partir des interrelations existantes entre les secteurs (des grands domaines mathématiques) que les programmes organisent les grands blocs.

3.1.2.2 Au lycée

Durant les trois années de lycée, les programmes sont découpés en statistiques ; calcul et fonctions et géométrie pour le premier cycle, et analyse probabilité et statistique, géométrie pour le deuxième cycle.

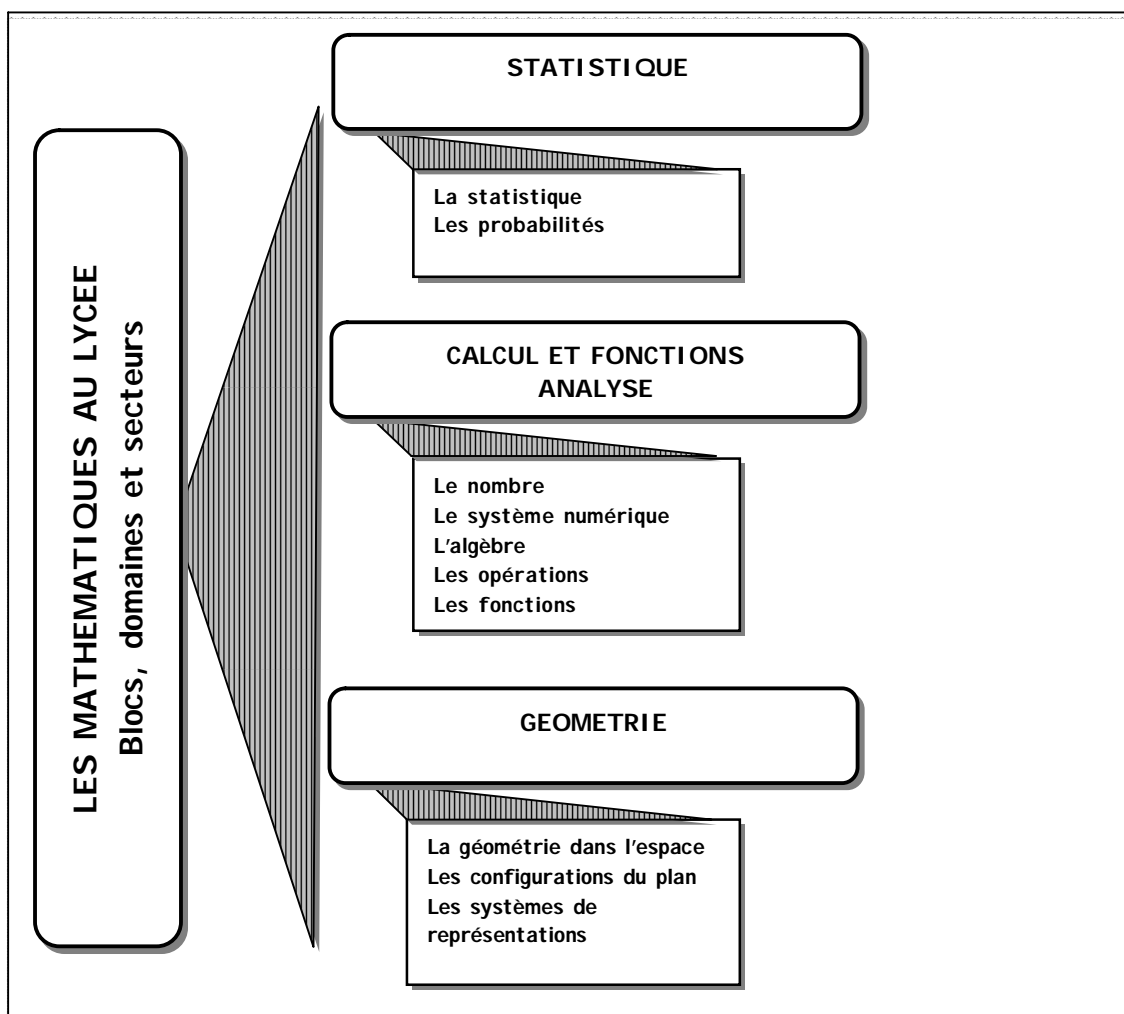


Figure 3: Blocs, domaines et secteurs au lycée.

Nous remarquons aussi qu'au lycée, c'est à partir de secteurs que les grands domaines mathématiques sont réorganisés en grands blocs.

On peut donc considérer que, dans une première approche, les découpages des contenus ci-dessus représentent de façon générale l'organisation des contenus mathématiques au secondaire. Dans cette même vue, nous observons, d'une manière générale, que les organisations des blocs sont faites à partir des interrelations entre plusieurs secteurs.

L'organisation des blocs mathématiques dans l'institution EMS, nous a amené à nous poser la question de savoir comment les connaissances sont enseignées dans cette institution, relativement aux les interrelations entre ces, dont l'importance est encore soulignée :

« L'activité mathématique n'est donc pas simplement recherche de la réponse correcte. Elle est aussi élaboration d'hypothèses, de conjectures, qui sont confrontées à celles des autres et testées dans la résolution du problème. Un concept approximatif est forgé pour résoudre un certain type de problème. Puis la pensée rebondit quand l'élève utilise ce concept pour résoudre d'autres problèmes, ce qui exige transferts, rectifications, ruptures, etc., selon un processus analogue à celui que l'on peut observer dans l'histoire des mathématiques. Il me semble donc essentiel de comprendre que l'élève ne construit pas un concept en réponse à un problème, mais, selon l'excellente formule des chercheurs de Louvain-la-Neuve ", un champ de concepts qui prend sens dans un champ. » (Bkouche et All, 1991).

Le système éducatif français a une organisation forte et centralisée qui couvre hiérarchiquement l'école primaire, le collège, le lycée, l'enseignement supérieur jusqu'à la formation des enseignants.

Dans l'enseignement français, les programmes sont nationaux. Un Conseil National des Programmes (CNP) dessine l'organisation générale du curriculum et prépare des directives spécifiques pour chaque discipline. En plus pour chacune d'elles, un groupe d'experts est constitué pour élaborer les programmes de la discipline. Ces programmes sont alors soumis à l'approbation du CNP et à celle d'autres autorités. A la demande de nombreuses associations de mathématiciens et de professeurs de mathématiques, Claude Allègre a été sollicité pour créer en 1999 une commission afin de « proposer des perspectives pour l'évolution de l'enseignement des mathématiques, l'amélioration de ses relations avec l'enseignement des autres disciplines, et corrélativement pour une transformation nécessaire de la formation des professeurs » (Dorier, 2004).

3.1.3 Une importance accordée aux interrelations

Comme nous l'avons déjà dit, à notre connaissance, il y a peu de travaux de recherche portant un regard sur les interrelations entre les domaines mathématiques. Néanmoins, il y a urgence à redonner du sens aux mathématiques enseignées dans le secondaire, ce qui est souligné par divers rapports et travaux français. Dans ce contexte, Chevallard (2002), fait remarquer :

« La reconnaissance de la hiérarchie de niveaux ainsi ébauchée, qui va des sujets d'études à la discipline en passant par thèmes, secteurs et domaines, a pour principal mérite de permettre un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire, en évitant un déséquilibre trop flagrant entre ce qui, de ces contraintes, sera pris en compte et ce qui sera laissé pour compte. Le réalisme de cette échelle de niveaux n'est, à cet égard, pas douteux. » (Chevallard, 2002. p.2).

Plus loin il insiste encore sur le fait que :

« C'est évoquer là un dispositif didactique, producteur d'effets qui n'ont pas aujourd'hui motif à exister : l'obligation pour le professeur de présenter domaines et secteurs et d'y situer les thèmes et sujets qui seront ensuite étudiés. Le fait que, comme tel – non par exemple en tant que le noosphérien qu'il peut être par ailleurs –, le professeur de mathématiques ne soit pas amené à situer les thèmes qu'il enseigne dans les secteurs et les domaines que dessine le programme le

conduit à faire défiler ces thèmes, et les sujets qui leur sont associés dans le cours d'études, les uns après les autres, à la queue leu leu : la « statistique », par exemple, n'est alors rien d'autre que la succession des sujets et thèmes de « statistique » ; et de même pour la géométrie, l'algèbre, etc. Une telle atomisation de la matière à étudier contraste déjà formellement avec l'ambition originelle dont pourtant elle procède – enseigner « les mathématiques », « la statistique », « la géométrie », « l'algèbre », etc. Dans le mouvement de déconstruction-reconstruction des œuvres à étudier, on ne reconstruit guère alors que des fragments d'un puzzle qui ne sera jamais reconstitué dans son ensemble. » (Chevallard, 2002. p.3).

En fait, ces deux extraits montrent bien une importance accordée aux interrelations dans le processus « enseignement et apprentissage des mathématiques ».

3.1.4 Objet d'étude

3.1.4.1 Le champ de recherche

Notre travail s'insère dans un champ de recherche sur les pratiques des enseignants. Nous nous sommes intéressés au rapport des professeurs avec le **NAG**, ainsi que leur rapport avec l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, ces éléments éclairant notre compréhension de leurs pratiques dans ce cadre bien spécifique. La présente recherche s'intéresse plus particulièrement aux pratiques ordinaires des enseignants lors du processus « enseignement et apprentissage » des connaissances mathématiques dans le cadre du **NAG**. Nous souhaitons étudier les conséquences dans les pratiques du fait que l'utilisation du **NAG** n'est pas au cœur de l'enseignement et montrer qu'il existe même un vide didactique institutionnel (Bronner, 1997) relativement à cet objet.

En présentant quelques éléments historiques relatifs à cet outil et en analysant les programmes, nous montrerons des habitats et des niches possibles de cet objet à certaines périodes et dans l'enseignement dans l'institution EMS.

3.1.4.2 Les domaines mathématiques étudiés et leurs interrelations

Tout projet d'enseignement des mathématiques n'échappe pas à la mise en place de trois grands domaines au collège et au lycée. Les domaines du numérique et de l'algébrique ont des liens assez naturels, fondés sur les nombres et le calcul et l'institution est, en général, confrontée au problème didactique du choix de la nature et de la mise en place d'un espace numérique comprenant, tout d'abord, les nombres rationnels, puis celui d'un espace plus vaste. Ce qui nous amène à considérer le numérique-algébrique. De même, la transposition didactique ne peut éviter de proposer de mettre en place des connaissances géométriques, dès le début du collège (et même à l'école primaire), organisées en un autre domaine, le géométrique. (Bronner, 1997).

Avec l'utilisation des premiers théorèmes de géométrie plane au collège jusqu'au thème de seconde "démonstration par les aires", les opérations arithmétiques élémentaires peuvent se construire dans le cadre géométrique. Le théorème de Thalès permet de créer la multiplication et la division ; l'itération de ce procédé aboutit à l'élévation à la puissance. Une analyse des propriétés de la hauteur issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle permet également la construction géométrique de la racine carrée.

Le début de l'enseignement des mathématiques à propos du géométrique correspond à une modélisation de l'espace ambiant et des objets déplaçables – du réel. L'enfant peut agir sur le monde réel et le modifier. Il peut ne pas être capable d'en avoir une vision globale instantanée

(Vergnaud, 1981). Un des rôles des représentations signalées dans les travaux de Raymond Duval (1993) est de rendre compte de cette globalité des processus de représentations. Il est un principe général de psychologie cognitive voulant que l'on apprenne en s'appuyant sur ce que l'on connaît déjà et que ce soit à partir des connaissances nouvelles. Ce principe met en évidence l'importance des liens dans le processus d'apprentissage, autrement dit, l'importance des liens dans le développement des connaissances. En ce qui concerne l'apprentissage des mathématiques, ces liens sont exigés davantage tout au cours du niveau secondaire d'enseignement, car ce sont ces liens qui permettront aux élèves d'accéder de façon compréhensible au vaste réseau de représentations qui est construit au cours de l'enseignement des mathématiques. Si nous observons le concept de nombre, nous pourrions percevoir qu'il est essentiel à la construction de l'addition, laquelle contribue en retour, à développer le sens du nombre. A un niveau plus avancé, la pertinence d'une signification de la fonction exponentielle est due à l'idée que la multiplication lui attribue et c'est à partir de la fonction exponentielle qu'il devient possible de construire les logarithmes. La multiplication est également très liée et fort utile dans le calcul d'aires. Dans l'espace des représentations (domaine géométrique), en observant par exemple l'enseignement du calcul des volumes des solides, nous pouvons percevoir qu'on enseigne, tout d'abord, le calcul de l'aire des surfaces planes, pour enseigner ensuite, le calcul des volumes des solides. Cette même notion d'aire est aussi rattachée, dans l'enseignement supérieur, à la notion d'intégrale. Pour aller plus loin, dans la question du calcul des volumes des solides, nous pouvons penser que l'enseignement du calcul de volumes utilise la multiplication des nombres (du numérique) et des applications de formules d'aires (de l'algébrique). Ce sont des exemples qui, au départ, relèvent incontestablement du domaine géométrique, mais font appel très vite au domaine numérique-algébrique pour être résolus, et ne peuvent être correctement traités que par les moyens d'un échange équilibré et mutuel entre les 2 domaines numérique-algébrique et géométrique.

Ainsi, il nous semble clair que les liens existant entre les domaines mathématiques, plus particulièrement entre les domaines numérique-algébrique et géométrique, occupent une place importante dans le processus de développement de la connaissance mathématique. Les domaines mathématiques sur lesquels porte ce travail sont restreints au numérique-algébrique et au géométrique. Il est inscrit dans la continuité des travaux de recherche sur le numérique de Alain Bronner (1997 ; 2007).

3.1.5 Questions de la recherche et hypothèses

Nous avons déjà évoqué, grâce aux travaux conduits jusqu'ici, que nous voulons mener une étude sur le **NAG** dans l'enseignement des mathématiques au secondaire tel qu'il est aujourd'hui. Précédemment, nous avons dévoilé quelques caractéristiques de cet objet, en pointant les éléments à mettre en question. Dans cette partie, nous reprenons les éléments essentiels de notre problématique à partir de quelques questions et hypothèses avancées, afin de les reformuler en relation avec les cadres théoriques choisis.

Notre travail s'inscrit dans un cadre qui a pour objectif de mettre en évidence le **NAG** ainsi que les principales difficultés rencontrées par les élèves et les enseignants dans l'institution EMS, pour établir des liens entre les domaines numérique-algébrique et le géométrique. Notre question générale de recherche est donc la suivante :

Quelles sont les conditions et les contraintes qui vont influencer la mise en place et l'utilisation des interrelations entre les deux domaines numérique-algébrique et géométrique ?

Ceci nous conduit à une nouvelle formulation des questions au centre de notre travail, notamment :

« Dans quelle mesure le **NAG** est-il utilisé par les enseignants ? »

« Comment font-ils travailler leurs élèves dans le cadre du **NAG** dans l'enseignement secondaire ? »

En fait, pour étudier la place et le rôle du **NAG** dans l'enseignement des mathématiques au secondaire, nous avons choisi de scinder notre étude en deux parties, dont l'une concerne une analyse institutionnelle de l'enseignement des mathématiques et l'autre concerne une analyse des pratiques en classe. Ces choix sont en lien avec nos hypothèses présentées ci-après.

Les rapports personnels des enseignants au **NAG** et le processus de la transposition didactique de cet objet dans l'enseignement des mathématiques au secondaire sont des objectifs de la présente recherche. Nous souhaitons étudier plus précisément les choix transpositifs actuels, les écologies pour les organisations didactiques et mathématiques relatives au **NAG** dans l'institution EMS, et les systèmes de contraintes et conditions qui pèsent sur cet objet. Nous montrerons plus précisément qu'il existe un vide didactique (Bronner, 1997 ; 2007) pour le **NAG** en tant qu'outil et objet dans l'EMS.

Nous nous plaçons dans une perspective qui considère la pratique de l'enseignant des mathématiques comme étant l'ensemble des travaux dont le but est de faire apprendre aux élèves et de faire faire par l'enseignant, avant, pendant et après, la séance d'enseignement. Notre recherche s'appuie sur la participation de deux enseignants de l'institution EMS, professeurs des mathématiques, ayant un acquis d'expériences professionnelles. Nous faisons l'hypothèse qu'ils disposent de nombreuses connaissances venues de différents domaines mathématiques mais qu'ils n'estiment pas importante l'utilisation des interrelations entre ces diverses connaissances. Le contexte précédent est lié à l'hypothèse qu'il existe un vide didactique pour le **NAG** en tant qu'outil et objet dans l'EMS. Malgré ce vide, le **NAG** est présent dans la pratique des enseignants et a une place et un rôle importants dans l'enseignement des mathématiques. Ce vide peut constituer un obstacle à la fois, pour les élèves et pour les enseignants lors de la résolution de problèmes qui font appel, simultanément, aux domaines du **NAG** et lors de la construction des nouvelles connaissances.

3.1.5.1 Hypothèses de recherche

Nous ferons des hypothèses qui vont servir de base pour la phase de conception et de validation de notre recherche. Ce sont les hypothèses de recherche.

Nous nous plaçons dans une perspective qui considère la pratique de l'enseignant des mathématiques comme étant l'ensemble des travaux dont le but est de faire apprendre aux élèves des mathématiques. On admet que l'étude du **NAG** est susceptible de favoriser une mise en évidence de savoirs cachés ou manquants au niveau des connaissances, permettant d'articuler les différents cadres (au sens de Douady, 1984) numérique-algébrique et géométrique ainsi que les caractéristiques de ces savoirs cachés.

Notre recherche s'appuie sur la participation de deux enseignants de l'institution EMS, professeurs des mathématiques, ayant un acquis d'expériences professionnelles. Nous faisons l'hypothèse qu'ils disposent de nombreuses connaissances venues de différents domaines mathématiques mais qu'ils n'estiment pas importante l'utilisation des interrelations entre ces diverses connaissances.

Le contexte précédent est lié à l'hypothèse qu'il existe un vide didactique (Bronner, 1997 ; 2007) pour le **NAG**, en tant qu'outil et objet, dans l'EMS. Malgré ce vide, le **NAG** est présent dans la pratique des enseignants et a une place et un rôle importants dans l'enseignement des mathématiques. Ce vide peut constituer un obstacle à la fois pour les élèves et pour les

enseignants lors de la résolution de problèmes qui font appel, simultanément, aux domaines du **NAG** et lors de la construction des nouvelles connaissances.

Donc l'étude des rapports personnels des enseignants au **NAG** et du processus de la transposition didactique de cet objet dans l'enseignement des mathématiques au secondaire, sont des objectifs de la présente recherche. Nous ambitionnons d'étudier plus précisément les choix transpositifs actuels, les écologies pour les organisations didactiques et mathématiques relatives au **NAG** dans l'institution EMS, et les systèmes de contraintes et conditions qui pèsent sur cet objet.

Résumons nos hypothèses de recherche :

Tableau 1: Les hypothèses.

HYPOTHESES DE RECHERCHE
<p>H1 - Il y a un vide didactique (Bronner 1997, 2007) pour le NAG, en tant qu'outil et objet dans l'EMS.</p> <p>H2 - Les enseignants de l'EMS n'accordent pas une grande importance à l'utilisation des interrelations entre domaines, et notamment à propos du NAG.</p> <p>H3 - Malgré ce vide, le NAG est présent dans la pratique des enseignants et joue un rôle important dans l'enseignement des mathématiques.</p> <p>H4 - Ce vide peut constituer un obstacle à la fois, pour les élèves et les enseignants, lors les travaux qui font appel aux domaines NAG.</p>

Nos hypothèses et objectifs de recherche, décrits ci-dessus, nous ont conduit à faire les choix méthodologiques et théoriques que nous présentons dans les chapitres suivants.

CHAPITRE A2 : CADRE THEORIQUE

Dans ce second chapitre, nous introduirons le cadre théorique de notre recherche. Comme nous l'avons annoncé précédemment, le cadre théorique dans lequel nous nous plaçons, est constitué essentiellement de différents aspects de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) telle qu'elle a été développée par Chevallard (1991). Nous présenterons dans ce qui suit une synthèse de cette théorie et d'autres éléments théoriques, tout en définissant la manière dont ils seront utilisés dans notre recherche.

4 Changements de cadres et de registres

4.1 Cadres

Comme nous l'avons déjà présenté, Régine Douady (1986) considère : « un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations ». C'est ainsi que l'on parle de cadres numérique-algébrique et géométrique.

Prenons comme exemple, le problème suivant : « Étant donné que P, Q et R sont trois points distincts du plan, P, Q et R sont-ils alignés ? ». Selon les données de l'énoncé, le problème peut être résolu en utilisant plusieurs cadres (géométrique, algébrique, ..).

Un cadre apparaît comme un système de connaissances locales (qui évoluent avec le temps et suivant le sujet considéré). Selon Régine Douady (1986), « le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. L'élève peut acquérir de nouvelles techniques, prouver de nouveaux résultats. » Le changement de cadres peut permettre à l'élève de construire son propre savoir. C'est ainsi qu'elle précise les conditions suivantes des problèmes proposés aux élèves :

- l'élève peut comprendre (seulement avec ses connaissances) ;
- l'élève peut engager une procédure de résolution sans qu'elle puisse aboutir ;
- le concept permettant de répondre efficacement au problème est celui que l'on souhaite enseigner à l'élève ;
- le problème doit pouvoir être formulé dans au moins deux cadres.

4.2 Registres de représentations sémiotiques

La sémiotique (du grec, sémosis : action de marquer d'un signe) est l'étude des systèmes de signes, qui s'intéresse aux relations des signes entre eux (syntaxe), aux relations entre signes et signifiés (sémantique), et à l'utilisation des signes (pragmatique). Raymond Duval (1993) définit les représentations sémiotiques comme étant « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentations qui a ses contraintes propres de signifiante et de

fonctionnement ». Une figure géométrique, une formule algébrique, un graphique, une écriture symbolique, un énoncé en langue naturelle sont des exemples de représentations sémiotiques.

Selon Raymond Duval (1993), les diverses représentations sémiotiques d'un objet sont nécessaires. Les objets mathématiques ne pouvant pas être directement perçus, il faut pouvoir en donner des représentants. Mais il faut faire attention à distinguer un objet de ses représentations.

Il présente les registres (de représentations sémiotiques) comme étant des systèmes sémiotiques qui permettent les trois activités fondamentales suivantes :

- I)** Le développement des représentations mentales ;
- II)** L'accomplissement des différentes fonctions cognitives :
 - fonction d'objectivation (expression privée) : par exemple, l'élaboration d'un schéma, le dessin d'une figure géométrique, etc.
 - fonction de communication (expression pour autrui) : par exemple, l'énonciation d'une phrase, l'écriture d'une formule, etc.
 - fonction de traitement : par exemple, la paraphrase (dans le langage naturel), le calcul (dans les écritures symboliques), etc.
- III)** La production des connaissances

Pour Raymond Duval (1993), le recours à plusieurs registres est une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent être reconnus au travers de chacune de l'une d'elles.

Par exemple, dans le cadre fonctionnel, une fonction est définie comme étant un procédé permettant d'associer à tout nombre x , élément d'un ensemble E , un unique nombre y . Cet objet mathématique admet différentes représentations définies par une formule algébrique (registre des écritures algébriques), ou par une courbe représentative (registre graphique), etc. C'est en utilisant ses différentes représentations, et en faisant les liens entre elles que les élèves conceptualisent la notion de fonction.

A l'intérieur d'un même cadre, les formulations relèvent de plusieurs registres. Dans les différents cadres, on retrouve souvent les mêmes registres. Le passage d'un registre à l'autre n'est pas automatique pour les élèves. Pourtant la résolution d'une question est parfois plus facile en adoptant tel registre plutôt que tel autre. L'enseignant doit alors faire travailler les élèves sur chaque registre, mais aussi sur le passage d'un registre à l'autre. Dans certains cas, le changement de registres s'accompagne de changements de cadres.

Lors de la résolution d'un problème, les changements de cadres et/ou de registres peuvent permettre d'anticiper ou de conjecturer. Ils peuvent aussi permettre un contrôle de la stratégie utilisée.

Les changements de cadres et de registres traduisent l'intention d'exploiter le fait que la plupart des concepts peuvent intervenir dans divers domaines, divers cadres. Il en résulte des correspondances entre objets et relations des différents cadres. Mais pour les élèves en cours d'apprentissage, les concepts fonctionnent de manière partielle et différente selon les cadres. Par suite, les correspondances sont incomplètes. Les changements de cadres et de registres sont indispensables pour donner du sens à l'activité mathématique, puisque les mathématiques ne décrivent que des relations. C'est une particularité de cette discipline qui avec la nécessité absolue de structurer l'information, explique en grande partie la spécificité de sa didactique.

En fait, les termes et les idées de cadres et de registres qui précèdent constituent l'origine de notre problématique. Lors de l'apprentissage d'une notion mathématique, les allers et retours entre des situations permettant d'étudier la notion pour elle-même et d'autres situations mettant cette même notion en position d'outil, sont producteurs de sens pour les élèves et contribuent à son élaboration. Nous regardons les interrelations entre les cadres et les registres comme un outil qui peut être utilisé au service des mathématiques pour apprendre des notions mathématiques.

Dans ces conditions, le **NAG** pourra permettre d'aider l'élève à donner du sens aux notions et de le faire progresser dans sa maîtrise de l'outil.

5 La théorie anthropologique du didactique

5.1 La TAD et les mathématiques

La Théorie Anthropologique en Didactique (TAD) des mathématiques s'inscrit dans un « programme épistémologique » de recherche, qui a son origine dans les travaux de Guy Brousseau. La caractéristique principale de ce programme consiste à considérer que l'objet premier de recherche de la didactique est l'activité mathématique comme étant effectué dans différentes institutions de la société.

Dans ce contexte, la « connaissance » est considérée d'un autre point de vue comme le produit ou la cristallisation d'un certain travail humain, toujours caractérisé par les activités dans lesquelles il apparaît. A partir de cet angle, tant la connaissance que l'activité mathématique sont des constructions sociales effectuées dans des institutions avec certains contrats institutionnels. Étudier les conditions de production et de diffusion de la connaissance mathématique requiert de notre part la capacité de décrire et d'analyser certains types d'activités humaines effectuées dans des conditions particulières. Il a donc fallu nécessairement un modèle épistémologique explicite de l'activité mathématique : l'analyse de l'activité mathématique requiert l'utilisation de notions appropriées permettant de décrire leurs différents composants, ainsi que leurs conditions de production et de reproduction. On obtient alors un modèle épistémologique de l'activité mathématique, c'est-à-dire de ce qui est compris pour rendre mathématique et pour produire la connaissance mathématique (Bosch, 2006).

« Les composants du modèle, qu'ils conforment, pour ainsi dire - l' " par anatomie " de l'activité mathématique - doivent correspondre avec les composants "du savoir mathématique" compris comme organisation théorique qui émerge de l'activité mathématique en même temps qu'elle l'orchestre. [...] En même temps, la description précédente doit être articulée avec un modèle de la "physiologie" de l'activité, c'est-à-dire, avec les conditions sous lesquelles elle est effectuée et il évolue, ou pour créer un nouveau savoir mathématicien (la recherche pure ou appliquée) ou pour reconstruire ce savoir, ce qui constitue l'activité didactique proprement dite. » (Bosch, 2006).

Le modèle épistémologique proposé par la TAD est capable de décrire l'activité mathématique et le savoir qui en émerge.

5.2 Une écologie pour le savoir

Dans le cadre général de la théorie anthropologique du didactique, Chevallard s'appuie sur les termes primitifs d'objet, d'individu, de rapport et d'institution pour construire son modèle. Tout est quasiment susceptible d'être objet, en particulier, toute œuvre, c'est-à-dire toute production humaine pour apporter une réponse à une ou plusieurs questions, théoriques ou pratiques. Chevallard (1989), considérait qu'« un savoir n'existe pas « in vacuo » dans un vide social : tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions ». Ainsi, selon lui, tout savoir est savoir, institution : « [...]. Une école est une institution de même qu'une classe ; mais il y a aussi l'institution « travaux dirigés », l'institution « cours », l'institution « famille ». La vie quotidienne est une institution. » (Chevallard, 1992, p.88).

Dans cette approche on retrouve, entre autres, la théorie initiale de la transposition didactique puisque, pour qu'un savoir puisse vivre dans une institution, il faut qu'il se soumette à un certain nombre de contraintes, ce qui implique notamment qu'il se modifie, sinon il ne peut pas se maintenir dans l'institution. Ce nouveau cadre plus large constitue ce que Chevallard a appelé « l'écologie des savoirs ». Dans ce contexte, il considère un habitat comme les lieux où l'on peut trouver un tel objet mathématique et les objets avec qui il entre en association. Il considère aussi la niche comme la place fonctionnelle occupée par un tel objet. Et dans la suite, il considère l'écosystème comme un lieu réunissant les conditions écologiques où un tel objet peut vivre, défini comme un système d'êtres et de relations :

« Les écologistes distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce. » (Chevallard, 1994. p. 142).

Selon le point de vue de Chevallard, un savoir S va exister dans différentes institutions, entouré par d'autres savoirs ou connaissances explicites ou implicites qui, pour les sujets de chaque institution, vont aller de soi, être stables, et constituer ce qu'il appelle un milieu. Ce milieu va caractériser les conditions dans lesquelles va vivre ce savoir S dans l'institution considérée. La caractérisation des conditions de vie d'un savoir donné a amené Chevallard (1994) à élargir le cadre, en intégrant ce qu'il appelle le questionnement écologique, s'inspirant de l'écologie biologique. Dans ce contexte Chevallard et Artaud (1997) montrent alors comment un objet émerge et peut vivre dans un écosystème didactique. Pour qu'un objet O émerge dans un écosystème didactique, ils considèrent comme nécessaire qu'existe un milieu pour cet objet (un ensemble d'objets connus) avec lesquels O viendra se mettre en interrelation. Car un objet mathématique ne peut exister seul : il doit venir prendre place dans une organisation mathématique, organisation qu'il faut faire exister. Il faut prendre appui sur des organisations, mathématiques ou non, déjà existantes.

Selon Artaud (1997), cette dimension écologique permet de questionner les objets mathématiques :

« La problématique écologique se présente, d'emblée, comme un moyen de questionner le réel. Qu'est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ? » (Artaud, 1997, p. 99)

L'analyse écologique vise ainsi à permettre de mettre à jour un réseau de conditions et de contraintes qui vont déterminer la place que peuvent occuper les interrelations entre les domaines mathématiques dans le processus enseignement/apprentissage dans l'institution EMS. Pour ce faire, nous analyserons quelques aspects historiques, sur l'utilisation du **NAG**, en prenant en compte le fonctionnement global des institutions liées au fonctionnement du savoir savant où le **NAG** intervient. Dans ce sens, Dorier (2000), signale :

« Par l'objet même de son étude, la recherche en didactique des mathématiques présente un caractère expérimental, cependant le travail "de terrain" (observations, expérimentations, analyses de productions d'élèves, etc.) est sous-tendu par un travail préalable important ayant trait à "l'étude du savoir mathématique". Cette étude est une phase fondamentale pour que le chercheur puisse prendre ses distances par rapport aux enjeux didactiques. Le sens des concepts, les problèmes qui s'y rattachent, la position relative d'un élément de savoir dans un savoir plus large qui l'englobe, mais aussi la variabilité de ces données en fonction des périodes et des institutions, etc. sont autant de questions qui aident à mieux comprendre le fonctionnement d'un système didactique. De plus, le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit de la production du savoir dans la communauté mathématique jusqu'à son enseignement, en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs. » (Dorier, 2000 p. 9).

Nous considérons que le cheminement dans la recherche en didactique, qui prend en compte la constitution historique du savoir, est fondamental, voire crucial pour l'étude du processus de la transposition didactique. Par ailleurs, comme l'indiquent Assude et Margolinas (2005), une analyse de matériaux, comme les manuels scolaires, peut compléter l'étude de la transposition didactique :

« L'étude de la transposition didactique appelle, le plus souvent, celle de l'histoire de l'enseignement d'un domaine donné des mathématiques. Les matériaux à disposition ne permettent pas, le plus souvent, d'avoir accès à l'enseignement effectif des époques anciennes. Les manuels scolaires peuvent renseigner sur un élément qui est intermédiaire entre la prescription officielle (en France, les programmes officiels) et les pratiques effectives des professeurs. Même pour les périodes actuelles, étant donné que les programmes et les manuels sont très aisément accessibles alors que les pratiques en classe sont longues à observer, cette facilité méthodologique est très souvent (presque toujours), notamment dans les travaux de thèse, à l'origine de questions qui sont adressées aux pratiques. Ainsi le manuel, dans de nombreux travaux de didactique des mathématiques, est un outil pour analyser le curriculum et les processus de transposition didactique ». (Assude et Margolinas, 2005, p. 232).

Partant de ce point de vue, nous nous proposons de dégager dans notre travail, à partir d'éléments historiques, de programmes, les habitats et des niches occupés par le **NAG**. C'est donc une analyse épistémologique, fondée sur les outils de l'analyse écologique, de l'évolution de l'enseignement et de l'apprentissage de cet objet que nous nous proposons de mener.

5.3 La transposition didactique

La notion de transposition didactique (Chevallard, 1985) est devenue d'usage courant en sciences d'éducation et notamment en plusieurs domaines des didactiques des disciplines, dès son introduction⁹ en didactique des mathématiques par Yves Chevallard en 1980.

Le concept de transposition didactique attire notre attention sur les transformations que subissent les théories des mathématiques lorsqu'elles deviennent « savoir scolaire », d'abord dans les programmes, puis dans les manuels et enfin dans les salles de classe. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au processus de transposition du **NAG**.

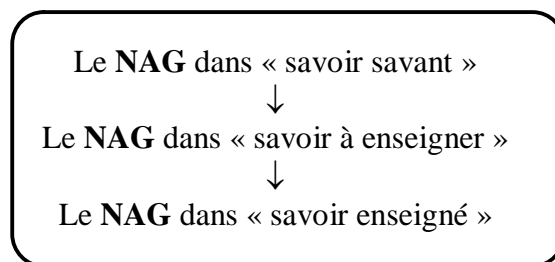


Figure 4 : Le **NAG** dans le processus de transposition didactique.

Ce processus de transformation du savoir peut se décomposer en deux étapes (Arsac, 1988, 1994, 1995,). Dans ces « deux étapes de la transposition didactique » présentées par Arsac, la première flèche figure la transposition des savoirs et des pratiques en programmes scolaires, que Perrenoud (1994, 1996, 1998) appelle « curriculum formel ou prescrit » et que Yves Chevallard a nommé « la transposition didactique externe ».

Dans ce premier temps de transformation du savoir, le travail porte sur la responsabilité de la noosphère, comme souligne Chevallard :

⁹ Cette notion a été introduite par Yves Chevallard dans la communauté didactique en 1980, lors d'un cours donné à la première école d'été de didactique des mathématiques.

« C'est elle [la noosphère], [...] qui va procéder à la sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme « savoir à enseigner », seront alors soumis au travail de transposition ; c'est elle, encore, qui va assumer la partie visible de ce travail, ce qu'on peut appeler le travail externe de la transposition didactique, par opposition au travail interne, qui se poursuit, à l'intérieur même du système d'enseignement, bien après l'introduction officielle des éléments nouveaux dans le savoir enseigné. » (Chevallard 1991, p. 31).

La seconde flèche figure la transposition des programmes en contenus effectifs de l'enseignement – « la transposition didactique interne » (Chevallard 1991), c'est-à-dire la transformation qui révèle largement la marge d'interprétation, voire la création des enseignants.

Considérant notre travail dans ce cadre, nous analyserons les processus de transposition didactique interne du **NAG** dans l'institution EMS française à l'heure actuelle et notamment le rapport de l'institution EMS au **NAG**.

Pour pouvoir étudier le processus de transposition du **NAG** au EMS, nous observerons comment est légitimé le savoir à enseigner lié au **NAG**.

Quels sont les savoirs à enseigner qui font référence au **NAG** ?

Quel est l'écart entre le savoir enseigné et le savoir à enseigner dans le cadre du **NAG** ?

5.4 Le rapport personnel et institutionnel

Dans ce travail, notre objet d'étude – le **NAG** – est considéré, non comme un objet mathématique existant en soi, mais comme des entités qui émergent de systèmes de pratiques existant dans des institutions données. Ces systèmes ou praxéologies sont décrits en termes de tâches dans lesquelles l'objet est investi, les techniques permettant de les résoudre, et à travers lesquelles le discours sert à expliquer et à justifier les techniques, ce que nous développerons en détail plus loin.

Selon Chevallard (1992), la didactique des sciences, comme toutes les didactiques, s'inscrit dans le champ de l'anthropologie sociale, c'est-à-dire, l'étude de l'homme. L'auteur distingue pourtant des types d'objets particuliers : les institutions (I) (comme par exemple EMS), les personnes (X) (comme par exemple Professeur - P, Elève - E) et les positions qu'occupent ces personnes dans les institutions. La connaissance – et le savoir comme une certaine forme d'organisation de connaissance – entre alors en scène avec la notion de rapport.

Chevallard prend en compte les liens qui peuvent exister entre les éléments précédents :

«Un objet existe dès lors qu'une personne X ou une institution I reconnaît cet objet comme existant pour elle. Plus précisément, on dira que l'objet O existe pour X (respectivement, pour I) s'il existe un objet, que je note R (X, O) (resp. $R_I(O)$), que j'appelle rapport personnel de X à O (resp. Rapport institutionnel de I à O). En d'autres termes, l'objet O existe s'il existe pour au moins une personne X ou une institution I, c'est à dire si au moins une personne ou une institution a un rapport à cet objet ». (Chevallard, 1992).

Autrement dit, le rapport personnel au **NAG** précise la manière dont P ou E connaît le **NAG**. De même, se trouve défini, un rapport institutionnel de l'institution EMS au **NAG** noté R (EMS, **NAG**) qui traduit la connaissance et l'usage du **NAG** dans l'institution EMS. Dans la figure ci-dessous, nous schématiserons ces rapports ainsi :

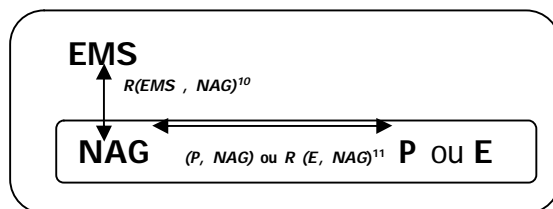


Figure 5 : Schéma des rapports entre l'EMS, le NAG et P ou E.

En ce qui concerne le **NAG** dans l'enseignement des mathématiques, nous pouvons nous questionner sur la reconnaissance et l'utilisation du **NAG** par l'institution EMS au niveau de la détermination didactique, lesquelles permettent de mieux identifier les contraintes et les points d'appuis qui peuvent déterminer les choix des stratégies didactiques des enseignants des mathématiques aujourd'hui.

Alors, avec cette caractérisation, nous pourrions parler de rapport institutionnel et personnel au **NAG**. Donc, le **NAG** existera officiellement pour l'EMS, s'il existe les rapports notés R (EMS, NAG) et R (EMS, O), respectivement, de l'institution EMS au **NAG** et de l'institution EMS à l'objet O, qui se traduisent par des pratiques existant dans cette institution. La figure ci-dessous schématise ces rapports :

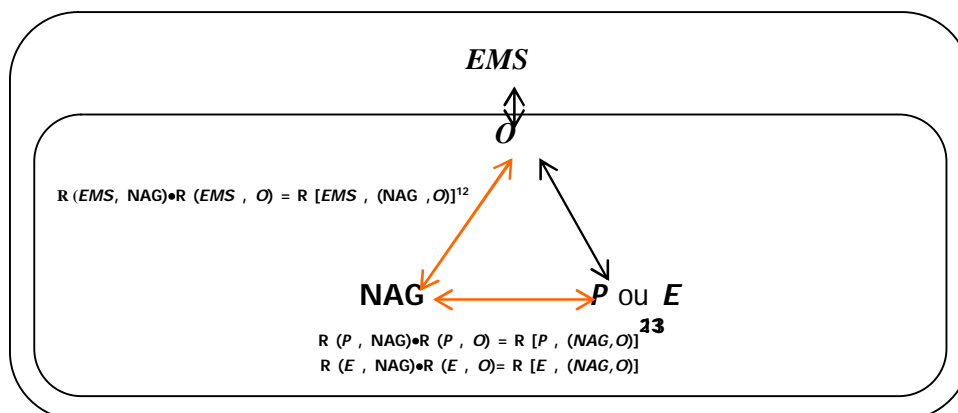


Figure 6: Les trois termes primitifs considérés par Chevallard avec l'outil (le **NAG**) un objet institutionnel.

Le rapport institutionnel est en quelque sorte caractérisé par les différents types de tâches que les sujets doivent savoir effectuer et par des raisons qui justifient les recours à ces tâches. Le rapport institutionnel à un objet (R (EMS, NAG)) est donc décrit par un ensemble de pratiques sociales qui devraient fonctionner au sein de l'institution en mettant en jeu cet objet de savoir.

5.5 Les praxéologies

Comme le souligne Chevallard, le savoir mathématique, en tant que forme particulière de connaissance, est le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne, ou plus généralement, se transpose dans des institutions.

¹⁰ Rapport personnel de EMS au NAG \Leftrightarrow EMS connaît le NAG.

¹¹ Rapport personnel de P ou E au NAG \Leftrightarrow P ou E connaît le NAG.

¹² Rapport institutionnel au NAG : si le NAG et O se rencontrent dans l'institution EMS autour de l'enseignement et l'apprentissage de O avec le NAG.

¹³ Rapport personnel de P ou E à O par la médiation avec le NAG.

Chevallard nous propose la notion d'organisation praxéologique ou praxéologie (comme la notion clé), pour étudier les pratiques institutionnelles relatives à un certain objet de savoir et, en particulier, les pratiques sociales en mathématiques. Les praxéologies sont décrites en termes de Type de tâches (T), Types de techniques (τ), Technologie (θ) et Théorie (Θ).

Chevallard donne, parmi d'autres, la définition suivante pour la notion de praxéologie :

« En toute institution, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents types de tâches T, accomplis au moyen d'une certaine manière de faire, ou technique. τ Le couple [T, τ] constitue, par définition, un savoir-faire. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un environnement technologico-théorique [θ, Θ], ou savoir (au sens restreint), formé d'une technologie θ , « discours » rationnel (logos) censé justifier et rendre intelligible la technique (tekhnè), et à son tour justifié et éclairé par une théorie Θ , généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté [T/ τ / θ / Θ], constitue alors une organisation praxéologique ou praxéologie, dénomination qui a le mérite de rappeler la structure bifide d'une telle organisation, avec sa partie pratico - technique [T/ τ] (savoir-faire), de l'ordre de la praxis, et sa partie technologico -théorique [θ / Θ] (savoir), de l'ordre du « logos ». (Chevallard, 1997)

Les quatre notions : type de tâche (T); technique (τ); technologie (θ) et théorie (Θ), décrivent une organisation praxéologique complète [T/ τ / θ / Θ], décomposable en deux blocs [T/ τ] et [θ / Θ], constituant respectivement, le savoir-faire [praxis] et le bloc technologico-théorique [le logos].

Nous pouvons donc affirmer que, selon Chevallard (1999) produire, enseigner et apprendre des mathématiques sont des actions humaines qui peuvent se décrire selon le modèle praxéologique.

5.6 Les cadres et la TAD

Dans ses travaux sur l'organisation mathématique (OM), Chevallard (2002) parle aussi de domaine. Cependant il apporte une vision qui nous permet d'aller un peu plus loin que celle de Douady. Car avec le travail sur les OM, Chevallard propose un découpage qui va plus loin qu'au niveau des domaines et qui nous permet de regarder les mathématiques au niveau des secteurs, des thèmes et des sujets.

Dans cette perspective, Chevallard montre que pour chaque type de tâches T, on trouve un triplet formé d'une technique τ (au moins), d'une technologie θ de la technique et d'une théorie Θ . Autrement dit, le praxéologie mathématique : [T, τ , θ , Θ]. Cette praxéologie est une praxéologie ponctuelle quand il s'agit d'une praxéologie relative à un type unique de tâches.

Généralement, on ne rencontre que rarement les praxéologies ponctuelles. Dans une institution comme l'EMS par exemple, une théorie Θ dépend de *plusieurs technologies* θ_j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à *autant de types de tâches* T_{ij} .

Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en *organisation locales*, [T_i/ τ_i / θ_i / Θ_i], centrées sur une technologie θ déterminée. Ensuite en *organisations régionales*, [T_{ij}/ τ_{ij} / θ_j / Θ_j], formées autour d'une théorie Θ . Au-delà, Chevallard (1998) nomme organisation *globale* le complexe praxéologique [T_{ijk}/ τ_{ijk} / θ_{jk} / Θ_k], obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k . Ce découpage peut être représenté de la façon suivant :

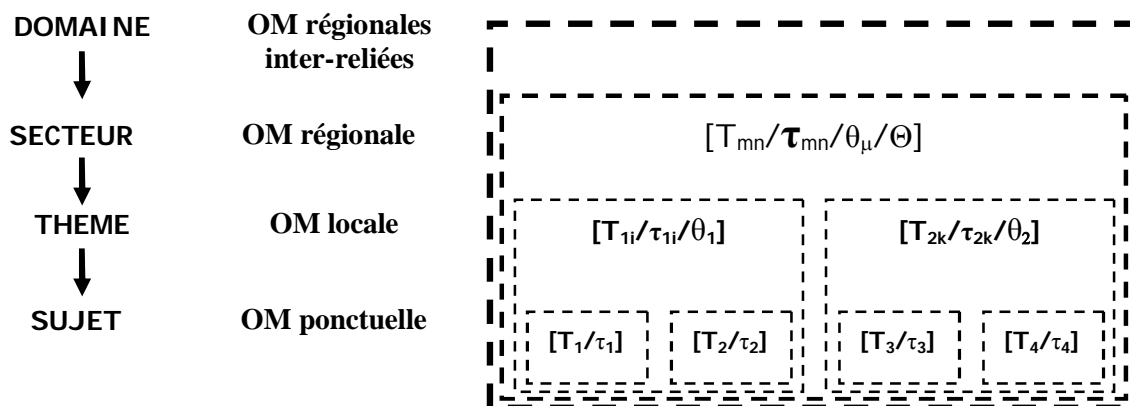


Figure 7: Les organisations ou praxéologies mathématiques.

Yves Chevallard montre que l'OM globale est spécifique à chaque institution, c'est-à-dire que d'une institution à une autre, on va pouvoir découper l'OM de façon différente en domaines, secteur, thème, sujet.

Régine Douady se situe dans ses travaux au niveau des grands domaines, alors que Chevallard étudie le découpage à l'intérieur même des domaines. Avec la théorie de Chevallard, nous pouvons aussi regarder les articulations au niveau d'un domaine, c'est-à-dire, les interrelations au niveau des secteurs, des thèmes, des sujets. Et comme nous l'avons présenté dans cette partie de la thèse, c'est à ce niveau là, et à cette échelle que le **NAG** s'applique pleinement.

Prenant comme exemple la tâche proposée dans la figure 1, nous pouvons l'analyser de la façon suivante :

Table 1 : Niveau de détermination didactiques.

Discipline d'études	Niveau 1	Mathématiques
Domaine d'études	Niveau 2	Analyse
Secteur d'études	Niveau 3	Suites
Thème d'études	Niveau 4	Suite arithmétique.
Sujet d'études	Niveau 5	U_n est l'aire du domaine vert de la figure. Calculer U_n en fonction de n et vérifier si la suite (U_n) est arithmétique.

En fait, l'outil que Chevallard nous présente nous permet d'articuler dans notre cadre théorique les apports de Douady avec celui de Chevallard, car cet outil nous donne la possibilité de regarder, d'étendre les interrelations dans des niveaux plus fins (secteur, thème, sujet) que celui des domaines. Ces approches apportent des idées différentes et se complètent.

Le découpage présenté dans le travail sur l'OM est relatif : il dépend des institutions, dans lesquels on peut en général voir des différences :

- ✓ entre un enseignement et un autre,
- ✓ entre deux classes du même niveau,
- ✓ entre le collège et le lycée,
- ✓ au Brésil et en France.

Comme nous pouvons voir dans le tableau 2, dans le cadre d'une perspective anthropologique, il nous a fallu caractériser les éléments des secteurs, des thèmes, des sujets et les pratiques associées dans une institution donnée. Pour cela nous avons utilisé un outil qui puisse intégrer et caractériser ces niveaux de déterminations didactiques : le *filtre du numérique*.

6 Le filtre du numérique

Selon Bronner (2007), dans une institution donnée, à un instant institutionnel donné, une tâche générique demande à être explicitée du point de vue de certaines contraintes et conditions à propos du résultat attendu, du *type de nombre*, des *opérateurs*, des *comparateurs*, le contrat pouvant aller jusqu'à préciser la forme de ce résultat.

6.1 Le type de nombre

Dans une première approche, Bronner (1997) repère deux grands types de pratiques dans les institutions d'enseignement au collège et au lycée : *la pratique du calcul exact et la pratique du calcul approché*. La caractérisation de ces pratiques de calcul nécessite en fait la prise en compte d'autres éléments essentiels comme la nature arithmétique des nombres et les systèmes de nombres, ainsi que les registres de représentation sémiotique utilisés. Ces pratiques fonctionnent sous la contrainte de règles qui constituent ce que Bronner (1997) appelle *le contrat institutionnel de calcul*. Cette notion est un des principaux axes du *filtre du numérique* :

« A travers la notion de contrat institutionnel de calcul (dans une institution), je souhaitais mettre en évidence la présence de choix mathématiques et didactiques au niveau des pratiques de calcul, choix souvent implicites. Cette notion permet de comparer des pratiques qui pourraient apparaître comme identiques en surface, et de repérer certains problèmes didactiques». (Bronner, 1999)

Cette construction constitue une première catégorisation des pratiques à partir du type de calcul, exact ou approché, bien qu'elles soient souvent mixtes, mais cette décomposition fournit les principales catégories d'outils d'analyse. La différenciation même de ces pratiques peut être une difficulté et source de problèmes au point que les enseignants voient *une opposition entre l'exacte et l'approchée* et en font un enjeu didactique important en parlant de *la différenciation valeurs exactes – valeurs approchées* ou *calcul exact – calcul approché* (Bronner 1997).

6.2 Les opérateurs

Selon Bronner, à certaines étapes du curriculum et à certains moments de la programmation de l'étude dans une institution, on peut considérer que l'espace numérique contient un système de nombres stabilisé, c'est-à-dire qu'il répond aux besoins des problèmes à traiter :

« Nous nous placerons dans le cas où ce système contiendrait au minimum un ensemble d'entiers positifs et, en général, comme au début du collège, un ensemble de nombres décimaux. Dans cet espace numérique, une interrelation apparaît inévitablement entre notre objet premier, l'objet nombre, et un deuxième objet, indispensable pour la résolution de problèmes des domaines numérique, algébrique ou géométrique : celui d'opérateur. Car le nombre n'est pas un objet statique, il faut pouvoir le modifier, le transformer. Cet agir sur les nombres est souvent mis sous le qualificatif d'un genre : le calcul. Cet objet, étant polysémique, renvoie à de nombreux aspects qu'il nous faut interroger davantage. » (Bronner, 2007 p. 23)

Dans ce contexte Bronner signale que les opérateurs sont donc nécessaires, lesquels peuvent alors prendre le statut d'opérations, de loi interne ou encore de fonction. Ainsi, il convoque l'objet *opérateur* au sens suivant :

« Pour un opérateur à un opérande, comme l'élevation au carré $x \rightarrow x^2$, nous retenons ici essentiellement le procédé opératoire, la relation entre l'opérande et l'image. Les sources dans lesquelles sont pris les opérandes (ce qui correspond aux ensembles de départ des fonctions) et les buts (ensembles d'arrivée) sont mis entre parenthèses. Autrement dit, il s'agit d'une notion de fonction "pensée en soi" (Descles 1988), sans s'occuper des opérandes. » (Bronner, 2007 p. 24).

En fait, la notion d'opérateur définie par Bronner permet d'englober sous un même statut des objets mathématiques qui sont formalisés sous des catégories ou des structures différentes dans les mathématiques savantes, mais qui apparaissent sous un statut relativement identique dans les institutions d'enseignement, tout au moins à certains niveaux du curriculum.

A partir de cette notion, il définit aussi des opérateurs à une ou plusieurs variables comme « additionner », « diviser », « élever au carré », « prendre la racine carrée » ou encore les opérateurs « cosinus » et « sinus » :

« Un système d'opérateur SO fait toujours partie des objets stables de l'espace numérique de l'institution à un instant donné. Dans le système d'enseignement, dès le début du collège, ce système contient au moins les quatre opérations de l'arithmétique. Chacun des opérateurs a alors un domaine, souvent implicite, d'opérandes, qui est lié au système de nombres stabilisé SN. »
(Bronner, 2007 p. 24).

Le calcul à l'œuvre dans le numérique mobilise des opérateurs qui forment ainsi un type de non-ostensibles en jeu dans les pratiques de calcul. Ainsi, il signale que la délimitation du numérique relativement à l'objet « opérateur » n'est pas chose évidente, du point de vue théorique, comme du point pratique, au sens des acteurs et pour cela l'opérateur est considéré comme un analyseur fondamental des curriculums du filtre du numérique.

6.3 Les comparateurs

Dans le travail de caractérisation du numérique, Bronner pointe un autre type d'objet fondamental, qui sera également considéré comme un autre axe du filtre, axe plus orienté sur les structures d'ordre : le comparateur. Bronner signale que le numérique appelle, pour un certain nombre de tâches, des relations binaires, que l'on qualifie de comparateurs et qu'il existe 6 relations binaires fondamentales (égal, différent de, plus grand que, plus petit que, plus grand ou égal, plus petit ou égal) qui permettent de comparer des nombres ou des grandeurs.

6.4 Le filtre

A travers les trois objets du numérique décrits précédemment : *nombre, opérateur, comparateur*, Bronner dégage les premiers indicateurs du filtre du numérique et un ensemble d'objets permettant de caractériser le rapport à ces objets premiers et plus précisément les praxéologies mathématiques que permet le programme dans l'institution EMS. La fonction de ce filtre du numérique, élaboré au niveau des organisations mathématiques, est d'attraper et « traquer » le numérique, que ce soit au niveau d'une pratique ou d'une institution. Ainsi différents éléments constitutifs d'un espace numérique peuvent être identifiés :

- ✓ Les objets de bases : les systèmes de nombres explicites ou non, l'ensemble des opérateurs et des comparateurs ;
- ✓ Les types de pratiques (calcul exact, calcul approché, mixte) ainsi que les différents contrats institutionnels de calcul ;
- ✓ Les articulations et les dynamiques du domaine numérique avec les autres domaines ainsi que les contrats sous-jacents (y compris une dynamique numérico-numérique) ;
- ✓ Les raisons d'être du numérique.

Ces éléments sont complétés par l'identification des organisations mathématiques (OM) composées par les praxéologies du numérique dont l'ensemble constitue un Espace Numérique noté EN(I) ou EN(P, n, t) pour l'institution I ou de la pratique P au niveau n et à l'instant t (année, grade ou cycle, instant). Ces praxéologies permettent de mettre à jour :

- les types de tâches mettant en jeu les objets de EN ;
- les techniques de calcul associées ; en particulier la manière dont sont instrumentées les techniques ;
- les technologies et théories, en particulier celles fondant les tâches et techniques.

L'observation de l'espace numérique comprend également ce qui relève de l'organisation didactique (OD) dans ce qu'elle a de spécifiquement numérique.

Ce filtre est ainsi une grille d'analyse, que nous utiliserons dans notre méthodologie, qui est organisée autour des éléments présentés précédemment :



Figure 8: Le filtre du numérique.

Nous utiliserons notamment le filtre du numérique pour caractériser les domaines qui sont dans les frontières et dans les dynamiques intra et inter-domaines avec le numérique :

« Un domaine de savoir, même si nous le regardons du point de vue du curriculum, doit pour se développer lors de sa mise en œuvre effective, sous des dispositifs et organisations didactiques, s'appuyer sur des dynamiques, moteurs de son évolution à un niveau d'enseignement. Une de ses dynamiques, a été théorisée par Douady (1984) sous la forme de jeux de cadres, comme celle des interrelations entre les divers domaines mathématiques. Mais nous pouvons avec Chevallard [...] mettre en avant l'intérêt de telles dynamiques à d'autres niveaux d'organisation des savoirs comme celui des secteurs d'enseignement. Une dynamique interne numérique. » (Bronner, 2007 p.25).

Pour décrire et analyser les pratiques relativement au **NAG**, tout en prenant en compte les aspects soulevés précédemment, nous utiliserons le cadre théorique présenté précédemment pour modéliser la pratique des enseignants concernés à cette recherche. Le cadre théorique présenté ici est général, et nous y reviendrons à chaque fois que nous en ressentirons le besoin, pour préciser d'autres éléments théoriques.

Dans les paragraphes suivants nous présenterons la méthodologie que nous avons utilisée pour mener cette recherche.

CHAPITRE A3 : METHODOLOGIE

Le but de cette partie est de présenter, en un premier temps, la méthodologie générale de notre travail et dans un deuxième temps, les différentes procédures, choix et éléments qui composent ce cadre méthodologique.

7 Méthodologie générale

Nous rappelons que cette recherche est inscrite dans un cadre qui ambitionne de mettre en évidence l'utilisation du **NAG** dans l'EMS, ainsi que les conditions et les contraintes liés à une telle utilisation. Dans cette perspective, notre travail se propose d'aborder les points suivants :

- Étude d'éléments historiques et épistémologiques sur l'utilisation des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique, que nous classerons en prenant comme repère les travaux de René Descartes.

- Analyse des conditions actuelles de l'enseignement du **NAG** en France, à travers une analyse des programmes et des manuels de mathématiques au secondaire.

- Étude des pratiques des enseignants de mathématiques à la fin du collège et au début du lycée dans le cadre du **NAG**.

- Analyse d'interviews des enseignants à propos du **NAG**.

Notre étude se découpe en quatre parties :

7.1 Partie B : Éléments historiques et épistémologiques

Dans cette partie, nous avons analysé quelques aspects historique et épistémologique à propos de l'utilisation des interrelations entre les grands domaines mathématiques. Cette étude nous a permis de dégager des grandes utilisations des interrelations entre les grands domaines mathématiques en mettant, en particulier, en évidence, les liens entre les domaines numérique, algébrique et géométrique. Ce travail nous a permis d'identifier les habitats et les niches des interrelations, d'une époque avant les travaux de Descartes jusqu'à nos jours. Cette analyse a visé donc, à dégager, à travers quelques aspects, les conditions historiques et épistémologiques qui ont conduit à l'utilisation du **NAG** à différentes époques.

7.2 Partie C : Analyse institutionnelle.

Dans cette partie nous regarderons le rapport institutionnel au **NAG**, à partir de l'enseignement des concepts, des objets, de la résolution des problèmes dans le cadre du **NAG**. Nous utiliserons des éléments de l'analyse de la partie B pour comprendre l'analyse que nous dégagerons dans cette partie à travers une lecture en termes de transposition didactique. Donc, les analyses B et C se complètent dans cette partie, à travers une deuxième analyse écologique, dans la mesure où nous nous proposons de dégager les conditions et les contraintes écologiques qui pèsent sur le système actuel. Ceci nous conduit à analyser les programmes et les manuels du collège et du lycée.

7.3 Partie D : Analyse des pratiques

Dans cette partie, nous présenterons l'analyse de pratiques des enseignants des mathématiques, observées au secondaire. À partir de ces observations nous avons récolté plusieurs données issues des pratiques des acteurs dans ces institutions. Nous nous sommes alors intéressés à ces données, en gardant toujours les liens existant entre eux.

Dans ce contexte, nous nous sommes demandé, en effet, comment les choix que fait l'enseignant pour sa classe, pouvaient influencer l'acquisition des connaissances chez les élèves, ou leur réussite dans certaines tâches en mathématiques. Nous pensons que les pratiques sont complexes, car les enseignants sont soumis à diverses contraintes qu'il faut prendre en compte. Et donc, pour pouvoir analyser, appréhender la façon dont l'enseignant va utiliser le **NAG**, et étudier la place et le rôle de celui-ci en situation didactique, nous considérerons plusieurs éléments dans les pratiques. Ce processus renvoie à une situation singulière au sein de laquelle interagissent des acteurs singuliers (un enseignant, des apprenants) et des champs différents (celui de la communication et celui des savoirs) qui mettent en jeu les deux dimensions composant le travail enseignant : la dimension interactive de la communication et la dimension finalisée de l'apprentissage. Pour restituer cette articulation fonctionnelle entre, enseignement et apprentissage en situation, nous analyserons la place et le rôle du **NAG** dans les séances observées.

7.4 Partie E : Analyse des interviews des enseignants

Dans cette partie, nous avons tenté de compléter le rapport effectif des enseignants au **NAG** et les variations qui peuvent exister, dans les pratiques de ces enseignants. Pour ce faire, nous avons mené des entretiens auprès des enseignants. Ces enquêtes nous permettent de mieux cerner comment les acteurs du système réagissent par rapport aux contraintes institutionnelles. Il s'agit de recueillir des informations de la part de ceux-ci concernant :

- Leur formation générale ;
- Leur rapport au **NAG** du point de vue des programmes ;
- Leur rapport au **NAG** du point de vue des manuels ;
- Leur rapport au **NAG** du point de vue de sa pratique ;
- Leur rapport au **NAG** du point de vue de l'élève ;
- Leur rapport au **NAG** du point de vue épistémologique.

L'ensemble de ces analyses vise à mieux cerner les rapports personnels des enseignants au **NAG**.

Enfin en conclusion nous reprendrons les principaux résultats de ces quatre parties de notre travail, en mettant en évidence les limites et les perspectives. Nous évoquerons, de façon modeste, quelques propositions pour l'utilisation du **NAG**.

8 Choix et procédures méthodologiques

Nous rappelons que notre recherche s'intéresse aux interrelations entre les domaines mathématiques dans l'EMS et plus précisément aux interrelations entre les domaines numérique-

algébrique et le géométrique, à la fin du collège (la troisième) et au début du lycée (la seconde). Notre méthodologie doit permettre d'apporter des éléments de réponses aux questions :

- Quelles sont les conditions et les contraintes qui vont influencer la mise en place et l'utilisation du **NAG** dans l'EMS ?
- Quelle est la place du **NAG** dans l'EMS ?
- Comment les enseignants utilisent-ils le **NAG** et comment font-ils travailler leurs élèves dans ce cadre ?

8.1 Les observables, le recueil de données et les outils

8.1.1 Les classes

La fin de la scolarité au collège est l'achèvement du premier cycle de l'enseignement secondaire, mais pour l'ensemble des collégiens, ce n'est que le début d'une nouvelle étape. Les années qui suivent le collège sont déterminantes pour la qualification et l'insertion futures. Le passage du collège au lycée constitue un double enjeu :

- D'une part, préparer la transition des élèves et éviter la rupture entre la reconnaissance des connaissances et des compétences acquises au collège et les attentes ou les exigences du second cycle.

- Et d'autre part, assurer la continuité de telles constructions.

Pour étudier les rapports entre le **NAG**, les enseignants et les élèves, nous avons choisi deux classes du secondaire. Compte tenu du peu de temps pour observer et analyser des pratiques dans l'institution EMS, il nous a fallu choisir et nous avons opté pour la troisième et la seconde. Nous pourrions voir des continuités et des ruptures et ainsi percevoir la mise en place d'adaptations nécessaires de l'enseignement des mathématiques tant au collège qu'au lycée.

La classe de troisième représente la dernière classe du collège et constitue le cycle d'orientation. Dans cette classe, les objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques des classes précédentes doivent être renforcés et améliorés afin de constituer des connaissances et des outils sur lesquels doit se construire l'enseignement au lycée :

« Les objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques décrits pour les classes antérieures demeurent tout naturellement valables pour la classe de troisième [...] Ils disposent aussi de connaissances et d'outils sur lesquels se construira l'enseignement au lycée. [...] L'ensemble des activités proposées dans cette classe permet de faire fonctionner les acquis antérieurs et de les enrichir. Les activités de formation, qui ne peuvent se réduire à la mise en œuvre des compétences exigibles, seront aussi riches et diversifiées que possible. » (BO. HS. n°10 du 15/10/98 p.106).

Pour ces raisons, nous avons choisi la « classe de troisième »

Nous avons aussi choisi la première classe du deuxième niveau de l'enseignement secondaire, la seconde de détermination. La seconde est la première classe des lycées généraux et technologiques, la voie choisie par une grande partie des collégiens.

Comme classe du début de la phase finale d'enseignement secondaire, elle est le niveau scolaire où les élèves prennent le temps de faire des mathématiques, de bâtir des connaissances et d'accéder à la découverte et à l'expérience de la compréhension :

« La seconde est une classe de détermination. Pour que l'élève puisse définir son orientation, il doit avoir pris conscience de la diversité de l'activité mathématique. Chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, appliquer des techniques bien comprises, étudier une

démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, etc. sont quelques-uns des aspects de cette activité. [...] L'utilité et la pérennité des mathématiques ne sont pas à prouver. Néanmoins, il faut que chaque élève, à son niveau, puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction. Il doit, pour cela, pouvoir prendre le temps de faire des mathématiques, de bâtir un ensemble cohérent de connaissances et d'accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension.» (BO.HS. n°2 30 /08 /01 p.31).

8.1.2 Les enseignants

Après avoir choisi les classes pour mener cette recherche, nous avons contacté de nombreux professeurs de mathématiques enseignant en troisième et en seconde en France, au cours du mois de Juin 2007. La demande que nous leur avons faite était la suivante :

« Je m'adresse à vous en tant qu'enseignant-chercheur brésilien, dans le cadre des échanges universitaires entre le Brésil et la France. Je développe une recherche dans le domaine de la Didactique des Mathématiques. Pour ceci, je suis accueilli par le Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactiques Education et Formation – LIRDEF du l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie de Montpellier. Dans le cadre de cette recherche, je réalise un travail sur l'enseignement de mathématiques au secondaire dans les systèmes éducatifs français. Je vous prie de bien vouloir prendre le temps de réfléchir à une proposition que je désire vous faire. Dans le cadre de la recherche au niveau d'une thèse, je vous contacte parce que je m'intéresse à l'enseignement des mathématiques au secondaire (plus précisément des classes de troisième et de seconde) et je voudrais pouvoir suivre aussi bien, l'enseignement par le professeur, que les apprentissages du côté des élèves pendant toute la période de l'année scolaire 2007-2008. Si vous désirez répondre favorablement à ma demande ou si vous désirez des renseignements supplémentaires, je vous propose de me contacter par mail ou par téléphone. Dans le cas où vous accepteriez ma demande, nous pourrions déterminer ensemble des modalités de rencontres qui pourraient prendre des formes diverses en accord avec vous (entretiens à la fois avec l'enseignant et les élèves, visites dans des séances enregistrées au magnétophone, enregistrées en vidéo, ...). Je vous prie de bien vouloir diffuser cette proposition auprès d'autres collègues enseignant en troisième et en seconde. Merci par avance pour l'attention portée à ce message.»

Dans cette demande, le contexte mathématique qui nous intéressait, « l'utilisation du **NAG** », n'avait pas été divulgué. Cette décision a été prise, volontairement, pour que l'annonce de nos intentions n'influence pas l'enseignant qui aurait pu avoir l'envie de modifier ses intentions initiales, autant du point de vue des contenus que de celui des pratiques.

Quelques enseignants ont répondu positivement à notre demande, mais comme le regard que nous portions sur l'enseignement dans les classes que nous avons choisies, était volontairement situé au niveau des praxéologies et des rapports personnels des enseignants et des élèves au **NAG**, nous avons voulu choisir deux d'entre eux. Ces deux enseignants avaient des liens communs. Ils étaient assez investis dans des ateliers et des projets autour de l'enseignement des mathématiques et membres actifs de l'IREM. Aucun d'entre eux n'était débutant, les deux participaient aux cercles d'étude organisés par les inspecteurs de l'Académie de Montpellier. L'enseignant du lycée était plus expérimenté que celui du collège, il avait eu déjà l'opportunité d'être enseignant au collège et était formateur à l'IUFM.

Les deux enseignants ont accepté le dispositif de recueil des données ci-dessous, pendant les séances observées :

- ✓ Progression de l'enseignant ;
- ✓ Copies des élèves ;
- ✓ Cahiers de quelques élèves ;

- ✓ Séances enregistrées et transcription ;
- ✓ Séances filmées et transcription
- ✓ Interview auprès de l'enseignant et transcription.

8.1.3 Description des classes

8.1.3.1 La troisième

La classe de 3^{ème}, que nous avons observée, comporte 24 élèves ayant des places fixes dans une classe organisée par l'enseignant de la façon suivante :

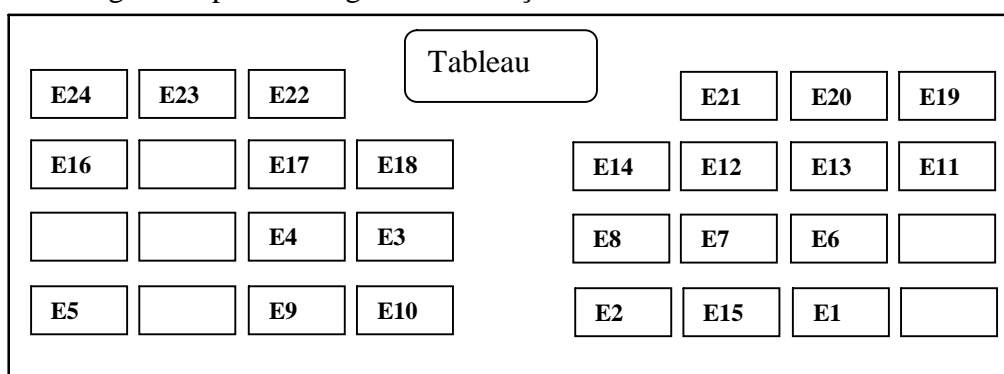


Figure 9: Plan de la classe fourni par l'enseignant.

L'enseignant assurait ses cours, presque quotidiennement et d'une durée inférieure à une heure, distribués de la façon suivante :

Tableau 1: Organisation hebdomadaire des cours en 3^{ème}.

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi
13h à 13h 45min.	07h 55min. à 08h 50min	08h 50min. à 09h 45min	15h 05 min à 15h 55min.

Selon l'enseignant, de façon générale, les élèves présentent un bon niveau. Ils prennent avec responsabilité les activités développées dans la classe. Les élèves trouvent intéressant d'étudier les nouvelles connaissances, les objets mathématiques pendant le déroulement d'une séance. Pendant ses travaux avec les élèves, l'enseignant, met un accent particulier sur l'autonomie. Généralement, la séance commence par une phase de mise en situation de l'activité entre les élèves et l'enseignant, puis entre les élèves entre eux. L'enseignant introduit alors des nouvelles notions en classe : il (ou un élève incité par lui) continue à poser des questions à la classe, à l'enseignant, à son voisin et y répond même de lui-même. Ces dialogues, aux règles préétablies, sont basés sur des questions-réponses, et cela pendant toutes les séances. Parfois, avec l'intention de faire avancer le cours en poursuivant le dialogue, l'enseignant réduit les participants à ces dialogues, les restreint à un plus petit nombre d'élèves ou le limite à lui-même (les dialogues en miroir).

Lors d'une séance, nous remarquons l'utilisation des cahiers de cours et d'exercices. L'enseignant et les élèves ont à leur disposition le tableau, des calculatrices, des outils géométriques, un ordinateur équipé avec une vidéo-projection, des logiciels de mathématiques (logiciels de géométrie dynamique, tableau, etc.) :

Tableau 2: Extrait de la Séance - C21, ligne 3.

P1	Donc, sortez vos cahiers d'exercices et de cours. Ok, on va commencer par une situation. Tout le monde a les deux feuilles de cours ? Je profite pour recentrer : résoudre une équation – on sait faire
-----------	---

Tableau 3 : Extrait de la Séance – C 21, ligne 9 - 11

E5	Elles sont finies ? C'est fini les inéquations ?
P1	Comment, non. !? Pourquoi ? On va les finir pour faire des exercices après.

Tableau 4 : Extrait de la Séance - C26, ligne 15 - 28.

E7	On va utiliser nos cahiers ou on va utiliser cette feuille, car c'est marqué Interrogation ?
P1	Oui. on va utiliser d'abord la feuille que je vais ramasser et après les cahiers. Bon, il faut qu'on y aille. Servez-vous de la calculatrice s'il le faut.
E14	Ça veut dire qu'on aura plein de trucs et c'est individuel le travail ?
P1	Oui, peut être.
E1	C'est facile !
P1	Vous levez la main si vous voulez une calculatrice ... J'ai juste un stylo.

8.1.3.2 La seconde

Cette classe est composée de 33 élèves, issus de collèges divers, ce qui confère à la classe une hétérogénéité accentuée.

L'enseignant faisait ses cours hebdomadaires avec des emplois du temps différents selon les modalités et les lieux. Nous pouvons résumer la distribution des cours de la classe de seconde de la façon suivante :

Tableau 5: Organisation hebdomadaire des cours en 2nd.

	Mercredi		Jeudi		Vendredi
Modalité	Option Sciences	Aide individualisée	Cours	Cours - classe partagée en G1 et G2	Cours
Lieu	Lab. Math.	En classe	En classe	En classe ou dans Lab. Math	En classe
Temps	08h 15min à 11h 15min.	11h 15min à 12h 10min.	08h 15min à 10h 05min.	G1 : 15h 30min à 16h 25min. G2 : 16h 25min à 17h 20min.	11h 15min à 12h 10min.
Remarque	Pas obligatoire	Pas obligatoire	Obligatoire	Obligatoire	Obligatoire

Selon l'enseignant, étant donné l'hétérogénéité de la classe, les élèves présents ont des niveaux très différents. L'enseignant signale qu'il a du mal à inciter les élèves à prendre de manière responsable les activités développées dans la classe. Et pour cela, l'enseignant a prévenu que la participation de chaque élève en classe compterait aussi dans le processus d'évaluation. Ainsi les élèves participent plus aux études des nouvelles connaissances, des objets mathématiques pendant le déroulement d'une séance. La séance commence généralement par une tâche proposée à la classe, à partir de laquelle l'enseignant commence à nourrir un dialogue entre les élèves et lui, puis entre les élèves. La tâche proposée peut se heurter à une difficulté : alors l'enseignant introduit des notions nouvelles pour aider les élèves à progresser. L'enseignant contrôle précisément les dialogues dans la classe. Ces dialogues aux règles préétablies sont basés sur des questions-réponses et cela pendant toutes les séances. Souvent, avec l'intention de faire

avancer le cours, l'enseignant réduit les participants à ces dialogues, les restreint à un plus petit nombre ou le limite à lui-même (les dialogues en miroir).

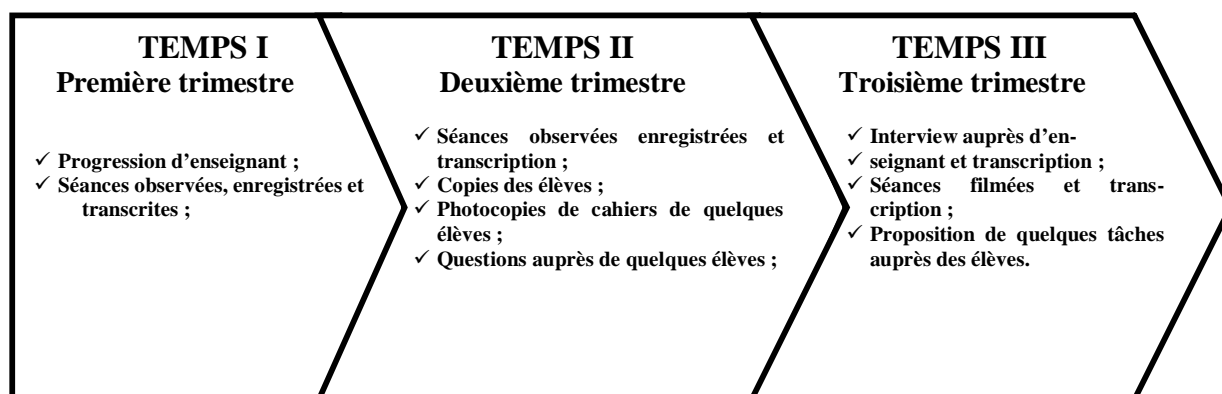
Lors d'une séance, nous remarquons l'utilisation des cahiers de cours et d'exercices. L'enseignant et les élèves ont à leur disposition, le tableau, des calculatrices, des outils géométriques, un ordinateur équipé avec une vidéo-projection, des logiciels de mathématiques (logiciels de géométrie dynamique, tableau, etc.) :

Tableau 6 : Extrait de la Séance -L06, ligne 1-15.

P2	P2 parle avec la classe.... « Sortez vos cahiers, vos calculatrices, etc. Je vais faire la correction des exercices
P2	P2 parle avec la classe.... Bien, alors on va commencer... Donc vous rentrez ces deux nombres dans la calculatrice et vous me dites ce qui se passe !
P	Est-ce que tout le monde l'a fait ?
Es	Oui
P2	Alors, dites moi ce que vous avez trouvé ?
E9	Bien ! Moi j'ai trouvé « 1 E 24 » pour le deuxième !
P2	Est-ce que tout le monde a trouvé ça ? E33
E33	Non ! Moi j'ai trouvé 99999.....
P2	E33, refaites vos calculs, parce qu'on a eu un résultat différent dans plusieurs autres calculatrices tout à l'heure. Vous devez vous être trompé quelque part !
P2	Est-ce que quelqu'un a une calculatrice « Casio graphe 35 plus » ou quelque chose comme ça ?

8.1.4 La procédure

Nos procédures de recueil de données dans les classes ont été réalisées à travers des dispositifs d'observation des acteurs - enseignants et élèves – des deux institutions. Grace à la mise en place de ces dispositifs d'observations et de recueil de données, nous avons pu nous approcher de manière concrète de l'objectif visé. Nous avons donc organisé les recueils de données en les articulant en trois temps, comme décrits ci-dessous :



À partir d'analyses « a priori » des progressions fournies par les enseignants au premier trimestre, nous avons choisi d'observer des séances dans lesquelles interviennent potentiellement des notions, des objets, des connaissances mathématiques des cadres du **NAG**. Ces mêmes séances ont été aussi transcrites.

Après l'analyse assez générale des observations et des données recueillies pendant le premier trimestre, nous avons continué avec des observations et des recueils de données pendant le deuxième trimestre. De la même manière que celle pratiquée au premier trimestre, nous avons choisi des séances, basées sur la progression de l'enseignant, pour les observer, les enregistrer et aussi les transcrire. Pendant le deuxième trimestre, nous avons recueilli toutes les activités

demandées aux élèves, les copies des élèves et à la fin de ce trimestre une copie des cahiers de quelques élèves choisis au hasard. À cette occasion, nous avons aussi mené auprès de quelques élèves des entretiens sous forme de questions simples. Les questions ont été posées sur des difficultés rencontrées :

Les techniques de résolution des tâches ;

Les technologies ;

Les théories et très vaguement les liens entre les domaines mathématiques.

Au cours du troisième trimestre, après l'analyse des observations et des données recueillies pendant les deux trimestres précédents, nous avons procédé à des interviews enregistrées et transcrites, auprès des enseignants.

8.1.5 Les observables

Les recueils des données ont été réalisés au cours de l'année scolaire 2007-2008, dans deux institutions différentes, dans une classe de troisième et dans une classe de seconde.

Au début de nos observations, nous n'avons dévoilé, ni aux enseignants ni aux élèves, notre intérêt pour le **NAG**. Cette particularité nous a conduit, à travers une analyse potentielle du **NAG** dans les progressions, de choisir des séances. Les tableaux ci-dessous montrent l'ensemble des séances observées.

8.1.5.2.2 L'ensemble des observations du deuxième trimestre

Tableau 11: L'ensemble des observations au lycée au deuxième trimestre année 2007-2008.

Mois	DECEMBRE										JANVIER										FEVRIER											
Dates	5	6	6 A	7	13	13 A	19	20	20 A	21	9	10	10 A	16	17	17 A	18	23	24	24 A	25	30	31	31 A	1	7	7 A	8	13	14	14 A	15
Semaine	13				15						16		17			18			19		20			21								
Chapitres	IV				V						VI										VII											
Titre chapitre	Fonctions affines										Triangles isométriques										Fonctions usuelles											
Type d'activité	C	C	C	C	DC	X	C	C	C/d	C	AI	C	C/d	AI	C	C	C	AI	C	C	C	AI	C	C	DC	C/d	C	C	AI	C	C	C
Quantité séances observées	07										10										07											
Séances observées																																
Séances enregistrées																																
Séances transcripts																																
Séances NAG en potentiel																																

C = Cours X = Il n'y a pas eu de cours T = test de rentrée d = Devoir à rendre à une date préétablie TD = Travaux dirigé salle informatique DC = Devoir en classe AI = Aide individualisée I = Interrogation écrite A = cours dans l'après-midi

8.1.5.2.3 L'ensemble des observations du troisième trimestre

Tableau 12: L'ensemble d'observations au lycée au troisième trimestre année 2007-2008.

Mois	MARS-AVRIL										MAY										JUN																						
Dates	6																																12	13									
Semaine																																											
Chapitres	VIII et IX										X et XI										XII et XIII																						
Titre chapitre	Géométrie analytique et dans l'espace										Équations droites et Système d'équations lineaires										Statistiques et trigonometrie																						
Type d'activité	C																																										
Quantité séances observées	01										0										02																						
Séances observées																																											
Séances enregistrées																																											
Séances transcrites																																											
Séances NAG en potentiel																																											

C = Cours X = Il n'y a pas eu de cours T = test de rentrée d = Devoir à rendre à une date préétablie TD = Travaux dirigés salle informatique DC = Devoir en classe AI = Aide individualisée I = Interrogation écrite A = cours dans l'après-midi

Comme nous l'avons précisé, la progression des enseignants a déterminé les jours d'observation. Nous avons observé un total de 100 séances dont 53 au collège et 45 au lycée.

Les dates présentes dans chaque tableau sont les jours prévus par les enseignants dans les classes concernées.

Dans leur programmation, les enseignants ont aussi nommé les chapitres qui seraient abordés au cours de chaque période ; par contre, il n'a pas toujours été possible de suivre régulièrement les programmes. Dans les tableaux, nous avons utilisé les mêmes noms pour les chapitres, tels qu'ils étaient indiqués dans les programmes des enseignants. Nous avons aussi, dans la partie « type d'activités », distingué les types d'activités observés dans chaque classe, au moyen d'une légende au-dessous de chaque tableau.

Ensuite, nous représentons la quantité de séances observées dans chaque chapitre, puis nous indiquons les jours de nos observations, suivis par les séances enregistrées et transcrites. Des séances ont été observées, mais n'ont pas pu être transcrites, compte tenu du manque de matériel technique. Des séances ont été enregistrées, mais n'ont pas été transcrites par manque de temps. En fait, nous avons mené une analyse potentielle du **NAG**, faite à partir de la progression des enseignants. C'est seulement après les constats empiriques que nous avons pu choisir les séances. Nous fournirons plus de détails sur ces choix dans la partie D de notre travail. Dans les tableaux, nous marquons par « séance **NAG** en potentiel » les séances qui, selon nous, ont pu être développées dans le cadre du **NAG**.

8.1.6 Les dispositifs de recueils de données et les outils

Pour pouvoir mettre en évidence, saisir et ensuite analyser les données recueillies, nous avons mis en place des dispositifs et des outils d'analyses jugés capables de nous aider à faire ressortir la place et le rôle de cet outil.

8.1.6.1 Le dispositif

Nous avons utilisé une grille comme une espèce de contrôle des contraintes agissant sur l'observateur. Nous reprenons la philosophie de Georges Canguilhem selon laquelle : « une théorie n'est pas vraie parce qu'elle est efficace, mais elle est efficace parce qu'elle est vraie » Canguilhem, (1996), pour conforter l'idée que : observer, c'est d'abord organiser les rapports d'observation présentant des garanties sur le plan déontologique et scientifique. Par conséquent, notre dispositif de recueil de données prévoit à travers notre grille l'organisation des relations entre les observables et notre objet de recherche, tout en faisant ressortir des informations en jeu dans cette recherche. Voici les principales fonctions de notre grille :

- ✓ Comme outil d'observation directe, elle nous permet de voir de façon générale le travail effectué par l'enseignant et par les élèves dans la séance ;
- ✓ Dans le cadre de nos analyses des pratiques, elle permet de faire ressortir des éléments pour une analyse plus fine en laissant une analyse plus proche du réel de ce qui s'est passé dans la classe. En fait, avec l'enregistrement et la grille, nous nous rapprochons assez fidèlement, de ce qui se passait dans la classe ;

- ✓ Médiateur dans la réflexion, elle nous offre des possibilités, à travers des éléments repérés, de réfléchir sur la façon dont nous allons intervenir auprès des élèves, soit à travers des questions posées, soit à travers des tâches proposées.

Voici la grille que nous avons utilisée :

Tableau 13 : Grille utilisée dans les observations.

COURS	La classe	Lieu	Temps	L'organisation de l'espace
CHAPITRE	Sujet	Thème	Secteur	Domaine
Conduites	Matériels et moyens didactiques	Les interventions	Le rythme des acteurs	
Registres du cours (de la Communication) (le type de discours)	Registre verbal		Registre non verbal	
Caractéristiques du style didactique de l'enseignant				
Remarques et interventions des élèves				
Éléments du tableau				
Praxéologies mathématiques				

8.1.6.2 Les outils

La TAD articulée avec d'autres cadres constitue notre cadre méthodologique principal. Les différents intervenants dans le processus de transposition d'un objet peuvent être modélisés comme sujet d'une institution ou de plusieurs institutions dont l'institution scolaire française (mathématique de la seconde ou de la troisième). Ceci nous amène à définir le rapport institutionnel au **NAG** comme renvoyant à l'ensemble de pratiques sur cet objet, où cet objet intervient au sein de l'institution considérée.

Un des postulats fondamentaux de la TAD énonce que les pratiques se laissent analyser selon un système de types de tâches, de techniques permettant d'accomplir ces types de tâches, de technologies qui justifient et légitiment ces techniques et de théories qui justifient et légitiment des technologies. Autrement dit, les pratiques peuvent être analysées selon une organisation praxéologique.

Dans ce contexte, nous considérons l'enseignant comme sujet de l'institution EMS, dans laquelle il est amené à réaliser deux grands types de tâches :

« L'une des premières tâches auxquelles s'affronte le professeur en tant que directeur d'étude d'une classe donnée, consiste à déterminer, à partir des indications du programme d'étude officiel, les organisations mathématiques à étudier, en précisant pour chacune d'elle son contenu précis, et en particulier, le socle des types de tâches mathématiques qu'elle contient, ainsi que le degré de développement à donner aux composantes technique, technologique, et théorique. [...] Le second grand type de tâches au cœur de l'activité du professeur consiste évidemment à diriger l'étude d'une organisation mathématique déterminée, c'est-à-dire à conduire la reconstruction, ou transposition dans la classe, de cette organisation. On ne saurait évidemment s'attendre à ce qu'une telle reconstruction soit univoquement déterminée. Mais on s'aperçoit pourtant que, quel que soit le cheminement de l'étude, certains types de situations sont nécessairement présents, même s'ils le sont de manière très variable, tant au plan qualitatif qu'au plan quantitatif. » (Chevallard, 1997).

Les enseignants assurent leurs cours en étant assujettis, à la fois, au programme scolaire, au manuel ou aux différents manuels qu'ils consultent. Ils sont également guidés par ces représentations sur les mathématiques et sur l'apprentissage des élèves. Ces différents assujettissements contraignent leur pratique tout en leur permettant de faire des choix du savoir enseigné en classe dans une relative liberté.

Pour résumer : analyser les pratiques enseignantes, en termes de praxéologies, revient à analyser l'organisation mathématique reconstruite par l'enseignant ainsi que l'organisation didactique mise en œuvre pour permettre l'étude de cette organisation mathématique. Par conséquent, pour étudier « comment l'enseignant de mathématiques au collège et au lycée utilise et fait utiliser le **NAG** à ses élèves », nous avons, tout d'abord étudié quelques écologies pour le **NAG**, ensuite leur processus de transposition didactique.

Maintenant, nous allons explorer l'organisation mathématique, construite par l'enseignant pour l'étude d'un objet présent dans leur projet de cours, et l'organisation didactique qu'il utilise pour mettre en place cette organisation mathématique. Car ce sont deux grandes classes de conditions, parmi d'autres conditions et contraintes, qui vont déterminer, la nature et la vie de cet objet. (Artaud, 1998)

A partir de l'organisation didactique utilisée par l'enseignant, nous allons ainsi analyser les praxéologies présentes dans quelques séances observées. En fait, nous étudierons les praxéologies mathématiques présentes dans les séances, en les confrontant avec l'organisation mathématique présente en leur projet de cours, pour repérer le rôle et la place du **NAG** dans ces séances. Pour cela, nous utiliserons une méthodologie qui s'inscrit dans le prolongement des recherches de Bronner (2007), que nous poursuivons au sein du laboratoire LIRDEF. Cette méthodologie a comme finalité de mettre en évidence des méthodes et des concepts mis en jeu dans les séances, ce que nous résumons dans les questions suivantes :

- ✓ Quelles sont les caractéristiques mathématiques et didactiques de la situation d'enseignement dans chaque séance ?

- ✓ De quelle manière l'enseignant installe-t-il et utilise-t-il le **NAG** ?

En fait, notre cadre méthodologique a pour fonction de mettre en évidence les caractéristiques mathématiques et didactiques de la séance et d'observer, afin d'en faire ressortir les événements saillants. Ce cadre compte sur des outils et des méthodes pour analyser ce qui se joue dans une séance d'enseignement des mathématiques et pour caractériser la place et le rôle du **NAG**. La démarche d'analyse Bronner (2007) se présente avec les étapes suivantes :

- ✓ L'élaboration de *la trame* de la séance qui aboutit à un premier découpage de celle-ci ;
- ✓ La description et l'analyse des organisations mathématiques à l'aide de *l'approche anthropologique* et du *filtre du numérique* ;
- ✓ L'analyse de l'organisation didactique à l'aide de *l'approche anthropologique* et du *filtre du numérique*.

Nous n'avons pas défini tous les outils que nous avons présentés. Ces outils seront définis dans les chapitres où ils seront utilisés.

8.2 Conclusion

En partant de notre problématique concernant l'étude du **NAG** dans le processus « enseignement/apprentissage » de l'institution EMS nous avons précisé un cadre théorique et méthodologique nous fournissant des outils capables d'interroger le **NAG** et de tester nos hypothèses.

Les résultats issus des travaux antérieurs nous ont conduit à amorcer une approche (quantitative et qualitative) de la pratique des enseignants du secondaire autour du **NAG**. Pour qu'un enseignement puisse utiliser le **NAG**, il nous a semblé nécessaire de prendre en compte les contraintes relevées par Alain Bronner (1997, 2007) : l'utilisation des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique relève d'une écologie spécifique encore peu étudiée et fortement limitée par des contraintes transpositives émanant des différents niveaux de co-détermination didactique. Examinant ces contraintes, nous nous sommes fixés comme objectif de montrer quelles conditions et contraintes vont influencer la mise en place et l'utilisation des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire.

PARTIE

B

**ASPECTS HISTORIQUE ET
EPISTEMOLOGIQUE**

CHAPITRE B1:ASPECTS HISTORIQUES

9 Aspects historiques et épistémologique sur les interrelations numériques, algébriques et géométriques

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques aspects historiques et épistémologiques de l'utilisation des interrelations entre les domaines numériques, algébriques et géométriques. Nous pointerons quelques éléments historiques, pour montrer quelques utilisations significatives, selon nous, des interrelations entre les grands domaines mathématiques dans l'histoire des mathématiques.

9.1 Les interrelations et le développement des mathématiques

Comme nous avons déjà dit, les mathématiques sont une science de la modélisation, de la démonstration, et du calcul. Leurs principes fondamentaux remontent à l'antiquité ou au XVIIe siècle (Lafont, 2006). Le développement des mathématiques a toujours été vivant, de l'antiquité à aujourd'hui. Les principales branches comme l'arithmétique (ou théorie des nombres), la géométrie, la mécanique (théorie des forces et des mouvements), la stochastique (théorie des phénomènes aléatoires) ont accompagné ce développement.

Ces branches sont en interrelation à travers un corpus de notions et de méthodes que l'on découpe habituellement en algèbre, analyse, combinatoire, logique et algorithmique.

9.2 Quelques écologies pour les interrelations entre les grands domaines mathématiques

Dans les paragraphes suivants, nous n'allons pas visiter des textes ni des ouvrages originaux, car nous n'avons pas l'intention de présenter un travail historique. En fait, notre intention est de montrer, de repérer quelques écologies pour le **NAG**, des épisodes où des interrelations entre les grands domaines mathématiques apparaissent. Dans ce contexte, nous n'utiliserons, ni les notations, ni le vocabulaire intermédiaire introduit, comme ils l'étaient dans ces formes classiques.

9.2.1 Le problème du doublement de volume du cube

La période entre 500 et 400 avant J.C a été marquée par l'apparition de problèmes qui ont influencé le développement de la géométrie. Parmi ces problèmes, nous pouvons citer celui du doublement du cube. Ce problème a son origine dans une légende rapportée par Ératosthène dans « Le Platonicien » et par Théon de Smyrne dans son Arithmétique. Les Déliens, victimes d'une épidémie de peste, demandèrent à l'oracle de Delphes comment faire cesser cette épidémie. La réponse de l'oracle fut qu'il fallait doubler l'autel consacré à Apollon, autel dont la forme était un cube parfait. Les architectes allèrent trouver Platon pour savoir comment faire. Ce dernier leur répondit que le dieu n'avait certainement pas

besoin d'un autel double, mais qu'il leur faisait reproche, par l'intermédiaire de l'oracle, de négliger la géométrie (Aaboe, 1994).

Le problème du doublement du cube consiste à trouver le côté d'un cube dont le volume soit double de celui d'un cube donné, en utilisant seulement la règle et le compas. Du temps de la mathématique grecque, on distinguait les problèmes dont les solutions ne faisaient intervenir que des droites et des cercles dans le plan, de ceux faisant intervenir d'autres procédés (utilisation de courbes dites « mécaniques » telles que la spirale d'Archimède ou les conchoïdes, utilisation de coniques pour les problèmes dits solides.).

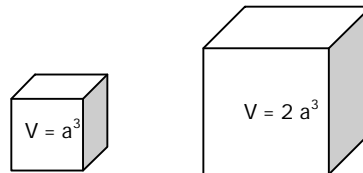


Figure 11 : Le problème en langage moderne

Cela revient donc à multiplier l'arête du cube par $\sqrt[3]{2}$. Ce problème est un problème classique de mathématiques, faisant partie des trois grands problèmes de l'Antiquité, avec la quadrature du cercle et la trisection de l'angle. Le problème du doublement du cube intéressa nombre de mathématiciens, par exemple Hippias d'Élis, Archytas de Tarente, Ménechme, Eudoxe de Cnide, Eutocius d'Ascalon. Plusieurs solutions furent proposées par intersection de coniques ou par intersection de figures spatiales, (Baumgart, 1992).

Une des étapes a été la définition donnée par Eudoxe de l'égalité de deux rapports, définition qui a inspiré plus tard Dedekind dans sa présentation des nombres réels. Ménechme, un des disciples d'Eudoxe, a introduit deux courbes nouvelles pour résoudre le problème du doublement du cube.

Cette problématique est au centre de l'origine des coniques. Erastosthènes (200 avant J.-C.) et Proclus (400 après J.-C.) citent Ménechme comme l'inventeur des sections coniques. Eutocius dans son « Commentaire sur le Seconde Livre du Traité d'Archimède sur la Sphère et le Cylindre » le crédite des solutions du problème des deux moyennes proportionnelles¹⁴, à l'aide des coniques. C'est la première référence que l'on ait sur les coniques. Ce problème est connu surtout à cause de son application au problème du doublement du cube (Bongiovanni, 2001).

Première transformation

¹⁴Le problème des deux moyennes proportionnelles, attribué à Hyppocrate, consiste à construire deux segments de longueurs x et y tel que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, à partir de deux segments de longueurs a et b . Le problème de la duplication du cube est un cas particulier lié à ce problème quand $b = 2a$ et dans ce cas

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \Rightarrow 2a^2 = xy$$

Donc : $2a^3 = xya$

Deuxième transformation

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow ya = x^2$$

Donc : $yx = x^3$

Par conséquent : $x^3 = 2a^3$

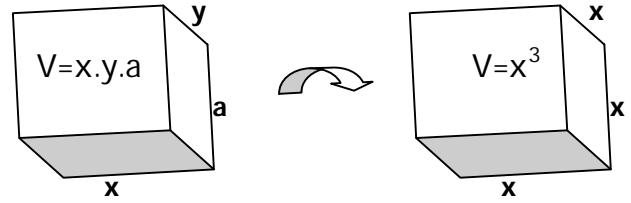


Figure 12 : Passage du problème des deux moyennes au problème de la duplication du cube.

Le problème des deux moyennes proportionnelles renvoie aux égalités $x^2 = ay$ et $y^2 = 2ax$.

En effet, $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = ay$ et $\frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \Rightarrow y^2 = 2ax$ La solution du système $\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases}$ est telle que $x^3 = 2a^3$

Dans la recherche d'une courbe satisfaisant la condition $y^2 = px$, Ménechme introduisait la parabole. Cette nouvelle courbe, obtenue comme section d'un cône circulaire droit par un plan perpendiculaire à une génératrice, a été appelée, à cette époque, la section du cône droite rectangle ou orthotome et plus tard nommée parabole.

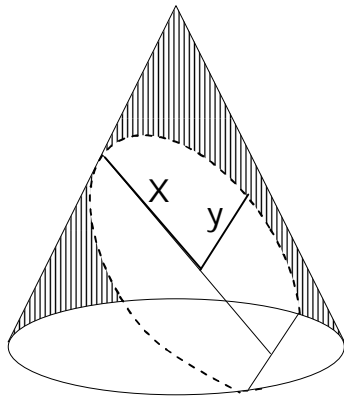


Figure 13 : Propriété fondamentale de la parabole : $y^2 = ax$

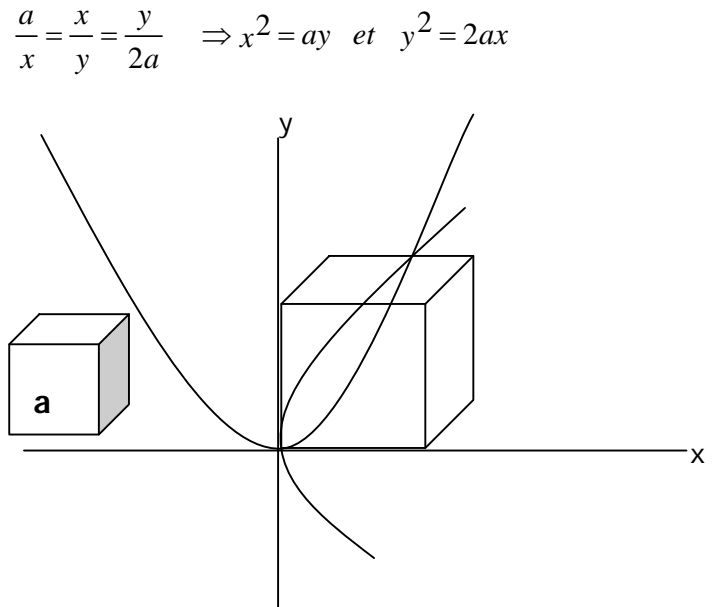


Figure 14 : Présentation moderne de la solution du problème de la duplication du cube

Plusieurs solutions furent proposées au problème du doublement du cube, par intersection de coniques ou par intersection de figures spatiales. Par exemple, Archytas proposa l'intersection entre un cône et un tore¹⁵. D'Alembert écrivit en 1760 qu'aucune solution plane n'était trouvée avec la seule utilisation de la règle et du compas. En 1837, Pierre-Laurent Wantzel établit un théorème donnant la forme des équations des problèmes solubles à la règle et au compas. Il démontra que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible. Le doublement du cube est donc impossible à réaliser à la règle et au compas. Elle devient possible avec d'autres méthodes, telles que l'utilisation de la règle graduée et du compas, ou par pliage de papier. La relation entre la construction géométrique et la théorie algébrique est développée à travers la notion de « Nombre constructible ».

9.2.2 Les nombres constructibles

Même avant l'antiquité grecque, la question de savoir quels sont les figures ou les nombres constructibles à la règle et au compas était un point central des mathématiques. Cependant, l'histoire des constructions géométriques remonte plus loin que Platon. L'école de Pythagore s'installe dans le sud de l'Italie actuelle au VI^e siècle av. J. C. et développe de nombreuses constructions géométriques, qui étaient l'un des moyens privilégiés pour l'étude des nombres, à une époque où l'on n'avait pas encore inventé le formalisme actuel de l'algèbre. Ainsi ils ont probablement démontré les premiers, l'irrationalité de $\sqrt{2}$, par une méthode géométrique. Les Grecs nous en ont d'ailleurs laissé de célèbres, comme celui que nous venons de voir, le doublement du cube, mais aussi celui de la quadrature du cercle ou encore de la trisection de l'angle (Boyer, 1996).

Pour réaliser une construction à la règle et au compas, on se donne deux points O et I, qui définissent un axe, muni d'une unité de longueur (la distance OI). Puis, à chaque étape, on a un certain nombre de points déjà construits (deux au départ), et l'on s'autorise uniquement à tracer une droite joignant deux de ces points, ou un cercle centré en l'un de ces points et de rayon, la distance entre deux de ces points. Les intersections de ces objets définissent alors de nouveaux points dits constructibles. Ce qui revient à se donner le nombre 1, un nombre x est dit constructible si on peut construire « à la règle et au compas » le point de cet axe dont l'abscisse est x. Donc, un nombre constructible à la règle et au compas est la mesure d'une longueur associée à deux points constructibles à la règle et au compas. Ainsi $\sqrt{2}$, est un nombre constructible, mais $\sqrt[3]{2}$ ne l'est pas. C'est du moins ainsi que le définissaient les mathématiciens grecs et tous ceux qui, à leur suite, ont cherché à déterminer quels étaient les points et les nombres constructibles de cette façon. (Silva, 1993).

¹⁵ Solide géométrique représentant un tube courbé refermé sur lui-même.

9.2.2.1 Opérations avec les nombres constructibles

Soient x et y deux nombres constructibles.

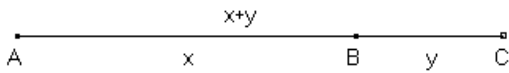


Figure 15 : L'addition des nombres.

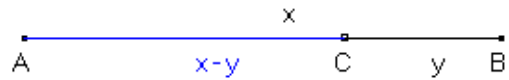


Figure 16 : La soustraction des nombres.

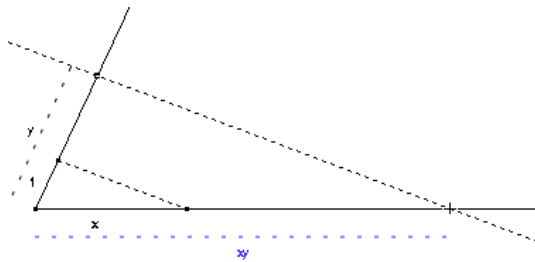


Figure 17 : La multiplication des nombres.

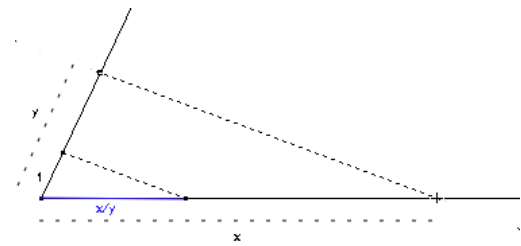


Figure 18 : La division des nombres.

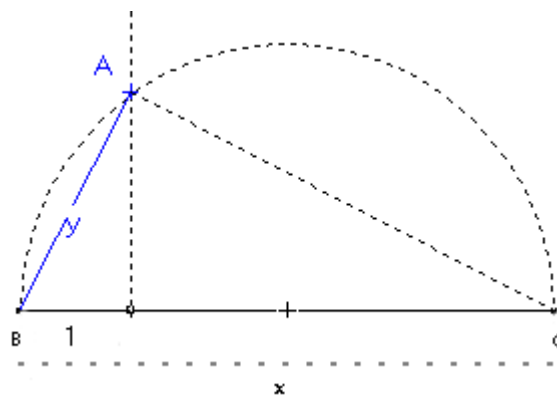


Figure 19 : L'extraction de la racine carrée de x .

Pour extraire la racine carrée de x , on utilise le fait que, dans un triangle rectangle en A , si H est le pied de la hauteur issue de A , on a $(BH \times BC = BA^2)^{16}$ et la propriété du triangle rectangle s'inscrit dans un demi-cercle, et on peut extraire une racine carrée. On trace donc la longueur $x = BC$, puis le cercle de diamètre BC , puis le point H tel que $BH = 1$, puis, la perpendiculaire à (BC) menée par H , enfin, le point A intersection de cette perpendiculaire avec le cercle. $BA^2 = 1 \times x$ assure que $y = \sqrt{x}$. Les racines carrées sont donc constructibles. La première tentative des Grecs a été de dire que ces nombres étaient rationnels, mais une démonstration leur a permis de se convaincre que cela n'était pas le cas. Ainsi, il existait des nombres constructibles qui n'étaient pas rationnels, mais irrationnels. Quelle était alors leur forme ? Permettaient-ils de tout mesurer dans le monde réel ? Malgré leurs recherches, ils ne purent venir à bout du problème. (Baragar, 2002)

¹⁶C'est une conséquence immédiate du fait que les triangles ABC et HAB sont semblables.

En s'appuyant sur les résultats de Niels Henrik Abel (1802-1829) relatifs aux équations algébriques, Pierre-Laurent Wantzel prouve que « Tout nombre constructible x est racine d'un polynôme à coefficients entiers et le degré du polynôme minimal admettant x comme zéro est une puissance de 2. ». Donc un nombre constructible est algébrique. En termes simples, les nombres constructibles sont ceux qui peuvent s'écrire aux seuls moyens des quatre opérations élémentaires et de la racine carrée. Ce théorème a engendré plusieurs conséquences, entre autres que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible et donc que le doublement du cube est impossible. En fait, grâce à ce théorème, tombent le problème du doublement du cube et d'autres problèmes de l'antiquité, qui reviennent à résoudre une équation du 3^e degré. L'ensemble des nombres constructibles ne regroupe donc qu'une petite partie de l'ensemble des nombres algébriques¹⁷ (Carrega, 1989).

9.2.3 Les équations du deuxième degré

Dans le cadre de l'avènement de l'algèbre, Abu Jafar Muhammad ibn Musa Al-Khwārizmī (780-850) est souvent proclamé comme le plus grand mathématicien arabe de son époque. Selon Djebbar (2005), c'était à Bagdad, entre 813 et 833, qu'Al-Khwārizmī écrivit « Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison » (l'Abrégé). Cette publication fait désormais office d'acte de naissance de l'algèbre en tant que discipline. L'Abrégé se divise en trois grandes sections.

Dans son œuvre, Al-Khwārizmī différenciait six types d'équations du deuxième degré – mais il n'utilisait pas l'écriture algébrique actuelle, puisqu'elle fut développée beaucoup plus tard - toutes les équations étaient décrites en mots. Al-Khwārizmī proposait un algorithme pour chacun des six types d'équations, c'est-à-dire une formule qui permet de résoudre un problème mis sous la forme proposée. L'algèbre présentée sous cette forme permet donc à l'utilisateur de se détacher du problème, de se libérer l'esprit des contraintes du problème afin d'appliquer la formule. Cet algorithme est soutenu par une preuve géométrique et non pas par une suite de calculs arithmétiques sur les formes de départ proposées. C'est donc la géométrie qui permet à Al-Khwārizmī de trouver la formule générale d'un cas. Nous montrerons un exemple de la méthode utilisée par Al-Khwārizmī pour trouver les algorithmes d'une des six équations : $x^2 + p x = q$, citées précédemment. Dans cet exemple, p et q sont des nombres connus dans des problèmes et x l'inconnue recherchée.

¹⁷ Est algébrique tout nombre qui est solution d'une équation algébrique (autrement dit racine d'un polynôme différent de zéro) à coefficients entiers (ou de manière équivalente, à coefficients rationnels).

$$x^2 + px = q$$

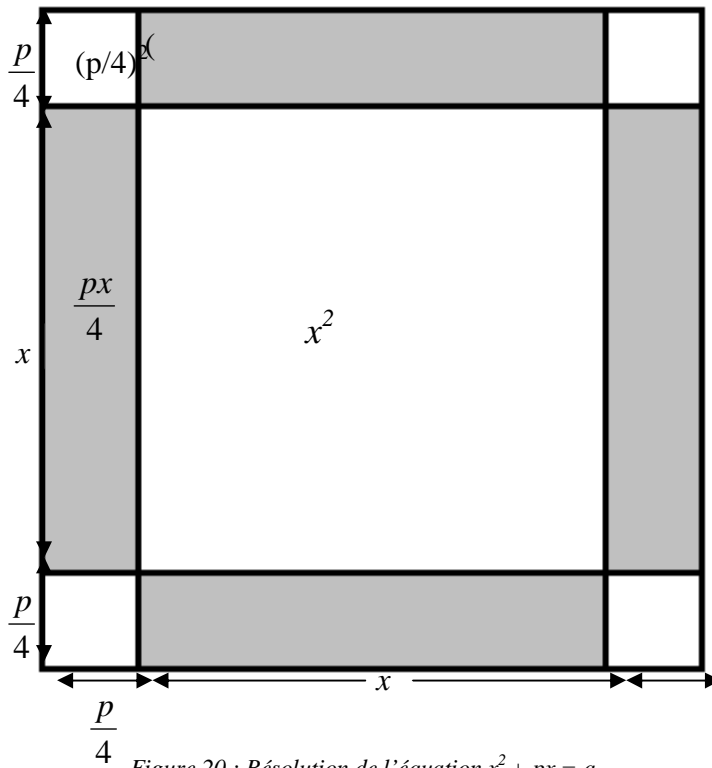


Figure 20 : Résolution de l'équation $x^2 + px = q$

Initialement Al-Khwārizmī représenta x^2 qui est la multiplication d'une inconnue par elle-même, donc un carré, puis il a créé la valeur px comme une aire sur la surface. On pourrait être tenté simplement de prolonger le carré de la distance p . Toutefois, Al-Khwārizmī chercha à conserver une figure qui lui permettrait de trouver la valeur de l'inconnue. Il prolongea donc chaque côté d'un carré d'une longueur de $\frac{p}{4}$, puisqu'il y a sommets. En additionnant les aires des quatre nouveaux rectangles, on voit bien que l'on obtient une aire de px . En complétant le nouveau grand carré, on obtient une aire de $(x + \frac{p}{4})^2$. Cette aire totale est égale à celle du carré additionné aux rectangles d'aire $\frac{px}{4}$ et aux quatre petits carrés d'aire $(\frac{p}{4})^2$. On a donc

$$(x + \frac{p}{4})^2 = x^2 + px + (\frac{p}{4})^2 = q + (\frac{p}{4})^2 \text{ et donc } x = \sqrt{(\frac{p}{4})^2 + q} - \frac{p}{4}$$

qui correspond à l'algorithme de résolution du problème, (Djebbar, 2005).

9.2.4 Les formulations de Descartes et Hilbert

Les opérations liées à des segments sont apparues dès la Géométrie des Grecs, mais c'est Descartes (1596 - 1650) qui les a utilisées pour libérer les puissances de dimensionnalité géométrique. Après Descartes, ce thème a resurgi avec les travaux de Hilbert (1862 - 1943) dans une forme beaucoup plus axiomatisée qu'à l'époque de

Descartes. Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons les formulations de Descartes et Hilbert qui ont introduit dans la Géométrie le calcul avec des segments, ainsi qu'une illustration de la règle des signes, en utilisant le produit de segments, selon Hilbert.

9.2.4.1 Les constructions géométriques chez Descartes

Les travaux de Descartes ont donné la géométrie analytique. C'est là que les mathématiciens ont appris que les courbes ont des équations (à deux inconnues) et, inversement, que de telles équations définissent des courbes. Ainsi courbe et équation sont deux notions, dans une large mesure équivalentes. Par exemple, la figure 11 est pour l'essentiel la même chose que l'équation $x^3 + y^3 = a x y$:

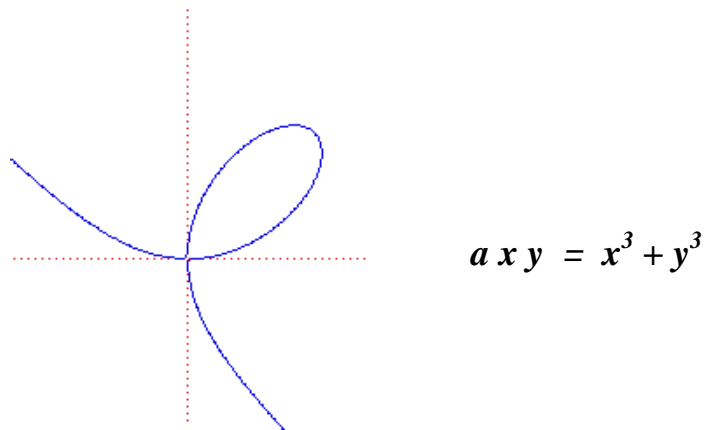


Figure 21 : Folium de Descartes.

De ce fait, on peut étudier une courbe au moyen de son équation, et une équation au moyen de la courbe qui s'y rattache. Dans la géométrie de 1637, apparaissent explicitement des liens utilisés depuis des siècles entre formule et figure, l'interrelation entre algèbre et géométrie, (Bos, 1998), préfigurant la Géométrie Analytique. Descartes montre comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie, (Silva, 1993) :

«Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire. Et comme toute l'Arithmétique n'est composée, que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, et l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de Division : Ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter, ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux, comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la Multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux, comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la Division ; ou enfin trouver une, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité, et quelque autre ligne ; ce qui est le même que tirer la racine carrée, ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible. » (Descartes, [1637], 1991 p.1-2).

Les constructions géométriques (à la règle et au compas) présentées dans le texte de Descartes étaient déjà une caractéristique marquante des mathématiques développées à l'époque des Grecs au Ve siècle avant J.C. Dans « la Géométrie », Descartes a montré

comment l'Algèbre s'applique à la Géométrie. Il a montré le chemin en expliquant comment opérer avec des segments, c'est-à-dire comment appliquer les opérations élémentaires de l'Arithmétique à la Géométrie, en montrant comment multiplier, diviser et extraire la racine carrée de segments. À partir de là, il a représenté des lignes par des lettres et a utilisé les dernières lettres de l'alphabet (x, y et z) pour les lignes inconnues et les lettres initiales (a, b, c) pour les lignes connues et montrer comment l'Algèbre et la Géométrie peuvent être en interrelation.

9.2.4.1.1 La multiplication

« Soit par exemple AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication. » (Descartes, [1637], 1991 p 2).

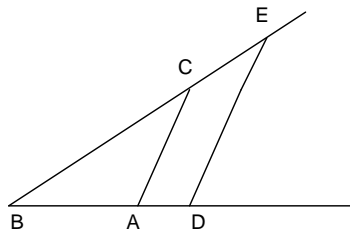


Figure 22 : La multiplication de segments selon Descartes.

Cette construction est basée sur le fait que les triangles ABC et DBE sont semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels, donc $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$. Ce qui peut être écrit comme $BE = \frac{BD \cdot BC}{BA}$. Étant donné que BA est unitaire, le segment BE représente le produit des segments BD et BC.

9.2.4.1.2 La division

« Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division. » (Descartes, [1637], 1991 p 2).

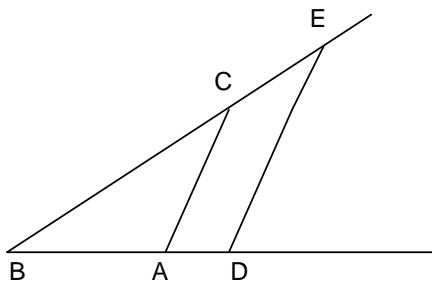


Figure 23 : La division de segments selon Descartes.

De façon analogue $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$. Ce qui peut être écrit ainsi $\frac{BC}{BA} = \frac{BE}{BD}$. Comme BA est unitaire, le segment BC représente le produit de la division des segments BE par BD.

9.2.4.1.3 L'extraction de la racine carrée

« Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH, je lui ajoute en ligne droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusqu'à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. » (Descartes, [1637], 1991, p 2).

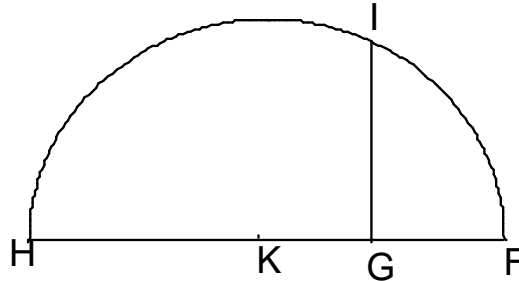


Figure 24 : Construction de la racine carrée du segment GH.

Pour faciliter la résolution, nous allons joindre les points I et H, en obtenant le segment IH et nous allons joindre les points I et F. Nous pouvons observer que l'angle HIF est droit, car l'angle central HKF est de 180° . Ainsi, nous avons obtenu un triangle rectangle IHF. À partir de là, par les relations métriques dans le triangle rectangulaire, nous concluons :

$IG^2 = HG \cdot GF$. Comme GF c'est unitaire, $IG^2 = HG$, donc $IG = \sqrt{HG}$.

9.2.4.1.4 Les équations

L'objectif de Descartes était de partir d'un problème géométrique et de chercher une équation algébrique qui symbolisait la situation donnée :

« Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b, et écris $a + b$; et ab pour les multiplier l'une par l'autre, et $\frac{a}{b}$ pour diviser a par b; et a a, ou a^2 , pour multiplier a par soi-même; et a^3 , pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini; et $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour la racine carrée de $a^2 + b^2$. et $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique de $a^3 - b^3 + a b b$, et ainsi des autres. » (Descartes, [1637], 1991, p 2-3).

Et un peu plus loin :

« Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre, le plus naturellement de tous, en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres [...]. » (Descartes,[1637], 1991, p 4).

Après toutes ces considérations, Descartes a introduit les équations de la manière suivante : $z = b$; ou $z^2 = - a z + b b$; ou $z^3 = a z^2 + b b z - c^3$; ou $z^4 = a z^3 - c^3 z + d^4$, etc.

Dans ces équations, z est pris comme la quantité inconnue et a , b et c sont des quantités positives. Il observe ici qu'il n'y a pas d'équation du type $z^2 = -a z - b$. Une telle équation aurait seulement des racines négatives, ce que Descartes n'a pas abordé.

Le fort héritage de l'homogénéité géométrique ne permettait pas que des dimensions différentes soient employées dans la même formule, étant donné qu'il n'est pas possible d'additionner une aire qui est la signification de " ay " à une expression qui n'a pas la même dimension. Alors, il faut mettre, dans l'équation, le terme b^2 à la place de b . Dans le développement des travaux de Descartes, on peut trouver que b^2 n'est rien de plus qu'un segment, qu'un nombre, et en même temps attaché à la notation traditionnelle. Sans doute ce fait se produisait, car la rupture de Descartes avec la question de la dimensionnalité géométrique n'était pas encore définitive, (Silva, 1993).

Descartes proposa la résolution suivante pour résoudre l'équation $z^2 = a z + b^2$:

« Je fais le triangle rectangle NLM , dont le côté LM est égal à b , racine carrée de la quantité connue b^2 , et l'autre $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue qui était multipliée par z , que je suppose être la ligne inconnue ; puis, prolongeant MN , la base de ce triangle, jusque à O , en sorte que NO soit égal à NL , la toute OM est z , la ligne cherchée ; et elle s'exprime en ce sort :

$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. » (Descartes, [1637], 1991 p 5)

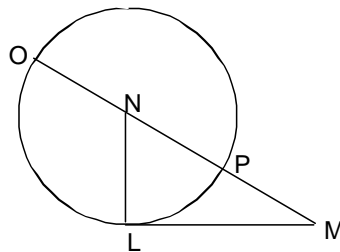


Figure 25 : Construction des racines de l'équation $z^2 = a z + b^2$

Le fait que la Géométrie et l'Algèbre entretiennent des rapports était déjà connu en mathématiques, mais la manière dont se produisaient exactement ces interrelations n'était pas encore explicitée clairement. L'établissement des interrelations entre la géométrie et le domaine des nombres, par le moyen de formules et de courbes géométriques, a été le fruit des travaux de Descartes et Fermat.

L'importance de l'œuvre de Descartes se constate dans l'association de la Géométrie avec l'Algèbre symbolique, qui encouragea le développement de techniques algébriques, indépendamment de visualisations géométriques.

9.2.4.2 David Hilbert et l'axiomatisation de la géométrie

La Géométrie a eu d'importantes contributions au XIXe siècle, avec la géométrie de Lobachevsky, de Bolyai et de Riemann. Ces nouvelles géométries, appelées non-euclidiennes, s'opposaient aux axiomes d'Euclide, et créait une exigence plus importante sur une structure formelle et déductive pour la géométrie, une structure qui était déjà présente dans l'Analyse et l'Algèbre.

Dans « Grundlagen der Geometrie », Hilbert a présenté l'axiomatisation de la Géométrie où il a proposé un système composé de vingt axiomes (au lieu de cinq, comme

avait fait Euclide) qui prétendait être cohérent (impossibilité de prendre deux théorèmes contradictoires à partir des axiomes), indépendant (aucun axiome n'est résultat des autres) et complet, c'est-à-dire que tout ce qui est utilisé dans la théorie est contenu dans les axiomes. Dans le cas particulier de la cohérence, cela prouve que la Géométrie est aussi cohérente que l'Arithmétique, car il est possible de construire un modèle arithmétique - la Géométrie Analytique - qui les satisfasse (Aaboe, 1984). Ces axiomes unifient dans un seul système la géométrie plane et la géométrie dans l'espace, toutes deux euclidiennes. Hilbert a considéré, au contraire d'Euclide, que ce qui importe, ce sont les relations entre les éléments du système et non pas leurs définitions. .

9.2.4.2.1 Le calcul de l'addition de segments

Dans le troisième chapitre du « Grundlagen der Geometrie », en prétendant associer la Géométrie à l'Arithmétique, Hilbert a introduit dans la Géométrie un calcul de segments, dans lequel toutes les règles données pour les nombres réels sont valables. A la place de « congruent » et « \equiv », sont utilisés le mot « égal » et le symbole « = ». Ainsi que Descartes, Hilbert utilisait les premières lettres de l'alphabet pour identifier les segments connus et les dernières pour identifier les segments inconnus. Sa définition pour l'opération d'addition de segments est la suivante (Boyer, 1996) :

Si, A, B et C sont trois points d'une ligne droite, soit B entre A et C, nous désignons $a = AB$ et $b = BC$ et nous écrivons : $c = a + b$ (Hilbert, [1953], p. 66).

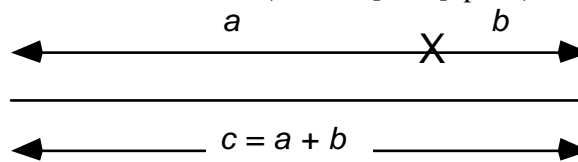


Figure 26 : Addition des segments a et b.

9.2.4.2.2 Le calcul de la multiplication de segments

La définition de Hilbert pour la multiplication de segments est semblable à celle de Descartes. Descartes utilisait la figure, omettant certaines informations, ce que semble éviter que Hilbert :

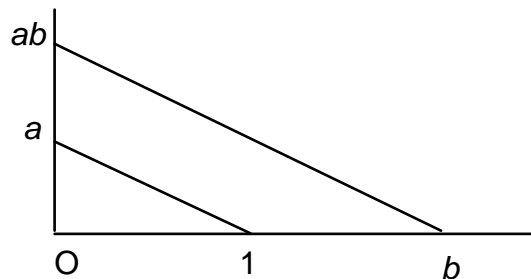


Figure 27 : La multiplication des segments a et b.

9.2.4.2.3 Le calcul du quotient de segments

Hilbert définit le quotient de **c** et **b** de la façon suivante :

« Soient b et c deux segments quelconques, il existe toujours un segment a tel que se vérifie l'égalité $c = ab$; ce segment a se représente par $\frac{c}{b}$ et s'appelle le quotient de c et b . (Hilbert, [1953]).

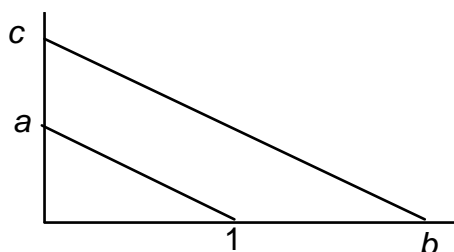


Figure 28 : Le quotient des segments c et b .

Hilbert a fondé le calcul de segments en utilisant le théorème de Pascal¹⁸. La définition du produit de deux segments et les propriétés de commutativité, associativité et distributivité, qui ne sont pas présentées par Descartes, ont reçu ainsi un traitement rigoureux.

Dans les paragraphes précédents, nous avons revisité l'histoire des mathématiques à travers le filtre du **NAG**, ce qui nous a révélé comment certains domaines ou concepts mathématiques se relient. Descartes a montré comment appliquer l'Algèbre à la Géométrie. On observe, néanmoins, qu'il était plus intéressé à donner des exemples - comment sa « méthode » fonctionnait - qu'à développer des formalisations. Hilbert de son côté a cherché à établir le calcul avec des segments de façon plus rigoureuse, de manière axiomatisée, en utilisant le théorème de Pascal.

Descartes a suivi une pensée plus instrumentale, tandis que Hilbert a dirigé sa pensée avec plus d'attention aux formulations de théories. Mais la ligne qui relie Descartes à Hilbert, révèle une évolution d'un traitement plus intuitif à un traitement plus formalisé sur la question des interrelations entre domaines mathématiques.

9.3 Analyse praxéologique des éléments historiques

Dans cette partie, nous résumons succinctement les aspects historiques et épistémologiques précédents à travers la notion de praxéologies.

Tableau 16: Les praxéologies

La période avant les travaux de Descartes		
T	τ	$[\Theta ; \Theta]$
Déterminer un cube dont le volume est le double d'un cube donné.	Si c désigne le côté du cube initial, il s'agit de construire un segment de mesure x tel	Un cube est un nombre multiplié trois fois par lui-même.

¹⁸ Soient a, b, c, a', b', c' six points d'un plan (projectif réel) tels que les droites bc' et $b'c$ se coupent en u , les droites ca' et $c'a$ se coupent en v et les droites ab' et $a'b$ se coupent en w . Si les six points a, b, c, a', b', c' sont sur une même conique, alors les points u, v, w sont alignés sur une droite appelée traditionnellement droite de Pascal.

	que $x^3 = 2c^3$. Le problème revient donc à construire, à la règle et au compas, un segment de mesure r tel que $r^3 = 2$, c'est à dire $\sqrt[3]{2}$.	
Étant donnés a et b constructibles, avec $a > b$, déterminer $a + b$; $a - b$; $a \times b$; $a : b$ et $\sqrt[b]{a}$.	Avec a et b constructibles, on construit ces opérations à la règle et au compas. C'est-à-dire, on place les abscisses des nombres et avec la configuration de Thalès à la règle et au compas on détermine ces opérations.	Définition : Sur une droite graduée orientée, on dit qu'un nombre x est constructible, si l'on peut placer exactement le point d'abscisse x sur cette droite, à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée. Le corps des nombres constructibles est stable par passage à la racine carrée : si x appartient à ce corps, alors la racine carrée de x est aussi élément de ce corps.
Résoudre une équation du deuxième degré.	A travers une représentation géométrique, construire à la règle et au compas les formules d'aire qui composent l'aire d'un carré écrit sous forme d'une équation.	Afin de valider des algorithmes, algébriques, des mathématiciens utilisaient aussi, comme le fit Euclide auparavant, le support géométrique en termes d'aires.
La période des travaux de Descartes		
Soit AB , BC des segments, déterminer le produit, le quotient et la racine carrée de ces segments.	Les constructions géométriques à la règle et au compas sont basées sur des triangles semblables, à partir desquels on opère leurs côtés homologues en sachant qu'ils sont proportionnels. Ce qui peut être écrit dans des formes algébriques. Pour l'extraction de la racine carrée, on utilise les relations métriques dans un triangle rectangle obtenu à partir de quelques opérations.	Explicitation des liens entre la géométrie et les nombres. Élaboration d'une sorte de dictionnaire entre les opérations algébriques et les constructions géométriques. Les problèmes géométriques sont ramenés à des équations algébriques, ce qui fait apparaître l'algèbre comme un outil pour découvrir de nouvelles constructions géométriques, restées cachées chez des auteurs anciens.

<p>Résoudre l'équation</p> $z^2 = a z + b^2$	<p>A partir des opérations avec les segments on construit le triangle rectangle, dont un des côté est égal à b, racine carrée de la quantité connue b^2, et l'autre $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue qui était multipliée par z, qu'on suppose être la ligne inconnue ; en opérant les lignes de ce triangle on arrive à exprimer ainsi :</p> $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$	<p>Les définitions élaborées par Descartes ont permis d'établir des interrelations entre ces domaines, également dans l'autre sens : en représentant les nombres par des segments de droite, on peut résoudre géométriquement des équations algébriques et, en particulier, calculer graphiquement leurs solutions.</p>
<p>La période après Descartes</p>		
<p>Soit b et c deux segments quelconques, déterminez le produit et le quotient entre ces deux segments.</p>	<p>Les constructions géométriques à la règle et au compas sont basées sur des triangles semblables, à partir desquelles on opère leurs côtés homologues en sachant qu'ils sont proportionnels. Ce qui peut être écrit dans des formes algébriques.</p>	<p>Théorème de Pascal : Soient a, b, c, a', b', c', six points d'un plan (projectif réel) tels que les droites bc' et b'c se coupent en u, les droites ca' et c'a se coupent en v et les droites ab' et a'b se coupent en w. Si les six points a, b, c, a', b', c' sont sur une même conique, alors les points u, v, w sont alignés sur une droite appelée traditionnellement droite de Pascal.</p>

9.4 Conclusion

Dans les paragraphes précédents, nous avons examiné plus spécifiquement l'évolution de l'usage des interrelations, en considérant trois périodes distinctes :

- 1) avant les travaux de Descartes
- 2) la période des travaux de celui-ci
- 3) après ses travaux.

Ce travail se veut être une première exploration de l'histoire du **NAG**. Un approfondissement de ce travail serait important à développer pour la didactique des mathématiques, comme le souligne Dorier (2000. p. 9) :

« [...] Ainsi une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et

ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné. En outre, le processus de transposition didactique est complexe, il ne commence pas au moment où l'enseignant prépare son cours, il est au contraire à ce moment là dans sa phase finale, l'enseignant n'ayant plus que le contrôle de variables locales dans la présentation du texte du savoir. Le chercheur en didactique est donc tenu de remonter aux sources de ce processus, jusqu'à la production du savoir savant, pour "se déprendre de la familiarité de son objet d'étude, et exercer sa vigilance épistémologique »

Il existe de très nombreuses interrelations entre les grands domaines dans l'histoire des mathématiques. Une période marquante aussi dans l'histoire des mathématiques, où les interrelations entre domaines ont été utilisées pendant le XIX^e siècle (au moins, entre deux des trois grands domaines), a été l'arithmétisation de l'Analyse, en commençant avec Bolzano, en passant par Cauchy, Dirichlet, Fourier, Weierstrass et Dedekind. Ce fut à partir de là que, pour la première fois, les mathématiciens réussirent à donner des définitions précises et des traitements satisfaisants pour des concepts comme l'infini, le nombre naturel, le nombre réel, la continuité et la dimension. Il a été difficile de concilier l'intuition géométrique avec le traitement purement arithmétique des nombres réels. Le traitement axiomatique des nombres réels a fourni un plus grand contrôle de l'intuition géométrique et, vice versa.

Les mathématiques plus contemporaines pourraient aussi témoigner de l'importance de l'utilisation du **NAG** et, plus généralement, des interrelations entre domaines mathématiques.

Dans notre analyse écologique, nous avons surtout insisté sur des exemples d'une période où les nombres et la géométrie entretenaient d'étroites interrelations (avec l'apparition de la géométrie analytique).

PARTIE

C

ANALYSE INSTITUTIONNELLE

CHAPITRE C1 : ETUDE DES PROGRAMMES

10 Notre questionnement

Ce chapitre de notre travail est consacré à l'étude des caractéristiques du rapport institutionnel au **NAG**. Nous allons présenter la méthodologie utilisée pour étudier ce rapport, à travers les analyses que des programmes, même que une analyse général des manuels a été faite dans l'annexe 12.

Nous n'avons pas l'intention d'effectuer une étude comparative entre les institutions brésilienne et française. Cependant, nous présenterons quelques éléments relatifs à des analyses institutionnelles brésiliennes et nous centrerons notre analyse sur les institutions françaises.

Notre analyse nous a conduit à examiner les programmes et les manuels de mathématiques du collège et du lycée sur les contenus associés au **NAG**. On trouvera quelques éléments sur les programmes au Brésil.

Depuis 1998, les programmes brésiliens ont acquis une forme unique : les Paramètres Curriculum Nationaux – PCN , références élaborées par le gouvernement fédéral. Comme propositions innovatrices et ouvertes, ils expriment l'engagement de créer de nouveaux liens entre l'enseignement et la société et la présentation des idées sur *ce qu'on veut enseigner*, comment *on veut enseigner* et pourquoi *on veut enseigner*. Les PCN ne sont pas une liste de règles, mais un pilier pour la transformation des objectifs, des contenus et de la didactique de chaque discipline. Ainsi dans les programmes de mathématiques, nous pouvons trouver une place plus explicite au **NAG**, ce qui n'est pas le cas actuellement en France. Rappelons que les noms et l'organisation des institutions d'enseignement au Brésil et en France ont des similarités.

Notre analyse des programmes est centrée sur les questions suivantes :

En quels lieux de vie, en quel environnement conceptuel, le **NAG** peut-il être rencontré dans l'institution EMS en France ?

Quelle est la fonction du NAG dans les systèmes des objets avec lesquels il interagit ?

Quelle importance est donnée au **NAG** dans la construction des nouvelles connaissances ou dans la résolution des problèmes ?

Cette analyse s'appuiera sur l'approche écologique et praxéologique.

10.1 Une méthodologie basée sur deux approches

Les questions posées dans le paragraphe précédent font partie d'un questionnement écologique et praxéologique. Pour déterminer le rapport institutionnel avec le **NAG** à partir de certaines organisations mathématiques, nous allons procéder à l'analyse des programmes et des manuels utilisés au secondaire. Cette analyse nous permettra d'identifier les conditions ou contraintes qui déterminent, dans ces institutions, les

organisations mathématiques dans lesquelles le **NAG** apparaît et les objets d'enseignement avec lesquels le **NAG** interagit.

L'analyse des programmes, produits de la noosphère, a pour but d'identifier le contour du rapport institutionnel au **NAG**. Lorsqu'un enseignant, en France, construit le texte du savoir, une des références premières est constituée par les programmes qui régissent l'institution dans laquelle s'inscrit son projet d'enseignement, même si les assujettissements à d'autres institutions jouent de façon plus ou moins souterraine un rôle dans l'élaboration de son travail. Les programmes mettent en évidence ce que l'enseignant est tenu de faire selon les choix de l'institution. Pour cela, nous avons analysé les « programmes officiels » français mais aussi, des traces de déclarations au niveau de la noosphère à propos du **NAG**. Ensuite, une analyse des manuels sera faite pour valider et affiner les résultats.

Une étude du **NAG** dans les programmes de mathématiques au secondaire étant essentielle, elle sera faite à travers les nouveaux et anciens programmes. Dans nous annexes (annexes 12), nous mènerons aussi, sur les manuels les plus utilisés en France, une analyse sur l'utilisation du **NAG**, en cherchant montrer quelques habitats et niches pour le **NAG**, suivie d'une analyse des praxéologies mathématiques de ces habitats et niches. Ces analyses nous permettront d'aborder les questions sur la place du **NAG**, afin de mettre en évidence ses habitats et ses niches écologiques dans les programmes. Notre travail ne sera pas exhaustif et nous nous limiterons à quelques exemples significatifs relativement au **NAG**.

En fait, la méthodologie adoptée consiste à identifier quelques habitats et niches du **NAG** dans les programmes, à partir des analyses de quelques tâches où le **NAG** est utilisé dans différents chapitres de manuels. Les manuels que nous utiliserons font partie des collections les plus répandues, au collège comme au lycée.

CHAPITRE C2 : L'ANALYSES DES PROGRAMMES

11 Les programmes

Notre étude porte essentiellement sur l'utilisation du **NAG** dans l'institution EMS en France. En ce qui concerne les programmes en France, nous dégagerons une analyse écologique du **NAG** dans les parties : contenus, connaissances et capacités, exemples d'activités proposées et commentaires.

11.1 LES PROGRAMMES EN FRANCE

11.1.1 Le Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale

En France jusqu'en 1989, la conception des programmes relevait exclusivement de l'Inspection Générale. La loi d'orientation de 1989 va modifier cette situation. La réflexion sur les orientations générales relève désormais du Conseil National des Programmes (CNP). Pour chaque domaine disciplinaire, la rédaction du projet, du travail scientifique et didactique est déléguée, toute cette production est ensuite soumise au CNP et doit passer devant le Conseil Supérieur de l'Éducation (CSE). Une fois approuvés par le CSE, les programmes sont soumis à la signature du ministre et publiés au Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale (BOEN ou plus simplement BO).

Nous avons consulté les programmes de mathématiques en France à travers les bulletins :

- ✓ Programmes de l'enseignement des mathématiques, des SVT, de physique-chimie du collège - (BO hors série n° 6 du 19 avril 2007).
- ✓ Programmes de l'enseignement des mathématiques de la classe de seconde voie générale et technologique - Volume 7 - (BO hors série n° 2 du 30 août 2001).
- ✓ Programmes de l'enseignement des mathématiques de la classe de première de la série scientifique - Volume 5 -(BO hors série n° 7 du 31 août 2000).
- ✓ Programmes de l'enseignement des mathématiques de la classe de terminale de la série scientifique - Enseignement obligatoire - enseignement de spécialité - Volume 9 – (BO hors série n° 4 du 30 août 2001).

11.1.2 Analyse des programmes au collège

11.1.2.1 Une vue générale des programmes au collège en France

Pour l'enseignement des mathématiques en classes de collège, les programmes consultés dans le bulletin officiel hors série n°6 du 19 avril 2007, se présentent en quatre parties :

- ✓ Organisation et gestion de données, fonctions ;
- ✓ Nombres et calcul ;
- ✓ Géométrie ;
- ✓ Grandeurs et mesures.

Ces programmes organisent l'enseignement des mathématiques du collège autour d'objectifs précis.

Dans les perspectives précédentes, nous avons cherché à savoir quels pourraient être les secteurs thèmes ou sujets, mentionnés dans les programmes, que l'on pourrait exploiter pour créer des occasions d'utiliser le **NAG**. Nous nous efforcerons, pour chacun des niveaux (sixième - cinquième - quatrième - troisième) d'identifier les parties de programmes qui peuvent être exploitées pour un développement de l'utilisation du **NAG**.

Les programmes du collège ne parlent pas explicitement des interrelations entre les différents domaines mathématiques, mais il existe cependant, de façon implicite, dans l'exposé des objectifs, une place laissée au **NAG**.

11.1.2.1.1 La sixième

Le programme compte quatre domaines.

On peut penser que le domaine « organisation et gestion de données. Fonctions » constitue un habitat pour le **NAG** comportant les deux rubriques suivantes :

- ✓ Proportionnalité ;
- ✓ Organisation et représentation de données.

La proportionnalité fait l'objet d'un apprentissage continu et progressif sur les quatre années du collège et permet de comprendre et de traiter de nombreuses notions du programme.

L'utilisation du coefficient de proportionnalité dans des procédures de proportionnalité entre des grandeurs est une niche possible pour le **NAG** avec une utilisation potentielle assez forte, comme dans des problèmes de distance parcourue.

Dans la rubrique - organisation et représentation de données - nous pouvons repérer une niche pour le **NAG** :

« Le repérage sur un axe : lire et compléter une graduation sur une demi-droite graduée, à l'aide d'entiers naturels, de décimaux, de fractions simples $1/2$, $1/10$, $1/4$, $1/5$ ou de quotients (placement exact ou approché) »

Ce travail est indispensable à la compréhension des représentations graphiques utilisant des axes gradués. Il permet aussi un travail sur la proportionnalité, à partir des relations entre les distances entre deux points et les différences entre les abscisses de ces points, ainsi qu'une meilleure compréhension de l'ordre sur les différents types de nombres

envisagés. Il est en outre intimement lié aux questions relatives au placement approché des nombres et permet un travail sur les ordres de grandeur.

Dans le domaine « Nombres et Calculs » comporte deux rubriques dans lesquelles on peut repérer des **habitats** possibles du **NAG** :

- ✓ Nombres entiers et décimaux ;
- ✓ Division, quotient.

Dans le secteur « nombres entiers et décimaux », à travers la droite graduée, apparaît une **niche** possible du **NAG** dans le travail sur les nombres et notamment pour la notion de quotient, qui d'ailleurs occupe une place centrale en sixième, sous ses différentes significations (quotient euclidien, quotient décimal, quotient fractionnaire) :

- ✓ Écriture fractionnaire : Placer le quotient de deux entiers sur une demi-droite graduée dans des cas simples ;
 - ✓ L'écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d'une unité.
- Dans la partie « *ordre* » de cette même rubrique, nous trouvons aussi :
- ✓ Placer un nombre sur une demi-droite graduée ;
 - ✓ Lire l'abscisse d'un point ou en donner un encadrement.

Dans cette partie aussi, nous trouvons explicitement la droite graduée citée comme outil significatif dans le processus d'acquisition des connaissances sur les nombres, donc plusieurs **niches** du **NAG** :

« Les erreurs relatives à l'ordre sur les décimaux proviennent le plus souvent d'une interprétation erronée des écritures à virgule. Les règles utilisées pour comparer, encadrer, intercaler des nombres doivent donc être justifiées en s'appuyant sur la signification des écritures décimales. Le placement sur une demi-droite graduée est pour cela un bon support d'activités. » (BO hors série n° 6 du 19 avril 2007, p.19).

Dans le domaine de la « Géométrie », des **habitats** sont repérables autour des travaux sur la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires. Cela nous permet de faire le lien avec le domaine des « Grandeurs et mesures », où de nombreux habitats apparaissent pour le **NAG**. Certains travaux géométriques, comme le calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, de la longueur d'un cercle, conduisent à décrire des situations qui mettent en jeu des interrelations entre différents domaines, et donc à utiliser le **NAG**. Une autre niche pour le **NAG** est celui du travail sur les nombres dans le contexte géométrique :

« Par exemple, le recours aux longueurs et aux aires permet d'enrichir le travail sur les nombres non entiers et les opérations étudiées en classe de Sixième. Il est important que les élèves disposent de références concrètes pour certaines grandeurs et soient capables d'estimer une mesure (ordre de grandeur). L'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime. Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens. A travers les activités sur les longueurs, les aires et les volumes, les élèves peuvent se construire et utiliser un premier répertoire de formules. » (BO hors série n° 6 du 19 avril 2007, p.28).

Le programme ne parle nulle part, de façon explicite, de l'utilisation du **NAG** mais nous l'avons montré qu'une utilisation potentielle du **NAG** est possible à travers les thèmes : proportionnalité, organisation et représentation de données nombres entiers et décimaux, division, quotient, aires : mesure, comparaison et calcul d'aires, volumes.

11.1.2.1.2 La cinquième

Ici encore dans le domaine « Organisation et gestion de données. Fonctions » nous trouvons dans un habitat pour le **NAG** dans l'« étude de la proportionnalité » avec une utilisation potentielle du **NAG** :

« Les activités numériques et graphiques font le plus souvent appel à des situations mettant en relation deux grandeurs. Le travail sur des tableaux de nombres sans lien avec un contexte doit occuper une place limitée. Il est possible d'envisager, dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur, toute autre variable étant fixée, par exemple dans le cas : de la longueur d'un arc de cercle ; de l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme, d'un disque, d'un secteur circulaire ; du volume ou de l'aire latérale d'un cylindre ou d'un prisme droit. » (BO hors série n° 6 du 19 avril 2007, p.33)

Encore dans ce même **habitat**, un commentaire signale que le travail avec des abscisses et ordonnées de points d'une droite passant par l'origine dans le plan muni d'un repère, amène à une première reconnaissance de la proportionnalité par une propriété graphique.

L'étude des nombres relatifs est aussi un habitat important du **NAG** dans la mesure où l'interprétation graphique contribue à développer la compréhension des notions en jeux à travers la droite graduée et le plan repéré. Le programme mentionne que les travaux au niveau des « activités graphiques » conduisent :

- ✓ à établir la correspondance entre nombres et points d'une droite graduée (une même droite peut être graduée de plusieurs façons)
- ✓ à interpréter l'abscisse d'un point d'une droite graduée en termes de distance et de position par rapport à l'origine
- ✓ à choisir l'échelle permettant de placer une série de nombres sur une portion de droite graduée.

Les travaux de géométrie plane prennent toujours appui sur des figures, mais les interrelations avec le numérique sont importantes :

« L'inégalité triangulaire est mise en évidence à cette occasion et son énoncé est admis : $AB + BC \geq AC$. Le cas de l'égalité $AB + BC = AC$ est reconnu comme caractéristique de l'appartenance du point B au segment [AC]. » (BO hors série n° 6 du 19 avril 2007, p.40).

Dans le domaine « Grandeurs et mesures », nous trouvons à nouveau de nombreuses occasions d'utiliser le **NAG** comme en sixième, comme dans le calcul du volume d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution dont il est indiqué qu'il est proportionnel : - à sa hauteur, lorsque la base est constante ; - à l'aire de sa base, lorsque la hauteur est constante.

11.1.2.1.3 La quatrième

Dans le domaine « Organisation et gestion de données. Fonctions » nous retrouvons une utilisation potentielle du **NAG** à travers différents habitats, notamment à travers le thème de la proportionnalité :

- ✓ Représentations graphiques, proportionnalité : utiliser dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité sous la forme d'alignement de points avec l'origine.
- ✓ Applications de la proportionnalité : vitesse (utiliser la vitesse $d=vt$), grandeurs quotients courantes (changer d'unités de vitesse, mètre par seconde et kilomètres par heure), calculs faisant intervenir des pourcentages (en liaison avec d'autres disciplines comme la géographie, etc.)

Dans le domaine « Nombres et Calculs » la résolution de problèmes issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines ou de la vie courante, constitue l'objectif fondamental du programme, ce qui laisse entrevoir des habitats possible pour le **NAG**.

L'étude plus approfondie du triangle rectangle et d'une nouvelle configuration (celle de triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes) permet d'aborder quelques aspects numériques fondamentaux de la géométrie du plan. Certaines propriétés géométriques d'un agrandissement ou d'une réduction d'une figure sont également étudiées.

Le domaine « Grandeurs et mesures » trouve aussi appui sur la résolution de problèmes souvent empruntés à la vie courante et aux autres disciplines. Les problèmes de variation d'une grandeur (aires, volumes) en fonction d'une autre fournissent des niches importantes au **NAG**.

11.1.2.1.4 La troisième

Le domaine « organisation et gestion de données, fonctions » fournit des **habitats** pour le **NAG** autour de la « notion de fonctions ». Une utilisation du **NAG** est même suggérée pour faire émerger la notion de fonction dans ses aspects numériques comme dans ses aspects graphiques.

L'étude de la fonction linéaire et la fonction affine constituent deux **habitats** à étudier. La notion de fonction linéaire permet, en 3^e, d'opérer une synthèse des différents aspects rencontrés de la proportionnalité tout au long du collège et de les exprimer dans un nouveau langage.

Dans le domaine de la « géométrie » les figures de base et propriétés de configurations du plan et de l'espace sont travaillées. A cette fin, les contenus sont distribués à travers différents habitats où on peut prévoir une utilisation potentielle du **NAG** :

- ✓ Géométrie dans l'espace : étude des sphères (aire de la sphère, volume de la boule), étude des « sections planes de solides » ;
- ✓ Triangle rectangle : relations trigonométriques entre les différents points d'un triangle rectangle, savoir calculer les angles avec le cosinus et le sinus (tracé d'une tangente, utiliser le théorème de Pythagore) ;
- ✓ Théorème de Thalès ;
- ✓ Les vecteurs et translations : propriétés et calculs sur les vecteurs ;

C'est encore dans le domaine des « Grandeurs et mesures » que l'on pourra trouver divers habitats pour le **NAG**. Le programme souligne que les situations mettant en jeu des grandeurs doivent être souvent empruntées à la vie courante (aires de terrains, volumes de

gaz, de liquides, vitesses, débits, coûts, etc.), mais aussi à d'autres disciplines notamment scientifiques, et permettent l'interaction entre les mathématiques et d'autres domaines. Les activités de comparaison d'aires, d'une part, et de volumes, d'autre part de figures ou d'objets obtenus par agrandissement ou réduction, sont en particulier autant d'occasions de manipulations de formules et de transformations d'expressions algébriques. Comme dans les classes précédentes, l'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime. Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens. Les objectifs de cette partie sont :

- ✓ de compléter les connaissances relatives aux aires et volumes ;
- ✓ d'étudier des situations dans lesquelles interviennent des grandeurs composées, notamment du point de vue des changements d'unités.

A travers ces objectifs le **NAG** devrait trouver différents habitats comme :

Aires et volumes : calculs d'aires et volumes ; effet d'une réduction ou d'un agrandissement ;

Grandeurs composées, changement d'unités : vitesse moyenne.

11.1.2.2 Utilisation générale du NAG au collège

En fait, dans les programmes du collège on peut voir l'utilisation potentielle du **NAG**, soit dans les objets, soit dans les exemples d'activités et commentaires de ces programmes. Cependant, cette utilisation potentielle est présentée de façon implicite. De façon générale, le **NAG** est potentiellement présent dans tous les niveaux du collège.

Les programmes parlent de l'importance des interrelations que les mathématiques entretiennent avec d'autres disciplines, cependant ils ne parlent nulle part de l'importance des interrelations entre les domaines mathématiques eux-mêmes.

11.1.3 Analyse des programmes au lycée

Le lycée en France est l'établissement d'enseignement, chargé d'accueillir les élèves de la deuxième partie des études secondaires, laquelle est partagée en trois niveaux : la Seconde (élèves 15 à 16 ans), la Première (élèves 16 à 17 ans) et la Terminale (élèves 17 à 18 ans).

À l'issue du collège, en poursuivant leur scolarité, les élèves entrent en seconde de détermination, palier important de leur orientation. Nous nous intéressons exclusivement à la filière Scientifique du lycée de formation générale et technologique. Ce choix s'explique par l'importance des contenus mathématiques abordés dans les trois niveaux de cette filière.

11.1.4 Les programmes par niveau

Dans les paragraphes suivants, nous allons mettre en évidence des utilisations potentielles du **NAG** repérées dans chaque niveau de l'enseignement des mathématiques au lycée.

11.1.4.1 La Seconde

Le programme de ce niveau est composé de trois grands chapitres : statistique, calcul et fonction, et géométrie. Le domaine « Calcul et fonction » est divisé en deux secteurs : Nombres et Fonctions

Dans le secteur «Nombres », nous pouvons repérer des utilisations potentielles du **NAG** à travers différents **habitats** :

- ✓ On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite (commentaire) ;
- ✓ Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter (capacité attendue) ;
- ✓ La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres (commentaire).

Comme en troisième, le secteur «Fonction» devrait fournir des **niches** importantes pour le **NAG** dans les habitats suivants :

- ✓ Étude qualitative de fonctions. Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle ;
- ✓ Premières fonctions de référence ;
- ✓ Fonctions linéaires et fonctions affines ;
- ✓ Fonctions et formules algébriques ;
 - ✓ Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et inéquations. Décrire le comportement avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations.

11.1.4.2 La Première

C'est dans le domaine de la « Géométrie», que de nombreux habitats se font jour pour le **NAG**. En effet, on peut penser qu'une importante l'utilisation potentielle du **NAG** est prévue dans le programme de ce domaine :

- ✓ Repérage d'abord d'un point du cercle trigonométrique, à l'aide d'un réel défini à un multiple près de 2π ; lien entre repérage polaire et repérage cartésien ;
- ✓ C'est en « enroulant **R** » sur le cercle trigonométrique que les élèves ont construit en seconde les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus. Une première approche du radian et des angles orientés a alors été réalisée, s'appuyant sur la proportionnalité entre mesure de l'angle au centre et longueur de l'arc intercepté. On gardera ici cette vision dynamique de l'enroulement ;
- ✓ En particulier, équation de quelques objets de l'espace : plans parallèles aux surfaces.
- ✓ Plans de coordonnées ; sphère centrée à l'origine, cône de sommet l'origine et cylindre, chacun ayant pour axe un axe du repère ;
- ✓ Propriétés de bilinéarité, de symétrie et expression analytique dans un repère orthonormal ;
- ✓ Équation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal, équation d'un cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre ;
- ✓ Calculs d'angles, de longueurs et d'aires sur des figures planes en liaison avec le produit scalaire ; on établira et utilisera la formule dite d'Al Kashi, le théorème de la médiane et les formules d'addition et de duplication pour les fonctions cosinus et sinus.

11.1.4.3 La Terminale

C'est dans l' « Analyse » que des habitats pour le **NAG** peuvent être repérés en classe Terminale, par exemple :

- ✓ La notion de suites adjacentes est introduite en liaison avec le calcul intégral : encadrements d'aires (par exemple, aire d'un cercle par la méthode d'Archimède, aire sous une parabole). On montre le lien avec l'écriture décimale d'un réel ;
- ✓ L'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fait apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable ;
- ✓ On exploite à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures, notamment sur les transformations du plan ;

La « Géométrie » de Terminale fournit aussi de grands habitats pour le **NAG** :

« L'extension à l'espace du produit scalaire permet de résoudre de nouveaux problèmes et, de ce fait, d'approfondir la vision de l'espace. Bien que, comme dans les programmes antérieurs, le libellé de cette partie soit relativement concis, on prendra le temps de mettre en œuvre toutes les connaissances de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire pour l'étude de configurations du plan ou de l'espace, le calcul de distances, d'angles, d'aires et de volumes, etc. Ces travaux seront répartis tout au long de l'année afin que les élèves acquièrent une certaine familiarité avec le domaine géométrique ; on privilégiera les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode et on entraînera les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent parmi ceux dont ils disposent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique). » (BO hors série n° 4 du 30 août 2001, p.24)

11.1.5 Utilisation générale du **NAG** au lycée

Comme au collège, l'utilisation du **NAG** au lycée reste implicite. Les programmes parlent seulement de l'importance des interrelations des mathématiques avec les autres disciplines. Mais dans les programmes du lycée, une utilisation potentielle du **NAG** y est plus accentuée qu'au collège.

11.1.6 Conclusion de l'analyse des programmes

Au collège, la différenciation et l'utilisation des interrelations entre les différents domaines mathématiques sont introduites de manière progressive. Le découpage en domaines est difficile. En prenant l'algèbre comme exemple, en tant que telle, elle n'y figure pas comme domaine. Les notions, les objets algébriques apparaissent comme des thèmes dans les différents domaines constitués au collège. Donc les domaines constitués dans les programmes du collège (Organisation et gestion de données, fonctions ; Nombres et calculs ; Géométrie ; Grandeurs et mesures) peuvent être vus comme un amalgame des différents domaines mathématiques (Numérique, Algébrique et Géométrique). Cet

amalgame est lié au travers des interrelations existantes entre les sujets, thèmes, secteurs et domaines mathématiques.

Au lycée, l'utilisation des interrelations occupe une place plus forte. En prenant la résolution des équations comme exemple, elle est faite par une combinaison des apports des modes de résolution graphique et algébrique : l'utilisation de la représentation graphique et l'utilisation du discriminant. L'utilisation du **NAG** n'est pas explicitée dans les programmes, mais il occupe une place importante dans la construction des connaissances dans les programmes. En fait dans d'autres pays, on peut observer des positions différentes.

Au Brésil, les programmes explicitent davantage l'importance de ces interrelations dans l'accomplissement des objectifs des mathématiques. Voici deux exemples qui schématisent comment un sujet peut être abordé en prenant en charge le réseau des interrelations existant autour de lui :

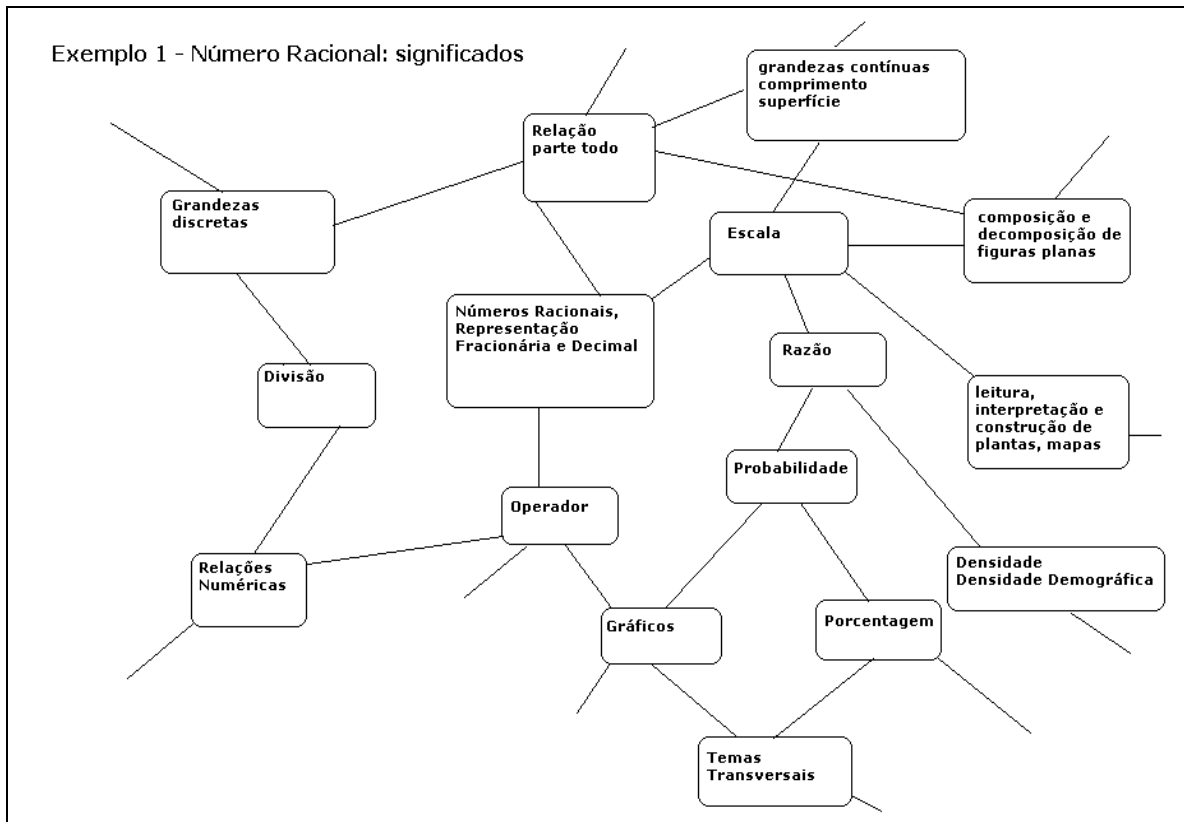


Figure 29 : Interrelations existantes à propos du nombre irrationnel (PCN/Mathématique - MEC/SNE, 1998, p.139).

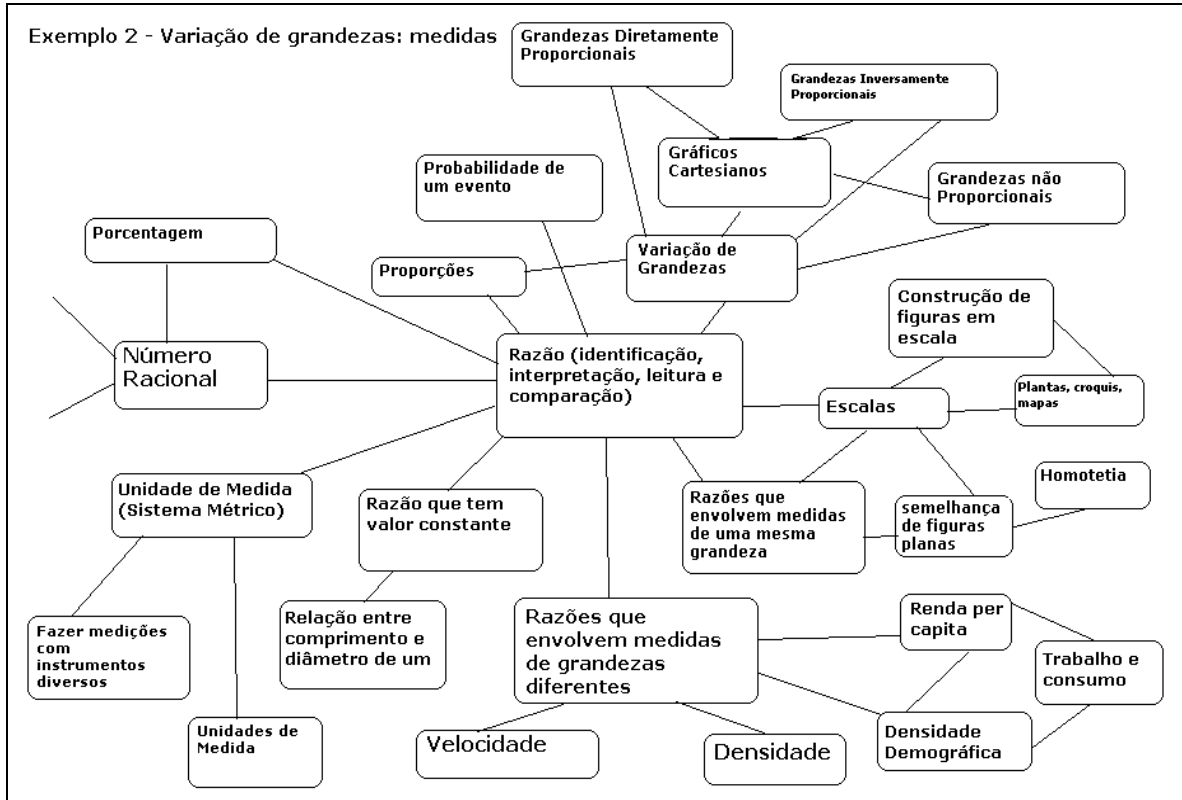


Figure 30 : Interrelations existantes à propos des variations de grandeurs et des mesures (PCN/Mathématique - MEC /SNE, 1998. p.140).

Les programmes au Brésil défendent aussi la rupture des barrières entre les disciplines. Les programmes font remarquer que l'apprentissage ne doit pas être prévu avec une perspective qui ne considère pas la multidisciplinarité et interdisciplinarité des thèmes abordés. Autrement dit, les thèmes doivent être proposés à partir d'une compréhension globale, en articulant les compétences qui seront développées d'abord dans chaque discipline puis dans l'ensemble de ces disciplines, dans chaque secteur puis dans l'ensemble des secteurs.

Dans cette perspective, en ce que concerne les mathématiques, nous considérons que c'est à l'intérieur de la discipline que, dans une perspective plus globale, quand les interrelations peuvent être comprises et utilisées, qu'il peut y avoir une meilleure compréhension de l'importance des interrelations entre des sujets, des thèmes, des secteurs, des domaines comme une des initiatives intégrantes du projet didactique des mathématiques au secondaire.

Dans les programmes français, le schéma présenté ci-dessous montre l'utilisation des interrelations entre notions ou thèmes. Il permet de situer les choix de contenus, pour concevoir un programme en prenant en compte la diversité des mathématiques actuelles et en rappelant les éléments fondamentaux propres à toute démarche mathématique :

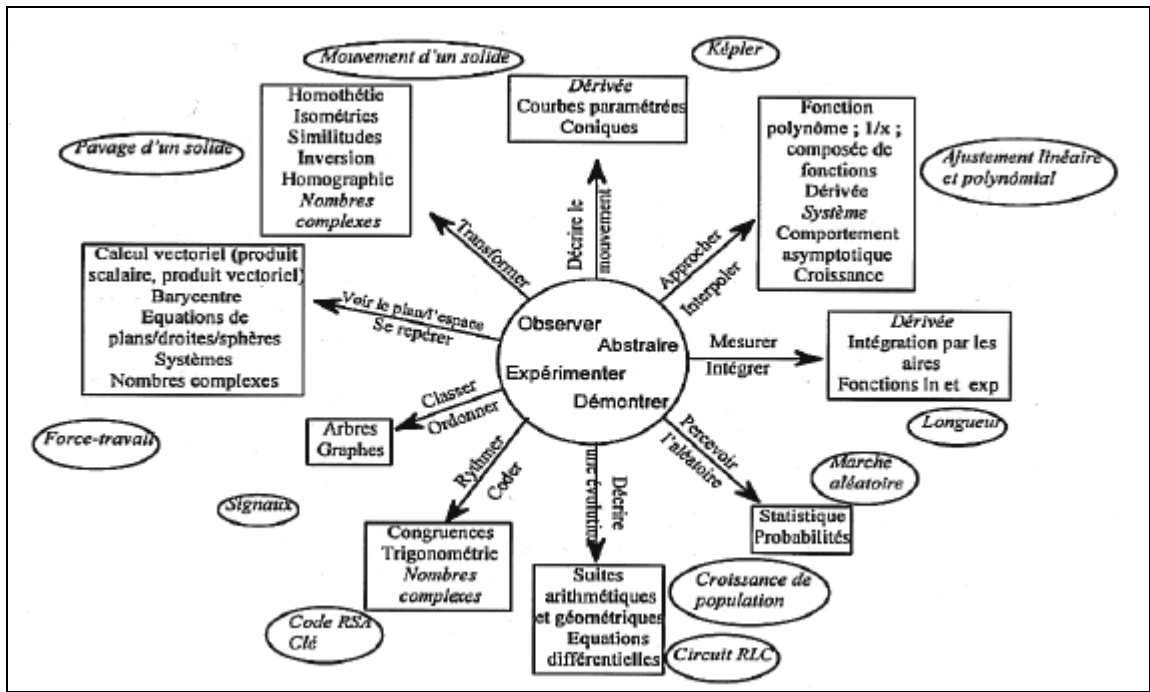


Figure 31 : Généralités à propos d'une formation scientifique en classes de première et terminale S (BO hors série n° 7 du 31 août 2000, p.25).

En fait, les programmes mettent l'accent sur l'articulation à faire entre les différentes disciplines, mais les interrelations à l'intérieur de chaque discipline ne sont pas mentionnées. Cependant, ces interrelations sont souvent utilisées implicitement par les programmes.

Mensouri (1994) souligne que les programmes seuls ne permettent pas de définir complètement un rapport institutionnel. Car, selon lui :

« [...] Les programmes ne constituent pas un texte de savoir, mais seulement un discours sur un hypothétique texte de savoir.[...] Même en disposant d'un certain texte de savoir, toutes les pratiques à propos des objets de savoir figurant dans ce texte ne peuvent pas être citées. » (Mensouri, 1994, p.44)

Pour accéder au rapport institutionnel, une analyse complémentaire de l'analyse des programmes est nécessaire.

PARTIE

D

ANALYSE DES PRATIQUES

CHAPITRE D1 : PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT

12 LA PRATIQUE

Dans les paragraphes suivants, nous allons préciser ce que nous comprenons par pratique d'enseignant.

12.1 Une première notion

La pratique est définie dans les dictionnaires comme « l'activité qui vise à appliquer une théorie, qui recherche des résultats concrets, qui met en œuvre les règles, les principes d'une activité particulière, d'un art ou d'une technique » (Lexilogos 2002-2009). Nous considérons l'analyse de pratiques comme une notion polysémique et non comme un effet de mode, car il existe différents types d'analyse de pratique. D'ailleurs, le terme n'est pas unifié. Il existe « l'analyse des pratiques », « l'analyse de pratiques » et « l'analyse de pratique ».

12.1.1 En vue d'une définition de la pratique

12.1.1.1 Une pratique dans un métier évolutif

Plusieurs facteurs peuvent apporter des changements considérables dans le métier d'enseignant, et en conséquence, dans la pratique de ces enseignants, comme par exemple les conditions sociales de l'enseignement :

« Les professeurs déclarent que l'hétérogénéité de leurs élèves est difficile à gérer. Hétérogénéité de niveau [...] mais aussi hétérogénéité de socialisation [...] Ceux qui partent à la retraite prochainement ont connu des changements de programme importants tant au niveau des contenus que des méthodes. » (Roditi, 2005, p.6).

Ces facteurs ont une influence sur l'accès aux savoirs : l'enseignant ne peut plus être seulement celui qui sait et qui transmet à celui qui ne sait pas ; il devient un acteur qui accompagne l'élève dans l'accès au savoir. L'école n'est plus le seul lieu où l'on trouve le savoir. Ces facteurs font du métier d'enseignant un métier complexe et en constante évolution :

« Les changements ont porté sur les contenus et sur les tâches que les élèves doivent être capable de réaliser (BAC et Brevet par exemple en témoignent) ce qui influe sur les pratiques.[...] Sans doute une des modifications majeures au niveau des méthodes est l'introduction de « situations créant un problème... afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. » Cette introduction influe aussi sur la nature et la forme du travail des élèves, et sur le « cours » de mathématiques. » (Roditi, 2005, p.7).

Dans ce contexte, la pratique des enseignants est au cœur de ces changements, elle les vit, les accompagne, les subit parfois. Et si le système éducatif change, ce n'est pas seulement pour des raisons qui lui sont extérieures, mais aussi par des raisons internes, afin de mieux répondre aux besoins de la société. A travers leurs pratiques, les enseignants sont alors les premiers agents des changements et des évolutions : « La société attend essentiellement des enseignants, qu'ils fassent acquérir des savoirs, des outils, des concepts, des processus à leurs élèves, qu'ils forment des citoyens et qu'ils transmettent les valeurs fondamentales de la société et les valeurs universelles de l'humanité » (Chabat, 2006)

12.1.1.2 La recherche et la pratique pédagogique contemporaines

Comme nous l'avons déjà écrit Farias et Barboza (2003), une des approches essentielles de la recherche en sciences de l'éducation est l'activité formative développée par les diverses institutions scolaires à travers leur pratique pédagogique. Les pratiques pédagogiques contemporaines sont l'objet de plusieurs projets de recherche. Ces recherches pointent les caractéristiques des pratiques pédagogiques dans l'éducation scolaire contemporaine. Elles se rapportent à des bases théoriques qui considèrent que, dans une institution donnée, il coexiste de multiples pratiques pédagogiques. Les évolutions de ces pratiques se font constamment en prenant en compte les transformations sociales, étant donné que l'école est conditionnée par les contextes sociaux, économiques, politiques et culturels :

« Dans le champ de l'éducation et de la formation, l'intérêt pour les pratiques professionnelles s'est considérablement accru au cours de la dernière décennie. Ce surcroît d'intérêt a concerné aussi bien la formation et la professionnalisation (avec le développement des dispositifs généralement repérés comme dispositifs d'analyse des pratiques) que la recherche. Remarquons d'ailleurs que, dans le cadre de la recherche, le terme de pratiques n'est pas utilisé de manière aussi centrale que dans la formation, et des travaux ciblent également l'action, l'activité (ou les activités), la conduite ou le travail. » (Marcel, 2002, p.5).

Nous pouvons regarder la diversité des préoccupations par rapport aux différentes dimensions de l'enseignement : sociologique, psychologique, didactique, technologique, organisationnelle, docimologique, etc.

12.1.1.3 Les dimensions de la pratique

Les différentes dimensions des pratiques contemporaines nous amènent à les considérer, non seulement de manière collective ou figée, mais aussi selon le point de vue individuel et évolutif. En effet, un enseignant ne possède pas, dès son entrée dans le métier, l'ensemble des connaissances et des compétences, il les acquiert tout au long de sa carrière. Et c'est la collectivité, l'équipe d'enseignants de l'établissement qui vont aider le nouvel enseignant à acquérir sa pratique.

Enseigner est un métier qui requiert des compétences nombreuses et complexes. Il ne peut pas exister de « pédagogie officielle », de méthode universelle d'enseignement (Cornu, 2000).

En fait, la pratique d'un enseignant ne peut plus se limiter, ni à la préparation d'un cours, ni à la présentation de celui-ci devant les élèves, ni aux apports de ce cours. Elle doit être considérée dans ses différentes dimensions.

12.1.1.4 Quelques définitions de la pratique

En faisant la recension des écrits à ce sujet, nous avons trouvé plusieurs définitions pour la pratique des enseignants.

Le concept doit donner une idée, contribuer à former un avis sur quelque chose, classer, etc. De façon très générale, le concept permet d'émettre un jugement et d'évaluer. Du latin *conceptum* : « une pensée, une idée, une notion abstraite ou une idée générale, en désignant soit un objet seul, soit une classe d'objets ». Du point de vue logique, le concept est caractérisé par son extension et par sa compréhension. C'est-à-dire que le concept et l'idée sont en rapport intime dans une association, à travers une représentation mentale, une image, une pensée ou une notion concernant quelque chose. Les idées de quelqu'un sont ses pensées, ses avis, ses conceptions sur quelque chose, (Japiassú & Marcondes, 1996).

En observant la littérature à propos de la pratique de l'enseignant, nous voyons dans Veiga (1994) que la pratique pédagogique est ainsi définie :

« Je comprends la pratique pédagogique comme une pratique sociale guidée par des objectifs, finalités et connaissances, et insérée dans le contexte de la pratique sociale. La pratique pédagogique est une dimension de la pratique sociale qui estime la relation théorique-pratique, et est essentiellement notre devoir, en tant que des éducateurs, à la recherche de conditions nécessaires à sa réalisation. » (Veiga, 1994, p.16).¹⁹

Le problème posé est le lien à construire entre ces apports et les pratiques réelles dans la conduite quotidienne des classes. En effet, des interactions équilibrées entre élèves, savoir et enseignants, sont bénéfiques pour le développement cognitif des uns et des autres.

La pratique enseignante peut être aussi définie comme « la façon de faire, singulière, d'un individu, sa manière réelle, propre, d'exécuter une activité professionnelle : l'enseignement » (Altet, 2002). La pratique n'est pas seulement l'ensemble des actes observables, des actions, des réactions, mais elle comporte aussi les procédés de mise en œuvre de l'activité dans une situation donnée. Beillerot (1998) précise que c'est la double dimension de la notion de pratique qui la rend précieuse : « d'un côté, les gestes, les conduites, les langages ; de l'autre, à travers les règles, ce sont les objectifs, les stratégies et les idéologies qui sont invoqués ». En fait, la pratique professionnelle recouvre donc, à la fois, la manière de faire de chaque personne, « le faire, propre à cette personne » et « les procédés pour faire » qui correspondent à une fonction professionnelle, telle qu'elle est définie par un groupe professionnel particulier.

Selon Altet (2002), la pratique de l'enseignant renvoie à une activité professionnelle située, orientée par les fins, les buts et les normes d'un groupe professionnel. Les multiples dimensions de la pratique interagissent entre elles pour permettre à l'enseignant de s'adapter à la situation professionnelle et de gérer conjointement l'apprentissage des élèves

¹⁹Traduction de l'auteur : Entendo a prática pedagógica como uma prática social orientada por objetivos, finalidades e conhecimentos, e inserida no contexto da prática social. A prática pedagógica é uma dimensão da prática social que pressupõe a relação teoria-prática, e é essencialmente nosso dever, como educadores, a busca de condições necessárias à sua realização (Veiga, 1994, p.16).

et la conduite de la classe. C'est en prenant en compte les articulations entre ces différentes dimensions que nous présenterons ce que nous considérons comme pratique d'enseignant.

12.1.2 Notre définition de la pratique

Nous parlerons d'analyse de pratiques, car il s'agit pour nous de travailler sur les pratiques de chacun des enseignants, pratiques liées à des situations vécues par les enseignants. L'animation d'une classe est constituée par un système complexe d'actions que l'enseignant doit gérer : la communication, la didactique, les savoirs, etc. L'enseignant construit des situations avant la classe et les reconstruit pendant la séance. Les situations reconstruites pendant la classe, garderont des informations, que l'enseignant utilisera aussi après la classe, c'est-à-dire des informations qu'il utilisera pour proposer des exercices à ses élèves. Cet enchaînement dans la pratique aidera l'enseignant à construire une suite logique lui permettant l'apprentissage et le bon fonctionnement de ses travaux.

En fait, chaque pratique d'enseignement se situe dans un contexte donné, en fonction de la structure imposée et de l'adaptation à la classe. La pratique doit également prendre en compte les travaux antérieurs et postérieurs que nous ne pouvons pas ignorer.

Ce choix d'une approche multidimensionnelle pour définir la pratique enseignante nous amène à reconsidérer deux aspects complémentaires : d'un côté, les travaux de didactique disciplinaire, centrés sur la gestion des contenus, leur structuration et leur acquisition par les élèves, et d'un autre côté, les recherches sur la pédagogie, centrées sur la dimension communicationnelle de l'enseignement, ainsi que quelques éléments sur l'analyse du discours (Chiocca, 1996) et sur l'approche ergonomique (Clot & Faïta, 2000).

Selon Vergnaud (2003) la pratique est à la fois source et critère de connaissance pour l'enseignant et aussi pour les élèves. Il estime que la majorité des activités sont maîtrisées. Cela ne signifie pas, bien sûr, que l'enseignant ne développe pas de nouvelles compétences dans l'exercice de sa profession. Il souligne que « Toute activité est à la fois productive et constructive : productive d'effets immédiats sur l'environnement extérieur, matériel et social ; constructive d'effets à long terme sur les ressources personnelles du sujet acteur ». Les conséquences de cette attention particulière accordée à la définition de la pratique sont importantes pour nos analyses, car nous considérons que la pratique d'un enseignant de mathématiques recouvre tout ce que cet enseignant met en œuvre avant, pendant et après la séance en classe.

CHAPITRE D2 : METHODOLOGIE GENERALE

13 Cadre théorique et méthodologie d'analyse

Dans cette partie de notre travail nous présentons la méthodologie d'analyse des pratiques. Il s'agit de préciser la méthodologie d'analyse de séances observées.

En parallèle aux observations des deux enseignants de mathématiques, l'un dans un collège et l'autre dans un lycée en France, pendant l'année scolaire 2007-2008, nous avons recueilli plusieurs données issues de leurs pratiques.

Voici quelques types :

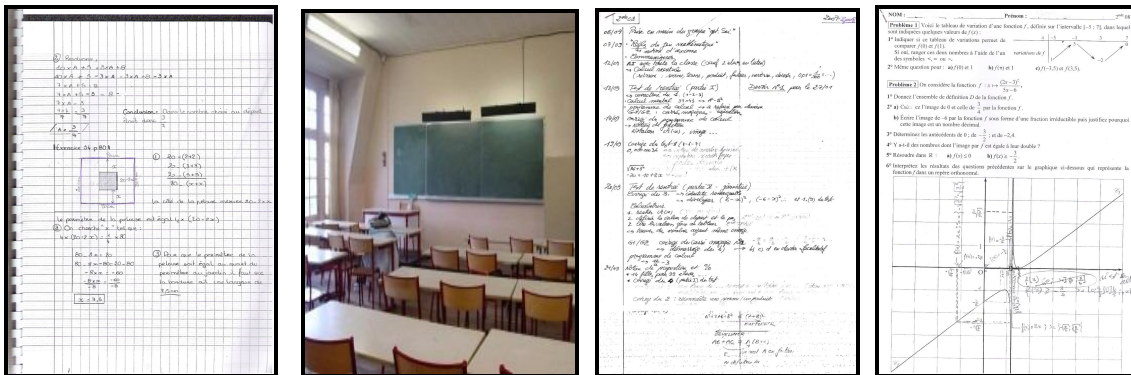


Figure 32: Partie du cahier cours élève collège. Figure 33: Extrait vidéo. Figure 34: Partie de progression lycée. Figure 35: Évaluation élève lycée.

Nous nous sommes intéressés à ces données en respectant les liens existant entre elles pour analyser les pratiques des enseignants constituées par ces différents éléments. Pour analyser les pratiques, nous avons besoin d'un cadre théorique capable d'articuler ces différentes données dans ce que nous allons considérer comme *la pratique*.

13.1 Cadre théorique

Nous avons déjà précisé plus avant ce que nous entendons par pratique d'enseignant. Maintenant, nous présentons le cadre théorique, les outils qui nous permettront d'analyser la pratique enseignante et son fonctionnement. Dans ce but, nous avons besoin d'une grille d'analyse de pratiques autour d'outils conceptuels issus de différentes recherches. Cette grille présentée dans les paragraphes suivants et en résumé à la fin de cette partie a pour but d'articuler les différents outils dans nos analyses de pratiques.

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)

Nous définissons le processus enseignement-apprentissage mis en œuvre dans la pratique enseignante comme « un processus interactif » (Altet, 1991). Ce processus renvoie à une situation singulière au sein de laquelle interagissent des acteurs singuliers (un enseignant, des apprenants) et des champs différents (celui de la communication et celui des savoirs) mettant en jeu les deux dimensions composant le travail enseignant : la dimension interactive de la communication et la dimension finalisée de l'apprentissage.

Pour restituer cette articulation fonctionnelle entre enseignement et apprentissage en situation, nous analysons à l'aide d'outils divers les modes d'action des acteurs. A cette fin, nous aurons besoin d'un cadre théorique en mesure de décrire les pratiques effectives des acteurs observées en situation et d'articuler ce que fait l'enseignant (Qu'enseigne-t-il ?) avec sa manière d'agir (Comment l'enseigne-t-il ?).

La pratique des enseignants ayant un caractère conjoncturel, les aléas environnementaux génèrent souvent un décalage entre ce que l'enseignant a initialement prévu de faire, et ce qu'il fait effectivement, et parfois entre ce qu'il dit vouloir faire et ce qu'il ne peut s'empêcher de faire.

L'objet de notre analyse est d'appréhender la façon dont l'enseignant va utiliser le **NAG**, et d'étudier la place et le rôle de celui-ci en situation didactique. Le but est de rendre la complexité intelligible, c'est-à-dire d'expliquer comment les choses se passent.

La théorie de la transposition didactique signale qu'un objet n'a pas tout à fait la même signification et qu'il ne vit pas de la même manière d'une institution à une autre, puisqu'on ne l'utilise pas pour faire la même chose. Pour décrire la façon dont un objet est utilisé dans une institution, pour décrire les rapports institutionnels et personnels à un objet du savoir, il est nécessaire d'avoir un modèle adéquat.

Pour étudier l'utilisation du **NAG**, en tenant compte de la complexité du processus enseignement-apprentissage, nous avons choisi, dans le cadre de la TAD, de modéliser la pratique des enseignants proposée par Chevallard. Ce modèle est, selon Artaud et autres (2008), « descriptif de ces savoirs, savoir-faire, connaissances. » Mais, comme le notent Bosch & Chevallard (1999), il n'existe pas de connaissance isolée, toute connaissance est un agrégat. C'est la modélisation en termes de praxéologie qui décompose ces agrégats en praxis et en logos, et qui va permettre une avancée significative pour décrire et expliquer les savoirs en fonctionnement. Ce modèle a d'abord vu le jour à propos de l'activité mathématique, principalement dans le but d'analyser des rapports institutionnels.

13.1.1.1 Les praxéologies

Les systèmes de pratiques ou praxéologies sont décrits en termes de types de tâches, de techniques, de technologies et de théories. Cela nous aidera dans notre étude sur le rôle et la place du **NAG** dans l'EMS et à définir le rapport institutionnel au **NAG**, à travers les praxéologies des activités où le **NAG** intervient.

L'un des postulats fondamentaux de la TAD énonce que les pratiques se laissent analyser selon une praxéologie composée de types de tâches, de techniques permettant d'accomplir ces types de tâches, de technologies justifiant, produisant et rendant intelligibles ces techniques et de théories. Autrement dit, les pratiques peuvent être analysées selon une organisation praxéologique.

Dans ce contexte nous considérons l'enseignant comme sujet d'une institution de l'EMS, dans laquelle il est amené à réaliser deux grands types de tâches :

« L'une des premières tâches auxquelles s'affronte le professeur en tant que directeur d'études d'une classe donnée consiste à déterminer, à partir des indications du programme d'études officiel, les organisations mathématiques à étudier, en précisant, pour chacune d'elles, son contenu précis, et en particulier le socle des types de tâches mathématiques qu'elle contient, ainsi que le degré de développement à donner aux composantes technique, technologique, théorique. [...] Le second grand type de tâches au cœur de l'activité du

professeur consiste évidemment à diriger l'étude d'une organisation mathématique déterminée, c'est-à-dire à conduire la reconstruction, ou transposition, dans la classe, de cette organisation. On ne saurait évidemment s'attendre à ce qu'une telle reconstruction soit univoquement déterminée. Mais on s'aperçoit pourtant que, quel que soit le cheminement de l'étude, certains types de situations sont nécessairement présents, même s'ils le sont de manière très variable, tant au plan qualitatif qu'au plan quantitatif. » (Chevalard, 1997, p. 19-20)

Pendant leurs cours les enseignants sont assujettis, à la fois, au programme scolaire, au manuel adopté pour la classe ou aux différents manuels qu'ils consultent. Ils sont également guidés par leurs représentations sur les mathématiques et l'apprentissage des élèves. Ces différents assujettissements contraignent leur pratique, tout en leur permettant de faire des choix sur le savoir enseigné en classe dans une relative liberté. Nos analyses nous permettront d'étudier quel est le rapport accordé au **NAG** par les enseignants .

En nous appuyant sur la notion de praxéologie, nous mettons l'accent sur deux points :

- D'une part, sur les techniques qui permettent d'accomplir les types de tâches, en mettant en évidence l'utilisation du **NAG** masquée par l'assujettissement à un système d'enseignement ;

- D'autre part, sur la fonction technologique du savoir (fonctions de production, de justification et d'intelligibilité des techniques) qui met notamment en évidence un système de conditions et de contraintes agissant sur la présence ou l'absence de telle technique, en telle institution, et qui donne à la notion même de savoir, une extension décisive (Artaud et autres, 2008).

En fait, l'approche anthropologique situe l'enseignant dans son cadre institutionnel habituel, la classe, milieu privilégié où s'articule, de manière dynamique, tout ce qui est institutionnellement « possible ». Les assujettissements institutionnels et la nécessité de l'institutionnalisation du savoir, sont envisagés comme des déterminants du mode de pensée de l'enseignant et des processus décisionnels engagés :

«Une praxéologie ne désigne donc pas l'étude de la pratique humaine mais la « science », personnelle ou institutionnelle, d'une certaine pratique. Elle est ainsi relative à la personne qui met en œuvre cette praxéologie ou à l'institution au sein de laquelle cette praxéologie peut vivre. Les praxéologies sont un modèle fondamental qui permet d'appréhender les objets de savoirs, d'étudier leurs transformations, de rendre compte de ce qui se fait dans telle institution avec ces objets et rend explicite le modèle épistémologique de référence qui nourrit les analyses des phénomènes de transposition. » (Artaud et al, 2008, p.3).

Les questions rencontrées dans l'exercice quotidien de la pratique enseignante sont en grande partie celles pour lesquelles la didactique des mathématiques fournit des outils professionnels permettant, à qui les maîtrise, d'élaborer des réponses. Citons-en quelques-unes : comment analyser ce que sera l'enseignement d'un sujet mathématique ? Comment concevoir, de manière scientifiquement fondée, un enseignement des mathématiques ? Comment décrire l'activité mathématique d'une classe et l'organisation des mathématiques que l'on enseigne ? Comment penser l'organisation didactique ?

Pour pallier l'insuffisance des réponses apportées d'ordinaire à ces questions, une analyse doit pouvoir prendre de la distance par rapport aux conceptions du chercheur qui l'a faite. Pour ce faire, il est nécessaire qu'il dispose d'outils didactiques permettant de rendre objectifs les faits d'enseignement afin de les analyser, les évaluer.

13.1.1.2 Les organisations mathématiques et didactiques

En résumé, l'analyse des pratiques enseignantes en termes de praxéologies revient à analyser l'organisation mathématique – OM reconstruite par l'enseignant, ainsi que l'organisation didactique – OD mise en œuvre pour permettre l'étude de cette organisation mathématique.

Pour analyser la manière dont l'enseignant de mathématique au collège et au lycée utilise et fait utiliser le **NAG**, nous allons étudier l'organisation mathématique présente dans ses projets de cours, et l'organisation didactique qu'il utilise pour mettre en place cette organisation mathématique. Car l'OM et l'OD sont deux grandes classes de conditions, parmi d'autres « conditions et contraintes, qui vont déterminer la nature et la vie d'un objet », (Artaud, 1998).

A partir de l'organisation didactique utilisée par l'enseignant, nous allons analyser les praxéologies mathématiques présentes dans les séances observées. Pour faire cette analyse, nous avons tout d'abord examiné les progressions que nous ont fournies les enseignants. A partir de ces progressions, nous allons construire les OM visées par les enseignants, tout en cherchant à mettre en évidence les éventuelles praxéologies où le **NAG** apparaît.

Nous analyserons les praxéologies présentes dans les séances en prenant en compte les traces observées ou fournies par le professeur et par les élèves. Pour introduire les objets d'apprentissage, un enseignant doit choisir un domaine mathématique (Douady, 1986) dans lequel il propose une série de tâches à faire effectuer par les élèves qui permettent, en faisant varier convenablement les variables à disposition, de parcourir la diversité des cas susceptibles d'être rencontrés et de faire émerger les objets visés. Dans ce contexte une série de praxéologies est construite :

Domaine	→ Secteur	→ Thème	→ Sujet
	OM régionale	OM locale	OM ponctuelle
	$[t_m/\tau_{man}/\theta_m/\Theta]$	$[t_{li}/\tau_{li}/\theta_{li}]...$	$[t_i/\tau_i]...$

Pour pouvoir caractériser comment se sont articulées et analysées ces OM et OD, nous utiliserons le filtre du numérique.

13.1.2 Le filtre du numérique

Le filtre du numérique nous permettra de caractériser plus finement les praxéologies, c'est-à-dire que nous pourrons repérer, avec cet outil, des indicateurs, des éléments, pour pouvoir voir de quoi les praxéologies sont constituées et comment elles sont articulées.

13.2 Méthodologie d'analyse des séances

Notre démarche méthodologique a comme finalité la mise en évidence des concepts et des méthodes mis en jeu dans les séances observées. Nous nous appuyerons sur la démarche d'analyse proposée par Bronner (2005), qui s'inscrit dans le cadre de l'approche anthropologique.

Pour l'organisation mathématique nous nous appuyerons sur le filtre numérique de Bronner (2007) :

« Du point de vue méthodologique nous avons ainsi élaboré au niveau des organisations mathématiques un premier filtre numérique pour attraper et

« traquer » l'espace [...]. Nous rechercherons et nous passerons cet espace au crible de ce filtre [...] » (Bronner, 2007, p.27).

Le filtre du numérique a ainsi pour fonction de caractériser les OM : les objets mathématique, le contrat du calcul, les praxéologies, les dynamiques intra et inter-domaines, etc.

Nous avons repris la méthodologie d'analyse développée par Bronner (2007) pour l'analyse de l'organisation didactique en se centrant sur les questions suivantes :

« Quelles sont les caractéristiques mathématiques et didactiques de la situation d'enseignement dans chaque séance ?

De quelle manière l'enseignant installe-t-il et utilise-t-il le **NAG** ?

En fait, notre cadre méthodologique a pour fonction de mettre en évidence les caractéristiques mathématiques et didactiques de la séance observée, tout en faisant ressortir les événements saillants » (Bronner, 2007)

Cette démarche nous permettra d'analyser ce qui se joue dans une séance d'enseignement des mathématiques et de caractériser la place et le rôle du **NAG**. La méthodologie comportant trois grandes étapes :

- Description générale et trame de la séance ;
- Description des organisations mathématiques ;
- Analyse de l'organisation didactique

Dans la section suivante, nous expliciterons davantage les fonctions de chacune de ces trois étapes.

13.2.1 La trame

Rappelons que notre objet d'étude – le **NAG** – n'a pas été dévoilé aux enseignants. On n'a donc pas programmé l'observation de séances précises et choisies avec les enseignants. En fait, pour pouvoir étudier l'utilisation du **NAG** faite par les enseignants du secondaire, nous avons effectué, durant l'année scolaire 2007/2008, des observations simples, ordinaires de deux enseignants français P1 en troisième et P2 en seconde.

A l'issue de nos protocoles d'observations, sur lequel nous reviendrons plus loin, nous avons reconstruit la description générale des séances et le déroulement des séances, dans une première étape d'analyse que nous appelons la trame.

La trame d'une séance a pour fonction de donner une première description de ce que nous avons examiné et d'identifier des traces relativement objectives de ce qui est observé. Ces descriptions posent problème, car le regard n'est pas neutre et la transcription des faits demande une sélection et un traitement de l'information. Cependant c'est l'attitude d'objectivité qui conduit à considérer cette première étape comme une première trace. Selon Bronner (2005), la trame d'une séance est une première description des pratiques observées. Elle fait apparaître les premiers découpages de la séance – les périodes - selon de grandes unités, rendant intelligibles chaque élément retenu relativement à un projet d'enseignement. Chaque période est définie par les fonctions habituellement utilisées en classe comme par exemple la mise au travail sur des exercices, la mise en commun, la recherche, les bilans, les cours, etc. En fait la trame « permet de repérer de grandes phases

dans le processus d'interaction à analyser, d'identifier les acteurs du jeu didactique, de dire à quel jeu didactique ils jouent pour un observateur du didactique » Bronner (2005).

13.2.2 Description de l'organisation mathématique

Comme le souligne Chevallard (1997), le savoir mathématique, en tant que forme particulière de connaissance, est le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans les institutions.

Chevallard propose la notion d'organisation praxéologique comme la notion-clé pour étudier les pratiques institutionnelles relatives aux objets du savoir et en particulier les pratiques sociales en mathématiques. Les praxéologies, qui peuvent se construire dans une classe où l'on étudie un certain objet, nous permettent d'analyser la manière dont peut se construire l'étude de cet objet, et d'amener la description et l'étude des conditions de réalisation.

Selon Chevallard (1999), le système des tâches professorales laisse apparaître des tâches de conception et d'organisation de dispositifs d'étude qui formeront l'OM.

Une organisation mathématique est une organisation praxéologique de nature mathématique qui se constitue autour d'un ou de plusieurs types de tâches mathématiques identifiées, qui appellent la création de techniques mathématiques adaptées et justifiées par des technologies mathématiques développées dans le cadre d'une théorie mathématique. Ainsi, l'une des tâches essentielles des enseignants consiste à déterminer, à partir des indications fournies par les programmes officiels et les manuels, les organisations mathématiques à étudier, en précisant pour chacune d'elle, son contenu précis, la base des types de tâches mathématiques qu'elle contient, ainsi que le degré de développement à donner aux composantes technique, technologique et théorique.

En fait, l'analyse des séances, en termes d'OM, nous permettra dans un premier temps de décrire la séance en lien avec les différentes tâches, et de voir aussi quelle est la différence entre une OM visée par un enseignant et l'OM qu'il met en place dans une séance. Elle peut aussi nous permettre de donner des éléments de réponse aux questionnements suivants :

Quels sont les apprentissages visés par la séance ?

Quelle est la place du **NAG** dans ces apprentissages ?

Nous utiliserons le filtre du numérique pour caractériser et repérer l'OM qui se développe dans les séances observées. Les questions qui guident notre analyse des pratiques des enseignants sont les suivantes :

Comment les enseignants utilisent-ils et font-ils travailler leurs élèves sur le **NAG** dans l'EMS ? Comment caractériser le **NAG** associé aux pratiques (explicites ou implicites) des enseignants dans une institution donnée ?

Pour apporter des éléments de réponse à ces questions en s'appuyant sur le filtre du numérique, de nouvelles questions, d'ordre méthodologique sur la description des pratiques enseignantes, se posent :

Comment décrire les composants et la structure des organisations didactiques au niveau du **NAG** ? Quels sont les éléments de la dynamique de ces organisations mathématiques qui appartiennent au **NAG** ?

Dans nos analyses nous essaierons de repérer le **NAG**, non seulement à travers les différentes tâches mais aussi ce que Bronner (2007) nomme les dynamiques intra et inter-domaines :

« Un domaine de savoir, même si nous le regardons du point de vue du curriculum, doit pour se développer lors de sa mise en œuvre effective, sous des dispositifs et organisations didactiques, s'appuyer sur des dynamiques, moteurs de son évolution à un niveau d'enseignement. Une de ses dynamiques a été théorisée par Douady (1984) sous la forme de jeux de cadres, comme celle des interrelations entre les divers domaines mathématiques. Mais nous pouvons avec Chevallard (2002b) mettre en avant l'intérêt de telles dynamiques à d'autres niveaux d'organisation des savoirs comme celui des secteurs d'enseignement. »
(p.25.)

13.2.3 Analyse de l'organisation didactique

Après la description de l'organisation mathématique, nous nous occupons d'une autre question : Que peut faire un enseignant afin de diriger – une OM - l'étude d'un objet mathématique dans une classe ? En fait, nous analyserons comment un enseignant dirige - l'étude d'un objet mathématique – la reconstruction d'une OM, et comment dans cette – OD – l'enseignant utilise le **NAG**.

Chevallard (1999) signale que le système des tâches professorales laisse aussi apparaître un composant relatif à la gestion de leur environnement : l'organisation didactique pour les tâches d'aide à l'étude et à la direction d'étude dont l'accomplissement est appelé pour la mise en œuvre de techniques didactiques déterminées. Cette composante correspond à des questions relatives aux gestes professionnels de l'enseignant au sens de Bronner & Larguier (2004).

L'organisation didactique renvoie à la reconstruction ou à la transposition des OM dans la classe. Pour Chevallard (1997) quel que soit le cheminement suivi, il arrive forcément un moment où tel ou tel geste didactique devra être accompli. Ces moments didactiques sont d'abord une réalité organique, avant d'être une réalité chronologique. Bien entendu une saine gestion de l'étude exige que chacun des moments didactiques se réalise au bon moment. En considérant qu'un moment de l'étude se réalise généralement en plusieurs fois, Chevallard (1997) distingue les différents moments suivants :

- Le moment de la première rencontre avec l'organisation mathématique étudiée ;
- Le moment de l'exploration du type de tâches et de l'élaboration d'une technique ;
- Le moment de l'élaboration technologico-théorique relative à une technique ;
- Le moment du travail de la technique ;
- Le moment de l'institutionnalisation ;
- Le moment de l'évaluation.

A partir de cette modélisation des séances, nous analyserons comment les enseignants construisent l'OD et quel est le « poids » du **NAG** sur la détermination de tel OD. A travers cette analyse nous essaierons de caractériser les rapports personnels des enseignants, observés au **NAG**.

Avant d'approfondir l'analyse de nos protocoles d'observations, selon la méthodologie précédente, nous commençons par décrire d'une manière globale *le style* des enseignants concernés.

CHAPITRE D3 : POUR DECRIRE LES PRATIQUES

14 Le style didactique et le discours

Pour décrire les pratiques des enseignants, nous avons été amenés à considérer les actions régulières individuelles, dans la pratique de chaque enseignant observé, ce que Clot (2000) désigne par « style d'enseignant » et ce que disent (le discours) les enseignants de mathématiques en classe, que Chiocca (1996) désigne par « discours d'accompagnement ».

14.1 Le style

Entre autres acceptions, le « style » est la « manière particulière d'exprimer sa pensée, ses émotions, ses sentiments, ... » (Larousse, 2004). Cette manière personnelle d'agir, de se comporter, peut par extension être considérée comme un « style de vie », un « style d'action ». Ceci nous amène à considérer aussi le « style d'enseignement », le « style de l'enseignant ».

En science de l'éducation, depuis les célèbres expériences de Lewin, Lippit et White²⁰ sur les styles de commandement, ce concept est relativement familier. Le style se rapporte à la manière personnelle d'établir la relation avec les élèves, de gérer une classe ou un groupe d'apprentissage, en relation avec des méthodes ou des techniques mises en œuvre. Plusieurs recherches ont été consacrées à l'étude du style et leurs différentes dimensions, entre autres nous pouvons citer celles de Witkin, Kolb, Scott, Dupont, Altet, Therer, Willemart, Cahay, Honorez, Monfort, Remy, Therer, etc. Une revue, même sommaire, de ces travaux dépasse le cadre de cette partie de notre travail. Donc nous relevons simplement quelques indications générales :

Une des caractéristiques de l'enseignant efficace est la capacité de varier son style et ses stratégies ;

Le concept de style d'enseignement s'avère utile à la compréhension et à l'explication du processus enseignement-apprentissage ;

Il n'existe pas un style idéal d'enseignement qu'il faudrait s'efforcer de maîtriser, mais bien des styles relativement opportuns en fonction de diverses variables individuelles et institutionnelles.

Dans nos analyses, le concept de « style » est important. Pour éviter toute équivoque dans sa définition - méthodes, systèmes, techniques, attitudes, habilités, etc. - nous nous en tiendrons aux définitions suivantes :

²⁰ Lewin, Lippit et White : Ces expériences princeps (1939) sont décrites et commentées dans la plupart des ouvrages consacrés à la dynamique de groupe. Pour la traduction des textes originaux, on peut consulter l'anthologie d'A. Levy, Psychologie sociale, textes fondamentaux, Paris, Dunod, 1965.

Ensemble de comportements didactiques coordonnés en vue de faciliter des apprentissages déterminés ;

Manière particulière d'organiser la relation enseignant-enseigné dans une situation d'apprentissage.

Dans le champ de la psychologie du travail, Yves Clot définit souvent le style professionnel, comme la distance au genre, autrement dit la manière dont on s'autorise à s'installer, un peu, à distance du genre professionnel, pour faire face aux situations que l'on rencontre :

« Si on considère, et c'est mon point de vue, que la compétence professionnelle réelle des personnes est justement dans le style de chaque personne, elle est dans la distance qu'une personne prend par rapport à la prescription... On pourrait prendre une métaphore musicale en disant que la compétence requise c'est un peu la partition et la compétence réelle c'est l'interprétation individuelle que les personnes font de cette partition, de cette prescription... c'est-à-dire qu'il y a plusieurs bonnes interprétations d'une même prescription. » (Clot, 1999, p.37)

Un enseignant de mathématique travaille en classe avec sa personnalité et ses convictions. Derrière les activités que l'enseignant propose aux élèves, il y a des choix que pose l'enseignant sur le plan des exemples, sur le plan de sa conception de l'apprentissage, sur le plan de son style d'enseignement privilégié, sur le plan de préférences personnelles. Ces choix vont, en quelque sorte, répondre aux besoins de sa façon de faire, d'exécuter une tâche, une activité – son style.

Sachant que chaque enseignant a un style, nous considérerons dans nos analyses les différents styles des enseignants. En fait, le style de l'enseignant constitue l'ensemble de ses manières de faire. Il y a d'autres éléments comme par exemple, les pensées, les sentiments, la personnalité, etc. qui vont aussi participer à la construction du style des enseignants. Cependant, dans notre travail, nous aborderons les styles en tant que styles d'enseignement. C'est-à-dire, nous ne considérerons pas ces derniers éléments, nous nous centrerons dans les styles en tant que styles des enseignants de mathématiques.

14.1.1 Style didactique

En fait, en considérant le style des enseignants, nous n'avons pas besoin de savoir quelles sont leurs caractéristiques. Ce que nous considérerons dans ces styles, ce sont les choix des modalités didactiques, les stratégies, la façon dont les enseignants gèrent les séances, les méthodes mises en œuvre par chacun : le style didactique. C'est le champ des variables décisionnelles prises par l'enseignant dans l'organisation de ses actions et des conditions d'apprentissage. Donc le style didactique fait référence aux modalités stratégiques mises en œuvre par le maître dans les séances. Dans toutes les séances, le style est accompagné par le discours (échanges verbaux entre l'enseignant et les élèves) des enseignants. Pour cela, nous utiliserons aussi la combinaison de ces deux éléments pour interpréter les pratiques des professeurs.

14.2 Le discours

Cette thèse présente les observations, essentiellement, de deux enseignants de mathématiques pendant des séances ordinaires.

Comme la majorité des travaux de didactique des mathématiques qui portent sur l'enseignant- plus précisément, ceux qui portent sur les pratiques des enseignants - notre travail a, au minimum, pour but, une mise en perspective éventuelle de certains caractères des pratiques et de certaines modalités d'utilisation du **NAG**, par deux enseignants et leurs élèves, à travers des activités ordinaires.

Les activités en mathématique destinées aux élèves sont un facteur de leur apprentissage et dépendent, en partie, du professeur, car c'est le professeur qui choisit les tâches qu'il propose aux élèves et la forme de l'exécution de ces tâches. Ces choix - de la tâche, de l'accompagnement, etc. - font partie de la pratique d'un enseignant et recouvrent tout ce qu'il met en œuvre avant, pendant et après la classe. En fait, analyser l'activité d'un enseignant de mathématiques, c'est essayer de comprendre ce qui compose son discours et les liens de ce discours avec l'apprentissage. Autrement dit, de décrire et d'étudier les tâches que le professeur propose à ses élèves et ce qu'il dit pendant l'accomplissement de ces tâches :

« Un savoir est d'abord un discours permettant de justifier, de produire, de rendre intelligibles des techniques et pas seulement ce que la culture nous donne à voir sous l'étiquette « savoir ». Ainsi la praxis réfère-t-elle à la pratique, au savoir-faire en quelque sorte, tandis que le logos fait référence à la théorie, aux discours qui décrivent, légitiment, expliquent la praxis. » (Artaud, Bosch, Wozniak all 2008, p.3)

Les travaux de Chiocca (1996), montrent que ce que disent les enseignants de mathématiques en classe - le discours d'accompagnement - est totalement variable d'un enseignant à l'autre et pour un même enseignant. Elle appelle « discours d'accompagnement », le discours d'un enseignant de mathématique qui complète le discours strictement mathématique. Autrement dit : lorsqu'une phrase ou un morceau de phrase contient des mots mathématiques et des mots qui ne le sont pas, elle est classée en discours d'accompagnement :

« Jeremy, refaites vos calculs, parce qu'on a eu un résultat différent dans plusieurs autres calculatrices tout à l'heure. Vous devez vous être trompé quelque part ! » (Protocole lycée séance-4, ligne 9.).

« Et vous faites une droite graduée. Sur une droite graduée, la seule chose à laquelle il faut faire attention quand même, tout le monde écoute, c'est que cette longueur doit être la même que celle sur votre cahier. Ca n'est pas n'importe laquelle, il faut que ça soit la même. » (Protocole lycée séance-4, ligne 76.).

Ces deux passages sont loin de pouvoir être considérés comme représentatifs d'un discours strictement mathématique. Ils sont donc des représentations du discours d'accompagnement. Le premier passage pourrait même être considéré comme un discours non mathématique, au cas où nous l'analyserions sans considérer notre protocole, vu qu'il présente seulement les substantifs « calculs », « résultat » et « calculatrices » qui peuvent être considérés comme des mots mathématiques. Dans le second passage, la présence de « droite graduée » et du substantif « longueur », conjointement avec le protocole, aident à renforcer le caractère mathématique du discours.

« Il a $1.x^{24}$. Ca, ça va ! C'est pareil que nous. Donc lui, en fait, à la place de « 1 E 24 », il a ça comme affichage. (Protocole lycée séance-4, linge 19.)

« Donc, ils sont à égale distance. Vous notez (ce petit dessin, avec donc « a » : c'est ce nombre pas au carré, c'est le nombre sans le carré. Ok ! » (Protocole lycée séance-4, ligne 75.)

Ces deux passages sont plus représentatifs d'un discours d'accompagnement que les précédents, car les mots mathématiques y sont plus présents que dans les derniers.

Chiocca regroupe les contenus des discours d'accompagnement des enseignants de mathématiques selon trois catégories qui correspondent aux fonctions supposées de ces discours : la fonction de communication, la fonction de structuration et d'étiquetage et la fonction de réflexion. Les passages de phrases sont classés en fonction de l'intentionnalité de l'enseignant que le chercheur interprète dans la phrase.

La fonction de communication correspond au discours de l'enseignant ayant l'intention de faire écouter les élèves, de les intéresser. Il ne s'agit pas de faire taire les élèves, mais au contraire de faciliter leur écoute au point qu'ils entendent le discours mathématique tenu. A travers cette fonction, « l'enseignant cherche à faciliter la transmission des connaissances, davantage, par des moyens langagiers que par le recours direct au contenu même de ce qui est en jeu. ». Selon Chiocca, la fonction de communication, très spécifique de l'oral, est peu susceptible d'être préparée, écrite à l'avance puisqu'elle dépend du déroulement toujours imprévu de la classe. Elle n'apporte pas directement des informations mathématiques aux élèves. Cependant elle contribue à une bonne réception du discours mathématique.

La fonction de structuration et d'étiquetage correspond au discours de l'enseignant ayant l'intention de "faire retenir" ou "faire apprendre". Autrement dit, l'enseignant utilise cette fonction pour aider les élèves à suivre le discours, à s'y reconnaître, à retenir quelques éléments. Selon Chiocca, avec cette fonction, le professeur tente de faire mémoriser aux élèves des éléments de contenus ou de méthodes. Il cherche ainsi à faciliter la transmission des connaissances en mettant des titres qui indiquent des places, en structurant le texte. Cette fonction rassemble « tout ce qui, dans le discours, fournit des points de repère non mathématiques liés aux contenus mathématiques et donnés sans argumentation. » Chiocca considère que l'enseignant a, à sa disposition, divers points de repère et que, de façon générale, les discours ayant une fonction de structuration et d'étiquetage vont être utilisés par tous les enseignants. Ces discours peuvent précéder ou suivre les mathématiques concernées par ces discours. Les messages des discours de structuration et d'étiquetage sont en partie spécifiques à l'oral. Ils n'apportent pas de renseignements mathématiques de manière directe et sont très contextualisés et plus relatifs à la présentation et à l'organisation des contenus eux-mêmes.

Dans les travaux de Chiocca, la fonction de réflexion est associée à l'intention de l'enseignant de "faire comprendre". Elle est utilisée pour aider la compréhension des élèves. L'enseignant utilise cette fonction pour faire aboutir à l'élaboration des contenus, pour essayer de faire participer les élèves et tenter de leur donner confiance, en utilisant leur discours, pour leur expliquer que ce n'est pas difficile, . Dans cette perspective, l'enseignant tente de faire dire aux élèves des choses, plutôt que de les dire lui-même, ce qui peut être le début d'une dévolution aux élèves du problème mathématique posé.

« Certains enseignants font parfois des commentaires sur les mathématiques, l'activité mathématique, l'apprentissage des mathématiques, ou encore présentent des éléments de méthodes comme tels. Ils tentent alors de créer chez les élèves une réflexion sur ce qu'ils sont en train de faire, ou sur ce qu'ils auront à faire. Ils introduisent une certaine généralité, et donc éventuellement une possibilité de réinvestissement.

[...] En effet, soit il s'agit de réflexion de type épistémologique [...] soit il s'agit d'indications de méthodes qui servent précisément à aider les élèves à reconnaître les connaissances qu'ils doivent mettre en œuvre dans divers types de situations [...] Ces messages sont très liés aux contenus mathématiques, à leur niveau, au fonctionnement des mathématiques. La teneur de ces messages est donc assez fixée. » (Chiocca, 1996, p. 3-4)

Dans cette perspective, nous analyserons les pratiques des enseignants en prenant en compte les discours des enseignants. En fait, dans nos analyses, nous examinerons

l'utilisation du **NAG** à partir de ces discours. Autrement dit, avec les catégories du discours proposé par Chiocca, nous classerons le type de discours qui est mis à jour lorsque l'enseignant et les élèves sont amenés à utiliser le **NAG**. Une intention mathématique dans un cadre de résolution - de transmission de connaissances, de faire retenir, de faire apprendre, de faire mémoriser, etc. - pourrait être un élément de variation du discours des enseignants. C'est pourquoi, nous allons considérer ces discours tenus dans des contextes de gestion des activités des élèves par l'enseignant. Le discours des enseignants étant extrêmement variable, il est naturel de se poser des questions sur les intentions de l'enseignant et sur l'impact de cette variabilité sur l'apprentissage des élèves.

A partir de notre ensemble d'observations dans les classes des deux enseignants en France, nous avons pu repérer les styles didactiques de ces deux cas. Considérant ces styles, il a été possible de caractériser les fonctions de discours (la fonction de communication, la fonction de structuration et d'étiquetage et la fonction de réflexion) que ces enseignants vont utiliser pour organiser des conditions d'apprentissage. En fait, le style et le discours sont deux outils qui interviennent sur les actions didactiques. Le discours est le composant des situations enseignement-apprentissage qui peut être modifié par l'enseignant, en fonction de ses intentions dans le contexte des séances. Ainsi, l'enseignant peut, par exemple, adapter un niveau de discours en recourant à un registre de la communication, pour tenter de faire mémoriser aux élèves des éléments de contenus ou de méthodes - fonction de structuration et d'étiquetage.

Le style et le discours des enseignants présentés, constituent des outils qui jouent des rôles importants dans la pratique des enseignants concernés. Pour cette raison, ils ont été pris en compte dans nos descriptions et analyse des pratiques. Maintenant que nous avons présenté notre cadre théorique et méthodologique, accompagné des outils qui les composent, nous pouvons présenter un résumé de notre grille qui va articuler ces différents outils pour nous aider à caractériser les rapports personnels des enseignants et des élèves au **NAG**.

14.3 La grille d'analyse

Analyser une pratique, c'est se pencher sur un événement déjà accompli, dans une perspective de séparer un tout, en ses différents éléments. Toute analyse nécessite donc l'explicitation d'une grille d'analyse qui permet cette opération. Le choix de cette grille a donc, également et forcément, un certain caractère normatif. Parce qu'elle est attachée à une description de la pratique enseignante, une grille d'analyse pertinente pour des analyses de ce type doit être centrée sur l'action, ou plutôt être capable de traduire la connaissance et la compréhension personnelles des acteurs d'une situation, en terme d'action. La grille mise au point précédemment et décrite succinctement ci-dessous a précisément été élaborée dans cette perspective : comment pouvoir caractériser les rapports personnels des enseignants à partir de leurs actions. Voici le tableau qui représente le résumé de notre grille :

Tableau 14 : Grille d'analyse des pratiques.

		ACTIVITE PROPOSEE			
F I L L E R E	Les praxéologies et le NAG	Domaine	Secteur	Thème	Sujet
			$[T_{mn}/\tau_{mn}/\theta_n/\Theta]$	$[T_{1i}/\tau_{1i}/\theta_1]$	$[T_1/\tau_1]$
	Organisation mathématique et le NAG	Visé	$[T/\tau/\theta/\Theta]...$		
		Mis en place	$[T/\tau/\theta/\Theta]...$		
D U N U M E R I Q U E	Style, organisation didactique et le NAG			Les discours et registres	Les domaines
		Moment de la première rencontre			
		Moment de l'exploration du type de tâches			
		Moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique			
		Moment du travail de la technique			
		Moment de l'institutionnalisation			
		Moment de l'évaluation			

Cette grille, d'utilisation simple, rapide et contextualisée pour l'enseignement des mathématiques dans la cadre du **NAG**, va nous permettre d'analyser les pratiques des enseignants. Elle permet d'étudier la place et le rôle du **NAG** dans ces pratiques, tout en considérant la variabilité des discours et les styles didactiques des enseignants concernés. Elle va aussi nous permettre de repérer des éléments pour caractériser les rapports personnels des enseignants au **NAG**.

CHAPITRE D4 : ANALYSE GÉNÉRALE AU COLLEGE

15 L'ensemble de séances

Dans cette partie nous allons analyser, de façon générale, l'ensemble des séances observées au collège. Notre intention a été de fournir une vue générale des séances au collège, ce qui nous a permis de pointer l'utilisation du **NAG** dans les séances et de choisir des séances avec lesquelles nous poursuivrons nos analyses plus fines. Nous présenterons aussi brièvement, dans la suite de cette partie, une analyse statistique de l'utilisation du **NAG** rencontrée dans cet ensemble.

15.1 Les séances au collège

Étant donné la grande diversité des séances observées, nous construisons un tableau pour les présenter. Nous avons organisé ce tableau en indiquant, pour chacune des séances, les principaux types de tâches que nous avons repérés pendant nos observations en classe. Cela correspond à une première entrée dans la modélisation des pratiques des enseignants. Nous utiliserons le tableau de l'ensemble des séances pour choisir celles avec lesquelles nous poursuivrons nos travaux d'analyse.

Nous rappelons que nous avons observé un total de 53 séances au collège en France, à propos desquelles nous avons le protocole de presque 70% d'entre elles, c'est-à-dire 37 séances. Dans le tableau ci-dessous, nous avons organisé ces séances en les notant « Séance - C_n » avec $n = 1, 2, \dots$, jusqu'à 37. Nous avons désigné par « t_{C_n} » avec $n = 1, 2, \dots, 91$, les principales tâches rencontrées à chaque séance au collège. Dans la suite de notre travail l'enseignant de la troisième en France sera appelé P1. Voici le tableau :

Table 20 : Liste des séances observées dans la classe de P1.

SÉANCE	DATE	DUREE	NOM CHAPITRE	PRINCIPALES TÂCHES
C01	12/09/2007	23 min.	Arithmétique	t _{C1}
C02	20/09/2007	36 min.	Arithmétique	t _{C2} ; t _{C3} ; t _{C4} ; t _{C5} ; t _{C6} ; t _{C7} ; t _{C8}
C03	24/09/2007	32 min.	Arithmétique	t _{C9} ; t _{C10} ; t _{C11} ; t _{C12}
C04	25/09/2007	53 min.	Arithmétique	t _{C13}
C05	26/09/2007	40 min.	Arithmétique	t _{C14} ; t _{C15}
C06	01/10/2007	50 min.	Arithmétique	t _{C16} ; t _{C17} ; t _{C18} ; t _{C19} ; t _{C20}
C07	03/10/2007	50 min.	Bilan géométrique	t _{C21} ; t _{C22}
C08	04/10/2007	46 min.	Bilan géométrique	t _{C23} ; t _{C24}

Analyses des pratiques
Analyse générale des séances au collège

C09	08/10/2007	43 min.	Bilan géométrique	t _{C25} ; t _{C26}
C10	10/10/2007	58 min.	Bilan géométrique	t _{C27} ; t _{C28} ; t _{C29}
C11	11/10/2007	45 min.	Géométrie plane et théorème de Thalès	t _{C30}
C12	15/10/2007	42 min.	Géométrie plane et théorème de Thalès	t _{C31}
C13	16/10/2007	40 min.	Géométrie plane et théorème de Thalès	t _{C32}
C14	17/10/2007	38 min.	Géométrie plane et théorème de Thalès	t _{C33}
C15	22/10/2007	34 min.	Géométrie plane et théorème de Thalès	t _{C34} ; t _{C35} ; t _{C36}
C16	23/10/2007	30 min.	Géométrie plane et théorème de Thalès	t _{C37}
C17	24/10/2007	38 min.	Géométrie plane et théorème de Thalès	t _{C38} ; t _{C39} ; t _{C40}
C18	25/10/2007	36 min.	Géométrie plane et théorème de Thalès Inéquations, équations et systèmes	t _{C41} ; t _{C42} ; t _{C43} ; t _{C44}
C19	21/11/2007	56 min.	Inéquations, équations et systèmes	t _{C45} ; t _{C46}
C20	26/11/2007	41min.	Inéquations, équations et systèmes	t _{C47} ; t _{C48}
C21	27/11/2007	53 min.	Inéquations, équations et systèmes	t _{C49} ; t _{C50} ; t _{C51} ; t _{C52}
C22	03/12/2007	39 min.	Inéquations, équations et systèmes	t _{C53} ; t _{C54}
C23	05/12/2007	41 min.	Inéquations, équations et systèmes	t _{C55} ; t _{C56}
C24	11/12/2007	50 min	Géométrie dans l'espace	t _{C57} ; t _{C58}
C25	12/12/2007	53 min.	Géométrie dans l'espace	t _{C59} ; t _{C60}
C26	17/12/2007	60 min.	Géométrie dans l'espace	t _{C61} ; t _{C62}
C27	18/12/2007	57 min.	Géométrie dans l'espace	t _{C63} ; t _{C64} ; t _{C65}
C28	19/12/2007	43 min.	Géométrie dans l'espace	t _{C66} ; t _{C67} ; t _{C68}
C29	20/12/2007	58 min.	Géométrie dans l'espace	t _{C69} ; t _{C70} ; t _{C71}
C30	16/01/2008	48 min.	Racines carrées	t _{C72} ; t _{C73} ; t _{C74} ; t _{C75}
C31	17/01/2008	55 min.	Racines carrées	t _{C76} ; t _{C77}
C32	21/01/2008	60 min.	Racines carrées	t _{C78} ; t _{C79}
C33	22/01/2008	60 min.	Proportionnalité	t _{C80} ; t _{C81}
C34	23/01/2008	58 min.	Proportionnalité	t _{C82} ; t _{C83} ; t _{C84}
C35	03/03/2008	46 min.	Calcul littéral	t _{C85} ; t _{C86}
C36	05/03/2008	53 min.	Calcul littéral	t _{C87} ; t _{C88} ; t _{C89}
C37	09/06/2008	57 min	Géométrie dans l'espace	t _{C90} ; t _{C91}

Dans le tableau ci-dessus, chaque séance apparaît accompagnée de la date où elle a été observée, du temps que cela a pris, du nom du chapitre qui a été étudié. Les noms des chapitres ont été donnés par P1. Chaque séance est aussi accompagnée par les principales tâches qui seront décrites à la suite.

15.1.1 Description des principales tâches

Nous décrivons, ci-dessous, les tâches qui apparaissent dans les tableaux précédents, liés au type de tâches :

- t_{C1} : Prouver qu'un énoncé est vrai ou faux – T_1 ;
 t_{C2} : Ecrire les multiples d'un nombre – T_2 ;
 t_{C3} : Trouver l'ensemble des diviseurs d'un nombre – T_3 ;
 t_{C4} : Trouver l'ensemble des diviseurs communs de deux nombres – T_4 ;
 t_{C5} : Calculer le PGCD de deux nombres – T_5 ;
 t_{C6} : Vérifier si un nombre est premier – T_6 ;
 t_{C7} : Simplifier une fraction pour la rendre irréductible – T_7 ;
 t_{C8} : Rendre une fraction irréductible – T_7 ;
 t_{C9} : Trouver l'ensemble des diviseurs d'un nombre – T_3 ;
 t_{C10} : Ecrire les multiples d'un nombre – T_2 ;
 t_{C11} : Trouver l'ensemble des diviseurs communs de deux nombres – T_4 ;
 t_{C12} : Calculer le PGCD de deux nombres – T_5 ;
 t_{C13} : Calculer le PGCD de deux nombres – T_5 ;
 t_{C14} : Calculer le PGCD de deux nombres – T_5 ;
 t_{C15} : Simplifier une fraction pour la rendre irréductible – T_7 ;
 t_{C16} : Calculer tous les diviseurs d'un nombre – T_3 ;
 t_{C17} : Trouver tous les diviseurs communs de deux nombres – T_4 ;
 t_{C18} : Calculer le PGCD de deux nombres – T_5 ;
 t_{C19} : Calculer le PGCD de trois nombres – T_5 ;
 t_{C20} : Résoudre les problèmes en utilisant les propriétés du PGCD – T_5 ;
 t_{C21} : Poser des questions relatives à une figure donnée – T_8 ;
 t_{C22} : Résoudre des questions relatives à une figure donnée – T_8 ;
 t_{C23} : Calculer la valeur de longueur des segments dans une figure donnée – T_9 ;
 t_{C24} : Démontrer une conjecture dans une figure donnée – T_8 ;
 t_{C25} : Appliquer le Théorème de Pythagore pour trouver les longueurs des segments dans une figure donnée – T_9 ;
 t_{C26} : Calculer des mesures des segments dans un triangle rectangle donné – T_9 ;
 t_{C27} : Calculer des longueurs de segments dans une figure donnée – T_9 ;
 t_{C28} : Identifier les triangles rectangles en utilisant le théorème de Pythagore – T_9 ;
 t_{C29} : Prouver des conjectures dans une construction où les données sont fournies – T_8 ;
 t_{C30} : Prouver des conjectures dans une construction où les données sont fournies – T_8 ;
 t_{C31} : Calculer des longueurs de segments et prouver des conjectures dans une construction où les données sont fournies – T_8 ;
 t_{C32} : Déduire des rapports entre les longueurs des segments d'une figure donnée – T_8 ;
 t_{C33} : Utiliser le théorème de Thalès pour calculer les longueurs des segments – T_9 ;
 t_{C34} : Déduire les valeurs des longueurs des segments dans une figure donnée – T_8 ;
 t_{C35} : Prouver qu'un triangle donné est rectangle – T_9 ;
 t_{C36} : Prouver que deux droites dans une figure donnée sont parallèles – T_8 ;
 t_{C37} : Calculer des longueurs des segments en utilisant le théorème de Thalès – T_9 ;
 t_{C38} : Calculer le PGCD de deux nombres en utilisant la méthode d'Euclide – T_{10} ;
 t_{C39} : Calculer des longueurs de segments et prouver des conjectures dans une figure donnée – T_8 ;
 t_{C40} : Résoudre des problèmes en utilisant le PGCD – T_5 ;
 t_{C41} : Prouver des conjectures dans une figure donnée – T_8 ;
 t_{C42} : Calculer les valeurs exactes des longueurs des segments dans une figure donnée – T_9 ;
 t_{C43} : Calculer les valeurs arrondies des longueurs des segments dans une figure donnée – T_{11} ;
 t_{C44} : Résoudre les équations du premier degré – T_{12} ;
 t_{C45} : Simplifier les expressions algébriques – T_{13} ;
 t_{C46} : Calculer la valeur numérique des expressions – T_{14} ;
 t_{C47} : Résoudre les équations à une inconnue – T_{12} ;
 t_{C48} : Représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation – T_{15} ;
 t_{C49} : Construire des figures – T_{16} ;
 t_{C50} : Placer des points dans des segments donnés – T_{17} ;

- t_{C51} : Placer des points dans des segments donnés en déduisant des conjectures – \mathbf{T}_{17} t_{C52} : Résoudre des équations – \mathbf{T}_{12} ;
 t_{C53} : Résoudre des équations à deux inconnues – \mathbf{T}_{18} ;
 t_{C54} : Résoudre des systèmes d'équations – \mathbf{T}_{19} ;
 t_{C55} : Résoudre des équations – \mathbf{T}_{12} ;
 t_{C56} : Résoudre des systèmes d'équations – \mathbf{T}_{19} ;
 t_{C57} : Calculer le volume d'un solide – \mathbf{T}_{20} ;
 t_{C58} : Résoudre des équations – \mathbf{T}_{12} ;
 t_{C59} : Calculer le volume d'un solide – \mathbf{T}_{20} ;
 t_{C60} : Calculer la surface et le volume d'un solide – \mathbf{T}_{21} ;
 t_{C61} : Calculer l'aire d'une figure – \mathbf{T}_{21} ;
 t_{C62} : Calculer le volume d'un solide – \mathbf{T}_{20} ;
 t_{C63} : Calculer le volume d'un solide – \mathbf{T}_{20} ;
 t_{C64} : Calculer la surface d'un solide – \mathbf{T}_{21} ;
 t_{C65} : Calculer la longueur des segments – \mathbf{T}_8 ;
 t_{C66} : Calculer la surface d'un solide – \mathbf{T}_{21} ;
 t_{C67} : Calculer la longueur des segments – \mathbf{T}_8 ;
 t_{C68} : Calculer le volume d'un solide – \mathbf{T}_{20} ;
 t_{C69} : Calculer le volume d'un solide – \mathbf{T}_{20} ;
 t_{C70} : Calculer la surface d'un solide – \mathbf{T}_{21} ;
 t_{C71} : Calculer la longueur des segments – \mathbf{T}_8 ;
 t_{C72} : Calculer le volume d'un solide – \mathbf{T}_{20} ;
 t_{C73} : Calculer la longueur des segments – \mathbf{T}_8 ;
 t_{C74} : Démontrer des conjectures dans un triangle donné – \mathbf{T}_9 ;
 t_{C75} : Dessiner des figures en vraie grandeur – \mathbf{T}_{16} ;
 t_{C76} : Calculer les racines carrées des nombres – \mathbf{T}_{22} ;
 t_{C77} : Ecrire une expression numérique sous une forme donnée – \mathbf{T}_{23} ;
 t_{C78} : Calculer des expressions numériques – \mathbf{T}_{14} ;
 t_{C79} : Utiliser les données d'une figure pour prouver des conjectures – \mathbf{T}_9 ;
 t_{C80} : Développer des expressions algébriques – \mathbf{T}_{24} ;
 t_{C81} : Réduire des expressions algébriques – \mathbf{T}_{18} ;
 t_{C82} : Résoudre des problèmes sur pourcentage –
 t_{C83} : Augmenter en pourcentage une valeur – \mathbf{T}_{25} ;
 t_{C84} : Diminuer en pourcentage une valeur – \mathbf{T}_{25} ;
 t_{C85} : Réduire des expressions algébriques – \mathbf{T}_{18} ;
 t_{C86} : Résoudre des équations – \mathbf{T}_{12} ;
 t_{C87} : Calculer les valeurs des remises – \mathbf{T}_{25} ;
 t_{C88} : Développer et résoudre des identités remarquables – \mathbf{T}_{24} ;
 t_{C89} : Développer et résoudre des expressions algébriques – \mathbf{T}_{24} ;
 t_{C90} : Construire une surface plane – \mathbf{T}_{16} ;
 t_{C91} : Construire des solides à partir d'une surface plane – \mathbf{T}_{26} ; \mathbf{T}_{25}

15.2 Les principaux types de tâches

La description des tâches citées précédemment a pour but de préciser les principales tâches qui apparaissent dans chaque séance, mais aussi de voir la progression de ces tâches et comment ces tâches se présentent chronologiquement les unes après les autres. Avec une telle description, il a été possible de classer ces tâches de la façon suivante :

Tableau 15: Les types de tâches et leurs nombre d'apparitions au collège.

TYPE TACHE T	DESCRIPTION	NOMBRE APPARITION	%EN RELATION AU NOMBRE DE T
T ₁	Prouver qu'un énoncé est vrai ou faux	1	1,1
T ₂	Ecrire les multiples d'un nombre	2	2,2
T ₃	Trouver l'ensemble des diviseurs d'un nombre	3	3,3
T ₄	Trouver l'ensemble de diviseurs communs de deux nombres	3	3,3
T ₅	Calculer le PGCD des nombres	8	8,8
T ₆	Vérifier si un nombre est premier	1	1,1
T ₇	Simplifier une fraction pour la rendre irréductible	3	3,3
T ₈	Démontrer des conjectures dans une figure donnée.	15	16,5
T ₉	Calculer des mesures dans une conjecture donnée.	11	12,1
T ₁₀	Calculer le PGCD de deux nombres en utilisant la méthode d'Euclide	1	1,1
T ₁₁	Calculer les valeurs arrondies des longueurs des segments dans une figure donnée	1	1,1
T ₁₂	Résoudre des équations	6	6,6
T ₁₃	Simplifier les expressions algébriques	1	1,1
T ₁₄	Calculer la valeur numérique des expressions	2	2,2
T ₁₅	Représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation	1	1,1
T ₁₆	Construire des figures	3	3,3
T ₁₇	Placer des points dans des segments donnés	2	2,2

T ₁₈	Résoudre des équations à deux inconnues	3	3,3
T ₁₉	Résoudre les systèmes d'équations	2	2,2
T ₂₀	Calculer le volume d'un solide	7	7,7
T ₂₁	Calculer la surface d'un solide	5	5,5
T ₂₂	Calculer les racines carrées des nombres	1	1,1
T ₂₃	Ecrire une expression numérique sous une forme donnée	1	1,1
T ₂₄	Développer des expressions algébriques	3	3,3
T ₂₅	Résoudre des problèmes sur pourcentage	4	4,4
T ₂₆	Construire des solides à partir d'une surface plane	1	1,1

Dans le tableau précédent, nous avons présenté les 26 types de tâches, aussi que la quantité d'apparition de ces types de tâches par rapport au nombre total de tâches repérées. Les types de tâches T₅;T₈;T₉;T₁₂;T₂₀;T₂₁;T₂₅ sont celles qui apparaissent le plus souvent parmi les 26 types. Les types de tâches T₈; T₉; T₁₂; T₁₆; T₁₇; T₂₀; T₂₁ T₂₆ sont, selon notre analyse institutionnelle, fortement potentiels à une utilisation du **NAG**. Pour cette raison ces types de tâches vont jouer des rôles décisifs dans nos choix de séances qui seront faits, et avec lesquelles nous poursuivrons nos analyses plus fines à la suite.

Les types de tâches ainsi présentés font partie des activités développées dans la classe de P1. De ce fait, ils participent aux praxéologies mathématiques d'activités que P1 développe avec ses élèves. Autrement dit, ces types de tâches vont apparaître, au fur et à mesure, dans les séances, à travers le style didactique que dirige P1 dans sa pratique.

L'ensemble des tâches que nous avons présentées, est constitué à travers trente sept séances dans une classe de troisième en France. Chaque séance est accompagnée des principaux types de tâches développées dans celle-ci. A travers nos outils de recueil de données, nous avons repéré un certain nombre de types de tâches qui semblent avoir joué des rôles assez importants dans la séance, soit par la relation qu'ils entretiennent directement avec le chapitre étudié, soit par les liens de ces tâches avec d'autres objets mathématiques. Cela ne veut cependant pas dire que ces tâches sont les seules à apparaître pendant toute la séance : une présentation plus précise sera faite dans l'analyse des séances choisies lors de la poursuite de nos analyses.

A travers une analyse générale des protocoles des trente sept séances observées dans cette classe de troisième, nous avons pu repérer le style didactique de P1, catégoriser les séances dans cet ensemble et mettre en évidence certains points par rapport à l'utilisation du **NAG** dans ces séances.

15.3 L'ensemble de séances et un style didactique

15.3.1 Le style didactique de P1

A travers une analyse générale de protocoles des séances menées par P1 dans cette classe, nous pouvons repérer des régularités dans ses choix sur plusieurs plans. Ces choix nous ont permis de définir ce que nous appellerons le style de P1, que nous présenterons dans le paragraphe suivant.

De façon générale, les séances dirigées par P1 en troisième, commencent par une mise en situation des élèves. P1 essaye, avant le début de chaque séance, de les confronter à une situation problématique. Après une rapide discussion générale avec les élèves, il examine certaines spécificités de l'objet mathématique en question. P1 utilise cet objet mathématique pour résoudre telle problématique. A partir de là, il commence d'abord à définir les objets mathématiques puis, petit à petit, présente toutes les propriétés des objets que la classe doit acquérir. Il termine, quelquefois, par une feuille de résumé où il demande aux élèves de noter, dans les cahiers de cours, toutes les définitions des objets mathématiques étudiés, leurs propriétés, illustrées par des exemples comme dans un cours formel.

Ensuite, P1 démarre un travail sur des tâches d'application des notions acquises, en commençant par les notions principales, en relation avec le chapitre étudié et il poursuit, avec l'application des principales propriétés consignées dans la feuille de résumé ou dans le cahier de cours. Au cours de ce premier temps, P1 laisse aux élèves un moment pour résoudre ces tâches, seuls. Dans un deuxième temps, il commence une phase de correction, au cours de laquelle il va résoudre la série d'exercices d'application avec les élèves.

15.3.1.1 La progression et le cahier de textes

L'un des points qui nous intéressait depuis le début de nos observations était l'ordre dans lequel les connaissances définies par le programme officiel seraient abordées et découvertes dans la classe de P1, sachant que ces connaissances définies par le programme de troisième, seraient bien entendu vues dans leur ensemble au cours de l'année en fonction du style de P1 et de sa classe. Nous avons interrogé P1 sur l'organisation de ses leçons. Il nous a indiqué, ce qu'il a appelé, " la progression ", qu'il pense être la plus appropriée pour cette classe en 2007-2008. Il nous a dit que cette progression évoluait chaque année, puisque chaque nouvelle expérience amène de nouvelles idées pour faciliter l'apprentissage et la mise en pratique des notions du programme.

P1 nous a dit que, avec une telle progression, il avait l'intention de couvrir, de façon équilibrée, la totalité du programme en termes de contenus et d'objectifs. Cette progression élaborée en début d'année est organisée sur environ vingt-quatre semaines, dont nous en avons observé une quinzaine.

Dans la progression de P1, nous ne trouvons ni les finalités, ni les objectifs de l'enseignement des mathématiques pour chacune des séances que nous avons observées. Nous y trouvons une répartition équilibrée des différents champs : numérique, algébrique, statistique et géométrique. Cette répartition est faite à travers les noms donnés par cet enseignant aux différents chapitres de sa progression : rationalité, arithmétique, bilan géométrique, géométrie plane et théorème de Thalès, inéquations, équations et systèmes,

géométrie dans l'espace, racines carrées, proportionnalité, calcul littéral, translation – vecteur – rotation, statistiques, fonctions linéaires et affines, vecteurs et coordonnées, trigonométrie – angles inscrits. Voici la progression de P1, configurée aussi dans l'annexe 15, et un extrait du cahier de textes de cette classe :

DATE	POUR LE	Contenu
23/01		Substitution Equations Produits
24/01		23.02 p.22
25/01		23.03 p.24
26/01		23.04 p.24
27/01		23.05 p.24
28/01		23.06 p.24
29/01		23.07 p.24
30/01		23.08 p.24
31/01		23.09 p.24
01/02		23.10 p.24
02/02		23.11 p.24
03/02		23.12 p.24
04/02		23.13 p.24
05/02		23.14 p.24
06/02		23.15 p.24
07/02		23.16 p.24
08/02		23.17 p.24
09/02		23.18 p.24
10/02		23.19 p.24
11/02		23.20 p.24
12/02		23.21 p.24
13/02		23.22 p.24
14/02		23.23 p.24
15/02		23.24 p.24
16/02		23.25 p.24
17/02		23.26 p.24
18/02		23.27 p.24
19/02		23.28 p.24
20/02		23.29 p.24
21/02		23.30 p.24
22/02		23.31 p.24
23/02		23.32 p.24
24/02		23.33 p.24
25/02		23.34 p.24
26/02		23.35 p.24
27/02		23.36 p.24
28/02		23.37 p.24
29/02		23.38 p.24
30/02		23.39 p.24
31/02		23.40 p.24

Figure 36 : Progression de P1.

PROGRESSION 2007-2008	
SEMAINES	CHAPITRES
1 (1)	RATIONALITE
2 (1)	01 - ARITHMETRIQUE
1 (1)	BILAN GEOMETRIE
3 (1)	02 - GEOMETRIE PLANE ET THEOREME DE THALES
2 (1)	03 - EQUATIONS, EQUATIONS ET SYSTEMES
1 (1)	04 - GEOMETRIE DANS L'ESPACE
2 (1)	05 - RACINES CARRÉES
1 (1)	06 - PROPORTIONNALITE
3 (1)	07 - CALCUL LITTÉRAL
2 (1)	09 - TRANSLATION - VECTEURS - ROTATION
1 (1)	10 - STATISTIQUES
3 (1)	11 - FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES
1 (1)	12 - VECTEURS ET COORDONNÉES
2 (1)	13 - TRIGONOMETRIE - ANGLES INSCRITS

Figure 37: Extrait du cahier de textes de P1.

L'enseignant n'a pas suivi systématiquement sa progression. Il nous a donc été difficile de savoir où il en était, les jours où nous avons observé des séances. Ce n'est que grâce aux annotations de P1 sur le cahier de textes que nous avons pu localiser le point où il en était. Comme nous n'avons pas dévoilé à P1 notre intérêt pour le NAG, c'était sa progression et bien évidemment ses annotations sur le cahier de textes²¹, qui nous ont guidés dans les choix des séances à observer, en connaissant la référence de la progression. C'est donc avec ces informations que nous avons pu choisir les séances à observer.

15.3.1.2 Déroulement général des séances

A partir de nos protocoles, nous avons remarqué, de façon générale, qu'à chaque séance, P1 avait bien défini ses objectifs qui répondaient précisément aux questions : « Que doivent acquérir les élèves en termes de connaissances, compétences, et méthodes mathématiques ? Que doivent-ils apprendre ? Que doivent-ils retenir ? ». Pendant la mise en situation - problème, P1 repère d'abord, les pré-requis nécessaires pour un bon déroulement de la séance et évalue la maîtrise des élèves. Il utilise ensuite le manuel et d'autres documents pour choisir les tâches traitées en classe. L'enseignant prévoit les annotations à porter dans le cahier de cours et sélectionne des tâches à donner aux élèves pour être travaillées en dehors de la classe. Ces tâches servent, en quelque sorte, d'analyse (a priori), lui permettant de mesurer les acquis et les difficultés des élèves. Pour cela,

²¹ Il s'agit d'un document utilisé par le professeur en tant que témoin du travail réalisé. Comme tel, ce document constate la régularité du travail effectué, le recours aux TIC, l'utilisation du matériel utilisé dans la classe. Il constitue un des éléments d'évaluation du travail du professeur. Les annotations du cahier de textes sont renseignées par P1, séance par séance, de manière précise et synthétique avec une présentation claire pour faciliter la lecture. Dans la rédaction du cahier de textes, P1 fait apparaître en termes de contenus, le travail effectué en classe et celui qui est donné à faire en dehors. Il note aussi les différentes tâches et évaluations (auto-évaluations, évaluations formatives et sommatives ; exercices intégrés, devoirs, interrogations écrites, etc.), leur fréquence (numérotation, dates de donnée, de remise, de restitution et de correction), les contenus, les supports et les références aux documents pédagogiques utilisés.

pendant les séances, P1 fait référence au contenu des interventions des élèves, à la nature de leurs réponses, aux questions posées et au degré de réussite des exercices abordés.

P1 fait aussi réfléchir ses élèves aux difficultés rencontrées, à leurs causes et définit, le cas échéant, les points sur lesquels il reviendra. Pendant les séances dans la classe, il y a des synthèses écrites par les élèves ou données en polycopies, dans lesquels P1 précise, explicitement, le statut des énoncés : définition, théorème, propriété, etc. Les résultats admis ne sont pas souvent justifiés par une démonstration. Le type de travail fait en classe n'est jamais indiqué par P1.

Les deux cahiers (cahier de cours et cahier d'exercices, où les élèves enregistrent, en général, les diverses activités menées en classe ou à la maison) font l'objet d'une attention et d'un suivi particuliers de la part de P1, afin qu'ils soient de véritables outils pour le travail personnel des élèves :

Tableau 16: Extrait de la séance-C26.

Lignes	Temps h:min:sec	Acteurs	Discours
5	00:00:12	P1	Allez, les cahiers de cours et d'exercice.
6	00:00:15	E21	Monsieur, je devais sortir chez moi, pour les prendre ainsi que le devoir, car je les ai oubliés, mais je n'y suis pas allé.
7	00:00:18	P1	OK, mais normalement, ils doivent être avec toi, non. Il ne fallait pas aller chez toi.

P1 vérifie les cahiers de cours de la classe après chaque séance et il précise, quand il y en a, quel travail les élèves doivent effectuer pour la séance suivante, les devoirs, les dates des contrôles, etc.

L'enseignant a proposé des devoirs en temps libre aux élèves. Il nous a indiqué que leurs objectifs étaient, entre autres : des travaux de recherche, des travaux de rédaction et des travaux de réactivation des connaissances antérieures. Nous pouvons donc signaler que les élèves ont alors eu la possibilité de se documenter, d'échanger avec leurs camarades ou de se faire aider. Ces travaux, de temps raisonnable, ont fait l'objet d'une correction détaillée par P1 et lui ont permis d'apporter des conseils individualisés aux élèves.

Nous remarquons aussi que P1 apporte une attention assez importante aux travaux des élèves, ce qui nous a fait penser aux questions suivantes : « Quelles sont ou quelles peuvent être les fonctions du travail demandé par P1 à ses élèves ? Servent-elles à la seule introduction de nouvelles connaissances ? Servent-elles à l'avancement des séances à travers l'emploi d'outils comme, par exemple, le **NAG**, ou doivent-elles servir aussi à la progression des élèves, ce qui suppose alors, qu'à côté de l'ensemble de tâches demandées aux élèves, il existe des tâches différenciées ? Est-ce qu'il y a, d'après le style de P1, des moments spécifiques dans les séances pour proposer ces tâches ? ». Ces questions vont aussi nous guider dans les choix des séances pour nos analyses plus fines par la suite.

15.3.1.3 Les écrits dans les cahiers des élèves

Dans cette classe, à travers nos protocoles et en suivant le style didactique de P1, il a été possible de classer les séances en plusieurs catégories, sur lesquelles nous reviendrons. Une fois que ces séances ont été catégorisées, il a été possible d'identifier, parmi ces catégories, une catégorie où il y avait une utilisation potentielle du **NAG**.

Les séances dirigées par P1, ses méthodes de travail, sont souvent développées et mises en évidence sur le tableau, à travers une situation - problème, au début de l'apprentissage, et elles figurent, dans le cahier de cours comme dans le cahier d'exercices. C'est pourquoi, dans ces cahiers, nous rencontrons assez fréquemment des textes intermédiaires entre le langage oral courant et le langage scientifique élaboré :

Tableau 17 : Extrait de la séance - C31.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours	Remarques
97	00:16:29	P1	Bon bien, avant de passer tout ça au cahier de cours, essayez de taper ça sur votre calculatrice graphique 3D, là, vous verrez qu'elle vous répondra « racine carrée de 3 sur 6 » et pas ce qu'on avait là.	<i>P1 écrit au tableau :</i> $\frac{\sqrt{3}}{6}$ <i>P1 écrit au tableau :</i> $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{72}} =$
98	00:16:38	E7	Donc, ça c'est le résultat commun monsieur ?	
99	00:16:39	P1	Oui, alors deux théorèmes, beaucoup de technique, pour le deuxième théorème, mais, en même temps, on utilise presque à la fin toute la technique qu'on a vu. Au lycée, c'est quelque chose que vous aurez à faire instinctivement, vous présentez un résultat toujours sous cette forme là.	

Nous remarquons aussi des exigences de rédaction et de solution des tâches avec assez de soins dans ces cahiers. Cela se traduit, par exemple, par :

Écrire les hypothèses dans un exercice de géométrie ;

Citer les théorèmes utilisés ;

Respecter le schéma déductif ; etc.

Nous allons utiliser ces cahiers, pour analyser le rapport personnel au **NAG** de quelques élèves.

15.4 Les phases et les catégories de séances

15.4.1 Les phases

Le déroulement de chaque séance observée dans la classe de P1 a été marqué par la présence, bien définie, d'une ou plusieurs phases. Ces phases que nous décrirons ci-dessous, se développent quasiment de la même manière en chaque séance.

Nous en avons repéré quatre types, différents, qui, généralement, composent les séances dans cette classe :

- Les phases magistrales – CU ;
- Les phases d'exercices – EX ;
- Les phases de correction – CO ;
- Les phases de remédiation –TG.

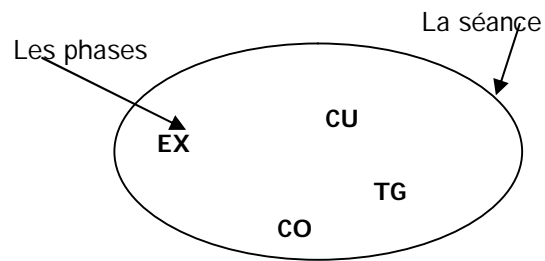


Figure 38 : La séance et leurs différentes phases.

Nous allons présenter l'ensemble des caractéristiques repérées, dans chacune de ces phases. C'est l'ensemble des caractéristiques que nous considérerons comme une définition de chacune de ces phases.

15.4.1.1 Les phases magistrales – CU

Pendant le déroulement des phases magistrales, P1 étudie une ou plusieurs notions nouvelles, ou poursuit l'étude d'une notion commencée lors d'une séance précédente. Les phases magistrales chez P1 se développent, en général, à partir d'une situation - problème, d'une sensibilisation aidant les élèves dans la découverte de la notion étudiée durant cette période. Pendant ces phases, P1 exige que les élèves soient actifs et il stimule leurs réflexions, par exemple, en ayant recours aux technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement.

Nous remarquons aussi que, pendant cette phase, P1 préconise des échanges avec la classe pour l'élaboration de la synthèse qui est ensuite écrite sur le cahier de cours, quand P1 ne donne pas cette synthèse sur une feuille. Il considère comme important de préciser clairement la nature des résultats obtenus, conjecturés, admis ou démontrés. Généralement, c'est dans ces phases que surviennent les moments de la première rencontre avec un type de tâches; l'exploration de celui-ci, et l'élaboration de l'environnement technologico-théorique. Ces moments sont mis à profit, par P1 et les élèves, pour acquérir de nouvelles connaissances.

15.4.1.2 Les phases d'exercices – EX

Appartiennent à cette phase, tous les épisodes de séances considérés comme un travail individuel sur des exercices progressifs et des exercices différenciés, selon les besoins de la classe identifiés par P1. Les travaux dans ces phases sont souvent développés en lien avec les synthèses collectives élaborées pendant les phases de cours. Nous considérons que les évaluations sont aussi représentatives de cette phase, tout en gardant quelques caractéristiques spécifiques à des évaluations. Ces phases sont marquées par la présence des moments de l'exploration du type de tâches et du travail de la technique. Nous remarquons que P1 laisse généralement les élèves travailler plus individuellement pendant ces périodes.

15.4.1.3 Les phases de correction – CO

Ces phases rassemblent tous les épisodes destinés à la correction des exercices proposés en classe ou pendant les évaluations. En considérant le style de P1, ces phases commencent, en général, par un compte-rendu des principales erreurs relevées, suivi d'une correction magistrale faite par P1 ou par des élèves. Dans ces phases, nous remarquons aussi que P1 exige que chaque élève soit actif, qu'il comprenne ses erreurs et apprenne à les éviter. Dans ce but, P1 demande quelquefois aux élèves de refaire un exercice mal réussi en tenant compte des annotations portées sur les synthèses et sur les copies, ou bien il propose un travail spécifique sur d'autres tâches pour atteindre ces objectifs. Dans cette phase, nous rencontrons les moments de l'institutionnalisation et de l'évaluation. Normalement, quand P1 voit que l'ensemble des exercices n'est guère efficace pour l'utilisation des objets mathématiques étudiés par certains élèves, il propose une aide individualisée ou par petits groupes.

15.4.1.4 Les phases de remédiation –TG

Ces phases dans les séances visent à permettre à P1 de mieux prendre en compte la diversité des élèves dans leurs rythmes et leurs modes d'apprentissage. Généralement, P1 ne destine pas ces phases à l'introduction d'objets mathématiques nouveaux. Il propose un travail autour des notions et des objets mathématiques déjà étudiés qui sont en voie d'être maîtrisés par les élèves. Ce travail peut même se faire en binômes, constitués en fonction de besoins repérés dans la classe. Dans ces phases, il y a un réinvestissement dans les moments de l'exploration du type de tâches, de l'élaboration de l'environnement technologico-théorique, du travail de la technique, de l'institutionnalisation. P1 utilise très rarement cette phase dans les séances que nous avons observées.

Aucune de ces phases n'était indiquée comme telle, ni dans la progression que P1 nous a fournie, ni dans les annotations du cahier de textes utilisé par P1 dans cette classe. Cette remarque montre qu'il n'y a pas de définition des phases, ni de catégorisation des séances de la part de P1.

A partir de nos premières analyses des pratiques de P1, nous avons noté qu'il a privilégié un certain ordre pour l'organisation des différentes phases dans une séance. Généralement, dès qu'il avait plusieurs phases, il a préféré commencer en suivant l'ordre : phase magistrale, phase d'exercice, phase de correction, phase de remédiation.

Nous n'avons pas observé de séance avec une seule phase, la plupart d'entre elles étant composées d'au moins deux phases.

Ce sont donc ces phases qui catégorisent chaque séance observée. Nous appelons - catégorie de séance - chacune d'entre elles qui peuvent être constituées à partir des différentes phases. Il peut y avoir des séances constituées par deux, trois ou même les quatre phases. Pour catégoriser les séances observées chez P1, nous avons considéré l'ordre dans lequel il a utilisé le plus souvent chaque phase. En général, l'enseignant ne destine pas toute une séance à une seule phase, même la phase de remédiation qui exige généralement plus de temps pour sa mise en forme.

Dans cette classe, P1 n'a eu qu'un seul cours par jour. Le temps étant limité, P1 n'a pas eu la possibilité de répéter des phases dans une même séance, car il n'avait pas suffisamment de temps.

15.4.2 Les catégories de séances

Dans chaque catégorie de séances que nous indiquons dans le tableau ci-dessous, P1 travaille avec son style didactique, et c'est d'ailleurs grâce à cela que nous avons pu catégoriser ses séances. Nous présentons les principales catégories de séances que nous avons repérées dans cette classe :

Tableau 18: Les catégories de séances chez P1.

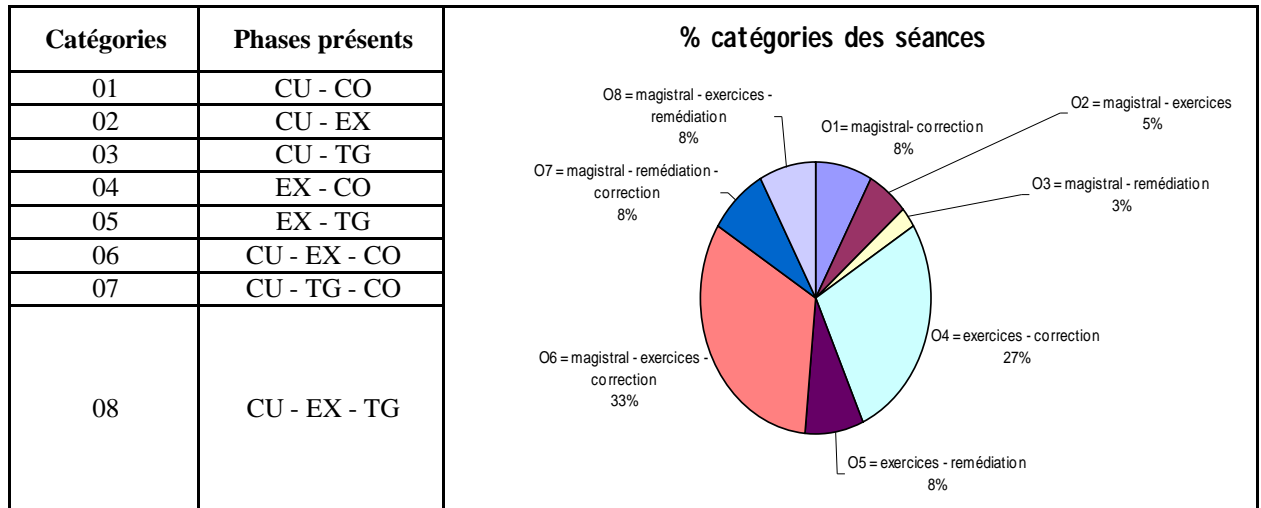


Figure 39: Pourcentage de catégories de séances.

En ce qui concerne les catégories de séances, nous repérons que sur 37 séances observées avec P1, celui-ci a consacré trois séances à chacune des catégories 01, 05, 07 et 08, soit 8% des séances pour chacune de ces catégories. La catégorie 02 représente 5% du total en deux séances. La 03, avec une seule séance, représente 3% du total. La catégorie 04, la deuxième la plus fréquente avec P1, totale dix séances, représente 27% du tout. En première position, les séances de la catégorie 06 représentent 33% du total, en douze séances.

Parmi les huit catégories de séances présentées, ce sont celles de la catégorie 06, que nous rencontrerons, probablement le plus souvent, les moments d'étude caractérisés par Chevallard, (1995) et que nous utiliserons pour faire nos analyses plus fines. Nous allons donc opter pour ces séances de la catégorie 06, pour la poursuite de nos analyses.

15.4.3 Utilisation potentielle du NAG par catégories de séances

Ces données présentent des informations sur les pourcentages des catégories de séances par rapport au total de toutes les séances. Elles servent, entre autres, à renforcer notre choix pour les séances de catégorie 06. Comme le montre l'analyse du tableau ci-dessous, il existe plus de possibilités de pouvoir décrire des praxéologies où le **NAG** est potentiellement présent, à partir de ces séances-ci, plutôt que d'autres :

Tableau 19 : % l'utilisation potentielle du NAG par catégorie

Catégorie	Total	L'utilisation potentielle du NAG	
		Quantité	%
01	3	1	33,3%
02	2	1	50%
03	1	0	0%
04	10	5	50%
05	3	1	33,3%
06	12	5	41,7%
07	3	2	66,7%
08	3	1	33,3%

Dans ce nouveau tableau, nous présentons l'utilisation potentielle du **NAG** dans chaque catégorie de séance. De cette manière, pour la catégorie 01, le total est de 33,3%. Pour la 02, 50% du total. La catégorie 03 ne présente pas d'utilisation potentielle pour l'utilisation du **NAG**, tandis que les 02 et 04 occupent la deuxième position la plus représentée. Cinq séances potentielles pour l'utilisation du **NAG** ont été prévues pour la catégorie 04, soit 50% du total. La catégorie 05 présente une seule utilisation potentielle, soit 33,3% du total. Cinq séances potentielles ont été prévues pour la catégorie 06 qui est la troisième la plus représentée, soit 41,7% du total des séances. La catégorie 07 présente deux utilisations potentielles, soit 66,7% du total. Pour la catégorie 08, une seule séance peut être potentielle, soit 33,3% de toutes les séances.

15.4.4 Les séances de catégorie 06

Nous allons utiliser la catégorisation des séances présentées précédemment, pour choisir celles qui nous conviennent le mieux pour mener des analyses plus fines, que nous présenterons par la suite. A travers nos analyses, nous avons montré que, parmi les huit catégories de séances présentées, les modalités 04 et 06 sont les plus fréquentes. Nous signalons aussi que ce sont dans les séances de catégorie 06, qu'il est le plus probable que nous rencontrions les moments d'étude caractérisés (Chevallard, 1995) que nous pourrions, ensuite, utiliser dans nos analyses plus approfondies.

Toutefois, il nous semble important de souligner qu'aucune de ces catégories de séances n'était indiquée comme telle, ni dans la progression que P1 nous a fournie, ni dans les annotations du cahier de textes utilisé par celui-ci dans cette classe. Nous voulons montrer, par cette remarque, qu'il n'y a pas de verrouillage ou de catégorisation de la part de P1. On considère que le style didactique de P1 joue un rôle considérable dans la catégorisation faite, car c'est ce style qui fait apparaître ces différentes catégories. En fait, à partir de nos premières analyses des pratiques de P1, nous avons noté la catégorisation des séances menées par cet enseignant, et ce sont les moments d'étude qui nous permettront d'affiner les phases des séances, pour pouvoir comprendre et analyser ce qui se passe dans chacune des phases que nous venons de présenter.

A travers une analyse générale des moments d'étude qui composent chaque phase des séances de catégorie 06, nous remarquons que le travail fait dans ces séances est assez divers : résolution d'exercices de sensibilisation ou de découverte d'une notion à étudier, demande aux élèves de la classe de résoudre des problèmes pour lesquels on leur a déjà proposé diverses techniques fondées sur des résultats théoriques relatifs à des notions déjà étudiées. En fait, le travail autour des séances de catégorie 06 est beaucoup plus associé à

des techniques faisant appel à des procédures de vérification de résultats, et c'est là que le **NAG** peut jouer un rôle important.

15.4.4.1 Un lieu pour une praxéologie plus complète pour le NAG

Les séances observées dans la classe de P1 font partie de huit types de catégories de séances. Cela nous amène à considérer les différentes praxéologies développées avec chacune de ces catégories, en les classant comme : praxéologies complètes ou incomplètes. L'approche de l'analyse des pratiques que nous avons adoptée, va mettre en évidence le statut du **NAG** dans le travail en classe. Nous allons utiliser les praxéologies pour pouvoir regarder plus finement la place et le rôle du **NAG**. Pour cette raison, nous avons opté pour les praxéologies les plus complètes, qui sont normalement présentes dans les séances de catégories du type 06.

En général, le travail autour des praxéologie de séance de catégorie 06, est pensé par P1, et par-là même, par les élèves, comme un travail fait en classe, très important et nécessaire pour faire étudier les mathématiques à tous les élèves. Sa signification aux yeux de tous est de servir à la progression de la classe. Le contrat didactique que l'élève noue autour de ce travail est piloté par P1, dans le cadre de la classe. Sa mise en œuvre est d'ordre collectif.

Selon l'environnement de la classe, il peut y avoir une transformation du contrat. Il peut s'agir d'une déformation (par exemple, les praxéologies de séance de catégorie 06 dans la salle informatique), ce peut être aussi une extension ou une réduction du contrat.

D'une façon générale, ce sont dans les séances de catégorie 06 que nous trouvons l'emploi le plus accentué du **NAG**, car les praxéologies dans ces catégories ne font pas faire d'économie dans le travail de P1, ni dans celui des élèves.

Dans cette perspective, nous remarquons que les praxéologies de séances de catégorie 06, sont des praxéologies assez complètes, sinon les plus complètes, de toutes celles que nous observons dans la classe de P1. Ce sont ces praxéologies qui vont permettre à P1 et à ses élèves de négocier le travail qui sera placé sous la responsabilité de chaque élève : le travail personnel. Cela peut expliquer l'importance que P1 attribue à ces praxéologies et au soin qu'il leur donne.

15.4.4.2 Le NAG dans les praxéologies de la catégorie 06

De façon générale, l'objectif de l'étude d'un thème dans une séance de catégorie 06 dans la classe de P1, était de permettre à tous les élèves de devenir autonomes dans la réalisation d'un type de tâche « T_C ». Il s'agissait d'acquérir des connaissances pour pouvoir résoudre des problèmes d'un type donné. Ces tâches, au départ problématiques pour la majorité des élèves, deviennent, petit à petit routinières pour eux, grâce aux situations organisées par P1, car elles permettent aux élèves de construire et d'automatiser des techniques pour réaliser ces tâches. Ces techniques sont fondées et justifiées par les savoirs théoriques enseignés sur le thème dans la séance.

L'étude d'un thème dans une séance de cours a souvent abouti à la construction par P1 et ses élèves d'une riche praxéologie liée à ce thème. Riche par la variété des éléments, cadres et registres qui le constituent, riche aussi par les interrelations entre ces éléments, cadres et registres, souvent utilisés par P1, mais quasiment jamais explicités. De ce fait,

l'élève a du mal à comprendre et à intégrer l'utilisation de ces interrelations dans l'activité qui lui a été demandé dans le cadre du **NAG**, pour qu'elles lui deviennent intelligibles. Les élèves restent sur une simple juxtaposition de l'utilisation du **NAG** faite par P1. Autrement dit, dans les diverses manières d'agir pour résoudre un problème donné, pour traiter une question posée ou une tâche, les élèves vont résoudre des tâches comme le fait P1, mais avec une très faible compréhension du rôle joué par le **NAG** dans la réalisation de cette tâche.

Dans ces praxéologies complexes autour d'un thème donné, P1 utilise le **NAG**, au fur et à mesure qu'il avance dans l'étude du thème, pour faire comprendre aux élèves les notions qu'ils sont en train d'étudier et la nature des résultats obtenus, conjecturés, admis ou démontrés pendant cette séance. Nous remarquons également l'utilisation du **NAG** dans les changements de sujets, de thèmes, de secteurs et de domaines d'étude, ou à l'intérieur des sujets, de thèmes, de secteurs et de domaines d'étude, par un élargissement des résultats théoriques, ou par l'introduction de nouvelles tâches.

15.4.4.3 Une utilisation implicite du NAG

La responsabilité de prévoir et d'organiser les activités correspondant à la classe, comme hors de la classe, incombe à P1. Ces activités portent en général sur les sujets d'étude qui figurent dans les programmes, mais également sur les tâches pour lesquelles les élèves peuvent acquérir des compétences et les techniques associées. Elles mettent les élèves en position de responsabilité face à des tâches déterminées par P1. Cependant, en ce qui concerne des tâches où P1 utilise le **NAG**, nous remarquons que les élèves acquièrent assez peu d'autonomie dans leurs travaux en classe, par rapport aux compétences que P1 exige d'eux. Car à la fin de l'étude d'un thème, nous constatons que la classe a du mal à faire face, à l'aide du savoir appris, à des situations dénuées d'intentions didactiques.

Bien que P1 ne dévoile pas aux élèves ses objectifs au début de chaque séance, ces derniers vont forcément apparaître au fur et à mesure, à travers des notions mathématiques pour lesquelles existent des définitions, des théorèmes, des propriétés etc. Cependant, les compétences qu'il souhaite développer chez ses élèves concernent la résolution d'exercices et de problèmes où intervient le **NAG**, mais la majorité des élèves ne réussissent pas à les acquérir, ni à les manier. Or de façon générale, un travail systématique à propos des exercices et des problèmes dans le cadre du **NAG**, n'est pas conduit de façon explicite dans la classe.

P1 propose des exercices et des problèmes en utilisant le **NAG**, mais il ne conduit aucune activité réflexive permettant aux élèves de repérer l'importance d'une telle utilisation dans ces familles de problèmes, car l'utilisation reste toujours implicite. De cette absence d'explicitation, nous remarquons que de nombreux élèves s'imaginent que les problèmes sont toujours posés et résolus dans un domaine donné et que les solutions doivent être cherchées dans le même domaine que le problème posé. Si par hasard un problème dans un domaine évoque fortement un autre domaine, les élèves essaient de se souvenir de la façon dont celui-ci avait été résolu par P1, mais ce souvenir est souvent vague et mêlé à d'autres. C'est sans doute que le travail sur les techniques de résolution des problèmes et des exercices n'est pas organisé de façon systématique. Il n'apparaît pas comme un travail indispensable et les élèves ne l'identifient pas comme un travail à part entière ayant une fonction essentielle dans la résolution des tâches ou des problèmes.

15.4.4.4 Le NAG dans les discours de P1 et des élèves

De façon générale, dans les séances, P1 intervient constamment et toujours d'une manière décisive : soit sur la forme (rappel des règles, lorsque celles-ci n'ont pas été respectées), soit sur le fond (demande de définition du concept clé, reformulation d'une idée importante, synthèse). P1 délègue une partie du rôle du développement du cours à des élèves animateurs en leur permettant d'intervenir, eux aussi, tantôt sur la forme, tantôt sur le fond et d'acquiescer ainsi un regard global. Ceci donne l'occasion, d'une part, à P1 de se distancier de la situation et d'autre part, aux élèves, de s'approcher de celle-ci et de devenir les garants de la qualité de la discussion. Et là, de façon évidente, les élèves ne font pas référence au **NAG**, même quand P1 le leur laisse entrevoir à travers les registres de différents domaines (un tracé, une expression algébrique, etc.). Plus loin, quand il va utiliser d'autres domaines, les élèves n'arrivent ni à voir, ni à expliciter de telles interrelations. Sur le fond, les élèves de ce niveau scolaire (troisième) savent très bien effectuer une même tâche dans plusieurs domaines différents, mais semblent avoir du mal à trouver les liens pour accéder à d'autres domaines quand une tâche est inscrite dans un domaine différent.

15.5 D'un bilan général vers les séances choisies

Nous venons de montrer, à travers une analyse générale des séances observées au collège en France, que les types de tâches et les catégories de séances jouent des rôles décisifs dans la pratique de P1 dans le cadre du **NAG**. Car le **NAG** est du contenu des OM, le **NAG** se repère par rapport à des problèmes, par rapport à des OM. Donc il est important, pour pouvoir étudier le **NAG**, de considérer tout d'abord les types de tâches avec lesquelles il entretient des rapports, où il vit. Il est important de considérer les types de tâches où il est possible de le rencontrer (le **NAG**), pour pouvoir ensuite étudier le statut d'une telle utilisation. Par rapport à la catégorisation des séances, elle nous a aidé à mieux choisir parmi l'ensemble des séances observées, celles où le **NAG** est rencontré, lié à des praxéologies qui donnent des possibilités de l'étudier.

Ces considérations faites permettent de mieux aborder et de comprendre le statut du **NAG** dans la pratique de P1 d'une part, et le rapport qui existe entre le **NAG** et P1 d'autre part. Nous avons donc examiné notre ensemble de séances au collège en considérant ces éléments (notre analyse générale) et nos principes méthodologiques, ce qui nous a aidé dans notre choix de séances, pour poursuivre nos analyses plus finement, comme le montre la figure suivante :

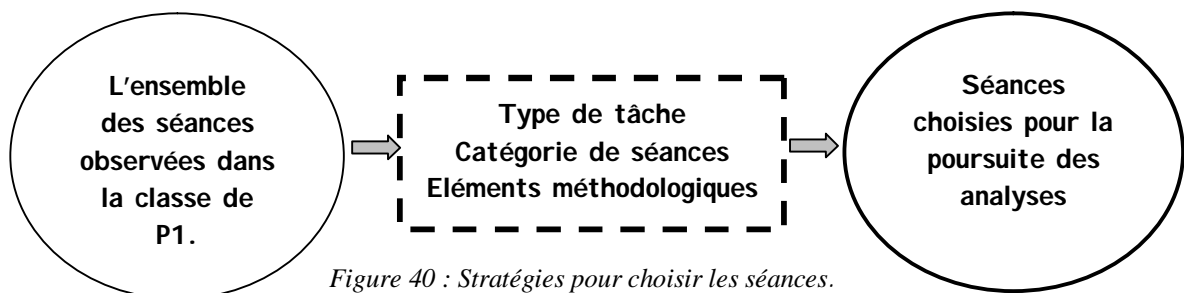


Figure 40 : Stratégies pour choisir les séances.

La figure ci-dessus résume les éléments dont nous avons tenu compte pour choisir les séances avec lesquelles nous continuerons les analyses. Pour éclairer ces choix, nous présenterons les principales étapes de ce processus.

15.5.1 Un bilan statistique

Les éléments statistiques que nous présenterons sont tous tirés de l'analyse générale à partir de l'ensemble des séances et tâches déjà présentées. Ils comprennent 37 séances, soit un total de 26 types principaux de tâches. En fait, nous ne ferons pas une analyse complète de toutes les séances. Une analyse générale a déjà été faite à travers les principales tâches et les catégories repérées. A partir de cette analyse, nous avons pu noter, tout d'abord, une utilisation potentielle, ensuite une utilisation effective du **NAG**. Voici le tableau que nous avons construit :

Tableau 20 : Utilisation potentielle et effective du **NAG** dans les catégories de séances.

SÉANCE	TYPES DE TÂCHES	CATEGORIE	NOM CHAPITRE	UTILISATION POTENTIELLE NAG	UTILISATION EFFECTIVE NAG
C01	T ₁	01	Arithmétique	NON	OUI
C02	T ₂ T ₃ T ₄ T ₅ T ₆ T ₇	04	Arithmétique	NON	NON
C03	T ₃ T ₂ T ₄ T ₅	04	Arithmétique	NON	NON
C04	T ₅	04	Arithmétique	NON	OUI
C05	T ₇ T ₅	06	Arithmétique	NON	OUI
C06	T ₃ T ₄ T ₅	05	Arithmétique	NON	NON
C07	T ₈	06	Bilan géométrique	OUI	OUI
C08	T ₈ T ₉	04	Bilan géométrique	OUI	NON
C09	T ₉	04	Bilan géométrique	OUI	OUI
C10	T ₈ T ₉	06	Bilan géométrique	OUI	OUI
C11	T ₈	04	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	OUI
C12	T ₈	05	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	OUI
C13	T ₈	04	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	OUI
C14	T ₉	02	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	OUI
C15	T ₈ T ₉	06	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	OUI
C16	T ₉	06	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	OUI
C17	T ₅ T ₈ T ₁₀	08	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	NON
C18	T ₈ T ₉ T ₁₁ T ₁₂	04	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	NON
C19	T ₁₃ T ₁₄	06	Inéquations, équations et systèmes	NON	NON
C20	T ₁₂ T ₁₅	05	Inéquations, équations et systèmes	OUI	NON
C21	T ₁₂ T ₁₆ T ₁₇	06	Inéquations, équations et systèmes	OUI	OUI
C22	T ₁₈ T ₁₉	06	Inéquations, équations et systèmes	NON	NON
C23	T ₁₂ T ₁₉	06	Inéquations, équations et systèmes	OUI	NON
C24	T ₁₂ T ₂₀	04	Géométrie dans l'espace	OUI	OUI
C25	T ₂₀ T ₂₁	01	Géométrie dans l'espace	OUI	OUI
C26	T ₂₀ T ₂₁	06	Géométrie dans l'espace	OUI	OUI
C27	T ₈ T ₂₀ T ₂₁	07	Géométrie dans l'espace	OUI	OUI
C28	T ₈ T ₂₀ T ₂₁	08	Géométrie dans l'espace	OUI	OUI
C29	T ₈ T ₂₀ T ₂₁	07	Géométrie dans l'espace	OUI	OUI
C30	T ₈ T ₉ T ₁₆ T ₂₀	08	Racines carrées	OUI	NON
C31	T ₂₂ T ₂₃	06	Racines carrées	NON	OUI
C32	T ₉ T ₁₄	04	Racines carrées	OUI	NON
C33	T ₁₈ T ₂₄	01	Proportionnalité	NON	NON
C34	T ₂₅	07	Proportionnalité	NON	OUI
C35	T ₁₂ T ₁₈	02	Calcul littéral	OUI	NON
C36	T ₂₅ T ₂₄	03	Calcul littéral	NON	OUI
C37	T ₁₆ T ₂₆	06	Géométrie dans l'espace	OUI	OUI

Ce tableau nous permet d'avancer quelques données statistiques concernant l'utilisation potentielle et effective du **NAG**. Pour cela nous nous rapporterons aux types de

tâches et aux catégories de séances. L'utilisation potentielle et effective du **NAG** présentée dans ce tableau va aussi servir de critère pour nos choix de séances, avec lesquelles nous allons effectuer des analyses plus fines. Nous présenterons ensuite des données statistiques par rapport à l'utilisation potentiel et effective du **NAG**.

15.5.1.1 L'utilisation potentielle du NAG

En nous appuyant sur notre analyse institutionnelle, avec les types et les catégories de séances relevés de notre analyse générale, nous avons pu prévoir une utilisation potentielle pour le **NAG** dans notre ensemble de séances. En fait, sans avoir fait une analyse très détaillée, nous nous sommes basés surtout sur les types de tâches présents dans chaque séance, pour pouvoir pointer une possible utilisation du **NAG** dans notre ensemble de séances, comme nous le représentons ci-dessous :

Utilisation potentielle du **NAG** dans les 37 séances

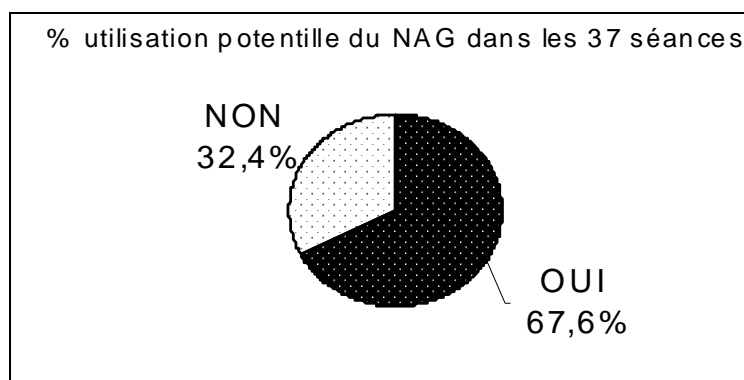


Figure 41 : L'utilisation potentielle du **NAG** en pourcentage.

Dans ce but, nous repérons, à travers cette analyse, que le **NAG** apparaît potentiellement dans 25 séances, c'est-à-dire, dans 67,6% du total des séances. Dans les 12 séances restantes, soit 32,4% du total, le **NAG** n'est pas présent.

15.5.1.2 D'une utilisation potentielle à une utilisation effective

L'analyse statistique présentée jusqu'ici, était une analyse potentielle du **NAG** dans les séances à partir d'une analyse - à priori - des principaux types de tâches que nous repérons. Autrement dit, (nous avons fait une analyse à priori des principaux types de tâches que nous repérons dans chaque séance, et à partir de cette analyse) nous en avons déduit l'utilisation potentielle du **NAG**. Cependant, après l'analyse - à posteriori - nous ne donnerons pas tous les éléments de notre travail, dans cette partie. Malgré tout, nous remarquons que le **NAG** a été utilisé dans des séances que nous n'avions pas prévues, alors qu'il n'est pas apparu dans quelques séances que nous avons retenues. Donc, c'est un fait que les résultats de nos nouvelles analyses pointent l'utilisation effective du **NAG**, que nous présenterons, mais sans donner tous les détails.

Nous signalons que dans la classe de P1, l'enseignement des mathématiques n'est pas limité au contenu des programmes de la discipline. Il s'inscrit dans une démarche

interdisciplinaire et s'intègre dans une politique éducative prenant en compte les axes prioritaires du projet académique et les spécificités du projet d'établissement. Donc c'est déjà quelques contraintes qui, avec d'autres, vont modifier l'utilisation potentielle du **NAG** par rapport à ce que nous avons prévu.

La figure ci-dessous a été établie pour mettre en évidence l'utilisation effective du **NAG**, à partir de notre analyse générale des types de tâches que nous avons repérés. Dans cette figure, nous présentons les séances où le **NAG** apparaît effectivement, cette utilisation effective peut être représentée par le graphique suivant :

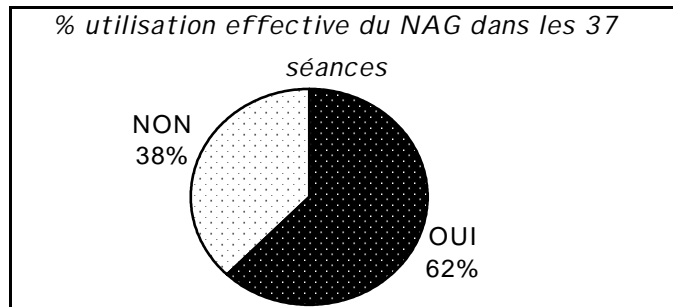


Figure 42 : Utilisation effective du **NAG** en pourcentage.

Concernant l'utilisation effective du **NAG**, nous repérons, à travers l'analyse faite jusqu'ici, que le **NAG** apparaît bien dans 23 séances, c'est-à-dire, dans 62,1% du total des séances. Dans les 14 séances restantes, soit 37,8%, du total, le **NAG** n'apparaît pas. Considérant les informations sur l'utilisation potentielle du **NAG**, nous constatons que, par rapport à cette utilisation, l'utilisation effective est passée de 67,6% à 62%. Il y a eu aussi des changements par rapport à l'utilisation du **NAG** dans chaque catégorie de séance, comme nous pouvons le voir à travers le tableau suivant :

Tableau 21 : L'utilisation effective du **NAG** par catégorie

Catégorie de séance	Total	Quantité NAG effective
01	3	2
02	2	1
03	1	1
04	10	5 (50%)
05	3	1
06	12	9 (75%)
07	3	3
08	3	1

La catégorie 01 présente le **NAG** dans deux séances (au lieu d'une), soit 66,7% du total des séances de cette catégorie. La 02 présente le **NAG** dans une seule séance (au lieu de deux), soit 50% du total. La 03 présente le **NAG** dans la seule séance qui existe dans cette catégorie, soit 100% du tout. La catégorie 04 utilise le **NAG** dans une seule séance (au lieu de deux), soit 33,3% du total des séances pour cette catégorie. Maintenant, le **NAG** est représenté par la catégorie 06 dans neuf séances, soit 75% du total, encore le plus représentatif. Dans la catégorie 07 le **NAG** est mis dans toutes les séances, soit 100% et dans la 08 le **NAG** a été utilisé dans une seule séance (au lieu de trois), soit 33,3% de la somme des séances de cette catégorie.

15.5.1.3 Le temps et la quantité d'utilisation du NAG

Nous signalons que l'utilisation du **NAG** ne se produit pas de la même manière dans toutes les séances, même dans celles qui appartiennent à une même catégorie. Le **NAG** peut être utilisé une ou plusieurs fois dans une même séance. Il existe aussi un autre aspect important : le temps consacré à l'utilisation du **NAG** dans une séance. Dans quelques séances, ce temps investi est très court ; dans d'autres, il est considérable par rapport au temps total de la séance. Considérant ces données, nous pouvons construire le tableau suivant

Tableau 22 : Nombre d'apparitions et temps d'utilisation du **NAG** par catégorie.

SÉANCE	TYPES DE TÂCHES	CATEGORIE	NOM CHAPITRE	UTILISATION EFFECTIVE NAG	NB FOIS APPARITIONS NAG	TEMPS UTILISATION NAG
C01	T ₁	01	Arithmétique	OUI	E	M
C04	T ₅	04	Arithmétique	OUI	E	M
C05	T ₇ T ₅	06	Arithmétique	OUI	E	I
C07	T ₈	06	Bilan géométrique	OUI	P	M
C09	T ₉	04	Bilan géométrique	OUI	P	I
C10	T ₈ T ₉	06	Bilan géométrique	OUI	P	I
C11	T ₈	04	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	P	M
C12	T ₈	05	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	E	I
C13	T ₈	04	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	P	M
C14	T ₉	02	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	P	M
C15	T ₈ T ₉	06	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	P	M
C16	T ₉	06	Géométrie plane et théorème de Thalès	OUI	P	M
C21	T ₁₂ T ₁₆ T ₁₇	06	Inéquations, équations et systèmes	OUI	P	I
C24	T ₁₂ T ₂₀	04	Géométrie dans l'espace	OUI	E	I
C25	T ₂₀ T ₂₁	01	Géométrie dans l'espace	OUI	E	I
C26	T ₂₀ T ₂₁	06	Géométrie dans l'espace	OUI	P	I
C27	T ₈ T ₂₀ T ₂₁	07	Géométrie dans l'espace	OUI	P	I
C28	T ₈ T ₂₀ T ₂₁	08	Géométrie dans l'espace	OUI	P	M
C29	T ₈ T ₂₀ T ₂₁	07	Géométrie dans l'espace	OUI	E	I
C31	T ₂₂ T ₂₃	06	Racines carrées	OUI	P	I
C34	T ₂₅	07	Proportionnalité	OUI	E	M
C36	T ₂₅ T ₂₄	03	Calcul littéral	OUI	E	M
C37	T ₁₆ T ₂₆	06	Géométrie dans l'espace	OUI	P	I

Dans ce tableau, deux nouvelles colonnes ont été ajoutées : « NB FOIS D'APPARITIONS **NAG** » et « TEMPS UTILISATION **NAG** » qui correspondent respectivement au nombre de fois d'apparition du **NAG** dans la séance et le temps consacré à une telle utilisation. Nous n'avons pas l'intention de préciser, quantitativement, le nombre de fois où le **NAG** apparaît, ni le temps qu'il reste utilisé. Ces précisions seront faites dans l'analyse plus fine. Mais nous savons que ces données jouent des rôles importants dans notre étude, et par conséquent nous allons les considérer de façon générale. De plus, dans la colonne « NB FOIS APPARITIONS **NAG** », E et P signifient, respectivement, « un certain nombre » et « plusieurs ». Dans la colonne « TEMPS UTILISATION **NAG** », M et I signifient, respectivement, « moyen » et « intermédiaire ».

Pour arriver au tableau ci-dessus, nous avons pris en compte les analyses générales faites jusqu'ici. Ces analyses ont mis en évidence les séances significatives pour une analyse des pratiques où nous pouvons étudier l'utilisation du **NAG** et la façon dont l'enseignant enchaîne et organise une telle utilisation.

15.5.2 Une séance spécifique du NAG

Il a été possible de choisir plusieurs séances où le **NAG** joue un rôle important. Nous avons transcrit l'enregistrement audio de certaines séances :

Tableau 23 : Les séances choisies pour l'analyse plus fine

SÉANCE	TYPES DE TÂCHES	CATEGORIE	NOM CHAPITRE	UTILISATION EFFECTIVE NAG	NB FOIS APPARITIONS NAG	TEMPS UTILISATION NAG
C21	T ₁₂ T ₁₆ T ₁₇	06	Inéquations, équations et systèmes	OUI	P	I
C26	T ₂₀ T ₂₁	06	Géométrie dans l'espace	OUI	P	I
C31	T ₂₂ T ₂₃	06	Racines carrées	OUI	P	I
C37	T ₁₆ T ₂₆	06	Géométrie dans l'espace	OUI	P	I

Dans notre choix des séances, nous avons cherché à donner la priorité à celles de la catégorie 06. Nous ne présentons que l'analyse de la séance C21 pour étudier la place et le rôle du **NAG** de manière plus précifique.

CHAPITRE D6 : LES ANALYSES DES SITUATIONS DU NAG EN TROISIEME

Dans ce chapitre, nous présentons l'analyse de la séance que nous avons choisie en classe de troisième et que nous qualifions de « situation du **NAG** », c'est-à-dire, le situation qui met en jeu les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique.

Nous analysons, de manière détaillée, la séance C21 pour donner des résultats relatifs à une situation du **NAG**.

Nous rappelons que notre cadre méthodologique a pour fonction de mettre en évidence les caractéristiques mathématiques et didactiques de la séance observée, tout en faisant ressortir les événements capables de fournir des informations sur la manière dont l'enseignant installe et utilise le **NAG**. Cette démarche comporte trois étapes :

- La description générale et la trame de la séance ;
- La description des organisations mathématiques ;
- L'analyse de l'organisation didactique.

16 La séance C21

Nous allons analyser la séance C21 où le **NAG** intervient, mais avant de commencer, nous la situerons dans le chapitre que l'enseignant de cette classe – P1 – a intitulé « chapitre 03 : Équations et inéquations ».

16.1 La séance C21 dans le chapitre 03

A partir de ce que nous avons recueilli dans cette classe, c'est-à-dire, le cahier de texte de classe ; la progression globale de P1 ; la progression prévue ; la discussion de P1, les cahiers d'exercice²² des élèves, les documents donnés en cours etc., il a été possible de reconstituer le chapitre 03 de façon plus claire. Ce chapitre, comme il apparaît dans l'annexe 16, commence le 13 novembre par l'introduction des « équations » à partir d'un problème. L'enseignant demande aux élèves de faire, pour le lendemain, l'exercice numéro 54 de la page 80 du manuel. Le 14 novembre, P1 et les élèves font la correction et travaillent sur la résolution des équations. À la fin de la séance du 14 novembre P1 demande aux élèves, pour la prochaine séance (le 19 novembre) de faire les exercices numéro 26 de la page 78 et 56, 58 et 60 de la page 80. Ces exercices sont résolus par P1 et les élèves le 19 novembre, le jour même. Ils les résolvent, en utilisant le logiciel APLUSIX, tout d'abord en s'occupant des équations, puis des inéquations. À la fin de cette

²² Nous avons donné un extrait du cahier d'exercice de l'élève E8 dans l'annexe 19.

séance P1 propose des exercices (interrogation) à résoudre individuellement. Il fait les corrections de ces exercices le 20 novembre. La séance du 21 novembre commence par la correction de l'exercice 43 de la page 79 : l'enseignant et les élèves résolvent, en utilisant à nouveau le logiciel APLUSIX, des équations et inéquations. La séance du 26 novembre est destinée à des révisions à travers les exercices 40 à 47 de la page 79 du manuel. Les « équations produits » sont introduites à la fin de la séance du 27 novembre. La séance du 28 novembre a comme but de corriger l'exercice numéro 27 de la page 78, de résoudre des équations, ainsi que d'introduire des systèmes d'équations. L'exercice numéro 39 de la page 121, ainsi que des exercices sur les systèmes d'équations sont résolus par P1 et les élèves le 29 novembre. Le professeur demande également aux élèves de résoudre les exercices 25 et 26 de la page 120. Le 03 décembre il propose à la classe une interrogation, et il leur demande de faire l'exercice 41 de la page 122 pour le lendemain. Le 04 décembre P1 corrige cet exercice. Pendant cette résolution traitant des systèmes d'équations, il utilise la méthode qu'il a appelé la « méthode 1 » pour résoudre ces systèmes d'équations du premier degré. A la fin de cette séance l'enseignant demande aux élèves de faire l'exercice 29 de la page 121 du manuel. Le 05 novembre, P1 corrige cet exercice, puis il présente le « méthode 2 » pour résoudre les systèmes d'équations du premier degré. P1 demande aussi aux élèves de faire, pour le lendemain des exercices à partir du numéro 33 jusqu'au numéro 44 des pages 121 et 122 du manuel. La séance du 06 décembre est destinée à la réalisation du devoir surveillé numéro 04. P1 a ainsi terminée le chapitre 03 avec l'étude des systèmes d'équations.

En synthèse : l'enseignant a démarré le chapitre 03 par un travail (des exercices) sur les équations et des problèmes. P1 commence par institutionnaliser des règles acquises en quatrième, qui sont, en fait, des rappels sur les équations, en utilisant une feuille de synthèse comme le montre cette figure :

Classe de 3 ^{ème}	CHAPITRE 03		
Equations et inéquations			
D) <u>Rappels sur les équations</u>			
<ul style="list-style-type: none"> • Résoudre une équation d'inconnue x c'est trouver TOUS les nombres qui, mis à la place de x, donnent une égalité vraie. Ce(s) nombre(s) est (sont) appelé(s) solution(s) de l'équation. • Il ne faut pas confondre les deux questions suivantes : 			
« L'égalité $2x+3 = x+8$ est-elle vraie ? » Ici il faut répondre que l'égalité est fautive car pour $x=1$ on a $2 \times 1 + 3 \neq 1 + 8$	« Résoudre l'équation $2x+3 = x+8$ » Ici il faut répondre que la solution est 5		
<ul style="list-style-type: none"> • Deux actions permettent de transformer une équation en une équation qui a les mêmes solutions : 			
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">1. Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une équation</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">2. Multiplier ou diviser par un même nombre non nul les deux membres d'une équation.</td> </tr> </table>		1. Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une équation	2. Multiplier ou diviser par un même nombre non nul les deux membres d'une équation.
1. Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une équation			
2. Multiplier ou diviser par un même nombre non nul les deux membres d'une équation.			
EXEMPLE :			
Résoudre l'équation : $5(x-3) = 2x+8$			
$5(x-3) = 2x+8$			
$5x-15 = 2x+8$	On développe le premier membre.		
$5x-15-2x = 2x+8-2x$	Règle 1 : On soustrait $2x$ à chacun des membres.		
$3x-15 = 8$	On réduit chacun des membres.		
$3x-15+15 = 8+15$	Règle 1 : On ajoute 15 à chacun des membres.		
$3x = 23$	On réduit chacun des membres.		
$\frac{3x}{3} = \frac{23}{3}$	Règle 2 : On divise chacun des membres par 3		
$x = \frac{23}{3}$	On réduit chacun des membres.		
La solution de cette équation est donc $\frac{23}{3}$			
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="border: none; text-align: left;">EQUATIONS ET INEQUATIONS</td> <td style="border: none; text-align: right;">Page 1 sur 3</td> </tr> </table>		EQUATIONS ET INEQUATIONS	Page 1 sur 3
EQUATIONS ET INEQUATIONS	Page 1 sur 3		

Figure 43 : Extrait du cahier de cours de E7.

Nous avons pu constater que P1 avait commencé le travail sur les équations à partir de la résolution d'un problème, puis il a travaillé sur des exercices portant sur des résolutions des équations. Ensuite, il passe aux inéquations, il finit le chapitre 03 par les inéquations produit et les systèmes d'équations.

A un moment donné du chapitre 03 P1 introduit les inéquations, en utilisant aussi le logiciel APLUSIX. Dans la poursuite du chapitre 03 nous avons observé la séance C21 qui

porte sur « un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue » et sur « une équation produit. »

16.2 Une situation du NAG dans la séance C21

D'après le cahier de la classe et la progression que P1 nous a fournis, nous constatons que cette séance, qui a eu lieu le 27 novembre 2007, a été consacrée à « l'introduction des l'équation produit ». La description du déroulement du chapitre 03 dans le cahier de classe, ci-dessous, montre bien ce fait :

Tableau 2: Description du déroulement du chapitre 03 dans le cahier de classe .

Date	Description
13/11/2007	Équations du premier degré à une inconnue et problème conduisant à des équations du premier degré à un inconnue.
14/11/2007	Résolutions d'équations du premier degré à une inconnue.
19/11/2007	Séance APLUSIX sur résolutions d'équations du premier degré à une inconnue.
20/11/2007	Résolutions d'équations et inéquations du premier degré à une inconnue
21/11/2007	Séance APLUSIX sur résolutions d'équations et inéquations du premier degré à une inconnue.
26/11/2007	Réviser les exercices et s'entraîner.
27/11/2007 Séance C21	Introduction aux « équations produits » à une inconnue.
28/11/2007	Équations produits à une inconnue / introductions aux systèmes d'équations à deux inconnues.
29/11/2007	Exercices sur les systèmes d'équations à deux inconnues.
03/12/2008	Résolution des systèmes d'équations à deux inconnues.
04/12/2008	Résolution des systèmes d'équations à deux inconnues (Méthode 1).
05/12/2008	Résolution des systèmes d'équations à deux inconnues (Méthode 2).
06/12/2008	Devoir surveillé N° 04.

Nous avons Nous avons décrit les principales informations sur le chapitre 03 telles qu'elles ont été décrites dans le cahier de la classe, cette partie apparaît aussi dans nos annexes.

P1 distribue d'abord dans la classe une feuille de cours sur les inéquations (synthèse sur les inéquations) :




Classe de 3 ^{ème}	CHAPITRE 03
Equations et inéquations	
II) <u>Inéquations</u>	
<ul style="list-style-type: none"> • Résoudre une inéquation d'inconnue x c'est trouver TOUS les nombres qui, mis à la place de x, donnent une inégalité vraie. Ce(s) nombre(s) est (sont) appelé(s) solution(s) de l'inéquation. • Trois règles permettent de transformer une inéquation en une inéquation qui a les mêmes solutions : 	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inéquation 2. Multiplier ou diviser par un même nombre positif non nul les deux membres d'une inéquation. 3. Multiplier ou diviser par un même nombre négatif non nul les deux membres d'une inéquation à condition de changer le sens de l'inégalité. 	
<p>La plupart des inéquations possèdent une infinité de solutions. On peut représenter l'ensemble de solutions par une phrase ou par une représentation graphique :</p>	
<p>Les solutions de l'inéquation $x < a$ sont représentées graphiquement par :</p>  <p>a n'est pas solution de l'inéquation donc les crochets ne sont pas dirigés du côté des solutions.</p>	<p>Les solutions de l'inéquation $x \leq a$ sont représentées graphiquement par :</p>  <p>a est solution de l'inéquation donc les crochets sont dirigés du côté des solutions.</p>
<u>EXEMPLE DE RESOLUTION D'UNE INEQUATION :</u>	
<p>Réolvons l'inéquation $4x - 5 \leq 6x + 3$</p>	
$4x - 5 - 6x \leq 6x + 3 - 6x$	Règle 1 : On soustrait $6x$ à chacun des membres.
$-2x - 5 \leq 3$	On réduit chacun des membres.
$-2x - 5 + 5 \leq 3 + 5$	Règle 1 : On ajoute 5 à chacun des membres.
$-2x \leq 8$	On réduit chacun des membres.
$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{8}{-2}$	Règle 3 : On divise chacun des membres par -2 .
$x \geq -4$	On réduit chacun des membres.
<p>On représente alors l'ensemble de solutions :</p> 	
EQUATIONS ET INEQUATIONS	Page 2 sur 3

Figure 44 : Feuille de synthèse sur les inéquations.

Cette feuille est la deuxième feuille de synthèse pour le chapitre 03. Elle est collée par les élèves dans leurs cahiers de cours.

Ensuite l'enseignant découpe en petit morceau et distribue dans la classe l'énoncé du problème périmètre :

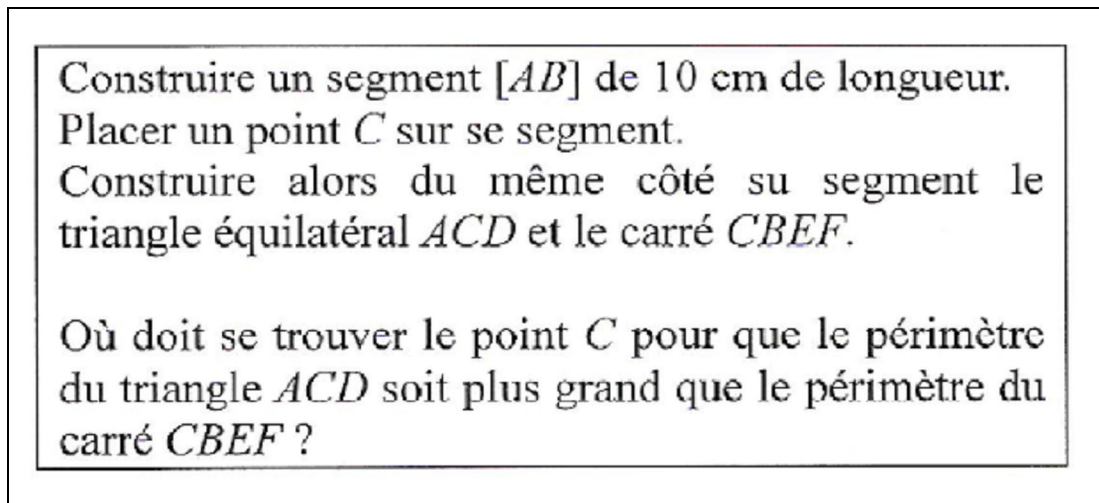


Figure 45 : Le problème périmètre.

Les élèves collent aussi cet énoncé sur leurs cahiers de cours. Le problème périmètre amène la classe à la poursuite des études sur les inéquations. En fait, la séance C21 peut être découpée en deux parties :

La situation avec le problème périmètre conduisant à une inéquation (**25 minutes**) ;

La résolution « d'une équation produit » (**26 minutes**).

Dans nos analyses, nous nous centrons sur la première partie, que nous appelons « la situation périmètre », compte tenu de l'utilisation effective des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique.

16.3 Le problème périmètre

Au fur et à mesure que P1 distribue les feuilles et le matériel (règle, équerre, etc.) dans la classe, les élèves commencent à résoudre le problème périmètre en suivant quelques pistes données par l'enseignant pour répondre le problème. Celui-ci, par sa nature même, suggère une utilisation potentielle d'interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique.

En utilisant une extension du filtre du numérique, le problème périmètre appartient au cadre géométrique et met en jeu des objets géométriques segment, point sur un segment, triangle équilatéral, carré ; des grandeurs et des mesures de ces grandeurs longueur, périmètre, longueur des segments, périmètre du triangle équilatéral, périmètre du carré. En fait, le problème périmètre est un problème de comparaison de grandeurs, problème inscrit dans un contexte du cadre géométrique. Il s'agit d'une question relative à la comparaison de périmètres : quand est-ce que le périmètre d'une figure est plus grand que celle d'une autre ? Le problème est plus précisément un problème de comparaison du périmètre d'un triangle équilatéral et d'un carré. Ainsi, en plus des objets géométriques, ce problème met aussi en jeu des opérateurs et des comparateurs (Bronner, 2007) du domaine numérique et

correspond bien à une situation du **NAG**. On peut même dire qu'il est nécessaire d'utiliser le **NAG** pour résoudre le problème.

Le problème périmètre présente aussi un aspect dynamique, et même fonctionnel, car dans ce problème, le point C est variable. En fait, il ne s'agit pas de trouver seulement une position pour le point C, mais toutes les positions possibles : Où doit se trouver le point C pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré CBEF ?

Les variables didactiques choisies pour ce problème, au niveau des positions pour le point C, la longueur des segments (AB, AC et BC), les valeurs des périmètres du triangle équilatéral et du carré, conduisent à une solution qui ne peut être trouvée par les élèves dans un environnement de géométrie dynamique et encore moins dans le registre des dessins en papier crayon. En effet le problème périmètre peut être modélisé par l'inéquation

$3x > 4(10 - x)$, qui conduit à la solution $40/7 < [AC] < 10$. En fait, on voit qu'une des bornes de l'intervalle solution est $40/7$. Il s'agit d'un nombre rationnel décimal (Bronner, 1997), borne de l'intervalle solution de l'inéquation, qui ne peut être trouvé sans obtenir et traiter l'inéquation.

Trois types de procédures de résolution peuvent apparaître pour cette situation:

Une procédure géométrique : on teste différentes positions du point C sur la figure, et on compare directement les périmètres du triangle équilatéral et du carré. Cette procédure avec du papier crayon est assez limitée, coûteuse et longue, car on doit faire plusieurs figures. D'autre part, la procédure géométrique avec du papier crayon fait introduire des imprécisions dans la résolution de la situation, car il faut mesurer des segments et des périmètres. Tandis qu'en utilisant un logiciel de géométrie dynamique, comme GEOGEBRA ou CABRI GEOMETRE, on peut résoudre cette situation de façon toujours approchée, mais avec des valeurs approchées plus précises. Avec CABRI GEOMETRE, on peut obtenir des résultats plus fiables : on part du géométrique et on place un point C, on mesure les segments AC et CB, soit avec la règle, soit avec CABRI GEOMETRE. Ensuite, on construit le triangle équilatéral et le carré et on calcule les périmètres. Avec ce procédé, on part des objets, on regarde ce que les différentes positions du point C ont produit sur la figure. Cette procédure ne peut pas résoudre la situation problème de manière exacte ou avec précision, car il est peu probable que les élèves arrivent à trouver ainsi la solution $40/7 < [AC] < 10$;

Une procédure numérique : on considère des valeurs numériques pour [AC], par exemple $[AC] = 3$, $[AC] = 6$, etc., à partir desquelles on calcule des périmètres (des polygones) pour les triangles équilatéraux et pour les carrés obtenus de différentes valeurs numériques de [AC]. Par observation puis par comparaison des valeurs numériques des périmètres des polygones, on voit si on tient une solution ou non. En fait un peu comme dans la procédure géométrique, on peut éventuellement voir dans quel sens, sur le segment AB, se trouve une variation la plus proche de la situation demandée. C'est-à-dire qu'on peut voir si le point C doit être le plus près du point A ou du point B, etc. On peut avoir une idée de quelques positions pour le point C, mais, comme dans la procédure géométrique, on ne peut pas dire que les élèves arriveront à trouver la position pour le point C en comparant les valeurs des périmètres. Et cette procédure ne pourra pas résoudre, de manière exacte, la situation proposée par P1, compte tenue qu'une des bornes de l'intervalle solutions est un nombre rationnel décimal.

Une procédure algébrique : il s'agit d'une modélisation en géométrie qui va avoir trois étapes : l'étape I (choix d'une inconnue et mise en équation) ; l'étape II (résolution de l'équation) ; l'étape III (interprétation du résultat). Dans l'étape I, on modélise la

situation en choisissant par exemple $[AC] = x$, ce qui nous donne $[CB] = 10 - x$, à partir de ces valeurs on trouve les périmètres du triangle équilatéral et du carré respectivement égal à $3x$ et $4(10 - x)$, ce qui permet d'écrire l'inéquation $3x > 4(10 - x)$.

On a choisi $[AC] = x$ comme l'inconnue, mais, on pourrait choisir $[CB] = x$, ce qui donnerait l'inéquation $3(10 - x) > 4x$.

La première inéquation donne comme résultat pour $[AC]$ l'intervalle $] \frac{40}{7} ; 10[$ et la deuxième pour $[CB]$ l'intervalle $]0 ; \frac{30}{7}[$.

Au cours de l'étape II on résout une équation du premier degré à une inconnue, $3x > 4(10 - x)$ ou $3(10 - x) > 4x$). Deux techniques peuvent être mises en œuvre en relation. Considérant l'inéquation $3x > 4(10 - x)$, on peut d'abord utiliser une technique provisoire, qui consiste à « remplacer la valeur de x dans l'inéquation par des nombres entiers en vérifiant si l'inégalité est vraie ». Cette technique est très coûteuse et devrait être concurrencée par une méthode algébrique : « on développe d'abord le deuxième membre de l'inéquation $3x > 4(10 - x)$: elle devient $3x > 4 \cdot 10 - 4 \cdot x$, puis $3x > 40 - 4x$; on fait ensuite disparaître le « $- 4x$ » du deuxième membre de l'inéquation en ajoutant « $4x$ » de chaque côté : il devient $3x + 4x > 40 - 4x + 4x$, ce qui donne $7x > 40$, puis, on isole « x », en divisant chaque côté de l'inéquation par 7 : cela devient $\frac{7x}{7} > \frac{40}{7}$, ce qui donne $x > \frac{40}{7}$ ». L'étape III - l'interprétation du résultat - consiste à accepter (ou rejeter) des solutions de l'inéquation suivant les conditions imposées par le problème et à les reformuler dans le contexte du problème. Dans cette interprétation, il est nécessaire que les domaines numérique-algébrique et géométriques soient bien mis en interrelations pour passer du résultat de l'inéquation ($x > \frac{40}{7}$) à l'intervalle solution du problème : $] \frac{40}{7} ; 10[$ et la formulation dans le contexte géométrique en terme de périmètre des figures.

Cette analyse a priori montre que le **NAG** est structurellement présent. Nous présentons la trame de la situation.

16.4 Trame et description générale de la situation périmètre

La situation périmètre appartient à la séance C21 qui se déroule devant 24 élèves et les fait travailler sur les inéquations et les problèmes.

Dans cette première partie de nos analyses, nous donnerons une première description de ce qui a été observé. Pour décrire la pratique de P1, dans ce premier temps, nous nous proposons de construire tout d'abord la trame de la leçon, telle qu'elle a été définie dans le chapitre D2. Nous rappelons que cette trame a pour fonction de faire apparaître les découpages de la séance selon de grandes unités intelligibles.

Cette situation s'y déroule à travers les différentes phases habituellement observées dans cette classe (cours, travail sur des exercices, correction, bilan). Nous présentons une première idée de la trame de cette situation dans le tableau ci-dessous :

Table 3: La trame de la situation périmètre.

Lignes ²³	Durée (min)	Modalité travail	Phases	
03	02	Collectif	0	Synthèse à propos des règles sur la résolution des inéquations.
04-10	03	Individuel	I	Construction géométrique de la figure du problème périmètre.
11-15	03	Collectif	II	Mise en évidence de la question à résoudre à travers l'aspect dynamique du logiciel Cabri Géomètre.
16-21	02	Collectif	III	Exploration de quelques configurations à l'aide du logiciel Cabri Géomètre.
22-47	06	Collectif	IV	Mise en équation du problème.
48-52	03	Individuel	V	Résolution de l'inéquation par les élèves.
53-55	01	Collectif	VI	Résolution de l'inéquation par P1 (correction).
56-59	02	Collectif	VII	Retour au problème périmètre.

La trame est ainsi constituée de sept phases, que nous allons décrire davantage.

Phase 0 : Synthèse à propos des règles sur la résolution des inéquations.

(Lignes : 0-03 ; Durée : 02 min).

L'enseignant débute cette phase en distribuant la feuille qui concerne la synthèse à propos de l'étude des inéquations que nous avons montré précédemment. Dans cette phase, P1 dévoile à la classe sur quel thème ils vont travailler :

Table 4: Extrait de la séance - C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
3	00:02:00	P1	[...]Tout le monde a les deux feuilles de cours n°2 ? Je profite pour recentrer : résoudre une équation – c'était fait. Résoudre une inéquation, on a trois règles, en particulier la règle trois qui nous intéresse [...].

L'enseignant souhaite ainsi institutionnaliser les règles sur la résolution des inéquations dans cette classe, après un travail fait dans des séances précédentes sur les inéquations. Pour cette raison, P1 aborde les règles pour résoudre des inéquations qui configurent sur la feuille de synthèse.

Phase I : Construction géométrique de la figure du problème périmètre.

(Lignes : 04-10 ; Durée : 03 min).

Cette phase commence avec P1 découpant et donnant aux élèves l'énoncé du problème périmètre que les élèves collent sur leurs cahiers d'exercices. Ensuite, il demande aux élèves de faire individuellement la construction géométrique, en se référant à la première partie du problème périmètre, sur leurs cahiers d'exercices :

Table 5 : Extrait de la séance - C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
4	00:04:00	P1	On va commencer par ça, je vais vous donner l'énoncé, dès que je coupe les papiers. Vous devez commencer par faire cette construction.

L'enseignant distribue des règles, des compas, etc. et demande aux élèves de travailler individuellement pendant un intervalle de temps de 02 minutes environ.

²³ Dans ce travail « lignes » correspond aux lignes du protocole qui configurent sur nos annexes.

Les élèves travaillent en suivant les consignes de la tâche. Vu que quelques élèves n'arrivent pas à suivre ces consignes pour construire la figure, dans un moment donné P1 fait une intervention dans la classe. Cette intervention a pour but d'aider les élèves qui sont en difficulté, dans le démarrage de cette construction :

Table 6: Extrait de la séance - C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
8	00:06:27	P1	Un segment 10 cm. Il y a quoi sur le segment ? Un point sur le segment.

Il y a des élèves qui n'arrivent pas à associer le sujet mathématique et les constructions géométriques faites :

Table 7: Extrait de la séance-C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
9	00:06:54	E5	Elles sont finies ? C'est fini les équations ?
10	00:06:57	P1	Comment, non. Pourquoi ? On va les finir pour faire des exercices après.

Phase II : Mise en évidence de la question à résoudre à l'aide du Cabri.

(Lignes : 11-15 ; Durée : 03 min).

A l'instant 07min 27seg, P1 commence la construction de la figure à l'aide du logiciel Cabri Géomètre :

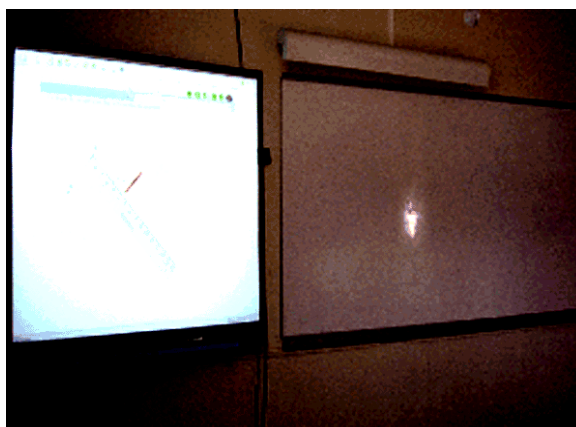


Figure 46: Photo de la séance C21.

A travers des échanges avec les élèves, P1 examine certaines spécificités des objets géométriques en questions. L'enseignant utilise les propriétés des objets géométriques pour construire la figure soulevée de la première partie du problème, et petit à petit revisite quelques propriétés des objets mathématiques que la classe semble connaître. Pendant ce travail, les élèves notent sur leurs cahiers de cours, toutes les définitions et propriétés des objets mathématiques réétudiés. Après ce travail, rapide et très discursif, le professeur construit, à l'aide du logiciel Cabri Géomètre, d'abord, le segment « AB », il place un point C sur ce segment et avec le segment « AC » il termine la construction du triangle équilatéral « ACD ».

Une fois que la figure a été (construite) dessinée, P1 exploite l'aspect dynamique de cette construction avec le logiciel Cabri Géomètre :

Table 8 : Extrait de la séance-C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
15	00:10:03	P1	[...]Voilà le triangle équilatéral ACD. Alors, forcément, si vous prenez

			C près de A, même qu'il soit le plus petit, le triangle reste équilatéral. La chose qui reste à faire, c'est de construire un carré, donc, de (coûté) couper ? ? [CB]. Je note que selon la position du point C que vous avez choisi sur cette figure, on trouve des triangles comme celui-ci, celui-là. Ce que vous devez fait maintenant, ce que j'ai fait moi à l'écran. Allez éventuellement imaginer que le point C, il peut bouger, et donc, ça produit un effet sur la figure que vous avez. Plus C est près de A, plus mon carré est grand, mon triangle équilatéral est petit. Par contre plus C est éloigné de A c'est l'inverse. La question c'est où je dois mettre C pour que le périmètre du triangle équilatéral soit plus grand que le périmètre du carré ?
--	--	--	---

L'enseignant exploite cet aspect dynamique de la figure, en faisant bouger le point « C » et en regardant avec les élèves ce qui se passe avec le triangle équilatéral et le carré. P1 commence à confronter les élèves en problématisant la tâche donnée.

Phase III : Exploration de quelques configurations à l'aide du Cabri.

(Lignes : 16-21 ; Durée : 02 min).

Dans cette phase, l'enseignant dialogue plus souvent avec les élèves, il pose des questions, demande et attend des réponses de leur part.

Table 9: Extrait de la séance – C 21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
16	00:11:23	E20	Bien ! Donc après le milieu de [AB]!
17	00:11:40	P1	Après le milieu de [AB]? Bien ! E20, propose entre le milieu de [AB] ça peut être une idée.
18	00:11:55		[...]donc le milieu ça serait où ? [...]
19	00:12:46	P1	Allez, d'autres propositions.
20	00:12:49	E1	Sur le point B.

A travers des dialogues entre P1 et les élèves, cet enseignant utilise certains outils du logiciel Cabri Géomètre pour mesurer plusieurs valeurs choisies pour [AC] et [CB] qui vont engendrer, respectivement, des valeurs pour les périmètres du triangle et celui du carré. Ces constructions sont observées à travers le déplacement du Cabri Géomètre :

Table 10: Extrait de la séance – C 21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
18	00:11:55	P1	Donc, je pose là, je vais mettre à 5,1 cm, et du coup, on va calculer le périmètre de celui-là. Ca fait 15,3 cm. C'est bien, je vais le mettre là. Le périmètre du carré est 19,6 cm. Donc, est-ce que ce que tu dis semble valide ? Eh, bien, non ! Même avec ce choix, j'ai mis le point C après le milieu du segment AB. Est-ce que le périmètre de celui-ci est plus grand que le périmètre de celui-là ? Eh, bien non ! Donc, le coûté est négatif, on élimine cette proposition parce qu'on a trouvé un contre-exemple.

P1 utilise aussi le déplacement du Cabri Géomètre pour valider ou invalider des valeurs numériques choisies, pour la position du point « C », par les élèves :

Table 11: Extrait de la séance-C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
21	00:12:56	P1	Sur le point B ? Je vous rappelle qu'on cherche toutes les propositions. Là, c'est sûr que sur le point B il n'y a plus de carré, mais pas très loin

			du point B c'est encore possible. Voilà!! Bon, mais on peut voir ce qui va se passer. Là, c'est encore vrai, là, c'est toujours vrai, pour 7,55. C'est en fait, tous les points qui sont par ici.
--	--	--	---

Les essais « de valeurs numériques » que font P1 et les élèves parcourent plusieurs positions possibles pour le point « C » et préparent la classe pour la modélisation.

Phase IV : Mise en équation du problème.

(Lignes : 22-47 ; Durée : 06 min).

Après avoir essayé plusieurs positions pour le point C à l'aide du logiciel Cabri Géomètre, P1 commence petit à petit à modéliser le problème périmètre avec une inéquation. Pendant ce travail, les élèves notent sur leurs cahiers de cours, plusieurs conjectures qu'ils peuvent énoncer pour le point C, pour les côtés et pour les périmètres des polygones en question. A l'instant 13 min 26 sec, P1 demande précisément aux élèves, la modélisation du problème périmètre en termes d'inéquation :

Table 12: Extrait de la séance – C 21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
22	00:13:26	P1	Là, c'est ce qu'on voit par expérience. Maintenant, il faudra arriver à le dire mathématiquement, à partir de ça, voilà ! A partir de telle position. Mais, bon ! Comment on peut faire ça, et comment on peut trouver cette position?
23	00:13:34	E6	Avec une inéquation.
24	00:13:35	P1	Comment fais-tu ?

La modélisation en terme d'inéquation se développe par sous-phases : le côté du triangle équilatéral ; le côté du carré ; le périmètre du triangle équilatéral ; le périmètre du carré. P1 commence d'abord par écrire le côté du triangle équilatéral, puis du carré, en arrivant à la fin aux périmètres de ces polygones. Et c'est autour des périmètres des polygones que P1 met en évidence la modélisation. Pendant ce travail, les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique sont évoquées dans les passages d'une sous-phase à l'autre :

Table 13: Extrait de la séance – C 21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
26	00:13:48	P1	Bon, je vois qu'il y a une inéquation, alors, il faudrait qu'il y ait une inconnue, et qu'est-ce qu'on cherche, qui n'est pas connu ?
27	00:14:00	P1	Oui, le périmètre du triangle ! Et qu'est-ce qui doit être plus grand que lui ? D'accord, le périmètre du carré. Donc, le problème qui se pose est celui-là : le périmètre d'un triangle ACD, il doit être plus grand que le périmètre de A, pardon de CBEF.

P1 montre que la situation peut être modélisée à travers une inéquation en écrivant au tableau de la classe : $\text{Périmètre}_{ACD} > \text{Périmètre}_{CBEF}$. Après avoir choisi une inconnue « X » pour représenter le côté puis, le périmètre du triangle équilatéral, l'enseignant fait quelques essais en utilisant des valeurs numériques pour montrer que le côté du carré va aussi dépendre de « X », et donc, de façon explicite, on voit le NAG jouer un rôle important :

Table 14: Extrait de la séance – C 21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
43	00:17:41	P1	[...] Si AC mesurait 6, CB ça serait ? $X - 6$. Mais si, on a pose que AB

			mesurait 10 cm. Combien serait CB? CB serait 4, 10 moins 6.
44	00:18 :02	P1	Le fait de passer au numérique vous permet de travailler sur des choses simples, de travailler des petits problèmes que vous gérez sans problème. Donc, qu'est ce qu'il faut repérer là ? Il faut repérer qu'est ce qui varie, qu'est ce qui ne varie pas. A chaque fois, on prendra 10 pour la longueur de AB et on arrivera à la longueur de AC et si la longueur de AC je la donne par une lettre et je la mets à cet endroit là. E, quel est le périmètre du carré donc? E11

Le travail sur la modélisation finit quand P1 amène les élèves aux représentations des périmètres du triangle équilatéral et du carré :

Table 15: Extrait de la séance – C 21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
47	00:18 :43	P1	[...]Bien, une fois, qu'on a fait ça, on sait ce qu'est-ce qu'on doit chercher. Quelles sont les valeurs de X qui vérifient ça. On passe à la main, on arrête le cinéma, et on résout cette inéquation.

Une fois que la modélisation est finie, l'enseignant demande aux élèves de résoudre l'inéquation qui représente une modélisation de la situation.

Phase V : Résolution de l'inéquation par les élèves.

(Lignes : 48-52 ; Durée : 03 min).

Après la modélisation du problème périmètre, P1 écrit l'inéquation dans le logiciel APLUSIX, il n'utilise pas ce logiciel dans cette phase, mais il demande aux élèves de résoudre l'inéquation en substituant « X » par des valeurs entières :

Table 16: Extrait de la séance-C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
48	00:19 :10	P1	On va rentre que des valeurs entières.

Pendant le temps que les élèves essaient de résoudre l'inéquation dans leurs cahiers, P1 circule dans la classe et les aide.

Phase VI : Résolution de l'inéquation par P1 (correction).

(Lignes : 53-55 ; Durée : 01 min).

Arrivé au temps de 22 min P1 commence à résoudre l'inéquation. Dans cette résolution, il utilise d'abord le logiciel APLUSIX puis, le tableau. Il commence en développant le deuxième membre, puis il cherche le terme qui contient l'inconnue en chacun des membres pour supprimer celui qui est le plus convenable pour la résolution de l'inéquation :

Table 17: Extrait de la séance – C 21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
53	00:22 :00	P1	[...] Donc, on résout cette inéquation $3X$ est plus grand que 40 moins $4X$, à partir de là, il y a un terme qui contient l'inconnue en chacun des membres, on va supprimer un des deux, on va supprimer moins $4X$, car

			il me semble que comme ça on est plus sûr. Et comment le supprimer ? En ajoutant 4 X à chacun des membres.
--	--	--	---

Après avoir éliminé l'inconnue du deuxième membre, « X » reste isolé, pour arriver aux valeurs qui satisfont l'inéquation :

Table 18 : Extrait de la séance-C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
54	00:22 :45	P1	On arrive à 7 X plus grand que 40. Comment je peux m'en sortir d'ici ? On ira isoler X ici, on doit diviser par 7 chacun des membres, 7, comme il est un nombre positif, on reste sur cet ordre là, et on obtient X plus grand que 40/7

Pendant cette résolution P1 utilise les règles 1 et 2 qui figurent sur la feuille de synthèse. Les élèves semblent n'avoir pas de difficultés pour suivre P1 dans cette résolution.

Phase VII : Retour au problème périmètre.

(Lignes : 56-59 ; Durée : 02 min).

Dans cette phase, P1 fait un retour au problème périmètre pour interpréter numériquement, géométriquement et algébriquement les résultats de l'inéquation. Il va associer « X » à une longueur, puis reprendre la construction au Cabri, utiliser des commandes du Cabri pour calculer la valeur de [AC], [CB] et ensuite la valeur des périmètres du triangle ACD et du carré CBEF. L'enseignant profite de l'aspect dynamique de ce logiciel pour montrer la validité de la solution de l'inéquation :

Table 19: Extrait de la séance – C 21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
59	00:24:03	P1	La longueur de AC. Donc, je ne peux pas dire que le périmètre du machin est plus grand que le périmètre du carré, car X est plus grand que 40/7. On interprète que X c'était la longueur AC, donc, (car) ?? la longueur AC est supérieure à 40/7. 40/7 c'est à peu près 5,7. On peut vérifier, c'est-à-dire qu'on calcule la longueur AC, je calcule le périmètre de celui-ci et le périmètre de celui-là si je mets AC au tour de 5,7, effectivement on voit que c'est à peu près égal et dès qu'on dépasse, ça y est, le périmètre de ACD devient plus grand que le périmètre du carré. Donc, le tour des positions de C ici, nous donnerons cette inégalité là OK?

Pendant toutes ces phases, nous constatons la présence et l'importance des dialogues, entre P1 et les élèves, tenus à travers les questions/réponses ou à travers « des dialogues au miroir ». Ces dialogues ont aidé P1 dans l'installation de l'OM qui se construit dans cette classe.

16.4.1 Organisation mathématique dynamique de la situation

Avant de présenter l'OM en jeu dans cette séance, nous présentons toutes les micro-tâches qui apparaissent dans chaque phase de la trame. Ces micro-tâches nous permettront d'associer à chaque phase de la trame un cadre mathématique :

Table 20 : Organisation mathématique dynamique en rapport avec la trame de la séance.

Lignes	Durée (min)	Modalité travail	Travail		Cadre
03	02	Collectif	0	- « Savoir quand appliquer la règle de trois sur la feuille de synthèse sur les inéquations : <i>si on multiplie ou divise par un nombre négatif, tout se fait, à condition de changer l'ordre des nombres dans une équation.</i> »	Algébrique
04-10	03	Individuel	I	- « Construire un segment AB de 10cm de longueur. » -« Placer un point C sur un segment AB de 10cm de longueur. »	Géométrique
11-15	03	Collectif	II	-« Construire un triangle équilatéral à partir de AC, étant donné un point C sur un segment AB de 10cm de longueur. » -« Construire un carré à partir de CB, étant donné un point C sur un segment AB de 10cm de longueur. » -« Construire un segment [AB] de 10 cm de longueur. Placer un point C sur ce segment. Construire alors, du même côté sur le segment, le triangle équilatéral ACD et le carré CBEF ».	Géométrique
16-21	02	Collectif	III	-« Calculer la longueur d'un segment » -« Calculer le périmètre d'un triangle équilatéral, étant donné le côté » -« Calculer le périmètre d'un carré, étant donné le côté. » -« Trouver le point C pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré CBEF ? »	Numérique Algébrique Géométrique
22-47	06	Collectif	IV	-« Repérer la position du point C sur le segment AB de 10 cm ». -« Écrire algébriquement une conjecture » -« Représenter algébriquement les longueurs des segments AC et AB, sachant que AB vaut 10 cm ». -« Représenter algébriquement le périmètre du triangle rectangle connaissant le côté ». -« Définir le périmètre d'un polygone ». -« Représenter algébriquement le périmètre du carré, connaissant le côté ». -« Calculer des valeurs numériques dans une expression algébrique »	Numérique Algébrique Géométrique

48-52	03	Individuel	V	- « Résoudre l'inéquation $3x > 4(10 - x)$ ». -« Calculer la valeur approchée d'une fraction » -« Calculer la valeur approchée d'un nombre décimal »	Numérique Algébrique
53-55	01	Collectif	VI	- « Résoudre l'inéquation $3x > 4(10 - x)$ » -« Calculer la valeur approchée d'une fraction » -« Calculer la valeur approchée d'un nombre décimal.»	Numérique Algébrique
56-59	02	Collectif	VII	-« Interpréter les résultats de la situation périmètre.».	Numérique Algébrique Géométrie

La modalité du travail de cette séance reste plutôt collective. Les différents types de tâches qui apparaissent dans la séance seront explicités lors des descriptions des organisations mathématiques que nous présentons maintenant.

16.5 Description des organisations mathématiques

Les objets de P1 dans cette séance apparaissent dans le cahier de la classe comme montrés précédemment. Cependant ces objectifs et les objets mathématiques qui seront utilisés par P1 ne sont pas dévoilés aux élèves au début de cette séance. Ils le seront au fur et à mesure, à travers les différentes tâches que compose l'organisation mathématique de cette séance.

L'enseignant travaille sur la tâche principale en la décomposant en plusieurs tâches qui seront travaillées avec d'autres sous-tâches qui vont apparaître au fur et à mesure dans la séance. Ces tâches fonctionnent comme des « tâches collaboratrices » pour l'institutionnalisation des règles sur les inéquations. P1 utilise plusieurs domaines mathématiques pour institutionnaliser les règles à propos des inéquations, il se sert du **NAG** pour pouvoir parcourir les différents domaines mathématiques et dévoiler, à travers les différentes tâches utilisées au cours de cette séance, des savoirs cachés qui feront avancer les constructions des connaissances mathématiques chez les élèves et dans le travail sur l'institutionnalisation des règles sur les inéquations. A travers l'organisation mathématique dynamique de la situation que nous venons de présenter, l'organisation mathématique qui s'instaure dans la séance est complexe et éloignée de l'OM visée par cet enseignant. Ce qui lui demande un véritable travail didactique pour pouvoir aboutir à ses objectifs.

16.5.1 L'organisation mathématique visée par P1

L'OM visée par P1 se constitue autour de deux types de tâches : T_p et T_c . Le type de tâches T_p : « Résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue. » constitue, d'ailleurs, le sujet central de la situation périmètre. Le type de tâche T_c : « Résoudre une équation mise sous la forme $A.B = 0$ où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable » que nous n'aborderons pas dans cette analyse, fait aussi partie de l'OM visée. Le tableau ci-dessous montre l'analyse praxéologique de l'OM visée par P1 :

Table 21: L'OM visée par P1.

Types de tâches T		Technique τ	Technologico-théorique [θ , Θ]
T_p : Résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue.	t_p : Construire un segment [AB] de 10 cm de longueur. Placer un point C sur ce segment. Construire alors du même côté du segment le triangle équilatéral ACD et le carré CBEF. Où doit se trouver le point C pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré CBEF ?	τ_p : Pour Résoudre un problème conduisant à une inéquation du premier degré à une inconnue, il faut suivre une technique composée par les étapes : choix de l'inconnue et mise en inéquation ; résolution de l'inéquation ; interprétation du résultat.	[θ , Θ] _c : Le périmètre des polygones réguliers est défini par le produit « n p », où « n » est égal aux nombres de côtés du polygone et « p », égal à la longueur du côté. On appelle inéquation d'inconnue x, toute inégalité contenant la lettre x, où x représente un nombre inconnu. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu pour que l'inégalité soit vraie : chacune de ces valeurs est appelée une solution de l'inéquation.
T_c : Résoudre une équation mise sous la forme $A.B = 0$ où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.	t_c : Résoudre l'équation $(x - 4)(2x + 3) = 0$	τ_c : Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins des deux facteurs est nul, d'où $x - 4 = 0$ ou $2x + 3 = 0$ soit $x = 4$ ou $x = -3/2$ Les solutions de l'équation sont 2, 4 et -1,5	[θ , Θ] _c : Équations de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ Un produit de facteurs est nul si un des facteurs au moins est nul. Les solutions de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ sont les solutions de chacune des équations $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$

Les objectifs de P1 dans cette séance apparaissent dans le cahier de la classe, cependant ils ne sont pas dévoilés aux élèves au début de cette séance, mais à travers les différentes tâches qui composent l'organisation mathématique de cette séance.

L'enseignant travaille sur la tâche principale en la décomposant en plusieurs tâches, lesquelles seront travaillées avec d'autres sous-tâches qui vont apparaître au fur et à mesure dans la séance. Ces tâches fonctionnent comme « collaboratrices » pour l'institutionnalisation des règles sur les inéquations. P1 utilise ainsi plusieurs domaines mathématiques dans ce but ce qui nous amène à dire qu'il utilise le NAG pour pouvoir atteindre ses objectifs sur les règles sur les inéquations. A travers l'organisation mathématique dynamique de la situation, l'organisation mathématique qui s'instaure dans la séance est complexe et éloignée de l'OM visée par cet enseignant, organisation étudiée dans la prochaine section.

En fait, dans cette séance, c'est la tâche t_p qui occupe la place centrale de l'OM présentée. P1 travaille cette tâche avec les élèves à travers les trois étapes de la technique qui va être mise en place. Pendant ce travail P1 a fait intervenir des objets comme, par exemple, « constructions de polygones réguliers », « calcul de périmètres », « inéquation du premier degré à une inconnue » et d'autres objets, qui aideront P1 à aboutir à leurs objectifs.

La technique qui va résoudre t_p sera mise en œuvre à partir de trois étapes. La classe, par l'intermédiaire de P1, va travailler aussi sur d'autres sujets cachés dans la tâche principale. Les interrelations entre les domaines mathématiques vont apparaître en jouant un rôle important dans le travail autour de la tâche principale : soit, pour révéler des objets mathématiques cachés ; soit, pour provoquer des changements de cadres pendant la résolution. L'enseignant a choisi d'aborder « un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue » à partir de la modélisation d'une situation. Ce choix est conforme à une contrainte relevant du niveau de la discipline (au sens de Chevallard, 2002). On trouve, d'ailleurs des incitations dans les programmes de mathématiques de collège à pratiquer de la sorte, comme nous le montrons ci-dessous :

« À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier un problème, conjecturer un résultat ; expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié. » (Mathématiques - Introduction générale pour le collège - BO du 19 avril 2007)

Des extraits comme celui ci-dessus peuvent être repérés aussi dans la présentation des programmes de la classe de troisième, ainsi que dans le document d'accompagnement des programmes de la classe de seconde. Dans la partie « Travaux numériques », en regard du contenu « Inéquation du premier degré à une inconnue », le programme de troisième précise que « les problèmes sont issus des différentes parties du programme. Comme en classe de 4e, on dégagera à chaque fois les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat ». Donc, le choix de P1 de débiter la séance pour telle tâche, paraît alors conforme aux indications du programme, si l'on entend que le traitement de ce thème doit conduire à l'étude de techniques utiles dans d'autres domaines (contrainte relevant du niveau du domaine au sens de Chevallard, 2002).

L'OM visée par P1 dans cette séance se construit autour des objets : « problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue » et « équation produit du premier degré à une inconnue ». Le but de l'enseignant est de faire travailler les élèves avec ces deux objets. L'enseignant avait prévu de travailler sur ces deux objets qui vont apparaître respectivement dans la partie cours et exercice de la séance et prendre la place la plus importante dans cette séance. Cependant, d'autres objets du savoir, cachés autour de ces deux objets principaux de la séance, vont y apparaître aussi, à travers une OM qui s'instaure parallèlement à celle prévue par P1. En fait, nous voyons deux OM bien différenciées : l'OM visée par P1 et celle qui se constitue au fur et à mesure de la séance. Pendant la mise en place de l'OM dans la classe, P1 fait, comme nous le verrons plus tard, un travail autour d'une organisation didactique qui doit permettre d'aboutir aux objectifs visés avec de multiples utilisations du NAG .

16.5.2 L'organisation mathématique qui va apparaître dans la séance

Nous présentons sous forme de tableau la description et l'analyse de l'OM qui se construit dans la séance, pour mieux faire apparaître la chronologie :

Tableau 24: L'OM qui va s'installer au fur et à mesure dans la séance.

Types de tâches T Spécimen	Technique τ	Technologico-théorique $[\theta, \Theta]$
<p>T_p: Résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue.</p>	<p>t_m: Mise en équation d'un problème du premier degré à une inconnue.</p>	<p>τ_m: En utilisant la règle graduée, on construit le segment AB en plaçant le point A, et à 10 cm de ce point, on place le point B. Construire les segments adjacents AC et CB. On a le premier côté du triangle, [AC], on prend comme écartement du compas, la mesure de ce côté. On pose la pointe du compas sur A et on trace un arc de cercle, vers l'endroit où doit se trouver le point C. On pose la pointe du compas sur C et on trace un arc de cercle qui coupe le premier. On obtient ainsi le troisième sommet du triangle. Il ne reste plus qu'à tracer les deux côtés manquants du triangle et à nommer le point D. A partir du segment [CB], tracer la perpendiculaire à (CB) passant par C et à reporter sur cette perpendiculaire la longueur du côté avec le cercle du centre C passant par B. Le sommet F est un des points d'intersection de cette perpendiculaire et du cercle. Construire les parallèles à (CB) passant par F et à (CF) passant par B. Construire le point E comme intersection de ces deux parallèles. CBEF est un carré de côté [CB]. Représenter algébriquement les périmètres des polygones, c'est-à-dire la somme des longueurs des côtés du triangle équilatéral et du carré. Pour le triangle équilatéral il est plus simple de calculer: $P = 3 \cdot x$ où x est la longueur d'un côté. Pour le carré, la formule est : $P = 4 \cdot (10 - x)$ où $(10 - x)$ est la longueur d'un côté. On représente à travers des lettres les périmètres des</p> <p>$[\theta, \Theta]_m$: Notions de point colinéaire, de segments consécutifs et colinéaires, de distance entre deux points, construction du triangle équilatéral et du carré à partir d'un côté connu, notions de droites perpendiculaires et parallèles. Notions d'algèbre, de périmètres des polygones réguliers, de représentation algébrique des périmètres, d'inéquation du premier degré à une inconnue.</p>

		<p>polygones (triangle et carré), où, l'objectif principal, est de faire apparaître l'inéquation polynomiale à partir des structures rattachées à la construction géométrique.</p>	
	<p>t_r: Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue.</p>	<p>τ_{rg}: Utilisant le logiciel Cabri Géomètre, on construit un segment [AB] de 10 cm de longueur, puis on place un point C sur le segment [AB]. Ensuite, on construit alors du même côté du segment, le triangle équilatéral ACD et le carré CBEF. Sur le segment AB, on a placé le point C, maintenant, on mesure les segments AC et CB, soit avec la règle graduée, soit avec le logiciel Cabri Géomètre. Puis, on construit le triangle équilatéral et le carré et on calcule les périmètres. On teste différentes positions du point C sur la figure, puis, on mesure des segments et des périmètres et on compare directement les périmètres du triangle équilatéral et du carré.</p>	<p>$[\theta, \Theta]_r$: On appelle inéquation à une inconnue x, toute inégalité contenant la lettre x, où x, représente un nombre inconnu. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu pour que l'inégalité soit vraie : chacune de ces valeurs est appelée une solution de l'inéquation.</p>
		<p>τ_m: Dans le milieu papier crayon ou dans le micro-monde Cabri Géomètre, on trouve le point C pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré CBEF, puis, on effectue des</p>	

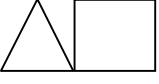
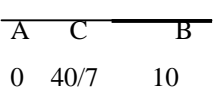

		<p>calculs numériques successifs des longueurs des segments et des périmètres du triangle et du carré.</p>	
	<p>t_i: Interpréter la solution d'une inéquation du premier degré à une inconnue.</p>	<p>τ_{ra}: Dans le milieu papier crayon ou en utilisant le logiciel Aplusix, on résout l'inéquation $-3x > 4(10 - x)$ - du premier degré à une inconnue, construite à partir de la variation des périmètres des polygones en fonction du point C. On remplace tout d'abord la valeur de x dans l'inéquation par des nombres entiers en vérifiant si l'inégalité est vérifiée. Ensuite, on développe d'abord, le deuxième côté de l'inéquation $3x > 4(10 - x)$: il devient $3x > 4 \cdot 10 - 4 \cdot x$, puis $3x > 40 - 4x$; on fait ensuite disparaître le « $-4x$ » du deuxième membre de l'inéquation en ajoutant « $4x$ » de chaque côté : il devient $3x + 4x > 40 - 4x + 4x$, ce qui donne $7x > 40$, puis on isole « x », en divisant chaque côté de l'inéquation par 7 : il devient $\frac{7x}{7} > \frac{40}{7}$, ce qui donne $x > \frac{40}{7}$.</p> <p>τ_{ig}: En utilisant la construction géométrique faite au Cabri Géomètre, on interprète géométriquement les résultats de l'inéquation $3x > 4(10 - x)$ à travers l'interprétation graphique que si construit à partir de la relation entre la valeur de la longueur du segment BC et la valeur du périmètre du triangle rectangle (une fonction affine.) A travers le dynamisme de la figure construite dans le Cabri, des outils de ce logiciel, on montre que, au fur et à mesure que la valeur de x varie progressivement dans</p>	<p>[θ, ⊙]_i : Notion de fonction, associé à certaines valeurs de x, un résultat qui dépend de la fonction. Notion de représentation graphique d'une fonction affine, savoir que cette représentation est une droite, et qu'une inéquation du premier degré se ramène toujours à un des cas suivants : $a \cdot x + b < 0$ ou $a \cdot x + b \leq 0$</p> <p>-si $a > 0$, l'inéquation équivaut à $x < -b/a$ ou $x \leq -b/a$</p> <p>-si $a < 0$, l'inéquation équivaut à $x > -b/a$ ou $x \geq -b/a$</p> <p>-si $a = 0$, l'inéquation devient : $b < 0$ ou $b \leq 0$. Savoir que, l'inégalité indépendante de x</p>

		<p>l'intervalle $]40/7 ; 10[$, la valeur du périmètre du triangle équilatéral est plus grand que la valeur du périmètre du carré.</p> <p>τ_{ina}: En utilisant l'inéquation $3x > 4(10 - x)$ inscrite dans le logiciel Aplusix, l'interprétation numérico-algébrique de cette inéquation est faite en utilisant la droite graduée et quelques valeurs numériques pour la valeur de x. On substitue x par des valeurs numériques qui appartiennent, soit, à des valeurs qui sont entre les nombres 0 et $40/7$, soit entre les nombres $40/7$ et 10, toutes placées dans la droite graduée, l'interprétation est faite en regardant si l'inégalité est toujours vraie.</p>	<p>est toujours vraie alors l'ensemble des solutions est \mathbb{R}. Ou bien, elle est toujours fausse, alors l'inéquation n'a pas de solution. On présente souvent l'ensemble des solutions sous forme d'un intervalle de \mathbb{R} :</p> <p>$x < c$ est caractéristique de l'intervalle</p> <p>$x \leq c$ est caractéristique de l'intervalle</p> <p>$x > c$ est caractéristique de l'intervalle</p> <p>$x \geq c$ est caractéristique de l'intervalle les deux autres intervalles que l'on est amené à rencontrer sont $\{ \}$ ou $,$ et \mathbb{R}</p>
<p>T_c: Résoudre une équation mise sous la forme $A.B = 0$ où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.</p>	<p>t_c: Résoudre l'équation $(x - 4)(2x + 3) = 0$</p>	<p>τ_c: Un produit de facteurs est nul si et seulement si, l'un au moins des deux facteurs est nul, d'où $x - 4 = 0$ ou $2x + 3 = 0$ soit $x = 4$ ou $x = -3/2$. Les solutions de l'équation sont 2, 4 et -1,5.</p>	<p>$[\emptyset, \emptyset]_c$: Notion d'équations de la forme $(ax + b) = 0$ Savoir qu'un produit de facteurs est nul si un des facteurs au moins est nul. Savoir que l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ peut être écrit comme $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$</p>

A travers les analyses que nous avons faites, on peut voir qu'il y a une distance entre l'OM visée par P1 et l'OM qui se construit dans la classe. Ces deux OM relèvent du domaine des « travaux numériques », autour du type de tâches T : « résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue ». Il s'agit d'organisations mathématiques locales, intégrant des acquis antérieurs révélés à travers l'utilisation des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique.

Pour travailler l'OM qui est visée, l'enseignant fait appel à des tâches plus complexes. Ces tâches vont constituer une organisation mathématique plus diversifiée. L'enseignant inscrit le problème périmètre en différents cadres comme nous le résumons ci-dessous :

Tableau 25 : Le NAG dans les changements des cadres

Résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue				
Travaux numériques				
Cadre géométrique	Cadre numérique	Cadre algébrique	Cadre géométrique	Cadre numérique
 $P_{\text{TRI}} > P_{\text{CAR}}$ Périmètre _{TRI} Périmètre _{CAR}	$P_{\text{TRI}} \quad P_{\text{CAR}}$ $15,3\text{cm} < 19,6\text{cm}$ $16,8\text{cm} < 17,6\text{cm}$ $17,2\text{cm} = 17,2\text{cm}$ $17,4\text{cm} > 16,8\text{cm}$ Périmètre _{TRI} Périmètre _{CAR}	Périmètre _{TRI} Périmètre _{CAR} $3x > 4(10 - x)$ $3x > 40 - 4x$ $3x + 4x > 40 - 4x + 4x$ $7x > 40$ $\frac{7x}{7} > \frac{40}{7}$ $x > \frac{40}{7}$ 7	$P_{\text{TRI}} \quad P_{\text{CAR}}$  $0 \quad 40/7 \quad 10$	$X \quad P_{\text{TRI}} \quad P_{\text{CAR}}$ 5,8 17,4 16,8 5,9 17,7 16,4 6,0 18,0 16,0 6,5 19,9 14,0 7,0 21,0 12,0 7,5 22,5 10,0 8,0 24,0 8,0
				
Les interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique sont utilisées dans les changements de cadres.				

Le problème périmètre est inscrit dans le cadre numérique. Il est résolu par P1 après l'avoir inscrit dans les différents cadres, à travers l'utilisation du NAG. En fait, nous constatons l'utilisation du NAG pour dévoiler des savoirs cachés et pour effectuer des changements de cadres et de registres. L'organisation didactique (OD) entreprise par P1 va révéler tout le travail didactique fait par cet enseignant à travers les différentes tâches dans le but de travailler sur « le problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue » et « les équations produites » que nous n'aborderons pas dans ces analyses de l'OD. Nous allons montrer à travers les analyses qui suivent, ce que fait P1 pour arriver à ses intentions, vis-à-vis des tâches complexes qui constituent l'OM instaurée dans cette classe.

16.6 Analyse de l'organisation didactique de la situation périmètre

Au niveau de l'OD que P1 utilise dans la classe, il va faire apparaître d'autres types de tâches et des sous-tâches. Ces tâches sont résolues à travers des procédures qui ne se réduisent pas à l'OM visée par P1. Ces procédures sont liées au choix du « problème périmètre » proposé par P1. En fait, par le choix du « problème périmètre » et par l'OD mise en place par P1, nous allons voir, comment nous pouvons analyser ci-dessous, les genres de tâches et les sous-tâches qui vont apparaître dans cette séance :

Tableau 22 : Analyse praxéologique des tâches de l'OD :

Types de tâches		Technique	Technologico-théorique
Genre	sous-tâches	τ	$[\theta, \Theta]$
T _g : Construire les figures à la règle graduée et compas ou avec le logiciel Cabri Géomètre.	t _{g1} : Construire un segment AB de 10 cm de longueur.	τ_{g1} : En utilisant les outils du Cabri ou la règle graduée, on construit le segment AB en plaçant le point A, et à 10 cm de ce point on place le point B.	$[\theta, \Theta]_{g1}$: Notions de distance entre deux points, longueur d'un segment.
	t _{g2} : Placer un point (dans une configuration) C sur un segment AB de 10cm de	τ_{g2} : Construire les segments adjacents AC et CB	$[\theta, \Theta]_{g2}$: Notions de segments consécutifs.

	longueur.		
	t_{g3} : Construire un triangle équilatéral connaissant le côté AC.	τ_{g3} : On a le premier côté du triangle, [AC], on prend comme écartement du compas la mesure de ce côté. On pose la pointe du compas sur A et on trace un arc de cercle, vers l'endroit où doit se trouver le point C. On pose la pointe du compas sur C et on trace un arc de cercle qui coupe le premier. On obtient ainsi le troisième sommet du triangle. Il ne reste plus qu'à tracer les deux côtés manquants du triangle et à nommer le point D.	$[\theta, \Theta]_{g3}$: Notions de construction géométrique de polygones réguliers.
	t_{g4} : Construire un carré connaissant le côté CB.	τ_{g4} : A partir du segment [CB], tracer la perpendiculaire à (CB) passant par C et et reporter sur cette perpendiculaire la longueur du côté avec le cercle de centre C passant par B. Le sommet F est un des points d'intersection de cette perpendiculaire et du cercle. Construire les parallèles à (CB) passant par F et à (CF) passant par B. Construire le point E comme intersection de ces deux parallèles. CBEF est un carré de côté [CB].	$[\theta, \Theta]_{g4}$: Notions de construction géométrique de polygones réguliers.
	t_{g5} : Construire dans un même côté d'un segment [AB] de 10 cm de longueur un triangle équilatéral ACD et le carré CBEF	τ_{g3} et τ_{g4}	
T_{pe} : Calculer les périmètres des figures	t_{pe1} : Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier.	τ_{pe1} : On mesure la valeur de la distance entre les deux extrémités de ce segment.	$[\theta, \Theta]_{pe1}$: Le segment qui a pour extrémités les points A et B se note [AB] ou [BA]. On note AB sa longueur, qui est la distance entre A et B
	t_{pe2} : Calculer le périmètre d'un triangle équilatéral, étant donné le côté.	τ_{pe2} : Le périmètre d'un polygone régulier est égal à la somme des longueurs de ses côtés. Pour un triangle équilatéral il est: $P = 3 \cdot c$ où c est la longueur d'un côté. Pour un carré la formule est: $P = 4 \cdot c$ où c est la longueur d'un côté.	$[\theta, \Theta]_{pe2}$: Notion de longueur de segment, notion de périmètre de polygones réguliers
	t_{pe3} : Calculer le périmètre d'un carré, étant donné le côté		
T_m : Mise en équation un problème du premier degré à un inconnue.	t_{m1} : Vérifier si une position ou un ensemble de positions est solution d'une conjecture.	τ_{m1} : Utilisant les outils du Cabri ou en papier et crayon, effectuer des calculs numériques successifs des longueurs des segments et des périmètres du triangle et du carré. Pour trouver des positions pour le point C, tel que le périmètre du triangle équilatéral soit plus grand que celui du carré.	
	t_{m2} : Écrire algébriquement une conjecture.	τ_{m2} : On représente à travers des lettres, des termes des opérations	$[\theta, \Theta]_{m2}$: Notions d'opérations algébriques,

	<p>t_{m3} : Représenter algébriquement les longueurs des segments AC et AB sachant que AB vaut 10 cm.</p> <p>t_{m4} : Représenter algébriquement le périmètre du triangle rectangle connaissant le côté.</p> <p>t_{m5} : Représenter algébriquement le périmètre du carré connaissant le côté</p>	(addition, multiplication, soustraction, division et extraction de racine) dont l'objectif principal est de faire apparaître l'inéquation polynomiale à partir des structures rattachées à une représentation géométrique du problème périmètre.	notions d'inéquation, notions de périmètre des polygones réguliers.
	t_{m6} : Définir le périmètre d'un polygone	τ_{Pe2}	$[\theta, \Theta]_{Pe2}$
	t_{m7} : Calculer des valeurs numériques dans une expression algébrique.	τ_{m7} : Tout ce qui se trouve représenté par des lettres, devra être considéré comme un nombre unique à prendre comme tel. La règle des signes s'applique évidemment dans ces calculs.	$[\theta, \Theta]_{m7}$: Valeur de l'expression dans laquelle on a remplacé chacune des variables par des nombres de leur domaine de définition. On pourra s'appuyer dans toute cette partie sur des activités déjà pratiquées dans les classes antérieures, notamment celles de tests par substitutions de valeurs numériques à des lettres.
	t_{m8} : Calculer la valeur approchée d'une fraction.	τ_{m8} : On calcule le quotient de la division de 40 par 7 en utilisant la calculatrice qui affiche 5,71428571.	$[\theta, \Theta]_{m8}$: Notion de division non exacte.
	t_{m9} : Calculer la valeur approchée d'un nombre décimal	τ_{m9} : On fait la troncature au dixième d'un nombre décimal, en coupant au rang indiqué et on supprime les chiffres à droite de la coupure puis : - si le chiffre qui suit est 5, 6, 7, 8 ou 9, on augmente de 1 le dernier chiffre du nombre coupé, - si le chiffre qui suit est 0, 1, 2, 3 ou 4, on garde le nombre coupé.	$[\theta, \Theta]_{m9}$: Notion de valeur approchée d'un décimal (par excès ou par défaut) au dixième d'un nombre décimal.
T_r : Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue.	t_r : Résoudre l'inéquation $3x > 4(10 - x)$.	τ_{r1} : Utilisant le logiciel Cabri Géomètre on construit un segment [AB] de 10 cm de longueur, puis on place un point C sur le segment [AB]. Ensuite on construit alors, du même côté du segment, le triangle équilatéral ACD et le carré CBEF. Sur le segment AB on a placé le point C, maintenant, on mesure les segments AC et CB, soit avec la règle graduée, soit, avec le logiciel Cabri Géomètre. Ensuite, on construit le triangle équilatéral et le carré, puis on calcule les périmètres. On teste différentes	$[\theta, \Theta]_r$: On appelle inéquation d'inconnue x, toute inégalité contenant la lettre x, où x représente un nombre inconnu. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu pour que l'inégalité soit vraie : chacune de ces valeurs est appelée une solution de l'inéquation.

		<p>périmètres et on compare directement les périmètres du triangle équilatéral et du carré.</p> <p>τ_{r2}: Dans le milieu papier crayon ou dans le micro-monde Cabri Géomètre on trouve le point C pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré CBEF, ensuite, on effectue des calculs numériques successifs des longueurs, des segments et des périmètres du triangle et du carré.</p> <p>τ_{r3}: Dans le milieu papier crayon ou en utilisant le logiciel Aplusix, on résout l'inéquation $-3x > 4(10 - x)$ - du premier degré à une inconnue, construite à partir de la variation des périmètres des polygones en fonction du point C. On remplace tout d'abord la valeur de x dans l'inéquation par des nombres entiers en vérifiant si l'inégalité est vérifiée. Ensuite, on développe d'abord le deuxième côté de l'inéquation $3x > 4(10 - x)$: il devient $3x > 4 \cdot 10 - 4 \cdot x$, puis $3x > 40 - 4x$; on fait ensuite disparaître le « $-4x$ » du deuxième membre de l'inéquation en ajoutant « $4x$ » de chaque côté : il devient $3x + 4x > 40 - 4x + 4x$, ce qui donne $7x > 40$, puis on isole « x », en divisant chaque côté de l'inéquation par 7 : il devient $\frac{7x}{7} > \frac{40}{7}$, ce qui donne $x > \frac{40}{7}$ ».</p>	
<p>T_i: Interpréter les résultats d'une inéquation.</p>	<p>t_{i1}: Interpréter géométriquement les résultats de l'inéquation $3x > 4(10 - x)$.</p> <p>t_{i2}: Interpréter algébriquement les résultats de l'inéquation $3x > 4(10 - x)$.</p>	<p>τ_{i1}: En utilisant la construction géométrique faite au Cabri Géomètre, on interprète géométriquement les résultats de l'inéquation $3x > 4(10 - x)$ à travers l'interprétation graphique que si construit à partir de la relation entre la valeur de la longueur du segment BC et la valeur du périmètre du triangle rectangle (une fonction affine.) A travers le dynamisme de la figure construite dans le Cabri, des outils de ce logiciel, on montre que, au fur et à mesure que la valeur de x varie progressivement dans l'intervalle $]\frac{40}{7}; 10[$, la valeur du périmètre du triangle équilatéral est plus grand que la valeur du périmètre du carré.</p> <p>τ_{i2}: En utilisant l'inéquation $3x > 4(10 - x)$ inscrite dans le logiciel Aplusix, l'interprétation numérique-algébrique de cette inéquation est faite en utilisant la droite graduée et quelques valeurs numériques pour la valeur de x. On substitue x par des valeurs numériques</p>	<p>$[\theta, \Theta]$: Notion de fonction, qui s'associe à certaines valeurs de x, un résultat qui dépend de la fonction. Notion de représentation graphique d'une fonction affine, savoir que cette représentation est une droite, et qu'une inéquation du premier degré se ramène toujours à une des cas suivants $ax + b < 0$ ou $ax + b \leq 0$</p> <p>-si $a > 0$, l'inéquation équivaut à $x < -b/a$ ou $x \leq -b/a$</p> <p>- si $a < 0$, l'inéquation équivaut à $x > -b/a$ ou $x \geq -b/a$</p> <p>-si $a = 0$, l'inéquation devient : $b < 0$ ou $b \leq 0$. Savoir que l'inégalité indépendante de x et qui ou bien est toujours vraie alors, l'ensemble des solutions est R. Ou bien est</p>

		<p>qui appartiennent, soit à des valeurs qui sont entre les nombres 0 et $40/7$, soit entre les nombres $40/7$ et 10, tous places dans la droite graduée, l'interprétation est faite en regardant si l'inégalité est toujours vraie.</p>	<p>toujours fausse alors l'inéquation n'a pas de solution. On présente souvent l'ensemble des solutions sous forme d'un intervalle de \mathbb{R} :</p> <p>$x < c$ est caractéristique de l'intervalle</p> <p>$x \leq c$ est caractéristique de l'intervalle</p> <p>$x > c$ est caractéristique de l'intervalle</p> <p>$x \geq c$ est caractéristique de l'intervalle</p> <p>les deux autres intervalles que l'on est amené à rencontrer sont $\{ \}$ ou \mathbb{R}</p>
--	--	--	---

Les analyses faites jusqu'ici, ont été possibles grâce au protocole que nous avons construit lors de notre observation et les OM reconstruites. Elles vont nous permettre de continuer à approfondir, de façon plus détaillée – ce que fait véritablement l'enseignant - c'est-à-dire analyser cette séance en termes de moments didactiques, en utilisant l'approche praxéologique et le filtre du numérique. Pour cela, nous allons présenter, tout d'abord, l'étude globale de l'OD et ensuite, l'étude de l'OD par phases en lien avec le NAG.

16.6.1 Analyse globale de l'organisation didactique.

L'organisation didactique entreprise par P1 dans cette séance, comme pendant toutes les autres, est marquée par le style didactique de cet enseignant, par la façon avec laquelle il réalise ses cours dans cette classe. Souvent, P1 commence ses cours par une phase d'exercices où il propose aux élèves une tâche d'introduction à travers un travail, d'abord individuel, puis collectif. Dans la phase de cours, la tâche d'introduction est travaillée à partir de nouvelles notions ou des notions vues récemment, dans un travail plutôt collectif dans lequel se trouve aussi l'institutionnalisation de connaissances. La séance se termine souvent par une phase de corrections des exercices. Nous présentons, ci-dessous, la trame de la séance C21 en rapport avec notre sujet d'étude, en précisant les parties de la séance et les différents types de travail entrepris par P1 et les élèves :

Tableau 26: La trame et les différents types de travail dans chaque partie de la séance.

Lignes	Durée (min)	Modalité travail	Phases		Type travail	Partie de la séance
03	02	Collectif	0	Synthèse à propos des règles sur la résolution des inéquations.	Lecture des synthèses des règles à propos de la résolution des inéquations.	
04-10	03	Individuel	I	Construction géométrique de la figure du problème périmètre.	Résolution de la tâche t_{g5}	AER
11-15	03	Collectif	II	Mise en évidence de la question à résoudre à travers l'aspect dynamique du logiciel Cabri Géomètre.	Résolution des tâches t_{g1} ; t_{g2} ; t_{g3} ; t_{g4} et t_{g5}	
16-21	02	Collectif	III	Exploration de quelques configurations à l'aide du logiciel Cabri Géomètre.	Résolution des tâches t_{pe1} ; t_{pe2} et t_{pe3} Cours sur résolution d'un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue	AER Cours
22-47	06	Collectif	IV	Mise en équation du problème.	Cours sur résolution d'un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue Résolution des tâches t_{m1} ; t_{m2} ; t_{m3} ; t_{m4} ; t_{m5} ; t_{m6} ; t_{m7} ; t_{m8} et t_{m9}	
48-52	03	Individuel	V	Résolution de l'inéquation par les élèves.	Résolution de la tâche t_r	
53-55	01	Collectif	VI	Résolution de l'inéquation par P1 (correction).	Résolution de la tâche t_r	
56-59	02	Collectif	VII	Retour au problème périmètre.	Résolution des tâches t_{i1} et t_{i2}	

L'organisation didactique de la séance a une structure binaire, qui débute avec une activité d'étude et de recherche, AER, et se poursuit par une phase collective d'élaboration et d'institutionnalisation de connaissances autour de la résolution des inéquations. En regardant cette OD à travers les différentes tâches proposées, nous constatons que, dans cette séance, un complexe praxéologie est instauré.

La méthode employée par P1, autour de la résolution du problème périmètre, utilise les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique pour l'aider à travailler sur les objets qui vont apparaître dans l'accomplissement de cette tâche. Ces objets vont participer à la mise en place d'une nouvelle compétence du numérique dans la classe de troisième : résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue.

Un complexe praxéologie va être instauré au long de cette séance pour aider P1 à aboutir aux objectifs visés. En effet, à travers l'observation et les traces repérées tout au

long de cette séance, l'enseignant utilise implicitement le **NAG** à travers de plusieurs tâches issues de la situation périmètre. Nous verrons, lors de l'analyse en termes de phases, que la structure de cette séance est beaucoup plus complexe. Les différentes phases que nous avons découpées chronologiquement, avec des fonctions diverses, montrent bien ce fait.

16.6.2 Analyse de l'organisation didactique par phases

Notre intérêt est d'étudier comment P1 installe et utilise le **NAG** dans cette séance. En considérant les contraintes disciplinaires auxquelles est assujéti l'enseignant, nous analyserons l'OD qu'il a mise en place à partir des phases qui apparaissent dans la trame de cette séance. Dans la suite de ce travail, nous analyserons davantage les phases de la séance où P1 utilise considérablement les interrelations entre les domaines mathématiques. Nous analyserons les phases de l'OD de cette séance en utilisant les concepts développés par l'approche anthropologique du didactique et le filtre du numérique. Nous avons l'intention de mettre en évidence l'utilisation des interrelations entre les domaines mathématiques comme un outil didactique nécessaire à un meilleur fonctionnement de la situation périmètre. Dans ce contexte deux questions nous ont guidé :

Comment le **NAG** favorise-t-il une mise en évidence des savoirs cachés ou manquants au niveau des connaissances, permettant d'articuler les différents cadres numérique-algébrique et géométrique ?

Comment P1 utilise-t-il les connaissances dont il dispose, associées à différents domaines mathématiques ?

Pour répondre à ces questions, en considérant la complexité de l'OD de la séance, nous analyserons chaque phase de la séance, à travers laquelle on pourra scinder chronologiquement tout le déroulement des diverses fonctions.

Nous présentons l'analyse de la séance considérant des effets potentiels du travail spécifique de la pratique de P1 sur les apprentissages des élèves. A partir de ce travail, le cœur du travail de P1 dans cette séance peut se décliner ainsi : comment P1 l'enseigne-t-il ? Une praxéologie didactique permettra de modéliser la réponse à cette question. Dans le cadre de la TAD, les praxéologies didactiques du professeur, qui soutiennent - son travail hors de la classe et dans la classe - sa pratique (et en particulier ses interactions avec les élèves et les autres acteurs du système d'enseignement), vont être appréhendées dans le cadre d'une telle analyse des processus didactiques. Leur mise à jour suppose des contextes d'observation et d'analyses pluriels, qui excèdent ce que l'on peut voir simplement dans la salle de classe.

16.6.2.1 Phase 0 - Synthèse sur la résolution des inéquations.

L'enseignant commence la séance en donnant les moyennes des élèves concernant le cycle d'évaluations qu'ils ont fait. Dans cette phase, P1 présente aux élèves la feuille de synthèse sur la résolution des inéquations et l'énoncé du problème périmètre autour duquel la « situation périmètre » va être développée. Cette phase révèle la préoccupation de P1 à institutionnaliser des règles sur la résolution des inéquations :

Table 23 : Extrait de la séance - C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
3	00:02:00	P1	Donc, sortez vos cahiers d'exercices et de cours. Ok, on va commencer par un cette situation. Tout le monde a les deux feuilles de cours ? Je profite pour recentrer : résoudre une équation – c'était fait. Résoudre une inéquation, on a trois règles, en particulier la règle 3 qui nous intéresse [...].

Cette phase marque l'intention de P1 d'institutionnaliser des règles sur la résolution des inéquations. L'enseignant révèle aussi, à travers cette phase, qu'il y a trois règles dans la feuille de synthèse pour résoudre des inéquations, et que cette situation est intéressante en particulier pour la règle 3 : *savoir si on multiplie ou on divise par un nombre négatif, tout se fait à condition de changer l'ordre des nombres dans une équation*. En regardant les cahiers des élèves, un travail autour des inéquations du premier degré a déjà été fait. En fait, P1 porte une attention à ce que les élèves prennent des notes dans leurs cahiers. Ce qui nous fait penser qu'il aura une AER, mais aussi une institutionnalisation des règles sur les résolutions d'inéquations du premier degré à une inconnue.

16.6.2.2 Phase I - Construction géométrique de la figure.

Des feuilles de synthèse ont été distribuées aux élèves pendant des séances précédentes. P1 avait préparé trois feuilles de synthèse pour aborder « équations et inéquations », mais il a préféré donner chaque feuille à chaque fois qu'il allait aborder les sujets présentés.

Avant cette séance, il y avait déjà dans le cahier d'exercices des élèves, des tâches portant sur la résolution des inéquations. Le jour où nous avons observé cette séance, l'enseignant a distribué dans la classe la feuille de synthèse numéro 2. Les élèves la reçoivent et la collent dans leur cahier de cours. Pendant cette séance, les élèves ne prennent pas trop de notes sur leur cahier de cours, mais ils en prennent souvent sur leur cahier d'exercice. Comme le point P1 dans la phase 0, une institutionnalisation pour les règles de résolution des inéquations a déjà été faite. Le travail entrepris par l'enseignant dans cette séance vise à recentrer les règles 1 et 2 de la feuille de synthèse.

Après avoir lu la feuille de synthèse, les élèves commencent le travail sur l'AER proposé par P1. Le travail est en majorité pris en charge par P1, à travers les questions-réponses, et aussi à travers les dialogues en miroir. Cette phase débute par la proposition du problème périmètre : « *Construire un segment $[AB]$ de 10 cm de longueur. Placer un point C sur ce segment. Construire alors, du même côté du segment, le triangle équilatéral ACD et le carré $CBEF$. Où doit se trouver le point C pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré $CBEF$?* », dont la fonction semble être une première rencontre avec ce type de tâche : « *résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue* », lequel P1 décompose classiquement en trois sous-tâches : T_m , T_r et T_i .

Cette situation se présente plutôt sous forme d'AER où les élèves n'ont pas beaucoup de temps pour travailler seuls, ce qui peut créer des difficultés pour la résolution du problème. Les élèves n'ont pas, en fait, à résoudre d'un seul coup, le problème posé dans la situation, mais à construire la figure mise en inéquation pour résoudre ensuite l'inéquation et interpréter enfin le résultat. C'est véritablement la première rencontre des élèves avec un problème d'une telle complexité. Dans cette phase commence la première

étape de ce travail : elle est de nature géométrique et doit être familière aux élèves et non problématique.

La séance observée est véritablement la première, en classe de troisième, sur la résolution d'un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue : les cahiers des élèves montrent bien cette situation. L'enseignant avait déjà abordé les équations et les inéquations (de façon très vague). Cette situation s'inscrit donc dans le secteur des problèmes numériques et algébriques, plus précisément dans le domaine des « équations, inéquations, systèmes d'équations », à propos duquel le programme précise :

« La résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue un objectif de cette partie du programme; elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. S'y ajoutent certains problèmes numériques purs, qui jouent un rôle dans l'appropriation de concepts importants. »

A propos du thème des inéquations du premier degré, le programme de troisième indique :

Tableau 27: Extrait du programme de troisième.

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Équations et inéquations du premier degré Inéquation du premier degré à une inconnue	Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Représenter ses solutions sur une droite graduée.	On pourra s'appuyer dans toute cette partie sur des activités déjà pratiquées dans les classes antérieures, notamment, celles de tests par substitution de valeurs numériques à des lettres.

Le thème « équations » a déjà été étudié au collège en classe de quatrième, ce qui fait que, quand P1 aborde ce thème en troisième, ce thème ne pose pas de problème aux élèves et P1 en profite, pendant le travail sur les équations, pour parler des « inéquations ».

Dans cette phase, P1 demande une construction géométrique, qui a par fonction de promouvoir une première rencontre de la classe avec les types de tâches T_m : *Mise en équation un problème du premier degré à une inconnue*. Ce type de tâche a déjà été travaillé en classe pendant l'étude des équations, mais de façon vague, et avec un travail plutôt à la charge de l'enseignant. Tandis que dans cette séance, et plus précisément dans cette phase, même si la majorité du travail reste encore à la charge de P1, la tâche T_m est véritablement travaillée par les élèves.

L'enseignant a présenté la tâche sous forme d'un exercice individuel en donnant à chaque élève l'énoncé sur un bout de papier.

Tableau 28: Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
6	00:05:08	P1	E14, on travaille. E5 et E7 je vous la donnerai tout suite.
7	00:05:27	P1	Donc, il faut construire le segment de longueur AB. E14, tu vas te mettre au travail ? Tu arrêtes maintenant!

Les élèves n'ont pas eu un temps considérable pour commencer à résoudre tout seuls la tâche T_m . L'enseignant circule dans la classe et s'aperçoit que beaucoup d'élèves n'arrivent pas à démarrer la résolution de la tâche T_m . P1 commence à guider les élèves vers la solution, à travers des questions-réponses. Ces questions ont été, parfois, posées en forme de sous-tâches :

Tableau 29 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
8	00:06:27	P1	Un segment 10 cm. Il y a quoi sur le segment ? Un point sur le segment.

La première question, de nature géométrique, doit être familière aux élèves et sans difficulté. P1 construit dans le logiciel Cabri Géomètre le segment AB de 10 cm, et ajoute un point C sur ce segment. Il utilise l'outil du Cabri pour mesurer et afficher la longueur du segment AB.

Dans les séances précédentes, un travail sur la résolution des inéquations a été fait : l'effet de l'enseignement didactique dispensé dans ces séances fait que quelques élèves s'interrogent sur la rupture d'un tel contrat :

Tableau 30: Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
9	00:06:54	E5	Elles sont finies ? C'est fini les inéquations ?
10	00:06:57	P1	Comment ? Non. Pourquoi ? On va les finir pour faire des exercices après.

Le fait d'avoir passé aux constructions géométriques incite les élèves à penser que le travail sur la résolution des inéquations est terminé. On voit la pertinence du travail entrepris par P1 dans cette séance. Le fait d'avoir donné une feuille de synthèse sur la résolution des inéquations et commencer le travail par une construction géométrique, suscite aussi des questions par rapport au contrat didactique établi par P1 dans cette classe.

16.6.2.3 Phase II - Mise en évidence de la question à résoudre.

Dans cette phase, une seconde question est posée tout au début. Elle impose une technique de mise en inéquation pour résoudre le problème périmètre, instaurant ainsi le caractère problématique de l'activité :

Tableau 31: Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
11	00:07:27	P1	Maintenant que vous avez tous fait la construction, la question que je voudrais vous poser est celle-ci : Où est-ce que je dois mettre le point C pour que le périmètre du triangle équilatéral soit plus grand que le périmètre du carré ?

Malgré la résolution du problème périmètre décomposé classiquement en trois sous-tâches : T_m , T_r et T_i , le type de tâches T_m qui constitue aussi une première rencontre des élèves avec ce type de travail est au centre du travail de la séance observée. Elle apparaît comme un élément important dans l'organisation didactique au service des tâches T_r et T_i . La tâche T_m est précédée par les tâches T_g et T_{pe} qui sont, en quelque sorte, des composantes du type de tâche T_m . L'enseignant utilise les types de tâches T_g et T_{pe} pour préparer le travail autour du type de tâche T_m .

« La résolution d'une équation » a été traitée dans des séances précédentes. Nous signalons à cet égard que l'association t_m et t_r n'apparaît explicitement, dans les programmes, qu'à partir de la classe de 4^e.

Dans les deux classes de 6^e et de 5^e « la résolution de problèmes constitue l'objectif fondamental » de la partie travaux numériques, mais ces problèmes sont surtout l'occasion d'activités numériques. Les contenus en liaison avec la résolution d'équations portent sur «

l'initiation à la résolution d'équations » à l'appui des activités numériques et de l'introduction du calcul littéral. Dans le programme de ces classes, la mise en équation semble aller de soi et aucune technique spécifique n'est indiquée.

Dans cette phase, par rapport au problème périmètre, on reste dans la première rencontre avec ce type de tâches. Mais, par rapport au type de tâche T_g , nous sommes à la fois dans les moments de l'exploration du type de tâche et d'élaboration du bloc technologico-théorique.

C'est à partir de cet épisode que les élèves commencent vraiment à rentrer dans le problème. Après un temps de travail individuel, très bref, la question posée dans l'extrait précédent commence à être corrigée par P1, à travers un travail autour des tâches coopératrices dirigées complètement par cet enseignant, à travers les questions-réponses et/ou les dialogues au miroir.

Cette phase est composée, respectivement, par la proposition des tâches t_{g1} ; t_{g2} ; t_{g3} ; t_{g4} et t_{g5} qui appartiennent au type de tâche T_g : « *Construire les figures à la règle graduée et compas ou avec le logiciel Cabri Géomètre.* » Ces tâches ont été résolues par quelques élèves avec l'aide de la règle graduée, du compas, de la calculatrice, etc. Cependant, P1 résout ces tâches à travers des constructions géométriques en utilisant le logiciel Cabri Géomètre.

Pendant le travail sur les types de tâches T_g , un autre travail sur la valeur des longueurs de segments, les périmètres des figures et sur des constructions géométriques est entrepris. Ce travail est utilisé pour faire émerger un embryon pour le bloc technologico-théorique du type de tâche T_g . Les types de nombres, les opérateurs, nous permettent de signaler que les tâches t_{g1} ; t_{g2} ; t_{g3} ; t_{g4} et t_{g5} sont placées dans le domaine géométrique, donc le premier moment d'étude se passe dans le domaine géométrique. Tout le travail pendant cette phase reste dans le domaine de retraitement géométrique jusqu'à l'émergence de la première tentative de résolution.

16.6.2.4 Phase III - Exploration de quelques configurations à l'aide du Cabri.

Dans cette phase, trois « tâches coopératrices » vont apparaître dans la séance pour aider P1 à élaborer une première technique pour résoudre T_m . En ce moment, par rapport au type de tâche T_m , nous sommes, à la fois, dans l'exploration du type de tâche et dans l'élaboration de la technique. Concernant le type de tâche T_{Pe} , nous sommes dans le travail de la technique, lequel est fait à travers des spécimens t_{Pe1} ; t_{Pe2} et t_{Pe3} .

L'élaboration de la technique pour résoudre T_m commence par un travail géométrique et passe aussi par une tentative de technique numérique. La technique géométrique reste sur la figure construite dans le Cabri : le fait de pouvoir déplacer des points dans la construction de la figure au Cabri, c'est-à-dire l'aspect dynamique de ce micro-monde, permet aux élèves de voir, au moment où P1 intervient au tableau, quand le triangle est plus petit ou plus grand que le carré. La technique numérique est instaurée, à partir du moment où P1 précise des valeurs numériques pour les valeurs des longueurs des côtés du triangle et du carré dans la construction de la figure.

À l'aide des questions-réponses et des manipulations de la figure construite dans le logiciel Cabri Géomètre, P1 fait émerger un embryon de technique pour T_m , à partir de laquelle une autre technique sera développée. Dans cette phase, le type de tâches T_{Pe} apparaît, non comme une fin en soi, mais comme un moyen pour que cette première technique de résolution se constitue. Cet embryon de technique est constitué d'essais-

erreurs où P1 demande des calculs (longueurs, périmètre) aux élèves pour tester ces valeurs dans la construction géométrique de la figure. Le **NAG** joue un rôle important dans cette phase, car il met en évidence les relations existant entre les valeurs des périmètres des figures, les valeurs des longueurs des côtés du triangle et du carré, de manière numérique et graphique. Dans la constitution de cet embryon P1 signale que résoudre une inéquation, c'est trouver des valeurs numériques qui valident une inégalité, et à partir de cette définition, P1 fait des essais numériques en utilisant la construction pour valider ou invalider les essais :

Tableau 32: Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
18	00:11:55	P1	Donc, on va marquer avec ça. Pour calculer la longueur AC. AC fait combien ? C'est 2,86 et donc le milieu ça serait ou ? Après cinq, ok ! Donc, je pose là, je vais mettre à 5,1 cm, et du coup, on va calculer le périmètre de celui-là : ça fait 15,3 cm. C'est bien, je vais le mettre là. Le périmètre du carré est 19,6 cm. Donc, est-ce que ce que tu dis semble valide ? Bien, non ! Même avec ce choix, j'ai mis le point C après le milieu du segmente AB. Est-ce que le périmètre de celui-là est plus grand que le périmètre de celui-là ? Bien non ! Donc, le côté est négatif, on élimine cette proposition parce qu'on a trouvé un contre exemple.
19	00:12:46	P1	Allez, d'autres propositions.
20	00:12:49	E1	Sur le point B.


L'enseignant utilise, d'abord implicitement, les interrelations entre les domaines mathématiques, et après plus explicitement, à travers les tentatives essais-erreurs, il utilise le **NAG** pour construire un corpus constitué des valeurs numériques pour : la valeur de la longueur du côté ([AC]) du triangle ; la valeur du périmètre du triangle équilatéral de côté [AC] ; la valeur de la longueur du côté ([CB]) du carré ; la valeur du périmètre du carré de côté [CB]. A partir de cette phase la tâche est inscrite dans le domaine numérique.

16.6.2.5 Phase IV - Mise en équation du problème.

L'accomplissement de la mise en équation du problème périmètre a été décomposé en trois types de tâches : T_G , T_{Pe} et T_m avec les spécimens t_{m1} ; t_{m2} ; t_{m3} ; t_{m4} ; t_{m5} ; t_{m6} ; t_{m7} ; t_{m8} et $t_{m9} \in T_m$ qui sont ceux qui nous intéressent le plus. Dans cette phase, il est important de préciser que, par rapport au problème périmètre, nous sommes plutôt dans le moment d'exploration du type de tâches, avec quelques éléments du moment d'élaboration du bloc technologico-théorique. Par rapport au type de tâches T_m , nous sommes dans la période technique.

Dans cette phase, les élèves sont relativement guidés par P1. Ils essaient de résoudre la tâche de type T_m algébriquement, ils essaient de donner une technique de résolution, mathématiquement plus adaptée pour la tâche T_m , technique que semble souhaiter institutionnaliser P1 :

Tableau 33: Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours	Remarque
22	00:13:26	P1	Là, c'est ce qu'on voit par expérience. Maintenant, il faudra arriver à le dire mathématiquement, à partir de ça, voilà ! A partir de telle position. Mais, bon ! Comment on peut faire ça, et comment on peut trouver cette position ?	P1 projette le cabri-dessin au tableau. 

En fait, l'enseignant guide les élèves à percevoir que les techniques utilisées jusqu'à cette phase ne sont pas satisfaisantes. P1 montre que le fait d'avoir la figure sur le Cabri, de pouvoir manipuler des éléments, ne suffisent pas. Il faut avoir une résolution mathématique plus adaptée, c'est-à-dire une technique algébrique. P1 guide les élèves dans la recherche des éléments qui vont leur permettre d'inscrire, d'abord la tâche dans le domaine algébrique et après d'instaurer la technique algébrique. Pour cela, P1 utilise la construction géométrique de la figure, des valeurs des longueurs des côtés du triangle et du carré, des périmètres, etc. P1 introduit l'inconnue, représentée par « x » pour modéliser le périmètre du triangle et du carré en fonction du côté du triangle.

En fait, on est toujours dans l'AER sur la résolution du problème périmètre, mais là, on rentre effectivement dans un sous-type de tâches particulier, qui fait partie en fait de la technique de résolution du problème périmètre. Plus précisément, on va travailler sur la mise en équation, c'est-à-dire, sur le type de tâche T_m et donc nous sommes globalement au moment de l'exploration du type de tâche T_p : « Résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue ». On rentre effectivement dans le type de tâche T_m : « Maintenant, il faudra arriver à le dire mathématiquement. » Autrement dit, il s'agit bien de « mettre en équation » comme on peut le voir dans l'extrait suivant :

Tableau 34:Extrait de la séance-C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
30	00:15:22	P1	Comment je peux nommer AC, donc ? Parce qu'au final, c'est ça que je vais chercher.

Cet extrait montre qu'on est vraiment dans la technique de T_m , qui commence par le choix d'une inconnue. « je dois commencer par choisir une inconnue x ». Les élèves sont loin de maîtriser cette technique : P1 essaie de les aider pendant tout le travail, mais c'est en fait lui qui assure la plus grande part de ce travail de modélisation :

Tableau 35 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
44	00:18 :02	P1	Le fait de passer au numérique vous permettra de travailler sur des choses simples, de travailler des petits problèmes que vous gérez sans difficulté. [...] la longueur de AC, je la donne par une lettre et je la mets à cet endroit là. Et quel est le périmètre du carré donc ?

Ce passage, situé à la fin de cette phase, montre que les élèves ont des difficultés pour élaborer ou mettre en œuvre la technique algébrique de mise en équation. En fait, les interrelations entre les domaines mathématiques jouent ici un rôle important dans l'aide que P1 fournit aux élèves. L'enseignant essaie, à travers les questions-réponses, de faire sortir quelques éléments technologico-théoriques liés complètement au NAG :

Tableau 36 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
36	00:16:00	P1	[...] Toujours en fonction de X hein ! Parce que, si non ! C'est lui l'inconnu.

Dans cet autre extrait, P1 est toujours en train d'aider les élèves dans la mise en équation, en prenant à sa charge pratiquement tout le travail :

Tableau 37 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
41	00:17:27	P1	Si AC égale à 7, comment on fait pour calculer CB ? Ce n'est pas combien il mesurerait surtout. C'est quel calcul je ferai pour calculer CB ?
42	00:17:38	E9	C'est AB moins 7

P1 se sert d'exemples numériques pour aider les élèves, pour passer à un traitement plus général, par l'algèbre :

Tableau 38 : Extrait de la séance - C21.

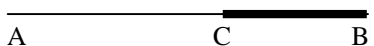
Ligne	Temps	Acteur	Discours
43	00:17:41	P1	Si AC mesurait 6, CB ça serait ? $X - 6$. Mais si, on a posé que AB mesurait 10 cm. Combien serait CB ? CB serait 4, 10 moins 6.

En fait nous pouvons voir l'utilisation du **NAG** dans les artifices didactiques de cet enseignant. Dans cette phase, nous sommes majoritairement dans l'exploration du type de tâches avec élaboration de quelques éléments du bloc technologico-théorique.

Le travail autour de la tâche T_m est inscrit plutôt dans le domaine numérique et pose des problèmes aux élèves. P1 utilise le logiciel Cabri Géomètre pour représenter la figure qui servira d'appui dans la construction des techniques. Ce sont ces techniques que nous avons repérées dans les cahiers d'exercices de la plupart des élèves. Nous ne savons pas cependant quelles sont les techniques que les élèves ont utilisées avant ce travail en classe.

Cette phase marque le commencement du travail de la technique que P1 souhaite institutionnaliser pour le type de tâches T_m . Nous pouvons même rencontrer dans cette phase, quelques éléments qui constituent un cours proprement dit, autour du type de tâches T_m . L'enseignant utilise le travail fait autour de T_m pour inscrire le problème périmètre dans le cadre algébrique. Pour cela, les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique sont largement sollicitées comme on peut le voir dans l'extrait suivant :

Tableau 39: Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours	Remarque
22	00:13:26	P1	Là, c'est ce qu'on voit par expérience. Maintenant, il faudra arriver à le dire mathématiquement, à partir de ça, voilà ! A partir de telle position. Mais, bon ! Comment on peut faire ça, et comment on peut trouver cette position ?	<i>P1 projette le cabri-dessin au le tableau.</i> 
23	00:13:34	E6	Avec une inéquation.	
24	00:13:35	P1	Comment tu fais ?	
25	00:13:37	E6	Heu!! A.....	
26	00:13:48	P1	Bon, je vois qu'il y a une inéquation, alors, il faudrait qu'il ait une inconnue, et qu'est-ce qu'on cherche qui n'est pas connu ?	

Dans ce travail la droite graduée est une aide à cette articulation entre les deux domaines.

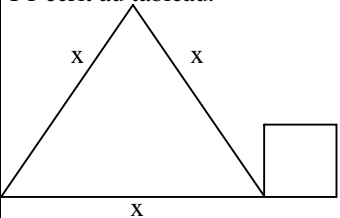
Tableau 40: Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
27	00:14:00	P1	Oui, le périmètre du triangle ! Et qu'est-ce qui doit être plus grand que lui ? D'accord, le périmètre du carré. Donc, le problème qui se pose c'est celui-là : le périmètre d'un triangle ACD, il doit être plus grand que le périmètre de A, pardon de CBEF.
28	00:14:25	P1	Bon mais, tout le monde aime faire ça, on n'a plus rien derrière, ou plutôt, il faudrait se dire: De quoi dépend le périmètre de ACD, de quoi dépend le périmètre de CBEF ? Ils dépendent l'un de l'autre, oui ! Ils dépendent de la position du point C. Tout dépend de la position du point C.

29	00:14:45	P1	Donc, tout mon problème va être de savoir comment repérer la position du point C sur le segment AB. La position pour repérer le point C, c'est donner sa distance par rapport à A ou par rapport à B. Il y a deux extrémités, donc, on pourrait faire une ou l'autre. Du coup, je vais peut-être effacer celui-là et celui-là, puis on va, maintenant, travailler, dans un cadre plus général. Mais, c'est vrai que le périmètre de ACD dépend directement du choix de la distance AC, et du coup le périmètre du carré dépend aussi du choix de AC.
30	00:15:22	P1	Comment je peux nommer AC, donc ? Parce qu'au final, c'est ça que je vais chercher.
31	00:15:28	E10	« X »
32	00:15:29	P	Pourquoi pas ! Si on pense que ça c'est X centimètres, alors, quel est le périmètre du triangle?
33	00:15:39	E1	3 X

A l'instant 15 min 45 secondes, P1 projette au tableau les premiers éléments de la représentation algébrique du problème périmètre : l'inéquation.

Tableau 41 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours	Remarque
34	00:15:41	P1	Le triangle, je vous rappelle qu'il est équilatéral et du coup le périmètre du triangle c'est X plus X plus X. 3 x, 3 fois X. Pourquoi x ?	P1 écrit au tableau.  Ensuite P1 écrit $\text{PérimètreACD} > \text{PérimètreCBEF}$ $3x >$ E14 demande pourquoi x
35	00:15:58	P1	Ça va jusqu'à là ?	E1 répond à E14, x parce que c'est l'inconnue. Les élèves répondent en même temps.
36	00:16:00	P1	Et maintenant, je vous laisse chercher un peu pour trouver le périmètre du carré. Toujours en fonction de X hein ! Parce que sinon ! C'est lui l'inconnu. E1 ?	P1 circule dans la classe.

Dans cette partie de la séance, la tâche commence à passer au cadre algébrique. L'enseignant construit avec les élèves les premiers éléments pour instaurer le cadre algébrique et laisse la partie suivante du travail à la charge des élèves.

Après le court instant laissé aux élèves pour travailler de manière plus autonome, P1 va reprendre la direction de la séance pour compléter les éléments manquants dans l'inéquation qu'il a commencé à écrire. Pour cela, il effectue des calculs numériques successifs pour trouver la valeur des longueurs des segments et des périmètres pour le carré à partir du triangle :

Tableau 42 : Extrait de la séance - C21.

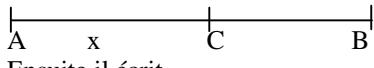
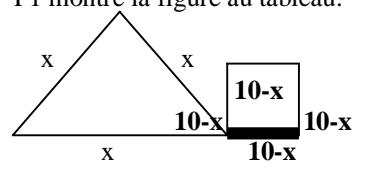
Ligne	Temps	Acteur	Discours
38	00:16:21	P1	Oui, le point C, c'est, trouver le périmètre du carré toujours en fonction de X, toujours en fonction de la position du point C. Si je me donne une

			certaine longueur là, je dois être capable de trouver le périmètre du carré.
39	00:16:33	E1	AB moins AC fois 4.
40	00:17:07	P1	Où, mais, c'est combien AB ? Vous le connaissez ? Attention, il y a quatre cotés sur un carré E24. Alors, si ça ne vient pas, prenez des exemples, et dites vous, si AC mesurait 7, combien mesurerait CB ?
41	00:17:27	P1	Si AC égale à 7, comment on fait pour calculer CB ? Ce n'est pas combien il mesurerait surtout. C'est, quel calcul que je ferais pour calculer CB ?
42	00:17:38	E9	C'est AB moins 7
43	00:17:41	P1	Ok ! Si AC mesurait 6, CB ça serait ? $X - 6$. Mais si, on a posé que AB mesurait 10 cm. Combien serait CB ? CB serait 4, 10 moins 6.
44	00:18 :02	P1	Le fait de passer au numérique vous permettra de travailler sur des choses simples, de travailler des petits problèmes que vous gérez sans difficultés. Donc qu'est ce qu'il faut repérer là ? Il faut repérer ce qui varie, ce qui ne varie pas. A chaque fois, on prendra 10 pour la longueur de AB et on arrivera à la longueur de AC et si la longueur de AC je la donne par une lettre et je la mets à cet endroit là. E quel est le périmètre du carré donc ? E11

A travers l'extrait précédent, on constate que l'enseignant utilise aussi les interrelations entre les domaines numérique et géométrique pour guider les élèves à écrire l'autre partie de l'inéquation. P1 explicite vraiment l'importance des interrelations dans le travail qui est en train d'être développé dans cette classe.

Dans l'extrait ci-dessous, P1 continue d'utiliser le **NAG**, soit à travers les segments AC, CB et AB, soit à travers les valeurs des longueurs des côtés et des périmètres du triangle équilatéral et du carré :

Tableau 43 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours	Remarque
45	00:18 :24	P1	On a trouvé que ce côté, mesurait ? CB mesurait 10 moins X, le périmètre du carré c'est quoi alors ? Le périmètre d'un polygone, merci E11.	P1 montre le dessin au tableau.  Ensuite il écrit $CB = 10 - x$
46	00:18 :42	E11	10 moins X fois 4	
47	00:18 :43	P1	Ce côté, plus ce côté, plus celui-là, plus celui-là. C'est quatre fois les mêmes. Donc, ce sera 10 moins X quatre fois. Quatre 10 moins X. Bien, une fois qu'on a fait ça, on sait ce qu'est ce qu'on doit chercher. Quelles sont les valeurs de X qui vérifie ça.	P1 montre la figure au tableau.  P1 étend le projecteur. Ensuite il écrit PérimètreACD > PérimètreCBEF $3x > 4(10 - x)$

En fait à l'instant 18min 43sec., la tâche est inscrite totalement dans le cadre algébrique.

16.6.2.6 Phase V - Résolution de l'inéquation par les élèves.

A partir de cette phase, la tâche est présentée dans le cadre algébrique de la façon suivante : T_r : « Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue », ou plus précisément t_r : « résoudre l'inéquation $3x > 4(10 - x)$. » :

Tableau 44 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours	Remarque
48	00:19 :10	P1	On passe à la main, on arrête le cinéma, et on résout cette inéquation. On ne va rentrer que des valeurs entières.	P1 laisse les élèves travailler et circule dans la classe. Plusieurs élèves l'appellent. E1 lui dit qu'il a trouvé une fraction.

Dans cette phase, on passe à un travail individuel. L'enseignant inscrit l'inéquation dans le logiciel Aplusix et laisse les élèves travailler tout seuls. Les élèves essaient de résoudre t_r . A ce moment là, nous sommes dans le travail de la technique par rapport au type de tâche T_r . Effectivement, les élèves ont déjà résolu des équations et des inéquations en utilisant aussi le logiciel Aplusix. Donc, cette tâche nous semble ne pas poser de problème aux élèves :

Tableau 45 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
52	00:21 :09	P1	Donc, vous n'avez pas la valeur exacte, par contre décalée ! Vous mettez combien ça vaut cette fraction pour avoir une idée. Décalée c'est au lieu de monter l'inéquation, pour baisser la fraction, c'est qu'après, je dis cette fraction, elle vaut à peu près. On n'avait pas dit là, mais ici, on avait posé AC égal X, donc c'est à partir de là qu'il doit être interpréter derrière.

Des élèves arrivent à trouver facilement la fraction, donc T_r semble ne pas poser trop de problèmes.

Par rapport au problème périmètre, nous sommes dans le moment d'exploration du type de tâche.

16.6.2.7 Phase VI - Résolution de l'inéquation par P1 (correction).

Cette phase est marquée par la prise en charge, par P1, du travail sur t_r .

Tableau 46 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
53	00:22 :00	P1	Bien heu ! Donc, on résout cette inéquation $3X$ est plus grand que 40 moins $4X$. A partir de là, il y a un terme qui contient l'inconnu en chacun des membres. On va supprimer un des deux, on va supprimer moins $4X$, car il me semble que, comme ça, on est plus sûr. Et comment le supprimer ? En ajoutant $4X$ à chacun des membres.

Le travail continue au moment de l'exploration du type de tâche, par rapport au problème périmètre et dans le travail de la technique par rapport au type de tâches T_r . Ce travail passe de l'individuel au collectif.

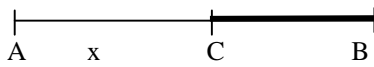
Pendant ce travail sur T_r , P1 essaie de travailler sur les trois règles d'inéquations qui apparaissent sur la feuille de synthèse. Ce travail se développe plutôt sur la forme de cours dialogué.

La tâche t_r : « résoudre l'inéquation $3x > 4(10 - x)$ » est une évolution de la tâche « trouver le point C pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré CBEF? ». L'enseignant ne fait pas un véritable travail de correction de la tâche t_r .

Les techniques τ_{r1} et τ_{r2} trouvent appui dans toutes les autres phases, surtout sur des activités déjà pratiquées dans cette séance antérieure, notamment celles de tests par

substitution de valeurs numériques à des lettres, des comparaisons des valeurs des périmètres et des longueurs des côtés, etc. Ces techniques vont rendre service à τ_{r3} . Pour résoudre la tâche t_r , trois techniques seront mises en œuvre. On voit d'abord apparaître une technique provisoire basée sur t_{r1} qui consiste à « en utilisant le logiciel Cabri Géomètre on construit la figure. Ensuite on mesure les segments AC et CB avec des outils du logiciel Cabri Géomètre, en les comparant aux périmètres du triangle équilatéral et du carré puis, on teste différentes positions du point C sur la figure, puis, on mesure des segment et des périmètres et on compare directement les périmètres du triangle équilatéral et du carré. » Cette technique ne sera pas institutionnalisée comme telle pour résoudre t_r . Elle cèdera rapidement la place à une autre technique qui ne sera pas non plus institutionnalisée. Cette deuxième technique peut être aussi résumée de la façon suivante : « dans le milieu papier crayon ou dans le micromonde Cabri Géomètre, on effectue des calculs numériques successifs des longueurs des segments et des périmètres du triangle et du carré, pour voir lequel maintient l'inégalité. » Les éléments technologico-théoriques sont plutôt du domaine géométrique, comme le montre l'extrait suivant :

Tableau 47 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours	Remarque
53	00:22 :00	P1	On n'avait pas dit là, mais ici. On avait posé AC égal X et donc, pour CB, c'est-à-dire $10-X$ nous aurons des valeurs qui vont de $10 - X$ jusqu'avant 10. Et donc, c'est à partir de là que doit être interprétée derrière. Bien heu ! Donc, on résout cette inéquation : $3 X$ est plus grand que 40 moins 4 X. A partir de là, il y a un terme qui contient l'inconnue en chacun des membres, on va supprimer un des deux, on va supprimer mois 4 X, car il me semble que, comme ça, on est plus sûr. Et comment le supprimer ? En ajoutant 4 X à chacun des membres.	<p>P1 montre le cabri-dessin au tableau.</p>  <p>Ensuite il écrit</p> $3x > 4(10 - x)$ $3x > 40 - 4x$ $3x + 4x > 40 - 4x + 4x$

La troisième technique τ_{r3} , qui sera d'ailleurs institutionnalisée en faisant partie de l'organisation mathématique construite dans cette séance, consiste « à développer », d'abord, le deuxième membre : il devient $3x > 4(10 - x)$, puis $3x > 40 - 4x$; on fait ensuite « disparaître le $4x$ » en « enlevant $4x$ de chaque côté » : il devient $3x + 4x > 40 - 4x + 4x$ puis $7x > 40$. Ce qui donne $x > 40/7$.

Tableau 48 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
54	00:22 :45	P1	On arrive à $7X$ plus grand que 40. Comment je peux m'en sortir d'ici ? On ira isoler X ici, on doit diviser par 7 chacun des membres, 7 comme est un nombre positif, on reste sur cet ordre là, et on obtient X plus grand que $40/7$
55	00:23 :11	P1	Alors, n'allez pas leur mettre une valeur approchée, par contre ! C'est tout à fait intéressant de savoir que $40/7$, c'est à peu près égal à 5,7.

Les règles pour résoudre les inéquations de feuille de synthèse ont été travaillées de façon muette. Tout au long de la séance, P1 guide les élèves avec l'intention plutôt, d'obtenir le résultat, sur la manière d'obtenir $x > 40/7$ à partir de $3x > 4(10 - x)$.

Dans la poursuite de cette séance, il travaillera sur la tâche « résoudre l'équation $(x-4)(2x+3)=0$. » La figure ci-dessous montre, à travers une partie du cahier d'exercices d'un élève, que les corrections sont portées plutôt sur des équations produites :

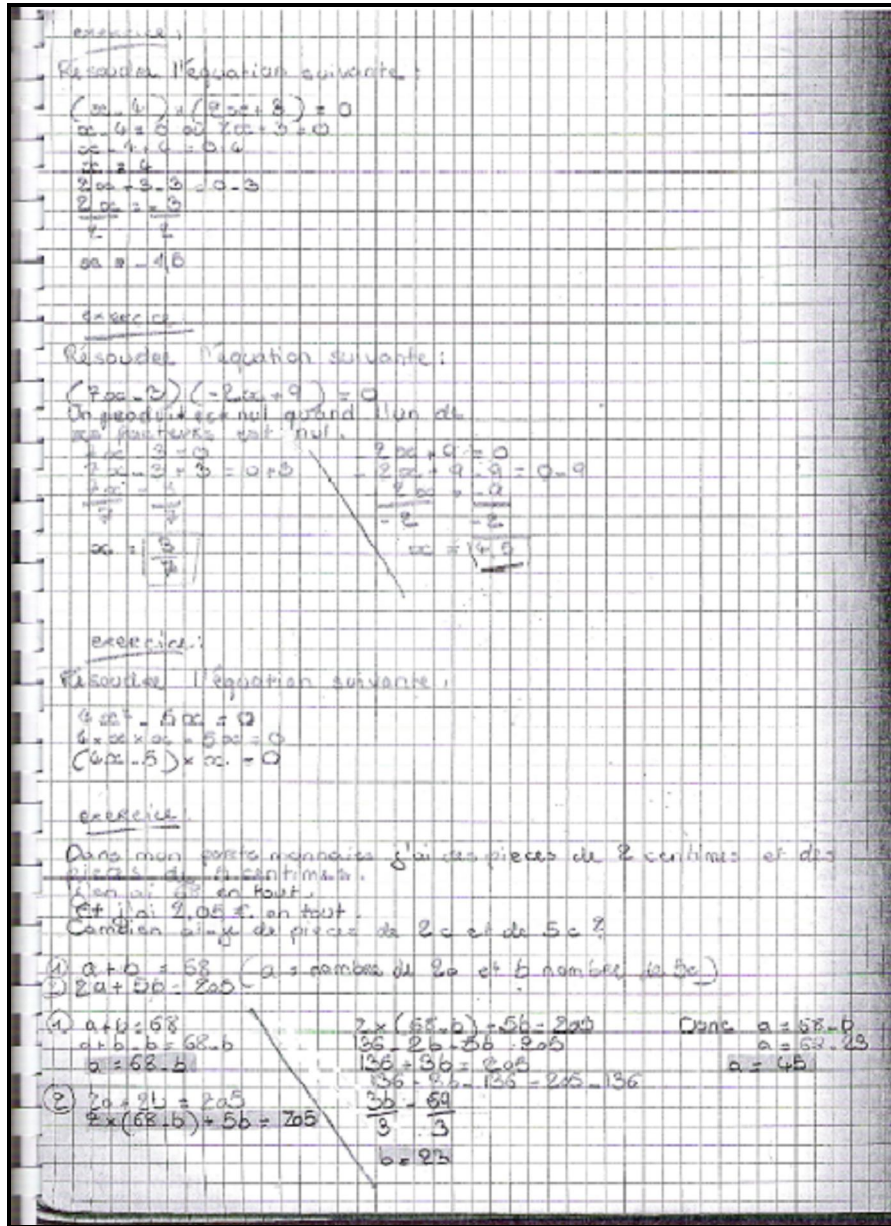


Figure 47: Extrait du cahier d'exercices de E12.

Pendant les corrections, on voit un changement qui modifie la technique τ_{r3} qui va être utilisée à la fin de la séance : au lieu « d'enlever chaque côté » on « change le terme de membre en le changeant de signe ». Compte tenu de l'observation réalisée et de notre protocole, ce changement dans la technique va figurer dans l'organisation mathématique.

16.6.2.8 Phase VII - Retour au problème périmètre.

Dans cette phase, nous sommes dans une période d'exploration du type de tâches T_1 , qui appartient à la technique pour résoudre le problème périmètre. Il est en effet possible de repérer, dans le travail autour du problème périmètre et de T_1 , quelques éléments plus généraux que celui du contexte du problème :

Tableau 49 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
59	00:24:03	P1	On interprète X c'était la longueur AC, donc car la longueur AC est supérieure à 40/7 ?

Il y a une intention de la part de P1 de montrer qu'il est dans une phase d'interprétation.

Par rapport à la résolution du problème périmètre, il n'y a pas un moment où l'enseignant explicite les étapes qu'il a suivies pour résoudre le problème périmètre. P1 ne fait pas de bilan, ni d'institutionnalisation de la résolution du problème périmètre, notamment sur les étapes du travail autour de T_1 . D'ailleurs, on ne voit pas très bien P1 fournir, réellement, les réponses du problème dans cette phase. Ce fait nous a conduit à nous interroger : « est-ce que P1 pense qu'au collège, les élèves savent déjà résoudre les problèmes conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue », « connaissent-ils la technique permettant de résoudre ce type de problèmes en la décomposant en trois parties ».

Ce constat nous conduit à regarder plus loin, ce qui apparaît dans les manuels, pour voir s'ils explicitent davantage les différentes étapes des techniques de résolution des problèmes amenant à des inéquations du premier degré à une inconnue.

Le type de tâche T_1 : « Interpréter les résultats d'une inéquation » apparaît dans la séance à travers les spécimens t_{i1} : « Interpréter géométriquement les résultats de l'inéquation $3x > 4(10 - x)$ » et t_{i2} : « Interpréter algébriquement les résultats de l'inéquation $3x > 4(10 - x)$ ». L'interprétation du résultat consiste à accepter ou rejeter les solutions de l'inéquation suivant les conditions imposées par le problème et à les reformuler dans le contexte du problème. Dans la résolution de ces tâches nous voyons émerger deux techniques différentes qui peuvent être résumées ainsi : τ_{i1} : « Pour l'interprétation graphique, on utilisera la représentation des fonctions affines. » et τ_{i2} : « Pour l'interprétation algébrique, on utilisera la droite graduée. » :

Tableau 50 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
56	00:23 :23	P1	Donc, quand est ce qu'on va voir le périmètre du triangle plus grand que le périmètre du carré ?
57	00:23:29	P1	Une petite phrase pour le dire là : Le périmètre de ACD est plus grand que le périmètre de CBEF, alors, ça nous donne quoi, dès qu'on a X ? Ce nombre X représente quoi ? Dans notre problème
58	00:24 :00	E8	La longueur de AC
59	00:24:03	P1	La longueur de AC. Donc, je ne peux pas dire que le périmètre du machin est plus grand que le périmètre du carré, car X est plus grand que 40/7. On interprète X c'était la longueur AC, donc, car la longueur AC est supérieure à 40/7. 40/7 c'est à peu près 5,7. On peut vérifier, c'est-à-dire, on calcule la longueur AC, je calcule le périmètre de celui-là et le périmètre de celui-là si je mets AC au tour de 5,7. Effectivement on voit que c'est à peu près égal et dès qu'on dépasse, ça y est le périmètre de ACD devient plus grand que le périmètre du carré. Donc, le tour de la position de C, ici, nous donnera cette inégalité là, OK ?

Dans les deux techniques, l'utilisation des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique est bien présente. Bien que l'interprétation des résultats soit faite de façon très rapide, P1 fait varier, à travers le cabri-dessin, les valeurs

possibles pour la longueur du segment CB, et à partir de telles manipulations, il consolide la compréhension et le sens des solutions de l'inéquation.

16.6.3 Le problème périmètre dans le programme et le manuel de la classe.

Nous retraçons les contenus présentés dans le programme de seconde et l'OM présentée dans le chapitre 5 du manuel²⁴ qui se réfère aux sujets « équations » et « inéquations » afin de voir comment ces institutions abordent ces sujets, et aussi comment elles ont pu influencer les choix P2 dans cette séance.

En ce qui concerne les programmes de 2007, dans la partie « nombre et calculs », on trouve :

Tableau 51 : Extrait du programme de 2007 de la classe de troisième.

Connaissances	Capacités	Exemples d'activités, commentaires	Commentaires spécifiques pour le socle
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle.			
<p>2.4. Équations et inéquations du premier degré</p> <p><i>Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues</i></p> <p><i>Problèmes se ramenant au premier degré : équations produits</i></p>	<p>- Mettre en équation un problème.</p> <p>- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques ; représenter ses solutions sur une droite graduée.</p> <p>- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.</p> <p>- Résoudre une équation mise sous la forme $A(x).B(x) = 0$, où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions du premier degré de la même variable x.</p>	<p><i>Il est indispensable dans toute cette partie de ne pas multiplier les exercices systématiques de résolution sans référence au sens d'un problème.</i></p> <p><i>Comme en classe de quatrième, les différentes étapes du travail sont identifiées à chaque occasion : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.</i></p> <p><i>La représentation graphique des fonctions affines est exploitable dans trois directions :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - vérifier la vraisemblance d'une solution obtenue algébriquement ; - donner une solution graphique évidente et la vérifier algébriquement ; - donner une solution approchée, précédant une éventuelle résolution algébrique. <p><i>L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est hors programme.</i></p>	<p>La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun.</p> <p>Néanmoins, les élèves, dans le cadre du socle, peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré.</p>

Dans l'organisation des contenus de la classe de troisième les « inéquations » apparaissent dans la partie « Travaux numériques ». Dans ce programme, l'objet « inéquation » apparaît sous la forme « *inéquation du premier degré à une inconnue* » et « *résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant* », les compétences consistant à « *résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Représenter ses solutions sur une droite graduée* » et « *Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation ou un système de deux équations du premier degré.* »

Le programme parle de la représentation graphique des solutions d'une inéquation, et de façon moins explicite de méthode graphique de résolution. La résolution de problèmes aboutissant à des inéquations est prévue et la méthode graphique de résolution

²⁴ Dimathème 3^e – Edition 1999 – Didier.

d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues est explicitement prévue aussi.

Voyons comment ces différents contextes se matérialisent dans des manuels par l'analyse du chapitre concernant l'étude de cet objet :

retenir le cours

Propriété :
 Si $c > 0$, alors ac et bc sont rangés dans le même ordre que a et b et dans l'ordre inverse si $c < 0$.
 Autrement dit, lorsqu'on multiplie ou on divise les deux membres d'une inégalité par le même nombre non nul :

- on garde le sens de l'inégalité si ce nombre est strictement positif ;
- on change le sens de l'inégalité si ce nombre est strictement négatif.

EXEMPLES

- Si $a > 4$, alors $-2 \times a < (-2) \times 4$
 (-2 est négatif, donc on a changé le sens de l'inégalité).
- Si $2b < -5$, alors $\frac{2b}{2} < \frac{-5}{2}$
 (2 est positif, donc on garde le sens de l'inégalité)

4 • Inéquations

Résoudre une inéquation d'inconnue x , c'est trouver toutes les valeurs qu'on peut donner à x pour lesquelles l'inégalité proposée est vérifiée.

EXEMPLES

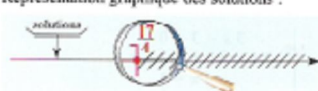
- Résoudre $4x \leq 17$:
 On isole x en divisant les deux membres par 4 ($4 > 0$, on garde le sens de l'inégalité) :

$$\frac{4x}{4} \leq \frac{17}{4}$$

$$x \leq \frac{17}{4}$$

Les inéquations obtenues lors de la résolution ayant les mêmes solutions, tous les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{17}{4}$ sont solutions de $4x \leq 17$.

Représentation graphique des solutions :



Le crochet est tourné vers les solutions car $\frac{17}{4}$ est solution de l'inéquation $4x \leq 17$.


- Résoudre $-4x < 17$:
 On isole x en divisant les deux membres par -4 ($-4 < 0$, on change le sens de l'inégalité) :

$$\frac{-4x}{-4} > \frac{17}{-4}$$

$$x > -\frac{17}{4}$$

Les inéquations obtenues lors de la résolution ayant les mêmes solutions, tous les nombres supérieurs à $-\frac{17}{4}$ sont solutions de $-4x < 17$.

Représentation graphique des solutions :



Le crochet n'est pas tourné vers les solutions car $-\frac{17}{4}$ n'est pas solution de l'inéquation $-4x < 17$.

CHAPITRE 5 • ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS • 73

Figure 48: Extrait du manuel *Dimathème 3^e*.

Sur le manuel utilisé en classe, dans la partie « *retenir le cours* », il apparaît tout d'abord la définition de ce qu'est « résoudre une inéquation ». Ensuite, le manuel présente une OM constituée par deux tâches : t_1 : « résoudre $4x \leq 17$ » et t_2 : « résoudre $-4x < 17$ ». Cette OM utilise une technique qui travaille sur la règle 3 de la feuille de synthèse sur les inéquations.

Une représentation graphique est présentée pour chaque tâche en utilisant la droite graduée pour représenter l'ensemble « constitué pour toutes les valeurs qu'on peut donner à « x » pour lesquelles les inégalités proposées sont vérifiées. » Les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique sont utilisées pour mettre en évidence, et élargir le point de vue sur les solutions numérique-algébrique qui ont été présentées.

retenir les méthodes

3 Résoudre une inéquation du type $ax + b \geq cx + d$

Résoudre l'inéquation $x + 4 \geq 4x + 10$ et représenter graphiquement les solutions.

1^{re} étape On se ramène à une inéquation du type $ax \geq b$.

On ajoute -4 (ou on soustrait 4) aux deux membres et on réduit :

$$x + 4 - 4 \geq 4x + 10 - 4$$

$$x \geq 4x + 6.$$

On soustrait $4x$ aux deux membres et on réduit :

$$x - 4x \geq -4x + 4x + 6$$

$$-3x \geq 6.$$

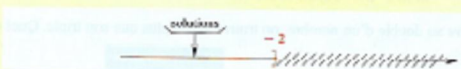
2^e étape On divise les deux membres par -3 qui est négatif.

-3 étant strictement négatif, on change le sens de l'inégalité :

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{6}{-3}, \text{ soit } x \leq -2.$$

Les inéquations obtenues lors de la résolution ayant les mêmes solutions, l'inéquation $x + 4 \geq 4x + 10$ admet pour solutions tous les nombres inférieurs ou égaux à -2 .

3^e étape On représente les solutions



Exercices 8 - Équations et inéquations - 75

Figure 49: Extrait du manuel Dimathème 3^e.

La partie « retenir les méthodes » est destinée au travail sur les inéquations du type $ax + b \geq cx + d$, à travers la tâche t_3 : « Résoudre une inéquation du type $x + 4 \geq 4x + 10$ et représenter graphiquement les solutions ». Dans cette partie, les trois règles qui apparaissent dans la feuille de synthèse sont travaillées. Il y a aussi l'utilisation du **NAG** pour représenter graphiquement les solutions de l'inéquation.

Nous constatons, à travers ces exemples que, dans l'OM présente dans ce manuel, le **NAG** apparaît comme jouant un rôle important. Cette utilisation des interrelations entre les domaines mathématiques est faite de façon plus explicite. On constate que l'OM proposée dans le manuel est très simple, contrairement à celle de la séance observée. A travers l'analyse de l'OM présentée précédemment, nous constatons que le **NAG**, à travers la droite graduée, est introduit pour servir aux OM construites autour de l'étude « des inéquations ». La droite graduée est l'objet qui gère la *dynamique inter-domaines* (Bronner, 2007). Par ailleurs, le fait que cette OM soit ponctuelle, laisse penser que la

droite graduée est un savoir «naturalisé» pour les élèves et qu'elle n'est plus un enjeu d'apprentissage.

16.6.4 Synthèse de l'analyse de la situation périmètre.

Dans les phases de la séance C21 que nous venons d'analyser, P1 et les élèves sont majoritairement confrontés à une AER. Le travail autour de cet AER est fait à travers une technique qui décompose pratiquement l'AER en trois types de tâches : T_m , T_r et T_i . Pendant l'accomplissement de ces tâches, un travail parallèle, à travers des spécimens de T_m , T_r et T_i , est également fait. Ce travail porte sur la valeur des longueurs de segments, les périmètres des figures et des constructions géométriques sont entreprises. A partir de ce travail, les éléments technologico-théoriques émergent au cours de la séance : la définition d'une inéquation du premier degré à une inconnue, les définitions de « premier et second membre », la définition de « solution de l'inéquation » ainsi que celle de « d'une « résolution de l'inéquation » ; les règles de « conservation des inégalités » par addition ou soustraction d'un même nombre et par multiplication ou division par un même nombre positif.

Du fait que les élèves n'ont pas eu un temps considérable pour effectuer une dévolution de la tâche, les règles et les définitions sont évaluées à travers le dispositif questions-réponses dirigé par P1. Ce dispositif, qui semble familier aux élèves, est modifié chaque fois que l'enseignant pose des questions et que les élèves n'arrivent pas à y répondre. A ce moment là, l'enseignant instaure les dialogues dans le miroir donnant lui-même les réponses aux questions posées.

Nous constatons que P1 aborde, en très peu de temps, le thème « inéquations. Les démonstrations, quand c'est nécessaire, sont faites de façon simple, à l'aide du NAG et des échanges enseignant - élèves.

Nous revenons dans cette partie sur certains éléments de l'analyse précédente pour préciser des caractéristiques des pratiques didactiques de P1 liées au NAG. Ces éléments nous permettront d'une part, de rediscuter des procédures didactiques de P1 présentes dans cette séance, et d'autre part, de préciser davantage quelques contraintes qui pèsent sur ces procédures.

16.6.4.1 Le savoir en jeu

Nous rappelons que P1 n'avait pas fait d'institutionnalisation du problème périmètre. Il insiste un peu sur l'interprétation, mais il ne fait pas une reprise du problème. Il n'y a pas, finalement, d'analyse de ce qu'il vient de faire avec les élèves, en disant par exemple : « qu'est-ce qu'on vient de faire : d'abord, la figure, puis on a mis en équations, puis ensuite on a résolu l'inéquation et à la fin on a interprété le résultat ». Alors, quels sont les raisons de ces choix didactiques de l'enseignant ? Est-ce dû à une contrainte de temps ? A cette contrainte de temps, nous ajoutons ce que dit Chevallard (2002), quand il signale que certaines incidences du « repliement temporel » dû au morcellement de l'enseignement en séquences de 55 minutes sont imposées à toutes les disciplines. P1 avait justement chaque jour, cette classe pendant 55 minutes, dont 24 minutes étaient destinées au problème périmètre. Donc, cette contrainte de niveau 0 nous semble avoir joué un poids important dans les choix didactiques faits par l'enseignant. Elle peut être due au programme, au fait que P1 considère qu'il n'est pas important de faire cette institutionnalisation, car les élèves

savent que, pour résoudre un problème, il faut passer par les phases qui ont été travaillées au cours de la séance.

En utilisant les éléments du filtre du numérique, il a été possible de bien préciser sur quels objets porte la séance. Il est fortement probable que la durée courte de la séance impose que le travail autour du problème périmètre soit conçu en termes de trois unités atomiques et dichotomiques : mise en équation, résolution de l'inéquation et interprétation du résultat. En fait, P1 utilise le **NAG** avec l'intention de faire en sorte que le sujet « résolution de problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue » puisse être travaillé, à travers la technique composée avec le travail des trois types de tâches : T_m , T_r et T_i de telle sorte qu'il soit possible d'articuler les différents cadres mathématiques par lesquels passe la résolution du problème périmètre. Dans ce contexte, comme nous l'avons déjà signalé, il utilise les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique dans l'organisation mathématique des thèmes étudiés, permettant d'articuler, sur une période courte, le travail sur les types de tâches T_m , T_r et T_i .

Nous avons montré comment P1 a articulé les objets dans la séance depuis le début, pour permettre dans les 24 minutes de provoquer une première rencontre des élèves avec le thème : « résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue », ce qui aurait nécessité plus de temps. Dans l'organisation didactique proposée, la mise en équation prend une partie significative, voire la plus significative de la séance. Le traitement du thème « équations » a été engagé dans des séances précédentes consacrées aux « Équations », comme en témoignent la feuille de synthèse dans le cahier de cours des élèves, les traces écrites dans le cahier exercices et l'extrait suivant :

Tableau 52 : Extrait de la séance - C21.

Lignes	Temps	Acteurs	Discours
9	00:06:54	E5	Elles sont finies ? C'est fini les équations ?
10	00:06:57	P1	Comment ? Non, pourquoi ? On va les finir pour faire des exercices après.

La séance a donc été consacrée à l'étude des inéquations et équations produites. L'organisation mathématique autour de l'étude des inéquations est locale, intégrant des acquis antérieurs. Elle relève du domaine des « travaux numériques », du secteur du « calcul littéral », et du thème « résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue ».

Les analyses présentées montrent combien sont diverses les connaissances qui permettent le fonctionnement de la séance, comme le souhaite P1. Ces connaissances sont révélées et exploitées à travers l'utilisation des interrelations entre les domaines mathématiques. Et le fonctionnement de la séance devient alors un travail complexe où se mêlent différents savoirs, venus de différents cadres mathématiques, où intervient le rapport personnel de P1 aux interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique qui est explicitement en jeu dans cette séance. Dans les analyses didactiques des phases, le rapport personnel de P1 avec le **NAG** se manifeste plus explicitement à chaque fois qu'il a besoin d'avancer dans la résolution du problème périmètre à travers la résolution des types de tâches T_m , T_r et T_i et de ses spécimens respectifs. A ce propos, voici ce qu'a répondu P1, sur l'utilisation du **NAG** dans sa pratique en classe, lors d'un entretien avec nous :

« Ces interrelations permettent de changer un peu de contexte, c'est-à-dire si l'on est sur de la résolution d'équation et que l'on n'est que sur des problèmes numériques ou de dénombrement, ou des choses comme ça, cela permet de varier l'approche, ou même de refaire travailler les connaissances antérieures, pour que tout ne soit pas partitionné dans

un coin, et donc, de refaire intervenir un théorème qui a été vu il y a deux mois, à un moment donné, et de l'amener à le ré-étudier. Elles peuvent aussi servir à motiver des introductions. Par exemple, pourquoi il faut multiplier deux racines carrées. Il y a une introduction que j'utilise, quand j'ai le temps, c'est à partir d'un triangle rectangle avec des côtés dont la mesure exacte serait exprimée avec des radicaux. Il faudrait calculer une aire ou quelque chose comme ça. Donc, on est amené à multiplier deux racines carrées. Là, on met les élèves dans une situation nouvelle. »

Cet extrait est caractéristique du rapport personnel de P1 avec le **NAG**.

16.6.4.2 A propos des interactions P1-élèves

L'enseignant utilise une organisation didactique qui n'est pas simple. Il y a tout le temps, dans les phases analysées, deux types de tâches qui sont résolus parallèlement : le problème périmètre et un des types de tâches qui compose la technique de résolution de ce problème. P1 doit faire montre d'une véritable vigilance didactique où le **NAG** fonctionne comme un outil important. Il utilise les échanges question-réponse afin de favoriser les prises de conscience des élèves à l'égard des procédures, des changements de cadres mathématiques qu'ils utilisent dans les tâches proposées. Ces interactions entre lui et les élèves doivent sûrement engendrer des effets sur l'acquisition des connaissances des élèves. A ce moment là, ce sont les élèves qui vont utiliser (guidés par P1) les interrelations entre les domaines mathématiques pour répondre aux questions posées par P1.

Dans le cadre de l'utilisation que fait l'enseignant du **NAG**, il y a des moments dans cette séance, où il ne s'empêche pas d'utiliser une stratégie du type « dialogues dans le miroir » pour régler le rythme de la séance et mieux guider l'étude des objets en jeu. Cependant, immédiatement après chaque utilisation, les élèves et P1 reprennent le cours questions-réponse sans que ces moments aient modifié trop le déroulement de la séance. Chaque fois que P1 utilise le **NAG**, il y a une intensification des dialogues dans le miroir.

16.6.4.3 L'enchaînement des tâches dans la séance

Cette séance débute par des constructions géométriques qui ont alors servi pour une première rencontre, et l'émergence d'un embryon d'une technique et un début de construction technologico-théorique relativement au type de tâches « résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue ». Mais cette séance est aussi centrée, en parallèle, sur le travail de la technique des types de T_m , T_r et T_i et de ses spécimens respectifs. Cette activité permet de poursuivre l'étude sur les équations, débutée avant et qui se poursuivra après l'étude des inéquations. En particulier, le travail sur la technique de mise en inéquation sera mené de pair avec le travail de techniques de résolution d'inéquations pendant la séance.

Dans la séance réalisée par P1, l'utilisation du **NAG** apparaît dans l'organisation mathématique, instaurée dans la classe pendant le traitement du thème « inéquations », mais une telle utilisation ne se poursuivra pas dans le travail sur les « équations produit ». L'enseignant, sépare bien les phases de la technique dans le traitement du problème périmètre :

Tableau 53 : Extrait de la séance - C21.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
4	00:04:00	P1	On va commencer par ça, je vais vous donner l'énoncé, dès que je coupe les papiers. Vous devez commencer par faire cette construction.
11	00:07:27	P1	Maintenant que vous avez tous fait la construction, la question que je voudrais vous poser est celle-ci : Où est-ce que je dois mettre le point C pour que le périmètre du triangle équilatéral soit plus grand que le périmètre du carré ?
22	00:13:26	P1	Là, c'est ce qu'on voit par expérience. Maintenant, il faudra arriver à le dire mathématiquement, à partir de ça, voilà ! A partir de telle position. Mais, bon ! Comment on peut faire ça, et comment on peut trouver cette position ?
32	00:15:29	P1	Pourquoi pas ! Si on pense que ça c'est X centimètres, ben, quel est le périmètre du triangle?
44	00:18 :02	P1	Le fait de passer au numérique vous permettez de travailler sur des choses simples, de travailler des petits problèmes que vous gérez sans problème. [...].
48	00:19 :10	P1	On passe à la main, on arrête le cinéma, et on résout cette inéquation.
59	00:24:03	P1	[...]On interprète X c'était la longueur AC, donc car la longueur AC est supérieure à $40/7$. $40/7$ c'est à peu près 5,7. On peut vérifier, c'est-à-dire, on calcule la longueur AC, je calcule le périmètre de celui-là [...]. Donc, le tour de positions de C ici, nous donnerons cette inégalité là OK?

Ces extraits fonctionnent comme des indicateurs, et montrent que les phases de la technique pour résoudre le problème périmètre sont bien séparées. L'utilisation du **NAG** est fortement présente en chacune de ces phases, parfois cette utilisation est explicitement évoquée par P1. L'enseignant cherche, non sans quelques difficultés d'ailleurs, à motiver l'étude des différents types de tâches (en utilisant le **NAG**) dont il sera question, ainsi qu'à disqualifier des techniques déjà connues en raison de leurs domaines de validité trop limités, ce qui amène P1 à la mise en place d'une organisation didactique permettant de rendre visible la cohérence du contenu traité au-delà du morcellement de la technique. En fait, un travail de vigilance constante est nécessaire, notamment sur l'utilisation implicite du **NAG**, pendant le déroulement de la séance, pour tenir un enchaînement cohérent entre les différentes phases et arriver aux objectifs attendus.

La séance est très guidée par P1, très présent dans la gestion de la classe. Il arrive assez facilement à tenir l'enchaînement de la séance pour passer aux différentes phases qui composent la technique pour résoudre le problème périmètre en utilisant le **NAG** pour pouvoir inscrire la tâche en différents cadres. Le temps de travail individuel des élèves est de courte durée, il n'y a pas d'interventions au tableau pour les élèves dans cette séance. Les corrections d'exercices, leurs interventions orales sont prises en compte, plutôt quand elles vont dans le sens souhaité par P1.

L'analyse praxéologique a permis de mettre en évidence, d'une part la structure de l'organisation mathématique de la séance en différenciant les divers types d'éléments entrant dans cette organisation, ainsi que leurs relations ; d'autre part, la structure de l'organisation didactique qui s'avère plus complexe que la structure ternaire maintenant classique : « activité/synthèse/exercices ». Cette analyse montre l'enchevêtrement de différents phases et moments didactiques avec des fonctions très diverses changeant parfois très rapidement. Par exemple, des gestes d'institutionnalisation peuvent se repérer à différents endroits de la séance, sans qu'une situation d'institutionnalisation soit clairement identifiable. Cela rejoint ce qui était aussi analysé dans Bronner et Noirfalise (2002).

16.6.4.4 Les changements de cadres

Le choix de débiter l'étude par un problème de mise en inéquation est conforme à une contrainte des programmes relevant du niveau de la discipline.

De telles incitations sont reprises dans la présentation des programmes de la classe de troisième pour l'étude des objets « inéquations » et « équations produit. » Donc le choix d'un problème numérique dans cette séance paraît alors conforme aux indications du programme, si l'on entend que le traitement de ce thème doit conduire à l'étude de techniques utiles dans d'autres domaines (contrainte du niveau 2).

L'activité choisie par P1 a eu pour fonction de participer à la première rencontre avec les types de tâches « résoudre un problème conduisant à des inéquations du premier degré à une inconnue ». Nous avons précisé ce qui a été réellement rencontré. La tâche principale travaillée dans cette séance est annoncée comme appartenant au cadre numérique, mais le travail qu'on observe s'inscrit dans différents cadres. Ce travail utilise les cadres numérique, algébrique et géométrique qui vont être introduits dans la séance à partir du travail de la technique pour résoudre la tâche principale. De façon générale, la résolution de cette tâche n'a pas été simple, elle paraît poser de problèmes aux élèves, elle a fait intervenir à la fois des connaissances liées à des situations spécifiques et à des règles générales susceptibles d'être appliquées à de larges catégories de problèmes. Le **NAG** joue un rôle important dans cette séance pour comprendre l'enjeu des objets mathématiques eux-mêmes et les élèves doivent maîtriser un même objet mathématique dans plusieurs cadres.

CHAPITRE D7 : ANALYSE GÉNÉRALE AU LYCÉE

17 Ensemble des séances

Nous avons observé un total de 47 séances dans un lycée en France, et parmi celles-ci nous avons un protocole de plus de 72%, c'est-à-dire 34 séances. Étant donné cette quantité, nous construisons là aussi dans un premier temps un tableau pour présenter cet ensemble. Ensuite, à partir d'une analyse générale des types de tâches et des thèmes abordés par l'enseignant, qui sera appelé P2, nous choisirons les séances avec lesquelles nous poursuivrons nos travaux d'analyse plus fine.

Dans ce but, nous avons mené une analyse préliminaire pour choisir les séances convenant le mieux à nos objectifs, tout en considérant des éléments qui jouent des rôles importants pour notre recherche. Les éléments pris en considération pour mener cette analyse seront décrits au fur et à mesure dans l'analyse qui suivra, jusqu'à ce que les choix se portent finalement sur les séances les plus appropriées.

Là aussi nous organisons un tableau en accompagnant les séances des principaux types de tâches repérés pendant nos observations en classe. C'est une première entrée dans la modélisation des pratiques des enseignants.

17.1 Les séances au lycée

Dans le tableau ci-dessous, nous avons classé les séances « Séance – L n° » avec $n = 1, 2, \dots, 33$. Nous avons désigné par « t_{Ln} », avec les numéros $n = 1, 2, \dots, 97$, les principales tâches rencontrées dans chaque séance :

Tableau 54: Liste des séances observées dans la classe de P2.

SÉANCE	DATE	DUREE	NOM CHAPITRE	PRINCIPALES TACHES
L1	27/09/2007	1h 53 min.	Activités numériques	t _{L1} ; t _{L2} ; t _{L3} ; t _{L4} ; t _{L5} ; t _{L6}
L2	27/09/2007	46 min.	Activités numériques	t _{L7} ; t _{L8} ; t _{L9} ; t _{L10}
L3	28/09/2007	42 min.	Activités numériques	t _{L11} ; t _{L12} ; t _{L13}
L4	03/10/2007	53 min.	Activités numériques	t _{L14} ; t _{L15} ; t _{L16} ; t _{L17} ; t _{L18} ; t _{L19}
L5	04/10/2007	50 min.	Activités numériques	t _{L20} ; t _{L21}
L6	04/10/2007	40 min.	Activités numériques	t _{L22}
L7	10/10/2007	51 min.	Calcul algébrique	t _{L23} ; t _{L24}
L8	11/10/2007	1h 36 min.	Calcul algébrique	t _{L25} ; t _{L26} ; t _{L27}
L9	11/10/2007	50 min.	Calcul algébrique	t _{L28}
L10	12/10/2007	40 min.	Fonctions	t _{L29} ; t _{L30} ; t _{L31} ; t _{L32}
L11	25/10/2007	1h 50 min.	Fonctions	t _{L33} ; t _{L34} ; t _{L35} ; t _{L36}
L12	25/10/2007	35 min.	Triangles	t _{L37} ; t _{L38} ; t _{L39}
L13	26/10/2007	55 min.	Inéquations	t _{L40}
L14	22/11/2007	1h 51 min.	Inéquations	t _{L41} ; t _{L42}
L15	22/11/2007	54 min.	Inéquations	t _{L43} ; t _{L44} ; t _{L45} ; t _{L46}
L16	06/12/2007	1h 32 min.	Équations de droites	t _{L47} ; t _{L48} ; t _{L49} ; t _{L50} ; t _{L51} ; t _{L52}
L17	07/12/2007	39 min.	Équations de droites	t _{L53} ; t _{L54}
L18	13/12/2007	1h 41 min.	Équations de droites	t _{L55} ; t _{L56} ; t _{L57} ; t _{L58} ; t _{L59} ; t _{L60} ; t _{L61} ; t _{L62}
L19	20/12/2007	1h 50min.	Équations de droites	t _{L63} ; t _{L64} ; t _{L65} ; t _{L66} ; t _{L67} ; t _{L68}
L20	20/12/2007	48min.	Équations de droites	t _{L69} ; t _{L70}
L21	10/01/2008	1h 51 min.	Équations de droites	t _{L71}
L22	10/01/2008	54 min.	Équations de droites	t _{L72} ; t _{L73}
L23	17/01/2008	1h 32 min.	Équations de droites ; système équation	t _{L74} ; t _{L75} ; t _{L76}
L24	17/01/2008	34 min	Équations de droites ; système équation	t _{L77} ; t _{L78}
L25	24/01/2008	1h 48 min.	Équations de droites ; système équation	t _{L79} ; t _{L80}
L26	31/01/2008	1h 20 min.	Triangles isométriques	t _{L81} ; t _{L82}
L27	31/01/2008	36 min.	Triangles isométriques	t _{L83} ; t _{L84}
L28	07/02/2008	1h 50 min.	Triangles isométriques	t _{L85} ; t _{L86} ; t _{L87}
L29	07/02/2008	52 min.	Triangles isométriques	t _{L88} ; t _{L89}
L30	08/02/2008	48 min.	Triangles isométriques	t _{L90} ; t _{L91}
L31	14/02/2008	1h 52 min.	Fonctions usuelles	t _{L92} ; t _{L93}
L32	14/02/2008	56 min.	Fonctions usuelles	t _{L94} ; t _{L95}
L33	06/03/2008	1h 42 min	Fonctions usuelles	t _{L96} ; t _{L97}
L34	13/06/2008	1h 05 min	Triangles	t _{L98}

A travers ce tableau, nous présentons l'ensemble des séances du lycée, par ordre chronologique, et accompagnée chacune de sa durée, du nom de chapitre auquel elle est associée et des principales tâches repérées dans chaque séance. Ici aussi, les noms des chapitres qui y configurent, ont été donnés par P2. Ces principales tâches seront décrites à la suite.

17.1.1 Description des principales tâches

Nous présenterons une description détaillée des tâches présentées dans le tableau précédent. En même temps, nous en profiterons pour classer ces tâches dans les types auxquels chaque tâche se réfère :

- | | |
|--|---|
| <p>t_{L1} : Développer des identités remarquables T₁ ;</p> <p>t_{L2} : Calculer des pourcentages T₂ ;</p> <p>t_{L3} : Calculer les pourcentages dans le cadre des augmentations et des diminutions T₂ ;</p> <p>t_{L4} : Décomposer des nombres pour effectuer des calculs mentaux T₂ ;</p> <p>t_{L5} : Appliquer des règles de puissances pour calculer des expressions T₂ ;</p> <p>t_{L6} : Définir un nombre décimal T₃ ;</p> <p>t_{L7} : Transformer une fraction donnée dans une fraction irréductible T₂ ;</p> <p>t_{L8} : Reconnaître des fractions décimales T₂ ;</p> <p>t_{L9} : Trouver les diviseurs d'un nombre en utilisant les critères de divisibilité T₂ ;</p> <p>t_{L10} : Ecrire des nombres décimaux comme un produit de nombre entier et d'une puissance de dix T₂ ;</p> <p>t_{L11} : Définir une fraction décimale T₃ ;</p> <p>t_{L12} : Ecrire un nombre décimal sous forme de fraction T₂ ;</p> <p>t_{L13} : Placer des nombres dans les ensembles numériques T₃ ;</p> <p>t_{L14} : Simplifier des expressions T₂ ;</p> <p>t_{L15} : Ecrire les règles sur les puissances T₂ ;</p> <p>t_{L16} : Transformer une écriture d'un nombre dans un produit d'un nombre entier et une puissance de dix avec un exposant positif T₂ ;</p> <p>t_{L17} : Transformer une écriture d'un nombre dans un produit d'un nombre entier et une puissance de dix avec un exposant négatif T₂ ;</p> <p>t_{L18} : Calculer les expressions T₂ ;</p> <p>t_{L19} : Calculer l'inverse des fractions T₂ ;</p> <p>t_{L20} : Calculer le carré des nombres T₂ ;</p> <p>t_{L21} : Calculer la différence entre les carrés de deux nombres T₂ ;</p> <p>t_{L22} : Trouver des formules sur l'Excel T₂ ;</p> <p>t_{L23} : Calculer des racines T₂ ;</p> <p>t_{L24} : Développer des identités remarquables T₁ ;</p> | <p>t_{L25} : Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers T₂ ;</p> <p>t_{L26} : Déterminer si un nombre est premier T₂ ;</p> <p>t_{L27} : Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. T₂</p> <p>t_{L28} : Trouver des formules dans Excel T₂ ;</p> <p>t_{L29} : Interpréter des informations dans une fonction T₄ ;</p> <p>t_{L30} : Identifier les figures géométriques clé T₅ ;</p> <p>t_{L31} : Calculer des longueurs des segments dans les figures géométriques clé T₅ ;</p> <p>t_{L32} : Calculer des longueurs des segments dans un triangle avec différents codages T₅ ;</p> <p>t_{L33} : Trouver les diviseurs d'un nombre T₂ ;</p> <p>t_{L34} : Trouver les antécédents d'une fonction T₄ ;</p> <p>t_{L35} : Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers T₂ ;</p> <p>t_{L36} : Trouver l'intersection entre deux ensembles T₃ ;</p> <p>t_{L37} : Trouver les médiatrices d'un triangle T₅ ;</p> <p>t_{L38} : Trouver les médianes d'un triangle T₅ ;</p> <p>t_{L39} : Trouver les bissectrices d'un triangle T₅ ;</p> <p>t_{L40} : Résoudre des équations comportant des valeurs absolues T₆ ;</p> <p>t_{L41} : Résoudre des équations T₆ ;</p> <p>t_{L42} : Résoudre des inéquations T₇ ;</p> <p>t_{L43} : Résoudre des équations T₆ ;</p> <p>t_{L44} : Résoudre des problèmes T₂ ;</p> <p>t_{L45} : Résoudre des inéquations T₇ ;</p> <p>t_{L46} : Justifier la position d'un point dans une figure donnée T₅ ;</p> <p>t_{L47} : Trouver l'intersection de deux ensembles T₃ ;</p> <p>t_{L48} : Trouver l'union de deux ensembles T₃ ;</p> <p>t_{L49} : Résoudre des inéquations T₇ ;</p> <p>t_{L50} : Résoudre des équations T₆ ;</p> <p>t_{L51} : Représenter graphiquement une fonction T₈ ;</p> |
|--|---|

- t_{L52}: Calculer la valeur approchée d'un nombre réel **T₂** ;
- t_{L53}: Construire des droites qui représentent les fonctions affines en connaissant les coefficients « a » et « b » **T₈** ;
- t_{L54}: Construire des droites que représentent les fonctions affines, en connaissant les coordonnées d'un point et la valeur du coefficient « a » **T₈** ;
- t_{L55}: Donner la définition de l'union de deux ou plusieurs ensembles **T₃** ;
- t_{L56}: Donner la définition d'une intersection de deux ou plusieurs ensembles **T₃** ;
- t_{L57}: Calculer l'union de deux ou plusieurs ensembles **T₃** ;
- t_{L58}: Calculer l'intersection de deux ou plusieurs ensembles **T₃** ;
- t_{L59}: Calculer le cosinus d'un angle **T₂** ;
- t_{L60}: Calculer la hauteur d'un triangle **T₅** ;
- t_{L61}: Résoudre des équations **T₆** ;
- t_{L62}: Résoudre des problèmes de pourcentage **T₂** ;
- t_{L63}: Résoudre des équations **T₆** ;
- t_{L64}: Résoudre des inéquations **T₇** ;
- t_{L65}: Calculer les longueurs des segments **T₅** ;
- t_{L66}: Démontrer une égalité **T₆** ;
- t_{L67}: Placer des droites sur le plan cartésien en connaissant les signes des coefficients « a », « b » et « c » **T₈** ;
- t_{L68}: Étudier les variations d'une fonction **T₈** ;
- t_{L69}: Représenter graphiquement des fonctions **T₈** ;
- t_{L70}: Déterminer les équations des droites à partir des représentations graphiques **T₈** ;
- t_{L71}: Montrer comment varie l'aire d'un triangle inscrit dans un carré en fonction de la position d'un des sommets du triangle **T₈** ;
- t_{L72}: Représenter graphiquement des fonctions **T₈** ;
- t_{L73}: Étudier les signes des coefficients « a », « b » et « c » d'une fonction affine, représentée graphiquement **T₈** ;
- t_{L74}: Trouver des encadrements pour un produit entre deux nombres donnés sous forme d'intervalle **T₇** ;
- t_{L75}: Résoudre des équations se ramenant à une équation - produit **T₆** ;
- t_{L76}: Résoudre des équations quand l'inconnue figure au dénominateur **T₆** ;
- t_{L77}: Représenter graphiquement des droites en connaissant les coordonnées de deux points **T₈** ;
- t_{L78}: Étudier les signes d'une expression algébrique **T₇** ;
- t_{L79}: Rechercher des images d'une fonction dans une représentation graphique **T₈** ;
- t_{L80}: Rechercher des antécédents d'une fonction dans une représentation graphique **T₈** ;
- t_{L81}: Construire des triangles isométriques **T₅** ;
- t_{L82}: Démontrer que des triangles sont isométriques **T₅** ;
- t_{L83}: Trouver des rectangles de même aire **T₅** ;
- t_{L84}: Construire des représentations graphiques des fonctions linéaires **T₈** ;
- t_{L85}: Utiliser des critères de similitude de triangles **T₅** ;
- t_{L86}: Définir des triangles semblables **T₅** ;
- t_{L87}: Étudier la relation de proportionnalité entre les côtés dans une figure donnée **T₅** ;
- t_{L88}: Utiliser la vitesse moyenne et la moyenne des vitesses **T₂** ;
- t_{L89}: Trouver sur un quadrillage des triangles de même aire **T₅** ;
- t_{L90}: Définir les droites particulières dans un triangle **T₅** ;
- t_{L91}: Définir les intersections des droites particulières dans un triangle **T₅** ;
- t_{L92}: Calculer l'aire des triangles **T₅** ;
- t_{L93}: Étudier la fonction carrée **T₈** ;
- t_{L94}: Étudier les propriétés du trapèze **T₅** ;
- t_{L95}: Prouver des conjectures dans une construction géométrique donnée **T₅** ;
- t_{L96}: Étudier les variations d'une fonction **T₇** ;
- t_{L97}: Résoudre des problèmes **T₂** ;
- t_{L98}: Prouver des conjectures dans une figure donnée **T₅** ;

Le **NAG** se repère par rapport aux contenus mathématiques - des OM - des problèmes. La description des tâches précédentes a pour but- outre de préciser ces principales tâches qui apparaissent dans chaque séance et voir comment elles sont présentes chronologiquement- de classer ces tâches dans les principaux types de tâches. Avec le classement, nous avons pu constater quels sont les principaux types de tâches qui apparaissent le plus souvent dans l'ensemble des séances observées. Cette classification peut être représentée de la façon suivante :

Tableau 55 : Les types de tâches et leurs nombres d'apparitions au lycée.

TYPE TACHE	DESCRIPTION	NOMBRE APPARITION	% EN RELATION AU NOMBRE DE T
T ₁	Développer des identités remarquables	2	2,0
T ₂	Décomposer des nombres en utilisant différents critères.	31	31,6
T ₃	Identifier les différents ensembles de nombres	2	10,2
T ₄	Définir plus généralement des fonctions	2	2,0
T ₅	Résoudre des problèmes en géométrie	22	22,4
T ₆	Résoudre des équations	9	9,2
T ₇	Résoudre des inéquations	7	7,1
T ₈	Représenter les fonctions	15	15,3

L'ensemble de types de tâches présenté ci-dessus montre, de façon générale, les principaux types qui vont composer les principales praxéologies dans les séances observées chez P2. Cet ensemble est composé par 08 types de tâches. Ces types sont présentés avec leur quantité d'apparitions par rapport au nombre total de tâches repérées. T₂ ; T₅ ; T₈ ; sont celles qui apparaissent le plus souvent parmi les 8 types. Les types de tâches T₅ ; T₆ ; T₇ ; T₈ ; sont, selon notre analyse institutionnelle, fortement potentielles à une utilisation du **NAG**. Pour cette raison, celles-ci vont jouer des rôles décisifs dans nos choix de séances pour les analyses plus fines dans le futur.

Les types de tâches présentées précédemment font partie des activités développées dans la classe de P1 avec ses élèves. Elles vont y apparaître au fur et à mesure dans les séances à travers des OM qui vont être construites. Ces types de tâches vont participer à des praxéologies assez complexes (sur lesquelles nous reviendrons plus loin) qui apparaissent avec les activités directives de P2. Pour cela nous allons, avant de présenter nos choix de séances, décrire le style didactique de P2.

A travers une analyse générale de nos protocoles, nous avons pu repérer ce style didactique de P2, ce qui nous a permis de modéliser les séances développées dans cette classe. En fait les types de tâches et la modélisation des séances que nous allons présenter par la suite, ont été les facteurs décisifs dans nos choix des séances faites en classe de seconde, pour être utilisées dans nos analyses plus affinés.

17.2 L'ensemble des séances et un style didactique

L'ensemble des séances présenté précédemment, est constitué de trente quatre séances d'une classe de seconde en France. Ces séances sont accompagnées des principaux types de tâches développées dans chacune d'elles. A partir de la modélisation générale des séances chez P2, nous avons constaté que ces tâches apparaissent en jouant :

soit un rôle de tâche principale dans la séance, autour de laquelle vont se développer d'autres tâches - un rôle de tâche communautaire - qui pourraient réduire l'isolement par ces autres tâches autour de la principale ;

soit un rôle de tâche secondaire, impliquée dans un engagement mutuel avec d'autres tâches dans un effort coordonné pour résoudre une tâche considérée comme principale, donc un rôle de tâche coopérative.

Dans les paragraphes suivants, nous allons décrire davantage les éléments sur lesquels nous nous appuyons pour pouvoir faire ces affirmations.

17.2.1 Le style didactique de P2

L'ancienneté de P2 influence sa pratique, plus précisément sa façon particulière d'agir et d'organiser la relation enseignant - enseigné, c'est à dire son style. Nous précisons que l'ensemble des comportements didactiques coordonnés en vue d'enseigner aux élèves - le style de P2 - est un élément fort. Cet élément nous aidera à comprendre la pratique de cet enseignant. Nous présenterons donc, dans le paragraphe suivant, ce style de P2, repéré à travers l'ensemble des séances observées dans la classe de seconde.

Les séances conduites par P2, démarrent généralement par une tâche d'organisation. Cette tâche précède l'introduction des contenus nouveaux en les encadrant par une situation problématique. Pendant la correction des tâches d'organisation, P2 dévoile aux élèves, au fur et à mesure, le statut, la nature des objets mathématiques étudiés, ainsi que les résultats obtenus, conjecturés, admis ou démontrés :

Tableau 56 : Extrait de la séance-L06.

Lignes	Temps	Acteur	Discours	Remarques
2	00:02:57	P	P2 parle avec la classe.... Bien, alors on va commencer... Donc, vous rentrez ces deux nombres dans la calculatrice et vous me dites ce qui se passe !	(P écrit au tableau) 999 999 999 925 ² 999 999 999 875 ²
3		P	Est-ce que tout le monde l'a fait ?	
4		Es	Oui	
5		P	Alors, dites moi ce que vous avez trouvé ?	
6		E9	Bah ! Moi j'ai trouvé « 1 E 24 » pour le deuxième !	
7		P	Est-ce que tout le monde a trouvé ça ? E33	(P écrit au tableau) 1 E 24

Toujours à travers des échanges oraux avec les élèves, P2 examine et définit certaines spécificités de l'objet mathématique en question et précise ce qui doit être retenu par les élèves. A partir de là, P2 propose normalement des tâches coopératives qui aideront les élèves dans l'élaboration de l'environnement technologico -théorique et dans le travail technique. Ensuite, P2 demande aux élèves d'écrire dans les cahiers de cours (ou bien, il donne une feuille), toutes les définitions des objets mathématiques étudiés et leurs propriétés illustrées par des exemples. Il propose d'autres tâches ou continue l'exécution de la même tâche. Mais là, l'enseignant laisse plus de temps pour que les élèves cherchent, et travaillent seuls. Dans une autre étape, P2 démarre une phase de correction pendant laquelle il va résoudre la (ou les) tâches en demandant aux élèves de participer, soit en venant au tableau, soit oralement. Normalement, l'enseignant termine la séance en proposant aux élèves des tâches à effectuer à la maison. Certaines de ces tâches feront l'objet de corrections ultérieures, en classe ou par remise d'un document aux élèves.

Maintenir dans sa pratique, une linéarité, telle que nous l'avons décrite, exige de P2 un effort et l'utilisation d'outils, sans laquelle, une telle linéarité serait impossible, en raison des contraintes du processus enseignement - apprentissage.

Nous présenterons, quelques points qui nous semblent concourir pour que la pratique de P2 puisse avoir la linéarité que nous avons décrite précédemment.

L'enseignant, pendant les cours, indique aux élèves l'importance des cours et leur rappelle qu'ils auront à passer le baccalauréat à la fin du secondaire. Il aborde les objets de la séance, formant le contenu spécifique du cours, en prenant ces remarques en compte. A travers les tâches proposées aux élèves, il stimule donc aussi leur réflexion sur les mathématiques. Il évoque leur rôle dans la vie quotidienne, le mode de pensée mathématique, les méthodes, etc.

Dans cette perspective, P2 privilégie deux principes :

Il est important d'acquérir un certain nombre de connaissances pour pouvoir suivre et comprendre les mathématiques ;

Le savoir-faire mathématique se construit à partir de soi et de son propre travail.

Pour cela P2, à travers la construction des synthèses de cours, les activités en classe, les activités à la maison, etc., laisse souvent la place au travail personnel et à l'organisation. En fait, fréquemment, les tâches et les situations proposées, ne sont pas de simples applications de la théorie étudiée, mais plutôt une partie du développement de la théorie, une partie du travail mathématique.

17.2.1.1 La progression et l'utilisation du NAG

Nous avons demandé à P2 l'organisation de ses leçons. Il nous a fourni sa " progression ", pour l'année scolaire 2007-2008. Dans cette progression, nous trouvons, de façon synthétique, une répartition équilibrée en nombre de semaines et d'heures pour les premières séances en classe de seconde : les fonctions, les nombres, les triangles isométriques/triangles de même forme, la statistique, les inéquations, la géométrie analytique, la géométrie dans l'espace, les fonctions usuelles, les équations de droites - système d'équations linéaire et trigonométrie – les fonctions circulaires. L'enseignant signale que cette progression est un minimum pour la classe de seconde et qu'elle peut évoluer pour faciliter l'apprentissage et la mise en pratique des notions du programme, en fonction de nouvelles expériences ou de nouvelles idées naissant au cours de l'année.

Cette progression, dans l'ordre où P2 la rédige, n'est pas la reprise du référentiel. L'enseignant prend en compte l'interaction des différentes parties du programme. D'autre part, il précise que le début d'année ne doit pas être consacré à de longues et systématiques révisions des programmes des années précédentes. Les calculs numériques ou algébriques doivent être réalisés régulièrement et ne peuvent pas constituer l'unique objectif des séances du premier trimestre. Et là, nous verrons P2 utiliser le **NAG** pour faire valoir cette remarque.

P2 a construit sa progression en tenant compte des contrôles écrits en classe (environ 3 par trimestre, ou 8 à 9 par an), de leurs corrections ainsi que de celles des devoirs (environ 5 par trimestre, ou 15 par an). La progression est organisée et élaborée en début d'année sur, à peu près, trente semaines, parmi lesquelles nous avons fait des observations pendant environ seize semaines. P2 n'a pas suivi systématiquement sa progression, ce qui ne nous a pas posé de problème, sachant que nous ne lui avons pas dévoilé notre intérêt pour le **NAG**. Grâce à son style, nous n'avons pas eu besoin de savoir où il en était précisément dans sa progression, les jours où nous avons observé des séances. Pourtant, à la fin de chaque séance, ce professeur nous a fourni une synthèse avec les sujets et thèmes abordés, ce qui nous a permis de localiser où il en était par rapport à son évolution. En fait, le style de P2 nous a laissé plusieurs possibilités pour choisir les séances permettant une analyse plus fine.

17.2.1.2 La séance n'est pas seulement magistrale

P2, dans la plupart des séances observées, évite les cours, essentiellement magistraux, mais indique pourtant qu'il arrive à couvrir le programme.

Couvrir le programme, pour P2, c'est bien, c'est même nécessaire, mais ce n'est pourtant pas l'essentiel de son point de vue. Il lui semble que plus importante est la capacité de mise au point de connaissances et de compétences mathématiques que les élèves doivent acquérir. Et selon lui, on ne peut compter que sur les situations où les élèves sont aussi des acteurs pour s'affirmer dans ces méthodes.

Pour gagner du temps sur le contenu et en dégager pour le contenant, P2 a décidé d'utiliser davantage les « questions-réponses » pendant les séances. Ainsi, durant l'étude d'un sujet, l'enseignant guide une véritable interaction entre les élèves et le contenu en voie d'apprentissage. Il demande aux élèves de compléter des hypothèses, d'énoncer des théorèmes, d'avancer des conclusions par rapport aux propriétés d'un objet, etc.

Selon P2, le travail « questions-réponses » est très intéressant, car il permet de développer l'esprit de synthèse qui n'est pas forcément acquis d'avance chez les élèves. Il désigne, sur leur demande, ceux qui interviendront dans la séance. Si l'intervention n'est pas conforme aux attentes de P2 ou si elle est trop longue, il la renvoie aux élèves en leur demandant de la corriger ou de la synthétiser davantage. De cette façon, P2 améliore les interventions des élèves au fur et à mesure qu'elles sont faites. Une fois validées, l'ensemble des élèves les notent sur le cahier de cours et à la fin de séance, les élèves auront les synthèses de tous les thèmes traités.

Une question reste cependant à résoudre : comment P2 motive-t-il l'ensemble des élèves, lorsqu'ils sont en classe, pour qu'ils deviennent acteurs et ne restent pas spectateurs ? Les élèves préfèrent parfois les cours magistraux durant lesquels ils peuvent écouter sans participer et sans vraiment réfléchir à ce qui se fait dans la séance. Certains ont du mal à se mettre sérieusement au travail. Pour motiver les élèves, l'enseignant, en fin

de séance, note ceux qui ont participé. Ces notes font partie de l'ensemble des notes prises en compte dans les moyennes des élèves, en fin de trimestre. En général, c'est une bonne motivation pour provoquer des questions. La phase de « questions-réponses » de la séance est souvent une forme de cours dialogué, mais avec ses spécificités.

Les questions et les réponses viennent des élèves mais aussi du professeur ;

A certains moments de quelques séances, P2 posait des questions et donnait lui-même les réponses.

17.2.1.3 Les dialogues dans le miroir

Le « dialogue dans le miroir » est la situation dans laquelle l'enseignant répond lui-même aux questions qu'il pose. Dans ces dialogues, P2 règle le rythme de la séance de manière plus rapide. Nous pouvons interpréter cette attitude comme une stratégie pour mieux guider l'institutionnalisation de certains objets :

Tableau 57 : Extrait de la séance-L06.

Lignes	Temps	Acteur	Discours	Remarques
141	00:26:00	P	Une soustraction, une différence. Facile à retenir : si vous êtes en voiture, pour savoir la distance que vous aurez parcourue entre une borne kilométrique et une autre, qu'est-ce que vous faite ?	
142		P	On fait la soustraction. D'accord ! Et on a la distance parcourue	
143	00:26:16	P	Donc, deux choses à retenir déjà : une distance, c'est une différence et quand ça doit être positif, on prend cette différence en valeur absolue.	
144	00:26:27	P	Je la prends soit « p » moins « q » soit « q » moins « p », je m'en moque maintenant, du moment où je la mets en valeur absolue	
145	00:25:35	P	On va voir sur un exemple, vous notez cet exemple	

Une telle pratique dans le processus d'institutionnalisation peut être pertinente pour consolider les acquis des élèves. Il est possible d'interpréter aussi l'emploi des « dialogues dans le miroir » comme des stratégies de P2 pour empêcher la classe de s'engager vers un débat autour des réponses erronées qui peuvent être données par les élèves, ce qui, notamment, ferait perdre du temps. On peut constater, qu'immédiatement après les « dialogues dans le miroir », les élèves et P2 reprennent le cours des « questions –réponses » sans que ces moments aient trop modifié le déroulement de la séance.

Ces éléments peuvent donc prendre une forme, quelque peu magistrale, mais nos observations nous ont montré que les élèves étaient beaucoup plus réceptifs quand les questions venaient d'eux-mêmes. Cela permet surtout à P2 de se concentrer, avec les élèves, sur les points les plus délicats des programmes.

17.2.1.4 Déroulement général des séances

L'enseignant ne dévoile pas aux élèves, au début des séances, les objectifs de chaque séance. Il les fait apparaître, graduellement, au fur et à mesure. Les séances sont le plus

souvent structurées en trois étapes : début de la séance ; noyau de la séance ; clôture de la séance.

Pendant ces étapes, sur lesquelles nous reviendrons par la suite, il y a des apports nouveaux : le contrôle des acquis de la séance, la correction des tâches, l'élaboration des techniques, les tâches d'organisation, les tâches coopératives, les synthèses de fin de séance. P2 suscite l'activité des élèves, en les interrogeant régulièrement à leur place ou au tableau (à travers les questions-réponses).

P2 circule régulièrement dans la classe pour avoir une vision globale des élèves, pour surveiller la prise de notes et contrôler le contenu et la gestion des cahiers. Il essaye de ne pas monopoliser la parole et de mémoriser les noms des élèves.

17.2.1.4.1 Une présence considérable du NAG

L'enseignant demande aux élèves qu'ils notent en priorité ce qui est écrit au tableau, lorsque ces annotations sont mises au propre. Il exige donc, que les élèves écrivent de façon lisible et qu'ils placent les résultats essentiels de la séance dans le cahier de cours, endroit facile à consulter chaque fois qu'ils en ont besoin.

Il estime que le cours de mathématiques dans lequel l'enseignant, donne des explications, énonce des propriétés et des règles, présente des exemples et contre-exemples et « pendant lequel l'élève, doit écouter et prendre des notes simultanément », ne permet pas d'engager les élèves actuels sur une activité intellectuelle personnelle en mathématiques.

Les séances chez P2 sont marquées par les moments d'activité des élèves, notamment sur des exercices ou problèmes de recherche. De ce fait, P2 considère que la synthèse, à la suite de telles activités, est essentielle, afin de réduire le temps que les élèves passent à prendre des notes au lieu de participer. Dans le contenu du cahier de cours, on trouve le cheminement de la séance, les informations essentielles portées comme points de repères assurant une vision synthétique d'ensemble. Le cahier de cours est utilisé et rempli régulièrement. Nous y trouvons le plan des séances, la référence des exercices à préparer et les textes des devoirs.

Une approche « décloisonnée » des contenus est appliquée dans quasiment toutes les séances de cette classe. L'enseignant s'appuie sur le fait que chaque notion ne prend vraiment son sens qu'en lien avec d'autres notions. Ainsi de nombreux problèmes d'approche et des activités de mobilisation sont choisis pour favoriser des interactions entre des domaines différents (numérique et géométrique, numérique et algébrique, géométrie plane et géométrie dans l'espace, etc.) De ce fait, la logique de progression par chapitres de contenus bien délimités se trouve remise en cause. Un même registre de contenu est abordé en plusieurs fois à différents moments de l'année. C'est ce que nous appelons le « décloisonnement des contenus ». Et là, nous avons constaté une forte utilisation du NAG.

17.2.1.4.2 L'erreur et le devoir

Lorsqu'un élève commet une erreur, P2 évite de la corriger immédiatement lui-même. Il préfère faire analyser cette erreur et la faire rectifier par l'élève ou le groupe.

En dehors des devoirs surveillés, l'enseignant propose des devoirs hebdomadaires rédigés en temps libre (devoirs à la maison) et des interrogations ponctuelles de leçon. Les devoirs corrigés sont rendus assez rapidement et contiennent des appréciations de P2.

17.2.1.4.3 L'utilisation des manuels

Les séances observées en classe de seconde ont eu lieu : le mercredi (rarement, car ce jour est plutôt réservé à l'aide individualisée), le jeudi (une première séance de 1 heure 50 et une autre de 55 minutes) et le vendredi (55 minutes). Pendant chaque séance, P2 essaye de maintenir une même structure. Il y arrive plutôt bien, pour la première séance du jeudi. C'est souvent ce jour où l'enseignant arrive à parcourir toutes les étapes d'une séance (que nous décrirons ensuite). Dans une de ces séances, nous pouvons voir que tous les élèves disposent de l'ouvrage retenu pour la classe, mais qu'ils ne l'utilisent quasiment pas pendant cette période. L'enseignant utilise plutôt le manuel de la classe pour donner des exercices à faire à la maison. P2 se sert aussi d'une bibliothèque et de quelques livres de référence, avec lesquels il prépare des documents photocopiés.

17.2.2 Une modélisation pour les séances chez P2

Les séances tournent autour de riches praxéologies. Pour pouvoir étudier le **NAG** dans ces séances, il nous a fallu savoir comment ses séances étaient organisées. Nous allons décrire cette organisation dans les paragraphes qui suivent.

17.2.2.1 Les étapes des séances

Après une analyse générale de l'ensemble des séances, depuis l'arrivée des élèves jusqu'à la fin de la classe, on peut remarquer que les séances se déroulent en trois étapes :

Début de la séance - DS ;

Noyau de la séance - NS ;

Clôture de la séance – FS ;

Ces étapes ont des caractéristiques bien différentes les unes des autres, surtout en ce qui concerne le travail de l'enseignant et celui des élèves.

Le début de la séance est marqué par son organisation. Il propose d'abord une tâche d'organisation, puis commence le travail mathématique à travers la correction de cette tâche, parfois accompagnée d'une petite révision. Dans cette étape ont généralement lieu les moments de la première rencontre avec un type de tâche. Et c'est là aussi que commencent les premiers travaux sur l'exploration du type de tâche et l'élaboration de l'environnement technologico - théorique.

Le noyau ou le cœur de la séance est la partie à laquelle l'enseignant consacre presque toujours le plus de temps. C'est au cours de cette période qu'il a été possible d'identifier les contenus mathématiques abordés et travaillés en classe (objets, sujets, thèmes). Cette étape prend une grande partie du temps de la séance, car c'est ici que se placent effectivement les moments d'exploration du type de tâches, la constitution de l'environnement technologico - théorique, le travail de la technique, l'institutionnalisation et l'évaluation.

La clôture de la séance est la dernière partie de la séance. Elle est marquée par deux types de préoccupations : la proposition de devoirs à faire à la maison et la réalisation, d'au moins, une tâche de structuration. Cette étape est aussi consacrée aux messages à donner, au rangement du matériel pour la sortie des élèves.

Le schéma présenté ci-dessous a été construit pour illustrer ces étapes :

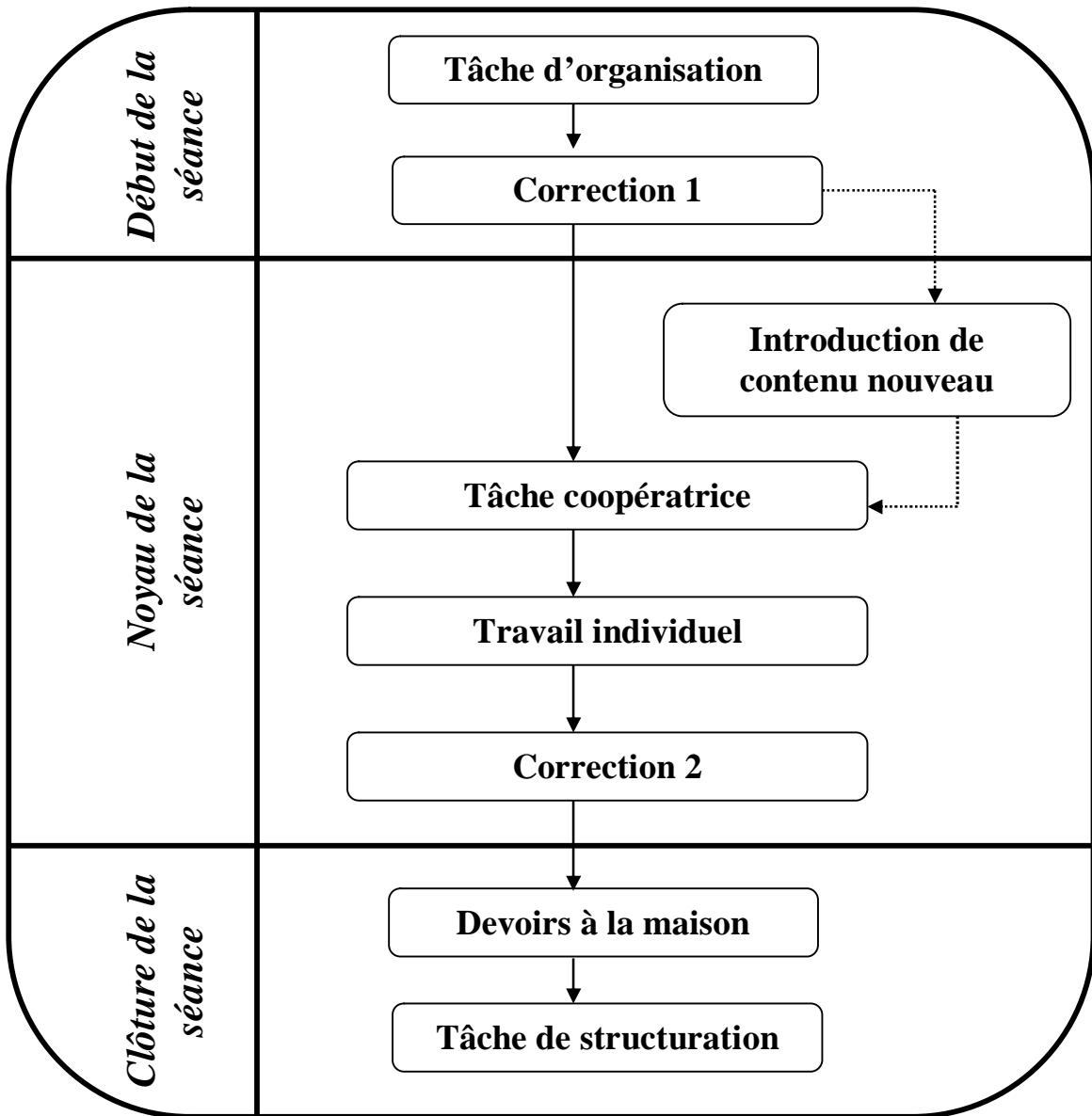


Figure 50 : Schéma général des séances au lycée.

Nous allons, à partir de ceci, préciser davantage les étapes des séances et leurs éléments, en détaillant les quelques différences observées.

Le schéma présenté ci-dessus ne laisse apparaître nulle part les traces écrites de P2 et dans une même séance, plusieurs étapes peuvent être répétées. La partie « noyau » est celle qui est la plus fréquemment répétée.

Selon l'activité proposée (individuelle ou en binôme) dans le noyau de la séance, le temps dévolu au travail individuel des élèves et le type de correction peuvent être plus ou moins longs. Si l'enseignant a proposé une tâche à faire en binôme, il n'y aura pas de temps pour le travail individuel. En outre, le déroulement d'une séance n'a pas été nécessairement

le même dans toutes les séances, bien que nous ayons présenté un schéma régulier des étapes à travers la figure précédente.

17.2.2.2 Début de la séance

17.2.2.2.1 Tâche d'organisation

En tout début de séance, P2 a l'habitude de demander notamment de sortir les cahiers de cours, d'exercices et de brouillon. Ensuite, l'enseignant propose une tâche – tâche d'organisation - sur laquelle les élèves doivent travailler. Cette tâche a pour but de lancer une première rencontre des élèves avec un objet mathématique, de préciser les éléments du contrat, de rassembler et organiser l'utilisation des notions et des objets mathématiques déjà étudiés et qui seront employés.

17.2.2.2.2 Correction 1

Pendant cette correction, P2 commence la constitution d'un embryon de technique, d'où va émerger une technique plus élaborée. La tâche proposée dans cette étape (tâche d'organisation) n'apparaît généralement pas comme une fin en soi. Elle est un moyen pour qu'une technique de résolution puisse commencer à être envisagée. P2 ne laisse pas beaucoup de temps aux élèves pour qu'ils puissent chercher. Mais le temps est suffisant pour qu'ils puissent comprendre que, malgré tous les outils dont ils disposent, la tâche ne pourra pas être résolue .

17.2.2.3 Noyau ou cœur de la séance

17.2.2.3.1 Introduction d'un contenu nouveau

Dès que les élèves sont bloqués, P2 introduit le contenu nouveau qui va les aider. Pendant cette étape, l'enseignant introduit, au fur et à mesure, des objets et des thèmes nouveaux. Il interroge verbalement les élèves qui lui posent des questions, ainsi qu'au reste de la classe. Il décide ce qui sera inscrit, d'abord au tableau, puis dans les cahiers. Pendant cette partie, nous trouvons des tâches coopératives jouant des rôles différents.

17.2.2.3.2 Tâches coopératives

Ces tâches peuvent apparaître :

soit en aidant à introduire des contenus nouveaux : une tâche pour étudier la situation, un problème, un moyen de créer et de mettre au point une technique qui sera, elle-même, le moyen de résoudre, de manière quasi automatique, des situations et des problèmes de ce type ;

soit en aidant à améliorer une technique déjà élaborée, en la rendant plus efficace et plus fiable.

Dans le premier cas, la tâche coopérative est simple et de résolution presque immédiate et elle ne prend pas beaucoup de temps. Dans le second cas, la tâche

coopératrice est plus complexe et peut demander aux élèves un temps plus important pour être résolue. Dans ce cas, la tâche coopératrice participe au moment de la mise à l'épreuve de la technique. Elle appartient à un corpus de tâches soigneusement choisies par P2. Et lorsque l'enseignant propose des tâches avec ce but, il y consacre un moment afin que les élèves puissent travailler individuellement.

17.2.2.3.3 Travail individuel

La durée de celui-ci est variable et dépend du nombre de tâches proposées aux élèves.

Les élèves travaillent individuellement en employant les techniques et les objets abordés et en utilisant les cahiers de cours et d'exercices dans l'accomplissement des tâches proposées. Quelquefois, P2 fixe, préalablement, une durée pour l'exécution de la tâche. Il circule dans la classe et aide les quelques élèves qui le lui demandent, jusqu'au moment où il interrompt le travail individuel pour commencer la correction collective.

17.2.2.3.4 Correction 2

Dans la plupart des séances, la correction a été faite au tableau par l'enseignant. Il sollicite souvent la participation des élèves et en profite pour préciser ce qu'est exactement l'organisation mathématique élaborée. Il précise, d'une part les éléments qui, ayant concouru à la construction de cette organisation, n'y seront pas pour autant intégrés, et d'autre part les éléments qui entreront, de manière définitive, dans l'organisation mathématique visée. L'enseignant lève les doutes et ajoute des explications. Dans cette forme de correction, les élèves l'accompagnent, de leur place, avec une totale responsabilité de leur travail. Quelquefois P2 demande aux élèves de passer au tableau pour faire la correction. L'enseignant accompagne ce qui est réalisé au tableau, fait des commentaires ou suscite la participation d'autres élèves pour lever les doutes .

17.2.2.4 Clôture de la séance

17.2.2.4.1 Devoir à la maison

L'enseignant choisit un corpus de tâches à faire à la maison, correspondant qualitativement et quantitativement au besoin de la classe. Le plus souvent, ce corpus est constitué de tâches tirées du manuel de la classe ou des manuels personnels de P2.

17.2.2.4.2 Tâche de structuration

L'enseignant a déjà choisi, préalablement, quelques tâches du corpus, qu'il va corriger rapidement. Ces corrections ne sont jamais écrites au tableau, mais faites verbalement. Elles sont dirigées par l'enseignant qui demande des réponses verbales aux élèves et passe d'une tâche à une autre de façon rapide. P2 montre, à partir de cette tâche, comment le corpus peut être résolu et où chaque contenu nouveau doit être appliqué. Les questions-réponses dans cette étape sont beaucoup plus spécifiques ; c'est en quelque sorte une interrogation orale.

Dans cette classe, toutes les séances ne se déroulent pas ainsi. Certaines séances ont débuté, par exemple, par une tâche coopératrice, une correction, etc.

Après avoir décrit le déroulement général des séances, et avant de continuer avec nos analyses générales, nous présentons, dans le tableau ci-dessous une synthèse du déroulement des séances les plus fréquentes dans cette classe :

Tableau 58 : Synthèse du déroulement des séances.

DS	Tâche d'organisation	Proposée aux élèves au début d'une séance (normalement les séances où il y aura des contenus nouveaux). Elle a pour but : de promouvoir une première rencontre des élèves avec un objet mathématique, de préciser les éléments du contrat, de rassembler et d'organiser l'utilisation des notions et des objets mathématiques déjà étudiés et qui seront employés.
	Correction 1	C'est un moyen pour qu'une technique de résolution puisse commencer à être envisagée, le début de la constitution d'un embryon de technique, à partir de laquelle une technique plus évoluée va émerger.
NS	Introduction contenus nouveaux	L'enseignant demande l'attention des élèves, il commence à dévoiler, au fur et à mesure, les contenus nouveaux. Il énonce des définitions, des propriétés, donne des explications et appelle l'attention des élèves sur les détails de la résolution. Ensuite, il écrit les définitions et les règles qui généralisent et systématisent ce qui a été donné en exemple avec la participation des élèves, puis ceux-ci copient ce qui est au tableau dans leurs cahiers.
	Tâche coopératrice	Pour aider à l'introduction des contenus nouveaux.
		Pour aider à améliorer une technique déjà élaborée.
	Travail individuel	Les élèves travaillent individuellement en utilisant les techniques et les objets abordés.
Correction 2	Préciser ce qu'est exactement l'organisation mathématique élaborée : les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas, pour autant, intégrés ; les éléments qui entreront, de manière définitive, dans l'organisation mathématique visée.	
CS	Devoirs à la maison	Corpus de tâches à faire à la maison qualitativement et quantitativement adaptées au besoin de la classe.
	Tâche de structuration	Quelques tâches du corpus proposées et corrigées rapidement à travers des questions-réponses en oral. Elles montrent comment le corpus peut être résolu et où chaque contenu nouveau doit être appliqué.

Ce tableau nous aidera à étudier et à comprendre ce qui caractérise la construction des connaissances mathématiques dans cette classe.

Les complexes praxéologies : Les praxéologies mathématiques s'enrichissent et se réorganisent au fur et à mesure que P2 avance dans l'étude. L'enseignant les enrichit par le changement de thèmes d'étude, et sur un même thème, par un élargissement des résultats théoriques et par l'introduction de nouvelles tâches. Sur un même type de tâches, de nouvelles techniques sont apprises.

En fait, le style didactique de P2 marque le déroulement des séances ; l'étude d'un thème dans cette classe doit donc aboutir à la construction par l'élève d'une praxéologie complexe liée à ce thème. Celui-ci est constitué par un type de tâches et par les techniques pour les réaliser (et les données théoriques qui sous-tendent ces dernières). Cette praxéologie est complexe par la variété des éléments qui la constitue et aussi par les interrelations entre ces éléments qu'elle suppose et nécessite. Le travail dans cette classe demande que les élèves comprennent et intègrent ces relations pour qu'ils soient en mesure d'effectuer l'activité demandée.

17.3 D'un bilan général vers les séances choisies

Nous cherchons à étudier le **NAG** à travers une analyse de la pratique des enseignants. Notre dispositif d'analyse de la pratique cherche à considérer les différentes dimensions de cette pratique dans une perspective didactique. Dans ce contexte, la partie suivante a pour but la mise en perspective de certaines caractéristiques des séances pour que, en considérant les types de tâches, nous puissions choisir les séances avec lesquelles nous poursuivrons nos analyses.

En effet, P2 choisit soigneusement les tâches qu'il propose aux élèves et la forme de travail. Nous pouvons avancer que ces tâches choisies, surtout au début des séances, ont de l'influence sur les activités des élèves et, en conséquence, sur leurs apprentissages. Le choix de la tâche et l'accompagnement font partie des pratiques de P2 qui recouvrent tout ce que l'enseignant met en œuvre avant, pendant et après la classe.

Nous venons de montrer la modélisation que nous avons faite pour les séances dans cette classe. Cette modélisation nous permettra de mieux comprendre le statut du **NAG** dans la pratique de P2 et le rapport de cet enseignant avec le **NAG**. Nous allons donc analyser notre ensemble de séances au lycée, en considérant les types de tâches travaillées dans chaque séance. En fait, c'est la tâche choisie au début des séances par P2 qui va faire apparaître différents registres, et qui va demander du travail sur différents cadres. Et donc nous avons considéré comme important de préciser le domaine dans lequel les tâches proposées par P2 ont été posées.

Les types de tâches, la modélisation et des éléments méthodologiques, nous permettront de mieux aborder et mieux comprendre le statut du **NAG** dans la pratique de P2, d'une part, et le rapport personnel de P2 avec le **NAG**, d'autre part. Nous allons donc examiner notre ensemble de séances au lycée en considérant ces éléments pour choisir les séances et poursuivre nos analyses plus fines, comme le montre la figure suivante :

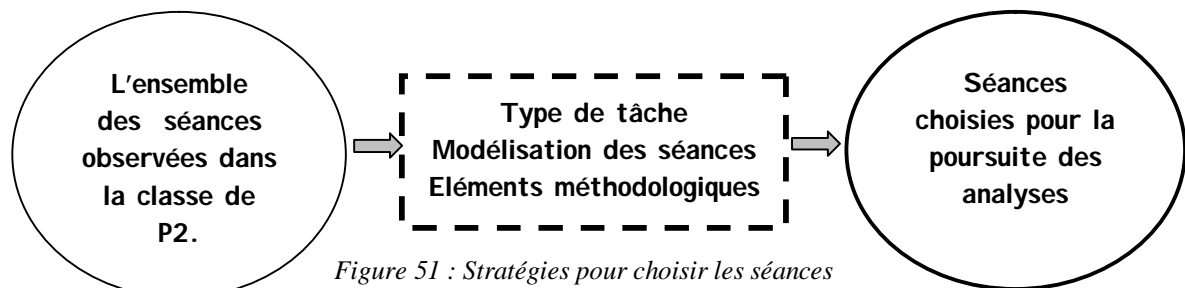


Figure 51 : Stratégies pour choisir les séances

La figure ci-dessus résume les éléments dont nous avons tenu compte pour choisir les séances avec lesquelles nous continuerons les analyses. Pour éclairer ces choix, nous présenterons les principales étapes de ce processus.

17.3.1 Un bilan statistique

Les éléments statistiques que nous présenterons sont tous tirés de l'analyse générale à partir de l'ensemble des séances et des tâches et, comprennent 33 séances, soit un total de 97 types principaux de tâches. En fait, nous ne ferons pas une analyse complète de toutes les séances. Ceci a été fait à travers les principaux types de tâches repérés. A partir de cette analyse, nous pouvons repérer une utilisation potentielle du **NAG**. Voici le tableau que nous avons construit :

Tableau 59 : Utilisation potentielle et effective du **NAG** dans les séances.

SÉANCE	TYPES DE TÂCHES	NOM CHAPITRE	UTILISATION POTENTIELLE NAG	UTILISATION EFFECTIVE NAG
L1	T ₁ ; T ₂ ; T ₃	Activités numériques	NON	NON
L2	T ₂	Activités numériques	NON	NON
L3	T ₂ ; T ₃	Activités numériques	NON	NON
L4	T ₂	Activités numériques	NON	NON
L5	T ₂	Activités numériques	NON	NON
L6	T ₂	Activités numériques	NON	OUI
L7	T ₂ ; T ₄	Calcul algébrique	NON	NON
L8	T ₂	Calcul algébrique	NON	NON
L9	T ₂	Calcul algébrique	NON	NON
L10	T ₄ ; T ₅	Fonctions	OUI	NON
L11	T ₂ ; T ₃ ; T ₄	Fonctions	NON	OUI
L12	T ₅	Triangles	OUI	OUI
L13	T ₆	Inéquations	OUI	OUI
L14	T ₆ ; T ₇	Inéquations	OUI	NON
L15	T ₂ ; T ₅ ; T ₆ ; T ₇	Inéquations	OUI	OUI
L16	T ₂ ; T ₃ ; T ₆ ; T ₇ ; T ₈	Équations de droites	OUI	NON
L17	T ₈	Équations de droites	OUI	OUI
L18	T ₂ ; T ₃ ; T ₄ ; T ₆	Équations de droites	OUI	OUI
L19	T ₅ ; T ₆ ; T ₇ ; T ₈	Équations de droites	OUI	OUI
L20	T ₈	Équations de droites	OUI	OUI
L21	T ₈	Équations de droites	OUI	NON
L22	T ₈	Équations de droites	OUI	OUI
L23	T ₆ ; T ₇	Équations de droites ; système équation	OUI	OUI
L24	T ₇ ; T ₈	Équations de droites ; système équation	OUI	OUI
L25	T ₈	Équations de droites ; système équation	OUI	OUI
L26	T ₅	Triangles isométriques	OUI	OUI
L27	T ₅ ; T ₈	Triangles isométriques	OUI	OUI
L28	T ₅	Triangles isométriques	OUI	NON
L29	T ₂ ; T ₅	Triangles isométriques	OUI	OUI
L30	T ₅	Triangles isométriques	OUI	OUI
L31	T ₅ ; T ₈	Fonctions usuelles	OUI	OUI

L32	T ₅	Fonctions usuelles	OUI	OUI
L33	T ₂ ; T ₇	Fonctions usuelles	OUI	OUI
L34	T ₅	Triangles	OUI	OUI

A partir du tableau ci-dessus, nous pouvons avancer quelques données statistiques concernant l'utilisation potentielle du **NAG** par rapport au total de séances.

17.3.1.1 L'utilisation potentielle du NAG

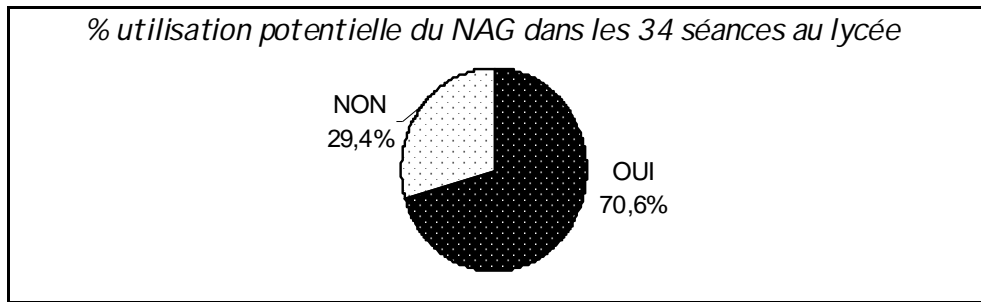


Figure 58.1 : Utilisation potentielle du **NAG**.

Nous repérons, à travers une analyse générale des principaux types de tâches, qu'une utilisation potentielle est prévue en 24 séances, c'est-à-dire dans 70,6% du total. Les 10 séances restantes, où une utilisation du **NAG** n'a pas été prévue, représentent 29,4%, du tout. Nous avons déjà signalé notre intérêt de savoir le domaine dont les tâches ont été proposées dans cette classe, et pour cela, nous nous appuyons sur la progression que P2 nous a fournie. Et c'est à partir de là que nous avons trouvé les noms des chapitres qui accompagnent chaque séance.

En ce qui concerne les chapitres étudiés dans les séances, nous repérons que, sur 34 séances observées chez P2, il a consacré 3 séances à chacun des chapitres : Calcul algébrique; Inéquations ; Équations de droites, système ; Fonctions usuelles, soit 8,8% des séances pour chacun de ces chapitres. Le chapitre activités numériques représente 17,6% du total en 6 séances. Les chapitres Fonction et triangle, avec 2 séances chacune, correspondent chacun à 5,9% du total. Le chapitre Équations de droites, le plus fréquent chez P2, avec un total de 7 séances, représente 20,6% du total. Le chapitre Triangles isométriques, avec 5 séances, se rapporte à 14,7% du total. Voici la figure qui résume bien ce que nous décrivons ci-dessus :

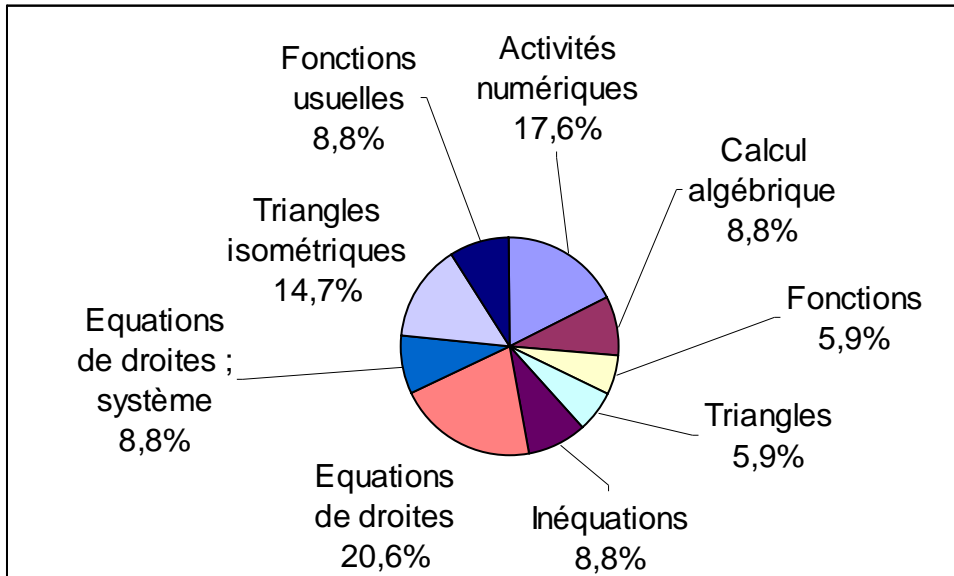


Figure 52 : Distribution des chapitres par rapport au total de séances.

Nous remarquons que le **NAG** a été utilisé dans des séances pour lesquelles nous n'avions pas prévu son utilisation, mais qu'en revanche, il n'est pas apparu dans des séances où nous l'avions prévu. Pour cette raison, il nous a donc fallu faire une analyse effective du **NAG**.

17.3.1.2 D'une utilisation potentielle à une utilisation effective

Nous avons présenté une analyse potentielle du **NAG** dans les séances. En fait, nous avons fait une analyse - a priori - des principaux types de tâches repérées dans chaque séance, et à partir de cette analyse, nous en avons déduit l'utilisation potentielle du **NAG**. Cependant, après une analyse – a posteriori - de nos protocoles (dont nous ne donnons pas tous les éléments dans cette partie de notre travail), nous remarquons que le **NAG** n'a pas été quantitativement utilisé comme nous l'avions prévu. L'utilisation effective du **NAG** peut être représentée par le graphique suivant :

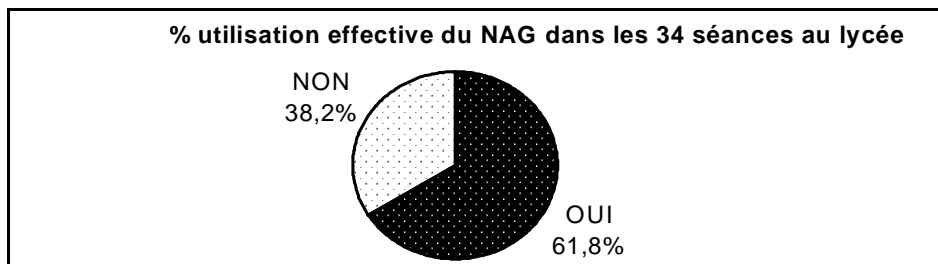


Figure 59.1 : Utilisation effective du NAG.

Par rapport à l'utilisation potentielle du **NAG**, l'utilisation effective a été en baisse. Maintenant nous pouvons regarder les pourcentages effectifs d'utilisation du **NAG** par chapitre.

Nous allons dans ce tableau ci-dessous représenter le pourcentage des séances par chapitre et le pourcentage du **NAG** dans chacun de ces chapitres :

Tableau 60 : L'utilisation potentielle du NAG en % par chapitre.

NOM CHAPITRE	NOMBRE SEANCES	% PAR RAPPORT AU N° TOTAL SEANCES	NOMBRE SEANCES UTILISATION EFFECTIVE NAG
Activités numériques	6	17,6%	1
Calcul algébrique	3	8,8%	0
Fonctions	2	5,9%	1
Triangles	2	5,9%	2
Inéquations	3	8,8%	2
Équations de droites	7	20,6%	5
Équations de droites ; système équation	3	8,8%	3
Triangles isométriques	5	14,7%	4
Fonctions usuelles	3	8,8%	3

Nous nous proposons d'étudier le rôle et la place du **NAG** dans la pratique de P2. Cet enseignant a consacré les séances observées à neuf grands chapitres nommés par lui même. Cependant, le programme de mathématiques en seconde est composé de trois grands chapitres : statistique, calcul et fonctions, géométrie. Nous rassemblerons, dans le tableau ci-dessous, les chapitres proposés par P2, en les organisant en fonction des chapitres proposés par le programme :

Tableau 61: Organisation des chapitres proposée par P2 en fonction du programme.

CHAPITRES DU PROGRAMME	CHAPITRES PROPOSES PAR P2	NOMBRE SEANCES UTILISATION EFFECTIVE NAG	% UTILISATION EFFECTIVE NAG PAR CHAPITRES DU PROGRAMME
<i>STATISTIQUE</i>	-	0	0%
<i>CALCUL ET FONCTIONS</i>	Activités numériques	1	31,8%
	Calcul algébrique	0	
	Fonctions	1	
	Inéquations	2	
	Fonctions usuelles	3	
<i>GEOMETRIE</i>	Triangles	2	68,2%
	Triangles isométriques	4	
	Équations de droites	5	
	Équations de droites ; système équation	3	

Maintenant que nous avons rassemblé les chapitres proposés par P2 en deux grands groupes, nous allons choisir une séance pour la poursuite des analyses. Mais il y a deux éléments importants à considérer avant nos choix. Il s'agit du nombre d'apparitions du **NAG** dans la séance et le temps pendant lequel le **NAG** est utilisé. En fait, les observations dans cette classe montrent que l'utilisation du **NAG** ne se produit pas de la même manière dans toutes les séances. Le **NAG** peut être utilisé une ou plusieurs fois dans une même séance. En ce qui concerne le temps consacré à cette utilisation, nous remarquons qu'il est aussi variable. Le tableau ci-dessous présente donc ces éléments en lien avec les séances choisies jusqu'ici :

Tableau 62 : Nombre d'apparition et temps d'utilisation du NAG

SÉANCE	TYPES DE TÂCHES	NOM CHAPITRE	UTILISATION EFFECTIVE NAG	NB FOIS APPARITION NAG	TEMPS UTILISATION NAG
L5	T ₂	Activités numériques	OUI	P	I
L11	T ₂ ; T ₃ ; T ₄	Fonctions	OUI	P	I
L12	T ₅	Triangles	OUI	P	I
L13	T ₆	Inéquations	OUI	P	M
L15	T ₂ ; T ₅ ; T ₆ ; T ₇	Inéquations	OUI	E	M
L17	T ₈	Équations de droites	OUI	E	I
L18	T ₂ ; T ₃ ; T ₄ ; T ₆	Équations de droites	OUI	E	M
L19	T ₅ ; T ₆ ; T ₇ ; T ₈	Équations de droites	OUI	P	I
L20	T ₈	Équations de droites	OUI	E	M
L22	T ₈	Équations de droites	OUI	E	M
L23	T ₆ ; T ₇	Équations de droites ; système équation	OUI	P	I
L24	T ₇ ; T ₈	Équations de droites ; système équation	OUI	E	I
L25	T ₈	Équations de droites ; système équation	OUI	E	M
L26	T ₅	Triangles isométriques	OUI	E	I
L27	T ₅ ; T ₈	Triangles isométriques	OUI	P	I
L29	T ₂ ; T ₅	Triangles isométriques	OUI	E	M
L30	T ₅	Triangles isométriques	OUI	P	I
L31	T ₅ ; T ₈	Fonctions usuelles	OUI	P	M
L32	T ₅	Fonctions usuelles	OUI	E	M
L33	T ₂ ; T ₇	Fonctions usuelles	OUI	P	I
L34	T ₅	Triangles	OUI	E	I

Dans le tableau ci-dessus « NB FOIS APPARITIONS NAG » et « TEMPS UTILISATION NAG » correspondent respectivement à « nombre de fois » d'apparition du NAG dans la séance et le temps consacré à une telle utilisation. Comme nous l'avons déjà annoncé, nous n'avons pas l'intention de préciser quantitativement le nombre de fois que le NAG apparaît dans les séances, ni le temps qu'il reste utilisé. Cependant, nous considérons que ces données jouent des rôles importants dans notre étude, et donc nous allons les considérer de façon générale, car des précisions plus pertinentes seront faites dans le cadre de nos analyses affines. Dans le tableau ci-dessus E et P signifient, respectivement, « un certain nombre » et « plusieurs » et, dans la colonne voisine, M et I signifient, respectivement, « moyen » et « intermédiaire ».

17.3.2 Les séances spécifiques

Nous avons cherché à donner la priorité aux séances appartenant à des chapitres (nommés par P2) différents. Et nous avons choisi les séances présentées ci-dessous en considérant les types de tâches, le domaine mathématique où la tâche a été posée, l'apparition et le temps d'utilisation du NAG.

Nous avons dans un premier temps fait une première sélection des séances où une utilisation du **NAG** semble spécifique de notre étude :

Tableau 63 : Les séances spécifiques du NAG.

SÉANCE	TYPES DE TÂCHES	NOM CHAPITRE	UTILISATION EFFECTIVE NAG	NB FOIS APPARITION NAG	TEMPS UTILISATION NAG
L5	T₂	Activités numériques	OUI	P	I
L11	T₂; T₃; T₄	Fonctions	OUI	P	I
L12	T₅	Triangles	OUI	P	I
L23	T₆; T₇	Équations de droites ; système équation	OUI	P	I
L34	T₅	Triangles	OUI	E	I

Notre travail dans le cadre de cette thèse se limitera à l'analyse de la séance L5.

CHAPITRE D9 : LES ANALYSES DES SITUATIONS DU NAG EN SECONDE

Dans les analyses que suivent, nous nous centrerons sur la séance L5, pour mettre en évidence des caractéristiques mathématiques et didactiques relatives à l'utilisation du NAG.

Nous rappelons que notre démarche d'analyse comporte trois étapes

- La description générale et la trame de la séance ;
- La description des organisations mathématiques ;
- L'analyse de l'organisation didactique.

18 La séance L5 : La différence entre les carrés de deux nombres

Dans cette section nous analysons la séance L5 du 04 octobre 2007, où le NAG intervient, à travers l'étude de « la distance entre deux nombres » et de « la valeur absolue d'un nombre ». Nous commençons par la situer dans le chapitre auquel cette séance appartient. Ce chapitre a été intitulé par P2 comme « chapitre 01 : Activités numériques ».

18.1 Positionnement de la situation du NAG dans son chapitre

A partir des données recueillies dans cette classe (la discussion de P2, les cahiers d'exercices des élèves, les documents donnés en cours ; le cahier de texte de classe, la progression globale de P2, la progression prévue de la séance L5) il a été possible de reconstituer le chapitre auquel la séance L5 appartient :

Tableau 24: Description du déroulement du chapitre 01 dans le cahier de classe.

DATE	DESCRIPTION
06/09/2007	Prise en main du groupe.
07/09/2007	Règles du jeu mathématique. Notions d'axiome. Communiquer.
12/09/2007	AI avec toute la classe (sauf 2 élèves). Calcul mental. Réviser : Somme ; terme ; produit ; facteur ; inverse ; diviser ; $0,01 = 1/100 = \dots$

13/09/2007	<p>Teste de rentrée (Partie I). Devoir N° 1 pour le 27/01. Correction du 1. (1 -2 -3). Calcul mental 37×43 à $A^2 - B^2$. Programme de calcul à A refaire pour demain. G1/G2 : Carrée magiques.</p>
14/09/2007	<p>Corrigé du programme de calcul. Notion de fonction. Notation $A(x)$, image, ...</p>
19/09/2007	<p>Corrigé du teste 1 (4-6-7) ; 0,00000036 à Notion de nombre décimal ; Notation scientifique Relation d'ordre.</p>
20/09/2007	<p>Teste de rentrée (partie II – géométrie). Corrigé du 3 à Identité remarquable. à Développer $(6 - x)^2$, $(-6 - x)^2$ et 1.(9) du test. Calculatrice ; -Rentrer $A(x)$ (Y ou $f(x)$). -Définir la valeur de départ et le pas. - Lire les valeurs. -Trouver des nombres ayant la même image. G1/G2 : Corrigé du carré magique ; N° - $(a/b) = (a/-b) = (-a/b)$ Démarrage du b) à b) c) en devoir facultatif. Programme de calcul à $(12/a) - 3$</p>
21/09/2007	<p>Notion de proportion et %. *14 filles pour 33 élèves> * Corrigé du 4 (partie I) du test de rentrée. * Corrigé du 2 : reconnaître une somme (un produit) : $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ Factoriser, développer $AB + AC = A(B + C)$ A en facteur</p>
27/09/2007	<p>Mise au point sur $(A+B)^2$ à langage naturel. à $(-5+x)^2$, $(-5 -x)^2$ Idem avec $(A+B)$ $(A-B)$ à $-5 + x = x - 5$ Retour sur % : -Baisse de 30% puis baisse de 30% (effet en 30% ?). -Corrigé du IV, 1° (effet en % ?).</p>

	<p>Calcul mental : 75×85 ; 65^2 ; 35^2 ; 115^2 à Cas général $(10d + 5)^2$. $2^7 \times 5^7$.</p> <p>Règles sur puissances $a^n \times b^n = (ab)^n$ et $a^n \times a^p = a^{n+p}$ $12^3 \times 5^6$ à $60^3 \times 5^3 = 300^3 = 3^3 \times 100^3 = 3^3 \times 10^6$ ou $(2^3 \times 3)^3 \times 5^6 = 2^6 \times 3^3 \times 5^6 \dots$ à $(a^n)^p = a^{np}$</p> <p>Opérations n'ayant pas de sens : $a/b/c$ et a^{n^p} Exemple 2^{3^4} à $(2^3)^4$ ou $2^{(3^4)}$ à le « mille feuille »</p> <p>Définition d'un nombre décimal : Quelques exemples $3,718 = 3718 \times 10^{-3}$ $5 \times 10^0 = 50 \times 10^{-1} \dots$ à Entier x une puissance de 10 à N ; Z G1/G2 : Après savoir rendu irréductible une fraction, comment savoir si elle est décimale ou non ? Critères de divisibilité. Nombres du type abcabc</p>
<p>28/09/2007</p>	<p>Fraction décimales : définition et exemple Mettre 2,875 sur forme de fraction irréductible Ensemble D ; fraction à Q à R Inclusion entre ensembles Diagramme avec trois ensembles (placer des nombres)</p>
<p>03/10/2007</p>	<p>Révisions orales : nombre décimal ? Fraction décimale ? Nombre rationnel ? Que signifie 17^{2003} ? 17^{-13} ?</p> <p>Devoir 2 pour jeudi 11/10 Rappels de règles sur puissances Calculez mentalement $32^{30} \times 0,125^{50}$ Corrigé du N°28 p. 22 : inverse (2 méthodes) Corrigé du N°26 p. 22 à $\sqrt{10^n}$ selon que n est pair ou impair. $\sqrt{10^{-19}} = 10^{-9} \sqrt{10^{-1}}$ ou mieux $10^{-10} \sqrt{10}$ $\sqrt{10} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$ (donc $\neq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$) Crible d'Ératosthène (à initiation tableur) à Définition des nombres premiers 414141 est-il premier à $414141 = 41 \times 10101 = 41 \times 3 \times 7 \times 13 \times 37$ (Touche STO de la calculatrice)</p>
<p>04/10/2007 Séance L5</p>	<p>G1/G2 Corrigé du II 1° du devoir 1 Fiche sur affichage scientifique</p>

	<p>à Distance de 2 nombres</p> <p>à Valeur absolue ... définitions, propriétés</p> <p>Corrigé du 1° avec calcul littéral</p> <p>Savoir si un nombre est première : méthode (critère d'arrêt)</p> <p>Poursuite du crible : à 4147 ? 2347 ?</p> <p>101, 103, 107, ... à (11x13x29)</p> <p>359 ? (oui)</p>
10/10/2007	<p>A.I: $\sqrt{4356}$; $\sqrt{7^8}$; $\sqrt{7^{11}}$</p> <p>Corrigé du III du devoir 1.</p> <p>Indications pour le devoir 2</p>
11/10/2007	<p>Chiffres de garde de la calculatrice</p> <p>à avec u</p> <p>Prévoir l'affichage scientifique de :</p> <p>$a = 0,002^5$ et $b = 0,002^4$</p> <p>Programme de calcul :</p> <p>Retour sur fonction x a $\frac{4}{5}x - \frac{7}{15}$</p> <p>Notion d'antécédent</p> <p>à Equation</p> <p>à Retour à $t(a) = \frac{3a^2 + 9a + 36}{2}$</p> <p>$t(-4)$; $t(-3) = -30$, ...</p> <p>Recherche d'antécédent.</p>

Ce chapitre commence le 06 septembre par une « prise en main du groupe » à partir d'un dialogue entre P2 et la classe.

Le 07 septembre, P2 travaille avec les élèves les façons de communiquer : règles et axiomes mathématiques.

Le 12 septembre, l'enseignant fait un travail sur le Calcul mental ; il révise des opérations arithmétiques comme la somme, le produit, la division, etc.

Les séances du 13, 14, 19 et 20 septembre ont été destinées majoritairement aux tests de rentrée. Pendant ces séances, P2 travaille aussi le Calcul mental, les notions de fonction, la notion de nombre décimal, la notation scientifique, la relation d'ordre, entre autres. Il y a aussi un travail fait avec la calculatrice ainsi que des corrections d'exercices.

La séance du 21 septembre a été destinée au travail autour des identités remarquables, des notions de proportion, de pourcentage et aux corrigés d'exercices.

La séance du 27 septembre a été destinée au travail autour des identités remarquables, des pourcentages, du calcul mental, des règles sur les puissances, des nombres décimaux, des ensembles **N** et **Z**, et sur les critères de divisibilité.

Pendant la séance du 28 septembre P2 a travaillé avec les fractions décimales et les opérations entre les ensembles : **D** ; **Q** et **R**.

Le 03 octobre, l'enseignant fait d'abord un travail de révision sur les nombres décimaux, les fractions décimales, les nombres rationnels, sur les puissances. Puis il travaille avec des radicaux, des nombres premiers et la touche STO de la calculatrice.

La séance du 04 octobre est majoritairement destinée au travail sur la distance de deux nombres et la valeur absolue d'un nombre.

Le 10 octobre, P2 travaille avec des radicaux et fait les corrections des exercices en classe. Le 11 octobre, la dernière séance du chapitre 01, P2 travaille d'abord avec la calculatrice : chiffres de garde et la touche « u ». Puis P2 travaille avec les affichages scientifiques, les fonctions et les équations.

Pendant le déroulement du chapitre 01 nous avons observé dix séances dans cette classe. La séance L5 est la cinquième séance que nous avons observée dans cette classe.

En synthèse, l'enseignant P2 a destiné le chapitre 01 à un travail autour des activités numériques, à travers des révisions, des résolutions de tâches et de problèmes numériques. Nous remarquons un travail d'institutionnalisation des thèmes, des notions acquises au collège, à travers la feuille de synthèse que P2 distribue en classe :

ADDITION + SOMME	MULTIPLICATION × PRODUIT
Termes	Facteurs
Opposé (0-pposé)	Inverse (I-verse)
Deux nombres sont opposés si et seulement si leur somme est égale à 0.	Deux nombres sont inverses si et seulement si leur produit est égal à 1.
Tout nombre possède un opposé.	0 n'a pas d'inverse.
Notation : l'opposé d'un nombre a se note $-a$ ($0 - a$)	Notation : l'inverse d'un nombre a différent de 0 se note $\frac{1}{a}$ ($1 \div a$) ou a^{-1} .
Opération contraire	
SOUSTRACTION	DIVISION
« soustraire c'est ajouter l'opposé » $a - b = a + (-b)$	« diviser c'est multiplier par l'inverse » $a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)
Règles de priorité 1° (.....) parenthèses 2° puissances α 3° \times, \div β 4° $+, -$	Racine carrée d'un nombre positif si $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$ quels que soient les réels a et b positifs : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$)
Distributivité : α puissances sur \times et \div β \times sur $+$ et $-$	Puissances exemples : a^7 représente le produit de 7 facteurs égaux à a . $(ab)^5 = a^5 \times b^5$, $a^5 \times a^7 = a^{12}$, ($a \neq 0$) $\frac{1}{a^7} = a^{-7}$
	Valeur absolue $ a = \sqrt{a^2}$, $ ab = a \times b $
Pour résoudre une équation du premier degré : « utiliser les opérations "contraires" dans l'ordre contraire des priorités. »	

Figure53 : Extrait du cahier de cours de E3.

P2 avait commencé le travail sur « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre » à partir de la résolution d'une tâche numérique en utilisant la calculatrice. Ce travail constitue la séance L5.

18.2 Description générale et trame de la séance L5

18.2.1 Description générale de la séance L5

Cette séance se déroule devant 30 élèves. L'enseignant fait son cours à propos des objets : « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre » lors de la cinquième séance que nous avons observée dans la classe de P2 pendant l'année scolaire 2007-2008.

La séance a été consacrée à l'étude de ces deux objets apparaissant dans la progression de P2 :

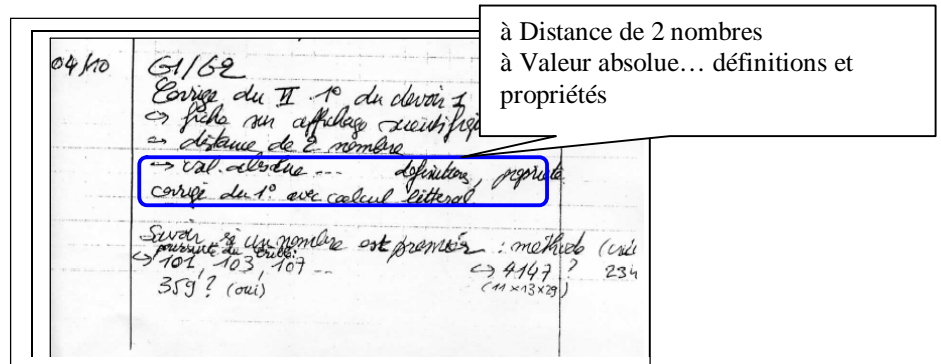


Figure 54: Extrait de la progression de P2 pour le 04 octobre 2007.

Nous précisons, au fur et à mesure, à travers l'analyse qui suit et l'analyse d'une partie du manuel de cette classe, que cette séance sur : « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre », est inscrite dans le domaine numérique. Nous disposons en effet du protocole écrit de cette séance, et c'est à partir d'analyse de ce protocole que nous proposons la reconstruction qui suit.

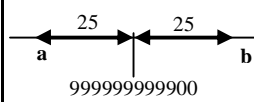
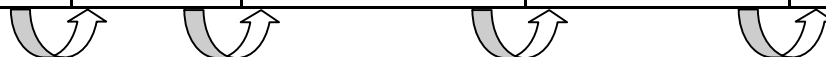
La séance de mathématique proprement dite, ne commence qu'après environ trois minutes pendant lesquelles P2 et les élèves s'installent dans la classe et ont quelques échanges. Les élèves sont ensuite amenés, à résoudre une « tâche d'introduction » dans une courte période (6 minutes environ), à trouver le résultat des calculs de $999\,999\,999\,9252$ et $999\,999\,999\,8752$ suivis d'une « correction 1 » avec des interactions entre P2 et les élèves. Ces éléments constituent le début de la séance.

Dans le noyau de la séance, plusieurs « tâches coopératives » vont apparaître accompagnées d'une part, par un « travail individuel » des élèves, et d'autre part d'une « correction 2 » fait par P2. Dans la période (minute de 9 à 13), P2 amène les élèves à calculer la valeur exacte de $A = 999\,999\,999\,9252 - 999\,999\,999\,8752$ et c'est à partir de cette tâche que P2 va faire l'« introduction des contenus nouveaux ». Dans la période (minutes de 13 à 16) P2 et les élèves continuent à chercher résoudre la « tâche principale » : calculer la valeur exacte de $A = 999\,999\,999\,9252 - 999\,999\,999\,8752$ et pour cela P2 instaure et utilise les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométriques, à travers l'introduction du cadre géométrique, à travers la droite graduée et le cadre algébrique, à travers les différents registres algébriques utilisés pour réécrire le nombre A. La période (minutes de 16 à 29) est marquée par l'« introduction d'un contenu nouveau » : « la distance entre deux nombres » que P2 fait devant ses élèves. Dans cet intervalle de temps, P2 introduit la notion de distance entre deux nombres en utilisant le NAG à travers la droite graduée, et aussi en faisant appel à la notion de « valeur absolue » qui, P2 le signale, était déjà étudiée au collège : « Regardez le tableau. Avec cette notation, on met un trait vertical entre les deux. Certains ont déjà vu ça au collège, mais normalement ce n'est pas nécessairement au programme. » (Protocole séance-L6, ligne 123). Encore dans le « noyau de la séance » nous remarquons aussi une utilisation des interrelations entre les grands domaines mathématiques, à travers le cadre algébrique et les différents registres de représentations. Il y aura aussi une autre « introduction de contenu nouveau », cette fois « la valeur absolue d'un nombre », ce que nous comptons comme la période (minutes de 29 à 39) de notre trame. Dans cette période, P2 utilise le NAG, à travers la notion de distance pour introduire l'objet « la valeur absolue d'un nombre ». Le cadre géométrique est utilisé, dans cette phase, moins souvent que dans la précédente. Au

travers des « comparateurs et opérateurs numériques » utilisés dans cette période, le domaine algébrique intervient aussi dans cette partie de la séance.

Dans la période de (minutes de 39 à 47), équivalente à la « clôture de la séance », P2 valide le calcul de $A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$, sans l'utilisation de la calculatrice, après avoir fini le travail sur les notions de « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre ». Dans cette partie de la séance, le NAG est aussi utilisé. Mais, cette fois, le domaine numérique-algébrique, au travers des identités remarquables, est plus utilisé pour faire progresser les élèves dans l'accomplissement de la tâche donnée au départ. Dans cette étape, l'enseignant fait aussi un bilan des objets étudiés et une institutionnalisation de la technique qu'il voudrait que les élèves s'approprient, en faisant émerger une règle pour le calcul de $A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$. P2 propose des « devoirs à la maison » et une « tâche de structuration », laquelle va renforcer la technique que P2 veut que les élèves s'approprient :

Tableau 64: Le NAG dans les changements des registres e.

$A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$.				
Cadre numérique				
Registre numérique	Registre algébrique	Registre géométrique	Registre algébrique	Registre numérique
$A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$.	$A = a^2 - b^2$ $\begin{cases} a = \alpha + m \\ b = \alpha - m \end{cases}$		$A = (\alpha + 25)^2 - (\alpha - 25)^2$ $A = 100\alpha$ $\alpha = (a+b)/2$	$A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$. $A = 100(999\,999\,999\,925 + 999\,999\,999\,875)/2$ $A = 999\,999\,999\,900\,00$.
 Les interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique sont utilisées dans les changements de registre.				

En fait, dans cette séance, nous avons une tâche principale inscrite dans le cadre numérique. Cette tâche est résolue dans le cadre numérique, mais pour cela, P2 l'inscrit, à travers l'utilisation du NAG, en différents registres.

Tout le travail dans cette séance est accompagné par des échanges « questions/réponses » dirigés par P2 au travers desquels il essaie de formuler des règles dans les différents registres intervenant dans cette séance. Au travers de ces dialogues, parfois au « miroir », il est aussi possible de repérer des informations sur l'instauration et l'utilisation des interrelations entre différents domaines et registres dans cette séance.

18.2.2 La trame de la séance L6

Nous proposons comme premier découpage de cette séance la trame suivante :

Tableau 65: La trame de la séance L6.

Lignes	Durée (min)	Modalité travail	Phases	Partie de la séance
2-22	03	Individuel	Calcul des carrés de deux nombres à la calculatrice n1 et n2 (n1 = 999 999 999 925 et n2 = 999 999 999 875).	Début
23-35	10	Collectif	Repérage des différents affichages, analyse des résultats et retour sur l'écriture scientifique.	
36-66	10	Collectif	Début du problème pour savoir « si le résultat (affichage) obtenu à la calculatrice par le nombre « A » est exact ou non » ($A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$), en décomposant le nombre « A » en « $a = \alpha + 25$ » et « $b = \alpha - 25$ ».	Noyau

67-76	05	Collectif	Introduction de la droite graduée et des notations symboliques de la distance.	
77-120	02	Collectif	Cours sur la distance entre deux nombres : plus précisément, expression de la distance de « p » à « q » en fonction de « p » et de « q ».	
121-322	12	Collectif	Cours sur la valeur absolue d'un nombre et début du travail de la technique sur la valeur absolue d'un nombre et sur la distance entre deux nombres.	
323-345	02	Individuel	Retour au calcul de A	
346-352	02	Collectif	Correction du calcul de A en utilisant les notions « de distance entre deux nombres et la valeur absolue d'un nombre » pour arriver à $A = 100\alpha$	
353-357	01	Collectif	Bilan du travail	
358-365	03	Individuel	Application du raisonnement à un autre cas.	Clôture

Le cours dont nous venons de présenter la trame - « distance entre deux nombres » et « valeur absolue d'un nombre » - constitue une séance de cours de 48 minutes environ. P2 débute cette séance par un exercice en classe sur la puissance de deux nombres qui s'est tenue la semaine précédente. Ces puissances sont calculées à l'aide de la calculatrice, puis P2 parle de l'affichage scientifique présenté sur des calculatrices et leur signification en tant qu'écriture scientifique.

L'enseignant explore la tâche sur la différence entre deux carrés pour introduire des contenus nouveaux « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre ». Il utilise le **NAG** pour dévoiler à travers cette tâche, des savoir cachés qui feront avancer la construction des connaissances chez les élèves, comme par exemple l'écriture scientifique, la droite graduée, des identités remarquables, entre autres.

Malgré les objets en jeu de cette séance apparaissant dans la progression de P2, ni les objectifs de cette séance, ni les intentions de P2 pour arriver à introduire les deux objets en jeu dans la séance, à partir du travail sur la tâche principale, ne sont dévoilés aux élèves au début de cette séance. Ils vont y être introduits au fur et à mesure, à travers les différentes tâches que l'enseignant propose aux élèves :

Tableau 66: Présentation chronologique des différentes tâches en rapport avec la trame de la séance.

Lignes	Durée (min)	Modalité travail	Les tâches proposées dans la séance	Partie de la séance
2-22	03	Individuel	Tâche d'introduction <i>t_{carré1}</i> : Calculer $999\,999\,999\,925^2$ et $999\,999\,999\,875^2$	Début
23-35	10	Collectif	Tâche d'introduction <i>t_{carré1}</i> : Calculer $999\,999\,999\,925^2$ et $999\,999\,999\,875^2$	
36-66	10	Collectif	Tâche principale <i>t_{carré2}</i> : Calculer $A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$	Noyau
67-76	05	Collectif	Tâche principale <i>t_{carré2}</i> : Calculer $A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$	
77-120	02	Collectif	Tâche coopératrice : <i>t_{d1}</i> : Calculer $d(a ; b)$ avec « a » et « b » abscisses quelconques de la droite	
121-322	12	Collectif	Tâche coopératrice <i>t_{v1}</i> : Calculer $V(p-q)$; <i>t_{d2}</i> : Calculer $d(12 ; 25)$; <i>t_{v2}</i> : Calculer $V(12-25)$; <i>t_{v3}</i> : Calculer $V(-5)$; <i>t_{v4}</i> : Calculer $V(7)$; <i>t_{v5}</i> : Calculer $V(-4)$; <i>t_{v6}</i> : Calculer $V(-2)$; <i>t_{v7}</i> : Calculer $V(8)$; <i>t_{v8}</i> : Calculer $V(x)$; <i>t_{v9}</i> : Calculer $V(\pi)$; <i>t_{v10}</i> : Calculer $V(\sqrt{2})$; <i>t_{v11}</i> : Calculer $V(-6)$; <i>t_{v12}</i> : Calculer $V(x-5)$	
323-345	02	Individuel	Tâche principale <i>t_{carré2}</i> : Calculer $A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$	

346-352	02	Collectif	Tâche principale $t_{\text{carré2}} : \text{Calculer } A=999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$	Clôture
353-357	01	Collectif	Tâche principale $t_{\text{carré2}} : \text{Calculer } A=999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$	
358-365	03	Individuel	Tâche de structuration $t_{\text{carré3}} : \text{Calculer } B=123\,456\,725^2 - 123\,456\,675^2$	

Dans le répertoire de tâches présenté dans le tableau ci-dessus, $d(x;y)$ et $v(x)$ signifient respectivement, la distance de « x » à « y » et la valeur absolue de « x ». Nous expliciterons davantage les éléments de l'organisation mathématique repérée dans cette séance.

18.3 Description des organisations mathématiques

A travers l'approche praxéologique nous pourrions décrire cette séance en lien avec les différentes tâches dans lesquelles sont engagés P2 et ses élèves, et analyser l'organisation mathématique par rapport aux apprentissages visés par cette séance. Mais pour cela, nous décrirons tout d'abord, de façon générale, les OM apparaissant dans la séance:

Tableau 67: L'OM générale de la séance.

Lignes	Durée (min)	Modalité travail	Les tâches proposées dans la séance	OM	Partie de la séance
2-22	03	Individuel	$t_{\text{carré1}} : \text{Calculer } 999\,999\,999\,9252 \text{ et } 999\,999\,999\,8752$	Calcul du carré de nombres avec la calculatrice.	Début
23-35	10	Collectif	$t_{\text{carré1}} : \text{Calculer } 999\,999\,999\,9252 \text{ et } 999\,999\,999\,8752$	Interprétation d'affichages de la calculatrice ; Écriture scientifique	
36-66	10	Collectif	$t_{\text{carré2}} : \text{Calculer } A=999\,999\,999\,9252 - 999\,999\,999\,8752$	Valeur exacte ou arrondie d'un calcul ; Identité remarquable ; Décomposition de nombres	Noyau
67-76	05	Collectif	$t_{\text{carré2}} : \text{Calculer } A=999\,999\,999\,9252 - 999\,999\,999\,8752$	Encadrement des abscisses dans la droite graduée ; Écriture algébrique de deux nombres	
77-120	02	Collectif	$t_{d1} : \text{Calculer } d(a;b) \text{ avec « a » et « b » abscisses quelconques de la droite}$	Équidistance ; Distance entre deux nombres	
121-322	12	Collectif	$t_{v1} : \text{Calculer } V(p-q) ; t_{d2} : \text{Calculer } d(12;25) ; t_{v2} : \text{Calculer } V(12-25) ; t_{v3} : \text{Calculer } V(-5) ; t_{v4} : \text{Calculer } V(7) ; t_{v5} : \text{Calculer } V(-4) ; t_{v6} : \text{Calculer } V(-2) ; t_{v7} : \text{Calculer } V(8) ; t_{v8} : \text{Calculer } V(x) ; t_{v9} : \text{Calculer } V(\sqrt{x}) ; t_{v10} : \text{Calculer } V(\sqrt{2}) ; t_{v11} : \text{Calculer } V(-6) ; t_{v12} : \text{Calculer } V(x-5)$	Distance entre deux nombres ; Valeur absolue d'un nombre ;	
323-345	02	Individuel	$t_{\text{carré2}} : \text{Calculer } A=999\,999\,999\,9252 - 999\,999\,999\,8752$	Identité remarquable ; Calcul algébrique	
346-352	02	Collectif	$t_{\text{carré2}} : \text{Calculer } A=999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$	Identité remarquable ; Calcul algébrique ; Écriture scientifique	
353-357	01	Collectif	$t_{\text{carré2}} : \text{Calculer } A=999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$	Valeur absolue d'un nombre	Clôture
358-365	03	Individuel	$t_{\text{carré3}} : \text{Calculer } B=123\,456\,7252 - 123\,456\,6752$	Calcul numérique	

A travers l'organisation chronologique des tâches qui apparaissent dans chaque partie de la trame, l'organisation mathématique qui s'instaure dans la séance est complexe ; cela demande de la part de P2 une véritable vigilance didactique pour pouvoir aboutir à ces objectifs.

18.3.1 L'organisation mathématique visée par l'enseignant

En fait, l'objectif de P2 dans cette séance a été le travail sur « la distance entre deux nombres » et sur « la valeur absolue d'un nombre » :

Tableau 68: Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
77	00:15:08	P2	Il faudrait bien se souvenir de cette notion d'équidistance. On va un peu en parler maintenant, justement, sous prétexte de cet exercice. On va parler de distance entre deux nombres.
116		P2	Il y a deux choses : l'une qui est un peu ennuyeuse parce qu'on est obligé de toujours dire, lors de la soustraction, quel est le plus grand des deux nombres.
117	00:21:58	P2	Alors, l'autre, est qu'en mathématique, on a quelque chose qui nous permet de nous assurer qu'on ait toujours un nombre, finalement le souci est de savoir quel est le nombre? E33
131	00:24:44	P2	Donc, ça peut se lire - valeur absolue de « p » moins « q » - ou - valeur absolue de « q » moins « p ». Il est bien entendu que, puisque c'est indifférent, qu'est-ce que je pourrais dire de ces deux quantités là ? E17

Cependant, la classe, par l'intermédiaire de P2, a travaillé davantage sur « la distance entre deux nombres ». Pendant ce travail P2 a fait intervenir l'objet « la valeur absolue d'un nombre » et d'autres objets, qui ne font pas partie des objectifs de P2, au travers des changements de registres.

A travers les analyses faites jusqu'ici, et celles qui suivent, P2 a utilisé les tâches (d'introduction, principale et coopératives) pour instaurer l'ensemble des situations qui donnent du sens au traitement des objets « la distance entre deux nombres » et sur « la valeur absolue d'un nombre », sur lesquels repose l'ensemble des formes langagières et non langagières, les présentations symboliques, les propriétés et les procédures de traitement dans cette séance : « On va un peu en parler maintenant, justement, sous prétexte de cet exercice. ». (Protocole séance-L6, ligne 77). A ce propos Vergnaud (1990) souligne :

« Le sens d'un concept pour un sujet est une relation du sujet aux situations et aux signifiants de ce concept. Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet par une situation ou par un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu. »

La façon dont P2 organise l'accomplissement des tâches proposées aux élèves, à travers l'utilisation des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique, témoigne que cet enseignant a essayé de donner du sens aux deux objets mathématiques étudiés dans cette séance :

P2 : Alors, maintenant, on revient à mon exemple et puis on poursuivra toujours la notion de valeur absolue. On va voir ce qu'on fait, on réfléchit bien déjà à la définition qu'on a donné de la notation scientifique. C'est un moyen de donner une définition de la notion de la valeur absolue (Protocole séance-4, linge 323).

P2 avait l'intention de faire travailler ses élèves en même temps sur plusieurs concepts et objets, ce qui nous amène à nous poser la question sur le sens que les élèves ont donné à ces objets et sur l'échelle qui se constitue entre l'OM visée par P2 et l'OM qui va véritablement apparaître dans la séance.

L'OM visée par P2 dans cette séance se construit autour des objets : « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre ». Le but de l'enseignant est de faire travailler les élèves sur ces deux objets, comme nous pouvons le voir à travers des extraits :

Tableau 69: Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
123	00:22:52	P2	Donc, notez indifféremment « p » moins « q » ou « q » moins « p ». Bien sûr, je ne peux pas laisser ça comme ça. On a une notation mathématique. Regardez le tableau. Avec cette notation, on met un trait vertical entre les deux. Certains ont déjà vu ça au collège, mais normalement ce n'est pas nécessairement au programme. On met entre barres la différence, pour indiquer quoi ?
139	00 :24 :41	P2	Donc, ce qu'il faut retenir proprement dit est que, la valeur absolue est une distance, et à quoi une distance est-elle toujours associée comme opération ?
143	00:26:16	P2	Donc, deux choses à retenir déjà : une distance c'est une différence et quand ça doit être positif, on prend cette différence en valeur absolue.
175	00:29:38	P2	Donc, vous voyez comme on progresse : on est parti de la distance entre deux nombres et maintenant je vais donner la définition de quoi ? Qu'est ce que la valeur absolue d'un nombre ? Ça sert à quoi ? Qui me fait la phrase ? La valeur absolue d'un nombre c'est quoi ? E17 ?

En considérant la quantité de temps pendant laquelle « la distance entre deux nombres » est travaillée par P2 et les élèves, nous pouvons constater que le travail fait par P2 dans cette séance consacre davantage de temps sur l'objet, « la valeur absolue d'un nombre ».

L'enseignant avait prévu de travailler sur deux objets qui vont apparaître au noyau de la séance et prendre une place assez importante, voire la plus importante dans cette séance. Mais avec ces objets, des savoirs cachés vont apparaître aussi dans la séance, au travers d'une OM qui s'instaure parallèlement à celle prévue par P2. C'est pour cela que nous voyons deux OM bien différenciées dans la séance : l'OM visée par P2 et celle qui se constitue au fur et mesure de la séance. En fait, P2 met en place une organisation didactique qu'il considère capable d'aboutir aux objectifs qu'il a visés. D'où, nous remarquons l'utilisation considérable que fait P2 des « dialogues dans le miroir ».

L'analyse praxéologique des tâches qui ont été proposées dans cette séance révèle que l'intention de P2 a été de travailler sur « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre », et montre que l'OM visée par P2, évoquée dans le tableau ci-dessous, a pour objectif, l'institutionnalisation des résultats sur ces deux objets:

Tableau 70: L'organisation mathématique visée par l'enseignant.

Types de tâches T		Technique τ	Technologico-théorique [θ , Θ]
T_a : Calculer $d(a ; b)$ avec « a » et « b » donnés numériquement	t_a : Calculer $d(12 ; 25)$	τ_{a2} : Ecrire la $d(a ; b) = a - b = b - a $. On calcule la valeur absolue de la soustraction de 25 par 12 ou de 12 par 25, c'est-à-dire $ 25 - 12 = 12 - 25 $	$[\theta, \Theta]_a$: Définition de la valeur absolue comme étant égale à $ p - q = q - p $

<p>T_v: Calculer V(a) avec « a » donné numérique.</p>	<p>t_{v1}: Calculer V(5)</p>	<p>τ_{v1}: Ecrire V(a) = d(a ; b).</p>	<p>V(x) = d(a ; b) = d(x;0) [θ, Θ]_v Définition de la valeur absolue de « x » comme étant égale à $\begin{cases} x =x; x \geq 0 \\ x =-x; x < 0 \end{cases}$ V(a) = d(a ; b).</p>
--	---	---	--

L'OM visée par P2 devient de plus en plus évidente à travers les tâches qu'il propose en classe (tableau 41), ainsi que par son discours (tableau 42 et 43). Cependant, une autre OM s'installe autour de celle prévue par P2.

18.3.2 L'organisation mathématique qui va apparaître dans la séance

A partir des analyses menées jusqu'ici, nous pouvons résumer, à travers le tableau ci-dessous, l'OM qui se construit dans la séance :

Tableau 71: L'OM qui va s'installer au fur et à mesure de la séance.

Types de tâches T	Technique τ	Technologico-théorique [θ, Θ]	
<p>T_{carré} : Calculer a² – b² étant donné « a » et « b »</p>	<p>t_{carré1} – Calculer 999999 999 925² et 999 999 999 875²</p> <p>t_{carré2} – Calculer A= 999999 999 9252 - 999 999 999 8752</p> <p>t_{carré2} – Calculer A= 999999 999 9252 - 999 999 999 8752</p> <p>t_{carré3} – Calculer B=123 456 725² - 123 456 675²</p>	<p>τ_{carré1} A l'aide de la calculatrice, on calcule d'une seule fois a² – b².</p> <p>τ_{carré2} - Sans utiliser la calculatrice on transforme le nombre a² – b² dans l'identité remarquable (a+b)(a-b). On cherche α tel que :</p> $\begin{cases} a = \alpha + m \\ b = \alpha - m \end{cases}$ <p>La droite graduée est utilisée pour montrer que α = (a + b)/2 et m = a - α = a - b en associant les notions d'équidistance, longueur et distance à la valeur absolue. A partir de ces notions le nombre a² – b² est écrit comme (α+m)² - (α-m)² = 2α2m - 4am = 100α comme la valeur exacte cherchée.</p>	<p>[θ, Θ]_{carré1} – La calculatrice peut calculer a², b² et a²-b². Mais la calculatrice ne produit pas toujours des calculs exacts. Il y a un manque technologique relativement aux connaissances sur l'affichage de la calculatrice.</p> <p>[θ, Θ]_{carré2} - Le nombre a² – b² est calculé comme la distance entre a² et b² et ces nombres sont à la fois grands et assez proches. Le fait que a² et b² soient décomposables en « α » et « m » fait que a² – b² peut s'écrire comme une identité remarquable lesquelles font aussi partie du bloc technologico-théorique</p>
<p>T_d Calculer d(a ; b).</p>	<p>t_{d1} : Calculer d(a ; b) avec « a » et « b » abscisses quelconques de la droite gradué d(a ; b)</p>	<p>τ_{d1} – Ecrire la d(a ; b) comme étant la longueur qui sépare « a » de « b » ou « b » de « a ». C'est-à-dire $a-b$ ou $b-a$</p>	<p>[θ, Θ]_a Soient p et q deux réels. On note d (p ; q) la distance entre p et q comme étant la valeur absolue de la soustraction d (p ; q) = $p-q = q-p$</p>

	\tilde{t}_{d2} Calculer $d(a ; b)$ avec « a » et « b » donnés numériquement $d(12 ; 25)$	τ_{d2} – Écrire la $d(a ; b) = a - b = b - a $. On calcule la valeur absolue de la soustraction de 25 par 12 ou de 12 par 25, c'est-à-dire $ 25 - 12 = 12 - 25 $	
\tilde{T}_v Calculer $V(a)$ avec « a » donné numériquement.	\tilde{t}_{v1} Calculer $V(p - q)$	τ_{v1} – Écrire $d(a ; b) = V(a - b)$	$V(x) = d(a ; b) = d(x ; 0)$ $[\mathbf{0}, \mathbf{0}]_v$. Définition de la valeur absolue de « x » comme étant égale à $\begin{cases} x = x ; x \geq 0 \\ x = -x ; x < 0 \end{cases}$
	\tilde{t}_{v2} Calculer $V(12 - 5)$		
	\tilde{t}_{v3} Calculer $V(-5)$	τ_{v2} – Écrire $V(x) = d(x ; 0)$	
	\tilde{t}_{v4} Calculer $V(7)$		
	\tilde{t}_{v5} Calculer $V(-4)$		
	\tilde{t}_{v6} Calculer $V(-2)$		
	\tilde{t}_{v7} Calculer $V(8)$		
	\tilde{t}_{v8} Calculer $V(x)$		
	\tilde{t}_{v9} Calculer $V(\pi)$		
	\tilde{t}_{v10} Calculer $V(\sqrt{2})$		
	\tilde{t}_{v11} Calculer $V(-6)$		
	\tilde{t}_{v12} Calculer $V(x - 5)$		

On voit à travers ces deux OM (Tableaux 45 et 44) que nous venons de représenter, la différence entre l'OM visée par P2 et l'OM qui se construit dans la classe. Et c'est à travers l'organisation didactique (OD) entreprise par P2 que nous pouvons voir comment il fait pour aboutir à ces objectifs. Il y a tout un travail didactique qui est fait par P2 sur ses deux objets : « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre » et les tâches qui participent à cette séance dans le but de travailler sur ces deux objets. Nous allons repérer dans la partie « noyaux de la séance » (tableau 41), à travers nos outils, ce que fait l'acteur du jeu didactique (P2) pour arriver à ses intentions, vis-à-vis de l'écart entre l'OM visée par P2 et l'OM qui se construit dans la classe.

18.4 Analyse de l'organisation didactique

A partir du protocole et des deux OM (Tableaux 44 et 45), nous analyserons le cours de P2 en termes de moments didactiques (Chevallard, 1998), du point de vue de l'OM qui se construit dans la classe et de l'organisation didactique, en utilisant l'approche praxéologique et le filtre du numérique.

Les cours de P2 suivent le style de cet enseignant (Clot, 1999). Selon ce style, les cours de P2 commencent par une tâche d'introduction proposée aux élèves dans un travail, d'abord individuel et puis collectif. Pendant la correction de la tâche d'introduction, P2 fait l'introduction des nouvelles notions, suivie d'une phase d'institutionnalisation de connaissances et se termine par une phase d'exercices.

Voici comment nous modélisons cette séance en précisant les différentes modalités de travail entreprises dans chaque partie de cette séance:

Tableau 72 : Les différentes modalités de travail dans chaque partie de la séance.

Lignes	Durée (min)	Modalité travail	Travail	Partie de la séance
2-22	03	Individuel	Résolution de la tâche $t_{carré1}$: Calculer $999\ 999\ 999\ 925^2$ et $999\ 999\ 999\ 875^2$	Début
23-35	10	Collectif	Résolution de la tâche $t_{carré1}$: Calculer $999\ 999\ 999\ 925^2$ et $999\ 999\ 999\ 875^2$	
36-66	10	Collectif	Résolution de la tâche $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	Noyau
67-76	05	Collectif	Résolution de la tâche $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	
77-120	02	Collectif	Cours sur la distance entre deux nombres t_{d1} : Calculer $d(a ; b)$ avec « a » et « b » abscisses quelconques de la droite	
121-322	12	Collectif	Cours sur la valeur absolue d'un nombre t_{v1} : Calculer $V(p-q)$; t_{d2} : Calculer $d(12 ; 25)$; t_{v2} : Calculer $V(12-25)$; t_{v3} : Calculer $V(-5)$; t_{v4} : Calculer $V(7)$; t_{v5} : Calculer $V(-4)$; t_{v6} : Calculer $V(-2)$; t_{v7} : Calculer $V(8)$; t_{v8} : Calculer $V(x)$; t_{v9} : Calculer $V(\pi)$; t_{v10} : Calculer $V(\sqrt{2})$; t_{v11} : Calculer $V(-6)$; t_{v12} : Calculer $V(x-5)$	
323-345	02	Individuel	Résolution de la tâche $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	
346-352	02	Collectif	Résolution de la tâche $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	
353-357	01	Collectif	Bilan du travail $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	Clôture
358-365	03	Individuel	Résolution de la tâche $t_{carré3}$: Calculer $B=123\ 456\ 725^2 - 123\ 456\ 675^2$	

En regardant l'OM à travers les différentes tâches proposées, dans cette séance, un complexe praxéologie est instauré.

18.4.1 Un complexe praxéologie

L'enseignant utilise les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique pour l'aider à travailler sur les objets « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre » et mettre en place une nouvelles compétence du numérique dans la classe de seconde : calculer la soustraction des carrés de deux nombres assez grands et proches à la fois.

A travers l'observation et les traces repérées tout au long de cette séance, pour aboutir aux objectifs visés, P2 utilise un complexe praxéologique. En effet, l'enseignant utilise implicitement les interrelations à travers plusieurs tâches issues de la tâche principale qu'il présente au début du noyau de la séance comme nous les schématisons chronologiquement ci-dessous:

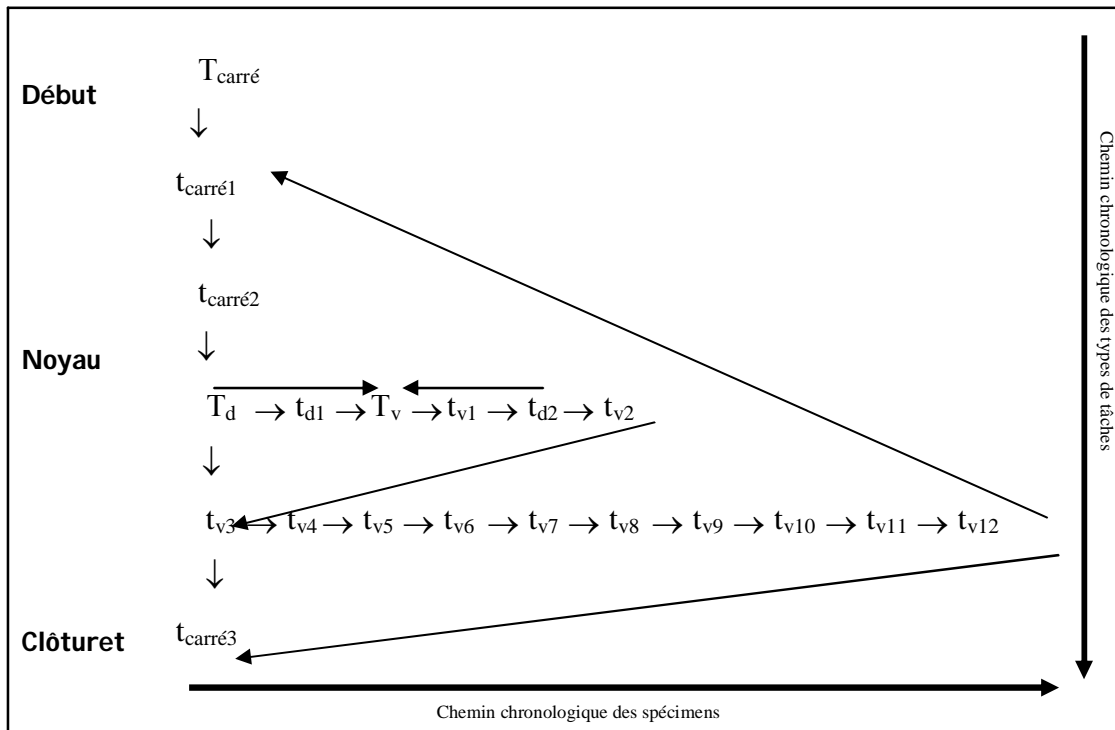


Figure 55: L'organisation chronologique des tâches.

Pour étudier de manière didactique le rôle du **NAG**, sans trop parler des contraintes disciplinaires auxquelles est assujéti P2, nous avons choisi d'analyser l'OD en insistant sur la partie de la séance – le noyau- où l'enseignant utilise considérablement les interrelations entre les domaines mathématiques.

Dans cette perspective, nous analyserons l'OD de cette séance en utilisant une grille de lecture construite de concepts développés par une approche anthropologique du didactique et par le filtre du numérique. Ce choix résulte d'une de nos hypothèses de recherche (H1, H2, H3). Le **NAG** peut être considéré comme un outil didactique nécessaire à un meilleur fonctionnement de l'institution « apprentissage des compétences du calcul numérique dans la classe de seconde ».

Deux questions nous ont guidé dans cette analyse :

- *Comment le **NAG**, fruit d'une utilisation didactique implicite, a-t-il été transposé dans une institution autre : de l'« institution enseignant » à l'« institution élève » ?*
- *Quelles sont les conditions, notamment imposées par l'écologie de l'institution classe, qui font subir à la mise en œuvre effective du **NAG** des modifications adaptatives ?*

En fait, pour répondre à ces questions, en considérant la complexité de la l'OD de la séance, nous analyserons la séance en termes de moments didactiques. Chevallard (1997),

Nous pouvons organiser ces différents moments didactiques de la façon suivante :

Tableau 73 : Les différentes modalités de travail dans chaque partie de la séance.

Lignes	Durée (min)	Modalité travail	Travail	Moments	Partie de la séance
2-22	03	Individuel	Résolution de la tâche $t_{carré1}$: Calculer $999\ 999\ 999\ 925^2$ et $999\ 999\ 999\ 875^2$	M1	Début
23-35	10	Collectif	Résolution de la tâche $t_{carré1}$: Calculer $999\ 999\ 999\ 925^2$ et $999\ 999\ 999\ 875^2$		
36-66	10	Collectif	Résolution de la tâche $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	M2	Noyau
67-76	05	Collectif	Résolution de la tâche $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	M3	
77-120	02	Collectif	Cours sur la distance entre deux nombres t_{d1} : Calculer $d(a;b)$ avec « a » et « b » abscisses quelconques de la droite		
121-322	12	Collectif	Cours sur la valeur absolue d'un nombre t_{v1} : Calculer $V(p-q)$; t_{d2} : Calculer $d(12;25)$; t_{v2} : Calculer $V(12-25)$; t_{v3} : Calculer $V(-5)$; t_{v4} : Calculer $V(7)$; t_{v5} : Calculer $V(-4)$; t_{v6} : Calculer $V(-2)$; t_{v7} : Calculer $V(8)$; t_{v8} : Calculer $V(x)$; t_{v9} : Calculer $V(\pi)$; t_{v10} : Calculer $V(\sqrt{2})$; t_{v11} : Calculer $V(-6)$; t_{v12} : Calculer $V(x-5)$		
323-345	02	Individuel	Résolution de la tâche $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 9252 - 999\ 999\ 999\ 8752$	M4	
346-352	02	Collectif	Résolution de la tâche $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	M5	
353-357	01	Collectif	Bilan du travail $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	M6	Clôture
358-365	03	Individuel	Résolution de la tâche $t_{carré3}$: Calculer $B=123\ 456\ 725^2 - 123\ 456\ 675^2$		

Analysant le système à 4 composantes $[T, \tau, \theta, \Theta]$. proposé par Chevallard, du point de vue qui nous intéresse, celui de pratiques de P2, c'est-à-dire le système $[T, \tau, \theta, \Theta]_{enseignant}$. En effet les procédures d'apprentissage mise en place par l'enseignant dans le cadre de son système $[T, \tau, \theta, \Theta]_{enseignant}$ ont pour objectif de faire évoluer le système de l'élève $[T, \tau, \theta, \Theta]_{élève}$ d'un état initial vers un état final. Et à travers ce travail on retrouve le NAG à travers les différents moments de l'organisation didactique.

18.4.1.1 Le premier moment de l'étude

Cette séance débute par la proposition de $t_{carré1}$: calcul de $999\ 999\ 999\ 925^2$ et $999\ 999\ 999\ 875^2$, P2 propose cette tâche pour être résolue par les élèves avec l'aide de la calculatrice. Cependant ce n'est pas cette tâche que P2 va utiliser pour introduire les contenus nouveaux, il va ajouter le comparateur « égal » et l'opérateur « soustractions » à cette tâche pour la transformer dans $t_{carré2}$: Calculer $A=999\ 999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$.

Pendant le travail sur la tâche $t_{carré1}$ un travail sur le contrat de la valeur approchée d'un nombre, écriture et affichage scientifique est entrepris. Ce travail est utilisé dans la résolution de la tâche $t_{carré2}$. A travers les types de nombres, des opérateurs, nous pouvons constater que cette tâche est placée dans le domaine numérique dans le premier moment d'étude. Tout le travail pendant cette phase, reste dans le domaine du traitement numérique : calcul des puissances en utilisant la calculatrice, calcul approché, écriture scientifique, etc :

Tableau 74: Extrait de la séance-L6

Ligne	Temps	Acteur	Discours
10	00:03:21	P2	Est-ce que quelqu'un a une calculatrice « Casio graphe 35 plus » ou quelque chose comme ça ?
12	00:03:29	P2	Alors, rentrez le numéro 999999999875 ² pour voir ce que cela donne. Qu'est-ce que qu'on trouve ?
15	00:03:40	P2	Donc, sur la « Casio Collège » on a 10 ²⁴ et dans une autre, on a 1 E 24.

Les séances dirigées par P2 dans cette classe, généralement, ne présentent pas une utilisation considérable du NAG dans la partie « début de la séance ».

18.4.1.2 L'exploration de $t_{carré2}$ et début de l'élaboration de la technique

L'élaboration de la technique, que P2 souhaite faire construire aux élèves, est faite à l'aide de plusieurs tâches coopératrices. Ce travail commence quand P2 demande une valeur exacte pour $t_{carré1}$ sans l'utilisation de la calculatrice :

Tableau 75: Extrait de la séance-L6.

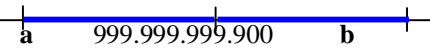
Ligne	Temps	Acteur	Discours
36	00:09:00	P2	Alors maintenant, regardons d'un petit peu plus près ce nombre pour voir si cette écriture est exacte ou pas. Certains m'ont dit que la machine a fait un arrondi etc... elle n'a plus assez de place etc...mais en fait on n'en sait rien. Vous dites des phrases mais vous n'avez pas vérifié ce qui se passait réellement. Je sais bien ce qu'est une machine arrondie, Je sais bien ce que ça a fait. Mais, qui pourrait me dire pourquoi ici ça ne serait pas le résultat exact ? Parce que finalement, elle a de la place pour mettre « 10 » chiffres. Elle en met combien ? Elle en met un ! Donc, je peux me demander « pourquoi elle fait ça ? ». On peut supposer que ce nombre est peut-être exact puisque elle n'a pas utilisé toute la place dont elle disposait. Donc on ne peut pas s'en sortir en disant simplement « c'est parce qu'elle est arrondie ! » ou « je ne sais pas trop ce que vous m'avez raconté ». Il faut donc faire un raisonnement autre que celui là.

A partir de cet épisode P2 commence un travail de recherche d'une nouvelle technique pour résoudre la tâche sur la différence entre deux carrés à travers un raisonnement permettant de préciser la valeur de la différence entre les deux carrés en question. Pour cela P2 utilise les tâches coopératrices $t_{carré2}$; t_{d1} ; t_{v1} .

18.4.1.2.1 Recherche d'une technique pour $t_{carré2}$

À l'instant 16h 55min, P2 utilise le NAG, à travers l'introduction de la droite graduée, pour commencer à montrer que les nombres 999 999 999 925² et 999 999 999 875² écrits respectivement sur la forme $(999\,999\,999\,900+25)^2 = a^2$ et $(999\,999\,999\,900-25)^2 = b^2$ peuvent être écrits dans la droite graduée, situés à une même distance du nombre $a = 999\,999\,999\,900$.

Tableau 76 : Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours	Remarque
83	00 :16 :55	P2	Si vous faites des flèches, comme je fais moi, regardez bien, est-ce que je dessine des flèches avant le « b » ? Mes flèches vont bien jusqu'au « b ».D'accord ! Il ne peut pas y avoir d'espace entre les deux.	

P2 utilise la droite graduée pour montrer que la distance entre les nombres **a** et **b** et celle entre les nombres **b** et **a** sont les mêmes, et c'est à partir de cette distance que P2 écrit les nombres **a** et **b** en fonction de **a**. Mais, à aucun instant de cette phase, l'enseignant ne mentionne avoir introduit deux autres registres dans le trame de la tâche. Voici une analyse plus détaillée de la tâche :

Tableau 77: Analyse détaillée de $t_{carré1}$.

	Filtre du numérique				
	Type de nombre	Type de comparateur	Type d'opérateur	Type de calcul	Domaine où la tâche était posée
	R	Différent ; Egal ; Plus grand que ; Plus petit que.	Soustraction ; Addition La distance La valeur absolue	Calcul exact	Numérique
$t_{carré2}$: Calculer $999999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$	Praxéologie				
	Technique τ		Technologico-théorique $[\theta, \Theta]$		
	$\tau_{carré1}$		$[\theta, \Theta]_{carré1}$		
Éléments pour l'analyse des phénomènes didactiques					
Registre	Procédure /Règle			Application	
Numérique Algébrique	Décomposer les nombres a^2 et b^2 en fonction de « a » et « m », puis multiplier « a » par 100.			Calculer $123\ 456\ 725^2 - 123\ 456\ 675^2$	

Nous désignerons par $t_{carré2}$ la tâche coopératrice, rencontrée par les élèves et nous pouvons la réécrire de la manière suivante :

$t_{carré2}$: Calculer la différence de deux carrés.

Il s'agit d'une tâche qui peut être écrite :

$t_{carré2}$: Calculer $a^2 - b^2$ étant données « a » et « b » nombres assez grands et proches.

Il s'agit d'un des grands types de pratique du calcul au lycée : le calcul exact. Ce type de calcul se développe pleinement avec le calcul littéral et l'algèbre à travers les tâches de résolution d'équation, de factorisation et de développement(Bronner, 2007).

En fait, nous pouvons voir par les spécimens de $t_{carré2}$ et $t_{carré3}$ que les tâches qui sont abordées par les élèves, sont dans un cas particulier du calcul $a^2 - b^2$.

De façon générale les élèves de seconde savent calculer les expressions de la forme $a^2 - b^2$ lorsque « a » et « b » sont des petits nombres. Donc, nous sommes dans le calcul de $a^2 - b^2$ lorsque « a » et « b » sont des nombres assez grands et proches à la fois. Il y a deux spécimens dans la séance :

$$t_{\text{carré2}} : \text{Calculer } A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$$

$$t_{\text{carré3}} : \text{Calculer } B = 123\,456\,725^2 - 123\,456\,675^2.$$

Nous estimons que P2 a dû avoir trouvé appui dans le manuel de la classe pour choisir $t_{\text{carré2}}$. Car, comme nous le montrerons, dans la suite de cette analyse, dans l'OM présente en ce manuel, on retrouve une tâche du type : Calculer $a^2 - b^2$ étant données « a » et « b » nombres assez grands et proches. en proposant deux techniques de résolution. D'ailleurs, ce sont ces techniques qui seront mises en œuvre par P2 à travers l'OM construite dans la classe.

De façon générale, on peut dire que dans la séance il y a tout un travail fait autour de la tâche principale : $t_{\text{carré2}}$, et c'est essentiellement autour de cette tâche que toute la séance va se développer. On voit $t_{\text{carré2}}$ apparaître soit comme enjeu en soi, soit comme tâche coopératrice pour introduire de nouveaux objets, et c'est dans cette partie de la séance que les interrelations entre les domaines mathématiques jouent un rôle important pour instaurer l'OM visée par P2.

Les spécimens $t_{\text{carré2}}$ et $t_{\text{carré3}}$ apparaissent en différents moments de la séance, $t_{\text{carré2}}$ apparaît dans le noyau de la séance, contrairement à $t_{\text{carré3}}$ qui apparaît dans la clôture de la séance. Cet écart entre ces deux spécimens nous a permis de constater que P2 utilise les interrelations entre les domaines mathématiques pour à la fois, résoudre $t_{\text{carré2}}$ et étudier, en donnant du sens, les objets « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre ». Ce constat est plus évident quand on observe la résolution de $t_{\text{carré3}}$, et on constate que P2 ne parcourt pas tout le chemin parcouru dans la résolution de $t_{\text{carré2}}$.

En ce que concerne $t_{\text{carré2}}$, il s'agit d'un spécimen mettant en jeu les nombres d'ensemble \mathbf{D} et les comparateurs évoqués sont « différents », « égaux », « plus grands que », « plus grands ou égaux ». Ces comparateurs sont utilisés pour les opérateurs « puissance, addition, soustraction », le calcul autour de ce spécimen reste dans la catégorie du calcul mixte (approché et exact.). Pour arriver à une technique pour résoudre $t_{\text{carré2}}$, P2 va développer tout un travail autour des tâches t_{d1} ; t_{v1} .

18.4.1.2.2 Travail sur de t_{d1} et t_{v1} , l'élaboration technologico-théorique

Dans cette phase, P2 dévoile aux élèves ses intentions à propos de la deuxième technique pour résoudre $t_{\text{carré2}}$ «cette notion d'équidistance, on va un peu en parler maintenant, justement, sous prétexte de cet exercice. On va parler de distance entre deux nombres. » P2 fait un cours sur la distance entre deux nombres. Il continue à utiliser la notion de distance entre les nombres \mathbf{a} et \mathbf{b} introduits à partir de la notion d'équidistance des nombres \mathbf{a} et \mathbf{b} en relation à α . Il écrit les nombres comme des abscisses de la droite graduée en utilisant le NAG, et montre à partir des abscisses \mathbf{a} et \mathbf{b} placées dans la droite graduée que les nombres \mathbf{a} et \mathbf{b} sont équidistants de α . A partir de la notion d'équidistance, P2 introduit la notion de distance et montre tout d'abord la notation pour la distance entre deux nombres :

Tableau 78: Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
78	00:15:46	P2	Donc, voilà la phrase que je pourrais rédiger ainsi : « a » et « b » sont équidistants de « α ». Voilà en effet
79	00:16:19	P	La notation « d » avec une parenthèse, « a » point virgule et « α ». A votre avis qu'est ce que c'est ?

A travers les types d'opérateurs, comparateurs, etc. P2 inscrit la tâche dans un autre registre : le registre géométrique. Pour cela, il inscrit aussi, rapidement, $t_{\text{carré}2}$ dans le registre algébrique. Il utilise la définition de la longueur de segment pour renforcer la notion d'équidistance et c'est après cela qu'il commence le cours sur la distance entre deux nombres. Il trace sur une autre droite graduée les abscisses « p » et « q », initialement, sans les associer à des nombres. Il travaille sur la distance qui sépare « p » et « q » pour montrer que cette distance est la longueur du segment PQ, c'est-à-dire la différence entre « p » et « q ». P2 fait aussi remarquer aux élèves que la différence entre 99999999925^2 et 999999999875^2 peut être écrite comme étant la distance entre les deux nombres. P2 utilise la notion de longueur de segment à partir des abscisses « p » et « q » placées dans la droite graduée pour montrer que la distance est toujours positive, et c'est pour renforcer la notion de distance entre deux nombres que P2 introduit, de façon implicite, la notation de la valeur absolue comme le montre l'extrait de la séance, lignes 91-93 :

Tableau 79: Extrait de la séance-L6

Ligne	Temps	Acteur	Discours
91	00:18:28	P2	Qu'est-ce que vous avez fait pour trouver la distance entre ces deux nombres ? Réfléchissez ! On avait des nombres qu'on connaît bien, « a » et « b ». On connaît bien, « a » on connaît bien, on était bien ! Que va être la distance entre ces deux nombres, E6 ?
92	00:18:30	E6	C'est la longueur qui sépare « p » et « q ».
93	00:18:34	P2	C'est la longueur qui sépare « p » et « q ». Alors, ça va être quoi ? La longueur on la comprend, mais on a fait quelque chose d'autre, E24 ?

Dans cette phase plusieurs tâches sont travaillées à la fois ; les tâches qui composent cette phase sont les suivantes :

- t_{d1} : Calculer $d(a ; b)$ avec « a » et « b » abscisses quelconques de la droite graduée $d(a ; b)$;
- t_{d2} : Calculer $d(a ; b)$ avec « a » et « b » donnés numériquement $d(12 ; 25)$;
- t_{v1} : Calculer $V(p-q)$;
- t_{v2} : Calculer $V(12-25)$

Cependant, ce ne sont pas toutes ces tâches qui seront l'enjeu dans cette phase. Les tâches t_{d2} , t_{v1} , et t_{v2} sont des tâches coopératrices à la tâche t_{d1} qui est l'enjeu majeur de cette phase. Ces tâches coopératrices ont été entreprises par P2 pour l'aider en un premier temps, dans la mise en place de la notion de distance, et dans un deuxième temps, dans l'institutionnalisation de la technique travaillée dans cette phase. Et nous verrons le travail commencer à changer de registre à travers l'utilisation du NAG. Nous présenterons la tâche en jeu dans cette phase :

Tableau 80: Analyse détaillée de t_{d1} .

t_{d1} : Calculer $d(a ; b)$ avec « a » et « b » abscisses quelconques de la droite graduée $d(a ; b)$	Filtre du numérique				
	Type de nombre	Type de comparateur	Type d'opérateur	Type de calcul	Domaine où la tâche était posée
	R	Différent ; Egal ; Plus grand que ; Plus petit que.	Soustraction ; La distance La valeur absolue	Calcul exact	Numérique
	Praxéologie				
	Technique τ			Technologico-théorique $[\theta, \Theta]$	
	τ_{d1}			$[\theta, \Theta]_a$	

Éléments pour l'analyse des phénomènes didactiques		
Registre	Procédure /Règle	Application
Géométrique	Calculer la longueur qui sépare les deux abscisses	t_{d2} : Calculer $d(12 ; 25)$ $t_{carré1}$: Calculer $999999\ 999\ 925^2 - 999\ 999\ 999\ 875^2$ $t_{carré2}$: Calculer $123\ 456\ 725^2 - 123\ 456\ 675^2$

Dans la séance le type de tâche T_d est utilisé par P2 dans le but de travailler sur la notion de distance. Ce type de tâche et les spécimens qui l'accompagnent se développent presque parallèlement avec les spécimens d'un autre type de tâche : T_v .

Le programme de mathématiques de seconde ne fait pas référence à l'objet « distance entre deux nombres ». La seule référence à cet objet, dans le programme se trouve dans la partie accompagnant : « La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres ». Une contrainte est transposée par P2 à ses élèves de la même façon qu'elle apparaît dans les programmes.

La tâche t_{d1} peut être redéfinie comme T_a : Calculer $d(a ; b)$ ou plus précisément comme T_a : Calculer $d(a ; b)$, étant donné « a » et « b », soit comme des abscisses de la droite graduée, soit comme nombres réels.

T_a enchaîne initialement le spécimen t_{d1} : Calculer $d(p ; q)$ sachant que « p » et « q » sont des abscisses de la droite graduée. Puis, le spécimen t_{d2} : Calculer $d(a ; b)$ avec « a » et « b » donné numérique. Autrement dit, t_{d2} : Calculer $d(12 ; 25)$.

Les spécimens t_{d1} et t_{d2} sont respectivement présentés en phases consécutives de la séance. Le deuxième spécimen va être utilisé comme tâche coopératrice au premier spécimen. Dans cette phase de la séance l'utilisation du NAG apparait implicitement, P2 commence à inscrire la tâche dans le domaine géométrique. P2 montre la droite graduée au tableau, ce qui marque, la présence d'une utilisation du NAG. Mais, comme nous pouvons voir à travers l'extrait qui suit, une utilisation implicite : P2 : « Il faudrait bien se souvenir de cette notion d'équidistance. On va un peu en parler maintenant, justement, sous prétexte de cet exercice. On va parler de distance entre deux nombres. » (Protocole séance-L6, ligne 77). Là, P2 dévoile aux élèves ses intentions de travailler l'objet « la distance entre deux nombres ». Dans cette phase la quantité des questions/réponse a diminué, la parole reste le fait de P2, les dialogues dans le miroir sont instaurés pour assurer la continuité du travail. Dans le début de cette phase nous trouvons au tableau de la classe :

$$A = (999\ 999\ 999\ 900 + 25)^2 - (999\ 999\ 999\ 900 - 25)^2$$

Figure 56: Représentation du tableau de la classe à l'instant 13min 09seg.

C'est à partir de cette construction que P2 commence à étudier la distance entre deux nombres. Les éléments des registres algébrique et géométrique sont bien présents. L'enseignant va utiliser des abscisses placées dans la droite graduée pour montrer que la distance entre deux nombres est toujours positive, mais toujours en utilisant des changements de registres, en utilisant le NAG pour faire comprendre aux élèves telles procédures.

Le spécimen t_{d1} est un spécimen qui fait travailler P2 et ses élèves dans l'ensemble R en utilisant les comparateurs « différent, égal, plus grand que, plus petit que. » Ces spécimens utilisent au-delà des opérateurs soustraction et addition, deux autres nouveaux opérateurs – la « distance et la valeur absolue » - sont introduites dans la séance dans cette phase. Le type de calcul est mixte, car P2 et les élèves travaillent avec des abscisses de la droite réelle. Dans cette phase, le NAG, à travers la droite graduée avec les notions de longueur et de distance, joue un rôle crucial dans la conversion et la compréhension des registres. A partir de ce moment, la tâche est inscrite dans le domaine géométrique. Cependant, ni la forme, ni les éléments qui ont participé à cette transformation de registre n'ont été révélés aux élèves. Ces conversions implicites des registres ne sont pas suivies par tous les élèves, elles semblent poser des problèmes à quelques uns, comme nous pouvons le voir dans l'extrait :

Tableau 81: Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
148	00:27:10	P2	Je vais faire 12 moins 25 et je vais mettre en valeur absolue. 12 moins 25 ou bien ? E33
149	00:27:19	E33	25 moins 12
150		P2	P : 25 moins 12, c'est la même chose
151	00:27:26	E17	On ne peut pas trouver la même chose
152		P2	Si
153	00:27:31	E17	On ne peut pas trouver la même chose en faisant 25 moins 12 et 12 moins 25
154		P2	Si, on va trouver la même chose
155	00:27:44	P2	Si, je vais trouver la même chose. Je reviens à 12 moins 25 : je vais trouver moins 13 en valeur absolue, donc là, c'est la même chose que la valeur absolue de 13. Regardez p et q dans la droite, on voit bien que la distance entre p et q est la même que q à p. C'est la longueur de ce segment là. E11 ?
156	00:27:43	E11	La valeur absolue de treize
157	00:27:50	P2	La valeur absolue de treize et quelle est la distance ?
158		P2	Treize, la distance est treize. Donc, on a ce résultat là.
159		P2	Ca va ? E17 ?
160		E17	Oui

Encore dans le noyau de la séance, P2 continue le cours, mais maintenant sur « la valeur absolue d'un nombre » et il signale bien le commencement du travail sur cet objet :

Tableau 82: Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
174	00:29:30	P	Donc, vous voyez comme on progresse : on est parti de la distance entre deux nombres et maintenant je vais donner la définition de quoi ?
175	00:29:38	P	Qu'est que ce que la valeur absolue d'un nombre ? Ca sert à quoi ? Qui me fait la phrase ? La valeur absolue d'un nombre c'est quoi ? E17 ?

P2 définit la valeur absolue et montre que la notion de la valeur absolue permet d'écrire une certaine égalité entre les soustractions $-q$ ou $|q - p|$. A travers la notion de longueur de segment, P2 a déjà montré que la distance entre « p » et « q » est la même que la distance entre « q » et « p ». P2 utilise le NAG, à travers la notion de longueur pour aider les élèves à comprendre que la valeur absolue de $p - q$ est égale à la valeur absolue de $q - p$. Ce qui n'était pas évident pour tous les élèves, et c'est à partir de la notion la valeur absolue que P2 écrit : $d(12 ; 25) = |12 - 25| = |25 - 12|$. Cet exemple numérique choisi par P2, en sortant du rapport avec le géométrique établi précédemment, à travers la droite graduée, pour aller travailler dans le domaine numérique, fait réagir un élève par

rapport à l'égalité entre les soustractions $|12-25| = |25-12|$, comme nous l'avons montré. (Protocole séance-L6, lignes de 159-160.).

P2 va encore utiliser les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique, à travers la droite graduée, pour faire comprendre aux élèves la définition de la valeur absolue, puis pour montrer que $d(12;25) = |12-25| = |25-12| = 13 = d(13;0)$ et que $|x| = d(x; 0)$, P2 fait aussi travailler les élèves sur quelques tâches à propos de la valeur absolue. Nous considérons ces tâches comme des tâches coopératrices (t_{v3} , t_{v4} , t_{v5} , t_{v6} , t_{v7} , t_{v9} , t_{v10} , t_{v11} , t_{v12}) car c'est la tâche t_{v8} l'enjeu dans cette phase. Voici une analyse plus détaillée de t_{v8} .

Tableau 83: Analyse détaillée de t_{v8} .

Filtre du numérique					
Type de nombre	Type de comparateur	Type d'opérateur	Type de calcul	Domaine où la tâche était posée	
				R	Différent ; Égal ; Plus grand que ; Plus petit que.
Praxéologie					
Technique τ			Technologico-théorique $[\theta, \Theta]$		
τ_{v8}			$[\theta, \Theta]_{v8}$		
Éléments pour l'analyse des phénomènes didactiques					
Registre	Procédure /Règle		Application		
Géométrique	La valeur absolue d'un nombre réel est le propre nombre si le nombre en question est positif ou nul. Si le nombre en question est négatif, la valeur absolue est l'opposé.		Calculer $v(\pi)$, $v(\sqrt{2})$, $v(-5)$, $v(x-5)$		

En fait, dans cette partie de la séance, P2 travaille dans l'élaboration du bloc technologico-théorique à travers t_{d1} et t_{v8} .

18.4.1.3 Le travail d'amélioration de la technique

t_{d1} est une spécimen qui utilise comme technique : Mesurer la longueur qui sépare « p » et « q », ce qui va aboutir à une soustraction, la différence entre « p » et « q. » t_{d1} est une tâche coopératrice autour de laquelle vont travailler P2 et les élèves.

La technique utilisée dans la résolution de t_{d1} : la distance entre deux nombres est la valeur de la longueur qui sépare ces deux nombres, cette longueur peut être calculée par la différence entre ces deux nombres, mais le résultat de cette différence doit être toujours positif.

Le NAG gère la dynamique entre les différents registres dans cette phase de la séance. Dans le registre géométrique le NAG apparaît à travers la droite graduée, dans les notions de longueur et de distance, ce qui joue un rôle crucial dans la conversion et la compréhension des registres.

L'objet « la distance entre deux nombres » fait partie des objectifs de P2 dans cette séance, et cet objet va apparaître dans autres phases de cette séance, non comme un objet en soi, mais comme un outil pour travailler $t_{carré2}$. La notion de distance est initialement utilisée, au travers des spécimens t_{v1} et t_{v2} , sans que P2 la définisse. C'est avec cette notion en relation avec les notions de longueur et équidistance, que P2 consolide la technique pour résoudre t_{d1} , t_{v8} , $t_{carré2}$ et $t_{carré3}$.

Dans le développement du bloc technologico-théorique, le NAG, au travers de la droite graduée, joue un rôle important, car c'est à partir de la notion de longueur qui sépare les abscisses « p » et « q » placées dans la droite graduée que P2 fait émerger la technique pour calculer la distance entre deux nombres, comme nous pouvons le constater dans l'extrait ci-dessous :

Tableau 84: Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
93	00:18:34	P2	C'est la longueur qui sépare « p » et « q ». Alors, ça va être quoi ? La longueur on la comprend, mais on a fait quelque chose d'autre, E24 ?
94		E24	On va soustraire
95		P2	Voilà, on va soustraire « p » de « q », c'est quoi soustraire ?
96		E30	C'est la différence entre « p » et « q »
97		P2	C'est la différence entre « p » et « q »....

C'est la technique de « soustraire un des nombres par l'autre » qui va être employée par P2 pour calculer la distance entre deux nombres. P2 va travailler encore plus cette technique en utilisant la droite graduée et la notion de longueur pour montrer que la valeur de la soustraction doit être toujours positive quel que soit l'ordre des nombres adoptés dans la soustraction.

Voici comment nous résumons le travail dans cette phase de la séance :

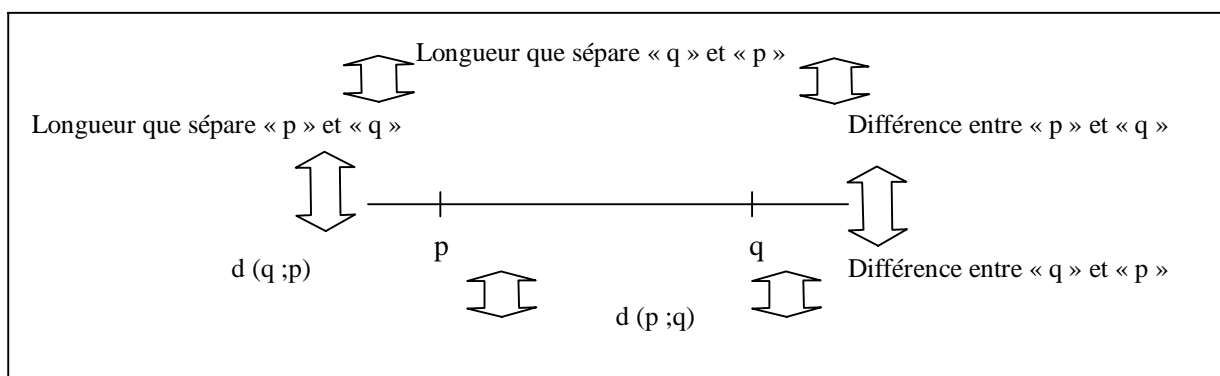


Figure 57: Résumé du travail sur les techniques pour résoudre T_d et T_v .

Le NAG, à travers la droite graduée, occupe une place assez importante dans la construction des connaissances chez les élèves, car, bien que P2 ait annoncé que la distance a déjà été étudiée en classe, dans cette phase il fait un cours sur la distance entre deux nombres en utilisant la droite graduée comme référence

A partir de cet épisode P2 utilise cette phase pour introduire la notion de la valeur absolue et plusieurs élèves participent à la séance en apportant des réponses aux questions posées par P2.

La tâche t_{v8} est un spécimen du type de tâche T_v qui est le troisième type de tâche qui apparaît dans la séance, nous écrivons cette tâche de la manière suivante :

T_v : Calculer la valeur absolue de « a » ou tout simplement T_v : Calculer $V(a)$.

Nous montrerons à travers les analyses qui suivent que, lorsque les élèves sont confrontés à T_v , trois approches différentes vont être mises en place. Ces différentes approches vont donner naissance à douze spécimens.

Pendant le travail consacré à t_{v8} , une première approche de la définition de la valeur absolue d'un nombre « Si x et y sont deux abscisses de la droite graduée alors $|x - y| = d(x ; y)$ » est mise en place. Cette approche avec les tâches t_{v1} et t_{v2} présentées dans la phase précédente vont participer à l'élaboration de la technique τ_{v8} .

Une deuxième approche de la définition de la valeur absolue d'un nombre « Un nombre réel est constitué de deux parties : un signe + ou - et une valeur absolue » apparaît. Les tâches t_{v3} , t_{v4} , t_{v5} , t_{v6} , t_{v7} vont concourir avec cette approche à l'élaboration de τ_{v8} .

La troisième approche de la définition de la valeur absolue « Soit x un réel, prendre la valeur absolue du nombre x consiste à le priver de son signe : un x positif coïncide avec sa valeur absolue; la valeur absolue d'un x négatif est son opposé » commence être travaillée à partir de la tâche t_{v8} . L'ensemble des tâches t_{v8} , t_{v9} , t_{v10} , t_{v11} , t_{v12} , où t_{v8} est une tâche enjeu, participent à l'institutionnalisation de la technique τ_{v8} .

La technique τ_{v1} « écrire $d(a ; b) = V(a-b)$ » est utilisée dans l'accomplissement des spécimens t_{v1}, t_{v2} et la technique τ_{v2} « écrire $V(x) = d(x ; 0)$ » dans l'accomplissement de tous les autres spécimens.

Les deux techniques τ_{v1} et τ_{v2} utilisent le NAG, à travers la droite graduée pour mettre en évidence que la valeur absolue d'un nombre est associée à une longueur, à la distance entre deux abscisses situées dans la droite graduée. Ces techniques se développent en faisant appel aux ensembles numériques Z et R en utilisant le calcul exact.

Le spécimen t_{v1} utilise les comparateurs « différent », « égal », « plus grand que », « plus petit que » et les opérateurs « différence » et « valeur absolue. »

Concernant le spécimen t_{v2} , il utilise les comparateurs « différent », « égal » et les opérateurs « différence » et « valeur absolue. »

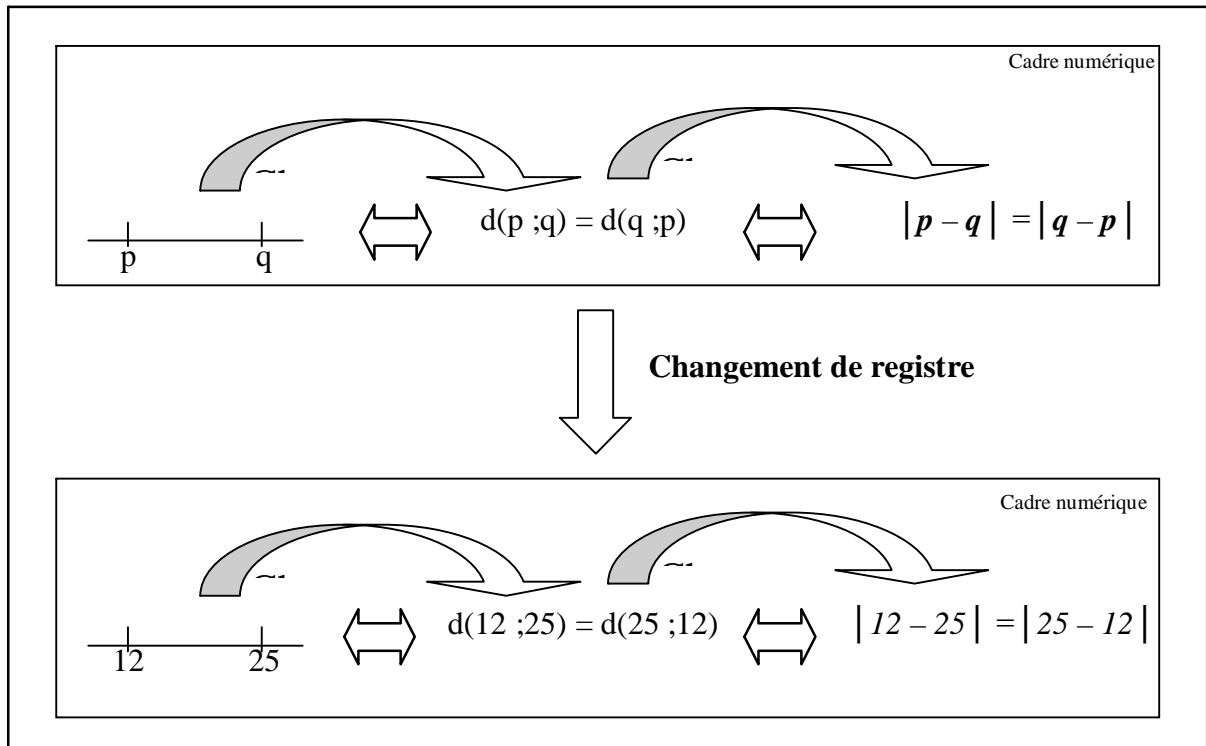
Le spécimen t_{v8} utilise les comparateurs « différence », « égal », « plus grand que », « plus grand ou égal », « plus petit que » et les opérateurs « différence », « opposé » et « valeur absolue. »

Les autres spécimens vont utiliser un seul comparateur « différence » et les opérateurs « différence », « opposé » et « valeur absolue. »

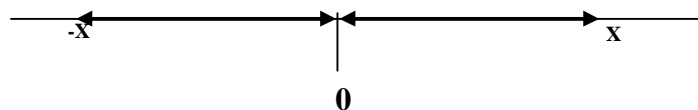
Le bloc technologico-théorique qui justifie les techniques (τ_{v1} et τ_{v2}) dans cette partie de la séance s'appuie initialement sur la définition de la distance entre deux nombres $d(a ; b) = d(x ; 0) = V(x)$, puis sur les tâches collaboratives t_{v1} , t_{v8} , t_{v11} , t_{v12} et sur la définition de la valeur absolue d'un nombre réel « x » comme étant égale à $|x| = -x ; x \leq 0$ ou $|x| = x ; x \geq 0$.

L'enseignant commence par évoquer la valeur absolue depuis la ligne 121 du notre protocole, il débute par la définition de la notation de la valeur absolue, puis P2 montre que la valeur absolue sert pour écrire indifféremment « p » moins « q » ou « q » moins « p », autrement dit $|p - q|$ ou $|q - p|$, P2 fait apparaître, à travers ses questions, le rapport d'égalité entre les deux notations. Ce rapport reste encore lié à la droite graduée évoquée dans la phase précédente, car dans cette même phase, quand P2 annonce que $|12 - 25| = |25 - 12|$ les élèves ont du mal à l'accepter. Dès que le calcul change de registre, les

élèves ont du mal à comprendre. Ce que fait P2 évoque la droite graduée pour essayer de convaincre les élèves que $d(12 ; 25) = |12 - 25| = |25 - 12|$, nous schématisons cela de la façon suivante :



Après avoir utilisé la droite graduée pour amener les élèves à la construction de la technique souhaitable, P2 présente finalement la technique pour résoudre T_v , il s'agit de calculer la distance de ce nombre à zéro, il désigne d'abord celui-ci :



Au tableau puis il écrit l'expression : $|x| = d(x ; 0)$.

A partir de cet épisode, on voit que le travail sur la technique pour calculer la valeur d'un nombre se termine, quand P2 montre que la valeur absolue, notée $|x|$ dépend de la valeur de x , autrement dit $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Tout ce travail autour de ces techniques présentées précédemment a été entrepris pour trouver la technique pour $t_{carré2}$.

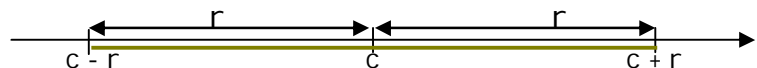
18.4.1.4 L'organisation mathématique élaborée

P2 possède un style pour faire ses cours. Considérant ce style, il est possible de mieux comprendre et de préciser l'organisation didactique mise en place par P2 pour résoudre $t_{carré1}$ et $t_{carré2}$.

Le calcul demandé au départ est repris par P2 pour faire travailler les élèves sur $\tau_{\text{carré}2}$ - qui va participer vraiment à l'enjeu didactique dans la séance. Le passage de $\tau_{\text{carré}2}$ à $\tau_{\text{carré}3}$ est fait sans que $\tau_{\text{carré}2}$ (l'ancienne technique) soit remise en question. En effet, même avec les éléments technologico-théorique que nous repérons dans la séance : *La calculatrice peut calculer a^2, b^2 et $a^2 - b^2$, elle ne produit pas toujours des calculs exacts*, $\tau_{\text{carré}1}$ est loin d'être considéré comme une technique dans la séance. Il nous semble que P2 a essayé d'utiliser $\tau_{\text{carré}1}$ à cause des contraintes institutionnelles, mais il n'arrive pas à établir des liens assez cohérents entre les limites de $\tau_{\text{carré}1}$ et l'émergence de $\tau_{\text{carré}2}$.

La construction de $\tau_{\text{carré}2}$ est aussi faite à partir des échanges questions/réponses menés par P2. Cette construction nous semble plus pertinente que la précédente. P2 fait émerger de ces échanges une technique pour résoudre $T_{\text{carré}}$ qui s'appuie sur les éléments technologico-théorique : le nombre $A = a^2 - b^2$ peut être conçu soit, comme une identité remarquable, soit comme la distance entre les nombres a^2 et b^2 .

P2 souhaite faire émerger une technique qui permettra la réalisation de $T_{\text{carré}}$ de manière assez simple, car les élèves vont effectuer cette tâche sans l'aide de la calculatrice. Le choix, que guideront les échanges questions/réponses proposés en travail collectif pendant la phase de construction de $\tau_{\text{carré}2}$, pourrait s'inscrire dans la stratégie suivante. La première question « P2 : Alors, si on regarde maintenant ces deux nombres, on peut les regarder d'un peu plus près et voir certaines choses qu'on a déjà envisagées en classe. » (Protocole séance-L6, ligne 37) peut aboutir à, au moins, deux réponses (qui ont été déjà travaillées en classe) de la part des élèves. La réponse non attendue, est mise en cause dès qu'elle arrive (voir l'annexe 12.2). P2 fait travailler les élèves sur une identité remarquable, mais bien avant, il souhaite que les élèves envisagent une décomposition des nombres a^2 et b^2 due à l'effet de la variable didactique « taille des nombres ». La deuxième question « P2 : On a déjà utilisé cette terminologie. En quoi est-ce intéressant là. Je vous fais remarquer quoi ? Que ces deux nombres là sont comment ? » (Protocole séance-L6, ligne 61) a eu comme réponse, pour la différence entre $a=(999\ 999\ 999\ 900+25)^2$ et $b=(999\ 999\ 999\ 900-25)^2$ que « E32 : La différence entre neuf cent quatre-vingt neuf..., je n'arrive pas à le lire. La différence entre eux est égale à 25. » Nous postulons que étant donné le contrat implicite (Brousseau, 1989) associé à la soustraction : « a et b sont deux nombres relatifs. La différence $a - b$ est le nombre qu'il faut ajouter à b pour obtenir a . » d'emblée, E32 répond à la question. A partir de cette réponse fournie par E32, P2 utilise le NAG, même de façon implicite, pour montrer que la réponse de E32 n'était pas correcte. Mais à aucun moment de la séance, P2 n'explique les raisons de l'utilisation de la droite graduée. Néanmoins, on peut remarquer la pertinence de l'utilisation du NAG, car après cette utilisation les élèves arrivent à mieux comprendre que la différence entre « a » et « b » ne pourrait pas être égale à 25. Cette différence pourrait nous être montrée à travers la soustraction $a-b$, mais, encore une fois, la contrainte « taille des nombres » a impulsé P2 à partir vers une recherche d'un raisonnement ($\tau_{\text{carré}2}$) où les opérations arithmétiques étaient les plus simples possibles. A partir de ce moment, « a » et « b » sont considérés comme abscisses de la droite graduée et le nombre comme le milieu de ces deux abscisses. Ce raisonnement qu'a fait P2 ne semble poser aucun problème de compréhension aux élèves. Et c'est peut-être dû à cela que P2 a choisi ce raisonnement :



plutôt que celui qui apparaît dans l'OM du manuel, où on calcule $x \in [-3 ; 5]$ en sachant que x appartient à l'intervalle du centre c et du rayon r . Le centre de l'intervalle $\in [-3 ; 5]$

est : $\frac{-3+5}{2}$ et son rayon est $\frac{5-(-3)}{2}$. Donc, pour résoudre les opérations $c = \frac{a+b}{2}$ et $r = \frac{a-b}{2}$, le calcul numérique est toujours impraticable, puisque la contrainte « taille des nombres » va encore poser des problèmes au calcul - ce qui ne veut pas dire qu'il n'existe pas de calcul dans le raisonnement utilisé par P2 – les élèves seront amenés à utiliser le **NAG** à travers la notion de longueur, puis à se tourner vers la notion d'équidistance et à utiliser une écriture littérale. On peut alors percevoir la raison pour laquelle plus d'élèves comprennent le raisonnement présenté par P2 en utilisant la droite graduée. Ce constat est plus visible à partir du questionnement qui suit. Presque tous les élèves sont désormais dans une démarche où le **NAG** est utilisé pour réduire les obstacles d'un travail de nature numérique.

La troisième question de « P2 : Je peux aussi dire qu'à partir de ce nombre que j'appelle « α », je peux dire que « a » s'écrit comment ? » (Protocole séance-L6, ligne 70). La réponse fournie par l'élève « E25 : « a » est égal à « α » plus 25 » est la réponse attendue par P2 : avec cette réponse et celle de « E30 : « b » est égal à « α » moins 25 », P2 va écrire les nombres a et b en fonction de α et 25.

18.4.1.5 Le moment de l'évaluation

C'est à la clôture de la séance, avec le travail sur $t_{\text{carré3}}$ que P2 va articuler les moments de l'évaluation et de l'institutionnalisation et faire le point sur ce qui a été travaillé.

La tâche $t_{\text{carré3}}$ a le même ensemble numérique et les comparateurs utilisés en $t_{\text{carré2}}$. Par contre, les opérateurs rencontrés sont élévation au carré, soustraction, addition, multiplication et le calcul autour de ce spécimen passe à la catégorie du calcul exact.

Le spécimen $t_{\text{carré2}}$ appartient au type de tâches $T_{\text{carré}}$. Dans cette phase P2 évalue le travail sur la technique qu'il a construit pour résoudre cette tâche, car au temps 15'46'' P2 commence à travailler à la fois τ_{d1} , τ_{v8} , et $\tau_{\text{carré1}}$. Ce qui est d'ailleurs une des raisons qui a conduit P2 à choisir tel tâche.

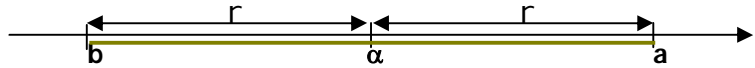
Dans cette phase de la séance, la technique $\tau_{\text{carré2}}$, construite à partir du travail sur τ_{d1} , τ_{v8} , et $\tau_{\text{carré2}}$, va être utilisée dans la résolution de $\tau_{\text{carré3}}$ et P2 en profite aussi pour faire un point sur les acquis:

Tableau 85: Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
353	00:44:51	P2	On a fait des choses importantes cet après midi. On avait une nouvelle notion qui est la valeur absolue avec une définition unique qui se découpe après en deux.
354	00:45:01	P2	Qu'est ce qu'une définition unique ?
355	00:45:08	P2	La valeur absolue d'un nombre c'est la distance d'un nombre à zéro, et ça se sous-divise en deux. S'il est négatif, c'est son opposé et s'il est positif ou nul, c'est lui-même. Il faut retenir ça.
356	00:45:30	P2	Et puis, on a vu aussi l'intérêt du calcul littéral... en français avec des lettres au lieu de travailler avec des nombres

357	00:45:41	P2	Sarah, vous avez du mal à le lire, tout le monde, c'est normal a du mal à lire ce nombre. Par contre, en mathématique quand on fait un calcul littéral, on peut le réduire. Ici ça vous donne donc : « a » plus 25 « a » moins 25. Regardez tout ce qui est fait après. On obtient des résultats très simples : qui est cent « a ».
-----	----------	----	---

En fait P2 fait travailler les élèves sur la technique qu'il a souhaité faire apprendre aux élèves :



Où $\alpha \in [b ; a]$, $\alpha = \frac{a+b}{2}$ et $r = \frac{a-b}{2}$.

P2 utilise les interrelations entre les domaines mathématiques pour pouvoir arriver au raisonnement qui conduit à la technique pour résoudre $t_{\text{carré2}}$ et conséquemment $t_{\text{carré3}}$. Cette technique se résume à trouver α et à le multiplier par 100, comme le montre le extrait :

Tableau 86: Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
358	00:46:10	P2	Ce résultat d'ailleurs est même plus général puisque maintenant si je vous demande de calculer par exemple ça ?
359	00:46:39	P2	Tout de suite la réponse, E33 ?
360	00:46:42	E33	Cent « α »
361	00:46:45	P2	Oui mais ce qui « α »
362		E33	123456700

P2 utilise $t_{\text{carré3}}$ pour évaluer la technique construite pour $t_{\text{carré2}}$. Pour ce qui concerne à $t_{\text{carré3}}$ l'ensemble numérique et les comparateurs sont les mêmes utilisés en $t_{\text{carré2}}$. Par contre, les opérateurs rencontrés sont l'addition, la division, la multiplication et le calcul autour de cet spécimen passe à la catégorie du calcul exact. Nous résumons cet épisode de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 t_{\text{carré3}}: \text{ Calculer } B &= 123\,456\,725^2 - 123\,456\,675^2. \\
 B &= 123\,456\,725 + 123\,456\,675. \\
 B &= 246\,913\,400 \\
 B &= (246\,913\,400)/2 \\
 B &= 123\,456\,700 = \mathbf{a} \\
 B &= (123\,456\,700).100 \\
 B &= 123\,456\,700\,00 = \mathbf{100a}.
 \end{aligned}$$

Dans cette partie de la séance, P2 réinscrit la tâche dans le registre numérique. Le NAG a été utilisé pas à pas pendant la construction de la technique pour résoudre $t_{\text{carré2}}$, mais cette technique s'est résumée à trouver 100α . Dans l'analyse qui suit, une organisation mathématique semblable à celle que nous venons d'analyser est présente dans le manuel utilisé par cette classe.

18.4.1.6 L'Organisation Mathématique présente dans le manuel

Nous retracerons les contenus présentés dans le programme de seconde et l'OM présenté dans le chapitre I du manuel²⁵ référant aux sujets « la valeur absolue d'un nombre » et « la distance entre deux nombres » afin de voir comment ces institutions ont influencé les choix P2 dans cette séance.

En ce qui concerne les programmes de 2001, dans la partie calcul et fonction on trouve :

Tableau 87: Extrait du programme de 2001 de la classe de seconde.

Contenus	Capacités Attendues	Commentaires
Nature et écriture des nombres. Notations N, Z, D, Q, R. Représentations des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. Décomposer un entier en produit de nombres premiers	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 56×67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a , a^2 et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.

L'analyse de cette partie et des objectifs de ce programme montre des éléments qui vont faire partie des choix de P2.

Le programme ne présente que « la valeur absolue d'un nombre » comme contenu, dans la partie commentaire il est marqué que « La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres. » En fait, ce programme ne fait aucune référence qui pourrait être en liaison avec l'étude des objets « la valeur absolue d'un nombre » et « la distance entre deux nombres » en utilisant les interrelations entre différents domaines, c'est-à-dire l'importance des activités qui pourraient se référer à des OM construites autour de plusieurs domaines pour aborder ces deux objets. La partie « accompagnement » du programme suggère une telle construction comme nous pouvons le voir dans l'extrait suivant :

« Le programme rassemble sous un titre unique un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calcul numérique et algébrique et l'étude des fonctions. C'est une invitation forte à chaque enseignant pour qu'il construise son cours en faisant interagir ces divers éléments : calcul numérique ou littéral et recherche d'images, résolution d'équations par le calcul ou dans un environnement graphique, de façon approchée ou exacte, ordre entre les nombres et variations de fonctions, etc. On veillera, en particulier, à choisir des problèmes se prêtant à plusieurs approches et admettant des types de résolution variés. » (Document concerne le programme de 2nde paru au BO hors-série n° 6 du 12 août 1999)

²⁵Fractale Maths 2^{de} – Edition 2004 – Bordas.

Quelques choix faits par P2 autour de l'étude de la distance entre deux nombres et la valeur absolue d'un nombre sont présents dans le programme de seconde. Mais, les objets que P2 choisit ont été employés dans la séance que nous analysons en suivant le style de cet enseignant. Pour mieux comprendre l'ordre d'introduction, d'apparition de ces objets dans OM instaurée par P2, nous présentons dans le tableau ci-dessous la structuration du chapitre se référant à l'étude de ces objets dans le manuel :

Tableau 88: Extrait du chapitre I du manuel.

Nom donné au chapitre I	Déjà vu au collège	À découvrir en seconde
Nombres, ordre et valeurs absolues	<ul style="list-style-type: none"> -Différentes écritures d'un même nombre ; -Valeurs approchées d'un nombre, troncatures et arrondis ; -Racine carrée d'un nombre positif ; -Puissances d'un nombre ; -Multiples et diviseurs d'un nombre entier ; -Nombres premiers entre eux. 	<ul style="list-style-type: none"> -Connaître les différents ensembles de nombres ; -Distinguer un nombre d'une des ses valeurs approchées ; -Décomposer un nombre entier en un produit des nombres premiers ; -Utiliser des encadrements ; -Caractériser des éléments d'un intervalle et le représenter, -Lier la valeur absolue d'un nombre avec la distance entre deux nombres.

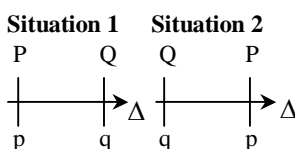
Dans le manuel utilisé en classe, la page d'entrée du chapitre I montre ce qui a été étudié au collège et ce qui sera étudié en seconde. La partie « activité », du chapitre I du manuel présente quatre grands types de tâches suivis des spécimens :

Activités	Types de tâches	Spécimen
1	T _{dif} – Trouver les différentes écritures d'un nombre.	t _{dif1} , t _{dif2} , t _{dif3}
2	T _{ecr} – Ecrire un nombre entier sous forme de produit d'entiers.	t _{ecr1} , t _{ecr2} , t _{ecr3} , t _{ecr4}
3	T _{com} – Comparer les nombres en utilisant des règles.	t _{com1} , t _{com2} , t _{com3} , t _{com4}
4	T _{dis} – Déterminer la distance entre deux nombres.	t _{dis1} , t _{dis2}

Tableau 89: Les types de tâches de la partie activité du manuel.

Dans cette partie, les activités 1, 2, 3 et 4 sont considérées comme « des activités volontairement réduites » et l'activité 1 « la première, simple, assure le lien avec la classe de 3^e » et les activités suivantes sont utilisées comme « activités d'introduction au cours ». Entre les spécimens t_{dis1}, t_{dis2} qui constituent l'introduction du cours « distance et valeur absolue » et qui apparaissent dans la partie « cours » du manuel, nous observons l'utilisation des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique, comme par exemple :

«Déterminer les distances AB, CA, OA, CI, DA, BE, OE et ED, en précisant à chaque fois l'opération à faire étant donné les abscisses des points O, I, A, B, C, D et E. »



«Déterminer la distance PQ en fonction de p et q pour chaque situation. Sachant que P et Q sont deux points de Δ, d'abscisses respectives p et q.»

« Compléter le tableau ci-dessous : »

p	q	p-q	q-p	Distance de p à q
5	3	2	-2	2
-4	2			
7	-3			
-8	$-\sqrt{63}$			
-3,14	$-\pi$			

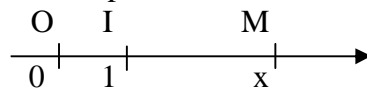
Dans la partie « cours » de ce même chapitre on trouve six sous-titres : « 1. Ensemble de nombres », « 2. Nombres premiers », « 3. Nombre et ordre », « 4. Intervalles de \mathbb{R} », « 5. Distance et valeur absolue » et « 6. Valeurs approchées d'un nombre réel », dans lesquels la droite graduée est évoquée comme un élément significatif de la compréhension des sous-titres « 1 », « 4 », « 5 » et « 6 ». Mais nous développerons davantage le sous-titre - « 5 » - qui se réfèrent aux objets de la séance-L6.

Le sous-titre « 5 » commence en présentant la définition suivante : « **Définition 3** - la distance de deux nombres réels x et y est celle des nombres $x-y$ ou $y-x$ qui est positive ou nulle. Cette distance se note $|x - y|$ et se lit valeur absolue de x moins y . » Ensuite vont apparaître deux exemples : $|5-2| = 5-2 = 3$ et $|7-13| = 13-7 = 6$, puis la remarque « la distance entre deux nombres réels x et y est égale à la distance MN des points M d'abscisse x et N d'abscisse y , de la droite numérique. » Cette remarque montre comme conséquence :

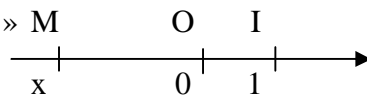
«**Conséquence** - la valeur absolue de x , notée $|x|$, est la distance de x à zéro. »

$|x|$ désigne toujours un nombre positif.

Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$



Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$



Encore dans le même sous-titre nous allons annoncer, avant la fin de cette partie, deux propriétés suivies des exemples :

«**Propriété 5** - La distance entre les nombres x et y est égale à la distance entre les nombres y et x : $|x-y| = |y-x|$. »

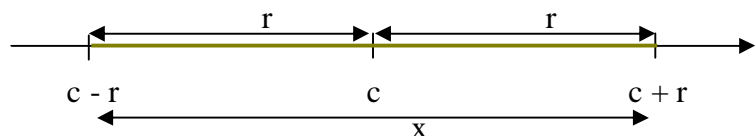
Exemple

$$|7-9| = |9-7| = 2.$$



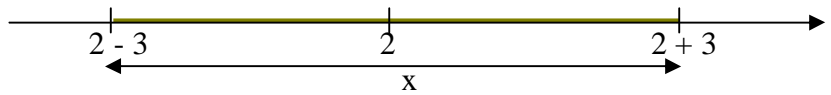
« **Propriété 6** - Soit c un nombre réel et r un nombre réel positif, les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- ✓ la distance de x à c est inférieure ou égale à r ;
- ✓ $x \in [c-r ; c+r]$;
- ✓ $|x-c| \leq r$;
- ✓ $c-r \leq x \leq c+r$.



Exemple

- ✓ $|x-2| \leq 3$ signifie que la distance de x à 2 est inférieure ou égale à 3 ou que x est comprise entre $2-3$ et $2+3$, soit $x \in [-1; 5]$ ou $-1 \leq x \leq 5$.



✓ $x \in [-3; 5]$ s'écrit de façon équivalente $|x-2| \leq 3$, car $1 = \frac{-3+5}{2}$ et $4 = \frac{5-(-3)}{2}$



Dans l'OM présente dans ce manuel, le NAG apparait en jouant un rôle important, malgré la façon implicite dont ces interrelations sont utilisées. Le tableau résume l'OM ponctuelle présente dans la partie cours, se référant à la distance et à la valeur absolue :

Tableau 90: Structure du sujet d'étude sur la valeur absolue avec la distance dans le manuel.

OM distance et valeur absolue dans le manuel		
T	τ	$[\theta / \Theta]$
T ₁ : Calculer la valeur absolue de la différence entre deux nombres donnés	Calculer la différence de façon à donner toujours un résultat positif.	Définition 3 - la distance de deux nombres réels x et y est celle des nombres $x-y$ ou $y-x$ qui est positive ou nulle. Cette distance note $ x - y $ et se lit valeur absolue de x moins y .
T ₂ : Montrer que la distance entre deux abscisses situées dans la droite graduée ne dépend pas de l'ordre des abscisses	Calculer la différence entre les abscisses des deux façons possibles en exprimant toujours un résultat positif.	Propriété 5 - La distance entre les nombres x et y est égale à la distance entre les nombres y et x : $ x-y = y-x $.
T ₃ : Trouver la signification d'une inégalité du type : $ x-c \leq r$	Écrire l'inégalité modulaire sous forme d'intervalle	Propriété 6 - Soit c un nombre réel et r un nombre réel positif, les quatre propositions suivantes sont équivalentes : ✓ la distance de x à c est inférieure ou égale à r ; ✓ $x \in [c-r ; c+r]$; ✓ $ x-c \leq r$; ✓ $c-r \leq x \leq c+r$
T ₄ : Ecrire un intervalle sur forme d'une inégalité modulaire. $x \in [c-r ; c+r]$; $ x-c \leq r$;	On calcule $x \in [-3 ; 5]$ en sachant que x appartient à l'intervalle de centre c et rayon r . Le centre de l'intervalle $\in [-3 ; 5]$ est : $\frac{-3+5}{2}$ et son rayon est $\frac{5-(-3)}{2}$	Propriété 6 - Soit c un nombre réel et r un nombre réel positif, les quatre propositions suivantes sont équivalentes : ✓ la distance de x à c est inférieure ou égal à r ; ✓ $x \in [c-r ; c+r]$; ✓ $ x-c \leq r$; $c-r \leq x \leq c+r$

A travers l'analyse de l'OM présentée précédemment, le NAG, au travers de la droite graduée, est introduit pour servir aux OM construites autour de l'étude « de la valeur absolue d'un nombre avec la distance entre deux nombres ». Et c'est la droite graduée l'objet responsable de gérer la *dynamique inter-domaines* (Bronner, 2007). Par ailleurs, le fait que cette OM soit ponctuelle laisse penser que la droite graduée est un savoir naturalisé pour les élèves et qu'elle n'est plus enjeu d'apprentissage.

D'une façon générale, l'OM présente dans le manuel va beaucoup influencer les choix de P2 : l'OM est construite dans la séance observée, entre les tâches que nous repérerons dans le chapitre I. Nous trouvons même une tâche qui demande le calcul de $A = 789456321^2 - 789456320^2$ avec la calculatrice et sans la calculatrice en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

La dynamique inter-domaines numérique-algébrique et géométrique, ici représenté par la droite graduée, apparaît pour introduire des notions comme par exemple la notion de distance entre deux nombres. Le domaine algébrique ici représenté par le calcul littéral, apparaît dans le travail des nouvelles techniques de résolution d'une tâche. Cette dynamique apparaît comme un élément important dans l'OM présente dans le manuel, ce qui va aussi influencer l'OM construite dans la classe.

18.4.1.7 Synthèse

Nous avons pour cette séance particulière, à travers nos analyses, fait ressortir les caractéristiques des pratiques didactiques liées au **NAG** dont nous donnons ici une synthèse. Nous revenons sur certains éléments présentés dans les analyses précédentes. Ces éléments nous permettront d'une part de rediscuter les procédures didactiques de P2 présentes dans cette séance, d'autre part de préciser davantage quelques contraintes qui pèsent sur ces procédures.

18.4.1.7.1 Le savoir en jeu

En utilisant les éléments du filtre du numérique, il a été possible de bien préciser sur quel objet porte la séance. Tout d'abord, nous nous appuyons sur le partage du temps total des parties de la séance (début=9min ; noyau=30min et clôture=8min), à partir de ces informations, et du style de P2, nous constatons que la séance a été consacrée à l'étude de deux objectifs « distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre » présents, d'ailleurs, dans la progression de P2.

La séance a été consacrée davantage à l'étude de la valeur absolue d'un nombre. A propos de cette affirmation, nous voyons que le terme « distance entre deux nombres » ne figure pas dans le titre du chapitre du manuel qui sert de référence dans cette classe. Dans les programmes de la seconde, le sujet « distance entre deux nombres » n'apparaît pas comme un sujet en soi, mais plutôt comme un élément adjacent de l'étude de la « valeur absolue d'un nombre ». En revenant au temps total de la séance, on a constaté que la résolution du calcul de la différence entre deux carrés donnés au départ a pris 38/47 minutes de la séance, que l'étude de la valeur absolue d'un nombre a pris 12/47 minutes de la séance, alors que l'étude de la « distance entre deux nombres » n'a pris que 2/47 minutes. Ce qui nous montre bien l'écart de temps consacré par P2 aux différents sujets. Quand P2 présente « Distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre » dans son projet de cours, c'est sur la valeur absolue d'un nombre que P2 va consacrer le plus de temps.

Dans cette séance, l'organisation mathématique visée relève du domaine des calculs et fonctions, du secteur ordre du nombre et valeur absolue d'un nombre et du thème constitué autour de la valeur absolue d'un nombre à partir de la distance entre deux nombres. Il s'agit d'une organisation mathématique qui intègre aussi des acquis (savoir cachés) étudiés au collège comme, par exemple, les identités remarquables, puissances d'un nombre, etc. qui sont dévolues à travers l'utilisation du **NAG**.

A propos des deux objets étudiés, nous remarquons qu'ils sont traités de manière très liée, et sont parfois considérés comme équivalents. Ce qui pose un problème dans la séance :

Tableau 91: Extrait de la séance-L6.

Ligne	Temps	Acteur	Discours
148	00:27:10	P2	Je vais faire 12 moins 25 et je vais mettre en valeur absolue. 12 moins 25 ou bien ? E33
149	00:27:19	E33	25 moins 12
150		P2	P : 25 moins 12, c'est la même chose
151	00:27:26	E17	On ne peut pas trouver la même chose
152		P2	Si
153	00:27:31	E17	On ne peut pas trouver la même chose en faisant 25 moins 12 et 12 moins 25
154		P2	Si, on va trouver la même chose
155	00:27:44	P2	Si, je vais trouver la même chose. Je reviens à 12 moins 25 : je vais trouver moins 13 en valeur absolue, donc là, c'est la même chose que la valeur absolue de 13. Regardez p et q dans la droite, on voit bien que la distance entre p et q est la même que q à p. C'est la longueur de ce segment là. E11 ?

P2 utilise le NAG pour révéler des savoirs cachés autour de l'étude de la valeur absolue d'un nombre et montrer que la valeur absolue est toujours positive.

La notion de valeur absolue occupe une place tout à fait à part dans l'EMS. Elle est introduite très trop, mais de façon brève, bien que répétée jusqu'à la seconde. Cette répétition est peut-être due à l'importance mathématique de cette notion et aux difficultés des élèves sur cette notion, comme nous le montrons dans l'extrait suivant :

Tableau 92: Extrait de la séance-L6

Ligne	Temps	Acteur	Discours
180		P2	Valeur absolue de sept
181		E17	Moins sept
182	00:30:03	P2	Vous êtes tombé dans le panneau. La valeur absolue de moins sept, est-ce que ça fait moins sept ? E33
183		E33	Non, c'est positif
184		P2	La valeur absolue vous m'avez dit tout à l'heure, c'est toujours comment ? Regardez le dessin, les flèches du dessin sont toujours comment ?
185		E17	Positif
186		P2	Donc, ça ne peut pas donner moins sept. Alors, la valeur absolue de sept, c'est quoi ?

La notion de valeur absolue pose encore des problèmes aux élèves, et P2 utilise les interrelations entre les domaines mathématiques pour retravailler cette notion, en montrant, à travers la droite graduée, que la valeur absolue est toujours positive.

L'enseignant, à travers son style, utilise les notions « la distance entre deux nombres » et « la valeur absolue d'un nombre » à la fois pour donner du sens à ces deux notions et pour construire, pendant l'étude de ces deux notions, la technique pour résoudre la tâche principale. En fait, les deux notions étudiées apparaissent comme des outils pour aider les élèves à comprendre la procédure de résolution de la tâche principale. La situation, à laquelle les élèves sont confrontés, implique un traitement de plusieurs

concepts et procédures à la fois. A ce propos, Vergnaud (1981) souligne qu'il n'est pas raisonnable d'étudier séparément l'acquisition de concepts et procédures, et que les situations rencontrées par l'élève sont difficilement dissociables, en impliquant un traitement des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion.

Les analyses présentées montrent combien sont diverses les connaissances permettant le fonctionnement de la séance comme le souhaite P2, par exemple connaissance de la différence entre mesure et longueur pour apprendre la distance, connaissance de la logique de la langue, connaissance des exigences de P2. Ces connaissances sont révélées et exploitées à travers l'utilisation des interrelations entre les domaines mathématiques. Le fonctionnement de la séance devient alors un travail complexe où se mêlent différents savoirs, mais où intervient le rapport personnel de P2 avec les objets étudiés, qui est explicitement en jeu dans cette séance.

18.4.1.7.2 A propos les interactions P2-élèves

Dans cette séance P2 utilise les échanges question/réponse afin de favoriser les prises de conscience des élèves à l'égard des procédures qu'ils utilisent dans les tâches proposées. Ces interactions entre P2 et les élèves engendrent des effets sur l'acquisition des connaissances des élèves.

Étant donné que P2 utilise le NAG de manière implicite, dans cette séance, les échanges question/réponse vont laisser la place plutôt aux « dialogues dans le miroir ». A travers ces dialogues, P2 posait des questions et donnait lui même les réponses. Avec cette stratégie, l'enseignant règle le rythme de la séance pour mieux guider l'institutionnalisation des objets en jeu. On peut constater qu'immédiatement après les « dialogues dans le miroir », les élèves et P2 reprennent le cours questions/réponse sans que ces moments aient trop modifié le déroulement de la séance.

18.4.1.7.3 L'enchaînement de la séance

Dans cette séance, les élèves sont souvent amenés à faire des analogies, des comparaisons, ou « traiter le problème d'une autre manière » pour avancer dans un raisonnement, expliquer ou même donner du sens aux concepts travaillés. Dès l'usage du calcul littéral pour réduire une tâche du domaine numérique à l'utilisation de représentations graphiques à travers les droites graduées pour travailler les concepts de équidistance, distance entre deux nombres et la valeur absolue d'un nombre, sont des exemples de ces pratiques qui nous trouvons dans cette séance.

Nos analyses montrent que donner du sens à des concepts, en utilisant exemples, comparaisons, analogies, n'était pas simple, ni à mettre en place par P2, ni à être compris par les élèves. Comme le souligne Raymond Duval, les objets mathématiques tels que droites, nombres, représentations algébriques, etc. ne sont pas des objets réels ou physiques. Pour les manipuler, les élèves doivent passer par leurs représentations, mentales et sémiotiques. Un travail de vigilance constante est fait par P2 en utilisant les interrelations entre les domaines mathématiques, pendant le déroulement de la séance, pour tenir un enchaînement cohérent entre les différentes phases de la séance et arriver aux objectifs attendus :

Tableau 93: Extrait de la séance-L6

Ligne	Temps	Acteur	Discours
323	00:39:12	P2	Alors, maintenant, on revient à mon exemple et puis on poursuivra toujours la notion de valeur absolue. On va voir ce qu'on fait, on réfléchit bien déjà à la définition qu'on a donnée de la notation scientifique. C'est un moyen de donner une définition de la notion de la valeur absolue

P2 arrive assez facilement à tenir cet enchaînement pour faire passer les différentes phases qui composent cette séance en utilisant le **NAG** pour promouvoir **inscrire** la tâche principale dans différents registres comme nous le montrons dans le tableau 38. L'extrait ci-dessus justifie de cette affirmation.

18.4.1.7.4 Les changements de registres

La tâche principale travaillée dans cette séance, est annoncée comme appartenant au cadre numérique, mais le travail observé s'inscrit dans différents registres. Ce travail utilise au moins trois registres de représentations sémiotiques, qui vont être introduites dans la séance à partir du travail de la technique pour résoudre la tâche principale. La résolution de cette tâche n'était pas un mécanisme simple, elle a fait intervenir à la fois des connaissances liées à des situations spécifiques et à des règles générales susceptibles d'être appliquées à de larges catégories de problèmes.

Les élèves qui ont participé à cette séance ont élaboré un schéma contextualisé de résolution de la tâche, nous pouvons trouver témoignage de ce que nous venons d'énoncer, en observant le transfert spontané d'une solution à un nouveau problème, donné par une élève à la ligne 362 de notre protocole.

Selon Duval, comprendre un objet mathématique, c'est la capacité de le reconnaître dans des registres différents. La conversion d'une représentation sémiotique à une autre peut ainsi être l'occasion d'apprentissage. La difficulté vient de la coordination des registres avec laquelle on détermine les conditions de réussite dans la conversion entre les différents registres sémiotiques.

On voit que le **NAG** joue aussi un rôle important dans la coordination des changements de registre, car dans cette séance pour comprendre l'enjeu des objets mathématiques eux-mêmes et pas seulement leur représentation, les élèves doivent maîtriser un même objet mathématique dans plusieurs registres de représentation sémiotique et ceux-ci doivent se coordonner.

PARTIE

E

ANALYSE DES ENTRETIENS

CHAPITRE E1 : OUTILS D'ANALYSE

19 Les outils

Dans ce chapitre nous présentons les outils qui nous aideront à analyser les entretiens avec des enseignants concernant cette recherche. En fait, nos outils ont été construits essentiellement à partir des données repérées pendant cette recherche.

19.1 Séance préparée à notre demande.

Pour compléter l'étude des rapports personnels des enseignants, après les analyses des séances observées, nous avons mené deux types d'entretiens avec eux : un entretien sur le **NAG** et un échange spécifique. Dans le cadre de l'échange spécifique, nous avons posé aux enseignants des questions concernant les séances observées

Avec l'échange spécifique, notre intention était d'éclaircir nos doutes par rapport aux questions-réponses que nous n'avions pas comprises pendant nos observations, nous n'avons pas eu besoin de construire un guide pour mener cet échange. Par contre, en ce qui concerne l'entretien sur le **NAG**, nous en avons conçu un.

19.1.1 L'entretien sur le NAG

Dans cette partie, nous abordons les deux axes de la conception de l'entretien sur le **NAG**. Le premier axe traite du « contenu » ; suivant cet axe, nous aborderons la nature, les raisons d'être et le contenu de chaque question qui apparaîtra dans l'entretien. Le deuxième traite de la « manière de réaliser » ; suivant cet axe, nous verrons les méthodologies que nous utiliserons dans la conception de nos entretiens. En fait, chaque axe donne naissance à des sections que nous aborderons dans les paragraphes suivants. Nous allons d'abord étudier la méthodologie utilisée dans les interviews, évoquer ensuite la méthodologie de conduite de ces interviews, puis la conception du « guide d'entretien », pour arriver aux questions de ce guide, et enfin pour finaliser nous présenterons l'analyse - à priori - de l'entretien.

19.1.1.1 La méthodologie utilisée dans les entretiens

Afin de mieux cerner les rapports des enseignants de mathématiques aux objets en jeu dans notre travail, nous avons mené des entretiens à l'aide d'une technique d'entretiens spécifiques basée sur l'approche de Vermersch :

" C'est un ensemble de pratiques d'écoute basées sur des grilles de repérage de ce qui est dit et de techniques de formulations de relances (questions, reformulations, silences) qui visent à aider, à accompagner la mise en mots d'un domaine particulier de l'expérience, en relation avec des buts personnels et institutionnels divers " (Vermersch, P., 2003, p.17).

En nous appuyant d'une part, sur les données recueillies pendant nos observations en classe et sur les techniques développées par Vermersch d'autre part, nous visons, avec ces entretiens, à recueillir des informations concernant les thèmes suivants :

Informations générales ;

Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue des programmes ;

Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue des manuels ;

Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue de sa pratique ;

Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue de l'élève ;

Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue épistémologique.

Partant de ces thèmes, nous avons organisé chaque entretien en le subdivisant en six thèmes. Chaque thème porte sur des questions se référant à un sujet précis. Ces questions constituent un guide lors des entretiens.

19.1.1.2 La méthodologie de conduite des interviews

L'interviewer joue un rôle fondamental dans la méthodologie de recueil de données lors de l'entretien. Quatre axes nous permettent de décrire la tâche du chercheur qui devra mener ces interviews : la préparation, les entretiens (recueil des données), la transcription des données et leur analyse.

Parmi les différents outils méthodologiques dont nous disposons pour mener une interview et ainsi tenter de répondre au questionnement, nous avons choisi d'utiliser les entretiens semi-ouverts de recherche, voire ouverts à certains moments. Ils nous fourniront des discours qui pourront compléter les informations apportées par nos observations et par les éléments repérés pendant celles-ci :

« [...] il y a nécessité d'un travail d'explicitation simplement parce que, quand nous agissons, une part cruciale des savoirs pratiques utilisés le sont de manière tacite, implicite. Ce caractère implicite n'est d'ailleurs pas un défaut qu'il serait souhaitable d'éviter. Il est inévitable parce qu'inhérent au fonctionnement intellectuel : par construction, dans nos interactions avec la réalité, donc dans la réalisation des tâches, nous fabriquons continuellement ce type de savoirs implicites par le seul fait d'agir. Le caractère crucial de ces savoirs implicites tient précisément à ce qu'ils sont développés à partir de l'expérience. Ils sont de ce fait nécessairement pertinents pour la compréhension de ce qui fait l'efficacité d'une action. Ils sont ce qui fait qu'un professionnel est particulièrement performant ou encore qu'il rencontre, sans comprendre pourquoi, des difficultés ou des limitations. » (Vermersch, 2003).

De plus, la possibilité de permettre une évolution des questions sans que l'enseignant puisse le percevoir - a priori-, la possibilité d'une adaptation et d'une reprise des réponses fournies par l'interviewé, sont les principaux motifs qui nous ont conduit à choisir la forme de l'entretien oral : l'interview semi-ouvert.

Nous n'allons pas traiter de façon théorique les principes méthodologiques généraux de l'entretien semi-ouvert, nous décrirons seulement son déroulement. Ceux-ci nécessitent la construction d'une méthodologie capable de nous aider à répondre à nos questions de recherche, en prenant en compte les observations et les éléments rassemblés. C'est pour cette raison que nous nous appuyons, en particulier, sur les techniques développées par Vermersch pour construire la méthodologie avec laquelle nous mènerons chaque entretien. Notre objectif vise l'explicitation, la

description et l'analyse de la pratique de l'enseignant relative au **NAG**, telles qu'elles ont été effectivement mises en œuvre lors des séances observées, dans une tâche réelle. Vermersch, considère que ce déroulement d'actions « est la seule source d'inférences fiables pour mettre en évidence les raisonnements effectivement mis en œuvre, pour identifier les buts réellement poursuivis, pour repérer les savoirs théoriques effectivement utilisés dans la pratique, pour cerner les représentations ou les préconceptions sources de difficultés. » (Vermersch, 2003)

Nous avons demandé aux enseignants leurs disponibilités pour participer à deux entretiens, l'entretien général et l'entretien spécifique devant faire l'objet d'un enregistrement, d'une retranscription et d'une analyse. En fait, nous avons choisi de faire deux entretiens avec chaque enseignant en France. Un premier entretien avec des questions générales nous permettra, entre autres, de comparer les enseignants et de cerner leurs rapports au **NAG**. Un deuxième entretien, avec des questions spécifiques à chaque enseignant, nous permettra de revenir sur les observables et les traces pour compléter notre recueil de données concernant les rapports des enseignants au **NAG**. Nous avons conduit des entretiens de deux heures au maximum avec chacun des deux enseignants. À travers l'interview semi-ouvert, nous avons mené le premier et le deuxième entretien avec un enseignant de troisième et un enseignant de seconde de l'EMS en France, pour essayer de comparer les réponses des enseignants.

Il pourra y avoir des allers-retours entre des questions appartenant à un même thème et à des thèmes différents. C'est précisément pour cette raison que nous choisissons un ordre bien précis pour présenter les thèmes et les questions correspondantes relatives chaque thème. Nous présentons cette organisation dans la suite de ce chapitre.

Chaque entretien réalisé s'est déroulé en interrogeant la pratique de l'enseignant et en prenant en compte les observations et les traces recueillies. En bref, cet entretien a été conçu et orienté vers des questions ciblées sur le **NAG** et sur les pratiques des enseignants par rapport au **NAG**.

Pour commencer, nous expliquons à l'enseignant la raison de l'entretien, sans rester dans le flou par rapport à notre objet de recherche. Il nous semble important de rappeler que, jusqu'à présent, nous le lui avons caché.

Pendant les entretiens, nous avons prêté attention au ton de ceux-ci, car un ton trop léger peut banaliser les réponses et les questions, alors qu'un ton dramatique ou autoritaire peut inhiber la personne. En fait, nous avons essayé de tenir compte de la manière dont l'enseignant a répondu aux questions, au type de réponse donnée, à son intérêt par rapport à un type de question, au ton de la réponse, au désagrément qu'une question pouvait lui causer pendant le déroulement de l'entretien. Nous avons évité d'induire les réponses et avons accepté l'absence de réponses et les silences.

Les entretiens semi-ouverts de recherche mettent en " scène " deux personnes. L'entretien est alors essentiellement défini comme un processus " interactionnel" : Les interactions concernent aussi bien la production du discours (interactions verbales et non verbales), que les relations entre les deux protagonistes et amènent à définir ce que Blanchet (2004) appelle un " contrat de communication". Ainsi, pour éviter que l'interviewé ne soit tenté de renverser la situation (qu'en pensez-vous ? Ce que je dis vous convient-il? ...) ou qu'il ne cerne pas le contrat, notre attitude d'intervieweur doit être claire et se résumer à une action d'entretien permettant à l'interviewé de s'exprimer librement dans un cadre fixé par l'action d'entretien et permettant l'auto - exploration.

Nous avons consulté les enseignants au préalable pour que les conditions matérielles puissent être soignées (choix des lieux, des horaires, du confort, etc.) et pour mettre l'enseignant en confiance.

Hormis quelques notes avant ou après l'entretien, nous sommes restés disponibles intellectuellement pour effectuer les relances et suivre notre guide d'entretien. Enfin, certains enseignants ont exigé une règle de confidentialité, selon laquelle l'intervieweur s'engage à ne citer que des extraits de discours et à ne pas citer les interviewés.

La construction de notre guide d'entretien est l'autre tâche avant l'action d'entretien proprement dite. Nous avons élaboré une liste de questions à poser aux enseignants en prenant en compte les objectifs de la recherche, les observables et les traces en lien avec les éléments qui participent des OM et OD construits en classe. Nous avons dévoilé aux enseignants notre objet de recherche, à l'occasion des entretiens. De ce fait, la présentation des thèmes est importante. Nous avons donc prévu de présenter, en quelques mots, chaque thème avant de poser l'ensemble des questions qui constituent ce thème et qui guident nos interviews.

19.1.1.3 Conception du guide d'entretien

Le guide d'entretien est un recensement des thèmes et sous - thèmes constitués par les sujets que l'on souhaite voir aborder par les personnes interviewées. Il peut se définir comme un plan thématique de plusieurs questions.

Cette liste de questions organisées par thèmes et sous - thèmes, n'est pas connue des interviewés. Elle doit servir de guide, de pense-bête à l'intervieweur. Le principe général est que l'intervieweur structure seul l'entretien, à la différence de l'interviewé qui ne doit pas être gêné par une structure, mais laisser libre cours à son discours exploratoire.

Concernant la structure de notre guide et les questions qui le composent, nous avons choisi de les organiser par thèmes pour que nous puissions rendre, de la manière la plus évidente possible, les différences entre chaque thème et chaque question. Nous avons pris en compte le rôle que l'ordre - dans lequel les thèmes seront menés- peut jouer dans le déroulement des entretiens. Pour cette raison, dans notre guide, nous présentons tout d'abord les questions (concernant les " Informations générales " sur l'enseignant) qui composent le thème 1. Les questions concernant le "rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue des programmes " sont regroupées dans le thème 2. Dans le thème 3, nous rassemblons les questions concernant le " rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue des manuels. », et dans le thème 4, nous réunissons les questions qui traitent du "rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue épistémologique." Les questions sur le "rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue de sa pratique" composent le thème 5, et pour finir nous rassemblons dans le thème 6, les questions concernant le " rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue de l'élève." Nous avons choisi cette structure , car nous ne voulions pas qu'une question posée à un moment donné puisse trop influencer les réponses aux autres questions posées ultérieurement.

19.1.1.3.1 Contenu du guide d'entretien

Les informations que nous cherchons et les questions que nous nous posons, ont construit notre guide d'entretien réparti en six thèmes :

Informations générales ;

Combien d'années d'enseignement avez-vous ? Pendant cette période, dans quels établissements et dans quelles classes avez-vous enseigné ?

Rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue des programmes ;

Comment pensez-vous que le **NAG** est abordé dans les programmes officiels et dans les manuels ?

Rapport de l'enseignant au NAG du point de vue des manuels ;

Est-ce que le(s) manuel(s) que vous utilisez pour préparer vos cours, fait (ou font) référence au **NAG** ? Si oui, dans quelles parties (chapitre, thème, problème, etc.) ? Sous quelle forme ?

Rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue de l'élève ;

Comment peut-on caractériser les principales difficultés rencontrées par les collégiens et les lycéens, pour travailler dans le cadre du **NAG** ? Peuvent-elles s'expliquer par des lacunes dans les connaissances antérieures ?

Rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue de sa pratique ;

Utilisez-vous le **NAG** dans vos pratiques ?

Comment utilisez-vous le **NAG** ? Comment faites-vous travailler les élèves dans le cadre du **NAG** ?

Quelles OD appliquez-vous ?

Quel rôle joue le **NAG** dans le processus d'enseignement et d'apprentissage à l'EMS ?

Comment utilisez-vous le **NAG** et de quelle façon vous en servez-vous ?

Sur quels facteurs vous basez-vous pour faire vos séances ?

Quelles activités mettez-vous en place ?

Y a-t-il des situations en mathématiques qui ne peuvent trouver de sens que dans le cadre du **NAG** ?

Quel est le degré d'interdépendance des objets mathématiques à l'EMS par rapport au **NAG** ?

Rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue épistémologique ;

Comment peut-on caractériser le **NAG** dans le processus d'enseignement et d'apprentissage à l'EMS ?

Quelles sont les principales difficultés rencontrées par les enseignants de mathématiques pour mettre en place le **NAG** à l'EMS ?

Quelques-unes des questions apparaissant ci-dessus ont déjà été présentées dans notre problématique et les autres ont leur origine dans les observations et les éléments recueillis dans les classes.

19.1.1.3.2 Les questions générales du guide

Le texte global des thèmes et des questions qui ont servi de guide pour chacun des entretiens est présenté davantage dans les paragraphes suivants. Ce questionnaire vise à capter très largement tout ce que l'enseignant exprime spontanément sur notre sujet. L'entretien a donc été construit pour cerner à travers les différents thèmes décrits ci-dessous, les rapports des enseignants (P1, P2) au **NAG**.

19.1.1.3.3 Thème 1 : Informations générales

Dans cette partie, les questions qui nous ont guidé concernent l'identification de l'enseignant relative à son ancienneté, l'établissement qu'il fréquente et les classes dans lesquelles il enseigne. Ces indicateurs permettent de repérer certains facteurs qui peuvent avoir une influence sur les conceptions et les pratiques d'un enseignant. Ils permettent en particulier de savoir à quelles institutions il a été assujéti par le passé en tant que professeur. Dans cette partie, les questions ouvertes servent aussi à repérer les mots spontanés prononcés par l'enseignant, pour les reprendre dans la suite de l'entretien. Aussi, dans ce thème, nous allons dévoiler pour la première fois notre objet de recherche à l'enseignant. Nous présentons ensuite les principales questions qui composent le thème :

Q₀ : Je vous suis très reconnaissant de bien vouloir consacrer un peu de votre temps à cette interview. N'hésitez pas à ajouter tout commentaire qui vous semblerait pertinent pour compléter vos réponses.

Q₁ : Êtes vous toujours d'accord pour cette interview pendant laquelle je vous poserai des questions sur les interrelations entre les domaines mathématiques (le numérique - algébrique et le géométrique) dans le cadre d'un travail de thèse ?

Q₂ : Combien d'années d'enseignement avez-vous ? Pendant cette période, dans quels établissements et dans quelles classes avez-vous enseigné ?

19.1.1.3.4 Thème 2 : Rapport de l'enseignant au NAG concernant le programme

Les mathématiques constituent une discipline qui procède par accumulation. Il est très important de maîtriser les outils, les savoirs et les savoir-faire qui correspondent à un niveau donné avant de passer au niveau suivant dans le processus d'apprentissage de ces disciplines. C'est ce qui rend crucial l'apprentissage des mathématiques à tous les niveaux. Chaque niveau est indispensable à la progression globale. Si un élève manque des étapes dans son processus d'apprentissage, il est fort probable qu'il aura des difficultés pour suivre les niveaux suivants.

La transposition didactique ne s'achève pas avec la rédaction des programmes. Elle s'opère tout autant dans l'interprétation de textes faits par les enseignants et dans la façon dont ils conçoivent et créent des situations d'enseignement et d'apprentissage.

Au-delà des programmes, le rapport personnel de l'enseignant au programme constitue un des éléments décisifs dans les pratiques professionnelles des enseignants :

la perception et la compréhension des contenus et des finalités de l'enseignement ;

la représentation et la mise en œuvre de textes ;

l'interprétation des commentaires des programmes et l'adhésion à des méthodes.

Le rapport personnel de l'enseignant au **NAG** en relation avec les programmes produit donc un message fort sur les armatures de la discipline, autant que sur la façon de la concrétiser au jour le jour, c'est-à-dire, la pratique.

Ce thème rassemble les questions que nous présentons ci-dessous et qui visent à obtenir des renseignements sur le rapport personnel de l'enseignant au **NAG** du point de vue des programmes. Nous cherchons à savoir à travers ces questions quel est le rapport institutionnel de l'enseignant au **NAG** et quels sont les éléments que l'enseignant repère dans les programmes par rapport au **NAG**. Les questions de ce thème sont relatives à la perception de ce que pense l'enseignant du point de vue du programme en relation avec le **NAG**. Nous ne cherchons pas forcément la conception de celui-ci par rapport au **NAG**, mais ce qu'il perçoit dans les programmes. Est-ce

que, dans les programmes, il perçoit des éléments qui parlent, des rôles réciproques, des liens, des interrelations entre les domaines numérique – algébrique et géométrique ?

Q₃ : Quel degré de connaissance avez-vous du programme de mathématiques de la classe que vous enseignez ? Et quelle importance donnez-vous à ce programme ?

Q₄ : Par rapport à ce programme, dans quelles parties, selon vous, se trouvent les concepts mathématiques qui sont les plus en rapport avec notre sujet ? Classez-les par ordre de priorité SVP.

Q₅ : Est-ce que le programme fait référence au **NAG** ? Et dans l'hypothèse affirmative, sous quelle forme ?

En fait, si le programme est une chose, son application en est une autre. Dans sa formulation, il laisse libre court à la liberté pédagogique pour sa mise en œuvre. C'est dans ce sens qu'il faut situer et interroger les manuels.

19.1.1.3.5 Thème 3 : Rapport de l'enseignant au NAG du point de vue des manuels

La rédaction des manuels est soumise à des enjeux divers en fonction des rôles qu'ils jouent. La fonction première du manuel est celle de passeur de programme : il propose une interprétation du programme. Le manuel peut également revêtir un rôle d'outil d'actualisation des connaissances, des problématiques et des questions au programme. Il fournit une aide aux enseignants pour aborder toutes les questions et prendre connaissance des résultats les plus récents de la recherche. Par conséquent, il convient sans doute de s'interroger sur le rapport de l'enseignant au manuel concernant le **NAG**.

Parler du rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue des manuels dans la transmission du savoir scolaire, implique de s'interroger sur plusieurs points :

- d'abord, sur les programmes enseignés pour en saisir les évolutions récentes,
- ensuite, sur la « fabrique » d'une culture scolaire par les manuels,
- enfin, sur ce que ces manuels représentent dans la pratique de l'enseignant et sur le rapport personnel de l'enseignant au **NAG** du point de vue du manuel : quelle est l'importance de ce rapport ? Quel est son usage ?

Dans cette perspective, à travers les questions qui apparaissent ci-dessous, nous aborderons le thème 2, et plus précisément l'utilisation des manuels en classe et hors de la classe par rapport au **NAG**.

Q₆ : Utilisez-vous couramment des manuels pour préparer votre cours et choisir vos exercices ? Pouvez-vous me dire lesquels ? Y a-t-il d'autres manuels que vous utilisez de façon personnelle ? Pouvez-vous me dire lesquels ?

Q₇ : La classe dans laquelle vous enseignez a-t-elle un manuel que vous utilisez avec ces élèves ? Pouvez-vous me dire comment vous utilisez ce manuel ?

Q₈ : Le(s) manuel(s) que vous utilisez pour préparer vos cours fait-il (ou font-ils) référence au **NAG** ? Dans l'affirmative, dans quelles parties (chapitre, thème, problème, etc.) ? Et sous quelles formes ?

Q₉ : Le(s) manuel(s) qui vous utilisez avec les élèves fait-il (ou font-ils) référence au **NAG** ? Dans l'affirmative, dans quelles parties (chapitre, thème, problème, etc.) ? Sous quelles formes ?

Q₁₀ : Par rapport à ce(s) manuel(s), dans quelles parties, selon vous, se trouvent les concepts mathématiques les plus en rapport avec notre sujet ? Classez-les par ordre de priorité SVP.

19.1.1.3.6 Thème 4 : Rapport de l'enseignant au NAG du point de vue de l'élève

Les questions qui composent ce thème visent à permettre d'obtenir des renseignements sur le rapport au **NAG** du point de vue de l'apprentissage. Nous pensons en tirer des informations sur tout ce qui concerne les difficultés des élèves et des connaissances qu'ils doivent avoir par rapport au **NAG**. Y a-t-il des pré-requis sur le **NAG** et des obstacles rencontrés par les élèves ? Les élèves doivent-ils avoir un certain nombre de connaissances par rapport au **NAG**, au début du collège, au début du lycée, etc. ?

Q₁₁ : Vos élèves vous posent-ils des questions auxquelles vous ne pouvez répondre qu'en faisant appel aux rôles réciproques des domaines mathématiques, autrement dit, qu'en connaissant le **NAG** pour pouvoir évoquer les rôles réciproques du numérique - algébrique et du géométrique pour répondre ?

Q₁₂ : Pensez-vous que vos élèves ont des connaissances mathématiques suffisantes et /ou adéquates pour comprendre l'usage que vous faites du **NAG** en classe ?

Q₁₃ : Donneriez-vous ces tâches à vos élèves ? Pour quelle raison ? (Éventuellement indiquez les modifications que vous apporteriez.)

Q₁₄ : Quelles difficultés prévoyez-vous que rencontreront vos élèves dans la résolution de ces questions ?

Q₁₅ : Quels sont les apprentissages essentiels que vous avez voulu construire à partir de ces tâches ?

19.1.1.3.7 Thème 5 : Rapport de l'enseignant au NAG du point de vue de sa pratique

Ce thème est composé des questions et d'une demande d'exercice de mathématiques qui sera faite à l'enseignant pour interroger sa pratique.

Lorsque nous proposons d'interroger le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue de sa pratique, il est important de clarifier le concept de pratique, tel que nous l'utilisons. Notons tout d'abord qu'il importe d'identifier ce qui compose cette pratique d'enseignement :

Les savoirs de la pratique sont issus de l'activité enseignante elle-même ;

Les savoirs pour la pratique sont le résultat d'une finalisation des savoirs sur la pratique dans lesquels figurent les éléments constitutifs des programmes de formation.

La pratique dans ce contexte est considérée non seulement, comme ce qui se passe dans la classe, mais aussi comme la préparation des cours, la gestion de la classe par l'enseignant, les choix du contenu des cours, etc. Autrement dit, c'est la conception la plus générale du métier d'enseignant dans laquelle on prend en compte toutes les formes d'orchestrations, de découvertes, d'apprentissages, de préparations utilisées par l'enseignant.

Les questions présentées ci-dessous traitent du « savoir enseigner » en mathématiques, plus précisément le savoir enseigner dans le cadre du **NAG** et de la mise en œuvre de celui-ci. Dans cette même partie, nous avons demandé à l'enseignant de proposer et de résoudre deux exercices - un dans le cadre numérique - algébrique et un autre dans le cadre géométrique - mettant en œuvre l'utilisation du **NAG**.

Q₁₆ : Faites-vous référence au **NAG** dans votre cours de mathématiques ? Dans l'affirmative, sous quelle forme ? Dans la négative, pour quelle raison ?

Q₁₇ : Pendant la préparation de vos cours, dans le choix des chapitres devant être étudiés en classe, pensez-vous à des interrelations possibles entre les domaines mathématiques pouvant aider à la compréhension des sujets à étudier ?

Q₁₈ : Faites-vous explicitement référence en cours à l'existence ou non, des interrelations possibles pouvant exister entre les sujets et les domaines en cours d'étude ?

Q₁₉ : Utilisez-vous le **NAG** dans vos pratiques en classe ? Est-ce que la prise en compte du **NAG**, en tant qu'outil didactique dans vos pratiques est capable de mobiliser les rôles réciproques des domaines mathématiques. ?

Q₂₀ : Est-ce que vous pouvez proposer et résoudre une tâche dans un cadre numérique - algébrique mettant en œuvre et en évidence l'utilisation du **NAG** pour pouvoir la résoudre ? Est-ce que vous pouvez proposer et résoudre une tâche dans un cadre géométrique mettant en œuvre et en évidence l'utilisation du **NAG** pour pouvoir la résoudre ? Si vous deviez faire des cours ou des activités en utilisant le **NAG**, ou même si vous en faisiez déjà, pourriez vous citer des activités qui vous semblent cohérentes avec celui-ci ?

Q₂₁ : On est presque à la fin de l'année scolaire : est-ce qu'entre aujourd'hui et votre dernier cours prévu, vous pouvez me dire le jour où je pourrai aller vous observer et filmer à propos du sujet qui m'intéresse : le **NAG**.

19.1.1.3.8 Thème 6 : Rapport de l'enseignant au NAG du point de vue épistémologique

Dans ce thème, les questions qui nous ont guidé concernent l'identification des liens entre les domaines mathématiques que voient les enseignants. Présenté d'une façon différente, quel est le rapport personnel de l'enseignant au **NAG** du point de vue épistémologique et de la connaissance mathématique de l'enseignant. ? De ce point de vue, nous pouvons trouver des informations qui n'ont rien à voir avec les élèves, car nous sommes dans le domaine épistémologique. Par exemple dans ce domaine, l'enseignant peut considérer que les seules façons d'utiliser le **NAG** sont celles des théorèmes de Pythagore et de Thalès. Donc les questions qui apparaissent ci-dessous permettront de repérer quels liens voient les enseignants entre les domaines mathématiques. Elles visent aussi à récolter des indices sur les connaissances des professeurs à propos du **NAG**. L'utilisation du **NAG** se limite-t-elle à des exemples classiques ?

Q₂₂ : Du point de vue mathématique, en général, indépendamment de votre enseignement, qu'est-ce qui vous semble important dans les interrelations entre les domaines mathématiques, et plus précisément le **NAG** ?

Q₂₃ : Parmi les aspects que vous trouvez importants, quels sont ceux qu'il vous semble importants de travailler dans la classe ?

Q₂₄ : Et au niveau des mathématiques elles-mêmes, des mathématiciens, quelles sont pour vous les difficultés rencontrées pour établir le **NAG** ?

Q₂₅ : Au niveau de vos études, en tant que mathématicien, avez-vous rencontré des difficultés dans le cadre du **NAG** ? Si oui, pouvez-vous me donner quelques exemples ?

Q₂₆ : Maintenant que nous avons parlé du **NAG** sur le point de vue des programmes, des manuels, de l'épistémologie, de votre pratique et sur le point de vue des élèves, voulez-vous revenir sur quelques thèmes ? Avez-vous des informations particulières à ajouter par rapport aux thèmes que nous avons abordés ?

Nous venons de présenter l'ensemble des thèmes et des questions qui composent notre guide d'entretiens. Nous essayerons de tenir l'ordre des thèmes et des questions, pendant nos entretiens.

19.1.1.4 L'analyse - a priori - de l'entretien sur le NAG

Nous présentons dans le tableau ci-dessous - le guide d'entretien - l'ensemble des questions organisé selon l'ordre dans lesquelles elles seront posées aux enseignants. Il s'agit d'une analyse - a priori - à travers le tableau où chaque question, associée à un commentaire, apparaît placée dans un des six thèmes proposés précédemment. Les commentaires accompagnant chaque question précisent les raisons du choix et de la formulation de celle-ci. Une fois les thèmes exposés, nous avons placé les questions, à partir de ces derniers, de façon qu'au niveau du guide et au niveau de l'enseignant interviewé, il soit possible de savoir dans quelle partie de l'entretien nous nous trouvons, au moment de chaque question. Pendant l'entretien nous explicitons verbalement où nous en sommes à chaque changement de thème. Il faut que l'enseignant puisse comprendre où l'intervieweur veut en venir exactement.

Ces questions nous ont guidé dans les entretiens, mais elles ne sont pas la seule source, car dans l'entretien semi-ouvert, des questions intermédiaires ont été posées pour recueillir des informations complémentaires à partir des réponses données par l'interviewé.

Voici le tableau avec l'ensemble des thèmes accompagnés de leurs questions respectives associées à des commentaires :

Tableau 94 : Analyse -a priori - du guide d'entretien.

Question		Raison du choix de la question
1	Je vous suis très reconnaissant de bien vouloir consacrer un peu de votre temps à cette interview. N'hésitez pas à ajouter tout commentaire qui vous semblerait pertinent pour compléter vos réponses. Êtes-vous toujours d'accord pour cette interview pendant laquelle je vous poserai des questions sur les interrelations entre les domaines mathématiques (le numérique - algébrique et le géométrique), dans le cadre d'un travail de thèse ?	Cette introduction ne correspond pas à une question. Elle sert de présentation générale de départ amenant une introduction avant d'aborder les questions centrales. Avec cette question, nous avons l'intention de dévoiler pour la première fois notre objet de recherche à l'enseignant. Et conformément au protocole d'interview élaboré par Vermesch, nous demandons explicitement l'accord de l'enseignant pour participer à l'interview.
2	Combien d'années d'enseignement avez-vous ? Pendant cette période, dans quels établissements et dans quelles classes, avez-vous enseigné ?	Cette question nous permettra de repérer des facteurs qui peuvent avoir une influence sur les conceptions et les pratiques d'un enseignant : nombre d'années d'enseignement, classes tenues, établissements, etc.
Introduction du thème 2 : Maintenant, nous allons nous occuper des programmes. Et nous allons interroger les programmes, justement du point de vue de mon sujet : les interrelations entre les domaines numérique - algébrique et géométrique.		
3	Quel degré de connaissance avez-vous du programme de mathématiques de la classe dans laquelle vous enseignez ? Et quelle importance donnez-vous à ce programme ?	Cette question nous permettra de mieux appréhender le rapport personnel de l'enseignant aux savoirs à enseigner. Les explications éventuelles formulées par l'enseignant à l'item " importance ", nous conduiront à confirmer ou infirmer des hypothèses de recherche et aussi des hypothèses apparues à partir des observables et traces recueillies.
4	Par rapport à ce programme, quelles sont les parties dans lesquelles, selon vous, se trouvent	Cette question est destinée à mettre en évidence l'importance que l'enseignant accorde à certaines parties du programme, à certains concepts mathématiques par rapport à d'autres qui

	les concepts mathématiques qui sont les plus en rapport avec notre sujet ? Classez-les par ordre de priorité SVP.	apparaissent dans le programme.
5	Est-ce que le programme fait référence au NAG ? Si oui sous quelle forme ?	Ces questions nous orienteront vers les contraintes et les choix, faits par l'enseignant par rapport aux programmes. Pour ces questions, on s'attend à ce que l'enseignant de mathématiques rencontre des difficultés pour trouver des références au NAG dans le programme de mathématiques, soit même sous forme de rappels.
Introduction du thème 3 : Maintenant nous allons parler des manuels, et dans les manuels scolaires je vous interrogerai selon votre point de vue justement par rapport au NAG.		
6	Utilisez-vous couramment des manuels pour préparer vos cours et choisir vos exercices ? Est-ce que vous pouvez me dire lesquels ?	Cette question nous aidera à déterminer le(s) manuels utilisé(s) par l'enseignant. C'est donc l'occasion de voir à partir de quelles sources, il construit un cours et choisit des exercices qu'il estime être en accord avec le programme.
7	Par rapport à ce(s) manuel(s), quelles sont les parties dans lesquelles, selon vous, se trouvent les concepts mathématiques les plus en rapport avec notre sujet ? Classez-les par ordre de priorité SVP.	Cette question est destinée à mettre en évidence l'importance que l'enseignant accorde à certaines parties du manuel et à certains concepts mathématiques par rapport à d'autres qui apparaissent dans le manuel.
8	Est-ce que le manuel fait référence au NAG ? Si oui, sous quelle forme ?	Ces questions nous orienteront vers les contraintes, et les choix faits par l'enseignant par rapport aux manuel(s) de mathématiques.
Introduction du thème 4 : Maintenant nous allons parler du NAG au point de vue des élèves, donc je vous interrogerai selon votre point de vue à propos de l'utilisation du NAG par les élèves.		
9	Vos élèves vous posent-ils des questions auxquelles vous ne pouvez répondre qu'en faisant appel aux rôles réciproques des domaines mathématiques. Autrement dit, qu'en connaissant le NAG pour pouvoir évoquer les rôles réciproques du <i>numérique - algébrique</i> et du <i>géométrique</i> pour répondre ?	Cette question est très liée à la question précédente. Les élèves rencontrent toujours des tâches qui demandent des changements de registre ou de cadre pour pouvoir les comprendre et les résoudre. Donc, l'aide de l'enseignant constitue un véritable appui pour que les élèves réussissent dans leurs tâches.
10	Pensez-vous que vos élèves ont des connaissances mathématiques suffisantes et /ou adéquates pour comprendre l'usage que vous faites du NAG en classe ?	A partir de cette question, il faut s'attendre à ce que l'enseignant évoque les difficultés que les élèves ont à transférer des connaissances mathématiques d'un domaine à un autre. Nous faisons l'hypothèse que l'enseignant pensera que ce transfert va de soi et qu'il doit être à la charge des élèves.
11	Est-ce que vous pouvez proposer et résoudre une tâche dans un cadre numérique - algébrique mettant en œuvre et en évidence l'utilisation du NAG pour pouvoir la résoudre ?	S'agit-il d'une évocation explicite ou bien, s'agit-il d'une véritable mise en scène du NAG par la sollicitation des connaissances mathématiques de l'enseignant sur le NAG
12	Est-ce que vous pouvez proposer et résoudre une tâche dans un cadre <i>géométrique</i> mettant en œuvre et en évidence, l'utilisation du NAG pour pouvoir la	Cette question est une continuation de la question 16. S'agit-il d'une évocation explicite ou bien, s'agit-il d'une véritable mise en scène du NAG par la sollicitation des connaissances mathématiques de l'enseignant sur le NAG .

	résoudre ?	
13	Donneriez-vous ces tâches à vos élèves ? Pourquoi ? (Éventuellement indiquez les modifications que vous apporteriez.)	On fait l'hypothèse que l'enseignant estimera nécessaire de donner cet exercice afin de vérifier si les élèves arrivent à reconnaître le NAG et à travailler avec celui-ci.
14	Quelles difficultés prévoyez-vous, que rencontreront vos élèves dans la résolution de ces questions ?	L'enseignant ne manquera pas de relever pour ses élèves des difficultés liées aux questions suivantes : - <i>Comment peut-on caractériser les principales difficultés rencontrées pour les collégiens et lycéens pour passer du domaine numérique - algébrique au domaine géométrique et vice-versa ? Peuvent-elles s'expliquer par le manque de connaissances antérieures sur les liens existant entre numérique - algébrique et le géométrique ?</i> - <i>Les difficultés sont-elles essentiellement d'origine épistémologique ou sont-elles spécifiques aux institutions dans lesquelles on les rencontre ?</i> - <i>Est-ce qu'il y a un domaine de validité dans les mathématiques ou dehors, où on pourrait mettre en œuvre le rôle réciproque du numérique - algébrique et du géométrique ?</i> Il sera donc intéressant de voir également comment l'enseignant jugera les difficultés.
15	Quels sont les apprentissages essentiels que vous avez voulu construire à partir de ces tâches ?	Cette question vise à savoir si le NAG existe dans les apprentissages que l'enseignant considère essentiels.
16	On est presque à la fin de l'année scolaire, est-ce qu'entre aujourd'hui et votre dernier cours prévu, vous pouvez me dire, le jour où je pourrai aller vous observer et filmer sur le sujet qui m'intéresse : le NAG ?	L'objectif de cette question est de demander l'autorisation de l'enseignant pour filmer un de ses cours et aussi de voir s'il y aurait des changements dans la posture didactique de l'enseignement après que nous aurions dévoilé notre objet d'étude.
Introduction du thème 5 : Maintenant nous allons parler du NAG, dans vos façons de faire vos cours, de préparer vos activités, de gérer la classe. Donc, je vous interrogerai à propos de votre pratique en relation avec le NAG.		
17	Faites-vous référence au NAG dans votre cours ? Si oui, sous quelles formes ? Sinon pourquoi ?	Pour ces questions, on s'attend à ce que l'enseignant fasse référence au NAG . Soit sous forme de rappels nécessaires pour renforcer les connaissances mathématiques des élèves. Soit sous forme d'outils, en supposant que les élèves ont les connaissances mathématiques nécessaires pour comprendre l'utilisation du NAG dans un cours. Ces questions peuvent aussi nous orienter sur l'influence de l'enseignant sur les références des élèves par rapport au NAG .
18	Quelle définition donnez-vous du NAG à vos élèves ? Donnez-vous des caractéristiques ? Lesquelles ?	Rappelons que le NAG n'est pas défini dans les manuels de mathématiques à l'EMS. Par contre, nous le trouvons utilisé dans plusieurs chapitres des manuels. Dans tous les manuels que nous avons analysés, nous ne le trouvons pas toujours clairement explicite ; il va y apparaître par des illustrations et des exemples, soit classiques, soit moins classiques. Ce qui est en réalité, important derrière ces utilisations est le fait que le NAG peut être efficace pour résoudre certaines tâches en mathématiques. En général les apprêtages didactiques (Ravel, 2003) du savoir réalisés par les auteurs de manuels et les enseignants sont peu différents, car non seulement les auteurs de manuels ont l'obligation de respecter un programme, mais le manuel est aussi l'un des outils au service du projet didactique de l'enseignant. Il est alors peu probable que l'enseignant qui répondra à notre question ait une définition et une caractérisation précises du NAG .

19	Pendant la préparation de vos cours, dans le choix des chapitres devant être étudiés en classe, pensez-vous à des interrelations possibles entre les domaines mathématiques pouvant aider à la compréhension des sujets à étudier ?	Il ne serait pas étonnant que l'enseignant réponde oui, et ne donne que quelques vagues explications ou dise en gros ce qu'il pense. On voit que dans les manuels, le NAG est utilisé ; cependant, les discours sur ces liens sont assez subtils, parfois même ils n'existent pas. Il sera intéressant avec cette question, de voir les influences de ce fait dans les choix didactiques de l'enseignant.
20	Faites-vous explicitement référence en cours à l'existence ou non, des interrelations possibles pouvant exister entre les sujets et les domaines en cours d'étude ?	Cette question est liée à la précédente et a pour objectif de clarifier les réponses précédentes. De plus, elle nous renseigne sur l'usage que l'enseignant fait des connaissances par rapport au NAG . L'existence d'une volonté d'utiliser le NAG dans ses cours, peut nous aider à confirmer des hypothèses qui apparaissent dans notre recherche et aussi d'autres qui surgissent à partir des observables et des traces.
21	Utilisez-vous le NAG dans vos pratiques en classe ? Est-ce que la prise en compte du NAG , en tant qu'outil didactique, dans vos pratiques, est capable de mobiliser les rôles réciproques des domaines mathématiques. ?	Ces questions sont destinées à savoir si l'enseignant utilise l'outil NAG dans son cours. Dans le cas d'une réponse positive, l'enseignant est invité à dire comment il met en œuvre cette utilisation du NAG dans son enseignement. Cependant, nous avons vu que ces interactions restent implicites dans le savoir à enseigner, ainsi que, dans les manuels. En plus, " <i>L'utilisation du NAG requiert une écologie spécifique encore peu étudiée et fortement limitée par des contraintes transpositives émanant des différents niveaux de codétermination didactique.</i> " Bronner (1997 ; 2007) De ce point de vue, ces questions permettent de savoir à quel degré l'enseignant participe dans la formation des rapports des élèves au NAG .
Introduction du thème 6 : Maintenant nous allons parler du NAG au point de vue épistémologique. Donc, je vous interrogerai selon votre point de vue à propos des connaissances mathématiques.		
22	De point de vue mathématique, en général, indépendamment de votre enseignement, qu'est-ce qu'il vous semble important dans les interrelations entre les domaines mathématiques, et plus précisément le NAG ?	L'objectif de cette question est de savoir quelles sont les connaissances mathématiques dans le cadre du NAG que l'enseignant considère importantes.
23	Parmi les aspects que vous trouvez importants, quels sont ceux qu'il vous semble important d'être travaillés dans la classe ?	Cette question a pour objectif de savoir quelles sont les connaissances mathématiques qu'il faut enseigner telle partie des mathématiques ou non, ce que l'on appellerait maintenant le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné. Est-ce que le NAG est présent après ce passage du savoir à enseigner au savoir enseigné ?
24	Au niveau des mathématiques elles-mêmes, des mathématiciens, quelles sont, pour vous, les difficultés rencontrées pour établir le NAG ?	Cette question a pour objectif de savoir quels sont les obstacles rencontrés par l'enseignant dans l'utilisation du NAG .
25	Au niveau de vos études en tant que mathématicien, avez-vous rencontré des difficultés dans le cadre du NAG ? Si oui, pouvez-vous me donner quelques exemples	Cette question est très liée à la question précédente, elle a pour but d'aller un peu plus loin par rapport aux obstacles rencontrés par l'enseignant pour utiliser le NAG .
26	Maintenant que nous avons parlé du NAG sur le point de vue des programmes, manuels, épistémologique, de votre pratique et sur le point de vue des élèves,	Il est possible que l'enseignant désire ajouter un commentaire sur un aspect qui n'a pas été abordé dans nos questions.

	est-ce que vous voulez revenir sur quelques thèmes ? Avez-vous des informations particulières à ajouter par rapport aux thèmes que nous avons abordés ? Voulez vous revenir sur quelque thème ?	
--	---	--

Cette analyse « a priori » nous a montré qu'un véritable travail d'analyse doit être mis en place, afin d'optimiser les éléments recueillis quant à la façon dont l'enseignant utilise et fait travailler ses élèves sur le **NAG**. Ce travail doit permettre de trouver des éléments correspondant aux besoins de notre recherche, ainsi que des éléments qui puissent compléter nos observables et nos traces. A cette fin, nous avons respecté une méthodologie présentée au chapitre E2, dans le déroulement de nos analyses des entretiens.

19.1.1.5 Les questions spécifiques posées à l'enseignant

Les observables et les traces recueillies pendant nos observations en classe sont aussi étudiés à travers ces entretiens. Après avoir interrogé de façon générale l'enseignant de l'EMS sur les thèmes et les questions apparaissant ci-dessus, nous l'interrogeons sur des questions spécifiques.

Nous n'avons pas présenté l'ensemble des questions posées à l'enseignant dans cet entretien, car chaque question est spécifique d'un moment donné de la pratique de l'enseignant, repérée dans la classe, le cahier des élèves et les devoirs demandés à ces derniers, etc. Dit d'une autre manière, nous interrogeons les indicateurs matériels, l'activité matérielle ou mentale traduits par les observables produits par la pratique de l'enseignant.

Une des caractéristiques de ces observables et traces est le fait qu'ils sont transitoires ; pour les observer, il faut être présent et pour les retenir, il faut vouloir les observer parce qu'ils ont du sens dans leur contexte propre. C'est dans ce contexte que nous avons choisi d'interroger les enseignants à partir des protocoles que nous avons construits.

Pour travailler vraiment sur les questions de nos protocoles, nous avons choisi de mener ce deuxième entretien, un autre jour que celui du premier entretien.

CHAPITRE E2 : ANALYSE DES INTERVIEWS

20 Méthodologie d'analyse des entretiens

Les analyses sont réalisées globalement dans le cadre de l'approche anthropologique développée par Chevallard (1988/89).

L'analyse du contenu des discours est de rendre un discours plus intelligible, de remettre en ordre ce qui apparaît parfois en désordre. En fait, l'analyse du contenu proprement dit est menée par le chercheur qui devra, à travers une méthodologie adéquate, répondre aux questions pour justifier le dispositif d'entretien et d'analyse et trouver d'autres motivations aux contenus de ces discours.

Le discours, objet de l'analyse de contenu, est composé du signifiant et de son énonciation. Trois orientations pourront être prises par le chercheur :

En privilégiant l'analyse de l'énonciation : les entrées sont alors essentiellement linguistiques (structures de la langue), syntaxiques (règles de la langue), ou pragmatiques (usages de la langue).

En privilégiant l'analyse thématique : l'entrée est alors essentiellement sémantique, elle s'accorde à chercher le sens du discours.

En combinant les deux entrées : le chercheur travaillera également sur les interactions langagières, c'est-à-dire, le lien entre énoncé et énonciation.

Nous avons privilégié l'analyse de l'énonciation comme outil d'analyse de l'organisation de chaque discours et du contexte de chaque entretien, car chaque entretien correspond à un locuteur et a sa logique et sa dynamique propres.

Par contre, en ce qui concerne nos orientations pour mener nos analyses, nous avons utilisé exclusivement l'analyse thématique que nous décrirons ultérieurement.

En ce qui concerne nos analyses d'entretiens, il y a tout d'abord un travail de transcription, une fois les entretiens effectués. Le chercheur a en possession des notes concernant le contexte de recherche, les interviewés, etc. Il s'agit de transcrire la totalité de l'entretien, même en considérant que parfois une transcription littérale peut aussi produire un texte difficile à lire, car trop proche de la langue parlée. Mais nous pensons, en nous appuyant sur les protocoles élaborés par Vermesch, que les transcriptions des entretiens sont d'autant plus riches et interprétables, que la transcription est fidèle et précise.

20.1 Une analyse thématique par parties

Nous avons traité les discours en privilégiant l'analyse thématique :

"Les interviews sont révélatrices d'une part importante du rapport personnel de chaque enseignant à **O** ; ce rapport personnel étant complété par l'analyse des autres matériaux de cette recherche. La mise à jour de ce rapport permettra de dire si l'enseignant **X** est ou n'est pas un bon sujet de l'institution **I**." (Larguier, 2005).

Une fois la transcription réalisée, avant de passer aux analyses elles-mêmes, nous avons utilisé les procédures décrites ci-dessous :

Nous faisons une lecture rapide et complète de chaque entretien. L'objectif est de repérer les associations thématiques qui peuvent apparaître dans une partie de l'entretien, mais qui ont un lien avec une autre partie de l'entretien.

Un rassemblement thématique par parties est fait assez facilement, car les différents thèmes sont abordés dans des parties précises de notre guide. Nous terminons cette phase de rassemblement des discours en présentant l'ensemble des réponses des enseignants en les organisant dans chaque partie de notre guide. Nous rappelons que chaque thème porte sur des questions qui font référence à un sujet précis, ces questions sont groupées en six thèmes :

Informations générales;

Le rapport au **NAG** du point de vue des programmes ;

Le rapport au **NAG** du point de vue des manuels ;

Le rapport au **NAG** du point de vue de sa pratique ;

Le rapport au **NAG** du point de vue de l'élève ;

Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue épistémologique.

Partant de ces thèmes nous avons à interpréter et analyser nos entretiens.

20.1.1 Informations générales

Les deux enseignants interrogés ont tous plus de 7 ans d'expériences dans le domaine d'enseignement.

« **P1** : *J'enseigne depuis sept ans dans l'enseignement public et j'avais enseigné pendant sept ans auparavant dans l'enseignement privé. C'était à des niveaux différents. Dans l'enseignement privé, c'était plutôt au niveau du lycée, terminale, terminale S jusqu'à la seconde, et les six dernières années au collège dans l'enseignement public après une année au lycée.* »

« **P2** : *Ça doit faire trente huit ans que j'enseigne, je pense, à peu près, à un an près. J'ai enseigné du collège au lycée et dans le supérieur puisque j'ai enseigné à l'IUFM aussi.* »

Vu le temps de travail et le « bagage » de ces enseignants, en expériences professionnelles acquises au niveau du collège et au niveau du lycée, nous pouvons donc estimer, compte tenu de l'objectif de notre travail, que nous avons choisi des professeurs de mathématiques disposant de solides connaissances.

20.1.2 Le rapport de l'enseignant au NAG du point de vue des programmes.

Les deux enseignants français considèrent comme importants la place et le rôle accordés aux programmes : de façon générale, les enseignants sont attachés à suivre le programme :

« **P1** : Oui, globalement, oui. Pour voir des enseignants que l'on a en formation, ils sont attachés à suivre le programme. C'est quand même la référence. Je dis globalement parce que ce n'est pas forcément par une lecture des programmes qu'ils en ont connaissance mais par une lecture des manuels scolaires. Mais globalement, ils sont attachés à suivre le programme, parfois avec une ou deux années de retard, jamais beaucoup plus. »

« P2 : C'est vraiment une grande question çà ! Parce que, bon, je ne peux pas répondre à la place de tous les enseignants de France. Bon, on est fonctionnaires. Donc, on doit respecter les programmes. Ca, c'est clair. Cela dit, le programme est décliné en terme de contenu mais il est aussi décliné grâce aux documents d'accompagnement qui disent comment les enseigner. Donc, il y a deux choses en fait. Donc, il y a certainement plusieurs catégories de professeurs : certains qui vont enseigner des contenus et d'autres qui vont plus s'occuper de la manière de les enseigner. Donc, moi, je dirais que je respecte les programmes en tant que fonctionnaire mais je cherche dans les programmes la façon de les enseigner qui corresponde à mon idée sur ce que c'est qu'enseigner des mathématiques. »

Selon les programmes ne font pas une référence explicite au **NAG** :

« P1 : Très peu, ne serait-ce que par la façon dont il est découpé. Il est découpé en catégories : nombres et calculs, gestion de données et fonctions, géométrie, mesures et volumes, pardon, grandeurs et volumes. Donc, il est réparti en quatre domaines. Les interrelations, elles existent. Elles sont parfois stipulées dans les commentaires. Mais le catalogue dont on dispose au départ, c'est vraiment une partition des acquisitions à faire passer. Elles ne sont pas explicitement présentes même s'il y a parfois des commentaires qui encouragent fortement à faire le lien. [...] Et puis, dans ce qu'on appelle les documents d'accompagnement, ils sont très nombreux. [...] Ils expliquent comment faire le lien entre chacun des thèmes. »

« P2 : Oui, d'accord. Disons les programmes officiels, oui, maintenant, depuis environ dix ans, un peu moins, je ne sais pas, en tout cas, les documents d'accompagnement montrent comment on peut effectivement donner des problèmes ou des exercices où l'on a une interconnexion entre le numérique, l'algébrique et le géométrique. Ca, c'est clair hein ! Notamment en début de seconde, quand on dit qu'il ne faut pas faire de révisions, et bien très souvent, on demande justement de faire résoudre des problèmes aux élèves, avec de la géométrie qui va leur permettre, justement, de mettre en œuvre du numérique. »

Ces réponses nous ont permis de constater que, selon les enseignants, le **NAG** est implicitement présent dans le savoir à enseigner, mais que cela puisse poser des problèmes dans le processus d'apprentissage.

Les explications formulées par ces enseignants, par rapport à l'importance que les programmes donnent au **NAG**, nous ont conduit à confirmer qu'ils n'estiment pas que les programmes n'explicitent pas le **NAG**. Nous pouvons aussi constater que les enseignants accordent, dans le cadre d'une utilisation du **NAG**, une certaine importance à des parties du programme, à certains concepts mathématiques par rapport à d'autres qui apparaissent dans le programme. Nous constatons que les enseignants ont eu du mal à trouver les parties des programmes qui font référence au **NAG**.

20.1.3 Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue des manuels ;

A partir des questions suivantes:

« Utilisez-vous couramment des manuels pour préparer votre cours et choisir vos exercices ? »,

« La classe dans laquelle vous enseignez dispose-t-elle d'un manuel que vous utilisez avec ces élèves ?

Est-ce que vous pouvez me dire comment vous utilisez ce manuel ? »,

« Est-ce que le(s) manuel(s) que vous utilisez pour préparer vos cours fait (ou font) référence au **NAG** ?

Si oui, dans quelles parties (chapitre, thème, problème, etc.) ?

Sous quelles formes ? »,

« Par rapport à ce(s) manuel(s), quelles sont les parties dans lesquelles, selon vous, se trouvent les concepts mathématiques les plus en rapport avec notre sujet ? »,

les 2 enseignants ont des opinions divergentes, allant des opinions les plus favorables à l'importance des manuels dans la pratique de l'enseignant et dans ses rapports personnels au **NAG**, jusqu'à d'autres qui accordent peu de crédit aux manuels.

En France, nous constatons une conception fortement centralisée et impérative par rapport à l'utilisation des programmes. Une des fonctions du corps d'inspection est de veiller à leur stricte mise en œuvre. Mais les éditeurs des manuels interprètent les programmes en toute liberté et le choix du manuel (support pédagogique essentiel) relève de la responsabilité du professeur. Les programmes sont nationaux et obligatoires, le choix des manuels est laissé aux enseignants comme un symbole de leur liberté pédagogique:

« **P1** : [...] Moi, de manière personnelle, j'utilise beaucoup cela et, pour revoir mon cours, et pour choisir des exercices ou des contrôles. Maintenant, j'essaie au maximum d'utiliser le manuel qu'ont les élèves parce que je trouve qu'on l'achète, qu'on leur fait amener. En tant que banque d'exercices, je ne veux pas dire qu'ils se valent tous, mais on peut trouver le bonheur dans chacun des manuels. Donc, au maximum, j'essaie de leur faire utiliser pour leur faire faire le travail à la maison ou des choses comme ça. [...] Oui, un plus discrète que, par exemple, dans *Le Triangle*, mais il y a quelques problèmes de synthèse. Celui qu'ils ont là, ce qu'on peut reprocher, c'est de la pseudo-modélisation. On tente de faire des situations concrètes qui, finalement, sont déjà modélisées, donc, après il y a un passage du géométrique vers l'algébrique qui est induit. Mais elles sont beaucoup moins nombreuses que dans d'autres. »

« **P2** : [...] La référence, ça reste les programmes officiels. Ils doivent tous être propriétaires des programmes officiels et, à mon avis, oui, ils le savent. Donc, ils peuvent avoir un regard critique sur les livres qu'ils utilisent grâce à ça. Donc, à la lecture du programme officiel, ils peuvent regarder si le livre qu'ils ont le respecte, s'il va trop loin, s'il y a des choses qui manquent, etc.. [...] Oui, d'accord. Disons les programmes officiels, oui, maintenant, depuis environ dix ans, un peu moins, je ne sais pas, en tout cas, les documents d'accompagnement montrent comment on peut effectivement donner des problèmes ou des exercices où l'on a une interconnexion entre le numérique, l'algébrique et le géométrique. [...]. Je ne vois pas un élément où on pourrait dire, là je ne peux pas faire une interconnexion. »

20.1.4 Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue de l'élève

Les réponses des enseignants aux questions de ce thème montrent que le **NAG** est présent dans leurs pratiques : pour cette raison, les élèves vont forcément rencontrer des situations, des tâches faisant appel au **NAG** pour pouvoir les comprendre et les résoudre. En fait, les enseignants considèrent que le **NAG** constitue un véritable appui pour les élèves.

Dans ces réponses, les enseignants évoquent les difficultés des élèves pour utiliser le **NAG** : ils nous semblent considérer que l'utilisation du **NAG** va de soi et en conséquence qu'elle doit être mise à la charge des élèves :

« **P1** : Les élèves sont beaucoup trop habitués à travailler par chapitre, c'est à dire que si on leur donne un exercice, ils recherchent dans leur zone temporelle proche les connaissances à mettre en jeu. Ils se disent que c'est quelque chose qu'on a dû faire, voilà, ces jours-ci et on va essayer d'appliquer ça. Donc, c'est vrai que les habituer petit à petit à mobiliser des connaissances algébriques pour résoudre de la géométrie, ou vice versa, c'est leur donner des outils supplémentaires pour réussir. [...]. Oui, ils ont une connaissance antérieure. On essaie de faire des liaisons en fonction des connaissances qu'ils ont. Maintenant, un entraînement suffisant : non. Ils n'en sont qu'au début. Souvent, ils ne comprennent pas, ils sont réticents à mélanger les deux domaines parce que cela leur

fait deux tâches différentes à gérer mais, petit à petit, si cela amène à résoudre des problèmes concrets, ils en perçoivent l'intérêt. »

« P2 : Alors, la première difficulté, je pense c'est que quand un problème est résolu, il n'a pas envie de le résoudre d'une autre façon. Donc, la plus grande difficulté, c'est justement dans le questionnement. [...]. Voilà. Donc, la grande difficulté, c'est de bien présenter si on veut vraiment que l'élève rentre dans l'interrelation. C'est de ne pas lui présenter justement les choses compartimentées. C'est de faire les choses de façon à ce qu'il voie l'interrelation, sinon, comme je viens de le dire, il verra deux choses différentes et puis je ne suis pas sûr que cela lui sera très utile. Je pense qu'il y a un enseignement spécifique, c'est l'habitude de le faire. C'est l'habitude.

Les enseignants ont construit à notre demande des tâches mettant en jeu les interrelations, de véritables mises en scène du **NAG**. Par là-même, ils ont caractérisé quelques difficultés rencontrées par les collégiens et lycéens pour utiliser le **NAG**. Ils estiment que ces difficultés semblent être dues au manque de connaissances antérieures des élèves sur le **NAG**. En fait, selon eux, ces difficultés ont des origines épistémologiques ; mais il y a aussi, comme nous l'avons montré, les difficultés liés aux choix spécifiques aux institutions dans lesquelles on les rencontre.

20.1.5 Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue de sa pratique

Concernant ce thème, il a été possible d'analyser le travail de l'enseignant par le biais didactique. L'institution détermine, en partie, les savoirs à enseigner (les programmes). En effet, ces enseignants désignent certains objets, le savoir officiel. Nos analyses précédentes ont montré que certains objets sont réellement travaillés par ces enseignants (le savoir vif).

Mais d'autres objets du savoir ne nécessitent plus d'explications, selon les enseignants : par conséquent, ils passent sous silence certaines façons ou certaines utilisations qui semblent aller de soi. L'ensemble de ces objets du savoir sont parfois au travers du **NAG**, mobilisés différemment par ces enseignants selon la progression du programme au fil du temps de l'étude. Ces usages relatifs au savoir fondent le contrat institutionnel, dont une large part est implicite. Cela nous donne à penser que ces gestes professionnels des enseignants interviewés révèlent d'une certaine façon, que ces enseignants ont un très fort rapport au **NAG** dans l'exercice de leurs pratiques. Ce rapport est très influencé par celui prescrit par le programme. A ce stade, nos entretiens, analysés ci-après, nous autorisent à dire que le rapport de ces enseignants au **NAG** est très associé aux façons d'enseigner:

« P1 : C'est celles que l'on a signalées précédemment. Ces interrelations permettent de changer un peu de contexte, c'est à dire si l'on est sur de la résolution d'équation et que l'on n'est que sur des problèmes numériques ou de dénombrement, ou des choses comme ça, cela permet de varier l'approche, ou même de refaire travailler les connaissances antérieures, pour que tout ne soit pas partitionné dans un coin, et donc de refaire intervenir un théorème qui a été vu il y a deux mois, à un moment donné, et de l'amener à le réétudier. Elles peuvent aussi servir à motiver des introductions. [...]. Ce serait plutôt vraiment après, quand on travaille sur de la résolution de problèmes où on appelle des outils dans des problèmes géométriques, numériques ou algébriques, mais pas forcément dans le cours, non. Oui, c'est à dire on les fait passer d'une posture d'apprenants qui reçoivent, et parfois subissent un apprentissage, pour les faire plutôt rentrer dans une pratique de recherche. [...]. Mais, et bien oui, c'est ce que j'ai déjà dit : les interrelations, ce n'est pas qu'elles sont possibles, elles sont toujours ..., je veux dire : il y a toujours des interrelations. Je ne vois jamais un problème tout seul. [...]. Oui, et bon, en didactique, il y a tous les changements de registre et de cadre, etc., donc là j'utilise, c'est évident. Un élève qui, parfois, n'a pas toujours tout compris, par exemple l'étude des fonctions, quand on demande de résoudre $x^2 < \dots$, ou plutôt, si un nombre est compris entre -2 et $+3$, à quel ensemble appartient son carré, les élèves vont me répondre bêtement entre 4 et 9. [...]. Quand je pense à un exercice, et bien, souvent je pense à ce que je pourrais faire dans un autre cadre et, du coup, et bien, je fais l'énoncé en conséquence. »

« P2 : Mais, et bien oui, c'est ce que j'ai déjà dit : les interrelations, ce n'est pas qu'elles sont possibles, elles sont toujours ..., je veux dire : il y a toujours des interrelations. Je ne vois jamais un problème tout seul. Bon, peut-être en arithmétique, et encore, l'arithmétique c'est lié, on ne va pas faire ... Un professeur qui enseignerait l'arithmétique en terminale S Spécialité, s'il fait des exercices d'arithmétique uniquement

pour l'arithmétique, c'est les isoler de leur champ d'action. [...]. Oui, pareil, là j'ai des exemples. A mon avis, de toute façon, dès qu'on parle d'interrelations, moi, je ne distinguerais même pas ces deux allers et retours. Bon, ça va dépendre si l'exercice est ouvert pour l'élève [...]. Et donc ça, c'est le boulot du professeur, c'est à dire de ..., c'est là où je n'ai pas besoin des bouquins, etc., je le fais moi-même. Quand je pense à un exercice, et bien, souvent je pense à ce que je pourrais faire dans un autre cadre et, du coup, et bien, je fais l'énoncé en conséquence. »

Les enseignants français font référence au **NAG**, soit sous forme de rappels nécessaires pour renforcer les connaissances mathématiques des élèves, soit sous forme d'outils, en relevant que les élèves de troisième ou de seconde, doivent avoir les connaissances mathématiques nécessaires pour comprendre l'utilisation du **NAG**. De ce fait nous considérons que, même si le **NAG** n'est pas défini, ni explicité dans les manuels de mathématiques à l'EMS, les enseignants dans cette recherche y font référence et disent utiliser le **NAG** dans leurs cours.

Ces réponses nous montrent l'influence de l'enseignant, et plus précisément le rapport personnel de ces enseignants, sur les références des élèves par rapport au **NAG**. Les enseignants n'ont pas une définition, ni une caractérisation précises du **NAG**. Comme nous l'avons constaté dans les manuels, le **NAG** y est utilisé, mais les enseignants trouvent implicitement, l'utilisation du **NAG** dans les manuels ; cependant les références à ces liens restent assez subtiles à ce fait dans ces choix didactiques. Nous constatons dans ces entretiens qu'il y a une volonté, de la part de ces enseignants, d'utiliser le **NAG** dans ses cours, mais cette utilisation n'a pas toujours été facile, car, comme le souligne Bronner (1997 ; 2007) « l'utilisation du **NAG** requiert une écologie spécifique encore peu étudiée et fortement limitée par des contraintes transpositives émanant des différents niveaux de codétermination didactique ». Et donc de ce point de vue nous constatons que le rapport de ces enseignants au **NAG**, va forcément participer à la formation des rapports des élèves au **NAG**.

20.1.6 Le rapport de l'enseignant au **NAG** du point de vue épistémologique

Les réponses que nous présentons ci-dessous révèlent les connaissances mathématiques dans le cadre du **NAG** que l'enseignant considère importantes et devant être enseignées :

« P1 : Historiquement, ce sont ces interrelations qui ont fait que les mathématiques ont évolué. Si on prend le cas du nombre Pi, par exemple, dont je leur parlais en faisant les polygones réguliers, c'était une recherche juste pour trouver les décimales du nombre qui a mobilisé énormément de connaissances géométriques, une approximation par les polygones réguliers, par la méthode d'Archimède. [...]. Juste, c'est vrai, que c'est quelque chose qui n'est pas forcément mis en avant dans l'enseignement français, le travail sur ces interrelations. Même si par plaisir les profs de math aiment bien partir d'une situation géométrique en général pour avoir une résolution algébrique, mais je dirais que c'est presque plus par plaisir que par souci d'efficacité et par une réelle pensée de ce qu'il y a derrière. Je pense que c'est des situations qui peuvent donner du sens à certains mais pas à tous. [...].

*« P2 : Oh, et bien, c'est tout ce qui est transférable en dehors des maths. C'est à dire qu'un jour, nos élèves, si j'ai 5% de mes élèves qui me passent par les mains, si je puis dire, font encore des mathématiques par la suite, c'est beaucoup. Donc, la plupart, ils ne feront plus de maths, ils vont trouver un boulot où ils n'auront presque plus de maths à faire. Donc, ce qui est transférable c'est, comme je dis toujours : vous avez une boîte à outils, là-dedans vous avez le numérique, l'algébrique, le géométrique, le vectoriel, et puis vous avez un problème qui se pose à vous, il faut savoir le résoudre. [...]. Ce n'est pas si facile d'être autonome, ce n'est pas si facile de prendre une initiative. Et, donc, je crois qu'il faut que les profs expérimentent eux-mêmes cette façon de travailler pour qu'après, vis-à-vis de leurs élèves, [...]. Qu'est-ce qu'il y avait encore que je voyais, le **NAG**, vraiment, derrière le **NAG**, j'avais vu tout ça. Oui, les exercices, les problèmes ouverts, ouverts pour les élèves, bien sûr. Donc, tout ça c'est ce qui se cache derrière le **NAG**. Je crois qu'on ne peut pas parler du **NAG** si on ne parle pas de tout ça. »*

Ces enseignants admettent aussi que le **NAG** favorise la mise en œuvre des savoirs cachés ou manquants au niveau des connaissances permettant d'articuler les différents cadres mathématiques.

Conclusion sur le rapport personnel des enseignants

Dans les paragraphes précédents, nous avons cerné quelques éléments du rapport effectif des enseignants au **NAG**. Ce qui semble le plus remarquable c'est l'utilisation, l'importance et le rôle donné par ces enseignants au **NAG**. De façon générale, ils estiment que le **NAG** favorise l'ouverture des mathématiques mettant en défaut l'injonction des programmes à une plus grande ouverture de l'enseignement des mathématiques vers leurs domaines et aussi vers les autres disciplines. Les analyses faites montrent que, même si les programmes et les manuels de mathématiques font référence implicitement au **NAG**, cela reste très présent dans les pratiques de ces enseignants. Cet effet est dû au fait que, dans l'exercice de leurs pratiques, ces enseignants ne s'appuient pas que sur les programmes et manuels, mais leur rapport personnel au **NAG** favorise l'intégration du **NAG** comme nous l'avons vu dans les exemples fournis.

En ce qui concerne les liens entre les domaines numérique-algébrique et géométrique que doivent faire les élèves dans leur travail en mathématique, les enseignants pensent que l'utilisation de ces liens va de soi, puisque pour eux les mathématiques sont fondées sur de tels liens.

Les résultats montrent globalement que l'utilisation du **NAG** par les enseignants reste très implicite, très limitée à leur travail. Dans le travail des élèves, cette utilisation reste en quelque sorte très superficielle, dans la mesure où seuls les enseignants savent comment l'appliquer et l'importance de l'utilisation du **NAG**.

Les enseignants jugent que le **NAG** a un rôle important dans l'EMS. Les élèves s'habituent à voir et reproduire l'utilisation que font les enseignants du **NAG**. Nous n'avons pas pu dans cette recherche examiner plus précisément le rapport des élèves au **NAG**.

Du point de vue épistémologique, les liens entre les différents domaines mathématiques existent, l'histoire du système éducatif avec ses contraintes propres les a en quelque sorte rendus implicites. Les enseignants mobilisent nécessairement le **NAG**, mais ils n'estiment pas important d'explicitier les vrais enjeux de cette utilisation.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Notre projet a été l'étude, d'une part, de la manière dont les enseignants utilisent les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique et d'autre part, de la façon dont ces enseignants font travailler leurs élèves sur les liens complexes entre ces domaines. Nous avons adopté un point de vue, selon lequel, pour l'étude de la place et du rôle du **NAG** dans les institutions du secondaire, il est nécessaire non seulement de connaître les conditions, mais aussi les contraintes influençant les enseignants dans l'utilisation du **NAG**. Compte tenu du questionnement, nous avons décidé de réaliser cette étude dans le cadre d'une perspective anthropologique en observant les conditions actuelles d'enseignement en classes de troisième et de seconde.

Cette étude nous a conduit à une approche didactique en trois temps. Dans un premier temps, nous avons évoqué les résultats de recherches à propos des changements de cadres et de registres, et une analyse de quelques aspects historiques à propos du **NAG**, qui nous ont permis de mieux cerner des exemples typiques d'utilisation du **NAG**.

Dans un deuxième temps, nous avons fait une étude institutionnelle en nous appuyant sur l'analyse des programmes français. Ceci nous a permis de caractériser les points communs, les différences, la place et le rôle du **NAG** dans chaque institution étudiée (les classes de troisième et de seconde).

Dans un troisième temps, nous avons mené une étude didactique de la pratique, c'est-à-dire une étude du système didactique en lui-même, basée surtout sur l'analyse des pratiques et des entretiens, à propos de l'utilisation du **NAG**, avec les deux enseignants des institutions concernées. Cette troisième étape de notre étude nous a permis de déterminer et d'interpréter, en utilisant les études précédentes, le rapport de ces enseignants au **NAG**.

Dans la **partie A** de la thèse, nous avons présenté la problématique et notre méthodologie qui s'appuient essentiellement sur l'approche anthropologique en didactique des mathématiques élaborée par Chevillard (1992). Cette méthodologie nous a permis de mettre en évidence des éléments sur la place et le rôle du **NAG** dans l'institution EMS, ainsi que les différences principales dans l'organisation des savoirs liés au **NAG** en France

Nous avons montré l'importance du **NAG** dans le processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, en nous fondant en particulier sur des travaux antérieurs et en nous basant sur les changements de cadres et de registres. Cette place et ce rôle qu'occupe le **NAG** dans le secondaire reposent sur plusieurs raisons didactiques. Les travaux de Régine Douady ont déjà montré que les changements de cadres traduisent une intention d'exploiter des concepts pouvant intervenir dans divers domaines ou dans divers cadres. A la suite des recherches sur le numérique menées par Alain Bronner, nous avons choisi d'aborder la place et le rôle du **NAG** au niveau des pratiques de deux enseignants au secondaire (en troisième et en seconde) et montré l'existence d'un vide didactique (Bronner, 1997, 2007) à propos du **NAG** dans l'enseignement secondaire. Malgré ce vide, les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique sont présentes dans la pratique des enseignants et ont une place et un rôle importants dans l'apprentissage des mathématiques. Ce vide peut constituer un obstacle, à la fois pour les élèves et les enseignants, lors des travaux qui font appel, simultanément, aux domaines du **NAG**, et lors de la construction des nouvelles connaissances.

Dans l'analyse des aspects épistémologiques et historiques (**partie B**), nous avons repéré l'existence de travaux significatifs en lien avec des interrelations entre les grands domaines mathématiques. Nous avons montré que l'utilisation du **NAG** a contribué à la formation de branches importantes des mathématiques, comme la topologie et la théorie des mesures, et qu'elle est présente dans plusieurs périodes de l'histoire des mathématiques. En étudiant les contributions de Descartes, par exemple, nous avons

montré l'importance du **NAG** dans son œuvre, notamment l'association de la Géométrie avec l'algèbre symbolique qui a contribué au développement de techniques algébriques, indépendamment de visualisations géométriques. Cette partie de la thèse montre une écologie pour le **NAG** dans l'histoire des mathématiques, qui reste aussi largement implicite. Cette écologie bien qu'implicite va intervenir à divers degrés, dans les choix faits par les enseignants de mathématiques à l'heure actuelle. Les transpositions didactiques des mathématiques vont contraindre le processus, la place et le rôle du **NAG** dans l'institution EMS. Cela peut expliquer en partie la prise en compte insuffisante, selon nous, du **NAG** dans cette institution, qui semble réduite essentiellement au rapport institutionnel des recommandations officielles.

L'objectif principal de notre analyse institutionnelle (**partie C**) était de mettre en évidence les choix faits par les institutions lorsqu'elles abordent des thèmes faisant appel au **NAG**. Cette partie de notre travail nous a ainsi amené à décrire et à analyser le rapport institutionnel actuel au **NAG**. Le questionnement écologique qui a été développé ici nous a permis d'analyser les conditions d'utilisation du **NAG** en termes de niches dans les deux institutions et de repérer diverses fonctions occupées par celui-ci l'enseignement. Nous avons obtenu les résultats suivants :

-Les programmes de mathématiques au collège présentent des objets à travers quatre domaines (*Organisation et gestion de données, fonctions ; Nombres et calcul ; Géométrie ; Grandeurs et mesure*), et au lycée, à travers trois grand domaines (*Statistiques ; Calcul et fonctions/Analyse ; Géométrie*). Le **NAG** est présent officiellement dans chacun des domaines à tous les niveaux au collège, sauf dans celui des « *Nombres et calcul* » en cinquième et en quatrième.

- Nous avons constaté que le programme ne mentionne nulle part de façon explicite l'utilisation du **NAG**. Cependant, nous notons à travers certains thèmes (par exemple *proportionnalité ; organisation et représentation de données ; nombres entiers et décimaux ; divisions ; quotients ; figures planes ; symétrie orthogonale par rapport à une droite ; aires : mesure, comparaison et calcul d'aires ; volumes*) une intention d'initier les élèves à la maîtrise de sujets mathématiques issus de plusieurs domaines.

- Dans les programmes du collège et du lycée, on a repéré une utilisation potentielle du **NAG**, soit dans les objectifs, soit dans les exemples d'activités et dans les commentaires de ces programmes. Cependant cette utilisation potentielle est présentée de façon implicite. Cette apparition se fait de manière progressive. Les domaines « *organisation et gestion de données, fonctions* », « *géométrie* » et « *grandeurs et mesure* » font apparaître une utilisation potentielle du **NAG** plus diversifiée que dans celui de « *nombres et calcul* ».

- Les programmes suggèrent des utilisations d'éléments extérieurs au domaine travaillé. Ils abordent aussi l'importance des interrelations que les mathématiques entretiennent avec d'autres disciplines. Cependant ils évoquent peu l'importance des interrelations entre les domaines mathématiques eux-mêmes.

Dans nos analyses des pratiques des enseignants en France (**partie D**), nous avons donc voulu comprendre comment deux enseignants, l'un en classe de troisième et l'autre en classe de seconde, instaurent et utilisent le **NAG**. Nous avons cherché à savoir si ces enseignants avaient recours spontanément à ces interrelations, et de quelle façon. À savoir dans quelle mesure ces connaissances sont évoquées, alors qu'ils disposent de nombreuses connaissances venues de différents domaines mathématiques, et s'ils estiment importante l'utilisation de telles interrelations ? Dans quelle mesure les recommandations officiels et

les manuels (dans leur représentation qu'ils font du **NAG**) leur servent d'appui pour mettre en place et utiliser le **NAG** ? Quelles sont les difficultés qu'ils rencontrent, aussi bien dans le **passage du domaine numérique-algébrique au géométrique**, que dans celui du **domaine géométrique au numérique-algébrique**, et dans l'articulation entre ces deux domaines ?

La recherche relativement à ces questions nous a permis de montrer que :

- Le vide didactique rencontré dans l'EMS pour le **NAG** n'empêche pas que l'utilisation de ces interrelations soit présente dans la pratique des enseignants. Ce vide représente parfois un obstacle, à la fois pour les élèves et les enseignants, et lors des travaux qui font appel, simultanément, aux domaines du **NAG** ;
- Le **NAG**, facilitant la mise au jour de savoirs cachés ou manquants au niveau des connaissances, permet d'articuler les cadres (au sens de Douady, 1984) numérique - algébrique et géométrique.

Elle nous a également amené à constater que :

- le **NAG** apparaît potentiellement dans 25 séances au collège, c'est-à-dire, dans 67,6% du total des séances observées ;
- concernant son utilisation effective dans la totalité des séances au collège, le **NAG** apparaît bien dans 23 séances, c'est-à-dire dans 62,1% du total des séances ;
- au lycée, à travers une analyse générale des principaux types de tâches, une utilisation potentielle peut être avancée dans 24 séances, c'est-à-dire dans 70,6% du total des séances ;
- concernant l'utilisation effective du **NAG** au lycée, nous l'avons constaté dans 21 séances, c'est-à-dire dans 61,8% du total.

En fait, cette partie de notre étude montre un décalage important entre la façon dont le **NAG** est mentionné dans les recommandations officielles, dans les manuels, et celle des pratiques des enseignants, telle qu'elle est vécue en classe, surtout au collège. Si on postule son intérêt pour l'enseignement des mathématiques, une évolution significative des pratiques est nécessaire pour que le **NAG** apparaisse avec une place et un rôle plus satisfaisant sur les plans épistémologique et didactiques.

L'étude des entretiens menés avec les enseignants au **NAG**, dans la **partie E**, a mis en évidence tout d'abord des convergences. Les deux enseignants français considèrent comme importante la place et le rôle accordés aux programmes, c'est pourquoi ils sont attachés à le suivre. Ils estiment que ces programmes ne font pas de référence explicite au **NAG**. Tous considèrent aussi que dans les manuels il est possible de repérer certaines parties, thèmes, concepts où le **NAG** est évoqué et qu'il est donc potentiellement présent. Ils pensent aussi que l'utilisation du **NAG** va de soi, qu'elle est le problème des élèves et provoque chez eux des difficultés, ces difficultés ayant pour origine un manque de connaissances antérieures des élèves relatives aux **NAG**. Cependant les enseignants jugent que le **NAG** a un rôle important dans l'institution EMS, bien qu'ils ne s'assurent pas que son utilisation soit maîtrisée par les élèves. Ces derniers s'habituent à reproduire l'utilisation qu'en font les enseignants du **NAG**.

Par contre, certains points différencient les professeurs sur le fait de devoir ou non expliciter l'utilisation du **NAG** avec les élèves.

Pour conclure, nous dirons que les contraintes propres au système éducatif ont rendu en quelque sorte implicite les liens entre les différents domaines mathématiques. Pour cette raison les enseignants sont placés dans une logique où ils utilisent inévitablement le **NAG**, tout en sous-estimant l'importance des enjeux de cette utilisation.

Notre travail reste une première investigation dans une voie peu développée de la recherche en didactique, malgré les travaux précurseurs de Régine Douady.

BIBLIOGRAPHIES

21 Références bibliographiques

AABOE, Asger. (1984). *Episódios da História antiga da Matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: SBM.

ALMOULOUD, S. A. (1997). *Fundamentos da didática da Matemática*. São Paulo: PUC-SP, v. 1.

ALTET, M. (1994). Comment interagissent enseignant et élèves en classe (Note de synthèse). *Revue française de pédagogie*, INRP Paris, n° 107.

ALTET, M. (1994). *La Formation professionnelle des enseignants*. Paris : PUF.

ALTET, M. (2002). Une démarche de recherche sur la pratique enseignante : l'analyse plurielle. *Revue Française de Pédagogie*, n° 138, janvier-février-mars, p. 85-93.

ARAUJO, C. (2000). Operações com segmentos segundo David Hilbert. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 42. p. 11 - 14, 1° quadrimestre.

ARSAC, G., CHEVALLARD, Y., MARTINAND, J.-L., TIBERGHIE, A. (dir.) (1994) *La transposition didactique à l'épreuve*, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions.

ARSAC, G., GERMAIN, G. ET MANTE, M. (1988) *Problème ouvert et situation-problème*, Lyon, IREM de l'Académie de Lyon.

ARSAC, G., GREA, J., GRENIER, D. ET TIBERGHIE, A. (dir.) (1995) *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions

ARTAUD, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique de l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la IX^e École d'été de didactique des mathématiques*, p. 99-139.

ARTAUD, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la neuvième École d'été de didactique des mathématiques*. Caen : ARDM&IUFM, pp. 101-139.

ARTAUD, M. ; BOSCH, M. ; WOZNIAK, F.(2008). *La théorie anthropologique du didactique*. <http://www.ardm.eu/contenu/yves-chevallard>. Page consultée le 20 décembre 2008.

ASSUDE, T. (1996). De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16/1, 47-72.

ASSUDE, T. & MARGOLINAS, C. (2005). Aperçu sur les rôles des manuels dans la recherche en didactique des mathématiques. IN BRUILLARD E. (dir.) (2005). *Manuels scolaires, regards croisés* (pp. 231-240), CRDP - Basse Normandie.

BACHELARD G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique*, 13^o éd. [1 édition 1938]. Paris : Vrin, 1986.

BARAGAR, Arthur. (2002). Constructions using a compass and twice-notched straightedge. *American Mathematical Monthly*. 109, n^o2, (février 2002), p. 151-164.

BAUMGART, J. (1992). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra*. São Paulo: Atual Editora.

BEILLEROT, J. (1998). *Formes et formations du rapport au savoir*. Paris : L'Harmattan.

BKOUCHE, R. ; CHARLOT, B. ; ROUCHE, N. (1991). *Faire des mathématiques le plaisir du sens*. Editions Armand Colin.

BLANCHET Ph., 2004, " L'identification sociolinguistique des langues et des variétés linguistiques : pour une analyse complexe du processus de catégorisation fonctionnelle ", L'Identification des langues et des variétés dialectales par les humains et par les machines, Paris, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications / CNRS, 2004, p. 31-36

BOS, Henk J. M. (1998). La structure de la Géométrie de Descartes. *Revue d'histoire des sciences*. v. 51, n^o 2, p. 291 – 318.

BOSCH, Marianna. (2006). Un point de vue anthropologique : l'évolution des « instruments de représentation » dans l'activité mathématique. *Bulletin d'ICMI*.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/1, p. 77-123.

BOYER, Carl B. (1996). *História da Matemática*. 2^a ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher.

BRASIL. (1998). Secretaria de Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais/Matemática/Secretaria Nacional de Educação* - Brasília : MEC /SNE.

BRONNER, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée* (Thèse de Doctorat). Université Joseph Fourier de Grenoble.

BRONNER, A. (2007). Installation et régulation par l'enseignant de l'espace « parole-pensée-actions-relations ». Gestes d'étude, gestes professionnels, événements et ajustements (corpus de mathématiques). In : GUERNIER, M.-C. ; DURAND-GUERRIER, V. ; SAUTOT, J.-P. (Dir) *Interactions verbales, didactiques et apprentissages*, PUFC.

BRONNER, A. (2007). *La question du numérique : Le numérique en questions* (Habilitation à Diriger les Recherches). Université Montpellier 2.

BRONNER, A. & LARGUIER, M. (2004), Analyse didactique de la séance « carte de géographie », In : *La réflexivité des langages, instruments de travail du professeur et des*

élèves. Symposium coordonné par D. Bucheton, Colloque international de l'AIRDF, Québec.

BRONNER, A. & NOIRFALISE, A. (2002). Structures, fonctionnement, écologie des organisations didactiques, A propos d'algèbre en Quatrième. *Actes de la 11^{ème} Ecole d'été de didactiques des Mathématiques*, 21 au 30 août 2001.

BROUSSEAU, Guy. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches : La politique de l'ignorance*, n° 41, p. 177-182.

BROUSSEAU, Guy. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 4, n°2, pp 165-198. (La pensée sauvage. Grenoble.)

BROUSSEAU, Guy. (1986). *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'Etat.

BROUSSEAU, Guy. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

BROUSSEAU, Guy. (2000), Communication au Congrès d'Aguas Calientes, Mexico. Article paru en espagnol dans la revue Mexicaine « *Educacion matematica* » Vol 12, n°1, Abril 2000, p. 5-39.

BRU, M. (1991). *Les variations didactiques dans l'organisation des conditions d'apprentissage*. Toulouse, EUS.

CANGUILHEM, G. : *Un style de pensée*. In : Cahiers philosophiques n 69, "La philosophie de Georges Canguilhem", décembre 1996, C.N.D.P., Paris, p.47-56.

CARREGA, Jean-Claude. (1989). *Théorie des corps, la règle et le compas*. Ed. Hermann.

CELI, Valentina. (2002). *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effets sur leur formation*. (Thèse de Doctorat). IREM de Paris7.

CELI, Valentina. (2005). Atelier 1 : Les formules de calcul d'aires planes : un trait d'union entre le géométrique et le numérique. Apports d'une analyse comparative. *XIII École d'été de Didactique des Mathématiques* -Maquette Thème 1 - Étude d'un problème curriculaire - Les nombres dans l'enseignement des mathématiques

CHBAT, J. (2006). *Recherches sur la pratique enseignante au collégial*. Chapitre 2 (Regards sur la profession) – Les attitudes et les pratiques pédagogiques des enseignants du collégial, pages 23-31, AQPC, 2006.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage (2e édition revue et augmentée, en coll. avec Marie-Alberte Joshua, 1re édition 1985).

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12.1, p. 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique, *Séminaire de l'Associazione Mathesis*, Turin, 3 février 1994, in Actes du Séminaire 1993-1994, 190-200.

CHEVALLARD, Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur - Texte issu d'un cours donné à la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 22-31 août 1995).

CHEVALLARD, Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Cours donné à l'université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, La Rochelle, 4-11 juillet 1998 ; paru dans les actes de cette université d'été, IREM de Clermont-Ferrand, p. 91-120.

CHEVALLARD, Y. (2000), La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes. *Actes de la Xe École d'été de didactique des mathématiques* (Houlgate, 18-25-1999).

CHEVALLARD, Y. (2001). *Les mathématiques et le monde : dépasser « l'horreur instrumentale »* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2000_-Quadrature_2001.pdf. Page consultée l'octobre 2007.

CHEVALLARD, Y. (2002), Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. In Dorier, J.-L. et al. (éds.), *Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 41-56.

CHEVALLARD, Y. (2005). Place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Actes de l'université d'été d'Animath*. In Brochure APMEP n° 168. Saint-Flour en Août 2004, Ed APMEP.

CHIOCCA, C-M. (1996). *Du discours des enseignants de mathématiques en classe aux représentations de leurs élèves sur les mathématiques : un essai de réflexion didactique*. (Thèse de Doctorat). Paris VII.

CHOPPIN, A. (1992). *Les Manuels scolaires, histoire et actualité*. — Paris : Hachette Éducation — 224-XVI p. : ill. — (Collection Pédagogie pour demain ; série références).

CLOT, Y. (1999). *Travail et Subjectivité : l'exemple des conducteurs de train*. Émergences, p. 1-39.

CLOT, Y. & FAÏTA, D. (2000). *Genres et styles en analyse du travail. Concepts et méthodes*, Travailler, 4 : 7-42.

COLETTE, Jean-Paul. (1973). Histoire des mathématiques, vol. 1, Vuibert/ERPI, Montréal.

COLETTE, Jean-Paul. (1973). Histoire des mathématiques, vol. 2, Vuibert/ERPI, Montréal.

Collection Triangle Mathématiques 3e – Edition spéciale pour le professeur. Hatier, Paris, Avril 1999.

Collection Triangle Mathématiques 4e – Edition spéciale pour le professeur. Hatier, Paris, Avril 2007.

Collection Triangle Mathématiques 5e – Edition spéciale pour le professeur. Hatier, Paris, Avril 2001.

Collection Triangle Mathématiques 6e – Edition spéciale pour le professeur. Hatier, Paris, Mai 2000.

COMBIS-CARNUS, M.F. (2001). *Analyse didactique du processus décisionnel de l'enseignant d'EPS en gymnastique*. (Thèse de Doctorat).

COMÉNIUS, João Amós. (1657/1966). *Didáctica Magna: tratado da arte universal de ensinar tudo a todos*. Tradução de Joaquim Ferreira Gomes. 3 ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian,

CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12(2.3), 221-270.

CORNU, B. (Direction) (2000). *Le nouveau métier d'enseignant*. La Documentation Française.

CORRADI, Massimo. (1999). Les rapports entre géométrie et arithmétique dans l'histoire de l' « art du bâtir » et de la « science des constructions. *Actes du Colloque de Peyresq*. 7 - 10 septembre

CREM Centre de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques. Grt. (2005). *Bulletin de l'APMEP. L'enseignement des mathématiques en relation avec les autres disciplines*. Paris, n° 458. p. 354-374.

DAHAN-DALMEDICO, A. & PEIFFER, J. (1986). *Une histoire des mathématiques*. Seuil, Paris.

BRASIL, MEC. (2008). *Departamento de Educação Básica/Secretaria de Educação do Estado da Bahia*.

DESCRATES, René. (1998). *La géométrie*. [1 édition 1637] Editions Bibliopolis.

DESCRATES, René. (1991). *La géométrie*. [1 édition 1637]. Editions Jacques Gabay.

DIEUDONNÉ, J. (1974). *Cours de géométrie algébrique*. Presses Universitaires de France, 2 vol.

DIEUDONNÉ, J. (1990). *A formação da Matemática Contemporânea*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

DJEBBAR, Ahmed. (2005). *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Vuibert Adapt, Paris, p. 25.

DORIER, J.-L. (1997). Géométrie - Vecteurs - Algèbre linéaire - Point de vue historique et questions didactiques. *Séminaire DIDIREM*. Université de Paris 7.

DORIER, J.-L. (2000). *Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions*. Cahiers du Laboratoire Leibniz-IMAG Document disponible en ligne : <http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers>. Page consultée le 12 octobre 2007.

DORIER, J.-L. (2004). Panorama des mathématiques dans l'éducation française « De la maternelle à l'université ». Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques (CFEM). <http://www.cfem.asso.fr/sysedfr.html>. Page consultée le 04 octobre 2008.

DOUADY, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. (Thèse d'Etat). Université Paris 7.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 7, n° 2, Grenoble, La pensée sauvage, p. 5-31.

DOUADY, R. (1993). *L'ingénierie didactique, un moyen d'organiser pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage*. IREM, Paris VII.

DUVAL, R. (1988). Graphiques et Équations : l'Articulation de deux registres. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Volume 1, p. 235-253, IREM de Strasbourg.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. IREM de Strasbourg, n°5, p.37-65.

ESMENJAUD-GENESTOUX, F. (2000). *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*. Thèse de 3ème cycle Université Bordeaux 1 - DAEST

ESMENJAUD-GENESTOUX, F. (2002). Les assortiments didactiques. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue (eds). *Actes de la 11e Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. Corps- du 21 au 30 août 2001. Grenoble : La Pensée Sauvage éditions. 177-186.

ESTABLET, R. ; FAUGUET, J. L. ; FELOUZIS, G. ; FEUILLADIEU, S. ; VERGÈS, P. (2005). *Radiographie du peuple lycéen. Pour changer le lycée*. ESF, Paris

FARIAS, L. M. S. & BARBOZA, M. (2003). De que maneira os alunos-professores de Matemática percebem a influência das disciplinas pedagógicas em seu desenvolvimento

professionnel: Concepções e práticas de ensino - uma experiência num contexto de formação inicial. *Actes VI Semana de Mobilização Científica - SEMOC 2003*. Salvador: CEPEX, 2003. v. 1. p. 225-240.

FLAMENT, D. (2003). *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*. Paris, CNRS Éd. (CNRS Histoire des Sciences).

Fractale Maths T^{erm} S – Enseignement obligatoire - Edition spéciale pour l'enseignant, Bordas.

Fractale Maths 1^{re} S – Programme 2001 - Edition spéciale pour l'enseignant, Bordas.

Fractale Maths 2^{de} – Programme 2000 - Edition spéciale pour l'enseignant, Bordas.

FREITAG, B. (1979). Política educacional: uma retrospectiva histórica. In: *Escola, estado e sociedade*. 3 ed. São Paulo: Cortez & Moraes, p. 43-69.

GIORDAN, A. & DE VECCHI, G. (1989). *L'enseignement scientifique, comment faire pour que "ça marche" ?* Z'Editions.

GIORDAN, A., GUICHARD, J et F. (1997). *Des idées pour apprendre*. Z'éditions,

GIORDAN, A & PELLAUD, F. (1999). État de l'enseignement des sciences. Paru dans les *Actes du Conseil de l'Europe*, LDES.

GOSSIN, P. (2006). Evolutions des didactiques au regard des manuels scolaires : du manuel papier au manuel numérique. *Colloque international de Montréal du 11 au 14 avril 2006 « Le manuel scolaire d'ici et d'ailleurs »*.

HILBERT, D. (1953). *Fundamentos de la Geometria*. Tradução de Francisco Cebrian. Madrid: Instituto Jorge Juan.

HILBERT, D. (1995). *Les fondements de la géométrie*, rééd. Gabay (1995), p. 159-167

HOUZEL, Christian. (1979). Histoire des mathématiques et enseignement des mathématiques. *Histoire des mathématiques et épistémologie*. Bulletin inter IREM n° 18.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. (1996). *Dicionário básico de filosofia*. 3.ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed.

JEAN-DAUBIAS, S. (2000). Pépite: un système d'assistance au diagnostic de compétences, In <http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=4e61242d7699f4ce>. Page consultée le 21 juin 2008.

JOHSUA, S. & DUPIN, J.J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques* ; PUF, Paris.

Journal Officiel, 2 septembre 2004 - Décret n°2004-922 du 31 août 2004 relatif au prix du livre scolaire. - L'alinéa 4 de l'article 3 de la loi du 10 août 1981.

LABORDE C. (1989). Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Actes de la 13^e conférence internationale Psychology of Mathematics Education*. Paris.

LAFONT, Yves. Petit Panorama de la Culture Mathématique. <http://iml.univ-mrs.fr/~lafont/PPCM.html>. Page consultée le 16 avril 2007.

LAVE, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge University Press.

Le Petit Larousse Illustré. (2004). Paris.

Lexilogos 2002-2009. -Dictionnaire français. <http://www.cnrtl.fr/definition/pratique>. Page consultée le 18 septembre 2008.

MALDAME, Jean-Michel. (1999). Mathématiques, science, culture et philosophie. Publication conjointe des *Actes d'un séminaire de l'Académie*, 12-14 novembre.

MALDAME, Jean-Michel. *Mathématiques, science, culture et philosophie*, <http://biblio.domuni.org/articlesphilo/mathemat/mathemat.htm>. Page consultée le 15 janvier 2009.

MARCEL, J-F (2002). *Revue Française de Pédagogie*. n° 138, 5-7.

MARIOTTI, M.A. (1996). *The interaction between images and concepts in geometrical reasoning*. PhD Thesis, Università di Pisa, Dipartimento di Matematica.

MENSOURI, D. (1994). *Essai de délimitation en termes de problématiques des effets de contrat et de transposition : le cas des relations entre droites et équations dans les classes de Seconde et de Première*. (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble.

MORENO, J. (2003). Articulation entre cadres et registres pour la modélisation par des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique. *Actes du Congrès Européen, ITEM, IUFM de Reims*.

ORTIGÃO, Maria Isabel. (2005). *Currículo de Matemática e desigualdades sociais*. Rio de Janeiro: PUC-Rio. (Tese de doutorado não publicada).

Parecer CNE/CES 1.302/2001 – Homologado Despacho do Ministro em 4/3/2002, publicado no Diário Oficial da União de 5/3/2002, Seção 1, p. 15.

PELLAUD, F. (1999). *Repenser l'enseignement des sciences dans une optique d'éducation à la citoyenneté*, A paru dans les actes du Conseil de l'Europe.

PERRENOUD, PH. (1994) *La formation des enseignants entre théorie et pratique*, Paris, L'Harmattan.

PERRENOUD, PH. (1996) Rôle de la formation des enseignants dans la construction d'une discipline scolaire : transposition et alternance, in Billi, E. et al (dir.) *Education physique et sportive. La formation au métier d'enseignant*, Paris, Editions de la Revue Education physique et sport, Dossiers EPS n° 27, pp. 49-60.

PERRENOUD, PH. (1998) De l'alternance à l'articulation entre théories et pratiques dans la formation des enseignants, in Tardif, M., Lessard, C. et Gauthier, C. (dir.). *Formation des maîtres et contextes sociaux. Perspectives internationales*, Paris, PUF, pp. 153-199.

PERRIN-GLORIAN, M. J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*, Thèse de doctorat d'Etat de Didactique des Mathématiques, Université Paris VII.

Rapport RECORD http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-cienceeducation_fr.pdf. Page consultée le 11 novembre 2008.

RAUSCHER, Jean-Claude (Dir). (2005). *Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM. Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs*. Collection : IREM de Strasbourg (Strasbourg les 30, 31 mai et 1er juin 2005).

RODITI, E. (2005). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. *Séminaire du LEMME* (Laboratoire d'études des méthodes modernes d'enseignement) de l'université Paul Sabatier, Toulouse (France).

ROGALSKI M. (2001). *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, organisée par l'équipe DIDIREM.

ROGALSKI M. (2002). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady, In *Actes de la journée en hommage à Régine Douady – 14 Juin 2001*, I.R.E.M. Université Paris VII.

ROMANELLI, O.O. (1993). *História da educação no Brasil*. 15^a ed. Petrópolis: Vozes,.

ROWAN, Hamilton William. (1834). *On Conjugate Functions, or Algebraic Couples, as tending to illustrate generally the Doctrine of Imaginary Quantities and so confirming the Results of Mrs Graves respecting the Existence of Two independent Integers in the complete expression of an Imaginary Logarithm*. New British Association Report (1834), p.519-523 ; MP3, p.97-103.

SESIANO, Jacques. (1999). *Une introduction à l'histoire de l'algèbre – Résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, p.59.

SILVA, C. (1993). O desenvolvimento da Geometria Analítica e a influência de Descartes e Euler na obra de Auguste Comte. *Bol.Soc.Paran.Mat.* v. 14, n. 1/2 p. 51-77.

TATON, R. (1969). *Histoire du calcul*. Cinquième édition. Presses Universitaires de France. Que sais-je? n°198 - 1969

VAN DER MAREN, J-M. (1995). *Méthodes de recherche pour l'éducation* ; De Boeck, Bruxelles.

VEIGA, I.P.A. (1994). *A prática pedagógica do professor de Didática*. 3.ed.Campinas, SP: Papyrus.

- VERGNAUD, G. (1981). *L'Enfant, la mathématique et la réalité*, P. Lang, Berne.
- VERGNAUD, G. (1988). Question de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. (1), p. 33-35.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. vol.10 n°2-3, pp.133-170.
- VERGNAUD, G. (1996). La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (pp. 197-242). Lausanne: Delachaux & Niestlé.(Republié de *Recherche en didactique des mathématiques*, 10, (2-3) 133-170 , 1990)
- VERGNAUD, G. (2003). La conceptualisation clef de voûte des rapports entre pratique et théorie. In *Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants*. Actes de la DESCO. CRDP de l'Académie de Versailles, p 48-57. Suivi de Table ronde p 73-77
- VERGNAUD, G. (2003). *Pratiques des élèves, pratiques des enseignants*. <http://www.pedagogy.eu/vergnaud.htm>. Page consultée le 10 juin 2007.
- VERMERSCH, P. (2003). *L'entretien d'explicitation*. Issy-les –Moulineaux : ESF.
- WERNECK, A. P. T. (2001). Euclides roxo e a gênese dos programas da reforma francisco campos. In: XII jornadas argentinas de historia de la educación matemática.

ANNEXES

INDEX DES ANNEXES

Annexe 1 - Quelques mots sur l'histoire du système éducatif brésilien	396
Annexe 2 - Vue générale de l'actuel système éducatif brésilien	298
Annexe 3 - Défis de l'actuel système éducatif brésilien	300
Annexe 4 - Les programmes au Brésil	302
Annexe 5 - Une application des programmes toujours difficile au Brésil	303
Annexe 6 - Une vue générale des programmes au collège au Brésil	304
Annexe 7 - Les contenus des mathématiques pour la troisième	305
Annexe 8 - Une vue générale des programmes au lycée au Brésil	307
Annexe 9 - Un programme pour le lycée	307
Annexe 10 - Une place accordée à l'articulation des domaines, des thèmes et des secteurs	307
Annexe 11 - Les mathématiques pour le lycée	309
Annexe 12 - Les séances	312
Annexe 12.1 Séance-C21	312
Annexe 12.2 Séance-L05	320
Annexe 13 - Les entretiens	338
Annexe 13.1 Entretien avec P1	338
Annexe 13.2 Entretien avec P2	349
Annexe 14 - Les demandes	365
Annexe 14.1 Demande d'autorisation de filmer	365
Annexe 14.2 Demande auprès du Proviseur	366
Annexe 14.3 Demande auprès du Principal	367
Annexe 14.4 Demande auprès du Professeur	368
Annexe 14.4.1 Demande auprès du Professeur	369
Annexe 15 - La progression de P1	370
Annexe 16 - Le cahier de la classe (Troisième)	371
Annexe 17 - La progression de P2	373
Annexe 18 - Le cahier de la classe (Seconde)	374
Annexe 19 - Extrait du cahier de E8	376
Annexe 20 - Extrait du cahier de E12	377

1 Quelques mots sur l'histoire du système éducatif brésilien

Les analystes de l'éducation brésilienne affirment que c'est seulement entre la fin de l'Empire, au commencement de la République, qu'on a créé une politique éducative d'État, fruit de la puissance de l'État. Jusqu'à cette époque, la politique éducative était faite presque exclusivement, dans le contexte de la société civile, par l'Église Catholique. Pendant la Période Coloniale (1500-1822), l'éducation n'assurait que les relations portugaises avec les Indiens et les esclaves Noirs. À la fin de cette période et pendant l'Empire (1822-1889), s'est instituée une structure de classes sociales, et l'éducation, conformément à l'idéologie, commence à reproduire aussi la structure des classes. À partir de la Première République (1889-1930), elle est progressivement valorisée comme instrument de reproduction des relations de production Freitag, (1979).

Jusqu'aux années 20, l'éducation brésilienne est apparue comme un instrument de mobilité sociale. La classe qui détenait le pouvoir économique et politique l'utilisait comme un signe de classe. Les classes moyennes la recherchaient comme la principale voie d'ascension sociale, de prestige et d'intégration avec la classe dominante. La société de cette époque, n'avait pas encore une fonction, une vocation d'« éducateur » pour les niveaux moyens et primaires ; elle : ne retenait pas l'attention de l'État, sauf formellement. La possibilité d'une école moyenne, par exemple, était très minime, se restreignant, pratiquement, à quelques initiatives du secteur privé, (Romanelli,1993). Dans la transition d'une société oligarchique à une société urbaine-industrielle, on a redéfini les structures du pouvoir et l'effort pour l'industrialisation a promulgué des changements substantiels dans l'éducation. On a créé le Ministère de l'Éducation et de la Santé, en 1930²⁶. L'université s'est structurée par la fusion de plusieurs institutions isolées d'enseignement supérieur. Un système national d'enseignement jusqu'alors inexistant s'est créé.

La Constitution de 1934 a été la première à établir la nécessité d'élaboration d'un Plan National d'Éducation, lequel coordonnait et supervisait les activités d'enseignement à tous les niveaux. Les formes de financement de l'enseignement officiel ont été réglementées à partir des quotas fixés par la Fédération, aux États et aux Villes, en fixant encore les compétences des niveaux administratifs. La gratuité et l'obligation de l'enseignement primaire se sont instaurées et l'enseignement religieux a été rendu facultatif.

La Constitution de 1937 a absorbé une bonne partie de la précédente. Dans cette nouvelle Constitution ont été présents deux nouveaux paramètres : l'enseignement professionnel avec l'obligation pour les industriels et les syndicats de créer des écoles d'apprentissage, dans chaque secteur une spécialisation est réservée aux fils des fonctionnaires ou des syndiqués. Ce fut encore en 1937 que fut déclarée l'obligation d'introduire l'éducation morale et politique dans les curriculums. Donc, progressivement, la société brésilienne a commencé à prendre conscience de l'importance stratégique de l'éducation pour assurer et consolider les changements économiques et politiques qui étaient entrepris.

Ainsi, en 1933, selon la SEEC/MEC²⁷, les écoles primaires comptaient 21.726 établissements d'enseignement officiels (États et municipaux) et 6.044 privés. En 1945, ils étaient respectivement 33.423 et 5.908, et le nombre d'élèves inscrits s'élevait à 1.739.613

²⁶ Dans cette époque le Ministère de l'Éducation et le Ministère de la Santé sont rassemblés dans une même structure.

²⁷ Synopsis Rétrospective de l'enseignement au Brésil, SEEC/MEC, cité par Freitag, op cit., p. 45.

dans les établissements publics et 368.006 dans les établissements privés. En 1945, on comptait respectivement, 2.740.755 et 498.085 établissements.

Jusqu'à la moitié du XX^e siècle, une grande partie des Brésiliens était encore analphabètes. En 1900, la population brésilienne était d'environ 17.438.434 d'habitants, avec 65,3% des jeunes de plus de quinze ans qui ne savaient ni lire, ni écrire. En 1950, la population était passée à 51.944.397 habitants, et la moitié des habitants de plus de quinze ans, étaient analphabètes. Ce que l'on note c'est que l'intensification du processus d'urbanisation et la croissance démographique, combinées avec la croissance du revenu par habitant, se sont accompagnées de la diminution du taux d'analphabétisme. Ainsi, l'urbanisation et l'industrialisation ont été des facteurs qui ont influencé la scolarisation de la population.

La Constitution de 1946 avait fixée la nécessité de nouvelles lois éducatives se substituant aux précédentes, considérées comme dépassées pour le nouveau boum économique et politique que le pays s'apprêtait à vivre. La fin de la Seconde Guerre mondiale a aussi imprimé au pays des nouvelles nécessités que l'éducation ne pouvait ignorer. C'était une période de transition marquée par d'intenses manifestations concernant les voies du système éducatif.

Après de nombreux débats ayant eu lieu au cours de cette période, la Loi n.° 4.024 a été approuvée en 1961, établissant les directives et les bases de l'éducation nationale. Leurs dispositifs les plus significatifs étaient :

Le secteur public comme le secteur privé ont le droit de prodiguer l'enseignement à tous les niveaux. L'État peut subventionner les initiatives privées de services scolaires. Une flexibilité d'organisation du curriculum, ce qui ne veut pas dire un programme unique sur tout le territoire national. A partir de cette période, le pays a connu les plus grands taux d'expansion d'alphabétisation.

Du point de vue de son organisation interne, l'actuel système brésilien d'enseignement que nous présenterons plus loin est la résultante des modifications importantes, introduites en 1971, 1988 et 1996. L'actuel système comporte trois niveaux qui accueillent toutes les tranches d'âges : enseignement primaire, enseignement secondaire et enseignement supérieur.

L'enseignement primaire (de 0 à 10 ans) englobe les écoles maternelles (de 0 à 5 ans) et élémentaires (de 6 à 10 ans). L'enseignement secondaire (de 11 à 18 ans) est constitué du collège (de 11 à 14 ans) et du lycée (de 15 à 18 ans). L'enseignement supérieur est destiné aux jeunes de plus de 18 ans.

Au Brésil, l'enseignement destiné aux enfants de 0 à 3 ans (crèches) et de 4 à 6 ans (pré-escola) est maintenant qualifié de Education Infantile. L'ensemble de l'école élémentaire et du collège est appelé « l'enseignement fondamental », et le lycée est appelé « l'enseignement moyen ». L'éducation Infantile, l'enseignement fondamental et l'enseignement moyen constituent le bloc qu'on appelle « l'Éducation de Base ».

L'enseignement fondamental, dont l'objectif premier est la formation basique des citoyens, dure neuf²⁸ ans et est obligatoire et gratuit dans les écoles publiques à partir de sept ans, avec inscription facultative à six ans. L'enseignement moyen, est l'étape finale de l'éducation de base, objective de consolidation et d'approfondissement des objectifs acquis

²⁸La majorité des écoles maintient encore la durée de huit ans dans l'Enseignement Fondamental, mais le mouvement d'élargissement a déjà commencé dans beaucoup d'états et de villes.

dans l'enseignement fondamental. Il dure au minimum trois ans, avec une admission à partir de quinze ans. Bien qu'actuellement l'inscription à ce niveau d'enseignement ne soit pas obligatoire, la Constitution Fédérale de 1988 prévoit une extension progressive de l'obligation et la gratuité de son offre.

L'éducation supérieure a pour finalités : stimuler la création culturelle et le développement de l'esprit scientifique et de la pensée réfléchie ; stimuler le travail de recherche scientifique, en visant le développement de la science, de la technologie et de la création, la diffusion de la culture, et, de cette manière, développer l'interaction de l'homme avec le milieu où il vit. Elle inclut des cours séquentiels dans les divers champs des savoirs, cours de graduation, de « pós-graduação » et d'extension. On accède à l'éducation supérieure à partir de 18 ans, et le nombre d'années d'études varie conformément aux cours et à leur complexité.

Le gouvernement fédéral entretient au moins une université fédérale dans chaque État. Chaque État entretient aussi au moins une université d'État, qui porte généralement le nom de l'État et a ses campus repartis dans plusieurs villes de l'État.

En raison des nombreuses demandes d'enseignement supérieur et du manque de places, les Facultés et les Universités du Brésil, aussi bien publiques que privées, imposent un concours d'entrée appelé « vestibular ».

Le système éducatif brésilien a connu de grandes transformations ces dernières années. Le nombre d'individus ayant accès à l'enseignement s'est considérablement accru et le niveau moyen de scolarisation de la population est plus élevé. Ces modifications ont rendu facile la comparaison du système éducatif brésilien avec celui d'autres pays, et plus particulièrement avec celui de la France qui présente un schéma semblable.

2 Vue générale de l'actuel système éducatif brésilien

Selon le SIC29, le développement récent du système scolaire brésilien est inséré dans le processus de consolidation démocratique, marqué par une nouvelle disposition institutionnelle qui se caractérise par le degré élevé d'autonomie des trois niveaux du gouvernement (législatif, exécutif et judiciaire) et par la décentralisation des politiques scolaires. La Constitution Fédérale de 1988, avec l'Amendement Constitutionnel n.º 14, de 1996 et de la nouvelle « Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional »- LDB, instituée de par la loi nº 9394, de 1996, sont les grandes lois qui réglementent l'actuel système éducatif brésilien.

L'actuelle structure du système éducatif brésilien, définie par des lois, englobe l'éducation de base - formée par l'éducation infantile, l'enseignement fondamental et l'enseignement moyen - et l'éducation supérieure. Conformément à l'actuelle législation, il est du devoir des villes de s'occuper prioritairement de l'enseignement fondamental et de l'éducation infantile. Il est du devoir des États et du District fédéral, de s'occuper de l'enseignement fondamental et moyen. Le gouvernement fédéral, à son tour, exerce, en ce qui concerne le système éducatif, les fonctions redistributives et supplémentaires, en ce qui

²⁹Cet organisme fait partie du «Setor Educacional do Mercosul » (SEM), créé à partir de protocole signé par les ministres de l'Éducation, membres du Mercosul. Le SEM a donné naissance au Comité Coordinateur Technique du Système d'Information et Communication (SIC). Le SIC a, entre autres, comme objectif, la diffusion de sujets scolaires honorant la communauté économique des pays de l'Amérique du Sud – Mercosud, qui signifie littéralement Marché Commun du Sud.

concerne le devoir de prêter assistance technique et financière aux États, au District Fédéral et aux Villes. En outre, il est aussi de son devoir d'organiser le système d'éducation supérieure.

L'éducation infantile, première étape de l'éducation de base, est offerte dans les crèches, pour les enfants jusqu'à 3 ans et dans des « pré-escolas », pour les enfants de 4 à 6 ans. L'enseignement fondamental, avec durée minimale de neuf ans, est obligatoire et gratuit à l'école publique. Il est du devoir des pouvoirs publics de garantir son offre à tous, y compris à ceux qui n'y ont pas eu accès à l'âge requis. Selon la LDB, c'est le devoir des parents ou des responsables, d'effectuer l'inscription des mineurs à ce niveau d'enseignement, à partir de 7 ans. L'enseignement moyen, étape finale de l'éducation de base, a une durée minimale de trois ans et se consacre à la formation générale des lycéens, pouvant inclure des programmes de préparation générale au travail et, facultativement, la qualification professionnelle. L'Amendement Constitutionnel n.º 14 en prévoit progressivement la généralisation.

Au delà de l'enseignement organisé par des lois, il y a aussi l'éducation « special » : l'éducation spécialisée, pour les « portadores de necessidades especiais » (handicapés) ; l'éducation des jeunes et des adultes qui n'ont pas eu accès à l'enseignement fondamental et moyen à l'âge recommandé ou qui ont eu un manque de continuité dans ces études. L'éducation professionnelle, intègre les différentes formes d'éducation, au travail, aux sciences et à la technologie, avec l'objectif de conduire vers un développement permanent d'aptitudes à la vie productive. L'enseignement technique est donné sous une forme indépendante de l'enseignement moyen régulier. Celui-ci, néanmoins, est requis pour l'obtention du diplôme de technicien.

L'éducation supérieure inclut les Licences dans les différents secteurs professionnels ouverts aux candidats qui ont terminé l'enseignement moyen ou l'équivalent et ont été classés dans des processus sélectifs nommé concours « vestibular ». De même, ce niveau d'enseignement, la « pós-graduação », qui comprend les programmes de Diplôme d'Etudes Approfondies, le Doctorat et des cours de spécialisation. Une innovation prévue dans la nouvelle LDB est la création de cours séquentiels par champ du savoir ouverts à des candidats qui répondent aux conditions établies par les Institutions d'Enseignement Supérieur.

L'éducation supérieure supervise toutes les institutions d'enseignement supérieur. Il comprend le premier cycle, d'une durée de 3 à 6 ans et les cycles supérieurs, qui varient de 2 à 3 ans pour la maîtrise, et de 3 à 4 ans pour le doctorat.

Le Ministère de l'Éducation (MEC) supervise tout le système éducatif. Au Brésil le système éducatif est décentralisé et composé d'institutions publiques et d'établissements privés, tous contrôlés par le MEC, secondé lui-même par le Conseil National de l'Éducation.

La constitution brésilienne garantit l'éducation publique et gratuite à tous les niveaux et engage sa responsabilité envers les États, le district fédéral et les municipalités.

L'année scolaire se divise en deux semestres : le premier commence en mars et s'achève à la mi-juillet, le second commence en août et s'achève à la mi-décembre. Les élèves suivent au minimum quatre heures de classe par jour, soit par an 800 heures de cours et 200 jours de classe, depuis l'école élémentaire jusqu'au lycée.

Enfin, pour pouvoir se présenter aux examens, l'élève doit avoir un minimum de 75 % de présence dans chaque discipline. Les vacances d'hiver ont lieu en juillet et celles d'été en décembre.

3 Défis de l'actuel système éducatif brésilien

Selon l'Institut Brésilien de Géographie et des Statistiques (IBGE), le taux d'analphabétisme est passé de 23% en 1985 à 10% environ en 2004. Les efforts récents ont été très importants. Aujourd'hui, 99% des enfants entre 7 et 14 ans sont scolarisés. La scolarité secondaire a presque doublé dans les dix dernières années. Le Brésil affiche des taux de scolarité supérieurs à 90% pendant les 9 années d'études consécutives, ce qui montre que la majorité des enfants a la possibilité de rester scolarisés.

Les derniers résultats du Recensement Scolaire de 2006 comptabilisent, approximativement, 55.9 millions d'inscriptions et 203.9 mille établissements scolaires offrant aux différentes étapes, les modalités d'enseignement de l'éducation basique. Les inscriptions sont faites, principalement, par les administrations municipales (44.8%) et par l'État (41.7%).

Même si des efforts notables ont été faits en terme d'alphabétisation et d'accès à l'enseignement, de nombreux problèmes persistent : échec scolaire, redoublement et illettrisme, y compris parmi les personnes scolarisées (MEC/SEF, 1998).

Le Brésil a le troisième plus haut taux de redoublement scolaire du monde, derrière les pays pauvres de l'Afrique comme le Gabon ou le Rwanda. Ce taux de redoublement élevé coûte cher à l'État brésilien : 20% des dépenses d'éducation sont destinées aux redoublants. En moyenne, les élèves brésiliens passent 2,8 années à redoubler et seulement 80% d'entre eux terminent le premier trimestre d'une année scolaire. A l'école primaire, un élève sur quatre redouble chaque année.

D'autres gros problèmes brésiliens concernent les enseignants : rémunération, emploi du temps, formation etc. En ce qui concerne la formation, celle-ci pose des problèmes qui se répercutent de façon directe et des plus alarmante dans le système éducatif. Nous pouvons constater ce fait dans le dernier rapport de l'Institut National d'Études et de Recherches Scolaires Anísio Teixeira (Inep/MEC) qui compare les résultats des rapports du Système National d'Évaluation de l'Éducation de Base (Saeb) depuis 1995. L'Inep présente les résultats du Saeb des élèves de CM2 (4^a série) et Troisième (8^a série) de l'enseignement fondamental et de la Terminale (3^o ano) de l'enseignement moyen, en Langue Portugaise et en Mathématiques. Dans cette dernière évaluation, participèrent, l'échantillon du Saeb, soit plus de 190 000 élèves et près de 6 000 écoles parmi les 27 unités de la Fédération.

D'après l'analyse des résultats du dernier Saeb, l'augmentation des acquisitions basiques en mathématiques se révèle de plus en plus insuffisant :

Tableau 1 : Total d'élèves du dernier niveau de chaque cycle de l'enseignement de base de 1995 à 2005 SEAB(2005).

Années	N° d'établissements	Total d'élèves par niveau			
		CM2	Troisième	Terminale	Total
1995	2.839	30.749	39.482	26.432	96.663
1997	1.933	70.445	56.490	40.216	167.196
1999	6.798	107.657	89.671	82.436	279.764
2001	6.935	114.512	100.792	72.415	287.719
2003	5.598	92.189	73.917	52.406	218.521
2005	5.490	83.929	66.353	44.540	194.822

Tableau 2 : Moyennes de compétence des élèves du dernier niveau de chaque cycle de l'enseignement de base évaluées en Portugais et en mathématiques de 1995 à 2005 SEAB(2005).

Niveau	Discipline	1995	1997	1999	2001	2003	2005
CM2 ³⁰	Portugais	188.3	186.5	170.7	165.1	169.4	172.3
	Mathématiques	190.6	190.8	181.0	176.3	177.1	182.4
Troisième ³¹	Portugais	256.1	250.0	232.9	235.2	232.2	231.9
	Mathématiques	253.2	250.0	246.4	243.3	245.0	239.5
Terminale ³²	Portugais	290.0	283.9	266.6	262.3	266.7	257.6
	Mathématiques	281.9	288.7	280.3	276.7	278.7	271.3

Dans les rapports du SEAB les moyennes sont présentées selon l'échelle de compétence, qui varie entre 0 et 500. Chacune des disciplines a une interprétation spécifique de l'échelle, seulement pour les trois séries évaluées. Les moyennes de compétence de l'échelle indiquent les degrés distincts de développement de capacités, de compétences et d'acquisition de connaissances par les étudiants au cours des années d'étude. En mathématiques, par exemple, selon le SEAB, la moyenne de 239.38 (moyenne nationale de troisième en zone rurale) indique que l'étudiant réussit, entre autres performances, à localiser des données dans des tableaux plus complexes, identifier un graphique de colonnes correspondant à des nombres positifs et négatifs, convertir des mesures de poids et calculer le périmètre et le secteur de figures, etc.

³⁰Ils incluent les écoles fédérales et agricoles. Les fédérales dans les années de 1995, 2003 et 2005. Les agricoles dans toutes les années, néanmoins en 1997 elles n'incluent pas la Région Nord et en 1999 et 2001 seulement des États du Nord-est, de « Minas Gerais » et de « Mato Grosso ».

³¹Il n'inclut pas des écoles agricoles, inclut les fédéraux en 1995, 2003 et 2005.

³²Il n'inclut pas des écoles agricoles, inclut les fédéraux en 1995, 2003 et 2005.

4 Les programmes au Brésil

Au Brésil, la rédaction des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire est sous la responsabilité du CNE³³ (Conseil National d'Éducation). Celui-ci confie la tâche à la CEB³⁴ (Commission d'Éducation de Base) qui regroupe l'ensemble des acteurs de l'enseignement des mathématiques du primaire à l'université. Les programmes actuellement en vigueur s'inscrivent dans la nécessité de la construction d'une référence curriculum nationale pour tout l'enseignement qui puisse être discutée et traduite dans des propositions régionales, dans les différents états, dans les villes brésiliennes, dans des projets éducatifs, dans les écoles et dans les classes. Ce qui peut garantir à tout élève de toute région du pays, le droit d'avoir accès aux connaissances indispensables pour la construction de sa citoyenneté.

En fait, les programmes actuels de mathématiques sont le résultat d'une réécriture générale de tous les derniers programmes en vigueur dans chaque état en vue d'une meilleure lisibilité et d'une fédération des contenus. Les programmes en vigueur sont ceux de 1998. Ils sont présentés en cinq parties :

Conception d'enseignement et d'apprentissage ;

- ✓ Objectifs ;
- ✓ Contenus ;
- ✓ Critères d'évaluation ;
- ✓ Orientations didactiques

Ces parties précisent le sens et les limites à donner aux contenus en précisant les compétences exigibles des élèves avec une correspondance entre contenus et compétences exigibles. Donc, une présentation des finalités, des objectifs et des options épistémologiques et didactiques que ces programmes ambitionnent de prendre en charge :

« Les objectifs et les contenus présentés dans les Paramètres Curriculums Nationaux sont organisés en quatre cycles, de façon que chacun corresponde à deux niveaux de l'enseignement fondamental. Ce regroupement a comme finalité d'éviter l'excessive fragmentation des objectifs et des contenus et de rendre possible un accès moins parcellaire des connaissances, permettant les approches successives nécessaires pour que les élèves se les approprient d'eux mêmes³⁵ ». (Brésil. Secrétariat de l'Éducation. Paramètres Curriculums Nationaux : Mathématiques/Secrétariat d'Éducation Fondamentale. - Brasília : MEC /SEF, 1998. p. 52)³⁶

Cet extrait montre bien une préoccupation des auteurs de programmes de faire en sorte que les contenus ne soient pas abordés de façon fragmentée. Mais en ce qui concerne

³³ Traduction de l'auteur : CNE (Conselho Nacional de Educação).

³⁴ Traduction de l'auteur : CEB (Câmara de Educação Básica).

³⁵ Souligné pour l'auteur.

³⁶ Traduction de l'auteur : Os objetivos e conteúdos apresentados nos Parâmetros Curriculares Nacionais estão organizados em quatro ciclos, sendo que cada um corresponde a duas séries do ensino fundamental. Esse agrupamento tem como finalidade evitar a excessiva fragmentação de objetivos e conteúdos e tornar possível uma abordagem menos parcelada dos conhecimentos, que permita as aproximações sucessivas necessárias para que os alunos se apropriem deles. (Brésil. Secrétariat d'Éducation. Paramètres Curriculums Nationaux : Mathématiques/Secrétariat d'Éducation Fondamentale. - Brasília : MEC /SEF, 1998. p. 52).

les programmes de mathématiques nous nous demandons ce que les programmes proposent pour aboutir à cette recommandation. Mais il ne faut pas oublier que la mise en œuvre des programmes au Brésil est encore problématique.

5 Une application des programmes toujours difficile au Brésil

Une réforme de l'enseignement a été instaurée dans tout le territoire brésilien en 1931. Un nouveau programme de mathématiques est imposé par l'arrêté ministériel du 30 juin 1931, pris en conformité de l'art. 10 du décret n° 19.890 du 18 avril 1931. Les Mathématiques, comprennent désormais l'Arithmétique, l'Algèbre et la Géométrie. L'obligation des mathématiques plongea dans la perplexité les professeurs et élèves des établissements secondaires. Beaucoup de critiques apparurent autour de cette réforme. L'une d'entre elles se distingue : celle d'un professeur, défenseur des humanités classiques, le Père Arlindo Vieira. Celui-ci accuse les programmes de la Réforme Francisco Campos d'encyclopédisme.

Se défendant de ces critiques, l'auteur des programmes des mathématiques de la Réforme, Euclides Roxo, déclare qu'ils sont en accord avec le mouvement rénovateur international des mathématiques, dans lequel les pays les plus "civilisés", comme la France, l'Angleterre, l'Allemagne et les Etats-Unis, sont engagés³⁷.

Les mots du Père Arlindo Vieira, concernant la comparaison des programmes brésilien et français, relatifs à la sixième et la cinquième, sont clairs. "Seule une partie correspondant à l'arithmétique est plus développée que celle des programmes français relative aux mêmes années. Ils englobent tout le programme d'arithmétique de quatrième"³⁸. Même en considérant que la France a été engagée dans ce mouvement, et que Euclides Roxo s'inspirant de celui-ci pour l'élaboration des programmes brésiliens, les programmes de la Réforme Francisco Campos ont continué à en être considérés comme encyclopédiques.

Il avait aussi une autre critique assez sensée autour des programmes des mathématiques élaborés par Euclides Roxo,. Elle est formulée par son collègue, professeur universitaire du collège Pedro II, Almeida Lisboa. Celui-ci pense que les programmes élaborés par Euclides Roxo sont enfantins et dignes d'éduquer "des jardiniers analphabètes"³⁹.

L'un accusait le programme de Mathématiques d'être enfantin et l'autre d'encyclopédique. L'un disait que les programmes étaient pour éduquer des jardiniers, l'autre disait que nos élèves ne réussiraient jamais à suivre les programmes à cause de leur complexité, Werneck, (2001). C'était donc ce climat qui a accompagné le développement des programmes des mathématiques brésiliens jusqu'à aujourd'hui.

³⁷ Mots de Euclides Roxo, in *Jornal do Comércio*. 1930.

³⁸ Père. Arlindo Vieira. *O Problema do ensino Secundário*. 1935.

³⁹ Joaquim Almeida Lisboa. *Os Programas de matemática do Colégio Pedro II*. In *Jornal do comércio*.

6 Une vue générale des programmes au collège au Brésil

Dans cette analyse nous nous basons sur la publication du MEC⁴⁰(1998). (Paramètres Curriculums Nationaux Mathématique) pour le collège, à travers le Secrétariat de l'Éducation Fondamentale.

Les programmes présentent, initialement, une brève analyse du développement des mathématiques au Brésil, puis des considérations sur les connaissances mathématiques et sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au collège. Ensuite, nous trouvons les objectifs généraux des mathématiques au collège, les contenus des mathématiques, l'évaluation des mathématiques et les principes de base du travail à réaliser au collège.

Les idées de base présentes dans les Paramètres Curriculums Nationaux des mathématiques reflètent plus qu'un simple changement dans les contenus. « *Elles présentent un changement de philosophie de l'enseignement et de l'apprentissage* ». Les programmes indiquent la nécessité de changements urgents, non seulement dans ce qui est enseigné mais, principalement, dans « *comment enseigner* », évaluer et organiser les situations d'enseignement et d'apprentissage.

Les programmes signalent aussi le rôle des mathématiques au collège, en tant que moyen pouvant favoriser la structuration et le développement de la pensée des collégiens. Les mathématiques sont évoquées comme discipline importante pour la formation basique de la citoyenneté des élèves :

« [...] Il est important que les mathématiques jouent, de façon équilibrée et indissociablement, son rôle dans la formation des capacités intellectuelles, dans la structuration de la pensée, dans l'organisation du raisonnement déductif des élèves, dans son application à des problèmes, dans des situations de la vie quotidienne, dans des activités du monde du travail et dans l'aide à la construction de connaissances dans d'autres disciplines du Curriculum. »(Brésil. Secrétariat d'Éducation. Paramètres Curriculums Nationaux : Mathématiques/Secrétariat d'Éducation Fondamentale. - Brasília : MEC /SEF, 1998. p. 29)⁴¹

Les programmes font référence à la formation de base pour l'insertion des personnes dans le monde du travail, à des relations sociales et à la culture, dans le contexte de la société brésilienne. Ils font référence aussi à la pluralité d'ethnies existant au Brésil, à la diversité et à la richesse de la connaissance mathématique que les collégiens possèdent en eux-même et amènent en classe. Les PCN signalent que l'enseignement des mathématiques qui valorise la pluralité socioculturelle des élèves, peut contribuer par la transcendance de son espace social et par sa participation active à la transformation de son milieu.

⁴⁰ Parecer n° 15/98 da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação. Resolução n° 03/98 da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação.

⁴¹ Traduction de l'auteur : « [...] É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. »(Brésil. Secrétariat d'Éducation. Paramètres Curriculums Nationaux : Mathématiques/Secrétariat d'Éducation Fondamentale. - Brasília : MEC /SEF, 1998. p. 29).

Les contenus des programmes apparaissent organisés en quatre blocs :

- ✓ Nombres et opérations ;
- ✓ Espace et formes ;
- ✓ Grandeurs et mesures ;
- ✓ Traitement des informations.

Les programmes du collège sont divisés en deux cycles : cycle 3 (les sixième et cinquième) et cycle 4 (les quatrième et troisième). Dans les paragraphes suivants nous présenterons tout d'abord le tableau des contenus des mathématiques pour la troisième. Ensuite, nous analyserons, de façon générale, les programmes des deux cycles, tout en faisant ressortir les sujets, les thèmes, les domaines qui font appel au **NAG**. Puis nous situerons, de façon générale, le **NAG** dans les programmes au collège. Il nous semble important de signaler qu'à partir des PCN, chaque Etat composant la fédération d'états brésiliens élabore à travers son secrétariat à l'Éducation le plan des contenus de base à aborder pendant l'année scolaire en vigueur. En raison du nombre d'états brésiliens et de nos expériences précédentes, nous nous limiterons au plan des contenus de l'Etat de Bahia. Nous présenterons le plan des contenus de la troisième année qui nous a été fourni par le Secrétariat à l'Éducation de l'Etat de Bahia.

7 Les contenus des mathématiques pour la troisième

Nous présenterons le tableau des contenus mathématiques de base pour la troisième pour l'année scolaire 2008. Ce tableau a été préparé par l'équipe de chaque discipline du Département d'Éducation de Base (DEB) du Secrétariat à l'Éducation de l'Etat de Bahia. Le DEB signale que ce document est le fruit des textes des Paramètres Curriculums Nationaux. En avertissant que les « contenus basiques » sont les connaissances fondamentales et nécessaires pour chaque niveau du collège et du lycée. Le DEB souligne que l'accès à ces connaissances, est indispensable pour la formation de l'élève à chaque niveau de sa scolarité. Le travail pédagogique avec de tels contenus est le devoir de l'enseignant qui pourra ajouter, mais jamais réduire ou supprimer des contenus, car ils sont déjà basiques et, donc, ne peuvent être réduits. Le DEB affirme qu'il ne s'agit pas d'une liste affranchie et isolée des contenus devant être travaillée à chaque niveau du collège:

« Les tableaux indiquent comment les contenus des mathématiques au collège et au lycée s'articulent avec les contenus de structuration de la discipline et le type d'accès théorico-méthodologique qu'ils doivent recevoir et, finalement, à quelles perspectives d'apprentissage ces contenus sont liés. » (Département d'Éducation de Base/Secrétariat de l'Éducation de l'Etat de Bahia. 2008. p.1)⁴²

Le DEB signale que les tableaux de contenus ne se substituent pas à la proposition pédagogique de chaque établissement de l'Etat, ni qu'ils ne doivent pas être confondus avec une conception basée seulement sur le contenu. Ces tableaux apparaissent pour compléter et concrétiser les PCN. Ils focalisent sur le travail pédagogique en mathématiques pour que soit garantie à l'élève, une formation conceptuelle de qualité.

⁴²Traduction de l'auteur : « Os quadros indicam como esses conteúdos se articulam com os conteúdos estruturantes da disciplina, que tipo de abordagem teórico - metodológica devem receber e, finalmente, a que expectativas de aprendizagem estão atrelados. » (Departamento de Educação Básica/Secretaria de Educação do Estado da Bahia. 2008.p.1).

Le DEB note qu'il est de la responsabilité de l'enseignant de réaliser le curriculum dans son plan de travail dans lequel les contenus de base doivent être transformés (dédoublés) en des contenus spécifiques qui seront en fait travaillés en classe. Donc un espace est laissé aux enseignants : l'espace de la création individuelle de chaque enseignant, pour construire et aborder les sujets mathématiques en considérant les contextes historiques, sociaux et politiques, de façon que l'accès aux contenus ait du sens. Et que les élèves des diverses réalités régionales, culturelles et économiques de l'État de Bahia puissent avoir une formation plus homogène. Voici le plan des contenus de troisième :

Tableau 3 : Proposition des contenus.

PROPOSITION DES CONTENUS POUR LES MATHÉMATIQUES - COLLEGE			
ACCES THÉORIQUE MÉTHODOLOGIQUE : Les contenus de base du collège devront être abordés de façon articulée, cette articulation donnant la possibilité d'interrelations et de complémentarité avec des concepts pertinents aux mathématiques. Les tendances méthodologiques indiquées dans les Directives Curriculums des Mathématiques suggèrent des chemins méthodologiques et fournissent des supports théoriques aux contenus proposés à ce niveau d'enseignement, dans une perspective de valorisation des connaissances de chaque élève, acquises, soit aux niveaux précédents, soit par l'élève sous forme intuitive. Ces connaissances et expériences provenant des expériences des élèves, devront être approfondies et systématisées, dans le but de les valider scientifiquement, en les élargissant et en les généralisant. Est spécialement importante, l'utilisation des ressources didactiques-pédagogiques et technologiques comme celle des instruments d'apprentissage.			
NIVEAU	CONTENUS DE STRUCTURATION	CONTENUS DE BASE	EVALUATION En 3^{ème} il est important que l'élève :
3^{ème}	Nombres et Algèbre	Nombres Réels ; Propriétés de radicaux ; Équation du 2 nd degré ; Théorème de Pythagore; Équations Irrationnelles ; Équations Biquadratiques ; Règle de Trois composée.	-Travaille avec des exposants fractionnaires; -Identifie les puissances d'exposants fractionnaires comme un radical et applique les propriétés pour les simplifier ; -Calcule une racine en utilisant la factorisation ; -Identifie des équations du 2 nd degré dans leur forme complète et incomplète, en reconnaissant leurs éléments ; -Détermine les racines d'une équation du 2 nd degré en utilisant différentes méthodes; -Interprète des problèmes dans un langage graphique et algébrique ; -Identifie des équations irrationnelles; -Résolve des équations biquadratiques à travers les équations du 2 nd degré ;
	Grandeurs et mesures	Relations métriques dans le triangle rectangle ; Trigonométrie dans le	-Connaisse et applique les relations métriques et trigonométriques dans le triangle rectangle ; -Utilise le Théorème de Pythagore pour calculer des mesures des côtés d'un triangle rectangle.
	Fonctions	Notion intuitive de Fonction Affine ; Notion intuitive de Fonction Carrée.	-Exprime la dépendance d'une variable par rapport à une autre ; -Reconnaisse une fonction affine et sa représentation graphique, de même sa déclivité par rapport au signe de la fonction -Associe des graphiques à des tableaux qui décrivent une fonction; -Reconnaisse la fonction carrée et sa représentation
	Géométrie	La Géométrie Plaine ; La Géométrie Spatiale ; La Géométrie Analytique ; La Géométrie Non-Euclidienne.	-Vérifie si deux polygones sont semblables, en établissant des relations entre eux ; -Comprenne et utilise le concept de ressemblance des triangles pour résoudre des situations problèmes ; -Connaisse et applique les critères de ressemblance des triangles; -Applique le Théorème de Thalès à dans situations problèmes ; -Calcule des surfaces et des volumes des polyèdres ; -Analyse et discute auto- ressemblance et la complexité infinie d'une fractal.

	Traitement des informations	Notions de Combinaisons ; Notions de Probabilité ; Statistique ; Intérêts Composés.	Développe le raisonnement de combinaison à travers des situations-problème avec des comptages, en appliquant le principe multiplicative; Décrire l'univers des réalisations possibles d'une expérience aléatoire; Calcule les possibilités d'occurrence d'un certain o événement; Résoudre des situations-problème avec des calculs d'intérêts composés.
--	------------------------------------	---	--

8 Une vue générale des programmes au lycée au Brésil

Au Brésil, l'enseignement au lycée, appelé « l'enseignement moyen » (élèves de 15 à 18 ans) est partagé en trois différents niveaux : 1^{ère} année (élèves de 15 à 16 ans, 2^{ème} année (élèves de 16 à 17 ans) et 3^e année (élèves de 17 à 18 ans). Dans aucun de ces niveaux, les élèves ne peuvent choisir leurs matières, il n'y a pas des divisions de l'enseignement en différentes voies. Tous les élèves de l'enseignement moyen doivent étudier, indistinctement, chacun des différents niveaux : le portugais, la littérature, la géographie, l'histoire, la chimie, la physique, la biologie, les sciences civiques et les mathématiques. Certains établissements offrent aussi la possibilité d'étudier l'informatique et les arts.

9 Un programme pour le lycée

Dans cette analyse nous nous basons, sur la publication du MEC⁴³ (1998), Paramètres Curriculums Nationaux pour l'Enseignement Moyen (PCNEM) / Mathématiques), à travers le Secrétariat de l'Éducation Nationale.

Dans nos études des programmes de l'enseignement moyen, nous serons beaucoup plus succincts que précédemment. Ce que nous mettrons en évidence est la place que ces programmes accordent au **NAG**.

10 Une place accordée à l'articulation des domaines, des thèmes et des secteurs

La présentation des programmes est composée de huit chapitres. Dans le sommaire du programme, que l'on peut voir dans l'intégralité, en annexe, nous trouvons trois chapitres qui nous semblent importants de commenter :

- ✓ *La reformulation de l'enseignement moyen et les secteurs de la connaissance*
La nature de l'enseignement moyen et les raisons de la réforme ;

⁴³ La reformulation de l'enseignement moyen au Brésil a été établie par la Loi de Directives de Bases de l'Éducation Nationale (LDBEN) de 1996, réglementée en 1998 par les Directives du Conseil National d'Éducation.

Comment reprendre le projet pédagogique du lycée;
Nouvelles orientations pour l'enseignement ;
Connaissances, compétences, disciplines et leurs thèmes structurations
Les articulations entre les secteurs ;
Les articulations entre les disciplines dans chacun des secteurs.

- ✓ *Les Sciences de la Nature et les Mathématiques*
Caractérisation du secteur de connaissance ;
Les compétences générales dans l'apprentissage des Sciences de la Nature et des Mathématiques ;
Langues partagées par les sciences ;
Instruments de recherche utilisés à la fois par plusieurs sciences ;
Le contexte dans l'enseignement des sciences.

- ✓ *L'enseignement articulé des sciences et son évaluation*

Ces éléments du sommaire, bien que de forme générale, nous révèlent une préoccupation de ces programmes en articuler les disciplines qui composent le curriculum, comme l'une des alternatives d'organisation de ce dernier. Les phrases -les articulations entre les secteurs ; les articulations entre les disciplines dans chacun des secteurs ; langues partagées par les sciences ; instruments de recherche utilisés à la fois par plusieurs sciences et l'enseignement articulé des sciences - présentées ci-dessus, témoignent bien cet aspect. Un extrait de ce programme peut rendre ce témoignage plus explicite :

« L'articulation des plusieurs secteurs de la connaissance et des disciplines du secteur des sciences, en partageant langues, procédures et contextes, converge pour le travail éducatif de l'école comme un ensemble, à la promotion des compétences générales des élèves. »
(Brésil. Secrétariat d'Éducation. Paramètres Curriculums Nationaux pour l'Enseignement Moyen/ Mathématiques/Secrétariat d'Éducation Nationale. - Brasília : MEC /SEN, 1998. p.133)⁴⁴.

Considérant que les orientations présentées par PCNEM, doivent être utilisées par tous les établissements de la fédération, c'est-à-dire par tous les enseignants du lycée, indépendamment de la discipline qu'ils enseignent, nous pouvons attendre que cet accent mis sur les connections entre les disciplines, influence aussi l'accent des connections entre des différents domaines qui composent une discipline.

Sciences de la Nature, Mathématiques et leurs Technologies

Les programmes rejoignent les disciplines en secteurs, constituant plusieurs secteurs pour aborder les programmes. La Biologie, la Physique, la Chimie et les Mathématiques intègrent un même secteur de la connaissance : Sciences de la Nature, Mathématiques et leurs Technologies. Elles sont considérées comme des sciences qui ont en commun la recherche de la nature et des développements technologiques, qui partagent

⁴⁴Traduction de l'auteur : « A articulação das várias áreas do conhecimento e das disciplinas da área das ciências, partilhando linguagens, procedimentos e contextos, converge para o trabalho educativo da escola como um todo, ao promover competências gerais dos alunos. » (Brasil. Secretaria de Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino Médio /Matemática/Secretaria Nacional de Educação - Brasília : MEC /SNE, 1998. p.133).

des langues pour la représentation et la systématisation de la connaissance des phénomènes ou des processus naturels et technologiques.

Les programmes considèrent que les disciplines de ce secteur composent la culture scientifique et technologique qui, comme toute culture humaine, est le résultat et l'instrument de l'évolution sociale et économique, dans l'actualité et au long de l'histoire.

Les PCN pointent que la définition du secteur des Sciences de la Nature, Mathématiques et leurs Technologies, facilite la présentation des objectifs scolaires, lesquels organiseront l'apprentissage de ces disciplines dans tous les lycées du pays en termes d'ensembles de compétences : représentation et communication; recherche et compréhension ; contextualisation socioculturelle.

11 Les mathématiques pour le lycée

Les programmes du lycée présentent les contenus à être travaillés à travers quatre points :

- ✓ Les compétences en mathématiques ;
- ✓ Thèmes structurateurs de l'enseignement des mathématiques ;
- ✓ L'organisation du travail scolaire ;
- ✓ Stratégies pour l'action.

Nous n'aborderons pas en détail chacun de ces points. Néanmoins, nous ferons une analyse générale des contenus des mathématiques comme les PCNEM les présentent : « ce sont des moyens pour la formation des élèves comme des citoyens ». Les mathématiques, comme le souligne les programmes, sont indispensables et fondamentaux, mais le centre permanent de l'action scolaire doit être le développement des compétences personnelles des élèves.

À partir des idées générales et des propositions de ces programmes, il est possible de percevoir une réunion de compétences de base à être développées par les élèves tout au long de l'enseignement moyen, y compris trois parties complémentaires, lesquelles constituent trois axes qui guideront tout l'action scolaire :

- ✓ L'axe expression/compréhension : capacité d'expression de soi, par le moyen de diverses langues, et capacité de compréhension de l'autre, ce qui inclut, de la lecture d'un texte à la compréhension de phénomènes historiques, sociaux, économiques, naturels etc.
- ✓ L'axe argument/décision : capacité d'argument, d'analyse et de connecter des informations et des relations disponibles, en vue de la construction de consensus et la viabilisation de la communication, de l'action commune, ainsi que capacité de décision, d'élaboration des synthèses des résultats, en ayant en vue la proposition et la réalisation d'actions effectives.
- ✓ L'axe contextualisation/abstraction : capacité de contextualisation, d'enracinement des contenus étudiés dans la réalité immédiate, dans les univers de signification - surtout dans le monde du travail - et capacité d'abstraction, d'imagination, de

considération de nouvelles perspectives, de potentialités sur ce qui n'existe pas encore.

Les programmes cherchent à rendre claire le rôle des mathématiques dans les trois axes cités. Ce rôle est facilement compréhensible à travers des indications que nos donnent les programmes. Dans le premier axe, au côté de la langue maternelle, les mathématiques composent une paire complémentaire comme une moyenne d'expression et de compréhension de la réalité. Les objets mathématiques - nombres, formes, relations - constituent des instruments de base pour la compréhension de la réalité, de la lecture d'un texte à l'interprétation d'un graphique, en passant par l'appréhension quantitative des grandeurs et relations présentes dans des phénomènes naturels ou économiques, entre autres.

Sur le deuxième axe, les PCNEM signalent l'évidence du rôle des mathématiques comme instrument pour le développement du raisonnement logique, et l'analyse rationnelle - en vue d'obtenir des conclusions nécessaires. De façon générale, ces programmes détachent deux points cruciaux. Le premier, sur la construction des formes valables de raisonnement logique, soit inductive ou déductive, les mathématiques et la langue maternelle partagent fraternellement la fonction de développement du raisonnement. Le second point à être considéré, est que, relatives à la capacité de synthétiser, de prendre des décisions à partir des éléments disponibles, les mathématiques ont, selon les PCNEM, un rôle prépondérant. Leurs situations problèmes sont plus claires que celles d'autres disciplines, en favorisant l'exercice du mouvement : faire valoir/décider ou diagnostiquer/proposer.

En ce qui concerne le troisième axe des compétences, les programmes indiquent les mathématiques comme un lieu (ou une instance) très ajusté ou même privilégié pour que les élèves apprennent à traiter les éléments de la paire concrète/abstraite. Les PCNEM signalent que, même en étant considérés spécialement abstraits, les objets mathématiques sont des exemples plus facilement imaginables pour que la connexion permanente entre les abstractions et la réalité concrète soient comprises. De manière synthétique, nous pourrions associer quelques compétences, listées ci-dessous, qui apparaissent dans les programmes aux trois axes mentionnés :

- ✓ La capacité d'expression dans différentes langues, incluant la langue maternelle, les mathématiques, les arts, entre autres ;
- ✓ La capacité de compréhension des phénomènes, de la lecture d'un texte jusqu'à la « lecture » du monde ;
- ✓ La capacité de contextualiser, d'affronter des situations problèmes, implicite à l'évaluation de l'imagination, nécessaire à l'abstraction quand on crée de nouveaux contextes ;
- ✓ La capacité d'argumenter de manière cohérente, de développer la pensée critique ;
- ✓ La capacité de décider, après les analyses argumentatives, et élaborer des propositions d'intervention solidaire dans la réalité.

En considérant les trois axes vus par les PCNEM comme fondamentaux pour la formation personnelle dans l'enseignement moyen, en rapport avec les compétences du référentiel théorique décrites précédemment, nous pouvons percevoir que les mathématiques, dans les curriculums du lycée, apparaissent en partenariat avec la langue. Elle constitue une ressource indispensable pour une expression riche, une compréhension compétente, un argument correct, une confrontation assertive des situations problèmes, une contextualisation et une articulation significative des sujets étudiés et, simultanément, un exercice d'imagination qui peut extrapoler les limites de tout le contexte. Mais il est important de voir comment les thèmes, les sujets, les secteurs, etc. sont présentés dans les programmes des mathématiques en prenant en compte ces aspects. Nous pensons que, l'ensemble des contenus de ce programme, peut nous aider à mieux voir et comprendre les articulations signalées par les PCNEM.

12 Les séances

12.1 Séance-C21


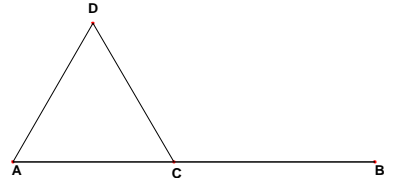
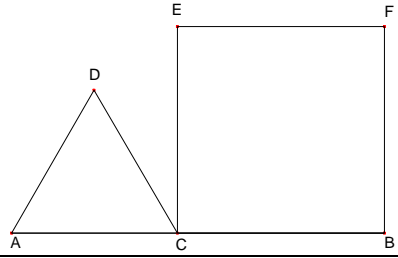
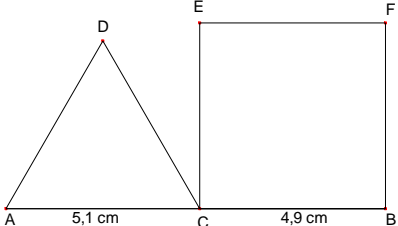
Lieu : Collège

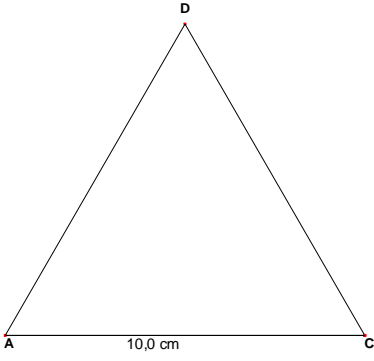
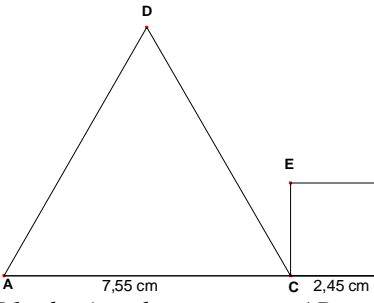
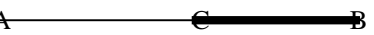
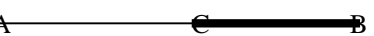
Date – Heure : Mardi, le 27 novembre 2007 – 07 h 55 min

Nombre d'élèves : 24

Inéquations, équations et systèmes

Numéros	Temps	Acteurs	ECHANGES VERBAUX	REMARQUES
1	h:min:sec	P1	Vous avez donc 4 notes, 3 notes de devoirs surveillés et une note de devoir, ça vous fait une moyenne. Ceux qui ne veulent pas que je donne la moyenne normalement, dites-le-moi. C'est bon.	
2	00:00:44	P1	E9 : 12 ; E3 : 9 ; E8 : 5 ; E14 : 11,5 ; Non ; E2 : 11,5 ; E18 : 12 ; E5 : 14,5 ; Non, E13 : 8,5 ; E20 : 13 ; E21 : 18 ; E19 : 11,25 ; E7 : 13,5 ; E4 : 11 ; E2 : 17,5. Les autres, qui n'ont pas voulu que je prononce leur moyenne, peuvent la consulter à la fin de classe. La moyenne de l'épreuve c'est 12,34.	<i>P1 écrit au tableau : Moyenne épreuve = 12,34.</i>
3	00:02:00	P1	Donc, sortez vos cahiers d'exercices et de cours. Ok, on va commencer par cette situation. Tout le monde a les deux feuilles de cours ? Je profite pour recentrer, résoudre une équation, on s'est fait. Résoudre une inéquation, on a trois règles, en particulier la règle 3 qui nous intéresse : à savoir que si vous multipliez ou divisez par un nombre négatif, on peut le faire à condition que vous changez l'ordre de l'inéquation.	<i>P1 distribue les feuilles de cours.</i>
4	00:04:00	P1	On va commencer par ça, je vais vous donner l'énoncé sur un petit morceau de papier. Vous devez commencer par faire cette construction.	<i>P1 distribue les énoncés.</i>
5	00:04:24	P1	Je vous donne des règles, tout ce que vous voulez. Allez.	<i>P1 distribue les règles.</i>
6	00:05:08	P1	E14, on travaille. E5 et E7 je vais vous la donner.	<i>P1 laisse les élèves travailler et surveille le travail et parle avec la classe.</i>
7	00:05:27	P1	Donc, il faut construire le segment de longueur AB. E14, tu vas te mettre au travail ? Tu arrêtes maintenant !	<i>P1 parle avec un élève qui semble ne pas se mettre au travail.</i>
8	00:06:27	P1	Un segment 10 cm. Il y a quoi sur le segment ? Un point sur le segment.	<i>P1 parle à la classe.</i>
9	00:06:54	E5	Elles sont finies ? C'est fini les inéquations ?	<i>E5 pose une question.</i>
10	00:06:57	P1	Comment ? Non. Pourquoi ? On va les finir pour faire des exercices après.	<i>P1 regarde le travail fait par les élèves.</i>

11	00:07:27		Maintenant que vous avez tous fait la construction. La question que je voudrais vous poser est celle-ci : Où est-ce que je dois mettre le point C pour que le périmètre du triangle équilatéral soit plus grand que le périmètre du carré ?	<i>P1 projette l'énoncé de la question au tableau : Construire un segment [AB] de 10 cm de longueur. Placer un point C sur ce segment. Construire alors du même côté du segment le triangle équilatéral ACD et le carré CBEF. Où doit se trouver le point C pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré CBEF ?</i>
12	00:08:01	P1	Un triangle équilatéral c'est quoi ?	
13	00:08:03	Es	Un triangle avec les trois cotés égaux.	
14	00:09:13	P1	Donc, l'histoire peut commencer comme ça, AB, un point C sur le segment [AB]. Vous avez bien compris le degré de liberté pour le point C. Vous pouvez prendre le point C ici, ou ici, ici, où vous voulez, et à partir de là, vous pouvez faire la construction.	<i>P1 corrige une phrase sur la feuille. Puis il construit le segment [AB] et le point C avec le logiciel Cabri Géomètre.</i> 
15	00:10:03	P	Il nous faut un compas pour tracer un triangle équilatéral ACD. Voilà le triangle équilatéral ACD. Alors, forcément plus vous prenez C près de A, plus il est petit, plus vous le prenez loin de A plus le triangle équilatéral est grand. Sur ce qui reste vous construisez un carré de côté [CB]. On obtient selon la position du point C que vous avez choisi soit cette figure, soit comme ceci, soit comme cela. Ce que vous devez arriver à faire mentalement, c'est ce que j'ai fait moi, sur l'écran. C'est-à-dire, arriver mentalement à imaginer que le point C peut bouger, et donc, que ça peut influencer sur la figure que vous avez. Plus C est près de A, plus mon carré est grand et mon triangle équilatéral est petit. Par contre plus C est éloigné de A c'est l'inverse.	<i>P1 construit le triangle ABC</i>  <i>P1 déplace le point C sur [AB]. Ensuite il construit le carré de côté [CB] et continue à déplacer le point C pour montrer les différentes possibilités pour la construction.</i> 
16	00:11:23	P1	La question c'est, où je dois mettre C pour que le périmètre du triangle équilatéral soit plus grand que le périmètre du carré ?	<i>L'élève E20 répond : Ben ! Donc après le milieu de [AB] !</i>
17	00:11:40	P1	Après le milieu de [AB] ? E20 propose entre le milieu de [AB] ça peut être une idée.	
18	00:11:55		Donc, on va marquer ça. Pour calculer la longueur AC, c'est 2,86 et donc le milieu ça serait où ? Après cinq ok. Donc, je pose là, je vais mettre à 5,1 cm, et du coup, on va calculer le périmètre de celui-là ça fait 15,3 cm. C'est bien, je vais le mettre là. Le périmètre du carré est 19,6 cm. Donc, est-ce que ce que tu dis semble valide ? Bien, non ! Même avec ce choix, j'ai mis le point C après le milieu du segment AB. Est-ce que le périmètre de	<i>P1 utilise un outil du logiciel Cabri Géomètre pour calculer la valeur de [AC]. Ensuite la valeur de [CB].</i>  <i>P1 écrite au tableau:</i>

			celui-là est plus grand que le périmètre de celui-là ? Non ! Donc le coté est négatif, on élimine cette proposition parce qu'on a trouvé un contre exemple.	$Périmètre_{ACD} = 15,3 \text{ cm}$ $Périmètre_{CBEF} = 19,6 \text{ cm}$
19	00:12:46	P1	Allez, d'autres propositions.	
20	00:12:49	E1	Sur le point B.	
21	00:12:56	P1	<p>Sur le point B ? Je vous rappelle qu'on cherche toutes les propositions. Là c'est sûr que sur le point B il n'y a plus de carré, mais pas très loin du point B c'est encore possible voilà !!</p> <p>Bon, mais on peut voir qu'est-ce que va se passer. Là c'est encore vrai, là c'est toujours vrai, pour 7,55. C'est en fait, tous les points qui sont par ici.</p>	<p>P1 déplace le point C jusqu'au point B dans la construction du logiciel Cabri</p>  <p>$E7$ dit qu'il n'y aura plus de carré après ça.</p> <p>1.1.1 P1 déplace le point C jusqu'à avoir le périmètre du triangle égal à 22,65cm.</p>  <p>P1 dessine le segmente AB au tableau et surligne une partie de ce segment.</p> 
22	00:13:26	p	Là, c'est ce qu'on voit par expérience. Maintenant, il faudra arriver à le dire mathématiquement. A partir de telle position on est bon. Comment on peut faire ça, et comment on peut trouver cette position ?	<p>P1 montre le dessin dans le tableau.</p> 
23	00:13:34	E6	Avec une inéquation.	
24	00:13:35	P1	Comment tu fais ?	
25	00:13:37	E6	Heu !! A.....	

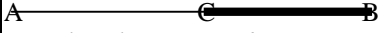
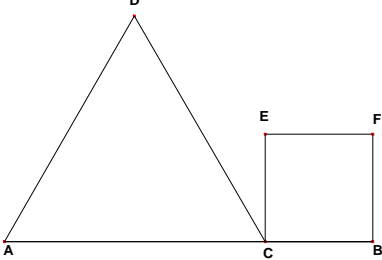
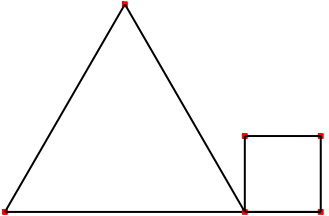
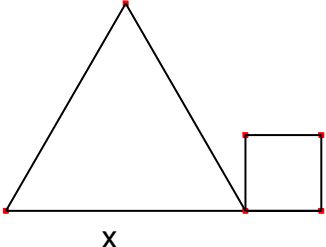
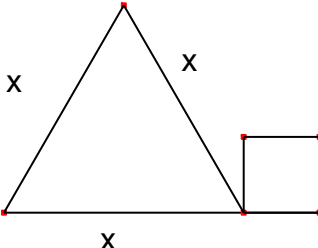
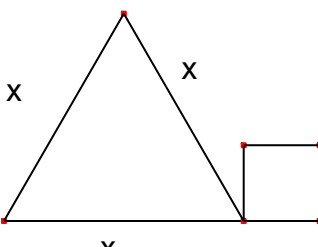
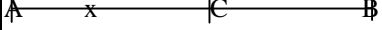
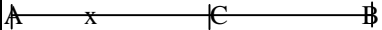
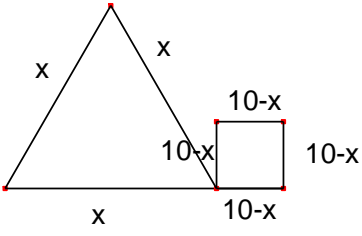
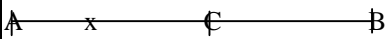
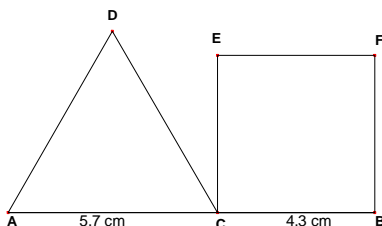
26	00:13:48	P1	Bon, je veux bien qu'il y ait une inéquation, mais, alors il faudrait qu'il y ait une inconnue, et qu'est-ce qu'on cherche qui n'est pas connu ?	<p>P1 montre le dessin dans le tableau.</p>  <p>Tous les élèves répondent en même temps.</p>
27	00:14:00	P1	Brouhaha ... Et qu'est-ce qui doit être plus grand que lui ? ... Oui, le problème qu'on nous pose c'est celui-là : le périmètre d'un triangle ACD, il doit être plus grand que le périmètre de A ... pardon de CBEF.	<p>Tous les élèves répondent en même temps. P1 écrit au tableau. $Périmètre_{ACD} > Périmètre_{CBEF}$</p>
28	00:14:25	P1	Bon, tout le monde va écrire ça, mais enfin on n'a plus rien derrière, ou plutôt il faudrait se dire : De quoi dépend le périmètre de ACD, de quoi dépend le périmètre de CBEF ? Ils dépendent l'un de l'autre, oui ! Ils dépendent de la position du point C. Mon problème cela va être de repérer la position du point C. Tout dépend de la position du point C.	<p>E1 dit qu'ils dépendent un du l'autre. E7 dit qu'ils dépendent du point C. Un autre élève dit qu'ils dépendent l'un de l'autre.</p> <p>1.1.2 P1 déplace le point C dans la construction avec le logiciel Cabri Géomètre en faisant changer le triangle et le carré.</p> 
29	00:14:45	P1	Donc, tout mon problème, cela va être de savoir comment repérer la position du point C sur le segment AB. La position pour repérer le point C, c'est donner sa distance par rapport à A ou par rapport à B. Il y a deux extrémités, donc, on pourrait faire l'un ou l'autre. Du coup je vais peut-être effacer celui-là et celui-là, puisqu'on va, maintenant, travailler, dans un cadre plus général. Mais, c'est vrai que le périmètre de ACD dépend directement du choix de la distance AC, et du coup le périmètre du carré dépend aussi du choix de AC.	<p>E1 dit qu'il faut repérer la position du point C sur le segment AC.</p> <p>1.1.3 P1 efface les points de la construction avec le logiciel Cabri Géomètre.</p> 
30	00:15:22	P1	Comment je peux nommer AC, donc? Parce qu'au final, c'est ce que je vais chercher.	
31	00:15:28	E10	« X »	
32	00:15:29	P1	Pourquoi pas ! Si on pense que ça c'est X centimètres, ben, quel est le périmètre du triangle?	<p>1.1.4 P1 introduit x dans la</p>

				figure du logiciel Cabri Géomètre. 
33	00:15:39	E1	3X	
34	00:15:41	P1	Le triangle, je vous rappelle qu'il est équilatéral et du coup le périmètre du triangle c'est X plus X plus X. 3X, 3 fois X. Pourquoi X ?	P1 écrit au tableau.  Ensuite P1 écrit $Périmètre_{ACD} > Périmètre_{CBEF}$ $3x >$ E14 demande pourquoi x
35	00:15:58	P1	Ça va jusque là?	E1 répond à E14, x parce que c'est l'inconnue. Les élèves répondent en même temps.
36	00:16:00	P1	Et maintenant, je vous laisse chercher un peu pour trouver le périmètre du carré. Toujours en fonction de X puisque c'est notre inconnue. E1 ?	P1 circule dans la classe.
37	00:16:15	E1	On doit trouver quand le triangle il est plus grand que le carré.	
38	00:16:21	P1	Oui, mais pour l'instant il faut trouver le périmètre du carré toujours en fonction de X, et toujours en fonction de la position du point C. Si je me donne une certaine longueur là, je dois être capable de trouver le périmètre de ce carré.	P1 montre la figure au tableau.  Ensuite P1 prend une certaine longueur pour le côté du carré, en la détachant de la figure.
39	00:16:33	E1	AB moins AC fois 4.	
40	00:17:07	P1	Ça c'est un côté, le périmètre ? Fois 2, fois 2. Alors en primaire tu as appris que plutôt d'additionner les 4 fois, tu peux les multiplier par 4.	P discute avec une élève

			Oui, mais, c'est combien AB ? On le connaît ? Mais attention il y a quatre cotés sur un carré E24. Alors, si ça ne vient pas, prenez des exemples, et dites vous, si AC mesurait 7, combien mesurerait CB ?	<i>PI écrit au tableau.</i> $AC = 7$ $CB =$
41	00:17:27	P1	Si AC égale à 7, comment vous faites pour calculer CB ? Ce n'est pas combien il mesurerait surtout. C'est quel calcul que je ferais pour calculer CB ?	<i>Tous les élèves répondent en même temps.</i> <i>PI écrit au tableau.</i> $AC = 7$ $CB =$
42	00:17:38	E9	C'est AB moins 7	
43	00:17:41	P1	Ok ! Si AC mesurait 6, CB ça serait ? $10 - 6$. Mais si, on a posé que AB mesurait 10 cm, combien ce sera CB ? CB serait 4, 10 moins 6.	<i>PI écrit au tableau.</i> $AC = 7$ $CB = AB - 7$ <i>Des élèves répondent en même temps : 4, 10 - 6</i> <i>PI écrit au tableau.</i> $AC = 6$ $CB = AB - 6$ $CB = 10 - 6$ $CB = 4$
44	00:18 :02	P1	Le fait de passer au numérique vous permet de travailler avec des choses simples, de travailler des petits problèmes que vous gérez sans problème. Qu'est ce qu'il faut repérer là ? Il faut repérer qu'est ce qu'il varie, qu'est ce qu'il ne varie pas. A chaque fois on prendra 10 la longueur de AB et on enlèvera la longueur de AC, et si la longueur de AC je la donne par une lettre alors j'enlèverai ce nombre là. E quel est le périmètre du carré donc ? E11	<i>PI refait le dessin au tableau.</i> 
45	00:18 :24	P1	On a trouvé que ce coté, mesurait ? CB mesurait 10 moins X, le périmètre du carré c'est quoi alors ? Le périmètre d'un polygone, merci E11.	<i>PI montre le dessin au tableau.</i>  <i>Ensuite il écrit $CB = 10 - x$</i>
46	00:18 :42	E11	10 moins X fois 4	
47	00:18 :43	P1	C'est ce coté, plus ce coté, plus celui-là, plus celui-là. C'est quatre fois les mêmes. Donc ce sera 10 moins X, quatre fois 10 moins X. Bien, une fois, qu'on a fait ça, on sait ce qu'est-ce qu'on doit chercher. Quelles sont les valeurs de X qui vérifient ça ?	<i>PI montre cette figure au tableau.</i>  <i>PI éteint le projecteur.</i> <i>Ensuite PI écrit</i> $Périmètre_{ACD} > Périmètre_{CBEF}$ $3x > 4(10 - x)$
48	00:19 :10	P1	On passe le mode cinéma et on résout cette inéquation.	<i>PI laisse les élèves travailler et circule dans la classe.</i>

			On va travailler avec des valeurs entières. Toi tu ne multiplies que X par 4. (E : c'est le tout par 4) Oui c'est tout le côté par 4.	<i>Plusieurs élèves appellent P1.</i>
49	00:19 :30	P1	Et à côté tu peux écrire que cette fraction vaut à peu près, ou que c'est à peu près ça te donnera une idée. Ok, parfait, interprète maintenant.	<i>E1 lui dit qu'il a trouvé une fraction. P1 parle à E1 et aussi pour le reste de classe.</i>
50	00:19 :54	P1	Interprète par rapport au problème ! Le périmètre du triangle est plus grand que le périmètre du carré, à quelle condition ?	
51	00:20 :04	P1	Combien ? Ce n'est pas un décimal, donc tu peux le laisser en fraction.	<i>E1 dit que c'est un décimal. P1 continue à circuler dans la classe et à échanger avec certains élèves.</i>
52	00:21 :09	P1	Non on travaille en valeurs exactes. Par contre décalez, vous mettez combien vaut cette fraction pour avoir une idée. Vous la décalez, c'est-à-dire, dans l'inéquation vous laissez la fraction, et puis après tu dis, cette fraction, elle vaut à peu près... X ça représentait quoi ? Ici on avait posé AC égal X, donc c'est ce terme là que tu dois interpréter derrière.	<i>Un élève demande si on peut mettre une valeur approchée. E14 demande qu'est-ce que décaler. P1 continue à circuler dans la classe.</i>
53	00:22 :00	P1	Donc, on résout cette inéquation 3X est plus grand que 40 moins 4X. A partir de là, il y a un terme que contient l'inconnue dans chacun des membres, on va supprimer un des deux, on va supprimer moins 4X, ça semble le plus judicieux. Et comment le supprimer ? En ajoutant 4X à chacun des membres.	<i>P1 montre le dessin au tableau.</i>  Ensuite il écrit $\begin{array}{rcl} 3x & > & 4(10 - x) \\ 3x & > & 40 - 4x \\ 3x + 4x & > & 40 - 4x + 4x \\ 7x & > & 40 \end{array}$
54	00:22 :45	P1	On en est à 7X plus grand que 40. Comment je peux m'en sortir ici ? Pour arriver à isoler X ici. On doit diviser par 7 chacun des membres. 7 est un nombre positif donc ça ne change pas l'ordre et on obtient X plus grand que 40/7.	<i>P1 continue à écrire au tableau :</i> $\frac{7x}{7} > \frac{40}{7}$ $x > \frac{40}{7}$
55	00:23 :11	P1	Alors, n'allez pas, n'allez pas mettre une valeur approchée, par contre, c'est tout à fait intéressant de savoir que 40/7, c'est à peu près égal à 5,7.	<i>P1 écrit au tableau</i> $\frac{40}{7} \cong 5,7$
56	00:23 :23	P1	Donc, quand est ce qu'on va avoir le périmètre du triangle plus grand que le périmètre du carré ?	
57	00:23:29	P1	Une petite phrase pour le dire là : Le périmètre de ACD est plus grand que le périmètre de CBEF. Alors ça représentait quoi X ? Ce nombre X représente quoi ? dans notre problème ?	<i>P1 écrit au tableau</i> <i>Le périmètre de ACD est plus grand que le périmètre de CBEF</i>

58	00:24 :00	E8	La longueur de [AC].	
59	00:24:03	P1	<p>La longueur de [AC]. Donc je ne peux pas dire que le périmètre du machin est plus grand que le périmètre du carré quand X est plus grand que 40/7. On interprète, X c'était la longueur AC, donc quand la longueur AC est supérieure à 40/7. 40/7 c'est à peu près 5,7. On peut vérifier, c'est-à-dire on calcule la longueur AC, je calcule le périmètre de celui-là et le périmètre de celui-là, si je mets AC autour de 5,7, effectivement on voit que c'est à peu près égal et dès qu'on dépasse, ça y est le périmètre de ACD devient plus grand que celui du carré. Donc toutes les positions de C, ici, nous donneront cette inégalité là. OK ?</p>	<p><i>P1 écrit au tableau</i> <i>Le périmètre de ACD est plus grand que le périmètre de CBEF quand la longueur AC est supérieure à 40/7</i> <i>P1 reprend la construction avec le logiciel Cabri Géomètre, il utilise des outils du logiciel pour faire afficher les valeurs des longueurs de [AC], [CB] et ensuite des périmètres du triangle ACD et du carré CBEF.</i></p>  <p>$Périmètre_{ACD} = 17,1cm$ $Périmètre_{CBEF} = 17,2cm$</p>

12.2 Séance-L05

Lieu : Lycée

Date – Heure : Jeudi, le 04 octobre 2007 – 16 h 25 minutes

Quantité d'élèves : 32 élèves

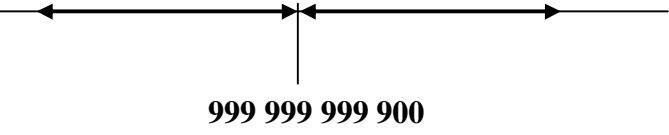
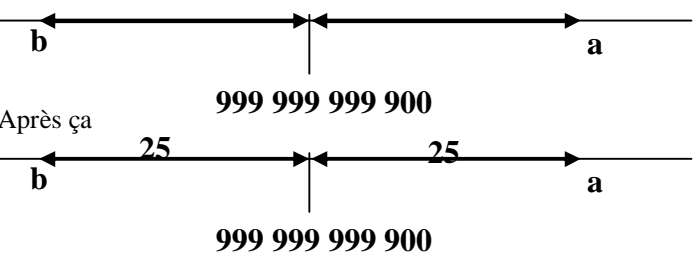
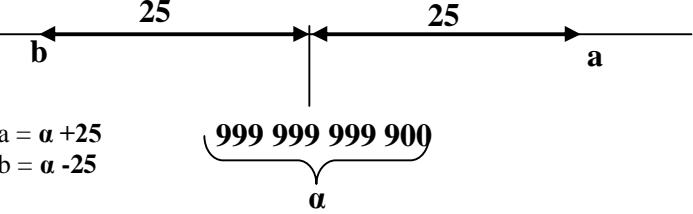
Activités numériques

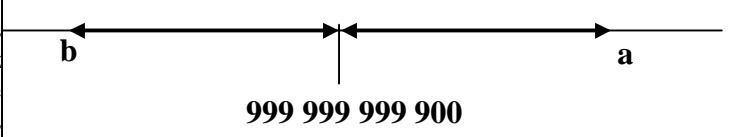
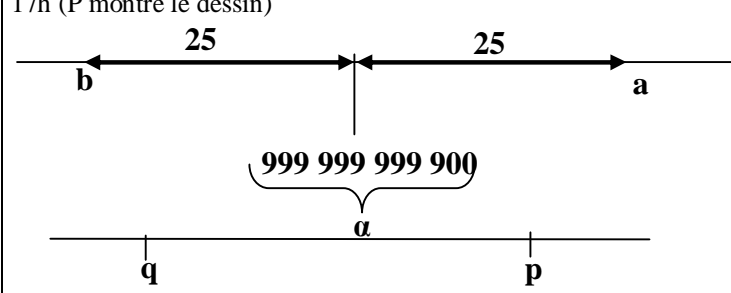
Lignes	Temps	Acteur	Discours	Remarques
1	h:min:seg	P2	P2 parle avec la classe.... « Sortez vos cahiers, vos calculatrices, etc. Je vais faire la correction des exercices	PHASE I
2	00:02:57	P2	P2 parle avec la classe.... Bien, alors on va commencer... Donc vous rentrez ces deux nombres dans la calculatrice et vous me dites ce qui se passe !	(P écrit au tableau) 999 999 999 925 ² 999 999 999 875 ²
3		P2	Est-ce que tout le monde l'a fait ?	
4		Es	Oui	
5		P2	Alors, dites moi ce que vous avez trouvé ?	
6		E9	Bah ! Moi j'ai trouvé « 1 E 24 » pour le deuxième !	
7		P2	Est-ce que tout le monde a trouvé ça ? E33	(P écrit au tableau) 1 E 24
8		E33	Non! Moi j'ai trouvé 99999.....	
9		P2	E33, , refaites vos calculs, parce qu'on a eu un résultat différent dans plusieurs autres calculatrices tout à l'heure. Vous devez vous être trompé quelque part !	(P se déplace vers E30, pour essayer de saisir le numéro dans la calculatrice)
10	00:03:21	P2	Est-ce que quelqu'un a une calculatrice « Casio graphe 35 plus » ou quelque chose comme ça ?	
11		E3	Oui	
12		P	Alors, rentrez le numéro 999999999875 ² pour voir ce que cela donne. Qu'est-ce que qu'on trouve ?	
13		E3	10 ²⁴	
14	00:03:33	P2	Voilà ! Donc, vous savez que cette calculatrice, je ne la veux plus d'accord !	(P écrit au tableau) 10 ²⁴
15	00:03:40	P2	Donc, sur la « Casio Collège » on a 10 ²⁴ et dans une autre, on a 1 E 24.	(P écrit au tableau) 10 ²⁴ 1 E 24
16		E24	Monsieur ?	
17		P2	Oui	
18		E24	Moi, j'ai 1. x ²⁴	
19	00:04:08	P2	Il a 1.x ²⁴ . Ca, ça va ! C'est pareil que nous. Donc lui, en fait, à la place de « 1 E 24 », il a ça comme affichage.	(P écrit au tableau) 1.x ²⁴
20	00:04:11	22 P2	Donc, on a ces deux affichages là.	(P montre au tableau) 999 999 999 925 ² 999 999 999 875 ² 1 E 24 1 E 24 10 ²⁴ 1.x ²⁴ 10 ²⁴
21		E30	Est-ce qu'il y a une différence entre les deux ?	
22	00:04:18	P2	Oui, mais on va en discuter.	

23	00:04:27		Donc moi, je vais écrire ce que vous avez trouvé pour ces nombres. Dicter-moi. Alors, maintenant, regardez ce nombre là. Il faut bien distinguer que, dans ce découpage ici, je n'ai pas mis égal n'est ce pas ! C'est un affichage. D'accord, distinguez bien, pour que vous compreniez qu'on n'écrit pas « égal » n'importe quand. Trop souvent, vous utilisez le symbole égal « à tord et à travers ». Quelle est la signification ?	(P demande aux élèves les valeurs trouvées dans leurs calculatrices pour chaque nombre et P écrit au tableau, puis P écrit le nombre « A » comme la différence entre les deux nombres) $\underbrace{999\ 999\ 999\ 925^2}_{e^{24}} \quad \underbrace{999\ 999\ 999\ 875^2}_{1\ E\ 24}$ $1\ E\ 24$ $1.x^{24}$ 10^{24} $A = \underbrace{999\ 999\ 999\ 925^2}_{e^{24}} - \underbrace{999\ 999\ 999\ 875^2}_{1\ E\ 24}$ $1.x^{24}$ 10^{24}
24		E30	Ils sont égaux	
25	00:05:31	P2	A priori, c'est autre chose, c'est « $1.x^{14}$ » c'est-à-dire, en fait...voilà ! Ici voilà ce que ça signifie « e^{24} », dans la « Casio Collège ». Ca ne signifie pas 10^{24} . Ca signifie $1.x^{24}$. D'ailleurs, dans la génération d'après, il y a le « 10 fois ». Ici, vous avez 1. On a vu qu'on a un petit problème, parce qu'on a déjà deux calculatrices qui donnent deux résultats franchement différents : ça va du simple au double! Mais on a réglé le problème !	(P écrit au tableau) $1\ E\ 24 = 1.x^{24} = 1.10^{24}$ $e^{24} = 1.x^{24} = 1.10^{24}$
26	00:05:50	P2	Alors, maintenant.... cet affichage, on lui a donné un nom la semaine dernière.	(P écrit au tableau) 1.10^{24}
27	00:06:04	E30	Écriture scientifique	
28		P2	C'était l'écriture scientifique.	
29		P2	Qui peut me rappeler ce qu'on connaît de l'écriture scientifique ?	
30	00:06:10	E17	C'est un nombre compris entre 1 et 10, multiplié par une puissance de 10.	
31	00:06:12	P2	Voilà, donc, avec le 1 inclus, et ce nombre est positif ou négatif. C'est vraiment important de savoir ça ! Ce qui veut dire que si vous regardez votre calculatrice, si vous avez un nombre négatif, vous aurez le « - » qui sera là.	(P écrit au tableau) $a \cdot 10^p$ $1 \leq a < 10$ $-10 \leq a < -1$ $P \in \mathbb{Z}$
32		P2	P2 parle avec un élève...Donc ici, j'aurai un chiffre, puis, les chiffres après la virgule, puis après, qu'est-ce que fera la calculatrice ?	16h 36(P écrit au tableau) - ____, ____
33	00:06:59	P2	Elle va réserver de la place pour mettre la lettre « E » et, éventuellement, de la place pour peut-être, un « - » et après, il y a encore deux chiffres pour votre exposant. Voilà comment sera votre affichage scientifique. D'accord ? Alors, je vous ai fait une petite fiche que vous mettrez dans votre porte-document qui explique ça. P2 parle avec un élève...	(P écrit au tableau) -E ____ et après distribue les fiches

34	00:08:35	P2	C'est pour que vous sachiez comment utiliser un affichage scientifique parce que je vais vous poser des questions là dessus lors du prochain contrôle. Je m'assurerai que vous savez ce qu'est un affichage scientifique. Donc, vous lirez sur cette fiche que je vous ai fait, un petit dessin avec des cadres pour que vous compreniez ce qui se passe. C'est presque comme l'écriture d'un nombre décimal ou quelque chose de cet ordre là et le « a », on nous l'a dit, c'est un nombre qui est compris entre « 1 » et « 10 » comme ça. S'il est négatif, il sera compris entre « -1 » inclus et « -10 » exclus.	
35	00:08:44	P2	Donc le nombre qui est là est entre « 1 » et « 10 » ou entre « -10 » et « -1 ». Tout le monde voit ? C'est bon ? Voilà ! Donc on en sait plus qu'avant.	16h 42(P montre l'écriture au tableau) a .10 ^P $1 \leq a < 10$ $-10 \leq a < -1$ $P \in \mathbb{Z}$
36	00:09:00	P2	Alors maintenant, regardons un petit peu plus près ce nombre pour voir si cette écriture est exacte ou pas. Certains m'ont dit que la machine a fait un arrondi etc... elle n'a plus assez de place etc...mais en fait on n'en sait rien. Vous dites phrases mais vous n'avez pas vérifié ce qui se passait réellement. Je sais bien ce qu'est une machine arrondie, Je sais bien ce que ça a fait. Mais, qu'i pourrait me dire pourquoi ici ça ne serait pas le résultat exact ? Parce que finalement, elle a de la place pour mettre « 10 » chiffres. Elle en met combien ? Elle en met un ! Donc, je peux me demander « pourquoi elle fait ça ? ». On peut supposer que ce nombre est peut-être exact puisque elle n'a pas utilisé toute la place dont elle disposait. Donc on ne peut pas s'en sortir en disant simplement « c'est parce qu'elle est arrondie ! » ou « je ne sais pas trop ce que vous m'avez raconté ». Il faut donc faire un raisonnement autre que celui là.	16h 43(P écrit au tableau) $A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$
37	00:09:58	23 P2	Alors, si on regarde maintenant ces deux nombres, on peut les regarder d'un peu plus prêt et voir certaines choses qu'on a déjà envisagé en classe.	
38		E30	C'est une identité remarquable.	
39	00:10:05	P2	Oui, on peut dire que c'est une identité remarquable, donc effectivement on verrait assez bien que c'est un petit peu mieux. E24 ?	
40	00:10:13	E24	On peut se dire que ce $(999999999+925)^2 - \dots$	
41	00:10:21	P2	Comme ça ? Je ne suis pas tout à faire d'accord avec ce qu'il vient de dire $(999999999+925)^2$. Est-ce que c'est bien vrai ça ?	16h 44(P écrit au tableau) $(999999999+925)^2$
42		E24	Non, non,	
43	00:10:34	P2	Est-ce que c'est bon là ? P2 parle avec un élève... E28 ?	
44	00:10:55	E28	Bah ! Non, bah ! Parce que, si on additionne 925, ça va s'ajouter à celui là !	L'élève se réfère à la partie du nombre, que P est en train de pointer.

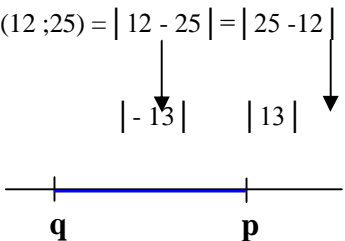
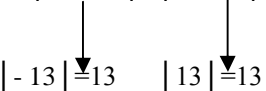
45		24 P2	Ca va s'ajouter à celui là, donc qu'est-ce qu'il faut écrire ?	16h 46(P écrit au tableau) (999 999 <u>999</u> +925) ²
46		25 E28	Écrire neuf cent quatre-vingt dix neuf million....	P prendre la parole
47		P2	Alors, ce n'est pas des millions, c'est quoi ?	
48		E28	Ce sont des milliards	P prendre la parole
49	00:11:09	P2	Ce sont des milliards, et on retire d'ici. Donc 999 999 999 900 + 25. Est-ce que tout le monde est d'accord avec ça ?	16h 47(P écrit au tableau et montre la partie du nombre d'où il retirer 25) (999 999 999 900 + 25) ²
50		Es	Oui	
51	00:11:09	P2	Et celui d'après, c'est quoi ? 19	
52		E19	999 999 999+875	
53	00:11:45	P2	Oui, tu pourrais faire comme ça, mais ce n'est peut être pas très astucieux d'avoir fait comme ça.	16h 48(P écrit au tableau) (999 999 999+875) ²
54		E33	Ce qu'il vient de faire ce pareil, c'est pareil !	
55	00:11:53	P2	Non, ce ne pas pareil. Ce qu'il dit ce n'est pas pareil Jeremy. Il ne faut pas le prendre comme solution.	
56		E33	Donc, 999 999 999 800 + 75. Je ne sais pas, mais pourquoi vous avez fait comme ça ?	
57	00:12:00	P2	Non, vous n'avez rien fait pour amélioré encore la compréhension. D'accord ! C'est bien d'essayer, je n'ai pas dit que c'était faux. J'écris donc ce qui est bon. Mais donc, je dis maintenant, regardez d'un peu plus prêt	16h 48(P écrit au tableau) (999 999 999 800+75) ²
58		E30	C'est 900 – 25	
59	00:12:30	P2	Et là c'est un petit peu plus intéressant, pourquoi ? P2 parle avec un élève...	16h 49 (P efface l'écriture précédente et écrit au tableau) (999 999 999 900-25) ²⁵
60		P2	On a déjà utilisé cette terminologie	
61	00:12:32	P2	On a déjà utilisé cette terminologie. En quoi est-ce intéressant là. Je vous fais remarquer quoi ? Que ces deux nombres là sont comment ?	16h 49 (P montre au tableau) (999 999 999 900+25) ² -(999 999 999 900-25) ²
62		E30	Ils sont différents de 25 de chaque côté	
63	00:12:49	P2	Oui! On a utilisé ça. Qu'est ce qu'il y a là dessus ? E32 ?	
64		E32	La différence entre neuf cent quatre-vingt neuf...., je n'arrive pas à le lire. La différence entre eux est égale à 25.	
65		P2	Redites-le	P essaye d'aider E32 à lire le nombre
66	00:13:03	P2	Non, ils ne sont pas différents de 25. Ils ressemblent à quel nombre ?	P écrit le nombre 999 999 999 900

67	00:13:09	P2	Alors, ce nombre, il faut savoir le lire : 999 999 999 900. Je l'appellerai « a ». Donc, si vous regardez bien je marque ce nombre là 25, unité de deux nombres qu'on appellera « a » et « b ». D'accord ! Il y en a un qui se trouve à 25 unités dans cette partie là, et je l'appellerai « a ». Donc, dans cette partie là, je trouve quel nombre ?	<p>16h 53 (P écrit au tableau, il montre les nombres mais il ne les écrit pas sur la droite)</p> $A = \underbrace{(999\ 999\ 999\ 900 + 25)}_a^2 - \underbrace{(999\ 999\ 999\ 900 - 25)}_b^2$  <p>26</p>
68		E30	b	
69	00:13:34	P2	C'est « b ». Si je trouve « b » j'enlève 25, d'accord ! Je trouve « a ». Si j'ajoute 25 à « a » je trouve « a ». Donc, il y a « b » et puis il y a l'autre qui était à égal distance, 25 aussi. Je mets 25 de chaque côté et là je trouve « a ». Est-ce que ça va ?	<p>16h 54 (P écrit initialement ça au tableau)</p>  <p>Après ça</p>
70	00:14:07	P2	Je peux aussi dire qu'à partir de ce nombre que je l'appelle « a », je peux dire que « a » s'écrit comment ?	<p>16h 56 (P écrit au tableau)</p> $\underbrace{999\ 999\ 999}_a$
71		E25	« a » est égal à « a » plus 25	
72	00:14:15	P	Très bien, alors, que vaut « b » ?	16h 56 (P écrit au tableau) $a = a + 25$
73		E30	« b » est égal à « a » moins 25	
74	00:14:23	P2	Voilà, ça va pour tout le monde ?	<p>16h 56 (P écrit au tableau)</p> $b = a - 25$
75	00:14:43	27 P2	Donc, ils sont à égale distance. Vous notez (ce petit dessin, avec donc « a » : c'est ce nombre pas au carré, c'est le nombre sans le carré. Ok !	<p>16h 57 (P écrit au tableau)</p>  $a = a + 25$ $b = a - 25$

76	00:14:49	P2	Et vous faites une droite graduée. Sur une droite graduée, la seule chose à laquelle il faut faire attention quand même, tout le monde écoute, c'est que, cette longueur doit être la même que celle sur votre cahier. Ca n'est pas n'importe laquelle, il faut que ça soit la même.	(P montre le dessin au tableau et tourne dans la classe)
77	00:15:08	P2	Il faudrait bien se souvenir de cette notion d'équidistance. On va un peu en parler maintenant, justement, sous prétexte de cet exercice. On va parler de distance entre deux nombres.	(P écrit au tableau) Distance entre deux nombres
78	00:15:46	P2	Donc, voilà la phrase que je pourrais rédiger aussi : « a » et « b » sont équidistants de « a ». Voilà en effet	(P écrit au tableau) \underline{a} et \underline{b} sont équidistants de α , on a en fait $d(a; \alpha) = 25 = d(b; \alpha)$
79	00:16:19	P2	La notation « d » avec une parenthèse, « a » point virgule et « a ». A votre avis qu'est ce que c'est ?	(P écrit au tableau) $d(a; \alpha)$
80		Es	Distance	
81	00:16:26	P2	Distance de « a » à « a ». D'accord !	
82	00:16:49	P	Donc, on est en plein dans la distance entre deux nombres	
83	00:16:55	P2	Si vous faites des flèches, comme je fais moi, regardez bien, est-ce que je dessine des flèches avant le « b » ? Mes flèches vont bien jusqu'au « b ».D'accord ! Il ne peut pas y avoir d'espace entre les deux.	(P montre le dessin qui a été fait au tableau) 
84	00:17:23	P2	Soyez précis pour que la distance présentée soit la bonne.	
85		P2	Voilà, maintenant, on va un petit peu parler de distance entre deux nombres.	
86	00:17:53	P2	Distance entre deux nombres, qu'est ce que c'est, à votre avis, la distance entre deux nombres ? On vient d'en parler. La semaine dernière, on en parlera. Maintenant, ça doit être quoi ?	(P fait le tour dans la classe)
87	00:18:04	P2	Entre deux nombres que j'appelle « p » et « q », ça sera quoi la distance entre les deux ?	
88		P2	E30	
89	00:18:09	E30	Bah, ça sera la distance... Bah, je ne sais pas...	
90	00:18:14	28 P2	Regardez bien le dessin ! Bien, alors ! J'ai deux nombres, je les appelle « p » et « q » je ne vous donne pas leurs valeurs et je vous demande la distance entre ces deux nombres.	17h (P montre le dessin) 

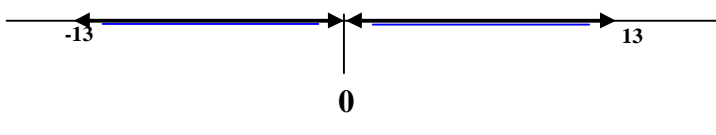
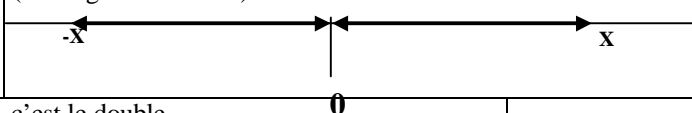
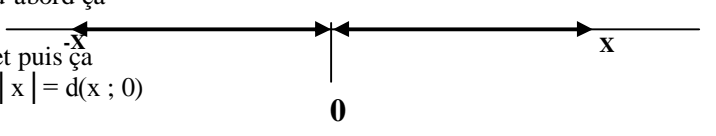
91	00:18:28	P2	Qu'est-ce que vous avez fait pour trouver la distance entre ces deux nombres ? Réfléchissez ! On avait des nombres qu'on connaît bien, « a » et « b ». On connaît bien, « a » on connaît bien, on était bien ! Que va être la distance entre ces deux nombres, E6 ?	
92	00:18:30	29 E6	C'est la longueur qui sépare « p » et « q ».	
93	00:18:34	P2	C'est la longueur qui sépare « p » et « q ». Alors, ça va être quoi ? La longueur on la comprend, mais on a fait quelque chose d'autre, E24 ?	
94		E24	On va soustraire	
95		P2	Voilà, on va soustraire « p » de « q », c'est quoi soustraire ?	
96		E30	C'est la différence entre « p » et « q »	
97		P2	C'est la différence entre « p » et « q »....	
98		E30	C'est la différence entre 99999999925^2 et 99999999875^2	
99	00:18:57	P2	On ne parle pas de chiffres mais on parle de différence de...	
100		E30	Nombres	
101		P2	De nombres, alors quel nombre ?	
102		E30	Du nombre le plus grand...	P prendre la parole
103	00:19:03	P2	Le nombre le plus grand. Donc, vous êtes en train de me dire que pour répondre à ma question il faut savoir quoi ?	
104		E30	Le plus grand des deux, le plus grand des deux nombres	
105	00:19:19	P2	Il faut savoir qui est le plus grand, en tout cas, il faut faire une soustraction. Tout le monde est convaincu que c'est une soustraction ? La distance entre deux nombres est une différence. Maintenant pour faire une différence, il faut que cette différence finalement....Soit ? Pourquoi voulez-vous faire le plus grand moins le plus petit ? Pourquoi est-ce important de faire le plus grand moins le plus petit ?	
106	00:19:40	P2	On lève la main, on ne parle pas sans que je donne la permission ! Pourquoi à votre avis, est-ce si important de faire le plus grand moins le plus petit ? E33 ?	
107		E33	Parce que sinon ça peut être un nombre négatif...	P prendre la parole
108		P2	Et une distance doit être ? E33 ?	
109	00:19:53	E33	Positive	
110			Positive. Donc, on va noter cela, on va noter à la suite, on va donc faire un petit peu de cours là, avant de finir l'exercice.	
111	00:20:05	P2	Distance entre deux nombres.	
112	00:20:23	P2	Donc, vous m'avez dit que si « p » est le plus grand, la distance entre « p » et « q », ça sera quoi ? E24	
113	00:20:32	E24	« p » moins « q »	
114		P2	C'est égal à « p » moins « q », donc ça, c'est la distance de « p » à « q ».	
115	00:20:42	P2	Sinon, si « p » est plus petit que « q », la distance entre « p » et « q » est égale à « q » moins « p ». Donc, voilà la distance de « p » à « q ». Ok !	17h 01 (P écrit au tableau) Si $p > q$ la distance entre p et q est égale à $p - q = d(p ; q)$ Si $p < q$ la distance entre p et q est égale à $q - p = d(p ; q)$
116		P2	Il y a deux choses : l'une qui est un peu embêtant parce qu'on est obligé de toujours dire, lors de la soustraction, quel est le plus grand des deux nombres.	

117	00:21:58	P2	Alors, l'autre, est qu'en mathématique, on a quelque chose qui nous permet de nous assurer qu'on ait toujours un nombre..., finalement le souci est de savoir quel est le nombre? E33	
118		E33	Positif	
119	00:22:09	P2	Positif, ce que la distance est toujours quelque chose de positif et ça indifféremment. Donc, vous notez la chose suivante :	
120	00:22:20	P2	Notation : je note que la distance de « p » à « q » est indifférente.	17h 01 (P écrit au tableau) La distance de p à q se note indifféremment $p - q$ ou $q - p$
121		P2	Ca va être intéressant de voir et noter indifféremment.	
122		P2	Ca veut dire que vous ne devez pas vous préoccuper de savoir qui est le plus grand des deux.	
123	00:22:52	P2	Donc, notez indifféremment « p » moins « q » ou « q » moins « p ». Bien sûr, je ne peux pas laisser ça comme ça. On a une notation mathématique. Regardez le tableau. Avec cette notation, on met un trait vertical entre les deux. Certains ont déjà vu ça au collège, mais normalement ce n'est pas nécessairement au programme. On met entre barre la différence, pour indiquer quoi ? E13 ?	
124		E13	La soustraction,	
125		P2	On fait la différence de toute façon qu'est qu'on fait à l'arrivé ? Il faut que ça soit... E5 ?	
126		P2	La distance de « p » moins « q » se note indifféremment « p » moins « q » ou... E5 ?	
127		E5	« q » moins « p »	
128		P2	Ah ! La distance de « p » moins « q » se note indifféremment « p » moins « q » entre deux barres ou E2 ?	
129		E2	
130	00:23:53	P2	ou « q » moins « p », entre deux barres.	(P montre au tableau) $ p - q $ ou $ q - p $
131	00:24:44	P2	Donc, ça peut se lire - valeur absolue de « p » moins « q » - ou - valeur absolu de « q » moins « p ». Il est bien entendu que, puisque c'est indifférent, qu'est-ce que je pourrais dire de ces deux quantités là ? E17	
132	00:24:51	E17	Ils sont égaux	
133	00:24:58	30 P2	Il y a égalité puisque c'est indifférent. Ca définit la distance de « p » à « q » parce qu'il y a égalité. On a donc valeur absolue de « p » moins « q » est la même chose que la valeur absolue de ? E33	
134		E33	« q » moins « p »	
135	00:25:16	31 P2	« q » moins « p ». D'accord ! Bien entendu que « p » moins « q » ce n'est pas la même chose que « q » moins « p », mais, quand je le mets entre barre, les valeurs absolues (c'est la même chose) sont les mêmes. Celle-là désigne à plus sûr un nombre positif	17h 01 (P montre au tableau) $ p - q = q - p $
136	00:25:26	P2	Peut-être que maintenant ce n'est pas encore très clair.	
137	00:25:31	P2	On va prendre un exemple pour voir ce que ça donne	

138	00:25:37	32 P2	C'est noté jusque là ?	
139	00:25:41	P2	Donc, ce qu'il faut retenir proprement est que, la valeur absolue est une distance, et à quoi une distance est-elle toujours associée comme opération ? E25 ?	
140	00:25:50	E25	A une soustraction	
141	00:26:00	P2	Une soustraction, une différence. Facile à retenir : si vous êtes en voiture, pour savoir la distance que vous aurez parcourue entre une borne kilométrique et une autre, qu'est-ce que vous faite ?	
142		P2	On fait la soustraction. D'accord ! Et on a la distance parcourue	
143	00:26:16	P2	Donc, deux choses à retenir déjà : une distance c'est une différence et quand ça doit être positif, on prend cette différence en valeur absolue.	
144	00:26:27	P2	Je la prends soit « p » moins « q » soit « q » moins « p », je m'en moque maintenant, du moment où je la mets en valeur absolue	
145	00:25:35	P2	On va voir sur un exemple, vous notez cet exemple	
146	00:26:59	P2	La distance de 12 à 25, par exemple, je vais chercher la distance de 12 à 25. Qu'est-ce que je vais faire pour ça ? E30 ?	17h 02 (P écrit au tableau) $d(12;25)$
147		E30	12 moins 25	
148	00:27:10	P2	Je vais faire 12 moins 25 et je vais mettre en valeur absolue. 12 moins 25 ou bien ? E33	17h02 (P écrit au tableau) $d(12;25) = 12 - 25 $
149	00:27:19	E33	25 moins 12	
150		P2	P : 25 moins 12, c'est la même chose	17h 02 (P écrit au tableau) $d(12;25) = 12 - 25 = 25 - 12 $
151	00:27:26	E17	On ne peut pas trouver la même chose	
152		P2	Si	
153	00:27:31	E17	On ne peut pas trouver la même chose en faisant 25 moins 12 et 12 moins 25	
154		P2	Si, on va trouver la même chose	
155	00:27:44	P2	Si, je vais trouver la même chose . Je reviens à 12 moins 25 : je vais trouver moins 13 en valeur absolue, donc là, c'est la même chose que la valeur absolue de 13. Regardez p et q dans la droite, on voit bien que la distance entre p et q est la même que q à p. C'est la longueur de ce segment là. E11 ?	17h 02 (P écrit au tableau et pointe le dessin) $d(12;25) = 12 - 25 = 25 - 12 $ 
156	00:27:43	E11	La valeur absolue de treize	
157	00:27:50	P2	La valeur absolue de treize et quelle est la distance ?	
158		P2	Treize, la distance est treize. Donc, on a ce résultat là.	17h 02 (P écrit au tableau) $d(12;25) = 12 - 25 = 25 - 12 = 13$ 

159		P2	Ca va ? E17 ?	
160		E17	Oui	
161	00:28:00	P2	Je n'ai pas écrit que moins treize est égal à treize. Ce que j'ai écrit c'est que la valeur absolue de moins treize est égale à la valeur de treize. Ca va ? C'est toujours positif	
162	00:28:07	P2	C'est intéressant ça parce qu'on vient de dire qu'une valeur absolue est une distance. Ca va ? On est bien d'accord !	
163	00:28:15	P2	Et tout d'un coup sur cet exemple, est-ce qu'il y a encore une distance là ? E30 ?	
164		E30	Oui	
165		P2	Oui...c'est la distance, il y a quand même une distance	
166	00:28:35	P2	Alors c'est la distance, c'est proprement la distance qui se cache derrière ? E33 ?	
167		E33	Non, le nombre positif	
168	00:28:41	P2	Oui, mais quand je vous demande la distance de « p » à « q », qui va voir ça ? Qui va me dire : « tiens ça va faire une distance », pourtant je le dire qu'il a une distance. Pourquoi y a t-il quand même une distance ? La distance par rapport à qui, alors ? E6	17h 04 (P reprendre les écritures au tableau) d'abord ça $d(p ; q) = p - q $ et puis ça, en ajoutant $d(12 ; 25) = 12 - 25 = 25 - 12 = 13 = d(13 ; 0)$
169	00:28:58	E6	De treize à zéro	
170	00:29:00	P2	Oui, c'est la même que celle de qui ? E6 ?	
171		E6	De moins treize	
172	00:29:12	P2	De moins treize, regarde, se maintenant je fait ça, pas mal, c'est bon. Donc, si je regarde la distance de zéro à treize, c'est bien la même que la distance de zéro à moins treize. Est que tu as compris ?	17h 05 (P écrit au tableau le dessin avec une « corde »)
173		E17	Oui	
174	00:29:30	P2	Donc, vous voyez comme on progresse : on est parti de la distance entre deux nombres et maintenant je vais donner la définition de quoi ?	
175	00:29:38	P2	Qu'est que ce que la valeur absolue d'un nombre ? Ca sert à quoi ? Qui me fait la phrase ? La valeur absolue d'un nombre c'est quoi ? E17 ?	(P écrit au tableau) La valeur absolue 33
176	00:29:44	E17	C'est un nombre qui a la même distance à zéro que son inverse	
177	00:29:50	P2	Pas l'inverse. Vous compliquez déjà beaucoup de choses. On va tout changer pour faire la phrase	
178		P2	Quel est la valeur absolue de moins cinq ?	(P écrit au tableau) $ -5 = 5$

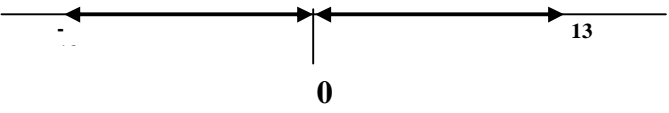
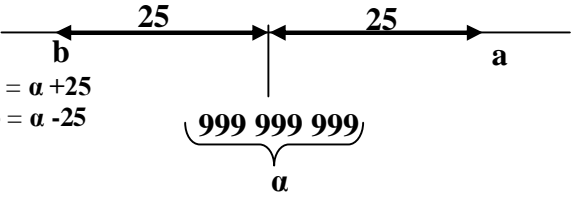
179		E17	Cinq	
180		P2	Valeur absolue de sept	(P écrit au tableau) $ 7 = 7$
181		E17	Moins sept	
182	00:30:03	P2	Vous êtes tombé dans le panneau. La valeur absolue de moins sept, est-ce que ça fait moins sept ? E33	
183		E33	Non, c'est positif	

184		34 P2	La valeur absolue vous m'avez dit tout à l'heure, c'est toujours comment ? Regardez le dessin..., les flèches du dessin sont toujours comment ?	17h 07 (P montre le dessin au tableau) 
185		E17	Positif	
186		P2	Donc, ça ne peut pas donner moins sept. Alors, la valeur absolue de sept, c'est quoi ?	
187		E17	Sept	
188	00:30:22	P2	Valeur absolue de moins 4 ? E30 ?	
189		E30	Quatre	
190	00:30:23	P2	Valeur absolue de moins deux ? E17	
191		E17	Deux	
192		P2	Valeur absolue de huit	
193		Es	Huit	
194	00:30:37	P2	Alors, si je vous dis maintenant la valeur absolue de X. Vous allez me répondre ! E24	(P écrit au tableau) $ X $
195		E24	X	
196	00:30:41	P2	Vous allez trop vite. Ce ne pas si simple quand même	
197	00:30:46	P2	Valeur absolue d'un nombre X, ça va être quoi ? Utilisez la distance d'abord et après, on verra, E33 ?	
198		E33	La distance de X à moins X	(P désigne au tableau) 
199		P2	La distance de X à moins X, c'est le double	
200	00:31:07	E33	La distance de X à zéro	
201	00:31:09	P2	C'est la distance de X à zéro, que X soit positif ou qu'il soit négatif, c'est la distance à zéro. Donc, on va rédiger ça. D'abord on ne va noter ici que ça, la distance de treize à zéro ou la distance de moins treize à zéro	
202	00:31:35	P2	Voilà ce qu'on a. D'accord ! Donc, on est parti d'une distance entre deux nombres, tout d'un coup on se retrouve avec un seul nombre. Mais finalement il y a toujours la notion de distance derrière, cachée. Distance d'un nombre à zéro	(P montre au tableau) d'abord ça  et puis ça $ x = d(x; 0)$
203	00:31:42	P2	Première idée très importante à retenir d'ici demain, la valeur absolue c'est une distance et donc, on rédige la phrase :	
204	00:31:51	P2	La valeur absolue d'un nombre est égale à sa distance à zéro. C'est à dire, valeur absolue de X . P2 parle avec un élève...	

205	00:32:52	P2	Qu'est que j'écris ? C'est à égale distance de X à zéro, de zéro à X, ça n'aura pas d'importance. La distance entre les deux nombres c'est...	(P montre au tableau) $ x = d(x; 0)$
206		E6	Pardon	L'élève a demandé de dicter la phrase à nouveau
207	00:33:10	P2	C'est à dire, vous écrivez maintenant, là, au niveau de l'algèbre. On a écrit le concept, maintenant on écrit de manière algébrique. Donc, la valeur absolue d'un nombre est égale à sa distance à zéro, c'est à dire la valeur absolue de X est à égale distance de X à zéro	(P montre au tableau) $ x = d(x; 0)$
208	00:33:35	P2	Maintenant on va séparer, parce que suivant le nombre « x » ça peut être comment ?	
209		Es	Positif ou négatif	
210	00:33:44	P2	On avait donné plusieurs exemples : quand le nombre était positif finalement, c'était quoi la valeur absolue du nombre ? Tout le monde a le temps de réfléchir avant de lever la main.	
211	00:33:54	P2	Quand un nombre est positif, sa valeur absolue est ? E16 ?	
212		E16	C'est elle-même	
213	00:34:00	P2	C'est elle-même, donc c'est simple à retenir. La valeur absolue de treize c'est elle-même parce que la distance à zéro c'est treize. Comment nous venons de dire que la valeur absolue d'un nombre positif est égale à elle-même. En traduisant en algèbre cela fait ...	
214		P2	E32 : plus ...	(L'élève fait référence au signe +)
215	00:34:49	P2	Non, on ne peut pas écrire ça, il faut que jeil faut que je mettes, si le nombre est positif, ? E30 ?	
216		E30	Qu'il est plus grand que zéro	
217	00:35:01	P2	Dire qu'il est positif signifie « il est plus grand que zéro ». Dire qu'il est positif ou nul, alors, E30 ?	(P écrit au tableau) $X > 0 \quad x = x$
218	00:35:04	E30	plus grand ou égal à zéro	
219	00:35:09	P2	Voilà, valeur absolue de X c'est elle-même, et réciproquement d'ailleurs. Si j'ai ça, je suis sûr que le nombre est comment ? Positif, donc c'est réciproque. E2 ?	(P écrit au tableau) $X \geq 0$ et la définition de la valeur absolue
220	00:35:18	E2	Excusez-moi, pour le nombre, pour la définition, on ne précise pas pourquoi ?	L'élève fait référence à « X » dans la définition
221	00:35:25	P2	Là quand on ne précise pas c'est que c'est un réel quelconque, ça marche pour tous les nombres, tout à fait.	
222	00:35:33	P2	Valeur absolue de « pi » ?	(P écrit au tableau) $ \pi = \pi$
223		Es	« pi »	
224	00:35:34	P2	Valeur absolue de racine de deux ?	(P écrit au tableau) $ \sqrt{2} = \sqrt{2}$
225		Es	Racine de deux	
226	00:35:39	P2	Ca va ça ? Bien, on continue, on va écrire la dernière phrase. Qui la fait ? E24 ?	

227	00:35:48	35 E24	La valeur absolue d'un nombre négatif est égale à son opposé	
228	00:35:54	P2	Voilà, ne confondez pas opposé et l'inverse. On a parlé de l'inverse ce matin. Donc, la valeur absolue d'un nombre négatif est égale à son opposé. D'accord ! C'est à dire, E30 ?	(P écrit au tableau) $X < 0 \quad x = -x$ et la cont. de la définition de la valeur absolue
229	00:36:21	36 E30	C'est à dire que, un nombre est inférieur à zéro, alors la valeur absolue de X est égale à moins X	
300	00:36:31	P2	Voilà, vous pouvez noter. C'est réciproquement, bien entendu. Là c'est toujours choquant cette phrase. A votre avis, pourquoi y a t'il des élèves qui sont choqués quand on dit ça ?	

301		37 Es	...	
302	00:36:44	P2	Oui, qu'est qui choque ?	
303		Es	...	
304	00:36:47	P2	Il ont l'impression que moins « -x », ça peut vouloir dire quoi ? E30 ?	
305		E30	Un nombre négatif	
306	00:36:49	P2	Oui, mais est ce vrai ? E30 ?	
307		E30	Non	
308		P2	Oui, moins devant une lettre, ça signifie quoi ? E24 ?	
309		E24	Que la lettre est égale à un nombre déjà négatif	
310		P2	Oui, mais ça veut dire quoi ? Ca veut dire l'opposé	
311	00:36:53	P2	Le moins devant une lettre, ça veut dire l'opposé, c'est bien ça qu'on vient de rédiger.	17h 13 (P montre l'écriture de la définition de la valeur absolue au tableau)
312	00:37:07	P2	Vous voyez bien que puisqu'ici dans la phrase, X est un nombre négatif, si vous faite moins X ça donnera bien un nombre positif, donc, c'est cohérent. La valeur absolue est bien toujours comment ? E25 ?	
313		E25	Positive	
314	00:37:24	P2	Donc, on peut mettre une propriété importante : la valeur absolue est toujours positive ou nulle	17h 13 (P écrit au tableau) La valeur absolue d'un nombre est toujours positive ou nulle
315	00:37:40	P2	Vous reprenez bien ça puisque déjà demain on retravaillera là-dessus. Vous voyez que cette notion d'équidistance, qu'on avait vu la semaine dernière, on l'a revue ici, c'était l'occasion.	

316	00:37:59	P2	Est-ce que tout le monde a compris pourquoi on avait besoin d'une nouvelle notation ? Pour être sûr, alors bien sûr avec des cas comme celui-là, l'exemple que j'ai donné, tout le monde regarde ! je l'ai donné parce que ça enrichit la définition et, en fait, c'est ce que j'analyse quand je cherche la distance de 12 à 25. Est-ce que je vais écrire ça ?	<p>17h13 (P montre des écritures que il a fait)</p> $d(12 ; 25) = 12 - 25 = 25 - 12 = 13 = d(13 ; 0)$ 
317	00:38:19	P2	Je sais qui est le plus grand entre 12 et 25, c'est 25. Ce que je vais écrire est . . . ?	17h 13 (P écrit au tableau) $ 25 - 12 = 13$
318	00:38:23	P2 et Es	25 moins 12, on est bien d'accord !	
319	00:38:29	P2	Donc, on a fait cela, on a . . . un petit protocole simplement pour voir avec un exemple. Mais si vous avez une lettre, c'est obligé de garder les barres de valeurs absolues, mais s'il n'y a pas de lettre, on va toujours les enlever.	
320	00:38:43	P2	Donc, si je vous dis, valeur absolue de moins six, on ne va pas laisser ça. On va écrire quoi ? On va écrire six.	17h13 (P écrit au tableau) $ -6 = 6$
321	00:38:51	P2	Par contre, si je vous dis valeur absolue de X moins cinq, je suis obligé de laisser. D'accord ? C'est la distance de « x » moins cinq à zéro.	17h13 (P écrit au tableau) $ x-5 $
322	00:39:05	P2	Là je ne peux pas enlever les barres, là il faut bien comprendre . . .	
323	00:39:12	P2	Alors, maintenant, on revient à mon exemple et puis on poursuivra toujours la notion de valeur absolue. On va voir ce qu'on fait, on réfléchit bien déjà à la définition qu'on a donné de la notation scientifique. C'est un moyen de donner une définition de la notion de la valeur absolue	<p>(P écrit au tableau)</p> $A = (999\ 999\ 999\ 900 + 25)^2 - (999\ 999\ 999\ 900 - 25)^2$  <p>$a = a + 25$ $b = a - 25$</p> <p>37.1.1</p>
324	00:39:34	P2	Maintenant, on va un petit peu revenir à mon exemple. « A » est égal à quoi ?	

325	00:39:48	38 P2	A « a » plus 25 au carré moins « a » moins 25 au carré. Alors, qui sait qu'est-ce que va dire factorise ? Ce qui est là. Qu'est ce que j'ai sous les yeux ? E6 ?	(P écrit au tableau) $A = (a + 25)^2 - (a - 25)^2$
326		E6	Des identités remarquables	
327		P2	On a des identités remarquables ? E33 ?	
328		E33	Différence de deux carrés	
329	00:40:25	P2	Oui, on a une différence de deux carrés. Ça donne quoi la différence de deux carrés ? Je vous dis de les apprendre en français, E33 ?	
330		E33	...	
331		P2	Non, vous savez que celle-là $(a + b)(a - b)$, E30 ?	(P écrit au tableau) $(a + b)(a - b) =$
332		E30	$a^2 - b^2$	
333	00:40:46	P2	Voilà, et après vous ne savez pas l'utiliser quand c'est compliqué..... Je vous ai dit qu'on apprend en français	(P écrit au tableau) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
334	00:40:53	P2	« a » carré moins « b » carré égal, ça, vous savez par cœur en principe. Je vous avais dit l'autre jour qu'il fallait l'apprendre en langage naturel.	
335	00:41:03	P2	Une différence de deux nombres est égale au produit de la somme par la différence de ces deux nombres. Dans votre cahier vous avez ça, il faudra l'apprendre	
336	00:41:23	P2	Bien, alors, d'après ça, vous me dictez ? E30 ?	
337	00:41:27	E30	« a » plus 25 plus « a » moins 25 produit « a » plus 25 moins « a » moins 25	
338	00:41:33	P2	C'est le produit de la somme par la différence de ces deux nombres, tout le monde comprend le produit, donc, tout le monde comprend le « $-a$ », E30 ?	(P écrit au tableau) $= (a + 25 + a - 25)(a + 25 - a + 25)$
339	00:41:38	E30	« a » plus 25 moins « a » moins 25	
340	00:41:43	P2	On va écrire encore comme ça pour que tout le monde comprenne.	(P écrit au tableau) $= [(a + 25) + (a - 25)] [(a + 25) - (a - 25)]$ $= (a + 25 + a - 25)(a + 25 - a + 25)$

341	00:42:06	P2	J'ai bien écrit que c'est une différence de deux carrés, c'est le produit de la somme par la différence. Qu'est que ça me donne ? Deux « α » que multiplie « α » moins « α » ça va s'annuler. Qu'est ce qu'il me reste ? 25 moins, moins 25 ça fait plus 25, plus 25 ça fait donc 50	(P continue écrit au tableau) $= [(\alpha + 25) + (\alpha - 25)] [(\alpha + 25) - (\alpha - 25)]$ $= (\alpha + 25 + \alpha - 25) (\alpha + 25 - \alpha + 25)$ $= (2\alpha) (50)$
342	00:42:21	P2	Deux fois 50, cent, cent « α ». Et donc, quel est le résultat exact?	(P continue à écrire au tableau) $= [(\alpha + 25) + (\alpha - 25)] [(\alpha + 25) - (\alpha - 25)]$ $= (\alpha + 25 + \alpha - 25) (\alpha + 25 - \alpha + 25)$ $= (2\alpha) (50)$ $= 100\alpha$
343	00:42:30	P2	On a besoin de ce nombre qui est « α » et je rajoute quoi ? E24 ?	(P continue à écrire au tableau) $= [(\alpha + 25) + (\alpha - 25)] [(\alpha + 25) - (\alpha - 25)]$ $= (\alpha + 25 + \alpha - 25) (\alpha + 25 - \alpha + 25)$ $= (2\alpha) (50)$ $= 100\alpha$ $\underbrace{\mathbf{999\ 999\ 999\ 900}}_{\alpha}$
344	00:42:35	E24	Deux zéros	
345	00:42:36	P2	Je rajoute deux zéros derrière parce que j'ai à multiplier par cent.	(P continue à écrire au tableau) $= [(\alpha + 25) + (\alpha - 25)] [(\alpha + 25) - (\alpha - 25)]$ $= (\alpha + 25 + \alpha - 25) (\alpha + 25 - \alpha + 25)$ $= (2\alpha) (50)$ $= 100\alpha$ $\underbrace{\mathbf{999\ 999\ 999\ 900\ 00}}_{\alpha}$
346	00:42:46	P2	Alors, je mets un(e) affichage scientifique ce nombre (, ça) donne quoi ? E33 ?	(P continue à écrire au tableau) $= [(\alpha + 25) + (\alpha - 25)] [(\alpha + 25) - (\alpha - 25)]$ $= (\alpha + 25 + \alpha - 25) (\alpha + 25 - \alpha + 25)$ $= (2\alpha) (50)$ $= 100\alpha$ $= 999\ 999\ 999\ 900\ 00$ $\underbrace{\mathbf{999\ 999\ 999\ 900\ 00}}_{\alpha}$
347	00:42:53	E33	Neuf virgules...	
348	00:42:55	P2	Neuf virgule, combien de neufs, alors, 1.2.3.4.5.6.7.8.9 Et combien de zéros ? J'ai besoin de mettre combien zéros ? Dès que j'ai mis la virgule, donc je n'ai plus besoin de mettre zéro, mais je pense combien de chiffre 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12. Donc, si je mets là, je presque oublier un. zéro..... ça fera 13	(P continue à écrire au tableau) $= 9,99\ 999\ 999\ 9 \times 10^{13}$
349	00:43:43	P2	Mais qu'est qui se passe : la calculatrice va arrondir à dix, là maintenant je n'ai plus d'égal, mais qu'est ce que j'ai ?	(P continue à écrire au tableau) $= 9,99\ 999\ 999\ 9 \cdot 10^{13}$ $\approx 10 \cdot 10^{13}$

350	00:43:55	P2	Semblable ou égal de dix fois dix exposant treize ? Ca c'est presque dix	
351	00:44:03	P2	Et ça sera bien, c'est à dire dix exposant 14, l'ordre de grandeur que va me donner la calculatrice. Donc, la calculatrice va quand même me donner un grand nombre de grandeurs,	(P continue à écrire au tableau) $= 9,99\ 999\ 999\ 9 \cdot 10^{13}$ $\approx 10 \cdot 10^{13}$ $\approx 10^{14}$
352	00:44:44	P2	Cet ordre de grandeur en fait c'est très important, c'est placé dans l'échelle de puissance de dix.	
353	00:44:51	P2	On a fait des choses importantes cet après midi. On avait une nouvelle notion qui est la valeur absolue avec une définition unique qui se découpe après en deux.	39
354	00:45:01	P2	Qu'est ce qu'une définition unique ?	
355	00:45:08	P2	Valeur absolue d'un nombre c'est la distance d'un nombre à zéro, et ça se sous-divise en deux. S'il est négatif, c'est son opposé et s'il est positif ou nul, c'est lui-même. Il faut retenir ça.	
356	00:45:30	P2	Et puis, on a vu aussi l'intérêt du calcul littéral... en français avec des lettres au lieu de travailler avec des nombres	
357	00:45:41	P2	Sarah, vous avez du mal à le lire, tout le monde, c'est normal a du mal à lire ce nombre. Par contre, en mathématique quand on fait un calcul littéral, on peut le réduire. Ici ça vous donne donc : « a » plus 25 « a » moins 25 . Regardez tous ce qui est fait après. On obtient des résultats très simples : qui est cent « a ».	(P montre le nombre) $A = (999\ 999\ 999\ 900 + 25)^2 - (999\ 999\ 999\ 900 - 25)^2$ $a = \alpha + 25$ $b = \alpha - 25$
358	00:46:10	P2	Ce résultat d'ailleurs est même plus général puisque maintenant si je vous demande de calculer par exemple ça . . . ?	(P écrit au tableau) $123\ 456\ 725^2 - 123\ 456\ 675^2$
359	00:46:39	P2	Tout de suite la réponse, E33 ?	
360	00:46:42	E33	Cent « a »	
361	00:46:45	P2	Oui mais ce qui « a »	

Annexes

362		E33	123456700	
363	00:47:05	P2	Où, maintenant il faut rajouter deux zéros. D'accord ! Le « <i>a</i> » c'est ça, parce que là vous avez « <i>a</i> » plus 25 et « <i>a</i> » moins 25. Et comme on va obtenir, de toute façon, un nouveau cent « <i>a</i> », ça donnera ça.	(<i>P écrit au tableau</i>) 123456700 00
364	00:47:24	P2	Vous pouvez noter l'application. Donc, mon résultat va être plus général que l'exercice que vous avez après.	(<i>ça sonne</i>)
365	00:47:35		Prenez bien notes de tout ça et après vous pouvez partir	
366	00:50:24			
367				
368				
369				

13 Les entretiens

13.1 Entretien réalisé avec P1

N°	QUESTION	REPOSE
0	07s - Je vous suis très reconnaissant de bien vouloir consacrer un peu de votre temps pour cette interview. Je voudrais maintenant vous dire qu'au début je n'ai pas explicité mon sujet de recherche pour que ce fait ne vous perturbe pas, pour n'avoir pas d'influence sur votre enseignement. En fait, mon sujet de recherche s'intéresse aux interrelations existantes entre les domaines mathématiques, notamment le domaine numérique-algébrique et géométrique d'autre part.	
1	48s - Êtes-vous toujours d'accord pour cette interview pendant laquelle je vous poserai des questions dans le cadre d'un travail de thèse ? N'hésitez pas à rajouter tout commentaire qui vous semblerait pertinent pour compléter vos réponses.	56s - Oui
2	1min07s - Depuis combien d'années enseignez-vous ? Pendant cette période dans quel établissement avez-vous enseigné et à quel niveau? 1min41s - E : Donc, pendant cette période vous avez enseigné dans deux établissements différents ? 2min41s - E : Au lycée, quels étaient les niveaux de vos classes ?	1min10s - J'enseigne depuis sept ans dans l'enseignement public et j'avais enseigné pendant sept ans auparavant dans l'enseignement privé. C'était à des niveaux différents. Dans l'enseignement privé, c'était plus au niveau lycée, terminale, terminale S jusqu'à la seconde, et les six dernières années au collège dans l'enseignement public après une année en lycée. 1min51s - J'ai enseigné dans l'enseignement privé hors contrat, sous contrat d'enseignement financé par l'État mais où les parents paient l'enseignement et puis avec des enseignements hors contrat, c'est à dire des boîtes complètement indépendantes, où l'on reçoit des élèves pour leur faire passer le bac le plus généralement. C'est ce que j'ai fait de 21 à 28 ans. Pendant deux ans, j'ai fait un autre travail. Ensuite, j'ai intégré l'enseignement public à 30 ans. La première année, j'étais en lycée, au lycée Jean Monnet à Montpellier et les six dernières années dans ce collège, le collège Froncarde. 2min45s - Des secondes, des terminales S, ES, sciences économiques et sociales et des premières et terminales littéraires.
Maintenant on va s'occuper des programmes, et dans les programmes je vous interrogerai selon votre point de vue à propos de mon sujet, votre point de vue par rapport à des interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique.		
3	3min19s - Moi, je viens du Brésil. Au Brésil il y a des enseignants qui trouvent que les programmes ne sont pas importants. Il y a d'ailleurs des enseignants qui ne suivent pas vraiment le programme. Est-ce que le programme en France est important pour tous les enseignants ? Est-ce que les enseignants en France suivent le programme ? Quel degré	3min39s - Oui, globalement, oui. Pour voir des enseignants que l'on a en formation, ils sont attachés à suivre le programme. C'est quand même la référence. Je dis globalement parce que ce n'est pas forcément par une

	d'importance donnez-vous au programme ?—4min07s - E : Donc, en France, les enseignants sont respectueux du programme ? 4min15s - E : Quel degré d'importance donnez-vous au programme ?	lecture des programmes qu'ils en ont connaissance mais par une lecture des manuels scolaires. Mais globalement, ils sont attachés à suivre le programme, parfois avec une ou deux années de retard, jamais beaucoup plus.4min08s - Oui, ils sont respectueux du programme.—4min19s - C'est la base du travail, on est des fonctionnaires de l'Etat, on est tenu de faire passer ce qu'il y a dans les programmes même si, par moments, on n'est pas d'accord avec certains, surtout en ce moment avec les programmes du primaire qui sont parus. On se demande ce qui va arriver aux collèges. Globalement, on ne se pose pas la question, dans l'acte d'enseignement, de savoir s'il faut ou pas le faire. C'est le programme, il faut le faire passer. Mais sur le contenu lui-même, on essaie de s'y tenir.
4	5min04s - Est-ce que le programme fait référence au NAG ? Si oui sous quelle forme ?	5min16s - Très peu, ne serait-ce que par la façon dont il est découpé. Il est découpé en catégories : nombres et calculs, gestion de données et fonctions, géométrie, mesures et volumes, pardon, grandeurs et volumes. Donc, il est réparti en quatre domaines. Les interactions, elles existent. Elles sont parfois stipulées dans les commentaires. Mais le catalogue dont on dispose au départ, c'est vraiment une partition des acquisitions à faire passer. Elles ne sont pas explicitement présentes même s'il y a parfois des commentaires qui encouragent fortement à faire le lien. Ces commentaires-là se retrouvent plus dans l'en-tête de chaque niveau. C'est à dire, au départ, il y a toujours une ou deux pages qui expliquent ce que l'on devra faire pour faire passer les données. Et puis, dans ce qu'on appelle les documents d'accompagnement, ils sont très nombreux. Il y en a huit qui sont sortis avec les nouveaux programmes, sur différents thèmes. Ils expliquent comment faire le lien entre chacun des thèmes. Au final, c'est présent si on veut bien creuser un peu.
5	6min28s - Par rapport à ce programme, dans quels thèmes, selon vous, se trouvent les concepts mathématiques qui sont le plus en rapport avec notre sujet de recherche ?	6min40s - Au collège, on a toute l'analyse avec les fonctions, l'analyse algébrique de problèmes géométriques qui aident à maximiser, minimiser, trouver la position d'un point sous

		contraintes. Le début du programme de collège est encore assez descriptif en sixième, on commence à voir quelques théorèmes en cinquième mais ça reste des outils. On commence à pouvoir faire agir ces interactions vraiment à des problèmes en quatrième, la fin du collège, c'est en quatrième et troisième avec, soit à partir de problèmes géométriques dans le plan ou dans l'espace sur lequel on voudrait, avec une contrainte donnée, trouver la position particulière d'un point ou bien maximiser ou minimiser une surface ou un volume. Je les verrais dans ce domaine-là.
Maintenant on va parler des manuels, et dans les manuels scolaires je vous interrogerai selon votre point de vue justement par rapport au NAG.		
6	7min57s - Utilisez-vous couramment des manuels pour préparer votre cours et choisir vos exercices ? Est-ce que vous pouvez me dire lesquels ? Est-ce qu'il y a des manuels que vous utilisez de façon personnelle ? Est-ce que vous pouvez me dire lesquels ?	8min15s - J'ai une position un peu particulière. Je suis auteur d'une série de manuels scolaires du collège : le Babylone chez Bordas. On avait essayé dans ces manuels de faire quelque chose d'un peu différent, c'est à dire des exercices autres que répétitifs et uniquement ciblés sur les données en question mais qui essaient un peu plus de faire réfléchir. Moi, de manière personnelle, j'utilise beaucoup cela et, pour revoir mon cours, et pour choisir des exercices ou des contrôles. Maintenant, j'essaie au maximum d'utiliser le manuel qu'ont les élèves parce que je trouve qu'on l'achète, qu'on leur fait amener. En tant que banque d'exercices, je ne veux pas dire qu'ils se valent tous, mais on peut trouver le bonheur dans chacun des manuels. Donc, au maximum, j'essaie de leur faire utiliser pour leur faire faire le travail à la maison ou des choses comme ça.—Donc, lesquels c'étaient leurs manuels à eux, je n'ai même pas la référence. Je vais les chercher. C'est le Dimathème. Un vieux manuel Dimathème qui va être changé cette année. Moi, de manière personnelle, j'apprécie assez Le Triangle de Chatier parce que déjà les gens qui le font ont fait d'autres travaux intéressants et puis, il y a d'autres approches. On n'est pas dans des exercices répétitifs, ça s'approche de l'esprit dans lequel on voulait travailler avec le Bordas Babylone, c'est à dire de faire des exercices qui puissent faire réfléchir. Si possible, pas deux qui soient identiques, qu'il y

		ait toujours une nouveauté qui soit apportée petit à petit. Voilà, dans chacun de ces manuels-là.
7	10min40s - Est-ce que le(s) manuel(s) que vous utilisez pour préparer vos cours fait(font) référence au NAG ? Si oui dans quelles parties (chapitre, thème, problème, etc) ? Sous quelle forme ?	11min10s - Une fois que toute la partie algébrique a été traitée, on aura dans chaque chapitre de géométrie des modélisations que l'on va nous proposer et qui vont permettre de passer d'un contexte géométrique à un contexte numérique ou algébrique. On va souvent les retrouver dans les chapitres de géométrie ou, inversement, vers la fin des chapitres sur les équations ou sur les fonctions, et des points de départ géométriques qui permettraient de basculer ensuite dans l'algébrique. Le Triangle fait une petite partie à la fin qu'il appelle « problèmes de synthèse ou problèmes vers la seconde » dans le manuel de troisième qui permet de mélanger tout cela, d'étudier des remplissages de solides et de les faire fluctuer. C'est surtout dans ces domaines-là.
8	12min10s - Est-ce que la classe à laquelle vous enseignez a un manuel que vous et les élèves utilisent ? Est-ce que vous pouvez me dire comment vous utilisez ce manuel ?	12min22s - En classe de troisième, moi je n'étais pas là quand il a été choisi. Ce n'est pas un choix. Je m'en sers principalement comme une banque d'exercices. Pour les activités proprement dites d'introduction, je préfère, si vraiment il y en a une qui me satisfait dedans, je vais me baser dessus pour le travail. Mais, sinon, en général, j'amène mes propres situations. Pour le cours, ça sert de référence pour les élèves. C'est à dire, il y a dedans un mémento pour la géométrie et pour le numérique sur les trois années précédentes du collège. Ils savent qu'ils peuvent s'en servir. Et puis, eux-mêmes se servent du cours mais moi, pour ma part, je ne fais pas de renvois précis à ce cours. C'est à dire qu'ils arrivent eux-mêmes à faire le parallèle et avoir une autre source de connaissances. Voilà, mais principalement comme une banque d'exercices.
9	13min17s - Est-ce que le(s) manuel(s) que vous utilisez avec les élèves fait(font) référence au NAG ? Si oui, dans quelles parties (chapitre, thème, problème, etc) ? Sous quelle forme ?	13min27s - Oui, un plus discrètes que, par exemple, dans Le Triangle, mais il y a quelques problèmes de synthèse. Celui qu'ils ont là, ce qu'on peut reprocher, c'est de la pseudo-modélisation. On tente de faire des situations concrètes qui, finalement, sont déjà modélisées, donc, après il y a un passage du géométrique vers l'algébrique qui est induit. Mais elles sont beaucoup moins nombreuses que dans d'autres.

10	14mins00s - Par rapport à ce(s) manuel(s), quelles sont les parties, dans lesquelles selon vous, se trouvent les concepts mathématiques, les exemples, les situations, etc. qui sont le plus en rapport avec mon sujet ?	14min21s - Les résolutions d'une équation, les fonctions, toute l'utilisation de la géométrie, de la géométrie dans l'espace. Les situations dans l'espace sont très riches de ce point de vue là, et puis toutes celles qui peuvent faire appel à la géométrie qui est enseignée, que ce soit de la trigonométrie, les théorèmes sur le triangle rectangle, les théorèmes de Thalès sur la proportionnalité. Voilà toutes ces situations qui permettent de faire le lien.
Maintenant on va parler sur le NAG dans vos façons de faire vos cours, de préparer vos activités, gérer la classe donc je vous interrogerai à propos de votre pratique relativement au NAG.		
11	15min17s - Pendant la préparation de vos cours, voyez-vous des interrelations possibles entre les domaines mathématiques pouvant aider dans la compréhension des sujets qui seront étudiés? 17min36s - E : C'est à dire, quand vous êtes en train de préparer vos cours, vous pensez à ces interrelations ?	15min35s - C'est celles que l'on a signalé précédemment. Ces interrelations permettent de changer un peu de contexte, c'est à dire si l'on est sur de la résolution d'équation et que l'on est que sur des problèmes numériques ou de dénombrement, ou des choses comme ça, cela permet de varier l'approche, ou même de refaire travailler les connaissances antérieures, pour que tout ne soit pas partitionné dans un coin, et donc de refaire intervenir un théorème qui a été vu il y a deux mois, à un moment donné, et de l'amener à le réétudier. Elles peuvent aussi servir à motiver des introductions. Par exemple, pourquoi il faut multiplier deux racines carrées. Il y a une introduction que j'utilise, quand j'ai le temps, c'est à partir d'un triangle rectangle avec des côtés dont la mesure exacte serait exprimée avec des radicaux. Il faudrait calculer une aire ou quelque chose comme ça. Donc, on est amené à multiplier deux racines carrées. Là on met les élèves dans une situation nouvelle. C'est à dire, comment on fait pour multiplier deux racines carrées ? Donc, ce lien-là est assez intéressant pour ne pas poser la multiplication des racines carrées comme quelque chose que l'on doit savoir faire mais comme quelque chose qui est motivé par une situation donnée. Donc, on peut l'avoir là, on peut l'avoir pour des fractions, en prenant un rectangle dont les côtés seraient des fractions de mesures connues. Pour calculer son aire, on est obligé de multiplier des fractions. Comment on fait ? On peut amener ces situations-là. Donc, c'est à toi d'amener, via la modélisation de situations concrètes, des situations qui

		nécessitent de nouveaux concepts numériques ou algébriques. 17min42s - Oui.
12	17min45s - Faites-vous explicitement référence en cours à l'existence ou non, des interrelations possibles qui peuvent exister entre les sujets, les domaines qui sont en train d'être étudiés?	17min59s - Peut-être pas forcément dans le cours mais plutôt dans l'approche qui précède le cours ou qu'il y a après. J'essaie d'orienter mon cours sur un cours outil, c'est à dire on met des outils à disposition des élèves pour ensuite résoudre des problèmes. Donc, c'est pas tellement là que je vais faire apparaître ces interrelations. Ce serait plutôt vraiment après quand on travaille sur de la résolution de problèmes où on appelle des outils dans des problèmes géométriques, numériques ou algébriques, mais pas forcément dans le cours, non.
13	18min40s - Utilisez-vous le NAG dans vos pratiques en classe ? Est-ce que le NAG peut être pris en compte en tant qu'outil didactique capable de mobiliser des connaissances mathématiques chez les élèves ?	19min01s - Oui, c'est à dire on les fait passer d'une posture d'apprenant qui reçoivent, et parfois subissent un apprentissage, pour les faire plutôt rentrer dans une pratique de recherche, où on part de situations connues, souvent géométriques, et ces situations-là, comme on disait tout à l'heure, nous amènent et nous posent des problèmes numériques ou algébriques, c'est à dire est-ce qu'on est capable de multiplier deux racines carrées, est-ce qu'on sait résoudre une équation du second degré, ou des choses comme ça. Donc, c'est ces situations-là concrètes qu'on modélise par des situations géométriques qui viennent mobiliser ces outils. Est-ce que c'est plus intéressant pour les élèves ? Il me semble qu'ils se sentent plus acteurs de la démarche. Donc, même si, peut-être, on reste dans le cadre des mathématiques la plupart du temps, il y a quand même un pourquoi je dois faire ça, pourquoi je dois savoir multiplier deux racines carrées, pourquoi additionner deux fractions, à quoi ça peut servir. Donc, ça reste très interne et très technique pendant un peu de temps pour eux et puis on peut toujours se référer quand même à cette situation-là, à cette situation de départ en disant : rappelez-vous pourquoi on a fait ça, on a voulu multiplier les racines carrées parce qu'on voulait calculer une aire. Donc, que ce soit un plus, je n'en doute pas.
14	20min26s - Faites-vous référence au NAG dans votre cours de mathématiques? Si oui par quels thèmes, chapitres, problèmes, etc. ? Si non pourquoi ?	20min47s - Oui, je voudrais dire ceci, dans le cours, le cours je l'axe comme un outil, où on met des outils à

		disposition, donc c'est plutôt dans les approches qui vont être avant où je verrais bien ces relations mais pas tellement dans le cours lui-même.
15	21min17s - Si vous deviez faire des cours ou des activités propices au NAG , pouvez-vous situer des activités qui vous semblent être cohérentes ? Est-ce que vous pouvez proposer un exercice, une tâche, une activité pour les élèves dans le cadre <i>numérique-algébrique</i> qui met en œuvre l'utilisation du NAG pour pouvoir le résoudre ? Dans cette activité qu'est-ce que vous attendez des élèves sur le point de vue de la résolution de cette tâche ?	21min59s - L'idée c'est toujours de trouver un point de motivation dans l'introduction d'une nouvelle notion, il me semble. C'est à partir de quelque chose qui est connu, de quelque chose que les élèves maîtrisent, pour arriver à une rupture, au moment où ils ne savent plus faire, et que ce moment-là mobilise d'autres apprentissages.
16	22min58s - Est-ce que vous pouvez proposer un exercice, une tâche, une activité pour les élèves dans le cadre <i>géométrique</i> qui met en œuvre et en évidence l'utilisation du NAG pour pouvoir la résoudre ? Dans cette activité qu'est-ce que vous attendez des élèves du point de vue de la résolution de cette tâche ? Donneriez-vous ces tâches à vos élèves ? Pourquoi ? (Éventuellement indiquez les modifications que vous apporteriez.)	23min21s - Donc là, par exemple, pour l'introduction du produit de racines carrées, pour motiver cette approche-là, par exemple, ce que l'on précisait tout à l'heure, avec un triangle dans lequel on pourrait avoir à calculer avec le théorème de Pythagore, un côté avec une racine carrée, et puis amener à calculer une autre aire d'un quadrilatère qui serait accolé, tout cela pour amener à devoir multiplier des racines carrées entre elles.
Maintenant on va parler sur le NAG dans le point de vue des élèves, donc je vous interrogerai selon votre point de vue à propos de l'utilisation du NAG par les élèves.		
17	24min08s - Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves dans le cadre du NAG ?	24min13s - Les élèves sont beaucoup trop habitués à travailler par chapitre, c'est à dire que si on leur donne un exercice, ils recherchent dans leur zone temporelle proche les connaissances à mettre en jeu. Ils se disent que c'est quelque chose qu'on a dû faire, voilà, ces jours-ci et on va essayer d'appliquer ça. Ils ne pensent pas intuitivement à utiliser, à faire référence à de la géométrie dans un problème numérique ou inversement. Donc, c'est vrai que les habituer petit à petit à mobiliser des connaissances algébriques pour résoudre de la géométrie, ou vice et versa, c'est leur donner des outils supplémentaires pour réussir. Mais la principale difficulté c'est qu'ils ne sont pas habitués à ce travail-là.
18	24min59s - Quelles sont les connaissances que, selon vous, les élèves doivent avoir sur le NAG ? Où ces connaissances doivent être acquises (plus tôt au collège ou au lycée) ? Est-ce qu'il y a un niveau de l'enseignement spécifique pour cette acquisition ? Le quel ? 26min10s - E : Donc, si j'ai bien compris, en commençant par la quatrième, en passant par la troisième, jusqu'à la seconde, le programme est progressif ?	25min20s - Dans l'enseignement actuel, le début du collège est là pour la mise en place des outils. Il peut y avoir des interactions, des petites interactions entre le numérique et le géométrique mais elles restent quand même très limitées. Par contre, dès qu'on commence à avoir des outils de géométrie un peu plus nombreux, en quatrième, là on peut faire des problèmes intéressants qui mobilisent l'un et l'autre. Et c'est vraiment, je

		<p>pense, en troisième, voire en seconde, quand on a de l'algèbre efficace avec la résolution d'équations, d'inéquations, la première branche des fonctions, que sur ces deux années-là on peut les mettre en pratique sans cesse. Donc, la finalité ce serait qu'en fin de seconde ils aient rencontré assez de situations pour que ce soit un réflexe pour eux. 26min19s - En fait, la progression de la connaissance algébrique et des fonctionnelles permet d'ouvrir le champ des problèmes. En troisième par exemple, on a très peu de chances de faire un problème de recherche de maximum, d'optimisation. De manière théorique, on est obligé d'utiliser des outils qui permettent de faire de l'approximatif. Mais en seconde, en première, quand ils auront progressé dans l'étude des fonctions, ils pourront aller un peu plus loin. Mais voilà, l'enrichissement du côté algébrique permet d'aller plus loin dans l'investigation chaque fois.</p>
19	<p>26min58s - Pensez-vous que vos élèves aient des connaissances mathématiques suffisantes et /ou adéquates pour comprendre l'usage que vous faites du NAG en classe ?</p>	<p>27min12s - Oui, ils ont une connaissance antérieure. On essaie de faire des liaisons en fonction des connaissances qu'ils ont. Maintenant, un entraînement suffisant : non. Ils n'en sont qu'au début. Souvent, ils ne comprennent pas, ils sont réticents à mélanger les deux domaines parce que cela leur fait deux tâches différentes à gérer mais, petit à petit, si cela amène à résoudre des problèmes concrets, ils en perçoivent l'intérêt. Par exemple, celui qu'on avait fait avec le surveillant de baignade : comment délimiter une surface maximale avec une corde de périmètre donné. Voilà, c'est des choses dans lesquelles ils rentrent plus aisément que si l'on n'avait présenté que l'aspect déjà modélisé.</p>
20	<p>28min06s - Vos élèves vous posent-ils des questions faisant appel aux rôles réciproques entre les domaines mathématiques ? 28min43s - E : Est-ce qu'ils posent des questions qui font appel aux deux domaines ?</p>	<p>28min19s - Non, plutôt des questions sur le rôle même des mathématiques : à quoi servent les mathématiques dans notre monde ? Mais très peu de questions viennent d'eux pour savoir quel rôle joue tel domaine, le numérique ou l'algébrique dans la géométrie et vice et versa. Pour eux, les relations ne sont pas encore naturelles. 28min53s - Oui, oui. Oui, parce que les réponses en plus pour certains peuvent être beaucoup plus éclairantes par une approche qu'algébrique et pour d'autres par une approche</p>

		géométrique. Donc moi, dans les réponses je peux varier les approches mais, eux-mêmes, non, ne se posent pas la question des relations qui peuvent exister entre les deux domaines.
Maintenant on va parler sur le NAG dans le point de vue épistémologique, donc je vous interrogerai selon votre point de vue à propos des connaissances mathématiques.		
21	29min34s - Du point de vue mathématique, en général, indépendamment de votre enseignement, qu'est-ce qui vous semble important dans les interrelations entre les domaines mathématiques, plus précisément le NAG ?	29min51s - Historiquement, ce sont ces interrelations qui ont fait que les mathématiques ont évolué. Si on prend le cas du nombre Pi, par exemple, dont je leur parlais en faisant les polygones réguliers, c'était une recherche juste pour trouver les décimales de nombres qui a mobilisé énormément de connaissances géométriques, une approximation par les polygones réguliers, par la méthode d'Archimède. Finalement, on se rend compte que, à partir d'un problème donné, on a fait évoluer des mathématiques dans un autre milieu, et réciproquement. C'est à dire qu'on est parti de la recherche des décimales du nombre Pi, qui lui-même intervenait dans le calcul de l'aire d'un cercle, et puis en cherchant ces décimales, on est reparti sur des problèmes géométriques où on a défini tout un tas de notions, et puis ces notions-là ne permettant pas de trouver assez de décimales, on a trouvé des accélérateurs de convergence pour Pi, et ainsi de suite. Donc, ces relations-là, finalement, elles s'enrichissent mutuellement et elles ont permis aux mathématiques de grandir, petit à petit. Donc, c'est quelque chose que l'on peut essayer de reproduire en classe, à moindre échelle.
22	31min04s - E : L'exemple que vous donnez là vous paraît être un exemple qu'il est possible de travailler dans la classe ? Parmi les aspects que vous trouvez importants, quels sont ceux qui vous semblent importants d'être travaillés dans la classe ?	31min18s - Oui, moi je le fais avec les troisièmes quand on parle des polygones réguliers. D'autant plus qu'avec les récents changements de programme, on fait disparaître la rotation des programmes de troisième tout en y laissant les polygones réguliers. Donc, ils sont maintenant un peu vus pour eux-mêmes. Donc, pour agrémente ça, pour essayer de motiver ce travail sur les polygones réguliers, on peut rapidement, avec des logiciels de géométrie dynamique, montrer que plus on augmente le nombre de côtés, plus ça ressemble à un cercle. Puis montrer ce qu'a fait Archimède, de les encadrer, et c'est vrai, quand on dit aux élèves qu'il a

		fait ça il y a presque 4000 ans, ils sont assez impressionnés de tout ce travail. Et puis, ça génère des questions : combien on connaît de décimales de Pi maintenant, et des choses comme ça. Donc, c'est vraiment pour eux un but, bon, culturel, il n'est pas négligeable quand même, mais surtout pour motiver un peu une approche, encore une fois de plus.
23	32min19s - Au niveau des mathématiques elles-mêmes, des mathématiciens, quelles sont pour vous les difficultés rencontrées pour établir le NAG ?	32min33 - Il viendrait les résultats obtenus mathématiquement qui ne seraient pas applicables à la géométrie, ne serait-ce que par la nature des nombres. Par exemple, trouver des solutions négatives pour des équations, ou des choses comme ceci, qui, lorsqu'on repasserait ça dans le domaine géométrique et le domaine des mesures ou des longueurs, n'auraient plus de sens. Donc, c'est peut-être ces incohérences-là qui créeraient des difficultés. Maintenant, comme ça, brut comme ça, je n'ai pas d'autre idée qui me vient.
24	33min13s - Au niveau de vos études tant que mathématicien avez-vous rencontré des difficultés dans le cadre du NAG ? Si oui, vous pouvez me donner quelques exemples	33min25s - Moi, j'ai rencontré des difficultés à partir du moment où on a dépassé la dimension trois et qu'on est passé dans des espaces de dimension n où je ne pouvais plus me faire des représentations géométriques des situations qu'on me proposait. Tant qu'on me parlait de vecteurs et que je pouvais représenter ça en trois dimensions, j'arrivais à faire des liens entre ce que je faisais dans l'algébrique, enfin, dans le numérique, et le sens que je pouvais lui donner de manière géométrique. Dès qu'on est passé à n dimensionnelles, avec des hyperplans, tout ça, j'ai eu beaucoup plus de mal à faire ça. J'ai continué à toujours ramener ça à une dimension trois mais le lien me manquait pour me représenter les situations et, du coup, mes connaissances sont devenues beaucoup plus abstraites.
25	34min22s - On est presque à la fin de l'année scolaire, est-ce qu'entre ici et votre dernier cours prévu, vous pouvez me dire le jour où je pourrai aller vous observer et filmer à propos d'un cours sur le sujet qui m'intéresse : le NAG .	34min44s - Autre que ce matin, oui. On l'a fait ce matin sur le problème de la boîte que l'on veut construire à partir d'un carré. On a essayé, à partir d'un problème géométrique, d'optimisation de volume, en utilisant les outils qu'ils ont utilisé cette année, c'est à dire le tableur, la calculatrice, les logiciels de géométrie dynamique, les fonctions, l'algèbre, de voir comment on pouvait arriver à une solution. Bon, c'est un problème qu'ils pourront reprendre plus tard

		<p>parce qu'il nous manque des outils.</p> <p>Je leur ai fait juste observer le problème de la boîte de conserve, parce qu'en général, il est très souvent donné en seconde. Donc, pour initier le travail, leur dire que la boîte de conserve n'avait pas la forme qu'elle a pour rien. Le fait que sa hauteur soit égale à sa largeur ...au périmètre ... au diamètre du disque de base, c'était pour des questions de coût minimum. Voilà, tout ça, ils l'ont vu ce matin, mais ils pourront le continuer en seconde.</p>
26	<p>35min55s - Maintenant que nous avons parlé du NAG sur le point de vue des programmes, manuels, épistémologique, de votre pratique et sur le point de vue des élèves, est-ce que vous voulez revenir sur quelques thèmes ? Avez-vous des informations particulières à ajouter par rapport aux thèmes que nous avons abordés ? Voulez- vous revenir sur quelque thème ? 37min49s - Remerciements.</p>	<p>36min24s - Juste, c'est vrai, que c'est quelque chose qui n'est pas forcément mis en avant dans l'enseignement français, le travail sur ces interrelations. Même si par plaisir les profs de math aiment bien partir d'une situation géométrique en général pour avoir une résolution algébrique, mais je dirais que c'est presque plus par plaisir que par souci d'efficacité et par une réelle pensée de ce qu'il y a derrière. Je pense que c'est des situations qui peuvent donner du sens à certains mais pas à tous. Il y a un bon exemple, quand on introduit la distributivité en cinquième, on a en général derrière deux situations classiques pour illustrer ça. C'est soit les deux rectangles accolés et, par un calcul d'aire, on arrive à montrer que k fois a plus b c'est aussi k fois a plus k fois b, ou ensuite par des petits problèmes de comptage. J'achète trois pains au chocolat et trois baguettes et combien je vais payer à la fin. Donc, ce sont deux approches différentes, une complètement géométrique, une complètement numérique et on remarque que certains élèves accrochent plus avec l'une qu'avec l'autre. Donc, c'est peut-être ce qui pourrait permettre d'encourager aussi l'enseignement à travailler sur ces interrelations pour permettre à chaque élève aussi d'accrocher à un moment donné sur la notion qui est visée.</p>

13.2 Entretien réalisé avec P2

N°	QUESTION	REPOSE
0	Omn04s : Je vous suis très reconnaissant de bien vouloir consacrer un peu de votre temps pour cette interview. Je voudrais maintenant vous dire qu'au début je n'ai pas explicité mon sujet de recherche pour que ce fait ne vous perturbe pas, pour n'avoir pas d'influence sur votre enseignement. En fait, mon sujet de recherche s'intéresse aux interrelations existant entre les domaines mathématique, notamment le domaine numérique-algébrique et le domaine géométrique d'autre part.	
1	Omn50s : Vous êtes toujours d'accord pour cette interview pendant laquelle je vous poserais des questions dans le cadre d'un travail de thèse ? N'hésitez pas à rajouter tout commentaire qui vous semble pertinent pour compléter vos réponses.	Omn52s : Oui
2	1mn08s : Depuis combien d'années enseignez-vous ? Pendant cette période, dans quels établissements avez-vous enseigné et à quel niveau ? 2mn09s : Pendant cette période, avez-vous enseigné au niveau collège à plusieurs niveaux différents ?	1mn18s : Alors, ça doit faire trente huit ans que j'enseigne, je pense, à peu près, à un an près. J'ai enseigné du collège au lycée et dans le supérieur puisque j'ai enseigné à l'IUFM aussi. Voilà. J'ai eu des classes de collège au début de ma carrière, j'ai eu des classes de lycée, des terminales, à l'époque, des terminales C, ça c'était à Strasbourg. Depuis que je suis à Montpellier, j'enseigne principalement en seconde et première S et le reste de mon service se faisait à l'IUFM. Maintenant, je vais être chargé d'une mission d'inspection, depuis cette année, donc je vais arrêter l'IUFM. Voilà. 2mn17 : Oui, j'ai enseigné en sixième, cinquième, quatrième, troisième. J'ai fait tous les niveaux. Et au lycée pareil : seconde, première, terminale.
Maintenant on va s'occuper des programmes, et dans les programmes, je vous interrogerais selon votre point de vue, en liaison avec mon sujet, votre point de vue par rapport à des interrelations entre les domaines <i>numérique-algébrique et géométrique</i>.		
3	2mn47s : Moi, je viens du Brésil. Au Brésil il y a des enseignants que ne trouvent pas que les programmes sont importants. Il y a d'ailleurs des enseignants qui ne suivent pas vraiment le programme. Est-ce que le programme en France c'est important pour tous les enseignants ? Est-ce que les enseignants en France suivent le programme ? Quel degré d'importance donnez-vous au programme ?	3mn21s : C'est vraiment une grande question ça ! Parce que, bon, je ne peux pas répondre à la place de tous les enseignants de France. Bon, on est fonctionnaires. Donc, on doit respecter les programmes. Ca, c'est clair. Cela dit, le programme est décliné en terme de contenu mais il est aussi décliné grâce aux documents d'accompagnement qui disent comment les enseigner. Donc, il y a deux choses en fait. Donc, il y a certainement plusieurs catégories de professeurs : certains qui vont enseigner des contenus et d'autres qui vont plus s'occuper de la manière de les enseigner. Donc, moi, je dirais que je respecte les programmes en tant que fonctionnaire mais je cherche dans les programmes la façon de les enseigner qui corresponde à mon idée sur ce que c'est qu'enseigner des

	<p>4mn52s : Par rapport aux enseignants que vous formez à l'IUFM, à votre avis, est-ce qu'ils donnent la même importance aux programmes ?</p>	<p>mathématiques. Donc, je m'intéresse surtout à tout ce qui est résolution de problèmes, etc.. Dès que je vois dans les programmes une indication qu'il faut résoudre des problèmes, mettre les élèves en situation de recherche, donc c'est plutôt sur cette partie-là que je vais me consacrer et puis après, bon, j'essaie de mettre les programmes là-dedans. Voilà, donc, oui, je pense que les programmes, maintenant que je suis chargé de mission d'inspection, c'est sûr qu'on vérifie que les enseignants respectent les programmes, qu'ils n'en font pas plus mais pas moins non plus. Mais je pense qu'au-delà des programmes, il y a la manière de les enseigner qui me paraît plus importante.</p> <p>5mn09s : Disons, dans la formation qu'on leur fait, on les rend tout de suite attentifs au fait que les programmes ce n'est pas le livre qu'ont les élèves mais c'est bien le programme officiel. Donc, ils ne doivent pas faire leur enseignement uniquement en ouvrant le livre qu'ont les élèves, en disant : « bon, bien, voilà, j'utilise le livre ».</p> <p>La référence, ça reste les programmes officiels. Ils doivent tous être propriétaires des programmes officiels et, à mon avis, oui, ils le savent. Donc, ils peuvent avoir un regard critique sur les livres qu'ils utilisent grâce à ça. Donc, à la lecture du programme officiel, ils peuvent regarder si le livre qu'ils ont le respecte, s'il va trop loin, s'il y a des choses qui manquent, etc.. Donc ça, ça fait partie de la formation des jeunes professeurs. On leur apprend à lire le programme et, surtout, à bien voir si les livres, etc., le respectent.</p>
4	<p>6mn11s : Est-ce que le programme fait référence au NAG ? Si oui sous quelle forme ?</p> <p>6mn23s : Ce sont les interrelations entre les domaines numérique / algébrique et géométrique.</p>	<p>6mn19s : Il faut m'expliquer ce que c'est que les NAG.</p> <p>6mn31s : Oui, d'accord. Disons les programmes officiels, oui, maintenant, depuis environ dix ans, un peu moins, je ne sais pas, en tout cas, les documents d'accompagnement montrent comment on peut effectivement donner des problèmes ou des exercices où l'on a une interconnexion entre le numérique, l'algébrique et le géométrique. Ca, c'est clair hein ! Notamment en début de seconde, quand on dit qu'il ne faut pas faire de révisions, et bien très souvent, on demande justement de faire résoudre des problèmes aux élèves, avec de la géométrie qui va leur permettre, justement, de mettre en œuvre du numérique.</p>
5	<p>7mn08s : Par rapport à ce programme, quels sont les thèmes dans lesquels, selon vous, se trouvent les concepts mathématiques qui sont le plus en rapport avec notre sujet</p>	<p>7mn25s : ...Il y en a beaucoup. Je veux dire, pratiquement tous, il y a tout le temps des occasions de faire des interrelations. Si</p>

	<p>de recherche ?</p> <p>8mn48s : Oui mais, j'ai regardé pas mal de cours que vous avez faits, et là, je parle au sujet des programmes : est-ce qu'il y a des indications dans les programmes ?</p>	<p>on étudie les fonctions, une fonction ça peut être au départ un problème de géométrie. Quand on étudie une fonction, on fait du numérique, on résout une équation puis on revient sur le géométrique pour voir finalement à quel cas de figure correspond l'équation que l'on vient de résoudre. Donc, c'est sans arrêt un aller-retour entre le numérique et le géométrique. Pratiquement, c'est ça toute l'année. Je veux dire, on résout des problèmes et si, au départ, on a un problème de géométrie, et bien oui, on a une interconnexion. Sinon, décliner les programmes en première S, c'est pareil. Quand on fait de la dérivée, au départ, la dérivée c'est une interprétation géométrique, la tangente à une courbe. Bon, et bien après, on décline ça en formule de dérivation puis, après calcul de dérivée, qu'est-ce qu'on en fait, etc., et on a toujours un problème par derrière. Je pense qu'il y a sans arrêt des occasions. Je ne vois pas un élément où on pourrait dire, là je ne peux pas faire une interconnexion. C'est toujours possible à mon avis, sans être même obligé de la chercher, c'est toujours possible à mon avis.</p> <p>9mn07s : Et bien, des indications, oui, quand même. Dans les documents d'accompagnement, il y a une forte indication. Maintenant, savoir si les professeurs les lisent ces documents d'accompagnement, c'est un autre problème effectivement. Mais il me semble que même dans les programmes secs, c'est à dire les contenus, de temps en temps, il doit y avoir des références au fait qu'on peut en profiter, à tel endroit, pour revenir soit à la géométrie, soit au contraire, sur de la géométrie, revenir sur des résolutions d'équation. Donc oui, il y a quand même des indications. Maintenant, est-ce que culturellement, est-ce que les professeurs aujourd'hui qui ont déjà vingt ou trente ans de carrière, sont sensibles à cette lecture des programmes ? Je ne sais pas. Par contre, les nouveaux professeurs à l'IUFM sont rendus sensibles à cela.</p>
<p>Maintenant on va parler des manuels, et dans les manuels scolaires je vous interrogerais selon votre point de vue justement par rapport au NAG.</p>		
6	<p>10mn19s : Utilisez-vous couramment des manuels pour préparer votre cours et choisir vos exercices ? Est-ce que vous pouvez me dire lesquels ? Est-ce qu'il y a des manuels que vous utilisez de façon personnelle ? Est-ce que vous pouvez me dire lesquels ?</p>	<p>10mn38s : Alors, bon, aujourd'hui ça peut paraître prétentieux, mais je n'utilise pratiquement plus de livres pour préparer mes cours, c'est rare. Par contre, je regarde, quand j'ai des nouveaux spécimens, je regarde s'il y a des nouveautés dedans, s'il apparaît par exemple une nouvelle gamme d'exercices qui n'existeraient pas dans les</p>

		<p>anciennes collections. Donc, je regarde si les auteurs font preuve un peu d'imagination. Je regarde si, par exemple, ils proposent des exercices avec prise d'initiative ou des choses comme ça. Je regarde, je feuillette pour voir s'il existe des choses ou des idées à prendre. Mais sinon, aujourd'hui j'ai tellement fait de recherches soit dans des groupes à l'APMEP, l'association des professeurs de mathématiques, soit dans les IREM, que j'ai des archives d'exercices et de choses. J'en ai pléthore. Donc, mon travail tous les ans, c'est de choisir lesquels je vais prendre dans toute la gamme des choses que j'ai. Je sais que ça va pouvoir servir de bon détonateur pour pouvoir travailler justement en interconnexion sur les domaines numériques, géométriques et algébriques. Donc, j'ai suffisamment maintenant de choses.</p> <p>Et puis, j'aime bien innover. Des fois, à partir d'une idée que j'ai vue, je fais moi-même mon propre exercice. On n'est jamais mieux servi que par soi-même. Donc, je fais moi-même mes propres exercices pour être sûr d'atteindre justement les objectifs que je souhaite obtenir. Ca ne me prend pas plus de temps que de feuilleter quinze livres et de ne pas trouver ce que je cherche. Donc, voilà. Par contre, il y a quand même des documents qui sont intéressants à avoir à portée de mains. C'est lorsqu'il y a des brochures de l'IREM ou des brochures de l'APMEP sur certains thèmes. Là, on trouve des exercices. Bon, j'ai participé à deux tomes qui s'appellent : « Pour un enseignement problématisé des mathématiques ». Bon, là, manifestement, j'ai mis des exercices avec l'équipe avec qui j'ai travaillé. Donc là, je trouve effectivement des choses pour préparer mes cours. Sinon, ça c'est pour les exercices. Pour préparer un cours, vraiment, je n'en ai plus vraiment besoin. Je regarde ce qui est nécessaire. Aujourd'hui, on ne fait pratiquement plus de cours, oui le cours, le cours magistral a pratiquement disparu, devrait avoir disparu. Donc, on ne fait plus de cours comme au début de ma carrière, où c'était très structuré. Donc, le cours, en fait, il est plutôt, il est amené au fil des problèmes ou des exercices que l'on fait. Donc, moi, je fais rarement un cours premièrement, deuxièmement, troisièmement, a), b). C'est très rare que j'aie ça, pratiquement jamais donc.</p> <p>Par contre, je renvoie parfois les élèves</p>
--	--	---

		<p>après au cours qu'ils ont dans leur livre. Parce qu'il y a des livres maintenant qui ont un cours à peu près correct. Il est bref mais il y a tout ce qu'il faut dedans. C'est ce qu'on demande. Il faut que le cours soit bref pour que les élèves fassent davantage de recherche de problèmes que simplement de subir un cours. Donc voilà. Donc, je n'ai pas de livre scolaire. La plupart aujourd'hui sont relativement bien faits quand même. Il y a beaucoup d'auteurs qui sont d'ailleurs dans des équipes qui viennent de l'IREM ou de l'APMEP. Donc, ils essaient quand même de coller plus ou moins aux intentions des programmes et des documents d'accompagnement. C'est à peu près fiable quoi.</p>
7	<p>14mn11s : Est-ce que le(s) manuel(s) que vous utilisez pour préparer vos cours fait(font) référence au NAG ? Si oui, dans quelles parties (chapitre, thème, problème, etc) ? Sous quelle forme ?</p>	<p>14mn26s : Oui, il y a quand même de temps en temps des recherches, mais dans le cours, pas vraiment. Mais dans certains problèmes, on peut en trouver. Mais ce n'est pas apparent, ce n'est pas suffisamment apparent. Donc, moi, je perdrais beaucoup de temps à aller chercher ça dans les livres. Je trouve que ce n'est vraiment pas ... On ne le voit pas. Donc moi, j'ai ma gamme de ... J'ai toutes mes archives, toutes les recherches que j'ai faites, soit dans les groupes APMEP, soit dans les groupes IREM, c'est une bonne base pour moi. Il suffit que je lise dans la revue de l'APMEP, quelqu'un qui propose une recherche ou un exercice et ça me permet d'en extirper quelque chose pour présenter une nouvelle notion, tout de suite j'ai une idée : tiens, je vais présenter ça, ça va permettre de parler de ceci, de cela, etc., et de couvrir le cours que j'ai envie de couvrir. Donc, c'est comme cela que je travaille. Mais les livres, à l'heure actuelle, je pense, n'aident pas beaucoup parce qu'ils sont perdus dans la masse, je ne les vois pas. Donc, il faut vraiment, et bien un jeune stagiaire ne peut pas le voir. Il faudrait qu'il fasse tous les exercices du livre pour savoir lesquels sont intéressants. Ce n'est pas possible. Il ne peut pas faire ça. Pour ça, il n'a pas une grande aide. C'est sûr.</p>
8	<p>15mn39s : Est-ce que la classe à laquelle vous enseignez a un manuel que vous et les élèves utilisent ? Est-ce que vous pouvez me dire comment vous utilisez ce manuel ?</p>	<p>15mn49s : La plupart du temps, le manuel je l'utilise pour la référence au cours. Une fois que le cours est fait, comme il est quand même plus ou moins, pas perdu, mais il se retrouve à plein d'endroits, si je fais une activité, par exemple, bon, bien, le cours tombe petit à petit donc il n'est pas structuré comme dans le livre où il est d'un bloc. Donc je choisis souvent le livre avec mes collègues quand le cours est bien clair et bien synthétique, donc ça c'est la qualité</p>

		<p>d'un livre. Donc, je renvoie mes élèves à ça. On fait, par exemple, une activité d'introduction, on donne la définition de la dérivée, etc., après avoir fait une activité, bon, les élèves l'ont, etc., donc, après, j'essaie de leur faire dire alors quelle définition on donnerait pour voir s'ils ont compris la définition et après, souvent, je leur dis, bon, on en reste là, vous pouvez soit la recopier dans votre cahier si vous pensez que c'est mieux pour vous, soit vous notez la page du livre dans laquelle la définition est bien rédigée, etc..</p> <p>Donc, je ne perds pas mon temps à faire du cours où l'élève va copier, copier des définitions. D'ailleurs, on nous dit dans les instructions officielles, de faire le cours le plus court possible justement pour que les élèves soient plus en situation de faire des exercices et des problèmes plutôt que de gratter des cours. Donc, le livre, ils l'utilisent pour ça. Le livre, c'est la référence. Je l'utilise aussi beaucoup pour tout ce qui est méthodologie. Donc, je fais beaucoup de méthodologie, des méthodes pour résoudre ceci, pour comment faire quand on a telle chose, si on veut, par exemple démontrer une égalité, comment est-ce qu'on procède, etc., et là aussi, on choisit le livre quand il y a de la méthodologie dans le livre. Donc, souvent, il y a le cours et après, il y a soit des exercices résolus ou des points de méthode et ça c'est important, donc là, on renvoie les élèves à ça. Et puis, bien sûr, de temps en temps, ils ont un exercice à préparer qui est donné dans le livre parce que bon, il faut quand même l'utiliser, quoi. Mais, comme on a très peu de temps pour enseigner, je n'utilise pas énormément le livre au niveau des exercices parce que, déjà, quand j'ai donné mes exercices qui sont quand même souvent très riches, il se passe presque deux à trois heures de cours et, donc, je ne peux pas en donner tellement plus après. Donc, voilà. Mais, de temps en temps, ils ont aussi des exercices du livre. Donc, globalement, c'est le cours, référence au cours, référence à la méthodologie, aux exercices résolus types, donc des exercices, je dirais, exigibles, et puis, de temps en temps, un ou deux exercices du livre, voilà.</p>
9	18mn25s : Est-ce que le(s) manuel(s) que vous utilisez avec les élèves fait(font) référence au NAG ? Si oui dans quelles parties (chapitre, thème, problème, etc) ? Sous quelle forme ?	18mn44s : C'est difficile à dire, parce que, bon, comme j'utilise très peu les livres maintenant. Dans le temps, j'utilisais plus les livres, mais là, je les utilise peu. Ceux que j'ai, ils y font un peu référence, car c'est aussi un peu pour cela que je les ai choisis. Mais la référence au NAG , c'est

		moi qui la porte, ce n'est pas tellement le livre, quoi.
10	18mn25s : Par rapport à ce(s) manuel(s), quelles sont les parties, dans lesquelles, selon vous, se trouvent les concepts mathématiques, les exemples, les situations, etc. qui sont le plus en rapport avec mon sujet ?	18mn44s : C'est difficile à dire, parce que, bon, comme j'utilise très peu les livres maintenant. Dans le temps, j'utilisais plus les livres, mais là, je les utilise peu. Ceux que j'ai, ils y font un peu référence, car c'est aussi un peu pour cela que je les ai choisis. Mais la référence au NAG , c'est moi qui la porte, ce n'est pas tellement le livre, quoi.
Maintenant on va parler du NAG dans vos façons de faire vos cours, de préparer vos activités, gérer la classe ; donc je vous interrogerais à propos de votre pratique relativement au NAG.		
11	19mn19s : Pendant la préparation de vos cours, voyez-vous des interrelations possibles entre les domaines mathématiques pouvant aider dans la compréhension des sujets qui seront étudiés?	19mn37s : Bien, je ne suis pas très sûr de bien comprendre la question. Mais, et bien oui, c'est ce que j'ai déjà dit : les interrelations, ce n'est pas qu'elles sont possibles, elles sont toujours, je veux dire : il y a toujours des interrelations. Je ne vois jamais un problème tout seul. Bon, peut-être en arithmétique, et encore, l'arithmétique c'est lié, on ne va pas faire ... Un professeur qui enseignerait l'arithmétique en terminale S Spécialité, s'il fait des exercices d'arithmétique uniquement pour l'arithmétique, c'est les isoler de leur champ d'action. Je veux dire : l'arithmétique c'est utilisé en phytographie, c'est utilisé dans des tas de domaines. Je veux dire : si on n'a pas une relation, si l'élève ne sait pas finalement où il peut, où on utilise les mathématiques qu'on lui enseigne, c'est un peu dommage, quoi. Donc, moi je pense qu'il y a toujours des interrelations dans plusieurs domaines. Je ne vois pas un exercice tout seul, c'est difficile. Alors, c'est sûr, on peut dire à un élève, pendant toute une heure, on va résoudre des équations du second degré. Bon, résoudre des équations du second degré, alors là, il n'y a que de l'algèbre mais moi je ne peux pas faire ça. Jamais. Ca me paraît ... Ca, je peux leur donner à faire à la maison, à la limite, mais quand je suis là, autant qu'ils en profitent et qu'on essaie de mettre en équation un problème de géométrie, ou quelque chose de ce genre, quoi, donc, et puis voir à quoi ça correspond, les cas particuliers, etc.. Donc, oui, des interrelations, oui, il y en a toujours, moi je pense, oui. Je cherche au maximum.
12	21mn18s : Faites-vous explicitement référence en cours à l'existence ou non, des interrelations possibles qui peuvent exister entre les sujets, les domaines qui sont en train d'être étudiés?	21mn31s : Oui, ça c'est clair, oui, oui, tout à fait. Oui, et bon, en didactique, il y a tous les changements de registre et de cadre, etc., donc là j'utilise, c'est évident. Un élève qui, parfois, n'a pas toujours tout compris, par exemple l'étude des fonctions, quand on demande de résoudre $x^2 < a$...,

		<p>ou plutôt, si un nombre est compris entre -2 et $+3$, à quel ensemble appartient son carré, les élèves vont me répondre bêtement entre 4 et 9. Et, en fait, là on peut utiliser la représentation graphique, soit le tableau de variation, et puis voilà, là il y a une interrelation entre différents cadres. Bon, je pense que quand on fait des mathématiques, c'est pareil. Quand on a des problèmes à résoudre, et bien oui, il y a sans arrêt à faire ce genre de chose pour que la compréhension de l'élève soit la meilleure possible. Il y en a qui vont comprendre dans tel cadre, d'autres vont mieux comprendre dans tel autre. Il y en a, quand on fait de la géométrie et qu'on résout le problème, il y en a qui vont très bien savoir résoudre l'équation mais qui auront du mal à voir le problème géométrique, donc la résolution de l'équation peut les aider à comprendre le problème géométrique. Mais il y a aussi le cas le plus fréquent : c'est que pour bien comprendre comment il doit résoudre son équation, c'est le fait d'avoir fait une figure et de comprendre ce qui se passe qui va lui donner du sens et lui permettre de mieux résoudre son équation. Ca, ça me paraît vraiment fondamental.</p>
13	<p>23mn11s : Utilisez-vous le NAG dans vos pratiques en classe ? Est-ce que le NAG peut être pris en compte en tant qu'outil didactique capable de mobiliser des connaissances mathématiques chez les élèves ?</p>	<p>23mn26s : Bon, ça c'est clair, oui. Bien sûr. Mais je ne vais pas me répéter. Ca c'est évident. Pour moi oui. Mais ça doit être un des axes de la formation des jeunes collègues qui débutent à l'IUFM. C'est de les mettre tout de suite dans cette situation de pouvoir ... Alors, pour eux, c'est plus difficile. J'ai discuté avec les jeunes stagiaires. Quand je leur explique moi, mon système d'enseignement, j'ouvre plein de tiroirs, donc, bien sûr, j'ouvre un tiroir, ..., il y a des tiroirs qui sont plus algébriques, des tiroirs plus numériques, des tiroirs plus géométriques, mais je les ouvre tous, et puis à la fin de l'année, comme je suis quand même fonctionnaire, il faut que j'aie fait le programme. Donc, j'essaie que mes tiroirs soient tous remplis, avec les exigibles du programme. Mais un jeune qui débute ne peut pas faire ça, parce qu'il n'a pas encore l'intégralité des choses devant lui et, donc, il aura plutôt tendance, lui, à compartimenter, c'est à dire ouvrir un tiroir, le refermer, ouvrir un autre, le refermer. Donc, mais on peut les aider à quand même, déjà, commencer à avoir cette idée d'enseigner de cette façon là. Et puis, derrière ça, il n'y a pas que les interactions, il y a tout ce qui est enseignement en spirale. Parce que, en fait,</p>

		<p>pour avoir des bonnes interactions, ça veut dire aussi, ... il y a ce qu'on appelle chez nous l'enseignement en spirale. Ça permet de revenir sur des notions : on fait de l'algèbre, puis on refait de la géométrie, on refait de l'algèbre, de la géométrie, etc., ce qui fait qu'on réimprime à chaque fois quelque chose et, donc, l'élève, on peut penser que ses connaissances vont devenir davantage pérennes, elles vont être plus durables, il va donc mémoriser davantage les choses et surtout mieux les comprendre. Donc, le fait de faire des interrelations est important aussi pour l'enseignement en spirale. Donc, ça va ensemble. Je crois qu'on ne peut pas dissocier les deux.</p>
14	<p>23mn11s : Faites-vous référence au NAG dans votre cours de mathématiques ? Si oui pour quels thèmes, chapitres, problèmes, etc. ? Si non pourquoi ?</p>	<p>23mn26s : Bon, ça c'est clair, oui. Bien sûr. Mais je ne vais pas me répéter. Ça c'est évident. Pour moi oui. Mais ça doit être un des axes de la formation des jeunes collègues qui débutent à l'IUFM. C'est de les mettre tout de suite dans cette situation de pouvoir ... Alors, pour eux, c'est plus difficile. J'ai discuté avec les jeunes stagiaires. Quand je leur explique moi, mon système d'enseignement, j'ouvre plein de tiroirs, donc, bien sûr, j'ouvre un tiroir, ..., il y a des tiroirs qui sont plus algébriques, des tiroirs plus numériques, des tiroirs plus géométriques, mais je les ouvre tous, et puis à la fin de l'année, comme je suis quand même fonctionnaire, il faut que j'aie fait le programme. Donc, j'essaie que mes tiroirs soient tous remplis, avec les exigibles du programme. Mais un jeune qui débute ne peut pas faire ça, parce qu'il n'a pas encore l'intégralité des choses devant lui et, donc, il aura plutôt tendance, lui, à compartimenter, c'est à dire ouvrir un tiroir, le refermer, ouvrir un autre, le refermer. Donc, mais on peut les aider à quand même, déjà, commencer à avoir cette idée d'enseigner de cette façon là.</p> <p>Et puis, derrière ça, il n'y a pas que les interactions, il y a tout ce qui est enseignement en spirale. Parce que, en fait, pour avoir des bonnes interactions, ça veut dire aussi, ... il y a ce qu'on appelle chez nous l'enseignement en spirale. Ça permet de revenir sur des notions : on fait de l'algèbre, puis on refait de la géométrie, on refait de l'algèbre, de la géométrie, etc., ce qui fait qu'on réimprime à chaque fois quelque chose et, donc, l'élève, on peut penser que ses connaissances vont devenir davantage pérennes, elles vont être plus durables, il va donc mémoriser davantage les choses et surtout mieux les comprendre. Donc, le fait de faire des interrelations est important aussi pour l'enseignement en</p>

		spirale. Donc, ça va ensemble. Je crois qu'on ne peut pas dissocier les deux.
15	25mn16s : Si vous deviez faire des cours ou des activités propices au NAG , pouvez-vous situer des activités qui vous semblent être cohérents ? Est-ce que vous pouvez proposer un exercice, une tâche, une activité pour les élèves dans le cadre <i>numérique-algébrique</i> qui met en œuvre l'utilisation du NAG pour pouvoir le résoudre ? Dans cette activité, qu'est-ce que vous attendez des élèves au point de vue de la résolution de cette tâche ?	25mn55s : Et bien oui, j'ai plusieurs exemples en tête. Il faut que ... Tu veux un exemple ? Je te le donnerai. Il y a plusieurs exemples que j'ai en tête où des élèves, alors c'est ce qu'on appelle aussi ... derrière ça, il y a ..., moi je vois derrière le NAG , je vois l'enseignement spirale mais je vois aussi les exercices, on va dire, entre guillemets, ouverts, parce qu'ils ne sont pas ouverts parce que, bon, on connaît la réponse mais des exercices, pour l'élève, ils sont ouverts en tout cas, pas pour le prof, mais des exercices ouverts qui vont demander de l'initiative. Et là, on voit des élèves qui vont s'orienter vers une résolution algébrique, d'autres vers une solution géométrique, et puis certains qui vont mêler les deux. Donc, quand on fait du Thalès, est-ce qu'on fait de la géométrie ou est-ce qu'on fait du numérique ? C'est les deux, donc, voilà. Donc, là j'ai des exemples. J'ai pensé à deux exemples assez précis. Donc je te les donnerai.
16	26mn55s : Est-ce que vous pouvez proposer un exercice, une tâche, une activité pour les élèves dans le cadre <i>géométrique</i> qui met en œuvre et en évidence l'utilisation du NAG pour pouvoir la résoudre ? Dans cette activité, qu'est-ce que vous attendez des élèves au point de vue de la résolution de cette tâche ? Donneriez-vous ces tâches à vos élèves ? Pourquoi ? (Éventuellement indiquez les modifications que vous apporteriez.)	27mn21s : Oui, pareil, là j'ai des exemples. A mon avis, de toute façon, dès qu'on parle d'interrelations, moi, je ne distinguerais même pas ces deux allers et retours. Bon, ça va dépendre si l'exercice est ouvert pour l'élève, ça va dépendre si l'élève il a démarré avec l'algébrique, bien, je lui montrerais qu'il y a une solution, ..., une attaque, pas une solution, une attaque géométrique, et puis vice-versa, s'il a commencé par la géométrie, je lui montrerais comment on peut le traiter avec l'algébrique. Alors, c'est vrai que parfois, il m'arrive d'avoir un exercice auquel j'ai pensé dans le cadre d'un chapitre, disons numérique ou algébrique, et puis, tout d'un coup, il me vient l'idée que je pourrais le résoudre par la géométrie, alors ça me fait souvent le rédiger différemment parce que je pense à la solution géométrique. Et donc ça, c'est le boulot du professeur, c'est à dire de ..., c'est là où je n'ai pas besoin des bouquins, etc., je le fais moi-même. Quand je pense à un exercice, et bien, souvent je pense à ce que je pourrais faire dans un autre cadre et, du coup, et bien, je fais l'énoncé en conséquence.
Maintenant on va parler du NAG au point de vue des élèves, donc je vous interrogerais selon votre point de vue à propos de l'utilisation du NAG par les élèves.		
17	28mn46s : Quelles sont les difficultés rencontrées par les élèves dans le cadre du NAG ?	28mn52s : Alors, la première difficulté, je pense c'est que quand un problème est résolu, il n'a pas envie de le résoudre d'une autre façon. Donc, la plus grande difficulté, c'est justement dans le questionnement. Si on a posé des questions et puis après on

		<p>dit : bon, autre méthode, ce n'est pas une interrelation en fait, on fait deux choses différentes. Par contre, si, par exemple, on résout par l'algèbre et à un moment donné, on dit interprétez géométriquement ce que vous venez de faire, ce n'est pas une autre solution qu'on lui demande, c'est une interprétation. Donc là, c'est subtil. Mais si on dit : première méthode par l'algébrique, deuxième méthode par la géométrie, bon, l'élève, s'il est sympa, il va noter et puis il dira : bon, on l'avait résolu, pourquoi est-ce qu'on fait encore ça ? Par contre, l'interrelation, c'est vraiment interpréter. Donc, soit j'ai de la géométrie et j'interprète, je pose mon inconnue, je résous, etc., et donc là, ça devient intéressant, soit j'ai de l'algèbre, et puis tout d'un coup j'ai une question intéressante, tiens, à quoi ça correspond au niveau de l'interprétation géométrique ? Voilà. Donc, la grande difficulté, c'est de bien présenter si on veut vraiment que l'élève rentre dans l'interrelation. C'est de ne pas lui présenter justement les choses compartimentées. C'est de faire les choses de façon à ce qu'il voie l'interrelation, sinon, comme je viens de le dire, il verra deux choses différentes et puis je ne suis pas sûr que cela lui sera très utile.</p>
18	<p>30mn22s : Quelles sont les connaissances que, selon vous, les élèves doivent avoir sur le NAG ? Où ces connaissances doivent-elles être acquises (plus tôt au collège ou au lycée) ? Est-ce qu'il y a un niveau de l'enseignement spécifique pour cette acquisition ? Le quel ?</p>	<p>30mn40s : Je pense qu'il y a un enseignement spécifique, c'est l'habitude de le faire. C'est l'habitude. Moi, les élèves que j'ai en seconde, par exemple, on voit tout de suite s'ils ont eu l'habitude d'avoir un professeur qui avait ..., qui changeait de cadre, qui faisait ce genre d'interrelations, même s'il n'en faisait pas beaucoup, des élèves qui ont toujours ..., qui me demandent : oh, mais monsieur, on est dans quel chapitre ? Parce qu'ils ne savent jamais avec moi dans quel chapitre on est, donc ça les perturbe quoi, donc moi je réponds toujours : on est dans le chapitre des mathématiques. Comme ça, ça règle le problème. Mais on voit bien les élèves qui compartimentent, etc.. Je pense que ça, c'est, aujourd'hui, en principe, s'ils lisent les documents d'accompagnement et autres, ça ne devrait plus exister. Mais bon, il y en a encore beaucoup qui sont tentés par ça. Il y en a même qui m'ont dit, j'y pense maintenant tout d'un coup, au chapitre des statistiques où il n'y aurait pas d'interrelations, mais ce n'est pas vrai parce qu'on fait des représentations graphiques en statistiques, donc on peut faire beaucoup de choses avec les statistiques. Il suffit de le montrer aux profs. Et là, c'est vrai, comme ils ont</p>

		comme seule ressource, certains, les livres qu'ils ont à leur disposition, il y a une grande responsabilité des livres là-dessus, parce que tous les profs, malheureusement, ne peuvent pas fréquenter les IREM ou l'APMEP, quoi. Ca serait l'idéal, mais bon, ils ne le font pas tous.
19	31mn58s : Pensez-vous que vos élèves aient des connaissances mathématiques suffisantes et /ou adéquates pour comprendre l'usage que vous faites du NAG en classe ?	32mn12s : Mais, les connaissances mathématiques, ils ne les ont pas toujours. Mais je pense que de travailler comme ça, ça les aide à affermir leurs connaissances et à les rendre pérennes, comme je disais tout à l'heure. C'est à dire, c'est l'enseignement en spirale. Tout d'un coup, on est en plein algèbre et puis je sors la nécessité de savoir faire des choses géométriques, alors ça, au début, ils hésitent un peu, ils ont un peu de mal, mais ça permet de réimprimer, comme j'ai dit, les connaissances et, donc, non, c'est bien. Alors, les connaissances, elles deviennent petit à petit suffisantes, c'est un entraînement. C'est comme le sport, est-ce que vous êtes ..., est-ce que vous avez un entraînement suffisant pour aller aux Jeux Olympiques ? Je pense que si on demande ça à tous les athlètes qui vont aux Jeux, si vous leur demandez un an avant les Jeux, ils vont vous dire non, mais un mois avant les Jeux, ils vont vous dire oui. Donc, notre but, c'est ça. C'est d'amener les élèves à avoir ces connaissances, et surtout, cette pratique. Quand ça devient familier, alors le problème c'est que, s'ils n'ont qu'un seul prof qui fait ça et puis qu'après c'est de nouveau un autre qui revient avec des trucs compartimentés, c'est un peu dommage, quoi. Mais bon, le milieu enseignant n'est pas un milieu homogène.
20	33mn34s : Vos élèves vous posent-ils des questions faisant appel aux rôles réciproques entre les domaines mathématiques ?	33mn43s : Alors, poser des questions, je ne pourrais pas dire qu'ils posent des questions, mais, par contre, ils le font, ce qui est beaucoup mieux. Sans que je leur demande, ils pensent, quand ils ont pris l'habitude avec moi de travailler comme ça, je veux dire : ils ne posent pas de questions, ils ne me demandent même plus s'ils ont le droit de, par contre, ils le font. C'est à dire, ils vont faire ces interrelations, bien sûr, à leur niveau d'élève, mais certains, on peut très bien poser un problème sans péri-vectorielles et puis, ils vont quand même le résoudre avec un autre domaine que le vectoriel parce qu'ils ont l'habitude. Tout d'un coup, enfin, je veux dire, ça ne paraît pas énorme comme chemin. Mais pour certains élèves, il y en a qui en sont incapables. On prend une situation vectorielle, tout d'un coup l'élève, il se place dans un repère, il ne fait plus du tout de vecteurs, il fait des coordonnées, il

		<p>fait ..., il ne parle même plus de vecteurs, il a des points, il fait des équations de droites, et puis, il a complètement changé d'endroit et il résout son problème avec des équations de droites. Et bien, c'est déjà ..., je trouve que c'est bien. Il a fait une interrelation entre deux domaines qui au départ ..., et bien, voilà. Alors, si l'autre, il fait du repérage avec des vecteurs, bon, il est resté dans le domaine vectoriel. Mais il y en a, j'ai vu des choses ... il a commencé par faire des équations de droites. Et bien voilà. Et donc, je pense que cette habitude, cet entraînement fait que les élèves ... ils ne posent pas de questions, ils le font. C'est beaucoup mieux, hein, c'est beaucoup mieux.</p>
<p>Maintenant on va parler du NAG au point de vue épistémologique, donc je vous interrogerais selon votre point de vue à propos des connaissances mathématiques.</p>		
21	<p>35mn36s : D'un point de vue mathématique, en général, indépendamment de votre enseignement, qu'est-ce qui vous semble important dans les interrelations entre les domaines mathématiques, plus précisément le NAG ?</p>	<p>35mn56s : Oh, et bien, c'est tout ce qui est transférable en dehors des maths. C'est à dire qu'un jour, nos élèves, si j'ai 5% de mes élèves qui me passent par les mains, si je puis dire, font encore des mathématiques par la suite, c'est beaucoup. Donc, la plupart, ils ne feront plus de maths, ils vont trouver un boulot où ils n'auront presque plus de maths à faire. Donc, ce qui est transférable c'est, comme je dis toujours : vous avez une boîte à outils, là-dedans vous avez le numérique, l'algébrique, le géométrique, le vectoriel, et puis vous avez un problème qui se pose à vous, il faut savoir le résoudre. Et bien, il faut savoir choisir l'outil pertinent et quelques fois, il en faut deux des outils. Donc, et voilà, c'est ça, c'est cette habitude, et je pense que savoir utiliser les choses qui paraissent pertinentes pour résoudre un problème, ça me paraît important. Donc ça, c'est au-delà des mathématiques. Et puis, de toute façon, par la suite, c'est pour ça aussi que je trouve que quand on donne un énoncé avec des a) fait ci, b) fait ça, ce n'est pas toujours très bon. On croit qu'on aide l'élève parce qu'on le guide mais si l'élève il avait en tête, par exemple, une solution géométrique et que l'auteur du problème l'envoie sur une solution algébrique, l'élève est perturbé et, donc, on ne lui laisse pas cette liberté. Donc, c'est un peu difficile à gérer tout ça. Donc, moi je crois que c'est important cela. Ils la retrouveront. On voit les élèves qui ont l'habitude de ça. Par la suite, et bien, ils ne seront jamais perdus devant un problème. Ils sauront qu'on peut faire des interrelations, même en dehors des mathématiques, après tout. Donc, je pense qu'il y a ça aussi. Il y a cet enjeu-là aussi.</p>

22	37mn41s : Parmi les aspects que vous trouvez importants, quel sont ceux qu'il vous semble important de travailler en classe ?	37mn57s : Et bien, c'est la prise d'initiative, hein. C'est à dire, l'idéal, mais ça, comme je dis à mes jeunes stagiaires : il faut avoir de l'ambition pour vos élèves. Donc, mon ambition, c'est qu'ils deviennent autonomes et qu'ils sachent prendre des initiatives. Alors, il faut savoir que, bien sûr, tout le monde n'est pas capable de le faire au même rythme, etc., et, donc, il faut quand même rassurer les élèves. Il faut donc avoir à la fois un enseignement balisé, avec des exercices un petit peu répétitifs, d'entraînement technique, mais il faut aussi, s'il n'y avait que ça, ça serait quand même passer à côté de l'enseignement, et il faut donc aussi ce genre d'exercices où il y a des interrelations où, là, c'est l'élève qui doit aller trouver ..., c'est lui qui doit être en mesure de prendre cette initiative et d'être autonome face à cela. Moi, le but c'est ça. Ce qui me paraît important, c'est de développer l'autonomie et la prise d'initiative qui sera quelque chose qui sera aussi transférable par la suite. Donc, si j'ai des élèves qui arrivent à trouver par eux-mêmes ce genre d'interrelations, c'est gagné, hein. C'est clair.
23	39mn10s : Au niveau des mathématiques elles-mêmes, des mathématiciens, quelles sont pour vous les difficultés rencontrées pour établir le NAG ?	39mn23s : C'est, si on mettait une échelle dans la difficulté, là on est dans le haut de gamme, hein. Quand on fait ce genre de choses, quand je demande à l'élève d'être autonome, de prendre de l'initiative, c'est le haut de gamme. C'est à dire, au niveau cognitif, on a vraiment quelque chose qui est ..., c'est ce qui est le plus difficile. Je veux dire, quand on fait des évaluations et qu'on regarde le niveau d'axonomique des questions qui sont posées, pour moi, c'est le haut de gamme. Donc, il ne faut pas faire que ça parce que, sinon, bien entendu, on va laisser plein d'élèves sur le bord de la route. Mais, il faut qu'il y en ait, et même des élèves faibles peuvent atteindre de temps en temps ce haut de gamme. Il faut les ..., je dis ..., ce que je disais souvent, c'est comme si en français on ne faisait que de la grammaire. Si on ne fait que de la grammaire, au bout d'un moment, on peut quand même avoir une espèce d'indigestion, si on ne fait jamais de poésie. Si on ne fait ..., c'est quelque chose qui n'irait pas. En mathématiques, pour moi, c'est ça. Si on arrive à amener les élèves à cette recherche de problèmes, à les mettre autonomes et en prise d'initiative, c'est un peu la poésie des mathématiques, c'est intéressant, quoi. Alors ça, c'est ..., il faut que le professeur soit conscient que c'est difficile, et, donc, il faut quand même,

		<p>suivant le niveau de l'élève, etc., il faut pouvoir quand même le relancer, l'aider et l'encourager. On ne peut pas le laisser toujours tout seul, je veux dire. Idéalement, l'autonomie elle n'existe pas, quoi. Si on est vraiment honnête, je veux dire, on ne peut pas rendre un élève complètement autonome face à un problème de maths, surtout que, souvent, ce sont des problèmes qui sont quand même, bon, dont on connaît la réponse. Mais, si on ne la connaissait pas, est-ce que nous-mêmes on saurait vraiment le résoudre ? Donc, je veux dire, voilà, hein. Alors, moi, ce que j'aimais bien faire avec les stagiaires, c'était leur donner des vrais problèmes de leur niveau et de les mettre en situation, justement, de problème ouvert pour voir comment ils réagissent. Et alors, on m'avait mis aussi dans cette situation-là et, là, on devient humble, on voit qu'on est perdu, qu'on Ce n'est pas si facile d'être autonome, ce n'est pas si facile de prendre une initiative. Et, donc, je crois qu'il faut que les profs ils expérimentent eux-mêmes cette façon de travailler pour qu'après, vis-à-vis de leurs élèves, ils sachent qu'on les met dans une situation difficile. Et, donc, de temps en temps, il faut leur donner aussi des exercices où ils sont en situation de réussite totale pour que, bien sûr, ils ne se découragent pas. Mais voilà. Donc, moi, c'est mon point de vue. Les difficultés, c'est ça : cette autonomie et ces prises d'initiative. C'est quand même sacrément difficile. C'est vraiment difficile.</p>
24	<p>42mn06s : Au niveau de vos études, en tant que mathématicien, avez-vous rencontré des difficultés dans le cadre du NAG ? Si oui, pouvez-vous me donner quelques exemples ?</p>	<p>42mn17s : Alors, des exemples, je ne sais pas si j'ai vraiment des exemples en tête. Mais j'ai ..., comme j'ai un certain âge, j'ai bénéficié d'un enseignement où il n'y avait pas d'interrelations, pratiquement jamais. Donc, on faisait ..., un jour on faisait de l'algèbre, un jour on faisait de la géométrie vectorielle, un jour de la géométrie projective, un jour ..., et, donc, tout ça c'était déconnecté de tout le reste, enfin c'est l'impression que moi j'en ai eu, hein. Je n'ai jamais vu d'interrelations en tant qu'élève. A l'université, on ne m'en a pas montré des masses. Non, j'ai commencé à découvrir tout ça quand j'ai fréquenté l'IREM et l'APMEP où là, j'ai côtoyé des gens qui..., et ça, ça m'a énormément intéressé et, c'est à partir de là. Alors, la difficulté, et bien oui, ça a été les premières fois que l'on m'a soumis à ce genre de choses, où c'était nouveau pour moi, donc, c'est Mais des exemples, je n'en ai plus en tête, c'est trop vieux maintenant, je ne vais pas en inventer.</p>

		Donc, voilà.
25	43mn20s : On est presque à la fin de l'année scolaire, est-ce qu'entre maintenant et votre dernier cours prévu, vous pouvez me dire le jour où je pourrais aller vous observer et filmer à propos d'un cours sur le sujet qui m'intéresse : le NAG ?	43mn38s : A un moment où je fais vraiment une interrelation forte pour que ça se voie, bon, parce que les interrelations sont plus ou moins fortes. Il y a des fois où c'est cinq minutes. Une interrelation, on la suggère, on la montre, mais bon, on est dans l'algébrique, on fait une interrelation, et puis on continue l'algébrique. Mais il y a vraiment des moments où c'est plus fort que d'autres. Oui, oui, donc ça on pourra le mettre sur pied effectivement.
26	44mn04s : Maintenant que nous avons parlé du NAG au point de vue des programmes, manuels, de l'épistémologie, de votre pratique et sur le point de vue des élèves, est-ce que vous voulez revenir sur quelques thèmes ? Avez-vous des informations particulières à ajouter par rapport aux thèmes qui nous avons abordés ? Voulez vous revenir sur quelque thème ? 45mn08s : Merci beaucoup Jean-Pierre.	44mn22s : Oh, pas vraiment, je crois que j'ai un peu tout dit dans cette interview. Je crois que j'ai dit les choses essentielles sur la façon dont j'enseigne. Oui, la recherche de problèmes, l'autonomie, la prise d'initiatives, l'enseignement spiralé, j'en ai parlé. Qu'est-ce que j'ai dit encore, je ne sais plus Qu'est-ce qu'il y avait encore que je voyais, le NAG , vraiment, derrière le NAG , j'avais vu tout ça. Oui, les exercices, les problèmes ouverts, ouverts pour les élèves, bien sûr. Donc, tout ça c'est ce qui se cache derrière le NAG . Je crois qu'on ne peut pas parler du NAG si on ne parle pas de tout ça. Ou alors, je n'ai pas bien compris le sujet de la thèse. Mais, sinon, pour moi, c'est tout ça, quoi. Voilà.

14 Les demandes

14.1 Demande d'autorisation de filmer

ACADEMIE de MONTPELLIER



Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche
en Didactique, Éducation et Formation

Autorisation de filmer

Madame, Monsieur

Dans le cadre de notre recherche, dirigé par Monsieur Alain Bronner, nous sommes conduits à filmer quelques moments de classe. L'enfant dont vous êtes responsable apparaîtra peut-être sur le film des enregistrements réalisés dans sa classe.

Nous avons l'intention d'utiliser ces enregistrements auprès d'un public d'enseignants et de chercheurs, mais nous devons pour cela avoir votre accord. Merci de lire les informations qui suivent :

Nous nous engageons :

- ✓ à ne pas montrer les moments de classe enregistrés à l'occasion de ce projet à un public autre que celui des enseignants en formation et des chercheurs ;
- ✓ à ne pas diffuser des images extraites de ces enregistrements ailleurs que dans des revues, ouvrages ou sites spécialisés à destination d'enseignants et de chercheurs ;
- ✓ à rendre anonyme l'image d'un enfant qui apparaît sur une image diffusée si le parent ou le tuteur légal de l'enfant le souhaite.

A présent, merci de remplir et signer les deux formulaires ci-après, de conserver cette page, et de remettre à l'enseignant le deuxième formulaire sur la page annexe.

Je soussigné

Parent ou tuteur légal de

Reconnais avoir pris connaissance des conditions d'utilisation des enregistrements vidéo réalisés dans la classe de l'enfant ci-dessus désigné.

- ✓ Autorise les chercheurs à montrer ou diffuser des extraits où apparaît l'enfant ci-dessus désigné.
- ✓ Autorise les chercheurs à ne montrer ou diffuser des extraits où apparaît l'enfant ci-dessus désigné qu'après avoir utilisé un procédé d'anonymat.
- ✓ N'autorise pas les chercheurs à montrer ou diffuser des extraits où apparaît l'enfant ci-dessus désigné.

Date Signature

Cordialement,

Luiz Marcio FARIAS

14.2 Demande auprès du Proviseur

Luiz Marcio FARIAS
IUFM de Montpellier
Tél : 04 67 61 82 68
mail : luiz.farias@montpellier.iufm.fr

Le 01 juin 2007

Bonjour Madame ou Monsieur le Proviseur,

Je suis étudiant brésilien, dans le cadre des échanges universitaires entre le Brésil et la France. Je développe une recherche dans le domaine de la Didactique des Mathématiques, et pour cela, je suis accueilli par l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie de Montpellier.

Dans le cadre de cette recherche, je réalise un travail sur l'enseignement des mathématiques au secondaire (plus précisément des classes de 3^{ème} et de 2^{de}) dans le système éducatif français.

Comme votre établissement correspond au profil nécessaire à mon projet, je voudrais vous solliciter une autorisation pour le déroulement de cette étude dans ce collège.

Voici en annexe une brève présentation de ce projet de recherche.

Je vous prie de bien vouloir accepter Madame ou Monsieur le Proviseur, l'assurance de mes sentiments respectueux en attendant votre réponse.

Cordialement,
Luiz Marcio FARIAS

14.3 Demande auprès du Principal

Luiz Marcio FARIAS
IUFM de Montpellier
Tél : 04 67 61 82 68
mail : luiz.farias@montpellier.iufm.fr

Le 01 juin 2007

Bonjour Madame ou Monsieur le Principal,

Je suis étudiant brésilien, dans le cadre des échanges universitaires entre le Brésil et la France. Je développe une recherche dans le domaine de la Didactique des Mathématiques, et pour cela, je suis accueilli par l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie de Montpellier.

Dans le cadre de cette recherche, je réalise un travail sur l'enseignement des mathématiques au secondaire (plus précisément des classes de 3^{ème} et de 2^{de}) dans le système éducatif français.

Comme votre établissement correspond au profil nécessaire à mon projet, je voudrais vous solliciter une autorisation pour le déroulement de cette étude dans ce lycée.

Voici en annexe une brève présentation de ce projet de recherche.

Je vous prie de bien vouloir accepter Madame ou Monsieur le Proviseur, l'assurance de mes sentiments respectueux en attendant votre réponse.

Cordialement,
Luiz Marcio FARIAS

14.4 Demande auprès du Professeur

Luiz Marcio FARIAS
IUFM de Montpellier
Tél : 04 67 61 82 68
mail : luiz.farias@montpellier.iufm.fr

Le 15 juin 2007

Bonjour Madame ou Monsieur le Professeur,

Je suis étudiant brésilien, dans le cadre des échanges universitaires entre le Brésil et la France. Je développe une recherche dans le domaine de la Didactique des Mathématiques, pour cela, je suis accueilli par l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie de Montpellier.

Dans le cadre de la recherche, je réalise un travail sur l'enseignement des mathématiques au secondaire dans le système éducatif français.

Je m'adresse à vous en tant qu'enseignant-chercheur brésilien. Je vous prie de bien vouloir prendre le temps de réfléchir à une proposition que je désire vous faire.

Dans le cadre de la recherche au niveau d'une thèse, je vous contacte car je m'intéresse à l'enseignement des mathématiques au secondaire (plus précisément dans les classes de 3^{ème} et de 2^{de}) et je voudrais pouvoir suivre, aussi bien, vos enseignements et les apprentissages des élèves.

Si vous désirez répondre favorablement à ma demande ou si vous désirez des renseignements supplémentaires, je vous propose de me contacter par mail ou par téléphone.

Dans le cas où vous accepteriez ma demande, nous pourrions déterminer ensemble les modalités de rencontres qui pourraient prendre diverses formes en accord avec vous (entretiens, visites, enregistrement des séances, interviews, ...).

Je vous prie de bien vouloir diffuser cette proposition auprès d'autres collègues enseignants en 3^{ème} et 2^{de}.

Merci par avance pour l'attention portée à ce message.

Cordialement,

Luiz Marcio FARIAS

14.4.1 Demande auprès du Professeur

Luiz Marcio FARIAS
IUFM de Montpellier

Tél : 04 67 61 82 68

mail : luiz.farias@montpellier.iufm.fr

Le 15 juin 2007

Bonjour Madame ou Monsieur le Professeur,

Je m'adresse à vous en tant qu'enseignant-chercheur brésilien, dans le cadre des échanges universitaires entre le Brésil et la France. Je développe une recherche dans le domaine de la Didactique des Mathématiques. Pour cela, je suis accueilli par le Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactiques Education et Formation – LIRDEF du l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie de Montpellier.

Dans le cadre de la recherche, je réalise un travail sur l'enseignement de mathématiques au secondaire dans les systèmes éducatifs français. Je vous prie de bien vouloir prendre le temps de réfléchir à une proposition que je désire vous faire. Dans le cadre de la recherche au niveau d'une thèse, je vous contacte car je m'intéresse à l'enseignement des mathématiques au secondaire (plus précisément des classes de troisième et de seconde) et je voudrais pouvoir suivre, aussi bien, vos enseignements, que les apprentissages des élèves, dans l'année scolaire 2007-2008.

Si vous désirez répondre favorablement à ma demande ou si vous désirez des renseignements supplémentaires, je vous propose de me contacter par mail ou par téléphone.

Dans le cas où vous accepteriez ma demande, nous pourrions déterminer ensemble des modalités de rencontres qui pourraient prendre diverses formes en accord avec vous (entretiens, visites, enregistrement des séances, interviews, ...).

Je vous prie de bien vouloir diffuser cette proposition auprès d'autres collègues enseignants en troisième et en seconde.

Merci par avance pour l'attention portée à ce message.

Cordialement,

Luiz Marcio FARIAS

15 Progression P1Classe de 3^{ème}**PROGRESSION**
2007-2008

SEMAINES	CHAPITRES
1 (1)	<i>RATIONALITE</i>
2 (3)	<i>01 - ARITHMETIQUE</i>
1 (4)	<i>BILAN GEOMETRIE</i>
3 (7)	<i>02 - GEOMETRIE PLANE ET THEOREME DE THALES</i>
2 (9)	<i>03 - INEQUATIONS, EQUATIONS ET SYSTEMES</i>
1 (10)	<i>04 - GEOMETRIE DANS L'ESPACE</i>
2 (11)	<i>05 - RACINES CARREES</i>
1 (12)	<i>06 - PROPORTIONNALITE</i>
3 (15)	<i>07 - CALCUL LITTERAL</i>
2 (17)	<i>09 - TRANSLATION - VECTEURS - ROTATION</i>
1 (18)	<i>10 - STATISTIQUES</i>
3 (21)	<i>11 - FONCTIONS LINEAIRES ET AFFINES</i>
1 (22)	<i>12 - VECTEURS ET COORDONNEES</i>
2 (24)	<i>13 - TRIGONOMETRIE - ANGLES INSCRITS</i>

DATE	POUR LE	
2/11		Introduction Equations produits
	28/11	N° 27 p 78
2/11		Equations - Produits / Introduction des systèmes d'équations
	28/11	N° 33 p 121
3/11		Exercices sur les systèmes
	03/12	N° 25-26 p 120
1/12		INTERROGATION / Problème de USB
	04/12	N° 41 p 122
1/12		Exercices - Méthode 1
	05/12	N° 29 p 121
2/12		Méthode 2 / Exercices
	06/12	N° 35-44 p 121-122
1/12		FICHES PROBLÈMES
1/12		DS N° 4
1/12		"Venez à moitié rempli!"
	12/12	N° 40 p 272
1/12		Volume et Surface d'une sphère / Unités /
	17/12	N° 21-23 p 208
1/12		Exercices sections + II
	18/12	Apprendre les formules p 160
1/12		Feuille EXO
	18/12	1-2-3.
1/12		Exercices Brevet
3/01		Introduction "Racines carrées"
	08/01	N° 1-2-3 p 58
1/01		Fin de la feuille de Test
	05/01	N° 20-21-22 p 60
1/01		Produit des racines
	10/01	N° 23-24-25-26-33-34-35-36-37 p 60
1/01		Exercices $\sqrt{}$ + cases 2/2
	17/01	N° 43-44 p 61
1/01		Exercices $\sqrt{}$
	21/01	N° 37-38-40-49 p 61
1/01		INTERROGATION - PROBLÈME $\sqrt{}$ et Pythagore
03		01 DEV = 3 ^{me} TR
	05/03	N° 30 ^{bijou} et 31 p 45

17 Progression P2

Programme de Seconde

Nombre de semaines et donc d'heures de module : 30 (32 maximum...)

En tenant compte des contrôles écrits en classe (environ 3 par trimestre, c'est à dire 8 à 9 par an), de leurs corrections ainsi que celles des devoirs (environ 5 par trimestre, c'est à dire 15 par an) :

- ♦ "premières séances" en Seconde (2 semaines)... puis "fil rouge" durant toute l'année en devoirs, en modules...

↳ activités numériques : pas de révisions systématiques mais résolution de problèmes permettant de "révisiter" des notions de collège et de progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, la mise en équation et résolution d'équations...

↳ activités géométriques : configuration de base & transformations étudiées au collège...
↳ trigonométrie du triangle rectangle...

- ♦ Fonctions (1) : 3 semaines

↳ activité d'introduction au fonctions : module 3h ↳ généralités...(1h)
↳ fonctions affines et linéaires (1h) ↳ proportionnalité, pourcentages...(1h + module 1h)
↳ équations de droites...(1h + module 1h)

- ♦ Nombres : 3 semaines

↳ nature et écriture des nombres...
↳ puissances...
↳ arithmétique

Calculatrice : module 2h

– affichage ↳ ordre de grandeur
↳ arrondi, troncature...
– notation scientifique

- ♦ Triangles isométriques / Triangles de même forme : 3 semaines

- ♦ Statistique : 4 semaines (classe entière / module)

↳ calcul de pourcentages...
↳ organisation et exploitation de données statistiques + simulation...

Calculatrice / Ordinateur...
module 3h à 4h

- ♦ Inéquations : 3 semaines

↳ résolution graphique d'équations et d'inéquations : module 2h

- ♦ Géométrie analytique : 4 semaines

↳ repérage
↳ vecteurs : multiplication par un réel...

- ♦ Géométrie dans l'espace : 3 semaines

↳ positions relatives de droites et plans...
↳ orthogonalité d'une droite et d'un plan...
↳ calculs...

Ordinateur, logiciel...
module 2h à 3h

- ♦ Fonctions usuelles : 3 semaines

- ♦ Équations de droites - Système d'équations linéaire : 2 semaines

- ♦ Trigonométrie - fonctions circulaires : 2 semaines

3 évidences :

- Suite du Collège (nouveau programme de mathématiques de 3^{ème} entré en vigueur à la rentrée 1999...) avec des contenus plus élaborés (sur les nombres, les transformations...)

- Seconde pour tous : capacités attendues limitées...

- Cadre horaire modeste...

+ "manque de temps" pour terminer le programmes !

3 "chapitres" :

- Statistique pour 1 / 8 du temps, c'est à dire 4 semaines...

- Calcul et Fonctions pour 3,5 / 8 du temps, c'est à dire 14 semaines...

– Orientation majeure : rapprocher les points de vue, numérique, algébrique, fonctionnel et graphique.

– Capacités attendues limitées.

– "Allègements" : trigonométrie, valeur absolue...

- Géométrie pour 3,5 / 8 du temps, c'est à dire 14 semaines...

– 3 orientations : * du temps pour les problèmes (lieu d'apprentissage d'une démarche déductive),

* s'appuyer sur des notions fortement liées à la perception,

* faire vivre "à plein" les acquis du Collège (configurations – transformations – vecteurs)...

– 3 parties : * géométrie dans l'espace,

* configurations du plan : les acquis du collège (avec "grille de lecture" pour éviter des révisions...), triangles isométriques, de même forme, problèmes d'aires, etc.,

* repérage, vecteurs.

– "Allègements" significatifs : homothétie, calcul vectoriel, angles orientés...

Des thèmes :

- Au-delà de l'évaluation...

- En traiter au moins 1 par chapitre...

TICE...

- L'intégration des calculatrices a paru indispensable...

– pour permettre aux élèves d'éayer leur réflexion sur la nature des nombres,

– ce les utiliser correctement et de façon réfléchié...

- L'usage de calculatrices graphiques s'impose... de même que celui de graphesurs et tableurs...

18 Cahier de la classe P2 (Seconde)

2007-2008

2nde 08

06/09 Prise en main du groupe "opt. Sci."

07/09 "Règles du jeu mathématique"
 ↳ notion d'axiome
 • Communiquer

12/09 AI avec toute la classe (sauf 2 élèves en latin)
 ↳ Calcul mental
 (révisori : somme, terme, produit, facteur, inverse, divisi, $op1 = \frac{1}{100} \dots$)

13/09 Test de rentrée (partie I) Devoir N°1 pour le 27/01
 ↳ correction du 1. (1-2-3)
 • Calcul mental $37 \times 43 \Leftrightarrow A^2 - B^2$
 • programme de calcul ↳ à revoir pour demain
 G1/G2 : carré magique - opérations

14/09 Corrigé du programme de calcul
 ↳ Notion de fonction
 Notation $f(x)$, image ...

19/09 Corrigé du test 1 (4-6-7)
 0, 0, 0, 0, 36 ↳ notion de nombre décimal
 ↳ notation scientifique
 ↳ partie décimale
 $\sqrt{36+3^2}$ ↳ inf. de $\sqrt{a^2+b^2}$ don $+|x|$
 $-20 = 10 + 3x = -20!$

20/09 Test de rentrée (partie II - géométrie)
 Exercice du 3. ↳ calculs remarquables
 ↳ développer $(5-x)^2$, $(-6-x)^2 \dots$ et 1.(3) du test
 Calculatrice
 1. retenir $A(x)$ (2° au final)
 2. définir la valeur de départ et le pas
 3. lire les valeurs gaze du tableau
 ↳ trouver des nombres ayant même image

G1/G2 corrigé de carré magique N°2 $-\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \dots$
 ↳ démarrage de 'b' ↳ b) c) d en devoir facultatif
 programme de calcul
 ↳ $\frac{12}{a} - 3$

21/09 Notion de proportion et %
 * 14 filles pour 33 élèves ...
 * Corrigé du 4 (partie I) du test
 ↳ exercice 1 : une fleur de ... revient à ... (deux ...)
 ↳ exercice 2 : reconnaître une somme / un produit
 ↳ exercice 3 : ...

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$

FACTORISER

$$AB + AC = A(B+C)$$

DEVELOPPER

↳ on met A en facteur

ou défalque Ax

7/09

- Trois au point sur $(A+B)^2 \rightarrow$ langage naturel
 - $\rightarrow (-5+x)^2$; $(-5-x)^2$
 - idem avec $(A+B)(A-B)$
 - $\rightarrow -5+x = x-5$
- \rightarrow retour sur %
 - * hausse de 30% puis baisse de 30% (effet en %?)
 - * corrigé du IV 2° (effet?)
- Calcul mental: 75×85 ; 65^2 ; 35^2 ; $15^2 \rightarrow$ cas général $(10d+5)^2$
 - $2^7 \times 5^5$
 - \rightarrow règles du puissance $a^m \times b^m = (ab)^m$ et $a^m \times a^p = a^{m+p}$
 - $12^3 \times 5^6 \rightarrow 60^3 \times 5^3 = 300^3 = 3^3 \times 100^3 = 3^3 \times 10^6$
 - ou $(2^2 \times 3)^3 \times 5^6 = 2^6 \times 3^3 \times 5^6$
 - $\rightarrow (a^m)^p = a^{mp}$
- opération n'ayant pas de sens: $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ et a^{n^p} (ex $2^{3^4} \rightarrow (2^2)^4$ ou $2^{(3^4)}$)
 - \rightarrow la "mille-feuille"
- Définition d'un nombre décimal
 - ex: $3,718 = 3718 \times 10^{-3}$; $5 = 5 \times 10^0 = 50 \times 10^{-1}$
 - \rightarrow entier \times une puissance de 10
 - $\rightarrow \mathbb{N}$; \mathbb{Z}

6/09

Après avoir rendu irréductible une fraction comment savoir si elle est décimale ou non?

\rightarrow critères de divisibilité

nombre du type $\frac{abc}{abc}$

1/09

- fractions décimales: définition et exemple
- mettre 2,875 sous forme d'une fract. irréductible
- Ensemble \mathbb{D} ; fraction $\rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$
- Inclusion entre ensembles
 - \rightarrow diagramme avec les ensembles
 - (\rightarrow places des nombres)

1/10

Révisions orales: nbs décimaux? fract. décimales? nbre rationnel?

que signifie l'exposant 17²⁰⁰³? 7^{-13} ?

rapels de règles sur puissances $\rightarrow \frac{1}{7^{13}} = (\frac{1}{7})^{13} = (7^{-1})^{13}$

Devoir 2 pour jeudi 11/10

Calculs mentalement: $32^3 \times 0,125^{50}$

\rightarrow corrigé du n°28 p22: inverse... (2 méthodes)

corrigé du 26 p22 $\rightarrow \sqrt{10^m}$ selon que m est pair ou impair

$\sqrt{10^{-10}} = 10^{-5} = 10^{-9} \times 10^4$ ou mieux $10^{-10} \times 10$

$\sqrt{10} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$ (donc $\neq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$!)

Crible d'Ératosthène (\rightarrow initiation tableau)

\rightarrow définition des nombres premiers

414141 et-il premier $\rightarrow 414141 = 41 \times 10101 = 41 \times 3 \times 7 \times 13 \times 37$

(touche $\sqrt{\quad}$ de la calculette)

6/10

6/11/09

comme un 1. un rayon

\rightarrow fiche sur affichage scientifique

\rightarrow distance de 2 nombres

\rightarrow val absolue

corrigé du 1° avec calcul littéral

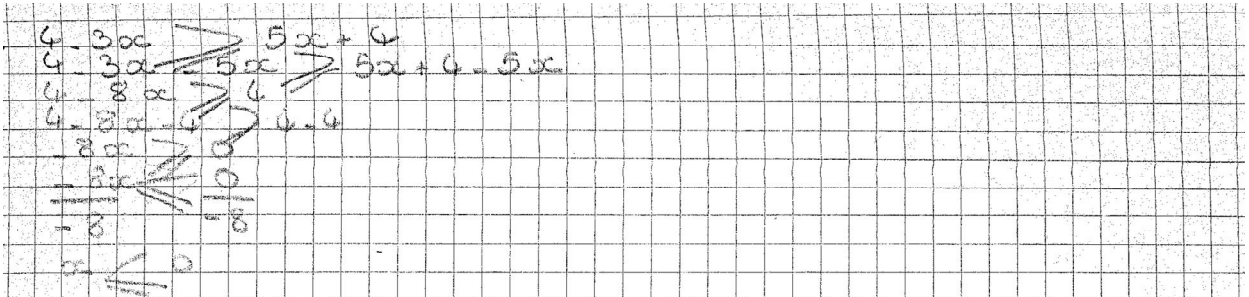
Savoir si un nombre est premier: méthode (critère d'arrêt)

$\rightarrow 101, 103, 107, 359$? (oui)

$\rightarrow 1147$? 2347 ?

(11 x 13 x 29)

19 Extrait du cahier de E8



exercice :

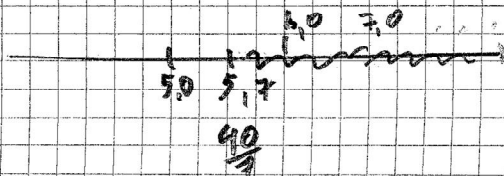
Construire un segment $[AB]$ de 10 cm de longueur.
 Placer un point C sur ce segment.
 Construire alors du même côté du segment le triangle équilatéral ACD et le carré $CBEF$.

Où doit se trouver le point C pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré $CBEF$?

Côté Δ	Périmètre Δ	Périmètre \square	Côté \square
5,4	15,3	19,6	4,9
5,6	16,8	17,6	4,4
5,7	17,1	17,2	4,3
6,0	18,0	16,0	4,0

$30x \rightarrow 4x (10x)$
 $30x \rightarrow 40 - 40x$
 $30x + 40x \rightarrow 40 - 40x + 40x$
 $70x \rightarrow 40$
 $7 \rightarrow 7$
 $x > \frac{40}{7} \approx 5,7$

AC doit mesurer plus de 5,7 cm pour que le périmètre du triangle ACD soit plus grand que le périmètre du carré $CBEF$.

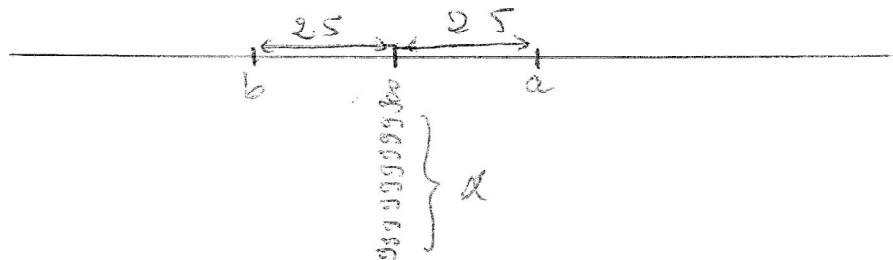


20 Extrait du Cahier de E12

$$A = 999\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,999\,875^2$$

affichage : 1E14 (sur CASIO : collage : 2¹⁴)
 Signification : 1×10^{14} 2×10^{14}
 collé 10^{14} $a \times 10^3$

$$A = (999\,999\,999\,900 + 25)^2 - (999\,999\,999\,900 - 25)^2$$



$$a = x + 25$$

$$b = x - 25$$

a et b sont équi-distant de x ou a en effet $d(a, x) = 25$
 $= \frac{1}{2}(b, x)$

(distance de a à x)

Distance entre deux nombres p et q :

Si $p \geq q$ la distance entre p et q est égale à $p - q = d(p, q)$

Si $p < q$ la distance entre p et q est égale à $q - p = d(p, q)$.

Notation : la distance de p à q se note indifféremment
 en : $|p - q|$ ou $|q - p|$.

et se lit la valeur absolue de $p - q$ ou valeur absolue
 de $q - p$ on a donc $|p - q| = |q - p|$.

