



**HAL**  
open science

## Normes stables des surfaces

Daniel Massart

► **To cite this version:**

Daniel Massart. Normes stables des surfaces. Mathématiques [math]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 1996. Français. NNT: . tel-00589624

**HAL Id: tel-00589624**

**<https://theses.hal.science/tel-00589624>**

Submitted on 29 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Normes stables des surfaces

D. Massart

12 juin 1996

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Définitions et généralités</b>	<b>5</b>
1.1 Premières définitions . . . . .	5
1.2 Cas d'une surface . . . . .	7
1.3 Autre définition . . . . .	11
1.4 Relation avec la théorie de Mather . . . . .	15
<b>2 Laminations géodésiques</b>	<b>18</b>
2.1 Applications du Graph Theorem de Mather . . . . .	18
2.2 Où l'on introduit le revêtement abélien . . . . .	22
<b>3 Etude au voisinage des points rationnels</b>	<b>29</b>
3.1 Non-strictes convexité en un point donné de $H_1(M, \mathbf{R})$ , pour une métrique dans une classe conforme donnée. . . . .	29
3.2 Non-strictes convexité au voisinage d'un point rationnel . . . . .	31
3.3 Non-différentiabilité de la norme stable en certains points rationnels . . . . .	34
<b>4 Liens avec la théorie des surfaces de Riemann</b>	<b>36</b>
4.1 Plongement du revêtement abélien dans $H_1(M, \mathbf{R})$ . . . . .	36
4.1.1 Définition de la Jacobienne . . . . .	36
4.1.2 Relèvement au revêtement abélien . . . . .	37
4.1.3 Ce qui précède est-il intrinsèque? . . . . .	38
4.1.4 Le plongement n'est pas isométrique . . . . .	39
4.2 Comparaison entre norme $L^2$ et norme stable . . . . .	40
4.2.1 Comparaison dans l'autre sens . . . . .	42
4.2.2 Estimations asymptotiques de $K_0$ dans l'espace de Teichmüller . . . . .	43
4.2.3 Formules sur $H_1(M, \mathbf{R})$ . . . . .	46
<b>5 Géométrie du revêtement abélien</b>	<b>47</b>
5.1 Sur une inégalité de Burago . . . . .	47
5.2 Sur un théorème de Mañé . . . . .	50

# Introduction

Ce texte constitue une étude de la norme stable sur le premier groupe d'homologie réelle d'une variété riemannienne  $(M, g)$  compacte et sans bord, avec un intérêt particulier pour le cas où  $M$  est une surface orientable de genre supérieur ou égal à deux. La motivation originelle en était de comprendre et relier entre eux certains travaux de Bangert, Burago, Mañé, Mather (voir [1, 2, 3, 11, 12, 13]).

Dans le cadre le plus général, la norme stable est définie par Federer de la façon suivante (cf. [9]) : pour  $v \in H_q(M, \mathbf{R})$  on pose

$$\|v\|_s = \inf \left\{ \sum |r_i| \text{vol}_q(\delta_i), \text{ où } \sum r_i \delta_i \text{ est un } q\text{-cycle lipschitzien représentant } v \right\} \quad (0.1)$$

en notant  $\text{vol}_q$  l'élément de volume  $q$ -dimensionnel.

Dans le cas où  $q = 1$  une définition équivalente mais plus géométrique est la suivante (voir [1]) : si  $v \in H_1(M, \mathbf{Z})$ ,

$$\|v\|_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \inf \{ l_g(\gamma_n), \text{ où } \gamma_n \text{ est une courbe fermée représentant } nv \} \quad (0.2)$$

où  $l_g$  est la longueur associée à la métrique riemannienne  $g$ . Ensuite on étend cette définition par homogénéité aux points rationnels de  $H_1(M, \mathbf{R})$ , puis par uniforme continuité à tout  $H_1(M, \mathbf{R})$ .

Dans le cas où  $q = \dim M - 1$ , la définition 0.2 se simplifie dans la mesure où il n'est plus nécessaire de passer à la limite en  $n$  ([9], p. 51). Dans la section 1.2 nous en donnons une démonstration simple, utilisant le fait que la forme d'intersection est symplectique, quand  $q = 1$ , et  $M$  est une surface fermée orientable. Ceci avait déjà été observé par Hedlund pour les tores  $\mathbf{T}^2$ .

Ensuite dans la section 1.3 nous donnons une autre définition de la norme stable, suivant une remarque d'A. Fathi, qui donne directement un sens à la norme stable d'une classe d'homologie irrationnelle. Cette définition se fait en termes de mesures de probabilité sur le fibré unitaire tangent à  $M$ , invariantes par le flot géodésique.

En 1.4 nous montrons que la norme stable n'est autre que le carré de la fonction  $\beta$  de Mather, dans le cas particulier où le lagrangien est une métrique riemannienne. Cette fonction est définie dans [13] comme minimum de l'action du lagrangien sur les mesures invariantes ayant une classe d'homologie ("average homological position") donnée. Nous utiliserons désormais le mot "minimisantes" pour qualifier les mesures réalisant le minimum. Dire qu'une probabilité est minimisante revient exactement à dire que la norme stable de sa classe d'homologie est 1.

Dans le second chapitre nous examinons certaines conséquences pour les surfaces du Graph Theorem (2.1.2) de Mather. En particulier nous montrons que les mesures

minimisantes s'identifient à des laminations géodésiques mesurées, orientables. De plus ces laminations se trouvent dans une partie compacte de l'espace  $\mathcal{ML}$  des laminations mesurées (alors que l'ensemble des laminations orientables est dense dans  $\mathcal{ML}$ ).

Dans le cas où une lamination minimisante n'est pas uniquement ergodique, il y a un domaine plat (ou "face") sur la sphère unité  $\mathcal{S}_1$  de la norme stable. Comme un tel domaine se trouve obligatoirement dans un sous-espace isotrope (pour la forme symplectique d'intersection) de  $H_1(M, \mathbf{R})$ , sa dimension est majorée par  $\text{genre}(M) - 1$ .

Nous justifions ces considérations dans le troisième chapitre (section 3.1), en montrant par exemple que dans une classe conforme donnée l'ensemble des métriques telle que la norme stable associée n'est pas strictement convexe est un fermé d'intérieur non vide.

Dans la section 2.2 nous considérons le revêtement galoisien  $\overline{M} \xrightarrow{p} M$  dont le groupe de transformations est le quotient de  $H_1(M, \mathbf{Z})$  par sa torsion, c'est-à-dire  $H_1(M, \mathbf{Z})$  lui-même si  $M$  est une surface orientable. Ce revêtement est appelé abélien. Il est démontré dans [13] que les géodésiques contenues dans le support d'une mesure minimisante ont la propriété suivante : leurs relevés à  $\overline{M}$  minimisent la distance entre deux quelconques de leurs points. Nous démontrons également quelques résultats sur la nature des faces. En particulier, si une face contient dans son intérieur un point rationnel, alors cette face est l'enveloppe d'un nombre fini de points rationnels.

Dans le troisième chapitre nous utilisons les résultats du second pour étudier le comportement de la norme stable au voisinage des points rationnels de  $H_1(M, \mathbf{R})$ . Les principaux résultats, valables pour une métrique quelconque, sont les suivants :

**Théorème 0.0.1** *La norme stable n'est strictement convexe dans aucun voisinage d'un point rationnel. Un tel point est toujours contenu dans une ou plusieurs faces plates de dimension  $\text{genre}(M) - 1$  de la sphère à laquelle il appartient.*

**Corollaire 0.0.2** *La norme stable n'est différentiable en aucun point rationnel n'appartenant pas à l'intérieur d'une face de dimension  $\text{genre}(M) - 1$  ; c'est-à-dire que la sphère unité  $\mathcal{S}_1$  admet en un tel point un cône tangent différent d'un plan.*

Le théorème prouve que le travail fait au second chapitre sur les faces n'est pas vain. On a là un trait spécifique aux surfaces de genre  $\geq 2$ . Si  $M$  est un tore  $\mathbf{T}^2$ , la norme stable est strictement convexe en tout point. Sur une variété de dimension plus grande, tout peut arriver, la dimension des faces n'étant plus limitée par l'obligation d'être contenue dans un sous-espace lagrangien de la forme symplectique d'intersection. Hedlund (cf. [1]) a ainsi construit une métrique sur le tore  $\mathbf{T}^3$  dont la norme stable a pour sphère unité un octaèdre.

Le corollaire s'applique à une infinité de points d'après la proposition 1.2.9. Un résultat analogue est dû à G. McShane et I. Rivin (cf. [14]), dans le cas où  $M$  est un tore privé d'un point, muni d'une métrique hyperbolique. Il est à rapprocher également d'un théorème de J. Delgado-Gómez (voir [5]). Le théorème de J. Delgado-Gómez est valable pour une variété de dimension quelconque, mais seulement pour une métrique générique. Sous cette forme il était déjà connu pour le tore  $\mathbf{T}^2$  (cf. [2]).

Au chapitre 4 nous supposons que  $M$  est une surface orientable et nous utilisons l'existence d'une structure complexe associée à la classe conforme de la métrique pour plonger (à l'aide des 1-formes différentielles harmoniques)  $\overline{M}$  dans  $H_1(M, \mathbf{R})$ . Le plongement est conforme mais non isométrique, sauf dans le cas où  $M$  est un tore muni d'une métrique plate. Nous verrons au dernier chapitre que la norme stable est reliée aux propriétés géométriques de ce plongement.

Dans la section 4.2 nous comparons la norme stable et la norme duale de la norme  $L^2$  (provenant de la théorie de Hodge) sur l'espace des 1-formes harmoniques, identifié à  $H^1(M, \mathbf{R})$ . La comparaison dépend de la géométrie de la forme d'intersection  $\text{Int}(.,.)$  sur  $H_1(M, \mathbf{R})$ : soit  $K_0$  tel que

$$K_0 = \sup \left\{ \frac{|\text{Int}(h, k)|}{\|h\|_s \|k\|_s} / h, k \in H_1(M, \mathbf{R}) \setminus \{0\} \right\}.$$

Nous démontrons le

**Théorème 0.0.3** *On a la double inégalité*

$$\text{Vol}(M)^{\frac{1}{2}} K_0 \|h\|_s \geq \|h\|_{L^2} \geq \text{Vol}(M)^{-\frac{1}{2}} \|h\|_s.$$

Nous examinons le comportement asymptotique de  $K_0$  quand la métrique  $g$  (supposée de courbure -1) tend vers l'infini dans l'espace de Teichmüller. Nous obtenons le

**Théorème 0.0.4** *Il existe des constantes  $A, B$  telles que*

$$\frac{A}{l_1 \log(l_1)} \leq K_0 \leq \frac{B}{l_1^2}.$$

où  $l_1$  est la longueur de la plus petite courbe non homologiquement triviale.

Dans le cinquième et dernier chapitre nous considérons le revêtement abélien du point de vue géométrique. Nous comparons la norme stable et la distance induite par la métrique relevée de  $g$  à  $\overline{M}$ . Nous obtenons en 5.1 une inégalité analogue à celle démontrée par D. Burago dans [3]. L'image de  $\overline{M}$  dans  $H_1(M, \mathbf{R})$  par le plongement construit au chapitre 4, est quasi-isométrique à  $H_1(M, \mathbf{R})$  muni de la norme stable. De plus les constantes multiplicatives intervenant dans la définition d'une quasi-isométrie sont toutes égales à 1.

Nous utilisons ceci pour redémontrer un théorème de Bangert (5.1.5). Ensuite nous en déduisons (théorème 5.2.1) une version adaptée à notre cas particulier du théorème de cohomologie de Mañé.

# Chapitre 1

## Définitions et généralités

### 1.1 Premières définitions

On s'inspire, pour cette présentation, de [7]. Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte connexe. On note  $\Gamma$  le quotient de  $H_1(M, \mathbf{Z})$  par sa torsion, c'est un réseau dans  $H^1(M, \mathbf{R})$ .

**Définition 1.1.1** pour  $h \in \Gamma$  on note

$$f(h) = \inf\{l_g(\gamma)/\gamma \text{ courbe fermée rectifiable représentant } h\}.$$

**Remarque 1.1.2** Pour tout  $h \in \Gamma$  on a  $(h \neq 0) \Rightarrow (f(h) > 0)$  car sinon on peut trouver des courbes arbitrairement courtes représentant  $h$ . Or,  $M$  étant une variété compacte, elle admet un rayon d'injectivité strictement positif  $r_{inj}$  et toute courbe de longueur inférieure à  $r_{inj}$  est contenue dans un disque topologique plongé dans  $M$  donc homologiquement triviale.

**Proposition 1.1.3** la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nh)/n$  existe pour tout  $h \in \Gamma$ , on la note  $\|h\|_g$ .

**Preuve :** on a l'inégalité suivante

$$f(h_1 + h_2) \leq f(h_1) + f(h_2) + 2\text{diam}(M).$$

En effet (voir figure 1.1 ci-dessous), si  $\gamma_1, \gamma_2$  sont deux représentants de  $h_1, h_2$  on peut construire un représentant de  $h_1 + h_2$  de longueur inférieure ou égale à  $l_g(\gamma_1) + l_g(\gamma_2) + 2\text{diam}(M)$  en connectant les courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  par un chemin de longueur inférieure ou égale au diamètre de  $M$ .

La suite  $f(nh) + 2\text{diam}(M)$  est donc sous-additive. Rappelons qu'une suite  $u_n$  est sous-additive si  $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ . Un théorème bien connu (cf. [16], pb. 98) dit alors que la suite  $u_n/n$  est convergente. La proposition est donc démontrée.

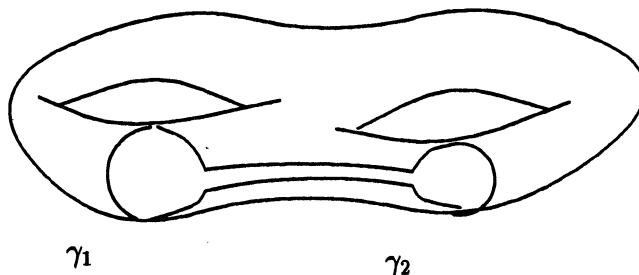


FIG. 1.1 - connexion des représentants

**Proposition 1.1.4** La fonction  $\|h\|_s$  vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\|h\|_s \leq f(h)$  pour tout  $h \in \Gamma$ .
2. Pour tous  $\lambda \in \mathbf{Z}$  et  $h \in \Gamma$ , on a

$$\|\lambda h\|_s = |\lambda| \|h\|_s.$$

3. Pour tous  $h_1, h_2 \in \Gamma$  on a

$$\|h_1 + h_2\|_s \leq \|h_1\|_s + \|h_2\|_s.$$

De plus, pour toute 1-forme différentielle  $\omega$ , pour toute courbe  $\alpha$ , de classe  $C^1$  par morceaux, on a :

$$\left| \int_{\alpha} \omega \right| \leq \sup_{x \in M} \|\omega_x\|_g l_g(\alpha) \quad (1.1)$$

où  $\|\omega_x\|_g$  désigne la norme duale de  $g$  sur le fibré cotangent à  $M$ .

**Preuve :**

1- En effet pour tout représentant  $\gamma$  de  $h$ ,  $\gamma$  parcouru  $n$  fois est un représentant de  $nh$  donc  $f(nh) \leq nf(h)$ .

2- La suite  $f(n\lambda h)/\lambda n$  est une sous-suite de la suite convergente  $f(nh)/n$  donc sa limite est la même.

3- Cette inégalité résulte de celle utilisée dans la proposition ci-dessus en passant à la limite en  $n$ .

La dernière partie de la proposition résulte de

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \omega &= \int \omega(\alpha(t)) dt \\ &\leq \int \|\omega_x\|_g \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\|_g dt. \end{aligned}$$

On peut ensuite étendre la fonction  $\|\cdot\|_s$  de façon homogène à tous les points rationnels de  $H_1(M, \mathbf{R})$ . Ces points formant une partie dense de  $H_1(M, \mathbf{R})$ , pour



prolonger  $\|\cdot\|_s$  à tout  $H_1(M, \mathbf{R})$  il ne nous manque que l'uniforme continuité. Soient  $e_1, \dots, e_n$  une base de  $H_1(M, \mathbf{R})$  formée de points de  $\Gamma$ , et  $K = \max_i \|e_i\|_s$ . On a

$$\begin{aligned} \forall v = \sum \lambda_i e_i, \|v\|_s &\leq \sum |\lambda_i| \|e_i\|_s \\ &\leq K \sum |\lambda_i|. \end{aligned}$$

Mais  $\sum |\lambda_i|$  est la valeur en  $v$  d'une norme sur  $H_1(M, \mathbf{R})$  associée à la base  $e_1, \dots, e_n$ . Cette norme définit, comme n'importe quelle norme, la topologie de  $H_1(M, \mathbf{R})$ . L'inégalité ci-dessus montre donc l'uniforme continuité de  $\|\cdot\|_s$ .

**Proposition 1.1.5** *L'extension est une norme.*

**Preuve :** l'homogénéité et la sous-additivité résultent de la proposition 1.1.4. D'autre part l'équation (1.1) implique pour toute courbe  $\alpha$ , de classe  $C^1$  par morceaux, et toute 1-forme différentielle  $\omega$  :

$$| \langle [\omega], [\alpha] \rangle | \leq c(\omega) l_g(\alpha)$$

où  $c(\omega)$  est une constante ne dépendant que de  $\omega$ . Donc

$$| \langle [\omega], [\alpha] \rangle | \leq c(\omega) f(n[\alpha])/n$$

puis

$$| \langle [\omega], [\alpha] \rangle | \leq c(\omega) \|[\alpha]\|_s. \quad (1.2)$$

Cette inégalité se prolonge par continuité à tout  $H_1(M, \mathbf{R})$ , et par conséquent  $\|[\alpha]\|_s = 0$  implique  $\langle [\alpha], [\omega] \rangle = 0$ . La 1-forme  $\omega$  étant arbitraire, cela implique la nullité de  $[\alpha]$ .

**Remarque 1.1.6** *La proposition ci-dessus justifie la notation  $\|\cdot\|_s$ . On parlera désormais de norme stable associée à la métrique  $g$ . On note de la même manière la norme duale sur  $H^1(M, \mathbf{R})$ .*

**Remarque 1.1.7** *La procédure de stabilisation décrite ci-dessus n'est pas gratuite, comme le montre la figure 2: la courbe  $c$  est cohomologue à la somme  $a + b$ . Si  $n$  est assez grand, il peut être plus court de faire  $n$  tours de  $a$ , rejoindre  $b$  par un chemin de longueur inférieure à  $\text{diam}(M)$ , faire  $n$  tours de  $b$  puis revenir, que de faire  $n$  tours de  $c$ .*

## 1.2 Cas d'une surface

On suppose dans cette section que  $M$  est une surface fermée, orientable. On note  $\zeta$  le genre de  $M$  pour éviter toute confusion avec la métrique  $g$ .

**Définition 1.2.1** *pour  $h \in H_1(M, \mathbf{Z})$  on pose*

$$f'(h) = \inf \left\{ \sum_i |p_i| \cdot l_g(\gamma_i) \right\}$$

où les  $\gamma_i$  sont des courbes fermées telles que  $h = \sum_i p_i \cdot [\gamma_i]$ .

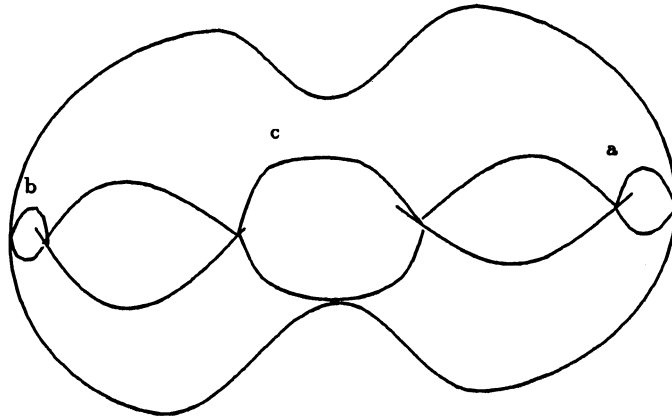


FIG. 1.2 - de l'intérêt de stabiliser

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1.2.2**

$$f'(h) = \|h\|_g \text{ pour tout } h \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

**Proposition 1.2.3** Dans la définition ci-dessus, on peut remplacer "inf" par "min".

**Preuve :** On peut supposer que les  $\gamma_i$  sont des géodésiques minimisant la longueur dans leur classe d'homotopie libre. Pour tout réel  $K$ , l'ensemble des géodésiques fermées de longueur  $\leq K$ , paramétrées à vitesse constante, est compact, car équicontinu, dans l'espace des chemins. Par un argument classique, combinant le théorème d'Ascoli et la semi-continuité inférieure de la fonction longueur, une suite de géodésiques dont les longueurs approchent l'infimum possède un point-limite. Celui-ci est une géodésique fermée dont la longueur est exactement l'infimum.

**Proposition 1.2.4** Si les courbes  $(\gamma_i)_{i=1..p}$  réalisent le minimum, alors elles sont simples (c'est-à-dire sans auto-intersection) et ne s'intersectent pas deux à deux.

**Preuve :** quitte à changer l'orientation de  $\gamma_i$ , on peut supposer que les  $p_i$  sont positifs. Si, pour un certain  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\gamma_i$  n'est pas un cercle plongé, recouvert éventuellement plusieurs fois, alors on peut (voir figure 3) trouver deux courbes simple fermées  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  telles que :

- $[\alpha_1] + [\alpha_2] = [\gamma_i]$
- $l_g(\alpha) < l_g(\gamma_i) + l_g(\gamma_j)$

On peut alors remplacer  $\gamma_i$  par la réunion de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dans  $\sum_i |p_i| \cdot l_g(\gamma_i)$  et contredire la propriété de minimalité des  $\gamma_i$ .

Si deux d'entre elles,  $\gamma_i$  et  $\gamma_j$  s'intersectent, alors on peut trouver une courbe fermée  $\alpha$  telle que

$$- [\alpha] = [\gamma_i] + [\gamma_j]$$

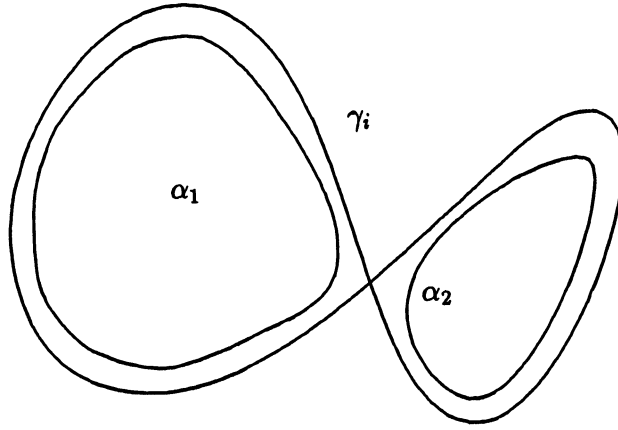


FIG. 1.3 - on gagne de la longueur en supprimant les intersections

$$- l_g(\alpha) < l_g(\gamma_i) + l_g(\gamma_j)$$

ce qui contredit la propriété de minimalité des  $\gamma_i$ .

**Corollaire 1.2.5** Les  $[\gamma_i]$  engendrent un sous-espace isotrope de  $H^1(M, \mathbf{R})$ . En particulier, si les classes  $[\gamma_i]$  sont linéairement indépendantes dans  $H_1(M, \mathbf{R})$ , leur nombre  $p$  est inférieur ou égal à  $\zeta$ .

**Proposition 1.2.6**  $\|h\|_s = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(nh)/n$

**Preuve :** L'existence de la limite s'obtient par sous-additivité comme précédemment. D'autre part il est clair que

$$\forall h \in H^1(M, \mathbf{Z}) \quad f'(h) \leq f(h).$$

Mais si on a un représentant de  $h$  sous la forme  $\sum_{i=1}^k p_i \cdot [\gamma_i]$ , on peut en reliant les  $\gamma_i$  entre elles obtenir un représentant sous forme de courbe simple fermée de longueur

$$\leq \sum_i |p_i| \cdot l_g(\gamma_i) + 2k \text{diam}(M)$$

d'où

$$f(h) \leq f'(h) + 2k \text{diam}(M).$$

Par conséquent

$$\frac{f(nh)}{n} - \frac{2k \text{diam}(M)}{n} \leq \frac{f'(nh)}{n} \leq \frac{f(nh)}{n} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (1.3)$$

d'où la proposition.

**Lemme 1.2.7** Pour tout  $h$  on peut trouver un représentant sous la forme  $\sum_i p_i \cdot [\gamma_i]$ , où  $f'(h) = \sum_i |p_i| \cdot l_g(\gamma_i)$ , et  $M \setminus \cup_i \gamma_i$  est connexe.

Cela montre que l'on peut toujours supposer les  $[\gamma_i]$  indépendantes.

**Preuve :** Parmi tous les représentants réalisant le minimum des longueurs, choisissons-en un dont le nombre de composantes connexes,  $k$ , soit minimal. Supposons que  $M \setminus \cup_i \gamma_i$  ne soit pas connexe.

Cela implique une relation non triviale entre les  $\gamma_i$ , du type  $\sum_i a_i \cdot [\gamma_i] = 0$ , où les  $a_i$  valent 0, 1, ou -1. Quitte à renverser l'orientation de  $\gamma_i$ , c'est-à-dire à changer le signe de  $p_i$ , on peut supposer que les  $a_i$  ne prennent que les valeurs 0 et 1. Soient

$$J = \{i/a_i = 1\}, I_+ = \{i/p_i > 0\}, I_- = \{i/p_i < 0\}.$$

Alors  $\sum_{i=1}^k p_i \cdot [\gamma_i] \pm \sum_J [\gamma_i]$  est encore un représentant de  $h$ , de longueur

$$f'(h) \pm \left( \sum_{J \cap I_+} l_g(\gamma_i) - \sum_{J \cap I_-} l_g(\gamma_i) \right).$$

Si la quantité entre parenthèses n'est pas nulle, on peut, en choisissant le signe devant la parenthèse, contredire la minimalité de  $\sum_i |p_i| \cdot l_g(\gamma_i)$ . Donc

$$\sum_{J \cap I_+} l_g(\gamma_i) - \sum_{J \cap I_-} l_g(\gamma_i) = 0.$$

Choisissons  $i_0 \in J \cap I_+$  tel que  $\forall i \in J \cap I_+$ , on a  $p_i \geq p_{i_0}$ .

Puisque

$$[\gamma_{i_0}] = - \sum_{i \in J, i \neq i_0} [\gamma_i] \tag{1.4}$$

un représentant de  $h$  est

$$\sum_{i \neq i_0} p_i \cdot [\gamma_i] - p_{i_0} \sum_{i \in J, i \neq i_0} [\gamma_i].$$

Sa longueur est

$$\begin{aligned} & \sum_{i \neq i_0} |p_i - a_i \cdot p_{i_0}| \cdot l_g(\gamma_i) \\ &= \sum_{J \cap I_+ \setminus i_0} (p_i - p_{i_0}) l_g(\gamma_i) - \sum_{J \cap I_-} (p_i - p_{i_0}) l_g(\gamma_i) + \sum_{I \setminus J} |p_i| l_g(\gamma_i) \\ &= \sum_{I_+} (p_i - p_{i_0}) l_g(\gamma_i) - \sum_{I_-} (p_i - p_{i_0}) l_g(\gamma_i) + \sum_{I \setminus J} |p_i| l_g(\gamma_i) \\ &= \sum_{I_+} p_i \cdot l_g(\gamma_i) - \sum_{I_-} p_i \cdot l_g(\gamma_i) - p_{i_0} \left( \sum_{J \cap I_+} l_g(\gamma_i) - \sum_{J \cap I_-} l_g(\gamma_i) \right) \\ &= f'(h) - p_{i_0} \left( \sum_{J \cap I_+} l_g(\gamma_i) - \sum_{J \cap I_-} l_g(\gamma_i) \right) \\ &= f'(h) \end{aligned}$$

car la dernière quantité entre parenthèses est nulle. Or le représentant ainsi construit ne contient que  $k - 1$  courbes (on a éliminé  $\gamma_{i_0}$ ), ce qui contredit la minimalité de  $k$ .

**Corollaire 1.2.8** *On peut trouver des courbes simples  $\alpha_j$  telles que*

$$Int([\gamma_i], [\alpha_j]) = \delta_{ij}.$$

Par connexité de  $M \setminus \cup_i \gamma_i$ , on peut trouver dans  $M \setminus \cup_i \gamma_i$  un arc simple  $a_1$ , transverse au bord, reliant les deux composantes de bord de  $M \setminus \cup_i \gamma_i$  correspondant à  $\gamma_1$ . On définit  $\alpha_1$  comme étant l'adhérence dans  $M$  de  $a_1$ . Si on enlève  $a_1$  à  $M \setminus \cup_i \gamma_i$  le nombre de composantes de bord n'augmente pas, donc  $M \setminus (\cup_i \gamma_i \cup a_1)$  est encore connexe. On définit par récurrence les autres  $\alpha_i$ .

Nous pouvons maintenant passer à la

**Preuve du théorème 1.2.1 :** Soit  $n \in \mathbf{N}$ , soient  $(\gamma_i)$  telles que  $nh = \sum_i p_i \cdot [\gamma_i]$ . Soient des courbes simples  $\alpha_j$  données par le corollaire ci-dessus, telles que  $\text{Int}([\gamma_i], [\alpha_j]) = \delta_{ij}$ .

Alors

$$\text{Int}([nh], [\alpha_j]) = n \text{Int}([h], [\alpha_j])$$

mais d'autre part

$$\text{Int}([nh], [\alpha_j]) = \text{Int}\left(\sum_i p_i \cdot [\gamma_i], [\alpha_j]\right) = p_j$$

donc  $n$  divise  $p_i$  pour tout  $i$ . Par conséquent un représentant de  $h$  est  $\sum_i p_i/n \cdot [\gamma_i]$  d'où

$$f'(h) \leq f'(nh)/n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

mais d'autre part  $f'(h) \geq f'(nh)/n$  par sous-additivité. Donc la suite  $f'(nh)/n$  est stationnaire, or sa limite est  $\|h\|$ .

Démontrons au passage la proposition suivante:

**Proposition 1.2.9** *Il existe une infinité de classes d'homologies entières indivisibles (dans le  $\mathbf{Z}$ -module  $H_1(M, \mathbf{Z})$ ) dont un représentant minimisant est connexe.*

**Preuve :** Soit  $\gamma_0$  la plus petite courbe non nulle en homologie dans  $M$ . Elle est évidemment minimisante dans sa classe d'homologie. Raisonnons par récurrence et supposons l'existence de  $n+1$  courbes  $(\gamma_i)_{i=0..n}$  deux à deux distinctes en homologie, et minimisantes.

Soit alors  $\gamma_{n+1}$  la plus petite courbe telle que  $[\gamma_{n+1}]$  n'appartient à aucun sous-espace isotrope de  $H_1(M, \mathbf{R})$  engendré par certaines des  $[\gamma_i]$ ,  $i \leq n$ . Supposons que  $\gamma_{n+1}$  ne minimise pas la longueur dans sa classe d'homologie. Cela signifie qu'il existe  $k$  courbes  $(\delta_i)_{i=1..k}$  contenues dans un sous-espace isotrope de  $H_1(M, \mathbf{R})$  telles que

$$\sum_{i=1}^k [\delta_i] = [\gamma_{n+1}] \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k l_g(\delta_i) < l_g(\gamma_{n+1}).$$

Nécessairement, au moins l'une des  $[\delta_i]$  n'est contenue dans aucun sous-espace isotrope de  $H_1(M, \mathbf{R})$  engendré par les  $([\gamma_i])_{i=0..n}$ . Mais sa longueur est alors inférieure à celle de  $\gamma_{n+1}$ , d'où une contradiction.

### 1.3 Autre définition

Dans cette section  $(M, g)$  est une variété riemannienne quelconque. Nous y présentons, en nous inspirant de [7], une généralisation de la définition de la première section, qui donne directement un sens à la norme stable d'une classe irrationnelle.

**Notations 1.3.1** Soient  $\pi : T^1M \rightarrow M$  le fibré unitaire tangent à  $M$  et  $\mathcal{G}_t$  le flot géodésique associé à la métrique riemannienne  $g$ . On notera  $\mathcal{M}$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $T^1M$  invariantes par  $\mathcal{G}_t$ .

**Définition 1.3.2** Soit  $\mu \in \mathcal{M}$ . On peut lui associer une classe d'homologie  $[\mu]$  de la manière suivante. Par compacité de  $M$ ,  $H_1(M, \mathbf{R})$  est de dimension finie. Il est donc canoniquement identifié à son bidual. On va définir la classe d'homologie de  $\mu$  comme élément du dual de  $H^1(M, \mathbf{R})$ , c'est à dire du bidual de  $H_1(M, \mathbf{R})$ . Pour cela on pose, pour toute 1-forme différentielle  $\omega$ ,

$$\langle [\mu], [\omega] \rangle = \int_{T^1 M} \omega(v) d\mu(v). \quad (1.5)$$

**Proposition 1.3.3** Cette définition ne dépend pas du choix de la 1-forme  $\omega$  dans sa classe d'homologie.

**Preuve :** Considérons l'expression

$$E(t) = \int_{T^1 M} \left( \int_0^t \omega(\mathcal{G}_t(v)) dt \right) d\mu(v).$$

D'après le théorème de Fubini on a

$$E(t) = \int_0^t dt \left( \int_{T^1 M} \omega(\mathcal{G}_t(v)) d\mu(v) \right)$$

soit encore par le changement de variable  $v$  donne  $\mathcal{G}_t(v)$

$$E(t) = \int_0^t dt \left( \int_{T^1 M} \omega(v) d(\mathcal{G}_{-t}^* \mu(v)) \right).$$

Or  $\mu$  est invariante par  $\mathcal{G}_t$ , donc

$$E(t) = t \int_{T^1 M} \omega(v) d\mu(v).$$

Si maintenant on ajoute à  $\omega$  un terme de la forme  $df$ , où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $M$ , l'expression ci-dessus est modifiée de

$$\Delta E(t) = \int_{T^1 M} (f(\pi(\mathcal{G}_t(v))) - f(\pi(v))) d\mu(v)$$

$$\text{puisque } \frac{d}{dt} \pi(\mathcal{G}_t(v)) = G_t(v).$$

Alors  $\Delta E(t)$  est nul par  $\mathcal{G}_t$ -invariance de  $\mu$ .

**Proposition 1.3.4** L'application

$$\begin{array}{ccc} [\cdot] : \mathcal{M} & \rightarrow & H_1(M, \mathbf{R}) \\ \mu & \mapsto & [\mu] \end{array}$$

est affine et continue pour la topologie faible sur les mesures.

**Démonstration :** En effet toutes les applications coordonnées

$$\mu \mapsto \int_{T^1 M} \omega(v) d\mu(v)$$

sont affines et continues par définition de la topologie faible, et cela suffit pour assurer la continuité de  $[\cdot]$  puisque  $H_1(M, \mathbf{R})$  est de dimension finie ( $M$  étant compacte).

**Remarque 1.3.5** On sait que  $\mathcal{M}$  est compact convexe dans le dual de l'espace des fonctions continues sur  $M$ ,  $\mathcal{C}(M)$ . Donc l'image de  $\mathcal{M}$  par  $[\cdot]$  est un compact convexe  $\mathcal{B}_1$  de  $H_1(M, \mathbf{R})$ .

**Lemme 1.3.6** *Le compact  $\mathcal{B}_1$  est symétrique par rapport à l'origine.*

En effet, considérons l'involution  $I$  :

$$\begin{aligned} T^1M &\rightarrow T^1M \\ v &\mapsto -v \end{aligned}$$

On a

$$\mathcal{G}_{-t} = I^{-1}\mathcal{G}_t I$$

donc si  $\mu \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t^*(I^*\mu) &= (I\mathcal{G}_t)^*\mu \\ &= (\mathcal{G}_{-t}I)^*\mu \end{aligned}$$

par la relation de conjugaison ci-dessus

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t^*(I^*\mu) &= I^*(\mathcal{G}_{-t}^*\mu) \\ &= I^*\mu \end{aligned}$$

$\mu$  étant invariante par le flot géodésique, dont on déduit que  $I^*\mu \in \mathcal{M}$ . Or pour  $\omega$  une 1-forme différentielle on a

$$\begin{aligned} \langle [I^*\mu], [\omega] \rangle &= \int_{T^1M} \omega(v) d(I^*\mu)(v) \\ &= \int_{T^1M} \omega(I(v)) d\mu(v) \\ &= - \int_{T^1M} \omega(v) d\mu(v) \\ &= - \langle [\mu], [\omega] \rangle \end{aligned}$$

donc  $[I^*\mu] = -[\mu]$  avec  $I^*\mu \in \mathcal{M}$ , ce qui démontre le lemme.

**Lemme 1.3.7** *Le compact  $\mathcal{B}_1$  contient 0 dans son intérieur.*

Soit  $(h_i)_i$  une base de  $H_1(M, \mathbf{R})$  formée d'éléments de  $\Gamma$  et soient  $\gamma_i$  des géodésiques fermées représentant les  $h_i$ . Alors, si  $\mu_i$  est la mesure de probabilité uniformément répartie sur  $\gamma_i$ ,  $\mu_i$  est invariante par le flot géodésique et

$$[\mu_i] = (l_g(\gamma_i))^{-1} h_i$$

En effet, si on appelle  $\lambda_i$  la mesure sur  $\gamma_i$  induite par l'élément de longueur riemannien, il est clair que

$$\lambda_i = l_g(\gamma_i) \mu_i$$

et pour toute 1-forme  $\omega$  on a

$$\begin{aligned} \langle [\lambda_i], [\omega] \rangle &= \int_{T^1M} \omega(v) d\mu(v) \\ &= \int_0^{l_g(\gamma_i)} \omega(d/(dt)\gamma_i) dt \\ &= \int_{\gamma_i} \omega = \langle [\gamma_i], [\omega] \rangle \end{aligned}$$

donc  $[\lambda_i] = [\gamma_i]$ .

Par conséquent  $\mathcal{B}_1$  contient l'enveloppe convexe de

$$\{\pm l_g(\gamma_i)^{-1} h_i\}$$

qui est un parallépipède rectangle symétrique par rapport à l'origine, donc la contenant dans son intérieur, QED.

**Corollaire 1.3.8** *Il existe une norme, notée  $\|\cdot\|$  sur  $H_1(M, \mathbf{R})$  dont  $\mathcal{B}_1$  est la boule unité.*

**Théorème 1.3.9** *Cette norme et la norme stable sont égales.*

**Preuve**

**Première assertion :** la norme stable est plus grande.

Il suffit de le démontrer pour un élément de  $\Gamma \setminus 0$  à cause de l'homogénéité et de la continuité des normes. Soit donc  $h \in \Gamma \setminus 0$ .

Soient des géodésiques fermées  $\gamma_n$  telles que  $l_g(\gamma_n) = f(nh)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , et  $\mu_n$  la mesure de probabilité uniformément répartie sur  $\gamma_n$ . On a

$$[\mu_n] = (l_g(\gamma_n))^{-1} nh = (n/f(nh))h.$$

Soit  $\mu$  une valeur d'adhérence de la suite  $\mu_n$ . Par continuité de  $[\cdot]$  et puisque  $f(nh)/n \rightarrow \|h\|_s$ , on a

$$[\mu] = (\|h\|_s)^{-1} h$$

d'où

$$\|[\mu]\| = (\|h\|_s)^{-1} \|h\|.$$

Mais par définition  $\|[\mu]\| \leq 1$  donc

$$(\|h\|_s)^{-1} \|h\| \leq 1.$$

**Deuxième assertion :** la norme stable est plus petite.

Il suffit de montrer que pour toute  $\mu \in \mathcal{B}_1$  on a  $\|[\mu]\|_s \leq 1$ . Fixons une 1-forme fermée  $\omega$ . On a pour toute courbe fermée  $\alpha$   $C^1$  par morceaux :

$$|\langle [\omega], [\alpha] \rangle| \leq \|[\omega]\|_s \cdot \|[\alpha]\|_s \leq \|[\omega]\|_s \cdot l_g(\alpha).$$

Prenons un point quelconque  $(x, v)$  de  $T^1M$ , appelons  $\alpha$  la courbe fermée obtenue en suivant la géodésique issue de  $v$  pendant le temps  $t$  puis en revenant en  $x$  par une courbe de longueur inférieure ou égale à  $\text{diam}(M)$ . On a

$$\begin{aligned} \int_0^t \omega(\mathcal{G}_t(v)) dt &\leq |\langle [\omega], [\alpha] \rangle| + \sup_{x \in M} \|\omega_x\|_g \text{diam}(M) \\ &\leq \|[\omega]\|_s (t + \text{diam}(M)) + \sup_{x \in M} \|\omega_x\|_g \text{diam}(M) \end{aligned}$$

Or on a établi plus haut la formule

$$\int_{T^1M} \int_0^t \omega(\mathcal{G}_t(v)) dt d\mu(v) = t \int_{T^1M} \omega(v) d\mu(v).$$



On en déduit

$$| \langle [\omega], [\mu] \rangle | \leq 1/t \int_{T^1 M} ( \|[\omega]\|_s (t + \text{diam}(M)) + \sup_{x \in M} \|\omega_x\|_g \text{diam}(M) ) d\mu.$$

Si l'on fait tendre  $t$  vers l'infini, on obtient

$$| \langle [\omega], [\mu] \rangle | \leq \|[\omega]\|_s.$$

Ce qui, d'après le théorème de Hahn-Banach, implique l'assertion.

## 1.4 Relation avec la théorie de Mather

Dans cette section  $(M, g)$  est une variété riemannienne compacte quelconque. Nous supposons connue la théorie de Mather sur les mesures invariantes d'un système lagrangien (cf. [13]).

**Notations 1.4.1** On considère maintenant  $\tilde{\mathcal{M}}$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $TM$  tout entier, invariantes par  $\mathcal{G}_t$  et à support compact.

On définit comme ci-dessus la classe d'homologie d'un élément de  $\tilde{\mathcal{M}}$ .

**Proposition 1.4.2** Pour tout  $h \in H_1(M, \mathbf{R})$  on a

$$\|h\|_s^2 = \min \left\{ \int_{TM} \|v\|_g^2 d\mu(v) / \mu \in \tilde{\mathcal{M}} \text{ et } [\mu] = h \right\}.$$

On commence par démontrer

$$\forall \mu \in \tilde{\mathcal{M}} \text{ } [\mu] = h \text{ on a } \|h\|_s \leq \int_{TM} \|v\|_g d\mu(v) \quad (1.6)$$

Supposons ceci fait dans le cas où  $\mu$  est ergodique et voyons comment s'en déduit le cas général: pour toute  $\mu \in \tilde{\mathcal{M}}$  on peut écrire  $\mu = \int_Z \nu$  où  $Z$  est l'espace des composantes ergodiques de  $\mu$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_{TM} \|v\|_g d\mu(v) &= \int_Z \int_{TM} \|v\|_g d\nu(v) \\ &\geq \int_Z \|[\nu]\|_s \\ &\geq \| \int [\nu] \|_s \\ &= \|[\mu]\|_s \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la linéarité de l'application  $\mu \mapsto [\mu]$ .

Démontrons maintenant 1.6 pour une mesure ergodique. Soit  $\gamma$  une orbite  $\mu$ -générique (c'est à dire vérifiant la conclusion du théorème ergodique de Birkhoff) de  $\mathcal{G}_t$ . On a le

**Lemme 1.4.3** On appelle  $c_T$  une courbe fermée simple obtenue en fermant le chemin  $\gamma([0, T])$  par un chemin  $c$  différentiable connectant  $\gamma(0)$  et  $\gamma(T)$  et de longueur inférieure à  $\text{diam}(M)$ . Alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [c_T] = [\mu].$$

**Démonstration:** Soit  $[\omega] \in H^1(M, \mathbf{R})$ , n'importe quelle forme différentielle lisse fermée  $\omega$  représentant  $[\omega]$  est une fonction  $L^1$  sur  $(TM, \mu)$  car  $\omega$  est continue sur le compact  $\text{supp}(\mu)$ . Par le théorème de Birkhoff on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega(d/dt \gamma(t)) dt = \int_{TM} \omega(v) d\mu(v).$$

Or

$$\int_{c_T} \omega = \int_0^T \omega(d/dt \gamma(t)) dt + \int_c \omega$$

et  $|\int_c \omega| \leq l_g(c) \|[\omega]\|_g$ , donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{c_T} \omega = \langle \omega, [\mu] \rangle$$

d'où le lemme.

On a déjà vu que

$$\int_{c_T} \|d/dt c_T(t)\|_g dt = l_g(c_T) \geq \|c_T\|_s.$$

En faisant tendre  $T$  vers l'infini, par continuité de la norme stable on obtient 1.6.

Ensuite par l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} \|[\mu]\|_s^2 &\leq \left( \int_{TM} \|v\|_g d\mu(v) \right)^2 \\ &\leq \int_{TM} \|v\|_g^2 d\mu(v) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que le minimum est atteint. Prenons  $h \in H_1(M, \mathbf{R})$ . D'après la preuve du théorème 1.3.9, on peut trouver  $\mu \in \mathcal{M}$  telle que  $h = \|h\|_s [\mu]$ . Dans cette preuve on suppose  $h \in \Gamma$ . Considérons la mesure de probabilité  $\mu_h$  sur  $TM$  définie de la manière suivante : pour  $\mathcal{A}$  un borélien de  $TM$ , on pose

$$\mathcal{A}_h = \mathcal{A} \cap \{(x, v) \in TM / \|v\|_g = \|h\|_s\}$$

et

$$\mu_h(\mathcal{A}) = \mu(\|h\|_s^{-1} \mathcal{A}_h)$$

c'est-à-dire que  $\mu_h$  est la mesure image de  $\mu$  par l'application

$$\begin{aligned} T_1 M &\rightarrow TM \\ v &\mapsto \|h\|_s v. \end{aligned}$$

Le support de  $\mu_h$  est contenu dans le compact de  $TM$  formé des vecteurs de norme  $\|h\|_s$ . Alors, pour  $\omega \in H^1(M, \mathbf{R})$  on a

$$\begin{aligned} \langle \omega, [\mu_h] \rangle &= \int_{TM} \omega(v) d\mu_h(v) \\ &= \int_{\|v\|_g = \|h\|_s} \omega(v) d\mu_h(v) \\ &= \int_{T_1 M} \|h\|_s \omega(v) d\mu(v) \\ &= \|h\|_s \langle \omega, [\mu] \rangle \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$[\mu_h] = h.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{TM} \|v\|_g^2 d\mu_h(v) &= \int_{\|v\|_g = \|h\|_s} \|v\|_g^2 d\mu_h(v) \\ &= \|h\|_s^2 \int_{\|v\|_g = \|h\|_s} 1 \cdot d\mu_h(v) \\ &= \|h\|_s^2\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition.

# Chapitre 2

## Laminations géodésiques

### 2.1 Applications du Graph Theorem de Mather

Bien que la théorie de Mather s'applique en toutes dimensions, nous supposons dans toute la suite que  $M$  est une surface fermée, orientée.

**Notations 2.1.1** Pour  $\omega \in H^1(M, \mathbf{R})$  on notera  $\mathcal{M}_\omega$  l'ensemble des mesures de probabilité  $\mu$  sur  $T^1M$  invariantes par le flot géodésique vérifiant :

- la norme stable  $\|[\mu]\|_s$  est égale à 1, c'est-à-dire que  $\mu$  est minimisante
- le crochet  $\langle \omega, [\mu] \rangle$  est égal à 1, et de plus  $\langle \omega, [\nu] \rangle \leq 1$  pour toute mesure de probabilité sur  $T^1M$  invariante par le flot géodésique.

On notera  $\text{supp}(\mathcal{M}_\omega)$  l'ensemble des  $x \in T^1M$  tels que tout voisinage de  $x$  est de mesure positive pour une certaine mesure élément de  $\mathcal{M}_\omega$ . C'est un fermé, et donc un compact, de  $T^1M$ .

J.Mather a démontré dans [13] que  $\mathcal{M}_\omega$  n'est pas vide si  $\omega$  appartient à la boule unité de la norme duale de la norme stable, ainsi que le théorème suivant :

**Théorème 2.1.2 (Graph Theorem)** La restriction à  $\text{supp}(\mathcal{M}_\omega)$  de la projection canonique  $\pi$  de  $TM$  sur  $M$  est injective et son inverse (vu comme application de  $\pi(\text{supp}(\mathcal{M}_\omega))$  dans  $\text{supp}(\mathcal{M}_\omega)$ ) est Lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe  $C \in \mathbf{R}$  tel que :

$$\forall x, y \in \pi(\text{supp}(\mathcal{M}_\omega)), d(\pi^{-1}(x), (\pi^{-1}(y))) \leq Cd(x, y). \quad (2.1)$$

**Remarque 2.1.3** Dans cet énoncé les distances sont calculées avec des métriques riemanniennes quelconques, et la constante  $C$  ne dépend alors que d'une borne pour la norme des vecteurs tangents de  $\text{supp}(\mathcal{M}_\omega)$  ; comme nous choisissons la métrique  $g$  sur  $M$ , et que nous nous restreignons au fibré unitaire tangent, nous pouvons supposer que  $C$  est fixée indépendamment de  $\mu$ .

**Corollaire 2.1.4** Si  $\mu$  est une probabilité minimisante, alors  $\text{supp}(\mu)$  est une lamination géodésique orientée, admettant une mesure transverse  $\bar{\mu}$  telle que  $\mu = \bar{\mu} \otimes dt$  où  $dt$  est l'élément de longueur le long d'une géodésique.

**Preuve :** une lamination géodésique est ici un fermé de  $M$  qui est réunion disjointe de géodésiques simples (i.e. sans points doubles), minimisant globalement la longueur dans le revêtement universel. Une lamination géodésique mesurée de support total  $\mu$  est la donnée

- d'une lamination géodésique, notée  $\text{supp}(\mu)$
- et d'une mesure définie sur tout arc  $c$  de  $M$  transverse à  $\text{supp}(\mu)$ , dont le support est  $c \cap \text{supp}(\mu)$ , invariante par homotopie respectant  $\text{supp}(\mu)$ .

On a vu que  $\text{supp}(\mathcal{M}_\omega)$  est un fermé de  $T^1M$  invariant par le flot géodésique, il est donc constitué d'une réunion de géodésiques. Sa projection  $\pi(\text{supp}(\mathcal{M}_\omega))$  est donc un compact de  $M$ , et par la propriété d'injectivité énoncée plus haut il est réunion de géodésiques ne s'intersectant ni entre elles, ni elles-mêmes, ce qui définit une lamination (géodésique a priori, et non mesurée). Par conséquent,  $\text{supp}(\mu)$ , étant un sous-ensemble de  $\text{supp}(\mathcal{M}_\omega)$  fermé et invariant par le flot géodésique, est lui-même une lamination.

D'autre part comme  $\text{supp}(\mu)$  est une partie du fibré unitaire tangent, et non du fibré projectif, on a en tout point de  $\pi(\text{supp}(\mu))$  une orientation de la géodésique de  $\pi(\text{supp}(\mu))$  passant par ce point. Pour avoir une orientation cohérente de la lamination il reste à montrer que le relèvement de  $\pi(\text{supp}(\mu))$  au fibré unitaire tangent obtenu en choisissant l'orientation comme ci-dessus est fermé, ce qui sera le cas si on montre que  $\pi^{-1}$  est continue sur  $\pi(\text{supp}(\mu))$ ; or le théorème nous l'assure.

A présent définissons la mesure transverse de la façon suivante : soit  $I$  un intervalle transverse à  $\pi(\text{supp}(\mu))$ . On pose

$$\bar{\mu}(I) = \lim \frac{\mu \left( \bigcup_{t \in ]-\epsilon, \epsilon[} \mathcal{G}_t \pi^{-1}(I) \right)}{2\epsilon}$$

quand  $\epsilon$  tend vers zéro,  $\pi^{-1}$  s'entendant comme inverse de la restriction à  $\text{supp}(\mu)$  de la projection canonique, et non comme image inverse.

**Définition 2.1.5** *On dit qu'une classe d'homologie  $h$  est rationnelle s'il existe  $r \in \mathbf{R}$  tel que  $rh \in H_1(M, \mathbf{Z})$ .*

Démontrons dès maintenant un lemme qui nous sera utile plus tard.

**Lemme 2.1.6** *Une lamination géodésique mesurée, orientée, de support total, dont la classe d'homologie est rationnelle a pour support une réunion de courbes fermées.*

**Preuve :** Il s'agit d'une adaptation d'un argument classique, dû à A. Haefliger (voir [10], p. 48). Supposons qu'une lamination mesurée orientable  $\lambda$  ait au moins une feuille non fermée  $f$ . En utilisant la construction de la figure 2.1 on peut construire une courbe fermée  $\gamma$  qui intersecte  $\lambda$  transversalement et toujours dans le même sens. De plus, en prenant  $\gamma$  assez proche de  $f$  pendant un temps suffisamment long, on peut faire en sorte que la mesure transverse déposée sur  $\gamma$  par  $\lambda$  soit arbitrairement petite. Cette mesure ne peut être nulle puisque  $\lambda$  est de support total et  $\gamma$  intersecte  $\lambda$  transversalement.

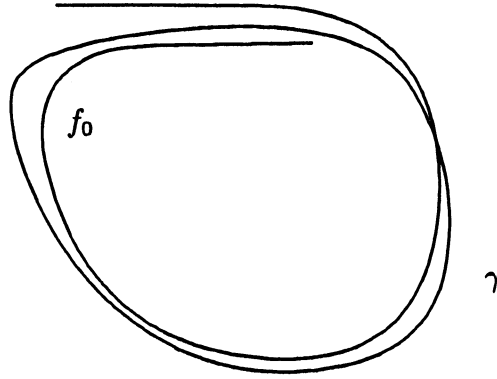


FIG. 2.1 - construction d'une transversale fermée

Mais si la classe d'homologie de  $\lambda$  est rationnelle, il existe  $r \in \mathbf{R}$  tel que

$$\text{Int}([\lambda], [\gamma]) \in r\mathbf{Z}$$

d'où une contradiction.

**Corollaire 2.1.7 (du Graph theorem)** *Nous supposons ici que la métrique sur  $M$  est à courbure strictement négative. L'ensemble des laminations qui vérifient une propriété de Lipschitz comme dans le théorème 2.1.2 avec la même constante  $C$  est compact dans l'espace des laminations mesurées de Thurston (cf. [10]),  $\mathcal{ML}$ , (muni de la topologie vague sur les mesures) et il se plonge homéomorphiquement dans le projectifié de  $\mathcal{ML}$ ,  $P\mathcal{ML}$ .*

**Remarque 2.1.8** *Ceci n'est pas vrai si on considère toutes les laminations orientables. En effet, les courbes simples fermées, donc a fortiori les laminations orientables, sont denses dans  $\mathcal{ML}$ , or presque toute lamination est non orientable.*

**Preuve du corollaire:** Notons  $\mathcal{M}_C(T^1M)$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $T^1M$ , invariantes par  $\mathcal{G}_t$ , dont les supports vérifient la propriété ci-dessus, et  $\mathcal{M}_C(PTM)$  les mesures induites sur le fibré projectif de  $M$ . On vient de voir que  $\mathcal{M}_C(PTM)$  est une partie de  $\mathcal{ML}$ , et on veut montrer sa compacité. Pour cela on commence par montrer que  $\mathcal{M}_C(T^1M)$  est compact dans  $\mathcal{M}$ .

Soit une suite  $\mu_n$  dans  $\mathcal{M}$  muni de la topologie vague, quitte à extraire une sous-suite on peut supposer qu'elle converge vers  $\mu$ . L'ensemble des compacts de  $T^1M$ , muni de la distance de Hausdorff, est compact, on peut donc, quitte à extraire encore une sous-suite, supposer que

$$\text{supp } \mu_n \xrightarrow{H} \Lambda \text{ compact } \subset T^1M. \quad (2.2)$$

On veut prouver :

1.  $\Lambda$  est invariant par le flot géodésique.

2.

$$\text{supp}\mu \subset \Lambda$$

3.  $\pi/\Lambda$  est injective et sa réciproque est C-Lipschitzienne.

Preuve de (1) : soient  $x \in \Lambda$  et  $t \in \mathbf{R}$ . On veut montrer que  $\mathcal{G}_t(x)$  appartient à  $\Lambda$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Par continuité du flot géodésique, il existe  $\alpha(\epsilon, t) > 0$  tel que

$$\forall y \in T^1M, (d(x, y) \leq \alpha(\epsilon, t)) \Rightarrow (d(\mathcal{G}_t(x), \mathcal{G}_t(y)) \leq \epsilon).$$

Il existe, d'après 2.2, un entier  $n$  et  $x_n \in \text{supp}\mu_n$  tels que  $d(x, x_n) \leq \alpha(\epsilon, t)$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} d(\mathcal{G}_t(x), \mathcal{G}_t(x_n)) &\leq \epsilon \text{ d'où} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathcal{G}_t(x), \Lambda) &= 0 \text{ donc} \\ \mathcal{G}_t(x) &\in \Lambda. \end{aligned}$$

Passons à la preuve de (2). Supposons :

$$\exists x \in \text{supp}\mu \setminus \Lambda.$$

Alors,  $\Lambda$  étant fermé, il existe  $\epsilon$  tel que  $d(x, \Lambda) > \epsilon$ .

**Affirmation** : il existe un voisinage de  $x$  qui ne rencontre aucun des  $\text{supp}(\mu_n)$ .

En effet, dans le cas contraire il existerait une suite

$$x_n \in \text{supp}\mu_n, x_n \rightarrow x.$$

A partir d'un certain rang les  $x_n$  seraient à distance au moins  $\epsilon/2$  de  $\Lambda$ , ce qui impliquerait,  $V_\epsilon\Lambda$  désignant l'ensemble des points distants de moins de  $\epsilon$  de  $\Lambda$ ,

$$\text{supp}\mu_n \not\subset V_{\epsilon/2}\Lambda$$

d'où une contradiction.

Mais d'après l'affirmation, on peut prendre une fonction à support dans un voisinage de  $x$ , d'intégrale positive pour  $\mu$  et nulle pour toutes les  $\mu_n$ , ce qui contredit la définition de la limite vague, (2) est donc démontrée.

Démontrons (3). Supposons qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$\exists x, y \in \Lambda, \text{ tels que } Cd_M(\pi(x), \pi(y)) + \epsilon \leq d_{T^1M}(x, y).$$

On peut trouver des suites  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  dans  $\text{supp}(\mu_n)$ , sans quoi il y aurait un voisinage de  $x$  (resp  $y$ ) qui ne rencontrerait aucun des  $\text{supp}(\mu_n)$ , ce qui est impossible par un argument déjà utilisé plus haut. Pour  $n$  assez grand, on aurait

$$Cd_M(\pi(x_n), \pi(y_n)) + \frac{\epsilon}{2} \leq d_{T^1M}(x_n, y_n)$$

d'où une contradiction, et (3) est démontré.

Mais (2) et (3) impliquent que  $\mathcal{M}_C(T^1M)$  est compact dans  $\mathcal{M}$  : soient en effet deux points de  $\text{supp}(\mu_n)$ , ils sont dans  $\Lambda$  par (2) et donc vérifient la condition de Lipschitz par (3).

Considérons maintenant la projection canonique  $p$  du fibré unitaire tangent, vu comme revêtement double du fibré projectif. Elle est continue et commute avec  $\mathcal{G}_t$ , donc elle envoie  $\mathcal{M}_C(T^1M)$  sur un compact de  $\mathcal{M}(PTM)$ , espace des probabilités sur  $PTM$  invariantes par le flot géodésique, c'est à dire l'espace des courants géodésiques. Il reste à vérifier que ces courants sont des laminations, pour cela il suffit de montrer que pour  $\mu \in \mathcal{M}_C(T^1M)$ , la projection canonique  $p\pi : PTM \rightarrow M$  est injective en restriction à  $\text{supp}(p_*\mu)$ ; mais c'est immédiat puisque  $\pi = p\pi \circ p$ .

Si on munit  $PTM$  de la distance  $d_{PTM}$  induite par la métrique riemannienne quotient de celle de  $T^1M$ , alors la propriété de Lipschitz reste vraie en considérant les mesures sur  $PTM$  et non plus sur  $T^1M$ , puisque par construction  $d_{PTM} \leq d_{T^1M}$ .

Il reste à montrer que  $\mathcal{M}_C(T^1M)$  se plonge homéomorphiquement dans  $\mathbf{PML}$ . Considérons la restriction  $p_C$  à  $\mathcal{M}_C(T^1M)$  de la projection canonique

$$p : \mathcal{ML} \rightarrow \mathbf{PML}.$$

La continuité de  $p_C$  se déduit de celle de  $p$ ; d'autre part toutes les mesures éléments de  $\mathcal{M}_C(T^1M)$  sont des probabilités, donc un multiple d'un élément de  $\mathcal{M}_C(T^1M)$  n'est pas dans  $\mathcal{M}_C(T^1M)$ , ce qui prouve l'injectivité de  $p_C$ . Mais une injection continue d'un compact dans un autre (il est bien connu que  $\mathbf{PML}$  est compact) est un homéomorphisme sur son image.

Continuons à examiner les conséquences dans le cas des surfaces des théorèmes de Mather et Mañé.

## 2.2 Où l'on introduit le revêtement abélien

La théorie des revêtements nous dit qu'il existe un revêtement galoisien  $(\overline{M}, p)$  de  $M$  dont le groupe de transformations est isomorphe en tant que groupe à  $H_1(M, \mathbf{Z})$ . De plus, si  $D$  est une transformation du revêtement et  $x$  un point de  $\overline{M}$ , alors un chemin de  $x$  à  $D(x)$  se projette par  $p$  sur un laçet de classe d'homologie  $D$ . On appellera revêtement abélien ce revêtement.

Une géodésique de  $M$  sera dite  $\overline{M}$ -minimisante si ses relevés à  $\overline{M}$  minimisent la distance entre deux quelconques de leurs points. J. Mather a démontré dans [13] le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1 (Mather)** *Pour  $\omega \in H^1(M, \mathbf{R})$ , toute trajectoire du flot géodésique contenue dans  $\text{supp}(\mathcal{M}_\omega)$  est  $\overline{M}$ -minimisante .*

V. Bangert a montré dans [1] une sorte de réciproque :

**Théorème 2.2.2 (Bangert)** *Si  $\gamma$  est une géodésique de  $M$ ,  $\overline{M}$ -minimisante, alors ses mesures-limites (i.e. les points-limites de l'ensemble des mesures de probabilité uniformément réparties sur un segment de  $\gamma$ ), qui sont automatiquement invariantes par le flot géodésique, sont minimisantes et leurs classes d'homologie sont contenues dans un domaine plat sur le bord de la boule unité de la norme stable dont les points extrémaux correspondent aux mesures ergodiques.*

**Définition 2.2.3** *une lamination minimisante  $\lambda$  est une lamination géodésique mesurée dont la mesure transverse, tensorisée par  $dt$ , est minimisante.*



Le support d'une lamination minimisante est une lamination topologique  $\Lambda$ , qui d'après le théorème 2.2.1 est formée de géodésiques  $\overline{M}$ -minimisantes. Si  $\lambda'$  est une autre lamination géodésique mesurée de support  $\Lambda$  (cela existe si  $\Lambda$  n'est pas uniquement ergodique), d'après un théorème de Mañé, (cf. [11])  $\lambda'$  est également minimisante.

**Lemme 2.2.4** *L'image par  $[\cdot]$  de l'ensemble des mesures transverses d'une lamination géodésique est contenu dans un sous-espace isotrope de  $H_1(M, \mathbf{R})$ .*

**Preuve**

Soient

- $\lambda$  une lamination géodésique
- $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux mesures transverses ergodiques de  $\lambda$
- $\gamma_1$  (resp  $\gamma_2$ ) une géodésique  $\mu_1$  (resp  $\mu_2$ )-générique
- $\epsilon > 0$ , strictement inférieur au rayon d'injectivité de  $M$ .

On note  $C_i^T$  la courbe obtenue en suivant  $\gamma_i$  pendant le temps  $T$ , puis en refermant par une portion  $a_i$  de géodésique de longueur  $\leq \text{diam}M$ . On a vu que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [C_i^T] = [\mu_i] \text{ pour } i = 1, 2.$$

De la même façon on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \text{Int}([C_1^T], [C_2^T]) = \text{Int}([\mu_1], [\mu_2]). \quad (2.3)$$

Pour majorer  $\text{Int}([C_1^T], [C_2^T])$  il suffit de majorer l'intersection géométrique de  $C_1^T$  et  $C_2^T$ . Celle-ci vaut

$$\text{cardinal}\{(\gamma_1([0, T]) \cap \gamma_2([0, T])) \cup (\gamma_1([0, T]) \cap a_2) \cup (\gamma_2([0, T]) \cap a_1) \cup (a_1 \cap a_2)\}.$$

Le premier terme a une contribution nulle puisque  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  font partie d'une même lamination géodésique. Pour évaluer les autres termes, découpons nos courbes en intervalles de longueur strictement inférieure à  $\epsilon$ . On a, suivant [8], p.58 :

$$\begin{aligned} \text{cardinal}\{(\gamma_1([0, T]) \cap a_2)\} &\leq \left(\frac{T}{\epsilon} + 1\right) \left(\frac{\text{diam}M + 1}{\epsilon}\right) \\ \text{cardinal}\{(\gamma_2([0, T]) \cap a_1)\} &\leq \left(\frac{\text{diam}M}{\epsilon} + 1\right) \left(\frac{T}{\epsilon} + 1\right) \\ \text{cardinal}(a_1 \cap a_2) &\leq \left(\frac{\text{diam}M + 1}{\epsilon}\right)^2. \end{aligned}$$

Donc il existe un réel positif  $K$  tel que l'intersection géométrique de  $C_1^T$  et  $C_2^T$  est majorée par  $KT$ . Ceci combiné avec 2.3 prouve le lemme dans le cas où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont ergodiques. Si elles ne le sont pas, le calcul qui précède montre que leur intersection est somme sur les composantes ergodiques de la fonction nulle, d'où la conclusion.

**Définition 2.2.5** *Un hyperplan affine  $H$  de  $H_1(M, \mathbf{R})$  est dit support à la sphère unité de la norme stable, notée  $\mathcal{S}_1$ , si  $H \cap \mathcal{S}_1 \neq \emptyset$ , et si la boule unité ouverte ne rencontre pas  $H$ .*

**Définition 2.2.6** Nous appellerons face de  $S_1$  l'intersection de  $S_1$  avec un hyperplan affine support. Par définition la dimension de la face est celle du sous-espace affine  $A$  qu'elle engendre. Une face est convexe, comme intersection de convexes.

**Définition 2.2.7** On dit qu'un point  $h_0$  appartient à l'intérieur de la face  $F$  si  $h_0$  appartient à l'intérieur de  $F$  considéré comme partie de  $A$ . Cela signifie qu'il existe  $h_1, \dots, h_n$  distincts dans  $F$ ,  $n - 1$  étant la dimension de  $F$ , et des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  dans  $]0, 1]$  tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i = h_0.$$

**Définition 2.2.8** Un point  $x$  de  $S_1$  est dit exposé s'il existe un hyperplan  $H$  support à  $S_1$  en  $x$  dont l'intersection avec  $S_1$  est réduite à  $x$ , autrement dit si  $x$  est une face.

Le lemme 2.2.4 permet de déduire de [11] la

**Proposition 2.2.9** Si une lamination géodésique est constituée de géodésiques  $\overline{M}$ -minimisantes, alors toutes ses mesures de probabilité transverses invariantes sont minimisantes en homologie et forment sur la sphère unité de la norme stable une face de dimension  $\leq \zeta - 1$  au plus.

On va montrer la réciproque.

Soit  $P$  une face. D'après Hahn-Banach il existe une forme linéaire  $c \in H^1(M, \mathbf{R})$  telle que

$$\langle c, h \rangle = 1 \quad \forall h \in P$$

(il suffit de trouver un hyperplan affine contenant  $P$  et d'intersection vide avec la boule unité ouverte, puis de considérer la forme linéaire valant 1 sur cet hyperplan)

Le théorème 2.1.2 affirme que  $\text{supp}(\mathcal{M}_c)$  est une lamination topologique  $\Lambda$  et que pour tout  $h \in P$ , si  $[\mu] = h$ , alors  $\text{supp}(\mu) \subset \Lambda$ . Si  $P$  n'est pas réduit à un point, alors  $\Lambda$  n'est pas uniquement ergodique. On a donc la

**Proposition 2.2.10** A toute face de la sphère unité  $S_1$  correspond une lamination topologique non uniquement ergodique, et une telle face est de dimension au plus  $\zeta - 1$ .

**Remarque 2.2.11** Ceci implique la stricte convexité de la norme stable sur un tore de dimension 2.

Le résultat 2.2.10 prolonge celui énoncé en 1.2.5, disant qu'on peut trouver un représentant minimisant possédant au plus  $g$  composantes connexes.

**Proposition 2.2.12** Soient  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_C(T^1M)$ . Supposons que l'ensemble des intersections transverses de  $\pi(\text{supp}(\mu_1))$  avec  $\pi(\text{supp}(\mu_2))$  soit non vide, et qu'en chaque point  $P$  de cet ensemble l'intersection algébrique de la géodésique orientée de  $\mu_1$  passant par  $P$  avec la géodésique orientée de  $\mu_2$  passant par  $P$  soit positive. Alors

$$\text{Int}([\mu_1], [\mu_2]) > 0.$$

**Preuve** Soient

-  $\gamma_i \subset \pi(\text{supp}(\mu_i))$ ,  $i = 1, 2$  des géodésiques qui s'intersectent transversalement

- $P$  un point de  $\gamma_1 \cap \gamma_2$
- $I_i$  un intervalle sur  $\gamma_i$  contenant  $P$ , pour  $i = 1, 2$ .

Notons  $\tilde{\mu}_i$ ,  $i = 1, 2$  la mesure transverse de la lamination mesurée associée à  $\mu_i$ . Comme  $\mu_i$  est de support total, on a  $\tilde{\mu}_i(I_{1-i}) > 0$ . Supposons pour commencer  $\mu_i$  ergodique, et soit  $\gamma_i'$  une géodésique  $\mu_i$ -générique. Il y a dans  $T^1M$  des points de l'orbite du flot géodésique qui relèvent  $\gamma_i'$ , arbitrairement proches du point de  $\text{supp}(\mu_i)$  au dessus de  $P$ . Cela impose à  $\gamma_1'$  et  $\gamma_2'$  de s'intersecter.

Considérons la courbe fermée  $C_i^T$  obtenue en suivant  $\gamma_i'$  pendant le temps  $T$  puis en refermant par un segment géodésique. On a, comme en 2.2.4

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [C_i^T] = [\mu_i] \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \text{Int}([C_1^T], [C_2^T]) = \text{Int}([\mu_1], [\mu_2]).$$

Par hypothèse les intersections entre  $\gamma_1'$  et  $\gamma_2'$  (dans cet ordre) sont positives. Donc pour calculer l'intersection algébrique il suffit de calculer l'intersection géométrique. On peut borner par une fonction linéaire  $KT$  (cf. 2.2.4) la contribution à celle-ci des segments utilisés pour fermer les  $C_i^T$ . Par conséquent

$$\mu_i(I_{1-i}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{cardinal}\{t \leq T \text{ tels que } \gamma_i'(t) \in I_{1-i}\}.$$

Donc pour  $T$  assez grand,

$$\frac{1}{T^2} \left( \prod_{i=1,2} \text{cardinal}\{t \leq T \text{ tels que } \gamma_i'(t) \in I_{1-i}\} - KT \right) > \frac{1}{2} \mu_1(I_2) \mu_2(I_1).$$

Mais le membre de gauche de cette inégalité est plus petit que l'intersection géométrique de  $C_1^T$  et  $C_2^T$  divisée par  $T^2$ , d'où la conclusion. Si une au moins des  $\mu_i$  n'est pas ergodique, on la décompose en composantes ergodiques, auxquelles on applique ce qui précède. L'intersection  $\text{Int}([\mu_1], [\mu_2])$  est somme sur les composantes ergodiques de nombres strictement positifs, donc est elle-même strictement positive.

**Proposition 2.2.13** *Soient*

- $h_0 \in H_1(M, \mathbf{R})$
- une suite  $h_n$  tendant vers  $h_0$
- des mesures  $\mu_n$  minimisantes telles que  $[\mu_n] = h_n$
- un point-limite  $\Lambda$  des  $\text{supp}(\mu_n)$  pour la topologie de Hausdorff.

*Alors*

- $\Lambda$  est une lamination géodésique
- ses mesures transverses sont minimisantes
- l'ensemble de celles-ci est une face de  $\mathcal{S}_1$ , contenant  $h_0$ .

**Preuve** D'après la preuve du corollaire 2.1.7  $\Lambda$  est un compact de  $T^1M$  invariant par le flot géodésique, et vérifiant l'inégalité 2.1, ce qui prouve le premier point.

D'autre part les géodésiques constituant  $\Lambda$  sont  $\overline{M}$ -minimisantes (car cette propriété passe à la limite en distance de Hausdorff), donc d'après [11] le deuxième point est démontré.

Enfin, toujours en vertu de 2.2.9, l'ensemble des probabilités invariantes de  $\Lambda$  est un domaine plat  $D$  sur  $\mathcal{S}_1$ . Il ne reste qu'à montrer que  $D \ni h_0$ . Quitte à extraire deux fois une sous-suite on peut supposer que

$$\text{supp}(\mu_n) \xrightarrow{H} \Lambda$$

et  $\mu_n$  tend vers une mesure  $\mu$  dans la topologie vague. Par continuité de l'application  $[\cdot]$ , on a  $[\mu] = h_0$ .

Montrons que  $\text{supp}(\mu) \subset \Lambda$ . Soient

- $x \in \text{supp}(\mu)$
- $B_k$  la boule ouverte dans  $T^1M$  de centre  $x$  et de rayon  $1/k$ .

On a  $\mu(B_k) > 0$  par définition de  $\text{supp}(\mu)$ . Puisque  $\mu_n$  converge vaguement vers  $\mu$ , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B_k) \geq \mu(B_k)$$

donc

$$\exists N_k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_k, \mu_n(B_k) > 0.$$

Cela signifie qu'il existe dans  $B_k$  un point de  $\text{supp}(\mu_n)$ . De là

$$d(x, \text{supp}(\mu_n)) \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k,$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, \text{supp}(\mu_n)) = 0.$$

Cela implique  $d(x, \Lambda) = 0$  donc  $x \in \Lambda$ , cqfd.

**Lemme 2.2.14** *Si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux faces de  $\mathcal{S}_1$  contenant toutes deux une classe  $h_0$ ,  $D_1$  contenant  $h_0$  dans son intérieur, alors il existe une face contenant  $D_1 \cup D_2$ .*

Le théorème de Hahn-Banach affirme qu'il existe une forme linéaire  $f$  telle que  $f(h) < 1$  si  $\|h\|_s < 1$  et  $f(h) = 1$  si  $h \in D_2$ . On a alors  $f(h) \leq 1$  si  $h \in D_1$ , et  $f(h_0) = 1$ . La fonction  $f$ , étant affine sur  $D_1$ , ne peut avoir de maximum local qu'au bord, mais  $h_0$  est intérieur à  $D_1$ . Ainsi  $f$  est constante égale à 1 sur  $D_1$ , donc

$$D_1 \cup D_2 \subset f^{-1}(1) \cap \mathcal{S}_1$$

qui est une face de  $\mathcal{S}_1$  par définition. De plus, si  $D_2$  contient  $h_0$  dans son intérieur, cette face contient  $h_0$  dans son intérieur. Il y a donc un sens à parler de la plus grande face contenant  $h_0$  dans son intérieur, réduite à  $h_0$  si ce dernier est exposé.

**Proposition 2.2.15** *Soit une face de  $\mathcal{S}_1$  contenant dans son intérieur une classe d'homologie rationnelle  $h_0$ . Alors  $D$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de classes d'homologie rationnelles  $h_1, \dots, h_n$ , avec  $n \leq 3\zeta - 3$ . Nous appelons rationnelle une telle face.*

Démontrons au préalable un

**Lemme 2.2.16** *Si  $D$  vérifie les hypothèses de la proposition ci-dessus, alors toute lamination minimisante dont la classe d'homologie est dans  $D$  est formée de géodésiques fermées.*

**Preuve du lemme:** soit  $h \in D$ . Considérons la droite  $L$  joignant  $h$  et  $h_0$ . L'intersection  $L \cap D$  est un segment contenant  $h_0$  dans son intérieur, on peut donc écrire  $h_0$  comme un barycentre :

$$h_0 = th + (1 - t)h' \text{ où } h' \in D \text{ et } t \in ]0, 1[.$$

Soient  $\lambda$  et  $\lambda'$  des laminations mesurées minimisant la longueur dans les classes  $h$  et  $h'$  respectivement. Le Graph Theorem 2.1.2 affirme que la réunion des supports de laminations mesurées dont les classes d'homologie appartiennent à  $D$  est une lamination géodésique. Par conséquent la réunion des supports de  $\lambda$  et  $\lambda'$ , munie de la mesure transverse invariante  $t\lambda + (1 - t)\lambda'$ , est une lamination mesurée. Sa classe d'homologie est  $t[\lambda] + (1 - t)[\lambda'] = h_0$ . Cette lamination est de support total (puisque  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont de support total) donc n'a que des feuilles fermées, en vertu du lemme 2.1.6. Par conséquent  $\lambda$  n'a que des feuilles fermées.

Passons maintenant à la

**fin de la preuve de la proposition.** Considérons un point extrémal  $h$  de  $D$ . D'après le lemme ci-dessus il existe des réels  $r_i$ ,  $i = 1 \dots k$ , et des géodésiques fermées  $\gamma_i$  telles que

$$\sum_{i=1}^k r_i[\gamma_i] = h, \quad \sum_{i=1}^k |r_i| l_g(\gamma_i) = \|h\|_s.$$

Puisque  $h$  est extrémal on a forcément  $k = 1$ . Donc  $h = r_1[\gamma_1]$ , c'est-à-dire que  $h$  est rationnelle.

En prenant des représentants de tous les points extrémaux de  $D$ , on obtient un système de géodésiques fermées disjointes non deux à deux cohomologues.

**Lemme 2.2.17** *Un tel système est de cardinalité moindre que  $3\zeta - 3$ .*

**Preuve** soient

- $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  les courbes du système
- $M_1, \dots, M_k$  les composantes connexes de  $M \setminus (\cup \gamma_i)$
- $M'_1, \dots, M'_k$  les surfaces fermées obtenues à partir des  $M_i$  en recollant des disques sur les composantes de bord.

Dans ce qui suit  $\chi$  désigne la caractéristique d'Euler et  $\#(\partial M_i)$  le nombre de composantes de bord de  $M_i$ . Nous disposons des informations suivantes :

1.  $\chi(M'_i) \leq 2$  car  $M'_i$  est une surface fermée.
2.  $\#(\partial M_i) \geq 3$  sans quoi deux des  $\gamma_i$  seraient cohomologues entre elles.
3.  $\sum \#(\partial M_i) = 2n$  car chaque  $\gamma_i$  apparaît deux fois comme bord.

4.  $\chi(M'_i) = \chi(M_i) + \#(\partial M_i)$  par additivité de la caractéristique d'Euler, celle du disque valant 1.

5.  $\sum \chi(M_i) = \chi(M) = 2 - 2\zeta$  pour la même raison.

De (2) on tire  $\sum \#(\partial M_i) \leq 3k$ , d'où, en utilisant (3),  $2n \leq 3k$ . Par (1) et (5) on obtient alors

$$2k \geq \sum \chi(M'_i) = 2\zeta - 2 + 2n \text{ puis}$$

$$\frac{4}{3}n \geq 2\zeta - 2 + 2n$$

soit  $n \leq 3\zeta - 3$  comme demandé.

**Remarque 2.2.18** *Il est démontré dans [10] qu'une lamination géodésique quelconque possède au plus  $3\zeta - 3$  composantes ergodiques, donc toute face est un polyèdre ayant au plus  $3\zeta - 3$  sommets.*

# Chapitre 3

## Etude au voisinage des points rationnels

Dans ce chapitre  $(M, g)$  est une surface fermée orientable munie d'une métrique riemannienne  $g$ .

### 3.1 Non-strictes convexité en un point donné de $H_1(M, \mathbb{R})$ , pour une métrique dans une classe conforme donnée.

Soit  $g$  une métrique riemannienne sur une surface compacte de genre strictement supérieur à 1. Soient  $(\Gamma_i)_{i=1..k}$  des classes d'homotopie libre dont les intersections géométriques 2 à 2 sont toutes nulles. Soient dans chaque  $\Gamma_i$  une géodésique  $\gamma_i$  de  $g$  minimisant la longueur dans  $\Gamma_i$ .

**Lemme 3.1.1** *Si  $f_0 \in C^\infty(M)$  est nulle sur  $\cup \gamma_i$ , strictement positive ailleurs et si de plus au voisinage de  $\cup \gamma_i$  on a*

$$\Delta(f_0) < -(\text{courbure scalaire de } g), \text{ alors}$$

1. les courbes  $\gamma_i$  sont des géodésiques de  $\exp(f_0)g$ , minimisant la longueur dans  $\Gamma_i$ .
2. Il existe un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $f_0$  dans  $C^\infty(M)$ , et (pour tout  $i$ ) un voisinage  $V_i$  de  $\gamma_i$  dans  $M$  tels que  $\forall f \in \mathcal{O}$ , il existe dans  $V_i$  une unique géodésique fermée de  $\exp(f)g$  appartenant à  $\Gamma_i$ .

**Preuve :**

1- Toutes les longueurs, sauf celles des  $\gamma_i$ , sont augmentées par la multiplication par  $\exp(f_0)$ , donc les  $\gamma_i$  sont géodésiques pour  $\exp(f_0)g$ . D'autre part, si  $\gamma$  est une géodésique de  $g$ , paramétrée à vitesse 1, de longueur  $l$ , sa longueur pour  $\exp(f_0)g$  est

$$l_0 = \int_0^l \exp(f_0)(\gamma(s)) ds.$$

Si  $\gamma$  n'est pas l'un des  $\gamma_i$ ,  $\exp(f_0)$  est strictement supérieure à 1 le long de  $\gamma$ , donc  $l_0 > l$ . Donc s'il existait dans  $\Gamma_i$  une géodésique  $\gamma$  de  $\exp(f_0)g$  de longueur pour  $\exp(f_0)g$  inférieure à celle de  $\gamma_i$ , on aurait

$$l_g(\gamma) < l_{\exp(f_0)g}(\gamma) = l_{\exp(f_0)g}(\gamma_i) = l_g(\gamma_i)$$

ce qui est impossible puisque  $\gamma_i$  minimise la longueur pour  $g$  dans sa classe d'homologie. Donc les  $\gamma_i$  minimisent la longueur pour  $\exp(f_0)g$  dans  $\Gamma_i$ .

2- la courbure scalaire de  $\exp(f_0)g$  a pour expression

$$\exp(f_0)\Delta(f_0) + \text{courbure scalaire de } g$$

qui est strictement négative au voisinage de  $\cup \gamma_i$  d'après notre hypothèse. Par conséquent les orbites  $\gamma_i$  du flot géodésique de  $\exp(f_0)g$  sont hyperboliques, donc seuls ensembles invariants par le flot dans un voisinage d'eux-même, et ceci reste vrai pour une petite perturbation de  $f_0$ .

**Proposition 3.1.2** *Avec les notations du lemme 3.1.1, si  $f_0$  est assez grande, il existe un voisinage  $\mathcal{O}$  de  $f_0$  dans  $C^\infty(M)$  tel que  $\forall f \in \mathcal{O}$ , la fonction longueur pour  $\exp(f)g$  est minimisée dans la classe d'homologie  $[\Gamma_1] + \dots + [\Gamma_k]$  par une réunion de géodésiques fermées appartenant aux  $\Gamma_i$ .*

**Preuve**

D'après le lemme 3.1.1, aucune géodésique fermée  $\gamma$  appartenant à une des classes  $\Gamma_i$ , non égale à l'une des  $\gamma_i$ , n'est contenue dans la réunion des  $V_i$ . Les  $V_i$  sont ici fixés indépendamment de  $f_0$ , cela est rendu possible par le fait que les  $V_i$  permis par le lemme 3.1.1 croissent avec  $f_0$ . Si on prend  $f_0 > \delta$  hors de  $\cup V_i$ , et si  $\gamma$  passe un temps  $t$  en dehors de  $\cup V_i$ , on a

$$l_{\exp(f_0)g}(\gamma) > (\exp(\delta) - 1)t + l_g(\gamma).$$

L'ensemble  $E$  des multicourbes cohomologues à  $\cup \gamma_i$  et plus courtes est compact. Donc l'infimum des  $t$  tels qu'un élément de  $E$  passe un temps  $t$  hors de  $\cup V_i$  est atteint, et ce ne peut être zéro sans quoi il existerait plus court que  $\cup \gamma_i$  dans  $\cup V_i$ .

Soit  $t_0$  le minimum, et soit  $l_0 = \|[\Gamma_1] + \dots + [\Gamma_k]\|_g$  pour la métrique  $g$ . Si on prend

$$\delta > \log\left[1 + \frac{1}{t}(\sum_i l_g(\gamma_i) - l_0)\right]$$

alors la réunion des  $\gamma_i$  minimise la longueur dans sa classe d'homologie, et la courbure négative permet d'affirmer que ceci est stable par perturbation de  $f_0$ .

**Corollaire 3.1.3** *L'ensemble  $\mathcal{F}(g, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$  des  $f \in C^\infty(M)$  telles que la fonction longueur pour  $\exp(f)g$  soit minimisée dans la classe d'homologie  $[\Gamma_1] + \dots + [\Gamma_k]$  par une réunion de géodésiques fermées appartenant aux  $\Gamma_i$  est un fermé d'intérieur non vide de  $C^\infty(M)$ .*

**Remarque 3.1.4** *En prenant pour  $(\gamma_i)_{i=1 \dots 3\zeta-3}$   $3\zeta-3$  géodésiques fermées disjointes (par exemple les bords d'une décomposition en pantalons) non deux à deux cohomologues et en appliquant ce qui précède, on montre que la borne  $3\zeta-3$  dans la proposition 2.2.15 est optimale.*



## 3.2 Non-strict convexité au voisinage d'un point rationnel

Le but de cette section est de démontrer le

**Théorème 3.2.1** *Toute face rationnelle de  $\mathcal{S}_1$  est contenue dans une face de dimension  $\zeta - 1$ .*

**Remarque 3.2.2** *Les points rationnels exposés dont on a montré l'existence en 1.2.9 sont points extrémaux des faces les contenant.*

Soient  $F$  une face rationnelle de  $\mathcal{S}_1$  et  $E$  l'espace vectoriel engendré par  $F$ . On a  $\dim(E) = \dim(F) + 1$  et  $E$  est isotrope pour  $\text{Int}(\cdot, \cdot)$ . Considérons

$$E' = \{h \in H_1(M, \mathbf{R}) \setminus \text{Int}(h, h') = 0 \forall h' \in F\}$$

(orthogonal de  $E$  pour la forme d'intersection). C'est un sous-espace vectoriel de  $H_1(M, \mathbf{R})$ , contenant  $E$ , de dimension  $2\zeta - \dim E$ . Deux cas sont possibles :

- $E = E'$ , ce qui équivaut à  $\dim(F) = \zeta - 1$ . Le théorème est alors évidemment vérifié.
- $E \neq E'$ .

Soit alors  $h' \in E' \setminus E$  tel que  $\|h'\|_s = 1$ .

**Proposition 3.2.3** *Il existe  $\lambda > 0$  tel que le convexe*

$$C = \{t\lambda h' + (1-t)x \mid t \in [0, 1], x \in F\}$$

*est contenu dans  $\mathcal{S}_1$ .*

Indiquons tout d'abord comment cela implique le théorème 3.2.1. D'après le lemme 2.2.14  $C$  est contenu dans une face  $F'$  de  $\mathcal{S}_1$ , de dimension  $\dim F + 1$ . Notons que nous pouvons choisir  $h'$  rationnel. En effet  $E'$  est l'orthogonal pour une forme entière d'un sous-espace engendré par des points entiers, il est donc lui-même engendré par des points entiers. La face  $F'$  est alors rationnelle. Si sa dimension est plus petite que  $g - 1$ , on peut itérer le procédé jusqu'à la conclusion désirée.

**Preuve** (de la proposition 3.2.3)

$$\text{Soient } h_0 \text{ un point rationnel intérieur de } F, h_n = \frac{h_0 + \frac{1}{n}h'}{\|h_0 + \frac{1}{n}h'\|_s}$$

et des mesures de probabilité  $\mu_n$  telles que  $[\mu_n] = h_n$ . Les  $\mu_n$  sont automatiquement minimisantes puisque ce sont des probabilités et  $h_n \in \mathcal{S}_1$ . Quitte à extraire deux fois une sous-suite on peut supposer que les  $\mu_n$  tendent dans la topologie vague vers une mesure  $\mu$ , et qu'il existe un compact  $\Lambda$  de  $T^1M$  tel que les supports des  $\mu_n$  convergent vers  $\Lambda$  en distance de Hausdorff. On a alors  $\text{supp}(\mu) \subset \Lambda$  et  $[\mu] = h_0$ . Le support de  $\mu$  est donc formé de géodésiques fermées dont les classes d'homologie sont dans  $F$ . Soient  $\Gamma_i, i = 1 \dots p$  les classes d'homotopie libre de ces courbes. L'alternative suivante se présente :

1. pour tout  $i = 1 \dots p$  il existe une géodésique fermée  $\gamma_i$  dans  $\Gamma_i$ , et un voisinage collier  $U_i$  de  $\gamma_i$  tel que  $\Lambda \cap U_i$  est constitué de géodésiques fermées appartenant à  $\Gamma_i$ .

2. (1) est fausse.

Nous allons voir que (1) implique la conclusion de la proposition 3.2.3. En effet, dans ce cas, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \forall i = 1 \dots p, \gamma_i \subset V_\epsilon \text{supp}(\mu_n),$$

$V_\epsilon \text{supp}(\mu_n)$  désignant l'ensemble des points distants de moins de  $\epsilon$  de  $\text{supp}(\mu_n)$ . Si  $\epsilon$  est plus petit que la demi-largeur des colliers  $U_i$ , cela implique l'appartenance à  $\text{supp}(\mu_n)$  d'une géodésique  $\gamma_i'$  homotope à  $\gamma_i$  pour  $n \geq N$ . Mais  $\text{supp}(\mu_n)$  ne peut être réduit à cette géodésique, sans quoi  $[\mu_n]$  serait constante à partir d'un certain rang. Par conséquent  $\mu_n$  est non uniquement ergodique, et une de ses composantes ergodiques est  $\mu_{\gamma_i}$ . D'après 2.2.9, le segment  $[h_0, h_n]$  est dans  $\mathcal{S}_1$ , et 3.2.3 est démontrée. Mais par la proposition ci-dessous, on est toujours dans le cas (1) puisque  $\text{Int}(h_0, h') = 0$ .

**Proposition 3.2.4** *Si (1) est fausse, alors  $\text{Int}(h_0, h_n) \neq 0$  pour une infinité de valeurs de  $n$ .*

La preuve de la proposition se fait en plusieurs étapes. Supposons (1) fausse. Il existe au moins une courbe  $\gamma_i$  telle que les  $\text{supp}(\mu_n)$  viennent arbitrairement près de  $\gamma_i$  dans  $T^1M$ . Supposons pour simplifier que ce soit  $\gamma_1$ .

**Lemme 3.2.5** *Soit  $\gamma_1$  une géodésique simple fermée. Il existe un voisinage  $V$  de  $\gamma_1$  dans  $T^1M$  tel que si une géodésique  $\gamma$  simple et minimisant globalement la longueur dans le revêtement universel  $\tilde{M}$  rencontre  $V$ , alors soit  $\gamma$  intersecte  $\gamma_1$ , soit l'adhérence de  $\gamma$  dans  $M$  contient une géodésique fermée homotope à  $\gamma_1$ .*

Choisissons :

- un voisinage collier  $U$  de  $\gamma_1$
- une origine  $P = \gamma_1(0)$  sur  $\gamma_1$ .

Soit  $T$  un segment géodésique inclus dans  $U$ , transverse en  $P$  à  $\gamma_1$ , orienté pour que l'intersection entre  $\gamma_1$  et  $T$  (dans cet ordre) soit positive.

Pour tous  $x \in U$  et  $v \in T_x^1M$ , on note  $]0, t_x[$  ( $t_x \in ]0, +\infty[$ ) l'intervalle maximal tel que la géodésique  $\gamma_{x,v}(t)$  issue de  $x$  dans la direction  $v$  reste dans  $U$  pendant le temps  $t_x$ . Considérons le voisinage de  $\gamma_1$  dans  $T^1M$  défini par les conditions suivantes :  $(x, v) \in V$  si et seulement si

- $x \in U$
- $\gamma_{x,v}(t)$  intersecte deux fois au moins  $T$  pour  $t \in ]0, t_x[$
- toutes les intersections de  $\gamma_{x,v}(t)$  avec  $T$  sont positives pour  $t \in ]0, t_x[$ .

Montrons que  $V$  vérifie les conclusions du lemme 3.2.5. Soient  $P'$  et  $P''$  deux points d'intersection consécutifs de  $\gamma_{x,v}$  avec  $T$ .

**Premier cas :**  $P' = P''$ . Alors  $\gamma_{x,v}$  qui, étant simple, ne peut se recouper transversalement, est une géodésique fermée homotope à  $\gamma_1$ , donc le lemme est vérifié.

**Deuxième cas :**  $P' \neq P''$ . Supposons par commodité que  $P'$  précède  $P''$  dans l'ordre de  $\gamma_{x,v}$ . Appelons  $R$  l'anneau contenu dans  $U$ , bordé par  $\gamma_1$ ,  $\gamma_{x,v}$  entre  $P'$  et

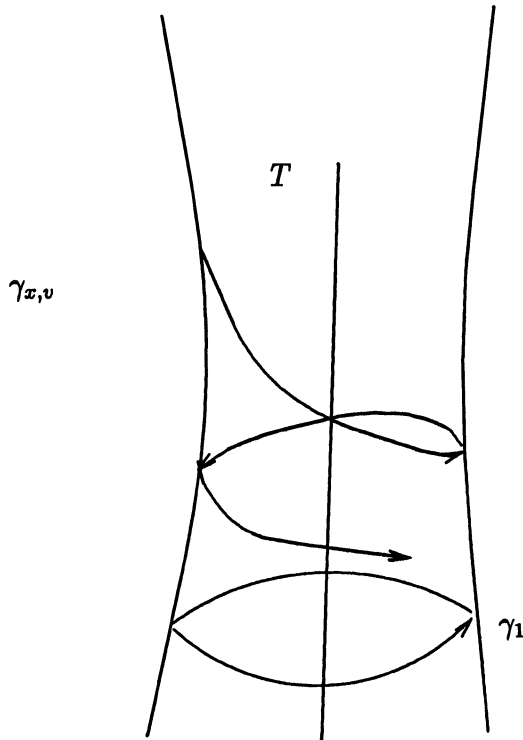


FIG. 3.1 - deux intersections successives avec  $T$

$P''$ , et  $T$  entre  $P'$  et  $P''$ . De la sorte une courbe qui sort de  $R$  en coupant  $T$  doit avoir une intersection négative avec  $T$  (voir figure 3.1).

Supposons que  $\gamma_{x,v}$  soit contenue dans  $R$  pour tous les temps postérieurs à  $t''$  tel que  $P'' = \gamma_{x,v}(t'')$ . Alors son ensemble limite est un compact invariant par le flot géodésique et contenu dans l'anneau  $R$ . Un tel ensemble contient nécessairement une géodésique fermée homotope à  $\gamma_1$ , auquel cas le lemme est démontré.

Supposons maintenant que  $\gamma_{x,v}$  sorte de  $R$ . Elle ne peut en sortir en se recoupant, étant simple par hypothèse. Elle ne peut non plus sortir en recoupant  $T$ , car l'intersection devrait être négative, ce qui est interdit par la définition de  $V$ . Par conséquent, elle doit intersecter  $\gamma_1$ , ce qui termine la preuve du lemme 3.2.5. Puisque  $\gamma_1$  est contenue dans un  $\epsilon(n)$ -voisinage de  $\text{supp}(\mu_n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$ , pour  $n$  assez grand  $\text{supp}(\mu_n)$  rencontre  $V$ . On suppose bien sûr que les  $\mu_n$  sont de support total. Or une géodésique spiralant vers  $\gamma_1$  (ou une géodésique homotope) n'est dans le support d'aucune mesure invariante par le flot géodésique, donc il existe dans  $\text{supp}(\mu_n)$  une géodésique qui coupe  $\gamma_1$ .

**Preuve de la proposition 3.2.4.**

Il s'agit de démontrer que  $\text{Int}(h_n, h_0) \neq 0$  pour une infinité d'entiers  $n$ . D'après la proposition 2.2.12, il suffit de démontrer que les géodésiques de  $\text{supp}(\mu_n)$  qui intersectent  $\gamma_1$  le font toutes dans le même sens. Supposons donc que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe deux géodésiques  $\gamma_n^+$  et  $\gamma_n^-$  dans  $\text{supp}(\mu_n)$ , intersectant  $\gamma_1$  l'une positivement

et l'autre négativement.

**Lemme 3.2.6** *Les géodésiques  $\gamma_n^+$  et  $\gamma_n^-$  rencontrent  $V$  pour  $n$  assez grand.*

En effet,  $\Lambda \cap V$  est un ouvert de  $\Lambda$ . La projection  $\pi$  étant un homéomorphisme en restriction à  $\Lambda$ ,  $\pi(\Lambda \cap V)$  est un ouvert de  $\pi(\Lambda)$ , qui peut s'écrire  $U' \cap \pi(\Lambda)$ . Puisque  $\pi$  est bijective sur  $\Lambda$ , on a

$$\pi^{-1}(U' \cap \pi(\Lambda)) = \pi^{-1}(U') \cap \Lambda.$$

Mais d'autre part

$$\pi^{-1}(U' \cap \pi(\Lambda)) = \pi^{-1}(\pi(\Lambda \cap V)) = \Lambda \cap V$$

$$\text{donc } \pi^{-1}(U') \cap \Lambda \subset V.$$

Par conséquent il existe un voisinage  $V'$  de  $\Lambda$  tel que  $\pi^{-1}(U') \cap V' \subset V$ . Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(\Lambda, \text{supp}(\mu_n)) = 0, \text{ on a } \pi^{-1}(\gamma_n^\pm) \subset V'$$

pour  $n$  assez grand. Par ailleurs,  $U'$ , qui contient  $\pi(\Lambda \cap V)$ , est voisinage de  $\gamma_1$ ; donc les  $\gamma_n^\pm$ , qui coupent  $\gamma_1$ , rencontrent  $U'$ . Ainsi

$$\pi^{-1}(\gamma_n^\pm) \cap \pi^{-1}(U') \cap V' \neq \emptyset$$

d'où le lemme.

**Fin** de la preuve de la proposition 3.2.4. Nommons  $R$  l'anneau défini comme dans la preuve du lemme 3.2.5, en remplaçant  $\gamma_{x,v}$  par  $\gamma_n^+$ . Remarquons que  $\gamma_n^-$ , une fois entrée dans  $R$ , doit en sortir. En effet, dans le cas contraire, elle devrait s'accumuler sur une courbe fermée contenue dans  $R$ , ce qui est impossible pour une géodésique contenue dans le support d'une mesure invariante par le flot géodésique.

Elle ne peut en sortir en coupant  $\gamma_n^+$ , puisque  $\gamma_n^+$  et  $\gamma_n^-$  font partie d'une même lamination géodésique. Elle ne peut non plus sortir par  $T$ , car l'intersection avec  $T$  serait alors négative, contredisant la définition de  $V$ . Enfin elle ne peut recouper  $\gamma_1$ , car cela créerait des points conjugués le long de  $\gamma_1$ , or cette dernière minimise la longueur dans le revêtement universel. Cette impossibilité achève la démonstration.

### 3.3 Non-différentiabilité de la norme stable en certains points rationnels

D'après [15],  $\mathcal{S}_1$  admet en tout point un cône convexe tangent.

**Corollaire 3.3.1** (du théorème 3.2.1) *En tout point rationnel n'appartenant pas à l'intérieur d'une face de dimension maximale ( $g - 1$ ) le cône tangent est strict (différent d'un hyperplan).*

**Remarque 3.3.2** *Il existe une infinité de tels points, voir 1.2.9.*

**Preuve du corollaire :** soit  $h_0$  un point rationnel de  $\mathcal{S}_1$ . Nous avons vu qu'il y a un sens à parler de la plus grande face de  $\mathcal{S}_1$  contenant  $h_0$  dans son intérieur. Soit  $F$  cette face. Supposons sa dimension  $d$  strictement inférieure à  $\text{genre}(M) - 1$ . Soient  $h_1, \dots, h_p$  les points extrémaux de  $F$ , et  $h$  un vecteur tangent à  $\mathcal{S}_1$  n'appartenant pas à  $F$  et tel que  $\text{Int}(h, h_i) = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, p$ . On peut trouver un tel vecteur puisque les  $h_1, \dots, h_p$  engendrent un sous-espace de  $H_1(M, \mathbf{R})$  de dimension  $\leq g - 1$ , par conséquent strictement contenu dans son orthogonal symplectique.

Supposons que la norme stable soit différentiable en  $h_0$ . Le cône tangent à  $\mathcal{S}_1$  en  $h_0$  serait alors un hyperplan, en particulier le vecteur  $-h$  en ferait partie. D'après 3.2.3 la droite affine  $D$  joignant  $h_0$  à  $h_0 + h$  rencontre  $\mathcal{S}_1$  en un segment  $C$  non réduit à un point. Comme  $h \notin F$ ,  $C$  n'est pas inclu dans  $F$ .

Le même argument s'applique à  $-h$ , on obtient ainsi un segment  $C'$ . Mais  $C$  et  $C'$  font tous deux partie de la droite affine  $D$ , et ont en commun le point  $h_0$ , leur réunion est donc un segment  $C''$  inclu dans  $\mathcal{S}_1$  et contenant  $h_0$  dans son intérieur. D'après le lemme 2.2.14 on peut trouver une face  $F'$  contenant  $h_0$  dans son intérieur, incluant  $F$  et  $C''$ , donc strictement plus grande que  $F$ . Cette contradiction termine la preuve du corollaire.

# Chapitre 4

## Liens avec la théorie des surfaces de Riemann

Dans tout ce chapitre  $M$  est une surface compacte orientable munie de la structure complexe donnée par la classe conforme de la métrique  $g$ .

### 4.1 Plongement du revêtement abélien dans $H_1(M, \mathbf{R})$

Choisissons

- un point base  $x_0 \in M$
- une base  $(a_1, \dots, a_\zeta, b_1, \dots, b_\zeta)$  de  $H_1(M, \mathbf{R})$  dans laquelle la forme symplectique d'intersection sur  $H_1(M, \mathbf{R})$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & Id_\zeta \\ -Id_\zeta & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors il existe une unique base  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\zeta)$  de  $\mathcal{H}$ , l'espace des 1-formes holomorphes sur  $M$ , telle que  $\langle \alpha_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$ .

#### 4.1.1 Définition de la Jacobienne

Le contenu de ce paragraphe est démontré dans [6], chapitre 3. On notera  $\Pi$  la matrice dont les coefficients sont  $\pi_{ij} = \langle \alpha_i, b_j \rangle$ . Les colonnes de la matrice  $\zeta \times 2\zeta$   $(Id_\zeta, \Pi)$  sont  $\mathbf{R}$ -indépendantes et forment donc un réseau  $L(M)$  dans  $\mathbf{C}^\zeta$ . Par définition la Jacobienne  $J(M)$  de  $M$  est le quotient  $\mathbf{C}^\zeta / L(M)$ .

On définit une application  $\Phi$  de  $M$  dans  $J(M)$  en posant

$$\Phi(x) = \left( \int_{x_0}^x \alpha_i \right)_{i=1, \dots, \zeta}$$

où l'intégrale est prise sur un chemin quelconque entre  $x$  et  $x_0$ . L'application  $\Phi$  est bien définie, holomorphe et injective, c'est donc un plongement conforme de  $M$  dans  $J(M)$ .

### 4.1.2 Relèvement au revêtement abélien

Choisissons maintenant un point  $\bar{x}_0$  dans la fibre au dessus de  $x_0$ . Les 1-formes  $\alpha_i$  se relèvent de façon unique à  $\bar{M}$ , en formes  $\bar{\alpha}_i$  holomorphes pour la structure complexe sur  $\bar{M}$  obtenue par image inverse de celle de  $M$ .

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} : \bar{M} &\rightarrow \mathbf{C}^\zeta \\ \bar{x} &\mapsto \left( \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \bar{\alpha}_i \right)_{i=1, \dots, \zeta} \end{aligned}$$

Remarquons que  $\bar{\Phi}$  est bien définie: si  $c_1$  et  $c_2$  sont deux chemins distincts de  $\bar{x}_0$  à  $\bar{x}$ , alors  $c_1 c_2^{-1}$  est un chemin fermé dans  $\bar{M}$ , donc il se projette sur un lacet d'homologie nulle dans  $M$ , et

$$\int_{c_1} \bar{\alpha}_i - \int_{c_2} \bar{\alpha}_i = \int_{c_1 c_2^{-1}} \bar{\alpha}_i = \int_{p(c_1 c_2^{-1})} \alpha_i = 0$$

l'avant dernière égalité ayant lieu par définition du pull-back, et la dernière parce que  $c_1 c_2^{-1}$  se projette sur un lacet d'homologie nulle dans  $M$ .

D'autre part le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \bar{M} & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \mathbf{C}^\zeta \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ M & \xrightarrow{\Phi} & J(M) \end{array}$$

En effet on a

$$\Phi(p(\bar{x})) = \left( \int_{x_0}^x \alpha_i \right)_{i=1, \dots, \zeta} \text{ mod } L(M)$$

par définition de  $\Phi$ ; mais par ailleurs

$$\begin{aligned} p'(\bar{\Phi}(\bar{x})) &= \left( \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \bar{\alpha}_i \right)_{i=1, \dots, \zeta} \text{ mod } L(M) \\ &= \left( \int_{x_0}^x \alpha_i \right)_{i=1, \dots, \zeta} \text{ mod } L(M) \end{aligned}$$

par définition de l'image inverse. Donc  $\bar{\Phi}$  relève  $\Phi$ , par conséquent elle est holomorphe.

Supposons que pour  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  deux points de  $\bar{M}$ , on ait

$$\bar{\Phi}(\bar{x}_1) = \bar{\Phi}(\bar{x}_2).$$

Alors on aurait

$$\Phi(p(\bar{x}_1)) = \Phi(p(\bar{x}_2))$$

et,  $\Phi$  étant injective, cela implique

$$p(\bar{x}_1) = p(\bar{x}_2).$$

Alors il existe une transformation  $D$  du revêtement (celui-ci étant Galoisien) qui envoie  $\bar{x}_1$  sur  $\bar{x}_2$ , donc il existe dans  $\bar{M}$  un chemin de  $\bar{x}_1$  à  $\bar{x}_2$  qui se projette sur un lacet  $c$  d'homologie  $D$ . On a

$$\bar{\Phi}(\bar{x}_1) - \bar{\Phi}(\bar{x}_2) = \left( \int_c \bar{\alpha}_i \right)_{i=1, \dots, \zeta}$$

la dernière quantité n'est pas nulle puisque  $c$  n'est pas d'homologie nulle (sauf si  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ ), d'où une contradiction. Donc  $\bar{\Phi}$  est injective. On a donc construit un plongement holomorphe de  $\bar{M}$  dans  $\mathbf{C}^\zeta$ .

Mais on peut identifier  $H_1(M, \mathbf{R})$ , comme dual de  $\mathcal{H}$ , avec  $\mathbf{C}^\zeta$ , en utilisant la base  $(\alpha_i)_i$ , par l'application suivante :

$$\begin{aligned} H_1(M, \mathbf{R}) &\xrightarrow{\Psi} \mathbf{C}^\zeta \\ h &\mapsto (\alpha_i(h))_{i=1 \dots \zeta} \end{aligned}$$

Donc

**Proposition 4.1.1**  $\Theta = \Psi^{-1} \circ \bar{\Phi}$  nous donne un plongement de  $\bar{M}$  dans  $H_1(M, \mathbf{R})$ , holomorphe pour la structure complexe sur  $H_1(M, \mathbf{R})$  induite par  $\Psi$ .

**Remarque 4.1.2** Si  $x, y$  sont deux points de  $\bar{M}$ , alors  $\Theta(x) - \Theta(y)$  est ce que Mather appelle le vecteur-différence de  $(x, y)$  dans [13], et Bangert (cf. [1]) le vecteur-rotation.

**Remarque 4.1.3** L'application  $\Theta$  est définie dans [9]. Dans le cas des surfaces de Riemann on possède suffisamment d'information sur les points singuliers des formes harmoniques pour affirmer que  $\Theta$  est un plongement.

### 4.1.3 Ce qui précède est-il intrinsèque ?

On peut se demander dans quelle mesure cette construction dépend des choix effectués, à savoir :

- le point base  $x_0$
- son relèvement  $\bar{x}_0$
- et la base  $(a_1, \dots, a_\zeta, b_1, \dots, b_\zeta)$  de  $H_1(M, \mathbf{R})$ .

Supposons choisi un autre relèvement  $\bar{x}'_0$  de  $x_0$ . Soit  $D$  la transformation du revêtement qui envoie  $\bar{x}_0$  sur  $\bar{x}'_0$ , notons  $\bar{\Phi}'$  le plongement défini avec le nouveau point-base. On a

$$\forall \bar{x} \in \bar{M} \quad \bar{\Phi}'(\bar{x}) - \bar{\Phi}(\bar{x}) = \left( \int_c \bar{\alpha}_i \right)_{i=1, \dots, \zeta}$$

où  $c$  désigne un lacet dans  $M$ , dont la classe d'homologie est  $D$ . Donc

$$\bar{\Phi}'(\bar{x}) - \bar{\Phi}(\bar{x}) = \langle D, \bar{\alpha}_i \rangle_{i=1, \dots, \zeta}.$$

On peut écrire  $D$  sous la forme  $\sum \lambda_i a_i + \mu_i b_i$  donc

$$\bar{\Phi}'(\bar{x}) - \bar{\Phi}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i \langle \alpha_j, a_i \rangle + \mu_i \langle \alpha_j, b_i \rangle$$

c'est une combinaison linéaire à coefficients entiers de colonnes de la matrice  $(Id_\zeta, \Pi)$  définie plus haut, c'est-à-dire un élément du réseau  $L(M)$ . On voit par là que le



changement revient à traduire d'un élément de  $L(M)$  l'image de  $\overline{M}$  dans  $\mathbf{C}^\zeta$ . Mais justement  $\overline{\Phi}(\overline{M})$  est invariante par l'action de  $L(M)$ :

$$\forall L \in L(M) \exists D \in H_1(M, \mathbf{Z}) \text{ tel que } \langle D, \overline{\alpha}_i \rangle_{i=1, \dots, \zeta} = L.$$

Donc

$$\overline{\Phi}'(\overline{x}) = \overline{\Phi}(D(\overline{x})).$$

Supposons maintenant qu'on choisisse un autre point-base  $x_0'$  dans  $M$ . Choisissons-en un relevé à  $\overline{M}$ ,  $\overline{x_0}'$ . Alors pareillement l'image  $\Theta(\overline{M})$  est traduite dans  $H_1(M, \mathbf{R})$ , de  $\Theta(\overline{x_0}) - \Theta(\overline{x_0}')$ ; mais cette fois il n'y a plus de raison pour qu'il y ait invariance. Notons toutefois que les translations sont conformes, et même isométriques, dans  $H_1(M, \mathbf{R})$  muni de la norme duale de la norme  $L^2$  sur les formes harmoniques.

Enfin, prenons une autre base symplectique  $(a_1', \dots, a_\zeta', b_1', \dots, b_\zeta')$  de  $H_1(M, \mathbf{R})$ . Soit alors  $A$  la matrice de transition entre les  $a_i$  et les  $a_i'$ . Les formes  $\alpha_i'$  duales des  $a_i'$  se déduisent des  $\alpha_i$  par la matrice  ${}^t A^{-1}$ , donc

$$\overline{\Phi}'(x) = \left( \int_{\overline{x_0}'}^{\overline{x}} \overline{\alpha}_i' \right)_{i=1, \dots, \zeta} = {}^t A^{-1} \overline{\Phi}(x).$$

D'autre part, l'identification  $\Psi$  devient  ${}^t A^{-1} \Psi$ , donc finalement

$$\Theta' = (\Psi')^{-1} \circ \overline{\Phi}' = \Psi^{-1} {}^t A {}^t A^{-1} \overline{\Phi} = \Theta$$

donc  $\Theta$  ne dépend pas du choix de la base.

#### 4.1.4 Le plongement n'est pas isométrique

On suppose ici que le genre de  $M$  est strictement supérieur à 1. On entend par plongement isométrique, le fait que la métrique  $g$  sur  $\Theta(\overline{M})$  induite par la norme  $L^2$  sur  $H_1(M, \mathbf{R})$ , et celle  $g_0$  provenant de  $\overline{M}$  par  $\Theta$ , coïncident.

Il y a à présent un sens à se demander si le plongement est isométrique puisqu'on vient de montrer qu'à isométrie près, il ne dépend pas des choix faits.

On peut remarquer que les deux métriques susdites sont invariantes par l'action de  $H_1(M, \mathbf{Z})$ ; donc elles descendent toutes deux sur  $M$ . Etant holomorphe,  $\Theta$  est conforme, donc il existe une fonction  $f \in C^\infty$  sur  $\overline{M}$ ,  $H_1(M, \mathbf{Z})$ -périodique, telle que

$$g = \exp(f)g_0.$$

Soit  $v$  un vecteur tangent à  $\overline{M}$  en  $P$ , unitaire pour  $g_0$ . Son image par  $d\Theta$  est  $(\alpha_i(v))_{i=1 \dots g}$ , qui peut également s'écrire

$$\sum_{i=1}^{\zeta} \alpha_i(v) \cdot a_i.$$

Remarquons que la base complexe  $(a_i)_{i=1 \dots \zeta}$  de  $H_1(M, \mathbf{R})$  est orthogonale pour la norme duale de la norme  $L^2$ , que l'on notera dorénavant  $\| \cdot \|_{L^2}$ ; en effet elle est duale

de la base  $(\alpha_i)_{i=1 \dots \zeta}$  de  $\mathcal{H}$ , qui est orthogonale pour la norme  $L^2$ . De plus chaque  $\alpha_i$  a pour norme  $(\|\alpha_i\|_{L^2})^{-1}$  donc

$$\begin{aligned} g(v, v) &= \|d\Theta(v)\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\zeta} \|\alpha_i(v)\|^2 \|\alpha_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\zeta} \frac{\|\alpha_i(v)\|^2}{\|\alpha_i\|_{L^2}^2} \end{aligned}$$

Mais

$$f(z) = \frac{g(v, v)}{g_0(v, v)} = g(v, v)$$

donc  $f$  s'écrit comme somme de carrés de modules de fonctions holomorphes. Par conséquent  $f$  est sous-harmonique; donc elle est constante si et seulement si les fonctions

$$\left( \frac{\|\alpha_i(v, v)\|^2}{\int_M \|\alpha_i(v, v)\|^2 dz d\bar{z}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui sont bien définies sur  $M$  car elles ne dépendent pas du choix d'un vecteur unitaire tangent, sont constantes pour tout  $i$ . Mais cela implique que  $\alpha_i(z)$  est constante pour tout  $i$ , or les  $\alpha_i(z)$  prennent la valeur zéro et ne sont pas identiquement nulles.

**Remarque 4.1.4** Dans le cas où  $M$  est un tore, le plongement est isométrique si et seulement si la métrique  $g_0$  est euclidienne.

## 4.2 Comparaison entre norme $L^2$ et norme stable

Soit  $\omega \in H^1(M, \mathbf{R})$ . On notera également  $\omega$  la 1-forme harmonique dans la classe de cohomologie  $\omega$ . On a l'égalité suivante (cf. [6]):

$$(\|\omega\|_{L^2})^2 = \int \omega \wedge * \omega = \langle \omega, D\omega \rangle$$

où  $D$  désigne la dualité de Poincaré entre  $H^1(M, \mathbf{R})$  et  $H_1(M, \mathbf{R})$  et le crochet désigne la dualité ordinaire entre  $H^1(M, \mathbf{R})$  et  $H_1(M, \mathbf{R})$ .

On a l'inégalité suivante, par définition de la norme duale de la norme stable :

$$\langle \omega, D\omega \rangle \leq \|\omega\|_s \|D\omega\|_s \text{ d'où}$$

$$\|\omega\|_{L^2}^2 \leq \|\omega\|_s \|D\omega\|_s. \quad (4.1)$$

$$\text{On a } \int \omega \wedge * \omega = \int_M \|\omega\|_g^2 d\mu_g$$

où  $\mu_g$  désigne l'élément de volume induit par la métrique  $g$ . Par l'inégalité de Schwarz ceci implique

$$\text{Vol}(M) \int_M \|\omega\|_g^2 d\mu_g \geq \left( \int_M \|\omega\|_g d\mu_g \right)^2. \quad (4.2)$$

On va montrer que

$$\int_M \|\omega\|_g d\mu_g \geq \|D\omega\|_s. \quad (4.3)$$

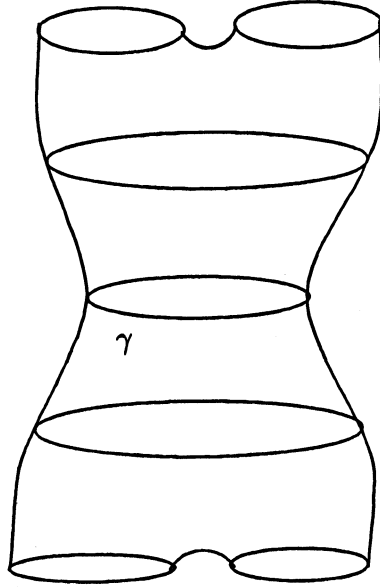


FIG. 4.1 - le feuilletage caractéristique de  $\omega$

Il suffit de le montrer dans le cas où  $\omega$  est une forme de Strebel, (cf. [17]) par densité de celles-ci dans les 1-formes harmoniques. Les formes de Strebel sont définies par le fait que leur feuilletage caractéristique a toutes ses feuilles fermées. Soit  $\gamma$  une feuille, ou réunion de feuilles, telle que

$$\int_M \|\omega\|_g d\mu_g = l_g(\gamma)(\text{masse de } \mu_{\text{trans}})$$

$\mu_{\text{trans}}$  étant la mesure transverse de  $^*\omega$ . Alors  $(\text{masse de } \mu_{\text{trans}})\gamma$  est dans la classe d'homologie  $D\omega$ ; en effet une courbe fermée reçoit autant de fois la mesure transverse de  $\omega$  qu'elle coupe  $\gamma$  (voir [17]). Sachant que

$$\|D\omega\|_s \leq l_g(\gamma)(\text{masse de } \mu_{\text{trans}})$$

l'inégalité 4.3 est prouvée. En la combinant avec ce qui précède, on obtient

$$\|D\omega\|_s^2 \leq \|\omega\|_{L^2}^2 \text{Vol}(M)$$

puis

$$\|D\omega\|_s^2 \leq \text{Vol}(M)\|\omega\|_s \|D\omega\|_s$$

et finalement

$$\|D\omega\|_s \leq \text{Vol}(M)\|\omega\|_s \quad (4.4)$$

En combinant ceci avec l'équation (3.1) il vient

$$\|\omega\|_{L^2}^2 \leq \text{Vol}(M)(\|\omega\|_s)^2. \quad (4.5)$$

**Remarque 4.2.1** *Le détour par les formes de Strebel est nécessaire car les feuilles du feuilletage caractéristique d'une 1-forme ne sont en général pas géodésiques, or nos définitions ne nous autorisent à considérer que des mesures invariantes par le flot géodésique, ou des courbes fermées.*

### 4.2.1 Comparaison dans l'autre sens

On va commencer par comparer  $\|\omega\|_s$  et  $\|D\omega\|_s$ , qui sont deux normes sur  $H^1(M, \mathbf{R})$ ; celui-ci étant de dimension finie, il existe  $K \in \mathbf{R}$  tel que  $\|\omega\|_s \leq K\|D\omega\|_s$ , on va essayer d'évaluer ce  $K$ . On a

$$\begin{aligned}\|\omega\|_s &= \sup\left\{\frac{\langle \omega, h \rangle}{\|h\|_s} / h \in H_1(M, \mathbf{R})\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\text{Int}(D\omega, h)}{\|h\|_s} / h \in H_1(M, \mathbf{R})\right\}\end{aligned}\quad (4.6)$$

où  $\text{Int}(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire d'intersection sur  $H_1(M, \mathbf{R})$ ; celui-ci étant de dimension finie, il existe  $K_0$  dépendant de la métrique tel que

$$K_0 = \sup\left\{\frac{|\text{Int}(h, k)|}{\|h\|_s \|k\|_s} / h, k \in H_1(M, \mathbf{R}) \setminus \{0\}\right\}.$$

On a donc, pour tout  $h \in H_1(M, \mathbf{R}) \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{\text{Int}(D\omega, h)}{\|h\|_s} \leq K_0 \|D\omega\|_s$$

d'où

$$\|\omega\|_s \leq K_0 \|D\omega\|_s. \quad (4.7)$$

**Lemme 4.2.2**  $K_0$  est la constante optimale.

En effet, considérons deux classes  $D\omega$  et  $k$  telles que  $\text{Int}(D\omega, k) = K_0 \|D\omega\|_s \|k\|_s$ . On a alors

$$\|\omega\|_s \geq \frac{\text{Int}(D\omega, k)}{\|k\|_s} = K_0 \|D\omega\|_s.$$

On a vu plus haut l'inégalité suivante:

$$\|D\omega\|_s^2 \leq \|\omega\|_{L^2}^2 \text{Vol}(M)$$

et par suite,

$$(\|\omega\|_s)^2 \leq K_0^2 \text{Vol}(M) \|\omega\|_{L^2}^2.$$

On peut résumer tout ce qui précède dans l'inéquation suivante:

$$\text{Vol}(M)^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_s \geq \|\omega\|_{L^2} \geq K_0^{-1} \text{Vol}(M)^{\frac{-1}{2}} \|\omega\|_s. \quad (4.8)$$

**Remarque 4.2.3** Ceci implique:

$$K_0 \geq \text{Vol}(M)^{-1}.$$

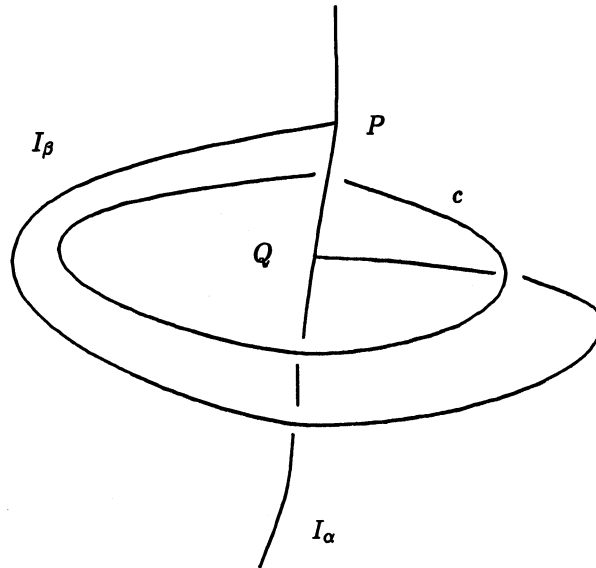


FIG. 4.2 - situation dans le lemme 4.2.5

## 4.2.2 Estimations asymptotiques de $K_0$ dans l'espace de Teichmüller

On suppose ici que  $M$  est munie d'une métrique hyperbolique. Soit  $\gamma_1$  la plus petite courbe non nulle en homologie, et  $l_1$  sa longueur. On va démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.2.4** *Il existe des constantes  $A, B$  telles que*

$$\frac{A}{l_1 |\log(l_1)|} \leq K_0 \leq \frac{B}{l_1^2}.$$

### Démonstration

**Première partie: la majoration.** L'hypothèse de courbure n'est pas utilisée ici. On s'inspire de la preuve du lemme 2, p. 58, de [8]. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux courbes fermées non nulles en homologie, et  $r$  un réel positif strictement plus petit que  $l_1/2$ . On découpe  $\alpha$  et  $\beta$  en intervalles de longueur inférieure ou égale à  $r$ .

**Lemme 4.2.5** *Deux de ces intervalles, l'un sur  $\alpha$  et l'autre sur  $\beta$ , ne peuvent se couper plus d'une fois avec le même signe.*

**Preuve du lemme:** par l'absurde. Supposons que deux intervalles  $I_\alpha$  et  $I_\beta$  se coupent en deux points  $P$  et  $Q$ . . Considérons la courbe fermée  $c$  obtenue en réunissant les segments de  $I_\alpha$  et  $I_\beta$  compris entre  $P$  et  $Q$  (voir figure 4.2). Sa longueur est  $2r < l_1$ . D'autre part elle est homotope à une courbe lisse  $c$  intersectant  $\alpha$  (ou  $\beta$ ) exactement une fois, donc elle ne peut être nulle en homologie, d'où la contradiction. Par conséquent, si  $n_\alpha$  et  $n_\beta$  sont les nombres d'intervalles décomposant  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement, on a

$$|\text{Int}([\alpha], [\beta])| \leq n_\alpha n_\beta.$$

Or

$$n_\alpha \leq \frac{l_g(\alpha)}{r} + 1 \text{ et } n_\beta \leq \frac{l_g(\beta)}{r} + 1$$

donc

$$\frac{\text{Int}([\alpha], [\beta])}{l_g(\alpha)l_g(\beta)} \leq \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{l_1}\right)^2.$$

Comme  $r$  est arbitrairement proche de  $l_1/2$ , ceci implique

$$\frac{\text{Int}([\alpha], [\beta])}{l_g(\alpha)l_g(\beta)} \leq \frac{9}{l_1^2}$$

et la majoration est établie.

**Remarque 4.2.6** *En combinant ceci et 4.2.3, on obtient*

$$\text{Vol}M \geq \frac{1}{9}l_1^2,$$

*mais ce fait avait déjà démontré par Hebda (voir [9], p. 48) avec la constante 1/2.*

**Deuxième partie : la minoration.** Un théorème de P. Buser (cf. [4], p125) nous dit que l'on peut compléter l'ensemble des courbes de longueur  $\leq 2\text{Arcsinh}(1)$  (éventuellement vide) en un système de  $3\zeta - 3$  courbes de longueurs  $\leq 26(\zeta - 1)$  qui sont les bords d'une décomposition de  $M$  en pantalons. Si  $l_1 \leq 2\text{Arcsinh}(1)$ ,  $\gamma_1$  fait partie de la décomposition. Sinon, on remplace  $\gamma_1$ , pour les besoins de la démonstration, par une courbe plus longue de la décomposition, mais on peut borner le rapport entre sa longueur et  $l_1$  (par  $26(\zeta - 1)/2\text{Arcsinh}(1)$ ), donc le théorème reste vrai en modifiant la constante  $A$ .

On va construire une courbe  $\alpha$  intersectant  $\gamma_1$  exactement une fois. Cette courbe ne sera alors pas nulle en homologie, sans quoi son intersection algébrique avec  $\gamma_1$  serait nulle. L'inverse du produit de leurs longueurs minore  $K_0$  puisque celui-ci est défini comme borne supérieure.

Soient  $\gamma_2, \dots, \gamma_{3\zeta-3}$  des courbes telles que le système  $(\gamma_i)_{i=1 \dots 3\zeta-3}$  vérifie les conclusions du théorème de Buser. Supposons que  $\gamma_1$  fasse partie du bord de deux pantalons  $P_a$  et  $P_b$  (le cas d'un seul pantalon se traite de manière semblable).

**Premier cas :** les pantalons  $P_a$  et  $P_b$  ont deux composantes de bord communes. Soient  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_a$  et  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_b$  les bords respectifs de  $P_a$  et  $P_b$ . Calculons la longueur  $a$  de la perpendiculaire commune à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans  $P_a$ . On découpe  $P_a$  en deux hexagones hyperboliques droits, et on utilise la formule (cf. [FLP], p. 152) reliant les côtés d'un tel polygone :

$$\cosh(a) = \frac{\cosh(\frac{l_a}{2}) + \cosh(\frac{l_1}{2}) \cosh(\frac{l_2}{2})}{\sinh(\frac{l_1}{2}) \sinh(\frac{l_2}{2})}$$

où  $l_2, l_a$  désignent les longueurs de  $\gamma_2, \gamma_a$ . On en déduit :

$$\cosh(a) \leq \frac{\cosh(13\zeta - 13)}{\sinh(\frac{l_1}{2})^2} + \coth(\frac{l_1}{2})^2$$

car  $l_2$  et  $l_a$  sont plus petites que  $26(\zeta - 1)$ , et la fonction cotangente hyperbolique est décroissante. On obtient la même inégalité dans  $P_b$ .

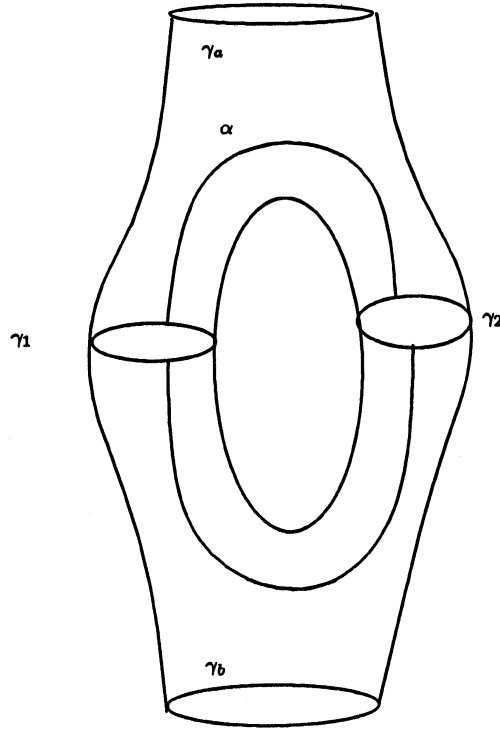


FIG. 4.3 - construction de  $\alpha$

Ensuite on construit (cf. figure 4.3) une courbe fermée  $\alpha$  en connectant les segments de perpendiculaires dont on vient de calculer les longueurs par des portions de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . On a :

$$l_g(\alpha) \leq 2 \operatorname{Argch} \left[ \frac{\cosh(13\zeta - 13)}{\sinh(\frac{l_1}{2})^2} + \coth(\frac{l_1}{2})^2 \right] + \frac{l_1}{2} + 13(g - 1).$$

La fonction de  $l_1$  ci-dessus est équivalente à  $\log(l_1)$  quand  $l_1$  tend vers zéro, d'où la conclusion du théorème.

**Deuxième cas :**  $P_a \cap P_b = \gamma_1$ . On choisit une suite finie de pantalons  $P_1, \dots, P_n$ ,  $n \leq 2\zeta - 2$ , tels que

- $P_1 = P_n = P_a$ ,
- $P_2 = P_b$ ,
- et  $P_i \neq P_{i-1}$ ,  $P_i \cap P_{i-1} \neq \emptyset$  pour  $i = 2, \dots, n$ .

Soient

- $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n + 1$  des composantes de bord des  $P_i$ , telles que  $\gamma_i \subset P_i \cap P_{i-1}$ , et  $\gamma_{n+1} = \gamma_1$ .
- des segments géodésiques  $a_i$ , reliant  $\gamma_i$  à  $\gamma_{i+1}$  dans  $P_i$ , perpendiculaires à  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i+1}$ .

On construit une courbe fermée  $c$  intersectant  $\gamma_1$  une seule fois en mettant bout à bout les  $a_i$  et des portions de  $\gamma_i$ . La longueur de  $c$  s'estime comme plus haut, le majorant est simplement multiplié par  $2\zeta - 2$ .

### 4.2.3 Formules sur $H_1(M, \mathbf{R})$

Soit  $h \in H_1(M, \mathbf{R})$ . La double inéquation (3.8) implique

$$\text{Vol}(M)^{\frac{1}{2}} K_0 \frac{\langle \omega, h \rangle}{\|\omega\|_s} \geq \frac{\langle \omega, h \rangle}{\|\omega\|_{L^2}} \geq \text{Vol}(M)^{\frac{-1}{2}} \frac{\langle \omega, h \rangle}{\|\omega\|_s}$$

On a

$$\|h\|_s = \sup\left\{ \frac{\langle \omega, h \rangle}{\|\omega\|_s} / \omega \in H^1(M, \mathbf{R}) \right\}$$

et d'autre part

$$\frac{\langle \omega, h \rangle}{\|\omega\|_{L^2}} = \int \frac{\omega}{\|\omega\|_{L^2}} \wedge {}^* Dh.$$

Or la norme  $L^2$  sur  $H^1(M, \mathbf{R})$  est euclidienne et vient du produit scalaire

$$(\omega, \nu) = \int \omega \wedge {}^* \nu$$

donc le supremum

$$\sup\left\{ \int \frac{\omega}{\|\omega\|_{L^2}} \wedge {}^* Dh / \omega \in H^1(M, \mathbf{R}) \right\}$$

est atteint pour  $\omega = Dh$ , et vaut  $\|Dh\|_{L^2}$  (ce qui signifie que la norme duale de la norme  $L^2$  est également obtenue par dualité de Poincaré)

En conclusion, on obtient le

#### **Théorème 4.2.7**

$$\text{Vol}(M)^{\frac{1}{2}} K_0 \|h\|_s \geq \|Dh\|_{L^2} \geq \text{Vol}(M)^{\frac{-1}{2}} \|h\|_s.$$



# Chapitre 5

## Géométrie du revêtement abélien

### 5.1 Sur une inégalité de Burago

Il est intéressant de comparer  $\| \cdot \|_s$  et la distance  $d_{\overline{M}}$  induite par la métrique relevée de  $g$  à  $\overline{M}$ .

**Notations 5.1.1** L'action de l'élément  $h$  de  $H_1(M, \mathbf{Z})$  sur un point  $a$  de  $\overline{M}$  se note  $a + h$ .

Soient

- un domaine fondamental  $\mathcal{D}$  de l'action de  $H_1(M, \mathbf{Z})$  sur  $\overline{M}$
- des points  $x, y \in \overline{M}$
- $\mathcal{D}_x$  et  $\mathcal{D}_y$  des translatsés du domaine fondamental, contenant  $x$  et  $y$  respectivement
- la transformation du revêtement  $h \in H_1(M, \mathbf{Z})$  qui envoie  $\mathcal{D}_x$  sur  $\mathcal{D}_y$
- une géodésique  $\gamma$  telle que  $l_g(\gamma) = f(h)$ .

On a

$$\|h\|_s \leq l_g(\gamma) \leq \|h\|_s + 2(\zeta - 1)\text{diam}M$$

(voir le théorème 1.2.2 et l'équation 1.3).

Choisissons un relevé  $\overline{\gamma}$  de  $\gamma$  à  $\overline{M}$  partant d'un point  $a$  de  $\overline{\gamma}$  dans  $\mathcal{D}_x$ . On a alors

$$a + h \in \overline{\gamma}, \text{ et } d_{\overline{M}}(a, a + h) = l_g(\gamma).$$

D'autre part, en notant  $\text{diam}\mathcal{D}$  le diamètre du domaine fondamental pour la distance  $d_{\overline{M}}$ , on a

$$|d_{\overline{M}}(x, y) - d_{\overline{M}}(a, a + h)| \leq 2\text{diam}\mathcal{D}.$$

Remarquons que l'on peut choisir  $\mathcal{D}$  de telle sorte que

$$\text{diam}\mathcal{D} \leq 2\text{diam}M.$$

De la même façon on a

$$|\|\Theta(x) - \Theta(y)\|_s - \|\Theta(a) - \Theta(a + h)\|_s| \leq 2D$$

en notant  $D$  le diamètre, pour la norme stable, de l'image d'un domaine fondamental par le plongement  $\Theta$ . D'où la

**Proposition 5.1.2** *On a la double inégalité suivante :*

$$\begin{cases} -2(\mathcal{D} + D) & \leq d_{\overline{M}}(x, y) - \|\Theta(x) - \Theta(y)\|_s \\ d_{\overline{M}}(x, y) - \|\Theta(x) - \Theta(y)\|_s & \leq 2(\zeta - 1)\text{diam}M + 4\text{diam}M + 2D \end{cases} \quad (5.1)$$

Cette inégalité est analogue à celle prouvée par D. Burago pour les tores  $T^n$  dans [3]. Nous allons voir qu'elle nous permet de retrouver le théorème suivant, dû à V. Bangert (cf. [1]) et déjà cité :

**Théorème 5.1.3 (Bangert)** *Soit  $\gamma$  géodésique  $\overline{M}$ -minimisante. Soit  $R(\gamma)$  l'ensemble :*

$$\left\{ \frac{\Theta(\gamma(t_2)) - \Theta(\gamma(t_1))}{|t_2 - t_1|} \mid t_2, t_1 \in \mathbf{R} \right\}.$$

*Alors il existe un hyperplan support à la boule unité de la norme stable tel que l'adhérence de  $R(\gamma)$  est contenue dans  $H \cap B(1, \|\cdot\|_s)$ .*

Soit  $\gamma$  géodésique  $\overline{M}$ -minimisante. Considérons, pour  $t_2 > t_1$ , l'ensemble :

$$E_{t_1, t_2} = \{ \omega \in H^1(M, \mathbf{R}) \mid \|\omega\|_s = 1 \text{ et } | \langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t_1)) \rangle - |t - t_1| | \leq 2C \forall t \in [t_1, t_2] \}$$

$$\text{où } C = \max\{2(\mathcal{D} + D), 2(g - 1)\text{diam}M + 4\text{diam}M + 2D\}.$$

**Proposition 5.1.4** *L'ensemble  $E_{t_1, t_2}$  est non vide pour tout  $t_1, t_2$ .*

Prenons  $\omega \in H^1(M, \mathbf{R})$ , telle que l'hyperplan affine défini par l'équation  $\omega = 1$  soit support à  $B(1, \|\cdot\|_s)$  au point

$$\frac{\Theta(\gamma(t_2)) - \Theta(\gamma(t_1))}{\|\Theta(\gamma(t_2)) - \Theta(\gamma(t_1))\|_s}.$$

Remarquons tout d'abord que  $\|\omega\|_s = 1$  donne

$$\langle \omega, \Theta(\gamma(t_2)) - \Theta(\gamma(t_1)) \rangle = \|\Theta(\gamma(t_2)) - \Theta(\gamma(t_1))\|_s.$$

De plus, d'après l'inégalité 5.1

$$\|\Theta(\gamma(t_2)) - \Theta(\gamma(t_1))\|_s \geq |t_2 - t_1| - C.$$

$$\text{et } | \langle \omega, h \rangle | \leq \|h\|_s \forall h \in H_1(M, \mathbf{R}) \text{ donc } \forall t, t' \in \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} | \langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t')) \rangle | & \leq \|\Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t'))\|_s \\ & \leq |t - t'| + C \end{aligned} \quad (5.2)$$

la dernière inégalité tenant à l'inégalité 5.1 et au fait que  $\gamma$  minimise la distance entre deux quelconques de ses points. Mais, si  $t \in [t_1, t_2]$ ,

$$\begin{aligned} \langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t_1)) \rangle & = \langle \omega, \Theta(\gamma(t_2)) - \Theta(\gamma(t_1)) \rangle - \langle \omega, \Theta(\gamma(t_2)) - \Theta(\gamma(t)) \rangle \\ & \geq t_2 - t_1 - C - (t - t_1 + C) \\ & = t - t_1 - 2C. \end{aligned}$$

La proposition est donc démontrée.

**Proposition 5.1.5** *L'ensemble  $E_{t_1, t_2}$  est un compact convexe de  $H^1(M, \mathbf{R})$ .*

En effet,  $E_{t_1, t_2}$  est fermé dans la boule unité de la norme stable sur  $H^1(M, \mathbf{R})$  : si on a une suite  $\omega_n$  dans  $E_{t_1, t_2}$ , tendant en norme vers  $\omega$ , alors

$$\langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t_1)) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \omega_n, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t_1)) \rangle > .$$

D'autre part, si  $\omega_a, \omega_b \in E_{t_1, t_2}$ , on a

$$\begin{aligned} & \langle \frac{\omega_a + \omega_b}{2}, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t_1)) \rangle - |t - t_1| \leq \\ & \frac{1}{2} (\langle \omega_a, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t_1)) \rangle - |t - t_1|) + \\ & \frac{1}{2} (\langle \omega_b, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t_1)) \rangle - |t - t_1|) \end{aligned}$$

d'où la convexité.

De plus il est évident d'après la définition que

$$E_{t_1, t_2} \subset E_{t_3, t_4} \text{ si } [t_3, t_4] \subset [t_1, t_2].$$

Donc, quelques soient  $t_1, t_2, t_3, t_4$  il existe  $t_5, t_6$  tels que  $E_{t_5, t_6}$  est non vide et contenu dans l'intersection de  $E_{t_1, t_2}$  et  $E_{t_3, t_4}$ . On peut alors invoquer le théorème des compacts emboîtés pour affirmer que

$$E_\gamma = \bigcap E_{t_1, t_2} \text{ pour } t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

est non vide, compacte, convexe dans la boule unité de la norme stable sur  $H^1(M, \mathbf{R})$ .

Soit maintenant  $h$  un point-limite de  $R(\gamma)$ . Les faits suivants impliquent le théorème de Bangert :

1. La norme stable de  $h$  est 1.
2. Si  $\omega$  appartient à  $E_\gamma$ , alors l'hyperplan défini par l'équation  $\omega = 1$  est support à  $B(1, \|\cdot\|_s)$ .

**Preuve des faits :** Prenons des suites  $s_n, t_n$  telles que

$$\frac{\Theta(\gamma(t_n)) - \Theta(\gamma(s_n))}{|t_n - s_n|} \rightarrow h$$

quand  $|t_n - s_n| \rightarrow \infty$ . On a, d'après nos hypothèses :

$$\begin{cases} \|\Theta(\gamma(t_n)) - \Theta(\gamma(s_n))\|_s - |t_n - s_n| & \leq C \\ |\langle \omega, \Theta(\gamma(t_n)) - \Theta(\gamma(s_n)) \rangle - |t_n - s_n| & \leq 2C \end{cases}$$

pour tout entier  $n$ , donc

$$\begin{cases} |t_n - s_n|^{-1} \|\Theta(\gamma(t_n)) - \Theta(\gamma(s_n))\|_s - 1 & \leq C |t_n - s_n|^{-1} \\ |\langle \omega, |t_n - s_n|^{-1} [\Theta(\gamma(t_n)) - \Theta(\gamma(s_n))] \rangle - 1| & \leq 2C |t_n - s_n|^{-1} \end{cases}$$

En passant à la limite, on obtient  $\|h\|_s = 1$  et  $\langle \omega, h \rangle = 1$ . Comme  $\omega$  appartient à la boule unité de la norme stable sur  $H^1(M, \mathbf{R})$ , on obtient le deuxième point.

On retrouverait de même le théorème dual (cf. [1]) :

**Théorème 5.1.6 (Bangert)** *Pour toute classe de cohomologie  $\omega$ , il existe une géodésique  $\gamma$  telle que*

$$|\langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(0)) \rangle - t| \leq 2C. \quad (5.3)$$

## 5.2 Sur un théorème de Mañé

R. Mañé a démontré (cf. [12]) le théorème suivant :

**Théorème 5.2.1 (Cohomology theorem)** *Il existe une constante  $K$  telle que pour toute 1-forme  $\omega$  telle que  $[\omega] \in B(1, \|\cdot\|_s)$  et  $\gamma$  géodésique paramétrée dans  $\text{supp}\mathcal{M}_\omega$ , la fonction*

$$f(t) = \int_0^t (\omega(\frac{d\gamma}{dt}) - 1) dt$$

*est  $K$ -Lipschitzienne pour la distance sur  $\pi(\text{supp}\mathcal{M}_\omega)$  vu comme sous-espace métrique de  $M$ .*

Voici une preuve de ce théorème basée sur l'inégalité 5.1, dans le cas où  $\gamma$  est une géodésique fermée et où  $\omega$  est une 1-forme harmonique. Démontrons au préalable la

**Proposition 5.2.2** *Soit  $\omega \in B(1, \|\cdot\|_s)$  et  $\gamma$  géodésique dans  $\mathcal{M}_\omega$ . On a, pour tous  $s, t \in \mathbf{R}$ ,*

$$\langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(s)) \rangle \geq |t - s| - 2C.$$

**Remarque 5.2.3** *Cette proposition ne suppose pas  $\gamma$  fermée, ni  $\omega$  harmonique.*

**Remarque 5.2.4** *On sait déjà (voir l'équation 5.2) que*

$$\langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(s)) \rangle \leq |t - s| + C. \quad (5.4)$$

Commençons par les cas où  $\gamma$  est  $\mu$ -générique,  $\mu$  étant une mesure ergodique dans  $\mathcal{M}_\omega$ . Supposons que  $\gamma$  mette en défaut le théorème. Il existe alors  $s, t \in \mathbf{R}$  tels que

$$\langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(s)) \rangle < |t - s| - 2C.$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $\alpha(\epsilon/2, s, t) > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in T_1M$ ,

$$\left( d_{T_1M}(x, y) \leq \alpha\left(\frac{\epsilon}{2}, s, t\right) \right) \Rightarrow \left( d_{T_1M}(\mathcal{G}_{t-s}(x), \mathcal{G}_{t-s}(y)) \leq \frac{\epsilon}{2} \right). \quad (5.5)$$

La géodésique  $\gamma$  est récurrente, donc il existe  $s', s''$  tels que  $\gamma(s')$  et  $\gamma(s'')$  soient distants de moins de  $\alpha(\epsilon, s, t)$  de  $\gamma(s)$  et limitent un intervalle  $I$  transverse au flot géodésique, contenant  $\gamma(s)$ . Appelons  $R$  le voisinage tubulaire du segment géodésique  $[\gamma(s), \gamma(t)]$  dont les côtés sont

$$I, [\gamma(s'), \gamma(s' - s + t)], [\gamma(s''), \gamma(s'' - s + t)],$$

et un intervalle  $I'$  reliant  $\gamma(s' - s + t)$  à  $\gamma(s'' - s + t)$  en passant par  $\gamma(t)$ . Alors, d'après 5.5 on peut choisir  $I'$  de longueur plus petite que  $\epsilon$ . De la sorte tout segment géodésique allant de  $I$  à  $I'$  et contenu dans  $R$  a une longueur comprise entre  $|t - s| - \epsilon$  et  $|t - s| + \epsilon$  (cf. figure 5.1). D'après le théorème ergodique de Birkhoff, et par généralité de  $\gamma$ , on a

$$\mu(R) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N |t_i - s_i|$$

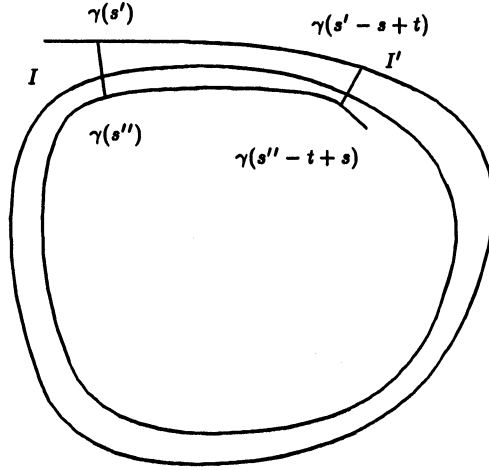


FIG. 5.1 - la boîte de flot  $R$

où les  $[s_i, t_i]_{i=1 \dots N}$  sont les segments successifs de  $\gamma([0, T])$  contenus dans  $R$ . Remarquons tout d'abord que  $\gamma$  ne peut entrer et sortir de  $R$  que par les côtés  $I$  et  $I'$ , sinon elle se recouperait, contredisant le théorème 2.1.2. On a alors, pour tout  $i$ ,

$$\begin{aligned} & | \langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(s)) \rangle - \langle \omega, \Theta(\gamma(t_i)) - \Theta(\gamma(s_i)) \rangle | \\ & \leq | \langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t_i)) \rangle - \langle \omega, \Theta(\gamma(s)) - \Theta(\gamma(s_i)) \rangle | \\ & \leq \|\omega\|_s (\|\Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(t_i))\|_s + \|\Theta(\gamma(s)) - \Theta(\gamma(s_i))\|_s). \end{aligned}$$

Soit une constante  $A$  telle que

$$\|\Theta(x) - \Theta(y)\|_s \leq A \bar{d}(x, y) \quad \forall x, y \in \bar{M}.$$

Il existe une telle constante car, une fois acquis l'inégalité de Burago, il suffit de trouver  $A$  sur un compact de  $\bar{M}$ . Ainsi

$$| \langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(s)) \rangle - \langle \omega, \Theta(\gamma(t_i)) - \Theta(\gamma(s_i)) \rangle | \leq 2A \|\omega\|_s \epsilon \quad (5.6)$$

puisque  $\gamma(t_i)$  et  $\gamma(t)$  (resp.  $\gamma(s_i)$  et  $\gamma(s)$ ) sont situés sur le segment  $I'$  (resp.  $I$ ), de longueur inférieure à  $\epsilon$ . Rappelons que  $\|\omega\|_s = 1$ . Par suite :

$$\langle \omega, \Theta(\gamma(t_i)) - \Theta(\gamma(s_i)) \rangle \geq |t_i - s_i| - 2C + 2A\epsilon + \epsilon. \quad (5.7)$$

**Lemme 5.2.5** Pour tout  $T \in \mathbf{R}$ , on a

$$\langle \omega, \Theta(\gamma(T)) - \Theta(\gamma(0)) \rangle \leq T - N(C - (2A + 1)\epsilon)$$

où  $N$  est le nombre de segments successifs de  $\gamma([0, T])$  contenus dans  $R$ .

En effet,

$$\langle \omega, \Theta(\gamma(T)) - \Theta(\gamma(0)) \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^N \langle \omega, \Theta(\gamma(t_i)) - \Theta(\gamma(s_i)) \rangle + \sum_{i=2}^N \langle \omega, \Theta(\gamma(s_i)) - \Theta(\gamma(t_{i-1})) \rangle + \\ \langle \omega, \Theta(\gamma(s_1)) - \Theta(\gamma(0)) \rangle + \langle \omega, \Theta(\gamma(T)) - \Theta(\gamma(t_N)) \rangle .$$

En additionnant 5.2 et 5.7  $N$  fois, on obtient le lemme.

D'autre part, si  $T$  est assez grand, le théorème de Birkhoff implique :

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N |t_i - s_i| \geq \frac{1}{2} \mu(R) \text{ d'où}$$

$$\frac{N}{T} \geq \frac{\mu(R)}{2(t - s + 2A\epsilon)} .$$

Or, d'après le lemme ci-dessus,

$$\frac{1}{T} \langle \omega, \Theta(\gamma(T)) - \Theta(\gamma(0)) \rangle \leq 1 - \frac{N}{T} (C - (2A + 1)\epsilon) \\ \leq 1 - \frac{\mu(R)(C - (2A + 1)\epsilon)}{2(t - s + (2A + 1)\epsilon)} .$$

Le dernier terme est strictement inférieur à 1 si on a choisi  $\epsilon$  plus petit que  $C/(2A+1)$ , mais le théorème ergodique, appliqué cette fois à  $\omega$ , implique :

$$\frac{1}{T} \langle \omega, \Theta(\gamma(T)) - \Theta(\gamma(0)) \rangle \rightarrow \langle \omega, [\mu] \rangle = 1$$

d'où une contradiction, la preuve est faite.

A présent supposons seulement que  $\gamma$  est une géodésique quelconque dans le support d'une mesure ergodique  $\mu \in \mathcal{M}_\omega$ . Soit  $\gamma'$  une géodésique  $\mu$ -générique. Soient  $s, t \in \mathbf{R}$  et  $\epsilon > 0$ . Soit  $\alpha(\epsilon, s, t)$  défini par 5.5. Par densité de  $\gamma'$  dans le support de  $\mu$  il existe  $s' \in \mathbf{R}$  tel que

$$d_{T^1M}(\gamma'(s'), \gamma(s)) \leq \alpha(\epsilon, s, t).$$

Quitte à reparamétriser  $\gamma'$  on peut supposer que  $s' = s$ . On a alors (cf. 5.6) :

$$\langle \omega, \Theta(\gamma(t)) - \Theta(\gamma(s)) \rangle \geq \\ \langle \omega, \Theta(\gamma'(t)) - \Theta(\gamma'(s)) \rangle - 2A\|\omega\|_s \epsilon \\ \geq t - s - 2C - 2A\|\omega\|_s \epsilon .$$

Comme  $\epsilon$  est arbitraire, la conclusion de la proposition suit.

Pour nous affranchir de l'hypothèse d'ergodicité de  $\mu$ , remarquons que l'ensemble des géodésiques vérifiant 5.3 est un fermé de  $T^1M$ . L'ensemble des géodésiques génériques de mesures ergodiques est dense dans l'ensemble des géodésiques. Toute géodésique incluse dans  $\mathcal{M}_\omega$  est limite de géodésiques génériques de mesures ergodiques, d'où la proposition.

**Preuve du théorème 5.2.1.** Soient deux points sur  $\gamma$ , l'un - quitte à reparamétriser - étant l'origine, l'autre ayant pour paramètre  $t$ .

**Premier cas :**  $d_M(\gamma(0), \gamma(t)) \geq r_{\text{inj}}$  où  $r_{\text{inj}}$  est le rayon d'injectivité. La proposition 5.2.2 nous assure que

$$|f(t) - f(0)| = |f(t)| \leq 2C .$$

$$\text{On a alors } \frac{|f(t) - f(0)|}{d_M(f(t), f(0))} \leq \frac{2C}{r_{\text{inj}}} \quad (5.8)$$

**Deuxième cas :**  $d_M(\gamma(0), \gamma(t)) = \epsilon \leq r_{\text{inj}}$ .

Prenons un chemin géodésique  $c$  de longueur  $\epsilon$  reliant  $\gamma(0)$  à  $\gamma(t)$ . On obtient ainsi deux courbes fermées  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ,  $\gamma_1$  consistant en la réunion de  $\gamma([0, t])$  et  $c([0, \epsilon])$ ,  $\gamma_2$  en la réunion de  $c([0, \epsilon])$  et  $\gamma([t, l_g(\gamma)])$ . Nous utilisons donc ici l'hypothèse selon laquelle  $\gamma$  est fermée. On a

$$\begin{cases} [\gamma_1] + [\gamma_2] = [\gamma] \\ l_g(\gamma_1) + l_g(\gamma_2) = l_g(\gamma) + 2\epsilon \end{cases} \quad (5.9)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t (\omega(\frac{d\gamma}{dt}) - 1) dt \\ &= \int_{\gamma_1} \omega - \int_0^\epsilon \omega(\frac{dc}{dt}) dt - l_g(\gamma_1) + \epsilon \end{aligned} \quad (5.10)$$

Les deux lemmes suivant nous sont nécessaires.

**Lemme 5.2.6** *Il existe une constante  $K_1$  telle que pour toute 1-forme harmonique  $\omega$  telle que  $[\omega] \in B(1, \|\cdot\|_s)$  et tout point  $(x, v)$  de  $T^1M$  on a  $|\omega_x(v)| \leq K_1$ .*

Par l'isomorphisme entre  $H^1(M, \mathbf{R})$  et l'espace des 1-formes harmoniques, l'ensemble des  $\omega$  vérifiant les hypothèses du lemme est homéomorphe à  $B(1, \|\cdot\|_s)$  qui est compact, d'où l'existence de  $K_1$ .

**Lemme 5.2.7** *Pour toute courbe  $\delta$  fermée  $C^1$  par morceaux, et pour toute  $\omega$  telle que  $[\omega] \in B(1, \|\cdot\|_s)$ , on a*

$$|\int_\delta \omega| \leq l_g(\delta).$$

En effet, la classe  $[\omega]$  étant support à  $\mathcal{S}_1$ , on a

$$| \langle [\omega], [\delta] \rangle | \leq \| [\delta] \|_s \leq l_g(\delta).$$

Des lemmes 5.2.6 et 5.2.7 on déduit, en utilisant l'hypothèse d'harmonicité de  $\omega$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\epsilon \omega(\frac{dc}{dt}) dt &\leq K_1 \epsilon \text{ et} \\ \int_{\gamma_1} \omega - l_g(\gamma_1) &\leq 0. \end{aligned}$$

En injectant ceci dans 5.10, on obtient

$$f(t) \leq (1 - K_1)\epsilon. \quad (5.11)$$

Il reste à démontrer une inégalité dans l'autre sens. De 5.9 on déduit

$$\langle [\omega], [\gamma_1] \rangle + \langle [\omega], [\gamma_2] \rangle = \langle [\omega], [\gamma] \rangle = l_g(\gamma) \quad (5.12)$$

la dernière égalité tenant au fait que  $\gamma$  est dans  $\text{supp}\mathcal{M}_\omega$ . En soustrayant 5.12 à la première inégalité de 5.9 on arrive à

$$l_g(\gamma_1) - \langle [\omega], [\gamma_1] \rangle + l_g(\gamma_2) - \langle [\omega], [\gamma_2] \rangle = 2\epsilon.$$

Or d'après le lemme 5.2.7 on a

$$\int_{\gamma_1} \omega \leq l_g(\gamma_1)$$

$$\int_{\gamma_2} \omega \leq l_g(\gamma_2)$$

$$\text{De là on tire } \int_{\gamma_1} \omega - l_g(\gamma_1) \geq -2\epsilon$$

puis, en comparant avec 5.10,

$$f(t) \geq -(1 + K_1)\epsilon$$

ce qui conclut la preuve du théorème, avec  $K = \max\{1 + K_1, \frac{2C}{r_{\text{inj}}}\}$ .



# Bibliographie

- [1] V. Bangert *Minimal geodesics*,  
Ergodic Theory & Dynamical Systems **10**, 263-286 (1989).
- [2] V. Bangert, *Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps*,  
Calculus of variations **2** 49-63 (1994).
- [3] D. Burago, *Periodic metrics*, Advances in Soviet mathematics, **9**, 205-210 (1992).
- [4] P. Buser, *The geometry and spectra of compact Riemann surfaces*,  
Birkhäuser, Boston (1992).
- [5] J. Delgado-Gómez, *Vertices and points of differentiability of the action function of a Lagrangian system*, preprint.
- [6] H. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*,  
Graduate Texts in Mathematics **71**, Springer-Verlag (2<sup>ième</sup> édition, 1992).
- [7] A. Fathi, *Bangert's norm*, manuscrit non publié.
- [8] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*,  
Astérisque, **66-67**, (2<sup>ième</sup> édition, 1991).
- [9] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, CEDIC, Paris, (1981).
- [10] G. Levitt, *Feuilletages des surfaces*, Thèse de doctorat d'état, Paris 7 (1983).
- [11] R. Mañé, *On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems*,  
Nonlinearity **5**, 623-638 (1992).
- [12] R. Mañé, *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*, preprint.
- [13] J. N. Mather, *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*, Math. Z. **207**, 169-207 (1991).
- [14] G. McShane, I. Rivin, *Simple curves on hyperbolic tori*,  
C.R. Acad. Sci. Paris, **320**, 1523-1528 (1995).
- [15] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton (1970).
- [16] Pólya-Szëgo *Problems and theorems in analysis*,  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York (1972).
- [17] K. Strebel, *Quadratic differentials*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1984).