



**HAL**  
open science

# Une contribution à l'observation et à l'estimation des systèmes linéaires

Yang Tian

► **To cite this version:**

Yang Tian. Une contribution à l'observation et à l'estimation des systèmes linéaires. Autre. Ecole Centrale de Lille, 2010. Français. NNT : 2010ECLI0025 . tel-00590376

**HAL Id: tel-00590376**

**<https://theses.hal.science/tel-00590376>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

No d'ordre : 

1	4	9
---	---	---

**ÉCOLE CENTRALE DE LILLE**

**THÈSE**

présentée en vue  
d'obtenir le grade de

**DOCTEUR**

en

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

par

**TIAN Yang**

Doctorat délivré par l'École Centrale de Lille

# Une contribution à l'observation et à l'estimation des systèmes linéaires

Soutenue le 8 décembre 2010 devant le jury d'examen :

Rapporteur	M. Gildas Besançon	Professeur à l'INPG, Grenoble
Rapporteur	M. Hervé Guéguen	Professeur à Supélec Rennes
Membre	M. Mamadou Mboup	Professeur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne
Membre	Mme Rosane Ushirobira	Maître de Conférences à l'Université de Bourgogne
Membre	M. Vincent Cocquempot	Professeur à l'Université Lille1
Directeur	M. Wilfrid Perruquetti	Professeur à l'École Centrale de Lille
Co-directeur	M. Thierry Floquet	Chargé de recherche CNRS au LAGIS

Thèse préparée dans le Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal  
L.A.G.I.S., CNRS FRE 3303 - École Centrale de Lille  
École Doctorale SPI 072

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>iii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Estimation de l'état</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.1.1 Problème de l'observation . . . . .	8
1.1.2 Conception d'observateur . . . . .	8
1.2 Observabilité . . . . .	9
1.2.1 Systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps . .	10
1.2.2 Systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps . . .	11
1.2.3 Systèmes dynamiques hybrides . . . . .	12
1.2.4 Systèmes linéaires à commutations en temps continu . . .	13
1.3 Synthèse d'observateurs . . . . .	18
1.3.1 Observateur pour les systèmes LTI : . . . . .	19
1.3.2 Observateurs pour les systèmes LTV : . . . . .	19
1.3.3 Observateurs pour les systèmes SLC : cas de l'état discret connu . . . . .	21
1.3.4 Observateurs pour des systèmes SLC : cas de l'état discret inconnu . . . . .	21
1.4 Estimation par une approche algébrique . . . . .	23
1.4.1 Estimation de paramètres . . . . .	25
1.4.2 Dérivation numérique . . . . .	27
1.5 Conclusion . . . . .	30

<b>Chapitre 2 Systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	32
2.2 Estimation d'état : approche algébrique . . . . .	32
2.3 Exemple et Implémentation . . . . .	41
2.4 Conclusion . . . . .	49
<b>Chapitre 3 Systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps</b>	<b>57</b>
3.1 Introduction . . . . .	58
3.2 Estimation d'état . . . . .	59
3.3 Exemple . . . . .	68
3.3.1 Approche algébrique . . . . .	68
3.3.2 Simulation . . . . .	70
3.4 Comparaison avec l'observateur de type Kalman . . . . .	71
3.5 Conclusion . . . . .	74
<b>Chapitre 4 Systèmes linéaires à commutation en temps continu</b>	<b>75</b>
4.1 Introduction . . . . .	76
4.2 Estimation de la fonction de commutation . . . . .	76
4.2.1 Approche algébrique . . . . .	78
4.2.2 Exemples . . . . .	87
4.3 Estimation de l'état . . . . .	94
4.4 Conclusion . . . . .	97
<b>Conclusion générale et Perspectives</b>	<b>99</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>103</b>

# Table des figures

1.1	Observateur : la partie essentielle dans la commande. . . . .	8
2.1	Cas 1 : Valeurs réelles et valeurs estimées (sans bruit). . . . .	50
2.2	Cas 1 : Valeurs réelles et valeurs estimées (avec le bruit blanc). . . . .	51
2.3	Cas 2 : Valeurs réelles et valeurs estimées (sans bruit). . . . .	52
2.4	Valeur réelle et estimée de l'état $x_1$ et $x_2$ . . . . .	53
2.5	Erreur d'estimation sur l'état $x_1$ et $x_2$ . . . . .	54
2.6	Perturbation extérieure $\pi(t)$ et son estimation $\pi_e(t)$ . . . . .	55
3.1	Valeurs réelles et estimées : sans bruit ( $\tau = a_0t + a_1$ ). . . . .	71
3.2	Valeurs réelles et estimées : avec le bruit blanc ( $\tau = a_0t + a_1$ ). . . . .	71
3.3	Valeurs réelles et estimées : sans bruit ( $\tau = b_0 \sin(b_1t) + b_2$ ). . . . .	71
3.4	Valeurs réelles et estimées : avec le bruit blanc ( $\tau = b_0 \sin(b_1t) + b_2$ ). . . . .	72
3.5	Valeurs réelles et estimées : méthode développée au sein de l'équipe Alien et observateur de type Kalman sans bruit ( $\tau = a_0t + a_1$ ). . . . .	73
3.6	Valeurs réelles et estimées : méthode développée au sein de l'équipe Alien et observateur de type Kalman avec le bruit blanc ( $\tau = a_0t + a_1$ ). . . . .	73
3.7	Valeurs réelles et estimées : méthode développée au sein de l'équipe Alien et observateur de type Kalman sans bruit ( $\tau = b_0 \sin(b_1t) + b_2$ ). . . . .	73
3.8	Valeurs réelles et estimées : méthode développée au sein de l'équipe Alien et observateur de type Kalman avec le bruit blanc ( $\tau = b_0 \sin(b_1t) + b_2$ ). . . . .	74
4.1	Circuit du convertisseur Buck-Boost. . . . .	88
4.2	Etat $x$ . . . . .	91
4.3	Identification de l'instant de commutation $t_c$ . . . . .	92
4.4	Circuit du convertisseur statique $DC/DC$ . . . . .	92
4.5	Valeurs réelles et estimées : état $x_1$ . . . . .	96
4.6	Valeurs réelles et estimées : état $x_2$ . . . . .	96
4.7	Sous-système activé réel $S_o$ et estimé $S_e$ . . . . .	96
4.8	Estimateur utilisé. . . . .	97



# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS FRE CNRS 3303), au sein de l'équipe SyNeR (Systèmes Non-linéaires et à Retard) sous la direction de Monsieur Wilfrid Perruquetti, Professeur à l'École Centrale de Lille et de Monsieur Thierry Floquet, Chargé de recherche CNRS au LAGIS.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur Wilfrid Perruquetti et Monsieur Thierry Floquet pour leurs patientes et rigoureuses directions et leurs conseils et soutien tout au long de ces trois années de thèse. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance.

Qu'il me soit ensuite permis de remercier très vivement Monsieur le Professeur Gildas Besançon et Monsieur le Professeur Hervé Guéguen pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être les rapporteurs de ce mémoire. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont montré pour mes travaux.

Qu'il me soit permis de remercier Madame Rosane Ushirobira, Maître de Conférences à l'Université de Bourgogne, Monsieur Vincent Cocquempot, Professeur à l'Université Lille 1 et Monsieur Mamadou Mboup, Professeur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membre du jury de ma thèse.

Je tiens également à remercier Monsieur Jean-Pierre Richard, Professeur à l'École Centrale de Lille, pour m'avoir encouragé tout au long de mes études et pour ses judicieux conseils.

C'est avec sympathie que je souhaite témoigner ma reconnaissance à Monsieur Lotfi Belkoura, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Technologies, Monsieur Alexandre Kruszewski, Maître de Conférences à l'École Centrale de Lille et Monsieur Laurentiu Hetel, Chargé de recherche CNRS au LAGIS, pour leur bon sens, leurs conseils avisés, ainsi que l'ensemble de leurs idées qu'ils m'ont fait partager avec bonne humeur.

Je n'oublie pas non plus les personnes de mon bureau qui m'ont supporté durant ces années, une pensée particulière à Christophe Fiter, Romain Delpoux, Emmanuel Bernuau et Bo Zhang, mais aussi à Michael Defoort, Romain Bourdais,

## *Remerciements*

---

Samer Riachy et Wenjuan JIANG pour leurs encouragements réguliers et les moments agréables passés ensemble.

A mes parents sans qui je n'aurais pas pu faire mes études en France.

A tous mes amis qui m'ont motivé pendant mes études et m'ont permis d'achever mon travail dans les meilleures conditions.

Je ne saurais terminer ce remerciements sans adresser ma reconnaissance la plus sincère aux autres Professeurs du LAGIS : M. Vasseur, M. Christov, M. Colot, M. Borne, M. Vanheeghe, M. Craye, Mme. Dauphin, M. Sueur et M. Toguyeni, pour leurs encouragements et leur aide.

# Introduction générale

## Contexte

Ce travail de doctorat a été réalisé au sein de l'équipe SyNeR du LAGIS. Le sujet de cette recherche entre dans le cadre du projet ALIEN<sup>1</sup> (ALgèbre pour Identification et Estimation Numériques), soutenu par l'INRIA Lille-Nord Europe. C'est un projet multi-site (Lille, Nancy, Reims et Paris) composé de 12 chercheurs permanents, dont 4 proviennent du LAGIS. Les objectifs de ce projet, démarré en Juin 2004, sont de favoriser de nouvelles techniques algébriques qui fournissent des formules explicites pour l'identification rapide des paramètres d'un modèle ou l'estimation de variables non mesurées, particulièrement dans le domaine de l'automatique et du traitement du signal et des images. Cette méthode possède la propriété d'être non asymptotique, ce qui est un avantage significatif pour des applications temps-réel. La principale préoccupation d'ALIEN est l'estimation utilisant des mesures bruitées. La plupart de ces recherches sont généralement faites dans un contexte probabiliste qui implique une bonne connaissance des propriétés statistiques du bruit. Le projet, lui, adopte un nouveau point de vue qui permet de s'affranchir de cette connaissance et qui utilise un certain nombre d'outils mathématiques de nature algébrique :

- l'algèbre différentielle<sup>2</sup> qui, pour les équations différentielles, joue un rôle similaire à l'algèbre commutative pour les équations algébriques,
- la théorie des modules [49], c'est-à-dire l'algèbre linéaire sur des anneaux qui ne sont pas nécessairement commutatifs,
- le calcul opérationnel.

L'identification des systèmes linéaires (au sens de l'automatique) qui utilise la théorie algébrique des modules et le calcul opérationnel permet, peut-être pour la première fois, de travailler en temps réel, c'est-à-dire d'identifier et commander simultanément, ce qui est souvent indispensable en pratique. La généralisation

---

<sup>1</sup>website <http://www.inria.fr/recherche/equipes/alien.fr.html>

<sup>2</sup>L'algèbre différentielle a été développée aux États-Unis à partir de 1920 pour traiter et comprendre les équations différentielles algébriques, de la même manière que l'algèbre linéaire permet de formaliser les problèmes relevant du théorème de superposition et s'écrivant à l'aide d'équations linéaires. Elle a été introduite en automatique en France en 1985 par Michel Fliess ([45],[46]) à propos du problème de l'inversion entrée-sortie des systèmes non linéaires. Cette nouvelle approche est déjà utilisée dans de nombreux domaines de la théorie du contrôle, par exemple : le découplage, le rejet de perturbations, la poursuite de modèle et la linéarisation.

au non linéaire repose sur une solution, facile à mettre en œuvre, d'un problème classique, à savoir l'estimation des dérivées d'un signal bruité. Les techniques développées dans le projet ALIEN sont donc algébriques, non asymptotiques (l'estimation exacte est obtenue en temps fini) et déterministes. Des résultats prometteurs ont déjà été obtenus dans les domaines de l'estimation des paramètres des systèmes en boucle fermée [67] ou des systèmes linéaires de dimension infinie [112], de l'estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps [132] ou de l'estimation en ligne de retards [13]. Ces travaux démontrent qu'on peut alors non seulement identifier les paramètres inconnus, mais aussi estimer l'état. Cette approche peut être aussi appliquée aux systèmes non linéaires avec entrée inconnue [9]. Ces techniques permettent d'aborder, sous un angle nouveau, le diagnostic [61], c'est-à-dire l'analyse des pannes, qui peut être effectué en boucle fermée, en commandant et identifiant le système.

L'un de mes objectifs de ce mémoire est d'appliquer les outils développés dans le projet ALIEN aux systèmes linéaires à paramètres invariant (LTI) ou variant dans le temps (LTV) et aux systèmes continus à commutation (SLC) pour estimer les variables d'état ou certains paramètres.

## Problématique

Les équations différentielles décrivant les phénomènes physiques sont souvent mal connues. Par ailleurs, l'information diffusée par un certain signal peut être perturbée par des bruits. Un autre problème pouvant se présenter est que l'état n'est pas entièrement accessible à la mesure pour des raisons techniques ou économiques (construction, positionnement et coût des capteurs).

Afin de remédier à ces inconvénients, un observateur ou reconstituteur d'état, qui donne une estimation de l'état complet, à partir des mesures et des entrées, doit alors être utilisé. Un observateur est un système dynamique qui peut également servir à la surveillance des systèmes, en particulier la détection de panne, ou même à l'identification de paramètres, en considérant un système augmenté, avec ces paramètres comme nouvelles variables d'état. Donc, la question de la synthèse d'observateurs constitue un grand domaine d'intérêt et d'étude.

Pour les systèmes linéaires stationnaires, un observateur a été introduit pour la première fois par Luenberger [94] conduisant à l'estimation asymptotique de l'état. Dans le cadre des systèmes linéaires avec bruit, où apparaissent des phénomènes stochastiques, un filtre de Kalman peut être conçu [82, 83]. La problématique d'observabilité liée aux systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps est traitée par L. M. Silverman et H. E. Meadows [120], et la conception d'observateur des systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps a été successivement étudiée, entre autres, par J. Trumpf [136], G. Bara [8] et J. Daafouz [31].

---

En fait, dans la nature, la majorité des systèmes complexes réalistes mélangeant des phénomènes de nature continue et événementielle ne peuvent pas être représentés par un modèle issu de la catégorie système continu ou de la catégorie système discret. Donc, ces dernières années, plusieurs recherches en été menées dans le domaine de la modélisation des systèmes sous forme de systèmes dynamiques hybrides (SDH). La notion de système hybride permet la prise en compte à la fois des variables continues et des variables discrètes, ainsi que leur interaction.

L'observation des systèmes hybrides pose des problèmes supplémentaires car, par définition, ceux-ci commutent entre plusieurs structures. Il faut donc parvenir à évaluer dans quelle structure évolue le système et ceci avant qu'il n'ait commuté dans une nouvelle structure. Cela implique que l'observation et l'estimation doivent être réalisées de manière très rapide.

Ces dernières années, diverses recherches se sont focalisées sur l'étude et l'analyse d'une classe particulière de systèmes dynamiques hybrides : les systèmes à commutation, en raison de son importance tant sur le point de vue théorique que pratique. Des résultats importants ont été obtenus pour la stabilité [2, 23, 25, 96, 138], la stabilisation [101, 105, 139, 142], la poursuite [24] et la commandabilité [126, 140] des systèmes hybrides.

La définition de l'observabilité des systèmes à commutations ne peut pas être prise de façon directe des systèmes linéaires parce que certaines complications apparaissent qui doivent être traitées au cas par cas. Par exemple, il faut distinguer le cas où l'état discret est disponible, du cas où l'état discret est totalement inconnu, ce qui est le cas dans notre travail. Dans le premier cas, il existe des conditions données concernant l'observabilité de l'état continu [124] et de telles conditions ne dépendent pas de l'entrée de commande. Évidemment, quand l'état discret est connu, d'après la théorie des systèmes linéaires, l'entrée n'a pas d'influence sur l'observabilité du système. Dans ce cas là, l'analyse d'observabilité est considérablement simplifiée ainsi que la conception d'observateurs [4]. Dans le cas où l'état discret est inconnu, l'observabilité a été principalement analysée lorsque l'entrée de commande est égale à zéro [137]. Certaines conditions ont été déduites selon lesquelles l'ensemble d'état (discret et continu) est observable. À la différence des résultats classiques pour les systèmes linéaires, l'entrée de commande joue alors un rôle important pour l'observabilité des états discrets et des états continus [117]. L'observabilité de l'état discret avec l'entrée de commande  $u \neq 0$  quand l'état discret est inconnu a été étudiée dans [12]. Pour ce faire, les notions d'observabilité forte et d'identifiabilité ont été introduites. Puisque l'analyse d'observabilité n'a pas encore été complètement résolue, la conception d'observateurs pour les systèmes à commutation semble toujours être un problème ouvert.

Il existe plusieurs équipes de recherche en France très dynamiques dans ce domaine :

- Le travail de A. Birouche [20] qui s'intéresse particulièrement aux classes de systèmes hybrides décrits par un ensemble fini de sous-systèmes linéaires

- en temps discret et une loi de commutation a été réalisé dans le centre de recherche en automatique de Nancy (CRAN) ;
- Le travail de S. Chaib [26] a été réalisé au sein de l'équipe d'automatique du Laboratoire Vision et Robotique (LVR). Dans ses travaux [28] et [27], des approches algébriques et géométriques ont été présentées ;
  - L'Équipe Commande de Systèmes (ECS) de l'ENSEA dirigée par le professeur J-P. Barbot a visé le problème d'observateur à modes glissants et à grand gain [9], [10], [113], [143] ;
  - L'Équipe de SYStème non linéaire et COmplexité (SYSCO) du Laboratoire Gipsa-lab s'intéresse particulièrement à l'observation adaptative, à grand gain et l'estimation d'états de systèmes complexes (par exemple : système à commutation) [18], [19] ;
  - Les activités de recherche de l'équipe d'Automatique et Systèmes Hybrides du Laboratoire de CReSTIC à l'Université de Reims Champagne-Ardenne s'orientent plutôt vers la commande, la modélisation, la vérification, l'observation, le diagnostic et la supervision des systèmes hybrides [43], [74] ;
  - Les travaux du Laboratoire LAMIH portent sur le problème de la synthèse d'observateurs, de l'identification paramétrique et du diagnostic pour des différentes classes de SDH (systèmes à commutations avec ou sans saut, avec ou sans mémoire discrète, systèmes autonomes, ainsi que des systèmes avec des dynamiques continues et des dynamiques discrètes) et avec applications aux convertisseurs multicellulaire [16], [36], [99] ;
  - L'Équipe SyNeR du Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS) s'est penchée sur ce problème plutôt avec un point de vue algébrique, [59], [60], [128], [129], [131], [132], et le présent mémoire fait partie de cet investissement ;
  - ...

## Objectif de la thèse

Le travail ici présenté, consiste à développer des techniques d'estimation d'état basées sur les méthodes développées au sein de l'équipe ALIEN pour des systèmes linéaires dont les paramètres sont invariant ou variant dans le temps, et pour une classe particulière de systèmes dynamiques hybrides<sup>3</sup> : les systèmes linéaires à commutation en temps continu, qui peuvent être considérés comme une abstraction de haut niveau d'un système hybride, dans lequel la dynamique discrète est omise. Un système à commutation est composé d'une famille de sous-systèmes dynamiques et d'une règle, appelée loi de commutation, qui orchestre la commutation entre eux (voir [91, 125] pour plus de détails).

Notre approche est bâtie autour de l'algèbre différentielle, le calcul opérationnel et la théorie des distributions. Elle conduit à des algorithmes rapides, de

---

<sup>3</sup>La principale motivation pour étudier les SDH vient en partie du fait que ces systèmes servent comme modèle à une classe très variée de processus.

---

faible complexité : les solutions sont données par des formules explicites, avec une mise en œuvre simple, utilisant des outils de l'analyse numérique classique. Contrairement aux méthodes usuelles, les estimateurs développés dans ce mémoire sont "non asymptotiques". Dans de nombreux secteurs d'application, le paramètre temps de réponse est crucial. Ici, les calculs sont faits en même temps que tourne l'application : on vise le "temps réel".

## Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé selon quatre chapitres :

**Chapitre 1 :** Dans un premier temps, nous faisons un l'état de l'art du problème général de l'observation, des résultats classiques d'observabilité et de synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires invariant dans le temps, des principaux travaux des dernières années pour les systèmes linéaires dont les paramètres varient dans le temps ainsi que de plusieurs approches pour les principales classes de systèmes hybrides, notamment les systèmes linéaires à commutation. Puis, nous rappelons les techniques algébriques d'estimation rapide, qui seront utilisées par la suite, et ses applications, surtout l'estimation de paramètres et la dérivation numérique sont détaillées.

**Chapitre 2 :** Dans un deuxième temps, nous construisons un estimateur appliquant les outils développés dans le projet ALIEN et conduisant à une expression générale pour les systèmes linéaires stationnaires. La comparaison entre notre approche et l'observateur de Luenberger est également réalisée. Un exemple de moteur à courant continu sujet à des perturbations extérieures inconnues est donné.

**Chapitre 3 :** Dans un troisième temps, les méthodes sont généralisées pour la classe des systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps. On teste la sensibilité de notre estimateur par rapport aux bruits. A la fin de ce chapitre, la méthode est comparée avec l'observateur de type Kalman pour les systèmes LTV.

**Chapitre 4 :** Dans un dernier temps, nous présentons notre contribution concernant l'estimation en temps réel de l'instant de commutation et de l'état (l'état discret et l'état continu) pour les systèmes linéaires à commutation en temps continu. D'abord, l'estimation de l'instant de commutation basée sur l'approche algébrique est présentée. Premièrement, on considère le cas le plus simple : une commutation entre deux sous-systèmes. Tout l'état du système est supposé mesurable et une expression formelle de l'estimation de l'instant de commutation  $t_c$  en fonction d'intégrales de la sortie et de l'entrée est donnée. Deuxièmement, la méthode est généralisée au cas de  $Q$  sous-systèmes et de  $S$  commutations. Troisièmement, la méthode est étendue aux systèmes avec état partiellement mesuré. Enfin, en combinant les résultats de l'estimation d'état pour les systèmes LTI par

l'approche algébrique présentée dans le Chapitre 2 et de la détection de l'instant de commutation en temps réel, nous présentons la démarche principale de l'estimation en temps réel du mode courant et de l'état continu des systèmes linéaires à commutation. Des simulations illustrent les techniques proposées.

Enfin, nous donnons une conclusion générale et quelques perspectives.

# Chapitre 1

## Estimation de l'état

*Measure what is measurable and make it measurable what is not so.*

— GALILEO GALILEI

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
1.1.1	Problème de l'observation	8
1.1.2	Conception d'observateur	8
<b>1.2</b>	<b>Observabilité</b>	<b>9</b>
1.2.1	Systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps	10
1.2.2	Systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps	11
1.2.3	Systèmes dynamiques hybrides	12
1.2.4	Systèmes linéaires à commutations en temps continu	13
<b>1.3</b>	<b>Synthèse d'observateurs</b>	<b>18</b>
1.3.1	Observateur pour les systèmes LTI	19
1.3.2	Observateurs pour les systèmes LTV	19
1.3.3	Observateurs pour les systèmes SLC : cas de l'état discret connu	21
1.3.4	Observateurs pour des systèmes SLC : cas de l'état discret inconnu	21
<b>1.4</b>	<b>Estimation par une approche algébrique</b>	<b>23</b>
1.4.1	Estimation de paramètres	25
1.4.2	Dérivation numérique	27
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>30</b>

---

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Problème de l'observation

Les processus physiques sont très souvent représentés par des modèles décrits sous la forme suivante (représentation d'état explicite) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x(t), u(t)) \\ y &= h(x(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y \in \mathbb{R}^d$  dénote le vecteur de sortie. Les fonctions  $f$  et  $h$  sont supposées être  $\mathbb{C}^\infty$  et l'entrée  $u$  est localement bornée et mesurable (au sens de Lebesgue).

En général, il est clair qu'on ne peut pas utiliser le même nombre de capteurs que celui d'informations requises pour caractériser le comportement du système (pour des raisons techniques, économiques, etc...) et la dimension du vecteur de sortie est donc inférieure à celle de l'état. Ceci entraîne qu'à un instant  $t$ , l'état  $x(t)$  ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie  $y$  à ce même instant. Par contre, le besoin d'information sur l'état est motivé par le fait qu'elle est une étape importante voire indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour la modélisation (identification), la détection et le diagnostic de défauts ou la supervision des systèmes industriels [17]. Ceci est illustré par la figure 1.1 [41].

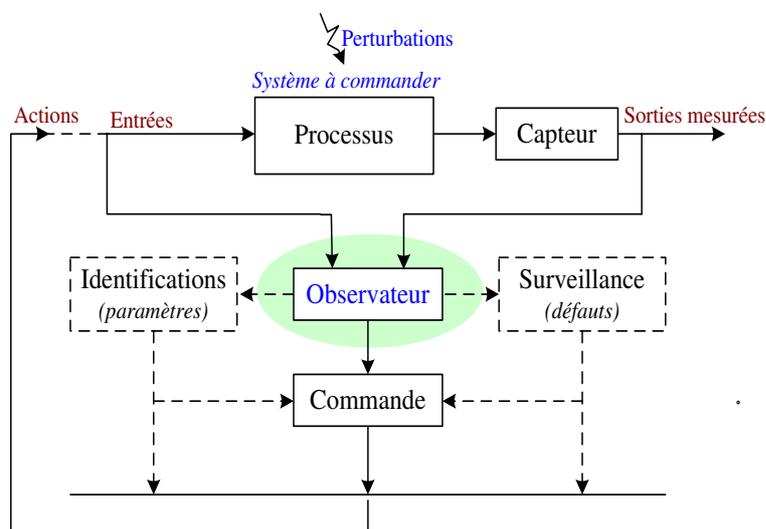


FIG. 1.1 – Observateur : la partie essentielle dans la commande.

### 1.1.2 Conception d'observateur

Un observateur peut être réalisé si le système est observable, c'est-à-dire qu'il est possible de reconstruire l'état initial à partir de l'information sur ses entrées  $u(t)$  et ses sorties  $y(t)$  pendant un intervalle de temps fini  $[t_i; t_f]$ .

Le but d'un observateur est précisément de fournir une estimation de la valeur courante de l'état en fonctions des entrées et sorties du système.

La conception d'un observateur est souvent basée sur l'idée de retour de l'information. Plus précisément, si la valeur initiale  $x(0)$  est connue, l'estimation de  $x(t)$  peut être obtenue tout simplement par l'intégration du système (1.1) à partir de  $x(0)$ . Par contre, si la valeur initiale  $x(0)$  n'est pas connue, nous pouvons essayer de corriger l'intégration de  $\hat{x}(t)$  en ligne à partir de sa valeur initiale  $\hat{x}(0)$ , éventuellement erronée, en fonction de l'erreur mesurable  $h(\hat{x}(t)) - y(t)$ , c'est-à-dire chercher une estimation  $\hat{x}$  de  $x$  comme la solution du système :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u(t)) + k(t, h(\hat{x}(t)) - y(t)), \quad \text{avec} \quad k(t, 0) = 0.$$

Dans la plupart des cas, un observateur pour le système (1.1) est réalisé par ce système auxiliaire.

## 1.2 Observabilité

Le but de cette section est de discuter certaines conditions requises sur le système pour avoir les solutions possibles au problème d'observation mentionné ci-dessus. Ces conditions correspondent à ce que l'on appelle généralement "l'observabilité" du système.

Pour concevoir un observateur, il faut être capable de récupérer les informations sur l'état via la sortie mesurée à partir de l'instant initial, et par exemple recouvrer la valeur initiale de l'état. Cela signifie que l'observabilité est caractérisée par le fait qu'à partir de la sortie mesurée, il faut être capable de discerner les différents états initiaux. L'observabilité est donc définie à partir de la notion d'indiscernabilité dont voici la définition.

**Définition 1** [21] (*Indiscernabilité*) Deux états initiaux  $x_0$  et  $x'_0$  du système (1.1) sont dits indiscernables (noté  $x_0 I x'_0$ ) sur l'intervalle de temps  $[0, t]$  si, pour toute entrée  $u(t)$ , leurs sorties respectives sont identiques sur cet intervalle. On note  $I(x_0)$  l'ensemble des états initiaux indiscernables de  $x_0$ .

Cette notion d'indiscernabilité de deux états initiaux nous permet de donner la définition de l'observabilité :

**Définition 2** [21] (*Observabilité*) Le système (1.1) est dit observable s'il n'existe pas de couple d'états initiaux distincts  $\{x_0, x'_0\}$  indiscernables.

Il faut noter que l'observabilité dépend souvent de l'entrée (par exemple : systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps, systèmes non linéaires,

etc.), parce que certaines entrées  $u$  ne permettent pas de discerner tout couple d'états initiaux distincts, comme l'exemple simple suivant le montre :

$$\begin{cases} \dot{x} = ux, & x \in \mathbb{R} \\ y = x. \end{cases} \quad (1.2)$$

Il est clair que ce système est observable pour toute entrée constante  $u \neq 0$ , mais ne l'est pas quand  $u = 0$ . Il n'est évidemment pas possible de construire un observateur qui fonctionne avec  $u \equiv 0$ , ni même avec des entrées voisines, qui poseraient sans doute des problèmes de sensibilité. La conception d'un observateur nécessite donc un regard sur les entrées.

Considérons le système général (1.1), il existe en général des entrées dites singulières, pour lesquelles le système n'est pas observable. La recherche de ces entrées pour un système donné est encore un problème largement ouvert.

**Définition 3** [21] (*Entrée Universelle*) : Une fonction d'entrée  $u$  est dite universelle pour le système (1.1) sur l'intervalle  $[0, t]$  si tout couple d'états initiaux distincts  $(x_0, x'_0)$  peut être discerné par les sorties sur l'intervalle  $[0, t]$ , le système étant excité par  $u$ .

La notion d'entrée universelle permet de définir une classe intéressante de systèmes : les systèmes uniformément observables. Cette notion sera utilisée par la suite pour les systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps.

**Définition 4** [21] (*Système uniformément observable*) : Un système dont toutes les entrées sont universelles est dit uniformément observable, c'est-à-dire, observable pour toute entrée.

Ci-dessus, nous avons rappelé quelques définitions générales sur l'observabilité. Ci-après, nous présentons les résultats classiques d'observabilité qui existent dans la littérature pour les systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps, les systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps et les systèmes hybrides, notamment les systèmes linéaires à commutation.

### 1.2.1 Systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps

Considérons la classe de systèmes linéaires stationnaires (LTI) définie par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ .  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimension appropriée.

Pour ce système, on note :

$$\mathbf{O}_{(A,C)} = [C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T]^T \quad (1.4)$$

la matrice d'observabilité. Le résultat classique d'observabilité du système LTI (1.3) énoncé par Kalman est le suivant :

**Théorème 1** [82] Une condition nécessaire et suffisante d'observabilité pour (1.3) est :

$$\text{rang} \mathbf{O}_{(A,C)} = n. \quad (1.5)$$

Cette propriété indique que pour un système LTI, l'observabilité est indépendante de l'entrée.

### 1.2.2 Systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps

Les systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps (LTV) sont mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ .  $A(t)$ ,  $B(t)$  et  $C(t)$  sont des matrices dont les coefficients varient dans le temps.

La définition de complètement/totalement observable pour les systèmes LTV de la forme (1.6), énoncée par E. Kreindler et P. E. Sarachik, est rappelée ici :

**Définition 5** [85] Soit  $t_f > t_0$ , alors le système (1.6) est :

- complètement observable sur  $[t_0; t_f]$ , si tout l'état initial  $x(t_0)$  à l'instant  $t_0$  peut être déterminé à partir de la sortie  $y(t)$  et de l'entrée  $u(t)$  sur  $[t_0; t_f]$ ;
- totalement observable sur  $[t_0; t_f]$ , s'il est complètement observable sur chaque sous-intervalle de  $[t_0; t_f]$ .

Rappelons également que l'observabilité du système (1.6) peut être caractérisée en termes de  $A(t)$ ,  $C(t)$  et de leurs dérivées par rapport au temps comme suit :

**Théorème 2** [120] Sur l'intervalle  $[t_0; t_f]$ , le système (1.6) est

- complètement observable si  $\text{rang } O(t) = n$  sur  $[t_0; t_f]$ ;
- totalement observable si et seulement si  $\text{rang } O(t) = n$  sur chaque sous-intervalle de  $[t_0; t_f]$ ,

où  $O(t)$  est la matrice d'observabilité définie par :

$$\begin{aligned} O(t) &= [S_0(t), S_1(t), \dots, S_{n-1}(t)], \\ S_0(t) &= C^T(t), \\ S_{k+1}(t) &= A(t)^T S_k(t) + \dot{S}_k(t), k = 0, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En 2003, H. Leiva et S. Siegmund ont donné une condition nécessaire pour l'observabilité du système (1.6).

**Théorème 3** [88] *Si la condition :*

$$\sum_{j=1}^q \left( \sum_{i_n, \dots, i_1=1}^l \text{Im} A_{i_n}^T \dots A_{i_1}^T C_j^T + \dots + \sum_{i_1=1}^l \text{Im} A_{i_1}^T C_j^T + \text{Im} C_j^T \right) \not\subseteq \mathbb{R}^d$$

*est vérifiée, alors (1.6) est non observable sur tout sous-intervalle de  $[0; T]$ .*  
où

$$A(t) = \sum_{i=1}^l a_i(t) A_i, \quad B(t) = \sum_{i=1}^p b_i(t) B_i, \quad C(t) = \sum_{i=1}^q c_i(t) C_i,$$

$1 \leq l \leq n^2$ ,  $1 \leq p \leq nm$ ,  $1 \leq dn$ . Les matrices  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$  et  $c_i(t)$  sont respectivement différentiables  $(n-2)$ ,  $(n-1)$  et  $(n-1)$  fois et  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  sont des matrices constantes.  $\text{Im}A$  représente l'image de l'opérateur  $A$ .

Toutes les conditions présentées sont relativement faciles à vérifier et peuvent être utilisées pour la plupart des systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps [37].

**Remarque 1** *Les travaux de ces dernières années sur l'observabilité pour les systèmes LTV rappelés ci-dessus sont réalisés géométriquement. Dans l'article [52], l'observabilité du système est définie avec un point de vue algébrique, qui sera présentée dans la section 3.1.*

### 1.2.3 Systèmes dynamiques hybrides

Cette partie est consacrée à l'étude de l'observabilité pour les systèmes dynamiques hybrides. Les systèmes hybrides s'apparentent à tout système comportant des états, des transitions, des modes. La loi de planification ou de coordination des différents changements de modes du système global peut être une entrée exogène ou événementielle. Elle peut aussi être une fonction de l'état du système ou du temps, déterministe ou même totalement aléatoire.

Le problème d'observation des systèmes hybrides a déjà attiré beaucoup l'attention des chercheurs et a été étudié avec un intérêt particulier. Toutefois, ce problème n'a pas été totalement résolu, et est analysé dans la littérature avec des points de vue divers. Les notions et définitions d'observation sont diverses. Pour tout œil curieux, en voici quelques-unes et les références qui vont avec.

- Dans l'article de De Santis *et al.* [116], une notion pour l'observabilité des systèmes à commutation est donnée, où un ensemble d'états, appelé état critique, doit être immédiatement détecté car il correspond à des dangers qui peuvent mener à des événements catastrophiques. Par exemple : dans le contexte de la gestion du trafic aérien (ATM : Air Traffic Management), il correspond à une alerte chaque fois qu'il y a une possibilité d'être dans une situation critique : détection de l'erreur de trajectoire. La probabilité

de détecter toutes les situations critiques est garantie. Des conditions nécessaires et suffisantes concernant cette observabilité critique sont également données.

- Dans l'article [115], De Santis *et al.* a introduit la notion de  $\Delta$ -observabilité, qui est basée sur la reconstruction de l'état hybride au moins dans certains (mais pas nécessairement tous) intervalles de temps. Il faut que  $\delta < \Delta$ , où  $\Delta$  est le temps limite (après cela le  $\Delta$ -observateur est capable d'estimer l'état du système) et où  $\delta$  représente le temps de séjour minimum. Il faut noter que l'existence du  $\Delta$ -observateur nécessite que le système hybride soit  $\Delta$ -observable, par contre, l' $\Delta$ -observabilité n'implique pas l'existence de  $\Delta$ -observateur.
- Dans l'article de Babaali *et al.* [5], l'observabilité d'un système à commutation en temps discret sans imposer un temps de séjour minimum dans chaque mode est étudiée. Selon la possibilité d'observer le mode courant, et la possibilité de récupérer l'état continu ou la séquence mode, plusieurs concepts d'observabilité sont définis.

On peut également trouver d'autres modèles souvent étudiés dans la littérature comme par exemple : les modèles affines constants par morceaux (PWA : PieceWise Affine systèmes [123, 14]), les modèles mixtes dynamique et logique (MLD : Mixed Logical Dynamical [15]), les modèles à complémentarité linéaires (LC : Linear Complementarity [77]) et les systèmes à complémentarité linéaires étendue (ELC : Extended Linear Complementarity). Bien que chacune d'elles possède des propriétés spécifiques qui lui sont propres, il existe parfois des équivalences entre ces différentes formes de représentation. Une équivalence entre deux modèles signifie qu'il y a une possibilité avec des changements de variables, de réécrire un modèle en fonction du modèle équivalent en question. Pour plus de détails sur les différentes transformations entre les modèles, on pourra se reporter à [78]. Pour la suite, notre travail se limite aux systèmes linéaires à commutation en temps continu.

#### 1.2.4 Systèmes linéaires à commutations en temps continu

Nous rappellerons ci-après des résultats récents concernant les systèmes les plus rencontrés dans la littérature : des systèmes linéaires à commutation, qui peuvent être considérés comme des abstractions de plus haut niveau de systèmes hybrides, obtenues en négligeant les détails du comportement de la variable discrète.

Contrairement aux systèmes linéaires classiques, il existe des différences entre le cas temps discret et continu pour les systèmes à commutation linéaires, et il est donc obligatoire de les étudier indépendamment. En temps continu, la connaissance des dérivées successives de la sortie permet d'exprimer le mode courant en un temps infinitesimal, i.e. fournir toutes les informations qu'il peut sur l'état

actuel. Cependant, la commutation arbitraire supprime cette bonne propriété en temps discret (cf [5] en détail). Le cadre de notre travail se limite au cas continu.

Les Systèmes Linéaires à Commutation (SLC) sont des systèmes dont l'évolution est déterminée par une collection de modes linéaires ( $Q$  sous-systèmes) où l'état continu  $x$  s'est relié par des commutations prises parmi un certain nombre d'état discret  $q \in I_Q \triangleq \{1, 2, \dots, Q\}$ , modélisés par des équations linéaires ordinaires de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(q)x + B(q)u \\ y = C(q)x \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^d$  représentent respectivement le vecteur d'état, d'entrée et de sortie du système. Quel que soit  $q \in \{1, 2, \dots, Q\}$ , les matrices  $A(q)$ ,  $B(q)$  et  $C(q)$  sont constantes.

La fonction de commutation est définie par :

$$\begin{aligned} \sigma(t) : \mathbb{R} &\rightarrow I_Q \\ x &\mapsto \sigma(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

où  $q \triangleq \sigma(t) \in I_Q$  correspond à l'indice associé au mode activé. La fonction de commutation est supposée avoir un nombre fini de discontinuités sur un intervalle de temps fini. Par exemple,  $\sigma(t)$  a des discontinuités à  $k$  instants  $t_1, t_2, \dots, t_k$  sur l'intervalle de temps  $[t_0, T[$ .

Le problème de l'observabilité pour ces systèmes linéaires à commutation est posé comme : sachant que l'évolution du système commence par l'état initial inconnu  $(q(t_0), x(t_0))$ , est-ce qu'il est possible de reconstruire la trajectoire de l'état continu et de l'état discret à partir de la sortie  $y$  sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$  ?

La conception d'un observateur repose sur des conditions essentielles à vérifier sur l'observabilité du système à étudier. Dans la plupart des cas, l'observateur du SLC est composé de deux parties : un observateur estime l'état discret et un autre estime l'état continu. L'observabilité du système à commutation est donc liée d'une manière directe à l'observabilité des deux états, et un système à commutation n'est observable que si ces deux états le sont aussi, dans ce cas là, la reconstruction de tout l'état est possible via des observateurs hybrides.

#### 1.2.4.1 Cas de l'état discret connu

Nous présentons tout d'abord des résultats concernant l'observabilité du système linéaire à commutation en temps continu lorsque **l'évolution de l'état discret est disponible**. Les conditions données concernant l'observabilité de l'état continu ne dépendent pas de l'entrée de commande.

Dans les articles de Z. Sun *et al.* ([124], [126]), le problème de commandabilité et d'atteignabilité des systèmes linéaires à commutation (1.8) est d'abord discuté. Puis, l'observabilité est considérée comme propriété duale de l'atteignabilité. On rappelle le résultat obtenu ci-dessous :

**Définition 6** [126] *Le système linéaire à commutation (1.8) est (complètement) observable, s'il existe un instant  $t_1 > 0$  et un chemin de commutation  $\sigma : [0, t_1] \rightarrow I_Q$ , tels que l'état initial  $x(t_0)$  peut être déterminé à partir de la connaissance de la sortie  $y(t)$  et de l'entrée  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ .*

**Théorème 4** [124] *Pour le système linéaire à commutation (1.8), les déclarations suivantes sont équivalentes :*

- le système est complètement observable ;
- $\mathbf{O} = \mathbb{R}^n$ ,

où le sous-espace  $\mathbf{O} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{O}_j$  est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_1 &= \text{Im}C_1^T + \dots + \text{Im}C_m^T \\ \mathbf{O}_{j+1} &= \Gamma_{A_1^T} \mathbf{O}_j + \dots + \Gamma_{A_m^T} \mathbf{O}_j, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- $\text{Im}C$  est le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice  $C$  ;
- étant donnée une matrice  $A$  et un sous-espace  $\mathbf{O}_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma_A \mathbf{O}_j$  indique le sous-espace invariant minimum de  $A$  qui contient  $\mathbf{O}_j$ , i.e.  $\Gamma_A \mathbf{O}_j = \mathbf{O}_j + A\mathbf{O}_j + \dots + A^{n-1}\mathbf{O}_j$ .

Quand l'état discret est connu, d'après la théorie des systèmes linéaires, l'entrée n'a pas d'influence sur l'observabilité du système. Dans ce cas, l'analyse d'observabilité est considérablement réduite et la conception d'observateurs devient beaucoup plus facile. Nous reviendrons dans le chapitre 1.3 en détail sur ce point.

#### 1.2.4.2 Cas de l'état discret inconnu

Dans la littérature, le cas où l'état discret est inconnu a été étudié dans [6, 12, 117, 137]. Un modèle formel relativement général des systèmes linéaires à commutation a été donné dans De Santis *et al.* [117]. Il peut englober une très large classe de systèmes, pour lesquels le modèle (1.8) étudié ici est un cas particulier, donc nous ne le développons pas en détail ici.

Nous décrivons notamment ici le travail de R. Vidal *et al.* [137]. Dans cet article, une analyse d'observabilité a été principalement réalisée pour le cas où **l'état discret est inconnu et l'entrée de commande est égale à zéro (système autonome)**.

Pour un sous-système  $q$ , la matrice définie par :

$$\mathcal{O}_j(q) = [C(q)^T \quad (C(q)A(q))^T \quad \dots \quad (C(q)A^{j-1}(q))^T]^T$$

est appelée *matrice d'observabilité étendue ordre  $j$* .

Pour deux sous-systèmes  $q$  et  $q'$ , la *matrice commune d'observabilité étendue*, associée aux deux sous-systèmes, est obtenue par la concaténation des deux matrices d'observabilité étendue :

$$\mathcal{O}_j(q, q') \triangleq [\mathcal{O}_j(q) \quad \mathcal{O}_j(q')].$$

On définit l'*indice commun d'observabilité* comme étant le plus petit entier  $\nu(q, q')$  tel que le rang de la matrice  $\mathcal{O}_j(q, q')$  cesse d'augmenter. On le note généralement  $\nu \triangleq \max_{q \neq q'} \{\nu(q, q')\} \leq 2n$ .

Analysons d'abord l'observabilité de l'état initial. Rappelons que deux états initiaux  $\{x(t_0), q(t_0)\}$  et  $\{x'(t_0), q'(t_0)\}$  sont indiscernables sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$  ( $t_1$  est le premier instant de commutation) si leurs sorties respectives sont identiques, c'est-à-dire :

$$C_{(q(t_0))} e^{A(q(t_0))(t-t_0)} x(t_0) = C_{(q'(t_0))} e^{A(q'(t_0))(t-t_0)} x'(t_0), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Le développement en série de Taylor autour de  $t_0$  des deux membres de l'égalité donne :

$$C_{(q(t_0))} A(q(t_0))^i x(t_0) = C_{(q'(t_0))} A(q'(t_0))^i x'(t_0), \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

En utilisant la notion de matrice commune d'observabilité étendue et l'indice commun d'observabilité, l'état initial est observable si :

$$\text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q(t_0)) \quad \mathcal{O}_\nu(q'(t_0))]) = 2n.$$

Ainsi la condition d'indiscernabilité peut être exprimée par :

$$\mathcal{Y}_\nu(t_0) \triangleq \begin{bmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \vdots \\ y^{(\nu-1)}(t_0) \end{bmatrix} = \mathcal{O}_\nu(q(t_0))x(t_0) = \mathcal{O}_\nu(q'(t_0))x'(t_0).$$

A partir de cette relation, les conditions suivantes sont déduites :

**Lemme 1** [137] (*Observabilité de l'état initial*) *Étant donné le système SLC (1.8) (cas  $u = 0$ ), si l'hypothèse de temps de séjour est respectée ( $t_1 - t_0 \geq \delta > 0$ ), alors l'état initial  $(q(t_0), x(t_0))$  est observable si pour tout  $q \neq q' \in \{1, 2, \dots, Q\}$ , nous avons  $\text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) \quad \mathcal{O}_\nu(q')]) = 2n$ . En outre,*

*l'état discret initial est donné par :  $q(t_0) = \{q : \text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) \quad \mathcal{Y}_\nu(t_0)]) = n\}$ ,*

*l'état continu initial est donné par :  $x(t_0) = \mathcal{O}_\nu^+(q(t_0))\mathcal{Y}_\nu(t_0)$ ,*

*où  $M^+$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose [100] donnée par  $M^+ = (M^T M)^{-1} M^T$ .*

Remarquons que :

- La condition  $\text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) \ \mathcal{O}_\nu(q')]) = 2n$  implique que chaque sous-système linéaire doit être observable, parce qu'elle implique que  $\text{rang}(\mathcal{O}_\nu(q)) = n$  pour tout  $q \in \{1, \dots, Q\}$  ;
- La condition  $\text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) \ \mathcal{O}_\nu(q')]) = 2n$  implique que l'intersection des sous-espaces d'observabilité de chaque paire de systèmes linéaires doit être trivial.

**Lemme 2** [137] (*Observabilité du premier instant de commutation*) *Étant donné le système SLC (1.8) (cas  $u = 0$ ), si l'hypothèse de temps de séjour est respectée ( $t_1 - t_0 \geq \delta > 0$ ), alors le premier instant de commutation  $t_1$  est observable si pour tout  $q \neq q' \in \{1, 2, \dots, Q\}$ , nous avons  $\text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) - \mathcal{O}_\nu(q')]) = n$ , et le premier instant de commutation  $t_1$  est donné par  $t_1 = \min\{t > t_0 : \mathcal{Y}_\nu(t^-) \neq \mathcal{Y}_\nu(t^+)\}$ .*

Remarquons que :

- La condition  $\text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) - \mathcal{O}_\nu(q')]) = n$  implique que l'intersection des sous-espaces non-observables doit être triviale ;
- La condition  $\text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) \ \mathcal{O}_\nu(q')]) = 2n$  contient la condition  $\text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) - \mathcal{O}_\nu(q')]) = n$ .

De ces lemmes peut être déduit le théorème suivant :

**Théorème 5** [137] *Si pour tout  $i \geq 0$ , nous avons  $t_{i+1} - t_i \geq \delta > 0$ , alors  $(x(t_0), q(t))$  est observable dans  $t \in [t_0, t_0 + T]$  si et seulement si pour tout  $q \neq q' \in \{1, \dots, Q\}$ , nous avons  $\text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) \ \mathcal{O}_\nu(q')]) = 2n$ . En outre, la trajectoire d'état peut être récupérée de façon unique :*

$$\begin{aligned} q(t_0) &= \{q : \text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) \ \mathcal{Y}_\nu(t_0)]) = n\}, \\ x(t_0) &= \mathcal{O}_\nu(q(t_0))^+ \mathcal{Y}_\nu(t_0), \\ t_i &= \min\{t > t_{i-1} : \mathcal{Y}_\nu(t^-) \neq \mathcal{Y}_\nu(t^+)\}, \\ q(t_i) &= \{q : \text{rang}([\mathcal{O}_\nu(q) \ \mathcal{Y}_\nu(t_i)]) = n\}. \end{aligned}$$

L'observabilité des systèmes linéaires à commutation (1.8) (cas  $u = 0$ ) dans cet article est définie en terme de l'état continu initial  $x(t_0)$  et de l'évolution de l'état discret  $q(t)$  plutôt qu'en terme de l'évolution de l'état  $\{x(t), q(t)\}$ . Parce qu'une fois  $\{q(t_0), x(t_0)\}$  et  $t_1$  obtenus, il suffit de répéter la même procédure en considérant  $\{q(t_1), x(t_1)\}$  comme le nouvel état initial et  $t_2$  comme le nouveau premier instant de commutation.

À la différence des résultats classiques pour les systèmes linéaires, l'entrée de commande joue un rôle important pour l'observabilité des états discrets et les états continus des systèmes à commutation (1.8). Afin de traiter le cas de **l'entrée de commande**  $u \neq 0$ , on est obligé de considérer les terme  $(B, D)$  [12]. Ici, le cadre de notre travail se limite au cas autonome.

Après avoir rappelé les diverses notions mathématiques et définitions se rapportant au concept d'observabilité pour les systèmes linéaires invariant ou variant dans le temps et les systèmes dynamiques à commutation, nous allons effectuer un tour d'horizon sur les divers observateurs correspondants.

### 1.3 Synthèse d'observateurs

Un observateur d'état déterministe a été introduit dans les années soixante par Luenberger [94] pour les systèmes linéaires continus. Kalman [82] a également formulé un observateur en considérant un système linéaire déterministe ou stochastique. Dans le cas de l'observateur de Luenberger ou de Kalman, il suffit de choisir  $L$  telle que la matrice  $(A - LC)$  soit une matrice de Hurwitz, c'est-à-dire telle que ses valeurs propres soient toutes à parties réelles strictement négatives dans le cas continu ou possèdent un module strictement inférieur à 1 dans le cas discret. La différence entre les deux observateurs se trouve principalement dans la façon de calculer le gain de retour  $L$  :

- pour l'observateur de Luenberger, on utilise la technique de placement de pôles,
- pour le filtre de Kalman, on résout une équation de Ricatti en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation et de perturbation.

Plus récemment, certains auteurs ont proposé des observateurs pour les systèmes linéaires invariants à retard dans les cas continu [29, 32], discret [33, 135], et stochastique [141]. Pour une vision plus large des problématiques liées aux systèmes à retard, on pourra se référer à [110, 119].

Une extension du filtre de Kalman [82] est donné par le filtre Kalman-Bucy [83] qui en est une version en temps continu. Puis, plusieurs résultats du type de Kalman [18, 22, 72, 75] sont étendus pour les systèmes LTV. Récemment, J. Trumpf [136] a également donné un observateur asymptotique pour les systèmes LTV ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes d'existence.

Concernant la synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires à commutation en temps continus, la majorité des travaux ne tient pas compte de la partie discrète. En supposant que le sous-système actif est connu à chaque instant, la synthèse d'observateurs s'en trouve grandement simplifiée. Un exemple typique d'un observateur peut être trouvé dans [4]. Dans le cas où l'état discret  $q(t)$  ne serait pas disponible, l'observateur du système à commutation est un système à commutation lui-même : sa mission revient à identifier l'état discret  $\hat{q}(t)$  en cours d'évolution et à calculer une estimation du vecteur d'état continu  $\hat{x}(t)$  pour l'emplacement de l'état discret  $q(t)$  courant et l'état continu  $x(t)$  du système. Il s'agit donc de fournir une estimation du vecteur d'état  $(x(t), q(t))$  [12, 106]. Ses entrées sont l'entrée continue  $u(t)$  et la sortie continue  $y(t)$ .

### 1.3.1 Observateur pour les systèmes LTI :

Pour les systèmes linéaires stationnaires, un observateur a été introduit pour la première fois par Luenberger [94] conduisant à l'estimation asymptotique de l'état.

**Théorème 6** [95] (*Observateur de Luenberger*) *Si le système (2.1) est observable, alors pour tout ensemble de valeurs propres  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , il existe une matrice de gain  $L$  telle que l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A - LC$  soit l'ensemble  $\Lambda$ . Si tous les éléments propres de  $\Lambda$  sont choisies à partie réelle strictement négative, alors le système suivant*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

*est un observateur asymptotique pour (2.1).*

Soit  $e = x - \hat{x}$  l'erreur entre la valeur réelle et la valeur estimée du système. Alors :

$$\dot{e} = (A - LC)e.$$

On peut choisir la vitesse de convergence asymptotique en plaçant judicieusement les valeurs propres de  $A - LC$ .

### 1.3.2 Observateurs pour les systèmes LTV :

Dans le cas des systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps, nous rappelons d'abord l'observateur de type Kalman :

**Théorème 7** [41] *Soit le système LTV (1.6) complètement uniformément observable. Les fonctions  $A(t), C(t)$  sont supposées bornées. Alors, il existe un observateur de la forme suivante :*

$$\dot{x}_e = A(t)x_e + B(t)u - K(t)(C(t)x_e - y) \quad (1.10)$$

avec  $K(t)$  donné par :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= P(t)A^T(t) + A(t)P(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t) + V + \lambda P(t) \\ K(t) &= P(t)C^T(t)W^{-1}(t) \\ x_e(0) &= x_{e0}, \quad P(0) = P_0 = P_0^T > 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

avec soit  $\lambda > 2\|A(t)\|$  pour tout  $t$ , soit  $V = V^T > 0$ .  $W(t)$  et  $P(t)$  sont des matrices symétriques définies positives de dimension adaptée.

Remarque :

- La vitesse de convergence peut être choisie par la valeur de  $\lambda$  ou  $V$ .

- Pour  $\lambda = 0$ , on obtient l'observateur classique de Kalman, la condition usuelle liée à la convergence est que la paire  $(A, V)$  soit complètement uniformément commandable (dual de complètement uniformément observable).
- Pour  $\lambda = 0$ , l'observateur est optimal dans le sens de la minimisation par rapport à  $z$  de la fonctionnelle :

$$\int_0^t [(C(\tau)z(\tau) - y(\tau))^T W^{-1} (C(\tau)z(\tau) - y(\tau)) + v^T(\tau) V^{-1} v(\tau)] d\tau + (z_0 - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (z_0 - \hat{x}_0)$$

avec

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + v(t), \quad y(t) = C(t)z(t).$$

Il fournit une solution explicite basée sur l'optimisation, il est aussi optimal en terme de minimisation d'une erreur de sortie au sens des moindres carrés pour un système affecté par des bruits blancs sur l'état et sur la mesure, non corrélée entre eux, de matrices de covariances respectives  $V$  et  $W$  ([86] et [30]).

- Le gain de l'observateur peut également être calculé par

$$K(t) = S^{-1}(t) C^T W^{-1}$$

où  $S$  est la solution de :

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + C^T W^{-1} C(t) - \delta S(t) - S(t) V S(t) \\ S(0) &= S^T(0) > 0 \end{aligned}$$

ce qui en fait est une équation linéaire en  $S$  quand  $V$  est choisi égal à 0. Cela est valable également pour toute la conception issue du filtre de Kalman.

Un autre observateur asymptotique pour les systèmes LTV est donné par J. Trumpf comme suit :

**Définition 7** [136] *Un observateur pour (1.6) est un système auxiliaire :*

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) &= F(t)\xi(t) + G(t)y(t) + H(t)u(t) \\ \zeta(t) &= J(t)\xi(t) \end{cases} \quad (1.12)$$

où  $F(t)$ ,  $G(t)$ ,  $H(t)$  et  $J(t)$  sont des matrices variant dans le temps de fonctions continues. Pour chaque condition initiale  $\xi(0)$  et les fonctions  $y(t)$ ,  $u(t)$ , le système (1.12) a une solution unique et suffisamment différentiable  $\xi(t, \xi(0), u, y)$ .

**Théorème 8** [136] *La sortie  $\zeta(t)$  rejoint  $x(t)$  asymptotiquement si et seulement s'il existe un vecteur  $z(t)$  de classe  $C^1$  solution de*

$$\begin{cases} \dot{z} &= F(t)z - zA(t) + G(t)C(t) \\ K(t) &= J(t)z \\ H(t) &= zB(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

avec

$$z(t) = K(t)x(t). \quad (1.14)$$

Bien que l'implémentation de cet observateur est plus compliquée que l'observateur de type Kalman (il faut un vecteur  $z(t)$  qui satisfait toutes les équations dans (1.13)), cette technique sera plus intéressante d'être appliquée pour des systèmes particuliers tels que, par exemple les systèmes bilinéaires ou les systèmes affines en l'état.

### 1.3.3 Observateurs pour les systèmes SLC : cas de l'état discret connu

Considérons un système à commutation composé de  $Q$  sous-systèmes linéaires en temps continu (1.8), un observateur pour ce système est construit dans Alessandri *et al.* [4] sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A(q)\hat{x} + B(q)u + L(q)(y - C(q)\hat{x}) \\ \hat{y} &= C(q)\hat{x} \end{cases} \quad (1.15)$$

Les gains de l'observateur  $L(q)$  ( $q \in \{1, 2, \dots, Q\}$ ) peuvent être déterminés tels que la performance désirée est atteinte. La dynamique de l'erreur d'estimation  $e = x - \hat{x}$  est donné par :

$$\dot{e} = (A(q) - L(q)C(q))e$$

qui doit être stable. Cette dynamique se comporte comme un système à commutation, donc une fonction de Lyapunov commune est recherchée pour assurer la stabilité. Ainsi, nous énonçons le théorème suivant :

**Théorème 9** [4] *Considérons le système à commutation (1.8) et supposons que les paires  $(A(q), C(q))$ ,  $q = \{1, 2, \dots, Q\}$  sont détectables. S'il existe une matrice symétrique définie positive  $P$  solution des inégalités de Lyapunov*

$$(A(q) - L(q)C(q))^T P + P(A(q) - L(q)C(q)) < 0, q = \{1, 2, \dots, Q\},$$

*alors l'erreur d'estimation (1.15) converge exponentiellement vers zéro.*

Cette méthode consiste à trouver la matrice de Lyapunov commune  $P$  qui garantit la stabilité de l'erreur d'estimation, puis de déduire les gains  $L(q)$  qui correspondent à chaque mode. Il faut noter que l'implémentation de l'observateur se fait sous l'hypothèse de la connaissance de l'état discret en temps réel.

### 1.3.4 Observateurs pour des systèmes SLC : cas de l'état discret inconnu

Une solution, utilisant des observateurs temps fini, est proposée dans l'article de Bejarano et Fridman [12] pour la reconstruction de l'état entier (continu et

discret) sur la base des informations de la sortie continue. Un différentiateur par modes glissants est utilisé pour la conception de l'observateur, qui assure que la trajectoire de l'observateur converge vers la trajectoire du système réel en temps fini.

Tout d'abord, un ensemble d'observateurs du type Luenberger est défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_q &= A(q)\tilde{x}_q + B(q)u + L(q)(y - C(q)\tilde{x}_q) \\ \tilde{y}_q &= C(q)\tilde{x}_q \end{cases} \quad (1.16)$$

pour tout  $q \in I_Q \triangleq \{1, 2, \dots, Q\}$ . Supposons que  $i$  est le mode courant et définissons  $e_i = x - \tilde{x}_i$ ,  $y_{e_i} = y - \tilde{y}_i$ . Nous avons :

$$\dot{e}_i = (A(i) - L(i)C(i))e_i = \tilde{A}(i)e_i, y_{e_i} = C(i)e_i.$$

En dérivant  $y_{e_i}$ , on obtient :

$$\mathcal{Y}_i \triangleq \begin{bmatrix} y_{e_i} \\ \dot{y}_{e_i} \\ \vdots \\ y_{e_i}^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(i) \\ C(i)\tilde{A}(i) \\ \vdots \\ C(i)\tilde{A}^l(i) \end{bmatrix} e_i = \mathcal{O}_i e_i$$

où l'indice  $l$  est le plus petit entier tel que  $\text{rang } \mathcal{O}_i = n$ .

Donc, on a :

$$e_i = \mathcal{O}_i^+ \mathcal{Y}_i. \quad (1.17)$$

Supposons que le vecteur  $\mathcal{Y}_i$  est reconstruit à partir de  $\tilde{t}_1 \in [0, t_1[$ ,  $t_1$  étant le premier instant de commutation. Alors la relation (1.17) est vraie pour tout  $t \in [\tilde{t}_1, t_1)$ . Puis, on peut remettre l'état courant  $\tilde{x}_i(\tilde{t}_1)$  à la valeur  $\tilde{x}_i(\tilde{t}_1^+) \triangleq e_i(\tilde{t}_1) + \tilde{x}_i(\tilde{t}_1^-) = x(\tilde{t}_1^-)$ . Ainsi, (1.16) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i &= A(i)\tilde{x}_i + B(i)u, \\ \tilde{y}_i &= C(i)\tilde{x}_i, \quad t \geq \tilde{t}_1^+. \end{cases}$$

Donc,  $x(t)$  et  $\tilde{x}_i(t)$  ont les mêmes équations dynamiques sur l'intervalle  $[\tilde{t}_1, t_1)$ ,  $\tilde{x}_i(\tilde{t}_1^+) = x_i(\tilde{t}_1^+)$  et sur l'intervalle  $[\tilde{t}_1, t_1)$ , nous avons :

$$\begin{cases} \tilde{x}_i(t) &= x(t), \\ \tilde{y}_i(t) &= y(t). \end{cases}$$

Maintenant, nous rappelons l'algorithme d'observation. D'abord, l'algorithme pour l'estimation de  $x(t)$  est introduit :

1. Concevoir un observateur de type Luenberger pour tout  $q \in I_Q \triangleq \{1, 2, \dots, Q\}$ .
2. Calculer le vecteur  $\mathcal{Y}_q$  pour tout  $q \in I_Q$  dans un temps  $\tilde{t}_1 < \delta$  ( $\delta$  est le temps de séjour minimum).
3. Définir  $e_q = \mathcal{O}_q^+ \mathcal{Y}_q$  pour  $t \geq \tilde{t}_1$ .

4. Mettre à jour l'état  $\tilde{x}$  par la formule  $\tilde{x}(t^+) = e_q(t^-) + \tilde{x}(t^-)$ .
5. Si l'équation  $\tilde{y}_i(t) = y(t)$  est satisfaite sur un petit intervalle  $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_1 + \epsilon)$  ( $\tilde{t}_1 + \epsilon < \delta$ ) pour un indice  $i$ , ceci implique que  $q(t) = i$ . Ainsi, l'observateur de  $q$  est définie par  $\hat{q}(t) = i$ . Notons que chaque fois, seulement un indice satisfait cette identité de sortie.
6. Une fois que l'état discret est reconstruit, l'observateur de l'état continu doit automatiquement être défini comme  $\hat{x}(t) = \tilde{x}_{\hat{q}(t)}(t)$ . Évidemment, nous aurons  $\hat{x}(t) = x(t)$  pour tout  $t \in [\tilde{t}_1 + \epsilon, t_1]$ .
7. Si  $\tilde{y}_{\hat{q}(t)}(t) = y(t)$  n'est pas satisfait, une mise à jour dans l'observateur (1.16) doit être effectuée de la manière suivante : si à l'instant  $t_1^*$ , la condition  $\tilde{y}_{\hat{q}(t)}(t_1^*) \neq y(t_1^*)$  est satisfaite, tous les observateurs doivent être remis à la valeur  $\tilde{x}_q(t_1^*) = \hat{x}(t_1^*)$  pour tout  $q \in I_Q$ .

Par conséquent, quand le système commute du mode  $i$  au mode  $j$ , la dynamique du système (1.16) pour  $q = j$  prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_j &= A(j)\tilde{x}_j + B(j)u, \\ \tilde{y}_j &= C(j)\tilde{x}_j. \end{cases}$$

et  $\tilde{x}_j$  sera identique à  $x$ .

Le problème restant consiste en la reconstruction de  $\mathcal{Y}_i$ . Pour ce faire, un autre observateur par modes glissants d'ordre supérieur basé sur l'algorithme du Super Twisting est appliqué (voir également [69]). Cet algorithme par modes glissants d'ordre 2, mis au point par Levant [71, 89, 90] est pratique d'utilisation pour les systèmes de degré relatif 1, puisqu'il permet de limiter le chattering, mais est également utilisable sans avoir besoin de connaître la dérivée de la variable de glissement.

Étant donné que les modes glissants ne font pas partie du cadre de notre travail, nous n'allons pas plus en détail ici (voir [104]). Notons également qu'une synthèse d'observateur par modes glissants d'ordre supérieur pour une classe de systèmes non linéaires à commutation a été proposé dans [114].

## 1.4 Estimation par une approche algébrique

Nous présentons ici les techniques algébriques d'estimation rapide qui seront utilisées par la suite. Les fondements théoriques de ces méthodes peuvent être trouvées dans [66, 51, 67].

Les techniques algébriques pour l'estimation rapide ont, dans un premier temps, été développées pour des problèmes d'identification paramétrique en boucle fermée de systèmes linéaires [66], et se sont révélées comme des alternatives efficaces aux techniques d'identification existantes telles qu'on peut les trouver dans [122], [84], [93] ou encore [92]. Par la suite, ces résultats ont été étendus pour des processus de commande, mettant en avant de nouveaux points de vue [51].

Le développement de telles techniques a un impact assez conséquent dans le milieu de l'automatique, notamment pour les problèmes suivants :

- les observateurs non linéaires, et le contrôle par retour d'état, développé notamment dans [68],
- le contrôle tolérant aux fautes [62],
- la commande sans modèle (voir [51], [58], et [81] pour un exemple concret d'étude),
- ...

Cette section est construite ainsi : tout d'abord nous introduisons quelques outils développés dans le projet ALIEN, puis illustrons la démarche proposée à l'aide d'un exemple assez simple lié à l'estimation rapide de paramètres en ligne ainsi qu'à la dérivation numérique et son application.

Les systèmes linéaires (2.1) peuvent être abordés par la théorie de l'algèbre différentielle introduite en Automatique par M. Fliess [47]. Soient  $K$  un corps commutatif (ici  $\mathbb{R}$ ) et  $K[s]$  un anneau principal des polynômes  $\sum_{fini} a_\nu s^\nu$ ,  $a_\nu \in K$  en l'indéterminée  $s$  (ici  $s = \frac{d}{dt}$ ). Un  $K[s]$ -module  $\Lambda$  est un  $K$ -espace vectoriel tel que  $s : \Lambda \rightarrow \Lambda$  soit un endomorphisme  $K$ -linéaire. Alors on a les propriétés suivantes :

- Un système linéaire à temps continu est un  $K[\frac{d}{dt}]$ -module  $\Lambda$ .
- Une dynamique est un système linéaire  $\Lambda$  muni d'une commande  $u = (u_1, \dots, u_m) \subset \Lambda$ , telle que le module quotient  $\Lambda / \text{span}_{K[\frac{d}{dt}]}(u)$  soit de torsion.
- Un système linéaire entrée-sortie est une dynamique linéaire  $\Lambda$  munie d'une sortie  $y = (y^1, \dots, y^p) \subset \Lambda$ .

On suppose désormais la commande indépendante, c'est-à-dire  $u_1, \dots, u_m$   $K[\frac{d}{dt}]$ -linéairement indépendants.

**Remarque 2** *Cette approche algébrique a permis les avancées suivantes [38] :*

- définition intrinsèque [48] de la commandabilité, à l'origine de la platitude [63] et de l'observabilité ;
- représentations généralisées d'état [48] ;
- simplification [50] des liens entre approche polynômial et par matrice de transfert ;
- dualité entre commandabilité et observabilité [111] ;
- ...

Remarquons qu'une grande partie des résultats ci-dessus restent valables dans le cas instationnaire en remplaçant le corps  $K$  par un corps différentiel [111].

Dans ce contexte, la propriété d'observabilité peut en particulier être énoncée de la façon suivante :

**Théorème 10** [51] *Le système entrée-sortie  $\Lambda$  est observable si et seulement si*

$$\Lambda = \text{span}_{K[\frac{d}{dt}]}(u, y).$$

D'après ces notions, ce critère exprime que toute variable d'un système observable satisfait une équation algébrique liant la sortie, l'entrée et un nombre fini de leurs dérivées. C'est-à-dire que l'observabilité équivaut à la possibilité d'exprimer toute variable du système, et, en particulier, toute variable d'état comme combinaison  $K$ -linéaire des composantes de la commande, de la sortie et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini.

### 1.4.1 Estimation de paramètres

De nombreux modèles font intervenir des paramètres qui doivent être estimés afin de faire des prévisions d'évolution du système ou pour élaborer une loi de commande. Les mesures obtenues sur le processus, augmentées de la connaissance des excitations appliquées à ce dernier, permettent de constituer les données utiles (lorsque cela est possible) à la détermination de ces paramètres. Les deux principales classes de méthodes utilisées sont basées sur la minimisation d'une erreur soit en utilisant<sup>4</sup> :

- la méthode des moindres carrés (LS : Least Squares, RLS : Recursive Least Squares, RELS : Recursive Extended Least Squares) (pour plus de détails voir [87]),
- la mise en place d'un observateur (en général à convergence asymptotique<sup>5</sup>).

Les principales faiblesses relatives de ces techniques sont liées aux bruits de mesure, au caractère asymptotique de la convergence (observateur) et à la difficulté de les mettre en œuvre pour une identification en ligne et en boucle fermée.

Une nouvelle approche pour l'estimation de paramètres basée sur des méthodes algébriques a été développée par M. Fliess et H. Sira-Ramirez [66, 67]. Grâce à cette approche, l'identification en boucle fermée est possible parce que l'identification peut être réalisée en temps réel (en temps très petit).

#### 1.4.1.1 Un exemple

Afin d'illustrer cette approche algébrique, dans un premier temps, nous montrons la démarche à travers un exemple simple : une équation différentielle ordinaire d'ordre 1.

$$\dot{y}(t) = ay(t) + u(t) + \gamma_0. \quad (1.18)$$

où  $a$  est un paramètre inconnu à identifier et  $\gamma_0$  est une perturbation constante inconnue. En utilisant les notations du calcul opérationnel et  $y_0 = y(0)$ , nous avons :

$$s\hat{y}(s) = a\hat{y}(s) + \hat{u}(s) + y_0 + \frac{\gamma_0}{s}.$$

---

<sup>4</sup>Bien qu'il existe d'autres techniques, elles sont relativement moins répandues.

<sup>5</sup>Depuis peu des observateurs en temps fini commencent à voir le jour (voir par exemple [70]), mais ils n'ont pas encore été exploités pour de l'identification car ils sont, en général, relativement sensibles aux bruits de mesure.

où  $\hat{y}(s)$  représente la transformation de Laplace du  $y(t)$  et  $s$  est la variable de Laplace.

Pour éliminer le terme  $\gamma_0$ , multiplions les deux membres de l'expression précédente par  $s$ , puis dérivons par rapport à  $s$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left[ s \left\{ s\hat{y}(s) = a\hat{y}(s) + \hat{u}(s) + y_0 + \frac{\gamma_0}{s} \right\} \right] \\ \Rightarrow 2s\hat{y}(s) + s^2\hat{y}'(s) &= a(s\hat{y}'(s) + \hat{y}(s)) + s\hat{u}'(s) + \hat{u}(s) + y_0. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\hat{y}'(s) \triangleq \frac{d\hat{y}(s)}{ds}$  correspond à  $-ty(t)$  dans le domaine temporel.

Estimation du paramètre  $a$  : supposons que  $y_0 = 0$  (si ce n'est pas le cas, on dérive deux fois par rapport à  $s$  afin d'éliminer  $y_0$ ), pour tout  $\nu > 0$ ,

$$s^{-\nu} [2s\hat{y}(s) + s^2\hat{y}'(s)] = s^{-\nu} [a(s\hat{y}'(s) + \hat{y}(s)) + s\hat{u}'(s) + \hat{u}(s)].$$

En appliquant la transformation inverse de Laplace pour retourner dans le domaine temporel, nous avons ( $\nu = 3$ ) :

$$a = \frac{2 \int_0^T d\lambda \int_0^\lambda y(t)dt - \int_0^T ty(t)dt + \int_0^T d\lambda \int_0^\lambda tu(t)dt - \int_0^T d\lambda \int_0^\lambda d\sigma \int_0^\sigma u(t)dt}{\int_0^T d\lambda \int_0^\lambda d\sigma \int_0^\sigma y(t)dt - \int_0^T d\lambda \int_0^\lambda ty(t)dt}. \quad (1.19)$$

Nous avons donc obtenu une estimation du paramètre  $a$ . Remarquons qu'au temps  $t = 0$  et en d'autre instant, une singularité peut apparaître dans l'équation (1.19), notamment quand la stabilisation de (1.18) est obtenue ( $y = 0|u = 0$ ). Dans ce cas, les deux termes du quotient sont égaux à 0, et le paramètre est alors indéterminé. Nous devons donc commencer à évaluer la formule non pas au temps  $t = 0$  mais après un court instant  $\epsilon$  (quand  $t \in [0, \epsilon]$ , on fige le paramètre à 0). Notons que l'on peut aussi utiliser une fenêtre d'intégration glissante.

Concernant cette approche, il faut noter que :

- deux types d'opérateurs sont utilisés :

$$\text{---} \boxed{\int} \text{---} \quad \text{---} \boxed{\times} \text{---}$$

$t$

- $T > 0$  peut être tout petit  $\Rightarrow$  estimation rapide.
- $\nu$  : correspond au nombre d'intégrales itérées qui agissent comme un filtre : atténuation de l'effet du bruit (on peut utiliser aussi un filtre passe-bas  $s \rightarrow 1 + \tau s$ ).

Cette exemple, même simple, démontre clairement comment cette méthode développée au sein de l'équipe ALIEN marche, pour plus de détail, voir [130]. Après avoir vu comment des manipulations algébriques pouvaient permettre d'obtenir des estimations de paramètres en ligne, nous allons étudier, dans la section suivante, comment utiliser des manipulations similaires pour faire de l'estimation de dérivées .

### 1.4.2 Dérivation numérique

Nous détaillons ici une méthode originale de dérivation numérique, qui pourrait également être appliquée pour traiter les problèmes décrits dans la suite de ce mémoire, sachant qu'une des questions cruciales consiste en l'estimation des dérivées des sorties qui sont des signaux bruités dans la pratique.

Le but est d'approcher le signal bruité par des polynômes et d'identifier algébriquement les coefficients de ces polynômes [97], [68]. Comme dans la partie précédente concernant l'estimation de paramètres, des manipulations algébriques sont réalisées dans le domaine opérationnel [42], [65] via des transformations de Laplace [39], [79] et conduisent à calculer ces coefficients via des intégrales itérées qui ont une tendance naturelle à lisser le bruit [51].

Soit  $y(t) = x(t) + n(t)$  une observation bruitée sur un intervalle ouvert fini de temps  $I$  d'un signal  $x$  dont nous voulons estimer les dérivées successives en utilisant le signal mesurable bruité  $y(t)$ .

Supposons que le signal  $x$  soit analytique en  $t = 0$  :

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}.$$

Nous représentons sa série de Taylor tronquée à l'ordre  $N$  par :

$$x_N(t) = \sum_{i=0}^N x^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!} \quad (1.20)$$

Ce polynôme, correspond en fait à une approximation de la fonction  $x$  sur un petit intervalle temporel. On peut notamment remarquer que la différence  $x(t) - x_N(t) = o(t^N)$ .

Dans le domaine opérationnel, la relation (1.20) s'écrit :

$$s^{N+1}x_N(s) = s^N x_N(0) + s^{N-1} \dot{x}_N(0) + \dots + x_N^{(N)}(0) \quad (1.21)$$

Afin d'obtenir une estimation de la dérivée par rapport au temps de  $x$  à l'ordre  $n$ , on peut annuler les coefficients restants  $x_N^{(j)}(0), j \neq n$  en multipliant par un opérateur linéaire différentiel de la forme [98] :

$$\Pi_{\kappa}^{N,n} = \frac{d^{n+\kappa}}{ds^{n+\kappa}} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{d^{N-n}}{ds^{N-n}}, \quad \kappa \geq 0.$$

On a donc :

$$\frac{\tilde{x}_N^{(n)}(0)}{s^{n+\kappa+1}} = \frac{(-1)^{n+\kappa}}{(n+\kappa)!(N-n)!} \Pi_{\kappa}^{N,n} (s^{N+1} \hat{x}_N). \quad (1.22)$$

Pour  $\nu = N + 1 + \mu$ ,  $\mu \geq 0$ , on a l'expression :

$$\frac{\tilde{x}_N^{(n)}(0)}{s^{\nu+n+\kappa+1}} = \frac{(-1)^{n+\kappa}}{(n+\kappa)!(N-n)!} \frac{1}{s^\nu} \Pi_\kappa^{N,n}(s^{N+1}\hat{x}_N), \quad (1.23)$$

qui est toujours correcte.

Après avoir fait la transformation inverse de Laplace de (1.23) pour retourner dans le domaine temporel, fait quelques calculs et changements de variable, on a l'estimation de la dérivée d'ordre  $n$  de  $x$  de la forme suivante (voir [97] pour plus de détails) :

$$\tilde{x}_N^{(n)}(0) = A(\nu, n, \kappa, N) \sum_{i=0}^{N-n} B(i, n, N) \sum_{j=j_0}^{n+\kappa} C(i, j, n, \kappa) \int_0^1 (1-\tau)^{\nu+\kappa-i-j-1} (-\tau)^{i+j} x(T\tau) d\tau$$

où  $j_0 = \max(0, k - i)$  et

$$\begin{aligned} A(\nu, n, \kappa, N) &= \frac{(-1)^{n+\kappa}(\nu+n+\kappa)!}{(n+\kappa)!(N-n)!}, \\ B(i, n, N) &= \binom{N-n}{i} \frac{(N+1)!}{(n+i+1)!}, \\ C(i, j, n, \kappa) &= \binom{n+\kappa}{j} \frac{(n+i)!}{(i+j-\kappa)!}. \end{aligned}$$

**Remarque 3** *L'estimateur introduit ici est indépendant pour chaque ordre de dérivation. Une petite erreur des estimations de dérivée provient de la partie du reste de la troncature de la série de Taylor et de la partie du bruit formel.*

*Les résultats obtenus ne sont valables que pour une fenêtre temporelle  $[0, t[$ . Mais en pratique, on peut facilement étendre ces formules pour travailler sur une fenêtre glissante de longueur  $T$ , et donc sur l'intervalle de temps  $[t - T, t]$ . C'est en travaillant sur cette fenêtre glissante que l'on peut obtenir une estimation en « temps réel » des dérivées de  $y^{(i)}(t)$ . On aurait pu proposer une solution alternative pour faire cette estimation en ligne, en combinant un filtre temporel avec des interpolations polynômiales, comme le proposent les auteurs de [108] et de [121].*

Il faut noter que cette technique d'estimation de dérivées de signaux bruités est déjà appliquée dans beaucoup de cas : au problème du traitement d'images et de vidéo (compression [56], débruitage [55], [57], démodulation du signal [64]), à la détection de ruptures dans les signaux electro-physiologiques [133], [134] et à des problèmes d'estimation liés au domaine de la finance [53], [54].

*Application à l'observation d'un système hybride*

Dans l'article [59], le problème de l'estimation du signal de commutation et de l'état continu du système linéaire à commutation en temps réel est traité via

ces techniques algébriques. Les entrées singulières pour lesquelles les systèmes à commutation deviennent indiscernables sont également caractérisées.

Une représentation de la matrice de transfert du comportement de l'entrée/sortie est adoptée :

$$\mathbf{a}_i \left( \frac{d}{dt} \right) y_i = \mathbf{b}_i \left( \frac{d}{dt} \right) u, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.24)$$

**Définition 8** [59] *Les deux systèmes (1.24) pour  $i = 1$  et  $i = 2$  sont dits fortement discernables si, et seulement si, les deux systèmes ont le même comportement entrée-sortie que pour  $u = y_1 = y_2 = 0$ . Sinon les deux systèmes sont dits faiblement discernables.*

Il a été montré que le fait que les deux systèmes soient fortement discernables est équivalent à  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  constants, où  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \text{pgcd}(\mathbf{b}_1 \mathbf{p}_1^1, \mathbf{b}_2 \mathbf{p}_1^2), \\ \mathfrak{B} &= (\mathbf{a}_2 \mathbf{b}'_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}'_2), \end{aligned} \quad (1.25)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \text{pgcd}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2), \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} \mathbf{b}'_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b} \mathbf{b}'_2, \\ \mathbf{a} &= \text{pgcd}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{a} \mathbf{a}'_1, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} \mathbf{a}'_2, \\ \mathbf{p}^1 &= \text{ppcm}(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2 \mathbf{b}'_1 - \mathbf{a}'_1 \mathbf{b}'_2), \quad \text{et} \quad \mathbf{p}^1 = \mathbf{p}_1^1 \mathbf{a}'_1 = \mathbf{p}_2^1 (\mathbf{a}'_2 \mathbf{b}'_1 - \mathbf{a}'_1 \mathbf{b}'_2), \\ \mathbf{p}^2 &= \text{ppcm}(\mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_2 \mathbf{b}'_1 - \mathbf{a}'_1 \mathbf{b}'_2), \quad \text{et} \quad \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_2^2 \mathbf{a}'_2 = \mathbf{p}_1^2 (\mathbf{a}'_2 \mathbf{b}'_1 - \mathbf{a}'_1 \mathbf{b}'_2), \\ \text{pgcd} &: \text{Plus Grand Diviseur Commun}, \quad \text{ppcm} : \text{Plus Petit Commun Multiple.} \end{aligned}$$

La discernabilité forte est équivalente à :

$$(\mathbf{a}_2 \mathbf{b}'_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}'_2) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(\mathbf{b}_1 \mathbf{p}_1^1, \mathbf{b}_2 \mathbf{p}_1^2) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Après avoir étudié la définition de discernabilité forte avec un point de vue algébrique, les quantités  $r_i(t)$  suivantes sont construites en temps réel :

$$r_i(t) = \mathbf{a}_i \left( \frac{d}{dt} \right) y_i - \mathbf{b}_i \left( \frac{d}{dt} \right) u.$$

Il apparaît que le mode “ $i$ ” courant est tel que  $r_i(t) = 0$  sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  de mesure non nul. L’algorithme en temps réel consiste à :

1. calculer  $y, \dot{y}, \dots, y^{(k_y)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(k_m)}$  en utilisant la méthode de dérivation numérique présentée précédemment,
2. vérifier si  $r_i(t)$  est nulle sur un intervalle de temps. Si tel est le cas, alors le sous-système actif est le mode “ $i$ ”,
3. déduire l’estimation d’état continue à l’aide de l’étape 1.

Par la suite, les auteurs ont étendu ces travaux avec le cas perturbé quand la perturbation est structurée dans l’article [60] (c’est-à-dire la perturbation est inconnue mais satisfait certaines équations différentielles).

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre propose une vision d'ensemble du problème d'observation et donne des critères d'observabilité et des synthèses d'observateurs pour les systèmes linéaires invariant et variant dans le temps et les systèmes dynamiques hybrides, notamment les systèmes linéaires à commutation en temps continu.

Bien entendu, cet état de l'art n'est pas complet, mais nous avons essayé d'être objectif quant à son contenu. Sans avoir à faire du dénombrement, on peut rapidement constater la richesse des résultats produits pour les systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps. En revanche pour des systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps, ou les systèmes à commutation, les résultats sont moins nombreux. Le problème de l'observation de tels systèmes représente alors un enjeu double, tant sur le plan scientifique que pratique, donc dans les chapitres suivants, nous allons introduire une approche algébrique appliquant les méthodes développées au sein de l'équipe Alien pour l'estimation d'état des systèmes de ces différentes catégories.

Le prochain chapitre propose un algorithme algébrique d'estimation d'état pour les systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps.

## Chapitre 2

# Systemes linéaires à paramètres invariant dans le temps

*All the effects of nature are only mathematical results of a small number of  
immutable laws.*

— PIERRE-SIMON LAPLACE

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	32
2.2	Estimation d'état : approche algébrique . . . . .	32
2.3	Exemple et Implémentation . . . . .	41
2.4	Conclusion . . . . .	49

---

## 2.1 Introduction

Après avoir présenté, au chapitre précédent, les principales théories concernant l'observabilité et la synthèse d'observateurs de quelques classes particulières de systèmes, nous allons aborder dans ce chapitre l'estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps (LTI), sujet à des perturbations extérieures, par une approche algébrique.

Un observateur peut être réalisé si le système est observable, c'est-à-dire qu'il est possible de reconstruire l'état initial  $x(t_i)$  à partir de l'information sur ses entrées  $u(t)$  et ses sorties  $y(t)$  pendant un intervalle de temps fini  $[t_i; t_f]$ . Pour les systèmes linéaires avec bruit, où apparaissent des phénomènes stochastiques, un filtre de Kalman a été conçu pour la première fois par Kalman [82, 83]. Pour les systèmes linéaires stationnaires, un observateur a été introduit par Luenberger [94] conduisant à l'estimation asymptotique de l'état.

Dans ce chapitre, nous proposons de réaliser un reconstituteur rapide d'état pour des systèmes linéaires stationnaires, par une approche algébrique inspirée de récents travaux de Fliess et Sira-Ramirez [66, 67]. La reconstruction de l'état est donnée par une formulation explicite, plutôt que par un système dynamique auxiliaire comme dans le cas de l'utilisation d'un observateur. Dans l'approche proposée, les dérivées successives de la sortie sont exprimées en fonction des intégrales des mesures (éventuellement bruitée) et des entrées. On peut alors reconstruire l'état du système en un temps fini (non asymptotique).

## 2.2 Estimation d'état : approche algébrique

Considérons un système linéaire stationnaire sujet à des perturbations extérieures :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + D\bar{\pi} \\ y &= Cx \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée,  $y \in \mathbb{R}^d$  est la sortie et  $\bar{\pi} \in \mathbb{R}^\nu$  est la perturbation extérieure inconnue.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{d \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{n \times \nu}$  sont des matrices constantes.

Pour des raisons de clarté, les systèmes monovariables observables sont considérés, c'est-à-dire :  $u \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  (en effet, l'approche proposée peut être étendue à certaines catégories de systèmes MIMO en utilisant des techniques de découplage de la relation entrée/sortie). Le but est d'estimer l'état  $x$  de façon rapide et sur la base d'une mesure éventuellement bruitée. Pour cela, l'expression exacte de l'état est donnée par une fonction d'intégrales itérées de la sortie et de l'entrée. Dans ce chapitre, notons qu'un point de vue algébrique est pris.

Considérons le système (2.1) sujet à des perturbations extérieures. La relation entrée/sortie peut alors s'exprimer par :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i u^{(i)}(t) + \pi(t) \quad (2.2)$$

avec  $a_n = 1$ . La perturbation extérieure inconnue  $\pi(t)$  est supposée suffisamment lisse sur une petite fenêtre de temps, une bonne approximation peut être considérée comme étant de la forme :

$$\pi(t) = c_0 + c_1 t \quad (2.3)$$

où  $c_0$  et  $c_1$  sont constantes sur cette fenêtre de temps. Ceci sera justifié par la suite. Les paramètres du système  $a_i$  et  $b_i$  sont supposés connus exactement. Si tel n'est pas le cas, des techniques similaires à celles présentées ci-après peuvent être utilisées pour estimer ces paramètres en temps réel [67].

**Théorème 1** *Pour le système linéaire stationnaire (2.1) avec la relation entrée/sortie donnée par (2.2), les estimations des dérivées successives par rapport au temps de la sortie mesurable  $y$  sont données par l'expression suivante :*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_e^{(1)}(t) \\ y_e^{(2)}(t) \\ y_e^{(3)}(t) \\ \vdots \\ y_e^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} &= -\frac{1}{(-t)^{n+2}} \tilde{R}(t) \begin{pmatrix} y_e(t) \\ y_e^{(1)}(t) \\ y_e^{(2)}(t) \\ \vdots \\ y_e^{(n-2)}(t) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{(-t)^{n+2}} \left( \begin{pmatrix} M_1(u) \\ M_2(u) \\ M_3(u) \\ \vdots \\ M_{n-1}(u) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1(y) \\ F_2(y) \\ F_3(y) \\ \vdots \\ F_{n-1}(y) \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec

$$y_e(t) = \frac{M_0(u) - F_0(y)}{(-t)^{n+2}}, \quad (2.5)$$

où

$$\tilde{R}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,0}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{2,0}(t) & \alpha_{2,1}(t) & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{3,0}(t) & \alpha_{3,1}(t) & \alpha_{3,2}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,0}(t) & \alpha_{n-1,1}(t) & \alpha_{n-1,2}(t) & \dots & \alpha_{n-1,n-2}(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\alpha_{p,k}(t) &= \tilde{d}_{p,k}(t) + \sum_{j=1}^{p-k} \sum_{g=0}^{j-1} k_g \tilde{r}_{k,g}(t), \\ \tilde{d}_{p,k}(t) &= \binom{p}{k} \frac{(-1)^{n+2} (n+2)!}{(n+2-p+k)!} t^{n+2-p+k}, \\ \tilde{r}_{k,g}(t) &= \binom{p-j-g}{k} \frac{(-1)^{n+2-j} (n+2-j)!}{(n+2-p+g+k)!} t^{n+2-p+g+k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_p(y) &= \sum_{j=1}^p \left( \mathcal{L}^{-1} [Q_1^j(s)] * (-t)^{n+2-j} y(t) \right) + \sum_{j=p+1}^{n+2} \left( \mathcal{L}^{-1} [Q_2^j(s)] * (-t)^{n+2-j} y(t) \right), \\ M_p(u) &= \sum_{j=0}^{p-1} \left( \mathcal{L}^{-1} [Q_3^j(s)] * (-t)^{n+2-j} u(t) \right) + \sum_{j=p}^{n+2} \left( \mathcal{L}^{-1} [Q_4^j(s)] * (-t)^{n+2-j} u(t) \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{p-1-k} \sum_{g=0}^{j-2} k'_g \tilde{r}'_{k,g}(t) u^{(k)},\end{aligned}$$

$k_g$  et  $k'_g$  sont des coefficients qui dépendent des paramètres du système et  $Q_1^j(s)$ ,  $Q_2^j(s)$ ,  $Q_3^j(s)$  et  $Q_4^j(s)$  sont des fractions rationnelles strictement propres définies dans la preuve.

**Remarque 1** Notons que la matrice  $\tilde{R}$  a une structure triangulaire inférieure. Ceci implique que l'expression (2.4) donne des estimations des dérivées de la sortie de manière récursive, et leurs expressions sont obtenues seulement en fonction de l'intégrale de  $u$  et  $y$ .

### Preuve

a) Application de la transformation de Laplace sur la relation entrée/sortie (2.2) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n a_i (s^i y(s) - s^{i-1} y(0) - \dots - y^{(i-1)}(0)) \\ = \sum_{i=0}^{n-1} b_i (s^i u(s) - s^{i-1} u(0) - \dots - u^{(i-1)}(0)) + \pi(s),\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\text{avec } \pi(s) = \frac{c_0 s + c_1}{s^2} = \frac{N(s)}{P(s)}.$$

b) Manipulation algébrique.

Multiplions les deux membres de l'expression (2.6) par  $s^2$ , on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n a_i (s^{i+2} y(s) - s^{i+1} y(0) - \dots - s^2 y^{(i-1)}(0)) \\ = \sum_{i=0}^{n-1} b_i (s^{i+2} u(s) - s^{i+1} u(0) - \dots - s^2 u^{(i-1)}(0)) + N(s).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Posons

$$\begin{aligned}
 P_1(s) &= \sum_{i=0}^n a_i s^{i+2} : \text{polynôme de degré } n+2 \\
 \Gamma_1(s) &= \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^{j+2} y^{(i-1-j)}(0) : \text{polynôme de degré } n+1 \\
 P_2(s) &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i s^{i+2} : \text{polynôme de degré } n+1 \\
 \Gamma_2(s) &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i \sum_{j=0}^{i-1} s^{j+2} u^{(i-1-j)}(0) : \text{polynôme de degré } n
 \end{aligned}$$

L'équation (2.7) peut être réécrite de la façon suivante :

$$P_1(s)y(s) - \Gamma_1(s) = P_2(s)u(s) - \Gamma_2(s) + N(s). \quad (2.8)$$

Pour éliminer les conditions initiales  $\Gamma_1(s)$  et  $\Gamma_2(s)$  et les perturbations  $N(s)$ , on dérive l'expression précédente  $n+2$  fois par rapport à  $s$  en utilisant la formule de Leibniz :

$$\frac{d^h(x(s)y(s))}{ds^h} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{d^{h-j}(x(s))}{ds^{h-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j},$$

et on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} \frac{d^j P_1(s)}{ds^j} \frac{d^{n+2-j}(y(s))}{ds^{n+2-j}} = \sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} \frac{d^j P_2(s)}{ds^j} \frac{d^{n+2-j}(u(s))}{ds^{n+2-j}}. \quad (2.9)$$

Afin d'estimer  $y^{(p)}(t)$  ( $0 \leq p < n$ ), multiplions les deux membres de (2.9) par  $\frac{s^p}{P_1(s)}$  :

$$s^p \frac{d^{n+2}(y(s))}{ds^{n+2}} + \sum_{j=1}^{n+2} \frac{N_j(s) s^p}{P_1(s)} \frac{d^{n+2-j}(y(s))}{ds^{n+2-j}} = \sum_{j=0}^{n+2} \frac{N'_j(s) s^p}{P_1(s)} \frac{d^{n+2-j}(u(s))}{ds^{n+2-j}} \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{aligned}
 N_j(s) &= \binom{n+2}{j} \frac{d^j P_1(s)}{ds^j}, \\
 N'_j(s) &= \binom{n+2}{j} \frac{d^j P_2(s)}{ds^j}.
 \end{aligned}$$

c) *Retour dans le domaine temporel*

Rappelons les règles de transformation entre le calcul opérationnel et le domaine temporel :

$$s^{-1} \longrightarrow \int_0^t, \quad s^{-n} \longrightarrow \int^{(n)} : \text{intégrales itérées}$$

$$\frac{d}{ds} \longrightarrow -t, \quad \frac{d^n}{ds^n} \longrightarrow (-t)^n : \text{dérivations algébriques}$$

La transformée de Laplace inverse pour le premier terme de l'équation (2.10) est donnée par :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( s^p \frac{d^{n+2}(y(s))}{ds^{n+2}} \right) = \frac{d^p ((-t)^{n+2}y(t))}{dt^p} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{d^{p-k} ((-t)^{n+2})}{dt^{p-k}} y^{(k)}(t).$$

En utilisant la formule :

$$\frac{d^k(s^l)}{ds^k} = \begin{cases} \frac{l!}{(l-k)!} s^{l-k}, & \text{si } 0 < k \leq l \\ 0, & \text{si } 0 < l < k \\ \frac{(-1)^k (k-l-1)!}{(-l-1)!} s^{l-k}, & \text{si } l < 0 < k \end{cases}$$

on a :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( s^p \frac{d^{n+2}(y(s))}{ds^{n+2}} \right) = (-t)^{n+2} y^{(p)}(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{d}_{p,k} y^{(k)}(t), \quad (2.11)$$

avec

$$\tilde{d}_{p,k} = \binom{p}{k} \frac{(-1)^{n+2} (n+2)!}{(n+2-p+k)!} t^{n+2-p+k}.$$

Considérons maintenant le deuxième terme de l'équation (2.10) et notons :

$$N_j(s) = n_0 + n_1 s + \dots + n_{n+2-j} s^{n+2-j}.$$

Puisque

$$\deg \left( \frac{N_j(s) s^p}{P_1(s)} \right) = \frac{n+2-j+p}{n+2}, \quad (2.12)$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{N_j(s) s^p}{P_1(s)} &= \frac{(n_0 + n_1 s + \dots + n_{n+2-j} s^{n+2-j}) s^p}{a_0 s^2 + a_1 s^3 + \dots + a_n s^{n+2}} \\ &= \begin{cases} \sum_{g=0}^{p-j} k_g s^{p-j-g} + Q_1^j(s) & \text{si } 1 \leq j \leq p \\ Q_2^j(s) & \text{si } p < j \leq n+2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

où  $Q_1^j(s)$  et  $Q_2^j(s)$  sont des fractions rationnelles strictement propres données par :

$$Q_1^j(s) = - \frac{\sum_{g=0}^{p-j} k_g s^{p-j-g} \left( P_1(s) - \sum_{i=n-g}^n a_i s^{i+2} \right)}{P_1(s)} + \frac{N_j(s) s^p - \sum_{i=n+2-p}^{n+2-j} n_i s^{p+i}}{P_1(s)}, \text{ si } j \leq p$$

$$Q_2^j(s) = \frac{N_j(s) s^p}{P_1(s)}, \text{ si } p < j$$

et où :

$$k_0 = n_{n+2-j}, \quad k_g = n_{n+2-j-g} - \sum_{i=0}^{g-1} k_i a_{n+i-g}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+2} \frac{N_j(s) s^p}{P_1(s)} \frac{d^{n+2-j}(y(s))}{ds^{n+2-j}} &= \sum_{j=1}^p \sum_{g=0}^{p-j} k_g s^{p-j-g} \frac{d^{n+2-j}(y(s))}{ds^{n+2-j}} \\ &+ \left( \sum_{j=1}^p Q_1^j(s) + \sum_{j=p+1}^{n+2} Q_2^j(s) \right) \frac{d^{n+2-j}(y(s))}{ds^{n+2-j}}. \end{aligned}$$

De même pour (2.11), on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \sum_{g=0}^{p-j} k_g s^{p-j-g} \frac{d^{n+2-j}(y(s))}{ds^{n+2-j}} \right) = \sum_{g=0}^{p-j} k_g \sum_{k=0}^{p-j-g} \tilde{r}_{k,g}(t) y^{(k)}(t),$$

avec

$$\tilde{r}_{k,g}(t) = \binom{p-j-g}{k} \frac{(-1)^{n+2-j} (n+2-j)!}{(n+2-p+g+k)!} t^{n+2-p+g+k}.$$

Cela implique :

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{-1} \left( \sum_{j=1}^p \sum_{g=0}^{p-j} k_g s^{p-j-g} \frac{d^{n+2-j}(y(s))}{ds^{n+2-j}} \right) \\ &= k_0 (\tilde{r}_{0,0} y + \dots + \tilde{r}_{p-1,0} y^{(p-1)}) + k_1 (\tilde{r}_{0,1} y + \dots + \tilde{r}_{p-2,1} y^{(p-2)}) + \dots + k_{p-1} \tilde{r}_{0,p-1} y \\ &\quad + k_0 (\tilde{r}_{0,0} y + \dots + \tilde{r}_{p-2,0} y^{(p-2)}) + k_1 (\tilde{r}_{0,1} y + \dots + \tilde{r}_{p-3,1} y^{(p-3)}) + \dots + k_{p-2} \tilde{r}_{0,p-2} y \\ &\quad + \dots \\ &\quad + k_0 (\tilde{r}_{0,0} y + \tilde{r}_{1,0} y^{(1)}) + k_1 \tilde{r}_{0,1} y \\ &\quad + k_0 \tilde{r}_{0,0} y \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{g=0}^{j-1} k_g \tilde{r}_{0,g} y + \dots + \sum_{j=1}^2 \sum_{g=0}^{j-1} k_g \tilde{r}_{p-2,g} y^{(p-2)} + \sum_{j=1}^1 \sum_{g=0}^{j-1} k_g \tilde{r}_{p-1,g} y^{(p-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{p-k} \sum_{g=0}^{j-1} k_g \tilde{r}_{k,g} y^{(k)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Puisque  $Q_1^j(s)$  et  $Q_2^j(s)$  sont des fractions rationnelles strictement propres, celles-ci fonctionnent comme des filtres passe-bas et donc on obtient :

$$\begin{aligned} F_p(y) &\triangleq \mathcal{L}^{-1} \left[ \left( \sum_{j=1}^p Q_1^j(s) + \sum_{j=p+1}^{n+2} Q_2^j(s) \right) \frac{d^{n+2-j}(y(s))}{ds^{n+2-j}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^p (\mathcal{L}^{-1} [Q_1^j(s)] * (-t)^{n+2-j} y(t)) + \sum_{j=p+1}^{n+2} (\mathcal{L}^{-1} [Q_2^j(s)] * (-t)^{n+2-j} y(t)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

En utilisant (2.11), (2.14) et (2.15), on obtient la transformée de Laplace inverse du terme de gauche de l'équation (2.10) :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( s^p \frac{d^{n+2}(y(s))}{ds^{n+2}} + \sum_{j=1}^{n+2} \frac{N_j(s)s^p}{P_1(s)} \frac{d^{n+2-j}(y(s))}{ds^{n+2-j}} \right) = (-t)^{n+2} y^{(p)} + \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{p,k} y^{(k)} + F_p(y), \quad (2.16)$$

avec

$$\alpha_{p,k} = \tilde{d}_{p,k} + \sum_{j=1}^{p-k} \sum_{g=0}^{j-1} k_g \tilde{r}_{k,g}.$$

On procède de la même manière pour le terme de droite de l'équation (2.10) impliquant l'entrée  $u$ . Posons

$$N'_j(s) = n'_0 + n'_1 s + \dots + n'_{n+1-j} s^{n+1-j},$$

puisque

$$\deg \left( \frac{N'_j(s)s^p}{P_1(s)} \right) = \frac{n+1-j+p}{n+2},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{N'_j(s)s^p}{P_1(s)} &= \frac{(n'_0 + n'_1 s + \dots + n'_{n+1-j} s^{n+1-j})s^p}{a_0 s^2 + a_1 s^3 + \dots + a_n s^{n+2}} \\ &= \begin{cases} \sum_{g=0}^{p-j-1} k'_g s^{p-j-1-g} + Q_3^j(s), & \text{si } 0 \leq j \leq p-1 \\ Q_4^j(s), & \text{si } p-1 < j \leq n+2 \end{cases} \end{aligned}$$

où  $Q_3^j(s), Q_4^j(s)$  sont des fractions rationnelles strictement propres et où :

$$\begin{aligned} k'_0 &= n'_{n+1-j}, \\ k'_g &= n'_{n+1-j-g} - \sum_{i=0}^{g-1} k'_i a_{n+i-g}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} M_p(u) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{j=0}^{n+2} \frac{N'_j(s)s^p}{P_1(s)} \frac{d^{n+2-j}(u(s))}{ds^{n+2-j}} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \left( \mathcal{L}^{-1} [Q_3^j(s)] * (-t)^{n+2-j} u(t) \right) + \sum_{j=p}^{n+2} \left( \mathcal{L}^{-1} [Q_4^j(s)] * (-t)^{n+2-j} u(t) \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-2} \sum_{j=0}^{p-1-k} \sum_{g=0}^{j-2} k'_g \tilde{r}'_{k,g} u^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ici, on suppose que l'entrée  $u$  est suffisamment dérivable et que ses dérivées sont connues. Toutefois, en appliquant la technique de l'estimation de la dérivation numérique présenté dans la section 1.4.2, on pourrait obtenir une expression qui ne fait plus intervenir les dérivées de l'entrée.

En utilisant (2.10), (2.16) et (2.17), on obtient :

$$y_e^{(p)}(t) = \frac{1}{(-t)^{n+2}} \left( - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{p,k} y_e^{(k)}(t) - F_p(y) + M_p(u) \right) \quad (2.18)$$

L'expression  $y_e$  de l'estimation de  $y$  est donc, en particulier, donnée par (2.5) qui ne comporte que des intégrales de la sortie. On considère cette estimation  $y_e$  pour la raison suivante : elle donne une estimation débruitée du signal de sortie et peut être aussi utilisée dans l'estimation des dérivées successives de la sortie  $y$  afin d'atténuer l'influence du bruit de mesure.

Enfin, en utilisant l'expression (2.18) pour  $p$  variant de 0 à  $n-1$ , on obtient (2.4) comme l'expression des dérivées successives de la sortie  $y$ . Grâce à la structure triangulaire de la matrice  $\tilde{R}$ , on obtient l'estimation de la  $p^{ieme}$  dérivée de la sortie  $y$  uniquement en fonction d'intégrales portant sur la sortie et l'entrée.

En ce qui concerne l'estimation d'état, nous considérons deux cas :

**Cas un :** Le système est sujet à une seule perturbation, qui satisfait l'hypothèse suivante :

$$CD = CAD = \dots = CA^{(n-2)}D = 0. \quad (2.19)$$

Si le système est observable, alors la matrice d'observabilité est inversible. Quand l'hypothèse (2.19) est vérifiée, on peut exprimer les états  $x(t)$  en fonction de  $u(t)$ ,  $y(t)$  et de leur dérivées de la façon suivante :

$$x(t) = \mathbf{O}_{(A,C)}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} - \mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix} \right] \quad (2.20)$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & \dots & CB \end{pmatrix}$$

Puisqu'on a, dans la partie précédente, exprimé l'estimation de la  $p^{ieme}$  dérivée par rapport au temps de  $y$  en fonction uniquement des intégrales itérées de  $y$  et de l'entrée  $u$ , en remplaçant dans la relation (2.20) la dérivée de  $y(t)$  par leurs estimations, on obtient l'estimation d'état suivante :

$$x_e(t) = \mathbf{O}_{(A,C)}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} y_e \\ y_e^{(1)} \\ y_e^{(2)} \\ \vdots \\ y_e^{(n-1)} \end{pmatrix} - \mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix} \right].$$

**Remarque 2** *A propos de la commande  $u$ , elle est supposée être suffisamment dérivable et que ses dérivées sont connues. Si ce n'est pas le cas, une technique de l'estimation de la dérivation numérique développée au sein de l'équipe ALIEN, présentée dans la section 1.4.2, peut être utilisée. On pourrait obtenir une expression qui ne fait plus intervenir les dérivées de l'entrée.*

**Cas deux :** La perturbation agit arbitrairement sur le système. Dans cette situation, il faut identifier les perturbations afin de reconstruire l'état. Puisque la perturbation extérieure inconnue  $\bar{\pi}(t)$  peut être approchée par un polynôme de degré 1 sur une petite fenêtre de temps et que donc  $\bar{\pi}^{(2)}(t) = 0$ , elle peut être considérée comme un nouvel état à estimer.

Le système (2.1) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases} \quad (2.21)$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (C \ 0), \quad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{\pi}(t) \\ \dot{\bar{\pi}}(t) \end{bmatrix}.$$

La relation entrée-sortie du système (2.1) alors devient :

$$\sum_{i=0}^{n+2\nu} a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1+2\nu} b_i u^{(i)}. \quad (2.22)$$

Les étapes de l'estimation des dérivées successives de la sortie avec la relation entrée-sortie restent les mêmes, la seule différence étant la dimension du système ( $n + 2\nu$  au lieu de  $n$ ). Dans la prochaine partie, nous allons l'illustrer en détail à travers un exemple simple.

A partir du système (2.32), en utilisant les dérivées estimées de  $y(t)$ , on peut exprimer l'état  $\tilde{x}$  comme une fonction de  $y$ ,  $u$  et de leur dérivées par rapport au temps comme suit :

$$\tilde{x}_e(t) = \mathbf{O}_{(\tilde{A},\tilde{C})}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} y_e \\ \dot{y}_e \\ y_e^{(2)} \\ \vdots \\ y_e^{(n+2\nu-1)} \end{pmatrix} - \tilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(n+2\nu-2)} \end{pmatrix} \right]$$

où

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n+2\nu-2}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{n+2\nu-3}\tilde{B} & \dots & \tilde{C}\tilde{B} \end{pmatrix}.$$

Notons que toutes ces expressions ne sont définies à l'instant  $t = 0$ , mais deviennent valables après n'importe quel instant arbitrairement petit (voir l'exemple dans la prochaine section).

## 2.3 Exemple et Implémentation

Dans la section précédente, nous avons développé les expressions formelles afin d'estimer les états du système LTI, dans la section suivante, nous allons discuter la solution d'implémentation.

Ci-après, les perturbations extérieures sont inconnues. Dans un premier temps, pour un modèle bien connu et des perturbations structurées, la mise en œuvre peut se faire simplement par l'interface *Matlab/Simulink*, i.e. l'intégration sur l'intervalle entier. Dans cette situation, nous allons considérer des perturbations qui agissent de deux façons différentes telles que mentionnées précédemment. Ce n'est bien sûr pas le cas dans la pratique. Les perturbations inconnues sont alors supposées être suffisamment lisses pour qu'elles puissent être approchées par un polynôme sur une petite fenêtre de temps, et l'implémentation est faite sur une *fenêtre glissante*.

### Intégration sur l'intervalle entier sous *Matlab/Simulink*

Un système de moteur à courant continu est décrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2 \\ J\dot{x}_2 & = K_1x_3 \\ L\dot{x}_3 & = -Rx_3 - K_2x_2 + u \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $y = x_1$  est la sortie mesurable ;  $x_1$  est la position angulaire du rotor,  $x_2$  est la vitesse angulaire du rotor,  $x_3$  est le courant du rotor et  $u$  est la tension d'entrée.  $K_1, K_2, J, L$  et  $R$  sont des paramètres constants et strictement positifs.

**Cas un :** Le système est sujet à la perturbation qui agit dans les mêmes directions que l'entrée, c'est-à-dire que la dernière équation devient  $L\dot{x}_3 = -Rx_3 - K_2x_2 + u + \bar{\pi}(t)$ . La perturbation extérieure  $\bar{\pi}(t)$  est inconnue mais structurée, par exemple : ici  $\bar{\pi}(t) = 1 + 5t$  et est approchée par  $\pi(t) = c_0 + c_1t$  ( $c_0$  et  $c_1$  sont des constantes inconnues).

Partons de la relation entrée/sortie :

$$y^{(3)}(t) + a_2y^{(2)}(t) + a_1\dot{y}(t) = b_0u(t) + c_0 + c_1t \quad (2.24)$$

avec  $a_2 = \frac{R}{L}$ ,  $a_1 = \frac{K_1 K_2}{LJ}$  et  $b_0 = \frac{K_1}{LJ}$ .

a) Transformée de Laplace de la relation (2.24) :

$$(s^3 y(s) - s^2 y(0) - s \dot{y}(0) - y^{(2)}(0)) + a_2 (s^2 y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)) + a_1 (s y(s) - y(0)) = b_0 u(s) + \frac{c_0 s + c_1}{s^2} \quad (2.25)$$

b) Manipulation algébrique.

On multiplie les deux membres de l'expression précédente par  $s^2$  et on obtient :

$$(s^5 y(s) - s^4 y(0) - s^3 \dot{y}(0) - s^2 y^{(2)}(0)) + \frac{R}{L} (s^4 y(s) - s^3 y(0) - s^2 \dot{y}(0)) + \frac{K_1 K_2}{LJ} (s^3 y(s) - s^2 y(0)) = \frac{K_1}{LJ} s^2 u(s) + c_0 s + c_1 \quad (2.26)$$

On dérive (2.26) cinq fois par rapport à  $s$  pour éliminer les conditions initiales et on a :

$$N_5(s)y + N_4(s)\frac{dy}{ds} + N_3(s)\frac{d^2y}{ds^2} + N_2(s)\frac{d^3y}{ds^3} + N_1(s)\frac{d^4y}{ds^4} + P_1(s)\frac{d^5y}{ds^5} = b_0 \left( 20\frac{d^3u}{ds^3} + 10s\frac{d^4u}{ds^4} + s^2\frac{d^5u}{ds^5} \right), \quad (2.27)$$

avec

$$\begin{aligned} N_5(s) &= 120, \\ N_4(s) &= 600s + 120a_2, \\ N_3(s) &= 600s^2 + 240a_2s + 60a_1, \\ N_2(s) &= 200s^3 + 120a_2s^2 + 60a_1s, \\ N_1(s) &= 25s^4 + 20a_2s^3 + 15a_1s^2, \\ P_1(s) &= s^5 + a_2s^4 + a_1s^3 = s^3(s^2 + a_2s + a_1). \end{aligned}$$

On multiplie les deux membres de (2.27) par  $\{s^3(s^2 + a_2s + a_1)\}^{-1} = \frac{1}{P_1(s)}$ , puis on applique la transformée inverse de Laplace afin d'estimer  $y_e$ . Ici, le détail de l'implémentation de la simulation est donnée par :

$$\begin{aligned} y_e &= -\frac{1}{t^5} \frac{K_1}{LJ} \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{20}{P_1(s)} \right] * (-t^3 u) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{10s}{P_1(s)} \right] * (t^4 u) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2}{P_1(s)} \right] * (-t^5 u) \right) \\ &+ \frac{1}{t^5} \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_5(s)}{P_1(s)} \right] * y + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_4(s)}{P_1(s)} \right] * (-ty) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_3(s)}{P_1(s)} \right] * (t^2 y) \right) \\ &+ \frac{1}{t^5} \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_2(s)}{P_1(s)} \right] * (-t^3 y) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_1(s)}{P_1(s)} \right] * (t^4 y) \right). \end{aligned}$$

On multiplie les deux membres de (2.27) par  $\{s^2(s^2 + a_2s + a_1)\}^{-1} = \frac{1}{D_1(s)}$  pour reconstruire  $\dot{y}_e$ .

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \mathcal{L}^{-1} \left[ s \frac{d^5 y}{ds^5} \right] = -t^5 \dot{y} - 5t^4 y \\
 \text{(ii)} \quad & \frac{25s^4}{D_1(s)} = 25 - \frac{25(D_1(s) - s^4)}{D_1(s)} \mapsto \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{25s^4}{D_1(s)} \right] * (t^4 y) = 25t^4 y - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{25(D_1(s) - s^4)}{D_1(s)} \right] * (t^4 y) \\
 \dot{y}_e = & -\frac{1}{t^5} \frac{K_1}{LJ} \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{20}{D_1(s)} \right] * (-t^3 u) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{10s}{D_1(s)} \right] * (t^4 u) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2}{D_1(s)} \right] * (-t^5 u) \right) \\
 & + \frac{1}{t^5} \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_5(s)}{D_1(s)} \right] * y + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_4(s)}{D_1(s)} \right] * (-ty) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_3(s)}{D_1(s)} \right] * (t^2 y) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_2(s)}{D_1(s)} \right] * (-t^3 y) \right) \\
 & + \frac{1}{t^5} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{25(D_1(s) - s^4) + (N_1(s) - 25s^4)}{D_1(s)} \right] * (t^4 y) + \frac{20y_e}{t}
 \end{aligned}$$

On multiplie les deux membres de (2.27) par  $\{s(s^2 + a_2 s + a_1)\}^{-1} = \frac{1}{D_2(s)}$  pour reconstruire  $y_e^{(2)}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \mathcal{L}^{-1} \left[ s^2 \frac{d^5 y}{ds^5} \right] = -t^5 y^{(2)} - 10t^4 \dot{y} - 20t^3 y \\
 \text{(ii)} \quad & \frac{25s^4 + \frac{R}{L} 20s^3}{D_2(s)} = 25s - 5\frac{R}{L} + 5\frac{R}{L} \frac{(D_2(s) - s^3)}{D_2(s)} - 25s \frac{(D_2(s) - s^3 - \frac{R}{L} s^2)}{D_2(s)} \\
 & \mapsto \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{25s^4 + \frac{R}{L} 20s^3}{D_2(s)} \right] * (t^4 y) \\
 & = 100t^3 y + 25t^4 \dot{y} - 5\frac{R}{L} t^4 y + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{5\frac{R}{L}(D_2(s) - s^3) - 25s(\frac{K_1 K_2}{LJ})}{D_2(s)} \right] * (t^4 y) \\
 \text{(iii)} \quad & \frac{200s^3}{D_2(s)} = 200 - \frac{200(D_2(s) - s^3)}{D_2(s)} \mapsto \\
 & \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{200s^3}{D_2(s)} \right] * (-t^3 y) = -200t^3 y - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{200(D_2(s) - s^3)}{D_2(s)} \right] * (-t^3 y) \\
 y_e^{(2)} = & -\frac{1}{t^5} \frac{K_1}{LJ} \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{20}{D_2(s)} \right] * (-t^3 u) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{10s}{D_2(s)} \right] * (t^4 u) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2}{D_2(s)} \right] * (-t^5 u) \right) \\
 & + \frac{1}{t^5} \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_5(s)}{D_2(s)} \right] * y + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_4(s)}{D_2(s)} \right] * (-ty) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_3(s)}{D_2(s)} \right] * (t^2 y) \right) \\
 & + \frac{1}{t^5} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-200(D_2(s) - s^3) + (N_2(s) - 200s^3)}{D_2(s)} \right] * (-t^3 y) \\
 & + \frac{1}{t^5} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{5\frac{R}{L}(D_2(s) - s^3) - 25s(D_2(s) - s^3 - \frac{R}{L} s^2)}{D_2(s)} \right] * (t^4 y) \\
 & + \frac{1}{t^5} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_1(s) - 25s^4 - 20\frac{R}{L} s^3}{D_2(s)} \right] * (t^4 y) \\
 & + \frac{15\dot{y}_e}{t} - 5\frac{R}{L} \frac{y_e}{t} - \frac{120y_e}{t^2}
 \end{aligned}$$

c) Reconstruction de l'état.

Enfin, en remplaçant la relation (2.20) par les valeurs estimées  $y_e^{(p)}$  ( $0 \leq p \leq 2$ ), l'état est estimé en fonction de  $u(t)$  et de l'intégrale de  $y(t)$  et  $u(t)$ .

$$\begin{cases} x_1 = y_e(t), \\ x_2 = \dot{y}_e(t), \\ x_3 = \frac{J}{K_1} y_e^{(2)}(t). \end{cases}$$

**Cas deux :** La perturbation agit sur le système arbitrairement. Par exemple, la première équation du (2.23) devient  $\dot{x}_1 = x_2 + \bar{\pi}(t)$  et on a :

$$\begin{cases} x_1 = y_e(t) \\ x_2 = \dot{y}_e(t) - \bar{\pi}_e(t) \\ x_3 = \frac{J}{K_1} \left( y_e^{(2)}(t) - \dot{\bar{\pi}}_e(t) \right) \end{cases} \quad (2.28)$$

Il est clair qu'on a besoin d'estimer  $\bar{\pi}(t)$  et  $\dot{\bar{\pi}}(t)$  ( $\bar{\pi}(t) = 1 + 5t$  dans la simulation) afin d'estimer l'état. Selon la forme de (2.32), la perturbation est considérée comme un nouvel état et le système peut être réécrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{\bar{\pi}} \\ \dot{\dot{\bar{\pi}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_1}{J} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_2}{L} & -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \bar{\pi} \\ \dot{\bar{\pi}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (2.29)$$

Partons de la relation entrée/ sortie :

$$y^{(5)}(t) + \frac{R}{L} y^{(4)}(t) + \frac{K_1 K_2}{LJ} y^{(3)}(t) = \frac{K_1}{LJ} u^{(2)}(t), \quad (2.30)$$

en appliquant l'approche algébrique développée à cette relation entrée/sortie, on obtient l'estimation de  $y^{(p)}$  ( $0 \leq p \leq 4$ ), ainsi, nous pouvons reconstruire la perturbation  $\bar{\pi}(t)$  et l'état :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \bar{\pi} \\ \dot{\bar{\pi}} \end{pmatrix} = \mathbf{O}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} y_e \\ \dot{y}_e \\ y_e^{(2)} \\ y_e^{(3)} \\ y_e^{(4)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_1}{LJ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{RK_1}{JL^2} & \frac{K_1}{LJ} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ u^{(4)} \end{pmatrix} \right],$$

avec

$$\mathbf{O}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J(-K_1 K_2 L + R^2 J)}{K_1^2 K_2^2} & \frac{J^2 RL}{K_1^2 K_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-J^2 R}{K_1^2 K_2} & -\frac{J^2 L}{K_1^2 K_2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{J(-K_1 K_2 L + R^2 J)}{K_1^2 K_2^2} & -\frac{J^2 RL}{K_1^2 K_2^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{JR}{K_1 K_2} & \frac{JL}{K_1 K_2} \end{pmatrix}.$$

**Simulation :**

Ci-après, les estimations d'état présentées démontrent une bonne robustesse par rapport aux bruits de mesure. Les paramètres utilisés dans la simulation sont :  $K1 = 1(N/(m \cdot A))$ ,  $K2 = 1(N/(m \cdot A))$ ,  $L = 0.1(H)$ ,  $R = 1(\Omega)$  et  $J = 5(N \cdot s^2/m \cdot rad)$  avec les conditions initiales :  $x_3(0) = 2(A)$ ,  $x_2(0) = 0(rad/s)$  et  $x_1(0) = 1(rad)$ . La perturbation extérieure est  $q(t) = 1 + 5t$ . La tension d'entrée est choisie comme  $u(t) = 24 \sin(\pi t)$ .

Dans la figure 2.1, la deuxième sous-figure est le zoom de l'état  $x_1$  et sa valeur estimée. Il est clair que pour  $t \in [0, 0.05]$ , l'état estimé est à 0, puis après un petit temps  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.05(s)$ ), les valeurs estimées atteignent exactement les valeurs réelles.

Dans la figure 2.2, le signal mesuré  $y(t)$  est bruité par un bruit blanc (généré par ordinateur, la figure de droite de la deuxième ligne est le bruit), réparti uniformément dans l'intervalle  $[-0.15, 0.15]$  (écart type de  $\frac{3\sqrt{3}}{1600}$ ), avec une fréquence d'échantillonnage de 1000Hz. On peut voir que l'estimateur est peu sensible par rapport au bruit blanc.

La figure 2.3 montre le résultat de deuxième cas, l'estimateur fonctionne bien puisque les valeurs estimées atteignent exactement les valeurs réelles après un temps petit  $\epsilon$ .

### Intégration sur une *fenêtre glissante*

Les résultats obtenus ci-dessus sont valables sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Mais en pratique, on doit étendre ces formules pour travailler sur une fenêtre glissante de longueur  $T$ , et donc sur l'intervalle de temps  $[t - T, t]$ .

Concernant la mise en œuvre de l'algorithme sur une fenêtre glissante, l'intégrale peut être approchée par une somme en utilisant la règle trapézoïdale [73]. Supposons que  $T = nT_e$ , où  $T_e$  est la période d'échantillonnage, on a :

$$\int_{t-T}^t f(\tau) d\tau \approx T_e \sum_{i=k-n+1}^k \frac{\tilde{f}(i-1) + \tilde{f}(i)}{2} = T_e S_n(k), \quad (2.31)$$

où  $\tilde{f}(i) = f(iT_e)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  et  $S_n(0) = 0$ .

Au lieu de reprendre sur l'intervalle d'intégration dans sa globalité, l'implémentation de l'algorithme sur une fenêtre glissante peut donner l'estimation à chaque étape d'intégration. Cela est utile pour mettre à jour les intégrales de l'étape précédente seulement en tenant compte des valeurs entrant et sortant de la fenêtre. L'intégrale peut être calculée comme suit :

$$S_n(k) = S_n(k-1) + \frac{\tilde{f}(k-1) + \tilde{f}(k)}{2} - \frac{\tilde{f}(k-n) + \tilde{f}(k-n-1)}{2}.$$

Ici, notre travail est un cas particulier et l'implémentation peut être réalisée plus simplement, parce que le signal à traiter  $f(t)$  peut toujours être exprimé

comme le produit d'un polynôme dépendant du temps (noté  $P(t)$ ) et la sortie mesurable  $y(t)$ , c'est-à-dire  $f(t) = P(t)y(t)$ . Grâce aux changements de variables et quelques calculs, on pourra obtenir le produit d'un vecteur constant dans l'intervalle de l'intégration et le signal  $y(t)$  au lieu du produit d'un polynôme dépendant du temps et de la sortie  $y(t)$ . Afin d'illustrer cette technique, nous montrons la démarche à travers un exemple simple,

$$\int_0^t (t - \tau)^2 \tau^2 y(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

En changeant de variable  $\tau \rightarrow t\tau'$ , alors  $\tau' \in [0, 1]$ , et l'intégrale (2.32) devient :

$$\int_0^1 (t - t\tau')^2 (t\tau')^2 y(t\tau') d(t\tau') = t^5 \int_0^1 (1 - \tau')^2 \tau'^2 y(\tau') d\tau'.$$

Il est clair que le vecteur  $(1 - \tau')^2 \tau'^2$  ( $\tau' \in [0, 1]$ ) est constant pour l'intégration sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Avec la technique de fenêtre glissante, une fois que la valeur de ce vecteur est calculée, pour chaque étape d'intégration, on tient seulement compte de nouvelle valeur  $y(k)$  entrant et de l'ancienne valeur  $y(k - n - 1)$  sortant de la fenêtre au lieu de tout le signal  $f(k)$  (pour plus de détails, voir [98]).

Cette méthode d'intégration permet de considérer des systèmes sujets à des perturbations inconnues supposées suffisamment lisse et approchées par un polynôme sur une petite fenêtre glissante.

**Exemple :** Considérons un système d'ordre 2 sujet à la perturbation comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 + u + \pi \\ y &= x_1 \end{cases} \quad (2.33)$$

La relation entrée/sortie est :

$$\ddot{y} + 4y = u + \pi \quad (2.34)$$

où  $\pi(t)$  est la perturbation externe inconnue et supposée suffisamment lisse sur une petite fenêtre de temps. Une bonne approximation peut être considérée comme un polynôme de la forme :  $\pi(t) = at + b$  où  $a, b$  sont des constantes sur cette fenêtre de temps. Notons qu'il n'est donc pas nécessaire d'avoir une perturbation structurée puisque sur cette fenêtre de temps, un rejet de perturbation en ligne est obtenu.

a) Transformée de Laplace de la relation (2.34) :

$$s^2 y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4(sy(s) - y(0)) = u(s) + a/s^2 + b/s \quad (2.35)$$

b) Manipulation algébrique.

On multiplie les deux membres de l'expression précédente par  $s^2$  et on obtient :

$$s^2(s^2y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 4s^2(sy(s) - y(0)) = s^2u(s) + a + bs \quad (2.36)$$

On dérive (2.36) quatre fois par rapport à  $s$  pour éliminer les conditions initiales et on a :

$$\begin{aligned} (s^4 + 4s^2)\frac{d^4y(s)}{ds^4} + (16s^3 + 32s)\frac{d^3y(s)}{ds^3} + (72s^2 + 48)\frac{d^2y(s)}{ds^2} + 96s\frac{dy(s)}{ds} + 24y(s) \\ = s^2\frac{d^4u(s)}{ds^4} + 8s\frac{d^3u(s)}{ds^3} + 12\frac{d^2u(s)}{ds^2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

On multiplie les deux membres de (2.37) par  $\frac{1}{s^2(s^2+4)}$ , puis on applique la transformée inverse de Laplace, et on a :

$$\begin{aligned} y_e = \frac{1}{t^4} \left( -6 \int_0^t (t-\tau)y d\tau + 3 \int_0^t \sin 2(t-\tau)y d\tau + 24 \int_0^t \tau y d\tau - 24 \int_0^t \tau y \cos 2(t-\tau) d\tau \right) \\ + \frac{1}{t^4} \left( -30 \int_0^t \tau^2 y \sin 2(t-\tau) d\tau - 12 \int_0^t (t-\tau)\tau^2 y d\tau + \int_0^t 8\tau^3 y \cos 2(t-\tau) d\tau + \int_0^t 8\tau^3 y d\tau \right) \\ + \frac{1}{t^4} \left( \int_0^t \frac{1}{2}\tau^4 u \sin 2(t-\tau) d\tau + \int_0^t 2\tau^3 u [\cos 2(t-\tau) - 1] d\tau + \int_0^t \tau^2 u [3(t-\tau) - 1.5 \sin 2(t-\tau)] d\tau \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

On multiplie les deux membres de (2.37) par  $\frac{1}{s(s^2+4)}$ , puis on applique la transformée inverse de Laplace, et on a :

$$\begin{aligned} \dot{y}_e = \frac{1}{t^4} \left( 6 \int_0^t \cos 2(t-\tau)y d\tau - 6 \int_0^t \tau y d\tau + 48 \int_0^t \tau y \sin 2(t-\tau) d\tau - 60 \int_0^t \tau^2 y \cos 2(t-\tau) d\tau \right) \\ + \frac{1}{t^4} \left( -12 \int_0^t \tau^2 y d\tau - \int_0^t 16\tau^3 y \sin 2(t-\tau) d\tau + 12t^3 y_e \right) \\ + \frac{1}{t^4} \left( \int_0^t \tau^4 u \cos 2(t-\tau) d\tau - 4 \int_0^t \tau^3 u \sin 2(t-\tau) d\tau + \int_0^t 3\tau^2 u [1 - \cos 2(t-\tau)] d\tau \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

On multiplie les deux membres de (2.37) par  $\frac{1}{s^2+4}$ , puis on applique la transformée inverse de Laplace, et on a :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_e = \frac{1}{t^4} \left( -12 \int_0^t \sin 2(t-\tau)y d\tau + 96 \int_0^t \tau y \cos 2(t-\tau) d\tau + 120 \int_0^t \tau^2 y \sin 2(t-\tau) d\tau \right) \\ + \frac{1}{t^4} \left( - \int_0^t 32\tau^3 y \cos 2(t-\tau) d\tau + 8t^3 \dot{y}_e - 36t^2 y_e \right) \\ + \frac{1}{t^4} \left( t^4 u - 2 \int_0^t \tau^4 u \sin 2(t-\tau) d\tau - 8 \int_0^t \tau^3 u \cos 2(t-\tau) d\tau + 6 \int_0^t \tau^2 u \sin 2(t-\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

c) Reconstruction de l'état.

En utilisant les valeurs estimées  $y_e$  et  $\dot{y}_e$ , l'état est estimé en fonction de  $u(t)$  et de l'intégrale de  $y(t)$  et  $u(t)$ .

$$\begin{cases} x_1 = y_e(t) \\ x_2 = \dot{y}_e(t) \end{cases}$$

Notons que la fenêtre glissante est utilisée ici pour les simulations. A propos des applications pratiques,  $T$  (la longueur de la fenêtre glissante) doit être choisie environ 20 à 100 fois supérieure à la période d'échantillonnage  $T_e$ . Dans cette simulation,  $T_e = 0.001(s)$  et  $T = 0.1(s)$ .

La figure 2.4 montre l'estimation de l'état  $x_1$  et  $x_2$  (par l'observateur de Luenberger et par notre approche algébrique). La figure 2.5 montre l'erreur d'estimation sur l'état  $x_1$  et  $x_2$ . On voit bien que sur  $t \in [0, 0.1]$ , la valeur estimée par l'approche algébrique est fixée à 0, puis qu'elle suit exactement la valeur réelle. Dans ce cas là, l'observateur de Luenberger marche moins bien à cause de la perturbation inconnue aléatoire  $\pi(t)$ .

La figure 2.6 représente l'estimation de la perturbation extérieure  $\pi(t)$ . Il est clair que la perturbation extérieure peut être approchée par une fonction de la forme (2.3) lors de l'implémentation avec fenêtre glissante.

### **Différences entre la méthode développée au sein de l'équipe ALIEN et l'observateur de Luenberger :**

Estimation d'état par l'observateur de Luenberger :

1. L'observateur est un système auxiliaire ;
2. La convergence de l'observateur est asymptotique, et la vitesse de convergence peut être choisit par les valeurs propres de  $A - LC$ .

Estimation d'état par la méthode développée au sein de l'équipe ALIEN :

1. Elle est algébrique basée sur le calcul opérationnel (Laplace ici) et l'estimation d'état est donnée par une formule explicite, les calculs peuvent être implémentés formellement et effectués de manière très rapide ;
2. Elle est non-asymptotique : la valeur estimée atteint la vraie valeur en un temps fini ;
3. Il n'y a pas de gains d'observation ou d'autres paramètres extérieurs à régler.

**Remarque 3** *Concernant la sensibilité des deux méthodes par rapport aux variations paramétriques, il faut noter que :*

- *L'observateur de Luenberger est robuste (peu sensible) par rapport aux variations paramétriques. Par exemple, même si la valeur estimée d'un paramètre est différente que sa valeur réelle et si la paire  $(A,C)$  est observable, on peut choisir la matrice  $L$  telle que  $A - LC$  soit de Hurwitz (à valeurs propres à partie réelle strictement négative) ce qui assure quand même la convergence asymptotique de l'erreur  $e$  vers 0.*
- *Notre approche est plus sensible par rapport aux variations paramétriques. C'est la raison pour laquelle les paramètres du système  $a_i$  et  $b_i$  sont supposés exactement connus. Si tel n'est pas le cas, des techniques similaires à celles présentées ci-dessus peuvent être appliquées pour estimer ces paramètres en temps réel [67].*

## 2.4 Conclusion

Ce chapitre est dédié à l'étude de l'observabilité et l'observateur du système LTI. Une approche algébrique pour l'estimation d'état en temps fini des systèmes linéaires stationnaires avec des perturbations extérieures inconnues a été introduite. Une expression formelle pour cette estimation a été développée. Deux solutions d'implémentation : l'intégration sur l'intervalle entière sous l'interface *Matlab/Simulink* et l'intégration sur une *fenêtre glissante* sont également présentées. Remarquons que notre approche montre les bonnes propriétés de robustesse par rapport aux bruits. A la fin du chapitre, la comparaison entre notre approche et l'observateur de Luenberger est faite.

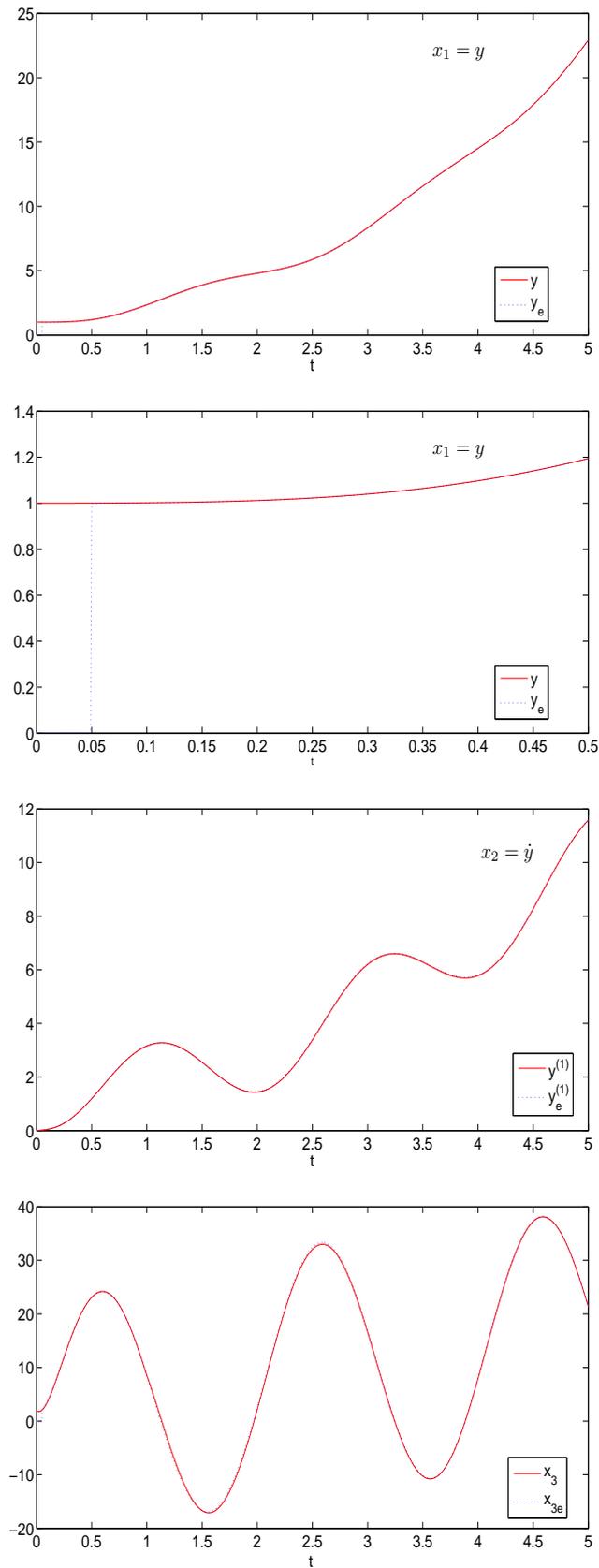


FIG. 2.1 – Cas 1 : Valeurs réelles et valeurs estimées (sans bruit).

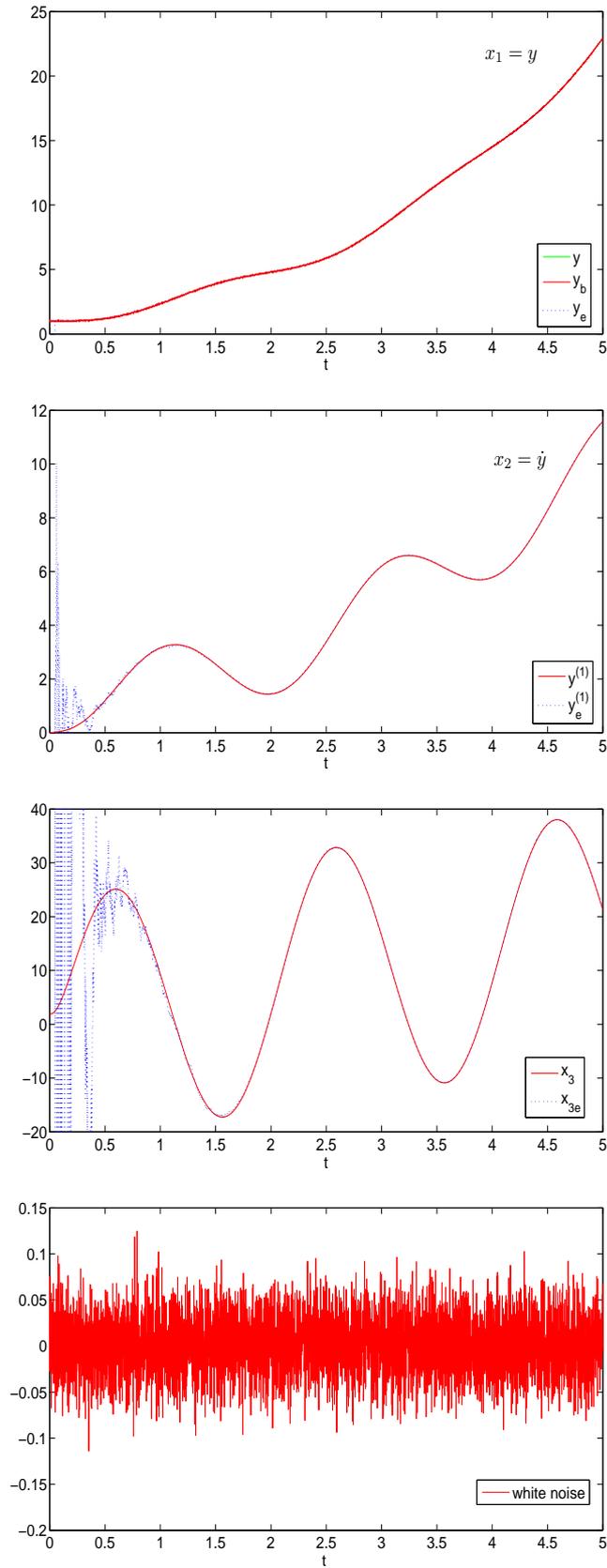


FIG. 2.2 – Cas 1 : Valeurs réelles et valeurs estimées (avec le bruit blanc).

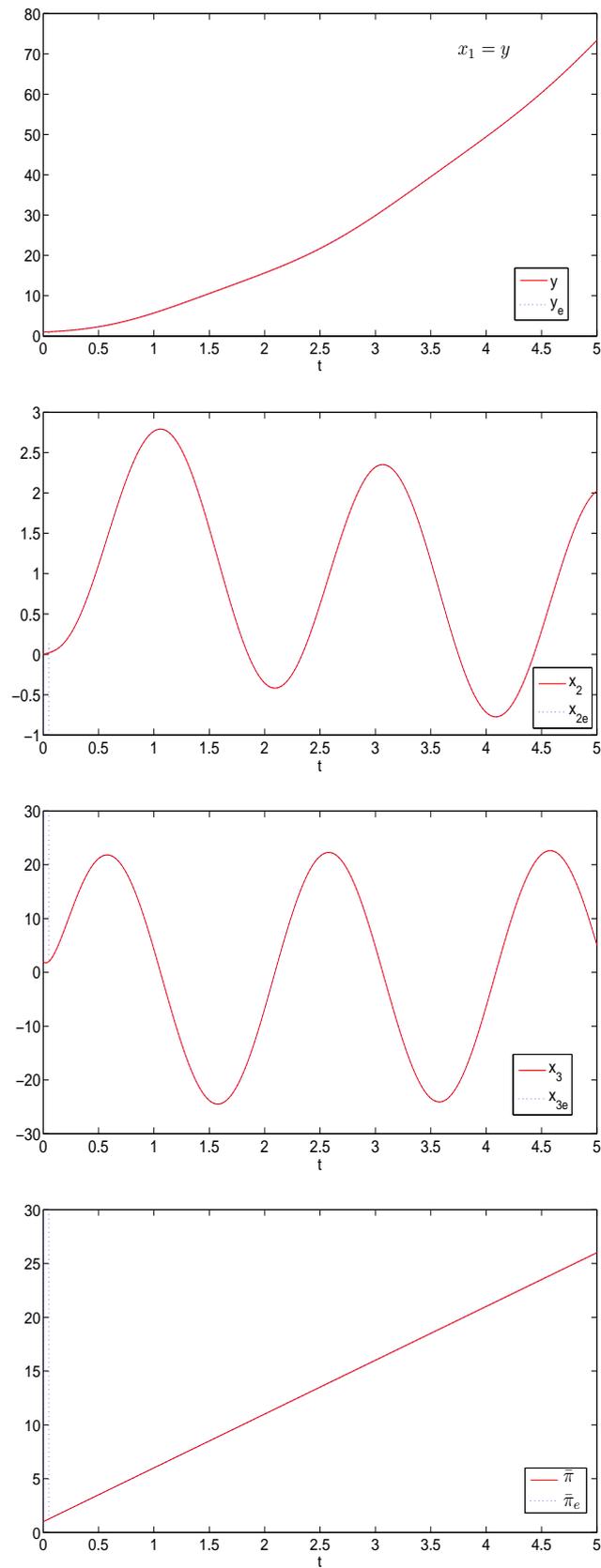
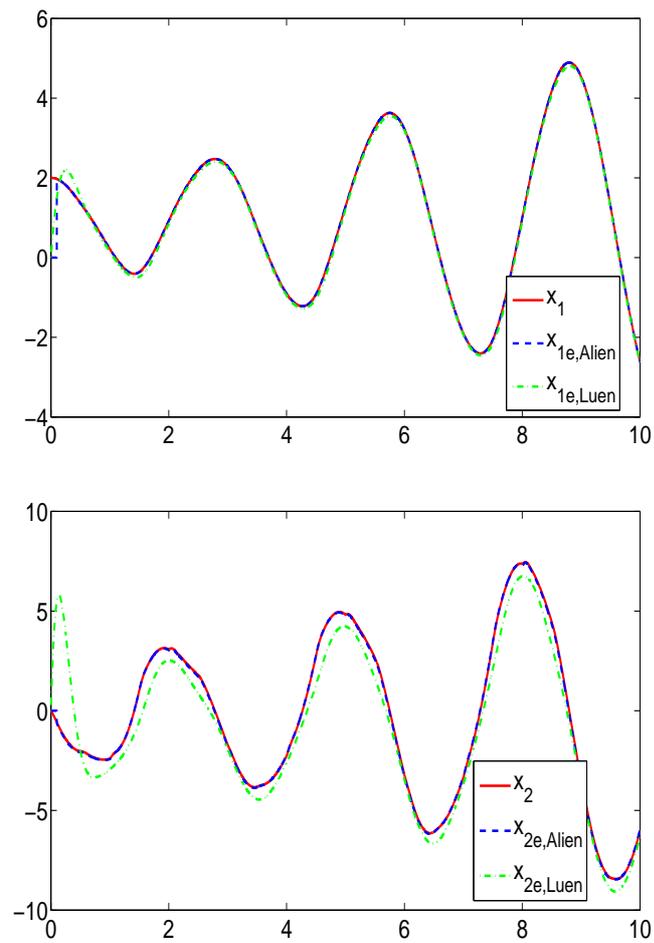


FIG. 2.3 – Cas 2 : Valeurs réelles et valeurs estimées (sans bruit).

FIG. 2.4 – Valeur réelle et estimée de l'état  $x_1$  et  $x_2$ .

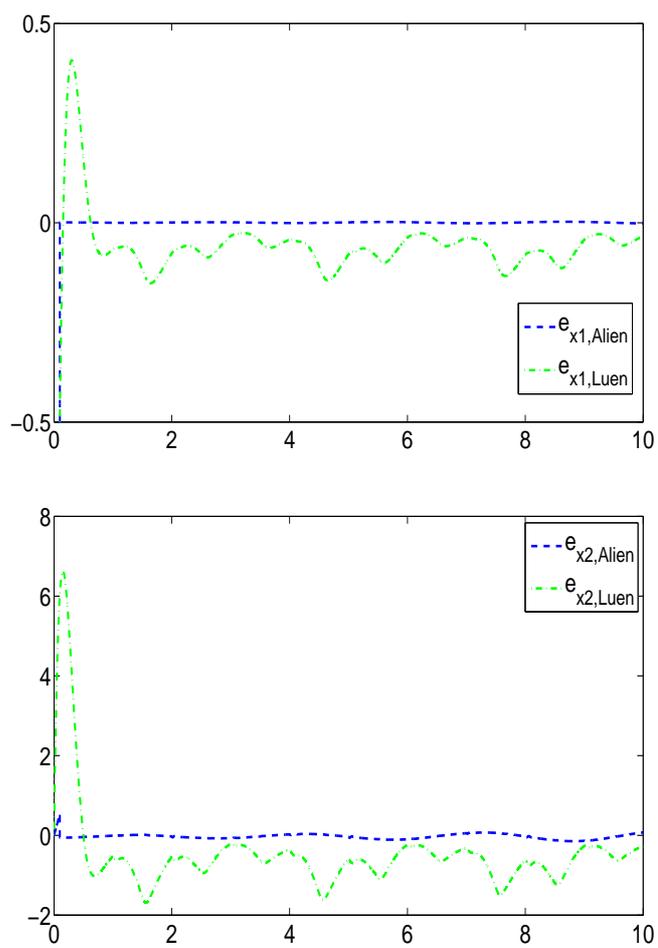
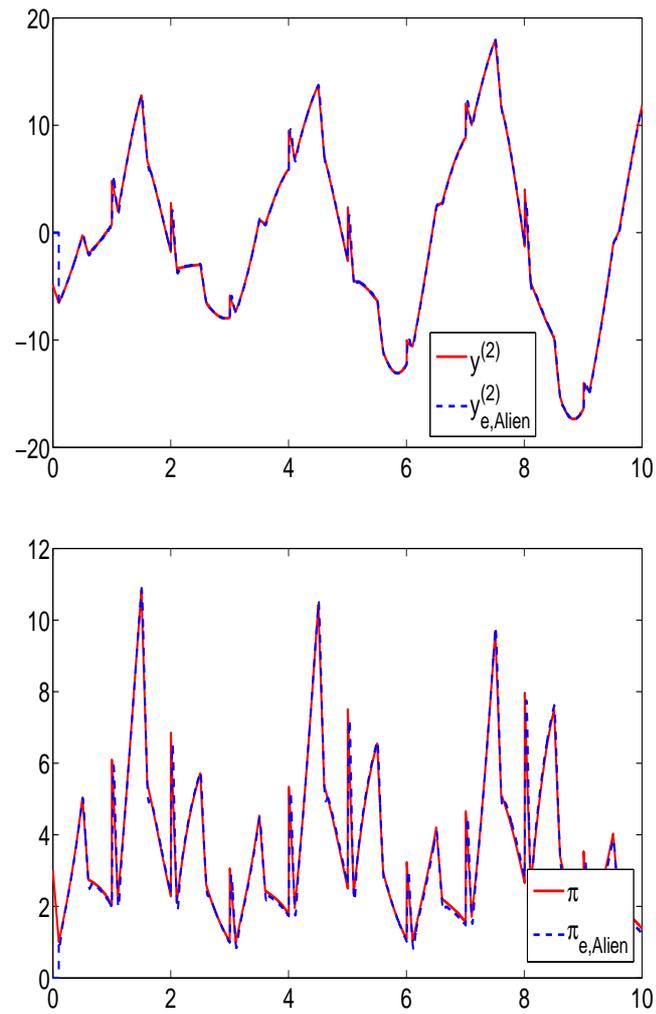


FIG. 2.5 – Erreur d'estimation sur l'état  $x_1$  et  $x_2$ .

FIG. 2.6 – Perturbation extérieure  $\pi(t)$  et son estimation  $\pi_e(t)$ .



# Chapitre 3

## Systemes linéaires à paramètres variant dans le temps

*Equations are more important to me, because politics is for the present, but an equation is something for eternity.*

— ALBERT EINSTEIN

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>3.2</b>	<b>Estimation d'état</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>3.3</b>	<b>Exemple</b> . . . . .	<b>68</b>
	3.3.1 Approche algébrique . . . . .	68
	3.3.2 Simulation . . . . .	70
<b>3.4</b>	<b>Comparaison avec l'observateur de type Kalman</b> . .	<b>71</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>74</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le problème d'estimation d'état par une approche algébrique pour les systèmes LTI a été étudié. Nous souhaitons ici étendre cette approche aux systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps (LTV).

Dans ce travail, nous donnons une expression formelle de l'état en fonction d'intégrales de la sortie et de l'entrée. L'influence des bruits de mesure peut également être réduite avec l'opération intégrale qui a un effet de filtrage. Pour ce faire, on applique certains outils mathématiques tels que la transformation de Laplace, des outils issus du calcul opérationnel et la théorie des distributions. Des simulations sont données afin d'illustrer les performances de cette approche. La comparaison entre notre approche et l'observateur de type Kalman pour les systèmes LTV est également réalisée.

Considérons la classe de systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ .  $A(t)$ ,  $B(t)$  et  $C(t)$  sont des matrices dont les coefficients varient dans le temps.

La définition de complètement/totalement observable pour les systèmes LTV de la forme (3.1), ainsi que des critères d'observabilité, ont été rappelés dans la section 1.2.2.

En particulier, dans l'article [52], l'observabilité du système (3.1) est définie avec un point de vue algébrique, qui est équivalent à la possibilité d'exprimer toutes les variables du système (en particulier toutes les variables d'état), en tant que combinaisons des éléments de l'entrée, de la sortie et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini. Dans ce contexte, en notant :

$$O(t) = \left[ C^T(t), \left( A^T(t) + \frac{d}{dt} \right) C^T(t), \dots, \left( A^T(t) + \frac{d}{dt} \right)^{n-1} C^T(t) \right],$$

on a le théorème :

**Théorème 1** [120] *Sur l'intervalle  $[t_0; t_f]$ , le système (3.1) est*

- *complètement observable si  $\text{rang } O(t) = n$  sur  $[t_0; t_f]$ ;*
- *totalement observable si et seulement si  $\text{rang } O(t) = n$  sur chaque sous-intervalle de  $[t_0; t_f]$ .*

## 3.2 Estimation d'état

Pour des raisons de facilité, quelques formules utiles qui seront utilisées ci-après dans ce chapitre sont rappelées ici :

$$\begin{aligned}
(i) \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^l} \frac{d^k Y(s)}{ds^k} \right) &= \begin{cases} \int \dots \int (-\tau_1)^k y(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_l, & \text{si } l \geq 1 \\ \frac{d^l((-t)^k y(t))}{dt^l}, & \text{si } l \leq 0 \end{cases} \\
(ii) \int \dots \int y(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_l &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{l-1} y(\tau)}{(l-1)!} d\tau \\
(iii) (f * g)(t) &= \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \\
(iv) \int_0^t \delta(\tau - \tau_0) f(\tau) d\tau &= f(\tau_0)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

où  $\delta(t)$  est la distribution de Dirac (fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui vaut zéro partout, sauf à l'origine et dont l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à 1).

Considérons le système (3.1). La relation entrée-sortie peut alors s'exprimer par :

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(t) u^{(i)}(t) \tag{3.3}$$

avec  $a_n = 1$ .

Notons :

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(t) &= C(t), \\
\Gamma_k(t) &= \left( \left( A^T(t) + \frac{d}{dt} \right)^k C^T(t) \right)^T, \quad 0 < k < n \\
\Delta_{k0}(t) &= \Gamma_k(t) B(t) \\
\Delta_{kj}(t) &= \begin{cases} C(t) B(t), & \text{si } j = k \\ \Delta_{(k-1)(j-1)}(t) + \frac{d}{dt} \Delta_{(k-1)j}(t), & \text{si } 1 \leq j < k \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut montrer que pour tout  $0 \leq k \leq n-1$  :

$$y^{(k)}(t) = \Gamma_k(t)x + \sum_{j=1}^k \Delta_{kj}(t)u^{(j-1)}. \tag{3.4}$$

Effectivement, on a :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \Gamma_0(t)x \\
\dot{y}(t) &= \Gamma_1(t)x + \Delta_{11}(t)u.
\end{aligned}$$

Supposons que la relation (3.4) est vraie pour l'entier  $k$ , nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 y^{(k+1)}(t) &= \frac{d}{dt}(\Gamma_k(t))x + \Gamma_k(t)(A(t)x + B(t)u) + \frac{d}{dt}(\Delta_{k1}(t))u \\
 &\quad + \Delta_{k1}(t)\dot{u} + \frac{d}{dt}(\Delta_{k2}(t))\dot{u} + \Delta_{k2}(t)u^{(2)} + \frac{d}{dt}(\Delta_{k3}(t))u^{(2)} \\
 &\quad + \dots + \Delta_{k(k-1)}(t)u^{(k-1)} + \frac{d}{dt}(\Delta_{kk}(t))u^{(k-1)} + \Delta_{kk}(t)u^{(k)} \\
 &= \left( \frac{d}{dt}(\Gamma_k(t)) + \Gamma_k(t)A(t) \right) x + \left( \Delta_{k0}(t) + \frac{d}{dt}(\Delta_{k1}(t)) \right) u \\
 &\quad + \left( \Delta_{k1}(t) + \frac{d}{dt}(\Delta_{k2}(t)) \right) \dot{u} + \left( \Delta_{k2}(t) + \frac{d}{dt}(\Delta_{k3}(t)) \right) u^{(2)} \\
 &\quad + \dots + \left( \Delta_{k(k-1)}(t) + \frac{d}{dt}(\Delta_{kk}(t)) \right) u^{(k-1)} \\
 &\quad + \Delta_{(k+1)(k+1)}(t)u^{(k)} \\
 &= \Gamma_{k+1}(t)x + \Delta_{(k+1)1}(t)u + \Delta_{(k+1)2}(t)\dot{u} + \Delta_{(k+1)3}(t)u^{(2)} \\
 &\quad + \dots + \Delta_{(k+1)k}(t)u^{(k-1)} + \Delta_{(k+1)(k+1)}(t)u^{(k)}
 \end{aligned}$$

Alors (3.4) est vraie pour l'entier  $k + 1$ . Ainsi, on peut exprimer tout l'état  $x$  en fonction de  $y$ ,  $u$  et de leurs dérivées par rapport au temps comme suit :

$$x(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_0(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \Gamma_2(t) \\ \Gamma_3(t) \\ \vdots \\ \Gamma_{n-1}(t) \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} - M(t) \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix} \right] \quad (3.5)$$

où

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta_{11}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta_{21}(t) & \Delta_{22}(t) & 0 & \dots & 0 \\ \Delta_{31}(t) & \Delta_{32}(t) & \Delta_{33}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{(n-1)1}(t) & \Delta_{(n-1)2}(t) & \Delta_{(n-1)3}(t) & \dots & \Delta_{(n-1)(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice d'observabilité  $O(t) = [\Gamma_0(t)^T, \Gamma_1(t)^T, \dots, (\Gamma_{n-1}(t))^T]$  est inversible puisque le système est supposé observable. Ainsi, on peut récupérer l'état du système une fois que la sortie mesurable et ses dérivées par rapport au temps jusqu'à un nombre fini sont connues. Dans la suite, une méthode algébrique est développée pour obtenir une estimation exacte et rapide de ces dérivées pour des systèmes LTV.

**Théorème 2** *Considérons la classe de systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps de la forme (3.1) dont la relation entrée/sortie est donnée par (3.3) et supposons que les  $a_i$  et  $b_i$  soient des fonctions  $i$  fois continûment différentiables. Les estimations des dérivées successives par rapport au temps de la sortie mesurable  $y$  sont alors données par l'expression suivante :*

$$y_e(t) = \frac{1}{(-t)^n} \left( \tilde{C}_0 - \tilde{B}_0 - \tilde{F}_0 \right) \quad (3.6)$$

$$\begin{pmatrix} y_e^{(1)}(t) \\ y_e^{(2)}(t) \\ y_e^{(3)}(t) \\ \vdots \\ y_e^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{(-t)^n} \left( \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \\ \tilde{C}_3 \\ \vdots \\ \tilde{C}_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_3 \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \vdots \\ \tilde{F}_{n-1} \end{pmatrix} - \tilde{R}(t) \begin{pmatrix} y_e(t) \\ y_e^{(1)}(t) \\ y_e^{(2)}(t) \\ \vdots \\ y_e^{(n-2)}(t) \end{pmatrix} \right) \quad (3.7)$$

avec

$$\tilde{R}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{2,1}(t) & \alpha_{2,2}(t) & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{3,1}(t) & \alpha_{3,2}(t) & \alpha_{3,3}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1}(t) & \alpha_{n-1,2}(t) & \alpha_{n-1,3}(t) & \dots & \alpha_{n-1,n-1}(t) \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{p,l}(t) = \sum_{j=n-p}^{n-1} \gamma_j \tilde{r}_{l-1,w}(t) + \tilde{d}_{p,l-1}(t)$$

$$\gamma_j = \frac{n!n!}{j!j!(n-j)!}, \quad w = p + j - n$$

$$\tilde{r}_{g,w}(t) = \binom{w}{g} \frac{j!(-1)^j}{(j-w+g)!} t^{j-w+g}, \quad \tilde{d}_{p,k}(t) = \binom{p}{k} \frac{(-1)^n n!}{(n-p+k)!} t^{n-p+k}$$

$$\tilde{B}_p = \frac{1}{(n-p-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \left( (-1)^i \int_0^t \tilde{E}_{p,a_i,i} y(\tau) d\tau \right)$$

$$\tilde{C}_p = \frac{1}{(n-p-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \left( (-1)^i \int_0^t \tilde{E}_{p,b_i,i} u(\tau) d\tau \right)$$

$$\tilde{E}_{p,f_i,i} = \{(t-\tau)^{n-p-1} (-\tau)^n f_i(\tau)\}^{(i)}$$

$$\tilde{F}_p = \sum_{j=0}^{n-p-1} \tilde{F}_{p,j} = \sum_{j=0}^{n-p-1} \gamma_j \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-w-1} (-\tau)^j y(\tau)}{(-w-1)!} d\tau, \quad w = p + j - n$$

**Preuve**

a) Appliquons la transformation de Laplace sur la relation entrée/sortie (3.3).

$$s^n y(s) - \dots - y^{(n-1)}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}(a_i(t) y^{(i)}(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}(b_i(t) u^{(i)}(t)).$$

b) Manipulation algébrique.

Pour éliminer les conditions initiales, dérivons l'expression précédente  $n$  fois par rapport à  $s$  en utilisant la formule de Leibniz :

$$\frac{d^h(x(s)y(s))}{ds^h} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{d^{h-j}(x(s))}{ds^{h-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j}$$

et la relation

$$\frac{d^k(s^l)}{ds^k} = \begin{cases} \frac{l!}{(l-k)!} s^{l-k}, & \text{si } 0 < k \leq l \\ 0, & \text{si } 0 < l < k \\ \frac{(-1)^k (k-l-1)!}{(-l-1)!} s^{l-k}, & \text{si } l < 0 < k \end{cases}, \quad (3.8)$$

Posons  $\gamma_j = \frac{n!n!}{j!j!(n-j)!}$ , on obtient :

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j s^j \frac{d^j(y(s))}{ds^j} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^n \mathcal{L}(a_i(t) y^{(i)}(t))}{ds^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^n \mathcal{L}(b_i(t) u^{(i)}(t))}{ds^n}. \quad (3.9)$$

Multiplions les deux membres de (3.9) par  $s^{-(n-p)}$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \gamma_j \frac{s^j}{s^{n-p}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{s^{n-p}} \frac{d^n \mathcal{L}(a_i(t) y^{(i)}(t))}{ds^n} \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{s^{n-p}} \frac{d^n \mathcal{L}(b_i(t) u^{(i)}(t))}{ds^n}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

c) Retour dans le domaine temporel.

On applique la transformée inverse de Laplace à (3.10) et on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{j=0}^n \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\gamma_j}{s^{n-p-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} \right)}_{\tilde{A}_p} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^{n-p}} \frac{d^n \mathcal{L}(a_i(t) y^{(i)}(t))}{ds^n} \right)}_{\tilde{B}_p} \\ = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^{n-p}} \frac{d^n \mathcal{L}(b_i(t) u^{(i)}(t))}{ds^n} \right)}_{\tilde{C}_p}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Maintenant, nous avons besoin d'exprimer  $\tilde{A}_p$ ,  $\tilde{B}_p$  et  $\tilde{C}_p$  en fonction de l'intégrale de  $y$ ,  $u$  et de leurs dérivées successives avec l'ordre inférieur à  $p$ .

c1) Concernant la partie  $\tilde{A}_p$ , en utilisant les deux formules (i) et (ii) données dans (3.2), on a :

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^l} \frac{d^k Y(s)}{ds^k} \right) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{l-1} (-\tau)^k y(\tau)}{(l-1)!} d\tau, \quad l \geq 1.$$

Donc,

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s^{n-p-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j} \right) = \begin{cases} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-p-j-1} (-\tau)^j y(\tau)}{(n-p-j-1)!} d\tau, & \text{si } j \leq n-p-1 \\ \frac{d^{p+j-n}((-t)^j y(t))}{dt^{p+j-n}}, & \text{si } n-p \leq j \leq n \end{cases}. \quad (3.12)$$

En posant  $w = p + j - n$  et en appliquant la formule de Leibniz ainsi que la relation (3.8), on a :

$$\frac{d^w((-t)^j y(t))}{dt^w} = \sum_{g=0}^w \binom{w}{g} \frac{j!(-1)^j t^{j-w+g} y^{(g)}(t)}{(j-w+g)!}. \quad (3.13)$$

Quand  $j = n$ , on a :

$$\frac{d^p((-t)^n y(t))}{dt^p} = (-t)^n y^{(p)}(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \frac{n!(-1)^n t^{n-p+k} y^{(k)}(t)}{(n-p+k)!}. \quad (3.14)$$

En utilisant (3.12), (3.13) et (3.14),  $\tilde{A}_p$  peut être réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_p &= \sum_{j=0}^{n-p-1} \tilde{F}_{p,j} + \sum_{j=n-p}^{n-1} \gamma_j \sum_{g=0}^w \binom{w}{g} \frac{j!(-1)^j t^{j-w+g} y^{(g)}(t)}{(j-w+g)!} \\ &+ (-t)^n y^{(p)}(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \frac{n!(-1)^n t^{n-p+k} y^{(k)}(t)}{(n-p+k)!}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

où

$$\tilde{F}_{p,j} = \gamma_j \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-w-1} (-\tau)^j y(\tau)}{(-w-1)!} d\tau.$$

c2) Afin d'exprimer  $\tilde{B}_p$  et  $\tilde{C}_p$ , on applique le théorème de convolution donné par :

$$\mathcal{L}^{-1}(g_1(s)g_2(s)) = g_1(t) * g_2(t)$$

qui donne :

$$\tilde{B}_p = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{n-p-1} \epsilon(t)}{(n-p-1)!} * (-t)^n a_i(t) y^{(i)}(t),$$

où  $\epsilon(t)$  est la distribution de Heaviside, appelée aussi fonction échelon.

Si  $g_1$  est une fonction de classe  $C^1$  avec  $g_1(0) = 0$  et  $g_2$  continue, alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^t g_1(t-\tau)g_2(\tau)d\tau \\ &= \left[ g_1(t-\tau) \int_0^\tau g_2(\mu)d\mu \right]_0^t - \int_0^t \frac{dg_1(t-\tau)}{d\tau} \left( \int_0^\tau g_2(\mu)d\mu \right) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{dg_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} \left( \int_0^\tau g_2(\mu)d\mu \right) d\tau. \end{aligned}$$

Ce résultat peut être généralisé pour deux distributions  $(g_1, g_2)$  de support limité à gauche (ce qui implique l'existence du produit de convolution  $g_1 * g_2$ ) :

$$\int_0^t g_1'(t-\tau)g_2(\tau)d\tau = \int_0^t g_1(t-\tau)g_2'(\tau)d\tau$$

qui se lit aussi comme suit :

$$g_1'(t) * g_2(t) = g_1(t) * g_2'(t), \quad (3.16)$$

où la notation prime désigne la dérivation de distribution.

En utilisant les formules (3.2) et (3.16), on a :

$$\begin{aligned} & t^{n-p-1}\epsilon(t) * (-t)^n a_i(t)y^{(i)}(t) \\ & \stackrel{(3.16)}{=} [(n-p-1)t^{n-p-2}\epsilon(t) + t^{n-p-1}\delta(t)] * \int_0^t (-\tau_1)^n a_i y^{(i)} d\tau_1 \\ & \stackrel{(iii)(iv)}{=} (n-p-1)t^{n-p-2}\epsilon(t) * \int_0^t (-\tau_1)^n a_i y^{(i)} d\tau_1 \\ & \stackrel{(3.16)}{=} (n-p-1)!\epsilon(t) * \underbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t (-\tau_1)^n a_i y^{(i)} d\tau_1}_{(n-p-1)} \\ & \stackrel{(iii)}{=} (n-p-1)! \underbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \epsilon(t-\tau_1)(-\tau_1)^n a_i y^{(i)} d\tau_1}_{(n-p)} \\ & = (n-p-1)! \underbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t (-\tau_1)^n a_i y^{(i)} d\tau_1}_{(n-p)} \\ & \stackrel{(ii)}{=} \int_0^t (t-\tau_1)^{n-p-1} (-\tau_1)^n a_i y^{(i)} d\tau_1 \end{aligned}$$

où  $\delta(t)$  est la fonction Dirac. Ainsi,

$$\tilde{B}_p = \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} (-\tau)^n a_i(\tau) y^{(i)}(\tau) d\tau.$$

Sachant que, par intégrations par parties successives pour une fonction  $g$  de classe  $C^i$ , on a :

$$\int_a^b f(\tau)g^{(i)}(\tau)d\tau = \left[ \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k f^{(k)}(\tau)g^{(i-1-k)}(\tau) \right]_a^b + (-1)^i \int_a^b f^{(i)}(\tau)g(\tau)d\tau$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_p &= \frac{1}{(n-p-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \tilde{E}_{p,a_i,j} y^{(i-j-1)}(\tau) \right]_0^t \\ &+ \frac{1}{(n-p-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \int_0^t \tilde{E}_{p,a_i,i} y(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{p,a_i,j} &= \{(t-\tau)^{n-p-1}(-\tau)^n a_i(\tau)\}^{(j)} \\ &= \{(\tau^2 - t\tau)^{n-p-1}(-\tau)^{p+1} a_i(\tau)\}^{(j)} \\ &= \sum_{f=0}^j \binom{j}{f} \frac{d^{j-f}\{(\tau^2 - t\tau)^{n-p-1}\}}{d\tau^{j-f}} \frac{d^f\{(-\tau)^{p+1} a_i(\tau)\}}{d\tau^f} \\ &= \sum_{f=0}^j \binom{j}{f} \frac{d^{j-f}\{(\tau^2 - t\tau)^{n-p-1}\}}{d(\tau^2 - t\tau)^{j-f}} \frac{d(\tau^2 - t\tau)^{j-f}}{d\tau^{j-f}} \frac{d^f\{(-\tau)^{p+1} a_i(\tau)\}}{d\tau^f}. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.8), on obtient

$$\frac{d^{j-f}\{(\tau^2 - t\tau)^{n-p-1}\}}{d(\tau^2 - t\tau)^{j-f}} = \begin{cases} \frac{(n-p-1)!(\tau^2 - t\tau)^{n-p-1-j+f}}{(n-p-1-j+f)!}, & \text{si } j-f \leq n-p-1 \\ 0, & \text{si } n-p-1 < j-f \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \left[ \tilde{E}_{p,a_i,j} y^{(i-j-1)}(\tau) \right]_0^t = 0,$$

et

$$\tilde{B}_p = \frac{1}{(n-p-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \left( (-1)^i \int_0^t \tilde{E}_{p,a_i,i} y(\tau) d\tau \right). \quad (3.17)$$

Appliquant les mêmes opérations pour  $\tilde{C}$ , on obtient :

$$\tilde{C}_p = \frac{1}{(n-p-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \left( (-1)^i \int_0^t \tilde{E}_{p,b_i,i} u(\tau) d\tau \right). \quad (3.18)$$

En substituant les résultats précédents (3.15), (3.17) et (3.18) dans (3.11), on obtient les expressions suivantes pour la dérivée d'ordre  $p$  de  $y$  par rapport au temps :

$$y^{(p)}(t) = \frac{1}{(-t)^n} \left( \tilde{C}_p - \tilde{B}_p - \sum_{j=0}^{n-p-1} \tilde{F}_{p,j} - \Gamma_p(y) \right), \quad (3.19)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Gamma_p(y) &= \sum_{j=n-p}^{n-1} \gamma_j \sum_{g=0}^w \binom{w}{g} \frac{j!(-1)^j t^{j-w+g}}{(j-w+g)!} y^{(g)}(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \frac{n!(-1)^n t^{n-p+k}}{(n-p+k)!} y^{(k)}(t) \\
 &= \left( (\gamma_{n-p} \tilde{r}_{0,0} + \gamma_{n-p+1} \tilde{r}_{0,1} + \dots + \gamma_{n-1} \tilde{r}_{0,p-1}) + \tilde{d}_{p,0} \right) y + \dots \\
 &\quad + \left( (\gamma_{n-p} \tilde{r}_{p-1,0} + \gamma_{n-p+1} \tilde{r}_{p-1,1} + \dots + \gamma_{n-1} \tilde{r}_{p-1,p-1}) + \tilde{d}_{p,p-1} \right) y^{(p-1)} \\
 &= \left( \sum_{j=n-p}^{n-1} \gamma_j \tilde{r}_{0,w} + \tilde{d}_{p,0} \right) y + \dots + \left( \sum_{j=n-p}^{n-1} \gamma_j \tilde{r}_{p-1,w} + \tilde{d}_{p,p-1} \right) y^{(p-1)} \\
 &= \sum_{l=1}^p \alpha_{p,l} y^{(l-1)}.
 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où  $p = 0$ , appliquant le résultat de (3.15), (3.17) et (3.18), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_0 &= (-t)^n y(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \frac{\int_0^t (t-\tau)^{n-j-1} (-\tau)^j y(\tau) d\tau}{(n-j-1)!}, \\
 \tilde{B}_0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i \int_0^t \{(t-\tau)^{n-1} (-\tau)^n a_i(\tau)\}^{(i)} y(\tau) d\tau}{(n-1)!}, \\
 \tilde{C}_0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i \int_0^t \{(t-\tau)^{n-1} (-\tau)^n b_i(\tau)\}^{(i)} u(\tau) d\tau}{(n-1)!}.
 \end{aligned}$$

On obtient donc ici une estimée du signal mesuré  $y$ . De toute évidence,  $y_e(t)$  peut être réécrit comme dans (3.6) en fonction de l'intégrale de la sortie  $y$  et l'entrée  $u$ . Puis, on réinjecte l'expression de  $y_e(t)$  dans (3.19). On obtient alors (3.7) comme une expression de l'estimation des dérivées successives par rapport au temps de la sortie mesurée  $y$ . En raison de la structure triangulaire de la matrice  $\tilde{R}$ , on obtient l'estimation de la dérivée d'ordre  $i$  ( $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ) de  $y$  seulement en fonction de l'intégrale de  $y$  et de l'entrée  $u$ .

Il faut noter qu'on demande seulement ici que les paramètres  $a_i$  et  $b_i$  soient des fonctions continûment dérivables.

### Reconstruction de l'état

En utilisant la relation (3.5), on obtient l'estimation de l'état en fonction uniquement de l'intégrale de  $y$  et de l'entrée  $u$  :

$$x_e(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_0(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \Gamma_2(t) \\ \Gamma_3(t) \\ \vdots \\ \Gamma_{n-1}(t) \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} y_e \\ \dot{y}_e \\ y_e^{(2)} \\ y_e^{(3)} \\ \vdots \\ y_e^{(n-1)} \end{pmatrix} - M(t) \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix} \right].$$

*Extension à l'observation des systèmes non linéaires*

Considérons un système non linéaire défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t)) \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^d$ .

Supposons que  $x_{ref} \in \mathbb{R}^n$  et  $u_{ref} \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement la trajectoire de l'état et de l'entrée du système nominal connu, et que nous avons la relation suivante :

$$\dot{x}_{ref}(t) = f(x_{ref}(t), u_{ref}(t)). \quad (3.21)$$

En appliquant la formule de Taylor du développement limité à l'ordre 1 au voisinage du système nominal, on peut approximativement linéariser le système non linéaire autour de la trajectoire connue  $(x_{ref}, u_{ref})$ . Alors le système (3.20) devient :

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t), \\ \Delta y(t) = C(t)\Delta x(t), \end{cases} \quad (3.22)$$

avec  $\Delta x(t) = x(t) - x_{ref}(t)$  et  $\Delta u(t) = u(t) - u_{ref}(t)$ . Les matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$  et  $C(t)$  sont définies par :

$$A(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$B(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \dots & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial u_j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{pmatrix}_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))} \in \mathbb{R}^{n \times r},$$

$$C(t) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \frac{\partial g_i}{\partial x_j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_d}{\partial x_1} & \frac{\partial g_d}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial g_d}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))} \in \mathbb{R}^{d \times n}.$$

Le système (3.22) est bien de la forme du système LTV (3.1) et peut être traité avec l'approche développée précédemment.

### 3.3 Exemple

Considérons un moteur à courant continu modélisé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{\tau(t)}x_2(t) + \frac{k}{\tau(t)}u(t) \end{cases} \quad (3.23)$$

où  $y = x_1$  est la sortie mesurable;  $x_1$  est la position angulaire du rotor,  $x_2$  est la vitesse angulaire du rotor et  $u$  est la tension d'entrée.  $k$  est un paramètre constant et strictement positif,  $\tau(t)$  est un paramètre strictement positif et variant par rapport au temps.

#### 3.3.1 Approche algébrique

Partons de la relation entrée/sortie :

$$y^{(2)}(t) + \frac{1}{\tau(t)}\dot{y} = \frac{k}{\tau(t)}u(t) \quad (3.24)$$

**Étape 1 : Expression de  $y^{(1)}$  en fonction de  $y$ ,  $u$  et de leurs intégrales.**

a) Appliquons la transformée de Laplace à la relation (3.24).

$$s^2y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + \mathcal{L}\left(\frac{\dot{y}}{\tau(t)}\right) = k\mathcal{L}\left(\frac{u(t)}{\tau(t)}\right) \quad (3.25)$$

b) Dérivons (3.25) deux fois par rapport à  $s$  pour éliminer les conditions initiales :

$$2y(s) + 4s\frac{dy(s)}{ds} + s^2\frac{d^2y(s)}{ds^2} + \frac{d^2\mathcal{L}\left(\frac{\dot{y}}{\tau(t)}\right)}{ds^2} = k\frac{d^2\mathcal{L}\left(\frac{u(t)}{\tau(t)}\right)}{ds^2} \quad (3.26)$$

Multiplions les deux membres de (3.26) par  $s^{-1}$  :

$$\frac{2}{s}y(s) + 4\frac{dy(s)}{ds} + s\frac{d^2y(s)}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{d^2\mathcal{L}\left(\frac{\dot{y}}{\tau(t)}\right)}{ds^2} = \frac{k}{s}\frac{d^2\mathcal{L}\left(\frac{u(t)}{\tau(t)}\right)}{ds^2} \quad (3.27)$$

c) Retour au domaine temporel.

Appliquons la transformée inverse de Laplace de (3.27) en utilisant les expressions de (3.15), (3.17), (3.18). On obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \int_0^t 2y(\lambda)d\lambda - 2ty(t) + t^2y^{(1)}, \\ \tilde{B}_1 &= \int_0^t \lambda^2 \left( \frac{y^{(1)}(\lambda)}{\tau(\lambda)} \right) d\lambda = \frac{t^2y(t)}{\tau(t)} - \int_0^t y(\lambda)d\frac{\lambda^2}{\tau(\lambda)}, \\ \tilde{C}_1 &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{k}{s} \frac{d^2\mathcal{L}\left(\frac{u(t)}{\tau(t)}\right)}{ds^2} \right) = k \int_0^t \lambda^2 \frac{u(\lambda)}{\tau(t)} d\lambda. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression (3.7), on obtient :

c1) pour  $\tau(t) = a_0 t + a_1$

$$y^{(1)} = \frac{k \int_0^t \frac{\lambda^2 u(\lambda)}{a_0 \lambda + a_1} d\lambda + \int_0^t y(\lambda) \frac{a_0 \lambda^2 + 2a_1 \lambda}{(a_0 \lambda + a_1)^2} d\lambda - \frac{t^2 y(t)}{\tau(t)} - \int_0^t 2y(\lambda) d\lambda + 2ty(t)}{t^2}, \quad (3.28)$$

c2) pour  $\tau(t) = b_0(\sin b_1 t) + b_2$

$$y^{(1)} = \frac{\int_0^t y(\lambda) \left( \frac{2\lambda}{b_0 \sin(b_1 \lambda) + b_2} - \frac{\lambda^2 b_0 b_1 \cos(b_1 \lambda)}{(b_0 \sin(b_1 \lambda) + b_2)^2} - 2 \right) d\lambda}{t^2} + \frac{\int_0^t \frac{k \lambda^2 u(\lambda)}{b_0 \sin(b_1 \lambda) + b_2} d\lambda + 2ty(t) - \frac{t^2 y(t)}{b_0 \sin(b_1 t) + b_2}}{t^2}. \quad (3.29)$$

**Étape 2 : Expression de  $y_e$  en fonction de l'intégrale de  $y$ .**

Multiplications les deux membres de (3.26) par  $s^{-2}$  :

$$\frac{2}{s^2} y(s) + \frac{4}{s} \frac{dy(s)}{ds} + \frac{d^2 y(s)}{ds^2} + \frac{1}{s^2} \frac{d^2 \mathcal{L} \left( \frac{\dot{y}}{\tau(t)} \right)}{ds^2} = \frac{k}{s^2} \frac{d^2 \mathcal{L} \left( \frac{u(t)}{\tau(t)} \right)}{ds^2} \quad (3.30)$$

Appliquons la transformée inverse de Laplace de (4.2) en utilisant l'expression de (3.15), (3.17), (3.18) avec  $p = 0$  :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= \int_0^t \int_0^\phi 2y(\lambda) d\lambda d\phi - \int_0^t 4\lambda y(\lambda) d\lambda + t^2 y(t), \\ \tilde{B}_0 &= \int_0^t (t - \lambda) \lambda^2 \frac{\dot{y}(\lambda)}{\tau(\lambda)} d\lambda = \int_0^t y(\lambda) d\frac{\lambda^3}{\tau(\lambda)} - t \int_0^t y(\lambda) d\frac{\lambda^2}{\tau(\lambda)}, \\ \tilde{C}_0 &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{k}{s^2} \frac{d^2 \mathcal{L} \left( \frac{u(t)}{\tau(t)} \right)}{ds^2} \right) = k \int_0^t (t - \lambda) \lambda^2 \frac{u(\lambda)}{\tau(t)} d\lambda. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression (3.6), on obtient :

c1) pour  $\tau(t) = a_0 t + a_1$

$$y_e(t) = \frac{\int_0^t y(\lambda) \left( \frac{-(2a_0 \lambda^3 + 3a_1 \lambda^2 - t(a_0 \lambda^2 + 2a_1 \lambda))}{(a_0 \lambda + a_1)^2} + 6\lambda - 2t \right) d\lambda}{t^2} + k \frac{\int_0^t \frac{(t - \lambda) \lambda^2 u(\lambda)}{a_0 \lambda + a_1} d\lambda}{t^2}$$

c2) pour  $\tau(t) = b_0 \sin(b_1 t) + b_2$

$$y_e(t) = \frac{\int_0^t y(\lambda) \left( \frac{-(3\lambda^2 - 2t\lambda)}{b_0 \sin(b_1 \lambda) + b_2} + \frac{(\lambda^3 - t\lambda^2) b_0 b_1 \cos(b_1 \lambda)}{(b_0 \sin(b_1 \lambda) + b_2)^2} \right) d\lambda}{t^2} + \frac{\int_0^t y(\lambda) (6\lambda - 2t) d\lambda + \int_0^t \frac{k(t - \lambda) \lambda^2 u(\lambda)}{b_0 \sin(b_1 \lambda) + b_2} d\lambda}{t^2}$$

Puis, on substitue  $y_e(t)$  dans l'expression de  $y^{(1)}(t)$  ((3.28) et (3.29)) et on obtient  $y_e^{(1)}(t)$  comme une expression de l'estimation de dérivée par rapport au temps de la sortie mesurée  $y$ .

### Étape 3 : Reconstruction de l'état.

c1) pour  $\tau(t) = a_0 t + a_1$ , on obtient :

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \frac{\int_0^t y(\lambda) \left( \frac{-(2a_0\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 - t(a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda))}{\tau(\lambda)^2} + (6\lambda - 2t) \right) d\lambda + k \int_0^t \frac{(t-\lambda)\lambda^2 u(\lambda)}{\tau(\lambda)} d\lambda}{t^2} \\ \hat{x}_2 = \frac{\int_0^t y(\lambda) \left( \frac{a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda}{\tau(\lambda)^2} - 2 \right) d\lambda + k \int_0^t \frac{\lambda^2 u(\lambda)}{\tau(\lambda)} d\lambda + 2ty_e(t) - \frac{t^2 y_e(t)}{\tau(t)}}{t^2} \end{cases}$$

c2) pour  $\tau(t) = b_0 \sin(b_1 t) + b_2$ , on obtient :

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \frac{\int_0^t y(\lambda) \left( \frac{-(3\lambda^2 - 2t\lambda)}{\tau(\lambda)} + \frac{(\lambda^3 - t\lambda^2)b_0 b_1 \cos(b_1 \lambda)}{\tau(\lambda)^2} + 6\lambda - 2t \right) d\lambda + \int_0^t \frac{k(t-\lambda)\lambda^2 u(\lambda)}{\tau(\lambda)} d\lambda}{t^2} \\ \hat{x}_2 = \frac{\int_0^t y(\lambda) \left( \frac{2\lambda}{\tau(\lambda)} - \frac{\lambda^2 b_0 b_1 \cos(b_1 \lambda)}{\tau(\lambda)^2} - 2 \right) d\lambda + \int_0^t \frac{k\lambda^2 u(\lambda)}{\tau(\lambda)} d\lambda + 2ty_e(t) - \frac{t^2 y_e(t)}{\tau(t)}}{t^2} \end{cases}$$

## 3.3.2 Simulation

Ci-après, les estimations d'état présentées démontrent une bonne robustesse par rapport aux bruits de mesure. Les conditions initiales sont :  $x_2(0) = 0(rad/s)$ ,  $x_1(0) = 1(rad)$ .  $k = 1$  et la tension d'entrée est choisie comme  $u(t) = 12 \sin t$ .

### 3.3.2.1 Sensibilité par rapport aux bruits :

Des simulations sont données pour des paramètres variant de façon polynômial (Fig. 3.1 et Fig. 3.2) :  $\tau = a_0 t + a_1$  (avec  $a_0 = 0.001$ ,  $a_1 = 1$ ) et sinusoïdale (Fig. 3.3 et Fig. 3.4) :  $\tau = b_0 \sin(b_1 t) + b_2$  (avec  $b_0 = 2$ ,  $b_1 = 0.5 * \pi$ ,  $b_2 = 3$ ).

Dans les figures Fig. 3.1 et Fig. 3.3, les mesures ne sont pas bruitées. On voit bien que la valeur estimée suit quasi-instantanément exactement la valeur réelle.

Dans les figures Fig. 3.2 et Fig. 3.4, le signal mesuré  $y(t)$  a été bruité par un bruit blanc uniformément réparti dans l'intervalle  $[-4, 4]$  (écart type de  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ). On peut constater que cet estimateur est assez robuste par rapport au bruit blanc.

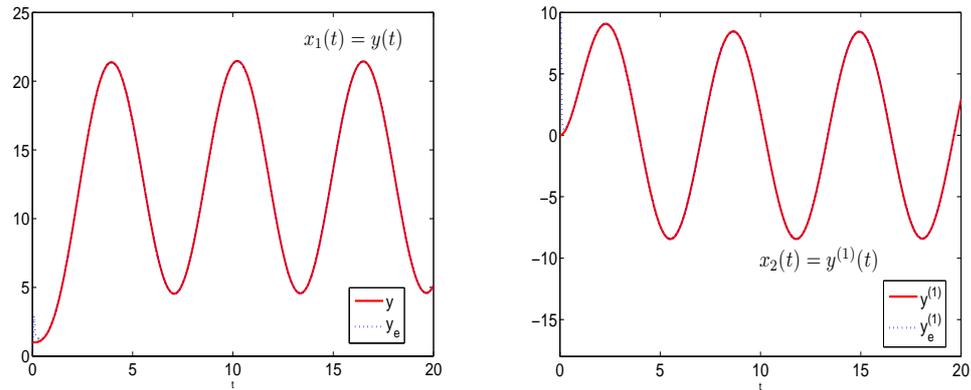


FIG. 3.1 – Valeurs réelles et estimées : sans bruit ( $\tau = a_0 t + a_1$ ).

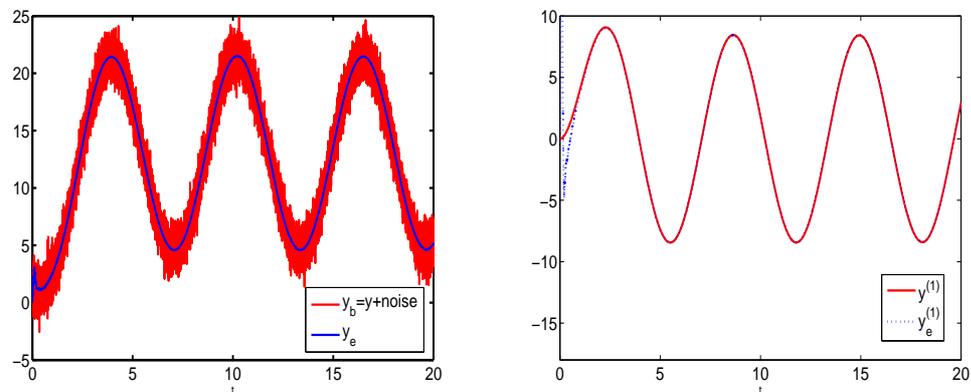


FIG. 3.2 – Valeurs réelles et estimées : avec le bruit blanc ( $\tau = a_0 t + a_1$ ).

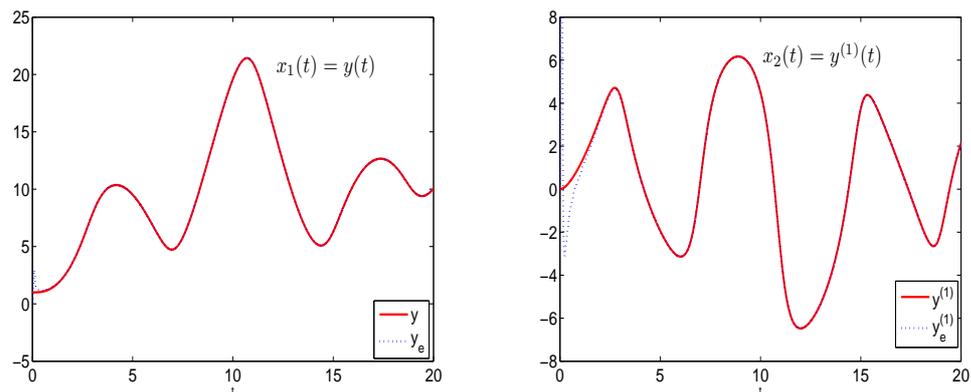


FIG. 3.3 – Valeurs réelles et estimées : sans bruit ( $\tau = b_0 \sin(b_1 t) + b_2$ ).

### 3.4 Comparaison avec l'observateur de type Kalman

Nous comparons ci-après l'observateur de type Kalman pour les systèmes LTV et notre approche algébrique avec le même exemple du moteur à courant continu

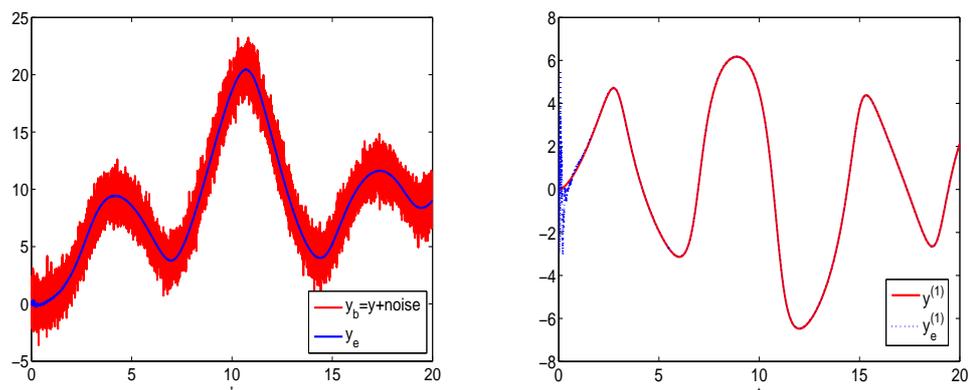


FIG. 3.4 – Valeurs réelles et estimées : avec le bruit blanc ( $\tau = b_0 \sin(b_1 t) + b_2$ ).

modélisé par (3.23).

Pour la suite, concernant l'observateur de type Kalman, on suppose que :

- $w(t)$  est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance  $W(t)$  et  $v(t)$  est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance  $V(t)$  dont les valeurs moyennes sont 0 ;
- Les bruits  $w(t)$  et  $v(t)$  sont des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes ;
- Les bruits  $w(t)$  et  $v(t)$  et la condition initiale  $x(0)$  sont mutuellement indépendants ;
- $x(t)$  et  $y(t)$  sont des variables indépendantes.

Des simulations sont données pour des paramètres polynômiaux (Fig. 3.5 et Fig. 3.6) :  $\tau = a_0 t + a_1$  (avec  $a_0 = 0.001$ ,  $a_1 = 1$ ) et des paramètres sinusoïdaux (Fig. 3.7 et Fig. 3.8) :  $\tau = b_0 \sin(b_1 t) + b_2$  (avec  $b_0 = 2$ ,  $b_1 = 0.5 * \pi$ ,  $b_2 = 3$ ).  $\lambda = 0$ ,  $R = 1$  et  $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Les conditions initiales sont :  $x_2(0) = 5(\text{rad/s})$ ,  $x_1(0) = 1(\text{rad})$ .  $k = 1$  et la tension d'entrée est choisie comme  $u(t) = 12 \sin t$ .

Dans les figures (Fig. 3.5 et Fig. 3.7), les mesures ne sont pas bruitées. On voit bien que la valeur estimée suit quasi-instantanément exactement la valeur réelle.

Dans les figures (Fig. 3.6 et Fig. 3.8), le signal mesuré  $y(t)$  a été bruité par un bruit blanc uniformément réparti dans l'intervalle  $[-4, 4]$  (écart type de  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ). On voit bien que ces deux méthodes (la méthode développée au sein de l'équipe Alien et l'observateur de type Kalman) marchent bien et sont assez robustes par rapport au bruit blanc. Ci-dessous, nous concluons sur les différences entre ces deux méthodes.

### Différences des deux méthodes :

### 3.4. Comparaison avec l'observateur de type Kalman

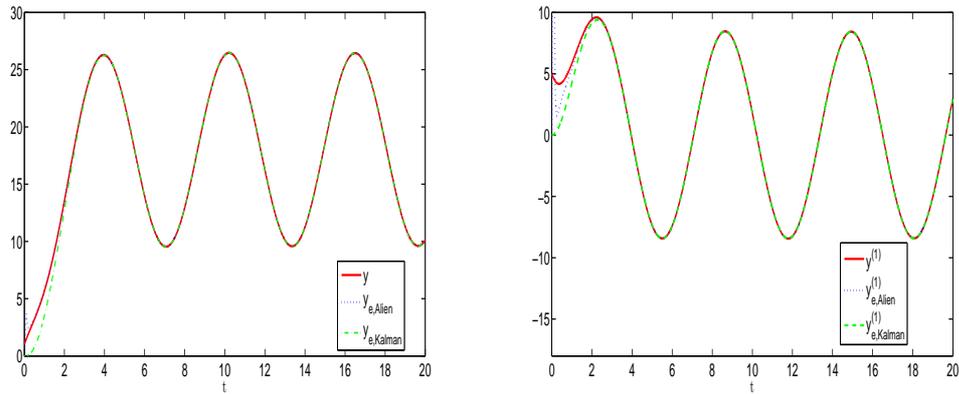


FIG. 3.5 – Valeurs réelles et estimées : méthode développée au sein de l'équipe Alien et observateur de type Kalman sans bruit ( $\tau = a_0t + a_1$ ).

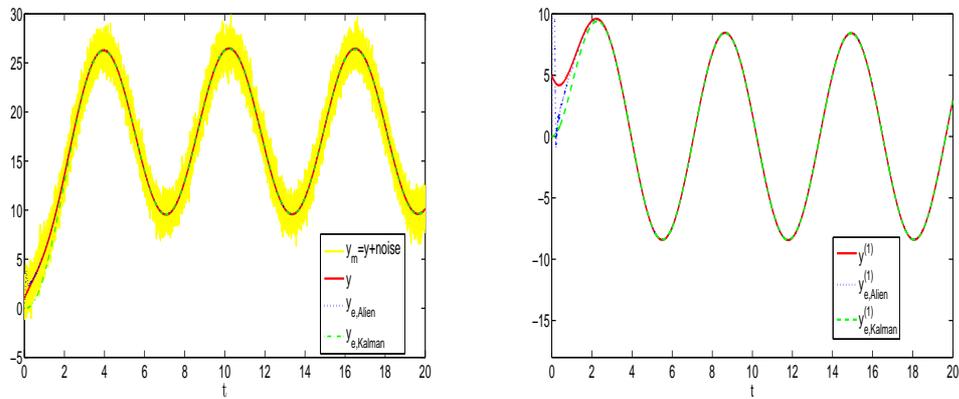


FIG. 3.6 – Valeurs réelles et estimées : méthode développée au sein de l'équipe Alien et observateur de type Kalman avec le bruit blanc ( $\tau = a_0t + a_1$ ).

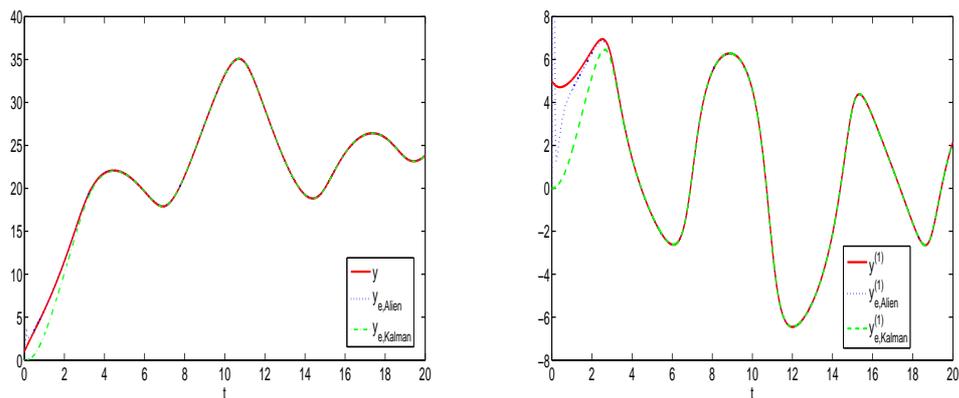


FIG. 3.7 – Valeurs réelles et estimées : méthode développée au sein de l'équipe Alien et observateur de type Kalman sans bruit ( $\tau = b_0 \sin(b_1t) + b_2$ ).

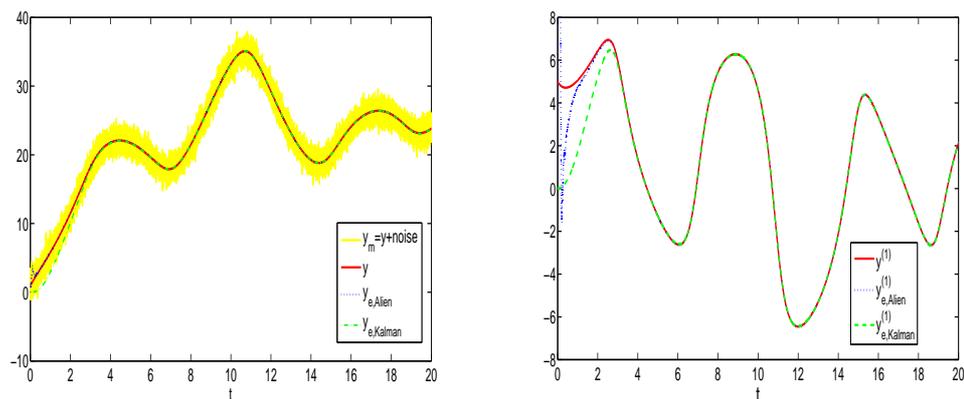


FIG. 3.8 – Valeurs réelles et estimées : méthode développée au sein de l'équipe Alien et observateur de type Kalman avec le bruit blanc ( $\tau = b_0 \sin(b_1 t) + b_2$ ).

Estimation d'état par l'observateur de type Kalman :

1. L'observateur est un système auxiliaire ;
2. La convergence de l'observateur est asymptotique, et la vitesse de convergence peut être choisie par la valeur de  $\lambda$  ou  $V$  ;
3. Les propriétés statistiques du bruit et les perturbations doivent être connues.

Estimation d'état par la méthode développée au sein de l'équipe ALIEN :

1. Elle est algébrique basée sur le calcul opérationnel (Laplace ici) et l'estimation d'état est donnée par une formule explicite ;
2. Elle est non-asymptotique : la valeur estimée atteint la vraie valeur en un temps fini : cette technique ne nécessite aucun paramètre de réglage de convergence (elle n'a besoin que des paramètres du système  $A(t)$  et  $C(t)$ ) ;
3. Elle est déterministe : aucune connaissance de la propriété statistique du bruit n'est requise.

Par ailleurs, l'observateur de type Kalman demande à ce que  $A(t)$  et  $C(t)$  soient bornées alors que nous ne demandons que certaine régularité (implicite liée à l'observabilité) dans le cas de notre estimateur.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la synthèse d'un observateur pour des systèmes LTV. Grâce à la méthode développée au sein de l'équipe ALIEN, une expression formelle de l'estimation d'état en fonction d'intégrales de la sortie et de l'entrée a été donnée. Nous avons montré comment se servir de cette approche algébrique sur un exemple de moteur à courant continu et simulé pour des paramètres variant de façon polynômial et sinusoidale.

# Chapitre 4

## Systemes linéaires à commutation en temps continu

*The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking.*

— ALBERT EINSTEIN

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>76</b>
<b>4.2</b>	<b>Estimation de la fonction de commutation</b> . . . . .	<b>76</b>
	4.2.1 Approche algébrique . . . . .	78
	4.2.2 Exemples . . . . .	87
<b>4.3</b>	<b>Estimation de l'état</b> . . . . .	<b>94</b>
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>97</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le problème d'estimation d'état pour les systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps a été résolu par l'obtention d'une expression formelle en fonction d'intégrales de la sortie et de l'entrée sous l'hypothèse que les paramètres du système soient continûment dérivables.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons maintenant à un problème d'observation pour une classe de systèmes linéaires où interviennent des commutations (qui, comme nous l'avons vu, sont une sous-classe de systèmes hybrides). L'objectif ici est de déterminer en temps réel la fonction de commutation (c'est-à-dire les instants de commutation ainsi que le sous-système actif (état discret)), et l'état continu du système.

L'observabilité et l'estimation d'état est un problème majeur pour ces systèmes, car le mode actif et l'état continu doivent être estimés en un temps fini. La notion d'estimation d'état des systèmes à commutation a été introduite pour la première fois par Ackerson et Fu [1]. Les notions d'observabilité des systèmes linéaires à commutation ont été discutées et caractérisées dans de récents travaux [6], [117], [137]. Le problème est de récupérer, à partir des mesures disponibles, l'état du système et/ou le signal de commutation, et éventuellement le temps de commutation. Différentes méthodes d'observation et d'identification ont été réalisées au cours des dernières années [3, 7, 11, 34, 35, 40, 44, 76, 77, 80, 102, 103, 114]. Généralement, l'observateur du système hybride se compose de deux parties : un estimateur indique le mode actif et un observateur continu estime, souvent asymptotiquement, l'état continu du système hybride.

Dans un premier temps, nous allons introduire une méthode pour l'estimation en temps fini de l'instant de commutation  $t_c$  du système en utilisant seulement la dynamique de l'état continu. L'estimation de  $t_c$  est donnée par des formules algébriques explicites obtenus d'une manière simple en appliquant des outils standards de calcul mathématique. Dans un deuxième temps, en combinant les résultats de l'estimation d'état pour les systèmes LTI par l'approche algébrique présentée dans le Chapitre 2 et de la détection de l'instant de commutation en temps réel, nous introduisons la démarche principale de l'estimation d'état des systèmes linéaires à commutation. Des simulations illustrent les techniques proposées.

## 4.2 Estimation de la fonction de commutation

Dans cette partie, nous étudions une classe de systèmes hybrides linéaires appelée systèmes linéaires à commutation en temps continu, c'est-à-dire des systèmes dont l'évolution est déterminée par une collection de  $Q$  sous-systèmes avec un état continu  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pour un nombre d'état discret  $q \in I_Q \triangleq \{1, \dots, Q\}$ , en

supposant qu'il n'existe pas de saut sur l'état continu, c'est-à-dire qu'à chaque instant de commutation  $t_k$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t),$$

l'évolution du système est modélisée ici par des équations linéaires ordinaires de la forme suivante :

$$\dot{x} = A_q x, \quad (4.1)$$

où  $A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des matrices constantes. Pour des raisons de facilité et sans perte de généralité, on suppose qu'à chaque fois, un seul événement discret peut agir sur le système.

Étant donnée la présence de dynamiques non lisses, la dérivation doit être considérée au sens des distributions. Nous rappelons ci-après quelques définitions et résultats de la théorie des distributions développées par L. Schwartz [118], et fixons les notations qui seront utilisées par la suite. L'espace des fonctions  $C^\infty$  ayant un support compact dans un sous-ensemble ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}$  est notée  $\mathcal{D}(\Omega)$ , et  $\mathcal{D}'(\Omega)$  représente l'espace des distributions sur  $\Omega$ , c'est-à-dire, l'espace de formes linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Pour  $u \in \mathcal{D}'$ ,  $\langle u, \varphi \rangle$  représente un nombre réel qui dépend linéairement et continûment de  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Ce nombre est défini par  $\langle u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \varphi$  pour une fonction  $u = f$  localement intégrable au sens de Lebesgue. Le complément du plus grand sous-ensemble ouvert de  $\Omega$  dans lequel la distribution  $u$  est nulle est appelé le support de  $u$  et est noté  $\text{supp} u$ .

Pour la distribution de Dirac  $u = \delta$  et sa dérivée  $\dot{u} = \dot{\delta}$ , la fonctionnelle est définie respectivement par  $\langle u, \varphi \rangle = \varphi(0)$  et  $\langle \dot{u}, \varphi \rangle = -\dot{\varphi}(0)$ . Plus généralement, chaque distribution est indéfiniment dérivable, de par sa définition :

$$\langle \dot{u}, \varphi \rangle = - \langle u, \dot{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dans ce chapitre, les fonctions (localement intégrables au sens de Lebesgue) sont définies au sens des distributions. Par conséquent, si  $u$  est une fonction continue sauf en un point  $a$  avec un saut fini  $\sigma_a$ , sa dérivée s'écrit :

$$\dot{u} = du/dt + \sigma_a \delta_a, \quad (4.2)$$

où  $du/dt$  est la distribution provenant de la dérivée au sens usuel de  $u$ . Ce résultat peut être généralisé au cas où l'ordre de la dérivation et les points de discontinuité sont arbitraires comme suit : soit  $t_\nu$  une suite croissante de points qui sont en nombre fini dans chaque intervalle fini, supposons que les deux dérivations à droite et à gauche  $\frac{d^p u}{dt^p}(t_\nu)$  existent, alors en désignant le saut correspondant  $\sigma_\nu^p = \frac{d^p u}{dt^p}(t_\nu+) - \frac{d^p u}{dt^p}(t_\nu-)$ , on a :

$$u^{(p)} = \frac{d^p u}{dt^p} + \sum_{\nu} \sum_{k=0}^{p-1} \sigma_\nu^{p-1-k} \delta_{t_\nu}^{(k)}. \quad (4.3)$$

Le théorème suivant est le résultat fondamental à partir de lequel les paramètres (l'instant de commutation ici) des systèmes à commutation peuvent être identifiés.

**Théorème 1** [118] *Pour toute distribution  $u$  à support compact  $K$  d'ordre  $r$  (nécessairement fini) et pour toute fonction  $\alpha$  dont les dérivées d'ordre inférieur ou égale à  $r$  s'annulent sur  $K$ , on a :*

$$\alpha u = 0.$$

Par la suite, nous nous concentrons sur l'annihilation de distributions de Dirac et, comme illustration du précédent théorème, pour toute fonction lisse  $\alpha$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha \delta_\tau &= \alpha(\tau) \delta_\tau, \\ \alpha \delta_\tau^{(r)} &= 0, \quad \forall \alpha \quad t.q. \quad \alpha^{(k)}(\tau) = 0, \quad k = 0, \dots, r. \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $\delta_\tau$  est la distribution de Dirac concentrée au point  $\{\tau\}$ , i.e.  $\delta(t - \tau)$ .

La dérivation, l'intégration et la translation peuvent être formé à partir du produit de convolution :  $\dot{y} = \dot{\delta} * y$ ,  $\int y = H * y$  et  $y(t - \tau) = \delta * y$ , où  $\dot{\delta}$  est la dérivée de la distribution de Dirac et  $H$  est la fonction de Heaviside.

## 4.2.1 Approche algébrique

### 4.2.1.1 Cas de deux sous-systèmes et d'une commutation

Dans ce cas-là,  $q \in \{1, 2\}$ . Supposons que le système (4.1) commute d'un sous-système à l'autre à l'instant  $t_c$ . Le but est d'obtenir une estimation en temps fini de cet instant de commutation  $t_c$ . Pour des raisons de simplicité, la méthode est d'abord détaillée en supposant que tout l'état est mesurable (pour le cas où l'état est partiellement mesuré, voir la Section 4.2.1.4). Le comportement dynamique du système peut s'écrire comme suit :

$$\dot{x} = \Gamma(t)x, \quad \Gamma(t) \in \{A_1, A_2\}. \quad (4.5)$$

Sous le changement de variable  $z = e^{Gt}x$ , où  $G$  est une matrice constante définie par la suite, on a :

$$\dot{z} = Ge^{Gt}x + e^{Gt}\dot{x} = Gz + e^{Gt}\Gamma(t)x = (G + e^{Gt}\Gamma(t)e^{-Gt})z.$$

Le système (4.5) est donc transformé en :

$$\dot{z} = M(t)z \quad (4.6)$$

---

<sup>6</sup>L'ordre de la distribution  $u$  est le plus petit entier  $m$  tel que :  $\exists C > 0$  telle que pour toute fonction lisse  $\varphi$ , on a  $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{0 \leq i \leq m} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$  (par exemple,  $\delta^{(r)}$  est d'ordre  $r$ ).

avec

$$M(t) = G + e^{Gt}\Gamma(t)e^{-Gt}.$$

La matrice  $G$  est alors choisie telle que :

$$M_1(t) + M_2(t) = 0 \quad (4.7)$$

avec

$$M_i(t) = G + e^{Gt}A_i e^{-Gt}, \quad i = 1, 2.$$

Puisque  $G$  et  $e^{Gt}$  commute, l'équation (4.7) implique que l'on doit avoir :

$$G + e^{Gt}A_1 e^{-Gt} + G + e^{Gt}A_2 e^{-Gt} = e^{Gt}2G e^{-Gt} + e^{Gt}(A_1 + A_2)e^{-Gt} = 0$$

et donc il faut choisir  $G$  telle que :

$$G = -\frac{A_1 + A_2}{2}.$$

Etant donné que  $M_1(t) = -M_2(t) = e^{Gt}(\frac{A_1 - A_2}{2})e^{-Gt}$ , on peut écrire (4.6) ainsi :

$$\dot{z} = \sigma(t)M_1(t)z \quad (4.8)$$

avec  $\sigma(t) \in \{-1, 1\}$ . Sans perte de généralité, on pose  $\sigma(0+) = 1$  si  $\Gamma(0+) = A_1$ .

Le déterminant  $\Delta_1(t)$  de  $M_1(t)$  satisfait la propriété suivante :

$$2^n \Delta_1(t) = \det(2M_1(t)) = \det(M_1(t) - M_2(t)) = \det(A_1 - A_2) = \text{cte}. \quad (4.9)$$

Supposons désormais que la matrice  $(A_1 - A_2)$  est de rang plein. Alors,  $M_1(t)$  est inversible et on peut définir  $W_1(t) := \text{Ad}(M_1(t)) = \Delta_1(t)M_1^{-1}(t)$ . L'équation (4.8) devient :

$$W_1(t)\dot{z} = \sigma(t)\Delta_1(t)z. \quad (4.10)$$

Notons que chaque membre de (4.10) est connu exceptée l'évolution de  $\sigma(t)$ . Puisque  $\sigma(t)$  est constante sauf sur l'ensemble  $\{t_c\}$ , la dérivée du produit  $\sigma(t)g(t)$  par rapport au temps est bien définie lorsque  $g(t)$  est une fonction lisse pour  $t = t_c$ . En notant  $\sigma_c = \sigma(t_c+) - \sigma(t_c-) = \pm 2$ , on a :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \sigma_c \delta_{t_c} \\ \frac{d(\sigma g)}{dt}(t) &= \dot{\sigma}(t)g(t) + \sigma(t)\dot{g}(t) = \sigma_c g(t_c)\delta_{t_c} + \sigma(t)\dot{g}(t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

En dérivant (4.10), on obtient ( $\Delta_1(t) = \text{cte}$  selon (4.9)) :

$$\dot{W}_1(t)\dot{z} + W_1(t)\ddot{z} = \dot{\sigma}(t)\Delta_1(t)z + \sigma(t)\Delta_1(t)\dot{z} = \dot{\sigma}(t)\Delta_1(t)z + \Delta_1(t)M_1(t)z$$

On peut réécrire cette relation de la façon suivante :

$$W_1(t)\ddot{z} + \dot{W}_1(t)\dot{z} - \Delta_1(t) M_1(t) z = \dot{\sigma}(t) \Delta_1(t) z. \quad (4.12)$$

En utilisant la propriété (4.11), l'équation (4.12) peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 K_i(t) z^{(i)} &= \gamma_c \delta_{t_c} & (4.13) \\ K_0(t) &= -\Delta_1(t) M_1(t) \\ K_1(t) &= \dot{W}_1(t) \\ K_2(t) &= W_1(t) \\ \gamma_c &= \sigma_c \Delta_1(t_c) z(t_c) \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le changement de variable  $z = e^{Gt}x$ , on obtient un système différentiel dont le membre de gauche contient seulement des quantités connues. Le membre de droite comporte une distribution de Dirac qui sera annihilée en utilisant la propriété (4.4). Ceci est expliqué en détail dans la sous-section suivante.

*Cas où les matrices  $A_1$  et  $A_2$  commutent [127]*

La seule hypothèse retenue ici est que les matrices  $A_1$  et  $A_2$  commutent. Considérons encore le changement de variable  $z = e^{Gt}x$  avec  $G = -\frac{A_1+A_2}{2}$ . On a :

$$M_1(t) = G + e^{Gt} A_1 e^{-Gt} = G + A_1 = \frac{A_1 - A_2}{2} = -M_2(t).$$

$M_1(t)$  et  $M_2(t)$  sont donc constantes.

Posons  $A = \frac{A_1 - A_2}{2}$ , on a alors :

$$\dot{z} = \sigma(t) A z. \quad (4.14)$$

En différentiant (4.14), on obtient :

$$\ddot{z} = \sigma(t) A \dot{z} + \dot{\sigma}(t) A z = A^2 z + \sigma_c A \delta_{t_c} z(t_c).$$

C'est-à-dire :

$$\ddot{z} - A^2 z = \sigma_c A \delta_{t_c} z(t_c). \quad (4.15)$$

L'intérêt du changement de variable est encore ici d'avoir un membre de gauche indépendant de l'instant de la commutation alors que le membre de droite sera annihilé par des manipulations adéquates.

### 4.2.1.2 Calcul explicite de l'instant de commutation

Prenons une fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec les propriétés suivantes :

- (i)  $f(t, t_c)\delta_{t_c} = 0$ ,
- (ii)  $f(0, t_c) = \dot{f}(0, t_c) = 0$ .

En multipliant (4.13) par  $f(t, t_c)$ , on obtient :

$$f(t, t_c) \left( \sum_{i=0}^2 K_i(t) z^{(i)} \right) = 0. \quad (4.16)$$

En intégrant (4.16) de 0 à  $t$  ( $t > t_c$ ), on a :

$$\int_0^t f(\tau, t_c) \left( W_1(\tau)\ddot{z} + \dot{W}_1(\tau)\dot{z} - \Delta_1(\tau) M_1(\tau)z \right) d\tau = 0. \quad (4.17)$$

L'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau, t_c) W_1(\tau) \ddot{z}(\tau) d\tau &= [f(\tau, t_c) W_1(\tau) \dot{z}(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \left( \dot{f}(\tau, t_c) W_1(\tau) + f(\tau, t_c) \dot{W}_1(\tau) \right) \dot{z}(\tau) d\tau \\ &= f(t, t_c) W_1(t) \dot{z}(t) - \int_0^t \dot{f}(\tau, t_c) W_1(\tau) \dot{z}(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau, t_c) \dot{W}_1(\tau) \dot{z}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{f}(\tau, t_c) W_1(\tau) \dot{z}(\tau) d\tau &= [\dot{f}(\tau, t_c) W_1(\tau) z(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \left( \ddot{f}(\tau, t_c) W_1(\tau) + \dot{f}(\tau, t_c) \dot{W}_1(\tau) \right) z(\tau) d\tau \\ &= \dot{f}(t, t_c) W_1(t) z(t) - \int_0^t \ddot{f}(\tau, t_c) W_1(\tau) z(\tau) d\tau - \int_0^t \dot{f}(\tau, t_c) \dot{W}_1(\tau) z(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau, t_c) \left( W_1(\tau)\ddot{z} + \dot{W}_1(\tau)\dot{z} \right) d\tau \\ = f(t, t_c) W_1(t) \dot{z}(t) - \dot{f}(t, t_c) W_1(t) z(t) + \int_0^t \ddot{f}(\tau, t_c) W_1(\tau) z(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{f}(\tau, t_c) \dot{W}_1(\tau) z(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Utilisons la propriété

$$\int_0^t \int_0^{t_{\nu-1}} \cdots \int_0^{t_1} x(\tau) dt_{\nu-1} \cdots dt_1 d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} x(\tau) d\tau,$$

et intégrons une fois de plus la relation (4.17) de 0 à  $t$  ( $t > t_c$ ) en utilisant (4.18) :

$$\begin{aligned} f(t, t_c) W_1(t) z(t) - 2 \int_0^t \dot{f}(\tau, t_c) W_1(\tau) z(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau, t_c) \dot{W}_1(\tau) z(\tau) d\tau \\ + \int_0^t (t-\tau) \left( \ddot{f}(\tau, t_c) W_1(\tau) + \dot{f}(\tau, t_c) \dot{W}_1(\tau) - \Delta_1(\tau) M_1(\tau) \right) z(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

L'estimation de  $t_c$  peut être obtenue par (4.19). Par exemple, prenons la fonction  $f(t, t_c) = t^2(t - t_c)$  qui satisfait les propriétés (i)-(ii) et pour laquelle :

$$\begin{aligned}\dot{f}(t, t_c) &= t(3t - 2t_c), \\ \ddot{f}(t, t_c) &= 6t - 2t_c.\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de (4.19), l'estimation de  $t_c$  est donnée par les formules suivantes :

$$D(t, z, M_1)t_c = N(t, z, M_1)$$

avec

$$\begin{aligned}N(t, z, M_1) &= t^3 W_1(t)z(t) - \int_0^t (6\tau^2 W_1(\tau) + \tau^3 \dot{W}_1(\tau))z(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t - \tau)(6\tau W_1(\tau) + 3\tau^2 \dot{W}_1(\tau) - \Delta_1(\tau) M_1(\tau))z(\tau)d\tau \\ D(t, z, M_1) &= t^2 W_1(t)z(t) - \int_0^t (4\tau W_1(\tau) + \tau^2 \dot{W}_1(\tau))z(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t - \tau)(2W_1(\tau) + 2\tau \dot{W}_1(\tau))z(\tau)d\tau\end{aligned}\quad (4.20)$$

Notons que  $N(t, z, M_1)$  et  $D(t, z, M_1)$  sont des vecteurs colonne de dimension  $n$ . Donc

$$t_c = \frac{N_i(t, z, M_1)}{D_i(t, z, M_1)}, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n \quad (4.21)$$

où  $N_i(t, z, M_1)$  et  $D_i(t, z, M_1)$  sont respectivement les  $i^{\text{ieme}}$  composantes des vecteurs  $N(t, z, M_1)$  et  $D(t, z, M_1)$ .

**Remarque 1** Lorsque le signal mesuré  $z(t)$  est bruité, la relation (4.19) peut être intégrée une ou plusieurs fois de plus afin de réduire l'effet de bruit. Dans ce cas, l'expression de  $N(t, z, M_1)$  et  $D(t, z, M_1)$  dans (4.20) devient (avec une intégration supplémentaire) :

$$\begin{aligned}N(t, z, M_1) &= \int_0^t \tau^3 W_1(\tau)z(\tau)d\tau - \int_0^t (t - \tau)(6\tau^2 W_1(\tau) + \tau^3 \dot{W}_1(\tau))z(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2}(t - \tau)^2(6\tau W_1(\tau) + 3\tau^2 \dot{W}_1(\tau) - \Delta_1(\tau) M_1(\tau))z(\tau)d\tau \\ D(t, z, M_1) &= \int_0^t \tau^2 W_1(\tau)z(\tau)d\tau - \int_0^t (t - \tau)(4\tau W_1(\tau) + \tau^2 \dot{W}_1(\tau))z(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2}(t - \tau)^2(2W_1(\tau) + 2\tau \dot{W}_1(\tau))z(\tau)d\tau\end{aligned}\quad (4.22)$$

**Remarque 2** Dans le cas de matrices qui commutent, le calcul de l'instant de commutation pour l'équation (4.15) s'effectue exactement de la même manière.

Ci-après, cette méthode est étendue au problème de l'identification d'un nombre arbitraire d'instant de commutation entre un nombre arbitraire de sous-systèmes.

#### 4.2.1.3 Cas de $Q$ sous-systèmes et de $S$ commutations

On suppose que les matrices  $(A_i - A_j)$  sont de rang plein ou que  $A_i$  et  $A_j$  commutent entre elles (pour  $i \neq j$ ,  $(i, j) \in I_Q^2$ ) dans le système (4.1). On voit bien qu'un estimateur  $E_{i,j}$  qui calcule les quantités  $D(t, z, M_{i,j})$  et  $N(t, z, M_{i,j})$  avec

$$M_{i,j} = G_{i,j} + e^{G_{i,j}t} A_i e^{-G_{i,j}t}, \quad G_{i,j} = -\frac{A_i + A_j}{2}$$

peut être utilisé afin de déterminer l'instant de commutation  $t_{i,j}$  qui se produit entre les deux sous-systèmes  $i$  et  $j$  (soit du mode  $i$  au mode  $j$ , soit du mode  $j$  au mode  $i$ ).

Par conséquent, afin d'identifier toutes les commutations parmi les  $Q$  modes, on peut utiliser  $C_Q^2 = \frac{Q(Q-1)}{2}$  estimateurs en parallèle. Puis, le signal de sortie de chaque estimateur peut être analysé comme ci-dessous afin de détecter l'apparition d'une commutation et le mode associé.

Supposons que le système (4.1) est dans le mode  $i$  pour  $t \in [t_0, t_{i,j}[$  et dans le mode  $j$  pour  $t \in [t_{i,j}, T[$ , où  $t_0$  et  $T$  représentent d'autres instants de commutation. On a :

1.  $D_g(t, z, M_{i,j}) = 0$  et  $N_g(t, z, M_{i,j}) = 0$  pour  $t \in [t_0, t_{i,j}[$  : dans la pratique, cette propriété doit être vérifiée quelques périodes d'échantillonnage avant l'instant de commutation.
2.  $D_g(t, z, M_{i,j})$  et  $N_g(t, z, M_{i,j})$  sont des lignes droites pour  $t \in [t_{i,j}, T[$  : dans la pratique, plusieurs points doivent être employés pour détecter que la pente de la ligne est constante.
3. Le rapport  $\frac{N_g(t, z, M_{i,j})}{D_g(t, z, M_{i,j})}$  est constant et égal à  $t_{i,j}$  pour  $t \in [t_{i,j}, T[$  : pour vérifier que ce rapport peut être assimilé à une constante, on calcule quelques valeurs successives et on vérifie qu'il y a peu de variations entre eux.

Les propriétés 1. et 2. proviennent du fait que les distributions de Dirac dans l'équation (4.13) sont intégrées deux fois.

Ainsi, l'estimateur qui satisfait ces trois conditions fournit l'instant de commutation ainsi que l'indice des sous-systèmes entre lesquels la commutation se produit. En outre, avec la connaissance du premier mode actif, la séquence de tous les modes actifs peut être estimée.

L'implémentation de l'algorithme numérique qui permet d'identifier tous les instants de commutation est faite sur une fenêtre glissante comme suit :

```

-----
fonction détection de l'instant de commutation  $t_c$ 
lire  $x(kT_e)$ 
 $T_e$  : période d'échantillonnage ;
 $h$  : nombre de points choisis pour vérifier les contraintes définies ci-dessus. La
valeur de  $h.T_e$  doit être plus petite que le dwell-time7 du système ;
 $t_s = 0$  : borne inférieure de la fenêtre d'intégration ;
 $m = \text{length}(x)$  : longueur de l'état échantillonné ;
 $z_{i,j}(kT_e) = e^{-\frac{A_i+A_j}{2}kT_e} x(kT_e)$  : nouvel état après changement de base
    pour  $k = h : m$ 
        Remettre  $N(t, z, M_{i,j})(k)$  et  $D(t, z, M_{i,j})(k)$  à zéro
            pour  $i = t_s : k$ 
                Approcher numériquement l'intégrale comme une somme en
                utilisant la méthode des trapèzes
            fin
                Calculer  $N(t, z, M_{i,j})(k)$  et  $D(t, z, M_{i,j})(k)$  dans une fenêtre d'inté-
                gration avec (4.20)
                si un estimateur satisfait les trois critères de détection
                    mettre à jour la borne inférieure de la fenêtre d'intégration :
 $t_s \leftarrow (k - h)T_e$  ;
                    imprimer cet estimateur et le mode actif.
                sinon
                    arrêt ;
                fin
            imprimer l'instant de commutation
    fin
-----

```

L'implémentation numérique de l'algorithme obtenu ci-dessus doit également respecter les points suivants :

- fenêtre d'intégration : lorsqu'aucun estimateur ( $C_Q^2 = \frac{Q(Q-1)}{2}$ ) ne détecte la commutation, l'algorithme va calculer la valeur de  $N(t, z, M_{i,j})(k)$ ,  $D(t, z, M_{i,j})(k)$  dans une nouvelle fenêtre d'intégration ( $k \leftarrow k + 1$ ) avec une largeur plus grande que l'ancienne (la borne inférieure de l'intégration n'est pas modifié alors que la borne supérieure est augmentée d'un échantillonnage), jusqu'à ce qu'un instant de commutation soit détecté par l'un des estimateurs.
- mise à jour : lorsque  $t_c$  est détecté, on doit mettre à jour le schéma en réinitialisant le calcul de l'intégrale et en remplaçant la borne inférieure de l'intégration par  $t_c$  afin d'identifier le prochain instant de commutation.

---

<sup>7</sup>Chaque fois, le signal de commutation doit attendre au moins un temps constant avant la prochaine commutation. Généralement ce temps de séjour est appelé "dwell-time".

#### 4.2.1.4 Extension aux systèmes avec état partiellement mesuré

Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Gamma(t)x, & \Gamma(t) &\in \{A_1, A_2\} \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.23)$$

où  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie. Supposons qu'il est possible de trouver une relation de sortie donnée par :

$$\dot{Y} = \bar{\Gamma}(t)Y + \Theta \left( \delta_{t_c}, \dot{\delta}_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right), \quad \bar{\Gamma}(t) \in \{ \bar{A}_1, \bar{A}_2 \} \quad (4.24)$$

où  $Y = \left[ y^T, \dots, y^{(r)T} \right]^T$  est un vecteur composé de la sortie et de sa dérivée par rapport au temps jusqu'à un ordre fini.  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$  sont des matrices carrées et  $\Theta$  est une matrice qui dépend de la distribution de Dirac et de ses dérivées par rapport au temps jusqu'à un ordre fini.

Sous le changement de variable  $\bar{z} = e^{\bar{G}t}Y$  ( $\bar{G} = -\frac{\bar{A}_1 + \bar{A}_2}{2}$ ), on a :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= \bar{G}e^{\bar{G}t}Y + e^{\bar{G}t}\dot{Y} \\ &= \bar{G}\bar{z} + e^{\bar{G}t}\bar{\Gamma}(t)Y + e^{\bar{G}t}\Theta \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right) \\ &= (\bar{G} + e^{\bar{G}t}\bar{\Gamma}(t)e^{-\bar{G}t})\bar{z} + e^{\bar{G}t}\Theta \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right) \\ &= \bar{M}_i(t)\bar{z} + e^{\bar{G}t}\Theta \left( \delta_{t_c}, \dot{\delta}_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right), \end{aligned}$$

avec

$$\bar{M}_i(t) = \bar{G} + e^{\bar{G}t}\bar{\Gamma}(t)e^{-\bar{G}t}.$$

Étant donné que

$$\bar{M}_1(t) = -\bar{M}_2(t) = e^{\bar{G}t} \left( \frac{\bar{A}_1 - \bar{A}_2}{2} \right) e^{-\bar{G}t},$$

le système (4.24) est transformé en :

$$\dot{\bar{z}} = \sigma(t)\bar{M}_1(t)\bar{z} + e^{\bar{G}t}\Theta \left( \delta_{t_c}, \dot{\delta}_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right), \quad (4.25)$$

avec  $\sigma(t) \in \{-1, 1\}$ . Sans perte de généralité, on pose  $\sigma(0+) = 1$  si  $\Gamma(0+) = \bar{A}_1$ .

Le déterminant  $\bar{\Delta}_1(t)$  de  $\bar{M}_1(t)$  satisfait la propriété suivante :

$$2^n \bar{\Delta}_1(t) = \det(2\bar{M}_1(t)) = \det(\bar{M}_1(t) - \bar{M}_2(t)) = \det(\bar{A}_1 - \bar{A}_2) = \text{cte.}$$

En supposant que la matrice  $(\bar{A}_1 - \bar{A}_2)$  est de rang plein ( $\bar{M}_1(t)$  est inversible) et en définissant

$$\bar{W}_1(t) := \text{Ad}(\bar{M}_1(t)) = \bar{\Delta}_1 \bar{M}_1^{-1}(t),$$

le système (4.25) devient :

$$\bar{W}_1(t) \dot{\bar{z}} = \sigma(t) \bar{\Delta}_1 \bar{z} + \bar{W}_1(t) e^{\bar{G}t} \Theta \left( \delta_{t_c}, \dot{\delta}_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right). \quad (4.26)$$

En dérivant (4.26) et en utilisant la propriété (4.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{W}}_1(t) \dot{\bar{z}} + \bar{W}_1(t) \ddot{\bar{z}} &= \dot{\sigma}(t) \bar{\Delta}_1 \bar{z} + \sigma(t) \bar{\Delta}_1 \dot{\bar{z}} \\ &+ \left( \dot{\bar{W}}_1(t) e^{\bar{G}t} + \bar{W}_1(t) \bar{G} e^{\bar{G}t} \right) \Theta \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right) + \bar{W}_1(t) e^{\bar{G}t} \dot{\Theta} \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right) \\ &= \sigma_c \delta_{t_c} \bar{\Delta}_1 \bar{z}(t_c) + \bar{\Delta}_1 \bar{M}_1(t) \bar{z} + \bar{\Delta}_1 e^{\bar{G}t} \Theta \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right) \\ &+ \left( \dot{\bar{W}}_1(t) e^{\bar{G}t} + \bar{W}_1(t) \bar{G} e^{\bar{G}t} \right) \Theta \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right) + \bar{W}_1(t) e^{\bar{G}t} \dot{\Theta} \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right). \end{aligned}$$

On peut réécrire cette relation de la façon suivante :

$$\bar{W}_1(t) \ddot{\bar{z}} + \dot{\bar{W}}_1(t) \dot{\bar{z}} - \bar{\Delta}_1 \bar{M}_1(t) \bar{z} = \bar{\Theta} \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)}, \delta_{t_c}^{(l+1)} \right), \quad (4.27)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)}, \delta_{t_c}^{(l+1)} \right) &= \sigma_c \delta_{t_c} \bar{\Delta}_1 \bar{z}(t_c) + \bar{\Delta}_1 e^{\bar{G}t} \Theta \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right) \\ &+ \left( \dot{\bar{W}}_1(t) e^{\bar{G}t} + \bar{W}_1(t) \bar{G} e^{\bar{G}t} \right) \Theta \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right) + \bar{W}_1(t) e^{\bar{G}t} \dot{\Theta} \left( \delta_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l)} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Donc, on obtient un système différentiel semblable à (4.13) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \bar{K}_i(t) \bar{z}^{(i)} &= \bar{\Theta} \left( \delta_{t_c}, \dot{\delta}_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l+1)} \right), \\ \bar{K}_0(t) &= -\bar{\Delta}_1 \bar{M}_1(t), \\ \bar{K}_1(t) &= \dot{\bar{W}}_1(t), \\ \bar{K}_2(t) &= \bar{W}_1(t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Puis, en posant  $\omega = \int^{(r)} \bar{z}$ , on a :

$$\sum_{i=0}^2 \bar{K}_i(t) \omega^{(i+r)} = \bar{\Theta} \left( \delta_{t_c}, \dot{\delta}_{t_c}, \dots, \delta_{t_c}^{(l+1)} \right).$$

Selon la Section 4.2.1.2, choisissons une fonction adaptée  $f(t, t_c)$ , qui permet l'annihilation de  $\bar{\Theta}$ , et intégrons un nombre suffisant de fois. Nous obtenons une relation algébrique de la forme :

$$D(t, \omega, \bar{M}_1) t_c = N(t, \omega, \bar{M}_1),$$

cela donne un calcul en temps réel de  $t_c$ , car  $\omega$  est disponible avec la mesure (il dépend de la sortie  $y$  et d'un nombre fini de ses intégrales).

**Remarque 3** Afin de résoudre complètement le problème de l'identification de l'instant de commutation des systèmes avec état partiellement mesuré en utilisant l'approche proposée, il faut étudier la possibilité d'obtenir la relation (4.24). Pour ce faire, les propriétés d'observabilité et d'identifiabilité du système (4.5) doivent être étudiées.

**Remarque 4** On peut voir ici que la méthode proposée est transposable au cas des systèmes décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_q x + B_q \\ y &= Cx \end{cases} \quad (4.30)$$

où les matrices  $A_q, B_q$  ( $q \in I_Q$ ) et  $C$  sont constantes. De tels modèles représentent par exemple des thermostats à résistance d'anticipation et des chaudières [107].

## 4.2.2 Exemples

*Exemple 1 :*

Considérons l'exemple du convertisseur d'énergie électrique  $DC - DC$  Buck-Boost, qui est une alimentation à découpage, qui convertit une tension continue en une autre tension continue de plus faible ou plus grande valeur mais de polarité inverse.

Le schéma classique de ce convertisseur est donné par la figure 4.1.  $T$  et  $D$  sont les interrupteurs du système (électriquement ce sont des semi-conducteurs) fonctionnant en tout ou rien.  $D$  est une diode à commutation autonome et  $T$  est un transistor (ou thyristor) commandé. Le fonctionnement d'un convertisseur Buck-Boost peut être divisé en deux configurations suivant l'état de l'interrupteur  $T$ . Dans l'état passant, l'interrupteur  $T$  est fermé, conduisant ainsi à une augmentation de l'énergie stockée dans l'inductance  $L$ . Dans l'état bloqué, l'interrupteur  $T$  est ouvert donc l'inductance est reliée seulement à la charge et à la capacité et il en résulte un transfert de l'énergie accumulée dans l'inductance vers la capacité et la charge. La tension de sortie du Buck-Boost est de polarité inverse de celle d'entrée et peut varier de 0 à 1 (pour un convertisseur idéal).

Pour que ce système puisse fonctionner en mode de fonctionnement continu (flux ou courant dans la bobine non nuls), le cas où les deux interrupteurs sont ouverts est éliminé et seulement deux modes de fonctionnement sont utilisés : le mode 1 représente  $T$  fermé et  $D$  bloquée (abrégié  $T = 1$  et  $D = 0$ ) et le mode 2 représente  $T$  ouvert et  $D$  passante (abrégié  $T = 0$  et  $D = 1$ ). Le but est de définir un cycle limite hybride pour ce système qui reste le plus proche possible d'un point désiré  $x_d$  ainsi qu'une trajectoire pour atteindre ce cycle qui respecte toutes les contraintes de fonctionnement.

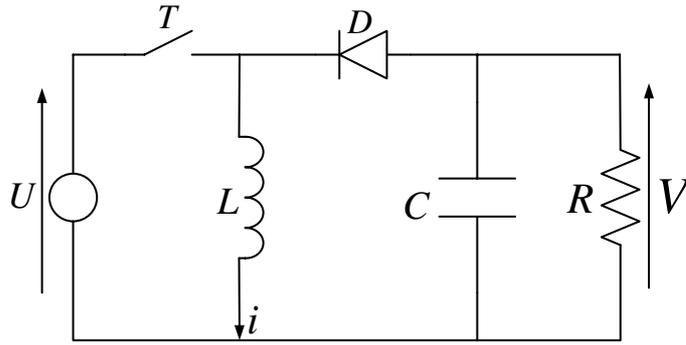


FIG. 4.1 – Circuit du convertisseur Buck-Boost.

Ce système est décrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U}{L} \end{pmatrix} \\ \dot{x} = A_2 x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} x \end{cases} \quad (4.31)$$

avec  $x = [V \ i]^T = [x_1 \ x_2]^T$ .

Ce système est linéaire à commutation en temps continu et fait bien partie de la classe définie dans la section 4.2. Il faut signaler aussi que dans le mode 1, le courant augmente linéairement au cours du temps quand  $T$  est fermé, tandis que le mode 2 ( $T$  ouvert) est stable à l'origine.

*Cas 1 : La sortie mesurable est  $y = x_1$ .*

Pour chacun des deux modes, on peut réécrire le système (4.31) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{Y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ \frac{1}{(RC)^2} & 0 \end{pmatrix} Y \\ \dot{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} Y \end{cases} \quad (4.32)$$

et  $Y = [y \ \dot{y}]^T$ . Ceci correspond à la relation (4.24) avec :

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ \frac{1}{(RC)^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\bar{G} = -\frac{\bar{A}_1 + \bar{A}_2}{2} = -\frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & 1 \\ \frac{1}{(RC)^2} - \frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}}{2}.$$

Avec le changement de variable  $\bar{z} = e^{\bar{G}t} Y$ , en appliquant la même procédure que dans la section 4.2.1.4, il est possible d'obtenir le système différentiel suivant :

$$\bar{W}_1(t) \ddot{\bar{z}} + \dot{\bar{W}}_1(t) \dot{\bar{z}} - \bar{\Delta}_1 \bar{M}_1(t) \bar{z} = \bar{\Theta}(\delta_{t_c}), \quad (4.33)$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{M}_1(t) &= \bar{G} + e^{\bar{G}t} \bar{A}_1 e^{-\bar{G}t}, \quad \bar{\Delta}_1 = \frac{\det(\bar{A}_1 - \bar{A}_2)}{4}, \quad \bar{W}_1(t) = \bar{\Delta}_1 \bar{M}_1^{-1}(t), \\ \bar{\Theta}(\delta_{t_c}) &= \sigma_c \bar{\Delta}_1 \delta_{t_c} \bar{z}(t_c).\end{aligned}$$

Posons  $\omega = \int_0^t \bar{z}(\tau) d\tau$ , qui est disponible à la mesure (car fonction de la sortie  $y$  et de son intégrale). Afin d'annihiler  $\bar{\Theta}(\delta_{t_c})$ , on multiplie (4.33) par une fonction  $f(t)$ , qui satisfait les propriétés :

- (i)  $f(t, t_c) \delta_{t_c} = 0$ ,
- (ii)  $f(0, t_c) = \dot{f}(0, t_c) = \ddot{f}(0, t_c) = 0$ .

et on obtient :

$$f(t, t_c) \left( \bar{W}_1(t) \bar{\omega}^{(3)} + \dot{\bar{W}}_1(t) \ddot{\omega} - \bar{\Delta}_1 \bar{M}_1(t) \dot{\omega} \right) = 0. \quad (4.34)$$

Après avoir intégré trois fois par parties<sup>8</sup> la relation (4.34), on obtient :

$$\begin{aligned}f(t, t_c) \bar{W}_1(t) \omega(t) - 3 \int_0^t \dot{f}(\tau, t_c) \bar{W}_1(\tau) \omega(\tau) d\tau - 2 \int_0^t f(\tau, t_c) \dot{\bar{W}}_1(\tau) \omega(\tau) d\tau \\ + \int_0^t (t - \tau) \left( 3\ddot{f}(\tau, t_c) \bar{W}_1(\tau) + 4\dot{f}(\tau, t_c) \dot{\bar{W}}_1(\tau) + f(\tau, t_c) \ddot{\bar{W}}_1(\tau) \right) \omega(\tau) d\tau \\ - \int_0^t \frac{(t - \tau)^2}{2} \left( f^{(3)}(\tau, t_c) \bar{W}_1(\tau) + 2\ddot{f}(\tau, t_c) \dot{\bar{W}}_1(\tau) + \dot{f}(\tau, t_c) \ddot{\bar{W}}_1(\tau) + \bar{\Delta}_1 \bar{M}_1(\tau) \right) \omega(\tau) d\tau = 0.\end{aligned} \quad (4.35)$$

Par exemple, en prenant la fonction  $f(t, t_c) = t^3(t - t_c)$  et en utilisant la relation (4.35), on a :

$$D(t, \omega, \bar{M}_1) t_c = N(t, \omega, \bar{M}_1) \quad (4.36)$$

avec

$$\begin{aligned}N(t, \omega, \bar{M}_1) &= t^4 \bar{W}_1(t) \omega(t) - \int_0^t (12\tau^3 \bar{W}_1(\tau) + 2\tau^4 \dot{\bar{W}}_1(\tau)) \omega(\tau) d\tau \\ &+ \int_0^t (t - \tau) \left( 36\tau^2 \bar{W}_1(\tau) + 16\tau^3 \dot{\bar{W}}_1(\tau) + \tau^4 \ddot{\bar{W}}_1(\tau) \right) \omega(\tau) d\tau \\ &- \int_0^t \frac{(t - \tau)^2}{2} \left( 24\tau \bar{W}_1(\tau) + 24\tau^2 \dot{\bar{W}}_1(\tau) + 4\tau^3 \ddot{\bar{W}}_1(\tau) + \bar{\Delta}_1(\tau) \bar{M}_1(\tau) \right) \omega(\tau) d\tau \\ D(t, \omega, \bar{M}_1) &= t^3 \bar{W}_1(t) \omega(t) - \int_0^t (9\tau^2 \bar{W}_1(\tau) + 2\tau^3 \dot{\bar{W}}_1(\tau)) \omega(\tau) d\tau \\ &+ \int_0^t (t - \tau) \left( 18\tau \bar{W}_1(\tau) + 12\tau^2 \dot{\bar{W}}_1(\tau) + \tau^3 \ddot{\bar{W}}_1(\tau) \right) \omega(\tau) d\tau \\ &- \int_0^t \frac{(t - \tau)^2}{2} \left( 6\bar{W}_1(\tau) + 12\tau \dot{\bar{W}}_1(\tau) + 3\tau^2 \ddot{\bar{W}}_1(\tau) \right) \omega(\tau) d\tau\end{aligned}$$

<sup>8</sup> ceci justifie la propriété (ii) requise ci-dessus

Ainsi, on peut calculer  $t_c$  explicitement avec l'équation (4.36).

Cas 2 : La sortie mesurable est  $y = x_2$ .

Pour chacun des deux modes, on peut réécrire le système (4.31) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \frac{U}{L} \delta_{t_c} \\ \frac{U}{L} \dot{\delta}_{t_c} \end{pmatrix} \\ \dot{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} Y \end{cases} \quad (4.37)$$

et  $Y = [\dot{y} \ \ddot{y}]^T$ . Ceci correspond à la relation (4.24) avec :

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}, \quad \Theta(\delta_{t_c}) = \begin{pmatrix} \frac{U}{L} \delta_{t_c} \\ \frac{U}{L} \dot{\delta}_{t_c} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\bar{G} = -\frac{\bar{A}_1 + \bar{A}_2}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} \end{pmatrix}}{2}.$$

Avec le changement de la variable  $\bar{z} = e^{\bar{G}t}Y$ , en appliquant la même procédure que dans la section 4.2.1.4, il est possible d'obtenir le système différentiel suivant :

$$\bar{W}_1(t)\ddot{\bar{z}} + \dot{\bar{W}}_1(t)\dot{\bar{z}} - \bar{\Delta}_1\bar{M}_1(t)\bar{z} = \bar{\Theta}(\delta_{t_c}, \dot{\delta}_{t_c}, \ddot{\delta}_{t_c}) \quad (4.38)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{M}_1(t) &= \bar{G} + e^{\bar{G}t}\bar{A}_1e^{-\bar{G}t}, \quad \bar{\Delta}_1 = \frac{\det(\bar{A}_1 - \bar{A}_2)}{4}, \quad \bar{W}_1(t) = \bar{\Delta}_1\bar{M}_1^{-1}(t), \\ \bar{\Theta}(\delta_{t_c}, \dot{\delta}_{t_c}, \ddot{\delta}_{t_c}) &= \sigma_c\bar{\Delta}_1\delta_{t_c}\bar{z}(t_c) + \bar{\Delta}_1e^{\bar{G}t_c}\bar{\Theta} + \left(\dot{\bar{W}}_1(t_c)e^{\bar{G}t_c} + \bar{W}_1(t_c)\bar{G}e^{\bar{G}t_c}\right)\bar{\Theta} + \bar{W}_1(t_c)e^{\bar{G}t_c}\dot{\bar{\Theta}}. \end{aligned}$$

Posons  $\omega = \int_0^t \int_0^\tau \bar{z}(\tau_1)d\tau_1d\tau$ , qui est disponible à la mesure (car fonction de la sortie  $y$  et de son intégrale). Afin d'annihiler  $\bar{\Theta}(\delta_{t_c}, \dot{\delta}_{t_c}, \ddot{\delta}_{t_c})$ , on multiplie (4.33) par la fonction  $f(t, t_c) = t^4(t - t_c)^3$ , qui satisfait les propriétés :

- (i)  $f(t, t_c)\delta_{t_c} = f(t, t_c)\dot{\delta}_{t_c} = f(t, t_c)\ddot{\delta}_{t_c} = 0$ ,
- (ii)  $f(0, t_c) = \dot{f}(0, t_c) = \ddot{f}(0, t_c) = f^{(3)}(0, t_c) = 0$ .

et on obtient :

$$f(t, t_c) \left( \bar{W}_1(t)\bar{\omega}^{(4)} + \dot{\bar{W}}_1(t)\bar{\omega}^{(3)} - \bar{\Delta}_1\bar{M}_1(t)\bar{\omega}^{(2)} \right) = 0. \quad (4.39)$$

Après avoir intégré quatre fois par partie la relation (4.39), on peut également obtenir l'estimation de  $t_c$ .

Des simulations sont faites afin de valider la méthode avec la sortie commune  $y = x_1$ . Le circuit Buck-Boost a les caractéristiques suivantes :  $U = 24V$ ,  $L =$

$100\mu H$ ,  $C = 220\mu F$ ,  $R = 20\Omega$ . Puisque les paramètres  $L$  et  $C$  sont de l'ordre de  $10^{-4}$ , afin d'obtenir une bonne simulation, nous utilisons une échelle de temps  $T = \frac{1}{\varepsilon}t$  avec  $\varepsilon = 10^{-4}$ , c'est-à-dire qu'on simule  $\frac{dx}{dT} = Ax + b$  au lieu de  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}(Ax + b)$ .

Les instants de commutation de ce système sont détectés en utilisant l'algorithme proposé avec  $T_e = 0.001s$  par rapport à la nouvelle échelle de temps. Les instants de commutation sont supposés agir à :  $t_1 = 80\mu s$ ,  $t_1 = 110\mu s$ ,  $t_3 = 150\mu s$ ,  $t_4 = 220\mu s$ ,  $t_5 = 280\mu s$  (temps réel) (cf Fig. 4.3) et le premier mode actif est le mode 1.

Notons que dans la simulation, on choisit 30 périodes d'échantillonnage pour déterminer l'instant de commutation, donc le *dwell-time* du système doit être au moins plus long que  $3\mu s$  par rapport au temps réel. La figure 4.2 représente le comportement de l'état  $x(t)$  et la figure 4.3 montre que le schéma d'estimation peut détecter tous les instants de commutation  $t_c$  correctement et précisément.

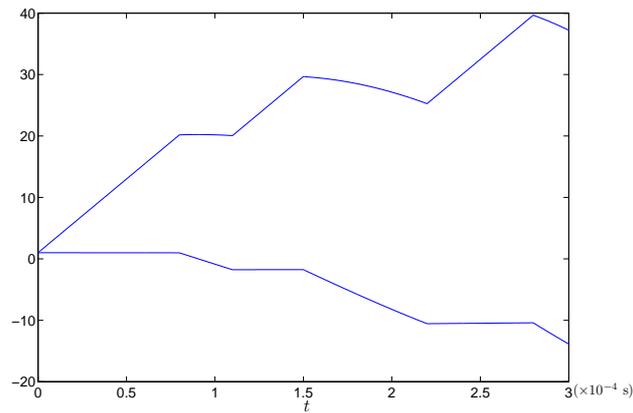


FIG. 4.2 – Etat  $x$ .

*Exemple 2 :*

Considérons un autre exemple de convertisseur statique  $DC/DC$  à générateur de tension continue et deux filtres  $LC$  (un d'entrée et un de sortie, voir la figure 4.4). La tension de sortie du circuit  $U_1$  va être comparée au signal de référence  $U_{ref}$ . La différence de ces deux quantités, notée  $\xi = U_{ref} - \sigma U_1$ ,  $0 < \sigma < 1$  ( $\sigma$  est le gain du capteur), est appliquée pour contrôler les éléments de commutation du convertisseur.

Les lois de l'électronique (lois des nœuds, lois des mailles) donnent le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} C_0 \dot{U}_O + i_{TC} = i_0 \\ L_0 \dot{i}_0 + R_0 i_0 + U_0 = E_0 \\ C_1 \dot{U}_1 + \frac{U_1}{R_L} = i_1 \\ L_1 \dot{i}_1 + R_1 i_1 + U_1 = U_{TC} \end{cases} \quad (4.40)$$

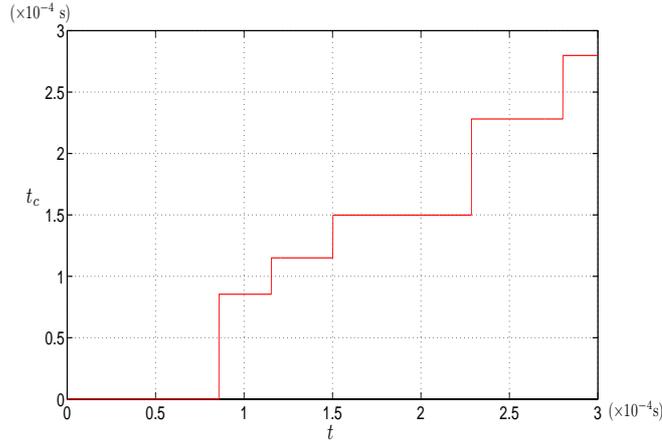


FIG. 4.3 – Identification de l'instant de commutation  $t_c$ .

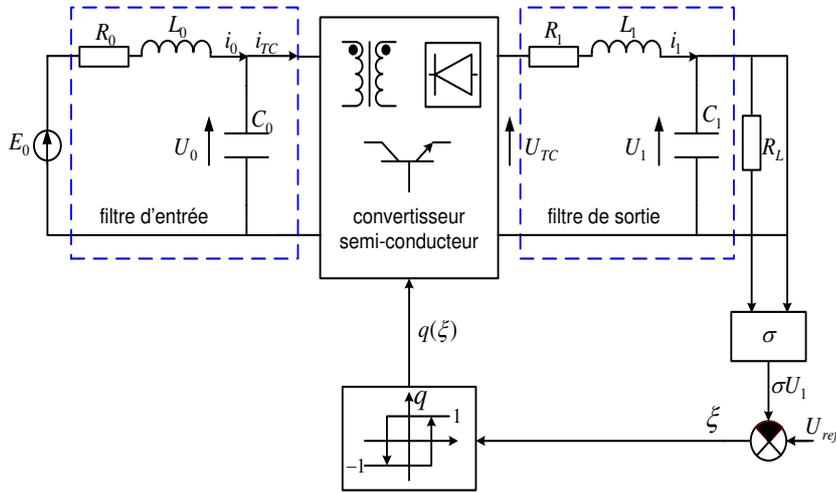


FIG. 4.4 – Circuit du convertisseur statique  $DC/DC$ .

où les coefficients  $L_0$  et  $L_1$  (exprimés en H) sont les valeurs d'auto-inductance des bobines d'inductance,  $C_0$  et  $C_1$  (exprimés en F) sont les capacités des condensateurs,  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_L$  (exprimés en  $\Omega$ ) sont les résistances. De plus,  $i_0$  et  $i_1$  (exprimés en A) sont les courants qui passent respectivement dans les bobines d'inductance à coefficients  $L_0$  et  $L_1$ . Les valeurs  $U_0$  et  $U_1$  (exprimées en V) sont les tensions aux bornes des condensateurs de capacités  $C_0$  et  $C_1$  respectivement selon les indices 0 et 1 qui représentent respectivement les éléments du filtre d'entrée et du filtre de sortie. Enfin,  $E_0$  (en V) est la tension d'entrée.

Ici, nous avons aussi :

$$U_{TC} = \begin{cases} U_0, & \text{si } q=1 \\ 0, & \text{si } q=-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad i_{TC} = \begin{cases} i_1, & \text{si } q=1 \\ 0, & \text{si } q=-1, \end{cases}$$

d'où :

$$U_{TC} = \frac{1 + q(\xi(t))U_0}{2} \quad \text{et} \quad i_{TC} = \frac{1 + q(\xi(t))i_1}{2}.$$

A partir de ces relations, le système (4.40) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \eta(-x_1(t) - x_2(t) + \Omega) \\ \dot{x}_2(t) = \gamma(x_1(t) - \frac{1}{2}(1 + q(\xi(t)))x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{\mu}{2}(1 + q(\xi(t)))x_2(t) - \nu x_3(t) - \mu x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \lambda(\frac{x_3(t)}{\alpha} - \frac{x_4(t)}{\beta}) \end{cases} \quad (4.41)$$

d'où :  $x_1 = R_0 i_0$ ,  $x_2 = U_0$ ,  $x_3 = R_0 i_1$ ,  $x_4 = U_1$ ,  $\eta = \frac{R_0}{L_0}$ ,  $\Omega = E_0$ ,  $\gamma = \frac{1}{C_0 R_0}$ ,  $\mu = \frac{R_0}{L_1}$ ,  $\nu = \frac{R_1}{L_1}$ ,  $\lambda = \frac{1}{C_1}$ ,  $\beta = R_L$ ,  $\alpha = R_0$  et  $q(t) \in \{-1, 1\}$ .

Le système (4.41) est bien de la forme de (4.30) puisqu'il peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_q x + B \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.42)$$

où  $y = x_4$  et les matrices  $A_q$ ,  $B$  sont données par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\eta & -\eta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu & -\nu \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\alpha} & \frac{\lambda}{\beta} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -\eta & -\eta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & \mu & -\nu & -\nu \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\alpha} & \frac{\lambda}{\beta} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \eta\Omega \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire ce système comme suit :

$$\begin{cases} \sum_1 : \dot{Y} = \bar{A}_1 Y \\ \sum_2 : \dot{Y} = \bar{A}_2 Y \end{cases} \quad (4.43)$$

avec  $Y = [\dot{y} \ \ddot{y} \ y^{(3)} \ y^{(4)}]^T$  et les matrices  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{A}_2$  définies comme suit :

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\nu\lambda - \nu\beta\frac{\lambda}{\alpha}}{\nu\beta - \lambda} & 0 & -\frac{\beta}{\nu - \lambda} & 0 \\ 0 & \frac{\nu\lambda - \nu\beta\frac{\lambda}{\alpha}}{\nu\beta - \lambda} & 0 & -\frac{\beta}{\nu - \lambda} \\ (\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\lambda}{\beta})\nu^2 & \nu^2 - \frac{\lambda}{\alpha}\nu & \frac{\lambda}{\beta} & 0 \\ 0 & (\frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\lambda}{\beta})\nu^2 & \nu^2 - \frac{\lambda}{\alpha}\nu & \frac{\lambda}{\beta} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda\gamma\eta\nu(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}) & \eta\nu(\frac{\lambda}{\beta} - \frac{\lambda}{\alpha}) + (\frac{\lambda\gamma\eta}{\beta} - \nu\gamma\eta) - \mu(1 - \frac{\lambda}{\beta}) & \eta(\frac{\lambda}{\beta} - \nu - 1) + \nu(\frac{\lambda}{\beta} - \frac{\lambda}{\alpha}) & -\eta + \frac{\lambda}{\beta} - \nu \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice  $(\bar{A}_1 - \bar{A}_2)$  est de rang plein, cet exemple peut également être traité par notre approche.

Notons aussi que la méthodologie de cette approche algébrique peut être appliquée pour résoudre certains problèmes pratiques, telle que par exemple : la détection de faute ou des problèmes de commande tolérante aux fautes [109].

## 4.3 Estimation de l'état

Après avoir introduit une approche algébrique pour l'identification en ligne de l'instant de commutation du système linéaire à commutation, cette section est consacrée à la recherche d'une méthode permettant l'estimation conjointe du mode actif et de l'état continu de ce type de système. On étudie le système modélisé par (4.23) et satisfaisant les contraintes suivantes :

- chaque sous-système est observable,
- le sous-système initial  $i$ , à partir de lequel on démarre notre système, est connu,
- la matrice  $(A_i - A_j)$  est de rang plein pour chaque paire de matrices  $A_i, A_j$  ( $i \neq j$ ) ou chaque paire de matrices  $A_i$  et  $A_j$  commute.

**Démarche principale de la méthode :**

1. Estimation de l'état  $x_1, \dots, x_n$  du sous-système  $i$  avec l'approche algébrique présentée dans le deuxième Chapitre (ou dans le troisième chapitre, si les paramètres varient) sachant que le sous-système initial est le mode  $i$ . On estime également l'état de tous les autres sous-systèmes en parallèle afin de pouvoir suivre la trajectoire de l'état plus vite quand il y a une commutation ;
2. Détection de l'instant de commutation et identification du mode actif  $j$  avec la méthode proposée dans la section précédente ;
3. Une fois qu'on connaît l'indice du sous-système actuel  $j$ , reconstruction de l'état actuel du système  $\rightarrow$  étape 1.

### Exemple et Simulation

Considérons un système linéaire à commutation en temps continu qui commute entre trois sous-systèmes LTI d'ordre 2 donné par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = (1 \ 0).$$

#### Estimation d'état

Premièrement, nous obtenons une formulation explicite de l'estimation de la sortie  $y_e$  et sa dérivée  $\dot{y}_e$  de chaque sous-système en appliquant la méthode proposée dans le deuxième Chapitre. Deuxièmement, puisque les sous-systèmes sont observables, la matrice d'observabilité de chaque mode est inversible. Ainsi, on peut alors exprimer l'état en fonction de la sortie et de sa dérivée. En remplaçant cette relation avec les valeurs estimées, nous pouvons récupérer l'état en fonction de l'intégrale de  $y(t)$ .

Pour le sous-système 1, on a :

$$\begin{cases} y_e(t) = \frac{6 \int_0^t \tau y(\tau) e^{(t-\tau)} d\tau - 2t \int_0^t y(\tau) e^{(t-\tau)} d\tau}{t^2} \\ \dot{y}_e(t) = \frac{6 \int_0^t \tau y(\tau) e^{(t-\tau)} d\tau - 2t \int_0^t y(\tau) e^{(t-\tau)} d\tau - 2 \int_0^t y(\tau) e^{(t-\tau)} d\tau}{t^2} + 2 \frac{y_e(t)}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1e} = y_e \\ x_{2e} = \dot{y}_e(t) - y_e(t) \end{cases} \quad (4.44)$$

Pour le sous-système 2, on a :

$$\begin{cases} y_e(t) = \frac{6 \int_0^t \tau y(\tau) e^{3(t-\tau)} d\tau - 2t \int_0^t y(\tau) e^{3(t-\tau)} d\tau}{t^2} \\ \dot{y}_e(t) = \frac{18 \int_0^t \tau y(\tau) e^{3(t-\tau)} d\tau - 6t \int_0^t y(\tau) e^{3(t-\tau)} d\tau - 2 \int_0^t y(\tau) e^{3(t-\tau)} d\tau}{t^2} + 2 \frac{y_e(t)}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1e} = y_e(t) \\ x_{2e} = \frac{1}{2}(\dot{y}_e(t) - 3y_e(t)) \end{cases} \quad (4.45)$$

Pour le sous-système 3, on a :

$$\begin{cases} y_e(t) = \frac{2 \int_0^t (e^{(1-\sqrt{6})(t-\tau)} + e^{(1+\sqrt{6})(t-\tau)}) \tau y(\tau) d\tau - \frac{\sqrt{6}}{6} \int_0^t (e^{(1+\sqrt{6})(t-\tau)} - e^{(1-\sqrt{6})(t-\tau)}) y(\tau) d\tau}{t^2} \\ \dot{y}_e(t) = 2 \frac{y_e(t)}{t} + \frac{\frac{6-6\sqrt{6}}{3} \int_0^t e^{(1-\sqrt{6})(t-\tau)} \tau y(\tau) d\tau + \frac{6+6\sqrt{6}}{3} \int_0^t e^{(1+\sqrt{6})(t-\tau)} \tau y(\tau) d\tau}{t^2} \\ - \frac{(\frac{6-\sqrt{6}}{6} \int_0^t e^{(1-\sqrt{6})(t-\tau)} y(\tau) d\tau + \frac{6+\sqrt{6}}{6} \int_0^t e^{(1+\sqrt{6})(t-\tau)} y(\tau) d\tau)}{t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1e} = y_e(t) \\ x_{2e} = \dot{y}_e(t) - 2y_e(t) \end{cases} \quad (4.46)$$

## Résultats de simulation

Maintenant, nous pouvons détecter “on-line” tous les instants de commutation et le mode actif du système en utilisant l’algorithme proposé dans la section 4.2 avec  $T_e = 0.001s$ . En combinant les formules d’estimation d’état par l’approche algébrique obtenue “off-line” ci-dessus, nous pouvons également récupérer l’état continu du système.

Ici, les instants de commutation sont donnés par :  $t_1 = 0.4s$ ,  $t_2 = 1s$ ,  $t_3 = 1.2s$ ,  $t_4 = 1.4s$ ,  $t_5 = 1.5s$  (cf Fig. 4.5 et 4.6) et le mode 1 est le premier activé. Les séquences de commutation entre les sous-systèmes sont  $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_2$  (cf Fig. 4.7). Puisque l’estimateur 1 ( $E_{1,2}$ ) détecte la commutation qui se produit entre les deux modes  $A_1$  et  $A_2$ , l’estimateur 2 ( $E_{2,3}$ ) correspond à la commutation entre  $A_2 \leftarrow A_3$  et l’estimateur 3 ( $E_{1,3}$ ) détecte la commutation entre les deux modes  $A_1$  et  $A_3$ , il est clair que l’estimateur correspondant à la séquence de commutation  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  fonctionne (cf Fig. 4.8).

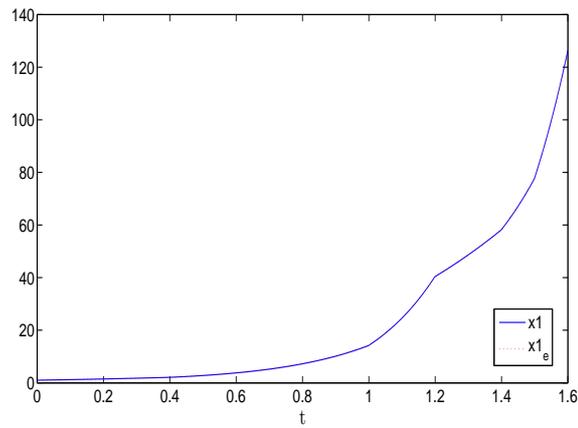


FIG. 4.5 – Valeurs réelles et estimées : état  $x_1$ .

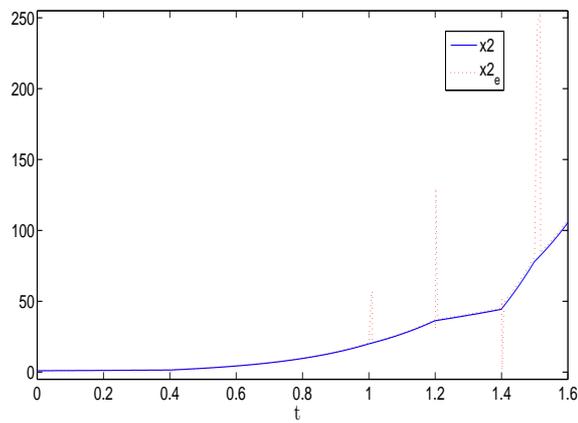


FIG. 4.6 – Valeurs réelles et estimées : état  $x_2$ .

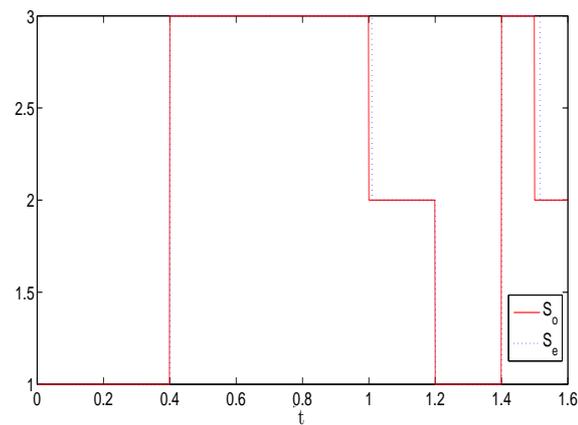


FIG. 4.7 – Sous-système activé réel  $S_o$  et estimé  $S_e$ .

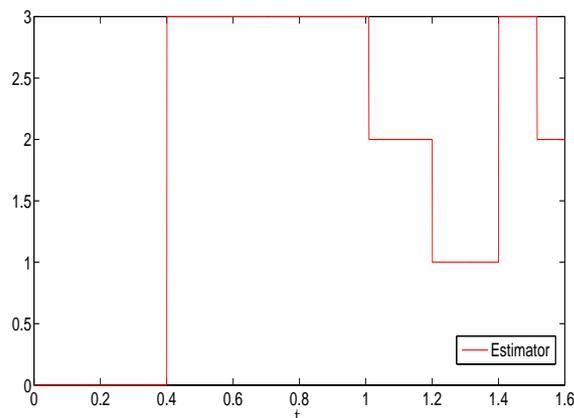


FIG. 4.8 – Estimateur utilisé.

La figure 4.5 et la figure 4.6 donnent l'estimation de l'état  $x_{1e}(t)$  et  $x_{2e}(t)$ . Il est clair que le schéma d'estimation détecte en temps réel tous les instants de commutation  $t_c$  et le mode actif correctement et précisément. L'estimation de l'état continu suit également bien l'état réel.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'estimation en temps réel des instants de commutation et de l'état (l'état discret et l'état continu) pour les systèmes linéaires à commutation en temps continu. Dans la littérature, la plupart des observateurs pour ce type de système ne tiennent pas compte de la partie discrète. En supposant que le sous-système actif est disponible à la mesure à chaque instant, la synthèse d'observateur en est très simplifiée. Dans notre travail, on suppose que le sous-système actif est inconnu (sauf pour le premier sous-système activé).

Ensuite, l'estimation de l'instant de commutation des systèmes linéaires à commutation basée sur l'approche algébrique a été présentée. Premièrement, on considère le cas le plus simple : une commutation entre deux sous-systèmes. Tout l'état du système est supposé mesurable. Grâce à la technique développée au sein de l'équipe ALIEN, une expression formelle de l'estimation de l'instant de commutation  $t_c$  en fonction d'intégrales de la sortie et de l'entrée est donnée. Deuxièmement, la méthode est généralisée au cas de  $Q$  sous-systèmes et de  $S$  commutations. La solution d'implémentation est également introduite. Troisièmement, la méthode est étendue aux systèmes avec état partiellement mesuré. A la fin de cette partie, nous avons montré comment se servir de cette approche algébrique à travers des exemples de convertisseurs.

Finalement, nous nous sommes penchés sur l'intérêt de l'estimation d'état de

ce type de systèmes avec l'état partiellement mesuré. En combinant les résultats de l'estimation d'état pour les systèmes LTI par l'approche algébrique présentée dans le Chapitre 2 et de la détection de l'instant de commutation en temps réel, nous avons réussi à estimer le mode actif et l'état continu des systèmes linéaires à commutation en temps réel. Des simulations illustrent les techniques proposées.

# Conclusion générale et Perspectives

L'ensemble de ce mémoire est dévolu au développement de méthodes d'estimation d'état par une approche algébrique. Cette méthode est dédiée à une classe générale de systèmes : les systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps (LTI), les systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps (LTV) et les systèmes linéaires à commutation en temps continu (SLC). Dans chaque chapitre, le problème d'observation est défini et analysé pour les différentes catégories de systèmes, par suite les contributions que nous apportons sont mises en évidence.

## Synthèse

Cette thèse est construite autour de la problématique d'observation de différents types de systèmes.

En général, il n'existe pas dans la littérature de méthode systématique de synthèse d'observateur pour les systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps et à commutation sous une forme générale. En fait, il n'existe qu'une panoplie de synthèses disponibles pour des systèmes sous des formes particulières, ou bien vérifiant des conditions particulières de structure.

Dans ce sens, nous avons commencé par exposer les principaux travaux de ces dernières années sur l'observabilité et la synthèse de l'observateur pour les systèmes LTI, LTV et SDH, notamment pour les systèmes SLC. La base principale des méthodes développées au sein de l'équipe ALIEN, en particulier pour l'estimation de paramètres et la dérivation numérique, a été présentée. L'observabilité du système définie par un point de vue algébrique est également introduite.

Par la suite, dans le deuxième chapitre, nous avons entrepris le développement d'une méthode d'estimation d'état pour les systèmes LTI, sujet à des perturbations extérieures inconnues, par les techniques développées dans le projet ALIEN et donné une expression formelle de l'état en fonction d'un nombre fini des intégrales des sorties. Pour ce faire, on applique la transformation de Laplace et les outils issus du calcul opérationnel. Tout d'abord, on exprime les états en fonction de  $y(t)$ ,  $u(t)$  et de leurs dérivées, puis on utilise le calcul opérationnel pour éliminer les conditions initiales et diminuer l'influence du bruit. A la fin, on réussit à exprimer les états en fonction des intégrales de  $y(t)$ .

Dans le troisième chapitre, nous avons développé une méthode originale d'estimation algébrique rapide pour des systèmes linéaires dont les paramètres varient dans le temps et ont une forme très générale (la seule condition requise est que ceux-ci soient des fonctions continûment dérivables). Les méthodes sont appliquées à un système de moteur à courant continu. Pour montrer l'efficacité de notre estimateur, nous avons réalisé des simulations, où le paramètre varie de façon polynômial puis sinusoïdale. Les résultats sont très satisfaisants, même en présence de bruit. Nous avons ensuite repris le même exemple, et comparé notre résultat avec celui de l'observateur de type Kalman. Notons que l'approche algébrique possède les propriétés suivantes :

- il n'y a pas de gains d'observation ou d'autres paramètres extérieurs à régler ;
- les calculs peuvent être implémentés formellement et effectués de manière très rapide ;
- elle est relativement robuste par rapport au bruit de mesure (qu'il soit blanc ou d'une autre nature) et par rapport à des perturbations extérieures.

Le quatrième chapitre a été consacré au développement d'une méthode d'estimation de la fonction de commutation et de l'état continu des systèmes linéaires à commutation en temps continu. Pour ce faire, dans un premier temps, nous avons introduit l'estimation en temps fini de l'instant de commutation  $t_c$  du système en utilisant seulement la dynamique de l'état continu. D'abord, on considère le cas le plus simple : une commutation entre deux sous-systèmes. L'estimation de  $t_c$  est alors donnée par des formules algébriques explicites. Puis, la méthode est généralisée au cas de  $Q$  sous-systèmes et de  $S$  commutations. La solution d'implémentation est également introduite. Cette méthode est étendue aux systèmes avec état partiellement mesuré. Dans un deuxième temps, en combinant les résultats de l'estimation d'état du système LTI par l'approche algébrique présentée dans le deuxième Chapitre et de la détection de  $t_c$  en temps réel, nous avons présenté la démarche principale de l'estimation d'état du système linéaire à commutation en temps continu. Enfin, des simulations ont illustré les techniques proposées.

## Problèmes ouverts

A l'issue de ce travail de thèse, plusieurs problèmes demeurent toutefois en suspens. Nous présentons ici ce qui nous semble être le cadre d'investigations ou d'avancées sont tout à fait envisageables.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème d'estimation de l'état du système par une approche algébrique. Le chapitre 1 met en avant la représentation de l'observabilité et l'observateur de différent type de systèmes.

Dans le chapitre 2, nous avons développé des algorithmes permettant l'estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps sujet à des perturbations extérieures inconnues. A partir de cette estimation, il est

---

possible d'étudier l'influence des manipulations algébriques sur les estimateurs obtenus. En effet, celles-ci ne sont pas forcément définies de façon uniques et peuvent influencer sur le conditionnement de certaines matrices à inverser.

Au niveau de chapitre 3, il serait intéressant de proposer l'approche pour des classes plus générales de système LTV, tels que les systèmes multivariables. Mais le gros problème est : pour un système d'ordre quelconque, comment peut on trouver les relations entrée/sortie d'ordre le plus bas possible. Il faudra se pencher sur la théorie de la réalisation. En outre, dans les perspectives, nous avons introduit l'extension à l'observation locale des systèmes non linéaires, qui peuvent être également traités par cette approche.

Concernant ces deux chapitres, étant donné le caractère formel des calculs effectués pour obtenir les expressions des estimées, on peut envisager l'écriture d'un logiciel où l'utilisateur pourrait entrer les paramètres de son système et obtenir les estimées de variables dont il a besoin.

Dans le dernier chapitre, le principe de l'estimation de la fonction de commutation (les instants de commutation  $t_c$  ainsi que le sous-système actif) et de l'état continu est établi pour les systèmes à commutation en temps continu. Il est clair que l'algorithme proposé concernant l'estimation de  $t_c$ , bien que donnant des résultats convainquant, peut être largement amélioré, notamment en limitant le nombre d'estimateurs en parallèle à utiliser sur les matrices. De plus, les contraintes sur les matrices pour l'estimation du mode actif et de l'état continu du système SLC sont un peu fortes. Afin de résoudre complètement ce problème en utilisant l'approche proposée, la possibilité d'obtenir la relation (4.24) entre la sortie et ses dérivées doit être analysée. Pour ce faire, les propriétés d'observabilité et d'identifiabilité du système doivent être étudiées proprement. C'est notamment dans ces directions que s'orientent les travaux que nous menons actuellement.

De manière plus générale, notre contribution est placée sous le sceau de la théorie. Une des perspectives est d'appliquer les résultats obtenus à des systèmes réels. En outre, dans cette thèse, seul le problème d'observation des systèmes à commutation a été abordé. L'étude approfondie d'une classe plus générale de systèmes hybrides est nécessaire et fera l'objet de futurs travaux. Il apparaît, à travers les exemples donnés dans le quatrième chapitre, que la méthode proposée s'applique à des classes plus larges de systèmes que celle envisagée dans ce mémoire.



# Bibliographie

- [1] G. A. Ackerson and K. S. Fu. On state estimation in switching environments. *IEEE Trans. Automat. Control*, 15(1) :10–17, 1970.
- [2] A. A. Agrachev and D. Liberzon. Lie-algebraic stability criteria for switched systems. *SIAM J. Control Optimiz.*, 40 :253–269, 2001.
- [3] A. Alessandri and P. Coletta. Design of luenberger observers for a class of hybrid linear systems. In *hybrid systems : Computation and Control*, Springer Verlag, 2034 :7–18, 2001.
- [4] A. Alessandri and P. Coletta. Switching observers for continuous-time and discrete-time linear systems. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 25–27, 2001. Arlington.
- [5] M. Babaali and M. Egerstedt. Observability of switched linear systems. *Hybrid Systems : Computation and Control*, pages 48–63, 2004.
- [6] M. Babaali and G. J. Pappas. Observability of switched linear systems in continuous time. *Lecture Notes in Computer Science (Hybrid Systems : Computation and Control)*, 3414 :103–117, 2005.
- [7] A. Balluchi, L. Benvenuti, M. D. Di Benedetto, and A. L. Sangiovanni-Vincentelli. Design of observers for hybrid systems. *Lecture notes in computer Science 2289*, Springer Verlag, pages 77–89, 2002.
- [8] G. Bara. Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants. *PhD thesis*, Déc, 2001. Institut Polytechnique de Lorraine.
- [9] J.-P. Barbot, M. Fliess, and T. Floquet. An algebraic framework for the design of nonlinear observers with unknown inputs. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, Louisiana, USA, 2007.
- [10] J.-P. Barbot, H. Saadaoui, M. Djemai, and N. Manamanni. Nonlinear observer for autonomous switching systems with jumps. *The International Conference of Hybrid Systems and Applications*, may, 2006. Lafayette, Louisiana, USA.
- [11] M. Basseville and I. V. Nikiforov. Detection of abrupt changes - theory and application. In *Englewood Cliffs, N.J.*, ISBN 0-13-126780-9, 1993.
- [12] F. J. Bejarano and L. Fridman. Exact observer for switching linear systems via super-twisting algorithm. In *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems. Zaragoza, Spain*, 2009.

- [13] L. Belkoura, J.-P. Richard, and M. Fliess. On-line identification of systems with delayed inputs. In *17th Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Kyoto, Japon, July 2006.
- [14] A. Bemporad, G. Ferrari-Trecate, and M. Morari. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45(10) :1864–1876, 2000.
- [15] A. Bemporad and M. Morari. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, 35 :407–427, 1999.
- [16] O. Benzineb, K. Benmansour, M. Djemaï, M. Tadjine, and M.S. Boucherit. Real time evaluation of adaptive / hybrid observer for three cells converter. In *Med. J. of Measurement and Control*, 4(2) :76–85, 2008.
- [17] G. Besançon. Contributions à l'étude et à l'observation des systèmes non linéaires avec recours au calcul formel. *Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1996.
- [18] G. Besançon, G. Bornard, and H. Hammouri. Observer synthesis for a class of nonlinear systems. *European J. of Control*, 3(1) :176–193, 1996.
- [19] G. Besançon, Q. Zhang, and H. Hammouri. High gain observer based state and parameter estimation in nonlinear systems. *IFAC Symp Nonlinear Control Systems*, 2004. Stuttgart, Germany.
- [20] A. Birouche. Contribution sur la synthèse d'observateurs pour pour les systèmes dynamiques hybrides. *PhD thesis*, 2006. Institut National Polytechnique de Lorraine.
- [21] G. Bornard, F. Celle-Gouenne, and G. Gilles. Systèmes non linéaires, tome 1 : modélisation-estimation, chapitre 5 : Observabilité et observateurs journal =. 1993.
- [22] G. Bornard, N. Gouenne, and F. Celle. Regularly persistent observer for bilinear systems. *New Trends in Nonlinear Control Theory; Lecture Notes in Control and Info. Sci*, pages 130–140, 1988. Springer-Verlag, Berlin.
- [23] U. Boscin. Stability of planar switched systems : The linear single input case. *SIAM J. Control Optimiz.*, 73 :89–112, 2006.
- [24] R. Bourdais, M. Fliess, C. Join, and W. Perruquetti. Towards a model-free output tracking of switched nonlinear systems. *7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, NOLCOS 2007*, pages 637–642, 2007. Pretoria, South Africa.
- [25] M. S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 43 :475–482, 1998.
- [26] S. Chaib. Observation et diagnostic des systèmes hybrides. *PhD thesis*, 2007. Université d'orléans.
- [27] S. Chaib, D. Boutat, A. Benali, and J. Barbot. Algebraic and geometrical conditions for the observability of the discrete state of a class of hybrid

- 
- systems. *IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*, 2006. Munich, Germany.
- [28] S. Chaib, D. Boutat, A. Benali, and J. P. Barbot. Observability of the discrete state for dynamical piecewise hybrid systems. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems and Applications*, 63 :423–438, 2005.
- [29] H. H. Choi and M. J. Chung. Observer-based h8 controller design for state delayed linear systems. *Automatica*, Vo. 32(7) : 1073-1075, July 1996.
- [30] N. Couenne. Synthèse d’observateurs de systèmes affines en l’état. Institut Nat. Polytechnique de Grenoble, 1988. Thèse de Doctorat.
- [31] J. Daafouz, G. Millerioux, and L. Rosier. Observer design with guaranteed bound for LPV systems. *Proceedings of IFAC World Congress on Automatic Control*, 2005.
- [32] M. Darouach. Linear functional observers for systems with delays in state variables. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 46(3), pages 491 – 496, 2001.
- [33] M. Darouach. Linear functional observers for systems with delays in state variables : the discrete-time case. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 50(2), pages 228 – 233, Feb 2005.
- [34] B. DasGupta and E. D. Sontag. A polynomial-time algorithm for checking equivalence under certain semiring congruences motivated by the state-space isomorphism problem for hybrid systems. In *Theoretical Computer Science*, volume 262(1-2), pages 161–189, 2001.
- [35] J. Davila, A. Pisano, and E. Usai. Finite-time observation of the continuous and discrete state for a class of nonlinear switched dynamics. In *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems.*, Zaragoza, Spain, 2009.
- [36] M. Defoort and M. Djemai. Synthèse d’un observateur en temps fini pour le convertisseur multicellulaire. In *Conf. Int. Francophone d’Automatique.*, Nancy, France, 2010.
- [37] S. Diop and M. Fliess. Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories. *IEEE Conférence on Decision and Control*, 1991.
- [38] S. Diop and M. Fliess. On nonlinear observability. *proc. 1st European Control conference*, pages 152–157, 1991.
- [39] J.-P. Richard (Dir). Mathématiques pour les systèmes dynamiques. *Lavoisier*, 2002.
- [40] E. A. Domlan, J. Ragot, and D. Maquin. Switching systems : Active mode recognition, identification of the switching law. *Journal of Control Science and Engineering*, page 11, 2007.
- [41] G. Besançon (Ed.). Nonlinear observers and applications. *Lecture Notes in Control and Information Sciences (LNCIS)*, 363, 2007. ISBN : 978-3-540-73502-1.

- [42] A. Erdélyi. Operational calculus and generalized functions. *Rinehard and Winston*, 1962.
- [43] N. Messai et K. Benmahamed F. Hamdi, N. Manamanni. Hybrid observer design for linear switched system via differential petri nets. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 3(3) :310–322, août, 2009.
- [44] C. Fantuzzi, S. Simani, S. Beghelli, and R. Rovatti. Identification of piecewise affine models in noisy environment. *Int. J. of Control*, 75(18) :1472–1485, 2002.
- [45] M. Fliess. A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems. *Systems Control Lett.*, 8 :147–151, 1986.
- [46] M. Fliess. Some remarks on nonlinear invertibility and dynamic state-feedback. *Theory and Applications of Nonlinear Control Systems*, 8 :115–121, 1986.
- [47] M. Fliess. Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Trans. Automat. Control*, 35 :9, 1990.
- [48] M. Fliess. Some basic structural properties of generalized linear systemes. *Systems Control Lett.*, 15 :391–396, 1990.
- [49] M. Fliess. A module theoretic approach to sliding mode control in linear systems. *IEEE Conference on Decision and Control*, 1993.
- [50] M. Fliess. Une interprétation algébrique de la transformation de laplace et des matrices de transfert. *Linear Alg. Appl*, 203-204 :429–442, 1994.
- [51] M. Fliess. Analyse non standard du bruit. *C. R. Acad. Sci.*, I(342) :797–802, 2006. Paris.
- [52] M. Fliess and S. Diop. Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. In *Proc. 36th IEEE Conf. Decision Control*, pages 714–719, 1991.
- [53] M. Fliess and C. Join. Time series technical analysis via new fast estimation methods : a preliminary study in mathematical finance. *Proc. 23rd IAR Workshop Advanced Control Diagnosis (IAR-ACD08)*, Coventry, 2008.
- [54] M. Fliess and C. Join. A mathematical proof of the existence of trends in financial time series. *Systems Theory : Modelling, Analysis and Control.*, pages 43–62, 2009.
- [55] M. Fliess, C. Join, and M. Mboup. Video and/or image data processing with determination of representation functions. 2006. Patent : WO/2006/087479.
- [56] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, and H. Sira-Ramírez. Compression différentielle de transitoires bruités. *C. R. Acad. Sci.*, I(339) :821–826, 2004. Paris.
- [57] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, and H. Sira-Ramírez. Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures. *Actes 20e Coll. GRETSI*, 2005. Louvain-la-Neuve.

- 
- [58] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, and H. Sira-Ramírez. Vers une commande multivariable sans modèle. *Proc. Conference Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'06.*, 2006.
- [59] M. Fliess, C. Join, and W. Perruquetti. Real-time estimation for switched linear systems. *47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- [60] M. Fliess, C. Join, and W. Perruquetti. Real-time estimation of the switching signal for perturbed switched linear systems. *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, ADHS'09*, 2009. Zaragoza, Spain.
- [61] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramírez. Robust residual generation for linear fault diagnosis : an algebraic setting with examples. *Int. J. of Control*, 77 :1223–1242, 2004.
- [62] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramírez. Control and observer design for nonlinear finite and infinite dimensional systems. *chapter Closed-loop fault-tolerant control for uncertain nonlinear systems*, 322 :217–233, 2005. T. Meurer, K. Graichen, E. D. Gilles (Eds), springer, berlin edition.
- [63] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and detect of nonlinear systems : introductory theory and examples. *Internal. J. Control*, 61 :1327–1361, 1995.
- [64] M. Fliess, M. Mboup, and H. Sira-Ramírez. Method for demodulating cpm signals. 2006. Patent : WO/2006/054131.
- [65] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph. Systèmes linéaires sur les opérateur de mikusiński et commande d'une poutre flexible. *ESAIM Proc.*, 2 :183–193, 1997.
- [66] M. Fliess and H. Sira-Ramírez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, 9 :151–168, 2003.
- [67] M. Fliess and H. Sira-Ramírez. Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques. 2008.
- [68] M. Fliess and H. Sira-Ramírez. Control via state estimations of some nonlinear systems. *Proc. Symp. Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004)*, Sept. 2004. Stuttgart, Germany.
- [69] T. Floquet and J-P. Barbot. Super twisting algorithm based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *IJSS on Advances in Sliding Mode observation and Estimation*, 38(10) :803–815, 2007.
- [70] T. Floquet, J. A. Twiddle, and S. K. Spurgeon. Parameter estimation via second order sliding modes with application to thermal modelling in a high speed rotating machine. *IEEE International Conference on Industrial Technology, ICIT'06*, 2006.
- [71] L. Fridman and A. Levant. Sliding modes of higher order as a natural phenomenon in control theory. In *Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques*, volume 217, pages 107–133, 1996.

- [72] J. P. Gauthier and A. K. Kupka. Deterministic observation theory and applications. *Cambridge Univ Press*, 1997.
- [73] A. Gensior, J. Weber, H. Guldner, and J. Rudolph. An algebraic parameter identification algorithm and asymptotic observers for estimation of the load of a boost converter. *IEEE international Symposium on Industrial Electronics*, 2007.
- [74] K. Guesmi and A. Hamzaoui. On the modelling of dc-dc converters : An enhanced approach. *Wiley InterScience, International Journal of Numerical modelling*, 2010.
- [75] H. Hammouri and J. De Leon Morales. Observer synthesis for state-affine systems. *Proc. 29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 784–785, 1990. Honolulu, HA, UA.
- [76] Y. Hashambhoy and R. Vidal. Recursive identification of switched arx models with unknown number of models and unknown orders. *Proceedings of the Joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2005. Sevilla, Spain.
- [77] W. P. M. H. Heemels, J. M. Schumacher, and S. Weiland. Linear complementarity systems. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 60 :1234–1269, 2000.
- [78] W. P. M. H. Heemels, B. De Schutter, and A. Bemporad. Equivalence of hybrid dynamical models. *Automatica*, 37(7) :1085–1091, 2001.
- [79] J. Hladik. La transformation de laplace. *Masson*, 1969.
- [80] K. Huang, A. Wagner, and Y. Ma. Identification of hybrid linear time-invariant systems via subspace embedding and segmentation (ses). *43th IEEE Conf. Decision Control*, 2004. Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
- [81] C. Join, J. Masse, and M. Fliess. Commande sans modèle pour l’alimentation de moteurs : résultats préliminaires et comparaisons. *Actes 2es Journées Identif. Modélis. Expérim. (JIME)*, 2006.
- [82] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82-D :35–45, 1960.
- [83] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 83 :95–107, 1961.
- [84] G. Kerschen, K. Worden, A. Vakakis, and J.-C. Golinval. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mech. Systems Signal Process.*, 20 :505–592, 2006.
- [85] E. Kreindler and P. E. Sarachik. On the concepts of controllability and observability of linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 9 :129–136, 1964.
- [86] H. Kwakernaak and R. Sivan. Linear optimal control systems. *Wiley-Interscience*, 1972. New York.

- 
- [87] I. D. Landau. *Identification et commande des systèmes. 2e édition revue et augmentée*. Hermès, 1993.
- [88] H. Leiva and S. Siegmund. A necessary algebraic condition for controllability and observability of linear time-varying systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 48(12) :2229–2232, 2003.
- [89] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. In *Automatica*, volume 34(3), pages 379–384, 1998.
- [90] A. Levant. High-order sliding modes : differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10) :924–941, 2003.
- [91] D. Liberzon. Switching in systems and control. *Systems & Control : Foundation & Applications*, 2003. Birkhauser.
- [92] L. Ljung and T. Glad. Modeling of dynamic system. *Englewood Cliffs.*, 1994.
- [93] L. Ljung and T. Glad. On global identifiability of arbitrary model parameterization. *Automatica*, 30(2) :265–276, 1994.
- [94] D. G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 11(2) :190–197, 1966.
- [95] D. G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Trans. Automat. Control*, 16(6) :596–692, 1971.
- [96] J. L. Mancilla-Aguilar and R. A. García. A converse lyapunov theorem for nonlinear switched systems. *Systems & Control Letters*, 41 :67–71, 2000.
- [97] M. Mboup, C. Join, and M. Fliess. A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control. *Proc. 15<sup>th</sup> Medit. Conf. Control Automation - MED'07*, 2007. Gresse.
- [98] M. Mboup, C. Join, and M. Fliess. Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numerical Algorithms*, 50(4) :439–467, 2009.
- [99] A. Mezhoud, S. Maradi, K. Benmansour, M. Djemai, and M. Tadjine. On hybrid observability and sliding mode observer in three cells converter. *Archives of Control Sciences*, 2009.
- [100] E. H. Moore. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26 :394–395, 1920.
- [101] E. Moulay, R. Bourdais, and W. Perruquetti. Stabilization of nonlinear switched systems using control lyapunov functions. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 1 :482–490, 2007.
- [102] N. Orani, A. Pisano, M. Franceschelli, A. Giua, and E. Usai. Robust reconstruction of the discrete state for a class of nonlinear uncertain switched systems. In *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems.*, Zaragoza, Spain, 2009.
- [103] S. Paoletti, A. L. Juloski, G. Ferrari-Trecate, and R. Vidal. Identification of hybrid systems : a tutorial. *European Journal of Control.*, 13(2-3) :242–260, 2007.

- [104] W. Perruquetti and J-P. Barbot. Sliding mode control in engineering. *Print ISBN : 978-0-8247-0671-5*, 2002.
- [105] C. De Persis, R. De Santis, and A. S. Morse. Supervisory control with state-dependent dwell-time logic and constraints. *Automatica*, 40(2) :269–275, 2004.
- [106] S. Pettersson. Designing switched observers for switched systems using multiple lyapunov functions and dwell-time switching. *2nd IFAC Conference on Analysis and design of hybrid systems*, June, 2006. Alghero, Italy.
- [107] C. Quémard. Analyse et optimisation d’une classe de systèmes dynamiques hybrides à commutations autonomes. *Thèse de l’Université d’Angers*, 2007.
- [108] J. Reger, H. S. Ramirez, and M. Fliess. On non-asymptotic observation of non linear systems. In *ECC-CDC*, 2005.
- [109] J. M. Rhee, H.-A. Pham, S. M. Kim, Y. M. Ko, and D. H. Lee. Issues of fail-over switching for fault-tolerant ethernet implementation. In *International Conference on New Trends in Information and Service Science*, pages 711–714, 2009.
- [110] J.-P. Richard. Time delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39 :1667 – 1694, 2004.
- [111] J. Rudolph. Duality in time-varying linear systems : a module theoretic approach. *Linear Alg. Appl*, 245 :83–106, 1996.
- [112] J. Rudolph and F. Woittennek. An algebraic approach to parameter identification in linear infinite dimensional systems. In *IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France, 2008.
- [113] H. Saadaoui, N. Manamanni, M. Djemai, and J. Barbot. Observateur hybride pour systèmes à commutations avec sauts sur l’état. *Proceedings of Conférence Internationale Francophone d’Automatique, CIFA’06*, may, 2006. Bordeaux, France.
- [114] H. Saadaoui, N. Manamanni, M. Djemai, J.P. Barbot, and T. Floquet. Exact differentiation and sliding mode observers for switched lagrangian systems. *Nonlinear Analysis : Theory Methods and Applications. Special issue : Hybrid systems and applications.*, 65(5) :1050–1069, 2006.
- [115] E. De Santis and M. D. Di Benedetto. Observer design for discrete-time linear switching systems. *System Structure and Control*, 3, 2008.
- [116] E. De Santis, M. D. Di Benedetto, S. Di Gennaro, A. D’Innocenzo, and G. Pola. Critical observability of a class of hybrid systems and application to air traffic management. *Lecture Notes on Control and Information Sciences*, 337 :141–170, 2006.
- [117] E. De Santis, M. D. Di Benedetto, and G. Pola. On observability and detectability of continuous-time linear switching systems. *Proc. 42nd IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 5777–5782, 2003. Maui, Hawaii, USA.
- [118] L. Schwartz. *Théorie des distributions. 2nd ed.*, 1966. Hermann.

- 
- [119] O. Sename. New trends in design of observers for time-delay systems. 37(4) :427 – 458, 2001. *Kybernetika*.
- [120] L. M. Silverman and H. E. Meadows. Controllability and observability in time-variable linear systems. *SIAM J.Control*, 5 :64–73, 1967. U.S.A.
- [121] H. Sira-Ramírez and M. Fliess. An algebraic state estimation approach for the recovery of chaotically encrypted messages. *Internat. J. Bifurc. Chaos.*, 16 :1–15, 2006.
- [122] J. Sjöberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Delyon, P.-Y. Glorennec, H. Hjalmarsson, and A. Juditsky. Nonlinear black-box modeling in system identification : a unified overview. *Automatica*, 31 :1691–1724, 1995.
- [123] E. D. Sontag. Nonlinear regulation : The piecewise linear approach. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 26 :346–357, 1981.
- [124] Z. Sun and S. S. Ge. Analysis and synthesis of switched linear control systems. In *Automatica*, volume 41, pages 181–195, 2005.
- [125] Z. Sun and S. S. Ge. Switched linear systems : Control and design. 2005. London : Springer-Verlag.
- [126] Z. Sun, S. S. Ge, and T. Lee. Controllability and reachability criteria for switched linear control. *Automatica*, 38(5) :775–786, May, 2002.
- [127] Y. Tian, T. Floquet, L. Belkoura, and W. Perruquetti. Algebraic switching time identification for a class of linear hybrid systems. In *3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, ADHS'09*, Zaragoza Spain, 2009.
- [128] Y. Tian, T. Floquet, L. Belkoura, and W. Perruquetti. Switching time estimation for linear switched systems : an algebraic approach. In *48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, CDC/CCC'09*, Shanghai, China, 2009.
- [129] Y. Tian, T. Floquet, L. Belkoura, and W. Perruquetti. Algebraic switching time identification for a class of linear hybrid systems. In *Journal of Nonlinear Analysis : Hybrid systems*, Available online 21 September, 2010.
- [130] Y. Tian, T. Floquet, and W. Perruquetti. Estimation des paramètres des systèmes linéaires : approche algébrique. In *5e IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'08*, UPB, Bucarest, 2008.
- [131] Y. Tian, T. Floquet, and W. Perruquetti. Fast state estimation in linear time-invariant systems : an algebraic approach. In *16th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'08*, Ajaccio, Corsica, France, 2008.
- [132] Y. Tian, T. Floquet, and W. Perruquetti. Fast state estimation in linear time-varying systems : an algebraic approach. In *47th IEEE Conference on Decision and Control, CDC'08*, Cancun Mexique, 2008.
- [133] Z. TIGANJ and M. MBOUP. Spike detection and sorting : combining algebraic differentiation with ica. In *8th International Conference of Independent Component Analysis and Signal Separation*, Brazil, Paraty, 2009.

- [134] Z. TIGANJ, M. MBOUP, C. Pouzat, and B. Lotfi. An algebraic method for eye blink artifacts detection in single channel eeg recordings. In *17TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON BIOMAGNETISM ADVANCES IN BIOMAGNETISM*, pages 175–178, 2010.
- [135] H. Trinh and M. Aldeen. A memoryless state observer for discrete time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(11) :1572 – 1577, Nov. 1997.
- [136] J. Trumpf. Observers for linear time-varying systems. *Linear Algebra Appl*, 425(2-3) :303–312, 2007.
- [137] R. Vidal, A. Chiuso, S. Soatto, and S. Sastry. Observability of linear hybrid systems. *Lecture Notes in Computer Science, Hybrid Systems Computation and Control*, 2623 :526–539, 2003.
- [138] L. Vu and D. Liberzon. Common Lyapunov functions for families of commuting nonlinear systems. *Systems Control Lett.*, 54(5) :405–416, May 2005.
- [139] M. Wicks, P. Peleties, and R. DeCarlo. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems. *European Journal of Control*, 4(2) :140–147, 1998.
- [140] G. Xie, D. Zheng, and L. Wang. Controllability of switched linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 47(8) :1401–1405, 2002.
- [141] H. S. Yu Y. M. Zhang and L. Guo. Using guaranteed cost filters for fault detection of discrete-time stochastic distribution systems with time delays. *The Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2 :5521 – 5525, Jun 2006.
- [142] G. Zhai, H. Lin, and P. J. Antsaklis. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *Internat. J. Control*, 76(7) :747–753, 2003.
- [143] G. Zheng, L. Yu, D. Boutat, and J-P. Barbot. Algebraic observer for a class of switched systems with zeno phenomenon. *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009. ShangHai, Chine.

## Résumé

Ce mémoire est dédié à l'étude de la synthèse de l'estimation d'état en temps fini par une approche algébrique (les techniques développés au sein de l'équipe ALIEN) pour les systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps (LTI) sujet à des perturbations extérieures inconnues, les systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps (LTV) et les systèmes linéaires à commutation en temps continu (SLC). Pour les systèmes LTI et LTV, une expression formelle de l'état en fonction des intégrales itérées des sorties et de l'entrée a été donnée. Pour les systèmes linéaires à commutation, en combinant les résultats de l'estimation d'état pour les systèmes LTI et de la détection de l'instant de commutation en temps réel présentée dans le chapitre 4, nous donnons la démarche principale de l'estimation en temps réel du mode courant et l'état continu du système.

**Mots-clés:** systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps, systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps, systèmes linéaires à commutation, approche algébrique, estimation d'état.

## Abstract

This PhD thesis is dedicated to the synthesis of the state estimation in a finite time by an algebraic approach (the techniques developed within the ALIEN group) for the linear time-invariant systems (LTI) subject to the external unknown disturbances, the linear time-varying systems (LTV) and the switched linear systems (SLC) in continuous time. For the LTI and LTV systems, a formal expression of state as a function of iterated integrals of the output and the input is obtained. For switched linear systems, combining the results of state estimation for LTI systems and switch instant detection presented in Chapter 4, we give the main approach of current mode estimation and the continuous state estimation in real time.

**Keywords:** linear time-invariant systems, linear time-varying systems, switched linear systems, algebraic approach, state estimation.

