



**HAL**  
open science

# Ondes de choc acoustiques en milieu hétérogène, des ultrasons au bang sonique

Lili Ganjehi

► **To cite this version:**

Lili Ganjehi. Ondes de choc acoustiques en milieu hétérogène, des ultrasons au bang sonique. Acoustique [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT: . tel-00590909

**HAL Id: tel-00590909**

**<https://theses.hal.science/tel-00590909>**

Submitted on 5 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité

**Acoustique physique**

Présentée par

**Lili Ganjehi**

Pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie**

Sujet de thèse :

**Ondes de choc acoustiques en milieu hétérogène,  
des ultrasons au bang sonique**

Soutenance prévue le 25 février 2008

Devant le jury composé de

M. COULOUVRAT François  
M. THOMAS Jean-Louis  
M. GIBIAT Vincent  
M. ROUX Philippe  
M. BLANC-BENON Philippe  
M. GUSEV Vitali  
M. SAGAUT Pierre  
M. VANHILLE Christian

Directeur de thèse  
Directeur de thèse  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>1. Contexte général.....</b>	<b>1</b>
1.1. <i>Le bang sonique .....</i>	<i>1</i>
1.2. <i>La problématique.....</i>	<i>3</i>
<b>2. Interaction entre le bang sonique et la couche turbulente : état de l’art</b>	<b>6</b>
2.1. <i>Théorie de la diffusion .....</i>	<i>6</i>
2.2. <i>Théorie du repliement du front d’onde.....</i>	<i>8</i>
<b>3. Modélisation de la propagation non-linéaire en milieu hétérogène. ....</b>	<b>11</b>
3.1. <i>Modélisation expérimentale.....</i>	<i>11</i>
3.2. <i>Modélisation théorique et numérique .....</i>	<i>14</i>
3.2.1. <i>L’approximation parabolique standard .....</i>	<i>14</i>
3.2.2. <i>L’approximation « grand angle ».....</i>	<i>16</i>
3.2.3. <i>La résolution numérique .....</i>	<i>17</i>
<b>4. Objectifs de la thèse .....</b>	<b>19</b>
<b>Phénomène de repliement du front d’onde : Mise en évidence et influence</b>	<b>25</b>
<b>1. Modélisation expérimentale .....</b>	<b>26</b>
1.1. <i>Dispositif expérimental .....</i>	<i>26</i>
1.2. <i>Mesure de champ acoustique en régime non linéaire.....</i>	<i>30</i>
1.3. <i>Diffraction en espace libre et filtre inverse.....</i>	<i>33</i>
<b>2. Analyse des résultats expérimentaux.....</b>	<b>40</b>
2.1. <i>Effet de la focalisation.....</i>	<i>40</i>
2.2. <i>Repliement du front d’onde .....</i>	<i>44</i>
2.3. <i>Conséquences du repliement du front d’onde.....</i>	<i>50</i>

2.3.1.	Augmentation du temps de montée .....	50
2.3.2.	Variabilité des formes d'onde temporelles.....	52
<b>3.</b>	<b>Modèle physique.....</b>	<b>56</b>
3.1.	<i>Equation de propagation des ondes acoustiques en régime non linéaire dans un fluide faiblement hétérogène en approximation paraxiale.....</i>	56
3.1.1.	Lois de conservation et de comportement .....	57
3.1.2.	Les équations de l'acoustique non linéaire en milieu faiblement hétérogène.....	58
3.1.2.1.	Equations en milieu faiblement hétérogène .....	59
3.1.2.2.	Equations de l'acoustique.....	61
3.1.2.3.	Equations constitutives adimensionnées .....	65
3.1.3.	L'équation KZ généralisée .....	67
3.1.3.1.	Approximation paraxiale .....	67
3.1.3.2.	L'équation KZ en milieu hétérogène.....	70
3.2.	<i>Interprétation physique de l'équation KZ généralisée.....</i>	72
3.2.1.	Interprétation des termes non linéaires.....	72
3.2.2.	Interprétation des termes de diffraction.....	75
3.2.2.1.	L'approximation parabolique standard.....	75
3.2.2.2.	Diffraction et diffusion hétérogène .....	79
3.2.3.	Interprétation des termes hétérogènes .....	80
3.3.	<i>Algorithme de résolution numérique.....</i>	82
3.3.1.	Principes de l'algorithme.....	83
3.3.1.1.	Formulation en potentiel.....	84
3.3.1.2.	Séparation numérique des non-linéarités et de la diffraction ..	85
3.3.1.3.	Traitement des non-linéarités : la méthode de Burgers-Hayes	86
3.3.2.	Schéma de résolution à pas fractionnés en milieu hétérogène .....	87
3.3.2.1.	Organigramme du schéma numérique en milieu hétérogène ..	88
3.3.2.2.	Résolution de l'équation paraxiale en milieu hétérogène en régime linéaire.....	93

3.3.2.3.	Equation paraxiale non-linéaire en milieu hétérogène .....	106
3.4.	<i>Validation de code de propagation non-linéaire en milieu hétérogène atténuant</i> .....	107
3.5.	<i>Effets non-linéaires locaux</i> .....	113
3.6.	<i>Evolution du temps de montée</i> .....	118
<b>4.</b>	<b>Conclusion</b> .....	<b>121</b>
	<b>Modélisation « grand angle » et hétérogénéités multiples .....</b>	<b>123</b>
<b>1.</b>	<b>Modèle physique</b> .....	<b>125</b>
1.1.	<i>Equations constitutives adimensionnées</i> .....	126
1.2.	<i>Equation « grand angle » en milieu hétérogène en régime linéaire</i> .....	128
1.2.1.	Interprétation de la diffraction en approximation grand angle .....	131
1.2.2.	Interprétation de l'effet hétérogène en grand angle.....	135
1.3.	<i>Prise en compte de la non-linéarité dans l'équation « grand angle »</i> .....	136
<b>2.</b>	<b>Modèle numérique</b> .....	<b>136</b>
2.1.	<i>Discrétisation de l'équation « grand angle » linéaire en milieu hétérogène</i> .....	137
2.1.1.	Equation discrétisée.....	137
2.1.2.	Condition aux limites absorbante .....	141
2.2.	<i>Validation en milieu homogène : champ proche d'un piston</i> .....	144
2.2.1.	Solution analytique.....	145
2.2.2.	Convergence en maillage .....	148
2.2.3.	Couche absorbante.....	151
2.2.4.	Comparaisons des approximations paraboliques standard et « grand angle »... ..	156
2.3.	<i>Validation en milieu hétérogène : diffusion par un cylindre</i> .....	164
2.3.1.	Condition absorbante et onde plane .....	164

2.3.2.	Comparaison des approximations paraboliques standard et « grand angle » en milieu hétérogène .....	170
<b>3.</b>	<b>Diffusion d'une onde de choc par des hétérogénéités multiples.....</b>	<b>176</b>
3.1.	<i>Conditions expérimentales</i> .....	177
3.2.	<i>Retour sur le cas d'une hétérogénéité unique</i> .....	180
3.3.	<i>Cas d'un réseau d'hétérogénéités</i> .....	186
3.3.1.	Repliement du front et hétérogénéités multiples. ....	186
3.3.2.	Influence de la taille des hétérogénéités multiples sur la variabilité des formes d'ondes et le temps de montée .....	190
3.3.3.	Simulation de l'interaction d'une onde en dent de scie avec des hétérogénéités multiples .....	192
3.4.	<i>Vers un cas de milieu aléatoire ...</i> .....	201
<b>4.</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>208</b>
	<b>Conclusion.....</b>	<b>210</b>



## **Introduction**

### **1. Contexte général**

#### **1.1. Le bang sonique**

Le bang sonique est la détonation balistique engendrée par un avion se déplaçant dans l'atmosphère à une vitesse supérieure à celle du son. Ce son est donc la trace au sol des ondes de choc acoustiques créées par l'écoulement aérodynamique autour de l'avion, lorsque ce dernier se déplace à une vitesse supersonique. Les enregistrements du bang au sol pour un avion en vol stationnaire et en atmosphère « calme » montrent une signature sous forme d'onde en N présentant deux chocs acoustiques. Lors du premier choc, la surpression acoustique augmente rapidement, en quelques millisecondes, jusqu'à atteindre une valeur allant jusqu'à une centaine de Pascals (pour Concorde en vol de croisière). L'air se détend ensuite lentement (sur une durée de 0,1 à 0,5 seconde selon la taille de l'objet), puis revient à la pression atmosphérique lors d'un second choc. Un exemple d'enregistrements d'une telle forme idéale est présenté sur la figure 1 ci-dessous.



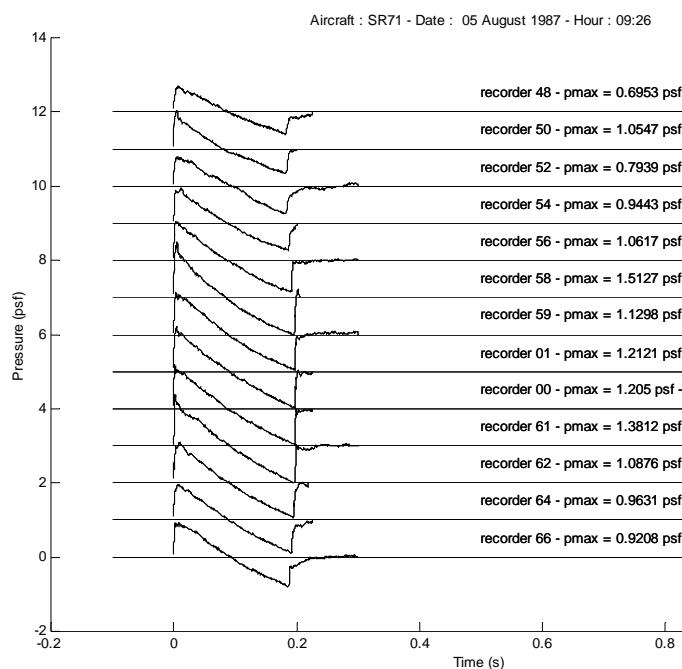


Figure 1 . Exemples d'enregistrements de bangs soniques en formes d'ondes en N. Essais BoomFile (Lee and Downing 1991) – vol SR71 du 05 août 1987 à 09:26 (heure locale) – Mach 2.5 – altitude de vol 64000 ft (1 psf = 47,88 Pa) – Les différents enregistrements correspondent à des capteurs localisés au sol perpendiculairement à la trajectoire.

L'objectif des études sur le bang sonique est de minimiser les nuisances sonores au sol, en particulier au-dessus des terres habitées, soit en optimisant les routes suivies par les avions, soit en optimisant la forme de l'avion. Dans l'état actuel des connaissances, un niveau de bang sonique « acceptable » au sol par les populations survolées n'est pas connu, et certains pays (comme les USA - United States FAA 14 CFR part 91) interdisent le survol des terres à vitesse supersonique pour les avions civils.

Pour définir les routes de navigation accessibles à un avion de transport supersonique ou modifier son profil aérodynamique de façon à réduire le bang, la propagation dans l'atmosphère des ondes acoustiques résultant de l'écoulement de l'air autour de l'avion, doit être modélisée. Cette propagation a lieu sur des distances élevées, pouvant atteindre plusieurs dizaines de kilomètres (la croisière supersonique de Concorde à Mach 2 varie entre 15 et 17 km d'altitude).

La théorie de la propagation du bang sonique dans une atmosphère stratifiée verticalement est maintenant bien connue depuis les travaux pionniers de Whitham (1952). Rappelons en brièvement les principaux éléments :

- 1) le champ source au voisinage de l'avion (champ « lointain » aérodynamique, « proche » acoustique) est décrit au moyen de la fonction établie par Whitham (1952) pour un corps axisymétrique, et généralisée par Walkden (1958) pour un objet non axisymétrique avec voilure portante,
- 2) la propagation se fait le long des rayons acoustiques issus du cône normal au cône de Mach, rayons qui sont déviés par la stratification de l'atmosphère (Guiraud, 1965, Hayes *et al.*, 1969, Pierce 1989, Auger 2001)
- 3) la déformation non linéaire cumulative du profil d'onde explique la distorsion progressive de la forme d'onde. La forme d'onde « initiale » émise par l'avion est complexe, mais la vitesse du son dépendant de l'amplitude, les surpressions acoustiques les plus fortes rattrapent les plus faibles au cours de la propagation, ce qui conduit au sol à l'onde en N (Whitham 1956, Guiraud 1965, Hayes *et al.*, 1969).

Les ouvrages de synthèse de Hayes *et al.* (1969), Pierce (1989), Maglieri et Plotkin (1995) et Plotkin (2002) présentent de manière détaillée l'ensemble de ces éléments. L'impact des fluctuations météorologiques sur une longue période (10 ans) de la stratification de température et de vent a été quantifié par Blumrich *et al.* (2005).

## 1.2. La problématique

La théorie résumée ci-dessus prévoit des formes d'ondes en N pour la signature du bang sonique au sol. Cependant, les premières mesures du bang sonique au sol dès les années 60 (Maglieri, 1966, Garrick, 1968) montrent une variabilité importante des signaux enregistrés au sol, variabilité que n'explique pas la théorie. Celle-ci est insuffisante pour prédire : i) les temps de montée du bang sonique mesurés au sol, ii) la variabilité des formes d'ondes et iii) les variations spatiales rapides du champ de pression pour des capteurs situés à des distances de l'ordre de la longueur d'onde (50 à 100 m environ). Un exemple est fourni par la figure 1 ci-dessus. Si globalement la forme de l'onde en N est bien conservée, l'amplitude maximale ne décroît pas de façon monotone quand on s'éloigne du capteur sous trace (capteur 00 sur la figure). Par ailleurs, le temps de montée  $t_m$  (temps nécessaire au premier choc pour varier de 10% à 90% de la surpression maximale) fluctue également de manière significative (tableau 1).

Capteur	48	50	52	54	56	58	59	01	00	61	62	64	66
$t_m$ (ms)	3.375	2.625	2.125	6.5	1.5	3.75	2.125	2.625	1.125	1.375	5.25	3.625	3.5

*Tableau 1. Temps de montée en fonction du capteur. Essais BoomFile (Lee and Downing 1991) – vol SR71 du 05 août 1987 à 09:26 (heure locale) – Mach 2.5 – altitude de vol 64000 ft (1 psf = 47,88 Pa) – Les différents capteurs sont localisés au sol perpendiculairement à la trajectoire (capteur sous trace : 00).*

La figure 2 fournit, pour le même avion (SR-71) et le même jour (05/08/1987) un autre exemple d'enregistrements au sol de bangs soniques, pour lesquels la variabilité par rapport à la forme en « N » idéale est sensiblement plus importante. Des écarts sensibles par rapport à cette forme et des temps de montée nettement plus longs (Tableau 2) peuvent être observés, notamment pour les capteurs 52, 54, 56, 59, 61 et 64.

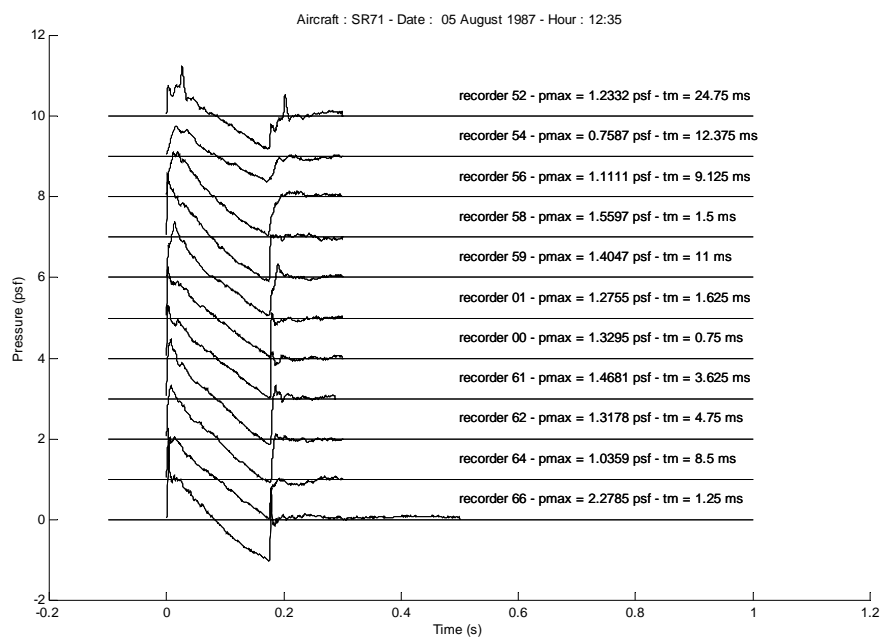


Figure 2. Exemples d'enregistrements de bangs soniques en formes d'ondes en N. Essais BoomFile (Lee and Downing 1991) – vol SR71 du 05 août 1987 à 12:35 (heure locale) – Mach 1.7 – altitude de vol 52000 ft (1 psf = 47,88 Pa) – Les différents enregistrements correspondent à des capteurs localisés au sol perpendiculairement à la trajectoire.

Capteur	52	54	56	58	59	01	00	61	62	64	66
$t_m$ (ms)	24.175	12.375	9.125	1.5	11.0	1.625	0.75	3.625	4.75	8.5	1.25

Tableau 2. Temps de montée en fonction du capteur. Essais BoomFile (Lee and Downing 1991) – vol SR71 du 05 août 1987 à 12:35 (heure locale) – Mach 1.7 – altitude de vol 52000 ft (1 psf = 47,88 Pa) – Les différents capteurs sont localisés au sol perpendiculairement à la trajectoire (capteur sous trace : 00).

L'absorption atmosphérique due à la relaxation moléculaire des molécules diatomiques d'azote et d'oxygène (Bass *et al.*, 1984) a été identifiée comme

partiellement responsable de l'augmentation du temps de montée (Hodgson, 1973, Bass *et al.*, 1983, Cleveland *et al.*, 1996). Elle reste néanmoins insuffisante pour décrire toutes les caractéristiques du bang sonique au sol. Il est maintenant communément admis que la variabilité des formes d'ondes, du temps de montée ainsi que de l'amplitude en pression est directement liée à l'interaction entre les signaux provenant d'un avion supersonique et la couche limite planétaire turbulente, située près du sol jusqu'à une altitude de l'ordre du kilomètre. Un des arguments est d'ailleurs la différence observée entre les mesures le matin (Fig. 1) et à midi (Fig. 2), suivant que la turbulence thermique (très forte en été en zone désertique – les mesures sont réalisées dans à la base USAF Edwards dans le désert de Mojave en Californie) s'est ou non développée.

Notons que toutes ces caractéristiques (amplitude, temps de montée et forme d'onde) sont des paramètres qui influencent la gêne sonore associée au bang sonique (au moins dans le cas d'une perception extérieure) (Zepler *et al.*, 1965, Rylander *et al.*, 1978).

A la fin des années 60, deux théories (Crow, 1969, Pierce, 1968) ont tenté d'expliquer les caractéristiques du bang sonique. Ces résultats restaient toutefois qualitatifs. Au début des années 90, des nouvelles mesures de l'influence de la turbulence sur le bang sonique au sol ont permis de confronter ces dernières à des résultats principalement numériques (dont les modèles théoriques sont plus ou moins issus des théories de Crow ou de Pierce), comme nous allons le montrer maintenant.

## **2. Interaction entre le bang sonique et la couche turbulente : état de l'art**

### **2.1. Théorie de la diffusion**

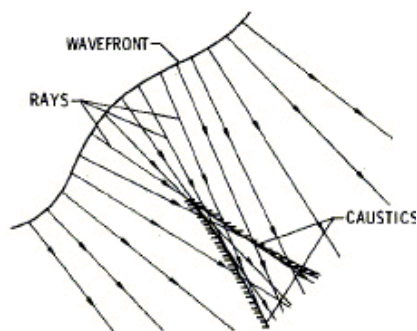
Crow (1969) tente d'expliquer qualitativement les caractéristiques du bang sonique mesurées au sol par une théorie de nature statistique. Il considère que l'onde est la somme de l'onde incidente et de l'onde diffusée, résultat de l'interaction de l'onde incidente avec la couche turbulente. Il rajoute dans l'équation des ondes des termes perturbatifs dus à la turbulence d'origine thermique (fluctuations de température et donc de célérité du son) et inertielle (fluctuations de vitesse du milieu). Il déduit, à partir de cette équation, une expression de la moyenne de la perturbation en pression au carré.

En 1992, McBride *et al.* proposent une simulation numérique pour quantifier l'influence de la turbulence atmosphérique sur la propagation du son. Leur étude modélise la diffusion d'une onde en N par des hétérogénéités disposées aléatoirement. Ces hétérogénéités ont un profil d'indice de réfraction variant spatialement (gaussienne). Chaque diffuseur a la même taille et son influence est modélisée par une approximation de Born au premier ordre. Notons que les non-linéarités sont négligées dans ce modèle. L'effet global du milieu est alors déterminé en sommant l'amplitude de chaque contribution. Boulanger *et al.* (1995) généralisent cette approche par une modélisation du milieu turbulent plus proche de la réalité en faisant varier la taille et l'intensité de chaque diffuseur. Ils déterminent la densité de chaque taille d'hétérogénéités afin de retrouver les caractéristiques de la turbulence atmosphérique (spectre de von Karmann) (deWolf, 1983). Ils améliorent grâce à ce modèle de couche turbulente les résultats numériques qu'ils confrontent avec les résultats mesurés au sol. Ils ne retrouvent cependant pas toutes les caractéristiques du bang sonique (par exemple : les valeurs du temps de montée). Le modèle de la couche turbulente a donc été encore amélioré en prenant en compte des formes d'hétérogénéités elliptiques (Kelly *et al.*, 2000) permettant d'introduire une anisotropie des caractéristiques du milieu. Ils retrouvent certaines des caractéristiques du bang sonique mais (nous citons) « ne

peuvent prédire de manière précise la statistique de la propagation du bang sonique au travers de la couche limite planétaire turbulente » (« cannot accurately predict the statistics of sonic boom propagation through the turbulent planetary boundary layer »). Plusieurs effets ne sont en effet pas pris en compte par le modèle, comme par exemple la variation du temps de vol au passage à travers les hétérogénéités (effet de « lentille acoustique »), la turbulence inertielle (vectorielle au lieu d'être scalaire comme dans le modèle), l'inhomogénéité de la turbulence, et la non-linéarité de la propagation acoustique. Notons aussi que ces différents travaux s'intéressent peu à la variabilité des formes d'ondes du bang sonique.

## **2.2. Théorie du repliement du front d'onde**

Pierce (1968), puis Pierce et Maglieri (1971) proposent une théorie purement géométrique. Le front d'onde subit une courbure lors de son passage à travers un milieu comportant des variations des propriétés atmosphériques. Cette courbure est une conséquence de la réfraction, modélisée (sous l'hypothèse haute fréquence) par l'acoustique géométrique en milieu hétérogène. Les rayons se croisent pour former des caustiques (Fig. 3).



*Figure 3. Chemin des rayons provenant d'un front d'onde courbé par les hétérogénéités du milieu. Les caustiques sont formées lorsque les rayons acoustiques se croisent.*

*(Figure extraite de Pierce and Maglieri, 1971).*

Selon ce modèle, les formes d'ondes « piquées » sont observées à proximité des caustiques, zones de focalisation (Marston, 1992) résultant du passage de l'onde à travers une zone de vitesse du son localement plus lente (effet de « lentille » acoustique). Les formes d'ondes arrondies sont le résultat du repliement du front d'onde après le passage à travers les caustiques résultant de plusieurs hétérogénéités : le choc initial est décomposé en plusieurs chocs d'amplitude différentes et de temps d'arrivée différents (Fig. 4), ce qui induit un étalement temporel du front d'onde. Cet effet pourrait ainsi expliquer la variabilité des formes d'ondes, ainsi que l'augmentation du temps de montée. Notons néanmoins que ce modèle reste très qualitatif. Enfin, l'influence des effets non linéaires n'est pas étudiée.



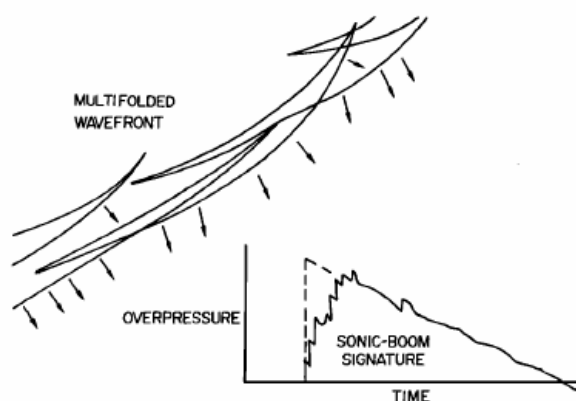


Figure 4. En haut à gauche : le repliement du front d'onde dans un milieu comportant plusieurs hétérogénéités. En bas à droite : la signature en pression. (Figure tirée de Pierce and Maglieri, 1971).

Des travaux ultérieurs ont permis d'améliorer ce modèle et de fournir des résultats quantitatifs. Blanc-Benon *et al.* (2002) simulent numériquement la propagation acoustique en utilisant l'acoustique géométrique (Candel, 1977) ou l'approximation parabolique (équation KZ, Zabolotskaya and Khokhlov, 1969). Ils considèrent une turbulence thermique, homogène et isotrope. Chaque réalisation indépendante d'un champ aléatoire est obtenue en sommant des modes de Fourier convenablement choisis pour satisfaire une statistique donnée (spectre Gaussien, de von Karman...) (Blanc-Benon *et al.*, 1991). Les simulations numériques sont réalisées en régime non linéaire et prennent en compte l'absorption atmosphérique. Elles montrent la variabilité des formes d'ondes : les formes d'ondes « piquées » apparaissent au passage à la caustique (effet de focalisation), les formes « double-piquées » sont liées à la superposition de deux fronts d'ondes de temps de propagation différents, les formes d'ondes arrondies apparaissent derrière les caustiques. Les effets non linéaires, les caustiques, ainsi que la dissipation expliqueraient donc la variété des formes d'ondes. Ces études mettent également en évidence une corrélation entre l'augmentation du temps de montée et l'apparition des caustiques caractérisées par leur probabilité d'apparition (Blanc-Benon *et al.*, 1991). Elles soulignent également l'importance de la turbulence inertielle (fluctuations de la vitesse du vent) en raison de son caractère vectoriel et non plus scalaire. Afin d'aborder

ce point, Aver'yanov *et al.* (2006) ont récemment proposé une équation de propagation non linéaire dans le cadre de l'approximation parabolique qui prend en compte les fluctuations de vitesse du vent. Remarquons qu'une comparaison quantitative des détails de la statistique entre les données enregistrées lors d'essais en vol et ce type de modèle numérique reste à réaliser. Il s'agit là d'un point important mais particulièrement difficile à réaliser car il reste difficile (et coûteux) de réaliser un nombre important d'essais en vol en conditions de vol, de météorologie et de turbulence bien caractérisées. Afin de pallier cette difficulté, des études sont en cours de réalisation afin de mesurer directement, dans les conditions atmosphériques réelles, les fonctions de transfert entre le bang sonique au-dessus de la couche limite turbulente et les bangs soniques au sol (Locey et Sparrow 2007). En altitude, les bangs sont mesurés par un planeur, et au sol par des microphones. Il est possible alors de construire une base de données de fonctions de transfert expérimentales traduisant la distorsion des formes d'onde, puis d'appliquer cette base de données sur des formes de bang non expérimentales (par exemple des bangs soniques calculés pour des formes optimisées de projets d'avion à faible bang). Ceci suppose évidemment que les effets non linéaires soient négligeables. Les premiers résultats publiés sur 6 filtres seulement montrent une fluctuation importante des niveaux de bang sonique (de l'ordre de 10 dB). La question sous-jacente est évidemment le nombre de « filtres » nécessaires à mesurer pour être statistiquement représentatifs.

Enfin, en ce qui concerne plus spécifiquement le comportement local d'une onde de choc au niveau des caustiques, Piacsek (2002) analyse via une simulation numérique de l'équation KZ en milieu homogène, la propagation d'un front d'onde courbé. Il met ainsi en évidence numériquement le repliement du front d'onde et décrit en détail cet effet, notamment l'évolution de la forme d'onde. Cette étude a été poursuivie par Marchiano *et al.* (2005) qui analysent les effets de focalisation d'une onde de choc au niveau d'une caustique cuspidée (Coulouvrat, 2000) dans le cadre de la théorie des catastrophes (Thom, 1972, Berry, 1976). Cette dernière étude a fait l'objet d'une comparaison avec des expériences en laboratoire.

Nous avons décrit dans cette partie les principaux travaux sur l'interaction du bang sonique avec la couche turbulente atmosphérique. La partie suivante a maintenant comme objectif de faire un état de l'art (non exhaustif) des différentes modélisations expérimentales, théorique et numérique qui existent dans la littérature sur la propagation d'une onde de choc en milieu hétérogène fluide, au-delà de la seule problématique stricte du bang sonique.

### **3. Modélisation de la propagation non-linéaire en milieu hétérogène.**

#### **3.1. Modélisation expérimentale**

Face à la difficulté de réaliser des mesures du bang sonique au sol lors d'essais en vol, les expériences à l'échelle du laboratoire ont émergé comme moyen alternatif pour obtenir des informations sur l'interaction entre les ondes de choc et un milieu hétérogène ou turbulent. Cependant, il est difficile de reproduire à l'échelle du laboratoire les paramètres du bang sonique. A notre connaissance, un certain nombre d'expériences ont été effectuées. Leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau 3 ci-dessous. Nous avons également ajouté les données correspondant à la présente étude. Les valeurs choisies pour estimer les paramètres dans le cas du bang sonique sont celles pour un avion de petite taille (avion militaire ou avion privé de 50 m de long) produisant au sol un bang sonique équivalent à celui du Concorde (100 Pa) avec un temps de montée égal à 1 ms en atmosphère calme. La taille des hétérogénéités est choisie inférieure ou égale à 100 m (soit comparable à la longueur d'onde). La fluctuation relative de vitesse du son ou de la vitesse du vent est égale à 0,03 (soit une vitesse du vent égal à 10 m/s).

	<b>Bang sonique</b>	<b>Davy and Blackstock (1971)</b>	<b>Lipkens <i>et al.</i> (1998)</b>	<b>Blanc- Benon <i>et al.</i> (2005)</b>	<b>Ganjehi (2007)</b>
$T$ durée ou période du signal	0.15 s	10 $\mu$ s	15 $\mu$ s	40 $\mu$ s	1 $\mu$ s
$A$ amplitude de l'onde	100 Pa	245 Pa	650 Pa	100 Pa	5 bar
$\tau$ temps de montée	1 ms	1 $\mu$ s	0.5 $\mu$ s	3 $\mu$ s	24 ns
$d$ taille des hétérogénéités ou grandes échelles de la turbulence	100 m	3.8 cm	1 cm	10 cm	3 mm
$\Delta c/c_0$ hétérogénéité relative de la vitesse du son ( $T$ ) ou $u/c_0$ nombre de Mach de l'écoulement ( $u$ )	0.03	-0.07 (Ar) ( $T$ ) +1.92 (He) ( $T$ )	$6.7 \cdot 10^{-3}$ ( $u$ )	$2.4 \cdot 10^{-3}$ ( $T$ ) $7 \cdot 10^{-3}$ ( $u$ )	-0.27 ( $T$ )
$\beta M$ (amplitude sans dimension)	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
$c_0 T/d$ rapport longueur d'onde / hétérogénéité	2	0.09	2	0.14	2
$T/\tau$ rapport durée / temps de montée	150	10	30	13	42
Type d'onde	Cylindrique	Sphérique	Plane	Sphérique	Plane
Type d'hétérogénéité	Aléatoire	Déterministe	Aléatoire	Aléatoire	Déterministe

Tableau 3. Paramètres des expériences en laboratoire – en haut : paramètres avec dimension – en bas : paramètres de similitude avec le bang sonique

Les paramètres retenus pour caractériser le signal et le milieu sont la durée ou la période du signal acoustique (suivant que celui-ci est transitoire ou périodique), son temps de montée (en l'absence d'hétérogénéités ou de turbulence), la taille des hétérogénéités (ou des plus grandes échelles de la turbulence) et leur intensité en tant que diffuseur

(contraste de célérité du son ou nombre de Mach de l'écoulement). Le paramètre sans dimension  $\beta M$  caractérise les effets de propagation non linéaire, le rapport longueur d'onde / taille des hétérogénéités la géométrie de celles-ci, et le rapport temps de montée / durée du signal l'absorption. Remarquons qu'aucune des expériences répertoriées ne peut simuler l'ensemble des paramètres du bang sonique.

Les premiers (Davy and Blackstock, 1971) produisent des ondes en N avec des étincelles électrique, réfractées et diffractées par des bulles de gaz agissant comme des lentilles acoustiques (Hélium He ou Argon Ar). Ils montrent que la lentille convergente (Ar) provoque la forme d'onde piquée de l'onde en N alors que la lentille divergente (He) provoque la forme d'onde arrondie. Cependant, la vitesse du son relative dans le cas de la lentille divergente (He) est bien trop forte par rapport à celle du bang sonique ( $\times 64$ ) et la taille de l'hétérogénéité est bien trop grande ( $\times 22$ ). Une autre expérience (Lipkens *et al.*, 1998) produit une onde plane sous forme d'onde en N grâce à une étincelle électrique produite au point focal d'un miroir parabolique. Cette onde se propage dans un champ de vitesse turbulent réalisé grâce à un jet. Cette expérience est réalisée en régime très fortement non linéaire (facteur 10 par rapport au bang). Elle reproduit bien certaines des caractéristiques du bang sonique : distorsion des formes d'onde, augmentation du temps de montée, diminution en moyenne de l'amplitude mais augmentation dans certains cas. Cependant leurs résultats (de nature statistique) ne prédisent pas complètement les résultats du bang sonique (à comparer leurs figures 4 et 16). Le dispositif expérimental de Blanc-Benon *et al.* (2005) est similaire à celui décrit précédemment mais il produit une onde sphérique de meilleure amplitude par rapport au bang sonique. Par contre, l'échelle de la turbulence est significativement plus grande que celle de la couche atmosphérique. Le principal résultat de ces expériences est de montrer l'augmentation du temps de montée avec la distance de propagation et sa corrélation avec l'apparition des caustiques.

## 3.2. Modélisation théorique et numérique

### 3.2.1. L'approximation parabolique standard

Les équations de base utilisées pour modéliser la propagation acoustique sont les trois équations de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie) ainsi que l'équation d'état. La simulation numérique directe de ces équations pour des ondes de choc acoustiques est à notre connaissance peu employée en raison de son coût numérique (grandes distances de propagation, dispersion et dissipation numérique, capture de choc). Ainsi les simulations numériques directes des équations d'Euler et du bang sonique autour des avions supersoniques sont limitées à quelques longueurs de fuselage (soit quelques centaines de mètres tout au plus) (Plotkin *et al.*, 2002).

Pour des propagations plus lointaines et des méthodes numériques moins coûteuses, des équations modèles plus simples et spécifiques à l'acoustique sont nécessaires, afin d'aboutir à des simulations numériques peu coûteuses en temps, stables, précises et valables en régime fortement non linéaire. Ceci nécessite évidemment des approximations dont il faut estimer le domaine de validité.

Pour les applications en acoustique non linéaire, deux approximations sont couramment utilisées : l'approximation géométrique (théorie des rayons) et l'approximation parabolique standard (ou paraxiale). L'acoustique géométrique est une méthode approchée d'estimation du champ acoustique, basée sur l'hypothèse fondamentale que le champ acoustique se propage localement comme une onde plane. L'écart par rapport à une onde plane exacte n'est significatif que sur des distances grandes devant la longueur d'onde. L'approximation géométrique est donc une approximation haute fréquence. Pour une introduction à cette méthode très utilisée, voir Candel (1977) ou Pierce (1989) et Auger (2001) pour son application au bang sonique. L'avantage de la méthode est son faible coût et sa généralité d'application en milieu hétérogène avec écoulement. L'inconvénient est que la théorie des rayons présente des singularités au niveau des caustiques (zone de convergence des rayons) ou dans les

zones d'ombres (zone d'absence des rayons). Le traitement de ces zones requiert un traitement spécifique. On est alors confronté à des équations de type approximation parabolique (voir ci-dessous) et une difficulté majeure consiste en leur raccord avec l'acoustique géométrique. En régime non linéaire et ondes de choc, le cas des caustiques simples (de type « pli ») est traité par Auger (2001), Auger *et al.* (2002), Marchiano *et al.* (2003), Blumrich *et al.* (2005a), le cas des caustiques cuspidées par Piacsek (2002) et Marchiano *et al.* (2005), le cas des zones d'ombre par Coulouvrat (2000) (réfraction atmosphérique) ou Coulouvrat *et al.* (2003) (écran acoustique).

L'approximation parabolique a été introduite initialement dans le cas de la propagation des ondes électromagnétiques (ondes radio, Leontovich, 1946). Elle a ensuite été appliquée avec succès dans le domaine des ondes sismiques (Claerbout, 1976), en acoustique sous-marine (Tappert, 1977) et, plus récemment, en acoustique atmosphérique (Myers *et al.*, 1987). En régime non linéaire, l'approximation parabolique standard apparaît sous la forme de l'équation dite KZK (Zabolotskaya et Khokhlov, 1969, Kuznetsov, 1970). Cette approximation a été très fréquemment utilisée dans le domaine médical pour l'étude de sources focalisées (Averkiou et Hamilton, 1997), l'application à la lithotritie (Averkiou et Cleveland, 1999) et l'imagerie harmonique (Humphrey, 2000). L'accord entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques est bon. Elle a aussi été utilisée pour simuler le décalage du point focal lié au réchauffement imposé par le passage de l'onde ultrasonore dans le milieu (hyperthermie : Baker, 1977, Meaney *et al.*, 2000). La propagation non linéaire dans l'océan considéré comme un guide d'onde a aussi été simulée avec l'approximation parabolique (McDonald et Kuperman, 1987, Ambrosiano *et al.*, 1990, Castor *et al.*, 2004). Pour des synthèses récentes sur l'équation KZK et ses applications, on pourra consulter le livre de Blackstock et Hamilton (1998) ou Duck (2002) pour les applications bio-médicales.

En 2002, Blanc-Benon *et al.* utilisent l'approximation parabolique pour étudier la propagation d'une onde de choc dans un milieu turbulent. Ils proposent une équation KZ étendue au cas hétérogène, mais ne présentent cependant pas la démonstration de cette nouvelle équation dans son article. Une équation du même type mais incluant la

relaxation moléculaire et les effets d'hétérogénéité en densité est présentée par Jing et Cleveland (2007). Enfin nous avons déjà cité l'équation établie par Aver'yanov *et al.* (2006) et prenant en compte un écoulement (à faible nombre de Mach).

### 3.2.2. L'approximation « grand angle »

L'approximation parabolique est une approximation de l'équation des ondes, qui privilégie une direction de propagation donnée *a priori*. On l'appelle également pour cela approximation paraxiale. Elle néglige complètement la partie de l'onde rétro-diffusée, et son domaine de validité est limité à un cône autour de cette direction préférentiel. En-dehors de ce cône d'ouverture relativement faible (angle de l'ordre de  $15^\circ$  environ de part et d'autre de l'axe), l'erreur introduite par l'approximation parabolique sur la phase de l'onde est telle que l'approximation n'est plus valable. Elle privilégie donc la propagation proche de cet axe.

De nombreux travaux ont cherché à étendre la validité de l'approximation parabolique. La solution proposée est un modèle basé sur l'approximation parabolique dite « grand angle ». Dans tous les travaux en régime linéaire, l'équation « grand angle » est développée à partir de la factorisation de l'équation des ondes en deux équations. Celles-ci correspondent à des ondes se propageant dans les deux sens par rapport à la direction privilégiée choisie. Chacune des équations factorisées fait apparaître un opérateur sous la forme  $\sqrt{1+L}$  avec  $L$  un opérateur différentiel décrivant la diffraction dans le plan transverse. L'approximation parabolique consiste alors :

- 1) à choisir une seule direction de propagation (dans la direction qui s'éloigne de la source) et donc à négliger le champ rétro diffusé,
- 2) à simplifier l'expression de l'opérateur, en général par approximation de Padé.



L'approximation de Padé (1,0) correspond à l'équation parabolique standard, l'approximation de Padé (1,1) à l'approximation « grand angle » (Claerbout, 1976). Différentes équations d'ordre d'approximation plus élevé ont été proposées dans la littérature (Greene, 1984, Knightly *et al.*, 1987, Bamberger *et al.*, 1988, Collins, 1989, Vefring and Mjølunes, 1990). Siegmann *et al.* (1985) ont proposé une extension de l'approximation « grand angle » en régime linéaire et en milieu faiblement hétérogène où seule la vitesse du son est modifiée. Lorsque le milieu est en mouvement, la difficulté d'obtenir une approximation grand angle est encore accrue par le fait qu'il n'est pas possible d'écrire une équation scalaire sous forme factorisée, et différentes approximations supplémentaires sont nécessaires : haute fréquence (Pierce 1990), écoulement à faible nombre de Mach (Ostashev *et al.* 1997) ou cisailé (Lingevitch *et al.* 2002). Des équations « grand angle » en régime non linéaire avec un gradient spatial de masse volumique et de vitesse du son (sans écoulement) ont été proposées par Kulkarny *et al.* (1997, 1998) en vue d'applications en acoustique sous-marine.

### 3.2.3. La résolution numérique

Il existe plusieurs schémas numériques qui ont été proposés dans la littérature pour résoudre l'équation KZ ou KZK.

Le premier consiste à résoudre l'équation en prenant en compte simultanément la diffraction, l'atténuation et la non-linéarité dans le domaine fréquentiel. Il a été utilisé pour simuler le champ de pression rayonné par une source axisymétrique en champ proche (Aanonsen *et al.*, 1984) et est connu sous le nom de « Bergen code ». Celui-ci est bien adapté à la prise en compte de l'atténuation mais n'est pas la meilleure méthode pour traiter les non-linéarités. En effet, le traitement des non-linéarités dans le domaine spectral est modifié par les oscillations de Gibbs qui apparaissent derrière le choc (liées à la transformée de Fourier d'un signal discrétisée). En outre la transformée de Fourier du terme non linéaire conduit à des produits de convolution pénalisant à calculer.

Les méthodes qui suivent utilisent le schéma à pas fractionné (Ames, 1977). L'équation KZ privilégie une seule direction (axe  $Z$ ). Le schéma à pas fractionné consiste à traiter séparément certains effets physiques sur un pas petit  $\Delta Z$ . L'équation réduite est alors résolue numériquement sur chaque pas et le couplage entre chaque effet physique est assuré par la répétition du procédé.

La seconde méthode est proposée par Lee et Hamilton (1995). L'équation KZK est résolue entièrement dans le domaine temporel. Ce code est connu sous le nom de Texas Code. La diffraction est donnée sous la forme d'une intégrale sur le temps, exprimée avec la formule des trapèzes et résolue par un schéma aux différences finies. La résolution numérique de l'équation non linéaire (Burgers non dissipative) est basée sur la solution de Poisson, valable si la distance de propagation est inférieure à la distance de choc. Chaque effet physique est soumis au schéma à pas fractionné. La méthode a été reprise par Marchiano *et al.* (2005) mais en étendant la solution de Poisson au cas avec ondes de choc, ces dernières étant calculées par la méthode exacte dite de Hayes *et al.* (1969) basée sur une formulation en potentiel plutôt qu'en pression. Enfin des généralisations du « Texas Code » à trois dimensions (Yang *et al.*, 2005) et en milieu hétérogène (Jing *et al.*, 2007) ont été récemment proposées.

La troisième méthode résout la diffraction et l'atténuation dans le domaine fréquentiel et les effets non linéaires dans le domaine temporel. Celle-ci a été proposée par Bakhvalov *et al.* (1987) qui simulent la diffraction et l'absorption avec un schéma aux différences finies implicite, et l'effet non linéaire dans le domaine temporel par la méthode de Godunov. Une méthode assez similaire (Frøysa *et al.* (1993)) utilise l'algorithme de capture de choc hybride de McDonald *et al.* (1984) pour traiter les non-linéarités. Une généralisation à trois dimensions a été récemment proposée par Khokhlova *et al.* (2006). La même technique a été utilisée par Auger (2001) et Auger et Coulouvrat (2002) pour résoudre l'équation de type mixte dite de Tricomi non linéaire décrivant la focalisation des ondes de choc autour d'une caustique « pli ». Pour résoudre cette même équation de Tricomi non linéaire, Marchiano *et al.* (2003) utilisent encore cette technique de pas fractionné avec diffraction en domaine fréquentiel et non-linéarités en régime temporel, mais là encore utilisent la solution exacte en potentiel dite

de Hayes *et al.* (1969) pour la partie non linéaire. C'est cette dernière version qui servira de base aux algorithmes développés pendant la présente étude.

Enfin, la dernière classe de méthodes numériques ne résout pas directement l'équation KZK. Elle a été proposée par Christopher and Parker (1991). La partie diffraction est résolue par la technique du spectre angulaire (utilisant la transformée de Hankel discrète dans le cas axisymétrique) résolvant entièrement dans l'espace de Fourier l'équation des ondes « exacte » au lieu de l'approximation paraxiale. L'effet non linéaire est résolu comme précédemment. Cette méthode a l'avantage de prendre en compte la propagation d'ondes acoustiques d'angles plus élevés que l'approximation parabolique standard. En revanche, la technique d'avancement plan par plan ne permet toujours pas de simuler le champ rétro-diffusé. Une généralisation à 3D a été réalisée par Zemp *et al.* (2003). Cette méthode a été reprise par Marchiano *et al.* (2008) pour modéliser la propagation non-linéaire en milieu hétérogène à trois dimensions. A trois dimensions, la méthode pseudo-spectrale s'avère nettement plus performante que la méthode des différences finies telle qu'utilisée par Yang *et al.* (2005) ou Jing *et al.* (2007). Tavakkoli *et al.* (1998) et Khokhlova *et al.* (2001) proposent de résoudre la diffraction dans le domaine temporel avec l'intégrale de Rayleigh. L'inconvénient en est alors le coût numérique.

## 4. Objectifs de la thèse

La synthèse bibliographique concernant la modélisation expérimentale ci-dessus fait apparaître les points suivants :

- Aucune modélisation expérimentale n'est strictement à l'échelle du bang sonique.
- La plupart des travaux sont de nature statistique. Aucune comparaison des formes d'onde temporelle avec des simulations numériques n'a en

conséquence été réalisée. Les mécanismes physiques responsables des caractéristiques du bang sonique au sol ne peuvent donc pas être déterminés facilement et peuvent varier d'une étude à l'autre.

- Il n'existe aucune mise en évidence expérimentale du phénomène de repliement du front d'onde comparée à l'étude numérique de Piacsek (2002) et l'analyse théorique de Pierce et Maglieri (1971).

La synthèse bibliographique concernant l'étude théorique et numérique fait apparaître les points suivants :

- Les hypothèses de l'équation KZ en milieu hétérogène ne sont pas clairement définies. Blanc-Benon *et al* (2002) ne donnent pas une démonstration de l'équation qu'ils utilisent.
- En raison de la nature statistique des travaux précédents, aucune simulation numérique n'a quantifié rigoureusement l'influence de chaque mécanisme physique sur le bang sonique.
- L'approximation parabolique standard est valable dans un cône d'angle  $15^\circ$ . Aucune étude n'a montré la validité de l'approximation paraxiale et l'apport de l'équation « grand angle » dans un milieu hétérogène ou turbulent.

Le but de notre travail est donc de proposer une étude expérimentale à l'échelle  $1/100\ 000^{\text{ème}}$ , de nature déterministe afin de comprendre les mécanismes physiques de la propagation d'une onde de choc en milieu turbulent et d'expliquer l'augmentation du temps de montée ainsi que la variabilité des formes d'ondes. Le dispositif expérimental utilisé et décrit plus loin est similaire à celui déjà utilisé pour simuler expérimentalement et à l'échelle la focalisation du bang sonique résultant de l'accélération de l'avion (Marchiano *et al.* 2003a). L'utilisation d'ultrasons dans l'eau permet (cf. tableau 3) de conserver la similitude avec le bang sonique pour certains paramètres (amplitude de l'onde et rapport taille / longueur d'onde), et d'avoir le

meilleur rapport temps de montée / durée du signal (le changement d'échelle est compensé par la moindre absorption du son dans l'eau). En revanche, la nature des hétérogénéités utilisées (silicone) augmente le contraste de vitesse du son en regard du bang sonique. La bande passante limitée des transducteurs piézoélectriques utilisés comme source ne permet d'émettre que des ondes périodiques. Les signaux temporels résultant seront donc des dents-de-scie plutôt que des ondes en « N » comme pour le bang sonique.

Notre approche est donc de réaliser des expériences qui modélisent la propagation d'une onde de choc acoustique dans un milieu hétérogène dont toutes les propriétés sont mesurées et connues. Le caractère déterministe de nos expériences permettra ensuite de confronter les résultats expérimentaux aux résultats numériques et de valider nos modèles théorique et numérique *via* une comparaison directe entre les signaux temporels mesurés et calculés dans les mêmes conditions parfaitement contrôlées (ce qui n'a jamais été entrepris à notre connaissance essentiellement parce que c'est impossible dans le cas aléatoire ou seules des comparaisons statistiques peuvent être entreprises). Les modèles seront ensuite utilisés pour approfondir l'étude de l'interaction entre une onde en N et un milieu hétérogène et identifier le rôle de certains mécanismes.

La première partie de cette thèse porte sur la modélisation de l'interaction entre une onde de choc et une seule hétérogénéité. Nous décrivons tout d'abord le dispositif expérimental de la propagation non linéaire en milieu hétérogène. Ensuite, nous mettons en évidence expérimentalement le phénomène de repliement du front d'onde. Nous étudions ainsi les conséquences de ce phénomène sur l'amplification locale, le temps de montée, ou la variabilité des formes d'onde. Nous étudions également l'influence de la taille des hétérogénéités. Nous montrons finalement qu'une seule hétérogénéité permet néanmoins d'observer un certain nombre de caractéristiques du bang sonique.

Ensuite, nous proposons une démonstration de l'équation KZ généralisée modélisant la propagation non linéaire des ondes acoustiques en milieu hétérogène et interprétons

chacun des effets physiques décrits par cette équation et les limites de la modélisation et notamment de l'approximation paraxiale. Puis, nous présentons en détail le modèle numérique issu des études antérieures sur la focalisation du bang sonique (Marchiano *et al.*, 2003).

Les résultats numériques sont ensuite comparés aux résultats expérimentaux dans différentes configurations (sur et hors de l'axe, dans le plan focal ou au-delà, pour différentes tailles d'hétérogénéités). Nous pouvons ainsi finalement utiliser le code numérique pour quantifier l'influence des effets non linéaires locaux en fonction de la taille des hétérogénéités. L'évolution du temps de montée est aussi analysée en fonction de la taille des hétérogénéités et de la distance de propagation. Nous retrouvons un résultat proche de celui de Blanc-Benon (2002) en milieu turbulent sur la corrélation entre l'augmentation du temps et l'apparition des caustiques avec une seule hétérogénéité.

La deuxième partie est consacrée à la modélisation expérimentale, théorique et numérique de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu comportant plusieurs hétérogénéités. Nous voulons nous approcher d'un milieu plus proche de la réalité, même si le dispositif expérimental utilisé ne permet évidemment pas de simuler un milieu turbulent. Nous interprétons les résultats expérimentaux sur l'influence de plusieurs hétérogénéités et de leurs tailles sur une onde de choc.

Nous développons nouveau modèle de propagation avec une approximation « grand angle » en régime non linéaire et en milieu hétérogène pour mieux prendre en compte la propagation des ondes sous des angles plus élevés. Tout d'abord, nous l'utilisons en régime linéaire pour quantifier l'apport du grand angle sur la modélisation du champ proche d'un piston en milieu homogène. Nous quantifions ensuite l'apport de l'approximation « grand angle » dans la modélisation de la diffusion d'une onde plane par un cylindre en régime linéaire. En régime linéaire, nous confrontons les résultats numériques aux résultats analytiques. En régime non linéaire, nous confrontons les résultats aux expériences. L'objectif final serait ainsi d'utiliser le modèle « grand

angle » pour modéliser l'interaction entre une onde en N et un milieu comportant des hétérogénéités aléatoire en contraste de vitesse, taille et position.

## **Phénomène de repliement du front d'onde : Mise en évidence et influence**

L'objectif de cette partie est d'une part de mettre en évidence et d'autre part d'évaluer l'influence du phénomène de repliement du front d'onde sur la propagation du bang sonique en milieu hétérogène. Le phénomène de repliement du front d'onde est tout d'abord observé expérimentalement. Pour cela, une étude expérimentale en laboratoire est menée. L'expérience a été dimensionnée pour que les principaux paramètres physiques régissant la propagation du bang sonique dans un milieu hétérogène soient dans le même rapport (cf Tableau 3 de l'introduction). Le dispositif expérimental consiste à étudier la propagation d'ondes de choc ultrasonores (jouant le rôle du bang sonique) à travers des cylindres de silicone immergés dans l'eau (jouant le rôle du milieu hétérogène), le rapport d'échelle entre le bang sonique et l'expérience est de 1/100000. Dans cette partie, seuls les résultats de l'interaction d'une onde de choc avec un seul cylindre sont présentés, car cette configuration suffit à elle seule à observer les phénomènes physiques de base comme l'augmentation du temps de montée ou la variabilité des formes d'ondes temporelles. L'expérience est complétée par une étude théorique et numérique. Le modèle théorique repose sur une équation de propagation paraxiale non linéaire valable en milieu faiblement hétérogène. Cette équation est ensuite résolue numériquement par un schéma aux différences finies. Le code de calcul ainsi obtenu est utilisé pour étudier l'influence des effets non linéaires sur la propagation d'ondes de choc en milieu hétérogène.



# 1. Modélisation expérimentale

## 1.1. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 1.

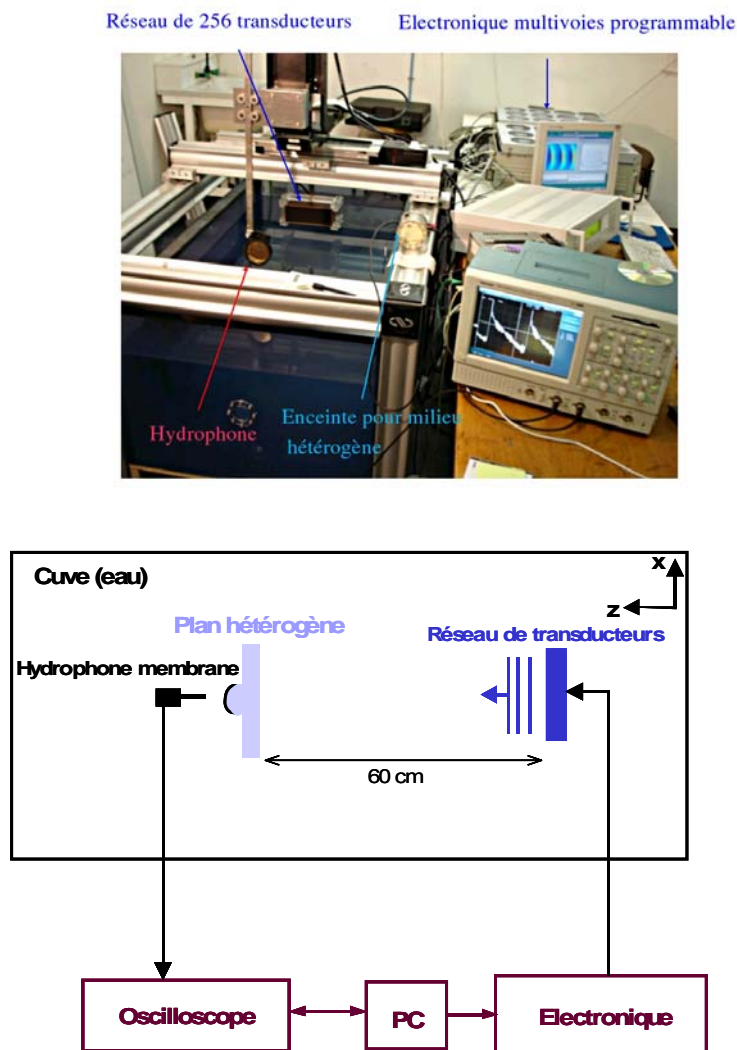


Figure 1. Dispositif expérimental

L'expérience est réalisée dans une cuve de dimensions  $1305 \times 805 \times 600 \text{ mm}^3$ , remplie d'eau. Un réseau bidimensionnel rectangulaire ( $191 \times 63 \text{ mm}^2$ , Fig. 2) de 256

transducteurs piézoélectriques rectangulaires de dimension  $5 \times 7 \text{ mm}^2$ , couplés deux par deux symétriquement par rapport à la ligne horizontale passant par le centre du réseau, est utilisé comme émetteur (Imasonic, France). Grâce au couplage des voies deux à deux, seuls 128 canaux électroniques indépendants sont nécessaires pour exciter cet émetteur. L'électronique est entièrement programmable, ce qui permet d'appliquer des signaux électriques de différentes formes, amplitudes et phases en chaque transducteur. Elle est commandée par ordinateur.

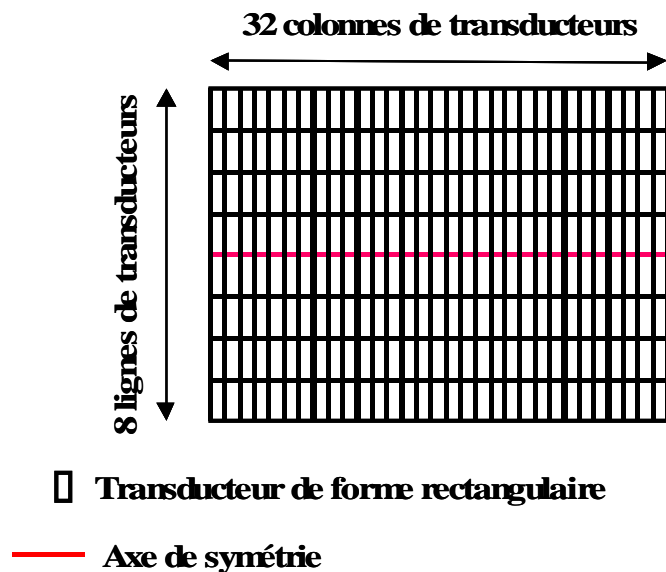


Figure 2. Surface active du réseau de 256 transducteurs de dimension  $5 \text{ mm}$  sur l'axe horizontale,  $Ox$ , et  $7 \text{ mm}$  sur l'axe verticale,  $Oy$ , avec un pas inter-éléments de  $1 \text{ mm}$ .  
Les dimensions sont donc respectivement  $D=191 \text{ mm}$  et  $d=63 \text{ mm}$ .

Le réseau émet un train d'onde à la fréquence  $f=1 \text{ MHz}$  dans l'eau, milieu considéré comme homogène de masse volumique  $\rho_0=1000 \text{ kg.m}^{-3}$ , de vitesse du son  $c_0=1482 \text{ m.s}^{-1}$  et de coefficient non linéaire  $\beta=3,5$ . Le coefficient non linéaire s'écrit  $\beta=1+B/2A$  où  $B/A$  est le paramètre non linéaire de l'équation d'état.

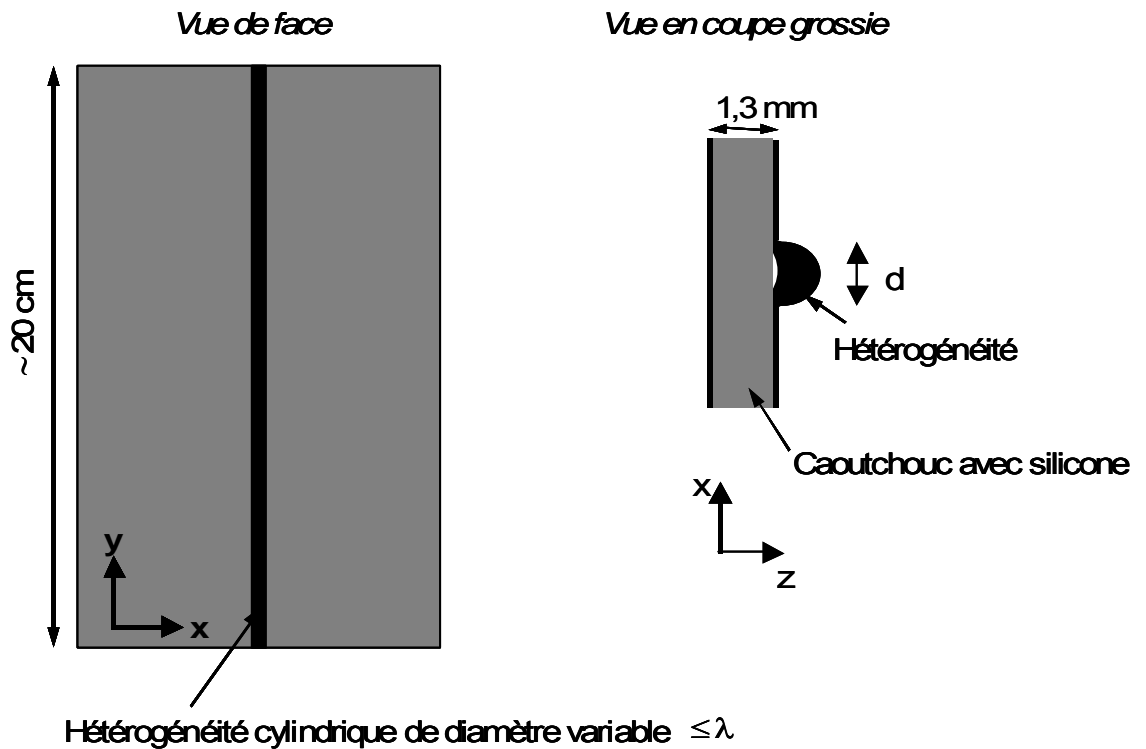


Figure 3. Le plan hétérogène vu de face et en coupe grossie.

Les vitesses du son dans le silicone ( $c_h$ ) et dans l'eau ( $c_0$ ) ont été déterminées à chaque expérience grâce à des mesures de temps de vol. Pour cette mesure nous utilisons une plaque plane en silicone d'épaisseur  $1,3 \text{ mm}$ . Les valeurs moyennes retrouvées à chaque expérience sont  $c_h = 1083 \text{ m.s}^{-1}$  et  $c_0 = 1482 \text{ m.s}^{-1}$ . Le contraste de vitesse entre l'eau et le silicone est donc de 27 %.

Le coefficient d'atténuation du silicone est déterminé précisément grâce à la procédure suivante : nous réalisons une première mesure de l'onde de choc de fréquence fondamentale  $1 \text{ MHz}$  et d'amplitude  $0,5 \text{ MPa}$  devant et une deuxième derrière la même plaque plane en silicone. Le rapport entre ces deux signaux dans le domaine fréquentiel nous donne le coefficient d'atténuation du silicone jusqu'à  $35 \text{ MHz}$ . Les mesures ont été faites avec deux types d'instruments (décrits dans le chapitre suivant) et donnent la même loi d'atténuation, avec une dépendance linéaire avec la fréquence  $f$  :  $\alpha = 49f$  (Fig. 4), où  $\alpha$  est le coefficient d'atténuation ( $\text{nepers.m}^{-1}$ ). Notons que dans les gels ou

les milieux biologiques, le coefficient d'atténuation est directement proportionnel à la fréquence à la différence des fluides thermovisqueux où il est proportionnel au carré de la fréquence. La loi d'atténuation mesurée par l'interféromètre comprend des fluctuations importantes à partir de 25 MHz. Ces fluctuations sont liées au bruit des photons (issus du laser) sur la photodiode. Ce bruit est réparti uniformément sur toutes les fréquences (bruit blanc). Le rapport signal/bruit est donc plus faible pour les plus hautes fréquences.

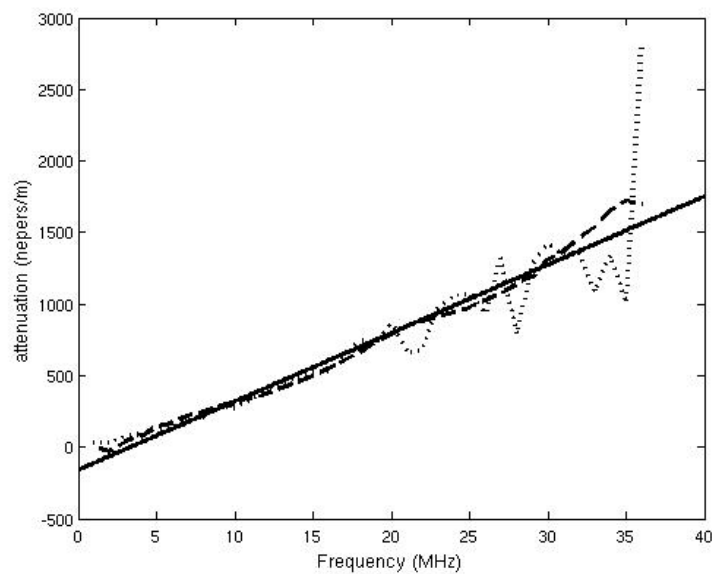


Figure 4. Mesure du coefficient d'atténuation dans le silicone avec l'hydrophone membrane (tiret), l'interféromètre optique (pointillé). En trait plein l'ajustement linéaire.

Le milieu hétérogène est placé à environ deux fois la distance de choc de la surface émettrice du réseau de transducteurs. Cette distance a été choisie dans le but d'obtenir une onde de choc incidente juste devant l'hétérogénéité. Le parallélisme entre la plaque plane et la surface émettrice du réseau de transducteurs est bien vérifié expérimentalement.

## **1.2. Mesure de champ acoustique en régime non linéaire**

La qualité des mesures d'un champ acoustique non-linéaire dépend fortement de la bande passante souvent limitée des instruments de mesure. Les effets d'absorption physique ou de filtrage expérimental se traduisent par un épaississement du choc qui n'est pas parfaitement raide. Ce phénomène est usuellement quantifié par la mesure du temps de montée du choc. Pour un bang sonique, la définition du temps de montée est le temps requis pour que la pression acoustique passe de 10 % à 90 % de sa valeur maximale. Ici, les signaux étant plutôt des signaux périodiques de forme anti-symétrique, on définira dans tout le document le temps de montée comme le temps nécessaire à la pression acoustique pour passer de 90 % de la valeur minimale à 90 % de la valeur maximale. Le temps de montée théorique, dans l'eau, d'une onde de choc plane de fréquence  $1\text{ MHz}$ , d'amplitude  $5 \cdot 10^5\text{ Pa}$  à deux fois la distance de choc, est égal à  $5\text{ ns}$  (Rudenko and Soluyan, 1977). Pour s'approcher au plus près de cette valeur, les mesures de champ de pression doivent donc être réalisées avec un hydrophone dont la bande passante est la plus large possible. Les hydrophones membranes sont actuellement les instruments de référence pour ce genre de mesure. Nous utilisons un hydrophone membrane bilaminaire (Precision Acoustic, UK), doté d'une bande passante de  $40\text{ MHz}$ . La sensibilité de cet hydrophone est relativement faible compte tenu de la taille réduite de sa surface active,  $200\text{ }\mu\text{m}$  de diamètre. Mais cette taille réduite permet d'exploiter réellement sa bande passante car le temps de montée d'un choc sera allongé d'autant plus que l'hydrophone est large en cas de désalignement entre sa surface et le front d'onde. De plus les non-linéarités créant des harmoniques, des variations spatiales rapides du champ peuvent apparaître et leur mesure nécessite un hydrophone de taille comparable. Cette caractéristique résulte donc d'un compromis entre sensibilité et fidélité de la mesure. Dans nos expériences en régime non linéaire, les amplitudes émises sont assez fortes pour conserver un bon rapport signal sur bruit. Cependant pour certaines mesures en régime linéaire décrites par la suite dans la partie concernant le filtre inverse nous utiliserons un hydrophone aiguille de  $1\text{ mm}$  de surface active.



Figure 5. Hydrophone membrane (à gauche) et hydrophone aiguille (à droite) (photo Precision Acoustic)

Un inconvénient majeur des hydrophones à membrane est l'apparition d'un « rebond » de la pression juste derrière le choc. Cet artefact est lié à la résonance autour de 30 MHz des deux membranes planes en PVDF, de 15  $\mu\text{m}$  d'épaisseur pour cet hydrophone. Pour ce rebond, le constructeur fournit la réponse fréquentielle de l'hydrophone en amplitude bien adaptée à la calibration de signaux monochromatiques. Cependant, l'onde de choc est très sensible aux phases relatives des harmoniques et la calibration en amplitude ne suffit pas à supprimer totalement le rebond. Pour obtenir la calibration en phase des champs de pression entre 1 et 30 MHz, nous avons utilisé un interféromètre optique associé à une membrane réfléchissante immergée dans l'eau (Barrière *et al.*, 2001) qui donne des mesures absolues du champ acoustique. Précisons que l'interféromètre n'a pas été utilisé dans nos expériences car il est difficilement déplaçable, le champ de pression ne peut donc pas être cartographié sur une grande surface.

La figure 6 montre l'onde de choc incidente mesurée 1) avec l'hydrophone membrane, 2) avec la calibration constructeur, et 3) avec l'interféromètre optique. La calibration en phase permet clairement de supprimer le rebond et de mesurer un signal qui ressemble plus nettement à une onde en dent-de-scie. En particulier, la dissymétrie du signal entre les phases de compression et les phases d'expansion est nettement

réduite. Pour notre application, la calibration en amplitude apparaît donc insuffisante et par la suite toutes nos mesures seront donc calibrées en phase et en amplitude par l'interféromètre optique pour éviter les perturbations induites par le rebond derrière le choc.

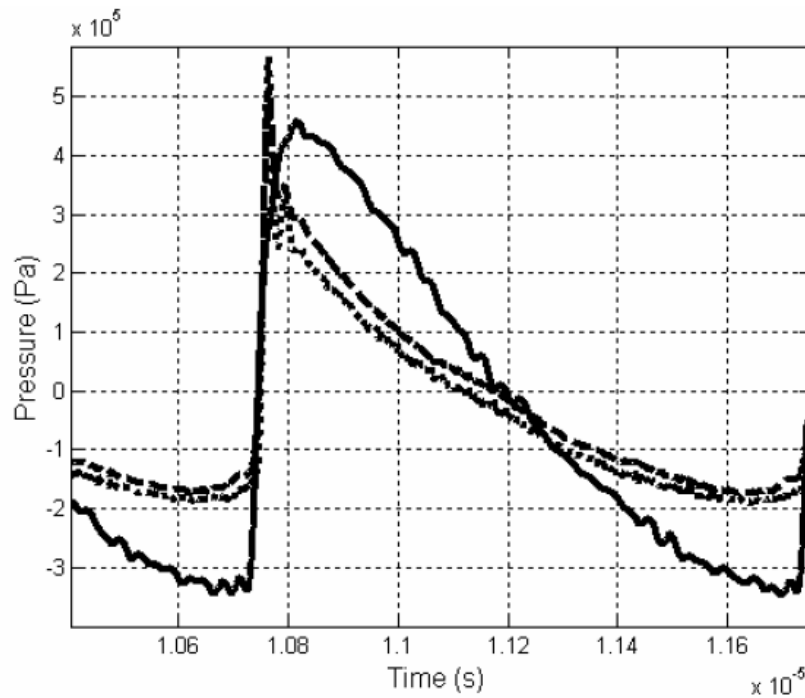


Figure 6. Calibration de l'hydrophone membrane : Pression incidente mesurée avec l'hydrophone membrane (trait), avec l'interféromètre optique (trait plein) et avec la calibration fournie par le constructeur (pointillé)

Précisons qu'ici, nous avons synthétisé une onde en dent de scie et non une onde en N. Il n'est pas possible de réaliser une onde en N expérimentalement. Le réseau est limité par la bande passante des transducteurs piézo-électriques qui le composent, et il ne peut donc que synthétiser des trains d'onde contenant au minimum 4 cycles pour conserver une amplitude optimale.

### 1.3. Diffraction en espace libre et filtre inverse

Un des objectifs du dispositif expérimental est que la diffraction créée par l'hétérogénéité domine celle liée à la taille finie du réseau de transducteurs. Cette hypothèse signifie que nous devons émettre l'onde la plus plane possible devant l'hétérogénéité.

Pour atteindre cet objectif, le réseau utilisé dispose d'une grande ouverture afin que la distance caractéristique de la diffraction soit supérieure à la distance caractéristique des effets non linéaires, la distance de choc. Ainsi, la distance de champ proche correspondant à la plus grande dimension,  $D$ , du réseau de transducteurs est égale à  $D^2/4\lambda = 6\text{ m}$  tandis que celle correspondant à la plus petite dimension,  $d$ , est de  $d^2/4\lambda = 0,66\text{ m}$  (Fig. 2). Ces distances sont à comparer à la distance de choc  $L_c = 30\text{ cm}$ , caractéristique des effets non-linéaires. Néanmoins, même si l'onde acoustique reste bornée en champ proche, des interférences avec les ondes de bord perturbent le champ acoustique. Afin de minimiser ces interférences, nous utilisons un algorithme de filtre inverse (Tanter *et al.*, 2000, Aubry *et al.*, 2001) qui permet de déterminer les signaux à émettre par le réseau de transducteurs pour réaliser un objectif donné, ici une onde plane dans le plan d'acquisition situé devant l'hétérogénéité. Il faut souligner ici que le filtre inverse n'est valable en principe qu'en régime linéaire mais a déjà été utilisé avec succès en régime non linéaire (Marchiano *et al.*, 2003b and 2005). Cette technique consiste tout d'abord à mesurer l'opérateur de propagation  $h$  entre le plan d'émission et un ensemble de points de contrôle (Fig. 7), opérateur qui caractérisera donc le milieu et la géométrie de l'expérience. L'acquisition de l'opérateur  $h$  consiste à mesurer les réponses impulsionnelles  $h_{m,j}(t)$  entre chaque transducteur  $j$  et chaque point de contrôle  $m$ . Ces points de contrôle sont obtenus en déplaçant un hydrophone. Nous utilisons pour cette opération un hydrophone aiguille (Precision Acoustic, UK) dont la surface active est un disque de diamètre  $1\text{ mm}$  plus sensible que l'hydrophone membrane. Cet hydrophone est bien adapté à la mesure des champs de pression en régime linéaire. La portion d'espace ainsi échantillonnée sert à définir le champ à synthétiser, i.e l'objectif, et doit donc être choisie de manière appropriée. Pour



cette expérience, nous avons choisi comme points de contrôle un plan de dimension (99x39 mm<sup>2</sup>), échantillonné avec un pas d'une longueur d'onde sur Ox (soit 1,5 mm), et de deux longueurs d'onde sur Oy (soit 3 mm) et situé à une distance de 60 cm du réseau, soit deux longueurs de choc. Cet échantillonnage se traduit par 938 points de contrôle. Les mesures  $r_m(t)$  dans l'espace de contrôle sont donc données

par  $r_m(t) = \sum_{j=1}^N h_{mj}(t) * e_j(t)$  où  $e_j(t)$  est le signal émis par le transducteur  $j$ ,  $N$ , le nombre

de transducteurs indépendants (ici  $N = 128$ ) et  $m$  est l'indice du point de contrôle variant de 1 à 938. Dans le domaine fréquentiel, cet ensemble de réponses impulsionnelles est représenté par une matrice de transfert  $H$  caractérisant la propagation de chaque composante monochromatique du champ entre le réseau de transducteurs et l'ensemble des points de contrôle. Une transformée de Fourier de l'équation précédente s'écrit sous forme matricielle  $R(\omega) = H(\omega) \cdot E(\omega)$  où  $R$ ,  $H$  et  $E$  sont respectivement les transformées de Fourier de  $r$ ,  $h$  et  $e$ .

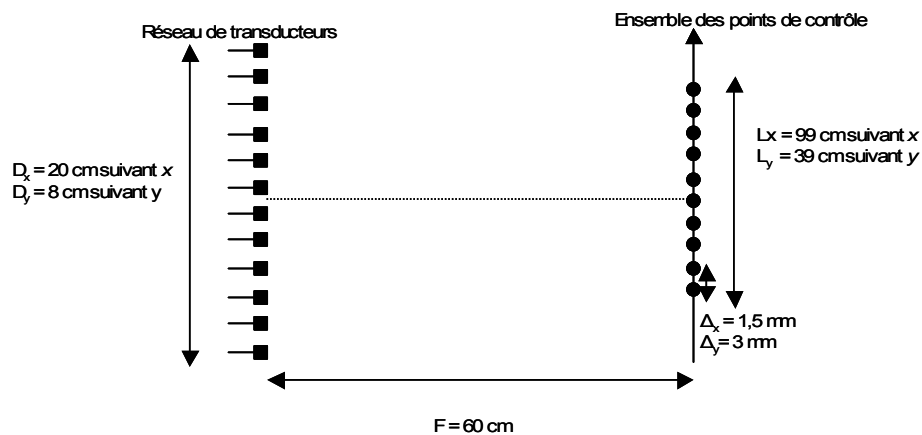


Figure 7. Schéma du filtre inverse

Le but, ici, est de déterminer le champ d'émission  $E$  à émettre pour atteindre l'objectif souhaité  $R$  sur le plan de contrôle. Pour obtenir le vecteur  $E = H^{-1}R$ , il faut donc inverser la matrice de propagation  $H$ . La procédure pour inverser  $H$  est basée sur la décomposition en valeurs singulières (SVD pour Singular Value Decomposition). On

opère avant son inversion une régularisation de  $H$  en ne retenant que les valeurs singulières les plus fortes, peu sensibles au bruit. Une fois le vecteur  $E$  déterminé pour chaque fréquence, on calcule les signaux à transmettre par une transformée de Fourier inverse de ses composantes pour obtenir  $e_j(t)$ . Enfin, l'électronique programmable impose à chaque transducteur  $j$  du réseau le signal  $e_j(t)$ .

Cette technique nécessite donc de définir un objectif et un ensemble de points de contrôle permettant de l'échantillonner spatialement. Le choix de cet objectif est une étape très importante. Ainsi ce dernier doit être réaliste compte tenu de la taille du réseau, la distance entre le réseau et la zone d'intérêt, et la longueur d'onde. Dans le cas qui nous intéresse ici, l'objectif est un compromis entre la minimisation des ondes de bords tout en conservant une zone sur laquelle l'onde est la plus plane possible, et les contraintes liées à la géométrie du réseau. Après plusieurs tests pour éviter la focalisation de l'onde émise, nous avons obtenu la meilleure onde plane sur la géométrie suivante : une fenêtre de type Blackman avec un plateau de 6 cm parallèle à l'axe  $Ox$  et une distribution en amplitude gaussienne de 1,5 cm de largeur à mi-hauteur parallèle à l'axe  $Oy$ . La fenêtre sur l'axe  $Ox$  comporte une partie centrale d'amplitude quasi constante pour s'approcher au mieux d'une onde plane et les raccords vers l'amplitude nulle se font de manière progressive pour minimiser les ondes de bord. Elle est synthétisée par une somme pondérée de 5 cosinus de fréquence croissante. Le choix sur l'axe verticale est dicté par l'échantillonnage faible, 8 transducteurs, et l'ouverture plus restreinte sur la dimension  $Oy$  qui n'a pas permis d'obtenir de bons résultats avec la fenêtre utilisée sur l'axe  $Ox$ . Pour le temps nous avons également choisi une fenêtre identique en forme à celle sur l'axe  $Ox$  et contenant une dizaine de période dans son plateau. La figure 8 est la représentation spatiale de l'objectif imposé au filtre inverse en amplitude dans le plan  $XY$ .

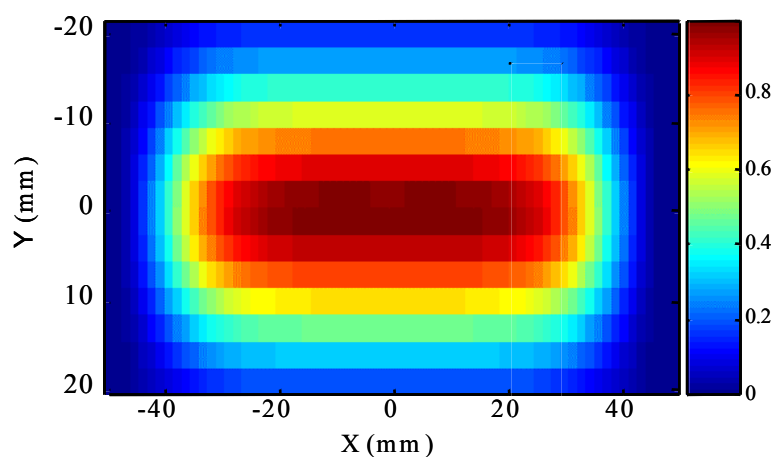


Figure 8. Représentation spatiale de l'objectif imposé au filtre inverse : une onde plane sur un plateau de 6 cm parallèle à l'axe  $Ox$  avec une distribution en amplitude gaussienne de 1,5 cm de largeur à demi-hauteur parallèle à l'axe  $Oy$ .

La figure 9 représente la distribution spatio-temporelle du gabarit imposé sur une ligne  $Ox$  située au centre du gabarit par rapport à l'axe  $Oy$ .

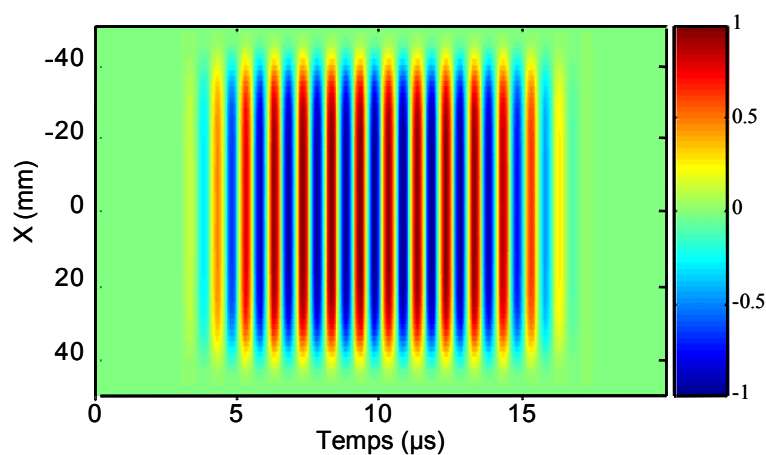


Figure 9. Représentation spatio-temporelle de la position médiane sur  $y$  de l'objectif imposé au filtre inverse : une onde plane sur un plateau de 6 cm parallèle à l'axe  $Ox$  avec une distribution en temps de même type sur 10 période.

La figure 10 représente le signal émis par le réseau de transducteurs. Le tir est calculé par la technique du filtre inverse pour obtenir l'objectif requis et décrit ci-dessus. Tous les transducteurs n'émettent pas avec la même intensité. Tout d'abord, une partie du réseau, soit environ les 63 transducteurs du centre (environ la moitié des transducteurs de réseau), contribuent essentiellement à la synthèse de l'objectif et ceci est dû à la taille des fenêtres sélectionnées sur  $Ox$  et  $Oy$  pour le définir. On peut observer que le choix de retour progressif vers l'amplitude nulle dans l'objectif se traduit également par une transition douce sur ces signaux. Ensuite, cinq voies de l'électronique ne fonctionnaient pas lors des expériences (amplitude nulle sur la figure). Ce dysfonctionnement a une importance dans la détermination du tir calculé par filtre inverse, qui cherche à en minimiser l'effet.

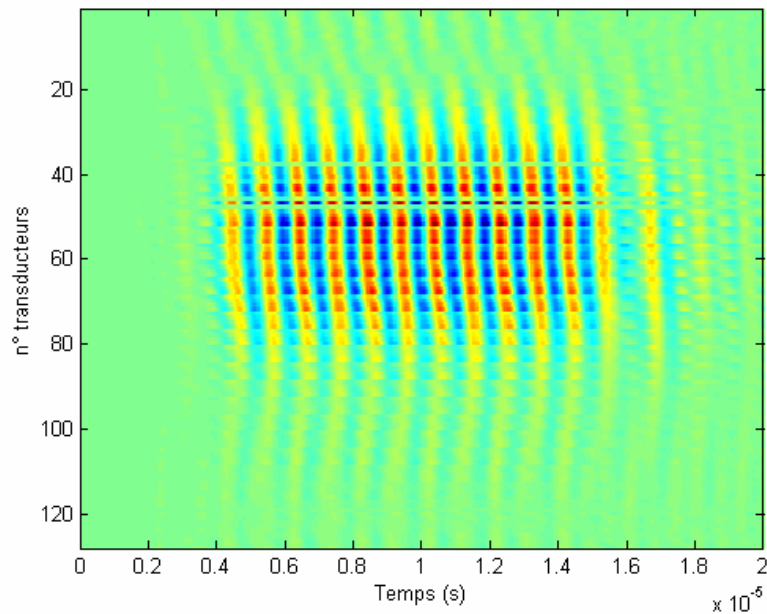


Figure 10. Tir calculé par filtre inverse pour chaque transducteur. Les transducteurs 38, 42, 46, 48 et 53 ne fonctionnaient pas.

La figure 11 est le champ spatial synthétisé par le filtre inverse. L'accord est très bon en amplitude et en phase. En régime non linéaire, les signaux calculés par la

technique du filtre inverse sont simplement multipliés par un facteur 10. L'efficacité de cette méthode est illustrée par la figure 12 qui montre la planéité du front d'onde incident (figure 12 en haut) ainsi que la formation du choc (figure 12 en bas). Notons aussi que les fronts d'onde ne sont pas tout à fait parallèles (il existe un angle d'environ  $1^\circ$ ). Ce défaut est lié à un défaut d'alignement entre le réseau de transducteurs et l'hydrophone membrane.

L'onde incidente est caractérisée par son amplitude, égale à 0,43 MPa, et par le temps de montée défini comme le temps nécessaire pour passer de 10 % à 90 % de cette amplitude, égal à 12 ns (24 ns pour le temps de montée à 90% et de crête à crête). Comme prévu, la valeur du temps de montée mesurée expérimentalement est différente de la valeur théorique en raison de la bande passante de l'hydrophone membrane (qui filtre les hautes fréquences) mais aussi en raison du défaut de parallélisme entre le réseau de transducteurs et l'hydrophone.

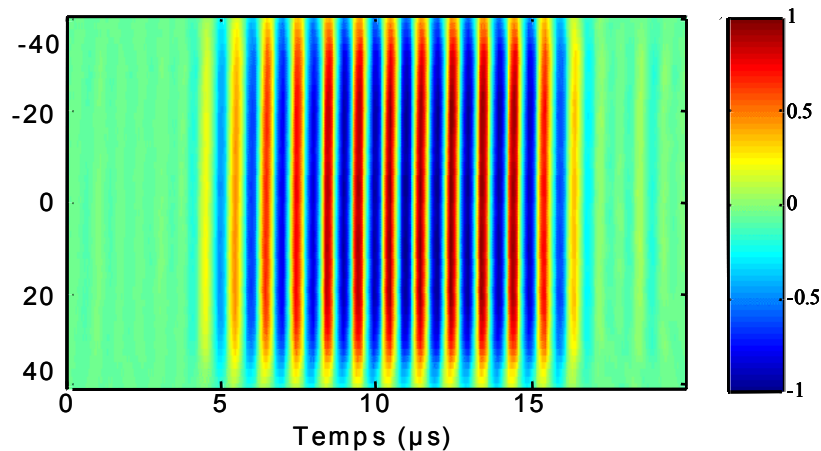


Figure 11. Mesure du champ synthétisé en représentation spatiotemporelle de la position médiane sur  $y$  en régime linéaire.

La figure 13 montre le module du spectre de l'onde en dent de scie mesurée juste devant l'hétérogénéité. Notons que la calibration avec l'interféromètre optique élimine les fréquences au-dessus du 35ème harmonique. Théoriquement, pour une onde en dent de scie, l'amplitude des harmoniques à la distance de choc en fonction des fréquences

harmoniques suit une évolution en  $\frac{1}{n}$  avec  $n=1$  qui correspond à la fréquence fondamentale,  $n=2$  au deuxième harmonique .... Ici, il existe un léger écart entre l'enveloppe spectrale théorique et celle mesurée expérimentalement. Cet écart s'explique par les erreurs de mesure (bande passante de l'hydrophone, défaut de parallélisme) et la diffraction due à la taille finie du réseau.

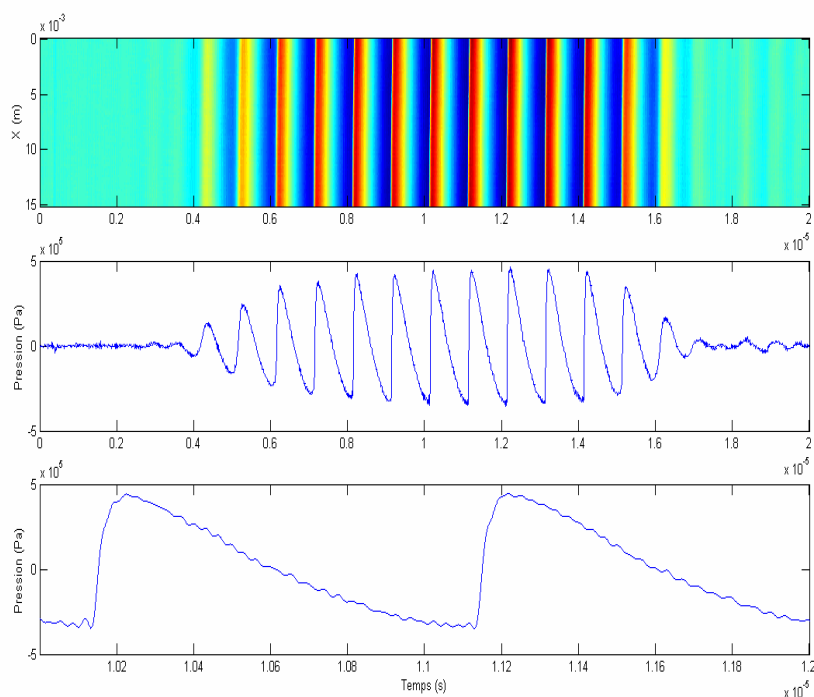


Figure 12. Représentation spatio-temporelle de l'onde de choc incidente (haut) et de la forme temporelle de l'onde de choc incidente (centre) mesurée juste devant l'hétérogénéité après calibration par l'interféromètre optique. Zoom sur deux périodes (bas).

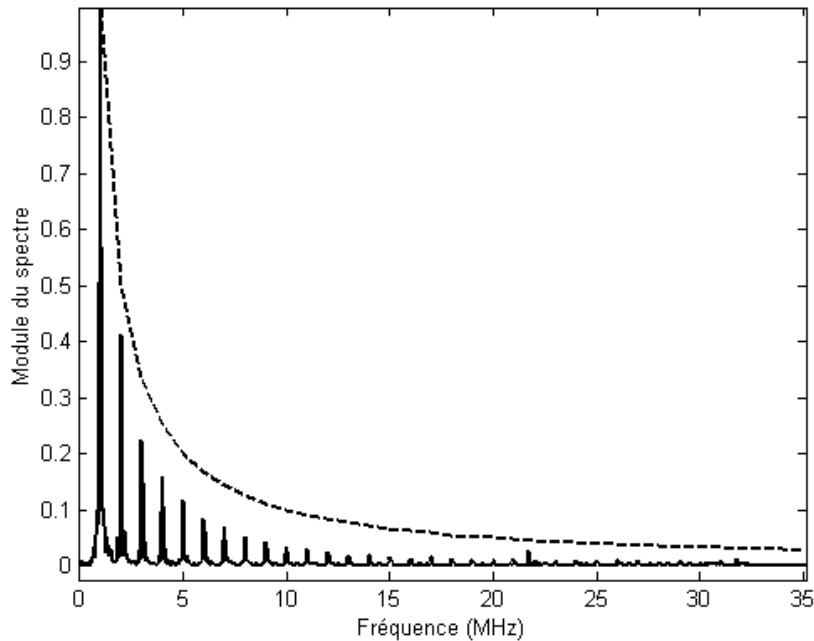


Figure 13. Module du spectre de l'onde en dent de scie mesurée juste devant l'hétérogénéité après calibration par l'interféromètre optique. En pointillé la loi de décroissance d'une dent de scie théorique.

## 2. Analyse des résultats expérimentaux

### 2.1. Effet de la focalisation

L'onde plane synthétisée par filtre inverse est envoyée sur le milieu hétérogène présenté dans la première partie. Le champ de pression est mesuré suivant les axes  $(x,y,z)$  grâce à des moteurs micrométriques commandés par le PC. L'hétérogénéité étant invariante suivant  $y$ , les signaux expérimentaux sont acquis uniquement suivant des lignes parallèles à l'axe  $x$ , appartenant au plan de symétrie horizontale  $y=0$  du réseau.

L'hydrophone est tout d'abord placé à la focale de l'hétérogénéité de diamètre 3 mm. La focalisation du champ est liée à l'effet de lentille acoustique de l'hétérogénéité

semi-cylindrique. En effet, la vitesse du son dans le silicone étant plus faible que celle dans l'eau, ce contraste de vitesse du son associé à la forme cylindrique crée une courbure du front d'onde : le champ se propageant au centre de l'hétérogénéité se propage plus lentement que le champ latéral, et donc arrive en retard de phase par rapport à ce dernier. Ce phénomène se produit pour toutes les tailles d'hétérogénéité étudiées, mais le point focal est d'autant plus éloigné que la taille de l'hétérogénéité est grande (et que le contraste de célérité est grand). Comme ici les hétérogénéités sont de très petite taille, le point focal est très proche. En raison de l'encombrement de l'hydrophone membrane (1 mm), la mesure au point focal n'a pu être réalisée que pour l'hétérogénéité de diamètre 3 mm, pour laquelle le point focal est situé à 2 mm derrière l'hétérogénéité.

La figure 14 est la représentation spatio-temporelle du champ de pression  $P(x,z,t)$  mesuré dans le plan focal à  $z = z_{foc} = 2 \text{ mm}$  ( $z=0$  est l'origine de l'axe  $z$  située à l'interface du cylindre et de l'eau) derrière l'hétérogénéité de diamètre  $d = 3 \text{ mm}$  (deux fois la longueur d'onde). Ce point correspond au point d'amplitude maximale mesurée.



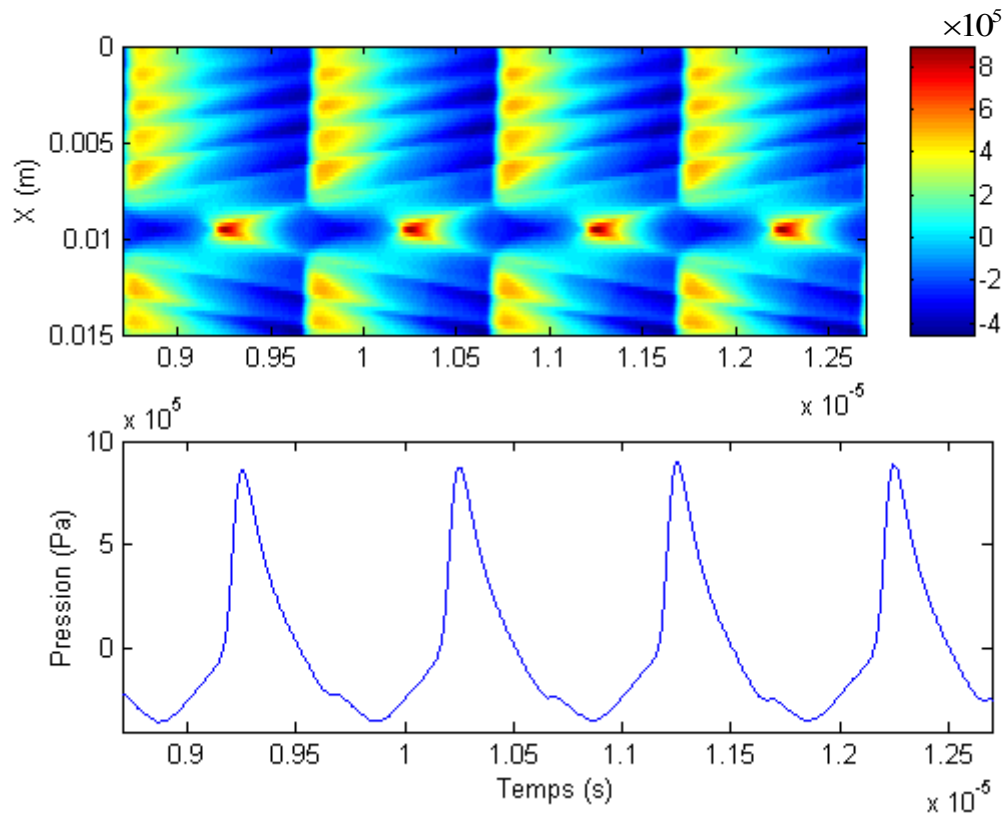


Figure 14. Représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré à la focale d'une hétérogénéité de diamètre  $d = 3 \text{ mm}$  (haut) et forme temporelle de la pression mesurée au foyer de l'hétérogénéité (sur l'axe de propagation).

Malgré la taille de l'hétérogénéité, le facteur d'amplification est environ égal à 2 (l'amplitude du pic de pression à la focale est égale à 9 MPa, comparée à l'amplitude 4,5 MPa de l'onde incidente). Ceci provient du contenu spectral élevé de l'onde incidente en dent-de-scie, les hautes fréquences de longueur d'onde courte étant plus amplifiées que les basses fréquences

Cette amplification différente suivant les fréquences conduit également à une modification de la forme temporelle de l'onde, avec une transformation de l'onde en dent-de-scie en une onde en « U », avec une forte dissymétrie entre les phases de compression et de détente. Les formes d'onde en « U » sont caractéristiques de la

focalisation des ondes de choc (Guiraud, 1965, Wanner *et al.*, 1972, Marchiano *et al.*, 2003, Coulouvrat 2000, Marchiano *et al.* 2005). Ainsi, dans le cas de la focalisation d'une onde sur une caustique « pli », le signal temporel après que l'onde ait traversé la caustique est la transformée de Hilbert du signal incident (Pierce 1989).

Notons cependant que la focalisation étudiée ici ne correspond pas aux caustiques décrites par la théorie des catastrophes, qui est une théorie asymptotique haute fréquence (Thom, 1972, Berry, 1976). En effet, cette théorie est valable seulement si la courbure du front d'onde est grande devant la longueur d'onde. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans nos expériences en raison de la taille trop faible rapportée à la longueur d'onde. De plus, les solutions analytiques du problème linéaire de la focalisation des ondes de chocs sur les caustiques « pli » (Guiraud, 1965) ou « cuspidée » (Coulouvrat, 2000) comportent des singularités d'amplitude (pics d'amplitude infinie). Par exemple, la transformée de Hilbert d'une discontinuité donne lieu à une singularité logarithmique. Ces singularités sont régularisées par l'introduction d'effets non linéaires locaux. Dans le cas étudié ici, nous montrerons plus loin, par une étude numérique, que les effets non linéaires locaux sont faibles, et que la diffraction linéaire seule est suffisante pour obtenir l'amplitude de l'onde.

Une dernière observation importante est l'augmentation du temps de montée à la focale. La figure 15 montre 1) le champ de pression incident, 2) le champ de pression mesuré derrière une plaque plane en silicone et 3) au centre de la focale de l'hétérogénéité semi-cylindrique. Alors que dans les deux premiers cas, le temps de montée reste inchangé ( $\tau = 24 \text{ ns}$ ) malgré l'absorption dans le silicone, le temps de montée augmente d'un ordre de grandeur dans le cas de la focalisation ( $\tau = 230 \text{ ns}$ ). Cette augmentation est bien évidemment liée au changement de forme temporelle.

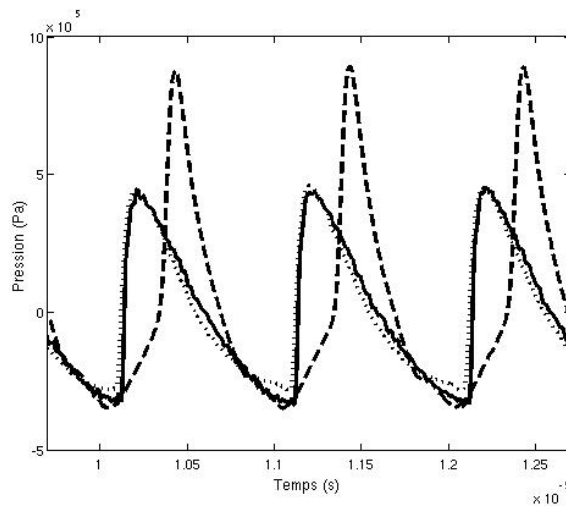


Figure 15. Forme temporelle de la pression mesurée devant l'hétérogénéité semi-cylindrique (trait plein), derrière la plaque plane en silicone (pointillé) et à la focale (tiret)

Finalement, la présente expérience montre qu'une seule hétérogénéité de rayon égal à la longueur d'onde est suffisante pour i) augmenter significativement l'amplitude de l'onde de choc, ii) modifier la forme d'onde en « U », et iii) augmenter très nettement le temps de montée. Ces effets, qualitativement similaires à ceux observés pour le bang sonique, sont observés au point focal. Toutefois, l'effet de focalisation local ne suffit pas à retrouver l'entière variabilité des formes d'ondes observées lors des mesures du bang sonique. La question est maintenant de savoir comment évolue le champ de pression au-delà du plan focal.

## 2.2. Repliement du front d'onde

Nous avons ensuite mesuré le champ de pression dans des plans à plusieurs distances derrière la focale (Fig. 16). La première colonne de la figure 17 (a), (b), (c) et (d) montre les champs de pression mesurés respectivement : (a) devant l'hétérogénéité (champ incident), (b) dans le plan focal  $z = z_{foc} = 2\text{ mm}$  et (c), (d) à deux positions

différentes au delà de la focale, respectivement  $z = z_{foc} + 5 \text{ mm}$  et  $z = z_{foc} + 8 \text{ mm}$  de l'hétérogénéité de diamètre  $d = 3 \text{ mm}$ . La deuxième colonne de la figure 17 (e), (f), (g) et (h) montre les signaux sélectionnés sur l'axe de propagation pour chaque distance  $z$ . La troisième colonne de la figure 17 (i), (j), (k) et (l) montre les signaux sélectionnés hors de l'axe de propagation à une distance  $x = 0,6 \text{ mm}$  de celui-ci.

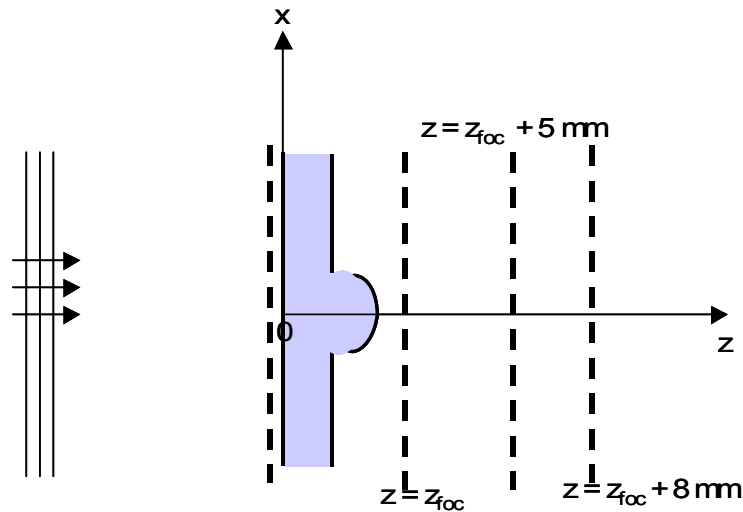


Figure 16. Plans de mesures

La première colonne montre l'évolution spatio-temporelle du champ de pression. L'onde plane incidente (Fig. 17. a)), après passage à travers l'hétérogénéité est focalisée (Fig. 17. b) cf. 2.1). Au-delà de la focale, nous observons que les fronts d'onde montrent clairement une forme dite en queue d'aronde (ici visible notamment pour les fronts des ondes de choc, visualisés par le passage bleu clair / bleu foncé correspondant au saut de pression au choc). Cette forme en queue d'aronde est caractéristique du front d'onde (Fig. 17. c) et d)) associé à une caustique cuspidée (Thom, 1972, voir aussi figure 11). Notre expérience en laboratoire permet donc de visualiser ce type de front d'onde caractéristique, même si nous n'avons pas ici réellement une véritable caustique au sens asymptotique (haute fréquence).

Ce phénomène de repliement du front d'onde (« wavefront folding ») avec modification de la forme du front d'onde (ici depuis le front d'onde plan incident

jusqu'à la queue d'aronde avec plusieurs plis) a été décrit théoriquement par Pierce et Maglieri (1971, Fig. 12) ainsi que par Piacsek (2002) comme le mécanisme essentiel expliquant l'évolution d'une onde de choc en milieu turbulent. En particulier, il expliquerait l'augmentation observée du temps de montée, le choc incident se brisant en plusieurs plis étalés dans le temps. Toutefois, à notre connaissance, il n'a jamais été réellement mis en évidence expérimentalement dans une expérience à l'échelle du bang sonique avec une seule hétérogénéité. La figure 18, extraite de l'article de Piacsek (2002), représente l'évolution géométrique d'un front d'onde avec une courbure localisée. Les lignes en pointillées représentent les trajectoires des rayons. Nous observons que les fronts d'onde calculés géométriquement ressemblent aux fronts d'ondes que nous mesurons expérimentalement. Ainsi, notre expérience permet d'observer expérimentalement l'effet de repliement du front d'onde d'une onde de choc après propagation à travers une hétérogénéité, bien que le rayon de celle-ci soit comparable à la longueur d'onde.

Cet effet est illustré plus rigoureusement grâce aux signaux mesurés à différentes distances sur l'axe (Fig. 17, seconde colonne) et hors de l'axe (Fig. 17, troisième colonne). Les figures 17 e)-h) présentent l'évolution temporelle de la pression sur l'axe aux mêmes distances que sur les figures 17 a)-d). Ces signaux montrent une évolution depuis la dent de scie (Fig. 17 e)) jusqu'à la forme d'onde focalisée en « U » (Fig. 17 f)). Puis, le choc initial est décomposé en deux chocs (flèches) derrière la focale (Fig. 17 g) et 17 h)), chaque choc étant associé à un des plis du front d'onde. A mesure que l'on s'éloigne de la focale, les deux chocs sont plus séparés temporellement (Fig. 17 g) et 17 h)). Hors de l'axe, les deux chocs sont encore plus séparés dans le temps (Fig. 17 k) et l)) conformément aux résultats numériques de Piacsek (2002). De plus, un troisième choc (Fig. 17. k) et l)) intermédiaire avec une amplitude plus petite est discernable. Ces observations montrent donc bien que la distorsion des formes d'ondes est liée à l'effet géométrique du repliement du front d'onde consécutif à la focalisation. Il faut aussi noter que les variations de ces formes d'ondes sont rapides dans la direction transverse, au sens où des variations significatives sont mesurées sur des distances inférieures à la longueur d'onde (ici 0,6 mm pour une longueur d'onde de 1,5 mm). Cette observation

est une nouvelle fois en accord qualitatif avec les observations du bang sonique qui montrent des fluctuations importantes du champ sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde (50 à 100 m suivant l'avion).

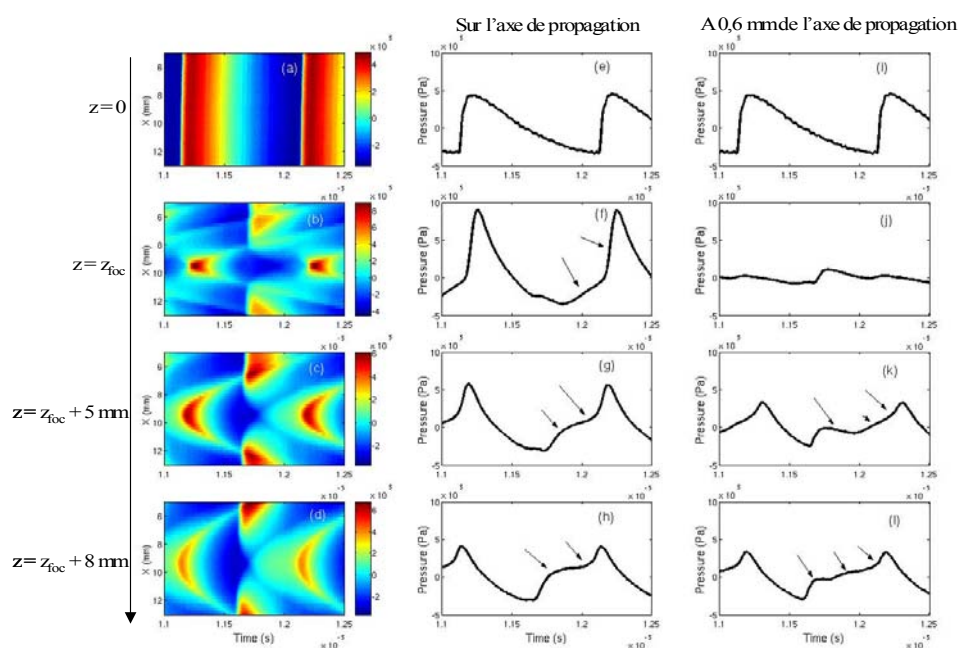


Figure 17. a) - d) (de haut en bas) Représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré respectivement devant l'hétérogénéité, à la focale  $z = z_{foc}$ , à  $z = z_{foc} + 5 \text{ mm}$  et à  $z = z_{foc} + 8 \text{ mm}$  e) - h) Evolution temporelle de la pression sur l'axe de propagation pour chaque  $z$  i) - l) Evolution temporelle de la pression hors de l'axe de propagation  $x = 0,6 \text{ mm}$  pour chaque  $z$

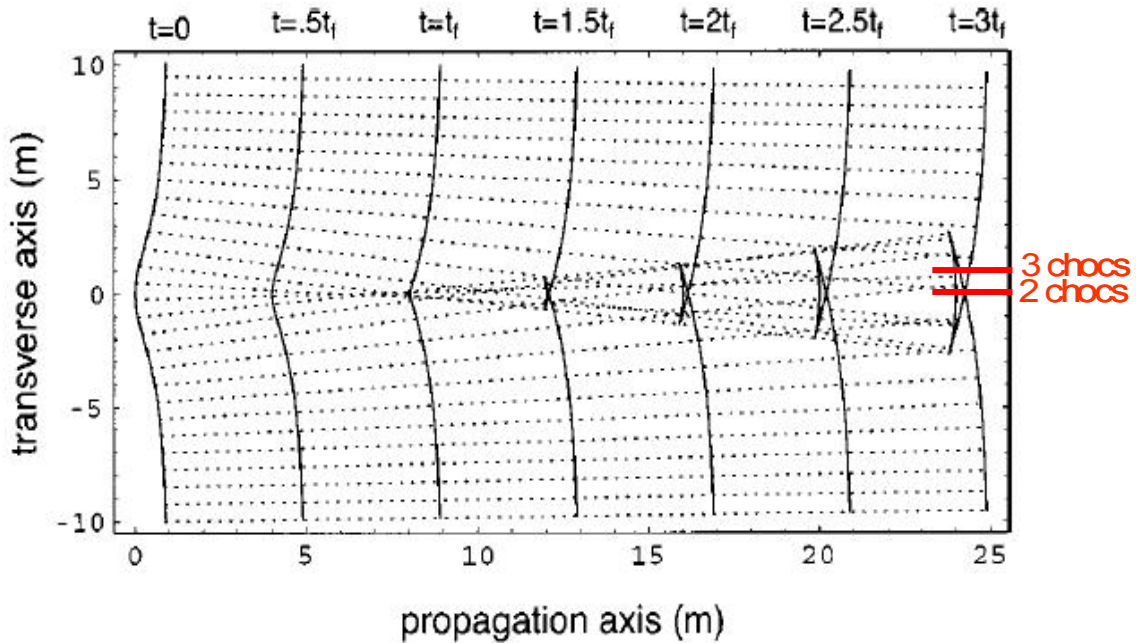


Figure 18. Evolution d'un front d'onde initialement courbé. Les lignes en pointillées représentent les trajectoires des rayons. (Piacsek, A.A. (2002). *J. Acoust. Soc. Am.* **III**, 520-529)

Le repliement du front d'onde est aussi observable pour des tailles d'hétérogénéités plus petites. Les figures 19 et 20 montrent les représentations spatio-temporelles des champs de pression mesurés derrière les hétérogénéités de diamètre  $d=0.73\lambda=1,1\text{ mm}$  (Fig. 19)  $d \approx 0,3\lambda=0,4\text{ mm}$  (Fig. 20) à différentes distances. L'effet du repliement du front d'onde reste visible jusqu'à des tailles d'hétérogénéités un peu inférieures à la longueur d'onde (Fig. 19). Pour  $d=1,1\text{ mm}$ , on observe clairement la forme en queue d'aronde du front d'onde, et le double choc (choc plan / choc diffracté) hors de l'axe ( $z = 7.4\text{ mm}$ ) qui fusionne plus loin ( $z=17.4\text{ mm}$ ) mais reste visible sous forme d'une rupture de pente, comme sur l'axe. Très loin de l'hétérogénéité ( $z=18\text{ cm}$ ), l'onde de choc a retrouvé son profil temporel incident en dent-de-scie, mais avec une amplitude un peu réduite. De légères oscillations du front d'onde restent néanmoins

encore visibles. Pour les plus petites tailles d'hétérogénéités ( $d=0,4 \text{ mm}$ , Fig. 20), le repliement est moins évident, l'effet ressemble plus à une perturbation. Le front d'onde reste essentiellement plan et les formes d'onde sont peu affectées. Près de l'hétérogénéité et hors de l'axe, on observe néanmoins encore une rupture de pente du choc et donc une augmentation du temps de montée.

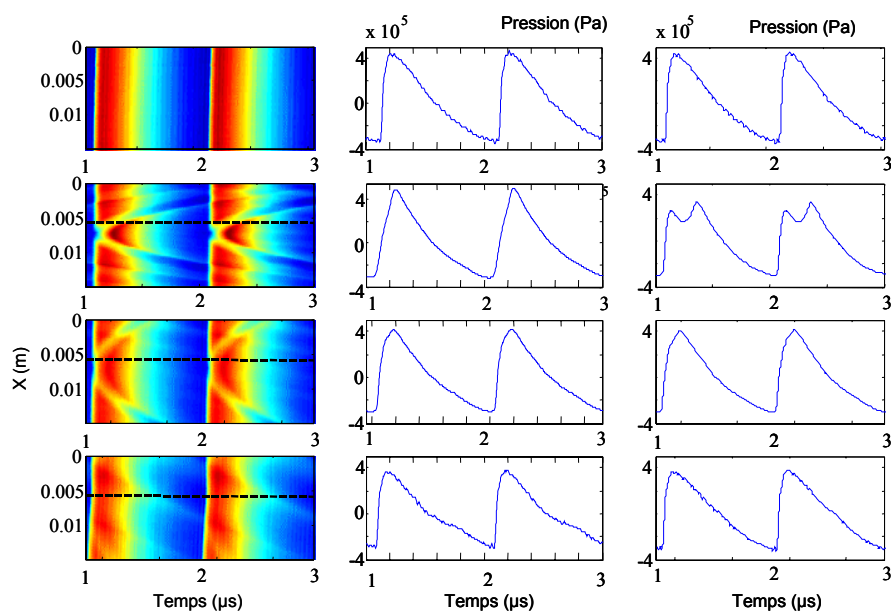


Figure 19. Champ de pression mesuré devant (1<sup>ère</sup> ligne) et derrière une hétérogénéité de diamètre 1.1 mm à  $z=7,4 \text{ mm}$  (2<sup>ème</sup> ligne),  $z=17,4 \text{ mm}$  (3<sup>ème</sup> ligne) et  $z=18 \text{ cm}$  (4<sup>ème</sup> ligne). A gauche : Représentation spatio-temporelle du champ. Au centre : signal temporel sur l'axe. A droite : signal temporel hors de l'axe ( $x = 1,6 \text{ mm}$ )



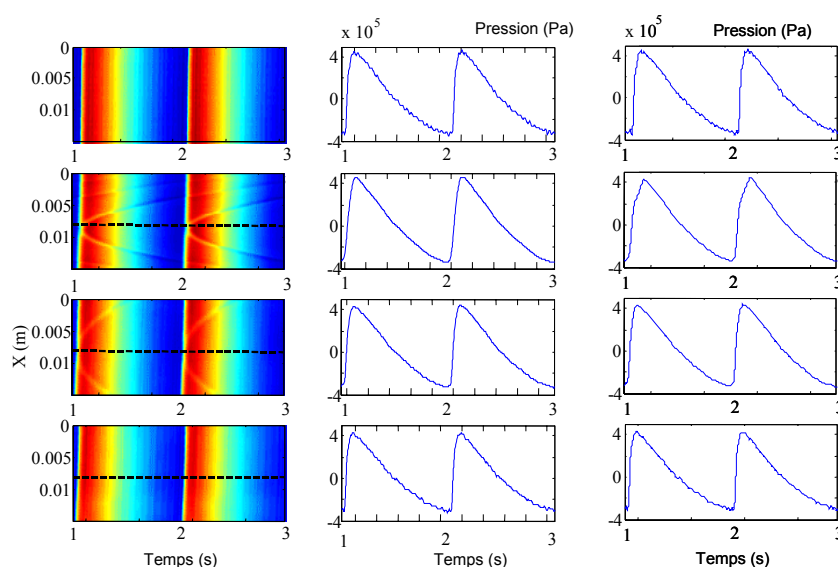


Figure 20. Champ de pression mesuré devant (1<sup>ère</sup> ligne) et derrière une hétérogénéité de diamètre 0.4 mm à  $z=7,4\text{ mm}$  (2<sup>ème</sup> ligne),  $z=17,4\text{ mm}$  (3<sup>ème</sup> ligne) et  $z=18\text{ cm}$  (4<sup>ème</sup> ligne). A gauche : Représentation spatio-temporelle du champ. Au centre: signal temporel sur l'axe. A droite : signal temporel hors de l'axe ( $x = 1\text{ mm}$ )

## 2.3. Conséquences du repliement du front d'onde

En accord avec les résultats expérimentaux, le repliement du front d'onde explique deux phénomènes observés lors des mesures du bang sonique au sol : l'augmentation du temps de montée ainsi que la distorsion des formes d'ondes.

### 2.3.1. Augmentation du temps de montée

Nous avons observé au chapitre précédent (cf. 2.1) que l'apparition de la focale était à l'origine de l'augmentation du temps de montée. Cette augmentation est liée à la variation de la forme d'onde en « N » à la forme d'onde en « U » à la focale. La question maintenant porte sur l'évolution de ce temps de montée au-delà du point focal après propagation en milieu homogène.

Pour répondre à cette question, la figure 21 compare les formes temporelles de la pression, mesurées sur l'axe de propagation derrière trois hétérogénéités de taille différentes  $d=2\lambda=3\text{mm}$ ,  $d=0.7\lambda=1.1\text{mm}$  et  $d=0.3\lambda=0.4\text{mm}$  à la même distance  $z=14\text{mm}$ , soit environ à  $10\lambda$ . Cette distance correspond typiquement, à l'échelle du bang sonique, à l'épaisseur de la couche limite atmosphérique ( $10\times 100\text{m}\approx 1\text{km}$ ).

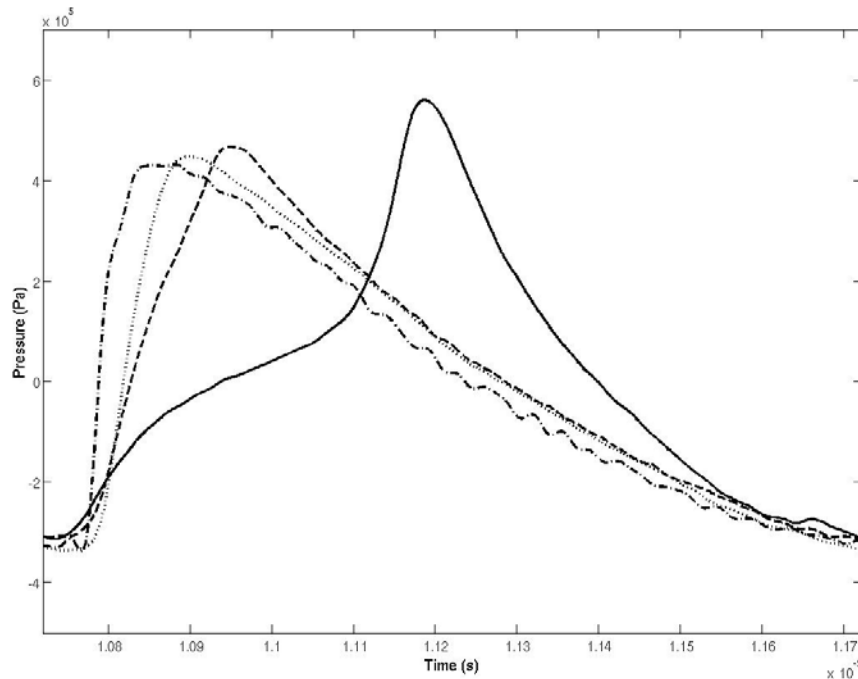


Figure 21. Forme temporelle de la pression mesurée devant (trait et pointillé) et derrière ( $z=14\text{mm}$ ) les hétérogénéités de diamètre  $d=3\text{mm}$  (trait plein),  $d=1,1\text{mm}$  (tiret) et  $d=0,4\text{mm}$  (pointillé)

Pour les plus grandes hétérogénéités ( $3\text{mm}$ ), pour lesquelles la distorsion des formes d'ondes est clairement associée au repliement du front d'onde, le temps de montée est égal à  $380\text{ns}$  : il est plus grand que le temps de montée mesuré à la focale de la même hétérogénéité ( $230\text{ns}$ ). Cette augmentation du temps de montée est une conséquence directe du repliement du front d'onde et de la décomposition du choc initial en deux chocs nettement séparés temporellement. Pour les tailles d'hétérogénéités intermédiaires ( $1,1\text{mm}$ ), pour lesquelles le repliement du front est encore visible, le

temps de montée est égal à 130 ns. Nous remarquons que le temps de montée est plus faible car les deux chocs sont moins séparés dans le temps, l'influence de l'hétérogénéité étant plus faible. Pour les plus petites tailles d'hétérogénéités (0,4mm), pour lesquelles le front d'onde a subi seulement une perturbation mais pas vraiment de repliement, le temps de montée mesuré est égal à 65 ns. Dans tous les cas, le temps de montée a subi une nette augmentation d'un facteur 3 à 16. Ainsi, en accord avec la théorie de Pierce et Maglieri (1971), l'augmentation du temps de montée après la focalisation apparaît bien liée à la brisure du choc initial en deux ou plusieurs chocs, chacun étant associé à un pli du front d'onde. Cette brisure est claire dans le cas des grosses hétérogénéités ( $d=2\lambda$ ) où les deux chocs sont plus séparés dans le temps que dans le cas des hétérogénéités de taille intermédiaire  $d=0,7\lambda$ . Par conséquent l'augmentation du temps de montée dépend fortement de la taille des hétérogénéités, l'influence du repliement du front d'onde étant plus importante dans le cas des grosses hétérogénéités.

### 2.3.2. Variabilité des formes d'onde temporelles

Selon Raspet *et al.* (1994), les formes d'ondes du bang sonique sont classées en trois groupes principaux : onde en « N », piquées et arrondies (leur figure 2). Ici, la figure 22 montre différentes formes d'ondes mesurées avec une seule hétérogénéité de tailles différentes ( $d=2\lambda$ , première colonne,  $d=0,7\lambda$ , deuxième colonne,  $d \approx 0,3\lambda$ , troisième colonne).

La forme d'onde piquée en « U » mesurée à  $z=2\text{ mm}$  (Fig. 22., première ligne) est liée à la forte focalisation observée derrière l'hétérogénéité de diamètre  $d=3\text{ mm}$  alors que cette forme n'est pas observée derrière les autres hétérogénéités.

La forme d'onde dite arrondie est observée dans nos expériences pour chaque diamètre. Le premier type de forme arrondie (Fig. 22. deuxième ligne) est observé près de la focale (à  $z=z_{foc}+5\text{ mm}$  respectivement à 1,8 mm, 2 mm et 1,6 mm de l'axe de propagation) et est composé de deux chocs d'amplitude différentes. Ces deux chocs sont

d'autant plus séparés dans le temps que le diamètre est grand ou que le point d'observation est éloigné.

Le deuxième type de forme arrondie (Fig. 22, troisième ligne) est composé de deux chocs d'amplitude similaire car les signaux ont été mesurés plus loin de la focale (à  $z = z_{foc} + 8\text{ mm}$  respectivement à 0,4 mm, 0,9 mm et 1,2 mm de l'axe de propagation) où le repliement du front d'onde est bien développé.

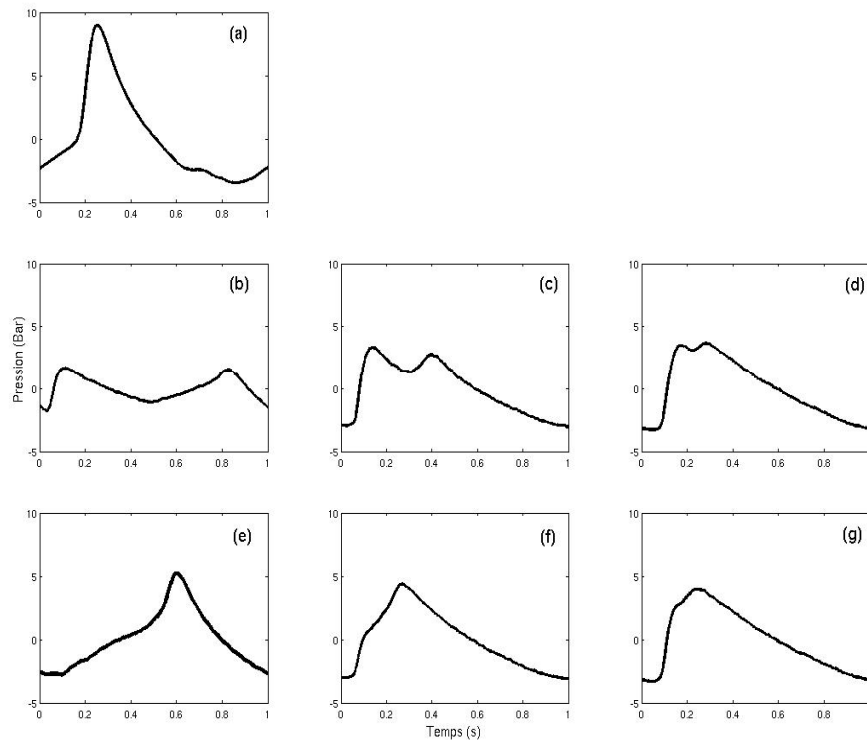


Figure 22. Différentes formes d'ondes mesurées avec une seule hétérogénéité de taille différente ( $d = 2\lambda$  -première colonne-  $d = 0,7\lambda$  -deuxième colonne-  $d = 0,3\lambda$  -troisième colonne). Les mesures sont choisies sur l'axe de propagation et à la focale ( $z = 2\text{ mm}$ ) de la plus grande hétérogénéité (première ligne), 5 mm derrière la focale respectivement à 1,8 mm, 2 mm et 1,6 mm hors de l'axe (seconde ligne) et 15 mm derrière la focale respectivement à 0,4 mm, 0,9 mm et 1,2 mm hors de l'axe (troisième ligne)

A titre de comparaison qualitative, la figure 23 montre quelques signaux du bang sonique mesurés pendant les essais dits « Boom File » (Lee and Downing, 1991) enregistrés en 1987 lors d'essais en vol de différents avions supersoniques volant à des nombres de Mach différents. Parmi 450 enregistrements, nous avons sélectionné quelques formes caractéristiques de signaux que nous pouvons comparer à nos expériences. Bien sûr, nos expériences avec une seule hétérogénéité ne prétendent pas reproduire la complexité de la propagation à travers la couche limite de l'atmosphère qui est un milieu turbulent multi-échelle, hétérogène, anisotrope et en mouvement.

Cependant, nous arrivons à reproduire qualitativement avec un milieu très simple quelques signaux du bang sonique sélectionnés dans la base de données. Nous observons dans nos expériences à l'échelle, les signaux en « U » à la focale (Fig. 23. première ligne), ainsi que des formes d'ondes arrondies constituée de deux chocs d'amplitude égale (Fig. 23. deuxième ligne) et des formes d'ondes arrondies constituées de deux chocs d'amplitudes différentes (Fig. 23. troisième ligne). L'objectif ici est de comprendre les mécanismes physiques à l'origine de la variabilité des formes d'ondes et de l'augmentation du temps de montée grâce à des expériences déterministes. Nos expériences permettent aussi de déterminer le diamètre « critique » de l'hétérogénéité à partir duquel le signal du bang sonique ne subit pratiquement plus de perturbation. Un modèle multi-échelle atmosphérique pourra donc négliger les hétérogénéités de diamètre inférieur à  $\lambda/4$  (ce diamètre correspond à des fluctuations dans l'atmosphère sur une distance égale à 25 m pour un bang sonique de type «Concorde »)

De plus, nos expériences permettent de réaliser des comparaisons quantitatives avec un modèle numérique, dans les mêmes conditions que l'expérience sans paramètre d'ajustement. Il s'agit là d'un avantage essentiel de notre expérience déterministe car ce type de comparaison est impossible à réaliser dans le cas d'expériences plus réalistes mais où l'interprétation ne peut être que statistique (Lipkens and Blackstock, 1998, Blanc-Benon *et al.*, 2002).

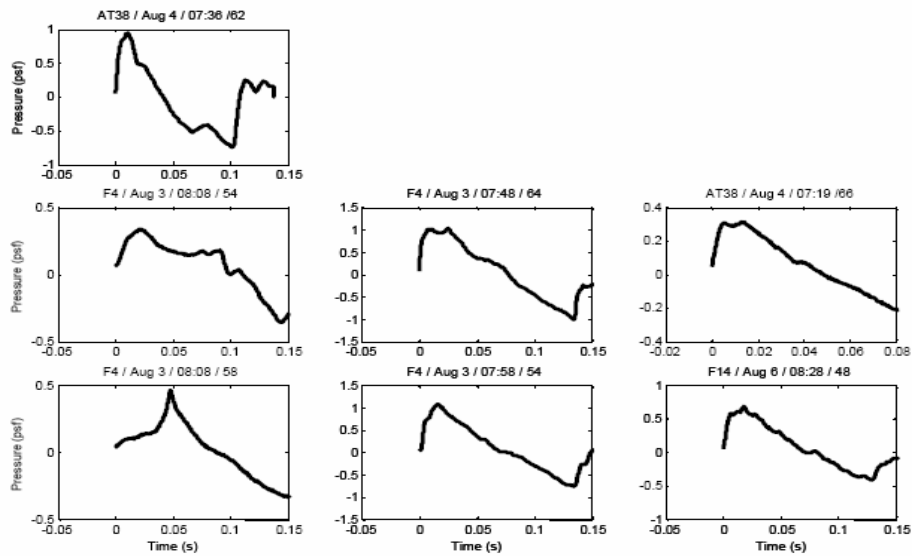


Figure 23. Exemples de signaux du bang sonique tirés de la base de données « Boom File » de Lee and Downing, 1991

### 3. Modèle physique

#### 3.1. Equation de propagation des ondes acoustiques en régime non linéaire dans un fluide faiblement hétérogène en approximation paraxiale

Comme nous l'avons déjà introduit dans le chapitre 1, l'étude théorique et numérique de la propagation non linéaire des ondes acoustiques intéresse différents domaines (acoustique sous-marine, thérapie médicale, propagation atmosphérique). Nous développons maintenant un modèle décrivant la propagation des ondes acoustiques en régime non-linéaire en milieu hétérogène, sous l'hypothèse de l'approximation paraxiale. Ce modèle pourra ensuite s'appliquer à la propagation du bang sonique dans la couche atmosphérique située entre 0 et 1 km d'altitude environ même si il est valable aussi dans les domaines cités précédemment.

Le modèle théorique le plus couramment utilisé en régime non linéaire en milieu homogène est l'équation de Khokhlov-Zabolotskaya (Zabolotskaya and Khokhlov, 1969). Cette équation prend en compte la diffraction sous l'hypothèse d'approximation paraxiale (ou encore appelée approximation parabolique « standard ») et la non-linéarité. Cette équation, étendue dans le cas d'un milieu absorbant thermovisqueux, est encore appelée équation Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (Kuznetsov, 1971). L'avantage de l'approximation parabolique est qu'elle permet une résolution numérique très rapide par rapport à l'équation des ondes, par avancement spatial depuis la source vers l'infini. En revanche, elle est mal adaptée à une propagation non directive et ne permet pas du tout de prendre en compte les phénomènes de rétro-diffusion.

Blanc-Benon *et al.* (2002) proposent une extension de l'équation KZ en milieu hétérogène. Cependant, le domaine de validité de cette équation et sa démonstration ne sont pas détaillés dans la publication. L'objectif de ce chapitre est donc d'établir une équation de propagation des ondes acoustiques en régime non linéaire et en milieu hétérogène, à partir des trois équations de conservation de la mécanique des fluides parfaits et de l'équation d'état (Landau and Lifshitz, 1987).

Nous établissons tout d'abord les lois de conservation et de comportement pour une onde acoustique se propageant dans un milieu faiblement hétérogène. Puis, une équation de propagation non linéaire en milieu hétérogène sous l'hypothèse paraxiale est établie en variables adimensionnées (Ganjehi *et al.*, 2007).

### 3.1.1. Lois de conservation et de comportement

Trois équations de conservation décrivent le comportement mécanique d'un fluide parfait. L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1)$$



où  $\rho$  est la masse volumique et  $\vec{u}$  est le vecteur vitesse de l'écoulement du fluide. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}, \quad (2)$$

où  $P$  est la pression dans le fluide et  $\vec{g}$  est l'accélération de la pesanteur.

L'équation de conservation de l'énergie s'exprime :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) s = 0, \quad (3)$$

où  $s$  est l'entropie spécifique ( $\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$ ).

Le comportement thermodynamique du fluide est décrit par son équation d'état. Pour un fluide classique, d'après la relation de Gibbs, la variation d'énergie interne  $e$  par unité de masse s'écrit :  $de = Tds + \frac{P}{\rho^2} d\rho$ , où  $T$  est la température du fluide. La pression est donc définie de façon thermodynamique en fonction des variables d'état  $\rho$  et  $s$  :

$$P = \rho^2 \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s = P(\rho, s) \quad (4)$$

### 3.1.2. Les équations de l'acoustique non linéaire en milieu faiblement hétérogène

Nous voulons tout d'abord établir les équations de l'acoustique non linéaire en milieu hétérogène. L'hétérogénéité provient, d'une part des variations de vitesse du son présentes dans le milieu, et d'autre part des variations de masse volumique. L'hétérogénéité est supposée stationnaire.

### 3.1.2.1. Equations en milieu faiblement hétérogène

Etablissons les équations de conservation et de comportement du milieu en présence d'une hétérogénéité. L'hétérogénéité induit une perturbation de pression  $\delta p_0(\vec{x})$ , de masse volumique  $\delta \rho_0(\vec{x})$ , de célérité du son  $\delta c_0(\vec{x})$  et d'entropie  $\delta s_0(\vec{x})$  par-rapport aux valeurs du milieu homogène indicées par « 00 ». Ces grandeurs sont fonctions de la position  $\vec{x}$ . Les variables du problème s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_{00} + \delta \rho_0(\vec{x}), \\ P = P_{00} + \delta P_0(\vec{x}), \\ \text{et } s = s_{00} + \delta s_0(\vec{x}). \end{array} \right.$$

Ces variables sont couplées par les lois de conservation et de comportement. Dans le fluide hétérogène, les termes de l'équation de conservation de la masse (1) ainsi que de l'équation de conservation de l'énergie (3) sont nuls.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (2) se réduit à l'équilibre hydrostatique :

$$0 = -\vec{\nabla} \delta P_0 + (\rho_{00} + \delta \rho_0) \vec{g}.$$

Le développement de Taylor à l'ordre 2 de la loi d'état (4) donnant la pression du fluide s'écrit :

$$\begin{aligned} P(\rho_{00} + \delta \rho_0, s_{00} + \delta s_0) = & P_{00} + \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s,0} \delta \rho_0 + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_{\rho,0} \delta s_0 + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} \delta \rho_0^2 + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s} \right)_0 \delta \rho_0 \delta s_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right)_{\rho,0} \delta s_0^2 + \dots \end{aligned}$$

où  $\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s,0} = c_{00}^2$  est par définition la vitesse du son dans le fluide homogène au

repos.

D'après l'équation précédente, la vitesse du son dans le fluide hétérogène vaut :

$$c_o(\vec{x}) = c_{00} + \delta c_o(\vec{x}) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)\delta\rho_0 + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s}\right)\delta s_0}.$$

Si  $\delta\rho_0$  et  $\delta s_0$  sont petits devant  $\rho_{00}$  et  $s_{00}$  (ce qui est le cas pour un milieu faiblement hétérogène), il vient en développant la racine carrée :

$$\delta c_o = \frac{1}{2c_{00}} \left[ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)\delta\rho_0 + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s}\right)\delta s_0 \right]$$

où toutes les dérivées partielles sont calculées à l'équilibre thermodynamique pour le milieu moyen.

Dans un fluide isentropique, l'équation d'état à l'ordre 2 est habituellement écrite [Beyer, 1960] :

$$P = P_0 + A \frac{\delta\rho_0}{\rho_{00}} + \frac{B}{2} \left(\frac{\delta\rho_0}{\rho_{00}}\right)^2,$$

où  $A = \rho_{00} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$  et  $B = \rho_{00}^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_s$  sont les modules d'élasticité isentropiques

du premier et second ordre.

L'hétérogénéité en vitesse  $\delta c_o$  peut donc aussi s'exprimer en fonction du paramètre de non linéarité thermodynamique<sup>1</sup> du liquide  $\left(\frac{B}{A}\right)_{00} = \frac{\rho_{00}}{c_{00}^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_s$  :

$$\delta c_o = \frac{1}{2} \left[ c_{00} \left(\frac{B}{A}\right)_{00} \frac{\delta\rho_0}{\rho_{00}} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s}\right) \frac{\delta s_0}{c_{00}} \right] \quad (5)$$

Dans un milieu hétérogène, les modules d'élasticité isentropiques dépendent de la position  $\vec{x}$  quel que soit leur ordre. Les variations du module d'élasticité du premier ordre  $A$  en fonction de  $\vec{x}$  sont prises en compte par l'hétérogénéité en vitesse  $\delta c_o$ . Peut-on négliger les variations du module élastique du second ordre  $B$  en milieu hétérogène ? Un calcul analogue à celui mené pour déterminer  $\delta c_o$  montre que la dépendance spatiale

<sup>1</sup>  $B/A$  est le rapport des amplitudes des termes quadratique et linéaire de l'équation d'état.

de  $B$  provient uniquement de termes du troisième ordre de l'équation d'état. L'hétérogénéité du module  $B$  intervient donc à un ordre de grandeur plus élevé que l'hétérogénéité de vitesse du son. Au second ordre, le module élastique  $B$  reste donc constant dans un milieu hétérogène.

### 3.1.2.2. Equations de l'acoustique

Nous supposons maintenant qu'une onde acoustique se propage dans le fluide. Les grandeurs associées à cette perturbation acoustique sont indicées par « a », comme ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}_a(\bar{x}, t), \\ \rho = \rho_{00} + \delta\rho_0(\bar{x}) + \rho_a(\bar{x}, t), \\ P = P_{00} + \delta P_0(\bar{x}) + P_a(\bar{x}, t), \\ s = s_{00} + \delta s_0(\bar{x}) + s_a(\bar{x}, t), \\ \text{et } c = c_{00} + \delta c_0(\bar{x}). \end{array} \right.$$

Ecrivons les équations auxquelles obéit la perturbation acoustique. La conservation de la masse (1) s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho_{00} + \delta\rho_0 + \rho_a) \bar{u}_a] = 0.$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (2) est :

$$(\rho_{00} + \delta\rho_0 + \rho_a) \left[ \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial t} + (\bar{u}_a \cdot \vec{\nabla}) \bar{u}_a \right] = -\vec{\nabla} \cdot (\delta P_0 + P_a) + (\rho_{00} + \delta\rho_0 + \rho_a) \vec{g}.$$

La conservation de l'énergie (3) se traduit par :

$$\frac{\partial s_a}{\partial t} + [(\bar{u}_a) \cdot \vec{\nabla}] (\delta s_0 + s_a) = 0.$$

Le développement de Taylor à l'ordre deux<sup>2</sup> de la pression du fluide (4), par rapport aux variations d'entropie et de masse volumique  $s - s_{00}$  et  $\rho - \rho_{00}$  s'écrit :

$$P = P_{00} + \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s,0} (\delta \rho_0 + \rho_a) + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_{\rho,0} (\delta s_0 + s_a) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} (\delta \rho_0 + \rho_a)^2 + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s} \right)_0 (\delta \rho_0 + \rho_a)(\delta s_0 + s_a) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right)_{\rho,0} (\delta s_0 + s_a)^2$$

En soustrayant les équations obtenues avec et sans la perturbation acoustique, nous obtenons les équations satisfaites par les champs acoustiques :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho_{00} + \delta \rho_0 + \rho_a) \vec{u}_a] = 0, \quad (6)$$

$$(\rho_{00} + \delta \rho_0 + \rho_a) \left[ \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial t} + (\vec{u}_a \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_a \right] = -\vec{\nabla} P_a + \rho_a \vec{g} \quad (7)$$

$$\frac{\partial s_a}{\partial t} + (\vec{u}_a \cdot \vec{\nabla})(\delta s_0 + s_a) = 0, \quad (8)$$

$$P_a = c_{00}^2 \rho_a + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_{\rho,0} s_a + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} \rho_a^2 + \left[ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} \delta \rho_0 + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s} \right)_0 \delta s_0 \right] \rho_a + \dots \quad (9)$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s} \right)_0 s_a \rho_a + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s} \right)_0 \delta \rho_0 s_a + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right)_{\rho,0} \delta s_0 s_a + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right)_{\rho,0} s_a^2$$

Les quatre derniers termes de l'équation d'état ci-dessus sont négligés, car les variations d'entropie acoustique seront montrées (section suivante 3.1.2.3) d'un ordre inférieur aux autres grandeurs caractérisant l'onde acoustique et l'hétérogénéité. En effet, au premier ordre, la propagation acoustique est isentropique. Ainsi, la faible variation d'entropie d'origine acoustique n'aura que très peu d'influence sur l'hétérogénéité (les échanges de chaleur sont insuffisants pour créer un gradient de

<sup>2</sup> En acoustique non linéaire dans les milieux homogènes, la plupart des effets sont correctement modélisés par les termes d'ordre 2 (le nombre de Mach est  $\ll 1$ ). Il n'est donc pas *a priori* nécessaire de développer l'équation d'état à un ordre plus élevé.

température) ou sur la propagation de l'onde elle-même (la propagation de l'onde ne crée pas de « lentille thermique »). L'équation (9) s'écrit donc :

$$P_a = c_{00}^2 \rho_a + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_{\rho,0} s_a + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} \rho_a^2 + \left[ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} \delta \rho_0 + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s} \right)_0 \delta s_0 \right] \rho_a,$$

soit, en introduisant la variation de vitesse du son  $\delta c_0$  définie par (5) :

$$P_a = c_{00}^2 \rho_a + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_\rho s_a + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_s \rho_a^2 + 2 c_{00} \delta c_{00} \rho_a. \quad (10)$$

On choisit d'écrire les équations de l'acoustique en variables sans dimension, pour mieux comparer les ordres de grandeur et simplifier les équations. Dans un premier temps, les grandeurs sans dimension sont repérées par un symbole surmonté d'une barre. Le temps est adimensionné par la période  $T = 2\pi/\omega$  de l'onde :  $\bar{t} = \omega t$ . Les variables d'espace sont adimensionnées par la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  :  $\bar{x} = k\bar{x}$ . Le gradient associé à la perturbation acoustique sera donc adimensionné par le nombre d'onde  $k$ . Le gradient associé aux hétérogénéités sera aussi adimensionné par  $k$ , car, pour le bang sonique, la taille caractéristique  $L$  de l'hétérogénéité de l'atmosphère est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde acoustique  $L \approx \lambda \approx 100$  m. Pour une application médicale, on note que la plupart des organes à imager sont de taille au moins millimétrique (comme les vaisseaux sanguins) et donc comparable aux longueurs d'onde échographiques. Il n'existe pas d'objet à contraste d'impédance significatif et très inférieur à la longueur d'onde. En conséquence, le modèle développé ici pourra également s'appliquer.

Le nombre de Mach acoustique  $M$ , est le rapport entre la vitesse acoustique du fluide et la vitesse du son :  $M = \max(\vec{u}_a) / c_{00}$ . Ce paramètre caractérise le degré de non-linéarité de la propagation des ondes. Dans le cas du bang sonique, le nombre de Mach acoustique vaut environ  $8 \cdot 10^{-4}$ , ce qui correspond à une pression acoustique au sol de 100 Pa soit une distance de choc  $L_c = 18$  km (très grande devant l'épaisseur de la couche limite planétaire). Dans le domaine médical, en imagerie échographique par exemple, la

pression acoustique au foyer est environ égale à 1 MPa pour une fréquence usuelle de 3 MHz. Le nombre de Mach acoustique est ainsi égal à  $M \cong 4.10^{-4}$  et la distance de choc vaut environ  $L_c = 5 \text{ cm}$ . Notons que pour des applications plus fortement non linéaires (lithotritie), l'amplitude au foyer est nettement plus élevée (100 MPa) et le nombre de Mach d'autant plus grand.

Le degré d'hétérogénéité du fluide est caractérisé par :  $\varepsilon = \max(\delta c_0)/c_{00}$ . Les perturbations liées à l'hétérogénéité sont toutes supposées être de l'ordre de  $\varepsilon$  :  $\delta c_0 = O(\varepsilon c_{00})$ ,  $\delta \rho_0 = O(\varepsilon \rho_{00})$  et  $\delta s_0 = O(\varepsilon s_{00})$ . On suppose que le milieu est faiblement hétérogène, c'est-à-dire que  $\varepsilon \ll 1$ . En effet, dans l'atmosphère, la variation de vitesse du son induite par les changements de température à faible altitude (de l'ordre de quelques °C, par exemple 5°C) induit des fluctuations de l'ordre de 1 % de la vitesse du son (339,4 m/s à 15°C et 342,3 à 20°C). Ceci donne un paramètre  $\varepsilon \approx 0,01$ . On a donc la hiérarchie suivante des paramètres :  $l \gg \varepsilon \gg M \gg \varepsilon^2$ .

Dans le corps humain, les fluctuations de vitesse du son observées quand on passe d'un tissu à l'autre sont faibles aussi. La vitesse du son dans la graisse vaut par exemple 1450 m/s ou celle dans les muscles vaut 1570 m/s, soit une fluctuation par rapport à la vitesse du son dans l'eau 1480 m/s de l'ordre de  $\varepsilon \approx 0,03$  à 0,06. Pour les applications de type fortement non linéaire (lithotritie) on a donc la hiérarchie suivante des paramètres :  $l \gg \varepsilon \approx M$ . En revanche, pour des applications de type imagerie, les effets d'hétérogénéité seront dominants.

Les grandeurs physiques (vitesse, pression et masse volumique) sont adimensionnées à l'aide des paramètres  $M$  et  $\varepsilon$  (pour la perturbation acoustique). L'indice «  $h$  » est associé aux hétérogénéités sans dimension :

$$\begin{cases} \vec{u} = c_{00} M \vec{u}_a(\vec{x}, t), \\ \rho = \rho_{00} (1 + \varepsilon \bar{\rho}_h(\vec{x}) + M \bar{\rho}_a(\vec{x}, t)), \\ P = P_{00} + \rho_{00} c_{00}^2 (\varepsilon \bar{P}_h + M \bar{P}_a). \end{cases}$$

L'équation d'état (10) montre que le choix pertinent pour le dimensionnement de l'entropie est :

$$s = s_{00} + \left[ \frac{\rho_{00} c_{00}^2}{\left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_{\rho,0}} \right] (\varepsilon \bar{s}_h + M \bar{s}_a)$$

### 3.1.2.3. Equations constitutives adimensionnées

Ecrivons les équations (6), (7), (8) et (10) sans dimension. Pour simplifier les calculs, nous considérons que l'hétérogénéité et la non-linéarité agissent au même ordre de grandeur sur la propagation acoustique :  $M \approx \varepsilon$ . En réalité, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent,  $M$  est environ 10 fois plus petit que  $\varepsilon$ , mais reste dominant par rapport à  $\varepsilon^2$ . Il apparaît donc cohérent de conserver à la fois les termes hétérogènes et non linéaires. Le cas où les effets non linéaires sont d'un ordre de grandeur inférieur aux effets hétérogènes ( $M=O(\varepsilon^2)$ ) est traité dans Jing *et al.* (2007). Nous négligeons ici tous les termes d'ordre supérieur ou égal à trois, c'est-à-dire d'ordre supérieur ou égal à  $\varepsilon^2$  et, *a fortiori*,  $M^2$  et  $\varepsilon M$ .

L'équation de conservation de la masse (6) adimensionnée est :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_a}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}}_a = -\varepsilon \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho}_h \bar{\mathbf{u}}_a) - M \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho}_a \bar{\mathbf{u}}_a). \quad (11)$$

Le membre de gauche correspond aux termes obtenus dans le cadre de l'acoustique linéaire en milieu homogène immobile. Le premier terme de droite traduit un couplage entre l'hétérogénéité ( $\rho_h$ ) et la perturbation acoustique. Le second terme à droite correspond aux effets non linéaires acoustiques.



Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement, nous exprimons l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  en fonction des grandeurs caractérisant l'hétérogénéité. A cette fin, écrivons (en variables sans dimensions) l'équation d'équilibre hydrostatique du milieu hétérogène, sans onde acoustique :

$$0 = -k\varepsilon\rho_{00}c_{00}^2\vec{\nabla}P_h + \rho_{00}(1 + \varepsilon\bar{\rho}_h)\vec{g}.$$

En divisant par  $\rho_{00}(1 + \varepsilon\bar{\rho}_h)$ , il vient :  $\vec{g} = \frac{k\varepsilon c_{00}^2}{1 + \varepsilon\bar{\rho}_h}\vec{\nabla}P_h$ , soit :  $\vec{g} \approx k\varepsilon c_{00}^2\vec{\nabla}P_h$ , car

$\varepsilon \ll 1$ .

L'équation de la quantité de mouvement (7) adimensionnée est donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial \bar{t}} + \vec{\nabla}P_a = -M \left[ \bar{\rho}_a \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial \bar{t}} + (\vec{u}_a \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_a \right] - \varepsilon \left[ \bar{\rho}_h \frac{\partial \vec{u}_a}{\partial \bar{t}} \right] + \dots \\ + \varepsilon \bar{\rho}_a \vec{\nabla}P_h + O(\varepsilon^2, M^2, \varepsilon M) \end{aligned} \quad (12)$$

Le membre de gauche est toujours celui obtenu en acoustique linéaire dans un milieu homogène immobile. Le premier terme à droite correspond aux effets non linéaires acoustiques. Les autres termes couplent à nouveau l'hétérogénéité et la perturbation acoustique. En particulier, le dernier terme traduit l'influence de l'hétérogénéité induite par la gravité sur la propagation acoustique.

L'équation de conservation de l'énergie (8) est aussi adimensionnée :

$$\frac{\partial \bar{s}_a}{\partial \bar{t}} = -\varepsilon \left[ (\vec{u}_a \cdot \vec{\nabla}) \bar{s}_h \right] - M (\vec{u}_a \cdot \vec{\nabla}) \bar{s}_a.$$

Comme la propagation de l'onde est considérée quasi-adiabatique, la perturbation acoustique d'entropie est donc bien d'un ordre inférieur aux autres grandeurs acoustiques :  $s_a = O(\varepsilon, M)$  comme annoncé précédemment<sup>3</sup>. Nous négligeons donc l'effet de la perturbation acoustique d'entropie sur l'onde elle-même :

3 Cf. 3.1.2.2, où les quatre derniers termes de l'équation d'état (9) sont d'ordre  $\varepsilon M$  ou  $M^2$ .

$$\frac{\partial \bar{s}_a}{\partial t} = -\varepsilon \bar{u}_a \cdot \bar{\nabla} \bar{s}_h + O(\varepsilon M, M^2) \quad (13)$$

L'équation d'état (10) adimensionnée devient :

$$\bar{P}_a = \bar{\rho}_a + \bar{s}_a + 2\varepsilon \bar{c}_h \bar{\rho}_a + M \left( \frac{B}{2A} \right)_{00} \bar{\rho}_a^2 + O(\varepsilon^2, M^2, \varepsilon M), \quad (14)$$

où  $\bar{c}_h = \frac{\delta c_0}{\varepsilon c_{00}}$  est l'hétérogénéité de vitesse adimensionnée et  $\left( \frac{B}{A} \right)_{00}$  est le

paramètre de non-linéarité du fluide au repos défini précédemment (cf. 3.1.2.1).

L'expression de la pression dans le milieu hétérogène sans onde acoustique nous servira à établir l'équation KZ généralisée. Le développement de Taylor de la pression s'écrit sans dimension :

$$\bar{P}_h = \bar{\rho}_h + \bar{s}_h + \varepsilon \frac{B}{2A} \bar{\rho}_h^2 + \varepsilon \rho_{00} \left[ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s} \right) / \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right) \right] \bar{\rho}_h \bar{s}_h + \frac{1}{2} \varepsilon \rho_{00} c_{00}^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right) / \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)^2 \right] \bar{s}_h^2,$$

qui se réduit au premier ordre à :

$$\bar{s}_h = \bar{P}_h - \bar{\rho}_h + O(\varepsilon) \quad (15)$$

### 3.1.3. L'équation KZ généralisée

A partir des équations (11), (12), (13) et (14), nous établissons l'équation de propagation des ondes acoustiques en milieu hétérogène, à l'aide de l'approximation paraxiale (encore appelée approximation parabolique « standard »).

#### 3.1.3.1. Approximation paraxiale

L'approximation paraxiale est utilisée pour modéliser la propagation des ondes émises par une source plane et directive. Considérons une telle source, de dimension

transverse  $a$ , située dans le plan  $z = 0$ . Nous dimensionnons les grandeurs transverses  $x$  et  $y$  par  $a$  :

$$X = \frac{x}{a} = \frac{\bar{x}}{ka} = \eta \bar{x} \quad \text{et} \quad Y = \frac{y}{a} = \frac{\bar{y}}{ka} = \eta \bar{y}.$$

Ici  $\eta = 1/ka$  est un paramètre associé à la diffraction de l'onde. Dans l'hypothèse, retenue ici, où la longueur d'onde est petite devant la taille de la source, il vient :  $\eta = 1/ka \ll 1$ . C'est le cadre de l'approximation paraxiale, qui n'est valable qu'au voisinage de l'axe de propagation  $z$ . Avec ces nouvelles variables non dimensionnelles<sup>4</sup>, les termes d'ordre  $\eta M$  et  $\eta \varepsilon$  sont négligés dans les trois équations de conservation.

L'équation de conservation de la masse (11) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = & -\eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial X} + \frac{\partial u_y}{\partial Y} \right) - \varepsilon \left( \frac{\partial \rho_h u_z}{\partial z} \right) - \varepsilon \left( u_x \frac{\partial \rho_h}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho_h}{\partial y} \right) + \dots \\ & - M \left[ \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right] + O(M^2, \varepsilon^2, \varepsilon M, \eta M, \eta \varepsilon) \end{aligned} \quad (16)$$

La projection suivant  $z$  de l'équation (12) de conservation de la quantité de mouvement est :

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = -M \left( \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \varepsilon \left( \rho_h \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) + \varepsilon \rho \frac{\partial P_h}{\partial z} + O(\varepsilon \eta, M \eta) \quad (17)$$

Sa composante suivant  $x$  est :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\eta \frac{\partial P}{\partial X} - M \left( \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \varepsilon \left( \rho_h \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) + \varepsilon \left( \rho \frac{\partial P_h}{\partial x} \right) + O(\varepsilon \eta, M \eta) \quad (18)$$

Sa composante suivant  $y$  est :

<sup>4</sup> Ce dimensionnement ne concerne bien entendu que les variables acoustiques. De plus, pour alléger les notations, nous omettons désormais l'indice « a » des grandeurs acoustiques et la barre des grandeurs adimensionnées dans les équations.

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\eta \frac{\partial P}{\partial Y} - M \left( \rho \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) - \varepsilon \left( \rho_h \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) + \varepsilon \left( \rho \frac{\partial P_h}{\partial y} \right) + O(\varepsilon \eta, M \eta). \quad (19)$$

L'équation de conservation de l'énergie (13) devient :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\varepsilon \left( u_x \frac{\partial s_h}{\partial x} + u_y \frac{\partial s_h}{\partial y} + u_z \frac{\partial s_h}{\partial z} \right) + O(\varepsilon M, M^2) \quad (20)$$

Considérant que les ondes se propagent uniquement vers les  $z$  croissants, nous introduisons ensuite un temps retardé sans dimension :  $\bar{\tau} = \bar{t} - \bar{z}$ . La variable dimensionnée  $z$ , qui est la direction principale de propagation, est adimensionnée par la distance de choc  $L_c = 1/k\beta M$ , dont nous donnerons une signification physique plus loin. Ici,  $\beta = 1 + B/2A$  est le coefficient de non linéarité du milieu<sup>5</sup>. Il vient alors :

$$\frac{z}{L_c} = z k \beta M \equiv \sigma, \text{ soit : } \sigma = \beta M \bar{z}.$$

Avec ce changement de variables, l'opérateur de dérivation par rapport à la variable  $\bar{z}$  s'écrit :  $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \tau} + \beta M \frac{\partial}{\partial \sigma}$ . Les grandeurs acoustiques s'expriment donc en fonction des variables :  $P = P(\tau, X, Y, \sigma)$ .

L'équation de conservation de la masse (16) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \frac{\partial u_z}{\partial \tau} &= -\beta M \frac{\partial u_z}{\partial \sigma} - \varepsilon \left( -\rho_h \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + u_z \frac{\partial \rho_h}{\partial z} \right) + \dots \\ &+ M \left( \rho \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) - \varepsilon \left[ u_x \frac{\partial \rho_h}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho_h}{\partial y} \right] - \eta \vec{\nabla}_\perp \vec{u} \end{aligned} \quad (21)$$

où  $\vec{\nabla}_\perp = \left( \frac{\partial}{\partial X}; \frac{\partial}{\partial Y} \right)$  est l'opérateur gradient dans le plan orthogonal à la

direction principale de propagation  $z$ .

L'équation (17) devient :

---

<sup>5</sup> Le coefficient  $\beta$  (1.2 dans l'air et 3.5 dans l'eau) prend en compte la convection et la non-linéarité thermodynamique du milieu, qui sont les deux effets à l'origine des non-linéarités acoustiques.

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} - \frac{\partial P}{\partial \tau} = -\beta M \frac{\partial P}{\partial \sigma} - M \left( \rho \frac{\partial u_z}{\partial \tau} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial \tau} \right) - \varepsilon \left( \rho_h \frac{\partial u_z}{\partial \tau} \right) + \varepsilon \left( \rho \frac{\partial P_h}{\partial z} \right) \quad (22)$$

La conservation de l'énergie (20) s'écrit :

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = -\varepsilon \left( u_x \frac{\partial s_h}{\partial x} + u_y \frac{\partial s_h}{\partial y} + u_z \frac{\partial s_h}{\partial z} \right) \quad (23)$$

Nous rappelons l'équation d'état (14) qui est inchangée :

$$P = \rho + s + 2\varepsilon c_h \rho + M \frac{B}{2A} \rho^2 \quad (24)$$

### 3.1.3.2. L'équation KZ en milieu hétérogène

D'après l'équation d'état (24) et l'équation (22),  $\rho$  et  $u_z$  s'écrivent au premier ordre :  $\rho = P + O(\varepsilon) + O(M)$  et  $u_z = P + O(\varepsilon) + O(M)$ . En remplaçant  $\rho$  et  $u_z$  par ces expressions dans les termes d'ordre  $\varepsilon$  et  $M$  de l'équation de conservation de la masse (21), il vient sans changer l'ordre d'approximation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{\partial u_z}{\partial \tau} = & \frac{\partial s}{\partial \tau} + 2\varepsilon c_h \frac{\partial P}{\partial \tau} + M \frac{B}{2A} \frac{\partial P^2}{\partial \tau} - \beta M \frac{\partial P}{\partial \sigma} - \eta \vec{\nabla}_\perp \bar{u} + \dots \\ & - \varepsilon \left[ -\rho_h \frac{\partial P}{\partial \tau} + P \frac{\partial \rho_h}{\partial z} \right] + 2MP \frac{\partial P}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (25)$$

Nous remplaçons ensuite  $\frac{\partial s}{\partial \tau}$  par son expression (23) et la perturbation d'entropie par l'expression (15). L'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{\partial u_z}{\partial \tau} = & -\varepsilon P \frac{\partial P_h}{\partial z} - \varepsilon \left( -\rho_h \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) + \dots \\ & - \varepsilon \left[ u_x \frac{\partial P_h}{\partial x} + u_y \frac{\partial P_h}{\partial y} \right] + 2\varepsilon c_h \frac{\partial P}{\partial \tau} + M\beta \frac{\partial P^2}{\partial \tau} - \eta \vec{\nabla}_\perp \bar{u} - \beta M \frac{\partial P}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (26)$$

De même, l'équation (22) devient :

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} - \frac{\partial P}{\partial \tau} = -\beta M \frac{\partial P}{\partial \sigma} - M \left( P \frac{\partial P}{\partial \tau} - P \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) - \varepsilon \left( \rho_h \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) + \varepsilon \left( P \frac{\partial P_h}{\partial z} \right) \quad (27)$$

Le membre à gauche de l'équation (26) est égal à l'opposé de celui de l'équation (27). Ainsi, les membres à droite de ces deux équations doivent être égaux et nous obtenons :

$$2\beta M \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \beta M \frac{\partial P^2}{\partial \tau} + 2\varepsilon \frac{\partial P}{\partial \tau} (c_h) - 2\varepsilon P \frac{\partial u_z^h}{\partial z} - \eta \vec{\nabla}_\perp \vec{u} - \dots$$

$$- \varepsilon \left[ u_x \frac{\partial P_h}{\partial x} + u_y \frac{\partial P_h}{\partial y} \right]$$

L'équation précédente est dérivée par rapport à  $\tau$  :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( 2P \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) - \frac{\eta}{2\beta M} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau \partial X} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau \partial Y} \right) + \frac{\varepsilon}{\beta M} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} [c_h]. \quad (28)$$

Or, les projections suivant  $x$  et  $y$  de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (cf. (18) et (19)) s'écrivent :

$$\frac{\partial u_x}{\partial \tau} = -\eta \frac{\partial P}{\partial X} + O(\varepsilon) + O(M) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_y}{\partial \tau} = -\eta \frac{\partial P}{\partial Y} + O(\varepsilon) + O(M). \quad (29)$$

Négliger les termes d'ordre  $\varepsilon$  et  $M$  devant celui d'ordre  $\eta$  dans les expressions ci-dessus, revient à considérer que  $\eta^2$  est de l'ordre de  $\varepsilon$  et  $M$ . Pour une onde plane, la diffraction est liée à l'hétérogénéité (taille et contraste de vitesse).

En introduisant les expressions (29) dans l'équation (28), nous obtenons finalement l'équation KZ généralisée, décrivant la propagation d'ondes acoustiques non linéaires dans un milieu faiblement hétérogène :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( P \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) + \frac{\eta^2}{2\beta M} \Delta_\perp P + \frac{\varepsilon c_h}{\beta M} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2}. \quad (30)$$

Le membre de gauche correspond à la propagation acoustique en régime linéaire d'une onde plane. Le premier terme à droite exprime l'effet de la non linéarité sur le champ acoustique dans un milieu homogène. Le second terme modélise la diffraction dans un milieu homogène en régime linéaire. Les effets de diffraction sont mesurés relativement aux effets non linéaires par le coefficient  $N = \eta^2 / 2\beta M$ . Nous constatons que la diffraction intervient à l'ordre deux en  $\eta$ , qui doit donc être considéré comme

approximativement du même ordre que  $M$  et  $\varepsilon$ . Enfin, le troisième terme traduit la contribution des hétérogénéités sur le champ acoustique en régime linéaire, contribution estimée par le paramètre  $H_c = \varepsilon c_n / \beta M$ .

Cette démonstration permet de retrouver et de connaître exactement les hypothèses de l'équation proposée par Blanc-Benon (2002).

## 3.2. Interprétation physique de l'équation KZ généralisée

### 3.2.1. Interprétation des termes non linéaires

En omettant diffraction et hétérogénéité dans l'équation (30), celle-ci se ramène, après intégration par rapport à la variable  $\tau$  à l'équation de Burgers non dissipative :

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = P \frac{\partial P}{\partial \tau}$$

En variables dimensionnées, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{c_{00}} \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\beta}{\rho_{00} c_{00}^3} p \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (31)$$

Comme le terme  $\beta p / \rho_{00} c_{00}^2$  est petit devant les deux autres termes (le nombre de Mach acoustique est petit, donc les effets non linéaires sont faibles devant la propagation linéaire), l'équation (31) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{c_{00}(1 + \beta v)} \frac{\partial p}{\partial t} = 0,$$

où l'on a remplacé la pression par la vitesse en utilisant la relation d'impédance d'une onde plane (linéaire)  $v = p / \rho_0 c_0$  pour une onde plane. Sous cette forme, on voit que, en régime non linéaire, la vitesse de propagation d'une onde acoustique plane dépend donc de la vitesse particulière (ou, de manière équivalente, de la surpression acoustique  $P = \rho_0 c_0 v$ ) :  $c = c_{00} + \beta v$ . Le coefficient  $\beta = 1 + B/2A$  traduit les deux origines des termes non linéaires : la non-linéarité des équations de bilan (termes

convectifs) pour le coefficient 1, et la non-linéarité de l'équation d'état pour le terme  $B/2A$ . Au cours de la propagation, l'onde devient « supersonique » durant la phase de compression et « subsonique » pendant la phase de détente. Il en résulte une distorsion progressive et cumulative de l'onde au cours de sa propagation (cf. Fig. 24.a, b et c). En pratique, les écarts de vitesse du son sont faibles. Pour un signal d'amplitude 100 Pa dans l'air, l'écart relatif est de  $8,7 \cdot 10^{-4}$ . Dans l'eau, une amplitude de 5 bars conduit à des écarts du même ordre. Ceci est insignifiant sur quelques longueurs d'onde, mais cumulé sur de grandes distances, finit par produire une distorsion très significative.

Le raidissement du front d'onde se traduit dans le domaine spectral par la génération d'harmoniques à des fréquences multiples de la fréquence fondamentale (cf. Fig. 24.e, f et g). Par interaction non-linéaire quadratique, la fréquence fondamentale contribue à la création du premier harmonique. Plus loin, l'interaction non-linéaire quadratique entre le fondamental et le premier harmonique contribue à la création du second harmonique et à la diminution d'amplitude du fondamental. Ainsi, de proche en proche, l'énergie initialement contenue dans le fondamental est transférée vers les harmoniques d'ordre supérieur.



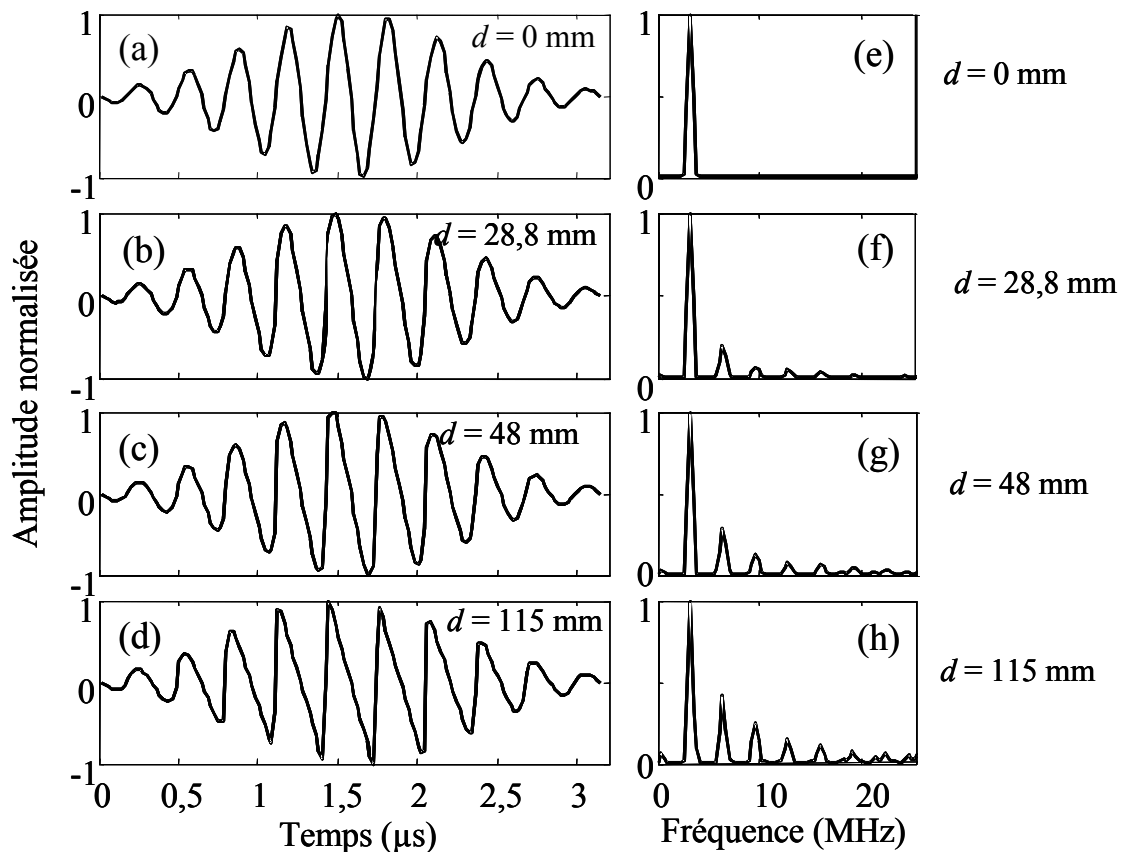


Figure 24. (a), (b), (c) et (d) : Propagation non linéaire dans l'eau d'une onde 1D de fréquence 3,2 MHz, simulée à partir de l'équation de Burgers et d'un algorithme de capture de choc développé par la méthode de Hayes. Le paramètre  $d$  indique la distance parcourue depuis l'émetteur. (e), (f), (g) et (h) : Modules des spectres des signaux précédents.

Lorsque les surpressions rattrapent les dépressions, on atteint la distance de choc (ou distance de discontinuité) (Thurston, 1967) :  $L_c = 1/k\beta M$  (correspondant à  $\sigma = 1$  dans le cas d'une onde monochromatique). Au-delà de la distance de formation de choc, la forme d'onde devient multivaluée, c'est-à-dire qu'à un seul point et à un seul instant peuvent correspondre plusieurs valeurs de la pression, ce qui est physiquement non admissible. Pour recouvrer un profil monovalué, il est nécessaire d'introduire des ondes de choc, c'est à dire des discontinuités reliant entre elles les différentes branches

monovaluées du profil. Il est possible de déterminer la position  $\tau_c$  des chocs à l'aide de la théorie des chocs faibles (Whitham, 1974), dont la formulation géométrique a été donné par Landau : les aires des deux lobes de la solution multivaluée éliminés par l'introduction du choc sont égales (Landau, 1945).

Les chocs sont associés à une dissipation de l'énergie acoustique dépendante de la forme temporelle du signal. En effet, la discontinuité dans le profil de l'onde de choc correspond à des fréquences harmoniques très élevées. Mais dans un gaz, l'onde acoustique ne peut se propager de façon cohérente que si sa longueur d'onde est grande devant le libre parcours moyen des particules. Les très hautes fréquences contenues dans le choc augmentent donc l'agitation thermique et créent un accroissement d'entropie qui dissipe l'énergie, même sans absorption.

### **3.2.2. Interprétation des termes de diffraction**

#### **3.2.2.1. *L'approximation parabolique standard***

L'approximation paraxiale est une approximation des effets de diffraction, qui permet de se ramener à une équation avec une dérivée spatiale d'ordre 1 seulement dans la direction principale de propagation. Ceci constitue un gros avantage numériquement, en permettant de résoudre l'équation par avancement plan par plan depuis la source vers l'infini : on peut donc avoir une méthode de résolution « parabolique » d'un problème d'onde, même si l'équation reste formellement de type hyperbolique. La méthode a donc été très largement appliquée en propagation à longue distance (aérienne ou sous-marine), ainsi qu'en propagation non linéaire, tous cas où des simulations directes s'avèrent coûteuses du fait des très grandes distances de propagation et / ou du caractère large bande des signaux, en particulier dans le cas des ondes de choc.

L'approximation paraxiale peut facilement être retrouvée à partir de l'équation des ondes linéaire en milieu homogène (ici à deux dimensions) :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) = 0$$

Si on exprime cette équation en fonction du temps retardé  $\tau = t - z/c_0$  d'une onde plane se propageant dans la direction axiale, on obtient :

$$2c_0 \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \tau} - c_0^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) = 0$$

L'approximation parabolique standard revient à négliger le terme  $\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$  dans les équations ci-dessus. En effet, il sera négligeable par rapport aux variations sur des échelles de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, variations qui sont déjà prises en compte dans le temps retardé (premier terme de l'équation). Le champ de pression en régime linéaire et en milieu homogène doit alors satisfaire l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

En réécrivant celle-ci dans les variables sans dimensions introduites au chapitre 3.1, on retrouve aisément l'équation KZ sans les termes non linéaires et hétérogènes :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial \sigma} = \frac{\eta^2}{2\beta M} \Delta_{\perp} P$$

La validité de cette approximation peut être précisée en calculant la relation de dispersion correspondante et en la comparant avec celle de l'équation des ondes.

Pour une onde plane monochromatique, le champ de pression en temps retardé s'écrit :

$$P = P_0 \exp \left[ i \left( k_z z + k_x x - \omega t \right) \right] = P_0 \exp \left[ i \left( (k_z - k) z + k_x x - \omega \tau \right) \right]$$

où  $k = \omega/c_0$  est le nombre d'onde. La relation de dispersion dans le cas de l'approximation parabolique standard s'écrit donc :

$$\frac{k_z^{(p)}}{k} = 1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2}{k^2}$$

à comparer avec la relation de dispersion dans le cas de l'équation des ondes :

$$\frac{k_z^{(e)}}{k} = \pm \left( 1 - \frac{k_x^2}{k^2} \right)^{1/2}$$

La relation de dispersion de l'approximation paraxiale (ou parabolique) apparaît donc comme le développement de Taylor au second ordre de la relation de dispersion de l'équation des ondes. Cette dernière est décrite géométriquement par un cercle de rayon  $k$ , tandis que la relation de dispersion parabolique est décrite par la parabole osculatrice à ce cercle au point  $k_x=0$  (Fig. 25).

Représentons les deux relations de dispersion dans un repère  $(k_x, k_z)$  :

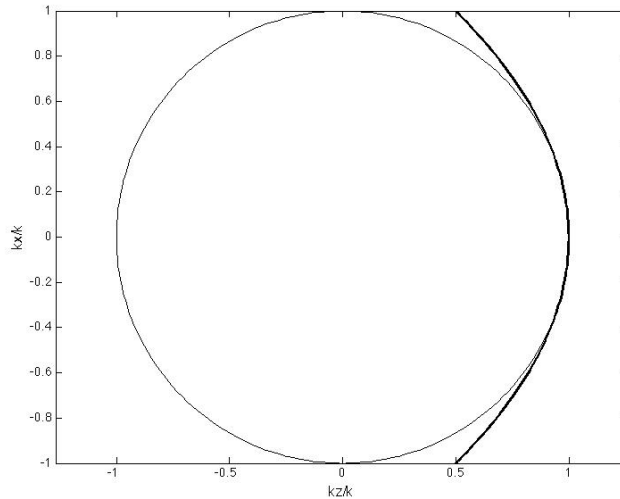


Figure 25. Représentation de la relation de dispersion dans le domaine  $(k_x, k_z)$  calculé avec l'équation des ondes (cercle) et avec l'approximation parabolique (parabole osculatrice)

L'erreur introduite par la relation de dispersion est représentée sur la figure 26 en fonction de l'angle  $\theta = \arcsin(k_x)$  repérant la direction de propagation de l'onde plane par rapport à la direction sélectionnée  $Oz$  :

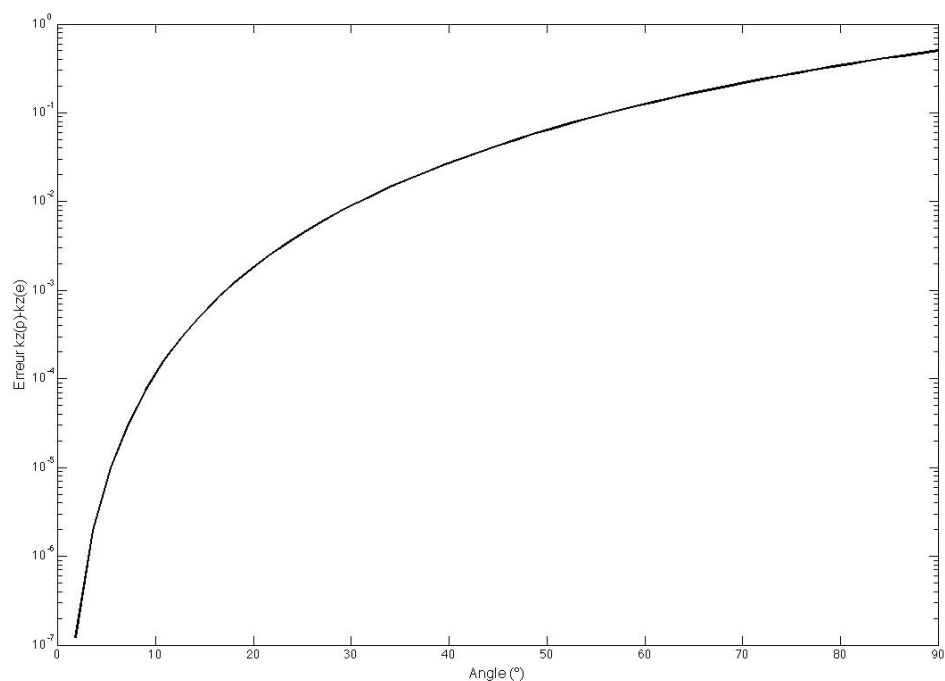


Figure 26. Erreur  $(k_z^{(p)} - k_z^{(e)})/k$  introduite par l'approximation parabolique en fonction de la direction de propagation de l'onde (en °)

On observe clairement une forte augmentation de l'erreur lorsque l'on s'éloigne sensiblement de la direction principale de propagation. En pratique, on considère que l'approximation parabolique standard reste valable jusqu'à un angle de  $15^\circ$  (Claerbout, 1976), ce qui correspond à une erreur de 0,1 % environ (Fig. 26).

Dans le cas d'une source fonctionnant en mode piston de dimension transverse  $a$ , l'approximation paraxiale sera limitée au champ proche de l'axe, sous des angles inférieurs à  $15^\circ$ . Elle ne sera pas non plus valable en champ très proche, lorsque l'on observe les bords de l'émetteur sous des angles supérieurs à  $15^\circ$  (Fig. 27).

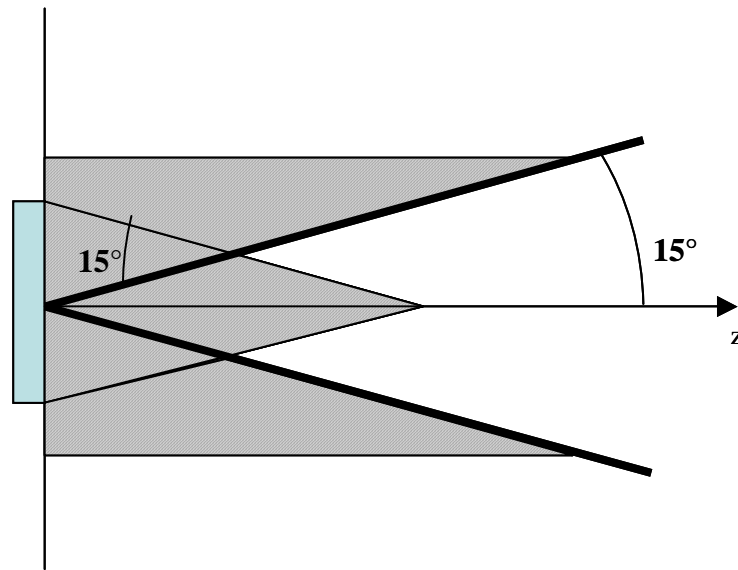


Figure 27. Représentation schématique du domaine de validité (en blanc) de l'approximation parabolique pour une source acoustique

Enfin, nous verrons dans la seconde partie de la présente thèse une extension de l'approximation parabolique valable pour des angles plus élevés, et généralisant l'approximation dite parabolique « grand angle » ou « de Claerbout » au cas non linéaire hétérogène.

### 3.2.2.2. Diffraction et diffusion hétérogène

Dans le cas d'une onde plane (ou quasi plane) diffusée par une hétérogénéité, l'origine physique de la diffraction sera non pas la taille finie de la source mais l'hétérogénéité. L'ordre de grandeur des phénomènes de diffraction dépendra donc de la taille de l'hétérogénéité et de son contraste acoustique par rapport au milieu ambiant. Lorsque la taille de l'hétérogénéité est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde (cas dans lequel on se place durant l'ensemble de la présente étude), l'équation généralisée KZ établie plus haut nous permet immédiatement de quantifier l'ordre de

grandeur de la diffraction induite par la diffusion. Il suffit pour ce faire d'équilibrer le paramètre de diffraction  $\eta^2$  avec le paramètre d'hétérogénéité  $\varepsilon$ .

Dans le cadre de l'expérience présente, nous avons deux sources possibles de diffraction : la diffusion hétérogène ou la diffraction du champ incident, de front d'onde quasi plan (grâce à la technique de synthèse de champ du filtre inverse) mais d'extension spatiale limitée. Le phénomène de diffraction dominant correspondra donc à celui dont le paramètre  $\eta$  associé est le plus grand. Pour la diffraction hétérogène on a donc  $\eta^2 = \varepsilon \approx 0,27$ . Pour la diffraction due à l'extension spatiale limitée de l'onde plane incidente, il convient de prendre comme dimension caractéristique la plus petite des dimensions car c'est dans cette direction que l'onde diffracte le plus, soit ici 1,5 cm (largeur de la fenêtre gaussienne dans la direction  $Oy$ ). A la fréquence fondamentale 1 MHz, on a donc  $\eta^2 = 1/(ka)^2 \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$ . L'expérience est donc bien dimensionnée pour que la diffraction induite par la diffusion hétérogène soit très supérieure à celle résultant de la dimension finie du champ source. Ceci justifie également que, à l'échelle de l'expérience, la diffraction induite par la taille du gabarit dans la direction  $Oy$  est négligeable, et donc que l'on peut comparer l'expérience avec une simulation numérique à deux dimensions seulement.

### 3.2.3. Interprétation des termes hétérogènes

Lorsque l'on néglige dans l'équation KZ généralisée les termes associés à la diffraction et à la non-linéarité, il reste simplement une équation approchée d'onde plane en milieu hétérogène :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial \sigma} = \frac{\varepsilon c_h}{\beta M} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2}$$

qui après intégration devient :

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{\varepsilon c_h}{\beta M} \frac{\partial P}{\partial \tau}$$

En revenant aux variables physiques dimensionnées, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c_0}{1 - \varepsilon c_h} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

On obtient donc une équation de propagation d'onde à une dimension spatiale, en milieu hétérogène, mais dont la célérité du son vaut  $\frac{c_0}{1 - \varepsilon c_h}$ . Lorsque la perturbation

de vitesse du son est faible  $\frac{c_0}{1 - \varepsilon c_h} = c_0(1 + \varepsilon c_h + O(\varepsilon^2)) = c_h + O(\varepsilon^2)$  et l'on retrouve

l'équation exacte d'une onde plane en milieu hétérogène de célérité  $c_h$  se propageant vers les  $z > 0$ . Ceci est évidemment conforme à l'ordre auquel on a établi l'approximation parabolique, en retenant les termes d'ordre  $\varepsilon$  mais négligeant ceux d'ordre  $\varepsilon^2$ . Toutefois, l'erreur sur la vitesse du son et donc la phase de l'onde plane peut être relativement élevée quand  $\varepsilon$  n'est pas très petit (ce qui est le cas dans l'expérience où la fluctuation de vitesse du son entre l'eau et le silicone est de l'ordre de 30%). Afin de garantir une phase correcte pour l'onde plane et minimiser au maximum les erreurs introduites par la modélisation, on peut modifier la définition de  $\varepsilon c_h$  de façon à ce que  $c_0 / (1 - \varepsilon c_h) = c_h$ , soit, tout simplement :

$$\varepsilon c_h = \frac{c_h - c_0}{c_h}$$

Les deux définitions sont équivalentes à l'ordre  $\varepsilon^2$  près et donc le changement peut être fait directement dans l'équation KZ généralisée. Il garantit une phase exacte pour l'onde plane se propageant dans la direction axiale, même en milieu fortement hétérogène. Le gain apporté par cette modification sera quantifié plus loin dans la phase de validation numérique de l'algorithme de discrétisation de l'équation KZ généralisée.



### 3.3. Algorithme de résolution numérique

L'équation KZ généralisée (Eq. (30)) en milieu hétérogène est résolue numériquement à deux dimensions par un schéma numérique dérivé de celui développé antérieurement par Marchiano (2003) et Coulouvrat *et al.* (2003) en milieu homogène prenant en compte le couplage entre diffraction et non-linéarités. Cet algorithme homogène a d'ores et déjà été validé par l'étude des phénomènes suivants :

diffraction de Fresnel non linéaire : validation par des solutions auto-semblables (Coulouvrat *et al.* 2003) ;

focalisation sur des caustiques pli ou cuspidées : validation par des solutions auto-semblables et par comparaison expérimentale (Marchiano 2003, Marchiano 2003a, Marchiano *et al.* 2005) ;

réflexion non linéaire de von Neumann : validation par des solutions analytiques ou auto-semblables (Baskar *et al.* 2007) ou par comparaison expérimentale (Marchiano *et al.* 2007).

Nous rappellerons ici le principe de l'algorithme, puis présenterons les modifications apportées par la prise en compte de l'hétérogénéité du milieu et de l'atténuation. Cette dernière n'est pas prise en compte explicitement dans l'équation modèle, cependant les mesures d'atténuation dans le silicone montrent que celle-ci est loin d'être négligeable. Aussi verrons comment on peut modifier l'algorithme pour l'inclure et comparer quantitativement les résultats numériques aux résultats expérimentaux. Par ailleurs on peut penser à d'autres applications des ondes de choc dans le domaine biomédical (imagerie ou thérapie) pour lesquelles l'atténuation dans les tissus (muscles, graisses..., NCRP 1992) est également importante. Le cas du milieu homogène ayant déjà été validé à de nombreuses reprises, la phase de validation portera uniquement sur la prise en compte des hétérogénéités. Dans un premier temps, celle-ci sera réalisée en régime linéaire par comparaison avec une solution analytique (de l'équation des ondes). La comparaison avec les données expérimentales fera l'objet de la prochaine section (3.4).

### 3.3.1. Principes de l'algorithme

La difficulté principale dans la résolution numérique de la propagation des ondes de choc réside dans le caractère discontinu des solutions recherchées. Les équations de propagation (Burgers, KZ,...) ne sont formellement pas valables au niveau des chocs et doivent être complétées par des relations spécifiques aux discontinuités. Les relations aux discontinuités pour l'équation KZ en milieu homogène sont par exemple explicitées dans Coulouvrat *et al.* 2003. Cette méthode de calcul explicite des chocs («shock fitting») est celle employée dans l'algorithme dit de Pestorius (1974). Une méthode assez généralement employée est la méthode dite de capture de choc qui introduit de la dissipation numérique afin de régulariser la solution. Un exemple bien connu d'application à l'acoustique non linéaire est l'algorithme de MacDonald et Ambrosiano (1987). Enfin, dans certains cas, c'est la dissipation physique (thermovisqueuse par exemple) qui est utilisée pour régulariser la solution (Pestorius *et al.*, 1974). Il s'agit évidemment de la méthode « optimale » car la plus proche de la réalité expérimentale, mais elle peut s'avérer très coûteuse numériquement quand l'amplitude de l'onde est élevée et le milieu peu dissipatif. C'est le cas aussi bien pour le bang sonique dans l'air que pour les ondes de choc dans l'eau, les deux cas qui nous intéressent plus particulièrement ici, pour lesquels le rapport entre le temps de montée du choc et la durée (ou la période) du signal (paramètre qui mesure en milieu homogène l'importance des phénomènes d'absorption) est très petit (ici de l'ordre de 1/100).

Ces considérations ont conduit au développement de l'algorithme de résolution développé précédemment, qui est en fait un algorithme hybride. Par une méthode de type « split-step » (Ames 1977), les effets physiques de diffraction et de non-linéarités sont découplés sur un pas d'avancement. En l'absence de diffraction, l'équation KZ se ramène à l'équation de Burgers non dissipative (cf. section 3.2.1) qui est résolue de manière « exacte », dans le domaine temporel, *via* une détermination explicite de la position des chocs par la méthode de Burgers-Hayes (Burgers 1954, Hayes *et al.* 1969). La partie purement non linéaire de l'algorithme est donc de type « shock fitting ». Au contraire la partie diffraction linéaire est traitée, dans le domaine fréquentiel, par une

discrétisation par différences finies et un schéma implicite dissipatif. Il s'agit donc là d'une méthode de type « shock capturing ». Le couplage entre les deux mécanismes de diffraction d'une part et de non-linéarités d'autre part, est assuré par la répétition de la procédure à chaque pas d'avancement spatial. Dans le cas hétérogène et absorbant, ces deux effets étant eux-mêmes linéaires, ils seront traités en même temps que la partie diffraction.

### 3.3.1.1. Formulation en potentiel

Comme mentionné plus haut, l'une des difficultés de la simulation réside dans le fait que, en présence d'ondes de choc, la pression est discontinue et n'apparaît pas comme une variable adaptée au traitement des chocs. Pour calculer les solutions et la position des chocs, il est préférable d'utiliser une variable intermédiaire plus régulière, qui est la primitive en temps de la pression (Hayes *et al.* 1969) et qui correspond au « potentiel acoustique » dans un fluide irrotationnel en régime linéaire :

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \Leftrightarrow \phi = \int_0^{\tau} P d\tau.$$

Même si en régime non linéaire, le potentiel acoustique n'est plus exactement la primitive de la pression, on conservera la dénomination « potentiel » dans la présente étude. Contrairement à la pression, cette nouvelle variable  $\phi$  est continue. Les discontinuités de la forme d'onde en pression correspondent à des points anguleux en potentiel, qui sont plus faciles à calculer numériquement. On réduira par exemple fortement, dans les formulations fréquentielles, les oscillations de Gibbs résultant de la transformée de Fourier discrète d'une fonction discontinue. En outre, la formulation en potentiel apparaît naturellement dans la méthode de résolution exacte de l'équation de Burgers (voir ci-dessous 3.3.1.3), et s'avère donc comme une variable particulièrement adaptée.

L'équation KZ en milieu hétérogène est la suivante une fois formulée en potentiel :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\eta^2}{2\beta M} \Delta_{\perp} \phi + \frac{\varepsilon c_h}{\beta M} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2}$$

### 3.3.1.2. Séparation numérique des non-linéarités et de la diffraction

La technique numérique de split-step (au premier ordre) revient à séparer, sur un pas d'avancement  $\Delta\sigma$ , les termes purement non linéaires d'une part, et les termes de diffraction et hétérogènes (linéaires) d'autre part. Connaissant le potentiel  $\phi(\sigma, \tau, X)$  dans un plan donné, on veut le calculer dans le plan numérique suivant  $\phi(\sigma + \Delta\sigma, \tau, X)$ . Dans un premier temps, on calcule l'évolution du potentiel sous l'action des seules non-linéarités. Ceci donne la valeur « intermédiaire »  $\tilde{\phi}(\sigma, \tau, X)$  qui est solution au point  $\sigma + \Delta\sigma$  de l'équation de Burgers non dissipative :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2$$

avec la condition « initiale »  $\phi(\sigma, \tau, X)$  au point  $\sigma$ . La deuxième étape revient à faire évoluer cette valeur intermédiaire, toujours sur le même pas  $\Delta\sigma$ , sous l'action des autres termes linéaires. L'estimation finale sera donc la solution de l'équation KZ linéarisée en milieu hétérogène :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial \sigma} = \frac{\eta^2}{2\beta M} \Delta_{\perp} \phi + \frac{\varepsilon c_h}{\beta M} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2}$$

avec la condition « initiale »  $\tilde{\phi}(\sigma, \tau, X)$  au point  $\sigma$ . Cette méthode de séparation, très couramment utilisée (notamment pour traiter les problèmes multi-dimensionnels) est précise à l'ordre 1 par rapport à la variable  $\Delta\sigma$ .

### 3.3.1.3. Traitement des non-linéarités : la méthode de Burgers-Hayes

La méthode que nous appelons de Burgers-Hayes est une solution exacte de l'équation de Burgers non dissipative formulée en potentiel qui permet de déterminer de manière très simple les chocs. La formulation théorique de cette méthode est due à Burgers (1954) lui-même, puis a été utilisée par Hayes *et al.* (1969) afin de déterminer graphiquement la position des ondes de choc à l'issue d'un algorithme de calcul du bang sonique. La méthode a finalement été codée numériquement par Coulouvrat (2003), également pour le calcul du bang sonique (Blumrich *et al.*, 2005), et enfin utilisée dans un algorithme de simulation d'équations de type KZ par Marchiano *et al.* (2003). L'équation de Burgers non dissipative en potentiel :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2$$

avec la condition « initiale »  $\phi(\sigma = 0, \tau) = \phi_0(\tau)$  a pour solution exacte

$$\phi(\sigma, \tau) = \phi_0(\theta) - 0.5\sigma P_0^2(\theta)$$

avec :

$$\tau = \theta - \sigma P_0(\theta) \quad \text{et} \quad P_0(\tau) = \frac{\partial \phi_0(\tau)}{\partial \tau}.$$

Cette solution généralise pour le potentiel la solution de Poisson bien connue  $P(\sigma, \tau) = P_0(\theta)$  (Blackstock and Hamilton, 1998). Les chocs apparaissent pour les valeurs de  $\sigma$  telles que le changement de variable  $\theta \rightarrow \tau$  entre la variable caractéristique  $\theta$  et la variable physique  $\tau$  n'est plus inversible. Alors la pression et le potentiel sont multivalués. La solution est rendue monovaluée par l'introduction de chocs. Pour une formulation en pression les chocs doivent satisfaire la loi des aires égales (Landau 1945). Toutefois, pour une formulation en potentiel, la valeur physiquement admissible du potentiel est simplement le maximum des valeurs monovaluées, ceci afin de satisfaire à la fois la continuité du potentiel et la loi des aires

égales en accord avec le second principe de la thermodynamique (Coulouvrat 2003). Numériquement le calcul du maximum de plusieurs valeurs est une opération élémentaire qui rend la formulation en potentiel particulièrement efficace. Les chocs sont simplement déterminés par les points d'intersection des différentes « branches » de la solution multivaluée. Le principe de la méthode est illustré par la figure 28 dans le cas où la déformation non linéaire de la forme d'onde initiale  $P_0(\tau) = \cos(\tau)\exp(-\tau^2/10)$  conduit à la formation de 2 chocs à la distance  $\sigma = 6$ .

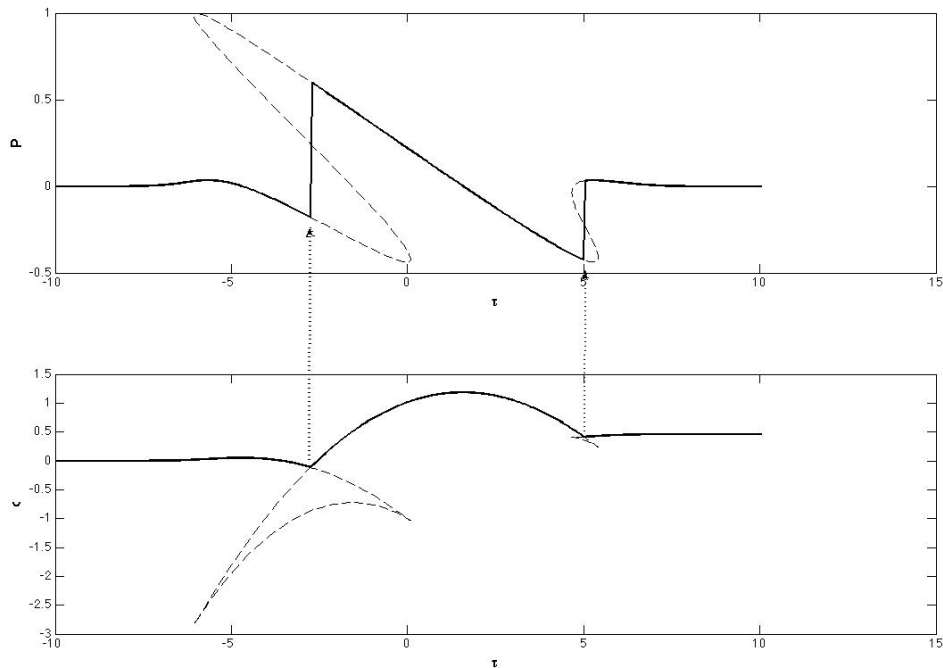


Figure 28. Principe de la méthode de Hayes : en haut la pression, en bas le potentiel. Lignes en tirets : solutions de Poisson multivaluées. Lignes continues : solutions monovaluées (maximum pour le potentiel). La correspondance entre les chocs pour le potentiel (points anguleux) et la pression (discontinuités) est repérée par les flèches.

### 3.3.2. Schéma de résolution à pas fractionnés en milieu hétérogène

### 3.3.2.1. Organigramme du schéma numérique en milieu hétérogène

Nous résolvons numériquement l'équation KZ linéaire en milieu hétérogène exprimée en potentiel :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial \sigma} = \frac{\eta^2}{2\beta M} \Delta_{\perp} \phi + \frac{\varepsilon c_h}{\beta M} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \quad (32)$$

Nous passons dans le domaine fréquentiel par une transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\sigma, X, \omega) &= TF \{ \phi(\sigma, X, t) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\sigma, X, t) \exp(-j\omega t) dt \\ \phi(\sigma, X, t) &= TF \{ \hat{\phi}(\sigma, X, \omega) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(\sigma, X, \omega) \exp(+j\omega t) dt \end{aligned}$$

si bien que  $\partial \phi / \partial \tau$  et  $\partial^2 \phi / \partial \tau^2$  deviennent respectivement dans l'espace de Fourier  $j\omega \hat{\phi}$  et  $-\omega^2 \hat{\phi}$ . La transformée de Fourier de l'équation (32) s'écrit alors :

$$(j\omega) \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \sigma} = -\frac{\omega^2 \varepsilon c_h}{\beta M} \hat{\phi} + \frac{\eta^2}{2\beta M} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial X^2}.$$

Le terme hétérogène en  $-\omega^2 \hat{\phi}$  correspond à un terme de déphasage associé à la variation de vitesse de phase liée à l'hétérogénéité locale du milieu (cf section 3.2.3). La prise en compte précise de ce terme est essentielle pour décrire correctement le déphasage hétérogène sans introduire de dissipation numérique. A cet effet, plutôt qu'une discrétisation numérique, il convient donc d'introduire la solution analytique correspondant au déphasage d'une onde plane. En supposant que le pas de discrétisation  $\Delta \sigma$  est suffisamment petit pour que le coefficient  $\varepsilon c_h$  puisse être supposé constant par morceaux on posera :

$$\hat{\phi}(\sigma, X, \omega) = \hat{\psi} \exp\left(\frac{j\omega \varepsilon c_h}{\beta M} \sigma\right).$$

En substituant, il vient donc l'équation suivante pour  $\hat{\psi}$  :

$$(j\omega) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \sigma} = \frac{\eta^2}{2\beta M} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial X^2}$$

L'équation ci-dessus est résolue par un schéma aux différences finies implicite (inconditionnellement stable) suivant la méthode déjà employée lors de la résolution numérique de l'équation parabolique « standard » en milieu hétérogène (cf. la bibliographie ci-dessus). On note  $\omega_l$  les pulsations discrétisées (indicées par  $l$ ),  $\sigma^k = (k-1)\Delta\sigma$  les points de l'axe discrétisé (avec  $k = [1, N_\sigma]$ ),  $X_i = (i-1)\Delta X$  les points de la direction transverse discrétisée (avec  $i = [1, N_X]$ ), et enfin  $\hat{\phi}_{i,l}^k = \hat{\phi}(\sigma^k, X_i, \omega_l)$  et  $\hat{\psi}_{i,l}^k = \hat{\psi}(\sigma^k, X_i, \omega_l)$  les valeurs des deux potentiels aux points de discrétisation. On approche la dérivée par rapport à la variable axiale  $\sigma$  par un schéma aux différences finies, décentré et précis au premier ordre :

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{i,l}^k}{\partial \sigma} = \frac{\hat{\psi}_{i,l}^k - \hat{\psi}_{i,l}^{k-1}}{\Delta\sigma} + O(\Delta\sigma)$$

La dérivée seconde par rapport à  $X$  est approchée par un schéma aux différences finies centré précis au deuxième ordre :

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}_{i,l}^k}{\partial X^2} = \frac{\hat{\psi}_{i-1,l}^k - 2\hat{\psi}_{i,l}^k + \hat{\psi}_{i+1,l}^k}{\Delta X^2} + O(\Delta X^2)$$

Ceci nous permet d'approcher l'équation de propagation linéaire paraxiale en milieu hétérogène dans le domaine fréquentiel par :

$$\hat{\psi}_{i,l}^k \left( \frac{j\omega_l}{\Delta\sigma} + \frac{\eta^2}{\beta M \Delta X^2} \right) - (\hat{\psi}_{i+1,l}^k + \hat{\psi}_{i-1,l}^k) \left( \frac{\eta^2}{2\beta M \Delta X^2} \right) = \hat{\psi}_{i,l}^{k-1} \left( \frac{j\omega_l}{\Delta\sigma} \right) \quad (33)$$

Tous les coefficients hétérogènes sont calculés au point où l'on réalise l'approximation, c'est-à-dire au point de coordonnées  $(\sigma^k, X_i)$ . L'équation 33 se met sous la forme d'une matrice tri-diagonale  $\mathbf{A}^{k,l}$ .  $\hat{\psi}_{\bullet,j}^k = \hat{\psi}_{\bullet,j}^{k-1}$  où le coefficient sur la diagonale principale vaut  $\left( 1 - \frac{j\eta^2\Delta\sigma}{\omega_l\beta M\Delta X^2} \right)$  et celui sur les deux autres diagonales vaut



$\left( \frac{j\eta^2 \Delta\sigma}{2\omega_l \beta M \Delta X^2} \right)$ . L'inversion de ce système (par la méthode de Thomas) pour chaque

fréquence  $\omega_l$  permet de déterminer le vecteur  $\hat{\psi}_{\bullet J}^k$  associé au champ dans le plan  $\sigma = \sigma^k$  connaissant le vecteur champ  $\hat{\psi}_{\bullet J}^{k-1}$  correspondant au plan précédent  $\sigma = \sigma^{k-1}$ .

On avance ainsi plan par plan. Enfin, on revient au potentiel par l'opération  $\hat{\phi}(\sigma, X, \omega) = \hat{\psi} \exp\left(\frac{j\omega \varepsilon c_h}{\beta M} \Delta\sigma\right)$ . Dans le cas où l'atténuation physique est importante

(dans le silicone), on multiplie également le champ par le coefficient d'atténuation d'une onde plane sur la distance  $\Delta\sigma$ . Il est à remarquer que ceci est un des avantages du passage dans le domaine fréquentiel, qui permet d'implémenter très simplement des lois d'absorption expérimentales de milieux complexes (comme ici pour le silicone, avec un coefficient d'absorption proportionnel à la fréquence). Enfin les passages entre les domaines fréquentiels et temporels sont assurés par des algorithmes de transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform, FFT).

Une étude classique de dispersion numérique permet de montrer que le schéma numérique est inconditionnellement stable, précis au premier ordre et dissipatif (à cause de la discrétisation de la dérivée par rapport à la variable  $\sigma$ ). La relation de dispersion est évidemment exacte pour l'onde plane (nombre d'onde transverse nulle) et l'erreur introduite par la discrétisation numérique augmente avec le nombre d'onde transverse. Il serait possible d'obtenir un schéma précis au second ordre et non dissipatif en utilisant un schéma de Crank-Nicholson. Toutefois, le schéma au premier ordre à l'avantage de dissiper essentiellement les grands nombres d'onde transverses, qui sont de toute façon mal décrits par l'approximation parabolique. Pour une source de type piston avec une discontinuité sur l'amplitude, des études antérieures (Lee, 1993) ont montré qu'en champ très proche, quand la pression varie très rapidement, il est préférable d'utiliser un schéma au premier ordre afin de dissiper ces grandes fréquences spatiales. En champ plus lointain, en revanche, le schéma de Crank-Nicholson, est préférable. Le cas qui nous intéresse ici est similaire, les variations spatiales venant de la discontinuité géométrique du milieu au niveau de l'hétérogénéité.

La résolution numérique de l'équation nécessite trois conditions aux limites en espace. Les dérivées par rapport à la variable axiale étant au plus d'ordre 1, une des conditions aux limites est la condition d'initialisation de l'algorithme, qui suppose que le champ de pression est connu dans le plan initial  $\sigma = \sigma^1 = 0$ . Les dérivées par rapport à la variable transverse étant au plus d'ordre 2, deux conditions aux limites sur les bords latéraux du domaine sont nécessaires. Ont été programmés les cas d'un champ de pression nul (champ libre) ou une onde plane imposée (onde plane incidente). En prenant un domaine de calcul assez grand, les ondes diffusées par les hétérogénéités ne viennent impacter les bords du domaine de calcul que sous des angles relativement forts. Or du fait de la dissipation numérique du schéma, l'amplitude de ces ondes sont très faibles. En conséquence une condition aux limites de type onde plane imposée aux bords du domaine s'avère adéquate en pratique.

La figure 29 montre l'organigramme simplifié de l'ensemble de l'algorithme de résolution numérique.

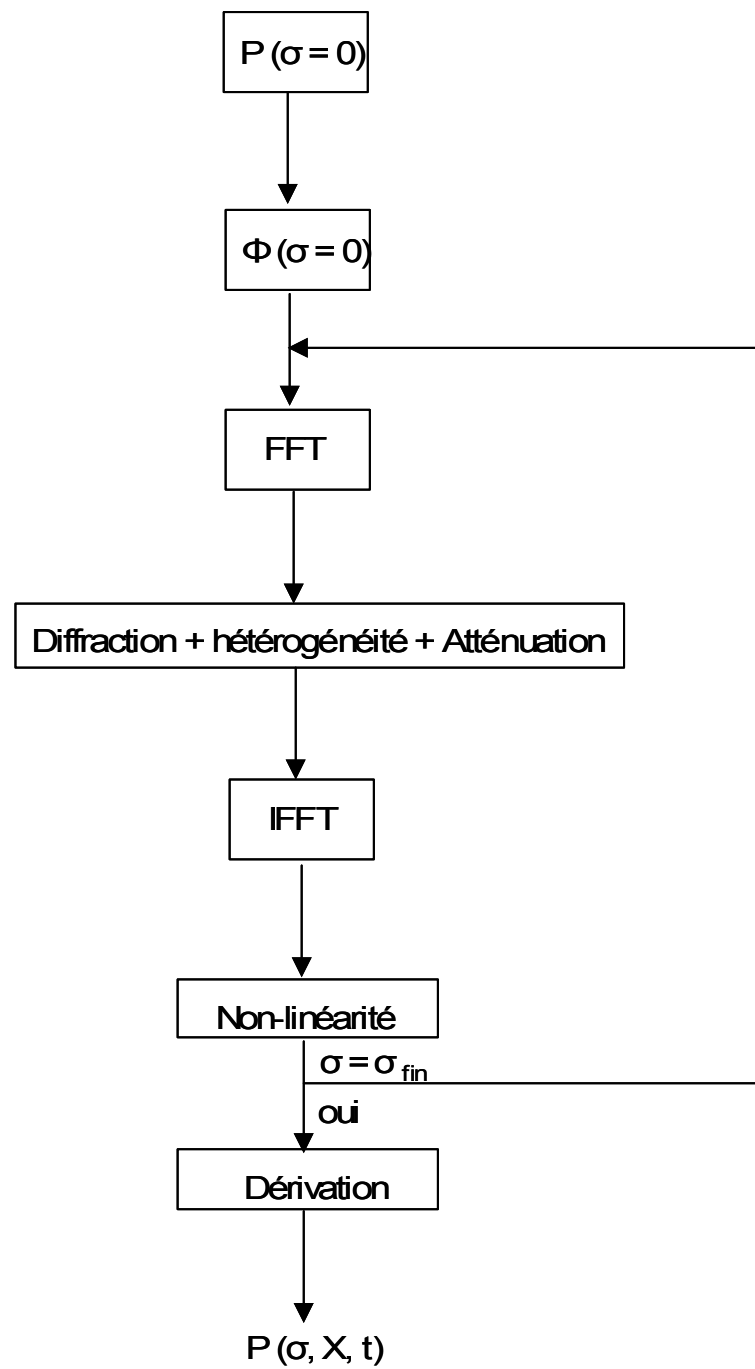


Figure 29. Schéma de la résolution numérique

### 3.3.2.2. Résolution de l'équation paraxiale en milieu hétérogène en régime linéaire

Les effets de diffraction et d'hétérogénéité sont traités sur un même pas  $\Delta\sigma$  dans le domaine fréquentiel où  $\hat{\phi} = TF\{\phi\}$

L'équation de diffraction  $j\omega \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \sigma} = \frac{\eta^2}{2\beta M} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial X^2}$  est résolue par un schéma aux

différences finies implicite inconditionnellement stable. On approche la dérivée par-rapport à  $\sigma$  par un schéma aux différences finies décentré précis au premier ordre :

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \sigma} = \frac{\hat{\phi}_{i,j}^k - \hat{\phi}_{i,j}^{k-1}}{\Delta\sigma} + O(\Delta\sigma) \text{ pour } k = [2, N_k].$$

La dérivée par-rapport à  $X$  est approchée par un schéma aux différences finies centré précis au deuxième ordre :

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial X^2} = \frac{\hat{\phi}_{i-1,j}^k - 2\hat{\phi}_{i,j}^k + \hat{\phi}_{i+1,j}^k}{\Delta X^2} + O(\Delta X^2) \text{ pour } i = [2, N_x - 1]$$

On peut finalement approcher l'équation parabolique en milieu hétérogène par l'équation discrétisée suivante :

$$\phi_{i,j}^k \left( \frac{j\omega}{\Delta\sigma} + \frac{2}{\Delta X^2} \right) + (\phi_{i+1,j}^k + \phi_{i-1,j}^k) \left( -\frac{1}{\Delta X^2} \right) = \phi_{i,j}^{k-1} \left( \frac{j\omega}{\Delta\sigma} \right) \exp(j\omega K \Delta\sigma)$$

pour  $i = [2, N_x - 1]$ ,  $j = [2, N_t]$  et  $k = [2, N_z]$

Dans un milieu atténuant, l'équation précédente s'écrit :

$$\phi_{i,j}^k \left( \frac{j\omega}{\Delta\sigma} + \frac{2}{\Delta X^2} \right) + (\phi_{i+1,j}^k + \phi_{i-1,j}^k) \left( -\frac{1}{\Delta X^2} \right) = \phi_{i,j}^{k-1} \left( \frac{j\omega}{\Delta\sigma} \right) \exp(j\omega K \Delta\sigma) \exp(\alpha L_c \Delta\sigma)$$

Cette équation nécessite trois conditions aux limites en espace : i) sur la frontière en  $k=1$  et  $i = [1, N_x]$ , le champ est toujours celui contenu dans  $\phi$  le plan initial, ii) sur la frontière en  $i=1$  et  $k = [1, N_z]$ , le champ imposé s'écrit  $\phi_{1,j}^k = \phi_{1,j}^{k-1}$  (qui correspond à une

condition onde plane. Les conditions aux limites ne sont pas corrigés par la non-linéarité compte-tenu des distances de propagation), iii) les mêmes conditions aux limites sont proposées sur la frontière en  $i=N_x$  et  $k=[1, N_z]$ . Nous pouvons bien entendu imposé d'autres conditions aux limites en  $i=1$  et  $i=N_x$ , un exemple sera montré dans le chapitre 2.

Dans un plan  $z$  fixé à une fréquence, l'équation discrétisée avec les conditions aux limites peut se mettre sous la forme d'un système matriciel où la matrice est de taille  $N_x$  :  $A\phi_{i,j}^k = B\phi_{i,j}^{k-1}$  où les matrices  $A$  et  $B$  sont de coefficients constants.

Pour connaître le potentiel  $\phi_{i,j}^k$ , il faut inverser le système matriciel. La matrice  $A$  étant tri-diagonale, un algorithme de Thomas est utilisé pour la résolution numérique. Le potentiel sur tous les nœuds du maillage est calculé plan par plan. Pour chaque nouveau plan, la solution est calculée fréquence par fréquence en inversant pour chaque couple  $(j,k)$  la matrice.

Nous calculons maintenant l'erreur d'approximation du schéma numérique en milieu hétérogène et en régime linéaire à deux dimensions.

A cette fin, nous utilisons un cas test de référence, pour lequel nous connaissons une solution analytique, qui est la diffusion linéaire d'une onde plane monochromatique par un cylindre mou de rayon  $a$  (Fig. 30 ). La vitesse du son dans le milieu environnant est  $c_0$  et celle dans le cylindre est  $c_h$ .

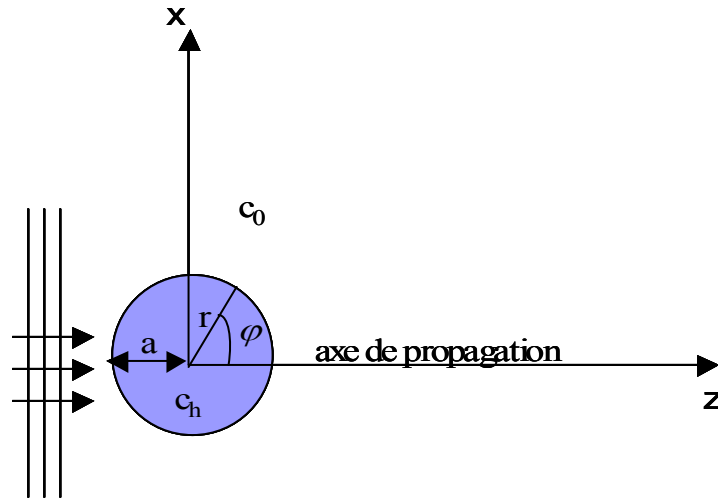


Figure 30. Diffusion d'une onde plane par un cylindre : géométrie

Ce problème a une solution analytique en régime fréquentiel (équation de Helmholtz) :

$$\nabla^2 P + k^2 P = 0$$

où  $k$  est le nombre d'onde dans chaque milieu.

Compte-tenu de la symétrie du problème, l'équation est écrite en coordonnées cylindriques  $(r, \varphi)$ . La solution est recherchée dans un premier temps à variables séparées pour faciliter les calculs. Les équations séparées, vérifiées par la solution en pression  $P = R(r)\Theta(\varphi)$ , s'écrivent (Morse and Ingard, 1968) :

$$\frac{d^2 \Theta}{d \varphi^2} + m^2 \Theta = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0$$

L'expression de la pression dépend des fonctions  $\Theta$  et  $R$ . Par périodicité angulaire, La solution pour  $\Theta$  est évidemment une combinaison linéaire des fonctions  $\exp(\pm jm \varphi)$ . Par périodicité sur un tour, on a évidemment que  $m$  doit être entier, et par symétrie  $\varphi \rightarrow -\varphi$ , la fonction  $\Theta$  doit être paire donc proportionnelle à  $\cos(m \varphi)$ . La

solution pour  $R$  s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions de Bessel  $J_m(kr)$  et de Neumann  $N_m(kr)$ . La combinaison dépend de l'onde en pression. Dans notre problème, nous devons écrire les expressions de l'onde incidente, de l'onde réfléchie mais aussi de l'onde transmise car le cylindre n'est pas rigide (cf. Morse and Ingard, 1968 pour le cas du cylindre rigide).

L'onde incidente est décrite sous la forme d'une superposition d'ondes cylindriques :

$$P_i = P_0 \left( J_0(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} i^m \cos(m\varphi) J_m(kr) \right)$$

L'onde réfléchie doit satisfaire la condition de rayonnement de Sommerfeld à l'infini, donc s'exprime uniquement avec les fonctions de Hankel de première espèce (avec la convention choisie ici  $\exp(+j\omega t)$ )  $H_m^1(kr) = J_m(kr) - jN_m(kr)$ . La solution de l'onde réfléchie s'écrit donc :

$$P_r = P_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^1(kr) \cos(m\varphi)$$

L'onde transmise dans le cylindre doit être bornée au centre de celui-ci, donc s'exprime uniquement en avec les fonctions de Bessel  $J_m(kr)$  :

$$P_t = P_0 \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_m(kr) \cos(m\varphi)$$

Les coefficients  $A_m$  et  $B_m$  sont déterminés en écrivant les conditions de continuité de la vitesse particulière ( $u$ ) et la pression ( $p$ ) à la surface du cylindre, soit :

$$u_i + u_r = u_t$$

$$p_i + p_r = p_t$$

En explicitant ces conditions on trouve finalement :

$$A_m = 2j^m \frac{\rho_1 c_1 J_m(k_1 a) [J_{m+1}(k_2 a) - J_{m-1}(k_2 a)] - \rho_2 c_2 J_m(k_2 a) [J_{m+1}(k_1 a) - J_{m-1}(k_1 a)]}{\rho_2 c_2 J_m(k_2 a) [H_{m+1}(k_1 a) - H_{m-1}(k_1 a)] - \rho_1 c_1 H_m(k_1 a) [J_{m+1}(k_2 a) - J_{m-1}(k_2 a)]}$$

$$B_m = 2j^m \frac{J_m(k_1 a)}{J_m(k_2 a)} + A_m \frac{H_m(k_1 a)}{J_m(k_2 a)}$$

où  $k_1 = 2\pi f / c_0$  et  $k_2 = 2\pi f / c_h$  sont les nombres d'onde respectivement du milieu environnant et du cylindre, et où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les masses volumiques respectivement du milieu environnant et du cylindre.

Pour comparer les résultats analytiques aux résultats numériques, les expressions de  $P_i$ ,  $P_r$  et  $P_t$  sont ensuite calculées en variables cartésiennes avec les changements de variables suivants :

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \quad \text{et} \quad \tan(\varphi) = \frac{x}{z}.$$

Nous comparons maintenant le résultat de la simulation en approximation parabolique avec la solution analytique de l'équation des ondes. Cette comparaison permettra d'estimer l'erreur introduite par l'approximation paraxiale dans le cas d'un milieu hétérogène. Les simulations sont réalisées pour une onde plane incidente de fréquence 1 MHz. La figure 31 présente l'évolution de la pression sur l'axe de propagation pour différents rayons du cylindre ( $a = \lambda ; 2\lambda$ ) (respectivement première et deuxième colonne) et différents contrastes de vitesse du son  $(c_h - c_0)/c_h = -0,03 ; -0,3$  (respectivement première et deuxième ligne). Les résultats sont calculés analytiquement (trait plein), simulés avec l'approximation parabolique en milieu hétérogène avec le terme hétérogène « original »  $H_c \propto (c_h - c_0)/c_0$  (tirets) ou corrigé  $H_c \propto (c_h - c_0)/c_h$  (pointillés) afin de retrouver la phase exacte de l'onde plane.



Le pas utilisé dans les simulations numériques dans la dimension transverse est égal à  $\lambda/25$  et celui utilisé dans la direction axiale est égal à  $\lambda/75$ . Ce choix sera justifié dans la partie suivante.

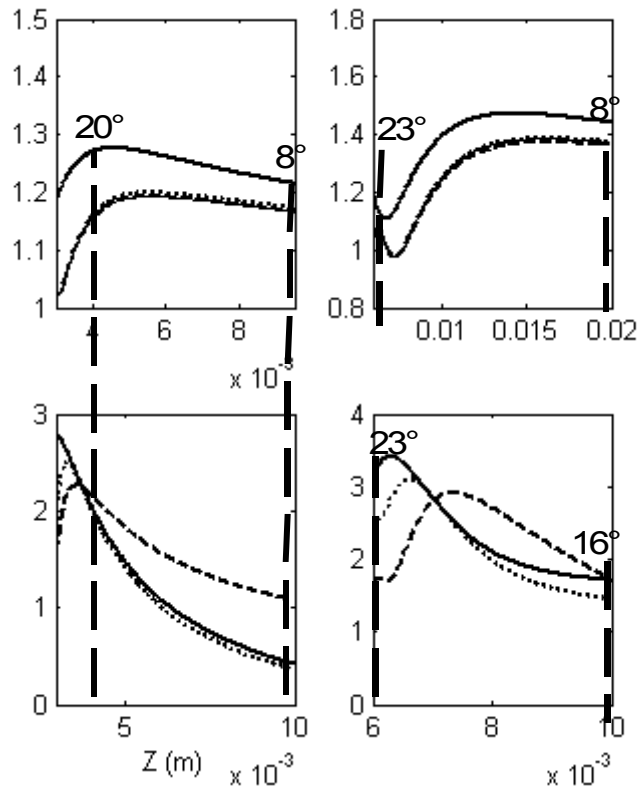


Figure 31. Diffusion d'une onde plane dans l'eau par un cylindre. Evolution de la pression sur l'axe de propagation calculée analytiquement (trait plein), simulée à partir du terme hétérogène initial (tirets) ou corrigé (pointillés). Le contraste de vitesse est égal à 3 % (première ligne) ou 30 % (deuxième ligne). Le rayon du cylindre est égal à  $\lambda$  (première colonne) ou  $2\lambda$  (deuxième colonne). Les champs sont tous représentés à partir de  $z=a$ .

Le contraste de vitesse le plus faible (première ligne) est de l'ordre de grandeur (quelques %) de celui observé dans le corps humain ou dans l'atmosphère (fluctuations de température de quelques degrés).

Nous observons tout d'abord que la modification du coefficient  $H_c$  ne joue presque aucun rôle pour ce contraste de vitesse quel que soit le diamètre. En effet, la différence entre les deux valeurs est du second ordre, donc ici totalement négligeable.

L'erreur en amplitude entre les deux résultats numériques et le calcul analytique est d'autant plus grande que la distance  $z$  est petite. Elle est environ égale à 7% sur le maximum d'amplitude et égale à 3% sur le dernier point de calcul pour chaque diamètre. Cette différence s'explique par l'angle sous lequel l'hétérogénéité est vue par rapport à l'axe de propagation  $\tan \theta = \frac{a}{z}$  (tirets verticaux sur la figure 31). Le dernier point de calcul correspond à un angle  $\theta = 8^\circ$  qui appartient au domaine de validité de l'équation KZ. Proche du cylindre, l'angle environ égal à  $20^\circ$  est à la limite du domaine de validité de l'équation KZ. Remarquons que le maximum d'amplitude dû à l'effet de lentille joué par le cylindre est décalé en approximation parabolique : en approchant la relation de dispersion exacte de l'équation des ondes (cercle) par la parabole osculatrice (approximation parabolique), on surestime le nombre d'onde axial, donc on ralentit la vitesse de phase axiale des ondes, et ce d'autant plus que les ondes se propagent sous des angles élevés. Le déphasage sur le maximum d'amplitude reste de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde pour chaque taille d'hétérogénéité.

Dans le cas du contraste de vitesse le plus fort (deuxième ligne) correspondant à celui de nos expériences, nous observons une très nette différence sur les deux résultats numériques. Plus la taille de l'hétérogénéité est grande, plus l'effet de la modification du terme hétérogène est évident. Dans les deux cas, la correction du terme hétérogène améliore sensiblement les résultats. Ainsi, l'erreur sur le maximum d'amplitude est environ égale à 10 % entre la solution analytique et le résultat numérique obtenu à partir du coefficient hétérogène corrigé pour chaque diamètre. La différence en amplitude est plus forte dans le cas du résultat obtenu à partir du coefficient hétérogène non modifié (18 % pour le plus petit diamètre et 15 % pour le plus grand diamètre).

Le déphasage sur le maximum d'amplitude calculé derrière l'hétérogénéité de rayon égal à la longueur d'onde est environ égal à  $\lambda/3$  dans le cas où le terme hétérogène est corrigé alors qu'il vaut environ  $\lambda/2$  dans le cas où le terme hétérogène

n'est pas corrigé. Derrière l'hétérogénéité de rayon  $2\lambda$ , la différence entre les deux modélisations est plus significative : le déphasage sur le maximum d'amplitude est égal à  $\lambda/3$  si le terme hétérogène est corrigé et  $\lambda$  si le terme hétérogène n'est pas corrigé.

La figure 32 représente l'évolution de la pression sur la direction transverse mesurée à 9,3 mm derrière l'hétérogénéité de rayon égal à  $2\lambda$  avec un contraste de vitesse égal à 3 % (première ligne) ou 30 % (deuxième ligne). Les lignes en tirets représentent la position du point sous lequel le cylindre est vu sous un angle de  $15^\circ$ .

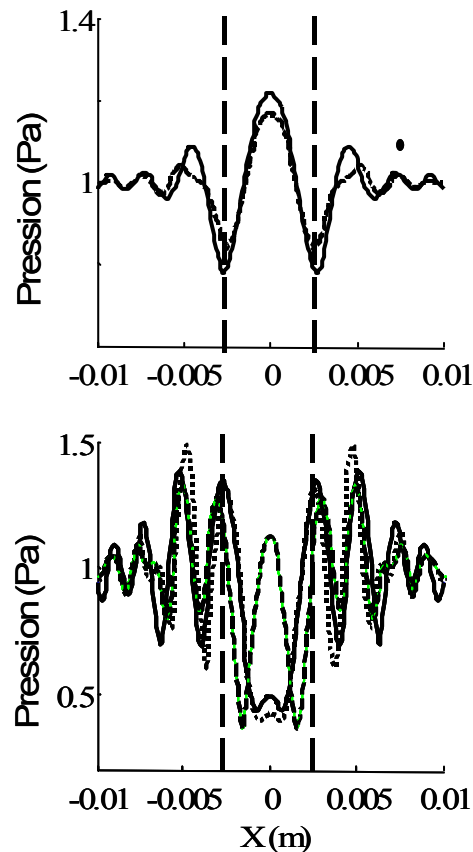


Figure 32. Diffusion d'une onde plane dans l'eau à 1 MHz par un cylindre de rayon  $2\lambda$ . Evolution transversale de la pression à  $z = 9,3$  mm calculée analytiquement (trait plein), ou simulée à partir du terme hétérogène initial (tiret) ou corrigé (pointillé). Le contraste de vitesse est égal à 3 % (première ligne) ou 30 % (deuxième ligne).

Dans le cas du contraste de vitesse faible égal à 3%, la position et la largeur du lobe principal et des lobes secondaires est assez bien modélisée (avec le terme hétérogène modifié ou non), même si l'amplitude est légèrement sous estimée.

Dans le cas du contraste de vitesse le plus fort égal à 30 %, la simulation numérique avec le terme hétérogène non modifié (en tiret) est complètement en défaut et ne simule ni la phase ni l'amplitude de la pression mesurée à  $z = 9,3$  mm. Par contre, la simulation avec le terme hétérogène modifié est en bon accord avec le résultat analytique sur l'axe de propagation ainsi que sur les deux premiers lobes.

Par conséquent, cette comparaison montre que la simulation numérique en approximation parabolique permet de décrire avec une précision raisonnable la diffusion d'une onde plane par une hétérogénéité, au moins au voisinage de la direction de propagation, à condition de prendre en compte la modification du terme hétérogène qui s'avère primordiale afin de décrire correctement la phase de l'onde. L'équation KZ en milieu hétérogène sans la correction ne peut être utilisée que pour des contrastes de vitesse très faibles (de l'ordre de quelques pourcents).

Nous justifions maintenant le choix du maillage utilisé précédemment en étudiant la convergence en maillage des solutions numériques.

Pour assurer la discrétisation et le couplage (dans le schéma à pas fractionné) des effets de diffraction, hétérogénéité, atténuation d'une part et de non-linéarité d'autre part, le pas spatial doit être suffisamment petit. Toutefois, l'approximation parabolique intègre, *via* le temps retardé, les variations axiales de l'ordre de la longueur d'onde. Les distances caractéristiques sont alors la distance de formation de choc (pour les effets non linéaires), la distance de Rayleigh (pour la diffraction) ou la distance d'absorption. Dans la direction transverse, la distance caractéristique est la dimension de la source. En régime haute fréquence, toutes ces distances sont très grandes devant la longueur d'onde, et l'approximation parabolique permet donc un maillage spatial à une échelle nettement plus grande que la longueur d'onde.

Dans le cas présent, ceci n'est pas possible car les hétérogénéités sont de l'ordre de la longueur d'onde. Même si les effets de diffraction induite sont modérés car le contraste de vitesse du son est faible, il est de toute façon nécessaire de discrétiser la géométrie de l'hétérogénéité. On voit là une limite bien connue des méthodes numériques aux différences finies, qui sont mal adaptées pour prendre en compte des géométries non alignées sur les coordonnées. Afin d'éviter des motifs hétérogènes en marche d'escalier qui introduirait une diffraction artificielle, il faut donc mailler suffisamment fin pour s'approcher le plus possible de la simple géométrie de l'hétérogénéité, ici un cylindre. La figure 33 représente à titre d'exemple un demi-cylindre de rayon une longueur d'onde (1,5 mm) avec une discrétisation grossière (en

haut) et plus fine (en bas). Il est clairement visible sur la figure 33 qu'un pas spatial égal à une fraction de rayon ne sera pas suffisant pour éviter une interaction entre l'onde acoustique et les discontinuités liées à la discrétisation du cylindre. Il faut donc que les motifs rectangulaires aient une dimension *très* inférieure à la longueur d'onde.

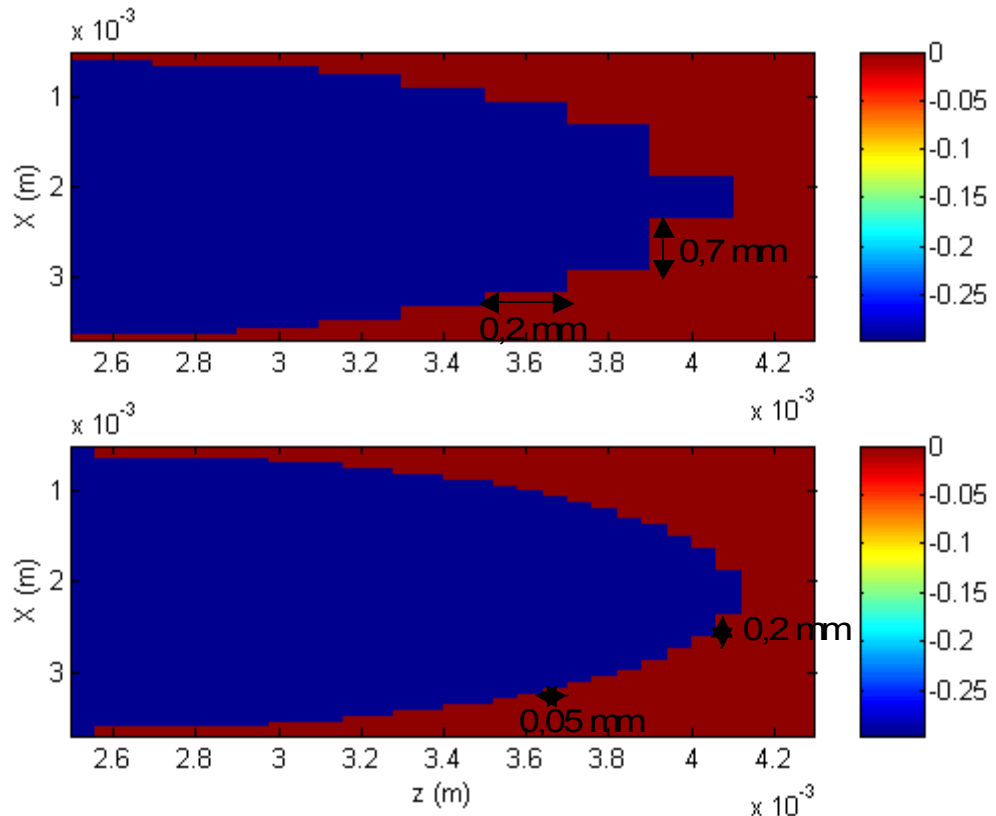


Figure 33. Exemple de discrétisation d'un demi cylindre de rayon 1,5 mm. En haut discrétisation grossière ( $\Delta X = \Delta Z = \lambda/7$ ), en bas discrétisation fine ( $\Delta X = \Delta Z = \lambda/25$ ).

La figure 34 représente l'évolution de la pression sur l'axe de propagation dans le cas de la diffusion linéaire par un cylindre de diamètre 3 mm et de contraste de vitesse 30 % pour différents maillages en X et en Z. La figure 35 représente le champ de pression transverse dans le plan  $z = 3, 4$  mm (position du maximum d'amplitude) avec les mêmes maillages. Ceux-ci sont respectivement  $\Delta X = \Delta Z = \lambda/38$  (tirets-pointillés) –  $\Delta X = \lambda/38; \Delta Z = \lambda/75$  (pointillés) –  $\Delta X = \lambda/25; \Delta Z = \lambda/75$  (tirets) –

$\Delta X = \lambda/25; \Delta Z = \lambda/150$  (trait plein). Remarquons que, en raison de la différence d'ordre du schéma numérique (ordre 2 dans la direction transverse mais ordre 1 seulement dans la direction axiale), nous privilégions les maillages plus fins dans la direction axiale que dans la direction transverse. Le maillage le plus grossier dans la direction axiale ( $\Delta Z = \lambda/38$ ) ne permet pas d'atteindre la convergence. En revanche un maillage plus fin dans la direction axiale ( $\Delta Z = \lambda/75$ ) est satisfaisant même avec un raffinement moindre dans la direction transverse ( $\Delta X = \lambda/25$ ). L'écart est de moins de 1% par rapport au maillage le plus fin. C'est donc ces valeurs que nous conserverons dans la suite de l'étude.

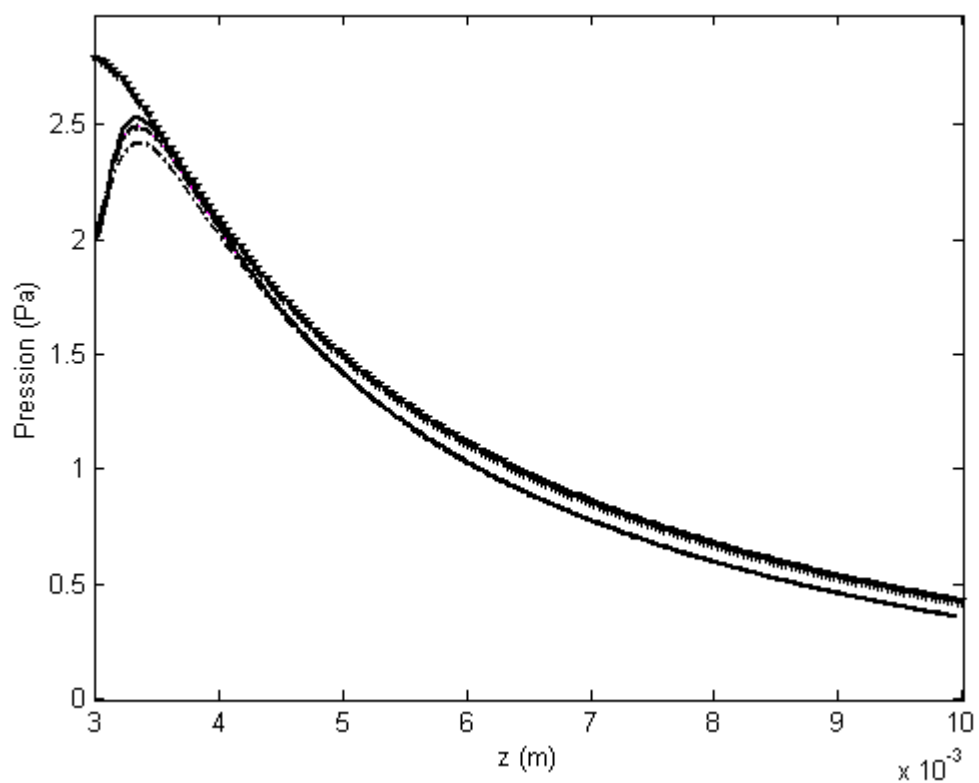


Figure 34. Evolution de la pression sur l'axe de propagation. Triangles : calcul analytique. Tirets-pointillés : maillage  $\Delta X = \Delta Z = \lambda/38$ . Pointillés : maillage  $\Delta X = \lambda/38; \Delta Z = \lambda/75$ . Tirets : maillage  $\Delta X = \lambda/25; \Delta Z = \lambda/75$ . Trait plein :  $\Delta X = \lambda/25; \Delta Z = \lambda/150$



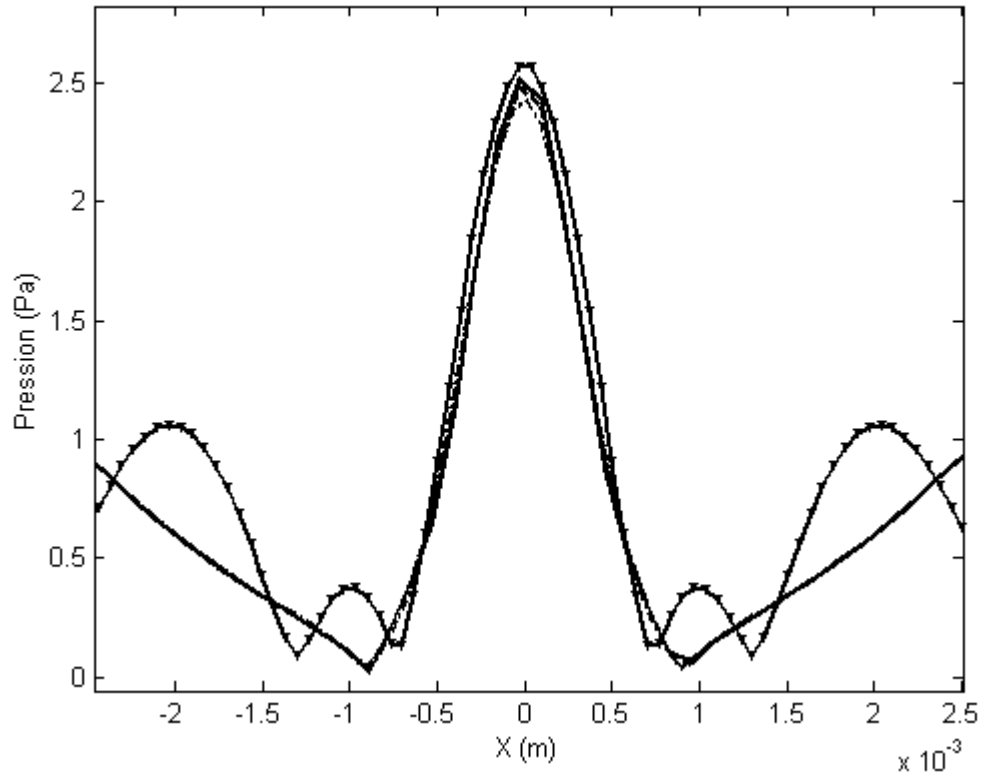


Figure 35. Evolution de la pression dans la direction transverse  $z = 3,4$  mm. Triangles : calcul analytique. Tirets-pointillés : maillage  $\Delta X = \Delta Z = \lambda/38$ . Pointillés : maillage  $\Delta X = \lambda/38; \Delta Z = \lambda/75$ . Tirets : maillage  $\Delta X = \lambda/25; \Delta Z = \lambda/75$ . Trait plein :  $\Delta X = \lambda/25; \Delta Z = \lambda/150$

### 3.3.2.3. Equation paraxiale non-linéaire en milieu hétérogène

Le potentiel obtenu est alors introduit dans l'équation non-linéaire

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2. \text{ Coulouvrat } et \text{ al. (2003) propose une résolution numérique de}$$

cette équation basée sur le calcul de la solution multivaluée en potentiel (comme pour l'équation de Burgers en pression, on peut écrire une solution sous forme implicite qui est la solution de Poisson). La solution physique, déterminée pour chaque point, est le maximum parmi toutes les valeurs calculées (cf. 3.3.1).

La résolution numérique de l'équation de Burgers a été validé (Marchiano, 2003). Pour cela, des comparaisons ont été faites entre les résultats fournis pour la propagation d'une onde en dent de scie et une onde en N par la méthode de Hayes (décrite ci-dessus et cf. 3.3.1), un algorithme de capture de choc (Mc Donald *et al.*, 1984) et la solution analytique. L'accord entre les trois signaux est très bon. Il existe une légère différence au niveau de la structure du choc entre les résultats issus de l'algorithme de capture de choc et ceux issus du code de Hayes et de la solution analytique. L'algorithme de capture de choc introduit de la viscosité numérique afin de stabiliser les chocs alors que la méthode de Hayes est une des méthodes de calcul explicite des chocs.

### **3.4. Validation de code de propagation non-linéaire en milieu hétérogène atténuant**

L'objectif majeur des simulations numériques dans le cadre de ce chapitre est de quantifier l'influence des effets non-linéaires sur les signaux du bang sonique (temps de montée et forme). Les expériences présentées dans la partie 1 ne permettent pas de discriminer les effets non-linéaires des effets linéaires. Nous voulons en particulier quantifier les effets non-linéaires à la focale. En effet, ces effets sont cumulatifs, ils agissent donc sur des distances de propagations longues (qui dépendent de la pression émise). L'une des questions est de savoir si ces effets peuvent jouer un rôle à la focale, lieu d'amplitude maximale, sur une distance de propagation quasiment égale à la longueur d'onde dans le cadre de nos expériences.

Le premier objectif est de déterminer l'erreur faite par la simulation numérique de la propagation non linéaire des ondes de choc en milieu hétérogène avec atténuation, en particulier à la focale. Précisons aussi que modéliser le champ à la focale en milieu hétérogène et atténuant est important en lithotritie, par-exemple, où les ultra-sons de forte intensité sont focalisés.

Nous ne possédons pas de solution analytique de cette équation. L'idée est donc de comparer les résultats numériques avec les résultats expérimentaux décrits dans la partie 2.

La simulation numérique est réalisée sur un domaine rectangulaire de dimension transverse égale à 30 mm sur 500 points (pas égal à  $\frac{\lambda}{25}$ ) et de dimension axiale égale à 1 cm sur 500 points (pas égal à  $\frac{\lambda}{75}$ ). Notons que les simulations numériques sont réalisées à deux dimensions. Ceci n'est pas gênant dans le cadre de nos expériences où l'onde en dent de scie interagit avec un milieu hétérogène en 2D.

Les conditions aux limites sont des conditions onde plane (décrite en 3.3.2.2) corrigées par le déphasage du milieu hétérogène et atténuant  $\phi_{1,j}^k = \phi_{1,j}^{k-1} \exp(j \omega K \Delta \sigma) \exp(\alpha L_c \Delta \sigma)$ .

Le champ imposé en  $z=0$  est l'onde incidente mesurée expérimentalement (cf. figure 12) juste devant l'hétérogénéité. Le milieu de propagation est de forme semi-cylindrique (décrit Fig. 3) raccordé à un plaque plane de dimension transverse égale à celle du domaine de calcul et d'épaisseur 1,3 mm.

La figure 36 montre des représentations spatio-temporelles du champ de pression mesuré (haut) et simulé (bas) au point focal de l'hétérogénéité de diamètre 3 mm. L'accord entre les résultats numériques et expérimentaux est très bon au voisinage de l'axe de propagation.

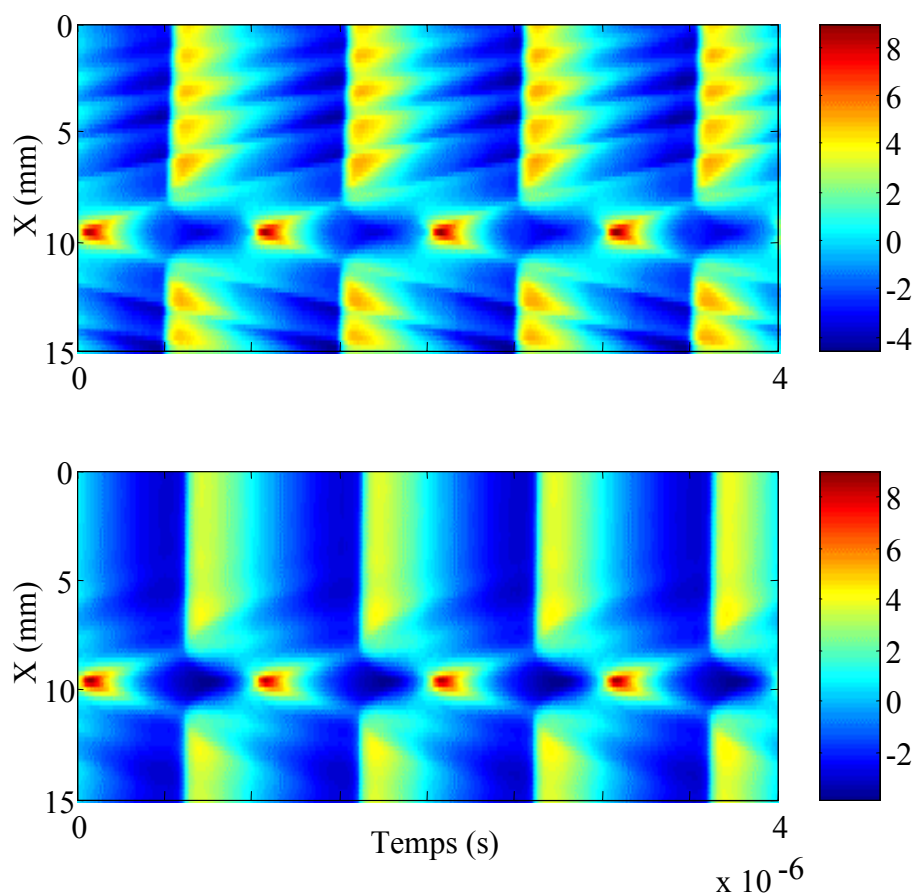


Figure 36. Représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré (haut) et simulé (bas) à la focale de l'hétérogénéité de diamètre  $d = 3 \text{ mm}$ .

La figure 37 montre la forme temporelle de la pression mesurée (ligne pleine) et simulée (ligne en pointillée) sur l'axe de propagation. La forme d'onde en « U », l'augmentation de l'amplitude ainsi que l'augmentation du temps de montée sont bien reproduites par la simulation. Ainsi, les principales caractéristiques de la focalisation de l'onde sont très bien simulées avec l'équation KZ en milieu hétérogène. Cependant, hors de l'axe de propagation, les résultats numériques et expérimentaux ne sont pas en si bon accord (Fig. 38). Les interférences entre l'onde cylindrique diffractée par l'hétérogénéité et l'onde plane ne sont pas visibles sur les résultats numériques.

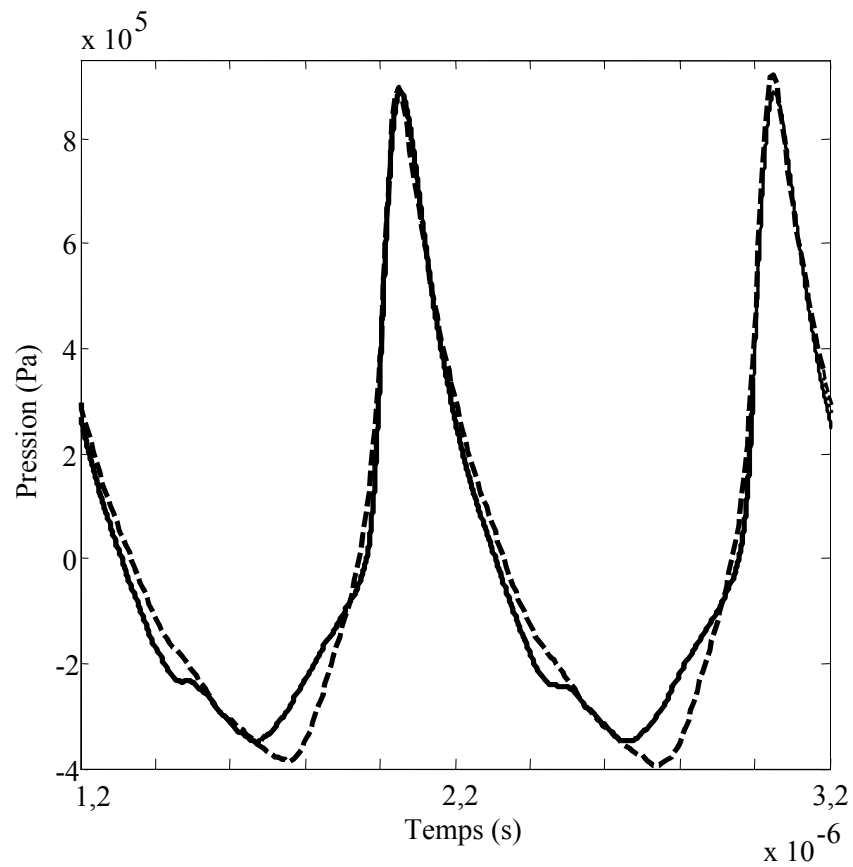


Figure 37. Forme temporelle de la pression mesurée (ligne pleine) et simulée (ligne pointillée) au centre de la focale de l'hétérogénéité de diamètre  $d=3\text{ mm}$

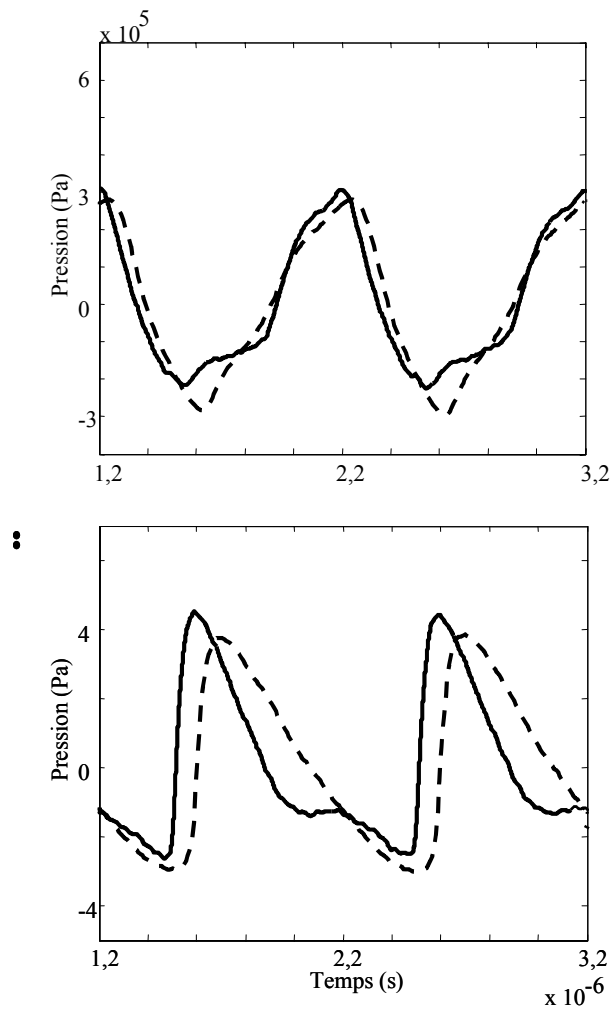


Figure 38. Forme temporelle de la pression mesurée (ligne pleine) et simulée (ligne pointillée) à 0,8 mm (haut) et 6,2 mm de l'axe de propagation (bas).

La figure 39 représente le champ de pression mesuré et simulé à 7,4 mm des hétérogénéités de diamètre 1,1 mm (à gauche) et 0,4 mm (à droite). Les figures (a) et (e) sont les représentations spatio-temporelles des champs de pression mesurés respectivement derrière les hétérogénéités de diamètre 1,1 mm et 0,4 mm. Les figures (b) et (f) sont les champs de pression simulés. Le résultat de la simulation numérique est en très bon accord avec l'expérience. La diffraction de l'onde de choc par l'hétérogénéité est clairement visible. La mesure peut être réalisée plus près de l'hétérogénéité, mais en raison de l'épaisseur du support de la membrane, nous ne

pouvons pas l'approcher suffisamment pour observer la focalisation de l'onde, qui à lieu à moins d'un millimètre.

Les figures c) et g) représentent les formes temporelles de la pression mesurée (en trait plein) et simulée (en tiret) sur l'axe de propagation à 7,4 mm de chaque hétérogénéité. Les figures d) et h) représentent les formes temporelles de la pression mesurée (en trait plein) et simulée (en tiret) à 1mm de l'axe de propagation à 7,4 mm de chaque hétérogénéité. Juste derrière le centre de chaque hétérogénéité (c) et g)), le signal a presque la même amplitude que l'onde de choc incidente. En revanche, le temps de montée est plus grand. Plus loin du centre de chaque hétérogénéité les figures d) et h) montrent la superposition des ondes de choc incidente et diffractée avec une amplitude réduite.

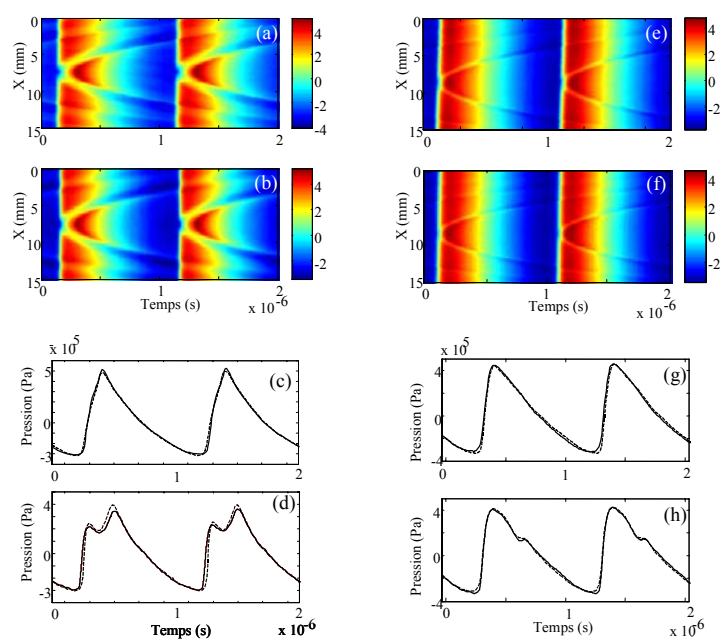


Figure 39. Première colonne : Champ de pression mesurés et simulés à 7,4 mm derrière les hétérogénéités de diamètre 1,1 mm (à gauche) et 0,4 mm (à droite).

Représentation spatio- temporelle de la pression mesurée (a) et e)) à 7,4 mm derrière les hétérogénéités de diamètre 1,1 mm et 0,4 mm et simulée (b) et f)).

Forme temporelle de la pression mesurée (en trait plein) et simulée (en tiret) sur l'axe de propagation (c) et g)) et à 1 mm de l'axe de propagation (d) et h)).

### 3.5. Effets non-linéaires locaux

Une des questions en suspens est le rôle des non-linéarités dans la propagation du bang sonique dans la couche limite planétaire turbulente. Suivant les auteurs (cf. bibliographie), les non-linéarités sont essentielles, prises en compte ou négligées. Dans le cadre plus restreint de notre expérience, la simulation numérique offre la possibilité de comparer les simulations avec et sans non-linéarités, et donc d'en discriminer l'importance. Evidemment, l'extrapolation au bang sonique est à faire avec prudence, mais la présente étude fournira une indication utile.



La figure 40 montre la simulation numérique de la forme temporelle du signal au point focal (là où l'amplitude est maximale donc les effets non linéaires *a priori* les plus importants) dans le cas d'une hétérogénéité de diamètre 3 mm. Les paramètres de la simulation sont ceux de l'expérience non linéaire (cylindre de silicone, onde de choc incidente d'amplitude 5 bars). Toutefois, la simulation a été réalisée sans l'absorption du silicone. En effet, celle-ci est un artefact de l'expérience à échelle réduite en laboratoire et l'absorption non négligeable pourrait s'avérer dominante par rapport à des effets non linéaires qui existeraient par ailleurs. La simulation a été réalisée en régime linéaire (trait plein) et en régime non-linéaire (pointillé). La différence entre les deux cas est minime. Le signal en régime non-linéaire est légèrement plus raide et a une amplitude légèrement plus forte mais il est clair l'effet non linéaire n'est pas le mécanisme dominant. D'autres simulations numériques réalisées dans le plan focal ou au-delà ne montrent également que de très faibles différences.

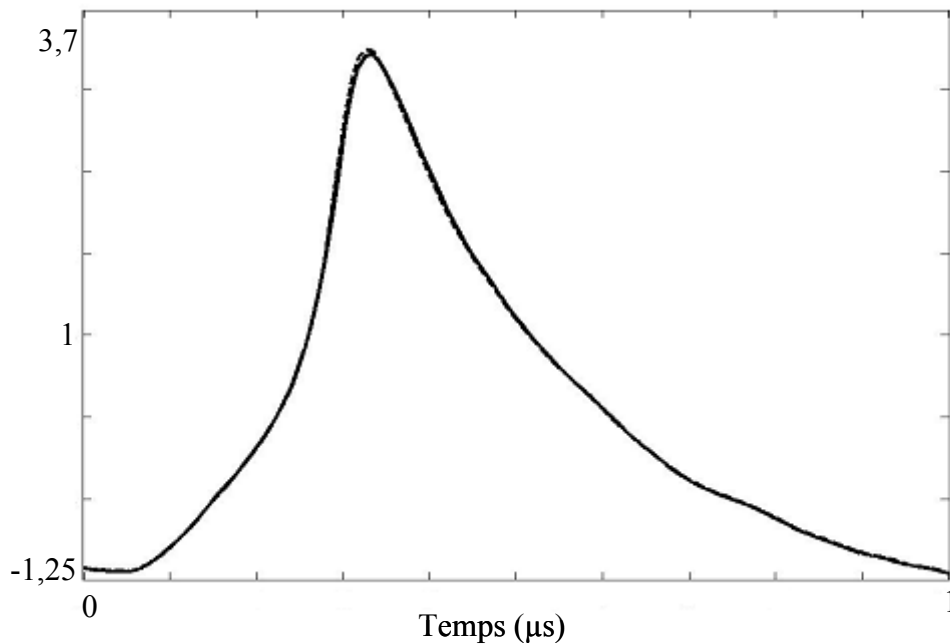


Figure 40. Forme temporelle du signal à la focale de l'hétérogénéité de diamètre 3 mm simulé en régime linéaire (trait plein) et en régime non-linéaire (pointillé) sans absorption

En terme spectral, la figure 41 montre la différence entre les amplitudes des 20 premiers harmoniques du signal temporel ci-dessus. On observe que dans le domaine fréquentiel, l'amplitude de la pression à la fréquence fondamentale (1 MHz) est légèrement plus faible si les effets non linéaires sont pris en compte, alors que cet effet est inversé pour les plus hautes fréquences. Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, ce phénomène est un effet non linéaire classique. L'énergie est transférée de la fréquence fondamentale vers les harmoniques. L'effet non linéaire joue donc un rôle uniquement sur les plus hauts harmoniques. Ainsi, même si la distance de propagation est faible, les effets non linéaires sont quand même significatifs sur les plus hautes fréquences. Or si l'on revient à l'application bang sonique, il s'avère que, en terme de perception, l'oreille est beaucoup plus sensible aux hautes fréquences qu'aux basses. Pour le bang sonique d'un avion de type Concorde, le maximum du spectre est même infrasonique donc inaudible, alors que les chocs associés aux hautes fréquences sont très

audibles ! Donc il est possible que les non-linéarités ne puissent être négligées dans ce cas, même si une étude spécifique devrait préciser ce point.

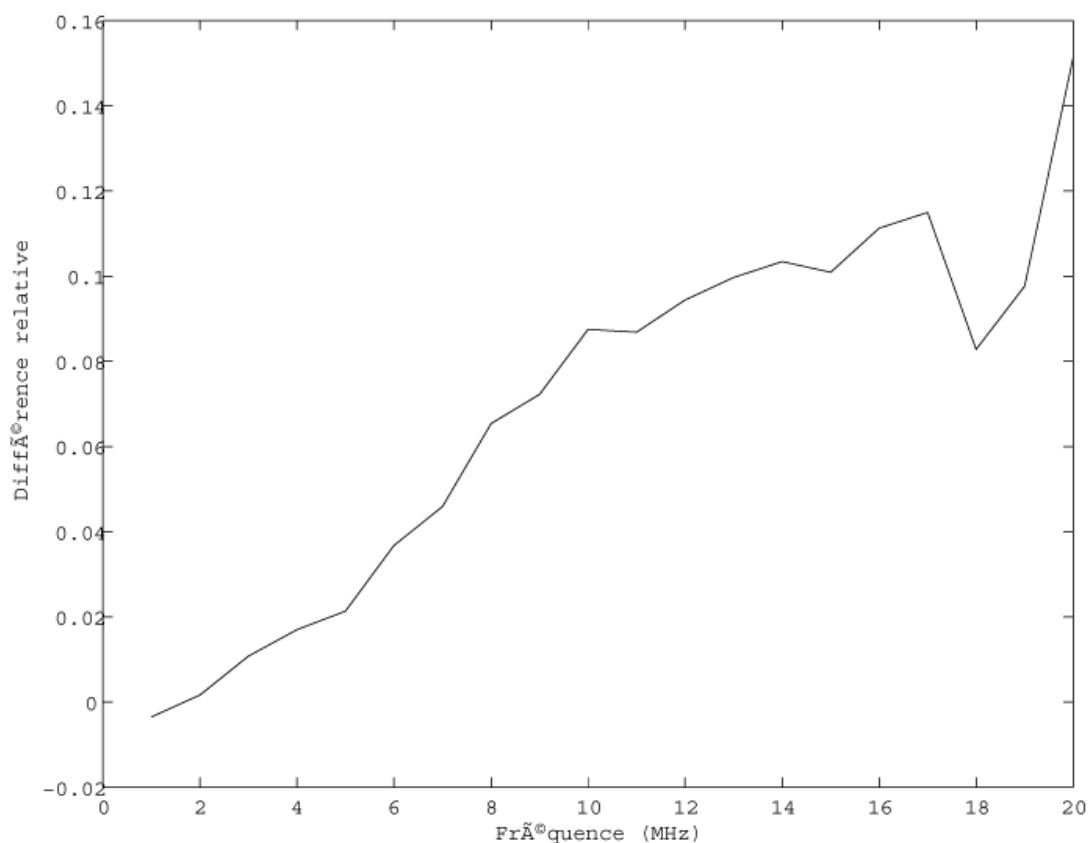


Figure 41 Différence relative sur l'amplitude simulée en régimes non linéaire et linéaire des 20 premiers harmoniques de la pression à la focale de l'hétérogénéité de diamètre 3mm.

Afin de confirmer ces observations pour d'autres tailles d'hétérogénéités, la figure 42 représente l'évolution des amplitudes des 8 premiers harmoniques du spectre de la pression calculée au point focal (amplitude maximale sur l'axe). Ces courbes sont tracées en fonction du diamètre de l'hétérogénéité (normalisé par la longueur d'onde), et toujours en comparant les régimes non linéaire et linéaire. Comme attendu, la différence entre les simulations linéaires et non-linéaires augmente avec la taille de l'hétérogénéité et avec la fréquence : celles de grande taille focalisent de manière plus efficace,

l'amplitude focalisée est plus importante et donc les effets non linéaires de cascade d'énergie vers les hautes fréquences sont plus prononcés. Par ailleurs on retrouve évidemment que la focalisation du signal augmente globalement avec la taille de l'hétérogénéité, même si le comportement n'est pas tout à fait monotone pour certaines fréquences.

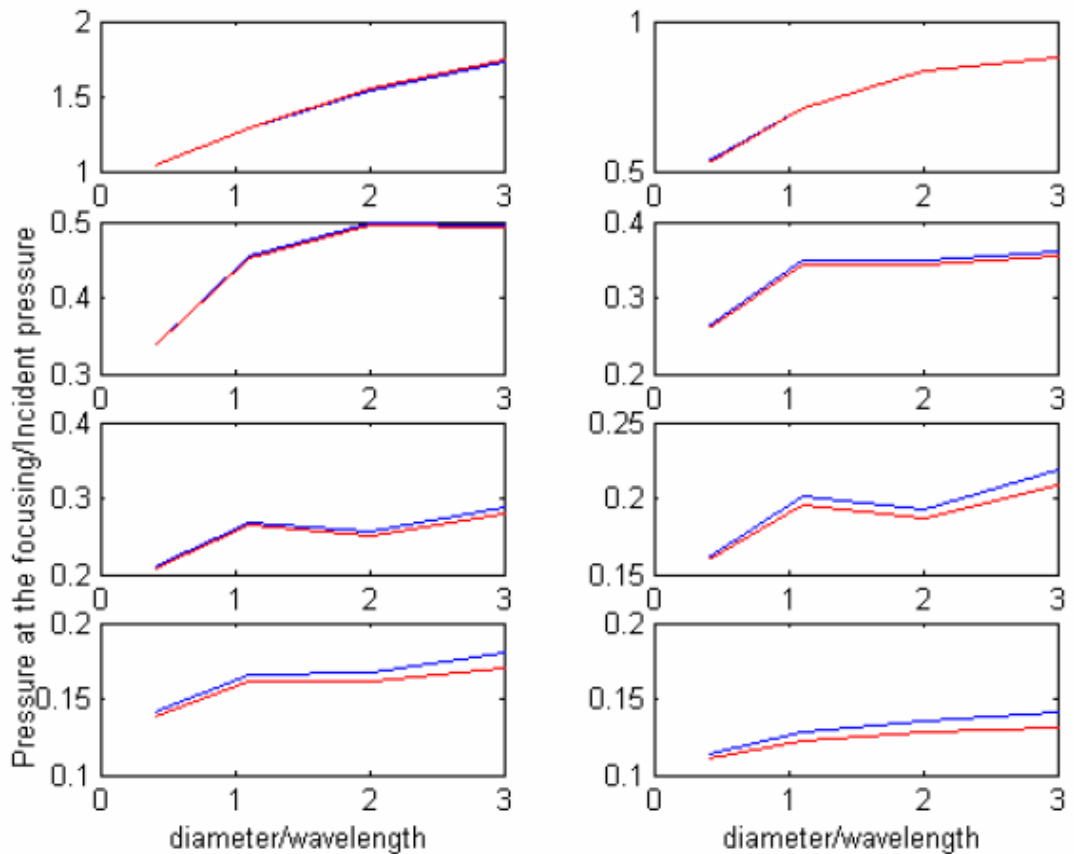


Figure 42. Evolution de l'amplitude des 8 premiers harmoniques (de gauche à droite et de haut en bas) du spectre de la pression calculée au point focal (amplitude maximale sur l'axe), en fonction du diamètre de l'hétérogénéité (normalisé par la longueur d'onde). Les amplitudes sont normalisées par celle du fondamental du champ incident.

En rouge : linéaire – en noir : non linéaire.

### **3.6. Evolution du temps de montée**

Un autre paramètre important pour l'application au bang sonique est l'évolution du temps de montée à travers la couche turbulente. Le facteur d'amplification induit par la focalisation dépend de la taille des hétérogénéités (Fig. 42). Dans la partie expérimentale, nous avons montré que le temps de montée est relié à la focalisation, son augmentation étant associée au repliement du front d'onde. Dans cette partie, les simulations numériques (sans atténuation) permettent de comprendre l'évolution du temps de montée en fonction de i) la distance de propagation ii) la taille de l'hétérogénéité.

La figure 43 montre l'évolution du temps de montée (normalisé par le temps de montée de l'onde de choc incidente soit 24 ns) en fonction de la distance de propagation (normalisée par la taille de l'hétérogénéité) pour différents diamètres de celle-ci  $d=3\text{ mm}$ ,  $d=2\text{ mm}$ ,  $d=1,1\text{ mm}$  et  $d=0,7\text{ mm}$ .

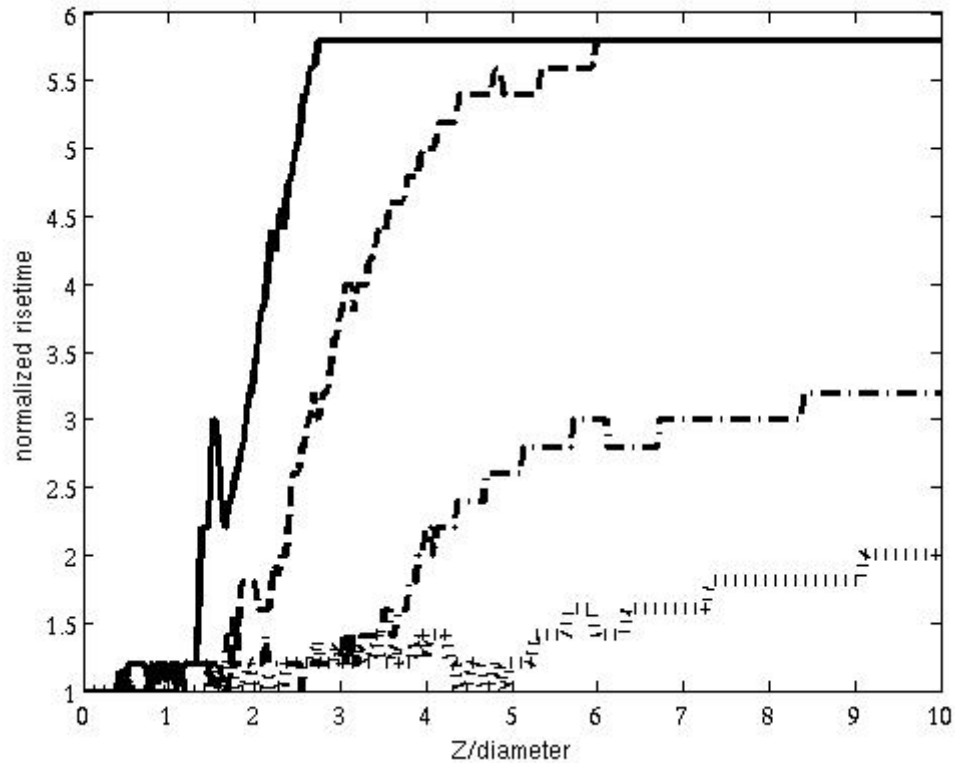


Figure 43. Evolution du temps de montée (normalisé par le temps de montée de l'onde plane incidente soit 24 ns) en fonction de la distance de propagation  $z$  pour différents diamètres des hétérogénéités (de bas en haut : 0,7 – 1,1 – 2 – 3 mm).

On observe très clairement que le temps de montée augmente avec l'apparition de la focale (autour d'un rapport  $z/d=2$ ) puis atteint une valeur stable. Cette observation est en accord avec les expériences dans les milieux aléatoires réalisées à l'échelle du bang sonique par Blanc-Benon *et al.* (2002, 2005). Ces dernières expériences montrent une corrélation entre l'augmentation du temps de montée et l'apparition de la première « caustique ». Le terme caustique est couramment utilisé dans les articles concernant la focalisation des ondes de choc dans la propagation atmosphérique mais comme nous l'avons déjà mentionné, nous nous restreindrons au terme de « focale » (la caustique a un sens asymptotique haute fréquence). La valeur stable est  $\tau \approx 6\tau_{inc}$  pour les hétérogénéités les plus importantes de diamètre  $d=3\text{ mm}$  et  $d=2\text{ mm}$ , mais elle est

atteinte plus tard pour cette dernière valeur. La valeur de stabilisation est plus faible pour décroît pour  $d=1,1\text{ mm}$  et la convergence est encore plus lente.

Sur le domaine de calcul ( $10\lambda$ ), nous observons que le temps de montée ne décroît pas. Le temps de montée ne diminue pas car le repliement du front d'onde n'est pas compensé par les effets non-linéaires sur cette distance. On aurait pu penser que les effets non-linéaires puissent effectivement provoquer le raidissement des profils d'onde et la fusion des chocs et donc diminuer le temps de montée. Mais la distance de propagation est trop courte pour que ceux-ci jouent un rôle vraiment significatif et compensent la forte déformation du profil d'onde due à son passage à travers l'hétérogénéité. Rappelons que, dans les expériences ultrasonores, la distance de choc est de l'ordre de 30 cm, donc très grande par rapport à  $10\lambda=1,5\text{ cm}$ . Rappelons encore que cette distance de propagation maximale  $10\lambda$  correspond aussi à l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite planétaire (1km) comparée à la taille des plus grosses structures et à la longueur d'onde du bang sonique (100m).

## **4. Conclusion**

Le premier objectif de cette partie était de mettre en évidence expérimentalement le repliement du front d'onde et ses conséquences sur l'augmentation du temps de montée ainsi que la variabilité des formes d'ondes. Le deuxième objectif était de développer un modèle physique permettant d'étudier précisément chaque mécanisme physique pouvant jouer un rôle dans l'interaction entre une onde de choc et un milieu hétérogène notamment l'influence de la non-linéarité. Ce modèle permet aussi d'étudier le problème sans prendre en compte l'absorption qui ne peut pas être négligée dans les expériences.

Tout d'abord, les expériences menées ont permis d'observer le phénomène de repliement du front d'onde. Nous avons montré expérimentalement que l'augmentation du temps de montée dépend de l'apparition de la focale et est liée à la brisure de l'onde de choc incidente en deux chocs, chacun étant associé à un pli du front d'onde. Cet effet physique explique aussi la variabilité des formes d'ondes ainsi que les variations spatiales rapides du champ de pression. La nature déterministe de nos travaux permet de comprendre l'influence de la taille des hétérogénéités sur le repliement du front d'onde. Cet effet est d'autant plus important que les hétérogénéités sont grandes. Ainsi, il existe un seuil en deçà duquel on peut négliger l'influence d'une seule hétérogénéité. Les expériences présentées dans cette partie permettent de conclure qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte les structures dont la taille est inférieure à 0.3 fois la longueur d'onde. Toutefois, ce résultat n'est valable que pour une hétérogénéité. La propagation d'ondes de choc à travers des milieux comportant plusieurs hétérogénéités est étudiée dans la deuxième partie de ce mémoire.

La nature déterministe de nos expériences permet aussi de faire des comparaisons quantitatives avec des résultats d'un modèle théorique et numérique. Nous avons proposé une démonstration de la généralisation de l'équation KZ pour modéliser la propagation non-linéaire des ondes acoustiques en milieu faiblement hétérogène. Cette équation a ensuite été résolue numériquement par un schéma aux différences finies. Ce code de calcul a permis de quantifier l'importance des effets non-



linéaires dans la propagation des ondes. L'influence des effets non-linéaires n'est pas visible sur les signatures temporelles en pression. En revanche, les hautes fréquences audibles sont sensibles aux effets non-linéaires notamment dans le cas des plus grosses hétérogénéités. De plus, l'outil numérique nous a permis de confirmer que l'augmentation du temps de montée apparaît aux caustiques quelle que soit la taille des hétérogénéités et qu'elle se stabilise sur une distance équivalente à l'épaisseur de la couche turbulente atmosphérique. Les différentes comparaisons entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux ont mis en lumière la pertinence du modèle théorique mais aussi ses limitations. Un modèle plus performant est proposé dans la deuxième partie de ce mémoire.

## **Modélisation « grand angle » et hétérogénéités multiples**

Dans la partie I nous avons mis en évidence le phénomène de repliement du front d'onde sur pour une hétérogénéité unique. L'importance de ce phénomène a été quantifiée en fonction de la taille de l'hétérogénéité. Les comparaisons avec le modèle numérique ont montré un écart croissant avec la distance, i.e. avec l'angle de diffraction. Pour modéliser une situation plus proche du cas réel, nous nous intéressons dans cette partie à des hétérogénéités multiples. Si le montage expérimental est peu différent, la modélisation doit, elle, prendre en compte dorénavant des angles plus élevés.

Le premier chapitre de cette partie, présente un nouveau modèle de propagation non-linéaire des ondes acoustiques en milieu hétérogène avec une approximation paraxiale dite « grand angle ». Cette approximation permettra de prendre en compte la propagation des ondes d'angles plus élevés que dans le cas de l'approximation paraxiale présentée dans la première partie est dite « standard ».

Le second chapitre décrit le modèle numérique correspondant à la simulation de cette équation. Ce modèle est basé sur celui présenté dans la partie 1 avec une amélioration de la condition aux limites sur les bords du domaine en  $X$ . Nous décrivons également un certain nombres de validation et comparaisons avec l'approximation parxiale « standard » lorsque des solutions analytiques sont disponibles :

- i) rayonnement d'un piston en champ proche
- ii) diffusion par un cylindre

Le dernier chapitre présente les résultats expérimentaux concernant l'influence des hétérogénéités multiples sur l'onde de choc et nous commentons l'effet du repliement du front d'onde dans ce cas. Comme dans la première partie nous regardons l'influence de la taille de l'hétérogénéité mais cette fois-ci dans un contexte collectif. Les comparaison avec le modèle « grand angle » d'une part et « standard » d'autre part sont réalisées.

Enfin nous proposons finalement la simulation de la propagation d'une onde en N avec tous les paramètres du bang sonique définis dans le tableau 3 dans un milieu aléatoire constitué de 10 diffuseurs de position, vitesse du son et rayon définis aléatoirement.

## 1. Modèle physique

L'objectif de cette section est d'établir un nouveau modèle d'équation de propagation des ondes en milieu hétérogène avec une approximation aux grands angles, permettant d'élargir le domaine de validité de l'approximation parabolique afin de traiter la diffusion par des hétérogénéités multiples. Nous adopterons la même démarche que précédemment, en déduisant l'équation de propagation directement des lois de conservation et de comportement pour une onde acoustique se propageant dans un milieu hétérogène sans écoulement. Nous développerons ce nouveau modèle toujours dans le cadre de l'approximation parabolique (cf. partie 1) afin de nous ramener à une dérivée spatiale d'ordre 1 dans la direction principale de propagation. Cette approximation sera néanmoins affinée pour des angles plus élevés que dans le cas de l'approximation parabolique standard.

Dans le but d'étendre les calculs à une approximation aux grands angles, nous avons décidé de prendre en compte dans les trois équations de conservation et l'équation d'état des termes d'ordre supérieur à  $\varepsilon$  i.e en :

- $\eta\varepsilon, \eta^2\varepsilon$  : couplage des effets de diffraction et hétérogénéité,
- $\eta^4$  : effet de diffraction aux angles élevés en milieu homogène,
- $\varepsilon^2$  : effet d'hétérogénéité à un ordre plus élevé,

en rappelant que les deux effets d'hétérogénéité et de diffraction sont supposés du même ordre  $\varepsilon = O(\eta^2)$ .

Notons que les effets non linéaires à un ordre plus élevé  $M^2$ ,  $\varepsilon M$ ,  $\eta M$  et  $\eta^2 M$  ne sont pas modélisés car nous avons remarqué dans le cadre de nos expériences que les effets non linéaires jouent un rôle moins important que les effets de diffraction et d'hétérogénéité (cf. partie 1).

Dans un cadre plus général, l'équation « grand angle » modélise des angles de propagations plus élevés que l'équation parabolique « standard » ce qui revient à avoir des effets de diffraction plus forts. Or, les effets de diffraction et de non-linéarité étant des effets antagonistes, le couplage de la diffraction aux grands angles et de la non-linéarité est très faible.

Ceci nous permet d'établir tout d'abord l'équation grand angle en milieu hétérogène en régime linéaire puis nous ajouterons les termes non-linéaires d'ordre  $M$  de l'équation parabolique standard.

### 1.1. Equations constitutives adimensionnées

Nous établissons l'équation de propagation linéaire en milieu hétérogène sans écoulement avec l'approximation grand angle à partir des équations (1), (2), (3) et (4) rappelées dans le chapitre 3 de la partie 1 (3.1.1).

Comme nous l'avons déjà mentionné, ces équations seront développées à un ordre plus élevé. Nous ne reviendrons pas sur les différentes étapes du calcul pour obtenir les trois équations de conservation ainsi que l'équation d'état en variables adimensionnées. Ces équations seront développées à deux dimensions  $(x,z)$ . Les termes dépendant de la troisième dimension en  $y$  étant analogues à ceux en  $x$ , la généralisation de l'équation à trois dimensions  $(x,y,z)$  est immédiate.

Les grandeurs sans dimension utilisées dans le développement des équations en régime linéaire sont définies de manière identique à la section (I.3.1). Seule la variable axiale est dimensionnée par :

$$\sigma = \frac{z}{L_r} = \frac{\bar{z}}{k L_r} = \frac{\eta^2}{2} \bar{z}$$

où  $L_r = 2ka^2$  est la distance de Rayleigh au contraire de la partie (I.3.1) où elle était dimensionnée par la distance de choc associée aux effets non linéaires, ce qui n'aurait pas de sens ici puisque nous travaillons (provisoirement) en régime linéaire.

Pour alléger les écritures, nous omettons les barres au-dessus des grandeurs adimensionnées.

L'équation de la conservation de la masse adimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = (1 + \varepsilon \rho_h) \frac{\partial u_z}{\partial \tau} - (1 + \varepsilon \rho_h) \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial u_z}{\partial \sigma} - \eta (1 + \varepsilon \rho_h) \frac{\partial u_x}{\partial X} - \varepsilon u_x \frac{\partial \rho_h}{\partial x} - \varepsilon u_z \frac{\partial \rho_h}{\partial z} \quad (1)$$

Dans cette équation deux nouveaux termes en  $\eta^2 \varepsilon$  et  $\eta \varepsilon$ , négligés dans l'approximation paraxiale standard sont pris en compte. Ces termes viennent de l'équation (11) déjà démontrée dans la partie I.3.1.2.3 dans le premier membre à droite.

L'équation d'Euler suivant  $z$  adimensionnée s'écrit :

$$(1 + \varepsilon \rho_h) \frac{\partial u_z}{\partial \tau} = \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial P}{\partial \sigma} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \rho_h} \rho \frac{\partial P_h}{\partial z} + O(\varepsilon^3) \quad (2)$$

Dans cette équation, le nouveau terme est au dénominateur du dernier membre à droite. Ce terme vient de l'expression de la constante de gravité démontrée dans la partie I.3.1.2.3. Ici, nous ne négligeons pas le terme en  $\varepsilon \rho_h$  au dénominateur du dernier membre à droite.

L'équation d'Euler suivant  $x$  adimensionnée s'écrit :

$$(1 + \varepsilon \rho_h) \frac{\partial u_x}{\partial \tau} = -\eta \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \rho_h} \rho \frac{\partial P_h}{\partial x} + O(\varepsilon^3) \quad (3)$$

Nous avons exactement le même terme supplémentaire que dans l'équation (2) ci-dessus.

L'équation de conservation de l'énergie adimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = -\varepsilon \left( u_x \frac{\partial s_h}{\partial x} + u_z \frac{\partial s_h}{\partial z} \right) \quad (4)$$

Cette équation n'a pas été modifiée car elle est exacte (cf. I.3.1.3.1).

L'équation d'état adimensionnée s'écrit :

$$P = \rho + s + 2 \varepsilon c_h \rho \quad (5)$$

De même, cette équation est identique à celle établie dans la partie I.3.1.3.1.

Dans nos expériences, les propriétés du milieu hétérogène (masse volumique, entropie, pression) sont constantes par morceau en fonction des variables d'espace. Les gradients des propriétés du milieu (densité, vitesse du son) sont donc nuls. Afin d'alléger l'établissement de l'équation grand angle, nous nous placerons également dans cette hypothèse pour établir l'équation modèle.

## 1.2. Equation « grand angle » en milieu hétérogène en régime linéaire

A partir des équations (1), (2), (3), (4) et (5), nous établissons l'équation de propagation des ondes acoustiques en milieu hétérogène et en régime linéaire avec l'approximation parabolique grand angle.

Insérons l'équation (2) dans l'équation (1), nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial P}{\partial \sigma} - (1 + \varepsilon \rho_h) \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial u_z}{\partial \sigma} - \eta (1 + \varepsilon \rho_h) \frac{\partial u_x}{\partial X} + O(\varepsilon^3) \quad (6)$$

Dérivons (6) par rapport à  $\tau$  soit:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma \partial \tau} - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \sigma \partial \tau} (1 + \varepsilon \rho_h) - \eta (1 + \varepsilon \rho_h) \frac{\partial^2 u_x}{\partial X \partial \tau} + O(\varepsilon^3) \quad (7)$$

Insérons les équations (2) et (3) dans l'équation (7):

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} - \eta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial \sigma} + \frac{\eta^4}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + O(\varepsilon^3) \quad (8)$$

Nous voulons garder le principe de l'approximation paraxiale permettant de résoudre l'équation par avancement plan par plan depuis la source (propagation dans un seul sens – « one way » en anglais). Il convient donc se ramener à une équation avec une dérivée spatiale d'ordre 1 dans la direction principale de propagation. A cette fin, nous devons approcher le terme en  $\partial^2 P / \partial \sigma^2$  pour se ramener à une approximation paraxiale. Nous utilisons à cet effet l'équation en milieu hétérogène dans l'approximation parabolique standard :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial \sigma} &= \left[ \frac{2\varepsilon c_h}{\eta^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right] + O(\varepsilon^2) \\ \text{soit } \frac{\partial^3 P}{\partial \tau \partial \sigma^2} &= \left[ \frac{2\varepsilon c_h}{\eta^2} \frac{\partial^3 P}{\partial \tau^2 \partial \sigma} + \frac{\partial^3 P}{\partial X^2 \partial \sigma} \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (9)$$

Le terme en  $\partial^2 P / \partial \sigma^2$  dans l'équation (8) étant d'ordre  $\eta^4 = \varepsilon^2$ , il suffit de remplacer la dérivée de ce dernier par une expression équivalente à l'ordre 1, soit justement l'équation (9).

Dérivons l'équation (8) par rapport à  $\tau$  et insérons l'équation (9), nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial^3 \rho}{\partial \tau^3} = \frac{\partial^3 P}{\partial \tau^3} - \eta^2 \frac{\partial^3 P}{\partial \tau^2 \partial \sigma} + \frac{\eta^2 \varepsilon c_h}{2} \frac{\partial^3 P}{\partial \tau^2 \partial \sigma} + \frac{\eta^4}{4} \frac{\partial^3 P}{\partial X^2 \partial \sigma} + \eta^2 \frac{\partial^3 P}{\partial \tau \partial X^2} + O(\varepsilon^3) \quad (10)$$



Tous les termes au second membre de l'équation (10) s'expriment en fonction de  $P$ . Le but étant d'avoir une seule équation scalaire (en pression), nous devons exprimer le terme au premier membre de l'équation en fonction de  $P$ . Or, l'équation (5) donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{1}{(1 + 2\varepsilon c_h)} \frac{\partial P}{\partial \tau} \quad (11)$$

En substituant l'équation (11) au premier membre de l'équation (10), on obtient finalement l'équation de propagation linéaire en milieu hétérogène sous l'approximation parabolique grand angle :

$$\frac{\partial^3 P}{\partial \tau^2 \partial \sigma} = H_{ga} \frac{\partial^3 P}{\partial \tau^3} + D_p H \frac{\partial^3 P}{\partial \tau \partial X^2} + D_{ga} H \frac{\partial^3 P}{\partial X^2 \partial \sigma} + O(\varepsilon^3) \quad (12)$$

$$\text{où } H_{ga} = \frac{2\varepsilon c_h}{\eta^2 (1 + 2\varepsilon c_h) \left(1 - \frac{\varepsilon c_h}{2}\right)} ; D_p H = \frac{1}{\left(1 - \frac{\varepsilon c_h}{2}\right)} \text{ et } D_{ga} H = \frac{\eta^2}{4 \left(1 - \frac{\varepsilon c_h}{2}\right)}$$

Par rapport à l'équation parabolique standard Eq.(I.28), deux modifications apparaissent :

- le dernier terme supplémentaire au second membre qui correspond à l'approximation parabolique d'ordre supérieur des termes de diffraction ;
- la modification des coefficients avec le terme  $(1 - \varepsilon c_h / 2)$  au dénominateur correspondant au couplage entre hétérogénéité et diffraction.

Dans le cas homogène, l'équation ci-dessus correspond à l'équation « grand angle » établie par Claerbout (1976).

### 1.2.1. Interprétation de la diffraction en approximation grand angle

Nous calculons la relation de dispersion correspondante à l'approximation parabolique « grand angle » en milieu homogène (ie pour  $\varepsilon c_h = 0$ ). Le champ de pression en régime linéaire et en milieu homogène satisfait alors à l'équation dite Claerbout (1976) qui s'écrit :

$$\frac{\partial^3 P}{\partial \tau^2 \partial \sigma} = \frac{\eta^2}{4} \frac{\partial^3 P}{\partial \sigma \partial X^2} + \frac{\partial^3 P}{\partial \tau \partial X^2}$$

soit avec les variables dimensionnées :

$$2 \frac{\partial^3 P}{\partial \tau^2 \partial z} - c_0 \frac{\partial^3 P}{\partial \tau \partial x^2} = \frac{c_0^2}{2} \frac{\partial^3 P}{\partial z \partial x^2} \quad (13)$$

Dans le cas de l'équation parabolique « standard » en milieu homogène, le dernier terme au second membre de l'équation ci-dessus est nul. En milieu homogène, la différence entre les deux équations parabolique standard et grand angle réside donc dans ce terme. Pour mieux comprendre l'influence de ce terme, comparons les relations de dispersion associées. Dans le cas de l'approximation parabolique « grand angle », cette relation s'écrit :

$$\frac{k_z^{(ga)}}{k} = 1 - \frac{\frac{k_x^2}{k^2}}{2 \left( 1 - \frac{k_x^2}{4 k^2} \right)}$$

à comparer avec la relation de dispersion dans le cas de l'approximation parabolique « standard » :

$$\frac{k_z^{(p)}}{k} = 1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2}{k^2}$$

et avec la relation de dispersion de l'équation des ondes :

$$\frac{k_z^{(e)}}{k} = \pm \left( 1 - \frac{k_x^2}{k^2} \right)^{1/2}$$

La relation de dispersion dans le cas « grand angle » est donc une approximation de Padé (1,1) (polynôme de degré 1 au numérateur et de degré 1 au dénominateur en  $k_x^2/k^2$ ) de la relation de dispersion de l'équation des ondes, d'un ordre plus élevé que dans le cas de l'approximation parabolique « standard » (approximation de Padé (1,0) soit développement de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre).

La figure ci-dessous représente les trois relation de dispersion dans le plan epère  $(k_x, k_z)$ .

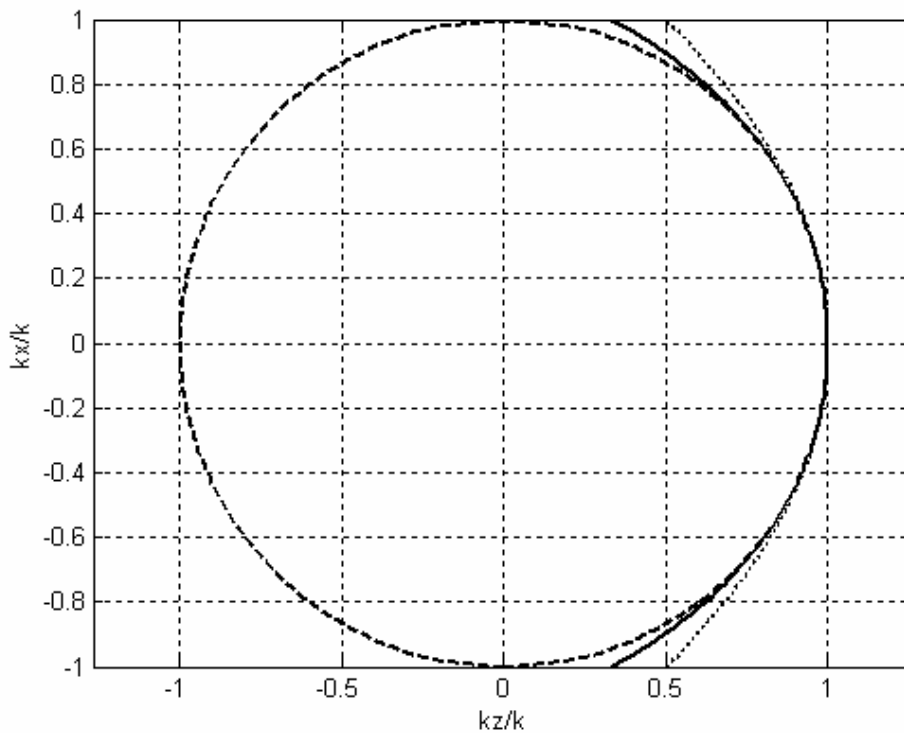


Figure 1. Représentation de la relation de dispersion dans le domaine  $(k_x, k_z)$  calculé avec l'équation des ondes (cercle en tiret), avec l'approximation parabolique standard (parabole en pointillé) et avec l'approximation grand angle (courbe en trait plein).

La relation de dispersion « grand angle » est décrite géométriquement par la courbe (en trait plein) « super-osculatrice » au cercle exact au point ( $k_x=0$ ,  $k_z=k$ ) et donc plus proche du cercle que la simple parabole osculatrice associée à l'approximation paraxiale standard. Ceci vient du fait que l'approximation de Padé (1,1) est équivalente à un développement de Taylor d'ordre 3. Toutefois, celui-ci ferait intervenir des termes d'ordre  $k_x^4/k^4$  qui correspondraient à des dérivées spatiales d'ordre 4 dans la direction transverse, alors que l'approximation grand angle de même précision ne fait intervenir que des dérivées spatiales d'ordre 2, beaucoup plus avantageuses pour le traitement numérique (notamment des conditions aux limites).

On peut également représenter l'erreur introduite par la relation de dispersion en fonction de l'angle repérant la direction de propagation de l'onde plane par rapport à la direction sélectionnée  $Oz$ .

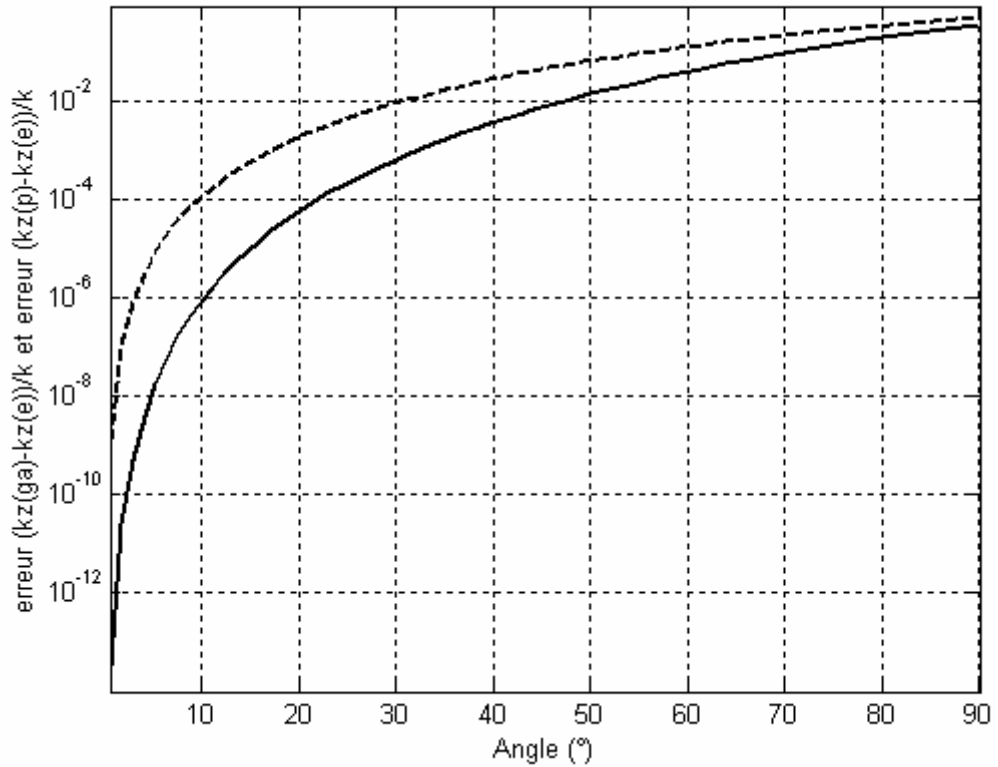


Figure 2. Erreur relative  $(k_z^{(p)} - k_z^{(e)})/k$  (approximation parabolique « standard » en tiret) et  $(k_z^{(ga)} - k_z^{(e)})/k$  (approximation « grand angle » en trait plein) en fonction de la direction de propagation de l'onde (en °)

L'erreur introduite par les deux approximations augmente lorsqu'on s'éloigne de la direction de propagation principale. Cependant, sa valeur dépend de l'approximation. Dans la partie I, nous avons montré que l'approximation « standard » reste valable jusqu'à un angle de 15° qui correspond à une erreur de 0,1 %. Dans le cas de l'approximation grand angle, cet angle vaut 30° pour la même erreur. De même, l'erreur augmente d'un facteur 10 (soit 1 %) jusqu'à un angle de 30° en approximation standard, alors que cet angle vaut 50° en approximation grand angle.

La partie consacrée aux simulations numériques permettra d'affiner la comparaison entre les deux approximations dans le cadre du rayonnement d'un piston de dimension transverse  $a$ , notamment en champ proche.

### 1.2.2. Interprétation de l'effet hétérogène en grand angle

L'effet hétérogène intervient dans l'équation (12) dans les trois termes de l'équation.

Le premier terme en  $\frac{\partial^3 P}{\partial \tau^3}$  de coefficient  $H_{ga}$ , traduit l'effet seul de l'hétérogénéité sur la propagation des ondes en approximation grand angle. Il équivaut à un déphasage de l'onde. Nous avons déjà modifié dans la partie I, le coefficient de ce terme dans le cadre de l'étude de l'équation paraxiale en milieu hétérogène, par un déphasage déterminé par l'équation des ondes en milieu hétérogène que l'on nommera ici  $H_{ex}$ . Il garantit une phase exacte pour l'onde plane se propageant dans la direction axiale, même en milieu fortement hétérogène. Par conséquent, nous modifierons de la même façon dans l'équation (12), le coefficient  $H_{ga}$  par le coefficient  $H_{ex}$ .

Le deuxième terme en  $\frac{\partial^3 P}{\partial \tau \partial X^2}$  de coefficient  $D_P H$  modélise la diffraction dans l'approximation parabolique standard, mais aussi le couplage entre ce dernier et l'effet du milieu hétérogène.

Enfin le troisième terme en  $\frac{\partial^3 P}{\partial \sigma \partial X^2}$  de coefficient  $D_{ga} H$  décrit la correction apportée par l'approximation grand angle, ainsi que le couplage entre cette dernière et la diffraction liée au milieu hétérogène.

Nous affinerons dans la partie consacrée à la résolution numérique de l'équation (12), le rôle de chacun des termes.

### 1.3. Prise en compte de la non-linéarité dans l'équation « grand angle »

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, les effets non linéaires ne sont pris en compte qu'à l'ordre  $M$ . Il suffit donc de rajouter dans l'équation (12) le terme non linéaire déterminé dans l'équation KZ .

En régime non-linéaire, nous adimensionnons la direction de propagation  $z$  par la distance de choc  $L_c$  qui est la distance caractéristique des effets non-linéaires :

$$\sigma_{nl} = \frac{z}{L_c} = \frac{L_r}{L_c} \sigma$$

Nous obtenons donc l'équation de propagation des ondes acoustiques en régime non-linéaire et en milieu hétérogène sous l'approximation « grand angle » :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 P}{\partial \tau^2 \partial \sigma_{nl}} &= \frac{L_c}{L_r} H_{ga} \frac{\partial^3 P}{\partial \tau^3} + \frac{L_c}{L_r} D_p H \frac{\partial^3 P}{\partial \tau \partial X^2} + D_{ga} H \frac{\partial^3 P}{\partial X^2 \partial \sigma} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( P \frac{\partial P}{\partial \tau} \right) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (14)$$

avec  $\frac{L_c}{L_r} = \frac{\eta^2}{2\beta M}$  où  $\beta$  est le coefficient de non-linéarité et  $M$  est le nombre de

Mach acoustique.

## 2. Modèle numérique

L'objectif de cette section est de présenter et de valider le schéma numérique de résolution de l'équation grand angle non linéaire en milieu hétérogène (12) établie dans le chapitre précédent .

Le principe général de résolution numérique de l'équation grand angle est identique à celui de l'équation parabolique standard détaillé dans la première partie, à savoir :

les effets non linéaires sont traités séparément des autres effets linéaires (diffraction, hétérogénéité, absorption) par une méthode à pas fractionné (au premier ordre) ;

l'équation d'évolution ne prenant en compte que les effets non linéaires (équation de Burgers non dissipative) est résolue dans le domaine temporel par la méthode de Hayes décrite dans la première partie ;

l'équation parabolique grand angle linéaire est résolue dans le domaine fréquentiel par une discrétisation aux différences finies au premier ordre pour les variations spatiales axiales, et au second ordre pour les variations spatiales transverses.

Par rapport à l'approximation parabolique standard, seule est modifiée la partie linéaire de l'équation. Nous ne présenterons donc ici que les modifications apportées à cette partie de l'algorithme (2.1). Ensuite, nous validerons cette partie de l'algorithme par comparaison avec une solution analytique de l'équation des ondes, d'abord dans le cas homogène (2.2, champ proche d'un piston) puis dans le cas hétérogène (diffusion par un cylindre, 2.3). Ceci nous amènera notamment à quantifier le gain apporté par l'approximation grand angle en comparaison de l'approximation standard traitée précédemment (partie I).

## **2.1. Discrétisation de l'équation « grand angle » linéaire en milieu hétérogène**

### **2.1.1. Equation discrétisée**

Nous résolvons numériquement l'équation (12) linéaire (terme non linéaire omis). Comme pour l'approximation paraxiale, et dans le but d'optimiser le traitement des non-linéarités, cette équation est exprimée en fonction du potentiel  $\phi$  tel que



$p = \partial\phi/\partial\tau$ . L'équation linéarisée est identique qu'elle soit exprimée en pression ou en potentiel. Ensuite, nous passons dans le domaine fréquentiel par une transformée de Fourier :

$$\hat{\phi}(\sigma, X, \omega) = TF \{ \phi(\sigma, X, t) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\sigma, X, t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$\phi(\sigma, X, t) = TF \{ \hat{\phi}(\sigma, X, \omega) \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(\sigma, X, \omega) \exp(+j\omega t) d\omega,$$

si bien que  $\partial\phi/\partial\tau$  et  $\partial^2\phi/\partial\tau^2$  deviennent respectivement dans l'espace de Fourier  $j\omega\hat{\phi}$  et  $-\omega^2\hat{\phi}$ . La transformée de Fourier de l'équation (12) s'écrit alors :

$$(j\omega) \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \sigma} = -\omega^2 H_{ex} \hat{\phi} + D_p H \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial X^2} - j \frac{D_{ga} H}{\omega} \frac{\partial^3 \hat{\phi}}{\partial X^2 \partial \sigma}.$$

Comme dans le cas de l'approximation paraxiale, le terme hétérogène  $-\omega^2 H_{ex} \hat{\phi}$  correspond à un terme de déphasage associé à la variation de vitesse de phase liée à l'hétérogénéité locale du milieu. La prise en compte précise de ce terme est essentielle pour décrire correctement le déphasage hétérogène sans introduire de dissipation numérique. A cet effet, plutôt qu'une discrétisation numérique, il convient donc d'introduire la solution analytique correspondant au déphasage d'une onde plane. Comme en outre le coefficient  $H_{ex}$  est supposé constant par morceaux on posera donc (à l'intérieur d'un même milieu),  $\hat{\phi}(\sigma, X, \omega) = \hat{\psi} \exp(j\omega H_{ex} \sigma)$ . Enfin, comme dans la partie I, le coefficient  $H_{ex}$  peut être modifié sans changer la précision de l'équation de façon à décrire exactement la phase de l'onde plane en posant  $H_{ex} = \frac{2}{\eta^2} \frac{c_h - c_0}{c_h}$ . En

substituant, il vient donc l'équation suivante pour  $\hat{\psi}$  :

$$(j\omega) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \sigma} = H(D_p + D_{ga} H_{ex}) \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial X^2} - j \frac{D_{ga} H}{\omega} \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial X^2 \partial \sigma}.$$

L'équation ci-dessus est résolue par un schéma aux différences finies implicite (inconditionnellement stable) suivant la méthode déjà employée lors de la résolution numérique de l'équation parabolique « standard » en milieu hétérogène. On note  $\omega_l$  les pulsations discrétisées (indicées par  $l$ ),  $\sigma^k = (k-1)\Delta\sigma$  les points de l'axe discrétisé (avec  $k = [1, N_\sigma]$ ),  $X_i = (i-1)\Delta X$  les points de la direction transverse discrétisée (avec  $i = [1, N_X]$ ), et enfin  $\hat{\phi}_{i,l}^k = \hat{\phi}(\sigma^k, X_i, \omega_l)$  et  $\hat{\psi}_{i,l}^k = \hat{\psi}(\sigma^k, X_i, \omega_l)$  les valeurs des deux potentiels aux points de discrétisation. On approche la dérivée par rapport à la variable axiale  $\sigma$  par un schéma aux différences finies, décentré et précis au premier ordre :

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{i,l}^k}{\partial \sigma} = \frac{\hat{\psi}_{i,l}^k - \hat{\psi}_{i,l}^{k-1}}{\Delta \sigma} + O(\Delta \sigma).$$

La dérivée seconde par rapport à  $X$  est approchée par un schéma aux différences finies centré précis au deuxième ordre :

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}_{i,j}^k}{\partial X^2} = \frac{\hat{\psi}_{i-1,l}^k - 2\hat{\psi}_{i,l}^k + \hat{\psi}_{i+1,l}^k}{\Delta X^2} + O(\Delta X^2).$$

De manière cohérente, le terme issu de l'approximation grand angle est approchée par une différence finie centrée au second par rapport à la variable  $X$  et décentrée au premier ordre par rapport à la variable  $\sigma$  :

$$\frac{\partial^3 \hat{\psi}_{i,j}^k}{\partial \sigma \partial X^2} = \frac{(\hat{\psi}_{i-1,l}^k - 2\hat{\psi}_{i,l}^k + \hat{\psi}_{i+1,l}^k) - (\hat{\psi}_{i-1,l}^{k-1} - 2\hat{\psi}_{i,l}^{k-1} + \hat{\psi}_{i+1,l}^{k-1})}{\Delta X^2 \Delta \sigma} + O(\Delta \sigma).$$

Finalement, nous pouvons approcher l'équation de propagation linéaire « grand angle » en milieu hétérogène dans le domaine fréquentiel par :

$$\begin{aligned} & \hat{\psi}_{i,l}^k \left( \frac{j\omega_l}{\Delta \sigma} + \frac{2D_p^1 H}{\Delta X^2} - \frac{2jD_{ga} H}{\omega_l \Delta \sigma \Delta X^2} \right) + (\hat{\psi}_{i+1,l}^k + \hat{\psi}_{i-1,l}^k) \left( \frac{jD_{ga} H}{\omega_l \Delta \sigma \Delta X^2} - \frac{D_p^1 H}{\Delta X^2} \right) = \dots \\ & \hat{\psi}_{i,l}^{k-1} \left( \frac{j\omega_l}{\Delta \sigma} - \frac{2jD_{ga} H}{\omega_l \Delta \sigma \Delta X^2} \right) + (\hat{\psi}_{i+1,l}^{k-1} + \hat{\psi}_{i-1,l}^{k-1}) \left( \frac{jD_{ga} H}{\omega_l \Delta \sigma \Delta X^2} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

avec  $D_p^1 = D_p + D_{ga} H_{ex}$ . Tous les coefficients hétérogènes sont calculés au point où l'on réalise l'approximation, c'est-à-dire au point de coordonnées  $(\sigma^k, X_i)$ .

Comme dans le cas paraxial (partie I), l'équation (15) se met sous la forme d'une matrice tri-diagonale  $\mathbf{A}^{k,l} \hat{\psi}_{\bullet,j}^k = \mathbf{B}^{k,l} \hat{\psi}_{\bullet,j}^{k-1}$ . L'inversion de ce système (par la méthode de Thomas) pour chaque fréquence  $\omega_l$  permet de déterminer le vecteur  $\hat{\psi}_{\bullet,j}^k$  associé au champ dans le plan  $\sigma = \sigma^k$  connaissant le vecteur champ  $\hat{\psi}_{\bullet,j}^{k-1}$  correspondant au plan précédent  $\sigma = \sigma^{k-1}$ . Enfin, on revient au potentiel par l'opération  $\hat{\phi}_{\bullet,j}^k = \hat{\psi}_{\bullet,j}^k \exp(j\omega H_{ex} \Delta\sigma)$ .

La résolution numérique de l'équation (15) nécessite trois conditions aux limites en espace. Les dérivées par rapport à la variable axiale étant au plus d'ordre 1, une des conditions aux limites est la condition d'initialisation de l'algorithme, qui suppose que le champ de pression est connu dans le plan  $\sigma = 0 = \sigma^1$ . Les dérivées par rapport à la variable transverse étant au plus d'ordre 2, deux conditions aux limites sur les bords latéraux du domaine sont nécessaires. Remarquons que le nombre de condition aux limites est identique au cas de l'approximation paraxiale. Pour les conditions aux limites latérales, dans le cas de l'approximation paraxiale, on s'était restreint au cas d'un champ de pression nul (champ libre) ou une onde plane imposée (onde plane incidente). Ceci était possible en prenant un domaine de calcul assez grand, pour lequel les ondes diffusées par les hétérogénéités ne venaient impacter les bords du domaine de calcul que sous des angles relativement forts. Or l'approximation paraxiale et la dissipation numérique du schéma (du fait de la discrétisation au premier ordre de la dérivée /  $\sigma$ ) font que ces ondes sont très faibles.

Ici, dans le cas de l'approximation grand angle, les ondes émises sous des angles élevés seront mieux décrites et moins atténuées. En outre, l'approximation grand angle vise aussi à décrire le cas d'hétérogénéités multiples, disposées dans la direction transverse et donc plus proches du bord du domaine de calcul numérique. Nous nous proposons donc d'implémenter une condition aux limites faiblement réfléchissante, au moyen d'une couche absorbante numérique.

### 2.1.2. Condition aux limites absorbante

Nous proposons dans cette partie d'implémenter une nouvelle condition aux bords latéraux du domaine en  $X$ . L'utilité de cette condition aux limites est de réduire les réflexions parasites sur les bords du domaine en  $X$ , liées à la propagation des angles plus élevés dans l'équation « grand angle ». L'idée est d'introduire une couche fortement absorbante aux bords du domaine numérique. L'onde, en pénétrant ce domaine va fortement s'atténuer. En atteignant le bord effectif du domaine, elle sera d'amplitude très faible et donc très peu d'énergie sera réfléchi. En outre, l'onde réfléchi continuera à être absorbée à l'intérieur de la couche absorbante en traversant celle-ci si bien que, au dehors de la couche absorbante, le champ de pression sera très peu affecté. La difficulté de la méthode consiste :

- 1) à bien choisir les caractéristiques de cette couche absorbante afin de ne pas créer de rupture d'impédance à l'interface entre le milieu de propagation et la couche absorbante fictive, et donc de réflexion parasite à ce niveau ;
- 2) tout en ayant un milieu fortement absorbant de façon à ce que l'épaisseur de la couche absorbante soit la plus petite possible afin de minimiser le coût numérique de la méthode.

L'idée d'une couche absorbante n'est en rien nouvelle et a fait l'objet d'une littérature considérable. Pour l'équation des ondes, les couches absorbantes de type PML (« Perfectly Matched Layer ») ont connu un succès considérable (Béranger 1994, Cohen 2002). L'idée consiste à reformuler l'équation des ondes scalaire sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles dissipatif, dont les coefficients, certains *a priori* non physiques, sont choisis de manière :

- 1) à redonner l'équation des ondes dans le cas non dissipatif,
- 2) à s'assurer qu'une onde arrivant à une interface fluide parfait / fluide dissipatif n'est pas réfléchi quel que soit l'angle d'incidence.

C'est cette formulation qui a ainsi permis de minimiser la réflexion des ondes. Des conditions aux limites de type PML ont également été élaborées pour des

approximations d'onde de type parabolique (en milieu homogène, Collino, 1996). Ici, le but est plus modeste et, afin de garder la structure existante de résolution de l'équation grand angle, nous nous sommes restreints à une couche absorbante sans que celle-ci soit parfaite, c'est-à-dire absolument non réfléchissante pour tous les angles d'incidence. Ceci n'était pas utile, car l'objectif de l'étude est une comparaison avec des données expérimentales. Or les incertitudes expérimentales et les erreurs introduites par l'approximation parabolique, même « grand angle », ont toutes chances d'être très supérieures aux erreurs induites par la (faible) réflexion sur la couche absorbante numérique.

Pour introduire une couche absorbante, revenons dans un premier temps à l'équation de propagation grand angle en milieu homogène, écrite en variables avec dimension (Eq. (13)). On lui ajoute un terme absorbant. Celui-ci n'ayant pas de réelle signification physique, il peut être choisi avec une certaine latitude et de la manière la plus simple possible en vue d'une programmation numérique. Les schémas numériques ici employés étant pseudo-spectraux, un terme absorbant faisant intervenir uniquement des dérivées partielles par rapport à la variable temps retardé s'avère adapté. On pose alors :

$$\frac{\partial^3 p}{\partial \tau^2 \partial z} - \frac{c_0}{2} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau \partial x^2} - \frac{c_0^2}{4} \frac{\partial^3 p}{\partial z \partial x^2} + J \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = 0$$

où le terme numérique  $J \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}$  est le nouveau terme numérique absorbant,  $J$

étant homogène à un nombre d'onde. Examinons maintenant la relation de dispersion d'une onde plane  $p = A \exp[i(k_x x + k_z^{ga} z - \omega \tau)]$ . En injectant celle-ci dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{k_z^{ga}}{k} = 1 - \frac{\left( \frac{k_x^2}{k^2} - i \frac{J}{k} \right)}{2 \left( 1 - \frac{k_x^2}{4k^2} \right)}$$

où  $k = \omega/c_0$ . La partie réelle de cette équation reste égale à la relation de dispersion de l'équation grand angle (cf 1.2.1). En considérant la partie imaginaire, on voit que, en prenant le coefficient  $J > 0$ , le terme supplémentaire introduit bien une absorption numérique (pour les nombres d'onde transverses  $k_x < 2k$ ) et ce sans dispersion artificielle (ce qui ne serait pas le cas pour l'équation des ondes où l'on est obligé de corriger la dispersion introduite par la dissipation, Cohen 2002). Au vu de l'équation de dispersion ci-dessus, on peut toutefois s'interroger sur le comportement de la solution résultant des nombres d'onde  $k_x > 2k$  qui semblent anti-dissipatifs et pourraient donc conduire à une instabilité numérique. On verra dans les exemples montrés plus loin qu'il n'en est rien. Ceci peut s'expliquer par la forte dissipation numérique de ces termes introduite par le schéma de différences finies décentré au premier ordre.

Afin de minimiser les réflexions parasites à l'interface entre le domaine de simulation numérique et la couche absorbante, il est préférable de choisir en pratique un coefficient continûment variable avec la profondeur, tel que  $J(x \leq L) = 0$  et  $J(x > L) > 0$  pour une interface milieu physique / couche absorbante située en  $x = L$ . On retient la forme recommandée pour les couches PML et qui optimise celles-ci (Cohen 2002) :

$$J(x > L) = 21 \frac{(x-L)^2}{h_{abs}^3}$$

où  $h_{abs}$  est l'épaisseur de la couche absorbante, choisie comme étant égale à deux longueurs d'onde (du fondamental pour les problèmes non linéaires).

On ajoute donc le terme  $J(x) \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = 0$  à l'équation grand angle linéaire en milieu hétérogène. Après adimensionnement de celle-ci, passage au potentiel  $\hat{\phi}$ , transformée de Fourier et passage au potentiel  $\hat{\psi}$ , l'équation satisfaite par ce dernier devient :

$$(j\omega) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \sigma} = HD_p^1 \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial X^2} - j \frac{D_{ga}H}{\omega} \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial X^2 \partial \sigma} - j\omega J(X)L_c \hat{\psi}$$

La discrétisation du terme absorbant introduit un terme diagonal supplémentaire dans le système matriciel à résoudre, qui s'écrit désormais :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{i,l}^k \left( \frac{j\omega_l}{\Delta\sigma} (1 + J(X_i)L_c\Delta\sigma) + \frac{2D_p^1H}{\Delta X^2} - \frac{2jD_{ga}H}{\omega_l \Delta\sigma \Delta X^2} \right) + (\hat{\psi}_{i+1,l}^k + \hat{\psi}_{i-1,l}^k) \left( \frac{jD_{ga}H}{\omega_l \Delta\sigma \Delta X^2} - \frac{D_p^1H}{\Delta X^2} \right) = \dots \\ \hat{\psi}_{i,l}^{k-1} \left( \frac{j\omega_l}{\Delta\sigma} - \frac{2jD_{ga}H}{\omega_l \Delta\sigma \Delta X^2} \right) + (\hat{\psi}_{i+1,l}^{k-1} + \hat{\psi}_{i-1,l}^{k-1}) \left( \frac{jD_{ga}H}{\omega_l \Delta\sigma \Delta X^2} \right). \end{aligned}$$

Si l'on retient uniquement les termes liés à la dissipation dans la couche absorbante, on voit que l'algorithme se réduit à :

$$\hat{\psi}_{i,l}^k = \frac{\hat{\psi}_{i,l}^{k-1}}{1 + J(X_i)L_c\Delta\sigma}$$

qui correspond donc bien à une absorption d'un coefficient  $(1 + J(X_i)L_c\Delta\sigma)^{-1} = \exp(-J(X_i)L_c\Delta\sigma) + O(\Delta\sigma^2)$  par pas d'avancement.

Avec la couche absorbante, les conditions aux limites latérales deviennent donc simplement des conditions de champ nul à l'extrémité de la couche absorbante

$$\hat{\psi}_{i=N_x,l}^k = 0.$$

## 2.2. Validation en milieu homogène : champ proche d'un piston

L'objectif de cette section est de valider l'algorithme de résolution de l'équation grand angle par comparaison avec une solution analytique de l'équation des ondes en milieu homogène (la validation en milieu hétérogène sera entreprise plus loin). La validation vise notamment à l'examen des trois points suivants :

- vérifier la convergence de l'algorithme lorsque l'on raffine le maillage ;
- valider l'efficacité et la stabilité de la couche absorbante ;

- estimer le gain apporté par l'approximation grand angle en regard de l'approximation parabolique standard.

Les comparaisons seront effectuées avec une solution diffractante 2D de l'équation des ondes avec champ de pression imposé dans un plan. Nous nous intéresserons notamment au cas d'un champ géométriquement discontinu (pression uniforme sur la surface de la source et nulle par ailleurs), pour lequel le champ acoustique présente de fortes variations spatiales en champ proche qui sont difficiles à capturer numériquement et mal décrites par l'approximation parabolique standard.

### 2.2.1. Solution analytique

En régime linéaire, nous rappelons le calcul analytique permettant de déterminer à 2D le champ rayonné par une source de largeur  $2a$ , vibrant de manière uniforme avec une pression imposée. La pression de la surface rayonnante est supposée égale à :

$$P_0(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x_0\| > a \\ 1 & \text{si } \|x_0\| \leq a \end{cases}$$

avec  $\vec{x}_0 = (x_0, 0)$  la coordonnée d'un point à la surface du piston et  $\vec{x} = (x, z)$  les coordonnées du point d'observation. Dans le domaine fréquentiel, le théorème de Kirchhoff s'écrit :

$$\hat{p}_a(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{p}_a(x_0) \frac{\partial \hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\partial n} - \hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_0) \frac{\partial \hat{p}_a(x_0)}{\partial n} \right) dx_0$$

où  $\hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_0)$  est une fonction de Green à 2D de l'équation des ondes, solution au point d'observation  $\vec{x}$  pour une source ponctuelle située en  $\vec{x}_0 = (x_0, 0)$ . La fonction de Green à deux dimensions en champ libre (domaine non borné) est (Morse and Ingard 1968) :

$$\hat{G}^l(\vec{x}, \vec{x}_0) = -\frac{j}{2} H_0^{(2)}(k \|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$



où  $H_n^{(2)}(kr)$  est la fonction de Hankel d'ordre  $n$  de deuxième espèce et  $r = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ . La méthode des images permet de construire la fonction de Green satisfaisant la condition aux limites  $\hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0$  dans le plan  $z_0 = 0$ . Si l'on considère le point image  $\vec{x}_0' = (x_0, -z_0)$  du point source  $\vec{x}_0$  symétrique par rapport au plan de la source, on construit la fonction de Green recherchée:

$$\hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \hat{G}'(\vec{x}, \vec{x}_0) - \hat{G}'(\vec{x}, \vec{x}_0') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k\|\vec{x} - \vec{x}_0\|) + \frac{j}{4} H_0^{(2)}(k\|\vec{x} - \vec{x}_0'\|)$$

Par symétrie, on a évidemment  $\hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0$  si  $z_0 = 0$ , et  $\hat{G}(\vec{x}, \vec{x}_0)$  est bien une fonction de Green puisqu'elle est la différence de la fonction de Green en champ libre et de la fonction de Green associée au point image qui n'est pas dans le domaine de calcul  $z > 0$ . En utilisant cette fonction de Green dans le théorème de Kirchhoff, la contribution associée à la dérivée normale de la pression dans le plan de la source disparaît, et l'on obtient après calcul l'expression de la pression en tout point d'observation  $\vec{x}$  :

$$p_a(\vec{x}) = \int_{-a}^a z \frac{H_1^{(2)}\left(k\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2}} dx_0$$

Cette expression est l'analogue à 2D de la formule de Rayleigh (Pierce 1989) pour un piston 3D. Remarquons toutefois ici que la condition aux limites correspond à un champ de pression imposé, au contraire du cas usuel d'un « piston bafflé » pour lequel c'est le champ de vitesse qui est imposé. L'approximation parabolique standard ne distingue pas les deux conditions aux limites car pression et vitesse axiale sont supposées proportionnelles au premier ordre. Ceci n'est plus vrai pour l'approximation grand angle. Nous n'examinerons pas ce cas, car, dans l'ensemble de la présente étude, c'est le champ de pression incident (mesuré) qui est utilisé pour initialiser les codes de propagation et comparer avec les simulations. Néanmoins, par commodité de langage nous appellerons ce type de source « piston » dans le reste de cette section II.3.

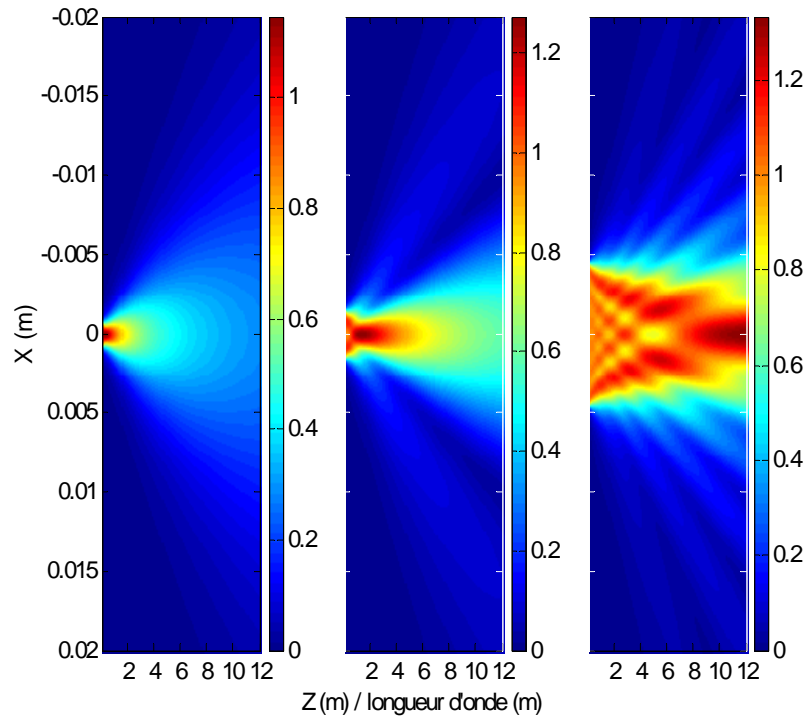


Figure 3. Représentation spatiale de l'amplitude du champ de pression rayonné dans l'eau ( $c_0=1500$  m/s) à 1 MHz par un « piston » plan de dimension  $2a$  égale à respectivement (de gauche à droite) une, deux et six longueurs d'onde

La figure 3 représente l'amplitude du champ de pression rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension  $a = \lambda/2, \lambda, 3\lambda$  (de gauche à droite) avec  $\lambda = 1,5$  mm. Comme attendu, le piston se comporte comme une source quasiment ponctuelle (rayonnement omnidirectionnel) si la valeur de  $a/\lambda$  est petite (figure 1 à gauche). Au fur et à mesure que ce rapport augmente (au centre et à droite) le rayonnement devient plus directif (le champ se rapproche de l'axe) et il existe une zone dite de champ proche (entre le piston et la distance de Fresnel  $L_d = a^2/\lambda$ ) qui comporte des oscillations. En effet, dans cette zone, la source principale peut être décomposée en plusieurs sources secondaires ponctuelles (selon le principe de Huygens) qui vibrent en phase (mode « piston »). Le point d'observation  $M(x, z)$  n'étant pas situé à la même distance de chacune de ces sources secondaires, leurs contributions arrivent déphasées les unes par

rapport aux autres et sont donc à l'origine d'interférences constructives ou destructives. En champ lointain, la source est vue comme une source ponctuelle mais directive et la pression décroît en  $1/\sqrt{z}$  sur l'axe de propagation comme pour une source linéique.

### 2.2.2. Convergence en maillage

Etudions maintenant le maillage nécessaire à la modélisation du champ proche du rayonnement d'un « piston ». Les simulations numériques sont ici réalisées pour une source de dimension  $2a=6\lambda=9$  mm, et toujours à 1,5 MHz dans l'eau. La figure 4 représente l'évolution de la pression sur l'axe de propagation calculée par l'algorithme décrit plus haut pour quatre maillages différents (respectivement  $(\Delta x=\Delta\sigma=\lambda/16)$  –  $(\Delta x=\lambda/40$  et  $\Delta\sigma=\lambda/16)$  –  $(\Delta x=\lambda/16$  et  $\Delta\sigma=\lambda/40)$  –  $(\Delta x=\Delta\sigma=\lambda/40)$ ). Le champ axial analytique est également représenté. On observe que la position du dernier maximum (qui repère la transition entre le champ proche fortement oscillant et le champ lointain plus régulier, la distance de Fresnel valant 13,5mm) ainsi que son amplitude sont en très bon accord pour chaque maillage. En revanche, la position et l'amplitude du dernier minimum (vers 7 mm) et de l'avant-dernier maximum (vers 4 mm) sont nettement mieux modélisées pour des maillages fins. En particulier, la position des extrema (qui résulte des interférences constructives ou destructives donc de la phase du champ) est sensible au pas transverse  $\Delta x$  car la discrétisation transverse introduit de la dispersion numérique, alors que l'amplitude est sensible au pas axial  $\Delta\sigma$  car la discrétisation axiale introduit de la dissipation numérique. En champ proche, le maillage nécessaire pour modéliser l'évolution de la pression doit donc être plus fin qu'en champ lointain en raison des évolutions rapides du champ liées à la discontinuité géométrique de la source. En champ lointain, un maillage à  $\lambda/16$  suffit, comme on le voit sur le dernier maximum.

La figure 5 représente le champ de pression transverse dans le plan  $z = 4,2$  mm de la source correspondant à l'avant-dernier maximum axial, et calculé pour deux maillages (respectivement le plus grossier  $(\Delta x=\Delta\sigma=\lambda/16)$  et le plus fin  $(\Delta x=\Delta\sigma=\lambda/40)$ ).

Les champs sont toujours comparés avec la solution analytique de l'équation des ondes. Les lettres CA sur la figure désignent la position de la couche absorbante (d'épaisseur  $2\lambda=3\text{mm}$ ) qui n'est pas une zone physique. Comme attendu, la solution est nettement meilleure avec le maillage fin, surtout près de l'axe. Ce maillage fin sera celui utilisé dorénavant dans le reste de cette étude (champ proche d'un « piston », partie 2.2.2). Lorsque l'on s'éloigne de l'axe, l'approximation parabolique ne peut toutefois rendre compte complètement de la phase des différentes ondelettes issues de la source, les interférences ne sont pas parfaitement décrites et l'on observe un petit écart avec la solution analytique sur le dernier maximum vers 2mm. La couche absorbante joue parfaitement son rôle et l'on voit bien la décroissance du champ jusqu'à zéro à l'intérieur sans perturbation à l'extérieur. Nous allons maintenant examiner plus en détail l'efficacité numérique de cette couche.

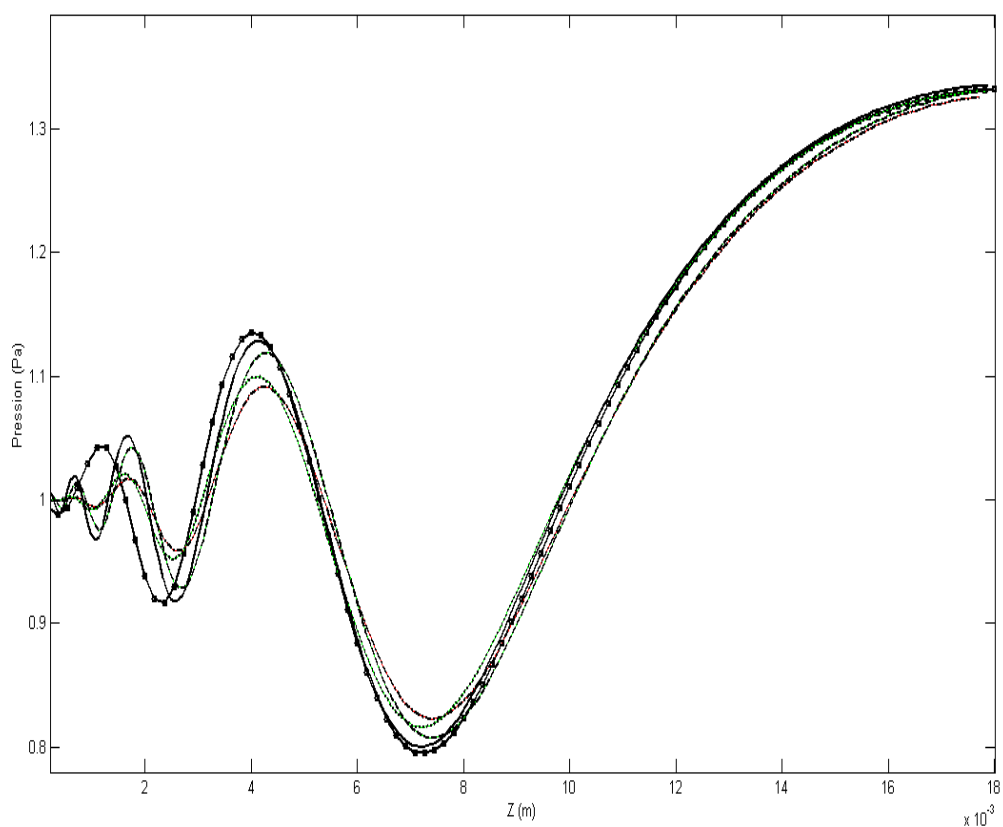


Figure 4. Champ de pression axial rayonné par un « piston » de dimension 9 mm ( $a=3\lambda$ ) à 1 MHz dans l'eau. En trait plein+cercles noirs : solution analytique de l'équation des ondes. Solution numérique de l'équation parabolique grand angle pour différents maillages :  $\Delta x=\Delta\sigma=\lambda/16$  (tirets+points) –  $\Delta x=\lambda/40$  et  $\Delta\sigma=\lambda/16$  (pointillés) –  $\Delta x=\lambda/16$  et  $\Delta\sigma=\lambda/40$  (tirets) –  $\Delta x=\Delta\sigma=\lambda/40$  (trait plein).

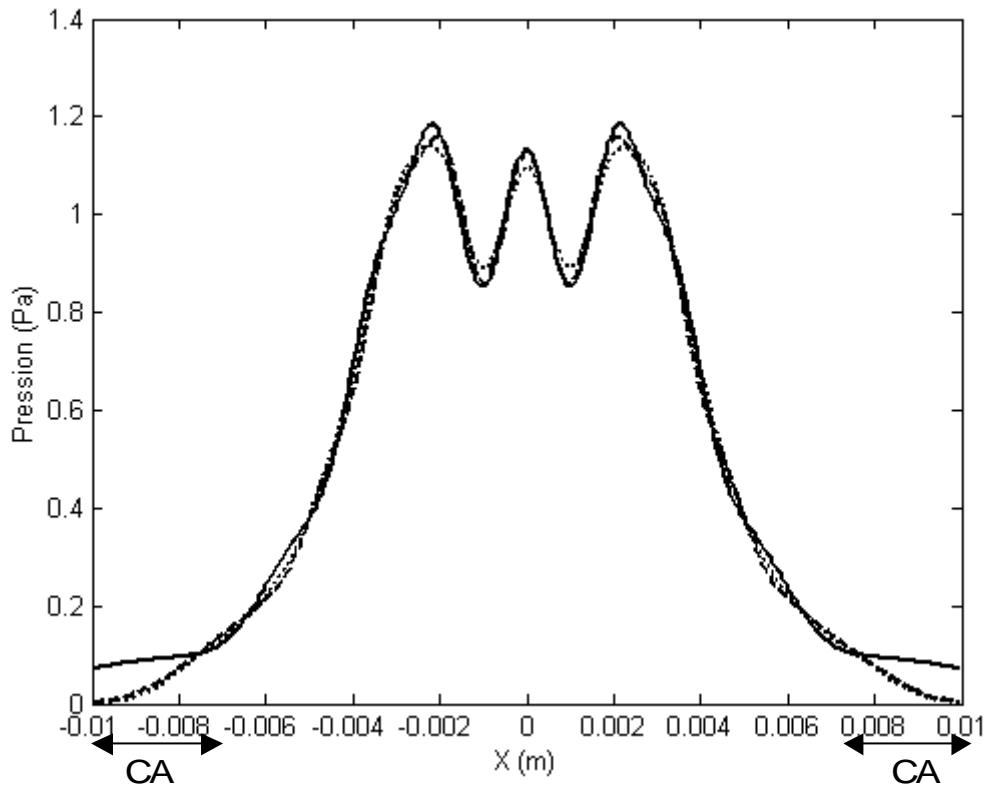


Figure 5. Champ de pression transverse rayonné par un « piston » de dimension 9 mm ( $a=3\lambda$ ) à 1 MHz dans l'eau dans le plan  $z = 4.2$  mm. En trait plein : solution analytique de l'équation des ondes. Solution numérique de l'équation parabolique grand angle pour différents maillages :  $\Delta x = \Delta \sigma = \lambda/16$  (pointillés) –  $\Delta x = \Delta \sigma = \lambda/40$  (tirets).

### 2.2.3. Couche absorbante

Intéressons-nous maintenant à l'efficacité de la condition absorbante appliquée aux bords latéraux du domaine. Nous simulons toujours numériquement le champ de pression rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9 mm. En vertu des conclusions du paragraphe précédent, le maillage choisi est un maillage « fin » (à  $\lambda/40$ ). Les simulations sont effectuées sans (Fig.6) et avec (Fig. 7) la couche absorbante, d'épaisseur  $2\lambda$ . En l'absence de couche absorbante, une condition de pression nulle est imposée sur les bords latéraux.

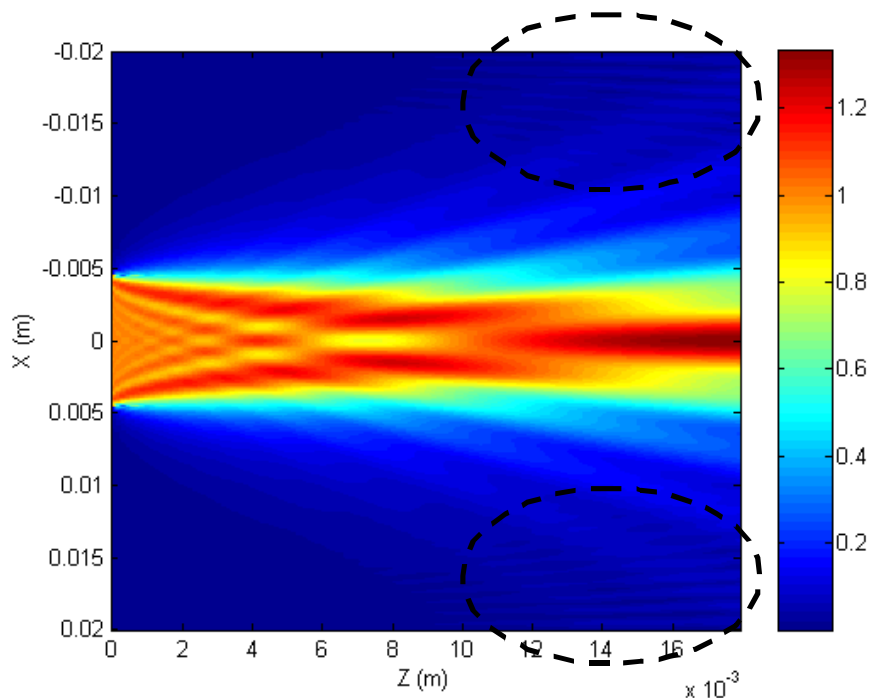


Figure 6. Représentation spatiale de l'amplitude du champ de pression (niveau de couleur) rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9mm : simulation numérique de l'équation grand angle sans conditions absorbantes.

On observe clairement sur les figures le comportement usuel d'un champ proche de type piston, à savoir :

- les oscillations axiales et transverses de l'amplitude en champ proche ;
- la transition champ proche / champ lointain avec le dernier maximum axial vers 18 mm ;
- la formation progressive des lobes secondaires.

Dans les cercles en pointillé noir, les réflexions parasites sur les bords du domaine apparaissent clairement (même si elles sont assez peu visibles car le champ y est d'amplitude assez faible) en l'absence de couche absorbante (Fig.6) alors qu'elles sont absentes avec la couche absorbante qui joue bien son rôle (Fig.7). Aucune instabilité numérique (dans cette simulation ni dans aucune autre réalisée) n'a été constatée.

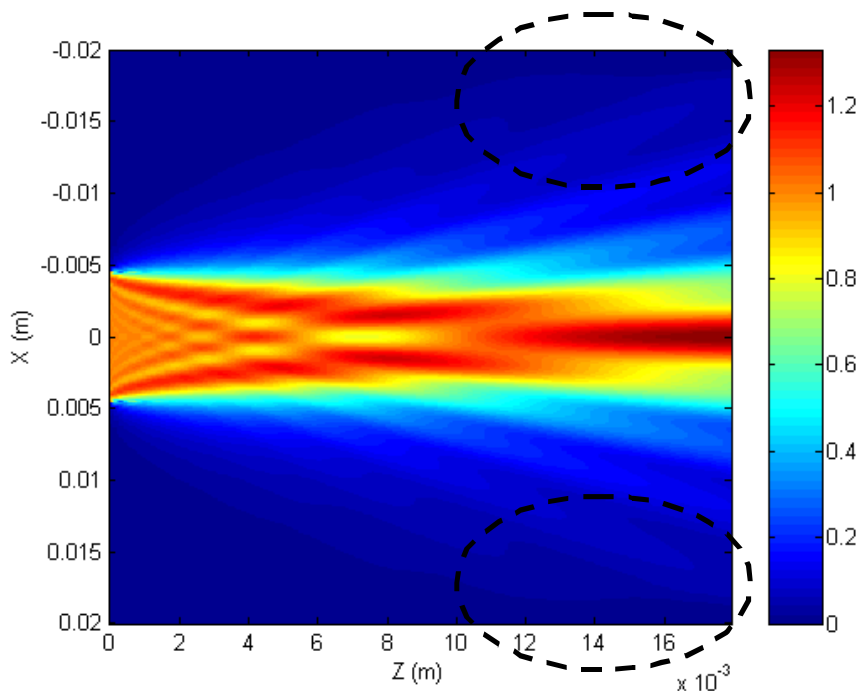


Figure 7. Représentation spatiale de l'amplitude du champ de pression (niveau de couleur) rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9mm : simulation numérique de l'équation grand angle avec couche absorbante d'épaisseur 3 mm.

Pour mieux visualiser l'efficacité de la couche absorbante, les figures 8 et 9 représentent respectivement l'erreur relative entre la solution analytique et la simulation numérique de l'équation grand angle, avec ou sans la couche absorbante. L'erreur est représentée sur le domaine de calcul, à l'exception de la couche absorbante (d'épaisseur 3 mm).

On remarque tout d'abord que le champ de pression très proche de la source (approximativement à une distance inférieure à deux fois la longueur d'onde – à l'intérieur du cercle pointillé noir sur la figure 8), est moins bien simulé. Nous reviendrons, dans la partie 2.2.4, sur l'interprétation de la figure 8 et sur l'apport de l'approximation « grand angle » en champ proche. Notons toutefois que l'erreur reste acceptable, de l'ordre de 5% au plus. Sur la figure 9, les cercles en pointillés noir indiquent la zone des réflexions parasites que nous n'observons pas sur la figure 8. On visualise ainsi clairement les réflexions parasites et les oscillations du champ qu'elles



produisent par interférence avec le champ direct. On remarque d'ailleurs que les erreurs induites par les réflexions artificielles sont comparables à celles dues à l'approximation grand angle (de l'ordre de 5%, en rouge sur la figure). Au contraire, le champ avec la couche absorbante apparaît beaucoup plus régulier et aucune réflexion au bord n'est visible. L'efficacité de la couche absorbante est donc bien mise en évidence, pour une mise en œuvre numérique très simple (seuls les termes diagonaux sont modifiés) et un surcoût numérique faible (épaisseur limitée à deux longueurs d'onde).

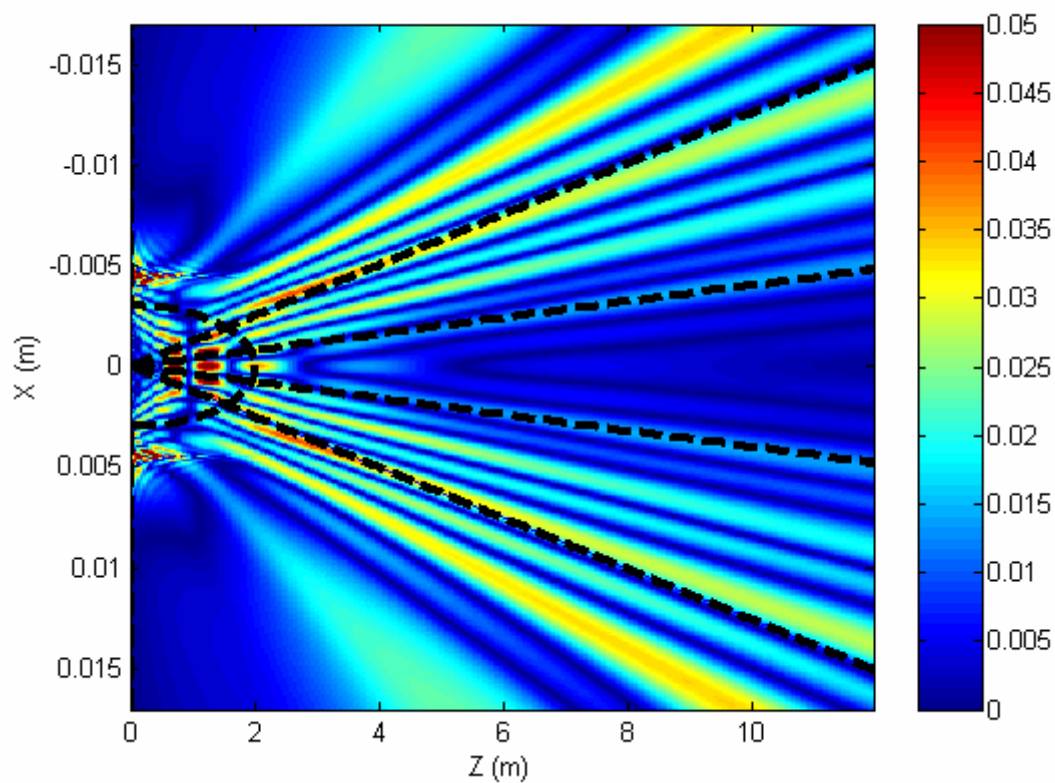


Figure 8. Champ de pression (niveau de couleur) rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9mm : amplitude de l'erreur relative entre la solution analytique (équation des ondes) et la simulation numérique de l'équation grand angle avec couche absorbante d'épaisseur 3mm.

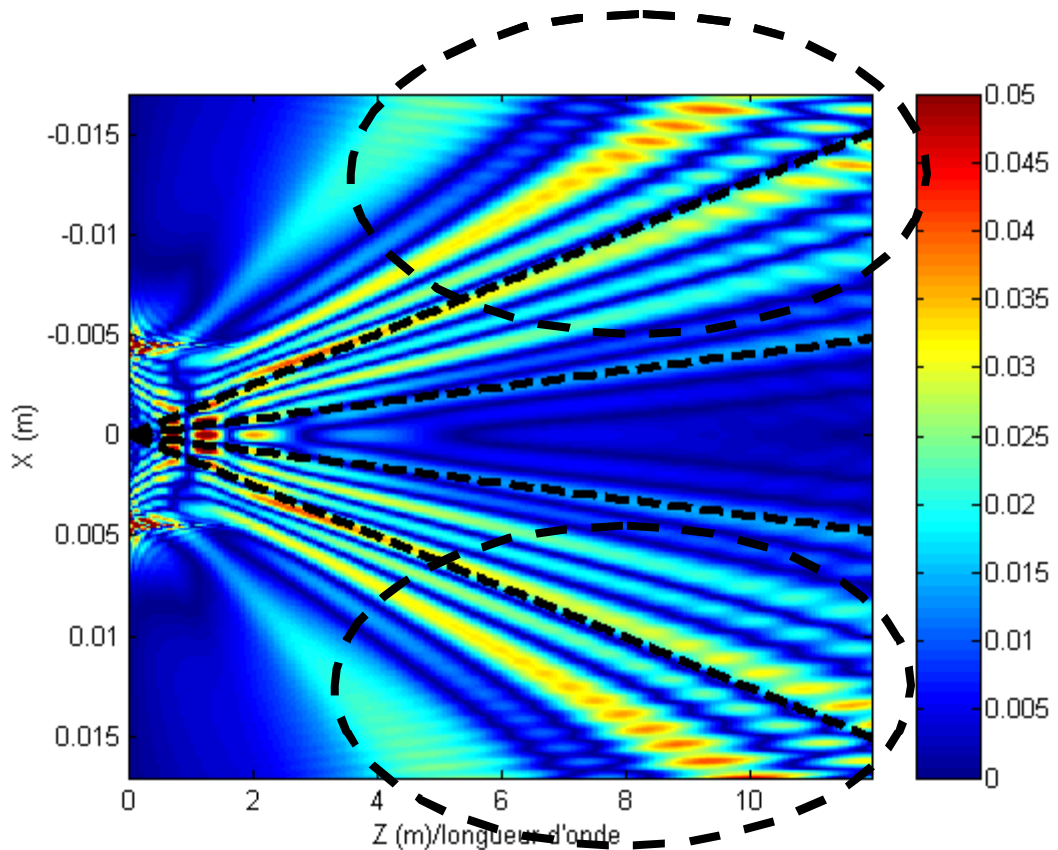


Figure 9. Champ de pression (niveau de couleur) rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9mm : amplitude de l'erreur relative entre la solution analytique (équation des ondes) et la simulation numérique de l'équation grand angle sans conditions absorbantes.

#### 2.2.4. Comparaisons des approximations paraboliques standard et « grand angle »

Nous avons validé dans les deux paragraphes la méthode numérique développée pour résoudre l'équation « grand angle », en vérifiant la sensibilité au maillage et l'influence de la couche absorbante aux bords du domaine numérique. Dans cette partie, nous analysons l'apport de l'approximation « grand angle » par rapport à l'approximation paraxiale standard dans la modélisation d'un champ proche acoustique relativement complexe.

La figure 10 représente l'erreur relative entre le calcul analytique (cf. 2.2.1) et la simulation numérique de la source « piston », toujours de dimension  $9 \text{ mm} - a=3\lambda$  - et rayonnant dans l'eau à 1,5 MHz. On compare l'approximation parabolique « standard » (en haut) et « grand angle » (en bas). Dans les deux cas, les simulations sont réalisées avec le même maillage fin et avec la même couche absorbante d'épaisseur  $3 \text{ mm}=2\lambda$ . L'implémentation de la couche absorbante dans le « solveur » de l'approximation standard est absolument similaire au cas de l'approximation grand angle et n'est pas détaillée ici. L'erreur est représentée sur tout le domaine de calcul à l'exception de la couche absorbante. Notons ici que, dans un souci de comparaison avec le grand angle, la barre de couleur pour l'approximation paraxiale standard a été saturée au maximum à 5%.

On remarque tout de suite le gain très évident apporté par l'approximation grand angle. L'erreur est partout réduite, et de manière très importante. Ceci démontre visiblement l'intérêt d'utiliser l'approximation grand angle, pour un coût numérique pratiquement identique.

Le champ très proche reste la zone la plus difficile à approcher en approximation paraxiale. En effet, les ondes de bord interfèrent de manière importante dans cette zone avec l'onde plane issue du centre de la source et sous des angles élevés qui sont mal décrits par les approximations paraboliques. En particulier, les ondes évanescentes (qui correspondent à des nombres d'onde transverses  $k_x > k_0$ ) jouent un rôle significatif en champ très proche et ne sont pas du tout décrites par aucune des approximations paraxiales. Néanmoins, même dans cette zone, le gain apporté par l'approximation grand angle est très visible. Plus loin de la source, on trace de part et d'autre de l'axe deux cônes d'angle respectivement  $15^\circ$  et  $40^\circ$  (droites pointillées sur les figures) correspondant aux angles théoriques pour lesquelles l'erreur sur la relation de dispersion d'une onde plane est inférieure respectivement à 1 % (standard) et 3 % (grand angle). On voit nettement sur les figures que ces droites donnent une bonne indication des domaines de validité des deux approximations paraxiales. L'approximation grand angle permet donc d'augmenter considérablement le domaine de validité (d'un facteur trois

environ). Elle permet également de réduire d'un ordre de grandeur environ (de 10 à 1 % environ) l'erreur dans la zone paraxiale (angles inférieurs à 15°).

Ce gain considérable est également visualisé sur la figure 11 qui représente pour les mêmes conditions l'amplitude du champ axial. La position et l'amplitude du dernier maximum (transition champ proche / champ lointain au-delà de la distance de Fresnel) sont très bien simulées avec les deux approximations. Néanmoins, en champ proche, l'approximation grand angle permet également de bien simuler de nombreuses oscillations du champ de pression. L'accord est notamment très bon en amplitude et en phase sur les deux derniers extrema (figure 11), et, en amplitude encore, pour les deux extrema précédents (mais est moins bon sur la phase). Au contraire, l'approximation paraxiale ne décrit pas correctement la position (phase) d'aucun de ces extrema (les amplitudes restent assez bien simulées). Les traits verticaux représentent les positions à partir desquelles un point de l'axe voit les bords de la source sous des angles inférieurs à 40° et 15°. On retrouve là encore une estimation du domaine de validité de chacune des approximations.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées de l'analyse des champs transverses, comme sur les figures 12, 13 et 14 montrant respectivement l'évolution transversale (y compris dans la couche absorbante) de l'amplitude de la pression dans les plans  $z = 16,8 \text{ mm}$ , (transition champ proche / champ lointain),  $z = 5,4 \text{ mm}$  (champ proche) et  $z = 3 \text{ mm}$  (champ très proche). Dans le premier cas (frontière avec le champ lointain), les deux approximations sont en très bon accord avec le calcul analytique près de l'axe, mais l'approximation grand angle est nettement meilleure en latéral (par exemple au niveau du « plateau » à 3 mm). Dans le deuxième cas (en champ proche), l'approximation grand angle reste en très bon accord partout avec le calcul analytique alors que l'approximation parabolique « standard » surestime les oscillations transverses du champ autour de l'axe de propagation. Dans le dernier cas (champ très proche), l'approximation grand angle ne simule pas complètement le nombre et la phase des lobes de diffraction autour de l'axe de propagation.

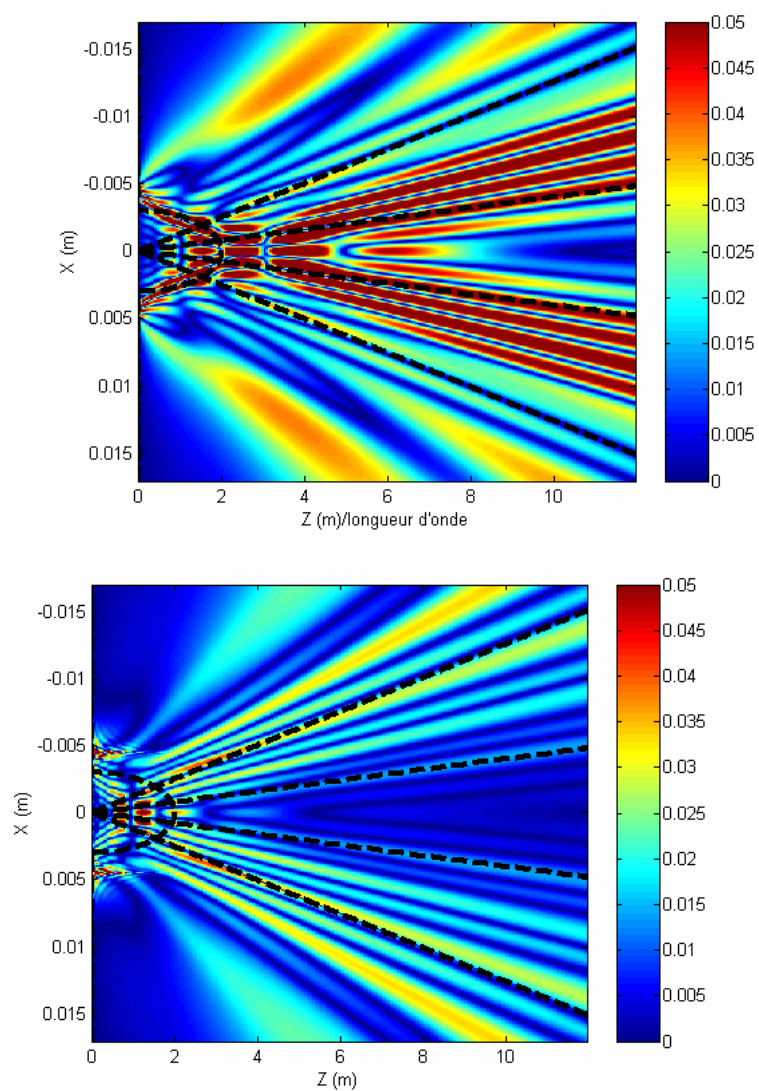


Figure 10. Champ de pression rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9mm : amplitude de l'erreur relative entre la solution analytique (équation des ondes) et la simulation numérique de l'équation parabolique standard (en haut) et grand angle (en bas).

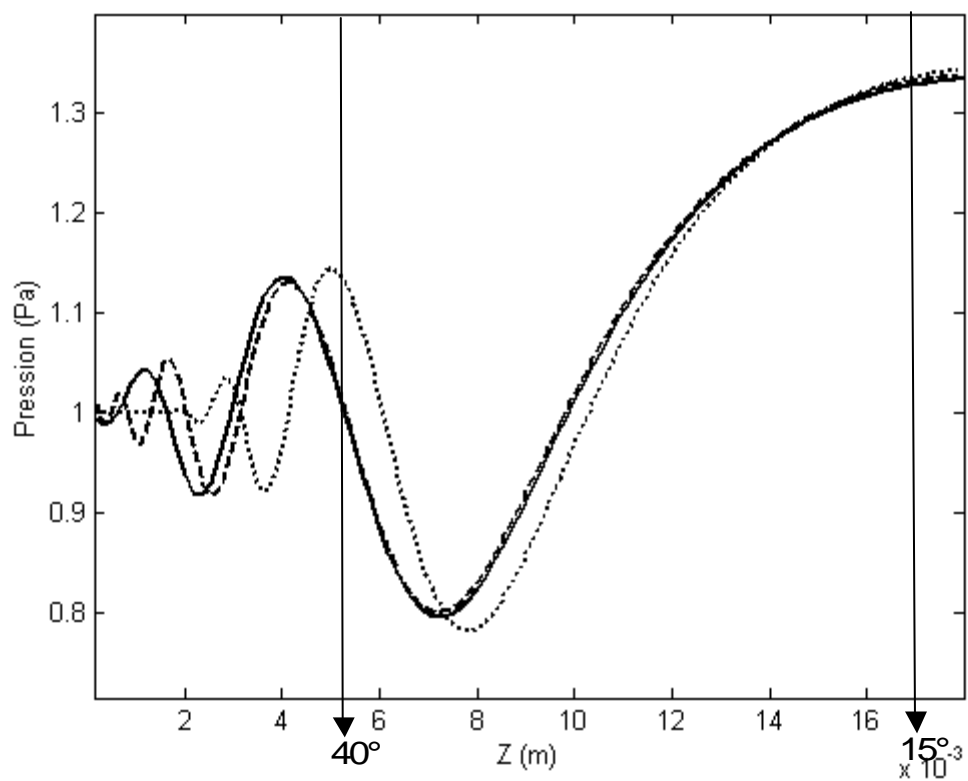


Figure 11. Amplitude du champ de pression axial rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9mm : solution analytique (équation des ondes - trait plein) et simulations numériques de l'équation parabolique standard (pointillé) et grand angle (tirets)

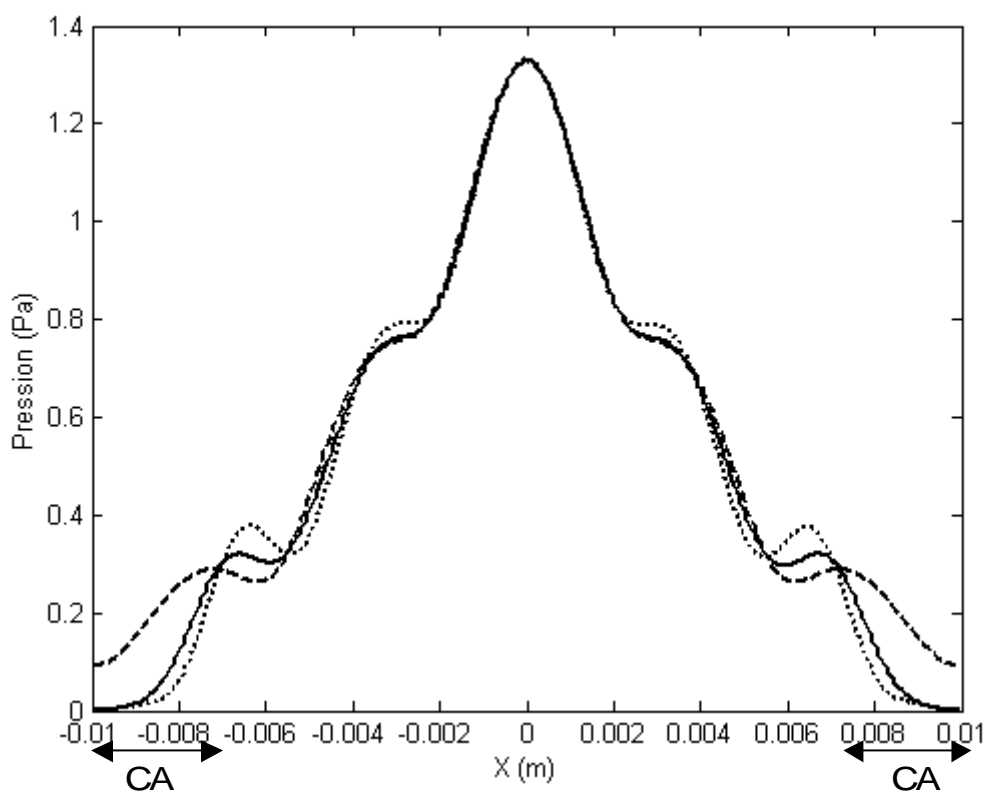


Figure 12. Amplitude du champ de pression transverse rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9mm dans le plan  $z = 16,8$  mm (transition champ proche / champ lointain) : solution analytique (équation des ondes - trait plein) et simulations numériques de l'équation parabolique standard (pointillé) et grand angle (tirets)



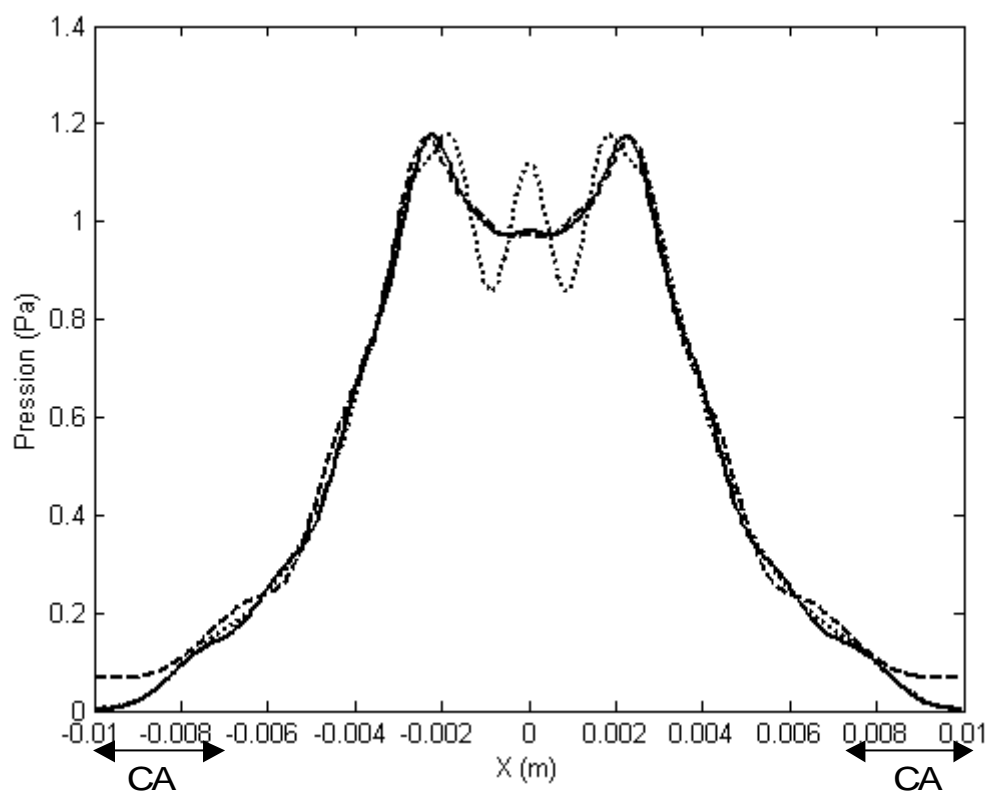


Figure 13. Amplitude du champ de pression transverse rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9mm dans le plan  $z = 5,4$  mm (champ proche) : solution analytique (équation des ondes - trait plein) et simulations numériques de l'équation parabolique standard (pointillé) et grand angle (tirets)

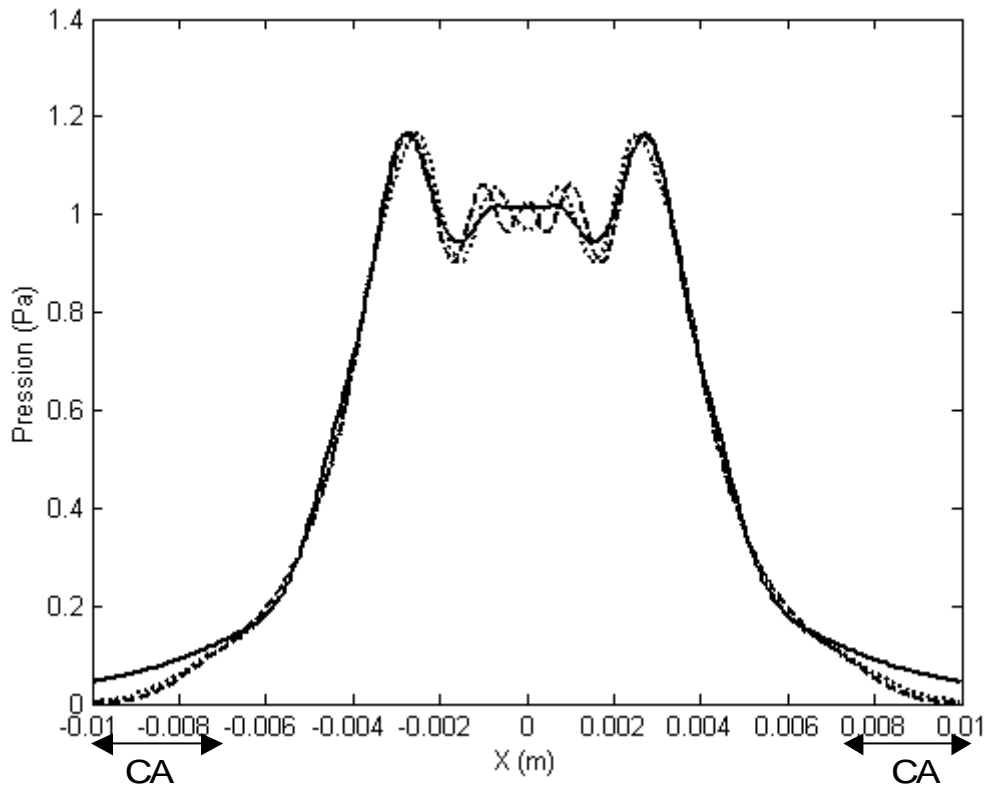


Figure 14. Amplitude du champ de pression transverse rayonné dans l'eau à 1 MHz par un « piston » de dimension 9mm dans le plan  $z = 3 \text{ mm}$  (champ très proche) : solution analytique (équation des ondes - trait plein) et simulations numériques de l'équation parabolique standard (pointillé) et grand angle (tirets)

En conclusion, l'équation de Claerbout (approximation parabolique grand angle) permet de bien simuler le champ de pression rayonné par un piston, y compris en champ proche où la pression présente de nombreuses oscillations résultant des interférences entre les différentes ondes. Seul le champ très proche (distance inférieure à deux longueurs d'onde de la source) où la contribution des ondes évanescentes est significative, et les zones latérales (au-delà de  $40^\circ$ ) restent difficiles à approcher de manière satisfaisante. Par rapport à l'approximation standard, le domaine de validité est étendu d'un facteur trois, et la précision augmentée d'un ordre de grandeur environ.

## 2.3. Validation en milieu hétérogène : diffusion par un cylindre

L'objectif de cette partie est de valider le modèle théorique (approximation parabolique « grand angle ») et numérique (schéma de discrétisation) et de quantifier le gain apporté par rapport à l'équation « paraxiale », cette fois en milieu hétérogène. La solution exacte de référence sera dans ce cas, et comme au chapitre I, la diffusion d'une onde plane par un cylindre hétérogène. Les comparaisons entre les différentes solutions (analytique, numérique parabolique standard et numérique parabolique grand angle) seront effectuées dans le cas de référence correspondant aux données expérimentales : diffusion d'une onde plane incidente dans l'eau à 1 MHz par un cylindre de silicone de diamètre 3 mm et avec un contraste de célérité du son par rapport à l'eau de -30%. Pour les simulations numériques, l'origine des coordonnées est choisie afin que le cylindre soit localisé entre les abscisses 0 et +3mm et les ordonnées -1.5 et +1.5 mm. D'après les enseignements de la 1ère partie, toutes les simulations sont réalisées avec un maillage avec un pas de discrétisation axiale  $\Delta z = \lambda/75$  et transverse  $\Delta x = \lambda/25$  et avec une couche absorbante d'épaisseur  $2\lambda$ .

### 2.3.1. Condition absorbante et onde plane

Une première difficulté numérique pour la comparaison entre solution numérique et analytiques provient de l'incompatibilité des conditions aux limites numériques de type couche absorbante avec la condition aux limites théorique d'onde plane incidente. En effet, l'utilisation de la condition absorbante (CA) nécessite que la pression sur les bords latéraux du domaine en  $X$  soit nulle. Or, évidemment, dans le cas de la propagation d'une onde plane, la pression est différente de zéro. La configuration décrite à la figure 15 est donc incohérente, et va conduire à un champ diffracté artificiel du fait de la discontinuité entre les deux conditions aux limites.

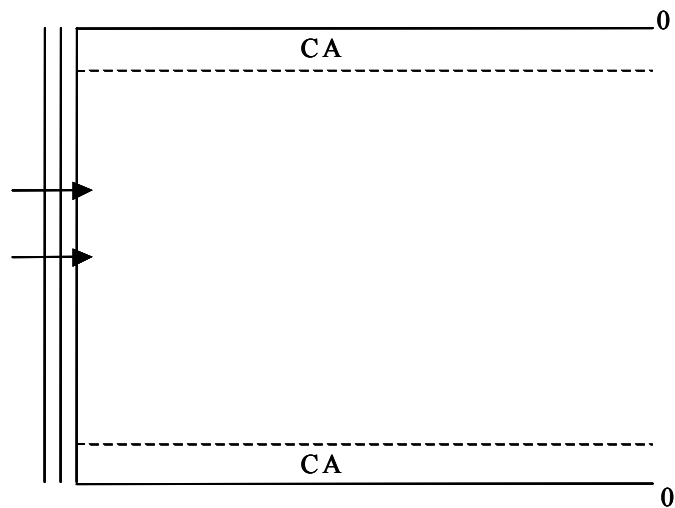


Figure 15. Configuration dans laquelle l'onde plane est imposée jusque dans les couches absorbantes

Une première solution serait d'imposer une onde plane d'extension spatiale finie sur un domaine qui ne contient pas la couche absorbante, comme l'illustre la figure 16.

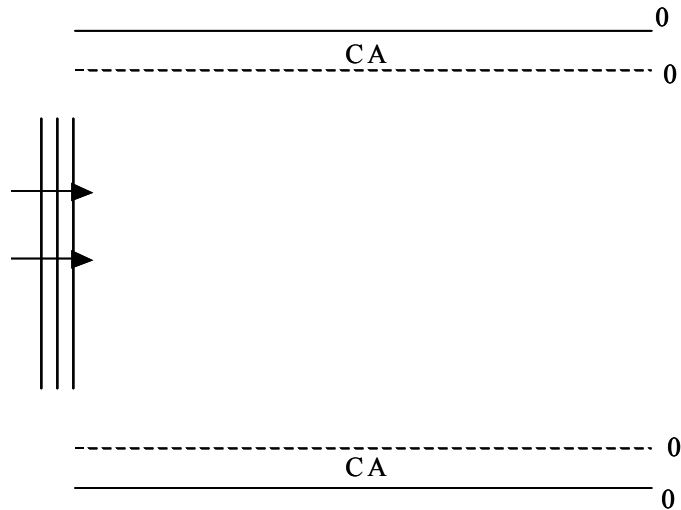


Figure 16. Configuration dans laquelle l'onde plane n'est pas imposée dans les couches absorbantes mais est d'extension spatiale finie

On se ramène dans ce cas à une source de type piston dont le champ va se propager en milieu hétérogène. Evidemment dans ce cas, on ne pourra s'abstraire du champ diffracté par les bords latéraux du piston, qui viendra nécessairement perturber le champ diffusé. Ceci est illustré par la figure 17, où l'extension latérale de l'onde plane est choisie égale à  $9\lambda = 13,5$  mm de chaque côté. L'amplitude est normalisée par rapport à l'amplitude maximale de la solution analytique. Notons que, sur la figure, pour mieux visualiser les interférences, les amplitudes normalisées entre les valeurs 0.5 et 1 sont saturées à la valeur 0.5 (tous les points rouges à la valeur 0.5 correspondent donc à des valeurs calculées entre 0.5 et 1). Nous observons très clairement la diffraction associée aux ondes de bords issues de la discontinuité de la condition initiale (rectangles en pointillés noir) qui viennent interférer avec le champ diffusé par le cylindre. La diffusion du champ de pression est donc sensiblement modifiée par la diffraction. Une façon de résoudre ce problème serait d'augmenter l'extension latérale afin de reporter plus loin les interférences entre champ diffusé et champ diffracté, mais on perdrait alors le bénéfice de la condition aux limites absorbante.

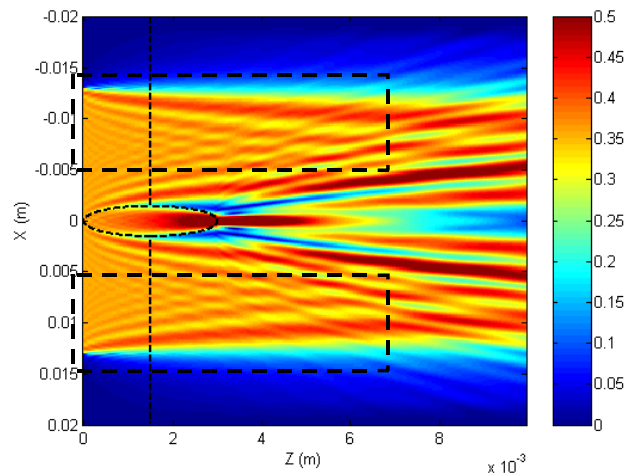


Figure 17. Simulation « grand angle » de l'amplitude du champ de pression diffusée dans l'eau à 1 MHz par un cylindre de diamètre 3 mm avec un contraste de vitesse égal à -30 %. Le cercle en pointillé noir représente la position du cylindre et les rectangles en pointillés noir indiquent l'effet de la diffraction liée à la taille finie de l'onde incidente. La barre de couleur est saturée au-delà de 0.5 pour mieux mettre en valeur ces effets de bord.

Une deuxième méthode consiste à minimiser la diffraction due aux ondes de bord en apodisant le signal latéralement par une distribution régulière et non plus discontinue, qui s'annule sur les bords du domaine (pour être compatible avec la condition absorbante). On peut choisir d'apodiser le signal soit à l'intérieur du domaine physique (le signal est nul à l'extérieur de la couche absorbante), soit même partiellement à l'intérieur de la couche absorbante de façon à minimiser l'extension latérale du domaine numérique. C'est cette configuration que nous avons choisie. La fenêtre d'apodisation est représentée sur la figure 18 et correspond à celle des expériences déjà décrites dans la partie I (nous avons alors montré que cette fenêtre minimise effectivement l'effet des ondes de bord). Son extension spatiale est de seulement 1 cm de part et d'autre de l'axe, et les trois derniers millimètres sont situés à l'intérieur de la couche absorbante. Par rapport au cas précédent, l'extension latérale du domaine est donc divisée par deux.

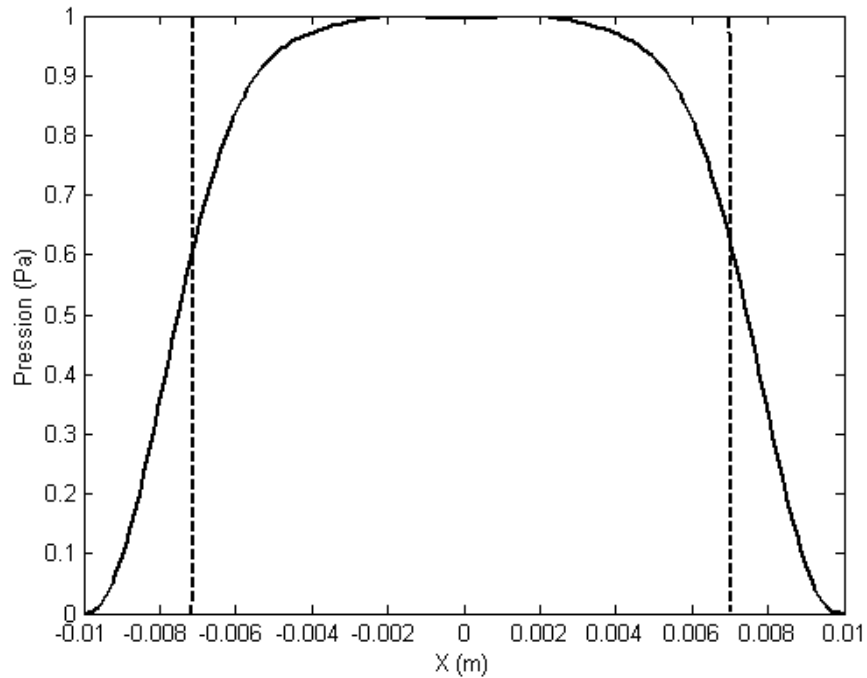


Figure 18. Profil de la fenêtre d'apodisation utilisée pour minimiser l'effet de la diffraction liée aux ondes de bord

La figure représente le champ de pression diffusé, toujours dans le cas de référence, avec d'une part (à gauche) une condition onde plane incidente apodisée et une condition aux limites de type onde plane, et d'autre part (à droite) une condition d'onde plane incidente apodisée avec couche absorbante. Comme précédemment, l'amplitude est normalisée par rapport à l'amplitude maximale de la solution analytique. La figure montre très clairement que le choix de la fenêtre apodisée élimine bien l'effet des ondes de bords : le champ diffusé n'est plus perturbé par les ondes de bord résultant de la taille finie de la condition initiale. La comparaison entre les deux figures 19 montre également à nouveau l'efficacité de la couche absorbante qui joue parfaitement son rôle en éliminant les réflexions parasites sur les bords latéraux.

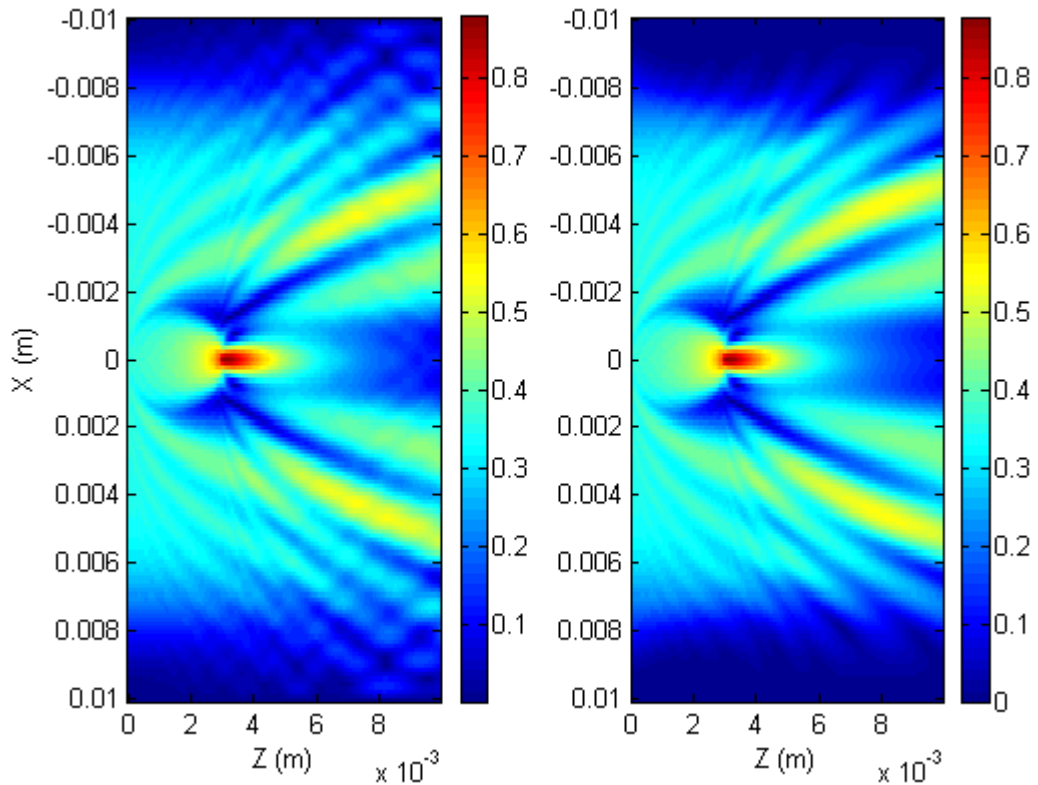


Figure 19. Simulation « grand angle » de l'amplitude du champ de pression diffusée dans l'eau à 1 MHz par un cylindre de diamètre 3 mm avec un contraste de vitesse égal à -30 %. Onde plane incidente apodisée. A gauche : condition aux limites onde plane, à droite avec couche absorbante.

Dans la suite de cette étude, pour toutes les simulations numériques, linéaires ou non linéaires, sur la diffusion en milieu hétérogène avec l'approximation grand angle, nous appliquerons la condition absorbante sur les bords latéraux du domaine de calcul. Dans le cas de la propagation d'une onde plane incidente, l'utilisation de cette condition absorbante exige alors que le champ de pression incident soit apodisé par une fenêtre spatiale qui minimise l'effet des ondes de bords.



### 2.3.2. Comparaison des approximations paraboliques standard et « grand angle » en milieu hétérogène

Nous nous intéressons dans cette partie à l'apport de l'équation « grand angle » en milieu hétérogène en régime linéaire. Est-ce que celle-ci contribue à l'amélioration de la modélisation de la propagation en milieu hétérogène par rapport à l'approximation parabolique standard ? Pour répondre à cette question, nous comparons les champs diffusés donnés par la solution analytique et les simulations numériques en approximation standard ou grand angle. La configuration de référence reste la même (onde plane incidente dans l'eau à 1 MHz diffusée par un cylindre de silicone diamètre  $2\lambda$  avec un contraste de vitesse de -30 %). Pour les simulations numériques, l'onde plane est apodisée comme décrit dans la section précédente.

La figure 20 est la représentation spatiale du champ de pression diffusé par un cylindre calculé analytiquement (à gauche) et simulé avec les équations « grand angle » (au milieu) et parabolique (à droite). Le champ ici représenté est le champ extérieur au cylindre, pour les abscisses  $z > 3 \text{ mm}$ . Seule est représentée la partie du champ comprise entre les ordonnées  $x = -6 \text{ mm}$  et  $x = 6 \text{ mm}$  où l'amplitude du champ varie la plus rapidement.

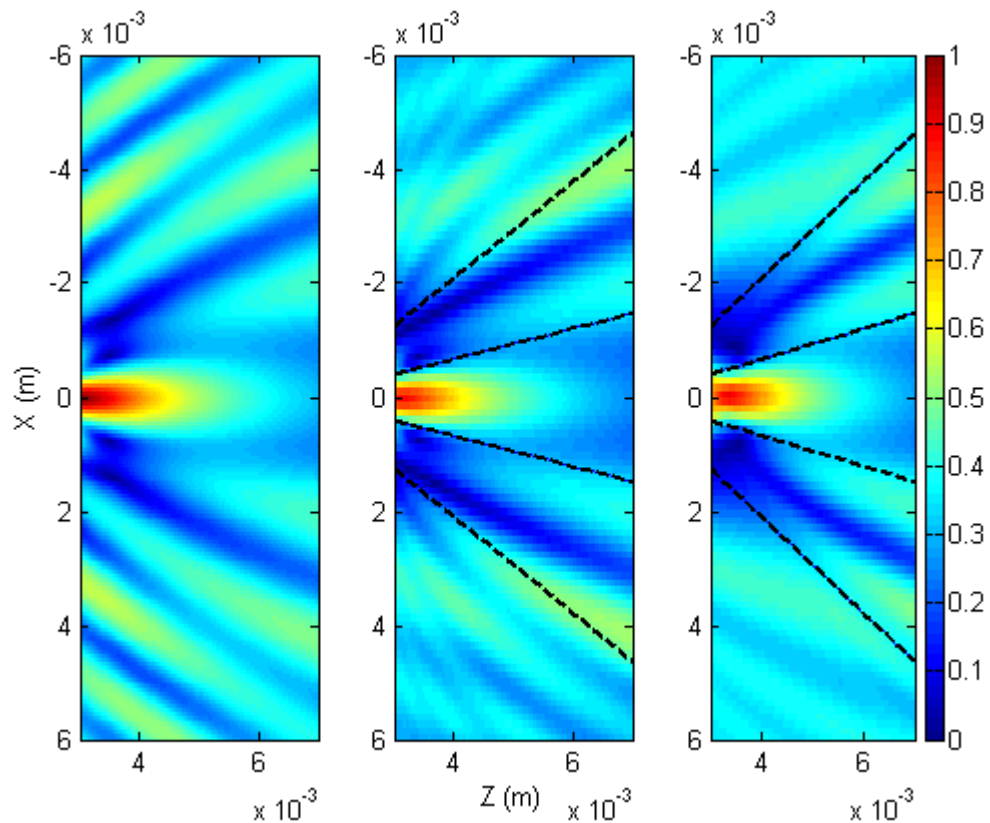


Figure 20. Simulation de l'amplitude du champ de pression diffusée dans l'eau à 1 MHz par un cylindre de diamètre 3 mm avec un contraste de vitesse égal à -30 %. A gauche : solution analytique. Simulations numériques (onde plane incidente apodisée avec couche absorbante) de l'approximation grand angle (au centre) et de l'approximation parabolique standard (à droite). Les lignes en pointillée noir représentent les cônes d'angles  $15^\circ$  et  $40^\circ$  issus du centre du cylindre diffuseur.

Nous observons sur la figure 20 que la répartition spatiale du champ de pression au-delà de l'hétérogénéité est mieux simulée au voisinage de l'axe de propagation en approximation « grand angle » qu'en approximation parabolique. En particulier, la position des maxima secondaires (bandes transverses « jaunes » vers  $\pm 40^\circ$ ) est beaucoup mieux décrite par l'équation de Claerbout, aussi bien en amplitude qu'en position ou en extension spatiale. De même, juste après le cylindre, les minima locaux (en bleu foncé) et les petits lobes secondaires (en bleu ciel) sont mieux appréhendés en grand angle. Loin de l'axe, les approximations paraboliques restent évidemment

médiocres, et on retrouve les valeurs usuelles limitant les approximations respectivement standard ( $15^\circ$ ) et grand angle ( $40^\circ$ ). De même, comme pour un piston, en champ très proche, l'approximation grand angle ne permet pas d'améliorer significativement l'amplitude et la taille de la zone focale qui restent sous-évaluées.

La figure 21 est la représentation spatiale de l'erreur relative entre le champ de pression calculé analytiquement et simulé avec l'équation grand angle (à gauche) et l'équation parabolique (à droite). Là encore, cette figure montre clairement que le domaine de validité de l'équation grand angle est dans un cône d'angle plus élevé que celui du parabolique. Nous confirmons, grâce à cette figure qu'il existe une erreur supérieure ou égale à 10 % pour des angles supérieurs à  $15^\circ$  en parabolique et  $40^\circ$  en grand angle (remarque : les deux zones rouges à l'intérieur du cône  $40^\circ$  et les deux zones bleu ciel correspondent à des régions où l'amplitude du champ exact tends à s'annuler, ce qui évidemment amplifie l'erreur relative).

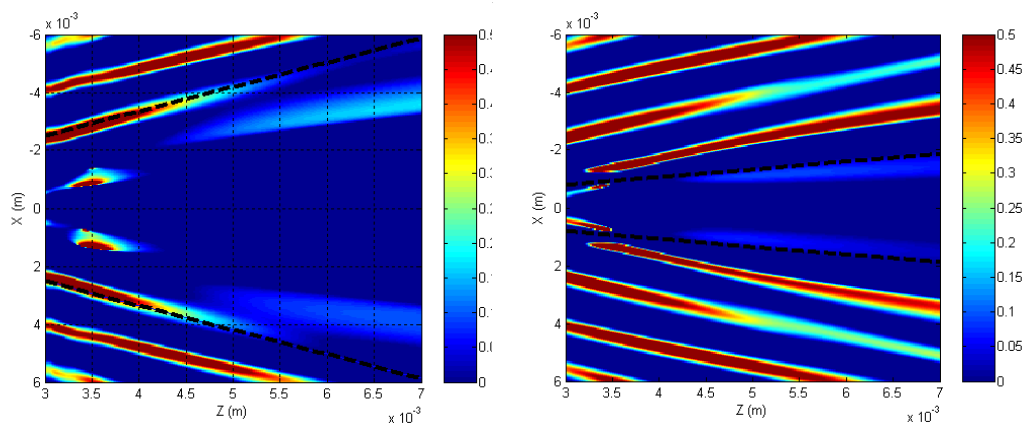


Figure 21. Simulation de l'amplitude du champ de pression diffusée dans l'eau à 1 MHz par un cylindre de diamètre 3 mm avec un contraste de vitesse égal à -30 %. Erreur relative entre la solution analytique et les simulations numériques (onde plane incidente apodisée avec couche absorbante) de l'approximation grand angle (à gauche) et de l'approximation parabolique standard (à droite). Les lignes en pointillée noir représentent les cônes d'angles  $40^\circ$  (à gauche) et  $15^\circ$  (à droite) issus du centre du cylindre diffuseur.

Analysons de plus près, les différences entre les deux modèles.

La figure 22 représente l'évolution de l'amplitude de la pression sur l'axe de propagation dans les trois cas précédents. On a également ajouté une simulation grand angle mais dans laquelle les termes de « couplage » diffraction / hétérogénéité sont négligés dans l'équation grand angle (12). Plus précisément, les coefficients devant les termes de diffraction (parabolique et grand angle) sont pris comme si le milieu était homogène, et donc on utilise les valeurs  $D_{para+het} = 1$  au lieu de  $D_{para+het} = 1/(1 - \epsilon c_h / 2)$  et  $D_{ga+het} = \eta^2 / 4$  au lieu de  $D_{ga+het} = \eta^2 / 4 (1 - \epsilon c_h / 2)$ .

On observe, comme attendu, que la simulation « grand angle » améliore la phase de l'onde diffusée, et donc la position du maximum résultant des interférences constructives avec l'onde plane incidente. En effet, la modélisation de cette zone nécessite la prise en compte des ondes issues des bords de l'hétérogénéité, qui sont vus sous des angles supérieurs ou égaux à  $40^\circ$  (indiqué sur la figure 22). Par contre, si elle est mieux localisée, l'amplitude maximale simulée par l'équation « grand angle » est un petit peu moins bonne que celle simulée par l'équation paraxiale. Pour mieux comprendre cet effet, nous avons supprimé les termes de couplage diffraction/hétérogénéité dans l'équation « grand angle » : l'amplitude maximale, dans ce cas, est mieux simulée que dans les cas précédents. Analysons aussi les figures de diffraction pour mieux déterminer l'influence des termes de couplage diffraction/hétérogénéité. A cette fin, nous avons étudié les figures de diffraction à différentes distances de l'hétérogénéité.

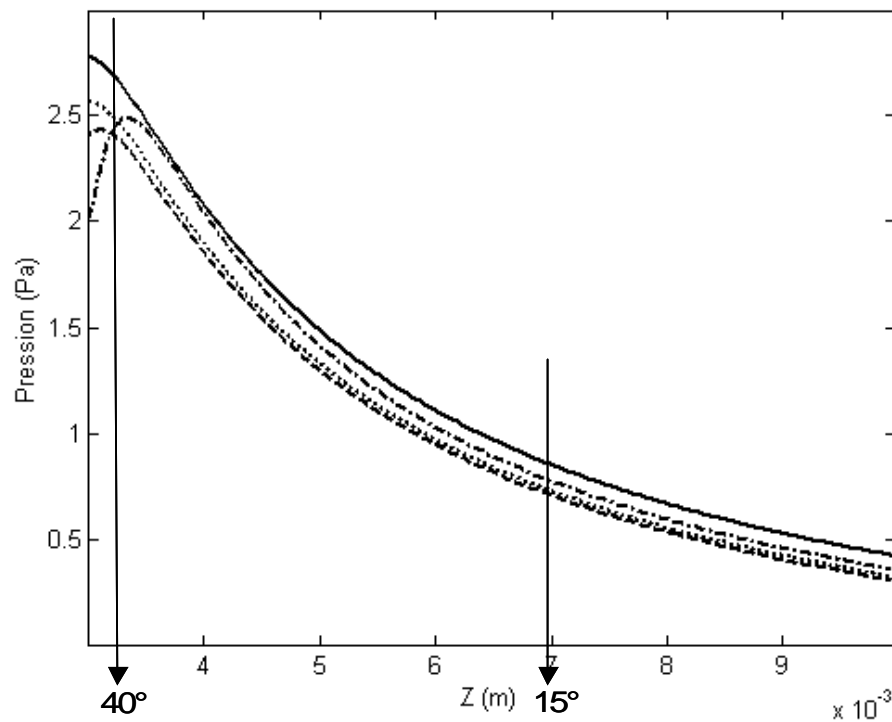


Figure 22. Simulation de l'amplitude axiale du champ de pression diffusée dans l'eau à 1 MHz par un cylindre de diamètre 3 mm avec un contraste de vitesse égal à -30 . Solution analytique (trait plein) et simulation numérique avec les approximations paraboliques standard (tirets et pointillés), grand angle (tirets), et grand angle sans les termes de couplage diffraction et hétérogénéité (pointillés).

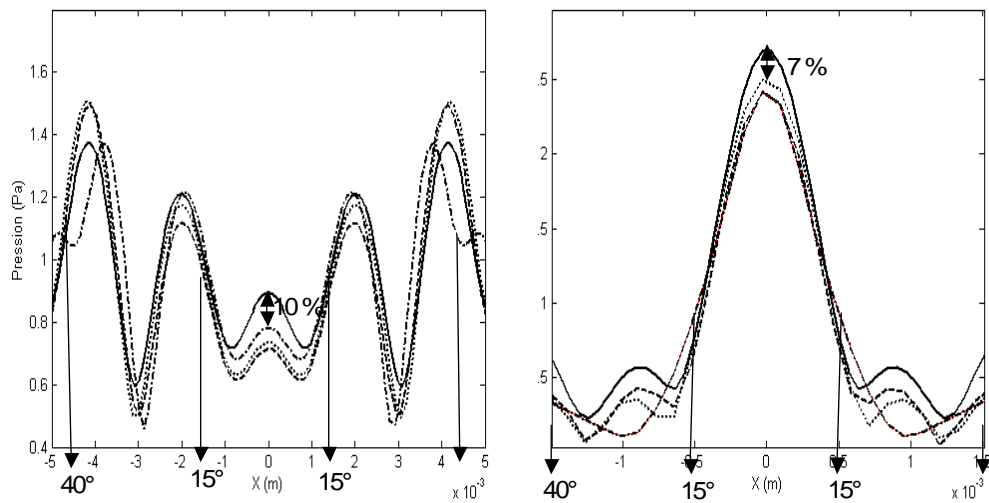


Figure 23. Simulation de l'amplitude transverse dans les plans  $z = 3.2 \text{ mm}$  (à droite) et  $z = 7 \text{ mm}$  (à gauche) du champ de pression diffusée dans l'eau à 1 MHz par un cylindre de diamètre 3 mm avec un contraste de vitesse égal à  $-30$ . Solution analytique (trait plein) et simulation numérique avec les approximations paraboliques standard (tirets et pointillés), grand angle (tirets), et grand angle sans les termes de couplage diffraction et hétérogénéité (pointillés).

La figure 23 représente l'amplitude de pression dans deux plans transverses à  $z = 3,2 \text{ mm}$  et à  $z = 7 \text{ mm}$  pour la solution analytique (trait plein) et les simulations numériques paraxiale (tiret et pointillé), grand angle complète (tiret) et sans les termes de couplage diffraction/hétérogénéité (pointillé). Là encore nous avons repéré (flèches) les points éloignés de l'axe de plus de  $15^\circ$  et  $40^\circ$ . Toutes les simulations ont tendance à sous-estimer légèrement le champ axial. En revanche les figures de diffraction transverses sont très nettement mieux prises en compte par l'approximation grand angle. En particulier, en champ très proche ( $z = 3.2 \text{ mm}$ ) la position et la largeur des lobes secondaires sont correctement captées en grand angle et pas du tout en parabolique standard. Plus loin ( $z = 7 \text{ mm}$ ), les positions des différents minima et extrema sont également mieux décrites, même si les amplitudes sont légèrement sous- ou surévaluées. Le fait de négliger les termes de couplage donne des résultats un peu meilleurs près de l'axe et moins bon plus loin, sans qu'il soit possible de conclure à

l'avantage de cette simplification. Ceci montre que l'équation « grand angle » complète est nécessaire pour bien simuler les effets de la diffraction liée à l'hétérogénéité, comme la position et l'amplitude des maxima locaux d'amplitude et des lobes secondaires résultant des interférences entre onde plane incidente et champ diffusé. Cependant, ces améliorations se font au dépend de l'amplitude maximale sur l'axe de propagation : l'énergie est un peu moins confinée autour de l'axe de propagation que dans les deux autres cas à cause de la contrainte imposée par les termes de couplage diffraction/hétérogénéité.

### **3. Diffusion d'une onde de choc par des hétérogénéités multiples**

Dans les chapitres précédents de cette partie, nous avons présenté le modèle théorique (approximation parabolique « grand angle ») et numérique (schéma à pas fractionnés, différences finies en régime fréquentiel pour la diffraction linéaire et conditions absorbantes) visant à modéliser la propagation acoustique non linéaire en milieu hétérogène. Ce modèle a par la suite été validé par comparaison avec une solution analytique, tout d'abord en milieu homogène (champ proche d'une source de type piston), puis en milieu hétérogène.

L'objet de cette partie est d'appliquer le modèle théorique et numérique à la diffusion d'une onde de choc par une ou plusieurs hétérogénéités. Le modèle sera comparé aux expériences ultrasonores en cuve à eau. Dans un premier temps, nous reviendrons brièvement sur le cas d'une hétérogénéité simple, pour évaluer l'apport de l'approximation grand angle en regard de l'approximation parabolique standard, notamment hors de l'axe de propagation. Dans un second temps, nous quitterons les hétérogénéités individuelles pour nous intéresser au cas de plusieurs diffuseurs. Tout d'abord, nous nous intéresserons au phénomène de repliement du front dans un milieu comportant des hétérogénéités multiples. Nous nous intéresserons à l'influence de la taille des hétérogénéités sur la variabilité des formes d'onde. Nous montrerons ensuite

que l'approximation grand angle permet de modéliser correctement le champ de pression mesuré derrière un réseau constitué de deux demi-cylindres de diamètre 1,5 mm. Puis, nous présenterons des comparaisons pour un réseau constitué de 30 demi-cylindres en parallèle. Ce dernier cas validera notre modèle dans une situation relativement complexe et qui s'approche de la réalité.

### **3.1. Conditions expérimentales**

Pour les expériences réalisées avec plusieurs hétérogénéités, le dispositif expérimental est identique à celui déjà présenté pour une seule hétérogénéité : le champ incident est une onde plane, avec apodisation par une fenêtre de type Blackman de plateau 6 cm dans la direction  $Ox$ , et gaussienne dans la direction  $Oy$  de largeur 1,5 cm à demi hauteur (Fig. 24). Le champ est synthétisé par filtre inverse suivant la procédure déjà décrite.



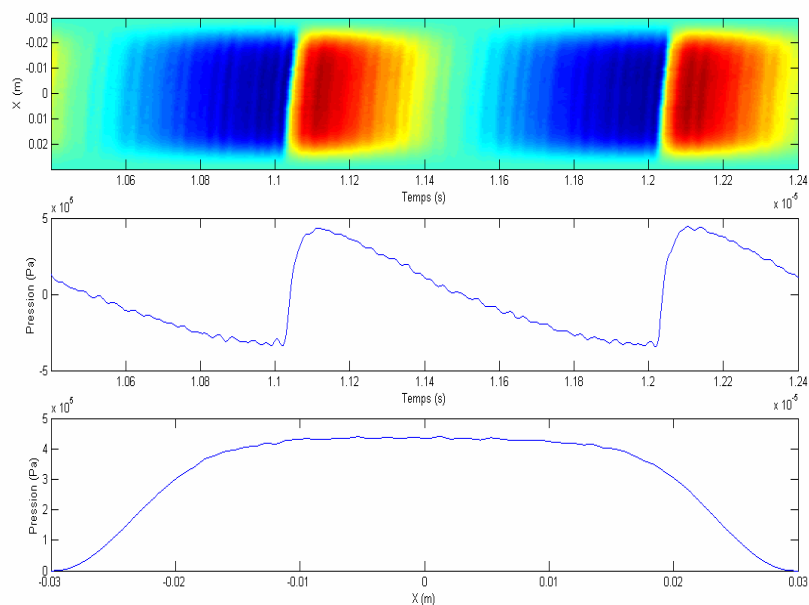


Figure 24. Représentation spatio-temporelle du champ de pression imposé en  $z=0$  (en haut). Forme temporelle de la pression au centre (au milieu) et fenêtre d'apodisation dans la direction transverse (en bas).

La géométrie des hétérogénéités multiples reste celle de demi-cylindres moulés « en parallèle » dans une plaque de silicone. La figure 25 présente le cas de deux demi-cylindres de diamètre 3 mm (soit 2 longueurs d'onde), séparés de 3 mm.

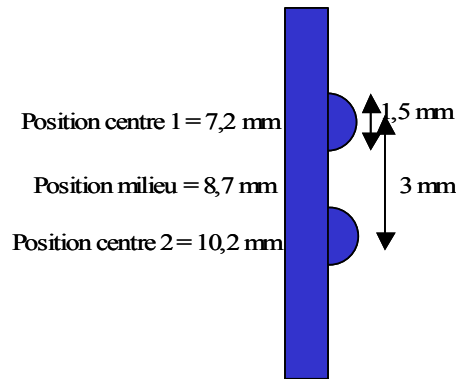


Figure 25. Schéma du plan hétérogène constitué de deux demi-cylindres de diamètre 1,5 mm espacés de 3 mm.

Dans le cas des hétérogénéités multiples, le silicone a été produit par mélange avec une composition qui n'était pas exactement la même que celle du cas mono-hétérogène. En outre, les mesures acoustiques ont été réalisées assez longtemps après le moulage, et les échantillons ont pu séjourner un certain temps dans l'eau. Un vieillissement du matériau a donc pu se produire. Pour toutes ces raisons, la vitesse du son et l'atténuation dans le silicone ne sont pas identiques à celles mesurées dans la première partie. Les valeurs obtenues par la mesure du temps d'arrivée et de l'amplitude de l'onde plane directe (non diffractée par les hétérogénéités) sont de 950 m/s pour la célérité du son (au lieu de 1083 m/s), et un coefficient d'absorption de  $44 f$  nepers / m (où  $f$  est la fréquence en MHz) au lieu de 49.

Les simulations numériques ont été réalisées sur un domaine bidimensionnel de dimension transverse 60 mm. D'après les études antérieures, on a utilisé un maillage avec un pas transverse  $\Delta x$  égal à  $\lambda/25$  et un pas axial  $\Delta z$  égal à  $\lambda/75$ . Une condition absorbante sur les bords latéraux a été utilisée, avec les mêmes paramètres que ceux définis dans l'étude numérique spécifique (et notamment une épaisseur de 3 mm, soit deux longueurs d'onde).

Le champ dans le plan « initial »  $z=0$  est donné sous la forme  $P(X, Z=0, \tau) = f(\tau)g(X)$ . La forme d'onde temporelle  $f(\tau)$  est celle mesurée expérimentalement au centre du plan de contrôle (Fig. 24- milieu). Toutefois, on n'a sélectionné pour la simulation numérique que deux périodes, alors que le signal complet est constitué d'une dizaine de cycles avec une enveloppe, également de type fenêtre de Blackman. Ces deux périodes ont été sélectionnées dans la zone temporelle où l'enveloppe est d'amplitude maximale et uniforme, si bien que l'on peut considérer le signal périodique comme quasi périodique, en accord avec le schéma numérique pseudo-spectral en temps. La fenêtre d'apodisation spatiale  $g(X)$  est en amplitude une fenêtre de type Blackman (Fig. 24- en bas). Elle est un peu plus étroite que la fenêtre expérimentale (plateau de largeur 4 cm environ). En effet, il n'est pas possible d'utiliser dans le plan incident le champ expérimental exact car le maillage spatial transverse (de l'ordre de 0.06 mm) est beaucoup plus fin que le maillage expérimental, ne serait-ce que parce que la zone active de l'hydrophone est de l'ordre de 200  $\mu\text{m}$ . En outre, sur les bords de la fenêtre d'apodisation expérimentale, l'amplitude du champ est moins forte, les effets non linéaires moins prononcés et donc la forme temporelle du signal modifiée. Compte-tenu de la résolution spatiale expérimentale, il est impossible de tenir compte de tous ces détails dans la simulation numérique. Aussi avons-nous choisi une condition aux limites « simplifiée », choisie en fonction de paramètres déduits de l'étude numérique précédente. Ainsi on s'attend à ce que la taille finie des fenêtres d'apodisation n'influence pas les résultats dans la zone de mesure. En revanche, nous avons bien pris en compte dans la simulation le décalage angulaire (de l'ordre de  $1^\circ$ ) du front d'onde incident.

### **3.2. Retour sur le cas d'une hétérogénéité unique**

Nous revenons brièvement dans un premier temps au cas d'une seule hétérogénéité, afin de comparer les simulations numériques (en approximation parabolique standard ou grand angle) à l'expérience. Remarquons que les simulations sont réalisées dans un cadre très légèrement différent que dans la première partie, où la

condition aux limites imposée latéralement était l'onde plane, alors qu'ici on a une condition absorbante. Enfin, ici, seul le cas de l'hétérogénéité de diamètre le plus grand (3 mm) sera traité, les effets de diffraction étant évidemment moins importants pour les diamètres plus petits.

Les résultats expérimentaux, Fig.26 à gauche, sont cette fois comparés d'une part à la simulation « grand angle », Fig. 26 au milieu, et d'autre part à la simulation « standard », Fig. 26 à droite, dans le plan focal soit  $z = 2$  mm. Le domaine spatial est ici restreint à la zone centrale d'extension latérale environ 1,5 cm (soit dix longueurs d'onde).

En accord avec les résultats de la partie 1, l'accord entre les résultats numériques et expérimentaux est bon proche de l'axe. Par contre, les résultats se détériorent rapidement dans le cas de l'approximation paraxiale « standard » pour laquelle seul le premier lobe latéral dû à l'interférence entre l'onde plane incidente et l'onde cylindrique diffractée par l'hétérogénéité est visible. Sa taille est par ailleurs nettement sous estimée. Dans le cas de l'approximation parabolique « grand angle », beaucoup plus de lobes latéraux sont observables, et la largeur du premier d'entre eux (situé autour de  $X=0.007$  m au niveau de la 2<sup>ème</sup> ligne pointillée en partant du haut de la figure 26) est beaucoup mieux simulée.

Pour mieux quantifier l'accord, ou le cas échéant les différences, entre les deux résultats numériques et l'expérience, nous allons comparer les formes temporelles des signaux en les superposant sur une même figure pour plusieurs distances transversales (respectivement à 0, 1, 3.4 et 6.2 mm de l'axe, selon les lignes indiquées en tirets et en pointillés sur la figure Fig. 26).

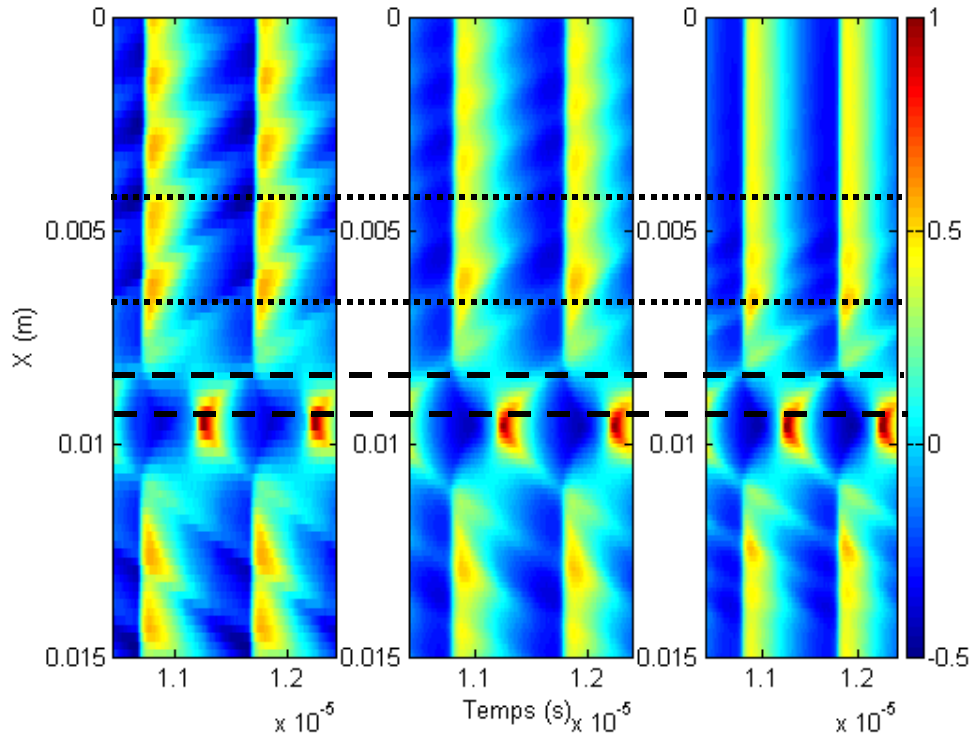


Figure 26. Représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré (à gauche) et simulé avec l'équation « grand angle » (au milieu) et avec l'équation paraxiale (à droite) dans le plan focal ( $z=2\text{mm}$ ) d'une hétérogénéité de diamètre 3 mm (gauche). Les niveaux de pression sont représentés en couleur et normalisé par la pression focale maximale.

Les champs de pression simulés sur l'axe de propagation avec les équations « grand angle » (Fig. 27, en tiret) et paraxiale (Fig. 27, en pointillé) sont en très bon accord en amplitude et en phase avec le résultat expérimental. Seule la phase d'expansion est un peu moins bien décrite expérimentalement. On retrouve ici, les résultats déjà présentés au chapitre 1 dans le cas « standard ». L'approximation « grand angle » est quasiment indiscernable de l'approximation standard.

A 1 mm de l'axe de propagation (Fig. 28), le champ de pression sur une période temporelle est modifié par l'onde cylindrique diffractée par l'hétérogénéité sur la période choisie, mais aussi sur la période précédente (cf. Fig. 26). Les deux lignes en

tirets sur la figure 28 indiquent approximativement la fenêtre temporelle où le signal diffusé de la période précédente interfère avec la période choisie, tandis que les lignes pointillées correspondent à l'interaction entre champs direct et diffusé de la même période. Ces interférences correspondent à un angle d'observation de l'hétérogénéité par rapport à l'axe de propagation égal à  $18^\circ$ . Les deux simulations numériques sont relativement proches mais on peut observer un accord sensiblement meilleur en amplitude et en phase avec l'expérience dans le cas de l'approximation grand angle. A nouveau les différences sur les parties négatives (expansions) subsistent. On remarque à nouveau la forte variabilité transverse du champ : alors que l'on s'est éloigné de moins d'une longueur d'onde de l'axe, l'amplitude maximale a chuté de près de 9 bars à moins de 2. La forme d'onde est très perturbée, avec trois fronts d'onde visibles.

A 3,4 mm de l'axe de propagation (Fig. 29), soit un angle d'observation de  $48^\circ$  de l'hétérogénéité, le champ de pression est modifié comme précédemment par la diffraction de l'onde cylindrique de la période choisie et de la période précédente (Fig. 26). Cependant la forme d'onde résultante est beaucoup plus régulière. On peut observer que l'accord avec l'expérience se dégrade pour les deux approximations paraxiales, mais que l'approximation « grand angle » simule une amplitude et une phase plus proches du résultat expérimental.

La figure 30 représente la forme temporelle de la pression mesurée et simulée à 6,2 mm de l'axe de propagation. Dans ce cas, l'évolution temporelle est modifiée par la propagation des ondes d'angles supérieurs à  $64^\circ$ . Les deux approximations sont insuffisantes pour simuler de tels angles et l'erreur sur la phase est du même ordre pour les deux approximations.

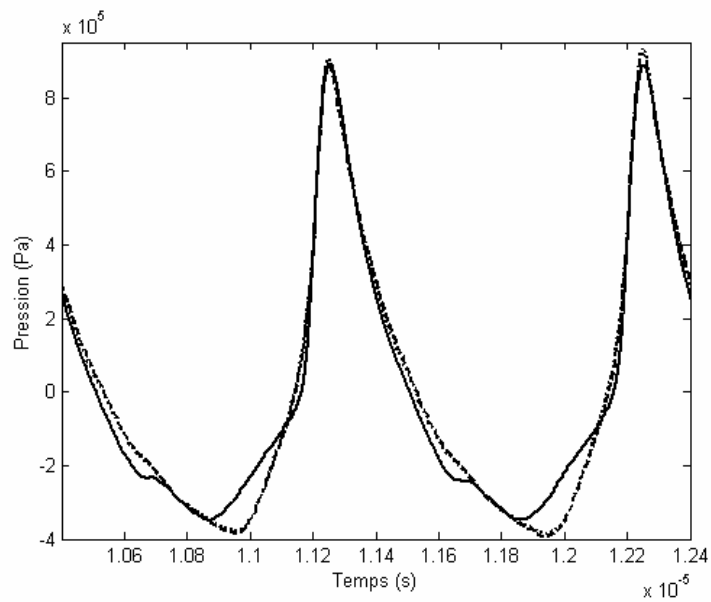


Figure 27. Forme temporelle du champ de pression mesuré (en trait plein) au centre de la focale de l'hétérogénéité de diamètre 3 mm et simulé avec les approximations paraxiale (en pointillé) et « grand angle » (en tiret)

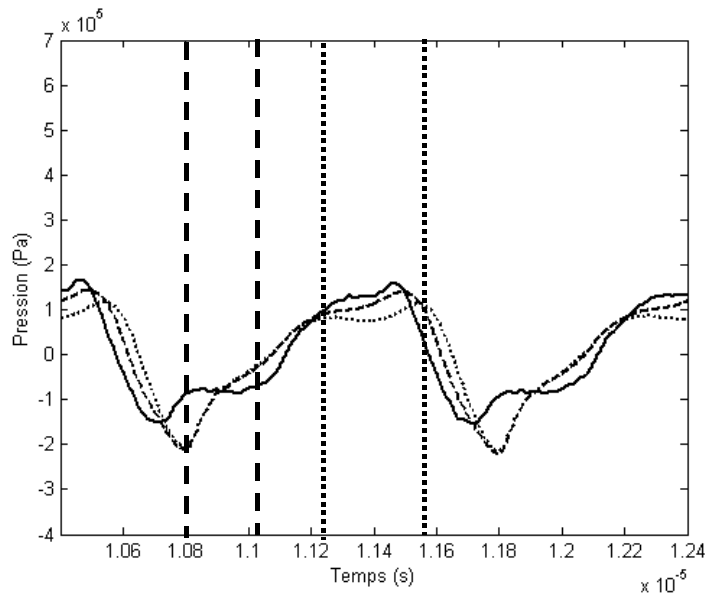


Figure 28. Forme temporelle du champ de pression mesuré (en trait plein) dans le plan focal ( $z = 2$  mm) de l'hétérogénéité de diamètre 3 mm à  $X = 8,6$  mm soit à 1 mm de l'axe de propagation et simulé avec les approximations paraxiale (en pointillé) et « grand angle » (en tiret)

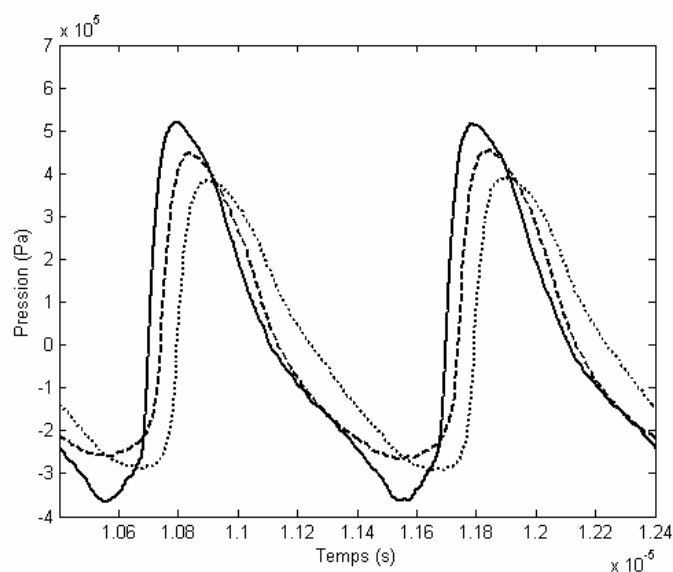


Figure 29. Forme temporelle du champ de pression mesuré (en trait plein) dans le plan focal ( $z = 2 \text{ mm}$ ) de l'hétérogénéité de diamètre  $3 \text{ mm}$  à  $X = 6,2 \text{ mm}$  soit à  $3,4 \text{ mm}$  de l'axe de propagation et simulé avec les approximations paraxiale (en pointillé) et « grand angle » (en tiret)

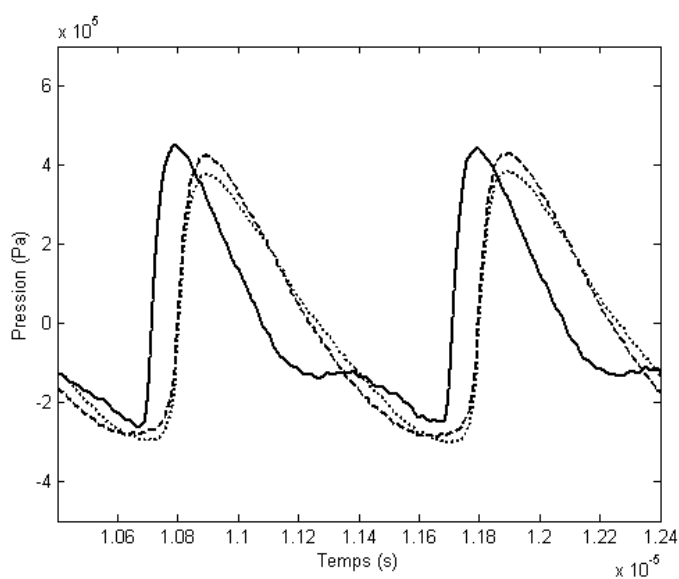


Figure 30. Forme temporelle du champ de pression mesuré (en trait plein) dans le plan focal ( $z = 2 \text{ mm}$ ) de l'hétérogénéité de diamètre  $3 \text{ mm}$  à  $X = 3,4 \text{ mm}$  soit à  $6,2 \text{ mm}$  de l'axe de propagation et simulé avec les approximations paraxiale (en pointillé) et « grand angle » (en tiret)



En conclusion, on voit donc que l'approximation parabolique « grand angle », comme attendu, apporte une amélioration significative par rapport à l'approximation standard par une meilleure estimation de la phase pour des angles de propagation « intermédiaires ». L'amélioration est particulièrement sensible pour le champ proche d'un piston, plus modérée pour la diffusion hétérogène, mais dans tous les cas va toujours dans le bon sens. D'autres comparaisons dans le cas d'hétérogénéités multiples (non présentées ici) conduisent aux mêmes conclusions. Dans la suite de la présente étude sur les hétérogénéités multiples, toutes les simulations numériques seront donc réalisées dans le cadre « grand angle ».

### **3.3. Cas d'un réseau d'hétérogénéités**

#### **3.3.1. Repliement du front et hétérogénéités multiples.**

Nous nous intéressons maintenant à la diffusion d'une onde de choc par deux hétérogénéités (2 demi-cylindres). Les résultats expérimentaux nous permettront d'analyser le phénomène de repliement du front d'onde dans ce cas, pour ensuite le généraliser au cas multi-hétérogène (30 demi-cylindres).

La figure 31 représente le champ de pression mesuré derrière un plan hétérogène constitué de deux demi-cylindres de diamètre 1,5 mm (à  $z = 9$  mm, 15 mm, 7 cm et 18 cm respectivement de gauche à droite et de haut en bas).

Pour les deux plans les plus proches, on observe clairement le phénomène de repliement du front d'onde au passage à travers chaque hétérogénéité, depuis le front d'onde plan incident jusqu'à la queue d'aronde avec plusieurs plis (cf. partie I.3.2). Ce phénomène se produit devant chaque hétérogénéité. Les deux queues d'aronde interfèrent sur une zone centrée en  $X = 8,7$  mm : les branches de chaque queue d'aronde sont indiquées par les chiffres 1 et 2, respectivement pour les motifs liés à la première et deuxième hétérogénéité. Chaque branche (nettement visible en  $z = 9$  mm) est une

indication de l'évolution spatio-temporelle des deux queues d'aronde. Elles divergent pour interférer de plus en plus loin de l'axe avec la partie plane du front d'onde non influencée par les hétérogénéités. En conséquence, suffisamment loin de l'hétérogénéité ( $z = 18$  cm), nous retrouvons un front d'onde quasi plan reformé par un mécanisme purement linéaire (atténuation géométrique en champ lointain de l'onde diffusée). Même si l'onde reste évidemment une onde de choc (transition rapide entre le minimum en bleu et le maximum en rouge), il ne s'agit pas là d'un phénomène non linéaire qui reformerait une onde en dent-de-scie par fusion des chocs.

Notons que l'onde en dent-de-scie se reforme après une distance égale à plus de 120 fois la longueur d'onde. Dans la partie I consacrée à l'étude de l'interaction entre l'onde en dent-de-scie et une seule hétérogénéité, nous avons montré que l'onde en dent-de-scie ne se reforme pas sur une distance de propagation équivalente à l'épaisseur de la couche turbulente de l'atmosphère soit 10 fois la longueur d'onde environ. Pour retrouver le front d'onde plan initial, il est nécessaire de se propager sur des distances beaucoup plus grandes.

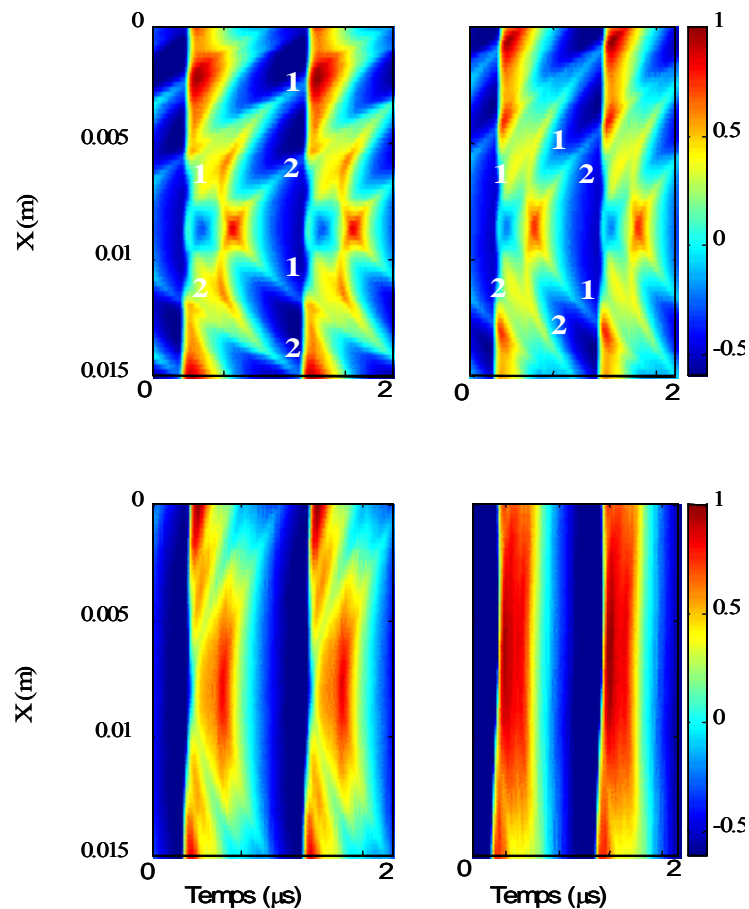


Figure 31. Représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré derrière le plan hétérogène constitué de deux cylindres de diamètre 1,5 mm. De gauche à droite et de haut en bas dans les plans situés respectivement à  $z = 9\text{ mm}$ ,  $z = 15\text{ mm}$ ,  $z = 7\text{ cm}$  et  $z = 18$  derrière les hétérogénéités. (Le chiffre 1 indique la position de la branche appartenant à la queue d'aronde liée à la première hétérogénéité et le chiffre 2 à la deuxième hétérogénéité. ). Les niveaux de pression sont représentés en couleur et normalisés par l'amplitude maximale.

Le cas suivant est plus complexe et correspond à l'interaction de l'onde de choc par un réseau constitué de 30 demi-cylindres identiques séparés d'un intervalle égal à 2 fois le diamètre. Quatre diamètres différents ont été réalisés.

La figure 32 est la représentation du champ de pression mesuré à 7,4 mm d'un réseau constitué de 30 demi-cylindres de diamètre 1,5 mm (première ligne), 1,1 mm

(deuxième ligne), 0,7 mm (troisième ligne) et 0,4 mm (quatrième ligne). Les motifs suivant  $X$  étant répétitifs, nous avons agrandi la figure sur une zone de 5 mm d'extension latérale.

Nous expliquons les mesures expérimentales par une généralisation de l'analyse du cas précédent : l'allure des fronts d'onde est liée aux interférences entre les différentes branches des queues d'aronde formées derrière chaque hétérogénéité. Notons aussi que plus les hétérogénéités sont petites, plus les motifs sont nombreux dans la zone observée. Le nombre de motifs sur la zone visualisée est égal à 1 derrière le réseau constitué de cylindres de diamètre 1,5 mm, à 2 derrière celui constitué de cylindres de diamètre 1,1 mm, à 4 derrière celui constitué de cylindres de diamètre 0,7 mm et à 6 derrière celui constitué de cylindres de diamètre 0,4 mm.

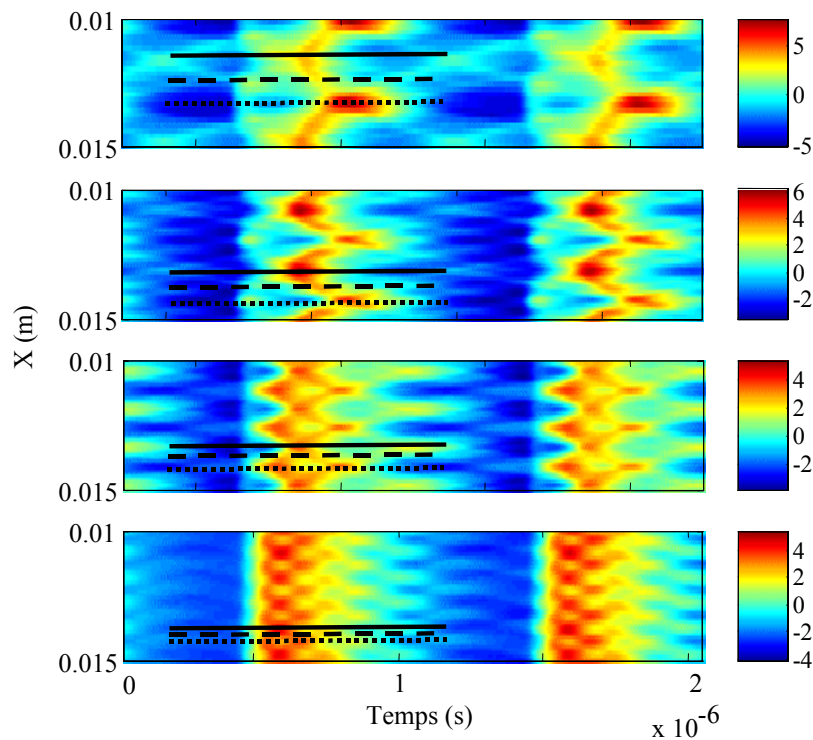


Figure 32. Représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré à 7,4 mm derrière les plans hétérogènes constitués de 30 demi-cylindres de diamètre (de haut en bas) 1,5 mm ; 1,1 mm ; 0,7 mm et 0,4 mm

### 3.3.2. Influence de la taille des hétérogénéités multiples sur la variabilité des formes d'ondes et le temps de montée

La figure 33 représente, pour chacun des 4 diamètres (chacune des lignes de la figure 33 correspond à un diamètre), les formes temporelles mesurées pour différentes valeurs de  $x$  (chaque colonne correspond à une position spatiale) repérées par les lignes noires (de gauche à droite sur la figure 33 : lignes continues, tirets ou pointillées indiquées sur la figure 32). Les positions des points de mesure sont séparées d'un demi diamètre. On remarque la grande variabilité des formes d'onde mesurées, qui sont très diverses en forme et en amplitude avec l'interférence des différentes formes d'onde diffusées. Nous observons évidemment que, plus la taille des hétérogénéités est grande, plus la variation des formes d'ondes sur un domaine transversal égal au diamètre correspondant est importante. Pour le réseau le plus petit (ligne du bas), l'onde conserve encore *grosso modo* sa forme temporelle en dent-de-scie et son amplitude (5 bars), mais des oscillations significatives apparaissent. Pour les diamètres supérieurs, les perturbations sont beaucoup plus importantes et les formes d'onde très variées. Ce résultat est intéressant car il souligne la différence avec le cas mono-hétérogène. En effet, nous avons montré que l'effet du repliement du front d'onde (dont l'une des conséquences est la grande variabilité des formes d'ondes) est faible pour un diamètre égal à 0,7 mm et pratiquement négligeable pour un diamètre égal à 0,4 mm. Dans ce cas, le champ de pression mesuré derrière le réseau constitué des plus petits cylindres n'aurait pas dû être modifié et nous n'aurions pas observé la grande variabilité des formes d'ondes (Fig. 33). Ceci n'est plus vrai dans le cas multi-hétérogène, de par l'effet collectif joué par l'ensemble des diffuseurs : chaque hétérogénéité a une influence faible individuellement, mais les faibles interférences cumulées finissent par modifier de manière importante le champ de pression. Cet effet est évidemment accru avec la taille des diffuseurs. Ce résultat dépend bien sûr du nombre d'hétérogénéités, de l'intervalle entre chacune d'elle et de l'intensité du contraste de vitesse du son. Si l'on extrapole à partir du cas d'une hétérogénéité, on pourrait estimer un seuil minimum de taille d'hétérogénéité à prendre en compte par la règle :

$$a_{\min} \approx \frac{\lambda}{4n} \frac{0.27c_0}{c_h - c_0}$$

où  $n$  est le nombre d'hétérogénéités. Considérant les plus grosses structures turbulentes de taille  $h$ , et comme sur une longueur de propagation  $L$  il y a environ  $n=L/h$  hétérogénéités de taille  $h$ , on en déduit une estimation :

$$a_{\min} \approx 0.05 \frac{\lambda h}{L} \frac{c_0}{\Delta c}$$

Les plus petites structures turbulentes seront évidemment plus nombreuses mais les fluctuations de célérité du son associées seront plus faibles. Ceci donne avec les valeurs du bang sonique (cf. tableau 3 de l'introduction  $L=1$  km,  $h=100$ m,  $\lambda=50$ m,  $\Delta c=0.03c_0$ )  $a_{\min} \approx 8$ m. On peut donc estimer qu'il serait nécessaire de connaître le champ atmosphérique turbulent avec une bonne précision sur des échelles de l'ordre de 8 m environ. Evidemment ceci repose sur un raisonnement très empirique à prendre avec beaucoup de précautions et qui mériterait d'être confirmé par des études plus précises qui dépassent le cadre de cette étude, mais la valeur ainsi trouvée pourrait être utilisée comme point de départ.

Concernant le temps de montée, celui-ci est d'autant plus grand que la taille de l'hétérogénéité est grande. Il peut varier très fortement car il va être très sensible à la forme de l'onde. Toutefois, derrière le réseau constitué de cylindres de plus petit diamètre, le temps de montée n'est pas modifié de manière importante car les ondes diffusées arrivent après l'onde directe et n'interfèrent donc pas avec le choc.

Ces résultats sont fortement liés aux interférences plus complexes qui se produisent derrière un réseau constitué de plusieurs hétérogénéités, que derrière un seul cylindre. En effet, dans ce dernier cas, le temps de montée et les formes d'ondes sont directement dépendants du mécanisme de repliement du front d'onde. Derrière un réseau, le problème dépend aussi de ce mécanisme mais la variabilité des formes d'ondes est aidée par le jeu d'interférences entre les champs de pression même très légèrement modifié.

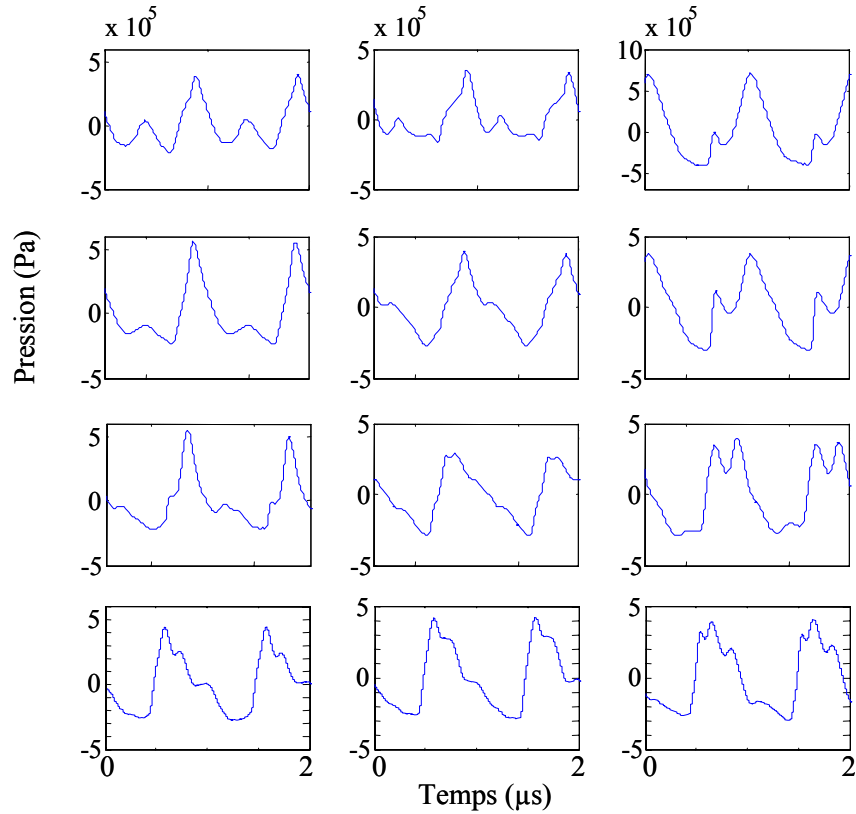


Figure 33. Forme temporelle de la pression mesurée dans un plan situés à 7,4 mm derrière les réseaux de demi-cylindres de taille 1,5 mm (première ligne), 1,1 mm (deuxième ligne), 0,7 mm (troisième ligne) et 0,4 mm (quatrième ligne). Les points de mesures sont situés en des ordonnées  $x$  séparées d'un demi diamètre et indiquées sur la figure précédente 32 en trait plein (première colonne), en tiret (deuxième colonne), en pointillé (troisième colonne).

### 3.3.3. Simulation de l'interaction d'une onde en dent de scie avec des hétérogénéités multiples

Nous nous intéressons maintenant aux performances du modèle théorique et numérique lorsque deux hétérogénéités sont présentes. Nous ne ferons pas une comparaison systématique pour différentes distances de propagation (ce qui serait

fastidieux), et nous nous limiterons à présenter les résultats dans le plan de mesure le plus proche. Ce cas est le plus « exigeant » pour les approximations paraxiales, car les trois ondes provenant du trajet direct et de la diffusion par chacune des hétérogénéités peuvent interagir sous des angles relativement élevés.

La figure 34 représente le champ de pression mesuré dans le plan à 7,4 mm de l'hétérogénéité (à gauche) et simulé avec l'équation « grand angle » (à droite). L'amplitude des champs de pression est normalisée par rapport à l'amplitude maximale mesurée expérimentalement.

Le résultat numérique calculé à partir de l'approximation « grand angle » concorde avec le résultat expérimental. La forme du front d'onde est modifiée par le phénomène de repliement du front d'onde au passage à travers chaque hétérogénéité. La zone de recouvrement des deux queues d'aronde est bien modélisée sur une zone centrée en  $X = 8,7 \text{ mm}$  (ligne en pointillé la plus inférieure).

En ce point situé à mi-distance du centre des deux hétérogénéités, le champ de pression est modifié par l'onde cylindrique diffractée par chaque hétérogénéité (Fig. 34) de la période choisie. Ces deux contributions correspondent à des angles d'observation de chaque hétérogénéité égaux à  $11^\circ$ , suffisamment faibles pour que l'approximation « grand angle » modélise très bien la forme et l'amplitude de la pression (Fig. 35).

En dehors de l'axe de symétrie, à 1,2 mm de la première hétérogénéité, l'influence de la deuxième hétérogénéité de la période choisie est nulle alors que celle de la période précédente modifie le champ de pression. L'angle d'observation correspondant à la deuxième hétérogénéité est égal à  $28^\circ$ , soit dans le domaine de validité de l'approximation grand angle. Celle-ci modélise correctement l'amplitude et la phase du signal (Fig. 36) avec un bon accord avec les données expérimentales. L'approximation grand angle permet donc d'avoir un bon accord en phase et en amplitude sur un domaine transversal assez large.

Les simulations numériques réalisées plus loin de l'axe de symétrie, en dehors du domaine de validité de l'approximation ( $30^\circ$  environ) montrent une dégradation progressive de l'accord théorie / expérience.



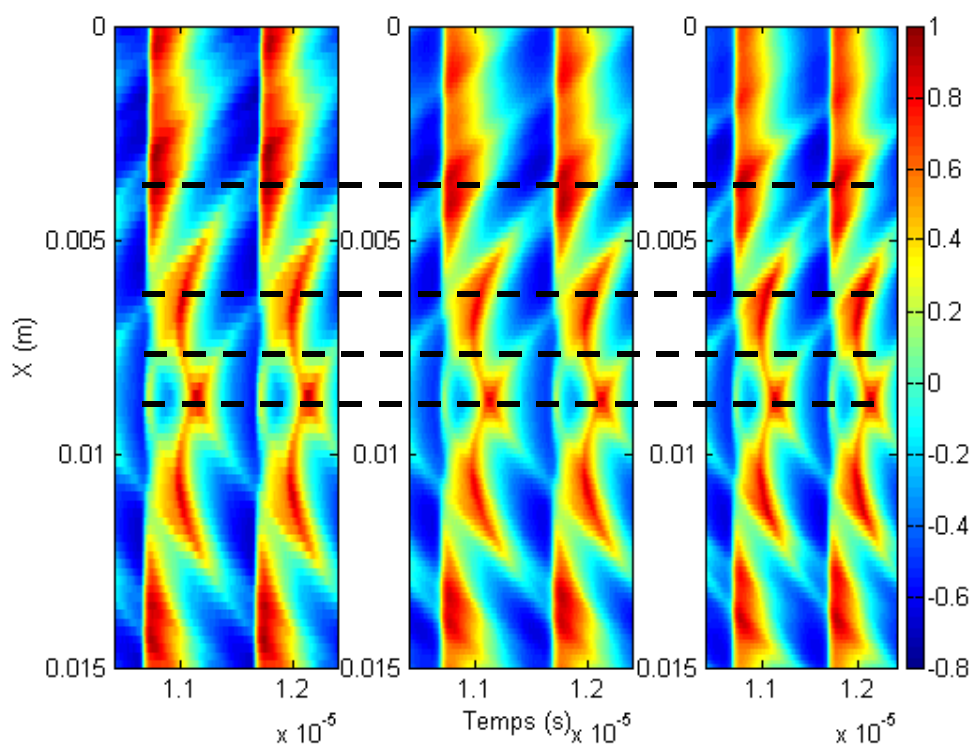


Figure 34. Représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré à  $z = 7,4$  mm du plan hétérogène constitué de deux demi-cylindres de diamètre 1,5 mm positionnés en  $x = 7,2$  mm et  $x = 10,2$  mm. A gauche : champ expérimental – A droite : simulation numérique grand angle. Les niveaux de pression (en couleur) sont normalisés par le maximum de l'amplitude expérimentale.

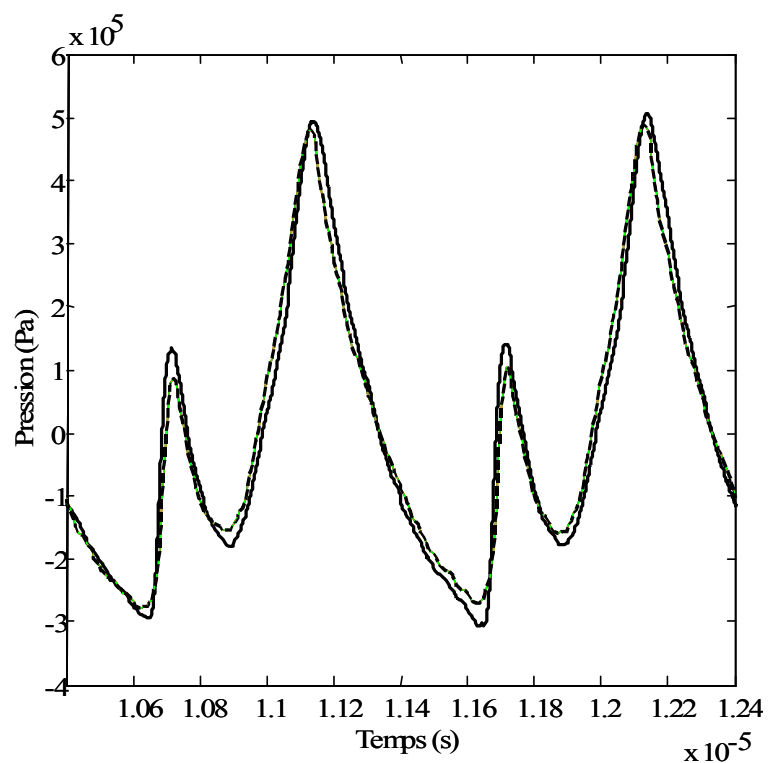


Figure 35. Forme temporelle de la pression mesurée (trait plein) et calculée (pointillé) en  $z = 7,4$  mm du plan hétérogène sur l'axe de propagation ( $x = 8,7$  mm) à égale distance (1,5 mm) du centre des deux hétérogénéités

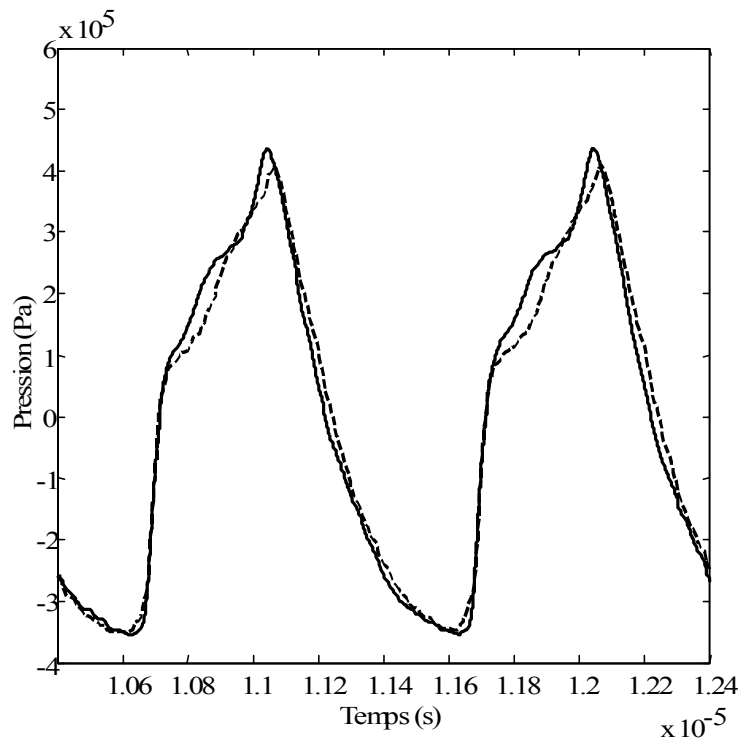


Figure 36. Forme temporelle de la pression mesurée (trait plein) et calculée (pointillé) en  $z = 7,4$  mm du plan hétérogène et à  $2,8$  mm de l'axe de propagation ( $x = 6$  mm) soit à  $1,2$  mm du centre de la première hétérogénéité et à  $4,2$  mm du centre de la deuxième

Regardons maintenant si le modèle physique basé sur l'approximation « grand angle » est capable de modéliser les interférences complexes qui se produisent derrière un réseau constitué de 30 demi-cylindres .

La figure 37 est la représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré (à gauche) à  $z = 7,4$  mm derrière le plan hétérogène constitué de 30 demi-cylindres et simulé avec l'équation « grand angle » (à droite). On remarque le bon accord global, l'allure des motifs répétitifs est simulée correctement même si l'on observe dans le détail de petites différences.

La figure 38 représente les différentes formes d'ondes mesurées à des distances transverses  $X$  différentes. L'approximation grand angle permet de retrouver les formes d'onde complexes mesurées derrière le plan hétérogène en amplitude et en phase.

La figure 39 est la représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré à 17 mm du réseau constitué de 30 demi-cylindres de diamètre 1,5 mm. Cette distance correspond à environ 10 fois la longueur d'onde, soit (à l'échelle du bang sonique) l'épaisseur de la couche turbulente. Là encore, l'accord est « globalement bon » en amplitude et en phase, même si le détail de tous les « motifs » du champ ne peut être complètement simulé.

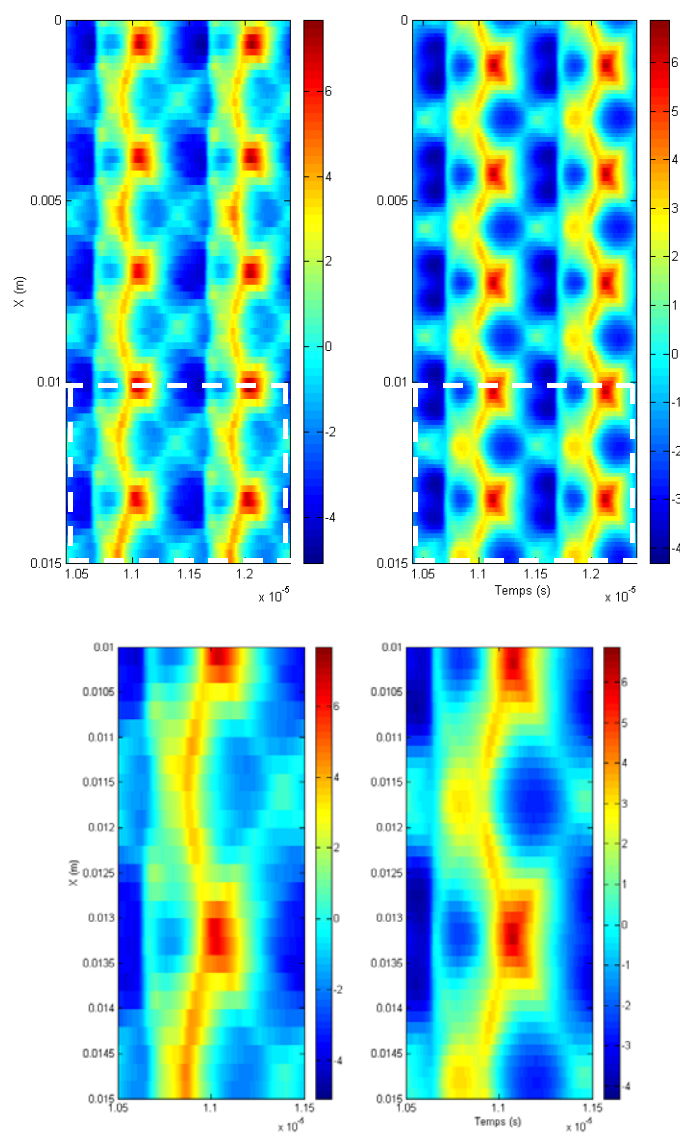


Figure 37. Représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré (à gauche) et simulé par l'équation grand angle (à droite) mesuré à  $z = 7,4$  mm du plan hétérogène derrière un plan hétérogène constitué de 30 demi-cylindres de diamètre 1,5 mm mm espacés de 3 mm. En bas, agrandissement de la zone indiquée dans les rectangles en tiret blanc. Les niveaux de pression (en couleur) sont normalisés par le maximum de l'amplitude expérimentale.

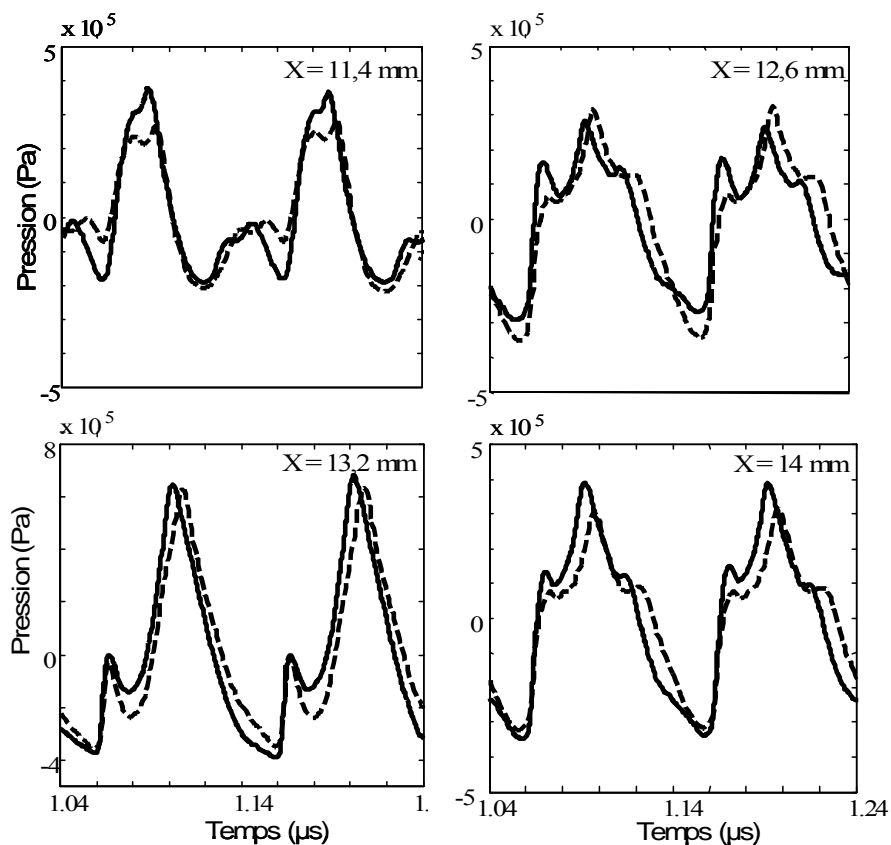


Figure 38. Formes temporelles de la pression mesurée (trait plein) et calculée (pointillé) en  $z = 7,4$  mm du plan hétérogène de 30 demi-cylindres de diamètre 1,5 mm espacés de 3 mm, et à diverses positions transverses (indiquées sur les figures).

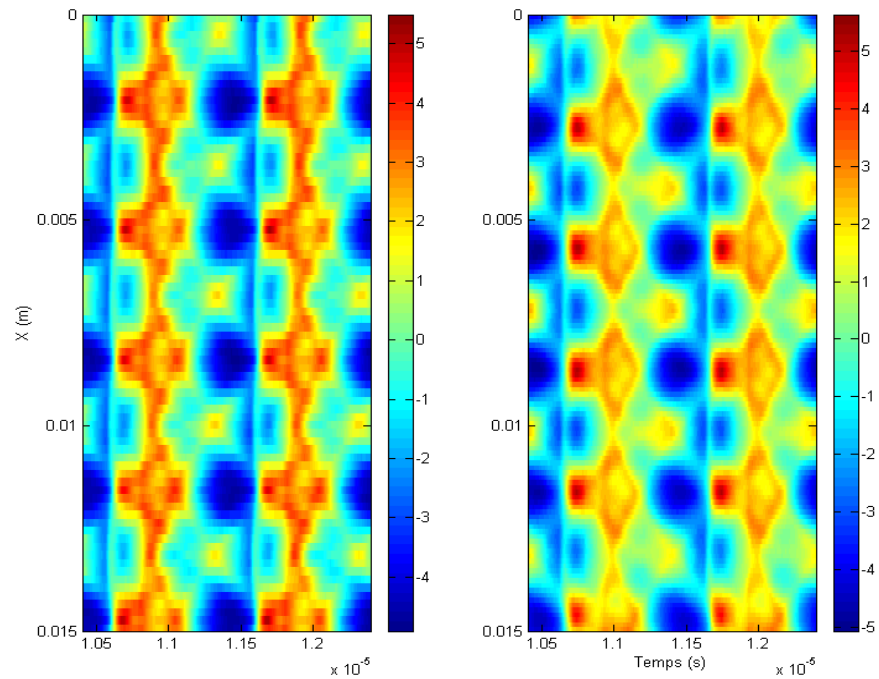


Figure 39 Représentation spatio-temporelle du champ de pression mesuré (à gauche) et simulé par l'équation grand angle (à droite) mesuré à  $z = 17$  mm du plan hétérogène derrière un plan hétérogène constitué de 30 demi-cylindres de diamètre 1,5 mm espacés de 3 mm. Les niveaux de pression (en couleur) sont normalisés par le maximum de l'amplitude expérimentale.

Cette partie conclut la validation quantitative de notre modèle théorique et numérique et montre également ses limites pour des angles d'observation trop importants. Nous avons pu vérifier que les formes des champs de pression étaient bien reproduites à la fois en phase et en amplitude. La comparaison reste bonne sur une distance de propagation équivalente à l'épaisseur de la couche turbulente. Nous avons donc maintenant à notre disposition un outil théorique et numérique qui permet de modéliser la propagation des ondes acoustiques en milieu hétérogène avec de multiples diffuseurs dans la limite de l'approximation paraxiale grand angle.

Nous utilisons maintenant ce logiciel pour donner quelques exemples de signaux mesurés derrière un milieu hétérogène « aléatoire », un pas de plus vers la simulation de la réalité de la propagation en milieu turbulent.

### **3.4. Vers un cas de milieu aléatoire ...**

Nous utilisons maintenant le code « grand angle » dans un cas plus proche de la « réalité » du bang sonique : la propagation d'une onde en « N » à travers un milieu composé de plusieurs diffuseurs choisis aléatoirement. Même si nous sommes encore loin de la réalité de la propagation du bang sonique dans la couche limite planétaire turbulente (milieu non stratifié, pas d'écoulement, diffuseurs considérés comme des cylindres homogènes), ces simples simulations permettent de retrouver bien des caractéristiques du bang sonique au sol.

La figure 40 représente le champ de pression en  $z = 0$  associé à une onde en N de période 0,15 s (soit une longueur d'onde de 50m), d'amplitude 100 Pa et de temps de montée égal à 1 ms. Les lignes en pointillées délimitent le domaine physique. Au-delà, l'amplitude est apodisée et le milieu numériquement absorbant pour prévenir les réflexions par les bords. Nous avons montré dans les études précédentes l'intérêt de la condition absorbante et de l'apodisation que nous appliquons ici.



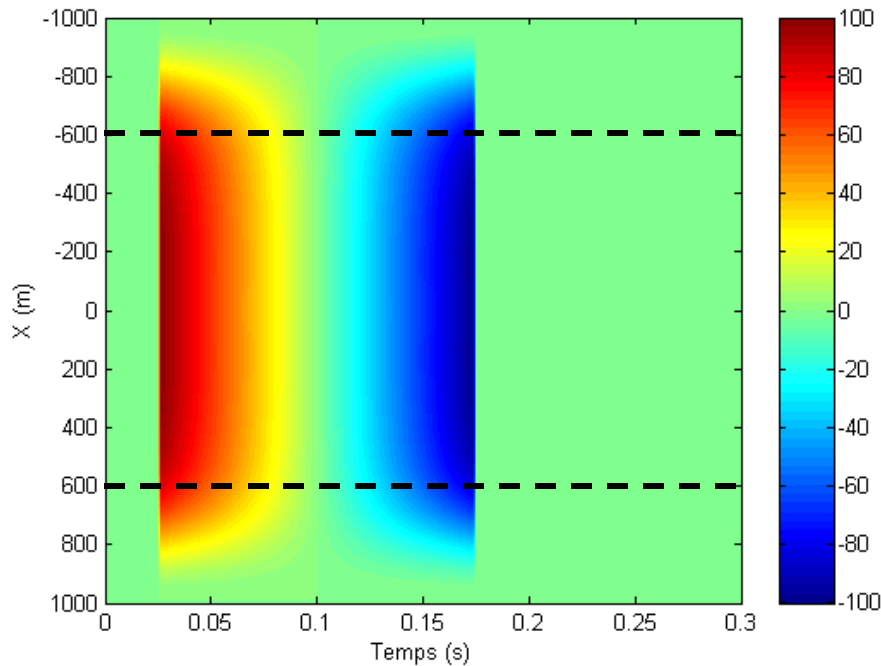


Figure 40. Onde en  $N$  incidente incidente. A l'intérieur des lignes en pointillés, le domaine physique.

Les propriétés du milieu de propagation sont choisies de manière aléatoire en utilisant les paramètres définis dans le tableau 3 de l'introduction pour le bang sonique (pression, temps de montée, fréquence, vitesse du son, taille des hétérogénéités ...).

La figure 41 représente la carte de vitesse du son. Nous avons choisi un milieu composé de 10 diffuseurs dont les propriétés (taille, intensité et position) sont choisies aléatoirement par un algorithme de tirage au sort selon les règles suivantes :

- a. le contraste de vitesse du son est choisi entre 2 et 5 %,
- b. le rayon de chaque hétérogénéité est choisi au maximum égal à 2 fois la longueur d'onde (soit 100 m),
- c. les positions de chaque diffuseurs sont telles qu'aucun diffuseur n'est localisé à l'intérieur de la couche absorbante du domaine npartie apodisée de l'onde incidente,

- d. le domaine de propagation est choisi égal à 1 km, ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite planétaire.

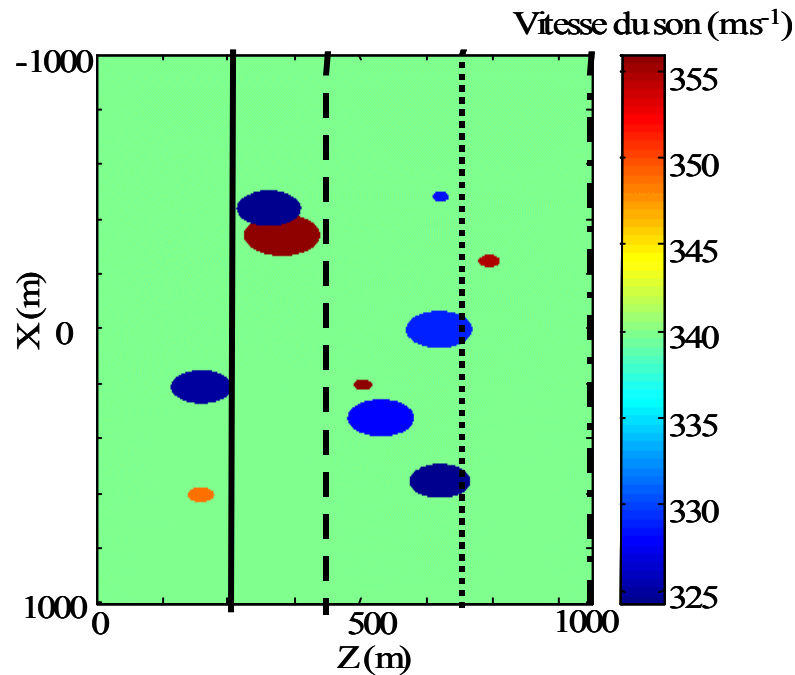


Figure 41. Exemple de « carte » de vitesse du son pour dix hétérogénéités choisies aléatoirement (en taille, position et contraste de vitesse du son). Les lignes verticales indiquent les distances correspondant aux champs de pression visualisés.

La figure 42 montre les représentations spatio-temporelles du champ de pression pour différentes distances  $z$  indiquées par des lignes sur la figure 41.

A  $z = 250 \text{ m}$  (Fig. 42.b)), le front d'onde subit une courbure principalement centrée en  $X = 200 \text{ m}$ . Cette courbure est provoquée par la présence de l'hétérogénéité de diamètre 2 fois la longueur d'onde et de contraste de vitesse environ égal à 5 %. La vitesse du son dans l'hétérogénéité étant plus faible que dans le milieu environnant, l'hétérogénéité joue le rôle de lentille convergente, et nous observons la focalisation correspondante à une distance  $z = 480 \text{ m}$  (Fig. 42.c)). A cette même distance, le front d'onde subit une courbure en  $X = -443 \text{ m}$  provoquée par les deux hétérogénéités accolées et centrées en  $X = -440 \text{ m}$  et  $X = -350 \text{ m}$ , de diamètre environ égal à 2 fois la longueur d'onde et de contraste de vitesse du son environ égal à 5 %. Une des

hétérogénéités a une vitesse du son plus grande (lentille divergente) que le milieu environnant alors que l'autre a une vitesse du son plus faible (lentille convergente). La courbure du front d'onde est donc dissymétrique.

En  $z = 700 \text{ m}$ , la zone du front d'onde modifiée par ces deux hétérogénéités subit l'effet de focalisation résultant de la lentille convergente, alors que celle centrée en  $X = 200 \text{ m}$  diverge. Entre ces deux zones, nous observons aussi des légères perturbations de la forme du front d'onde liées à la présence d'hétérogénéités de petite taille (inférieure à  $\lambda/2$ ).

En  $Z = 1000 \text{ m}$ , nous observons l'influence des hétérogénéités de taille au moins égale à la longueur d'onde mais de contraste de vitesse plus faible (environ 2 %). Le front d'onde ne subit pas de réelle focalisation mais nous observons clairement le repliement du front d'onde.

L'influence de chaque hétérogénéité est « locale » soit à peu près sur une distance égale à quelques longueurs d'onde. Mais, la propagation sur une distance équivalente à l'épaisseur de la couche turbulente est suffisante pour observer les interférences constructives et destructives du champ de pression modifié par chaque hétérogénéité (repliement du front d'onde, focalisation, changements de formes d'onde). Ces interférences modifient le champ de pression sur une dimension transverse large.

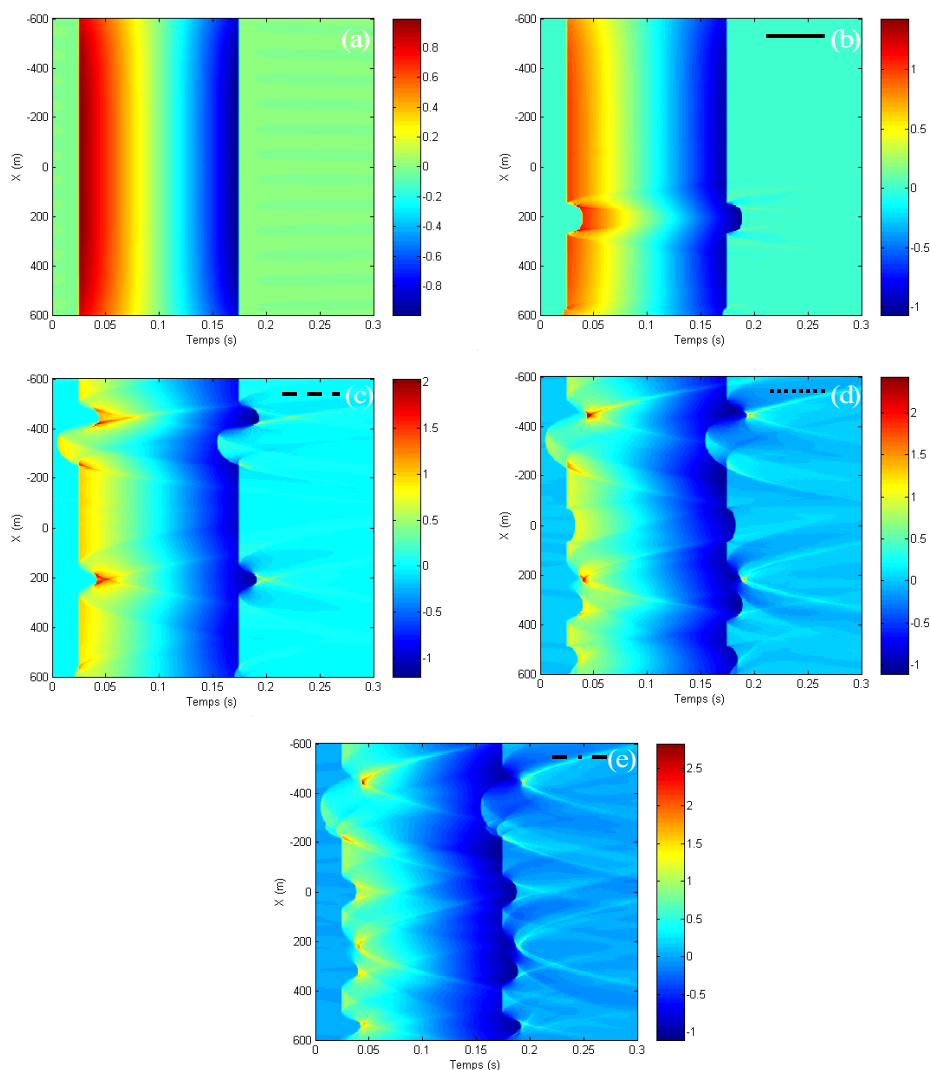


Figure 42. Représentation spatio-temporelle du champ de pression incident (a) et simulé à  $z = 250$  m (b), à  $z = 480$  m (c), à  $z = 700$  m et à  $z = 1000$  m. Les niveaux de pression en couleur sont normalisés par l'amplitude de l'onde incidente (100 Pa).

Cet exemple nous montre que la modification du champ de pression est très sensible à la disposition de chaque diffuseur.

La figure 43 montre des formes temporelles du champ de pression mesuré à  $z = 1000$  m, distance équivalente à l'épaisseur de la couche turbulent (c'est-à-dire au sol).

Nous observons une très grande variabilité des formes temporelles. Nous retrouvons des formes d'ondes focalisées (en U) pour  $X = -443$  m ou « piquées »  $X$  (337m, 537 m) que nous n'avions pas observées dans nos expériences en laboratoire. Nous observons aussi des chocs constitués de plusieurs chocs très rapprochés (plus rapprochés que ceux obtenus expérimentalement) d'amplitudes différentes (à  $X = 77$  m, - 403 m, - 3m) ou alors des formes d'ondes en plateau ( $X = 298$  m) ou encore arrondies ( $X = 597$  m). Rappelons qu'il existe plusieurs différences entre le milieu hétérogène défini ici et le milieu imposé expérimentalement : i) la valeur maximale du contraste de vitesse du son est plus faible que celle utilisée dans les expériences, ii) le milieu est constitué d'hétérogénéités de taille et de contraste de vitesse du son différentes, iii) les diffuseurs sont positionnés dans des plans différents.

Remarquons aussi la variation rapide des formes d'ondes spatialement : les formes d'ondes simulées entre  $X = -443$  m et  $X = -403$  m sont très différentes alors que la distance entre ces deux valeurs est inférieure à la longueur d'onde, de même pour les formes d'ondes mesurées entre  $X = 537$  m et  $X = 597$  m ou  $X = 77$  m,  $X = 197$  m et  $X = 298$  m. De telles formes d'onde se retrouvent communément lors des campagnes d'essais en vol, même si les hypothèses de modélisation du milieu de propagation sont encore trop simplifiées pour tenter une comparaison autre que qualitative.

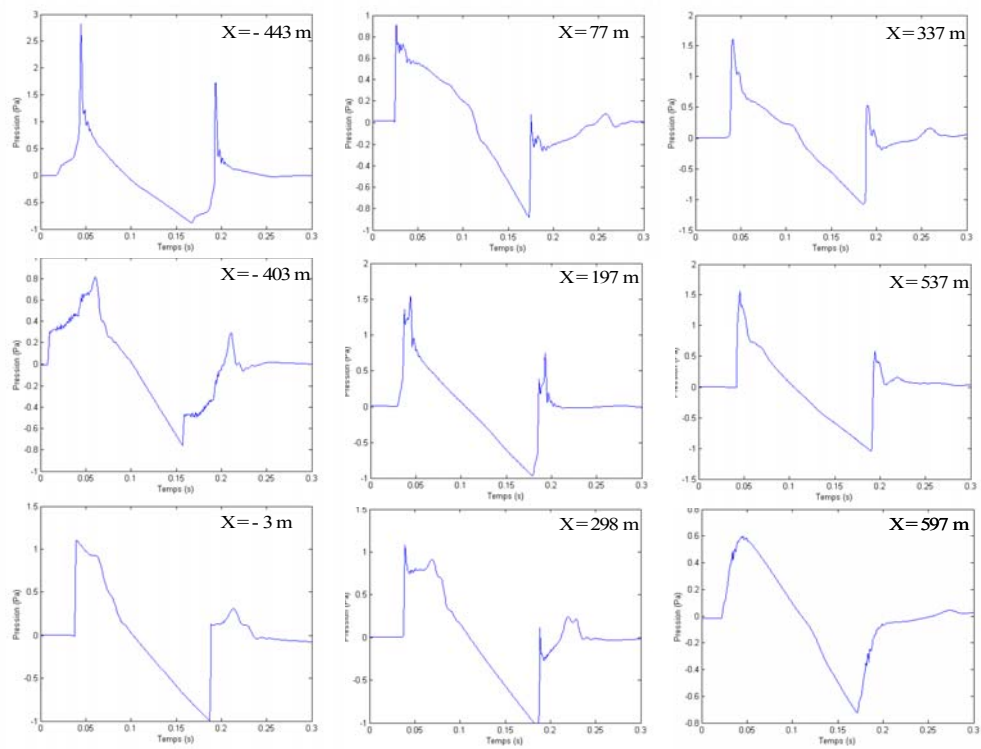


Figure 43. Forme temporelle de signaux pour différentes valeurs de X.

## 4. Conclusion

Nous avons développé dans cette partie un nouveau modèle de propagation non-linéaire des ondes acoustiques en milieu faiblement hétérogène.

Nous avons décrit le modèle numérique de cette équation (basé sur celui de l'équation KZ) ainsi que l'implémentation d'une nouvelle condition aux limites sur les bords du domaine en  $X$ .

Nous nous sommes tout d'abord intéressé à la modélisation du rayonnement d'un piston en champ proche. Nous quantifions l'efficacité de la nouvelle condition aux limites absorbante et nous montrons que les oscillations très rapides de la pression en champ proche sont nettement mieux simulées avec l'équation « grand angle » qu'avec l'approximation paraxiale. Seul le champ très proche (distance inférieure à deux longueurs d'onde de la source) où la contribution des ondes évanescentes est significative, et les zones latérales (au-delà de  $40^\circ$ ) restent difficiles à approcher de manière satisfaisante.

L'étude de la simulation de la diffusion d'une onde acoustique par un cylindre en régime linéaire montre que l'utilisation de la condition absorbante exige que le champ de pression incident soit apodisé par une fenêtre spatiale qui minimise l'effet des ondes de bords. Comme attendu, la simulation « grand angle » améliore la phase de l'onde diffusée, et donc la position du maximum résultant des interférences constructives avec l'onde plane incidente. Par contre, si elle est mieux localisée, l'amplitude maximale simulée par l'équation « grand angle » est un petit peu moins bonne que celle simulée par l'équation paraxiale. Si nous négligeons les termes de couplage diffraction/hétérogénéité dans l'équation « grand angle », nous observons que cette amplitude est meilleure. En revanche, les figures de diffraction transverse sont nettement mieux prises en compte par l'approximation « grand angle » complète. Cette étude montre que l'équation « grand angle » complète est nécessaire pour bien simuler les effets de la diffraction liée à l'hétérogénéité, comme la position et l'amplitude des maxima locaux d'amplitude et des lobes secondaires résultant des interférences entre onde plane incidente et champ diffusé. Cependant, ces améliorations se font au dépend

de l'amplitude maximale sur l'axe de propagation : l'énergie est un peu moins confinée autour de l'axe de propagation que dans les deux autres cas à cause de la contrainte imposée par les termes de couplage diffraction/hétérogénéité.

En régime non-linéaire, nous montrons l'amélioration en phase et en amplitude du champ de pression simulé avec l'équation « grand angle » derrière un seul cylindre pour des angles « intermédiaires ». Précisons tout de même que l'amélioration est plus forte dans le cas du rayonnement d'un piston en champ proche.

Les résultats expérimentaux de l'interaction d'une onde de choc avec des hétérogénéités multiples dans un même plan montrent que le temps de montée et les formes d'ondes sont directement dépendants du mécanisme de repliement du front d'onde mais dépendent aussi du jeu d'interférences entre les champs de pression même très légèrement modifiée. Nous montrons notamment que le champ de pression derrière un réseau constitué de cylindres de diamètres égaux à 0,4 mm est modifié : il existe une variabilité des formes d'ondes que nous n'avons pas observé dans le cas d'une seule hétérogénéité de diamètre 0,4 mm. Ceci, nous amène à définir un nouveau seuil minimum pour la taille des hétérogénéités à prendre en compte pour la modélisation des structures de la couche turbulente.

Finalement, après avoir déterminé le domaine de validité de notre modèle numérique basé sur l'approximation « grand angle » en régime non-linéaire et dans le cas d'un milieu constitué de plusieurs hétérogénéités, nous avons réalisé une simulation numérique de la propagation d'une onde en N dans un milieu aléatoire dans le cadre du bang sonique. Les caractéristiques de l'onde en N et du milieu aléatoire sont tirées du tableau 3. Nous montrons quelques formes d'ondes temporelles qui ressemblent à celles du bang sonique mesurées au sol.



## Conclusion

Cette étude visait à approfondir la compréhension de la propagation d'une onde de choc acoustique dans un milieu hétérogène, au moyen d'expériences déterministes réalisées au laboratoire et comparées à un modèle numérique. Ce double aspect d'expérience *déterministe* permettant une *validation quantitative* des modèles, constitue l'originalité de notre travail par rapport aux autres études de la littérature sur cette thématique. Cette étude était principalement motivée par les applications au bang sonique, pour lesquelles l'expérience a été dimensionnée, mais elle pourrait trouver d'autres applications potentielles, notamment dans le domaine biomédical correspondant aux mêmes fréquences, dimensions et niveaux acoustiques.

La première partie de notre travail consistait à identifier les mécanismes physiques importants qui jouent un rôle lors de l'interaction d'une onde de choc avec une hétérogénéité. Les expériences en laboratoire ont mis en évidence le phénomène de *repliement du front d'onde*, proposé depuis longtemps dans la littérature comme mécanisme de la déformation des formes d'onde, mais observé ici à notre connaissance pour la première fois. Ses conséquences sur le temps de montée et la variabilité des formes d'onde ont également été soulignées. Nous avons aussi étudié expérimentalement l'influence de la taille des hétérogénéités. Un point important de ce travail est que nous démontrons la possibilité, avec une seule hétérogénéité, de reproduire (au moins qualitativement) certaines des caractéristiques du bang sonique mesuré au sol, comme la forte variabilité des formes d'onde sur des distances comparables à la longueur d'onde.

La nature déterministe de nos travaux nous a permis de *comparer* ensuite, forme d'onde à forme d'onde, les résultats expérimentaux aux résultats numériques bâtis sur un modèle physique précédemment démontré. Cela permet de la sorte de valider la procédure de simulation, pour l'employer ultérieurement dans des configurations aléatoires pour lesquelles une telle comparaison est plus difficile. Les simulations

numériques ont également permis de quantifier l'importance des effets non linéaires. Nous avons également abouti à la même conclusion que Blanc-Benon *et al.* (2002) sur la corrélation entre l'augmentation du temps de montée et l'apparition des caustiques.

Bien entendu, nous ne prétendons pas reproduire avec nos expériences ou nos résultats numériques, la complexité de l'étude de l'interaction entre une onde de choc et la couche turbulente atmosphérique. Néanmoins, le dispositif expérimental utilisé peut nous permettre de nous en approcher progressivement. Dans cet objectif, la deuxième partie est donc consacrée à l'étude de la propagation d'une onde de choc dans un milieu constitué cette fois d'hétérogénéités multiples.

A cet effet, nous avons donc développé un modèle prenant en compte la propagation d'ondes d'angles plus élevés. Nous avons validé le modèle numérique original correspondant dans plusieurs configurations. Nous avons à chaque cas montré l'apport de cette approche « *grand angle* » par rapport à l'approximation « paraxiale » usuelle. Nous montrons ainsi que, dans chaque cas, les simulations numériques sont améliorées grâce à cette approximation « grand angle ». Cette amélioration est toutefois plus marquante dans le cas du rayonnement d'un piston en champ proche (zone difficile à résoudre numériquement) que dans le cas de la diffusion par un cylindre.

Nous avons également présenté les résultats expérimentaux de l'interaction d'une onde de choc avec un réseau allant jusqu'à 30 hétérogénéités de même diamètre, ce dernier étant un paramètre que nous avons fait varier. Nous montrons que, dans ce cas, les formes d'ondes complexes dépendent toujours du repliement du front d'onde mais résultent aussi des interférences entre les champs de pression même légèrement modifiés par des hétérogénéités de petite taille. Ce résultat nous amène à proposer un nouveau seuil minimum pour la taille des hétérogénéités à prendre en compte dans la modélisation des structures de la couche turbulente, proposition qui nécessitera des études ultérieures pour être confirmée.

Finalement, nous avons proposé, à titre d'exemple, une première simulation numérique de l'interaction entre une onde en N et un milieu aléatoire, simulations

réalisées dans le cadre du bang sonique. Ce résultat paraît très encourageant car nous retrouvons des formes d'ondes complexes mesurées lors des essais en vol.

L'étude devrait donc pouvoir se poursuivre par les travaux suivants, dont certains sont en cours et qui permettront d'approfondir le travail effectué en thèse dans le cadre de l'étude sur le bang sonique :

- Proposer une nouvelle équation de propagation non linéaire en milieu hétérogène avec l'approximation « grand angle » qui prend en compte les variations spatiales des propriétés du milieu hétérogène et l'écoulement.
- Comparer cette équation avec les équations déjà existantes établies dans la littérature en régime linéaire (Ostashev, 1997) ou en régime non-linéaire avec l'approximation paraxiale (Aver'yanov, 2006)
- Réaliser des expériences en laboratoire les plus proches possibles d'un milieu aléatoire contrôlé permettant d'identifier le domaine de validité de cette équation.
- Modéliser ensuite la propagation d'une onde en N dans un milieu turbulent contenant des hétérogénéités d'origine thermique (fluctuations de vitesse du son) et inertielle (fluctuations de vitesse du vent). Le milieu turbulent pourrait être décrit au moyen de simulations numériques avancées (LES, Large Eddy Simulation par exemple, Wagner *et al.*, 2007).
- Les résultats de ces simulations devront *in fine* être comparés autant que faire se peut aux bases de données de bangs soniques, afin de vérifier que la simulation permet de recouvrir l'ensemble de la variabilité statistique observée au sol lors d'essais en vol.

Au-delà du bang sonique nous souhaiterions aussi appliquer nos travaux à d'autres domaines qui s'intéressent également à la propagation des ondes de choc en

milieu hétérogène (cf. introduction). Le domaine médical serait certainement le plus approprié, notamment dans les situations où des ondes de forte puissance avec des grandes ouvertures sont focalisées à l'émission, comme par exemple la lithotritie : cette technique consiste à envoyer des ondes de choc depuis l'extérieur du corps sur un calcul pour le fragmenter s'il n'est pas trop dur. Il serait donc intéressant d'avoir un outil numérique fiable qui pourrait simuler la propagation de l'onde utilisée de forte puissance et avec une grande ouverture dans le corps humain (évidemment hétérogène) pour améliorer la focalisation. L'équation « grand angle » développée dans cette thèse ainsi que le modèle numérique correspondant pourraient modéliser ce problème. D'autre part, ces outils théoriques et numériques pourraient aussi jouer un rôle dans les études sur la technique dite HIFU (High Intensity Focused Ultrasound) qui utilise des faisceaux ultrasonores focalisés monochromatique de forte intensité pour créer des élévations de température importantes bien délimitées et rapides à des profondeurs de pénétration importantes dans les tissus. L'utilisation de ces effets est en phase de recherche pour le traitement de la prostate et des tumeurs du foie.

L'équation « grand angle » en milieu hétérogène pourrait enfin servir en acoustique sous-marine, dont la problématique est la compréhension de l'interaction entre une onde acoustique émise par un système sonar, et un obstacle (par exemple le fond de la mer) qui est un milieu absorbant et hétérogène. La caractérisation de signaux de forte puissance (par exemple une explosion) qui se propagent sur des centaines de kilomètres dans l'océan considéré comme un guide d'onde pourrait aussi constituer une autre application potentielle.

## Bibliographie

- Aanonsen, S.I., Barkve, T., Tjøtta, J.N., Tjøtta, S. (1984). "Distortion and harmonic generation in the near-field of a finite amplitude sound beam," J. Acoust. Soc. Am **75**, 749.
- Ambrosiano, J., Plante, D., McDonald, B.E., Kuperman, W.A. (1990). "Nonlinear propagation in an ocean waveguide," J. Acoust. Soc. Am **75**, 749.
- Ames, W. F. (1977), Numerical methods for partial differential equations, Academic Press (New York), pp. 315-467.
- Aubry, J.-F., Tanter, M., Gerber, J.-L., Thomas, J.-L., Fink, M. (2001). "Optima focusing by spatio-temporal inverse filter. II. Experiments. Application to focusing through absorbing and reverberating media," J. Acoust. Soc. Am **110** (1), 48-58.
- Auger, Th. (2001), *Modélisation et simulation numérique de la focalisation d'ondes de choc acoustiques en milieu en mouvement. Application à la focalisation du bang sonique en accélération*, thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) (in French)
- Auger, Th. and Coulouvrat, F. (2002), "Numerical simulation of sonic boom focusing", *AIAA J.*, **40**, 1726-1734
- Averkioiu, M.A., Cleveland, R.O (1999). "Modelling of an electrohydraulic lithotripter with the kzk equation," J. Acoust. Soc. Am **106**, 102-112.
- Averkioiu, M.A., Hamilton, M.F. (1997). "Non linear distortion of short pulses radiated by plane and focused circular sources," J. Acoust. Soc. Am **102**, 2539-2548.
- Aver'yanov, M.V., Khokhlova, V.A., Sapozhnikov, O.A., Blanc-Benon, Ph., Cleveland, R.O. (2006). "Parabolic equation for nonlinear acoustic wave propagation in inhomogeneous moving media," *Acoustical Physics* **52** (6), 623-632.
- Baker, A.C. (1997). "A numerical study of the effect of drive level on the intensity loss from an ultrasonic beam," *Ultrasound Med. Biol.* **23**, 1083-1088.
- Bakhvalov, N. S., Zhileikin, Ya. M., Zabolotskaya, E. A. (1987), *Nonlinear Theory of sound Beams*, American Institute of Physics (New York)
- Bamberger, A., Engquist, B., Halpern, L., Joly, P. (1988), « Higher order paraxial wave equation in heterogeneous media », *SIAM J. Appl. Math.* **48**, 129-154
- Barrière, C., Royer, D. (2001). "Optical measurement of large transient mechanical displacements," *Applied Physics Letters* **79** (6), 878-880.

- Baskar, S., Coulouvrat, F., Marchiano, R. (2007). “Nonlinear reflection of grazing acoustic shock waves : unsteady transition from von Neumann to Mach to Snell Descartes reflections,” *J. Fluid. Mech.* **575**, 25-55.
- Bass, H.E., Ezell, J., Raspet, R. (1983). “Effect of vibrational relaxation on rise times of shock waves in the atmosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.* **74** , 1514-1517.
- Bass, H. E., Sutherland, L. C., Piercy, J. and Evans, L. (1984), “Absorption of sound by the atmosphere”, in *Physical Acoustics*, eds. W.P. Mason, R.N. Thurston, Academic Press (Orlando), **XVII**, 145-232.
- Béranger, J.-P. (1994). “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” *J. Comp. Phys.* **114**, 185-200.
- Berry, M.V. (1976). “Waves and Thom’s theorem,” *Adv.Phys.* **25**, 1-26.
- Blackstock, D.T., Hamilton, M.F. (1998), “History of Nonlinear Acoustics : 1750s-1930s,” in “*Nonlinear Acoustics*”, ed. M.F. Hamilton and D.T. Blackstock, Academic Press (San Diego), 309-341.
- Blanc-Benon, Ph., Juvé, D., Comte-Bellot, G. (1991). « Occurrence of caustics for high-frequency acoustic waves propagating through turbulent fields, » *Theor. Comput. Fluid. Dynam.* **2**, 271-278.
- Blanc-Benon, Ph., Lipkens, B., Dallois, L., Hamilton, M.F., Blackstock, D.T. (2002). “Propagation of finite amplitude sound through turbulence : Modeling with geometrical acoustics and the parabolic approximation,” *J. Acoust. Soc. Am.* **111** (1), 487-498 .
- Blanc-Benon, Ph., Ollivier, S., Attenborough, K., Qin, Q. (2005). “Laboratory experiments to study N-waves propagation: effects of turbulence and/or ground roughness,” in “Innovations in nonlinear Acoustic”, Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Symposium on Nonlinear Acoustics including the International Sonic Boom Forum (State College, Pennsylvania 18-22 July 2005), Eds. A.A. Atchley, V. W. Sparrow, R. M. Keolian, AIP Conference Proceedings 838, 651-654
- Blumrich, R., Coulouvrat, F., Heimann, D. (2005), « Meteorologically induced variability of sonic boom characteristics of supersonic aircraft in cruising flight », *J. Acoust. Soc. Am.*, **118**, 707-722
- Blumrich, R., Coulouvrat, F., Heimann, D. (2005a), « Variability of focused sonic booms from accelerating supersonic aircraft in consideration of meteorological effects », *J. Acoust. Soc. Am.*, **118**, 696-706, 2005
- Boulanger, P., Raspet, R., Bass, H.E. (1995). “Sonic boom propagation through realistic turbulent atmosphere,” *J. Acoust. Soc. Am.* **98** (6), 3412-3417 .

- Burgers, J. M. (1954). « Further statistical problems connected with the solution of a simple nonlinear partial differential equation ». Proc. Kon. Nederlandse Akad. van Wet., Ser. B, 57 :159–169, 1954.
- Candel, S.M. (1977). “Numerical simulation of conservation equation arising in linear wave theory : application to aeroacoustics,” J. Fluid. Mech., **83**, 465-493 .
- Castor, K., Gerstoft, P., Roux, Ph., Kuperman, W.A., McDonald, B.E. (2004). “Long-range propagation of finite-amplitude acoustic waves in an ocean waveguide,” J. Acoust. Soc. Am **78**, 672-681.
- Christopher, P.T., Parker, K.J. (1991). “New approaches to nonlinear diffractive fields propagation,” J. Acoust. Soc. Am **90**, 488-499.
- Claerbout, J.F. (1976). *Fundamentals of geophysical data processing : with applications to petroleum prospecting* , McGraw-Hill (New York).
- Cleveland, R. O., Chambers, J. P., Bass, H. E., Raspet, R., Blackstock, D. T. and Hamilton, M. F. (1996), “Comparison of computer codes for the propagation of sonic boom waveforms through isothermal atmospheres”, *J. Acoust. Soc. Am.*, **100**, 3017-3027.
- Cohen, G. C. (2002), *Higher-order numerical methods for transient wave equations*, Springer (Berlin).
- Collins, M. D. (1989), “Applications and time-domain solution of higher-order parabolic equations in underwater acoustics”, J. Acoust. Soc. Am. **86**, 1097-1102.
- Collino, F. (1996), “Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations”, rapport de recherché INRIA RR-2964 (disponible en ligne <http://www.inria.fr/rrrt/rr-2964.html>)
- Coulouvrat, F. (2000) “Focusing of weak acoustic shock waves at a caustic cusp,” Wave Motion **32**, 233-245.
- Coulouvrat, F., Marchiano, R. (2003), « Nonlinear Fresnel diffraction of weak shock waves », *J. Acoust. Soc. Am.*, **114**, 1749-1757, 2003
- Crow, S.C. (1969). “Distortion of sonic bangs by atmospheric turbulences,” J. Fluid. Mech. **37** (3), 529-563.
- Davy, B.A., Blackstock, D.T.(1971). “Measurements of the refraction and diffraction of a short N wave by a gas-filled soap bubble,” J. Acoust. Soc. Am. **49** (3), 732-737.
- Duck, F. A. (2002), “Nonlinear acoustics in diagnostic ultrasound“, *Ultrasound in Med. & Biol.*, **28** (1), 1-18
- Frøysa, K.-E., Tjøtta, J. N., Berntsen, J. (1993), “Finite amplitude effects in sound beams. Pure tone and pulsed excitation,” in *Advances in nonlinear acoustics*, ed. H. Hobæk, 13th Int. Symp. Nonlinear Acoustics, Bergen (Norway), 28 June-2 July, World Scientific, Singapore,

- Ganjehi, L., Marchiano, R., Coulouvrat, F., Thomas, J.-L. (2008) "Evidence of the wave front folding of sonic boom by a laboratory-scale deterministic experiment of shock waves in a heterogeneous medium," Accepted for publication in *J. Acoust. Soc. Am.* (December 2007).
- Garrick, I.E. (1968). "Atmospheric effects on the sonic boom," Second Conference on Sonic Boom Research, I.R. Schwartz, Ed., NASA SP-180, 3-17.
- Ginsberg, J.H., Hamilton, M.F. (1998), "Computational Methods," in "*Nonlinear Acoustics*", ed. M.F. Hamilton and D.T. Blackstock, Academic Press (San Diego), 309-341.
- Greene, R. R. (1984), "The rational approximation to the acoustic wave equation with bottom interaction", *J. Acoust. Soc. Am.*, 76, 1764-1773
- Guiraud, J.-P. (1965) "Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation," *J. Mécanique*. 4, 215-267.
- Hayes, W.D., Haefeli, R.C., Kulsrud, H.E.(1969). "Sonic boom propagation in a stratified atmosphere with computer program", NASA CR-1299
- Hodgson, J. P. (1973), "Vibrational relaxation effects in weak shock waves in air and the structure of sonic bangs", *J. Fluid Mech.*, 58, 187-196
- Humphrey, V. F. (2000), "Nonlinear propagation in ultrasonic fields : measurements, modelling and harmonic imaging", *Ultrasonics* 38, 267-272
- Jing, Y., Cleveland, R. A. (2007), "Modeling the propagation of nonlinear three-dimensional acoustic beams in inhomogeneous media », ," *J. Acoust. Soc. Am.* 122 (3), 1352-1364.
- Kelly, M, Raspet, R., Bass, H.E. (2000). "Scattering of sonic booms by anisotropic turbulence in the atmosphere," *J. Acoust. Soc. Am.* 107 (6), 3059-3064.
- Khokhlova, V. A., Ponomarev, A. E., Averkiou, M. A., Crum, L. A. (2006), "Nonlinear pulsed ultrasound beams radiated by rectangular focused diagnostic transducers", *Acoust. Phys.*, 52(4), 481-489
- Khokhlova, V. A., Souchon, R., Tavakkoli, J., Sapozhnikov, O. A., Cathignol, D. (2001), "Numerical modeling of finite-amplitude sound beams: Shock formation in the near field of a cw plane piston source", *J. Acoust. Soc. Am.*, 110, 95-108
- Knightly, G. H., Lee, D., Mary, D. F. S. (1987), "A higher-order parabolic wave equation", *J. Acoust. Soc. Am.*, 82, 580-587
- Kulkarni, R. H., Siegmann, W. L., Collins, M. D. (1997), "Nonlinear wide-angle paraxial acoustic propagation in shallow water channels", *J. Acoust. Soc. Am.*, 102, 224-232



Kulkarni, R. H., Siegmann, W. L., Collins, M. D., McDonald, B. E. (1998), "Nonlinear pulse propagation in shallow-water environments with attenuating and dispersive sediments", J. Acoust. Soc. Am., 104, 1356-1362.

Kuznetsov, V.P. (1970), "Equations of nonlinear acoustics", Sov. Phys. Acoust., **16**, 467-470.

Landau, L. (1945), "On shock waves at large distances from the place of their origin", J. Phys. USSR, **9**,496-500.

Landau, L. (1971), *Physique théorique : Mécanique des fluides*, Librairie du Globe.

Lee, Y.S. (1993), Numerical solution of the KZK equation for pulsed finite amplitude sound beams in thermoviscous fluids, PHd, University of Texas.

Lee, Y.S. (1993), *Numerical solution of the KZK equation for pulsed finite amplitude sound beams in thermoviscous fluids*, PHd, University of Texas.

Lee, R.A., Downing, J.M. (1991). "Sonic booms produced by United States Air Force and United States Navy Aircraft: measured data," Armstrong Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, AL-TR-1991-009.

Lee, Y.S., Hamilton, M.F. (1995). "Time-domain modelling of pulsed finite-amplitude sound beams," J. Acoust. Soc. Am. **97** (6), 906-917.

Leontovich, M., Fock, V. (1946). "Solution of the problem of electromagnetic waves along the earth's surface by the method of parabolic equation," J. Phys. **10**, 13-24.

Lingevitch, J. F., Collins, M. D., Dacol, D. K., Drob, D. P., Rogers, J. C., Siegmann, W. L. (2002), "A wide angle and high Mach number parabolic equation", J. Acoust. Soc. Am., 111, 729-734

Lipkens B., Blackstock D.T. (1998). "Model experiment to study sonic boom propagation through turbulence. Part 1:General results," J. Acoust. Soc. Am. **103** (1), 148-158.

Locey, L. L., Sparrow, V. W. (2007), "Perceived loudness fluctuations in low-boom signatures due to atmospheric turbulence," Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Congress on Acoustics (Madrid, 2-7 September 2007), NLA-08-010 (6 pages) (on CD-Rom)

Maglieri, D.J. (1966). "Some effects of airplane operations and the atmosphere on sonic boom signatures," J. Acoust. Soc. Am. **39**, S36-S42.

Maglieri, D. J. and Plotkin, K. J (1995), "Sonic boom", in *Aeroacoustics of Flight Vehicles*, Vol.1, ed. H.H. Hubbard, Acoustical Society of America (Woodbury), 519-561

Marchiano, R., Coulouvrat, F., Grenon, R. (2003). "Numerical simulation of shock wave focusing at fold caustics, with application to sonic boom," J. Acoust. Soc. Am. **114**, 1758-1771.

- Marchiano, R., Thomas, J.-L., Coulouvrat, F. (2003a). “Experimental simulation of supersonic superboom in a water tank : Nonlinear focusing of weak shock waves at a fold caustic,” *Phys. Rev. Lett.*, **91** (18), 184301 (1-4).
- Marchiano, R., Coulouvrat, F., Thomas, J.-L. (2005). “Nonlinear focusing of acoustic shock waves at a caustic cusp,” *J. Acoust. Soc. Am.* **117** (2), 566-577.
- Marchiano, R., Coulouvrat, F., Baskar, S., Thomas, J.-L. (2007). “Experimental evidence of deviation from mirror reflection for acoustical shock waves,” *Phys. Rev. E.* **76** (5).
- Marchiano, R., Thomas, J.-L., Coulouvrat, F., Ganjehi, L. (2008) “A numerical investigation of the properties of nonlinear acoustical vortices through weakly heterogeneous media”, accepted for publication, à paraître, *Phys. Rev. E*.
- Marston, P.L. (1992) “Geometrical and catastrophe optics method in scattering,” in “*High Frequency and Pulse Scattering*”, Physical Acoustics, edited by Pierce A.D. and Thurston R.N., Vol. XXI, Academic Press (San Diego), 1-234
- McBride, W.E., Bass, H.E., Raspet, R., Gilbert, K.E. (1992). “Scattering of sound by atmospheric turbulence : Predictions in a refractive shadow zone,” *J. Acoust. Soc. Am.* **91** (3), 1336-1340.
- McDonald, B. E., Ambrosiano, J. (1984), “High order upwind flux methods for scalar hyperbolic conservation laws,” *J. Comp. Phys.*, 56, 448-460
- McDonald, B.E., Kuperman, W.A. (1987). “Time-domain formulation for pulse propagation including nonlinear behaviour at a caustic,” *J. Acoust. Soc. Am.* **81**, 1406-1417.
- Meaney, P.M., Cahill, M.D., Haar, G.R.T. (2000). “The intensity dependence of lesion position shift during focused ultrasound surgery,” *J. Acoust. Soc. Am.* **26**, 441-450.
- Morse, Ph. M., Ingard, K.U. (1968) *Theoretical Acoustics*, Princeton University Press (Princeton).
- Myers, M.K., McAninch, G.L. (1987). “Parabolic approximation for sound propagation in the atmosphere,” *AIAA J.* **16**, 836-842.
- National Council for Radiation Protection and Measurements (NCRP) (1992). “Exposure criteria for diagnostic ultrasound. Part 1. Criteria based on thermal mechanisms.
- Ostashev, V. E., Juvé, D., Blanc-Benon, Ph. (1997), “Derivation of a wide-angle parabolic equation for sound waves in inhomogeneous moving media”, *Acustica – Acta Acustica*, 83, 455-460
- Pestorius, F.M., Blackstock, D.T. (1974) “A computer algorithm for predicting propagation of intense acoustic signals of arbitrary waveform,” *J. Acoust. Soc. Am.* **53**, 383 (A).

- Piasek, A.A. (2002). “ Atmospheric turbulence conditions leading to focused and folded sonic boom wave fronts,” *J. Acoust. Soc. Am.* **111**, 520-529.
- Pierce, A.D.(1968). “Spikes on sonic-boom pressure waveforms,” *J. Acoust. Soc. Am.* **44** (4), 1052-1061.
- Pierce, A. D. (1989), *Acoustics, an introduction to its physical principles and applications*, Acoustical Society of America (New York) (1<sup>st</sup> edition in 1981)
- Pierce, A. D. (1990), “Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow”, *J. Acoust. Soc. Am.*, 87, 2292-2299
- Pierce, A.D., Maglieri D.J. (1971). “Effects of atmospheric irregularities on sonic boom propagation,” *J. Acoust. Soc. Am.* **51** (3), 702-721.
- Plotkin, K. J. (2002), “State of the art of sonic boom modelling”, *J. Acoust. Soc. Am.*, **111**, 530-536
- Plotkin, K. J. and Page, J. A. (2002), “Extrapolation of sonic boom signatures from CFD solutions”, AIAA 2002-0922
- Raspet, R. (1997), “Shock waves, blast waves, and sonic booms”, in *Encyclopedia of Acoustics*, ed. M. J. Crocker, Vol. 1, Ch. 31, 337-338, John Wiley & Sons (New York)
- Raspet, R., Bass, H.E., Yao, L., Boulanger, P., McBride, W.E. (1994). “Statistical and numerical study of the relationship between turbulence and sonic boom characteristics,” *J. Acoust. Soc. Am.* **96** (6), 3621-3626.
- Rudenko, O.V., Soluyan, S.I. (1977). *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics*, Studies in Soviet Science, Consultants Bureau, Plenum (New York and London).
- Rylander, R. and Dancer, A. (1978), “Startle reactions to simulated sonic booms: influence of habituation, boom level and background noise”, *J. Sound Vib.*, **61**, 235-243
- Siegmann, W. L., Kriegsmann, G. A., Lee, D. (1985), "A wide-angle three-dimensionnal parabolic wave equation" , *J. Acoust. Soc. Am.* 78, 659-664
- Tanter, M, Thomas, J.-L., Fink, M. (2000). “Time reversal and the inverse filter,” *J. Acoust. Soc. Am.* **108** (1), 223-234.
- Tappert, F.D. (1977). *The parabolic approximation method*, volume 70 of *Lecture Notes in Physics*, Springer (New York)
- Tavakkoli, J., Cathignol, D., Souchon, R., Sapozhnikov, O. A. (1998) “Modeling of pulsed finite-amplitude focused sound beams in time domain,” *J. Acoust. Soc. Am.* **104**, 2061-2072
- Thom, R. (1972). *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*, Benjamin (Reading), 72-107
- Vassalo, C., Collino, F. (1996) “Highly efficient absorbing boundary conditions for the beam propagation method”, *J. Lightwave. Technology*, **14** (6), 1570-1577.

- Thurston R. N. et Shapiro M. J. (1967) "Interpretation of Ultrasonic Experiments on Finite-Amplitude Waves," J. Acoust. Soc. Am., **41** (4), 1112-1125.
- Vefring, E. H., Mjøl̄snes, S. (1990), « A parabolic wave equation based on rational-cubic approximation », J. Acoust. Soc. Am., 87, 619-623.
- Wagner, C., Huttl, Th., Sagaut, P. (2007), *Large-eddy simulation for acoustics*, Cambridge university Press (Cambridge).
- Walkden, F. (1958), "The shock pattern of a wing-body combination, far from the flight path", *Aeron. Q.*, **IX**, 164-194
- Wanner, J.C., Vallée, J., Vivier, C., Théry, C. (1972). "Theoretical and experimental studies of the focus of sonic booms," J. Acoust. Soc. Am. **52** , 13-32.
- Whitham, G. B. (1952), "The flow pattern of a supersonic projectile", *Comm. Pure Appl. Math.*, **5**, 301-348
- Whitham, G.B. (1956). "On the propagation of weak shock waves," J. Fluid. Mech. **1**, 290-318.
- Whitham, G. B. (1974), *Linear and Nonlinear waves*, Wiley/Interscience (New York)
- de Wolf, D.A. (1983). "A random-motion model of fluctuations in a nearly transparent medium," Radio Science **18** (2), 138-142.
- Yang X., Cleveland, R. A. (2005), "Time domain simulation of nonlinear acoustic beams generated by rectangular pistons with application to harmonic imaging", J. Acoust. Soc. Am. **117** (1), 113-123.
- Zabolotskaya, E.A., Khokhlov, R.V. (1969). "Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams," Sov. Phys. Acoust., **15**, 35-40
- Zemp, R. J., Tavakkoli, J., Cobbold, R.S. (2003), "Modeling of nonlinear ultrasound propagation in tissue from array transducers », J. Acoust. Soc. Am. **113**, 139-152
- Zepler, E.E., Harel, F.R.P. (1965). "The loudness of sonic booms and other impulsive sounds," J. Sound. Vib. **2** (3), 249-256.