



**HAL**  
open science

## Analyse modale non-linéaire expérimentale

Claude Gibert

► **To cite this version:**

Claude Gibert. Analyse modale non-linéaire expérimentale. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2001. Français. NNT : . tel-00591587

**HAL Id: tel-00591587**

**<https://theses.hal.science/tel-00591587>**

Submitted on 9 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE CENTRALE DE LYON

*Année 2001*

*N° attribué par la bibliothèque 2001-14*

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

*Discipline : MECANIQUE*

présentée et soutenue publiquement

par

Claude GIBERT

le 4 juillet 2001

**Titre :**

**ANALYSE MODALE NON-LINEAIRE EXPERIMENTALE**

*Directeur de thèse : Pr. Louis Jézéquel*

**JURY**

Mr. R. Dufour, Pr. , INSA de Lyon, Président

Mr. D. Le Houedec, Pr. , Ecole Centrale de Nantes, Rapporteur

Mr. P. Drazétic, Pr. , Université de valenciennes, Rapporteur

Mr. F. Thouverez, Maître de Conférence, Ecole Centrale de Lyon, Examineur

Mr. O. Noël, Ingénieur de la société Messier-Dowty, Examineur

ECOLE CENTRALE DE LYON

*Année 2001*

*N° attribué par la bibliothèque 2001-14*

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

*Discipline : MECANIQUE*

présentée et soutenue publiquement

par

Claude GIBERT

le 4 juillet 2001

**Titre :**

**ANALYSE MODALE NON-LINEAIRE EXPERIMENTALE**

*Directeur de thèse : Pr. Louis Jézéquel*

**JURY**

Mr. R. Dufour, Pr. , INSA de Lyon, Président

Mr. D. Le Houedec, Pr. , Ecole Centrale de Nantes, Rapporteur

Mr. P. Drazétic, Pr. , Université de valenciennes, Rapporteur

Mr. F. Thouverez, Maître de Conférence, Ecole Centrale de Lyon, Examineur

Mr. O. Noël, Ingénieur de la société Messier-Dowty, Examineur

## Remerciements

Ce travail a été réalisé au Département de Mécanique des Solides, Génie Mécanique Génie Civil de l'Ecole Centrale de Lyon, sous la direction du Professeur Louis Jézéquel. Mes premiers remerciements lui seront donc adressés pour m'avoir permis de disposer des moyens de son Laboratoire dans le cadre de cette étude.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Régis Dufour, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. J'exprime ma très grande reconnaissance à Monsieur D. Le Houedec, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes et Monsieur P. Drazétic, Professeur à l'Université de Valenciennes, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie très vivement Monsieur O. Noël, Ingénieur de la société Messier-Dowty, pour l'honneur qu'il m'a fait en participant au jury et la confiance qu'il nous a témoignée lors de notre collaboration.

Je remercie les techniciens du laboratoire pour l'aide qu'ils m'ont apporté dans la réalisation des bancs expérimentaux ainsi que l'ensemble du personnel du laboratoire dont notamment Fabrice Thouverez, Noël Chatelus et Jean Magnus, Jean Bernard Gross, Alain Le Bot, Olivier Dessombz pour leur soutien ainsi que les nombreux autres doctorants qui seront passés par le laboratoire au cours de ces dernières années, tout particulièrement, Fabiano Assis Rodrigues pour son aide et sa gentillesse.

Je remercie aussi Monsieur Fernandez, chauffagiste, carreleur et amateur de calcul tensoriel pour m'avoir fait partager son enthousiasme pour les problèmes de la physique (et en particulier les miens!) au cours de discussions sous une certaine tonnelle à Pouzol (87)...

Enfin, je remercie amis et famille pour leurs encouragements renouvelés et tout particulièrement Anne-Françoise, Théo, Lucie pour leur patience ...

**RESUME :**

L'introduction de l'analyse modale dans le cadre de structures mécaniques non-linéaires semble paradoxale, car le domaine d'application des nombreuses méthodes regroupées sous ce terme, est limité aux systèmes qui peuvent être considérés comme linéaires. Cependant, l'obtention de bases modales par ces méthodes très répandues, est d'une très grande utilité dans le domaine de l'ingénierie à plusieurs égards : caractérisation dynamique des structures, prédiction des réponses, sous-structuration, recalage de modèles...

La notion de mode de vibration a été étendue, dans les années 1960, à une certaine classe de systèmes non-linéaires. Les modes des systèmes linéaires sont alors un cas particulier des modes normaux non-linéaires définis comme des mouvements possédant des propriétés particulières et dont l'existence a été démontrée. Depuis, de nombreux développements, le plus souvent analytiques, ont été effectués dans l'étude des systèmes dynamiques à l'aide des modes normaux non-linéaires.

Les structures réelles exhibent souvent des comportements non-linéaires et peuvent donc poser certains problèmes de modélisation et d'analyse. Il nous a semblé opportun de rechercher l'intérêt, les possibilités d'application et l'efficacité de méthodes basées sur des notions modales étendues au cas non-linéaire dans un contexte expérimental et industriel.

Dans le cadre de ce travail, des méthodes de calcul des modes non-linéaires sont évaluées sur des modèles numériques de structures. Des techniques d'identification des modes non-linéaires dans le domaine fréquentiel sont proposées, appliquées à des cas expérimentaux puis industriels, sur lesquels auront été effectués des tests vibratoires adéquats.

Nous montrons quelques possibilités dans le domaine de l'analyse expérimentale des structures vibrantes basée sur des notions modales non-linéaires.

**TITRE et RESUME en anglais :**  
**Expérimental non-linear modal analysis**

Introducing modal analysis in the context of non-linear mechanical structures may appear like a paradox. That because the several methods which can be put behind this term apply only in the case where the system under study can be considered like a linear one. Gathering "modal bases" by means of these widely spread methods is very useful in the domain of engineering for many reasons : dynamic characterisation of structures, response prediction, sub-structuring, model updating ...

In the meantime, the extension of the vibration mode concept, developed in the 60's, to a particular class of non-linear systems is less known. Linear systems' modes appear then as a particular case of non-linear modes which are defined as motions with some particularities and whose existence have been verified. More recently, several advancement, mostly analytical, have been carried out in the study of dynamical systems using non-linear normal modes.

Actual structures often exhibit some non-linear behavior that may lead to potential difficulties in modeling and analysis. So, it seems important, to look for the usefulness, the applicability and the efficiency of methods based on extended modal concepts in an experimental and industrial context.

In this work, some non-linear normal mode computing technics are shown and applied to experimental, and afterwards to industrial cases, after some appropriate vibratory tests.

We show some possibilities and some limits in the experimental analysis of vibrating structures using non-linear modal concepts.

**DISCIPLINE :**

Mécanique

**MOTS-CLES :**

MODES NON-LINEAIRES, IDENTIFICATION, EXPERIMENTAL, ANALYSE MODALE.

**INTITULE ET ADRESSE DU LABORATOIRE :**

Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes (LTDS)

Ecole Centrale de Lyon

36 avenue Guy de Collongue

69134 Ecully Cedex

FRANCE

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>   | <b>8</b>  |
| <b>1 Les modes normaux de Rosenberg</b>   | <b>11</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .  | 11        |
| 1.2 Systèmes et mouvements admissibles . . . . .                                | 11        |
| 1.2.1 Systèmes admissibles . . . . .  | 11        |
| 1.2.2 Mouvements admissibles . . . . .  | 12        |
| 1.2.3 Equations des trajectoires admissibles . . . . .                          | 13        |
| 1.3 Modes normaux des systèmes admissibles . . . . .                            | 14        |
| 1.3.1 Définition des modes normaux . . . . .                                    | 14        |
| 1.3.2 Caractérisation géométrique des modes normaux . . . . .                   | 15        |
| 1.3.3 Existence et obtention des modes non linéaires . . . . .                  | 16        |
| 1.3.4 Equations modales . . . . .   | 19        |
| 1.3.5 Bifurcation et surabondance des modes normaux . . . . .                   | 20        |
| 1.3.6 Stabilité des modes de Rosenberg . . . . .                                | 22        |
| 1.4 Réponse en oscillations forcées . . . . .                                   | 22        |
| 1.4.1 Vibrations à l'unisson du système forcé . . . . .                         | 22        |
| 1.4.2 Résonances au voisinage des modes . . . . .                               | 24        |
| 1.5 Conclusion . . . . .  | 27        |
| <b>2 Approximation des modes non-linéaires</b>                                  | <b>29</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .  | 29        |
| 2.2 Oscillations en mode normal . . . . .                                       | 30        |
| 2.2.1 Forme de l'approximation . . . . .  | 30        |
| 2.2.2 Expression des modes non-linéaires dans la base modale linéaire . . . . . | 31        |
| 2.2.3 Normalisation des modes . . . . .   | 33        |
| 2.3 Calcul des modes normaux non-linéaires . . . . .                            | 34        |
| 2.3.1 Problème aux valeurs propres non-linéaire . . . . .                       | 34        |
| 2.3.2 Non-linéarité unique . . . . .  | 36        |
| 2.3.3 Non-linéarités multiples . . . . .  | 36        |
| 2.3.4 Calcul des modes à l'aide de réponses forcées . . . . .                   | 38        |
| 2.4 Exemples, calcul des modes . . . . .  | 38        |
| 2.4.1 Système discret comportant une seule non-linéarité . . . . .              | 38        |
| 2.4.2 Système comportant plusieurs non-linéarités . . . . .                     | 42        |
| 2.4.3 Systèmes continus . . . . .   | 43        |
| 2.5 Réponses forcées . . . . .  | 49        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.5.1    | Introduction . . . . .   | 49        |
| 2.5.2    | Couplage des coordonnées normales linéaires . . . . .                                | 49        |
| 2.5.3    | Méthode du mode non-linéaire isolé . . . . .   | 52        |
| 2.5.4    | Prise en compte de la dissipation . . . . .  | 53        |
| 2.5.5    | Expression à l'aide des modes non-linéaires . . . . .                                | 54        |
| 2.5.6    | Calcul des réponses . . . . .  | 55        |
| 2.6      | Exemples, calcul des réponses forcées . . . . .                                      | 58        |
| 2.6.1    | Méthode de sommation des modes isolés . . . . .                                      | 58        |
| 2.6.2    | Calcul à l'aide des modes couplés . . . . .  | 63        |
| 2.7      | Conclusion . . . . .   | 66        |
| <b>3</b> | <b>Systèmes dissipatifs faiblement non-linéaires</b>                                 | <b>67</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .   | 67        |
| 3.2      | Modes et variétés invariantes réelles . . . . .                                      | 67        |
| 3.3      | Obtention des modes . . . . .  | 68        |
| 3.4      | Analyse modale . . . . .   | 69        |
| 3.4.1    | Equations en base modale non-linéaire . . . . .                                      | 71        |
| 3.4.2    | Réduction du système . . . . .   | 71        |
| 3.4.3    | Synthèse modale de la réponse libre . . . . .  | 72        |
| 3.5      | Variétés complexes . . . . .   | 72        |
| 3.6      | Résonances internes . . . . .  | 73        |
| 3.7      | Conclusion . . . . .   | 74        |
| <b>4</b> | <b>Analyse des phénomènes non-linéaires</b>  | <b>76</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .   | 76        |
| 4.2      | Phénomènes non-linéaires . . . . .   | 76        |
| 4.2.1    | Réponse en résonance principale, solutions multiples . . . . .                       | 77        |
| 4.2.2    | Phénomène de saut . . . . .  | 79        |
| 4.2.3    | Stabilité de la réponse . . . . .  | 81        |
| 4.2.4    | Surharmonique . . . . .  | 81        |
| 4.2.5    | Sousharmonique . . . . .   | 82        |
| 4.2.6    | Résonance interne . . . . .  | 83        |
| 4.3      | Méthode de la linéarisation équivalente . . . . .                                    | 86        |
| 4.3.1    | Principe général de la méthode . . . . .   | 86        |
| 4.3.2    | Existence et unicité du système linéaire équivalent . . . . .                        | 88        |
| 4.3.3    | Construction du système linéaire équivalent . . . . .                                | 88        |
| 4.4      | Méthode de Lindstedt-Poincaré . . . . .  | 89        |
| 4.5      | Systèmes algébriques non-linéaires, méthode de continuation . . . . .                | 91        |
| 4.5.1    | L'algorithme de continuation séquentielle . . . . .                                  | 92        |
| 4.5.2    | Algorithme de continuation sur la longueur d'arc . . . . .                           | 92        |
| 4.6      | Conclusion . . . . .   | 95        |
| <b>5</b> | <b>Identification non-linéaire</b>   | <b>96</b> |
| 5.1      | Introduction . . . . .   | 96        |
| 5.2      | Méthode de la raideur complexe . . . . .   | 96        |
| 5.3      | Méthode d'identification des modes linéaires en présence de non-linéarités . . . . . | 102       |



|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.3.1    | Introduction . . . . .                                       | 102        |
| 5.3.2    | Cas d'un mode isolé . . . . .                                | 102        |
| 5.3.3    | Cas de plusieurs modes de fréquences voisines . . . . .      | 103        |
| 5.4      | Méthode de continuation en fréquence . . . . .               | 106        |
| 5.4.1    | Introduction . . . . .                                       | 106        |
| 5.4.2    | Expression de la souplesse dynamique . . . . .               | 107        |
| 5.4.3    | Extraction des paramètres modaux . . . . .                   | 108        |
| 5.4.4    | Lissage des paramètres . . . . .                             | 109        |
| 5.4.5    | Commentaires . . . . .                                       | 110        |
| 5.5      | Lissage fréquentiel . . . . .                                | 111        |
| 5.5.1    | Introduction . . . . .                                       | 111        |
| 5.5.2    | Synthèse des réponses modales non-linéaires . . . . .        | 111        |
| 5.5.3    | Fonction d'écart . . . . .                                   | 116        |
| 5.5.4    | Influence des paramètres . . . . .                           | 122        |
| 5.5.5    | Estimation de la lois amplitude-fréquence . . . . .          | 123        |
| 5.5.6    | Identification des formes modales . . . . .                  | 125        |
| 5.6      | Analyse d'une poutre avec une liaison non-linéaire . . . . . | 128        |
| 5.6.1    | Introduction . . . . .                                       | 128        |
| 5.6.2    | Description du dispositif expérimental . . . . .             | 128        |
| 5.6.3    | Résultats d'essais . . . . .                                 | 130        |
| 5.6.4    | Lissage des réponses . . . . .                               | 131        |
| 5.6.5    | Comparaison du modèle et des essais . . . . .                | 132        |
| 5.7      | Conclusion . . . . .   | 137        |
| <b>6</b> | <b>Application industrielle</b>                              | <b>138</b> |
| 6.1      | Introduction . . . . .                                       | 138        |
| 6.2      | Description des tests expérimentaux . . . . .                | 140        |
| 6.2.1    | Conditions d'essai . . . . .                                 | 140        |
| 6.2.2    | Instrumentation . . . . .                                    | 140        |
| 6.2.3    | Excitation de la structure . . . . .                         | 142        |
| 6.3      | Résultats expérimentaux . . . . .                            | 144        |
| 6.3.1    | Nature des tests effectués . . . . .                         | 144        |
| 6.3.2    | Présentation des résultats . . . . .                         | 145        |
| 6.4      | Lissage des réponses expérimentales . . . . .                | 147        |
| 6.4.1    | Lissage des mesures . . . . .                                | 148        |
| 6.4.2    | Pulsations propres et amortissement non-linéaires . . . . .  | 152        |
| 6.5      | Tests de prédiction . . . . .                                | 153        |
| 6.6      | Conclusion . . . . .   | 155        |
|          | <b>Conclusion générale</b>                                   | <b>156</b> |

# Introduction

Dans le cadre de l'étude du comportement dynamique de systèmes mécaniques, il est souvent nécessaire de recourir à une approche expérimentale. L'analyse modale est couramment utilisée dans divers secteurs de l'industrie et grâce aux nombreuses méthodes d'identification modale ainsi qu'aux moyens d'essais, de traitement du signal et de calcul actuels, ce type d'approche permet de caractériser avec précision une structure par ses fréquences propres, ses déformées et ses amortissements modaux [85]. La connaissance des propriétés dissipatives des structures justifie à elle seule l'approche expérimentale.

Le modèle modal obtenu expérimentalement permet dans certains cas de contourner les difficultés liées à la modélisation et de fournir un modèle de la structure relativement "compact". Les bases modales expérimentales peuvent servir de plus à alimenter le calcul de prédiction de réponses, les méthodes de sous-structuration [35], de localisation de défauts, de recalage de modèles,...

Les méthodes d'identification modale les plus répandues s'appliquent à des structures pouvant être considérées comme linéaires. Cependant, certaines structures réelles manifestent un comportement non-linéaire marqué dans leur plage de fonctionnement. Afin d'étudier ces systèmes, des non-linéarités sont introduites par exemple dans les modèles de type éléments finis, qui sont utilisés abondamment dans l'industrie. Les paramètres associés peuvent être en nombre assez élevé afin que le modèle puisse restituer les comportements conservatifs et dissipatifs dans une plage de fonctionnement suffisamment large pour l'application. Il existe un nombre important d'études de structures représentées par des sous-ensembles linéaires connectés par des joints non-linéaires auxquelles peuvent s'appliquer différentes méthodes [44].

Le concept de mode de vibration étendu au cas non-linéaire permettrait une approche alternative par une représentation globale de ce type de structure et serait particulièrement adapté au cas de non-linéarités réparties continûment dans la structure.

Or, les notions modales, propres aux systèmes linéaires, ont été généralisées aux systèmes non-linéaires. Plusieurs travaux, dont ceux de Rosenberg dans les années 1960, ont permis de montrer l'existence de solutions périodiques particulières pour des systèmes discrets conservatifs faiblement ou même fortement non-linéaires. La caractérisation géométrique de ces solutions, appliquée aux systèmes linéaires conduit aux modes définis de manière classique. Les modes non-linéaires en sont ainsi une généralisation. Ces notions ont été ensuite étendues aux systèmes continus, puis aux systèmes dissipatifs en faisant appel à différentes méthodes analytiques (perturbations, formes normales [38],...). Bien que l'on ai pu dégager la notion de mode pour les systèmes non-linéaires, les principes de superposition et d'orthogonalité qui font la puissance de l'analyse modale linéaire, ne sont en général pas valables dans le cas non-linéaire. Cependant, dans le cadre de l'étude des réponses de systèmes soumis à des excitations forcées, il a été montré

que les résonances principales s'effectuaient au voisinage des modes non-linéaires, en analogie avec le cas linéaire. Ainsi, il est possible de se ramener, dans ces conditions, à un problème où les déplacements de la structure vibrante sont décrites par une seule coordonnée.

Dans le cadre du calcul appliqué, les techniques analytiques citées plus haut, mises en œuvre pour déterminer les modes normaux non-linéaires [51] peuvent être relayées par des méthodes exploitables numériquement comme la méthode de Ritz-Galerkin [82], [67]. Le mode non-linéaire est alors vu comme un mode classique dont la pulsation et la forme sont des fonctions de l'amplitude des oscillations approchées par une fonction harmonique.

Ces notions, particulièrement efficaces dans le domaine du calcul, peuvent servir de base au développement de modèles de réponses fréquentielles non-linéaires, afin d'interpréter les observations expérimentales. Ainsi, il nous semble intéressant d'étudier l'applicabilité des notions citées ci-dessus dans le cadre de structures complexes, afin de dégager les potentialités d'une approche modale non-linéaire, susceptible d'offrir une alternative dans le cadre d'applications pratiques.

Le document présent se décomposera en six chapitres, qui permettront d'exposer quelques idées de base des modes non-linéaires, certaines méthodes de calcul associées, la synthèse numérique de réponses forcées, l'analyse des phénomènes non-linéaires auxquels sont confrontés les expérimentateurs à l'aide des méthodes analytiques, l'exploitation des modes non-linéaires dans le cadre de cas concrets.

**Chapitre 1 :** Le premier chapitre est consacré à la présentation des modes normaux étendus aux systèmes non-linéaires tels qu'ils ont été introduit par Rosenberg dans les années 1960. Les définitions cinématiques, géométriques des modes normaux, ainsi que la classe particulière des systèmes dynamiques discrets conservatifs dits admissibles qui en constitue le cadre sont abordés. Certaines propriétés caractéristiques (géométrie des trajectoires, surabondance, bifurcation, stabilité) des modes normaux non-linéaires sont illustrées ainsi que les méthodes qui permettent leur obtention à partir des équations du mouvement associées au système.

Les oscillations libres, mais aussi les oscillations forcées sont abordées pour exposer le fait important que les résonances des systèmes dynamiques non-linéaires (linéarisables ou fortement non-linéaires), s'effectuent au voisinage des modes normaux.

**Chapitre 2 :** Le deuxième chapitre est consacré à l'approximation des modes normaux, plus particulièrement à l'aide de la méthode de Ritz-Galerkin sur la base des fonctions harmoniques. Les modes normaux sont alors obtenus par le biais de formes modales et de pulsations modales fonctions d'une amplitude. Certaines propriétés de ces modes non-linéaires approchés sont mises en évidence ainsi que des algorithmes permettant de les calculer. Comme il a été proposé par Szemplińska-Stupnika [82], une unique coordonnée normale non-linéaire permet de traduire la prépondérance d'un mode lors d'une résonance du système dynamique et de calculer les réponses des systèmes en résonance principale d'une façon particulièrement efficace (*single non-linear mode method*). La dissipation peut être introduite dans l'approximation des réponses à l'aide des modes normaux ou de la notion de modes complexes non-linéaires. On abordera ensuite la possibilité d'utiliser plusieurs modes pour représenter la réponse au moyen d'une méthode de superposition, bien que ce principe ne soit pas valable en général. Plusieurs exemples numériques

sont proposés pour tester cette démarche ainsi que le calcul des modes.

**Chapitre 3** : Le troisième chapitre viendra compléter les concepts de modes qui précèdent avec des développements théoriques plus récents. Il permettra d'exposer les concepts de mode qui ont permis de généraliser cette notion aux systèmes non-linéaires dissipatifs.

**Chapitre 4** : Le quatrième chapitre nous permettra d'exposer plusieurs techniques d'analyse des systèmes non-linéaires. Celles-ci seront l'occasion de mettre en évidence les différentes phénoménologies susceptibles d'être rencontrées par l'expérimentateur (sauts, surharmonique, sousharmonique, résonance interne). Nous décrirons aussi les différentes méthodes de calcul qui auront été exploitées dans ce travail ou auxquelles il est souvent fait référence.

**Chapitre 5** : Le cinquième chapitre est relatif à l'identification non-linéaire par lissage des courbes de résonance expérimentales. Après une revue de quelques méthodes d'identification de la littérature, nous présentons une technique de lissage des réponses non-linéaires. Un modèle de souplesse non-linéaire, s'appuyant sur les notions exposées au deuxième chapitre et défini à l'aide des paramètres modaux non-linéaires est exposé, ainsi que les techniques mises au point pour le calcul de ces souplesses. Une application expérimentale illustrera les possibilités de l'analyse des réponses forcées à l'aide des modes non-linéaires pour une poutre encastree et possédant une liaison non-linéaire.

**Chapitre 6** : Le sixième chapitre présente une application des techniques de lissage dans le cadre d'une structure industrielle. Une démarche d'analyse modale s'appuyant sur la notion de modes non-linéaires est appliquée dans l'étude de l'atterrisseur d'un avion. Des tests de sinus balayé montrent des phénomènes typiques de saut et de glissement des pics de résonance. L'identification à l'aide d'un modèle de réponse fréquentielle non-linéaire, donne l'évolution des fréquences propres et facteurs d'amortissement en fonction de l'amplitude pour les premiers modes du système. La synthèse des réponses permet de rendre compte des observations expérimentales à l'aide d'un nombre réduit de paramètres.

# Chapitre 1

## Les modes normaux de Rosenberg

### 1.1 Introduction

La notion de mode normal pour les systèmes non linéaires a été introduite par Rosenberg dans les années 1960 pour une classe de systèmes dynamiques discrets conservatifs dits **admissibles** [60], [61], [62], [63], [65]. Les trajectoires particulières des oscillations sur un mode sont caractérisées par certaines propriétés correspondant à des vibrations dites "à l'unisson". Ils apparaissent comme une généralisation des modes normaux des systèmes linéaires et existent dans le cadre de systèmes faiblement ou fortement non-linéaires (dans le sens de linéarisable ou non). D'une façon analogue au cas linéaire, bien qu'ici le principe de superposition ne soit plus valable, la notion de mode normal a un intérêt particulier dans l'étude des réponses forcées car il existe un lien étroit entre les propriétés des modes normaux (nombre, forme, loi de dépendance de la période vis à vis de l'amplitude) et la topologie des courbes de réponse forcée du système.

### 1.2 Systèmes et mouvements admissibles

#### 1.2.1 Systèmes admissibles

Les systèmes considérés auront des équations du mouvement de la forme :

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial U}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_n) + f_i(t), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.1)$$

où  $u = (u_1, \dots, u_n)$  est le vecteur des déplacements,  $U(u)$  la fonction potentielle, et  $f_i(t)$  les composantes du vecteur des forces externes. La forme (1.1) peut être obtenue après un éventuel changement de variable linéaire diagonalisant les termes d'inertie pour un système mécanique discret ramenant ainsi les masses à l'unité. Les conditions requises sur  $U(u)$ , pour que ce système appartienne à la classe des systèmes dits admissibles sont :

1. La régularité :

$U(u) = U(u_1, \dots, u_n)$  est supposée dérivable et ses dérivées partielles au moins dérivables par morceau.

2. La définie-négativité de la fonction potentielle :

$$U(0, \dots, 0) = 0,$$

et,

$$(u_1, \dots, u_n) \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow U(u_1, \dots, u_n) < 0$$

3. L'annulation des forces internes à l'origine :

$$(u_i = 0, \quad \forall \quad i = 1, \dots, n) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_n) = 0$$

4. La symétrie du potentiel par rapport à l'origine :

$$\forall u \in R^n, U(u) = U(-u)$$

Des forces élastiques possédant des ruptures de pente en certains points isolés ne sont pas exclues. Le système possédera un unique point d'équilibre (que l'on peut ramener à l'origine sans perte de généralité) et les forces de rappel élastique sont des fonctions impaires.

De plus, pour qu'un système non-autonome soit admissible, les forces d'excitation doivent vérifier :

1. La régularité :

Les fonctions  $f_i(t)$  sont continues par morceau et bornées sur  $[0, +\infty[$

2. La périodicité :

$$\exists T / f_i(t) = f_i(t + T), \forall i \in (1, \dots, n), \forall t \in [0, +\infty[$$

3. L'annulation en moyenne sur une période :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

### 1.2.2 Mouvements admissibles

Les mouvements admissibles sont aussi appelés "vibrations à l'unisson" et sont définis par les propriétés suivantes :

1. Périodicité :

$$\exists T / u(t) = u(t + T), \quad \forall t \in [0, +\infty[$$

2. Unicité du passage au point d'équilibre au cours d'une demi-période :

$$\forall t, \exists ! t_0 \in [t, t + \frac{T}{2}[ / u(t_0) = 0 \quad (1.2)$$

3. Unicité de l'instant de l'annulation de toutes les vitesses au cours d'une demi-période :

$$\forall t, \exists ! t_1 \neq t_0, \in [t, t + \frac{T}{2}[ / \dot{u}(t_1) = 0 \quad (1.3)$$

4. Description des trajectoires à partir d'une seule coordonnée arbitraire :

$$\forall i, r \in [1, \dots, n], \quad \exists \quad c_i(u) : R \rightarrow R / u_i(t) = c_i(u_r(t)), \quad \forall t \in [0 + \infty[ \quad (1.4)$$

Lors d'un mouvement admissible, toutes les coordonnées du système atteignent leurs maxima en même temps et passent en même temps par le point d'équilibre (Figure 1.1). La propriété

correspondant à l'équation (1.4) est aussi appelée propriété de **stricte monotonie** des trajectoires car elle est vérifiée lorsque toutes les fonctions  $u_i(t)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), sont strictement monotones par morceaux.

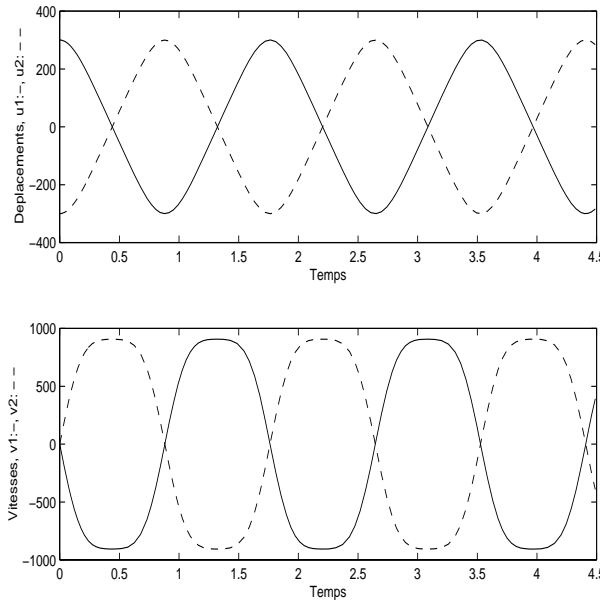


FIG. 1.1 – Mouvements admissibles d'un système non-linéaire autonome à deux degrés de liberté; ' - ' :  $u_1, \dot{u}_1$ , ' - - ' :  $u_2, \dot{u}_2$ .

### 1.2.3 Equations des trajectoires admissibles

Dans le cas général du système non-autonome d'équation (1.1), et compte tenu des propriétés énoncées en 1.2.2, il est possible de caractériser les trajectoires admissibles en tant que solutions d'une équation différentielle.

En choisissant d'écrire les coordonnées  $u_j$ , ( $j = 2, \dots, n$ ), du système (1.1) en fonction de  $u_1$  :

$$u_j \equiv u_j(u_1), \quad (1.5)$$

on aura :

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= u_j' \dot{u}_1, \quad (j = 2, \dots, n), \\ \ddot{u}_j &= u_j'' \dot{u}_1^2 + u_j' \ddot{u}_1, \quad (j = 2, \dots, n), \end{aligned}$$

avec

$$u_j' = \frac{du_j}{du_1}, \quad u_j'' = \frac{d^2u_j}{du_1^2}.$$

De plus, d'après les propriétés que traduisent les équations (1.2) et (1.3), et comme les forces  $f_i(t)$  sont bornées, les déplacements et vitesses présentent les propriétés suffisantes d'inversibilité pour pouvoir écrire la variable temps en fonction des  $u_i$  sur les intervalles  $[u_i, \bar{u}_i]$ , où  $\bar{u}_i = u_i(t_1)$  est le maximum de la coordonnée  $u_i$ . Dans ces conditions, la vitesse pourra s'exprimer en fonction

du déplacement :

$$\begin{aligned} t &= t_i(u_i), \\ \dot{u}_i &= \dot{u}_i(u_i). \end{aligned} \quad (1.6)$$

En utilisant (1.6), les équations (1.1) s'écrivent alors :

$$\dot{u}_i \frac{d\dot{u}_i}{du_i} = \frac{\partial U}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_n) + f_i(t), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.7)$$

et par intégration de (1.7) sur un intervalle  $[u_i, \bar{u}_i]$  et sommation sur les indices  $i$  on obtient l'équation de conservation

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{u}_i^2 = U(u) + h + \sum_{i=1}^n F_i(u_i, \bar{u}_i), \quad (1.8)$$

où le dernier terme représente le travail des forces externes :

$$F_i(u_i, \bar{u}_i) = \int_{\bar{u}_i}^{u_i} f_i(t(x_i)) dx_i.$$

La constante d'intégration  $h$  correspond à l'énergie du système. En multipliant (1.8) par  $u_j''$  et en utilisant (1.1) et (1.5), il est possible d'éliminer la variable temps et d'obtenir les équations des trajectoires :

$$\begin{aligned} &2[U(u) + h + \sum_{i=1}^n F_i(u_i, \bar{u}_i)]u_j'' + \\ &\left( \sum_{k=1}^n u_k'^2 \right) \left( u_j' \left[ \frac{\partial U}{\partial u_1} + f_1(t(u_1)) \right] - \left[ \frac{\partial U}{\partial u_j} + f_j(t(u_j)) \right] \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

pour  $(j = 2, \dots, n)$ .

Il s'agit d'un système de  $n - 1$  équations différentielles non-linéaires (même si le système dynamique correspondant est linéaire). Les solutions de ce système déterminent les trajectoires admissibles  $u_j(u_1)$  du système d'équation (1.1).

## 1.3 Modes normaux des systèmes admissibles

### 1.3.1 Définition des modes normaux

Les équations du mouvement pour un système autonome se réduisent à :

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial U}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_n), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.10)$$

Rosenberg [63], définit les modes normaux (non-linéaires) du système admissible autonome d'équation (1.10) comme les vibrations à l'unisson de ce système. Les trajectoires dans l'espace des configurations  $(u_1, \dots, u_n)$  correspondant à ces vibrations sont appelées les lignes modales.

D'après les propriétés de la fonction potentielle  $U(u)$ , les lignes modales sont symétriques par rapport à l'origine et l'on distingue deux types de trajectoires :



Les trajectoires rectilignes qui vérifient

$$\frac{u_i(t)}{u_j(t)} \equiv c_{ij} = \text{const.}, \quad (1.11)$$

pour lesquelles on parlera alors de modes **similaires**, et celles qui seront courbes, auxquelles correspondront les modes dits **non-similaires** (Figure 1.2). (les modes d'un système linéaire sont des cas particuliers de modes similaires).

### 1.3.2 Caractérisation géométrique des modes normaux

Les trajectoires  $u_j(u_1)$  du système dynamique d'équation (1.10) sont solutions d'un système d'équations différentielles :

$$2[U(u) + h]u_j'' + \left(1 + \sum_{k=2}^n u_k'^2\right) \left(u_j' \frac{\partial U}{\partial u_1} - \frac{\partial U}{\partial u_j}\right) = 0, \quad (j = 2, \dots, n), \quad (1.12)$$

où  $h$  est l'énergie totale du système autonome et les  $u_j$  fonctions de la variable  $u_1$ . La surface équipotentielle maximale du système autonome est la surface  $\mathcal{L}_a$  définie par :

$$\mathcal{L}_a : U(u_1, \dots, u_n) + h = 0. \quad (1.13)$$

A partir des propriétés de la fonction  $U(u)$ , on montre que cette surface est régulière et délimite un volume dans l'espace qui contient l'origine ainsi que toutes les trajectoires du système.

Les vitesses s'annulent simultanément sur la surface  $\mathcal{L}_a(h)$  et pour que les solutions de l'équation (1.12) correspondent à un mode normal non-linéaire il faut associer à (1.12) les conditions suivantes :

1. Passage à l'origine :

$$u_j(0) = 0, \quad (j = 2, \dots, n) \quad (1.14)$$

2. Condition d'orthogonalité à l'équipotentielle :

$$u_j'(\bar{u}_1) \frac{\partial U}{\partial u_1}(u(\bar{u}_1)) - \frac{\partial U}{\partial u_j}(u(\bar{u}_1)) = 0, \quad (j = 2, \dots, n), \quad \text{avec } U(u(\bar{u}_1)) + h = 0 \quad (1.15)$$

*nota* : Le maximum de la coordonnée  $u_1$ , noté  $\bar{u}_1$ , n'est pas connu *a priori* lorsque le niveau d'énergie  $h$  est fixé.

Les propriétés géométriques des trajectoires des modes normaux sont illustrées par la figure 1.2.

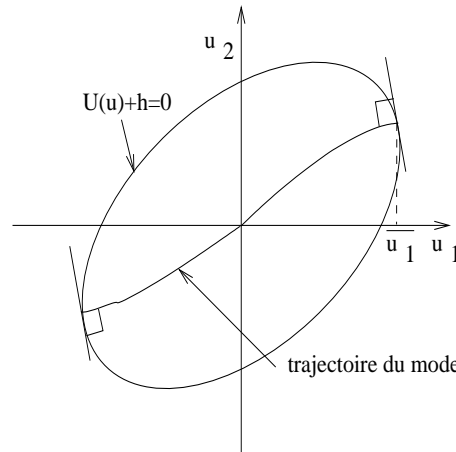


FIG. 1.2 – Mode non-linéaire (non-similaire) d'un système à 2 degrés de liberté.

### 1.3.3 Existence et obtention des modes non linéaires

#### Cas des modes similaires

Les modes similaires correspondent à des lignes modales droites dans l'espace des configurations et pourront s'écrire

$$u_i(u_1) = c_i u_1, \quad (i = 2, \dots, n), \quad (1.16)$$

où les  $c_i$  sont des constantes. Ainsi, compte tenu de l'équation (1.16), nous avons :

$$u_i'' \equiv 0, \quad (i = 2, \dots, n),$$

ce qui entraîne une simplification de l'équation des trajectoires (1.12) qui se réduit alors à la simple condition d'orthogonalité (1.15), et ceci indépendamment du niveau d'énergie  $h$ . Ainsi, nous avons la propriété suivante :

**Propriété 1** *Les lignes modales d'un mode similaire intersectent orthogonalement toutes les surfaces équipotentielles  $\mathcal{L}_a(h)$  pour  $0 < h < +\infty$ .*

Cette propriété est utilisée afin de rechercher les modes similaires qui sont d'abord exprimés en coordonnées sphériques  $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ , dans l'espace de dimension  $n$ . La géométrie particulière des trajectoires sera décrite en coordonnées  $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$  par

$$u_i = r g_i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.17)$$

où les fonctions  $g_i$  sont composées des fonctions trigonométriques dont les arguments sont des angles  $\theta_i$  qui définissent les directions des lignes modales dans l'espace (*e.g.* en dimension  $n = 3$ , on a simplement  $g_1(\theta_1, \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2$ ,  $g_2(\theta_1, \theta_2) = \cos \theta_2 \sin \theta_1$  et  $g_3(\theta_1, \theta_2) = \sin \theta_2$ )

L'équation de la surface  $\mathcal{L}_a$  en coordonnées sphériques est :

$$\hat{U}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) + h = 0. \quad (1.18)$$

Ainsi [63], une condition nécessaire et suffisante d'existence d'au moins un mode similaire pour le système dynamique d'équation (1.10), est que les dérivées partielles de  $\hat{U}$  soient de la forme :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \theta_i}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \Theta_i(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \Gamma_i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (1.19)$$

où  $\Theta_i$  et  $\Gamma_i$  sont des fonctions telles que, le système d'équations transcendantes :

$$\Gamma_i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (1.20)$$

possède **au moins une solution réelle**.

Cette condition nécessaire et suffisante, traduit l'orthogonalité à toutes les équipotentielles. Elle fournit un moyen pratique pour le calcul des modes similaires au moyen de la résolution du système d'équations (1.20) pour l'obtention des solutions des lignes modales dans l'espace des configurations.

### Systèmes possédant des modes similaires

Les modes similaires ont été recherchés en premier lieu du fait de la simplification qu'ils introduisent, et il peut être intéressant d'avoir présent à l'esprit quelques classes de systèmes qui y correspondent lorsqu'on cherche des exemples particuliers. De plus, les systèmes à modes similaires sont utilisés dans l'investigation de modes non-similaires.

Les trajectoires rectilignes peuvent être rencontrées dans le cadre de plusieurs types de systèmes :

1. Systèmes homogènes [60],[61] :

Les systèmes homogènes constituent une classe assez générale et pour un système homogène de degré  $k$ , où  $k$  est un réel tel que  $0 < k < +\infty$  la fonction potentielle sera homogène de degré  $k+1$  :

$$U(\lambda u) = \lambda^{k+1} U(u), \quad \forall \lambda \in R \quad (1.21)$$

Les modes seront calculés par résolution du système (1.20). Les liaisons du système sont toutes représentées par un monôme de même degré  $k$ .

2. Systèmes uniformes [43] :

Les systèmes uniformes sont caractérisés par une fonction potentielle de la forme :

$$U(u) = - \sum_{r=1,3,\dots}^m a_r \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (u_i - u_j)^{r+1}.$$

où  $n$  est le nombre de degrés de liberté du système. Clairement, toutes les liaisons sont identiques dans ce cas, (ainsi que toutes les masses que nous avons supposées ramenées à l'unité).

Mawhin [43], montre que les systèmes uniformes ont la particularité de posséder des modes similaires ayant des directions identiques aux modes du système linéaire associé obtenus pour la valeur  $m = 1$ . Ils seront donc calculés de façon standard par résolution d'un problème aux valeurs propres (quelque soit le degré  $m$  de la non-linéarité).

## 3. Systèmes chaînés [30] :

Contrairement au cas précédant, dans un système chaîné, ne sont reliées par des ressorts, que les masses "voisines". Les masses aux extrémités sont liées "au massif" et les liaisons sont polynomiales et linéarisables.

Le potentiel sera donc de la forme :

$$U(u) = - \sum_{r=1,3,\dots}^m \left( a_{1r} u_1^{r+1} + a_{nr} u_n^{r+1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ir} (u_i - u_{i+1})^{r+1} \right), \quad (1.22)$$

On montre, que si le système (1.22) possède des modes similaires, alors, leurs directions sont aussi celles des modes du système linéarisé. De plus, Haughton [30] a établi que si les masses et les coefficients de (1.22) sont toutes égales, alors, il existe effectivement des modes similaires pour ce système.

## 4. Systèmes symétriques [43],[64] :

Un système discret à  $n$  degrés de libertés est dit symétrique si sa fonction potentielle est de la forme :

$$U(u) = - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{r=1,3,\dots}^{m_0} a_{0r} u_i^{r+1} + \sum_{j=i+1}^n \sum_{r=1,3,\dots}^{m_1} a_{ijr} (u_i - u_j)^{r+1} \right) \quad (1.23)$$

Physiquement, toutes les masses sont liées au "massif" par le biais de raideurs identiques linéarisables, les liaisons de couplages sont aussi polynomiales et toutes de même degrés et linéarisables. Pour  $n = 2$ , le système présente physiquement une symétrie par rapport à son "centre". Dans ce cas également, il a été montré qu'il existe des modes similaires tangents aux modes linéaires.

**Cas des modes non similaires [65]**

Dans un cas général, les lignes modales des modes normaux sont courbes et le problème défini par l'équation des trajectoires (1.12), à laquelle sont adjointes les conditions (1.14) et (1.15) ne peut pas être traité de façon exacte. Dans [65], Rosenberg étudie les modes non-similaires à l'aide d'une méthode de perturbation à partir des modes similaires connus d'un autre système appelé **système parent** associé au problème. La solution est cherchée sur un intervalle ouvert strictement contenu dans l'intervalle  $[0, \bar{u}_1]$ , car l'équation (1.12) est singulière sur l'équipotentielle maximale  $\mathcal{L}_a$ . Cependant, en utilisant la règle de l'Hospital [65], et le fait que les forces dérivant du potentiel  $U$  ne s'annulent pas sur  $\mathcal{L}_a$ , on montre que les  $u_j''$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), sont bornés sur  $\mathcal{L}_a$  et que la solution peut alors être prolongée sur l'intervalle  $[0, \bar{u}_i]$  tout entier. Le potentiel "perturbé"  $U$  du système dont on recherche les modes non similaires devra pouvoir s'exprimer selon :

$$U = U_o + \epsilon W \quad |\epsilon| \ll |U_o|, \quad (1.24)$$

où  $U_o$  et  $W$  sont respectivement le potentiel du système parent et le potentiel de perturbation.

Si le système parent possède un mode (similaire)  $u_i^*(u_1) = c_i u_1$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), avec  $c_1 = 1$ , on montre [65], que le système perturbé possède un mode (non-similaire) dans un  $\epsilon$ -voisinage du mode similaire  $u_i^*(u_1)$ , et sa trajectoire est obtenue par les perturbations successives en  $\epsilon$  selon l'équation :

$$u_i(u_1) = c_i u_1 + \epsilon \xi_{1i}(u_1) + \epsilon^2 \xi_{2i}(u_1) + \dots \quad (1.25)$$

où la fonction de perturbation  $\xi_{1i}$  est solution d'une équation différentielle du second ordre, non-homogène obtenue par substitution de l'expression (1.25) dans (1.12) et regroupement des termes de même puissance par rapport au paramètre de perturbation  $\epsilon$  :

$$2(U_o^* + h) \frac{d^2 \xi_{1i}}{du_1^2} + \left[ \frac{\partial U_o^*}{\partial u_1} \sum_{k=1}^n c_k^2 \right] \frac{d \xi_{1i}}{du_1} + \left[ \sum_{j=1}^n \left( c_i \frac{\partial^2 U_o^*}{\partial u_1 \partial u_j} - \frac{\partial^2 U_o^*}{\partial u_i \partial u_j} \right) \sum_{k=1}^n c_k^2 \right] \xi_{1i} = \left( \frac{\partial W^*}{\partial u_i} - c_i \frac{\partial W^*}{\partial u_1} \right) \sum_{k=1}^n c_k^2, \quad (1.26)$$

$(i = 2, \dots, n),$

avec,

$$U_o^*(u_1) = U_o(u^*(u_1)),$$

et,

$$W^*(u_1) = W(u^*(u_1)).$$

Les termes  $\xi_{ki}$ , ( $k = 2, 3, \dots$ ), sont ensuite obtenus successivement à partir de  $\xi_{k1}$  et le problème est donc la détermination de la perturbation de premier ordre  $\xi_{1i}$ .

Les équations de perturbations sont parfois **intégrables** comme dans le cas particulier de couplages faibles par les forces non-linéaires, ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial u_i \partial u_j}(u_1, \dots, u_n^*(u_1)) = \mathcal{O}(\epsilon),$$

Dans ce type de conditions, on obtient alors une simplification du problème en  $\xi_{1i}$  dans les dérivées partielles mixtes de l'équation (1.26) et après intégration et détermination des deux constantes, on obtient la solution pour un niveau d'énergie  $h$  sous forme d'une quadrature :

$$\xi_{1i} = -\frac{1}{2} \sqrt{G(u_1)} \int_0^{u_1} \frac{\Omega_i(x)}{G(x)^{\frac{3}{2}}} dx, \quad (1.27)$$

avec,

$$G(u_1) = U_o(u^*(u_1)) + h, \quad (1.28)$$

et,

$$\Omega_i(x) = \sum_{k=1}^n c_k^2 \int_0^x \left[ c_i \frac{\partial W^*}{\partial u_1}(u_1) - \frac{\partial W^*}{\partial u_i}(u_1) \right] du_1, \quad (i = 2, \dots, n). \quad (1.29)$$

### 1.3.4 Equations modales

Les équations du mouvement du système (1.10) sont réduites lorsque le système vibre selon l'un de ces modes normaux. L'intégration du système est ramenée à celle d'une équation différentielle non-linéaire du second ordre à une seule variable après substitution de la solution de l'équation de la trajectoire  $u_i(u_1)$  dans la première équation de (1.10) :

$$\ddot{u}_1 + \frac{\partial U}{\partial u_1}(u_1, u_2(u_1), \dots, u_n(u_1)) = 0. \quad (1.30)$$

La période des oscillations peut alors être calculée à partir de l'équation (1.30) qui est appelée "équation modale". A l'inverse de la procédure de calcul des valeurs et vecteurs propres des systèmes linéaires, les modes sont déterminés en premier. On obtient alors la relation fréquence-amplitude  $\omega(\bar{u}_1) = \frac{2\pi}{T(\bar{u}_1)}$  : En associant les conditions initiales

$$u_1(0) = \bar{u}_1, \quad \dot{u}_1(0) = 0,$$

à l'équation (1.30) et en intégrant sur un intervalle  $[0, \bar{u}_1]$ , la période des oscillations obtenue est

$$T(\bar{u}_1) = 4 \int_{\bar{u}_1}^0 \frac{dx}{\sqrt{2G(x, \bar{u}_1)}},$$

où

$$G(x, \bar{u}_1) = \int_{\bar{u}_1}^x \frac{\partial U}{\partial u_1}(u_1, u_2(u_1), \dots, u_n(u_1)) du_1. \quad (1.31)$$

En général, pour un système non-linéaire, la période dépend de l'amplitude : La propriété dite "d'isochronisme" n'est donc pas vérifiée (ce n'est pas une condition nécessaire de non-linéarité).

### 1.3.5 Bifurcation et surabondance des modes normaux

Une propriété propre aux systèmes non-linéaires est de pouvoir posséder plus de modes que de degrés de libertés. Cette propriété est qualifiée de **surabondance** des modes normaux [61]. Afin d'illustrer ce fait, considérons le système homogène de degrés  $k$  et symétrique à 2 d.d.l. [61] suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \alpha u_1^k + (u_1 - u_2)^k &= 0, \\ \ddot{u}_2 + \alpha u_2^k + (u_2 - u_1)^k &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

D'après les propriétés du sous-paragraphe 1.3.3, ce système possède des modes similaires que l'on peut obtenir en résolvant les conditions (1.20). On peut également chercher les solutions correspondant à des trajectoires rectilignes de la forme

$$u_2(t) = cu_1(t), \quad (1.33)$$

en substituant (1.33) dans les équations (1.32) dont la première est multipliée par  $c$  et en soustrayant celles-ci entre elles, on obtient une condition sur  $c$  ( $k$  impair)

$$(1 - c)(1 + c)[(1 - c)^{k-1} + \alpha c(1 + c^2 + c^4 + \dots + c^{k-3})] = 0, \quad (1.34)$$

qui laisse apparaître que le système (1.32) possède toujours 1 mode en opposition de phase ( $c = -1$ ) et un en phase ( $c = 1$ ). Mais, par exemple, pour  $k = 3$  le système (1.32) peut avoir deux modes supplémentaires en fonction de la valeur du paramètre  $\alpha$ . Les trajectoires de l'ensemble de ces modes sont représentées sur la figure 1.3, ainsi que les équipotentielles correspondant à  $h = 0.2$  et  $h = 1$ . Dans ce cas, le "surnombre" des modes est associé à un phénomène de bifurcation du mode en opposition de phase par rapport au paramètre  $\alpha$  (Figure 1.4). La bifurcation s'effectue pour la valeur de paramètre  $\alpha = 4$  (et  $\Theta_1 = \arctg(c)$  donne l'angle directeur des lignes modales).

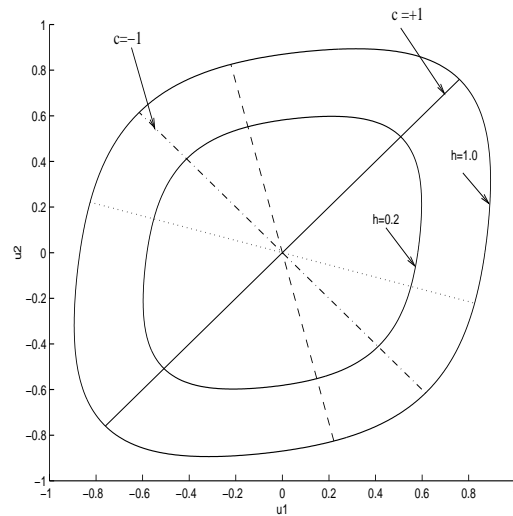


FIG. 1.3 – Modes normaux (similaires) et équipotentielles ( $h = 0.2$  et  $h = 1$ ) du système (1.32), cas d’une bifurcation du mode ( $\alpha = 6, k = 3$ ).

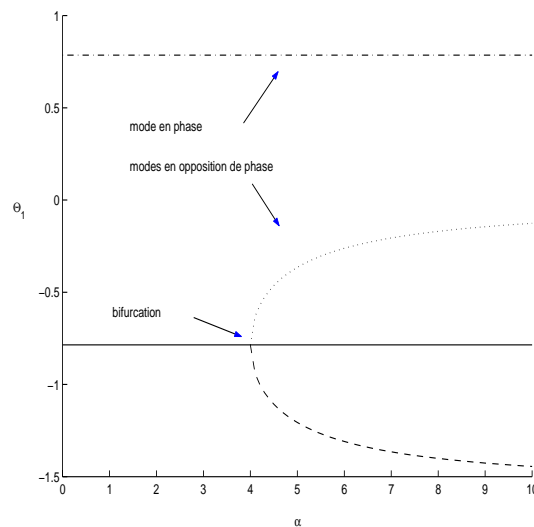


FIG. 1.4 – Bifurcation des modes du système (1.32) avec  $k = 3$ , en fonction de  $\alpha$ . Bifurcation pour la valeur critique  $\alpha = 4$ .

Nous voyons également sur cet exemple que les modes normaux d’un système à masses unitaires ne sont en général pas orthogonaux même lorsque ceci peut avoir un sens. Mawhin [43] propose un théorème de dénombrement des modes :

*Le nombre de modes normaux semblables d’un système homogène de degré  $k$  impair à 2 degrés de liberté est compris entre 2 et  $k + 1$  parmi lesquels on trouve toujours au moins un mode en phase et un en opposition de phase, les nombres respectifs de ceux-ci étant toujours un nombre impair.*

### 1.3.6 Stabilité des modes de Rosenberg

Quelques propriétés de stabilité des modes normaux sont résumées dans [63]. En particulier, il est montré que les modes normaux d'un système admissible dont la fonction potentielle n'est pas une forme quadratique ne peut pas être stable au sens de Liapunov. Ceci découle du fait que les oscillations libres d'un système autonome non-linéaire ne sont en général pas isochrones. On examinera plutôt la stabilité orbitale des modes normaux (ou stabilité au sens de Poincaré). Celle-ci pourra dépendre des paramètres du système, mais aussi du niveau de l'amplitude des mouvements.

Quelques résultats de stabilité peuvent être mentionnés relativement à certaines classes de systèmes :

**Systèmes homogènes :** *Le caractère stable ou instable des vibrations en mode normal d'un système homogène est conservé indépendamment de l'amplitude des oscillations. La stabilité ne dépend donc que des paramètres.*

**Modes non-similaires :** Dans ce cadre plus général, la stabilité des modes non similaires peut être rattachée à la stabilité des modes similaires d'un système associé (système parent) dont le système initial est considéré comme étant une perturbation de ce dernier.

Ainsi, d'après les références [65], [63] : *La stabilité des modes normaux de vibration du système (1.10), est de même nature que celle des modes du système parent*

## 1.4 Réponse en oscillations forcées

On considère le problème non-autonome d'équation (1.1), et les solutions auxquelles on s'intéresse à présent sont les vibrations à l'unisson ayant même période que la force d'excitation. Elles sont appelées *steady state vibration*, [63].

### 1.4.1 Vibrations à l'unisson du système forcé

Il s'agit d'examiner à quelle condition ce type de mouvement est possible pour le système non-autonome et notamment quelle forme de la force d'excitation permet d'atteindre ce régime. Dans le cas linéaire, la réponse  $u_i(t)$  à une excitation harmonique  $f(t)$ , est harmonique, de même période, et on peut alors définir la courbe de réponse par le quotient

$$\frac{u_i(t)}{f(t)} \equiv cste$$

indépendant du temps. Cette propriété peut être généralisée dans le cas de systèmes homogènes.

#### systemes homogènes [63]

Il existe une classe de systèmes pour lesquels il est possible d'obtenir une solution exacte au problème : il s'agit des systèmes homogènes de degrés  $k$ , dont le cas linéaire ( $k = 1$ ) est un exemple particulier, auquel correspond une excitation harmonique.

Rosenberg montre que pour ces systèmes, et pour une force de la forme :

$$f_1(t) = Pcam^k(m\sqrt{\frac{D\lambda^2}{m}}t), \quad f_i \equiv 0, \quad (i = 2, \dots, n), \quad (1.35)$$



où  $D = (c\bar{u}_1)^{k-1}$ ,  $\lambda$  est la pulsation généralisée qui correspond à la pulsation habituelle dans le cas harmonique, et où  $cam(mu)$  est une fonction spéciale. Pour  $m = 1$  on a  $cam(u) = \cos(u)$ , et pour  $m = 2$ , elle correspond à une fonction elliptique [63]. La réponse forcée est alors :

$$u_i(t) = \bar{u}_i cam\left(m\sqrt{\frac{D\lambda^2}{m}}t\right), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.36)$$

Les constantes  $c, \bar{u}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), sont déterminées en injectant (1.35) et (1.36) dans les équations du mouvement (1.1) et de la trajectoire (1.9).

### Trajectoires des réponses forcées :

Les trajectoires, ainsi que les lieux parcourus par les extrémités de ces trajectoires lorsque la pulsation  $\lambda$  varie, sont représentés sur la figure 1.5 pour un système homogène de degrés 3 à deux degrés de liberté. Dans ce cas, les trajectoires des réponses forcées sont rectilignes et la figure 1.5 permet notamment d'illustrer le fait que lorsque la pulsation d'excitation tend vers la pulsation d'un mode, les amplitudes tendent vers  $+\infty$ . Le rapport des composantes  $u_i/u_1$  tend alors vers les constantes modales  $c_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ . La trajectoire se rapproche de la ligne modale. Le système vibre alors au voisinage d'un mode normal non-linéaire lors d'une résonance.

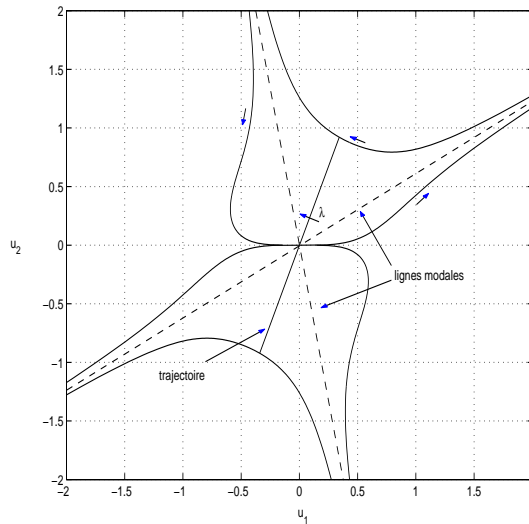


FIG. 1.5 – Trajectoires des oscillations forcées dans l'espace des configurations, ( $k=3$ ).

Pour un système linéaire ( $k = 1$ ), les courbes dans le plan définies par  $(u_1(\lambda), u_2(\lambda))$  sont des hyperboles (Figure 1.6) et les trajectoires des modes sont orthogonales (si les masses sont unitaires).

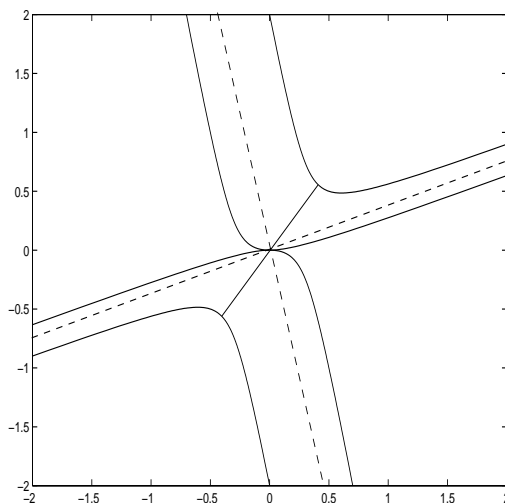


FIG. 1.6 – Trajectoires des oscillations forcées, cas linéaire avec  $k = 1$ .

### Intégration approchée

Dans le cas de systèmes plus généraux, il n'est pas possible de trouver une solution exacte au problème de la recherche de vibration à l'unisson pour le système forcé. D'une façon analogue à la recherche des modes non-similaires on utilise alors une méthode de perturbation [63] au voisinage d'une solution connue. Plus récemment, certaines méthodes ont été proposées. Dans [14], une méthode analytique de calcul consiste à exprimer la force en fonction du déplacement en se ramenant ainsi à un système autonome. Dans [87], un théorème donnant une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une force menant à une vibration forcée à l'unisson est donné. On montre, que pour un système non-linéaire, il existe toute une classe d'excitations convenables, à l'opposé des systèmes linéaires pour lesquels seule une forme harmonique convient.

### 1.4.2 Résonances au voisinage des modes

Les **courbes de réponse** sont des courbes dans le plan amplitude-fréquence obtenues pour chaque degré de liberté et pour un niveau de force donné. Elles sont analogues aux courbes de résonance pour les systèmes linéaires et font apparaître des branches de résonance qui peuvent être stables ou instables. Ces branches sont associées aux différents modes, et dans le cas où le système possède plus de modes que de degrés de liberté, la courbe de réponse fait figurer autant de branches de résonances que de modes stables [14]. Nous allons illustrer certaines propriétés en calculant ces courbes de réponse par une approximation mono-harmonique. Les courbes de la figure 1.8 illustrent ceci sur l'exemple simple (équation 1.37), d'un système symétrique à deux degrés de liberté (schéma 1.7), possédant une partie linéaire :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x + \beta(x - y) + \delta x^3 + \alpha(x - y)^3 &= F_x \cos(\Omega t) \\ \ddot{y} + y - \beta(x - y) + \delta y^3 - \alpha(x - y)^3 &= F_y \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (1.37)$$

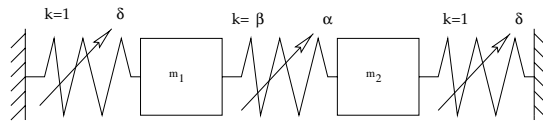


FIG. 1.7 – Système linéarisable à deux degrés de liberté (paramètre des liaisons élastiques linéaires et cubiques).

Une étude de stabilité montrerait que la branche associée au mode  $c = -1$  est instable. On constate que sur les deux modes résultant de la bifurcation, (modes en anti-phase avec  $c < 0$ ), l'énergie vibratoire a tendance à se localiser sur l'une des deux masses (Figure 1.8).

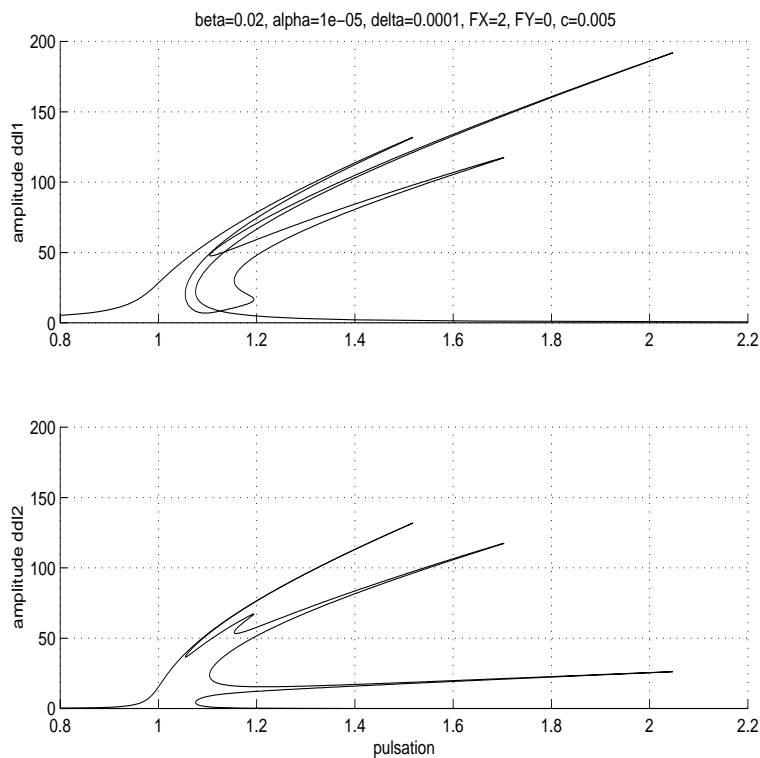


FIG. 1.8 – Réponse forcée d'un système non-linéaire à 2 d.d.l. comportant une bifurcation de l'un ses modes non-linéaires (le mode  $c=-1$ );  $\alpha = 10^{-5}$ ,  $\beta = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\delta = 10^{-4}$ ,  $F_x = 2$ ,  $F_y = 0$ .

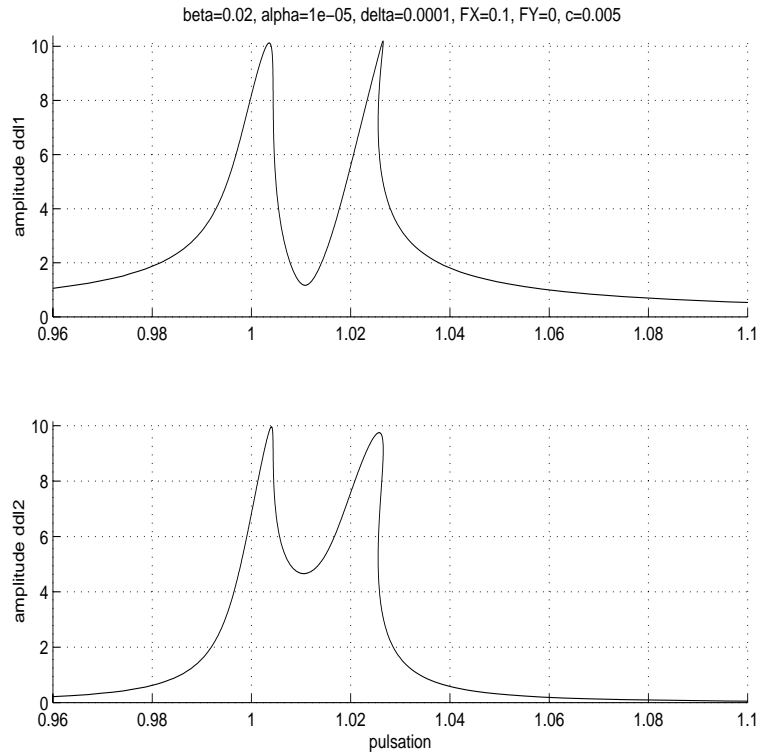


FIG. 1.9 – Réponse forcée d'un système non-linéaire à 2 d.d.l. comportant une bifurcation de l'un ses modes non-linéaires (mode  $c=-1$ ) ;  $\alpha = 10^{-5}$ ,  $\beta = 2.10^{-2}$ ,  $\gamma = 5.10^{-3}$ ,  $\delta = 10^{-4}$ ,  $F_x = 0, 1$ ,  $F_y = 0$ .

Ce type de réponse forcée peut apparaître avec l'augmentation d'amplitude lorsque le système est linéarisable et tend vers un système non-linéaire bifurquant lorsque l'amplitude augmente [46]. La figure 1.9 représente la réponse du même système avec une force d'excitation plus faible. Seulement deux pics de résonance apparaissent. Dans les deux cas, les réponses sont calculées par la méthode de continuation (voir la partie 4.3) appliquée au système algébrique

$$\begin{aligned} -\Omega^2 X + X + i\gamma\Omega X + \beta(X - Y) + \frac{3}{4}\delta|X|^2 X + \frac{3}{4}\alpha|X - Y|^2(X - Y) &= F_x, \\ -\Omega^2 Y + Y + i\gamma\Omega Y - \beta(X - Y) + \frac{3}{4}\delta|Y|^2 Y - \frac{3}{4}\alpha|X - Y|^2(X - Y) &= F_y, \end{aligned}$$

obtenu par la méthode de la balance mono-harmonique [82]. Un terme dissipatif proportionnel à  $\gamma = 0.005$  est rajouté par rapport au système (1.37), afin que les résonances aient des amplitudes bornées et que la méthode de continuation puisse parcourir l'ensemble de la courbe de réponse. Selon la forme des forces non-linéaires, le nombre de modes peut dans certains cas être plus important dans une plage de "régime intermédiaire" alors qu'il sera égale au nombre de degrés de libertés à faible niveau et à "très fort" niveau [46].

## Réponses temporelles

L'illustration des propos précédant peut s'effectuer à l'aide des réponses temporelles intégrées par des schémas numériques. La figure 1.10 montre la réponse temporelle en régime forcé avec  $\Omega = 1,4$  lorsque le mouvement s'effectue au voisinage du pic associé au mode  $c = +1$ . La figure 1.11 met en évidence le phénomène de localisation sur le degrés de liberté  $x$ . La figure 1.12 reflète l'instabilité des oscillations forcées au voisinage du mode bifurquant  $c = -1$ . Le système se stabilise sur l'un des modes localisés après un certain temps d'intégration.

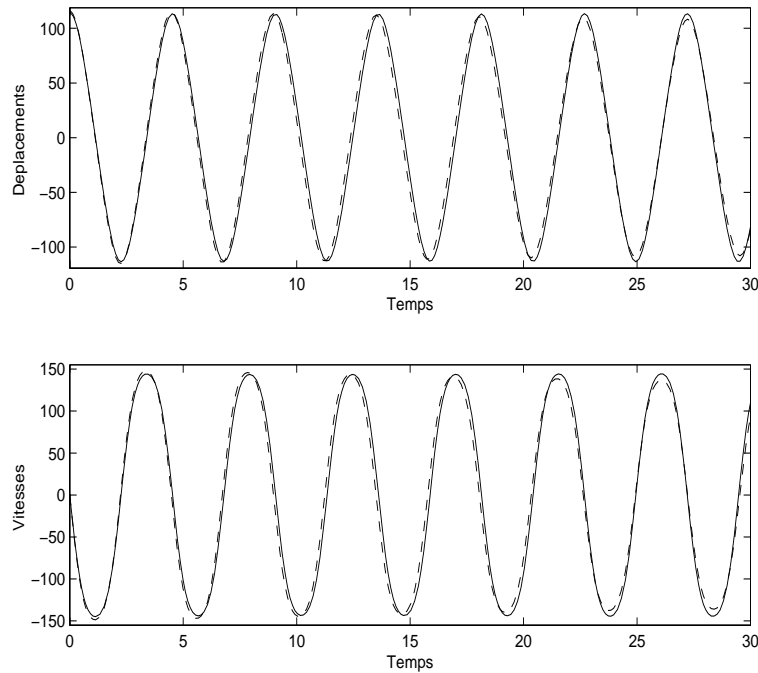


FIG. 1.10 – Réponse du système (1.37) (avec ajout de  $\gamma = 0,005$ ), au voisinage du mode en phase  $c = 1$ , pour  $\Omega = 1,4$ .  $x$  : '-',  $y$  : '- -'.

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé les notions relatives aux modes non-linéaires telles qu'elles sont apparues historiquement dans les années 1960 avec les travaux de Rosenberg, pour la plupart. Les systèmes dynamiques concernés sont alors discrets et conservatifs et peuvent être fortement non-linéaires. L'obtention des trajectoires des modes nécessite la résolution d'un problème différentiel non-linéaire qui n'est pas immédiate. La pulsation est calculée ensuite en injectant l'équation des lignes modales dans l'équation du mouvement qui est alors réduite à une seule équation. Les modes normaux en tant que réponses libres particulières du système, présentent néanmoins le grand intérêt, d'appréhender la dynamique du système en régime forcé.

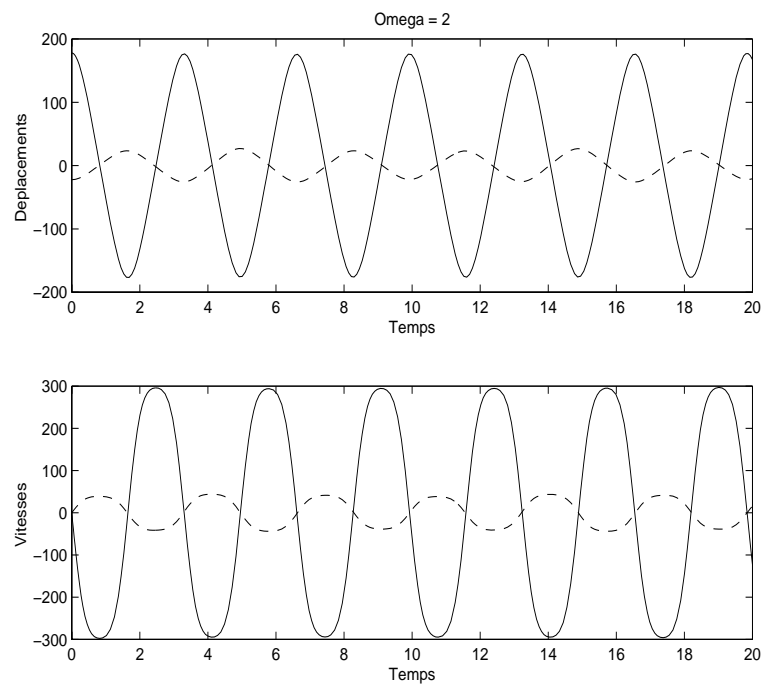


FIG. 1.11 – Localisation de la réponse temporelle forcée du système (1.37) ( $\gamma = 0,005$ ), au voisinage d'un mode en anti-phase ( $c < 0$ ) bifurqué, pour  $\Omega = 2$ .  $x$  : '-',  $y$  : '- -'.

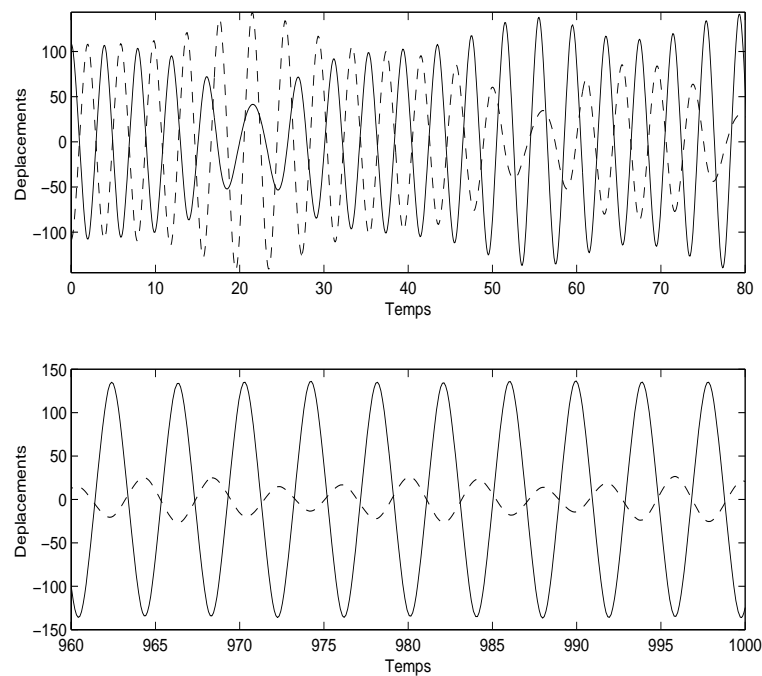


FIG. 1.12 – Transition d'une condition initiale sur le mode  $c = -1$  vers un des modes localisés ( $c < 0$ )  $x$  : '-',  $y$  : '- -'. En haut : instants initiaux. En bas : "stabilisation".

# Chapitre 2

## Approximation des modes non-linéaires

### 2.1 Introduction

Les systèmes non-linéaires ne permettent en général pas d'accéder à leurs solutions sous forme exacte. On a recours alors à des méthodes approchées. Ces méthodes peuvent être regroupées en deux grandes classes [83] :

- Les méthodes basées sur l'introduction de "petits paramètres".

Les termes non-linéaires sont supposés petits et de l'ordre d'un paramètre  $\epsilon \ll 1$ . La solution est construite en fonction des termes d'ordre  $\epsilon, \epsilon^2, \dots$ . Les méthodes que l'on peut ranger dans cette première famille sont la méthode de moyennage (averaging method), la méthode asymptotique, et les méthodes de perturbation.

- Les méthodes d'approximation.

La solution est cherchée dans un sous-espace dont on dispose d'une base et où l'on cherche la meilleure approximation (suivant un certain critère) de la solution exacte. Il s'agit principalement de la méthode de Ritz et Galerkin.

Nous présenterons la méthode de Ritz-Galerkin dans le cadre du calcul approché des modes normaux de systèmes non-linéaires. L'approximation obtenue nous servira de base pour l'analyse des réponses forcées et dans les modèles de souplesse qui seront utilisés pour l'identification modale expérimentale à partir de résonances non-linéaires.

La méthode d'approximation de Ritz-Galerkin s'applique à des problèmes qui admettent une formulation variationnelle [32]. Considérant un système dynamique conservatif autonome vérifiant le principe variationnel de Hamilton, le mouvement des points du système allant de  $x_1$  à  $x_2$ , entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , s'effectuera de telle sorte que la fonctionnelle  $T - V$  soit stationnaire :

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \right] = 0, \quad (2.1)$$

dans l'espace des fonctions  $x(t)$  vérifiant

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_1, \\ x(t_2) &= x_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ainsi que certaines conditions aux limites associées au problème.  $T$  est l'énergie cinétique et  $V$  l'énergie de déformation. La solution est recherchée dans un espace de dimension finie dont les fonctions  $\xi_i(t)$  constituent une base et vérifient les conditions (2.2) :

$$x(t) \approx u(t) = \sum_{i=1}^m a_i \xi_i(t), \quad (2.3)$$

Il s'agit de déterminer les coefficients  $a_i$  de telle sorte que le principe de Hamilton soit réalisé dans ce sous espace. Compte tenu de (2.3), ces conditions se traduisent par :

$$\int_{t_1}^{t_2} \epsilon_i(t) \xi_k(t) dt = 0, \quad (i = 1, \dots, n); \quad (k = 1, \dots, m). \quad (2.4)$$

où les  $\epsilon_i(t)$  sont les résidus des équations de Lagrange associées au principe de Hamilton et à la solution approchée (2.3). Ils peuvent être interprétés physiquement comme des forces appliquées au système afin que celui-ci suive la trajectoire approchée par (2.3). Les coefficients cherchés sont ainsi solutions d'un système algébrique à  $m$  inconnues.

Pour la recherche de solutions T-périodiques on prendra  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = T$  et pour les fonctions de base  $\xi_i(t)$ , les  $m$  premières fonctions harmoniques  $\sin k\omega t$ ,  $\cos k\omega t$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) avec  $\omega = 2\pi/T$ .

## 2.2 Oscillations en mode normal

### 2.2.1 Forme de l'approximation

Nous considérons un système dynamique discret à  $n$  d.d.l., non-linéaire, conservatif dont les équations du mouvement sont

$$M\ddot{x} + Kx + f(x) = 0, \quad (2.5)$$

où  $M$  et  $K$  sont les matrices de masse et de rigidité constituant la partie linéaire,  $x$  le vecteur des déplacements et  $f(x)$  représente les forces élastiques non-linéaires conservatives.

Nous approcherons les oscillations en modes non-linéaires associées au système (2.5) par :

$$x(t) \approx u(t) = u_r(t) \bar{b}, \quad (2.6)$$

où  $u_r$  est une coordonnée de référence arbitraire, à partir de laquelle sont exprimées les autres coordonnées, et  $\bar{b}$  un vecteur de  $R^n$ . La loi horaire du mode non-linéaire est approchée par une fonction harmonique de pulsation  $\bar{\omega}$ , et d'amplitude  $U_r$  donne l'amplitude maximum des oscillations :

$$u_r(t) = U_r \cos(\bar{\omega}t). \quad (2.7)$$

Pour une amplitude donnée  $U_r$  non nulle, le problème consiste à déterminer  $\bar{\omega}$  ainsi que  $\bar{b}_i$  pour  $i \in \{1, \dots, r-1, r+1, \dots, n\}$ , soit  $n$  inconnues de telle sorte que  $u(t)$  soit solution approchée de l'équation (2.5). En pratique, on choisira la coordonnée  $r$  pour qu'elle ne corresponde pas avec un noeud de vibration afin que la détermination du mode soit possible.

L'expression (2.6) est substituée dans l'équation du mouvement (2.5) pour obtenir le résidu de force  $\epsilon$

$$\epsilon(t) = M\ddot{u}(t) + Ku(t) + f(u(t)). \quad (2.8)$$



Les conditions générales d'orthogonalité (2.3)

$$\int_0^{\frac{\bar{\omega}}{2\pi}} \epsilon(t) \cos(\bar{\omega}t) dt = 0, \quad (2.9)$$

s'explicitent suivant

$$(-\bar{\omega}^2 M + K)\bar{b} + \frac{1}{\pi U_r} \int_0^{2\pi} f(U_r \bar{b} \cos \theta) \cos \theta d\theta = 0, \quad (2.10)$$

ce qui constitue un système algébrique de  $n$  équations non-linéaires couplées à  $n$  inconnues. Si l'on admet que ce système d'équations possède  $m$  solutions  $s_j$  :

$$s_j = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_j \\ \bar{b}_{j1} \\ \vdots \\ \bar{b}_{j,r-1} \\ \bar{b}_{j,r+1} \\ \vdots \\ \bar{b}_{jn} \end{pmatrix}, \quad (j = 1, \dots, m), \quad (2.11)$$

celles-ci dépendront de l'amplitude  $U_r$  fixée et les oscillations sur les modes non-linéaires seront notées :

$$u(t) = U_r \bar{b}_j(U_r) \cos(\bar{\omega}_j(U_r)t), \quad (j = 1, \dots, m). \quad (2.12)$$

La forme du mode approché ne varie pas au cours de l'oscillation en mode normal mais est fonction de  $U_r$ . Les trajectoires du mode approché dans l'espace des configurations sont des segments de droites dont les orientations sont fonctions de l'amplitude  $U_r$ . La propriété d'orthogonalité de ces modes non-linéaires n'a généralement plus de sens.

## 2.2.2 Expression des modes non-linéaires dans la base modale linéaire

Si le système est linéarisable, les modes normaux du système linéaire associé

$$M\ddot{x} + Kx = 0, \quad (2.13)$$

peuvent être utilisés pour exprimer les modes non-linéaires. Ils sont définis par  $n$  pulsations propres  $\omega_1, \dots, \omega_n$  et par une matrice modale dont les colonnes sont les  $n$  vecteurs propres ( $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_n]$ ) tels que :

$$(K - \omega_j^2 M)\Phi_j = 0, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2.14)$$

avec les propriétés classiques d'orthogonalité :

$${}^t\Phi_i M \Phi_j = \delta_{ij}, \quad \Phi_j^t K \Phi_j = \omega_j^2 \quad (\forall i, j = 1, \dots, n).$$

Ces modes sont utilisés afin d'exprimer un vecteur  $x$  au moyen des coordonnées modales  $\xi$

$$x = \Phi \xi. \quad (2.15)$$

Ainsi, l'équation du mouvement (2.5) devient après le changement de variable (2.15)

$$\ddot{\xi}(t) + \Lambda\xi(t) + \mathcal{F}(\xi) = 0, \quad (2.16)$$

avec

$$\mathcal{F}(\xi) = {}^t\Phi f(\Phi\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_i(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Nous cherchons à présent, la solution approchée correspondant au système (2.16)

$$\xi(t) \approx \zeta(t) = \alpha_s \beta \cos(\bar{\omega}t), \quad (2.18)$$

où nous fixons une composante de référence à l'unité dans le vecteur  $\beta$  :

$$\beta_s = 1.$$

L'expression du système algébrique de la méthode de Ritz est cette fois :

$$(-\bar{\omega}^2 I + \Lambda)\beta + \frac{1}{\pi\alpha_s} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}(\alpha_s \beta \cos\theta) \cos\theta d\theta = 0, \quad (2.19)$$

avec  $\alpha_s \neq 0$  et où  $I$  est la matrice identité.

Si elles existent, les  $m$  solutions du problème (2.19), seront représentées par les vecteurs  $\sigma_j$

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_j \\ \beta_{j1} \\ \vdots \\ \beta_{j,s-1} \\ \beta_{j,s+1} \\ \vdots \\ \beta_{jn} \end{pmatrix}, \quad (j = 1, \dots, m). \quad (2.20)$$

Ces solutions sont obtenues pour une amplitude  $\alpha_s$  fixée et les solutions approchées  $\zeta(t)$  de (2.16) s'écriront donc :

$$\zeta(t) = \alpha_s \beta_j(\alpha_s) \cos(\bar{\omega}_j(\alpha_s) t), \quad (2.21)$$

avec

$$\beta_j(\alpha_s) \equiv 1.$$

Pour  $\alpha_s = 0$ , la solution  $\sigma_j$  correspond au  $j^{ieme}$  mode linéaire, on prendra alors  $s = j$ .

### 2.2.3 Normalisation des modes

Les modes non-linéaires seront notés à l'aide de

$$\begin{aligned} u(t) &= q(t)\bar{\Phi}, \\ q(t) &= Q \cos(\bar{\omega} t), \\ \bar{\omega} &\equiv \bar{\omega}(Q), \\ \bar{\Phi} &\equiv \bar{\Phi}(Q), \end{aligned} \tag{2.22}$$

où  $q(t)$  est l'amplitude modale non-linéaire,  $\bar{\Phi}$  la forme modale non-linéaire,  $\bar{\omega}$  la pulsation propre non-linéaire,  $Q$  l'amplitude. Dans le cas particulier où le mode non-linéaire est exprimé en coordonnées "physiques" selon l'équation (2.6), l'amplitude modale est le déplacement de référence  $u_r$  et les notations (2.6) correspondent à (2.22) avec

$$Q = U_r,$$

et

$$\bar{\Phi} = \bar{b},$$

et la forme du mode est normalisée par rapport à la composante correspondante

$$\bar{\Phi}_r = 1.$$

Dans le cas où le mode non-linéaire est exprimé à l'aide de la base modale linéaire  $\Phi$ , les déplacements sont donnés par

$$u(t) = \Phi \beta(\alpha_s) \alpha_s \cos \bar{\omega} t$$

on notera

$$q(t) = \alpha_s \cos(\bar{\omega} t), \quad Q = \alpha_s, \quad \bar{\Phi} = \Phi \beta,$$

et la normalisation du  $s$ -ième mode se fait en imposant

$$\beta_s = 1,$$

d'où,

$$\bar{\Phi}_s(Q) = \Phi_s + \sum_{k \neq s} \Phi_k \beta_k, \quad \beta_k \equiv \beta_k(Q), \tag{2.23}$$

où les coefficients  $\beta_k(Q)$  traduisent la modification de la forme du mode à partir du mode linéaire que l'on retrouve compte tenu de la normalisation adoptée, lorsque  $Q$  tend vers 0. Les coefficients  $\beta_k$ , pour  $k \neq s$  s'annulent alors tous.

Il peut être parfois utile de changer la normalisation des modes normaux non-linéaires. Comme pour les modes normaux linéaires, plusieurs types de normalisation peuvent être adoptés. La normalisation par rapport à la matrice de masse impose la condition

$${}^t \bar{\Phi}_j(Q_j) M \bar{\Phi}_j(Q_j) = 1, \quad \forall Q_j.$$

La normalisation peut s'effectuer en fixant à l'unité l'une des composantes du vecteur  $\bar{\Phi}_j$  :

$$\bar{\Phi}_{jk}(Q_j) = 1, \quad \forall Q_j.$$

Dans le cas de la décomposition sur la base des vecteurs propres linéaires, la normalisation se traduira par :

$$\beta_{jj} = {}^t \Phi_j M \bar{\Phi}_j = 1$$

A chaque normalisation est associé une amplitude modale différente. En effet, par définition du problème modal non-linéaire selon l'équation (2.32) nous avons

$$[\bar{K}(Q_j \bar{\Phi}_j(Q_j)) - \bar{\omega}_j^2(Q_j)M] \bar{\Phi}_j(Q_j) = 0, \quad (2.24)$$

qui définit le mode non-linéaire pour l'amplitude  $Q_j$  telle que les déplacements lors des oscillations libres suivant ce mode soient :

$$u(t) = q_j(t) \bar{\Phi}(Q_j), \quad q_j(t) = Q_j \cos(\bar{\omega}_j t). \quad (2.25)$$

En introduisant un facteur  $\lambda$ , l'équation (2.24) donne

$$[\bar{K}(\lambda \frac{Q_j}{\lambda} \bar{\Phi}_j(\lambda \frac{Q_j}{\lambda})) - \bar{\omega}_j^2(\lambda \frac{Q_j}{\lambda})M] \lambda \bar{\Phi}_j(\lambda \frac{Q_j}{\lambda}) = 0, \quad (2.26)$$

on a alors

$$[\bar{K}(Q'_j \bar{\Psi}_j(Q'_j)) - \bar{\omega}'_j{}^2(Q'_j)M] \bar{\Psi}_j(Q'_j) = 0, \quad (2.27)$$

avec

$$\begin{aligned} Q'_j &= \lambda^{-1} Q_j, \\ \bar{\Psi}_j(Q'_j) &= \lambda \bar{\Phi}_j(\lambda Q'_j), \\ \bar{\omega}'_j(Q'_j) &= \bar{\omega}_j(\lambda Q'_j). \end{aligned} \quad (2.28)$$

L'oscillation normale (2.25) s'écrit à l'aide de la nouvelle normalisation :

$$u(t) = q'_j(t) \bar{\Psi}_j(Q'_j), \quad q'_j(t) = Q'_j \cos \bar{\omega}'_j(Q'_j) t.$$

Le changement de normalisation par le facteur de normalisation  $\lambda$ ,

$$\bar{\Phi}_j \leftrightarrow \lambda \bar{\Phi}_j = \bar{\Psi}_j,$$

est obtenu en effectuant le changement de variable (2.28) sur les "fonctions modales".

## 2.3 Calcul des modes normaux non-linéaires

### 2.3.1 Problème aux valeurs propres non-linéaire

Considérons les forces non-linéaires  $f(x)$  agissant dans le système discret (2.5) de la forme suivante :

$$f_i(x) = a_i(x_i) + \sum_{k \neq i}^n b_{ik}(x_i - x_k), \quad (2.29)$$

où  $a_i$  et  $b_{ik}$  sont des fonctions polynomiales correspondant à des liaisons élastiques non-linéaires. Ces fonctions pourront avoir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a_i(x_i) &= \sum_{r=3,5,\dots} \hat{a}_{ir} x_i^r, \\ b_{ik}(x_i - x_k) &= \sum_{r=3,5,\dots} \hat{b}_{ikr} (x_i - x_k)^r, \end{aligned} \quad (2.30)$$

où  $\hat{a}_{ir}$  et  $\hat{b}_{ikr}$  sont des constantes.

En faisant apparaître les déplacements dans les forces non-linéaires (2.30), de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a_i(x_i) &= [\sum_{r=3,5,\dots} \hat{a}_{ir} x_i^{r-1}] x_i, \\ b_{ik}(x_i - x_k) &= [\sum_{r=3,5,\dots} \hat{b}_{ikr} (x_i - x_k)^{r-1}] (x_i - x_k), \end{aligned} \quad (2.31)$$

et par application de la méthode de Ritz en supposant la solution de la forme :

$$x(t) = q_j(t) \bar{\Phi}_j = Q_j \cos(\bar{\omega}_j t) \bar{\Phi}_j,$$

l'équation modale correspondant à  $\bar{\Phi}_j$  pourra s'écrire en faisant apparaître une matrice de rigidité non-linéaire, dépendante de l'amplitude. Le problème modal non-linéaire sera alors de la forme :

$$[\bar{K}(Q_j \bar{\Phi}_j) - \bar{\omega}_j^2 M] \bar{\Phi}_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2.32)$$

où les termes de la matrice  $\bar{K}$  peuvent être explicités en fonction des coefficients  $\hat{a}_{ir}$  et  $\hat{b}_{ikr}$  des expressions (2.31), de  $Q_j$ , de  $\bar{\Phi}_j$  et des intégrales :

$$I_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{r+1} \theta d\theta.$$

Les termes de la matrice  $\bar{K}$  sont :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ii}(Q_j \bar{\Phi}_j) &= K_{ii} + \sum_{r=3,5,\dots} I_r \hat{a}_{ir} \bar{\Phi}_{ji}^{r-1} Q_j^{r-1} \\ &\quad + \sum_{r=3,5,\dots} I_r \sum_{k \neq i} \hat{b}_{ikr} [(\bar{\Phi}_{ji} - \bar{\Phi}_{jk}) Q_j]^{r-1}, \\ \bar{K}_{ik}(Q_j \bar{\Phi}_j) &= K_{ik} - \sum_{r=3,5,\dots} I_r \hat{b}_{ikr} [(\bar{\Phi}_{ji} - \bar{\Phi}_{jk}) Q_j]^{r-1}, \quad (k \neq i). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Les vecteurs  $\bar{\Phi}_j$  solutions de (2.32) sont trouvés en fonction de  $Q_j$ . La masse modale sera notée

$$\bar{\mu}_j(Q_j) = {}^t \bar{\Phi}_j(Q_j) M \bar{\Phi}_j(Q_j), \quad (2.34)$$

avec,

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_j \bar{\omega}_j^2 &= {}^t \bar{\Phi}_j K \bar{\Phi}_j + \frac{1}{\pi Q_j} {}^t \bar{\Phi}_j \int_0^{2\pi} f(Q_j \bar{\Phi}_j \cos \theta) \cos \theta d\theta, \\ &= {}^t \bar{\Phi}_j \bar{K}(Q_j \bar{\Phi}_j) \bar{\Phi}_j. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Le produit  $\bar{\mu}_j(Q_j) \bar{\omega}_j^2(Q_j)$  correspond à une raideur modale non-linéaire. L'obtention des modes se fait par résolution du problème modal (2.32).

D'une manière plus générale, si l'on note,

$$F_{nl}(Q_j \bar{\Phi}_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(Q_j \bar{\Phi}_j \cos \theta) \cos \theta d\theta, \quad (2.36)$$

on pourra mettre la fonction algébrique  $F_{nl}$  sous forme matricielle de la façon suivante :

Posons  $g(s) = F_{nl}(s Q_j \bar{\Phi}_j)$ , nous avons

$$g'(s) = \nabla F_{nl}(s Q_j \bar{\Phi}_j) Q_j \bar{\Phi}_j, \quad (2.37)$$

or,

$$\int_0^1 g'(s)ds = g(1) - g(0) = F_{nl}(Q_j \bar{\Phi}_j) = \left\{ \int_0^1 \nabla F_{nl}(sQ_j \bar{\Phi}_j) ds \right\} Q_j \bar{\Phi}_j, \quad (2.38)$$

d'où,

$$\begin{aligned} \bar{K}(Q_j \bar{\Phi}_j) &= K + \int_0^1 \nabla F_{nl}(sQ_j \bar{\Phi}_j) ds, \\ &= K + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \nabla f(sQ_j \bar{\Phi}_j \cos \theta) \cos^2 \theta ds d\theta. \end{aligned} \quad (2.39)$$

### 2.3.2 Non-linéarité unique

Dans ce cas, les efforts non-linéaires ne dépendent que d'une seule des variables cinématiques. On peut éventuellement se ramener à cette situation par passage en coordonnées relatives lorsque la non-linéarité intervient dans une liaison entre deux degrés de liberté. (voir l'exemple dans la partie 2.4.2).

En choisissant comme amplitude modale la coordonnée intervenant dans les forces non-linéaires, le problème (2.32) prend la forme plus simple suivante,

$$[\bar{K}(Q_j) - \bar{\omega}_j^2 M] \bar{\Phi}_j = 0, \quad (2.40)$$

où la matrice  $\bar{K}$  dépend de  $Q_j$  mais pas de la forme du mode. Ainsi, on cherchera les solutions pour une amplitude fixée  $Q_j$  par une procédure de calcul des modes linéaires standard. Remarquons que l'on obtient dans ce cas toujours  $n$  solutions au problème (2.32) pour une amplitude donnée.

### 2.3.3 Non-linéarités multiples

Dans les cas où le système possède plusieurs non-linéarités, la matrice de rigidité non-linéaire  $\bar{K}$  dépend également de la forme du mode qui est *a priori* inconnue et le problème (2.32) doit être traité par une procédure numérique itérative. La procédure de Newton-Raphson peut être utilisée en définissant la fonction

$$g(\bar{\lambda}_j, \bar{\Phi}_j) = [K + \mathcal{K}(Q_j \bar{\Phi}_j) - \bar{\lambda}_j M] \bar{\Phi}_j, \quad (2.41)$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(Q_j \bar{\Phi}_j) &= \bar{K}(Q_j \bar{\Phi}_j) - K, \\ \bar{\lambda}_j &= \bar{\omega}_j^2. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation  $g(\bar{\lambda}_j, \bar{\Phi}_j) = 0$ , sont obtenues par le processus d'itérations sur l'entier  $k$

$$\nu_j^{k+1} = \nu_j^k - [\nabla g(\bar{\lambda}_j^k, \bar{\Phi}_j^k)]^{-1} g(\bar{\lambda}_j^k, \bar{\Phi}_j^k), \quad (2.42)$$

avec le vecteur d'inconnues

$$\nu_j^k = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_j \\ \bar{\Phi}_{j1} \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_{j,s-1} \\ \bar{\Phi}_{j,s+1} \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_{jn} \end{pmatrix}^k. \quad (2.43)$$

Nous nous ramenons à un problème à  $n$  inconnues en fixant à l'unité l'une des coordonnées. Les colonnes de la matrice Jacobienne  $\nabla g$  (en  $(\bar{\lambda}_j, \bar{\Phi}_j)$ ) s'explicitent comme suit :

$$\begin{aligned} (\nabla g)_{.,1} &= \frac{\partial g}{\partial \bar{\lambda}_j} = -M\bar{\Phi}_j, \\ (\nabla g)_{.,i+1} &= \frac{\partial g}{\partial \bar{\Phi}_{ji}} \\ &= \mathcal{K}'_i(Q_j \bar{\Phi}_j) \bar{\Phi}_j + \bar{K}_{.,i} - \lambda_j M_{.,i}, \quad (i \geq 1, \quad i \neq s) \\ (\mathcal{K}'_i)_{pq} &= \frac{d(\mathcal{K}(Q_j \bar{\Phi}_{ji})_{pq})}{d\bar{\Phi}_{ji}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla g_{.,1} &= \frac{\partial g}{\partial \bar{\lambda}_j} - M\bar{\Phi}_j, \\ \nabla g_{.,i+1} &= \frac{\partial g}{\partial \bar{\Phi}_{ji}}, \quad \text{si } 1 < i < s, \\ \nabla g_{.,i} &= \frac{\partial g}{\partial \bar{\Phi}_{ji}}, \quad \text{si } i > s > 1. \end{aligned} \quad (2.44)$$

où  $K_{.,i}$  est, par exemple, la  $i$ -ème colonne de la matrice  $K$ , et avec

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\Phi}_{ji}} = K_{.,i} - \lambda_j M_{.,i} + \frac{\partial}{\partial \bar{\Phi}_{ji}} [\mathcal{K}(Q_j \bar{\Phi}_j)]. \quad (2.45)$$

En faisant apparaître la fonction  $F_{nl}$  définie plus haut, nous avons :

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\Phi}_{ji}} = K_{.,i} - \lambda_j M_{.,i} + \nabla F_{nl}(Q_j \bar{\Phi}_j)_{.,i}, \quad (2.46)$$

avec,

$$\nabla F_{nl}(Q_j \bar{\Phi}_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \nabla f_{nl}(Q_j \bar{\Phi}_j \cos \theta) \cos^2 \theta d\theta. \quad (2.47)$$

Les itérations (2.42) sont initialisées avec les modes linéaires correspondant aux amplitudes nulles  $Q_j = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) :

$$\nu_j^0 = \begin{pmatrix} \omega_j^2 \\ \bar{\Phi}_{j1} \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_{j,s-1} \\ \bar{\Phi}_{j,s+1} \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_{jn} \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Les modes sont dans ce cas calculés progressivement en fonction de l'amplitude  $Q_j$  à partir des différentes initialisations en "suivant" un mode donné. L'amplitude est incrémentée itérativement :  $Q_j^{k+1} = Q_j^k + \Delta Q_j$ .

La recherche du mode non-linéaire pour l'amplitude  $Q_j^{k+1}$  est initialisée à chaque itération avec le résultat correspondant à l'amplitude  $Q_j^k$ . L'opération est à effectuer successivement pour chaque mode dans la plage d'amplitude voulue. Dans ce cas, il n'est pas évident que le système algébrique à résoudre possède  $n$  solutions comme dans le cas précédent.

### 2.3.4 Calcul des modes à l'aide de réponses forcées

Il est possible de calculer une approximation des modes non-linéaires à l'aide d'une réponse forcée en se basant sur la méthode de la linéarisation équivalente (voir la partie 4.3). En supposant que l'on dispose de la réponse forcée  $x(t)$  du système

$$M\ddot{x} + Kx + f(x) = F \cos(\Omega t), \quad (2.49)$$

pour chaque valeur du champs de déplacement connu  $x$ , on peut déterminer la matrice de raideur équivalente qui dépendra du champs de ces déplacements. Ainsi les équations du système équivalent s'écriront :

$$M\ddot{x} + K_{eq}(x)x = F \cos(\Omega t). \quad (2.50)$$

Il est ensuite possible de calculer de façon standard, les valeurs propres et modes propres associés au système équivalent

$$[K_{eq}(x) - \bar{\omega}_j^2 M] \bar{\Phi}_j = 0, \quad (2.51)$$

où  $K_{eq}$  est la matrice obtenue par la méthode de la linéarisation équivalente. Afin de relier ensuite ces modes à leurs amplitudes modales, on détermine celles-ci de la façon suivante :

$$q_j = {}^t \bar{\Phi}_j M x, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.52)$$

(en ne gardant que le premier harmonique). Cette méthode nécessite la simulation de la réponse forcée par une intégration temporelle du système d'équations qui peut être assez lourde mais les modes sont ensuite obtenus de façon standard.

On pourra trouver d'autres algorithmes de calcul des solutions de problèmes aux valeurs propres non-linéaires dans [45].

## 2.4 Exemples, calcul des modes

### 2.4.1 Système discret comportant une seule non-linéarité

On considère un système dynamique discret à 3 degrés de liberté possédant une non-linéarité cubique et dont les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + \alpha_1 x_1^3 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 - k_3 x_3 &= 0, \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_3 x_3 - k_3 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$



Ce système peut être représenté par un ensemble de masses chaînées par des raideurs linéaires avec une raideur à "l'encastrement" non-linéaire (Figure 2.1).

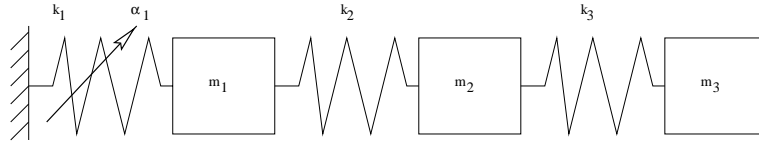


FIG. 2.1 – Système discret comportant une non-linéarité isolée.

Le système d'équations algébriques qui résulte de l'application de la méthode de Ritz sur le système d'équations différentielles (2.53), lorsqu'on cherche une solution de la forme

$$x_i(t) = X_i \cos \bar{\omega} t \quad (i = 1, \dots, 3), \quad X_i \neq 0,$$

est :

$$\begin{aligned} -\bar{\omega}^2 m_1 X_1 + (k_1 + k_2) X_1 - k_2 X_2 + \alpha_1 \frac{3}{4} X_1^3 &= 0, \\ -\bar{\omega}^2 m_2 X_2 + (k_2 + k_3) X_2 - k_2 X_1 - k_3 X_3 &= 0, \\ -\bar{\omega}^2 m_3 X_3 + k_3 X_3 - k_3 X_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Le calcul des modes est effectué en normalisant par rapport à la première coordonnée. L'oscillation en mode normal non-linéaire sera alors exprimée par

$$x(t) = X_1 U \cos \bar{\omega} t,$$

où la première composante du vecteur  $U$  est unitaire ( $U_1 = 1$ ).

La recherche du mode normal revient à la résolution du problème

$$[K(X_1) - \bar{\omega}^2 M]U = 0, \quad (2.55)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix},$$

$$K(X_1) = \begin{pmatrix} k_2 + k_1 + \frac{3}{4} \alpha_1 X_1^2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Pour plusieurs valeurs successives de  $X_1$ , on calculera directement, par résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres (2.55),  $\bar{\omega}$  et  $U$  en fonction de  $X_1$ .

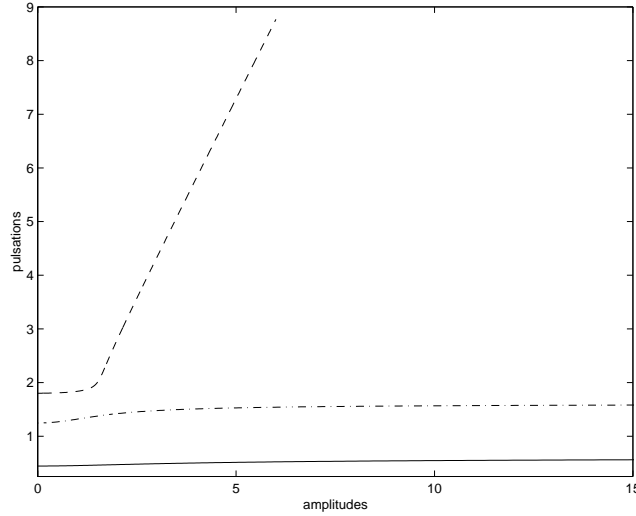


FIG. 2.2 – Pulsations non-linéaires du système (2.53),  $\bar{\omega}_i(Q_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , en fonction de leurs amplitudes modales pour  $X_1$  variant dans  $[0, 10]$  (système d'équation 2.54).

Les résultats sont présentés en utilisant la normalisation des modes non-linéaires  $\bar{\Phi}_j$ , ( $j = 1, 2, 3$ ) écrits dans la base modale linéaire  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), effectuée en imposant  $\beta_{jj} \equiv 1$  ( $j = 1, 2, 3$ ) dans la décomposition

$$\bar{\Phi}_j = \beta_{jj}\phi_j + \sum_{k \neq j} \beta_{jk}\phi_k.$$

Les amplitudes modales associées à cette normalisation sont calculées par

$$Q_j = X_1^t \bar{\Phi}_j M U_j, \quad (j = 1, \dots, 3).$$

Les pulsations des deux premiers modes tendent asymptotiquement vers les valeurs limites correspondant au système à deux degrés de liberté obtenu en bloquant la masse  $m_1$  (soit  $x_1 \equiv 0$ ), et la troisième pulsation tend vers l'infini (Figure 2.2). Les pulsations évoluent continûment à partir des pulsations obtenues pour  $X_1 = 0$  qui correspondent aux pulsations du système linéaire associé aux équations (2.53) avec  $\alpha_1 = 0$ .

Les valeurs d'amplitudes modales  $Q_1, Q_2, Q_3$ , en fonction desquelles sont tracées ces pulsations (Figure 2.2), ont été obtenues pour  $X_1$  variant dans l'intervalle  $[0, 10]$ . Les valeurs numériques correspondant au calcul sont :  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ .

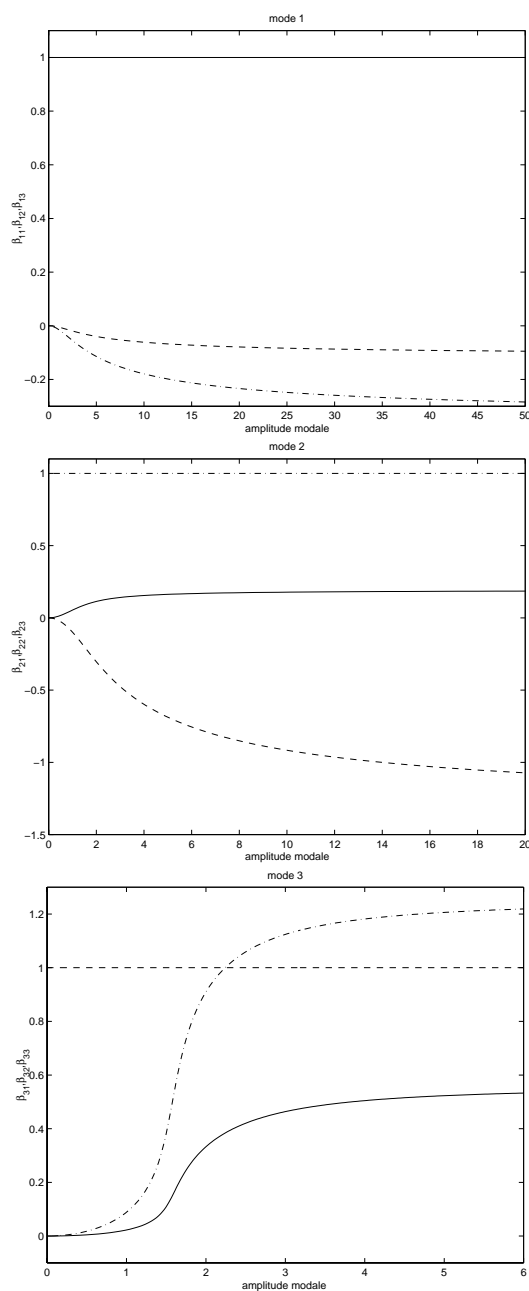


FIG. 2.3 – Participations  $\beta_{jk}(Q_j)$  des modes en fonction des amplitudes modales (système d'équation 2.53) de haut en bas :  $j = 1, 2, 3$ ; - :  $k = 1$ , - - :  $k = 2$ , - . - :  $k = 3$ .

Les coefficients de participation pour chaque mode, obtenus par

$$\beta_{jk}(Q_j) = \frac{X_1}{Q_j} {}^t \Phi_k M U \quad (j, k = 1, \dots, 3, \quad j \neq k),$$

traduisent la variation de la forme des modes (Figures 2.3).

Les masses modales non-linéaires (Figure 2.4), sont calculées par :

$$\bar{\mu}_j = {}^t \bar{\Phi}_j(Q_j) M \bar{\Phi}_j(Q_j) \quad (j = 1, \dots, 3).$$

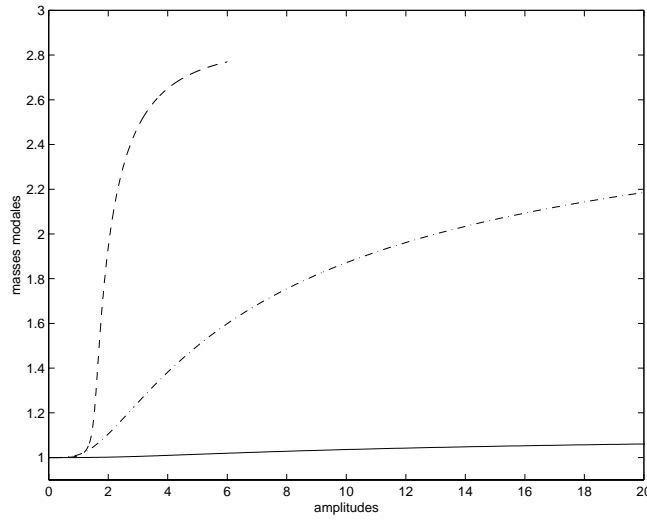


FIG. 2.4 – Masses modales  $\bar{\mu}_1(Q_1)$ ,  $\bar{\mu}_2(Q_2)$ ,  $\bar{\mu}_3(Q_3)$  en fonction de leurs amplitudes modales pour  $X_1$  dans l'intervalle  $[0, 10]$ , (système d'équation 2.53).

**Remarque :** Dans le cas où la non-linéarité isolée n'est pas à l'encastrement mais intervient dans le couplage de deux masses et dépend de la différence entre deux coordonnées  $x_k - x_{k+1}$ , on effectuera le passage en coordonnées relatives  $x = P r$  avec :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

## 2.4.2 Système comportant plusieurs non-linéarités

On considère maintenant à titre d'exemple, un système discret possédant plusieurs liaisons non-linéaires :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2(x_1 - x_2)^3 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - x_3) + \alpha_2(x_2 - x_1)^3 + \alpha_3(x_2 - x_3)^3 &= 0, \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_3(x_3 - x_2) + \alpha_3(x_3 - x_2)^3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ce système peut être représenté par un ensemble de masses chaînées par des raideurs non-linéaires (Figure 2.5).

Il est avantageux, dans ce cas d'effectuer la transformation en coordonnées relatives donnée par l'équation (2.56) et le système algébrique à résoudre, exprimé en fonction des coordonnées relatives devient

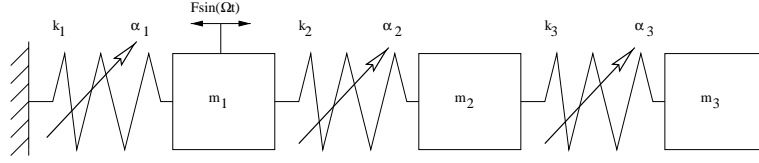


FIG. 2.5 – Système discret à plusieurs non-linéarités.

$$[K_r(R_1.S) - \bar{\omega}^2 M_r]S = 0, \quad (2.58)$$

avec,

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, M_r = {}^t PMP = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & m_2 + m_3 & m_3 \\ m_2 + m_3 & m_2 + m_3 & m_3 \\ m_3 & m_3 & m_3 \end{pmatrix},$$

$$K_r(R_1.S) = \begin{pmatrix} k_1 + \frac{3}{4}\alpha_1 R_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 + \frac{3}{4}\alpha_2 (R_1.S_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 + \frac{3}{4}\alpha_3 (R_1.S_3)^2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur  $S$  est normalisé par rapport à la première coordonnée. Le problème aux valeurs propres n'est cette fois ci plus standard lorsque l'on fixe  $R_1$ , en effet le terme  $K_r$  dépend de  $S$ . Nous avons utilisé une méthode de Newton-Raphson afin de trouver le vecteur d'inconnues  ${}^t[\bar{\omega}, S_2, S_3]$  solution du système algébrique

$$g(\bar{\omega}, S_2, S_3) = [K_r(R_1.S) - \bar{\omega}^2 M_r]S = 0 \quad (2.59)$$

La procédure est initialisée à l'aide des modes du système linéaire, correspondant à une valeur de  $R_1$  très petite. Puis, en augmentant progressivement  $R_1$ , la solution au pas précédent est utilisée pour initialiser la recherche de la solution correspondant à une amplitude  $R_1$  plus grande.

Les résultats sont exprimés dans la base des déplacements absolus par la transformation inverse de (2.56) puis dans la base des modes linéaires comme dans l'exemple précédent (partie 2.4.1) et correspondent aux valeurs numériques  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ .

Les courbes 2.6, 2.7 et 2.8, montrent l'évolution des paramètres modaux en fonctions de leurs amplitudes modales respectives correspondant toutes à des déplacements de la masse  $m_1$  compris dans l'intervalle  $[0, 4]$ .

### 2.4.3 Systèmes continus

#### Poutre avec une non-linéarité localisée

On considère à présent un cas particulier de système constitué d'une poutre rectiligne de longueur  $l$ , appuyée à une extrémité (en  $x = 0$ ) et possédant une non-linéarité localisée cubique à l'autre extrémité en  $x = l$  (Figure 2.9).

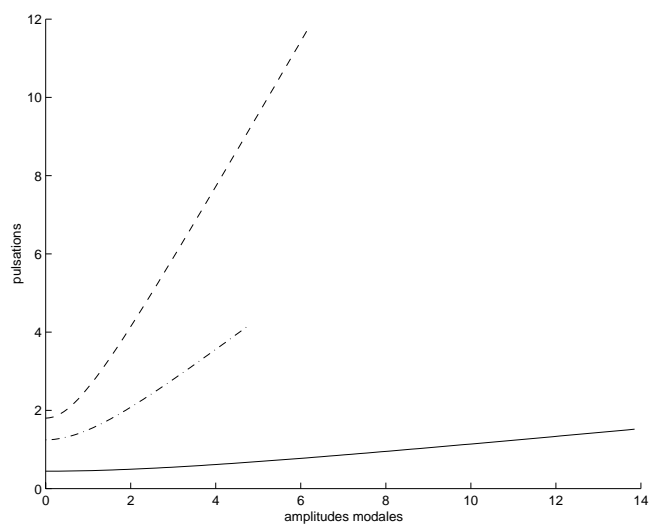


FIG. 2.6 – Pulsations propres  $\bar{\omega}_j(Q_j)$  du système (2.57), en fonction des amplitudes.

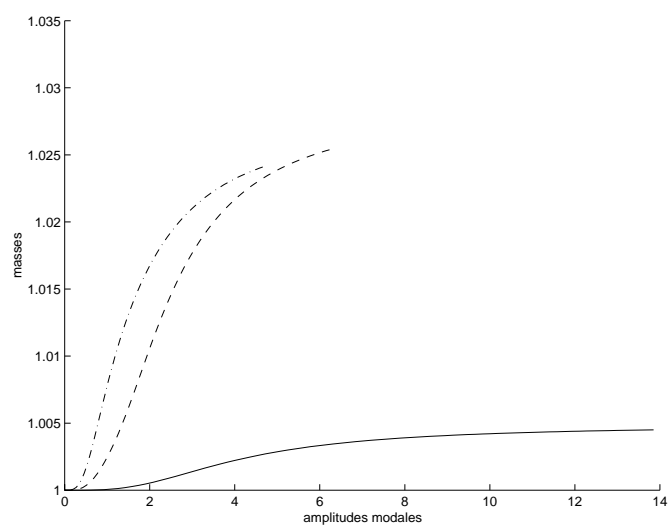


FIG. 2.7 – Masses modales  $\bar{\mu}_j(Q_j)$  du système (2.57).

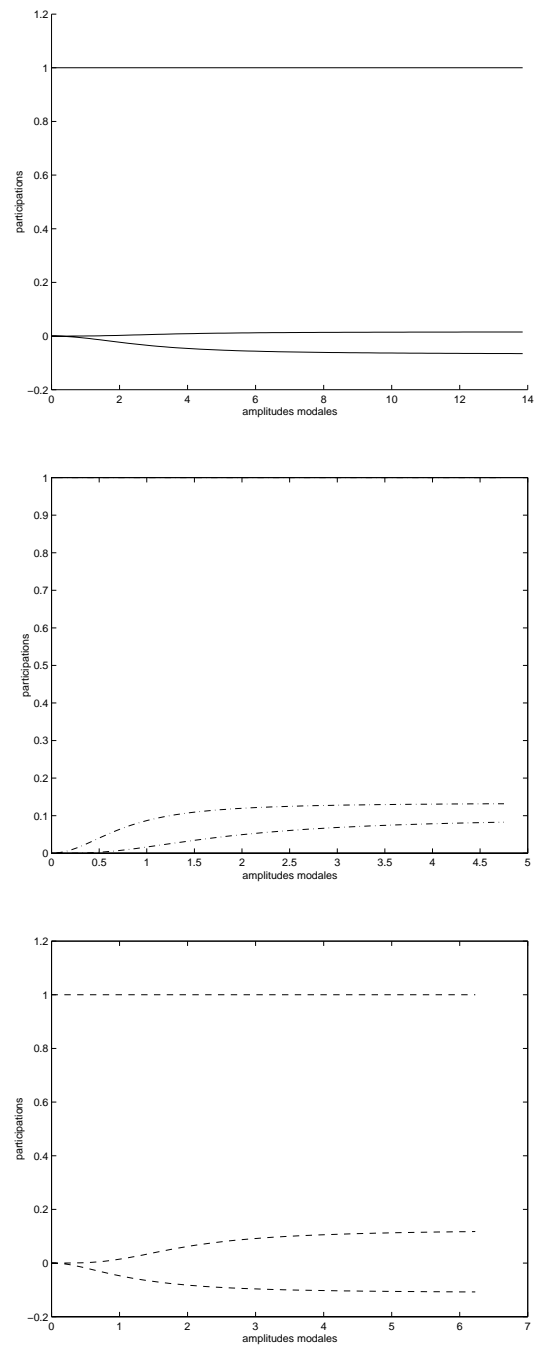


FIG. 2.8 – Participations modales pour le système (2.57). De haut en bas :  $\beta_{1k}(Q_1)$ ,  $\beta_{2k}(Q_2)$ ,  $\beta_{3k}(Q_3)$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

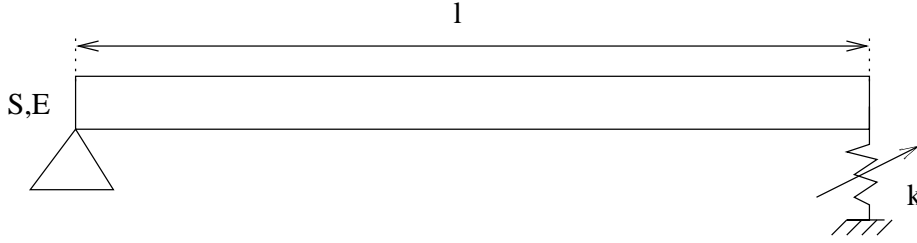


FIG. 2.9 – Poutre appuyée avec une liaison non-linéaire.

L'équation du mouvement en considérant de petits mouvements de flexion de la poutre dont la section  $S$  sera constante

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad (2.60)$$

où  $w(x, t)$  représente la déflexion transverse de la fibre moyenne, est associée aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0, \quad \forall t \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) &= 0, \quad \forall t \end{aligned} \quad (2.61)$$

et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) &= 0, \\ EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l, t) - kw(l, t) - \alpha w^3(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

On recherche la solution du problème constitué par les équations (2.60), (2.61) et (2.62) correspondant aux oscillations selon un mode normal sous la forme

$$w(x, t) = Q_j \bar{\Psi}_j(x) \cos \bar{\omega}_j t, \quad (2.63)$$

avec  $Q_j$  réel et la condition de normalisation

$$\bar{\Psi}_j\left(\frac{l}{2}\right) = 1. \quad (2.64)$$

En injectant l'équation (2.63) dans l'équation du mouvement (2.60) ainsi que dans les équations de conditions aux limites associées (2.61) et (2.62) on a, en ne conservant que le premier harmonique :

$$\frac{\partial^4 \bar{\Psi}_j}{\partial x^4}(x) - \bar{\lambda}^4 \bar{\Psi}_j(x) = 0, \quad (2.65)$$

$$\bar{\Psi}_j(0) = 0, \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_j}{\partial x^2}(0) = 0, \quad (2.67)$$



et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_j}{\partial x^2}(l) &= 0, \\ EI \frac{\partial^3 \bar{\Psi}_j}{\partial x^3}(l) - k \bar{\Psi}_j(l) - \frac{3}{4} \alpha Q_j^2 [\bar{\Psi}_j(l)]^3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

avec

$$\bar{\lambda} = \left( \frac{\rho S \bar{\omega}_j^2}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.69)$$

Les fonctions  $\bar{\Psi}_j(x)$  sont cherchées sous la forme

$$\bar{\Psi}_j(x) = A \sin \bar{\lambda} x + B \cos \bar{\lambda} x + C \sinh \bar{\lambda} x + D \cosh \bar{\lambda} x. \quad (2.70)$$

La condition d'obtention d'une solution non-triviale, vérifiant les conditions aux limites ainsi que l'équation (2.64) permet d'obtenir les pulsations des oscillations normales approchées à partir des solutions de l'équation caractéristique

$$2 \left[ k + 12 \alpha Q_j^2 \left[ \frac{\cos(\lambda/2) \cosh(\lambda/2)}{\cos(\lambda/2) + \cosh(\lambda/2)} \right]^2 \right] \sin \lambda \sinh \lambda - EI \lambda^3 (\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda) = 0, \quad (2.71)$$

avec  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Les solutions  $\lambda$  sont alors obtenues pour des amplitudes  $Q_j$  fixées en résolvant numériquement l'équation (2.71). Les fréquences apparaissent alors comme fonctions de l'amplitude modale  $Q_j$  et on les notera :

$$\bar{\omega}_j(Q_j) = \lambda^2(Q_j) \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (2.72)$$

Les solutions linéaires correspondant à  $Q_j = 0$  initialisent la recherche des modes. De même, les formes modales  $\bar{\Psi}_j(x, Q_j)$ , associées à ces fréquences seront exprimées en fonction de l'amplitude  $Q_j$ .

Les formes des modes évoluent progressivement vers les déformées d'une poutre sur deux appuis (Figure 2.11).

### Non-linéarités réparties

Les modes normaux peuvent être obtenus analytiquement par la méthode de Ritz pour des non-linéarités réparties [42]. Différentes techniques analytiques ont également été exploitées pour le calcul des modes de systèmes continus : méthode de perturbation et méthode des échelles multiples [56], méthode des variétés [73], pour des systèmes monodimensionnels ou bidimensionnels (plaques) [39].

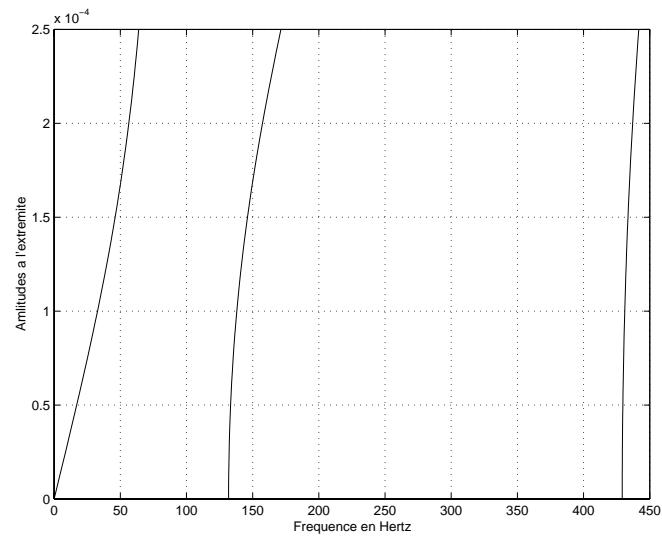


FIG. 2.10 – Pulsations de la poutre en fonction de l'amplitude à l'extrémité, (paramètres :  $l = 625 \text{ mm}$ ,  $E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^{12} = \text{N/m}^3$ ).

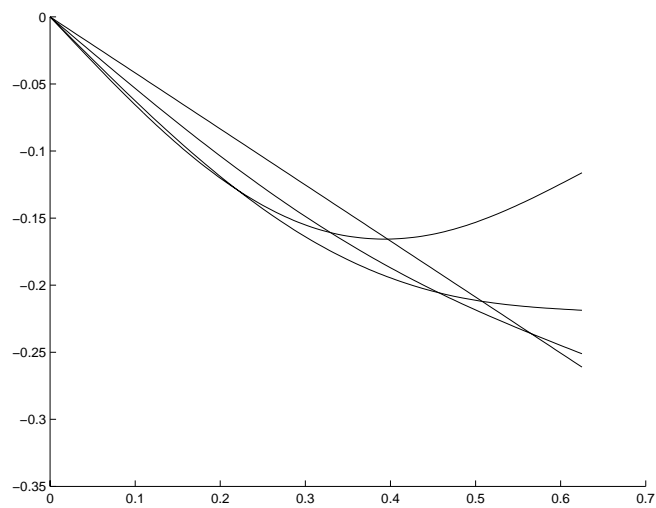


FIG. 2.11 – Evolution de la forme du premier mode d'une poutre appuyée avec une non-linéarité, pour plusieurs amplitudes.

## 2.5 Réponses forcées

### 2.5.1 Introduction

Dans le cadre des systèmes linéaires, la notion de mode offre un intérêt particulier notamment lors de la synthèse des réponses du système en régime forcé. Celle-ci s'appuie sur la connaissance des modes normaux qui constituent une base de l'espace des solutions ainsi que sur le principe de superposition et d'orthogonalité des modes. Le calcul de la réponse d'un système à  $n$  d.d.l. est ramené à la résolution de  $n$  équations découplées à une variable, qui fournissent les amplitudes modales, et à une simple sommation lors de la synthèse à partir des réponses modales :

$$u(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \Phi_i.$$

Lors de couplage des modes normaux importants par les forces dissipatives, les modes complexes sont utilisés afin de découpler les équations dans l'espace d'état. En ce qui concerne les systèmes non-linéaires, les modes non-linéaires d'un système dynamique constituent une famille de solutions périodiques particulières possédant certaines analogies avec les modes des systèmes linéaires, mais le principe de superposition n'est en général plus valable.

Cependant, certains auteurs ont étudié la possibilité d'utiliser les modes non-linéaires dans l'étude des solutions des problèmes de calcul des réponses forcées

$$M\ddot{u} + Ku + f(u) = p(t) = P\cos(\Omega t), \quad (2.73)$$

et

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku + f(u) = p(t) = P\cos(\Omega t). \quad (2.74)$$

Dans cette section, on s'intéressera au calcul des réponses forcées à l'aide des modes non-linéaires en faisant ressortir l'intérêt de leur utilisation dans ce contexte.

### 2.5.2 Couplage des coordonnées normales linéaires

Afin de montrer l'intérêt de l'utilisation des modes non-linéaires dans le calcul des réponses forcées des systèmes dynamiques, nous revenons à l'approche basée sur les modes linéaires. On considère le système dynamique non-linéaire et non-autonome (2.73) soumis à une excitation harmonique. Les solutions correspondant au régime stationnaire de (2.73) sont écrites en fonction des coordonnées modales linéaires :

$$u = \Phi \xi. \quad (2.75)$$

L'équation du mouvement (2.73) se traduit alors par

$$\ddot{\xi}_i(t) + c_i \dot{\xi}_i(t) + \Lambda_{ii} \xi_i(t) + \mathcal{F}_i(\xi) = {}^t \Phi_i p(t), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.76)$$

avec

$$\mathcal{F}(\xi) = {}^t \Phi f(\Phi \xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_i(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

et où  $c_i$  traduit l'hypothèse de découplage des forces d'amortissement dans la base modale  $\Phi$ . Par contre, les coordonnées modales linéaires sont *a priori* couplées par les termes non-linéaires. Afin de résoudre ce système de façon approchée dans le cadre de la méthode de Ritz, nous chercherons les amplitudes modales  $\xi_i$  sous forme de fonctions harmoniques :

$$\xi_i(t) \approx \alpha_i \cos(\Omega t + \vartheta_i), \quad (i = 1, \dots, n).$$

On aura ainsi, un système algébrique non-linéaire de  $2n$  équations et  $2n$  inconnues provenant des  $n$  amplitudes modales définies par deux paramètres ( $\alpha_i$  et  $\vartheta_i$ ). Nous illustrons ceci pour le système amorti non-linéaire à 3 degrés de liberté de l'exemple de la partie 2.4.2.

Afin d'obtenir les coordonnées modales de la réponse forcée, le système couplé (2.76) est résolu par la méthode de continuation présentée dans le chapitre 4. La méthode est initialisée avec les solutions correspondant au système linéaire associé à (2.73) pour la première pulsation d'excitation dans la gamme de fréquence. Les figures 2.12 et 2.13 donnent les amplitudes modales  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  en fonction de la pulsation d'excitation pour deux niveaux de forces dans une bande de fréquence contenant les résonances 2 et 3 du système.

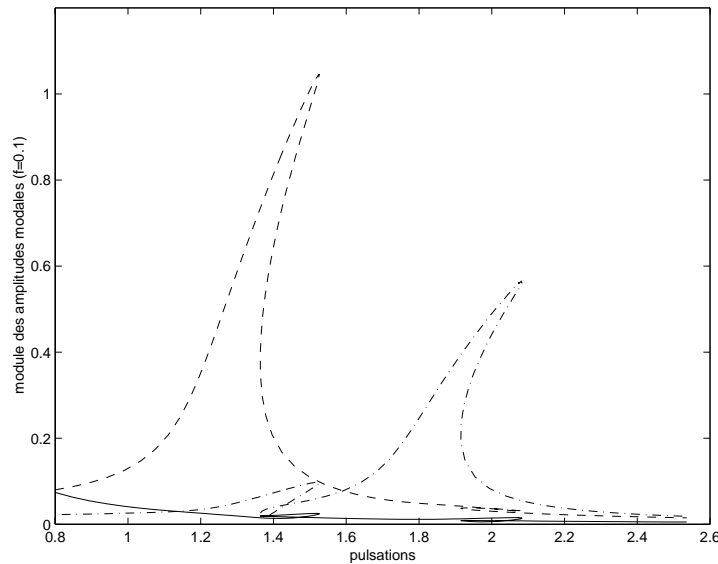


FIG. 2.12 – Couplage des coordonnées normales linéaires dans une réponse forcée ( $f = 0.1$ ) - :  $|\xi_1|$ , - - :  $|\xi_2|$ , .- :  $|\xi_3|$ .

Le couplage apparaît surtout entre les coordonnées modales  $\xi_2$  et  $\xi_3$  au voisinage de la deuxième résonance. La coordonnée modale  $\xi_3$  vient contribuer dans la deuxième résonance. Il s'agit là d'un couplage purement non-linéaire car les effets dissipatifs sont pris en compte par une matrice d'amortissement proportionnel dans ce cas (voir équations du système dans la partie 2.4.2) qui n'introduit aucun couplage entre les coordonnées modales.

Les courbes 2.12 et 2.13 seront à comparer, plus loin, avec les courbes 2.14 et 2.15 de réponse des coordonnées modales non-linéaires couplées dans les réponses forcées.

On pourra également se reporter aux courbes traduisant la déformation des modes non-linéaires lors de leurs résonances (courbes 2.8 du paragraphe 2.4.2). La variation de forme du

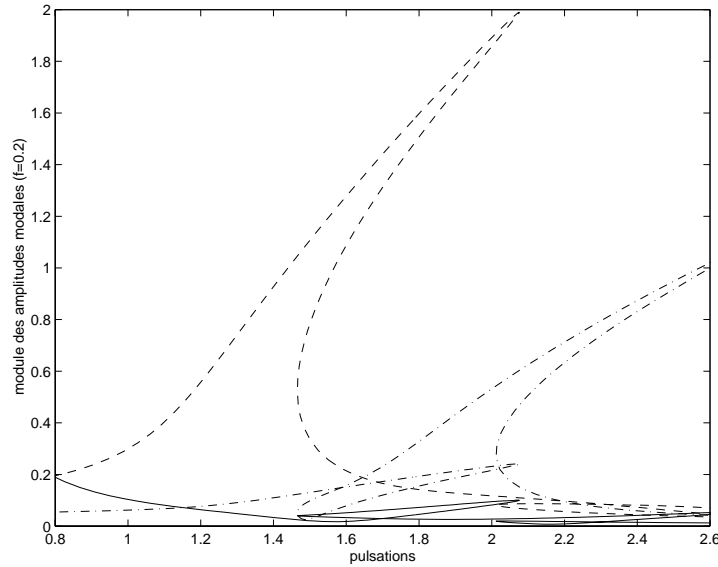


FIG. 2.13 – Couplage des coordonnées normales linéaires dans une réponse forcée ( $f = 0.25$ ) - :  $|\xi_1|$ , - - :  $|\xi_2|$ , . - :  $|\xi_3|$ .

mode non-linéaire résonnant introduit un couplage des modes linéaires. La description de cette résonance nécessite plusieurs coordonnées linéaires, alors qu'une seule coordonnée non-linéaire fournira une très bonne approximation de la réponse comme nous le verrons plus loin (Figures 2.14 et 2.15).

### Méthode du mode linéaire

Il existe des systèmes non-linéaires dont la forme des modes est invariante (modes similaires de la partie 1.3.3), mais dans le cas contraire, on peut aboutir à des résultats très éloignés de la solution [82] si l'on impose une déformée fixe lorsqu'on cherche la solution. Il est alors difficile de réduire le nombre d'inconnues dans le système algébrique par troncature de la base. En considérant qu'un seul mode linéaire participe à la réponse, ceci s'écrirait

$$\ddot{\xi}(t) + \Lambda\xi(t) + \mathcal{F}(\xi) = {}^t\Phi p(t), \quad (2.78)$$

avec

$$\mathcal{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_i(\xi_2) \\ \vdots \\ \mathcal{F}_n(\xi_n) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Il s'agit là de la méthode qu'on peut dénommer par méthode du mode linéaire découplé ("single linear mode method" [82]). Cette approximation ne pourra donner des résultats satisfaisants que si les modes ont des formes quasiment constantes. Dans certains cas, les modes

linéaires peuvent découpler les termes non-linéaires, comme pour l'exemple suivant :

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2x - y + (x - y)^3 &= f_x(t), \\ \ddot{y} + 2y - x - (x - y)^3 &= f_y(t),\end{aligned}$$

qui devient en effet, dans la base linéaire  $\Phi = [1 \quad 1; 1 \quad -1]$  :

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1 + \xi_1 &= f_x(t) + f_y(t), \\ \ddot{\xi}_2 + 3\xi_2 + 8\xi_2^3 &= f_x(t) - f_y(t),\end{aligned}$$

et on pourra alors traiter les équations séparément.

### 2.5.3 Méthode du mode non-linéaire isolé

#### Approximation de la réponse

La méthode dite *single non-linear mode method* [82], suppose qu'au voisinage de la résonance, un mode non-linéaire est prépondérant :

$$u(t) \approx q_j(t)\bar{\Phi}_j. \quad (2.80)$$

La coordonnée normale non-linéaire  $q_j(t)$  du mode résonnant est alors la solution de l'équation

$$\bar{\mu}_j(Q_j)\ddot{q}_j + \bar{\omega}_j^2(Q_j)q_j = \bar{f}_j(q_j), \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.81)$$

où on a

$$q_j(t) = Q_j \cos(\Omega t), \quad \bar{f}_j(Q_j) = {}^t\bar{\Phi}_j(Q_j)P,$$

et où  $\bar{\mu}_j$  et  $\bar{\omega}_j^2$  sont définis par (2.35).

Les équations (2.81) seront appelées équations normales non-linéaires. Les coordonnées normales vérifient :

$$q_j(t) = Q_j \cos \Omega t = \frac{\bar{f}_j(Q_j)}{\bar{\mu}_j(Q_j)(\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2)} \cos \Omega t.$$

La résonance non-linéaire s'effectue lorsque  $\bar{\omega}(Q_j)$  est proche de  $\Omega$ .

#### Qualité de l'approximation

Le comportement de l'erreur dans l'approximation (2.80) à été étudiée [82] en notant

$$u(t) = \bar{\Phi}_j(q_j)q_j(t) + \Delta u(q_1, \dots, q_n), \quad (2.82)$$

où  $\Delta u(q_1, \dots, q_n)$  est une fonction des coordonnées normales (2.81).

Au terme d'une analyse basée sur un exemple analytique particulier, Szemplińska-Stupnika montre que lorsque  $\Omega \rightarrow \bar{\omega}_j$ , l'erreur  $\Delta u(q)$  tend vers  $+\infty$  mais reste d'un ordre plus faible que l'amplitude  $q_j$ , justifiant ainsi la validité de l'approximation (2.80).

### 2.5.4 Prise en compte de la dissipation

Nous considérons à présent un système dissipatif discret à  $n$  degrés de liberté, soumis à une excitation harmonique :

$$M\ddot{x} + Kx + f(x, \dot{x}) = p(t) = P\cos(\Omega t). \quad (2.83)$$

La présence d'amortissement introduit *a priori* des différences de phase entre l'excitation et les réponses des coordonnées  $x_i$ . Dans l'hypothèse de faibles forces de dissipation, les coordonnées peuvent être considérées en phase ou en opposition de phase entre elles, la réponse sera généralement d'amplitude importante et pourra ainsi être considérée proche du mode normal non-linéaire [82] lorsque le système oscillera au voisinage de l'une de ses résonances. La réponse sera donc cherchée sous la forme :

$$x(t) \approx u(t) = Q_j \bar{\Phi}_j \cos(\Omega t + \vartheta_j). \quad (2.84)$$

En substituant l'expression (2.84) dans (2.83) et en appliquant la méthode de Ritz, on obtient les  $2 \times n$  conditions d'orthogonalités

$$\begin{aligned} (K - \Omega^2 M) \bar{\Phi}_j Q_j + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(Q_j \bar{\Phi}_j \cos \theta, -Q_j \Omega \bar{\Phi}_j \sin \theta) \cos \theta d\theta - P \cos \vartheta_j &= 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(Q_j \bar{\Phi}_j \cos \theta, -Q_j \Omega \bar{\Phi}_j \sin \theta) \sin \theta d\theta - P \sin \vartheta_j &= 0. \end{aligned}$$

En pré-multipliant ces équations par  ${}^t \bar{\Phi}_j$  et en utilisant la masse modale de l'équation (2.35), nous obtenons :

$$\bar{\mu}_j(Q_j)(\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2)Q_j = \bar{f}_j \cos \vartheta_j = {}^t \bar{\Phi}_j P \cos \vartheta_j, \quad (2.85)$$

où  $\bar{f}_j$  est la force modale non-linéaire, et on posera :

$$\bar{c}_j(Q_j, \Omega) = \frac{1}{\pi \Omega Q_j} {}^t \bar{\Phi}_j \int_0^{2\pi} f(Q_j \bar{\Phi}_j \cos \theta, -Q_j \Omega \bar{\Phi}_j \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.86)$$

désigné comme l'amortissement modal non-linéaire. On a alors :

$$- \Omega Q_j \bar{c}_j = \bar{f}_j \sin \vartheta_j. \quad (2.87)$$

En adoptant à présent une notation complexe pour la coordonnée modale non-linéaire dans le cas d'un système faiblement dissipatif, celle-ci sera définie par :

$$Q_j = \frac{\bar{f}_j}{\bar{\mu}_j(Q_j)(\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2) + \mathbf{i} \bar{c}_j(Q_j, \Omega) \Omega}. \quad (2.88)$$

Dans le cas où l'amortissement est de nature linéaire et visqueux, la fonction  $f(x, \dot{x})$  s'exprime par :

$$f(x, \dot{x}) = f_c(x) + C\dot{x}, \quad (2.89)$$

et le terme d'amortissement dans l'expression (2.88) sera alors :

$$\bar{c}_j(Q_j) = {}^t \bar{\Phi}_j(Q_j) C \bar{\Phi}_j(Q_j). \quad (2.90)$$

On constate alors que cet amortissement peut apparaître dépendant de l'amplitude par le biais de la variation de la forme du mode. De même, en considérant un amortissement hystérétique linéaire on aura :

$$Q_j = \frac{\bar{f}_j}{\mu_j(Q_j)(\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2) + i\bar{h}_j(Q_j)}, \quad (2.91)$$

avec :

$$\bar{h}_j(Q_j) = {}^t \bar{\Phi}_j(Q_j) H \bar{\Phi}_j(Q_j). \quad (2.92)$$

### Modes complexes non-linéaires

Lorsque les forces d'amortissement induisent des couplages importants, on introduira [67] la notion de mode non-linéaires complexes qui donneront lieu à un problème modal non-linéaire analogue à celui exposé précédemment mais écrit dans l'espace d'état. L'équation du système dans l'espace d'état

$$A\dot{y} + By + \hat{f}(y, \dot{y}) = \hat{p}(t), \quad (2.93)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, y = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}, \quad (2.94)$$

$$\hat{f}(y, \dot{y}) = \begin{Bmatrix} f(u, \dot{u}) \\ 0 \end{Bmatrix}, \hat{p}(t) = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.95)$$

permettra de poser le problème modal non-linéaire associé :

$$[\bar{B}(Q_j \bar{\Psi}_j) + s_j(Q_j)A] \bar{\Psi}_j = 0, \quad (2.96)$$

où  $\bar{\Psi}_j$  est le mode complexe non-linéaire,  $s_j$  la valeur propre complexe, solutions du problème algébrique non-linéaire (2.96). L'obtention de ces modes s'effectue également par une méthode itérative dans le cas général.

### 2.5.5 Expression à l'aide des modes non-linéaires

Afin de mettre en évidence l'avantage apporté par l'utilisation des modes non-linéaires dans la synthèse de réponses forcées, nous traitons à présent le problème sans hypothèse de découplage. Nous utiliserons comme exemple, le système dissipatif associé à (2.73)

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku + f(u) = p(t) = P \cos(\Omega t), \quad (2.97)$$

où  $C$  est la matrice d'amortissement. Afin d'exprimer le système d'équations (2.97) à l'aide des coordonnées modales non-linéaires, les solutions du système (2.97) sont recherchées sous forme d'une combinaison linéaire de  $m$  modes normaux non-linéaires du système conservatif (2.73) :

$$u(t) \approx \sum_{j=1}^m \bar{\Phi}_j q_j(t) \quad (2.98)$$

avec  $q_j(t) = \text{Re}(Q_j e^{i\Omega t})$ .

Les  $\bar{\Phi}_j(Q_j)$  pour  $(j = 1, \dots, m)$  sont les modes définis par (2.32) et les  $q_j(t)$  sont ici des amplitudes modales déterminées simultanément et sont différentes *a priori* des coordonnées



normales définies en (2.81) (*single non-linear mode*). On suppose connues les pulsations propres non-linéaires  $\bar{\omega}_j$ , ( $j = 1, \dots, m$ ), et on injecte l'expression (2.98) dans le système (2.97) pré-multiplié par  $\bar{\Phi}_j$  pour ( $j = 1, \dots, m$ ). Compte tenu de la définition de  $\bar{\mu}_{ij} = {}^t \bar{\Phi}_i M \bar{\Phi}_j$ , et en utilisant les équations (2.32) traduisant l'oscillation libre des modes non-linéaires on a :

$${}^t \bar{\Phi}_j \bar{K}(Q_i \bar{\Phi}_i) \bar{\Phi}_i = \bar{\omega}_i^2 {}^t \bar{\Phi}_j M \bar{\Phi}_i = \bar{\omega}_i^2 \bar{\mu}_{ij}.$$

Il est alors possible de présenter le système d'équation (2.97) en utilisant les paramètres modaux non-linéaires :

$$\bar{\mu}_j \left( \ddot{q}_j + \bar{\omega}_j^2(Q_j) q_j \right) + \bar{c}_j \dot{q}_j = {}^t \bar{\Phi}_j p - \sum_{i \neq j} [\bar{\mu}_{ij} (\ddot{q}_i + \bar{\omega}_i^2(Q_i)) + \bar{c}_{ij} \dot{q}_i] + {}^t \bar{\Phi}_j \left[ \sum_{i=1}^m f(q_i \bar{\Phi}_i) - f\left(\sum_{i=1}^m q_i \bar{\Phi}_i\right) \right]. \quad (2.99)$$

$\bar{c}_{ij}$  correspond au couplage des modes normaux non-linéaires par l'amortissement et est défini par :

$$\bar{c}_{ij}(Q_i, Q_j) = {}^t \bar{\Phi}_i(Q_i) C \bar{\Phi}_j(Q_j).$$

Compte tenu de  $q_j(t) = \text{Re}(Q_j e^{i\Omega t})$ , nous avons un système de  $m$  équations algébriques non-linéaires couplées (si on a  $m$  modes) sur les  $Q_j$  :

$$[\bar{\mu}_j(-\Omega^2 + \bar{\omega}_j^2(Q_j)) + i\Omega \bar{c}_j] Q_j = {}^t \bar{\Phi}_j P - \sum_{k \neq j} [\bar{\mu}_{jk}(\bar{\omega}_k^2(Q_k) - \Omega^2) + i\Omega \bar{c}_{kj}] Q_k + G_j^{ml}(Q_1, \dots, Q_m) \quad (2.100)$$

pour ( $j = 1, \dots, m$ ), et où  $i^2 = -1$ , avec en résumé, les fonctions des amplitudes suivantes :

$$\begin{aligned} & \bar{\Phi}_j(Q_j), \\ & \bar{\mu}_{ij}(Q_i, Q_j), \\ & \bar{\mu}_j(Q_j), \\ & \bar{c}_j(Q_j), \\ & \bar{c}_{ij}(Q_i, Q_j), \quad (i, j = 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (2.101)$$

$G_j^{ml}$  est une fonction non-linéaire des amplitudes modales, construite à partir de  $f$  et des fonctions  $\bar{\Phi}_i(Q_i)$  par application de la méthode de Ritz, contenant des termes de couplage entre les  $Q_i$ .

Les équations (2.100) prennent en compte les couplages dus à la non-orthogonalité des modes non-linéaires et les termes de couplage non-linéaires  $G_j^{ml}$  négligés par la méthode du mode non-linéaire isolé.

Le système (2.100) doit être résolu par une méthode itérative. De même, nous avons utilisé les méthodes itératives par continuation sur un paramètre pour obtenir les  $m$  amplitudes modales. Les figures suivantes illustrent l'évolution des coordonnées modales non-linéaires sur un exemple de réponse forcée (voir exemple de la partie 2.4.2).

Les coordonnées modales non-linéaires (Figures 2.14 et 2.15) sont quasiment découplées aux résonances contrairement aux coordonnées dans la base linéaire (Figures 2.12 et 2.13).

## 2.5.6 Calcul des réponses

### Superposition

Le calcul des réponses s'effectue dans tous les cas par sommation des modes pondérés par leurs amplitudes respectives selon l'équation (2.98). Les méthodes diffèrent donc sur le calcul

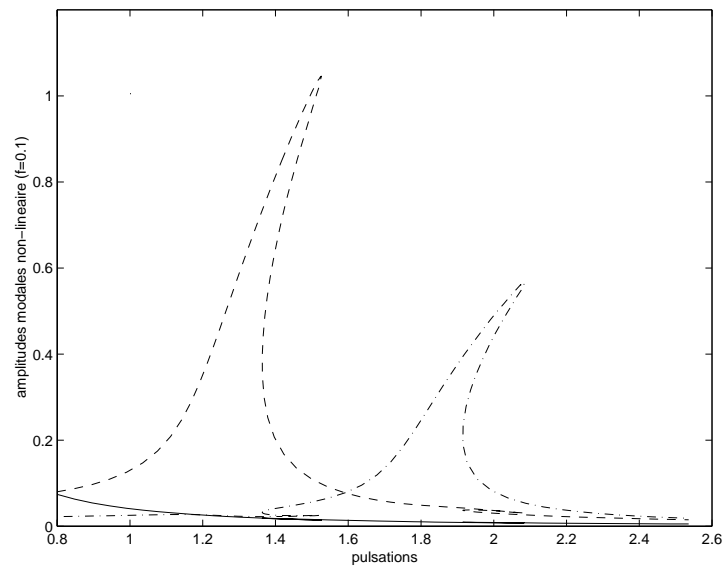


FIG. 2.14 – Couplage des coordonnées normales non-linéaires dans une réponse forcée ( $f = 0.1$ ); - :  $|Q_1|$ , - - :  $|Q_2|$ , . - :  $|Q_3|$ .

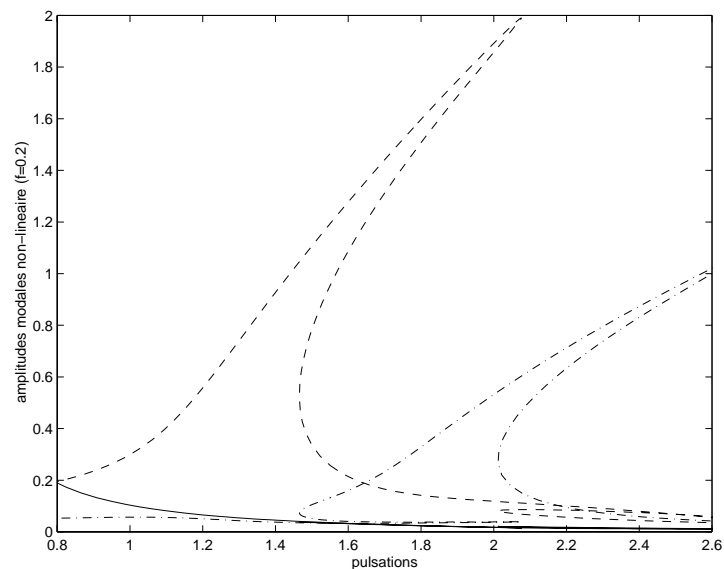


FIG. 2.15 – Couplage des coordonnées normales non-linéaires dans une réponse forcée ( $f = 0.25$ ); - :  $|Q_1|$ , - - :  $|Q_2|$ , . - :  $|Q_3|$ .

des coordonnées modales et notamment sur la prise en compte ou non de leurs interactions au cours du calcul.

L'approche *single non-linear mode* est proposée par Szemplinska-Stupñika [82] pour calculer les réponses au voisinage des résonances. Lorsque les résonances sont séparées, il est possible d'additionner les participations de chaque mode non-linéaire pour obtenir la réponse dans toute une bande fréquentielle contenant plusieurs résonances non-linéaires [67]. On alors une approximation au premier harmonique de la réponse sur cette bande. Si on se focalise sur une résonance particulière, les contributions des autres modes (non-résonnants), seront considérées linéaires. Cependant, les exemples traités dans cette étude montreront que lorsque les résonances sont proches, les pics peuvent se "surplomber" *i.e.* pour une pulsation d'excitation  $\Omega$ , le système peut vibrer selon l'un ou l'autre des modes sur le pic respectif [82]. Ce sont les conditions initiales qui gouvernent alors le régime adopté par le système. Il convient alors de faire une analyse des bassins d'attraction des différentes solutions possibles pour déterminer quel pic de résonance est effectivement suivi par le système compte tenu des conditions initiales [82]. Lors d'un balayage de la fréquence d'excitation, par exemple, un phénomène de saut peut faire passer brutalement le système d'une résonance à une autre (voir les exemples dans la partie 2.4.2). La sommation des modes isolés n'est alors pas légitime et peut alors donner une mauvaise approximation de la solution (voir plus loin la figure 2.20 dans la partie 2.6).

## Troncature

Dans le cas de résonances proches, nous avons considéré le couplage des coordonnées des modes non-linéaires dans la réponse afin d'obtenir une meilleur approximation des réponses possibles du système. Une fois que les modes non-linéaires sont calculés il peut être très intéressant de réduire le nombre de modes non-linéaires couplés à traiter simultanément. On réduira alors d'autant la taille du problème algébrique non-linéaire à résoudre pour obtenir les amplitudes modales non-linéaires dans la réponse forcée. Les autres modes, non couplés dans la bande fréquentiel d'étude peuvent être pris en compte de façon isolé et sommés *a posteriori*.

Les méthodes prenant en compte les couplages aboutissent à des systèmes algébriques qui couplent *a priori* tous les modes (soit  $m$  modes). En pratique, on a souvent un groupe de  $p$  modes proches entre eux qu'il faut considérer couplés, mais que l'on peut découpler des  $q$  autres modes avec une bonne approximation (on a  $p + q = m$ ). Afin d'alléger la procédure de résolution, il peut être avantageux de ne résoudre (2.100) pour un nombre limité ( $p$ ) de modes dont on désire prendre le couplage en compte. Les autres modes peuvent tout de même être introduits comme suit :

Dans une première étape, on pourra calculer les participations des  $m$  modes par la méthode des modes non-linéaires découplés (*single mode method*). Les participations des  $q$  modes obtenus par cette méthode sont alors introduites dans le système algébrique dont elles ne sont plus considérées comme des inconnues. Il restera  $q$  inconnues couplées dans le système algébrique qui doivent être calculées simultanément. On ne résout alors que pour  $m$  inconnues.

## 2.6 Exemples, calcul des réponses forcées

### 2.6.1 Méthode de sommation des modes isolés

Afin d'illustrer la méthode de synthèse des réponses fréquentielles de systèmes non-linéaires nous reprendrons le système dynamique (2.57). La méthode procède par simple superposition des contributions provenant de chacun des modes non-linéaires dont les amplitudes sont déterminées par la méthode du mode non-linéaire isolé (*single non-linear mode method*). Afin de réaliser la synthèse des réponses, les paramètres modaux de ce système sont lissés au moyen de fractions rationnelles pour les trois modes non-linéaires de ce système.

Nous introduisons trois éléments dissipatifs et une force d'excitation harmonique dans le système (Figure 2.16) selon les équations :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2(x_1 - x_2)^3 &= F \sin(\Omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - x_3) + \alpha_2(x_2 - x_1)^3 + \alpha_3(x_2 - x_3)^3 &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + c_3 \dot{x}_3 + k_3(x_3 - x_2) + \alpha_3(x_3 - x_2)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.102)$$

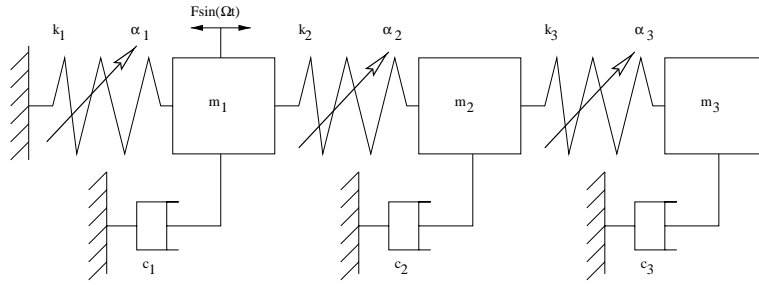


FIG. 2.16 – Système dissipatif discret non-linéaire en excitation forcée ( $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = .05$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ ).

Les réponses de chaque mode sont calculées en résolvant (2.88), puis additionnées dans la bande de fréquence (Figure 2.17).

Nous avons comparé les résultats obtenus pour cet exemple avec la méthode d'intégration temporelle de Runge-Kutta d'ordre 4 [76]. Cette méthode a été utilisée pour simuler un test d'excitation en sinus balayé avec deux niveaux de force  $F = 0.1$  et  $F = 0.15$ , dans les deux sens de balayage ascendant et descendant. Le signal est ensuite projeté sur l'harmonique  $\Omega$ .

Les figures 2.18 2.19 et 2.20, illustrent la comparaison des réponses obtenues par la méthode de superposition modale et celles obtenues à partir de l'intégration temporelle.

La superposition des modes isolés, calculés de façon indépendante, montre sa limite d'utilisation dans cet exemple. La sommation des contributions semble en effet engendrer des anomalies sur certains pics (Figures 2.19 et 2.20, deuxième pic).

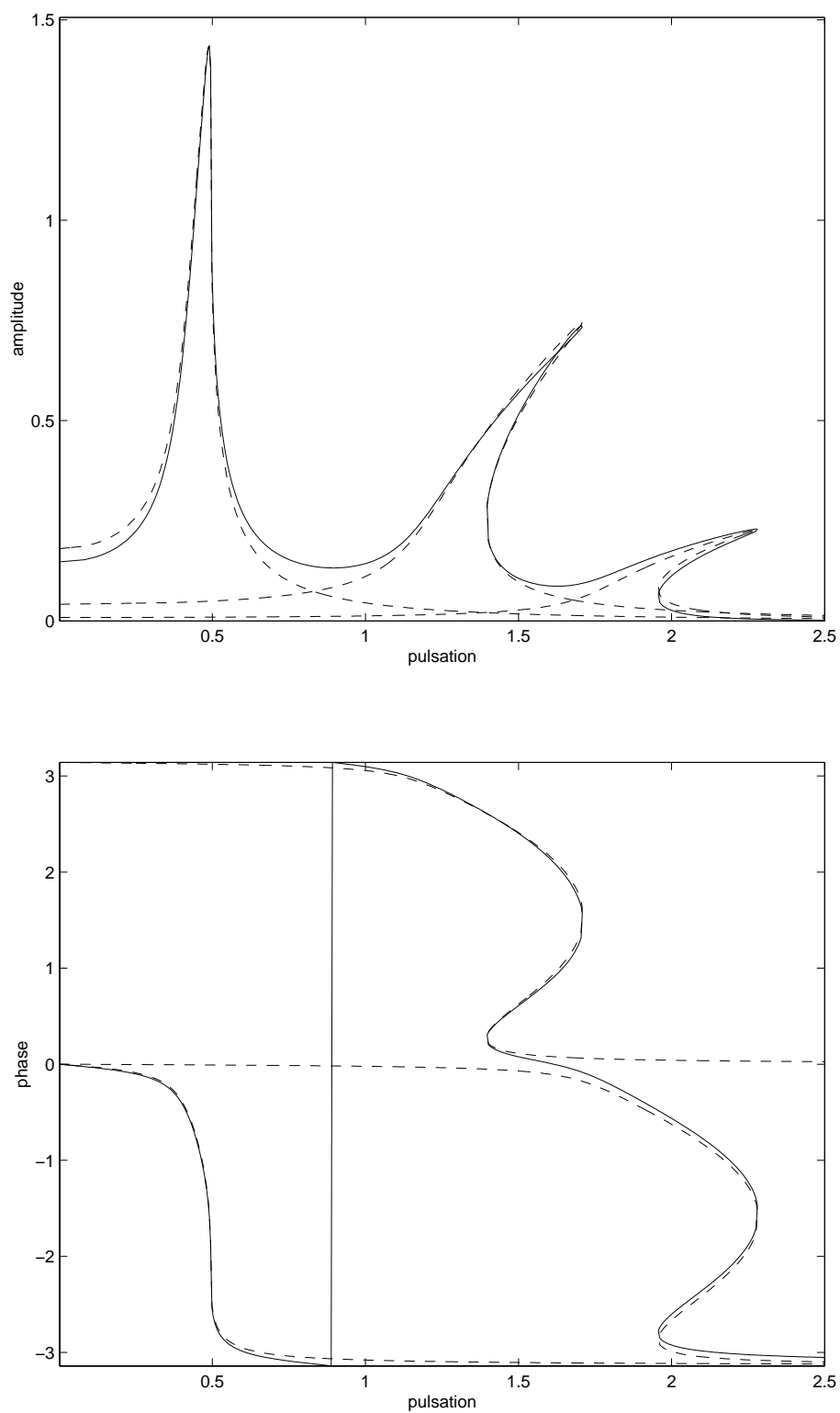


FIG. 2.17 – Superposition des participations des modes isolés,  $F = 0.15 \sin(\Omega t)$ , (- -) : participations modales, (-) : superposition.

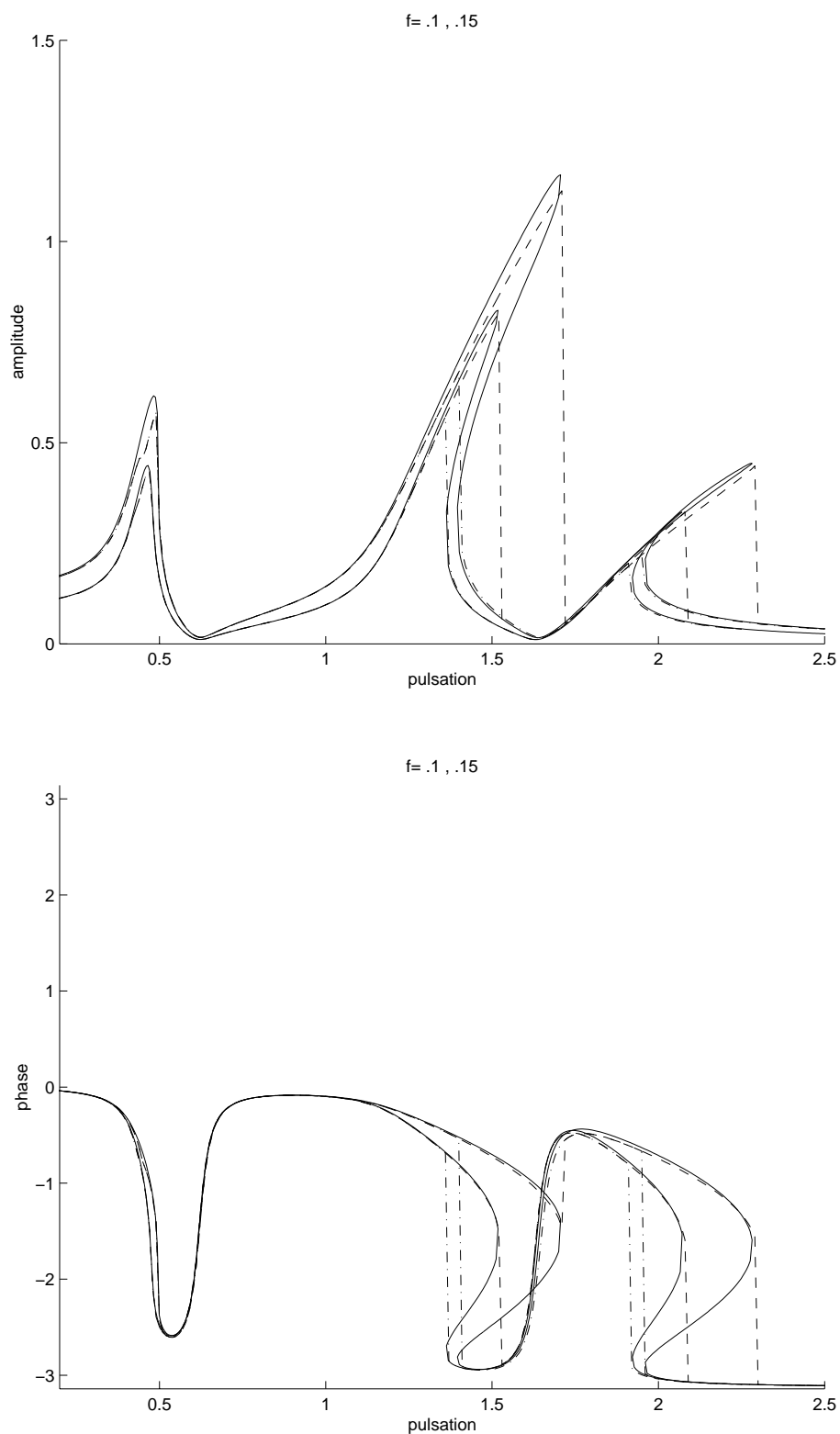


FIG. 2.18 – Méthode de superposition des modes non-linéaires isolés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.), masse  $m_1$ ,  $F = 0.1, 0.15$ .

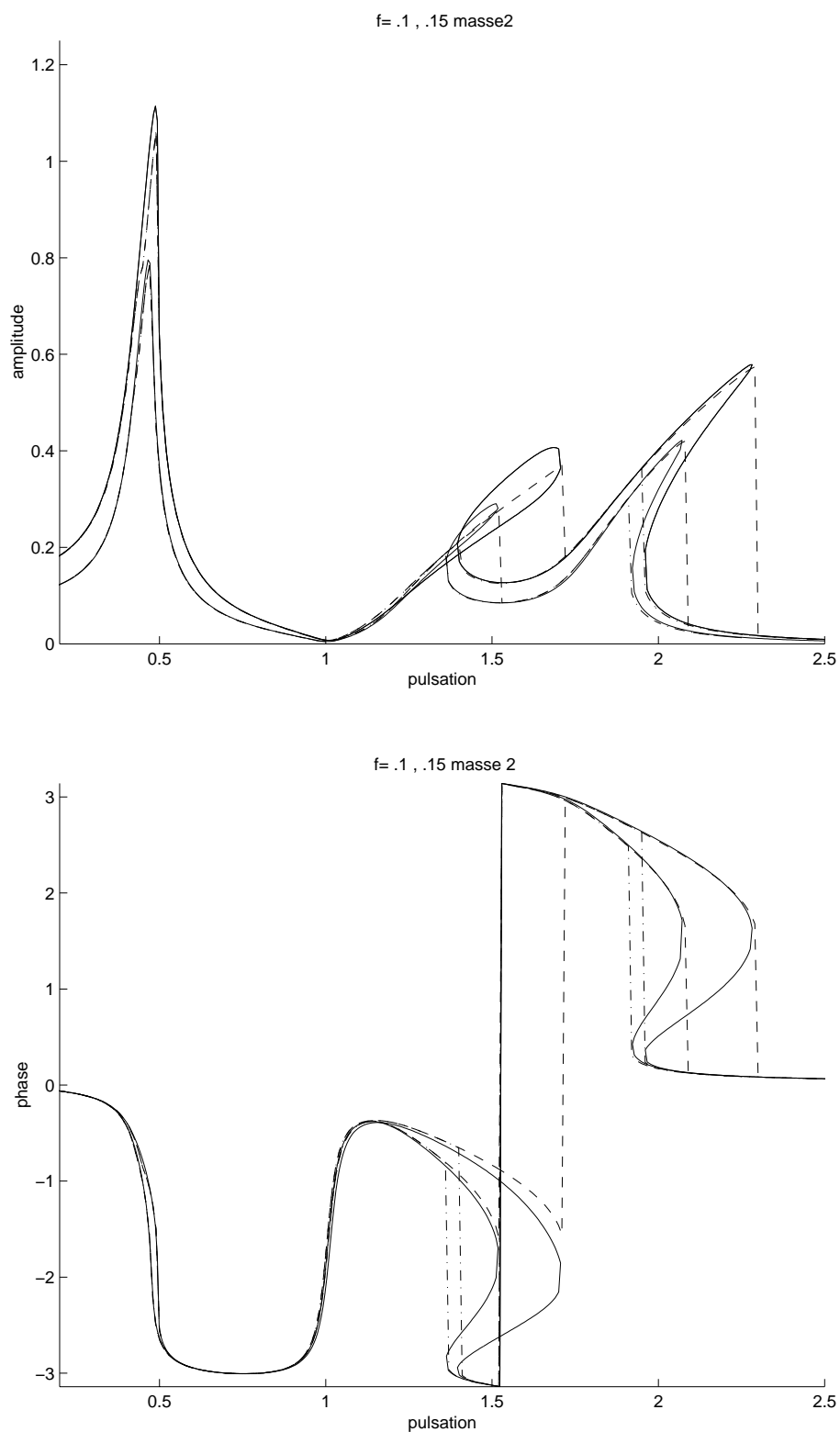


FIG. 2.19 – Méthode de superposition des modes non-linéaires isolés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : --, descendant : -.) , masse  $m_2$ ,  $F = 0.1, 0.15$ .

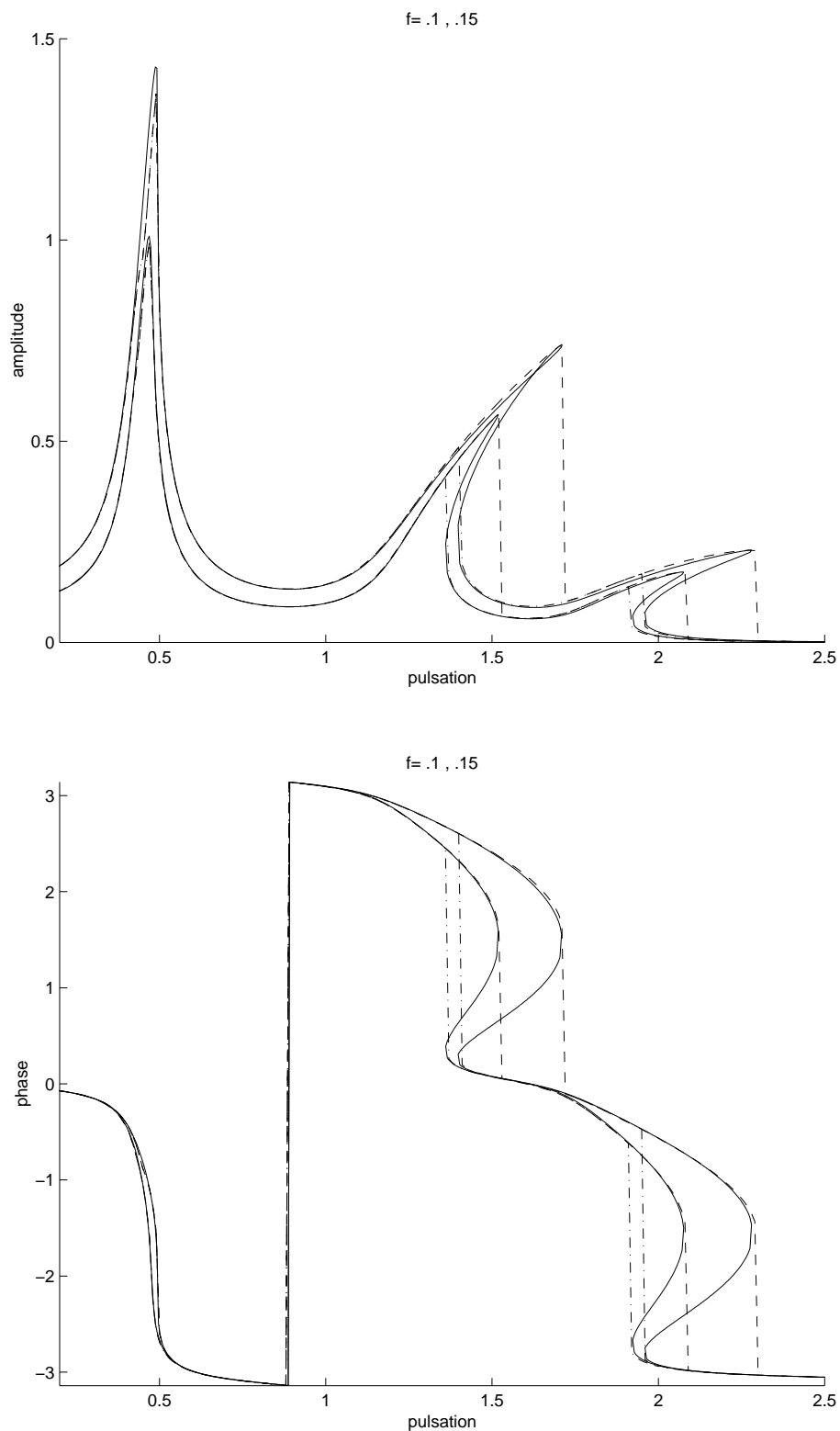


FIG. 2.20 – Méthode de superposition des modes non-linéaires isolés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.) , masse  $m_3$ ,  $F = 0.1, 0.15$ .



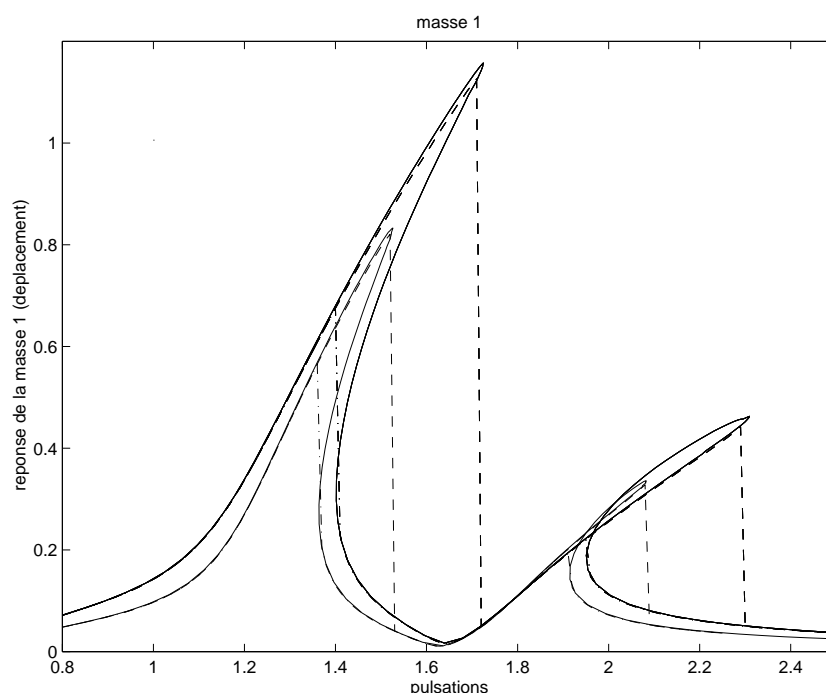


FIG. 2.21 – Méthode de superposition des modes non-linéaires couplés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : --, descendant : -.), masse  $m_1$ ,  $F = 0.1, 0.15$ .

## 2.6.2 Calcul à l'aide des modes couplés

On utilise cette fois les coordonnées modales non-linéaires couplées calculées par résolution du problème couplé d'équation (2.100).

Si l'on prend en compte les trois modes non-linéaires calculés plus haut, le système algébrique possède trois inconnues complexes. Ce système a été résolu dans la bande de fréquence  $[0.8, 2.5]$  afin de comparer les résultats avec la méthode précédente sur les deuxième et troisième pics de la réponse.

On constate une amélioration de la prédiction des réponses par rapport à la méthode précédente. La réponse calculée est ici très proche de la solution obtenue par la méthode de Runge-Kutta (Figures 2.21, 2.22 et 2.23). Notamment, les branches stables des pics de résonance semblent bien mieux approchées. On remarque d'ailleurs que la branche instable (qui n'est pas donnée par la méthode temporelle), peut être positionnée au dessus de la branche stable. La troncature du premier mode permet de ramener le système algébrique à un système à deux inconnues. Le premier mode est alors calculé par la méthode du mode isolé. Les réponses avec et sans troncature se sont révélées quasiment identiques.

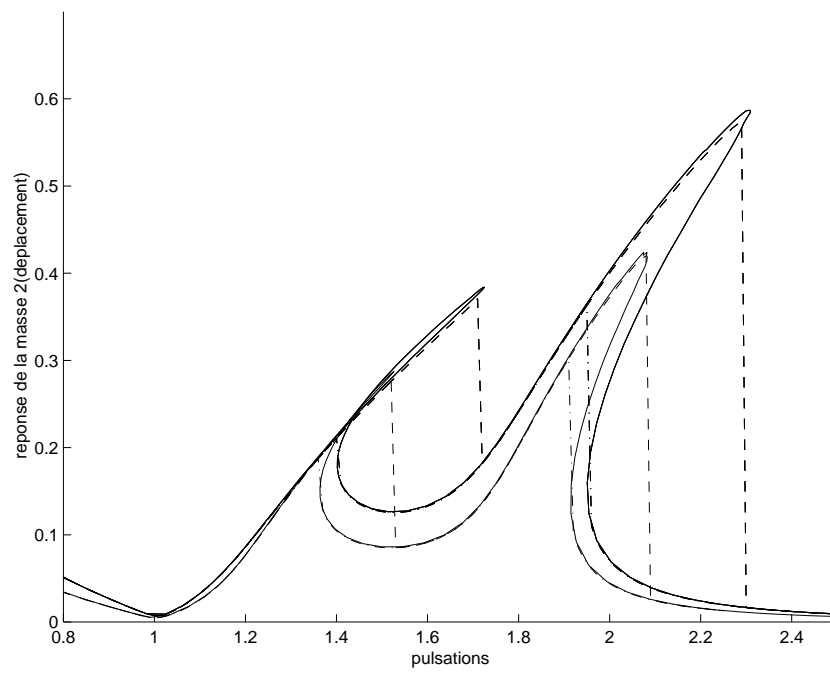


FIG. 2.22 – Méthode de superposition des modes non-linéaires couplés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.) , masse  $m_2$ ,  $F = 0.1, 0.15$ .

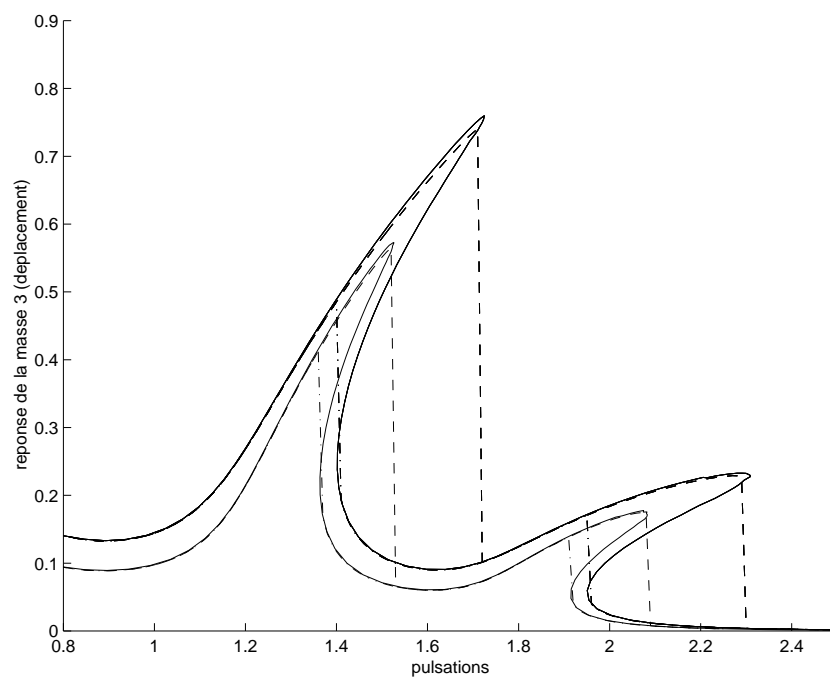


FIG. 2.23 – Méthode de superposition des modes non-linéaires couplés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.), masse  $m_3$ ,  $F = 0.1, 0.15$ .

## 2.7 Conclusion

L'approximation des modes non-linéaires au moyen de la méthode de Ritz a été présentée. Les modes non-linéaires sont obtenus par résolution d'un problème modal non-linéaire, traité par une procédure numérique de résolution d'un système d'équations algébriques non-linéaires. Les modes obtenus, permettent de synthétiser les réponses forcées après avoir calculé leurs participations modales de façon indépendante, en utilisant l'hypothèse du mode résonant. Ces participations sont ensuite sommées. Cette approche semble fournir d'excellents résultats lorsque les résonances sont assez éloignées. Dans le cas où celles-ci se rapprochent, les exemples traités illustrent comment la superposition des "modes isolés" peut s'éloigner de la solution exacte.

# Chapitre 3

## Systèmes dissipatifs faiblement non-linéaires

### 3.1 Introduction

Une définition de mode a été introduite par Shaw et Pierre [71], [72], dans le cadre de systèmes dynamiques discrets à  $n$  degrés de liberté, dissipatifs, linéarisables autour d'un point d'équilibre (*i.e.* faiblement linéaires). Cette méthode a été également appliquée aux cas de systèmes continus par les mêmes auteurs dans [73]. Les modes sont vus comme des surfaces de l'espace des phases et paramétrées par deux variables de déplacement et de vitesse. Cette définition s'accompagne d'une technique particulière empruntée à celle utilisée dans la théorie de la variété centrale [12] pour l'obtention de ces variétés localement à un point d'équilibre par un développement en série. L'existence de variétés centrales invariantes dans l'espace des phases pour les systèmes différentiels discrets non-linéaires est connue [12]. Ces variétés sont utilisées dans la réduction pour l'étude de la stabilité et des bifurcations. Lorsque le paramètre de bifurcation prend sa valeur critique, la théorie de la variété centrale fournit une approximation sous forme de série de la variété invariante, c'est à dire essentiellement une hypersurface, sur laquelle se produit la bifurcation. Elle permet d'obtenir un système d'équations différentielles qui décrit la dynamique par un système réduit au voisinage de la bifurcation. Cette technique permet également de reconstruire d'une manière approchée, des solutions générales du système dynamiques en oscillations libres à partir de ces modes selon ce qui est considéré par les auteurs [72] comme une extension de la technique de superposition.

### 3.2 Modes et variétés invariantes réelles

La méthode est originellement formulée à l'aide de variétés réelles [72] en écrivant tout d'abord les équations dynamiques sous forme d'un système du premier ordre dans l'espace des phases :

$$\begin{aligned}\dot{u}_i &= v_i, \\ \dot{v}_i &= g_i(u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n), \quad (i = 1, \dots, n).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Les fonctions  $g_i$  représentent des forces non-linéaires linéarisables et développables en série de Taylor au voisinage du point d'équilibre. Le mouvement du système est décrit par les couples

déplacement-vitesse  $(u_i, v_i)$  et on supposera l'existence d'au moins un point d'équilibre qui sera ramené à l'origine  $O : u_i = 0, (i = 1, \dots, n)$ .

Nous supposons qu'il est possible de décrire le mouvement à l'aide de deux coordonnées arbitraires (par exemple  $u_1, v_1$ ) notées  $u, v$  par la suite :

$$u_i = X_i(u, v), \quad v_i = Y_i(u, v), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.2)$$

L'équation (3.2) représente une surface de dimension 2 dans l'espace des phases de dimension  $2n$ .

La notion de mode donnée dans [72] repose sur les définitions suivantes :

1- *Un mode normal pour le système non-linéaire autonome (3.1), est une trajectoire astreinte à une variété invariante de dimension 2 dans l'espace des phases. Cette variété passe par l'origine ( $O$ ) et est tangente en  $O$ , à un hyperplan engendré par une solution propre du système linéarisé en  $O$ .*

2- *Un ensemble invariant pour un système dynamique est un sous ensemble de l'espace des phases tel que si le système prend sa condition initiale dans cet ensemble, il y demeure à tout instant.*

Afin d'obtenir l'équation de cette variété nous supprimons la variable temps dans (3.1) et (3.2). Nous écrivons d'abord, en dérivant (3.2) :

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \frac{\partial X_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial X_i}{\partial v} \dot{v}, \\ \dot{v}_i &= \frac{\partial Y_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Y_i}{\partial v} \dot{v}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Par substitution, de (3.3) et de (3.2) dans (3.1), nous obtenons un système de  $2(n - 1)$  équations ne faisant figurer que les variables  $u$  et  $v$  et dont les fonctions  $X_i(u, v)$  et  $Y_i(u, v)$  sont les inconnues pour  $i = (2, \dots, n)$  :

$$\begin{aligned} Y_i(u, v) &= \\ &\frac{\partial X_i}{\partial u} v + \frac{\partial X_i}{\partial v} g_1(u, X_2(u, v), \dots, X_n(u, v); v, Y_2(u, v), \dots, Y_n(u, v)), \\ g_i(u, X_2(u, v), \dots, X_n(u, v); v, Y_2(u, v), \dots, Y_n(u, v)) &= \\ &\frac{\partial Y_i}{\partial u} v + \frac{\partial Y_i}{\partial v} g_1(u, X_2(u, v), \dots, X_n(u, v); v, Y_2(u, v), \dots, Y_n(u, v)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.3 Obtention des modes

Les équations (3.4) sont en général assez complexes mais permettent de rechercher une solution approchée sous forme d'un développement en série des fonctions  $X_i(u, v)$  et  $Y_i(u, v)$  comme suit :

$$X_i(u, v) = a_{0i} + a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 + a_{6i}u^3 + a_{7i}u^2v + a_{8i}uv^2 + a_{9i}v^3 + \dots$$

$$Y_i(u, v) = b_{0i} + b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 + b_{6i}u^3 + b_{7i}u^2v + b_{8i}uv^2 + b_{9i}v^3 + \dots \quad (3.5)$$

Les séries (3.5) sont tronquées à un certain degré et substituées dans (3.4). Les termes sont rassemblés selon les puissances des monômes en  $u^p v^q$  pour fournir un nouvel ensemble d'équations algébriques que l'on cherchera à résoudre afin d'obtenir les coefficients  $a_{ki}$  et  $b_{ki}$ . Les coefficients  $a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i}$  correspondant aux modes linéaires sont déterminés en premier lieu par une méthode standard de calcul des solutions propres d'un système linéaire. En substituant les valeurs trouvées dans le système algébrique, on détermine de proche en proche, les coefficients des monômes de degrés plus élevés par résolution d'un problème linéaire à chaque étape. Une fois obtenues les fonctions réelles  $X_i$  et  $Y_i$ , leurs expressions sont substituées dans l'équation (3.1) afin d'obtenir l'équation dynamique de l'oscillation en mode normal :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= g_1(u, X_2(u, v), \dots, X_n(u, v); v, Y_2(u, v), \dots, Y_n(u, v)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les équations du type (3.6) correspondent à chacun des modes du système linéarisé autour de chaque point d'équilibre et peuvent être résolues par les méthodes classiques (voir méthode de Linstedt-Poincaré, méthode des échelles multiples dans le chapitre 4). Les coefficients constants  $a_{0i}$  de l'équation (3.5) permettent de prendre en compte des solutions translatées par rapport à l'origine correspondant à la multiplicité des points d'équilibre que peut engendrer la non-linéarité.

Dans le cas particulier de modes réels linéaires, on aura :

$$u_i = a_{1i}u + a_{2i}v, \quad v_i = b_{1i}u + b_{2i}v,$$

avec

$$a_{2i} = 0, \quad b_{1i} = 0, \quad a_{1i} = b_{2i},$$

pour ( $i = 2, \dots, n$ ). Si ces coefficients n'ont pas cette particularité, le mode est complexe.

## 3.4 Analyse modale

Les coordonnées modales non-linéaires peuvent être utilisées pour représenter des solutions générales aux équations du mouvement de façon approchée. La méthode que nous allons exposer se réduit à la superposition modale de modes linéaires si le système est linéaire et peut donc être considérée comme une extension de celle-ci. Les modes sont notés sous forme matricielle de la façon suivante en notant  $\mathbf{z} = {}^t (u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n)$  :

$$\mathbf{z} = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \\ b_{1n} & b_{2n} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{32}u + a_{42}v & a_{52}v \\ b_{32}u + b_{42}v & b_{52}v \\ \vdots & \vdots \\ a_{3n}u + a_{4n}v & a_{5n}v \\ a_{3n}u + b_{4n}v & b_{5n}v \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{62}u^2 + a_{82}v^2 & a_{72}u^2 + a_{92}v^2 \\ b_{62}u^2 + b_{82}v^2 & b_{72}u^2 + b_{92}v^2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{6n}u^2 + a_{8n}v^2 & a_{7n}u^2 + a_{9n}v^2 \\ a_{6n}u^2 + b_{8n}v^2 & b_{7n}u^2 + b_{9n}v^2 \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots \quad (3.7)$$

Soit, sous forme plus compacte :

$$\mathbf{z} = \{\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1(u, v) + \mathbf{m}_2(u, v)\} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots, \quad (3.8)$$

où la matrice  $\mathbf{m}_0$  correspond au mode linéaire écrit avec le paramétrage déplacement-vitesse, et  $\mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{m}_2$ , définissent les termes quadratiques et cubiques du mode non-linéaire.

A chaque mode est associé un couple  $(u, v)_k$  et la "matrice modale non-linéaire"  $\mathbf{M}$  est constituée en assemblant les expressions (3.8). La transformation reliant le vecteur de coordonnées modales  $\mathbf{w}$  constitué de l'assemblage des  $(u, v)_k$  :

$${}^t\mathbf{w} = [(u, v)_1 (u, v)_2 \dots (u, v)_k \dots (u, v)_n],$$

et les coordonnées physiques  $\mathbf{z}$  s'écriront :

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{M}(\mathbf{w})\mathbf{w} \\ &= \{\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1(\mathbf{w}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{w})\}\mathbf{w} + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec à titre d'exemple  $M_o = [m_o^1 m_o^2 \dots m_o^n]_{2n \times 2n}$ . La "projection" de  $\mathbf{z}$  sur les modes s'effectue en inversant la transformation (3.9). Cette opération s'effectue approximativement, en tronquant les développements polynomiaux à un certain ordre dans toutes les relations et en utilisant le développement en série matricielle. Nous précisons cette procédure dans le cas où l'expression (3.9) ne contient que des termes cubiques ( $M_1 = 0$ ), le cas général étant traité dans la référence [72]. La relation (3.9) est pré-multipliée par l'inverse de la somme des matrices ne contenant que des termes au plus cubiques, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \{\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_2(\mathbf{w})\}^{-1}\mathbf{z} + \dots \\ &= \{\mathbf{I} + \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_2(\mathbf{w})\}^{-1}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z} + \dots \end{aligned}$$

soit, après un développement en série :

$$\mathbf{w} = \{\mathbf{I} - \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_2(\mathbf{w})\}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z} + \dots \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité  $2n \times 2n$ .

L'équation (3.10) est réinjectée dans elle même pour y substituer  $\mathbf{w}$ . Les puissances de  $\mathbf{z}$  sont développées. Comme  $\mathbf{M}_2(\mathbf{w})$  est quadratique, la dépendance en  $\mathbf{w}$  du second membre de la relation (3.10) est repoussée à l'ordre supérieur. Nous avons donc la relation suivante entre  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{z}$ , à l'ordre 3 :

$$\mathbf{w} = \{\mathbf{I} - \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{M}_2(\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z})\}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z} + \dots \quad (3.11)$$

qui constitue la transformation de passage des coordonnées physiques aux coordonnées modales. La méthode se ramène à la superposition modale linéaire habituelle lorsque les amplitudes tendent vers zéro :

$$\mathbf{w} = \mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{z} \quad (3.12)$$



### 3.4.1 Equations en base modale non-linéaire

Les équations du mouvement peuvent être exprimées à l'aide du vecteur des coordonnées modales  $\mathbf{w}$  et nous les récrivons d'abord sous la forme suivante [72] :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(\mathbf{z})\mathbf{z} = \{\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(\mathbf{z}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{z})\}\mathbf{z} + \dots \quad (3.13)$$

où  $\mathbf{A}_0$  définit le système linéarisé autour du point  $\mathbf{z} = 0$ , et  $\mathbf{A}_1(\mathbf{z})\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{A}_2(\mathbf{z})\mathbf{z}$  sont les termes non-linéaires quadratiques et cubiques. La transformation (3.9) est notée :

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{w}), \quad (3.14)$$

la dérivée temporelle donne donc

$$\dot{\mathbf{z}} = \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{w}) \right] \dot{\mathbf{w}}. \quad (3.15)$$

Par substitution de ces expressions dans (3.15) et inversion de la matrice Jacobienne, nous avons

$$\dot{\mathbf{w}} = \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{w}) \right]^{-1} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{w}))\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{w}), \quad (3.16)$$

qui constitue l'équation de la dynamique du système en coordonnées modales.

Ces équations couplent les coordonnées modales  $(u, v)_i$  correspondant à chaque mode. Les équations de ce système sont de la forme (3.6) avec en plus des termes de couplages. Lorsqu'on annule ces termes de couplage, on retrouve en fait les équations correspondant à chacun des modes non-linéaires.

### 3.4.2 Réduction du système

Les développements en série des modes et l'écriture des équations en coordonnées modales non-linéaires (3.15) font apparaître l'intérêt des modes non-linéaires dans la réduction des systèmes. Les équations (3.15) correspondant à l'écriture du système en base modale non-linéaires sont couplées comme celles exprimées dans la base linéaire.

Cependant, les équations (3.15) font apparaître dans la pratique, la propriété remarquable **d'invariance** qui se traduit par le fait que seuls les modes (non-linéaires) excités initialement participeront à la réponse. Ce qui n'est pas le cas des modes linéaires à causes des effets de couplage.

Afin d'illustrer ce propos, un exemple de système à 2 degrés de liberté dissipatif, donné dans [72] donne en base modale linéaire les équations :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + s_1 \dot{u}_1 + s_2 u_1 + s_3 (u_1 + u_2)^3 + s_4 (\dot{u}_1 + \dot{u}_2)(u_1 + u_2)^2 &= 0, \\ \ddot{u}_2 + s_5 \dot{u}_2 + s_6 u_2 + s_7 (u_1 + u_2)^3 + s_8 (\dot{u}_1 + \dot{u}_2)(u_1 + u_2)^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

où les  $s_k$  sont des constantes, alors qu'en coordonnées modales non-linéaires, le système a la forme

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 f_1(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) + \dot{u}_1 g_1(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) &= 0, \\ \ddot{u}_2 + u_2 f_2(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) + \dot{u}_2 g_2(u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ainsi, nous voyons qu'une condition initiale ( $u_1 = 0, \dot{u}_1 = 0$ ) laisse la première coordonnée non-linéaire  $u_1$  au repos alors que dans la première équation modale en base linéaire, le deuxième mode peut venir exciter le premier par les termes de couplages avec la même condition initiale. Les modes non-linéaires permettent donc de mieux maîtriser la réduction de la taille des systèmes par troncature grâce à cette propriété d'invariance.

### 3.4.3 Synthèse modale de la réponse libre

Dans [72], est proposé une méthode de superposition modale pour un système non-linéaire autonome pour des conditions initiales données ( $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ ). Les participations des différents modes non-linéaires sont calculées en utilisant la relation (3.11) (avec  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$ ). Ensuite, les équations (3.6) correspondant à chaque mode sont intégrées en négligeant les termes de couplage. On recompose ensuite la solution à l'aide de l'équation (3.9). Sans justification [72], on constate une très bonne approximation par rapport à une intégration numérique du système complet sur plusieurs exemples et une nette amélioration par rapport à la démarche analogue utilisant les modes linéaires et en forçant les découplages des coordonnées modales linéaires.

## 3.5 Variétés complexes

Une formulation dans le domaine complexe plus compacte a été introduite [56], sur un système continu discrétisé. Nous supposons que l'équation du système peut se mettre sous la forme suivante par projection sur la base modale linéaire :

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i + g_i(u, \dot{u}) = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.19)$$

et nous introduisons le changement de variable :

$$u_i(t) = \zeta_i(t) + \bar{\zeta}_i(t), \quad \dot{u}_i(t) = \mathbf{i}\omega_i(\zeta_i(t) - \bar{\zeta}_i(t)), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.20)$$

où les  $\zeta_i(t)$  sont complexes et  $\mathbf{i}^2 = -1$ .

Les variables  $\zeta_i(t)$  permettent de ramener l'équation (3.19) à une équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{\zeta}_i(t) = \mathbf{i}\omega_i \zeta_i(t) + \frac{\mathbf{i}}{2\omega_i} \tilde{g}_i(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.21)$$

où la fonction  $\tilde{g}_i$  est composée de  $g_i$  et du changement de variable (3.20).

La paramétrisation du mode non-linéaire tangent par exemple au premier mode linéaire est alors effectuée en utilisant la paire de variables complexes  $(\zeta_1, \bar{\zeta}_1)$  telle que :

$$\zeta_i(t) = h_i(\zeta_1, \bar{\zeta}_1), \quad (i = 2, \dots, n), \quad (3.22)$$

et où les  $h_i$  sont des fonctions de variables complexes telles que  $h_i(0, 0) = 0$  et d'ordre au moins quadratique. En substituant (3.22) dans (3.21) les fonctions  $h_i$  apparaissent comme solutions du problème

$$\omega_1 \frac{\partial h_i}{\partial \zeta_1} \zeta_1 - \omega_1 \frac{\partial h_i}{\partial \bar{\zeta}_1} \bar{\zeta}_1 - \omega_i h_i(\zeta_1, \bar{\zeta}_1) =$$

$$\frac{1}{2\omega_i} \tilde{g}_i(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, h_2(\zeta_1, \bar{\zeta}_1), \bar{h}_2(\zeta_1, \bar{\zeta}_1), \dots, h_n(\zeta_1, \bar{\zeta}_1), \bar{h}_n(\zeta_1, \bar{\zeta}_1)) + \dots, \quad (3.23)$$

$$(i = 2, \dots, n).$$

Les fonctions  $h_i$  sont recherchées sous formes de développements en puissances :

$$h_i(\zeta_1, \bar{\zeta}_1) = \Lambda_i^{(3)} \zeta_1^2 + \Lambda_i^{(4)} \bar{\zeta}_1^2 + \Lambda_i^{(5)} \zeta_1 \bar{\zeta}_1 + \Lambda_i^{(6)} \zeta_1^3 + \Lambda_i^{(7)} \bar{\zeta}_1^3 + \Lambda_i^{(8)} \zeta_1^2 \bar{\zeta}_1 + \Lambda_i^{(9)} \zeta_1 \bar{\zeta}_1^2 + \dots$$

$$(i = 2, \dots, n).$$

Comme plus haut, les coefficients  $\Lambda_i^{(p)}$  de la série sont calculés en substituant celle-ci dans (3.23) et en regroupant tous les termes de l'équation selon les monômes de même puissance. L'annulation des coefficients fournit un système d'équations dont les inconnues sont les  $\Lambda_i^{(p)}$ . L'expression ainsi approchée des fonctions  $h_i$  est alors substituée dans la première ( $i = 1$ ) équation de (3.21) qui donne alors la dynamique du système sur la variété correspondant au premier mode non-linéaire. L'expression (3.20) est utilisée pour revenir aux coordonnées  $u_i$ . Cette formulation complexe est aussi plus adaptée à l'application de la méthode des formes normales [56] pour la simplification de l'équation (3.21) de la dynamique du système sur la variété. On calcul enfin la période de l'oscillation sur le mode non-linéaire par les méthodes approchées exposées dans le chapitre 4).

## 3.6 Résonances internes

Les développements précédents donnent, après résolution, les coefficients  $\Lambda_i^{(p)}$  sous forme de fractions où apparaissent aux dénominateurs des combinaisons entières des pulsations propres du système conservatif linéaire. On a par exemple [56] des coefficients de la forme :

$$\Lambda_i^p = \frac{\lambda_i^p}{\omega_1 - \omega_i},$$

ou bien,

$$\Lambda_i^p = \frac{\lambda_i^p}{3\omega_1 - \omega_i},$$

où les  $\lambda_i^p$  sont des coefficients qui dépendent du système.

Les coefficients du développement sont alors ici singuliers dans le cas de résonances internes "1-1" ou "3-1" (voir plus loin le chapitre 4).

Cependant, la méthode de la variété invariante a été étendue par certains auteurs, pour traiter le cas de résonances internes dans sa formulation en variables réelles [7], et en variables complexes [53]. Dans le cas de la formulation à l'aide des nombres complexes, la résonance interne entre deux modes, sera traitée en introduisant une variété de dimension 4 ( $2M$  pour  $M$  modes en général). Si l'on suppose que ses deux modes sont le premier et le deuxième, elle sera paramétrée par  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  et on aura [53] :

$$\zeta_i(t) = h_i(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2), \quad (i = 3, \dots, n). \quad (3.24)$$

La dynamique sur cette variété de dimension 4 est alors gouvernée par deux équations que l'on ne peut pas découpler (on parle alors de multi-mode [71]) :

$$\dot{\zeta}_1(t) = \mathbf{i}\omega_1 \zeta_1 + \frac{\mathbf{i}}{2\omega_1} \tilde{g}_1(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2),$$

$$\dot{\zeta}_2(t) = \mathbf{i}\omega_2 \zeta_2 + \frac{\mathbf{i}}{2\omega_2} \tilde{g}_2(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2),$$

Afin de déterminer les fonctions  $h_i$ , l'expression (3.24) est substituée dans l'équation (3.21) en utilisant (3.25) afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \omega_1 \left( \frac{\partial h_i}{\partial \zeta_1} \zeta_1 - \frac{\partial h_i}{\partial \bar{\zeta}_1} \bar{\zeta}_1 \right) + \omega_2 \left( \frac{\partial h_i}{\partial \zeta_2} \zeta_2 - \frac{\partial h_i}{\partial \bar{\zeta}_2} \bar{\zeta}_2 \right) - \omega_i h_i = \\ \frac{1}{2\omega_i} \tilde{g}_i(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, h_2, \bar{h}_2, \dots, h_n, \bar{h}_n) + \dots, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$(i = 3, \dots, n).$

Les fonctions  $h_i$  sont cette fois cherchées sous formes de développements polynomiaux de la forme :

$$\begin{aligned} h_i = \Lambda_i^{(3)} \zeta_1^2 + \Lambda_i^{(4)} \bar{\zeta}_1^2 + \Lambda_i^{(5)} \zeta_1 \bar{\zeta}_1 + \Lambda_i^{(6)} \zeta_1^3 + \Lambda_i^{(7)} \bar{\zeta}_1^3 + \Lambda_i^{(8)} \zeta_1^2 \bar{\zeta}_1 + \Lambda_i^{(9)} \zeta_1 \bar{\zeta}_1^2 + \\ \Lambda_i^{(10)} \zeta_2^2 + \Lambda_i^{(11)} \bar{\zeta}_2^2 + \Lambda_i^{(12)} \zeta_2 \bar{\zeta}_2 + \Lambda_i^{(13)} \zeta_2^3 + \Lambda_i^{(14)} \bar{\zeta}_2^3 + \Lambda_i^{(15)} \zeta_2^2 \bar{\zeta}_2 + \Lambda_i^{(16)} \zeta_2 \bar{\zeta}_2^2 + \\ \Lambda_i^{(17)} \zeta_1 \zeta_2 + \Lambda_i^{(18)} \zeta_1 \bar{\zeta}_2 + \Lambda_i^{(19)} \bar{\zeta}_1 \zeta_2 + \Lambda_i^{(20)} \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 + \Lambda_i^{(21)} \zeta_1^2 \zeta_2 + \Lambda_i^{(22)} \zeta_1^2 \bar{\zeta}_2 + \\ \Lambda_i^{(23)} \zeta_1 \bar{\zeta}_1 \zeta_2 + \Lambda_i^{(24)} \zeta_1 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 + \Lambda_i^{(25)} \bar{\zeta}_1^2 \zeta_2 + \Lambda_i^{(26)} \bar{\zeta}_1^2 \bar{\zeta}_2 + \Lambda_i^{(27)} \zeta_1 \zeta_2^2 + \Lambda_i^{(28)} \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2^2 + \\ \Lambda_i^{(29)} \zeta_1 \zeta_2 \bar{\zeta}_2 + \Lambda_i^{(30)} \bar{\zeta}_1 \zeta_2 \bar{\zeta}_2 + \Lambda_i^{(31)} \zeta_1 \bar{\zeta}_2^2 + \Lambda_i^{(32)} \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2^2 + \dots \end{aligned}$$

$(i = 3, \dots, n).$

De même, les coefficients sont déterminés en égalisant les monômes de même puissance. Après résolution, ceux-ci ne font plus apparaître de singularités dues aux résonances internes des deux modes initiaux. Il peut subsister cependant des termes singuliers provenant de résonance en combinaison entre ces modes et un troisième. On aura alors aux dénominateurs, des termes du type  $\omega_i - 2\omega_1 \pm \omega_2$ ,  $\omega_i - \omega_1 \pm 2\omega_2, \dots$

Il convient alors de prendre en compte les modes en interaction en augmentant la dimension du multi-mode si l'on désire prendre en compte l'un d'eux dans la dynamique. Les résonances internes dans un groupe de modes couplés entre eux, non-pris en compte dans la dynamique, n'affectera pas les autres modes par invariance du multi-mode [71].

### 3.7 Conclusion

Cette méthode permet de souligner l'utilité des modes non-linéaires pour la réduction des systèmes par la propriété d'invariance. Ces modes peuvent être utilisés efficacement lors d'une procédure approchée de synthèse modale pour l'analyse des réponses libres par simplification des couplages dans les équations écrites en base modale non-linéaire. La méthode permet la détection des résonances internes dans lequel cas les modes concernés ne peuvent pas être découplés et doivent être pris en compte sous forme d'un multi-mode dans la dynamique du système. Cette détection dépend du degré de développement de l'approximation en série pour les variétés.

Certains auteurs [58], ont mis en évidence certaines limites d'applicabilité de cette méthode, qui interviennent lorsque les équations du système possèdent des termes dits "mixtes". C'est le cas pour l'exemple de système à deux degrés de liberté suivant :

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \epsilon k_3 x_1 x_2^2 = 0, \quad (3.26)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \epsilon k_3 x_1^2 x_2 = 0. \quad (3.27)$$

Comparativement à la méthode de la forme normale [38], la méthode "de la variété", ne donne dans ce cas aucune correction à la solution linéaire.

On peut également évoquer, pour l'obtention des modes, l'existence d'une méthode numérique [75] d'intégration temporelle couplée à une méthode d'optimisation permettant de déterminer les conditions initiales du système conduisant à une vibration sur la variété modale, à également été proposée. Cette méthode à l'avantage d'éviter les développements algébriques qui peuvent nécessiter un nombre important de termes en fonction du nombre de degrés de liberté et de l'étendue de l'étude en amplitude, mais ne permet pas de détecter les résonances internes du système.

# Chapitre 4

## Analyse des phénomènes non-linéaires

### 4.1 Introduction

Afin de guider l'interprétation des observations expérimentales effectuées sur des structures présentant des réponses non-linéaires, nous introduirons quelques modèles de systèmes dynamiques simples, ainsi que quelques uns des outils d'analyse classique utilisés pour en déterminer les propriétés.

Il est en effet important de bien appréhender les phénomènes que peut induire la présence de non-linéarités, afin de pouvoir détecter leur présence et de permettre une bonne analyse des réponses expérimentales.

Certains phénomènes non-linéaires sont spécifiques aux systèmes possédant plusieurs degrés de liberté : résonance interne, résonance en combinaison, saturation, et non existence d'une réponse périodique à une excitation périodique lorsque le système est dissipatif [55]. Il est donc intéressant de les mettre en évidence dans le cadre de cette étude. Nous avons vu que certaines méthodes de recherche des modes non-linéaires étudiées dans le chapitre 3 doivent être maniées avec précautions notamment dans le cas de résonance interne.

Nous exposerons également dans ce chapitre quelques unes des techniques employées dans l'étude des systèmes non-linéaires et qui nous ont été utiles dans ce travail dont la linéarisation équivalente et les méthodes de continuation.

### 4.2 Phénomènes non-linéaires

Afin d'illustrer le phénomène de saut et d'introduire la méthode des échelles multiples [55], nous considérerons le système non-linéaire à un degré de liberté en excitation forcée suivant :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \epsilon(2\mu\dot{u} + \alpha u^3) = F \cos(\Omega t). \quad (4.1)$$

Il s'agit d'un oscillateur de Duffing où  $\mu$  est le coefficient d'amortissement (un paramètre positif),  $\alpha$  un paramètre positif dans le cas d'un oscillateur dit raidissant et négatif dans le cas contraire.  $F$  représente l'amplitude de la force d'excitation externe,  $\epsilon$  un "petit paramètre",  $\mu$  et  $\alpha$  sont indépendants de  $\epsilon$ .

### 4.2.1 Réponse en résonance principale, solutions multiples

La résonance principale correspond à la situation  $\omega_o \approx \Omega$  :

$$\Omega = \omega_o + \epsilon\sigma. \quad (4.2)$$

La théorie linéaire prédit pour un système non-amorti, des oscillations d'amplitude infinie lorsque  $\sigma = 0$ . Les amplitudes sont en fait limitées dans le cadre de (4.1) par l'amortissement et la non-linéarité. Il est ainsi naturel de faire intervenir la force d'excitation avec le même ordre en  $\epsilon$  que pour l'amortissement et la non-linéarité. Nous poserons donc  $F = \epsilon f$  avec  $f$  indépendant de  $\epsilon$ .

Conformément à la technique des échelles multiples [55], la solution est exprimée selon différentes échelles de temps selon

$$u(t, \epsilon) = u_o(T_o, T_1) + \epsilon u_1(T_o, T_1) + \dots, \quad (4.3)$$

avec  $T_o = t$  et  $T_1 = \epsilon t$  et,

$$F \cos(\Omega t) = \epsilon f \cos(\omega_o T_o + \sigma T_1). \quad (4.4)$$

En substituant les expressions (4.3) et (4.4) dans l'équation (4.1) et en regroupant les termes de même ordre en  $\epsilon$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} D_o^2 u_o + \omega_o^2 u_o &= 0, \\ D_o^2 u_1 + \omega_o^2 u_1 &= -2D_o D_1 u_o - 2\mu D_o u_o - \alpha u_o^3 + f \cos(\omega_o T_o + \sigma T_1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

où

$$D_o(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial T_o}, \quad D_1(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial T_1}.$$

La solution générale de la première équation du système (4.5) peut être exprimée sous la forme

$$u_o(T_o, T_1) = A(T_1) e^{i\omega_o T_o} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_o T_o}, \quad (4.6)$$

où  $\bar{A}$  désigne le complexe conjugué de  $A$ .

Cette solution est ensuite substituée dans la deuxième équation de (4.5), ce qui fournit :

$$\begin{aligned} D_o^2 u_1 + \omega_o^2 u_1 &= -[2i\omega_o(A' + \mu A) + 3\alpha A^2 \bar{A}] e^{i\omega_o T_o} \\ &\quad - \alpha A^3 e^{3i\omega_o T_o} + \frac{f}{2} e^{i(\omega_o T_o + \sigma T_1)} + tc, \end{aligned} \quad (4.7)$$

où  $tc$  désigne les termes conjugués analogues à ceux qui le précèdent dans le membre de droite, et où le signe  $'$  désigne la dérivée selon  $T_1 = \epsilon t$ . Les solutions de (4.7) contiennent des termes séculaires qui sont de la forme  $t^m \cos(\omega t + \beta)$ . Ceux-ci ne sont donc pas périodiques et afin de les supprimer, il convient d'introduire la condition supplémentaire

$$2i\omega_o(A' + \mu A) + 3\alpha A^2 \bar{A} - \frac{f}{2} e^{i\sigma T_1} = 0, \quad (4.8)$$

qui revient à supprimer les termes en  $e^{\pm i\omega_o T_o}$  dans l'équation (4.7). Afin de résoudre (4.8), nous introduisons la notation complexe :

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta},$$

avec  $a$  et  $\beta$  réels, ainsi que  $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ . En séparant la partie réelle et imaginaire, nous obtenons le système

$$\begin{aligned} a' &= -\mu a + \frac{f}{2\omega_o} \sin(\gamma), \\ a\gamma' &= \sigma a - \frac{3\alpha}{8\omega_o} a^3 + \frac{f}{2\omega_o} \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (4.9)$$

La réponse correspondant au régime stationnaire du système (4.1) est obtenue lorsque

$$a' = \gamma' = 0,$$

ce qui correspond aux points singuliers du système différentiel (4.9). On a donc :

$$\begin{aligned} \mu a &= \frac{f}{2\omega_o} \sin(\gamma), \\ \sigma a - \frac{3\alpha}{8\omega_o} a^3 &= -\frac{f}{2\omega_o} \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Les équations (4.10) permettent d'obtenir l'expression de  $a$  en fonction des paramètres de (4.1) après élévation au carré et sommation :

$$\left[ \mu^2 + \left( \sigma - \frac{3\alpha}{8\omega_o a^2} \right)^2 \right] a^2 = \frac{f^2}{4\omega_o^2}. \quad (4.11)$$

L'équation (4.11) est implicite en  $a$ , et est appelée "équation de réponse fréquentielle".

L'approximation de la réponse stationnaire de (4.1) à l'ordre  $\epsilon$  par la méthode des échelles multiples est alors :

$$u = a \cos(\omega_o t + \epsilon \sigma t - \gamma) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.12)$$

La courbe de réponse en fréquence est obtenue en traçant  $a$  en fonction de  $\sigma$ , ou à l'inverse, exprimant  $\sigma$  en fonction de  $a$  à partir de (4.11) :

$$\sigma = \frac{3\alpha}{8\omega_o} a^2 \pm \sqrt{\frac{f^2}{4\omega_o^2 a^2} - \mu^2}. \quad (4.13)$$

L'amplitude du pic en fréquence est donc donnée par  $a_{max} = \frac{f}{2\omega_o \mu}$  et sa position se trouve sur la parabole  $\sigma = \frac{3\alpha}{8\omega_o} a^2$ . La non-linéarité a pour effet de "courber" les pics de résonance vers la gauche ou vers la droite selon le signe du paramètre  $\alpha$  (respectivement  $\alpha < 0$  ou  $\alpha > 0$ ) et de distordre la phase  $\gamma$  (Figure 4.1). En fonction des paramètres  $\sigma$ ,  $\mu$  et  $f$ , les courbes de réponses peuvent être univaluées ou multi-valuées.



### 4.2.2 Phénomène de saut

Cette dernière propriété nous permet d'introduire la notion de saut qui est un phénomène physique caractéristique associé à l'existence de solutions multiples. Ce phénomène peut se rencontrer lorsque l'on effectue un balayage lent de la fréquence d'excitation (par le biais de  $\sigma$ ) pour un niveau de force constant  $f$  dans le sens croissant ou décroissant des fréquences autour de la pulsation  $\omega_o$ . Ceci est illustré par l'exemple (Figure 4.1) où le balayage démarre pour la fréquence correspondant au point 1. La fréquence est baissée et l'amplitude augmente jusqu'à l'arrivée au point 3. Si l'on continue à faire décroître la fréquence, il se produit un saut du point 3 jusqu'au point 4 avec une variation brusque de l'amplitude et de la phase. Ensuite la réponse rediminue lorsqu'on continue à baisser la fréquence d'excitation jusqu'au point 5.

Si l'on procède à nouveau, mais dans le sens inverse à partir du point 5, l'amplitude augmente jusqu'au point 6. Une augmentation supplémentaire de la fréquence d'excitation à partir de 6 provoque alors un nouveau saut vers le point 2, avec une diminution brusque de l'amplitude et également une forte variation de phase. L'amplitude décroît ensuite progressivement jusqu'au point 1.

Il s'avère que le point 6 n'est atteignable que dans le sens des fréquences croissantes et on peut montrer analytiquement que la partie de la courbe de réponse située entre les points 3 et 6 est instable et ne peut être obtenue expérimentalement. Pour un système tel que  $\alpha < 0$ , un phénomène identique peut être observé au sens de parcours près avec un pic incliné vers les basses fréquences.

Le phénomène de saut peut également être mis en évidence en fixant la fréquence d'excitation et en augmentant ou diminuant progressivement la force d'excitation. Il peut arriver que le saut puisse masquer une autre résonance voisine lors d'un balayage. Le balayage dans le sens contraire peut permettre alors de détecter expérimentalement cette deuxième résonance.

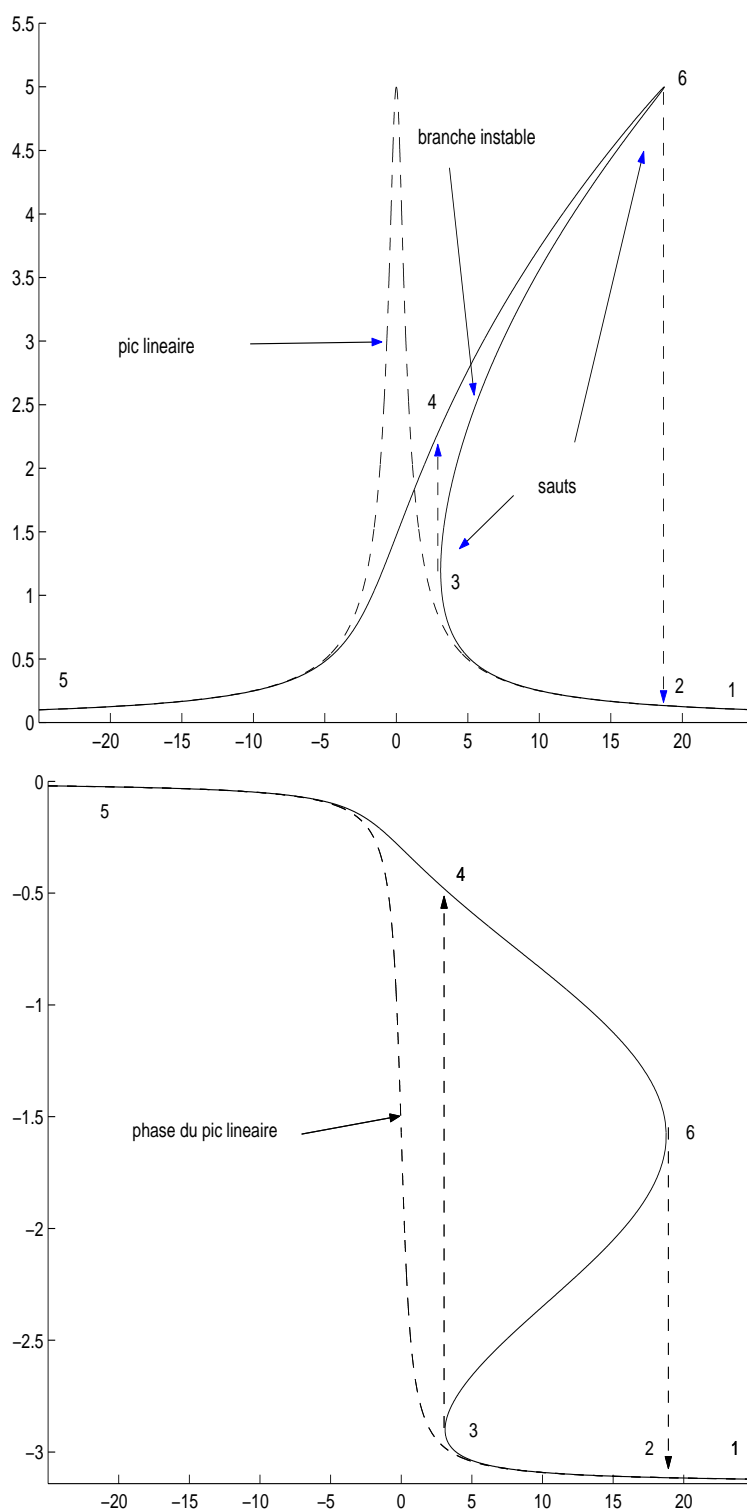


FIG. 4.1 – Phénomène de saut pour l'oscillateur d'équation (4.1) avec  $\alpha = 2$ , figure du haut :  $|a|$  (amplitude) en fonction de  $\sigma$ , figure du bas :  $\gamma$  (phase) en fonction de  $\sigma$ .

### 4.2.3 Stabilité de la réponse

La stabilité de la réponse établie en régime forcé est déterminée par la nature des points singuliers du système (4.9). Soit un point singulier, représenté par un couple  $(a_o, \gamma_o)$ , auquel nous soumettons la perturbation

$$\begin{aligned} a &= a_o + a_1, \\ \gamma &= \gamma_o + \gamma_1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En substituant (4.14) dans les équations (4.9), compte tenu que le couple  $(a_o, \gamma_o)$  est solution de (4.10), que  $a_1$  et  $\gamma_1$  sont petits, et en ne gardant que la partie linéaire par rapport à ces derniers, on obtiendra :

$$\begin{aligned} a'_1 &= -\mu a_1 + \left( \frac{f}{2\omega_o} \cos \gamma_o \right) \gamma_1, \\ \gamma'_1 &= - \left( \frac{3\alpha a_o}{4\omega_o} + \frac{f}{2\omega_o a_o^2} \cos \gamma_o \right) a_1 - \left( \frac{f}{2\omega_o a_o} \sin \gamma_o \right) \gamma_1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La stabilité locale des solutions dépend des valeurs propres de la matrice Jacobienne associée au membre de droite de (4.15). En utilisant à nouveau (4.10), les solutions instables sont alors déterminées par le critère :

$$\Gamma = \left( \sigma - \frac{3\alpha a_o^2}{8\omega_o} \right) \left( \sigma - \frac{9\alpha a_o^2}{8\omega_o} \right) + \mu^2 < 0. \quad (4.16)$$

La condition (4.16) correspond à la branche de la courbe de réponse limitée par les points 3 et 6 (Figure 4.1). On montre qu'en ces points, le critère s'annule et que la courbe admet deux tangentes verticales. Une étude de stabilité complète [55] permettrait de montrer l'existence de domaines d'attraction des différentes solutions lorsque la courbe de réponse en fréquence est multi-valuée, soulignant ainsi l'influence des conditions initiales sur la réponse en régime permanent pour un système non-linéaire. Ainsi, lorsque deux états stables existent, les conditions initiales déterminent lequel sera effectif. Ceci est caractéristique des systèmes non-linéaires.

### 4.2.4 Surharmonique

Le phénomène de surharmonique est également caractéristique des systèmes non-linéaires. Il se manifeste par l'apparition d'un harmonique multiple de la fréquence d'excitation  $\Omega$  dans la réponse. On montre en effet à l'aide d'un développement analogue au précédant, que pour  $3\Omega = \omega_o + \epsilon\sigma$  et  $F = f$ , l'équation d'élimination des termes séculaires s'exprime sous la forme :

$$2i\omega_o(A' + \mu A) + 6\alpha\Lambda^2 A + 3\alpha A^2 \bar{A} + \alpha\Lambda^3 e^{i\sigma T_1} = 0, \quad (4.17)$$

avec  $\Lambda = \frac{1}{2}F(\omega_o^2 - \Omega^2)^{-1}$ .

En utilisant la notation complexe qui précède, les équations donnant le régime stationnaire sont :

$$\begin{aligned} -\mu a &= \frac{\alpha\Lambda^3}{\omega_o} \sin(\gamma), \\ \left( \sigma - 3\frac{\alpha\Lambda^2}{\omega_o} \right) a - \frac{3\alpha}{8\omega_o} a^3 &= \frac{\alpha\Lambda^3}{\omega_o} \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (4.18)$$

La relation définissant l'amplitude est alors obtenue à partir des équations qui précèdent :

$$[\mu^2 + \left(\sigma - 3\frac{\alpha\lambda^2}{\omega_o} - \frac{3\alpha}{8\omega_o}a^2\right)^2]a^2 = \frac{\alpha^2\Lambda^6}{\omega_o^2}, \quad (4.19)$$

et la solution de l'équation (4.1) est alors de la forme suivante :

$$u = a \cos(3\Omega t - \gamma) + f(\omega_o^2 - \Omega^2)^{-1} \cos(\Omega t) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.20)$$

On peut de même, mettre en évidence la présence de saut dans le cas de surharmonique.

### 4.2.5 Sousharmonique

L'apparition de sousharmonique se montre de manière analogue. On pose alors pour les étudier,  $\Omega = 3\omega_o + \epsilon\sigma$  et  $F = f$ . Le système alors obtenu pour les paramètres  $a$  et  $\gamma$  de la solution sont :

$$\begin{aligned} -\mu a &= \frac{3\alpha\Lambda}{4\omega_o}a^2 \sin(\gamma) \\ \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_o}\right)a - \frac{9\alpha}{8\omega_o}a^3 &= \frac{9\alpha\Lambda}{4\omega_o}a^2 \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (4.21)$$

La réponse du système s'exprime alors sous la forme

$$u = a \cos\left(\frac{1}{3}(\Omega t - \gamma)\right) + f(\omega_o^2 - \Omega^2)^{-1} \cos(\Omega t) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.22)$$

L'équation fournissant l'amplitude en fonction des paramètres du système pour une fréquence d'excitation donnée est cette fois :

$$[9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\lambda^2}{\omega_o} - \frac{9\alpha}{8\omega_o}a^2\right)^2]a^2 = \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16\omega_o^2}a^2. \quad (4.23)$$

Celle-ci possède la solution triviale  $a = 0$  et les autres solutions sont déterminées en résolvant l'équation bicarrée

$$9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\lambda^2}{\omega_o} - \frac{9\alpha}{8\omega_o}a^2\right)^2 = \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16\omega_o^2}a^2. \quad (4.24)$$

Pour  $p > 0$  et  $p^2 \geq q$ , avec

$$p = \frac{8\omega_o\sigma}{9\alpha} - \Lambda^2, \quad q = \frac{64\omega_o^2}{81\alpha^2}\left(9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\lambda^2}{\omega_o}\right)^2\right),$$

la solution est

$$a^2 = p \mp \sqrt{p^2 - q}.$$

Dans les autres situations, seule la solution  $a = 0$  existe. On a alors une condition qui régit l'apparition du sousharmonique, fait nouveau par rapport au cas du surharmonique. On montre qu'il n'y a qu'un seul point singulier stable correspondant aux solutions de (4.21) différent de la solution  $a = 0$ . On a donc pas le phénomène de saut que l'on observe sur un surharmonique.

### 4.2.6 Résonance interne

Les phénomènes non-linéaires cités précédemment apparaissent également pour des systèmes à plusieurs degrés de libertés, mais il en existent d'autres, qui concernent exclusivement ces derniers comme le phénomène de résonance interne. Les conditions d'occurrence des résonances internes sont réunies lorsque la partie linéaire du système possède des pulsations propres  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , commensurables, c'est à dire vérifiant une relation du type

$$p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \dots + p_n\omega_n \approx 0, \quad (4.25)$$

où les  $p_i$  sont des entiers relatifs. On pourra avoir par exemple :

$$\omega_2 \approx 2\omega_1, \omega_2 \approx 3\omega_1, \omega_3 \approx 2\omega_2 \mp \omega_1, \omega_4 \approx \omega_3 \mp \omega_2 \mp \omega_1, \dots$$

En fonction du type de la non-linéarité (quadratique, cubique, ...), ces relations de commensurabilité, peuvent occasionner un couplage fort des modes qui correspond au phénomène de résonance interne. Pour un système oscillant librement en condition de résonance interne, l'énergie qui peut être confinée sur un mode à un instant initial, s'échangera ensuite continûment entre les modes commensurables entre eux.

Pour un système en excitation harmonique forcée de pulsation  $\Omega$ , il peut exister des résonances dites en combinaison en fonction de l'ordre de la non-linéarité. Pour une non-linéarité cubique, les résonances en combinaison concernant 2 ou 3 modes se traduiraient par exemple par :

$$\Omega \approx \omega_n \mp \omega_m \mp \omega_k, \Omega \approx 2\omega_n \mp \omega_m, \Omega \approx \frac{1}{2}(\omega_n \mp \omega_m).$$

Le phénomène de résonance interne est associé au phénomène de **saturation** : dans ce cas, on peut montrer par une analyse à l'aide d'une méthode de perturbations, que lorsqu'un mode est excité par une force, et que le niveau de cette force est progressivement augmenté jusqu'à une certaine valeur critique, il se produit une instabilité (bifurcation de Hopf). Un autre mode est alors excité et l'énergie du premier arrive à saturation.

Ce phénomène a été étudié en détail analytiquement, et expérimentalement pour la première fois par Haddow, Barr et Mook [20] pour un système à deux degrés de liberté et possédant une non-linéarité quadratique. Lors de cette expérience, le système est excité sur son deuxième mode (à 16 Hertz), et pour des niveaux relativement faibles, la réponse est dominée par ce mode dont l'amplitude modale est proportionnelle à la force : on alors un comportement linéaire. Si le niveau de force est supérieur à la valeur critique, et que le système est initialement au repos, la réponse reste d'abord dominée par le mode excité, mais progressivement, l'amplitude du premier mode (à 8 Hz) augmente au cours du temps alors que celle du mode à 16 Hz décroît jusqu'à une amplitude de saturation. La réponse est alors une combinaison des deux modes et peut être fortement dominée par le mode non-excité directement (Figure 4.2).

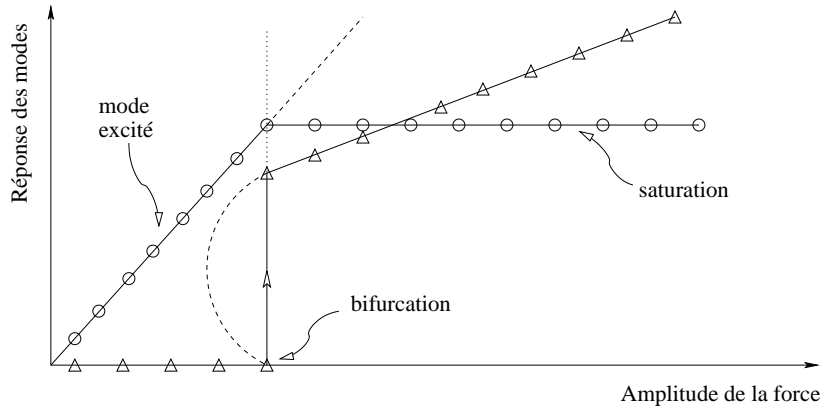


FIG. 4.2 – Comportement modal lors d'une résonance interne d'un système forcé

Afin d'aborder ce phénomène analytiquement, nous choisirons l'exemple d'un système dynamique non-linéaire dissipatif à deux degrés de liberté suivant :

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 &= -2\mu_1 \epsilon \dot{u}_1 + \alpha_1 u_1 u_2, \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 &= -2\mu_2 \epsilon \dot{u}_2 + \alpha_2 u_1^2.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Afin d'aborder le phénomène de résonance interne dans le cadre du système d'équation (4.26), nous étudierons le comportement du système lorsque  $\omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon\sigma$ . Le développement de  $u_1$  et  $u_2$  est donné conformément à la méthode des échelles multiples [55] par :

$$\begin{aligned}u_1 &= \epsilon u_{11}(T_0, T_1) + \epsilon^2 u_{12}(T_0, T_1) + \dots, \\ u_2 &= \epsilon u_{21}(T_0, T_1) + \epsilon^2 u_{22}(T_0, T_1) + \dots,\end{aligned}\quad (4.27)$$

Le phénomène non-linéaire et l'amortissement interviennent au même ordre en  $\epsilon$ . En substituant les équations (4.27) dans le système (4.26) et en regroupant les termes en  $\epsilon$  et  $\epsilon^2$  on obtient :

$$\begin{aligned}D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} &= 0, \\ D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} &= 0, \\ D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} &= -2D_0(D_1 u_{11} + \mu_1 u_{11}) + \alpha_1 u_{11} u_{21}, \\ D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} &= -2D_0(D_1 u_{21} + \mu_2 u_{21}) + \alpha_2 u_{11}^2.\end{aligned}\quad (4.28)$$

Les deux premières équations de (4.28) fournissent les solutions

$$\begin{aligned}u_1 &= A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + A_1^*(T_1) e^{-i\omega_1 T_0} \\ u_2 &= A_2(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + A_2^*(T_1) e^{-i\omega_2 T_0}\end{aligned}\quad (4.29)$$

qui sont substituées dans les deux dernières équations de (4.28) :

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2i\omega_1(A'_1 + \mu_1 A_1)e^{i\omega_1 T_0} + \alpha_1(A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)T_0} + A_1^* A_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)T_0}) + tc, \quad (4.30)$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2i\omega_2(A'_2 + \mu_2 A_2)e^{i\omega_2 T_0} + \alpha_2(A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + A_1^* A_1) + tc, \quad (4.31)$$

où  $tc$  désigne le conjugué des termes qui le précèdent dans les second membres. Lorsque  $\omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon\sigma$ , la condition d'annulation des termes séculaires se traduit par :

$$\begin{aligned} -2i\omega_1(A'_1 + \mu_1 A_1) + \alpha_1 A_1^* A_2 e^{i\sigma T_1} &= 0, \\ -2i\omega_2(A'_2 + \mu_2 A_2) + \alpha_2 A_1^2 e^{-i\sigma T_1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

En effectuant le changement de variables  $A_n = \frac{1}{2}a_n e^{i\theta_n}$ , et  $\gamma = \theta_2 - 2\theta_1 + \sigma T_1$ , puis en ne considérant que la solution stationnaire ( $a'_n = \gamma' = 0$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} -\mu_1 a_1 + \frac{\alpha_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin(\gamma) &= 0, \\ -\mu_2 a_2 + \frac{\alpha_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin(\gamma) &= 0, \\ \left(\frac{\alpha_1}{2\omega_1} a_2^2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_2} a_1^2 \cos(\gamma) + \sigma a_2\right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

d'où on obtient en éliminant  $\gamma$  à l'aide des deux premières équations de (4.33) :

$$a_1^2 + \frac{\mu_2 \omega_2 \alpha_1}{\mu_1 \omega_1 \alpha_2} a_2^2 = 0. \quad (4.34)$$

Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont de signes différents,  $a_1$  et  $a_2$  admettent une solution non nulle. Dans ce cas, la solution libre existe et est semblable au comportement d'un système auto-entretenu. On notera qu'il y a dans le cas de la résonance interne, un échange d'énergie entre les modes.

### 4.3 Méthode de la linéarisation équivalente

Le concept de linéarisation équivalente a été introduit initialement par Krylov et Bogoliubov [55] pour un système à un degré de liberté. Plus tard, cette idée a été étendue au cas de systèmes possédant plusieurs degrés de libertés [78], [34], afin de fournir un moyen efficace et applicable dans des cas concrets, pour obtenir des solutions approchées correspondant aux oscillations en régime permanent de systèmes non-linéaires. L'idée de base de cette méthode est de remplacer un système dynamique non-linéaire par un système linéaire équivalent au sens de l'optimum d'un critère de différence entre ces deux systèmes.

#### 4.3.1 Principe général de la méthode

On considère un système dynamique non-linéaire gouverné par le système d'équations suivant :

$$M\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = p(t). \quad (4.35)$$

Le système linéaire équivalent au système (4.35) est noté :

$$M\ddot{x} + Kx + C\dot{x} = p(t), \quad (4.36)$$

où  $C$  et  $K$  sont des matrices indépendantes de la variable  $t$ . Elles sont déterminées de telle sorte que la différence  $\epsilon$  entre les systèmes (4.35) et (4.36) soit minimum pour toute fonction  $x(t)$  appartenant à l'ensemble  $U$  des solutions du système (4.36). Cette différence  $\epsilon$  est exprimée par :

$$\epsilon = f(x, \dot{x}) - C\dot{x} - Kx, \quad (4.37)$$

avec

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

et le critère de minimisation est exprimé par :

$$\forall x(t) \in U, \quad \{C^*, K^*\} = \operatorname{argmin}\{\mathcal{A}(\|\epsilon\|^2)\}. \quad (4.39)$$

où  $\mathcal{A}$  est un opérateur linéaire de "moyenne temporelle" vérifiant les propriétés suivantes :

**Propriété 4.3.1** *Indépendance de  $\mathcal{A}[z(t)]$  par rapport à  $t$*

$$\frac{d\mathcal{A}[z(t)]}{dt} = 0$$

**Propriété 4.3.2 (Linéarité de l'opérateur  $\mathcal{A}(\cdot)$ )** *Si  $u(t)$  et  $v(t)$  sont deux fonctions, on a :*

$$\mathcal{A}[u(t) + v(t)] = \mathcal{A}[u(t)] + \mathcal{A}[v(t)].$$



**Propriété 4.3.3 (Moyenne des matrices de fonctions)** Si  $Z$  est une matrice de fonctions  $z_{ij}(t)$ , les entrées de la matrice moyennée  $\mathcal{A}(Z)$  sont :

$$\mathcal{A}(Z)_{ij} = \mathcal{A}(z_{ij}(t)).$$

**Propriété 4.3.4 (Défini-positivité de l'opérateur  $\mathcal{A}(\cdot)$ )**

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z^2(t)) &> 0 \quad \forall z(t) \neq 0, \\ \mathcal{A}(z^2(t)) &= 0 \quad \iff z(t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Le critère sera le plus souvent basé sur la norme Euclidienne et une moyenne sur un intervalle de temps. Ce choix facilite les développements analytiques. D'autres critères sont envisageables mais il semble qu'ils donnent tous des résultats comparables [34].

Les conditions nécessaires d'optimalité du critère (4.39) se traduisent par les deux conditions suivantes à remplir de façon simultanée :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial c_{ij}} \mathcal{A}(\|\epsilon\|^2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial k_{ij}} \mathcal{A}(\|\epsilon\|^2) = 0, \end{cases} \quad (4.40)$$

pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i, j \in [1, \dots, n]$ ,  $n$  étant la dimension des systèmes (4.35) et (4.36), et  $c_{ij}$  et  $k_{ij}$  étant les entrées des matrices  $C$  et  $K$  respectivement (et  $\|\epsilon\|^2 = {}^t \epsilon \epsilon$ ). Si l'on pose

$$E_i^2 = \mathcal{A}(\epsilon_i^2),$$

$E_i$  ne dépend que de  $c_{ij}$  et  $k_{ij}$  pour  $(j = 1, \dots, n)$ . Ainsi, les conditions (4.40) sont équivalentes aux  $2n$  conditions simultanées sur les  $E_i$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial c_{ij}} E_i^2(\epsilon_i^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial k_{ij}} E_i^2(\epsilon_i^2) = 0, \quad (j = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (4.41)$$

pour  $(i = 1, \dots, n)$ . En utilisant (4.37) et les propriétés de  $\mathcal{A}$ , l'ensemble des  $2n$  équations (4.41) s'écrit :

$$\mathcal{A}[y^t g(y)] - \mathcal{A}[y^t y] \begin{bmatrix} {}^t K \\ {}^t C \end{bmatrix} = 0, \quad (4.42)$$

avec  $y$  le vecteur de taille  $2n$ , défini par :

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix},$$

et la fonction  $g(\cdot)$  définie par :

$$g(y) = f(x, \dot{x}).$$

Se pose alors le problème de la résolution du système (4.42) en  $k_{ij}$  et  $c_{ij}$ .

### 4.3.2 Existence et unicité du système linéaire équivalent

Si la matrice  $\mathcal{A}[y^t y]$  est définie positive, les solutions  $C$  et  $K$  de l'équation (4.42) existent de façon unique. Nous énoncerons alors le théorème suivant [78] :

**Théorème 4.3.1 (conditions d'unicité de la linéarisation équivalente)** *Si  $U$  est un espace vectoriel de solutions de dimension  $s$  sur le corps des réels, la matrice  $\mathcal{A}[y^t y]$  est singulière si et seulement si  $s < 2n$ . Autrement dit, la solution est unique si le nombre de fonctions  $x_i(t)$  et  $\dot{x}_i(t)$  linéairement indépendantes de  $U$  est supérieur ou égal à  $2n$ .*

La démonstration tient aux propriétés de l'opérateur  $\mathcal{A}(\cdot)$ . En effet, supposons que  $\mathcal{A}[y^t y]$  est singulière, on a alors :

$$\mathcal{A}[y^t y]u = 0 \quad \text{avec } u \neq 0, \quad (4.43)$$

en pré-multipliant par  ${}^t u$ , et par linéarité de  $\mathcal{A}$ , on a :

$$\mathcal{A}[({}^t y u)^2] = 0,$$

d'où  ${}^t y u \equiv 0$  d'après les propriétés de l'opérateur  $\mathcal{A}(\cdot)$ . Ceci montre que les composantes de  $y$  sont liées et donc que  $s < 2n$ . Réciproquement, si on a  ${}^t y u \equiv 0$  avec  $u \neq 0$ , on a alors  $y^t y u \equiv 0$ , d'où :

$$\mathcal{A}[y^t y u] = \mathcal{A}[y^t y]u = 0,$$

et donc  $\mathcal{A}[y^t y]$  est singulière.

#### Nature de l'extremum :

Les quantités  $E_i^2$  sont des formes quadratiques des variables  $c_{ij}$  et  $k_{ij}$ . En considérant un développement en série de Taylor au voisinage d'un optimum défini par  $c_{ij}$  et  $k_{ij}$  pour  $(i, j) \in (1, \dots, n)$ , on montre que la condition d'unicité ( $s \geq 2n$ ) est équivalente à celle de l'existence d'un minimum absolu pour le problème (4.39).

Lorsque la solution n'est pas unique ( $s < 2n$ ), les solutions obtenues donnent la même valeur au critère et aucune des solutions n'est meilleur qu'une autre au sens de (4.39).

### 4.3.3 Construction du système linéaire équivalent

On se place dans le cas du système décrit par (4.35) et d'une excitation harmonique

$$p(t) = P \cos \Omega t,$$

et l'opérateur de moyenne sera

$$\mathcal{A}[z(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt.$$

Dans le cas où les composantes du vecteur de forces non-linéaires  $f(x, \dot{x})$  sont de la forme :

$$f_i(x, \dot{x}) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(r_{ij}, \dot{r}_{ij}),$$

avec

$$r_{ij} = x_i - x_j,$$

et où les fonctions  $b_{ij}$  sont impaires ( $b_{ij}(r_{ij}, \dot{r}_{ij}) = -b_{ij}(-r_{ij}, -\dot{r}_{ij})$ ), on peut alors construire un système linéaire équivalent en remplaçant chaque liaison  $b_{ij}(r_{ij}, \dot{r}_{ij})$  par une liaison linéaire équivalente selon le schéma :

$$b_{ij}(r_{ij}, \dot{r}_{ij}) \hookrightarrow c_{ij}\dot{r}_{ij} + k_{ij}r_{ij},$$

où les termes  $c_{ij}$  et  $k_{ij}$  sont solutions de

$$\begin{aligned} \int_0^T b_{ij} \cos \Omega t \, dt &= c_{ij} \int_0^T \dot{r}_{ij} \cos \Omega t \, dt + k_{ij} \int_0^T r_{ij} \cos \Omega t \, dt, \\ \int_0^T b_{ij} \sin \Omega t \, dt &= c_{ij} \int_0^T \dot{r}_{ij} \sin \Omega t \, dt + k_{ij} \int_0^T r_{ij} \sin \Omega t \, dt. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les équations précédentes (4.44) donnent les coefficients de raideur et d'amortissement :

$$k_{ij} = \frac{\int_0^T b_{ij} r_{ij} \, dt}{\int_0^T r_{ij}^2 \, dt}, \quad (4.45)$$

$$c_{ij} = \frac{\int_0^T b_{ij} \dot{r}_{ij} \, dt}{\int_0^T \dot{r}_{ij}^2 \, dt}, \quad (4.46)$$

pour  $(i, j) = (1, \dots, n)$ .

### Linéarisation stochastique équivalente :

La procédure de linéarisation générale peut être appliquée dans le cas d'excitations aléatoires [78]. On considérera que  $p(t)$  est un processus aléatoire stationnaire Gaussien et les réponses du système linéaire équivalent seront également des vecteurs Gaussiens.

L'opérateur de moyenne sera dans ce cas le premier moment statistique :

$$\mathcal{A}(z(t)) = E[z], \quad (4.47)$$

où  $E[z]$  est l'espérance de la variable aléatoire  $z(t)$ .

## 4.4 Méthode de Lindstedt-Poincaré

La méthode des perturbations de Lindstedt-Poincaré est souvent utilisée dans l'analyse des systèmes non-linéaires [55]. Elle consiste à chercher les solutions sous forme d'un développement en série d'un petit paramètre qui est associé à la non-linéarité et à déterminer les termes du développement par une succession de résolutions linéaires.

Nous illustrons cette méthode sur un exemple très classique consistant en un système non-linéaire autonome conservatif à 1 degré de liberté et comportant une non-linéarité polynomiale cubique. Dans le cadre de l'étude des modes normaux des systèmes non-linéaires à plusieurs degrés de liberté, cette méthode peut être employée pour obtenir une approximation des périodes des oscillations d'un mode (cf. chapitre 1).

L'équation du mouvement de ce système, si l'on considère des oscillations libres sera

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0, \quad (4.48)$$

où  $\mu$  est le petit paramètre et  $x(t)$  le déplacement cherché.

Le développement de la solution  $x(t)$  de l'équation (4.48) en fonction du paramètre de perturbation  $\mu$  s'écrira :

$$x(t) = x_o(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \mu^3 x_3(t) + \dots \quad (4.49)$$

La pulsation  $\omega$  des oscillations libres du système (4.48) dépendra en général de l'amplitude et sera donc cherchée comme un développement en série du paramètre de perturbation  $\mu$  selon :

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \mu^3 \alpha_3 + \dots \quad (4.50)$$

où les  $\alpha_i$  pour  $i = 1, 2, \dots$ , sont des fonctions de l'amplitude.

Nous nous limiterons ici au premier ordre en  $\mu$  en injectant les deux premiers termes des équations (4.49) et (4.50) dans l'équation du mouvement (4.48), d'où :

$$\ddot{x}_o + \mu \ddot{x}_1 + (\omega^2 - \mu \alpha_1)(x_o + \mu x_1) + \mu(x_o^3 + 3\mu x_o^2 x_1 + \dots) = 0. \quad (4.51)$$

On obtient une séquence de problèmes linéaires en regroupant les termes relatifs à une même puissance du paramètre de perturbation. Les conditions d'annulation des différents termes se traduisent par :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_o + \omega^2 x_o &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \alpha_1 x_o - x_o^3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.52)$$

La solution de la première équation de (4.52) avec les conditions initiales  $x(0) = A$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  est donc

$$x_o = A \cos \omega t. \quad (4.53)$$

On substitue à présent l'expression (4.53) dans le second membre de la deuxième équation de (4.52) :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \alpha_1 A \cos \omega t - A^3 \cos^3 \omega t, \\ &= \left(\alpha_1 - \frac{3}{4} A^2\right) A \cos \omega t - \frac{A^3}{4} \cos 3\omega t, \end{aligned} \quad (4.54)$$

Le premier terme du second membre fait apparaître les termes séculaires et viole donc la condition de périodicité. On impose alors :

$$\alpha_1 - \frac{3}{4} A^2 = 0, \quad (4.55)$$

d'où,

$$\alpha_1(A) = \frac{3}{4} A^2.$$

La solution générale de (4.54) pour  $x_1$  est alors

$$x_1(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{A^3}{32} \omega^2 \cos 3\omega t, \quad (4.56)$$

avec

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \mu \frac{3}{4} A^2.$$

En imposant les conditions initiales  $x_1(0) = 0$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$ , les deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  se trouvent déterminées avec les valeurs

$$C_1 = 0, \quad (4.57)$$

$$C_2 = -\frac{A^3}{32} \omega^2, \quad (4.58)$$

d'où finalement,

$$x_1(t) = \frac{A^3}{32} \omega^2 (\cos 3\omega t - \cos \omega t).$$

La solution approchée de l'équation (4.48) devient alors :

$$x(t) = A \cos \omega t + \mu \frac{A^3}{32} \omega^2 (\cos 3\omega t - \cos \omega t) \quad (4.59)$$

La relation pulsation-amplitude est donnée enfin, par :

$$\omega = \omega_o \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{\mu A^2}{\omega_o^2}} \quad (4.60)$$

La méthode de Lindstedt-Poincaré nous a permis d'obtenir une solution périodique approchée de l'équation non-linéaire (4.48) en mettant en évidence la dépendance de la pulsation vis à vis de l'amplitude et l'apparition d'harmoniques dans les termes d'ordre élevés de l'expression de la réponse temporelle .

## 4.5 Systèmes algébriques non-linéaires, méthode de continuation

Les méthodes de résolution de problèmes dynamiques non-linéaires par certaines méthodes d'approximation amènent à la résolution de systèmes algébriques non-linéaires. Ce type de problème a notamment été rencontré au cours de cette étude lors de l'obtention des modes non-linéaires sous forme approchée par résolution d'un problème modal non-linéaire, ainsi que dans le calcul des réponses forcées. Le paramètre sera pour nous l'amplitude modale, la pulsation d'excitation ou le niveau de l'excitation dans le cas du calcul de réponses forcées. Ces problèmes aboutissent tous à la résolution d'une ou d'un ensemble d'équations de la forme [52] :

$$F(x, \alpha) = 0, \quad (4.61)$$

où  $x \in R^n$  est un vecteur d'inconnues à déterminer et  $\alpha$  un vecteur de paramètres scalaires. Nous nous limiterons ici à un seul paramètre.

Le suivi des solutions du problème (4.61) par rapport au paramètre  $\alpha$  est l'objet de certaines techniques que nous allons présenter. Celles-ci, permettent selon leur degré de sophistication, de faire face aux situations susceptibles de se produire dans le cadre des problèmes non-linéaires (solutions multiples, bifurcations,...).

Les algorithmes de continuation permettent de suivre les branches des solutions de (4.61) lorsque le paramètre  $\alpha$  évolue. Ces méthodes sont basées sur le théorème des fonctions implicites

qui permet, à condition que la fonction  $F(x, \alpha)$  soit suffisamment régulière et que la matrice Jacobienne en un point  $(x_i, \alpha_i)$  de l'espace  $R^n \times R$  associée à (4.61),

$$F_x(x_i, \alpha_i) = \left[ \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right] (x_i, \alpha_i), \quad (4.62)$$

ne soit pas singulière, d'attribuer de façon univoque une solution  $x$  pour toute valeur du paramètre  $\alpha$  dans un voisinage de  $(x_i, \alpha_i)$ .

La matrice Jacobienne (4.62) peut devenir singulière dans différents cas correspondant par exemple aux points selle ou au point d'intersection de plusieurs branches de solutions. Ces différentes situations correspondent toutes à la singularité de la matrice Jacobienne et sont classifiées en fonction du rang de la matrice  $[F_x, F_\alpha]$  :

- point selle dans le cas où  $\text{rang}([F_x, F_\alpha]) = n$ ,
- autres bifurcations si  $\text{rang}([F_x, F_\alpha]) \leq n - 1$ ,

où

$$F_\alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

Les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont alors violées et l'on perd l'assurance de l'existence et de l'unicité de la solution localement au point de bifurcation. Nous supposons à présent, que nous disposons d'une solution initiale  $(x_i, \alpha_i)$  du problème (4.61) :

$$F(x_i, \alpha_i) = 0, \quad (4.63)$$

et que  $F(x, \alpha)$  satisfait les hypothèses nécessaires.

Les méthodes que nous exposerons entrent dans la classe des méthodes de prédicteur-correcteur. Elles consistent en une paramétrisation du problème, une phase de prédiction, une phase de correction et de contrôle de pas.

### 4.5.1 L'algorithme de continuation séquentielle

L'algorithme de continuation séquentielle, sans doute le plus simple, consiste à fixer une subdivision de l'intervalle balayé par  $\alpha$ , définie par les valeurs  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ . La solution  $x_i$  telle que  $F(x_i, \alpha_i) = 0$  est utilisée comme prédicteur (d'ordre 0) pour la solution voisine  $(x_{i+1}, \alpha_{i+1})$ . Cette valeur prédite est ensuite corrigée par exemple par une méthode de Newton-Raphson. Cependant, cette technique échoue en présence d'un point selle en fonction du paramètre  $\alpha$  correspondant à une valeur  $\alpha_{crit}$  à partir de laquelle il ne correspond pas de solution  $x$  (Figure 4.3). Cette situation peut être rencontrée lorsque l'on désire calculer une réponse fréquentielle qui présente un saut et que l'on choisit la pulsation comme paramètre de continuation. La difficulté peut être levée en choisissant une des variables  $x_k$  comme nouveau paramètre de continuation et  $\alpha$  devient alors une variable déterminée par le correcteur.

### 4.5.2 Algorithme de continuation sur la longueur d'arc

Le paramètre de continuation est ici la longueur de l'arc.  $x$  et  $\alpha$  sont considérés comme fonctions de  $s$  i.e.  $x = x(s)$  et  $\alpha = \alpha(s)$ . On cherche alors sur la courbe paramétrée par la variable  $s$  une solution  $(x, \alpha)$  de

$$F(x(s), \alpha(s)) = 0. \quad (4.64)$$

En dérivant (4.64) par rapport à  $s$ , on obtient :

$$F_x(x, \alpha)x' + F_\alpha(x, \alpha)\alpha' = 0, \quad (4.65)$$

où

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad (4.66)$$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}, \quad (4.67)$$

$$F_x = \left[ \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right], \quad (4.68)$$

$$F_\alpha = \left[ \frac{\partial F_j}{\partial \alpha} \right]. \quad (4.69)$$

L'équation (4.65) est utilisée pour déterminer une tangente à la courbe (4.61) à la coordonnée  $s$  :

$$T = \begin{bmatrix} x' \\ \alpha' \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

En se plaçant dans le cas où la matrice Jacobienne  $F_x$  est non-singulière, deux cas sont considérés :

1)-si  $F_\alpha = 0$ , on obtient une solution en fixant  $\alpha$  à l'unité :

$$\begin{bmatrix} x' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

2)-Si  $F_\alpha$  est non nul, alors, comme l'équation (4.65) est linéaire en  $x'$  et  $\alpha'$ , on fixe  $\alpha' = 1$  et on détermine  $x'$  par inversion :

$$x' = -F_x(x, \alpha)^{-1} F_\alpha(x, \alpha). \quad (4.72)$$

Le vecteur  $T$  est normalisé en fixant à l'unité sa norme Euclidienne :

$$\|T\|^2 = \|x\|^2 + \alpha'^2 = 1.$$

La prédiction à l'étape  $i$  (en vue de l'étape  $i + 1$ ), s'effectue alors par un pas de la méthode d'Euler :

$$\begin{bmatrix} x \\ \alpha \end{bmatrix}_{i+1}^p = \begin{bmatrix} x \\ \alpha \end{bmatrix}_i \pm \begin{bmatrix} x' \\ \alpha' \end{bmatrix}_i \cdot \Delta s. \quad (4.73)$$

Le prédicteur ainsi réalisé est d'ordre 1 et est appelé prédicteur tangent. Le signe  $\pm$  dépend du sens de parcours que l'on désire sur la courbe et le paramètre  $\Delta s$  permet d'ajuster les pas du prédicteur. En pratique, nous avons orienté la tangente en assurant que le produit scalaire de deux tangentes successives  $T_i$  et  $T_{i+1}$  pour deux points proches sur la courbe des solutions est de signe constant (Figure 4.3). A chaque itération le produit scalaire est testé, et la tangente re-orientée si nécessaire.

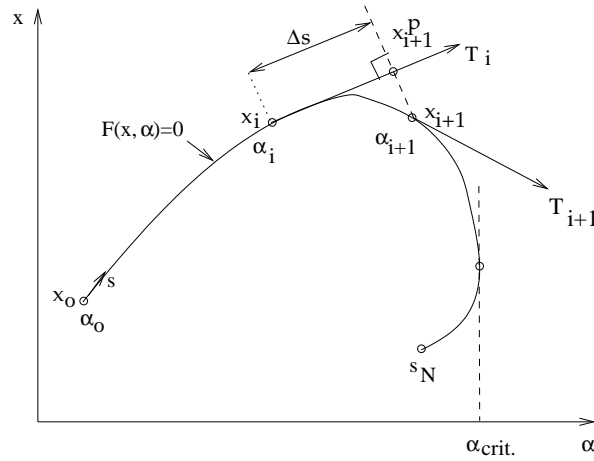


FIG. 4.3 – Méthodes de continuation sur un paramètre.

La correction de la solution prédite est effectuée en ajoutant une contrainte au système d'équations à résoudre. Si  $(x_i, \alpha_i)$  est la solution à l'itération  $i$ , la correction est effectuée en cherchant l'intersection de la courbe  $F(x, \alpha) = 0$  avec l'hyperplan orthogonal à  $T_i$  et passant par  $(x_i^p, \alpha_i^p)$ . (Figure 4.3). Cette contrainte s'exprime par

$${}^tT_i \cdot \begin{bmatrix} x - x_{i+1}^p \\ \alpha - \alpha_{i+1}^p \end{bmatrix} = 0, \quad (4.74)$$

et doit être résolue simultanément avec  $F(x, \alpha) = 0$  pour trouver la solution  $(x_{i+1}, \alpha_{i+1})$ .

### Contrôle du pas

Le choix du pas intervient dans la vitesse de convergence des phases de correction et dans la finesse de discrétisation voulue de l'ensemble des solutions. Le pas doit également s'adapter pour assurer la convergence du correcteur. Certaines stratégies [9] sont ainsi basées sur une estimation *a posteriori* des performances du correcteur pour ajuster la taille de  $\Delta s$  en vue de l'itération suivante. Si  $a$  est un nombre d'itérations de correction "raisonnable" fixé par l'utilisateur, et  $n$  le nombre d'itérations effectif, le pas sera adapté selon une règle du type :

$$\Delta_{i+1} = 2^{(a-n)/b} \Delta_i, \quad (4.75)$$

ou bien

$$\Delta_{i+1} = (a/b)^\beta \Delta_i, \quad (4.76)$$

où les paramètres  $a, b, \beta$  dépendent du problème et doivent être ajustés. D'autres critères de contrôle établis de façon plus rigoureuse [9] utilisent les facteurs suivant :

#### 1) Le taux de contraction $k(x_i, \Delta s)$

Le taux de contraction est défini comme de quotient des premières itérations du correcteur ( $x_i^{p'}$  et  $x_i^{p''}$ ) :

$$k(x_i, \Delta s) = \frac{\|x_i^p - x_i^{p'}\|}{\|x_i^{p'} - x_i^{p''}\|} \quad (4.77)$$



Connaissant les propriétés de vitesse de convergence locale du correcteur (par exemple localement quadratique pour l'algorithme de Newton-Raphson), le pas est ajusté en fonction de  $k(x_i, \Delta s)$ .

### 2) L'angle de deux tangentes

L'angle entre deux tangentes consécutives  $T_i$  et  $T_{i+1}$ , est utilisé comme une mesure de la courbure. Plus la courbure est grande plus le pas sera choisi petit.

### Autres types de bifurcation

Dans le cas de points selle, tels que les sauts de certaines réponses fréquentielles non-linéaires, la matrice Jacobienne  $F_x$  est singulière mais  $[F_x, F_\alpha]$  est de rang  $n$  ce qui rend possible le choix d'un nouveau paramètre. Les bifurcations ne correspondant pas à des points selles (pitchfork, bifurcation transcritique) sont détectées par le fait que le rang est alors de  $n - 1$ . Les solutions non triviales de :

$$[F_x, F_\alpha]d_j = 0 \quad (4.78)$$

au nombre de 2 au moins, donnent alors les directions des branches de bifurcation exploitées par des algorithmes adaptés à ces situations qui ont fait l'objet de développements ([52] ou [19]).

## 4.6 Conclusion

Ce chapitre a été l'occasion de faire ressortir certaines phénoménologies propres aux systèmes non-linéaires par le biais de plusieurs exemples traités par les méthodes d'analyse non-linéaires classiques. Nous avons abordé les phénomènes de saut, de surharmonique et sousharmonique de résonance interne et en combinaison. Il est en effet indispensable à l'expérimentateur, d'avoir présent à l'esprit ces différents points afin qu'il puisse maîtriser et interpréter ses essais. D'un point de vue du calcul, les méthodes de continuation, seront un outils efficace pour la recherche des modes exposés au chapitre 2 ainsi que pour les différents sous-problèmes algébriques non-linéaires rencontrés dans de travail.

# Chapitre 5

## Identification non-linéaire

### 5.1 Introduction

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour identifier ou prendre en compte l'effet des non-linéarités dans l'analyse des réponses mesurées sur un système. Des méthodes temporelles pourront être trouvées dans la référence [89], où on utilise une méthode de décomposition de Karhunen-Loeve pour condenser les données. Dans [6], une notion particulière de mode non-linéaire fonction de plusieurs amplitudes  $(\bar{\omega}_j(Q_1, \dots, Q_n), \bar{\Phi}_j(Q_1, \dots, Q_n))$  est introduite et utilisée pour exprimer analytiquement la réponse libre d'un système. La transformation de Gabor est ensuite utilisée pour extraire ces modes non-linéaires de réponses temporelles.

Malgré l'intérêt de ces différentes méthodes temporelles, la présentation de ce chapitre se limitera à l'identification de réponses fréquentielles de systèmes non-linéaires.

### 5.2 Méthode de la raideur complexe

Mertens et al. [21] proposent la méthode "*Complex Stiffness Method*" qui permet la détection et l'identification des non-linéarités dans le domaine fréquentiel à l'aide d'un modèle à 1 degré de liberté

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f, \quad (5.1)$$

et qui utilise l'inverse de l'inertance mesurée  $\alpha(\Omega)$  (accélération sur force) en considérant uniquement le premier harmonique de l'excitation dans la réponse :

$$u(t) \approx \frac{1}{2}(Ue^{i\Omega t} - \bar{U}e^{-i\Omega t}), \quad (5.2)$$

$$f(t) \approx \frac{1}{2}(Fe^{i\Omega t} - \bar{F}e^{-i\Omega t}). \quad (5.3)$$

On a alors, d'après (5.1),

$$(-\Omega^2 m + ic\Omega + k) = \frac{F}{U} = -\Omega^2 \alpha^{-1}(\Omega). \quad (5.4)$$

L'équation (5.4) donne :

$$k = \Omega^2(m - Re(\alpha^{-1}(\Omega))), \quad (5.5)$$

et,

$$c = -\Omega \operatorname{Im}(\alpha^{-1}(\Omega)). \quad (5.6)$$

Il reste à déterminer la masse  $m$  en utilisant l'équation (5.5) et 2 couples de points expérimentaux  $(U_a, \Omega_a)$  et  $(U_b, \Omega_b)$  correspondant à la même amplitude de déplacement ( $|U_a| = |U_b|$ ). En effet, en supposant que la raideur ne dépend que de l'amplitude nous avons en utilisant (5.5) :

$$m = [\operatorname{Re}(\alpha^{-1}(\Omega_a)) - \frac{\Omega_b^2}{\Omega_a^2} \operatorname{Re}(\alpha^{-1}(\Omega_b))] \left(1 - \frac{\Omega_b^2}{\Omega_a^2}\right)^{-1} \quad (5.7)$$

Les paramètres  $k, c, m$ , obtenus à l'aide des expressions (5.5), (5.6), (5.7), dépendent du point de calcul considéré et peuvent être vus comme des fonctions de  $|U|$  et/ou  $|V|$  :

$$k(|U|), c(|U|, |V|), m(|U|),$$

avec  $|V| = \Omega|U|$  et  $|U| = \frac{|\alpha(\Omega)F|}{\Omega^2}$ .

Les fonctions  $k(|U|), c(|U|, |V|), m(|U|)$  permettent de mettre en évidence et de distinguer les effets des non-linéarités sur la raideur et/ou l'amortissement et d'avoir un aperçu de leur dépendance par rapport au déplacement et/ou à la vitesse.

D'un point de vue pratique, nous ajouterons que les essais ne fournissent pas nécessairement des points à des amplitudes strictement identiques de part et d'autre d'un pic de résonance pour la détermination des masses car la discrétisation en amplitude dépend de la dynamique du système. Nous proposons alors le recours à une technique d'interpolation pour pallier à cet inconvénient en générant des couples de points expérimentaux "supplémentaires"  $(\Omega_i^a, U_i^a)$  et  $(\Omega_i^b, U_i^b)$ , respectivement à gauche et à droite de la résonance, proches de ceux mesurés et correspondant à la même amplitude ( $|U_i^a| = |U_i^b|$ ). (Figure 5.1 et 5.3).

La pulsation  $\Omega_a$  est d'abord déterminée par interpolation du module de la réponse mesurée comme illustré dans la figure 5.1. La valeur complexe de la réponse correspondant à  $\Omega_a$  est ensuite obtenue par une nouvelle interpolation. Cette procédure peut être conduite pour les points situés à gauche ( $\Omega_a$ ) et à droite ( $\Omega_b'$ ) du maximum de réponse, en générant à chaque fois de nouveaux points.

Notons que la technique employée pour déterminer la masse ne peut pas être appliquée lorsque les réponses possèdent des sauts car il est alors impossible de trouver des points à la même amplitude sur la même réponse au voisinage de la résonance (voir le chapitre 4). Nous proposons d'utiliser dans ce cas 2 niveaux d'effort différents en prenant 1 point de mesure sur chaque réponse pour déterminer  $m$  dans l'équation (5.7) (Figure 5.2).

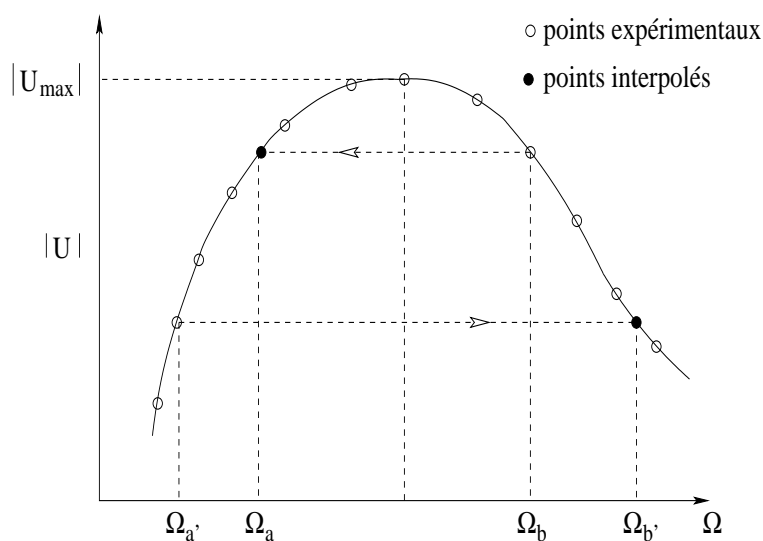


FIG. 5.1 – Méthode proposée pour l'interpolation de points ayant un même niveau d'amplitude pour la méthode de la raideur complexe.

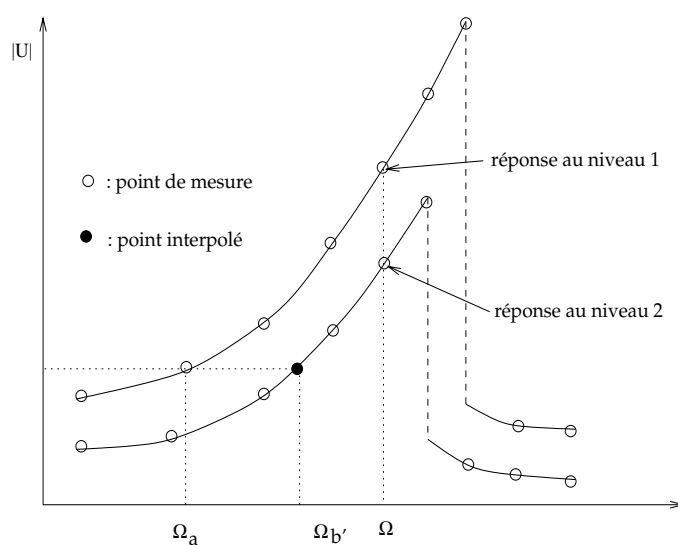


FIG. 5.2 – Méthode d'interpolation de points de même niveau d'amplitude pour la méthode de la raideur complexe dans le cas d'une réponse avec un saut.

Nous testerons la méthode sur la deuxième résonance (Figure 5.3) d'un système constitué d'une poutre qui sera présenté ultérieurement (partie 5.6). Les figures 5.4, 5.5, 5.6 montrent les paramètres  $m$ ,  $k$ ,  $c$  en fonction de l'amplitude. Le calcul des paramètres a été effectué successivement à partir de plusieurs réponses obtenues pour des niveaux de force différents (3, 5, 9, 11 Newton).

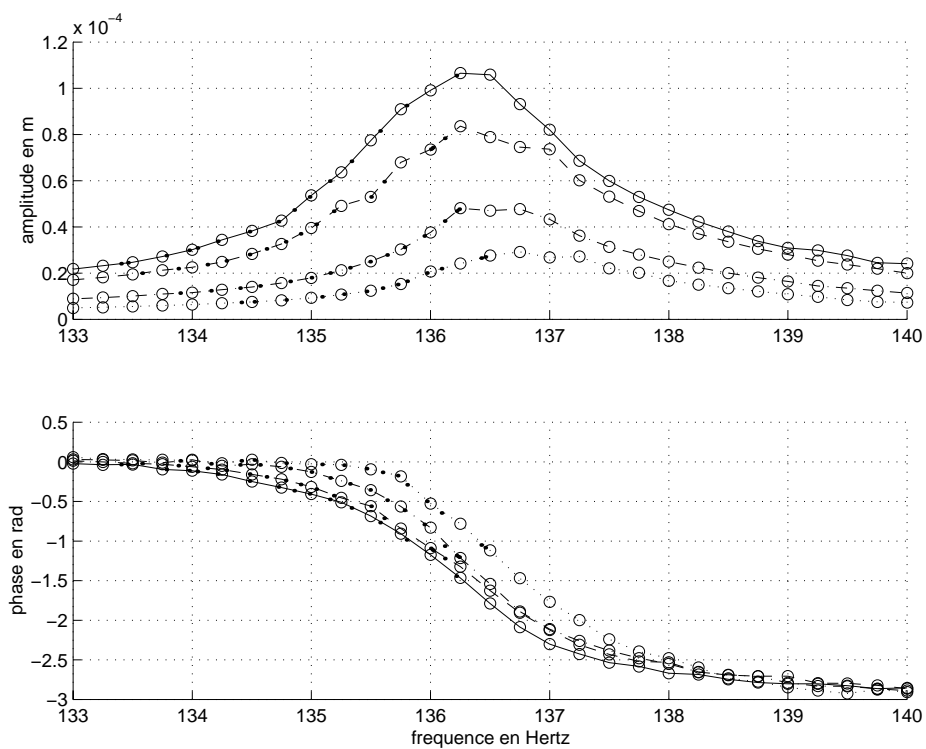


FIG. 5.3 – Méthode de la raideur complexe, génération des points expérimentaux "supplémentaires" (... : 3 N, - - : 5 N, - · : 9 N, - : 11 N); 'o' : points mesurés, 'o' : points interpolés.

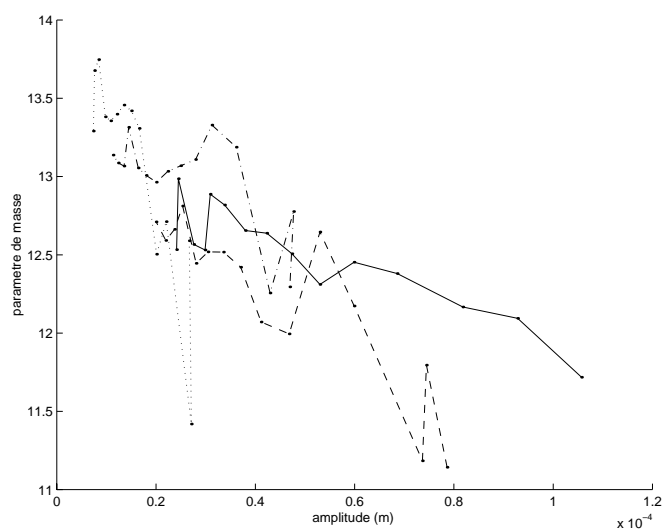


FIG. 5.4 – Méthode de la raideur complexe, paramètre de masse  $m$  en fonction de  $|U|$ ,  
( $\dots$  : 3 N,  $- \cdot$  : 5 N,  $- -$  : 9 N,  $-$  : 11 N).

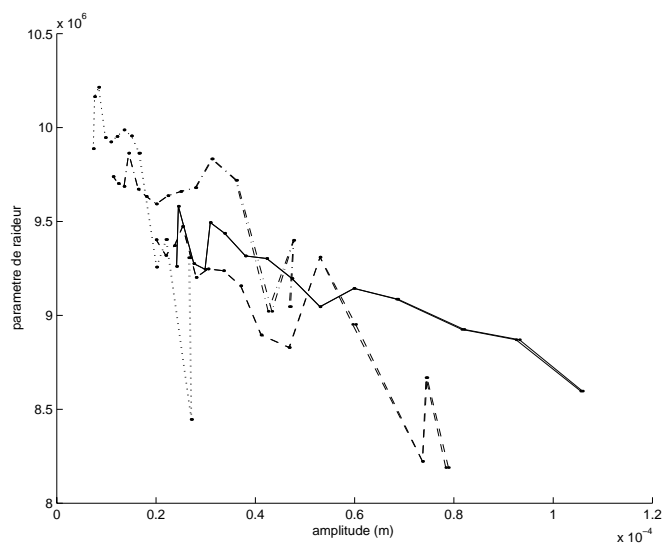


FIG. 5.5 – Méthode de la raideur complexe, paramètre de raideur  $k$  en fonction de  $|U|$ ,  
( $\dots$  : 3 N,  $- \cdot$  : 5 N,  $- -$  : 9 N,  $-$  : 11 N).

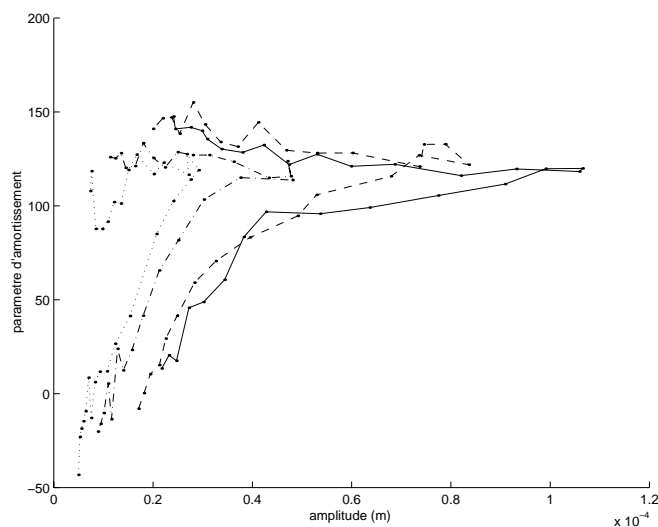


FIG. 5.6 – Méthode de la raideur complexe, paramètre d'amortissement  $c$  en fonction de  $|U|$ , ( $\dots$  : 3 N,  $- \cdot -$  : 5 N,  $- - -$  : 9 N,  $-$  : 11 N).

La synthèse des réponses s'effectuera en lissant les paramètres  $m, c, k$  par des fonctions continues en en résolvant le problème non-linéaire à une variable

$$[-\Omega^2 m(|U|) + \mathbf{i}c(|U|)\Omega + k(|U|)]U = F, \quad (5.8)$$

pour chaque pulsation  $\Omega$ .

En conclusion, la méthode de la raideur complexe est assez simple puisque qu'elle n'utilise que quelques points de mesure simultanément, ce qui peut générer une certaine dispersion dans les résultats. Néanmoins, elle nous permet de faire apparaître quelques particularités de l'identification non-linéaire : spécificités des réponses non-linéaires, choix de la forme des fonctions de l'amplitude, synthèse des réponses.

## 5.3 Méthode d'identification des modes linéaires en présence de non-linéarités

### 5.3.1 Introduction

Certains auteurs ont proposé une méthode d'identification modale [49], [25] applicable à des structures faiblement non-linéaires en excitation harmonique. Lorsque les modes sont isolés, un modèle de fonction transfert est proposé. Une technique de filtrage des modes extérieurs à la bande d'analyse est employée. Lorsque les modes sont couplés, les données expérimentales sont condensées sur des "capteurs fictifs" en nombre égal aux modes présents dans la bande d'analyse détectés par la méthode de décomposition en valeurs singulières. Ensuite, une technique de linéarisation équivalente, appliquée à la partie non-linéaire du modèle permet d'identifier les paramètres linéaires en prenant en compte la présence de non-linéarités, afin d'obtenir les modes du système linéaire associé, par résolution d'un problème aux valeurs propres standard. La méthode est également transposable au domaine temporel [26].

### 5.3.2 Cas d'un mode isolé

Dans le cas d'une résonance isolée, il est proposé [49] d'utiliser le modèle de fonction de transfert suivant :

$$y(\omega) = u + sv + \frac{t_v}{s - s'_v(A, \omega)} \quad (5.9)$$

avec :

$$s'_v(A, \omega) = s_v \left( 1 + \sum_{i=1}^{N_\alpha} \alpha_{iv} (A\omega^{p_i})^{q_i} \right) \quad (5.10)$$

où l'on a :

$y(\omega)$  : vecteur des  $q$  réponses en fréquence filtrées sur l'harmonique d'excitation  $\omega$ ,

$u + sv$  : termes de contribution des modes extérieurs, ( $s = j\omega$ )

$t_v = y_v^t y_v F$  et  $y_v$  : vecteur propre complexe du système linéaire associé,

$F$  : vecteur des forces excitatrices de pulsation  $\omega$ ,

$s_v = -a_v \omega_v + j\omega_v$  : valeurs propres du système linéaire associé,

$A = ({}^t \bar{y} y)^{\frac{1}{2}}$  : amplitude globale mesurée sur l'ensemble des  $q$  capteurs,

$p_i, q_i, \alpha_{iv}$  : exposants et coefficients de la non-linéarité,

$N_\alpha$  : nombre de termes non-linéaires dans le développement.

La déformée est ainsi supposée invariante par rapport à l'amplitude, les exposants  $p_i, q_i$  sont choisis arbitrairement en fonction du type de non-linéarité rencontrée. Les distorsions des diagrammes de Nyquist sont utilisées pour fournir des indications sur le type de non-linéarité en présence [24]. D'après les auteurs, le modèle (5.9) convient lorsque les modes sont isolés dans le spectre et que l'amortissement est faible.

La détermination des vecteurs complexes  $u, v, t_v$  et des scalaires complexes  $s_v, \alpha_{iv}$  est effectuée par une méthode de moindres carrés comme dans la méthode de lissage linéaire [22] avec ici, les inconnues supplémentaires  $\alpha_{iv}$ , en considérant la fonction d'erreur complexe suivante



pour un point de mesure  $n$  à la fréquence  $\omega_k$  :

$$g_n(p, \omega_k) = y_n(\omega_k) - u_n - \mathbf{i}\omega_k v_n - \frac{t_{vn}}{\mathbf{i}\omega_k - s'_v(A, \omega_k)}, \quad (5.11)$$

où  $p = (u_n, v_n, t_{vn}, \alpha_{1v}, \dots, \alpha_{N_\alpha v}, s_v)$  est le vecteur des paramètres à identifier. Le vecteur  $p$  est calculé par une méthode de gradient associée à un problème de moindres carrés. La linéarisation de (5.11) au voisinage d'une estimation des paramètres  $p_o$  s'écrit :

$$g_n(p, \omega_k) = g_n(p_o, \omega_k) + \left[ \frac{\partial g_n}{\partial p}(p_o) \right] \cdot \delta p + \epsilon_k(\omega_k) \quad (5.12)$$

En utilisant les  $N_\omega$  mesures aux pulsations  $\omega_k$ , ( $k = 1, \dots, N_\omega$ ), on obtient un système, en général surdéterminé, de  $N_\omega$  équations à  $4 + N_\alpha$  inconnues complexes de la forme :

$$B\delta p = b + \epsilon, \quad (5.13)$$

La solution au sens des moindres carrés qui minimise  ${}^t\bar{\epsilon}\epsilon$  conduit à :

$$\delta p = ({}^t\bar{B}B)^{-1} {}^t\bar{B}b. \quad (5.14)$$

La solution  $p = p_o + \delta p$  qui découle de résolution de (5.14) est ensuite réinjectée dans (5.14) où  $B$  dépend de  $p$ , et le procédé est itéré jusqu'à satisfaction d'un critère de convergence sur  $p$ .

Le vecteur  $p_o$  est constitué avec les valeurs  $u_n = v_n = t_{nv} = \alpha_{iv} = 0$  et  $s_v = -\omega_o/1000 + \mathbf{i}\omega_o$ , où  $\omega_o$  est directement estimé sur le pic de réponse.

Un premier passage de lissage des réponses de chaque capteur, séparément, est ainsi effectué et les différentes valeurs des paramètres  $\alpha_{iv}$  et  $s_v$  sont moyennées sur le nombre des capteurs.

Un deuxième passage, où l'on fixe les paramètres  $s_v$  et  $\alpha_{iv}$  à leurs valeurs moyennes, rend cette fois le problème (5.12) linéaire, qui par résolution, donne l'estimation finale des vecteurs  $u$ ,  $v$ ,  $t_v$ .

Les modes  $y_v$  sont ensuite déterminés classiquement en utilisant d'abord le point de mesure colocalisé au point d'excitation dans le cas d'une excitation mono-point ou par résolution d'un système linéaire dans le cas d'une excitation multi-point [22], [24].

Après détermination de tous les paramètres intervenant dans (5.9), la synthèse des réponses correspondant à une excitation  $F$  à partir du modèle (5.9) s'effectue en résolvant en  $y$  le problème non-linéaire à  $q$  variables

$$y = u + sv + \frac{y^t y F}{s - s'_v(({}^t\bar{y}y)^{\frac{1}{2}}, \omega)}. \quad (5.15)$$

### 5.3.3 Cas de plusieurs modes de fréquences voisines

Les modes sont dits fortement couplés si leurs fréquences propres sont dans une bande large de 3 fois la largeur de bande à 3 dB du mode le plus amorti [49]. Dans ce cas, la méthode précédente ne peut plus être appliquée. Une alternative est proposée par les auteurs dont on trouvera les détails dans [26]. On suppose alors, que les vecteurs de mesure  $y(\omega)$  sont solutions d'un système linéaire équivalent :

$$[-\omega^2 M + \mathbf{i}\omega(B + B^e) + (K + K^e)]y(\omega) = F(\omega), \quad (5.16)$$

où  $B^e$  et  $K^e$  sont des matrices d'amortissement et de raideur équivalentes (au sens de la linéarisation équivalente décrite dans la partie 4.3), fonctions de  $\omega$  et de  $y(\omega)$  et  $M$ ,  $B$ ,  $K$  sont les matrices de la partie linéaire du système.

La méthode procède en plusieurs étapes. Tout d'abord, les modes extérieurs à la bande des modes couplés sont filtrés en formant les suites de différences des réponses pour des fréquences voisines rangées dans la matrice  $\Delta Y$  :

$$\Delta Y = [\Delta y(\omega_1) \dots \Delta y(\omega_{N_\omega - \delta})] \quad (5.17)$$

où  $\Delta y(\omega_k) = y(\omega_{k+\delta}) - y(\omega_k)$  avec  $\delta$  choisi tel que  $(\omega_{k+\delta} - \omega_k)$  soit de l'ordre de la largeur de bande de fréquence à 3dB. Les contributions des modes extérieurs ont en effet une variation lente dans la bande d'analyse et sont donc quasiment éliminés de la réponse par ce procédé.

Une base minimale de représentation de  $\Delta Y$  est ensuite construite par une technique de décomposition en valeurs singulières

$$[\text{Re}(\Delta Y) \quad \text{Im}(\Delta Y)] = U \Sigma^t V, \quad (5.18)$$

où  $U$  et  $V$  sont deux matrices réelles orthonormales. La base minimale est obtenue en tronquant la base orthonormale constituée par les colonnes de  $U$ . On forme pour cela la suite des ratios

$$r_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}},$$

où les  $\sigma_k$  sont les valeurs singulières ordonnées ( $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ ) prises sur la diagonale de  $\Sigma$ . Une forte augmentation dans la suite  $r_k$  se produisant au rang  $k = p$  indique que  $p$  modes sont présents dans la bande. Nous obtenons alors une sous base réelle  $Z$ , en prenant les  $p$  premiers vecteurs colonne de  $U$ .

Les données sont donc exprimées de façon approximative sur cette base :

$$\Delta Y \approx ZC, \quad (5.19)$$

et grâce à la propriété d'orthogonalité de  $Z$ , les mesures condensées  $C$  sont obtenues par

$$C = {}^t Z \Delta Y.$$

Le système (5.16) condensé sera noté :

$$[-\omega^2 m_o + \mathbf{i}\omega b_o + k_o + \bar{k}]c(\omega) = {}^t ZF(\omega) \quad (5.20)$$

où  $m_o = {}^t ZMZ$ ,  $b_o = {}^t ZBZ$ ,  $k_o = {}^t ZKZ$  sont les matrices condensées de la partie linéaire du système, et où  $\bar{k} = {}^t Z(K^e + j\omega B^e)Z$  est une matrice complexe qui regroupe les termes non-linéaires.  $c(\omega)$  sera la colonne de  $C$  correspondant à la fréquence  $\omega$ .

Les non-linéarités sont introduites dans le modèle par des formes polynomiales des déplacements et/ou vitesses des points de mesure. Dans le cas d'une non-linéarité cubique en raideur entre les coordonnées  $i$  et  $j$ , les forces introduites aux points  $i$  et  $j$  seront (dans le domaine temporel) :

$$f_i(y(t)) = -f_j(y(t)) = \beta_{ij}(y_i(t) - y_j(t))^3 \quad (5.21)$$

où  $y(t)$  désigne la réponse temporelle au point de mesure et  $\beta_{ij}$  le coefficient de la non-linéarité cubique de la liaison entre les points  $i$  et  $j$ .

Les matrices  $B^e$  et  $K^e$  du système équivalent (5.16) sont calculées par la méthode de linéarisation équivalente (voir la partie 4.3). Sous l'hypothèse du premier harmonique de la réponse  $y(t)$ , nous obtenons à partir de (5.21) :

$$\begin{aligned} B^e &= 0, \\ K^e &= \sum_{i=1}^q \sum_{j \geq i}^q \alpha_{ij} Q_{ij}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

avec la matrice  $Q_{ij}$  que nous définissons par :

$$Q_{ijpq} = (\delta_{ip} - \delta_{jp})(\delta_{iq} - \delta_{jq}), \quad (5.23)$$

et avec

$$\alpha_{ij} = \frac{3}{4} \beta_{ij} | \Delta y_i(\omega) - (1 - \delta_{ij}) \Delta y_j(\omega) |^2, \quad (5.24)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. D'après l'équation (5.19), nous avons

$$\Delta y_i(\omega) - \Delta y_j(\omega) = \sum_k (z_{ik} - z_{jk}) \cdot c_k(\omega) \quad (5.25)$$

où  $z_{ik}$  sont les éléments de la matrices  ${}^t Z$ . Ainsi, les raideurs équivalentes  $\alpha_{ij}$  des liaisons non-linéaires sont exprimées en fonction des coordonnées  $c_k$  :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{3}{4} \beta_{ij} | \sum_l (z_{il} - z_{jl}) \cdot c_l(\omega) |^2 \\ &= \frac{3}{4} \beta_{ij} \left( \sum_l (z_{il} - z_{jl})^2 \cdot |c_l|^2 + 2 \sum_{m < n} (z_{im} - z_{jm})(z_{in} - z_{jn}) \operatorname{Re}(c_m \bar{c}_n) \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Compte tenu des expressions (5.26) et (5.22), la matrice de raideur non-linéaire condensée  $\bar{k}$  s'écrira :

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^q \sum_{j \geq i}^q \alpha_{ij} \bar{Q}_{ij} \quad (5.27)$$

où  $\bar{Q}_{ij} = {}^t Z Q_{ij} Z$ .

En substituant l'expression (5.26) dans (5.27) et par regroupement des termes en  $c_k$  et  $c_m \bar{c}_n$ , nous faisons apparaître l'écriture suivante :

$$\bar{k}(\omega) = \sum_{l=1}^p \bar{k}_l |c_l(\omega)|^2 + \sum_{m=1, m < n}^{p-1} \bar{k}_{I(n,p,m)} \operatorname{Re}(c_m(\omega) \bar{c}_n(\omega)) \quad (5.28)$$

où  $I(n, p, m) = m(2p - m - 1)/2 + n$ .

Les matrices  $\bar{k}_l$  et  $\bar{k}_{I(n,p,m)}$  sont symétriques, complexes et définies par :

$$\bar{k}_l = \frac{3}{4} \sum_{i=1, j \geq i}^q (z_{il} - z_{jl})^2 \beta_{ij} \bar{Q}_{ij}, \quad (5.29)$$

et

$$\bar{k}_{I(n,p,m)} = \frac{3}{2} \sum_{m=1, m < n}^q (z_{im} - z_{jm})(z_{in} - z_{jn}) \beta_{ij} \bar{Q}_{ij}. \quad (5.30)$$

Dans le cas particulier où la condensation s'effectue à l'aide d'une sous-base de dimension  $p = 2$  on aura :

$$\bar{k} = \bar{k}_1 |c_1|^2 + \bar{k}_2 |c_2|^2 + \bar{k}_3 R_e(c_1 \bar{c}_2), \quad (5.31)$$

et pour  $p = 3$  :

$$\bar{k} = \bar{k}_1 |c_1|^2 + \bar{k}_2 |c_2|^2 + \bar{k}_3 |c_3|^2 + \bar{k}_4 R_e(c_1 \bar{c}_2) + \bar{k}_5 R_e(c_1 \bar{c}_3) + \bar{k}_6 R_e(c_2 \bar{c}_3). \quad (5.32)$$

L'identification porte sur les coefficients des matrices  $m_o$ ,  $b_o$ ,  $k_o$ ,  $\bar{k}_j$ . Les coefficients des matrices de la partie linéaire sont réels et au nombre de  $3p(p+1)/2$ . Les matrices  $\bar{k}_j$  sont au nombre de  $p(p+1)/2$ . Le total des paramètres réels à identifier est donc de  $N = p(p+1)(3+p(p+1))/2$ , soit  $N = 27$  pour  $p = 2$  et  $N = 90$  si  $p = 3$ . Le problème d'identification est linéaire compte tenu de l'expression de  $\bar{k}$  (équation (5.28)) et du problème condensé (5.20).

Cependant, le nombre de paramètres augmentant rapidement avec le nombre de modes, il ne semble pas possible, d'après les auteurs, d'identifier plus de trois modes couplés avec cette méthode.

Différentes techniques (conditionnement par normalisation et décalage fréquentiel, pondération, régularisation de Tichonov) appliquées au problème linéaire à résoudre pour trouver ces paramètres sont exposées et mises en œuvre dans [26].

Les modes complexes ou conservatifs sont *in fine* obtenus par résolution de problèmes aux valeurs propres sur la partie linéaire du système condensé et les modes sont ensuite restitués à la taille des vecteurs de mesure *via* l'équation (5.19).

## 5.4 Méthode de continuation en fréquence

### 5.4.1 Introduction

Nous présentons ici une méthode d'identification des modes non-linéaires, dans le domaine fréquentiel, qui a été proposée par Sétio [68],[69], [70], [67] et que nous appellerons ici **méthode de continuation en fréquence**.

La méthode est basée sur la notion de mode non-linéaire approché par la méthode de Ritz qui a été exposée dans la section 2.2, ainsi que sur l'approximation des réponses fréquentielles au moyen d'une superposition linéaire des réponses fréquentielles modales. Elle utilise les réponses expérimentales obtenues en sinus balayé avec un niveau de force constant et nécessite la connaissance d'une base de vecteurs propres "linéaires" ainsi que des facteurs d'amortissement associés et qui peuvent être obtenus à partir d'essais à faible niveau à l'aide de méthodes d'identification modales classiques [24], [85].

La méthode procède progressivement dans la bande de fréquence, et pour chaque amplitude de réponse mesurée correspondant à une pulsation de l'excitation, les paramètres modaux du modèle (la pulsation  $\bar{\omega}_j$  et les coefficients  $\beta_{jk}$ ) sont extraits par une procédure numérique, minimisant l'écart entre la souplesse théorique (fonction de  $\bar{\omega}_j$  et  $\beta_{jk}$ ) et la souplesse mesurée. On utilise pour cela plusieurs points de mesure sur la structure dont les réponses sont traitées simultanément. Les paramètres sont *in fine* reliés à l'amplitude modale non-linéaire  $Q_j$  et lissés par des fonctions continues. La synthèse des réponses se ramène à la résolution d'un problème

non-linéaire à une variable.

### 5.4.2 Expression de la souplesse dynamique

La "souplesse dynamique"  $\bar{S}_{im}(\Omega, Q)$  du système non-linéaire est approchée par une superposition linéaire des différentes contributions de  $n$  modes non-linéaires. Ainsi, la réponse au point  $i$  due à une excitation de niveau  $F_m$  au point  $m$  sera :

$$U_i = \bar{S}_{im}(\Omega, Q)F_m, \quad (5.33)$$

où  $U_i$  représente l'amplitude complexe du déplacement au point  $i$  de la structure. La souplesse dynamique non-linéaire  $\bar{S}_{im}(\Omega, Q)$  est une fonction de la pulsation d'excitation et du vecteur  $Q$  des amplitudes modales non-linéaires :

$$\bar{S}_{im}(\Omega, Q) = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\Phi}_{ij}(Q_j)\bar{\Phi}_{mj}(Q_j)}{\bar{\mu}_j(\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2) + \mathbf{i}\Omega\bar{c}_j}. \quad (5.34)$$

En introduisant les expressions des masses modales  $\bar{\mu}_j(Q_j)$ , de l'amortissement modal  $\bar{c}_j(Q_j)$ , et des modes non-linéaires exprimés dans la base des modes linéaires  $\Phi_k$ , (5.34) devient :

$$\bar{S}_{im}(\Omega, Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{jl}(Q_j)\beta_{jk}(Q_j)\Phi_{il}\Phi_{mk}}{(\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2) \sum_{l=1}^n \beta_{jl}^2 + \mathbf{i}\Omega \sum_{l=1}^n \beta_{jl}^2 c_l}. \quad (5.35)$$

Cependant, plutôt que de résoudre le problème en l'état à partir de (5.35), par détermination des paramètres modaux non-linéaires correspondant à chaque mode, on considérera un mode non-linéaire résonant particulier : Si les résonances sont suffisamment distantes dans le domaine fréquentiel, les participations des modes éloignés (non résonants) au voisinage d'une résonance  $\Omega = \bar{\omega}_j(Q_j)$  peuvent être approchés par des participations linéaires évaluées à partir des paramètres modaux linéaires identifiés à faible niveau.

Ainsi pour  $\Omega$  voisin de  $\bar{\omega}_j(Q_j)$ , la réponse stationnaire du système à l'excitation est approchée par :

$$U_i = [\bar{S}_{im}^j(\Omega, Q_j) + S_{im}(\Omega)]F_m, \quad (5.36)$$

où

$$S_{im}(\Omega) = \sum_{l \neq j} \frac{\Phi_{il}\Phi_{ml}}{(\omega_l^2 - \Omega^2) + \mathbf{i}\Omega c_l}, \quad (5.37)$$

est la partie linéaire de la réponse fréquentielle provenant des modes non résonants. (On pourra également introduire les termes résiduels de masse et de raideur dans l'expression ci-dessus).

La participation (non-linéaire) du mode résonant est donnée par :

$$\bar{S}_{im}^j(\Omega, Q_j) = \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{jl}(Q_j) \beta_{jk}(Q_j) \Phi_{il} \Phi_{mk}}{(\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2) \sum_{l=1}^n \beta_{jl}^2 + \mathbf{i}\Omega \sum_{l=1}^n \beta_{jl}^2 c_l}. \quad (5.38)$$

### 5.4.3 Extraction des paramètres modaux

L'extraction des paramètres modaux non-linéaires est effectuée par minimisation de la différence entre les souplesses mesurées et celles données par l'équation (5.36). Les paramètres à déterminer sont la pulsation  $\bar{\omega}_j$  et les coefficients de participation  $\beta_{jk}$ .

Les parties réelles et imaginaires de la participation du mode résonant peuvent être exprimées selon :

$$\begin{aligned} \text{Re}(\bar{S}_{im}) &= \bar{S}_{im}^R = \frac{A_j a_j}{a_j^2 + b_j^2}, \\ \text{Im}(\bar{S}_{im}) &= \bar{S}_{im}^I = -\frac{A_j b_j}{a_j^2 + b_j^2}, \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{jl} \beta_{jk} \Phi_{il} \Phi_{mk}, \\ a_j &= (\bar{\omega}_j^2 - \Omega^2) \sum_{l=1}^n \beta_{jl}^2, \\ b_j &= \sum_{l=1}^n \beta_{jl}^2 c_l. \end{aligned}$$

Les composantes de la fonction  $g(\bar{\lambda}_j, \beta_{j1}, \dots, \beta_{jn})$  intervenant dans le critère, où  $\lambda_j = \bar{\omega}_j^2$  seront scindées en parties réelles et imaginaires selon :

$$\begin{aligned} \text{Re}(g_i(\bar{\lambda}_j, \beta_{j1}, \dots, \beta_{jn})) &= (\alpha_{im}^R - S_{im}^R)(a_j^2 + b_j^2) - A_j a_j, \\ \text{Im}(g_i(\bar{\lambda}_j, \beta_{j1}, \dots, \beta_{jn})) &= (\alpha_{im}^I - S_{im}^I)(a_j^2 + b_j^2) + A_j b_j, \end{aligned} \quad (5.39)$$

où  $\alpha_{im}^R$  et  $\alpha_{im}^I$  sont les parties réelle et imaginaire de la souplesse mesurée  $\alpha_{im}$ ,  $S_{im}^R$  et  $S_{im}^I$  les parties réelle et imaginaire de la participation des modes non résonants. Le gradient de la fonction  $g$  peut être explicité [70] en dérivant (5.39) et l'initialisation sera effectuée à l'aide des valeurs des paramètres modaux linéaires qu'il est possible d'obtenir par une méthode d'identification modale classique à partir d'essais à faible niveau :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_j &\longrightarrow \omega_j, \\ \beta_{jk} &\longrightarrow \delta_{jk} \\ Q_j &\longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

En pratique, il convient de choisir une bande d'analyse  $[\Omega_0, \Omega_N]$  contenant la résonance du mode non-linéaire étudié et telle que l'amplitude aux bornes de l'intervalle  $[\Omega_0, \Omega_N]$  soit suffisamment faible pour que l'estimation initiale par les paramètres modaux linéaires soit convenable.

Les paramètres sont identifiés pour  $\Omega = \Omega_0$ . On progresse ensuite dans la bande  $[\Omega_0, \Omega_N]$  par incrément de  $\Delta\Omega$  en prenant comme estimation initiale pour les paramètres correspondant à  $\Omega_n = \Omega_0 + n\Delta\Omega$ , les valeurs optimales précédemment calculées pour  $\Omega_{n-1} = \Omega_0 + (n-1)\Delta\Omega$ . Une fois le parcours de la bande de fréquence terminé, les valeurs (complexes) des amplitudes modales non linéaires :

$$Q_j^{(0)}, \dots, Q_j^{(n-1)}, Q_j^{(n)}, \dots, Q_j^{(N)},$$

correspondant aux valeurs des paramètres :

$$\bar{\omega}_j^{(0)}, \dots, \bar{\omega}_j^{(n-1)}, \bar{\omega}_j^{(n)}, \dots, \bar{\omega}_j^{(N)},$$

$$\beta_{jk}^{(0)}, \dots, \beta_{jk}^{(n-1)}, \beta_{jk}^{(n)}, \dots, \beta_{jk}^{(N)},$$

et aux pulsations :

$$\Omega_0, \dots, \Omega_{n-1}, \Omega_n, \dots, \Omega_N,$$

sont déterminées en appliquant la relation :

$$Q_j^{(n)} = \frac{{}^t\bar{\Phi}_j^{(n)} F_m^{(n)}}{\bar{\mu}_j^{(n)} [(\bar{\omega}_j^{(n)})^2 - \Omega_n^2] + \mathbf{i}\bar{c}_j^{(n)} \Omega_n}. \quad (5.41)$$

#### 5.4.4 Lissage des paramètres

Les paramètres modaux peuvent ensuite être lissés sous forme de fonctions continues de l'amplitude modale afin de pouvoir exploiter ultérieurement le modèle identifié. Les participations des modes  $\bar{\beta}_{jk}(Q_j)$  et les pulsations  $\bar{\omega}_j(Q_j)$  peuvent être correctement lissées par des fractions rationnelles de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \beta_{jk}(Q_j) &= \frac{a^* + \sum_{l=1}^{l=M_a} a_l |Q_j|^{2l}}{1 + \sum_{l=1}^{l=N_b} b_l |Q_j|^{2l}} \quad (j \neq k) \\ \bar{\omega}_j(Q_j) &= \omega_j + \frac{c^* + \sum_{l=1}^{l=M_c} c_l |Q_j|^{2l}}{1 + \sum_{l=1}^{l=N_d} d_l |Q_j|^{2l}} \end{aligned} \quad (5.42)$$

où  $M_a$ ,  $N_b$ ,  $M_c$ ,  $N_d$  fixent le degré des polynômes aux numérateurs et dénominateurs. Ces formes permettent de retrouver les valeurs des paramètres modaux correspondant au système linéaire lorsque  $Q_j$  est faible et l'évolution de ces paramètres pour des amplitudes plus grandes. Les caractéristiques modales linéaires obtenues à partir d'essais à faible niveau correspondent à des amplitudes faibles mais non nulles, c'est pourquoi nous avons rajouté les termes  $a^*$  et  $c^*$  par rapports aux expressions données dans [70].

Les paramètres de lissage  $a^*$ ,  $a_l$ ,  $b_l$ ,  $c^*$ ,  $c_l$ ,  $d_l$  sont obtenus par minimisation de la différence entre les expressions (5.42) et les valeurs identifiées. Différentes techniques sont possibles, comme la méthode de résidus avec pondérations utilisée dans [70].

### 5.4.5 Commentaires

Cette méthode d'identification est la seule méthode à notre connaissance permettant de traiter l'identification des modes non-linéaires de systèmes à plusieurs degrés de libertés dans le domaine fréquentiel en prenant en compte l'évolution de la forme des modes en fonction de l'amplitude. Il s'agit en outre d'une méthode simple dans sa mise en œuvre et rapide.

Dans le cadre de structures réelles il convient d'introduire des termes résiduels de type masse et/ou raideur pour prendre en compte l'effet des modes tronqués :

$$\bar{S}_{im}(\Omega, q) = -\frac{1}{M_{im}\Omega^2} + \bar{S}_{im}^j + \frac{1}{K_{im}} \quad (5.43)$$

Les termes de correction en masse et raideur  $M_{im}$  et  $K_{im}$  sont alors identifiés sur les essais à faible niveau en utilisant toute la bande d'analyse par le biais d'une procédure de moindres carrés [24].

La méthode nécessite la connaissance des coefficients d'amortissement modaux de tous les modes linéaires qui interviennent et le modèle de souplesse présenté suppose la lois de dissipation linéaire. Cette méthode peut être cependant exploitée avec un modèle d'amortissement non-linéaire [17].

La procédure de continuation en fréquence utilisée pour l'identification, peut être mise en difficulté au passage de sauts dans les réponses non-linéaires. Pour y remédier il est possible de stopper les itérations après avoir détecté les sauts sur la réponse mesurée et d'utiliser les deux balayages en fréquence croissante et décroissante pour accéder à tous les points de mesure par l'algorithme. Cependant, notons que cette méthode peut être mise en défaut dans les situations où la réponse possède plusieurs sauts : une branche isolée par deux sauts peut ne pas être atteinte à cause du problème de convergence du correcteur, quelque soit le sens du balayage utilisé (Figure 5.7).



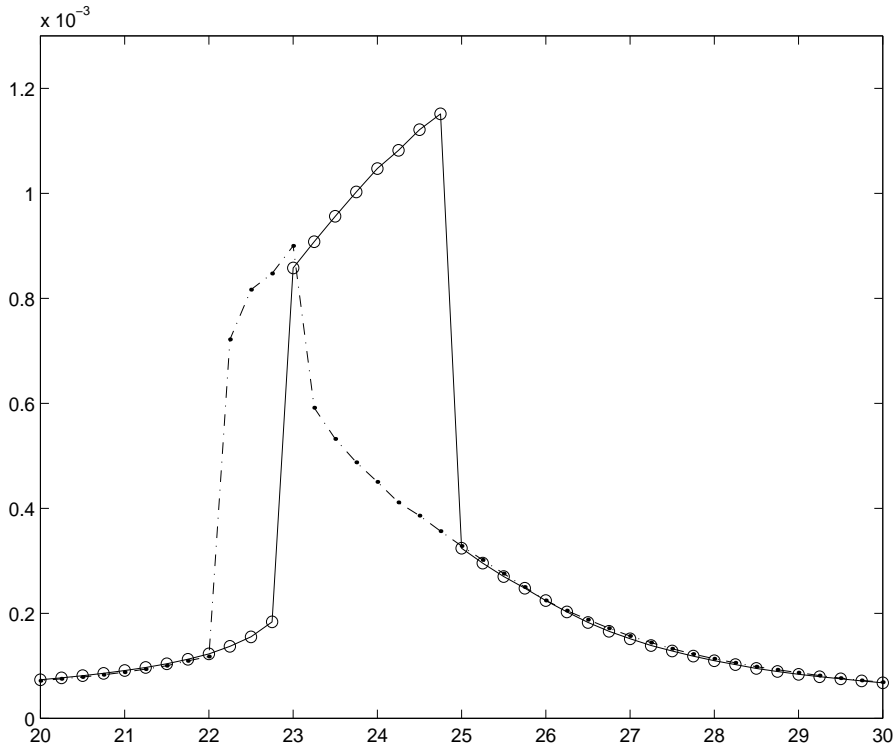


FIG. 5.7 – Réponse fréquentielle expérimentale d'un système non-linéaire sur l'harmonique de l'excitation possédant deux sauts ; 'o' : balayage ascendant, '.' : balayage descendant.

## 5.5 Lissage fréquentiel

### 5.5.1 Introduction

Nous présentons maintenant une méthode directe qui consiste à synthétiser les réponses au moyen de fonctions modales estimées pour les comparer directement aux réponses mesurées afin de déterminer par un problème inverse, les paramètres qui interviennent dans la définition des fonctions modales à identifier. La synthèse des réponses se basera ici aussi sur la superposition des contributions modales non-linéaires. Il s'agit donc de trouver une méthode rapide pour calculer la contribution à la réponse fréquentielle d'un mode non-linéaire isolé à partir des fonctions modales. Nous détaillerons dans cette partie les techniques que nous avons mises en œuvre dans le cadre de cette approche.

### 5.5.2 Synthèse des réponses modales non-linéaires

Conformément aux modèles introduits dans la partie 2, la participation du  $j^{ieme}$  mode non-linéaire à la réponse sera définie par :

$$U_j(\Omega) = Q_j(\Omega)\bar{\Phi}_j(Q_j),$$

où  $Q_j$  est l'amplitude modale telle que

$$Q_j = \frac{\bar{f}_j}{\bar{\mu}_j(Q_j)(\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2) + i\bar{h}_j(Q_j, \Omega)}, \quad (5.44)$$

où  $\bar{h}_j(Q_j, \Omega)$  traduit la dissipation qui peut être de type visqueuse, hystérétique ou plus générale,  $\bar{f}_j = {}^t \bar{\Phi}_j F$  est la force modale si  $F$  est le vecteur d'excitation,  $\bar{\mu}_j$  la masse modale et  $\bar{\omega}_j$  la pulsation. Rappelons que dans le cas particulier où l'on utilise une sous-base formée de modes linéaires  $\bar{\Phi}_k$ , et un modèle d'amortissement visqueux, ces différentes variables s'écriront :

$$\bar{f}_j(Q_j) = \sum_k \beta_{jk}(Q_j) {}^t \Phi_k F, \quad (5.45)$$

$$\bar{\mu}_j(Q_j) = \sum_k \beta_{jk}^2, \quad (5.46)$$

$$\bar{h}_j(Q_j, \Omega) = \Omega \cdot \sum_k \beta_{jk}^2(Q_j) c_k. \quad (5.47)$$

Contrairement au cas linéaire, l'amplitude modale  $Q_j$  est donnée de façon implicite par la relation (5.44) puisque les fonctions modales

$$\bar{f}_j(\cdot), \bar{\mu}_j(\cdot), \bar{\omega}_j(\cdot), \bar{h}_j(\cdot),$$

ne seront généralement pas constantes en fonction de  $Q_j$ .

La détermination des amplitudes modales  $Q_j$  à partir de (5.44) est un problème non-linéaire qui se pose pour chaque valeur de pulsation  $\Omega$  dans un intervalle  $[\Omega_1, \Omega_N]$  donné. Celui-ci ne peut être résolu généralement que par une méthode numérique, par exemple en utilisant la méthode de continuation sur la longueur d'arc (voir la partie 4).

Nous avons recherché une méthode permettant d'obtenir plus rapidement la réponse fréquentielle à partir des paramètres modaux compte tenu de la forme particulière du problème (5.44), en déterminant les pulsations,  $\Omega$  en fonction de l'amplitude modale donnée à partir de l'équation (5.44). Dans cette perspective, distinguons différents suivant le types d'amortissement.

### Amortissement hystérétique :

Nous considérons un terme d'amortissement indépendant de la pulsation  $\Omega$  dans la partie imaginaire du dénominateur de (5.44). Celui-ci peut néanmoins être fonction de l'amplitude modale  $Q_j$  :

$$\bar{h}(Q_j, \Omega) = \bar{h}(Q_j)$$

En prenant alors le carré du module de (5.44), on obtient  $\Omega$  comme les racines réelles positives d'une équation bicarrée :

$$\Omega_{\mp} = \sqrt{\bar{\omega}_j^2(Q_j) \mp \frac{1}{\bar{\mu}_j(Q_j)} \sqrt{\left(\frac{\bar{f}_j(Q_j)}{|Q_j|}\right)^2 - \bar{h}_j^2(Q_j)}}, \quad (5.48)$$

où le signe  $\mp$  est relatif respectivement aux pulsations rencontrées avant (-) et après (+) le maximum de l'amplitude modale (Figure 5.8) qui correspond à

$$\left(\frac{\bar{f}_j}{|Q_j|}\right)^2 - \bar{h}_j^2(Q_j) = 0. \quad (5.49)$$

Pour le modèle hystérétique, l'amplitude modale vérifiant cette condition sera notée  $Q_j^*$  telle que :

$$|Q_j^*| = \left| \frac{\bar{f}_j}{\bar{h}}(Q_j^*) \right| \quad (5.50)$$

La pulsation correspondante est  $\Omega^* = \bar{\omega}_j(Q_j^*)$ . La solution  $(Q_j^*, \Omega^*)$  est l'intersection de la courbe de réponse et de la courbe  $\Omega = \bar{\omega}_j(Q_j)$  (Figure 5.8).

Les relations (5.48) supposent des conditions sur les fonctions modales afin que celles ci donnent bien des pulsations  $\Omega$  réelles. Un point important est donc d'assurer que la méthode de résolution numérique de (5.50) utilisée pour le calcul de l'amplitude  $Q^*$  donne un discriminant approchant la valeur zéro **positivement** dans (5.49) :

$$\left(\frac{\bar{f}_j}{|Q_j|}\right)^2 - \bar{h}_j^2(Q_j) \leq -|\epsilon_{num}|.$$

où  $\epsilon_{num}$  est le zéro informatique.

Nous utiliserons pour cela des méthodes donnant un encadrement de la solution comme par exemple la méthode de dichotomie [76] à partir d'un encadrement initial. Ce dernier peut être obtenue en définissant un pas d'incrémentations arbitraire  $\Delta Q$  et en testant les valeurs du terme de gauche de (5.49) aux bornes des intervalles  $[Q_i, Q_i + \Delta Q]$  en partant de  $Q_0 = 0$  et avec  $Q_i = i\Delta Q$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  jusqu'à encadrement du zéro de (5.49). On effectue ensuite l'optimisation par la méthode de dichotomie jusqu'à une précision prescrite et on choisit la borne de l'intervalle obtenu donnant une valeur positive.

Les relations (5.48) sont alors évaluées pour un intervalle d'amplitudes modales  $[Q_j^{min}, Q_j^{max}]$  à fixer. On prend pour  $Q_j^{max} = Q_j^*$ , l'amplitude solution de (5.50) et pour  $Q_j^{min}$  la plus petite des amplitudes atteinte dans la gamme de fréquences  $[\Omega_1, \Omega_N]$ .

Ce minimum correspond généralement à  $Q_1$  ou  $Q_N$  sur l'une des bornes de  $[\Omega_1, \Omega_N]$  contenant le pic de résonance (Figure 5.8). L'amplitude modale correspondante est calculée par résolution approchée numérique de (5.44) par une routine itérative de recherche de zéros monodimensionnelle. Une bonne estimation initiale est fournie par le modèle linéaire si l'on est assez loin de la résonance en  $\Omega_1$  ou  $\Omega_N$ .

Nous sommes donc ramenés par ce procédé, à seulement deux résolutions de (5.44) pour  $\Omega = \Omega_1$  et  $\Omega = \Omega_N$ , et une résolution de (5.50) (Figure 5.8) pour obtenir la réponse dans tout l'intervalle  $[\Omega_1, \Omega_N]$ . Les deux branches de la réponse allant de  $(\Omega_1, Q_1)$  à  $(\Omega^*, Q^*)$ , puis la branche de  $(\Omega^*, Q^*)$  à  $(\Omega_2, Q_2)$  sont obtenues par les formules explicite. Cette méthode fonctionne pour des réponses de forme très générale ayant éventuellement un ou plusieurs sauts.

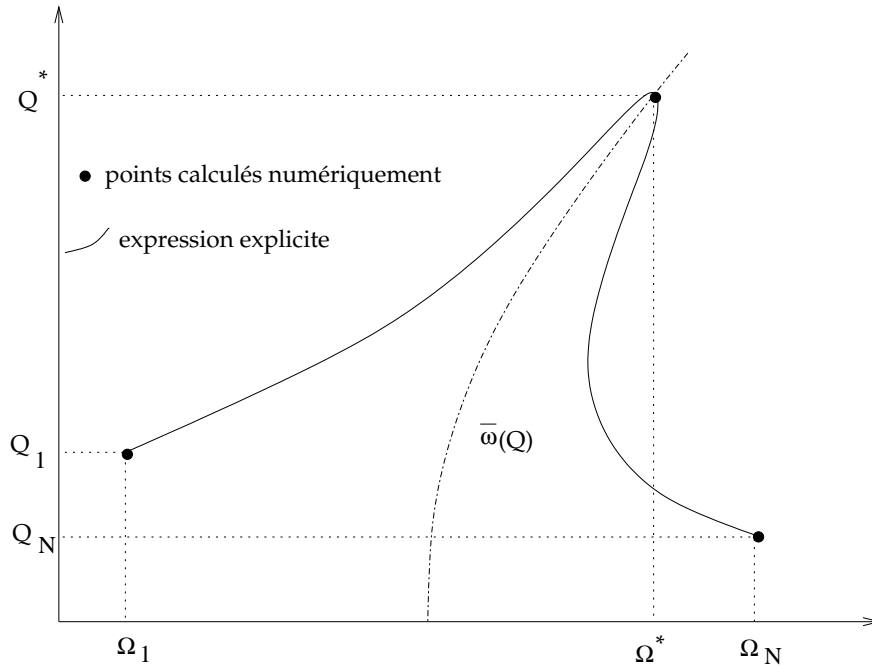


FIG. 5.8 – Synthèse des réponses fréquentielles non-linéaires.

### Amortissement de type visqueux

En fonction du type d'amortissement une expression différente est obtenue pour  $\Omega_{\mp}$ . Dans le cas visqueux, une expression analogue à (5.48) peut être obtenue en reconsidérant l'expression implicite de l'amplitude modale (5.44) avec cette fois :

$$\bar{h}_j(Q_j, \Omega) = \bar{c}_j(Q_j)\Omega \quad (5.51)$$

De la même façon, on obtient l'expression des pulsations en fonction de l'amplitude modale sous la forme

$$\Omega_{\mp}(Q_j) = \sqrt{\left[ \bar{\omega}_j^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{c}_j}{\bar{\mu}_j} \right)^2 \right] (Q_j) \mp \frac{1}{2\bar{\mu}_j(Q_j)} \sqrt{\bar{c}_j^2(Q_j) \left[ \left( \frac{\bar{c}_j}{\bar{\mu}_j} \right)^2 - 4\bar{\omega}_j^2 \right] (Q_j) + 4 \left( \frac{\bar{f}_j(Q_j)}{|Q_j|} \right)^2}}. \quad (5.52)$$

De même, l'amplitude modale  $Q_j^*$  sera définie par

$$\bar{c}_j^2(Q_j^*) \left[ \left( \frac{\bar{c}_j}{\bar{\mu}_j} \right)^2 (Q_j^*) - 4\bar{\omega}_j^2(Q_j^*) \right] + 4 \left( \frac{\bar{f}_j(Q_j^*)}{|Q_j^*|} \right)^2 = 0,$$

soit encore

$$|Q_j^*| = \frac{2|\bar{f}_j(Q_j^*)|}{\bar{c}_j(Q_j^*) \sqrt{4\bar{\omega}_j^2(Q_j^*) - \left( \frac{\bar{c}_j}{\bar{\mu}_j} \right)^2 (Q_j^*)}}. \quad (5.53)$$

La pulsation correspondante est donnée par :

$$\Omega(Q_j^*) = \sqrt{\bar{\omega}_j^2(Q_j^*) - \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{c}_j}{\bar{\mu}_j} \right)^2} (Q_j^*). \quad (5.54)$$

L'équation (5.53), implicite en  $|Q_j^*|$ , ainsi que l'équation (5.44) avec (5.51) pour  $\Omega = \Omega_1$  et  $\Omega = \Omega_N$  sont résolues numériquement en  $|Q_j^*|$ ,  $|Q_1|$ ,  $|Q_N|$ . L'expression explicite (5.52) est ensuite appliquée pour obtenir la réponse dans toute la bande de fréquence. L'amplitude modale complexe  $Q_j$  est ensuite obtenue en appliquant la formule (5.44) (les fonctions modales sont en fait fonctions du module de  $Q_j$ , ce que nous avons omis pour alléger la notation).

### Autres modèles d'amortissement

On pourra appliquer ce qui précède avec des modèles d'amortissement ayant des lois de dépendance fréquentielle simples, ces lois simples pouvant être combinées. La combinaison d'une loi de type hystérétique avec une loi quadratique en fréquence donnera également une équation bicarrée :

$$\bar{h}(Q, \Omega) = h_0(Q) + h_2(Q)\Omega^2 \quad (5.55)$$

Les formes  $\bar{h}(Q, \Omega) = h_3(Q)\Omega^3$ , ou même,  $\bar{h}(Q, \Omega) = h_{-1}(Q)\Omega^{-1}$  par exemple, donnent des équations bicubiques à partir desquelles on peut exprimer  $\Omega$  analytiquement en fonction de  $Q$ . Dans le cas général, où le modèle de dissipation ferait intervenir une fonction de  $\Omega$  plus complexe, il peut être impossible de résoudre en  $\Omega$  et on aura alors recours à une procédure numérique par continuation (prédicteur-correcteur) pour évaluer les participations des modes non-linéaires dans la bande de fréquence d'analyse.

### Synthèse des composantes de la réponse

Une fois connue l'amplitude modale correspondant à l'intervalle  $[\Omega_1, \Omega_N]$ , la contribution du mode  $j$  à une composante quelconque  $k$  de la réponse sera obtenue directement par l'expression

$$U_{kj}(\Omega) = Q_j(\Omega)\bar{\Phi}_{kj}(Q_j). \quad (5.56)$$

### Suppression des branches instables

Afin que les réponses synthétisées puissent être comparées à des réponses expérimentales, il convient de supprimer dans celles-ci les parties correspondant à des solutions instables. Nous appliquerons pour cela le critère de stabilité de la solution approchée harmonique à un problème non-linéaire à 1 degré de liberté [83]. Les points de la courbe de réponse dans le plan  $(\Omega, Q_j)$  vérifiant ainsi

$$(\bar{\omega}_j(Q_j) - \Omega) \left( \frac{dQ_j}{d\Omega} \right) < 0, \quad (5.57)$$

correspondent à des oscillations instables et doivent donc être supprimés. On obtiendra alors les courbes analogues aux courbes expérimentales obtenues en balayant les fréquences d'excitation dans les sens ascendant et descendant en présence de sauts.

## Interpolation sur les pulsations expérimentales

La méthode relative aux expressions (5.48) et (5.52) fournit un échantillonnage non régulier des pulsations  $\Omega \in [\Omega_1, \Omega_N]$ . Celles-ci seront ramenées sur les points de fréquence expérimentaux par une opération d'interpolation. Cette opération doit également être effectuée avant d'additionner fréquence à fréquence, deux participations modales pour la superposition.

## Superposition des réponses modales

Après interpolation des réponses modales sur une bande de fréquence discrétisée commune, les différentes contributions modales peuvent être additionnées en chaque pulsation  $\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N$ . Cette opération ne pose pas de problèmes dans le cas où seulement l'une des opérands est multivaluée. Conformément à l'hypothèse de superposition, il suffit de sommer les participations fréquence par fréquence. Dans le cas contraire, qui correspond par exemple à des résonances proches, il est possible de construire un opérateur de sommation de deux participations multivaluées qui généralise la sommation précédente, mais celle-ci n'a pas de sens physique et l'hypothèse de superposition semble de toute façon en défaut dans ces circonstances (voir les exemples numériques dans la partie 2.6).

### 5.5.3 Fonction d'écart

#### Critère d'erreur

Une fois que les opérations précédentes ont été effectuées, il convient de définir une fonction permettant de quantifier l'écart existant entre les réponses théoriques et expérimentales. Cette fonction prendra en compte plus ou moins de données expérimentales. On pourra baser l'écart sur une différence des souplesses pour chaque point de fréquence ( $i = 1, \dots, N_\Omega$ ), chaque voie de mesure ( $j = 1, \dots, N$ ), chaque niveau de force ( $l = 1, \dots, N_f$ ) et enfin chaque sens de parcours du balayage ( $s = 1, 2$ ). La forme la plus générale de la fonction d'erreur sera

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{N_\Omega} \sum_{l=1}^{N_f} \sum_{s=1}^2 \sum_{j=1}^N | \bar{S}_{jm}(\Omega_i) - \alpha_{jm}(\Omega_i) |_{(s,l)}, \quad (5.58)$$

où  $\bar{S}_{jm}$  est la souplesse théorique et  $\alpha_{jm}$  la souplesse mesurée, mais on pourra aborder le problème progressivement.

#### Régularité du critère d'erreur

Le fait que les réponses non-linéaires possèdent éventuellement des sauts et que la comparaison des réponses s'effectue sur un ensemble discret de fréquences, la fonction d'écart (5.58) peut posséder certaines irrégularités.

Afin de mettre ceci en évidence, considérons à titre d'exemple, la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.59)$$

Cette fonction, discontinue en  $x = \frac{1}{2}$ , est échantillonnée par les valeurs  $f_i$  qui joueront le rôle des données expérimentales :

$$f_i = f(x_i), \quad (i = 0, \dots, N) \quad (5.60)$$

où,

$$x_0 = 0, \quad x_i = i\Delta x, \quad (i = 1, \dots, N), \quad x_N = 1,$$

et,

$$x_{N/2} = \frac{1}{2},$$

en prenant un entier  $N$  pair (Figure 5.9).

Donnons nous à présent une fonction  $g(x, p)$  définie sur  $[0, 1]$ , qui dépendra du paramètre  $p$  et qui sera définie par :

$$g(x, p) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0, p], \\ 0 & \text{pour } x \in ]p, 1]. \end{cases} \quad (5.61)$$

$g(x, p)$  joue le rôle du modèle théorique dont nous cherchons à déterminer le paramètre optimal  $p^*$  tel que l'écart entre  $g(x, p^*)$  et  $f(x)$  soit minimum.

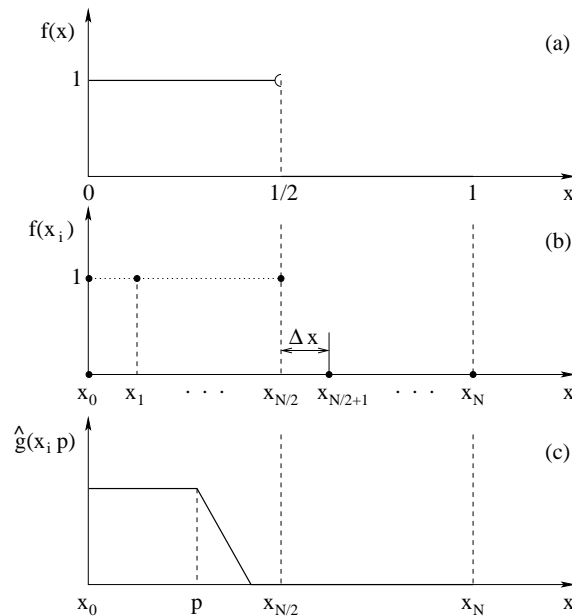


FIG. 5.9 – Exemple de critère d'erreur. (a) Fonction modèle ; (b) Valeurs discrétisées ; (c) Fonction modèle régularisé  $\hat{g}(x, p)$ .

Pour la fonction  $f$  définie par (5.59) et  $g$  définie par (5.61), et en considérant le critère d'erreur continu entre les fonctions  $f$  et  $g$  défini par :

$$\epsilon(p) = \int_0^1 |f(x) - g(x, p)| dx = \left| p - \frac{1}{2} \right|, \quad (5.62)$$

on a effectivement  $p^* = \frac{1}{2}$ . Cependant, seules les valeurs discrétisées de  $f$  sont données et le critère discret qui sera utilisé sera (méthode des rectangles) :

$$\epsilon_N(p) = \sum_{i=0}^N |f_i - g(x_i, p)| \cdot \Delta x \quad (5.63)$$

Or, compte tenu de la forme des fonctions  $g(., p)$  et du fait de la discrétisation de  $f$ ,  $\epsilon_N(p)$  est une fonction escalier définie par morceaux (Figure 5.10) selon

$$\epsilon_N(p) = \Delta x \left| \frac{N}{2} - i \right| \quad \text{pour } p \in [x_i, x_{i+1}[ \quad (i = 0, \dots, N-1). \quad (5.64)$$

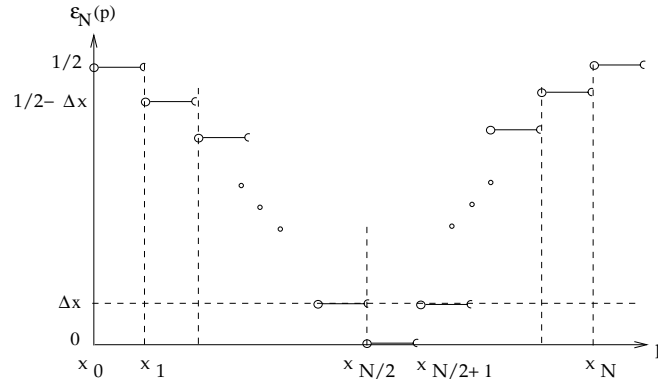


FIG. 5.10 – Critère d'erreur discontinu par rapport au paramètre  $p$ .

Cette fonction d'écart est donc mal adaptée à la détermination de  $p^*$  puisqu'elle n'est pas régulière et possède tout l'intervalle  $[x_{\frac{N}{2}}, x_{\frac{N}{2}+1}[$  de solutions pour  $p^*$ .

### ”Régularisation” du critère

L'exemple précédant est représentatif du problème de comparaison des réponses non-linéaires, et on cherchera donc à améliorer le critère (5.58).

Pour pallier aux inconvénients du critère précédent et dans le cadre de notre exemple démonstratif, il est possible de régulariser la fonction  $g(x, p)$  en introduisant une nouvelle fonction  $\hat{g}(x, p)$  qui rende le critère régulier tout en permettant d'obtenir par minimisation de celui-ci, les paramètres optimaux du vrai critère. Pour notre exemple, il est naturel de proposer la fonction suivante (Figure 5.9(c)) :

$$\hat{g}(x, p) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [0, p], \\ 1 - \frac{1}{\Delta x}(x - p) & \forall x \in [p, p + \Delta x], \\ 0 & \forall x \in [p + \Delta x, 1]. \end{cases} \quad (5.65)$$

Le critère obtenu avec  $\hat{g}(x, p)$  est cette fois continu :

$$\hat{\epsilon}_N(p) = \sum_{i=0}^N |f_i - \hat{g}(x_i, p)| \cdot \Delta x = \left| p - \frac{1}{2} \right| \cdot \Delta x \quad (5.66)$$

et fournit la bonne solution  $p^* = \frac{1}{2}$ .

Afin d'illustrer ces remarques dans le cadre qui nous intéresse nous considérerons la réponse non-linéaire d'un système particulier. L'exemple proposé consiste en un oscillateur dont la réponse en fréquence est approchée par

$$U = \frac{f}{\bar{\omega}^2(|U|) - \Omega^2 + ih} \quad (5.67)$$



où

$$\omega^2(U) = \omega_o^2(1 + \alpha |U|^2). \quad (5.68)$$

Pour des variations du paramètre  $h$  autour d'une valeur de référence  $h_o$ , les réponses (5.67) ainsi que le critère d'erreur sont évalués. La figure 5.11 montre les valeurs du critère discontinu en fonction des variations sur le paramètre. Pour de faibles valeurs de  $h$  (faible amortissement), les réponses possèdent un saut et le critère est discontinu. Pour des valeurs d'amortissement plus importantes ( $\frac{h}{h_o} > 1$ ), les sauts disparaissent et le critère est continu.

La figure 5.12 montre la réponse de référence discrète (pour  $h = h_o = 0.9$ ) et les réponses correspondant à quelques unes des valeurs du paramètre  $h$  pour lesquelles le critère a été évalué lors du tracé de la figure 5.11.

Nous avons ensuite appliqué le critère régulier  $\hat{\epsilon}_N$  à cet exemple en raccordant la discontinuité au saut par un segment de droite (Figure 5.13). La courbe 5.14 montre le nouveau critère qui est sans discontinuité, tracé pour deux valeurs de pente différentes de la droite de raccordement. On remarque toutefois que le critère régularisé introduit un léger biais dans l'estimation du paramètre puisque le minimum du critère est obtenu pour une valeur différente de  $h/h_o = 1$  (soit  $h = 0.9$  ici). Ce biais dépend notamment de la finesse de la discrétisation en fréquence des données expérimentales. Plus la pente du raccordement est importante, plus le critère se rapproche du critère discontinu et le minimum se rapproche de la valeur optimale telle que  $h/h_o = 1$  (Figure 5.14).

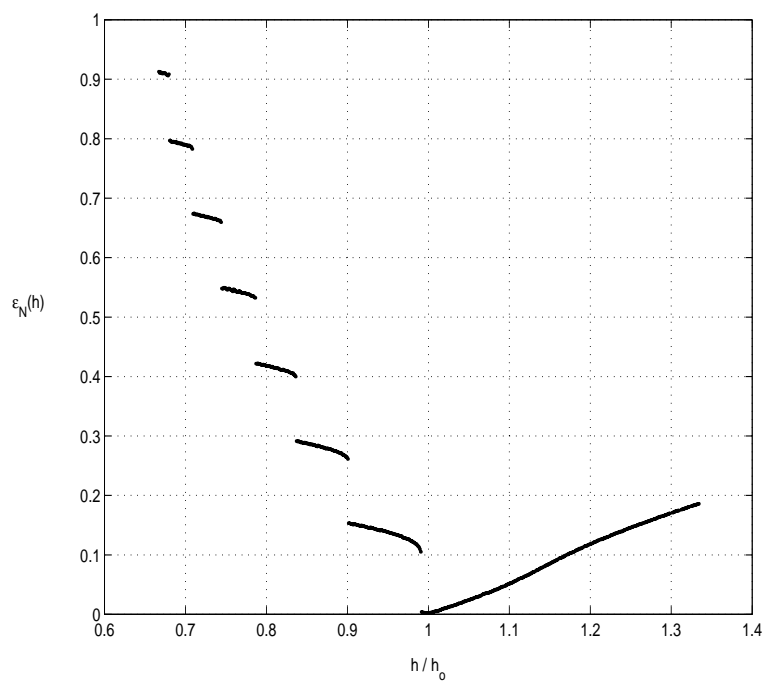


FIG. 5.11 – Variations du critère d'erreur  $\epsilon_N$  en fonction de  $h$  pour les réponses en fréquence d'équation (5.67)

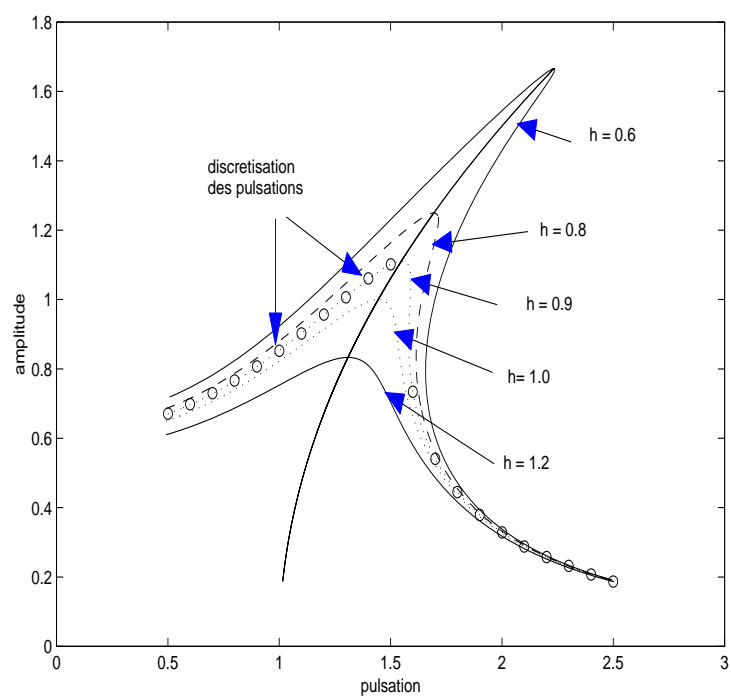


FIG. 5.12 – Modification des réponses (5.67) en fonction du paramètre  $h$

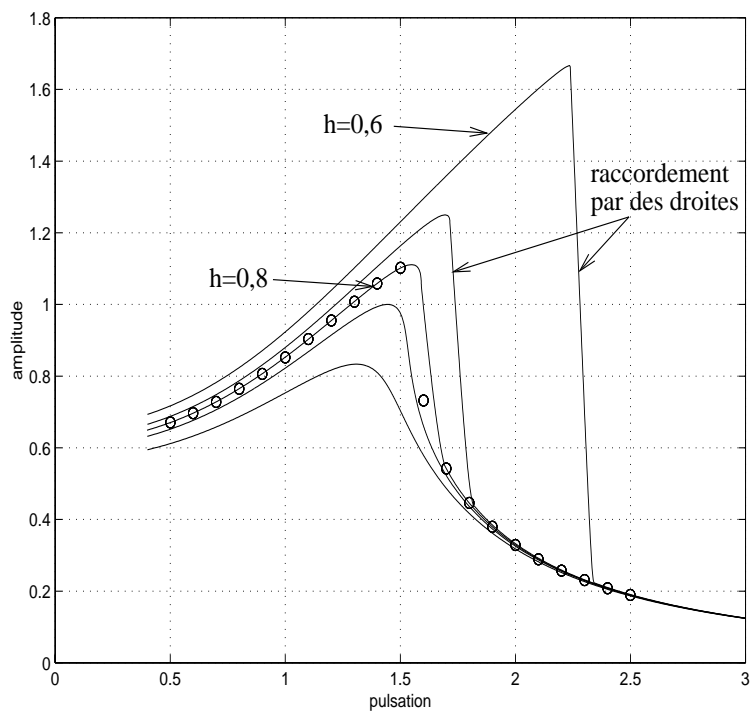


FIG. 5.13 – Raccordement des discontinuités sur des réponses possédant un saut à l'aide de droites.

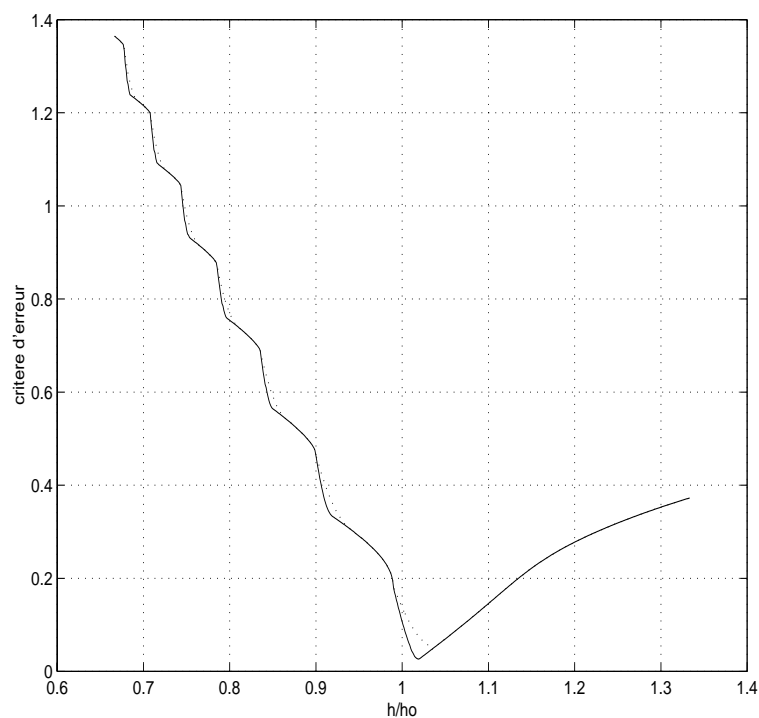


FIG. 5.14 – Variations du critère d'erreur  $\hat{\epsilon}_N$  en fonction de  $h$  pour les réponses en fréquence d'équation (5.67) ('-' : forte pente de raccordement, '...' : pente plus faible).

### 5.5.4 Influence des paramètres

Afin d'apprécier qualitativement la dépendance de la réponse par rapport aux paramètres, nous avons effectué plusieurs variations à partir de l'exemple d'équation (5.67). Les variations sur  $\bar{\omega}(Q)$  et  $\bar{\mu}(Q)$  sont réalisées en déterminant l'amortissement de telle sorte que l'amplitude maximale soit conservée. Les variations sur  $\bar{\omega}(Q)$  ont pour effet de déplacer l'ensemble du pic (Figure 5.15).

La variation de l'amortissement déplace le saut en suivant la courbe  $\bar{\omega}(Q)$  et l'effet est surtout sensible au pic (Figure 5.16). La variation de la masse modale règle "l'ouverture" des branches du pic autour de la courbe  $\bar{\omega}(Q)$  (Figure 5.17).

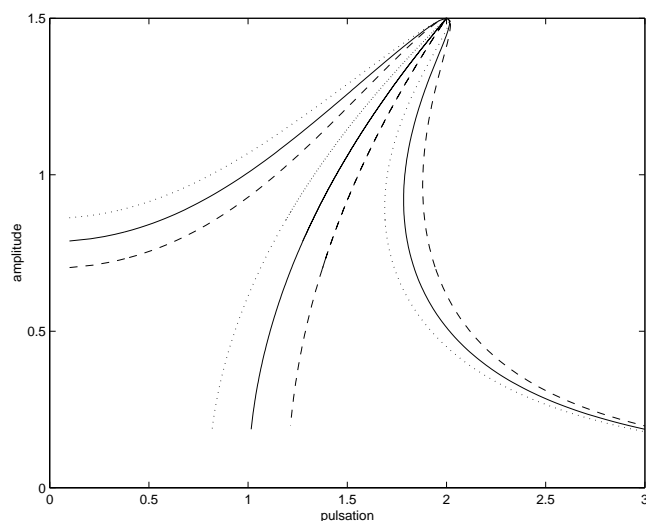


FIG. 5.15 – Sensibilité par rapport aux variations de la fonction de pulsation  $\bar{\omega}(Q)$ ; '–' : valeur nominale, '- -' et '...' : variations.

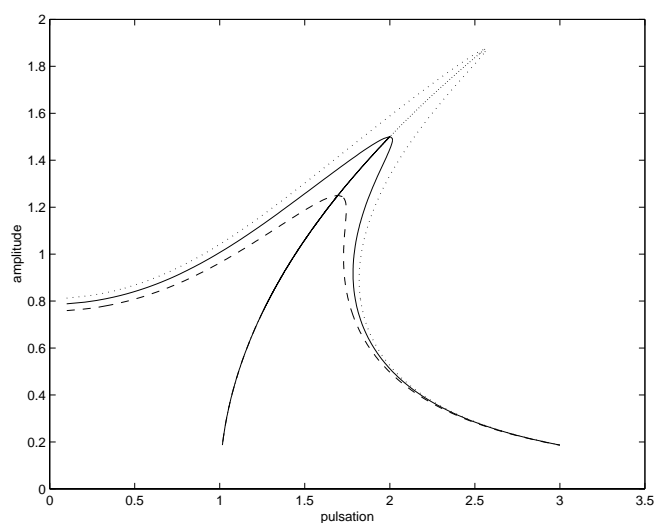


FIG. 5.16 – Sensibilité par rapport aux variations de la fonction d’amortissement  $\bar{h}(Q)$ ; ‘-’ : valeur nominale, ‘- -’ : valeur forte, ‘...’ : valeur faible.

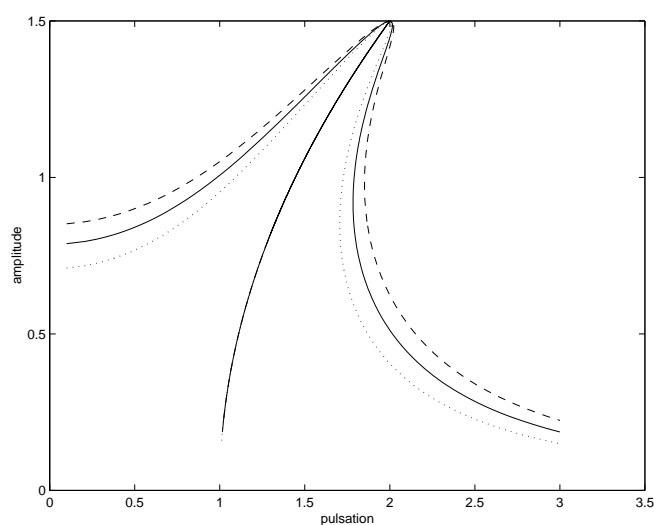


FIG. 5.17 – Sensibilité par rapport aux variations de la masse modale  $\bar{\mu}(q)$ ; ‘-’ : valeur nominale, ‘- -’ : valeur faible, ‘...’ : valeur forte.

### 5.5.5 Estimation de la lois amplitude-fréquence

#### Utilisation des pics à plusieurs niveaux

La relation entre l’amplitude et les fréquences de résonance est directement estimée à partir des courbes d’essais. On peut en effet relever simplement les fréquences des sauts qui sont assez proches des fréquences de résonance pour des amortissements faibles. Elles sont facilement détectables grâce à la discontinuité et elle sont associées ensuite aux valeurs d’amplitudes

mesurées sur une voie de référence. Les imprécisions alors introduites dans la lois  $\bar{\omega}(Q)$  sont dues au fait que le déplacement n'est pas purement modal aux pics, ce qui entraîne une erreur sur l'argument de la fonction  $\bar{\omega}(Q)$ , ensuite, la pulsation correspondant au saut ou au maximum d'amplitude n'est pas toujours la pulsation de résonance selon le type d'amortissement. La précision sur  $\bar{\omega}$  est également liée au pas de fréquence pris pour les essais. Cette méthode ne donne pas d'estimation pour les amplitudes en dessous du plus petit pic mesuré.

### Utilisation de points de même amplitude

En rappelant la relation (5.48), liant la pulsation d'excitation aux paramètres modaux, fonctions de l'amplitude modale  $Q_j$  obtenue dans le cadre du modèle d'amortissement hystérétique,

$$\Omega_{\mp}^2 = \bar{\omega}_j^2(Q_j) \mp \frac{1}{\bar{\mu}_j(Q_j)} \sqrt{\left(\frac{\bar{f}_j(Q_j)}{|Q_j|}\right)^2 - \bar{h}_j^2(Q_j)},$$

on voit qu'en sommant les carrés de deux pulsations  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  se trouvant de part et d'autre d'une résonance et correspondant à la même amplitude, on obtient l'estimation

$$\bar{\omega}_j(Q_j) = \sqrt{\frac{\Omega_+^2 + \Omega_-^2}{2}}. \quad (5.69)$$

Pour appliquer (5.69), les données d'essais doivent être interpolées pour fournir des points effectivement à la même amplitude. La procédure proposée dans la mise en œuvre de la méthode de la raideur complexe sera appliquée à cet effet. La qualité de l'estimation (5.69) valable pour une résonance isolée dépendra du rapport entre l'amplitude du mode associé à la résonance étudiée et l'amplitude des autres modes, en accord avec la méthode de superposition. Appliquée aux réponses expérimentales de la figure 5.3 et après application de la procédure d'interpolation, les estimations correspondantes sont tracées en fonction de l'amplitude de la réponse (Figure 5.18).

Cette méthode donne plus de points d'estimation mais ne peut pas être appliquée lorsque les réponses possèdent des sauts.

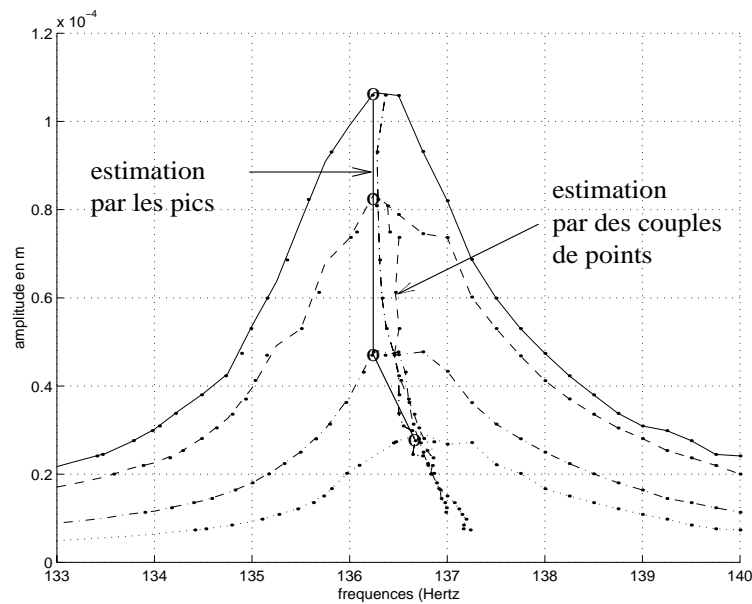


FIG. 5.18 – Estimation des pulsations non-linéaires  $\bar{\omega}_j$  en utilisant des points de réponses ayant la même amplitude.

### 5.5.6 Identification des formes modales

Une difficulté supplémentaire liée à la variation possible de la forme du mode peut surgir dans le problème d'identification. Nous avons précédemment exposé des techniques utilisant une base modale linéaire pour exprimer les formes modales non-linéaires au moyen des coefficients de participation  $\beta_{jk}$ . Dans le cadre de ces méthodes, la base modale linéaire est obtenue expérimentalement à partir d'essais à faible niveau. Cependant, le niveau requis pour obtenir des réponses sur lesquelles il serait possible d'appliquer des méthodes d'identification modale linéaires peut être trop faible pour que la mesure puisse être effectuée dans de bonnes conditions [86]. On peut également imaginer des systèmes physiques ne possédant pas de partie linéaire (systèmes fortement non-linéaires) et pour lesquels la notion et l'existence de mode non-linéaire sont pourtant bien connues théoriquement (voir chapitre 1). D'autre part, on peut imaginer des systèmes pour lesquels les modes correspondant au régime à faible niveau permettent d'exprimer difficilement les mouvements vibratoires à fort niveau comme c'est le cas pour l'exemple de la figure 5.19a d'une poutre encastree avec un point de frottement à son extrémité [37]. Pour de faibles amplitudes, les modes de cette structure correspondent à ceux d'une poutre possédant une extrémité encastree et l'autre appuyée (Figure 5.19 (b)) et, pour de fortes amplitudes, à ceux d'une poutre console amortie par l'existence du frottement qui opère durant la majeure partie du cycle de vibration (Figure 5.19 (c)). On pourra constater un problème analogue pour le système conservatif continu de l'exemple de la figure 2.9 du chapitre 2.

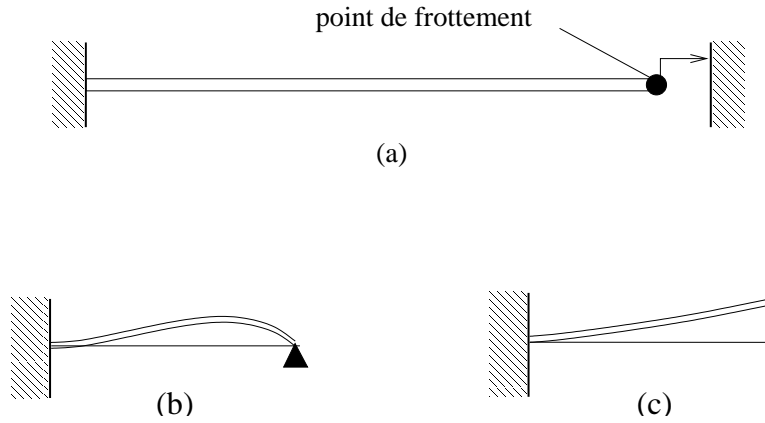


FIG. 5.19 – Poutre en flexion possédant une interface de frottement.

Pour ces différentes raisons, nous envisagerons l'identification des composantes des modes non-linéaires directement dans la base physique en fonction de l'amplitude modale. Nous supposons que la réponse du système au point  $i$  au voisinage de la résonance du mode  $j$  et pour une excitation  $F_m$  au point  $m$  sera telle que :

$$U_i/F_m = \alpha_{im}(\Omega) = -\frac{1}{\Omega^2 M_{im}} + \frac{\bar{\Phi}_{ij}(Q_j)\bar{\Phi}_{mj}(Q_j)}{\bar{\mu}_j(\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2) + \mathbf{i}\bar{h}_j} + \frac{1}{K_{im}}, \quad (5.70)$$

les modes non résonnant, étant approchés à l'aide des termes résiduels  $K_{im}$  et  $M_{im}$ .

Les inconnues à identifier sont la forme du mode non-linéaire  $\bar{\Phi}_j$ , la masse modale  $\bar{\mu}_j$ , et la partie imaginaire  $\bar{h}_j$ . La relation entre la masse modale et la forme du mode s'effectue par le choix de la normalisation, comme par exemple :

$$\bar{\Phi}_{rj}(Q_j) \equiv 1, \quad \forall Q_j. \quad (5.71)$$

L'amplitude modale sera l'amplitude physique de la contribution du mode en ce point de référence. Compte tenu de (5.70), nous procéderons selon les différentes étapes suivantes pour l'identification des paramètres.

### Utilisation de la voie de référence :

En choisissant  $r = m$  et d'après (5.71), la réponse aura la forme suivante :

$$U_m(\Omega) = \left( -\frac{1}{\Omega^2 M_{mm}} + \frac{1}{\bar{\mu}_j(\bar{\omega}_j^2 - \Omega^2) + \mathbf{i}\bar{h}_j} + \frac{1}{K_{mm}} \right) F_m \quad (5.72)$$

En supposant que les fonctions modales  $\bar{\mu}_j(Q_j)$ ,  $\bar{\omega}_j(Q_j)$  et  $\bar{h}_j(Q_j)$  sont identifiées sur la voie  $m$ , on recherchera ensuite la forme des modes en utilisant les autres voies de mesure correspondant aux différents points instrumentés  $r \neq m$ . Les formes modales peuvent être exprimées en fonction de l'amplitude  $Q_j$  sous la forme suivante :

$$\bar{\Phi}_{ij}(Q_j) = a_{ij0} + a_{ij1} |Q_j| + a_{ij2} |Q_j|^2 + a_{ij3} |Q_j|^3 + \dots \quad (5.73)$$

Un certain nombre d'inconnues sont ainsi ajoutées au problème d'identification mais si l'on connaît déjà l'amplitude modale  $Q_j$ , le problème de la détermination des coefficients  $a_{ij0}$ ,  $a_{ij1}$ ,



$a_{ij2}$ ,  $a_{ij3}$  et des termes résiduels associés à la voie  $i$  ( $\frac{1}{K_{im}}$  et  $\frac{1}{M_{im}}$ ), peut être ramené à un problème de moindres carrés linéaire en utilisant la réponse expérimentale :

$$Ax_i = b_i + \epsilon \quad (5.74)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Omega_1^2} & 1 & d_{j1} |Q_j^{(1)}| & d_{j1} |Q_j^{(1)}|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{\Omega_N^2} & 1 & d_{jN} |Q_j^{(N)}| & d_{jN} |Q_j^{(N)}|^2 & \dots \end{bmatrix}, \quad x_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_{im}} \\ \frac{1}{K_{im}} \\ a_{ij0} \\ a_{ij1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} \alpha_{im}(\Omega_1) \\ \vdots \\ \alpha_{im}(\Omega_N) \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

avec

$$d_{jn} = \frac{1}{\bar{\mu}_j(\bar{\omega}_j^2 - \Omega_n^2) + \mathbf{i}\bar{h}_j} \quad (5.76)$$

## 5.6 Analyse d'une poutre avec une liaison non-linéaire

### 5.6.1 Introduction

Dans le but de tester la représentativité des modèles sur un cas réel, nous avons réalisé un banc d'essais expérimental constitué d'une poutre encastrée à l'une de ses extrémités et possédant une liaison non-linéaire à l'autre extrémité (Figure 5.20). La non-linéarité est introduite par une lame fine en grand déplacement. A partir de réponses en régime forcé, nous nous proposons d'identifier les paramètres modaux non-linéaires de la structure sur la base des modèles et des méthodes exposées.

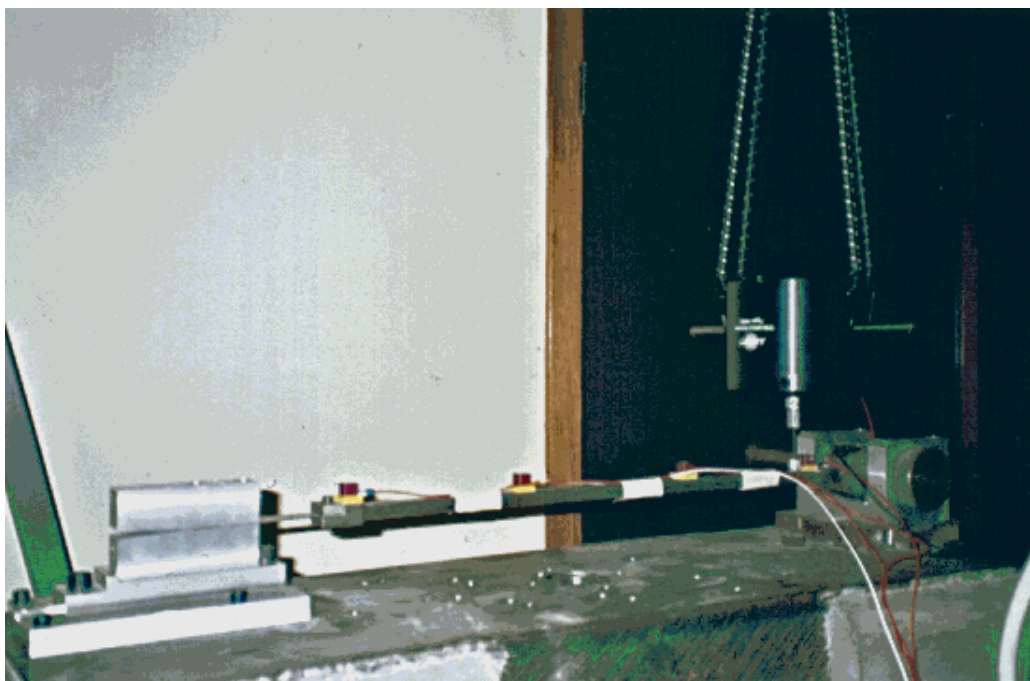


FIG. 5.20 – Montage expérimental pour le test d'une poutre encastrée comportant une non-linéarité.

### 5.6.2 Description du dispositif expérimental

Décrivons brièvement la structure étudiée ainsi que le dispositif expérimental.

#### La structure

Le système est constitué de trois parties (Figures 5.20 et 5.21) :

- Une poutre principale en acier, de longueur 593 mm, de section  $14 \times 14$  mm,
- Un élément de jonction de longueur 40 mm, de section  $20 \times 30$  mm, assurant la liaison entre la poutre et la lame,
- Une lame d'acier, de longueur 57 mm, de section  $57 \times 0,5$  mm encastrée à son extrémité.

### Instrumentation

La mesure des grandeurs cinématiques est effectuée au moyen de 4 capteurs accélérométriques répartis sur la poutre comme indiqué sur la figure 5.21 aux emplacements suivants :

| Encastrement | capteur 1 | capteur 2 | capteur 3 | capteur 4 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x=0          | x=47 mm   | x=220 mm  | x=420 mm  | x=605 mm  |

Le montage de ces capteurs permet de mesurer la composante verticale des accélérations aux points 1, 2, 3 et 4.

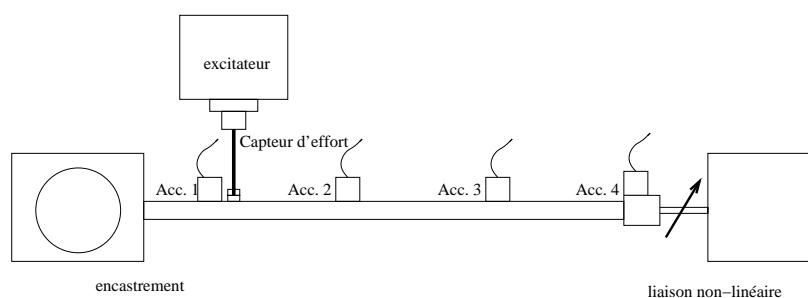


FIG. 5.21 – Instrumentation d'une poutre encadrée avec une liaison non-linéaire

Le matériel utilisé pour ces tests expérimentaux est le suivant :

- 4 capteurs d'accélération Endevco MODAL 61-100 ICP, sensibilité : 100mV/g, poids : 10 grammes,
- 1 baie d'acquisition "Paragon" HP3565A, équipée de 5 modules d'entrée et d'un module source,
- 1 micro-ordinateur équipé du Logiciel HP3565 de pilotage de la baie.

### Mise en œuvre et contrôle de l'excitation

Le matériel utilisé pour l'excitation est le suivant :

- 1 pot électromagnétique Bruel et Kjaer 50 N Modèle 4809,
- 1 capteur de force Bruel et Kjaer modèle 8200, sensibilité 3.7 pC/N,
- 1 amplificateur de charge Bruel et Kjaer.

Le module source du "Paragon" envoie un signal de consigne à l'amplificateur de puissance, la force injectée dans la structure par l'excitateur est mesurée et l'information de retour est traitée par le calculateur équipée du logiciel HP3665. Celui-ci permet de maintenir une force constante en pilotant le module source qui délivre la tension de consigne. La position du capteur de force est consignée dans le tableau suivant :

| Encastrement | Capteur de force |
|--------------|------------------|
| x=0          | x=63 mm          |

L'excitateur électromagnétique est maintenu verticalement par des suspensions très souples en prenant garde de ne pas imposer une charge statique au système qui pourrait précharger et dissymétriser la non-linéarité. La force est transmise par une tige métallique flexible fixée à la poutre à proximité de l'accéléromètre  $n^{\circ} 1$ .

### 5.6.3 Résultats d'essais

La structure est excitée successivement avec 5 niveaux de force différents (2, 3, 5, 9 et 11 Newton) à l'aide d'une force sinusoïdale d'amplitude constante. Un balayage en fréquence est réalisé dans les deux sens (ascendant puis descendant) dans la plage située entre 8 Hz et 500 Hz, avec une définition de 250 mHz. Pour chaque fréquence d'excitation, un nombre de périodes d'oscillation suffisamment élevé est atteint, permettant de se situer proche d'un régime permanent.

La bande de fréquence contient 3 pics de résonance aux fréquences voisines de 20 Hz, 137 Hz et 400 Hz. Les réponses montrent clairement le caractère non-linéaire du système par la présence de distorsions, de glissement des pics et de sauts (Figures 5.22, 5.23). Il n'a pas été possible d'obtenir de réponses sans distorsion même pour le niveau le plus faible de 2 Newton. On remarque un effet "raidissant" avec des sauts sur le premier pics de résonance (à 20 Hertz) comme on pouvait l'attendre d'après le type de non-linéarité introduite. Cependant, on note que les pics de résonance 2 et 3 ont plutôt tendance à glisser vers les basses fréquences (Figure 5.22).

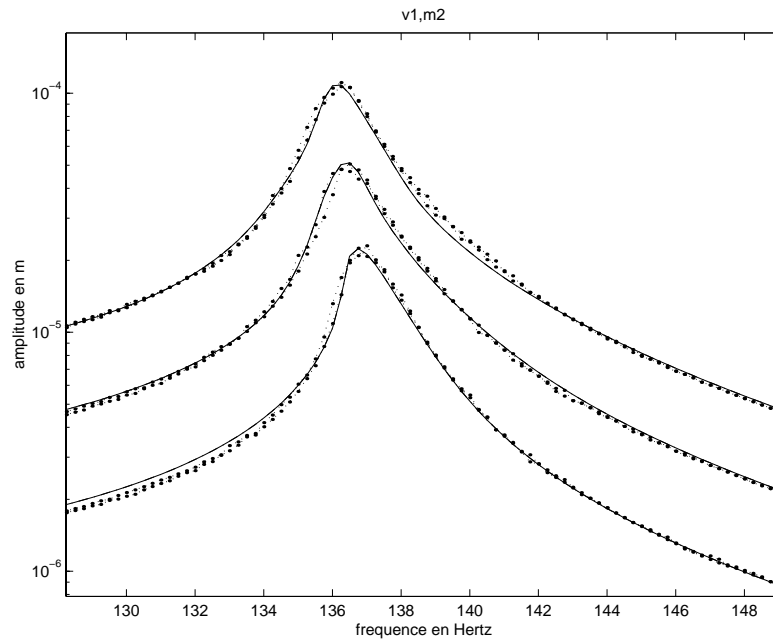


FIG. 5.22 – Réponses à 2, 5 et 11 Newton : capteur 1, résonance du mode 2. '.' : points expérimentaux pour les balayages ascendant et descendant ; '-' : modèle.

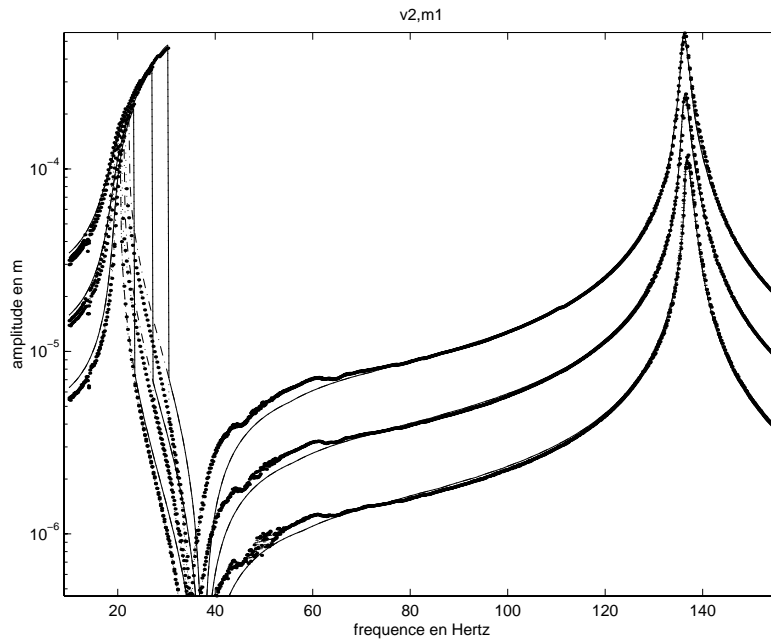


FIG. 5.23 – Réponses à 2, 5 et 11 Newton : capteur 2, résonances des modes 1 et 2. '·' : points expérimentaux ; '-' : modèle.

#### 5.6.4 Lissage des réponses

Nous exposons à présent le lissage des réponses expérimentales à l'aide des modèles de souplesse exposés dans les chapitres qui précèdent.

##### Modèle de souplesse

Le lissage est effectué avec le modèle de souplesse non-linéaire par superposition de trois composantes modales et d'un terme résiduel de raideur

$$\bar{S}_{im}(\Omega, Q) = \sum_{j=1}^3 \frac{\bar{\Phi}_{ij}(Q_j) \bar{\Phi}_{mj}(Q_j)}{\bar{\omega}_j^2(Q_j) - \Omega^2 + i \bar{h}_j(Q_j)} + \frac{1}{R_{im}}. \quad (5.77)$$

Le point d'injection de la force correspond à  $m = 1$  et les points de mesure des réponses à  $i = 1, \dots, 4$ , les voies de mesure et les composantes des modes portant les numéros des capteurs (Figure 5.21). Nous adoptons la normalisation des modes par rapport à la masse et nous supposons que l'amortissement suit une lois hystérétique éventuellement dépendante de l'amplitude. Les modes au delà de la bande de fréquence contenant les 3 premières résonances sont pris en compte par un terme résiduel de correction en raideur. Constatant que même pour des niveaux de force très faibles, le comportement ne pouvait pas s'apparenter à celui d'un système linéaire, nous n'avons pas eu la possibilité d'effectuer une analyse modale classique permettant de dégager une famille de vecteurs propres. Nous chercherons donc à identifier les formes des modes directement, sans réduction sur la base modale linéaire.

### Estimation, représentation des paramètres modaux et lissage

Les pulsations de résonance  $\bar{\omega}_j$  sont estimées aux maxima des pics de résonance et sont associées aux amplitudes mesurées aux pics  $U_{ij}$  pour chaque résonance des mode  $j = 1, 2, 3$  sur la voie  $i$ . L'amortissement est initialisé à une valeur forfaitaire constante en fonction de  $Q_j$  et correspondant à un facteur d'amortissement hystérétique fixé à  $\eta = 0.01$ . Les coordonnées des vecteurs modaux sont estimées de telle sorte à retrouver les amplitudes aux résonances pour chaque niveau de force compte tenu des valeurs de  $\eta$  et nous supposons à l'initialisation, que la forme des modes est constante dans le domaine d'amplitude étudié en prenant la moyenne des estimations

$$\bar{\Phi}_{1j} = \sqrt{\frac{U_{1j}\eta\bar{\omega}_j^2}{F}},$$

et,

$$\bar{\Phi}_{ij} = \frac{U_{ij}\eta\bar{\omega}_j^2}{\bar{\Phi}_{1j}F},$$

trouvées avec chaque niveau de force  $F$  et  $\eta = 0.01$ .

Les valeurs des pulsations, des amortissements et des vecteurs modaux sont reliés aux amplitudes modales  $Q_j$ . Les fonctions modales sont représentées par des fonctions d'interpolation entre ces points. Les paramètres de définition de ces fonctions sont ensuite optimisés afin de diminuer la distance entre la mesure et le modèle.

#### 5.6.5 Comparaison du modèle et des essais

L'ensemble des résultats de lissage sont présentés sur les figures 5.24, 5.25, 5.26, 5.27 correspondant aux 4 voies de mesure et pour les niveaux de force de 2, 5, 11 Newton.

Les fonctions modales identifiées (Figures 5.28, 5.29, 5.30), montrent que le premier mode possède une période d'oscillation décroissante avec l'amplitude alors que les modes 2 et 3 se comportent plutôt à l'inverse. L'hypothèse d'un mode constant (Figure 5.31) à été maintenue lors de l'analyse de ces réponses. On peut en déduire, que l'amortissement est de nature intrinsèquement non-linéaire en augmentant avec l'amplitude pour tous les modes. Les valeurs  $\bar{h}_j(Q_j)$  peuvent être traduites en facteurs d'amortissement hystérétique par

$$\bar{\eta}_j(Q_j) = \frac{\bar{h}_j(Q_j)}{\bar{\omega}_j^2(Q_j)}.$$

Les valeurs minimum et maximum correspondantes, obtenues pour 2 et 11 Newton, pour les trois modes sont regroupées dans le tableau suivant :

| F    | mode 1                 | mode 2                 | mode 3                 |
|------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 2 N  | $\bar{\eta}_1 = 0,013$ | $\bar{\eta}_2 = 0,009$ | $\bar{\eta}_3 = 0,008$ |
| 11 N | $\bar{\eta}_1 = 0,019$ | $\bar{\eta}_2 = 0,011$ | $\bar{\eta}_3 = 0,010$ |

TAB. 5.1 – Variations des amortissements hystérétiques pour les trois premiers modes non-linéaires d'une poutre

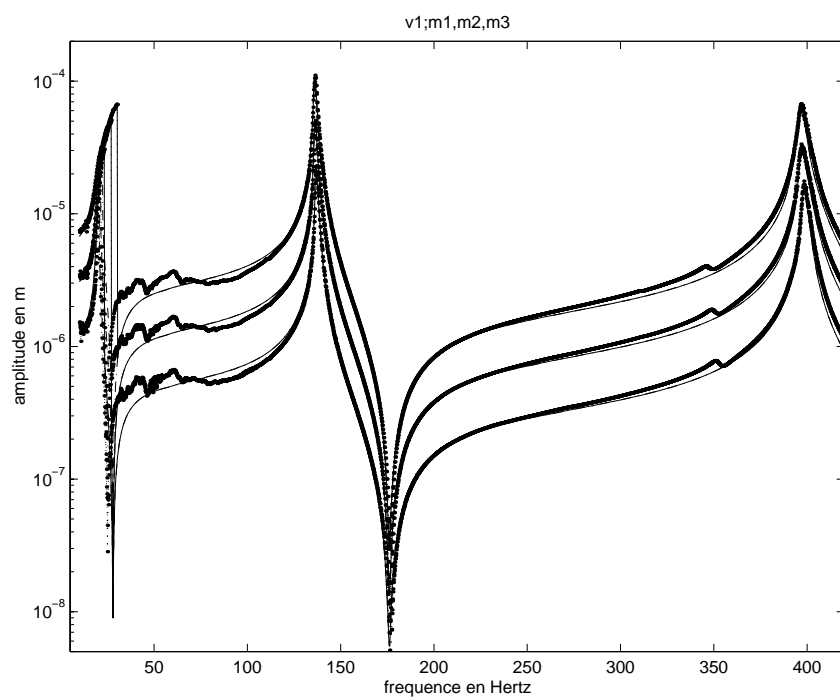


FIG. 5.24 – Réponses au capteur 1. '·' : points expérimentaux; '-' : modèle.

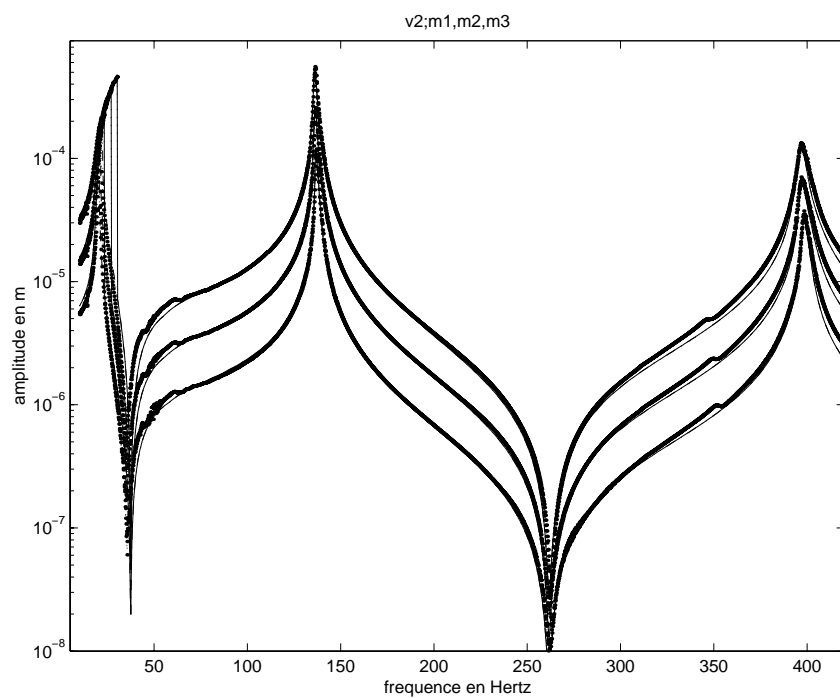


FIG. 5.25 – Réponses au capteur 2. '·' : points expérimentaux; '-' : modèle.

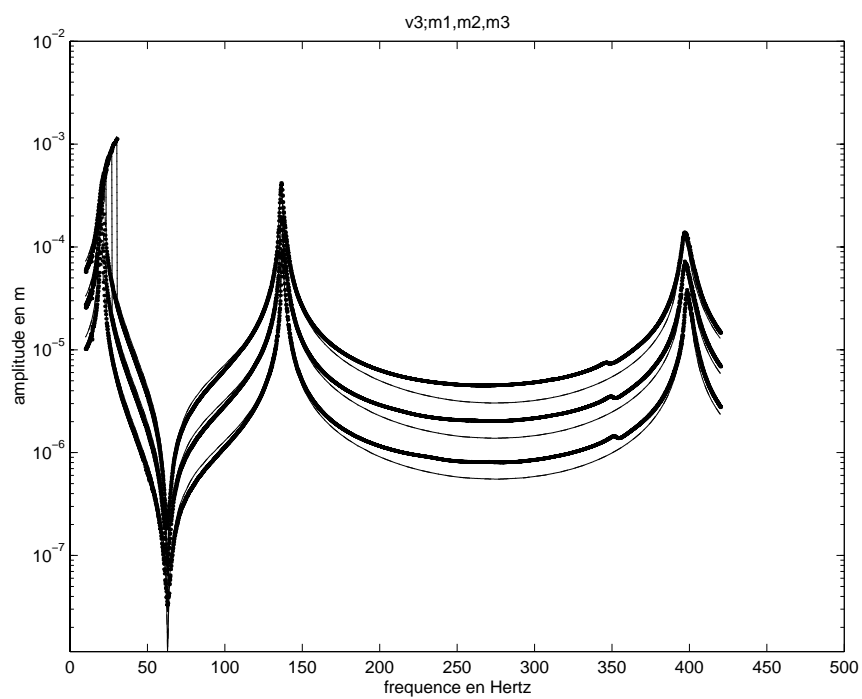


FIG. 5.26 – Réponses au capteur 3. '·' : points expérimentaux; '—' : modèle.

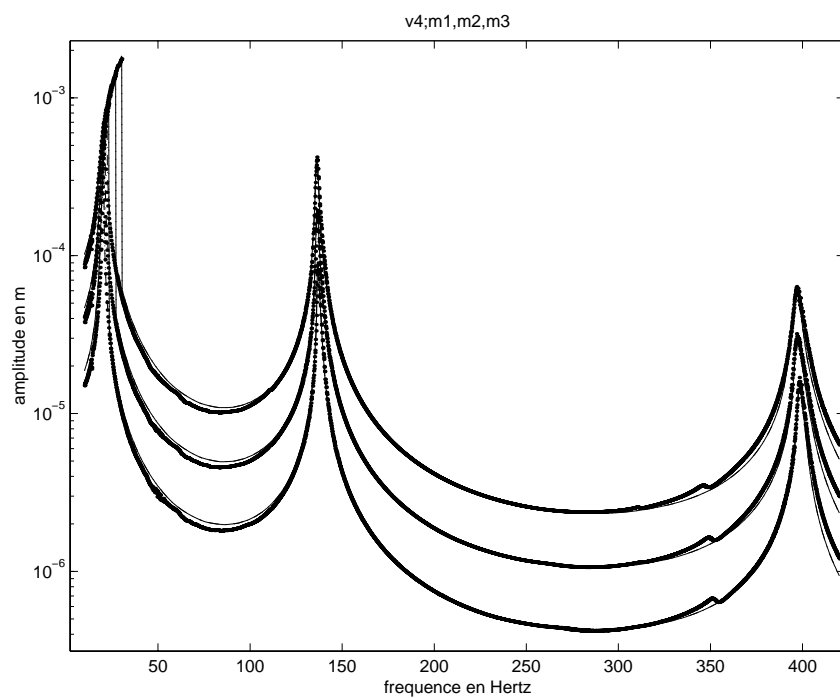


FIG. 5.27 – Réponses au capteur 4. '·' : points expérimentaux; '—' : modèle.



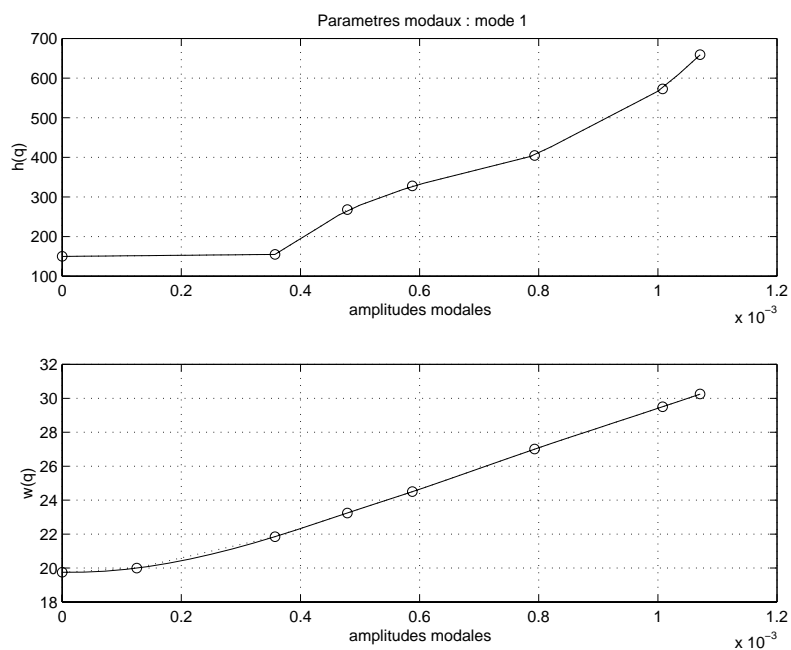


FIG. 5.28 – Paramètres modaux identifiés pour le mode 1. Haut :  $\bar{h}_1(Q_1)$ . Bas :  $\bar{w}_1(Q_1)$ .

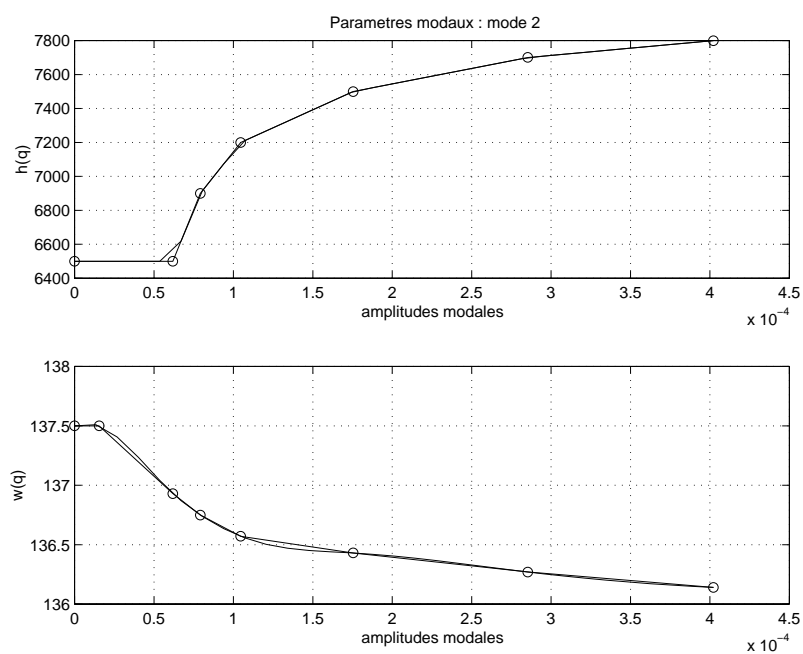


FIG. 5.29 – Paramètres modaux identifiés pour le mode 2. Haut :  $\bar{h}_2(Q_2)$ . Bas :  $\bar{w}_2(Q_2)$ .

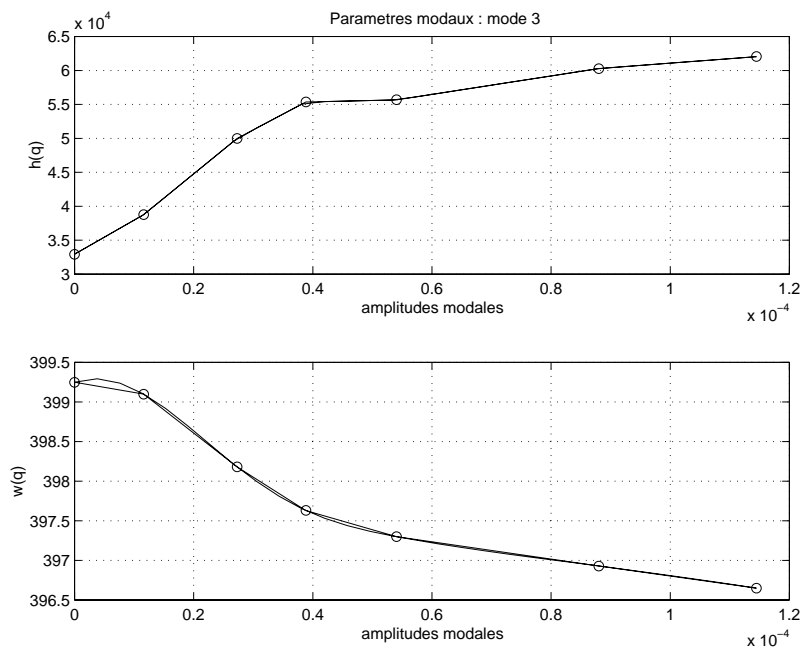


FIG. 5.30 – Paramètres modaux identifiés pour le mode 3. Haut :  $\bar{h}_3(Q_3)$ . Bas :  $\bar{w}_3(Q_3)$ .

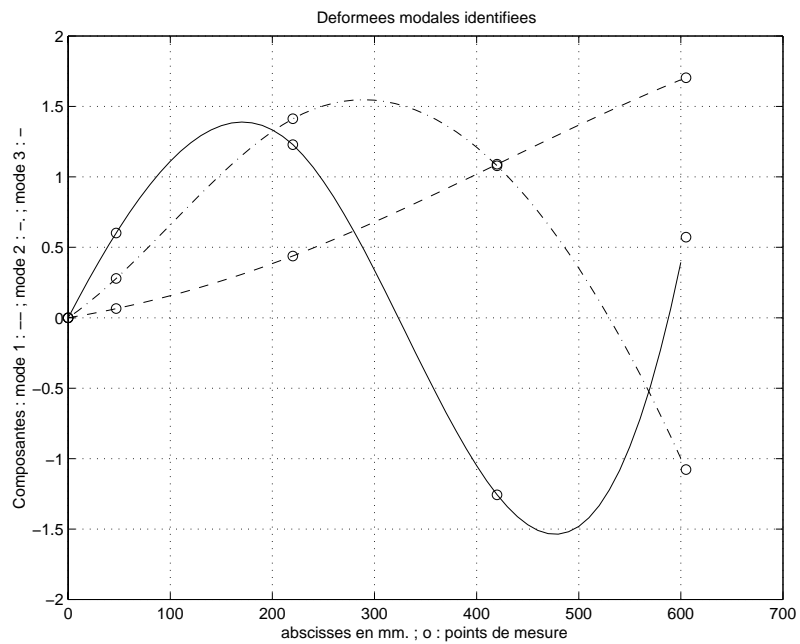


FIG. 5.31 – Déformées modales identifiées pour les 3 premiers modes d'une poutre (interpolation entre les points de mesure).

## 5.7 Conclusion

Dans le cadre de cet exemple expérimental, nous avons constaté que les modèles permettent de représenter d'une façon satisfaisante les réponses mesurées dans les zones où le niveau est faible, ainsi que dans les zones où le comportement non-linéaire est marqué mais où le modèle permet de suivre l'évolution et les distorsions des pics de résonance et les phénomènes de saut. L'hypothèse de superposition des contributions modales non-linéaires semble bien adaptée à ce cas de figure et permet le lissage dans toute la bande de fréquence, les modes de la poutre étant relativement éloignés les uns des autres. On illustre ainsi, l'extension, dans une certaine mesure, des modèles de réponse fréquentielle linéaire vers les systèmes non-linéaires.

# Chapitre 6

## Application industrielle

### 6.1 Introduction

Nous allons nous intéresser à présent à un système beaucoup plus complexe dans le cadre d'une application industrielle concernant l'étude du comportement dynamique d'un atterrisseur d'avion. L'analyse dynamique d'un tel système est motivée en particulier par l'étude du comportement d'instabilité en roulage appelé shimmy [47], [88], [10], [50], [16], [79], [18], [23].

Ce phénomène peut se produire dans des conditions très diverses en particulier à l'atterrissage, même lorsque les excitations générées par les pneumatiques en roulement sont relativement faibles (on parle alors d'atterrissage en effleurement ou *kiss landing*).

L'une des difficultés pour l'analyse dynamique de ce comportement, est la modélisation de la jambe de l'atterrisseur. La deuxième difficulté majeure est la représentation du pneumatique, qui peut aussi être source de non-linéarités [57], [3], mais qui ne fait pas l'objet de ce travail. Enfin, la troisième difficulté sera le couplage de l'atterrisseur avec l'aile et le fuselage de l'avion.

Les fonctions d'un atterrisseur d'avion sont le roulage, la suspension de l'aéronef lors du décollage, l'absorption de l'énergie du choc au contact de la piste lors de l'atterrissage. Celui-ci est fixé à l'aile de l'avion par trois paliers rotulaires permettant le pivotement de l'ensemble lors de l'escamotage du train en vol.

L'atterrisseur qui est l'objet de notre application est celui d'un Falcon 900 (avion de type "affaire"), d'une taille relativement modeste (masse d'environ 225 kg, hauteur approximative de 1350 mm). Cet atterrisseur principal gauche, (Figure 6.1) est constitué d'un caisson, qui contient l'amortisseur hydraulique en liaison (de type glissière) avec la tige coulissante, de deux roues et deux freins représentant une inertie concentrée à l'extrémité du système (environ 120 kg), et d'un vérin contrefiche servant à la rétraction ou au maintien en position verticale en roulement. La rotation de la tige coulissante autour de son axe, par rapport au caisson, est bloquée par un système de compas articulé permettant l'enfoncement de l'amortisseur (Figure 6.3).

D'une manière générale, l'architecture d'un tel système contient plusieurs liaisons de différents types (rotules, pivot, pivot glissant, glissière) qui seront inévitablement le siège de jeux et de frottements, sources de non-linéarités.

Ces liaisons, réparties en différents endroits de la structure, sont en nombre important et peuvent poser certaines difficultés pour leur modélisation ainsi que pour la détermination des paramètres associés [15], [28]. Il nous a donc semblé intéressant de tester la représentativité d'un modèle modal non-linéaire dans ce contexte à partir d'essais et d'une analyse des réponses

mesurées.

Dans cette optique, le système sera testé et les mesures de réponse interprétées au moyen de modèles de souplesse basés sur la notion de modes non-linéaires qui seront identifiés. Nous évaluerons ensuite la capacité de prédiction du modèle modale non-linéaire vis à vis d'essais annexes effectués dans des conditions différentes.

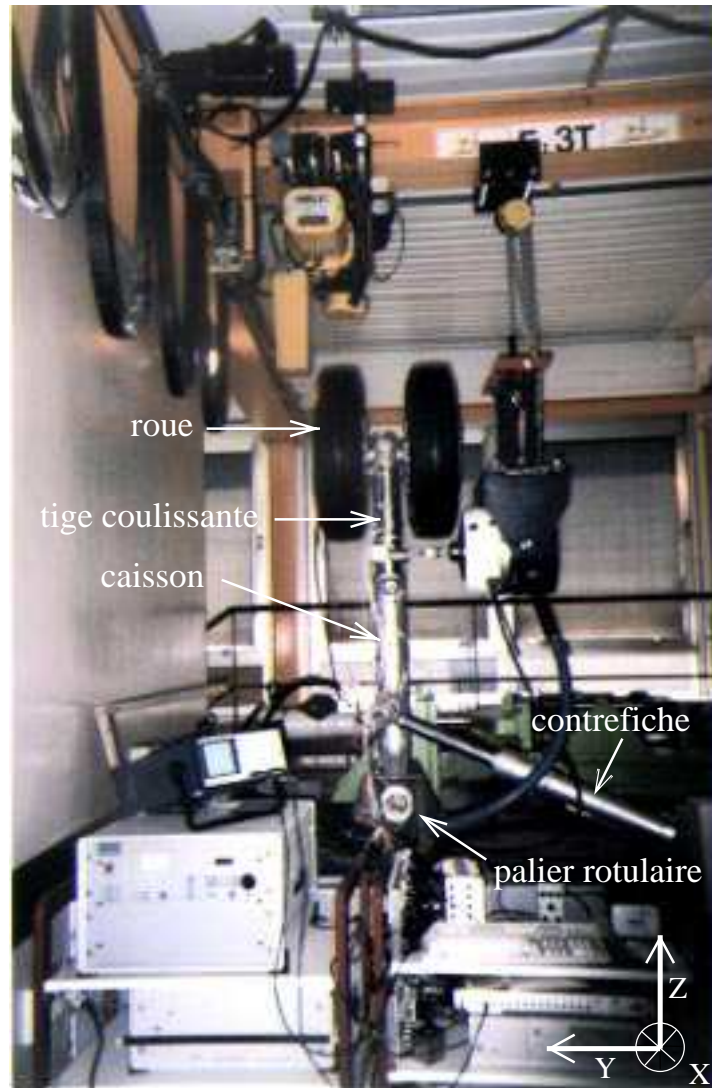


FIG. 6.1 – Dispositif de test vibratoire sur un atterrisseur de Falcon 900.

## 6.2 Description des tests expérimentaux

Nous allons à présent décrire les conditions expérimentales les moyens d'excitation ainsi que l'instrumentation associée aux tests vibratoires menés sur l'atterrisseur.

### 6.2.1 Conditions d'essai

L'atterrisseur est solidarisé à une dalle d'essai à l'aide d'un système d'équerres rigides réalisées en acier à partir de ses 3 points d'attache utilisés sur avion : les 2 paliers rotulaires avant et arrière et l'attache du vérin contrefiche (voir la figure 6.1). L'atterrisseur est en position inversée par rapport à sa position naturelle (roues vers le haut), le vérin contrefiche est verrouillé, les paramètres de la configuration d'essai

- Pression des pneumatiques,
- Pression de l'amortisseur,
- Pression de verrouillage du vérin contrefiche,

sont réglés aux valeurs prescrites.

Ces conditions d'essais sont en accord avec celles utilisées habituellement par le constructeur dans le cadre d'autres types d'essais comme les essais de roulage avec un enfoncement de l'amortisseur nul. Le fait d'inverser la position verticale de l'atterrisseur a une influence sur la répartition de la masse d'huile dans l'amortisseur mais qui est *a priori* négligeable.

Un paramètre important est le réglage du jeu de l'atterrisseur dans le débattement en torsion. Celui-ci s'effectue par ajout ou suppression de cales de jeu dans les liaisons caisson-compas et tige coulissante-compas, afin d'obtenir une valeur vérifiée par une procédure normalisée.

### 6.2.2 Instrumentation

L'instrumentation est constituée d'une vingtaine de capteurs accélérométriques répartis sur la structure et donnant les accélérations dans l'une des 3 directions de l'espace (principalement les directions X et Y pour les capteurs fixés sur la tige coulissante et le caisson et les directions Z pour les capteurs placés aux centre-roues). Le matériel de mesure, employé dans le cadre de ces tests expérimentaux est le suivant :

- 23 capteurs d'accélération ICP Endevco 100 mV/g,
- 1 conditionneur 16 voies PCB,
- 2 conditionneurs 8 voies,
- 1 baie "Paragon" HP3565A, équipé de 3 modules d'acquisition 8 voies, d'un module 1 voie pour la mesure d'effort, et d'un module source,
- 1 micro-ordinateur équipé du Logiciel HP3565 de pilotage du Paragon.

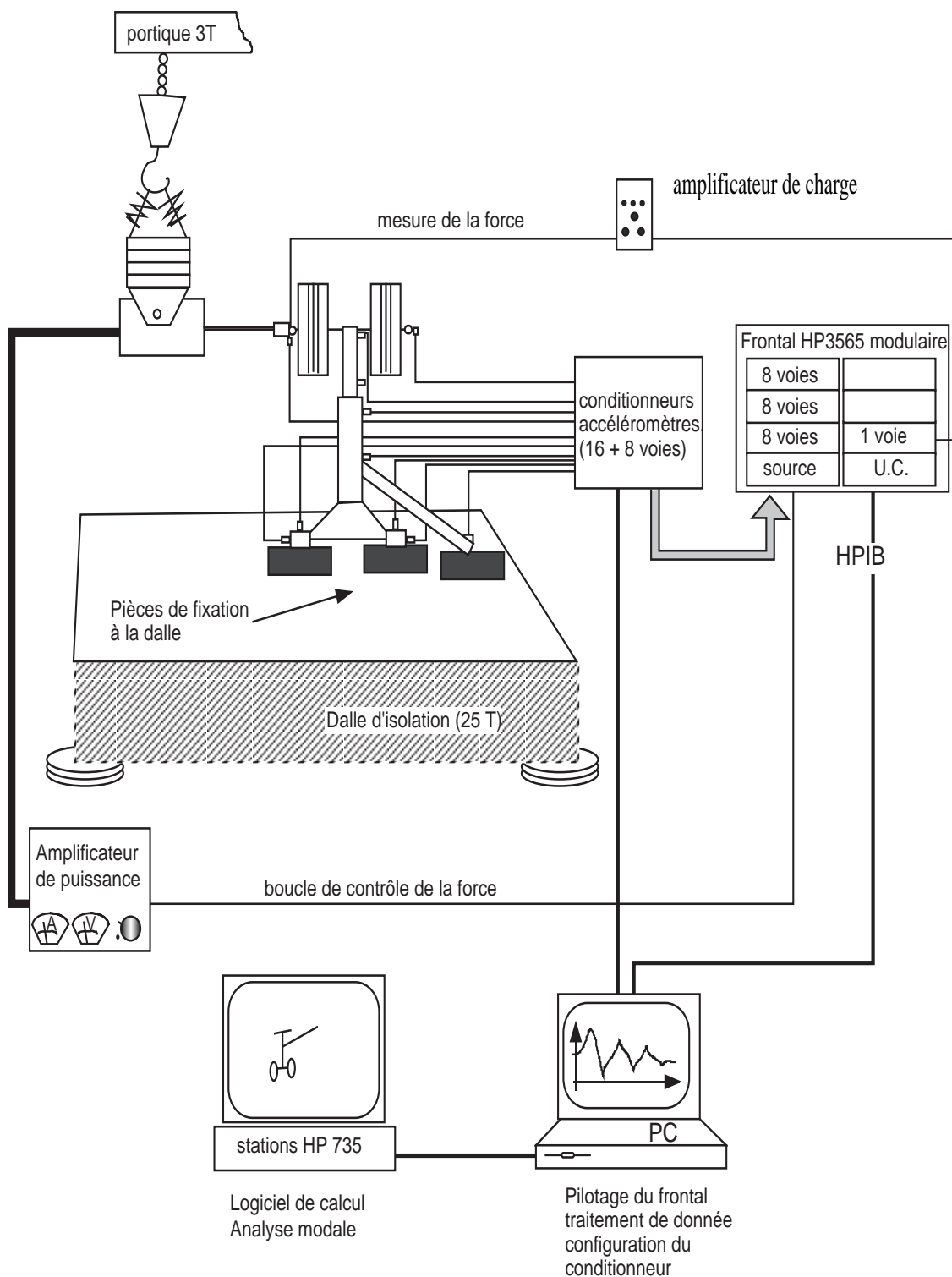


FIG. 6.2 – Schéma du dispositif d'essais et d'analyse.

### 6.2.3 Excitation de la structure

Le matériel utilisé pour l'excitation est le suivant :

- 1 pot électromagnétique Gearing et Watson (GWV 300 C) : 1640 Newton, amplitude maximum pic à pic : 12.5 mm, masse totale 225 Kg,
- 1 amplificateur de puissance (1000 Watts) Gearing et Watson SS1000,
- 1 capteur de force : Bruel et Kjaer modèle 8850, 3.7 pC/N,
- 1 amplificateur de charge Bruel et Kjaer.

L'excitateur est suspendu le plus doucement possible afin de limiter ses mouvements surtout lors des essais de résonance en basse fréquence. Cette disposition permet également de faire varier le point d'application avec plus de facilité par rapport à un montage rigide. Un lest a été employé pour augmenter l'inertie de réaction en dynamique.

Plusieurs montages ont été effectués à l'aide de certaines pièces d'adaptation permettant d'exciter le système dans plusieurs directions et en différents points. Nous avons eu recours principalement à trois types de montage énumérés ci dessous :

1. Excitation de direction X :

L'excitation est produite dans la direction X (direction de roulement) sur la tige coulissante au moyen d'une pièce réalisée en aluminium maintenue par serrage sur la tige coulissante (voir la figure 6.3).

2. Excitation de direction Y :

Une bague en aluminium est maintenue par serrage sur le caisson et permet une excitation de la jambe d'atterrisseur latéralement par rapport à la direction de roulement que nous nommerons direction Y (voir la figure 6.4).

3. Excitation en torsion autour de l'axe Z :

Un bras de levier réalisé en aluminium, de masse négligeable (4500 g), permet d'exciter l'atterrisseur en torsion autour de son axe vertical (Figure 6.5). La longueur de ce bras de levier permettra d'imposer l'effort à l'aide du pot électromagnétique en restant dans les limites de course de celui-ci.



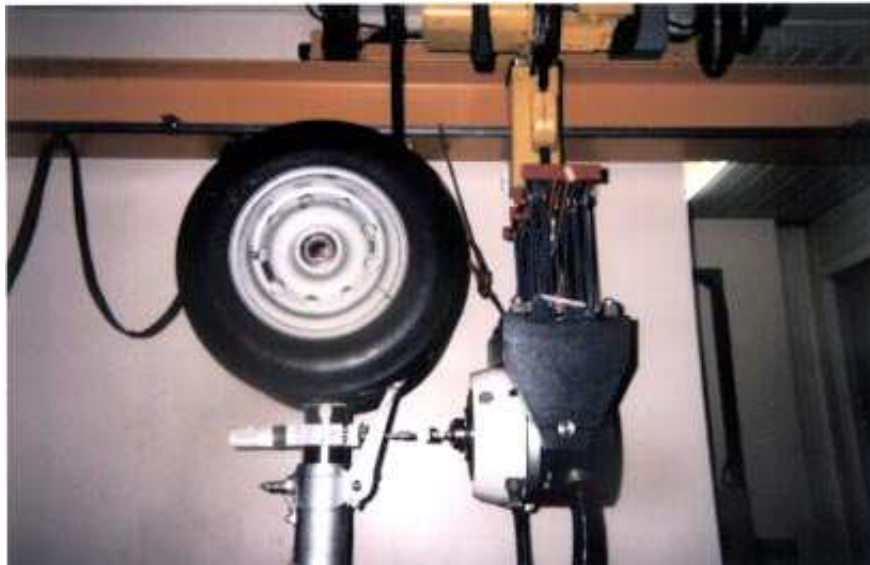


FIG. 6.3 – Montage expérimental pour l'excitation de direction X.



FIG. 6.4 – Montage expérimental pour l'excitation de direction Y.



FIG. 6.5 – Montage expérimental pour l'excitation en torsion autour de Z.

L'excitation transmise à la structure par le biais d'une tige métallique souple est mesurée par le capteur piézo-électrique fixé aux pièces d'adaptation.

## 6.3 Résultats expérimentaux

### 6.3.1 Nature des tests effectués

Dans l'ensemble des tests expérimentaux effectués, nous mesurons la réponse du système à une force d'excitation harmonique de niveau constant au cours du balayage de la fréquence dans la bande d'étude. Après chaque incrémentation de la fréquence d'excitation, un temps d'attente permet de retrouver un régime quasi-permanent. Seule l'harmonique d'excitation est gardée dans l'acquisition des réponses. Les balayages sont effectués en augmentant puis en diminuant les fréquences pour différents niveaux de force. La force est maintenue constante au point d'entrée grâce à une boucle de contrôle (Figure 6.2).

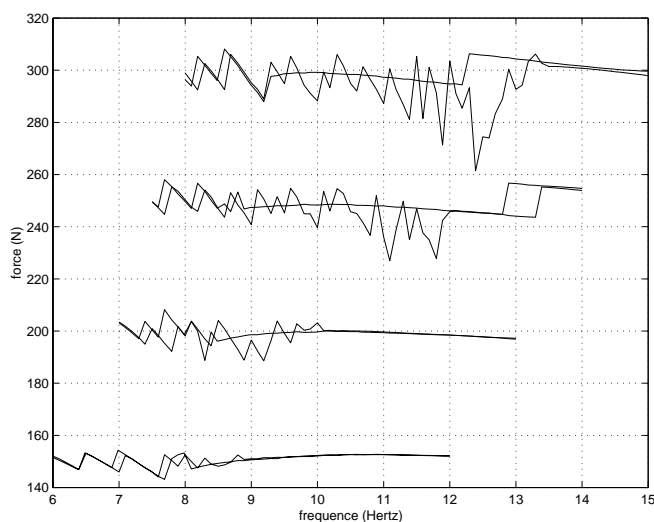


FIG. 6.6 – Historiques des forces d'excitation (direction X) au cours des balayages en fréquence.

La figure 6.6 donne un aperçu des niveaux d'effort effectifs injectés dans la structure. Suivant les situations, celle-ci est réalisée avec plus ou moins de précision.

Lors de l'exploitation des méthodes de lissage, il sera ainsi nécessaire de considérer un effort moyen dans la bande de fréquence si l'on utilise les expressions (5.48) ou (5.52) car on ne peut pas prendre en compte les perturbations sur l'effort dans ces expressions. Par contre, la méthode de continuation en fréquence permet d'intégrer le niveau d'effort réel rencontré à chaque pas de fréquence. L'algorithme pourra converger si les fluctuations ne sont pas suffisantes pour mettre en défaut le prédicteur-correcteur (voir la partie 5.4).

### 6.3.2 Présentation des résultats

Les résultats expérimentaux sont présentés sous forme de courbes de réponses donnant l'amplitude (en m) et les phases (en degrés) des déplacements en fonction de la fréquence (en Hertz) pour chacune des voies de mesure.

Les réponses permettent de mettre en évidence l'effet des non-linéarités du système : la position des pics de résonance en fréquences s'est avérée extrêmement sensible par rapport au niveau. Globalement, deux types de situations ont été rencontrées au cours des essais effectués avec cette structure :

L'une à faible niveau, le décalage des pics, très amortis, s'effectuant vers les basses fréquences (Figure 6.8), l'autre à plus fort niveau (figure 6.7), les fréquences correspondant aux pics augmentant rapidement en fonction du niveau et faisant apparaître des sauts. Les courbes de la figure 6.7 font apparaître les réponses obtenues pour les deux sens de balayage et pour plusieurs niveaux de force.

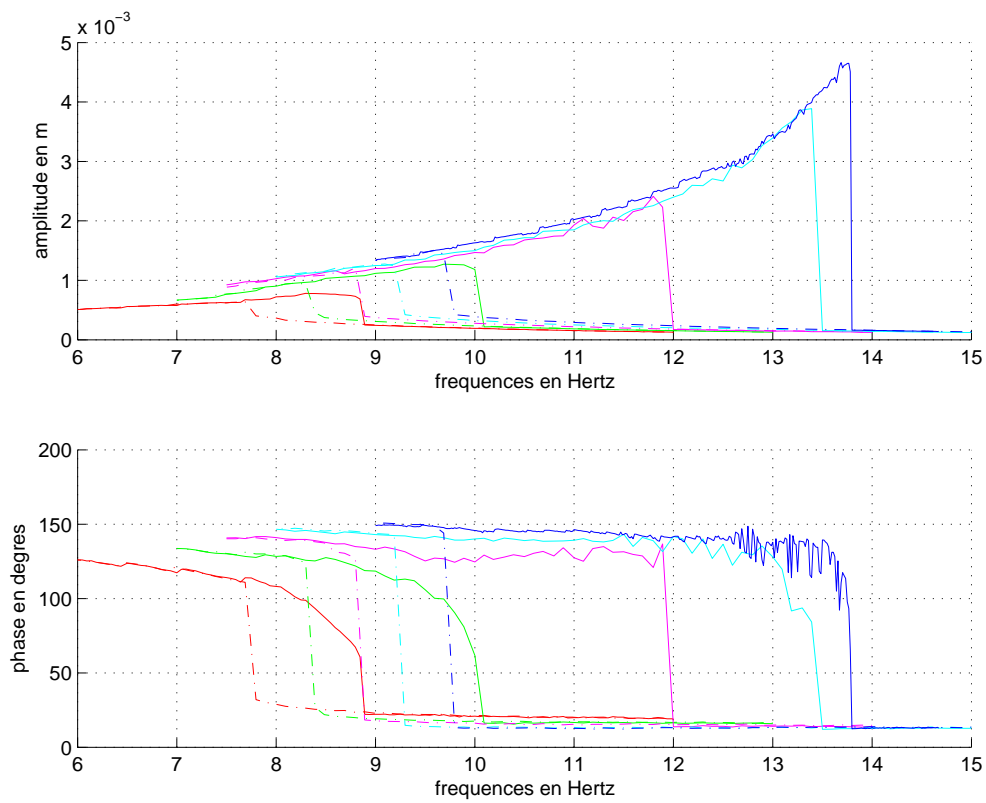


FIG. 6.7 – Excitation en X, réponses fréquentielles au point 5 (forts niveaux).

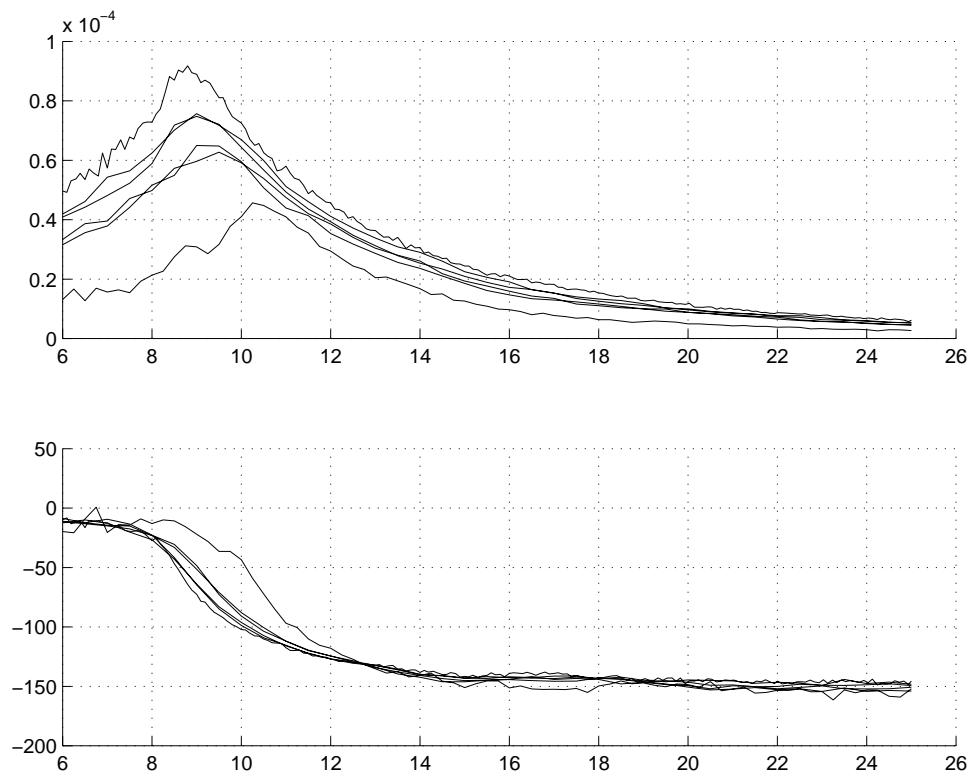


FIG. 6.8 – Excitation en X, réponses fréquentielles au point 5 (faibles niveaux).

## 6.4 Lissage des réponses expérimentales

Les différentes techniques exposées au chapitre précédant ont été exploitées pour extraire les paramètres modaux correspondant aux trois premiers modes de la structure, à partir des réponses mesurées. Ces trois premiers modes de l'atterrisseur sont deux flexions, approximativement dans les plan X-Z (mode 1), le plan Y-Z (mode 2), et un mode de torsion autour de l'axe Z (vertical). Les figures 6.9 permettent de comparer le modèle de réponse théorique avec les réponses expérimentales en phases et déplacements pour les essais avec l'excitation dans la direction X pour 4 niveaux de force différents. L'amplitude indiquée correspond à un capteur situé à l'un des centre-roues et mesurant dans la direction X. Un mode est prépondérant dans ces essais, les autres sont pris en compte par des termes résiduels et des contributions linéaires. La pulsation et l'amortissement du mode correspondant à ces résonances possèdent de fortes variations en fonction du niveau (figure 6.13).

Un comportement analogue est obtenu pour les autres modes (6.14), avec la transition assez brusque d'un comportement avec perte de raideur et un fort amortissement à faible niveau ( $\bar{\eta} = 0,1$ ), vers un comportement raidissant à fort niveau et une chute du coefficient d'amortissement (de l'ordre de  $\bar{\eta} = 0,03$ ).

Les réponses synthétisées et mesurées sont comparées graphiquement dans les figures 6.10, 6.11 et 6.12. La voie 25 correspond au déplacement dans la direction Y du point d'application de la force pour l'essai en Z (voir la figure 6.5), et les voies 1 et 3 aux extrémités de l'essieu où les déplacements sont mesurés dans la direction X.

Le modèle permet de retrouver les niveaux d'amplitude, les fréquences et les deux sauts observés sur chaque réponse avec une précision suffisante pour l'ensemble des points de mesure.

### 6.4.1 Lissage des mesures

#### Lissage des réponses à l'excitation en X

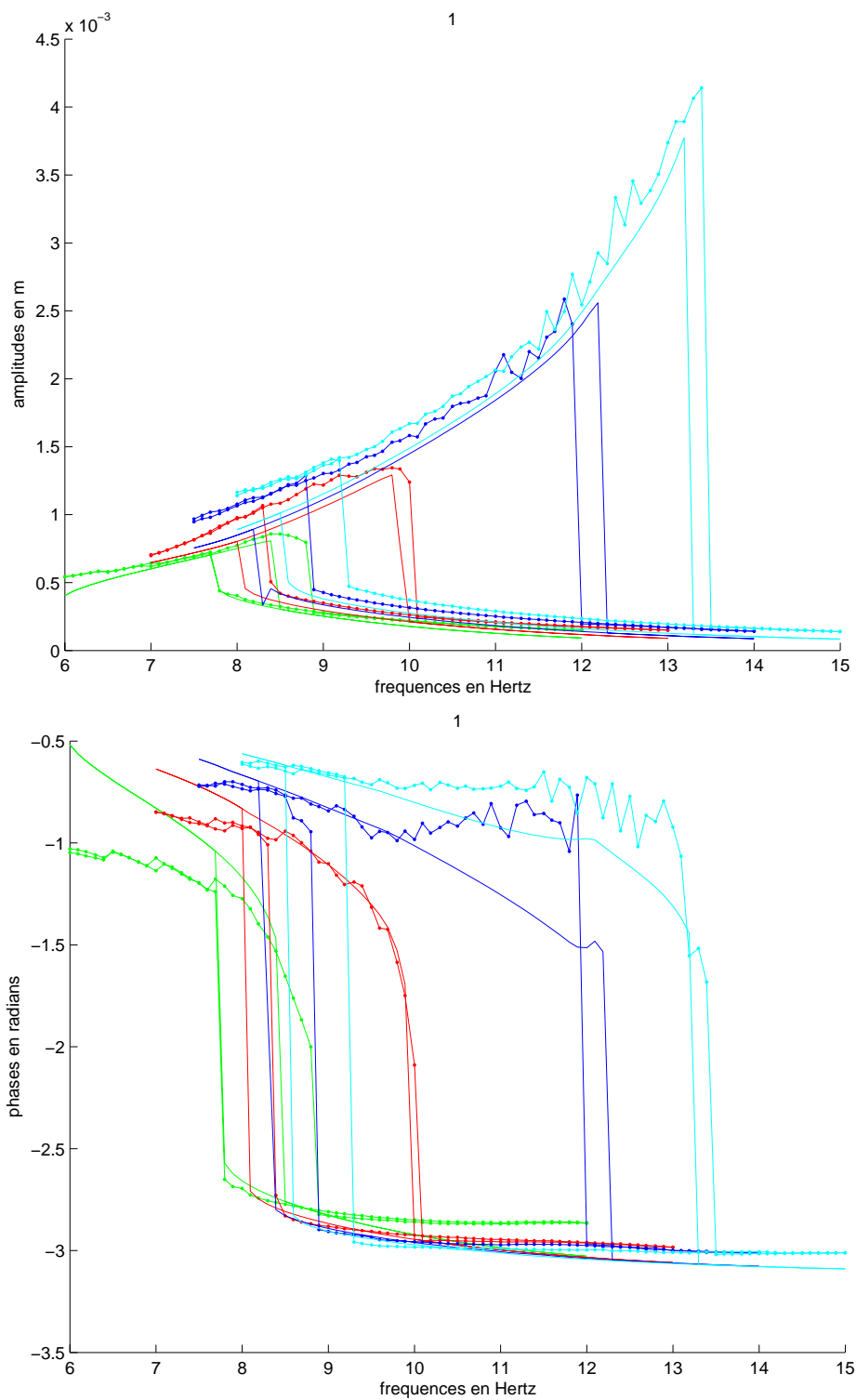


FIG. 6.9 – Lissage des réponses à l'excitation de direction X. Haut : amplitudes, Bas : phases. Niveaux de force 150, 200, 250, 300 Newton, voie 1.

## Lissage des réponses à l'excitation en Z

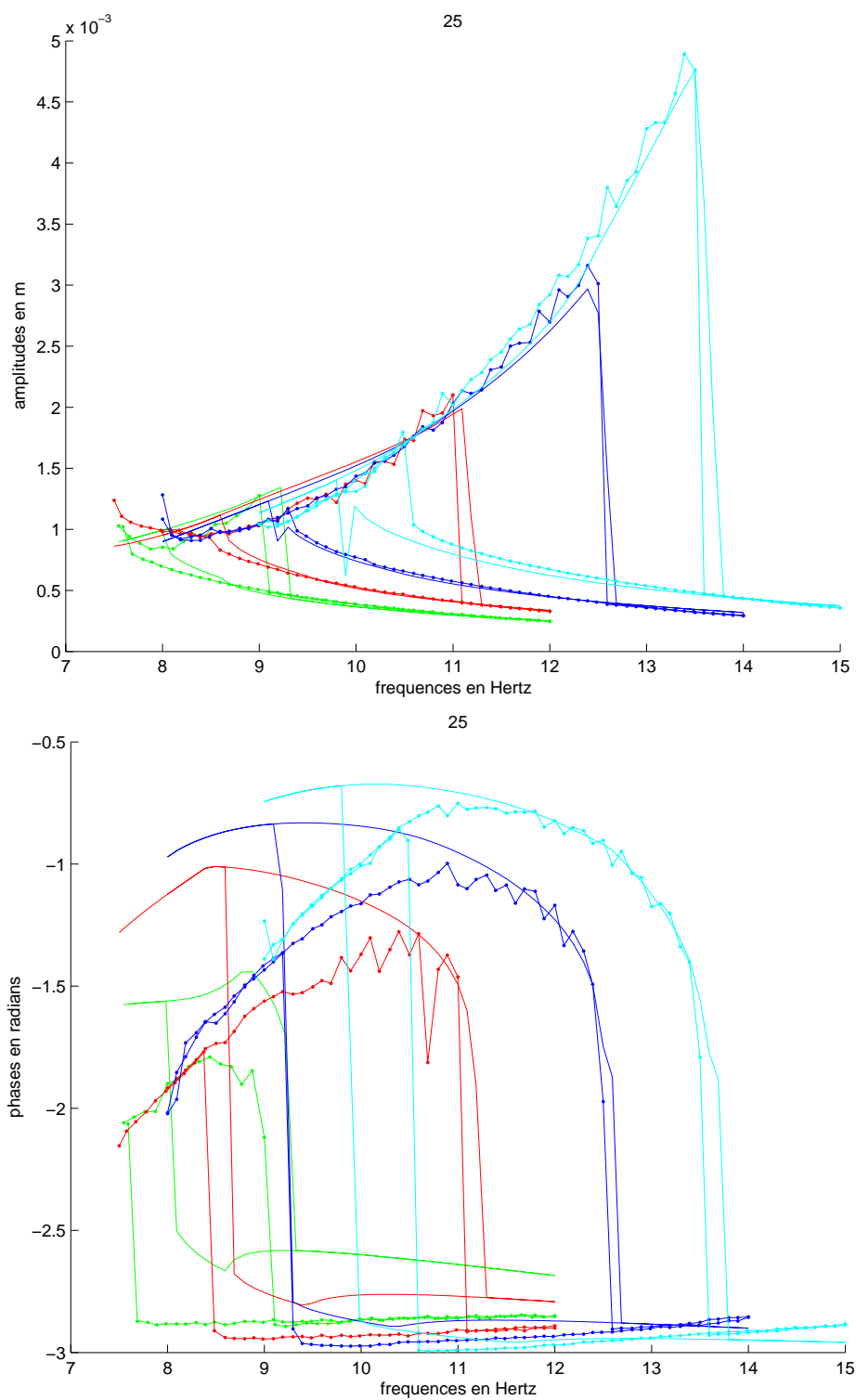


FIG. 6.10 – Lissage des réponses à l'excitation de direction Z. Haut : amplitudes, Bas : phases. Niveaux de force 175, 250, 350, 500 Newton, voie 25.

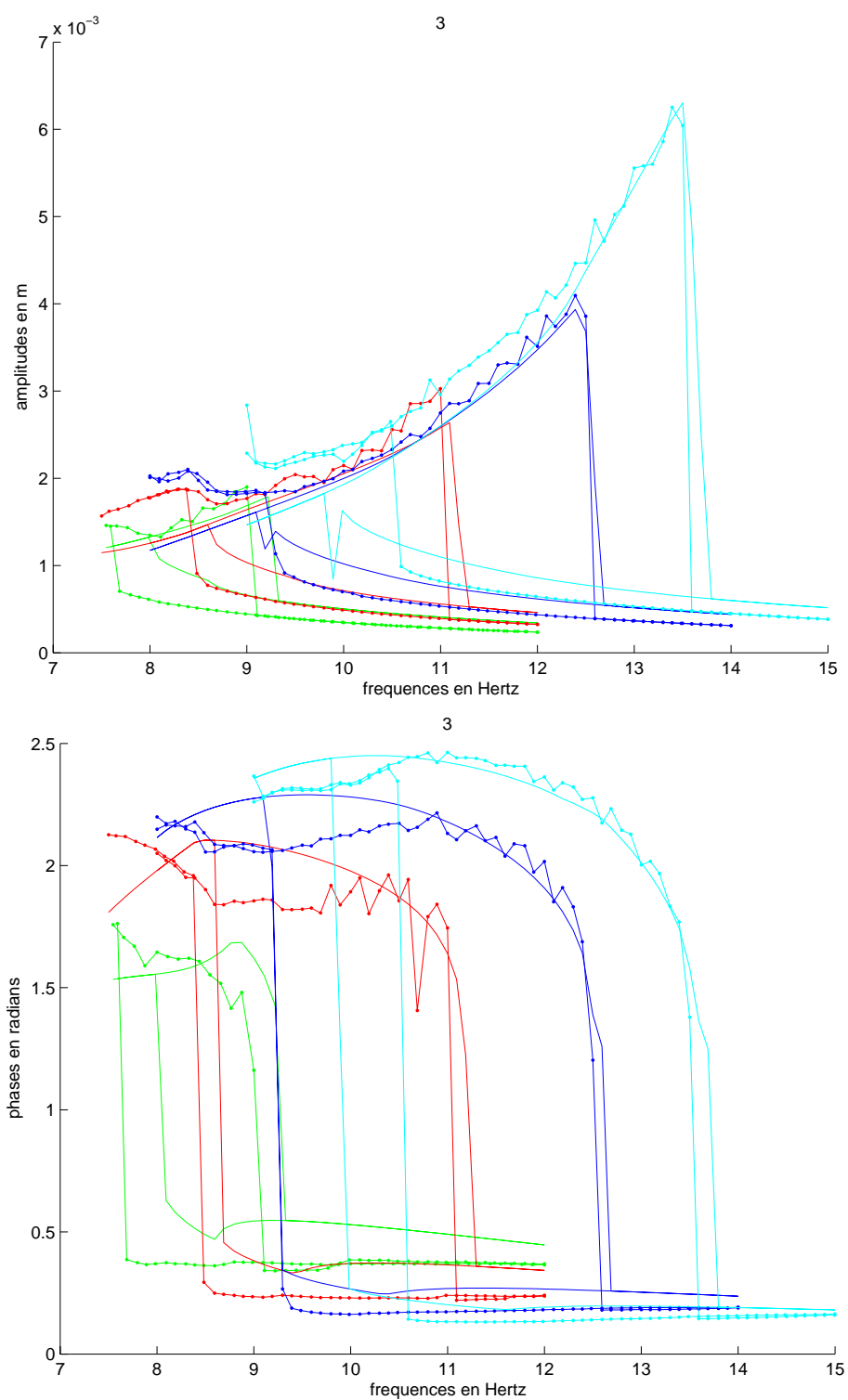


FIG. 6.11 – Lissage des réponses à l'excitation de direction Z. Haut : amplitudes, Bas : phases. Niveaux de force 175, 250, 350, 500 Newton, voie 3.



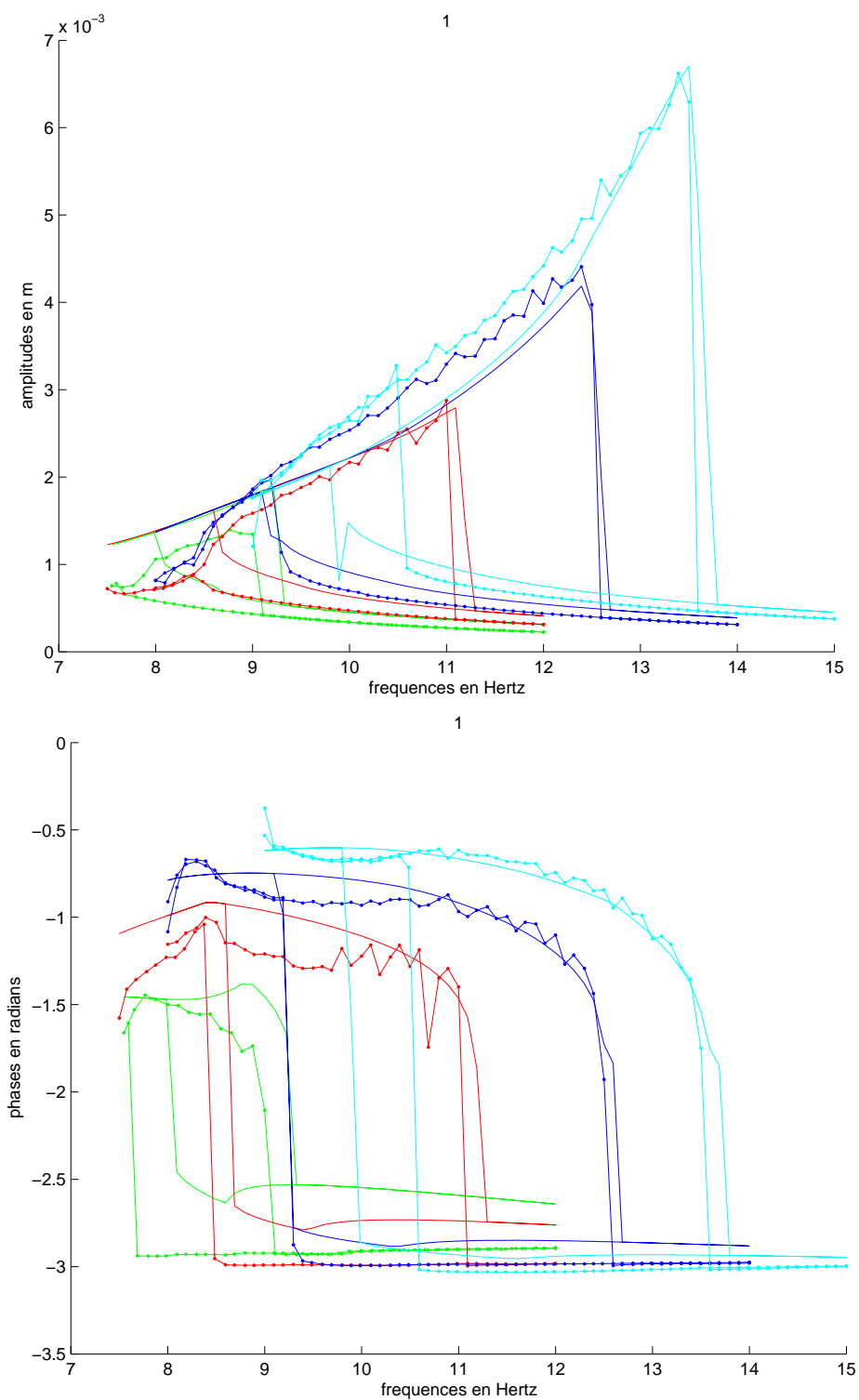


FIG. 6.12 – Lissage des réponses à l'excitation de direction Z. Haut : amplitudes, Bas : phases. Niveaux de force 175, 250, 350, 500 Newton, voie 1.

### 6.4.2 Pulsations propres et amortissement non-linéaires

Les fonctions modales sont obtenues sous forme polynomiale par morceaux et font apparaître les variations de l'amortissement et des fréquences avec l'amplitude modale. Ces fonctions, associées aux formes modales identifiées et aux termes résiduels permettent de synthétiser les réponses à l'aide des procédures exposées au chapitre 5.

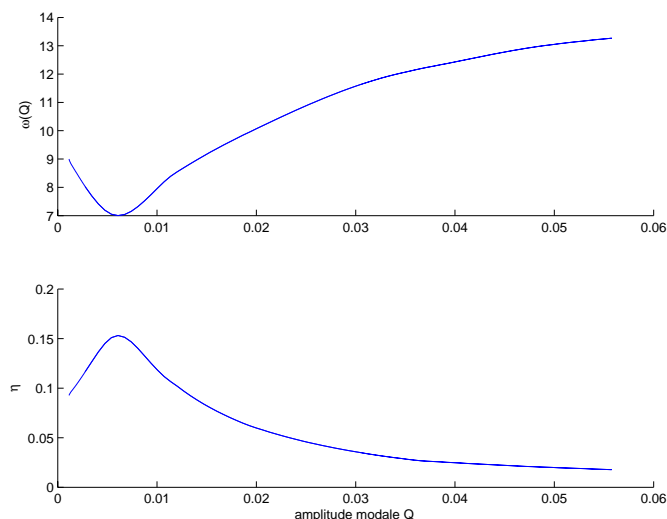


FIG. 6.13 – Fonctions modales du mode 1. Haut :  $\bar{\omega}_1(Q_1)$  (Hertz), Bas :  $\bar{\eta}_1(Q_1)$ .

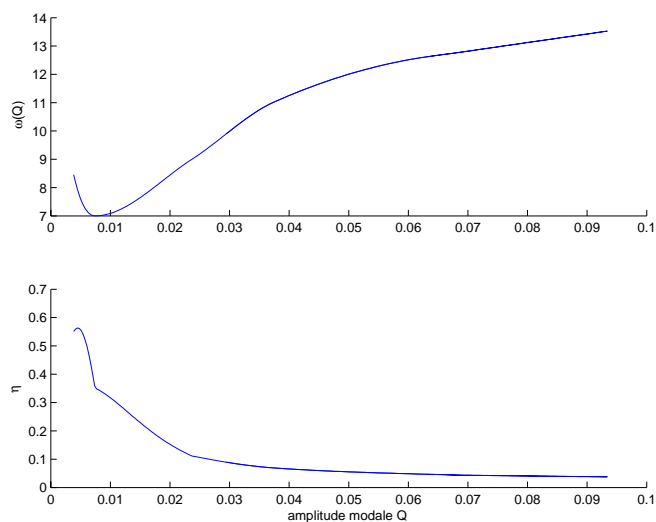


FIG. 6.14 – Fonctions modales du mode 3. Haut :  $\bar{\omega}_3(Q_3)$  (Hertz) , Bas :  $\bar{\eta}_3(Q_3)$ .

## 6.5 Tests de prédiction

Dans le but de tester la capacité du modèle modal à prédire les réponses à une excitation autre que celle utilisée pour fournir les données d'identification, un nouvel essai est réalisé. Ces essais ont été réalisés avec la collaboration de la SOPEMEA dans les locaux de l'Ecole Centrale de Lyon. L'excitation est injectée en deux points situés aux extrémités de l'essieu supportant les roues de l'atterrisseur (Figure 6.15). L'utilisation de pots électromagnétiques ayant une course de  $\pm 10$  mm permet en effet ce montage.

Les résultats fournis sont les amplitudes et fréquences relevées par l'expérimentateur pour plusieurs niveaux d'effort lorsque le système atteint son maximum d'amplitude. Cette amplitude correspondant à une voie de référence (l'une des deux voies d'injection des forces) est associée à la fréquence et à la force dans le tableau ci-dessous (6.1) :

|                  |       |       |       |       |       |      |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| Force (N)        | 114   | 136,8 | 159,6 | 182,4 | 205,2 | 228  |
| Fréquence (Hz)   | 10,75 | 11,5  | 12,1  | 12,5  | 12,82 | 13   |
| Déplacement (mm) | 3,43  | 5,02  | 6,15  | 7,27  | 8,36  | 9,18 |

TAB. 6.1 – Données du test de prédiction



FIG. 6.15 – Test de prédiction de la réponse, excitation en deux points.

La prédiction est effectuée à l'aide du modèle modal identifié sur les essais d'excitation dans les directions X, Y et Z. Au préalable, il est nécessaire d'expanser les modes identifiés sur les nouveaux points d'injection des efforts et de mesure afin de pouvoir simuler l'essai et comparer les réponses au même point. Cette expansion peut être réalisée par la méthode de projection

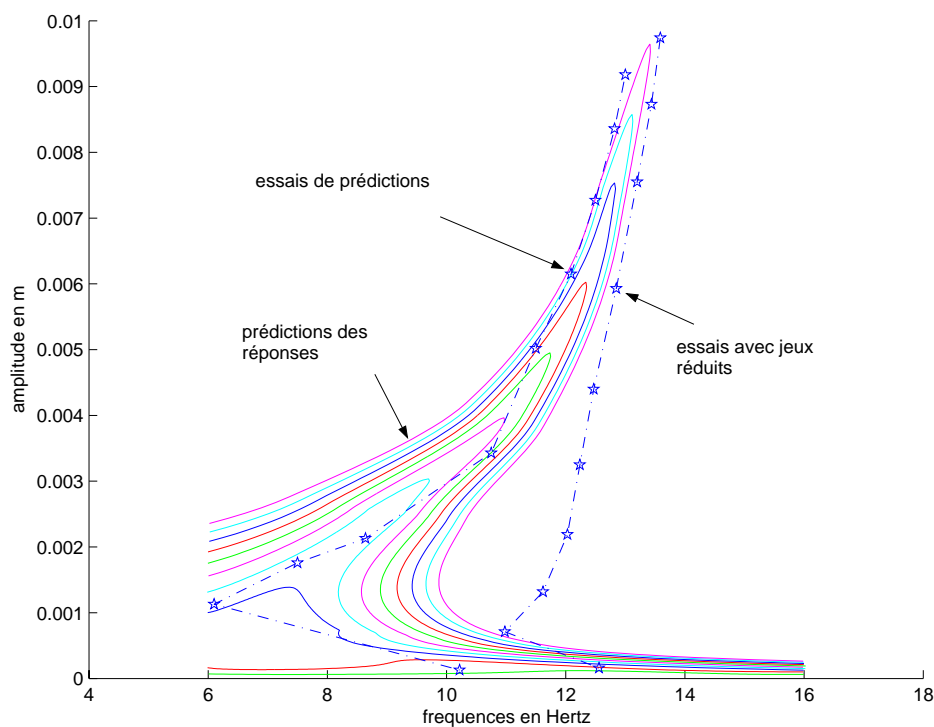


FIG. 6.16 – Prédiction des réponses à l'aide du modèle identifié.

[33], [48], à l'aide d'un modèle élément fini simplifié. On constate une bonne corrélation entre les maxima de réponse prédits et ceux obtenus avec la nouvelle excitation dans le plan amplitude-fréquence (Figure 6.16). Les points de mesure décalés vers la droite correspondent à un essai où le jeu dans le mouvement en torsion de l'atterrisseur est réduit.

## 6.6 Conclusion

Nous avons traité une application industrielle en utilisant la notion de mode non-linéaire pour analyser les résonances de la structure. Les tests vibratoires effectués sur cette structure ont mis en évidence certains phénomènes analogues à ceux prédits par les techniques analytiques exposées au chapitre 4. La conception du système permet en effet de supposer l'origine du comportement non-linéaires à cause des nombreuses liaisons qui interviennent dans l'assemblage. Cependant, sans tenter une modélisation "physique" du système, nous avons cherché à le représenter par un modèle modal non-linéaire en identifiant les paramètres modaux par comparaison des souplesses mesurées et des souplesses théoriques exposées au chapitre 2. Nous avons constaté que le comportement dynamique d'une structure complexe, tel l'atterrisseur qui constituait notre exemple, pouvait être représenté assez simplement au moyen des modèles de souplesse basés sur les modes non-linéaires.

## Conclusion générale

Nous avons, au cours de ce travail, exploité le concept de mode non-linéaire dans l'étude de systèmes dynamiques. Nous nous sommes basés sur les fondements théoriques et avons utilisé les approximations permettant de traiter des exemples numériques ainsi que des systèmes réels.

La notion de mode non-linéaire s'avère alors un outil très performant pour le calcul des réponses forcées d'un système même fortement non-linéaire, en se ramenant, dans certaines conditions, à un problème mono-dimensionnel. Le calcul préalable de ces modes non-linéaires est effectué dans le cas général par la résolution d'un problème aux valeurs propres non-linéaire, à l'aide de méthodes de prédicteur-correcteur.

Dans le domaine expérimental, nous avons constaté que l'expression approchée des souplesses, basée sur la notion de mode non-linéaire résonant, est capable de restituer le comportement de systèmes mécaniques complexes au moyen de fonctions modales simples qui généralisent les paramètres modaux classiques, ouvrant ainsi une perspective d'exploitation dans le contexte industriel.

La notion de mode permet en effet de représenter de façon globale, un ensemble de composants mécaniques inter-connectés. Bon nombre de structures industrielles, devant assurer plusieurs fonctions, ont une architecture constituée d'un assemblage de diverses pièces par des liaisons sources de non-linéarités : paliers, pièces élastomères, roulements, assemblages boulonnés,... On doit parfois considérer que la non-linéarité est répartie (ou continue) comme c'est le cas pour des structures souples mettant en jeu des effets géométriques lors de leurs mouvements, ou pour des interfaces continues entre composants. Dans ce cas, les modes non-linéaires permettront de représenter la structure d'une manière efficace.

L'exploitation des modes-non linéaires calculés ou identifiés sur des structures, à d'autre fin que celle de la prédiction des réponses forcées, a été menée dans le cadre de la sous-structuration, étendue au cas non-linéaire [66]. La prédiction des modifications apportées sur les modes ou sur les réponses par des perturbations en masse ou en raideur, au moyen de méthodes de sensibilité non-linéaires [67] peut avoir également un intérêt dans le cadre des applications pratiques.

Les exemples numériques traités, ainsi que les applications expérimentales montrent que l'approximation qui considère un seul mode résonant, dont la contribution est superposée aux autres contributions modales, donne des résultats satisfaisants. Cependant, cette hypothèse de base peut être mise en défaut lorsque le système en excitation forcée, possède des résonances en combinaison. La réponse ne peut plus alors, être approchée convenablement par des fonc-

tions mono-fréquentielles. Conformément aux travaux menés à l'aide de la méthode de la forme normale [38], il semble intéressant d'essayer de généraliser la notion de mode non-linéaire en utilisant plusieurs variables dans le paramétrage de ceux-ci et de généraliser les méthodes de résolutions numériques, afin de pouvoir traiter le cas de réponses forcées correspondant à cette situation. Ceci pourra constituer un axe d'investigation, permettant d'élargir les thèmes abordés dans le présent travail.

# Table des figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Mouvements admissibles d'un système non-linéaire autonome à deux degrés de liberté; $u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2$ . . . . .  | 13 |
| 1.2  | Mode non-linéaire (non-similaire) d'un système à 2 degrés de liberté. . . . .   | 16 |
| 1.3  | Modes normaux (similaires) et équipotentielles ( $h = 0.2$ et $h = 1$ ) du système (1.32), cas d'une bifurcation du mode ( $\alpha = 6, k = 3$ ). . . . .   | 21 |
| 1.4  | Bifurcation des modes du système (1.32) avec $k = 3$ , en fonction de $\alpha$ . Bifurcation pour la valeur critique $\alpha = 4$ . . . . .   | 21 |
| 1.5  | Trajectoires des oscillations forcées dans l'espace des configurations, ( $k=3$ ). . . . .  | 23 |
| 1.6  | Trajectoires des oscillations forcées, cas linéaire avec $k = 1$ . . . . .  | 24 |
| 1.7  | Système linéarisable à deux degrés de liberté (paramètre des liaisons élastiques linéaires et cubiques). . . . .  | 25 |
| 1.8  | Réponse forcée d'un système non-linéaire à 2 d.d.l. comportant une bifurcation de l'un ses modes non-linéaires (le mode $c=-1$ ); $\alpha = 10^{-5}, \beta = 2.10^{-2}, \gamma = 5.10^{-3}, \delta = 10^{-4}, F_x = 2, F_y = 0$ . . . . . | 25 |
| 1.9  | Réponse forcée d'un système non-linéaire à 2 d.d.l. comportant une bifurcation de l'un ses modes non-linéaires (mode $c=-1$ ); $\alpha = 10^{-5}, \beta = 2.10^{-2}, \gamma = 5.10^{-3}, \delta = 10^{-4}, F_x = 0, 1, F_y = 0$ . . . . . | 26 |
| 1.10 | Réponse du système (1.37) (avec ajout de $\gamma = 0,005$ ), au voisinage du mode en phase $c = 1$ , pour $\Omega = 1, 4$ . $x : u_1, y : u_2$ . . . . .  | 27 |
| 1.11 | Localisation de la réponse temporelle forcée du système (1.37) ( $\gamma = 0,005$ ), au voisinage d'un mode en anti-phase ( $c < 0$ ) bifurqué, pour $\Omega = 2$ . $x : u_1, y : u_2$ . . . . .  | 28 |
| 1.12 | Transition d'une condition initiale sur le mode $c = -1$ vers un des modes localisés ( $c < 0$ ) $x : u_1, y : u_2$ . En haut : instants initiaux. En bas : "stabilisation". . . . .  | 28 |
| 2.1  | Système discret comportant une non-linéarité isolée. . . . .  | 39 |
| 2.2  | Pulsations non-linéaires du système (2.53), $\bar{\omega}_i(Q_i), i = 1, 2, 3$ , en fonction de leurs amplitudes modales pour $X_1$ variant dans $[0, 10]$ (système d'équation 2.54). . . . .   | 40 |
| 2.3  | Participations $\beta_{jk}(Q_j)$ des modes en fonction des amplitudes modales (système d'équation 2.53) de haut en bas : $j = 1, 2, 3$ ; $k = 1, 2, 3$ . . . . .  | 41 |
| 2.4  | Masses modales $\bar{\mu}_1(Q_1), \bar{\mu}_2(Q_2), \bar{\mu}_3(Q_3)$ en fonction de leurs amplitudes modales pour $X_1$ dans l'intervalle $[0, 10]$ , (système d'équation 2.53). . . . .   | 42 |
| 2.5  | Système discret à plusieurs non-linéarités. . . . .   | 43 |
| 2.6  | Pulsations propres $\bar{\omega}_j(Q_j)$ du système (2.57), en fonction des amplitudes. . . . .   | 44 |
| 2.7  | Masses modales $\bar{\mu}_j(Q_j)$ du système (2.57). . . . .  | 44 |
| 2.8  | Participations modales pour le système (2.57). De haut en bas : $\beta_{1k}(Q_1), \beta_{2k}(Q_2), \beta_{3k}(Q_3), k = 1, 2, 3$ . . . . .  | 45 |



|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.9  | Poutre appuyée avec une liaison non-linéaire. . . . .   | 46 |
| 2.10 | Pulsations de la poutre en fonction de l'amplitude à l'extrémité, (paramètres :<br>$l = 625\text{ mm}$ , $E = 2,11 \cdot 10^{11}\text{ N/m}^2$ , $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$ , $\alpha = 2 \cdot 10^{12} = \text{N/m}^3$ ). . . . . | 48 |
| 2.11 | Evolution de la forme du premier mode d'une poutre appuyée avec une non-linéarité, pour plusieurs amplitudes. . . . .   | 48 |
| 2.12 | Couplage des coordonnées normales linéaires dans une réponse forcée ( $f = 0.1$ ) - :<br>$ \xi_1 $ , - - : $ \xi_2 $ , . - : $ \xi_3 $ . . . . .  | 50 |
| 2.13 | Couplage des coordonnées normales linéaires dans une réponse forcée ( $f = 0.25$ )<br>- : $ \xi_1 $ , - - : $ \xi_2 $ , . - : $ \xi_3 $ . . . . .   | 51 |
| 2.14 | Couplage des coordonnées normales non-linéaires dans une réponse forcée ( $f = 0.1$ ) ; - : $ Q_1 $ , - - : $ Q_2 $ , . - : $ Q_3 $ . . . . .   | 56 |
| 2.15 | Couplage des coordonnées normales non-linéaires dans une réponse forcée ( $f = 0.25$ ) ; - : $ Q_1 $ , - - : $ Q_2 $ , . - : $ Q_3 $ . . . . .  | 56 |
| 2.16 | Système dissipatif discret non-linéaire en excitation forcée ( $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ , $c_1 = c_2 = c_3 = .05$ , $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ , $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ ). . . . .  | 58 |
| 2.17 | Superposition des participations des modes isolés, $F = 0.15 \sin(\Omega t)$ , (- -) : participations modales, (-) : superposition. . . . .   | 59 |
| 2.18 | Méthode de superposition des modes non-linéaires isolés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.) , masse $m_1$ , $F = 0.1, 0.15$ . . . . .                                     | 60 |
| 2.19 | Méthode de superposition des modes non-linéaires isolés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.) , masse $m_2$ , $F = 0.1, 0.15$ . . . . .                                     | 61 |
| 2.20 | Méthode de superposition des modes non-linéaires isolés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.) , masse $m_3$ , $F = 0.1, 0.15$ . . . . .                                     | 62 |
| 2.21 | Méthode de superposition des modes non-linéaires couplés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.) , masse $m_1$ , $F = 0.1, 0.15$ . . . . .                                    | 63 |
| 2.22 | Méthode de superposition des modes non-linéaires couplés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.) , masse $m_2$ , $F = 0.1, 0.15$ . . . . .                                    | 64 |
| 2.23 | Méthode de superposition des modes non-linéaires couplés (-) et intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (ascendant : - -, descendant : -.) , masse $m_3$ , $F = 0.1, 0.15$ . . . . .                                    | 65 |
| 4.1  | Phénomène de saut pour l'oscillateur d'équation (4.1) avec $\alpha = 2$ , figure du haut : $ a $ (amplitude) en fonction de $\sigma$ , figure du bas : $\gamma$ (phase) en fonction de $\sigma$ . . . . .                           | 80 |
| 4.2  | Comportement modal lors d'une résonance interne d'un système forcé . . . . .  | 84 |
| 4.3  | Méthodes de continuation sur un paramètre. . . . .  | 94 |
| 5.1  | Méthode proposée pour l'interpolation de points ayant un même niveau d'amplitude pour la méthode de la raideur complexe. . . . .  | 98 |
| 5.2  | Méthode d'interpolation de points de même niveau d'amplitude pour la méthode de la raideur complexe dans le cas d'une réponse avec un saut. . . . .   | 98 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.3  | Méthode de la raideur complexe, génération des points expérimentaux "supplémentaires" (... : 3 N, - : 5 N, - - : 9 N, - : 11 N); 'o' : points mesurés, '.' : points interpolés.       | 99  |
| 5.4  | Méthode de la raideur complexe, paramètre de masse $m$ en fonction de $ U $ , (... : 3 N, - : 5 N, - - : 9 N, - : 11 N).  | 100 |
| 5.5  | Méthode de la raideur complexe, paramètre de raideur $k$ en fonction de $ U $ , (... : 3 N, - : 5 N, - - : 9 N, - : 11 N).  | 100 |
| 5.6  | Méthode de la raideur complexe, paramètre d'amortissement $c$ en fonction de $ U $ , (... : 3 N, - : 5 N, - - : 9 N, - : 11 N).   | 101 |
| 5.7  | Réponse fréquentielle expérimentale d'un système non-linéaire sur l'harmonique de l'excitation possédant deux sauts; '-o' : balayage ascendant, '-.' : balayage descendant.           | 111 |
| 5.8  | Synthèse des réponses fréquentielles non-linéaires.   | 114 |
| 5.9  | Exemple de critère d'erreur. (a) Fonction modèle; (b) Valeurs discrétisées; (c) Fonction modèle régularisé $\hat{g}(x, p)$ .  | 117 |
| 5.10 | Critère d'erreur discontinu par rapport au paramètre $p$ .  | 118 |
| 5.11 | Variations du critère d'erreur $\epsilon_N$ en fonction de $h$ pour les réponses en fréquence d'équation (5.67)   | 120 |
| 5.12 | Modification des réponses (5.67) en fonction du paramètre $h$   | 120 |
| 5.13 | Raccordement des discontinuités sur des réponses possédant un saut à l'aide de droites.   | 121 |
| 5.14 | Variations du critère d'erreur $\hat{\epsilon}_N$ en fonction de $h$ pour les réponses en fréquence d'équation (5.67) ('-' : forte pente de raccordement, '...' : pente plus faible). | 121 |
| 5.15 | Sensibilité par rapport aux variations de la fonction de pulsation $\bar{\omega}(Q)$ ; '-.' : valeur nominale, '- -' et '...' : variations.   | 122 |
| 5.16 | Sensibilité par rapport aux variations de la fonction d'amortissement $\bar{h}(Q)$ ; '-.' : valeur nominale, '- -' : valeur forte, '...' : valeur faible.                             | 123 |
| 5.17 | Sensibilité par rapport aux variations de la masse modale $\bar{\mu}(q)$ ; '-.' : valeur nominale, '- -' : valeur faible, '...' : valeur forte.                                       | 123 |
| 5.18 | Estimation des pulsations non-linéaires $\bar{\omega}_j$ en utilisant des points de réponses ayant la même amplitude.   | 125 |
| 5.19 | Poutre en flexion possédant une interface de frottement.  | 126 |
| 5.20 | Montage expérimental pour le test d'une poutre encastree comportant une non-linéarité.  | 128 |
| 5.21 | Instrumentation d'une poutre encastree avec une liaison non-linéaire  | 129 |
| 5.22 | Réponses à 2, 5 et 11 Newton : capteur 1, résonance du mode 2. '.' : points expérimentaux pour les balayages ascendant et descendant; '-.' : modèle.                                  | 130 |
| 5.23 | Réponses à 2, 5 et 11 Newton : capteur 2, résonances des modes 1 et 2. '.' : points expérimentaux; '-.' : modèle.   | 131 |
| 5.24 | Réponses au capteur 1. '.' : points expérimentaux; '-.' : modèle.   | 133 |
| 5.25 | Réponses au capteur 2. '.' : points expérimentaux; '-.' : modèle.   | 133 |
| 5.26 | Réponses au capteur 3. '.' : points expérimentaux; '-.' : modèle.   | 134 |
| 5.27 | Réponses au capteur 4. '.' : points expérimentaux; '-.' : modèle.   | 134 |
| 5.28 | Paramètres modaux identifiés pour le mode 1. Haut : $\bar{h}_1(Q_1)$ . Bas : $\bar{w}_1(Q_1)$ .   | 135 |
| 5.29 | Paramètres modaux identifiés pour le mode 2. Haut : $\bar{h}_2(Q_2)$ . Bas : $\bar{w}_2(Q_2)$ .   | 135 |
| 5.30 | Paramètres modaux identifiés pour le mode 3. Haut : $\bar{h}_3(Q_3)$ . Bas : $\bar{w}_3(Q_3)$ .   | 136 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 5.31 | Déformées modales identifiées pour les 3 premiers modes d'une poutre (interpolation entre les points de mesure).                             | 136 |
| 6.1  | Dispositif de test vibratoire sur un atterrisseur de Falcon 900.   | 139 |
| 6.2  | Schéma du dispositif d'essais et d'analyse.  | 141 |
| 6.3  | Montage expérimental pour l'excitation de direction X.   | 143 |
| 6.4  | Montage expérimental pour l'excitation de direction Y.   | 143 |
| 6.5  | Montage expérimental pour l'excitation en torsion autour de Z.   | 144 |
| 6.6  | Historiques des forces d'excitation (direction X) au cours des balayages en fréquence.   | 145 |
| 6.7  | Excitation en X, réponses fréquentielles au point 5 (forts niveaux).   | 146 |
| 6.8  | Excitation en X, réponses fréquentielles au point 5 (faibles niveaux).   | 146 |
| 6.9  | Lissage des réponses à l'excitation de direction X. Haut : amplitudes, Bas : phases.<br>Niveaux de force 150, 200, 250, 300 Newton, voie 1.  | 148 |
| 6.10 | Lissage des réponses à l'excitation de direction Z. Haut : amplitudes, Bas : phases.<br>Niveaux de force 175, 250, 350, 500 Newton, voie 25. | 149 |
| 6.11 | Lissage des réponses à l'excitation de direction Z. Haut : amplitudes, Bas : phases.<br>Niveaux de force 175, 250, 350, 500 Newton, voie 3.  | 150 |
| 6.12 | Lissage des réponses à l'excitation de direction Z. Haut : amplitudes, Bas : phases.<br>Niveaux de force 175, 250, 350, 500 Newton, voie 1.  | 151 |
| 6.13 | Fonctions modales du mode 1. Haut : $\bar{\omega}_1(Q_1)$ (Hertz), Bas : $\bar{\eta}_1(Q_1)$ .   | 152 |
| 6.14 | Fonctions modales du mode 3. Haut : $\bar{\omega}_3(Q_3)$ (Hertz), Bas : $\bar{\eta}_3(Q_3)$ .   | 152 |
| 6.15 | Test de prédiction de la réponse, excitation en deux points.   | 153 |
| 6.16 | Prédiction des réponses à l'aide du modèle identifié.  | 154 |

# Bibliographie

- [1] T.J. Anderson, B. Balachandran, and A. H. Nayfeh. Nonlinear resonances in a flexible cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 158(3) :497–515, 1992.
- [2] P.A. Atkins, G.R. Tomlinson, and J.R. Wright. Force appropriation of simple nonlinear systems. In *13th International Modal Analysis Congress*, pages 146–157, 1995.
- [3] E. Bakker and H.B. Pacejka. Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies. *Society of Automotive Studies*, SAE-P 89 00 87 :119–158, 1989.
- [4] R. Balagangadhar and J.C. Slater. On the convergence of nonlinear modes in a finite element model. In *16th International Modal Analysis Congress*, volume 2, pages 1460–1466, 1998.
- [5] S. Belizzi and R. Bouc. Analysis of multi-degree of freedom strongly non-linear mechanical systems with random input. part i : Non-linear modes and stochastic averaging. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 14 :229–244, 1999.
- [6] S. Belizzi, P. Guillemain, and R. Kronland-Martinet. Extraction par transformation de gabor des modes non-linéaires d’un système mécanique à plusieurs degrés de liberté. In *14e Congès Français de Mécanique*, page Réf.579, 1999.
- [7] N. Boivin, S. W. Shaw, and C. Pierre. Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, 182(2) :336–341, 1995.
- [8] J.P. Boudot. *Modélisation des bruits de freinage des véhicules industriels*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1995.
- [9] A. El Boukili and A. Marroco. *Arclength continuation for semiconductor equation*. Rapport de Recherche INRIA, RR-2546.
- [10] T.D. Burton. Describing function analysis of nonlinear gear shimmy. In *Winter Annual Meeting, ASME, Washington*, pages 1–9, 1981.
- [11] H.R. Busby, C. Nopporn, and R. Singh. Experimental modal analysis of non-linear systems : a feasibility study. *Journal of Sound and Vibration*, 180(3) :415–427, 1986.
- [12] J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [13] T. Caughey. Equivalent linearisation techniques. *Journal of the Acoustics Society of America*, 35 :1706–1711, 1963.
- [14] T.K. Caughey and A.F. Vakakis. A method for examining steady state solutions of forced discrete systems with strong non-linearity. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 26 :89–103, 1991.
- [15] C. F. Chang. The dynamic finite element modeling of aircraft landing system. In *DE-Vol.84-1, ASME : Design Engineering Technical Conferences*, volume 3-Part A, pages 1217–1227, 1995.

- [16] D. Chaumette. Landing gear design loads. In *71st Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel*, pages 1–200, 1991.
- [17] Y.H. Chong and M. Imregun. Modal parameter extraction methods for non-linear systems. In *Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference*, pages 728–736, 1998.
- [18] R.L. Collins. Theories on the mechanics of tires and their applications to shimmy analysis. *Journal Of Aircraft*, 8 :271–277, 1971.
- [19] A. Dutta and D. W. White. Automated solution procedures for negotiating abrupt non-linearities and branch points. *Engineering Computations*, 14(1) :31–56, 1997.
- [20] A.G. Haddow et al. Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure. *Journal of Sound and Vibration*, 97(3) :451–473, 1984.
- [21] M. Mertens et al. The complex stiffness method to detect and to identify non-linear dynamic behaviour of sdof systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3 :37–54, 1989.
- [22] R. Fillod et al. *Notice d'utilisation du programme Modan PC*, volume 1. Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat, 1989.
- [23] W. Krüger et al. Aircraft landing gear dynamics : Simulation and control. *Vehicle System Dynamics*, 28 :119–158, 1997.
- [24] D.J. Ewins. *Modal testing : Theory and Practise*. Research Studies Press LTD., 1984.
- [25] R. Fillod, J. Piranda, and G. Lallement. Identification des solutions propres en présence de non-linéarités. *Revue Française de mécanique*, 1 :3–7, 1984.
- [26] E. Foltête. *Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaire*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1998.
- [27] C. Gibert, F. Thouverez, and L. Jézequel. Non-linear modal analysis applied to an industrial structure. In *17th International Modal Analysis Congress, Orlando, Florida*, volume 2, pages 155–242, 1999.
- [28] D.T. Grossman. F-15 nose landing gear shimmy, taxi test and corrective analysis. *SAE Paper*, 801239 :1–11, 1954.
- [29] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Non-Linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vectors Fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [30] K.E. Haughton. *Similar motions of multi-degree-of-freedom vibrating systems with nonsymmetric springs*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1964.
- [31] J. He and D. J. Ewins. A simple method of interpretation for the modal analysis of nonlinear systems. In *5th International Modal Analysis Congress, Orlando, Florida*, pages 626–634, 1987.
- [32] J.F. Imbert. *Analyse des structures par éléments finis*, volume I. CEPADUES Editions, Sup'Aero, 1991.
- [33] Imregun and Visser. *A review of model updating techniques*. Technical article in shock and vibration technology, 1990. 253 p.
- [34] W.D. Iwan. A generalisation of the concept of equivalent linearisation. *International Journal on Non-linear Mechanics*, 8 :279–287, 1973.
- [35] L. Jézequel. *Synthèse de l'amortissement par sous-structuration expérimentale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1978.

- [36] L. Jézequel. *Synthèse modale : Théorie et extensions*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1985.
- [37] L. Jézequel. Extension des méthodes de synthèse modale au cas non-linéaire. *Revue Française de Mécanique*, 3 :159–172, 1987.
- [38] L. Jézequel and C.H. Lamarque. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Vibration and Acoustics*, 149(3) :429–459, 1991.
- [39] M. El Kadiri, R. Benamar, and R.G. White. The non-linear free vibration of fully clamped rectangular plates : second non-linear modes for various plates aspect ratios. *Journal of Sound and Vibration*, 228(2) :333–358, 1999.
- [40] C. H. Lamarque. *Modélisation et identification des systèmes mécaniques non-linéaires*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [41] C.H. Lamarque and O. Janin. Analyse modale de système à non linéarité irrégulière. In *14e Congrès Français de Mécanique*, page Réf.210, 1999.
- [42] A.K. Mallik, G. Chakraborty, and H. Hatwal. Normal modes and near resonance response of beams with non-linear effects. *Journal of Sound and Vibration*, 210(1) :19–36, 1998.
- [43] J. Mawhin. Oscillations en modes normaux de systèmes dynamiques nonlinéaires à plusieurs degrés de libertés. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 9-10 :540–557, 1964.
- [44] L. Meunier. *Caractérisation de systèmes non-linéaires dans le domaine fréquentiel*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1998.
- [45] R. Meyer. Nonlinear eigenvector algorithms for local optimisation in multivariate data analysis. *Linear algebra and its applications*, 264(1) :225–246, 1997.
- [46] Y. V. Mikhlin. On non-linear normal vibration modes that exist only in an intermediate amplitude range. *Journal of Sound and Vibration*, 204(1) :159–161, 1997.
- [47] W.J. Moreland. The story of shimmy. *Journal of Aeronautical Sciences*, 21 :793–808, 1954.
- [48] J.E. Mottershead and M.I. Friswell. Model updating in structural dynamics : A survey. *Journal of sound and vibration*, 167 :347–375, 1993.
- [49] A. Mousrij, R. Fillod, and J.L. Raynaud. Identification modale des structures faiblement non-linéaires par excitations harmoniques. *Revue Française de mécanique*, 1994 :43–51, 1994.
- [50] Auteurs multiples. Agard-r-800 the design, qualification and maintenance of vibration-free landing gear. In *81st Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel*, pages 1–156, 1996.
- [51] P. Muzard. *Etude du comportement dynamique linéaire et non-linéaire d'un rotor d'hélicoptère. Application au couplage rotor-fuselage*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [52] A.H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*. John Wiley, 1995.
- [53] A.H. Nayfeh, C. Chin C., and S.A. Nayfeh. On nonlinear normal modes of systems with internal resonance. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118(1) :340–345, 1996.
- [54] A.H. Nayfeh, C. Chin, and S.A. Nayfeh. Nonlinear normal modes of a cantilever beam. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117(1) :477–481, 1995.

- [55] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley, 1979.
- [56] A.H. Nayfeh and S.A. Nayfeh. On nonlinear modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 116(1) :129–136, 1994.
- [57] H.B. Pacejka and I.J.M Besselink. Magic formula tyre model with transient properties. *Vehicle System Dynamics Supplement*, 27 :234–249, 1997.
- [58] F. Pellicano and F. Mastrodi. Applicability conditions of a non-linear superposition technique. *Journal of Sound and Vibration*, 200(1) :3–14, 1997.
- [59] F. Assis Rodrigues, C. Gibert, and F. Thouverez. Chebyshev polynomials fits for efficient analysis of finite length squeeze-film damped rotors. *Journal of engineering for gas turbine and power*, in Press, 2001.
- [60] R.M. Rosenberg. Normal modes of nonlinear dual-mode systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 27 :233–268, 1960.
- [61] R.M. Rosenberg. On normal vibrations of a general class of nonlinear dual-mode systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, pages 275–283, 1961.
- [62] R.M. Rosenberg. The normal modes of nonlinear n-degree of freedom systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, pages 7–14, 1962.
- [63] R.M. Rosenberg. On nonlinear vibration of systems with many degrees of freedom. *Adv. appl. Mech.*, 9 :155–242, 1966.
- [64] R.M. Rosenberg and C.P. Atkinson. On the natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems. *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 26 :377–385, 1959.
- [65] R.M. Rosenberg and J.K. Kuo. Nonsimilar normal mode vibration of nonlinear systems having two degrees of freedom. *ASME Journal of applied Mechanics.*, pages 283–290, 1964.
- [66] H.D. Setio. *Synthèse modale des structures assemblées - Extensions aux cas non-linéaires et dissipatifs*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1990.
- [67] S. Setio. *Comportement des structures mécaniques non-linéaires soumises à des excitations stationnaires*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1991.
- [68] S. Setio, H.D. Setio, and L. Jézequel. Identification et recalage à l'aide d'un modèle modal non-linéaire. In *conférence proceedings StruCoMe*, pages 198–213, Novembre 1990.
- [69] S. Setio, H.D. Setio, and L. Jézequel. Nonlinear modal synthesis in frequency domain. In *8th International Modal Analysis Congress, Orlando, Florida*, pages 334–340, 1990.
- [70] S. Setio, H.D. Setio, and L. Jézequel. A method of non-linear modal identification from frequency response tests. *Journal of Sound and Vibration*, 158(3) :497–515, 1992.
- [71] S. W. Shaw and C. Pierre. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1) :170–173, 1991.
- [72] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1) :85–124, 1993.
- [73] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3) :319–347, 1994.
- [74] M. Simon and G. R. Tomlinson. Use of hilbert transform in modal analysis of linear and non-linear structures. *Journal of Sound and Vibration*, 96(4) :421–436, 1984.

- [75] J.C. Slater. A numerical method for determining non linear normal modes. *Nonlinear dynamics*, 10 :19–30, 1996.
- [76] Numerical Recipe Software. *Numerical recipes in C : The art of scientific computing*. Cambridge University Press Programs, 1992.
- [77] H. W. Song and W. L. Wang. Non-linear system identification using frequency domain measurement data. In *16th Internationnal Modal Analysis Congress*, volume 2, pages 1012–1016, 1997.
- [78] P.T.D. Spanos and W.D. Iwan. On the existence and uniqueness of solutions generated by equivalent linearisation. *International Journal on Non-linear Mechanics*, 13 :71–78, 1978.
- [79] E. Sperling. Shimmy problems of landing gears caused by elastic deformation of tyres. *ICAS and AIAA Papers*, ICAS-86-5.9.2 :1372–1382, 1986.
- [80] W. Szemplińska-Stupnika. On normal coordinates in an analysis of steady-state forced vibrations of a nonlinear multiple-degree-of-freedom system. *Archives of mechanics*, 21(5) :603–621, 1969.
- [81] W. Szemplińska-Stupnika. The modified single mode method in the investigation of the resonant vibration of non-linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 104(2) :475–489, 1979.
- [82] W. Szemplińska-Stupnika. *The behaviour of nonlinear vibrating systems*, volume II : Advanced Concepts and Application to single-degree-of-freedom systems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990. 330 p.
- [83] W. Szemplińska-Stupnika. *The behaviour of nonlinear vibrating systems*, volume I : Fundamental concepts and methods : Application to single-degree-of-freedom systems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990. 253 p.
- [84] I. Tawfiq and T. Vinh. Sur diverses méthodes de calcul des fonctions de transfer des structures non-linéaire (étude critique). *Mécanique Industrielle et Matériaux*, 48(3) :157–161, 1995.
- [85] F. Thouverez. *Identification temporelle des structures non-linéaires*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [86] A. F. Vakakis and D. J. Ewins. Effects of weak non-linearities on modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8 :175–198, 1994.
- [87] A.F. Vakakis and T.K. Caughey. A theorem on the exact nonsimilar steady-state motions of a nonlinear oscillator. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 59 :418–424, 1994.
- [88] R. Van Der Valk and H.B. Pacejka. An analysis of a civil aircraft main gear shimmy failure. *Vehicle System Dynamics*, 22 :119–158, 1993.
- [89] M. Xianghong and A. F. Vakakis. Nonlinear transient localisation and low dimensional models of a flexible system with a clearance. In *ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, Nevada*, pages 1–9, 1999.
- [90] L.D. Zadovney. Can the modal analyst afford to be ignorant of nonlinear vibration phenomena? In *5th Internationnal Modal Analysis Congress, Orlando, Florida*, pages 154–159, 1987.



## **RESUME :**

L'introduction de l'analyse modale dans le cadre de structures mécaniques non-linéaires semble paradoxale, car le domaine d'application des nombreuses méthodes regroupées sous ce terme, est limité aux systèmes qui peuvent être considérés comme linéaires. Cependant, l'obtention de bases modales par ces méthodes très répandues, est d'une très grande utilité dans le domaine de l'ingénierie à plusieurs égards : caractérisation dynamique des structures, prédiction des réponses, sous-structuration, recalage de modèles... La notion de mode de vibration a été étendue, dans les années 1960, à une certaine classe de systèmes non-linéaires. Les modes des systèmes linéaires sont alors un cas particulier des modes normaux non-linéaires définis comme des mouvements possédant des propriétés particulières et dont l'existence a été démontrée. Depuis, de nombreux développements, le plus souvent analytiques, ont été effectués dans l'étude des systèmes dynamiques à l'aide des modes normaux non-linéaires. Les structures réelles exhibent souvent des comportements non-linéaires et peuvent donc poser certains problèmes de modélisation et d'analyse. Il nous a semblé opportun de rechercher l'intérêt, les possibilités d'application et l'efficacité de méthodes basées sur des notions modales étendues au cas non-linéaire dans un contexte expérimental et industriel. Dans le cadre de ce travail, des méthodes de calcul des modes non-linéaires sont évaluées sur des modèles numériques de structures. Des techniques d'identification des modes non-linéaires dans le domaine fréquentiel sont proposées, appliquées à des cas expérimentaux puis industriels, sur lesquels auront été effectués des tests vibratoires adéquats. Nous montrons quelques possibilités dans le domaine de l'analyse expérimentale des structures vibrantes basée sur des notions modales non-linéaires.

## **TITLE : Experimental non-linear modal analysis**

Introducing modal analysis in the context of non-linear mechanical structures may appear like a paradox. That because the several methods which can be put behind this term apply only in the case where the system under study can be considered like a linear one. Gathering "modal bases" by means of these widely spread methods is very useful in the domain of engineering for many reasons : dynamic characterisation of structures, response prediction, sub-structuring, model updating ... In the meantime, the extension of the vibration mode concept, developed in the 60's, to a particular class of non-linear systems is less known. Linear systems' modes appear then as a particular case of non-linear modes which are defined as motions with some particularities and whose existence have been verified. More recently, several advancement, mostly analytical, have been carried out in the study of dynamical systems using non-linear normal modes. Actual structures often exhibit some non-linear behavior that may lead to potential difficulties in modeling and analysis. So, it seems important, to look for the usefulness, the applicability and the efficiency of methods based on extended modal concepts in an experimental and industrial context. In this work, some non-linear normal mode computing technics are shown and applied to experimental, and afterwards to industrial cases, after some appropriate vibratory tests. We show some possibilities and some limits in the experimental analysis of vibrating structures using non-linear modal concepts.