



**HAL**  
open science

# Le morphisme déterminant pour les espaces de modules de groupes $p$ -divisibles

Miaofen Chen

► **To cite this version:**

Miaofen Chen. Le morphisme déterminant pour les espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112058 . tel-00594110

**HAL Id: tel-00594110**

**<https://theses.hal.science/tel-00594110>**

Submitted on 18 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD  
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

## THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Miaofen CHEN

Le morphisme déterminant  
pour les espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles

Soutenue le 11 mai 2011 devant la commission d'examen :

M.	Christophe BREUIL	Examineur
M.	Jean-François DAT	Examineur
M.	Laurent FARGUES	Directeur de thèse
M.	Alain GENESTIER	Rapporteur
Mme.	Eva VIEHMANN	Examinatrice
M.	Jean-Pierre WINTENBERGER	Président

Rapporteur non présent à la soutenance :

M. Matthias STRAUCH

## Le morphisme déterminant pour les espaces de modules de groupes $p$ -divisibles

**Résumé.** Soit  $\check{\mathcal{M}}$  un espace de modules de groupes  $p$ -divisibles introduit par Rapoport et Zink. Supposons que cet espace  $\check{\mathcal{M}}$  soit non-ramifié de type EL ou PEL unitaire ou symplectique. Soit  $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$  la fibre générique de Berthelot de  $\check{\mathcal{M}}$ . C'est un espace rigide analytique au-dessus duquel il existe une tour de revêtements étales finis  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  qui classifient les structures de niveau. On définit un morphisme déterminant  $\det_K$  de la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  vers une tour d'espaces rigides analytiques étales de dimension 0 associée au cocentre du groupe réductif relié à cet espace. C'est un analogue local en des places non-archimédiennes du morphisme déterminant pour les variétés de Shimura défini par Deligne. Comme pour les variétés de Shimura, on montre que les fibres géométriques du morphisme déterminant  $\det_K$  sont les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$ . On définit aussi les morphismes puissances extérieures qui généralisent le morphisme déterminant sur la tour d'espaces rigides analytiques associée à un espace de Lubin-Tate.

**Mots clefs :** composante connexe géométrique, espace analytique rigide, espace de Rapoport-Zink, groupe  $p$ -divisible, morphisme déterminant

---

## The determinant morphism for the moduli spaces of $p$ -divisible groups

**Abstract.** Let  $\check{\mathcal{M}}$  be a moduli space of  $p$ -divisible groups introduced by Rapoport and Zink. Assume that  $\check{\mathcal{M}}$  is unramified of EL or PEL type which is unitary or symplectic. Let  $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$  be the generic fiber of Berthelot of  $\check{\mathcal{M}}$ . This is a rigid analytic space over which there exist a tower of finite étale coverings  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  classifying the level structures. We define a determinant morphism  $\det_K$  from the tower  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  to a tower of rigid analytic spaces of dimension 0 associated to the cocenter of the reductive group related to the space  $\check{\mathcal{M}}$ . This is a local analogue on the nonarchimedean places of the determinant morphism for Shimura varieties defined by Deligne. As for Shimura varieties, we prove that the geometric fibers of the determinant morphism  $\det_K$  are the geometrically connected components of  $\check{\mathcal{M}}_K$ . We define also the exterior power morphisms which generalize the determinant morphism on the tower of rigid analytic spaces associated to a Lubin-Tate space.

**Keywords:** determinant morphism, geometrically connected component,  $p$ -divisible group, Rapoport-Zink space, rigid analytic space

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Laurent Fargues, sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour. C'est lui qui m'a proposé ce sujet de thèse si intéressant. C'est lui qui, avec beaucoup de patience, m'a aidée à entrer dans ce domaine tout en me laissant une grande liberté. C'est lui qui m'a partagé ses connaissances, ses idées avec générosité. C'est lui qui a répondu à toutes mes questions et qui a corrigé mes nombreuses erreurs. C'est lui aussi qui a soigneusement lu la première version -bien mal présentée- de ma thèse et qui l'a beaucoup corrigée afin de la rendre plus agréable à lire. C'est lui enfin qui m'a appris comment donner un exposé. Il a toujours été là pour m'aider. C'est ce qui m'a donné cette confiance qui m'a permis de continuer chaque fois j'ai senti ma faiblesse. Lorsque j'ai pris la décision d'aller en France pour poursuivre mes études il y a six ans, je ne savais pas que j'entrerais dans un domaine si dur pour moi. J'avoue avoir regretté quelquefois cette décision. Mais aujourd'hui, je me suis rendu compte que j'ai rencontré le meilleur directeur de thèse que je pouvais espérer et je comprends la chance que j'ai eue de pouvoir travailler avec lui durant toutes ces années.

Je remercie sincèrement Alain Genestier et Matthias Strauch d'avoir accepté la tâche de rapporter cette thèse. Je remercie également Christophe Breuil, Jean-François Dat, Alain Genestier, Eva Viehmann, Jean-Pierre Wintenberger d'avoir accepté de participer au jury de ma soutenance.

Je voudrais remercier aussi Alain Genestier, Matthias Strauch, Eva Viehmann pour leurs remarques sur la version précédente de cette thèse, et pour avoir si aimablement répondu à mes questions. Alain Genestier m'a signalé une lacune dans la démonstration de la surjectivité de la monodromie géométrique. Eva Viehmann m'a signalé l'absence d'une hypothèse pour la conjecture.

Mes remerciement vont également à Linsheng Yin, mon directeur de master à l'université Tsinghua. C'était lui qui, dès le début, m'a beaucoup encouragé à me mettre dans la route de recherche mathématique.

C'est une coopération entre l'université Paris-Sud XI et l'université Tsinghua qui m'a donné l'occasion de venir en France et de poursuivre mes études à l'université Paris-Sud XI dans un laboratoire de très haut niveau. Je voudrais remercier tous les gens qui y ont participé, surtout Pierre Colmez, Keqin Feng, Jean-Marc Fontaine, David Harari, Luc Illusie, Michel Raynaud, Zhiying Wen...

Je suis très reconnaissante à Jean-Marc Fontaine et Luc Illusie, Xiaonan Ma qui m'ont beaucoup aidé après mon arrivée en France. Je profite aussi d'un groupe de travail organisé par Luc Illusie et Alexis Bouthier sur le sujet " introduction aux théorèmes de comparaison  $p$ -adiques". Avec Luc Illusie j'ai appris beaucoup de choses en préparant mon exposé de ce groupe de travail.

Mes plus chaleureux remerciements s'adressent à tous les membres du laboratoire de mathématiques de l'université Paris-Sud XI, surtout tous les professeurs qui m'ont enseigné ainsi que ceux qui m'ont donnée beaucoup d'aide durant toutes ces années, dont David Harari, Valérie Lavigne, Pierre Pansu, Marie-Christine Myoupo...

Je voudrais remercier tous mes collègues, surtout Nalini Anantharaman, Bruno Vallet et Pascal Auscher et les autres avec qui j'ai enseigné.

Je voudrais remercier Jilong Tong. Il m'a beaucoup aidée depuis mes années universitaires en chine. Durant toutes ces années, il a gentiment répondu à toutes mes questions de géométrie algébrique. Je garde un très bon souvenir de la vie que nous avons passée ensemble en tant que colocataires aux Baconnets. Je voudrais aussi remercier Yongquan Hu avec qui je suis partie pour la France. C'est lui qui a rendu ma première année en France moins difficile.

Je voudrais remercier Richard Aoun. Il n'a jamais hésité à m'encourager et m'a appris le français quand j'étais encore bien timide, parlant un piètre français et cherchant autant que possible à éviter les rencontres au bureau. Je voudrais remercier Nicolas de Saxcé, merci pour la culture française qu'il m'a partagée, les Fables de La Fontaine qu'il m'a racontées et les petits exercices mathématiques que nous avons faits ensemble. Un grand merci aussi à Hatem Hajri, Ramla Abdellatif, Shweta Sharma pour l'amitié qu'ils m'ont partagée.

Je voudrais remercier aussi mes amis chinois qui m'ont accompagnée toutes ces années à l'étranger, surtout les amis qui m'ont accompagnée les premières années en France : Ke Chen, Yongquan Hu, Zhi Jiang, Xiangyu Liang, Tong Liu, Peng Shan, Yichao Tian, Jilong Tong, Shanwen Wang, Weizhe Zheng, ainsi que les amis moins âgés : Li Chen, Zongbin Chen, Yong Hu, Yongqi Liang, Xu Shen,

Shenghao Sun, Zhe Sun, Shun Tang, Chunhui Wang, Haoran Wang, Han Wu, Hao Wu, Wenqing Xu...

J'exprime toute ma gratitude du fond du cœur à mes parents pour leur soutiens constants et leur soins des plus attentifs. Enfin, je voudrais adresser à mon époux, Guodong Zhou, mes sincères remerciements pour son encouragement, sa compréhension, sa patience et son aide, pour ses centaines de heures passées dans les trains entre Paris et Cologne, Paderborn, Bielefeld, Lausanne. Le fait de l'avoir rencontré, en France, est la meilleure chose que j'ai vécue.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Un théorème de comparaison pour les groupes <math>p</math>-divisibles</b>	<b>11</b>
1.1	Rappels sur les anneaux de périodes de Fontaine . . . . .	11
1.2	$F$ -cristaux filtrés associés aux groupes $p$ -divisibles . . . . .	16
1.3	Théorème de comparaison . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Le morphisme déterminant</b>	<b>35</b>
2.1	Espaces de Rapoport-Zink de type E.L. et P.E.L. et la tour d'espaces rigides . . . . .	35
2.2	Espaces de Rapoport-Zink associés aux tores . . . . .	46
2.3	Le morphisme déterminant pour le type E.L. . . . .	52
2.4	Le morphisme déterminant pour le type P.E.L. . . . .	75
2.5	Interprétation en termes de systèmes locaux sur l'espace des périodes . . . . .	86
<b>3</b>	<b>Morphismes puissances extérieures sur les espaces de Lubin-Tate</b>	<b>93</b>
3.1	Énoncé du théorème . . . . .	93
3.2	La théorie des displays . . . . .	97
3.3	Construction du morphisme puissances extérieures . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Le groupe de Mumford-Tate <math>p</math>-adique générique</b>	<b>113</b>
4.1	Introduction . . . . .	113
4.2	Existence de points génériques sur $\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$ . . . . .	115
4.3	Le groupe de Mumford-Tate $p$ -adique . . . . .	118
4.4	Filtrations génériques de la catégorie des représentations d'un groupe réductif . . . . .	127
4.5	Le groupe de Mumford-Tate $p$ -adique générique . . . . .	132
<b>5</b>	<b>Composantes connexes géométriques et applications</b>	<b>137</b>
5.1	Composantes connexes géométriques des tours de Rapoport-Zink . . . . .	137
5.2	Applications cohomologiques . . . . .	143
<b>A</b>	<b>Comparaison d'anneaux <math>B_{cris}</math> et <math>\hat{B}_{cris}</math></b>	<b>147</b>
	Bibliographie . . . . .	153



# Introduction

## Motivation générale

Soient  $N$  un entier strictement positif et  $X(N)$  la courbe modulaire sur  $\mathbb{Q}$  associée au groupe de congruence

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid b \equiv c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}.$$

Fixons une racine primitive  $N$ -ième de l'unité  $\zeta_N \in \mathbb{C}$ . Il est alors bien connu qu'on a un isomorphisme  $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)|\mathbb{Q})$ -équivariant :

$$\pi_0(X(N)_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \zeta_N^{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}, \quad (1)$$

où  $\zeta_N^{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}$  désigne l'ensemble des racines primitives  $N$ -ièmes de l'unité. Soit  $(E, \eta) \in X(N)(\mathbb{C})$  avec  $E$  une courbe elliptique et  $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\sim} E[N]$ . Posons  $e_1 := \eta((1, 0))$  et  $e_2 := \eta((0, 1))$ . Alors l'image de  $(E, \eta)$  via (1) est  $\langle e_1, e_2 \rangle$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E[N] \times E[N] \rightarrow \mu_N(\mathbb{C})$  est l'accouplement de Weil.

Plus généralement, soient  $G$  un groupe réductif défini sur  $\mathbb{Q}$  et  $(G, X)$  une donnée de Shimura. Notons  $E$  le corps réflex de cette donnée. Soit  $(\mathrm{Sh}_K(G, X))_K$  la tour de variétés de Shimura associée. Il s'agit d'une tour de variétés algébriques lisses sur  $E$  indexées par des sous-groupes compacts ouverts  $K$  de  $G(\mathbb{A}_f)$  suffisamment petits. Deligne montre dans [Del79] que si le groupe dérivé  $G^{\mathrm{der}}$  de  $G$  est simplement connexe, on a une bijection

$$\pi_0(\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q})^\dagger \backslash D(\mathbb{A}_f) / \det(K), \quad (2)$$

où  $D = G/G^{\mathrm{der}}$ ,  $\det : G \rightarrow D$  est la projection, et  $D(\mathbb{Q})^\dagger := D(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Im}(Z(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{R}))$  avec  $Z$  le centre de  $G$ . Cet isomorphisme est compatible à l'action par correspondances de Hecke. De plus, l'ensemble des composantes connexes géométriques  $\pi_0(\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}})$  est muni d'une action de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ . Deligne décrit alors l'action associée sur le membre de droite de (2). Cette action est donnée par une loi de réciprocité associée au tore  $D$  faisant intervenir le corps de classe global de  $E$  et la norme réflex associée au cocaractère composé  $\det \circ \mu \in X_*(D)$  où  $\mu$  est le cocaractère de Hodge associé à la donnée de Shimura.

Lorsque la variété de Shimura est un espace de modules de variétés abéliennes, l'application déterminant précédente (2) est construite en regardant l'image dans le cocentre  $D$  de la monodromie des variétés abéliennes que l'on paramètre, construction qui généralise celle rappelée précédemment pour les courbes modulaires.

La cohomologie des variétés de Shimura réalise des cas particuliers de correspondances de Langlands globales entre représentations automorphes de  $G$  et représentations  $\ell$ -adiques de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ . La description précédente des composantes connexes géométriques se traduit de manière cohomologique : le  $H^0$  de la tour de variétés de Shimura réalise des correspondances de Langlands entre représentations automorphes de dimension 1 de  $G$ , des caractères de Hecke de  $D$  composés avec la projection  $\det$ , et des caractères de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ . Les deux sont reliés via la théorie du corps de classe de  $E$ .

Dans cette thèse, nous démontrons un analogue local en des places non-archimédiennes de cet isomorphisme. Plus précisément, nous décrivons les composantes connexes géométriques munies de leur action de Galois de certains espaces de modules  $p$ -adiques introduits par Rapoport et Zink. Traduit de façon cohomologique cela exprime le fait que le  $H^0$  de ces tours d'espaces de modules  $p$ -adiques réalise des correspondances de Langlands locales provenant de la théorie du corps de classe locale via le cocentre du groupe réductif associé à notre espace.

## La tour d'espaces de Rapoport-Zink

### Espaces de modules de groupes $p$ -divisibles

Michael Rapoport et Thomas Zink ont défini dans [RZ96] des espaces qui sont des analogues locaux en un premier  $p$  des variétés de Shimura. Ce sont des espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles généralisant ceux de Lubin-Tate et de Drinfeld. Rapoport et Zink ont démontré que ces espaces permettent d'uniformiser  $p$ -adiquement certains ouverts rigides analytiques des variétés de Shimura de type PEL. Par exemple, les espaces de Lubin-Tate de hauteur 2 correspondent aux complétés formelles des courbes modulaires en un point supersingulier.

On se restreint dans cette thèse aux espaces de Rapoport-Zink non ramifiés de type E.L et P.E.L unitaires ou symplectiques. Dans le cas le plus simple, c'est-à-dire pour un espace de Rapoport-Zink sans structure additionnelle associé à un groupe linéaire sur  $\mathbb{Q}_p$ , l'espace de modules  $\check{\mathcal{M}}$  est défini comme un foncteur

$$\check{\mathcal{M}} : \text{Nil}_W \rightarrow \mathcal{E}ns$$

où  $W = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$  est l'anneau des vecteurs de Witt et  $\text{Nil}_W$  est la catégorie des  $\text{Spec}(W)$ -schémas  $S$  tels que  $p$  soit localement nilpotent sur  $S$ . Un groupe  $p$ -divisible  $\mathbb{X}$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  étant fixé, le foncteur  $\check{\mathcal{M}}$  associe à  $S \in \text{Nil}_W$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des couples  $(X, \rho)$  où  $X$  est un groupe  $p$ -divisible sur  $S$  et  $\rho : \mathbb{X} \times_{\text{Spec} \overline{\mathbb{F}}_p} \overline{S} \rightarrow X \times_S \overline{S}$  est une quasi-isogénie avec  $\overline{S} = S \times_{\text{Spec}(W)} \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ . Pour la définition générale, on renvoie aux définitions 2.1.4 et 2.1.4.3.

En général, un espace de Rapoport-Zink non-ramifié  $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  de type EL ou PEL symplectique ou unitaire est défini à partir d'une donnée de Rapoport-Zink  $(G, b, \mu)$ . Ce triplet  $(G, b, \mu)$  vérifie certaines conditions :

- $G$  est un groupe réductif non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$  qui est soit une restriction de scalaires d'un groupe linéaire, soit un groupe de similitudes unitaires ou symplectiques,
- $b$  est un élément de  $G(W(\overline{\mathbb{F}}_p)_{\mathbb{Q}})$  dont on note  $\bar{b}$  la classe de  $\sigma$ -conjugaison,
- $\mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$  est un cocaractère minuscule de  $G$  dont on note  $\bar{\mu}$  la classe de conjugaison.

L'espace  $\check{\mathcal{M}}$  ne dépend que de  $\bar{b}$  et  $\bar{\mu}$ . L'élément  $\bar{b}$  fixe la classe d'isomorphisme du module de Dieudonné covariant du groupe  $p$ -divisible avec  $G$ -structure que l'on déforme tandis que  $\bar{\mu}$  fixe le polygone de Hodge arithmétique avec structures additionnelles. On demande de plus dans les données précédentes que  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ , l'ensemble de Kottwitz (cf. [Kot97] ou 2.1.1.2), cela afin que nos espaces de modules soient non-vides et que le module de Tate rationnel de la déformation universelle soit muni d'une  $G$ -structure (trivialité du torseur des périodes). Notons  $E$  le corps de définition de  $\bar{\mu}$ , le corps reflex, et  $\check{E}$  le complété de l'extension maximale non-ramifiée de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ . L'espace  $\check{\mathcal{M}}$  est défini sur  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$  et est muni d'une donnée de descente de  $\check{E}$  à  $E$ . Bien que non effective, cette donnée de descente est suffisante pour définir une action de Frobenius sur la cohomologie de ces espaces.

Rapoport et Zink montrent que  $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  est un schéma formel localement formellement de type fini sur  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ . Il est muni d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p)$ , le  $\sigma$ -centralisateur de  $b$ , où  $J$  est une forme intérieure d'un sous groupe de Levi de  $G$ . Il s'agit du groupe des automorphismes par quasi-isogénies du groupe  $p$ -divisible avec structures additionnelles que l'on déforme.

Fixons un modèle entier réductif de  $G$  et soit  $G(\mathbb{Z}_p)$  le sous-groupe compact hyperspécial associé dans  $G(\mathbb{Q}_p)$ . Soit  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$  la fibre générique de  $\check{\mathcal{M}}$ . C'est un  $\check{E}$ -espace rigide au dessus duquel il existe une tour d'espaces rigides analytiques  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ ,  $K$  parcourant les sous-groupes ouverts de  $G(\mathbb{Z}_p)$ . Cette tour forme un revêtement pro-galoisien de  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$  de groupe  $G(\mathbb{Z}_p)$ . Le groupe  $J(\mathbb{Q}_p)$  agit à

gauche sur chaque  $\check{\mathcal{M}}_K$  pour tout  $K$ . De plus, la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  est muni d'une action à droite de  $G(\mathbb{Q}_p)$  par correspondances de Hecke, action étendant celle de  $G(\mathbb{Z}_p)$ . Cette action commute à celle de  $J(\mathbb{Q}_p)$ .

### Espaces de Rapoport-Zink toriques

Soient  $(G, b, \mu)$  comme précédemment,  $D = G/G^{der}$  l'abélianisé de  $G$ , qui est un tore  $p$ -adique non-ramifié, et  $\det : G \rightarrow D$  la projection. Si  $\bar{x}$  est un point géométrique de  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$ , notons  $\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{rig}, \bar{x})$  le groupe fondamental profini classifiant les revêtements étales finis de la composante connexe de  $\bar{x}$  dans  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$ . Le module de Tate de la déformation universelle sur  $\check{\mathcal{M}}$  spécialisée en  $\bar{x}$  munie de sa  $G$ -structure définit une représentation de monodromie

$$\rho_{\bar{x}} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{rig}, \bar{x}) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

bien définie à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près. La construction du morphisme déterminant consiste à expliciter la représentation de monodromie composée

$$\rho_{\bar{x}} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{rig}, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Q}_p).$$

Néanmoins, cette représentation de monodromie n'est pas en général associée à un groupe  $p$ -divisible. Lorsqu'on regarde des espaces sans structures additionnelles, c'est-à-dire que  $G$  est un groupe linéaire sur  $\mathbb{Q}_p$ , cela résulte de ce qu'en général le déterminant d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate 0 ou 1 a un poids de Hodge-Tate qui n'est pas nécessairement 0 ou 1. Ainsi, si  $K|W(\overline{\mathbb{F}}_p)_{\mathbb{Q}}$  est une extension de degré fini et  $H$  est un groupe  $p$ -divisible de dimension  $d$ , alors  $\det V_p(H) \simeq \mathbb{Q}_p(d)$  qui n'est pas associé à un groupe  $p$ -divisible si  $d \neq 0, 1$ .

Du point de vue de la donnée de Rapoport-Zink  $(G, b, \mu)$  le phénomène précédent se traduit de la façon suivante. À cause de la normalisation du Frobenius et de la filtration de Hodge des modules de Dieudonné covariants, pour définir un morphisme déterminant, on utilise plutôt dans la suite la donnée  $(p^{-1}b, \tilde{\mu})$ , où  $\tilde{\mu} := \nu_G \cdot \mu$  avec  $\nu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow G$  le cocaractère central  $z \mapsto z^{-1} \text{Id}$  (si  $(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K)$  est le module de Dieudonné filtré covariant associé à un groupe  $p$ -divisible  $H$  sur  $\mathcal{O}_K$ ,  $K|\mathbb{Q}_p$  étant de valuation discrète à corps résiduel parfait, et  $V_{cris}$  est le foncteur de Fontaine covariant, alors  $V_p(H) = V_{cris}(N, p^{-1}\varphi, \text{Fil}^{\bullet-1} N_K)$ ). La donnée  $(G, p^{-1}b, \tilde{\mu})$  induit une nouvelle donnée  $(D, \det(p^{-1}b), \det \circ \tilde{\mu})$ . Cette donnée n'est pas en général associée à une donnée de Rapoport-Zink de type groupe  $p$ -divisible telle que définie dans [RZ96].

Cependant, étant donné un couple  $(T, \mu)$  où  $T$  est un tore défini sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mu \in X_*(T)$ , on peut définir de façon ad-hoc une tour d'espaces de Rapoport-Zink

$$(\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K)_{K \subset T(\mathbb{Q}_p)}.$$

Soit  $E(T, \mu)$  le corps de définition de  $\mu$  et  $\check{E}(T, \mu)$  le complété de son extension maximale non-ramifiée. Il s'agit alors d'une tour de  $\check{E}(T, \mu)$ -espaces rigides étales de dimension 0, c'est à dire une union disjointe de spectres d'extensions de degré fini de  $\check{E}(T, \mu)$ . Elle est munie d'une action de  $T(\mathbb{Q}_p) \times T(\mathbb{Q}_p)$  (dans ce contexte abélien, les groupes  $J$  et  $G$  coïncident). On a de plus

$$\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(\check{E}(T, \mu)) = T(\mathbb{Q}_p)/K$$

où l'action de  $T(\mathbb{Q}_p) \times T(\mathbb{Q}_p)$  est donnée par translations et celle de l'inertie de  $E(T, \mu)$  par la théorie du corps de classe local via une norme reflex associée à  $\mu$ . On peut également définir une donnée de descente de  $\check{E}(T, \mu)$  à  $E(T, \mu)$  sur ces espaces. On renvoie à la section 2.2 pour plus de détails.

Il résulte de la discussion précédente que l'on peut en particulier considérer la tour  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante d'espaces rigides de dimension 0

$$(\check{\mathcal{M}}_K(D, \det \tilde{\mu}))_{K \subset T(\mathbb{Q}_p)}.$$

## Morphisme déterminant

### Énoncé du théorème

Le premier résultat de cette thèse est l'existence d'un morphisme déterminant entre des tours d'espaces rigides.

**Théorème (2.3.4.1, 2.4.2.1 et 2.4.3.3).** *Via le morphisme  $(\det, \det) : J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$  il existe un morphisme  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours d'espaces rigides*

$$(\check{\mathcal{M}}_K(G, b, \mu))_K \longrightarrow (\check{\mathcal{M}}_{\det K}(D, \det \tilde{\mu}))_K$$

où  $K$  parcourt les sous-groupes ouverts de  $G(\mathbb{Z}_p)$ . De plus, ce morphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

Restreignons-nous maintenant pour simplifier les notations au cas de type EL, c'est à dire  $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_n$  où  $F|\mathbb{Q}_p$  est non-ramifiée. La donnée de la classe de conjugaison  $\bar{\mu}$  est alors équivalente à la donnée d'un uplet d'entiers  $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in I_F}$  où  $I_F$  désigne les plongements de  $F$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  et  $p_\tau + q_\tau = n$ . Soit  $\mathcal{LT}_\tau$  un groupe de Lubin-Tate sur  $\mathcal{O}_F$  associé à  $F|\mathbb{Q}_p$ . Notons  $T_p(\mathcal{LT}_\tau)$  son module de Tate que l'on voit comme un  $\mathcal{O}_F$ -système local  $p$ -adique étale de rang 1 sur  $\text{Sp}(\mathcal{O}_F)$ . Tout plongement  $\tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$  est à valeurs dans  $\check{E}$  (le corps  $F$  est un corps abstrait tandis que  $E$  est par définition plongé dans une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  de  $\mathbb{Q}_p$  que l'on a fixée depuis le début). Posons alors

$$\mathcal{L}_{\bar{\mu}} = \bigotimes_{\tau \in I_F} \tau^* T_p(\mathcal{LT}_\tau)^{\otimes p_\tau}.$$

C'est un  $\mathcal{O}_F$ -système local  $p$ -adique étale de rang 1 sur  $\text{Sp}(\check{E})$ . La représentation galoisienne associée de l'inertie de  $E$ ,  $\text{Gal}(\check{E}|\check{E})$ , est le caractère

$$\chi_{\det \bar{\mu}} = \prod_{\tau} \chi_{\mathcal{LT}_\tau}^{p_\tau} : \text{Gal}(\check{E}|\check{E}) \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$$

où  $\chi_{\mathcal{LT}_\tau}$  est le caractère de Lubin-Tate associé au plongement  $\tau$ . Par exemple, lorsque  $F = \mathbb{Q}_p$ ,  $\mathcal{L}_{\bar{\mu}} = \mathbb{Z}_p(d)$  où  $d$  est la dimension du groupe  $p$ -divisible que l'on déforme et  $\chi_{\det \bar{\mu}}$  est la puissance  $d$ -ième du caractère cyclotomique.

Le théorème précédent est alors une conséquence du théorème plus précis qui suit.

**Théorème (2.3.4.2).** *Notons  $f_K : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \text{Sp} \check{E}$  le morphisme structural. Soit  $\mathcal{T}_K$  le  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur  $\check{\mathcal{M}}_K$  qui est le module de Tate de la déformation universelle.*

*Pour tout  $K$ , il existe un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -systèmes locaux étales*

$$u_K : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. Si  $K' \subset K$ , via le morphisme de changement de niveau  $\pi_{K',K} : \check{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$  et l'identification canonique  $\pi_{K',K}^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_{K'}$  on a

$$\pi_{K',K}^* u_K = u_{K'}.$$

2. Si  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ , qui définit l'automorphisme  $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_K$ , via l'identification canonique  $g^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_K$ , l'isomorphisme

$$\det \mathcal{T}_K = g^* \det \mathcal{T}_K \xrightarrow{g^* u_K} g^* f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à

$$(p^{-v_p(\det g)} \det(g)) u_K.$$

3. Si  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  est tel que  $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$  et  $\Lambda_0 \subset g.\Lambda_0$ , si  $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$ , via le morphisme canonique

$$\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg},$$

le morphisme composé

$$\det \mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \det \mathcal{T}_{g^{-1}Kg} \xrightarrow{g^* u_{g^{-1}Kg}} g^* f_{g^{-1}Kg}^* \mathcal{L}_{\check{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\check{\mu}}$$

est égal à

$$p^{-v_p(\det g)} u_K.$$

### Un théorème de comparaison

Pour montrer le théorème 2.3.4.2, l'outil principal est un théorème de comparaison relatif entre module de Tate et module de Dieudonné filtré des groupes  $p$ -divisibles. Un tel théorème est valable sur des bases très générales. Il s'agit de l'objet du chapitre I de cette thèse. Plus précisément, soit  $R$  une  $\mathbb{Z}_p$ -algèbre noethérienne,  $p$ -adiquement complète, normale, intègre et sans  $p$ -torsion. Fixons une clôture algébrique de  $\text{Frac}(R)$ . Soit  $\bar{R}$  la fermeture intégrale de  $R$  dans l'extension galoisienne maximale de  $\text{Frac}(R)$  étale au-dessus de  $R[1/p]$ . Posons  $S = \varprojlim_{\mathbb{N}} \bar{R}/p\bar{R}$  où les applications de transition sont le Frobenius. Soit  $W(S)$  l'anneau des vecteurs de Witt. On a une application  $\theta : W(S) \rightarrow \widehat{\bar{R}}$  de Fontaine, où  $\widehat{\bar{R}}$  est le complété  $p$ -adique de  $\bar{R}$ . Soit  $A_{\text{cris}}(\bar{R})$  l'anneau de Fontaine qui est le complété de l'enveloppe à puissances divisées de  $(W(S), \ker(\theta))$  par rapport à sa filtration à puissances divisées. Il est muni d'un Frobenius cristallin  $\varphi$ , d'une filtration et d'une action de

$$\Gamma := \text{Gal}(\widehat{\bar{R}}/R) = \pi_1(\text{Spec}(R[1/p]), \bar{\eta})$$

où  $\bar{\eta}$  est le point géométrique au dessus du point générique associé au choix de la clôture algébrique de  $\text{Frac}(R)$ . De plus l'application  $\theta$  s'étend en une application surjective :

$$\theta : A_{\text{cris}}(\bar{R}) \rightarrow \widehat{\bar{R}}.$$

Soit  $X$  un groupe  $p$ -divisible sur  $R$ . Il existe une représentation de monodromie continue

$$\Gamma \longrightarrow \text{GL}(T_p(X_{\bar{\eta}}))$$

que l'on veut interpréter en termes cristallins. Soit pour cela  $\tilde{X}$  un relèvement de  $X$  sur  $A_{\text{cris}}(\bar{R})$ . Soit  $E(\tilde{X})$  l'extension vectorielle universelle de  $\tilde{X}$ , c.f. Messing [Mes72]. Posons

$$\mathbb{E} := \text{Lie } E(\tilde{X})$$

qui ne dépend pas du choix du relèvement de  $X$ . Il s'agit de l'évaluation du cristal de Dieudonné covariant de  $X$  sur l'épaississement  $\theta : A_{\text{cris}}(\bar{R}) \rightarrow \widehat{\bar{R}}$ . Le  $A_{\text{cris}}(\bar{R})$ -module  $\mathbb{E}$  possède une  $\mathbb{N}$ -filtration, une action de Frobenius semi-linéaire  $\varphi$  et une action de Galois  $\Gamma := \text{Gal}(\bar{R}/R)$ .

**Théorème (1.3.1.1).** *Supposons que  $\text{Lie } X$  et  $\text{Lie}(X^\vee)$  soient libres. Il existe alors un isomorphisme de périodes*

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \xrightarrow{\sim} \text{Fil}^0 \mathbb{E}^{\varphi=P}$$

compatible à l'action de  $\Gamma$ . Le morphisme induit

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\text{cris}}(\bar{R}) \longrightarrow \mathbb{E}$$

est injectif, strictement compatible aux filtrations et de conoyau annulé par  $t$ . En particulier, il existe un isomorphisme de  $(B_{\text{cris}}(\bar{R}), \varphi)$ -modules filtrés

$$V_p(X_{\bar{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\bar{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}].$$

Ce théorème généralise un résultat de Faltings dans [Fal99]. Faltings a démontré un tel théorème pour des groupes  $p$ -divisibles sur un anneau de valuation d'inégales caractéristiques. On obtient le même résultat en diminuant les hypothèses nécessaires sur la base.

Ce théorème de comparaison nous permet de construire l'isomorphisme  $u_{G(\mathbb{Z}_p)}$  du théorème 2.3.4.2 cité précédemment au niveau local. On obtient l'isomorphisme  $u_{G(\mathbb{Z}_p)}$  sur  $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$  en collant les morphismes locaux à l'aide de la théorie de Raynaud des modèles entiers des espaces rigides. Les isomorphismes  $(u_K)_K$  sont obtenus par le tiré en arrière de l'isomorphisme  $u_{G(\mathbb{Z}_p)}$  par les morphismes structuraux  $\check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ .

Remarquons que dans le cas PEL symplectique, la preuve du théorème est beaucoup plus simple que dans les autres cas. Dans ce cas là, on n'a pas besoin d'utiliser le théorème de comparaison pour la construction de  $(u_K)_K$ . Ils existent déjà, car  $\det : G \rightarrow \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$  se factorise par le caractère de similitudes  $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ .

### Interprétation en termes de $\mathbb{Q}_p$ -systèmes locaux sur l'espace des périodes

Remarquons enfin que le théorème 2.3.4.2 précédent s'interprète en termes de  $\mathbb{Q}_p$ -systèmes locaux de de Jong sur l'espace des périodes. Plus précisément, soit  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  la fibre générique de  $\check{\mathcal{M}}$  comme  $\check{E}$ -espace analytique de Berkovich. Soit

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}^{an} \longrightarrow \check{\mathcal{F}}^{an}$$

le morphisme de périodes ([RZ96] chap. 5). Ici,  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  est l'espace analytique associé à une Grassmannienne  $p$ -adique. Notons  $\check{\mathcal{F}}^a$  l'image de  $\check{\pi}$ , un ouvert de  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  appelé ouvert admissible. D'après de Jong ([dJ95b]) le  $\mathbb{Q}_p$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant défini par le module de Tate rationnel descend en un  $\mathbb{Q}_p$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur  $\check{\mathcal{F}}^a$ . Ce système local est muni d'une  $G$ -structure, c'est à dire qu'il est un  $G$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant que l'on note  $\mathcal{E}$ . Si  $\det : G \rightarrow D$ , les résultats précédents sont équivalents à une description explicite du  $D$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant  $\det_* \mathcal{E}$ . Après avoir oublié de l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  cela s'interprète en termes de représentations de monodromie du groupe fondamental de de Jong de  $\check{\mathcal{F}}^a$ . Ces représentations de monodromie sont à valeurs dans  $G(\mathbb{Q}_p)$  et on décrit ces représentations lorsque composées avec  $\det : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$ . On renvoie à la section 2.5 pour plus de détails.

## Morphismes puissances extérieures

Si  $(G, b, \mu)$  est une donnée de Rapoport-Zink du type précédent,  $H$  est un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $\rho : G \rightarrow H$ , alors en général  $(H, \rho(b), \rho \circ \mu)$  n'est pas une donnée de Rapoport-Zink associée à un groupe  $p$ -divisible, car  $\rho \circ \mu$  n'est pas minuscule. Il existe cependant un cas pour lequel cela est vérifié, celui des espaces de Lubin-Tate lorsque  $\rho$  est le morphisme puissances extérieures. Bültel a construit dans [Bül03] de tels morphismes puissances extérieures pour certaines variétés de Shimura. Pour les espaces de Rapoport-Zink, on construit parallèlement dans le chapitre 3 des morphismes  $\wedge^k$  d'un espace de Lubin-Tate vers un espace de Rapoport-Zink.

Dans le cas non-ramifié, l'espace de Lubin-Tate  $\check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$  est associé à la donnée  $(G, b, \mu)$ , où  $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}(V)$ ,  $F$  est une extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  et  $V$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . De plus,  $J(\mathbb{Q}_p) = D_{1/n}^\times$ , les unités de l'algèbre à division sur  $F$  d'invariant  $1/n$ .

Pour  $1 \leq k \leq n$ , on a un morphisme produit extérieur  $\wedge^k : G \rightarrow \wedge^k G := \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}(\wedge^k V)$ . En utilisant ce morphisme, on peut définir une nouvelle donnée

$$(\wedge^k G, \wedge^k b, \wedge^k \mu) := (\wedge^k G, p \cdot \wedge^k (p^{-1}b), \nu_{\wedge^k G}^{-1} \cdot \wedge^k \circ \tilde{\mu}).$$

En effet, dans ce cas là, cette donnée provient encore d'une donnée de Rapoport-Zink,  $\nu_{\wedge^k G}^{-1} \wedge^k \circ \tilde{\mu}$  étant encore minuscule. On notera  $\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$  l'espace de Rapoport-Zink associé. Cet espace est muni d'une action de  $J_{\wedge^k b}(\mathbb{Q}_p) \simeq \text{GL}_r(D_{\frac{k}{n}})$  où  $r$  se calcule explicitement en fonction de  $k$  et  $n$ . On montre

alors dans le chapitre 3 que l'on a des morphismes produits extérieurs  $\wedge^k$  entre la tour associée à l'espace de Lubin-Tate et celle associée à  $\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$ . Il s'agit du théorème suivant.

**Théorème (3.1.0.2).** *Pour  $1 \leq k \leq n$ , il existe un morphisme de schémas formels  $\wedge^k : \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n} \rightarrow \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$  tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n} & \xrightarrow{\wedge^k} & \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n} \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ D_{\frac{1}{n}}^\times & \longrightarrow & \text{GL}_r(D_{\frac{k}{n}}) \end{array}$$

soit commutatif.

De plus, notons  $(\wedge^k)^{\text{rig}} : \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}^{\text{rig}} \rightarrow (\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n})^{\text{rig}}$  le morphisme induit d'espaces rigides. Alors  $(\wedge^k)^{\text{rig}}$  est compatible aux morphismes de périodes et il induit naturellement un morphisme de tours d'espaces rigides

$$(\wedge^k)^{\text{rig}}_K : \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n, K}^{\text{rig}} \rightarrow (\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n})_{\wedge^k K}^{\text{rig}}.$$

Le point clé pour la preuve est la théorie des displays de Zink combinée avec le théorème de comparaison 1.3.1.1. Les puissances extérieures du display associé au groupe  $p$ -divisible universel sur l'espace  $\check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$  sont encore des displays et les groupes  $p$ -divisibles correspondants nous permettent de définir les morphismes puissances extérieures entre espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles sans structure de niveau (les schémas formels  $\check{\mathcal{M}}$ ). En utilisant le théorème de comparaison 1.3.1.1 on vérifie que ces morphismes s'étendent au niveau des tours d'espaces rigides.

Notons que Hedayat-zadeh a aussi étudié les puissances extérieures des groupes  $p$ -divisibles de dimension 1 dans [Hed] avec un intérêt un peu différent du nôtre. Il montre que les puissances extérieures d'un groupe  $p$ -divisible de dimension au plus 1 sur une base quelconque existent et sont compatibles au changement de base.

## Groupe de Mumford-Tate $p$ -adique générique

Dans le chapitre 4 on démontre un résultat qui est utilisé de façon essentielle dans le chapitre 5 afin de démontrer le résultat principal de cette thèse concernant les composantes connexes géométriques des espaces de Rapoport-Zink.

Dans ce chapitre 4 on travaille en fait dans un cadre plus général que le précédent en ne considérant pas seulement des données de Rapoport-Zink associées à des groupes  $p$ -divisibles. Soient  $G$  un groupe réductif non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $(b, \mu)$  un couple avec  $b \in G(W(\overline{\mathbb{F}}_p)_{\mathbb{Q}})$ ,  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$  et  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ . Ici, on ne demande pas que  $G$  soit un groupe classique. On ne demande pas non plus que  $\mu$  soit minuscule. Soit  $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$  le corps de définition de la classe de conjugaison de  $\mu$ . On associe une variété de drapeaux  $\mathcal{F}$  à  $\mu$  sur  $E$ . Rapoport et Zink ont défini dans [RZ96] un ouvert faiblement admissible  $\mathcal{F}_E^{fa}$  dans l'espace rigide analytique  $\mathcal{F}_E^{\text{rig}}$  associé à  $\mathcal{F}$  sur  $\check{E}$ . Si  $K|\check{E}$  est une extension de degré fini et  $x \in \mathcal{F}_E^{fa}(K)$ , grâce à la théorie de Fontaine et la trivialité du torseur des périodes, il lui est associé une représentation  $p$ -adique cristalline

$$\xi_x : \text{Gal}(\overline{\check{E}}|K) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

bien définie à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près.

**Théorème (4.5.0.1).** *Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à  $\bar{\mu}$  et  $\bar{b}$  dans la chambre de Weyl positive « ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités ». Supposons  $b$  décent. Soit  $K|\check{E}$  une extension de degré fini et  $x \in \mathcal{F}(K)$  qui est un point générique de  $\mathcal{F}$ . Alors,  $x$  est admissible,  $x \in \mathcal{F}_E^{fa}(K)$  et l'image de la représentation cristalline*

$$\xi_x : \text{Gal}(\overline{\check{E}}|K) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

contient un sous-groupe ouvert de  $G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p)$ .

L'énoncé précédent est non-vide, car on vérifie que  $\check{E}|E$  est de degré de transcendance infini (4.2.0.3). À un tel  $x \in \mathcal{F}_{\check{E}}^{fa}(K)$  on peut associer deux groupes algébriques du type Mumford-Tate correspondant aux deux facettes de la théorie de Fontaine : étales et cristallines. Le premier,  $MT_x$ , est l'enveloppe algébrique de l'image de  $\xi_x$ . D'après Sen, l'algèbre de Lie de l'image de  $\xi_x$  est algébrique et donc l'image de  $\xi_x$  est un sous-groupe ouvert de  $MT_x(\mathbb{Q}_p) \subset G(\mathbb{Q}_p)$ . Au point  $x$  est associé canoniquement un cocaractère  $\mu_x^{HT} : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{C_p}$  donnant la décomposition de Hodge-Tate de  $\xi_x$  et conjugué à  $\mu$ . La composante neutre de  $MT_x$  est alors le plus petit sous-groupe de  $G$  sur  $\mathbb{Q}_p$  contenant l'image de  $\mu_x^{HT}$ . Le deuxième groupe est le groupe de Mumford-Tate cristallin  $MT_x^{cris}$  qui se calcule en termes du  $\varphi$ -module filtré avec  $G$ -structure associé à  $x$ . La théorie de Fontaine, qui fournit un dictionnaire entre représentations galoisiennes et  $\varphi$ -modules filtrés, et la théorie des catégories Tannakiennes montrent que  $MT_x$  et  $MT_x^{cris}$  sont formes intérieures l'un de l'autre. Pour montrer que  $MT_x$  est aussi gros que possible il suffit donc de le faire pour  $MT_x^{cris}$ . Or,  $MT_x^{cris}$  se calcule en termes de « cycles de Hodge cristallins ». Par des arguments de théorie des représentations on montre alors que pour la filtration générique  $MT_x^{cris}$  est aussi grosse que possible.

## Composantes connexes géométriques des tours de Rapoport-Zink

Dans le chapitre 5, on revient aux espaces de Rapoport-Zink non ramifiées de type EL ou PEL  $\check{\mathcal{M}} = \check{\mathcal{M}}(G, b, \mu)$ . Ce chapitre contient les résultats principaux de cette thèse concernant le calcul des composantes connexes géométriques des tours d'espaces de Rapoport-Zink. Dans cette partie, nous considérons la tour d'espaces de Rapoport-Zink  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  non plus comme une tour d'espaces rigides au sens de Tate mais d'espaces analytiques au sens de Berkovich ([Ber90], [Ber93]). Ainsi  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  désigne la fibre générique de  $\check{\mathcal{M}}$  comme  $\check{E}$ -espace analytique de Berkovich.

En utilisant la hauteur de la quasi-isogénie, on a une application localement constante

$$\varkappa : \check{\mathcal{M}} \rightarrow \Delta,$$

où  $\Delta$  est un groupe discret. Soient  $H^{\text{univ}}$  le groupe  $p$ -divisible universel sur  $\check{\mathcal{M}}$ ,  $\bar{x}$  un point géométrique de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . Notons «  $\pi_1$  » pour le groupe fondamental profini des espaces analytiques classifiant les revêtements étales finis. On a alors des représentations de monodromie arithmétiques et géométriques

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{x}) & & \\ \downarrow & \searrow^{\rho_{\bar{x}}^{geo}} & \\ \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & & \text{Aut}(T_p(H_{\bar{x}}^{\text{univ}})) \simeq G(\mathbb{Z}_p). \\ & \nearrow_{\rho_{\bar{x}}} & \end{array}$$

D'après les résultats du chapitre 2, l'existence de l'application déterminant, cela induit un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \otimes \mathbb{C}_p, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & I_E & \longrightarrow & 1 \\ \rho_{\bar{x}}^{geo} \downarrow & & \downarrow \rho_{\bar{x}} & & \downarrow \chi_{\det \tilde{\mu}} & & \\ 1 & \longrightarrow & G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & G(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\det} & D(\mathbb{Z}_p) \end{array} \quad (3)$$

où  $\chi_{\det \tilde{\mu}} : I_E \rightarrow D(\mathbb{Z}_p)$  est un caractère associé à  $\det \tilde{\mu}$  et  $I_E = \text{Gal}(\overline{\check{E}}|\check{E})$  désigne l'inertie de  $E$ .

De Jong a montré dans [dJ95b] que  $\rho_{\bar{x}}^{geo}$  est surjectif dans le cas des espaces de Lubin-Tate. Strauch a redémontré ce résultat par d'autres méthodes dans [Str08]. On généralise cela aux espaces de Rapoport-Zink non-ramifiés précédents sous la conjecture qui suit.

**Conjecture (1).** *Soit  $\check{\mathcal{M}}$  un espace de Rapoport-Zink non-ramifié simple de type EL, PEL symplectique ou unitaire. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. 4.1 et 4.5.0.1 hypothèse (d)). Alors,*

$$\varkappa : \pi_0(\check{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \text{Im } \varkappa.$$

La conjecture est connue dans des cas particuliers. Lorsque  $F = \mathbb{Q}_p$  dans le cas EL et PEL symplectique, elle a été démontrée par Viehmann ([Vie08b], [Vie08a]). Dans le cas des espaces de Lubin-Tate elle est vérifiée pour des raisons évidentes. Dans le cas PEL unitaire basique lorsque  $F$  est une extension quadratique de  $\mathbb{Q}_p$  et que l'on travaille en signature  $(1, n-1)$  elle a été démontré par Vollaard ([Vol10]). Remarquons enfin que cette conjecture est un problème d'espaces de modules en caractéristique positive :  $\pi_0(\check{\mathcal{M}}) = \pi_0(\check{\mathcal{M}}_{red})$  où  $\check{\mathcal{M}}_{red}$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -schéma réduit localement de type fini.

Voici donc le théorème principal.

**Théorème (5.1.2.1).** *Supposons la conjecture ci-dessus vérifiée. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. 4.1 et 4.5.0.1 hypothèse (d)). Soit  $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{an}(\overline{E})$ . La représentation de monodromie géométrique*

$$\rho_{\bar{x}}^{geo} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{x}) \longrightarrow G^{der}(\mathbb{Z}_p)$$

*sur le module de Tate de la déformation universelle spécialisée en  $\bar{x}$  est surjective.*

La technique de démonstration est analogue à celle de de Jong dans le cas des espaces de Lubin-Tate ([dJ95b]). On utilise en particulier les représentations de monodromie du groupe fondamental « étendu » qu'il a construites sur l'espace des périodes couplées avec le théorème 4.5.0.1 du chapitre 4 sur le groupe de Mumford-Tate  $p$ -adique générique (dans le cas des espaces de Lubin-Tate ce dernier résultat est facile d'après Serre ([Ser67])).

De ce théorème, on déduit le résultat principal de cette thèse.

**Théorème (5.1.3.1).** *Supposons la conjecture ci-dessus vérifiée. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. 4.1 et 4.5.0.1 hypothèse (d)).*

1. *Les fibres géométriques du morphisme déterminant*

$$\check{\mathcal{M}}_K \longrightarrow \det(\check{\mathcal{M}})_{\det K} = \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_{\det K}$$

*sont les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$ .*

2. *Le morphisme déterminant induit des bijections compatibles lorsque  $K$  varie*

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q}_p) / \det K.$$

*L'action de  $(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  sur les composantes connexes géométriques est donnée sur  $D(\mathbb{Q}_p) / \det K$  par la translation par  $\det(g_1) \det(g_2)$ . L'action de  $\gamma \in I_E$  sur les composantes connexes géométriques est donnée par la translation par  $\chi_{\det \tilde{\mu}}(\gamma)$ .*

On donne une traduction cohomologique du théorème précédent. Dans le cadre des espaces analytiques de Berkovich il n'y a pas de bonne notion de cohomologie étale  $\ell$ -adique sans support pour les espaces de Rapoport-Zink. Ainsi on ne peut pas traduire le théorème précédent en termes de  $H^0$ . On pourrait définir un  $H^0$  de manière ad-hoc en posant  $H^0(X, \mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_\ell^{\pi_0(X)}$  mais dans le cas de l'espace de Rapoport-Zink  $X = \check{\mathcal{M}}^{an}$  l'action du groupe  $J(\mathbb{Q}_p)$  sur ce groupe ne serait pas lisse. On utilise plutôt le point de [Far04]. Soit  $d := \dim \check{\mathcal{M}}^{an}$ . Bien qu'on ne puisse définir un bon  $H^0$ , on peut définir  $H_c^{2d}$  qui joue le rôle du dual de Poincaré du  $H^0$ , même si ce dernier n'existe pas. Soit donc

$$H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

la cohomologie étale  $\ell$ -adique à support compact de l'espace analytique de  $\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p$  à coefficient dans  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  de degré  $2d$ . Le système projective  $(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))_K$  est muni d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$ , où  $W_E$  est le groupe de Weil associé à  $E$ .

En utilisant le morphisme trace pour les espaces analytiques défini par Berkovich [Ber93] couplé avec les théorèmes précédents, on obtient le théorème suivant.

**Théorème (5.2.0.1).** *Supposons la conjecture ci-dessus vérifiée. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. 4.1 et 4.5.0.1 hypothèse (d)). Soit  $\pi$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible lisse de  $J(\mathbb{Q}_p)$ .*

- Si  $\pi = \chi \circ \det$  est le composé du morphisme déterminant avec un caractère de  $D(\mathbb{Q}_p)$

$$\pi : J(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\chi} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times,$$

alors la représentation

$$\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) \quad (4)$$

de  $G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  est le caractère suivant :

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q}_p) \times W_E &\rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \\ (g, \gamma) &\mapsto \chi \circ \det(g) \cdot \chi \circ \tilde{\chi}_{\det \bar{\mu}}(\gamma) \cdot \chi_{\mathrm{cycl}}^d(\gamma) \end{aligned}$$

où  $\chi_{\mathrm{cycl}}$  est le caractère cyclotomique et  $\tilde{\chi}_{\det \bar{\mu}} : W_E \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est défini dans la remarque 2.2.3.2.

- si  $\pi \neq \chi \circ \det$ , alors (4) s'annule.

# Chapitre 1

## Un théorème de comparaison pour les groupes $p$ -divisibles

Dans ce chapitre, on généralise un théorème de comparaison de Faltings ([Fal99], théorème 5) entre module de Tate et module de Dieudonné filtré des groupes  $p$ -divisibles. Ce résultat de Faltings est lui-même une généralisation de ceux de Fontaine-Laffaille ([FL82]). Ce théorème de comparaison concerne les périodes entières de tels groupes  $p$ -divisibles. Il servira comme outil essentiel dans le deuxième chapitre pour construire un morphisme déterminant d'une tour d'espaces de Rapoport-Zink vers une tour d'espaces rigides de dimension 0. Dans [Fal99] Faltings démontre un tel théorème pour des groupes  $p$ -divisibles sur un anneau de valuation d'inégales caractéristiques. La généralisation dont il est question dans ce chapitre consiste à vérifier que ce théorème est valable sur des bases plus générales. On montre que très peu d'hypothèses sur la base sont nécessaires afin d'obtenir un tel théorème de de comparaison.

### 1.1 Rappels sur les anneaux de périodes de Fontaine

On supposera toujours que  $p$  est un nombre premier impair.

#### 1.1.1 Notations

Le théorème de comparaison que nous démontrons dans la suite concerne les groupes  $p$ -divisibles sur un anneau  $R$ . Voici les hypothèses faites et les notations choisies concernant cet anneau :

- $R$  désigne un anneau noethérien,  $p$ -adiquement séparé complet, normal, intègre, et dans lequel  $p \neq 0$ .
- On fixe une clôture algébrique de  $\text{Frac}(R)$ . L'anneau  $\overline{R}$  est la fermeture intégrale de  $R$  dans l'extension galoisienne maximale de  $\text{Frac}(R)$  étale au-dessus de  $R[1/p]$ .
- $\widehat{\overline{R}}$  est le complété  $p$ -adique de  $\overline{R}$ .
- On note  $\Gamma = \text{Aut}(\overline{R}|R) = \pi_1(\text{Spec}(R[1/p], \overline{\eta}))$ , où  $\overline{\eta}$  est un point géométrique au-dessus du point générique de  $\text{Spec}(R)$  associé au choix de la clôture algébrique de  $\text{Frac}(R)$ .

Enfin, dans la suite  $\text{BT}_X$  désigne la catégorie des groupes  $p$ -divisibles sur une base  $X$ .

#### 1.1.2 Anneaux de périodes

Avant de définir les anneaux de périodes de Fontaine que nous utiliserons commençons par deux lemmes de base concernant l'anneau  $R$ .

**Lemme 1.1.2.1.** *L'anneau  $\overline{R}$  est séparé pour la topologie  $p$ -adique :  $\overline{R} \hookrightarrow \widehat{\overline{R}}$ .*

*Démonstration.* Comme  $R$  est un anneau noethérien, normal intègre de corps des fractions de caractéristique 0, d'après ([Gro64], prop. 23.1.2)  $R$  est japonais.

Soit  $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n \bar{R}$ . Posons  $R'$  égal à la clôture intégrale de  $R$  dans  $\text{Frac}(R[a])$ . Alors,  $R'$  est une  $R$ -algèbre finie car  $R$  est noethérien et japonais. En particulier,  $R'$  est noethérien. Comme  $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n R'$ , d'après le théorème d'intersection de Krull ([Eis95], coro. 5.4), on a  $a = 0$ .  $\square$

**Lemme 1.1.2.2 ([Bri04], prop. 2.4 p.23).** *Le morphisme de Frobenius de  $\bar{R}/p\bar{R}$  est surjectif.*

*Démonstration.* Soit  $a \in \bar{R}$ . Considérons le polynôme  $P(X) = X^{p^2} - pX - a$ . Soit  $x$  une racine de  $P(X)$ , alors  $x$  est entier sur  $R$ . De plus en remarquant que  $P'(x) = -p(1 - px^{p^2-1})$  et  $px^{p^2-1}$  sont topologiquement nilpotents, donc  $P'(x)$  est inversible dans  $R[x, 1/p]$  puisque  $R[x]$  est une  $R$ -algèbre fini elle est  $p$ -adiquement complète car  $R$  l'est. Donc  $R[x] \subset \bar{R}$  et alors  $x^{p^2} \equiv a \pmod{p}$ .  $\square$

On pose

$$S = (\bar{R}/p\bar{R})^{\text{perf}} := \varprojlim_{\mathbb{N}} \bar{R}/p\bar{R}$$

où les applications de transition sont le Frobenius. Considérons le sous-ensemble de  $\widehat{\bar{R}}^{\mathbb{N}}$

$$\{(x^{(n)})_{n \geq 0} \in \widehat{\bar{R}}^{\mathbb{N}} \mid (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\}.$$

On le voit comme un anneau avec les structures d'addition et de multiplication comme suit :

$$(x + y)^{(n)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x^{(n+k)} + y^{(n+k)})^{p^k} \text{ et } (xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}.$$

L'application de réduction modulo  $p$

$$\begin{aligned} \{(x^{(n)})_{n \geq 0} \in \widehat{\bar{R}}^{\mathbb{N}} \mid (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\} &\rightarrow S \\ (x^{(n)})_{n \geq 0} &\mapsto (x^{(n)} \bmod p)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux (voir [FO], prop. 5.4 p.106). On identifie ces deux anneaux dans la suite.

Suivant Fontaine, on définit une application

$$\begin{aligned} \theta : \quad W(S) &\longrightarrow \widehat{\bar{R}}, \\ \sum_{n \geq 0} [a_n] p^n &\longmapsto \sum_{n \geq 0} a_n^{(0)} p^n. \end{aligned}$$

où  $[a_n]$  sont les relèvements de Teichmüller. C'est un homomorphisme de  $\mathbb{Z}_p$ -algèbres. De plus, le lemme 1.1.2.2 implique que  $\theta$  est surjectif. Puisque  $\bar{R} \supset \mathbb{Z}_p$ , il existe un élément  $\underline{p} \in S$  tel que  $\underline{p}^{(0)} = p$ . Fixons un tel élément.

**Lemme 1.1.2.3.**  $\ker \theta = (\xi)$ , où  $\xi = p - [\underline{p}]$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $\xi \in \ker \theta$ . Pour voir que  $\xi$  est un générateur de  $\ker \theta$ , il suffit de vérifier le critère suivant : un élément  $x = \sum_n [a_n] p^n \in \ker \theta$  est un générateur de  $\ker \theta$  si  $a_0^{(0)} \in \widehat{p\bar{R}}^\times$ .

Soit  $x$  un tel élément, on vérifie aussitôt que  $\ker \theta = (x) + p \ker \theta$ . Alors le fait que  $x$  est un générateur de  $\ker \theta$  découle du lemme de Nakayama  $p$ -adique puisque  $\ker \theta$  est  $p$ -adiquement complet.  $\square$

**Lemme 1.1.2.4.** *L'élément  $\xi$  est régulier dans  $W(S)$ .*

*Démonstration.* Soit  $a = \sum_{n \geq 0} [a_n] p^n \in W(S)$  avec  $a_n \in S$  tel que  $\xi \cdot a = 0$ . Par récurrence, il suffit de montrer que  $a_0 = 0$ . L'équation  $\xi \cdot a = 0$  se réécrit sous la forme suivante

$$\sum_{n \geq 1} ([a_{n-1}] - [pa_n]) p^n + [pa_0] = 0,$$

d'où  $pa_0 = 0$ . Comme  $\widehat{R}$  n'a pas de  $p$ -torsion, on a  $a_0 = 0$ .  $\square$

**Définition 1.1.2.1.** *L'anneau  $A_{cris}(\overline{R})$  est le complété de l'enveloppe à puissances divisées de  $(W(S), \ker \theta)$  par rapport à sa filtration à puissances divisées. S'il y a confusion avec l'anneau  $A_{cris}(\overline{R})$  défini par Fontaine, le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées, on le notera  $\widehat{A}_{cris}(\overline{R})$ .*

Comme  $\xi$  est régulier (lemme 1.1.2.4), on peut donner une description explicite de  $A_{cris}(\overline{R})$  :

$$A_{cris}(\overline{R}) = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n \frac{\xi^n}{n!} \mid a_n \in W(S) \right\},$$

une telle écriture d'un élément de  $A_{cris}(\overline{R})$  n'étant pas unique.

L'anneau  $A_{cris}(\overline{R})$  possède des structures additionnelles :

– *Frobenius* : l'homomorphisme  $\varphi : A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow A_{cris}(\overline{R})$  prolonge le Frobenius usuel sur  $W(S)$

$$\begin{aligned} \varphi : W(S) &\rightarrow W(S) \\ [a] &\mapsto [a^p], \end{aligned}$$

car  $\varphi(\ker \theta) \subset \ker \theta + pW(S)$ .

– *Filtration* : l'homomorphisme  $\theta$  s'étend en

$$\theta : A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{R}.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$\text{Fil}^n A_{cris}(\overline{R}) := \ker(\theta)^{[n]} = \left\{ \sum_{i \geq n} a_i \frac{\xi^i}{i!} \mid a_i \in W(S) \right\},$$

où  $\ker(\theta)$  désigne le noyau de  $\theta : A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{R}$ .

– *Action de  $\Gamma$*  : L'action nature de  $\Gamma$  sur  $S$  induit une action de  $\Gamma$  sur  $W(S)$  et  $A_{cris}(\overline{R})$ . De plus le morphisme  $\theta$  est  $\Gamma$ -équivariant.

Dans ce chapitre, s'il n'y a pas de confusion, on abrège  $A_{cris}(\overline{R})$  en  $A_{cris}$ .

**Lemme 1.1.2.5.** *Notons  $\widehat{R}\{T\} := D_{\widehat{R}[T]}((T))$  l'enveloppe à puissances divisées de  $(\widehat{R}[T], (T))$ .*

*Alors, l'homomorphisme de  $\widehat{R}$ -algèbres*

$$\begin{aligned} \widehat{R}\{T\} &\longrightarrow \text{gr}^\bullet A_{cris}(\overline{R}) \\ T^{[n]} &\longmapsto \text{classe de } \frac{\xi^n}{n!} \text{ dans } \text{gr}^n A_{cris}(\overline{R}) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme. En particulier,  $\xi$  est régulier dans  $A_{cris}(\overline{R})$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'homomorphisme de  $\widehat{R}$ -modules*

$$\begin{aligned} \widehat{R} &\longrightarrow \text{gr}^n A_{cris}(\overline{R}) \\ 1 &\longmapsto \text{classe de } \frac{\xi^n}{n!} \text{ dans } \text{gr}^n A_{cris}(\overline{R}) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Comme  $\xi$  est un élément régulier dans  $W(S)$  (lemme 1.1.2.4), d'après ([Ber74] chap I, prop. 3.4.4), il y a un isomorphisme naturel

$$\alpha_1 : D_{\text{gr}^\bullet W(S)}(\text{gr}^+ W(S)) \xrightarrow{\sim} \text{gr}^\bullet D_{W(S)}(\ker \theta) = \text{gr}^\bullet A_{\text{cris}}(\overline{R})$$

où  $\text{gr}^\bullet W(S)$  est le gradué associé à la filtration  $\ker \theta$ -adique de  $W(S)$ ,  $\text{gr}^+ W(S)$  l'idéal des éléments de degré strictement positif de  $\text{gr}^\bullet W(S)$ ,  $\text{gr}^\bullet D_{W(S)}(\ker \theta)$  le gradué associé à la filtration  $\ker \theta$ -PD-adique de  $D_{W(S)}(\ker \theta)$ . D'autre part, le morphisme  $\theta$  induit un isomorphisme naturel

$$\text{gr}^\bullet W(S) \xrightarrow{\sim} \widehat{R}[T]$$

qui nous donne un isomorphisme

$$\alpha_2 : D_{\text{gr}^\bullet}(\text{gr}^+ W(S)) \xrightarrow{\sim} \widehat{R}\{T\}.$$

Le composé  $\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}$  est l'isomorphisme désiré.  $\square$

**Remarque 1.1.2.1.**

1. Le noyau de  $\theta : A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{R}$  n'est pas un idéal principal de  $A_{\text{cris}}(\overline{R})$ .
2. On adopte ici la définition de  $\widehat{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$  utilisée dans [Fal99] qui est différente de celle de Fontaine. Rappelons que  $A_{\text{cris}}(\overline{R})$  tel défini par Fontaine est le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de  $W(S)$  par rapport à  $\ker(\theta)$ . Il existe un homomorphisme naturel injectif  $A_{\text{cris}}(\overline{R}) \hookrightarrow \widehat{A}_{\text{cris}}(\overline{R})$ . Cependant, ces deux anneaux possèdent des propriétés identiques (cf. Appendice).
3. Soit l'anneau de Fontaine

$$B_{dR}^+(\overline{R}) = \varprojlim_{n \geq 0} W(S)[\frac{1}{p}]/(\ker(\theta))^n,$$

le complété de  $W(S)[\frac{1}{p}]$  pour la topologie  $\ker(\theta)$ -adique. L'homomorphisme  $\theta$  s'étend en  $\theta : B_{dR}^+(\overline{R}) \rightarrow \widehat{R}[1/p]$ . La filtration de  $B_{dR}^+(\overline{R})$  est définie par  $\text{Fil}^n B_{dR}^+(\overline{R}) = \ker(\theta)^n = \xi^n B_{dR}^+(\overline{R})$ . On dispose alors de plongements naturels

$$A_{\text{cris}}(\overline{R}) \hookrightarrow \widehat{A}_{\text{cris}}(\overline{R}) \hookrightarrow B_{dR}^+(\overline{R}),$$

où la deuxième injection est due à l'injectivité des gradués :  $\text{gr}^\bullet A_{\text{cris}}(\overline{R}) \hookrightarrow \text{gr}^\bullet B_{dR}^+(\overline{R})$ .

Voici maintenant une propriété fondamentale des anneaux de périodes entiers.

**Lemme 1.1.2.6.** *Pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i < p$ , la restriction de  $\varphi$  à  $\text{Fil}^i A_{\text{cris}}$  est divisible par  $p^i$ . De plus,  $\frac{\varphi}{p^i}(\text{Fil}^i A_{\text{cris}})$  engendre  $A_{\text{cris}}$ , plus précisément  $\frac{\varphi(\xi^i)}{p^i} \in A_{\text{cris}}^\times$ .*

*Démonstration.* Pour la première assertion, il suffit de montrer que  $\varphi(\xi)$  est divisible par  $p$ . Cela revient au même de dire que  $\varphi(\xi) \equiv 0 \pmod{p}$ . Comme  $\varphi$  est un relèvement de Frobenius, on a

$$\varphi(\xi) \equiv \xi^p \equiv p \cdot \frac{\xi^p}{p} \equiv 0 \pmod{pA_{\text{cris}}},$$

d'où le résultat.

Pour la seconde assertion, il suffit de montrer que  $\frac{\varphi(\xi)}{p} \in A_{\text{cris}}^\times$ . On a les égalités suivantes

$$\frac{\varphi(\xi)}{p} = \frac{p - [p]}{p} = \frac{(p - [p])^p}{p} + 1 - \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} p^{i-1} (-[p])^{p-i}.$$

On pose  $u = 1 - \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} p^{i-1} (-[p])^{p-i}$ . Comme  $1 - u \in pW(S)$ ,  $u$  est inversible dans  $W(S)$ . Alors,

$$\left(\frac{\varphi(\xi)}{p}\right)^{-1} = u^{-1} \sum_{n \geq 0} (-u)^{-n} \left(\frac{\xi^p}{p}\right)^n = u^{-1} \sum_{n \geq 0} (-u)^{-n} \frac{(pn)!}{p^n} \frac{\xi^{pn}}{(pn)!} \in A_{\text{cris}}(\overline{R})$$

d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 1.1.2.2.** *Le fait que  $\varphi|_{\text{Fil}^i}$  soit divisible par  $p^i$  n'est pas particulier à  $A_{\text{cris}}(\overline{R})$ . Si  $\tilde{\varphi}$  est un relèvement de Frobenius sur un anneau sans torsion et si  $I$  est un idéal ayant des puissances divisées dans cet anneau, alors  $\tilde{\varphi}$  restreint à  $I^{[i]}$  est divisible par  $p^i$  lorsque  $i < p$ . Ce qui est remarquable ici c'est la seconde partie du lemme qui dit que  $\varphi$  est un "bon relèvement de Frobenius".*

**Définition 1.1.2.2.** *On notera pour  $0 \leq i < p$  les Frobenius divisés par*

$$\varphi_i = \frac{\varphi|_{\text{Fil}^i A_{\text{cris}}}}{p^i}.$$

Posons

$$\mathbb{Z}_p(1) = \{(\epsilon_n)_{n \geq 0} \mid \epsilon_0 = 1, \epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n, \epsilon_n \in \mu_{p^n}(\overline{\mathbb{Z}}_p)\} \subset S^\times.$$

Pour  $\epsilon \in \mathbb{Z}_p(1)$ ,  $1 - [\epsilon] \in \ker \theta$  et donc la série

$$\log[\epsilon] = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{([\epsilon] - 1)^n}{n}$$

converge et définit un élément dans  $\text{Fil}^1 A_{\text{cris}}(\overline{R})$ , d'où un homomorphisme

$$\alpha : \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}(\overline{\mathbb{Z}}_p) \subset \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}(\overline{R}).$$

Considérons le composé

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}_p(1) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}(\overline{\mathbb{Z}}_p) & \longrightarrow & \text{gr}^1 A_{\text{cris}}(\overline{\mathbb{Z}}_p) & \xrightarrow{\sim} & \widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_p \\ & & & & x \bmod \text{Fil}^2 A_{\text{cris}}(\overline{\mathbb{Z}}_p) & \longmapsto & \theta\left(\frac{x}{\xi}\right). \end{array}$$

L'image de  $\epsilon$  par ce composé est  $\theta\left(\frac{[\epsilon]-1}{\xi}\right)$ .

Si  $\epsilon \neq 1$ , on vérifie aussitôt que  $v_p((\epsilon - 1)^{(0)}) = \frac{p}{p-1}$ . Alors  $\theta\left(\frac{[\epsilon]-1}{\xi}\right) \neq 0$ . On en déduit que  $\alpha$  est une injection. Posons  $t = \alpha(\epsilon)$ , où  $\epsilon$  est un générateur de  $\mathbb{Z}_p(1)$ . Alors

$$\mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p t \text{ et } \varphi(t) = pt.$$

**Remarque 1.1.2.3.** *Le groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$  agit sur  $\mathbb{Z}_p(1)$  via le caractère cyclotomique, et l'inclusion  $\mathbb{Z}_p(1) \hookrightarrow A_{\text{cris}}(\overline{R})$  est  $\Gamma$ -équivariante via*

$$\Gamma = \pi_1(\text{Spec}(R[1/p], \overline{\eta})) \twoheadrightarrow \pi_1(\text{Spec}(\mathbb{Q}_p), \overline{\eta}) = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p).$$

**Lemme 1.1.2.7.** *L'élément  $t$  est régulier dans  $B_{dR}^+(\overline{R})$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la multiplication scalaire

$$\times \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{([\epsilon] - 1)^i}{i} : W(S)[1/p]/\xi^n \longrightarrow W(S)[1/p]/\xi^{n+1}$$

est injective. Cela découle du fait que  $\theta\left(\frac{t}{\xi}\right) \neq 0$  et que  $\xi$  est régulier dans  $W(S)[1/p]$ .  $\square$

Dans la suite on pose

$$\begin{aligned} B_{\text{cris}}^+(\overline{R}) &:= A_{\text{cris}}(\overline{R})[1/p], \\ B_{\text{cris}}(\overline{R}) &:= B_{\text{cris}}^+(\overline{R})[1/t] = A_{\text{cris}}(\overline{R})[1/t], \\ B_{dR}(\overline{R}) &:= B_{dR}^+(\overline{R})[1/t] \end{aligned}$$

L'anneau  $B_{\text{cris}}^+(\overline{R})$ , resp.  $B_{\text{cris}}(\overline{R})$ , resp.  $B_{dR}(\overline{R})$ , possède naturellement une  $\mathbb{N}$ -filtration, resp.  $\mathbb{Z}$ -filtration, resp.  $\mathbb{Z}$ -filtration, qui étend la  $\mathbb{N}$ -filtration sur  $A_{\text{cris}}(\overline{R})$ , resp.  $A_{\text{cris}}(\overline{R})$ , resp.  $B_{dR}^+(\overline{R})$ . De

plus, les filtraions sur  $B_{cris}^+(\overline{R})$  et  $B_{cris}(\overline{R})$  coïncident avec la restriction de la  $\mathbb{Z}$ -filtration sur  $B_{dR}(\overline{R})$  via les inclusions naturelles

$$B_{cris}^+(\overline{R}) \hookrightarrow B_{cris}(\overline{R}) \hookrightarrow B_{dR}(\overline{R}),$$

où la deuxième injection est due à l'injection  $B_{cris}^+(\overline{R}) \hookrightarrow B_{dR}^+(\overline{R})$  et le fait que  $t$  est un élément régulier dans  $B_{dR}^+(\overline{R})$  (Lemme 1.1.2.7).

Dans la section 2.3.7 du chapitre 2 nous aurons besoin de la propriété suivante des anneaux  $B_{cris}(\overline{R})$ . Dans le cas de la théorie de Fontaine « classique » il s'agit de l'exactitude à gauche de la suite exacte fondamentale de Fontaine ([Fon94a] proposition 5.3.6). Tsuji a vérifié dans l'appendice de [Tsu99] qu'une telle propriété s'étendait à des anneaux plus généraux.

**Théorème 1.1.2.1 (Fontaine, Tsuji).** *On a pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\mathrm{Fil}^i B_{cris}(\overline{R})^{\varphi=p^i} = \mathbb{Q}_p t^i.$$

*Démonstration.* Il s'agit de vérifier que les hypothèses du théorème A.3.26 de [Tsu99] sont vérifiées (Tsuji utilise l'anneau de Fontaine qui est le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées et non le complété par rapport à la PD-filtration, mais sa preuve s'adapte de façon identique). En effet, on peut vérifier que la preuve de Tsuji de l'exactitude à gauche de la suite exacte fondamentale de Fontaine ne utilise que la première hypothèse concernant la connexité.

Il suffit donc de vérifier que  $\mathrm{Spec}(\overline{R}/p\overline{R})$  est connexe. Mais si  $e \in \overline{R}/p\overline{R}$ , vérifie  $e^2 = e$ , il existe une extension finie  $R'|R$  dans  $\overline{R}$  telle que  $R'$  est normale et  $e \in R'/pR'$ . Puisque  $R'$  est  $p$ -adiquement complète on peut relever  $e$  en un idempotent de  $R'$ . L'anneau  $R'$  étant intègre on en déduit que  $e \in \{0, 1\}$ . □

## 1.2 $F$ -cristaux filtrés associés aux groupes $p$ -divisibles

### 1.2.1 Site cristallin PD-nilpotent $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$ et Frobenius

Dans cette section, notons  $S = \mathrm{Spf}(R)$  comme schéma formel  $p$ -adique,  $S_0 = \mathrm{Spec}(R/pR)$ ,  $\Sigma = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$  et  $\Sigma_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ .

#### Définition 1.2.1.1.

*On désigne par  $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$  le gros site Zariski-cristallin PD-nilpotent de  $S$  sur  $\Sigma$ . Il s'agit du site suivant :*

(a) *Un objet est la donnée :*

- d'un  $S$ -schéma formel  $U$  qui est  $p$ -adique, c'est à dire dont un idéal de définition est  $p\mathcal{O}_U$
- d'une  $\Sigma$ -immersion fermée  $i$  de  $U$  dans un  $\Sigma$ -schéma formel  $T$  définie par un idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{O}_T$  et d'une PD-structure  $\delta$  sur  $\mathcal{I}$ , compatible à celle sur  $(p)$  de  $\mathbb{Z}_p$ , telle que  $(\mathcal{I}^{[n]} + p^m \mathcal{O}_T)_{n,m \in \mathbb{N}}$  forment un système fondamental de voisinages de 0 dans  $\mathcal{O}_T$  i.e.  $T$  est la limite inductive de schémas  $\varinjlim_{n,m \geq 0} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T/\mathcal{I}^{[n]} + p^m \mathcal{O}_T)$ .

*Un tel objet est appelé épaissement à puissance divisées de  $U$ . Notons-le  $(U, T, i, \delta)$ , ou  $(U \hookrightarrow T)$  lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.*

(b) *Un morphisme  $(U', T', i', \delta') \rightarrow (U, T, i, \delta)$  est un couple de morphismes*

$$v : U' \rightarrow U, \quad u : T' \rightarrow T,$$

*tels que  $v$  soit un  $S$ -morphisme,  $u$  soit un  $\Sigma$ -morphisme commutant aux puissances divisées, et  $u \circ i' = i \circ v$ .*

(c) *Un recouvrement d'un objet  $(U, T, i, \delta)$  est donné par une famille de morphismes*

$$((U_j, T_j, i_j, \delta_j) \rightarrow (U, T, i, \delta))_j$$

*où  $(T_j \rightarrow T)_j$  est un recouvrement Zariski de  $T$  et pour tout  $j$ ,  $U_j = T_j \cap U$ .*

On définit un faisceau d'anneaux  $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$  sur  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$  en posant pour tout objet  $(U \hookrightarrow T)$

$$\mathcal{O}_{S/\Sigma}(U \hookrightarrow T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T).$$

Un *cristal en  $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libres de rang fini* sur  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$  est une section cartésienne du champ au-dessus de  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$  dont la fibre au-dessus d'un objet  $(U \hookrightarrow T)$  de  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$  est la catégorie des  $\mathcal{O}_T$ -modules localement libres de rang fini. On note cette catégorie  $\underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma)$ . Similairement, pour  $S_0$ , on peut définir les catégories  $\text{NCRIS}(S_0/\Sigma)$ ,  $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma}$  et  $\underline{\mathcal{M}od}(S_0/\Sigma)$ .

Le Frobenius absolu sur  $S_0$

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \xrightarrow{\text{Frob}} & S_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spf } \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\text{Id}} & \text{Spf } \mathbb{Z}_p \end{array}$$

définit un foncteur  $\text{Frob}^* : \underline{\mathcal{M}od}(S_0/\Sigma) \rightarrow \underline{\mathcal{M}od}(S_0/\Sigma)$ . Or, le foncteur naturel  $\underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma) \rightarrow \underline{\mathcal{M}od}(S_0/\Sigma)$  est une équivalence de catégories ([BO78] chap.VI, 6.7). En prenant un quasi-inverse, on obtient un foncteur

$$\text{Frob}^* : \underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma) \rightarrow \underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma).$$

Pour  $X$  un  $S$ -schéma formel notons  $X_0$  sa réduction modulo  $p$ . Si  $\mathcal{E} \in \underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma)$  et  $(U \hookrightarrow T) \in \text{NCRIS}(S/\Sigma)$  il définit par composition  $U_0 \hookrightarrow U \hookrightarrow T$  un objet  $(U_0 \hookrightarrow T) \in \text{NCRIS}(S/\Sigma)$ . On a alors

$$(\text{Frob}^* \mathcal{E})_{(U \hookrightarrow T)} = (\text{Frob}^* \mathcal{E})_{(U_0 \hookrightarrow T)} = \mathcal{E}_{(U_0^{[p]} \hookrightarrow T)}$$

où  $U_0^{[p]}$  est le  $S$ -schéma formel de schéma formel sous-jacent  $U_0$  et de morphisme structural

$$U_0 \longrightarrow S_0 \xrightarrow{\text{Frob}_{S_0}} S_0 \longrightarrow S,$$

la première flèche étant le morphisme structural de  $U_0/S_0$ . Si  $T$  possède un relèvement de Frobenius  $\sigma : T \rightarrow T$ , un tel relèvement définit un morphisme dans  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$

$$\begin{array}{ccc} U_0^{[p]} \hookrightarrow & T \\ \text{Frob}_{U_0} \downarrow & \downarrow \sigma \\ U_0 \hookrightarrow & T. \end{array}$$

La propriété de cristal induit donc un isomorphisme

$$(\text{Frob}^* \mathcal{E})_{(U \hookrightarrow T)} \xrightarrow{\sim} \sigma^* \mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}.$$

Ainsi, si  $\mathcal{E} \in \underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma)$  est muni d'un morphisme  $\Phi : \text{Frob}^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , pour un tel  $(U \hookrightarrow T)$  muni d'un relèvement de Frobenius  $\sigma : T \rightarrow T$ , l'opérateur  $\Phi$  s'incarne en un morphisme  $\sigma^\#$ -linéaire de  $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}$  dans lui-même, où  $\sigma^\# : \mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_T$ .

## 1.2.2 La catégorie $\mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$

### 1.2.2.1 Définition de la catégorie

On définit dans cette section une catégorie de  $F$ -cristaux filtrés particulièrement adaptée aux modules de Dieudonné des groupes  $p$ -divisibles. Si  $\mathcal{E} \in \underline{\mathcal{M}od}(S/\Sigma)$  on note  $\mathcal{E}_S$  l'évaluation du cristal  $\mathcal{E}$  sur l'épaississement tautologique  $S \xrightarrow{\text{Id}} S$ . C'est un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de rang fini. On note  $\mathcal{E}_{S_0}$  la réduction modulo  $p$  de  $\mathcal{E}_S$ , c'est à dire l'évaluation de  $\mathcal{E}$  sur l'épaississement  $S_0 \xrightarrow{\text{Id}} S_0$ . On note  $\mathcal{E}_0$  la restriction de  $\mathcal{E}$  à  $\text{NCRIS}(S_0/\Sigma_0)$  c'est à dire aux épaississements annulés par  $p$ .

Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module il définit un  $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -module

$$i_{S/\Sigma*}\mathcal{F}$$

en posant  $(i_{S/\Sigma*}\mathcal{F})_{(U \hookrightarrow T)} = i_*a^*\mathcal{F}$  si  $a : U \rightarrow S$  est le morphisme structural et  $i : U \hookrightarrow T$ . Si

$$J_{S/\Sigma} \subset \mathcal{O}_{S/\Sigma}$$

désigne l'idéal à puissances divisées on a

$$\mathcal{O}_{S/\Sigma}/J_{S/\Sigma} = i_{S/\Sigma*}\mathcal{O}_S$$

et en fait  $i_{S/\Sigma*}\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_{S/\Sigma}/J_{S/\Sigma}$ -module. De même si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_{S_0}$ -module il définit un  $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma_0}$ -module  $i_{S_0/\Sigma_0*}\mathcal{F}$  sur  $\text{NCRIS}(S_0/\Sigma_0)$ .

**Définition 1.2.2.1.** La catégorie  $\mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$  consiste en les triplets  $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S)$  où

1.  $\mathcal{E}$  est un élément de  $\underline{\text{Mod}}(S/\Sigma)$ .
2.  $\Phi : \text{Frob}^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  et  $\Psi : \mathcal{E} \rightarrow \text{Frob}^*\mathcal{E}$  sont des morphismes vérifiant

$$\Phi \circ \Psi = p\text{Id} \quad \text{et} \quad \Psi \circ \Phi = p\text{Id}.$$

3.  $\text{Fil } \mathcal{E}_S \subset \mathcal{E}_S$  est un sous- $\mathcal{O}_S$ -module localement libre localement facteur direct.
4. Notons  $\text{Fil } \mathcal{E}_{S_0} \subset \mathcal{E}_{S_0} = \mathcal{E}_S/p\mathcal{E}_S$  la réduction modulo  $p$  de  $\text{Fil } \mathcal{E}_S$ . Soit  $\text{Fil } \mathcal{E}_0$  le sous  $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma_0}$ -module de  $\mathcal{E}_0$  qui est l'image réciproque de  $i_{S_0/\Sigma_0*}\text{Fil } \mathcal{E}_{S_0}$  via le morphisme

$$\mathcal{E}_0 \rightarrow i_{S_0/\Sigma_0*}\mathcal{E}_{S_0}$$

de réduction modulo  $J_{S_0/\Sigma_0}$ . On demande alors que les morphismes composés de  $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma_0}$ -modules

$$\text{Frob}^*\text{Fil } \mathcal{E}_0 \longrightarrow \text{Frob}^*\mathcal{E}_0 \xrightarrow{\Phi} \mathcal{E}_0$$

et

$$\mathcal{E}_0 \xrightarrow{\Psi} \text{Frob}^*\mathcal{E}_0 \longrightarrow \text{Frob}^*(\mathcal{E}_0/\text{Fil } \mathcal{E}_0)$$

soient nuls.

**Définition 1.2.2.2.** Soit  $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$ . On définit une filtration décroissante  $\text{Fil}^\bullet \mathcal{E}_S$  de  $\mathcal{E}_S$  en posant

$$\begin{cases} \text{Fil}^{-1} \mathcal{E}_S = \mathcal{E}_S \\ \text{Fil}^0 \mathcal{E}_S = \text{Fil } \mathcal{E}_S \\ \text{Fil}^1 \mathcal{E}_S = 0. \end{cases}$$

Notons

$$\alpha : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/J_{S/\Sigma}\mathcal{E} = i_{S/\Sigma*}\mathcal{E}_S.$$

On pose alors

$$\text{Fil } \mathcal{E} = \alpha^{-1}(i_{S/\Sigma*}\text{Fil } \mathcal{E}_S).$$

On définit la filtration décroissante  $\text{Fil}^\bullet \mathcal{E}$  du  $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -module  $\mathcal{E}$  comme étant

$$\begin{cases} \text{Fil}^{-1} \mathcal{E} = \mathcal{E} \\ \text{Fil}^0 \mathcal{E} = \text{Fil } \mathcal{E} \\ \text{Fil}^k \mathcal{E} = J_{S/\Sigma}^{[k+1]}\mathcal{E} + J_{S/\Sigma}^{[k]}\text{Fil } \mathcal{E} \quad \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Le faisceau  $\text{Fil } \mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -module contenant  $J_{S/\Sigma}\mathcal{E}$  tel que

$$\text{Fil } \mathcal{E}/J_{S/\Sigma}\mathcal{E} = i_{S/\Sigma*}\text{Fil } \mathcal{E}_S.$$

On a bien sûr

$$(\text{Fil}^\bullet \mathcal{E})_S = \text{Fil}^\bullet \mathcal{E}_S.$$

### 1.2.2.2 Lorsque Frobenius se relève en caractéristique 0

Le point (3) de la proposition suivante joue un rôle important dans la suite.

**Proposition 1.2.2.1.** *Soient  $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$  et  $(U \hookrightarrow T) \in \text{NCRIS}(S/\Sigma)$  avec  $T$  sans  $p$ -torsion muni d'un relèvement de Frobenius  $\sigma : T \rightarrow T$ . Notons*

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \quad \text{et} \quad \text{Fil } \mathcal{D} = \text{Fil } \mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}.$$

Soit  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  le morphisme  $\sigma^\#$ -linéaire déduit de  $\Phi$  et de  $\sigma$ .

1. Il y a une inclusion

$$\varphi(\text{Fil } \mathcal{D}) \subset p\mathcal{D}$$

2. Le faisceau

$$\frac{\varphi}{p}(\text{Fil } \mathcal{D}) + \varphi(\mathcal{D})$$

engendre le  $\mathcal{O}_T$ -module  $\mathcal{D}$ .

3. Soit  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_T$  l'idéal de  $U$  dans  $T$ . Supposons de plus que le relèvement de Frobenius  $\sigma$  soit tel que

$$\frac{\sigma^\#(\mathcal{I})}{p} \subset \mathcal{O}_T$$

engendre  $\mathcal{O}_T$  comme  $\mathcal{O}_T$ -module. Alors,

$$\frac{\varphi}{p}(\text{Fil } \mathcal{D})$$

engendre  $\mathcal{D}$  comme  $\mathcal{O}_T$ -module.

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{D}_0 := \mathcal{D}/p\mathcal{D} = (\mathcal{E}_0)_{(U_0 \hookrightarrow T_0)}$ . Le point (1) est alors une conséquence immédiate de ce que le composé

$$\text{Frob}^* \text{Fil } \mathcal{E}_0 \longrightarrow \text{Frob}^* \mathcal{E}_0 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}_0$$

est nul (cf. point (4) de la définition 1.2.2.1).

La nullité du morphisme composé

$$\mathcal{E}_0 \xrightarrow{\Psi} \text{Frob}^* \mathcal{E}_0 \longrightarrow \text{Frob}^*(\mathcal{E}_0/\text{Fil } \mathcal{E}_0)$$

entraîne que l'image de

$$\Psi_{U_0 \hookrightarrow T_0} : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{T_0}, \text{Frob}} \mathcal{O}_{T_0}$$

est contenue dans l'image de

$$\text{Fil } \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{T_0}, \text{Frob}} \mathcal{O}_{T_0} \longrightarrow \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{T_0}, \text{Frob}} \mathcal{O}_{T_0}.$$

Localement sur  $T$ , soit  $x \in \mathcal{D}$ . On peut donc écrire

$$\Psi_{U \hookrightarrow T}(x) = \sum_i y_i \otimes \lambda_i + p \sum_j z_j \otimes \mu_j$$

où pour tout  $i$ ,  $y_i \in \text{Fil } \mathcal{D}$  et pour tout  $j$ ,  $z_j \in \mathcal{D}$ . Puisque  $\Phi \circ \Psi = p$  on a alors

$$x = \frac{\varphi}{p} \circ \Psi_{U \hookrightarrow T}(x) = \sum_i \lambda_i \frac{\varphi(y_i)}{p} + \sum_j \mu_j \varphi(z_j).$$

Le point (2) s'en déduit.

Sous l'hypothèse du point (3), localement sur  $T$  on peut écrire

$$1 = \sum_k \nu_k \frac{\varphi(w_k)}{p}$$

où pour tout  $k$ ,  $w_k \in \mathcal{I}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathcal{D}$  on a

$$\varphi(x) = \sum_k \nu_k \frac{\varphi(w_k x)}{p}$$

où pour tout  $k$ ,  $w_k x \in \mathcal{I}\mathcal{D} \subset \text{Fil } \mathcal{D}$ . Le point (3) se déduit alors du point (2).  $\square$

### 1.2.2.3 Le $F$ -module filtré associé à un groupe $p$ -divisible

Soit  $G$  un groupe  $p$ -divisible sur  $S$ . On note  $\mathbb{D}(G_{S_0})$  son module de Dieudonné covariant vu comme un cristal sur  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$ . Comme l'indique la notation il ne dépend que de la réduction modulo  $p$  de  $G$ . Il y a une identification

$$\mathbb{D}(G_{S_0}^{(p)}) = \text{Frob}^* \mathbb{D}(G_{S_0}).$$

Le morphisme de Frobenius  $F : G_{S_0} \rightarrow G_{S_0}^{(p)}$  induit alors

$$\Psi : \mathbb{D}(G_{S_0}) \longrightarrow \text{Frob}^* \mathbb{D}(G_{S_0}).$$

Le Verschiebung  $V : G_{S_0}^{(p)} \rightarrow G_{S_0}$  induit

$$\Phi : \text{Frob}^* \mathbb{D}(G_{S_0}) \longrightarrow \mathbb{D}(G_{S_0}).$$

Si  $E(G)$  désigne l'extension vectorielle universelle de  $G$  ([Mes72]) on a

$$\mathbb{D}(G_{S_0})_S = \text{Lie } E(G).$$

Posons

$$\text{Fil } \mathbb{D}(G_{S_0})_S = \text{Lie}(G^\vee)^*,$$

où  $G^\vee$  désigne le dual de Cartier de  $G$ . Il s'agit de la partie vectorielle de l'extension vectorielle universelle de  $G$ . On a

$$\mathbb{D}(G_{S_0})_S / \text{Fil } \mathbb{D}(G_{S_0})_S = \text{Lie}(G).$$

**Proposition 1.2.2.2.** *Pour un groupe  $p$ -divisible  $G$  sur  $S$  on a  $(\mathbb{D}(G_{S_0}), \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathbb{D}(G_{S_0})_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$ .*

*Démonstration.* Seul le point (4) de la définition 1.2.2.1 demande vérification. Soit  $(U \hookrightarrow T)$  avec  $T$  affine annulé par  $p$ . Soit  $\tilde{G}_U$  un relèvement à  $T$  du groupe  $p$ -divisible  $G_U$ . Soit  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_T$  l'idéal de  $U$  dans  $T$ . Notons  $\mathcal{D} = \mathbb{D}(G_{S_0})_{(U \hookrightarrow T)}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \text{Fil } \mathcal{D} &= \text{Lie}(\tilde{G}_U^\vee)^* + \mathcal{I} \cdot \mathcal{D} \\ \mathcal{D} / \text{Fil } \mathcal{D} &= \text{Lie } G_U. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{I}$  est muni de puissances divisées, pour tout  $x \in \mathcal{I}$  on a  $x^p = 0$ . Pour vérifier que le composé

$$\text{Fil } \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_T, \text{Frob}} \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_T, \text{Frob}} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D}$$

est nul il suffit de vérifier que le composé

$$\text{Lie}(\tilde{G}_U^\vee)^* \otimes_{\mathcal{O}_T, \text{Frob}} \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_T, \text{Frob}} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D}$$

l'est. Mais ce morphisme n'est rien d'autre que le morphisme induit au niveau des algèbres de Lie par  $F : \tilde{G}_U^\vee \rightarrow (\tilde{G}_U^\vee)^{(p)}$ . Il est donc nul.

Le morphisme composé

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_T, \text{Frob}} \mathcal{O}_T \longrightarrow (\mathcal{D} / \text{Fil } \mathcal{D}) \otimes_{\mathcal{O}_T, \text{Frob}} \mathcal{O}_T$$

s'écrit comme le composé

$$\mathcal{D} \rightarrow \text{Lie } \tilde{G}_U \xrightarrow{\text{Lie}(F)} \text{Lie } \tilde{G}_U \otimes_{\mathcal{O}_T, \text{Frob}} \mathcal{O}_T \rightarrow \text{Lie } G_U \otimes_{\mathcal{O}_T, \text{Frob}} \mathcal{O}_T.$$

Où  $\text{Lie}(F)$  est le morphisme induit au niveau des algèbres de Lie par  $F : \tilde{G}_U \rightarrow \tilde{G}_U^{(p)}$ . Il est donc nul.  $\square$

On a donc défini un foncteur  $\mathbb{Z}_p$ -linéaire module de Dieudonné filtré

$$\mathbb{D}\mathbb{F} : \text{BT}_S \longrightarrow \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R).$$

**Exemple 1.2.2.1.**

1.  $\mathbb{D}\mathbb{F}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$  est donné par
  - $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{S/\Sigma}$
  - $\Phi : \mathcal{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{\times p} \mathcal{O}_{S/\Sigma}$  et  $\Psi : \mathcal{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{O}_{S/\Sigma}$
  - $\text{Fil } \mathcal{E}_S = \mathcal{O}_S$ .
2.  $\mathbb{D}\mathbb{F}(\widehat{\mathbb{G}}_m)$  est donné par
  - $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{S/\Sigma}$
  - $\Phi : \mathcal{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{O}_{S/\Sigma}$  et  $\Psi : \mathcal{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{\times p} \mathcal{O}_{S/\Sigma}$
  - $\text{Fil } \mathcal{E}_S = 0$ .

**1.2.2.4 Dual de Cartier**

Soit  $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$ . On définit son dual de Cartier comme étant

$$(\mathcal{E}^\vee, \Psi^\vee, \Phi^\vee, (\text{Fil } \mathcal{E}_S)^\perp).$$

On vérifie que c'est encore un objet de  $\mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$ . On vérifie de plus en utilisant les résultats du chapitre 5 de [BBM82] que si  $G \in \text{BT}_S$  alors le dual de Cartier de  $\mathbb{D}\mathbb{F}(G)$  s'identifie canoniquement à  $\mathbb{D}\mathbb{F}(G^\vee)$ .

**1.2.3 Représentation galoisienne associée à un objet de  $\mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$**

Soit  $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$ . Posons

$$E = \Gamma(A_{\text{cris}}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{R}, \mathcal{E})$$

muni de la filtration

$$\text{Fil}^\bullet E = \Gamma(A_{\text{cris}}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{R}, \text{Fil}^\bullet \mathcal{E}).$$

C'est un  $A_{\text{cris}}(\overline{R})$ -module localement libre de rang fini sur  $\text{Spf}(A_{\text{cris}}(\overline{R}))$  muni d'un endomorphisme  $\varphi$ -semi-linéaire  $\varphi : E \rightarrow E$  déduit de  $\Phi$ , et d'une action semi-linéaire de  $\Gamma$ , i.e. pour  $\sigma \in \Gamma$ , le morphisme  $\sigma : E \rightarrow E$  est associée au morphisme dans  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$  :

$$(A_{\text{cris}}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{R}) \xrightarrow{(\sigma, \sigma)} (A_{\text{cris}}(\overline{R}) \twoheadrightarrow \widehat{R}).$$

Cette action commute à  $\varphi$  en vertu de la functorialité de  $\varphi$  et  $\text{Fil}^\bullet E$  est stable sous  $\Gamma$ . On note  $\text{Fil } E := \text{Fil}^0 E$  qui détermine complètement  $\text{Fil}^\bullet E$ . Si  $M = \Gamma(S, \mathcal{E}_S)$  et  $\text{Fil } M = \Gamma(S, \text{Fil } \mathcal{E}_S)$  on a

$$E/\text{Fil}^1 A_{\text{cris}} E = M \otimes_R \widehat{R} \quad \text{et} \quad \text{Fil } E/\text{Fil}^1 A_{\text{cris}} E = \text{Fil } M \otimes_R \widehat{R}.$$

**Exemple 1.2.3.1.**

- (1) Si  $\mathcal{E} = \mathbb{D}\mathbb{F}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ , on a  $E = A_{\text{cris}}(\overline{R}) \cdot e$  où :
  - Le Frobenius est  $\varphi e = pe$  ;
  - L'action de  $\Gamma$  est  $\sigma e = e$ , pour  $\sigma \in \Gamma$  ;
  - La filtration est  $\text{Fil}^n E = \text{Fil}^n A_{\text{cris}}(\overline{R}) \cdot e$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- (2) Si  $\mathcal{E} = \mathbb{D}\mathbb{F}(\widehat{\mathbb{G}}_m)$ , on a  $E = A_{\text{cris}}(\overline{R}) \cdot e$  où :
  - Le Frobenius est  $\varphi e = e$  ;
  - L'action de  $\Gamma$  est  $\sigma e = e$ , pour  $\sigma \in \Gamma$  ;
  - La Filtration est  $\text{Fil}^n E = \text{Fil}^{n+1} A_{\text{cris}}(\overline{R}) \cdot e$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Définition 1.2.3.1.** On définit deux foncteurs

$$\begin{aligned} T_p : \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R) &\longrightarrow \mathbb{Z}_p[\Gamma] \text{-modules} \\ (\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S) &\longmapsto (\text{Fil } E)^{\varphi=p} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_p : \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R) &\longrightarrow \mathbb{Q}_p[\Gamma] \text{-modules} \\ (\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S) &\longmapsto T_p(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S)[1/p]. \end{aligned}$$

Dans la suite on abrège  $T_p(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S)$  en  $T_p(\mathcal{E})$ . On peut réécrire le foncteur  $T_p$  sous la forme

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\varphi, \text{Fil}}(\mathbb{DF}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_{A_{\text{cris}} \rightarrow \widehat{R}}, E) &\xrightarrow{\sim} T_p(\mathcal{E}) \\ f &\longmapsto f(e) \end{aligned}$$

où  $\mathbb{DF}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_{A_{\text{cris}} \rightarrow \widehat{R}} = A_{\text{cris}} \cdot e$  (cf. exemple 1.2.3.1).

**Remarque 1.2.3.1.** Supposons que  $\Gamma(S, \text{Fil } \mathcal{E}_S)$  et  $\Gamma(S, \mathcal{E}_S/\text{Fil } \mathcal{E}_S)$  soient des  $R$ -modules libres de rang  $n-r$  et  $r$  respectivement. Alors,  $E$  est un  $A_{\text{cris}}(\widehat{R})$ -module libre de rang  $n$ . On peut de plus trouver une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$  telle que

$$\text{Fil } E = \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} e_1 \oplus \cdots \oplus \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} e_r \oplus A_{\text{cris}} e_{r+1} \oplus \cdots \oplus A_{\text{cris}} e_n.$$

La filtration  $\text{Fil}^\bullet E$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} \forall i < 0 \quad \text{Fil}^i E &= E \\ i = 0 \quad \text{Fil}^0 E &= \text{Fil } E \\ \forall i > 0 \quad \text{Fil}^i E &= \text{Fil}^{i+1} A_{\text{cris}} e_1 \oplus \cdots \oplus \text{Fil}^{i+1} A_{\text{cris}} e_r \oplus \text{Fil}^i A_{\text{cris}} e_{r+1} \oplus \cdots \oplus \text{Fil}^i A_{\text{cris}} e_n. \end{aligned}$$

## 1.3 Théorème de comparaison

### 1.3.1 L'énoncé du théorème

On généralise un théorème de comparaison de Faltings ([Fal99] théorème 5) en remplaçant par l'anneau  $R$  l'anneau de valuation discrète complet qu'il utilise.

**Théorème 1.3.1.1.** Soit  $R$  une  $\mathbb{Z}_p$ -algèbre noethérienne,  $p$ -adiquement complète, normale, intègre et sans  $p$ -torsion. Soit  $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$ . On suppose de plus que  $\Gamma(S, \text{Fil } \mathcal{E}_S)$  et  $\Gamma(S, \mathcal{E}_S/\text{Fil } \mathcal{E}_S)$  sont des  $R$ -modules libres. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées.

1. Le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $T_p(\mathcal{E})$  est libre de même rang que celui de  $\mathcal{E}$ .
2. Si  $E = \mathcal{E}_{A_{\text{cris}}(\widehat{R}) \rightarrow \widehat{R}}$ , le morphisme naturel de  $A_{\text{cris}}(\widehat{R})$ -modules filtrés

$$T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\text{cris}}(\widehat{R}) \longrightarrow E$$

est injectif strictement compatible aux filtrations et de conoyau annulé par  $t$ .

On détaillera la démonstration de ce théorème plus loin, démonstration qui est essentiellement celle de l'acticle de Faltings. Notons d'abord le corollaire immédiat suivant.

**Corollaire 1.3.1.1.** Avec les mêmes hypothèses que celles du Théorème 1.3.1.1, on a un isomorphisme

$$V_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\widehat{R}) \xrightarrow{\sim} E \otimes_{A_{\text{cris}}(\widehat{R})} B_{\text{cris}}(\widehat{R})$$

qui est compatible aux filtrations, aux actions de  $\Gamma$  et aux morphismes de Frobenius si on munit le membre de gauche du Frobenius  $p \otimes \varphi$  et celui de droite de  $\varphi \otimes \varphi$ .

Soit  $H$  un groupe  $p$ -divisible sur  $R$ . Notons  $T_p(H)$  le module de Tate associé à  $H$  et  $V_p(H) := T_p(H)[1/p]$ . Ces modules de Tate sont associés au choix fait au tout début d'une clôture algébrique de  $\text{Frac}(R)$  (cf. section 1.1.1). On a

$$T_p(H) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H_{\widehat{R}}).$$

L'application

$$\text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H_{\widehat{R}}) \rightarrow \text{Hom}_{\varphi, \text{Fil}}(\mathbb{DF}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_{A_{\text{cris}} \rightarrow \widehat{R}}, \mathbb{DF}(H)_{A_{\text{cris}} \rightarrow \widehat{R}}) = T_p(\mathbb{DF}(H))$$

induit un morphisme de  $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$ -modules

$$\beta_H : T_p(H) \rightarrow T_p(\mathbb{DF}(H)).$$

**Corollaire 1.3.1.2.** *Supposons que  $\text{Lie } H$  et  $\text{Lie}(H^\vee)$  soient des  $R$ -modules libres. Le morphisme de périodes*

$$\beta_H : T_p(H) \rightarrow T_p(\mathbb{DF}(H))$$

*est alors un isomorphisme.*

On reporte la preuve de ce corollaire à la fin de ce chapitre.

### 1.3.2 Préparatifs à la preuve

Sous les hypothèses du théorème 1.3.1.1, posons

$$E = \mathcal{E}_{A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{R}}.$$

C'est un  $A_{\text{cris}}$ -module libre. Il possède de plus une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  telle que

$$\text{Fil } E = \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} e_1 \oplus \cdots \oplus \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} e_r \oplus A_{\text{cris}} e_{r+1} \oplus \cdots \oplus A_{\text{cris}} e_n.$$

D'après le point (1) de la proposition 1.2.2.1  $\varphi(\text{Fil } E) \subset pE$ . On note

$$\varphi_1 = \frac{\varphi}{p} : \text{Fil } E \longrightarrow E.$$

Le point (3) de la proposition 1.2.2.1 et le lemme 1.1.2.6 entraînent la proposition suivante.

**Proposition 1.3.2.1.** *La collection  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r), \varphi_1(e_{r+1}), \dots, \varphi_1(e_n))$  est une base de  $E$ .*

On note dans la suite  $\delta_i = 1$  si  $1 \leq i \leq r$ , et  $\delta_i = 0$ , si  $r+1 \leq i \leq n$ . Pour

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \text{Fil } E$$

on a la formule

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_{\delta_i}(x_i) \varphi_{1-\delta_i}(e_i).$$

Pour  $r \in \mathbb{N}$  on définit  $\text{Fil}(E/p^{r+1}E)$  comme étant l'image de  $\text{Fil } E$  dans  $E/p^{r+1}E$  c'est à dire

$$E/p^{r+1}E = \mathcal{E}_{A_{\text{cris}}/p^{r+1}A_{\text{cris}} \rightarrow \overline{R}/p^{r+1}\overline{R}}$$

et

$$\text{Fil}(E/p^{r+1}E) = (\text{Fil } \mathcal{E})_{A_{\text{cris}}/p^{r+1}A_{\text{cris}} \rightarrow \overline{R}/p^{r+1}\overline{R}}.$$

Puisque  $E/\text{Fil } E$  est sans  $p$ -torsion on a  $\text{Fil } E \cap p^{r+1}E = p^{r+1}\text{Fil } E$ . L'opérateur semi-linéaire  $\varphi_1 : \text{Fil } E \rightarrow E$  fournit donc par réduction modulo  $p^{r+1}$  un opérateur semi-linéaire

$$\varphi_1 : \text{Fil}(E/p^{r+1}E) \longrightarrow E/p^{r+1}E.$$

On vérifie facilement le lemme qui suit.

**Lemme 1.3.2.1.** *Pour  $0 \leq i < p - 1$  on a  $\varphi_i(\text{Fil}^p A_{\text{cris}}) \subset pA_{\text{cris}}$ .*

Notons  $\text{Fil}(E/(p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E))$  pour l'image de  $\text{Fil} E$  dans  $E/(p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E)$ . Les modules  $E/(p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E)$  et  $\text{Fil}(E/(p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E))$  sont les évaluations des modules  $\mathcal{E}$  et  $\text{Fil} \mathcal{E}$  sur l'épaississement

$$\theta : A_{\text{cris}}/(p^{r+1}A_{\text{cris}} + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}) \rightarrow \overline{R}/p^{r+1}R.$$

Comme précédemment, puisque  $E/\text{Fil} E$  est sans  $p$ -torsion, on a

$$\text{Fil} E \cap (p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E) = p^{r+1} \text{Fil} E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E.$$

On déduit donc du lemme précédent que  $\varphi_1 : \text{Fil} E \rightarrow E$  induit un opérateur semi-linéaire

$$\varphi_1 : \text{Fil}(E/(p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E)) \longrightarrow E/(p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E).$$

### 1.3.3 Démonstration du point (1) du Théorème 1.3.1.1

On montre dans cette sous-section que  $\dim_{\mathbb{Z}_p}(\text{Fil} E)^{\varphi_1 = \text{Id}} = n$ . La preuve se divise en trois étapes.

1. On montre dans le lemme 1.3.3.1 que

$$\text{Fil}(E/pE)^{\varphi_1 = \text{Id}} \xrightarrow{\sim} \text{Fil}(E/pE + \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E)^{\varphi_1 = \text{Id}}.$$

2. On montre dans le lemme 1.3.3.3 que  $\dim_{\mathbb{F}_p} \text{Fil}(E/pE + \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E)^{\varphi_1 = \text{Id}} = n$ .

3. On montre dans le lemme 1.3.3.6 que  $(\text{Fil} E)^{\varphi_1 = \text{Id}} \rightarrow \text{Fil}(E/pE)^{\varphi_1 = \text{Id}}$  est surjectif.

Cela nous permettra de conclure car  $(\text{Fil} E)^{\varphi_1 = \text{Id}}$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module  $p$ -adiquement complet sans  $p$ -torsion et  $\ker((\text{Fil} E)^{\varphi_1 = \text{Id}} \rightarrow \text{Fil}(E/pE)^{\varphi_1 = \text{Id}}) = p(\text{Fil} E)^{\varphi_1 = \text{Id}}$ .

Commençons par la première étape.

**Lemme 1.3.3.1.**

(1) *L'application de réduction modulo  $\text{Fil}^p A_{\text{cris}}$  induit un isomorphisme*

$$\text{Fil}(E/pE)^{\varphi_1 = \text{Id}} \xrightarrow{\sim} \text{Fil}(E/(pE + \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E))^{\varphi_1 = \text{Id}}.$$

(2) *Similairement, pour  $r \in \mathbb{N}$ ,*

$$\text{Fil}(E/p^{r+1}E)^{\varphi_1 = \text{Id}} \xrightarrow{\sim} \text{Fil}(E/(p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E))^{\varphi_1 = \text{Id}}.$$

*Démonstration.* Utilisant le lemme 1.3.2.1 il est aisé de vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \text{Fil}(E/(p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{\text{cris}}E))^{\varphi_1 = \text{Id}} &\longrightarrow \text{Fil}(E/p^{r+1}E)^{\varphi_1 = \text{Id}} \\ x &\longmapsto \varphi_1(\tilde{x}), \end{aligned}$$

où  $\tilde{x} \in \text{Fil}(E/p^{r+1}E)$  est un relèvement quelconque de  $x$ , est bien définie indépendamment du choix d'un tel relèvement et est un inverse à l'application de réduction modulo  $\text{Fil}^p A_{\text{cris}}$ .  $\square$

On vérifie que pour  $0 \leq i < p$ ,  $\varphi_i : \text{Fil}^i A_{\text{cris}} \rightarrow A_{\text{cris}}$  passe au quotient en une application de  $\text{Fil}^i A_{\text{cris}} + pA_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}} + \text{Fil}^p A_{\text{cris}}$  dans lui-même.

**Lemme 1.3.3.2.** *Munissons  $\overline{R}/p\overline{R}$  de la filtration suivante : pour  $i \geq 0$*

$$\text{Fil}^i \overline{R}/p\overline{R} = p^{i/p} \overline{R}/p\overline{R}.$$

*Munissons le également des Frobenius divisés : pour  $0 \leq i < p$*

$$\forall \overline{x} \in \text{Fil}^i \overline{R}/p\overline{R}, \varphi_i(\overline{x}) = \frac{x^p}{(-p)^i} \text{ mod } p.$$

*Il existe alors un isomorphisme d'anneaux*

$$\gamma : A_{\text{cris}}(\overline{R})/(pA_{\text{cris}}(\overline{R}) + \text{Fil}^p A_{\text{cris}}(\overline{R})) \xrightarrow{\sim} \overline{R}/p\overline{R}$$

*compatible à la filtration image de celle de  $A_{\text{cris}}$  et aux Frobenius divisés  $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq p-1}$ .*

*Démonstration.* On a un homomorphisme naturel surjectif :

$$\alpha : W(S) \longrightarrow A_{cris}/\text{Fil}^p A_{cris}$$

de noyau  $\ker(\alpha) = W(S) \cap \text{Fil}^p A_{cris} = \xi^p W(S)$ . En effet, soit

$$x = \sum_{n \geq p} a_n \frac{\xi^n}{n!} \in W(S) \cap \text{Fil}^p A_{cris}.$$

Alors  $\theta(x) = 0$  et donc  $x = \xi \cdot b$ , où  $b \in W(S)$ . Puisque l'élément  $\xi$  est régulier dans  $B_{dR}^+(\overline{R})$ , on a dans  $B_{dR}^+(\overline{R})$

$$b = \sum_{n \geq p} a_n \frac{\xi^{n-1}}{n!}.$$

La formule précédente implique que  $\theta(b) = 0$ . Par récurrence sur  $j$ ,  $0 \leq j \leq p$ , on montre ainsi que  $x = \xi^j b_j$  où  $b_j \in W(S)$  s'écrit dans  $B_{dR}^+(\overline{R})$

$$b_j = \sum_{n \geq p} a_n \frac{\xi^{n-j}}{n!}.$$

On conclut que  $x \in \xi^p W(S)$ .

L'homomorphisme  $\alpha$  induit modulo  $p$  un isomorphisme qu'on note encore  $\alpha$  :

$$\alpha : S/p^p = W(S)/(p, \xi^p) \xrightarrow{\sim} A_{cris}(\overline{R})/(p, \text{Fil}^p A_{cris}(\overline{R})).$$

Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \beta : S/p^p S &\longrightarrow \overline{R}/p\overline{R} \\ x \bmod p^p &\longmapsto x_1. \end{aligned}$$

On affirme que  $\beta$  est un isomorphisme d'anneaux. D'après la définition de  $S$ , on voit aussitôt que  $\beta$  est un homomorphisme d'anneaux. La surjectivité de  $\beta$  est due à la surjectivité du Frobenius sur  $\overline{R}/p\overline{R}$ . Concernant l'injectivité, il suffit d'utiliser l'argument suivant. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \widehat{\overline{R}}$ ,

$$x^{p^i} \in p\widehat{\overline{R}} \implies x \in p^{1/p^i} \widehat{\overline{R}}.$$

Soit en effet un tel  $x$ . Écrivons  $x = a + pb$  avec  $a \in \overline{R}$  et  $b \in \widehat{\overline{R}}$ . L'hypothèse  $x^{p^i} \in p\widehat{\overline{R}}$  implique que  $a^{p^i} \in p\widehat{\overline{R}} \cap \overline{R} = p\overline{R}$ . Puisque  $\overline{R}$  est intégralement clos,  $a \in p^{1/p^i} \overline{R}$ , d'où le résultat pour  $x$ .

En composant  $\beta$  avec  $\alpha^{-1}$ , on obtient l'isomorphisme  $\gamma = \beta \circ \alpha^{-1}$  désiré. Il reste à vérifier les compatibilités aux filtrations et aux Frobenius divisés. La compatibilité aux filtrations est évidente puisque  $\gamma(\xi^i) = (-p^{1/p})^i$ . Pour la compatibilité aux Frobenius divisés  $\varphi_i$ , il suffit de vérifier que  $\varphi_i \circ \gamma(\xi^i) = \gamma \circ \varphi_i(\xi^i)$  pour  $0 \leq i \leq p-1$ , car les Frobenius  $\varphi_i$  sur  $A_{cris}(\overline{R})/(p, \text{Fil}^p A_{cris}(\overline{R}))$  et  $\overline{R}/p\overline{R}$  sont tous des homomorphismes semi-linéaires. Cela ne pose pas de problème.  $\square$

Ainsi l'épaississement de  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$  donné par

$$\theta : A_{cris}/(pA_{cris} + \text{Fil}^p A_{cris}) \twoheadrightarrow \widehat{\overline{R}}/p\widehat{\overline{R}}$$

s'identifie à l'épaississement

$$\overline{R}/p\overline{R} \xrightarrow{\text{Frob}} \overline{R}/p\overline{R}.$$

On note désormais

$$\tilde{\gamma} : A_{cris} \longrightarrow A_{cris}/(pA_{cris} + \text{Fil}^p A_{cris}) \xrightarrow{\gamma} \overline{R}/p\overline{R}.$$

**Lemme 1.3.3.3.** *On a l'égalité*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \text{Fil}(E/(pE + \text{Fil}^p A_{\text{cris}} E))^{\varphi_1 = \text{Id}} = n.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\text{Fil}(E \otimes_{A_{\text{cris}, \tilde{\gamma}}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1 = \text{Id}}$  est de cardinal  $pn$ . Soit

$$x = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i e_i \in \text{Fil}(E \otimes_{A_{\text{cris}, \tilde{\gamma}}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1 = \text{Id}}$$

où  $x_1, \dots, x_r \in p^{1/p}\overline{R}$  et  $x_{r+1}, \dots, x_n \in \overline{R}$ . Soit

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{GL}_n(\overline{R}/p\overline{R})$$

la matrice de passage de la base  $(\varphi_{1-\delta_i}(e_i))_i$  à la base  $(e_i)_i$  de  $E \otimes_{A_{\text{cris}, \tilde{\gamma}}} \overline{R}/p\overline{R}$ , i.e.

$$e_j = \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij} \varphi_{1-\delta_i}(e_i)$$

pour  $1 \leq j \leq n$ , avec  $a_{ij} \in \overline{R}$ . Alors la matrice relevée  $(a_{ij})_{i,j} \in \text{GL}_n(\overline{R})$ .

L'équation  $\varphi_1(x) = x$  s'écrit

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{\delta_i}(\bar{x}_i) \varphi_{1-\delta_i}(e_i) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \bar{a}_{ij} \bar{x}_j \varphi_{1-\delta_i}(e_i).$$

Cela est équivalent au système d'équations

$$\begin{aligned} \forall i \leq r, x_i^p &\equiv -p \sum_j a_{ij} x_j \pmod{p^2}, \\ \forall i > r, x_i^p &\equiv \sum_j a_{ij} x_j \pmod{p}. \end{aligned}$$

On montre dans le lemme 1.3.3.4 qu'il y a un unique relèvement  $(y_i)_i \in \overline{R}^n$  des  $(\bar{x}_i)_i \in (\overline{R}/p\overline{R})^n$  tel que  $y_i^p = (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{i,j} y_j$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Posons

$$B = \overline{R}[U_1, \dots, U_n] / (U_i^p - (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} U_j)_i$$

qui est une  $R$ -algèbre finie et plate sur  $\overline{R}$  d'après le lemme 1.3.3.5 qui suit. On en déduit une bijection

$$\begin{aligned} \text{Fil}(E \otimes_{A_{\text{cris}}(\overline{R})} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1 = \text{Id}} &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\overline{R}}(B, \overline{R}) \\ (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) &\mapsto [U_i \mapsto y_i] \end{aligned}$$

On montre maintenant que  $B[1/p] \simeq \overline{R}[1/p]^{p^n}$ . On peut choisir une extension finie  $R' \subset \overline{R}$  de  $R$ , telle que  $B$  provient du changement de base de  $R'$ , i.e.  $B = B' \otimes_{R'} \overline{R}$ , où

$$B' = R'[U_1, \dots, U_n] / (U_i^p - (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} U_j)_i.$$

D'après la définition de  $\overline{R}$ , il suffit alors de montrer que  $B'[1/p]$  est étale sur  $R'[1/p]$ .

La matrice jacobienne associée à la présentation de  $B'$  écrite ci-dessus est

$$\Delta = \text{diag}(pU_i^{p-1})_{1 \leq i \leq n} - \text{diag}((-p)^{\delta_i})_{1 \leq i \leq n} \cdot A$$

Alors,

$$\text{diag}((-p)^{-\delta_i})_{1 \leq i \leq n} \cdot \Delta = \text{diag}((-1)^{-\delta_i} p^{1-\delta_i} U_i^{p-1})_{1 \leq i \leq n} - A$$

Si  $1 \leq i \leq r$ ,  $U_i^p \in pB'$  et donc  $p^{1-\delta_i}U_i^{p-1}$  est  $p$ -adiquement topologiquement nilpotent. Si  $r < i \leq n$ ,  $p^{1-\delta_i}U_i^{p-1} = pU_i^{p-1}$  qui l'est donc également. Comme  $A$  est inversible et la matrice diagonale du terme à droite de l'équation précédente est  $p$ -adiquement topologiquement nilpotente dans l'anneau  $B'$  qui est  $p$ -adiquement complet car fini sur  $R'$ , la matrice  $\Delta$  est inversible dans  $B'[1/p]$ . D'où le résultat.

Le normalisé  $\tilde{B}$  de  $B$  est donc isomorphe à  $\overline{R}^{pn}$  ce qui implique que

$$\text{Fil}(E \otimes_{A_{\text{cris}}(\overline{R}), \tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1 = \text{Id}} = \text{Hom}_{\overline{R}}(\tilde{B}, \overline{R})$$

est de cardinal  $pn$ . □

**Lemme 1.3.3.4.** *Soit  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{GL}_n(\overline{R})$ . Soit  $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \overline{R}^n$  vérifiant les congruences*

$$\begin{aligned} \forall i \leq r, x_i^p &\equiv -p \sum_j a_{ij} x_j \pmod{p^2}, \\ \forall i > r, x_i^p &\equiv \sum_j a_{ij} x_j \pmod{p}. \end{aligned}$$

Il existe alors une unique collection  $(y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \overline{R}^n$  congruente à  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  modulo  $p$  telle que

$$\begin{aligned} \forall i \leq r, y_i^p &= -p \sum_j a_{ij} y_j, \\ \forall i > r, y_i^p &= \sum_j a_{ij} y_j. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une variante de la méthode de Newton faisant intervenir des congruences modulo  $p$  et  $p^2$  simultanément. Pour  $\epsilon \geq 1$ ,  $\epsilon \in \mathbb{Q}$ , et  $(y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \overline{R}^n$  vérifiant  $y_i \in p^{\delta_i/p}\overline{R}$ , remarquons que les quantités

$$y_i^p \pmod{p^{\epsilon+\delta_i}} \quad \text{et} \quad (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} y_j \pmod{p^{\epsilon+\delta_i}}$$

ne dépendent que de la classe de congruence modulo  $p^\epsilon$  de  $(y_i)_i$ . Pour un tel  $\epsilon$ , on dit alors que

$$(\bar{y}_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{1 \leq i \leq n} p^{\delta_i/p}\overline{R}/p^\epsilon\overline{R}$$

est une solution du système d'équations  $(E_\epsilon)$  si

$$\forall i, y_i^p \equiv (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} y_j \pmod{p^{\epsilon+\delta_i}}.$$

Soit  $(\bar{y}_i)_i$  une solution de  $(E_\epsilon)$ . Montrons que pour  $\epsilon' \in ]\epsilon, \epsilon + \frac{p-1}{p}[$ , il existe une unique solution

$$(\bar{y}'_i)_i \in \prod_{1 \leq i \leq n} p^{\delta_i/p}\overline{R}/p^{\epsilon'}\overline{R}$$

de  $(E_{\epsilon'})$  qui relève  $(\bar{y}_i)_i$ .

Pour  $1 \leq i \leq n$ , on cherche  $y'_i$  sous la forme  $y'_i = y_i + p^\epsilon b_i$ . On vérifie que l'hypothèse  $\epsilon' \in ]\epsilon, \epsilon + \frac{p-1}{p}[$  implique que

$$y_i'^p \equiv y_i^p \pmod{p^{\epsilon+\delta_i}}.$$

Pour tout  $i$ , notons  $z_i \in \overline{R}$  tel que

$$y_i^p - (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} y_j = p^{\epsilon+\delta_i} z_i.$$

Dire que  $(\bar{y}'_i)_i$  est solution de  $(E_{\epsilon'})$  est alors équivalent à ce que pour tout  $i$  on ait

$$z_i \equiv (-1)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} b_j \pmod{p^{\epsilon' - \epsilon}}.$$

Si  $A = ((-1)^{\delta_i} a_{ij})_{i,j} \in \text{GL}_n(\bar{R})$ ,  $Z$  est le vecteur colonne  $(z_i)_i$  et  $W$  le vecteur colonne  $(b_i)_i$ , cela est encore équivalent à ce que

$$Z \equiv A.W \pmod{p^{\epsilon' - \epsilon}}$$

soit encore

$$W \equiv A^{-1}.Z \pmod{p^{\epsilon' - \epsilon}}.$$

Le résultat s'en déduit.  $\square$

**Lemme 1.3.3.5.** *Soit  $A$  un anneau,  $n \geq 1$  et  $d \geq 2$  deux entiers et  $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$ . Posons pour  $1 \leq i \leq n$ ,*

$$f_i = U_i^d - \sum_{j=1}^n a_{ij} U_j \in A[U_1, \dots, U_n].$$

Alors, la  $A$ -algèbre

$$B = A[U_1, \dots, U_n] / (f_i)_{1 \leq i \leq n}$$

est un  $A$ -module libre de base les images des  $\{U_1^{i_1} \cdots U_n^{i_n} \mid 0 \leq i_k < d, k = 1, \dots, n\}$ .

*Démonstration.* Le fait que les éléments annoncés engendrent le  $A$ -module  $B$  ne pose pas de problème. Il reste à vérifier qu'ils sont linéairement indépendants. Soit  $C = A[U_1, \dots, U_n]$  l'anneau des polynômes à  $n$  variables. Soient  $(g_i)_{1 \leq i \leq n} \in C^n$  tels que  $\sum_{i=1}^n g_i f_i$  soit une combinaison linéaire de  $(U_1^{i_1} \cdots U_n^{i_n})_{0 \leq i_k < d}$ . On veut montrer que  $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 0$ .

Posons  $m = \max_{1 \leq i \leq n} (\deg g_i)$ . Soit  $g_{i,m}$  la partie homogène de degré  $m$  de  $g_i$ . En considérant la partie homogène de degré  $m + d$  de  $\sum_{i=1}^n f_i g_i$ , on a  $\sum_{i=1}^n g_{i,m} U_i^d = 0$ . On peut donc écrire  $g_{i,m}$  sous la forme  $g_{i,m} = \sum_{j=1, j \neq i}^n h_{ij} U_j^d$ , où  $h_{ij} \in C$  est homogène tel que  $h_{ij} + h_{ji} = 0$  pour  $i \neq j$ . Posons  $\psi_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n h_{ij} f_j$ ,  $1 \leq i \leq n$ , on a

$$\sum_i \psi_i f_i = \sum_{i \neq j} h_{ij} f_j f_i = \sum_{i < j} (h_{ij} + h_{ji}) f_i f_j = 0.$$

Posons  $g'_i = g_i - \psi_i$ . On obtient  $\sum_{i=1}^n g'_i f_i = \sum_{i=1}^n g_i f_i$  et  $\max_i \deg g'_i < m$ . Alors par récurrence sur  $m$ , on peut supposer  $m = 0$ . Cela implique que  $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 0$ .  $\square$

**Lemme 1.3.3.6.** *Le morphisme*

$$(\text{Fil } E)^{\varphi_1 = \text{Id}} \rightarrow \text{Fil}(E/pE)^{\varphi_1 = \text{Id}}$$

est surjectif.

*Démonstration.* Pour  $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on montre que

$$\text{Fil}(E/p^{r+1}E)^{\varphi_1 = \text{Id}} \rightarrow \text{Fil}(E/p^rE)^{\varphi_1 = \text{Id}}$$

est surjectif. Pour  $i \geq 0$  notons

$$\text{Fil}^i(A_{\text{cris}}/p^r A_{\text{cris}})$$

l'image de  $\text{Fil}^i A_{\text{cris}}$  dans  $A_{\text{cris}}/p^r A_{\text{cris}}$ . L'anneau  $A_{\text{cris}}/\text{Fil}^i A_{\text{cris}}$  est sans  $p$ -torsion car le gradué de sa PD-filtration l'est (cf. lemme 1.1.2.5). On a donc  $\text{Fil}^i A_{\text{cris}} \cap p^r A_{\text{cris}} = p^r \text{Fil}^i A_{\text{cris}}$  et

$$\text{Fil}^i(A_{\text{cris}}/p^r A_{\text{cris}}) = \text{Fil}^i A_{\text{cris}} / p^r \text{Fil}^i A_{\text{cris}}.$$

Soit maintenant

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i e_i \in \text{Fil}(E/p^r E)^{\varphi_1 = \text{Id}}$$

où  $x_i \in \text{Fil}^{\delta_i} A_{cris}$  et  $\bar{x}_i \in \text{Fil}^{\delta_i}(A_{cris}/p^r A_{cris})$ . On cherche

$$\bar{x}' = \sum_{i=1}^n \bar{x}'_i e_i \in \text{Fil}(E/p^{r+1}E)^{\varphi_1 = \text{Id}}$$

où  $\bar{x}'_i \in \text{Fil}^{\delta_i}(A_{cris}/p^{r+1}A_{cris})$  est tel que  $x'_i \equiv x_i \pmod{p^r}$ . On cherche alors  $(x'_i)_i$  sous la forme

$$x'_i = x_i + p^r b_i$$

où  $b_i \in \text{Fil}^{\delta_i} A_{cris}$ .

D'après le lemme 1.3.3.1, il suffit de trouver de tels  $(b_i)_i$  de telle manière que

$$\varphi_1(x') \equiv x' \pmod{p^{r+1}E + p^r \text{Fil}^p A_{cris}E}.$$

Cette équation s'écrit

$$\forall i, \quad \varphi_{\delta_i}(x_i + p^r b_i) \equiv \sum_j a_{ij}(x_j + p^r b_j) \pmod{(p^{r+1}, p^r \text{Fil}^p A_{cris})}$$

où  $(a_{ij}) \in \text{GL}_n(A_{cris})$  est la matrice de passage de la base  $(\varphi_{1-\delta_i}(e_i))_i$  à la base  $(e_i)_i$ . Cela s'écrit encore pour tout  $i$ ,

$$\frac{\varphi_{\delta_i}(x_i) - \sum_j a_{ij} x_j}{p^r} + \varphi_{\delta_i}(b_i) \equiv \sum_j a_{ij} b_j \pmod{(p, \text{Fil}^p A_{cris})}$$

On utilise maintenant l'isomorphisme  $\gamma : A_{cris}/(p, \text{Fil}^p A_{cris}) \xrightarrow{\sim} \bar{R}/p\bar{R}$ . Rappelons qu'on note  $\tilde{\gamma} : A_{cris} \rightarrow \bar{R}/p\bar{R}$  le morphisme composé. Écrivons dans  $\bar{R}/p\bar{R}$ ,

$$\tilde{\gamma}(b_i) \equiv p^{\delta_i/p} c_i \pmod{p}$$

où  $c_i \in \bar{R}$ . Les équations déduites dans  $\bar{R}/p\bar{R}$  sont alors

$$(-1)^{\delta_i} c_i^p - \sum_j \bar{d}_{ij} p^{\delta_j/p} c_j + \bar{s}_i \equiv 0 \pmod{p}$$

où

$$\bar{d}_{ij} = \tilde{\gamma}(a_{ij}) \in \bar{R}/p\bar{R} \quad \text{et} \quad \bar{s}_i = \tilde{\gamma}\left(\frac{\varphi_{\delta_i}(x_i) - \sum_j a_{ij} x_j}{p^r}\right) \in \bar{R}/p\bar{R}.$$

Choisissons des relèvements  $(d_{ij})_{i,j} \in \text{GL}_n(\bar{R})$ ,  $(s_i)_i \in \bar{R}$  de  $(\bar{d}_{ij})_{i,j}$  et  $(\bar{s}_i)_i$ . On se ramène à résoudre les équations suivantes dans  $\bar{R}$  :

$$(-1)^{\delta_i} Y_i^p - \sum_j d_{ij} p^{\delta_j/p} Y_j + s_i = 0.$$

En appliquant la méthode utilisée dans la preuve du lemme 1.3.3.3 on montre que l'algèbre

$$\bar{R}[1/p][Y_i]_{1 \leq i \leq n} / ((-1)^{\delta_i} Y_i^p - \sum_j d_{ij} p^{\delta_j/p} Y_j + s_i)_i$$

est étale sur  $\bar{R}[1/p]$ . Le résultat en découle. □

### 1.3.4 Accouplement de Weil

On commence par un lemme qui servira à la définition de l'accouplement de Weil.

**Lemme 1.3.4.1.**  $T_p(\mathrm{DF}(\widehat{\mathbb{G}}_m)) = (\mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}))^{\varphi_1=\mathrm{Id}} = \mathbb{Z}_p \cdot t$ .

*Démonstration.* D'après la sous-section 1.3.3, le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $(\mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}))^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$  est libre de rang 1. D'autre part,  $\mathbb{Z}_p \cdot t \subset (\mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}))^{\varphi_1=\mathrm{Id}}$ . Pour montrer l'égalité, il suffit donc de montrer que l'image de  $t$  dans  $A_{\mathrm{cris}}/(p, \mathrm{Fil}^p A_{\mathrm{cris}})$  est non-nulle. En utilisant la description explicite de l'isomorphisme

$$\gamma : A_{\mathrm{cris}}(\overline{R})/(p, \mathrm{Fil}^p A_{\mathrm{cris}}) \xrightarrow{\sim} \overline{R}/p\overline{R},$$

on calcule directement  $\gamma(\bar{t}) = \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^{n-1} \frac{(\epsilon_1-1)^n}{n} \neq 0$ , où  $\epsilon_1$  est une racine primitive  $p$ -ième de l'unité.  $\square$

Reprenons les hypothèses et notations de la section 1.3.2. Soit  $(\mathcal{E}^\vee, \Psi^\vee, \Phi^\vee, (\mathrm{Fil} \mathcal{E}_S)^\perp)$  le dual de Cartier de  $(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \mathrm{Fil} \mathcal{E}_S)$  (cf. section 1.2.2.4). Posons

$$E^\vee = \mathcal{E}^\vee_{A_{\mathrm{cris}} \rightarrow \widehat{R}}.$$

D'après la définition du dual de Cartier, on vérifie aussitôt les propriétés suivantes de  $E^\vee$ .

- En tant que  $A_{\mathrm{cris}}(\overline{R})$ -module :  $E^\vee = \mathrm{Hom}_{A_{\mathrm{cris}}(\overline{R})}(E, A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}))$ . On désigne par  $(e_i^\vee)_i$  la base duale de  $(e_i)_i$ .
- Structure de  $\varphi$  : pour  $f \in E^\vee$ ,  $\varphi(f) = \varphi \circ (f \otimes 1) \circ \Psi$  au sens suivant

$$\varphi(f) : E \xrightarrow{\Psi} E \otimes_{A_{\mathrm{cris}}, \varphi} A_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{f \otimes 1} A_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\varphi} A_{\mathrm{cris}}$$

où  $\Psi$  désigne encore l'opérateur associé à  $\Psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathrm{Frob}^* \mathcal{E}$  par évaluation du cristal.

- Structure de filtration :

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil} E^\vee &= \{f \in E^\vee \mid f(\mathrm{Fil} E) \subset \mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}}\} \\ &= A_{\mathrm{cris}} e_1^\vee \oplus \cdots \oplus A_{\mathrm{cris}} e_r^\vee \oplus \mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}} e_{r+1}^\vee \oplus \cdots \oplus \mathrm{Fil}^1 e_n^\vee. \end{aligned}$$

Les éléments  $(\varphi_{\delta_i}(e_i^\vee))_i$  forment aussi une base de  $E^\vee$  (cf. prop. 1.3.2.1). De plus, si  $A' = (a'_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(A_{\mathrm{cris}})$ , resp.  $B' = (b'_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(A_{\mathrm{cris}})$ , est la matrice de passage telle que pour tout  $i$ ,

$$e_i = \sum_j a'_{ij} \varphi_{1-\delta_j}(e_j), \quad \text{resp. } e_i^\vee = \sum_j b'_{ij} \varphi_{\delta_j}(e_j^\vee),$$

on vérifie aussitôt que  $B' = {}^t A'^{-1}$ .

Les résultats dans la sous-section 1.3.3 s'appliquent à  $(\mathcal{E}^\vee, \Psi^\vee, \Phi^\vee, (\mathrm{Fil} \mathcal{E}_S)^\perp)$ . On en déduit que  $T_p(\mathcal{E}^\vee)$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang  $n$ . L'application naturelle  $E \times E^\vee \rightarrow A_{\mathrm{cris}}(\overline{R})$  induit un *accouplement de Weil* :

$$T_p(\mathcal{E}) \times T_p(\mathcal{E}^\vee) \rightarrow (\mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}}(\overline{R}))^{\varphi_1=\mathrm{Id}} = \mathbb{Z}_p \cdot t \cong \mathbb{Z}_p(1).$$

**Proposition 1.3.4.1.** *L'accouplement de Weil est parfait au sens où il induit un isomorphisme  $T_p(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{\sim} T_p(\mathcal{E})^*(1)$ .*

*Démonstration.* Comme  $T_p(\mathcal{E})$  et  $T_p(\mathcal{E}^\vee)$  sont libres de même rang, il suffit de montrer que modulo  $p$ , l'accouplement de Weil est non dégénéré au sens où pour  $f \in T_p(\mathcal{E}^\vee)/pT_p(\mathcal{E}^\vee)$ , si pour tout  $x \in T_p(\mathcal{E})/pT_p(\mathcal{E})$ ,  $\langle f, x \rangle = 0 \in \mathbb{F}_p(1)$ , alors  $f = 0$ . D'après les résultats de la section précédente, on se ramène à travailler modulo l'idéal  $(p, \mathrm{Fil}^p A_{\mathrm{cris}})$ . Soit donc

$$f = \sum_i \bar{\lambda}_i e_i^\vee \in \mathrm{Fil}(E^\vee \otimes_{A_{\mathrm{cris}}, \tilde{\gamma}} \overline{R}/p\overline{R})^{\varphi_1=\mathrm{Id}},$$

où  $\bar{\lambda}_i \in p^{\frac{1-\delta_i}{p}} \bar{R}/p\bar{R}$ , tel que pour tout

$$x = \sum_i \bar{x}_i e_i \in \text{Fil}(E \otimes_{A_{\text{cris}, \tilde{\gamma}}} \bar{R}/p\bar{R})^{\varphi_1 = \text{Id}},$$

où  $\bar{x}_i \in p^{\delta_i/p} \bar{R}/p\bar{R}$ , on ait  $\langle f, x \rangle = 0 \in \bar{R}/p\bar{R}$ .

Rappelons que dans la démonstration du lemme 1.3.3.3, on a obtenu une bijection

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\bar{R}}(B, \bar{R}) &\xrightarrow{\sim} \text{Fil}(E \otimes_{A_{\text{cris}, \tilde{\gamma}}} \bar{R}/p\bar{R})^{\varphi_1 = \text{Id}} \\ [U_i \mapsto x_i] &\mapsto \sum_{i=1}^n \bar{x}_i e_i \end{aligned}$$

où

$$B = \bar{R}[U_1, \dots, U_n] / (U_i^p - (-p)^{\delta_i} \sum_j a_{ij} U_j)_i$$

et  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{GL}_n(\bar{R})$  est telle que  $A \equiv (\tilde{\gamma}(a'_{ij}))_{i,j} \pmod{p}$  dans  $\text{GL}_n(\bar{R}/p\bar{R})$ .

Soit  $\tilde{B}$  le normalisé de  $B$ . On a d'après la preuve du lemme 1.3.3.3

$$\tilde{B} \simeq \bar{R}^{p^n}.$$

Soit  $C = B[p^{-\frac{\delta_i}{p}} U_i]_{1 \leq i \leq n} \subset \tilde{B}$ . Posons maintenant

$$b = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i \in C.$$

Puisque  $\lambda_i \in p^{\frac{1-\delta_i}{p}} \bar{R}$  et  $U_i \in p^{\frac{\delta_i}{p}} C$  on a

$$\begin{aligned} b^p &\equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i^p U_i^p \pmod{p^2} \\ &\equiv \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} (-p)^{\delta_i} \lambda_i^p U_j \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Soit  $(b_{ij})_{i,j} \in \text{GL}_n(\bar{R})$  dont la réduction modulo  $p$  est la matrice  $(\tilde{\gamma}(b'_{ij}))_{i,j} \in \text{GL}_n(\bar{R}/p\bar{R})$ . L'équation  $\varphi_1(f) = f$  se traduit en

$$\forall i, \quad \lambda_i^p \equiv (-p)^{1-\delta_i} \sum_j b_{ij} \lambda_j \pmod{p^{2-\delta_i}}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} b^p &\equiv -p \sum_{j,k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ik} \right) \lambda_k U_j \pmod{p^2} \\ &\equiv -pb \pmod{p^2} \end{aligned}$$

car  $B' = {}^t A'^{-1}$ . D'après le lemme 1.3.3.4 (qui s'applique de façon identique à l'anneau  $C$  à la place de  $\bar{R}$ ) il existe un unique  $b' \in C$  congruent à  $b$  modulo  $pC$  et vérifiant

$$b'^p = -pb'.$$

L'hypothèse affirmant que pour tout  $x \in \text{Fil}(E \otimes_{A_{\text{cris}, \tilde{\gamma}}} \bar{R}/p\bar{R})^{\varphi_1 = \text{Id}}$  on a  $\langle f, x \rangle = 0$  se traduit en en disant que pour tout morphisme de  $\bar{R}$ -algèbres

$$\chi : \tilde{B} \longrightarrow \bar{R}$$

on a

$$\chi(b') \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pour un tel  $\chi$ , l'équation  $\chi(b')^p = -p\chi(b')$  implique que  $\chi(b') \in p^{1/(p-1)}\overline{\mathbb{Z}}_p^\times$  ou bien  $\chi(b') = 0$ . Mais,

$$p^{1/(p-1)}\overline{\mathbb{Z}}_p^\times \cap p\overline{R} = \emptyset.$$

On en déduit que  $b' = 0$  et donc

$$b \in pC.$$

Utilisant le lemme 1.3.3.5 on vérifie que  $C$  est un  $\overline{R}$ -module libre de base

$$(p^{-i_1 \frac{\delta_1}{p}} U_1^{i_1} \dots p^{-i_n \frac{\delta_n}{p}} U_n^{i_n})_{0 \leq i_1, \dots, i_n < p}.$$

La congruence précédente  $b \in pC$  se traduit donc en

$$\forall i, \lambda_i \in p^{1 - \frac{\delta_i}{p}} \overline{R}.$$

On a donc  $\bar{\lambda}_i = 0$  si  $\delta_i = 0$ . Cependant, l'équation  $\varphi_1(f) = f$  fournit l'égalité

$$f = \sum_i \varphi_{1-\delta_i}(\bar{\lambda}_i) \varphi_{\delta_i}(e_i^\vee).$$

Or, si  $\delta_i = 1$ , la relation  $\lambda_i \in p^{1-1/p}\overline{R}$  implique que  $\varphi_0(\bar{\lambda}_i) = 0$ . On a donc  $f = 0$ .  $\square$

*Démonstration du Théorème 1.3.1.1.* L'accouplement parfait  $T_p(\mathcal{E}) \times T_p(\mathcal{E}^\vee) \rightarrow \mathbb{Z}_p(1)$  induit un isomorphisme  $\delta : T_p(\mathcal{E}^\vee)^* \xrightarrow{\sim} T_p(\mathcal{E})(-1)$ . Considérons les deux applications naturelles compatibles aux filtrations :

$$\begin{aligned} \omega &: T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow E, \\ \omega^\vee &: T_p(\mathcal{E}^\vee) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow E^\vee. \end{aligned}$$

et le morphisme transposé :

$${}^t\omega^\vee : E \xrightarrow{\sim} (E^\vee)^* \rightarrow T_p(\mathcal{E}^\vee)^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\overline{R})$$

est compatible aux filtrations avec décalage de degré 1, i.e.,

$${}^t\omega^\vee(\text{Fil}^i E) \subset T_p(\mathcal{E}^\vee)^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Fil}^{i+1} A_{cris}(\overline{R}), \text{ pour } i \in \mathbb{Z}.$$

On considère le composé  $\alpha$  :

$$E \xrightarrow{{}^t\omega^\vee} T_p(\mathcal{E}^\vee)^* \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \xrightarrow{\delta \otimes \text{Id}} T_p(\mathcal{E})(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \xrightarrow{\times(t \otimes 1)} T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}.$$

Nous vérifions aussitôt que

$$\alpha \circ \omega = 1 \otimes t : T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \rightarrow T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}.$$

Comme  $T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}$  et  $E$  sont des  $A_{cris}$ -modules libres de rang  $n$ , on peut donc calculer les déterminants pour les morphismes  $\alpha$ ,  $\omega$  et  $\alpha \circ \omega$  :

$$t^n = \det \alpha \cdot \det \omega.$$

Puisque  $t$  est régulier dans  $A_{cris}$ ,  $\det \alpha$  et  $\det \omega$  ne sont pas des zéro-diviseurs. On en déduit que  $\omega$  et  $\alpha$  sont injectifs. De plus  $\alpha$  induit une injection

$$\alpha : E/\text{Im}\omega \hookrightarrow T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}/\text{Im}(\alpha \circ \omega) = T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}/1 \otimes t$$

qui implique que le conoyau de  $\omega$  est annulé par  $t$ .

D'autre part, puisque  ${}^t\omega^\vee$  est compatible aux filtrations avec décalage de degré 1, les autres composants dans le composé  $\alpha$  sont compatibles aux filtrations. Alors  $\alpha \circ \omega$  induit un morphisme entre les gradués :

$$\alpha \circ \omega = 1 \otimes t : T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{gr}^i A_{cris} \xrightarrow{\omega} \text{gr}^i E \rightarrow T_p(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{gr}^{i+1} A_{cris}, \forall i \in \mathbb{N}$$

qui est injectif, car  $t : \text{gr}^i A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \text{gr}^{i+1} A_{cris}(\overline{R})$  l'est. Cela implique que  $\omega$  est strictement compatible aux filtrations.  $\square$

*Démonstration du corollaire 1.3.1.2.* Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T_p(H) & \times & T_p(H^\vee) & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & T_p(\widehat{\mathbb{G}}_m) \\ \downarrow \beta_H & & \downarrow \beta_{H^\vee} & & \downarrow \sim \\ T_p(\mathbb{D}\mathbb{F}(H)) & \times & T_p(\mathbb{D}\mathbb{F}(H)^\vee) & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & T_p(\mathbb{D}\mathbb{F}(\widehat{\mathbb{G}}_m)) = \mathbb{Z}_p \cdot t \end{array}$$

où les lignes sont toutes des accouplements parfaits d'après la proposition 1.3.4.1. Il est commutatif. En effet, si  $(x, y) \in T_p(H) \times T_p(H^\vee)$ ,

$$x : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H, \quad y : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H^\vee$$

alors

$$\langle x, y \rangle = y^\vee \circ x : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \widehat{\mathbb{G}}_m$$

où  $y^\vee : H = (H^\vee)^\vee \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_m$ . On a alors

$$\mathbb{D}\mathbb{F}(y^\vee \circ x) = \mathbb{D}\mathbb{F}(y^\vee) \circ \mathbb{D}\mathbb{F}(x) = \mathbb{D}\mathbb{F}(y)^\vee \circ \mathbb{D}\mathbb{F}(x)$$

via l'isomorphisme de foncteurs  $\mathbb{D}\mathbb{F}((-)^\vee) \simeq \mathbb{D}\mathbb{F}(-)^\vee : \text{BT}_R \rightarrow \mathcal{MF}^{[-1,0]}(R)$ . On en déduit la commutativité.

Le morphisme composé

$$T_p(H) \xrightarrow{\beta_H} T_p(\mathbb{D}\mathbb{F}(H)) \xrightarrow{\sim} T_p(\mathbb{D}\mathbb{F}(H^\vee))^\vee(1) \xrightarrow{\beta_{H^\vee}^\vee(1)} T_p(H^\vee)^\vee(1)$$

est un isomorphisme. On en déduit que  $\beta_{H^\vee}^\vee(1)$  est surjectif. C'est donc un isomorphisme puisque  $T_p(\mathbb{D}\mathbb{F}(H^\vee))^\vee(1)$  et  $T_p(H^\vee)^\vee(1)$  sont des  $\mathbb{Z}_p$ -modules libres de même rang d'après le théorème 1.3.1.1. Le morphisme  $\beta_H$  est donc un isomorphisme. □



# Chapitre 2

## Le morphisme déterminant

Dans ce chapitre, on va construire un morphisme déterminant entre la tour de revêtements étales finis de la fibre générique d'un espace de Rapoport-Zink et une tour d'espaces rigides de dimension 0 associée au cocentre du groupe réductif relié à cet espace.

### 2.1 Espaces de Rapoport-Zink de type E.L. et P.E.L. et la tour d'espaces rigides

Fixons une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  de  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $\overline{\mathbb{F}_p}$  la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p$  associée. Notons  $W = W(\overline{\mathbb{F}_p})$  et  $L = W \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  le complété  $p$ -adique de l'extension maximale non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . L'automorphisme  $\sigma$  est le Frobenius de l'extension  $L|\mathbb{Q}_p$ .

#### 2.1.1 Rappels sur des définitions et résultats de Kottwitz et Rapoport-Richartz

Rappelons quelques définitions dues à Kottwitz ([Kot85] et [Kot97]).

**Définition 2.1.1.1 ([Kot85]).** Soit  $H$  un groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$ . On désigne par  $B(H)$  l'ensemble des classes de  $\sigma$ -conjugaison dans  $H(L)$ , où deux éléments  $b_1, b_2 \in H(L)$  sont dits  $\sigma$ -conjugués s'il existe un  $g \in H(L)$  tel que  $b_1 = g^{-1}b_2\sigma(g)$ . Pour  $b \in H(L)$ , on notera  $\bar{b} \in B(H)$  sa classe de  $\sigma$ -conjugaison.

Soit  $H$  un groupe réductif quasi-déployé sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $A \subset T \subset B$  un triplet où  $B$  est un sous-groupe de Borel,  $T$  un tore maximal dans  $G$  et  $A$  un tore déployé maximal. À  $b \in H(L)$  est associé un foncteur exact compatible au produit tensoriel

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_b : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H &\longrightarrow \text{Isoc}_{\overline{\mathbb{F}_p}} \\ (V, \rho) &\longmapsto (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma) \end{aligned}$$

de la catégorie des représentations linéaires de  $H$  vers la catégorie des  $\overline{\mathbb{F}_p}$ -isocristaux. Soit  $\mathbb{D}$  le pro-tore des pentes,  $X^*(\mathbb{D}) = \mathbb{Q}$ . Il existe alors un unique morphisme

$$\nu_b : \mathbb{D} \longrightarrow H_L,$$

le morphisme des pentes, tel que pour tout  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$ ,  $\rho \circ \nu_b$  fournisse la  $\mathbb{Q}$ -graduation de Dieudonné-Manin de  $V_L$  pour le Frobenius  $b\sigma$ . En fait, le morphisme  $\nu_b$  est défini sur  $\mathbb{Q}_p^{nr}$ , l'extension maximale non-ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ , et de plus sa classe de conjugaison est définie sur  $\mathbb{Q}_p$ . Cette classe de conjugaison ne dépend elle-même que de la classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $b$ . Le groupe  $H$  étant quasi-déployé cela définit donc une application

$$\begin{aligned} B(H) &\longrightarrow X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+ \\ \bar{b} &\longmapsto \nu_{\bar{b}} \end{aligned}$$

où  $X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+$  est la chambre de Weyl positive dans  $X_*(A)_{\mathbb{Q}} = \text{Hom}(\mathbb{D}, A)$  relativement au choix du sous-groupe de Borel. Supposons maintenant fixé un cocaractère

$$\mu : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}}_p} \longrightarrow H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$$

à  $H(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ -conjugaison près. On peut donc supposer que  $\mu \in X_*(T)^+$ . Supposons maintenant, ce qui sera le cas dans tout ce qui suit, que  $H^{der}$  est simplement connexe. Soit  $D = H/H^{der}$  le cocentre. Notons  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p|\mathbb{Q}_p)$ . Kottwitz définit dans la section 6 de [Kot97] deux éléments :

- $\mu_1 \in X_*(D)_{\Gamma}$  l'image dans les coinvariants sous Galois de  $\mu$  composé avec la projection  $H \rightarrow D$ ,
- $\mu_2 \in X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+$ , le barycentre de l'orbite de Galois de  $\mu$ , c'est à dire

$$\mu_2 = \frac{1}{[E:\mathbb{Q}_p]} \sum_{\gamma \in \text{Gal}(E|\mathbb{Q}_p)} \mu^{\gamma}$$

où  $E|\mathbb{Q}_p$  est galoisienne suffisamment grande.

Rappelons que d'après ([Kot85] chap. 2) il existe un isomorphisme canonique de groupes

$$X_*(D)_{\Gamma} \xrightarrow{\sim} B(D).$$

On note alors

$$\kappa(\bar{b}) \in X_*(D)_{\Gamma}$$

l'élément correspondant à l'image de  $\bar{b}$  via la projection  $B(H) \rightarrow B(D)$ .

**Définition 2.1.1.2 ([Kot97] chap. 6).** On note  $B(H, \mu)$  l'ensemble des  $\bar{b} \in B(H)$  vérifiant :

1. Dans la chambre de Weyl  $X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+$  on a

$$\nu_{\bar{b}} \leq \mu_2$$

au sens où  $\mu_2 - \nu_{\bar{b}}$  est une combinaison linéaire à coefficients rationnels positifs de coracines positives.

2. On a l'égalité

$$\kappa(\bar{b}) = \mu_1.$$

Procédons à quelques remarques concernant cette définition. Le point (1) de la définition précédente implique que l'image de  $\kappa(\bar{b})$  et de  $\mu_1$  dans  $X_*(D)_{\Gamma} \otimes \mathbb{Q} = X_*(D)_{\mathbb{Q}}^{\Gamma}$  coïncident. Ainsi, si le point (1) est vérifié,  $\kappa(\bar{b}) - \mu_1 \in X_*(D)_{\Gamma, \text{tor}}$ . D'après [Kot84] il existe un isomorphisme canonique

$$H^1(\mathbb{Q}_p, H) \xrightarrow{\sim} X_*(D)_{\Gamma, \text{tor}}.$$

On en déduit la remarque suivante : si  $H^1(\mathbb{Q}_p, H)$  est trivial alors dans la définition 2.1.1.2, la condition (2) est inutile. Ce sera le cas pour les données de type E.L. dans la section 2.1.2. Ce ne sera pas le cas pour les données de type P.E.L. dans la section 2.1.3.

Pour les groupes classiques, les éléments de  $X_*(A)_{\mathbb{Q}}^+$  paramètrent des polygones convexes à pentes rationnelle satisfaisant certaines symmétries (symmétries des pentes  $\lambda$  et  $1 - \lambda$  pour les groupes symplectiques par exemple). Le polygone associé à  $\kappa(\bar{b})$  est un polygone du type Newton et celui associé à  $\mu_2$  un polygone de type Hodge. En gros, la définition 2.1.1.2 se scinde alors en deux parties :

- La condition (1) qui affirme que le polygone de Newton est au dessus du polygone de Hodge.
- La condition (1) étant assumée, la condition (2) affirme qu'un certain  $H$ -torseur dont la classe  $\kappa(\bar{b}) - \mu_1 \in H^1(\mathbb{Q}_p, H)$  est trivial. On appelle ce toseur le toseur des périodes.

L'ensemble  $B(H, \mu)$  intervient dans la suite afin d'assurer que certains espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles sont non vides. Plus précisément on a le résultat suivant de Rapoport-Richartz. Supposons  $H$  non-ramifié. Soit  $\Lambda_0 \in \mathcal{BT}(H)$  un sommet hyperspécial dans l'immeuble de Bruhat-Tits de  $H$ . Pour les groupes classiques,  $\Lambda_0$  est un réseau muni de structures additionnelles satisfaisant une relation d'autodualité dans le cas des groupes unitaires, symplectiques ou orthogonaux. Soit

$\Lambda_0 \otimes \mathcal{O}_L \in \mathcal{BT}(H_L)$  le sommet correspondant dans l'immeuble de  $H_L$  et  $\mathcal{V}$  la  $G(L)$ -orbite de  $\Lambda_0 \otimes \mathcal{O}_L$ . Il y a une application

$$\text{inv} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow X_*(T)^+$$

donnant la « position relative de deux réseaux » dans l'orbite  $\mathcal{V}$ . Étant donné  $b \in H(L)$  et  $\Lambda \in \mathcal{V}$  on définit le polygone de Hodge arithmétique de  $(\Lambda, b\sigma)$  comme étant

$$\text{inv}(\Lambda, b\sigma\Lambda) \in X_*(T)^+.$$

On a alors le théorème suivant de Rapoport-Richartz qui généralise l'inégalité classique de Mazur entre polygone de Newton et de Hodge.

**Théorème 2.1.1.1 ([RR96] theo. 4.2).** *Supposons qu'il existe  $\Lambda \in \mathcal{V}$  tel que*

$$\text{inv}(\Lambda, b\sigma\Lambda) = \mu \in X_*(T)^+.$$

*On a alors  $\bar{b} \in B(H, \mu)$ .*

L'hypothèse du théorème précédent est que le polygone de Hodge arithmétique associé à  $(\Lambda, b\sigma\Lambda)$  coïncide avec le polygone de Hodge géométrique associé à  $\mu$ . Sous cette hypothèse on a donc que :

- Le polygone de Newton associé à  $\nu_{\bar{b}}$  est au dessus du polygone de Hodge associé à  $\mu_2$
- Le torseur « de périodes » dont la classes est donnée par  $\kappa(\bar{b}) - \mu_1$  est trivial.

### 2.1.2 Donnée de type E.L. non ramifiée simple

Pour définir une variété de Shimura on a besoin d'une donnée de Shimura. De la même façon, la définition d'un espace de Rapoport-Zink nécessite au préalable que l'on se soit donné une donnée de Rapoport-Zink. Commençons par le cas des groupes linéaires.

#### Définition 2.1.2.1.

(1) Une donnée locale de Rapoport-Zink de type E.L. non ramifiée simple  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$  consiste en la donnée

- d'une extension finie non ramifiée  $F$  de  $\mathbb{Q}_p$  de degré  $d$ ,
- d'un  $F$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n < +\infty$ ,
- d'une classe de  $\sigma$ -conjugaison  $\bar{b} \in B(G)$  où  $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_F(V)$ ,
- d'une classe de conjugaison de cocaractère minuscule  $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$  au sens suivant : on peut choisir une base de  $V$  telle que

$$\begin{array}{ccc} \mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}} & \longrightarrow & G_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GL}_{n, \overline{\mathbb{Q}_p}} \\ z & \longrightarrow & \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{q_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_\tau}) \end{array}$$

où  $\tilde{I}_F = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$  et  $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$  est une collection d'entiers satisfaisant  $p_\tau + q_\tau = n$ .

On suppose de plus que ces données sont liées entre elles par la relation  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ .

(2) Le corps réflex local associé  $E$  est le corps de définition de la classe de conjugaison de  $\mu$ .

(3) On définit un foncteur  $J$  sur la catégorie des  $\mathbb{Q}_p$ -algèbres

$$J(R) = \{g \in G(R \otimes_{\mathbb{Q}_p} L), g(b\sigma) = (b\sigma)g\}.$$

Ce foncteur est représenté par un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$  (cf. [RZ96] prop. 1.12).

Soit  $G$  comme dans la définition 2.1.2.1 précédente. Alors,  $B(G)$  classifie les isocristaux de dimension  $nd$  sur  $L$  munis d'une action de  $F$ . L'isocristal associé à  $b \in G(L)$  est  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b \otimes \sigma)$ . Le groupe  $J$  est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi de  $G$ , le centralisateur du morphisme des pentes  $\nu_{\bar{b}}$ .

Comme expliqué dans la section 2.1.1, puisque  $H^1(\mathbb{Q}_p, G)$  est trivial, dans la définition 2.1.1.2 de l'ensemble  $B(G, \mu)$ , seule la condition (1) est nécessaire, la seconde étant automatique. La condition  $\bar{b} \in B(G, \mu)$  se traduit donc uniquement en une inégalité de polygones et le fait qu'ils aient même points terminaux.

Dans la suite nous utilisons la donnée E.L. précédente pour définir des espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles munis d'une action de  $\mathcal{O}_F$ . Si  $X$  est un tel groupe  $p$ -divisible sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  et

$$\text{Lie } X = \bigoplus_{\tau \in \tilde{I}_F} (\text{Lie } X)_\tau$$

où  $\mathcal{O}_F$  agit sur  $(\text{Lie } X)_\tau$  via  $\tau : \mathcal{O}_F \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ , on demandera que  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} (\text{Lie } X)_\tau = p_\tau$ . Si  $(M, F, V)$  désigne le cristal de Dieudonné covariant de  $X$  avec  $(M[\frac{1}{p}], F) = (V_L, b\sigma)$  on a une décomposition  $M = \bigoplus_{\tau} M_\tau$  et la condition sur l'algèbre de Lie se traduit en

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} M_\tau / VM_{\sigma\tau} = p_\tau$$

soit encore pour tout  $\tau$ ,

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} M_\tau / FM_{\sigma^{-1}\tau} = q_{\sigma^{-1}\tau}.$$

Ainsi, le choix de  $\mu$  pourrait paraître étrange à la vue du théorème 2.1.1.1 de Rapoport-Richartz puisque la position relative des réseaux  $M$  et  $b\sigma M$  de  $V_L$  est donnée par le cocaractère

$$\begin{aligned} \mu' : \mathbb{G}_m \overline{\mathbb{Q}}_p &\longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GL}_{n, \overline{\mathbb{Q}}_p} \\ z &\longmapsto \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{q_{\sigma^{-1}\tau}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_{\sigma^{-1}\tau}}) \end{aligned}$$

Néanmoins, avec les notations de la section 2.1.1, on a  $\mu'_2 = \mu_2$  puisque la définition de ces caractères fait intervenir la moyenne de ceux-ci sur une orbite de Galois. Cela justifie le choix fait de  $\mu$ .

### Remarque 2.1.2.1.

1. Contrairement au corps  $F$  qui est un corps « abstrait », le corps reflex est un corps plongé,  $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$  par définition.
2. Il est aisé de vérifier que puisque  $F|\mathbb{Q}_p$  est non-ramifiée,  $E|\mathbb{Q}_p$  l'est également.
3. Plus précisément, via l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p|\mathbb{Q}_p)$  sur  $\mathbb{N}^{\tilde{I}_F}$ ,  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p|E)$  est le stabilisateur de  $(p_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$ .

Dans ce texte nous utilisons la théorie de Dieudonné covariante. Le cocaractère  $\tilde{\mu}$  qui suit s'avère alors plus adapté que  $\mu$  à la vue des normalisations choisies dans le chapitre 1 concernant les filtrations de Hodge des cristaux de Dieudonné.

**Définition 2.1.2.2.** Étant donné une donnée de type E.L. comme dans la définition 2.1.2.1 on note

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \mathbb{G}_m \overline{\mathbb{Q}}_p &\longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GL}_{n, \overline{\mathbb{Q}}_p} \\ z &\longmapsto \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{diag}(\underbrace{z^{-1}, \dots, z^{-1}}_{p_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_\tau}) \end{aligned}$$

à conjugaison près.

Si  $\nu : \mathbb{G}_m \rightarrow G$  est le caractère central  $z \mapsto z^{-1} \text{Id}$ , on a  $(\overline{p^{-1}b}, \tilde{\mu}) = (\overline{\nu(p)b}, \nu.\mu)$  (à conjugaison près pour l'égalité de caractères). On a donc  $\overline{p^{-1}b} \in B(G, \tilde{\mu})$ .

### 2.1.3 Donnée de type P.E.L. non ramifiée simple unitaire et symplectique

#### Définition 2.1.3.1.

(1) Une donnée locale de type P.E.L. non ramifiée simple  $(F, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$  consiste en la donnée

- d'une extension non ramifiée  $F$  de  $\mathbb{Q}_p$  de dimension  $d < +\infty$  munie d'une involution  $*$ ,
- d'un  $F$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n < +\infty$ ,
- d'un produit hermitien symplectique  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}_p$ , c'est à dire tel que
  - $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est  $\mathbb{Q}_p$ -bilinéaire symplectique et non dégénérée,
  - $\langle rv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, r^*v_2 \rangle$  pour  $r \in F$ ,  $v_1, v_2 \in V$
 tel qu'il existe un réseau autodual  $\Lambda_0$  dans  $V$  pour ce produit symplectique (i.e.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induit un isomorphisme  $\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda_0, \mathbb{Z}_p)$ ),
- d'une classe de  $\sigma$ -conjugaison  $\bar{b} \in B(G)$  où  $G$  désigne le groupe des similitudes associé, i.e. pour une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre  $R$ ,

$$G(R) = \{g \in \text{GL}_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} R}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} R) \mid \exists c(g) \in R \forall v_1, v_2 \in V \otimes_{\mathbb{Q}_p} R \\ \langle gv_1, gv_2 \rangle_R = c(g) \langle v_1, v_2 \rangle_R\}.$$

L'homomorphisme  $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$  est appelé le facteur de similitude. De plus, le choix d'un réseau autodual  $\Lambda_0$  tel que précédemment définit un modèle entier réductif de  $G$  sur  $\mathbb{Z}_p$ .

- d'une classe de conjugaison de cocaractère minuscule  $\mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow \mathbb{G}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ .

On suppose de plus que ces données sont liées entre elles par la relation  $c \circ \mu(z) = z$  et  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ .

- (2) Le corps réflex local associé  $E$  est le corps de définition de la classe de conjugaison de  $\mu$ .
- (3) On définit un foncteur  $J$  sur la catégorie des  $\mathbb{Q}_p$ -algèbres

$$J(R) = \{g \in G(R \otimes_{\mathbb{Q}_p} L), g(b\sigma) = (b\sigma)g\}.$$

Ce foncteur est représenté par un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$ .

#### 2.1.3.1 Cas unitaire

Si l'involution  $*$  est non triviale sur  $F$ , cette donnée est dite *unitaire*. Dans ce cas, notons  $F_0$  le sous-corps de  $F$  fixé par  $*$ . Alors  $\text{Gal}(F|F_0) = \{\text{Id}, *\}$ .

Soit  $\Phi \subset \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$  un type C.M.  $p$ -adique de  $F$  c'est-à-dire

$$\Phi \coprod \Phi^* = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$$

où  $\Phi^* = \{\tau \circ * \mid \tau \in \Phi\}$ . En fixant une  $F$ -base de  $V$ , on a

$$G_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \simeq \prod_{\tau \in \Phi} \text{GL}_{n_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \times \mathbb{G}_{m_{\overline{\mathbb{Q}_p}}}.$$

Le groupe  $G$  est alors une forme extérieure de  $\prod_{\tau \in \Phi} \text{GL}_n \times \mathbb{G}_m$ . On notera encore  $\mu$  le composé

$$\mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}} \xrightarrow{\mu} G_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \hookrightarrow \text{GL}_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p}}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}) \times \mathbb{G}_{m_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \simeq \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GL}_{n_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \times \mathbb{G}_{m_{\overline{\mathbb{Q}_p}}}$$

où  $\tilde{I}_F = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$ . On peut supposer que

$$\mu(z) = \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{diag}(\underbrace{z, \dots, z}_{q_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_\tau}) \times (z)$$

avec  $(p_{\tau^*}, q_{\tau^*}) = (q_\tau, p_\tau)$ .

Contrairement au cas EL,  $H^1(\mathbb{Q}_p, G)$  est trivial si  $n$  est impair mais  $H^1(\mathbb{Q}_p, G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  si  $n$  est pair. Plus précisément, il y a toujours deux classes de formes hermitiennes sur  $V$  distinguées suivant que leur discriminant, un élément de  $F_0^\times$ , est ou non une norme d'un élément de  $F$ . Cependant, si  $n$  est impair ces deux classes de formes hermitiennes sont dans la même classe de similitude, ce qui n'est pas le cas si  $n$  est pair. Lorsque  $n$  est pair la deuxième condition de la définition 2.1.1.2 intervient donc dans la définition de l'ensemble  $B(G, \mu)$ .

La même remarque qu'après la définition 2.1.2.1 s'applique concernant le choix de  $\mu$  et le théorème de Rapoport-Richartz. Plus précisément, si  $\mu'$  est défini en remplaçant la collection  $(p_\tau, q_\tau)_\tau$  par  $(p_{\sigma^{-1}\tau}, q_{\sigma^{-1}\tau})_\tau$  alors  $B(G, \mu) = B(G, \mu')$ . En effet, il est clair que la moyenne sur une orbite de Galois de  $\mu$  coïncide avec celle de  $\mu'$ . De plus, les composés de  $\mu$  et  $\mu'$  avec la projection sur le cocentre, bien que non égales, ont même classe dans les coinvariants sous le groupe de Galois.

On pose comme dans la définition 2.1.2.2

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}}_p} &\longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \\ z &\longmapsto \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{diag}(\underbrace{z^{-1}, \dots, z^{-1}}_{p_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q_\tau}) \times (z^{-1}). \end{aligned}$$

On a alors  $\overline{p^{-1}b} \in B(G, \tilde{\mu})$ .

Concernant le corps reflex  $E$ , la remarque 2.1.2.1 s'applique de façon identique et  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p|E)$  est le stabilisateur de la collection  $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$ .

### 2.1.3.2 Cas symplectique

Si l'involution  $*$  est triviale sur  $F$ , cette donnée est dite *symplectique*. Dans ce cas, la dimension  $n$  du  $F$ -espace vectoriel  $V$  est forcément paire. En fixant une  $F$ -base de  $V$ , on a

$$G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = G\left(\prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GSp}_n\right)$$

où le  $G$  devant le produit signifie que l'on prend le sous groupe du produit formé des uplets ayant même facteur de similitude.

On peut supposer que

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}}_p} &\longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\sim} G\left(\prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \text{GSp}_n\right) \\ z &\longmapsto \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \begin{pmatrix} zI_{n/2} & \\ & I_{n/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a  $p_\tau = q_\tau = n/2$  et on pose  $\tilde{\mu}(z) = z^{-1}\mu(z)$ . Puisque  $H^1(\mathbb{Q}_p, G)$  est trivial, dans la définition 2.1.1.2 seule la première condition intervient.

Dans ce cas là le corps reflex est  $E = \mathbb{Q}_p$ .

## 2.1.4 Espaces de Rapoport-Zink associés

**Définition 2.1.4.1.** Soit  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$  une donnée locale de type E.L. non ramifiée simple. Soit  $\mathbb{X}$  un groupe  $p$ -divisible sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  et d'isocrystal covariant muni de son action de  $F$  égal à  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$ . Nous noterons  $\check{\mathcal{M}}(b, \mu)/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$  l'espace de Rapoport-Zink associé, où  $\check{E} = \widehat{E^{\text{nr}}}$  est le complété  $p$ -adique de l'extension maximale non ramifiée de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ . C'est un espace de modules de groupes  $p$ -divisibles munis d'une action de  $\mathcal{O}_F$ . Pour un  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ -schéma  $S$  sur lequel  $p$  est localement nilpotent, un  $S$ -point de  $\check{\mathcal{M}}(b, \mu)$  est une classe d'isomorphisme de couples  $(X, \rho)$ , où

- $X$  est un groupe  $p$ -divisible défini sur  $S$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  vérifiant la condition suivante : si

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau \in \tilde{I}_F} \mathrm{Lie}(X)_\tau$$

est la décomposition de  $\mathrm{Lie}(X)$  suivant l'action de  $\mathcal{O}_F$ , alors pour tout  $\tau \in \tilde{I}_F$ ,  $\mathrm{Lie}(X)_\tau$  est localement libre de rang  $p_\tau$ .

- $\rho : \mathbb{X} \times_{\mathbb{F}_p} (S \bmod p) \rightarrow X \times_S (S \bmod p)$  est une quasi-isogénie compatible à l'action de  $\mathcal{O}_F$ .

On passe maintenant à la définition de l'espace de Rapoport-Zink associé à une donnée de type P.E.L.

**Définition 2.1.4.2.** Soit  $X$  un groupe  $p$ -divisible. On appelle polarisation principale de  $X$  un isomorphisme  $\lambda : X \xrightarrow{\sim} X^\vee$  avec son dual de Cartier  $X^\vee$  tel que  $\lambda^\vee = -\lambda$ .

**Définition 2.1.4.3.** Soit  $(F, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$  une donnée de type P.E.L. non ramifiée simple. Soit  $\mathbb{X}$  un groupe  $p$ -divisible sur  $\mathbb{F}_p$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$ , d'une polarisation principale  $\lambda$  tel que l'isocrystal covariant polarisé muni de son action de  $F$  égal à  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Nous noterons  $\check{\mathcal{M}}(b, \mu) / \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$  l'espace de Rapoport-Zink associé avec  $\check{E} = \widehat{E}^{\mathrm{nr}}$ . C'est un espace de modules de groupes  $p$ -divisibles principalement polarisés munis d'une action de  $\mathcal{O}_F$ . Pour  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ -schéma  $S$  sur lequel  $p$  est localement nilpotent, un  $S$ -point de  $\check{\mathcal{M}}(b, \mu)$  est une classe d'équivalence de triplets  $(X, \lambda', \rho)$ , où

- $(X, \lambda')$  est un groupe  $p$ -divisible principalement polarisé sur  $S$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  tel que via cette action  $\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \mathrm{End}(X)$ , l'involution  $*$  sur  $\mathcal{O}_F$  est compatible à l'involution de Rosati sur  $\mathrm{End}(X)$  c'est à dire  $\lambda' : (X, \iota) \rightarrow (X^\vee, \iota \circ *)$ . On suppose de plus que  $X$  vérifie la condition suivante : si

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau \in \tilde{I}_F} \mathrm{Lie}(X)_\tau$$

est la décomposition de  $\mathrm{Lie}(X)$  suivant l'action de  $\mathcal{O}_F$ , alors pour tout  $\tau \in \tilde{I}_F$ ,  $\mathrm{Lie}(X)_\tau$  est localement libre de rang  $p_\tau$ .

- $\rho : \mathbb{X} \times_{\mathbb{F}_p} \bar{S} \rightarrow X \times_S \bar{S}$  est une quasi-isogénie compatible à l'action de  $\mathcal{O}_F$ , où  $\bar{S}$  est le sous-schéma de  $S$  défini par l'idéal  $(p)$ . On suppose de plus que le diagramme suivant est commutatif à une fonctions localement constante  $S \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$  près :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{\bar{S}} & \xrightarrow{\rho} & X_{\bar{S}} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ \mathbb{X}_{\bar{S}}^\vee & \xleftarrow{\rho^\vee} & X_{\bar{S}}^\vee \end{array} \quad (2.1)$$

- Deux triplets  $(X_1, \lambda'_1, \rho_1)$  et  $(X_2, \lambda'_2, \rho_2)$  sont équivalents s'il existe un isomorphisme entre  $(X_1, \rho_1)$  et  $(X_2, \rho_2)$  via lequel  $\lambda'_1$  et  $\lambda'_2$  diffèrent d'une unité dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ , c'est à dire une fonction localement constante  $S \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ .

Le schéma formel  $\check{\mathcal{M}}(b, \mu)$  est localement formellement de type fini ([RZ96] théo. 3.25) et formellement lisse sur  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$  d'après la théorie de la déformation de Grothendieck-Messing ([Mes72]). Il est muni d'une action à gauche de  $J(\mathbb{Q}_p)$  via

$$g \cdot (X, \rho) = (X, \rho \circ g^{-1}), \text{ où } g \in J(\mathbb{Q}_p) \text{ et } (X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}(b, \mu).$$

S'il n'y a pas de confusion possible, on écrit  $\check{\mathcal{M}}$  pour  $\check{\mathcal{M}}(b, \mu)$ .

Rappelons qu'en utilisant la hauteur de la quasi-isogénie  $\rho$ ,  $\check{\mathcal{M}}$  peut être scindé en unions disjointes des sous-schémas formels ouverts et fermés

$$\check{\mathcal{M}} = \coprod_{i \in \mathrm{Im} \varkappa} \check{\mathcal{M}}(i)$$

par une application localement constante

$$\varkappa : \check{\mathcal{M}} \rightarrow \Delta,$$

où  $\Delta = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Q}_p}^*(G), \mathbb{Z})$  et  $X_{\mathbb{Q}_p}^*(G)$  est le groupe des caractères  $\mathbb{Q}_p$ -rationnels de  $G$ . Cette application vérifie

$$\varkappa(g \cdot x) = \omega_J(g) + \varkappa(x), \quad g \in J(\mathbb{Q}_p), x \in \check{\mathcal{M}}$$

avec  $\omega_J : J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \Delta$  est défini par l'équation  $\langle \omega_J(x), \chi \rangle = v_p(i(\chi)(x))$ , où  $i : X_{\mathbb{Q}_p}^*(G) \rightarrow X_{\mathbb{Q}_p}^*(J)$  est l'application naturelle entre les deux groupes de caractères  $\mathbb{Q}_p$ -rationnels (cf. [RZ96], 3.52).

**Remarque 2.1.4.1.** *Puisque  $\overline{\mathbb{F}}_p$  est la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p$  associée à  $\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p$ ,  $E|\mathbb{Q}_p$  est non-ramifiée et  $L = W(\overline{\mathbb{F}}_p)_{\mathbb{Q}}$ , on a  $L = \check{E}$ .*

### 2.1.4.1 Donnée de descente de Rapoport-Zink

Soit  $\sigma_E : \check{E} \xrightarrow{\sim} \check{E}$  l'automorphisme de Frobenius relatif à  $E$ . Pour un Spf  $\mathcal{O}_{\check{E}}$ -schéma  $S$  avec le morphisme structural  $f : S \rightarrow \text{Spf } \mathcal{O}_{\check{E}}$ , on note  $S_{[\sigma_E]}$  le Spf  $\mathcal{O}_{\check{E}}$ -schéma  $S$  avec le morphisme structural

$$\sigma_E \circ f : S \xrightarrow{f} \text{Spf } \mathcal{O}_{\check{E}} \xrightarrow{\sigma_E} \text{Spf } \mathcal{O}_{\check{E}}.$$

Une donnée de descente de Rapoport-Zink pour un espace de Rapoport-Zink  $\check{\mathcal{M}}$  est un isomorphisme de foncteurs :

$$\alpha : \check{\mathcal{M}} \rightarrow \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}$$

définit comme suit :

Soit  $S$  un Spf  $\mathcal{O}_{\check{E}}$ -schéma sur lequel  $p$  est localement nilpotent avec morphisme structural  $f : S \rightarrow \text{Spf } \mathcal{O}_{\check{E}}$ . Soit  $(X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$  pour le type P.E.L (resp.  $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$  pour le type E.L). On définit un point  $(X^\alpha, \lambda'^\alpha, \rho^\alpha)$  (resp.  $(X^\alpha, \rho^\alpha)$ ) dans  $\check{\mathcal{M}}(S_{[\sigma_E]})$ . Posons  $X^\alpha := X$  et

$$\begin{aligned} \rho^\alpha &= \rho \circ \overline{f}^*(\text{Frob}_E)^{-1} : \overline{\sigma_E f^* \mathbb{X}} \xrightarrow{\overline{f}^*(\text{Frob}_E^{-1})} \overline{f^* \mathbb{X}} \xrightarrow{\rho} X_{\overline{S}} \\ \lambda'^\alpha &: X \xrightarrow{\lambda'} X^\vee \xrightarrow{\sim} (X^\alpha)^\vee \end{aligned}$$

où  $\overline{(-)}$  désigne  $(-) \pmod{p}$  et  $X^\vee \xrightarrow{\sim} (X^\alpha)^\vee$  est induit par l'isomorphisme naturel  $\mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathbb{G}_m$ . Alors

$$\begin{aligned} \alpha(S) : \check{\mathcal{M}}(S) &\rightarrow \check{\mathcal{M}}(S_{[\sigma_E]}) = \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}(S) \\ (X, \lambda', \rho) &\mapsto (X^\alpha, \lambda'^\alpha, \rho^\alpha) \quad (\text{resp. } (X, \rho) \mapsto (X^\alpha, \rho^\alpha)). \end{aligned}$$

### 2.1.5 Non vacuité des espaces de Rapoport-Zink

Le fait que les espaces de Rapoport-Zink précédents sont non vides résulte des travaux de Kottwitz-Rapoport ([KR03]) et Fontaine-Rapoport ([FR05]). Cependant cela n'est pas écrit explicitement dans les articles précédents, c'est pourquoi nous le faisons. Cela nous permet également de clarifier nos conventions concernant les  $\varphi$ -modules filtrés admissibles associés aux groupes  $p$ -divisibles.

#### 2.1.5.1 L'application de périodes

Soit  $\check{\mathcal{F}}$  la Grassmannienne des sous-groupes paraboliques de type  $\tilde{\mu}$  dans  $G_{\check{E}}$ . Soit  $K|\check{E}$  une extension de degré fini. Soit  $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}^{rig}(K) = \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K)$  dans le cas EL, resp.  $(X, \lambda, \rho)$  dans le cas PEL. Soit  $\mathbb{D}(X)$  le module de Dieudonné covariant de  $X$ . Notons  $\varphi$  le Frobenius de  $\mathbb{D}(X)$ . La quasi-isogénie  $\rho$  induit un isomorphisme

$$\rho_* : (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}(X)[\frac{1}{p}], \varphi).$$

Soit  $\text{Fil}^\bullet \mathbb{D}(X)_K$  la filtration de Hodge de  $\mathbb{D}(X) \otimes_{\mathcal{O}_L} K$  normalisée comme dans le chapitre 1. On a donc  $\text{Fil}^{-1} \mathbb{D}(X)_K = \mathbb{D}(X)_K$ ,  $\text{Fil}^1 \mathbb{D}(X)_K = 0$  et

$$\text{Fil}^{-1} \mathbb{D}(X)_K / \text{Fil}^0 \mathbb{D}(X)_K = \text{Lie } X[\frac{1}{p}].$$

Soit  $\text{Fil}^\bullet V_K$  la filtration déduite de  $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ . Elle est stable sous l'action de  $F$ , totalement isotrope sous le produit symplectique dans le cas PEL et vérifie de plus

$$\text{Fil}^{-1} V_K = V_K, \quad \text{Fil}^1 V_K = 0 \quad \text{et} \quad \dim_K(V_K / \text{Fil}^0 V_K)_\tau = p_\tau.$$

Elle définit donc un élément de  $\check{\mathcal{F}}(K)$ . Cela définit donc une application de périodes

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \check{\mathcal{F}}(K).$$

D'après le théorème de comparaison 1.3.1.1 et son corollaire 1.3.1.1, après avoir fixé une clôture algébrique de  $K$ ,

$$V_p(X) = \text{Fil}^0(\mathbb{D}(X)_K \otimes B_{\text{cris}})^{\varphi=p}.$$

On en déduit que le  $\varphi$ -module filtré

$$(V_L, p^{-1}b\sigma, \text{Fil}^\bullet V_K)$$

est admissible au sens de Fontaine. En d'autres termes, après avoir fixé un scindage de la filtration de Hodge, si  $\mu_0 : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}_p}} \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$  est le cocaractère conjugué à  $\tilde{\mu}$  définissant la filtration scindée précédente alors la paire  $(p^{-1}b\sigma, \mu_0)$  est admissible au sens de la définition 1.18 de [RZ96]. Donc,

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \check{\mathcal{F}}^a(K).$$

### 2.1.5.2 Non vacuité

**Proposition 2.1.5.1.** *Les espaces de Rapoport-Zink précédents sont non vides.*

*Démonstration.* Puisque  $\overline{p^{-1}b} \in B(G, \tilde{\mu})$ , d'après la première condition de la définition 2.1.1.2, c'est à dire  $\nu_{\overline{p^{-1}b}} \leq \tilde{\mu}_2$ , la condition du théorème 3 de [FR05] est vérifiée. Il existe donc une extension de degré fini  $K|\check{E}$  telle que  $\check{\mathcal{F}}^a(K) \neq \emptyset$ . Choisissons un tel point admissible dans  $\check{\mathcal{F}}(K)$ . D'après les travaux de Fontaine, Fontaine-Laffaille et Breuil, pour un tel point admissible il existe un groupe  $p$ -divisible  $X$  sur  $\mathcal{O}_K$  et une quasi-isogénie  $\rho : \mathbb{X} \otimes \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K \rightarrow X \otimes \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K$  telle que le tiré en arrière par  $\rho_* : V_K \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(X)_K$  de la filtration de Hodge de  $X$  soit le point de  $\check{\mathcal{F}}(K)$  choisi.

Supposons d'abord que l'on est dans le cas EL. Rappelons que le foncteur de Fontaine de la catégorie des groupes  $p$ -divisibles à isogénie près sur  $\mathcal{O}_K$  vers les  $\varphi$ -modules filtrés relativement à  $K|\check{E}$  est pleinement fidèle. Puisque la filtration associée à notre point admissible dans  $\check{\mathcal{F}}(K)$  est stable sous l'action de  $F$ , le groupe  $p$ -divisible  $X$  est donc muni d'un morphisme  $\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \text{End}(X)_{\mathbb{Q}}$  tel que la quasi-isogénie  $\rho$  soit compatible à cette action de  $\mathcal{O}_F$ . Soit  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . La représentation Galoisienne  $\text{Gal}(\overline{K}|K) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V_p(X))$  est à valeurs dans  $\text{GL}_F(V_p(X))$ . Il existe donc un  $\mathcal{O}_F$ -réseau  $\Lambda \subset V_p(X)$  stable sous l'action de  $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ . Il existe alors un groupe  $p$ -divisible  $X'$  sur  $\mathcal{O}_K$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$ , une quasi-isogénie  $f : X \rightarrow X'$  commutant aux actions de  $\mathcal{O}_F$  et telle que  $V_p(f)(\Lambda) = T_p(X')$  où  $V_p(f) : V_p(X) \xrightarrow{\sim} V_p(X')$ . On a alors

$$(X', f \circ \rho) \in \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K).$$

En effet, la condition de Kottwitz donnant l'action de  $\mathcal{O}_F$  sur  $\text{Lie } X'$ ,  $\dim \text{Lie}(X')_\tau = p_\tau$ , est satisfaite puisqu'on peut la lire sur le gradué de la filtration du  $\varphi$ -module filtré associé au point dont on est parti dans  $\check{\mathcal{F}}^{\text{ad}}(K)$ .

Supposons maintenant qu'on est dans le cas PEL. Le foncteur pleinement fidèle de Fontaine qui à un groupe  $p$ -divisible à isogénie près sur  $\mathcal{O}_K$  associe son  $\varphi$ -module filtré est compatible à la dualité de Cartier. Le groupe  $p$ -divisible est donc muni comme précédemment de  $\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \text{End}(X)_{\mathbb{Q}}$  mais également d'une quasi-isogénie  $\lambda : (X, \iota) \rightarrow (X^\vee, \iota \circ *)$  compatible à celle sur  $\mathbb{X}$  via  $\rho$ . Soit

$(V_p(X), t, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  l'espace hermitien symplectique associé où  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_p(X) \times V_p(X) \rightarrow \mathbb{Q}_p$  après avoir fixé un isomorphisme  $\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p(1)$ . On utilise maintenant la condition (2) dans la définition 2.1.1.2. Puisque  $\kappa(\overline{p^{-1}b}) = \tilde{\mu}_1$ , d'après la proposition 1.20 de [RZ96], le torseur des périodes

$$\text{Isom}_F((V, \langle \cdot, \cdot \rangle), (V_p(X), \langle \cdot, \cdot \rangle))$$

des isomorphismes de  $F$ -espaces hermitiens est trivial. Il existe donc un  $\mathcal{O}_F$ -réseau  $\Lambda$  dans  $V_p(X)$  autodual sous  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Quitte à remplacer  $K$  par une extension de degré fini on peut supposer que la représentation Galoisienne  $\text{Gal}(\overline{K}|K) \rightarrow \text{GL}_F(V_p(X))$  stabilise le réseau  $\Lambda$ . Il existe alors un groupe  $p$ -divisible  $X'$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  sur  $\mathcal{O}_K$  et une quasi-isogénie  $f : X \rightarrow X'$  telle que  $V_p(f)(\Lambda) = T_p(X')$ . Un tel  $X'$  est alors muni d'une unique polarisation  $\lambda' : X' \xrightarrow{\sim} X'^{\vee}$  compatible via  $f$  à la quasi-isogénie  $\lambda$ . On a alors

$$(X', \lambda', f \circ \rho) \in \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K).$$

□

**Remarque 2.1.5.1.** *Puisque  $\check{\mathcal{M}}$  est non vide, on peut toujours supposer que  $\mathbb{X}$  muni de ses structures additionnelles définisse un point de  $\check{\mathcal{M}}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ . On supposera désormais que c'est le cas dans la suite. Cela implique en particulier que  $0 \in \text{Im } \varkappa$ .*

## 2.1.6 La tour d'espaces rigides

**Définition 2.1.6.1.** *On désigne par  $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$  la fibre générique de Berthelot de  $\check{\mathcal{M}}$  sur  $\check{E}$  au sens des espaces rigides ([dJ95a] section 7).*

Nous adopterons la définition suivante dans la suite.

**Définition 2.1.6.2.** *Un  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur un espace rigide  $Y$  est un système projectif  $(\mathcal{F}_m)_{m \geq 1}$  de faisceaux étales de  $\mathcal{O}_F$ -modules tel que :*

- $\mathcal{F}_m$  est un faisceau étale de  $\mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F$ -modules, localement libre de rang fini,
- $\mathcal{F}_m$  devient constant au dessus d'un revêtement étale fini de  $Y$ ,
- pour  $m' \geq m$ ,  $\mathcal{F}_{m'} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_m$ .

Au groupe  $p$ -divisible universel  $X^{\text{univ}}/\check{\mathcal{M}}$  est associé un groupe  $p$ -divisible rigide

$$(X^{\text{univ}})^{\text{rig}} = \varinjlim_m X^{\text{univ}}[m]^{\text{rig}}$$

où  $X^{\text{univ}}[m]^{\text{rig}}/\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$  est étale fini de degré  $p^{mht\mathbb{X}}$ . Le système compatible

$$T_p(X^{\text{univ}}) := (X^{\text{univ}}[m]^{\text{rig}})_{m \in \mathbb{N}}$$

est un  $\mathcal{O}_F$ -système local étale et (dans le cas P.E.L) est muni d'une polarisation

$$T_p(X^{\text{univ}}) \times T_p(X^{\text{univ}}) \rightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

où  $\mathbb{Z}_p(1)$  est le  $\mathbb{Z}_p$ -système local étale rigide  $(\mu_{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$ . On remarquera que cette polarisation n'est définie qu'à multiplication par une unité dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ -près (cf. néanmoins 2.4.1 où on explique comment fixer un élément particulier dans cette classe d'homothétie).

Notons  $\overline{\check{E}}$  la clôture algébrique de  $\check{E}$  associée au plongement canonique  $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ . Fixons un  $\mathcal{O}_F$ -réseau  $\Lambda_0$  dans  $V$  dans le cas de type E.L. Dans le cas de type P.E.L, on fixe un  $\mathcal{O}_F$ -réseau  $\Lambda_0$  autodual dans  $V$ . D'après la trivialité du torseur des périodes qui résulte de la condition (2) dans la définition 2.1.1.2 et de la proposition 1.20 de [RZ96] (cf. par exemple [Far04], 2.3.9.1), pour tout  $x \in \check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}(\overline{\check{E}})$ , après avoir fixé un isomorphisme  $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$  sur  $\overline{\check{E}}$  c'est à dire un système compatible de racines primitives dans  $\mu_{p^n}(\overline{\check{E}})$  lorsque  $n$  varie, il existe un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -modules symplectiques

$$\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X_x^{\text{univ}}).$$

Le réseau  $\Lambda_0$  définit un modèle entier réductif de  $G$ . On a alors

$$G(\mathbb{Z}_p) = \text{Aut}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda_0)$$

dans le cas E.L. et

$$G(\mathbb{Z}_p) = \text{Aut}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda_0) \cap G(\mathbb{Q}_p) = \text{Gsp}(\Lambda_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

dans le cas P.E.L..

Si  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  est un sous-groupe ouvert, on peut parler de structure de niveau  $K$  sur  $T_p(X^{\text{univ}})$  au sens usuel que nous rappelons.

**Définition 2.1.6.3.** Soit  $Y \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$  un espace rigide. Fixons un  $x \in Y(\overline{E})$  dans chaque composante connexe de  $Y$ . Une structure de niveau  $K$  sur  $T_p(X^{\text{univ}})$  au-dessus de  $Y$  est la donnée pour tout  $x$  comme précédemment d'une  $K$ -orbite d'isomorphismes de  $\mathcal{O}_F$ -modules :

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X_x^{\text{univ}})$$

vérifiant :

- dans le cas P.E.L., après avoir fixé un isomorphisme entre la fibre de  $\mathbb{Z}_p(1)$  au point  $x$  et  $\mathbb{Z}_p$ , on demande que  $\eta$  soit compatible aux produits symplectiques à une unité dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ -près,
- via  $\eta$  l'action de monodromie de  $\pi_1(Y, x)$  sur  $T_p(X_x^{\text{univ}})$  se fait à travers  $K$  agissant sur  $\Lambda_0$ .

Pour un tel  $\eta$  on note  $\bar{\eta}$  sa classe modulo composition par un élément de  $K$ .

**Définition 2.1.6.4.** Pour  $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$  un sous-groupe compact ouvert, nous notons  $\check{\mathcal{M}}_K$  l'espace rigide qui classifie les structures de niveau  $K$  sur  $T_p(X^{\text{univ}})$ . Autrement dit,

$$\check{\mathcal{M}}_K = \underline{\text{Isom}}(\Lambda_0/p^m \Lambda_0, X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}})/K, \quad m \gg 0$$

où

- $\Lambda_0/p^m \Lambda_0$  est vu comme faisceau étale constant.
- $\underline{\text{Isom}}$  signifie les isomorphismes de faisceaux étales compatibles à l'action de  $\mathcal{O}_F$  dans le cas E.L.. Dans le cas P.E.L. on demande de plus que localement pour la topologie étale, après avoir fixé un isomorphisme  $\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_{p^m}^{\text{rig}}$ , ils soient compatibles aux produits symplectiques

$$X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \times X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \longrightarrow \mu_{p^m}^{\text{rig}}$$

induit par la polarisation et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda_0/p^m \Lambda_0 \times \Lambda_0/p^m \Lambda_0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}$$

à une unité dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ -près, c'est à dire une fonction localement constante à valeurs dans  $\mathbb{Z}_p^\times$ -près.

- L'hypothèse  $m \gg 0$  signifie  $(\text{Id} + p^m \text{End}(\Lambda_0)) \cap G(\mathbb{Q}_p) \subset K$ .

La collection  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  est une tour de revêtements finis étales au-dessus de  $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ . Rappelons que l'on a une action à droite de  $G(\mathbb{Q}_p)$  sur  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  comme suit : pour  $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$  et  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  tels que  $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ , on a un isomorphisme

$$g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$$

(cf. [RZ96] 5.34 ou [Far04] 2.3.9.3). L'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$  s'étend à  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  et commute à celle de  $G(\mathbb{Q}_p)$ .

La donnée de descente de Rapoport-Zink pour  $\check{\mathcal{M}}$  induite naturellement la donnée de descente de Rapoport-Zink pour la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ , car pour un  $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ -espace rigide  $Y$ , une structure de niveau  $K$  ne dépend pas du morphisme structural  $Y \rightarrow \text{Sp } \check{E}$ .

**Remarque 2.1.6.1.** *Les définitions 2.1.6.3 et 2.1.6.4 d'une structure de niveau P.E.L. et de son espace classifiant que nous avons données sont celles apparaissant dans la littérature. Dans la section 2.4.1 nous donnerons une reformulation plus agréable de ces définitions.*

**Remarque 2.1.6.2.** *Soit  $Z_G$  le centre de  $G$ . Puisque  $J$  est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi  $G$ , il existe un plongement canonique  $Z_G \hookrightarrow J$ . Alors, via le plongement*

$$\begin{aligned} Z_G(\mathbb{Q}_p) &\hookrightarrow J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p), \\ z &\mapsto (z^{-1}, z) \end{aligned}$$

$Z_G(\mathbb{Q}_p)$  agit trivialement sur la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ . En effet, l'action d'un tel élément sur le module de Tate ou le module de Dieudonné est identique. Ainsi, la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  est munie d'une action de  $(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))/Z_G(\mathbb{Q}_p)$ .

### 2.1.7 Le système local équivariant sur la tour

Notons pour tout  $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ ,  $\mathcal{T}_K$  le tiré en arrière via  $\check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{rig}$  du  $\mathcal{O}_F$ -système local étale  $T_p(X^{\text{univ}})$ . On a donc  $\mathcal{T}_{G(\mathbb{Z}_p)} = T_p(X^{\text{univ}})$ . La collection de faisceaux  $(\mathcal{T}_K)_{K \subset G(\mathbb{Z}_p)}$  forme un système  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  au sens suivant. Si  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ , via l'isomorphisme

$$g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_K$$

on a un isomorphisme canonique compatible aux structures additionnelles

$$g^* \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_K.$$

C'est une conséquence de ce que l'action de  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$  sur  $(X, \rho)$  modifie la déformation  $\rho$  du groupe  $p$ -divisible et non le groupe  $p$ -divisible  $X$  lui-même et donc pas son module de Tate. Si  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  et  $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$  vérifient  $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$  et  $\Lambda_0 \subset g.\Lambda_0$ , associé au morphisme

$$g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$$

il existe un morphisme

$$\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg}.$$

En gros (on renvoie à [RZ96] chap. 5 ou [Far04], 2.3.9.3), le morphisme  $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$  fait correspondre à  $(X, \rho, \bar{\eta})$  un triplet

$$(X/C, f \circ \rho, \overline{\eta \circ g})$$

où  $C \subset X$  est un sous-groupe plat fini et  $f : X \rightarrow X/C$ . Le morphisme précédent  $\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg}$  est alors donné par  $T_p(X) \hookrightarrow T_p(X/C)$ .

Ces morphismes se composent naturellement et les deux « actions » de  $J(\mathbb{Q}_p)$  et  $G(\mathbb{Q}_p)$  commutent.

**Remarque 2.1.7.1.** *Bien que via le plongement  $Z_G(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ ,  $Z_G(\mathbb{Q}_p)$  agisse trivialement sur  $\check{\mathcal{M}}_K$ , le système compatible de  $\mathcal{O}_F$ -systèmes locaux étales  $(\mathcal{T}_K)_K$  n'est pas  $(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))/Z_G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant i.e.  $Z_G(\mathbb{Q}_p)$  n'agit pas trivialement sur  $\mathcal{T}_K$ . Par exemple, l'action de  $(p, p^{-1}) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  est donnée par  $\mathcal{T}_K \xrightarrow{\times p} \mathcal{T}_K$ .*

## 2.2 Espaces de Rapoport-Zink associés aux tores

### 2.2.1 Donnée de Rapoport-Zink torique et norme reflex

Comme précédemment on suppose fixé une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  de  $\mathbb{Q}_p$ . On oublie momentanément les notations qui précèdent dans cette section. Soit  $T$  un tore sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mu \in X_*(T) = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$  un cocaractère. Notons  $E$  le corps de définition de  $\mu$  et  $\check{E}$  le complété de l'extension maximale non-ramifiée de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ . Posons

$$J = G = T.$$

**Remarque 2.2.1.1.** *Contrairement aux données de Rapoport-Zink « usuelles », la donnée permettant de définir l'espace associé à un tore ne requiert pas le choix d'un élément  $\bar{b} \in B(T)$ . La raison est que  $\mu \in X_*(T)$  étant donné, il existe un unique  $\bar{b} \in B(T)$  tel que  $\bar{b} \in B(T, \mu)$ . En effet, d'après Kottwitz, si  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ , on a  $B(T) = X_*(T)_\Gamma$  et  $B(T, \mu)$  est l'ensemble des éléments de  $X_*(T)_\Gamma$  qui coïncident avec l'image de  $\mu$  dans les coinvariants sous  $\Gamma$ .*

Le cocaractère  $\mu : \mathbb{G}_{mE} \rightarrow T_E$  définit un morphisme de tores

$$N_\mu : \text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \longrightarrow T$$

qui est le composé

$$\text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} \mu} \text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} T_E \xrightarrow{N_{E/\mathbb{Q}_p}} T$$

C'est un analogue  $p$ -adique de la norme reflex en théorie de la multiplication complexe. On en déduit un morphisme

$$N_\mu : E^\times \longrightarrow T(\mathbb{Q}_p).$$

**Exemple 2.2.1.1.** *Soit  $F|\mathbb{Q}_p$  une extension de degré fini « abstraite », c'est à dire non plongée dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  et  $T = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$ . Soit  $\tilde{I}_F = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$  sur lequel agit  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ . On a comme  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ -module,  $X_*(T) = \mathbb{Z}[\tilde{I}_F]$ . Soit  $\mu = \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} p_\tau[\tau] \in X_*(T)$ . Alors,*

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|E) = \{\gamma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p) \mid \forall \tau \in \tilde{I}_F, p_{\gamma\tau} = p_\tau\}.$$

Fixons  $\tau_0 \in \tilde{I}_F$ . Pour  $\gamma \in \tilde{I}_E = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E, \overline{\mathbb{Q}_p})$ , soit  $\tilde{\gamma} \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$  prolongeant  $\gamma$ . Alors,  $p_{\tilde{\gamma}^{-1}\tau_0}$  ne dépend pas du choix du relèvement  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$ . On a

$$\begin{aligned} N_\mu : E^\times &\longrightarrow F^\times \\ x &\longmapsto \tau_0^{-1} \left( \prod_{\gamma \in \tilde{I}_E} \gamma(x)^{p_{\tilde{\gamma}^{-1}\tau_0}} \right) \end{aligned}$$

qui ne dépend pas du choix fait de  $\tau_0$ .

Soit  $\overline{E} = \overline{\mathbb{Q}_p}$  et

$$\text{rec}_E : E^\times \longrightarrow \text{Gal}(\overline{E}|E)^{ab}$$

l'application de réciprocité d'Artin normalisée de telle manière qu'une uniformisante de  $E$  s'envoie sur un Frobenius arithmétique de  $\text{Gal}(\overline{E}|E)$ . On note  $I_E$  le sous-groupe d'inertie de  $\text{Gal}(\overline{E}|E)$  et  $E^{ab}$  l'extension abélienne maximale de  $E$ . On note  $\overline{\check{E}}$  la clôture algébrique de  $\check{E}$  déduite de celle fixée  $\overline{E} = \overline{\mathbb{Q}_p}$  de  $E$ . On a donc  $I_E = \text{Gal}(\overline{\check{E}}|\check{E})$ .

**Définition 2.2.1.1.** *On note*

$$\chi_\mu : I_E \longrightarrow T(\mathbb{Q}_p)$$

le morphisme composé

$$\begin{aligned} I_E &\longrightarrow \mathcal{O}_E^\times \xrightarrow{N_\mu} T(\mathbb{Q}_p) \\ \gamma &\longmapsto \text{rec}_E^{-1}(\gamma|_{E^{ab}}). \end{aligned}$$

## 2.2.2 Tour de Rapoport-Zink torique

Soit  $\text{Et}_{\check{E}}$  la catégorie des espaces rigides de dimension 0 étales sur  $\text{Sp}(\check{E})$  et  $\bar{x} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$  un point géométrique avec  $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ . Alors le foncteur fibre :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{x}} : \text{Et}_{\check{E}} &\rightarrow \mathcal{E}\text{ns} \\ Y &\mapsto Y_{\bar{x}} = \{\bar{y} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow Y \mid f_Y(\bar{y}) = \bar{x}\} \end{aligned}$$

avec  $f_Y : Y \rightarrow \mathrm{Sp}(\check{E})$  le morphisme structural, induit une équivalence de catégories :

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} : \mathrm{Et}_{\check{E}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x}) - \mathcal{E}\mathrm{ns}$$

où  $\pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x}) - \mathcal{E}\mathrm{ns}$  désigne la catégorie des ensembles (avec la topologie discrète) munis d'une action continue de  $\pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x}) = \mathrm{Gal}(\overline{\check{E}}/\check{E})$ .

**Définition 2.2.2.1.** Soit  $K$  un sous-groupe compact ouvert de  $T(\mathbb{Q}_p)$ . On note  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$  l'unique espace rigide étale de dimension 0 sur  $\check{E}$  tel que

$$\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(\overline{\check{E}}) = T(\mathbb{Q}_p)/K$$

et l'action de  $\sigma \in I_E$  soit donnée par : si  $\gamma \in I_E$  alors

$$\gamma(xK) = \chi_\mu(\gamma)xK.$$

On obtient ainsi une tour d'espaces rigides de dimension 0

$$(\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K)_K.$$

Si  $M$  est l'extension de degré fini de  $\check{E}$  dans  $\overline{\check{E}}$  telle que

$$\mathrm{Gal}(\overline{\check{E}}|M) = \ker(I_E \xrightarrow{\chi_\mu} T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow T(\mathbb{Q}_p)/K),$$

on a

$$\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K \simeq \coprod_{N_\mu(\mathcal{O}_E^\times) \backslash T(\mathbb{Q}_p)/K} \mathrm{Sp}(M).$$

**Définition 2.2.2.2.** La tour est munie d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  en posant pour  $(a, b) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  et  $xK \in T(\mathbb{Q}_p)/K$

$$(a, b).xK = abxK$$

qui définit un isomorphisme

$$(a, b) : \check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K.$$

Soit  $\Delta = \mathrm{Hom}(X_{\mathbb{Q}_p}^*(T), \mathbb{Z})$ . Il y a une application  $I_E$ -invariante

$$\begin{aligned} \varkappa : T(\mathbb{Q}_p)/K &\longrightarrow \Delta \\ xK &\longmapsto [\chi \mapsto v_p(\chi(x))] \end{aligned}$$

qui induit un morphisme d'espaces rigides

$$\varkappa : \check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K \longrightarrow \Delta$$

où  $\Delta$  est vu comme l'espace rigide de dimension 0,  $\coprod_{\Delta} \mathrm{Sp}(\check{E})$  (ou si l'on veut  $\varkappa$  est une application de l'ensemble discret  $|\check{\mathcal{M}}(T, \mu)|$  vers  $\Delta$ ).

Si  $T$  est un tore non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$ , notons  $T(\mathbb{Z}_p)$  les  $\mathbb{Z}_p$ -points de son modèle entier canonique. C'est un sous-groupe compact maximal dans  $T(\mathbb{Q}_p)$ . Il y a une bijection

$$\begin{aligned} X_*(T)_{\mathbb{Q}_p} &\xrightarrow{\sim} T(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Z}_p) \\ \nu &\longmapsto \nu(p)T(\mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

où  $X_*(T)_{\mathbb{Q}_p}$  désigne les cocaractères rationnels. Soit  $\Delta'$  l'image dans  $\Delta$  de l'application

$$\begin{aligned} X_*(T)_{\mathbb{Q}_p} &\longrightarrow \Delta \\ \nu &\longmapsto [\chi \mapsto \langle \chi, \nu \rangle]. \end{aligned}$$

On a alors

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_{T(\mathbb{Z}_p)} \hat{\otimes}_{\check{E}} \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_{T(\mathbb{Z}_p)}) \xrightarrow[\sim]{\varkappa} \Delta'$$

c'est à dire  $\Delta' = \mathrm{Im} \varkappa$  et

$$\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_{T(\mathbb{Z}_p)} = \coprod_{\Delta'} \mathrm{Sp}(\check{E}).$$

### 2.2.3 Donnée de descent de Rapoport-Zink pour la tour de Rapoport-Zink torique

Fixons une inclusion  $\bar{x} : \check{E} \hookrightarrow \overline{\check{E}}$ . Pour un automorphisme  $\tau : \check{E} \rightarrow \check{E}$  stabilisant les éléments de  $E$ , fixons un relèvement  $\tilde{\tau} : \overline{\check{E}} \xrightarrow{\sim} \overline{\check{E}}$  de  $\tau$  au sens où le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{\check{E}} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \overline{\check{E}} \\ \uparrow \bar{x} & & \uparrow \bar{x} \\ \check{E} & \xrightarrow{\tau} & \check{E} \end{array}$$

Soit  $X$  un espace rigide étale sur  $\mathrm{Sp} \check{E}$ . Alors via  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ , l'espace rigide étale  $\tau^* X$  correspond à l'ensemble  $X_{\tau(\bar{x})}$  muni d'une action

$$\pi_1(\mathrm{Sp} \check{E}, \bar{x}) \xrightarrow{\pi_1(\tau)} \pi_1(\mathrm{Sp} \check{E}, \tau(\bar{x})) \rightarrow \mathrm{Aut}(X_{\tau(\bar{x})})$$

où

- $\tau(\bar{x})$  est le point géométrique

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \xrightarrow{\bar{x}} \mathrm{Sp}(\check{E}) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Sp}(\check{E});$$

- la flèche à gauche  $\pi_1(\tau)$  est le morphisme de groupes fondamentaux du morphisme  $\tau : \mathrm{Sp}(\check{E}) \rightarrow \mathrm{Sp}(\check{E})$ ;
- la flèche à droite est fournie par l'image de  $X$  via le foncteur  $\mathcal{F}_{\tau(\bar{x})}$ .

L'isomorphisme  $\tilde{\tau}$  induit un isomorphisme de foncteurs

$$\alpha_{\tilde{\tau}, \bar{x}} : \mathcal{F}_{\tau(\bar{x})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\bar{x}}$$

comme suit : soit  $Y$  un espace rigide étale sur  $\check{E}$ , alors

$$\alpha_{\tilde{\tau}, \bar{x}}(Y) : \{\bar{y} : \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow Y \mid f_Y(\bar{y}) = \tau(\bar{x})\} = Y_{\tau(\bar{x})} \rightarrow Y_{\bar{x}} = \{\bar{y} : \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow Y \mid f_Y(\bar{y}) = \bar{x}\}$$

$$\bar{y} \mapsto \bar{y} \circ \tilde{\tau}^{-1}$$

où  $\tilde{\tau}^{-1} : \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p)$  correspond à  $\tilde{\tau}^{-1} : \overline{\check{E}} \rightarrow \overline{\check{E}}$  par l'abus de notation.

De plus,  $\alpha_{\tilde{\tau}, \bar{x}}$  induit un isomorphisme de groupes fondamentaux :

$$\gamma_{\tilde{\tau}} : \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \tau(\bar{x})) = \mathrm{Gal}(\overline{\check{E}}_{\tau(\bar{x})}/\check{E}) \rightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\check{E}}_{\bar{x}}/\check{E}) = \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x})$$

$$g \mapsto \tilde{\tau}^{-1} g \tilde{\tau}$$

où l'indice en bas de  $\overline{\check{E}}$  précise le plongement  $\check{E} \hookrightarrow \overline{\check{E}}$ . On en déduit immédiatement le lemme suivant :

**Lemme 2.2.3.1.** *Fixons un point géométrique  $\bar{x} : \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathrm{Sp}(\check{E})$ . Soient  $\tau : \check{E} \xrightarrow{\sim} \check{E}$  un automorphisme de  $\check{E}$  stabilisant les éléments de  $E$  et  $\tilde{\tau} : \overline{\check{E}} \xrightarrow{\sim} \overline{\check{E}}$  un relèvement de  $\tau$ . Soit  $X$  un espace rigide étale sur  $\mathrm{Sp}(\check{E})$ . Alors se donner un morphisme (resp. isomorphisme)  $X \rightarrow \tau^* X$  est équivalent à se donner une application (resp. bijection)  $X_{\bar{x}} \rightarrow X_{\tau(\bar{x})}$  compatible à l'action de  $\pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x})$  via*

$$\tilde{\gamma}_{\tilde{\tau}} : \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x}) \xrightarrow{\pi_1(\tau)} \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \tau(\bar{x})) \xrightarrow{\gamma_{\tilde{\tau}}} \pi_1(\mathrm{Sp}(\check{E}), \bar{x}).$$

Fixons  $\pi_E$  une uniformisante de  $E$ . Posons  $\tilde{\sigma}_E := \mathrm{rec}_E(\pi_E) \in \mathrm{Gal}(\overline{E}|E)^{ab}$ . Soit  $E_{\pi_E}$  le sous corps de  $E^{ab}$  fixé par  $\tilde{\sigma}_E$ . Alors  $E^{ab} = E_{\pi_E} E^{nr}$ , où  $E_{\pi_E}$  et  $E^{nr}$  sont linéairement disjoints. De plus,  $(\tilde{\sigma}_E)|_{E^{nr}} \in \mathrm{Gal}(E^{nr}|E)$  est le Frobenius. On prend un antécédent de  $\tilde{\sigma}_E$  via  $\mathrm{Gal}(\overline{E}|E) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E^{ab}|E)$ . Par l'abus de notation, on le note encore  $\tilde{\sigma}_E$ . Alors  $\tilde{\sigma}_E$  est un relèvement de Frobenius.

**Remarque 2.2.3.1.** La réciproque de l'application de réciprocité d'Artin  $\text{rec}_E^{-1} : I_E \rightarrow \mathcal{O}_E^\times$  factorise via

$$\text{Gal}(E^{ab}|E^{nr}) = I_E/\text{Ker}(\text{rec}_E^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E^\times$$

qu'on note encore  $\text{rec}_E^{-1}$ . Alors le morphisme composé

$$\text{Gal}(\bar{E}|E) \rightarrow \text{Gal}(E^{ab}|E) \rightarrow \text{Gal}(E_\pi|E) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(E^{ab}|E^{nr}) \xrightarrow{\text{rec}_E^{-1}} \mathcal{O}_E^\times \quad (2.2)$$

coïncide avec  $\chi_{LT_E, \pi_E}^{-1}$  d'après [CF86] Ch VI, §3.4, thm 3, où  $\chi_{LT_E, \pi_E}$  est le caractère module de Tate d'un groupe de Lubin-Tate sur  $\mathcal{O}_E$  associé à la uniformisante  $\pi_E$ . Donc  $\chi_{LT_E, \pi_E}^{-1}(\bar{\sigma}_E) = 1$ .

**Définition 2.2.3.1.** La donnée de descente de Rapoport-Zink pour l'espace rigide  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$  est un isomorphisme  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$  qui correspond à la bijection

$$\begin{aligned} \times N_\mu(\pi_E^{-1}) : \check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(\bar{E}) &= T(\mathbb{Q}_p)/K \rightarrow T(\mathbb{Q}_p)/K = \check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(\bar{E}) \\ xK &\mapsto N_\mu(\pi_E^{-1})xK \end{aligned}$$

compatible à l'action de  $I_E$  via lemme 2.2.3.1 pour  $\bar{x}$ ,  $\sigma_E$  et  $\bar{\sigma}_E$  comme précédent.

**Remarque 2.2.3.2.** (1) La donnée de descente de Rapoport-Zink pour l'espace rigide  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$  ne dépend pas de l'uniformisante  $\pi_E$  choisie.

(2) A l'aide de la théorie du corps de classes local, le morphisme composé

$$I_E \xrightarrow{\tilde{\gamma}_{\bar{\sigma}_E}} I_E \xrightarrow{\text{rec}_E^{-1}} \mathcal{O}_E^\times$$

coïncide avec le morphisme  $\text{rec}_E^{-1}$ . Donc dans la définition précédente, la compatibilité de l'action de  $I_E$  est équivalent à celle de l'action de  $I_E$  via  $\tilde{\gamma}_{\bar{\sigma}_E}$ .

(3) L'inverse de l'application de réciprocité d'Artin  $\text{rec}_E^{-1} : I_E \rightarrow \mathcal{O}_E^\times$  prolonge en un morphisme :

$$W_E \rightarrow E^\times$$

en associant  $\pi_E$  à  $\bar{\sigma}_E$ , où  $W_E$  est le groupe de Weil. Donc  $\chi_\mu : I_E \rightarrow T(\mathbb{Q}_p)$  se prolonge en

$$\tilde{\chi}_\mu : W_E \rightarrow E^\times \xrightarrow{N_\mu} T(\mathbb{Q}_p) \quad (2.3)$$

L'espace rigide  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$  muni de la donnée de Rapoport-Zink correspond donc à la fibre  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(\bar{E})$  muni d'une action de  $W_E$  via  $\tilde{\chi}_\mu$ .

La foncteur  $\mathcal{F}_{\bar{x}}$  induit aussi une équivalence de catégories :

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} : \mathcal{O}_F - \text{Loc} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x}) - \mathcal{O}_F - \text{mod}$$

où  $\pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x}) - \mathcal{O}_F - \text{mod}$  désigne la catégorie des  $\mathcal{O}_F$ -modules libres de rang fini munis d'une action continue de  $\pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x})$ . On en déduit une variation du lemme 2.2.3.1 :

**Lemme 2.2.3.2.** Soient  $\bar{x} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$ ,  $\tau \in \check{E} \xrightarrow{\sim} \check{E}$  un automorphisme stabilisant les éléments de  $E$  et  $\tilde{\tau} : \bar{E} \xrightarrow{\sim} \bar{E}$  un relèvement de  $\tau$ . Soit  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_F$ -système local sur  $\text{Sp}(\check{E})$ . Alors se donner un morphisme de  $\mathcal{O}_F$ -systèmes locaux  $\mathcal{L} \rightarrow \tau^* \mathcal{L}$  est équivalent à se donner un homomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -modules  $\mathcal{L}_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{\tau}}$  compatible à l'action de  $\pi_1(\text{Sp}(\check{E}), \bar{x})$  via  $\tilde{\gamma}_{\tilde{\tau}}$ .

## 2.2.4 Lien avec les représentations cristallines abéliennes

Soit  $L$  le complété de l'extension maximale non-ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}_p$  et  $B(T)$  l'ensemble associé de Kottwitz. Comme expliqué dans la remarque 2.2.1.1, le choix de  $\mu \in X_*(T)$  détermine complètement un unique  $\bar{b} \in B(T)$  tel que  $\bar{b} \in B(T, \mu)$ . Plus précisément, d'après ([Kot85] 2.5), si  $E^0$  est l'extension maximale non-ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $E$  on peut prendre

$$b = N_{E/E^0}(\mu(\pi_E))$$

où  $\pi_E$  est une uniformisante de  $E$ . D'après la proposition 1.21 de [RZ96] la paire  $(b, \mu)$  est admissible et définit donc un foncteur exact compatible au produit tensoriel

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{b,\mu} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T &\longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} I_E \\ (V, \rho) &\longmapsto \text{Fil}_{\rho \circ \mu}^0 (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\overline{O}_E))^{\rho(b) \otimes \varphi = \text{Id}} \end{aligned}$$

où

- $G_E = \text{Gal}(\overline{E}|E)$  et  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} G_E$  désigne les représentations cristallines de  $G_E$
- La filtration  $\text{Fil}_{\rho \circ \mu}^\bullet$  de  $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{E}$  est définie par :  $\text{Fil}^i V_{\check{E}}$  est la somme directe des espaces isotypiques où le caractère  $\rho \circ \mu$  agit via  $z \mapsto z^k$  avec  $k \geq i$ .
- $\rho(b) \in \text{End}_L(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L) \subset \text{End}_{B_{\text{cris}}}(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}})$  et  $\rho(b) \otimes \varphi$  est obtenu en composant  $\rho(b)$  avec  $\text{Id} \otimes \varphi$  où  $\varphi$  est le Frobenius cristallin de  $B_{\text{cris}}$ .

D'après la proposition 1.20 de [RZ96] le torseur des périodes associé à  $(b, \mu)$  est trivial au sens où le foncteur fibre obtenu par composition

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T \xrightarrow{\mathcal{F}_{b,\mu}} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} I_E \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$$

est isomorphe au foncteur fibre canonique sur la catégorie Tannakienne  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T$ . Cela signifie que pour  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(T)$ , après choix d'un isomorphisme entre ces deux foncteurs fibres, on peut voir la représentation cristalline  $\mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho)$  comme une représentation

$$\mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho) : I_E \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

Rappelons le lemme suivant.

**Lemme 2.2.4.1 ([RZ96] lemme 1.22).** *Le groupe de Galois  $I_E$  agit sur l'espace de la représentation  $\mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho)$  via*

$$\rho \circ \chi_\mu : I_E \longrightarrow \text{GL}(V)$$

et ce, puisque  $T(\mathbb{Q}_p)$  est abélien, indépendamment du choix d'un isomorphisme entre les deux foncteurs fibres précédents  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$ .

Remarquons que puisque pour tout  $g \in J(\mathbb{Q}_p) = T(\mathbb{Q}_p)$ ,  $gbg^{-\sigma} = b$  et  $g\mu g^{-1} = \mu$ , le groupe  $J(\mathbb{Q}_p)$  agit sur le foncteur  $\mathcal{F}_{b,\mu}$ . Voici maintenant une description en termes de structures de niveau des espaces de Rapoport-Zink toriques précédents.

**Proposition 2.2.4.1.** *L'espace  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$  admet la description suivante.*

Notons  $\omega_0 : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} I_E \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$  et  $\omega_{\text{can}} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$  les foncteurs fibres canoniques. Soit  $M|\check{E}$  une extension de degré fini dans  $\check{E}$ . Alors,

$$\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(M) \simeq \{\eta\} / \sim$$

où :

- $\eta : \omega_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b,\mu}$  est un isomorphisme de foncteurs fibres tel que pour tout  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T$ , l'action de  $\text{Gal}(\check{E}|M)$  sur le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $\omega_0 \circ \mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho)$  se fasse via  $\eta$  à travers le sous-groupe  $\rho(K) \subset \text{GL}(V) = \text{GL}(\omega_{\text{can}}(V, \rho))$ .
- On a  $\eta \sim \eta'$  si et seulement s'il existe  $g \in K$  tel que  $\eta'$  soit obtenu à partir de  $\eta$  par composition avec l'isomorphisme de foncteur fibre  $\omega_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \omega_{\text{can}}$  fourni par  $g$ .

L'action de  $g \in J(\mathbb{Q}_p) = T(\mathbb{Q}_p)$  est donnée par composition de  $\eta$  avec  $g : \mathcal{F}_{b,\mu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{b,\mu}$ . Celle de  $g \in G(\mathbb{Q}_p) = T(\mathbb{Q}_p)$  est donnée par  $\eta \mapsto \eta \circ g$ .

*Démonstration.* Fixons un isomorphisme de foncteurs fibres

$$u : \omega_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b,\mu}$$

(l'isomorphisme que l'on construit dépend d'un tel choix). Il y a alors une bijection

$$\begin{aligned} T(\mathbb{Q}_p) &\xrightarrow{\sim} \text{Isom}(\omega_{can}, \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b,\mu}) \\ x &\longmapsto u \circ x. \end{aligned}$$

Celle-ci induit une bijection

$$T(\mathbb{Q}_p)/K \xrightarrow{\sim} \text{Isom}(\omega_{can}, \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b,\mu}) / \sim$$

où deux isomorphismes entre  $\omega_{can}$  et  $\omega_0 \circ \mathcal{F}_{b,\mu}$  sont équivalents s'ils diffèrent par composition avec un élément de  $K$ . Maintenant, si  $M|\check{E}$  est comme dans l'énoncé,  $g \in T(\mathbb{Q}_p)$ , d'après le lemme 2.2.4.1, via  $\eta = u \circ g$ , l'action de  $\text{Gal}(\overline{\check{E}}|M)$  sur  $\omega_0 \circ \mathcal{F}_{b,\mu}$  se fait à travers  $K$  si et seulement si

$$xK \in (T(\mathbb{Q}_p)/K)^{\text{Gal}(\overline{\check{E}}|M)}$$

où  $\text{Gal}(\overline{\check{E}}|M)$  agit sur  $T(\mathbb{Q}_p)/K$  par translations via  $\chi_\mu$ . □

**Remarque 2.2.4.1.** *La description précédente de  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$  dépend du choix d'un isomorphisme de foncteurs fibres  $\omega_{can} \xrightarrow{\sim} \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b,\mu}$ . La bonne définition des espaces de Rapoport-Zink  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$  est peut-être celle donnée dans la proposition précédente qui paraît plus intrinsèque que celle de la définition 2.2.2. En effet, la définition 2.2.2 suppose en quelque sorte que l'on a fixé un point base dans  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)$  pour identifier ses points géométriques, qui forment un espace homogène sous  $T(\mathbb{Q}_p)$ , à  $T(\mathbb{Q}_p)/K$ .*

Soit  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} T$ . La représentation

$$\rho \circ \chi_\mu : I_E \longrightarrow \text{GL}(V)$$

définit un  $\mathbb{Q}_p$ -système local étale

$$\mathcal{L}_{\mu,\rho}$$

sur  $\text{Sp}(\check{E})$  (il n'y a pas d'ambiguïté à définir ce qu'est un  $\mathbb{Q}_p$ -système local étale sur un espace rigide de dimension 0). Le tiré en arrière de ce système local sur  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$  à pour fibres géométriques

$$(T(\mathbb{Q}_p) \times V)/K \longrightarrow T(\mathbb{Q}_p)/K$$

au dessus de  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K$ . En termes de la description donnée dans la proposition 2.2.4.1,  $\check{\mathcal{M}}(T, \mu)_K(\overline{\check{E}}) = \{\eta : \omega_{can} \xrightarrow{\sim} \omega_0 \circ \mathcal{F}_{b,\mu}\}$ , la fibre en  $\eta$  de ce système local munie de son action de Galois est la représentation cristalline  $\mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho)$ .

## 2.3 Le morphisme déterminant pour le type E.L.

### 2.3.1 Notations

Soient  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$  une donnée locale de type E.L. non ramifiée simple et  $\check{\mathcal{M}} := \check{\mathcal{M}}(b, \mu)$  l'espace de Rapoport-Zink associé. On reprend les notations de la section 2.1.2. Comme  $F$  et  $E$  sont non-ramifiés, on prend toujours  $\pi_E = \pi_F = p$  comme une uniformisante de  $E$  et de  $F$ .

Précisons le scindage de  $\check{\mathcal{M}}$  par  $\Delta$  dans ce cas là. Comme  $X_{\mathbb{Q}_p}^*(G) \simeq \mathbb{Z}$  est engendré par

$$\begin{aligned} \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_F(V) &\longrightarrow \mathbb{G}_m \\ g &\longmapsto \det_{\mathbb{Q}_p}(g, V) = N_{F/\mathbb{Q}_p}(\det_F(g, V)) \end{aligned}$$

où  $\det_{\mathbb{Q}_p}(g, V)$  désigne le déterminant de l'homomorphisme  $\mathbb{Q}_p$ -linéaire  $g : V \rightarrow V$ , on a  $\Delta \simeq \mathbb{Z}$ . Les applications  $\varkappa$  et  $\omega_J$  sont définies par

$$\begin{aligned} \varkappa : \quad \check{\mathcal{M}} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (X, \rho) &\longmapsto -\text{ht}\rho \\ \omega_J : \quad J(\mathbb{Q}_p) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ g &\longmapsto v_p(\det_L(g, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)). \end{aligned}$$

Rappelons que l'on note  $d = [F : \mathbb{Q}_p]$ .

**Lemme 2.3.1.1.** *L'image de  $\varkappa$  est  $d\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 3.53 de [RZ96] et puisque  $0 \in \text{Im } \varkappa$  (cf. remarque 2.1.5.1) on a  $\text{Im } \varkappa \subset d\mathbb{Z}$ . Puisque l'image de  $\omega_J$  est  $d\mathbb{Z}$  on en déduit le résultat.  $\square$

On définit maintenant :

–  $D := G/G^{\text{der}}$ , où  $G^{\text{der}}$  désigne le groupe dérivé de  $G$ . On note

$$\det : G \longrightarrow D.$$

–  $\det \tilde{\mu}$  : le caractère

$$\det \tilde{\mu} : \mathbb{G}_m \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathbb{G}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \longrightarrow D_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$$

–  $\det K$  : l'image d'un sous-groupe compact ouvert  $K$  de  $G(\mathbb{Q}_p)$  via le morphisme  $G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$ .

Le morphisme

$$\begin{aligned} \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_F(V) &\longrightarrow \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \\ g &\longmapsto \det_F(g, V). \end{aligned}$$

induit un isomorphisme

$$D \xrightarrow{\sim} \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m.$$

Via cet isomorphisme le générateur de  $X^*(G)$  donné au début de cette section est

$$G \xrightarrow{\det} D \xrightarrow{N_{F/\mathbb{Q}_p}} \mathbb{G}_m.$$

On a alors

$$X_*(D) = \bigoplus_{\tau \in \check{I}_F} \mathbb{Z}[\tau]$$

où via la décomposition

$$D_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \prod_{\tau \in \check{I}_F} \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}},$$

l'élément  $[\tau] \in X_*(D)$  est donné par

$$z \longmapsto (1, \dots, 1, z, 1, \dots, 1)$$

où  $z$  est placé en indice  $\tau$ . Alors,

$$\det \tilde{\mu} = - \sum_{\tau} p_{\tau}[\tau].$$

Puisque  $J$  est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi de  $G$ , il existe un morphisme canonique

$$\det : J \longrightarrow D$$

tel que pour  $g \in J(\mathbb{Q}_p) \subset G(L)$ , c'est à dire  $g b \sigma = b \sigma g$ ,

$$\det(g) = \det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} L}(g, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L) \in F^{\times}.$$

## 2.3.2 L'espace déterminant $\det(\check{\mathcal{M}})_K$

### 2.3.2.1 Le système local déterminant

Soit maintenant  $H_{LT}$  un groupe  $p$ -divisible de Lubin-Tate sur  $\mathcal{O}_F$  associé à l'uniformisante  $p$  ([CF86] VI.3.3). Cela signifie que  $H_{LT}$  est un groupe formel  $p$ -divisible de dimension 1 sur  $\mathcal{O}_F$ , de hauteur  $[F : \mathbb{Q}_p]$  et muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  telle que l'action induite sur  $\text{Lie } H_{LT}$  soit l'action tautologique. On note

$$T_p(H_{LT})$$

le  $\mathcal{O}_F$ -système local étale rigide sur  $\text{Sp } F$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  donné par  $(H_{LT}[p^m]^{rig})_{m \geq 1}$  (cf. définition 2.1.6.2). On fixe un point géométrique  $\bar{x} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$ . Cela induit une bijection

$$\check{I}_F := \text{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}_p}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathcal{O}_F, \mathcal{O}_{\check{E}}).$$

On identifie ces deux ensembles dans la suite. Pour  $\tau \in \check{I}_F$ , on note

$$\mathcal{L}_\tau = \tau^* T_p(H_{LT}) = T_p(H_{LT} \otimes_{\mathcal{O}_F, \tau} \mathcal{O}_{\check{E}})$$

comme  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur  $\text{Sp } \check{E}$ .

**Définition 2.3.2.1.** On définit un  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur  $\text{Sp } \check{E}$

$$\mathcal{L}_{\check{\mu}} := \bigotimes_{\tau \in \check{I}_F} \mathcal{L}_\tau^{\otimes p\tau}$$

où le produit tensoriel est pris au dessus de  $\mathcal{O}_F$ .

Si  $\mathcal{L}_{\check{\mu}} = (\mathcal{L}_{\check{\mu}, m})_{m \geq 1}$  on fera l'abus de notation qui consiste à écrire

$$\mathcal{L}_{\check{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} = \mathcal{L}_{\check{\mu}}/p^m \mathcal{L}_{\check{\mu}} = \mathcal{L}_{\check{\mu}, m}.$$

Pour tout  $\tau \in \check{I}_F$  notons

$$\chi_{LT, \tau} : I_E = \text{Gal}(\overline{\check{E}}|\check{E}) \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$$

le caractère de Lubin-Tate donnant l'action de  $\text{Gal}(\overline{\check{E}}|\check{E})$  sur la fibre au point géométrique  $\bar{x} : \text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$  de  $\mathcal{L}_\tau$ . Si  $\gamma \in \text{Gal}(F|\mathbb{Q}_p)$  on a

$$\chi_{LT, \tau\gamma} = \gamma^{-1} \circ \chi_{LT, \tau}.$$

En effet, si  $\iota : \mathcal{O}_F \xrightarrow{\sim} \text{End}(H_{LT})$  désigne l'action de  $\mathcal{O}_F$  alors  $H_{LT, \tau\gamma} = \tau^* \gamma^* H_{LT}$ . Or, le groupe  $p$ -divisible  $\gamma^* H_{LT}$  muni de l'action  $\mathcal{O}_F \xrightarrow{\gamma^{-1}} \mathcal{O}_F \xrightarrow{\gamma^* \iota} \text{End}(\gamma^* H_{LT})$  est un groupe de Lubin-Tate.

La fibre géométrique en  $\text{Sp}(\overline{\check{E}}) \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$  de  $\mathcal{L}_{\check{\mu}}$  munie de son action de Galois est donnée par le caractère

$$\prod_{\tau \in \check{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p\tau} : I_E \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times.$$

Si  $\tau_0 : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$  est fixé, ce caractère s'écrit

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \chi_{LT, \tau_0}^{p_i}$$

où  $\text{Gal}(F|\mathbb{Q}_p) = \langle \gamma \rangle$  et  $p_i = p_{\tau_0 \gamma^i}$ . Puisque  $F|\mathbb{Q}_p$  est non-ramifiée,  $E \subset \tau_0(F)$ . Notons  $d' = [E : \mathbb{Q}_p]$  et

$$\chi_{LT_E} : I_E \longrightarrow \mathcal{O}_{\check{E}}^\times$$

le caractère de Lubin-Tate de  $E$ . On a alors

$$\begin{aligned}
\prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau} &= \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \chi_{LT, \tau_0}^{p_i} \\
&= \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} \prod_{j \in d'\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \tau_0^{-1} \circ (\tau_0 \circ \gamma^{-j} \circ \tau_0^{-1}) \circ \chi_{LT, \tau_0}^{p_i} \\
&= \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \tau_0^{-1} \circ N_{\tau_0(F)/E} \circ \chi_{LT, \tau_0}^{p_i} \\
&= \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \tau_0^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_i}. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

**Exemple 2.3.2.1.** *Voici deux cas extrêmes :*

1. Si tous les  $(p_\tau)_\tau$  sont égaux,  $p_\tau = k$ , alors  $E = \mathbb{Q}_p$  et le caractère précédent est  $\chi_{cycl}^k$ .
2. S'il existe  $\tau_0$  tel que  $p_{\tau_0} \neq 0$  et pour  $\tau \neq \tau_0$ ,  $p_\tau = 0$  alors  $E = \tau_0(F)$  et le caractère précédent est  $\tau_0^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_{\tau_0}}$ .

### 2.3.2.2 La tour d'espaces déterminant $(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_K$ : définition

**Définition 2.3.2.2.** Notons  $\det \Lambda_0 = \bigwedge_{\mathcal{O}_F}^n \Lambda_0$ . Soit  $K \subset \mathcal{O}_F^\times$  un sous groupe ouvert, on définit

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K = \coprod_{\delta \in \text{Im } \varkappa} \underline{\text{Isom}}(\det \Lambda_0 \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \mathcal{L}_{\bar{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})/K, \quad m \gg 0$$

un espace rigide étale de dimension 0 sur  $\text{Sp } \check{E}$ , où  $\det \Lambda_0 \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$  est vu comme faisceau étale constant,  $\underline{\text{Isom}}$  signifie les isomorphismes de faisceaux étales compatibles à l'action de  $\mathcal{O}_F$  et  $m \gg 0$  signifie  $\text{Id} + p^m \mathcal{O}_F \subset K$ .

Les espaces  $\det(\check{\mathcal{M}})_K$  sont munis d'une action de  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$  de la façon suivante. Soit  $S$  un espace rigide sur  $\text{Sp } \check{E}$ . Soit  $\delta \in \mathbb{Z}$ ,  $m \geq 1$  et

$$\eta : \det \Lambda_0/p^m \det \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\bar{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

un isomorphisme au dessus de  $S$ . Soit  $\delta \in \text{Im } \varkappa$ . L'isomorphisme  $\eta$  définit un point dans la composante indexée par  $\delta$ ,  $x \in \det(\check{\mathcal{M}})_{K_m}(S)$  où  $K_m = \text{Id} + p^m \text{End}(\Lambda_0)$ . Soient  $(a, b) \in F^\times \times F^\times = D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ . Considérons l'isomorphisme

$$\begin{aligned}
u_{a,b} : \det \Lambda_0 \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \det \Lambda_0 \otimes \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \\
z \otimes 1 &\longmapsto p^{-v_p(a) - v_p(b)} abz \otimes 1.
\end{aligned}$$

Alors,  $\eta \circ u_{a,b}$  définit un élément  $y = \det(\check{\mathcal{M}})_{K_m}(S)$  dans la composante indexée par

$$\delta + dv_p(a) + dv_p(b).$$

Par définition on pose  $y = (a, b).x$ . Cela définit une action de  $F^\times \times F^\times$  sur  $\det \check{\mathcal{M}}_{K_m}$ . Celle-ci commute à l'action de  $\text{End}(\Lambda_0)/K_m$ . Cela étant vrai pour tout  $m$ , on en déduit l'existence d'une action de  $F^\times \times F^\times$  sur  $\det \check{\mathcal{M}}_K$  pour tout  $K$ . On a donc défini une action de  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$  sur la tour  $(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_{K \subset D(\mathbb{Q}_p)}$ .

Enfin, on définit une application localement constante de façon tautologique

$$\varkappa : \det(\check{\mathcal{M}})_K \longrightarrow \Delta$$

qui sur la composante indexée par  $\delta$  vaut  $\delta$ .

Rappelons que  $\sigma_E$  est le Frobenius par rapport à  $\check{E}|E$ . Alors  $\sigma_E^* \mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\sigma_E \tau}$  et

$$\sigma_E^* \mathcal{L}_{\check{\mu}} = \otimes_{\tau \in \check{I}_F} \mathcal{L}_\tau^{\otimes p_{\sigma_E^{-1} \tau}} = \otimes_{\tau \in \check{I}_F} \mathcal{L}_\tau^{\otimes p_\tau} = \mathcal{L}_{\check{\mu}}.$$

Donc on a un isomorphisme canonique  $\mathcal{L}_{\check{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathcal{L}_{\check{\mu}}$ .

Pour  $K \subset \mathcal{O}_F^\times$ , la donnée de descente de Rapoport-Zink pour l'espace rigide  $\det(\check{\mathcal{M}})_K$  est un isomorphisme

$$\alpha : \det(\check{\mathcal{M}})_K \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \det(\check{\mathcal{M}})_K$$

défini comme suit. Soit  $S$  un espace rigide connexe sur  $\mathrm{Sp} \check{E}$ . Soit  $x = (\delta, \eta) \in \det(\check{\mathcal{M}})_K(S)$  avec  $\delta \in \mathrm{Im} \varkappa$  et

$$\eta : \det \Lambda_0 / p^m \det \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\check{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} [K]$$

au dessus de  $S$ , alors l'image de  $x$  via  $\alpha$  est défini par l'isomorphisme

$$\det \Lambda_0 / p^m \det \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\check{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathcal{L}_{\check{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} [K]$$

dans la composante indexée par

$$\delta + [E : \mathbb{Q}_p] \sum_{\tau \in \check{I}_F} p_\tau.$$

### 2.3.3 Comparaison avec l'espace de Rapoport-Zink associé au cocentre

Le corps reflex de la donnée de Rapoport-Zink torique  $(D, \det \check{\mu})$  (cf. section 2.2) coïncide avec  $E$  le corps reflex de  $(G, \mu)$ . Rappelons que l'on a défini dans la section 2.2 une norme reflex

$$N_{\det \check{\mu}} : E^\times \longrightarrow F^\times.$$

et grâce à l'application de réciprocité d'Artin un caractère

$$\chi_{\det \check{\mu}} : I_E \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$$

(cf. définition 2.2.1.1).

**Lemme 2.3.3.1.** *On a l'égalité*

$$\chi_{\det \check{\mu}} = \prod_{\tau \in \check{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau}.$$

*Démonstration.* Soit  $\tau_0 \in \check{I}_F$  fixé. Puisque l'extension  $F|\mathbb{Q}_p$  est galoisienne,  $E \subset \tau_0(F)$ . D'après la normalisation choisie de l'application de réciprocité d'Artin le composé

$$I_E \longrightarrow \mathrm{Gal}(E^{ab}|E^{nr}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{rec}_E^{-1}} \mathcal{O}_E^\times$$

coïncide avec  $\chi_{LT_E}^{-1}$ . On utilise la formule donnée dans l'exemple 2.2.1.1.

$$\begin{aligned} \chi_{\det \check{\mu}} &= \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)} \tau_0^{-1} \circ \gamma \circ \chi_{LT_E}^{p_{\gamma^{-1} \circ \tau_0}} \\ &= \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)} \tau_0^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_{\gamma \circ \tau_0}} \\ &= \prod_{\gamma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)} (\tau_0^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \tau_0) \circ \tau_0^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_{\tau_0 \circ (\tau_0^{-1} \circ \gamma \circ \tau_0)}} \end{aligned}$$

On conclut grâce à la formule 2.4. □

**Proposition 2.3.3.1.** Soit  $(\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu}))_K$  la tour d'espaces de Rapoport-Zink associée à la donnée torique  $(D, \det \tilde{\mu})$  et  $\varkappa_{D, \tilde{\mu}} : \check{\mathcal{M}}(D, \tilde{\mu}) \rightarrow \Delta$  (cf. section 2.2). Il y a alors un isomorphisme  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours

$$(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_K \xrightarrow{\sim} (\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K)_K$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \det(\check{\mathcal{M}})_K & \longrightarrow & \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K \\ & \searrow \varkappa & \swarrow \varkappa_{D, \tilde{\mu}} \\ & \Delta & \end{array}$$

De plus, cet isomorphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

*Démonstration.* Il suffit de construire un système compatible de bijections  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ -équivariantes lorsque  $K$  varie

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K(\overline{E}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K(\overline{E})$$

compatibles à l'action de  $I_E$ . Pour cela, fixons une base de  $\det \Lambda_0$  c'est à dire identifications  $\det \Lambda_0$  à  $\mathcal{O}_F$ . D'après le lemme 2.3.3.1, la fibre de  $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$  au point géométrique associé à  $\overline{E}|\overline{E}$  est  $\mathcal{O}_F$  muni de l'action de Galois donnée par  $\chi_{\det \tilde{\mu}}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \det(\check{\mathcal{M}})_K(\overline{E}) &= \prod_{\delta \in d\mathbb{Z}} \text{Isom}_{\mathcal{O}_F}(\det \Lambda_0, \mathcal{O}_F)/K \\ &= \prod_{\delta \in d\mathbb{Z}} \mathcal{O}_F^\times/K \end{aligned}$$

où  $\gamma \in I_E$  agit sur  $\mathcal{O}_F^\times/K$  via  $xK \mapsto \chi_{\det \tilde{\mu}}(\gamma)xK$ . On définit alors

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K(\overline{E}) = \prod_{\delta \in d\mathbb{Z}} \mathcal{O}_F^\times/K \xrightarrow{\sim} F^\times/K = \check{\mathcal{M}}(D, \tilde{\mu})(\overline{E})$$

qui à  $xK \in \mathcal{O}_F^\times/K$  dans la composante indexée par  $\delta$  associe

$$p^{\delta/d}xK \in F^\times/K.$$

On vérifie immédiatement que cela est compatible à l'action de  $I_E$ , celle de  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$  et aux morphismes  $\varkappa$ .

Pour montrer que l'isomorphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink, il suffit de montrer que l'isomorphisme canonique  $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$  correspond à l'identité  $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}, \bar{x}} \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{\mu}, \bar{x}}$  via le lemme 2.2.3.2 pour un point géométrique  $\bar{x} : \text{Sp } \mathbb{C}_p \rightarrow \text{Sp } \check{E}$  et un relèvement  $\tilde{\sigma}_E$  de  $\sigma_E$  comme dans la section 2.2.3.

Soient  $\tau_0 : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$  fixé,  $\text{Gal}(F|\mathbb{Q}_p) = \langle \gamma \rangle$  et  $p_i = p_{\tau_0 \gamma^i}$ . Comme  $E \subset \tau_0(F)$ , on a un homomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Gal}(F|\mathbb{Q}_p) &\rightarrow \text{Gal}(E|\mathbb{Q}_p) \\ \gamma^i &\mapsto \tau_0 \gamma^i \tau_0^{-1}. \end{aligned}$$

Posons

$$\mathcal{L}'_{\tilde{\mu}} := \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} (\tau_0 \gamma^i \tau_0^{-1})^* T_p(H_{LT_E})^{\otimes p_i}$$

comme  $\mathcal{O}_E$ -système local étale sur  $\text{Sp } E$ . Alors l'action de  $\text{Gal}(\overline{E}|E)$  sur la fibre au point géométrique  $\text{Sp}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \text{Sp}(E)$  qui correspond au corps plongé  $E \subset \overline{E}$ , est donnée par le caractère :

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} (\tau_0 \gamma^i \tau_0^{-1})^{-1} \chi_{LT_E}^{p_i} : \text{Gal}(\overline{E}|E) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times.$$

Soit  $\alpha_{\bar{x}} : E \rightarrow \check{E}$  tel que le morphisme composé

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p) \xrightarrow{\bar{x}} \mathrm{Sp} \check{E} \xrightarrow{\alpha_{\bar{x}}} \mathrm{Sp} E$$

correspond à l'inclusion  $E \subset \bar{E}$ . Alors

$$\alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}} \otimes_{\mathcal{O}_{E, \tau_0^{-1}}} \mathcal{O}_F$$

est un  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur  $\mathrm{Sp} \check{E}$  avec l'action de  $I_E$  sur la fibre géométrique  $\bar{x}$  donnée par le caractère

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} \gamma^{-i} \circ \tau_0^{-1} \circ \chi_{LT_E}^{p_i} = \tau_0^{-1} \prod_{i \in \mathbb{Z}/d'\mathbb{Z}} (\tau_0 \gamma^i \tau_0^{-1})^{-1} \chi_{LT_E}^{p_i} : \mathrm{Gal}(\bar{E}|E) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times$$

D'après l'égalité 2.4, les deux  $\mathcal{O}_F$ -systèmes locaux  $\alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}} \otimes_{\mathcal{O}_{E, \tau_0^{-1}}} \mathcal{O}_F$  et  $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}$  sur  $\mathrm{Sp} \check{E}$  sont isomorphes. On fixe un isomorphisme

$$\alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}} \otimes_{\mathcal{O}_{E, \tau_0^{-1}}} \mathcal{O}_F \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\bar{\mu}}, \quad (2.5)$$

alors l'isomorphisme  $\mathcal{L}_{\bar{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$  correspond à l'isomorphisme naturel

$$\alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}}$$

Et ca ne dépend pas de l'isomorphisme 2.5 choisi. Donc cela revient à montrer que  $\alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}} \xrightarrow{\sim} \sigma_E^* \alpha_{\bar{x}}^* \mathcal{L}'_{\bar{\mu}}$  correspond à l'identité  $\mathcal{O}_E \rightarrow \mathcal{O}_E$  via le lemme 2.2.3.2 pour  $\tilde{\sigma}_E$  qui ne pose pas de problème grâce au choix de  $\tilde{\sigma}_E$ .  $\square$

### 2.3.4 Énoncé du théorème principal

**Théorème 2.3.4.1.** *Via le morphisme  $(\det, \det) : J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$  il existe un morphisme  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours d'espaces rigides*

$$(\check{\mathcal{M}}_K)_K \longrightarrow (\det(\check{\mathcal{M}})_K)_K$$

où  $K$  parcourt les sous-groupes ouverts de  $G(\mathbb{Z}_p)$ . Ce morphisme composé avec l'application canonique  $\det(\check{\mathcal{M}})_{\det K} \rightarrow \Delta$  coïncide avec l'application  $\varkappa : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \Delta$ . De plus, ce morphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

Ce théorème résulte du théorème plus général suivant.

**Théorème 2.3.4.2.** *Notons  $f_K : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \mathrm{Sp} \check{E}$  le morphisme structural. Soit  $\mathcal{T}_K$  le  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur  $\check{\mathcal{M}}_K$  qui est le module de Tate de la déformation universelle.*

*Pour tous  $K$ , il existe un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -systèmes locaux étales*

$$u_K : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. Si  $K' \subset K$ , via le morphisme de changement de niveau  $\pi_{K', K} : \check{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$  et l'identification canonique  $\pi_{K', K}^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_{K'}$  on a

$$\pi_{K', K}^* u_K = u_{K'}.$$

2. Si  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ , qui définit l'automorphisme  $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_K$ , via l'identification canonique  $g^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_K$  l'isomorphisme

$$\det \mathcal{T}_K = g^* \det \mathcal{T}_K \xrightarrow{g^* u_K} g^* f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à

$$(p^{-v_p(\det g)} \det(g)) u_K.$$

3. Si  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  est tel que  $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$  et  $\Lambda_0 \subset g.\Lambda_0$ , si  $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$ , via le morphisme canonique

$$\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg},$$

le morphisme composé

$$\det \mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \det \mathcal{T}_{g^{-1}Kg} \xrightarrow{g^* u_{g^{-1}Kg}} g^* f_{g^{-1}Kg}^* \mathcal{L}_{\check{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\check{\mu}}$$

est égal à

$$p^{-v_p(\det g)} u_K.$$

L'isomorphisme  $u_K$  que nous contruisons n'est pas tout à fait naturel. L'isomorphisme naturel est plutôt  $p^{\times/d} u_K$  qui n'est plus un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -système locaux au sens de la définition 2.1.6.2 mais de  $\mathbb{Q}_p$ -systèmes locaux munis d'une action de  $F$  au sens de de Jong ([dJ95b]). On renvoie à la section 2.5 pour plus de détails.

### 2.3.5 Rappels de théorie de Fontaine

Oublions momentanément les notations de la section précédente. Soit  $K|\mathbb{Q}_p$  un corps valué complet pour une valuation discrète, à corps résiduel  $k$  parfait de caractéristique  $p > 0$ . On note  $K_0 = W(k)[1/p]$ . On suppose que  $k$  contient un corps fini de degré  $d$  et on note  $\mathbb{F}_q = k^{\text{Frob}^d = \text{Id}}$ ,  $F = W(\mathbb{F}_q)\mathbb{Q} \subset K_0$ . Soit  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . On note  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ .

Soit

$$\chi_{LT} : G_K \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$$

le caractère de Lubin-Tate donnant l'action de  $G_K$  sur le module de Tate d'un groupe formel  $p$ -divisible  $H_{LT}$  de dimension 1 et de hauteur  $d$  sur  $\mathcal{O}_F$ , muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  telle que l'action induite sur son algèbre de Lie soit l'action tautologique.

Soit  $\sigma$  le Frobenius de  $K_0$ . Soit  $S = \text{Spf}(\mathcal{O}_{K_0})$  et

$$(\mathcal{E}, \Phi, \Psi, \text{Fil } \mathcal{E}_S) = \mathbb{D}F(H_{LT} \otimes \mathcal{O}_{K_0}) \in \mathcal{MF}^{[-1,0]}(\mathcal{O}_{K_0})$$

(cf. section 1.2.2.3). Celui-ci est complètement déterminé par le  $\varphi$ -module filtré  $(M, \varphi, \text{Fil } M)$  où  $M = \Gamma(S, \mathcal{E}_S)$ ,  $\varphi : M \rightarrow M$  est  $\sigma$ -linéaire déduit de  $\Phi$  et  $\text{Fil } M = \Gamma(S, \text{Fil } \mathcal{E}_S)$ . On a alors :

- Le module de Dieudonné est

$$M = \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{K_0} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{K_0}$$

où  $\mathcal{O}_F$  agit sur le facteur indexé par  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  via  $\sigma^i$ . Notons  $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$  la base canonique du module de droite.

- Le Frobenius  $\varphi$  est donné par

$$\varphi(x_0, \dots, x_{d-1}) = (p\sigma(x_{d-1}), \sigma(x_0), p\sigma(x_1), p\sigma(x_2), \dots, p\sigma(x_{d-2})).$$

c'est à dire

$$\varphi(e_j) = \begin{cases} pe_{j+1} & \text{si } j \neq 0 \\ e_1 & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

- La filtration de Hodge est

$$\text{Fil } M = \langle e_1, \dots, e_{d-1} \rangle.$$

Soit  $A_{\text{cris}} := A_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$  (cf. section 1.1). On a

$$\text{Fil}^0(M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} A_{\text{cris}}) = \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} e_0 \oplus A_{\text{cris}} e_1 \oplus \dots \oplus A_{\text{cris}} e_{d-1}.$$

(on renvoie à la définition 1.1 pour la numérotation des filtrations) et

$$\begin{aligned} \{x \in A_{\text{cris}}^{\varphi^n = p} \mid \varphi(x) \in pA_{\text{cris}}\} &\xrightarrow{\sim} (M \otimes A_{\text{cris}})^{\varphi=p} \\ x &\longmapsto (x, p^{-1}\varphi(x), p^{-1}\varphi^2(x), \dots, p^{-1}\varphi^{d-1}(x)). \end{aligned}$$

On a donc d'après le corollaire 1.3.1.2

$$T_p(H_{LT}) = \{x \in \text{Fil}^1 A_{cris}^{\varphi^d=p} \mid \varphi(x) \in pA_{cris}\}$$

qui est un  $\mathcal{O}_F$ -module libre de rang 1 via le plongement canonique  $\mathcal{O}_F \subset A_{cris}$ . Notons

$$t_{LT} \in \text{Fil}^1 A_{cris}^{\varphi^d=p}$$

un générateur de  $T_p(H_{LT})$ . On a donc

$$\forall \tau \in G_K, \quad \tau(t_{LT}) = \chi_{LT}(\tau) \cdot t_{LT}.$$

Bien sûr lorsque  $d = 1$ ,  $t_{LT} = t$  à une unité dans  $\mathbb{Z}_p^\times$  près. On a après inversion de  $p$  et  $t$ ,

$$F \cdot t_{LT} = \text{Fil}^1 B_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}})^{\varphi^d=p}.$$

Considérons maintenant pour  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ,  $H_{LT}^{(\sigma^i)}$  le groupe  $p$ -divisible sur  $\mathcal{O}_F$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  obtenu par torsion de  $H_{LT}$  via  $\sigma^i$ . L'action de  $G_K$  sur  $T_p(H_{LT}^{(\sigma^i)})$  est donnée par

$$\sigma^{-i} \circ \chi_{LT} : G_K \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times.$$

Son module de Dieudonné filtré est obtenu par torsion du précédent. Si  $(M_i, \varphi, \text{Fil } M_i)$  est ce  $\varphi$ -module filtré on a :

- Son module de Dieudonné est

$$M_i = \langle e_{i,0}, \dots, e_{i,d-1} \rangle$$

où  $\mathcal{O}_F$  agit sur  $K_0 e_{i,j}$  via  $\sigma^j$ .

- Le Frobenius  $\varphi$  est donné par

$$\varphi(e_{i,j}) = \begin{cases} p e_{i,j+1} & \text{si } j \neq i \\ e_{i,j+1} & \text{si } j = i. \end{cases}$$

- Sa filtration de Hodge est

$$\text{Fil } M_i = \langle e_{i,j} \rangle_{j \neq i}.$$

On a alors

$$\text{Fil}^0(M_i \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} A_{cris}) = \bigoplus_{j=0}^{d-1} \text{Fil}^{\delta_{i,j}} A_{cris}.$$

et

$$\begin{aligned} B_{cris}^{\varphi^d=p} &\xrightarrow{\sim} (M_i \otimes B_{cris})^{\varphi=p} \\ x &\longmapsto \sum_{j=0}^i \varphi^j(x) e_{i,j} + \frac{1}{p} \sum_{j=i+1}^{d-1} \varphi^j(x) e_{i,j}. \end{aligned}$$

On a donc

$$V_p(H_{LT}^{(\sigma^i)}) = \{x \in B_{cris}^{\varphi^d=p} \mid \varphi^i(x) \in \text{Fil}^1 B_{cris}\}.$$

L'élément  $\varphi^{d-i}(t_{LT})$  est dans ce  $F$ -espace vectoriel de dimension 1. On a donc

$$\{x \in B_{cris}^{\varphi^d=p} \mid \varphi^i(x) \in \text{Fil}^1 B_{cris}\} = F \cdot \varphi^{d-i}(t_{LT}).$$

Rappelons que l'on a une équivalence de catégories de Fontaine entre  $\varphi$ -modules filtrés admissibles associés à  $K/K_0$  et représentations cristallines de  $G_K$ . Par  $\varphi$ -module filtré on entend un triplet  $(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_H)$  où

- $N$  un  $K_0$ -espace vectoriel de dimension finie,
- $\varphi : N \xrightarrow{\sim} N$  un isomorphisme  $\sigma$ -linéaire,
- $\text{Fil}^\bullet N_K$  une filtration décroissante finie de  $N \otimes_{K_0} K$ .

Le foncteur  $V_{cris}$  donnant l'équivalence est alors donné par

$$V_{cris}(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N) = \text{Fil}^0(N \otimes_{K_0} B_{cris})^{\varphi=\text{Id}}.$$

Cette équivalence est compatible au produit tensoriel :

$$V_{cris}(N_0, \varphi_1, \text{Fil}^\bullet N_{1,K}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_{cris}(N_1, \varphi_2, \text{Fil}^\bullet N_{2,K}) \xrightarrow{\sim} V_{cris}(N_1 \otimes N_2, \varphi \otimes \varphi, \text{Fil}^\bullet(N_{1,K} \otimes N_{2,K})).$$

L'équivalence précédente induit une équivalence entre  $\varphi$ -modules filtrés admissibles munis d'une action de  $F$  et représentations cristallines à coefficients dans un  $F$ -espace vectoriel. Considérons la surjection canonique  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} F \rightarrow F$ . Il y a un idempotent  $e \in F \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$  tel que via la surjection précédente  $e.(F \otimes_{\mathbb{Q}_p} F) \xrightarrow{\sim} F$ . Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux  $F$ -espaces vectoriels on a alors

$$e.(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2) = V_1 \otimes_F V_2.$$

Si  $\underline{N}_i = (N_i, \varphi_i, \text{Fil}^\bullet N_{i,K})$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , sont deux  $\varphi$ -modules filtrés admissibles munis d'une action de  $F$  on a donc

$$\begin{aligned} V_{cris}(\underline{N}_1) \otimes_F V_{cris}(\underline{N}_2) &= e.V_{cris}(\underline{N}_1 \otimes \underline{N}_2) \\ &= V_{cris}(e.(\underline{N}_1 \otimes \underline{N}_2)). \end{aligned}$$

Mais le  $\varphi$ -module filtré  $e.(\underline{N}_1 \otimes \underline{N}_2)$ , facteur direct de  $\underline{N}_1 \otimes \underline{N}_2$ , est donné par

$$(N_1 \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0} N_2, \varphi \otimes \varphi, \text{Fil}^\bullet(N_{1,K} \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} N_{2,K})).$$

On a donc

$$V_{cris}(\underline{N}_1) \otimes_F V_{cris}(\underline{N}_2) = V_{cris}(N_1 \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0} N_2, \varphi \otimes \varphi, \text{Fil}^\bullet(N_{1,K} \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} N_{2,K})).$$

**Proposition 2.3.5.1.** Soit  $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$  une collection d'entiers positifs et  $a = \sum_i p_i$ . Le  $F$ -espace vectoriel

$$M(K, \{p_i\}) := \{x \in B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}})^{\varphi^d=p^a} \mid \forall i, 0 \leq i < d, \varphi^i(x) \in \text{Fil}^{p_i} B_{cris}\}$$

est de dimension 1 de base

$$\prod_{i=0}^{d-1} \varphi^{d-i}(t_{LT})^{p_i}.$$

Le groupe de Galois  $G_K$  agit sur cet espace vectoriel par le caractère

$$\prod_{i=0}^{d-1} \sigma^{-i} \circ \chi_{LT}^{p_i} : G_K \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times.$$

*Démonstration.* Pour  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ , posons  $N_i = M_i[\frac{1}{p}]$ . Le  $\varphi$ -module filtré

$$(N_i, p^{-1}\varphi, \text{Fil}^\bullet N_i)$$

est admissible muni d'une action de  $F$ , où on rappelle que l'on pose  $\text{Fil}^{-1} N_i = N_i$ ,  $\text{Fil}^0 N_i = \text{Fil} N_i$  et  $\text{Fil}^1 N_i = 0$ . Soit

$$N = \bigotimes_{0 \leq i < d} N_i^{\otimes p_i}$$

où les produits tensoriel sont pris au dessus de  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0$ . Notons

$$\epsilon_j = e_{0,j}^{\otimes p_0} \otimes \dots \otimes e_{d-1,j}^{\otimes p_{d-1}} \in N.$$

Alors,  $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{d-1})$  est une base de  $N$  comme  $K_0$ -espace vectoriel et  $F$  agit sur  $\epsilon_j$  via  $\sigma^j$ . La structure de  $\varphi$ -module filtré de  $N$  est donnée par :

– le Frobenius  $p^{-1}\varphi \otimes \cdots \otimes p^{-1}\varphi$  est donné par

$$\varphi(\epsilon_j) = p^{-p_j} \epsilon_{j+1},$$

– la filtration est

$$\text{Fil}^k N = \langle \epsilon_j \rangle_{p_j \leq -k}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} B_{\text{cris}}^{\varphi^d = p^a} &\xrightarrow{\sim} (N \otimes_{K_0} B_{\text{cris}})^{\varphi = \text{Id}} \\ x &\longmapsto \sum_{j=0}^{d-1} p^{-\sum_{0 \leq k < j} p_k} \varphi^j(x) \epsilon_j \end{aligned}$$

et

$$\text{Fil}^0(N \otimes_{K_0} B_{\text{cris}}) = \bigoplus_{0 \leq j < d} \text{Fil}^{p_j} B_{\text{cris}}.$$

Le résultat se déduit alors de l'isomorphisme

$$\bigotimes_{0 \leq i < d} V_{\text{cris}}(N_i, p^{-1}\varphi, \text{Fil}^\bullet N_i)^{\otimes p_i} \xrightarrow{\sim} V_{\text{cris}}(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N).$$

où les produits tensoriels sont pris au dessus de  $F$ .  $\square$

**Remarque 2.3.5.1.** L'inclusion  $B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{F}}) \subset B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$  induit une inclusion

$$M(F, \{p_i\}) \subset M(K, \{p_i\}).$$

En appliquant la proposition 2.3.5.1 pour  $K = F$ , on en déduit que c'est une identification. Donc on a une action de  $G_F$  sur  $M(K, \{p_i\})$  et le caractère  $\prod_{i=0}^{d-1} \sigma^{-i} \circ \chi_{LT}^{p_i} : G_K \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$  factorise via  $G_F \longrightarrow \mathcal{O}_F^\times$  qu'on note encore  $\prod_{i=0}^{d-1} \sigma^{-i} \circ \chi_{LT}^{p_i}$  par l'abus de notation.

**Proposition 2.3.5.2.** Soient  $d' | d$  et  $E = \mathbb{Q}_{p^{d'}}$ . Soit  $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$  une collection d'entiers positifs telle que  $p_i = p_j$  pour  $i \equiv j \pmod{d'}$ . Posons  $a' = \frac{d'}{d} \sum_i p_i$ . Alors

$$\{x \in B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})^{\varphi^{d'} = p^{a'}} \mid \forall i, 0 \leq i < d', \varphi^i(x) \in \text{Fil}^{p_i} B_{\text{cris}}\} \subset M(K, \{p_i\})$$

est un sous- $E$ -espace vectoriel de dimension 1 de base

$$\prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i}.$$

De plus,

$$\prod_{i=0}^{d-1} \varphi^{d-i}(t_{LT})^{p_i} = \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i}$$

à unité dans  $E^\times$  près.

L'action de  $G_E$  sur  $B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) = B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{F}})$  induit une action de  $G_E$  sur  $M(K, \{p_i\})$  telle que sur le sous- $E$ -espace vectoriel  $E \cdot \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i}$ , l'action de  $G_E$  est donné par le caractère

$$\prod_{i=0}^{d'-1} \sigma^{-i} \circ \chi_{LT_E}^{p_i} : G_E \longrightarrow \mathcal{O}_E^\times.$$

*Démonstration.* La première assertion est due à la proposition 2.3.5.1. D'après les discussions dans cette section,

$$V_p(H_{LT_E}) = \text{Fil}^1 B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{E}})^{\varphi^{d'-p}}$$

est un  $E$ -module libre de rang 1 de base  $t_{LT_E}$ . On vérifie aisément que

$$\prod_{i=0}^{d/d'-1} \varphi^{d'i}(t_{LT}) \in V_p(H_{LT_E}).$$

Donc

$$\prod_{i=0}^{d/d'-1} \varphi^{d'i}(t_{LT}) = t_{LT_E}$$

à unité dans  $E^\times$  près. On a alors

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{d-1} \varphi^{d-i}(t_{LT})^{p_i} &= \prod_{j=0}^{d/d'-1} \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d-(d'j+i)}(t_{LT})^{p_i} \\ &= \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i} \left( \prod_{j=0}^{d/d'-1} \varphi^{d-d'-d'j}(t_{LT}) \right)^{p_i} \\ &= \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i} \end{aligned}$$

à unité dans  $E^\times$  près. On en déduit l'action de  $G_E$  sur  $E \cdot \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{LT_E})^{p_i}$  désiré car  $G_E$  agit sur  $E \cdot t_{LT_E}$  via le caractère  $\chi_{LT_E}$ .  $\square$

### 2.3.6 Rappel d'un résultat de Faltings sur le déterminant des périodes cristallines

Soit  $K|\mathbb{Q}_p$  un corps valué complet de valuation discrète à corps résiduel algébriquement clos  $k$  et  $K_0 = W(k)_\mathbb{Q}$ . Fixons une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$ . Soit  $H$  un groupe  $p$ -divisible sur  $\mathcal{O}_K$  de dimension  $d$  et de hauteur  $n$ . Notons  $(M, \varphi)$  le module de Dieudonné entier covariant de la réduction de  $H$  sur  $k$  où  $M$  est un  $\mathcal{O}_{K_0}$ -module libre de rang la hauteur de  $H$ . Considérons l'isomorphisme de périodes

$$V_p(H) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} M\left[\frac{1}{p}\right] \otimes_{K_0} B_{\text{cris}}$$

normalisé comme dans le théorème 1.3.1.1 et où  $B_{\text{cris}} := B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ . Fixons des bases de  $V_p(H)$  et de  $M\left[\frac{1}{p}\right]$  telles que via la base choisie de  $M\left[\frac{1}{p}\right]$ ,

$$\left(\wedge_{K_0}^n M\left[\frac{1}{p}\right], \varphi\right) \xrightarrow{\sim} (K_0, p^{n-d}\sigma).$$

Soit  $A \in \text{GL}_n(B_{\text{cris}})$  la matrice de l'application de périodes précédente. La compatibilité aux filtrations et au Frobenius de l'isomorphisme de périodes impose que

$$\det A \in \text{Fil}^d B_{\text{cris}}^{\varphi=p^d} = \mathbb{Q}_p t^d$$

et donc  $\det(A) \in \mathbb{Q}_p^\times t^d$ .

**Proposition 2.3.6.1 (Faltings, [Fal02b] lemme 1).** *Si l'on choisit des bases entières données par des bases de  $T_p(H)$  et  $M$  telles que via la base choisie de  $M$ ,  $(\wedge_{\mathcal{O}_K}^n M, \varphi) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{K_0}, p^{n-d}\sigma)$ . Alors le déterminant de la matrice de périodes associée  $\det(A)$  est dans  $\mathbb{Z}_p^\times t^d$ .*

On renvoie également à [Far08], théorème C.2.6 p.122 pour plus de détails sur la preuve de Faltings.

### 2.3.7 Preuve du théorème 2.3.4.2 et du théorème 2.3.4.1

#### 2.3.7.1 Préliminaires

Afin de construire l'isomorphisme on fixe dès le début un relèvement  $\tilde{\mathbb{X}} \in \check{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_{\tilde{E}})$  de  $\mathbb{X}$ . On note  $\mathcal{T}$  le  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$  qui est le module de Tate de la déformation universelle. Pour simplifier, on note encore  $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$  pour le  $\mathbb{Z}_p$ -faisceau sur  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$  qui est le tiré en arrière du système local  $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$  sur  $\mathrm{Sp} \tilde{E}$ . On va commencer par construire un isomorphisme

$$u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}.$$

satisfaisant la relation d'équivariance relativement à l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  pour  $K = \mathrm{Aut}(\Lambda_0)$  annoncée dans le point (2) du théorème 2.3.4.2. On posera ensuite pour  $K \subset \mathrm{Aut}(\Lambda_0)$ , si  $\pi_K : \mathcal{M}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{rig}$ ,

$$u_K = \pi_K^* u.$$

Il restera alors à vérifier que les  $(u_K)_K$  satisfont à la relation d'équivariance du point (3) du théorème 2.3.4.2 relativement à l'action de  $G(\mathbb{Q}_p)$ .

Soit  $(\mathbb{D}(\mathbb{X}), \varphi)$  le module de Dieudonné covariant de  $\mathbb{X}$  et  $\mathrm{Fil} \mathbb{D}(\mathbb{X})$  la filtration déduite du relèvement  $\tilde{\mathbb{X}}$  (on utilise les normalisations du chapitre 1 concernant le Frobenius  $\varphi$  et cette filtration). Par définition,  $\mathbb{D}(\mathbb{X})$  est l'évaluation du cristal de Dieudonné covariant de  $\mathbb{X}$  sur l'épaississement  $W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W$  et  $\varphi$  est induit par le Verschiebung de la réduction modulo  $p$  de  $\mathbb{X}$ . Soit

$$(\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(X), \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet \det_{\mathcal{O}_F} \mathbb{D}(X))$$

le  $\varphi$ -module filtré associé où le déterminant est pris au dessus de  $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ .

**Lemme 2.3.7.1.** *Il existe une base  $(\epsilon_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$  de  $\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}]$  pour laquelle*

- $F$  agit sur  $L \cdot \epsilon_\tau$  via  $\tau : \mathcal{O}_F \hookrightarrow \mathcal{O}_L$ ,
- $\varphi(\epsilon_\tau) = p^{q_\tau} \epsilon_{\sigma\tau}$
- $\mathrm{Fil}^k \mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}] = \langle \epsilon_\tau \rangle_{p_\tau \leq -k}$ .

*Démonstration.* L'isocrystal filtré muni de son action de  $F$ ,  $\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}]$ , est donné par le couple  $(\det \bar{b}, \det \tilde{\mu})$  où  $\det \bar{b} \in B(D)$  et  $\det \tilde{\mu} \in X_*(D)$ . Puisque  $\overline{p^{-1}\bar{b}} \in B(G, \tilde{\mu})$ , on a

$$\det(\overline{p^{-1}\bar{b}}) \in B(D, \tilde{\mu}).$$

Ainsi, d'après la remarque 2.2.1.1,  $\det \tilde{\mu}$  détermine complètement  $\det(\overline{p^{-1}\bar{b}}) = \overline{p^{-n} \det \bar{b}} \in B(D)$ . Il suffit alors de constater que le Frobenius donné dans l'énoncé multiplié par  $p^{-n}$  est bien l'élément associé à  $\det \tilde{\mu}$  dans  $X_*(D)_\Gamma$ . □

**Définition 2.3.7.1.** *On note  $T := \det_{\mathcal{O}_F} T_p(\tilde{\mathbb{X}})$ .*

Puisque

$$V_p(\tilde{\mathbb{X}}) = \mathrm{Fil}^0(\mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\tilde{E}}))^\varphi = p,$$

on a

$$\det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}) \subset \mathrm{Fil}^0(\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\tilde{E}}))^\varphi = p^n.$$

**Proposition 2.3.7.1.** *L'action de  $I_E$  sur  $T$  est donnée par le caractère*

$$\prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau}.$$

*Démonstration.* Donnons deux démonstrations de cette proposition. Tout d'abord la première consiste à utiliser la formule donnée dans le lemme 2.3.7.1. En effet,

$$\det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}) = \text{Fil}^0(\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\tilde{E}}))^{\varphi=p^n}$$

s'identifie grâce au lemme 2.3.7.1, après choix d'un plongement de  $F$  dans  $\tilde{E}$ , au module galoisien de la proposition 2.3.5.1.

Une preuve plus conceptuelle est la suivante. Après choix d'un scindage de la filtration de Hodge de  $\mathbb{D}(\tilde{\mathbb{X}})[\frac{1}{p}]$ , celle-ci est donnée par un cocaractère  $\mu'$  à valeurs dans  $G_L$  conjugué à  $\tilde{\mu}$  dans  $G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ . Le couple  $(p^{-1}b, \mu')$  est admissible et donne lieu à un foncteur

$$\mathcal{F}_{p^{-1}b, \mu'} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}} I_E$$

(cf. [RZ96] 1.19). De plus si  $V = F$  et  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V)$  est la représentation  $\det_F$ , on a

$$\det_F V_p(\tilde{\mathbb{X}}) = \mathcal{F}_{p^{-1}b, \mu'}(V, \rho).$$

Mais,

$$\mathcal{F}_{p^{-1}b, \mu'}(V, \rho) = \mathcal{F}_{\det(p^{-1}b), \det \mu'}(V, \rho')$$

où  $\rho' \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D)$  est la représentation canonique  $D \hookrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V)$ ,  $\det : G \rightarrow D$ . Puisque  $\mu' \sim \tilde{\mu}$ ,  $\det \mu' = \det \tilde{\mu}$ . D'après le lemme 2.2.4.1,  $I_E$  agit donc sur  $\det_F(V_p \tilde{\mathbb{X}})$  via  $\chi_{\det \tilde{\mu}}$ . On conclut en utilisant le lemme 2.3.3.1 qui affirme que

$$\chi_{\det \tilde{\mu}} = \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau}.$$

□

On fixe désormais un isomorphisme entre la fibre de  $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$  au point géométrique  $\text{Spec}(\overline{\tilde{E}}) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{E})$  et  $T$ .

### 2.3.7.2 Dévissage au cas affine « adapté »

**Définition 2.3.7.2.** *Un triplet adapté est un triplet  $(S, X, \rho)$  où :*

- $S = \text{Spf}(R)$  est un schéma formel affine,
- $R$  est une  $\mathcal{O}_{\tilde{E}}$ -algèbre topologiquement de type fini sans  $p$ -torsion intègre normale,
- $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$ ,
- $\text{Lie } X$  et  $\text{Lie } X^\vee$  sont des  $R$ -modules libres,
- le morphisme  $S \rightarrow \check{\mathcal{M}}$  induit une immersion ouverte  $S^{\text{rig}} \hookrightarrow \check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$ .

Si  $(S, X, \rho)$  est un triplet adapté on note

$$T_p(X) = (X[p^m]^{\text{rig}})_{m \geq 1}$$

comme  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur  $S^{\text{rig}}$ .

**Proposition 2.3.7.2.** *Pour se donner un isomorphisme  $\det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$  il suffit de se donner pour tout triplet adapté  $x = (S, X, \rho)$  un isomorphisme*

$$u_x : \det_{\mathcal{O}_F} T_p(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$$

*vérifiant : si  $x' = (S', X', \rho')$  est un autre triplet adapté et  $f : S' \rightarrow S$  est tel que  $f^*(X, \rho) = (X', \rho')$  alors  $f^* u_x = u_{x'}$ .*

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert quasicompact connexe de  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$ . Soit  $\mathcal{U}$  un modèle topologiquement de type fini dans  $p$ -torsion sur  $\mathcal{O}_K$  de  $U$ ,  $\mathcal{U}^{rig} = U$ . Après un éclatement formel admissible au sens de Raynaud on peut supposer que l'inclusion  $U \subset \check{\mathcal{X}}^{rig}$  soit donnée par un morphisme  $\mathcal{U} \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ . Soit  $\mathcal{U} = \bigcup_j \mathcal{U}_j$  un recouvrement affine fini de  $\mathcal{U}$  sur lequel  $\text{Lie } X$  et  $\text{Lie } X^\vee$  sont libres. Notons  $\mathcal{U}_i = \text{Spf}(R_i)$ . Puisque  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$  est lisse,  $R_i[\frac{1}{p}]$  est normale. Quitte à remplacer  $R_i$  par son normalisé dans  $R_i[\frac{1}{p}]$  on peut supposer  $R_i$  normale (d'après [BGR84], 6.4.1, ce normalisé est encore topologiquement de type fini). Alors,

$$\pi_0(\text{Spf}(R_i)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\text{Sp}(R_i[\frac{1}{p}])).$$

On peut donc trouver une famille de morphismes

$$(\mathcal{U}_{ij} \longrightarrow \mathcal{U}_i)_j$$

avec  $\mathcal{U}_{ij} = \text{Spf}(R_{ij})$ ,  $R_{ij}$  intègre normale et induisant un recouvrement admissible

$$\mathcal{U}_i^{rig} = \bigcup_j \mathcal{U}_{ij}^{rig}.$$

On a donc une famille de morphismes

$$(\mathcal{U}_{ij} \longrightarrow \mathcal{U})_{i,j}$$

induisant un recouvrement admissible en fibre générique et telle que pour tout  $i, j$ , le morphisme  $\mathcal{U}_{ij} \rightarrow \check{\mathcal{M}}$  définisse un triplet adapté.

Soient maintenant  $\mathcal{U} \rightarrow \check{\mathcal{M}}$  et  $\mathcal{V} \rightarrow \check{\mathcal{M}}$  deux  $\check{\mathcal{M}}$ -schémas formels affines définissant des triplets adaptés et tels que  $\mathcal{U}^{rig} \subset \mathcal{V}^{rig} \subset \check{\mathcal{M}}^{rig}$ . D'après Raynaud, quitte à effectuer un éclatement formel admissible de  $\check{\mathcal{U}}$  de  $\mathcal{U}$ , l'inclusion

$$\check{\mathcal{U}}^{rig} = \mathcal{U}^{rig} \subset \mathcal{V}^{rig}$$

est donnée par un morphisme  $\check{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{V}$ . On peut appliquer la procédure précédente à  $\check{\mathcal{U}}$  afin de trouver une famille de morphismes

$$(\check{\mathcal{U}}_k \rightarrow \check{\mathcal{U}})_k$$

induisant un recouvrement admissible en fibre générique et tel que pour tout  $k$ , le morphisme  $\check{\mathcal{U}}_k \rightarrow \check{\mathcal{M}}$  définisse un triplet adapté. À partir de ces constatations il est aisé de conclure.  $\square$

### 2.3.7.3 Construction de l'isomorphisme

Soit  $(\text{Spf } R, X, \rho)$  un triplet adapté. Fixons une clôture algébrique  $\overline{\text{Frac}(R)}$  de  $\text{Frac}(R)$  contenant  $\overline{\mathbb{E}}$ . L'anneau  $R$  satisfait les hypothèses de la section 1.1.1. Soit  $\overline{R} \subset \overline{\text{Frac}(R)}$  comme dans cette section. On a

$$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{E}}} \subset \overline{R}.$$

On va pouvoir appliquer le théorème de comparaison 1.3.1.1. Avant toute chose rappelons qu'il existe une équivalence entre la catégorie des  $\text{Spec}(R[\frac{1}{p}])$ -schémas étales finis et celle des  $\text{Sp}(R[\frac{1}{p}])$ -espaces rigides étales finis. Cette équivalence est tout simplement donnée par  $\text{Spec}(\mathcal{A}) \mapsto \text{Sp}(\mathcal{A})$ . Le groupe de Galois  $\Gamma = \text{Aut}(\overline{R}/R)$  s'identifie donc au groupe fondamental de l'espace rigide  $\text{Sp}(R[\frac{1}{p}])$  (par groupe fondamental on entend ici celui classifiant les revêtements étales finis). Le faisceau étale  $T_p(X)$  s'incarne alors en un  $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$ -module que l'on note encore  $T_p(X)$ .

**Lemme 2.3.7.2.** *Notons  $\mathbb{D}(X)$  le cristal covariant de  $X$  sur  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$ . La quasi-isogénie  $\rho$  induit un isomorphisme compatible aux actions de  $F$*

$$(\mathbb{D}(X) \otimes_W B_{cris}^+(\overline{R}), \varphi_{\mathbb{X}} \otimes \varphi) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}(X)_{A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}} [1/p], \varphi_X)$$

où  $\varphi_X$  est le morphisme semi-linéaire sur  $\mathbb{D}(X)_{A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}}$  induit par la *Verschibung* de la réduction modulo  $p$  de  $X$  et où  $\varphi_{\mathbb{X}}$  est le même pour  $\mathbb{D}(X)$ . De plus, il est compatible à l'action de  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{R}/R)$ , où l'action de  $\text{Gal}(\overline{R}/R)$  sur  $\mathbb{D}(X) \otimes_W B_{cris}^+(\overline{R})$  est induite par celle sur  $B_{cris}^+(\overline{R})$ .

*Démonstration.* On considère le morphisme d'épaississements à puissances divisées nilpotentes dans la catégorie  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \overline{R}/p\overline{R} & \hookrightarrow & \text{Spf } A_{\text{cris}}(\overline{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } (\overline{\mathbb{F}}_p) & \hookrightarrow & \text{Spf } W. \end{array}$$

D'après la propriété de cristal, l'évaluation du cristal de  $\mathbb{X}$  sur l'épaississement  $\text{Spec}(\overline{R}/p\overline{R}) \hookrightarrow \text{Spf } A_{\text{cris}}(\overline{R})$  s'identifie à

$$\mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W A_{\text{cris}}(\overline{R}).$$

Par functorialité du cristal de Messing, la quasi-isogénie  $\rho$  induit un isomorphisme entre l'évaluation du cristal de  $\mathbb{X}$  sur  $\text{Spec}(\overline{R}/p\overline{R}) \hookrightarrow \text{Spf } A_{\text{cris}}(\overline{R})$  et celui de  $X$  c'est à dire un isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{\text{cris}}^+(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(X)_{A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}[\frac{1}{p}]}$$

Par application du foncteur cristal de Dieudonné sur le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{X} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} R/pR)^{(p)} & \xrightarrow{\rho^{(p)}} & (X \otimes_R R/pR)^{(p)} \\ \downarrow v & & \downarrow v \\ \mathbb{X} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} R/pR & \xrightarrow{\rho} & X \otimes_R R/pR \end{array}$$

on déduit que l'isomorphisme précédent est compatible aux morphismes semi-linéaires induits par le Verschiebung. La compatibilité aux actions de Galois est due à la functorialité de cristal associée aux morphismes dans  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$  pour  $\gamma \in \text{Gal}(\overline{R}/R)$  :

$$(A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}) \xrightarrow{(\gamma, \gamma)} (A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}).$$

□

Notons

$$\mathbb{E} = \mathbb{D}(X)_{A_{\text{cris}}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}}.$$

D'après le corollaire 1.3.1.1 du théorème de comparaison 1.3.1.1, l'application de périodes de  $X$  induit un isomorphisme de  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\overline{R})$ -modules

$$V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}[\frac{1}{tp}].$$

Cet isomorphisme est compatible aux Frobenius semi-linéaires où sur le membre de gauche le Frobenius est  $p \otimes \varphi$  et sur celui de droite c'est le Frobenius  $\varphi$  induit par le Verschiebung de la réduction modulo  $p$  de  $X$ . Il est de plus compatible aux filtrations où

$$\text{Fil}^\bullet (V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\overline{R})) = V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^\bullet B_{\text{cris}}(\overline{R})$$

et la filtration de  $\mathbb{E}[\frac{1}{pt}]$  est celle induit par la filtration de  $\mathbb{E}$  donnée dans la définition 1.2.2.2 du chapitre 1.

Prenons le déterminant au dessus de  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\overline{R})$  de cet isomorphisme. C'est un isomorphisme

$$\det_F V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\overline{R})} \mathbb{E}[\frac{1}{tp}]$$

compatible à l'action de  $\Gamma$ , les Frobenius et les filtrations. Le Frobenius sur  $\det_F V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\overline{R})$  est donné par  $p^n \otimes \varphi$ . Calculons la filtration de  $\det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\overline{R})} \mathbb{E}[\frac{1}{tp}]$ . Soit

$$\mathbb{E} = \bigoplus_{\tau \in \tilde{I}_F} \mathbb{E}_\tau$$

la décomposition de  $\mathbb{E}$  suivant l'action de  $F$  où  $\tau : \mathcal{O}_F \hookrightarrow W \subset A_{cris}(\overline{R})$ . Alors,

$$\mathrm{Fil}^\bullet \mathbb{E} = \bigoplus_{\tau} \mathrm{Fil}^\bullet \mathbb{E}_{\tau}$$

et

$$\mathrm{Fil}^\bullet \det_{F \otimes B_{cris}} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] = \bigoplus_{\tau} \mathrm{Fil}^\bullet \det_{B_{cris}} E_{\tau}[\frac{1}{tp}].$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}^i \mathbb{E}_{\tau} &= \mathbb{E}_{\tau} \text{ si } i \leq -1, \\ \mathrm{Fil}^{-1} \mathbb{E}_{\tau} / \mathrm{Fil}^0 \mathbb{E}_{\tau} &= \mathrm{Lie}(X)_{\tau} \otimes_R \widehat{R}, \\ \mathrm{Fil}^i \mathbb{E}_{\tau} &= \mathrm{Fil}^{i+1} A_{cris}(\overline{R}) \cdot \mathbb{E}_{\tau} + \mathrm{Fil}^i A_{cris}(\overline{R}) \cdot \mathrm{Fil}^0 \mathbb{E}_{\tau} \text{ si } i > 0. \end{aligned}$$

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base du  $A_{cris}(\overline{R})$ -module  $\mathbb{E}_{\tau}$  telle que

$$\mathrm{Fil}^0 \mathbb{E}_{\tau} = \mathrm{Fil}^1 A_{cris} e_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^1 A_{cris} e_{p_{\tau}} \oplus A_{cris} e_{p_{\tau}+1} \oplus \dots \oplus A_{cris} e_n$$

(cf. remarque 1.2.3.1) et donc pour  $i \geq 0$ ,

$$\mathrm{Fil}^i \mathbb{E}_{\tau} = \mathrm{Fil}^{i+1} A_{cris} e_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^{i+1} A_{cris} e_{p_{\tau}} \oplus \mathrm{Fil}^i A_{cris} e_{p_{\tau}+1} \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^i A_{cris} e_n.$$

Alors, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}^i \mathbb{E}_{\tau}[\frac{1}{pt}] &= \left\{ \frac{x}{t^k} \mid x \in \mathrm{Fil}^{i+k} \mathbb{E}_{\tau}[\frac{1}{p}] \right\} \\ &= \mathrm{Fil}^{i+1} B_{cris} e_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^{i+1} B_{cris} e_{p_{\tau}} \oplus \mathrm{Fil}^i B_{cris} e_{p_{\tau}+1} \oplus \dots \oplus \mathrm{Fil}^i B_{cris} e_n. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Fil}^i \det_{B_{cris}(\overline{R})} \mathbb{E}_{\tau}[\frac{1}{pt}] = \mathrm{Fil}^{i+p_{\tau}} B_{cris} \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

et que donc

$$\mathrm{Fil}^\bullet \det_{B_{cris}(\overline{R})} \mathbb{E}_{\tau}[\frac{1}{pt}] = \mathrm{Fil}^{\bullet+p_{\tau}} B_{cris}(\overline{R}) \cdot \det_{B_{cris}(\overline{R})} \mathbb{E}_{\tau}[\frac{1}{pt}].$$

D'après le lemme 2.3.7.2 il existe un isomorphisme de  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ -modules munis d'une action de semi-linéaire d'un opérateur  $\varphi$

$$\rho_* : \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}].$$

Prenant son déterminant au dessus de  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$  on obtient un isomorphisme de  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$ -modules libres de rang 1 munis d'un opérateur semi-linéaire  $\varphi$  :

$$\det(\rho_*) : (\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})) \otimes_W B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \det_{F \otimes B_{cris}} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}].$$

Il résulte du calcul précédent et du lemme 2.3.7.1 que cet isomorphisme est compatible aux filtrations. On obtient donc au final par composition un isomorphisme de  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$  modules libres de rang 1, munis de Frobenius semi-linéaires et de filtrations

$$(\det_F V_p(X)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} (\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})) \otimes_W B_{cris}(\overline{R}).$$

Mais d'après Fontaine il existe un isomorphisme associé aux périodes de  $\widetilde{\mathbb{X}}$

$$\det_F V_p(\widetilde{\mathbb{X}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}) \xrightarrow{\sim} \det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}}).$$

Appliquant  $(-)\otimes_{B_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{E}})} B_{cris}(\overline{R})$  on obtient un isomorphisme

$$\det_F V_p(\widetilde{\mathbb{X}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R}) \xrightarrow{\sim} \det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\overline{R})$$

compatible aux Frobenius, aux filtrations et à l'action de  $\Gamma$  via  $\Gamma \rightarrow I_E$ . On a donc obtenu au final un isomorphisme de  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R})$ -modules munis de Frobenius, de filtrations et d'une action semi-linéaire de  $\Gamma$ ,

$$\det_F V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R}) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R}).$$

D'après le théorème 1.1.2.1, si on applique  $\text{Fil}^0(-)^{\varphi=\text{Id}}$  à l'isomorphisme précédent on obtient un isomorphisme de  $F[\Gamma]$ -modules

$$\beta : T[\frac{1}{p}] = \det_F V_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\tilde{X}).$$

Cela montre déjà que  $\Gamma$  agit sur  $\det_F V_p(X)$  via le caractère

$$\prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p\tau} : \Gamma \rightarrow I_E \rightarrow \mathcal{O}_F^\times.$$

**En résumé :** on a construit un isomorphisme de  $\varphi$ -modules sur  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R})$

$$V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R}) \xrightarrow[\sim]{\pi_1} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] \xleftarrow[\sim]{\rho_*} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris}(\bar{R}) \xleftarrow[\sim]{\pi_2} V_p(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R})$$

où :

- $\pi_1$  est l'application de périodes de  $\tilde{X}$
- $\pi_2$  est l'application de périodes de  $\tilde{X}$  à laquelle on a appliqué  $(-)\otimes_{B_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{E}})} B_{cris}(\bar{R})$
- $\rho_*$  est induit par le lemme 2.3.7.2.

On a vérifié qu'après application du déterminant  $\det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}}(-)$  l'isomorphisme de  $\varphi$ -modules précédent est un isomorphisme de  $\varphi$ -modules filtrés. Puis on a appliqué le foncteur  $\text{Fil}^0(-)^{\varphi=\text{Id}}$  pour obtenir notre isomorphisme.

Remarquons que puisque  $S$  est connexe la hauteur de la quasi-isogénie  $\rho$  est constante.

**Proposition 2.3.7.3.** *Via l'isomorphisme  $\beta : \det_F V_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\tilde{X})$  on a*

$$\beta(\det_{\mathcal{O}_F} T_p(X)) = p^{-\text{ht}(\rho)/d} \det_{\mathcal{O}_F} T_p(\tilde{X}).$$

*Démonstration.* On va utiliser la proposition 2.3.6.1. Soit  $x \in S^{rig}$  de corps résiduel  $K$  où  $[K : \check{E}] < +\infty$ . Soit  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . On peut étendre le morphisme  $R \rightarrow \mathcal{O}_K$  associé à  $x$  en un morphisme  $\bar{R} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Choisissons une telle extension. Quitte à remplacer  $R$  par  $\mathcal{O}_K$  et le groupe  $p$ -divisible  $X$  par  $X \otimes_R \mathcal{O}_K$  on peut alors supposer que  $R = \mathcal{O}_K$  et  $\bar{R} = \mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Considérons

$$\det_{\mathbb{Q}_p}(\beta) : \det_{\mathbb{Q}_p} V_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_{\mathbb{Q}_p} V_p(\tilde{X}).$$

Si  $\beta(T) = p^a \det_{\mathcal{O}_F} T_p(\tilde{X})$  alors

$$\det_{\mathbb{Q}_p}(\beta)(\det_{\mathbb{Z}_p} T_p(X)) = p^{ad} \det_{\mathbb{Z}_p} T_p(\tilde{X}).$$

Soit  $D$  le module de Dieudonné de  $X$ . Puisque  $[K : \check{E}] < +\infty$ , le corps résiduel de  $K$  est  $\bar{\mathbb{F}}_p$  et  $D$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module. Avec les notations précédentes on a donc

$$\mathbb{E} = D \otimes_W A_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}}).$$

Notons  $B_{cris} := B_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ . Considérons les isomorphismes (l'isomorphisme du milieu n'est pas compatible aux filtrations, il l'est seulement après passage au déterminant)

$$T_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris} \xrightarrow[\sim]{\pi_1} D \otimes_W B_{cris} \xleftarrow[\sim]{\rho_*} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris} \xleftarrow[\sim]{\pi_2} T_p(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris}$$

où  $\pi_1$  est l'isomorphisme de périodes de  $X$  et  $\pi_2$  celui de  $\tilde{X}$ . Fixons des bases de  $T_p(X)$ ,  $D$ ,  $\mathbb{D}(\tilde{X})$  et  $T_p(\tilde{X})$  telles que l'hypothèse de la proposition 2.3.6.1 soit satisfait. Soient  $A \in \mathrm{GL}_{nd}(B_{cris})$  la matrice de  $\pi_1$ ,  $B \in \mathrm{GL}_{nd}(L)$  celle de  $\rho_*$  et  $C \in \mathrm{GL}_{nd}(B_{cris})$  celle de  $\pi_2$ . Notons  $a = \sum_{\tau} p_{\tau}$  la dimension de nos groupes  $p$ -divisibles. D'après la proposition 2.3.6.1

$$\begin{aligned} \det(A) &= ut^a \text{ où } u \in \mathbb{Z}_p^{\times} \\ \det(C) &= wt^a \text{ où } w \in \mathbb{Z}_p^{\times} \end{aligned}$$

et de plus

$$v_p(\det B) = \mathrm{ht}(\rho).$$

Alors,

$$\det(C^{-1}B^{-1}A) = w^{-1}u \det(B)^{-1}$$

qui est de valuation  $p$ -adique  $-\mathrm{ht}(\rho)$ . On en déduit le résultat.  $\square$

On peut maintenant poser la définition suivante.

**Définition 2.3.7.3.** *On fixe l'isomorphisme suivant de  $F[\Gamma]$ -modules :*

$$p^{\mathrm{ht}(\rho)/d}\beta : \det_{\mathcal{O}_F} T_p(X) \xrightarrow{\sim} T$$

qui induit donc un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -systèmes locaux

$$u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_{S^{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\bar{\mu}}.$$

### 2.3.7.4 Functorialité de l'isomorphisme

**Lemme 2.3.7.3.** *L'isomorphisme  $u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_{S^{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$  ne dépend pas canoniquement du choix fait de la clôture algébrique de  $\mathrm{Frac}(R)$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence du fait que si  $\gamma \in \Gamma$ , le composé

$$\Gamma \xrightarrow{\mathrm{int}_{\gamma}} \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_F(V_p(X)) \xrightarrow{\det_F} F^{\times}$$

où la seconde flèche est l'action naturelle de  $\Gamma$  sur  $V_p(X)$ , coïncide avec

$$\Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}_F(V_p(X)) \xrightarrow{\det_F} F^{\times}.$$

$\square$

On doit maintenant vérifier que les conditions de la proposition 2.3.7.2 sont vérifiées. Soit donc  $(S', X', \rho')$  un autre triplet adapté et un morphisme  $f : S' \rightarrow S$  tel que  $(X', \rho') = f^*(X, \rho)$ . Notons  $S' = \mathrm{Spf}(R')$ . On suppose bien sûr que  $S' \neq \emptyset$ .

**Lemme 2.3.7.4.** *Le morphisme  $f^* : R \rightarrow R'$  est injectif.*

*Démonstration.* Le morphisme  $f^{rig} : S'^{rig} \rightarrow S^{rig}$  identifie  $S'^{rig}$  à un ouvert admissible de  $S^{rig}$ . Soit  $x \in S'^{rig}$  et  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $R[\frac{1}{p}]$  associé à  $f(x)$ . Puisque  $R[\frac{1}{p}]$  est intègre noethérien

$$R[\frac{1}{p}] \hookrightarrow R[\frac{1}{p}]_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \widehat{R[\frac{1}{p}]_{\mathfrak{m}}}.$$

Mais d'après la proposition 3, sec. 7.3.2 chap. 7 de [BGR84], le morphisme naturel

$$R[\frac{1}{p}]_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_{S^{rig}, f(x)}$$

induit un isomorphisme

$$\widehat{R[\frac{1}{p}]_{\mathfrak{m}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}_{S^{rig}, f(x)}}.$$

Puisque  $S'^{rig} \rightarrow S^{rig}$  est une immersion ouverte on a  $\mathcal{O}_{S'^{rig}, f(x)} = \mathcal{O}_{S^{rig}, x}$  et on conclut.  $\square$

Soit  $\overline{\text{Frac}(R')}$  une clôture algébrique de  $\text{Frac}(R')$  et  $\overline{R'}$  l'anneau associé comme précédemment. Soit  $\overline{\text{Frac}(R)}$  la clôture algébrique de  $\text{Frac}(R)$  dans  $\overline{\text{Frac}(R')}$  et  $\overline{R}$  l'anneau associé. Il y a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \subset & R' \\ \cap & & \cap \\ \overline{R} & \subset & \overline{R'} \end{array}$$

Notons  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{R}|R)$  et  $\Gamma' = \text{Gal}(\overline{R'}|R')$ . Il y a un morphisme naturel  $\Gamma' \longrightarrow \Gamma$ . Si  $\bar{\eta}'$  est le point géométrique de  $\text{Spec}(R'[\frac{1}{p}])$  associé au choix de la clôture algébrique  $\overline{\text{Frac}(R')}$  et  $\bar{\eta}$  celui de  $\text{Spec}(R[\frac{1}{p}])$ , il s'agit du morphisme

$$\pi_1(\text{Spec}(R'[\frac{1}{p}]), \bar{\eta}') \longrightarrow \pi_1(\text{Spec}(R[\frac{1}{p}]), \bar{\eta}).$$

Le diagramme précédent induit un diagramme d'épaississement à puissances divisées

$$\begin{array}{ccc} A_{cris}(\overline{R}) & \longrightarrow & \widehat{\overline{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{cris}(\overline{R'}) & \longrightarrow & \widehat{\overline{R'}} \end{array}$$

Les flèches de ce diagramme sont  $\Gamma'$  équivariantes où l'action de  $\Gamma'$  sur les objets du haut est déduite de l'action de  $\Gamma$  et du morphisme  $\Gamma' \rightarrow \Gamma$ . Soient

$$\begin{array}{ccc} \beta_X : \det_F V_p(X) & \xrightarrow{\sim} & \det_F V_p(\widehat{\overline{X}}) \\ \beta_{X'} : \det_F V_p(X') & \xrightarrow{\sim} & \det_F V_p(\widehat{\overline{X'}}) \end{array}$$

les deux isomorphismes construits précédemment où  $\beta_X$  est un isomorphisme de  $F[\Gamma]$ -modules et  $\beta_{X'}$  de  $F[\Gamma']$ -modules. Puisque  $X' = X \otimes_R R'$ , il existe un isomorphisme

$$V_p(X) \xrightarrow{\sim} V_p(X')$$

qui est compatible à l'action de  $\Gamma'$  via  $\Gamma' \rightarrow \Gamma$ . On veut montrer que le déterminant de cet isomorphisme composé avec  $\beta_{X'}$  coïncide avec  $\beta_X$ . Il suffit pour cela de montrer que ces deux isomorphismes auxquels on applique  $(-) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R'})$  coïncident. Mais cela résulte de l'existence du diagramme d'épaississements à puissances divisées précédent, l'évaluation de tous les cristaux que nous avons utilisés sur  $A_{cris}(\overline{R'}) \rightarrow \widehat{\overline{R'}}$  s'obtenant canoniquement par application de  $(-) \otimes_{A_{cris}(\overline{R})} A_{cris}(\overline{R'})$  à leur évaluation sur  $A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}$ .

### 2.3.7.5 Compatibilité à l'action de $J(\mathbb{Q}_p)$

Soit  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ ,  $g \in \text{Aut}(\mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}], \varphi)$ . Avec les notations précédentes, dans l'isomorphisme

$$\rho_*^{-1} : \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{X})[\frac{1}{p}] \otimes_L B_{cris}(\overline{R})$$

si on remplace  $\rho$  par  $\rho \circ (g \otimes \text{Id})^{-1}$  on a

$$(\rho \circ g^{-1})_*^{-1} = (g \otimes \text{Id}) \circ \rho_*^{-1}.$$

Prenant le déterminant sur  $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\overline{R})$  on a

$$\det_{F \otimes B_{cris}}((\rho \circ g^{-1})_*^{-1}) = \det(g) \cdot \det_{F \otimes B_{cris}}(\rho_*^{-1})$$

où  $\det(g) \in F^\times$ . On a de plus

$$\text{ht}(\rho \circ g^{-1}) = \text{ht}(\rho) - dv_p(\det(g)).$$

En se référant à la définition 2.3.7.3 on constate donc que pour  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$  qui induit  $g : \check{\mathcal{M}}^{rig} \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}^{rig}$ , on a  $g^*u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\check{\mu}}$  est égal à  $p^{-v_p(\det g)} \det(g) \cdot u$ .

### 2.3.7.6 Compatibilité à l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$

On a construit précédemment un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -systèmes locaux sur l'espace rigide  $\check{\mathcal{M}}^{rig}$

$$u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\check{\mu}}.$$

Pour  $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$  un sous-groupe ouvert, on pose maintenant

$$u_K = \pi_K^* u : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\check{\mu}}$$

où  $\pi_k : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{rig}$ . Il reste à vérifier le point (3) du théorème 2.3.4.2.

Soit  $(S, X, \rho)$  un triplet adapté. On choisit comme précédemment un anneau  $\overline{R}$  et on note  $T_p(X)$  le  $\Gamma := \text{Gal}(\overline{R}|R)$ -module associé. Soit  $K \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$  et  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  vérifiant :

- $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$ ,
- $\Lambda_0 \subset g.\Lambda_0$ .

Supposons de plus que l'on dispose d'une structure de niveau  $K$

$$\bar{\eta} : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X) [K],$$

c'est à dire un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -modules

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X)$$

via lequel l'action de  $\Gamma$  sur  $T_p(X)$  se fasse à travers  $K$  et où  $\bar{\eta}$  désigne la classe de  $K$ -conjugaison de  $\eta$ . Le quadruplet  $(S, X, \rho, \bar{\eta})$  définit un élément  $x \in \check{\mathcal{M}}_K(S^{rig})$ .

Supposons de plus que l'on a un sous-groupe plat fini  $C \subset X$  stable sous l'action de  $\mathcal{O}_F$  tel que le composé

$$\Lambda_0 \xrightarrow[\sim]{\eta} T_p(X) \hookrightarrow T_p(X/C)$$

induit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0 & \xrightarrow[\sim]{\eta} & T_p(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g.\Lambda_0 & \xrightarrow[\sim]{} & T_p(X/C). \end{array}$$

Alors,

$$\eta \circ g : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X/C)$$

induit une structure de niveau

$$\overline{\eta \circ g} : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X/C) [g^{-1}Kg].$$

Soit  $f : X \rightarrow X/C$  l'isogénie. Alors, via l'isomorphisme

$$g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg},$$

le quadruplet  $(S, X/C, f \circ \rho, \overline{\eta \circ g})$  correspond au point  $g.x \in \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}(S^{rig})$ .

Notons  $\mathbb{E}$ , resp.  $\mathbb{E}'$  l'évaluation du cristal de Dieudonné de  $X$  sur l'épaississement  $A_{cris}(\overline{R}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}$ . L'isogénie  $f : X \rightarrow X/C$  induit un morphisme  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  compatible à l'action de  $\mathcal{O}_F$ . Par functorialité du cristal de Dieudonné on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{E}[\frac{1}{pt}] \xleftarrow[\sim]{\rho^*} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \parallel \\ V_p(X/C) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{E}'[\frac{1}{pt}] \xleftarrow[\sim]{(f \circ \rho)^*} \mathbb{D}(\mathbb{X}) \otimes_W B_{cris} \end{array}$$

où les applications horizontales de gauche sont les application de périodes de  $X$  et  $X/C$ . Soient

$$\begin{aligned}\beta_X &: \det_F V_p(X) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\tilde{X}) \\ \beta_{X/C} &: \det_F V_p(X/C) \xrightarrow{\sim} \det_F V_p(\tilde{X})\end{aligned}$$

les isomorphismes construite précédemment. Il résulte de la commutativité du diagramme précédent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \det_F V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R}) & \xrightarrow[\sim]{\beta_X \otimes \text{Id}} & \det_F V_p(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R}) \\ \det V_p(f) \downarrow \simeq & & \parallel \\ \det_F V_p(X/C) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R}) & \xrightarrow[\sim]{\beta_{X/C} \otimes \text{Id}} & \det_F V_p(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\bar{R}) \end{array}$$

est commutatif. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \det_F V_p(X) & \xrightarrow[\sim]{\beta_X} & \det_F V_p(\tilde{X}) \\ \det V_p(f) \downarrow \simeq & & \parallel \\ \det_F V_p(X/C) & \xrightarrow[\sim]{\beta_{X/C}} & \det_F V_p(\tilde{X}) \end{array}$$

l'est donc. On en déduit la propriété (3) du théorème 2.3.4.2.

Cela termine la démonstration du théorème 2.3.4.2.  $\square$

*Preuve du théorème 2.3.4.1.* Le morphisme  $\check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \det(\check{\mathcal{M}})_K$  est défini comme suit : Soient  $S$  un espace rigide connexe sur  $\text{Sp } \check{E}$  avec morphisme structural  $f_S : S \rightarrow \text{Sp } \check{E}$ . Un élément  $x = (X, \rho, \bar{\eta})$  de  $\check{\mathcal{M}}_K(S)$  est donné par  $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}(Y)$  où  $Y$  est un schéma formel admissible de fibre générique  $S$  et

$$\eta : \Lambda_0/p^m \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \pi_{S,K}^* \mathcal{T}_K \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} [K]$$

avec  $\pi_{S,K} : S \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$  et  $m \in \mathbb{N}$  assez grand. Posons l'image de  $x$  dans  $\det(\check{\mathcal{M}})_K(S)$  via  $\check{\mathcal{M}}_K(S) \rightarrow \det(\check{\mathcal{M}})_K(S)$  l'isomorphisme

$$\det_{\mathcal{O}_F} \Lambda_0 \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \xrightarrow{\det_{\mathcal{O}_F} \eta \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}} \pi_{S,K}^* \det_K \mathcal{T}_K \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_{S,K}^*(u_K) \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}} f_S^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} [\det K]$$

dans la composante  $\varkappa(X, \rho)$ .

La compatibilité de l'action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  est immédiate d'après le théorème 2.3.4.2. Il nous reste à montrer que le morphisme  $\check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \det(\check{\mathcal{M}})_K$  est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink. Considérons le morphisme

$$V_p(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{E}}) \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{D}(\tilde{X}) \otimes_W B_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{E}}) \xrightarrow{(\text{Frob}_E)^*} \mathbb{D}(\sigma_E^* \tilde{X}) \otimes_W B_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{E}}) \xleftarrow{\pi_2} V_p(\sigma_E^* \tilde{X}) \otimes B_{cris}(\mathcal{O}_{\bar{E}})$$

où

- $\pi_1$  (resp.  $\pi_2$ ) est l'application de périodes de  $\tilde{X}$  (resp.  $\sigma_E^* \tilde{X}$ )
- $(\text{Frob}_E)_*$  est induit par l'isogénie  $\text{Frob}_E : \tilde{X} \rightarrow \sigma_E^* \tilde{X}$ .

Après avoir appliqué le foncteur  $\text{Fil}^0(\det_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}}(-))^{\varphi=p^n}$ , on a un isomorphisme

$$\det V_p(\tilde{X}) \xrightarrow{\sim} \det V_p(\sigma_E^* \tilde{X}). \quad (2.6)$$

En utilisant la même preuve que la proposition 2.3.7.3 et le fait que  $\text{ht}(\text{Frob}_E) \geq 0$ , l'isomorphisme 2.6 induit un morphisme

$$\det T_p(\tilde{X}) \rightarrow \det T_p(\sigma_E^* \tilde{X})$$

qui induit un morphisme de  $\mathcal{O}_F$ -systèmes locaux

$$\mathcal{L}_{\bar{\mu}} \rightarrow \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}.$$

Il suffit donc de montrer que via le lemme 2.2.3.2 pour  $\tilde{\sigma}_E$ ,  $\mathcal{L}_{\bar{\mu}} \rightarrow \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$  correspond à

$$\times N_{\det \bar{\mu}}(p^{-1}) : \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F$$

avec  $N_{\det \bar{\mu}}(p^{-1}) = p^{ad'/d}$ , où  $a = \sum_i p_i$  et  $d' = [E : \mathbb{Q}_p]$ .

On fixe une base  $(\epsilon_\tau)_{\tau \in \tilde{I}_F}$  de  $\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[1/p]$  comme dans le lemme 2.3.7.1. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{\mu}, \bar{x}}[1/p] &= \det V_p(\tilde{\mathbb{X}}) = \left\{ \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} e_\tau \otimes a_\tau \in \text{Fil}^0 \left( \det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[1/p] \otimes B_{\text{cris}} \right)^{\varphi=p^n} \right\} \\ \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}, \bar{x}}[1/p] &= \det V_p(\sigma_E^* \tilde{\mathbb{X}}) \\ &= \left\{ \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} e_\tau \otimes 1 \otimes a_\tau \in \text{Fil}^0 \left( \det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[1/p] \otimes_{\check{E}, \sigma_E} \check{E} \otimes_{\check{E}} B_{\text{cris}} \right)^{\varphi=p^n} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} e_\tau \otimes 1 \otimes a_\tau \in \text{Fil}^0 \left( \det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[1/p] \otimes_{\check{E}} (\check{E} \otimes_{\sigma_E^{-1}, \check{E}} B_{\text{cris}}) \right)^{\varphi=p^n} \right\} \end{aligned}$$

On explicite donc l'isomorphisme 2.6 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{\mu}, \bar{x}}[1/p] &\rightarrow \sigma_E^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}, \bar{x}}[1/p] \\ \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} e_\tau \otimes a_\tau &\mapsto \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} (p^n \varphi^{-1})^{d'}(e_\tau) \otimes 1 \otimes a_\tau. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Comme  $\sum_{\tau \in \tilde{I}_F} e_\tau \otimes a_\tau \in \text{Fil}^0(\det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[1/p] \otimes B_{\text{cris}})^{\varphi=p^n}$  implique que  $\varphi(a_\tau) = p^{p^r} a_{\sigma\tau}$ , on a alors

$$\sum_{\tau \in \tilde{I}_F} (p^n \varphi^{-1})^{d'} e_\tau \otimes 1 \otimes a_\tau = \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} p^{ad'/d} e_{\sigma^{-d'}\tau} \otimes 1 \otimes a_\tau = \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} e_\tau \otimes 1 \otimes \varphi^{d'}(a_\tau).$$

Soit  $\tilde{\sigma}_E : \check{E} \xrightarrow{\sim} \check{E}$  comme dans la section 2.2.3. Alors  $\tilde{\sigma}_E^{-1}$  induit un isomorphisme de  $\check{E}$ -algèbres

$$\tilde{\sigma}_E^{-1} : \check{E} \otimes_{\sigma_E^{-1}, \check{E}} B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\check{E}}) \xrightarrow{\sim} B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\check{E}})$$

et puis un isomorphisme  $\mathcal{L}_{\bar{\mu}, \sigma_E(\bar{x})}[1/p] \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\bar{\mu}, \bar{x}}[1/p]$ . En composant avec 2.7, on a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu, \bar{x}}[1/p] &\rightarrow \mathcal{L}_{\mu, \bar{x}}[1/p] \\ \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} e_\tau \otimes a_\tau &\mapsto \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} e_\tau \otimes \tilde{\sigma}_E^{-1}(\varphi^{d'}(a_\tau)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Si on fixe un  $\tau_0 : F \hookrightarrow \check{E}$  et pose  $p_i := p_{\sigma^i \tau_0}$ , on a un  $F$ -isomorphisme compatible à l'action de  $I_E$  :

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} e_\tau \otimes a_\tau \in \text{Fil}^0 \left( \det_{\mathcal{O}_F \otimes W} \mathbb{D}(\mathbb{X})[1/p] \otimes B_{\text{cris}} \right)^{\varphi=p^n} \right\} &\xrightarrow{\sim} M(\check{E}, \{p_i\}) \\ \sum_{\tau} e_\tau \otimes a_\tau &\mapsto a_{\tau_0} \end{aligned}$$

où

$$M(\check{E}, \{p_i\}_{0 \leq i \leq d-1}) := \{x \in B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\check{E}})^{\varphi^d=p^a} \mid \forall i, 0 \leq i < d, \varphi^i(x) \in \text{Fil}^{p_i} B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\check{E}})\}.$$

On peut donc identifier ces deux  $F[I_E]$ -modules et l'isomorphisme 2.8 via cette identification correspondant à  $F$ -isomorphisme

$$\begin{aligned} M(\check{E}, \{p_i\}) &\xrightarrow{\sim} M(\check{E}, \{p_i\}) \\ a_{\tau_0} &\mapsto \tilde{\sigma}_E^{-1}(\varphi^{d'}(a_{\tau_0})) \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3.5.2 et le choix de  $\tilde{\sigma}_E$ , lorsque  $a_{\tau_0} = \prod_{i=0}^{d'-1} \varphi^{d'-i}(t_{\mathcal{L}T_E})^{p^i}$ , on a

$$\tilde{\sigma}_E^{-1}(\varphi^{d'}(a_{\tau_0})) = p^{ad'/d} \tilde{\sigma}_E(a_{\tau_0}) = p^{ad'/d} a_{\tau_0},$$

car  $\chi_{LT_E}(\tilde{\sigma}_E) = 1$ . Alors (2.8) est la multiplication par  $p^{ad'/d}$ .  $\square$

## 2.4 Le morphisme déterminant pour le type P.E.L.

### 2.4.1 Reformulation de la définition d'une structure de niveau P.E.L.

Avant de définir le morphisme déterminant dans le cas P.E.L. on a besoin de reformuler les définitions 2.1.6.3 et 2.1.6.4 concernant les structures de niveau avec polarisation. Il ne s'agit que d'un jeu sur les définitions mais on préfère clarifier ce point.

Plaçons nous donc dans une situation P.E.L., c'est à dire que l'on a fixé une donnée de type P.E.L. non-ramifiée simple (cf. section 2.1.3). Soit  $G$  le groupe réductif associé. Rappelons que l'on note

$$c : G \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

le facteur de similitude. On a fixé un réseau autodual  $\Lambda_0 \subset V$  pour l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et on note  $G(\mathbb{Z}_p)$  le sous-groupe compact de  $G(\mathbb{Q}_p)$  associé.

**Lemme 2.4.1.1.** *Soit  $Y$  un  $\check{E}$ -espace rigide et  $H$  un groupe  $p$ -divisible rigide sur  $Y$  muni d'une structure additionnelle P.E.L.  $(\iota, \lambda)$  associée au groupe  $G$ ,  $\iota : \mathcal{O}_F \rightarrow \text{End}(H)$  et  $\lambda : H \xrightarrow{\sim} H^\vee$ . Supposons  $H$  muni d'une structure de niveau  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ . Alors,  $\mu_p^{\text{rig}}$  est muni d'une structure de niveau  $c(K)$  telle que pour tout point géométrique  $x \in Y(\check{E})$  si*

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(H_x)$$

a pour  $K$ -orbite celle associée à la structure de niveau  $K$  sur  $H$ , il existe

$$\eta_c : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$$

ayant pour  $c(K)$ -orbite celle associée à la structure de niveau  $c(K)$  sur  $\mu_p^{\text{rig}}$  telle que si

$$(\cdot, \cdot) : T_p(H_x) \times T_p(H_x) \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

est l'accouplement associé à la polarisation  $\lambda$  de  $H$  alors

$$(\eta(\bullet), \eta(\bullet)) = \eta_c \circ \langle \bullet, \bullet \rangle.$$

*Démonstration.* Soient  $v_1, v_2 \in \Lambda_0$  vérifiant  $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$ . Posons pour  $a \in \mathbb{Z}_p$

$$\eta_c(a) = a(\eta(v_1), \eta(v_2)).$$

D'après la définition 2.1.6.3, si  $f : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$  il existe  $u \in \mathbb{Z}_p^\times$  tel que

$$(\eta(\bullet), \eta(\bullet)) = u \cdot f \circ \langle \bullet, \bullet \rangle.$$

Appliquant cette égalité au couple de vecteurs  $(v_1, v_2)$  on obtient

$$\eta_c(1) = (\eta(v_1), \eta(v_2)) = u f(1).$$

On a donc  $\eta_c = u \cdot f : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$  et

$$(\eta(\bullet), \eta(\bullet)) = \eta_c \circ \langle \bullet, \bullet \rangle.$$

Bien sûr,  $\eta_c$  ne dépend pas du choix fait de  $v_1$  et  $v_2$ .

Maintenant, si  $\gamma \in \pi_1(Y, x)$ , par définition d'une structure de niveau  $K$ , il existe  $k \in K$  tel que

$$\begin{aligned}\gamma.\eta(v_1) &= \eta(k.v_1) \\ \gamma.\eta(v_2) &= \eta(k.v_2).\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\gamma.\eta_c(1) &= \gamma.\eta_c(\langle v_1, v_2 \rangle) \\ &= \gamma.(\eta(v_1), \eta(v_2)) \\ &= (\gamma.\eta(v_1), \gamma.\eta(v_2)) \\ &= (\eta(k.v_1), \eta(k.v_2)) \\ &= \eta_c(\langle k.v_1, k.v_2 \rangle) \\ &= \eta_c(c(k) \langle v_1, v_2 \rangle) \\ &= c(k)\eta_c(1).\end{aligned}$$

On en déduit que  $\eta_c$  définit une structure de niveau  $c(K)$  sur  $\mathbb{Z}_p(1)$ .  $\square$

Avant d'aller plus loin on a besoin de préciser un point concernant « la » polarisation de la déformation universelle  $\mathbb{X}^{univ}$  sur  $\check{\mathcal{M}}$ . En effet,  $X^{univ}$  n'est pas muni d'une polarisation principale mais d'une classe de  $\mathbb{Z}_p^\times$ -homothétie de telle polarisation (cf. le dernier point de la définition 2.1.4.3). Néanmoins il y a un moyen de choisir un représentant dans cette classe de la façon suivante.

**Convention :** Soit  $S$  un  $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ -schéma et  $(X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$  où  $\lambda'$  est définie a priori à un  $\mathbb{Z}_p^\times$ -multiple près. On choisit  $\lambda' : X \xrightarrow{\sim} X^\vee$  comme étant l'unique polarisation principale telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{X}_{\check{S}} & \xrightarrow{\rho} & X_{\check{S}} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ \mathbb{X}_{\check{S}}^\vee & \xleftarrow{\rho^\vee} & X_{\check{S}}^\vee\end{array}$$

commute à une puissance de  $p$  près (et non pas à un  $\mathbb{Q}_p^\times$ -multiple près).

À cause de la convention précédente l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\check{\mathcal{M}}$  se décrit de façon légèrement différente.

**Lemme 2.4.1.2.** Soit  $c : J \rightarrow \mathbb{G}_m$  déduit du facteur de similitude  $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ . Avec la convention précédente, si  $(X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$  et  $g \in J(\mathbb{Q})$  on a

$$g.(X, \lambda', \rho) = (X, p^{-v_p(c(g))}c(g)\lambda', \rho \circ g^{-1}).$$

*Démonstration.* La commutativité du diagramme précédente à une puissance de  $p$  près s'énonce en

$$\rho^\vee \circ \lambda' \circ \rho = p^i \lambda$$

pour un  $i \in \mathbb{Z}$ . On a donc

$$\begin{aligned}(\rho \circ g^{-1})^\vee \circ \lambda' \circ (\rho \circ g^{-1}) &= p^i (g^{-1})^\vee \circ \lambda \circ g^{-1} \\ &= p^i c(g)^{-1} \lambda.\end{aligned}$$

soit encore

$$(\rho \circ g^{-1})^\vee \circ (p^{-v_p(c(g))}c(g)\lambda') \circ (\rho \circ g^{-1}) = p^{i-v_p(c(g))} \lambda.$$

Le résultat s'en déduit.  $\square$

Avec la convention précédente on parlera désormais de la polarisation de la déformation universelle  $X^{\text{univ}}$  sur  $\check{\mathcal{M}}$ . La proposition qui suit se déduit alors du lemme 2.4.1.1.

**Proposition 2.4.1.1.** *Pour tout entier  $m \geq 1$ , soit  $\mathcal{N}_m$  le faisceau étale sur  $\check{\mathcal{M}}^{\text{rig}}$  formé des couples  $(\eta, \eta_c)$  où :*

- $\eta : \Lambda_0/p^m\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}}$  est un isomorphisme compatible à l'action de  $\mathcal{O}_F$ ,
- $\eta_c : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(1)$
- l'accouplement  $(\cdot, \cdot) : X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \times X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \rightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(1)$  associé à la polarisation de  $X^{\text{univ}}$  est tel que

$$\eta_c \circ \langle \bullet, \bullet \rangle = (\eta(\bullet), \eta(\bullet)).$$

Munissons  $\mathcal{N}_m$  de l'action de  $G(\mathbb{Z}_p)$  en posant  $g \cdot (\eta, \eta_c) = (\eta \circ g, c(g)\eta_c)$ . Alors, si  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  est un sous-groupe ouvert on a

$$\check{\mathcal{M}}_K = \mathcal{N}_m/K$$

pour un  $m$  tel que  $K \subset \ker(G(\mathbb{Z}_p) \rightarrow G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}))$ .

Voici une formulation plus savante de la proposition précédente. Au groupe étale fini  $X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}}$  muni de son action de  $\mathcal{O}_F$  et de l'accouplement

$$X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \times X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}} \rightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(1)$$

donné par la polarisation est associé un  $G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ -torseur étale  $\mathcal{E}$ . Si  $c : G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ , le poussé en avant de ce tosseur  $c_*\mathcal{E}$  est le  $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ -torseur associé à  $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(1)$  c'est à dire  $\underline{\text{Isom}}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(1))$ . Alors, une structure de niveau  $\ker(G(\mathbb{Z}_p) \rightarrow G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}))$  n'est rien d'autre qu'une trivialisaton de ce tosseur. Par application de  $c_*$ , cette trivialisaton de  $\mathcal{E}$  induit une trivialisaton du tosseur associé à  $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(1)$  c'est à dire une structure de niveau  $1 + p^m\mathbb{Z}_p$  sur  $\mathbb{Z}_p(1)$  qui est celle notée  $\eta_c$ .

## 2.4.2 Le cas symplectique

Soient  $(F, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$  une donnée de type P.E.L non ramifiée simple de type symplectique. On reprend les notations des sections 2.1.3 et 2.1.4. Rappelons qu'on note  $\Lambda_0$  un réseau autodual dans  $V$ . On note encore  $G = \text{Gsp}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  pour le modèle entier de  $G = \text{Gsp}_F(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  défini par ce réseau. On a donc  $G(\mathbb{Z}_p) = G(\mathbb{Q}_p) \cap \text{Aut}(\Lambda_0)$ . On note  $(\check{\mathcal{M}}_K)_{K \subset G(\mathbb{Z}_p)}$  la tour d'espaces rigides associée. Le corps reflex associé est  $E = \mathbb{Q}_p$ .

Dans le cas symplectique la définition du morphisme déterminant est particulièrement simple car le cocentre de  $G$  l'est. Plus précisément, comme dans le cas E.L. on définit

$$D = G/G^{\text{der}} = \mathbb{G}_m,$$

la projection  $G \rightarrow D$  étant donnée par le facteur de similitude

$$c : G \longrightarrow \mathbb{G}_m.$$

Le morphisme

$$\begin{aligned} \det_F : G &\longrightarrow \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \\ g &\longmapsto \det_F(g; V) \end{aligned}$$

est donné en fonction du facteur de similitude par

$$\det_F = c^{\frac{n}{2}}.$$

Rappelons le lemme suivant.

**Lemme 2.4.2.1.** *La hauteur de la quasi-isogénie universelle  $\rho$  sur  $\check{\mathcal{M}}$  est divisible par  $\frac{nd}{2}$ . Plus précisément, si  $S$  est connexe,  $(X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(S)$  et dans le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{\bar{S}} & \xrightarrow{\rho} & X_{\bar{S}} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda' \\ \mathbb{X}_{\bar{S}}^{\vee} & \xleftarrow{\rho^{\vee}} & X_{\bar{S}}^{\vee} \end{array}$$

on a  $\lambda' = p^i \cdot \rho^{\vee-1} \circ \lambda \circ \rho^{-1}$  alors

$$\text{ht} \rho = \frac{nd}{2} i.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \text{ht}(\lambda') &= \text{ht}(p^i \cdot \rho^{\vee-1} \circ \lambda \circ \rho^{-1}) \\ &= \text{ht}(p^i) + \text{ht}(\rho^{\vee-1}) + \text{ht}(\lambda) + \text{ht}(\rho^{-1}) \\ &= ndi - \text{ht} \rho + \text{ht}(\lambda) - \text{ht}(\rho) \end{aligned}$$

Comme  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont les isomorphismes, d'où le résultat. □

On a dans la situation symplectique  $\Delta = \mathbb{Z}$  et

$$\begin{aligned} \varkappa : \check{\mathcal{M}} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (X, \lambda, \rho) &\longmapsto -\frac{2}{nd} \text{ht} \rho \end{aligned}$$

qui d'après le lemme 2.4.2.1 s'interprète en termes de polarisations.

Le morphisme  $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$  définit un morphisme  $c : J \rightarrow \mathbb{G}_m$  et alors pour  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ ,

$$\omega_J(g) = v_p(c(g)).$$

**Lemme 2.4.2.2.** *Le morphisme de groupes  $c : J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est surjectif.*

*Démonstration.* Le groupe  $J$  est une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$ , le centralisateur du morphisme des pentes. Un tel sous-groupe de Levi est donné par le scindage d'un drapeau isotrope dans  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Plus précisément, on peut écrire  $V$  comme somme directe de sous- $F$ -espaces vectoriels

$$V = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E \oplus (W_r \oplus W_{r-1} \cdots \oplus W_1)$$

avec

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)^\perp = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E$$

et pour  $1 \leq i < r$ ,

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_i)^\perp = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E \oplus (W_r \oplus \cdots \oplus W_{i+1}).$$

L'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E$  est non dégénéré et pour  $1 \leq i \leq r$ , il induit un accouplement parfait  $V_i \times W_i \rightarrow \mathbb{Q}_p$ . Si  $1 \leq i \leq r$  et  $g \in \text{GL}(V_i)$  on note  ${}^t g \in \text{GL}(W_i)$  l'adjoint de  $g$  relativement à cet accouplement. Alors,

$$\begin{aligned} M = \prod_{i=1}^r \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}(V_i) \times \text{Gsp}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) &\hookrightarrow \text{Gsp}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ (g_1, \dots, g_r, h) &\longmapsto g_1 \oplus \cdots \oplus g_r \oplus h \oplus c(h) {}^t g_r^{-1} \oplus \cdots \oplus c(h) {}^t g_1^{-1}. \end{aligned}$$

où  $c(h) \in \mathbb{G}_m$  désigne le facteur de similitude de  $h$  et si  $E = 0$  on note  $\text{Gsp}(E, \langle \dots \rangle) = \mathbb{G}_m$ .

Il résulte de cette description de  $M$  que  $M^{\text{der}}$  est simplement connexe. Le groupe algébrique  $J^{\text{der}}$  l'est donc également. D'après Kneser, cela implique que le morphisme

$$J(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow (J/J^{\text{der}})(\mathbb{Q}_p)$$

est surjectif. Mais le morphisme  $c : J \rightarrow \mathbb{G}_m$  se factorise en

$$J \longrightarrow J/J^{\text{der}} = M/M^{\text{der}} \longrightarrow G/G^{\text{der}} = \mathbb{G}_m.$$

Il suffit alors de constater sur la formule donnée précédemment pour  $M$  que le morphisme

$$M(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{c} \mathbb{Q}_p^\times$$

est surjectif. □

Puisque pour  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$  on a  $\varkappa(g.x) = \omega_J(g) + \varkappa(x)$  on en déduit la proposition suivante.

**Proposition 2.4.2.1.** *L'application  $\varkappa : \check{M} \rightarrow \mathbb{Z}$  est surjective.*

Voici maintenant l'analogie du théorème 2.3.4.2. Sa démonstration est beaucoup plus simple que celle du théorème 2.3.4.2. De plus nous n'en n'aurons pas besoin dans la suite pour définir le morphisme vers l'espace de Rapoport-Zink associé au cocentre puisque celui-ci est donné par  $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$  et non  $\det : G \rightarrow \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$ . Nous l'avons tout de même inclu.

**Théorème 2.4.2.1.** *Pour  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ , soit  $\mathcal{T}_K$  le  $\mathcal{O}_F$ -système local sur  $\check{M}_K$  qui est le module de Tate de la déformation universelle. Il y a pour tout  $K$  un isomorphisme*

$$u_K : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_F(\frac{n}{2}).$$

Ils vérifient :

1. Si  $K' \subset K$  via  $\pi_{K',K} : \check{M}_{K'} \rightarrow \check{M}_K$ ,

$$\pi_{K',K}^* u_K = u_{K'}.$$

2. Si  $g \in J(\mathbb{Q})$ , qui définit l'automorphisme  $g : \check{M}_K \xrightarrow{\sim} \check{M}_K$ , via l'identification  $g^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_K$  on a

$$g^* u_K = (p^{-v_p(\det g)} \det(g)) u_K.$$

3. Si  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  est tel que  $g^{-1}Kg \subset G(\mathbb{Z}_p)$  et  $\Lambda_0 \subset g.\Lambda_0$ , si  $g : \check{M}_K \xrightarrow{\sim} \check{M}_{g^{-1}Kg}$ , via le morphisme canonique

$$\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg}$$

le composé

$$\det \mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \det \mathcal{T}_{g^{-1}Kg} \xrightarrow{g^* u_{g^{-1}Kg}} g^* \mathcal{O}_F(\frac{n}{2}) = \mathcal{O}_F(\frac{n}{2})$$

est égal à

$$p^{-v_p(\det g)} u_K.$$

*Démonstration.* Soit  $m \geq 1$ . On a deux morphismes de groupes

$$\begin{aligned} \det_m : G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) &\longrightarrow (\mathcal{O}_F/p^m\mathcal{O}_F)^\times \\ c_m : G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) &\longrightarrow (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times. \end{aligned}$$

Au groupe étale fini polarisé muni de son action de  $\mathcal{O}_F$ ,  $(X^{\text{univ}}[p^m]^{\text{rig}}, \lambda')$  est associé un  $G(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ -torseur étale  $\mathcal{E}_m$  (cf. section 2.4.1). On doit calculer son poussé en avant,  $\det_{m*} \mathcal{E}_m$ . Puisque

$$\det_m = i \circ c_m^{n/2},$$

où  $i : (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow (\mathcal{O}_F/p^m\mathcal{O}_F)^\times$ , on a

$$\det_{m*}\mathcal{E}_m = i_*(c_{m*}\mathcal{E}_m)^{n/2}.$$

Mais (cf. toujours la section 2.4.1),

$$c_{m*}\mathcal{E}_m = \underline{\text{Isom}}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(1)).$$

Les diverses égalités précédentes sont compatibles lorsque  $m$  varie. Le résultat s'en déduit facilement. En particulier, on retrace facilement les actions de  $J(\mathbb{Q}_p)$  et  $G(\mathbb{Q}_p)$  (il faut utiliser le lemme 2.4.1.2 pour l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$ ).  $\square$

Voici maintenant le morphisme « déterminant » que l'on devrait plutôt appeler morphisme facteur de similitude dans ce cas là. Soit  $(D, c \circ \tilde{\mu})$  comme donnée de Rapoport-Zink torique (cf. 2.2). On a  $D = \mathbb{G}_m$  et  $c \circ \tilde{\mu} : z \mapsto z^{-1}$  car  $c \circ \mu : z \mapsto z$  (cf. def. 2.1.3.1). Pour  $K \subset \mathbb{Z}_p^\times$  un sous-groupe ouvert, l'espace de Rapoport-Zink torique  $\check{\mathcal{M}}(D, c \circ \tilde{\mu})$  classe les structures de niveau  $K$  sur  $\mathbb{Q}_p(1)$ .

**Théorème 2.4.2.2.** *Soit  $(\check{\mathcal{M}}(D, c \circ \tilde{\mu})_K)_K$  la tour de Rapoport-Zink associé à la donnée torique  $(D, c \circ \tilde{\mu})$ . Il existe un morphisme  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant surjectif de tours de  $\check{E}$ -espaces rigides*

$$(\check{\mathcal{M}}_K)_K \longrightarrow (\check{\mathcal{M}}(D, c \circ \tilde{\mu})_{c(K)})_K$$

où l'équivariance est relative au morphisme  $(c, c) : J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ . Ce morphisme est compatible aux applications localement constantes  $\varkappa : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \Delta$  et  $\varkappa_{D, c \circ \tilde{\mu}} : \check{\mathcal{M}}(D, c \circ \tilde{\mu})_{c(K)} \rightarrow \Delta$ , et est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

*Démonstration.* D'après la proposition 2.4.1.1, le faisceau  $\mathbb{Z}_p(1)$  sur  $\check{\mathcal{M}}_K$  est muni d'une structure de niveau  $c(K)$  associée à la polarisation,

$$\bar{\eta}_c : \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1) [c(K)].$$

On définit alors une structure de niveau  $c(K)$  sur  $\mathbb{Q}_p(1)$

$$p^{-\varkappa}\bar{\eta}_c : \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p(1) [c(K)]$$

et donc un morphisme  $\check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \check{\mathcal{M}}(D, c \circ \tilde{\mu})_{c(K)}$ . On vérifie que ce morphisme est compatible aux actions de  $J(\mathbb{Q}_p)$  et  $G(\mathbb{Q}_p)$  (pour l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  il faut utiliser le lemme 2.4.1.2) et à la donnée de descente de Rapoport-Zink.  $\square$

### 2.4.3 Le cas unitaire

Soient  $(F, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$  une donnée de type P.E.L non ramifiée simple unitaire (2.1.3) et  $\check{\mathcal{M}}$  l'espace de Rapoport-Zink associé.

Comme précédemment on définit

$$D = G/G^{der}$$

le cocentre et

$$\det : G \longrightarrow D$$

le morphisme quotient. On a alors

$$D = \{(x, c) \in \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \mid N_{F/F_0}(x) = c^n\}$$

où  $N_{F/F_0} : \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}\mathbb{G}_m \rightarrow \text{Res}_{F_0/\mathbb{Q}_p}\mathbb{G}_m$  et  $F_0$  est l'ensemble des points fixes de  $F$  sous l'involution  $*$ . Via cette identification

$$\begin{aligned} \det : G &\longrightarrow D \\ g &\longmapsto (\det_F(g; V), c(g)). \end{aligned}$$

Le groupe  $X_{\mathbb{Q}_p}^*(G)$  est engendré par  $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$  qui fournit une identification

$$\Delta = \mathbb{Z}.$$

D'après le lemme 2.4.2.1, la hauteur de la quasi-isogénie universelle est divisible par  $\frac{nd}{2}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \varkappa : \check{\mathcal{M}} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (X, \lambda', \rho) &\longmapsto -\frac{2}{nd} \text{ht}\rho. \end{aligned}$$

Le morphisme  $c : G \rightarrow \mathbb{G}_m$  induit  $c : J \rightarrow \mathbb{G}_m$  et pour  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$

$$\omega_J(g) = v_p(c(g)).$$

Calculons l'image de l'application  $\varkappa$ .

**Proposition 2.4.3.1.** *Si  $n$  est impair l'application  $\varkappa$  est à valeurs dans  $2\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Soit  $x = (X, \lambda', \rho) \in \check{\mathcal{M}}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ . Par définition,

$$\varkappa(x) = -\frac{2}{nd} \text{ht}\rho \in \mathbb{Z}.$$

D'après lemme 2.3.1.1,  $\frac{1}{d} \text{ht}\rho \in \mathbb{Z}$ . On en déduit que  $\varkappa(x) \in 2\mathbb{Z}$  lorsque  $n$  est impair. □

Voici maintenant l'analogie du lemme 2.4.2.2.

**Lemme 2.4.3.1.** *Le morphisme de groupes  $c : J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est surjectif.*

*Démonstration.* On reprend le raisonnement du lemme 2.4.2.2. Le groupe algébrique  $J$  est forme intérieure du sous-groupe de Levi  $M$ . Précisons la structure de  $M$ . On peut écrire  $V$  comme somme directe de sous- $F$ -espaces vectoriels

$$V = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E \oplus (W_r \oplus W_{r-1} \cdots \oplus W_1)$$

avec

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r)^\perp = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E$$

et pour  $1 \leq i < r$ ,

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_i)^\perp = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \oplus E \oplus (W_r \oplus \cdots \oplus W_{i+1}).$$

L'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E$  est non dégénéré et pour  $1 \leq i \leq r$ , il induit un accouplement parfait  $V_i \times W_i \rightarrow \mathbb{Q}_p$ . Si  $1 \leq i \leq r$  et  $g \in \text{GL}(V_i)$  on note  $g^* \in \text{GL}(W_i)$  l'adjoint de  $g$  relativement à cet accouplement. Alors,

$$\begin{aligned} M = \prod_{i=1}^r \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}(V_i) \times \text{GU}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) &\hookrightarrow \text{GU}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ (g_1, \dots, g_r, h) &\longmapsto g_1 \oplus \cdots \oplus g_r \oplus h \oplus c(h)(g_r^*)^{-1} \oplus \cdots \oplus c(h)(g_1^*)^{-1}. \end{aligned}$$

où  $c(h) \in \mathbb{G}_m$  désigne le facteur de similitude de  $h$  et si  $E = 0$  on note  $\text{GU}(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \mathbb{G}_m$ .

Notons  $\dim_F V_i = m_i$  et  $\dim_F E = s$ . On a alors

$$2 \sum_{i=1}^r m_i + s = n.$$

Si  $E = 0$ ,  $n$  est pair et le morphisme de groupes

$$(M/M^{\text{der}})(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_p)$$

s'identifie alors à

$$\begin{aligned} (F^\times)^r \times \mathbb{Q}_p^\times &\longrightarrow \{(x, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \mid N_{F/F_0}(x) = c^n\} \\ ((y_1, \dots, y_r), c) &\longmapsto (y_1/y_1^* \dots y_r/y_r^* c^{n/2}, c). \end{aligned}$$

Il est surjectif. En effet, si  $x \in F^\times$  et  $c \in \mathbb{Q}_p^\times$  sont tels que  $N_{F/F_0}(x) = c^n$  alors

$$N_{F/F_0}(xc^{-\frac{n}{2}}) = 1$$

et d'après le théorème de Hilbert 90 il existe  $y \in F^\times$  tel que

$$y/y^* = xc^{-\frac{n}{2}}.$$

Si  $E \neq 0$ , le morphisme  $(M/M^{der})(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  s'identifie à

$$\begin{aligned} (F^\times)^r \times \{(z, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \mid N_{F/F_0}(z) = c^s\} &\longrightarrow \{(x, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \mid N_{F/F_0}(x) = c^n\} \\ ((y_1, \dots, y_r), (z, c)) &\longmapsto (y_1/y_1^* \dots y_r/y_r^* . z . c^{m_1 + \dots + m_r}, c). \end{aligned}$$

Si  $s = n$  il est évidemment surjectif. Supposons donc que ce n'est pas le cas et que donc  $r \neq 0$ . Si  $(x, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$  sont tels que  $N_{F/F_0}(x) = c^n$  alors

$$N_{F/F_0}(xc^{-(m_1 + \dots + m_r)}) = c^s.$$

On conclut que  $(M/M^{der})(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est surjectif.

Puisque  $J^{der}$  est simplement connexe, d'après Kneser,  $J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow (J/J^{der})(\mathbb{Q}_p)$  est surjectif. On conclut donc au final que le composé

$$J(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow (J/J^{der})(\mathbb{Q}_p) = (M/M^{der})(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_p)$$

est surjectif. □

L'image de l'application naturelle

$$\begin{aligned} D(\mathbb{Q}_p) &\longrightarrow \Delta = \mathbb{Z} \\ (x, c) &\longmapsto v(c) \end{aligned}$$

est  $\mathbb{Z}$  si  $n$  est pair et  $2\mathbb{Z}$  si  $n$  est impair. La proposition 2.4.3.1 et le lemme 2.4.3.1 entraînent donc la proposition suivante.

**Proposition 2.4.3.2.** *L'image de l'application*

$$\varkappa : \check{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est  $\mathbb{Z}$  si  $n$  est pair et  $2\mathbb{Z}$  si  $n$  est impair.

Revenons au morphisme déterminant. On a

$$X_*(D) = \left\{ \sum_{\tau \in \check{I}_F} a_\tau[\tau] \mid a_\tau \in \mathbb{Z} \text{ et } \exists i \in \mathbb{Z} \forall \tau, a_\tau + a_{\tau^*} = in \right\}.$$

Soient  $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \check{I}_F}$  les signatures associées à la donnée de Rapoport-Zink (cf. 2.1.3). On a  $p_\tau + q_\tau = n$  et  $(p_{\tau^*}, q_{\tau^*}) = (q_\tau, p_\tau)$ . Alors,

$$\det \tilde{\mu} = - \sum_{\tau \in \check{I}_F} p_\tau[\tau].$$

Soit

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$$

le  $\mathcal{O}_F$ -système local sur  $\mathrm{Sp}(\check{E})$  de la définition 2.3.2.1. Rappelons qu'il a pour fibre géométrique sur  $\check{E}$  le  $\mathcal{O}_F$ -module  $\mathcal{O}_F$  muni de l'action de Galois donnée par

$$\prod_{\tau \in \check{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau}.$$

Nous adpotons la définition suivante.

**Définition 2.4.3.1.** Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur un espace rigide.

1. On note  $\mathcal{F}^{(*)}$  le  $\mathcal{O}_F$ -système local  $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_F, *} \mathcal{O}_F$ .
2. On note

$$N_{F/F_0} \mathcal{F}$$

le  $\mathcal{O}_{F_0}$ -système local étale obtenu par descente des coefficients de  $\mathcal{O}_F$  à  $\mathcal{O}_{F_0}$  du  $\mathcal{O}_F$ -système local

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F}^{(*)}$$

muni de sa donnée de descente canonique

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F}^{(*)} &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F}^{(*)})^{(*)} = \mathcal{F}^{(*)} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{F} \\ x \otimes y &\longmapsto y \otimes x. \end{aligned}$$

Revenons au système local  $\mathcal{L}_{\bar{\mu}}$ . Il y a une identification canonique

$$N_{F/F_0} \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = \mathcal{O}_{F_0}(n)$$

car

$$\begin{aligned} \prod_{\tau \in \bar{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau} \cdot * \circ \prod_{\tau \in \bar{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau} &= \prod_{\tau \in \bar{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau} \prod_{\tau \in \bar{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau} \\ &= \prod_{\tau \in \bar{I}_F} \chi_{LT, \tau}^{p_\tau + p_\tau} \\ &= \prod_{\tau \in \bar{I}_F} \chi_{LT, \tau}^n \\ &= \chi_{cycl}^n. \end{aligned}$$

**Définition 2.4.3.2.** On note  $(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_{K \subset D(\mathbb{Q}_p)}$  la tour de  $\check{E}$ -espaces rigides définie par

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K = \prod_{\text{Im } \varkappa} Y_m/K \text{ pour } m \gg 0$$

où  $Y_m = \{(\eta, \eta_c)\}$  avec

- $\eta \in \underline{\text{Isom}}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F, \mathcal{L}_{\bar{\mu}} \otimes \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})$ ,
- $\eta_c \in \underline{\text{Isom}}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1))$ ,
- via l'identification  $N_{F/F_0} \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = \mathcal{O}_{F_0}(n)$  on a

$$N_{F/F_0} \eta = \eta_c^{\otimes n} \otimes \text{Id}$$

où

$$\eta_c^{\otimes n} \in \underline{\text{Isom}}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(n))$$

et

$$\eta_c^{\otimes n} \otimes \text{Id} \in \underline{\text{Isom}}_{\mathcal{O}_{F_0}}(\mathcal{O}_{F_0}/p^m \mathcal{O}_{F_0}, \mathcal{O}_{F_0}/p^m \mathcal{O}_{F_0}(n)),$$

- $(x, c) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$  vérifiant  $(x, c) \in K$  agit sur  $Y_m$  via  $(\eta, \eta_c) \cdot (x, c) = (x\eta, c\eta_c)$ .

On munit  $\det(\check{\mathcal{M}})_K$  de l'action de  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$  suivante. Pour  $((x, c), (x', c')) \in (F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)^2$  vérifiant  $N_{F/F_0}(x) = c^n$  et  $N_{F/F_0}(x') = c'^n$ , si  $(\eta, \eta_c) \in \det(\check{\mathcal{M}})_K$  est dans la composante indexée par  $\delta \in \text{Im } \varkappa \subset \mathbb{Z}$  on pose

$$((x, c), (x', c')) \cdot (\eta, \eta_c) = (p^{-v_p(x) - v_p(x')} x x' \cdot \eta, p^{-v_p(c) - v_p(c')} c c' \cdot \eta_c)$$

dans la composante indexée par  $\delta + v_p(c) + v_p(c')$ .

Enfin on définit l'application  $\varkappa : \det(\check{\mathcal{M}})_K \rightarrow \Delta$  qui sur la composante indexée par  $\delta \in \mathbb{Z}$  vaut  $\delta$ . Il existe aussi une donnée de descente sur  $\det(\check{\mathcal{M}})_K$  comme dans la section 2.3.2.2.

Voici maintenant l'analogue de la proposition 2.3.3.1.

**Proposition 2.4.3.3.** *Soit  $(\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu}))_K$  la tour d'espaces de Rapoport-Zink associée à la donnée torique  $(D, \det \tilde{\mu})$  et  $\varkappa_{D, \tilde{\mu}} : \check{\mathcal{M}}(D, \tilde{\mu}) \rightarrow \Delta$  (cf. section 2.2). Il y a alors un isomorphisme  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours*

$$(\det(\check{\mathcal{M}})_K)_K \xrightarrow{\sim} (\check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K)_K$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \det(\check{\mathcal{M}})_K & \longrightarrow & \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_K \\ & \searrow \varkappa & \swarrow \varkappa_{D, \tilde{\mu}} \\ & \Delta & \end{array}$$

De plus, cet isomorphisme est compatible à la donnée de descente.

*Démonstration.* Fixons un isomorphisme  $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p(1)$ . On identifie donc la fibre de  $\mathbb{Z}_p(1)$  sur le point géométrique donné par  $\bar{E}$  à  $\mathbb{Z}_p$  muni de l'action donnée par le caractère cyclotomique.

On a

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K(\bar{E}) = \coprod_{\text{Im } \varkappa} \{(\eta, \eta_c) \mid N_{F/F_0} \eta = \eta_c \otimes \text{Id}\} / K$$

où

$$\begin{aligned} \eta &\in \text{Isom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F, \mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F) = (\mathcal{O}_F/p^m \mathcal{O}_F)^\times, \\ \eta_c &\in \text{Isom}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}(1)) = (\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^\times \end{aligned}$$

vérifient

$$N_{F/F_0}(\eta) = \eta_c^n.$$

Un tel couple  $(\eta, \eta_c)$  définit donc un élément  $(\eta, \eta_c) \in D(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})$  (le tore  $D$  étant non-ramifiée on note encore  $D$  pour son modèle entier canonique sur  $\mathbb{Z}_p$ ). La classe de  $(\eta, \eta_c)$  modulo  $K$  définit un élément

$$(\eta, \eta_c) \cdot K \in D(\mathbb{Z}_p) / K.$$

Si  $(\eta, \eta_c) \cdot K$  est dans la composante de  $\det(\check{\mathcal{M}})_K(\bar{E})$  indexée par  $\delta \in \text{Im } \varkappa$ , en translatant par  $(p^{\frac{n\delta}{2}}, p^\delta) \in D(\mathbb{Q}_p)$  (ce qui a un sens grâce à la proposition 2.4.3.2) on lui associe l'élément

$$(p^{\frac{n\delta}{2}}, p^\delta)(\eta, \eta_c) \cdot K \in D(\mathbb{Q}_p) / K.$$

Cela définit une bijection

$$\det(\check{\mathcal{M}})_K(\bar{E}) \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})(\bar{E})$$

dont on vérifie comme dans la proposition 2.3.3.1 qu'elle est compatible à l'action de  $I_E$  et de  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{T}_K$  le  $\mathcal{O}_F$ -système local étale sur  $\check{\mathcal{M}}_K$  qui est le module de Tate de la déformation universelle. La polarisation universelle normalisée comme dans la section 2.4.1 munie  $\mathcal{T}_K$  d'un produit hermitien

$$\mathcal{T}_K \times \mathcal{T}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

qui induit un isomorphisme

$$\mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_K^{\vee(*)}(1).$$

Appliquant  $\det_{\mathcal{O}_F}$  à cet isomorphisme on obtient un isomorphisme de systèmes locaux de rang 1

$$\det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \simeq (\det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K)^{\vee(*)}(n)$$

soit encore un isomorphisme

$$N_{F/F_0} \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{F_0}(n).$$

Venons en au théorème principal analogue du théorème 2.3.4.2. On note encore  $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$  pour le tiré en arrière de  $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$  sur  $\check{\mathcal{M}}_K$ .

**Théorème 2.4.3.1.** *Pour tout  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ , il existe un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -systèmes locaux étales sur  $\check{\mathcal{M}}_K$*

$$u_K : \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

vérifiant :

1. Le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} N_{F/F_0} \det_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}_K & \xrightarrow[\sim]{N_{F/F_0} u_K} & N_{F/F_0} \mathcal{L}_{\bar{\mu}} \\ & \searrow \simeq & \swarrow \simeq \\ & \mathcal{O}_{F_0}(n) & \end{array}$$

où la flèche diagonale de gauche est induite par la polarisation de la déformation universelle et celle de droite résulte de l'égalité de caractères  $N_{F/F_0} \circ \prod_{\tau} \chi_{LT, \tau}^{p_{\tau}} = \chi_{cycl}^n$ .

2. Si  $K' \subset K$ , via le morphisme de changement de niveau  $\pi_{K', K} : \check{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$  et l'identification canonique  $\pi_{K', K}^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_{K'}$  on a

$$\pi_{K', K}^* u_K = u_{K'}.$$

3. Si  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ , qui définit l'automorphisme  $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_K$ , via l'identification canonique  $g^* \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_K$  l'isomorphisme

$$\det \mathcal{T}_K = g^* \det \mathcal{T}_K \xrightarrow{g^* u_K} g^* f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à

$$(p^{-v_p(\det g)} \det_F(g)) u_K.$$

4. Si  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  est tel que  $g^{-1}Kg \subset \text{Aut}(\Lambda_0)$  et  $\Lambda_0 \subset g \cdot \Lambda_0$ , si  $g : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$ , via le morphisme canonique

$$\mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \mathcal{T}_{g^{-1}Kg},$$

le morphisme composé

$$\det \mathcal{T}_K \longrightarrow g^* \det \mathcal{T}_{g^{-1}Kg} \xrightarrow{g^* u_{g^{-1}Kg}} g^* f_{g^{-1}Kg}^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}} = f_K^* \mathcal{L}_{\bar{\mu}}$$

est égal à

$$p^{-v_p(\det_F g)} u_K.$$

*Démonstration.* Après oubli du produit symplectique, la donnée de Rapoport-Zink de type PEL  $(F, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$  dont on est parti fournit une donnée de type EL  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$ . Il lui correspond un espace de Rapoport-Zink de type EL. Le morphisme oubli de la polarisation définit un morphisme de l'espace de type PEL vers l'espace de type EL. Ce morphisme est équivariant via les morphismes naturels des groupes  $G$  et  $J$  associés à la donnée de type PEL vers ceux associés à la donnée de type EL. Tirant en arrière les isomorphismes du théorème 2.3.4.2 de la tour de Rapoport-Zink de type EL vers celle de type PEL on obtient la construction des  $(u_K)_K$  vérifiant les propriétés (2), (3) et (4). Il reste à vérifier la propriété (1) faisant intervenir la polarisation. En reprenant la preuve du théorème 2.3.4.2 dans la section 2.3.7, on vérifie que cette propriété est une conséquence de la compatibilité de l'isomorphisme de périodes du théorème 1.3.1.1 à la dualité de Cartier.  $\square$

Comme dans le cas EL on en déduit le théorème suivant.

**Théorème 2.4.3.2.** *Via le morphisme  $(\det, \det) : J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p)$  il existe un morphisme  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de tours d'espaces rigides*

$$(\check{\mathcal{M}}_K)_K \longrightarrow (\det(\check{\mathcal{M}})_K)_K$$

où  $K$  parcourt les sous-groupes ouverts de  $G(\mathbb{Z}_p)$ . Ce morphisme composé avec l'application canonique  $\det(\check{\mathcal{M}})_{\det K} \rightarrow \Delta$  coïncide avec l'application  $\varkappa : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \Delta$ . De plus, ce morphisme est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink.

## 2.5 Interprétation en termes de systèmes locaux sur l'espace des périodes

### 2.5.1 Rappels sur le morphisme de périodes et les $\mathbb{Q}_p$ -systèmes locaux de Jong

Considérons une donnée de Rapoport-Zink locale non-ramifiée simple de type EL ou PEL. Soit  $G$  le groupe réductif associé. Rappelons qu'on a fixé une classe de conjugaison de cocaractère

$$\tilde{\mu} : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}}_p} \longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}.$$

On dispose également d'une classe de  $\sigma$ -conjugaison  $\bar{b} \in B(G)$  et  $J(\mathbb{Q}_p)$  est le  $\sigma$ -centralisateur de  $b$ . Enfin on a fixé un réseau (autodual dans le cas PEL) dans l'espace vectoriel  $V$  ce qui définit un modèle entier réductif de  $G$  que l'on note de la même façon. En particulier,  $G(\mathbb{Z}_p)$  est un sous-groupe compact de  $G(\mathbb{Q}_p)$ .

Dans cette section on considère la tour d'espaces de Rapoport-Zink non plus comme une tour d'espaces rigides au sens de Tate mais d'espaces analytiques au sens de Berkovich ([Ber90], [Ber93]). Ainsi, si  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  désigne la fibre générique de  $\check{\mathcal{M}}$  comme  $\check{E}$ -espace analytique de Berkovich ([Ber96]) on note

$$(\check{\mathcal{M}}_K)_{K \subset G(\mathbb{Z}_p)} \longrightarrow \check{\mathcal{M}}^{an}$$

la tour de revêtements de l'espace analytique  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . Soit  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  l'espace des périodes de Rapoport-Zink ([RZ96] chapitre 1). Il s'agit de l'espace homogène des sous-groupes paraboliques de type  $\tilde{\mu}$  de  $G_{\check{E}}$ . Plus précisément, on voit  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  comme  $\check{E}$ -espace analytique de Berkovich i.e. c'est l'analytifié de la variété algébrique sur  $\check{E}$  qui est l'espace homogène précédent. Rappelons que  $L = \check{E}$  (2.1.4.1) et que

$$J(\mathbb{Q}_p) = \{g \in G(L) \mid gb\sigma = b\sigma g \text{ dans } G(L) \rtimes \langle \sigma \rangle\}.$$

On a donc  $J(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\check{E})$  qui agit donc sur  $\check{\mathcal{F}}^{an}$ .

Rapoport et Zink ont construit dans le chapitre 5 de [RZ96] un morphisme de périodes

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}^{an} \longrightarrow \check{\mathcal{F}}^{an}.$$

Celui-ci généralise le morphisme de périodes de Gross-Hopkins pour les espaces de Lubin-Tate ([GH94]). C'est un morphisme  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant. Il est étale au sens des espaces rigides ([RZ96] prop. 5.17) et même étale comme morphisme d'espaces analytiques de Berkovich ([Far04] lemme 2.3.24). Il s'en suit que l'image de  $\check{\pi}$  est un ouvert de  $\check{\mathcal{F}}^{an}$ .

**Définition 2.5.1.1.** *On note  $\check{\mathcal{F}}^a$  l'ouvert de  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  qui est l'image du morphisme de périodes. On l'appelle le lieu admissible.*

C'est un ouvert  $J(\mathbb{Q}_p)$ -invariant dans  $\check{\mathcal{F}}^{an}$ . Dire que le morphisme de périodes est étale au sens de Berkovich signifie que tout  $x \in \check{\mathcal{M}}^{an}$  possède un voisinage ouvert  $U$  tel que  $\check{\pi} : U \rightarrow \check{\pi}(U)$  soit étale fini. Dans [dJ95b] de Jong définit une notion de revêtements étales d'espaces analytiques de Berkovich et démontre le théorème suivant.

**Théorème 2.5.1.1 (de Jong [dJ95b]).** *Le morphisme de périodes est un revêtement étale au sens de de Jong, c'est à dire tout point de  $\check{\mathcal{F}}^a$  possède un voisinage ouvert  $U$  tel que  $\check{\pi}^{-1}(U)$  soit une union disjointe d'ouverts étales finis sur  $U$ .*

Dans [dJ95b] ce théorème est explicitement démontré dans le cas de l'espace de Lubin-Tate car dans ce cas là on sait d'après Gross et Hopkins ([GH94]) que  $\check{\mathcal{F}}^a$  est l'espace projectif tout entier. Cependant, les résultats de [dJ95b] montrent le théorème plus général tel que cité précédemment. Le morphisme de périodes est invariant sous l'action de  $G(\mathbb{Q}_p)$  au sens où si  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  et  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$

sont tels que  $g^{-1}Kg \subset G(\mathbb{Z}_p)$  alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \check{\mathcal{M}}_K & \xrightarrow[\sim]{g} & \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg} \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \check{\mathcal{M}}^{an} & & \check{\mathcal{M}}^{an} \\
 \searrow \check{\pi} & & \swarrow \check{\pi} \\
 & \check{\mathcal{F}}^a &
 \end{array}$$

De plus, les fibres de  $\check{\pi}$  sont exactement les orbites de Hecke (cf. [RZ96] Prop. 5.37). Le théorème 2.5.1.1 précédent affirme donc en quelque sorte que les correspondances de Hecke agissent « de façon proprement discontinue » sur la tour de Rapoport-Zink.

De Jong définit également une notion de  $\mathbb{Q}_p$ -système local sur les espaces analytiques de Berkovich ([dJ95b] def. 4.1). Nous notons

$$\mathbb{Q}_p\text{-Loc}_X$$

la catégorie des  $\mathbb{Q}_p$ -systèmes locaux sur  $X$ . Si  $\bar{x}$  est un point géométrique de  $X$ , il définit un groupe fondamental que nous notons

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}).$$

Notons

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\pi_1^{dJ}(X, x))$$

la catégorie des représentations continues de ce groupe topologique dans des  $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels de dimension finie. Il y a un foncteur

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}_p\text{-Loc}_X & \longrightarrow & \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\pi_1^{dJ}(X, \bar{x})) \\
 \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\bar{x}}
 \end{array}$$

où la fibre  $\mathcal{E}_{\bar{x}}$  est munie d'une représentation de monodromie de  $\pi_1^{dJ}(X, \bar{x})$ . Lorsque  $X$  est connexe le foncteur précédent induit une équivalence de catégories.

Si on note  $\pi_1(X, \bar{x})$  le groupe profini classifiant les revêtements étales *finis* de  $X$  (qui est noté  $\pi_1^{alg}$  dans [dJ95b]), il existe un morphisme continu

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \bar{x})$$

déduit de ce que tout revêtement étale fini est un revêtement étale au sens de de Jong. Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -système local au sens de la définition 2.1.6 il définit une représentation de monodromie

$$\pi_1(X, \bar{x}) \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_{\bar{x}}).$$

Alors,  $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_p \in \mathbb{Q}_p\text{-Loc}_X$  et sa représentation de monodromie est donnée par le composé

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{F}_{\bar{x}}) \hookrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(\mathcal{F}_{\bar{x}} \otimes \mathbb{Q}_p).$$

Revenons aux espaces de Rapoport-Zink. Soit  $\mathcal{T}$  le  $\mathbb{Z}_p$ -système local sur  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  qui est le module de Tate de la déformation universelle  $X^{\text{univ}}$ . Si  $\bar{x}$  est un point géométrique de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  la représentation de monodromie associée est une représentation

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(X_{\bar{x}}^{\text{univ}})).$$

Soit

$$\mathcal{V} = \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}_p$$

le  $\mathbb{Q}_p$ -système local module de Tate rationnel. Notons  $\mathcal{V}_K$  le tiré en arrière de  $\mathcal{V}$  en niveau  $K$  sur  $\check{\mathcal{M}}_K$  pour  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ . Comme expliqué dans la section 2.1.7, la famille de systèmes locaux

$$(\mathcal{V}_K)_{K \subset G(\mathbb{Z}_p)}$$

forme alors un  $\mathbb{Q}_p$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ . Cela signifie que :

- si  $K' \subset K$  et  $\pi_{K',K} : \check{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$  il existe un isomorphisme

$$\pi_{K',K}^* \mathcal{V}_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{K'},$$

- si  $(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ ,  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  et  $g_2^{-1}Kg_2 \subset G(\mathbb{Z}_p)$ , via  $(g_1, g_2) : \check{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \check{\mathcal{M}}_{g_2^{-1}Kg_2}$  il existe un isomorphisme

$$(g_1, g_2)^* \mathcal{V}_{g_2^{-1}Kg_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_K,$$

- les isomorphismes précédents vérifient les relations de compatibilité et de cocycle naturelles auxquelles on s'attend.

**Définition 2.5.1.2.** *On note*

$$\mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}$$

la catégorie de tels  $\mathbb{Q}_p$ -systèmes locaux  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants sur la tour de Rapoport-Zink. On note

$$\mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}$$

la catégorie des  $\mathbb{Q}_p$ -systèmes locaux  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants sur le lieu admissible.

On a un foncteur naturel :

$$\check{\pi}^* : \mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)} \rightarrow \mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}$$

C'est probable que  $\check{\pi}^*$  est une équivalence de catégories. Par exemple, Fargues a démontré dans [Far08] Prop. IV.11.20 que  $\check{\pi}^*$  induit une équivalence de catégories entre faisceaux sur l'espace des périodes et faisceaux cartésiens sur la tour pour l'espace de Lubin-Tate.

De Jong démontre grâce au théorème 2.5.1.1 que le système local module de Tate rationnel  $(\mathcal{V}_K)_K$  descend en un  $\mathbb{Q}_p$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant  $\mathcal{E}$  sur  $\check{\mathcal{F}}^a$ . En termes de représentations de monodromie, après oubli de l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$ , cela se traduit de la façon suivante. Soit  $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{an}$  un point géométrique et  $\bar{y} = \check{\pi}(\bar{x})$ . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(X_{\bar{x}}^{\mathrm{univ}})) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) & \longrightarrow & & \longrightarrow & \mathrm{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V_p(X_{\bar{y}}^{\mathrm{univ}})) \end{array}$$

où la représentation de monodromie de la ligne du bas définit le  $\mathbb{Q}_p$ -système local  $\mathcal{E}$ . Le fait que le système local module de Tate rationnel descende à  $\check{\mathcal{F}}^a$  se traduit donc en ce que la représentation de monodromie  $\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}_p}(V_p(X_{\bar{x}}^{\mathrm{univ}}))$  composée avec  $\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x})$  descend en une représentation de monodromie du groupe fondamental de de Jong de  $\check{\mathcal{F}}^a$ .

## 2.5.2 Traduction des résultats en termes de systèmes locaux sur l'espace des périodes

**Définition 2.5.2.1.** *Soit  $H$  un groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$ . Un  $H$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  est un tenseur foncteur exact*

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(H) \longrightarrow \mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}.$$

On note  $H\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}$  cette catégorie.

Un  $H$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur  $\check{\mathcal{F}}^a$  est un tenseur foncteur exact

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(H) \longrightarrow \mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}.$$

On note  $H\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}$  cette catégorie.

Le foncteur  $\check{\pi}^*$  induit un foncteur

$$\check{\pi}^* : H\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)} \rightarrow H\text{-}\mathcal{L}oc_{(\check{\mathcal{M}}_K)_K/J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)}.$$

Si  $f : H \rightarrow H'$  est un morphisme de groupes algébriques il induit par composition avec  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H' \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$  un foncteur évident  $f_*$  des  $H$ -systèmes locaux équivariants vers les  $H'$ -systèmes locaux équivariants au sens précédent.

Le système local équivariant module de Tate rationnel  $(\mathcal{V}_K)_K$  sur  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  est un  $G$ -système local. Pour préciser, soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une  $\mathbb{Q}_p$ -représentation de  $G$ . On définit un  $\mathbb{Q}_p$ -système local sur la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  associé à  $\rho$  via le foncteur  $(\mathcal{V}_K)_K$  comme suit : La représentation provient d'une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation algébrique de  $G_{\mathbb{Z}_p}$  qu'on note encore  $\rho : G_{\mathbb{Z}_p} \rightarrow \text{GL}(M)$ , où  $M$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -réseau dans  $V$ . Posons  $K_n := \text{Ker}(G(\mathbb{Z}_p) \rightarrow G(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ . Alors  $\check{\mathcal{M}}_{K_n}$  est un  $G(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ -torseur sur  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . Si on note  $\rho_n : G(\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p) \rightarrow \text{GL}(M/p^nM)$ , le poussé en avant de ce toseur  $(\rho_n)_*\check{\mathcal{M}}_{K_n}$  est un  $\text{GL}(M/p^nM)$ -torseur sur  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . Alors

$$\mathcal{T}_{\rho_n} := (\rho_n)_*\check{\mathcal{M}}_{K_n} \times_{\text{GL}(M/p^nM)} M/p^nM$$

est un faisceau étale de  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -modules sur  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . De plus ils sont compatibles lorsque  $n$  varie. Donc  $(\mathcal{T}_{\rho_n})_{n \geq 1}$  forment un  $\mathbb{Z}_p$ -système local sur  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . Soit

$$(\mathcal{T}_{\rho_n})_n \otimes \mathbb{Q}_p$$

le  $\mathbb{Q}_p$ -système local sur  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  associé à  $(\mathcal{T}_{\rho_n})_{n \geq 1}$ . Alors cela ne dépend pas de réseau  $M$  choisi. La tiré en arrière de  $(\mathcal{T}_{\rho_n})_n \otimes \mathbb{Q}_p$  sur la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  définit un  $\mathbb{Q}_p$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$ . On le définit comme l'image de  $(V, \rho)$  via le foncteur  $(\mathcal{V}_K)_K$ .

D'après de Jong, le système local  $(\mathcal{V}_K)_K$  descend en un  $G$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant  $\mathcal{E}$  sur  $\check{\mathcal{F}}^a$  que l'on note de la même façon :

$$\mathcal{E} \in G\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}.$$

Notons  $D$  le cocentre de  $G$  et  $\det : G \rightarrow D$  le morphisme quotient. On note  $\det \tilde{\mu} \in X_*(D)$ . Rappelons (cf. fin de la section 2.2.4) que  $\tilde{\mu}$  définit un  $D$ -système local

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mu}} \in D\text{-}\mathcal{L}oc_{\text{Sp}(\check{E})}.$$

Les résultats des sections précédentes se traduisent alors de la façon suivante.

**Théorème 2.5.2.1.** *Soit  $\mathcal{E} \in G\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}$  le  $G$ -système local  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant sur le lieu admissible de l'espace des périodes associé à un espace de Rapoport-Zink de type  $EL$  non-ramifié simple ou  $PEL$  non-ramifié simple unitaire ou symplectique. Soit  $f : \check{\mathcal{F}}^a \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$  le morphisme structural. Soit  $\det : G \rightarrow D$  le morphisme de  $G$  vers son cocentre. Il y a alors un isomorphisme*

$$\det_* \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} f^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}} \in D\text{-}\mathcal{L}oc_{\check{\mathcal{F}}^a/J(\mathbb{Q}_p)}$$

où la structure  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante sur  $f^* \mathcal{L}_{\tilde{\mu}}$  est donnée par : l'action de  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$  est la multiplication par  $\det(g) \in D(\mathbb{Q}_p)$ .

### 2.5.3 Application aux représentations de monodromie

Soit  $X$  un espace analytique de Berkovich,  $H$  un groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\mathcal{F}$  un  $H$ -système local sur  $X$  et  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$ . Considérons le composé

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{Q}_p\text{-}\mathcal{L}oc_X \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}))$$

où la flèche de droite est le foncteur fibre en  $\bar{x}$ . Composé avec le foncteur fibre canonique

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\pi_1^{dJ}(X, \bar{x})) \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$$

le foncteur obtenu est un foncteur fibre sur  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$ . Fixons un isomorphisme entre ce foncteur fibre et le foncteur fibre canonique sur  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$ . Cela définit une représentation de monodromie continue

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}) \longrightarrow H(\mathbb{Q}_p).$$

Un choix différent d'isomorphisme entre foncteurs fibres sur  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} H$  fournit une représentation conjuguée par un élément de  $H(\mathbb{Q}_p)$ . Ainsi, à un  $H$ -système local sur  $X$  est associé canoniquement une classe de  $H(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison de morphismes continus

$$\pi_1^{dJ}(X, \bar{x}) \longrightarrow H(\mathbb{Q}_p).$$

Revenons à nos espaces de Rapoport-Zink. Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . Fixons un réseau  $\Lambda_0$  dans l'espace vectoriel  $V$  associé à la donnée de Rapoport-Zink. Dans le cas PEL on suppose ce réseau autodual. On note encore  $G$  pour le modèle entier réductif de  $G$  associé à ce réseau. Il y a associé à ce choix de réseau une classe de  $G(\mathbb{Z}_p)$ -conjugaison de morphisme continu

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p).$$

Le choix d'un élément dans cette classe de  $G(\mathbb{Z}_p)$ -conjugaison consiste à fixer un isomorphisme compatible aux structures additionnelles  $\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\bar{x}}$ . Notons  $\bar{y} = \check{\pi}(\bar{x})$ . Il y a alors un diagramme commutatif à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & G(\mathbb{Z}_p) \\ \check{\pi}_* \downarrow & & & & \downarrow \\ \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) & \longrightarrow & & \longrightarrow & G(\mathbb{Q}_p) \end{array}$$

où le morphisme du bas est la classe de  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison de morphisme associée à  $\mathcal{E} \in G\text{-Loc}_{\check{\mathcal{F}}^a}$  via la discussion précédente au début de cette section. Rappelons (def. 2.2.1.1) que l'on a défini un morphisme

$$\chi_{\det \bar{\mu}} : \text{Gal}(\bar{E} | \check{E}) = I_E \longrightarrow D(\mathbb{Z}_p).$$

Supposons maintenant que  $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}(\bar{E})$ . Si  $f : \check{\mathcal{M}}^{an} \rightarrow \text{Sp}(\check{E})$ , il existe un morphisme

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow \pi_1(\text{Sp}(\check{E}), f(\bar{x})) = I_E.$$

Il y a de même un morphisme

$$\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) \longrightarrow I_E.$$

Les résultats précédents impliquent le théorème suivant.

**Théorème 2.5.3.1.** *Les composés*

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Z}_p)$$

et

$$\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Q}_p)$$

sont donnés via le morphisme canonique vers  $I_E$  par  $\chi_{\det \bar{\mu}} : I_E \rightarrow D(\mathbb{Z}_p)$ .

**Remarque 2.5.3.1.** *Le théorème précédent est plus faible que le théorème 2.5.2.1 car il ne tient pas compte de la structure  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante. Le groupe  $J(\mathbb{Q}_p)$  ne stabilisant pas en général de point  $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{an}(\bar{E})$ , il n'est pas possible de formuler la totalité du théorème 2.5.2.1 en termes de représentations de monodromie. Cela est seulement possible après oubli de l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$ .*

Notons le corollaire suivant qui n'était pas à priori évident.

**Corollaire 2.5.3.1.** *Le morphisme  $\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a, \bar{y}) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$  est à valeurs dans  $G(\mathbb{Q}_p)^1$ , où  $G(\mathbb{Q}_p)^1 := \{x \in G(\mathbb{Q}_p) \mid \det x \in D(\mathbb{Z}_p)\}$ .*

Notons  $\mathbb{C}_p$  le complété de  $\overline{\check{E}}$ . Regardons maintenant les représentations de monodromie géométriques.

**Corollaire 2.5.3.2.**

1. *Le morphisme*

$$\pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{x}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p)$$

*est à valeurs dans  $G^{der}(\mathbb{Z}_p)$ .*

2. *Le morphisme*

$$\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}^a \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{y}) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

*est à valeurs dans  $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ .*



## Chapitre 3

# Morphismes puissances extérieures sur les espaces de Lubin-Tate

Dans ce chapitre, on construit un morphisme puissances extérieures  $\wedge^k$  de la tour de Lubin-Tate  $\check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$  associé à  $\text{GL}_n$  vers une autre tour d'espaces de Rapoport-Zink notée  $\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$ . Ce morphisme généralise le morphisme déterminant construit dans le deuxième chapitre. Comme on l'a vu précédemment, étant donnée une donnée locale non ramifiée simple de type E.L.  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$ , le déterminant  $(F, \det V, \det(\bar{b}), \det \bar{\mu})$  n'est pas forcément une donnée locale non ramifiée simple de type E.L. Cependant, le groupe associé à cette donnée est un tore et on a pu donner une définition ad-hoc des espaces de Rapoport-Zink dans ce cas là comme espaces de dimension 0. Cependant, une telle construction n'existe pas en général si on remplace le déterminant par les puissances extérieures (ou encore plus généralement n'importe quelle représentation linéaire du groupe  $G$ ). En effet, en général, pour la représentation  $\wedge^k$  de  $\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}(V)$ , le cocaractère  $\nu^{-1} \wedge^k \bar{\mu}$  n'est pas minuscule avec  $\nu : z \mapsto z^{-1} \text{Id}$  le cocaractère central. Cependant si  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$  est la donnée associée à l'espace de Lubin-Tate c'est le cas. On peut donc définir d'une façon naturelle l'espace de Rapoport-Zink  $\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$  comme ci-dessous. Du point de vue des poids de Hodge-Tate la raison est que les poids de Hodge-Tate d'un groupe  $p$ -divisible de dimension  $d$  et hauteur  $h$  sont  $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  où 1 apparaît  $d$ -fois et 0  $h - d$ -fois. La puissance extérieure  $k$ -ième du module de Tate d'un tel groupe  $p$ -divisible contient donc des poids supérieures ou égaux à 2 si  $d > 1$ , et n'est donc pas associée à un groupe  $p$ -divisible (même à torsion par un caractère cyclotomique près en fait). Cependant, si  $d = 1$  les poids de la puissance extérieure  $k$ -ième sont 0 et 1. C'est la raison heuristique pour laquelle un tel morphisme d'espaces de modules  $\wedge^k$  doit exister pour les espaces de Lubin-Tate (et c'est effectivement le cas comme nous le montrons).

### 3.1 Énoncé du théorème

Nous nous limitons au cas des espaces de Lubin-Tate associés à une extension non-ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$ . Cette condition n'est certainement pas nécessaire mais simplifie la présentation. Rappelons des notations du chapitre précédent :

- $F$  est une extension finie non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$ . On note  $d = [F : \mathbb{Q}_p]$ .
- $\bar{\mathbb{Q}}_p$  est une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  de corps résiduel noté  $\bar{\mathbb{F}}_p$ .
- $W(\bar{\mathbb{F}}_p)$  est l'anneau de vecteurs de Witt de  $\bar{\mathbb{F}}_p$ .
- $L = W(\bar{\mathbb{F}}_p)[1/p]$  est son corps des fractions.
- $\sigma \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$  désigne le Frobenius.

Le corps  $L$  s'identifie donc canoniquement au complété de l'extension maximale non-ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ . Fixons un plongement  $\tau_0 : F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ .

**Définition 3.1.0.1.** *La donnée de Lubin-Tate de hauteur  $n$  est la donnée locale non ramifiée simple de type E.L.  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$  telle que*

- $V$  est un  $F$ -espace vectorielle de dimension  $n$ . On note  $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}(V)$ .
- $b \in G(L) \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau: F \hookrightarrow L} \text{GL}_n(L)$  après choix d'une base de  $V$ , avec si  $b = (b_\tau)_\tau$

$$b_\tau = \begin{cases} p & \text{si } \tau \neq \tau_0 \\ p \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ p & & & 0 \end{pmatrix}^{-1} & \text{si } \tau = \tau_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}} &\longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} \text{GL}_{n, \overline{\mathbb{Q}_p}} \\ z &\longmapsto \left( \text{diag} \left( \underbrace{z, \dots, z}_{q_\tau}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_\tau} \right)_{\tau: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{avec } (p_\tau, q_\tau) = \begin{cases} (0, n) & \text{si } \tau \neq \tau_0 \\ (1, n-1) & \text{si } \tau = \tau_0 \end{cases}.$$

Le corps réflex local associé à la donnée précédente est  $E = F$  et  $J = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} D_{\frac{1}{n}}^\times$ , où  $D_{\frac{1}{n}}$  est l'algèbre à division sur  $F$  d'invariant  $\frac{1}{n}$ .

Soit  $\check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$  l'espace de Rapoport-Zink associé à la donnée de Lubin-Tate de hauteur  $n$ . Soit  $\mathbb{X}$  un groupe formel sur  $\overline{\mathbb{F}_p}$  de dimension 1 de hauteur  $n$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  telle que l'action induite sur  $\text{Lie } \mathbb{X}$  soit donnée par le plongement  $\tau_0$ . D'après [Dri74] prop 1.6, 1.7,  $\mathbb{X}$  est unique à isomorphisme près. Son module de Dieudonné covariant rationnel muni de son action de  $F$  est isomorphe à  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$ . Le schéma formel  $\mathcal{M}_{\text{LT}_n}$  est muni d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p) = D_{\frac{1}{n}}^\times$ .

Précisons quelques définitions concernant les isocristaux.

**Définition 3.1.0.2.** On appelle isocristal un  $L$ -espace de dimension finie  $N$  muni d'une application bijective  $\sigma$ -linéaire  $\varphi : N \rightarrow N$ . On désigne par  $\text{Isoc}_L \otimes F$  la catégorie des isocristaux munis d'une action de  $F$ . On appelle  $L/F$ -isocristal un  $L$ -espace vectoriel  $N$  muni d'une application bijective  $\sigma^d$ -linéaire  $\varphi : N \rightarrow N$ . On note  $\text{Isoc}_{L/F}$  la catégorie des  $L/F$ -isocristaux.

Rappelons qu'il existe une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} \text{Isoc}_L \otimes F &\xrightarrow{\sim} \text{Isoc}_{L/F} \\ (N, \varphi, \iota) &\longmapsto (N_{\tau_0}, \varphi^d) \end{aligned}$$

où si  $\iota : F \rightarrow \text{End}(N, \varphi)$  on a

$$N = \bigoplus_{\tau: F \hookrightarrow L} N_\tau$$

avec

$$N_\tau = \{x \in N \mid \forall a \in F, \iota(a).x = \tau(a)x\},$$

décomposition sur laquelle  $\varphi$  agit via

$$\varphi : N_\tau \xrightarrow{\sim} N_{\sigma\tau}.$$

La catégorie abélienne  $\text{Isoc}_{L/F}$  est semi-simple. Ses objets simples sont paramétrés par les éléments de  $\mathbb{Q}$ . À  $\lambda \in \mathbb{Q}$ ,  $\lambda = s/r$  avec  $\text{pgcd}(r, s) = 1$  et  $s > 0$  ( $r, s \in \mathbb{Z}$ ), il correspond l'objet simple

$$N_\lambda = (L^r, \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ p^s & & & 0 \end{array} \right) \cdot \sigma^d).$$

On a de plus  $D_{-\lambda} = \text{End}(N_\lambda)$  est l'algèbre à division sur  $F$  d'invariant  $-\lambda$  (cf. [Dem86], chapitre IV lorsque  $F = \mathbb{Q}_p$ , le cas général étant similaire).

Notons  $\text{BT}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes F$  la catégorie des groupes  $p$ -divisibles munis d'une action de  $\mathcal{O}_F$  à isogénies près. On a le composé des foncteurs :

$$\begin{array}{ccccc} \omega : \text{BT}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes F & \longrightarrow & \text{Isoc}_L \otimes F & \xrightarrow{\sim} & \text{Isoc}_{L/F} \\ X & \longmapsto & (M(X)[1/p], \varphi) & & \\ & & (N, \varphi) & \longmapsto & (N_{\tau_0}, \varphi^d) \end{array}$$

où  $(M(X), \varphi)$  est le module de Dieudonné covariant de  $X$  muni de son action de  $F$ . L'image essentielle de ce foncteur consiste en les éléments de  $\text{Isoc}_{L/F}$  de pentes à valeurs dans  $[0, d]$ . On a de plus

$$(M(\mathbb{X})[1/p], \varphi) \simeq (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$$

dans  $\text{Isoc}_L \otimes F$  et donc

$$\omega(\mathbb{X}) \simeq N_{d-\frac{1}{n}}.$$

Il y a maintenant un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \wedge^k : \text{Isoc}_L \otimes F & \longrightarrow & \text{Isoc}_L \otimes F \\ (N, \varphi) & \longmapsto & (\wedge_{L \otimes F}^k N, \wedge^k \varphi). \end{array}$$

Via l'équivalence  $\text{Isoc}_L \otimes F \xrightarrow{\sim} \text{Isoc}_{L/F}$  il correspond au foncteur

$$\begin{array}{ccc} \wedge^k : \text{Isoc}_{L/F} & \longrightarrow & \text{Isoc}_{L/F} \\ (N, \varphi) & \longmapsto & (\wedge_L^k N, \wedge^k \varphi). \end{array}$$

Ce dernier foncteur vérifie

$$\wedge^k N_\lambda \simeq N_{k\lambda}^{\oplus \delta \binom{r}{k} / r}$$

où si  $\lambda = s/r$  avec  $\text{pgcd}(r, s) = 1$  alors  $\delta = \text{pgcd}(k, r)$ .

Notons  $\wedge^k V := \wedge_F^k V$  et

$$\wedge^k G := \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}(\wedge^k V).$$

On a un morphisme naturel

$$\wedge^k : G \longrightarrow \wedge^k G.$$

Alors,  $\wedge^k(b) \in (\wedge^k G)(L)$  et avec les notations précédentes pour  $\wedge^k : \text{Isoc} \otimes F \rightarrow \text{Isoc} \otimes F$ ,

$$((\wedge^k V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, \wedge^k(b)\sigma) = \wedge^k(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma).$$

Considérons alors

$$p \cdot \wedge^k(p^{-1}b) = p^{1-k} \cdot \wedge^k(b) \in (\wedge^k G)(L)$$

et l'isocrystal muni d'une action de  $F$

$$((\wedge^k V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, p^{1-k} \wedge^k(b)\sigma) \in \text{Isoc}_L \otimes F.$$

L'objet associé de  $\text{Isoc}_{L/F}$  est isomorphe à

$$N_{d-\frac{k}{n}}^{\oplus r} \quad \text{où } r = \text{pgcd}(n, k) \binom{n}{k} / n.$$

C'est donc le module de Dieudonné covariant d'un groupe formel  $p$ -divisible isocline  $\wedge^k \mathbb{X}$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$ , de dimension  $\binom{n-1}{k-1}$  et de hauteur  $d \binom{n}{k}$  et vérifiant

$$\text{End}(\wedge^k \mathbb{X})_{\mathbb{Q}}^{\times} = \text{GL}_r(D_{\frac{k}{n}}).$$

Notons  $\nu_G \in X_*(G)$  défini par  $z \mapsto z^{-1}Id$  et de même  $\nu_{\wedge^k G} \in X_*(\wedge^k G)$ . Soit alors le cocaractère

$$\wedge^k \circ (\nu_G \cdot \mu) : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\nu_G \cdot \mu} G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\wedge^k} \wedge^k G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$$

et

$$\nu_{\wedge^k G}^{-1} \cdot \wedge^k \circ (\nu_G \cdot \mu) \in X_*(\wedge^k G).$$

Concrètement, après choix d'une base de  $V$ ,

$$\nu_{\wedge^k G}^{-1} \cdot \wedge^k \circ (\nu_G \cdot \mu) : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} \longrightarrow (\wedge^k G)_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{GL}_{(n)_k, \overline{\mathbb{Q}}_p}$$

$$z \longmapsto \left( \underbrace{\mathrm{diag}(z, \dots, z)}_{q'_\tau}, \underbrace{\mathrm{diag}(1, \dots, 1)}_{p'_\tau} \right)_{\tau: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p}$$

$$\text{avec } (p'_\tau, q'_\tau) = \begin{cases} (0, \binom{n}{k}) & \tau \neq \tau_0 \\ \left( \binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k} \right) & \tau = \tau_0 \end{cases}.$$

On vérifie alors que la donnée

$$(F, \wedge_F^k V, \overline{p^{1-k} \wedge^k \bar{b}}, \overline{\nu_{\wedge^k G}^{-1} \wedge^k (\nu_G \mu)})$$

est aussi une donnée local non ramifiée simple de type E.L. au sens de la définition 2.1.2.1. On note  $\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n}$  l'espace de Rapoport-Zink associée. Il s'agit d'un espace de déformations par quasi-isogénies de  $\wedge^k \mathbb{X}$ . Plus précisément, pour  $S$  un  $\mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p))$ -schéma sur lequel  $p$  est localement nilpotent

$$\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n} = \{(X, \rho)\} / \sim$$

où  $X$  est un groupe  $p$ -divisible sur  $S$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$  telle que l'action induite sur  $\mathrm{Lie}(X)$  soit donnée par le plongement  $\tau_0 : \mathcal{O}_F \hookrightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_p)$  et

$$\rho : \wedge^k \mathbb{X} \times_{\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)} \overline{S} \longrightarrow X \times_S \overline{S}$$

est une quasi-isogénie compatible à l'action de  $\mathcal{O}_F$  où  $\overline{S}$  est la réduction modulo  $p$  de  $S$ .

Rappelons maintenant le morphisme de périodes (cf. [RZ96] 5.16). Soient  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$  une donnée locale de type E.L non ramifiée simple avec  $p_\tau = 0$  pour  $\tau \neq \tau_0$ , et  $\check{\mathcal{M}}$  l'espace de Rapoport-Zink associé (cf. 2.1.1). Soit  $(X^{\mathrm{univ}}, \rho^{\mathrm{univ}})$  l'objet universel et  $E(X^{\mathrm{univ}})$  l'extension vectorielle universelle de  $X^{\mathrm{univ}}$ . Alors  $\rho^{\mathrm{univ}}$  couplé à la nature cristalline de l'extension vectorielle universelle nous donne un isomorphisme canonique

$$\mathbb{D}(\mathbb{X})_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)} \mathcal{O}_{\check{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}} \simeq \mathrm{Lie} E(X^{\mathrm{univ}})^{\mathrm{rig}}.$$

En identifiant  $\mathbb{D}(\mathbb{X})_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)}[1/p]$  avec  $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ , on a un isomorphisme

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_{\check{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}} \simeq \mathrm{Lie} E(X^{\mathrm{univ}})^{\mathrm{rig}},$$

où pour un faisceau cohérent  $\mathcal{G}$  sur  $\check{\mathcal{M}}$ , on note  $\mathcal{G}^{\mathrm{rig}}$  le faisceau cohérent associé sur  $\check{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}$ .

Considérons le morphisme composé

$$V \otimes_{F, \tau_0} \mathcal{O}_{\check{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}} \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_{\check{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie} E(X^{\mathrm{univ}})^{\mathrm{rig}} \rightarrow \mathrm{Lie}(X^{\mathrm{univ}})^{\mathrm{rig}}.$$

C'est un homomorphisme surjectif de  $\mathcal{O}_{\check{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}}$ -modules localement libres. Cela nous donne un élément de  $\mathrm{Grass}_{p\tau_0}(V \otimes_{F, \tau_0} \check{E})(\check{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}})$ , autrement dit, le morphisme de périodes d'espaces rigides sur  $\mathrm{Sp} \check{E}$

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}} \rightarrow \mathrm{Grass}_{p\tau_0}(V \otimes_{F, \tau_0} \check{E}).$$

Ce morphisme est  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant.

En particulier, dans notre situation on a deux morphismes de périodes

$$\begin{aligned}\tilde{\pi} : \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n}^{\mathrm{rig}} &\longrightarrow \mathbb{P}(V \otimes_F \check{E}) \\ \tilde{\pi} : (\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n})^{\mathrm{rig}} &\longrightarrow \mathrm{Grass}_{\binom{n-1}{k-1}}(\wedge^k V \otimes_F \check{E})\end{aligned}$$

Voici l'énoncé du théorème principal de ce chapitre.

**Théorème 3.1.0.2.** *Pour  $1 \leq k \leq n$ , il existe un morphisme de schémas formels  $\wedge^k : \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n} \rightarrow \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n}$   $\gamma$ -équivariant au sens où le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}\check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n} & \xrightarrow{\wedge^k} & \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n} \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ D_{\frac{1}{n}}^\times & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{GL}_r(D_{\frac{k}{n}})\end{array}$$

soit commutatif, où  $\gamma$  est induit par l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Isoc}_{L/F}}(N_{\frac{n-1}{n}}) \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{Isoc}_{L/F}}(\wedge^k N_{\frac{n-1}{n}}).$$

De plus, notons  $(\wedge^k)^{\mathrm{rig}} : \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n}^{\mathrm{rig}} \rightarrow (\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n})^{\mathrm{rig}}$  le morphisme induit d'espaces rigides.

(1) Alors  $(\wedge^k)^{\mathrm{rig}}$  est compatible aux morphismes de périodes, i.e., le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}\check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n}^{\mathrm{rig}} & \xrightarrow{(\wedge^k)^{\mathrm{rig}}} & (\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n})^{\mathrm{rig}} \\ \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \mathbb{P}(V \otimes_F \check{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Grass}_{\binom{n-1}{k-1}}(\wedge^k V \otimes_F \check{E})\end{array}$$

où le morphisme en bas est défini comme suit : soit  $\tilde{S}$  un  $\mathrm{Sp} \check{E}$ -espace rigide et  $g : V \otimes_F \mathcal{O}_{\tilde{S}} \rightarrow \mathcal{E}$  un élément de  $\mathbb{P}(V \otimes_F \check{E})(\tilde{S})$ , alors on pose

$$\wedge_F^k V \otimes_F \mathcal{O}_{\tilde{S}} \twoheadrightarrow \wedge_F^k V \otimes_F \mathcal{O}_{\tilde{S}} / \wedge_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}^k (\ker g)$$

son image dans  $\mathrm{Grass}_{\binom{n-1}{k-1}}(\wedge^k V \otimes_F \check{E})(\tilde{S})$ .

(2) Soit  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  un sous groupe compact ouvert. Notons  $\wedge^k K$  l'image de  $K$  via  $\wedge^k : G \rightarrow \wedge^k G$ . Alors  $(\wedge^k)^{\mathrm{rig}}$  induit naturellement un morphisme de tours d'espaces rigides

$$(\wedge^k)^{\mathrm{rig}}_K : \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n, K}^{\mathrm{rig}} \rightarrow (\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n})_{\wedge^k K}^{\mathrm{rig}}.$$

On reporte la preuve du théorème à la section 3.3.

**Corollaire 3.1.0.3.** *Lorsque  $k = n$ , on retrouve le morphisme déterminant :*

$$(\wedge^n)^{\mathrm{rig}}_K = \det_K : \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n, K}^{\mathrm{rig}} \rightarrow (\wedge^n \check{\mathcal{M}}_{\mathrm{LT}_n})_{\wedge^n K}^{\mathrm{rig}}.$$

C'est une conséquence immédiate de la construction des morphismes puissances extérieures.

## 3.2 La théorie des displays

### 3.2.1 Rappels

Pour construire les morphismes puissances extérieures, on a besoin de la théorie des displays de Zink qu'on rappelle brièvement (cf.[Zin02]).

**Définition 3.2.1.1 (Zink).** Soit  $R$  un anneau. Un 3n-display sur  $R$  est un quadruplet  $(P, Q, F, V^{-1})$ , où

- $P$  est un  $W(R)$ -module projectif de type fini,
- $Q \subset P$  est un sous  $W(R)$ -module,
- $F, V^{-1}$  sont des applications  $F$ -linéaires  $F : P \rightarrow P, V^{-1} : Q \rightarrow P$ , où  $F : W(R) \rightarrow W(R)$  est le Frobenius de l'anneau des vecteurs de Witt,

tels que les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $I_R P \subset Q \subset P$  avec  $I_R = {}^V W(R)$  l'idéal d'augmentation de  $W(R)$  où  $V : W(R) \rightarrow W(R)$  est la Verschiebung. Et il existe une décomposition de  $P$  en une somme directe de  $W(R)$ -modules  $P = L \oplus T$  telle que  $Q = L \oplus I_R T$ .
2.  $V^{-1} : Q \rightarrow P$  est une épimorphisme  $F$ -linéaire.
3. Pour  $x \in P$  et  $\lambda \in W(R)$ , on a  $V^{-1}(V \lambda x) = \lambda Fx$ .

**Remarque 3.2.1.1.** Si  $R$  est un anneau local  $p$ -adique (i.e. complet et séparé pour la topologie  $p$ -adique) et  $P/I_R P$  est un  $R$ -module libre alors  $P$  est un  $W(R)$ -module libre car  $W(R)$  est complet et séparé pour la topologie  $I_R$ -adique ([Zin02], prop 3).

Localement sur  $\text{Spec}(R)$ , les  $W(R)$ -modules  $T$  et  $L$  sont libres avec comme bases  $e_1, \dots, e_d$  et  $e_{d+1}, \dots, e_h$  respectivement. Il existe alors une matrice inversible  $(\alpha_{ij})$  à coefficient dans  $W(R)$  telle que les relations suivantes sont satisfaites

$$Fe_j = \sum_{i=1}^h \alpha_{ij} e_i \quad \text{pour } j = 1, \dots, d$$

$$V^{-1}e_j = \sum_{i=1}^h \alpha_{ij} e_i \quad \text{pour } j = d+1, \dots, h$$

([Zin02] lemme 9). Localement cette matrice inversible  $(\alpha_{ij})$  définit le 3n-display par rapport à la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq h}$ .

Pour un 3n-display  $(P, Q, F, V^{-1})$  sur  $R$ , il existe une l'application unique  $W(R)$ -linéaire

$$V^\sharp : P \rightarrow P \otimes_{W(R), F} W(R)$$

telle que les équations suivantes sont satisfaites :

$$V^\sharp(wFx) = px \otimes w, \quad \forall w \in W(R), x \in P$$

$$V^\sharp(wV^{-1}y) = y \otimes w, \quad \forall y \in Q,$$

([Zin02], lemme 10). On note  $F^i V^\sharp$  l'application  $W(R)$ -linéaire

$$V^\sharp \otimes_{W(R), F^i} \text{Id} : P \otimes_{W, F^i} W \rightarrow P \otimes_{W, F^{i+1}} W,$$

et note  $V^{n\sharp}$  la composée  $F^{n-1} V^\sharp \circ \dots \circ F V^\sharp \circ V^\sharp$ .

**Définition 3.2.1.2 (Zink).** Soit  $p$  localement nilpotent dans  $R$ .

1. On dit qu'un 3n-display satisfait la condition de  $V$ -nilpotence s'il existe un entier positive  $N$  tel que l'application

$$V^{N\sharp} : P \rightarrow P \otimes_{W(R), F^N} W(R)$$

s'annule modulo  $I_R + pW(R)$ .

2. Un display sur  $R$  est un 3n-display qui satisfait la condition de  $V$ -nilpotence.

**Définition 3.2.1.3 (Zink).** Soit  $R$  un anneau  $p$ -adique. Un 3n-display sur  $R$  est dit un display si le 3n-display sur  $R/pR$  obtenu par changement de base est un display. On désigne par  $\text{Disp}_R$  la catégorie des displays sur  $R$ .

### 3.2.2 Displays munis d'une action de $\mathcal{O}_F$

Si  $R$  est un anneau dans lequel  $p$  est nilpotent, où bien  $R$  est  $p$ -adique, on a une équivalence de catégories

$$\mathcal{BT} : \text{Disp}_R \xrightarrow{\sim} \text{FBT}_R$$

où  $\text{FBT}_R$  désigne la catégorie des groupes formels  $p$ -divisibles sur  $R$  ([Lau08], thm 1.1).

Étant donné que l'on s'intéresse aux groupes formels  $p$ -divisibles munis d'une action de  $\mathcal{O}_F$ , via un quasi-inverse du foncteur  $\mathcal{BT}$ , il est naturel de considérer les displays munis d'une action de  $\mathcal{O}_F$ . Dans la suite de cette section, on suppose toujours que  $R$  est une  $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ -algèbre  $p$ -adique et on note  $\mathcal{O} := \mathcal{O}_F$ . Commençons par généraliser la définition des displays.

**Définition 3.2.2.1.** *Un  $\mathcal{O}$ -3n-display sur  $R$  est une donnée  $(P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1})$ , où*

- $P_0$  est un  $W(R)$ -module projectif de type fini,
- $Q_0 \subset P_0$  un sous  $W(R)$ -module,
- $\tilde{F}, \tilde{V}^{-1}$  sont des applications  $F^d$ -linéaires  $\tilde{F} : P_0 \rightarrow P_0, \tilde{V}^{-1} : Q_0 \rightarrow P_0$ ,

qui satisfont les conditions suivantes :

1.  $I_R P_0 \subset Q_0 \subset P_0$  et il existe une décomposition de  $P_0$  en une somme directe de  $W(R)$ -modules  $P_0 = L_0 \oplus T_0$  telle que  $Q_0 = L_0 \oplus I_R T_0$ .
2.  $\tilde{V}^{-1} : Q_0 \rightarrow P_0$  est un épimorphisme  $F^d$ -linéaire.
3. Pour  $x \in P_0$  et  $\lambda \in W(R)$ , on a  $\tilde{V}^{-1}(V\lambda.x) = F^{d-1}\lambda.\tilde{F}(x)$ .

On note  $\mathcal{O} - 3n\text{-Disp}_R$  la catégorie des  $\mathcal{O}$ -3n-displays sur  $R$ .

**Remarque 3.2.2.1.** *Soit  $P_0 := (P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1})$  un  $\mathcal{O}$ -3n-display sur  $R$ . Localement sur  $\text{Spec}(R)$ , les  $W(R)$ -modules  $T_0$  et  $L_0$  sont libres avec comme base  $e_1, \dots, e_d$  et  $e_{d+1}, \dots, e_h$  respectivement. Alors, il existe une matrice inversible  $(\alpha_{ij})$  à coefficient dans  $W(R)$  telle que les relations suivantes sont satisfaites*

$$\begin{aligned} \tilde{F}e_j &= \sum_{i=1}^h \alpha_{ij} e_i \text{ for } j = 1, \dots, d \\ \tilde{V}^{-1}e_j &= \sum_{i=1}^h \alpha_{ij} e_i \text{ for } j = d+1, \dots, h \end{aligned}$$

Localement, cette matrice inversible  $(\alpha_{ij})$  définit le  $\mathcal{O}$ -3n-display  $P_0$ .

**Lemme 3.2.2.1.** *Soit  $(P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1}) \in \mathcal{O} - 3n\text{-Disp}_R$ . Il existe une unique application  $W(R)$ -linéaire  $\tilde{V}^\sharp : P_0 \rightarrow P_0 \otimes_{W(R), F^d} W(R)$  vérifiant*

$$\begin{aligned} \tilde{V}^\sharp(w\tilde{F}x) &= px \otimes w, \quad \forall w \in W(R), x \in P_0 \\ \tilde{V}^\sharp(w\tilde{V}^{-1}y) &= y \otimes w, \quad \forall y \in Q_0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Puisque  $\tilde{V}^{-1}(Q_0)$  engendre le  $W(R)$ -module  $P_0$ , la seconde condition détermine de façon unique  $\tilde{V}^\sharp$ . Montrons son existence. Soit  $P_0 = L_0 \oplus T_0$  une décomposition normale. Alors,  $\tilde{V}^{-1} \oplus \tilde{F} : L_0 \oplus T_0 \rightarrow P_0$  induit un isomorphisme linéaire  $(\tilde{V}^{-1} \oplus \tilde{F}) \otimes 1 : P_0 \otimes_{W(R), F^d} W(R) \xrightarrow{\sim} P_0$ . Il suffit alors de poser

$$\tilde{V}^\sharp = [(\tilde{V}^{-1} \oplus \tilde{F}) \otimes 1]^{-1} \circ (\text{Id}_{L_0} \oplus p \text{Id}_{T_0}).$$

□

Pour  $N \in \mathbb{N}$  on définit alors une application linéaire

$$\tilde{V}^{N\sharp} : P_0 \longrightarrow P_0 \otimes_{W(R), F^{Nd}} W(R)$$

en itérant l'opérateur précédent.

**Définition 3.2.2.2.** Un  $\mathcal{O}$ -display est un  $\mathcal{O}$ -3n-display  $(P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1})$  tel que pour  $N$  grand la réduction modulo  $I_R + pW(R)$  de l'application  $\tilde{V}^{N\sharp} : P_0 \rightarrow P_0 \otimes_{W(R), F^{Nd}} W(R)$  soit nulle. On note  $\mathcal{O} - \text{Disp}_R$  la catégorie des  $\mathcal{O}$ -displays sur  $R$ .

Le morphisme structural  $W(\overline{\mathbb{F}}_p) \rightarrow R$  induit par composition avec le morphisme  $\Delta : W(-) \rightarrow W(W(-))$  de Cartier un morphisme

$$W(\overline{\mathbb{F}}_p) \xrightarrow{\Delta} W(W(\overline{\mathbb{F}}_p)) \longrightarrow W(R).$$

On a donc

$$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R) \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau: \mathcal{O} \rightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_p)} W(R).$$

Ainsi, si  $M$  est un  $W(R)$ -module muni d'une action de  $\mathcal{O}$ , on a une décomposition

$$M = \bigoplus_{\tau: \mathcal{O} \rightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_p)} M_\tau$$

où

$$M_\tau = \{x \in M \mid a \cdot x = \tau(a)x, \forall a \in \mathcal{O}\}.$$

**Définition 3.2.2.3.**

1. On note  $3\text{n-Disp}_{R, \mathcal{O}}$  la catégorie des couples  $(\mathcal{P}, \iota)$  où  $\mathcal{P} = (P, Q, F, V^{-1})$  est un 3n-display sur  $R$  et  $\iota : \mathcal{O} \rightarrow \text{End}_{3\text{n-Disp}_R}(\mathcal{P})$  est un homomorphisme de  $\mathbb{Z}_p$ -algèbres, tels que  $P/Q = (P/Q)_{\tau_0}$  i.e. l'action de  $\mathcal{O}_F$  sur l'espace tangent  $P/Q$  est donnée par le plongement  $\tau_0 : \mathcal{O}_F \rightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_p) \rightarrow R$ .
2. On note  $\text{Disp}_{R, \mathcal{O}}$  la sous catégorie de  $3\text{n-Disp}_{R, \mathcal{O}}$  dont les objets sont les couples  $(\mathcal{P}, \iota)$  avec  $\mathcal{P}$  un display.

**Proposition 3.2.2.1.** Il y a une équivalence de catégories

$$\beta : 3\text{n-Disp}_{R, \mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O} - 3\text{n-Disp}_R.$$

*Démonstration.* Commençons par construire  $\beta$ . Soit donc  $((P, Q, F, V^{-1}), \iota) \in 3\text{n-Disp}_{R, \mathcal{O}}$ . On a alors pour tout plongement  $\tau$

$$\begin{aligned} F : P_\tau &\longrightarrow P_{\sigma\tau} \\ V^{-1} : Q_\tau &\longrightarrow P_{\sigma\tau}. \end{aligned}$$

De plus,  $P_\tau = Q_\tau$  si  $\tau \neq \tau_0$ . Posons alors

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= (V^{-1})^{d-1} \circ F : P_{\tau_0} \longrightarrow P_{\tau_0} \\ \tilde{V}^{-1} &= (V^{-1})^d : Q_{\tau_0} \longrightarrow P_{\tau_0}. \end{aligned}$$

On vérifie alors immédiatement que

$$\beta((P, Q, F, V^{-1}), \iota) := (P_{\tau_0}, Q_{\tau_0}, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1}) \in \mathcal{O} - 3\text{n-Disp}_R.$$

Cela définit le foncteur  $\beta$ . Construisons maintenant un inverse de ce foncteur. Soit  $(P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1}) \in \mathcal{O} - 3\text{n-Disp}_R$ . Posons pour  $0 \leq i \leq d-1$ ,

$$\begin{aligned} P_i &= P_0 \otimes_{W(R), F^i} W(R) \\ Q_i &= \begin{cases} Q_0 & \text{si } i = 0 \\ P_i & \text{si } i \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Soient alors

$$P = \bigoplus_{i=0}^{n-1} P_i \quad \text{et} \quad Q = \bigoplus_{i=0}^{n-1} Q_i$$

sur lesquels  $\mathcal{O}_F$  agit sur le facteur indéxé par  $i$  via  $\sigma^i \tau_0 : \mathcal{O}_F \rightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_p) \rightarrow W(R)$ . On note dans la suite  $P_d := P_0$ . Fixons une décomposition normale

$$P_0 = L_0 \oplus T_0.$$

Utilisant cette décomposition on va définir pour  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  deux opérateurs  $F$ -linéaires

$$F : P_i \longrightarrow P_{i+1} \quad \text{et} \quad V^{-1} : Q_i \longrightarrow P_{i+1}$$

ce qui définira en prenant leur somme directe deux opérateurs  $F$ -linéaires commutant à l'action de  $\mathcal{O}_F$

$$F : P \longrightarrow P \quad \text{et} \quad V^{-1} : Q \longrightarrow P.$$

Pour  $i \in \{1, \dots, d-2\}$  posons donc

$$\begin{aligned} V^{-1} : P_0 \otimes_{W(R), F^i} W(R) &\longrightarrow P_0 \otimes_{W(R), F^{i+1}} W(R) \\ x \otimes 1 &\longmapsto x \otimes 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F : P_0 \otimes_{W(R), F^i} W(R) &\longrightarrow P_0 \otimes_{W(R), F^{i+1}} W(R) \\ x \otimes 1 &\longmapsto x \otimes p. \end{aligned}$$

Pour  $i = 0$ , en notant  $x \in L_0$ ,  $y \in T_0$  et  $\lambda \in W(R)$ , soient

$$\begin{aligned} V^{-1} : Q_0 &\longrightarrow P_0 \otimes_{W(R), F} W(R) \\ x + {}^V\lambda.y &\longmapsto x \otimes 1 + y \otimes \lambda \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F : P_0 &\longrightarrow P_0 \otimes_{W(R), F} W(R) \\ x + y &\longmapsto x \otimes p + y \otimes 1. \end{aligned}$$

Enfin, pour  $i = d-1$  posons en notant  $x \in L_0$  et  $y \in T_0$

$$\begin{aligned} V^{-1} : P_0 \otimes_{W(R), F^{d-1}} W(R) &\longrightarrow P_0 \\ (x + y) \otimes 1 &\longmapsto \tilde{V}^{-1}(x) + \tilde{F}(y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F : P_0 \otimes_{W(R), F^{d-1}} W(R) &\longrightarrow P_0 \\ (x + y) \otimes 1 &\longmapsto p\tilde{V}^{-1}(x) + p\tilde{F}(y). \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que  $(P, Q, F, V^{-1}) \in 3n\text{-Disp}_{R, \mathcal{O}}$ . La définition des opérateurs  $F$  et  $V^{-1}$  précédente dépend du choix d'une décomposition normale  $P_0 = L_0 \oplus T_0$ . Supposons choisis une autre telle décomposition  $P_0 = L'_0 \oplus T'_0$ . Les inclusions composées avec les projections

$$\begin{aligned} L_0 &\hookrightarrow P_0 \rightarrow L'_0 \\ T_0 &\hookrightarrow P_0 \rightarrow T'_0 \end{aligned}$$

sont des isomorphismes modulo  $I_R$ . Ce sont donc des isomorphismes. Il existe donc un unique auto-morphisme

$$f \in \text{Aut}_{W(R)}(P_0)$$

vérifiant  $f(L_0) = L'_0$ ,  $f(T_0) = T'_0$  et tel que  $f|_{L_0} : L_0 \xrightarrow{\sim} L'_0$  et  $f|_{T_0} : T_0 \xrightarrow{\sim} T'_0$  soient ces isomorphismes. Le morphisme  $F$ -linéaire  $V^{-1} : I_R \rightarrow W(R)$  induit un morphisme linéaire  $I_R \otimes_{W(R), F} W(R) \rightarrow W(R)$ . Puisque  $T'_0$  est un  $W(R)$ -module projectif on en déduit un morphisme

$$\begin{aligned} \alpha : I_R T'_0 \otimes_{W(R), F} W(R) &\longmapsto T'_0 \otimes_{W(R), F} W(R) \\ {}^V\lambda x \otimes 1 &\longmapsto x \otimes \lambda. \end{aligned}$$

Soit alors

$$g : P_0 \otimes_{W(R),F} W(R) \longrightarrow P_0 \otimes_{W(R),F} W(R)$$

$$(x + y) \otimes 1 \longmapsto \underbrace{(f(a) + p(b - f(b))) \otimes 1}_{\in L'_0 \otimes W(R)} + \underbrace{f(b) \otimes 1 + \alpha((a - f(a)) \otimes 1)}_{\in T'_0 \otimes W(R)}.$$

où  $x \in L_0$  et  $y \in T_0$ . Modulo  $pW(R)$  ce morphisme est un isomorphisme car  $f$  en est un. Puisque  $W(R)$  est  $p$ -adiquement séparé complet on en déduit que  $g$  est un isomorphisme. Soit alors l'automorphisme  $h$  de  $P$  donné par

$$h = \bigoplus_{i=0}^{d-1} h_i \quad \text{avec} \quad h_i = \begin{cases} \text{Id} & \text{si } i = 0 \\ g \otimes \text{Id} & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

où  $g \otimes \text{Id}$  est défini en écrivant pour  $i \geq 1$ ,  $P_0 \otimes_{W(R),F^i} W(R) = (P_0 \otimes_{W(R),F} W(R)) \otimes_{W(R),F^{i-1}} W(R)$ . Soient  $F'$  et  $(V^{-1})'$  les opérateurs définis à partir de la décomposition normale  $P_0 = L'_0 \oplus T'_0$ . On vérifie immédiatement que

$$h : (P, Q, F, V^{-1}) \xrightarrow{\sim} (P, Q, F', (V^{-1})')$$

est un isomorphisme de displays. Cet isomorphisme  $g$  a été construit canoniquement en les deux décompositions normales. On en déduit un foncteur

$$\mathcal{O} - 3\text{n-Disp}_R \longrightarrow 3\text{n-Disp}_{R,\mathcal{O}}$$

(par exemple en prenant la limite projective sur toutes les décompositions normales) dont on vérifie que c'est un inverse de  $\beta$ .  $\square$

**Proposition 3.2.2.2.** *L'équivalence de la proposition 3.2.2.1 se restreint en une équivalence*

$$\beta : \text{Disp}_{R,\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O} - \text{Disp}_R.$$

*Démonstration.* Avec les notations de la démonstration 3.2.2.1, si

$$P = \bigoplus_{\tau} P_{\tau}$$

alors

$$V^{\sharp} : P_{\tau} \longrightarrow P_{\sigma^{-1}\tau} \otimes_{W(R),F} W(R)$$

et donc

$$V^{d\sharp} : P_{\tau} \longrightarrow P_{\tau} \otimes_{W(R),F^d} W(R).$$

On vérifie alors en utilisant la propriété caractérisant  $\tilde{V}^{\sharp}$  que

$$(V^{d\sharp})|_{P_{\tau_0}} = \tilde{V}^{\sharp}.$$

Il en résulte que pour tout entier  $N$

$$(V^{dN\sharp})|_{P_{\tau_0}} = \tilde{V}^{N\sharp}.$$

On en déduit que si  $(P, Q, F, V^{-1})$  est un display alors  $(P_{\tau_0}, Q_{\tau_0}, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1})$  est un  $\mathcal{O}$ -display. Réciproquement, supposons que  $(V^{d\sharp})|_{P_{\tau_0}}$  satisfasse à la condition de nilpotence caractérisant un  $\mathcal{O}$ -display. Soit  $i \in \{1, \dots, d-1\}$ . L'épimorphisme  $F^i$ -linéaire

$$V^{-i} : Q_{\tau_0} \longrightarrow P_{\sigma^i\tau_0}$$

induit la surjection linéaire

$$\alpha_i : Q_{\tau_0} \otimes_{W(R),F^i} W(R) \twoheadrightarrow P_{\sigma^i\tau_0}.$$

Alors, pour  $N \geq i$ , le composé

$$Q_{\tau_0} \otimes_{W(R), F^i} W(R) \xrightarrow{\alpha_i} P_{\sigma^i \tau_0} \xrightarrow{V^{N\sharp}} P_{\sigma^{i-N} \tau_0} \otimes_{W(R), F^N} W(R)$$

est égal au composé

$$Q_{\tau_0} \otimes_{W(R), F^i} W(R) \longrightarrow P_{\tau_0} \otimes_{W(R), F^i} W(R) \xrightarrow{V^{(N-i)\sharp} \otimes \text{Id}} (P_{\sigma^{i-N} \tau_0} \otimes_{W(R), F^{N-i}} W(R)) \otimes_{W(R), F^i} W(R).$$

Puisque  $\alpha_i$  est surjectif, on en déduit que si  $\tilde{V}^{n\sharp}$  est nul modulo  $I_R + pW(R)$  alors  $(V^{(dn+i)\sharp})|_{P_{\sigma^i \tau_0}}$  l'est également.  $\square$

**Définition 3.2.2.4.** On note  $\text{FBT}_{R, \mathcal{O}}$  la catégorie des  $\mathcal{O}$ -modules formels  $p$ -divisibles sur  $R$ , c'est à dire les groupes  $p$ -divisibles formels sur  $R$  munis d'une action de  $\mathcal{O}_F$  telle que l'action induite sur leur algèbre de Lie soit donnée par le morphisme structural  $\mathcal{O}_F \rightarrow R$ .

On a donc une équivalence de catégories obtenue par composition des équivalences précédentes

$$\mathcal{BT}_{R, \mathcal{O}} : \mathcal{O} - \text{Disp}_R \xrightarrow{\beta^{-1}} \text{Disp}_{R, \mathcal{O}} \xrightarrow{\mathcal{BT}} \text{FBT}_{R, \mathcal{O}}.$$

Enfin, lorsque  $R = \overline{\mathbb{F}}_p$ , il existe deux foncteurs

$$\begin{aligned} \mathcal{O} - \text{Disp}_{\overline{\mathbb{F}}_p} &\longrightarrow \text{Isoc}_{L/F} \\ (P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1}) &\longmapsto (P_0[\frac{1}{p}], \tilde{F}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Disp}_{\overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{O}} &\longrightarrow \text{Isoc}_L \otimes F \\ (P, Q, F, V^{-1}, \iota) &\longmapsto (P[\frac{1}{p}], F, \iota) \end{aligned}$$

Cependant, il faut faire attention à ce que via l'équivalence  $\text{Isoc}_L \otimes F \xrightarrow{\sim} \text{Isoc}_{L/F}$  rappelée dans la section 3.1, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} - \text{Disp}_{\overline{\mathbb{F}}_p} & \xrightarrow[\sim]{\beta^{-1}} & \text{Disp}_{\overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{O}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Isoc}_{L/F} & \xrightarrow{\sim} & \text{Isoc}_L \otimes F \end{array}$$

n'est pas tout à fait commutatif. En effet, si  $\beta(P, Q, F, V^{-1}, \iota) = (P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1})$  alors via  $\text{Isoc}_{L/F} \xrightarrow{\sim} \text{Isoc}_L \otimes F$ ,

$$(P_0[\frac{1}{p}], p^{d-1} \tilde{F}) \longmapsto (P[\frac{1}{p}], F, \iota).$$

### 3.2.3 Puissances extérieures d'un display de dimension 1

**Définition 3.2.3.1.** Un  $3n$ -display (resp.  $\mathcal{O}$ - $3n$ -display)  $P$  (resp.  $P_0$ ) est dit de dimension 1 si  $T$  (resp.  $T_0$ ) est localement libre de dimension 1 pour une décomposition normale  $P = L \oplus T$  (resp.  $P_0 = L_0 \oplus T_0$ ).

Bien sûr, via l'équivalence  $\beta : \text{Disp}_{R, \mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O} - \text{Disp}_R$  les objets de dimension 1 se correspondent. Via le foncteur  $\mathcal{BT}_{R, \mathcal{O}}$  ils correspondent aux  $\mathcal{O}$ -modules formels  $p$ -divisibles de dimension 1. En effet, si le groupe  $p$ -divisible  $H$  est associé au display  $(P, Q, F, V^{-1})$  alors  $\text{Lie } H = P/Q$ . Notons

$$\text{Disp}_{R, \mathcal{O}}^{\dim=1}, \quad \mathcal{O} - \text{Disp}_R^{\dim=1} \quad \text{et} \quad \text{FBT}_{R, \mathcal{O}}^{\dim=1}$$

ces catégories d'objets de dimension 1. Dans cette section on définit pour un entier  $k \in \mathbb{N}$  un foncteur

$$\wedge^k : \text{FBT}_{R, \mathcal{O}}^{\dim=1} \longrightarrow \text{FBT}_{R, \mathcal{O}}.$$

Pour cela il suffit de définir via les équivalences précédentes un foncteur

$$\wedge^k : \mathcal{O} - \text{Disp}_R^{\dim=1} \longrightarrow \mathcal{O} - \text{Disp}_R.$$

Soit donc  $(P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1}) \in \mathcal{O} - \text{Disp}_R^{\dim=1}$ . Considérons le  $W(R)$ -module projectif  $\wedge^k P_0$  (les puissances extérieures sont celles de  $W(R)$ -modules). Notons

$$Q_0^{(k)} := \text{Im}(\wedge^k Q_0 \longrightarrow \wedge^k P_0).$$

**Proposition 3.2.3.1.** *Il existe un unique  $\mathcal{O}$ -display  $(\wedge^k P_0, Q_0^{(k)}, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1})$  tel que*

$$\tilde{V}^{-1}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = \tilde{V}^{-1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \tilde{V}^{-1}(x_k)$$

lorsque  $x_1, \dots, x_k \in Q_0$ .

*Démonstration.* La formule donnée détermine de façon unique l'opérateur  $\tilde{V}^{-1}$  sur  $Q_0^{(k)}$  et donc l'opérateur  $\tilde{F}$  sur  $\wedge^k P_0$  car par définition d'un  $\mathcal{O}$ -display celui-ci doit satisfaire  $\tilde{F}(x) = \tilde{V}^{-1}(V1.x)$ . On en déduit l'unicité. Passons à l'existence. Soit  $P_0 = L_0 \oplus T_0$  une décomposition normale. Puisque  $T_0$  est un  $W(R)$ -module projectif de rang 1 on a

$$\begin{aligned} \wedge^k P_0 &= \wedge^k L_0 \oplus \wedge^{k-1} L_0 \otimes T_0 \\ Q_0^{(k)} &= \wedge^k L_0 \oplus I_R \cdot \wedge^{k-1} L_0 \otimes T_0. \end{aligned}$$

Posons via cette décomposition

$$\begin{aligned} \tilde{F}|_{\wedge^k L_0} &= \wedge^{k-1} \tilde{V}^{-1} \wedge \tilde{F} \\ \tilde{F}|_{\wedge^{k-1} L_0 \otimes T_0} &= \wedge^{k-1} \tilde{V}^{-1} \otimes \tilde{F} \end{aligned}$$

et puisque  $I_R \cdot \wedge^{k-1} L_0 \otimes T_0 = I_R \otimes \wedge^{k-1} L_0 \otimes T_0$  (cela résulte de ce que  $\wedge^{k-1} L_0 \otimes T_0$  est projectif)

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{-1}|_{\wedge^k L_0} &= \wedge^k \tilde{V}^{-1} \\ \tilde{V}^{-1}|_{I_R \otimes \wedge^{k-1} L_0 \otimes T_0} &= (F^{d-1} \circ V^{-1}) \otimes \wedge^{k-1} \tilde{V}^{-1} \otimes \tilde{F}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que cela définit un  $\mathcal{O}$ - $3n$ -display. De plus, l'opérateur  $\tilde{V}^\sharp : \wedge^k P_0 \rightarrow \wedge^k P_0 \otimes_{W(R), F} W(R)$  est la puissance extérieure  $k$ -ième de l'opérateur  $\tilde{V}^\sharp : P_0 \rightarrow P_0 \otimes_{W(R), F} W(R)$ . Il en résulte que la condition de nilpotence caractérisant les  $\mathcal{O}$ -display est satisfaite.  $\square$

Notons

$$\wedge^k : \mathcal{O} - \text{Disp}_R^{\dim=1} \longrightarrow \mathcal{O} - \text{Disp}_R$$

le foncteur défini grâce à la proposition précédente. Soit  $\mathcal{P} = (P, Q, F, V^{-1}) \in \text{Disp}_{R, \mathcal{O}}^{\dim=1}$  et  $\mathcal{P}_0 = (P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1}) = \beta(\mathcal{P}) \in \mathcal{O} - \text{Disp}_R^{\dim=1}$ . On a alors

$$\wedge^k \mathcal{P}_0 = \beta \left( \bigwedge_{W(R) \otimes \mathcal{O}}^k P, Q^{(k)}, F, V^{-1} \right)$$

où

$$Q^{(k)} = \text{Im} \left( \bigwedge_{W(R) \otimes \mathcal{O}}^k Q \longrightarrow \bigwedge_{W(R) \otimes \mathcal{O}}^k P \right)$$

et  $V^{-1}$  est l'unique opérateur  $F$ -linéaire tel que

$$V^{-1}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = V^{-1}(x_1) \wedge \cdots \wedge V^{-1}(x_k).$$

On note encore

$$\wedge^k : \text{FBT}_{R,\mathcal{O}}^{\dim=1} \longrightarrow \text{FBT}_{R,\mathcal{O}}$$

le foncteur déduit sur les  $\mathcal{O}$ -modules formels  $p$ -divisibles de dimension 1.

Rappelons que l'on a défini dans la section 3.1 un foncteur  $\wedge^k : \text{Isoc}_{L/F} \rightarrow \text{Isoc}_{L/F}$ . On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} - \text{Disp}_{\overline{\mathbb{F}}_p}^{\dim=1} & \xrightarrow{\wedge^k} & \mathcal{O} - \text{Disp}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Isoc}_{L/F} & \xrightarrow{\wedge^k} & \text{Isoc}_{L/F} \end{array}$$

qui ne commute pas tout à fait car si  $(P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1}) \in \mathcal{O} - \text{Disp}_{\overline{\mathbb{F}}_p}^{\dim=1}$  alors

$$\wedge^k(P_0[\frac{1}{p}], \tilde{F}) = ((\wedge^k P_0)[\frac{1}{p}], p^{(k-1)}\tilde{F}).$$

On en déduit alors que le groupe  $p$ -divisible muni d'une action de  $\mathcal{O}_F$ ,  $\wedge^k \mathbb{X}$  défini dans la section 3.1 seulement à isogénie près (on a défini dans cette section son isocristal seulement) provient d'un  $\mathcal{O}$ -module formel canoniquement défini, pas seulement à isogénie près, que l'on note encore  $\wedge^k \mathbb{X}$ .

### 3.3 Construction du morphisme puissances extérieures

#### 3.3.1 Construction du morphisme de schémas formels $\check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n} \rightarrow \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$

Étant donné un anneau  $p$ -adique  $R$ , on a construit dans la section précédente un foncteur

$$\wedge^k : \text{FBT}_{R,\mathcal{O}}^{\dim=1} \longrightarrow \text{FBT}_{R,\mathcal{O}}.$$

Il résulte de la construction de ce foncteur qu'il est compatible au changement de base lorsque  $R$  varie : pour  $R \rightarrow R'$  et  $X \in \text{FBT}_{R,\mathcal{O}}$  on a un isomorphisme canonique

$$\wedge^k(X \otimes_R R') \xrightarrow{\sim} (\wedge^k X) \otimes_R R'.$$

Soit maintenant  $\text{FBT}_{R,\mathcal{O}} \otimes F$  la catégorie des  $\mathcal{O}$ -modules formels  $p$ -divisibles à isogénie près. Ses objets sont les mêmes que ceux de  $\text{FBT}_{R,\mathcal{O}}$  mais on prend comme morphismes

$$\text{Hom}_{\text{FBT}_{R,\mathcal{O}} \otimes F}(X, Y) := \text{Hom}_{\text{FBT}_{R,\mathcal{O}}}(X, Y)[\frac{1}{p}].$$

Les isomorphismes dans  $\text{FBT}_{R,\mathcal{O}} \otimes F$  sont les quasi-isogénies compatibles à l'action de  $\mathcal{O}_F$ . On définit de même  $\mathcal{O} - \text{Disp}_R \otimes F$ . L'équivalence  $\mathcal{BT}_{R,\mathcal{O}}$  s'étend alors en une équivalence

$$\mathcal{BT}_{R,\mathcal{O}} : \mathcal{O} - \text{Disp}_R \otimes F \xrightarrow{\sim} \text{FBT}_{R,\mathcal{O}} \otimes F.$$

Bien que non-linéaire, le foncteur  $\wedge^k$  s'étend en un foncteur

$$\wedge^k : \text{FBT}_{R,\mathcal{O}}^{\dim=1} \otimes F \longrightarrow \text{FBT}_{R,\mathcal{O}} \otimes F.$$

En effet, si  $u \in \text{Hom}_{\text{FBT}_{R,\mathcal{O}}}(X, Y)$  et  $i \in \mathbb{Z}$  il suffit de poser

$$\wedge^k(p^i \cdot u) = p^{ik} \cdot \wedge^k u.$$

À partir de ces observations, il est facile de construire le morphisme

$$\wedge^k : \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n} \longrightarrow \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}.$$

En effet, si  $R$  est une  $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ -algèbre annulée par une puissance de  $p$  et  $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}(R)$  où  $\rho : \mathbb{X} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} R/pR \rightarrow X \otimes_R R/pR$  est une quasi-isogénie on pose

$$\wedge^k(X, \rho) := (\wedge^k X, \wedge^k \rho) \in \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}(R).$$

Cela définit un morphisme de foncteurs  $\check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n} \rightarrow \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$  lorsque  $R$  varie et donc notre morphisme de schémas formels

$$\wedge^k : \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n} \longrightarrow \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}.$$

Le foncteur  $\wedge^k$  induit un morphisme de groupes

$$\gamma : D_{\frac{1}{n}}^\times = \text{End}(\mathbb{X})_{\mathbb{Q}}^\times \longrightarrow \text{End}(\wedge^k \mathbb{X})_{\mathbb{Q}}^\times \simeq \text{GL}_r(D_{\frac{k}{n}}).$$

Alors, si  $g \in \text{End}(\mathbb{X})_{\mathbb{Q}}^\times = \text{Aut}_{FBT_{\overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{O}} \otimes F}(\mathbb{X})$  et  $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}(R)$  on a

$$\begin{aligned} \wedge^k(g.(X, \rho)) &= \wedge^k((X, \rho \circ g^{-1})) \\ &= (\wedge^k X, \wedge^k(\rho \circ g^{-1})) \\ &= (\wedge^k X, \wedge^k(\rho) \circ \wedge^k(g)^{-1}) \\ &= \gamma(g). \wedge^k(X, \rho). \end{aligned}$$

Le morphisme de schémas formels  $\wedge^k : \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n} \rightarrow \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}$  est donc compatible aux actions de  $D_{\frac{1}{n}}^\times$  et  $\text{GL}_r(D_{\frac{k}{n}})$  via  $\gamma$ .

### 3.3.2 Compatibilité aux morphismes de périodes

Soit  $X$  un  $\mathcal{O}$ -module formel  $p$ -divisible sur  $R$ . Notons  $S = \text{Spec}(R)$  et  $\Sigma = \text{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p))$ . Soit  $\mathcal{E}$  le cristal de Dieudonné covariant de  $X$  sur  $\text{NCRIS}(S/\Sigma)$ . Il y a une décomposition

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{\tau: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \mathcal{E}_\tau.$$

Le cristal  $\mathcal{E}_{\tau_0}$  est le cristal algèbre de Lie de la  $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle (cf. [Far08] Appendice B). Le Frobenius de la réduction modulo  $p$  de  $X$  définit un morphisme de cristaux

$$V : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{(p)}$$

vérifiant  $V : \mathcal{E}_\tau \rightarrow (\mathcal{E}_{\sigma^{-1}\tau})^{(p)}$ . La puissance  $d$ -ième de ce morphisme définit un morphisme

$$\tilde{V} : \mathcal{E}_{\tau_0} \longrightarrow \mathcal{E}_{\tau_0}^{(q)}.$$

Ce morphisme est le morphisme induit au niveau des cristaux algèbre de Lie de la  $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle par le morphisme de  $\mathcal{O}$ -module formels  $p$ -divisibles sur  $R/pR$  qui est la puissance  $r$ -ième du Frobenius de  $X \otimes R/pR$  ( $(X \otimes R/pR)^{(q)}$  est encore un  $\mathcal{O}$ -module formel). Notons donc

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X) = \mathcal{E}_{\tau_0}.$$

La  $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle

$$0 \longrightarrow V_{\mathcal{O}}(X) \longrightarrow E_{\mathcal{O}}(X) \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

fournit une suite exacte au niveau des algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow V_{\mathcal{O}}(X) \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X)_S \longrightarrow \text{Lie } X \longrightarrow 0$$

où  $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X)_S$  est l'évaluation du cristal sur l'épaississement tautologique. Notons

$$\text{Fil } \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X)_S := V_{\mathcal{O}}(X)$$

la filtration de Hodge.

**Proposition 3.3.2.1.** *Il y a un isomorphisme canonique en  $X \in \text{FBT}_{R,\mathcal{O}}^{\dim=1}$*

$$(\wedge^k \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X), \wedge^k \tilde{V}, \wedge^k \text{Fil } \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X)) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\wedge^k X), \tilde{V}, \text{Fil } \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\wedge^k X)).$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{P} = (P, Q, F, V^{-1}, \iota) \in \text{Disp}_{R,\mathcal{O}}$  le display muni de son action de  $\mathcal{O}$  associé à  $X$ . Soit  $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$  le cristal de Witt associé à  $\mathcal{P}$  ([Zin02] def. 4.7). C'est un cristal en  $W(\mathcal{O}_{S/\Sigma})$ -modules tel que sa réduction modulo l'idéal d'augmentation de  $W(\mathcal{O}_{S/\Sigma})$ ,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{P}} := \mathcal{K}_{\mathcal{P}} \otimes_{W(\mathcal{O}_{S/\Sigma})} \mathcal{O}_{S/\Sigma},$$

soit le cristal de Dieudonné covariant de  $X$ . De plus, via cette identification

$$(\mathcal{K}_{\mathcal{P}})_S = P \text{ et } Q/I_R P = \text{Fil}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}})_S,$$

la filtration de Hodge qui est la partie vectorielle de l'extension vectorielle universelle. Soit  $B \rightarrow A$  un épaissement à puissances divisées nilpotentes de noyau  $\mathfrak{a}$  où  $A$  est une  $R$ -algèbre et  $B$  une  $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ -algèbre annulée par une puissance de  $p$ . Notons  $X_A \in \text{FBT}_{A,\mathcal{O}}$  et  $\mathcal{P}_A \in \text{Disp}_{A,\mathcal{O}}$  les changements de base via  $R \rightarrow A$ . Soit  $X' \in \text{FBT}_{B,\mathcal{O}}$  relevant  $X_A$  et  $\mathcal{P}' = (P', Q', F', V'^{-1}, \iota) \in \text{Disp}_{B,\mathcal{O}}$  son display muni d'une action de  $\mathcal{O}$ . On a alors un isomorphisme

$$\alpha_{X'} : (\mathcal{K}_{\mathcal{P}})_{B \rightarrow A} \xrightarrow{\sim} P'.$$

Si de plus  $X''$  est un autre relèvement associé à  $\mathcal{P}'' = (P'', Q'', F'', V''^{-1}, \iota)$

$$\alpha_{X''} \circ \alpha_{X'}^{-1} : P' \xrightarrow{\sim} P''$$

se décrit de la façon suivante ([Zin02] chap. 2). Les puissances divisées de  $\mathfrak{a}$  définissent un plongement  $\mathfrak{a} \hookrightarrow W(\mathfrak{a})$  tel que  $I_B + \mathfrak{a} = \ker(W(B) \twoheadrightarrow W(A) \twoheadrightarrow A)$ . Soient  $\widehat{Q}' = Q' + \mathfrak{a}P'$  et  $\widehat{Q}'' = Q'' + \mathfrak{a}P''$ . Il existe alors des uniques extensions des opérateurs  $V'^{-1}$  et  $V''^{-1}$

$$\begin{aligned} V'^{-1} : \widehat{Q}' &\longrightarrow P' \\ V''^{-1} : \widehat{Q}'' &\longrightarrow P'' \end{aligned}$$

vérifiant  $V'^{-1}\mathfrak{a}P' = 0$  et  $V''^{-1}\mathfrak{a}P'' = 0$ . Alors,  $\alpha_{X'} \circ \alpha_{X'}^{-1}$  est l'unique morphisme compatible à ces extensions, à  $F'$  et  $F''$  et relevant l'identité du display  $\mathcal{P}_A$  vu comme la réduction de  $\mathcal{P}''$  et  $\mathcal{P}'$  via  $B \rightarrow A$  :

$$\alpha_{X''} \circ \alpha_{X'}^{-1} : (P', \widehat{Q}', F', V'^{-1}) \xrightarrow{\sim} (P'', \widehat{Q}'', F'', V''^{-1}).$$

Les  $\mathcal{O}$ -modules formels  $\wedge^k X'$  et  $\wedge^k X''$  sont des relèvements de  $\wedge^k X_A$  de displays notés  $(\wedge^k P', Q'^{(k)}, F', V'^{-1})$  et  $(\wedge^k P'', Q''^{(k)}, F'', V''^{-1})$  où  $\wedge^k := \wedge_{W(B) \otimes \mathcal{O}}^k$  ici,  $Q'^{(k)} = \text{Im}(\wedge^k Q' \rightarrow \wedge^k P')$  et de même pour  $Q''^{(k)}$ .

Notons  $\wedge^k \mathcal{P} \in \text{Disp}_{R,\mathcal{O}}$  la puissance extérieure  $k$ -ième de  $\mathcal{P}$ . Il existe alors des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \alpha_{\wedge^k X'} : (\mathcal{K}_{\wedge^k \mathcal{P}})_{B \rightarrow A} &\xrightarrow{\sim} \wedge^k P' \\ \alpha_{\wedge^k X''} : (\mathcal{K}_{\wedge^k \mathcal{P}})_{B \rightarrow A} &\xrightarrow{\sim} \wedge^k P''. \end{aligned}$$

L'isomorphisme  $\alpha_{\wedge^k X''} \circ \alpha_{\wedge^k X'}^{-1}$  est caractérisé comme précédemment. Montrons que

$$\wedge^k(\alpha_{X''} \circ \alpha_{X'}^{-1}) = \alpha_{\wedge^k X'} \circ \alpha_{\wedge^k X''}^{-1}.$$

On suppose pour cela que  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ , la preuve étant un peu fastidieuse mais identique lorsque  $\mathcal{O}$  est plus général. Notons  $u = \alpha_{X''} \circ \alpha_{X'}^{-1}$ . Il s'agit de montrer que pour  $x \in \widehat{Q}'^{(k)} = Q'^{(k)} + \mathfrak{a} \cdot \wedge^k P'$ ,

$$(\wedge^k u)(V'^{-1}(x)) = V''^{-1}((\wedge^k u)(x)) \quad (3.1)$$

(la commutation de  $\wedge^k u$  à  $F'$  et  $F''$  résulte de celle à  $V'^{-1}$  et  $V''^{-1}$  grâce aux formules  $F'(x) = V'^{-1}(V'1.x)$  et  $F''(y) = V''^{-1}(V''1.y)$ ). Or,

$$\widehat{Q}'^{(k)} = \text{Im}(\wedge^k \widehat{Q}' \longrightarrow \wedge^k P')$$

De plus, pour  $x_1, \dots, x_k \in \widehat{Q}'$ ,

$$V'^{-1}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = V'^{-1}(x_1) \wedge \dots \wedge V'^{-1}(x_k).$$

En effet, par définition du produit extérieur des displays, cette formule est valable pour  $x_1, \dots, x_k \in Q'$ . De plus les deux quantités sont nulles si  $x_1 \in \mathfrak{a}.Q'$ . On conclut immédiatement quant à la validité de la formule (3.1).

Il résulte de ce que l'on vient de montrer que l'on a un isomorphisme de cristaux en  $W(\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \otimes \mathcal{O}$ -modules

$$\bigwedge_{W(\mathcal{O}_{S/\Sigma}) \otimes \mathcal{O}}^k \mathcal{K}_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_{\wedge^k \mathcal{P}}.$$

Il en est donc de même pour les cristaux de Dieudonné. La proposition s'en déduit facilement.  $\square$

Vérifions maintenant la compatibilité de

$$\wedge^k : \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}^{\text{rig}} \longrightarrow (\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n})^{\text{rig}}$$

aux morphismes de périodes. Soit  $R$  une  $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ -algèbre  $p$ -adique sans  $p$ -torsion que l'on munit de la topologie  $p$ -adique. Soit  $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}(R)$ . Notons  $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}$  le foncteur cristal algèbre de Lie de la  $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle d'un  $\mathcal{O}$ -module formel  $p$ -divisible. On a par la propriété de cristal

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{X} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} R/pR)_{R \rightarrow R/pR} = \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{X})_{W(\overline{\mathbb{F}}_p) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)} R.$$

De plus, la quasi-isogénie  $\rho : \mathbb{X} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} R/pR \longrightarrow X \otimes_R R/pR$  induit un isomorphisme

$$\rho_* : \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{X} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} R/pR)_{R \rightarrow R/pR}[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X \otimes_R R/pR)_{R \rightarrow R/pR}[\frac{1}{p}].$$

On a

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X \otimes_R R/pR)_{R \rightarrow R/pR} = \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X)_R$$

qui est muni de sa filtration de Hodge  $\text{Fil} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X)_R$ . Alors,

$$\rho_*^{-1}(\text{Fil}[\frac{1}{p}]) \subset \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{X})_{W(\overline{\mathbb{F}}_p) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_p)} R[\frac{1}{p}]$$

définit un élément de  $\mathbb{P}(R[\frac{1}{p}])$  où  $\mathbb{P}$  est l'espace projectif sur  $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{X})_{W(\overline{\mathbb{F}}_p) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p}[\frac{1}{p}]$ . Cet élément est l'image de  $(X, \rho) \in \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}(R)$  par le morphisme de périodes. D'après la proposition il existe des isomorphismes

$$\wedge^k \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{X}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\wedge^k \mathbb{X})$$

et

$$\wedge^k \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\wedge^k X)$$

tels que  $\text{Fil} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\wedge^k X)_R = \wedge^k \text{Fil} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(X)_R$ . Ces isomorphismes sont canoniques au sens où  $\wedge^k(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\rho)) = \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\wedge^k \rho)$ . La compatibilité de  $\wedge^k$  aux morphismes de périodes s'en déduit.

### 3.3.3 Extension à la tour d'espaces rigides

#### 3.3.3.1 Dualité des $\mathcal{O}$ -modules formels $p$ -divisibles

Soit  $\mathcal{P} = (P_0, Q_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1}) \in \mathcal{O}\text{-Disp}_R$  avec  $R$  comme précédemment. On définit un  $\mathcal{O}$ - $3n$ -display dual  $\mathcal{P}^\vee$  de la façon suivante. Posons

$$\mathcal{P}^\vee = (P_0^*, \widehat{Q}_0, \tilde{F}, \tilde{V}^{-1})$$

où :

- $P_0^* = \text{Hom}_{W(R)}(P_0, W(R))$  est le dual du  $W(R)$ -module projectif  $P_0$ ,
- $\widehat{Q}_0 = \{f \in P_0^* \mid f(Q_0) \subset I_R\}$ ,

- si  $\tilde{V}^\sharp : P_0 \rightarrow P_0 \otimes_{W(R), F^d} W(R)$  alors pour  $f \in P_0^*$ ,  $\tilde{F}f = ((F^d \circ f) \otimes \text{Id}) \circ \tilde{V}^\sharp$ ,
- pour  $f \in \widehat{Q}_0$ ,  $\tilde{V}^{-1}f$  est l'unique élément de  $P_0^*$  tel que pour tout  $x \in Q_0$ ,  $(\tilde{V}^{-1}f)(\tilde{V}^{-1}x) = F^{d-1} \circ V^{-1}f(x)$ .

Dans la définition de  $\tilde{V}^{-1}f$ , le fait qu'un tel opérateur soit unique résulte de ce que  $\tilde{V}^{-1} : Q_0 \rightarrow P_0$  est un épimorphisme  $F$ -linéaire. L'existence de cet opérateur se vérifie en prenant une décomposition normale de  $P_0$ .

Lorsque  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$  et  $X \in \text{FBT}_{\mathcal{O}, R}$  est tel que  $\mathcal{BT}_{R, \mathcal{O}}(X) = \mathcal{P}$ , Zink a montré dans [Zin02] que  $\mathcal{P}^\vee$  est un display si et seulement si le dual de Cartier  $X^\vee$  est formel et que si c'est le cas alors  $\mathcal{BT}_{R, \mathcal{O}}(X^\vee) = \mathcal{P}^\vee$ . Pour  $\mathcal{O}$  général, lorsque  $\mathcal{P}^\vee$  est un display on note  $X^\vee \in \text{FBT}_{R, \mathcal{O}}$  tel que  $\mathcal{BT}_{R, \mathcal{O}}(X^\vee) = \mathcal{P}^\vee$ . On a bien sûr alors  $(X^\vee)^\vee = X$ . Il est probable que l'on puisse interpréter le dual  $X^\vee$  au sens de la dualité introduite par Faltings dans [Fal02a].

Soit  $R$  un anneau satisfaisant les hypothèses de la section 1.1.1. Reprenons les notations du théorème de comparaison du chapitre 1. Soit  $X \in \text{FBT}_{R, \mathcal{O}}$  tel que  $X^\vee \in \text{FBT}_{R, \mathcal{O}}$  soit défini. Soit  $E$  l'évaluation du cristal algèbre de Lie de la  $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle de  $X$  sur l'épaississement  $A_{\text{cris}}(\widehat{R}) \rightarrow \widehat{R}$ . Notons  $\text{Fil } E$  sa filtration de Hodge, c'est à dire  $\text{Fil}^1 A_{\text{cris}}.E \subset \text{Fil } E$  et  $\text{Fil } E / \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}.E = \text{Lie } X \otimes \widehat{R}$ . Il y a un opérateur  $\varphi^d$ -linéaire  $\tilde{V}^{-1} : \text{Fil } E \rightarrow E$ . Supposons  $\text{Lie } X$  et  $\text{Lie } X^\vee$  libres. Le théorème de comparaison du chapitre 1 se traduit alors en un isomorphisme de  $\mathcal{O}_F$ -modules

$$T_p(X) \xrightarrow{\sim} (\text{Fil } E)^{\tilde{V}^{-1}=\text{Id}}.$$

L'évaluation du cristal de  $X^\vee$  s'identifie alors à  $E^* = \text{Hom}(E, A_{\text{cris}})$ . De plus,

$$\text{Fil } E^* = \{f \in E^* \mid f(\text{Fil } E) \subset \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}\}.$$

Il y a alors un accouplement

$$(\text{Fil } E)^{\tilde{V}^{-1}=\text{Id}} \times (\text{Fil } E^*)^{\tilde{V}^{-1}=\text{Id}} \longrightarrow (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^{\varphi^d=p} = \mathcal{O}_F.t_{\mathcal{LT}}$$

où  $t_{\mathcal{LT}}$  est la période d'un groupe de Lubin-Tate associé à  $F|\mathbb{Q}_p$ . Cela définit un accouplement

$$T_p(X) \times T_p(X^\vee) \longrightarrow \mathcal{O}_F.t_{\mathcal{LT}}.$$

Lorsque  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ , cet accouplement est l'accouplement de la dualité de Cartier et est donc parfait. On admettra que c'est le cas pour  $\mathcal{O}$  général. Cela devrait résulter naturellement d'un lien entre la notion de dualité introduite et celle de [Fal02a]. On doit pouvoir également le vérifier directement en adaptant la preuve de la proposition 1.3.4.1 (il suffit essentiellement de remplacer  $\varphi$  par  $\varphi^d$ ).

### 3.3.3.2 Extension à la tour

La proposition qui suit implique que le morphisme d'espaces rigides  $(\wedge^k)^{\text{rig}}$  s'étend au niveau des tours d'espaces rigides, c'est à dire le point (2) du théorème 3.1.0.2.

**Proposition 3.3.3.1.** *Soit  $\mathcal{T}_1$ , resp.  $\mathcal{T}_2$ , le  $\mathcal{O}_F$ -système local  $D_{\frac{1}{n}}^\times$ -équivariant, resp.  $\text{GL}_r(D_{\frac{k}{n}})$ -équivariant, sur  $\check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}^{\text{rig}}$ , resp.  $\wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}^{\text{rig}}$ , qui est le module de Tate de la déformation universelle. Via*

$$(\wedge^k)^{\text{rig}} : \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}^{\text{rig}} \longrightarrow \wedge^k \check{\mathcal{M}}_{\text{LT}_n}^{\text{rig}}$$

*il existe un isomorphisme de systèmes locaux  $D_{\frac{1}{n}}^\times$ -équivariants*

$$(\wedge^k)^{\text{rig}*} \mathcal{T}_2 \xrightarrow{\sim} \wedge^k \mathcal{T}_1$$

*où l'action de  $D_{\frac{1}{n}}^\times$  sur le membre de gauche est déduite de  $\gamma : D_{\frac{1}{n}}^\times \rightarrow \text{GL}_r(D_{\frac{k}{n}})$ .*

Cette proposition va elle même résulter du résultat qui suit. Reprenons les hypothèses et notations du chapitre 1. Soit  $R$  un anneau satisfaisant les hypothèses de la section 1.1.1 et  $\bar{R}$  l'anneau associé. Supposons que  $R$  soit de plus une  $W(\bar{\mathbb{F}}_p)$ -algèbre. Soit  $X \in \text{FBT}_{R, \mathcal{O}}^{\dim=1}$  et  $\wedge^k X \in \text{FBT}_{R, \mathcal{O}}$ . Supposons que Notons  $T_p(X) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, X_{\widehat{R}})$  et de même  $T_p(\wedge^k X)$ . Ce sont des  $\mathcal{O}_F$ -module libres de rang fini munis d'une action continue de  $\Gamma = \text{Gal}(\bar{R}|R)$ . Supposons que  $\text{Lie } X$  et  $\text{Lie } X^\vee$  sont des  $R$ -modules libres. La proposition précédente résulte alors de la suivante.

**Proposition 3.3.3.2.** *Il existe un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_F$ -modules munis d'une action de  $\Gamma$*

$$\wedge^k T_p(X) \xrightarrow{\sim} T_p(\wedge^k X).$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{E}$  le cristal algèbre de Lie de la  $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle de  $X$  et  $\text{Fil } \mathcal{E}_R$  sa filtration de Hodge (cf. section 3.3.2). Notons

$$E = \mathcal{E}_{A_{\text{cris}}(\bar{R}) \rightarrow \widehat{R}}.$$

Il est muni d'une filtration de Hodge  $\text{Fil } E$  contenant  $\text{Fil}^1 A_{\text{cris}} \cdot E$  telle que  $\text{Fil } E / \text{Fil}^1 A_{\text{cris}} \cdot E = \text{Fil } \mathcal{E}_R \otimes_R \widehat{R}$ . Soit  $\varphi$  le Frobenius cristallin de  $A_{\text{cris}}$ . Il y a de plus un opérateur  $\varphi^d$ -linéaire

$$\tilde{V}^{-1} : \text{Fil } E \longrightarrow E.$$

Le théorème de comparaison du chapitre 1 s'écrit alors sous la forme

$$T_p(X) = (\text{Fil } E)^{\tilde{V}^{-1}=\text{Id}}$$

où la structure de  $\mathcal{O}$ -module sur  $T_p(X)$  est donnée par  $\tau_0 : \mathcal{O}_F \xrightarrow{\sim} W(\bar{\mathbb{F}}_p)^{\sigma^d=\text{Id}}$  et  $W(\bar{\mathbb{F}}_p)^{\sigma^d=\text{Id}} \subset A_{\text{cris}}^{\varphi^d=\text{Id}}$ . Notons  $\wedge^k E$  la puissance extérieure  $k$ -ième du  $A_{\text{cris}}$ -module libre  $E$ . D'après la proposition 3.3.2.1 et le théorème de comparaison appliqué à  $\wedge^k X$  on a

$$T_p(\wedge^k X) = (\text{Fil } \wedge^k E)^{\wedge^k \tilde{V}^{-1}=\text{Id}}$$

où

$$\text{Fil } \wedge^k E = \text{Im}(\wedge^k \text{Fil } E \longrightarrow \wedge^k E).$$

Il y a donc un morphisme canonique compatible à l'action de  $\Gamma$

$$\alpha : \wedge^k T_p(X) \longrightarrow T_p(\wedge^k X).$$

Montrons que c'est un isomorphisme. L'accouplement parfait

$$T_p(X) \times T_p(X^\vee) \longrightarrow \mathcal{O}_F \cdot t_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$$

induit un accouplement parfait

$$\wedge^k T_p(X) \times \wedge^k T_p(X^\vee) \longrightarrow \mathcal{O}_F \cdot t_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^k. \quad (3.2)$$

Il y a de plus un accouplement naturel

$$\text{Fil}(\wedge^k E)^{\wedge^k \tilde{V}^{-1}=\text{Id}} \times \wedge^k ((\text{Fil } E^*)^{\tilde{V}^{-1}=\text{Id}}) \longrightarrow (\text{Fil}^1 A_{\text{cris}})^{\varphi^d=p} = \mathcal{O}_F \cdot t_{\mathcal{L}\mathcal{T}}$$

qui définit un accouplement

$$T_p(\wedge^k X) \times \wedge^k T_p(X^\vee) \longrightarrow \mathcal{O}_F \cdot t_{\mathcal{L}\mathcal{T}} \quad (3.3)$$

tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \wedge^k T_p(X) & \times & \wedge^k T_p(X^\vee) \longrightarrow \mathcal{O}_F \cdot t_{\mathcal{L}\mathcal{T}}^k \\ \downarrow \alpha & & \parallel \\ T_p(\wedge^k X) & \times & \wedge^k T_p(X^\vee) \longrightarrow \mathcal{O}_F \cdot t_{\mathcal{L}\mathcal{T}} \end{array}$$

Les  $\mathcal{O}$ -modules  $T_p(\wedge^k X^{\text{univ}})$ ,  $\wedge^k T_p(X^{\text{univ}})$  et  $\wedge^k T_p((X^{\text{univ}})^\vee)$  sont tous libres de rang  $\binom{n}{k}$ . En fixant une  $\mathcal{O}_F$ -base de chacun, soient les accouplements (3.2) et (3.3) donnés par les matrices  $M_1$  et  $M_2$ , et  $\alpha$  donné par la matrice  $M_\alpha$ . Alors on a  $M_1 = {}^t M_\alpha M_2$ . La matrice  $M_\alpha$  est donc inversible car  $M_1$  l'est et  $M_2$  est à coefficients entiers. Le morphisme  $\alpha$  est donc un isomorphisme.  $\square$



# Chapitre 4

## Le groupe de Mumford-Tate $p$ -adique générique

### 4.1 Introduction

Soit une donnée de Rapoport-Zink non ramifié simple de type E.L  $(F, V, \bar{b}, \bar{\mu})$  (2.1.2) ou bien une donnée de Rapoport-Zink non ramifié simple de type P.E.L  $(F, *, V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{b}, \bar{\mu})$  (2.1.3), de corps réflex local  $E$ . Rappelons que l'on a fixé une clôture algébrique  $\bar{\mathbb{Q}}_p$  de  $\mathbb{Q}$ , que  $E \subset \bar{\mathbb{Q}}_p$  et que l'on note  $\check{E}$  le complété de l'extension maximale non-ramifiée de  $E$  dans  $\bar{\mathbb{Q}}_p$ . On note  $\bar{\check{E}}$  la clôture algébrique de  $\check{E}$  associée au plongement canonique  $E \subset \bar{\mathbb{Q}}_p$ .

Soit  $\check{\mathcal{F}}$  l'espace homogène sous  $G_{\bar{\check{E}}}$  associé des sous-groupes paraboliques de type  $\mu$  que l'on voit comme une variété algébrique sur  $\check{E}$ . Soit

$$\check{\mathcal{F}}^a \subset \check{\mathcal{F}}^{an}$$

l'ouvert admissible qui est l'image du morphisme de périodes dans l'espace analytique de Berkovich associé à  $\check{\mathcal{F}}$  (cf. section 2.5). Nous n'utiliserons en fait dans ce chapitre que les points de  $\check{\mathcal{F}}^a$  à valeurs dans une extension de degré fini de  $\check{E}$ . En particulier, nous n'utiliserons pas la structure d'espace analytique sur cet ouvert. De plus, d'après Colmez et Fontaine, de tels points coïncident avec les points à valeurs dans une extension de degré fini de  $\check{E}$  de l'ouvert faiblement admissible  $\check{\mathcal{F}}^{fa}$  ([RZ96] chapitre 1 et [DRO10]) où

$$\check{\mathcal{F}}^a \subset \check{\mathcal{F}}^{fa} \subset \check{\mathcal{F}}^{an}.$$

Si  $x \in \check{\mathcal{F}}^a(K)$  avec  $\bar{\check{E}}|K|\check{E}$  et  $[K : \check{E}] < +\infty$ , il lui est associé une classe de  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison  $\{\xi_x\}$  de morphismes continus

$$\xi_x : \text{Gal}(\bar{\check{E}}|K) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p).$$

Avec les notations de la section 2.5, soit

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}^{an} \longrightarrow \check{\mathcal{F}}^a$$

le morphisme de périodes,  $X^{\text{univ}}$  la déformation universelle sur  $\check{\mathcal{M}}$ . Si  $y \in \check{\mathcal{M}}^{an}(K)$  est tel que  $\check{\pi}(y) = x$  regardons la représentation galoisienne sur le module de Tate

$$\text{Gal}(\bar{\check{E}}|K) \longrightarrow \text{GL}_F(V_p(X_y^{\text{univ}}))$$

dans le cas EL,

$$\text{Gal}(\bar{\check{E}}|K) \longrightarrow \text{GU}(V_p(X_y^{\text{univ}}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

dans le cas PEL unitaire, où  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_p(X_y^{\text{univ}}) \times V_p(X_y^{\text{univ}}) \rightarrow \mathbb{Q}_p(1)$  est donné par la polarisation de  $X^{\text{univ}}$  et

$$\text{Gal}(\bar{\check{E}}|K) \longrightarrow \text{Gsp}(V_p(X_y^{\text{univ}}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

dans le cas PEL symplectique. Le morphisme  $\xi_x$  est alors obtenu après avoir fixé un isomorphisme

$$V \simeq V_p(X_y^{\text{univ}})$$

de  $F$ -espaces vectoriels, compatible aux produits symplectiques dans le cas PEL (ce qui est possible d'après la trivialité du toseur des périodes).

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'image de ces morphismes  $\xi_x$  lorsque  $x$  est comme précédemment et varie dans l'espace des périodes. Plus précisément, on s'intéresse à l'algèbre de Lie du groupe de Lie  $p$ -adique  $\text{Im } \xi_x \subset G(\mathbb{Q}_p)$ ,

$$\text{Lie}(\text{Im } \xi_x) \subset \text{Lie } G$$

(qui est donc bien définie à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près via l'action adjointe  $\text{Ad} : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{Aut}(\text{Lie } G)$ ). C'est une sous- $\mathbb{Q}_p$ -algèbre de Lie de  $\text{Lie } G$  (mais pas une sous- $F$ -algèbre de Lie en général). On démontre sous une hypothèse nécessaire concernant les polygones de Hodge et Newton que nous précisons dans la suite que pour  $x$  « générique » en un sens que nous précisons plus loin,

$$\text{Lie}(\text{Im } \xi_x) = \text{Lie } G$$

soit encore, l'image de  $\xi_x$  est ouverte dans  $G(\mathbb{Q}_p)$ .

D'après Serre ([Ser79]) et Sen ([Sen73]), l'algèbre de Lie de  $\text{Im } \xi_x$  est algébrique et  $\text{Im } \xi_x$  est un sous-groupe ouvert de son enveloppe algébrique. De plus, si  $\mathbb{C}_p$  est le complété de  $\overline{E}$ , la décomposition de Hodge-Tate de cette représentation fournit canoniquement un cocaractère

$$\mu_x : \mathbb{G}_m \longrightarrow G_{\mathbb{C}_p}$$

dans la classe de conjugaison  $\bar{\mu}$  tel que l'enveloppe algébrique de l'image de  $\xi_x$  soit le plus petit sous-groupe algébrique de  $G$  contenant l'image de  $\mu_x$ . Il y a en fait un autre moyen de calculer cette enveloppe algébrique (à torsion intérieure près) en utilisant la théorie de Fontaine, on renvoie pour cela à la section 4.3.

Le théorème principal de ce chapitre est le théorème 4.5.0.1. Il est valable pour des espaces des périodes plus généraux que ceux associés à des groupes  $p$ -divisibles dont nous venons de parler, le cocaractère de Hodge  $\mu$  n'étant pas nécessairement supposé minuscule. Plus précisément, soit  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  et  $L$  le complété de l'extension maximale non-ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . Soit donné un groupe réductif  $G$  non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$  et une paire  $(b, \mu)$  avec  $b \in G(L)$ ,  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$  et  $\bar{b} \in B(G, \mu)$  l'ensemble de Kottwitz. Soit  $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$  le corps de définition de la classe de conjugaison de  $\mu$ . À  $\mu$  est associée une variété de drapeaux  $\mathcal{F}$  sur  $E$ . Notons  $\check{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{/\check{E}}$ . Rappelons que  $\check{E} = L$  est le complété de l'extension maximale non-ramifiée de  $E$ . Rapoport et Zink ont défini dans [RZ96] un ouvert faiblement admissible

$$\check{\mathcal{F}}^{\text{fa}} \subset \check{\mathcal{F}}^{\text{rig}}$$

de l'espace rigide analytique associé à la variété de drapeaux sur  $\check{E}$ . Si  $K|\check{E}$  est une extension de degré fini et  $x \in \check{\mathcal{F}}^{\text{fa}}(K)$  il lui est associée une représentation  $p$ -adique cristalline

$$\xi_x : \text{Gal}(\overline{\check{E}}|K) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

bien définie à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près. Le théorème 4.5.0.1 s'énonce alors ainsi.

**Théorème (Théorème 4.5.0.1).** *Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à  $\bar{b}$  et  $\bar{\mu}$  dans la chambre de Weyl positive « ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités ». Supposons  $b$  décent. Soit  $K|\check{E}$  une extension de degré fini et  $x \in \mathcal{F}(K)$  qui est un point générique de  $\mathcal{F}$ . Alors,  $x$  est admissible,  $x \in \check{\mathcal{F}}^{\text{fa}}(K)$  et l'image de la représentation cristalline*

$$\xi_x : \text{Gal}(\overline{\check{E}}|K) \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

*contient un sous-groupe ouvert de  $G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p)$ .*

Bien sûr pour qu'un tel théorème ne soit pas vide il faut montrer qu'il existe de tels points génériques. C'est ce que nous faisons dans la section 4.2. La condition concernant les polygones de Hodge et Newton se traduit de la façon suivante dans le cas des groupes  $p$ -divisibles et des données de type EL et PEL précédentes. Soient  $n = \dim_F V$  et  $d = [F : \mathbb{Q}_p]$ . À tout élément

$$(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Q}^n$$

vérifiant  $\nu_1 \leq \dots \leq \nu_n$  on associe le polygone convexe

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_1, \dots, \nu_n) : [0, n] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto \nu_1 + \dots + \nu_i \text{ si } i \in [1, n] \cap \mathbb{N} \\ 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

de pentes  $\nu_1, \dots, \nu_n$  et d'origine  $(0, 0)$ . Puisque l'isocrystal  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$  est muni d'une action de  $F$ , les multiplicités de ses pentes sont des multiples de  $d$ . Soient

$$\underbrace{\lambda_1 = \dots = \lambda_1}_{d\text{-fois}} \leq \dots \leq \underbrace{\lambda_i = \dots = \lambda_i}_{d\text{-fois}} \leq \dots \leq \underbrace{\lambda_n = \dots = \lambda_n}_{d\text{-fois}}$$

les pentes du polygone de Newton  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$ . On pose alors

$$\mathcal{P}_N = \mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Soit

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{P}\left(\frac{1}{d} \sum_{\tau \in I_F} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{p_\tau}, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{q_\tau}\right).$$

Puisque  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ ,  $\mathcal{P}_N$  et  $\mathcal{P}_H$  ont même points terminaux et  $\mathcal{P}_N \geq \mathcal{P}_H$ . On demande alors que

$$\forall x \in ]0, n[, \quad \mathcal{P}_N(x) > \mathcal{P}_H(x).$$

#### Remarque 4.1.0.1.

1. Dans le cas sans structures additionnelles, la condition précédente sur les polygones signifie que nos groupes  $p$ -divisibles n'ont pas de pente 0 et 1. Dans ce cas là la condition sur les polygones est nécessaire afin qu'il existe un point dans l'espace des périodes tel que l'image de la représentation de monodromie associée contienne un sous-groupe ouvert de  $G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p)$ . En effet, s'il existe une pente 0 ou 1, une telle représentation se factorise automatiquement par un sous-groupe parabolique propre de  $G(\mathbb{Q}_p)$ .
2. Bien que nous ne l'avons pas vérifié, il est en fait probable que cela soit toujours le cas pour des  $G$ -structures additionnelles générales : si les polygones de Newton et Hodge au sens précédent se touchent en dehors de leurs extrémités alors les représentations de monodromies  $\xi_x$  se factorisent par un sous-groupe parabolique propre.

**Remarque 4.1.0.2.** Le résultat précédent est un analogue  $p$ -adique de résultats d'André ([And92] sect. 6) sur le groupe de Mumford-Tate générique en théorie de Hodge usuelle sur  $\mathbb{C}$ .

**Remarque 4.1.0.3.** Afin d'appliquer le théorème 4.5.0.1 au cas des espaces de Rapoport-Zink de type EL et PEL, à cause des normalisations concernant les filtrations de Hodge des modules de Dieudonné covariant (cf. chapitre 1), afin que le morphisme  $\xi_x : \text{Gal}(\bar{E}|K) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$  soit bien celui associé au module de Tate il faut l'appliquer non pas à  $(b, \mu)$  mais  $(p^{-1}b, \bar{\mu})$ . La condition concernant les polygones associés à  $(b, \mu)$  énoncée ci dessus est la même que celle associée à  $(p^{-1}b, \bar{\mu})$ .

## 4.2 Existence de points génériques sur $\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$

Pour pouvoir appliquer le théorème 4.5.0.1 qui suit nous avons besoin de vérifier le résultat suivant.

**Proposition 4.2.0.3.** *Le corps  $\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$  est de degré de transcendance infini sur  $\mathbb{Q}_p$ .*

*Démonstration.* Pour  $i, j \in \mathbb{N}$ , posons  $N'_{ij} = (j^{i+1})!$  et

$$N_{ij} = \begin{cases} N'_{ij} & \text{si } j = n! \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour  $i \in \mathbb{N}$ , choisissons

$$x_i = \sum_{j \geq 0} V^j[x_{ij}] \in W(\overline{\mathbb{F}_p})$$

tel que

- si  $N_{ij} \neq 0$ ,  $x_{ij}$  est un générateur de  $\mathbb{F}_p^{\times N_{ij}}$ ,
- si  $N_{ij} = 0$ ,  $x_{ij} = 0$ .

On montre que la famille  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est algébriquement indépendante sur  $\mathbb{Q}_p$ .

Un élément  $\sum_{j \geq 0} V^j[y_j] \in W(\overline{\mathbb{F}_p})$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}_p$  si et seulement s'il existe  $s \in \mathbb{N}$  tel que  $y_j \in \mathbb{F}_{p^s}$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . L'élément  $x_0$  est donc transcendant sur  $\mathbb{Q}_p$ .

Supposons maintenant que  $x_0, \dots, x_{i-1}$  sont algébriquement indépendants sur  $\mathbb{Q}_p$ , on veut montrer que  $x_0, \dots, x_i$  le sont aussi. Soit une relation

$$a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = 0$$

avec  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_{i-1}]$  et  $m > 0$ . Il suffit de montrer que  $a_m = 0$ . Soient  $a_k = \sum_{s \geq 0} V^s[a_{ks}]$  pour  $k = 0, \dots, m$ . Supposons par l'absurde que  $a_m \neq 0$  et soit  $r$  le plus petit entier tel que  $a_{m,r} \neq 0$ .

Remarquons que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{i+1}!}{p^{b(m-1)} \cdot (bm+r)^{i!}} = +\infty$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(b^{i+1})!}{p^{b(m-1)} \cdot (b-1)^{i+1}!} = +\infty.$$

Choisissons alors  $b \in \mathbb{N}$  tel que  $b$  soit de la forme  $n!$  avec  $(n+1)! > m \cdot n! + r$ ,

$$b^{i+1}! > p^{b(m-1)} m \cdot (bm+r)^{i!} \quad \text{et} \quad (b^{i+1})! > p^{b(m-1)} m \cdot (b-1)^{i+1}!$$

On a donc

- $x_{ib} \neq 0$  et  $x_{ij} = 0$  pour  $j = b+1, \dots, bm+r$ ,
- $N_{i,b} > p^{b(m-1)} m \cdot \max(N'_{i-1, bm+r}, N'_{i, b-1})$ .

Posons

$$n_0 := bm+r \quad \text{et} \quad M = \max(N'_{i-1, bm+r}, N'_{i, b-1}).$$

De l'inégalité  $M \geq N'_{i, b-1}$  on tire que

$$\forall t, 0 \leq t \leq b-1, \quad x_{i,t} \in \mathbb{F}_{p^M}$$

c'est à dire

$$x_i \bmod p^b \in W_b(\mathbb{F}_{p^M}).$$

De l'inégalité  $M \geq N'_{i-1, n_0}$  et de ce que  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_{i-1}]$ , on tire que

$$\text{pour } 0 \leq k \leq m, 0 \leq t \leq n_0, \quad a_{k,t} \in \mathbb{F}_{p^M}$$

c'est à dire

$$\text{pour } 0 \leq k \leq m, \quad a_k \bmod p^{n_0+1} \in W_{n_0+1}(\mathbb{F}_{p^M}).$$

D'après le lemme 4.2.0.1 qui suit,

$$a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0 = \sum_{s \geq 0} V^s[z_s]$$

où  $z_{n_0}$  est un polynôme en  $x_{i,b}$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_{p^M}$  de degré  $p^{n_0-b}m$  et de facteur dominant

$$a_{m,r}^{p^{bm}} \cdot x_{i,b}^{n_0-b} m.$$

Puisque  $x_{i,b}$  est un générateur de  $\mathbb{F}_{p^{N_{ib}}}$  et que  $N_{i,b} > p^{n_0-b}mM$ , on en déduit que  $a_{m,r} = 0$ . C'est donc une contradiction.  $\square$

**Lemme 4.2.0.1.** Soient  $r \in \mathbb{N}$  et  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Posons

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i \geq 0} V^i[X_i] \right)^m \cdot \left( \sum_{j \geq r} V^j[Y_{m,j}] \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i \geq 0} V^i[X_i] \right)^k \cdot \left( \sum_{j \geq 0} V^j[Y_{k,j}] \right) \\ &= \sum_{s \geq 0} V^s[P_s] \in W(\mathbb{F}_p[X_i, Y_{k,j}]_{i,j,k \geq 0}). \end{aligned}$$

Alors pour tout  $b \in \mathbb{N}$ ,

- si  $s < bm + r$ ,  $\deg_{X_b}(P_s) < p^{s-b}m$  ;
- si  $s = bm + r$ ,  $\deg_{X_b}(P_s) = p^{s-b}m$ . De plus, le coefficient de  $X_b^{p^{s-b}m}$  dans  $P_s$  est  $Y_{m,r}^{p^{bm}}$ .

*Démonstration.* Puisque  $P_s$  est un polynôme en les  $(X_i, Y_{k,j})_{\substack{0 \leq i, j \leq s \\ 0 \leq k \leq m}}$ , le résultat est clair si  $s < b$  car alors  $\deg_{X_b}(P_s) = -\infty$ . On suppose donc dans la suite que  $b \leq s$ .

On raisonne par récurrence sur  $s$ . Lorsque  $s = 0$ ,

$$P_0 = \begin{cases} \sum_{k=0}^m X_0^k Y_{k,0} & r = 0 \\ \sum_{k=0}^{m-1} X_0^k Y_{k,0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit le résultat dans ce cas là.

Supposons maintenant  $s > 0$ . Notons

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i \geq 0} V^i[X_i] \right)^m \cdot \left( \sum_{j \geq r} V^j[Y_{m,j}] \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i \geq 0} V^i[X_i] \right)^k \cdot \left( \sum_{j \geq 0} V^j[Y_{k,j}] \right) \\ &= \sum_{s \geq 0} V^s[Q_s] \end{aligned}$$

dans  $W(\mathbb{Z}[X_i, Y_j]_{i,j,k \geq 0})$ . Pour tout  $s$ , le polynôme  $P_s$  est donc la réduction modulo  $p$  de  $Q_s$ . Appliquant le  $s$ -ième polynôme de Witt à cette égalité on obtient

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^m \left( \sum_{j=r}^s p^j Y_{m,j}^{p^{s-j}} \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^k \left( \sum_{j=0}^s p^j Y_{k,j}^{p^{s-j}} \right) \\ &= \sum_{t=0}^s p^t Q_t^{p^{s-t}} \end{aligned}$$

où si  $r > s$ , la somme  $\sum_{j=r}^s p^j Y_{m,j}^{p^{s-j}}$  est par définition 0. On a donc

$$\begin{aligned} & (p^b X_b^{p^{s-b}} + \alpha)^m p^r \beta + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^k \left( \sum_{j=0}^s p^j Y_{k,j}^{p^{s-j}} \right) \\ &= \sum_{t=0}^s p^t Q_t^{p^{s-t}} \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des polynômes ne contenant pas la variable  $X_b$ . Si  $s < bm + r$  on a donc

$$\deg_{X_b} \left( \sum_{t=0}^s p^t Q_t^{p^{s-t}} \bmod p^{s+1} \right) < p^{s-b}m. \quad (4.1)$$

où

$$\sum_{t=0}^s p^t Q_t^{p^{s-t}} \bmod p^{s+1} \in (\mathbb{Z}/p^{s+1}\mathbb{Z})[X_i, Y_{k,j}]_{i,j,k \geq 0}.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout  $t < s$ ,

$$\deg_{X_b}(P_t) < p^{t-b}m$$

et donc

$$\deg_{X_b} \left( p^t Q_t^{p^{s-t}} \bmod p^{s+1} \right) < p^{s-b}m \quad (4.2)$$

car pour un polynôme  $f \in \mathbb{Z}[T]$  et  $a \in \mathbb{N}$ ,

$$\deg(f^{p^a} \bmod p^{a+1}) = p^a \deg(f \bmod p).$$

Combinant les relations (4.1) et (4.2) on obtient

$$\begin{aligned} \deg_{X_b}(p^s Q_s \bmod p^{s+1}) &< p^{s-b}m \\ \Rightarrow \deg_{X_b} P_s &< p^{s-b}m. \end{aligned}$$

Si  $s = bm + r$ , alors

$$\begin{aligned} &\deg_{X_b} \left( \left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^m \left( \sum_{j=r}^s p^j Y_{k,j}^{p^{s-j}} \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i=0}^s p^i X_i^{p^{s-i}} \right)^k \left( \sum_{j \geq 0} p^j Y_{k,j}^{p^{s-j}} \right) \bmod p^{s+1} \right) \\ &= p^{s-b}m \end{aligned}$$

et modulo  $p^{s+1}$ , le coefficient de  $X_b^{p^{s-b}m}$  dans ce polynôme produit est  $p^s Y_{m,r}^{p^{s-r}} = p^s Y_{m,r}^{p^{bm}}$ . D'autre part, pour  $k < s$  l'inégalité (4.2) est encore vérifiée grâce à l'hypothèse de récurrence. On obtient donc que

$$\begin{aligned} \deg_{X_b}(p^s Q_s \bmod p^{s+1}) &= p^{s-b}m \\ \Rightarrow \deg_{X_b} P_s &= p^{s-b}m. \end{aligned}$$

De plus, le coefficient de  $X_b^{p^{s-b}m}$  dans  $p^s Q_s$  est  $p^s Y_{m,r}^{p^{bm}}$  et donc le coefficient de  $X_b^{p^{s-b}m}$  dans  $P_s$  est  $Y_{m,r}^{p^{bm}}$ .  $\square$

## 4.3 Le groupe de Mumford-Tate $p$ -adique

### 4.3.1 Rappels sur la catégorie Tannakienne des représentations cristallines

Soient  $K$  un corps de valuation discrète extension de  $\mathbb{Q}_p$  à corps résiduel  $k$  parfait, et  $K_0 = \text{Frac}(W(k))$ . Désignons par  $\sigma$  le Frobenius de  $k$  et de  $K_0$ . On fixe une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$  et on note  $\Gamma_K = \text{Gal}(\bar{K}|K)$ .

On rappelle la définition d'un isocrital filtré ainsi que la définition d'un isocrital filtré faiblement admissible (cf. [Fon94b]) que Fontaine appelle  $\varphi$ -modules filtrés et  $\varphi$ -modules filtrés faiblement admissibles respectivement.

**Définition 4.3.1.1.** *Un isocrital filtré sur  $K/K_0$  est un triplet  $D = (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K)$ , où*

- $N = (N, \varphi)$  est un isocrystal sur  $k$ ,
- $\text{Fil}^\bullet N_K$  est une  $\mathbb{Z}$ -filtration décroissante de  $N_K := N \otimes_{K_0} K$  par des sous- $K$ -espaces vectoriels telle que  $\text{Fil}^i N_K = N_K$  pour  $i \ll 0$  et  $\text{Fil}^i N_K = 0$  pour  $i \gg 0$ .

La catégorie des isocristaux filtrés sur  $K/K_0$  est notée  $\text{IsocFil}_{K/K_0}$ . C'est une catégorie additive  $\mathbb{Q}_p$ -linéaire exacte quasi-abélienne.

**Définition 4.3.1.2 (Fontaine).** *Pour tout isocrystal filtré  $D = (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K)$ , on définit*

$$\begin{aligned} t_N(D) &= v_p(\det \varphi) \in \mathbb{Z} \\ t_H(D) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K \text{gr}^i(N_K) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Un isocrystal filtré  $D$  est dit faiblement admissible si  $t_N(D) = t_H(D)$ , et pour tout sous-objet strict  $D'$  de  $D$  dans  $\text{IsocFil}_{K/K_0}$ ,  $t_N(D') \geq t_H(D')$ .

La sous-catégorie pleine des isocristaux filtrés faiblement admissibles sur  $K/K_0$  est désignée par  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$ . C'est une catégorie abélienne. Le produit tensoriel de deux isocristaux filtrés faiblement admissibles l'est aussi grâce à Faltings ([Fal95]) et Totaro ([Tot96] théorème 1). Donc,  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$  est une catégorie tannakienne  $\mathbb{Q}_p$ -linéaire ([Del90] 2.8) avec comme foncteur fibre naturel sur  $K_0$  :

$$\begin{aligned} \omega' : \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} &\longrightarrow \text{Vect}_{K_0} \\ (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K) &\longmapsto N \end{aligned}$$

où  $\text{Vect}_{K_0}$  est la catégorie des  $K_0$ -espaces vectoriels de dimension finie.

D'après Colmez et Fontaine ([CF00]), faiblement admissible est équivalent à admissible. On a donc une équivalence de catégories de Fontaine :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) &\xrightarrow{\sim} \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} \\ V &\longmapsto ((V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}})^{\Gamma_K}, \text{Id} \otimes \varphi, \text{Fil}^\bullet) \end{aligned}$$

où

- $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K)$  est la catégorie des représentations  $p$ -adiques cristallines de  $\Gamma_K$ ,
- $B_{\text{cris}}$  désigne  $B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ ,
- la filtration  $\text{Fil}^\bullet$  est obtenue à partir du plongement

$$(V \otimes B_{\text{cris}})^{\Gamma_K} \otimes_{K_0} K \hookrightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR}$$

et de la filtration  $V \otimes \text{Fil}^\bullet B_{dR}$ .

L'équivalence inverse est donnée par

$$\begin{aligned} V_{\text{cris}} : \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} &\longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \\ (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K) &\longmapsto \text{Fil}^0(N \otimes_{K_0} B_{\text{cris}})^{\varphi=\text{Id}}. \end{aligned}$$

La catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K)$  est tannakienne neutre sur  $\mathbb{Q}_p$  avec comme foncteur fibre naturel :

$$\begin{aligned} \omega : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\ (V, \rho) &\longmapsto V. \end{aligned}$$

Il y a de plus un isomorphisme de foncteurs

$$\omega \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} (\omega' \circ \mathbb{D}_{\text{cris}}) \otimes_{K_0} B_{\text{cris}} \quad (4.3)$$

c'est à dire, les foncteurs fibres  $\omega$  et

$$\omega' \circ \mathbb{D}_{cris} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \longrightarrow \text{Vect}_{K_0}$$

deviennent isomorphes après extension des scalaires à  $B_{cris}$ .

Soit  $\text{Isoc}_{K_0}$  la catégorie des isocristaux  $(N, \varphi)$  où  $N$  est un  $K_0$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\varphi$  un isomorphisme  $\sigma$ -linéaire. Elle est Tannakienne sur  $\mathbb{Q}_p$  avec un foncteur fibre évident

$$\begin{aligned} \omega' : \text{Isoc}_{K_0} &\longrightarrow \text{Vect}_{K_0} \\ (N, \varphi) &\longmapsto N \end{aligned}$$

que l'on note de la même façon que le foncteur fibre  $\omega'$  sur  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$  puisque ce dernier est obtenu par composition

$$\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} \longrightarrow \text{Isoc}_{K_0} \xrightarrow{\omega'} \text{Vect}_{K_0}.$$

Supposons maintenant et dans toute la suite que  $k$  est algébriquement clos. Soit pour un entier  $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

$$\text{Isoc}_{K_0}^s$$

la sous-catégorie Tannakienne des isocristaux dont les dénominateurs des pentes de Dieudonné-Manin divisent  $s$ . On a donc «  $\text{Isoc}_{K_0} = \bigcup_{s \geq 1} \text{Isoc}_{K_0}^s$  » avec  $\text{Isoc}_{K_0}^s \subset \text{Isoc}_{K_0}^{s'}$  si  $s|s'$ . En particulier, toute sous-catégorie Tannakienne de  $\text{Isoc}_{K_0}$  engendrée par un nombre fini d'objets est contenue dans  $\text{Isoc}_{K_0}^s$  pour  $s \gg 1$ . Soit  $\mathbb{Q}_{p^s} = K_0^{\sigma^s = \text{Id}}$  l'extension non-ramifiée de degré  $s$  de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $K_0$ . Il y a un foncteur fibre

$$\begin{aligned} \omega'_s : \text{Isoc}_{K_0}^s &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \\ (N, \varphi) &\longmapsto \bigoplus_{\lambda \in \frac{1}{s}\mathbb{Z}} N^{\varphi^s = p^{s\lambda}} \end{aligned}$$

tel que

$$\omega'_{|\text{Isoc}_{K_0}^s} = \omega'_s \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} K_0.$$

En particulier,  $\text{Isoc}_{K_0}$  possède un foncteur fibre sur  $\mathbb{Q}_p^{nr}$ . Soit

$$\text{Isoc}_{K_0}^s \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$$

la catégorie des isocristaux dans  $\text{Isoc}_{K_0}^s$  munis d'une action de  $\mathbb{Q}_{p^s}$ . Un objet de cette catégorie est noté par  $(N, \varphi, \iota)$  où  $\iota : \mathbb{Q}_{p^s} \rightarrow \text{End}(N, \varphi)$ . Elle est Tannakienne neutre sur  $\mathbb{Q}_{p^s}$  car  $\omega'_s$  induit un foncteur fibre

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}'_s : \text{Isoc}_{K_0}^s \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \\ (N, \varphi, \iota) &\longmapsto N_{\gamma_0} \end{aligned}$$

où

$$N = \bigoplus_{\gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s}|\mathbb{Q}_p)} N_\gamma$$

avec

$$N_\gamma = \{x \in N \mid \forall a \in \mathbb{Q}_{p^s}, \iota(a)(x) = \gamma(a)x\}$$

et  $\gamma_0 = \text{Id}$ . Il y a un foncteur d'extension des scalaires (cf. [DMOS82])

$$\begin{aligned} \text{Isoc}_{K_0}^s &\longrightarrow \text{Isoc}_{K_0}^s \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \\ X &\longmapsto X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \end{aligned}$$

et le diagramme suivant commute à un isomorphisme canonique près

$$(4.4) \quad \begin{array}{ccc} \text{Isoc}_{K_0}^s & & \\ \downarrow & \searrow^{\omega'_s} & \\ \text{Isoc}_{K_0}^s \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} & \xrightarrow{\tilde{\omega}'_s} & \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}}. \end{array}$$

où la flèche verticale est l'extension des scalaires précédente.

Revenons aux isocristaux filtrés admissibles. Soit

$$\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s}$$

la sous-catégorie pleine de  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$  dont les objets sont les  $(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K)$  avec  $(N, \varphi) \in \text{Isoc}_{K_0}^s$ . On a donc par composition avec le foncteur oubli de la filtration

$$\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} \longrightarrow \text{Isoc}_{K_0}^s$$

des foncteurs fibres

$$\begin{array}{ccc} \omega'_s : \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} & \longrightarrow & \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \\ \tilde{\omega}'_s : \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} & \longrightarrow & \text{Vect}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \end{array}$$

avec un diagramme commutatif identique au diagramme (4.4) et

$$\omega'_{|\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s}} = \omega'_s \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} K_0.$$

### 4.3.2 Le groupe de Mumford-Tate $p$ -adique

Soit  $K/K_0$  comme dans la section précédente où  $K_0 = W(k)_{\mathbb{Q}}$  et on suppose  $k$  algébriquement clos. On note également  $L = K_0$ . Soit  $G$  un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$ . Supposons nous donné une paire  $(b, \mu)$  où

$$b \in G(L)$$

et

$$\mu : \mathbb{G}_m \longrightarrow G_K.$$

On note  $\bar{b} \in B(G)$  la classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $b$  et  $\bar{\mu}$  la classe de  $G(\bar{K})$ -conjugaison de  $\mu_{\bar{K}} : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\bar{K}}$ . Supposons que

$$\bar{b} \in B(G, \bar{\mu})$$

l'ensemble de Kottwitz (cf. les rappels de la section 2.1.1). Supposons la paire  $(b, \mu)$  admissible au sens de la définition 1.18 de [RZ96]. Elle définit donc un tenseur foncteur exacte entre catégories Tannakiennes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{b,\mu} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) & \longrightarrow & \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}} \\ (V, \rho) & \longmapsto & (V_{K_0}, \rho(b) \cdot \text{Id} \otimes \sigma, \text{Fil}_{\mu}^\bullet V_K) \end{array}$$

où  $V_{K_0} := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0$ ,  $V_K := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$  et si

$$V_K = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{K,n}$$

est la décomposition isotypique de la représentation  $\rho \circ \mu : \mathbb{G}_m \rightarrow \text{GL}(V_K)$  selon les caractères de  $\mathbb{G}_m$ ,  $X^*(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}$ , alors

$$\text{Fil}_{\mu}^k V_K = \bigoplus_{n \geq k} V_{K,n}.$$

Notons

$$\mathcal{F}_{b,\mu} = V_{cris} \circ \mathcal{G}_{b,\mu} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) \longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K).$$

Soit le foncteur fibre canonique

$$\begin{aligned} \omega_{can} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) &\longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\ (V, \rho) &\longmapsto V \end{aligned}$$

Puisque  $\bar{b} \in B(G, \bar{\mu})$ , le torsueur des périodes associé est trivial : le foncteur fibre

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \xrightarrow{\mathcal{F}_{b,\mu}} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \xrightarrow{\omega} \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}$$

est isomorphe à  $\omega_{can}$ . Le choix d'un isomorphisme  $\omega_{can} \xrightarrow{\sim} \omega \circ \mathcal{F}_{b,\mu}$  définit un morphisme continu de groupes

$$\xi_{b,\mu} : \Gamma_K \longrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$$

et un isomorphisme entre  $\mathcal{F}_{b,\mu}$  et le foncteur

$$\begin{aligned} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G &\longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \\ (V, \rho) &\longmapsto (V, \rho \circ \xi_{b,\mu}). \end{aligned}$$

Un autre choix fournit un morphisme  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugué. On obtient ainsi une classe de  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison de morphismes  $\{\xi_{b,\mu}\}$ . On fixe désormais un isomorphisme de foncteurs fibres et donc une représentation  $\xi_{b,\mu}$  dans la classe de  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison précédente.

Voici maintenant une traduction des résultats de Serre ([Ser79] théorème 1') et Sen ([Sen73] § 4, thm 1). On note

**Proposition 4.3.2.1.**

1. L'algèbre de Lie du groupe de Lie  $p$ -adique  $\text{Im}(\xi_{b,\mu}) \subset G(\mathbb{Q}_p)$  est une sous-algèbre de Lie algébrique de Lie  $G$ .
2. L'image de  $\xi_{b,\mu}$  est ouverte dans son enveloppe algébrique (i.e. son adhérence de Zariski).
3. La décomposition de Hodge-Tate d'une représentation cristalline définit canoniquement un caractère

$$\mu_{HT} : \mathbb{G}_m \longrightarrow G_{\widehat{K}}$$

$G(\widehat{K})$ -conjugué à  $\mu_{\widehat{K}}$  tel que la composante neutre de l'enveloppe algébrique de  $\text{Im} \xi_{b,\mu}$  soit le plus petit sous-groupe algébrique de  $G$  sur  $\mathbb{Q}_p$  contenant  $\text{Im} \mu_{HT}$ .

*Démonstration.* La décomposition de Hodge-Tate d'une représentation cristalline fournit un tenseur foncteur exact

$$\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \longrightarrow \widehat{K} - \text{espaces vectoriels } \mathbb{Z}\text{-gradués.}$$

On en déduit l'existence de  $\mu_{HT}$  tel que pour tout  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$ , la décomposition de Hodge-Tate de  $\rho \circ \xi_{b,\mu}$  soit donnée par  $\rho \circ \mu_{HT}$  i.e. si

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K})_i$$

est la décomposition isotypique de la représentation  $\rho \circ \mu_{HT}$  selon les caractères de  $\mathbb{G}_m$ , la représentation semi-linéaire  $(\rho \circ \xi_{b,\mu}) \otimes Id$  est isomorphe en restriction à  $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K})_i$  à une somme directe de  $\widehat{K}(i)$ .

Soit maintenant  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation fidèle de  $G$ . Appliquant ([Ser79] théorème 1') et ([Sen73] § 6) à la représentation  $\rho \circ \xi_{b,\mu}$  on conclut.  $\square$

**Définition 4.3.2.1.** On note  $MT_{b,\mu}$  le sous-groupe algébrique de  $G$  qui est l'adhérence de Zariski de  $\text{Im} \xi_{b,\mu}$ .

Bien sûr, le sous-groupe  $MT_{b,\mu} \subset G$  n'est défini qu'à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près via le choix d'un isomorphisme de foncteurs fibres  $\omega_{can} \xrightarrow{\sim} \omega \circ \mathcal{F}_{b,\mu}$  que l'on a fixé précédemment. La proposition précédente affirme que  $\text{Im } \xi_{b,\mu}$  est un sous-groupe ouvert de  $MT_{b,\mu}(\mathbb{Q}_p)$  que  $MT_{b,\mu}$  est le plus petit sous-groupe algébrique de  $G$  contenant l'image de  $\mu_{HT}$ . Voici une description Tannakienne de  $MT_{b,\mu}$ . Soit

$$\mathcal{T}_{b,\mu} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K)$$

la sous-catégorie Tannakienne de  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K)$  engendrée par l'image essentielle de  $\mathcal{F}_{b,\mu}$ , c'est à dire la plus petite sous-catégorie de  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K)$  contenant les  $\mathcal{F}_{b,\mu}(X)$ ,  $X \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$ , stable par produit tensoriel, somme directe, contragrédiente et sous-quotient. Si  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une représentation fidèle de  $G$  alors  $\mathcal{T}_{b,\mu} = \langle \mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho) \rangle$  (catégorie Tannakienne engendrée). Il y a un foncteur fibre

$$\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}} : \mathcal{T}_{b,\mu} \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p}.$$

Le foncteur  $\mathcal{F}_{b,\mu}$  induit un plongement

$$\underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}}) \hookrightarrow \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega \circ \mathcal{F}_{b,\mu}) \simeq \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega_{can}) = G.$$

**Proposition 4.3.2.2.** *On a  $MT_{b,\mu} = \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}})$ .*

*Démonstration.* Il y a un morphisme canonique

$$\Gamma_K \longrightarrow \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}})(\mathbb{Q}_p) \subset G(\mathbb{Q}_p).$$

On a donc

$$MT_{b,\mu} \subset \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}}).$$

D'après Chevalley, il existe une représentation  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  et une droite  $D \subset V$  telles que  $MT_{b,\mu}$  soit le stabilisateur de  $D$  dans  $G$  :

$$MT_{b,\mu} = \{g \in G \mid \rho(g)(D) \subset D\}.$$

Puisque

$$\rho \circ \xi_{b,\mu} : \Gamma_K \longrightarrow MT_{b,\mu}(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\rho} \text{GL}(V),$$

$D$  définit une sous-représentation de dimension 1 de  $\mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho)$  et donc un objet de la catégorie Tannakienne  $\mathcal{T}_{b,\mu}$  qui est un sous-objet de  $\mathcal{F}_{b,\mu}(V, \rho)$ . Il est nécessairement stable par l'action d'un élément de  $\underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}})$ .  $\square$

Le foncteur fibre  $\omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}}$  fait de  $\mathcal{T}_{b,\mu}$  une catégorie Tannakienne neutre. On a donc le corollaire suivant.

**Corollaire 4.3.2.1.** *On a une équivalence de catégories Tannakiennes*

$$\mathcal{T}_{b,\mu} \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} MT_{b,\mu}.$$

### 4.3.3 Description cristalline

Notons maintenant

$$\mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \subset \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$$

la sous-catégorie Tannakienne de  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$  engendrée par l'image essentielle de  $\mathcal{G}_{b,\mu}$ . Si  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est fidèle, il s'agit de la sous-catégorie Tannakienne engendrée par l'isocrystal filtré

$$(V_L, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_{\mu}^{\bullet} V_K).$$

Via la  $\otimes$ -équivalence

$$\mathbb{D}_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{\text{cris}}(\Gamma_K) \xrightarrow{\sim} \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad}}$$

on a donc une équivalence de catégories Tannakiennes

$$\mathcal{T}_{b,\mu} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}}.$$

Soit  $s \geq 1$  tel que pour une représentation fidèle  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ , les pentes de l'isocystal  $(V_L, \rho(b)\sigma)$  aient des dénominateurs divisant  $s$ . Alors,

$$\mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \subset \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s}.$$

Notons

$$\omega_{b,\mu}^{\text{cris},s} := \omega'_s|_{\mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}}} : \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p^s}.$$

**Définition 4.3.3.1.** *On note*

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} = \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\omega_{b,\mu}^{\text{cris},s}).$$

Soit

$$\nu_b : \mathbb{D} \longrightarrow G_L$$

le morphisme des pentes (cf. les rappels de la section 2.1.1). Rappelons ([Kot85] et [RZ96] def. 1.8) que  $b$  est décent pour l'entier  $s$  s'il vérifie

$$(b\sigma)^s = (s.\nu_b)(p)\sigma^s.$$

Si c'est le cas, d'après le corollaire 1.9 de [RZ96], on a

$$b \in G(\mathbb{Q}_p^s) \quad \text{et} \quad \nu_b : \mathbb{D} \longrightarrow G_{\mathbb{Q}_p^s}.$$

On vérifie alors aussitôt le lemme suivant.

**Lemme 4.3.3.1.** *Supposons  $b$  décent pour l'entier  $s$ . Alors*

$$\begin{aligned} \omega'_s \circ \mathcal{G}_{b,\mu} &= \omega_{\text{can}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^s : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p^s} \\ (V, \rho) &\longmapsto V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^s. \end{aligned}$$

On en déduit que si  $b$  est décent pour  $s$  alors le foncteur  $\mathcal{G}_{b,\mu}$  induit canoniquement un plongement

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} \subset G_{\mathbb{Q}_p^s}.$$

Notons la proposition suivante qui relie le « groupe de Mumford-Tate cristallin » au « groupe de Mumford-Tate étale ».

**Proposition 4.3.3.1.** *Il y a un isomorphisme de schémas en groupes sur  $\text{Spec}(B_{\text{cris}})$*

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p^s} B_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} MT_{b,\mu} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}.$$

*De plus,  $MT_{b,\mu}^{\text{cris}}$  et  $MT_{b,\mu} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^s$  sont formes intérieures l'un de l'autre.*

*Démonstration.* C'est une conséquence de l'existence de l'isomorphisme de foncteurs fibres sur la catégorie Tannakienne  $\mathcal{T}_{b,\mu}$

$$\omega_{b,\mu}^{\text{cris},s} \circ \mathbb{D}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p^s} B_{\text{cris}} \xrightarrow{\sim} \omega|_{\mathcal{T}_{b,\mu}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}.$$

□

Notons

$$\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s} : \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^s \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{Q}_p^s}$$

le foncteur fibre obtenu par extension des scalaires à partir de  $\omega_{b,\mu}^{\text{cris},s}$  (cf. [DMOS82] exp.II sect. 3). On a alors

$$MT_{b,\mu}^{\text{cris}} = \underline{\text{Aut}}^{\otimes}(\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s})$$

et d'après ([DMOS82] exp.II prop.3.11) le foncteur  $\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}$  induit une équivalence de catégories :

$$\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s} : \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_{p^s}}(\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}}).$$

Avant d'énoncer la proposition qui suit, rappelons qu'un objet  $X \in \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  est dit de rang 1 si  $\dim_{\mathbb{Q}_{p^s}} \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) = 1$ . Si  $X = (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K, \iota)$  où  $(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K) \in \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}}$  et  $\iota : \mathbb{Q}_{p^s} \rightarrow \text{End}(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K)$  cela signifie que

$$\dim_{K_0} N = s.$$

**Proposition 4.3.3.2.** *Supposons  $b$  décent pour l'entier  $s$ .*

1. On a

$$\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}} = \left\{ g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \forall (V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G, \forall X \subset \mathcal{G}_{b,\mu}(V, \rho) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \text{ de rang } 1 \right. \\ \left. \rho(g) \cdot \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) \subset \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) \right\}.$$

2. Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation fidèle. Pour  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  notons  $T^{m_1, m_2}$  la représentation  $\rho^{\otimes m_1} \otimes \rho^{\vee \otimes m_2}$ . On a alors

$$\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}} = \left\{ g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \forall m_1, m_2, \forall X \subset \mathcal{G}_{b,\mu}(T^{m_1, m_2}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \text{ de rang } 1 \right. \\ \left. \rho(g) \cdot \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) \subset \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) \right\}.$$

*Démonstration.* Le point (2) résulte du point (1) et de ce que toute représentation de  $G$  se réalise comme sous-représentation de  $T^{m_1, m_2}$  pour des entiers  $m_1, m_2$ . Passons au point (1). Soit  $H \subset G_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  le groupe algébrique de droite dans l'égalité cherchée. Par définition de  $\underline{\text{Aut}}^\otimes(\omega_{b,\mu}^{\text{cris},s})$  on a

$$\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}} \subset H.$$

D'après Chevalley, il existe une représentation  $\rho' : G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_{p^s}}(V)$  et une  $\mathbb{Q}_{p^s}$ -droite  $D \subset V$  telle que

$$\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}} = \{g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \rho'(g)(D) \subset D\}.$$

Via l'équivalence  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} = \text{Rep}_{\mathbb{Q}_{p^s}}(G)$ , soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{Q}_p}(V)$  la représentation de  $G$  munie de son action  $\iota$  de  $\mathbb{Q}_{p^s}$  associée à  $\rho'$ . On a donc  $\mathcal{G}_{b,\mu}(V, \rho) \in \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}}$  et grâce à  $\iota$ ,

$$(\mathcal{G}_{b,\mu}(V, \rho), \mathcal{G}_{b,\mu}(\iota)) \in \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}.$$

Puisque

$$\mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbb{Q}_{p^s}} \text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}},$$

la droite  $D$  définit un sous-objet  $X$  de rang 1,

$$X \subset (\mathcal{G}_{b,\mu}(V, \rho), \mathcal{G}_{b,\mu}(\iota)).$$

Si  $Y \in \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  et  $Z \in \mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}}$  est l'objet  $Y$  après oubli de l'action de  $\mathbb{Q}_{p^s}$ , on a une décomposition dans la catégorie  $\mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$

$$Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} = \bigoplus_{\gamma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s} | \mathbb{Q}_p)} (Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s})_\gamma$$

qui provient de ce que  $Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  est muni d'une action de  $\mathbb{Q}_{p^s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$ . Soit  $\gamma_0 = \text{Id} \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s} | \mathbb{Q}_p)$ . Alors,

$$Y = (Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s})_{\gamma_0} \subset Z \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}.$$

On a donc une suite de sous-objets dans  $\mathcal{T}_{b,\mu}^{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$

$$X \subset (\mathcal{G}_{b,\mu}(V, \rho), \mathcal{G}_{b,\mu}(\iota)) \subset \mathcal{G}_{b,\mu}(V, \rho) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$$

Soit maintenant  $g \in H$ . Par définition de  $H$ ,

$$g(\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X)) \subset \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X),$$

mais

$$\tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(X) = D \subset V = \tilde{\omega}_{b,\mu}^{\text{cris},s}(\mathcal{G}_{b,\mu}(V, \rho), \mathcal{G}_{b,\mu}(t)).$$

et donc  $g \in \text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}}$ .  $\square$

Grâce à la proposition précédente et au lemme qui suit on va donner une description « concrète » de  $\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}}$ .

**Lemme 4.3.3.2.** *Les objets de rang 1 de  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  sont classifiés par  $\mathbb{Z}^s$ . À  $(d_0, \dots, d_{s-1}) \in \mathbb{Z}^s$  est associé  $(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K, \iota)$  où  $(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K) \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s}$  et  $\iota : \mathbb{Q}_{p^s} \rightarrow \text{End}(N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K)$  sont donnés par :*

– on a

$$N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p^s} \cdot e_i$$

où l'action  $\iota$  de  $\mathbb{Q}_{p^s}$  sur  $\mathbb{Q}_{p^s} \cdot e_i$  est donnée par le plongement  $\sigma^i$ ,

– l'action de  $\varphi$  est donnée par

$$\begin{cases} \varphi(e_i) = e_{i+1} & \text{si } 0 \leq i < s-1 \\ \varphi(e_{s-1}) = p^k e_0 \end{cases}$$

où  $k = \sum_{i=0}^{s-1} d_i$ ,

– la filtration est

$$\text{Fil}^\bullet = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} \text{Fil}^\bullet K \cdot e_i$$

où

$$\text{Fil}^j K \cdot e_i = \begin{cases} K \cdot e_i & \text{si } j \leq d_i \\ 0 & \text{si } j > d_i. \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit le tore  $T = \text{Res}_{\mathbb{Q}_{p^s}/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$ . Les objets de rang 1 dans  $\text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$  sont donnés par les paires admissibles  $(b', \mu')$  dans  $T$  qui se calculent à isomorphisme près grâce à la proposition 1.21 de [RZ96].  $\square$

Voici maintenant la description de  $\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}}$  que nous utiliserons dans la suite.

**Proposition 4.3.3.3.** *Supposons  $b$  décent pour l'entier  $s$ . Pour  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$  et  $v \in V_K$  notons*

$$\text{deg}_\mu(v) = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid v \in \text{Fil}_\mu^k V_K\}.$$

1. On a

$$\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}} = \left\{ g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \begin{array}{l} \forall (V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall v \in V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \text{ non nul satisfaisant} \\ (s \cdot \rho \circ \nu_b)(p) \cdot v = p^k v \text{ et } \sum_{i=0}^{s-1} \text{deg}_\mu((\rho(b)\sigma)^i(v)) = k, \exists c \in \mathbb{G}_m \rho(g) \cdot v = cv \end{array} \right\}.$$

2. Si  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une représentation fidèle,  $T^{m_1, m_2} = V^{\otimes m_1} \otimes V^{\vee \otimes m_2}$  et on note encore  $\rho$  l'action de  $G$  sur  $T^{m_1, m_2}$ ,

$$\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}} = \left\{ g \in G_{\mathbb{Q}_{p^s}} \mid \begin{array}{l} \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall v \in T^{m_1, m_2} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s} \text{ non nul satisfaisant} \\ (s \cdot \rho \circ \nu_b)(p) \cdot v = p^k v \text{ et } \sum_{i=0}^{s-1} \text{deg}_\mu((\rho(b)\sigma)^i(v)) = k, \exists c \in \mathbb{G}_m \rho(g) \cdot v = cv \end{array} \right\}.$$

*Démonstration.* Avec les notations du lemme 4.3.3.2, si

$$X \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s}$$

est l'objet de rang 1 associé à  $(d_0, \dots, d_{s-1}) \in \mathbb{Z}^s$ ,  $k = \sum_i d_i$ , et

$$Y = (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K, \iota) \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^s},$$

où  $\iota$  est l'action de  $\mathbb{Q}_{p^s}$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}(X, Y) \setminus \{0\} &\longrightarrow \left\{ v \in N \setminus \{0\} \mid \begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{Q}_{p^s}, \iota(a).x = ax, \quad \varphi^s(v) = p^k v \\ \text{et si } 0 \leq i \leq s-1, \text{ deg}_{\text{Fil}^\bullet N_K}(\varphi^i(v)) = d_i \end{array} \right\} \\ f &\longmapsto f(e_0). \end{aligned}$$

Cela résulte de ce que puisque  $X$  est de rang 1, un morphisme de  $X$  dans  $Y$  est un monomorphisme si et seulement s'il est non-nul. De plus, puisque nos isocristaux filtrés sont admissibles, un tel monomorphisme est strictement compatible aux filtrations. Le résultat est alors une conséquence de la proposition 4.3.3.2 couplé du fait que si  $Z = (N, \varphi, \text{Fil}^\bullet N_K) \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s}$ , alors

$$Z \otimes \mathbb{Q}_{p^s} = (N \otimes \mathbb{Q}_{p^s}, \varphi, \text{Fil}^\bullet(N_K \otimes \mathbb{Q}_{p^s}), \iota) \in \text{IsocFil}_{K/K_0}^{\text{ad},s}$$

où

- $N \otimes \mathbb{Q}_{p^s} = \bigoplus_{\tau \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_{p^s}|\mathbb{Q}_p)} N_\tau$  avec  $N_\tau = N$  et l'action  $\iota$  de  $\mathbb{Q}_{p^s}$  sur  $N_\tau$  est donnée par  $\tau$  ;
- $\varphi((a_\tau)_\tau) = (\varphi(a_{\sigma^{-1}\tau}))_\tau$  pour  $(a_\tau)_\tau \in N \otimes \mathbb{Q}_{p^s} = \bigoplus_\tau N_\tau$  ;
- filtration  $\text{Fil}^\bullet(N_K \otimes \mathbb{Q}_{p^s})$  est induite par les filtrations  $\text{Fil}^\bullet(N_{\tau,K}) = \text{Fil}^\bullet(N_K)$  sur chaque composante.

□

## 4.4 Filtrations génériques de la catégorie des représentations d'un groupe réductif

### 4.4.1 Filtrations de la catégorie des représentations d'un groupe réductif

Soit  $K$  un corps et  $G$  un groupe réductif sur  $K$ . Si

$$\mu : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$$

on note  $P_\mu \subset G$  le sous-groupe parabolique défini par

$$P_\mu = \left\{ g \in G \mid \lim_{z \rightarrow 0} \mu(z)g\mu(z)^{-1} \text{ existe} \right\}.$$

Le centralisateur de  $\mu$  dans  $G$  est un sous-groupe de Levi de  $P_\mu$ . Si  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une représentation de  $G$  dans un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

où  $\rho \circ \mu$  agit sur  $V_n$  par le caractère  $z \mapsto z^n$ . On pose alors

$$\text{Fil}_\mu^\bullet V = \bigoplus_{n \geq \bullet} V_n.$$

qui est une filtration décroissante de  $V$  par des sous-représentations de  $P_\mu$ . Les gradués de cette filtration sont des représentations triviales du radical unipotent de  $P_\mu$  et sont donc des représentations du groupe de Levi  $M_\mu = C_G(\mu)$ . Par exemple, pour la représentation adjointe de  $G$  sur  $\text{Lie } G$  on a

$$\text{Lie } P_\mu = \text{Fil}_\mu^0 \text{Lie } G.$$

La correspondance  $(V, \rho) \mapsto \text{Fil}_\mu^\bullet V$  définit une filtration scindée de la catégorie Tannakienne  $\text{Rep}_K G$  (cf. par exemple le chapitre 5 de [DRO10]). Soit  $R$  une  $K$ -algèbre et  $\text{Rep}_R G$  la catégorie des représentations de  $G$  dans des  $R$ -modules libres. Pour  $g \in G(R)$ ,  $g\mu g^{-1}$  définit une filtration de la catégorie  $\text{Rep}_R G$ . Si  $g \in P_\mu(R)$ , cette filtration est identique à celle définie par  $\mu$  (mais le scindage est différent si  $g$  ne centralise par  $\mu$ ).

Notons

$$X_\mu = G/P_\mu,$$

la variété de drapeaux associée à  $P_\mu$ . Elle paramètre des filtrations de la catégorie des représentations de  $G$ . Ainsi, si  $K'|K$ , à chaque élément de  $X(K')$  est associé une filtration de  $\text{Rep}_{K'} G$ .

**Définition 4.4.1.1.** *Pour  $x \in X_\mu(K')$ ,  $x = gP_\mu$  avec  $g \in G(K')$  et  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{K'} G$ , on note*

$$\text{Fil}_x^\bullet V := \text{Fil}_{g\mu g^{-1}}^\bullet V = \rho(g) \text{Fil}_\mu^\bullet V$$

la filtration associée.

#### 4.4.2 La filtration générique associée à $\mu$

**Définition 4.4.2.1.** *Soit  $(V, \rho) \in \text{Rep}_K G$ . On note*

$$\overline{\text{Fil}}_\mu^\bullet V = \bigcap_{x \in X_\mu(K)} \text{Fil}_x^\bullet V$$

que l'on appelle la filtration générique associée à  $\mu$ .

Cette filtration ne dépend que de la classe de  $G(K)$ -conjugaison de  $\mu$ . Ainsi, si  $A$  est un tore déployé maximal dans  $G$ ,  $P_0$  un sous-groupe parabolique minimal contenant  $A$  et  $X_*(A)^+$  la chambre de Weyl positive associée, à chaque élément de  $X_*(A)^+$  est associée une filtration générique de  $V$ .

Cette filtration est invariante sous l'action de  $G$  et définit donc une filtration de la représentation  $\rho$  par des sous-représentations. On a

$$\overline{\text{Fil}}_\mu^\bullet V = \bigcap_{g \in G(K)} \rho(g) \cdot \text{Fil}_\mu^\bullet V$$

et  $\overline{\text{Fil}}_\mu^k V$  est la plus grande sous-représentation de  $\rho$  contenue dans  $\text{Fil}_\mu^k V$ . Si  $\text{deg}_\mu : V \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$  est la fonction degré associée à la filtration  $\text{Fil}_\mu^\bullet V$ ,

$$\text{deg}_\mu(v) = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid v \in \text{Fil}_\mu^k V\},$$

la fonction degré  $\overline{\text{deg}}_\mu$  associée à la filtration générique est

$$\overline{\text{deg}}_\mu(v) = \inf_{g \in G(K)} \text{deg}_\mu(\rho(g) \cdot v).$$

On prendra garde au fait que le foncteur

$$(V, \rho) \mapsto \overline{\text{Fil}}_\mu V$$

ne définit pas en général une filtration de la catégorie Tannakienne  $\text{Rep}_K G$  (cette filtration n'est pas en général compatible au produit tensoriel).

**Lemme 4.4.2.1.** *Soit  $K'|K$  et  $x \in X_\mu(K')$  un point générique de  $X_\mu$ . Pour  $(V, \rho) \in \text{Rep}_K G$  on a*

$$\overline{\text{Fil}}_\mu^\bullet V = V \cap \text{Fil}_x^\bullet V_{K'}.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{E}_\rho$  le  $\mathcal{O}_{X_\mu}$ -module localement libre de réalisation géométrique le fibré vectoriel

$$G \times_{P_{\mu,\rho}} V.$$

La filtration  $\text{Fil}_\mu^\bullet V$  de  $V$  forme une filtration de  $V$  par des sous-représentations de  $P_\mu$ . On a donc une filtration

$$\text{Fil}^\bullet \mathcal{E}_\rho$$

de  $\mathcal{E}_\rho$  par des sous- $\mathcal{O}_{X_\mu}$ -modules localement libres localement facteur direct de réalisation géométrique le fibré vectoriel filtré

$$G \times_{P_{\mu,\rho}} \text{Fil}_\mu^\bullet V.$$

Soient maintenant  $v \in V$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . Voyons  $v$  comme une section globale de  $\mathcal{E}_\rho$ . Considérons le foncteur

$$\begin{aligned} H_{v,k} : K\text{-Schémas} &\longrightarrow \text{Ensembles} \\ Y &\longmapsto \{f : Y \rightarrow X_\mu \mid f^*v \in \Gamma(Y, f^* \text{Fil}^k \mathcal{E}_\rho)\}. \end{aligned}$$

Puisque la filtration  $\text{Fil}^\bullet \mathcal{E}_\rho$  est formée de sous- $\mathcal{O}_{X_\mu}$ -modules localement libres localement facteurs directs,  $H_{v,k}$  est un sous-schéma fermé de  $X_\mu$ .

Soit maintenant  $v \in V \cap \text{Fil}_x^k V_{K'}$ . Le sous-schéma fermé  $H_{v,k}$  de  $X_\mu$  contient donc le point générique de  $X_\mu$ . On a donc  $H_{v,k} = X_\mu$  ce qui implique que  $X_\mu(K) = H_{v,k}(K)$  et donc  $v \in \overline{\text{Fil}}_\mu^k V$ .

Réciproquement, si  $v \in \overline{\text{Fil}}_\mu^k V$ , on a  $H_{v,k}(K) = X_\mu(K)$ . Puisque  $X_\mu(K)$  est Zariski dense dans  $X_\mu$  on a alors  $H_{v,k} = X_\mu$ . En particulier,  $x \in H_{v,k}(K')$  ou encore  $v \in \text{Fil}_x^\bullet V_{K'}$ .  $\square$

### 4.4.3 Caractérisation en termes de plus haut poids

Supposons maintenant  $K$  de caractéristique 0 et  $G$  déployé sur  $K$ . Soit  $T \subset B$  un tore maximal de  $G$  dans un sous-groupe de Borel. Si  $\Phi \subset X^*(T)$  désigne les racines de  $T$  dans  $\text{Lie } G$ , on note  $\Phi^+$  les racines positives c'est à dire celles dans  $\text{Lie } B$ . On note  $\check{\Phi} \subset X_*(T)$  les coracines. Soit

$$X^*(T)^+ = \{\chi \in X^*(T) \mid \forall \alpha \in \Phi^+, \langle \chi, \check{\alpha} \rangle \geq 0\}$$

les poids dominants. On suppose, ce que l'on peut toujours faire, que  $\mu$  est dans la chambre de Weyl positive,

$$\mu \in X_*(T)^+$$

c'est à dire pour tout  $\alpha \in \Phi^+$ ,  $\langle \alpha, \mu \rangle \geq 0$ . On note  $w_0$  l'élément de plus grande longueur dans le groupe de Weyl. Ainsi,  $w_0 \cdot \mu$  est le représentant dans la chambre de Weyl négative de la classe de conjugaison de  $\mu$ . Rappelons également que  $w_0^2 = 1$  et donc si  $\chi \in X^*(T)$ ,  $\langle w_0 \cdot \chi, \mu \rangle = \langle \chi, w_0 \cdot \mu \rangle$ .

Rappelons le théorème suivant.

**Théorème 4.4.3.1 (Tits, [Tit71, thm 2.5]).** *Les  $K$ -représentations irréductibles de  $G$  sont classifiés, à  $K$ -isomorphisme près, par les poids dominants. De plus, elles sont toutes absolument irréductibles.*

Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation de  $G$  sur  $K$ . Notons

$$V = \bigoplus_{\lambda \in X^*(T)^+} V^\lambda$$

la décomposition isotypique de  $V$  selon les représentations de plus haut poids  $\lambda$  de  $G$ , c'est à dire  $V^\lambda$  est une somme directe de représentations irréductibles de plus haut poids  $\lambda$ .

**Proposition 4.4.3.1.** *La filtration générique de  $V$  associée à  $\mu$  est donnée par*

$$\overline{\text{Fil}}_{\mu}^k V = \bigoplus_{\substack{\lambda \in X^*(T)^+ \\ \langle \lambda, w_0 \cdot \mu \rangle \geq k}} V^{\lambda}.$$

*Démonstration.* Soit

$$V = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V_{\chi}$$

la décomposition de  $\rho|_T$ . On a alors

$$\text{Fil}_{\mu}^k V = \bigoplus_{\langle \chi, \mu \rangle \geq k} V_{\chi}.$$

Soit

$$\overline{\text{Fil}}_{\mu}^k V = \bigoplus_{\lambda \in X^*(T)^+} (\overline{\text{Fil}}_{\mu}^k V)^{\lambda}$$

la décomposition isotypique suivant les plus hauts poids de la représentation  $\overline{\text{Fil}}_{\mu}^k V$  de  $G$ . Si  $(\overline{\text{Fil}}_{\mu}^k V)^{\lambda} \neq 0$ , l'espace de plus bas poids

$$(\overline{\text{Fil}}_{\mu}^k V)^{\lambda} \cap V_{w_0 \cdot \lambda}$$

est non-nul contenu dans  $\text{Fil}_{\mu}^k V$  et donc  $\langle \lambda, w_0 \cdot \mu \rangle = \langle w_0 \cdot \lambda, \mu \rangle \geq k$ . On en déduit que

$$\overline{\text{Fil}}_{\mu}^k V \subset \bigoplus_{\substack{\lambda \in X^*(T)^+ \\ \langle \lambda, w_0 \cdot \mu \rangle \geq k}} V^{\lambda}.$$

On a pour tout  $\lambda \in X^*(T)^+$

$$V^{\lambda} = \bigoplus_{\substack{\chi \in X^*(T) \\ w_0 \cdot \lambda \leq \chi \leq \lambda}} V^{\lambda} \cap V_{\chi}$$

où rappelons que  $\chi_1 \leq \chi_2$  signifie que  $\chi_2 - \chi_1$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs de racines positives. Puisque  $\mu \in X_*(T)^+$ , si  $\chi \geq w_0 \cdot \lambda$  et  $\langle w_0 \cdot \lambda, \mu \rangle \geq k$  alors  $\langle \chi, \mu \rangle \geq k$  et donc

$$V_{\chi} \subset \text{Fil}_{\mu}^k V.$$

Donc, si  $\langle \lambda, w_0 \cdot \mu \rangle \geq k$ ,

$$V^{\lambda} \subset \text{Fil}_{\mu}^k V.$$

Mais puisque  $V^{\lambda}$  est stable sous l'action de  $G$  cela implique que

$$V^{\lambda} \subset \bigcap_{g \in G(K)} g \cdot \text{Fil}_{\mu}^k V = \overline{\text{Fil}}_{\mu}^k V.$$

On en déduit le résultat. □

**Remarque 4.4.3.1.** *Il résulte de la proposition précédente que la filtration générique de  $(V, \rho)$  associée à  $\mu$  est canoniquement scindée, ce qui n'était pas a priori évident.*

#### 4.4.4 Interprétation géométrique

Soit  $(V, \rho) \in \text{Rep}_K G$ . Soit

$$\mathcal{E}_{\rho} = G \times_{P_{\mu, \rho}} V$$

comme dans la démonstration du lemme 4.4.2.1, muni de sa filtration

$$\text{Fil}^{\bullet} \mathcal{E}_{\rho} = G \times_{P_{\mu, \rho}} \text{Fil}_{\mu}^{\bullet} V.$$

C'est une filtration de fibrés  $G$ -équivariants sur  $X_\mu$ . Puisque  $\rho$  est une représentation de  $G$  et pas seulement de  $P_\mu$ , le fibré  $\mathcal{E}_\rho$  est trivial. On a donc comme représentation de  $G$ ,

$$\rho = H^0(X_\mu, \mathcal{E}_\rho).$$

Il résulte de la preuve du lemme 4.4.2.1 que la filtration générique de  $\rho$  est donnée par

$$\overline{\text{Fil}}_\mu^\bullet \rho = H^0(X_\mu, \text{Fil}^\bullet \mathcal{E}_\rho).$$

Notons

$$\text{Gr}_\mu^\bullet V$$

le gradué de  $\text{Fil}_\mu^\bullet V$  qui est une représentation du sous-groupe de Levi  $M_\mu = C_G(\mu)$  de  $P_\mu$  (le radical unipotent de  $P_\mu$  agit trivialement sur le gradué de la filtration). On a alors

$$\text{Gr}^\bullet \mathcal{E}_\rho = G \times_{P_\mu} \text{Gr}_\mu^\bullet V.$$

Comme représentations de  $G$ , le gradué de la filtration générique se plonge de la façon suivante

$$\overline{\text{Gr}}_\mu^k \rho = \text{Gr}^k H^0(X_\mu, \text{Fil}^\bullet \mathcal{E}_\rho) \hookrightarrow H^0(X_\mu, \text{Gr}^k \mathcal{E}_\rho).$$

Supposons maintenant que l'on est dans la situation de la section précédente. Soient  $T \subset B \subset P_\mu$  où  $T$  est un tore maximal et  $B$  un sous-groupe de Borel. Supposons que  $\mu \in X^*(T)^+$ . Pour  $\chi \in X^*(T)$  on note  $\mathcal{L}_\chi$  le fibré en droites équivariant associé sur  $G/B$ ,  $\mathcal{L}_\chi = G \times_B \chi$ . Soit

$$\pi : G/B \longrightarrow G/P_\mu = X_\mu.$$

D'après ([Jan03] II.4.6 b)), on a

$$H^0(X_\mu, \text{Gr}^k \mathcal{E}_\rho) = H^0(G/B, \pi^* \text{Gr}^k \mathcal{E}_\rho).$$

Mais,

$$\text{Gr}_\mu^k V = \bigoplus_{\substack{\chi \in X^*(T) \\ \langle \chi, \mu \rangle = k}} V_\chi$$

comme représentation de  $T$  et donc

$$\pi^* \text{Gr}^k \mathcal{E}_\rho = \bigoplus_{\substack{\chi \in X^*(T) \\ \langle \chi, \mu \rangle = k}} V_\chi \otimes \mathcal{L}_\chi.$$

On a donc comme représentation de  $G$ ,

$$H^0(G/B, \pi^* \text{Gr}^k \mathcal{E}_\rho) = \bigoplus_{\substack{\chi \in X^*(T) \\ \langle \chi, \mu \rangle = k}} V_\chi \otimes H^0(G/B, \mathcal{L}_\chi).$$

Mais d'après le théorème de Borel-Weil,  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\chi)$  est soit nul si  $w_0 \cdot \chi$  n'est pas dominant, soit une représentation de plus haut poids  $w_0 \cdot \chi$  (il faut prendre garde à ce que la formulation classique du théorème de Borel-Weil fait intervenir le sous-groupe de Borel opposé à  $B$ , d'où  $w_0 \cdot \chi$  et non  $\chi$ ). On en déduit que les sous-représentations irréductibles de

$$H^0(G/B, \pi^* \text{Gr}^k \mathcal{E}_\rho)$$

on des plus hauts poids  $\lambda$  vérifiant  $\langle \lambda, w_0 \cdot \mu \rangle = k$ . Il en est donc de même pour

$$\overline{\text{Gr}}_\mu^k \rho = \text{Gr}^k H^0(X_\mu, \text{Fil}^\bullet \mathcal{E}_\rho).$$

On a donc retrouvé géométriquement la proposition 4.4.3.1.

## 4.5 Le groupe de Mumford-Tate $p$ -adique générique

Nous prouvons maintenant le théorème principal de ce chapitre. On se place dans les hypothèses de la section 4.3.2. Plus précisément,  $L = K_0 = W(k)_\mathbb{Q}$  avec  $k$  algébriquement clos et  $K|K_0$  de degré fini.

**Théorème 4.5.0.1.** *Soit  $G$  un groupe réductif non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $b \in G(L)$  et  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow G_K$ . Faisons les hypothèses suivantes :*

- (a)  $b$  est décent.
- (b) La classe de  $\sigma$ -conjugaison  $\bar{b}$  de  $b$  est dans l'ensemble de Kottwitz  $B(G, \mu)$ .
- (c) Soit  $E \subset L$  le corps de définition de la classe de conjugaison de  $\mu$  et  $\mathcal{F}$  la variété de drapeaux sur  $E$  associée à  $\mu$ . On suppose que le sous-groupe parabolique  $P_\mu \in \mathcal{F}(K)$  est un point générique de la variété algébrique  $\mathcal{F}$ .
- (d) Soient  $A \subset B$  un tore déployé maximal dans un sous-groupe de Borel de  $G$ . Soient  $\nu_b \in X_*(A)_\mathbb{Q}^+$  le point de Newton associé à  $\bar{b}$  dans la chambre de Weyl positive et  $\mu_2 \in X_*(A)_\mathbb{Q}^+$  le point de Hodge. On suppose que les polygones associés de Newton et de Hodge ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités au sens où pour tout sous-groupe de Levi standard propre  $M$  de  $G$ , on n'a pas  $\nu_b \leq \mu_2$  dans la chambre de Weyl positive de  $M$  dans  $X_*(A)_\mathbb{Q}$ .

On a alors

1. La paire  $(b, \mu)$  est admissible.
2. Le groupe de Mumford-Tate  $MT_{b, \mu}$  contient  $G^{der}$  et  $MT_{b, \mu}/G^{der}$  est le plus petit sous-tore du cocentre contenant l'image de  $\mu$ . En particulier, l'image de la représentation  $\xi_{b, \mu} : \text{Gal}(\bar{K}|K) \rightarrow G(\mathbb{Q}_p)$ , bien définie à  $G(\mathbb{Q}_p)$ -conjugaison près, contient un sous-groupe ouvert de  $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ .

*Démonstration.* Soit  $s$  un entier tel que  $b$  soit décent pour  $s$ . Choisissons  $s$  suffisamment grand de telle manière que  $G$  soit déployé sur  $\mathbb{Q}_{p^s}$ . On a donc  $E \subset \mathbb{Q}_{p^s}$ . De plus,  $b \in G(\mathbb{Q}_{p^s})$  et  $\nu_b : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\mathbb{Q}_{p^s}}$ . Soit  $A$  un tore déployé maximal dans  $G$  et  $B$  un sous-groupe de Borel contenant  $A$ . Notons  $T = C_G(A)$ , un tore non-ramifié qui est un sous-groupe de Levi de  $B$ . On a donc

$$A \subset T \subset B.$$

Puisque  $G$  est quasi-déployé et la classe de  $G(\mathbb{Q}_{p^s})$ -conjugaison de  $\nu_b$  définie sur  $\mathbb{Q}_p$ , il existe  $g \in G(\mathbb{Q}_{p^s})$  tel que  $g\nu_b g^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow A$ . Quitte à remplacer  $b$  par  $gbg^{-\sigma}$  et  $\mu$  par  $g\mu g^{-1}$  (ce qui ne change pas l'hypothèse de généricité concernant  $\mu$ ) on peut supposer que

$$\nu_b \in X_*(A)_\mathbb{Q}^+,$$

la chambre de Weyl positive.

Commençons par le point (1). Soit  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  la variété de drapeau sur  $\mathbb{Q}_{p^s}$  et  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{an}$  l'espace analytique de Berkovich associé. Soit  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{fa} \subset \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{an}$  l'ouvert qui est le lieu de faible admissibilité de l'isocristal filtré associé à l'isocristal avec  $G$ -structure défini par  $b \in G(\mathbb{Q}_{p^s})$ . Si  $(V, \rho) \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$  est une représentation et  $x \in \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{an}$  on lui associe l'isocristal filtré

$$(V_{\mathbb{Q}_{p^s}}, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_x^\bullet V_{k(x)}).$$

Alors,  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{fa}$  est le lieu de faible admissibilité de ces isocristaux filtrés (il suffit en fait de le tester pour une représentation fidèle de  $G$ ). Puisque  $b$  est décent, l'extension des scalaires de  $\mathbb{Q}_{p^s}$  à  $L$  induit une bijection

$$\{\text{sous isocristaux de } (V_{\mathbb{Q}_{p^s}}, \rho(b)\sigma)\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous isocristaux de } (V_L, \rho(b)\sigma)\}.$$

En particulier, si  $K'|L$  est une extension de degré fini et  $x \in \mathcal{F}(K')$ ,

$$(V_{\mathbb{Q}_{p^s}}, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_x^\bullet V_{K'}) \text{ est faiblement admissible} \iff (V_L, \rho(b)\sigma, \text{Fil}_x^\bullet V_{K'}) \text{ est faiblement admissible}.$$

Puisque  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ , d'après le théorème 3 de [FR05],  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_p^s}^{fa}(L) \neq \emptyset$  et donc  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_p^s}^{fa} \neq \emptyset$ . Il existe donc un point fermé de la variété algébrique  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_p^s}$  qui soit un point de l'ouvert analytique  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_p^s}^{fa}$ . Notons  $z \in \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_p^s}$  un tel point. Soit  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  une représentation fidèle de  $V$ . Soit  $N \subset V_{\mathbb{Q}_p^s}$  un sous-isocristal de  $(V_{\mathbb{Q}_p^s}, \rho(b)\sigma)$ . La fonction

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_p^s}| &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto t_H(N, \rho(b)\sigma, \mathrm{Fil}_x^\bullet V_{k(x)} \cap N \otimes_{\mathbb{Q}_p^s} k(x)) \end{aligned}$$

(point terminal du polygone de Hodge) est semi-continue supérieurement et en particulier croît par spécialisation. Puisque  $\mu : \mathbb{G}_m \rightarrow G_K$  définit un point générique de  $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_p^s}$  on a donc

$$\begin{aligned} t_H(N, \rho(b)\sigma, \mathrm{Fil}_\mu^\bullet V_K \cap N \otimes_{\mathbb{Q}_p^s} K) &\leq t_H(N, \rho(b)\sigma, \mathrm{Fil}_z^\bullet V_{k(z)} \cap N \otimes_{\mathbb{Q}_p^s} k(z)) \\ &\leq t_N(N, \rho(b)\sigma) \end{aligned}$$

où la seconde inégalité résulte de la faible admissibilité de  $z$ . Cela étant vrai pour tout  $N$ , on en déduit que l'isocristal filtré

$$(V_{\mathbb{Q}_p^s}, \rho(b)\sigma, \mathrm{Fil}_\mu^\bullet V_K)$$

est faiblement admissible et donc

$$(V_L, \rho(b)\sigma, \mathrm{Fil}_\mu^\bullet V_K)$$

l'est aussi. La paire  $(b, \mu)$  est donc admissible.

Passons au point (2). On utilise la description donnée dans la proposition 4.3.3.3 de la version cristalline du groupe de Mumford-Tate,  $\mathrm{MT}_{b, \mu}^{\mathrm{cris}}$ . Soit  $(V, \rho) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$ . Soit

$$V_{\mathbb{Q}_p^s} = \bigoplus_{\lambda \in X^*(T)^+} V_{\mathbb{Q}_p^s}^\lambda$$

la décomposition isotypique suivant les plus hauts poids de l'extension des scalaires de  $\mathbb{Q}_p$  à  $\mathbb{Q}_p^s$  de  $\rho$  (cf. section 4.4.3). On note  $\sigma$  pour  $\mathrm{Id} \otimes \sigma$  agissant sur  $V_{\mathbb{Q}_p^s}$ . Notons  $\varphi = \rho(b)\sigma$  le Frobenius. On a alors

$$\varphi : V_{\mathbb{Q}_p^s}^\lambda \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{Q}_p^s}^{\lambda^\sigma}$$

où  $\lambda \mapsto \lambda^\sigma$  est donné par l'action de  $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^s | \mathbb{Q}_p)$  sur  $X^*(T)$ . Notons

$$\mu' \in X_*(T)^+$$

le représentant de la classe de conjugaison de  $\mu$  dans la chambre de Weyl positive. Soit

$$\mathrm{deg}_\mu : V_{\mathbb{Q}_p^s} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

la fonction degré associée à la filtration  $V_{\mathbb{Q}_p^s} \cap \mathrm{Fil}_\mu^\bullet V_K$ . D'après le lemme 4.4.2.1 et la proposition 4.4.3.1, si  $v \in V_{\mathbb{Q}_p^s} \setminus \{0\}$  se décompose suivant les plus hauts poids en

$$v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v^\lambda$$

où  $\Lambda \subset X^*(T)^+$  et pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $v^\lambda \neq 0$ , on a

$$\mathrm{deg}_\mu(v) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \langle \lambda, w_0 \cdot \mu' \rangle .$$

On a donc pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\sum_{i=0}^{s-1} \mathrm{deg}_\mu(\varphi^i(v)) \leq \sum_{i=0}^{s-1} \langle \lambda^{\sigma^i}, w_0 \cdot \mu' \rangle = s \langle \lambda, w_0 \cdot \mu' \rangle \quad (4.5)$$

où  $\mu_2 = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \mu^{\sigma^i} \in X_*(A)_{\mathbb{Q}}$  est le point de Hodge associé à  $\mu$ . Regardons maintenant la décomposition de  $\rho$  sur  $\mathbb{Q}_{p^s}$  selon l'action de  $T_{\mathbb{Q}_{p^s}}$  :

$$V_{\mathbb{Q}_{p^s}} = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V_{\mathbb{Q}_{p^s}, \chi}.$$

Pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$V_{\mathbb{Q}_{p^s}}^{\varphi^s = p^k} = \bigoplus_{\substack{\chi \in X^*(T) \\ \langle \chi, \nu_b \rangle = \frac{k}{s}}} V_{\mathbb{Q}_{p^s}, \chi}.$$

Soit maintenant  $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v^\lambda$  comme précédemment vérifiant

$$\begin{cases} \varphi^s(v) = p^k v \\ \sum_{i=0}^{s-1} \deg_{\mu}(\varphi^i(v)) = k. \end{cases} \quad (4.6)$$

Pour  $\lambda \in \Lambda$  décomposons

$$v^\lambda = \sum_{\chi \in X^*(T)} v_{\chi}^{\lambda}$$

où  $v_{\chi}^{\lambda} \in V_{\mathbb{Q}_{p^s}, \chi}$ . Soit  $\chi$  tel que  $v_{\chi}^{\lambda} \neq 0$ . On a donc

$$\langle \chi, \nu_b \rangle = \frac{k}{s}$$

et puisque le poids  $\chi$  intervient dans la représentation de plus haut poids  $\lambda$ ,  $\chi \geq w_0 \cdot \lambda$ . Combinant cela on obtient que

$$\langle w_0 \cdot \lambda, \nu_b \rangle \leq \frac{k}{s}.$$

Cette inégalité et l'inégalité (4.5) donnent

$$\langle w_0 \cdot \lambda, \nu_b \rangle \leq \langle w_0 \cdot \lambda, \mu_2 \rangle. \quad (4.7)$$

Puisque  $\bar{b} \in B(G, \mu)$ , on a  $\mu_2 \geq \nu_b$  et donc, étant donné que  $w_0 \cdot \lambda$  est un poids antidominant,

$$\langle w_0 \cdot \lambda, \mu_2 - \nu_b \rangle \geq 0. \quad (4.8)$$

De (4.7) et (4.8) on déduit que

$$\langle w_0 \cdot \lambda, \mu_2 - \nu_b \rangle = 0.$$

L'hypothèse (d) de l'énoncé se traduit maintenant en ce que si  $\Delta \subset X^*(A)$  sont les racines simples de  $A$  dans  $\text{Lie } B$  et

$$\mu_2 - \nu_b = \sum_{\alpha \in \Delta} a_{\alpha} \check{\alpha}$$

avec, puisque  $\mu_2 \geq \nu_b$ ,  $a_{\alpha} \geq 0$ , alors pour tout  $\alpha \in \Delta$ ,  $a_{\alpha} > 0$ . On a donc

$$\sum_{\alpha \in \Delta} a_{\alpha} \langle w_0 \cdot \lambda, \check{\alpha} \rangle = 0$$

mais puisque  $\langle w_0 \cdot \lambda, \check{\alpha} \rangle \leq 0$ , cela signifie que pour tout  $\alpha \in \Delta$ ,  $\langle w_0 \cdot \lambda, \check{\alpha} \rangle = 0$  soit encore

$$\lambda \in \langle \Phi(A, G)^{\vee} \rangle^{\perp}$$

où  $\Phi(A, G) \subset X^*(A)$  sont les racines de  $A$  dans  $\text{Lie } G$ .

Soit maintenant  $\check{\alpha} \in \Phi(T, G)^{\vee}$  une coracine de  $T$  dans  $\text{Lie } G$ . On a alors

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=0}^{s-1} \lambda^{\sigma^i}, \check{\alpha} \right\rangle &= \left\langle \lambda, \sum_{i=0}^{s-1} \check{\alpha}^{\sigma^{i-1}} \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{i=0}^{s-1} \lambda^{\sigma^i} \in \langle \Phi(T, G)^\vee \rangle^\perp.$$

Mais, pour tout  $i$ ,  $\lambda^{\sigma^i} \in X^*(T)^+$ . On en déduit que

$$\lambda \in \langle \Phi(T, G)^\vee \rangle^\perp.$$

La représentation de plus haut poids associée à  $\lambda$  est donc une représentation de dimension 1 de  $G_{\mathbb{Q}_p^s}$ .

On a donc démontré que si  $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v^\lambda \in V_{\mathbb{Q}_p^s}$  avec pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $v_\lambda \neq 0$  et  $v$  satisfait les équations (4.6) alors pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $V_{\mathbb{Q}_p^s}^\lambda$  est une somme directe de représentations de dimension 1 de  $G_{\mathbb{Q}_p^s}$  i.e. de caractères  $G_{\mathbb{Q}_p^s} \rightarrow \mathbb{G}_m$ . On a donc

$$\forall g \in G_{\mathbb{Q}_p^s}^{der}, \quad g.v = v$$

soit encore

$$G_{\mathbb{Q}_p^s}^{der} \subset \text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}}$$

d'après la proposition 4.3.3.3. Mais puisque  $\text{MT}_{b,\mu} \otimes \mathbb{Q}_p^s$  est une forme intérieure de  $\text{MT}_{b,\mu}^{\text{cris}}$ ,

$$G^{der} \subset \text{MT}_{b,\mu}.$$

Il reste à calculer  $\text{MT}_{b,\mu}/G^{der}$ . Si  $\det : G \rightarrow G/G^{der} = D$ , cela revient à calculer  $\text{MT}_{\det(b), \det \circ \mu}$  c'est à dire les groupes de Mumford-Tate associés à un tore non-ramifié. Plus précisément, si  $T$  est un tore non-ramifié sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mu_0 \in X_*(T)$ , soit  $b_0 \in B(T)$  l'unique élément tel que  $b_0 \in B(T, \mu_0)$ . On vérifie alors que  $\text{MT}_{b_0, \mu_0}$  est le plus petit sous-tore de  $T$  contenant l'image de  $\mu_0$ . Cela résulte par exemple du lemme 2.2.4.1 qui montre que  $\text{MT}_{b_0, \mu_0}$  est le plus petit sous-tore de  $T$  contenant l'image du morphisme  $\chi_\mu$ .  $\square$



# Chapitre 5

## Composantes connexes géométriques et applications

### 5.1 Composantes connexes géométriques des tours de Rapoport-Zink

#### 5.1.1 Une conjecture

Voici une conjecture concernant les composantes connexes des espaces de Rapoport-Zink.

**Conjecture 1.** *Soit  $\check{\mathcal{M}}$  un espace de Rapoport-Zink non-ramifié simple de type EL, PEL symplectique ou unitaire. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. 4.1 et 4.5.0.1 hypothèse (d)). Alors,*

$$\varkappa : \pi_0(\check{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \text{Im } \varkappa.$$

On a le théorème suivant de Viehmann.

**Théorème 5.1.1.1 (Viehmann [Vie08b],[Vie08a]).** *La conjecture précédente est vérifiée lorsque  $F = \mathbb{Q}_p$  dans le cas EL et PEL symplectique.*

La conjecture est également vérifiée pour des raisons évidentes dans le cas des espaces de Lubin-Tate. Il résulte également des travaux de Vollaard ([Vol10]) que cette conjecture est vérifiée dans le cas PEL unitaire basique lorsque  $F$  est une extension quadratique de  $\mathbb{Q}_p$  et la signature est  $(1, n-1)$ .

Soit  $\check{\mathcal{M}}_{red}$  la fibre spéciale réduite de  $\check{\mathcal{M}}$ , un  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -schéma localement de type fini. Puisque  $|\check{\mathcal{M}}| = |\check{\mathcal{M}}_{red}|$  la conjecture est un problème d'espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles en caractéristique positive. Il s'agit de montrer que si  $x, x' \in \check{\mathcal{M}}_{red}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  sont associés à  $(X, \rho)$  et  $(X', \rho')$  avec  $\text{ht}\rho = \text{ht}\rho'$  alors  $x$  et  $x'$  sont dans la même composante connexe.

Rappelons que  $\check{\mathcal{F}}^{an}$  est la variété de drapeaux associée sur  $\check{E}$  vue comme  $\check{E}$ -espace analytique de Berkovich et

$$\check{\pi} : \check{\mathcal{M}}^{an} \longrightarrow \check{\mathcal{F}}^{an}$$

le morphisme de périodes. Soit  $\check{\mathcal{F}}^a = \text{Im } \check{\pi}$  l'image du morphisme de périodes.

**Lemme 5.1.1.1.** *Supposons que la conjecture 1 vérifiée, alors  $\check{\mathcal{F}}^a$  est connexe. De plus, pour toute composante connexe  $X$  de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ ,  $\check{\pi}(X) = \check{\mathcal{F}}^a$ .*

*Démonstration.* Pour  $i \in \text{Im } \varkappa \subset \mathbb{Z}$ , posons  $\check{\mathcal{M}}(i) = \varkappa^{-1}(i)$ . Il suffit de montrer que pour tout  $i_1, i_2 \in \text{Im } \varkappa$ ,  $\check{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i_1)^{an}) = \check{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i_2)^{an})$ . Soit  $K_g := gG(\mathbb{Z}_p)g^{-1} \cap G(\mathbb{Z}_p)$ , pour  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ . Considérons le

diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \check{\mathcal{M}}_{K_g} & \xrightarrow{g} & \check{\mathcal{M}}_{g^{-1}K_g g} \\
 \pi_{K_g, G(\mathbb{Z}_p)} \swarrow & & \searrow \pi_{g^{-1}K_g g, G(\mathbb{Z}_p)} \\
 \check{\mathcal{M}}^{an} & & \check{\mathcal{M}}^{an} \\
 \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \tilde{\pi} \\
 & \check{\mathcal{F}}^a &
 \end{array}$$

Pour  $(X, \rho, \eta) \in \check{\mathcal{M}}_{K_g}$  dans le cas EL (resp.  $(X, \lambda, \rho, \eta) \in \check{\mathcal{M}}_{K_g}$  dans le cas PEL), soit  $\rho'$  le quasi-isogénie apparaissant dans  $g \cdot (X, \rho, \eta)$  (resp.  $g \cdot (X, \lambda, \rho, \eta)$ ). Alors

$$\text{ht} \rho' = \begin{cases} \text{ht} \rho - dv_p(\det(g)) & \text{cas EL} \\ \text{ht} \rho - \frac{nd}{2} v_p(c(g)) & \text{cas PEL} \end{cases}$$

Donc pour  $i \in \text{Im } \varkappa$ ,

$$\pi_{g^{-1}K_g g, G(\mathbb{Z}_p)} \circ \pi_{K_g, G(\mathbb{Z}_p)}^{-1}(\check{\mathcal{M}}(i)^{an}) = \begin{cases} \check{\mathcal{M}}(i + v_p(\det(g)))^{an} & \text{cas EL} \\ \check{\mathcal{M}}(i + v_p(c(g)))^{an} & \text{cas PEL} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\tilde{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i)^{an}) = \begin{cases} \tilde{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i + v_p(\det(g)))^{an}) & \text{cas EL} \\ \tilde{\pi}(\check{\mathcal{M}}(i + v_p(c(g)))^{an}) & \text{cas PEL.} \end{cases}$$

Le résultat s'en déduit du fait que l'image de  $G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \Delta$  est l'image de  $\varkappa$ , puisque l'image de  $D(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \Delta$  est l'image de  $\varkappa$ , et  $G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est surjectif d'après Kneser.  $\square$

### 5.1.2 L'image de la monodromie géométrique des espaces de Rapoport-Zink

On reprend les notations du chapitre 2 et en particulier de la section 2.5. Soit  $\check{\mathcal{M}}$  un espace de Rapoport-Zink non-ramifié simple de type EL ou PEL symplectique ou unitaire. Rappelons que l'on note  $\pi_1$  pour le groupe fondamental classifiant les revêtements étales finis d'un espace analytique de Berkovich et  $\pi_1^{dJ}$  pour le groupe fondamental défini par de Jong. On note  $\mathbb{C}_p$  le complété de  $\overline{E}$ . Rappelons que l'on note  $I_E = \text{Gal}(\overline{E}|E)$ . On a démontré dans le chapitre 2 qu'étant donné un point  $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{an}(\overline{E})$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_1(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{x}) & \longrightarrow & I_E & \longrightarrow & 1 \\
 \rho_{\bar{x}}^{géo} \downarrow & & \downarrow \rho_{\bar{x}} & & \downarrow \chi_{\det \bar{\mu}} & & \\
 1 & \longrightarrow & G^{der}(\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & G(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\det} & D(\mathbb{Z}_p)
 \end{array} \tag{5.1}$$

donné par les représentations de monodromie sur le module de Tate de la déformation universelle spécialisée en  $\bar{x}$  (cf. 2.5.3).

Voici le théorème principal. Dans le cas des espaces de Lubin-Tate ce théorème a été démontré par de Jong ([dJ95b], cf. proposition 7.4). Nous suivons sa stratégie de preuve.

**Théorème 5.1.2.1.** *Supposons la conjecture 1 vérifiée. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. 4.1 et 4.5.0.1 hypothèse (d)). Soit  $\bar{x} \in \check{\mathcal{M}}^{an}(\overline{E})$ . La représentation de monodromie géométrique*

$$\rho_{\bar{x}}^{géo} : \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \bar{x}) \longrightarrow G^{der}(\mathbb{Z}_p)$$

sur le module de Tate de la déformation universelle spécialisée en  $\bar{x}$  est surjective.

*Démonstration. Première étape : l'image est ouverte.*

Commençons par montrer que l'image de  $\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}}$  est ouverte. On peut supposer que  $b \in G(L)$  est décent. Soit  $X$  la composante connexe de l'image de  $\bar{x}$  dans  $\check{\mathcal{M}}^{an}$ . D'après le lemme 5.1.2.1 qui suit elle est géométriquement connexe. Son image par l'application de périodes,  $\check{\pi}(X)$ , est un ouvert de  $\check{\mathcal{F}}^{an}$ . Puisque l'on suppose la conjecture 1 vérifiée, on a  $\check{\pi}(X) = \text{Im } \check{\pi}$  grâce au lemme 5.1.1.1. D'après la proposition 4.2.0.3 il existe un point à valeurs dans  $\check{E}$  de  $\check{\mathcal{F}}$  qui est un point générique de la variété de drapeaux sur  $E$ . D'après le point (1) du théorème 4.5.0.1 un tel point est dans  $\check{\pi}(X)$ .

Soit  $K|\check{E}$  de degré fini avec  $K \subset \check{E}$  et  $y \in X(K)$  s'envoyant sur un tel point par l'application de périodes. Soit  $\bar{y}$  le point géométrique associé au plongement  $K \subset \check{E}$ . L'image de  $\rho_{\bar{y}}^{\text{géo}}$  coïncide avec celle de  $\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}}$  à  $G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p)$ -conjugaison près. Il y a de plus un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \text{Gal}(\check{E}|K) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & s & \swarrow & & \\
 \pi_1(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{an}, \bar{y}) & \longrightarrow & \pi_1(\check{\mathcal{M}}^{an}, \bar{y}) & \longrightarrow & I_E & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow \rho_{\bar{y}}^{\text{géo}} & & \downarrow \rho_{\bar{y}} & & \downarrow \chi_{\det \bar{\mu}} & & \\
 1 & \longrightarrow & G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & G(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\det} & D(\mathbb{Z}_p)
 \end{array}$$

où  $s$  est la section donnée par le point rationnel  $y \in \check{\mathcal{M}}^{an}(K)$ . D'après le théorème 4.5.0.1, l'image de

$$\rho_{\bar{y}} \circ s : \text{Gal}(\check{E}|K) \longrightarrow G(\mathbb{Z}_p)$$

contient un sous-groupe ouverte de  $G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p)$ . L'image de  $\rho_{\bar{y}}$  contient donc un sous-groupe ouvert de  $G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p)$ . Or,

$$\text{Im } \rho_{\bar{y}}^{\text{géo}} \triangleleft \text{Im } \rho_{\bar{y}}$$

et donc

$$\text{Lie}(\text{Im } \rho_{\bar{y}}^{\text{géo}}) \triangleleft \text{Lie } G^{\text{der}}.$$

D'après le lemme 5.1.2.2 qui suit,  $\text{Lie } G^{\text{der}}$  est simple. On a donc que soit  $\text{Im } \rho_{\bar{y}}^{\text{géo}}$  est un sous-groupe ouvert de  $G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p)$ , soit c'est un groupe fini. Supposons par l'absurde que c'est un groupe fini. Soit  $A$  une  $\mathcal{O}_{\check{E}}$ -algèbre topologiquement de type fini sans  $p$ -torsion intègre non nulle et  $\text{Spf}(A) \rightarrow \check{\mathcal{M}}$  un morphisme tel que l'image de  $\text{Sp}(A[\frac{1}{p}]) \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{an}$  soit contenue dans la composante connexe de  $\bar{x}$ . Soit  $X$  le groupe  $p$ -divisible sur  $\text{Spf}(A)$  tiré en arrière de la déformation universelle sur  $\check{\mathcal{M}}$ . Quitte à remplacer  $A$  par son normalisé dans une extension de degré fini de  $\text{Frac}(A)$  on peut supposer que  $A$  est normale et qu'il existe un groupe  $p$ -divisible  $Y$  sur  $\check{E}$  tel que

$$X^{\text{univ}, an} \times \text{Sp}(A[\frac{1}{p}]) \simeq Y \times_{\text{Sp}(\check{E})} \text{Sp}(A[\frac{1}{p}]). \quad (5.2)$$

Soit  $K|\check{E}$  une extension fini telle que

$$\text{Sp}(A[\frac{1}{p}])(K) = \text{Spf}(A)(\mathcal{O}_K) \neq \emptyset$$

Alors  $Y \otimes_{\check{E}} K$  possède un modèle  $Y'$  sur  $\mathcal{O}_K$ . Soit  $A'$  le normalisé de  $A$  dans le corps des fractions de  $A \otimes_{\mathcal{O}_{\check{E}}} \mathcal{O}_K$ . Alors (5.2) entraîne un isomorphisme

$$X^{\text{univ}, an} \times_{\check{\mathcal{M}}^{an}} \text{Sp}(A'[\frac{1}{p}]) \simeq Y'^{an} \times_{\text{Sp}(K)} \text{Sp}(A'[\frac{1}{p}]).$$

Puisque  $A'$  est noethérienne normale, d'après le théorème de pleine fidélité de Tate,

$$X^{\text{univ}} \times_{\check{\mathcal{M}}} \text{Spf}(A') \simeq Y' \times_{\text{Spf } \mathcal{O}_K} \text{Spf}(A').$$

Or, l'application de Kodaira-Spencer pour  $Y'$  s'annule car  $\Omega_{\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_{\bar{E}}}^1 = 0$ , mais celle pour  $X^{\text{univ}}$  est l'isomorphisme

$$(\Omega_{\check{\mathcal{M}}/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\bar{E}})}^1)^\vee \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(X^{\text{univ}D}) \otimes_{\mathcal{O}_{\check{\mathcal{M}}}} \text{Lie}(X^{\text{univ}})$$

On en déduit que le morphisme naturel

$$f^*(\Omega_{\check{\mathcal{M}}/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\bar{E}})}^1) \rightarrow \Omega_{\text{Spf}(A')/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\bar{E}})}^1$$

s'annule, où  $f : \text{Spf}(A') \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ . Donc

$$\Omega_{\text{Spf}(A')/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\bar{E}})}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{Spf}(A')/\check{\mathcal{M}}}^1.$$

Or,  $(\Omega_{\text{Spf}(A')/\check{\mathcal{M}}}^1)^{\text{an}}$  s'annule puisque  $\text{Sp}(A'[1/p]) \rightarrow \check{\mathcal{M}}^{\text{an}}$  est une immersion ouverte composé avec un morphisme fini étale. On en déduit que

$$(\Omega_{\text{Spf}(A')/\text{Spf}(\mathcal{O}_{\bar{E}})}^1)^{\text{an}} = \Omega_{\text{Sp}(A'[1/p])/\text{Sp}(\bar{E})}^1 = 0.$$

D'où  $\check{\mathcal{M}}$  est de dimension 0. Cela n'est pas possible puisque l'on suppose que les polygones de Newton et de Hodge n'ont pas de point commun en dehors de leurs extrémités.

*Deuxième étape : utilisation des représentations de monodromie de de Jong*

Soit maintenant  $\bar{y} = \check{\pi}(\bar{x})$ , un point géométrique de l'espace des périodes. Rappelons (cf. section 2.5) qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}, \bar{x}) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}, \bar{x}) \xrightarrow{\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}}} G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p) \\ \check{\pi}_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}_p}^a, \bar{y}) & \xrightarrow{\beta} & G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p). \end{array}$$

Notons

$$\Gamma = \text{Im } \beta.$$

Dans le diagramme précédent on a :

- les groupes  $\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}, \bar{x})$  et  $\pi_1^{dJ}(\check{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}_p}^a, \bar{y})$  sont prodiscrets,
- le groupe  $\pi_1(\check{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}_p}^{\text{an}}, \bar{x})$  est profini,
- l'image de  $\alpha$  est dense,
- on a  $\Gamma \cap G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p) = \text{Im}(\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}} \circ \alpha)$ .

Soit  $\bar{\Gamma}$  l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p)$  pour la topologie  $p$ -adique. On a un diagramme d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(\rho_{\bar{x}}^{\text{géo}} \circ \alpha) & \subset & \text{Im } \rho_{\bar{x}}^{\text{géo}} \\ & \text{dense} & \\ \cap & & \\ \Gamma & & \end{array}$$

duquel on déduit que

$$\text{Im } \rho_{\bar{x}}^{\text{géo}} \subset \bar{\Gamma}.$$

Puisqu'on a montré que  $\text{Im } \rho_{\bar{x}}^{\text{géo}}$  est ouvert dans  $G^{\text{der}}(\mathbb{Z}_p)$ , on en déduit que  $\bar{\Gamma}$  est un sous-groupe ouvert de  $G^{\text{der}}(\mathbb{Q}_p)$ .

Comme remarqué au début de cette démonstration, si  $X$  est une composante connexe de  $\check{\mathcal{M}}^{\text{an}}$  alors  $\text{Im } \check{\pi} = \check{\pi}(X)$  et donc  $\text{Im } \check{\pi}$  est connexe. Il résulte alors de la description de de Jong de l'espace  $\check{\mathcal{M}}^{\text{an}}$  en termes de réseaux dans le  $\mathbb{Q}_p$ -système local sur le lieu admissible  $\text{Im } \check{\pi}$  et du lemme qui suit que

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}^{\text{an}}) \simeq \Gamma \backslash G(\mathbb{Q}_p) / G(\mathbb{Z}_p).$$

Puisque  $\pi_0(\check{\mathcal{M}}^{an})/p^{\mathbb{Z}}$  est fini on en déduit que

$$|\Gamma \backslash G(\mathbb{Q}_p)/G(\mathbb{Z}_p) \cdot p^{\mathbb{Z}}| < +\infty$$

et que donc

$$|\bar{\Gamma} \backslash G^{der}(\mathbb{Q}_p)| < +\infty$$

en utilisant le fait que  $\bar{\Gamma}$  est ouvert. Alors  $\bar{\Gamma}$  est de covolume fini dans  $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ . D'après ([Mar91] II thm 5.1),  $\bar{\Gamma}$  étant ouvert, on en déduit que

$$\bar{\Gamma} = G^{der}(\mathbb{Q}_p).$$

Mais puisque  $G^{der}(\mathbb{Z}_p)$  est ouvert dans  $G^{der}(\mathbb{Q}_p)$ , on a

$$\overline{\bar{\Gamma} \cap G^{der}(\mathbb{Z}_p)} = \bar{\Gamma} \cap G^{der}(\mathbb{Z}_p) = G^{der}(\mathbb{Z}_p).$$

Puisque  $\Gamma \cap G^{der}(\mathbb{Z}_p) = \text{Im}(\rho_x^{\text{géo}} \circ \alpha)$  et  $\text{Im} \rho_x^{\text{géo}}$  est fermé dans  $G^{der}(\mathbb{Z}_p)$  on conclut que

$$\text{Im} \rho_x^{\text{géo}} = G^{der}(\mathbb{Z}_p).$$

□

### Lemme 5.1.2.1.

1. Soit  $\check{\mathcal{M}}_{red}$  la fibre spéciale réduite du schéma formel  $\check{\mathcal{M}}$ , un  $\mathbb{F}_p$ -schéma localement de type fini. L'application de spécialisation induit une bijection

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}^{an}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\check{\mathcal{M}}_{red}).$$

2. Toute composante connexe de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  est géométriquement connexe.

*Démonstration.* Le point (1) résulte de ce que  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  est formellement lisse et du théorème 7.4.1 de [dJ95a]. Le point (2) résulte du point (1) et de ce que  $\check{\mathcal{M}}$  étant formellement lisse, toute composante connexe de  $\check{\mathcal{M}}^{an}$  possède un point  $\check{E}$ -rationnel. □

### Lemme 5.1.2.2. L'algèbre de Lie de $G^{der}$ est simple.

*Démonstration.* Dans tous les cas,

$$\text{Lie } G^{der} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \bar{\mathbb{Q}}_p = \prod_{\tau \in \tilde{I}_F} \mathfrak{g}.$$

où  $\mathfrak{g}$  est simple et  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p|\mathbb{Q}_p)$  agit par permutation des composantes. Si  $\mathfrak{h} \subset \text{Lie } G^{der}$  est un idéal on a donc

$$\mathfrak{h}_{\bar{\mathbb{Q}}_p} = \prod_{\tau \in J} \mathfrak{g}$$

où  $J \subset \tilde{I}_F$ . Mais l'ensemble  $J$  est nécessairement invariant par l'action de  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p|\mathbb{Q}_p)$ . On a donc soit  $J = \emptyset$ , soit  $J = \tilde{I}_F$ . □

## 5.1.3 Composantes connexes géométriques des tours de Rapoport-Zink

Du théorème 5.1.2.1 on déduit le suivant qui est le théorème principal de cette thèse.

**Théorème 5.1.3.1.** *Supposons la conjecture 1 vérifiée. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. 4.1 et 4.5.0.1 hypothèse (d)).*

1. Les fibres géométriques du morphisme déterminant

$$\check{\mathcal{M}}_K \longrightarrow \det(\check{\mathcal{M}})_{\det K} = \check{\mathcal{M}}(D, \det \tilde{\mu})_{\det K}$$

sont les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$ .

2. Le morphisme déterminant induit des bijections compatibles lorsque  $K$  varie

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q}_p)/\det K.$$

L'action de  $(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  sur les composantes connexes géométriques est donnée sur  $D(\mathbb{Q}_p)/\det K$  par la translation par  $\det(g_1)\det(g_2)$ . L'action de  $\gamma \in I_E$  sur les composantes connexes géométriques est donnée par la translation par  $\chi_{\det \tilde{\mu}}(\gamma)$ .

**Remarque 5.1.3.1.** Via le théorème d'uniformisation de Rapoport-Zink ([RZ96] chap. 6) le théorème 5.1.3.1 fournit une description des composantes connexes géométriques du tube au dessus du lieu basique de certaines variétés de Shimura de type PEL.

### 5.1.4 Composantes connexes des tours de Rapoport-Zink

Bien sûr, si on connaît les composantes connexes géométriques ainsi que l'action du groupe de Galois dessus, on connaît les composantes connexes.

**Corollaire 5.1.4.1.** Soit  $D_0$  le plus petit sous tore de  $D$  contenant l'image de  $\det \circ \tilde{\mu} \in X_*(D)$ . Il y a des bijection naturelles lorsque  $K$  varie

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{Q}_p)/D_0(\mathbb{Z}_p)\det K.$$

L'action de  $(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$  sur les composantes connexes géométriques est donnée sur  $D(\mathbb{Q}_p)/\det K$  par la translation par  $\det(g_1)\det(g_2)$ .

*Démonstration.* On a

$$\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K) = I_E \backslash \pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p).$$

Rappelons (cf. section 2.2) que  $\chi_{\det \tilde{\mu}} : I_E \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est donné par l'application de réciprocity d'Artin composée avec le morphisme de groupes  $\mathcal{O}_E^\times \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  induit par le morphisme de tores  $N_{\det \tilde{\mu}} : \text{Res}_{E/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m \rightarrow D$ . On vérifie facilement que  $D_0 = \text{Im } N_{\det \tilde{\mu}}$ . Remarquons que tous nos tores sont non-ramifiés sur  $\mathbb{Q}_p$ . On note encore  $D$  pour le modèle entier canonique de  $D$  sur  $\mathbb{Z}_p$ . Alors,  $N_{\det \tilde{\mu}}$  est induit en fibre générique par un morphisme de tores

$$N_{\det \tilde{\mu}} : \text{Res}_{\mathcal{O}_E/\mathbb{Z}_p} \mathbb{G}_m \longrightarrow D.$$

On vérifie par un calcul explicite que le noyau de ce morphisme de tores est connexe et est donc un tore. D'après le théorème de Lang, cela implique que l'image de  $N_{\det \tilde{\mu}} : \mathcal{O}_E^\times \rightarrow D(\mathbb{Z}_p)$  est égale à  $D_0(\mathbb{Z}_p)$ .  $\square$

**Exemple 5.1.4.1.** Soit  $\delta \in \text{Im } \varkappa$  et  $\check{\mathcal{M}}_K^{[\delta]} = \varkappa^{-1}(\delta)$ . Si  $D_0 = D$ ,  $|\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K^{[\delta]})|$  est borné lorsque  $K$  varie. Si  $D_0 \subsetneq D$ ,  $\lim_{K \rightarrow \{e\}} |\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K^{[\delta]})| = +\infty$ .

### 5.1.5 Sur l'hypothèse concernant les polygones de Hodge et de Newton

Supposons que l'on regarde un espace de Rapoport-Zink de type EL lorsque  $F = \mathbb{Q}_p$ , c'est à dire sans structures additionnelles. On a alors  $G = \text{GL}_n/\mathbb{Q}_p$ . Dans les théorèmes précédents, la condition concernant les polygones de Hodge et Newton signifie simplement que le groupe  $p$ -divisible que l'on déforme ne possède pas de partie étale, ni de partie multiplicative. Si c'était le cas, la représentation de monodromie du théorème 5.1.2.1 se factoriserait par un sous-groupe parabolique propre de  $G(\mathbb{Q}_p)$ . De plus, la tour de Rapoport-Zink serait « induite parabolique » à partir d'une tour de Rapoport-Zink de dimension inférieure. Dans le cas des espaces de modules de déformation de groupes  $p$ -divisibles de dimension 1, il s'agit de « l'astuce de Boyer » (cf. [Boy99] et [HT01]). Donc, lorsqu'il n'y a pas de structures additionnelles, l'hypothèse concernant les polygones de Hodge et Newton est nécessaire afin que les théorèmes précédents soient vrais.

Dans le cas général, il est probable que cette hypothèse soit encore nécessaire. Un cas particulier de cela a été vérifié par Mantovan dans [Man08]. Plus précisément, Mantovan montre que si non seulement les polygones de Hodge et de Newton se touchent en un point de rupture du polygone de Newton mais également « ils coïncident avant », alors la représentation de monodromie se factorise par un sous-groupe parabolique et la tour de Rapoport-Zink est induite parabolique.

## 5.2 Applications cohomologiques

La tour  $(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)_K$  est munie d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  à gauche et d'une action de  $G(\mathbb{Q}_p) \times I_E$  à droite. De plus, pour un relèvement de Frobenius  $\tilde{\sigma}_E \in \text{Gal}(\overline{E}|E)$ ,  $\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p$  est muni d'une action de  $\tilde{\sigma}_E$  induite par la donnée de Rapoport-Zink :

$$\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p \xrightarrow{\alpha_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p} \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p \xrightarrow{\tilde{\sigma}_E} \check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p$$

où  $\alpha_K : \check{\mathcal{M}}_K \rightarrow \sigma_E^* \check{\mathcal{M}}_K$  est la donnée de descente de Rapoport-Zink. Donc l'action de  $I_E$  à droite sur la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  prolonge en une action de  $W_E$  qui commute encore aux actions de  $J(\mathbb{Q}_p)$  et de  $G(\mathbb{Q}_p)$ . Posons

$$d := \dim \check{\mathcal{M}}^{an} = \begin{cases} \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} p_\tau q_\tau & EL \\ \frac{1}{2} \sum_{\tau \in \tilde{I}_F} p_\tau q_\tau & PEL \text{ unitaire} \\ [F : \mathbb{Q}_p]n(n+1)/2 & PEL \text{ symplectique} \end{cases}$$

**Définition 5.2.0.1.** *On définit*

$$H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_l) := \varinjlim_U \varprojlim_n H_c^\bullet(U \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_l$$

la cohomologie à support compact  $l$ -adique de l'espace analytique  $\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p$ , où  $U$  parcourt les ouverts relativement compacts de  $\check{\mathcal{M}}_K$ . Définissons

$$H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) := H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_l) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Considérons le système projectif  $(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))_K$  avec les morphismes de translation :

$$(\pi_{K',K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)_! : H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_{K'} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

où  $K' \subset K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  et  $\pi_{K',K} : \check{\mathcal{M}}_{K'} \rightarrow \check{\mathcal{M}}_K$  le morphisme naturel. Ce système est muni d'une action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  à gauche, avec l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  donnée par  $(g^{-1})^*$  pour  $g \in J(\mathbb{Q}_p)$ .

**Théorème 5.2.0.1.** *Supposons la conjecture 1 vérifiée. Supposons que les polygones de Hodge et de Newton associés à la donnée de Rapoport-Zink ne se touchent pas en dehors de leurs extrémités (cf. 4.1 et 4.5.0.1 hypothèse (d)). Soit  $\pi$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible lisse de  $J(\mathbb{Q}_p)$ .*

– Si  $\pi = \chi \circ \det$  est le composé du morphisme déterminant avec un caractère de  $D(\mathbb{Q}_p)$

$$\pi : J(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\det} D(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\chi} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times,$$

alors la représentation

$$\varinjlim_K \text{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) \quad (5.3)$$

de  $G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  est le caractère suivant :

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q}_p) \times W_E &\rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \\ (g, \gamma) &\mapsto \chi \circ \det(g) \cdot \chi \circ \tilde{\chi}_{\det \tilde{\mu}}(\gamma) \cdot \chi_{\text{cycl}}^d(\gamma) \end{aligned}$$

où  $\chi_{\text{cycl}}$  est le caractère cyclotomique et  $\tilde{\chi}_{\det \tilde{\mu}} : W_E \rightarrow D(\mathbb{Q}_p)$  est défini dans la remarque 2.2.3.2.

– si  $\pi \neq \chi \circ \det$ , alors 5.3 s'annule.

Pour montrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.2.0.1.** – L'action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  sur

$$V := \varprojlim_K H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

factorise par

$$J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E \xrightarrow{(\det, \det, \text{Id})} D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p) \times W_E.$$

- Désignons par  $\rho : J(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  l'action de  $J(\mathbb{Q}_p)$  sur  $V$  qui factorise par  $D(\mathbb{Q}_p)$ . Par l'abus de notation, on note encore  $\rho : D(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ . Alors on peut décrire explicitement l'action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  comme suit : pour  $(g_1, g_2, \gamma) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  et  $v \in V$ ,

$$(g_1, g_2, \gamma) \cdot v = \chi_{\mathrm{cycl}}^{-d}(\gamma) \rho(\det(g_1)) \circ \rho(\det(g_2^{-1})) \circ \rho(\tilde{\chi}_{\det \bar{\mu}}(\gamma^{-1}))v.$$

*Démonstration.* Posons

$$(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))^1 := \{(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \mid \det(g_1) = \det(g_2) \in D(\mathbb{Q}_p)\}$$

$$(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))_1 := \{(g_1, g_2) \in J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \mid \det(g_1^{-1}) = \det(g_2) \in D(\mathbb{Q}_p)\}$$

On déclare que  $(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))^1$  agit trivialement sur  $V$ .

Soient  $(g_1, g_2) \in (J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))_1$  et  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  un sous groupe compact ouvert tels que  $g_2^{-1}Kg_2 \subset G(\mathbb{Z}_p)$ . Considérons la correspondance de Hecke :

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{M}}_{K \cap g_2 K g_2^{-1}} & \xrightarrow{(g_1, g_2)} & \check{\mathcal{M}}_{g_2^{-1} K g_2 \cap K} \\ \pi_{K \cap g_2 K g_2^{-1}, K} \swarrow & & \searrow \pi_{g_2^{-1} K g_2 \cap K, K} \\ \check{\mathcal{M}}_K & & \check{\mathcal{M}}_K \end{array}$$

Comme le morphisme déterminant est compatible aux actions de  $J(\mathbb{Q}_p)$  et  $G(\mathbb{Q}_p)$ , cela induit une identité sur les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$  :

$$\begin{array}{ccccc} D(\mathbb{Q}_p)/\det(K \cap g_2 K g_2^{-1}) & \xlongequal{\quad} & \pi_0(\check{\mathcal{M}}_{K \cap g_2 K g_2^{-1}} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & \xrightarrow{(g_1, g_2)} & \pi_0(\check{\mathcal{M}}_{g_2^{-1} K g_2 \cap K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & \xlongequal{\quad} & D(\mathbb{Q}_p)/\det(g_2^{-1} K g_2 \cap K) & (5.4) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_0(\pi_{K \cap g_2 K g_2^{-1}, K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & & \downarrow \pi_0(\pi_{g_2^{-1} K g_2 \cap K, K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & & \downarrow \\ D(\mathbb{Q}_p)/\det K & \xlongequal{\quad} & \pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p) & \xlongequal{\quad} & D(\mathbb{Q}_p)/\det K \end{array}$$

Berkovich montre dans [Ber93] théorème 7.2.1 que le morphisme trace :

$$\mathrm{Tr}_K : H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-d)$$

est un isomorphisme pour tout  $K \subset G(\mathbb{Z}_p)$  sous groupe ouvert compact. De plus le morphisme trace est compatible à la composition (i.e. pour  $K' \subset K \subset G(\mathbb{Z}_p)$ ,  $\mathrm{Tr}_{K'} = \mathrm{Tr}_K \circ (\pi_{K', K})$ !). Alors le diagramme 5.4 couplé avec le morphisme trace pour la tour  $(\check{\mathcal{M}}_K)_K$  entraîne le diagramme suivant de groupes de cohomologies en degré  $2d$  :

$$\begin{array}{ccc} H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_{K \cap g_2 K g_2^{-1}} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xleftarrow{((g_1^{-1})^*, g_2^*)} & H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_{g_2^{-1} K g_2 \cap K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ \downarrow (\pi_{K \cap g_2 K g_2^{-1}, K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)! & & \downarrow (\pi_{g_2^{-1} K g_2 \cap K, K} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)! \\ H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xleftarrow{\mathrm{Id}} & H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{array}$$

D'où  $(J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p))^1$  agit trivialement sur  $V$ . En particulier, l'action de  $J(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  factorise par  $D(\mathbb{Q}_p) \times D(\mathbb{Q}_p) \times W_E$  et de plus pour  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  et  $v \in V$ ,

$$g \cdot v = \rho(\det g^{-1})v.$$

De même, on définit

$$(J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1 := \{(g, \gamma) \in J(\mathbb{Q}_p) \times W_E \mid \det g = \tilde{\chi}_{\det \bar{\mu}}(\gamma)\}$$

$$(J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)_1 := \{(g, \gamma) \in J(\mathbb{Q}_p) \times W_E \mid (g^{-1}, \gamma) \in (J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1\}$$

On montre de la même manière que  $(J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)_1$  agit trivialement sur  $\pi_0(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p)$  les composantes connexes géométriques de  $\check{\mathcal{M}}_K$ . Donc l'action de  $(J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1$  est donnée par le caractère  $\chi_{\mathrm{cycl}}^{-d}$  composé avec la projection  $(J(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} W_E$ . D'où le résultat.  $\square$

*Preuve du théorème 5.2.0.1.* Remarquons que

$$\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(\varprojlim_K H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p), \pi) \quad (5.5)$$

car tous les morphismes de translation dans le système projectif  $(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p))_K$  sont surjectifs. D'après le lemme 5.2.0.1,  $\mathrm{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(\varprojlim_K H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p), \pi)$  s'annule si  $\pi$  ne factorise pas par  $D(\mathbb{Q}_p)$ , d'où le point (2).

Maintenant supposons que  $\pi = \chi \circ \det$  avec  $\chi : D(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  un caractère lisse. En utilisant le morphisme trace, on a

$$H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq c - \mathrm{Ind}_{\det K}^{D(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{1}_{\det K})$$

en tant que  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation de  $J(\mathbb{Q}_p)$  qui factorise par  $D(\mathbb{Q}_p)$ . Donc

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) \\ & \simeq \mathrm{Hom}_{D(\mathbb{Q}_p)}(c - \mathrm{Ind}_{\det K}^{D(\mathbb{Q}_p)}(\mathbb{1}_{\det K}), \chi) \\ & = \mathrm{Hom}_{\det K}(\mathbb{1}_{\det K}, \chi|_{\det K}) \\ & = (\chi|_{\det K})^{\det K} \end{aligned}$$

et

$$\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J(\mathbb{Q}_p)}(H_c^{2d}(\check{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi) = \varinjlim_K (\chi|_{\det K})^{\det K} = \chi$$

Donc (5.3) est de dimension 1, et le caractère s'est obtenu par l'inclusion (5.5) couplée avec le lemme 5.2.0.1.  $\square$



## Annexe A

# Comparaison d'anneaux $B_{cris}$ et $\hat{B}_{cris}$

Soit  $K$  un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète à corps résiduel  $k$  parfait de caractéristique  $p > 0$ . Nous noterons  $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ ,  $K_0 = W(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Fixons une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ , on note  $C$  la complété  $p$ -adique de  $\bar{K}$ .

Dans cet appendice, on va voir que la théorie classique de Fontaine pour  $B_{cris}(\mathcal{O}_K)$  reste valable pour  $\hat{B}_{cris}(\mathcal{O}_K)$ . On notera  $B_{cris} := B_{cris}(\mathcal{O}_K)$ ,  $\hat{B}_{cris} := \hat{B}_{cris}(\mathcal{O}_K)$ .

Soit  $R := \varprojlim_{Frob} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . (On a changé la notation de  $S$  à  $R$  ici).

Soit  $\alpha \subset R$  un idéal. Posons

$$S_{\alpha} := \left\{ \sum_{n > > -\infty} p^n [v_n] | v_n \in \alpha^{-n} \forall n < 0 \right\} \subset W(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

C'est une sous- $W(k)$ -algèbre de  $W(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Soient  $S_{\alpha}^{\wedge} := \varprojlim_n S_{\alpha}/p^n S_{\alpha}$ ,  $B_{\alpha}^+ := S_{\alpha}^{\wedge} \otimes_{W(k)} K_0$  et  $B_{\alpha, K}^+ := B_{\alpha}^+ \otimes_{K_0} K$ .

Posons des idéaux  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  de  $R$  :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \{x \in R | x^{(0)} \in p^p \mathcal{O}_C\} \\ \alpha_2 &:= \{x \in R | x^{(0)} \in p^{p-1} \mathcal{O}_C\} \\ \alpha_3 &:= \{x \in R | x^{(0)} \in p \mathcal{O}_C\}. \end{aligned}$$

Rappelons que on a un homomorphisme surjectif :

$$\theta : W(R) \rightarrow \mathcal{O}_C$$

avec  $\ker(\theta) = (\xi)$ , où  $\xi = p - [p]$ .

**Proposition A.0.0.1.** *On a des inclusions naturelles :*

- (1)  $S_{\alpha_1}^{\wedge} \subset A_{cris} \subset S_{\alpha_2}^{\wedge}$ .
- (2)  $S_{\alpha_1}^{\wedge} \subset \hat{A}_{cris} \subset S_{\alpha_3}^{\wedge}$ .

*Démonstration.* (1)[Fon83, 3.8].

(2) Comme  $\hat{A}_{cris}$  est  $p$ -adiquement complet, on a un homomorphisme  $\alpha : S_{\alpha_1}^{\wedge} \rightarrow \hat{A}_{cris}$ .

Notons  $D := D_{W(R)}(\ker \theta)$  l'enveloppe à puissances divisées de  $W(R)$  par rapport à l'idéal  $\ker \theta$ . On peut vérifier que la topologie sur  $D$  définie par la PD-filtration est plus fine que celle induite par la topologie  $p$ -adique de  $S_{\alpha_3}$ . Donc on a un morphisme naturel  $\beta : \hat{A}_{cris} \rightarrow S_{\alpha_3}^{\wedge}$ . Comme on sait que la composée

$$S_{\alpha_1}^{\wedge} \xrightarrow{\alpha} \hat{A}_{cris} \xrightarrow{\beta} S_{\alpha_3}^{\wedge}$$

est injectif [Fon82, Prop 4.4], on en déduit que  $\alpha$  est injectif. On se ramène à l'injectivité de  $\beta$ . A l'aide du morphisme  $\theta$ , tout élément de  $\hat{A}_{cris}$  peut être écrit de la forme  $\sum_{n \geq 0} [a_n] \xi^{[n]}$ . Cette écriture n'est pas unique, mais  $\sum_{n \geq 0} [a_n] \xi^{[n]} = 0$  si et seulement si  $a_n = 0$  pour tout  $n$ . Soit  $x = \sum_{n \geq 0} [a_n] \xi^{[n]} \in \hat{A}_{cris}$  non nul, on veut montrer que  $\beta(x)$  ne s'annule pas dans  $S_{\alpha_3}^{\wedge}$ .

Notons  $\lambda_0 := \min_n(\nu_R(a_n) + n - v_p(n!)) \in \mathbb{N}$ , où  $\nu_R(v_n) := v_p(v_n^{(0)})$ . Posons  $\Delta_{\lambda_0} := \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_R(a_n) + n - v_p(n!) = \lambda_0\}$ . C'est un ensemble fini avec éléments  $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ .

Posons  $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} [a_i] \xi^{[i]} \in D$ . Alors  $x$  est défini par la suite de Cauchy  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\hat{A}_{cris}$ . Pour montrer que  $\beta(x) \neq 0$ , il suffit de montrer que

$$\forall n \geq n_r, x_n \notin p^{\lambda_0+1} S_{\alpha_3}.$$

Or on a une description plus concrète de  $S_{\alpha_3}$  :

$$S_{\alpha_3} = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} p^n [v_n] \mid \nu_R(v_n) + n \geq 0, \forall n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Alors

$$p^m S_{\alpha_3} = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} p^n [v_n] \mid \nu_R(v_n) + n \geq m, \forall n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Alors pour tout  $n \geq n_r$ ,  $x_n \in p^{\lambda_0} S_{\alpha_3}$  et

$$x_n \equiv \sum_{i=1}^r [a_{n_i}] \xi^{[n_i]} \pmod{p^{\lambda_0+1} S_{\alpha_3}}.$$

Comme  $S_{\alpha_3}$  est sans  $p$ -torsion, on a

$$\frac{x_n}{p^{\lambda_0}} \equiv \sum_{i=1}^r \frac{[a_{n_i}] \xi^{[n_i]}}{p^{\lambda_0}} \pmod{p S_{\alpha_3}}.$$

Considérons maintenant l'homomorphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} \gamma : \quad S_{\alpha_3} &\rightarrow R/pR[X] \\ \sum_{n \gg -\infty} p^n [v_n] &\mapsto \sum_{n \geq 0} \overline{(v_n p^{-n})} X^n \end{aligned}$$

où  $\bar{x}$  désigne  $x$  modulo  $pR$ . C'est surjectif avec noyau  $pS_{\alpha_3}$  [Fon82, lemme 4.5].

Alors on se ramène à montrer que  $\gamma(\sum_{i=1}^r \frac{[a_{n_i}] \xi^{[n_i]}}{p^{\lambda_0}}) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} &\gamma\left(\sum_{i=1}^r \frac{[a_{n_i}] \xi^{[n_i]}}{p^{\lambda_0}}\right) \\ &= \gamma\left(\sum_{i=1}^r \frac{[a_{n_i}]}{p^{\nu_R(a_{n_i})}} \cdot \frac{(p - [p])^{n_i}}{(n_i)!} \cdot \frac{1}{p^{n_i - v_p(n_i!)}}\right) \\ &= \gamma\left(\sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^{n_i} \frac{[a_{n_i}]}{p^{\nu_R(a_{n_i})}} \cdot \frac{p^m}{m!} \cdot \frac{(-[p])^{n_i-m}}{(n_i-m)!} \cdot \frac{1}{p^{n_i - v_p(n_i!)}}\right) \\ &= \gamma\left(\sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^{n_i} [a_{n_i} \cdot p^{n_i-m}] \cdot p^{-(\nu_R(a_{n_i}) + (n_i-m) - v_p(\binom{n_i}{m}))} \cdot \overline{(-1)^{n_i-m} u_m^{-1} u_{n_i-m}^{-1}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{m \in \Delta_{n_i}} \overline{a_{n_i} \cdot p^{-\nu_R(a_{n_i})}} X^{\nu_R(a_{n_i}) + (n_i-m)} \cdot \overline{(-1)^{n_i-m} u_m^{-1} u_{n_i-m}^{-1}} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{m \in \Delta_{n_i}} \overline{a_{n_i} \cdot p^{-\nu_R(a_{n_i})}} X^{\lambda_0 + v_p(n_i!) - m} \cdot \overline{(-1)^{n_i-m} u_m^{-1} u_{n_i-m}^{-1}} \end{aligned} \tag{A.1}$$

où  $\binom{n_i}{m} = \frac{n_i!}{(n_i-m)!m!}$ ,  $u_m = \frac{m!}{p^{v_p(m!)}}$  et  $\Delta_{n_i} := \{m \in \mathbb{N} \mid 0 \leq m \leq n_i, v_p(\binom{n_i}{m}) = 0\}$ .

Si pour tout  $l \leq n_r$ ,  $\sum_{i=0}^{l-1} v_p(n_r - i) < l$ . Alors,

$$v_p(n_r!) - n_r < v_p(n_i!) - n_i, 1 \leq i \leq r-1.$$

On en déduit que le coefficient du monôme de  $X^{\lambda_0 + v_p(n_r!) - n_r}$  de (A.1) est

$$a_{n_r} \underline{p}^{-v_R(a_{n_r})} \cdot (-1)^{n_r - m} u_m^{-1} u_{n_r - m}^{-1} \pmod{\underline{p}R}$$

qui ne s'annule pas dans  $R/\underline{p}R$ . Donc  $\gamma(\sum_{i=1}^r \frac{[a_{n_i}] \xi^{[n_i]}}{p^{\lambda_i}}) \neq 0$ .

Sinon, il existe  $l \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq l \leq n_r$  tel que  $\sum_{i=0}^{l-1} v_p(n_r - i) \geq l$ . Soit  $l_0$  le plus petit entier positif qui vérifie cette propriété. D'après le lemme A.0.0.3,  $l_0 - 1 \in \Delta_{n_r}$ . Donc il suffit de montrer que le coefficient du monôme  $X^{\lambda_0 + v_p(n_r!) - l_0 + 1}$  de (A.1) est

$$a_{n_r} \underline{p}^{-v_R(a_{n_r})} (-1)^{n_r - l_0 + 1} u_{l_0 - 1}^{-1} u_{n_r - l_0 + 1}^{-1} \pmod{\underline{p}R}$$

qui ne s'annule pas dans  $R/\underline{p}R$ . C'est équivalent à dire que

$$\lambda_0 + v_p(n_r!) - l_0 + 1 \neq \lambda_0 + v_p(n_i!) - m$$

pour tout  $1 \leq i \leq r-1$  et  $m \in \Delta_{n_i}$ . On raisonne par l'absurde. Sinon il existe  $i, m$  tel que  $v_p(n_r!) - v_p(n_i!) = l_0 - 1 - m$ . Si  $n_r - n_i \leq l_0 - 1 - m$ , d'après la définition de  $l_0$ , on a  $n_r - n_i \geq l_0$ . Cela entraîne que  $l_0 \leq l_0 - 1 - m$  qui est impossible. Donc on a

$$l_0 - 1 - m < n_r - n_i \tag{A.2}$$

Comme  $m \in \Delta_{n_i}$ , on a

$$v_p(n_r!) - v_p((n_i - m)!) = v_p(n_r!) - v_p(n_i!) + v_p(m!) = l_0 - 1 - m + v_p(m!) \leq l_0 - 1.$$

D'autre part, d'après A.2,

$$v_p(n_r!) - v_p((n_i - m)!) \geq v_p(n_r!) - v_p((n_r - l_0)!) \geq l_0,$$

d'où la contradiction.  $\square$

**Lemme A.0.0.2.** Soit  $n \leq m$  deux entiers positifs avec expansion  $p$ -adique

$$n = \sum_i a_i p^i, m = \sum_i b_i p^i, 0 \leq a_i, b_i \leq p-1.$$

Alors  $v_p\left(\binom{n}{m}\right) = 0$  si et seulement si  $b_i \leq a_i$  pour tout  $i$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} v_p\left(\binom{n}{m}\right) &= v_p(n!) - v_p((n-m)!) - v_p(m!) \\ &= \sum_{i \geq 1} \left[ \frac{n}{p^i} \right] - \left[ \frac{n-m}{p^i} \right] - \left[ \frac{m}{p^i} \right] \end{aligned}$$

où  $[x]$  désigne le plus grand entier égal ou inférieur que  $x$ . Alors  $v_p\left(\binom{n}{m}\right) = 0$  si et seulement  $\left[ \frac{n}{p^i} \right] = \left[ \frac{n-m}{p^i} \right] + \left[ \frac{m}{p^i} \right]$  pour tout  $i$ . Et le dernier est équivalent à  $b_i \leq a_i$  pour tout  $i$ .  $\square$

**Lemme A.0.0.3.** Soient  $n_r, l_0 \in \Delta_{n_r}$  comme dans la preuve du proposition A.0.0.1. Alors on a une décomposition  $n_r = a \cdot p^{i_0} + l_0 - 1$ , avec  $i_0 \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{N}$  et  $l_0 - 1 < p^{i_0}$ . En particulier,  $l_0 - 1 \in \Delta_{n_r}$ , i.e.  $v_p\left(\binom{n_r}{l_0 - 1}\right) = 0$ .

*Démonstration.* Soient

$$n_r = \sum_{i=0}^{s_1} a_i p^i, l_0 - 1 = \sum_{i=0}^{s_2} b_i p^i$$

les expansion  $p$ -adique de  $n_r$  et  $l_0 - 1$  avec  $0 \leq a_i, b_i \leq p - 1$ ,  $a_{s_1} \neq 0 \neq b_{s_2}$  et  $s_2 \leq s_1$ . Il suffit de montrer que  $b_i = a_i$  pour  $i = 0, \dots, s_2$ .

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe  $t \in \mathbb{N}$ ,  $t \leq s_2$  tel que  $b_i = a_i$  pour  $i = 0, \dots, t-1$  et  $b_t \neq a_t$ . Alors

$$\begin{aligned} & (v_p(n!) - v_p((n - l_0)!) - l_0) - (v_p(n!) - v_p((n - l_0 + p^t)!) - (l_0 - p^t)) \\ &= v_p((n - l_0 + p^t)!) - v_p((n - l_0)!) - p^t \\ &= v_p(p^t!) - p^t \quad (\text{car } v_p(n - l_0 + 1) = t) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Comme  $v_p(n!) - v_p((n - l_0)!) \geq l_0$ , on en déduit que  $v_p(n!) - v_p((n - l_0 + p^t)!) \geq l_0 - p^t$ . Cela contredit la définition de  $l_0$ .

La dernière assertion est due au lemme A.0.0.2.  $\square$

**Proposition A.0.0.2.** (1) *L'homomorphisme naturel  $\hat{B}_{cris} \otimes_{K_0} K \rightarrow B_{dR}$  est injectif.*

(2)  $(\hat{B}_{cris})^G = K_0$ .

*Démonstration.* (1) On a

$$\hat{B}_{cris} \otimes_{K_0} K \hookrightarrow B_{\alpha_3, K}^+ \hookrightarrow B_{dR}^+$$

où la première injection est due à la proposition A.0.0.1 et la deuxième est due à [Fon82, Prop 4.7]. Comme  $t$  est régulier dans  $B_{dR}^+$ , on en déduit l'injectivité de  $\hat{B}_{cris} \otimes_{K_0} K \rightarrow B_{dR}$ .

(2) Il est clair que  $K_0 = (B_{cris})^G \subset (\hat{B}_{cris})^G \subset (B_{dR})^G = K$  (cf. [Fon94a, 1.5.7], [Fon94b, Prop 5.1.2]). Alors, l'égalité  $K_0 = (\hat{B}_{cris})^G$  résulte de (1).  $\square$

**Lemme A.0.0.4.** *Pour qu'un sous- $K_0$ -espace vectoriel  $\Delta$  de dimension 1 de  $\hat{B}_{cris}$  soit stable par  $G$ , il faut et il suffit qu'il existe  $i \in \mathbb{Z}$  tel que  $\Delta = K_0 t^i$ .*

*Démonstration.* Grâce à la prop A.0.0.2, on peut copier mot par mot la démonstration de [Fon94b, lemme 5.1.3] pour  $\hat{B}_{cris}$  à la place de  $B_{cris}$ .  $\square$

**Proposition A.0.0.3.** *Les  $(\mathbb{Q}_p, G)$ -anneaux  $\hat{B}_{cris}$  sont  $G$ -réguliers.*

*Démonstration.* Comme  $B_{dR}$  est  $G$ -régulier, compte tenu de [Fon94b, Prop 1.6.5], on ramène la démonstration à vérifier que si  $b \in \hat{B}_{cris}$  est un élément non-nul tel que la  $\mathbb{Q}_p$ -droite engendré par  $b$  est stable par  $G$ , alors  $b$  est inversible. Cela résulte du lemme A.0.0.4.  $\square$

**Proposition A.0.0.4.** (1) *Pout tout  $r \in \mathbb{N}$ , la suite*

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_p(r) \rightarrow \text{Fil}^r \hat{B}_{cris} \xrightarrow{p^{-r}\varphi^{-1}} \hat{B}_{cris} \rightarrow 0$$

*est exacte.*

(2) *Pout tout  $r \in \mathbb{Z}$ , la suite*

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_p(r) \rightarrow \text{Fil}^r \hat{B}_{cris} \xrightarrow{p^{-r}\varphi^{-1}} \hat{B}_{cris} \rightarrow 0$$

*est exacte.*

*Démonstration.* On imite la démonstration de [Fon94a, thm 5.3.7] en remplaçant  $(B_{cris}, B_{cris}^+)$  par  $(\hat{B}_{cris}, \hat{B}_{cris})$  dans toutes les propositions citées par celui-là.  $\square$

**Proposition A.0.0.5.** *Soit  $V$  une  $\mathbb{Q}_p$ -représentation de  $G$ . Si on note  $D_{cris}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^G$ ,  $D'_{cris}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \hat{B}_{cris})^G$ , alors, l'injection  $D_{cris}(V) \hookrightarrow D'_{cris}(V)$  est en effet une bijection. En particulier,  $V$  est cristalline si et seulement si  $V$  est  $\hat{B}_{cris}$ -admissible.*

*Démonstration.* La première assertion est due à A.0.0.1 et [Fon82, Rem 5.5(b)]. La deuxième est immédiate en vertu des inégalités de dimensions

$$\dim_{K_0} D_{cris}(V) = \dim_{K_0} D'_{cris}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V.$$

□



## Bibliographie

- [And92] Yves André. Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part. *Compositio Math.*, 82(1) :1–24, 1992.
- [BBM82] P. Berthelot, L. Breen, and W. Messing. *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, volume 930. Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, 1982.
- [Ber74] Pierre Berthelot. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique  $p > 0$* . Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78) :5–161 (1994), 1993.
- [Ber96] Vladimir G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2) :367–390, 1996.
- [BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [BO78] Pierre Berthelot and Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.
- [Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [Boy99] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3) :573–629, 1999.
- [Bri04] Olivier Brinon. *Représentation galoisiennes  $p$ -adiques dans le cas relatif*. 2004. Thèse de l’université Paris-Sud Orsay.
- [Bül03] Oliver Bültel. Embeddings of the complex ball into Siegel space. *Asian J. Math.*, 7(2) :199–218, 2003.
- [CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.
- [CF00] Pierre Colmez and Jean-Marc Fontaine. Construction des représentations  $p$ -adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140(1) :1–43, 2000.
- [Del71] Pierre Deligne. Travaux de Shimura. In *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71)*, *Exp. No. 389*, pages 123–165. Lecture Notes in Math., Vol. 244. Springer, Berlin, 1971.
- [Del79] Pierre Deligne. Variétés de Shimura : interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 247–289. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
- [Del90] P. Deligne. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Dem86] Michel Demazure. *Lectures on  $p$ -divisible groups*, volume 302 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Reprint of the 1972 original.
- [Die71] Jean A. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Troisième édition, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5*.
- [dJ95a] A. J. de Jong. Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (82) :5–96 (1996), 1995.
- [dJ95b] A. J. de Jong. Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compositio Math.*, 97(1-2) :89–118, 1995. Special issue in honour of Frans Oort.

- [dJvdP96] Johan de Jong and Marius van der Put. Étale cohomology of rigid analytic spaces. *Doc. Math.*, 1 :No. 01, 1–56 (electronic), 1996.
- [DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [Dri74] V. G. Drinfel'd. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 94(136) :594–627, 656, 1974.
- [DRO10] Jean-François Dat, Michael Rapoport, and Sascha Orlik. *Period Domains over Finite and  $p$ -adic Fields*, volume 183 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge university press, 2010.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [Fal95] Gerd Faltings. Mumford-Stabilität in der algebraischen Geometrie. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 648–655, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [Fal99] Gerd Faltings. Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :117–144, 1999.
- [Fal02a] Gerd Faltings. Group schemes with strict  $\mathcal{O}$ -action. *Mosc. Math. J.*, 2(2) :249–279, 2002.
- [Fal02b] Gerd Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [Far] Laurent Fargues. Isocristaux munis de structures additionnelles. <http://www.math.u-psud.fr/~fargues>.
- [Far04] Laurent Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles et correspondances de Langlands locales. *Astérisque*, (291) :1–199, 2004. Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales.
- [Far08] Laurent Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. In *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, volume 262 of *Progr. Math.*, pages 1–325. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [FL82] Jean-Marc Fontaine and Guy Laffaille. Construction de représentations  $p$ -adiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(4) :547–608 (1983), 1982.
- [FO] Jean-Marc Fontaine and Yi Ouyang. *Theory of  $p$ -adic Galois Representations*. En préparation, <http://www.math.u-psud.fr/~fontaine/recherche.html>.
- [Fon82] Jean-Marc Fontaine. Sur certains types de représentations  $p$ -adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Ann. of Math. (2)*, 115(3) :529–577, 1982.
- [Fon83] Jean-Marc Fontaine. Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations  $p$ -adiques. In *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, volume 1016 of *Lecture Notes in Math.*, pages 86–108. Springer, Berlin, 1983.
- [Fon94a] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes  $p$ -adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [Fon94b] Jean-Marc Fontaine. Représentations  $p$ -adiques semi-stables. *Astérisque*, (223) :113–184, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [FR05] Jean-Marc Fontaine and Michael Rapoport. Existence de filtrations admissibles sur des isocristaux. *Bull. Soc. Math. France*, 133(1) :73–86, 2005.
- [GH94] B. H. Gross and M. J. Hopkins. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [GLS98] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, and Ronald Solomon. *The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A*, volume 40 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Almost simple  $K$ -groups.

- [Gro64] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20) :259, 1964.
- [Gro65] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (24) :231, 1965.
- [Gro66] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28) :255, 1966.
- [Hed] Mohammad Hadi Hedayatzadeh. Exterior powers of barsotti-tate groups.
- [HT01] Michael Harris and Richard Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. With an appendix by Vladimir G. Berkovich.
- [Hub96] Roland Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.
- [Ill85] Luc Illusie. Déformations de groupes de Barsotti-Tate (d'après A. Grothendieck). *As-térisque*, (127) :151–198, 1985. Seminar on arithmetic bundles : the Mordell conjecture (Paris, 1983/84).
- [Jan03] Jens Carsten Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 107 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2003.
- [Kne65] Martin Kneser. Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über  $p$ -adischen Körpern. II. *Math. Z.*, 89 :250–272, 1965.
- [Kot84] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula : cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.*, 51(3) :611–650, 1984.
- [Kot85] Robert E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 56(2) :201–220, 1985.
- [Kot92] Robert E. Kottwitz. Points on some Shimura varieties over finite fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(2) :373–444, 1992.
- [Kot97] Robert E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. II. *Compositio Math.*, 109(3) :255–339, 1997.
- [KR03] R. Kottwitz and M. Rapoport. On the existence of  $F$ -crystals. *Comment. Math. Helv.*, 78(1) :153–184, 2003.
- [Lan56] Serge Lang. Algebraic groups over finite fields. *Amer. J. Math.*, 78 :555–563, 1956.
- [Lau08] Eike Lau. Displays and formal  $p$ -divisible groups. *Invent. Math.*, 171(3) :617–628, 2008.
- [Man08] Elena Mantovan. On non-basic Rapoport-Zink spaces. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 41(5) :671–716, 2008.
- [Mar91] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Mes72] William Messing. *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [Neu99] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.
- [PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, volume 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.
- [RR96] M. Rapoport and M. Richartz. On the classification and specialization of  $F$ -isocrystals with additional structure. *Compositio Math.*, 103(2) :153–181, 1996.

- [RZ96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for  $p$ -divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [Sen73] Shankar Sen. Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules. *Ann. of Math. (2)*, 97 :160–170, 1973.
- [Ser67] J.-P. Serre. Sur les groupes de Galois attachés aux groupes  $p$ -divisibles. In *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, pages 118–131. Springer, Berlin, 1967.
- [Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [Ser79] Jean-Pierre Serre. Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 of *Astérisque*, pages 155–188. Soc. Math. France, Paris, 1979.
- [Str04] Helmut Strade. *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I*, volume 38 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004. Structure theory.
- [Str08] Matthias Strauch. Geometrically connected components of Lubin-Tate deformation spaces with level structures. *Pure Appl. Math. Q.*, 4(4, part 1) :1215–1232, 2008.
- [Tit71] J. Tits. Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque. *J. Reine Angew. Math.*, 247 :196–220, 1971.
- [Tot96] Burt Totaro. Tensor products in  $p$ -adic Hodge theory. *Duke Math. J.*, 83(1) :79–104, 1996.
- [Tsu99] Takeshi Tsuji.  $p$ -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Invent. Math.*, 137(2) :233–411, 1999.
- [Vie08a] Eva Viehmann. The global structure of moduli spaces of polarized  $p$ -divisible groups. *Doc. Math.*, 13 :825–852, 2008.
- [Vie08b] Eva Viehmann. Moduli spaces of  $p$ -divisible groups. *J. Algebraic Geom.*, 17(2) :341–374, 2008.
- [Vol10] Inken Vollaard. The supersingular locus of the Shimura variety for  $\mathrm{GU}(1, s)$ . *Canad. J. Math.*, 62(3) :668–720, 2010.
- [Wat79] William C. Waterhouse. *Introduction to affine group schemes*, volume 66 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [Zin02] Thomas Zink. The display of a formal  $p$ -divisible group. *Astérisque*, (278) :127–248, 2002. Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques, I.