HAL
open science

Contribution à une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques : analyse structurelle et couplage à l'optimisation dynamique

Audrey Jardin

To cite this version:

Audrey Jardin. Contribution à une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques : analyse structurelle et couplage à l'optimisation dynamique. Sciences de l'ingénieur [physics]. INSA de Lyon, 2010. Français. NNT : . tel-00597430

HAL Id: tel-00597430

https://theses.hal.science/tel-00597430v1

Submitted on 31 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 2010 ISAL 0003 Année 2010

THÈSE

présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

le grade de docteur

par

Audrey Jardin
Ingénieur de l'INSA de Lyon

Équipe d'accueil : Équipe EASY - Laboratoire Ampère
École Doctorale : Électronique, Électrotechnique, Automatique (EEA)
Spécialité : Énergie et Systèmes

Contribution à une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques : analyse structurelle et couplage à l'optimisation dynamique

---

Soutenue le 15 janvier 2010 devant le jury :

Rapporteurs :	S.Junco	Professeur, Université Nationale de Rosario, Argentine
	X.Roboam	Directeur de Recherche CNRS, LAPLACE - Université de Toulouse
	C.Sueur	Professeur, LAGIS - ECL
Examinateurs :	M.Malabre	Directeur de Recherche CNRS, IRCCyN - ECN
	D.Thomasset	Professeur, AMPÈRE - INSA de Lyon
Invités :	Z.Benjelloun-Dabaghi	HDR, IFP
	D.Bouskela	Ingénieur chercheur, EDF
	F.Guillemard	Docteur ingénieur, PSA
	F.Lorenz	Ingénieur, LorSim SA
Encadrant :	W.Marquis-Favre	HDR, AMPÈRE - INSA de Lyon

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales – Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	**CHIMIE DE LYON** **http://sakura.cpe.fr/ED206** M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	**ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE** **http://www.insa-lyon.fr/eea** M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	**EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION** **http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2** M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	**INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE** Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	**INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES** http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : C. DAYEYAN	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 43 13 10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
Matériaux	**MATERIAUX DE LYON** M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	**MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE** M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	**ScSo*** M. OBADIA Lionel Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Geographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du Laboratoire d'Automatique Industrielle (LAI) de l'INSA de Lyon qui a fusionné depuis janvier 2007 avec le Laboratoire CEGELY et une unité de microbiologie environnementale pour devenir le Laboratoire Ampère. *À ce titre, je tiens à remercier pour leur accueil le directeur de ce nouveau laboratoire, M. Laurent* Nicolas, *directeur de recherche CNRS, ainsi que M. Tanneguy* Redarce, *professeur des universités et directeur du LAI à mon arrivée.*

Tout naturellement, les remerciements qui suivent s'adressent en premier lieu à ceux qui m'ont suivi pendant ces trois années de travail. Merci à mon directeur de thèse M. Wilfrid Marquis-Favre, *habilité à diriger des recherches, pour m'avoir proposé ce sujet, pour son encadrement, pour la confiance dont il m'a fait preuve, pour son enthousiasme envers les bond graphs et ses nombreuses discussions techniques passionnées. Merci également à M. Daniel* Thomasset, *professeur des universités, pour avoir toujours gardé un œil sur mon travail, pour sa bienveillance, pour sa vision du monde de la recherche et ses conseils avisés.*

J'exprime par ailleurs toute ma reconnaissance envers chacun des membres du jury de thèse. Merci aux rapporteurs qui m'ont accordé de leur temps pour examiner les nombreuses pages de mon mémoire et qui, par leurs remarques, ont participé à son amélioration. À ce titre, merci à M. Xavier Roboam, *directeur de recherche CNRS et à M. Christophe* Sueur, *professeur des universités. Merci aussi à M. Sergio* Junco, *professeur, qui a accepté de faire le déplacement depuis l'Argentine et de lire un mémoire en français. Merci à M. Michel* Malabre, *directeur de recherche CNRS et directeur de l'IRCCyN, qui me fait ici un grand honneur en acceptant d'examiner mes travaux. Je suis flattée et vous remercie vivement de l'attention que vous y portez. Enfin, merci aux membres invités pour avoir également témoigné de l'intérêt envers mes travaux de recherche mais aussi pour avoir su instaurer un climat de travail agréable lors de nombreux échanges au cours du projet ANR SIMPA2-C6E2. Merci à Mme Zakia* Benjelloun-Dabaghi, *habilitée à diriger des recherches à l'IFP, à M. Daniel* Bouskela, *ingénieur chercheur à EDF, à M. Franck* Guillemard, *docteur ingénieur à PSA Peugeot Citroën ainsi qu'à M. Françis* Lorenz, *créateur du logiciel MS1.*

Ces trois années de thèse auraient été sans doute bien plus pénibles voire impossibles si elles ne s'étaient pas déroulées dans un environnement de travail agréable. Merci à tous les membres du laboratoire Ampère *et plus particulièrement ceux de l'équipe EASY pour leur sympathie et leur soutien tout spécialement lors de mes derniers mois de thèse. Merci à Maguy, secrétaire du laboratoire, et à Christophe, technicien du laboratoire, pour leur gentillesse et leur soutien logistique (merci aussi pour les soirées karaoké même si je n'ai pas chanté !). Merci aux chercheurs permanents pour leur aide technique et pour avoir toujours eu un petit mot amical à mon égard. Merci particulièrement à Minh Tu, à Éric, à Sylvie, à Xavier, à Richard, à Damien, à Mickaël, à Jean-Pierre et à Xuefang. Merci aussi à tous les doctorants que j'ai pu croiser et avec qui j'ai pu partager l'expérience « Thésa » : à Gérardo mon mexicain préféré, à Grégory (et oui je te remercie !), à Rosario, à Quyen, à Sylvain, à Juan, à Gabor, à Salam, à Anouar, à Mingming, à Frédéric, à Lilia, ...*

. . . et bien sûr à Mariem ma « consœur bond graphiste » (courage la fin est proche !).

Orientée désormais vers de nouvels horizons, je profite également de cette occasion pour remercier mes nouveaux collègues d'EDF R & D à Chatou, pour leur sympathique accueil au sein de leur unité et leurs encouragements lors des semaines précédant ma soutenance.

D'un point de vue plus personnel, merci aussi à mes amis parisiens qui m'ont paru parfois si loin. Merci en particulier à Arnaud et Bubu ainsi qu'à Teebo l'Artiste pour avoir su me changer les idées quand j'en avais le plus besoin.

Enfin, je ne pourrai terminer ces remerciements sans évoquer ceux qui me sont les plus chers. À mes parents pour leur soutien constant durant ces longues années d'études et pendant mes si nombreuses périodes de doute (et pas que pendant ma thèse !), pour leur écoute, pour leur réconfort à grands renforts de gâteaux au chocolat, pour leur amour, pour tout. À mon petit frère Stéphane qui n'est plus si petit que ça d'ailleurs et pour qui le rôle « d'aîné » a dû lui sembler parfois inversé. À mon indispensable Loïc pour être toujours resté là près de moi, pour être tout simplement lui.

À vous quatre, merci du fond du cœur . . . vous êtes les panseurs qui me font devenir docteur . . .

Table des matières

Introduction générale **v**

1 Les systèmes mécatroniques et leur dimensionnement **1**
1.1 Introduction 2
1.2 Qu'est-ce qu'un système mécatronique ? 2
1.2.1 Introduction à la Mécatronique 2
1.2.2 Architecture générique d'un système mécatronique 6
1.3 La conception d'un système mécatronique 8
1.3.1 De l'ingénierie séquentielle à l'ingénierie concourante 8
1.3.2 Le cycle de conception en V 9
1.3.3 Le prototypage virtuel 10
1.4 La conception de la chaîne d'actionnement 13
1.4.1 Les différents problèmes de conception 15
1.4.2 Les besoins en termes d'outils 17
1.5 Le dimensionnement de la chaîne d'actionnement 19
1.5.1 Méthode essai → erreur → correction 20
1.5.2 Les critères de sélection 21
1.6 Conclusion 23

2 Le dimensionnement par modèles bond graph inverses **25**
2.1 Introduction 26
2.2 Le dimensionnement par modèles inverses 26
2.2.1 Reformulation du problème de dimensionnement en problème inverse 26
2.2.2 L'inversion en automatique 28
2.2.3 Méthodes de dimensionnement utilisant l'inversion 30
2.3 Le langage bond graph 33
2.3.1 Un outil adapté à l'étude des systèmes mécatroniques 33
2.3.2 L'inversion en langage bond graph 35
2.4 Le dimensionnement par modèles bond graph inverses 35
2.4.1 Le principe 36
2.4.2 Les différentes étapes 37
2.4.3 Les avantages par rapport à la démarche classique 42
2.4.4 Les différents contextes dans lesquels la méthodologie peut être utilisée 44
2.5 Positionnement de l'approche proposée dans un contexte industriel 48
2.5.1 Quelques exemples d'applications industrielles 48
2.5.2 Les langages Modelica et bond graph 64
2.5.3 L'acausalité, gage de pérennité des modèles 65

2.5.4 Originalité et apport de l'analyse structurelle 71
2.6 Conclusion 72

3 Contribution à la phase d'analyse structurelle : niveaux d'analyse pour la conception 75
3.1 Introduction 76
3.2 Définition de l'analyse structurelle 76
3.3 Présentation de formalismes possibles pour l'analyse structurelle 78
3.3.1 Approche modèle d'état 79
3.3.2 Approche système structuré 80
3.3.3 Approche bond graph 82
3.4 Notion de niveaux d'analyse 95
3.4.1 Correspondances et procédures de passage d'un formalisme à l'autre 96
3.4.2 Différents niveaux d'information et de description... 100
3.4.3 ...qui conduisent à différents niveaux d'analyse 106
3.4.4 Intérêt des niveaux d'analyse dans la démarche de conception . . . 108
3.5 Niveaux d'analyse pour le modèle de conception 123
3.5.1 Critères d'inversibilité 124
3.5.2 Obtention d'un modèle inverse d'ordre minimal 138
3.6 Niveaux d'analyse pour le cahier des charges 139
3.6.1 Ordre d'essentialité d'une sortie 139
3.6.2 Critères de dérivabilité pour la simulation d'un modèle inverse . . . 152
3.7 Conclusion 154

4 Contribution à la phase de dimensionnement : optimisation dynamique dans la méthodologie - Théorie 159
4.1 Introduction 161
4.2 Intérêt du couplage méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique 161
4.2.1 Sur-nombre et diversité des contraintes de conception 161
4.2.2 Différentes approches du couplage 162
4.3 L'optimisation dynamique 163
4.3.1 Rappels généraux sur l'optimisation dynamique 163
4.3.2 L'optimisation dynamique en langage bond graph : état de l'art et choix de la méthode de résolution 165
4.4 Représentation bond graph d'un problème d'optimisation : cas . . . linéaires 167
4.4.1 Origine et principe de la procédure 169
4.4.2 Procédure bond graph d'optimisation 169
4.4.3 Exemple 174
4.4.4 Précisions sur la mise en œuvre de la procédure 177
4.5 Représentation bond graph d'un problème d'optimisation : extension . . . non linéaires 182
4.5.1 D'une formulation port-hamiltonienne 184
4.5.2 . . . vers une formulation bond graph 185
4.5.3 Extension de la procédure bond graph d'optimisation 190
4.5.4 Exemple de stockage non linéaire 1-port 195

4.5.5 Exemple de stockage non linéaire multiport 197
4.6 Couplage méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique . . 201
4.6.1 Formulation d'un problème de dimensionnement en un problème mixte d'inversion et d'optimisation 202
4.6.2 Extension de la procédure bond graph d'optimisation au cas où seule une partie des entrées du modèle est à déterminer par optimisation 203
4.6.3 Exemple de couplage 207
4.7 Conclusion 221

5 Contribution à la phase de dimensionnement : optimisation dynamique dans la méthodologie - Résolution numérique 225
5.1 Introduction 226
5.2 Difficultés numériques et méthodes employées pour la résolution des conditions d'optimalité 226
5.3 Résolution numérique dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires . . 229
5.3.1 Solution analytique pour le co-état initial 230
5.3.2 Méthode pour approximer la solution analytique du co-état initial . 232
5.3.3 Exemple linéaire de problème d'optimisation dynamique 234
5.3.4 Exemple linéaire de couplage entre méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique 236
5.4 Résolution numérique dans le cas de problèmes d'optimisation non linéaires 238
5.4.1 Méthode globale de résolution des conditions d'optimalité 239
5.4.2 Exemple linéaire de problème d'optimisation dynamique 241
5.4.3 Exemple non linéaire de problème d'optimisation dynamique 244
5.5 Conclusion 249

Conclusion générale 251

Bibliographie personnelle 258

Bibliographie 260

A Le langage bond graph 277
A.1 Description 277
A.2 Historique 277
A.3 Éléments de base du langage 277
A.3.1 Concepts et variables utilisées 278
A.3.2 Éléments bond graph 280
A.4 Construction d'un modèle bond graph 285
A.4.1 Procédure générale 285
A.4.2 Exemple 288
A.5 Schéma de calcul associé à un modèle bond graph 289
A.5.1 Causalité 290
A.5.2 Bicausalité 294
A.6 Logiciels 300

B Le langage Modelica **301**
B.1 Description . . . 301
B.2 Historique . . . 301
B.3 Éléments de base du langage . . . 302
B.3.1 Principales caractéristiques . . . 302
B.3.2 Sémantique . . . 302
B.4 Construction d'un modèle Modelica . . . 305
B.4.1 Construction d'un modèle simple ou modèle élémentaire . . . 306
B.4.2 Construction d'un assemblage de modèles . . . 308
B.5 Logiciels . . . 309

C Outils de l'analyse structurelle **311**
C.1 Approche modèle d'état . . . 312
C.1.1 Représentation matricielle . . . 312
C.1.2 Représentation graphique . . . 314
C.2 Approche système structuré . . . 322
C.2.1 Représentation matricielle . . . 322
C.2.2 Représentation graphique . . . 322
C.3 Approche bond graph . . . 323
C.3.1 Outils utiles à l'analyse d'un modèle bond graph . . . 323
C.3.2 Propriétés structurelles déduites de l'analyse d'un modèle bond graph 326

D Prise en compte des boucles algébriques **335**
D.1 Détermination du modèle d'état . . . 335
D.1.1 Approche digraphe . . . 336
D.1.2 Approche bond graph . . . 336
D.2 Détermination du polynôme caractéristique . . . 341

E Précisions sur la structure à l'infini **345**
E.1 Approche algébrique et résultats préliminaires . . . 345
E.1.1 Définition et procédure de calcul . . . 345
E.1.2 Résultats préliminaires pour la détermination graphique de la structure à l'infini . . . 347
E.2 Approche bond graph . . . 350
E.2.1 Théorèmes existants . . . 350
E.2.2 Reformulation des théorèmes existants selon les différents niveaux d'analyse . . . 351

F Méthodes indirectes de résolution d'un problème d'optimisation **359**
F.1 Cadre d'étude . . . 359
F.2 Le principe du minimum de Pontryagin . . . 360
F.2.1 Formulation « automaticienne » . . . 360
F.2.2 Formulation « mécanicienne » . . . 360
F.2.3 Comparaison des deux formulations . . . 361
F.3 Méthode variationnelle classique . . . 362
F.4 Brève comparaison entre le principe de Pontryagin et la méthode variationnelle . . . 362

G Formulation port-hamiltonienne d'un modèle bond graph 365
G.1 Description 365
G.2 Bref historique des systèmes port-hamiltoniens 366
G.3 Formulation port-hamiltonienne d'un modèle bond graph 367
G.3.1 Formulation générale 367
G.3.2 Formulation « simplifiée » 368
G.4 Exemple 369

H Démonstrations relatives à la procédure bond graph d'optimisation 373
H.1 Dualisation partielle 373
H.1.1 Dualisation totale d'éléments $\mathbb{R}$ multiports 374
H.1.2 Dualisation partielle d'éléments $\mathbb{R}$ multiports 374
H.1.3 Application du principe de dualisation partielle à la construction de modèle bond graph optimisant 376
H.2 Optimisation d'une seule partie des entrées 378
H.2.1 Rappel de la procédure 379
H.2.2 Démonstration 380

Introduction générale

Face à l'internationalisation des marchés et à la conjoncture économique actuelle, chaque industrie se doit d'être la plus compétitive possible en renouvelant sans cesse sa gamme de produits. Cependant, ce renouvellement n'a de sens que si le nouveau produit est proposé au bon moment aux clients et donc que s'il est fréquent. Pour assurer le suivi des fluctuations des marchés et se distinguer ainsi de ses concurrents, l'industrie en question se doit d'adopter de nouvelles méthodes de conception bien sûr moins coûteuses en termes financiers mais aussi moins coûteuses en termes de temps d'étude. Ces exigences du marché sont d'autant plus difficiles à satisfaire qu'à l'inverse, les produits à concevoir sont de plus en plus complexes et doivent être de plus en plus performants pour répondre, entre autres, aux nouvelles normes en termes de pollution et de sécurité ou encore à l'exigence accrue des consommateurs en termes de confort et d'assistance.

Afin de concilier toutes ces contraintes de conception, de nouveaux systèmes dits *systèmes mécatroniques* sont apparus. Cependant, si leur plurisdisciplinarité permet d'envisager des solutions originales qui n'avaient jusqu'alors pas été explorées ou autorisées par de nouvelles avancées technologiques, celle-ci demande également un changement de méthode dans le processus de conception. En effet, même si auparavant les systèmes complexes pouvaient utiliser différentes technologies issues de différents domaines de la physique, ils relevaient plus d'une juxtaposition de disciplines plutôt que d'une réelle synergie. L'approche classique de conception consistait alors à adopter une démarche d'*ingénierie séquentielle* où les savoir-faire des spécialistes étaient relativement cloisonnés. Désormais, puisque, par nature, les systèmes mécatroniques sont le lieu d'intéractions entre différentes technologies, l'approche séquentielle de conception n'est plus adéquate : les différents acteurs de la conception doivent communiquer entre eux afin d'éviter tout problème d'interfaçage entre les différentes parties du système. Dans cet esprit, les concepts d'*ingénierie concourante* et de *cycle de conception en V* sont apparus. La conception du produit est divisée en plusieurs sous-projets et chaque sous-projet (relatif cette fois-ci à un niveau de développement particulier et non à un domaine de la physique particulier) est soumis à des étapes de traduction des besoins, de conception, d'intégration et de validation. Les équipes en charge de chaque sous-projet vont ainsi développer et tester différentes solutions en itérant ainsi cet enchaînement d'étapes et le cycle de conception est parcouru plusieurs fois, partiellement ou totalement, jusqu'à ce qu'une solution efficiente soit trouvée.

Si l'*ingénierie concourante* vise à améliorer l'interaction entre les différents partenaires du projet, la démarche de conception reste néanmoins itérative : une réelle communication entre les équipes est certes nécessaire mais celle-ci ne suffit pas pour anticiper dans les moindres détails l'influence de chaque composant sur le comportement global du système. Aussi, de la durée de chaque itération et du nombre d'itérations dépendra essentiellement la durée de l'étude : plus ceux-ci seront importants et plus la mise sur le marché

du produit final sera retardée. La durée de chaque itération peut être réduite en ayant recours au *prototypage virtuel* : plutôt que de lancer la fabrication longue et coûteuse de prototypes physiques, les différentes solutions sont testées en modélisant et en simulant le comportement des différents organes du système. Quant au nombre d'itérations, celui-ci peut varier selon l'expertise de l'équipe en charge de l'étude, la formulation *a priori* du problème de conception ou, encore une fois, selon la démarche adoptée pour traiter le problème donné.

Dans ce contexte de conception des systèmes mécatroniques, cette thèse s'intéresse plus spécifiquement au problème particulier de sélection de composants d'une chaîne d'actionnement (ou *problème de dimensionnement d'une chaîne d'actionnement*) ainsi qu'aux méthodes à déployer pour traiter de tels problèmes en un minimum d'itérations.

Motivations

Pour dimensionner une chaîne d'actionnement, l'approche itérative évoquée précédemment se traduit classiquement par :

1. sélectionner un composant sur étagère (c'est-à-dire un composant existant, disponible sur catalogue) ;
2. modéliser le comportement dynamique de l'ensemble {composant sélectionné + partie de la chaîne d'actionnement déjà dimensionnée} ;
3. choisir arbitrairement les entrées du modèle obtenu à l'étape précédente ;
4. vérifier par simulation si le résultat obtenu au niveau des sorties du modèle est conforme aux spécifications du cahier des charges ;
5. recommencer si le résultat obtenu à l'étape précédente n'est pas satisfaisant.

Dans cette démarche, seule la manière de sélectionner *a priori* le composant peut permettre de diminuer le nombre d'itérations : plus ce dernier sera initialement choisi avec pertinence, plus la démarche convergera rapidement vers une solution adéquate (si elle converge). Pour diminuer le nombre potentiel d'itérations, des *critères de sélection* ont donc été établis notamment par Newton Jr [New50] et Cœuillet [Coe69]. Cependant, même s'ils permettent d'affiner la sélection initiale, ceux-ci ne garantissent en aucun cas la réussite de la procédure : il ne s'agit que d'une première sélection et rien ne garantit que tous les composants vérifiant ces critères de sélection seront capables de répondre au cahier des charges imposé. Ces critères reposent sur des hypothèses simplificatrices où la structure de la chaîne d'actionnement n'est pas entièrement prise en compte. Bien souvent statiques, ils sont établis à partir de valeurs maximales calculées dans des situations de vie critique alors que le comportement dynamique du système peut s'avérer lui bien plus dimensionnant.

En réalité, la difficulté d'énoncer des critères de sélection vraiment pertinents tient au fait que les spécifications du cahier des charges sont généralement rédigées pour préciser les performances attendues au niveau des sorties du système et non au niveau de chaque composant. Ici, en utilisant des *modèles directs*, c'est-à-dire en calculant l'évolution des sorties physiques du système à partir de l'évolution de ses entrées physiques, le concepteur ne peut procéder que par itération pour essayer d'approcher au mieux une évolution en

sortie comparable à celle requise par le cahier des charges. Afin de contourner cette difficulté, une approche alternative consiste à utiliser cette fois-ci des *modèles inverses*. Ces modèles, bien que sans sens physique, sont, en effet, mathématiquement envisageables. Ils permettent de calculer l'évolution des entrées du modèle à partir de l'évolution de ses sorties et donc d'être en adéquation avec l'objectif même du problème de dimensionnement : celui de déterminer les performances requises en entrée à partir de la donnée des spécifications du cahier des charges sur les sorties du système. Outre une diminution du nombre d'itérations dans le processus de conception, cette approche présente également l'avantage de prendre en compte les spécifications à tout instant de leur évolution et de procéder ainsi à un dimensionnement sur des *critères dynamiques*.

Afin de généraliser et de systématiser certaines méthodes basées sur l'inversion comme celles de Potkonjak et Vukobratović [Pot86, Vuk87] ou de Dequidt [Deq98], le laboratoire AMPÈRE propose une méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses. Initiée par les travaux de Scavarda et Amara [Ama91], puis formalisée par Fotsu-Ngwompo [Fot97a, Ngw01a, Ngw01b], cette méthodologie consiste à :

1. vérifier que le problème de dimensionnement peut se formuler sous la forme d'un problème inverse (c'est-à-dire vérifier que le modèle est inversible et que les spécifications sont atteignables par la structure du modèle choisi) ;
2. construire graphiquement le modèle bond graph inverse correspondant ;
3. exploiter le modèle bond graph inverse ainsi obtenu pour déterminer directement les inconnues du problème de dimensionnement à partir des spécifications imposées.

En procédant à des inversions successives, l'équipe en charge de l'étude peut alors procéder en quelque sorte à une « remontée » des spécifications et dimensionner ainsi progressivement chaque étage de la chaîne de dimensionnement. Outre l'utilisation du principe d'inversion qui permet de diminuer le nombre d'itérations du processus de conception, cette méthodologie tient son originalité à sa phase d'analyse structurelle. Grâce à elle, le concepteur vérifie que son problème de dimensionnement est *a priori* correctement formulé pour procéder à une inversion et, s'il ne l'est pas, un certain nombre d'indications lui est fourni pour éventuellement le reformuler de manière adéquate. En collaboration avec la société PSA Peugeot Citroën, les avantages de cette méthodologie ont d'ailleurs pu être mis en œuvre sur des exemples industriels issus du domaine automobile (travaux de thèse de Mechin [Mec03a] et de Laffite [Laf04]).

Cependant, pour être complètement exploitable par des industriels, certains aspects de la méthodologie doivent être améliorés et motivent les travaux entrepris lors de ce travail de thèse. Le langage bond graph, par exemple, bien qu'adapté pour la modélisation des systèmes plurisdisciplinaires comme les systèmes mécatroniques [Gaw91, Dau99a, Dam03, van03a], n'est pas aussi bien disséminé dans le monde industriel que semble l'être maintenant de nouveaux langages émergents tels que Modelica [Mod99]. De par la forme même qu'elle recouvre, la méthodologie peut sembler alors comme « difficilement accessible » pour certains bureaux d'études (tout au moins sans l'organisation au préalable de formation à l'outil bond graph). En outre, en ne traitant le problème de dimensionnement que par inversion, la méthodologie nécessite actuellement de pouvoir traduire les spécifications du cahier des charges comme des fonctions explicites du temps ou de certaines variables internes du modèle (*i.e.* comme des trajectoires désirées ou bien comme des contraintes de comportement ou d'assistance [Mec03a]). Or, ceci ne traduit pas l'exacte réalité des cahiers des charges auxquels doivent répondre les industriels. Les contraintes

de conception sont souvent de nature hétérogène et peuvent s'exprimer aussi bien sous la forme de trajectoires à suivre que de valeurs limites à ne pas dépasser ou bien de problèmes d'optimisation. Dans le cadre du projet SIMPA2-C6E2, ce mémoire tâche de répondre à ces problématiques en visant les objectifs énoncés ci-dessous.

Contexte et objectifs

SIMPA2-C6E2 [1] a été un projet ANR labellisé en 2005 dont l'objectif principal était d'étendre la plate-forme open source Scicos [Sci94] et l'outil commercial AMESim [LMS07] à la modélisation et à la simulation des systèmes implicites décrits en langage Modelica. Plus exactement, le projet consistait à développer un outil logiciel permettant, d'une part, le support complet de la partie hybride du langage Modelica, et, d'autre part, l'inversion de modèles statiques et dynamiques pour la résolution de problèmes inverses (tels que la détermination de l'état initial de systèmes thermodynamiques ou le dimensionnement d'une chaîne d'actionnement de systèmes mécatroniques). Dans ce contexte, les objectifs de cette thèse étaient :

1. de déployer la méthodologie de dimensionnement du laboratoire et plus particulièrement sa phase d'analyse structurelle auprès de nouveaux industriels partenaires du projet SIMPA2-C6E2. En effet, visant le développement d'une plate-forme de simulation Modelica, ce projet était l'occasion d'exploiter le caractère acausal et multidisciplinaire du langage Modelica pour transcrire les principes de l'analyse structurelle dans un formalisme autre que le bond graph et qui est annoncé comme futur standard pour l'échange de modèles ;
2. de poursuivre les développements entrepris lors du projet ANR METISSE [2] quant au couplage de la méthodologie de dimensionnement avec de l'optimisation dynamique, afin de réduire les exigences en termes de rédaction du cahier des charges et de pouvoir traiter des problèmes de dimensionnement qui, après analyse structurelle, se révèlent impossibles à traiter exclusivement par inversion.

Organisation du mémoire

Pour répondre aux objectifs de cette thèse, ce manuscrit s'articule autour de cinq chapitres.

Le premier chapitre, essentiellement bibliographique, présente une courte introduction à la Mécatronique et décrit l'architecture générique d'un *système mécatronique*. Les notions d'*ingénierie concourante* et de *cycle de conception en V* sont rappelées et les besoins en termes de *prototypage virtuel* sont explicités. La présentation très générale dans un premier temps se restreint ensuite au cas du problème de sélection de composants pour une chaîne d'actionnement. L'approche classique par *modèles directs* est détaillée sur un

1. *i.e.* SIMulation pour le Procédé et l'Automatique 2 et pour l'ingénierie de la Conception des SYSTèmes Électriques Embarqués
2. *i.e.* Méthodes numériquEs et Techniques Informatiques pour la Simulation et la Synthèse en Environnement

exemple simple et quelques *critères statiques de sélection* sont discutés.

Afin d'aborder des méthodes de dimensionnement autorisant la prise en compte de critères dynamiques, le deuxième chapitre dresse quant à lui un rapide état de l'art sur les approches de conception utilisant l'inversion. Après avoir justifié le choix du langage bond graph dans un tel contexte et présenté le concept de bicausalité [Gaw95] utile à la construction d'un modèle bond graph inverse, la méthodologie de dimensionnement proposée par le laboratoire est largement étudiée. Son principe général, ses différentes étapes ainsi que ses avantages par rapport à la démarche par modèles directs sont détaillés. Ensuite, son utilité dans un contexte industriel est démontrée d'une part en montrant que la méthodologie peut permettre de répondre à des problèmes d'ingénierie autres que le dimensionnement (*i.e.* synthèse d'architecture, synthèse paramétrique, ...), et d'autre part, en illustrant sa mise en œuvre pratique sur deux cas d'étude issus du domaine automobile. Enfin, ce second chapitre se termine par une partie non bibliographique : le langage Modelica est comparé au langage bond graph notamment en termes d'analyse structurelle afin de statuer sur la possibilité de transcrire ou non la méthodologie du laboratoire dans ce nouveau langage émergent dans la communauté mécatronicienne.

Les chapitres suivants sont ensuite particulièrement dédiés à la présentation de nos contributions à la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses d'une part sur la phase d'analyse structurelle (chapitre 3) puis, d'autre part, sur la phase de dimensionnement par couplage avec de l'optimisation dynamique (chapitres 4 et 5).

Initiés lors de la discussion sur la comparaison des langages bond graph et Modelica, le troisième chapitre reprend en détails les niveaux d'information et de description requis et utilisés pour mener à bien l'analyse structurelle d'un modèle bond graph. Ces différents niveaux sont notamment mis en évidence par l'intermédiaire d'une comparaison avec les approches *modèle d'état* et *système structuré* où la notion de propriété structurelle a également été définie comme étant une propriété valable pour toutes les valeurs des paramètres sauf éventuellement pour quelques valeurs particulières. De l'existence et de l'exploitation ou non de ces différents niveaux de description et d'information, nous montrons qu'il existe également différents niveaux d'analyse structurelle. En s'inspirant des travaux de Rahmani [Rah93] sur les différentes méthodes de calcul du rang d'une matrice, une classification de ces différents niveaux d'analyse est ensuite proposée. Celle-ci distingue notamment deux niveaux d'analyse pour le formalisme bond graph : un niveau d'analyse BG-structurel où seule l'existence de chemins causaux appropriés est prise en compte pour la détermination des propriétés structurelles, et, un niveau d'analyse comportemental où l'analyse est affinée en prenant en considération les gains de ces mêmes chemins causaux. Utilisés dans un ordre chronologique, il est ensuite montré comment ces différents niveaux d'analyse peuvent être mis à profit au cours du processus de conception et comment certaines propriétés bond graph peuvent être reformulées de manière à envisager au plus tôt certaines pistes de reconception quand celle-ci s'avère nécessaire. Enfin, la fin de ce troisième chapitre traite également de l'analyse structurelle mais replace celle-ci dans notre contexte initial de dimensionnement par modèles bond graph inverses. En précisant les différentes étapes à mener pour étudier l'inversibilité puis les ordres d'essentialité des sorties d'un modèle, nous montrons l'utilité de l'analyse structurelle tout au

long de la démarche de conception comme lors de la définition du modèle de conception et de la rédaction du cahier des charges. Outre la démonstration de l'intérêt applicatif de l'analyse structurelle, ces dernières sections permettent, à la lumière des différents niveaux d'analyse établis précédemment, d'éclaircir les différences, pour certaines propriétés, entre les utilisations des notions de chemins causaux différents [Rah93] ou disjoints [Fot97a].

Lorsque l'analyse structurelle permet d'identifier que le problème de conception ne peut pas être formulé sous la forme d'un problème inverse (soit parce que le modèle associé n'est pas inversible, soit parce que les spécifications n'ont pas été correctement choisies), la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses ne peut être appliquée en l'état actuel de développement. Afin d'étendre cette méthodologie à des problèmes de conception plus généraux, le quatrième chapitre considère le cas d'un cahier des charges de nature hétérogène où seule une partie des spécifications porte sur des trajectoires à suivre et où l'autre partie des spécifications s'exprime sous la forme d'un problème d'optimisation. Après avoir détaillé l'intérêt de coupler la méthodologie de dimensionnement à de l'optimisation dynamique, le problème de la représentation bond graph d'un problème d'optimisation est abordé. La procédure bond graph d'optimisation de Marquis-Favre *et al.* [Mar08] est alors étendue à une classe particulière de systèmes non linéaires et permet de construire un *modèle bond graph augmenté*, reflet des conditions d'optimalité associées au problème d'optimisation considéré. Enfin, un exemple de couplage entre optimisation dynamique et méthodologie de dimensionnement par inversion est traité afin d'illustrer la faisabilité de notre approche.

Le cinquième et dernier chapitre achève quant à lui la résolution des problèmes d'optimisation en s'intéressant à la résolution numérique des conditions d'optimalité issues des modèles bond graph augmentés construits précédemment. Après avoir détaillé les difficultés liées à une telle résolution et présenté différentes méthodes employées, deux d'entre elles sont particulièrement étudiées. La première, uniquement valable dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires, consiste à calculer la valeur d'un co-état initial pour résoudre ensuite les conditions d'optimalité par intégration. La seconde, quant à elle, consiste à discrétiser les conditions d'optimalité de manière à ramener le problème à la résolution d'un système carré d'équations algébriques. L'intérêt de cette seconde approche est notamment démontré grâce à sa mise en œuvre sur un exemple de problème d'optimisation non linéaire.

La conclusion de ce mémoire propose une synthèse des contributions présentées au cours des différents chapitres ainsi que quelques pistes de recherche qu'il serait intéressant d'investir pour compléter et élargir ces travaux.

Enfin, signalons dès à présent la présence de plusieurs annexes qui pourront être lues de manière indépendante selon les besoins du lecteur. Pour une entrée en matière, les annexes A et B présentent les concepts de base des langages bond graph et Modelica. Pour une première approche des notions relatives à l'analyse structurelle, l'annexe C sert de référence pour la définition des différentes propriétés structurelles et terminologies utilisées. Puis, les annexes D et E viennent en appui du chapitre 3 concernant respectivement l'illustration des différents niveaux de description lors de la prise en compte de boucles

algébriques et la reformulation, selon différents niveaux d'analyse, des procédures bond graph de détermination de la structure à l'infini. Pour la considération des problèmes d'optimisation, les annexes F et G rappellent, quant à elles, le *principe du minimum de* PONTRYAGIN [Pon62], la *méthode variationnelle d'*EULER-LAGRANGE [Pun72, Nai03]) ainsi que les principes de la *représentation port-hamiltonienne* [Gol02]. Enfin, l'annexe H détaille les démonstrations utilisées lors de l'établissement de la procédure bond graph d'optimisation et de ses extensions.

Chapitre 1

Les systèmes mécatroniques et leur dimensionnement

Sommaire

1.1 Introduction **2**
1.2 Qu'est-ce qu'un système mécatronique ? **2**
1.2.1 Introduction à la Mécatronique 2
1.2.2 Architecture générique d'un système mécatronique 6
1.3 La conception d'un système mécatronique **8**
1.3.1 De l'ingénierie séquentielle à l'ingénierie concourante 8
1.3.2 Le cycle de conception en V 9
1.3.3 Le prototypage virtuel 10
1.4 La conception de la chaîne d'actionnement **13**
1.4.1 Les différents problèmes de conception 15
1.4.2 Les besoins en termes d'outils 17
1.5 Le dimensionnement de la chaîne d'actionnement **19**
1.5.1 Méthode essai → erreur → correction 20
1.5.2 Les critères de sélection 21
1.6 Conclusion **23**

1.1 Introduction

Aujourd'hui, pour faire face à la conjoncture économique et à la mondialisation des marchés, chaque industrie doit savoir renouveler sa gamme de produits : il est plus que primordial de satisfaire les demandes toujours croissantes des consommateurs mais aussi de contrer les produits concurrents. Pour être efficace en termes de retour sur investissement, ce renouvellement doit donc être fréquent et s'adapter aux réalités du marché. Les coûts et les temps de développement doivent alors être réduits au maximum alors qu'*a contrario* les performances demandées sont de plus en plus sévères : de nouvelles contraintes environnementales apparaissent dans le cadre du développement durable, de nouvelles normes en termes de sécurité sont exigées... Désormais, grâce aux avancées technologiques, les utilisateurs attendent même des systèmes qu'ils soient « intelligents » et qu'ils assurent de nouvelles fonctionnalités en termes de confort et d'assistance.

Pour répondre à la complexité des cahiers des charges actuels, de nouveaux systèmes, dits systèmes mécatroniques, sont apparus. Fondamentalement pluridisciplinaires, ces systèmes nécessitent une autre approche de la conception qui, jusqu'alors, n'était vue que comme la juxtaposition de différentes approches orientées métiers.

Ce chapitre est consacré à l'établissement du cadre général de nos travaux. Après avoir défini la notion de système mécatronique, la conception de ces systèmes est abordée : d'une manière très générale pour commencer avec les notions d'ingénierie concourante, de cycle de conception en V et de prototypage virtuel puis, de manière plus précise, en se focalisant sur la conception d'une partie d'un système mécatronique, à savoir sa chaîne d'actionnement. Ainsi, ce chapitre nous permettra par la suite de positionner nos travaux dans les différentes étapes de la conception d'un système mécatronique et de montrer en quoi ceux-ci se distinguent des méthodologies existantes.

1.2 Qu'est-ce qu'un système mécatronique ?

Avant d'aborder sa conception et les difficultés qui s'y rattachent, il convient tout d'abord de définir ce qu'est exactement un système mécatronique et de souligner l'importance que ce type de système a dans notre vie actuelle. Pour cela, cette partie présente une courte introduction à cette discipline qu'est la Mécatronique et dessine l'architecture générale que peut avoir un système mécatronique.

1.2.1 Introduction à la Mécatronique

Concaténation des mots *mecha*nics et elec*tronics*, le terme *mechatronics* (ou *mécatronique* en français [1]) a vraisemblablement été inventé en 1969 par l'ingénieur japonais Mori de la société Yasukawa Electric [Kyu96, Mor69]. La rétrospective d'Isermann [Ise08] indique que, si au début des années 80, ce qualificatif était attribué à tout mécanisme électrifié, il prit un autre sens lors de son apparition en Europe. En effet, au milieu des années 80, la Mécatronique se définissait alors comme une discipline transverse de l'électronique et de la mécanique (mécanique au sens large incluant l'hydraulique, la thermique, *etc.*). Depuis, sa signification a encore évolué. La Mécatronique n'est plus simplement à l'interface

1. Même si l'équivalent français *mécatronique* était d'ores et déjà employé dans la communauté scientifique, notons que celui-ci n'est apparu officiellement dans *Le Petit Larousse* que depuis 2005.

de ces deux domaines et inclut bien d'autres disciplines comme celles issues des technologies de l'information (acquisition de données, commande, intelligence artificielle,...) (Fig. 1.1).

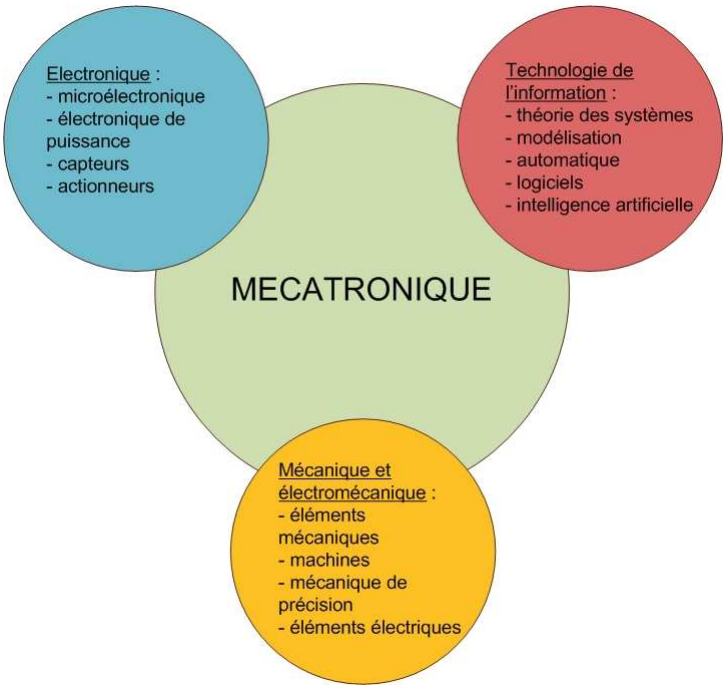


FIGURE 1.1 – La Mécatronique : synergie de différentes disciplines [Ise08]

À ce titre, de nombreuses définitions peuvent être trouvées dans la littérature. Parmi elles, nous pouvons citer :

- la définition du journal international *Mechatronics*, paru pour la première fois en 1991 : *« Mechatronics in its fundamental form can be regarded as the fusion of mechanical and electrical disciplines in modern engineering process. It is a relatively new concept to the design of systems, devices and products aimed at achieving an optimal balance between basic mechanical structures and its overall control »* [Dan91] ;

- celle du journal international *IEEE Transactions on Mechatronics*, crée en 1996 : *« Mechatronics is the synergetic combination of mechanical engineering with electronics and intelligent computer control in the design and manufacturing of industrial products and processes »* [Com94, Kyu96] ;

- ou bien encore, celle choisie par le *IFAC Technical Committee on Mechatronic Systems*, fondé en 2000 : *« Many technical processes and products in the area of mechanical and electrical engineering show an increasing integration of mechanics with electronics and information processing. This integration is between the components (hardware) and the information-driven function (software), resulting in integrated systems called mechatronic systems »* [IFA09].

Aussi, malgré la maturité industrielle de cette nouvelle discipline, l'édition de normes

spécifiques était inexistante jusqu'en novembre 2008, date à laquelle la France fût le premier pays à homologuer une norme dédiée à la Mécatronique. Élaborée dans le cadre d'un groupe de travail de l'UNM [2] composé d'industriels (Asco Joucomatic, Bosch Rexroth Industries, EDF, PSA Peugeot Citroën, Renault Automobiles,...), de centres techniques et de syndicats professionnels (CETIM [3], ARTEMA [4], BNAE [5], FIM [6], UTE [7],...), cette norme NF E01-010 a pour objectif de proposer à la communauté industrielle et scientifique une terminologie commune à l'échelle nationale puis internationale (une soumission au niveau européen est en projet). Visant à améliorer la compréhension mutuelle des différents intervenants d'un projet mécatronique (experts, intégrateurs, fournisseurs, service marketing,...), un certain nombre de termes et définitions propres à la Mécatronique y est ainsi précisé. La Mécatronique est notamment définie comme :

> *« une démarche visant l'intégration en synergie de la mécanique, l'électronique, l'automatique et l'informatique dans la conception et la fabrication d'un produit en vue d'augmenter et/ou d'optimiser sa fonctionnalité »* [AFN08].

Suivant leurs niveaux d'*intégration physique* (*i.e. « interpénétration des supports mécaniques et électroniques »* [AFN08]) et d'*intégration fonctionnelle* (*i.e. « apport de fonctions de détection, de communication, de traitement de l'information et de rétroaction aux fonctions mécaniques de base »* [AFN08]), cette norme distingue également les *composants mécatroniques* (intégration faible ou moyenne) des *produits mécatroniques* (intégration physique et fonctionnelle élevée). Dans la suite de ce mémoire cependant, nous ferons plus volontiers référence à la notion de *systèmes mécatroniques* indépendamment de leurs niveaux d'intégration.

Aujourd'hui, la Mécatronique est en pleine expansion et de nombreux exemples de systèmes mécatroniques nous entourent aussi bien dans le monde industriel que dans notre vie au quotidien. La figure 1.2 nous montre un bref aperçu des applications possibles que ce soit dans le domaine des loisirs (caméscope, lecteur CD, jouet,...), de l'aide aux tâches ménagères (lave-vaisselle, machine à café,...), de la médecine (robot de chirurgie mini-invasive, prothèse,...), de la recherche spatiale (robot explorateur, satellite,...), de la fabrication (machine outil à commande numérique, chaîne automatisée d'assemblage,...) ou encore des transports (avion, véhicule routier,...). En réalité, les applications sont diverses et variées et semblent même infinies : toute structure énergétique peut potentiellement être améliorée par couplage avec de l'électronique et des algorithmes de contrôle. En quelque sorte, la Mécatronique permet de rendre le système « intelligent » [8] et d'envisager ainsi de meilleures performances voire même de nouvelles fonctionnalités.

2. *i.e.* Union de Normalisation de la Mécanique
3. *i.e.* Centre Technique des Industries Mécaniques
4. *i.e.* le syndicat des industries de la Mécatronique
5. *i.e.* Bureau de Normalisation de l'Aéronautique et de l'Espace
6. *i.e.* Fédération des Industries Mécaniques
7. *i.e.* Union Technique de l'Electricité
8. Sur ce point, notons que l'auteur Rzevski propose dans [Rze03] une classification des systèmes mécatroniques selon leur degré d'intelligence. Il distingue notamment les *systèmes mécatroniques automatisés* (*Automated Mechatronic Systems*) qui évoluent de manière préprogrammée, des *systèmes mécatroniques intelligents* (*Intelligent Mechatronic Systems*) qui sont capables d'accomplir des tâches programmées malgré une évolution non programmée de leur environnement, ou bien encore des *réseaux mécatroniques intelligents* (*Intelligent Mechatronic Networks*) qui sont des ensembles de systèmes mécatroniques coopérant entre eux, capables ainsi d'adapter leurs tâches à leur environnement.

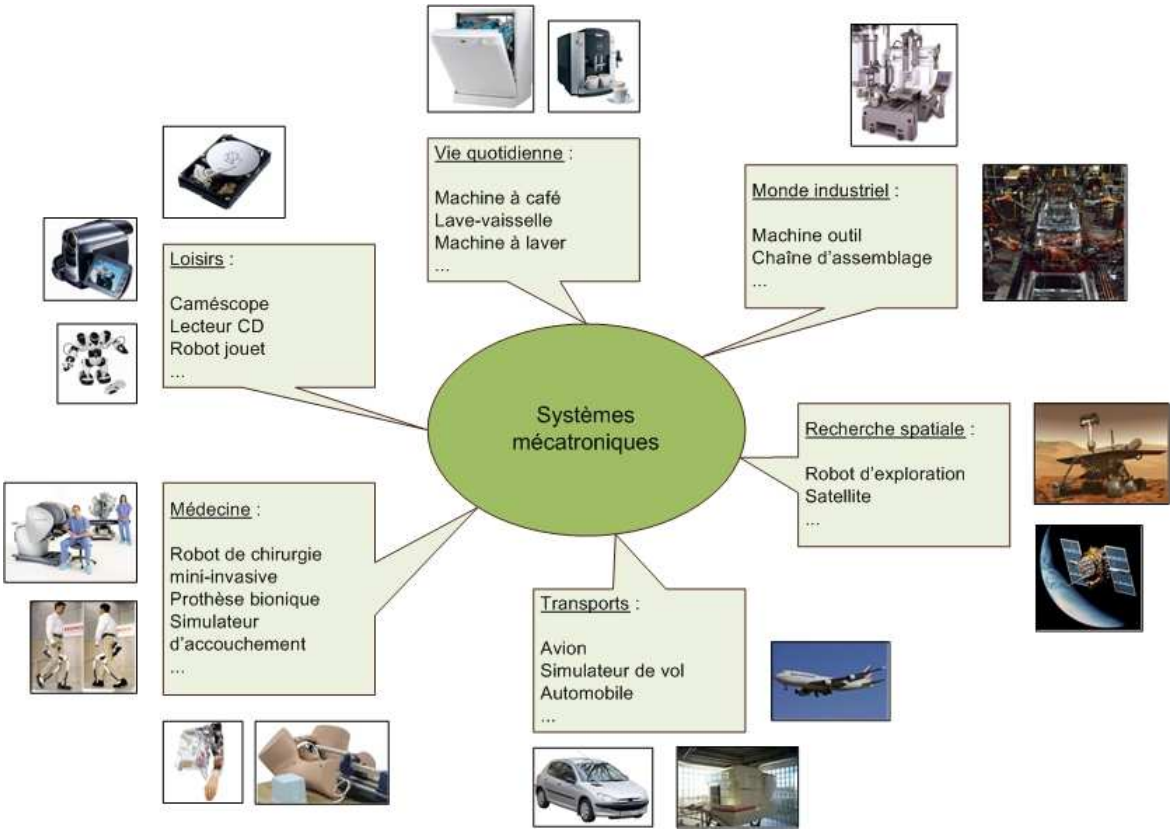


FIGURE 1.2 – Exemples de systèmes mécatroniques

La Mécatronique vue comme l'amélioration de performances...

L'exemple des lecteurs CD pour voiture est illustratif de la manière dont la Mécatronique peut améliorer les performances d'un système. En effet, auparavant, pour empêcher que les vibrations du véhicule n'endommagent la tête de lecture, les lecteurs disposaient en général d'un système de suspension mécanique de type ressort et amortisseur. Mais ces systèmes nécessitaient alors un poids et un encombrement plus importants que ce qui est autorisé par les contraintes de conception actuelles. Aujourd'hui, certains fabricants ont utilisé la Mécatronique pour contourner ce problème : exempts de suspension mécanique, ces nouveaux lecteurs sont insérés dans un boîtier mécanique à très faible jeu et les dommages dus aux vibrations sont diminués par l'ajout d'une amplification dans le domaine des hautes fréquences et d'un meilleur asservissement de suivi de piste.

...ou comme l'apport de nouvelles fonctionnalités

Parallèlement aux avancées technologiques, si la Mécatronique connaît aujourd'hui un essor important, c'est aussi parce qu'elle permet d'innover et donc de faire face aux nouvelles contraintes de conception en termes de confort, de sécurité et d'environnement. Tout système doit aujourd'hui être conçu le plus rapidement et le moins cher possible tout en satisfaisant des contraintes toujours plus strictes et nombreuses. L'évolution des véhicules est un exemple marquant de cet environnement de conception complexifié. Dans [Ise08], ISERMANN reprend le cas de l'automobile et récapitule ainsi bon nombre des nouvelles fonctionnalités rendues disponibles par la Mécatronique (Fig. 1.3). Celles-ci portent no-

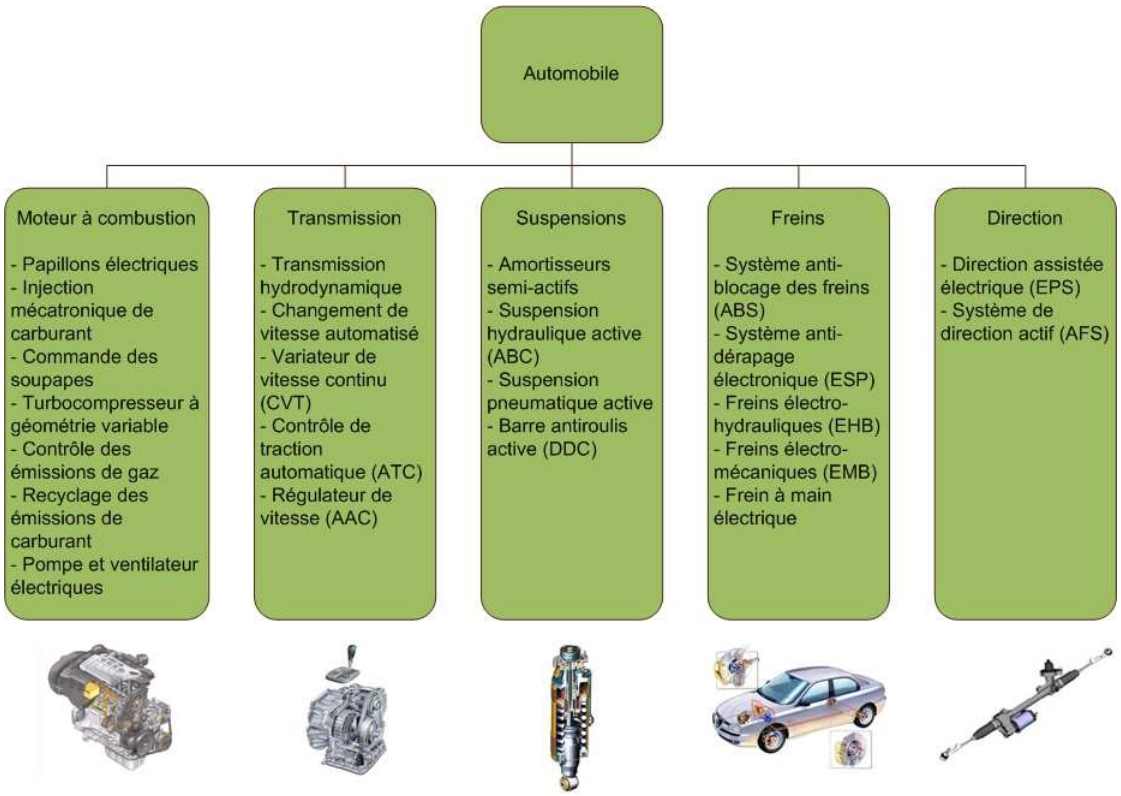


FIGURE 1.3 – Evolution de l'automobile grâce aux systèmes mécatroniques [Ise08]

tamment sur l'aide à la conduite et l'assistance au conducteur : aide au freinage (ABS [9]), régulation du comportement dynamique (ESP [10]), régulateur et limitateur de vitesse,. . . La tendance générale vise même à remplacer les systèmes purement mécaniques par des systèmes mécatroniques de type *« X by wire »* (*« drive by wire »*, *« brake by wire »*,...), voire à concevoir des véhicules hybrides couplant moteur thermique et moteur électrique. À ce sujet et dans un cadre plus général, une description intéressante des tendances technologiques actuelles et de l'évolution pressentie des systèmes mécatroniques est dressée par OLLERO dans [Oll06].

1.2.2 Architecture générique d'un système mécatronique

Afin de mieux comprendre par la suite comment une méthode de conception peut être plus pertinente et plus efficace, précisons tout d'abord l'architecture générique d'un système mécatronique. Un tel système peut être vu comme des chaînes d'actionnement supervisées à l'aide d'algorithmes de commande, eux-mêmes éventuellement paramétrés *via* l'intermédiaire d'une interface homme-machine (Fig. 1.4). Les chaînes d'actionnement constituent ainsi la partie opérative du système tandis que l'ensemble {chaîne d'actionnement + informatique + électronique de commande} est considéré comme un système piloté par boucle de rétroaction.

D'un point de vue énergétique, les chaînes d'actionnement sont l'association de plu-

9. *i.e.* AntiBlockierSystem en allemand ou bien Anti-lock Braking System en anglais
10. *i.e.* Electronic Stability Program

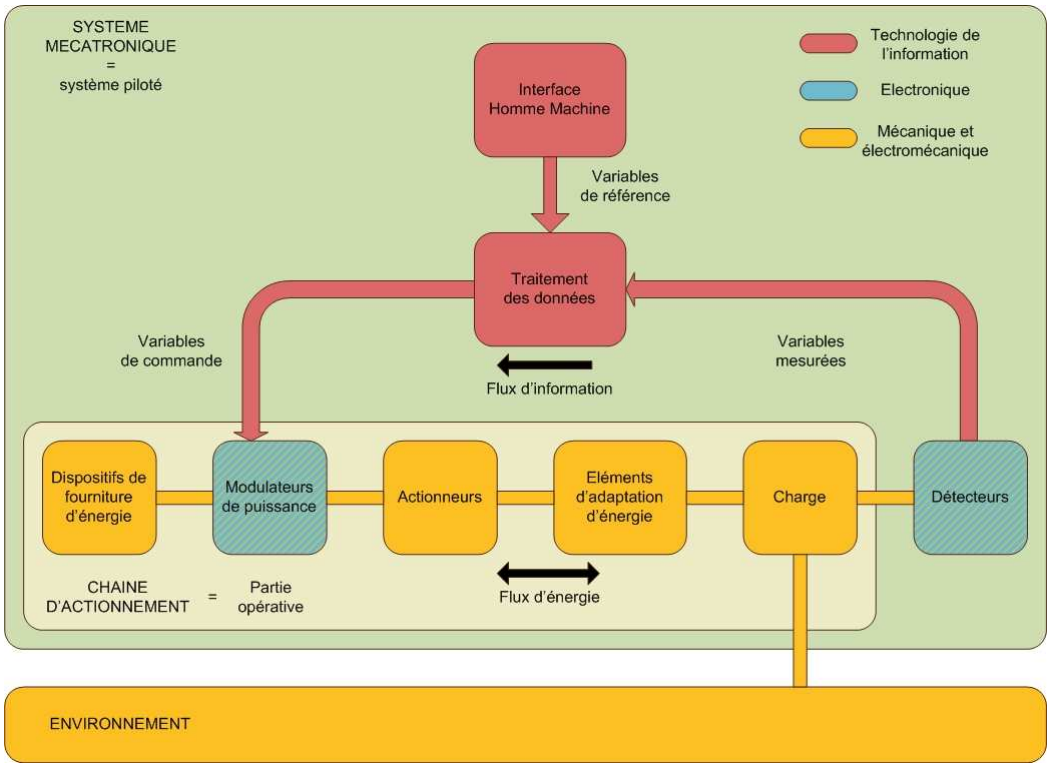


FIGURE 1.4 – Architecture générique d'un système mécatronique d'un point de vue énergétique

sieurs fonctions telles que [Laf04] (Fig. 1.4) :

- l'alimentation énergétique du système (sous-système *dispositifs de fourniture d'énergie*) ;
- la modulation de puissance permettant de piloter le transfert d'énergie entre les dispositifs de fourniture d'énergie et les actionneurs (sous-système *modulateurs de puissance*) ;
- la conversion et la transmission de l'énergie, issue des systèmes modulateurs de puissance, pour l'adapter aux besoins de la charge (sous-systèmes *actionneurs* et *adaptation d'énergie*) ;
- l'actionnement des degrés de liberté énergétiques de la charge, finalité du système mécatronique (sous-système *charge*).

Par la suite, les termes utilisés au cours de ce mémoire feront implicitement référence à cette description d'un système mécatronique et de sa chaîne d'actionnement.

Remarque : Notons tout de même que, par souci de clarté, l'architecture fonctionnelle présentée ici est une architecture dite simple. De nombreuses autres configurations peuvent être imaginées comme celles décrites dans la thèse de LAFFITE [Laf04] (mise en cascade, association de plusieurs chaînes d'actionnement simples, ...). Cependant, quelque soit l'agencement et le rôle des chaînes d'actionnement (transmission de la puissance principale ou modulation d'une autre chaîne d'actionnement), la cascade des fonctions dispositifs de fourniture d'énergie → modulateurs → ... → charge est supposée toujours vérifiée.

1.3 La conception d'un système mécatronique

Comme nous l'avons vu précédemment, un système mécatronique est un système mêlant plusieurs technologies issues de l'informatique, de l'électronique et de la mécanique au sens large. L'avènement de tels systèmes a certes été rendu possible grâce aux avancées technologiques mais leur besoin est surtout apparu avec la complexité croissante des cahiers des charges et des fonctionnalités ou actions demandées. Cette section du chapitre est dédiée à l'approche globale de conception qu'il convient d'adopter pour de tels systèmes. Nous verrons notamment l'utilité voire la nécessité de l'ingénierie concourante et du prototypage virtuel. Les nouveaux enjeux que soulève une démarche de conception en V sont également abordés.

1.3.1 De l'ingénierie séquentielle à l'ingénierie concourante

Jusqu'alors, même si les systèmes complexes pouvaient utiliser différentes technologies issues de différents domaines de la physique, il s'agissait plus d'une juxtaposition des disciplines que d'une réelle synergie. L'approche globale de conception habituellement adoptée consistait alors à décomposer le système en plusieurs sous-systèmes (chacun étant relatif à une discipline propre) et à étudier ces sous-systèmes de manière séparée. Ce point de vue traditionnel a ainsi abouti à ce que nous pouvons appeler l'*ingénierie séquentielle* où les savoir-faire technologiques des spécialistes sont relativement cloisonnés (approche dite également *approche métier*).

Depuis l'avènement de la Mécatronique, il s'agit désormais de savoir intégrer les différentes technologies afin qu'elles interagissent entre elles de manière optimale. Or, le découpage par discipline scientifique ne permet justement plus de répondre à cette exigence : tout optimaux que soient les sous-systèmes par rapport à leur propre discipline, rien ne garantit que leur association sera optimale. En effet, pour citer Lebrun, *à partir des propriétés des différentes parties, il n'est pas trivial de déduire le comportement de l'ensemble* [Leb03] et donc d'en assurer son efficience maximale. Dans l'approche conventionnelle, même si chacun des spécialistes travaille de la manière la plus efficace possible, son isolement fait qu'il ne possède qu'une idée partielle de la conception du système global et engendre ainsi potentiellement des problèmes d'interfaçage avec les autres sous-systèmes. Une combinaison des différentes technologies ne peut être optimale que si une réelle communication entre les différents spécialistes est mise en place et si l'interconnexion des différentes disciplines est prise en compte dès le processus de conception.

L'évolution des systèmes à concevoir nécessite donc également un changement de méthode de conception. C'est à ce titre notamment qu'est apparue la notion d'*ingénierie concourante*. Parfois dénommée *ingénierie simultanée* [Ise96a], *approche mécatronique* ou encore *approche système*, cette nouvelle démarche est principalement basée sur la communication des différents partenaires du projet. Des équipes plurisdisciplinaires composées d'ingénieurs aux compétences transverses pilotent les équipes métiers plus spécialisées. Ils assurent ainsi un dialogue permanent et garantissent la cohérence des différentes études. Un tel dialogue permet de prendre en compte dès la conception les différentes phases du cycle de vie du système (comme la fabrication, la maintenance,...) et d'envisager des solutions innovantes qui, avec l'approche séquentielle, n'auraient jamais été envisagées (*e.g.* roulements de roue avec mesure intégrée de la vitesse de rotation, société SNR [Soc]). Les différentes études sont menées autant que possible en parallèle afin de limiter les

risques de conflit lors de l'interfaçage des différentes technologies et donc de réduire les phases de reconception. Déjà appliquée dans de nombreuses industries, cette approche connaît un succès grandissant et bon nombre de références peut être trouvé dans la littérature à ce sujet. Le lecteur intéressé pourra notamment consulter l'article de Decreuse et Feschotte [Dec98] pour une entrée en matière très fonctionnelle puis la norme X 50-415 [AFN94] et le livre de Jagou [Jag93] pour une description plus détaillée.

1.3.2 Le cycle de conception en V

En parallèle de cette notion d'ingénierie concourante, focalisons nous désormais sur le développement même d'un produit mécatronique, c'est-à-dire sur les étapes aboutissant à la production du produit à partir des besoins exprimés (la distribution et la maintenance du produit ne sont pas abordées ici). Aujourd'hui, les spécialistes de la conception de systèmes mécatroniques s'accordent à représenter leur demarche sous la forme d'un « cycle en V ». Issue du génie logiciel [Brö95], cette démarche a effectivement été adaptée par et pour la communauté mécatronicienne [Ver04].

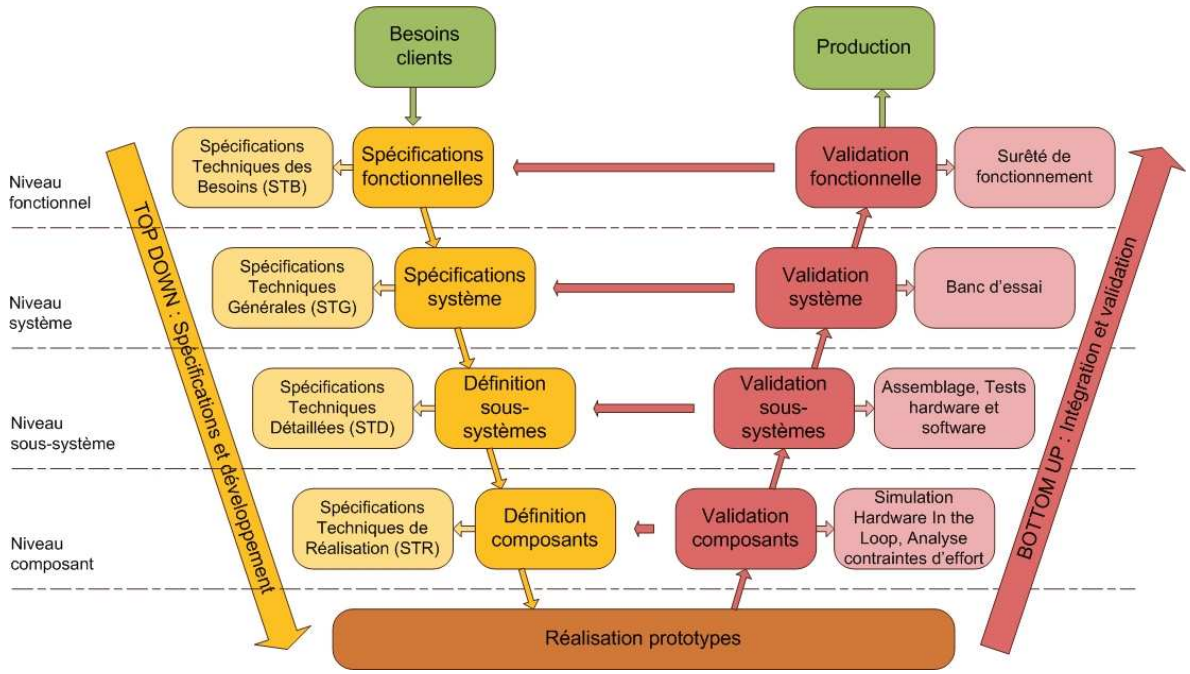


Figure 1.5 – Le cycle de conception en V

S'inspirant des descriptions d'Isermann [Ise08] et de Lebrun [Leb03], ce cycle est repris ici dans le cas d'un système mécatronique (Fig. 1.5). Celui-ci est constitué de deux branches principales : la phase descendante (*top down*) correspond aux différentes phases de spécifications et de conception tandis que la phase ascendante (*bottom up*) représente les étapes de validation et d'intégration des différentes technologies. Le projet est décomposé en plusieurs sous-projets de différents niveaux :

- le *niveau fonctionnel* correspond à la définition des fonctionnalités que le produit devra présenter (traduction des attentes exprimées par le consommateur en Spécifications Techniques des Besoins) ainsi qu'aux situations de vie auxquelles il sera

confronté (scenarii qui seront validés, par exemple, par une analyse des modes de fonctionnement) ;
- le *niveau système* représente une vue plus physique du produit au sens où c'est dans ce cadre que se dessine déjà l'architecture du système (combien de sous-systèmes vont pouvoir assurer les différentes fonctionnalités et comment ces sous-systèmes vont interagir entre eux ?). Certains choix technologiques sont de ce fait implicitement décidés lors de l'écriture des Spécifications Techniques Générales ;
- le *niveau sous-système* où chacun des sous-systèmes définis au niveau précédent est vu comme un organe du produit initial. Pour préciser sa conception, chaque organe doit être à son tour décomposé en sous-systèmes, appelés alors composants. De nouveaux choix architecturaux et technologiques sont documentés cette fois-ci dans des Spécifications Techniques Détaillées ;
- le *niveau composant* achève la conception à l'aide notamment de la rédaction de Spécifications Techniques de Réalisation.

Ainsi si nous reprenons l'architecture générique d'un système mécatronique, présentée à la section 1.2.2 (page 6), celle-ci peut être découpée en différents niveaux de sorte que :
- l'ensemble {chaîne d'actionnement + informatique + électronique de commande} corresponde au niveau système ;
- les dispositifs de fourniture d'énergie, les actionneurs, les capteurs, la charge, les parties modulation, adaptation, électronique et informatique de commande, représentent chacun un type de sous-sytème ;
- chacun de ces sous-systèmes est décomposé en composants.

En réalité, chaque sous-projet relatif à un niveau de développement particulier est soumis à des étapes de traduction des spécifications, de conception, d'intégration et de validation (après réalisation de composants prototypes, ceux-ci seront éventuellement validés par simulation puis assemblés et l'ensemble sera testé sur différents aspects hardware, software, physique et fonctionnel). Les équipes en charge de la conception du produit vont ainsi développer et tester différentes solutions et le cycle en V sera successivement parcouru plusieurs fois, totalement ou partiellement, jusqu'à ce qu'une solution optimale soit trouvée. Même si nous sommes dans un contexte d'ingénierie concourante, cette démarche de conception reste donc néanmoins itérative : il est impossible de prévoir les comportements de chaque composant dans les moindres détails et encore moins d'anticiper leurs influences sur le comportement global du système.

1.3.3 Le prototypage virtuel

Pour faire face à la concurrence accrue des marchés et à la dimension économique actuelle, il est important de pouvoir rendre disponible un produit amélioré dans les plus brefs délais. Il est donc capital de réduire au maximum les temps de développement d'un produit. Cependant, s'il est vrai que les équipes pluridisciplinaires essaient d'anticiper au mieux les problèmes d'interfaçage entre les différentes technologies, nous avons vu précédemment qu'il est impossible de tout prévoir et que des phases de correction et de validation sont inévitables. Si la démarche de conception restera donc toujours itérative, un moyen de limiter les temps de développement est donc de réduire au mieux la durée de

chaque itération, c'est-à-dire de chaque enchaînement spécifications → conception → validation → correction. C'est notamment à cette fin qu'est récemment apparue l'utilisation du *prototypage virtuel* dans les bureaux d'études.

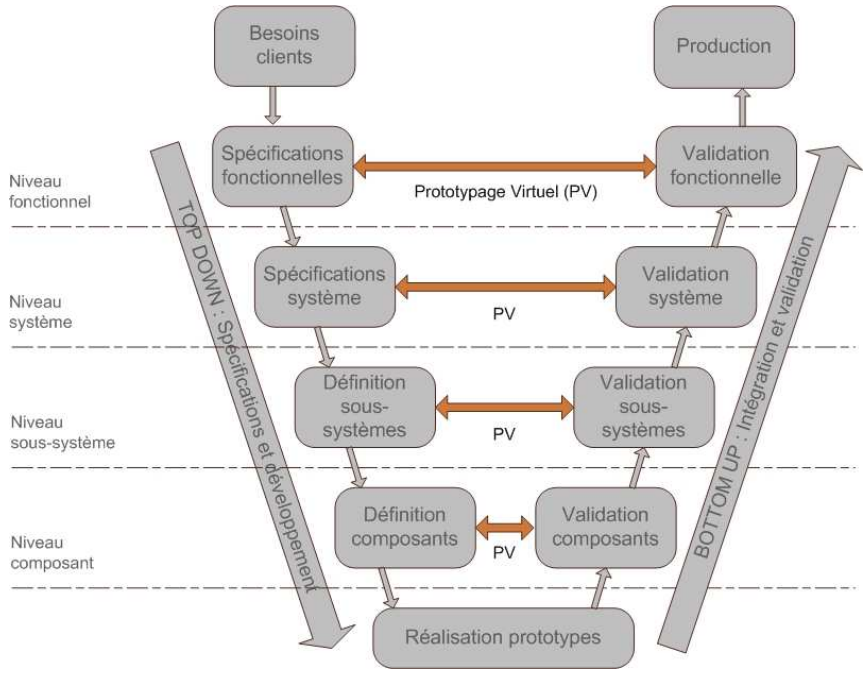


FIGURE 1.6 – Intérêt du prototypage virtuel dans le cycle de conception en V

Le prototypage virtuel : un gain de temps...

En effet, réaliser des simulations permet d'éviter la fabrication de nombreux prototypes et favorise ainsi un gain de temps et d'argent. Même si la fabrication d'un prototype réel ne pourra être évitée pour les tests finaux, cette approche par simulation permet d'enchaîner très rapidement les phases de conception et de validation et ce par les mêmes personnes. Des passerelles se tissent alors entre les deux branches du cycle en V (Fig. 1.6) et augmentent la réactivité des équipes.

Le gain de temps et donc d'argent que permet le prototypage virtuel n'est pas uniquement théorique. Il se vérifie dans la pratique. MARGOLIS montre notamment sur deux cas industriels (système d'isolation vibratoire pour cabine de camion et tympanomètre, outil médical déterminant la santé d'une oreille interne) comment des erreurs de mauvaise conception auraient pu être évitées grâce à la modélisation et à la simulation [Mar02].

...impliquant différent niveaux d'abstraction...

Cependant, le prototypage virtuel n'est vraiment efficace que si l'ingénieur en charge de l'étude est capable de modéliser le système avec pertinence, c'est-à-dire s'il est capable de le décrire à un niveau de granularité cohérent avec son problème de conception. Ceci est d'autant plus difficile qu'un niveau de modélisation ou *niveau d'abstraction* est souvent à l'interface de deux niveaux de conception ou *niveaux de développement* comme le montre la figure 1.7 (figure basée sur les travaux présentés dans [Leb03]).

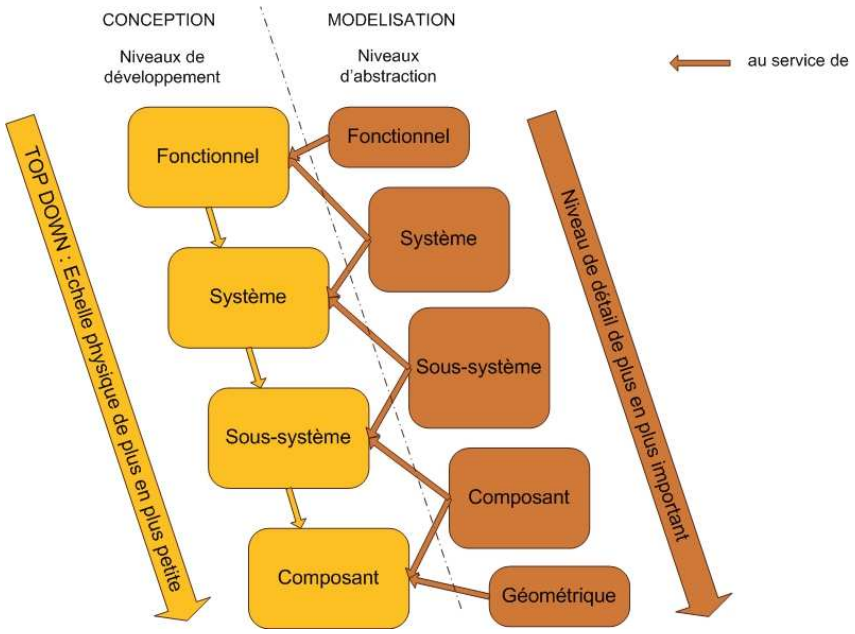


FIGURE 1.7 – Un niveau d'abstraction correspond à plusieurs niveaux de développement

Cinq niveaux d'abstraction de la réalité peuvent ainsi être différenciés (Fig. 1.7) :

- le *niveau fonctionnel* où les modèles ne s'attachent à décrire que les différentes fonctions du système ainsi que les différentes situations dans lesquelles ce système peut être amené à évoluer (*e.g.* modèles réseaux de PETRI [Pet62]). Ce niveau correspond uniquement au niveau de développement fonctionnel ;

- le *niveau système* où le comportement du système est représenté par une association de sous-modèles. Chaque sous-modèle correspond à un sous-système et décrit son comportement de manière simplifiée sous la forme de modèles entrées/sorties plus ou moins explicites (*e.g.* modèle « boîte noire » basé sur une expression mathématique ou une cartographie et où le comportement interne n'est pas détaillé ou modèle « boîte grise » où le comportement interne est partiellement détaillé). Ce niveau permet de préciser comment les fonctionnalités désirées du système vont pouvoir être accomplies physiquement. À ce titre, il correspond donc à la fois au niveau de développement fonctionnel et au niveau de développement système ;

- le *niveau sous-système* qui reprend la même hiérarchie que précédemment mais à une échelle physique du système différente. Ici le modèle principal correspond à un sous-système du produit initial et les sous-modèles à des composants. Là encore, les sous-modèles sont simplifiés. De la même façon que précédemment, ce niveau correspond aux niveaux de développement système et sous-système ;

- le *niveau composant* permet de détailler les phénomènes régissant le comportement dynamique de chacun des composants. Les modèles mis en jeu sont principalement des modèles à paramètres localisés (*lumped-parameter models*). Selon le degré de détail, ce niveau correspondra aux niveaux de développement sous-système ou com-

posant ;

- le *niveau géométrique* implique la description des formes géométriques des composants ainsi que les lois de comportement des matériaux. Les modèles sont des modèles à paramètres répartis (*distributed-parameter models*). Ce niveau correspond exclusivement au niveau de développement composant.

...sous différentes formes

Quelque soit leur niveau d'abstraction de la réalité, ces modèles peuvent revêtir diverses formes telles que sémantiques, graphiques (*e.g.* schémas électriques, hydrauliques, modèles bond graph, schémas blocs,...), analytiques (*e.g.* modèles d'état, matrices de transfert,...), algorithmiques [Ull92, Lor96] ou apparaître encore sous la forme de fichiers de données (*e.g.* cartographies). Deux types de modèles peuvent cependant être différenciés selon la manière dont ils ont été déterminés :

- les *modèles de représentation* dont les paramètres peuvent n'avoir aucun sens physique connu. Ils permettent de décrire certaines évolutions de certaines variables du processus dans un domaine particulier. Ils sont bien souvent obtenu par expérimentation sur système physique existant ;
- les *modèles de connaissance* dont les caractéristiques et les équations associées ont été établies en faisant appel à des modèles plus généraux mettant en œuvre les lois de la physique, de la chimie, de la biologie, *etc.* Les grandeurs associées à ces modèles ont, par construction, une interprétation physique directe (*e.g.* température, pression, courant, accélération, force,...) [Bor92].

Le prototypage virtuel en pratique

Parmi la multitude de logiciels existants, la table 1.1 présente à titre d'information un bref aperçu d'outils permettant d'aborder le prototypage virtuel suivant différents niveaux d'abstraction.

1.4 La conception de la chaîne d'actionnement

Les sections précédentes nous ont permis d'aborder jusqu'à présent la conception d'un système mécatronique d'une manière assez générale. Comme le souligne Dauphin-Tanguy, nous pouvons cependant en dégager deux phases principales [Dau99a] :

- une phase portant sur la conception de la partie opérative du système, c'est-à-dire portant sur la conception de ce que nous avons appelé la chaîne d'actionnement ;
- et une phase permettant de déterminer et d'implémenter les lois de commande pour piloter le système.

Conformément au principe de l'ingénierie concourante et du cycle de conception en V, ces deux phases peuvent être menées en parallèle : une fois l'architecture du système décidée, la conception de la partie commande se base sur des modèles simplifiés régissant les comportements dynamiques de chaque sous-système, tandis que ces mêmes modèles sont raffinés pour la conception de la partie opérative (les modèles de commande négligent bien souvent certaines dynamiques nécessaires pourtant au dimensionnement de la chaîne

Logiciels Editeurs	**Niveaux d'abstraction**				
	Fonction-nel	**Système**	**Sous-système**	**Compo-sant**	**Géomé-trique**
Matlab/Stateflow The MathWorks	x				
ASCET ETAS	x	x			
Matlab/Simulink The MathWorks		x	x	x	
Simscape The MathWorks		x	x	x	
Scilab/Scicos INRIA		x	x	x	
MapleSim Maplesoft		x	x	x	
Dymola Dassault systèmes		x	x	x	
LMS Imagine.Lab AMESim LMS		x	x	x	
OpenModelica Association Modelica		x	x	x	
Comsol Multiphysics Comsol					x
ProEngineer PTC			x	x	x
CATIA/Abaqus Dassault Systèmes					x
Fluent ANSYS					x

Table 1.1 – Exemples d'outils logiciels disponibles suivant le niveau d'abstraction désiré

d'actionnement). Des étapes de validation propres à la branche ascendante (*bottom up*) du cycle en V permettront ensuite de valider la robustesse des lois de commande par rapport au comportement réel du système [11].

La suite de ce mémoire portera uniquement sur la conception de la partie opérative d'un système mécatronique (Fig. 1.8) et se référera donc uniquement aux niveaux de

11. Pour anticiper les problèmes de réalisation technique des contrôleurs, ceux-ci sont déterminés à partir de modèles simplifiés. Cependant, selon le degré de précision demandé et la complexité des tâches à concevoir, il peut s'avérer nécessaire de ne concevoir la partie commande qu'une fois la partie opérative du système dimensionnée [Lin08]. Les modèles détaillés nécessaires à la conception de la partie opérative sont alors simplifiés grâce à des techniques de réduction de modèle (*Model-Order Reduction techniques*) pour synthétiser les lois de commande appropriées [Oll06]. Même si les deux phases de conception (partie opérative et partie commande) sont traitées, dans ce cas, de manière séquentielle, il reste toutefois primordial de prendre en compte les contraintes de pilotage dans la conception de la partie opérative [You96, Ise96b].

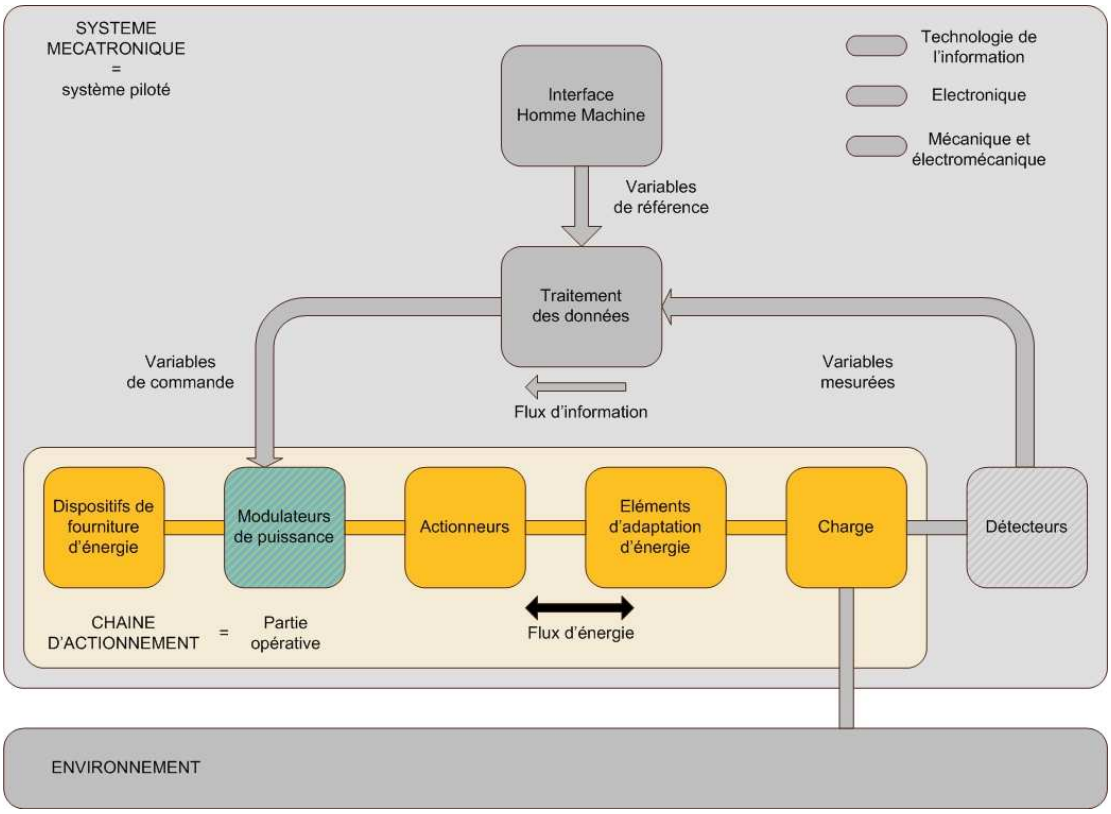


FIGURE 1.8 – Partie de la conception traitée dans le mémoire

développement système, sous-système et composants (Fig. 1.9). Les modèles étudiés seront supposés être des modèles à paramètres localisés. Le dimensionnement géométrique des composants ne sera, quant à lui, pas traité.

Dans les sections suivantes, les différents types de problèmes d'ingénierie rencontrés lors de la conception de la partie opérative du système sont décrits et les besoins vers de nouveaux outils de modélisation sont ensuite exprimés. Enfin, quelques démarches classiques propres au dimensionnement de la chaîne d'actionnement sont discutées.

1.4.1 Les différents problèmes de conception

Selon le niveau de développement du projet, la conception de la partie opérative d'un système mécatronique peut revêtir plusieurs aspects. Que l'étude vise une rupture technologique avec l'apport d'une solution innovante ou bien mise sur la reconception d'un objet existant, la conception d'une chaîne d'actionnement implique souvent l'enchaînement voire l'entremêlement de plusieurs problèmes d'ingénierie qui peuvent être, par exemple, des problèmes de [Ull92] :

- *synthèse d'architecture* ;
- *sélection de sous-systèmes ou de composants sur étagère* ;
- *synthèse paramétrique* ;
- ...

Comme nous allons le voir ci-dessous, ces problèmes se distinguent par le type de solution qu'ils engendrent et le niveau d'abstraction qu'ils requièrent.

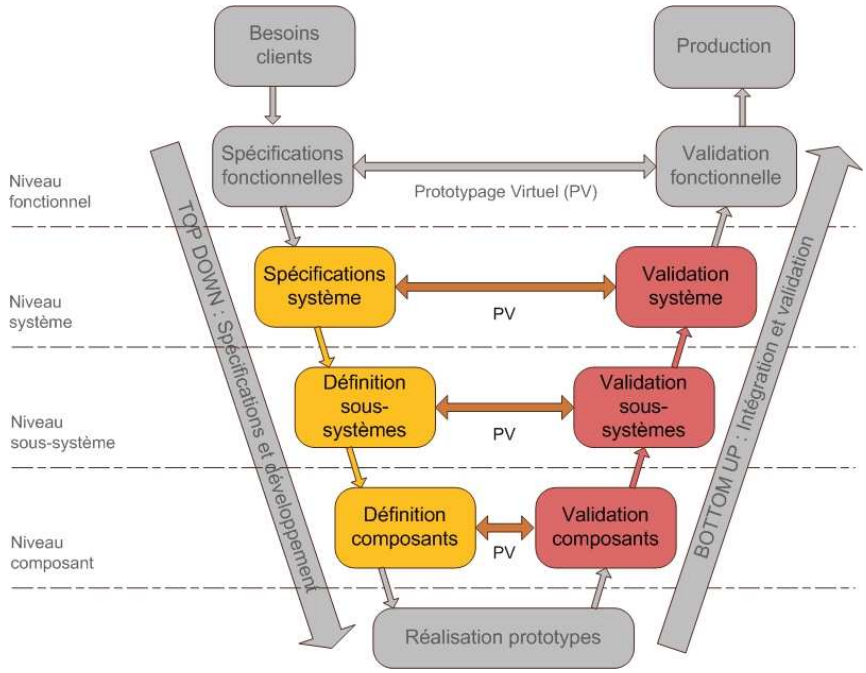


FIGURE 1.9 – Niveaux de développement traités dans le mémoire

La synthèse d'architecture

Avant de préciser la conception d'un système (phénomène, géométrie, dimensions), il convient de choisir auparavant l'architecture de ce système (lorsque celle-ci n'est pas *a priori* arrêtée), et ce conformément au cahier des charges. Cette architecture fixe ainsi le nombre, le type et l'agencement de « briques élémentaires » qui permettront de répondre, entre autres, aux aspects fonctionnels désirés. Ces « briques élémentaires » sont :

- au niveau de développement système : des sous-systèmes ;
- au niveau de développement sous-système : des composants ;
- au niveau de développement composant : des phénomènes.

La difficulté des problèmes de synthèse d'architecture réside notamment :

- dans la multiplicité d'architectures candidates à un même cahier des charges ;
- d'un choix d'architecture bien souvent fait *a priori* sans aucune validation ;
- et du fait qu'une architecture fixe bien souvent le type de technologie associée et donc conditionne quelque part les possibilités offertes par les étapes de conception ultérieures (étape notamment de sélection de sous-systèmes ou de composants).

Pour limiter au mieux ces inconvénients, RZEVSKI conseille notamment de résoudre les problèmes de synthèse d'architecture en réfléchissant d'abord à une association de concepts avant tout agencement physique (notion de *conceptual design*) [Rze03]. Les choix de tels concepts résultent bien souvent d'un compromis entre des contraintes environnementales et des coûts en termes d'études et/ou de fabrication (*e.g.* dans l'automobile, le choix d'une chaîne de traction électrique s'inscrit dans le contexte de la protection de l'environnement mais implique une certaine rupture technologique, malheureusement lourde en investissement).

Le problème de sélection de sous-systèmes ou de composants

Une fois l'architecture fixée, le problème de sélection consiste à choisir dans un catalogue les « briques élémentaires » adéquates pour satisfaire le cahier des charges imposé [Ull92, Fot97a]. En réalité, dans ce type de problème, les données sont la charge à actionner et les objectifs que cette charge doit accomplir (données fixées par le cahier des charges) tandis que les inconnues sont :

- au niveau de développement système : les sous-systèmes de la chaîne d'actionnement tels que dispositifs de fourniture d'énergie, modulateurs de puissance, actionneurs et éléments d'adaptation d'énergie ;
- au niveau de développement sous-système : les composants de chaque sous-système.

Ce type de problème intervient généralement dans des phases de pré-conception, d'études de faisabilité du système ou bien lorsque le concepteur ne souhaite pas redévelopper certaines parties existantes qui pourraient *a priori* convenir. Selon le niveau de développement considéré, les critères de sélection (voir section 1.5.2, page 21) reposent principalement sur des calculs statiques jugés dimensionnants et sur les caractéristiques techniques de chaque « brique élémentaire ».

Dans la suite de ce mémoire, nous ferons référence, par abus de langage, au terme dimensionnement pour désigner un problème de sélection de sous-systèmes ou de composants.

La synthèse paramétrique

Les problèmes de synthèse paramétrique sont exprimés au niveau de développement composant. Ils consistent à déterminer, pour des spécifications données, un ou plusieurs paramètres apparaissant dans le modèle d'un composant de la chaîne d'actionnement [Laf04]. La structure des modèles de composants est ainsi fixée et leurs commandes sont supposées connues. Ce type de problème intervient généralement lors de la reconception d'un composant.

1.4.2 Les besoins en termes d'outils

Comme nous venons de le voir, la conception d'une chaîne d'actionnement passe par la résolution de plusieurs problèmes d'ingénierie et ce à chaque niveau de développement. Afin de réduire toujours plus les temps d'études, nous avons vu que ces problèmes étaient désormais résolus par simulation. Les concepteurs ont donc besoin de nouveaux outils pour effectuer ces calculs : des outils en termes de langages de modélisation mais aussi en termes de logiciels.

Les besoins en termes de langages

Dans un problème de conception par prototypage virtuel, l'une des tâches les plus ardues réside dans l'étape de modélisation qui nécessite de [Jar08c] :

- trouver un niveau d'abstraction adéquat au problème de conception considéré ;
- pouvoir décrire les différents phénomènes mis en jeu dans le système et identifier s'ils relèvent bien du niveau d'abstraction requis ;
- représenter de manière unifiée ces différents phénomènes même s'ils appartiennent à différents domaines de la physique (mécanique, électrique, hydraulique,...).

De fait, la construction d'un modèle n'est pas aisée et il est donc primordial de savoir capitaliser les efforts de modélisation autant que possible. Cette capitalisation peut être entreprise :

- dès la construction du modèle, en essayant de le construire de manière hiérarchisée (association de plusieurs sous-modèles génériques qui seront ensuite affinés pour les besoins du problème de conception considéré ou pour des niveaux de développement ultérieurs [van03a, Ber03, Lin08]) ;
- et au niveau du management de projet, par la construction et/ou l'utilisation de bibliothèques de modèles.

En effet, une certaine généricité permet une certaine réutilisabilité des modèles tandis que la construction de bibliothèques permet de mutualiser les efforts de modélisation que ce soit au niveau des différentes strates du cycle en V (mutualisation à court terme) (Fig. 1.10) ou pour d'autres projets (mutualisation à plus long terme). Le retour d'expérience s'en trouve ainsi maximisé.

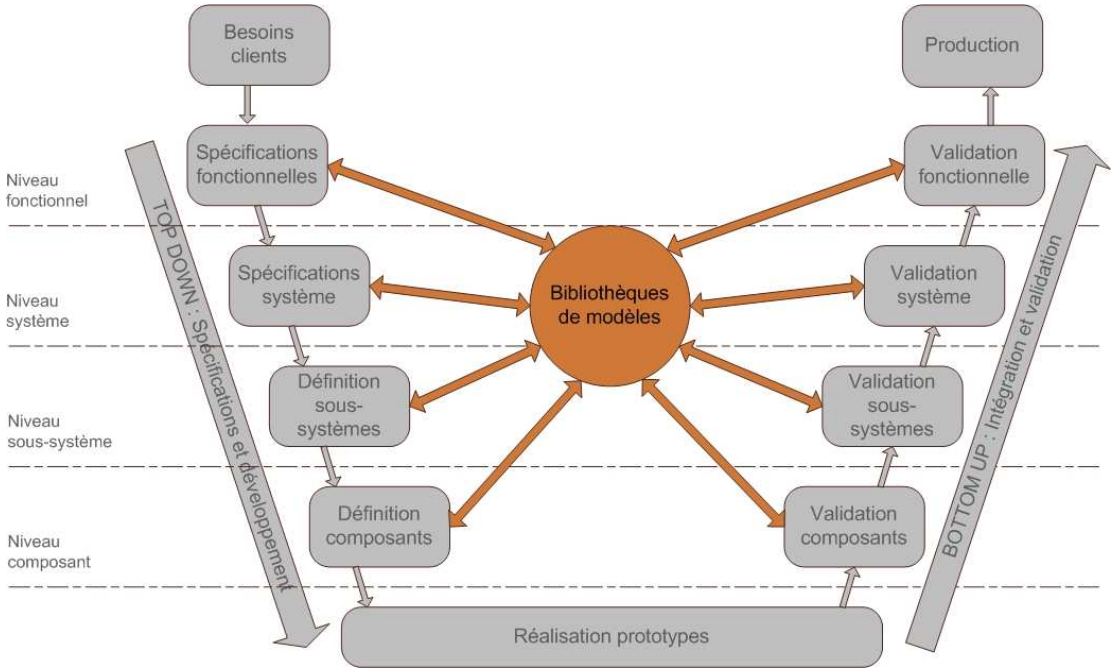


FIGURE 1.10 – Capitalisation des efforts de modélisation grâce aux bibliothèques de modèles

Pour appréhender au mieux les difficultés inhérentes à la modélisation et gérer le principe de capitalisation, les concepteurs ont ainsi besoin d'un langage de modélisation qui :

- permette de décrire d'une manière unifiée les différents domaines de la physique (mécanique, hydraulique, électrique,...) afin d'intégrer au plus tôt les différents aspects du système.
  → *Le langage doit donc être multi-domaine.*

- assure une sorte de continuité à chaque étape du projet de conception en facilitant la communication entre les différentes équipes du projet.
  → *Le langage doit être reconnu comme un standard pour l'échange de modèles.*

- optimise autant que possible les temps de conception en facilitant la mutualisation des efforts de modélisation par la construction de bibliothèques de modèles.
  → *Le langage doit permettre une approche hiérarchisée tel un langage orienté objet.*

- garantisse la réutilisabilité des modèles en permettant la déclaration d'équations *a priori* non orientées (séparation entre la description de la physique du système et l'objectif de calcul envisagé).
  → *Le langage doit être acausal.*

Comme nous le verrons dans la suite de ce mémoire, des outils de modélisation comme le bond graph [Pay61] ou plus récemment le langage Modelica [Elm97] permettent de répondre à la plupart de ces attentes. Bien entendu comme le souligne Lorenz [Lor96], il n'existe pas de langage universel qui soit adapté pour résoudre n'importe quel problème puisque certains niveaux d'abstraction (*e.g.* le niveau géométrique) requièrent des formalismes trop spécifiques pour être traités par un langage générique. Dans la pratique, l'utilisation de plusieurs formalismes ou langages reste donc nécessaire.

Les besoins en termes d'outils logiciels

De nouveaux besoins en langages de modélisation émergent inévitablement de nouveaux besoins en termes d'outils logiciels. Cependant, outre le support d'un nouveau langage, les logiciels doivent aujourd'hui correspondre également à la notion d'ingénierie concourante : les concepteurs ont désormais besoin de communiquer leurs résultats de simulation et leurs modèles aux différents partenaires du projet et ce très facilement. Les articles de Ferretti [Fer04] et de Lebrun [Leb03] formulent d'ailleurs très clairement ces attentes. Pour être industriellement viable, un logiciel de conception se doit aujourd'hui de :

- présenter une interface graphique conviviale ou tout au moins intuitive (représentation graphique du modèle, encapsulation de sous-modèles dans un modèle de niveau supérieur, visualisation des résultats,...) ;
- faciliter la gestion des bibliothèques de modèles (protection de certains modèles, possibilité de modifier certains modèles existants, d'en créer de nouveaux) ;
- autoriser le choix parmi plusieurs formalismes de modélisation [Lor96, van03a, van03b, Lin08] et plusieurs solveurs ou tout au moins posséder des fonctions de cosimulation et/ou d'import et d'export de modèles.

1.5 Le dimensionnement de la chaîne d'actionnement

Intéressons nous désormais plus particulièrement au problème de dimensionnement de la chaîne d'actionnement. Comme nous l'avons précisé précédemment (section 1.4.1, page 15), une fois que certaines orientations en matière d'architecture voire de technologie ont été fixées, ce type de problème consiste à comparer puis à choisir les différents composants de la chaîne d'actionnement de sorte que leur association satisfasse les spécifications imposées par le cahier des charges. Étudions ici la démarche communément suivie dans les bureaux d'étude pour résoudre un tel problème ainsi que quelques uns des critères

adoptés pour la sélection des composants.

1.5.1 Méthode essai → erreur → correction

Par souci de clarté et de concision, considérons ici l'exemple d'une chaîne d'actionnement mono-entrée mono-sortie, constituée simplement d'une charge et d'un actionneur (la transmission d'énergie est supposée directe sans recours à une quelconque adaptation). Supposons alors, par exemple, que le problème soit de dimensionner l'actionneur de sorte que la charge (fixée par le cahier des charges) suive une trajectoire spécifiée (fixée elle aussi par le cahier des charges). Une fois le modèle de la charge établi, l'approche classique de dimensionnement consiste alors à [Jar08c] :

1. sélectionner un actionneur parmi les catalogues d'actionneurs disponibles (ce choix dépend notamment du degré d'expertise et de la connaissance du système que possède l'ingénieur en charge de l'étude mais aussi de certains critères de sélection plus précis comme nous le verrons à la section 1.5.2, page 21) ;
2. modéliser l'actionneur ainsi sélectionné ;
3. choisir la façon dont va être commandé l'actionneur, c'est-à-dire choisir l'entrée du modèle {actionneur + charge} ;
4. lancer une simulation permettant de calculer la trajectoire de la charge (*i.e.* la sortie du modèle) à partir de l'entrée précédemment choisie ;
5. comparer la trajectoire ainsi calculée à la trajectoire spécifiée par le cahier des charges ;
6. recommencer la procédure si la trajectoire calculée n'est pas suffisamment proche de la trajectoire spécifiée (une trajectoire est jugée suffisamment proche si elle satisfait les critères de précision du cahier des charges).

Schématisée sur la figure 1.11, cette approche, habituellement adoptée par les bureaux d'études, aboutit rarement à une solution correcte (*i.e.* en adéquation avec le cahier des charges) dès la première simulation. En général, la procédure doit être itérée de nombreuses fois et plusieurs phases d'essai, d'erreur et de correction doivent s'enchaîner avant de trouver un actionneur adéquat. Ceci est d'autant plus vrai dans un contexte de rupture technologique où, par définition, les ingénieurs ne peuvent avoir aucune expertise sur le système.

De plus, cette approche classique engendre bien souvent une perte de temps puisque :

- dans le premier cas où l'actionneur choisi satisfait les spécifications (*e.g.* dans notre exemple, permet de suivre la trajectoire spécifiée), l'ingénieur en charge de l'étude a certes répondu au problème de dimensionnement mais il ne sait pas s'il l'a fait de manière optimale. Il n'a aucune idée des marges dont il dispose en termes de sur-dimensionnement et il ne peut ainsi pas savoir si un actionneur plus petit (et donc potentiellement moins cher) serait acceptable ou non tant qu'il n'essaie pas une nouvelle simulation sur ce nouvel actionneur ;
- dans le deuxième cas où l'actionneur choisi n'a pas permis de satisfaire le cahier des charges, le résultat de la simulation ne permet pas d'identifier les causes de sous-dimensionnement. L'ingénieur sait qu'il doit choisir un autre actionneur *a priori* plus

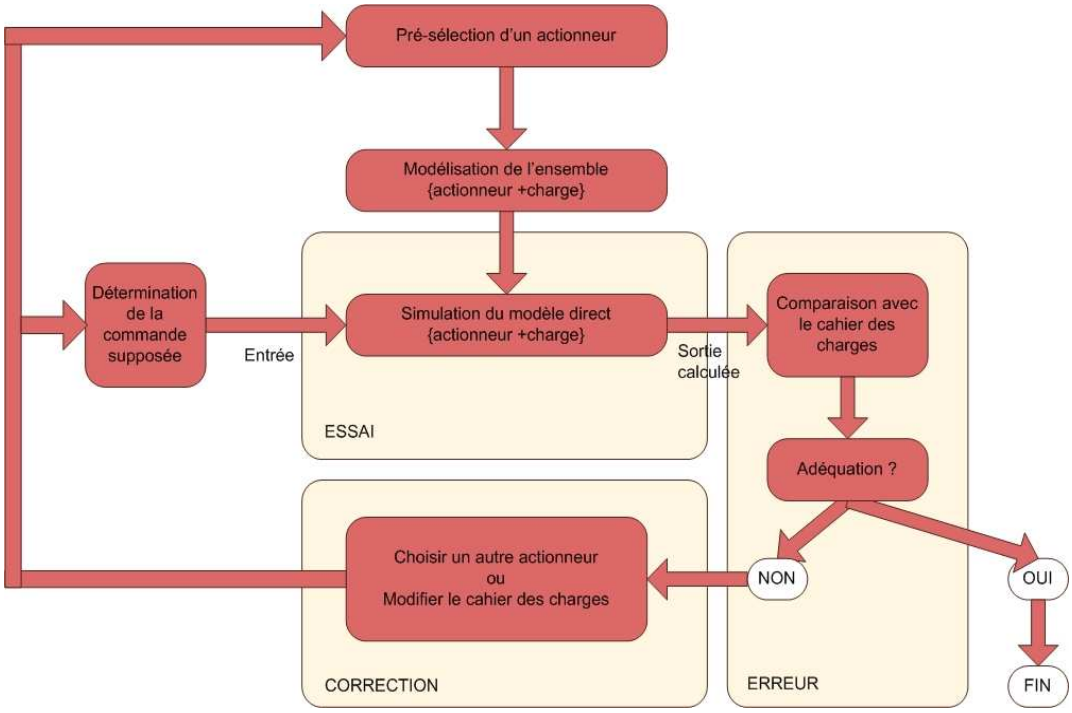


FIGURE 1.11 – Dimensionnement de la chaîne d'actionnement par modèles directs : méthode essai → erreur → correction

puissant mais aucune indication supplémentaire ne lui est fournie pour préciser son choix (*e.g.* doit-il choisir un actionneur plus rapide ou fournissant plus de couple ?).

Enfin, cette démarche peut même s'avérer sans fin puisqu'après tout, aucune analyse n'a été faite pour vérifier que les spécifications peuvent effectivement être atteintes par la structure du modèle que nous nous sommes fixée (la structure de la charge est imposée par le cahier des charges mais pas celle du reste de la chaîne d'actionnement). Dans ce cas, s'il ne trouve pas de solution, l'ingénieur est obligé de diminuer ses exigences en termes de cahier des charges pour résoudre son problème de conception.

1.5.2 Les critères de sélection

Nous avons vu à la section précédente que la démarche classique pour résoudre un problème de dimensionnement consistait grossièrement à choisir successivement des composants et à les tester jusqu'à ce que l'un d'entre eux semble pouvoir satisfaire le cahier des charges. Cette méthode apparaît ainsi très « expérimentale » et le temps de convergence vers une solution adéquate (si une solution est trouvée) dépend essentiellement de la manière dont sont sélectionnés *a priori* les composants. En réalité, la difficulté d'une telle sélection tient au fait que les spécifications n'ont été rédigées que pour préciser les performances attendues au niveau de la charge et non au niveau de chaque composant. Voici ici, à titre d'exemples, deux méthodes qui ont été présentées dans la littérature afin de faciliter et de rendre plus pertinent le choix d'un composant. Ces méthodes sont décrites ici de manière très succincte. Le lecteur intéressé pourra consulter les références

mentionnées ci-dessous ainsi que la thèse de Fotsu [Fot97a] pour un résumé plus détaillé.

Méthode de Newton Jr [New50]

L'une des premières études portant sur la sélection de composant est apparue dans les années 50 grâce au travail de Newton Jr [New50]. Celle-ci consiste à classifier les moteurs par leur inertie mais aussi par les vitesses et les couples maximaux qu'ils peuvent fournir. Les cahiers des charges sont quant à eux caractérisés par l'inertie de la charge et par les vitesses et accélérations maximales qu'il ne faut pas dépasser. Après avoir écrit les équations de couplage entre la charge et le moteur, des conditions d'adéquation entre la charge et le moteur sont établies en se basant sur le simple principe que le couple et la vitesse développés par le moteur doivent toujours rester supérieurs au couple et à la vitesse spécifiés pour la charge. L'ingénieur en charge de l'étude obtient ainsi des critères de sélection pour effectuer son choix de composant.

Méthode de Cœuillet [Coe69]

En 1969, Cœuillet reprend une démarche similaire mais cette fois-ci appliquée au choix d'un groupe moto-réducteur pour l'actionnement de radars destinés à la poursuite d'objectifs à forte vitesse de défilement [Coe69]. La charge et le moteur sont encore une fois uniquement modélisés par de simples inerties tandis que le réducteur est supposé parfait. Des conditions d'adéquation entre le groupe moto-réducteur et la charge sont alors également établies sur le même principe à la différence que celles-ci s'expriment au niveau des énergies cinétiques $\mathcal{W}$ et des puissances instantanées $\mathcal{P}$. L'originalité de la méthode réside alors dans l'exploitation de ces conditions puisque celles-ci sont traduites en termes graphiques dans un plan (énergie cinétique $\mathcal{W}$, taux de puissance transitoire $\dot{\mathcal{P}}$) : les zones d'actionneurs non-adéquats, de sous- et de sur-adéquation sont alors clairement identifiées.

Discussion des méthodes

Si les méthodes de Newton Jr et de Cœuillet permettent de sélectionner des composants sur des critères logiques de la physique, celles-ci ne font que guider l'ingénieur en charge de l'étude et n'assurent en aucun cas la réussite de son choix. L'établissement des conditions d'adéquation permet certes d'effectuer une première sélection mais celle-ci est relativement grossière et rien ne garantit que, parmi cette sélection, tous les composants seront aptes à satisfaire le cahier des charges. En réalité, les insuffisances de ces méthodes proviennent du fait que :

- la charge et l'actionneur sont représentés par de simples inerties, modèles qui ne traduisent pas la complexité actuelle des systèmes à concevoir ;
- la transmission d'énergie est limitée à la représentation d'un réducteur idéal alors que, là encore, des architectures plus complexes peuvent intervenir et engendrer certaines limitations pour l'adéquation charge/actionneur ;
- les conditions d'adéquation ne sont établies que pour des valeurs maximales, c'est-à-dire que sur des critères statiques obtenus en considérant des situations de vie dites critiques, alors que le comportement dynamique du système peut s'avérer lui bien plus dimensionnant.

1.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, une courte introduction à la Mécatronique a été présentée et l'architecture générique d'un système mécatronique a été définie comme l'association d'une chaîne d'actionnement et d'une partie commande. Du fait de leur complexité, nous avons vu que la conception des systèmes mécatroniques était une tâche ardue et qu'elle nécessitait de prendre en compte l'aspect pluridisciplinaire des systèmes dès les premières phases de développement. Aussi, nous avons également montré comment les concepts d'ingénierie concourante, de cycle de conception en V et de prototypage virtuel peuvent être mis à profit pour réduire les coûts et les temps d'études. L'intérêt d'une modélisation hiérarchisée utilisant un langage multi-domaine et acausal a également été avancé. Enfin, nous nous sommes intéressés à un problème particulier de la démarche de conception : celui du dimensionnement de la chaîne d'actionnement. La méthode habituellement considérée pour traiter ce genre de problème est une méthode itérative constituée de phases d'essais, d'erreurs et de corrections. Malheureusement, cette méthode ne donne aucune assurance de converger vers une solution et même en cas de convergence, rien ne garantit que la solution obtenue soit optimale.

Ce premier chapitre a présenté quelques critères de sélection basés sur l'exploitation de modèles directs (*i.e.* modèles dont les grandeurs données correspondent aux entrées physiques du système). Si ceux-ci ont été établis pour essayer de choisir au mieux les composants de la chaîne d'actionnement, ces critères sont cependant bien souvent statiques et ne prennent pas en compte la totalité de la structure de la chaîne d'actionnement. Afin de considérer le cahier des charges dans sa globalité, le chapitre suivant s'attachera quant à lui à présenter d'autres méthodes de dimensionnement basées cette fois-ci sur l'inversion (méthode de Potkonjak et Vukobratović [Pot86, Vuk87] ou de Dequidt [Deq98]). La méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses proposée initialement par Amara et Scavarda [Ama91] sera ensuite largement étudiée et servira de base de travail pour les contributions de ce mémoire.

Chapitre 2

Le dimensionnement par modèles bond graph inverses

Sommaire

2.1 Introduction 26
2.2 Le dimensionnement par modèles inverses 26
2.2.1 Reformulation du problème de dimensionnement en problème inverse 26
2.2.2 L'inversion en automatique 28
2.2.3 Méthodes de dimensionnement utilisant l'inversion 30
2.3 Le langage bond graph 33
2.3.1 Un outil adapté à l'étude des systèmes mécatroniques 33
2.3.2 L'inversion en langage bond graph 35
2.4 Le dimensionnement par modèles bond graph inverses 35
2.4.1 Le principe 36
2.4.2 Les différentes étapes 37
2.4.3 Les avantages par rapport à la démarche classique 42
2.4.4 Les différents contextes dans lesquels la méthodologie peut être utilisée 44
2.5 Positionnement de l'approche proposée dans un contexte industriel 48
2.5.1 Quelques exemples d'applications industrielles 48
2.5.2 Les langages Modelica et bond graph 64
2.5.3 L'acausalité, gage de pérennité des modèles 65
2.5.4 Originalité et apport de l'analyse structurelle 71
2.6 Conclusion 72

2.1 Introduction

L'évolution et la complexité croissante des systèmes nécessitent l'adoption de nouvelles démarches de conception, démarches qui doivent de plus satisfaire les contraintes de marché en réduisant au maximum les coûts et les temps de développement. Dans le cas du dimensionnement de la chaîne d'actionnement d'un système mécatronique, nous avons vu au chapitre précédent que la méthode habituellement adoptée n'était pas des plus pertinentes : que ce soit au niveau du temps de mise en œuvre avec ses nombreuses itérations ou bien même au niveau de la solution obtenue qui *a priori* n'a aucune raison d'être optimale. Cette non-optimalité provient essentiellement des critères de choix des composants : ceux-ci sont généralement sélectionnés selon des critères statiques et ne considèrent pas la totalité de la structure de la chaîne d'actionnement.

Tenant compte de ces désavantages, ce chapitre a pour objectif de présenter une nouvelle démarche de dimensionnement basée sur l'utilisation de modèles bond graph inverses. Pour cela, après avoir reformulé le problème de dimensionnement sous la forme d'un problème inverse, des approches basées sur le principe d'inversion seront étudiées. Elles nous permettront notamment de considérer le dimensionnement à l'aide de critères dynamiques. Base de travail de ce mémoire, la méthodologie proposée par le Laboratoire AMPÈRE[1] depuis une vingtaine d'années sera ensuite décrite avant d'en étudier ses avantages dans un contexte industriel.

2.2 Le dimensionnement par modèles inverses

Jusqu'à présent, les méthodes de sélection décrites au chapitre précédent (méthodes de Newton Jr et de Cœuillet) étaient basées sur des critères statiques : les grandeurs maximales à ne pas dépasser étaient établies à partir du cahier des charges dans des situations de vie jugées critiques. À ce titre, ces critères n'exploitaient pas la totalité des spécifications et pouvaient rendre en pratique la sélection non pertinente. Pour contrer cet inconvénient, une approche possible est l'approche par modèle inverse. Après avoir ainsi redéfini le problème de dimensionnement et rappelé le principe même de l'inversion en automatique, cette section présente trois méthodes de dimensionnement basées sur cette approche et montre comment celles-ci permettent **la prise en compte de critères dynamiques**.

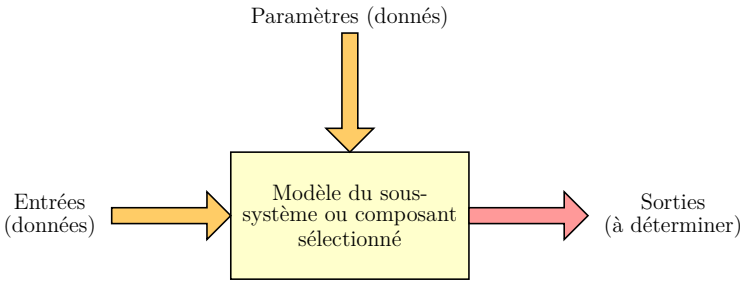
2.2.1 Reformulation du problème de dimensionnement en problème inverse

Une fois l'architecture du système choisie, nous avons vu à la section 1.4.1 (page 17) que le problème de dimensionnement consistait à sélectionner les sous-systèmes[2] de la chaîne d'actionnement de manière à satisfaire un cahier des charges donné. Maintenant, revenons brièvement sur la méthode essai → erreur → correction présentée à la section 1.5.1 (page 20). Pour résoudre ce type de problème, celle-ci consiste à sélectionner un sous-système

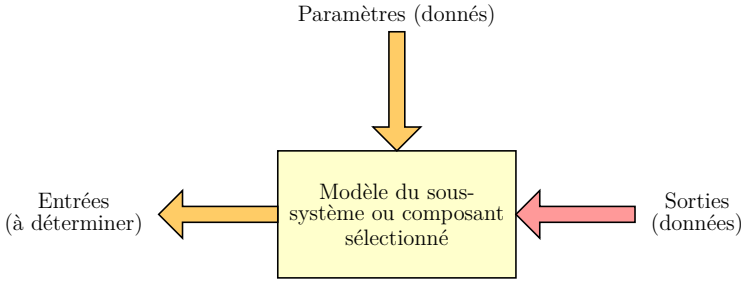
1. Plus exactement, la méthodologie a été initialement développée dans le cadre du Laboratoire d'Automatique Industrielle (LAI) qui, depuis janvier 2007, a fusionné avec le CEGELY et une équipe de microbiologie environnementale pour devenir le Laboratoire AMPÈRE (UMR CNRS 5005).

2. ou composants selon le niveau d'abstraction

sur des critères statiques de valeurs maximales puis à valider sa dynamique grâce à un calcul par simulation. Dans ce calcul, l'objectif est de déterminer l'évolution des variables de sortie du composant à partir de la connaissance de ses variables d'entrée et de ses paramètres (les entrées sont fixées plus ou moins arbitrairement tandis que les paramètres sont inhérents au composant choisi) (Fig. 2.1(a)) puis de comparer cette évolution au cahier des charges. Cette approche du dimensionnement est dite *approche par modèle direct*. Cette désignation fait notamment référence au fait que les modèles utilisés pour ce type de simulation respectent la causalité [3] de la physique du système : les sorties sont bien calculées à partir de la donnée des entrées.



(a) Par modèle direct



(b) Par modèle inverse

FIGURE 2.1 – Approches de dimensionnement

Cependant, si nous laissons de côté cette approche et si nous revenons au problème de dimensionnement en lui-même : initialement, l'ingénieur n'a d'autres données à sa disposition que celles fournies par le cahier des charges. Ces données portent généralement sur l'évolution souhaitée des variables de sortie du système et l'enjeu consiste donc à déterminer *in fine* les variables d'entrée de ce même système. Fondamentalement, le problème de dimensionnement est donc un *problème inverse* (Fig. 2.1(b)) : les modèles impliqués ne suivent plus le principe physique de causalité (les entrées sont calculées à partir des sorties) mais sont pourtant mathématiquement envisageables. Partant des données pour déterminer les inconnues, l'*approche par modèle inverse* apparaît ainsi comme naturelle. Elle permet de prendre en compte les spécifications à chaque instant de leurs évolutions

3. Au sens de la physique, le principe de causalité traduit le principe bien connu des relations de cause à effet : si un phénomène (nommé cause) produit un autre phénomène (nommé effet), alors l'effet ne peut précéder la cause. Le lecteur intéressé pourra consulter le livre de TRAVÉ-MASSUYÈS et DAGUE [Tra03] où une discussion est menée sur l'interprétation causale des modèles.

et non plus seulement au niveau de certaines valeurs maximales.

Remarques :

- Si l'inversion semble naturelle dans le cadre d'un problème de dimensionnement, il s'avère qu'un modèle n'est pas toujours inversible. Nous verrons au chapitre 3 quelles sont les conditions à respecter pour s'assurer que l'inversion est effectivement possible.
- Notons dès à présent que la reformulation du problème de dimensionnement en problème inverse implique implicitement la traduction du cahier des charges en termes de fonctions dépendant du temps (l'évolution temporelle des sorties spécifiées doit être connue pour lancer le calcul inverse en simulation). En pratique, cette traduction n'est pas toujours possible et nous verrons aux chapitres 4 et 5 comment le problème de dimensionnement peut alors être résolu par optimisation.

2.2.2 L'inversion en automatique

Afin de mieux comprendre le principe de l'inversion et les difficultés qu'elle engendre, donnons ici brièvement quelques rappels sur la manière dont a été abordé le problème en automatique.

Modèle direct

Pour cela, considérons ici un système Σ carré (*i.e.* même nombre de variables d'entrée que de variables de sortie) [4], linéaire et invariant dans le temps. Classiquement, son modèle d'état est représenté de la manière suivante [5] :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement les vecteurs d'entrée et de sortie.
Dans ce modèle, les variables de sortie sont exprimées comme des fonctions des variables d'état et d'entrée. Ce modèle est donc un modèle direct : il respecte le principe de causalité et est donc physiquement réalisable.

Modèle inverse

L'inversion consiste à partir de cette formulation directe pour exprimer cette fois-ci les variables d'entrée en fonction des variables de sortie, de leurs dérivées et des variables d'état. Ceci revient à obtenir un système Σ^{-1} d'équations de la forme suivante [Fot97a] :

$$\Sigma^{-1} : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}\mathbf{y}_\alpha(t) \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{H}\mathbf{z}(t) + \mathbf{J}\mathbf{y}_\alpha(t) \end{cases}$$

4. Cette hypothèse nous permet de ne pas avoir à distinguer les notions d'inverse à gauche ou à droite (voir [Zad63] pour plus de détails).
5. Dans toute la suite du mémoire et par souci de concision, la dérivée par rapport au temps d'une grandeur m sera désignée par $\dot{m}$.

où $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état généralisé et le vecteur $\mathbf{y}_\alpha(t)$ résulte d'opérations différentielles et algébriques sur les variables de sortie de sorte que l'on puisse écrire par transformation de LAPLACE : $\mathbf{Y}_\alpha(s) = \mathbf{M}(s)\mathbf{Y}(s)$ où $\mathbf{M}(s)$ est une matrice polynômiale en s.
Dans ce modèle, les rôles des vecteurs d'entrée et de sortie sont inversés : le vecteur $\mathbf{y}_\alpha(t)$ joue le rôle de variable d'entrée alors que le vecteur $\mathbf{u}(t)$ celui de sortie. De plus, ce modèle fait apparaître des dérivées des composantes du vecteur $\mathbf{y}(t)$: il est non causal[6] et donc physiquement non réalisable.

Remarques :

- Le modèle inverse présenté ici est un modèle dit *d'ordre plein* puisque le vecteur d'état généralisé $\mathbf{z}(t)$ a la même dimension n que le vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$ du modèle direct. SILVERMAN a cependant montré qu'il existait un modèle inverse dit *d'ordre minimal*, équivalent au niveau du comportement entrées/sorties mais dont la partie dynamique est décrite par un vecteur d'état généralisé de dimension pouvant être inférieure à n [Sil68] (voir la section 3.5.2, page 138).
- Le nombre d'opérations de différentiation sur chacune des variables de sorties nécessaire à l'obtention du modèle inverse peut être connu avant la construction même de celui-ci grâce à la notion d'*ordre d'essentialité* (voir la section 3.6.1, page 139).

Procédure d'inversion

Finalement, comme le soulignent SAIN et MASSEY [Sai69], un modèle inverse peut intuitivement être défini comme un second modèle qui, mis en cascade avec le modèle direct, permet d'obtenir en sortie les variables d'entrée du modèle direct. Globalement, le processus d'inversion consiste alors à partir du modèle direct, à dériver successivement les variables de sortie et à effectuer un certain nombre de transformations matricielles (représentées par la matrice $\mathbf{M}(s)$) de manière à exprimer les variables physiques d'entrée en fonction des variables physiques de sortie, de leurs dérivées et des variables d'état.
De nombreux travaux témoignent d'ores et déjà de l'intérêt porté à la résolution mathématique d'un tel problème. En effet, dès 1963, ZADEH et DESOER [Zad63] et WEISS [Wei64] considèrent le problème de l'inversion. Puis, après avoir étudié la notion de *commandabilité fonctionnelle en sortie*[7], BROCKETT et MESAROVIĆ [Bro65b, Bro65a] établissent en 1965 la première condition nécessaire et suffisante d'inversibilité et un algorithme d'inversion pour tout système linéaire, invariant dans le temps et monovariable. L'année suivante, YOULA et DORATO [You66, Dor69] traitent le cas multivariable, déduisent un critère d'inversibilité plus simple et proposent un nouvel algorithme d'inversion. En 1969, SILVERMAN [Sil69] revient au cas monovariable et démontre que l'algorithme de BROCKETT est généralisable aux systèmes discrets et aux systèmes linéaires à paramètres variant dans

6. La présence d'une dérivée d'une variable d'entrée nécessite quelque part de prédire le futur à partir d'un constat fait à un instant présent et rend de ce fait le modèle non causal. Que celui-ci soit direct ou inverse, le modèle est alors dit *modèle d'état généralisé* (d'où également le nom de vecteur d'état généralisé pour $\mathbf{z}(t)$).

7. La notion de *commandabilité fonctionnelle en sortie* est identique à celle de *reproductibilité fonctionnelle*. Elle se définit comme la capacité à commander les sorties d'un système sur tout intervalle de temps suivant une trajectoire prédéfinie [Bro65b, Rah93]. À ce titre, elle apparaît comme étant le dual de l'inversion (vue alors comme de l'*observabilité fonctionnelle en entrée*) [Sai69].

le temps. Il propose ainsi un nouvel algorithme qui sera la base ou le complément de nombreux autres travaux comme ceux de Sain et Massey [Sai69], de Porter [Por69] ou de Willsky [Wil74]. Depuis, plusieurs auteurs ont travaillé sur le sujet. Sans être exhaustif, citons parmi eux : Rosenbrock et van der Weiden [Ros77] pour leur approche matrice système, Hirschorn [Hir79], Singh [Sin81], Nijmeijer [Nij82, Nij86] et Fliess [Fli86] pour leurs travaux sur les systèmes non linéaires, Tan et Vandewalle [Tan88] pour l'étude des systèmes singuliers et Perdon *et al.* [Per92] pour celle des systèmes périodiques.

2.2.3 Méthodes de dimensionnement utilisant l'inversion

Si l'inversion a été abordée pour résoudre de nombreux problèmes en automatique tels que le découplage, la poursuite parfaite de trajectoire ou l'analyse des sensibilités [Sai69], cette approche a également été utilisée pour résoudre certains problèmes de dimensionnement. En effet, si, au chapitre 1, nous avons présenté uniquement des méthodes de sélection basées sur des modèles directs, il faut noter qu'en réalité l'utilisation de modèles inverses est fréquente en bureau d'études lors des phases notamment de prédimensionnement. L'inversion concerne alors essentiellement des modèles simples, souvent déterminés dans des conditions statiques ou stationnaires. Ils ne permettent pas un dimensionnement fin de la chaîne d'actionnement et ne tiennent pas compte des caractéristiques dynamiques du cahier des charges. Cette section présente trois méthodes de dimensionnement qui permettent de le faire : la méthode générale communément adoptée en robotique pour dimensionner les actionneurs de robots manipulateurs puis celles de Potkonjak et Vukobratović et de Dequidt.

Méthode générale en robotique

En robotique, les problèmes de dimensionnement consistent souvent à sélectionner des actionneurs adéquats de sorte que les organes terminaux d'un robot suivent parfaitement des trajectoires données. Habituellement, la résolution de tels problèmes se déroule en deux étapes :

- une première où les spécifications sur les organes terminaux sont traduites en spécifications au niveau des articulations ;
- une seconde où les efforts moteurs requis pour satisfaire la tâche sont calculés à chaque articulation à partir des spécifications établies à l'étape précédente.

Pour effectuer la première étape, le concepteur part du modèle cinématique direct du robot (2.1) :

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) \tag{2.1}$$

où :

- $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de coordonnées opérationnelles (grandeurs connues liées au repère de la tâche à effectuer) ;
- $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de coordonnées articulaires ;
- $\mathbf{J}(\mathbf{q}(t)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est appelée *matrice jacobienne.*

Puis il inverse ce modèle (si la matrice $\mathbf{J}$ est effectivement inversible) pour obtenir les évolutions temporelles nécessaires au niveau de chaque articulation (2.2) : à partir de la donnée des trajectoires souhaitées des organes terminaux (vecteur $\mathbf{y}(t)$), il en déduit celles des articulations (vecteur $\mathbf{q}(t)$ défini à une constante près). Il procède ainsi à une certaine remontée des spécifications le long de la chaîne cinématique.

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t))\dot{\mathbf{y}}(t) \tag{2.2}$$

Ensuite, une fois les trajectoires connues au niveau des articulations, le concepteur peut calculer les efforts moteurs nécessaires au niveau des articulations pour réaliser la tâche à accomplir. Pour cela, il utilise le modèle dynamique inverse du robot (2.3) :

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \tag{2.3}$$

où :
- $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ est un vecteur traduisant l'effet des accélérations de Coriolis, des forces centrifuges, des forces de gravité, des forces de frottements, ... ;
- $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$ est la matrice d'inertie du système ;
- $\boldsymbol{\gamma}(t)$ est le vecteur des efforts moteur.

Connaissant ainsi les évolutions des vitesses ($\dot{\mathbf{q}}(t)$) et des efforts ($\boldsymbol{\gamma}(t)$) nécessaires au niveau de chaque articulation, le concepteur a alors la possibilité de choisir des actionneurs capables de fournir en sortie de telles grandeurs. Cette sélection peut être directe en comparant uniquement les données constructeurs des composants avec les grandeurs désirées ou bien plus évoluée comme le montrent la méthode de Potkonjak et Vukobratović en établissant une condition d'existence d'un réducteur ou celle de Dequidt en tenant compte de certaines exigences en termes de commande.

Méthode de Potkonjak et Vukobratović [Pot86, Vuk87]

Dès 1986, Potkonjak et Vukobratović sont partis de la méthode générale présentée précédemment pour affiner les critères de sélection de composants. Conformément à l'approche générale, leur méthode consiste :
- à calculer les mouvements des axes moteurs à partir des spécifications imposées sur la charge grâce au modèle cinématique inverse ;
- puis à en déduire les évolutions des efforts moteurs dans l'espace articulaire grâce au modèle dynamique inverse.

Cependant, leur critère de sélection est ensuite affiné en établissant une condition d'existence d'un rapport de réduction N propre à l'adéquation charge/actionneur. Pour cela, une équation du second degré en N est déduite du modèle dynamique inverse et un raisonnement sur l'existence de solutions pour cette équation permet d'aboutir à la formulation d'une inégalité du type :

$$\frac{\mathcal{P}(t)}{\mathcal{P}_{max}} + \frac{\mathcal{DP}(t)}{\mathcal{DP}_{max}} + \frac{\mathcal{D}2\mathcal{P}(t)}{\mathcal{D}2\mathcal{P}_{max}(t)} \leq 1 \tag{2.4}$$

où :
- les notations $\mathcal{P}$, $\mathcal{DP}$ et $\mathcal{D}2\mathcal{P}$ représentent des grandeurs respectivement homogènes à une puissance, à une puissance transitoire (dérivée première d'une puissance) et à un jerk de puissance (dérivée seconde d'une puissance) ;

– les termes $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{DP}(t)$ et $\mathcal{D2P}(t)$ traduisent l'évolution temporelle du robot conformément à la tâche qui lui est confiée ;
– les termes $\mathcal{P}_{max}$, $\mathcal{DP}_{max}$ et $\mathcal{D2P}_{max}$ sont calculés à partir des caractéristiques intrinsèques (constantes de temps) et des valeurs maximales (vitesse et couple) que peut fournir un actionneur particulier.

Le test de sélection proposé par Potkonjak et Vukobratović consiste alors à traduire graphiquement cette inégalité (2.4) dans un système d'axes ($\mathcal{P}$,$\mathcal{DP}$,$\mathcal{D2P}$) puis à vérifier que la trajectoire imposée par le cahier des charges et représentée par les points $M(t)$ de coordonnées ($\mathcal{P}(t)$,$\mathcal{DP}(t)$,$\mathcal{D2P}(t)$) reste à tout instant dans le domaine de fonctionnement délimité par les trois axes de coordonnées et le plan passant par les trois points ($\mathcal{P}_{max}$,0,0), (0,$\mathcal{DP}_{max}$,0) et (0,0,$\mathcal{D2P}_{max}$) (Fig. 2.2). Si la trajectoire imposée dépasse le domaine de fonctionnement, tout actionneur fournissant au maximum les valeurs $\mathcal{P}_{max}$, $\mathcal{DP}_{max}$ et $\mathcal{D2P}_{max}$ est sous-dimensionné par rapport à la tâche requise. Au contraire, si la trajectoire imposée est inclue dans le domaine de fonctionnement, tout actionneur capable de fournir au minimum les grandeurs $\mathcal{P}_{max}$, $\mathcal{DP}_{max}$ et $\mathcal{D2P}_{max}$ est adéquat. Le test de sélection est alors terminé.

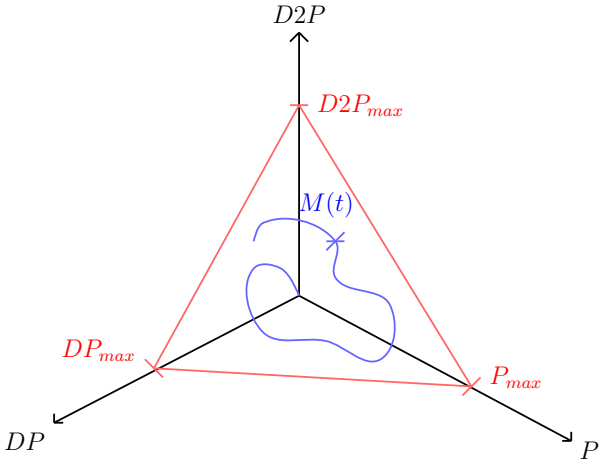


Figure 2.2 – Sélection de composant par la méthode de Potkonjak et Vukobratović

Enfin, notons que cette méthode a été appliquée au dimensionnement d'actionneurs électromécaniques [Pot86] mais aussi électrohydrauliques [Vuk87]. Le lecteur intéressé pourra consulter les références mentionnées ci-dessus ainsi que la thèse de Fotsu- Ngwompo [Fot97a] pour un résumé plus détaillé.

Méthode de Dequidt [Deq98, Deq00]

Plus tard, Dequidt *et al.* ont proposé une autre méthode de sélection, cette fois-ci dans le cas de machines à grande vitesse et haute précision [Deq98, Deq00]. L'inversion du modèle dynamique linéaire du mécanisme est là encore utilisée pour déterminer les contraintes que doivent satisfaire les actionneurs à partir des spécifications faites sur la charge. Une fois ce modèle obtenu, une transformation de Laplace permet d'étudier les pôles de la fonction de transfert du système en boucle ouverte et en boucle fermée. Des contraintes sur la conception de la commande (précision, minimum de phase) sont ensuite prises en compte pour établir quatre règles de conception. Le test de sélection proposé

consiste alors à choisir les actionneurs de manière à ce que leurs caractéristiques (température maximale, vitesse maximale, inertie,...) satisfassent ces quatre règles exprimées sous la forme d'inégalités.

Discussion des méthodes

Contrairement aux méthodes de Newton Jr et de Cœuillet, les méthodes présentées dans cette section modélisent la charge de manière plus complexe (celle-ci n'est plus modélisée par une simple inertie), tiennent compte de la structure de la chaîne d'actionnement (*via* le modèle dynamique inverse) et surtout considèrent les évolutions de la charge sur toute sa trajectoire et non plus seulement aux points de fonctionnement les plus contraignants. En cela, elles rendent la sélection des composants plus pertinente. Cependant, comme en phase de prédimensionnement dans les bureaux d'études, les méthodes de Potkonjak *et al.* et de Dequidt sont pour le moment restreintes à des modèles relativement simples : elles ne concernent que des systèmes linéaires et monovariables. En effet, si certains phénomènes non linéaires sont pris en compte dans les modèles, la mise en place du modèle inverse est non seulement longue et fastidieuse mais les tests de sélection tels que présentés par Potkonjak *et al.* et Dequidt ne sont plus valables (la condition d'existence d'un rapport de réduction ne s'exprime plus sous la forme d'une équation du second degré et le raisonnement avec les fonctions de transfert est impossible).

2.3 Le langage bond graph

Avant de voir à la section 2.4 (page 35) comment la méthodologie de dimensionnement proposée par le laboratoire Ampère peut pallier certains inconvénients ou compléter certaines des méthodes présentées jusqu'alors, cette section est dédiée à une brève présentation du langage bond graph, langage qui sera principalement utilisé dans la suite de ce mémoire. Nous justifions notamment ici le choix d'un tel outil et présentons les principes utilisés dans ce langage pour traiter les problèmes d'inversion.

2.3.1 Un outil adapté à l'étude des systèmes mécatroniques

Le langage bond graph est un langage de modélisation permettant d'identifier les différents phénomènes physiques intervenant au sein d'un système et de représenter graphiquement leur interconnexion. Globalement, il permet de mieux appréhender la répartition des échanges d'énergie au sein d'un système. Si les principes de ce langage sont expliqués plus en détails à l'annexe A et plus largement dans les livres de référence de Karnopp *et al.* [Kar90] et de Dauphin-Tanguy [Dau00], nous pouvons cependant présenter ici en quoi ce langage est particulièrement adapté à la modélisation des systèmes mécatroniques.

Pour cela, reprenons les critères que doit présenter un langage pour satisfaire aux contraintes de conception actuelles (critères énoncés à la section 1.4.2, page 17). Nous constatons alors que le langage bond graph :

- autorise une modélisation *multi-domaine*. Basé sur une représentation énergétique du système, un modèle bond graph représente de manière unifiée différents phénomènes issus de différents domaines de la physique ;

- permet une *approche hiérarchisée*. Le modélisateur peut décomposer son modèle en plusieurs sous-modèles grâce à la notion de *modèles bond graph à mots* ou de *word bond graph*. Il reprend ainsi le principe d'encapsulation de tout langage orienté objet ;
- aborde la modélisation de manière *acausale* en permettant de se focaliser d'abord sur la description physique des phénomènes impliqués au sein du système, indépendamment de l'utilisation qui sera faite du modèle *a posteriori* (*i.e.* indépendamment de l'expérimentation choisie comme une simulation par calcul direct ou inverse).

À la vue de ces caractéristiques, le langage bond graph apparaît donc comme tout à fait adapté à la modélisation des systèmes mécatroniques. Plusieurs auteurs l'attestent d'ailleurs comme Gawthrop [Gaw91], Dauphin-Tanguy [Dau99a], Damić et Montgomery [Dam03] ou encore van Amerongen [van03a].

De plus, si le langage bond graph est idoine à la modélisation des systèmes mécatroniques, il l'est aussi pour résoudre un certain nombre de problèmes de conception et d'analyse de ces systèmes. En effet, en plus des caractéristiques énoncées précédemment, le langage bond graph :

- facilite l'interprétation physique. Un modèle bond graph étant par construction fortement lié à la physique du système, il apparaît très aisé de traduire les résultats issus de l'analyse de ce modèle en termes de réalisations techniques physiques sur le système ;
- offre intrinséquement la possibilité d'étudier différents niveaux d'information sur le système (architecture, structure énergétique, phénoménologie, paramétrage numérique) et par conséquent la possibilité de traiter différents problèmes relatifs à différents niveaux du cycle de conception en V ;
- autorise une certaine modularité au niveau du modèle du système, modèle qui peut alors facilement évoluer pour satisfaire aux degrés de complexité requis par chaque problème de conception (l'évolution est possible soit par l'ajout de nouveaux éléments bond graph, soit par le remplacement de lois de comportement linéaires en lois non linéaires plus réalistes).

En l'occurrence, la littérature montre que certains auteurs se sont d'ores et déjà basés sur le langage bond graph pour aborder (entre autres) en plus du problème de modélisation des problèmes :

- de synthèse d'architecture (Redfield *et al.* [Red93b, Red93a], Seo *et al.* [Seo03], Kayani [Kay07], Mosiek [Mos99]) ;
- de reconception (Pirvu *et al.* [Pir09]) ;
- de synthèse paramétrique (Fotsu-Ngwompo [Fot98]) ;
- d'identification (De Giorgi *et al.* [De 05]) ;
- de réduction de modèles (Louca et Stein [Lou09]) ;
- de synthèse de commande (Sueur et Dauphin-Tanguy [Sue93], Lin-Shi *et al.* [Lin02], Junco *et al.* [Jun02, Jun05], Bideaux *et al.* [Bid03]) ;
- et de sûreté de fonctionnement (Feenstra *et al.* [Fee01], Lo *et al.* [Lo,02], Djeziri *et al.* [Dje07, Dje08]).

2.3.2 L'inversion en langage bond graph

Maintenant que le langage bond graph a été présenté comme un outil possible pour la modélisation et l'étude des systèmes mécatroniques, revenons plus précisément à nos préoccupations de dimensionnement et étudions notamment s'il est possible de traiter des modèles inverses en langage bond graph (modèles *a priori* plus pertinents pour le dimensionnement comme l'a montré la section 2.2.1, page 26).

Le concept de causalité (voir annexe A.5.1) est une notion clé pour l'exploitation d'un modèle bond graph. Basé sur le principe physique de causalité (*e.g.* si un sous-système Σ_A impose un effort à un sous-système Σ_B alors Σ_B réagit nécessairement en imposant un flux à Σ_A), ce concept permet d'orienter les équations d'un modèle bond graph pour le transformer en un modèle de simulation conforme à l'expérimentation choisie. Historiquement, l'inversion reposait sur cette exploitation causale et consistait généralement à partir du modèle bond graph direct :

- soit pour en déduire le modèle d'état associé et appliquer les techniques d'inversion classiquement utilisées en automatique (comme celles présentées à la section 2.2.2, page 28) ;
- soit pour en déduire, grâce à la règle de Mason [Bro72], la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ correspondante et inverser mathématiquement cette matrice.

Le problème d'inversion en langage bond graph était alors reporté sur un problème d'inversion au sens classique de l'automatique. L'utilisation du langage bond graph n'était pas mis à profit et les manipulations mathématiques fastidieuses telles que celle employées dans l'algorithme de Silverman n'étaient pas évitées.

Depuis, la méthode d'inversion en langage bond graph a beaucoup évoluée grâce notamment à l'introduction par Gawthrop de la notion de bicausalité [Gaw95] (annexe A.5.2). Vue quelque part comme une extension de la causalité classique, cette notion permet d'envisager de nouveaux schémas de calculs physiquement irréalisables et pourtant mathématiquement possibles (*e.g.* un sous-système Σ_A peut imposer à la fois un effort et un flux à un sous-système Σ_B). Les schémas de calcul utiles à l'inversion sont alors représentables sur un modèle bond graph comme l'ont démontré Fotsu-Ngwompo *et al.* [Fot96]. Grâce à leur procédure SCAPI [8] (annexe A.5.2), ces derniers expliquent la possibilité de construire un modèle bond graph bicausal pour chaque problème inverse. Même si une analyse préalable doit être effectuée afin de vérifier l'inversibilité structurelle du modèle direct (chapitre 3), nous verrons que cette procédure systématise les étapes de l'inversion et simplifie le résultat final par l'obtention d'un modèle inverse d'ordre minimal (chapitre 3, section 3.5.2).

2.4 Le dimensionnement par modèles bond graph inverses

Nous avons vu, lors des sections précédentes, qu'il était intéressant de reformuler le problème de dimensionnement sous la forme d'un problème inverse et ce, de manière à

8. *i.e.* Sequential Causality Assignment Procedure for Inversion

prendre en compte le cahier des charges sur toute sa trajectoire et non plus seulement au niveau de points critiques. À cette fin, les méthodes de calcul d'effort moteur en robotique, de Potkonjak et Vukobratović, et de Dequidt, toutes basées sur l'inversion, ont été brièvement présentées. Après étude, nous avons constaté :

- qu'elles nécessitaient des manipulations mathématiques qui pouvaient devenir fastidieuses selon la complexité du modèle ;
- qu'elles reposaient bien souvent sur des modèles linéaires simples et que la généralisation à des modèles plus complexes remettait en cause le principe même des critères de sélection établis.

Afin de pallier ces inconvénients et de proposer une alternative à ces méthodes, le LAI, devenu maintenant le Laboratoire AMPÈRE, propose une méthodologie de dimensionnement basée sur l'utilisation de modèles bond graph inverses. Cette section est dédiée à la présentation de cette méthodologie. Après en avoir succinctement expliqué le principe général et les différentes étapes, ses avantages ainsi que les différents contextes d'ingénierie dans lesquels elle peut être utilisée sont détaillés.

2.4.1 Le principe

Sous l'impulsion de Scavarda, les premiers travaux entrepris par le LAI sur le dimensionnement des systèmes mécatroniques ont pour origine la thèse d'Amara [Ama91]. En collaboration avec l'Unité de Génie Robotique Avancé du CEA [9], celle-ci a notamment abouti à la méthode MACSYMEN [10] qui est une extension de la méthode de Cœuillet à des charges plus complexes. Formulée en langage bond graph, celle-ci nécessitait cependant de passer par l'intermédiaire du formalisme scattering [11].

Depuis, la méthodologie de dimensionnement a évolué : elle s'affranchit du formalisme scattering et utilise désormais la notion de modèles inverses. Formalisée pour la première fois dans la thèse de Fotsu-Ngwompo [Fot97a], celle-ci consiste alors :

1. à vérifier que le problème de dimensionnement peut s'exprimer sous la forme d'un problème inverse (le modèle dynamique considéré est-il bien inversible ? les spécifications du cahier des charges peuvent-elles être satisfaites ?) ;

2. à construire graphiquement, grâce au principe de bicausalité, le modèle bond graph inverse associé à ce problème de dimensionnement ;

3. à exploiter le modèle bond graph inverse ainsi obtenu en calculant les inconnues nécessaires au dimensionnement directement à partir des données du cahier des charges.

9. *i.e.* Commissariat à l'Energie Atomique
10. *i.e.* Méthode d'Aide à la Conception des SYstèmes Multi-ENergétiques
11. Le *formalisme scattering* est une approche alternative pour modéliser les systèmes multi-domaines de manière unifiée en les décrivant par l'intermédiaire de *variables d'onde incidentes* et *réfléchies*. Paynter et Busch-Vishniac ont notamment montré qu'il présentait les mêmes propriétés que le langage bond graph [Pay88].

2.4.2 Les différentes étapes

Avant de présenter les différents avantages que cette méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses peut apporter, essayons de comprendre tout d'abord quels sont ses mécanismes et quelles sont les différentes étapes à mener. Même si les travaux de Derkaoui [Der05] ont initié une extension de la méthodologie aux systèmes à paramètres distribués, la présentation de la méthodologie se restreindra ici aux systèmes à paramètres localisés : les dimensionnements considérés n'iront donc pas jusqu'au niveau géométrique où les comportements dynamiques sont alors fortement influencés par la dimension spatiale des composants. Enfin, les présentations originelles de la méthodologie peuvent être trouvées dans les références [Fot97a, Fot97b, Ngw01a, Ngw01b].

Cas d'une chaîne d'actionnement « simple »

Pour plus de clarté et pour faciliter la comparaison ultérieure, reprenons dans un premier temps l'exemple utilisé à la section 1.5.1 (page 20) pour présenter la méthode essai → erreur → correction. Considérons donc à nouveau une chaîne d'actionnement mono-entrée mono-sortie, constituée simplement d'une charge et d'un actionneur et supposons que le problème de dimensionnement soit de sélectionner un actionneur adéquat de sorte que la charge puisse suivre une trajectoire spécifiée. La méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses se déroule alors en quatre étapes :

Étape n°1 : Adéquation

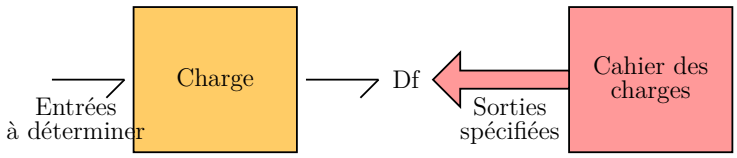


Figure 2.3 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : étape d'adéquation modèle/cahier des charges

Le cahier des charges porte généralement sur la caractérisation de la charge à mouvoir et sur les tâches que celle-ci doit effectuer. Aussi, après lecture du cahier des charges, le concepteur peut construire le modèle bond graph de la charge et connaît la trajectoire que celle-ci doit suivre. L'étape d'adéquation consiste alors à partir du modèle bond graph acausal de la charge (Fig. 2.3) pour effectuer une analyse acausale puis causale de manière à vérifier que le modèle de la charge est bien structurellement inversible [12] et

12. Au chapitre 3, nous verrons plus précisément quelles sont les conditions qu'un modèle doit respecter pour être structurellement inversible. Nous verrons notamment que la satisfaction de ces conditions peut se révéler par une analyse acausale consistant à rechercher les lignes de puissance entrée/sortie du système (définition 2, page 84) puis, par une analyse causale permettant :
- de rechercher les ensembles de chemins causaux entrée/sortie disjoints (définitions 5 et 8, pages 86 et 87) ;
- de s'assurer que la structure de jonction du modèle inverse est résoluble ;
- et de calculer les ordres de dérivabilité minimaux que doivent présenter les trajectoires spécifiées.

que les trajectoires spécifiées dans le cahier des charges ont été correctement choisies. Le concepteur s'assure ainsi qu'il y a une certaine adéquation et que les spécifications fixées par le cahier des charges sont effectivement atteignables par la structure du modèle choisie.

Étape n°2 : Spécification

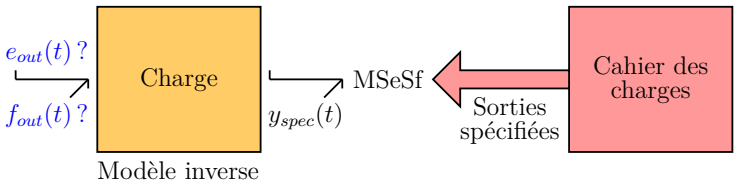


FIGURE 2.4 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : étape de spécification

Si l'adéquation modèle/cahier des charges est vérifiée, le concepteur peut alors aller à l'étape suivante de la méthodologie, étape dite de spécification. Celle-ci consiste à construire graphiquement le modèle bond graph inverse de la charge grâce au principe de bicausalité puis, à le simuler de manière à calculer les évolutions des variables d'effort $e_{out}(t)$ et de flux $f_{out}(t)$ nécessaires en entrée de la charge pour que celle-ci suive parfaitement la trajectoire spécifiée $y_{spec}(t)$ (Fig. 2.4). Cette étape permet ainsi de remonter les spécifications au niveau de l'entrée de la charge alors qu'elles étaient initialement rédigées au niveau de sa sortie.

Étape n°3 : Sélection

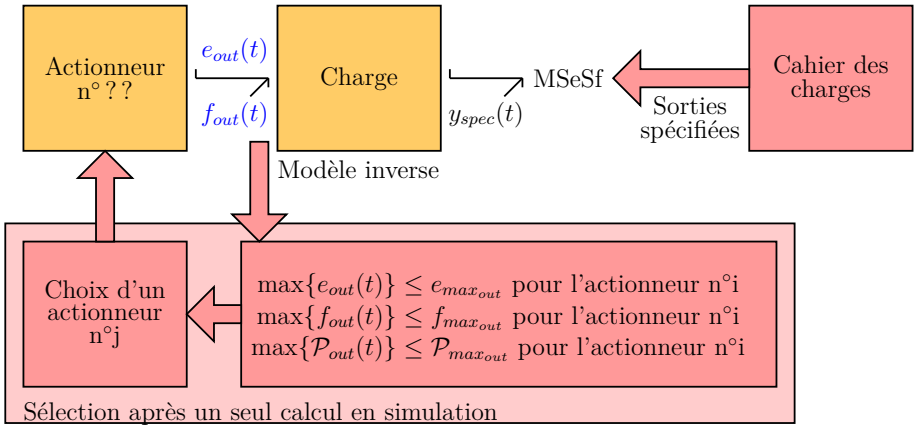


FIGURE 2.5 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : étape de sélection

Une fois le modèle inverse de la charge simulé, le concepteur peut exploiter les résultats obtenus à l'étape précédente pour sélectionner un actionneur. Pour cela, comme les

Plus généralement, nous appelons ce type d'analyse *analyse structurelle* car les résultats sont déterminés indépendamment des valeurs numériques des paramètres (définition 1, page 77).

variables d'effort et de flux requises en entrée de la charge correspondent aux variables d'effort et de flux à fournir en sortie de l'actionneur, il suffit de comparer les évolutions calculées aux caractéristiques de sortie d'actionneurs existants (Fig. 2.5). L'étape de sélection consiste ainsi à consulter les données constructeurs d'une bibliothèque d'actionneurs et à comparer les maximums des variables calculées $e_{out}(t)$, $f_{out}(t)$ et $e_{out}(t)f_{out}(t)$ aux variables d'effort $e_{max_{out}}$, de flux $f_{max_{out}}$ et de puissance $\mathcal{P}_{max_{out}}$ maximales que peuvent fournir chacun des actionneurs de cette bibliothèque. Seuls les actionneurs capables de fournir au moins $\max\{e_{out}(t)\}$, $\max\{f_{out}(t)\}$ et $\max\{e_{out}(t)f_{out}(t)\}$ sont retenus. Les autres actionneurs ne satisfaisant pas ces critères de sélection sont automatiquement éliminés : ils ne permettront pas de réaliser la tâche spécifiée dans le cahier des charges. Parmi les actionneurs retenus, plusieurs sont finalement sélectionnés sur de nouveaux critères non pris en compte jusqu'alors (*e.g.* encombrement, prix, *etc.*). Ces derniers devront être testés individuellement grâce à l'étape de validation.

Étape n°4 : Validation

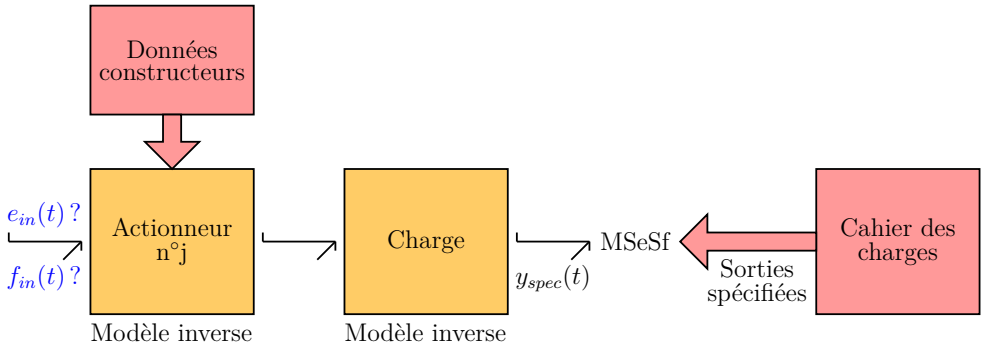


FIGURE 2.6 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : étape de validation

Si un actionneur a été choisi à l'étape précédente, celui-ci n'a été sélectionné que sur des critères portant sur ses variables de sortie. Il convient donc de vérifier ce qui se passe, entre autres, au niveau de ses variables d'entrée, de ses variables internes et de ses temps de fonctionnement, grâce à la dernière étape du dimensionnement de l'actionneur, étape dite de validation. Pour cela, cette étape consiste à (Fig. 2.6) :

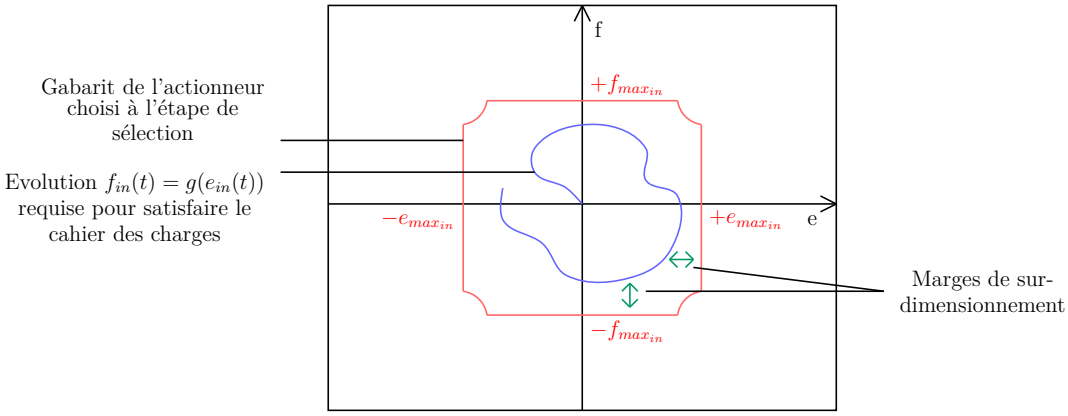
1. modéliser l'actionneur choisi à l'étape de sélection ;
2. coupler le modèle de l'actionneur au modèle de la charge ;
3. vérifier que le modèle bond graph {charge + actionneur} est structurellement inversible et que le cahier des charges est en adéquation avec la structure de ce modèle (même démarche que pour l'étape d'adéquation) ;
4. si le modèle {charge + actionneur} est inversible, construire le modèle bond graph inverse correspondant et le simuler de manière à calculer les évolutions des variables d'effort $e_{in}(t)$ et de flux $f_{in}(t)$ requises en entrée de l'actionneur pour que la charge suive parfaitement la trajectoire spécifiée ;

5. valider ou infirmer le choix de l'actionneur en traçant les évolutions calculées $e_{in}(t)$ et $f_{in}(t)$ dans un plan (effort, flux) et en superposant le gabarit d'entrée[13] de l'actionneur précédemment sélectionné (Fig. 2.7 où les courbes sont paramétrées en fonction du temps).

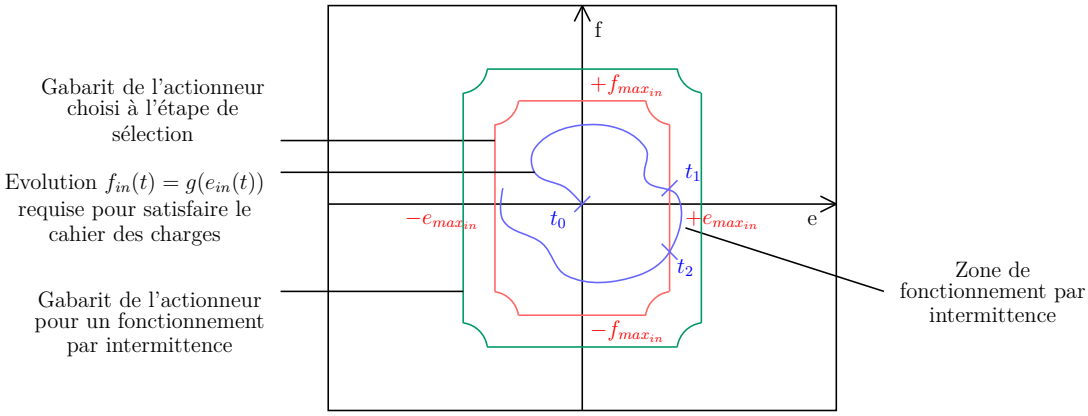
Remarques :

- Les critères de l'étape de sélection ont été présentés sous la forme d'inégalités. Cependant, comme à l'étape de validation, le concepteur peut procéder de manière graphique en traçant les évolutions de $e_{out}(t)$ et $f_{out}(t)$ dans un plan (effort,flux) et en y superposant les gabarits de sortie des actionneurs (de la même manière, le concepteur peut raisonner simplement à l'aide d'inégalités pour l'étape de validation).
- L'étape de validation de l'actionneur peut également servir d'étape de spécification pour le dimensionnement du composant situé juste en amont de l'actionneur dans la chaîne d'actionnement (*e.g.* modulateur de puissance ou dispositif de fourniture d'énergie).

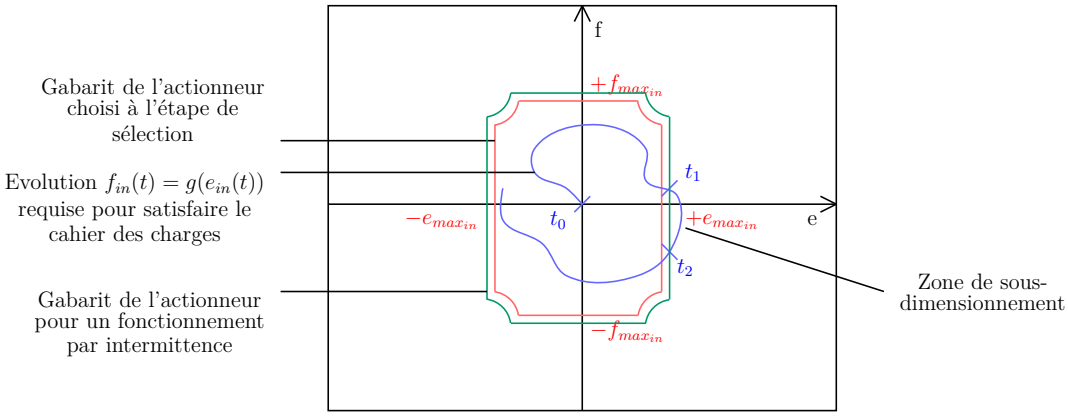
13. Le *gabarit d'entrée* (resp. *de sortie*) d'un actionneur est déterminé par l'effort, le flux et la puissance maximaux que cet actionneur peut accepter en entrée (resp. fournir en sortie). Ces grandeurs sont généralement données par les constructeurs de l'actionneur.



(a) Cas d'un composant validé



(b) Cas d'un composant validé (en fonctionnement par intermittence)



(c) Cas d'un composant refusé

FIGURE 2.7 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : étape de validation (suite)

Cas d'une chaîne d'actionnement complète

Revenons désormais à une chaîne d'actionnement complète. En raison de sa structure plus ou moins en cascade, un composant limitant les performances d'une fonction générique (*e.g.* apport d'énergie, modulation,...) limite également les performances de l'actionnement tout entier. Si les capacités physiques de chaque composant ne sont pas prises en compte, des saturations de variables de puissance ou de la puissance risquent fort d'intervenir pour certaines spécifications. Lors du dimensionnement d'une chaîne d'actionnement complète, il est donc naturel de se demander si, du point de vue énergétique, les spécifications sous forme de fonctions dépendant explicitement du temps respectent les contraintes de puissance de chaque composant de la chaîne d'actionnement.

Cette vérification peut être faite en procédant à une « remontée » des spécifications le long de la chaîne d'actionnement, c'est-à-dire en traduisant au niveau de chaque composant les spécifications initialement rédigées au niveau de la charge.

Dans le cas d'une chaîne d'actionnement simple, nous avons vu que cette « remontée » des spécifications a pu être mise en œuvre grâce à des inversions successives partielles (inversion du modèle de la charge puis du modèle {charge + actionneur}). En réalité, pour dimensionner une chaîne d'actionnement complète, il suffit donc de répéter les quatre étapes de la méthodologie (*i.e.* adéquation, spécification, sélection, validation) pour dimensionner chaque étage la constituant (Fig. 2.8).

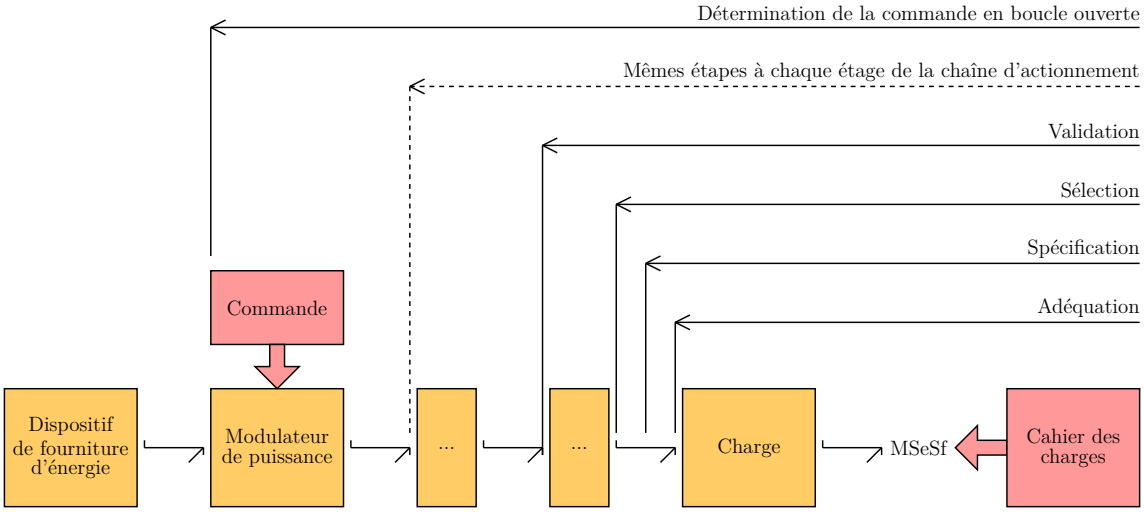


FIGURE 2.8 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : un dimensionnement étage par étage

Remarque : À la fin de ces « répétitions », la commande en boucle ouverte du système peut être obtenue comme le détaille la section 2.4.4 (page 44).

2.4.3 Les avantages par rapport à la démarche classique

Maintenant que les principes de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses ont été expliqués, voyons en quoi celle-ci s'avère plus pertinente que la méthode classique essai → erreur → correction, présentée à la section 1.5.1 (page 20).

Premièrement, nous pouvons remarquer que la méthodologie proposée ici :
- ne requiert aucune supposition sur les commandes des actionneurs et facilite ainsi la tâche du concepteur en charge de l'étude (ou tout au moins n'en requiert pas tant que les dimensionnements envisagés concernent des sous-systèmes ou composants en aval des modulateurs de puissance) ;
- permet de sélectionner des composants sur des critères dynamiques et non plus seulement statiques.

Deuxièmement, comparée à l'approche classique, l'utilisation de modèles inverses permet de réduire de manière significative le nombre d'itérations de calcul et de simulation et donc d'optimiser les temps de développement [14].
En effet, à la fin de l'étape de sélection, comme les variables requises à chaque étage de la chaîne d'actionnement sont déterminées directement à partir des spécifications, le concepteur en charge de l'étude est capable après une seule simulation :
- soit d'éliminer une partie des actionneurs faisant partie de son catalogue d'actionneurs (alors que chacun de ces composants aurait dû être testé individuellement dans l'approche classique pour être rejeté) ;
- soit de décider la fabrication d'un actionneur sur mesure si aucun des actionneurs présents dans son catalogue ne convient (la spécification d'un nouvel actionneur est possible alors que l'approche classique ne permet même pas de conclure sur les besoins en cas d'échec de la sélection) ;
- soit de légèrement modifier le cahier des charges si les contraintes financières du projet n'autorisent pas le lancement d'une fabrication sur mesure.

Même s'il ne trouve pas d'actionneur approprié, le concepteur dispose d'une marge de manœuvre plus importante pour répondre à son problème de dimensionnement : contrairement à l'approche classique, il n'est pas systématiquement obligé de modifier son cahier des charges pour aboutir à une solution. Quelle que soit l'issue de l'étape de sélection, le concepteur peut tirer des informations utiles au dimensionnement. Il s'affranchit de bon nombre de simulations inutiles et évite ainsi des pertes de temps.
De plus, ce gain de temps s'observe également à l'étape de validation. En effet, dans l'exemple de gabarits relativement simples et symétriques, trois situations différentes peuvent apparaître à la suite de cette étape [15] :
- soit les restrictions constructeurs de l'actionneur choisi à l'étape précédente (étape de sélection) conviennent pour satisfaire les spécifications (la trajectoire calculée $f(t) = g(e(t))$ est incluse dans le gabarit du composant, Fig. 2.7(a)) ;
- soit les caractéristiques du fonctionnement par intermittence conviennent pour satisfaire le cahier des charges (la trajectoire calculée $f(t) = g(e(t))$ dépasse du gabarit du composant mais est incluse dans la zone de fonctionnement par intermittence, Fig. 2.7(b)) ;
- soit les restrictions constructeurs de l'actionneur ne permettent pas de satisfaire les spécifications (la trajectoire calculée $f(t) = g(e(t))$ dépasse le gabarit et la zone de

14. Ce constat est cependant à nuancer car, si les modèles inverses réduisent le nombre d'itérations, ils impliquent bien souvent des modèles algébro-différentiels d'index élevés et donc plus complexes à résoudre même numériquement.

15. Selon les caractéristiques techniques des composants considérés, les gabarits peuvent être non symétriques et inclure des données supplémentaires comme des indications sur les zones d'accélération. Dans ce cas, l'étape de validation peut conduire à de plus nombreuses situations en terme d'interprétation.

fonctionnement par intermittence du composant, Fig. 2.7(c)).

Dans les deux premiers cas, le concepteur peut directement conclure que l'actionneur choisi à l'étape précédente convient à la tâche qui lui est confiée (et ce après seulement deux calculs inverses) et peut également évaluer si celui-ci est sur-dimensionné ou non. Au contraire, dans le troisième cas, le concepteur sait qu'il doit choisir un autre composant mais, cette fois-ci, la comparaison entre le gabarit du composant et les variables requises pour satisfaire le cahier des charges lui donne des indications sur les origines du sous-dimensionnement (*e.g.* le composant ne supporte pas un apport d'énergie aussi important). Le concepteur doit certes itérer une nouvelle fois la procédure mais il revient à l'étape précédente de sélection avec, malgré tout, de nouvelles lignes directrices pour choisir un nouvel actionneur plus pertinent.

Troisièmement, grâce au principe d'analyse structurelle (utilisée notamment dans les étapes d'adéquation et de validation et détaillée au chapitre 3), le concepteur peut vérifier si son problème de dimensionnement est bien posé en termes d'inversion et peut, si besoin est, revoir l'architecture du système et/ou la rédaction de son cahier des charges de manière à être sûr que ses spécifications sont atteignables par la structure du modèle qu'il s'est fixée. Au contraire de l'approche classique, le concepteur s'assure donc que la méthodologie convergera *a priori* vers un résultat et ce avant tout calcul numérique.

2.4.4 Les différents contextes dans lesquels la méthodologie peut être utilisée

La méthodologie par modèles bond graph inverses a été présentée jusqu'alors dans le contexte du dimensionnement. Cependant, tout ou une partie de cette méthodologie peut être utilisée dans d'autres contextes d'ingénierie comme nous allons le voir dans cette section.

Synthèse d'architecture

Au début de la conception de la chaîne d'actionnement, le concepteur connaît uniquement l'architecture de la charge à mouvoir et les trajectoires (*i.e.* les sorties spécifiées) qu'il doit lui faire suivre. À partir de ces données et de son niveau d'expertise, le concepteur doit alors choisir une architecture de la chaîne d'actionnement *a priori* adéquate. La méthodologie propose d'aider le concepteur dans cette tâche. En effet, en explicitant clairement les cheminements des apports d'énergie et de modulations de puissance [16], l'analyse structurelle permet au concepteur d'établir les conditions d'inversion du modèle, de déterminer quelles sont les sorties indépendamment commandables par les entrées disponibles et de répondre à des questions du type :

- combien d'actionneurs faut-il pour atteindre les objectifs du cahier des charges ?
- où placer, le long de la chaîne d'actionnement, les actionneurs et les capteurs nécessaires ?

16. Ces cheminements se caractérisent, sur le modèle bond graph, par des *lignes de puissance de fourniture d'énergie* et *de modulation* (voir la thèse de Laffite [Laf04] pour plus de détails). Il s'agit de notions acausales, intrinsèques à l'architecture du modèle.

L'analyse structurelle fournit ainsi de nouveaux critères de sélection, voire de synthèse d'architecture. En assurant un minimum de vérification quant à l'adéquation architecture/cahier des charges, elle permet d'éliminer, sans aucun calcul numérique, un certain nombre d'architectures qui se révéleraient par la suite inappropriées. La thèse de Laffite [Laf04] et son étude des chaînes de traction automobiles est un exemple de l'application de la méthodologie à ce type de problème.

Aide à la rédaction du cahier des charges

L'analyse structurelle permet également de déterminer les ordres de dérivation minimaux que doivent présenter les sorties spécifiées pour générer, à partir du modèle inverse, des entrées physiquement réalisables [17]. Ceci constitue à nouveau une aide précieuse pour le concepteur puisqu'il sait alors quel type de trajectoires il peut imposer à son système. En connaissance de cause, il peut ainsi adapter le cahier des charges ou bien, si cela n'est pas possible, revenir sur l'architecture du système. Quoi qu'il en soit, dans les deux cas, le concepteur est capable de détecter exactement la cause d'une mauvaise formulation de son problème de conception. Il peut vérifier si son problème est bien posé en termes d'inversion et ce sans effectuer une seule simulation. L'utilité a notamment été démontrée par Mechin [Mec03b] dans le cas d'une direction assistée électrique pour automobile.

Comparaison d'architectures

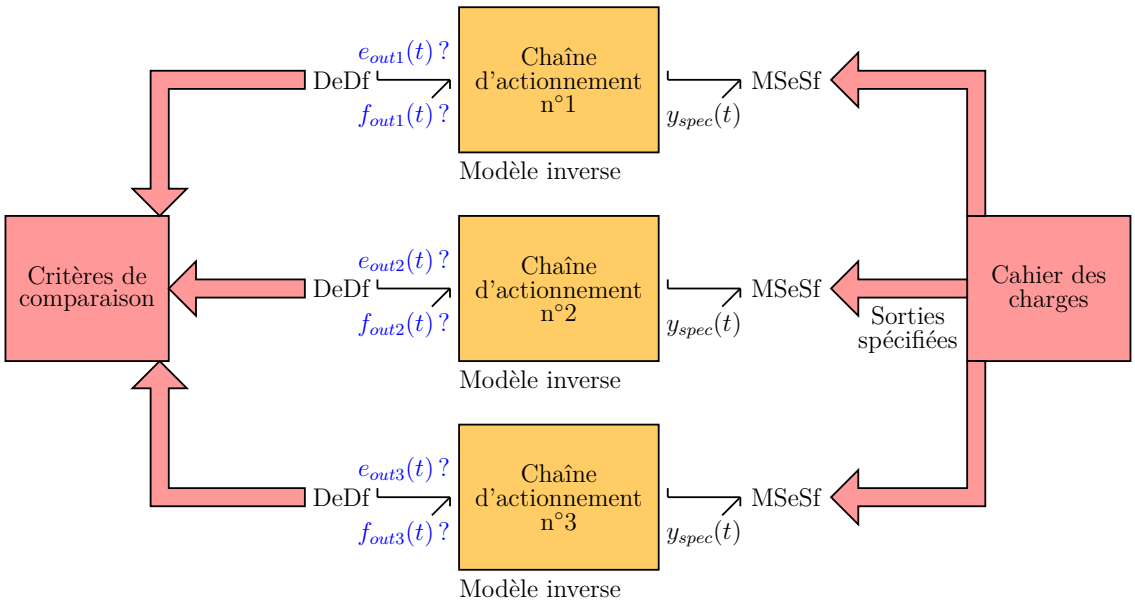


Figure 2.9 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : comparaison d'architectures

Par son utilisation de modèles inverses, la méthodologie facilite la comparaison d'architectures (Fig. 2.9) : en imposant à chacun le suivi des mêmes trajectoires, le concepteur

17. Nous verrons à la section 3.6 (page 139) que ceci se traduit par le calcul de l'ordre d'essentialité de chaque sortie directement à partir du modèle bond graph.

peut alors comparer numériquement leurs performances individuelles et affiner son choix sur d'autres critères comme des critères économiques ou environnementaux (*e.g.* consommation en énergie, émission de gaz polluants,...). LAFFITE [Laf04], par exemple, mentionne ce type de problème dans le contexte automobile.

Dimensionnement

Comme nous l'avons présenté à la section précédente, la méthodologie permet de sélectionner, de vérifier puis de valider chaque composant de la chaîne d'actionnement. Nécessitant moins d'itérations de calcul, elle garantit également un dimensionnement au plus juste. Pour exemple, l'article [Ngw99] de FOTSU-NGWOMPO et SCAVARDA prouve la faisabilité de la méthodologie dans le cas du dimensionnement des actionneurs d'un robot manipulateur à deux bras.

Détermination de la commande en boucle ouverte

En répétant successivement les quatre étapes de la méthodologie, chaque étage et donc chaque composant de la chaîne d'actionnement peut être dimensionné. Une fois cette étude terminée, la méthodologie permet alors de déterminer également la commande en boucle ouverte du système.

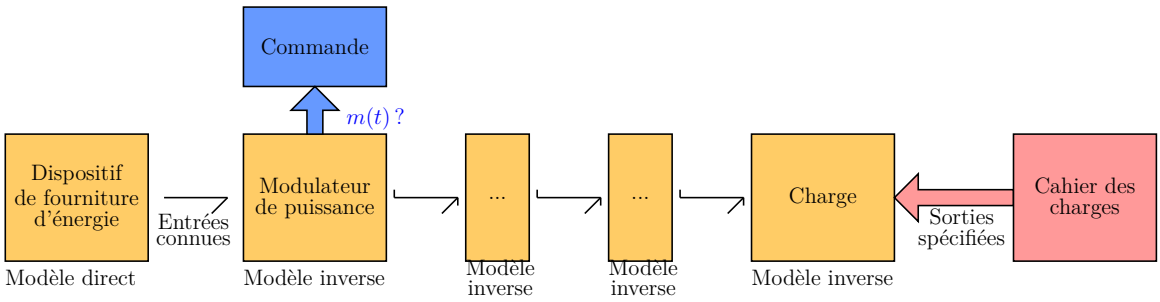


FIGURE 2.10 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : détermination de la commande en boucle ouverte

Il suffit pour cela (Fig. 2.10) :

1. de modéliser chaque composant préalablement dimensionné ;
2. de déclarer la commande, c'est-à-dire l'entrée du groupe fonctionnel « modulateur de puissance » comme une inconnue et de considérer les dispositifs de fourniture d'énergie et les trajectoires de sortie du système comme des données connues (*i.e.* en langage bond graph, les sources du système sont laissées inchangées tandis que les détecteurs des variables de sortie sont transformés en double sources imposant les trajectoires spécifiées) ;
3. d'inverser le modèle global {dispositif de fourniture d'énergie + modulateur + ... + charge} conformément aux entrées et sorties du système qui ont été déclarées (notons qu'alors seul le modèle du dispositif de fourniture d'énergie n'est pas inversé) ;
4. de lancer le calcul inverse en simulation afin d'obtenir l'évolution de la commande $m(t)$ en boucle ouverte nécessaire pour, qu'à partir de l'apport d'énergie présupposé,

le système suive exactement les trajectoires imposées par le cahier des charges.

Remarque : En réalité, plusieurs cas peuvent apparaître lors de la détermination de la commande en boucle ouverte :
- soit le dispositif de fourniture d'énergie est fixé (cas étudié ci-dessus) ;
- soit le dispositif de fourniture d'énergie n'est pas fixé et reste à dimensionner.

Dans ce dernier cas, la détermination de la commande en boucle ouverte n'est plus aussi directe que ce nous avons présenté précédemment. Cependant, deux manières de procéder peuvent être imaginées :
- une première où des hypothèses sur la commande sont formulées afin de dimensionner le dispositif de fourniture d'énergie. Une fois ce dispositif de fourniture d'énergie fixé, la commande en boucle ouverte est ensuite déterminée selon les étapes évoquées précédemment ;
- une deuxième où des spécifications supplémentaires sont prises en compte afin de remonter les objectifs simultanément sur la commande et le dispositif de fourniture d'énergie (*e.g.* approche mise en œuvre notamment dans la thèse de Laffite [Laf04] pour le dimensionnement d'une chaîne de traction automobile hybride : stratégie d'assistance électrique et spécification sur la vitesse du véhicule sont utilisées pour remonter simultanément sur les énergies à fournir au moteur thermique et au moteur électrique).

Synthèse paramétrique

Enfin, la méthodologie permet également de répondre à des problématiques de synthèse paramétrique. Comme pour la détermination de la commande en boucle ouverte, il suffit simplement de considérer le modèle inverse adéquat en déclarant correctement les entrées et les sorties appropriées.

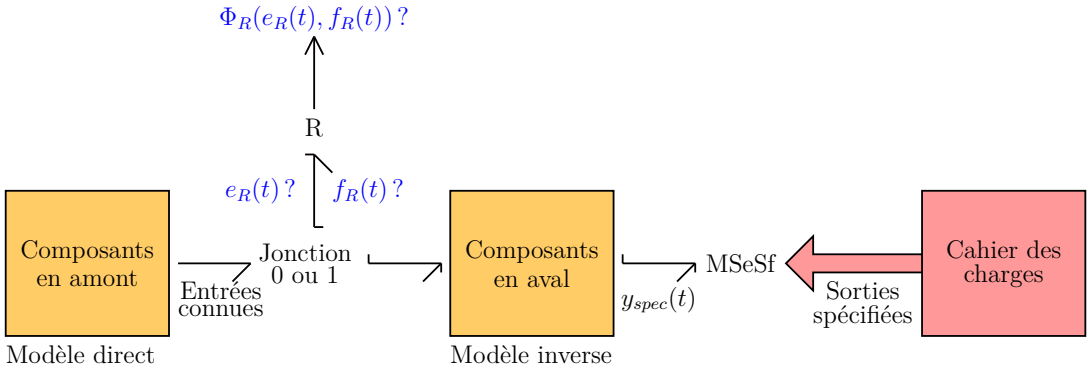


Figure 2.11 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : synthèse paramétrique d'un élément R

En l'occurrence, le problème de synthèse paramétrique suppose la valeur d'un paramètre comme inconnue et se base sur la connaissance :
- de la structure, du paramétrage et des commandes des composants situés en amont du composant à caractériser ;
- de la structure et du paramétrage des composants situés en aval ;

– des spécifications du cahier des charges qui ont été formulées en aval.

La figure 2.11 illustre ce type de calcul notamment dans le cas d'un élément bond graph R (élément qui peut être vu comme un composant ou un phénomène dissipatif selon le niveau d'abstraction considéré). Dans [Fot98], Fotsu-Ngwompo a notamment démontré la possibilité d'appliquer la méthodologie à ce cas de figure pour une suspension hydro-pneumatique.

Remarque : Compte tenu des données d'entrée sur lesquelles il se base, le problème de synthèse paramétrique pose un problème supplémentaire : celui de vérifier une certaine compatibilité entre les commandes des composants en amont et les spécifications imposées en aval [Fot98, Laf04].

2.5 Positionnement de l'approche proposée dans un contexte industriel

Maintenant que les principes de la méthodologie ont été expliqués, intéressons nous désormais au rayonnement que peut avoir la méthodologie dans la communauté mécatronicienne. Après en avoir présenté quelques exemples d'applications industrielles, cette section positionnera notamment le langage bond graph ici utilisé par rapport au langage Modelica qui suscite actuellement un réel engouement chez les industriels. Nous reviendrons ainsi sur l'utilité réel du concept d'acausalité, dénominateur commun aux deux langages et illustrerons l'apport méthodologique que constitue l'analyse structurelle [18].

2.5.1 Quelques exemples d'applications industrielles

Tout d'abord, intéressons nous aux applications qui ont déjà pu être traitées par la méthodologie par modèles bond graph inverses. Au niveau universitaire, nous pouvons signaler les travaux de Miled [Mil03] qui s'est basé sur cette approche pour aborder le problème de conception de systèmes actifs. Aussi, dans un contexte plus industriel, nous pouvons également citer l'article [Gan07] de Gandanegara *et al.* qui applique la méthodologie proposée ici pour synthétiser un actionneur électro-hydrostatique utilisé à bord d'avions. Dans le même esprit, cette section reprend plus en détails deux cas d'études industrielles qui ont été menés par le laboratoire en collaboration et sous la demande de la société PSA Peugeot Citroën : le premier portant sur l'analyse d'une direction assistée électrique (thèse de Mechin [Mec03a]) et le second sur une chaîne de traction automobile (thèse de Laffite [Laf04]) [19]. Le paramétrage numérique des modèles ne sera cependant pas détaillé afin de conserver la confidentialité des résultats.

18. Si besoin est, le lecteur pourra avantageusement consulter le début du chapitre 3 pour une première approche de la notion d'analyse structurelle.

19. Ces cas d'études ont été initiés dans le cadre du programme PREDIT 2 (*i.e.* Programme de Recherche Et D'Innovation dans les Transports terrestres 2) et ont été repris dans le cadre du projet ANR SIMPA2-C6E2 (*i.e.* SIMulation pour le Procédé et l'Automatique 2 et pour l'ingénierie de la Conception des SYStèmes Électriques Embarqués).

Direction assistée électrique automobile [Mec03a]

Considérons ici une direction assistée électrique pour automobile (Fig. 2.12) et supposons que le problème de dimensionnement soit de trouver un moteur électrique adéquat pour assurer la fonction d'assistance.

FIGURE 2.12 – Direction assistée électrique

Modélisation

De manière générale, le modèle d'une direction assistée électrique peut être vu comme l'assemblage de trois sous-modèles principaux, à savoir (Fig. 2.13) :

- un modèle représentant la base passive de la direction, c'est-à-dire l'ensemble {volant+ colonne de direction + capteur de torsion} et décrivant l'action du conducteur sur le volant ;
- un modèle de l'assistance apportée à la direction (ici nous supposerons qu'elle sera réalisée par un moteur électrique à courant continu) ;
- un modèle caractérisant le comportement du véhicule complet et son interaction avec le sol.

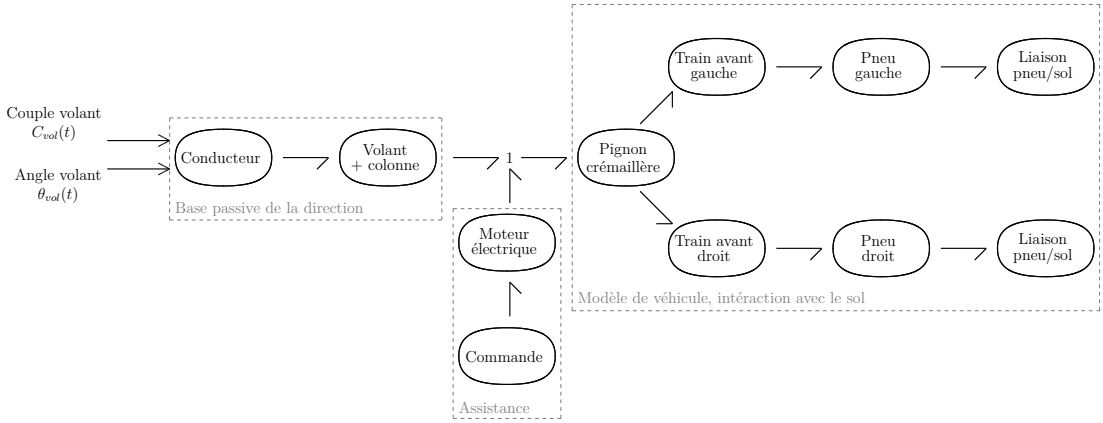


FIGURE 2.13 – Modèle word bond graph de la direction assistée électrique

Afin de modéliser le comportement du véhicule complet, en plus de la direction assistée électrique, il convient donc *a priori* de modéliser la caisse du véhicule, les deux barres anti-devers (une pour l'avant et une pour l'arrière du véhicule), les quatre suspensions, les quatre roues et leurs interactions avec le sol. Cependant, un tel modèle est relativement

compliqué et fastidieux à mettre en place. En réalité, pour aider au dimensionnement de la direction assistée et notamment du moteur d'assistance, il suffit d'étudier un modèle simplifié du véhicule correspondant à une situation de vie critique. Aussi, puisque ce sont les manœuvres qui éprouvent le plus la direction, le modèle à étudier ici est celui du « véhicule en parking ».

Ce modèle de « véhicule en parking » correspond à une situation de vie bien particulière où la vitesse de caisse du véhicule est nulle. De ce fait, seuls les mouvements induits par la cinématique du train avant sont considérés et deux instances des modèles pneumatique et suspension suffiront pour représenter le comportement du véhicule. De plus, d'autres simplications en termes de modélisation interviennent telles que :

- au niveau du modèle de la caisse du véhicule : l'ensemble {pignon + crémaillère} représente la transmission du mouvement et seuls les efforts dus au rappel gravitaire [20] sont pris en compte ;
- au niveau du modèle du pneumatique : seul le comportement en torsion est considéré ;
- au niveau du modèle contact pneumatique/sol : l'action du poids de la caisse sur le système de direction est indirectement pris en compte.

Enfin, pour des questions de concision, les hypothèses suivantes sont également formulées :

- les effets thermiques sont négligés ;
- le capteur permettant de mesurer la position angulaire du volant est placé dans la barre de torsion de la colonne de direction ;
- les butées de fin de course de la crémaillère sont modélisées par des raideurs ;
- les rendements des ensembles {pignon + crémaillère} et {moteur + réducteur} sont pris en compte.

En couplant le modèle de « véhicule en parking » avec les hypothèses de modélisation ci-dessus, le modèle bond graph global de la figure 2.15 a alors été obtenu [21].

Critères de dimensionnement

Les constructeurs automobiles utilisent plusieurs critères et essais pour valider les choix de conception du système de direction. Ceux-ci permettent notamment d'envisager différentes situations de vie du véhicule et conduisent ainsi à une certaine caractérisation de la direction et plus particulièrement à une certaine caractérisation de son assistance. Si de nombreux critères existent, seuls trois essais en situation de parking sont abordés ici : l'essai « surplace lent » ou « manœuvre parking », l'essai « créneaux » et l'essai « surplace rapide ».

Globalement, ces essais « parking » permettent de vérifier si le niveau d'assistance reste dans une plage de valeurs donnée lorsque les manœuvres sont effectuées à différentes vitesses et si le couple ressenti par le conducteur est acceptable ou non. Ces essais

20. Ces efforts sont dus à la variation de la hauteur de la caisse lors du braquage.
21. Voir la thèse de Mechin [Mec03a] pour plus de détails sur la construction des différents sous-modèles et sur les lois de comportement associées.

consistent ainsi à :

1. imposer une trajectoire en termes d'angle au volant $\theta_{vol}(t)$ (cette trajectoire modélise un braquage de butée à butée, effectué à plusieurs reprises et à une vitesse différente selon l'essai envisagé, Fig. 2.14) [22] ;
2. calculer le couple volant $C_{vol}(t)$;
3. tracer le couple volant obtenu $C_{vol}(t)$ en fonction de l'angle volant imposé $\theta_{vol}(t)$;
4. vérifier un certain nombre de critères de dimensionnement afin de minimiser les efforts dus au rappel gravitaire ou encore de régler la progressivité des arrivées en butée.

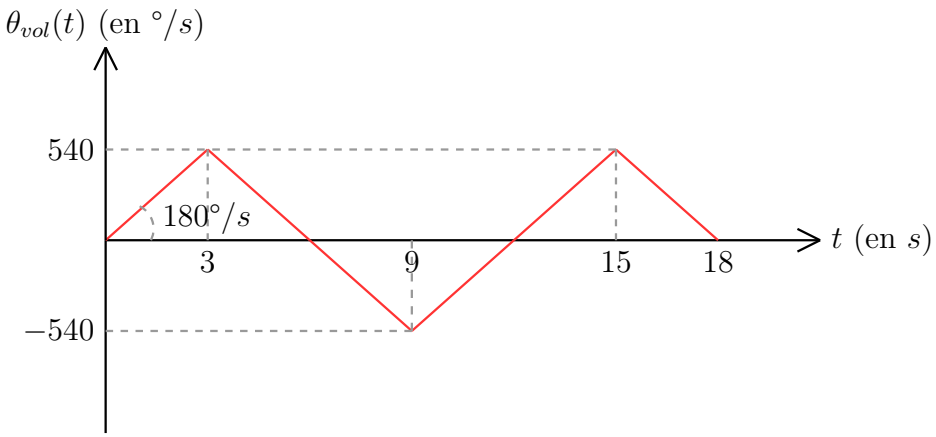


FIGURE 2.14 – Trajectoire de l'angle au volant $\theta_{vol}(t)$ imposé par l'essai « surplace lent »

Étape n°1 : adéquation

L'analyse structurelle du modèle direct de la figure 2.15 indique [23] :
- qu'il existe une ligne de puissance entrée/sortie (*i.e.* un chemin d'acheminement de l'énergie) entre l'élément bond graph portant la variable d'entrée $C_{mot}(t)$ et celui portant la variable de sortie $C_{vol}(t)$;
- qu'il existe un chemin causal entrée/sortie (*i.e.* une relation analytique) entre la variable d'entrée $C_{mot}(t)$ et la variable de sortie $C_{vol}(t)$.

Conformément à ce qui sera expliqué au chapitre 3, le modèle est donc structurellement inversible par rapport au couple de variables $(C_{mot}(t), C_{vol}(t))$: connaissant l'angle au volant $\theta_{vol}(t)$ et le couple au volant $C_{vol}(t)$, le concepteur vérifie ainsi qu'il est potentiellement capable de calculer le couple moteur $C_{mot}(t)$ que doit fournir l'assistance pour répondre aux critères de dimensionnement établis par les constructeurs automobiles. Enfin, pour finir cette étape de la méthodologie, le concepteur doit vérifier que ses spécifications sont en adéquation avec la structure du modèle. Après construction du modèle bond graph inverse correspondant (Fig. 2.16), une nouvelle analyse montre que l'ordre minimal qu'un

22. En réalité, les trajectoires d'angle volant utilisées pour la simulation numérique sont légèrement différentes de celles définies par les constructeurs automobiles. Afin d'éviter les problèmes numériques, les trajectoires sont définies telles qu'aux points de raccordement, les fonctions prennent une forme du type $1 - \cos(t)$ qui soit infiniment dérivable.

23. Les notions de *ligne de puissance* et de *chemin causal* seront définies de manière plus précise au chapitre 3 (définitions 2 et 5, pages 84 et 86).

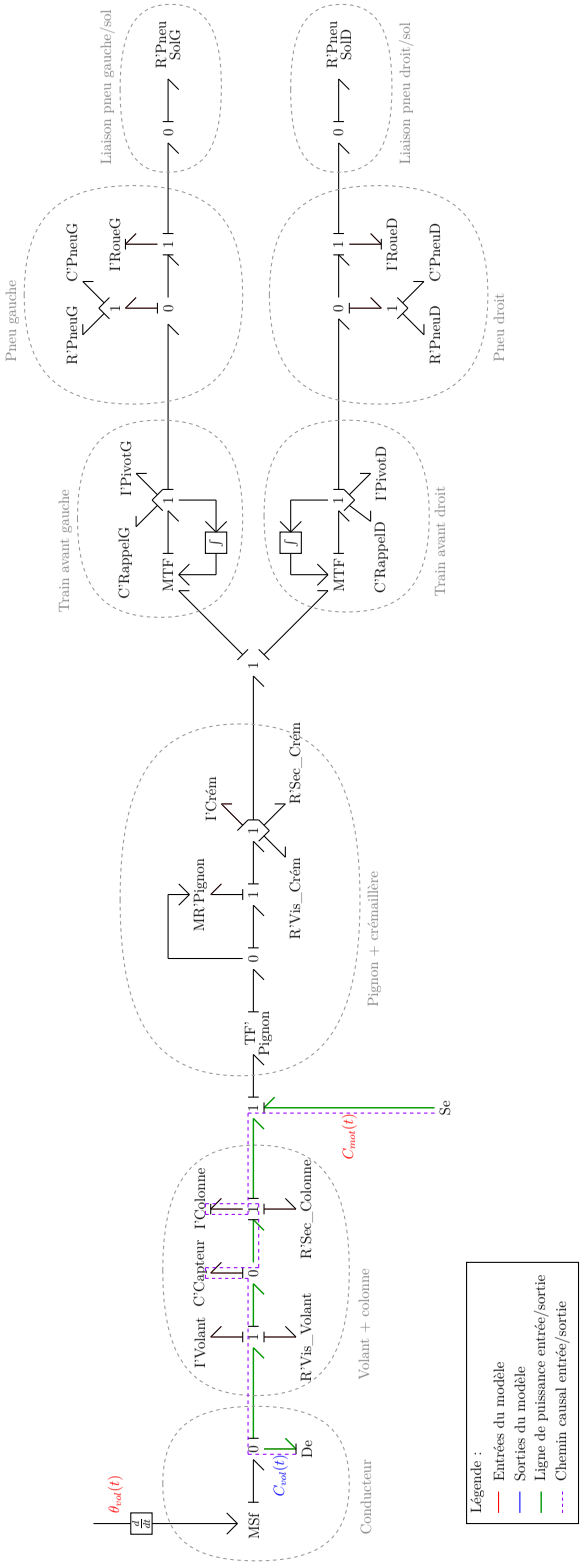


FIGURE 2.15 – Dimensionnement d'une direction assistée électrique : étape d'adéquation

chemin causal entrée/sortie puisse avoir entre les variables $C_{vol}(t)$ et $C_{mot}(t)$ est égal à -2. Pour être en adéquation avec la structure du modèle, le concepteur sait alors que ses spécifications (ici le couple volant $C_{vol}(t)$) doivent être au moins deux fois dérivables par rapport au temps [24].

Étape n°2 : spécification

L'objectif de l'étape de spécification est ici de calculer le couple $C_{mot}(t)$ requis en sortie du moteur d'assistance pour suivre l'angle au volant $\theta_{vol}(t)$ imposé par l'essai tout en respectant les contraintes de couple au volant $C_{vol}(t)$ établies par le cahier des charges. Pour effectuer ce calcul, il convient donc d'inverser le modèle précédent (Fig. 2.15) par rapport au couple de variables $(C_{vol}(t), C_{mot}(t))$. L'inversion de ce système nécessite donc la connaissance à chaque instant des variables $\theta_{vol}(t)$ et $C_{vol}(t)$. Or, si la trajectoire de $\theta_{vol}(t)$ est connue et imposée par l'essai, il n'en est pas de même pour $C_{vol}(t)$: le cahier des charges ne spécifie que des valeurs de couple à ne pas dépasser mais n'établit en aucun cas une évolution précise en fonction du temps.

Pour pallier ce problème, Mechin a proposé une certaine extension de la méthodologie en définissant l'évolution du couple au volant non plus comme une fonction du temps mais comme une fonction de l'effort crémaillère telle que : $C_{vol}(t) = f(F_{crém}(t))$ avec $f(.)$ fonction connue qui dépend du degré d'assistance et de la valeur $C_{vol_{max}}$ à ne pas dépasser. Physiquement, cette relation traduit bien l'objectif d'une direction assistée qui est de ne fournir qu'une partie des efforts au conducteur tout en lui donnant suffisamment d'information sur le comportement du véhicule. Elle reflète également le compromis que doit faire le concepteur pour répartir la puissance entre les deux chaînes d'actionnement (*i.e.* répartition entre la base passive et la chaîne d'assistance).

Grâce à cette relation, différentes spécifications ont pu être définies pour différents degrés d'assistance et en imposant au couple volant de ne pas dépasser ± 3 N.m (Fig. 2.17). Pour un degré d'assistance donné et un essai particulier, calculer le couple et la vitesse angulaire requis en sortie du moteur d'assistance revient alors à injecter le profil cible de couple volant et celui de l'angle volant correspondants et à inverser le modèle bond graph tel qu'il est montré à la figure 2.19. À titre d'exemple, la figure 2.18 montre les spécifications en sortie du moteur d'assistance obtenues après simulations numériques pour un degré d'assistance donné et pour les trois essais envisagés (*i.e.* « surplace lent à $180°/s$ », « créneaux à $360°/s$ » et « surplace rapide à $500°/s$ »).

24. Les critères d'inversibilité ainsi que ceux de dérivabilité des sorties spécifiées seront présentés et justifiés au chapitre 3, section 3.5.1 (page 124).

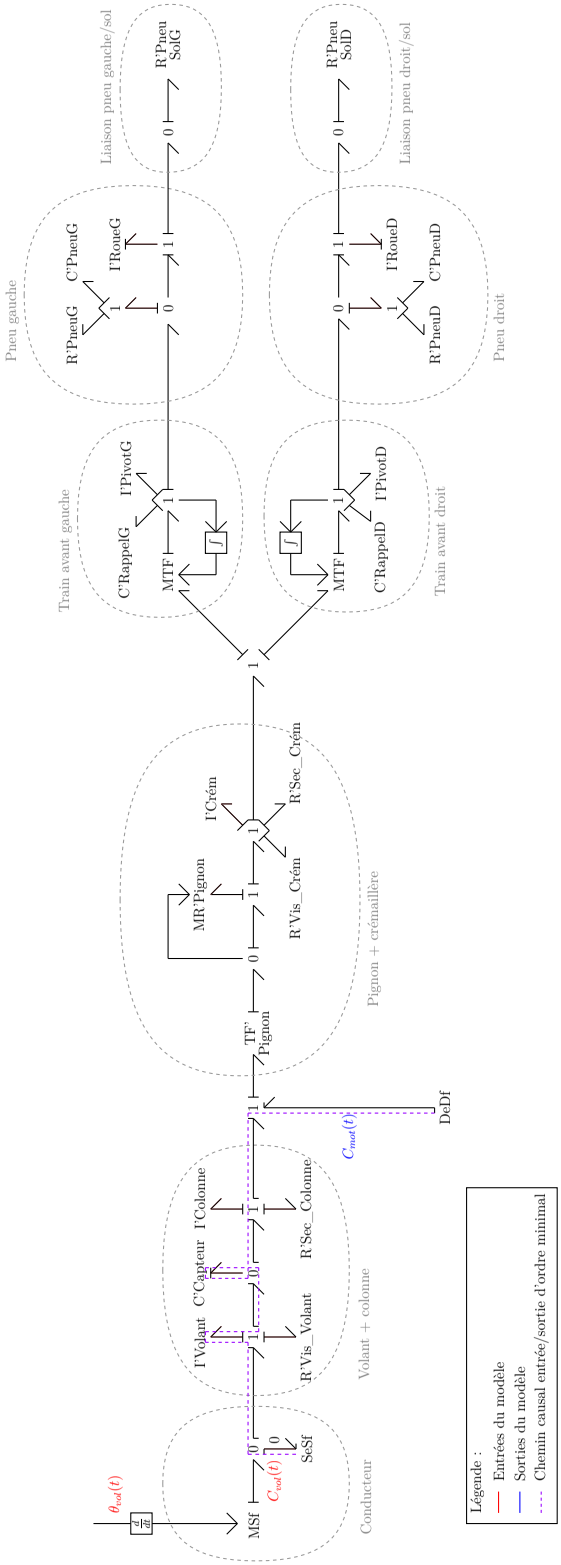


FIGURE 2.16 – Dimensionnement d'une direction assistée électrique : étape d'adéquation (suite)

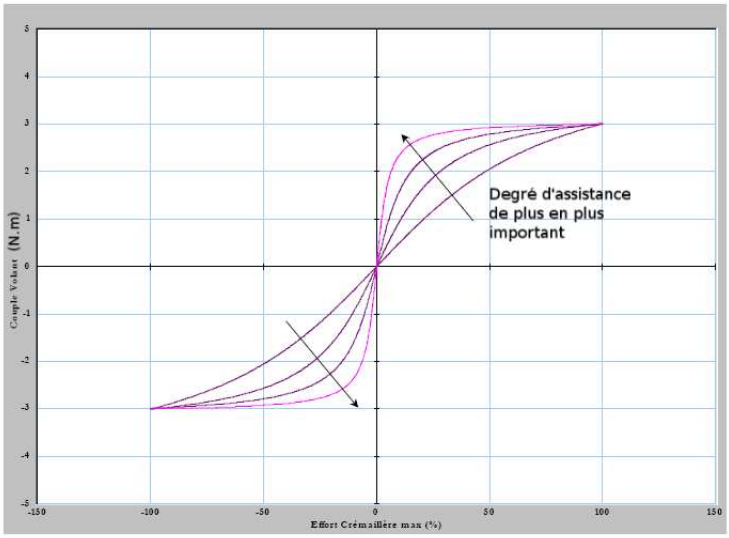


FIGURE 2.17 – Spécifications de couple volant $C_{vol}(t)$ en fonction de l'effort crémaillère $F_{crém}(t)$ pour différents degrés d'assistance [Mec03a]

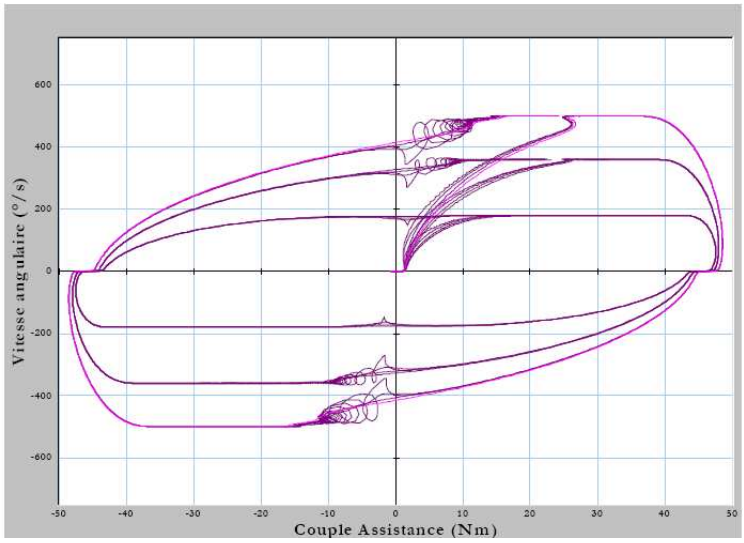


FIGURE 2.18 – Domaines de fonctionnement requis en sortie du moteur d'assistance pour un degré d'assistance donné et pour différentes vitesses de volant (resp. $180°/s$, $360°/s$ et $500°/s$) [Mec03a]

Étape n°3 : sélection

En comparant les spécifications précédemment calculées (Fig. 2.18) aux gabarits de sortie de deux moteurs électriques à courant continu de $45A$ et de $65A$ (Fig. 2.20), le concepteur peut alors constater que le moteur de $45A$ est clairement sous-dimensionné pour satisfaire le cahier des charges. Le moteur sélectionné est donc celui de $65A$ (les zones *a priori* de sous-dimensionnement de la figure 2.20 correspondent aux arrivées en butée de la crémaillère et ne sont, de ce fait, pas dimensionnantes).

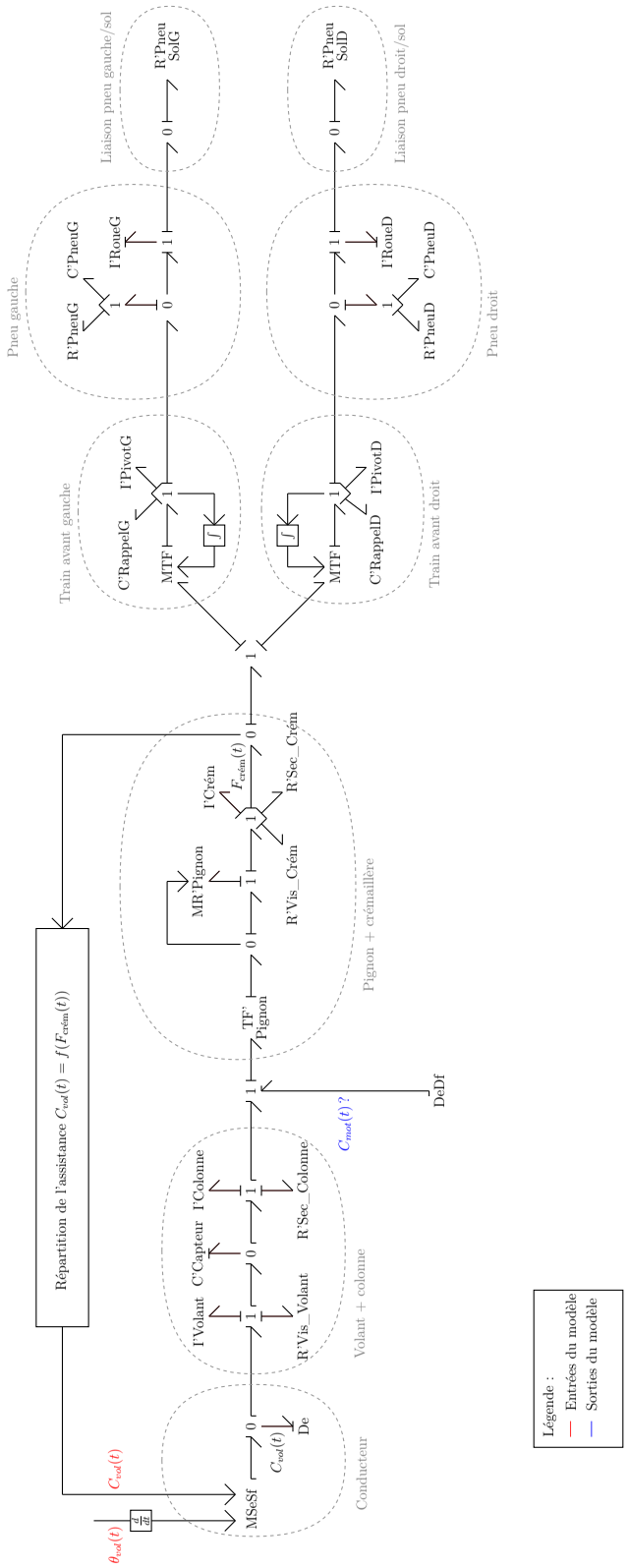


FIGURE 2.19 – Dimensionnement d'une direction assistée électrique : étape de spécification

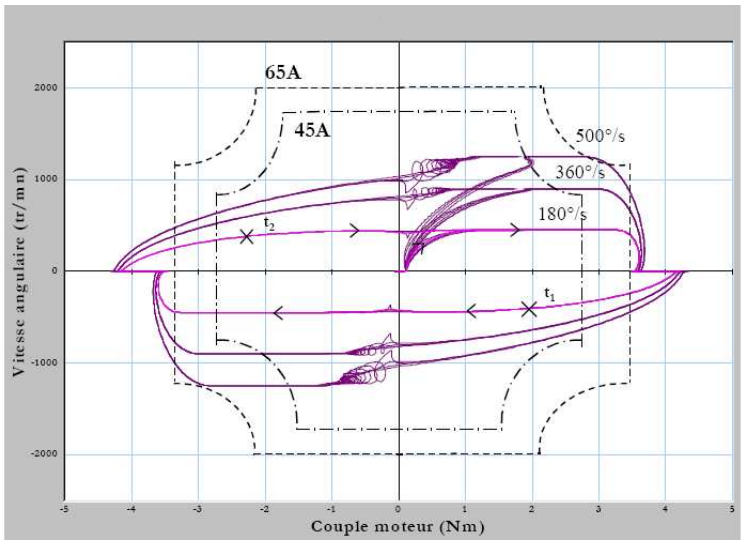


FIGURE 2.20 – Dimensionnement d'une direction assistée électrique : étape de sélection en comparant les spécifications requises aux gabarits de deux moteurs (resp. de $45A$ et de $65A$) [Mec03a]

Étape n°4 : validation

Enfin, pour valider le choix du moteur de $65A$, il convient de le modéliser et d'inverser à nouveau le modèle, cette fois-ci par rapport au couple de variable $(C_{vol}(t), U(t))$ où $U(t)$ est la tension d'entrée du moteur (Fig. 2.22). En partant toujours des profils d'angle volant et de couple volant, la simulation numérique de ce nouveau modèle permet de calculer les évolutions de la tension et de l'intensité requises en entrée du moteur d'assistance pour satisfaire le cahier des charges. La figure 2.21 montre les performances attendues pour la partie électrique du moteur pour différentes vitesses de volant (resp. $180°/s$, $360°/s$ et $500°/s$) et pour le même degré d'assistance qu'à l'étape de sélection.

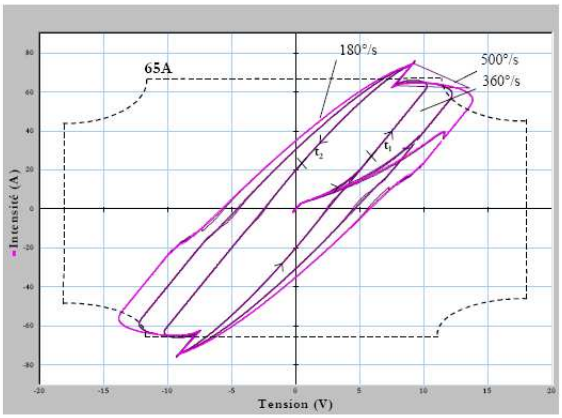


FIGURE 2.21 – Domaines de fonctionnement requis pour l'étage électrique du moteur d'assistance et gabarit d'entrée du moteur de $65A$ [Mec03a]

En superposant les performances calculées avec le gabarit d'entrée du moteur de $65A$, le concepteur peut alors déduire que celui-ci est globalement validé : les zones de sous-dimensionnement apparaissant sur la figure 2.21 ne sont encore une fois pas dimensionnantes puiqu'elles correspondent aux arrivées en butée de la crémaillère.

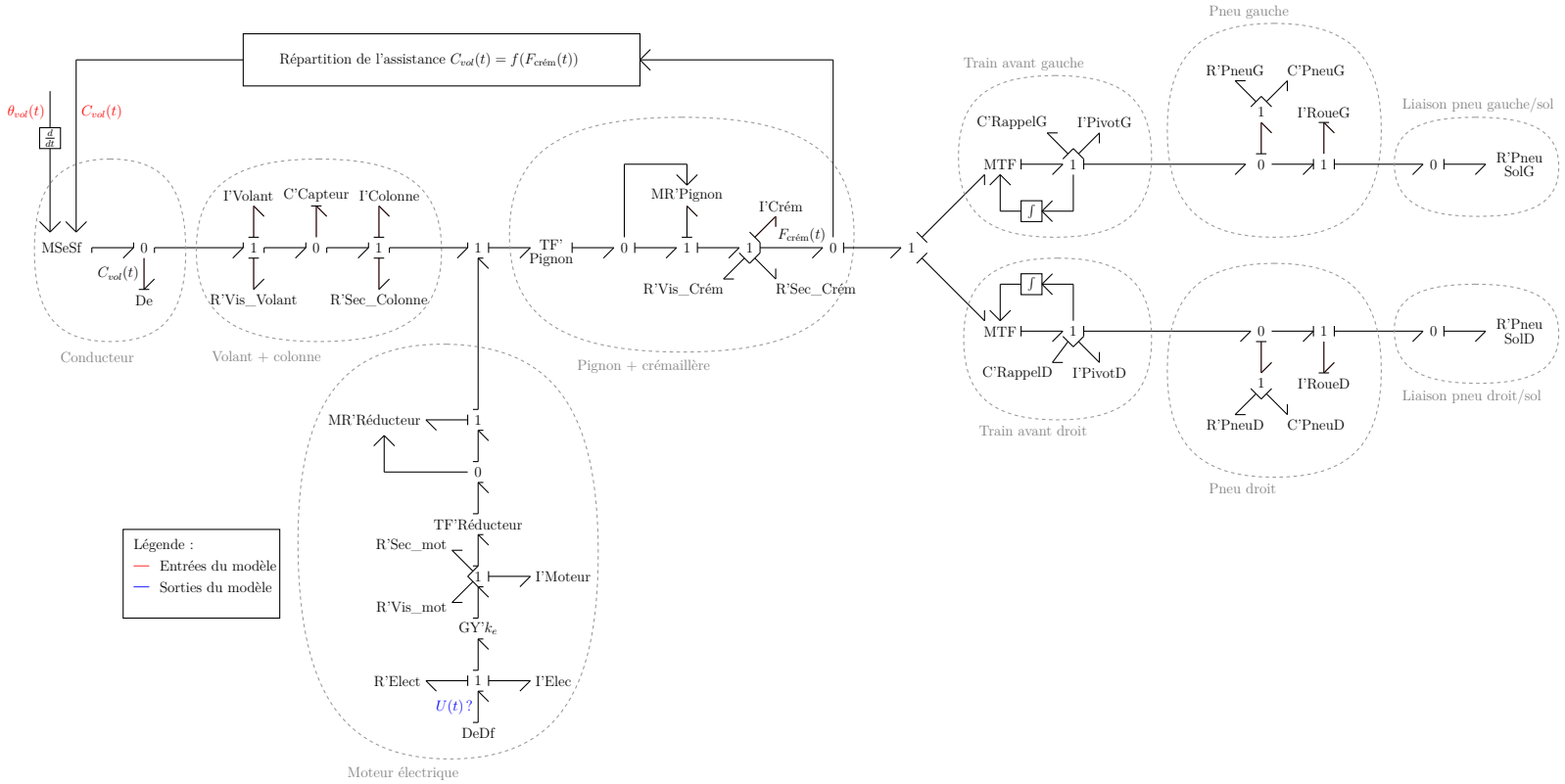


FIGURE 2.22 – Dimensionnement d'une direction assistée électrique : étape de validation

Chaîne de traction électrique automobile [Laf04]

Comme deuxième exemple d'application industrielle, considérons ici une chaîne de traction électrique automobile et supposons que le problème de dimensionnement soit de dimensionner le groupe moto-réducteur.

Modélisation

Le but d'une chaîne de traction électrique, comme tout autre chaîne de traction automobile, est d'assurer le mouvement longitudinal du véhicule. En réalité, une telle chaîne peut être modélisée comme un assemblage de plusieurs sous-systèmes dont (Fig. 2.23) :
- un dispositif de fourniture d'énergie électrique embarquée ;
- un modulateur de puissance ;
- un moteur électrique associé à un réducteur ;
- une transmission ;
- un ensemble de masses non suspendues (ensemble {pneumatiques + pivots}) ;
- un dispositif de suspensions ;
- et un modèle de véhicule complet qui joue ici le rôle de charge pour la chaîne d'actionnement ainsi décrite et qui permet de prendre en compte les interactions véhicule/environnement telles que la force de résistance au roulement ou encore la force aérodynamique.

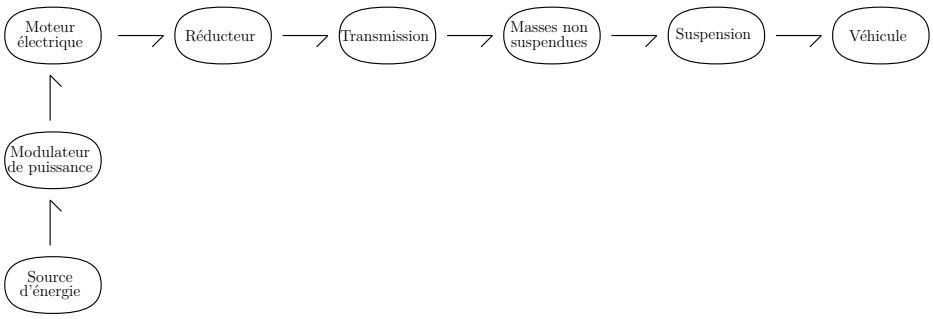


FIGURE 2.23 – Modèle word bond graph d'une chaîne de traction électrique

Sans entrer dans les détails de construction [25], la figure 2.25 représente le modèle bond graph d'une telle chaîne de traction électrique en supposant que :
- le dispositif de fourniture d'énergie, le modulateur de puissance et la partie électrique du moteur ne sont pas modélisés ;
- la non-idéalité du reducteur est prise en compte (le rapport fixe du réducteur reste cependant à déterminer) ;
- les effets thermiques sont négligés ;
- l'hypothèse de roulement sans glissement est vérifiée et donc aucune dissipation d'énergie due au contact roue/sol n'est modélisée ;
- les amortissements et raideurs dus aux dispositifs de transmission et de suspension sont négligés.

25. Le lecteur intéressé pourra se référer à la thèse de LAFFITE [Laf04] pour cela.

Critères de dimensionnement

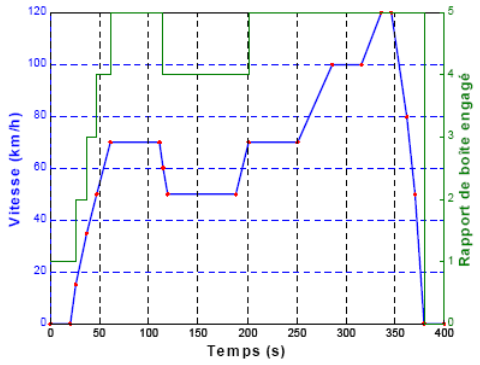


FIGURE 2.24 – Cycle normalisé EUDC [Laf04]

Un des critères de dimensionnement des moteurs consiste à mesurer la quantité de carburant (ou ici la quantité d'énergie non renouvelable) consommée lorsque le véhicule parcourt un cycle d'évolution normalisé, donné sous la forme de vitesse en fonction du temps. Un de ces cycles normalisés est le cycle européen EUDC [26] dont la figure 2.24 représente l'allure [27]. Ce cycle permet notamment de spécifier une partie des performances attendues pour le moteur.

Étape n°1 : adéquation

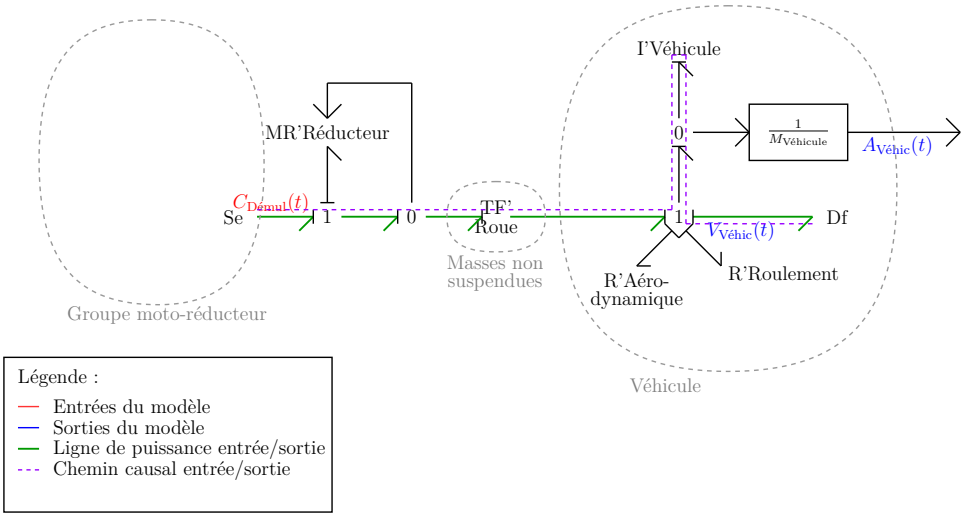


FIGURE 2.25 – Dimensionnement d'une chaîne de traction électrique : étape d'adéquation

26. *i.e.* Extra Urban Driving Cycle
27. Là encore, en réalité, le cycle EUDC utilisé pour les simulations est légèrement différent de celui défini par le constructeur automobile : il est filtré afin de satisfaire les conditions nécessaires de dérivabilité.

L'analyse structurelle du modèle direct de la figure 2.25 indique[28] :

- qu'il existe une ligne de puissance entrée/sortie (*i.e.* un chemin d'acheminement de l'énergie) entre l'élément bond graph portant la variable d'entrée $C_{Démul}(t)$ et celui portant la variable de sortie $V_{Véhic}(t)$;
- qu'il existe un chemin causal entrée/sortie (*i.e.* une relation analytique) entre la variable d'entrée $C_{Démul}(t)$ et la variable de sortie $V_{Véhic}(t)$.

Conformément à ce qui sera expliqué au chapitre 3, le modèle est donc structurellement inversible par rapport au couple de variables $(C_{Démul}(t), V_{Véhic}(t))$ où $C_{Démul}(t)$ est le couple fourni en sortie du groupe moto-réducteur et $V_{Véhic}(t)$ est la vitesse longitudinale du véhicule. S'imposant un cycle de vitesse véhicule (*e.g.* le cycle EUDC), le concepteur est alors capable de spécifier les performances désirées en sortie du groupe moto-réducteur. Enfin, après construction du modèle inverse correspondant (Fig. 2.26), une analyse montre que l'ordre minimal qu'un chemin causal entrée/sortie puisse avoir entre les variables $V_{Véhic}(t)$ et $C_{Démul}(t)$ est égal à -1. Pour être en adéquation avec la structure du modèle, le concepteur sait alors que ses spécifications (ici le cycle EUDC) doivent être au moins une fois dérivables par rapport au temps.

Étape n°2 : spécification

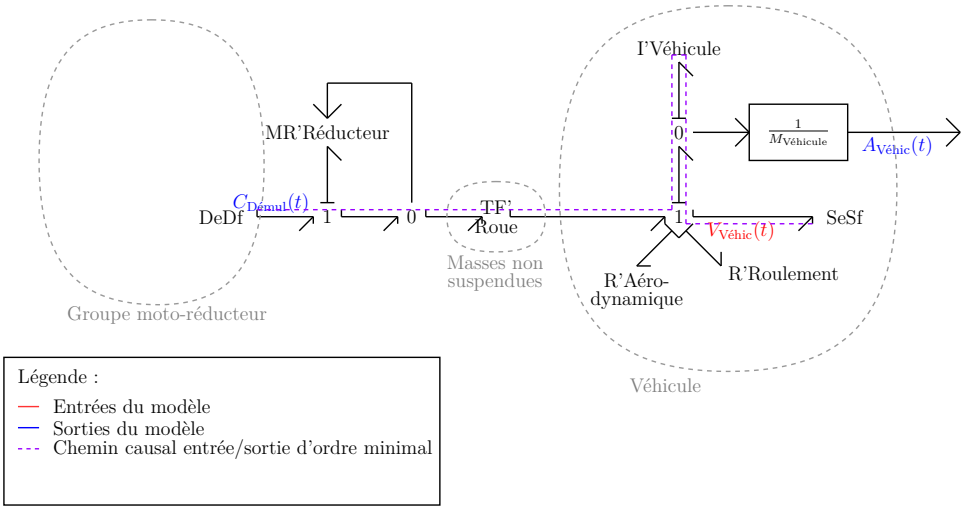


FIGURE 2.26 – Dimensionnement d'une chaîne de traction électrique : étape de spécification

L'objectif de l'étape de spécification est ici de calculer l'évolution des variables de puissance requise en sortie du groupe moto-réducteur pour permettre au véhicule de suivre le cycle de vitesse EUDC. Après avoir inversé le modèle par rapport au couple de variables $(C_{Démul}(t), V_{Véhic}(t))$ et après avoir imposé $V_{Véhic}(t) = V_{Critère_{EUDC}}(t)$ conformément au modèle bond graph de la figure 2.26, le concepteur obtient par simulation numérique

28. Comme nous l'avons précédemment annoncé, de plus amples détails sur les notions de ligne de puissance, de chemin causal, de critère d'inversibilité et de dérivabilité sur les sorties spécifiées seront fournis lors du chapitre 3.

l'évolution temporelle de la puissance à fournir par le groupe moto-réducteur (Fig. 2.27).

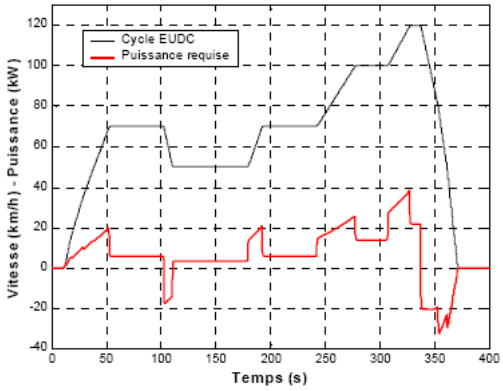


FIGURE 2.27 – Puissance requise en sortie du groupe moto-réducteur pour satisfaire le cycle EUDC [Laf04]

Étape n°3 : sélection

D'après les résultats de l'étape précédente (Fig. 2.27), le concepteur sait qu'il doit choisir un groupe moto-réducteur capable de fournir au moins $39kW$. Un réducteur (supposé ici à rapport fixe) doit également être choisi.

Étape n°4 : validation

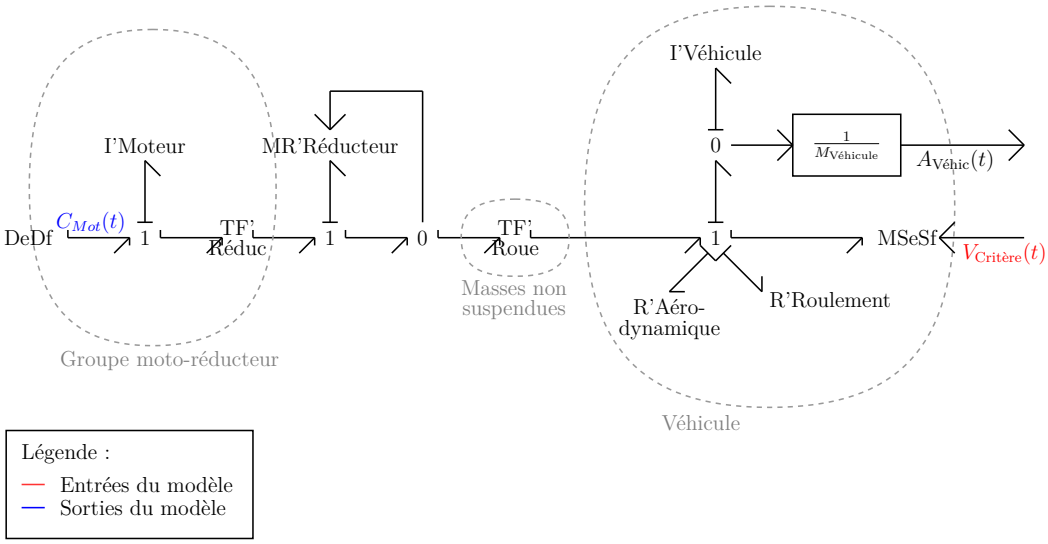


FIGURE 2.28 – Dimensionnement d'une chaîne de traction électrique : étape de validation

Enfin, une fois le groupe moto-réducteur choisi, il convient de le valider. Pour cela, il est nécessaire de le modéliser et d'inverser cette fois-ci le modèle {moteur + réducteur +

masses non suspendues + véhicule} par rapport au couple de variables $(C_{mot}(t), V_{Véhic}(t))$ (Fig. 2.28) [29]. La figure 2.29 illustre les zones de fonctionnement requises en sortie de l'étage électrique du groupe moto-réducteur. Ces courbes sont entièrement incluses dans les gabarits du groupe moto-réducteur choisi à l'étape précédente : celui-ci est donc validé pour le critère EUDC.

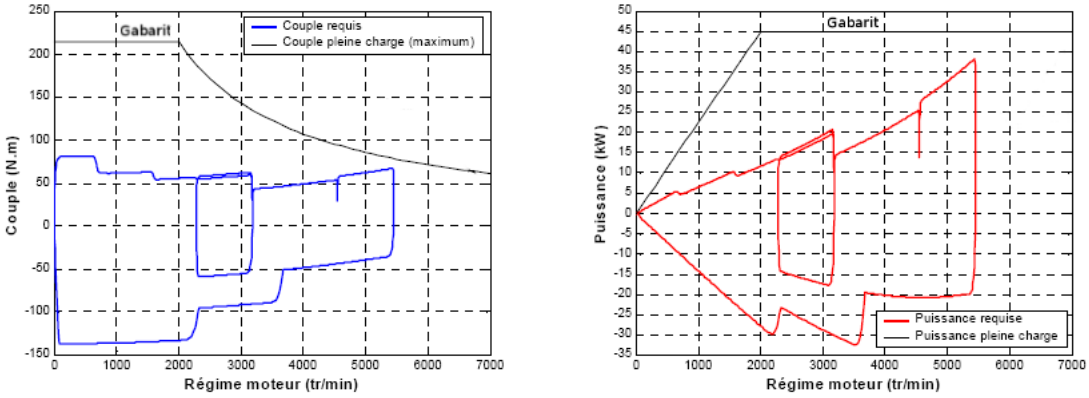


FIGURE 2.29 – Zones de fonctionnement requises en sortie de la partie électrique du moteur pour satisfaire le cycle EUDC [Laf04]

2.5.2 Les langages Modelica et bond graph

Si la méthodologie proposée ici a été initialement développée dans le formalisme bond graph, il convient d'étudier sa viabilité industrielle et notamment de savoir la positionner par rapport à des langages de modélisation émergents tels que le langage Modelica [Mod99].

En effet, depuis 1997, le langage Modelica rencontre un essor important tant au niveau académique qu'industriel. Gratuit et non propriétaire, ce langage orienté objet, multi-domaine et acausal (quelques notions sur la sémantique du langage sont données à l'annexe B) réunit *a priori* toutes les caractéristiques nécessaires pour satisfaire les contraintes de conception actuelles. Il apparaît comme tout à fait adapté à l'étude des systèmes mécatroniques. Ajouté à son apparente facilité d'accès (les modèles sont relativement lisibles même pour un néophyte), bons nombres d'industriels s'y intéressent et semblent voir en Modelica un futur standard pour l'échange de modèles. Témoins de ce réel engouement, de nombreux logiciels de simulation et d'analyse ont d'ores et déjà intégré les fonctions d'import, de traitement et d'export de modèles Modelica. Parmi eux, nous pouvons notamment citer les logiciels : Dymola de DASSAULT SYSTÈMES [Dym92], LMS Imagine.Lab AMESim de LMS ENGINEERING INNOVATION [LMS07], Scicos de l'INRIA [30] [Sci94] ou encore plus récemment MapleSim de MAPLESOFT [Mapb] [31].

29. Seuls le réducteur et l'inertie de l'arbre moteur sont modélisés ici.
30. *i.e.* Institut National de Recherche en Informatique et Automatique
31. Nous pouvons également noter que la société THE MATHWORKS propose depuis peu l'outil Simscape [Sim07] avec un langage propriétaire mais sensiblement proche de Modelica (langage multi-domaine, acausal,...).

Aussi, si le langage bond graph n'est pas aussi bien disséminé dans le monde industriel car bien souvent perçu comme plus difficile d'accès, il est alors légitime de se demander si la méthodologie de dimensionnement proposée ici ne peut pas, dans une certaine mesure, être transposée dans le langage Modelica. Si l'utilité industrielle de la méthodologie a été démontrée dans les sections précédentes, il est vrai que la forme qu'elle recouvre peut influer sur sa valorisation auprès des entreprises. Cette transposition est d'autant plus légitime que, de par leurs caractéristiques multi-disciplinaires et acausales, les langages bond graph et Modelica sont *a priori* conceptuellement proches. Pour preuve, Borutzky [Bor99] pousse la comparaison un peu plus loin en considérant l'outil bond graph comme un langage orienté objet et certains auteurs comme Brœnink [Bro97, Bro99] ou Cellier [Cel05] ont montré qu'il était possible de coder les éléments bond graph en langage Modelica [32].

À l'occasion du projet ANR SIMPA2 [33], de nouvelles réflexions ont alors été entreprises quant à la faisabilité de transporter la méthodologie de dimensionnement dans un formalisme Modelica. Les deux sections suivantes présentent ces travaux en reprennant notamment deux concepts forts de la méthodologie :

- l'acausalité qui permet de séparer le problème de modélisation du problème de dimensionnement ;
- l'analyse structurelle qui permet d'aider le concepteur à vérifier que son problème de dimensionnement est bien formulé.

Progressivement, elles montreront ainsi si le langage Modelica s'avère adapté ou non à la méthodologie proposée ici.

2.5.3 L'acausalité, gage de pérennité des modèles

Au chapitre 1, la nécessité d'avoir un langage acausal a été évoquée comme étant un moyen de capitaliser les efforts de modélisation. Cette section reprend plus en détails cet argument et explique comment le principe d'acausalité rend les modèles effectivement réutilisables.

Afin d'illustrer nos propos, l'exemple académique d'un moteur à courant continu (Fig. 2.30) sera traité tout au long de cette section. Pour cela, nous caractériserons le moteur par :

- un circuit électrique composé d'une source de tension u, d'une résistance électrique R et d'une bobine de paramètre constant L en série ;
- un couplage électromécanique de constante de couple k_c ;
- un arbre de sortie moteur, d'inertie J_m, supposé infiniment raide et soumis à des frottements visqueux de cœfficient b_c.

32. Depuis peu, il est important de noter que le logiciel MS1 permet de générer un code Modelica directement à partir d'un modèle bond graph. Cependant, ce module ne permet pas d'établir une réelle comparaison entre les deux langages puisqu'il ne conserve pas la structure du modèle : le code généré est un code Modelica « à plat » où toutes les équations du modèle sont encapsulées dans une seule *class* [Jar08c].

33. *i.e.* SIMulation pour le Procédé et l'Automatique 2

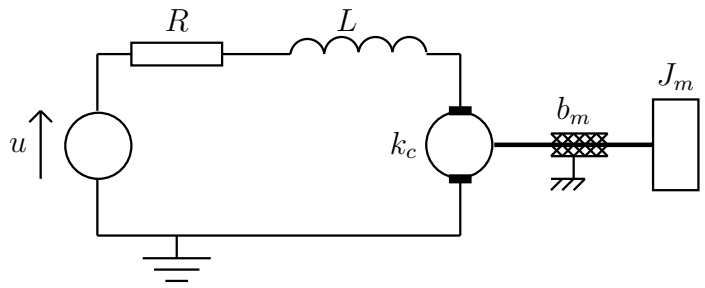


FIGURE 2.30 – Schéma technologique d'un moteur à courant continu

D'une description causale dédiée...

En dehors des contextes bond graph et Modelica et de manière tout à fait générale, un modèle causal est défini comme la représentation d'un schéma de calcul. Il s'agit d'une série d'affectations simulable. Par définition donc, un modèle causal dépend de l'objectif de l'étude (quelles sont les données et les inconnues du problème ?) et ne peut être utilisé qu'à cette seule et unique fin (l'ordonnancement des relations d'affectation dépend indubitablement de la connaissance des entrées et des sorties du modèle). Comme montré sur la figure 2.31, si l'ingénieur en charge de l'étude choisit une approche causale, il sera alors contraint de formuler un modèle causal pour chaque autre problème d'ingénierie qu'il voudra ensuite résoudre (*e.g.* analyse, dimensionnement, synthèse paramétrique,...).

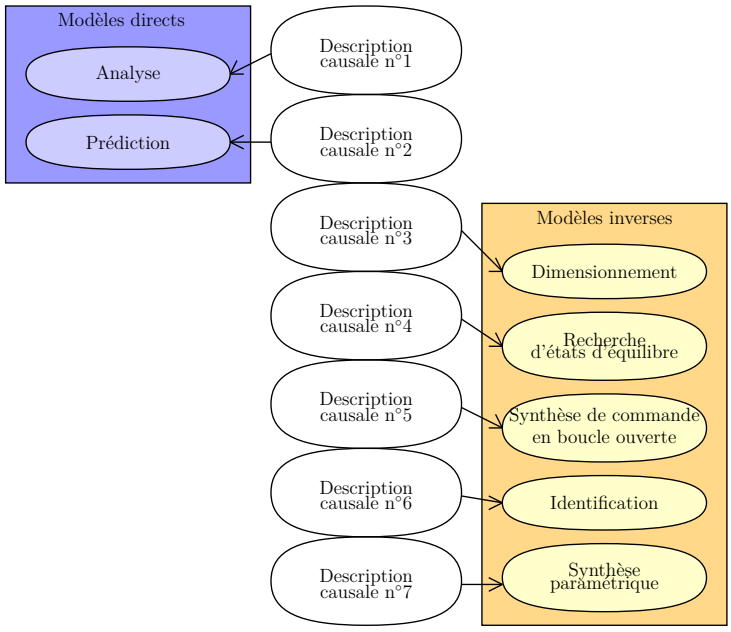


FIGURE 2.31 – Chaque problème d'ingénierie requiert une description causale différente

Prenons pour exemple la modélisation du moteur à courant continu et supposons que l'ingénieur responsable de l'étude soit confronté à un problème d'analyse de performances

puis à un problème de détermination de la commande u en boucle ouverte.
Dans le problème d'analyse, la commande u est connue et la vitesse de l'arbre de sortie ω_m est à déterminer. Le modèle correspondant est donc un modèle direct (l'entrée du modèle correspond à une entrée physique du système) qui, en appliquant les lois de la physique, peut être mis sous la forme du modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_c}{J_m} \\ \frac{k_c}{L} & -\frac{b_m}{J_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ p_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (u) \\ (\omega_m) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{J_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ p_m \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.5}$$

en notant ϕ le flux magnétique dans la bobine et p_m le moment cinétique de l'arbre de sortie.
Pour pouvoir le simuler, l'ingénieur en charge de l'étude est alors classiquement habitué à implémenter ce modèle sous la forme d'un schéma bloc tel que celui proposé à la figure 2.32(a).

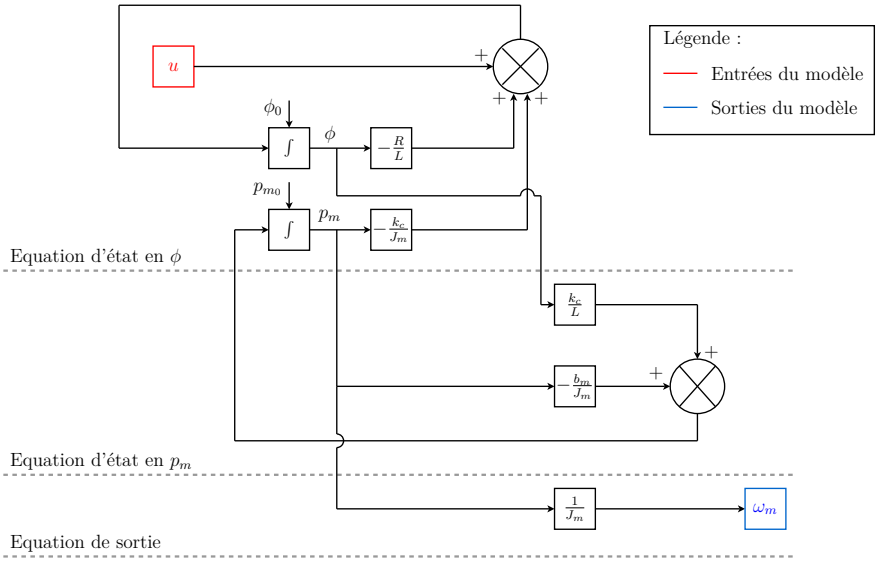
Dans le problème de détermination de la commande en boucle ouverte, les rôles sont inversés : la commande u est à déterminer à partir de la connaissance de la vitesse moteur ω_m. Le modèle correspondant est donc un modèle inverse qui peut être obtenu en inversant les équations (2.5) par rapport au couple (u, y) :

$$u = \left(\frac{Rb_m}{k_c} + k_c\right)\omega_m + \frac{(Lb_m + RJ_m)}{k_c}\dot{\omega}_m + \frac{LJ_m}{k_c}\ddot{\omega}_m \tag{2.6}$$

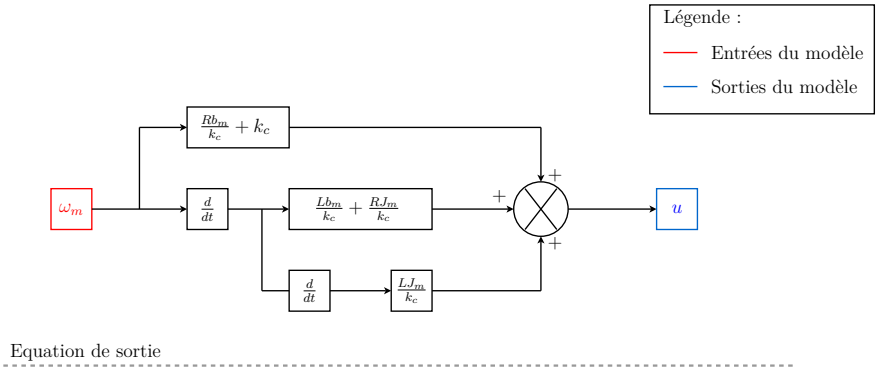
Pour pouvoir simuler le modèle (2.6), l'ingénieur en charge de l'étude doit alors construire un nouveau schéma bloc (Fig. 2.32(b)). Ce nouveau schéma bloc ne présente aucune partie commune avec celui du modèle direct. Le concepteur est obligé de reprendre les développements analytiques et ne peut pas capitaliser les efforts précédents pour mener d'autres calculs ultérieurs.

...vers une description acausale réutilisable

En réalité, si un langage causal ne permet pas de rendre les modèles réutilisables, c'est parce qu'il contraint le modélisateur à mêler description physique du système et expérimentation (ce pour quoi le modèle a été écrit). Au contraire d'un modèle causal, un modèle acausal, lui, est une description du système qui est totalement indépendante de l'utilisation qui lui est destinée. Mathématiquement, ce type de modèle consiste en un ensemble d'équations implicites non ordonnées où les entrées et les sorties du modèle (donc l'expérimentation) ne sont pas précisées. Par conséquent, si un modèle causal n'est écrit que pour un objectif de simulation précis, un modèle acausal peut être, lui, utilisé à plusieurs fins (Fig. 2.33) : à condition d'avoir un logiciel (et plus exactement un compilateur) capable d'ordonner les équations acausales sous la forme d'une série d'affectations compatibles avec les grandeurs connues et recherchées, un seul et même modèle acausal peut être utilisé pour résoudre plusieurs problèmes d'ingénierie (*e.g.* analyse, dimensionnement, synthèse paramétrique, ...).



(a) Modèle direct correspondant au système d'équations (2.5)



(b) Modèle inverse correspondant au système d'équations (2.6)

FIGURE 2.32 – Modélisations schémas blocs d'un moteur à courant continu

Comme au paragraphe précédent, reprenons l'exemple du moteur à courant continu et supposons que les mêmes problèmes d'analyse et de détermination de la commande en boucle ouverte soient considérés mais cette fois-ci avec une approche acausale.
Si l'ingénieur choisit l'outil bond graph comme langage de modélisation, il pourra alors représenter son problème d'analyse puis son problème de détermination de la commande respectivement grâce aux modèles bond graph direct et inverse des figures 2.34(a) et 2.34(b) [34].
Il lui suffit pour cela de partir du modèle bond graph acausal du moteur, d'y connecter les sources et détecteurs adéquats pour déclarer les entrées et les sorties relatives au problème considéré puis de propager la causalité (modèle direct) ou la bicausalité (modèle inverse) de manière à organiser les équations. Les efforts de modélisation qui ont été fournis pour décrire le comportement du moteur sont ici capitalisés : l'ingénieur se sert de la même base pour construire les différents modèles causaux associés à ses différentes expérimentations.

34. La construction de tels modèles est expliquée à l'annexe A.

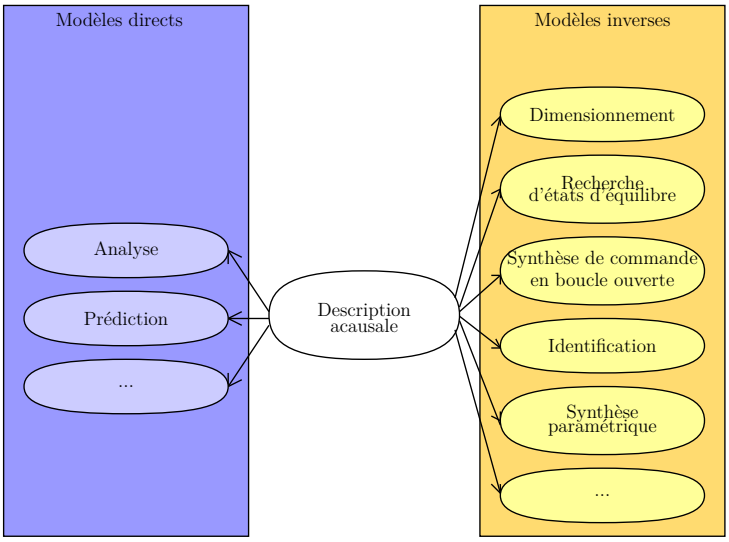
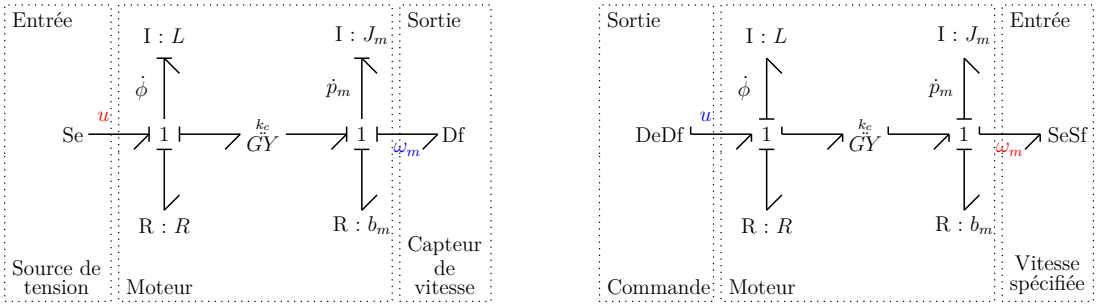


FIGURE 2.33 – Une seule et même description acausale peut servir à plusieurs problèmes d'ingénierie



(a) Modèle direct

(b) Modèle inverse

FIGURE 2.34 – Modélisation bond graph d'un moteur à courant continu

Il s'agit bien du même modèle bond graph de moteur qui est utilisé à chaque fois : seule l'organisation des équations qui lui sont liées (donc la causalité) change en fonction de l'expérimentation choisie.

De la même façon, si l'ingénieur en charge de l'étude choisit le langage Modelica comme langage de modélisation, ceci le conduit alors à implémenter les codes des tableaux 2.0(a) et 2.0(b) pour traiter respectivement les problèmes d'analyse et de détermination de la commande en boucle ouverte [35].
Là encore, seuls les modèles correspondant aux entrées et aux sorties du problème sont changés et ce sont bien les mêmes modèles de composants (*e.g.* modèle de résistance, d'inductance, de masse, ...) qui sont appelés dans ce qui représente les modèles direct et inverse (comme en langage bond graph où seuls les éléments sources et détecteurs sont

35. La construction de tels modèles est expliquée à l'annexe B.

(a) Modèle direct

```
model DirectDCMotor
  // Instanciation et paramètrage des modèles élémentaires :
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.ConstantVoltage Source(V=1);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Resistor R(R=8.0);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Inductor L(L=0.001);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.EMF emf(k=0.031);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Ground G;
  Modelica.Mechanics.Rotational.Inertia Jm(J=0.0000018);
  Modelica.Mechanics.Rotational.Damper bm(d=0.0001);
  Modelica.Mechanics.Rotational.SpeedSensor Sensor;
equation
  // Assemblage de la partie électrique :
  connect(Source.p, R.n);
  connect(R.p, L.n);
  connect(L.p, emf.n);
  connect(emf.p, Source.n);
  connect(Source.n, G.p);
  // Assemblage de la partie mécanique :
  connect(emf.flange_b, Jm.flange_a);
  connect(Jm.flange_b, bm.flange_a);
  connect(bm.flange_b, Sensor.flange_a);
end DirectDCMotor;
```

(b) Modèle inverse

```
model InverseDCMotor
  // Instanciation et paramètrage des modèles élémentaires :
  Modelica.Electrical.Analog.Sensors.VoltageSensor Out;
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Resistor R(R=8.0);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Inductor L(L=0.001);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.EMF emf(k=0.031);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Ground G;
  Modelica.Mechanics.Rotational.Inertia Jm(J=0.0000018);
  Modelica.Mechanics.Rotational.Damper bm(d=0.0001);
  Modelica.Mechanics.Rotational.Speed In(exact=true);
  Modelica.Blocks.Sources.Sine wm(amplitude=20,freqHz=50);
equation
  // Assemblage de la partie électrique :
  connect(Out.p, R.n);
  connect(R.p, L.n);
  connect(L.p, emf.n);
  connect(emf.p, Source.n);
  connect(Source.n, G.p);
  // Assemblage de la partie mécanique :
  connect(emf.flange_b, Jm.flange_a);
  connect(Jm.flange_b, bm.flange_a);
  connect(bm.flange_b, In.flange_b);
  connect(In.w_ref, wm.y);
end InverseDCMotor;
```

TABLE 2.1 – Modélisation Modelica d'un moteur à courant continu

modifiés).

Concept propre aux langages bond graph et Modelica, le principe d'acausalité permet de séparer la description du système de l'expérimentation. Grâce à lui, il n'est plus utile de modéliser plusieurs fois le même composant suivant les différents contextes dans lesquels il peut être utilisé. Non seulement les modèles deviennent réutilisables mais en plus les bibliothèques deviennent ainsi moins redondantes. De ce point de vue, la transposition de la méthodologie de dimensionnement en langage Modelica semble *a priori* possible.

Remarques :

– Notons toutefois que même si les modèles acausaux sont réutilisables, il conviendra de leur associer un ensemble de conditions initiales compatible avec l'expérimentation entreprise.

– À la différence de l'approche causale schéma bloc, avec une approche acausale, l'ingénieur n'est plus obligé d'ordonner « à la main » ses équations pour obtenir le modèle inverse : cette tâche est bien souvent gérée de manière automatique par les compilateurs des logiciels. Ceci constitue donc là encore un gain d'effort et de temps.

2.5.4 Originalité et apport de l'analyse structurelle

Comparativement aux méthodologies de dimensionnement évoquées au cours des sections précédentes, outre son utilisation de modèles inverses, la méthodologie proposée ici se distingue par sa phase d'analyse structurelle. Loin d'être un artifice intellectuel, nous avons déjà vu que ce type d'analyse permet, entre autres :

– de guider le concepteur dans l'élaboration de l'architecture du système ;
– de vérifier si le modèle est structurellement inversible et donc si la méthodologie est potentiellement applicable ;
– de s'assurer que la structure du modèle est en adéquation avec le cahier des charges ;
– si besoin est, d'aider le concepteur à reformuler son cahier des charges [36].

Aussi, si la manière dont est conduite cette analyse sera largement discutée au chapitre suivant, nous pouvons cependant d'ores et déjà voir dans quelle mesure ce concept d'analyse structurelle peut (ou ne peut pas) être transposé dans le formalisme Modelica.

En réalité, par définition, l'analyse structurelle d'un modèle consiste à déterminer des propriétés du modèle indépendamment des valeurs numériques des paramètres. Ces propriétés dites *structurelles* peuvent concerner aussi bien l'inversion ou tout autre caractéristique habituellement utile aux concepteurs (*e.g.* commandabilité, découplabilité,...). Même si leur domaine de validité est restreint (certaines valeurs numériques particulières peuvent rendre les propriétés fausses), celles-ci permettent de donner un certain nombre d'information sur le système et ce, sans recours à la simulation numérique. L'analyse structurelle permet, en quelque sorte, de jalonner les différentes difficultés que peut rencontrer un concepteur :

– si la propriété imposée par son cahier des charges n'est pas vérifiée au niveau structurel, il sait qu'il doit modifier l'architecture de son système ;
– au contraire, si la propriété recherchée est vérifiée au niveau structurel, le concepteur doit poursuivre pour tester le résultat au niveau numérique mais il sait que son problème est *a priori* bien posé pour la structure du modèle qu'il s'est fixée.

Au niveau du langage bond graph, cette étape d'analyse structurelle nécessite :

– une certaine quantité d'information sur la structure du modèle, notamment sur la nature énergétique des phénomènes impliqués et la manière dont ceux-ci sont interconnectés ;
– la visualisation de certaines manipulations causales.

De par la nature même de l'outil, tout modèle bond graph possède intrinsèquement ces caractéristiques. Cependant, en est-il de même pour un modèle Modelica ? Malheureusement, si la traduction d'un modèle bond graph en code Modelica peut être faite de manière quasi systématique grâce à la bibliothèque BondLib de Cellier [Cel05], l'opéra-

36. L'analyse structurelle peut également servir à détecter les éventuelles difficultés numériques qui peuvent apparaître lors de la simulation d'un modèle (*i.e.* boucle causale, dérivations,...).

tion inverse n'est pas si aisée. Bien que les concepts de multi-disciplinarité et d'acausalité semblent établir un lien entre l'outil bond graph et le langage Modelica, la conversion d'un code Modelica en un modèle bond graph se révèle plus ardue voire impossible dans le cas général. En réalité, si un modèle bond graph est intrinsèquement lié à la description de la structure énergétique du système, rien n'impose au modélisateur de décrire celle-ci dans un modèle Modelica. Par exemple, le comportement d'un système peut être complètement décrit par un ensemble d'équations encapsulées dans une même *class* Modelica, sans la moindre utilisation d'un modèle de connecteur et donc sans la moindre description de la structure du modèle. De plus, même si un modèle de connecteur apparaît dans le code Modelica, celui-ci ne représente pas nécessairement un échange physique d'énergie : la notion de connecteur étant beaucoup plus générale qu'en langage bond graph, rien n'impose en langage Modelica de prendre pour variables de description des variables de puissance ou d'énergie.

Pour ces raisons, les concepts propres à l'analyse structurelle de modèles bond graph ne peuvent être directement transposables à l'analyse de modèles Modelica. Il est cependant intéressant d'exhiber de cette tentative de traduction que l'analyse structurelle requiert un niveau d'information minimum sur la structure énergétique du système. Aussi, comme les définitions relatives à l'analyse structurelle (définitions énoncées en début du chapitre suivant) peuvent être exprimées dans un cadre plus général autre que le formalisme bond graph, il est tout à fait possible d'imaginer une sorte de méta-langage Modelica qui soit capable de décrire toute l'information nécessaire à l'analyse structurelle. Cette façon de voir se révèle même plus pertinente puisque l'analyse structurelle ne se base pas sur l'interprétation des équations (ce que contient un modèle Modelica « classique ») mais bien uniquement sur le « squelette » énergétique du modèle. L'analyse structurelle a trait à une étape en amont de l'écriture du code Modelica et concerne finalement directement l'étape de modélisation, étape où est fixée la structure du système. Le langage Modelica, tel qu'il se présente actuellement, peut donc être vu comme un outil complémentaire à la méthodologie, utile pour faciliter sa promotion auprès d'industriels, mais n'est *a priori* pas adapté à l'analyse structurelle et donc apte à remplacer totalement le langage bond graph.

2.6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, la reformulation du problème de dimensionnement en problème inverse a été légitimée par la possibilité de prendre en compte le cahier des charges dans sa globalité et non plus seulement en certains points critiques. Les principes de l'inversion en automatique ont alors été rappelés puis certaines méthodes de dimensionnement basées sur l'inversion ont été étudiées. Nous avons vu que ces méthodes, qui sont celles du calcul des efforts moteurs en robotique, de Potkonjak et Vukobratović ou encore de Dequidt, permettent certes d'obtenir des critères de sélection plus pertinents mais sont malheureusement peu générales. Après avoir brièvement justifié l'utilisation du formalisme bond graph dans un tel contexte, nous avons alors présenté la méthodologie de dimensionnement proposée par le laboratoire. Beaucoup plus générale que les méthodes précédentes, cette méthodologie systématise l'inversion de modèles et permet au concepteur de « remonter » les spécifications du cahier des charges à chaque étage de la chaîne d'actionnement. Comparée à la méthode essai → erreur → correction, cette méthodologie

permet de diminuer de manière significative le nombre d'itérations de calcul et garantit un dimensionnement au plus juste par rapport à ce qui est imposé par le cahier des charges. De plus, grâce à elle, le concepteur vérifie au préalable si son problème de dimensionnement est bien posé et a ainsi l'assurance *a priori* que sa démarche convergera vers une solution (ce qui n'était pas le cas avec l'approche classique). Outre le dimensionnement, nous avons également illustré le fait que cette méthodologie pouvait être applicable en réalité à bien d'autres problèmes d'ingénierie tels que la synthèse d'architecture, la détermination de commande en boucle ouverte ou encore la synthèse paramétrique et qu'il suffisait pour cela de considérer le modèle inverse adéquat. Deux applications issues du domaine automobile ont notamment été reprises pour illustrer l'intérêt de la méthodologie dans un contexte industriel. Enfin, la dernière partie de ce chapitre (partie non bibliographique) reflète les travaux qui ont été initialement présentés dans l'article [Jar08c] sur la transposition de la méthodologie de dimensionnement dans le formalisme Modelica, langage émergent dans la communauté mécatronicienne. Malgré l'apparente ressemblance du langage Modelica au langage bond graph grâce notamment aux concepts d'acausalité et de multi-disciplinarité, nous avons alors vu que les étapes d'analyse structurelle (étapes essentielles de la méthodologie) ne pouvaient être directement transposables à l'étude de modèles écrits en langage Modelica.

Jusqu'à présent, les chapitres 1 et 2 nous ont permis d'aborder la conception des systèmes mécatroniques de manière très générale puis de se focaliser sur les méthodes existantes pour le dimensionnement de leurs chaînes d'actionnement. Basée sur l'utilisation de modèles bond graph inverses, la méthodologie proposée par le laboratoire a alors été présentée. La suite de ce mémoire présente nos contributions au développement de cette méthodologie, d'une part dans sa phase amont d'analyse structurelle (chapitre 3) et d'autre part dans sa phase aval de dimensionnement par couplage avec de l'optimisation dynamique (chapitres 4 et 5).

Chapitre 3

Contribution à la phase d'analyse structurelle : niveaux d'analyse pour la conception

Sommaire

3.1 Introduction 76
3.2 Définition de l'analyse structurelle 76
3.3 Présentation de formalismes possibles pour l'analyse structurelle 78
3.3.1 Approche modèle d'état 79
3.3.2 Approche système structuré 80
3.3.3 Approche bond graph 82
3.4 Notion de niveaux d'analyse 95
3.4.1 Correspondances et procédures de passage d'un formalisme à l'autre 96
3.4.2 Différents niveaux d'information et de description... 100
3.4.3 ...qui conduisent à différents niveaux d'analyse 106
3.4.4 Intérêt des niveaux d'analyse dans la démarche de conception . 108
3.5 Niveaux d'analyse pour le modèle de conception 123
3.5.1 Critères d'inversibilité 124
3.5.2 Obtention d'un modèle inverse d'ordre minimal 138
3.6 Niveaux d'analyse pour le cahier des charges 139
3.6.1 Ordre d'essentialité d'une sortie 139
3.6.2 Critères de dérivabilité pour la simulation d'un modèle inverse 152
3.7 Conclusion 154

3.1 Introduction

Lors du chapitre précédent, nous avons vu que la méthodologie proposée ici tient son originalité notamment de sa phase d'analyse structurelle. Contrairement à la méthode classique essai → erreur → correction qui ne permet de conclure que sur une solution numérique, cette phase permet d'évaluer les propriétés structurelles d'un système. En amont de tout calcul numérique, elle guide ainsi le concepteur dans son choix d'architecture et l'aide à vérifier que son modèle de conception est *a priori* inversible et en adéquation avec son cahier des charges.

Dans un premier temps, ce chapitre s'attache à présenter les concepts clés de ce type d'analyse. Notamment, après avoir défini la notion même d'analyse structurelle, les approches modèle d'état, système structuré (*structured system*) et bond graph seront présentées puis, confrontées, afin de montrer qu'il existe finalement différents niveaux d'analyse. Nous montrerons ainsi que les domaines de validité des résultats d'analyse d'un modèle dépendent *in fine* des niveaux d'information et de description intrinsèques au formalisme choisi pour représenter ce modèle. En s'inspirant des travaux de Rahmani [Rah93] sur le calcul du rang d'une matrice, une classification de ces différents niveaux d'analyse sera alors établie dans un cadre relativement générique (*i.e.* indépendant du type de propriété qui est observé). L'intérêt de ces différents niveaux d'analyse dans une démarche de conception sera ensuite discuté et étayé par le fait que leur prise en compte permet de jalonner les différentes étapes de l'analyse structurelle et de donner ainsi des pistes précises sur les types de reconception à envisager dans le cas où une propriété recherchée n'est pas vérifiée. Enfin, les deux dernières sections de ce chapitre auront pour objectif d'orienter cette notion d'analyse structurelle pour la conception dans notre problématique initiale de dimensionnement par modèles bond graph inverses. En l'occurrence, ces sections permettront de détailler les étapes d'analyse structurelle rapidement évoquées lors du chapitre 2 et utiles tout au long de la démarche de dimensionnement lors :

- de la définition du modèle de conception (critères d'inversibilité, section 3.5, page 123) ;
- et de la rédaction du problème de conception (critères de dérivabilité des spécifications, section 3.6, page 139).

Outre la démonstration de l'intérêt applicatif de l'analyse structurelle, ce chapitre nous permettra également de reprendre un certain nombre de résultats existants à la lumière des différents niveaux d'analyse proposés ici et d'éclaircir la différence entre le fait de considérer dans certains cas des chemins causaux BG-différents ou BG-disjoints.

Remarque : Dans la suite de ce mémoire, nous nous limiterons volontairement à l'analyse structurelle de systèmes linéaires et invariants dans le temps même si certaines définitions ou résultats peuvent être étendus au cas de systèmes non linéaires ou tout au moins affines en la commande (*e.g.* [Nij82, Rei88, Glu89]).

3.2 Définition de l'analyse structurelle

Dans le contexte de la simulation, l'analyse des systèmes, leur dimensionnement et la synthèse de leurs lois de commande conduisent à des résultats qui dépendent souvent des valeurs attribuées aux paramètres. Cependant, cette façon de procéder possède au moins

deux inconvénients majeurs.
Premièrement, d'un point de vue pratique, quelques difficultés apparaissent lors de l'implémentation des modèles : certains modèles peuvent contenir des paramètres dont la valeur numérique est inconnue ou difficile à mesurer. Sujet aux incertitudes, ces paramètres aboutissent alors à des erreurs de modélisation et éventuellement à des erreurs dans les résultats d'analyse [1].
Deuxièmement, d'un point de vue méthodologique, cette approche requiert qu'à chaque changement de valeurs numériques soit menée une nouvelle phase d'analyse afin de vérifier si les résultats obtenus sur les performances du système sont toujours vérifiés.

Par conséquent, l'approche numérique est en contradiction avec la capitalisation des efforts d'analyse et la réduction des temps de développement. Ceci est d'autant plus dommageable que certains résultats peuvent être mis en commun en analysant simplement la structure du système, une information qui, elle, est valable pour la plupart des valeurs numériques des paramètres [2]. En général, s'il est impossible de garantir la valeur numérique de tous les paramètres du modèle, certaines valeurs et certaines relations sont invariantes comme :

- une relation exprimant qu'une variable est la dérivée d'une autre variable ;
- les relations traduisant des connexions entre différents sous-systèmes ;
- les lois de conservation d'énergie identiques quelle que soit la valeur numérique des paramètres ;
- les entrées de matrices toujours fixées à zéro ;
- ...

En se basant uniquement sur ce type d'information, le concepteur dispose alors d'un ensemble d'informations simple qui présente l'avantage d'être indépendant de la valeur numérique des paramètres. Cet ensemble permet de valider un certain niveau de modèle (*e.g.* l'architecture choisie autorise-t-elle *a priori* l'inversion du système ?) en étudiant uniquement ses *propriétés structurelles* (définition 1 dans le contexte du langage bond graph).

Définition 1 (*[Rah93]*)

*Une **propriété** d'un système est dite **structurelle** si :*

- *elle ne dépend que du type d'éléments [bond graph] qui composent le modèle du système et de la façon dont ils sont interconnectés, non pas de la valeur numérique de ses paramètres ;*
- *elle est vérifiée pour toutes les valeurs des paramètres sauf éventuellement pour quelques valeurs particulières.*

En procédant ainsi, non seulement il n'est plus nécessaire de connaître la valeur numérique des paramètres pour dresser un premier bilan, mais en plus, les résultats de cette analyse seront valides pour la plupart des valeurs numériques des paramètres. Cette approche, appelée *analyse structurelle*, assure ainsi une meilleure compréhension du comportement du système et une certaine capitalisation des résultats d'études.

1. En réalité, même si certaines méthodes comme les approches robustes permettent de pallier l'effet de ces incertitudes, elles peuvent alourdir également la complexité des calculs.
2. Nous verrons dans les paragraphes suivants que des valeurs numériques spécifiques peuvent tout de même altérer la structure du modèle et modifier ainsi certaines de ses propriétés.

Même s'il est vrai que cette approche n'est pas encore vraiment adoptée par les bureaux d'études du monde industriel, de nombreux travaux de recherche ont cependant porté sur cette notion d'analyse structurelle. Dès 1917, Frobenius [Fro17] et König [Kön31] se sont intéressés aux propriétés structurelles des matrices. Ensuite, Lin [Lin74], Shields et Pearson [Shi76], Glover et Silverman [Glo76], puis Franksen *et al.* [Fra79a, Fra79b], Schizas et Evans [Sch81] ont développé cette approche pour l'étude de la commandabilité et l'observabilité structurelles des modèles. Aujourd'hui, bon nombre de références peut être trouvé et plusieurs méthodes ou outils de modélisation peuvent être utilisés pour conduire une telle analyse structurelle comme : l'approche modèle d'état [Des82], l'approche géométrique [Des82, Com82], l'approche digraphe [Eva79, Yam85, Rei88], l'analyse des matrices système [Ros70], l'approche système structuré [Shi76, Com91, van91] ou encore l'utilisation du langage bond graph [Sud86, Rah97]. Enfin, la littérature montre que l'analyse structurelle s'est avérée utile pour aborder plusieurs études comme celles : des structures finies et infinies [Com82, van91, Ber97b], de la commandabilité et de l'observabilité [Eva79, May81, Sud86, Rah97, Rei97], de la monitorabilité [Haf06], de la dualité [Bir89, Lic07], du placement de pôles [Sue93], du rejet de perturbation [Com91], de l'inversion [Rah93, Fot97a, Jar08a] ou encore du découplage [Yam85, Rah96, Com93, Dio93].

3.3 Présentation de formalismes possibles pour l'analyse structurelle

Afin de déterminer le domaine de validité des résultats issus de l'analyse structurelle d'un modèle bond graph, il est intéressant d'étudier d'autres approches permettant ce type d'analyse. En particulier, nous avons choisi d'étudier les approches modèle d'état et système structuré aussi bien dans leurs formes matricielles que graphiques. Avant de comparer entre elles les approches modèles d'état, système structuré et bond graph, cette section a pour objectif de présenter ces différentes approches et de clarifier les différentes terminologies utilisées. Pour cela, chaque approche sera énoncée dans le cas général puis illustrée par un exemple commun aux trois formalismes : celui du moteur à courant continu (Fig. 2.30) introduit au chapitre précédent (schéma technologique repris sur la figure 3.1).

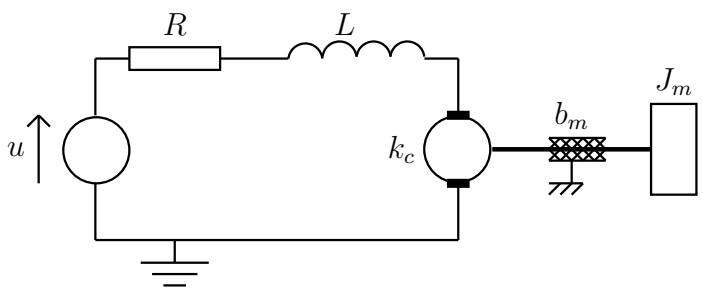


Figure 3.1 – Schéma technologique d'un moteur à courant continu

Au cœur de la méthodologie de dimensionnement proposée ici, l'accent sera mis sur

l'approche bond graph pour laquelle un plus grand nombre de définitions sera exposé. Selon les besoins du lecteur, d'autres concepts plus spécifiques à la mise en œuvre de l'analyse structurelle (*e.g.* ordre relatif d'une sortie, polynôme caractéristique, matrice système, ...) pourront toutefois être trouvés à l'annexe C, et ce pour les différentes approches étudiées.

3.3.1 Approche modèle d'état

L'approche modèle d'état peut revêtir deux formes à savoir celle d'une représentation matricielle ou celle d'une représentation graphique. Suivant ces différents aspects, différentes notions propres à l'analyse structurelle ont alors été introduites comme l'illustre l'annexe C.1.

Représentation matricielle

Considérons un système Σ linéaire et invariant dans le temps. La représentation matricielle du modèle d'état qui lui est associée s'exprime alors généralement sous la forme :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur d'entrée et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ celui de sortie [3].

Exemple :

Nous avons déjà vu à la section 2.5.3 (page 65) que le modèle d'état du moteur à courant continu pouvait être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_c}{J_m} \\ \frac{k_c}{L} & -\frac{b_m}{J_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (u) \\ (y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{J_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ p \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.2}$$

où :
- ϕ et p représentent respectivement le flux magnétique dans la bobine et le moment cinétique de l'arbre de sortie ;
- $y = \omega_m$ correspond à la vitesse angulaire de l'arbre de sortie et u à la commande en tension du moteur.

Il s'agit ici d'un cas particulier où la matrice $\mathbf{D}$ est nulle.

Une fois cette représentation matricielle établie, plusieurs propriétés du système peuvent alors être déduites de ce modèle d'état comme le montrent les définitions et propriétés de l'annexe C.1.1. Nous parlerons dans ce cas de propriétés déterminées selon une approche algébrique.

3. Dans la suite du mémoire, il sera sous-entendu que les vecteurs d'état $\mathbf{x}$, d'entrée $\mathbf{u}$ et de sortie $\mathbf{y}$ sont dépendants du temps même si la variable de temps ne sera pas explicitement écrite. Dans cet même esprit de concision, rappelons que la dérivée par rapport au temps d'une grandeur sera désignée ici par un point (*e.g.* la dérivée par rapport au temps du vecteur d'état $\mathbf{x}$ sera notée $\dot{\mathbf{x}}$).

Représentation graphique

Le modèle d'état d'un système Σ peut être également représenté de manière graphique par l'intermédiaire d'un digraphe[4]. Pour un système décrit par le modèle d'état (3.1), le digraphe correspondant, noté $\mathcal{G}(V, E)$, est composé [Yam85, Rah97] :

- d'un ensemble de sommets $V = U \cup X \cup Y$ où $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$ sont les ensembles de sommets associés respectivement aux variables d'entrée, d'état et de sortie du modèle ;
- d'un ensemble d'arcs $E = E_{\mathbf{A}} \cup E_{\mathbf{B}} \cup E_{\mathbf{C}} \cup E_{\mathbf{D}}$ avec :

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}} &= \{(x_j, x_i) | a_{ij} \neq 0\} \\ E_{\mathbf{B}} &= \{(u_j, x_i) | b_{ij} \neq 0\} \\ E_{\mathbf{C}} &= \{(x_j, y_i) | c_{ij} \neq 0\} \\ E_{\mathbf{D}} &= \{(u_j, y_i) | d_{ij} \neq 0\} \end{aligned}$$

  où, par exemple, (x_j, x_i) dénote l'existence d'un arc orienté partant du sommet $x_j \in X$ vers $x_i \in X$ et $a_{ij} \neq 0$ signifie que le cœfficient de la matrice $\mathbf{A}$, situé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne, n'est pas fixé à zéro (bien sûr, le même type de convention s'applique aux autres ensembles $E_{\mathbf{B}}$, $E_{\mathbf{C}}$ et $E_{\mathbf{D}}$).

Enfin, chaque arc (x_j, x_i) (resp. (u_j, x_i), (x_j, y_i), (u_j, y_i)) a un poids égal à la $(i, j)^{\text{ième}}$ entrée de la matrice $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$).

Exemple :

Le modèle d'état (3.2) (page 79) du moteur à courant continu peut être représenté par le *digraphe* de la figure 3.2.

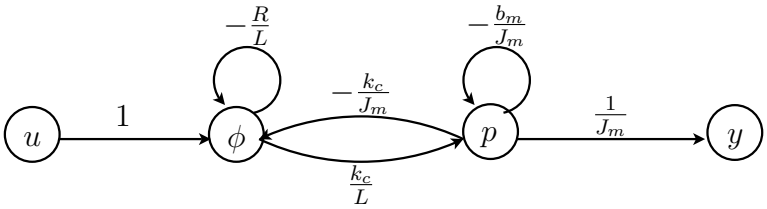


FIGURE 3.2 – *Digraphe* correspondant à l'exemple du moteur à courant continu

Dès lors, comme pour la représentation d'état sous forme matricielle, un certain nombre de concepts ont été introduits afin d'étudier les propriétés structurelles d'un système, comme le montrent les définitions et les propriétés fournies à l'annexe C.1.2. Nous parlerons dans ce cas de propriétés déterminées selon une approche digraphe.

3.3.2 Approche système structuré

Telle l'approche modèle d'état, l'approche système structuré peut prendre la forme d'une représentation matricielle ou graphique où différents concepts sont alors utilisés pour étudier les propriétés structurelles d'un système.

4. Un *digraphe* est un graphe dont les arcs sont orientés.

Représentation matricielle

Considérons le même type de système linéaire et invariant dans le temps que précédemment (modèle (3.1), page 79) et supposons que [Shi76, van91, Dio03] :

- seul l'emplacement des cœfficients des matrices fixés à zéro est connu (donc l'emplacement des cœfficients non fixés à zéro est également connu) ;
- les cœfficients non fixés peuvent potentiellement prendre n'importe quelle valeur (sauf zéro).

En d'autres mots, supposons que nous ne connaissons que la structure mathématique des matrices du modèle. Dans ce cas, si le modèle comporte q cœfficients non fixés, il peut être paramétré par un vecteur $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ où toutes ses composantes sont supposées être indépendantes les unes des autres. Un tel système, noté $\Sigma_{\boldsymbol{\lambda}}$, est appelé **système structuré** et peut alors être décrit par le modèle suivant :

$$\Sigma_{\boldsymbol{\lambda}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{x} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{u} \end{cases}$$

où $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\lambda}}$ et $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\lambda}}$ sont dénommées **matrices structurées** [Shi76].

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu, l'approche système structuré conduit à la représentation matricielle :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_5 \\ 0 \end{pmatrix} (u) \\ (y) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ p \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix}^T$ et tous les λ_i sont supposés indépendants entre eux.

Représentation graphique

Comme à la section 3.3.1 (page 80), un système structuré peut non seulement être modélisé de manière matricielle mais aussi de manière graphique à l'aide d'un digraphe. Ce digraphe, que nous appelerons **digraphe structuré** et que nous noterons $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\lambda}}(V, E_{\boldsymbol{\lambda}})$ est composé [Dio03] :

- d'un ensemble de sommets $V = U \cup X \cup Y$;
- d'un ensemble d'arcs orientés $E_{\boldsymbol{\lambda}} = E_{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}}} \cup E_{\mathbf{B}_{\boldsymbol{\lambda}}} \cup E_{\mathbf{C}_{\boldsymbol{\lambda}}} \cup E_{\mathbf{D}_{\boldsymbol{\lambda}}}$;

tels que V et $E_{\boldsymbol{\lambda}}$ sont définis de la même manière que pour un digraphe « classique » à la seule différence que les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont remplacées par les matrices structurées $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\lambda}}$ et $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\lambda}}$. Par conséquent, chaque arc orienté (x_j, x_i) (resp. (u_j, x_i), (x_j, y_i), (u_j, y_i)) d'un digraphe structuré a un poids égal à la $(i, j)^{\text{ième}}$ entrée non fixée de la matrice $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\lambda}}$ (resp. $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\lambda}}$).

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu, le *système structuré* (3.3) peut être représenté de manière équivalente par le *digraphe structuré* de la figure 3.3.

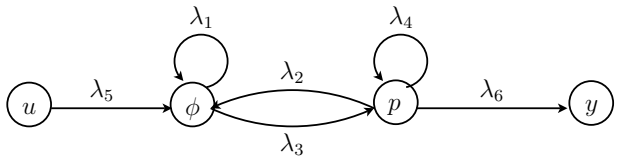


FIGURE 3.3 – *Digraphe structuré* de l'exemple d'un moteur à courant continu

3.3.3 Approche bond graph

Concernant l'approche bond graph, seule une représentation graphique existe même si celle-ci est intrinsèquement liée à un modèle mathématique (annexe A). Aussi, à la différence des approches précédentes (les digraphes structurés ou non sont orientés et donc nécessairement causaux), apparaît ici une notion supplémentaire d'acausalité qui, comme nous le verrons plus tard, sera utile à la détermination d'un certain niveau de propriétés structurelles (voir section 3.5 concernant notamment le test d'inversibilité d'un modèle bond graph par étude de ses lignes de puissances E/S). Les paragraphes suivants présentent les concepts acausaux et causaux utiles à l'étude structurelle d'un modèle bond graph. Pour chaque nouvelle définition, le préfixe (ou parfois suffixe) « BG » sera volontairement ajouté de manière à ne pas confondre les différentes approches.

Concepts acausaux

Considérons un modèle bond graph représentant un système linéaire et invariant dans le temps. Un modèle bond graph acausal décrit uniquement les types de phénomènes pris en compte dans le modèle (phénomène dissipatif, d'apport ou de stockage d'énergie) et la manière dont ceux-ci sont interconnectés. Dans ce type de modèle, aucune hypothèse n'est faite *a priori* sur l'orientation des équations représentées.

Exemple :

Conformément aux hypothèses formulées au chapitre 2, section 2.5.3 (page 65) et aux procédures de construction de l'annexe A, le moteur à courant continu peut être modélisé par l'intermédiaire d'un *modèle bond graph acausal* comme celui montré sur la figure 3.4.

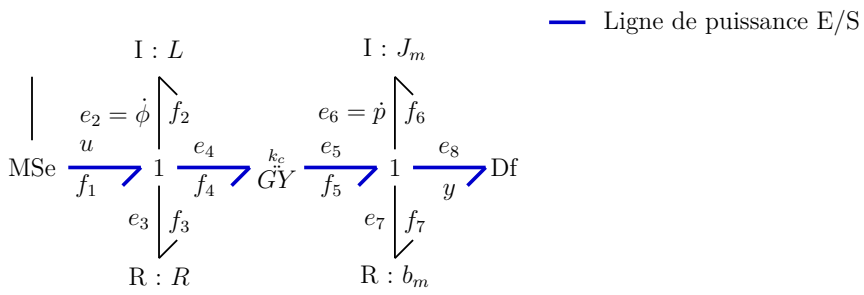


FIGURE 3.4 – *Modèle bond graph acausal* de l'exemple du moteur à courant continu

De manière plus détaillée :
- l'élément MSe représente la source de tension u modulée ;
- les deux éléments I caractérisent les deux phénomènes de stockages d'énergie respectivement associés à l'énergie magnétique présente dans la bobine et à l'énergie cinétique de l'arbre de sortie ;
- les deux éléments R décrivent les phénomènes dissipatifs (effet Joule et frottements visqueux) présents dans le circuit électrique et au niveau de l'arbre de sortie ;
- l'élément GY représente le couplage électromécanique ;
- et enfin, l'élément Df modélise un capteur idéal mesurant la vitesse de rotation de l'arbre de sortie.

Ce modèle caractérise le comportement physique du système mais les données et les inconnues du problème n'ont pas été spécifiées (ce qui justifie notamment l'absence de flèche sur le lien de signal au dessus de l'élément MSe sur la figure 3.4). Il correspond à l'ensemble d'équations non orientées suivant :

Éléments I : $$\begin{cases} f_2 - \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} e_2\,dt - \frac{1}{L}\phi_0 = f_2 - \frac{1}{L}\phi = 0 \\ f_6 - \frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t} e_6\,dt - \frac{1}{J_m}p_0 = f_6 - \frac{1}{J_m}p = 0 \end{cases}$$

Éléments R : $$\begin{cases} e_3 - Rf_3 = 0 \\ e_7 - b_m f_7 = 0 \end{cases}$$

Élément GY : $$\begin{cases} e_4 - k_c f_5 = 0 \\ e_5 - k_c f_4 = 0 \end{cases}$$

Élément Df : $$\{ e_8 = 0$$

Jonctions 1 :
$$\begin{cases} f_1 - f_2 = 0 \\ f_3 - f_2 = 0 \\ f_4 - f_2 = 0 \\ \dot{\phi} - u + e_3 + e_4 = 0 \\ f_5 - f_6 = 0 \\ f_7 - f_6 = 0 \\ y - f_6 = 0 \\ \dot{p} - e_5 + e_7 + e_8 = 0 \end{cases}$$

Définition 2 (*[Wu,95, Ngw05, Mar09]*)

Sur un modèle bond graph acausal, une ***ligne de puissance*** *entre deux composants est une série de liens bond graph et d'éléments multiports connectant ces deux composants. Cette ligne caractérise l'acheminement de l'énergie entre deux points du système. Mathématiquement, elle est constituée d'une série de puissances mises en relation par les lois du modèle et dans laquelle une même puissance ne peut intervenir qu'une seule fois.*

Définition 3

Une ***ligne de puissance entrée/sortie (E/S)*** *est une ligne de puissance entre deux éléments bond graph, l'un portant une variable d'entrée et l'autre portant une variable de sortie du modèle.*

Définition 4 (*[Ngw01a]*)

Deux lignes de puissance sont dites ***BG-disjointes*** *si et seulement si elles ne possèdent aucune puissance en commun.*

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu, il existe une seule *ligne de puissance E/S* : celle-ci part de l'élément MSe pour arriver à l'élément Df (liens colorés en bleu sur la figure 3.4).

Concepts causaux

Une notation spécifique (plus largement détaillée à l'annexe A), consistant en l'ajout de traits verticaux aux extrémités des liens bond graph, permet de traduire l'orientation des équations sur un modèle bond graph. Les procédures SCAP [Kar90] et SCAPI [Fot97a] sont en particulier deux procédures permettant la construction de modèles directs et inverses. Elles aboutissent alors respectivement à un modèle *bond graph causal* ou à un modèle *bond graph bicausal*.

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu, l'affectation d'une causalité préférentiellement intégrale [5] au modèle *bond graph acausal* (Fig. 3.4, page 83) conduit à l'obtention du modèle *bond graph causal* de la figure 3.5.

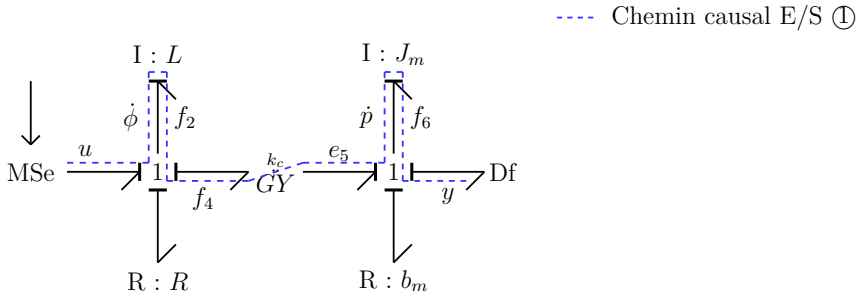


FIGURE 3.5 – *Modèle bond graph causal* de l'exemple du moteur à courant continu

Ce modèle causal représente le système suivant d'équations cette fois-ci orientées (notons que la désignation des variables fait ici référence à la numérotation des liens bond graph de la figure 3.4, page 83, numérotation volontairement omise sur la figure 3.5 pour plus de clarté) :

$$\begin{cases} f_2 := \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} e_2\,dt + \frac{1}{L}\phi_0 := \frac{1}{L}\phi \\ f_6 := \frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t} e_6\,dt + \frac{1}{J_m}p_0 := \frac{1}{J_m}p \\ e_3 := Rf_3 \\ e_7 := b_m f_7 \\ e_4 := k_c f_5 \\ e_5 := k_c f_4 \\ e_8 := 0 \\ f_1 := f_2 \\ f_3 := f_2 \\ f_4 := f_2 \\ \dot{\phi} := u - e_3 - e_4 \\ f_5 := f_6 \\ f_7 := f_6 \\ y := f_6 \\ \dot{p} := e_5 - e_7 - e_8 \end{cases} \tag{3.4}$$

Ce système d'équation peut être notamment représenté par le schéma bloc de la figure 3.6.

5. Un élément de stockage d'énergie est *en causalité intégrale* lorsque la loi de comportement associée est orientée de sorte que la variable de co-énergie est déterminée à partir de la variable d'énergie. Il est dit en *causalité dérivée* lorsqu'à l'inverse, la variable d'énergie est déterminée à partir de la variable de co-énergie [Mar09, Dam03].
De plus, un modèle est dit *en causalité préférentiellement intégrale* (resp. *dérivée*) lorsque la causalité a

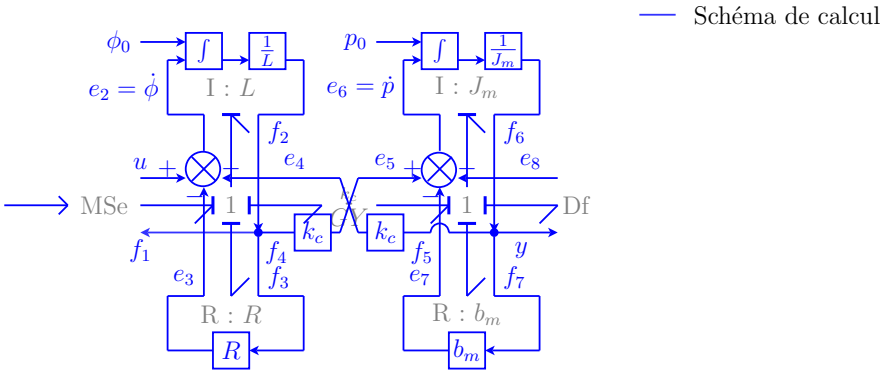


FIGURE 3.6 – Schéma de calcul associé à l'exemple du moteur à courant continu

Dès lors, de nouvelles propriétés peuvent être introduites en tenant compte de certaines manipulations causales du système.

Définition 5 (*[Ngw01a, Wu,95]*)

Sur un modèle bond graph causal, un ***chemin causal*** *est une suite ordonnée de variables (d'effort et/ou de flux) mises en relations les unes aux autres par les équations du modèle. L'ordonnancement de cette suite est conforme à la causalité du modèle. Un chemin causal permet de mettre en évidence comment une variable influe mathématiquement sur une autre variable.*

Définition 6

Un ***chemin causal E/S*** *est un chemin causal entre une variable d'entrée et une variable de sortie du modèle.*

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu, un exemple de *chemin causal E/S* est montré sur la figure 3.5 (page 85). Ce chemin correspond à la suite de variables suivante : ① $= \{u, \dot{\phi}, f_2, f_4, e_5, \dot{p}, f_6, y\}$. Conformément à l'orientation des équations (3.4) (page 85), il montre ainsi comment la variable u est impliquée dans l'expression de y :

$$\begin{aligned} y &:= f_6 \\ &:= \frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t} e_6\, dt + \frac{1}{J_m} p_0 \end{aligned}$$

été propagée de manière à maximiser le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (resp. dérivée).

$$
\begin{aligned}
y &:= \frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t}(e_5 - e_7 - e_8)\,dt + \frac{1}{J_m}p_0 \\
&:= \frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t}(k_c f_4 - b_m f_7 - 0)\,dt + \frac{1}{J_m}p_0 \\
&:= \frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t}(k_c f_2 - b_m f_6)\,dt + \frac{1}{J_m}p_0 \\
&:= \frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t}(k_c(\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} e_2\,dt + \frac{1}{L}\phi_0) - b_m(\frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t} e_6\,dt + \frac{1}{J_m}p_0))\,dt + \frac{1}{J_m}p_0 \\
&:= \frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t}(k_c(\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}(u - e_3 - e_4)\,dt + \frac{1}{L}\phi_0) - b_m(\frac{1}{J_m}\int_{t_0}^{t} e_6\,dt + \frac{1}{J_m}p_0))\,dt + \frac{1}{J_m}p_0
\end{aligned}
$$

Ce chemin est surligné sur le schéma bloc de la figure 3.7. Il permet de mettre en évidence le nombre d'intégrations (retards) ou de dérivations (avances) nécessaires pour calculer la variable y à partir de la connaissance de u.

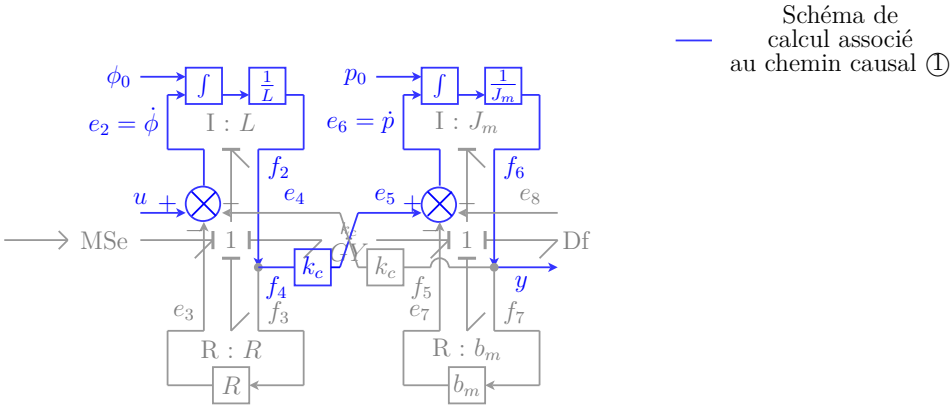


FIGURE 3.7 – Schéma de calcul associé au chemin causal ① de l'exemple du moteur à courant continu

Définition 7 (*[Rah92, Rah93]*)

Sur un modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, deux chemins causaux sont dits ***BG-différents*** *s'ils ne possèdent aucun élément de stockage d'énergie en causalité intégrale en commun.*

Définition 8 (*[Ngw01a]*)

Deux chemins causaux sont dits ***BG-disjoints*** *si et seulement s'ils ne possèdent aucune variable en commun.*

Remarquons ainsi que si deux chemins causaux sont BG-disjoints alors ils sont nécessairement BG-différents. La réciproque n'est cependant pas toujours vraie dans le cas général.

Exemple :

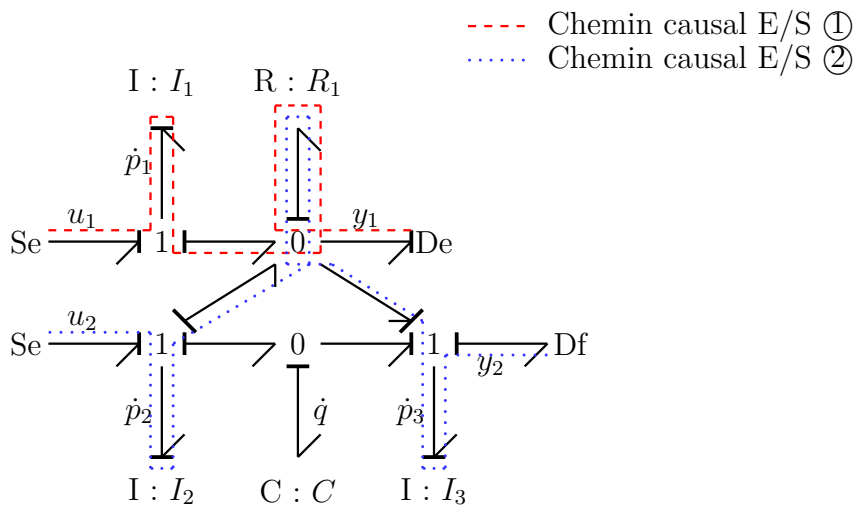


FIGURE 3.8 – Exemple de deux chemins causaux *BG-différents* mais non *BG-disjoints*

Le modèle bond graph de la figure 3.8 fournit l'exemple de deux chemins causaux ① et ② possédant uniquement un élément R en commun : ils sont donc *BG-différents* mais pas *BG-disjoints*.

Enfin, outre ces outils utiles à l'analyse structurelle d'un modèle bond graph, donnons désormais quelques résultats supplémentaires plus spécifiquement orientés pour l'inversion de modèle et donc pour la méthodologie de dimensionnement par modèles inverses. En l'occurrence, afin d'appréhender plus en détails les critères d'inversibilité d'un modèle bond graph (critères évoqués lors de la section 3.5.1, page 124), précisons ici comment le déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (définition 14, page 313) peut être déterminé directement à partir d'un modèle bond graph. Pour cela, deux approches sont étudiées : une première faisant intervenir la notion de modèle bond graph réduit (théorème 1, page 89), puis une seconde, que nous proposons, comme étant une méthode alternative pour calculer le déterminant de la matrice système sans recours au concept de modèle bond graph réduit (théorème 2, page 91). Toutefois, notons dès à présent que ces deux approches sont équivalentes et que l'utilisation de l'une ou l'autre de ces deux méthodes dépend de l'objectif recherché (nous verrons notamment que la deuxième approche permet d'obtenir le déterminant directement sous la forme d'un polynôme en s, critère qui peut, dans certains cas, être avantageux et éviter une remanipulation ultérieure).

Commençons par étudier la première approche. Grâce à l'introduction de la notion de modèle bond graph réduit (définition 41, page 333) et à l'équivalence entre les familles de cycles contenant obligatoirement m arcs de retour (définition 24, page 316) et les ensembles de m chemins causaux E/S BG-différents (définition 7, page 87), RAHMANI a pu énoncer le résultat suivant, résultat très proche du théorème 11 (page 320) de l'approche digraphe :

Théorème 1 (*Modèle bond graph* → $\det \mathbf{P}(s)$ *[Rah93, Ber97a]*)

Le déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ *est donné par l'expression suivante :*

$$\det \mathbf{P}(s) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^{\sigma_{\mathcal{E}_i}} \tilde{G}_{\mathcal{E}_i} P_{R,\mathcal{E}_i}(s)$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale :
- *q est le nombre d'ensembles de m chemins causaux E/S BG-différents ;*
- *$\mathcal{E}_i$ est le $i^{\text{ème}}$ ensemble de m chemins causaux E/S BG-différents ;*
- *$\tilde{G}_{\mathcal{E}_i}$ est le produit des gains statiques des m chemins causaux appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_i$;*
- *$P_{R,\mathcal{E}_i}(s)$ est le polynôme caractéristique du bond graph réduit associé à l'ensemble $\mathcal{E}_i$;*
- *$\sigma_{\mathcal{E}_i}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties de l'ensemble $\mathcal{E}_i$ dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les m chemins causaux de l'ensemble $\mathcal{E}_i$ sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Remarque : La prise en compte des valeurs $\sigma_{\mathcal{E}_i}$ nous permet d'obtenir un résultat identique quelle que soit la numérotation choisie pour les ensembles $\mathcal{E}_i$ de m chemins causaux E/S BG-différents. Aussi, le polynôme caractéristique d'un modèle bond graph réduit est calculé de la même façon que celle énoncée au théorème 12 (page 329). Enfin, rappelons que le calcul d'un tel déterminant suppose que le système soit carré (*i.e.* même nombre de variables d'entrée que de sortie).

Exemple :

Considérons le modèle bond graph de la figure 3.9 correspondant au modèle d'état (C.6) (page 314).

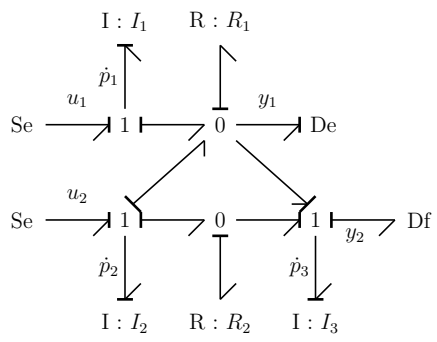
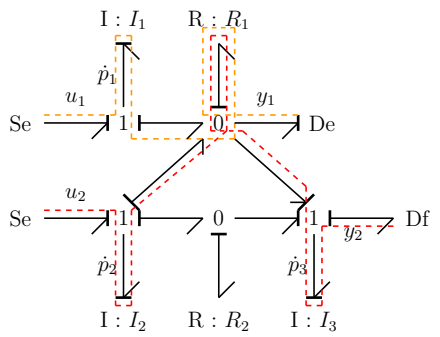
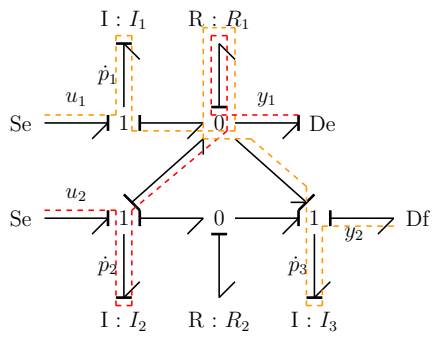


FIGURE 3.9 – Exemple de modèle bond graph pour le calcul du déterminant de la matrice système

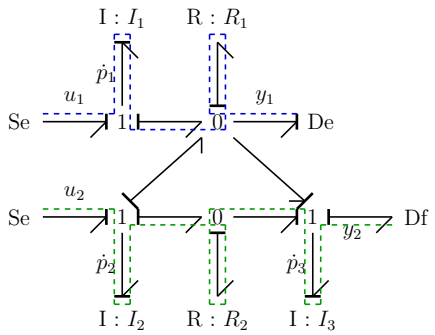
Une analyse causale de ce modèle permet de montrer qu'il existe trois ensembles de 2 chemins causaux E/S BG-différents (Fig. 3.10(a), 3.10(b) et 3.10(c)).



(a) Ensemble $\mathcal{E}_1$ de chemins BG-différents non BG-disjoints



(b) Ensemble $\mathcal{E}_2$ de chemins BG-différents non BG-disjoints



(c) Ensemble $\mathcal{E}_3$ de chemins BG-disjoints

FIGURE 3.10 – Calcul du déterminant de la matrice système par l'approche bond graph

Procédons alors au calcul du déterminant de la matrice système $\det \mathbf{P}(s)$. Chacun des ensembles de 2 chemins causaux E/S passant par tous les éléments dynamiques du modèle, leurs modèles bond graph réduits associés ne comportent aucun élément de stockage d'énergie en causalité intégrale et leurs polynômes caractéristiques réduits $P_{R,\mathcal{E}_i}$ sont égaux à 1. Selon le théorème 1, nous obtenons alors :

$$\det \mathbf{P}(s) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{\sigma_{\mathcal{E}_i}} \tilde{G}_{\mathcal{E}_i} P_{R,\mathcal{E}_i}(s) = \frac{R_1^2}{I_1 I_2 I_3} - \frac{R_1^2}{I_1 I_2 I_3} + \frac{R_1 R_2}{I_1 I_2 I_3} = \frac{R_1 R_2}{I_1 I_2 I_3}$$

Remarquons ainsi que le résultat obtenu par l'approche bond graph est bien identique au résultat obtenu par l'approche algébrique (équation (C.7), page 314).

Remarque : À partir de cette section et dans toute la suite de ce mémoire, les définitions, procédures, propriétés ou théorèmes qui font l'objet d'une contribution sont identifiables par un encadré en trait épais.

Cependant, en étendant les définitions relatives aux familles de cycles causaux (définitions 38, 39 et 40, page 328) et en introduisant ainsi la notion de famille bond graph (définitions 9, 10 et 11), nous pouvons montrer qu'il existe une approche bond graph

alternative pour calculer le déterminant de la matrice système $\det \mathbf{P}(s)$ et ce, sans passer par la construction de modèles bond graph réduits.

Définition 9

*Une **famille bond graph** $\mathcal{F}_i$ est un ensemble constitué de cycles causaux et de chemins causaux E/S BG-différents.*

Définition 10

*Le **gain BG** $G_{\mathcal{F}_i}$ (resp. **gain statique** $\tilde{G}_{\mathcal{F}_i}$) **d'une famille bond graph** $\mathcal{F}_i$ est égal au produit des gains BG (resp. gains statiques) des cycles causaux et des chemins causaux composant la famille considérée.*

Définition 11

*Sur un modèle bond graph causal, la **longueur BG** $l_{\mathcal{F}_i}$ **d'une famille bond graph** est égale au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale contenus dans cette famille (*i.e. *traversés le long des cycles causaux et des chemins causaux constituant cette famille).*

En effet, en reprenant le théorème énoncé pour calculer le déterminant de la matrice système $\det \mathbf{P}(s)$ à partir du digraphe associé (théorème 11, page 320) et en exploitant la correspondance existante entre les cycles disjoints contenant des arcs de retour sur le digraphe et les chemins causaux E/S BG-différents sur le modèle bond graph, nous pouvons directement conclure que :

Théorème 2 (*Modèle bond graph* $\rightarrow$ $\det \mathbf{P}(s)$)

Le déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ est donné par l'expression suivante :

$$\det \mathbf{P}(s) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{m\}} s^{n-k}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale :

- *n et m correspondent respectivement au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intrégrale et au nombre d'entrées ;*
- *$\rho_k^{\{m\}}$ correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph de longueur BG égale à k et contenant comme chemins causaux uniquement m chemins causaux E/S BG-différents. Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph $\mathcal{F}_l$ doit être multiplié par $(-1)^{d_l}$ où d_l est le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique doit également être multiplié par $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_l}}$ où $\sigma_{\mathcal{F}_l}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les m chemins causaux de la famille $\mathcal{F}_l$ sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Remarque : Si les familles bond graph considérées pour calculer le cœfficient $\rho_k^{\{m\}}$ doivent contenir exactement m chemins causaux E/S BG-différents, celles-ci peuvent également contenir des cycles causaux BG-différents à condition qu'ils soient également BG-différents

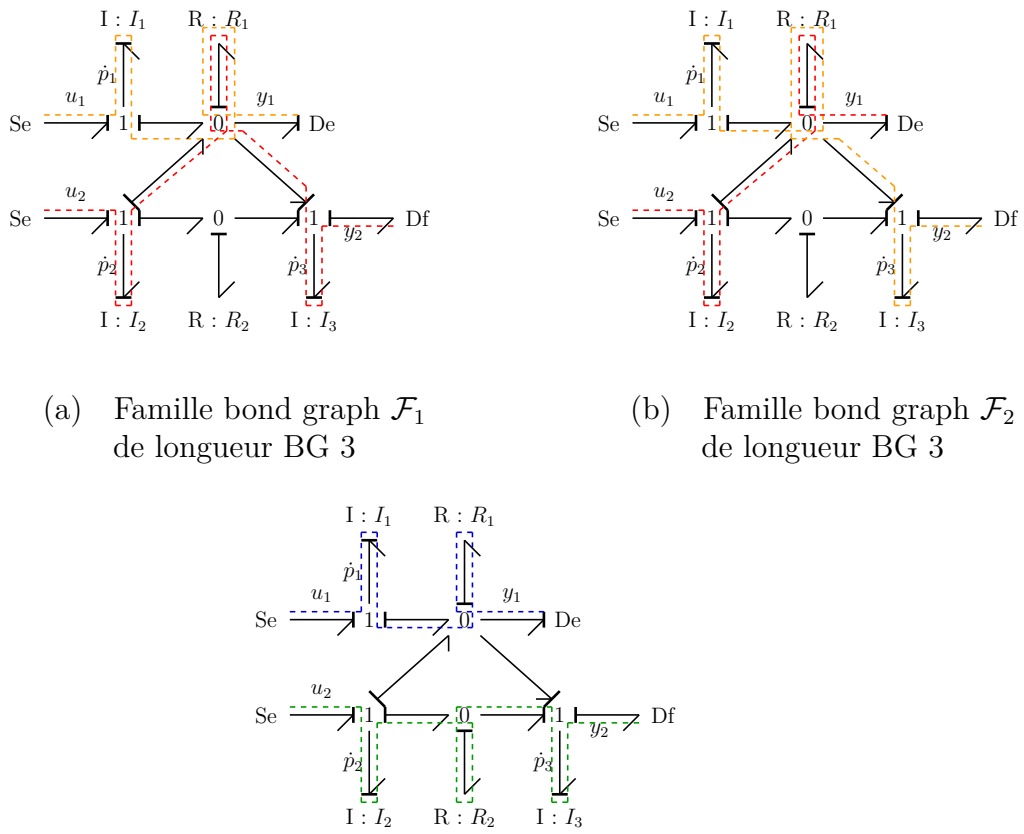
avec ces chemins causaux et que la longueur BG de la famille soit égale à k.

Donnant directement les cœfficients des monômes en s de $\det \mathbf{P}(s)$, nous verrons que la formulation de ce théorème sera particulièrement utile lors de la section 3.5.1 sur les critères d'inversibilité (page 124). En attendant, les deux exemples suivants s'attachent à montrer, d'une part, que ce théorème 2 donne un résultat identique à l'approche algébrique puis, d'autre part, qu'il évite la construction de modèles bond graph réduits contrairement au théorème 1 (page 89).

Exemple 1 :

Reprenons l'exemple précédent et calculons le déterminant de la matrice système associée cette fois-ci grâce au théorème 2.
Une analyse causale du modèle bond graph de la figure 3.9 (page 89) permet de montrer :

- qu'il n'existe aucune famille bond graph de longueur BG égale à 0, 1 ou 2 ;
- qu'il existe trois familles bond graph de longueur BG égale à 3 (Fig. 3.11).



(a) Famille bond graph $\mathcal{F}_1$ de longueur BG 3

(b) Famille bond graph $\mathcal{F}_2$ de longueur BG 3

(c) Famille bond graph $\mathcal{F}_3$ de longueur BG 3

FIGURE 3.11 – Calcul du déterminant de la matrice système par l'approche bond graph

Procédons alors au calcul du déterminant de la matrice système $\det \mathbf{P}(s)$. Selon le

théorème 2, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{P}(s) &= \sum_{k=0}^{3} \rho_k^{\{2\}} s^{3-k} \\
&= \left((-1)^{d_1}(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_1}}\tilde{G}_{\mathcal{F}_1} + (-1)^{d_2}(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_2}}\tilde{G}_{\mathcal{F}_2} + (-1)^{d_3}(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_3}}\tilde{G}_{\mathcal{F}_3}\right) s^{3-3} \\
&= (-1)^0(-1)^0 \left(\frac{R_1}{I_1}\right)\left(\frac{R_1}{I_2 I_3}\right) + (-1)^0(-1)^1 \left(\frac{R_1}{I_1 I_3}\right)\left(\frac{R_1}{I_2}\right) \\
&\quad + (-1)^0(-1)^0 \left(\frac{R_1}{I_1}\right)\left(\frac{R_2}{I_2 I_3}\right) \\
&= \frac{R_1 R_2}{I_1 I_2 I_3}
\end{aligned}$$

Remarquons ainsi que le résultat obtenu par le théorème 2 est bien identique au résultat obtenu par l'approche algébrique (équation (C.7), page 314).

Exemple 2 :

Considérons le modèle bond graph de la figure 3.12 correspondant au modèle d'état (C.2) (page 313) et calculons le déterminant de la matrice système associée respectivement à partir des théorèmes 1 et 2 (pages 89 et 91).

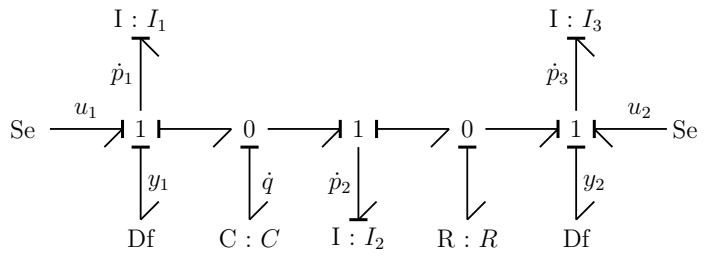


FIGURE 3.12 – Exemple de modèle bond graph pour le calcul du déterminant de la matrice système

Calcul avec l'intermédiaire de modèles bond graph réduits : Une analyse causale du modèle bond graph de la figure 3.12 nous permet de montrer qu'il existe un unique ensemble $\mathcal{E}_1$ de chemins causaux E/S BG-différents (Fig. 3.13).

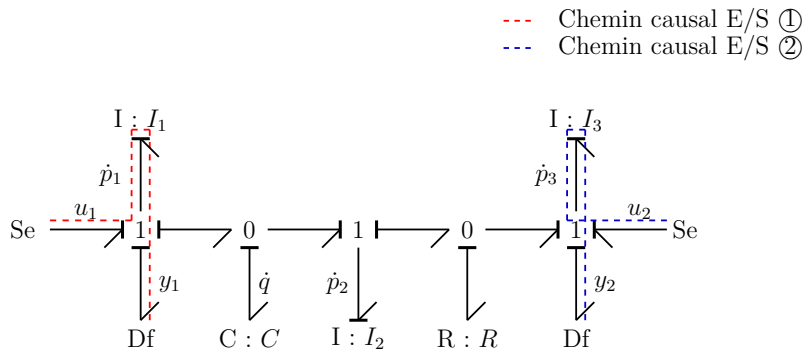


FIGURE 3.13 – Ensemble $\mathcal{E}_1$ de chemins causaux E/S BG-différents

Pour calculer le déterminant de la matrice système associée selon le théorème 1 (page 89), il suffit donc de déterminer le modèle bond graph réduit associé à cet ensemble $\mathcal{E}_1$ (Fig. 3.14).

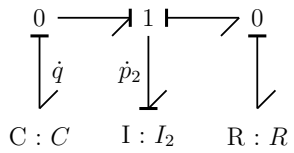


FIGURE 3.14 – Modèle bond graph réduit associé à l'ensemble $\mathcal{E}_1$

Une analyse causale de ce modèle bond graph réduit nous permet de montrer qu'il existe deux cycles causaux $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de longueurs BG respectives 1 et 2 et de déterminer ainsi les cœfficients α_i du polynôme caractéristique associé $P_{R,\mathcal{E}_1}(s)$ (Tab. 3.1). Le théorème 12 (page 329) nous permet alors de conclure que :

$$P_{R,\mathcal{E}_1}(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} = s^2 + \frac{R}{I_2}s + \frac{1}{I_2 C}$$

D'où, d'après le théorème 1 (page 89) :

$$\begin{aligned}\det \mathbf{P}(s) =& (-1)^{\sigma_{\mathcal{E}_1}} \tilde{G}_{\mathcal{E}_1} P_{R,\mathcal{E}_1}(s) = (-1)^0 \left(\frac{1}{I_1 I_3}\right)\left(s^2 + \frac{R}{I_2}s + \frac{1}{I_2 C}\right) \\ =& \frac{1}{I_1 I_3}s^2 + \frac{R}{I_1 I_2 I_3}s + \frac{1}{I_1 I_2 I_3 C} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Calcul sans l'intermédiaire de modèles bond graph réduits : Une analyse causale du modèle bond graph de la figure 3.12 nous permet de conclure :

- qu'il n'existe aucune famille bond graph de longueur BG 0 ou 1 ;
- qu'il existe une famille bond graph $\mathcal{F}_1$ de longueur BG 2 constituée uniquement de l'ensemble $\mathcal{E}_1$;
- qu'il existe une famille bond graph $\mathcal{F}_2$ de longueur BG 3 constituée de l'ensemble $\mathcal{E}_1$ et du cycle causal $\mathcal{C}_1$;
- qu'il existe une famille bond graph $\mathcal{F}_3$ de longueur BG 4 constituée de l'ensemble $\mathcal{E}_1$ et du cycle causal $\mathcal{C}_2$.

Par conséquent, d'après le théorème 2 (page 91), nous pouvons directement conclure que :

$$\begin{aligned}\det \mathbf{P}(s) =& \sum_{k=0}^{4} \rho_k^{\{2\}} s^{4-k} \\ =& \left((-1)^{d_1}(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_1}}\tilde{G}_{\mathcal{F}_1}\right) s^{4-2} + \left((-1)^{d_2}(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_2}}\tilde{G}_{\mathcal{F}_2}\right) s^{4-3} \\ &+ \left((-1)^{d_3}(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_3}}\tilde{G}_{\mathcal{F}_3}\right) s^{4-4} \\ =& \left((-1)^0(-1)^0\left(\frac{1}{I_1 I_3}\right)\right) s^{4-2} + \left((-1)^1(-1)^0\left(\frac{1}{I_1 I_3}\right)\left(\frac{-R}{I_2}\right)\right) s^{4-3} \\ &+ \left((-1)^1(-1)^0\left(\frac{1}{I_1 I_3}\right)\left(\frac{-1}{I_2 C}\right)\right) s^{4-4} \\ =& \frac{1}{I_1 I_3}s^2 + \frac{R}{I_1 I_2 I_3}s + \frac{1}{I_1 I_2 I_3 C}\end{aligned}$$

Nous retrouvons donc bien le même résultat (3.5) qu'avec le théorème 1 (page 89) mais cette fois-ci sans construire de modèle bond graph réduit.

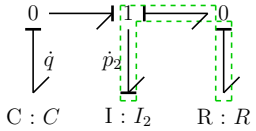
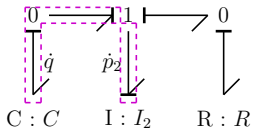
α_i	Familles de cycles causaux sur le modèle bond graph	$(-1)^{d_k}\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
α_1	(a) Cycle $\mathcal{C}_1$ de longueur 1 ($d = 1$). 	$\frac{R}{I_2}$
α_2	(b) Cycle $\mathcal{C}_2$ de longueur 2 ($d = 1$). 	$\frac{1}{I_2 C}$

TABLE 3.1 – Calcul des cœfficients α_i du polynôme caractéristique $P_{R,\mathcal{E}_1}(s)$ par l'approche bond graph

3.4 Notion de niveaux d'analyse

Maintenant que les différentes approches ont été introduites, il nous paraît utile de les confronter afin d'évaluer leurs ressemblances et/ou leurs différences et de voir si celles-ci mènent à une même analyse d'un système. Pour cela, cette section compare l'approche bond graph tout d'abord à l'approche modèle d'état puis, à l'approche système structuré. Quand elle existe, une procédure est donnée pour passer d'une approche à l'autre et quand cette traduction est impossible, les raisons sont expliquées. Ensuite, une brève discussion est menée afin de montrer que ces approches présentent finalement des degrés d'information et de description différents et qu'elles induisent ainsi des degrés d'analyse également différents. De ces constatations en découle la proposition d'une classification des différents niveaux d'analyse. Enfin, la section se termine par quelques pistes données sur la manière dont peut être mise à profit cette classification des niveaux d'analyse dans une démarche de conception. Cet argument sera notamment étayé par quelques exemples où les spécifications portent sur l'ordre relatif d'une sortie (définition 12, page 312) ou sur la structure à l'infini du système (annexe E, page 345). Nous montrerons alors que la reformulation des propriétés bond graph correspondantes selon les différents niveaux d'analyse proposés autorise la reconception au plus tôt du système lorsque les spécifications recherchées ne sont pas vérifiées.

3.4.1 Correspondances et procédures de passage d'un formalisme à l'autre

Afin d'établir un certain nombre de correspondances entre les différentes approches, étudions tout d'abord dans quelle mesure il est possible de passer d'un formalisme à l'autre.

D'un modèle bond graph à un modèle d'état

La traduction d'un modèle bond graph en un modèle d'état est possible que ce soit sous forme d'une représentation matricielle ou bien d'un digraphe.

En effet, grâce à la procédure SCAP (annexe A.5.1), une fois qu'une causalité préférentiellement intégrale a été affectée au modèle bond graph, les équations du modèle d'état peuvent être obtenues par simple calcul de gains de chemins causaux appropriés (définitions 32 et 33, page 325). Pour cela, il suffit d'appliquer la procédure expliquée ci-dessous [Fot97a] ou bien celle équivalente de [Rah98, Oul06].

Procédure 1 (*Modèle bond graph → modèle d'état analytique [Fot97a]*)

Soit un modèle bond graph représentant un système linéaire et invariant dans le temps et qui ne présente ni boucle algébrique[6]*, ni élément de stockage en causalité dérivée (lorsque le modèle est en causalité préférentiellement intégrale).*
L'affectation d'une causalité préférentiellement intégrale permet alors d'en déduire un modèle d'état de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

où :

- $\mathbf{x}$ *est le vecteur d'état constitué des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (*$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_{I(I)}}$*, voir définition 27, page 323) ;*
- $\mathbf{u}$ *(resp.* $\mathbf{y}$*) est constitué des variables d'entrée (resp. de sortie) associées aux éléments source (resp. détecteurs).*

Pour cela, les cœfficients des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *doivent être calculés de sorte que :*

$$\forall (i,j), \begin{cases} a_{ij} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \tilde{G}_k(\dot{x}_j, \dot{x}_i) \\ b_{ij} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k(u_j, \dot{x}_i) \\ c_{ij} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \tilde{G}_k(\dot{x}_j, y_i) \\ d_{ij} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(u_j,y_i)=0} \tilde{G}_k(u_j, y_i) \end{cases}$$

où $\tilde{G}_k(v_i, v_j)$ *correspond au gain statique du chemin causal* ⓚ *existant entre les variables* v_i *et* v_j *et dont l'ordre est* $\omega_k(v_i, v_j)$*.*

6. Une *boucle algébrique* correspond sur un modèle bond graph à une boucle causale d'ordre BG 0

Exemple :

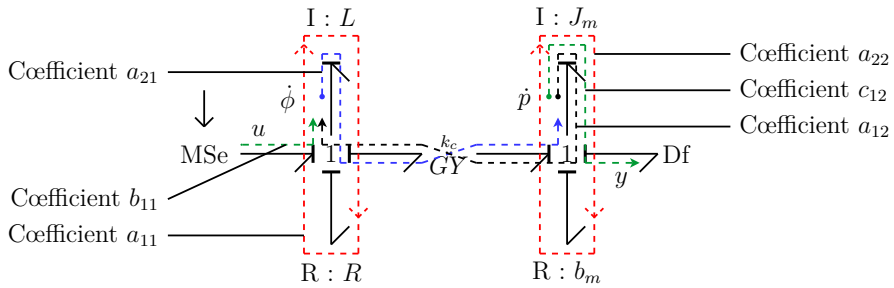


FIGURE 3.15 – Détermination de la représentation matricielle d'état dans l'exemple du moteur à courant continu

Dans le cas du moteur à courant continu, le modèle d'état (3.2) (page 79) peut être obtenu en calculant les gains statiques des chemins causaux de la figure 3.15.

Remarque : Dans [Rah98], RAHMANI et DAUPHIN-TANGUY ont montré que la procédure précédente pouvait être étendue aux modèles bond graph présentants des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée (lorsque les modèles sont en causalité préférentiellement intégrale).

Concernant maintenant la traduction d'un modèle bond graph en un digraphe, deux procédures ont d'ores et déjà été présentées par RAHMANI dans [Rah93] :

- la première procédure consiste à déterminer les équations du modèle d'état à partir du modèle bond graph (procédure 1, page 96) et à en déduire ensuite le digraphe correspondant (section 3.3.1, page 80) ;
- la seconde procédure consiste à déterminer le digraphe correspondant directement à partir du modèle bond graph en étudiant uniquement l'existence et les gains statiques (définition 33, page 325) de chemins causaux appropriés (procédure 2, page 98).

(*e.g.* entre deux éléments R, entre un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale et un autre en causalité dérivée, ...). Elle traduit l'existence d'une relation algébrique entre plusieurs variables du modèle.

Procédure 2 (*Modèle bond graph → digraphe [Rah93]*)

Soit un modèle bond graph représentant un système linéaire et invariant dans le temps et qui ne présente ni boucle causale entre deux élements R, ni élément de stockage en causalité dérivée (lorsque le modèle est en causalité préférentiellement intégrale).
L'affectation d'une causalité préférentiellement intégrale permet alors d'obtenir le digraphe correspondant si les règles suivantes sont appliquées[7] *:*

1. *Chaque variable d'énergie associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale, chaque variable d'entrée associée à une source d'effort ou de flux et chaque variable de sortie associée à un détecteur d'effort ou de flux sont respectivement représentées par un sommet d'état x_i, d'entrée u_i et de sortie y_i sur le digraphe.*
2. *Un chemin causal de longueur BG 1 reliant une variable d'énergie x_i associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale à elle-même (boucle causale) est représenté par un arc reliant le sommet d'état correspondant x_i à lui-même (boucle).*
3. *Un chemin causal de longueur BG 0 reliant une variable d'entrée u_i associée à une source à une variable d'énergie x_i associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale est représenté par un arc reliant le sommet d'entrée u_i au sommet d'état x_i.*
4. *Un chemin causal de longueur BG 0 reliant une variable d'énergie x_i associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale à une variable de sortie y_i associée à un détecteur est représenté par un arc reliant le sommet d'état x_i au sommet de sortie y_i.*
5. *Un chemin causal de longueur BG 1 reliant une variable d'énergie x_i associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale à une autre variable d'énergie x_j associée à un élément distinct de stockage d'énergie en causalité intégrale est remplacé par un arc reliant le sommet d'état x_i au sommet d'état x_j.*
6. *Un chemin causal de longueur BG 0 reliant une variable d'entrée u_i associée à une source à une variable de sortie y_i associée à un détecteur est remplacé par un arc reliant le sommet d'entrée u_i au sommet de sortie y_i.*
7. *Chaque arc a un poids égal au gain statique du chemin causal à partir duquel il a été construit.*

Remarque : Lorsque plusieurs chemins causaux existent entre deux variables v_i et v_j, deux cas de figure peuvent se présenter :

- soit la somme de leurs gains statiques est nulle et dans ce cas, aucun arc n'est à ajouter sur le digraphe correspondant ;
- soit la somme de leurs gains statiques est non nulle et dans ce cas, un arc de poids égal à cette somme doit être ajouté entre les sommets v_i et v_j.

7. Par rapport à la version originelle de Rahmani, nous avons préféré parler de chemin causal entre deux variables associées à des éléments bond graph plutôt que de chemin causal entre deux éléments bond graph afin d'éliminer toute ambiguïté quant à la mise en œuvre de la procédure. En outre, la règle 6 a été rajoutée, ceci afin d'insister sur le fait que les modèles peuvent présenter une matrice **D** non nulle.

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu, il est possible de déduire le digraphe de la figure 3.2 (page 80) directement à partir du modèle bond graph de la figure 3.5 (page 85) en étudiant les mêmes chemins causaux que ceux de la figure 3.15 (page 97). Par exemple, nous pouvons constater que le poids $\frac{k_c}{L}$ du chemin orienté $\{\phi, p\}$ (Fig. 3.2, page 80) correspond à la partie constante de $\frac{k_c}{Ls}$ qui est le gain du chemin causal correspondant au cœfficient a_{21} (Fig. 3.15, page 97).

D'un modèle d'état à un modèle bond graph

Maintenant, si nous désirons construire un modèle bond graph à partir d'une représentation d'état, l'opération est plus difficile. En fait, puisque le langage bond graph repose sur la description d'un système d'un point de vue énergétique, la construction d'un modèle bond graph requiert la connaissance d'un minimum d'information sur le système, à savoir :

- quels types de phénomènes sont pris en compte dans le modèle (quels sont ceux qui stockent, apportent ou dissipent de l'énergie ?) ;
- de quelle façon sont interconnectés ces différents phénomènes (quelles sont les connexions en série/parallèle, à effort/flux commun ?).

Or, une représentation d'état ne contient pas naturellement ce type d'information. Par conséquent, si aucune information n'est ajoutée, la traduction de cette représentation d'état en un modèle bond graph est impossible [8].

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu, si nous observons sa représentation d'état (3.2) (page 79), nous constatons que le paramètre L apparaît dans deux cœfficients de la matrice $\mathbf{A}$. Si aucune indication textuelle n'est ajoutée, il n'est pas possible dire que ce paramètre correspond à un seul et même phénomène de stockage d'énergie et donc à un seul élément I sur le modèle bond graph du moteur.

D'un modèle bond graph à un système structuré

Comme démontrés lors des sections précédentes, puisque les passages modèle bond graph/modèle d'état et modèle d'état/système structuré sont possibles, il est également possible de déduire un système structuré d'un modèle bond graph. Pour cela, il suffit simplement de déduire le modèle d'état associé au modèle bond graph comme nous l'avons vu lors de la procédure 1 (page 96), puis de transformer cette représentation d'état, conformément à l'approche système structuré, en la paramétrant par un vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ (section 3.3.2, page 80). Notons cependant qu'une deuxième méthode plus directe existe. Celle-ci consiste à construire un digraphe structuré directement à partir du modèle bond graph en suivant la procédure 2 (page 98) mais en ne considérant ici que l'existence (ou la non-existence) des chemins causaux appropriés : il suffira ensuite de paramétrer les poids des arcs par des λ_i indépendants entre eux.

8. En réalité, si aucune information n'est ajoutée, à un modèle d'état peuvent correspondre plusieurs modèles bond graph.

D'un système structuré à un modèle bond graph

De la même manière que pour le passage d'un modèle d'état à un modèle bond graph, celui d'un système structuré à un modèle bond graph est impossible. Ceci s'explique par la même raison que précédemment : un système structuré ne contient pas suffisamment d'information par rapport à ce qui est demandé pour construire un modèle bond graph. Si l'opération précédente (qui consistait à transformer un modèle bond graph en un système structuré) était si facile, c'est parce que celle-ci impliquait une perte d'information : seule la structure du modèle était conservée. Or, pour passer d'un système structuré à un modèle bond graph, à l'inverse, il faut rajouter de l'information.

3.4.2 Différents niveaux d'information et de description...

Si la section précédente s'attachait à montrer une certaine correspondance entre les différentes approches, voyons désormais en quoi celles-ci se distinguent les unes par rapport aux autres. Revenons notamment sur les raisons qui expliquent qu'il n'est pas toujours possible de passer d'un formalisme à l'autre : les différents niveaux de description et d'information.

Niveaux de description

Tout d'abord, nous pouvons constater que le concept de chemin orienté sur un digraphe (ou sur un digraphe structuré) est différent du concept de chemin causal sur un modèle bond graph. En effet, dans le premier cas, un chemin consiste en une série d'arcs reliant des nœuds associés à des variables d'entrée, d'état et de sortie, alors que, dans le second cas, il implique une série de variables d'entrée, d'état, algébriques et de sortie. Par conséquent, la notion de chemin causal au sens du langage bond graph semble plus détaillée : elle permet de donner plus d'information sur les différentes étapes à effectuer pour exprimer une variable en fonction d'une autre. De plus, *via* les éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale ou dérivée, la notion de chemin causal montre explicitement les opérations d'intégration ou de dérivation qu'il faudra effectuer. Si une telle information peut être utile pour détecter certaines difficultés numériques, celle-ci est totalement absente de la notion de chemin orienté sur un digraphe. En réalité, cette différence de concept vient essentiellement du fait que les approches impliquent des niveaux de description différents : l'approche bond graph permet une description très locale [9] (notamment par la représentation des différents phénomènes) alors que les approches systèmes structurés et modèle d'état sont, elles, beaucoup plus globales (un certain nombre d'éliminations est implicitement effectué).

9. La description est qualifiée ici de locale car liée à la représentation des phénomènes énergétiques. Notons cependant que nous restons ici dans le cadre de modèles à paramètres localisés et non répartis.

Exemple :

Considérons le modèle bond graph de la figure 3.16 issu de la thèse de Fotsu-Ngwompo [Fot97a].

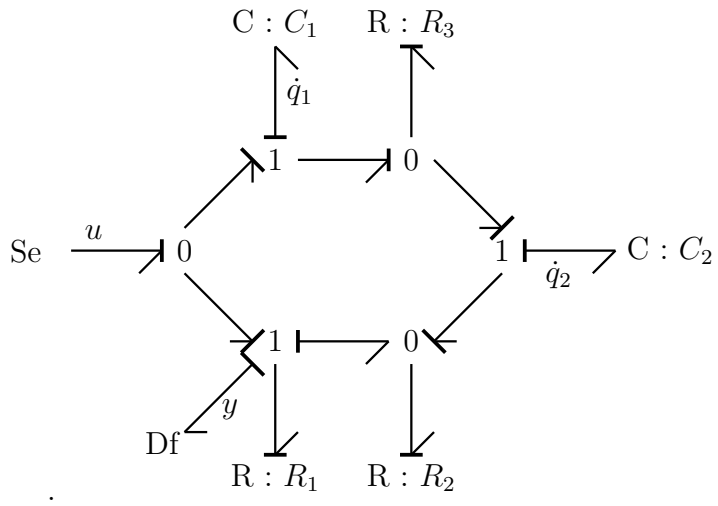


Figure 3.16 – Modèle bond graph de l'exemple de Fotsu-Ngwompo [Fot97a]

En analysant les différents chemins causaux entre deux éléments de stockage d'énergie, entre un même élément de stockage d'énergie, et, entre un élément de stockage d'énergie et une entrée ou une sortie, nous pouvons alors faire correspondre à ce modèle bond graph le digraphe de la figure 3.17.

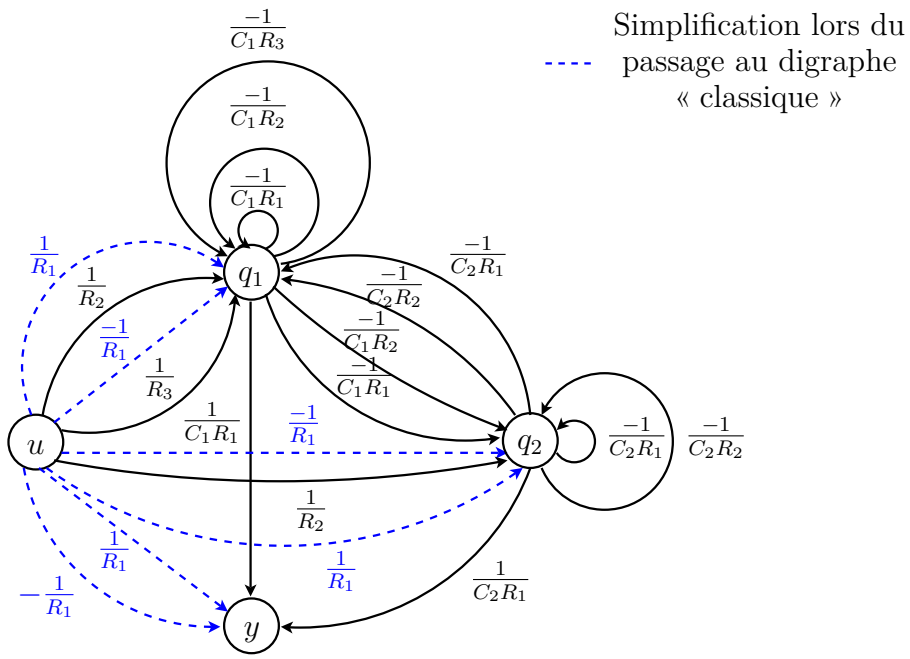


Figure 3.17 – Digraphe « éclaté » de l'exemple de Fotsu-Ngwompo [Fot97a]

Ici, nous constatons alors qu'il existe parfois plusieurs chemins orientés entre deux mêmes variables (*e.g.* deux chemins orientés existent entre l'entrée u et la sortie y) : en procédant ainsi, nous avons donc construit non pas un digraphe « classique » mais un digraphe que nous pourrons qualifier d'« éclaté ». Ce digraphe « éclaté » correspond en fait au niveau de description local du modèle bond graph mais n'est pas tout à fait conforme à ce qui est exigé au niveau des approches modèle d'état ou système structuré qui requièrent elles un niveau de description plus global. Ce niveau de détail permet de mettre en évidence certaines éliminations qui sont implicitement faites au niveau du modèle d'état. Par exemple, nous constatons alors que, s'il existe bien deux arcs orientés directs entre u et y, ceux-ci étant de poids opposés, ils se simplifient et n'apparaissent plus dans le modèle d'état (3.6) du système correspondant (modèle obtenu en appliquant la procédure 1, page 96).

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1R_1} - \frac{1}{C_1R_2} - \frac{1}{C_1R_3} & -\frac{1}{C_2R_1} - \frac{1}{C_2R_2} \\ -\frac{1}{C_1R_1} - \frac{1}{C_1R_2} & -\frac{1}{C_2R_1} - \frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_2} \end{pmatrix} (u) \\ (y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} & \frac{1}{C_2R_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.6}$$

L'application de la procédure 2 (page 98) quant à elle nous aurait permis d'obtenir directement un digraphe classique, c'est-à-dire correspondant à un niveau global de description. Les cas où il existe plusieurs chemins causaux entre deux mêmes variables v_i et v_j et où la somme de leurs gains statiques est nulle sont directement pris en compte (comparaison entre les figures 3.17 et 3.18).

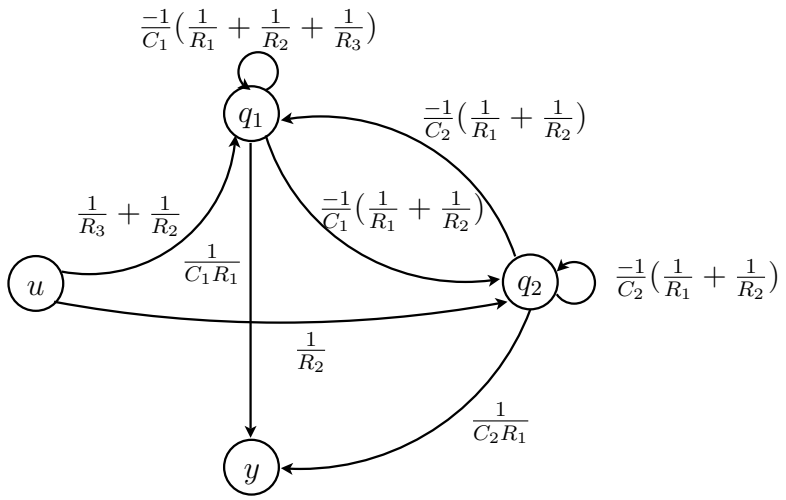


FIGURE 3.18 – Digraphe de l'exemple de FOTSU-NGWOMPO [Fot97a]

De la même manière, les notions de chemins disjoints au sens des digraphes et de chemins BG-différents ou BG-disjoints au sens du langage bond graph révèlent là encore une différence de niveaux de description. En effet, puisque chaque élément de stockage d'énergie en causalité intégrale correspond à un sommet sur le digraphe associé, nous pouvons conclure que deux chemins causaux BG-différents (définition 7, page 87) se traduisent nécessairement par deux chemins orientés disjoints au sens des digraphes (définition 17, page 315). Cependant, à l'inverse, il n'est pas évident de faire correspondre à deux chemins orientés disjoints un type de chemin causal bien précis : deux chemins orientés disjoints sur un digraphe correspondent certes nécessairement à des chemins causaux BG-différents mais rien ne permet de prédire si, en plus, ces chemins seront BG-disjoints (définition 8, page 87) ou non.

Exemple :

Considérons à nouveau le modèle bond graph de la figure 3.8 (Fig. 3.19) ainsi que ses trois chemins causaux ①, ② et ③.

Les chemins ① et ③ ne possèdent aucune variable en commun : ils sont donc à la fois BG-différents et BG-disjoints. Aussi, à l'inverse, les chemins ① et ② partagent, eux, un élément R en commun : ils sont donc BG-différents mais non BG-disjoints. En construisant le digraphe correspondant (Fig. 3.20), nous constatons alors que ces deux ensembles de chemins causaux correspondent à deux ensembles de chemins orientés et que chacun de ces deux ensembles comporte deux chemins orientés qui ne présentent aucun sommet en commun. Les deux types d'ensemble de chemins causaux se traduisent donc tous les deux par des ensembles de chemins orientés disjoints au sens des digraphes.

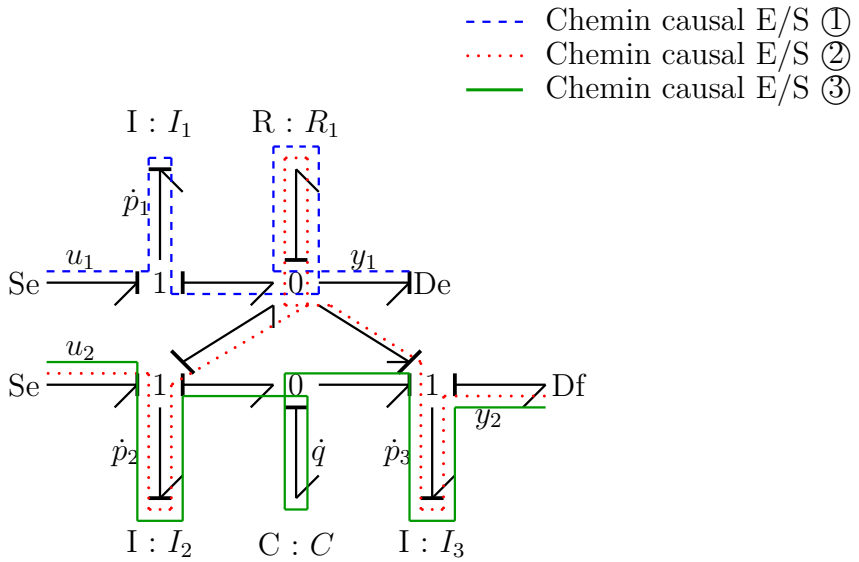


FIGURE 3.19 – Exemple de deux chemins causaux *BG-différents* mais non *BG-disjoints*

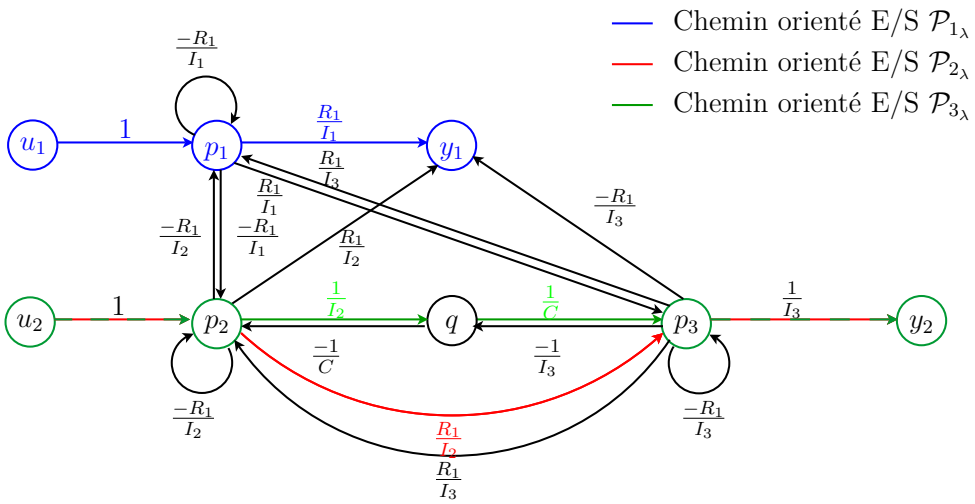


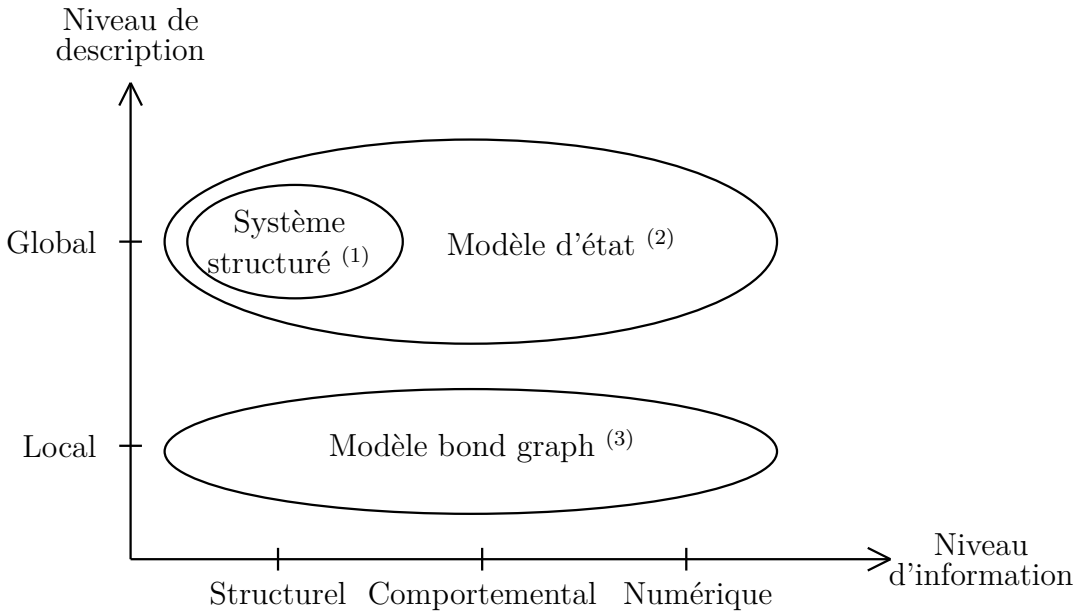
FIGURE 3.20 – Traduction en digraphe de deux chemins causaux *BG-différents* mais non *BG-disjoints*

S'il n'est pas possible de dissocier au niveau du digraphe ce qui correspondrait au niveau bond graph à des chemins causaux BG-disjoints, c'est parce que, là encore, la construction d'un digraphe implique un niveau de description plus global : le passage d'un chemin orienté par un ou plusieurs phénomènes dissipatifs n'est, par exemple, pas explicitement mis en évidence. En réalité, la seule manière de différencier les chemins orientés qui correspondent à des chemins causaux BG-disjoints et non pas simplement BG-différents serait de construire un digraphe « éclaté » pour se ramener à un niveau de description plus local et d'étudier ensuite les dépendances entre les poids des arcs (si les poids font apparaître un même paramètre issu d'un phénomène dissipatif, les chemins correspondront alors à des chemins causaux BG-différents mais non BG-disjoints).

Enfin, notons que le lecteur intéressé pourra également consulter l'annexe D pour compléter l'illustration de ces niveaux de description propres à chaque formalisme. Si aucun résultat nouveau n'y est avancé, cette annexe souligne notamment la cohérence des différents niveaux de description proposés ici en redémontrant par leur intermédiaire un certain nombre de résultats (étude sur l'obtention du modèle d'état sous forme matricielle ou bien sur la détermination du polynôme caractéristique à partir d'un modèle bond graph possédant des boucles algébriques).

Niveaux d'information

Outre le niveau de description, les trois approches se distinguent entre elles par un niveau d'information sur le comportement du système lui aussi différent (Fig. 3.21). Considérons par exemple la modélisation d'un système quelconque. Si nous choisissons de le modéliser par l'approche système structuré, seule la structure mathématique du modèle d'état correspondant sera alors modélisée. Si maintenant nous choisissons de le modéliser par une représentation matricielle d'état classique, nous devons alors prendre en compte cette fois-ci non seulement la structure mathématique des équations mais aussi les dépen-



(1) Structure dans le sens modèle d'état
+ Indépendance des cœfficients (pas de détail phénoménologique)

(2) Information fournie par l'approche système structuré
+ Détail phénoménologique (les cœfficients peuvent être dépendants)

(3) Information fournie par l'approche modèle d'état
+ Structure énergétique

FIGURE 3.21 – Niveaux de description et d'information différents selon les approches

dances qui peuvent exister entre certains cœfficients matriciels. Pour cela, nous ajoutons de l'information en considérant les lois caractéristiques des phénomènes physiques mis en jeu. Cependant, à ce niveau de modélisation, aucune information sur la structure énergétique du système n'a encore été ajoutée. De plus, le système n'est décrit qu'à un niveau global et non local. Par exemple, si un même paramètre apparaît dans deux cœfficients d'une des matrices de la représentation d'état, il n'est pas possible de savoir si ce paramètre correspond à un seul et même phénomène de stockage ou de dissipation d'énergie. Si nous voulons obtenir un modèle plus proche d'une interprétation physique, une possibilité est alors d'utiliser l'approche bond graph qui permet de décrire la structure énergétique du système de manière locale.

En réalité, l'utilisation d'une approche plutôt qu'une autre dépend de l'objectif de l'étude, du niveau de connaissance du système et des possibilités de calcul mises à disposition. Si une approche système structuré peut apparaître pauvre en termes d'information, celle-ci peut s'avérer particulièrement appropriée pour des problèmes comme la synthèse d'architecture. À l'inverse, dans certains cas, l'approche bond graph pourra être préférée pour ses caractéristiques graphiques et son aptitude à faciliter les interprétations physiques

tandis que, dans d'autres cas, l'approche modèle d'état s'avérera plus appropriée.

3.4.3 ...qui conduisent à différents niveaux d'analyse

Par conséquent, puisque les trois approches comportent intrinsèquement des niveaux d'information et de description différents, celles-ci conduisent à des degrés d'analyse également différents. En partant des observations de Rahmani sur le calcul des rangs de matrices [Rah93, Rah97] ainsi que de la terminologie de l'article [Bel07], nous proposons de distinguer alors les quatre niveaux d'analyse suivants :

- **le niveau structuré** où seule la structure globale du modèle est considérée et où les cœfficients du modèle sont supposés être indépendants entre eux. Par exemple, toutes les propriétés déduites d'un système structuré seront appelées **propriétés structurées** ;
- **le niveau BG-structurel** où seule la structure énergétique du modèle est prise en compte. Par exemple, toutes les propriétés déduites d'un modèle bond graph par analyse de l'existence de chemins causaux sans considération de leurs gains seront alors appelées **propriétés BG-structurelles** ;
- **le niveau comportemental** où non seulement la structure du modèle est prise en compte mais aussi certaines dépendances *via* les lois caractéristiques des phénomènes [10]. Par exemple, toutes les propriétés déduites analytiquement d'un modèle d'état ou d'un modèle bond graph par considération des gains de chemins causaux seront appelées **propriétés comportementales**.
- **le niveau numérique** où les paramètres sont remplacés par leur valeur numérique dans les calculs analytiques précédents. Toutes les propriétés déduites de cette façon seront appelées **propriétés numériques**.

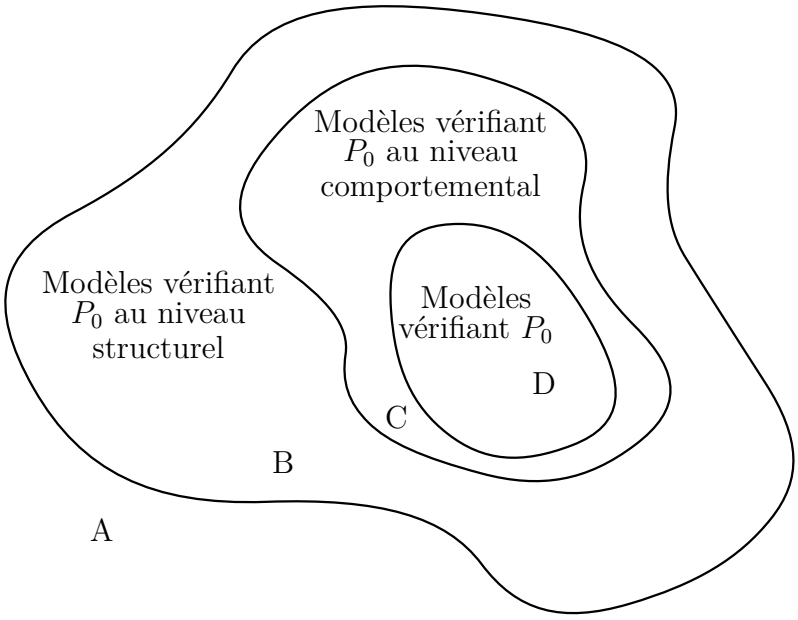
Ainsi, si l'approche système structuré ne peut conduire qu'à une analyse de niveau structuré, l'approche modèle d'état permet d'obtenir trois degrés d'analyse : le niveau structuré, le niveau comportemental et le niveau numérique. L'approche bond graph, quant à elle, permet d'obtenir également trois degrés d'analyse : le niveau BG-structurel, le niveau comportemental et le niveau numérique.

Cette classification s'explique notamment par le fait que les différences d'analyse entre une description globale et locale ne peuvent avoir lieu qu'au niveau d'information structurel. En effet, un zéro fixe ne peut apparaître dans une matrice (structurée ou non) que dans deux cas :

- soit ce zéro correspond à l'absence de chemin causal/chemin orienté entre les deux variables considérées (*e.g.* sur le digraphe de la figure 3.3, page 82, il n'existe pas d'arc orienté entre les sommets u et y car il n'existe aucun chemin causal de longueur BG égale à 0 entre ces deux variables) ;
- soit ce zéro signifie qu'il existe des chemins causaux/chemins orientés entre les deux variables considérées mais que la somme de leurs gains/poids s'annule (*e.g.* les poids des deux chemins orientés entre u et y s'annulent sur le digraphe « éclaté » de la figure 3.17, page 101).

10. Nous avons préféré le terme « comportemental » au terme « formel » de manière à souligner l'origine physique des dépendances apparaissant dans le modèle.

D'une certaine manière, en globalisant le point de vue, l'approche système structuré prend naturellement en compte certaines informations (*e.g.* l'annulation des gains de chemins causaux) qui n'auraient pu être révélées, d'un point de vue plus local, qu'à un niveau d'analyse comportemental. À l'inverse, puisque l'expression mathématique des composantes du modèle est prise en compte aux niveaux des analyses comportementales et numériques, le résultat ne dépend plus dès lors du degré de description impliqué et deux niveaux d'analyse suffisent à caractériser les approches (les niveaux comportemental et numérique sont les mêmes pour une approche bond graph ou modèle d'état).



A {Ensemble des modèles vérifiant P_0 et des modèles ne vérifiant pas P_0}
B {Ensemble des modèles vérifiant P_0 au niveau structurel}
C {Ensemble des modèles vérifiant P_0 au niveau comportemental}
D {Ensemble des modèles vérifiant P_0}
$A \supset B \supset C \supset D$

FIGURE 3.22 – Les différents niveaux d'analyse

Enfin, si cette classification peut paraître relativement abstraite dans un premier temps, il convient d'en noter son importance : celle-ci permet d'identifier le domaine de validité des résultats qui nous seront fournis par l'analyse structurelle [11]. Par exemple, différents raisonnements logiques peuvent être établis (Fig. 3.22) :

1. Si une propriété P_0 est fausse au niveau d'analyse structurel (*i.e.* structuré ou BG-structurel) alors elle est fausse de manière générale (c'est-à-dire aux niveaux d'analyse inférieurs) ;
2. Si une propriété P_0 est vraie au niveau d'analyse structurel alors elle peut être vraie aux niveaux d'analyse inférieurs ;

11. Par abus de langage, nous continuerons d'utiliser le terme d'analyse structurelle pour évoquer de manière générale toute analyse conduite indépendamment des valeurs numériques des paramètres. Ce terme désignera donc par la suite les niveaux d'analyse structuré, BG-structurel et comportemental.

3. Si une propriété P_0 est fausse au niveau d'analyse comportemental alors elle est fausse au niveau d'analyse numérique ;
4. Si une propriété P_0 est vraie au niveau d'analyse comportemental alors elle peut être vraie au niveau d'analyse numérique.

3.4.4 Intérêt des niveaux d'analyse dans la démarche de conception

Replacée dans le contexte de la conception d'un système, l'existence de différents niveaux d'analyse peut être mise à profit. En effet, en ayant conscience de ces différents niveaux, l'ingénieur en charge de la conception peut alors jalonner son analyse et minimiser ainsi les efforts à fournir. Plus exactement, en reprenant les raisonnements logiques précédents (Fig. 3.22) et en y ajoutant une notion d'ordre chronologique (Fig. 3.23), l'ingénieur sait que si une propriété P_0 est fausse à un certain niveau, il est alors inutile de poursuivre l'étude car elle sera nécessairement fausse aux niveaux ultérieurs de l'analyse.

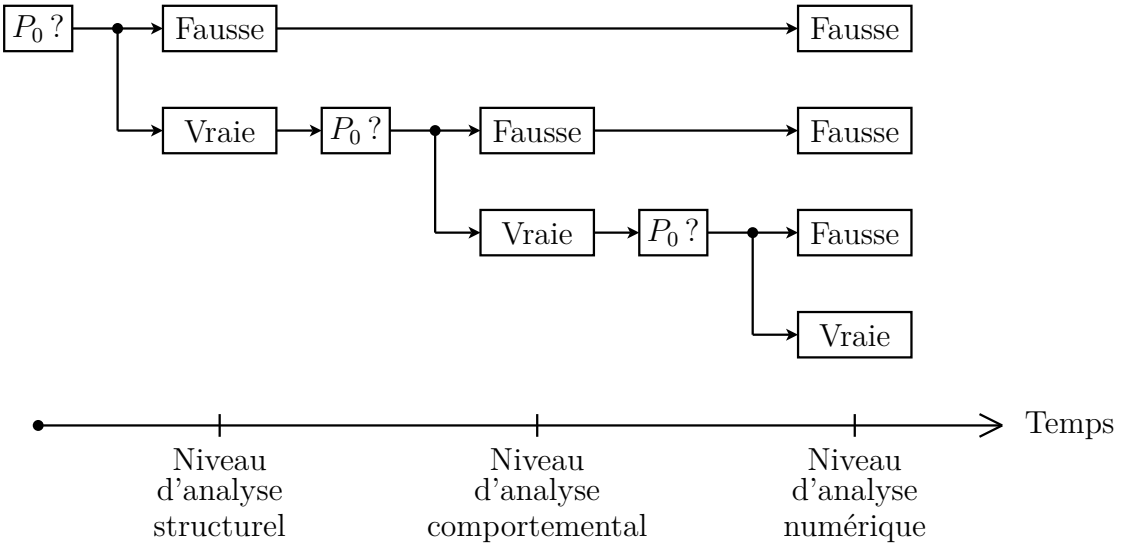


FIGURE 3.23 – Utilisation des différents niveaux d'analyse pour raccourcir la phase d'analyse structurelle lors de l'étude d'une propriété P_0

Ce type de démarche permet ainsi d'obtenir le résultat recherché (*i.e.* est-ce que la propriété P_0 est vérifiée ?) tout en « court-circuitant » un certain nombre d'étapes et en minimisant du même coup le temps d'étude.

En outre, hormis ce gain de temps, cette démarche présente l'avantage de mettre en évidence les raisons qui font qu'une propriété P_0 n'est pas vérifiée et fournit ainsi quelques pistes pour la reconception du système. En effet (Fig. 3.24) :

- si la propriété n'est pas vérifiée au niveau d'analyse structurel, l'ingénieur sait alors qu'il doit revoir la structure de son système ;
- si la propriété est vérifiée au niveau d'analyse structurel mais pas au niveau d'analyse comportemental, l'ingénieur peut, par exemple, essayer d'identifier si cela est dû à

un certain couplage entre les composantes du modèle et si ce couplage ne peut pas être éliminé en introduisant un phénomène jusqu'alors négligé ;
– enfin, si la propriété est fausse uniquement au niveau numérique, l'ingénieur peut alors jouer sur la valeur numérique des paramètres non fixés par le cahier des charges ou par la physique du système afin de satisfaire la propriété recherchée.

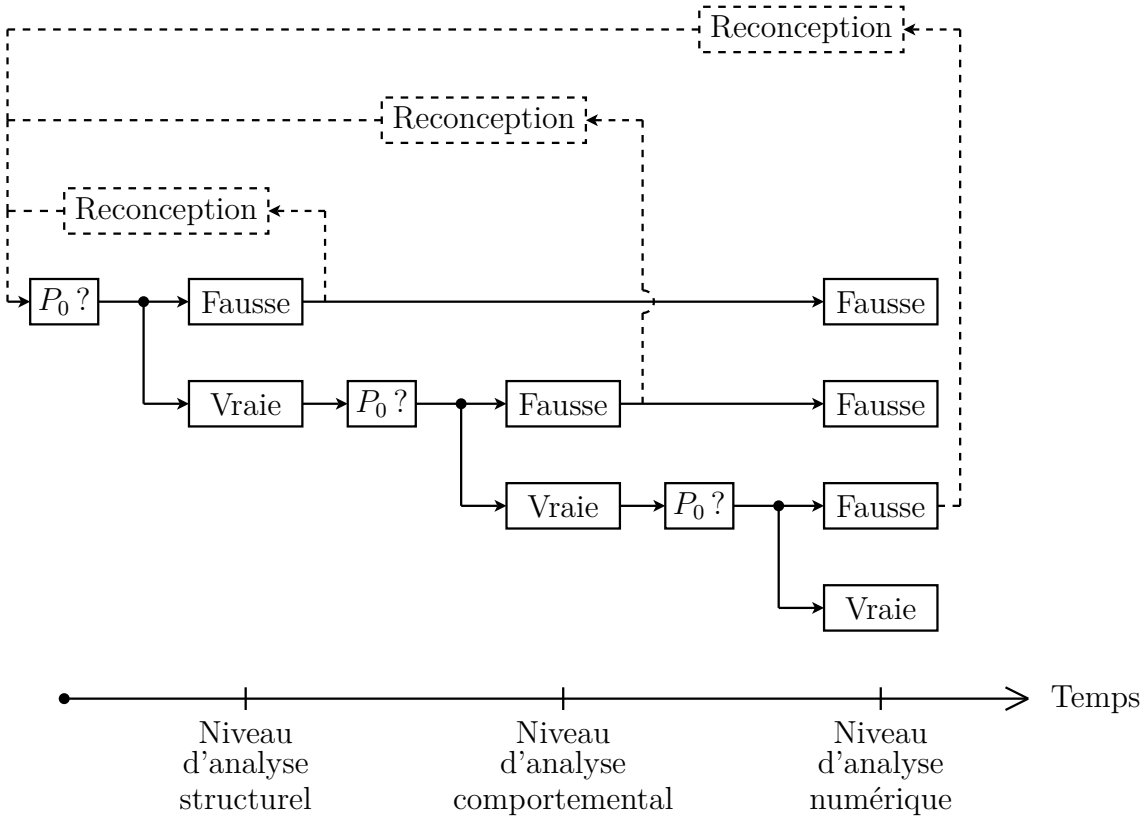


FIGURE 3.24 – Utilisation des différents niveaux d'analyse pour orienter au plus tôt les pistes de reconception

Si les sections suivantes (sections 3.5 et 3.6) nous permettront de montrer comment cette démarche permet d'identifier les problèmes au plus tôt spécifiquement dans la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses (et notamment lorsqu'il s'agira de tester l'inversibilité du modèle et les conditions de dérivabilité des spécifications du cahier des charges), étayons dès à présent notre argumentation sur l'utilité des niveaux d'analyse à l'aide de deux exemples de conception :
– un premier où nous imaginons que le cahier des charges impose les ordres relatifs des sorties du système (définition 12, page 312) ;
– un second où, par anticipation avec le problème de synthèse de commande, le cahier des charges requiert que le système conçu soit découplable et présente ainsi une certaine structure à l'infini (définition 44, page 346).

À cette occasion, nous verrons notamment comment la prise en compte des différents niveaux d'analyse est nécessaire à l'interprétation des résultats obtenus et comment elle permet de reformuler certaines propriétés bond graph pour jalonner la conception du système de différentes étapes et s'assurer ainsi à chaque instant de l'adéquation entre cahier

des charges et conception retenue. Au cours des paragraphes suivants, outre l'illustration de l'existence et de l'utilité des différents niveaux d'analyse, nous serons ainsi progressivement amenés à :

- reformuler la propriété 6 (page 326) sur la détermination de l'ordre relatif d'une sortie à partir d'un modèle bond graph (l'exception de Wu et Youcef-Toumi, énoncée à l'annexe C, sera notamment prise en compte *via* les différents niveaux d'analyse) ;
- reformuler les théorèmes 17 et 18 (page 350) sur la détermination de la structure à l'infini d'un système à partir de son modèle bond graph (à l'image des études présentées pour les systèmes structurés [van91], la reformulation bond graph permettra notamment de déterminer une structure à l'infini dite « BG-structurelle » afin de détecter toute architecture ne permettant pas d'assurer *a priori* la découplabilité du système et de considérer ainsi au plus tôt les reconceptions nécessaires).

Pour cela, la détermination des ordres relatifs des sorties d'un système puis celle de sa structure à l'infini seront successivement étudiées selon les approches algébrique, bond graph et parfois digraphe [12]. À ce titre, l'annexe C servira notamment de support pour la compréhension des différents outils ici mis en œuvre.

Hypothèses : Jusqu'à la fin de ce chapitre et sauf mention contraire, la notion de « modèle bond graph causal » fera implicitement référence à un modèle bond graph affecté d'une causalité préférentiellement intégrale. Aussi, les systèmes considérés seront des systèmes linéaires et invariants dans le temps dont la représentation d'état pourra être mise sous une forme explicite du type :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \tag{3.7}$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)^T$ représente le vecteur d'entrée et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)^T$ celui de sortie. Sauf cas contraire, les modèles bond graph correspondants ne posséderont donc pas d'élément de stockage d'énergie en causalité dérivée (lorsque les modèles sont en causalité préférentiellement intégrale) et leurs boucles algébriques (s'il en existe) seront toujours résolubles [13]. Par souci de simplicité, nous supposons également que les systèmes sont carrés (*i.e.* $m = p$). Enfin, dans la suite de ce chapitre, l'approche algébrique (approche modèle d'état par représentation matricielle) sera prise comme référence puisqu'historiquement les concepts étudiés ont été définis dans ce cadre.

12. Pour rappel, nous avons défini à la section 3.3 (page 78) :
- l'approche algébrique comme l'approche consistant à déterminer les propriétés d'un système à partir de l'étude de son modèle d'état sous forme matricielle ;
- l'approche digraphe (structuré ou non) comme l'approche consistant à déterminer les propriétés d'un système à partir de l'étude de son digraphe (structuré ou non) ;
- l'approche bond graph comme l'approche consistant à déterminer les propriétés d'un système à partir de l'étude de son modèle bond graph.

13. L'absence d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée permet d'obtenir une représentation d'état sous forme explicite tandis que la résolution possible des boucles algébriques garantit la possibilité d'exprimer le modèle d'état sous forme ODE (*i.e.* Ordinary Differential Equations) tel que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ et non plus DAE (*i.e.* Differential Algebraic Equations) tel que $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{h} \\ \mathbf{h} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{h} + \mathbf{H}\mathbf{u} \end{cases}$.

L'approche digraphe (approche modèle d'état par représentation graphique) sera, quant à elle, parfois évoquée de manière à mieux comprendre les mécanismes d'une analyse graphique et à faire le parallèle avec l'approche bond graph.

Cas d'une spécification portant sur les ordres relatifs des sorties

L'ordre relatif n'_i associé à la sortie y_i d'un système est défini comme correspondant au nombre minimal de dérivations de y_i nécessaire pour faire apparaître une des composantes du vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ (définition 12, page 312). Comme détaillées à l'annexe C, plusieurs propriétés existent pour déterminer cet ordre relatif selon :

- l'approche algébrique : propriété 4 (page 312) ;
- l'approche digraphe : propriété 5 (page 322) ;
- l'approche bond graph : propriété 6 (page 326).

Imaginons que le problème de conception envisagé ici impose l'obtention d'ordres relatifs bien particuliers. En se basant sur l'exemple suivant, voyons alors comment la propriété de l'approche bond graph peut être reformulée pour tenir compte des différents niveaux d'analyse et autoriser ainsi une reconception au plus tôt du système lorsque les ordres relatifs imposés par le cahier des charges ne sont pas obtenus.

Exemple :

Supposons que le problème de conception envisagé ici soit de concevoir un système de sorte que, entre autres, l'unique sortie de ce système possède un ordre relatif égal à 0. Imaginons que les autres spécifications du cahier des charges nous ont conduit à retenir pour le moment le modèle bond graph de la figure 3.16 (Fig. 3.25) issu de la thèse de Fotsu-Ngwompo [Fot97a]. Essayons alors de valider ce modèle vis-à-vis de la spécification sur l'ordre relatif selon une approche algébrique d'une part, puis, selon une approche bond graph d'autre part.

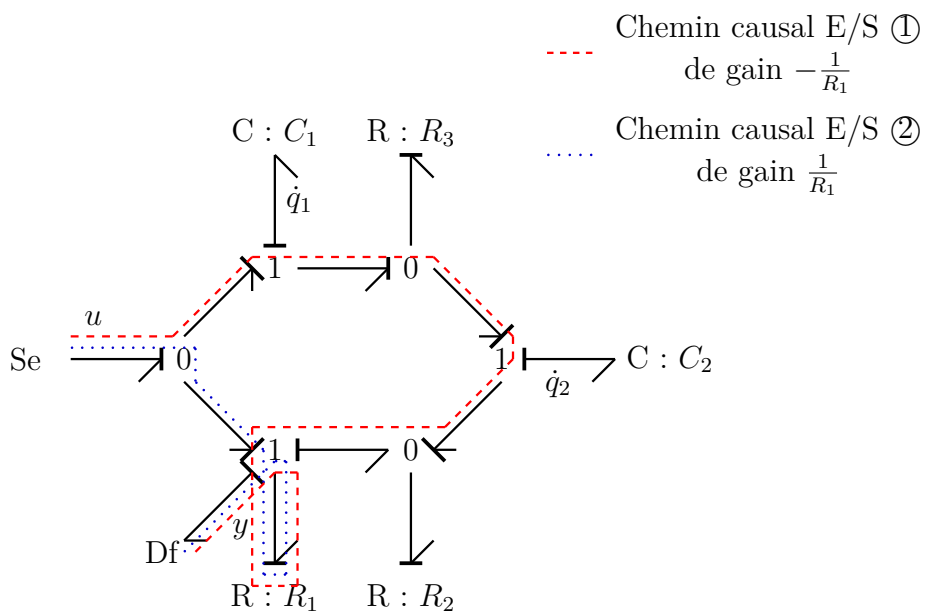


Figure 3.25 – Modèle bond graph de l'exemple de Fotsu-Ngwompo [Fot97a]

Approche algébrique : Nous avons déjà vu que le modèle d'état correspondant à ce

modèle bond graph pouvait être mis sous la forme suivante (modèle d'état (3.6), page 102) :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{C_1}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}) & \frac{-1}{C_2}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) \\ \frac{-1}{C_1}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) & \frac{-1}{C_2}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_2} \end{pmatrix} (u) \\ (y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} & \frac{1}{C_2R_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

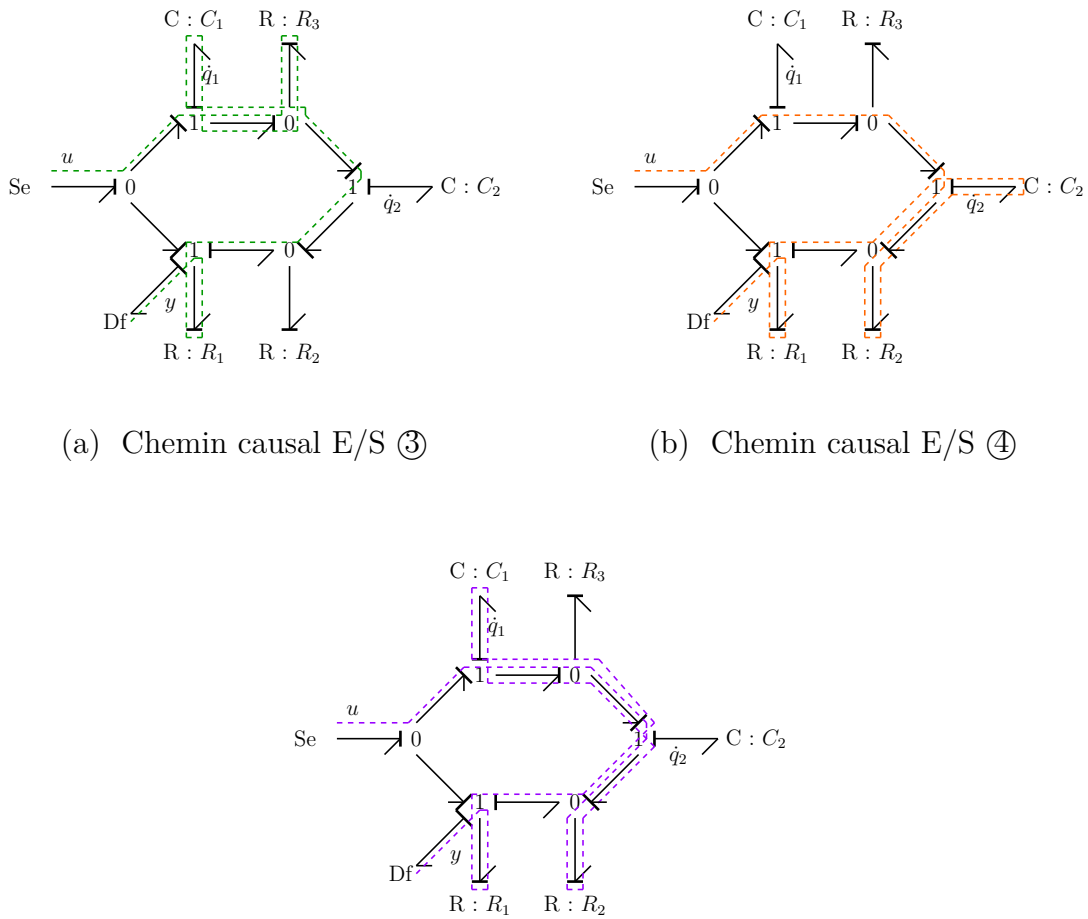
La matrice $\mathbf{D}$ de cette représentation d'état étant nulle, nous pouvons alors directement conclure que $n'_1 > 0$. De plus :

$$\mathbf{c_1B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1}(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}) + \frac{1}{C_2R_1R_2} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow n'_1 = 1 \tag{3.8}$$

Par conséquent, d'après l'approche algébrique (propriété 4, page 312), l'ordre relatif de la sortie y est égal à 1 et non à 0. Le modèle choisi ne convient donc pas pour satisfaire la spécification sur l'ordre relatif (ici $n'_1 = 0$) : le système doit être reconçu mais aucune piste pour sa reconception n'est *a priori* fournie.

Approche bond graph (sans analyse des gains des chemins causaux appropriés) : Une analyse causale du modèle bond graph de la figure 3.25 nous montre que les chemins causaux ① et ② entre la sortie y et l'entrée u sont des chemins causaux d'ordre BG minimal (définition 30, page 324). Leur ordre BG est égal à 0 donc, d'après la propriété 6 (page 326), nous sommes amenés à conclure que l'ordre relatif $n'_{BG,1}$ de la sortie y est égal à 0. Selon ce premier niveau d'analyse bond graph (niveau qualifié de BG-structurel conformément à la section 3.4.3, page 106), le modèle bond graph retenu est donc ici *a priori* adéquat pour satisfaire la spécification « $n'_1 = 0$ ». Le concepteur valide ainsi un premier niveau de son modèle de conception : la structure qu'il s'est fixée permet *a priori* de répondre au cahier des charges.

Approche bond graph (avec analyse des gains des chemins causaux appropriés) : Reprenons l'analyse causale précédente mais cette fois-ci en considérant les gains statiques (définition 33, page 325) des chemins causaux adéquats. Grâce à l'étude précédente, nous pouvons constater que $\sum_{①|\omega_l(u,y)=0} \tilde{G}_l(u,y) = \tilde{G}_1(u,y) + \tilde{G}_2(u,y) = \dfrac{-1}{R_1} + \dfrac{1}{R_1} = 0.$
Par conséquent, au niveau de description global, il n'existe finalement aucune relation mathématique directe entre les variables u et y et donc $n'_1 > 0$ (nous retrouvons ici le résultat de l'approche algébrique où la nullité de la matrice $\mathbf{D}$ avait conduit au même constat).



(a) Chemin causal E/S ③

(b) Chemin causal E/S ④

(c) Chemin causal E/S ⑤

FIGURE 3.26 – Calcul de l'ordre relatif dans l'exemple de FOTSU-NGWOMPO [Fot97a] conformément à niveau d'analyse comportemental

En nous intéressant désormais aux chemins causaux E/S d'ordre BG supérieur, c'est-à-dire d'ordre BG égal à 1, nous constatons alors qu'il existe trois chemins de ce type tels que $\sum_{①|\omega_l(u,y)=1} \tilde{G}_l(u,y) = \tilde{G}_3(u,y) + \tilde{G}_4(u,y) + \tilde{G}_5(u,y) = \frac{1}{R_1R_3C_1} + \frac{1}{R_1R_2C_2} + \frac{1}{R_1R_2C_1} \neq 0$ (Fig. 3.26). Cette somme étant non nulle, nous pouvons alors conclure qu'au niveau de description global, il existe une relation mathématique entre les variables u et $\dot{y}$ et donc que $n'_1 = 1$ (par ailleurs, nous retrouvons dans la somme calculée les trois termes apparaissant dans l'expression (3.8) de $\mathbf{c_1B}$ étudiée lors de l'approche algébrique). Selon ce deuxième niveau d'analyse bond graph (niveau qualifié de comportemental conformément à la section 3.4.3, page 106), le modèle bond graph retenu n'est donc pas adéquat pour satisfaire la spécification « $n'_1 = 0$ ». Le concepteur constate qu'il ne peut valider le deuxième niveau de son modèle de conception : celui-ci doit être repensé pour répondre au cahier des charges fixé.

Interprétation : En réalité, l'approche bond graph autorise plusieurs niveaux d'analyse. Dans le niveau d'analyse BG-structurel, seule l'existence ou non de chemins causaux appropriés est étudiée tandis que dans le niveau d'analyse comportemental, non seulement l'existence mais aussi les gains statiques des chemins causaux appropriés sont considérés. S'il est clair qu'une analyse bond graph causale complète (c'est-à-dire de niveau comportemental) est à termes requise pour résoudre entièrement le problème de conception d'un point de vue structurel (c'est-à-dire pour résoudre ce problème à un niveau identique à celui de l'approche algébrique), la distinction de ces différents niveaux d'analyse et donc de ces différents niveaux de résultats permet de jalonner la conception en différentes sous-étapes de validation. Ici, dans notre exemple, l'analyse de niveau BG-structurel permet de valider un certain niveau de modèle préalablement choisi et donc d'asseoir progressivement une certaine confiance dans la conception jusqu'alors retenue. En outre, cette manière de procéder par étapes permet également de mieux identifier les causes d'une mauvaise conception. Dans l'exemple présenté ici, au terme du niveau d'analyse comportemental, le concepteur sait qu'il doit revoir sa conception initiale s'il veut satisfaire le cahier des charges mais en plus, il dispose d'une piste de reconception : il ne doit pas modifier tout le modèle mais uniquement ce qui impacte les gains statiques des chemins causaux ① et ②. Une classe de solutions possibles pour la reconception de ce modèle en particulier est notamment d'ajouter un élément TF sur un lien bond graph appartenant à un seul de ces deux chemins causaux (*e.g.* sur la Fig. 3.27, l'ajout d'un élément TF de module constant $m \neq 1$ induit $\sum_{①|\omega_l(u,y)=0} \tilde{G}_l(u,y) = \tilde{G}_1(u,y) + \tilde{G}_2(u,y) = \frac{-1}{R_1} + \frac{m}{R_1} \neq 0$ et donc un ordre relatif $n'_1 = 0$).

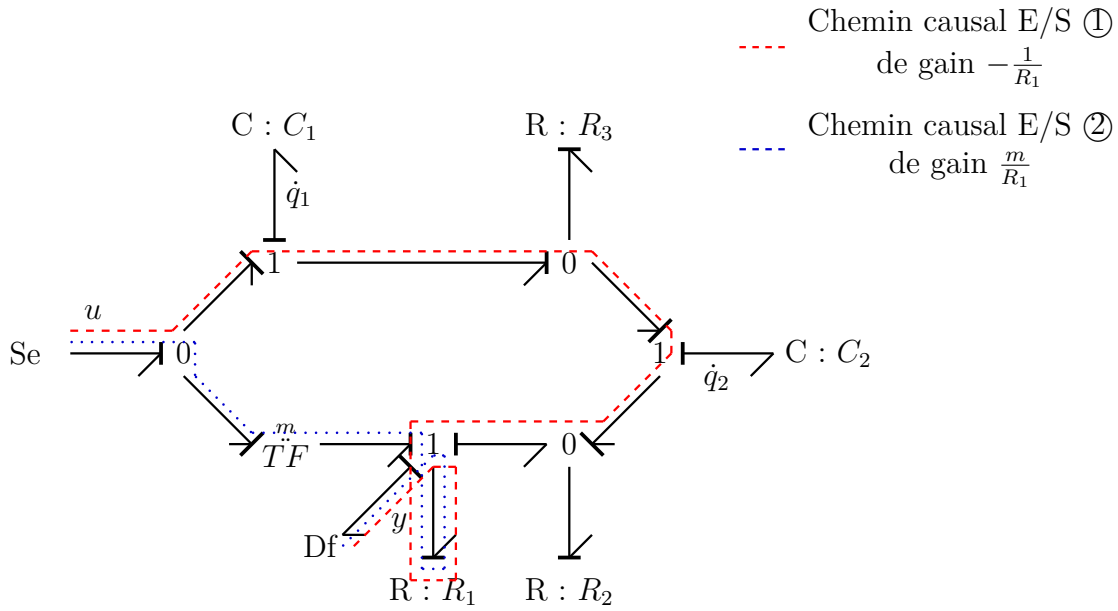


FIGURE 3.27 – Exemple de reconception possible pour satisfaire la spécification sur l'ordre relatif

Par conséquent, non seulement cet exemple permet d'illustrer l'existence de deux niveaux d'analyse différents, mais il permet également de préciser l'utilité de ces niveaux

d'analyse dans un contexte de conception. Afin de présenter une certaine cohérence avec ces niveaux d'analyse et d'exploiter au mieux ce concept, nous proposons de reformuler la propriété 6 (page 326) en précisant son domaine de validité selon les outils d'analyse bond graph utilisés :

- celui de l'analyse BG-structurelle lorsque seule l'existence des chemins causaux appropriés est étudiée (propriété 1) ;
- puis celui de l'analyse comportementale lorsque les gains statiques des chemins causaux appropriés sont également considérés (propriété 2).

Propriété 1 (*niveau d'analyse BG-structurel*)

*Sur un modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, l'**ordre relatif BG-structurel** $n'_{BG-s,i}$ de la sortie y_i est égal à $\omega_{BG,i_{min}}$, l'ordre BG minimal qu'un chemin causal puisse avoir entre la sortie y_i et n'importe quelle entrée.*

Remarque : Dans toute la suite de ce mémoire, l'ajout de l'indice $_{BG-s}$ permettra d'identifier un résultat énoncé à un niveau d'analyse BG-structurel.

Propriété 2 (*niveau d'analyse comportemental*)

*Sur un modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, l'**ordre relatif** n'_i de la sortie y_i peut être calculé de sorte que :*

$$n'_i = \min \{\omega_k | \sum_{①|\omega_l(u_j,y_i)=\omega_k} \tilde{G}_l(u_j, y_i) \neq 0\}$$

où $\tilde{G}_l(u_j, y_i)$ est le gain statique du chemin causal ① d'ordre BG ω_k entre une entrée u_j et la sortie y_i.

Remarque : Puisque le niveau d'analyse comportemental est identique pour l'approche algébrique et l'approche bond graph (*i.e.* puisque ces approches conduisent à des résultats identiques à un niveau d'analyse comportemental), il n'y a plus lieu d'ajouter ici l'indice $_{BG}$ à la notation de l'ordre relatif. De plus, notons que, lorsqu'il existe par exemple un unique chemin causal entre les variables u_j et y_i, une analyse de niveau BG-structurel suffit à obtenir un résultat identique à l'approche algébrique (le cas d'une somme de gains statiques nulle ne pouvant apparaître, il est inutile d'investiguer le gain de chaque chemin causal considéré). Ainsi, la prise en compte des différents niveaux d'analyse permet dans certains cas de rationnaliser le nombre de calculs à mener.

Notons au passage que nous retrouvons dans cette nouvelle propriété de niveau d'analyse comportemental l'exception de Wu et Youcef-Toumi [Wu,95] (exception mentionnée lors de l'énoncé de la propriété 6, page 326) puisque celle-ci concernait justement le cas de chemins causaux dont la somme des gains s'annulait.

Cas d'une spécification portant sur la structure à l'infini du système

La structure à l'infini d'un système (définition 44, page 346) peut être vue comme un outil d'analyse permettant, entre autres, de déterminer si le système en question est

découplable ou non. Si le problème très répandu de découplage [14] relève plus d'un problème de synthèse de commande, il est cependant intéressant d'intégrer au plus tôt les contraintes qu'une telle démarche pourrait engendrer et ce dès la conception du système. En effet, afin d'anticiper au mieux les problèmes qui pourraient surgir lors de la conception de la commande, l'ingénieur en charge de l'étude doit vérifier que la conception du système qu'il a jusqu'alors retenue assure bien cette découplabilité. À l'image de ce qui a été présenté lors de la section précédente pour le calcul de l'ordre relatif d'une sortie, la détermination de différents niveaux de structure à l'infini prend alors tout son sens : ils permettent, le cas échéant, d'envisager et d'orienter toute reconception nécessaire. Dans cette idée, l'annexe E est dédiée à la reformulation, selon les niveaux d'analyse BG-structurel et comportemental, des théorèmes 17 et 18 (page 350) sur la détermination bond graph des zéros à l'infini. L'exemple qui suit vise à illustrer ces derniers résultats.

Remarque : La notion de structure à l'infini au niveau BG-structurel peut être vue, en quelque sorte, comme le pendant en langage bond graph des zéros à l'infini structurels introduits par VAN DER WOUDE [van91] pour les digraphes structurés.

Exemple :

Considérons l'exemple de la figure 3.28, issu de l'article [Sue92] et supposons que le problème de conception spécifie une certaine structure à l'infini pour le système.

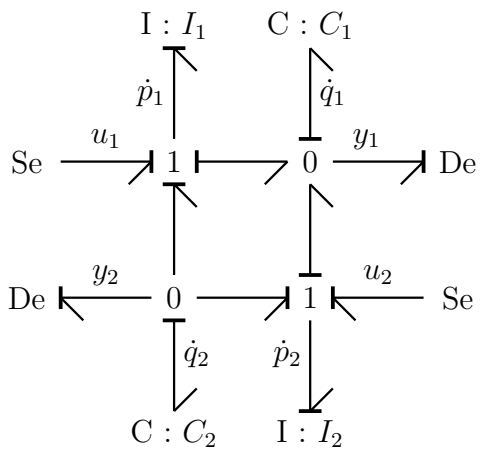


FIGURE 3.28 – Exemple de modèle bond graph pour le calcul des ordres des zéros à l'infini

14. Un *problème de découplage par retour d'état* consiste à trouver un contrôleur régi par une équation en variable de LAPLACE de type (3.9) de sorte que chaque variable d'entrée u_i commande une variable de sortie y_j sans affecter les autres variables de sortie [Rah93].

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}\mathbf{V}(s) \tag{3.9}$$

Plus spécifiquement, le cas particulier où la matrice $\mathbf{F}$ du contrôleur ne dépend pas de l'opérateur s fait référence quant à lui à un *problème de découplage par retour statique* [Mor64, Rek65]. De plus amples détails peuvent être trouvés dans l'abondante littérature à ce sujet *via* notamment les références [Fal67, Des82, Com82, Com86, Com93, Dio93].

Approche algébrique : Après une exploitation causale du modèle bond graph de la figure 3.28, nous pouvons conclure que le comportement du système considéré est régi par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ et la matrice système $\mathbf{P}(s)$ de ce modèle s'expriment sous la forme :

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} \frac{I_2C_2}{I_1I_2C_1C_2s^2+I_1C_2+I_1C_1+I_2C_2+I_2C_1} & \frac{I_1C_2}{I_1I_2C_1C_2s^2+I_1C_2+I_1C_1+I_2C_2+I_2C_1} \\ -\frac{I_2C_1}{I_1I_2C_1C_2s^2+I_1C_2+I_1C_1+I_2C_2+I_2C_1} & -\frac{I_1C_1}{I_1I_2C_1C_2s^2+I_1C_2+I_1C_1+I_2C_2+I_2C_1} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s & 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 1 & 0 \\ 0 & s & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & s & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & \frac{1}{I_2} & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

En étudiant la matrice de transfert, d'après (3.10), nous avons :

$$\det(\mathbf{T}(s)) = \frac{-I_2C_2I_1C_1 + I_2C_1I_1C_2}{I_1I_2C_1C_2s^2 + I_1C_2 + I_1C_1 + I_2C_2 + I_2C_1} = 0$$

Ainsi, le système n'est pas inversible (critère d'inversibilité 1, page 125) et il y a donc moins de deux zéros à l'infini. De plus, la matrice $\mathbf{T}(s)$ n'est pas une matrice nulle, donc il existe au moins une sous-matrice d'ordre 1 non nulle : $\text{rang}(\mathbf{T}(s)) = 1$ et par conséquent le système possède un unique zéro à l'infini. Enfin, l'ordre n_1 de ce zéro à l'infini est donné par l'ordre minimal des zéros à l'infini que peuvent présenter les mineurs d'ordre 1 (donc les cœfficients) de la matrice $\mathbf{T}(s)$. D'après (3.10), nous obtenons donc $n_1 = 2$.

Parallèlement, en étudiant la matrice système, d'après (3.11), nous avons : $\det(\mathbf{P}(s)) = \left(-\frac{1}{C_2}\right)\left(-\frac{1}{C_1}\right)\left(-\frac{1}{I_1I_2} + \frac{1}{I_1I_2}\right) = 0$. Ainsi, le système n'est pas inversible (critère d'inversibilité 1, page 125) et il y a donc moins de deux zéros à l'infini.
De plus, si nous étudions les mineurs d'ordre $n + 1 = 5$, nous constatons que (Tab. 3.2) :

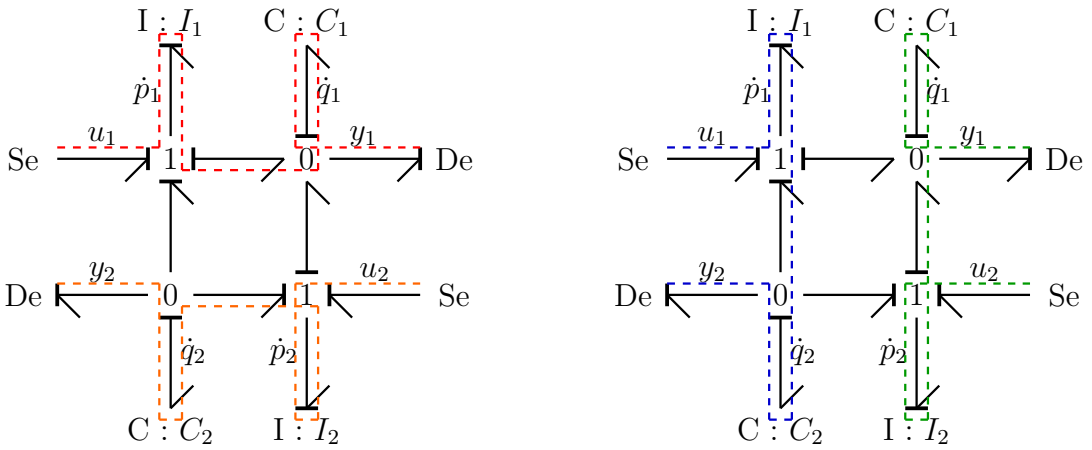
$$\beta_1 = \max\{\beta_{1^{1,2,3,4,5}_{1,2,3,4,5}}, \beta_{1^{1,2,3,4,6}_{1,2,3,4,5}}, \beta_{1^{1,2,3,4,5}_{1,2,3,4,6}}, \beta_{1^{1,2,3,4,6}_{1,2,3,4,6}}\} = 2$$

Ainsi, il existe au moins un mineur d'ordre 5 non nul. Le système n'admet donc qu'un unique zéro à l'infini et $n_1 = \delta_1 = n - \beta_1 = 4 - 2 = 2$. Les résultats sont donc bien identiques à ceux obtenus par étude de la matrice de transfert.

Sous-matrice	Déterminant	Degré correspondant
$\mathbf{P}(s)^{1,2,3,4,5}_{1,2,3,4,5} = \begin{pmatrix} s & 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 1 \\ 0 & s & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 0 \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & s & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & \frac{1}{I_2} & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{s^2}{I_1 C_1}$	$\beta_{1^{1,2,3,4,5}_{1,2,3,4,5}} = 2$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,3,4,6}_{1,2,3,4,5} = \begin{pmatrix} s & 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & s & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 1 \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & s & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & \frac{1}{I_2} & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{s^2}{I_2 C_1}$	$\beta_{1^{1,2,3,4,6}_{1,2,3,4,5}} = 2$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,3,4,5}_{1,2,3,4,6} = \begin{pmatrix} s & 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 1 \\ 0 & s & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 0 \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & s & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & \frac{1}{I_2} & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{s^2}{I_1 C_2}$	$\beta_{1^{1,2,3,4,5}_{1,2,3,4,6}} = 2$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,3,4,6}_{1,2,3,4,6} = \begin{pmatrix} s & 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & s & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} & 1 \\ -\frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & s & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1} & \frac{1}{I_2} & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 \end{pmatrix}$	$-\frac{s^2}{I_2 C_2}$	$\beta_{1^{1,2,3,4,6}_{1,2,3,4,6}} = 2$

TABLE 3.2 – Calcul de l'ordre d'un zéro à l'infini par étude des mineurs de la matrice système

Approche bond graph : Après affectation de la causalité préferentiellement intégrale au modèle bond graph considéré, nous constatons qu'il existe uniquement deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de deux chemins causaux E/S BG-différents et que ces ensembles sont également des ensembles de chemins causaux E/S BG-disjoints (Fig. 3.29).



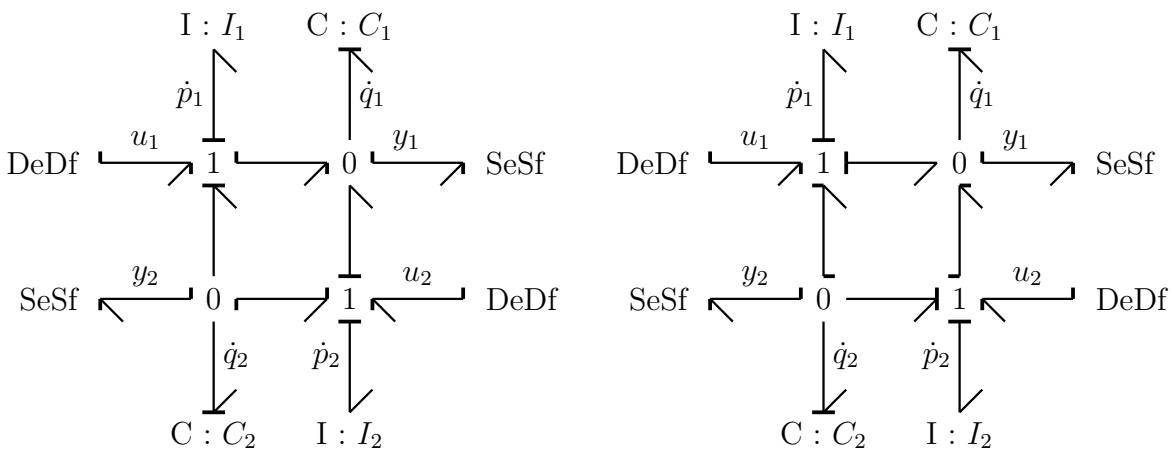
(a) Ensemble $\mathcal{E}_1 = \{① + ②\}$ de deux chemins causaux E/S BG-disjoints

(b) Ensemble $\mathcal{E}_2 = \{③ + ④\}$ de deux chemins causaux E/S BG-disjoints

FIGURE 3.29 – Analyse causale

Du point de vue de l'analyse BG-structurelle : il ne peut exister d'ensemble de chemins causaux E/S BG-disjoints plus grand puisque le système est un système à seulement deux entrées et deux sorties. D'après le théorème 19 (page 352), nous pouvons conclure que le système possède deux zéros BG-structurels à l'infini. De plus, d'après le théorème 21 (page 353), nous avons alors : $\begin{cases} n_{1_s} = L_{1_s} = 2 \\ n_{2_s} = L_{2_s} - L_{1_s} = 4 - 2 = 2 \end{cases}$. Si nous verrons par la suite que ce résultat n'est pas nécessairement identique à l'approche algébrique, celui-ci permet néanmoins une première comparaison avec la structure à l'infini imposée ici par le cahier des charges et autorise donc une éventuelle reconception.

Du point de vue de l'analyse comportementale : il ne peut toujours pas exister d'ensemble de chemins causaux E/S BG-disjoints plus grand. *A priori*, le nombre de zéros à l'infini est donc inférieur ou égal à 2. Or, si nous construisons les modèles bond graph bicausaux correspondants, nous constatons que ces derniers possèdent une structure de jonction non résoluble (Fig. 3.30). Par conséquent, le modèle bond graph de la figure 3.29 est non inversible (critère d'inversibilité 5, page 133) et son nombre de zéros à l'infini est strictement inférieur à 2.



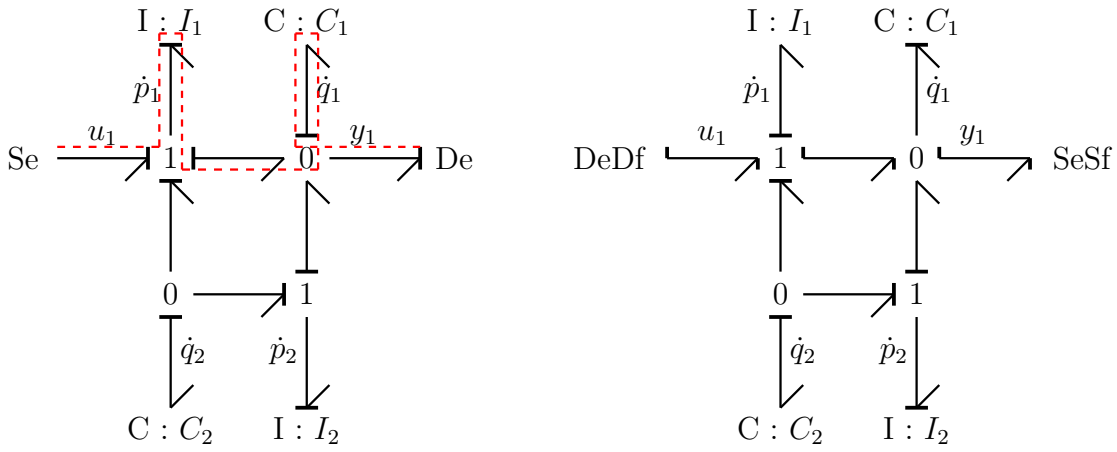
(a) Modèle bond graph bicausal associé à l'ensemble $\mathcal{E}_1$

(b) Modèle bond graph bicausal associé à l'ensemble $\mathcal{E}_2$

FIGURE 3.30 – Analyse causale des modèles bond graph bicausaux associés

D'autre part, si nous étudions, par exemple, le sous-modèle issu du modèle bond graph de la figure 3.29 en ne considérant que l'entrée u_1 et la sortie y_1, nous pouvons constater :

- qu'il existe un chemin causal E/S (le chemin ①) entre cette paire de variable (u_1, y_1) (Fig. 3.31(a)) ;
- que le modèle bond graph bicausal associé au chemin ① possède une structure de jonction résoluble (Fig. 3.31(b)).



(a) Sous-modèle bond graph causal

(b) Sous-modèle bond graph bicausal associé au chemin ①

FIGURE 3.31 – Exemple de sous-modèle bond graph à une entrée et une sortie

Par conséquent, nous pouvons conclure qu'il existe au moins un sous-système, à une entrée et une sortie, inversible (test d'inversibilité 2, page 135) et que le modèle bond graph initial de la figure 3.29 possède finalement un seul zéro à l'infini (théorème 20, page 352). Enfin, pour calculer l'ordre de ce seul zéro à l'infini, nous devons déterminer L_1 de sorte que :

$$L_1 = \min_{(j_1,h_1)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,m]\!]} \{ \min_{l_{h_1}^{j_1}\in[\![0,\ldots,n]\!]} \{ l_{h_1}^{j_1} \mid \rho_{l_{h_1}^{j_1}}^{\{1_{h_1}^{j_1}\}} \neq 0 \} \}$$

avec ici $n = 4$ (puisqu'il y a 4 éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale) et $m = 2$ (puisque le modèle bond graph représente un système à deux entrées et deux sorties). Pour cela, nous devons étudier tous les sous-modèles bond graph issus du modèle bond graph de la figure 3.29 en ne considérant qu'une seule entrée u_{j_1} et une seule sortie y_{h_1} puis, calculer les cœfficients correspondants $\rho_{l_{h_1}^{j_1}}^{\{1_{h_1}^{j_1}\}}$ (Tab. 3.3 et 3.4). D'après le théorème 22 (page 354), nous pouvons alors conclure que $n_1 = L_1 = 2$. Si l'approche bond graph permet de jalonner l'analyse de différentes étapes qui peuvent être ici utile à la validation des spécifications, elle permet également de retrouver ainsi un résultat identique à l'approche algébrique [15].

15. Remarquons qu'à travers les cœfficients $\rho_{l_{h_1}^{j_1}}^{\{1_{h_1}^{j_1}\}}$ (Tab. 3.3 et 3.4) nous retrouvons l'expression des mineurs de la matrice système calculés selon l'approche algébrique (Tab. 3.2, page 118). Cependant, il s'agit ici d'un cas particulier. Dans le cas général, l'approche bond graph permet de ne calculer que les monômes de plus haut degré de chaque mineur et de ne s'intéresser ainsi qu'à la partie nécessaire à la détermination des ordres des zéros à l'infini. En pratique, l'approche bond graph peut donc s'avérer moins coûteuses en termes de temps de calcul. Dans certains cas, selon la morphologie du système, il peut même être montré qu'une analyse de type BG-structurelle suffit à obtenir un résultat identique à l'approche algébrique.

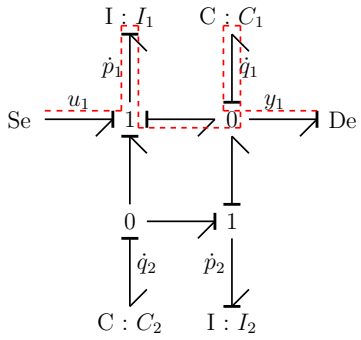
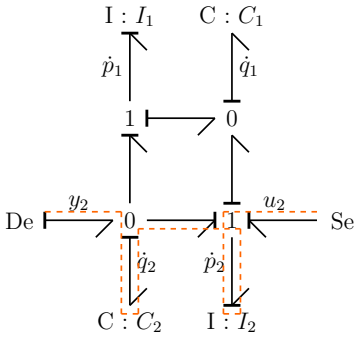
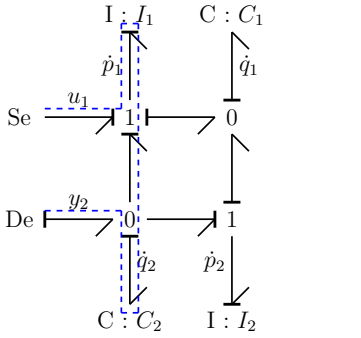
Entrée u_{i_1} et sortie y_{h_1} considérées	Familles bond graph	$\rho_{l_{h_1}^{j_1}}^{\{1_{h_1}^{j_1}\}}$	$\min\limits_{l_{h_1}^{j_1}\in\{0,\ldots,4\}} \{l_{h_1}^{j_1} \mid \rho_{l_{h_1}^{j_1}}^{\{1_{h_1}^{j_1}\}} \neq 0\}$
u_1,y_1	- de longueur BG $l = 0$: aucune - de longueur BG $l = 1$: aucune - de longueur BG $l = 2$:  	0 0 $\frac{1}{I_1C_1}$	2
u_2,y_2	- de longueur BG $l = 0$: aucune - de longueur BG $l = 1$: aucune - de longueur BG $l = 2$:  	0 0 $\frac{-1}{I_2C_2}$	2
u_1,y_2	- de longueur BG $l = 0$: aucune - de longueur BG $l = 1$: aucune - de longueur BG $l = 2$:  	0 0 $\frac{-1}{I_1C_2}$	2

TABLE 3.3 – Détermination de l'ordre du zéro à l'infini par l'approche bond graph

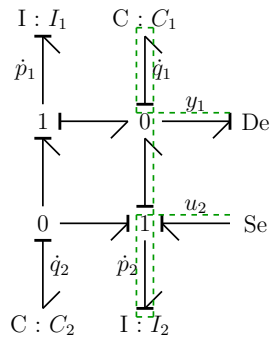
Entrée u_{i_1} et sortie y_{h_1} considérées	Familles bond graph	$\rho_{l_{h_1}^{j_1}}^{\{1_{h_1}^{j_1}\}}$	$\min\limits_{l_{h_1}^{j_1}\in\{0,\ldots,4\}} \{l_{h_1}^{j_1} \mid \rho_{l_{h_1}^{j_1}}^{\{1_{h_1}^{j_1}\}} \neq 0\}$
u_2,y_1	- de longueur BG $l = 0$: aucune - de longueur BG $l = 1$: aucune - de longueur BG $l = 2$:  	0 0 $\frac{1}{I_2C_1}$	2

TABLE 3.4 – Détermination de l'ordre du zéro à l'infini par l'approche bond graph (suite)

Remarque : Les théorèmes énoncés pour le calcul du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ et du déterminant de la matrice système $\det \mathbf{P}(s)$ (voir les théorèmes 10 et 11 pour l'approche digraphe et les théorèmes 12, 1 et 2 pour l'approche bond graph, pages 317, 320, 329, 89 et 91) consistent à étudier à la fois l'existence et les poids/gains de chemins orientés/causaux appropriés (puisque, par essence, les résultats recherchés sont de nature analytique). À ce titre, ils relèvent déjà d'une analyse de niveau comportemental et conduisent à des résultats identiques à ceux obtenus par une approche algébrique. Ils ne demandent donc aucune reformulation.

L'intérêt des différents niveaux d'analyse a été illustré dans un cadre relativement général de conception. À l'aide des deux sections suivantes, revenons désormais plus particulièrement à notre préoccupation initiale, à savoir, l'utilité de l'analyse structurelle pour un dimensionnement par modèles bond graph inverses.

3.5 Niveaux d'analyse pour le modèle de conception

Lors de l'application de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses, nous avons vu à la section 2.4.2 (page 37) que celle-ci nécessitait dès le début une phase d'analyse du modèle de conception : l'étape dite d'adéquation. Cette étape vise à vérifier notamment :

- que le modèle de conception est bien inversible ;
- et que les spécifications du cahier des charges ont été correctement choisies pour pouvoir générer des entrées physiquement réalisables.

Si le problème de rédaction des spécifications sera traité à la section suivante (section 3.6, page 139), cette section a pour objectif d'étudier ici les critères d'inversibilité d'un modèle. Après avoir rapidement rappelé ces critères pour une approche algébrique puis digraphe,

l'approche bond graph est plus particulièrement détaillée. Enfin, l'intérêt et la méthode d'obtention d'un modèle bond graph inverse d'ordre minimal sont également présentés.

Remarque : Par abus de langage, nous parlerons souvent d'inversibilité d'un modèle. En toute rigueur, notons cependant qu'il conviendrait plutôt de parler d'inversibilité des équations par rapport à un couple de variables spécifiées et à déterminer (*i.e.* ou plus simplement par rapport à un couple de vecteurs d'entrées et de sorties).

3.5.1 Critères d'inversibilité

Afin de réduire au maximum la durée du cycle de conception, nous avons vu, lors du chapitre 2, qu'il pouvait être pertinent de formuler un problème de dimensionnement, lorsqu'il s'y prête, sous la forme d'un problème inverse. Cependant, ceci ne peut se faire que si le modèle choisi pour représenter le comportement du système est effectivement inversible. Afin de vérifier s'il est donc possible de dimensionner le système par inversion, il est nécessaire de tester l'inversibilité du modèle de conception qui le représente. Pour se faire, plusieurs types de critères existent :

- des critères indirects qui apparaissent lors de la construction même du modèle inverse. Ils consistent généralement à étudier certaines matrices obtenues lors de la procédure d'inversion et sont, de ce fait, très liés à l'algorithme utilisé. Ce type de critères peut, par exemple, être trouvé dans les travaux de Silverman [Sil69] ou de Hirschorn [Hir79] ;
- des critères directs qui, eux, ne requièrent pas la construction du modèle inverse.

Cette section reprend ces critères d'inversibilité selon les trois approches étudiées jusqu'à présent : algébrique, digraphe structuré et bond graph. Bien entendu, nous nous focaliserons sur les critères d'inversibilité bond graph dans la mesure où ils sont partie intégrante de la méthodologie de dimensionnement présentée ici (méthodologie par modèles bond graph inverses, chapitre 2). Cette section nous permettra notamment de confronter deux procédures bond graph utilisant chacune un type particulier de chemins causaux E/S pour tester l'inversibilité d'un modèle, à savoir : les chemins causaux E/S BG-différents ou BG-disjoints (Tab. 3.5, page 126).
Si, fondamentalement, aucun nouveau résultat ne sera établi ici, nous nous attacherons encore une fois à préciser le domaine de validité de chaque critère énoncé et essaierons de comprendre ainsi ce qu'induit l'utilisation de ces deux types de chemins causaux E/S en termes de niveaux d'analyse.

Approche algébrique

Naturellement, le premier critère permettant de tester l'inversibilité d'un système est de vérifier la non singularité de sa matrice de transfert ou, de manière équivalente, celle de sa matrice système :

Critère d'inversibilité 1 (*niveau d'analyse comportemental [Rah93]*)

Soit Σ un système carré, linéaire et invariant dans le temps, défini par le quadruplet de matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ et de matrice de transfert $\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$.
Le système Σ est inversible si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :
(1) $\det \mathbf{T}(s) \neq 0$ *;*
(2) $\det \mathbf{P}(s) \neq 0$.

Remarque : Comme $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, P_{\mathbf{A}}(s) \neq 0$, l'équivalence entre les deux propriétés se déduit simplement de la formule de Schur qui permet d'établir : $\det \mathbf{P}(s) = P_{\mathbf{A}}(s) \det \mathbf{T}(s)$. En outre, si ce critère 1 est le plus immédiat à établir, notons que d'autres critères directs d'inversibilité peuvent être trouvés dans la littérature comme ceux de Brockett et Mesarović [Bro65b], de Sain et Massey [Sai69] ou encore de Respondek [Res90] [16].

Approche digraphe structuré

Au niveau des systèmes structurés, la notion d'inversibilité prend un sens légèrement différent puisque les paramètres du modèle sont supposés être indépendants entre eux. Aussi, dans cette approche, l'inversibilité se lit à un niveau uniquement structuré en étudiant le rang structuré de la matrice de transfert correspondante : soit selon un calcul algébrique, soit selon une approche digraphe.

Critère d'inversibilité 2 (*niveau d'analyse structuré [Com91]*)

Soit $\Sigma_{\boldsymbol{\lambda}}$ un système structuré carré à p sorties, $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\lambda}}(V, E_{\boldsymbol{\lambda}})$ le digraphe structuré le caractérisant et $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\lambda}}(s)$ sa matrice de transfert structurée.
Le système structuré $\Sigma_{\boldsymbol{\lambda}}$ est inversible si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :
(1) $\det \mathbf{T}_{\boldsymbol{\lambda}}(s) \neq 0$
(2) Sur le digraphe structuré $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\lambda}}(V, E_{\boldsymbol{\lambda}})$, il existe au moins un ensemble de p chemins orientés E/S disjoints.

Remarque : La première propriété est l'application du critère algébrique 1(1) à la matrice de transfert structurée $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\lambda}}(s)$. D'après Commault *et al.* [Com91], la deuxième propriété correspond à la caractérisation, dans le formalisme digraphe, du rang de la matrice de transfert structurée $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\lambda}}(s)$: si un ensemble de chemins orientés E/S disjoints ne peut contenir au maximum que p chemins et si un tel ensemble existe, ceci signifie alors que $\text{rang}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\lambda}}(s) = p$. De plus, si $\text{rang}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\lambda}}(s) = p$, alors $\det \mathbf{T}_{\boldsymbol{\lambda}}(s) \neq 0$ et il y a donc bien équivalence entre les deux assertions.

Approche bond graph par étude des chemins causaux E/S BG-différents

Comme nous l'avons énoncé précédemment, l'inversibilité d'un modèle bond graph peut être testée en étudiant les chemins causaux E/S soit BG-différents, soit BG-disjoints. Si le tableau 3.5 récapitule brièvement les deux procédures de test qui en découlent, ces deux prochaines sections visent à étudier plus en détails en quoi elles consistent et comment elles doivent être mises en œuvre dans notre démarche de conception. Enfin, ces

16. Un aperçu général de ces critères peut également être trouvé dans la thèse de Fotsu-Ngwompo [Fot97a].

procédures seront confrontées en termes d'objectif de conception et de niveau d'analyse recherché.

Approche basée sur l'exploration des chemins causaux E/S BG-différents et la matrice système $\mathbf{P}(s)$ [Rah93]	**Approche basée sur l'exploration des lignes de puissance E/S et des chemins causaux E/S BG-disjoints** [Fot97a]
1 - Détermination des chemins causaux E/S BG-différents 2 - Calcul du déterminant de la matrice système $\det \mathbf{P}(s)$	1 - Étude des lignes de puissance E/S BG-disjointes 2 - Étude des chemins causaux E/S BG-disjoints 3 - Étude de la résolubilité de la structure de jonction du modèle bond graph bicausal associé

TABLE 3.5 – Procédures existantes pour tester l'inversibilité d'un modèle bond graph

Si la procédure par étude des chemins causaux E/S BG-disjoints sera étudiée à la section suivante, commençons ici par présenter celle basée notamment sur la scrutation des chemins causaux E/S BG-différents. Pour cette approche, les développements reposent sur [Rah93] :

- les résultats existants sur les digraphes structurés (critère 2, page 125) ;
- et l'équivalence entre chemins orientés disjoints en digraphe et chemins causaux BG-différents en bond graph (section 3.4.2, page 100).

Ceci a conduit notamment au test d'inversibilité suivant :

Test d'inversibilité 1 (*[Rah93]*)

Par étude des chemins causaux E/S BG-différents

Soit un modèle bond graph vérifiant les hypothèses décrites en début de chapitre.

(1) Si le modèle bond graph ne contient pas p chemins causaux E/S BG-différents, alors le système est non inversible.

(2) Si le modèle bond graph contient un seul choix possible de p chemins causaux E/S BG-différents, alors le système est inversible.

(3) Si le modèle bond graph contient plusieurs choix possibles de p chemins causaux E/S BG-différents, il faut alors calculer le déterminant de la matrice système d'après le théorème 1 (page 89) pour conclure sur l'inversibilité du système.

En réalité, ce test d'inversibilité se déduit de la détermination de $\det \mathbf{P}(s)$ directement à partir du modèle bond graph. En effet, selon le théorème 1 (page 89), nous constatons alors directement que :

- s'il n'existe aucun ensemble $\mathcal{E}_i$ alors $\det \mathbf{P}(s) = 0$ et le système n'est pas inversible ;
- s'il n'existe qu'un unique ensemble $\mathcal{E}_i$ alors la somme ne peut s'annuler et $\det \mathbf{P}(s) \neq 0$: le système est inversible ;

– s'il existe plusieurs ensembles $\mathcal{E}_i$, il convient alors de vérifier que la somme des termes $(-1)^{\sigma_{\mathcal{E}_i}} \tilde{G}_{\mathcal{E}_i} P_{R,\mathcal{E}_i}(s)$ ne s'annule pas pour conclure sur l'inversibilité du système.

Enfin, de par le calcul formel de $\det \mathbf{P}(s)$, notons ainsi que ce test d'inversibilité relève d'un niveau d'analyse comportemental.

Remarque : En pratique, lorsqu'il existe plusieurs ensembles $\mathcal{E}_i$, il n'est pas nécessairement utile d'étudier tous les ensembles existants. Dans la mesure où la non nullité d'un seul des cœfficients du polynôme $\det \mathbf{P}(s)$ est suffisante pour conclure sur la non nullité de $\det \mathbf{P}(s)$, il n'est en effet pas utile de calculer l'expression formelle et complète de ce déterminant pour conclure sur l'inversibilité du modèle de conception. D'après le théorème 2 (page 91), montrer que $\det \mathbf{P}(s) \neq 0$ peut se réduire à montrer que :

$$\exists\ k \in \{0, \ldots, n\} \text{ tel que } \rho_k^{\{m\}} \neq 0$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale :

– n et m sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'entrées ;
– $\rho_k^{\{m\}}$ correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph de longueur BG égale à k et contenant comme chemins causaux uniquement m chemins causaux E/S BG-différents. Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph $\mathcal{F}_l$ doit être multiplié par $(-1)^{d_l}$ où d_l est le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique doit également être multiplié par $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_l}}$ où $\sigma_{\mathcal{F}_l}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les m chemins causaux de la famille $\mathcal{F}_l$ sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.

Approche bond graph par étude des chemins causaux E/S BG-disjoints

Selon une approche différente, Fotsu-Ngwompo *et al.* [Fot97a, Ngw01a, Ngw01b] se sont eux intéressés à l'étude de l'inversibilité d'un modèle par l'analyse de ses chemins causaux E/S BG-disjoints. Cette différence d'approche s'explique notamment par son origine : les critères d'inversibilité déduits selon cette logique ne sont pas basés sur une traduction bond graph de résultats énoncés dans le formalisme digraphe mais ont été établis directement en langage bond graph.

Cette approche se distingue de l'approche bond graph précédente notamment par l'ajout d'une étape supplémentaire d'analyse au niveau du modèle bond graph acausal et par l'étude des chemins causaux E/S cette fois-ci BG-disjoints. Ainsi, selon cette démarche, il convient d'étudier dans l'ordre (Tab. 3.5, page 126) :

1. les lignes de puissance E/S BG-disjointes du modèle bond graph acausal ;
2. les chemins causaux E/S BG-disjoints du même modèle bond graph cette fois-ci affecté d'une causalité préférentiellement intégrale ;
3. la structure de jonction du modèle bond graph bicausal correspondant (s'il a été prouvé lors des étapes précédentes qu'il était possible de le construire).

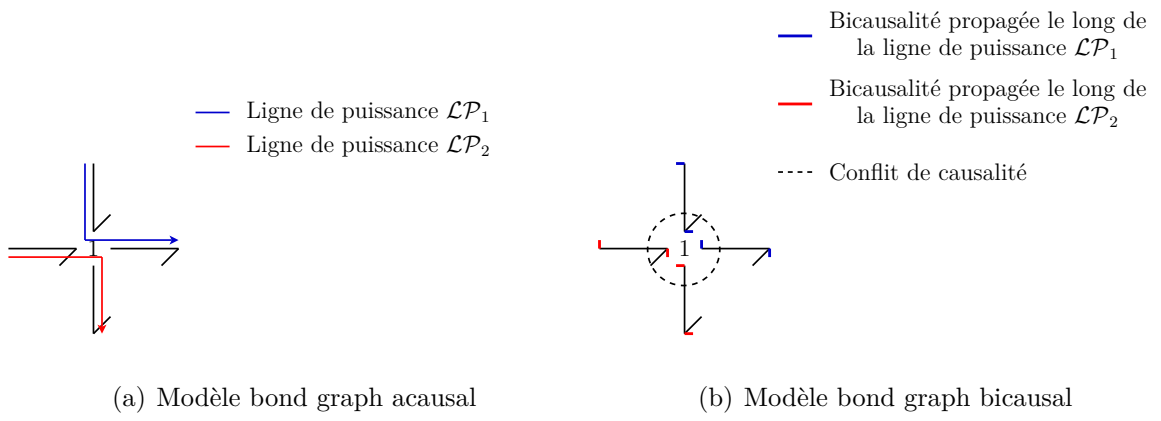
Avant de comparer les deux procédures permettant de tester l'inversibilité d'un modèle bond graph, revenons ici sur ces différentes étapes. Pour cela, commençons par le critère 3

qui est un critère acausal sur la structure énergétique même du modèle.

Critère d'inversibilité 3 (*[Ngw05]*)

Par étude de lignes de puissance E/S BG-disjointes
Soit un modèle bond graph acausal vérifiant les hypothèses décrites en début de chapitre.
Pour que le système correspondant soit inversible, il doit exister au moins *un ensemble de p lignes de puissance E/S BG-disjointes*[17] *sur le modèle bond graph acausal.*

Interprétation : D'un point de vue graphique, la bicausalité (causalité qui est principalement utilisée pour construire des modèles bond graph inverses, annexe A.5.2 et [Gaw95]) est nécessairement propagée le long des lignes de puissance E/S. Par conséquent, pour les systèmes multi-entrées multi-sorties, l'existence de lignes de puissance partiellement jointes impliquera la présence de plusieurs causalités fortes[18] sur une même jonction et induira donc un conflit de causalité durant l'affectation de la bicausalité (Fig. 3.32). L'existence d'au moins un ensemble de p lignes de puissance E/S BG-disjointes est donc nécessaire pour éviter ce type de conflit causal lors de la construction du modèle inverse. D'un point de vue physique, ceci signifie simplement que, pour pouvoir agir énergétiquement parlant sur une sortie y spécifique du système à partir d'une entrée u spécifique, un acheminement d'énergie doit exister entre cette paire de variables (u, y). Pour les systèmes multi-entrées multi-sorties, le raisonnement s'applique également à chaque paire entrée-sortie (u_i, y_j) en ajoutant la condition supplémentaire que les chemins d'acheminement de l'énergie doivent être disjoints. Vérifier la disjonction des lignes de puissance E/S permet ainsi de vérifier si le problème est bien posé au sens de l'inversion. □



(a) Modèle bond graph acausal (b) Modèle bond graph bicausal

FIGURE 3.32 – Apparition d'un conflit de causalité lorsque la bicausalité est propagée le long de lignes de puissance non BG-disjointes

17. Conformément à leur définition 4 (page 84), rappelons que deux lignes de puissance BG-disjointes se caractérisent par le fait qu'elles sont graphiquement disjointes puisqu'elles ne possèdent aucun élément bond graph en commun.
18. Nous appelons *causalité forte* une causalité qui impose un flux (resp. un effort) sur une jonction 1 (resp. 0).

Exemple :

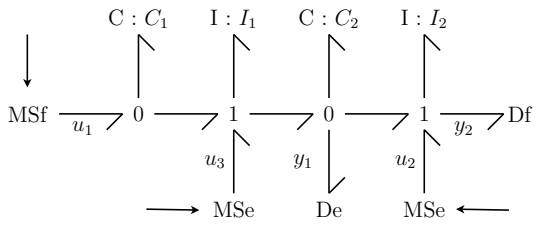
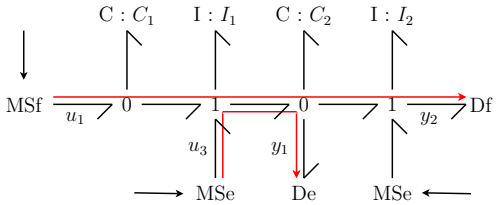


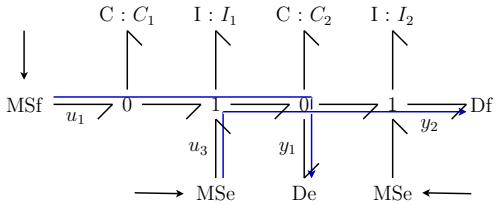
FIGURE 3.33 – Exemple de modèle bond graph pour illustrer la condition d'inversibilité sur l'existence de lignes de puissance E/S BG-disjointes

Illustrons cette condition nécessaire d'inversibilité avec le modèle bond graph de la figure 3.33 et considérons deux problèmes d'inversion différents :

- le premier consistant à exprimer les entrées (u_1, u_3) en fonction des sorties (y_1, y_2) (Fig. 3.34) ;
- le deuxième consistant, lui, à exprimer les entrées (u_1, u_2) en fonction des sorties (y_1, y_2) (Fig. 3.35).

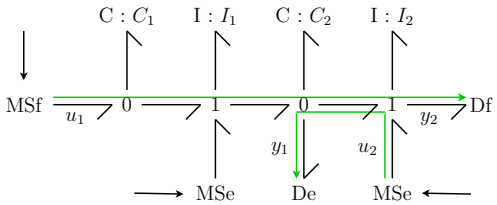


(a) Ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}1}$ de lignes de puissance E/S non BG-disjointes

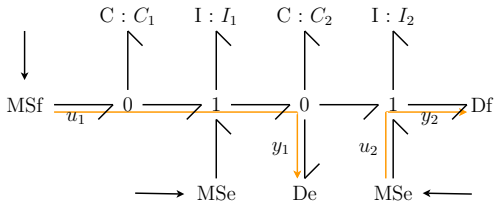


(b) Ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}2}$ de lignes de puissance E/S non BG-disjointes

FIGURE 3.34 – Absence d'ensemble de lignes de puissance E/S BG-disjointes



(a) Ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}3}$ de lignes de puissance E/S non BG-disjointes



(b) Ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}4}$ de lignes de puissance E/S BG-disjointes

FIGURE 3.35 – Existence d'au moins un ensemble de lignes de puissance E/S BG-disjointes

Une analyse des lignes de puissance E/S aboutit alors aux résultats suivants. Dans le cas du premier problème, deux ensembles de lignes de puissance E/S existent entre les entrées et sorties considérées : les ensembles $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}1}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}2}$ (Fig. 3.34(a) et 3.34(b)).

Malheureusement, ces ensembles sont constitués de couples de lignes de puissance non BG-disjointes : le modèle n'est donc pas inversible par rapport aux paires de variables (u_1, u_3) et (y_1, y_2). Au contraire, pour le deuxième problème, il existe toujours deux ensembles de lignes de puissance E/S (les ensembles $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}3}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}4}$, Fig. 3.35(a) et 3.35(b)), et un de ceux-ci est composé de lignes de puissance BG-disjointes. Le modèle satisfait donc ici le critère d'inversibilité 3 (page 128) : il est donc *potentiellement* inversible par rapport aux paires de variables (u_1, u_2) et (y_1, y_2).

L'adverbe « potentiellement » est de première importance dans la phrase précédente et souligne le fait que le critère 3 (page 128) est une condition nécessaire mais non suffisante. En effet, la disjonction des lignes de puissance E/S ne conduit pas nécessairement à une propagation correcte de la bicausalité et donc à la possibilité d'inverser le modèle.

En réalité, afin de s'assurer d'une propagation correcte de la bicausalité, l'étude des lignes de puissance E/S BG-disjointes ne suffit pas. Cette vérification peut être faite *a priori* de deux manières différentes :

- au niveau du modèle bond graph par l'analyse des lignes de puissance E/S dite indépendantes [19]. Cependant, l'étude de ce type de lignes de puissance peut s'avérer difficile à détecter en pratique ;
- au niveau du modèle bond graph causal en étudiant les ensembles de chemins causaux E/S BG-disjoints comme le montre le critère d'inversibilité suivant.

Critère d'inversibilité 4 (*[Fot97a, Ngw01a, Ngw05, Jar08a]*)

Par étude des chemins causaux E/S BG-disjoints
Soit un modèle bond graph causal vérifiant les hypothèses décrites en début de chapitre.
Pour que le système correspondant soit inversible, il doit exister au moins *un ensemble de p chemins causaux E/S BG-disjoints sur le modèle bond graph causal.*

Interprétation : D'un point de vue graphique, s'il existe un ensemble de p chemins causaux E/S BG-disjoints, ceci prouve, d'après [Fot97a], que la bicausalité peut être correctement propagée sans l'apparition d'un quelconque conflit de causalité. Ceci signifie donc qu'il est possible de construire graphiquement le modèle inverse correspondant.
D'un point de vue mathématique, s'il n'existe pas d'ensemble de p chemins causaux E/S BG-disjoints, ceci montre que les variables d'entrées considérées ne peuvent pas simultanément être exprimées comme des fonctions des variables de sortie étudiées : le modèle n'est, par conséquent, pas inversible pour le problème considéré (*i.e.* pas inversible par rapport aux variables d'entrée et de sortie considérées). □

19. Cette notion a été introduite par Fotsu-Ngwompo *et al.* dans [Ngw05]. En l'occurrence, deux lignes de puissances E/S sont dites *indépendantes* si elles ne possèdent aucune variable en commun. Une propriété équivalente est de dire que deux lignes de puissance E/S sont indépendantes si au moins une séquence d'éléments de jonction n'imposant pas une causalité forte est présente dans chaque structure reliant n'importe quelle paire d'éléments de jonction appartenant à une de ces lignes de puissance. Remarquons au passage que, contrairement à la notion acausale de lignes de puissance E/S BG-disjointes, la définition même des lignes de puissance E/S indépendantes est une notion qui implique une analyse causale du modèle.

Remarque : S'il existe un ensemble de p chemins causaux E/S BG-disjoints, il existe alors nécessairement un ensemble de p lignes de puissance E/S BG-disjointes. Cependant, l'analyse acausale des lignes de puissance permet de stopper parfois l'étude de l'inversibilité plus tôt grâce à une étude relativement simple (il existe toujours moins ou autant de lignes de puissance que de chemins causaux) et ne nécessitant pas l'orientation des équations du modèle (*i.e.* une affectation causale).

Exemple :

Reprenons le modèle bond graph de la figure 3.33 (page 129) et supposons que le problème considéré soit d'inverser le modèle par rapport aux variables d'entrée (u_1, u_2) et aux variables de sortie (y_1, y_2). Nous avons déjà vu que ce problème satisfaisait la première condition nécessaire d'inversibilité (critère 3, page 128) et qu'il était donc potentiellement inversible. Voyons désormais s'il vérifie le critère 4 (page 130).

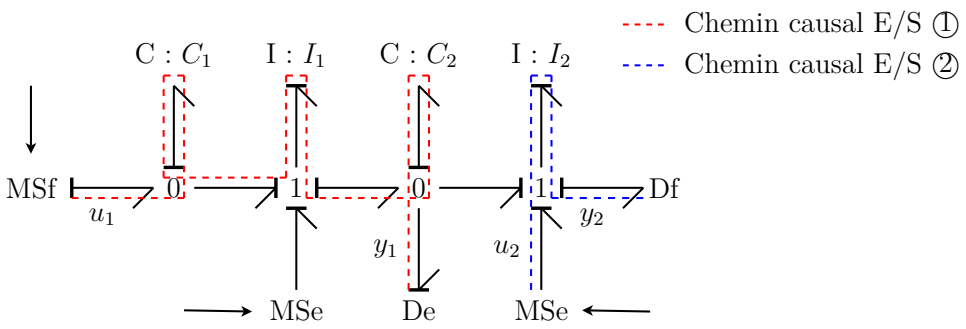


FIGURE 3.36 – Exemple de modèle bond graph possédant un ensemble de chemins causaux E/S BG-disjoints

Après affectation de la causalité préférentiellement intégrale, une analyse causale nous montre qu'il existe un ensemble de deux chemins causaux E/S BG-disjoints (Fig. 3.36). Le modèle vérifie donc le critère 4 : il est *potentiellement* inversible.

Encore une fois, il convient de noter l'importance de l'adverbe « potentiellement » dans notre dernière phrase. Si le deuxième critère d'inversibilité de la procédure de FOTSU-NGWOMPO *et al.* [Fot97a, Ngw01a, Ngw01b] (critère 4, page 130) est certes plus restrictif que le premier (critère 3, page 128) et permet d'éliminer certains problèmes mal posés qui n'avaient pas été détectés par l'analyse des lignes de puissance, celui-ci n'est pas toujours suffisant pour conclure sur l'inversibilité effective du modèle comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple :

Considérons le modèle bond graph de la figure 3.37.

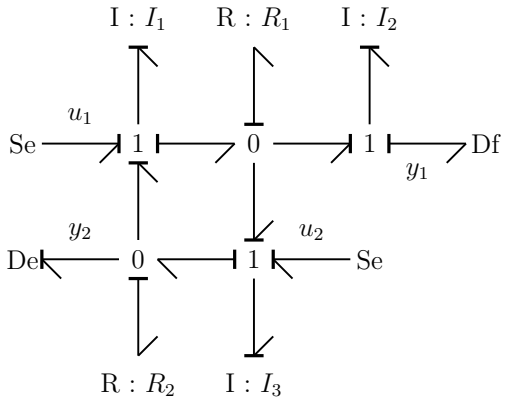
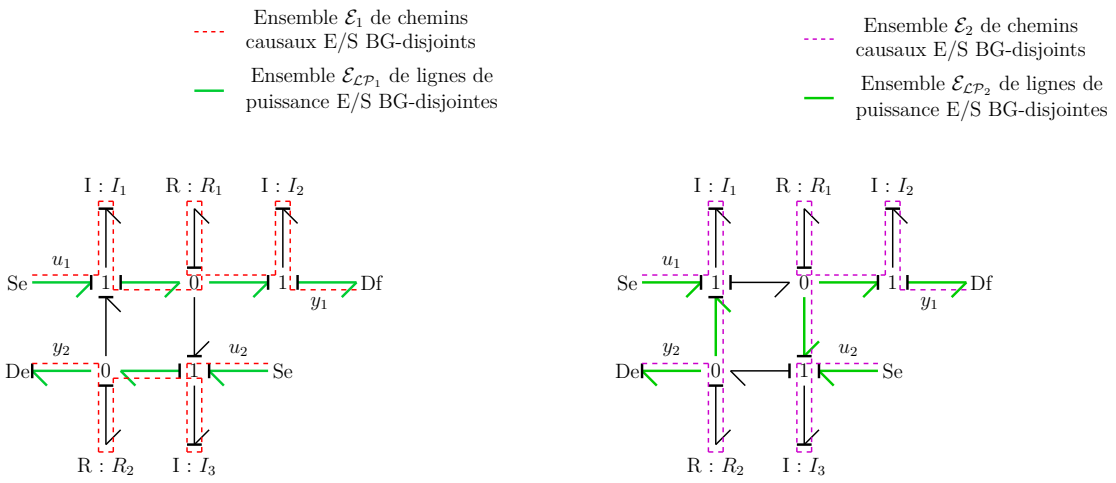


FIGURE 3.37 – Exemple de modèle bond graph non inversible satisfaisant pourtant les critères d'inversibilité 3 et 4 (pages 128 et 130)

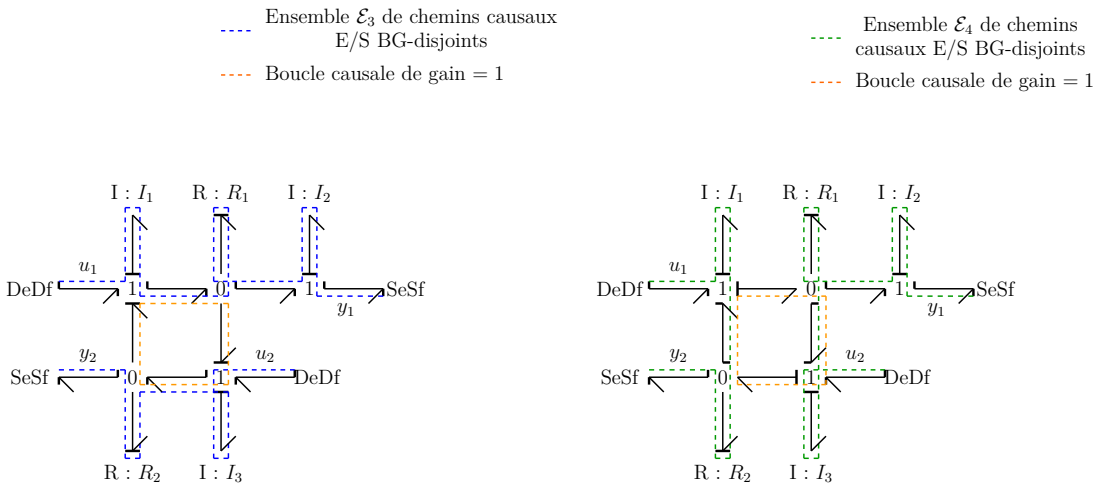
Après analyse acausale et causale de ce modèle bond graph, nous pouvons montrer qu'il existe deux ensembles de deux lignes de puissance E/S BG-disjointes et deux ensembles de deux chemins causaux E/S BG-disjoints (Fig. 3.38(a) et 3.38(b)) : les deux premiers critères d'inversibilité de la procédure de FOTSU-NGWOMPO *et al.* sont donc vérifiés et le modèle est potentiellement inversible.



(a) Modèle bond graph causal (b) Modèle bond graph causal

FIGURE 3.38 – Analyse acausale et causale du modèle bond graph

Cependant, lors de la construction des modèles inverses correspondants, nous nous rendons compte que, quelle que soit la manière dont est propagée la bicausalité, les modèles bicausaux obtenus présentent une boucle causale de gain égal à 1 (Fig. 3.39(a) et 3.39(b)) : la structure de jonction du modèle n'est donc pas résoluble [20] et le modèle n'est pas inversible par rapport aux variables d'entrée (u_1, u_2) et de sortie (y_1, y_2) considérées.



(a) Modèle bond graph bicausal n°1 (b) Modèle bond graph bicausal n°2

FIGURE 3.39 – Analyse causale des modèles bond graph bicausaux associés

En réalité, l'existence d'un ensemble de chemins causaux E/S BG-disjoints assure uniquement une propagation de la bicausalité sans apparition de conflit de causalité lors de la construction graphique du modèle inverse correspondant (résultat démontré par FOTSU-NGWOMPO dans [Fot97a]). Toutefois cette existence ne garantit en aucune manière que l'affectation de causalité ne conduira pas à une structure de jonction non résoluble. Tout comme un modèle direct, un modèle inverse doit en effet également vérifier certaines contraintes globales de causalité (contraintes traduites par les notions de cycles et de cocycles [Bid94] et d'ordre des variables de base [Ros80]). Un troisième critère doit donc être ajouté pour tester l'inversibilité d'un modèle :

Critère d'inversibilité 5 (*[Fot97a, Jar08a]*)

Par étude de la structure de jonction du modèle bond graph bicausal
Soit un modèle bond graph vérifiant les hypothèses décrites en début de chapitre et vérifiant également les critères d'inversibilité 3 et 4 (pages 128 et 130) [21].
Pour que le système correspondant soit inversible, la structure de jonction du modèle bond graph bicausal associé doit être résoluble.

20. Plus de détails sur la résolubilité de la structure de jonction d'un modèle bond graph peuvent être trouvés dans les références [Ros79, Wla91, van94].
21. Nous supposons que le modèle vérifie les critères d'inversibilité 3 et 4 (pages 128 et 130) afin de s'assurer qu'il est possible de construire un modèle bicausal.

Interprétation : D'un point de vue mathématique, ce critère signifie qu'il existe une suite ordonnée d'affectations *a priori* résolubles qui permettent de déterminer chaque entrée inconnue u_i en fonction des sorties spécifiées y_j et de l'état inverse : mathématiquement, le modèle est donc *a priori* inversible. □

Remarque : En pratique, ce critère d'inversibilité est automatiquement vérifié lorsque le modèle bond graph considéré présente une structure arborescente (*i.e.* sans cycle de liens bond graph) [Fot97a]. Dans le cas contraire (*i.e.* présence de cycle de liens bond graph), celui-ci peut toutefois être vérifié en détectant la présence de boucles causales non résolubles sur le modèle bond graph bicausal grâce notamment aux procédures de Rosenberg et Andry [Ros79] et de van Dijk [van94].

Exemple :

Considérons le modèle bond graph de la figure 3.40.

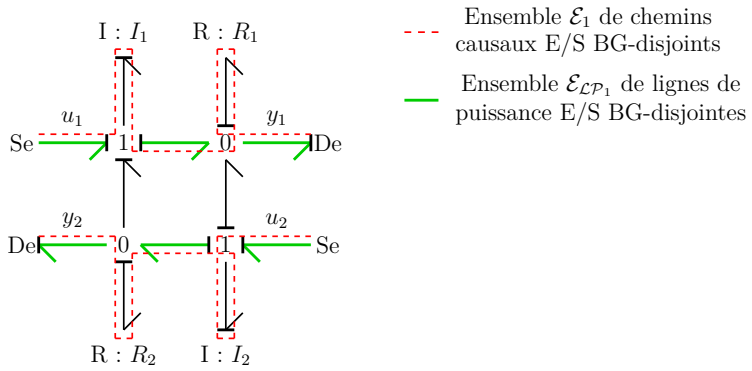


Figure 3.40 – Exemple de modèle bond graph causal pour illustrer le critère d'inversibilité 5 (page 133)

Après une analyse acausale puis causale de ce modèle, nous constatons qu'il existe au moins un ensemble de deux lignes de puissance E/S BG-disjointes et un ensemble de deux chemins causaux E/S BG-disjoints. Ainsi, le modèle vérifie les deux critères 3 et 4 (pages 128 et 130) et est donc potentiellement inversible.

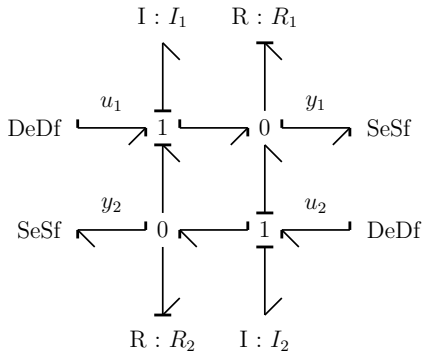


Figure 3.41 – Modèle bond graph bicausal associé et possédant une structure de jonction résoluble

Désormais, si nous construisons le modèle bond graph bicausal correspondant (Fig. 3.41), nous constatons que ceci conduit à l'obtention d'une structure de jonction résoluble : le modèle est *a priori* inversible par rapport aux variables d'entrée (u_1, u_2) et de sortie (y_1, y_2).

Finalement, les critères d'inversibilité de Fotsu-Ngwompo *et al.* peuvent se récapituler sous la forme du test suivant :

Test d'inversibilité 2 (*[Fot97a, Jar08a]*)

Par étude des chemins causaux E/S BG-disjoints

Soit un modèle bond graph vérifiant les hypothèses décrites en début de chapitre.

(1) Si le modèle bond graph considéré ne possède pas d'ensemble de p lignes de puissance E/S BG-disjointes, alors le système n'est pas inversible.

(2) Si le modèle bond graph ne possède pas d'ensemble de p chemins causaux E/S BG-disjoints, alors le système n'est pas inversible.

(3) Si le modèle contient plusieurs ensembles de p chemins causaux E/S BG-disjoints :

- *choisir alors un ensemble de p lignes de puissance E/S BG-disjointes ;*
- *construire le modèle bond graph bicausal correspondant en propageant la bicausalité le long des p lignes de puissance E/S BG-disjointes choisies à l'étape précédente.*

Si cette construction conduit à l'obtention d'une structure de jonction résoluble, le modèle est alors inversible. Au contraire, si, quel que soit l'ensemble de lignes de puissance E/S BG-disjointes choisi et quelles que soient les affectations causales retenues pour le modèle bond graph bicausal, une structure de jonction non résoluble apparaît, le système n'est alors pas inversible. Le modèle et/ou le problème d'inversion doivent être reformulés.

Remarque : Les critères (1), (2) et (3) ne sont que la reprise des critères 3, 4 et 5 (pages 128, 130 et 133). En outre, précisons que, même si le critère 5 est plus restrictif que les autres, celui-ci n'est encore une fois qu'une condition nécessaire mais non suffisante. Il permet simplement de conclure sur l'inversibilité comportementale du modèle : en toute rigueur, le modèle ne sera effectivement inversible que si les équations qui lui sont associées (*e.g.* les lois caractéristiques des phénomènes décrits) sont également mathématiquement localement inversibles (ceci explique notamment l'utilisation de l'expression « *a priori* inversible » dans l'interprétation précédente). Toutefois, puisque nous considérons ici des modèles bond graph linéaires, invariants dans le temps et à éléments 1-ports, l'inversibilité mathématique locale des équations asssociées est automatiquement vérifiée et le critère 5 suffit à conclure sur l'inversibilité des modèles étudiés.

Comparaison entre les deux approches bond graph

Si nous comparons maintenant les deux approches présentées pour tester l'inversibilité d'un modèle bond graph, nous pouvons constater, entre autres, que :

- Dans le principe, l'approche basée sur la scrutation des chemins causaux E/S BG-différents (méthode de Rahmani [Rah93]) a permis d'établir des critères directs d'inversibilité tandis que les critères d'inversibilité basés sur l'étude des chemins causaux E/S BG-disjoints (méthode de Fotsu-Ngwompo *et al.* [Fot97a, Ngw01a, Ngw01b]) seraient plus qualifiés de critères indirects puisqu'ils nécessitent *in fine* la construction du modèle inverse *via* un modèle bond graph bicausal (tests d'inversibilité 1 et 2, pages 126 et 135) ;

- En termes de niveaux d'analyse, la procédure de Rahmani requiert d'emblée l'étude des lois caractéristiques à travers le calcul des gains des chemins causaux E/S BG-différents. À l'inverse, la procédure de Fotsu-Ngwompo *et al.* ne le demande éventuellement que pour étudier les gains des boucles causales du modèle bicausal et donc pour vérifier la résolubilité de sa structure de jonction ;

- En termes de mise en œuvre, la méthode de Fotsu-Ngwompo *et al.* peut sembler plus itérative que celle de Rahmani. En effet, lorsqu'il existe plusieurs ensembles de chemins causaux E/S BG-disjoints, celle-ci peut parfois nécessiter la construction de plusieurs modèles bicausaux avant de pouvoir conclure sur l'inversibilité du modèle. Malgré tout, de par ses différentes étapes, elle permet de stopper au plus tôt l'analyse en cas de non inversibilité (*e.g.* l'analyse des lignes de puissance suffira parfois à conclure sur la non inversibilité alors que la méthode de Rahmani aurait requis l'analyse des gains de tous les chemins causaux E/S BG-différents).

- Enfin, en termes de champ d'application, étant basée sur des raisonnements graphiques (et donc indépendamment de la forme des lois caractéristiques des phénomènes modélisés), la démarche de Fotsu-Ngwompo *et al.* est généralisable aux modèles présentant des éléments de stockage d'énergie dépendants. Cependant, cette extension ne semble pas aussi facile pour les critères établis par l'approche de Rahmani. En toute rigueur, il faudrait vérifier si la formule digraphe pour calculer $\det \mathbf{P}(s)$ est toujours valable pour de tels systèmes et si son interprétation en langage bond graph reste identique [22].

Bien que les deux approches soient différentes, elles ne sont pas pour autant en contradiction. En réalité, l'utilisation de l'une ou l'autre de ces procédures de test dépend intrinsèquement du contexte pour lequel la propriété d'inversibilité est recherchée. En effet, dans une problématique de conception, cette propriété peut être à vérifier lors :
- d'un dimensionnement par inversion ;
- ou d'une synthèse de commande par découplage (la propriété d'inversibilité étant une condition nécessaire au découplage d'un système).

Ces deux contextes sont d'ailleurs les contextes historiques pour lesquels les deux procédures de test ont été établies.
Dans le cas d'un dimensionnement par inversion (cas de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses), l'approche de Fotsu-Ngwompo *et al.* présente

22. En réalité, Reinschke démontre justement dans [Rei94] que la procédure digraphe pour calculer $\det \mathbf{P}(s)$ diffère lorsqu'il s'agit de systèmes singuliers. Le lecteur intéressé pourra consulter également la thèse de Mouhri [Mou00] où une traduction bond graph de cette extension est initiée.

plusieurs avantages. Lorsqu'à l'issue de l'analyse, le modèle testé est inversible, cette procédure permet de construire en même temps le modèle bond graph inverse correspondant et initie donc la suite du dimensionnement par inversion (dans la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses, l'ingénieur en charge de l'étude peut alors passer à l'étape de spécification). À l'inverse, lorsque le modèle testé n'est pas inversible, cette procédure fournit quelques pistes sur la reconception éventuelle du système. En effet, en se basant sur la classification des différents niveaux d'analyse (section 3.4.3, page 106), cette approche permet de « découper » la procédure de test en différentes étapes de sorte à donner des indications précises sur les origines de la non-inversibilité du modèle.
Dans le cas d'une synthèse de commande par découplage, à l'inverse, la méthode de Rahmani (test d'inversibilité 1, page 126) peut sembler plus adéquate car la construction *in fine* du modèle inverse n'est pas recherchée. Notons toutefois que celle-ci peut être avantageusement complétée par une des étapes de la procédure de test de Fotsu-Ngwompo *et al.* (étape 1(b), Tab. 3.6). Afin de détecter au plus tôt les modèles non inversibles et d'éviter le recours systématique au calcul formel de $\det \mathbf{P}(s)$, l'ingénieur en charge de l'étude peut vérifier, parmi les ensembles de chemins causaux E/S BG-différents, la présence d'ensembles de chemins causaux E/S BG-disjoints : s'il n'en existe pas, le modèle peut alors être directement déclaré comme non inversible.

Test / **Niveau d'analyse**	**Test d'inversibilité 1** (chemins E/S BG-différents) [Rah93]	**Test d'inversibilité 2** (chemins E/S BG-disjoints) [Fot97a]
BG-structurel	1(a) - Détermination des chemins causaux E/S BG-différents 1(b) - Étude de chemins causaux E/S BG-disjoints	1 - Étude des lignes de puissance E/S BG-disjointes 2 - Étude des chemins causaux E/S BG-disjoints
Comportemental	2 - Calcul du déterminant de la matrice système $\det \mathbf{P}(s)$	3 - Étude de la résolubilité de la structure de jonction du modèle bond graph bicausal associé

Table 3.6 – Comparaison entre deux procédures existantes pour tester l'inversibilité d'un modèle bond graph

3.5.2 Obtention d'un modèle inverse d'ordre minimal

Dans la section 2.2.2 (page 28) sur les méthodes d'inversion de modèles en automatique, nous avons montré que les modèles inverses obtenus présentaient des parties dynamiques de même ordre que celle du modèle direct original. Ces modèles étaient alors appelés des modèles inverses d'*ordre plein*. Cependant, comme nous l'avons déjà indiqué, Silverman [Sil68] a démontré que, dans ce cas, l'ordre du modèle inverse pouvait être réduit sans augmentation de l'ordre de différentiation des composantes du vecteur de sortie. La réduction de sa partie dynamique aboutit alors à un modèle inverse qualifié d'*ordre minimal*. Ici, la notion d'ordre minimal doit se comprendre comme étant le nombre maximal de conditions initiales qui peuvent être indépendamment fixées sur le modèle inverse (propriété qui ne se vérifie généralement pas sur les modèles inverses d'ordre plein).

L'intérêt d'un tel type de modèle inverse réside dans des manipulations simplifiées, que ce soit au niveau algébrique ou au niveau de la simulation. C'est pourquoi, toujours dans le contexte de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses, Fotsu-Ngwompo [Fot97a] s'est intéressé à l'obtention de tels modèles en bond graph, et ce, sans passer par l'intermédiaire d'un modèle inverse d'ordre plein :

Procédure 3 (*Obtention d'un modèle inverse d'ordre minimal [Fot97a]*)

Soit un modèle bond graph vérifiant les hypothèses énoncées en début de chapitre et inversible. Un modèle inverse d'ordre minimal peut alors être directement obtenu en appliquant la procédure suivante[23] *:*

1. *Choisir un ensemble $\mathcal{E}_i$ de p chemins causaux E/S BG-disjoints d'ordre BG minimal ;*
2. *Déterminer quel ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}i}$ de p lignes de puissance E/S BG-disjointes est associé à l'ensemble $\mathcal{E}_i$;*
3. *Construire le modèle bicausal correspondant en propageant la bicausalité le long des lignes de puissances appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}i}$.*

Interprétation : En réalité, le terme « d'ordre minimal » pour un modèle inverse englobe deux significations. La première est que cet ordre correspond à la dimension minimale que peut avoir la partie dynamique du modèle inverse. La seconde implique que les sorties spécifiées (donc les entrées du modèle inverse) ont été dérivées par rapport au temps un nombre minimum de fois pour obtenir ce modèle inverse. Or, comme le montre Fotsu-Ngwompo [Fot97a] par un raisonnement graphique sur la propagation de la bicausalité et sur son implication en termes de changement de causalité des éléments de stockage d'énergie :

- l'ordre BG minimal ω_{min} que peut avoir un ensemble de chemins causaux E/S BG-disjoints correspond au nombre global minimum de dérivations des sorties y_i nécessaire pour inverser le système ;

23. Bien entendu, lors de l'application de la procédure 3, il convient de choisir un ensemble $\mathcal{E}_i$ parmi les ensembles assurant l'inversibilité du système (c'est-à-dire dont les lignes de puissance associées permettent de construire un modèle bond graph bicausal présentant une structure de jonction résoluble). De plus, selon Fotsu-Ngwompo *et al.*, un ensemble $\mathcal{E}_i$ de p chemins causaux E/S BG-disjoints est dit *associé* à un ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}i}$ de p lignes de puissance E/S BG-disjointes si, chaque jonction appartenant à une des lignes de puissance de $\mathcal{E}_{\mathcal{LP}i}$, est également traversée par au moins un des chemins causaux de $\mathcal{E}_i$ [Ngw05].

– $n - \omega_{min}$ représente l'ordre minimal que peut avoir la partie dynamique du modèle inverse. □

3.6 Niveaux d'analyse pour le cahier des charges

Dans la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses, nous avons vu que l'étape d'analyse du modèle de conception (étape dite d'adéquation) consistait à vérifier d'une part que le modèle considéré est inversible (voir section 3.5) et, d'autre part, que les sorties spécifiées par le cahier des charges permettent de calculer des entrées physiquement réalisables. En d'autres mots, après avoir vérifié que le modèle de conception était correctement défini pour une inversion, l'ingénieur en charge de l'étude doit s'assurer que le problème de conception est également bien posé en termes de spécifications.

Cette section vise à présenter cette nouvelle étape d'analyse. À cette fin, la notion d'ordres d'essentialité est introduite comme correspondant aux ordres de dérivation maximaux des sorties spécifiées apparaissant dans un modèle inverse. Une procédure causale de détermination bond graph de ces ordres est étudiée puis simplifiée. Enfin, une nouvelle procédure est établie, cette fois-ci selon une approche bicausale, et des critères de dérivabilité sur les sorties spécifiées sont énoncés.

3.6.1 Ordre d'essentialité d'une sortie

Issue du concept de *ligne essentielle* de Cremer[24], la notion d'ordre d'essentialité a été introduite pour la première fois en 1986 par Commault *et al.* [Com86] pour résoudre le problème de découplage par retour statique. Physiquement, ce type d'ordre peut s'interpréter de la manière suivante :

> *« L'**ordre d'essentialité** n_{ie} de la sortie y_i est égal à l'ordre maximal de dérivation (par rapport au temps) de la sortie y_i apparaissant dans le modèle inverse »* [Com86, Glu92].

Dans le contexte du dimensionnement des systèmes mécatroniques, la détermination de ce type d'ordre nous permet de vérifier ainsi que le cahier des charges est correctement rédigé et que les trajectoires spécifiées sont suffisamment dérivables par rapport au temps pour calculer des entrées physiquement réalisables.

Afin de déterminer ces ordres d'essentialité, Commault *et al.* ont établi le théorème suivant faisant appel aux ordres des zéros à l'infini du système (définition 44, page 346 ou plus largement voir annexe E pour plus de précisions).

24. La ligne $\mathbf{m}_i$ d'une matrice $\mathbf{M}$ est dite *essentielle* si et seulement si cette ligne ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres lignes de $\mathbf{M}$ [Cre71].

Théorème 3 (*Modèle d'état → ordre d'essentialité [Com86]*)

Pour un système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ *inversible à droite et présentant* p *sorties, l'ordre d'essentialité* n_{ie} *de la sortie* y_i *peut être calculé de sorte que :*

$$n_{ie} = \sum_{j=1}^{p} n_j - \sum_{j=1}^{p-1} \overline{n}_{ij}$$

où :
- n_j *est l'ordre du* $j^{\text{ième}}$ *zéro à l'infini du système* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ *;*
- $\overline{n}_{ij}$ *est l'ordre du* $j^{\text{ième}}$ *zéro à l'infini du système* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ *lorsque :*

$$\overline{\mathbf{C}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T & \dots & \mathbf{c}_{i-1}^T & \mathbf{c}_{i+1}^T & \dots & \mathbf{c}_p^T \end{pmatrix}^T$$

et $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $\mathbf{c}_j$ *est la* $j^{\text{ième}}$ *ligne de* $\mathbf{C}$.

Remarque : L'hypothèse d'inversibilité à droite est nécessaire pour justifier le calcul des ordres d'essentialité pour chacune des p sorties. De plus, même si le théorème n'a pas été énoncé dans ce cadre, il reste valable pour un système où $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ (les n_j sont alors calculés à partir du système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ et les $\overline{n}_{ij}$ à partir des sous-systèmes $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i, \overline{\mathbf{D}}_i)$ où $\overline{\mathbf{D}}_i$ est la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne de $\mathbf{D}$.).

Maintenant que l'approche algébrique a été présentée, voyons comment ces ordres d'essentialité peuvent être déterminés directement à partir de l'analyse d'un modèle bond graph en adoptant une approche soit causale soit bicausale.

Approche bond graph causale

En partant du théorème 3 (page 140) formulé pour l'approche algébrique et en reprenant le théorème 18 (page 351) pour déterminer les ordres des zéros à l'infini d'un système à partir de son modèle bond graph, nous pouvons énoncer un théorème bond graph de sorte que[25] :

Théorème 4 (*Modèle bond graph → ordre d'essentialité*)

Soit un modèle bond graph vérifiant les hypothèses énoncées en début de chapitre et supposé inversible[26].
L'ordre d'essentialité $n_{BG,ie}$ *de la sortie* y_i *peut être calculé de sorte que :*

$$n_{BG,ie} = \sum_{j=1}^{p} n_{BG,j} - \sum_{j=1}^{p-1} \overline{n}_{BG,ij}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale :
- $\{n_{BG,1}, \dots, n_{BG,p}\}$ *sont les ordres des zéros à l'infini du modèle bond graph initial ;*
- $\{\overline{n}_{BG,i1}, \dots, \overline{n}_{BG,i(p-1)}\}$ *sont les ordres des zéros à l'infini du modèle bond graph obtenu en supprimant le* $i^{\text{ième}}$ *détecteur du modèle bond graph initial.*

25. Sans l'exprimer sous forme mathématique, Bertrand [Ber97a] suggère ce théorème dans sa thèse.

Remarque : Les ordres $\overline{n}_{BG,ij}$ sont déterminés de manière identique au théorème 18 (page 351). De plus, notons que la suppression d'un détecteur ne change pas la causalité du modèle bond graph restant et que si un système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ admet p zéros à l'infini alors chaque sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ possède bien $p-1$ zéros à l'infini.

Illustrons dans un premier temps comment ce théorème 4 peut être appliqué avant de montrer qu'une reformulation de ce dernier permet de diminuer potentiellement le nombre de calculs à effectuer.

26. Cette dernière hypothèse tient simplement à souligner le fait qu'il n'y a bien sûr pas lieu de parler d'ordre d'essentialité lorsque le modèle considéré n'est pas inversible.

Exemple :

Considérons maintenant l'exemple fourni par le modèle bond graph de la figure 3.42.

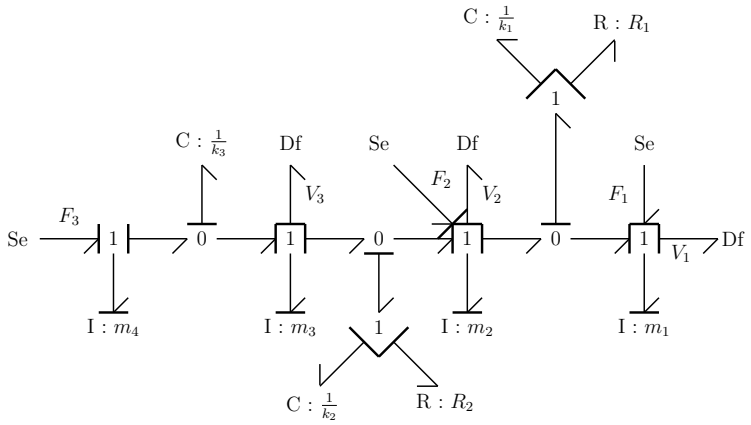


FIGURE 3.42 – Exemple de modèle bond graph pour le calcul des ordres d'essentialité

Une analyse causale nous permet de montrer qu'il existe un unique ensemble $\mathcal{E}_1 = \{①, ②, ③\}$ de trois chemins causaux BG-différents entre les entrées (F_1, F_2, F_3) et les sorties (V_1, V_2, V_3) (Fig. 3.43). Cet ensemble étant unique, le modèle est inversible (test d'inversibilité 1, page 126) et le théorème 4 (page 140) est applicable.

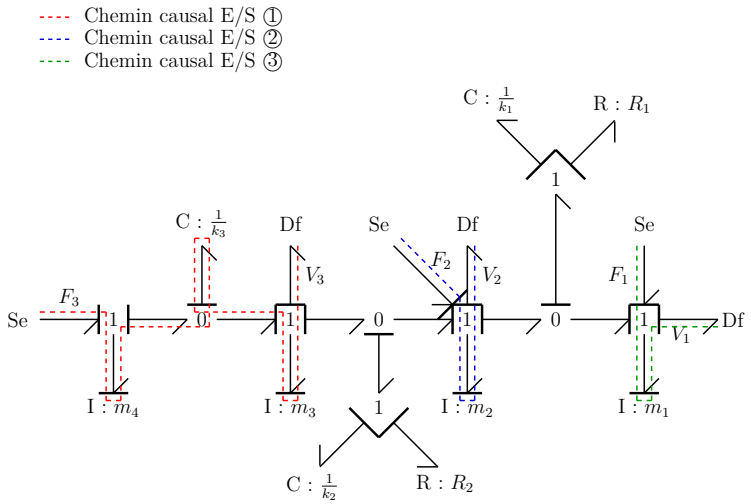
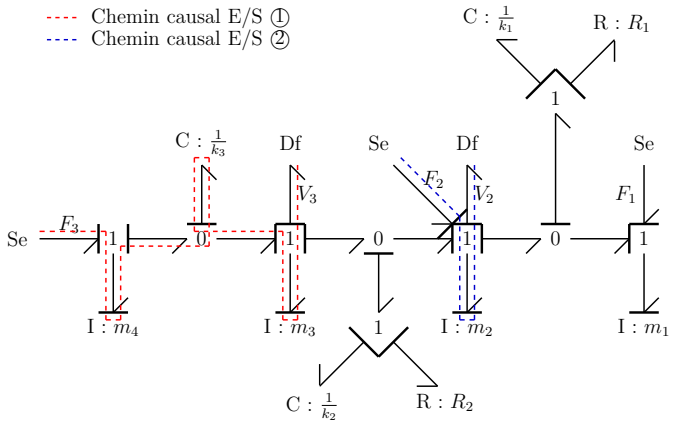
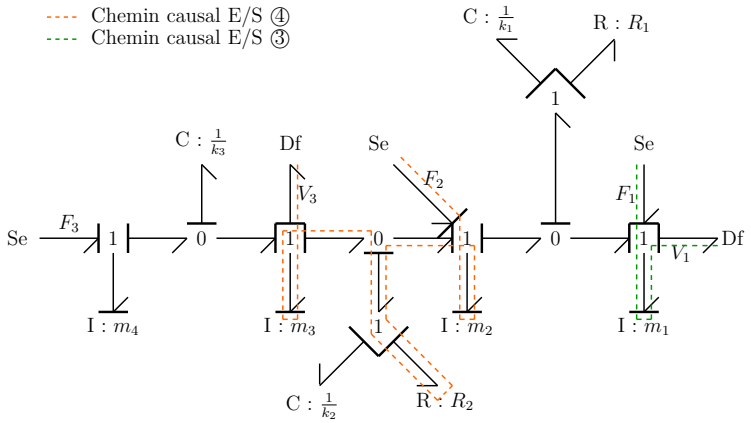


FIGURE 3.43 – Ensemble unique de chemins causaux E/S BG-différents

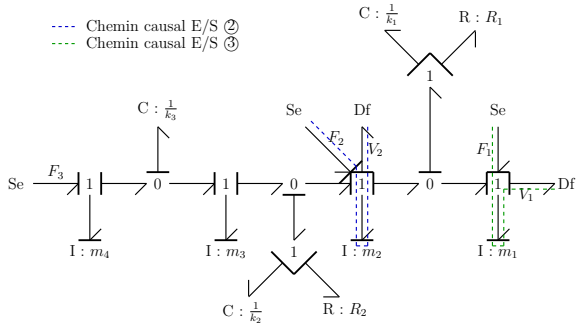
Application du théorème 4 :



(a) Pour le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_1)$



(b) Pour le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_2)$



(c) Pour le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_3)$

FIGURE 3.44 – Détermination des ordres des zéros à l'infini $\overline{n}_{BG,ij}$

Maintenant, déterminons les ordres d'essentialité suivant le théorème 4 (page 140). Grâce au théorème 18 (page 351), une analyse causale conduit alors à conclure que[27] :

– dans le cas du modèle bond graph associé au sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ (Fig. 3.43) :

$$\begin{cases} L_1 = l_3(F_1, V_1) = 1 \\ L_2 = l_2(F_2, V_2) + l_3(F_1, V_1) = 2 \\ L_3 = l_1(F_3, V_3) + l_2(F_2, V_2) + l_3(F_1, V_1) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{BG,1} = L_1 = 1 \\ n_{BG,2} = L_2 - L_1 = 1 \\ n_{BG,3} = L_3 - L_2 = 3 \end{cases}$$

– dans le cas du modèle bond graph associé au sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_1)$ (Fig. 3.44(a)) :

$$\begin{cases} L_1 = l_2(F_2, V_2) = 1 \\ L_2 = l_1(F_3, V_3) + l_2(F_2, V_2) = 3 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{n}_{BG,11} = L_1 = 1 \\ \overline{n}_{BG,12} = L_2 - L_1 = 3 \end{cases}$$

– dans le cas du modèle bond graph associé au sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_2)$ (Fig. 3.44(b)) :

$$\begin{cases} L_1 = l_3(F_1, V_1) = 1 \\ L_2 = l_3(F_1, V_1) + l_4(F_2, V_3) = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{n}_{BG,21} = L_1 = 1 \\ \overline{n}_{BG,22} = L_2 - L_1 = 2 \end{cases}$$

– dans le cas du modèle bond graph associé au sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_3)$ (Fig. 3.44(c)) :

$$\begin{cases} L_1 = l_3(F_1, V_1) = 1 \\ L_2 = l_2(F_2, V_2) + l_3(F_1, V_1) = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{n}_{BG,31} = L_1 = 1 \\ \overline{n}_{BG,32} = L_2 - L_1 = 1 \end{cases}$$

Ainsi, il peut être conclu que, conformément au théorème 4 (page 140), $n_{BG,1e} = n_{BG,1} + n_{BG,2} + n_{BG,3} - \overline{n}_{BG,11} - \overline{n}_{BG,12} = 1$, $n_{BG,2e} = n_{BG,1} + n_{BG,2} + n_{BG,3} - \overline{n}_{BG,21} - \overline{n}_{BG,22} = 2$ et $n_{BG,3e} = n_{BG,1} + n_{BG,2} + n_{BG,3} - \overline{n}_{BG,31} - \overline{n}_{BG,32} = 3$.

Grâce à cet exemple, nous constatons que le théorème 4 (page 140) requiert l'analyse de nombreux chemins causaux. De manière à pallier cet inconvénient, nous proposons de simplifier ce théorème de la façon suivante :

27. Ici, nous sommes dans un cas particulier où tous les ensembles de chemins causaux E/S BG-différents sont également BG-disjoints.

Théorème 5

Soit un modèle bond graph vérifiant les hypothèses énoncées en début de chapitre et supposé inversible.
L'ordre d'essentialité $n_{BG,ie}$ de la sortie y_i peut être calculé de sorte que :

$$n_{BG,ie} = L_p - L_{p-1}^{(i)}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale :
- *L_p est la longueur BG minimale qu'un ensemble de p chemins causaux E/S BG-différents puisse avoir sur le modèle bond graph initial ;*
- *$L_{p-1}^{(i)}$ est la longueur BG minimale qu'un ensemble de $p-1$ chemins causaux E/S BG-différents puisse avoir sur le modèle bond graph obtenu en supprimant du modèle bond graph initial son $i^{\text{ième}}$ détecteur.*

Démonstration : Grâce à la procédure de détermination des ordres des zéros à l'infini sur un modèle bond graph (théorème 18, page 351), nous pouvons conclure que :

$$\sum_{j=1}^{p} n_{BG,j} = L_1 + \sum_{j=2}^{p} L_j - L_{j-1} = \sum_{j=1}^{p} L_j - \sum_{j=1}^{p-1} L_j = L_p \tag{3.12}$$

Le théorème 5 est alors simplement déduit du théorème 4 (page 140) en appliquant le résultat de cette équation (3.12) aux systèmes $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ et $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$. □

Reprenons l'exemple précédent afin d'illustrer ce gain de calcul.

Exemple :

Dans le cas de l'exemple pris précédemment, la même analyse des modèles des figures 3.42 et 3.44 (pages 142 et 143) aboutit à :

$$\begin{cases} L_3 = 5 \\ L_2^{(1)} = l_1(F_3, V_3) + l_2(F_2, V_2) = 3 + 1 = 4 \\ L_2^{(2)} = l_4(F_2, V_3) + l_3(F_1, V_1) = 2 + 1 = 3 \\ L_2^{(3)} = l_2(F_2, V_2) + l_3(F_1, V_1) = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{BG,1e} = L_3 - L_2^{(1)} = 1 \\ n_{BG,2e} = L_3 - L_2^{(2)} = 2 \\ n_{BG,3e} = L_3 - L_2^{(3)} = 3 \end{cases}$$

En appliquant le théorème 5, les résultats sont donc identiques à ceux obtenus par le théorème 4 (page 140) tout en effectuant comparativement moins de calculs.

Approche bond graph bicausale

Afin de simplifier encore plus les calculs nécessaires à la détermination des ordres d'essentialité, l'idée a été avancée de déterminer ces derniers directement à partir du modèle bond graph bicausal correspondant. En effet, puisque, par définition, l'ordre d'essentialité d'une sortie est lié au modèle inverse, il paraît logique que la lecture de cette grandeur apparaisse sur le modèle bond graph bicausal correspondant. Récemment, un théorème a d'ailleurs été établi par El Feki *et al.* :

Théorème 6 (*[El 09]*)

Soit un modèle bond graph vérifiant les hypothèses énoncées en début de chapitre et supposé inversible.
L'ordre d'essentialité $n_{BG,ie}$ de la sortie y_i peut être calculé de sorte que :

$$n_{BG,ie} = -\min_{j \in [\![1,\ldots,m]\!]} \{\omega_{ji}\}$$

où ω_{ji} est l'ordre BG minimal que peut avoir un chemin causal entre la double source associée à y_i et le double détecteur associée à u_j sur le modèle bond graph bicausal correspondant affecté d'une causalité préférentiellement intégrale.

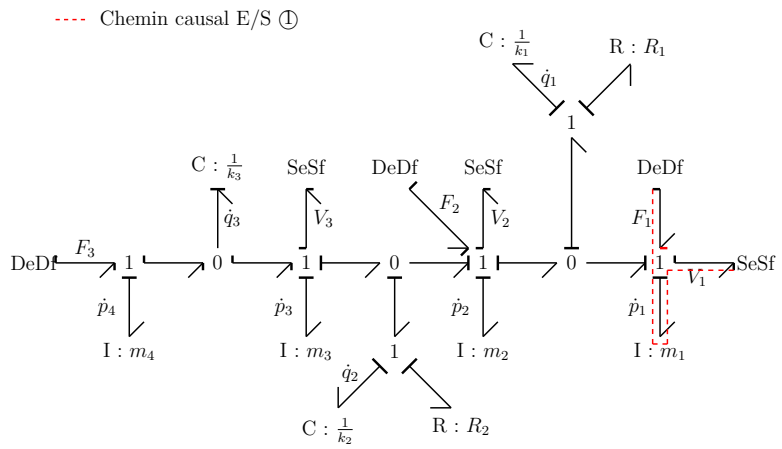
La démonstration de ce théorème est essentiellement basée sur la considération des degrés des cœfficients de la matrice de transfert inverse $\mathbf{T}^{-1}(s)$ et sur leur interprétation bond graph. De plus, si cette démonstration est détaillée dans des travaux en cours [El 09], précisons toutefois que :

- le signe $-$ permet d'obtenir des ordres d'essentialité positifs (ce qui est conforme à l'interprétation de ces ordres, section 3.6.1, page 139) ;
- le fait que la matrice de transfert inverse $\mathbf{T}^{-1}(s)$ ne présente que des pôles à l'infini assure l'existence, pour chaque sortie, d'au moins un chemin causal d'ordre BG négatif ou nul sur le modèle bond graph bicausal.

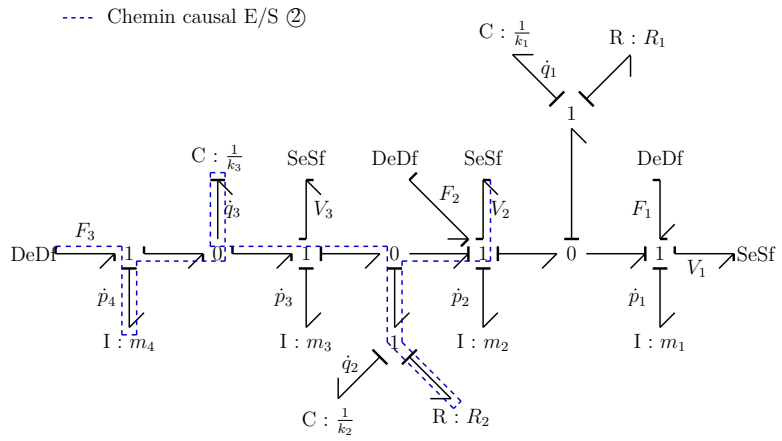
Afin d'illustrer cette nouvelle approche de calcul, reprenons l'exemple utilisé précédemment pour illustrer les procédures causales.

Exemple :

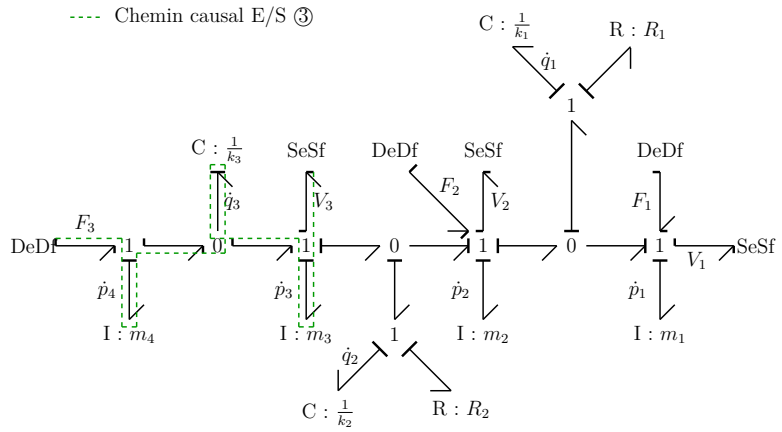
Pour cela, considérons à nouveau l'exemple de la figure 3.42 (page 142). Nous avons déjà vu que le modèle correspondant était inversible. En appliquant la procédure SCAPI (annexe A.5.2), nous pouvons alors construire le modèle bond graph bicausal correspondant au modèle inverse (Fig. 3.45).



(a) Chemin causal le plus court en terme d'ordre BG entre V_1 et n'importe quelle entrée



(b) Chemin causal le plus court en terme d'ordre BG entre V_2 et n'importe quelle entrée



(c) Chemin causal le plus court en terme d'ordre BG entre V_3 et n'importe quelle entrée

FIGURE 3.45 – Analyse causale du modèle bond graph bicausal associé

L'analyse causale de ce modèle bicausal, nous permet de constater que :

- le chemin présentant un ordre BG minimal entre V_1 et n'importe quelle entrée correspond au chemin causal ① entre V_1 et F_1 (Fig. 3.45(a)).
- le chemin présentant un ordre BG minimal entre V_2 (resp. V_3) et n'importe quelle entrée correspond au chemin ② (resp. ③) entre V_2 (resp. V_3) et F_3 (Fig. 3.45(b) et 3.45(c)).

Par conséquent, d'après le théorème 6 (page 146), nous obtenons :

$$\begin{cases} n_{BG,1e} = -\omega_1(V_1, F_1) = 1 \\ n_{BG,2e} = -\omega_2(V_2, F_3) = 2 \\ n_{BG,3e} = -\omega_3(V_3, F_3) = 3 \end{cases}$$

Les résultats obtenus sont donc bien identiques à ceux fournis par les théorèmes 4 et 5 (pages 140 et 145).

Remarque sur la mise en œuvre de l'approche bond graph bicausale pour différentes propagations de la bicausalité

Maintenant qu'une nouvelle procédure a été énoncée pour calculer les ordres d'essentialité directement à partir d'un modèle bond graph bicausal, il convient de s'attarder sur sa mise en œuvre pratique. Plus exactement, si nous avons déjà vu que cette approche engendrait potentiellement un gain de temps par rapport à l'approche causale de par le simple fait qu'elle nécessitait la scrutation d'un nombre moins important de chemins causaux, il est intéressant de préciser comment l'approche bicausale doit être appliquée dans le cas où l'inversion du modèle bond graph peut engendrer la construction de plusieurs modèles bicausaux (c'est-à-dire dans le cas où il est possible de propager la bicausalité selon des ensembles différents de lignes de puissance E/S BG-disjointes). Pour cela, considérons l'exemple suivant où justement deux manières de propager la bicausalité existent.

Exemple :

Considérons le modèle bond graph de la figure 3.46. En appliquant les tests d'inversibilité de la section 3.5.1 (page 124), nous pouvons montrer que ce modèle est inversible. Calculons alors l'ordre d'essentialité n_{1e} de sa sortie y selon l'approche algébrique (section 3.6.1, page 139) et l'approche bond graph bicausale (théorème 6, page 146).

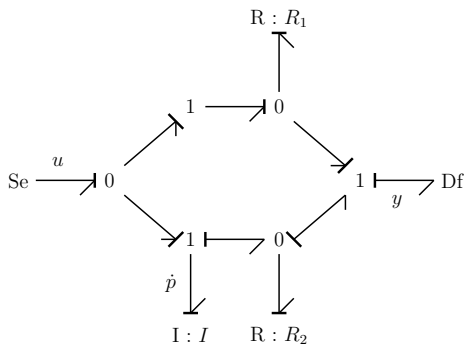


FIGURE 3.46 – Exemple de modèle bond graph présentant plusieurs ensembles de lignes de puissance E/S BG-disjointes

Approche algébrique : Une analyse causale du modèle bond graph nous permet de conclure que le comportement du système correspondant est régi par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{p} = 2u \\ y = \frac{1}{I}p + \frac{1}{R_2}u \end{cases}$$

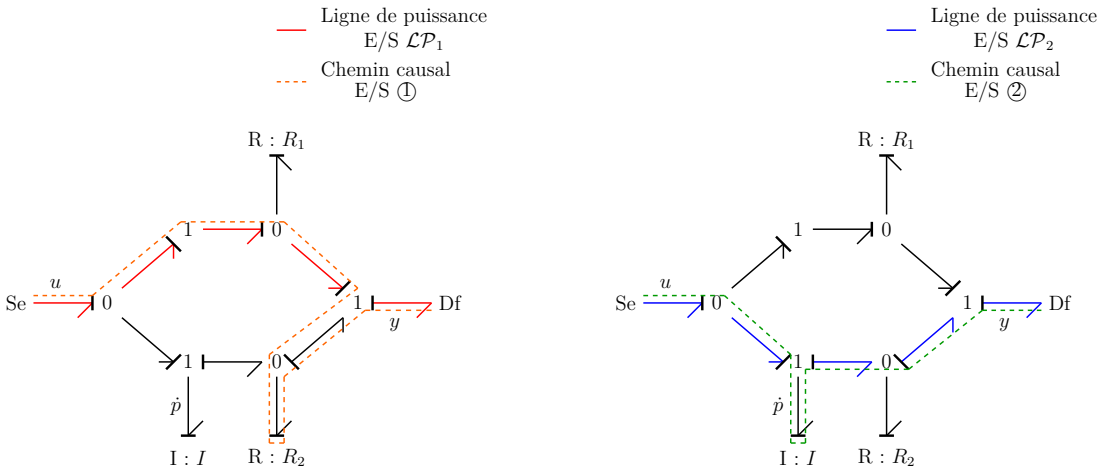
En exprimant la variable d'entrée u en fonction de y et p, nous en déduisons que le modèle inverse s'exprime sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{2R_2}{I}p + 2R_2 y \\ u = -\frac{R_2}{I}p + R_2 y \end{cases}$$

Aucune dérivation de y n'apparaît dans ce modèle inverse. D'après l'interprétation algébrique d'un ordre d'essentialité (section 3.6.1, page 139), nous pouvons alors directement conclure que $n_{1e} = 0$.

Approche bond graph bicausale : Une analyse causale du modèle bond graph nous montre que :

- le chemin causal ① est l'unique chemin causal E/S d'ordre BG 0 existant sur le modèle. Son ordre BG détermine donc l'ordre BG minimal que peut avoir un chemin causal E/S (Fig. 3.47(a)) ;
- le chemin causal ② est un chemin causal E/S d'ordre BG 1 ne correspondant donc pas à un chemin causal d'ordre BG minimal (Fig. 3.47(b)).



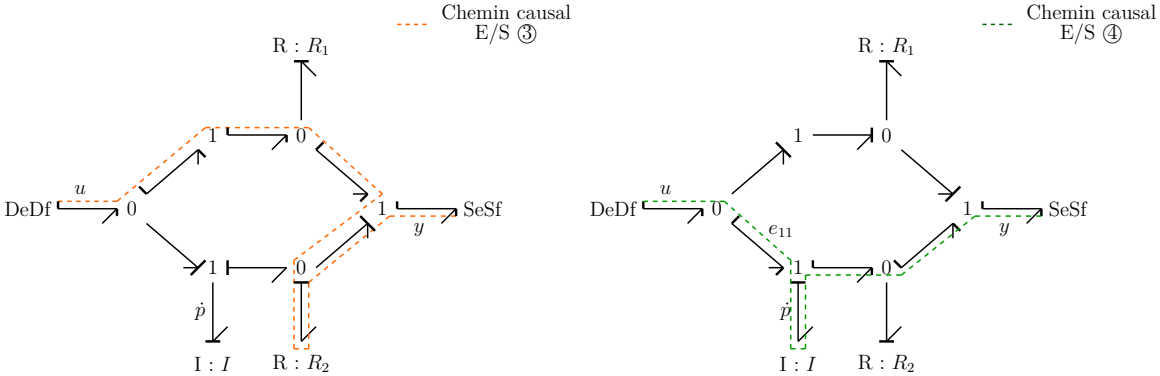
(a) Chemin causal E/S d'ordre BG minimal

(b) Chemin causal E/S d'ordre BG non minimal

FIGURE 3.47 – Exemple de modèle bond graph présentant plusieurs ensembles de lignes de puissance E/S BG-disjointes

De plus, comme chacun de ces deux chemins ① et ② sont respectivement associés à deux lignes de puissance distinctes (les lignes de puissances $\mathcal{LP}_1$ et $\mathcal{LP}_2$, Fig. 3.47), il est possible de construire deux modèles bond graph bicausaux distincts :

- un premier construit en propageant la bicausalité le long de la ligne de puissance $\mathcal{LP}_1$ (Fig. 3.48(a)). Comme cette ligne de puissance est associée à un chemin causal d'ordre BG minimal, ce modèle bicausal permet d'obtenir le modèle inverse d'ordre minimal (procédure 3, page 138) ;
- un second construit en propageant la bicausalité le long de la ligne de puissance $\mathcal{LP}_2$ (Fig. 3.48(b)).



(a) Inversion selon la ligne de puissance $\mathcal{LP}_1$

(b) Inversion selon la ligne de puissance $\mathcal{LP}_2$

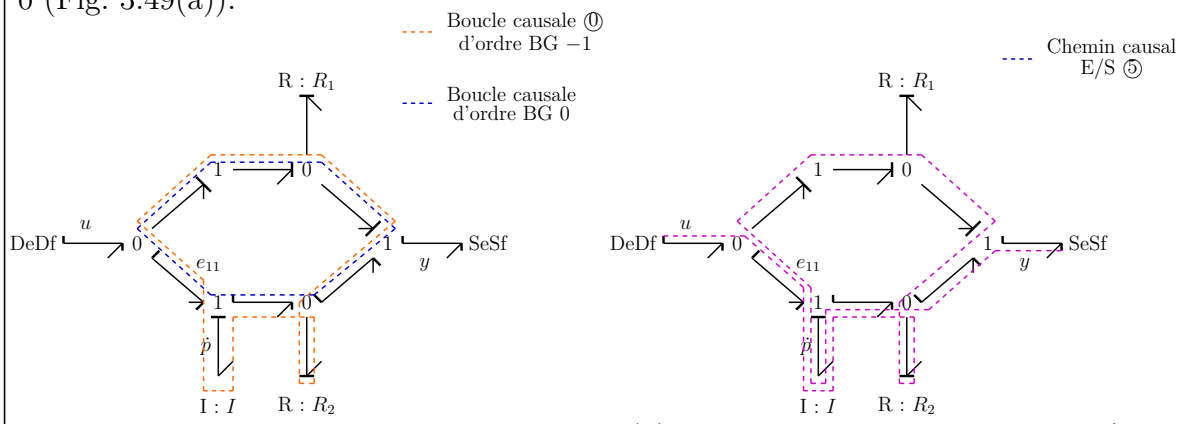
FIGURE 3.48 – Exemple de problème inverse correspondant à plusieurs modèles bond graph bicausaux

Une nouvelle analyse causale nous montre alors que le chemin causal E/S le plus court (en terme d'ordre BG) sur le premier modèle bicausal correspond au chemin causal ③ d'ordre BG 0 alors qu'il correspond au chemin causal ④ d'ordre BG -1 sur le deuxième modèle bicausal (Fig. 3.48). Par conséquent, en appliquant le théorème 6 (page 146), nous obtenons :

- $n_{BG,1e} = 0$ en analysant le premier modèle bond graph bicausal ;
- $n_{BG,1e} = 1$ en analysant le deuxième modèle bond graph bicausal ;

Si le premier modèle bond graph bicausal conduit à un résultat identique à l'approche algébrique, l'étude du second modèle bond graph bicausal aboutit, elle, à un résultat différent.

Interprétation : La différence de résultat est simplement due à un défaut d'analyse causale du second modèle bicausal. En effet, en étudiant à nouveau ce modèle bond graph, nous constatons que celui-ci présente deux boucles causales d'ordres BG -1 et 0 (Fig. 3.49(a)).



(a) Boucles causales

(b) Exemple de chemin causal E/S généralisé d'ordre BG négatif

FIGURE 3.49 – Prise en compte des chemins causaux généralisés E/S passant par la boucle causale ⓪ d'ordre BG -1

Du fait de la présence de la boucle causale ⓪ d'ordre BG -1, des chemins causaux E/S d'ordre BG négatif, autre que le chemin causal ④, existent : il s'agit des chemins causaux généralisés E/S (définition 43, page 338) qui passent respectivement une fois, deux fois, ... dans cette boucle causale (*e.g.* le chemin causal ⑤, Fig. 3.49(b)). Par conséquent, ces chemins causaux généralisés présentant des ordres BG négatifs inférieurs à -1, le chemin causal ④ n'est plus le chemin causal E/S d'ordre BG minimal et donc nous avons $n_{BG,1e} > 1$. De plus, si ces chemins causaux peuvent passer une infinité de fois dans la boucle causale ⓪ d'ordre BG -1 et donc si leurs ordres BG n'admettent pas de borne inférieure, il est cependant possible de déterminer l'ordre d'essentialité en calculant la somme des gains de cette série de chemins causaux généralisés (même raisonnement que lors de la prise en compte des boucles entre deux éléments R à l'annexe D, page 335, en considérant cette fois-ci non pas les gains statiques des chemins mais leurs gains BG) :

$$\sum_{l=0}^{\infty} G_4(u,y)\left(G_0(e_{11},e_{11})\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty}(Is)\left(\frac{-Is}{R_2}\right)^l = (Is)\left(\frac{1}{1+\frac{Is}{R_2}}\right)$$

Le degré de cette fraction en s vaut 0. Nous pouvons alors en déduire finalement que $n_{BG,1e} = 0$ et retrouver ainsi le même résultat que celui issu de l'approche algébrique. Enfin, notons que cette manipulation supplémentaire peut se voir au niveau algébrique. En effet :

- le premier modèle bond graph bicausal (Fig. 3.48(a)) correspond au modèle inverse $\begin{cases} \dot{p} = -\frac{2R_2}{I}p + 2R_2 y \\ u = -\frac{R_2}{I}p + R_2 y \end{cases}$. Ce modèle est le modèle inverse d'ordre minimal et il peut alors être directement conclu que $n_{BG,1e} = 0$ puisqu'aucune dérivation de y n'apparaît dans ce modèle ;
- au contraire, le deuxième modèle bond graph bicausal (Fig. 3.48(b)) correspond, lui, au modèle inverse :

$$\dot{e}_{11} = -\frac{2R_2}{I}e_{11} + R_2\dot{y} \tag{3.13}$$

$$u = e_{11} \tag{3.14}$$

  Ce modèle ne correspond pas au modèle inverse d'ordre minimal et la lecture de l'ordre d'essentialité associé à la sortie y n'est pas directe. Pour calculer cet ordre, il convient de résoudre tout d'abord l'équation (3.14) par rapport à e_{11} afin d'obtenir une expression de u en fonction de y et de ses dérivées éventuelles. Nous retrouvons ici ce que nous avons avancé pour la détermination de l'ordre d'essentialité par scrutation des chemins causaux généralisés d'ordre BG négatif : la résolution au niveau du modèle algébrique de l'équation (3.14) correspond à la prise en compte du passage des chemins causaux généralisés dans la boucle causale ⓪.

Nous reviendrons en fin de section suivante sur ces méthodes de détermination bond graph des ordres d'essentialité afin de préciser leurs niveaux d'analyse. Nous mettons maintenant en évidence l'utilité de calculer ces ordres d'essentialité dans une démarche

de conception notamment lors de la rédaction du cahier des charges.

3.6.2 Critères de dérivabilité pour la simulation d'un modèle inverse

La simulation d'un modèle inverse s'avère en général plus ardue que celle d'un modèle direct ne serait-ce que par l'apparition de certaines dérivées des variables de sortie y_i. Afin d'éviter certains problèmes d'ordre numérique, il convient alors de prendre certaines précautions comme celle dictée par la propriété suivante :

Propriété 3 (*Simulation d'un modèle inverse [Jar08a]*)

Pour simuler un modèle inverse, chaque sortie spécifiée y_i doit être au moins *n_{ie} fois dérivable par rapport au temps.*

Interprétation : Par définition (section 3.6.1, page 139), chaque ordre d'essentialité n_{ie} correspond au nombre de dérivations maximal de la sortie y_i apparaissant dans le modèle inverse. Spécifier correctement les sorties y_i est donc indispensable pour simuler le modèle inverse envisagé : si chaque sortie spécifiée y_i n'est pas au moins n_{ie} fois dérivable par rapport au temps, les entrées calculées par inversion ne seront alors pas physiquement réalisables. □

La détermination des ordres d'essentialité se revèle ainsi comme primordiale pour mener à bien toute inversion. Physiquement, cette notion revêt également une importance particulière pour le dimensionnement des systèmes mécatroniques :

- lors de la rédaction du cahier des charges (pour un dimensionnement par inversion) : elle permettra au concepteur de vérifier si ses sorties spécifiées (*i.e.* son cahier des charges) sont en adéquation avec la structure du modèle choisi, voire de les reformuler si elles n'ont pas été correctement rédigées (*e.g.* si elles ne sont pas suffisamment dérivables) ;
- et lors de la synthèse de commande par découplage puisque l'ordre d'essentialité indique également l'extension dynamique nécessaire pour rendre le système découplable (section suivante et [Gil69, El 08a]).

Remarques sur les procédures bond graph de détermination des ordres d'essentialité

À la suite des derniers résultats sur le nombre et les ordres des zéros à l'infini d'un système reformulés selon les différents niveaux d'analyse (théorèmes 19, 20, 21 et 22, pages 352 et 353), les procédures bond graph de détermination des ordres d'essentialité, notamment celles développées selon une approche causale et faisant intervenir la notion d'ordre d'un zéro à l'infini (théorèmes 4 et 5, pages 140 et 145), peuvent également être reformulées selon les différents niveaux d'analyse proposés et ce toujours dans l'optique de détecter au plus tôt les reconceptions nécessaires. En réalité, établis à partir du théorème 18 (page 351) qui, comme le montre l'annexe E, relève finalement d'un niveau d'analyse BG-structurel, ces théorèmes 4 et 5 correspondent également à un niveau d'analyse BG-structurel. En toute rigueur, pour obtenir un résultat identique à l'approche algébrique, il convient de les reformuler à un niveau d'analyse comportemental comme il

l'a été fait pour le nombre et les ordres des zéros à l'infini (théorèmes 19, 20, 21 et 22, pages 352 et 353). Par exemple, pour le théorème 5 (page 145), la prise en compte de ces différents niveaux d'analyse conduit à la formulation des deux théorèmes suivants :

Théorème 7 (*niveau d'analyse BG-structurel*)

Soit un modèle bond graph vérifiant les hypothèses énoncées en début de chapitre et supposé inversible.
L'ordre d'essentialité BG-structurel $n_{BG-s,ie}$ de la sortie y_i peut être calculé de sorte que :

$$n_{BG-s,ie} = L_{p_s} - L^{(i)}_{p-1_s}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale :
- *L_{p_s} est la longueur BG minimale qu'un ensemble de p chemins causaux E/S BG-différents puisse avoir sur le modèle bond graph initial ;*
- *$L^{(i)}_{p-1_s}$ est la longueur BG minimale qu'un ensemble de $p-1$ chemins causaux E/S BG-différents puisse avoir sur le modèle bond graph obtenu en supprimant du modèle bond graph initial son $i^{\text{ième}}$ détecteur.*

Théorème 8 (*niveau d'analyse comportemental*)

Soit un modèle bond graph vérifiant les hypothèses énoncées en début de chapitre et supposé inversible.
Sur un modèle bond graph en causalité intégrale, l'ordre d'essentialité n_{ie} de la sortie y_i peut être calculé de sorte que :

$$n_{ie} = L_p - L^{(i)}_{p-1}$$

où :
- *sur le modèle bond graph initial :*

$$L_p = \min_{\substack{(j_1,\ldots,j_p)\in([\![1,m]\!])^p \\ (h_1,\ldots,h_p)\in([\![1,m]\!])^p}} \{ \min_{l^{j_1,\ldots,j_p}_{h_1,\ldots,h_p}\in[\![0,n]\!]} \{ l^{j_1,\ldots,j_p}_{h_1,\ldots,h_p} \mid \rho^{\{i^{j_1,\ldots,j_p}_{h_1,\ldots,h_p}\}}_{l^{j_1,\ldots,j_p}_{h_1,\ldots,h_p}} \neq 0 \} \}$$

- *sur le modèle bond graph obtenu en supprimant du modèle bond graph initial son $i^{\text{ième}}$ détecteur :*

$$L^{(i)}_{p-1} = \min_{\substack{(j_1,\ldots,j_{p-1})\in([\![1,m]\!]\setminus\{i\})^{p-1} \\ (h_1,\ldots,h_{p-1})\in([\![1,m]\!]\setminus\{i\})^{p-1}}} \{ \min_{l^{j_1,\ldots,j_{p-1}}_{h_1,\ldots,h_{p-1}}\in[\![0,n]\!]} \{ l^{j_1,\ldots,j_{p-1}}_{h_1,\ldots,h_{p-1}} \mid \rho^{\{i^{j_1,\ldots,j_{p-1}}_{h_1,\ldots,h_{p-1}}\}}_{l^{j_1,\ldots,j_{p-1}}_{h_1,\ldots,h_{p-1}}} \neq 0 \} \}$$

où :
- *n et m sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'entrées ;*
- *$\rho^{\{i^{j_1,\ldots,j_p}_{h_1,\ldots,h_p}\}}_{l^{j_1,\ldots,j_p}_{h_1,\ldots,h_p}}$ (resp. $\rho^{\{i^{j_1,\ldots,j_{p-1}}_{h_1,\ldots,h_{p-1}}\}}_{l^{j_1,\ldots,j_{p-1}}_{h_1,\ldots,h_{p-1}}}$) correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph de longueur BG égale à $l^{j_1,\ldots,j_p}_{h_1,\ldots,h_p}$ (resp. $l^{j_1,\ldots,j_{p-1}}_{h_1,\ldots,h_{p-1}}$) et contenant comme chemins causaux uniquement p (resp. $p-1$) chemins causaux E/S BG-différents entre les variables d'entrée $u_{j_1},\ldots,u_{j_p}$ (resp. $u_{j_1},\ldots,u_{j_{p-1}}$) et*

les variables de sortie $y_{h_1}, \ldots, y_{h_p}$ (resp. $y_{h_1}, \ldots, y_{h_{p-1}}$). Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph $\mathcal{F}_k$ doit être multiplié par $(-1)^{d_k}$ où d_k est le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique doit également être multiplié par $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_k}}$ où $\sigma_{\mathcal{F}_k}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties $y_{h_1}, \ldots, y_{h_p}$ (resp. $y_{h_1}, \ldots, y_{h_{p-1}}$) dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les p (resp. $p-1$) chemins causaux de la famille $\mathcal{F}_k$ sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.

Remarque : Les exemples étudiés à la section 3.6.1 (page 139) pour illustrer les méthodes bond graph de calcul des ordres d'essentialité restent cependant valides puisqu'ils concernaient des cas particuliers où les ensembles de chemins causaux étudiés correspondaient à des cœfficients $\rho_{l_{h_1,\ldots,h_p}^{j_1,\ldots,j_p}}^{\{i_{h_1,\ldots,h_p}^{j_1,\ldots,j_p}\}}$ et $\rho_{l_{h_1,\ldots,h_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{p-1}}}^{\{i_{h_1,\ldots,h_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{p-1}}\}}$ différents de 0.

Enfin, concernant l'approche bicausale, notons également que le théorème 6 (page 146) a été énoncé pour un niveau d'analyse BG-structurel. En toute rigueur, pour obtenir une valeur de n_{ie} identique à l'approche algébrique, il convient de vérifier que la somme des gains statiques des chemins causaux de même ordre BG minimal entre la sortie spécifiée y_i et une même entrée ne s'annule pas (le raisonnement est exactement le même que celui mentionné pour le calcul des ordres relatifs sur le modèle bond graph causal, propriété 2, page 115).

Cette reformulation, selon différents niveaux d'analyse, des propriétés bond graph pour la détermination des ordres d'essentialité peut s'avérer même des plus intéressantes puisque, outre la vérification de l'adéquation structure du modèle/cahier des charges, ces ordres permettent d'étudier la découplabilité d'un système et donc d'éventuellement anticiper, lors de la conception, les contraintes de synthèse de commande. Le cas d'un système détecté comme non découplable lors d'une analyse BG-structurelle est un exemple d'aide à la reconception : ses ordres d'essentialité BG-structurels indiquent alors *a priori* les ordres des extensions dynamiques nécessaires à ce système pour le rendre découplable [Gil69, El 08a].

3.7 Conclusion

Lors du chapitre précédent, nous avons vu que la méthodologie de dimensionnement proposée (c'est-à-dire celle par modèles bond graph inverses) tirait avantage, entre autres, de sa phase d'analyse structurelle. Basée sur l'étude de la structure mathématique et/ou énergétique du modèle, ce type d'analyse permet notamment d'observer un certain nombre de propriétés, indépendamment des valeurs numériques attribuées aux paramètres du modèle (valeurs qui sont sujettes aux incertitudes) et peut, de ce fait, se révéler d'une grande aide lors de la conception de systèmes (justement lorsque les valeurs numériques des paramètres ne sont pas encore fixées). Focalisé sur ce type d'analyse, ce troisième chapitre a notamment permis d'en donner une définition et d'illustrer l'intérêt de sa mise en œuvre dans une démarche de conception et plus particulièrement dans celle de dimensionnement par modèles bond graph inverses.

Au cours de ce chapitre (et des annexes support C, D et E), si l'approche bond graph

était plus particulièrement visée (notamment pour la mise en application de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses), deux autres formalismes possibles pour conduire une analyse structurelle ont également été étudiés puis confrontés : l'approche modèle d'état et l'approche système structuré aussi bien sous leurs formes matricielles que graphiques. Le constat important issu de la comparaison de ces différentes approches réside dans le fait que chacune d'elle englobe des niveaux d'information (information sur la structure mathématique, les détails phénoménologiques ou la structure énergétique) et de description (description locale ou globale) spécifiques et engendre ainsi un niveau d'analyse également spécifique. À l'image des travaux initiés par Rahmani [Rah93] lors du calcul de rang de matrice, nous avons alors proposé une classification de ces différents niveaux d'analyse de manière cette fois-ci plus générique (*i.e.* indépendamment du type de propriété recherché). Cette classification distingue notamment quatre niveaux d'analyse :

- le niveau structuré, propre à l'approche système structuré et où seule la structure mathématique du modèle est considérée (les paramètres du modèle sont supposés indépendants entre eux) ;
- le niveau BG-structurel, propre à l'approche bond graph et où seule la structure énergétique du modèle est considérée ;
- le niveau comportemental, valable, par exemple, pour l'approche bond graph et l'approche algébrique (approche modèle d'état sous forme analytique), où non seulement la structure du modèle est prise en compte mais aussi certaines dépendances *via* les lois caractéristiques des phénomènes modélisés ;
- le niveau numérique où les paramètres du modèle sont remplacés par leur valeur numérique (ce niveau ne faisant ainsi plus référence au concept d'analyse structurelle).

Replacé dans le contexte d'une démarche de conception, nous avons alors montré en quoi cette distinction des différents niveaux d'analyse pouvait être mise à profit. En effet, en replaçant ces différents niveaux d'analyse dans un ordre chronologique, la phase d'analyse structurelle peut alors être vue comme jalonnée d'étapes de sorte que :

- si une propriété P_0 n'est pas vérifiée à un niveau d'analyse alors il peut être directement conclu que celle-ci ne sera pas vérifiée à tous les niveaux d'analyse inférieurs ;
- si une propriété P_0 est vérifiée à un niveau d'analyse alors il faut poursuivre l'étude aux niveaux d'analyse inférieurs.

En réalité, si cette façon de « découper » l'analyse du système peut paraître *a priori* superflue (*e.g.* dans le cas où une propriété P_0 est vérifiée au niveau d'analyse numérique, les études aux niveaux d'analyse supérieurs peuvent sembler inutiles), celle-ci prend du sens dans un processus de conception. En effet, dans le cas où la propriété recherchée P_0 n'est pas vérifiée, elle permet de donner progressivement des pistes pour la reconception du système : l'ingénieur sait à quel niveau d'analyse la propriété n'est pas vérifiée et peut dès lors identifier quel type d'information sur le système il doit modifier pour que cette propriété soit finalement obtenue. À ce titre, plusieurs propriétés bond graph ont pu être reformulées pour préciser leurs domaines de validité et identifier au mieux les raisons qui font que le système initialement envisagé ne satisfait pas le cahier des charges spécifié (section 3.4.4, page 108).

Enfin, les deux dernières sections de ce chapitre ont eu pour objectif de replacer l'ana-

lyse structurelle dans notre contexte initial de dimensionnement et de montrer en quoi celle-ci pouvait être particulièrement utile tout au long d'une démarche de conception. En l'appliquant à la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses, nous avons ainsi expliqué le rôle que celle-ci pouvait jouer de la définition du modèle de conception (section 3.5, page 123) à la rédaction du cahier des charges (section 3.6, page 139). Outre la démonstration de l'intérêt applicatif de l'analyse structurelle, ces sections ont également permis de reprendre un certain nombre de résultats existants au niveau bond graph qui, s'ils ne se montraient pas nécessairement contradictoires, pouvaient paraître ambigus dans leur mise en œuvre notamment par l'étude de chemins causaux E/S parfois BG-différents, parfois BG-disjoints.

À cette occasion et fort des différents niveaux d'analyse précédemment identifiés, les contributions de ce chapitre, résumées pour partie dans les références [Jar08a, El 09], ont notamment permis :

- au niveau du modèle de conception : de comparer deux procédures permettant de tester l'inversibilité d'un modèle bond graph et d'identifier pour quels objectifs et pour quels niveaux d'analyse chacune d'elles pouvait être utilisée (section 3.5.1, page 135) ;
- au niveau de la rédaction du cahier des charges :
  - de simplifier la procédure causale existante pour déterminer les ordres d'essentialité des sorties d'un modèle bond graph (théorèmes 5 et 8, pages 145 et 154) ;
  - de proposer en collaboration avec El Feki *et al.* une procédure simple pour déterminer les ordres d'essentialité d'un modèle bond graph directement à partir de l'analyse du modèle bond graph bicausal associé (théorème 6, page 146) ;
  - d'énoncer dans le contexte de la conception un critère de dérivabilité sur les sorties spécifiées du cahier des charges (propriété 3, page 152).

En outre, l'étude à l'annexe E sur la notion de structure à l'infini d'un système, nous a également permis d'éclaircir la différence entre la considération de chemins causaux E/S BG-différents ou BG-disjoints pour étudier la structure à l'infini d'un modèle bond graph en proposant une étude selon différents niveaux d'analyse (théorèmes 19, 20, 21 et 22, pages 352 et 353).

Finalement, dans le cadre de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses, l'analyse structurelle est apparue ici comme un outil efficace qui permet, entre autres :

- de guider le concepteur dans le choix de l'architecture du système (*e.g. via* l'observation des lignes de puissance E/S) ;
- de vérifier si le modèle est potentiellement inversible (et donc de vérifier si la méthodologie est applicable) ;
- de s'assurer que le cahier des charges est correctement rédigé pour un dimensionnement par inversion ;
- de construire un modèle inverse d'ordre directement minimal sans avoir recours à aucune technique de « post-réduction » (et donc de procéder au dimensionnement par inversion selon un modèle d'ordre réduit) ;
- d'éventuellement initier la synthèse de commande par découplage en vérifiant *a priori* que le modèle est découplable.

Pour résumer, en amont de toute simulation numérique, l'intérêt majeur de l'analyse structurelle est de détecter au plus tôt tout problème de conception mal posé et de participer ainsi à la réduction des temps de développement.

Enfin, si ce chapitre a été consacré à la mise en œuvre de l'analyse structurelle dans une démarche de dimensionnement où l'inversibilité du modèle était requis, il est cependant également intéressant de pouvoir répondre au problème de dimensionnement posé lorsque celui-ci ne peut pas être formulé complètement sous la forme d'un problème inverse. En effet, s'il est possible parfois de « réajuster » le modèle du système pour le rendre inversible, dans bien des cas, la non inversibilité du problème vient également de l'impossibilité de traduire le cahier des charges sous la forme de fonctions explicites du temps ou de variables internes du modèle. Les chapitres suivants sont consacrés à ce dernier cas. Ils présentent notamment nos contributions quant à l'extension de la méthodologie de dimensionnement par couplage avec de l'optimisation dynamique : d'un point de vue théorique d'une part (chapitre 4) et numérique d'autre part (chapitre 5).

Chapitre 4

Contribution à la phase de dimensionnement : optimisation dynamique dans la méthodologie - Théorie

Sommaire

4.1 Introduction 161

4.2 Intérêt du couplage méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique 161

4.2.1 Sur-nombre et diversité des contraintes de conception 161

4.2.2 Différentes approches du couplage 162

4.3 L'optimisation dynamique 163

4.3.1 Rappels généraux sur l'optimisation dynamique 163

4.3.2 L'optimisation dynamique en langage bond graph : état de l'art et choix de la méthode de résolution 165

4.4 Représentation bond graph d'un problème d'optimisation : cas . . . linéaires 167

4.4.1 Origine et principe de la procédure 169

4.4.2 Procédure bond graph d'optimisation 169

4.4.3 Exemple 174

4.4.4 Précisions sur la mise en œuvre de la procédure 177

4.5 Représentation bond graph d'un problème d'optimisation : extension . . . non linéaires 182

4.5.1 D'une formulation port-hamiltonienne 184

4.5.2 . . . vers une formulation bond graph 185

4.5.3 Extension de la procédure bond graph d'optimisation 190

4.5.4 Exemple de stockage non linéaire 1-port 195

4.5.5 Exemple de stockage non linéaire multiport 197

4.6 Couplage méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique 201

4.6.1 Formulation d'un problème de dimensionnement en un problème mixte d'inversion et d'optimisation 202

4.6.2 Extension de la procédure bond graph d'optimisation au cas où seule une partie des entrées du modèle est à déterminer par optimisation 203
4.6.3 Exemple de couplage 207
4.7 Conclusion 221

4.1 Introduction

En permettant de calculer les inconnues du problème de dimensionnement directement à partir de la connaissance des sorties spécifiées imposées par le cahier des charges, l'inversion diminue grandement le nombre d'itérations au sein du cycle de conception et réduit donc potentiellement les temps de développement. Les chapitres précédents ont ainsi montré l'intérêt et la pertinence de formuler un problème de dimensionnement sous la forme d'un problème inverse. Cependant, cette formulation nécessite d'emblée que :

- le modèle considéré soit inversible ;
- le cahier des charges soit traduisible en termes de fonctions dépendant explicitement du temps ou de certaines variables du modèle [1].

Or, si dans le processus de conception, il est possible d'agir parfois sur la structure du système et donc sur l'inversibilité du modèle, le cahier des charges, lui, est fixé et est bien souvent composé de contraintes de conception de nature hétérogène. En effet, la plupart du temps, ces contraintes de conception sont exprimées non pas sous la forme de trajectoires à suivre mais sous forme de non dépassement de valeurs limites, de minimisation de poids, de consommation d'énergie, ... Dans le but d'élargir le type de spécifications prises en compte dans la méthodologie, celle-ci est étendue à des problèmes d'optimisation dynamique. Ce chapitre est consacré à la présentation de cette extension.

Pour cela, après avoir plus largement précisé l'intérêt d'un couplage entre optimisation et méthodologie de dimensionnement, quelques rappels sur l'optimisation dynamique ainsi qu'un bref état de l'art sur l'optimisation en langage bond graph sont présentés. Une procédure permettant de représenter un problème d'optimisation dans le formalisme bond graph est ensuite décrite dans le cas de modèles linéaires et invariants dans le temps. Puis, une extension de cette procédure à une classe de modèles non linéaires est développée. Enfin, ce chapitre termine par l'objectif initial de cette démarche : un exemple de couplage entre la procédure bond graph d'optimisation et la méthodologie de dimensionnement. À l'image des chapitres précédents, chaque résultat est illustré par un exemple. Notons cependant que nous nous arrêtons ici à la présentation théorique des problèmes. Les questions relatives aux résolutions numériques seront évoquées lors du chapitre suivant.

4.2 Intérêt du couplage méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique

Dans cette section, revenons plus précisément aux cas où le problème de dimensionnement ne peut s'exprimer sous la forme d'un problème inverse. Essayons notamment de comprendre pourquoi la forme du cahier des charges est importante et en quoi le recours à de l'optimisation dynamique peut s'avérer utile.

4.2.1 Sur-nombre et diversité des contraintes de conception

Aujourd'hui, l'ingénierie système nécessite de trouver le meilleur compromis possible entre des contraintes de conception toujours plus nombreuses. Celles-ci peuvent être certes

1. Ce dernier cas illustrant des contraintes dites de comportement ou d'assistance [Mec03a].

redondantes (*e.g.* comme vouloir alléger le poids et diminuer le coût de la matière première) mais sont malheureusement souvent antagonistes (*e.g.* avoir les meilleures performances au prix le plus bas). Bien souvent en sur-nombre par rapport au nombre de degrés de pilotage disponibles, ces contraintes conduisent à un problème de dimensionnement auquel une inversion -même complète- du modèle ne peut répondre : il y a en quelque sorte trop de sorties spécifiées pour déterminer trop peu d'inconnues. L'ingénieur est alors obligé de prioriser et de pondérer ces critères pour optimiser sa conception et satisfaire le cahier des charges au meilleur compromis. Face aux problèmes de dimensionnement sur-contraints, coupler inversion et optimisation peut s'avérer utile pour effectuer une telle priorisation des critères.

Aussi, si l'inversion ne peut suffire à résoudre les problèmes de dimensionnement les plus généraux, c'est parce qu'au sein d'un même cahier des charges, les spécifications s'expriment rarement sous la même et unique forme de fonction dépendant explicitement du temps. Elles peuvent également apparaître sous la forme de [Laf04] :

- valeur limite à ne pas dépasser ;
- valeur moyenne à respecter ;
- valeur à atteindre ;
- ...

De plus, à cette diversité s'ajoute le fait que les spécifications ne sont pas toujours établies au niveau de la charge du système (donc au niveau des variables de sortie du modèle) puisque :

- le choix de certains composants peut imposer certaines contraintes en termes d'évolution dynamique de certaines variables internes du modèle (*e.g.* saturations, durée de fonctionnement par intermittence, ...) ;
- certaines contraintes de conception sont basées sur le retour d'expérience et donc sur des mesures pas nécessairement effectuées sur les variables de sortie (il arrive en effet que ces grandeurs ne soient pas directement mesurables).

Par ailleurs, dans un contexte où désormais les industriels sont obligés de tenir compte du développement durable, les problèmes d'optimisation tels que la minimisation d'apport/de consommation d'énergie ou encore la minimisation d'émission de gaz polluants prennent de plus en plus d'importance dans les problèmes de conception. Les notions de meilleur rapport qualité/prix et d'optimisation sont désormais ancrées dans notre société et ce quel que soit le secteur d'activité considéré. Là encore, coupler inversion et optimisation pour répondre au mieux à cette hétérogénéité de critères semble des plus pertinents.

4.2.2 Différentes approches du couplage

Puisque les problèmes d'optimisation sont omniprésents dans les problèmes de dimensionnement, la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses doit également intégrer des techniques d'optimisation.

Un tel couplage entre inversion et optimisation peut notamment s'effectuer de deux manières différentes :

- une première où le modèle est d'abord inversé par rapport aux spécifications traduisibles en termes de fonction du temps puis, est ensuite simulé à plusieurs reprises

pour répondre par itération au reste des spécifications ;
- une seconde où toutes les spécifications du cahier des charges sont simultanément prises en compte par inversion et par optimisation.

Ici, la suite de ce mémoire ne s'intéressera qu'à la deuxième approche. Pour initier nos premiers travaux sur le couplage entre la méthodologie de dimensionnement et l'optimisation dynamique, nous supposerons notamment que les cahiers des charges considérés pourront être séparés en deux parties :
- l'une où les spécifications pourront être traduites comme des fonctions dépendant explicitement du temps (et donc pour lesquelles l'inversion sera applicable) ;
- l'autre où les contraintes de conception pourront s'exprimer sous la forme de critères à extrémaliser.

Notons au passage que le cas où les spécifications apparaissent sous la forme de contraintes de comportement ou d'assistance (*i.e.* fonctions dépendant de certaines variables du modèle) ne sera pas traité ici. Le lecteur intéressé pourra consulter notamment la thèse de Mechin [Mec03a] où cette situation a été envisagée dans le cadre du dimensionnement d'une direction assistée électrique pour automobile.

4.3 L'optimisation dynamique

Avant de travailler plus précisément sur le couplage entre la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses et l'optimisation dynamique, il convient de dresser quelques rappels généraux sur ce dernier domaine. Cette section sera également l'occasion de voir dans quelle mesure ce thème de l'optimisation a été abordé dans le formalisme bond graph.

4.3.1 Rappels généraux sur l'optimisation dynamique

Dans le domaine de l'optimisation, deux catégories de problèmes peuvent être distinguées : celle relevant de l'*optimisation statique* où il s'agit d'extrémaliser des fonctions et celle relevant de l'*optimisation dynamique* où l'apparition de la variable de temps fait intervenir la notion de fonctionnelle (*i.e.* de fonction de fonctions). Ici, puisque l'objectif est de dimensionner des systèmes mécatroniques sur des critères dynamiques et énergétiques, nos travaux se placent directement dans le contexte de l'optimisation dynamique, voire même de l'*optimisation dynamique continue* puisque les variables recherchées prendront leurs valeurs dans un ensemble continu (*i.e.* ici celui des réels). Plus particulièrement, voyons dans cette section comment un problème de dimensionnement peut être formulé sous la forme d'un problème d'optimisation et étudions brièvement quelles méthodes de résolution existent et apparaissent pertinentes pour aborder notre problématique.

Formulation d'un problème de dimensionnement en problème d'optimisation

De manière générale, tout problème d'optimisation dynamique implique la formulation :
- d'un *indice de performance*[2] de type quadratique ou autre et pouvant s'exprimer

2. Selon les domaines d'applications, cet indice est également appelé *fonction objectif*, *fonction coût* ou encore *critère d'optimisation*.

sous forme algébrique, différentielle ou intégrale. Il porte en général sur les variables d'entrée, les variables d'état, les variables de sortie, les paramètres ou le temps ;
- d'un *objectif* qui consiste généralement à minimaliser ou à maximiser l'indice de performance ;
- éventuellement d'une famille de *contraintes* sous lesquelles doit être menée l'optimisation. Ces contraintes, de type égalité ou inégalité, peuvent apparaître sous forme algébrique, différentielle ou intégrale. Dans le contexte de la conception de systèmes physiques, elles font intervenir les paramètres et les variables du modèle du système (*i.e.* les variables d'entrée, d'état et de temps). Elles restreignent l'espace des solutions ;
- de *conditions aux limites*, fixées, contraintes ou libres [3], sur les temps et les variables d'état initiaux et finaux.

Ici, dans ce chapitre, nous considérerons des problèmes de dimensionnement où le but est de minimiser la puissance dissipée par certains phénomènes du système. En reprenant les termes précédents, nous considérerons donc ces problèmes de dimensionnement comme des problèmes d'optimisation ayant pour :
- Objectif : déterminer le vecteur $\mathbf{u}$ tel que :

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{u}} V \tag{4.1}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée du système étudié ;
- Indice de performance :

$$V = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt \tag{4.2}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left[\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R_u} \cdot \mathbf{u} + P_{diss} \right] dt \tag{4.3}$$

où :
  - $\mathbf{R_u} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice de pondération des entrées, supposée diagonale, $\mathbf{R_u} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{u_e}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R_{u_f}} \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{R_{u_e}}$ (resp. $\mathbf{R_{u_f}}$) celle associée aux entrées en effort $\mathbf{u_e}$ (resp. en flux $\mathbf{u_f}$) ;
  - P_{diss} est la puissance dissipée par tout ou une partie des phénomènes dissipatifs présents dans le système, $P_{diss} = \mathbf{e_{R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{f_{R_{opt}}}$ où $\mathbf{e_{R_{opt}}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$ (resp. $\mathbf{f_{R_{opt}}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$) est le vecteur d'effort (resp. de flux) associé aux phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance ;
- Contraintes :
  - les équations d'état (4.4) du système étudié.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{4.4}$$

  - les conditions aux limites fixées :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \end{cases} \tag{4.5}$$

3. Lorsque ces conditions aux limites sont fixées, celles-ci doivent impérativement respecter les éventuelles contraintes du problème, sous peine sinon d'obtenir un problème mal posé et sans solution.

Hypothèses : Dans la suite de ce mémoire, nous supposons donc implicitement que les modèles d'état des systèmes étudiés pourront être mis sous une forme explicite. Également, même si cela ne traduit pas l'exacte réalité des cahier des charges, nous choisissons, pour démarrer nos travaux de couplage optimisation/méthodologie de dimensionnement, de ne considérer aucune contrainte supplémentaire sur les variables d'entrée et d'état (*e.g.* les saturations éventuelles de ces variables ne seront pas considérées). Enfin, nous restreindrons ici nos développements au cas de problèmes de minimisation d'énergie dissipée. Notons toutefois que, toujours dans le même contexte, des résultats sur les problèmes de suivi de trajectoire en bond graph ont récemment été établis par Mouhib *et al.* dans [Mou09].

Méthodes de résolution

De par la diversité même des problèmes d'optimisation, les méthodes de résolution associées sont nombreuses et également diverses. Celles-ci dépendent notamment de la forme des expressions mises en jeu mais aussi de la présence et du type de contraintes prises en compte. Cependant, les méthodes de résolution sont traditionnellement classées en trois catégories :

- celle des *méthodes directes*. Ces méthodes recherchent des solutions approchées et utilisent pour cela une discrétisation *a priori*, partielle ou complète, du problème d'optimisation pour effectuer les calculs numériques. Grâce à certains algorithmes, elles impliquent un processus itératif de comparaison successive des valeurs calculées ;
- celle des *méthodes indirectes*. Ces méthodes recherchent des solutions exactes et utilisent pour cela une approche analytique. Si leurs résolutions finales feront généralement appel à une phase numérique, celles-ci engendreront une discrétisation cette fois-ci *a posteriori* du problème [4]. Néanmoins, cette approche permet, en principe, de se rapprocher de la solution exacte du problème ;
- celle des *méthodes semi-directes* ou *méthodes hybrides* qui utilisent une combinaison des approches directes et indirectes en réinjectant de premiers résultats issus d'une approche directe pour faciliter la convergence numérique d'une résolution par approche indirecte.

De manière générale, de plus amples informations sur ces types de méthodes pourront notamment être trouvées dans les références [Pun72, Nai03, Tré05]. La section suivante, quant à elle, justifiera notre choix de méthode de résolution du problème d'optimisation.

4.3.2 L'optimisation dynamique en langage bond graph : état de l'art et choix de la méthode de résolution

Avant de procéder au couplage de la méthodologie de dimensionnement à l'optimisation dynamique, il convient de voir dans quelle mesure ce thème a été traité dans le langage bond graph. Aussi, si l'optimisation dynamique et le formalisme bond graph ont déjà été mêlés dans le domaine de l'analyse des sensibilités [Cab99, Gaw00a, Gaw00b], de la surêté de fonctionnement [Lo,02] ou encore de la synthèse d'architecture [Seo03, Kay07, Kay08], il s'agit dans ces travaux de coupler un algorithme d'optimisation à un modèle bond

4. Ce recours au calcul numérique provient du fait qu'il est mathématiquement illusoire de vouloir trouver une solution analytique dans le cas de problèmes très généraux.

graph et donc d'utiliser des méthodes directes de résolution. L'optimisation n'est réalisée qu'à l'aide de routines classiques tandis que le bond graph n'est lui utilisé que pour la modélisation du système à optimiser : il est vu simplement comme un outil efficace de représentation.

Ici, notre but étant d'étendre la méthodologie de dimensionnement à la résolution de problèmes d'optimisation, il nous a paru intéressant de construire la solution exacte d'un problème d'optimisation (ou tout au moins un système d'équations dont la résolution conduit à la solution exacte) directement à l'aide d'un modèle bond graph. Les méthodes directes reposant plus sur le calcul numérique étant de ce fait inadaptées pour une traduction en langage bond graph, nous avons alors choisi d'adopter une approche indirecte comme celles offertes par le calcul variationnel ou plus particulièrement par le principe de Pontryagin formulé ci-dessous [5].

Théorème 9 (*Principe du minimum faible de* Pontryagin *[Sch67, Nai03]*)

Si le vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ *associé au système* (4.4) *est optimal pour l'indice de performance* (4.2)*, alors il existe une application* $\boldsymbol{\lambda}$ *absolument continue sur* $[t_0, t_f]$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*, appelée* vecteur de co-état *(ou* vecteur adjoint *ou* vecteur des multiplicateurs de Lagrange*), telle que les équations suivantes sont vérifiées :*

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H_p(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \tag{4.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H_p(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial H_p(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{4.8}$$

où H_p *est la* fonction de Pontryagin *associée au système* (4.4) *et à l'indice de performance* (4.2) *telle que :*

$$H_p(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Appelées *conditions d'optimalité*, les équations (4.6)-(4.8) fournissent ainsi la solution au problème d'optimisation considéré. Cependant, comme la plupart des méthodes d'optimisation, notons que celles-ci ne seront bien souvent que des conditions nécessaires et non suffisantes dans le sens où elles fourniront, dans la plupart des cas, des solutions :

- qui ne seront pas forcément des mininums puisqu'elles peuvent correspondre également à des maximums ou simplement à des points d'inflexion [6] ;
- et qui, si elles correspondent effectivement à des extremums, correspondront alors à des extremums locaux et donc pas forcément globaux [7].

5. Si cette formulation du principe de Pontryagin est celle utilisée tout au long de ce mémoire, une autre formulation (faisant apparaître un réel devant le Lagrangien $\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$) existe et est tout aussi employée dans la littérature. Cependant, l'annexe F.2 montre que celles-ci sont bien équivalentes.

6. Une condition supplémentaire portant sur les dérivées secondes de la fonction H_p sera étudiée à la section 4.4.4 (page 178) pour préciser la nature de la solution trouvée.

7. Cette difficulté est notamment liée à la nature non convexe des fonctions mises en jeu dans le problème d'optimisation.

Remarque : Cette formulation du principe de PONTRYAGIN est dite *faible* car aucune contrainte sur les variables d'entrée n'est prise en compte. Aussi, les conditions d'optimalité se résument ici à des conditions sur les vecteurs d'état, de co-état et d'entrée. En théorie, d'autres conditions apparaissent lorsque les temps et les états initiaux et finaux ne sont pas fixés (voir [Nai03] pour plus de détails sur ces conditions aux limites).

4.4 Représentation bond graph d'un problème d'optimisation : cas de modèles linéaires et invariants dans le temps

Afin d'élargir la classe des problèmes de dimensionnement pouvant être traités, nous avons vu qu'une extension possible de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses résidait dans un couplage avec de l'optimisation dynamique : celui-ci permettrait notamment de diminuer les exigences actuelles de la méthodologie en termes de rédaction du cahier des charges (seules les spécifications se traduisant comme des fonctions explicites du temps sont traitées). Aussi, dans cette perspective, la question d'une formulation bond graph d'un problème d'optimisation se devait d'être résolue.

Débutés depuis 2004 dans le cadre du projet ANR METISSE [8], de premiers travaux ont été entrepris à ce sujet et ont permis notamment d'établir une procédure systématique de construction de modèles bond graph optimisants. Cette section est dédiée à la présentation de cette procédure. Après en avoir succinctement expliqué le principe général et les différentes étapes, quelques exemples d'application et éléments de réflexion sont ensuite détaillés.

Hypothèse : Dans toute cette section 4.4, les modèles d'état (4.4) (page 164) des systèmes considérés seront supposés être donc explicites mais aussi linéaires et invariants dans le temps [9]. À ce titre, tout modèle bond graph étudié aura la structure générique du modèle de la figure 4.1 [10] et sera supposé correspondre à la formulation port-hamiltonienne [11]

8. *i.e.* Méthodes numériquEs et Techniques Informatiques pour la Simulation et la Synthèse en Environnement

9. Cette hypothèse a permis de simplifier le cadre d'étude afin d'obtenir de premiers résultats sur la traduction bond graph d'un problème d'optimisation. Une extension à certaines classes de modèles non linéaires sera étudiée dans ce mémoire à la section 4.5 (page 182).

10. Les éléments bond graph apparaissant sur cette figure sont des éléments dits *multiports* qui présentent les mêmes lois caractéristiques que celles présentées à l'annexe A à la simple différence qu'elles sont ici sous forme vectorielle. Pour bien les distinguer, ces éléments sont notés avec une double barre (*e.g.* $\mathbb{I}$) et les liens bond graph les connectant sont représentés à l'aide d'un double trait. Ce type de notation a été choisi ici pour représenter de manière compacte un modèle bond graph totalement générique. La notation $\mathbb{GJS}$ se trouve d'ailleurs dans la littérature et signifie *Generalized Junction Structure* : celle-ci permet de représenter sous un seul élément multiport toutes les *jonctions tableaux* $\underline{0}$ et $\underline{1}$ (*i.e.* les extensions des jonctions 0 et 1 au cas multiport) et tous les autres éléments de jonctions apparaissant dans le modèle. Pour de plus amples informations sur cette notion de *multi-bond graph*, le lecteur intéressé pourra avantageusement consulter les références de BREEDVELD [Bre85a, Bre85b].

11. La formulation port-hamiltonienne peut être vue comme une mise en forme particulière d'une représentation d'état où les matrices classiques **A**, **B**, **C** et **D** sont décomposées selon l'origine physique de chaque cœfficient. Choisie pour son analogie avec la structure et le point de vue énergétique du langage

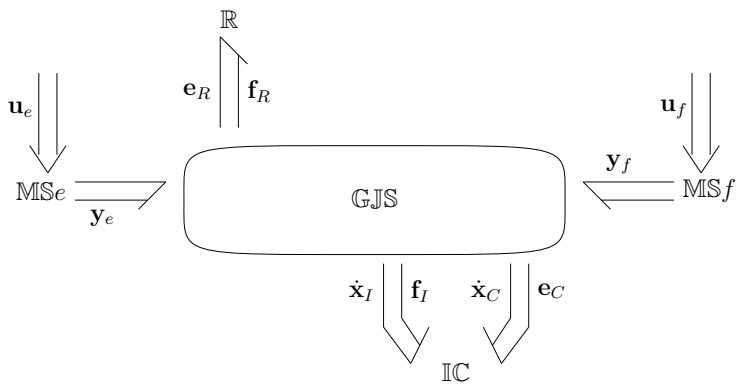


FIGURE 4.1 – Modèle bond graph générique (cas linéaire)

explicite suivante [Gol01] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{u_R} \\ \mathbf{y} = \mathbf{G_u}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{y_R} = \mathbf{G_R}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \end{cases} \tag{4.9}$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état d'ordre minimal (*i.e.* constitué uniquement de variables d'état indépendantes) associé aux éléments de stockage d'énergie, $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{x_I}^T & \mathbf{x_C}^T \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{x_I}$ (resp. $\mathbf{x_C}$) le vecteur d'état associé aux éléments $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{C}$) ;
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{u_e}^T & \mathbf{u_f}^T \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{u_e}$ (resp. $\mathbf{u_f}$) le vecteur d'entrée en effort (resp. en flux) ;
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sortie constitué des variables de puissance conjuguées au vecteur d'entrée $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{y_e}^T & \mathbf{y_f}^T \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{y_e}$ (resp. $\mathbf{y_f}$) le vecteur de sortie en flux (resp. en effort) ;
- $\mathbf{u_R} \in \mathbb{R}^r$ (resp. $\mathbf{y_R} \in \mathbb{R}^r$) est le vecteur d'entrée (resp. de sortie) associé aux phénomènes dissipatifs [12] ;
- $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice hessienne [13] de H où H est l'Hamiltonien du système, à savoir une fonction du vecteur d'état $\mathbf{x}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et représentant l'énergie totale stockée dans le système ;

bond graph [Don09] (*e.g.* le terme $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ correspond au vecteur des variables de coénergie associées aux éléments de stockage du modèle bond graph), nous verrons dans la section suivante que cette formulation permet de justifier théoriquement le bien-fondé de la procédure d'optimisation en bond graph. Enfin, de plus amples informations sur cette formulation port-hamiltonienne sont fournies à l'annexe G.

12. En toute rigueur, nous devrions parler de vecteur d'entrée (ou de sortie) de la structure de jonction généralisée.

13. Pour un Hamiltonien H fonction d'un vecteur $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$, la *matrice hessienne* $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ est définie de sorte que [Ric01] : $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H(x)}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 H(x)}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix}$. Toutefois, dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps, il peut être montré que cette matrice hessienne ne dépend pas de $\mathbf{x}$ [Mar08].

- $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie ;
- $\mathbf{G_u} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et les entrées ;
- $\mathbf{G_R} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et ceux dissipatifs.

4.4.1 Origine et principe de la procédure

Tout modèle dynamique résulte d'un problème d'optimisation au sens très général puisque son comportement est régi par le *principe de moindre d'action*[14]. À ce titre, tout modèle bond graph est donc quelque part la solution d'un problème d'optimisation. Fort de cette observation, pourquoi un modèle bond graph ne pourrait donc pas représenter la solution d'un problème d'optimisation tel qu'il a été présenté à la section 4.3.1 (page 163) ?

Cette question a été résolue par Marquis-Favre *et al.* dans [Mar05, Mou06, Mar08] avec la construction graphique d'un *modèle bond graph augmenté* couplant le *modèle bond graph initial* du système étudié et un *modèle bond graph optimisant*. Ce modèle bond graph augmenté reflète alors les conditions d'optimalité issues du principe de Pontryagin, conditions qui, une fois résolues, aboutissent à la solution du problème d'optimisation envisagé.

4.4.2 Procédure bond graph d'optimisation

Plus précisément, une fois le problème d'optimisation formulé et le modèle du système étudié établi, la construction du modèle bond graph augmenté correspondant requiert le suivi de la procédure suivante.

14. Ce principe affirme que tout système évolue naturellement de sorte à minimiser l'*action* nécessaire à ce changement [Cra68, Gol80].

Procédure 4 (*[Mar08]*)

Construction de modèles bond graph optimisants dans le cas linéaire

Pour tout problème d'optimisation formulé sur un système linéaire et invariant dans le temps et consistant à déterminer le vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ *de sorte que l'indice de performance* $V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}\left[\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R_u} \cdot \mathbf{u} + P_{diss}\right] dt$ *soit minimisé, que les équations d'état* $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases}$ *soient prises comme contraintes et que des conditions initiales et finales sur le temps et l'état soient fixées, les conditions d'optimalité issues du principe de* Pontryagin *peuvent être obtenues de manière graphique par l'exploitation causale d'un modèle bond graph augmenté, construit en suivant les étapes suivantes :*

Étape 1 : Duplication (Fig. 4.2). *Dupliquer le modèle bond graph initial, c'est-à-dire le modèle bond graph correspondant au système étudié. La partie ainsi dupliquée sera désignée par la suite par modèle bond graph optimisant (sur la figure 4.2, l'élément* $\mathbb{R} : \mathbf{R_{opt}}$ *(resp.* $\mathbb{R} : \mathbf{R_R}$*) désigne les phénomènes dissipatifs pris en compte (resp. non pris en compte) dans l'indice de performance* V*).*

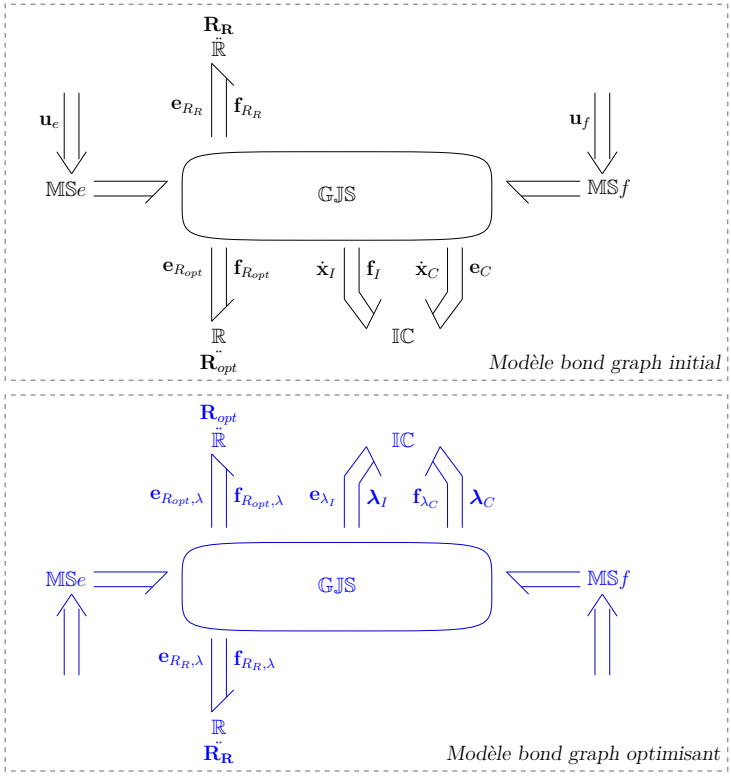


Figure *4.2 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas linéaire : étape 1*

Étape 2 : Caractéristiques du modèle bond graph optimisant (Fig. 4.3). *Dans le modèle bond graph optimisant, remplacer les matrices caractéristiques* $\mathbf{R_R}$ *et* $\mathbf{R_{opt}}$ *des éléments* $\mathbb{R}$ *respectivement par* $-\mathbf{R_R}^T$ *et* $-\mathbf{R_{opt}}^T$.

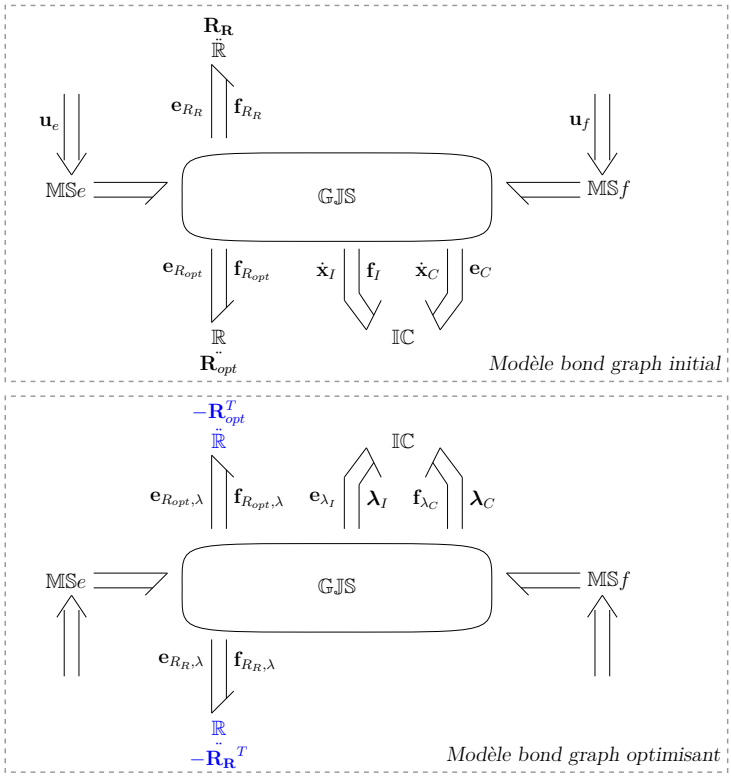


FIGURE *4.3 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas linéaire : étape 2*

Étape 3 : Prise en compte de l'indice de performance (Fig. 4.4).

- *<u>A - Pour les phénomènes dissipatifs</u> pris en compte dans l'indice de performance, coupler les éléments $\mathbb{R}$ multiports correspondants présents à la fois dans les modèles bond graph initial et optimisant. Ensuite, ajouter sous la diagonale de la matrice caractéristique de l'élément, la sous-matrice $\frac{1}{2}[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{R_{opt}}^T]$.*
- *<u>B - Pour les entrées</u>, insérer une jonction tableau $\underline{\mathbf{0}}$ (resp. $\underline{\mathbf{1}}$) entre la structure de jonction et chaque source d'effort (resp. de flux) puis leur connecter un élément $\mathbb{R}$ multiport par paire de sources correspondantes dans les modèles bond graph initial et optimisant. Pour les sources d'effort (resp. de flux), leur associer la matrice caractéristique $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_e} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_e} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_f} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_f} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_f} \end{pmatrix}$).*

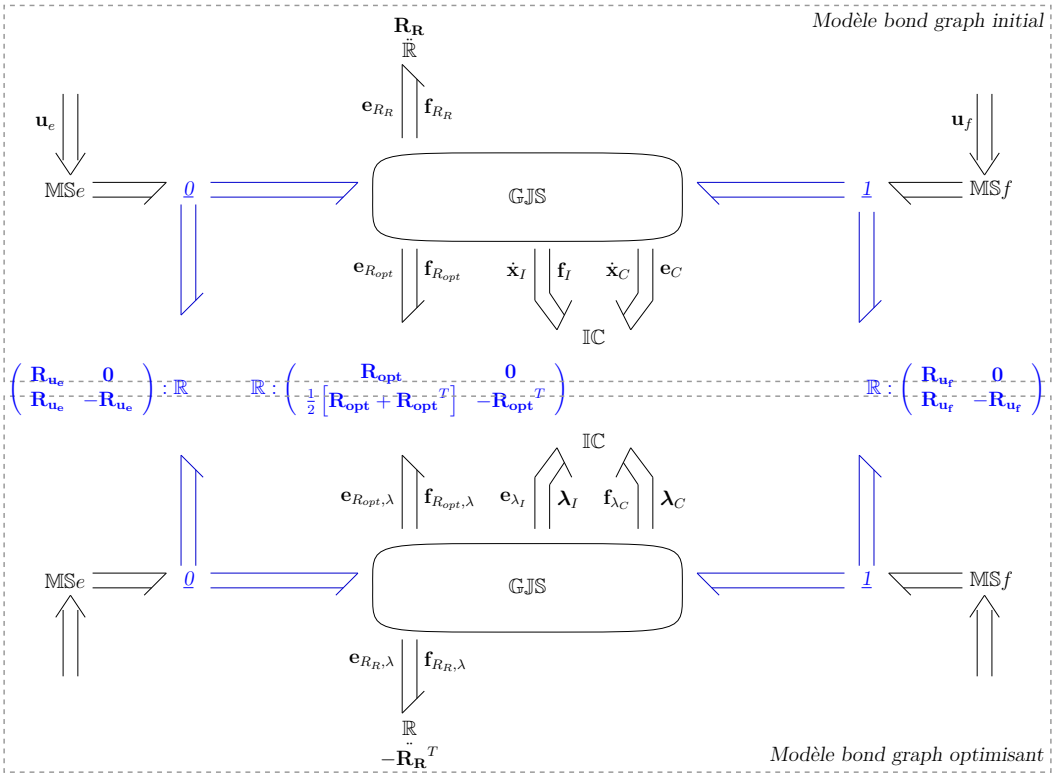


FIGURE 4.4 – *Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas linéaire : étape 3*

Étape 4 : Affectation de la bicausalité (Fig. 4.5). *Remplacer les éléments* $\mathbb{MS}e$ *et* $\mathbb{MS}f$ *correspondants aux entrées par des doubles détecteurs* $\mathbb{D}e\mathbb{D}f$ *dans le modèle bond graph initial, et, par des doubles sources* $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ *imposant des vecteurs d'effort et de flux nuls dans le modèle bond graph optimisant. Enfin, propager la bicausalité des doubles sources vers les doubles détecteurs à travers les éléments* $\mathbb{R}$ *multiports introduits pour prendre en compte les pondérations des entrées à déterminer par optimisation.*

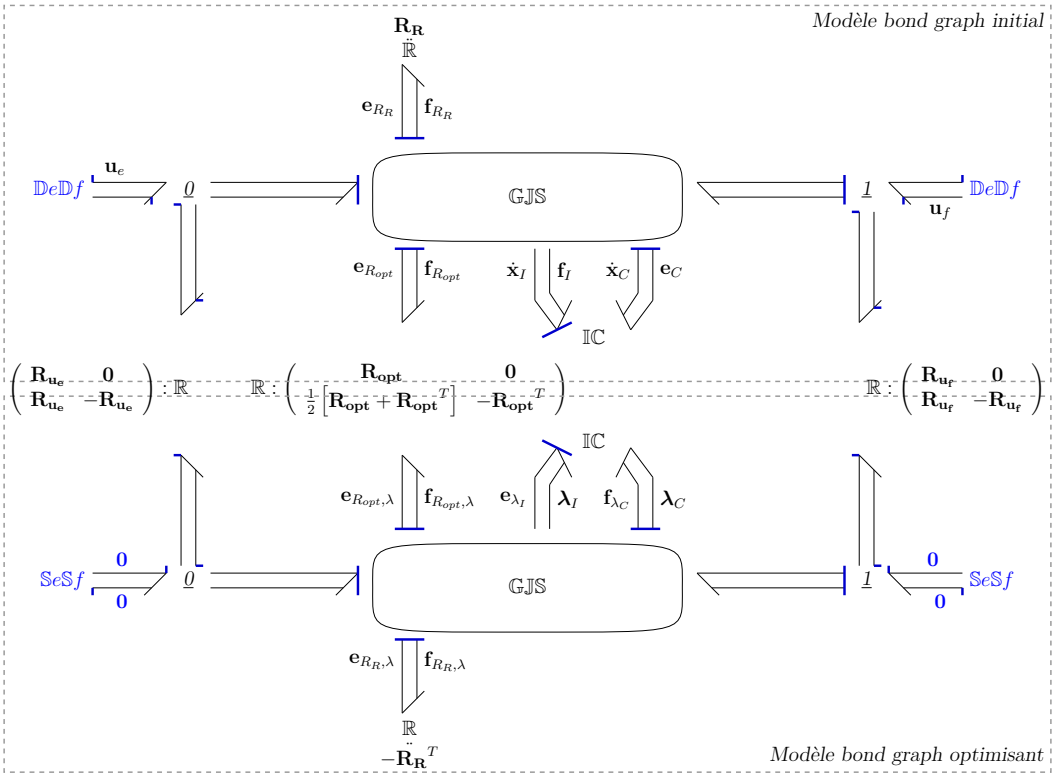


FIGURE 4.5 – *Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas linéaire : étape 4*

Démontrée initialement dans [Mou06] et étendue dans l'annexe H.2 à une classe plus générale de systèmes linéaires [15], cette procédure permet ainsi d'obtenir, de manière graphique, les conditions d'optimalité issues du principe de PONTRYAGIN.

Du point de vue de l'optimisation, les avantages d'une telle procédure résident notamment dans son caractère graphique : l'ingénieur peut appliquer le principe de PONTRYAGIN sans développement analytique et sans avoir besoin de déterminer au préalable le modèle d'état du système étudié ou l'expression analytique des puissances dissipées à minimiser. Aussi, l'ingénieur a désormais une représentation graphique « physique » du problème d'optimisation puisque cette procédure lui permet notamment :

- une visualisation et une interprétation physique possible, *via* le modèle bond graph optimisant, du modèle adjoint souvent utilisé dans les problèmes d'optimisation [16] ;
- une visualisation graphique de l'impact de chaque critère d'optimisation, d'une part sur la puissance dissipée (par l'intermédiaire des éléments $\mathbb{R}$ multiports de couplage), et d'autre part sur les entrées (grâce aux double sources et à la propagation de la bicausalité) ;
- la possibilité de modifier facilement le critère d'optimisation (possibilité d'optimiser

15. La démonstration de la section H.2 (page 378) étend notamment la démonstration initiale à un cas plus général de système port-hamiltonien où le vecteur de sortie $\mathbf{y}$ peut dépendre explicitement du vecteur d'entrée $\mathbf{u}$.

16. La construction du modèle bond graph optimisant présente notamment de grandes similitudes avec la procédure de XIA et SCAVARDA sur la traduction bond graph d'un modèle adjoint [Xia01, Xia00].

tout ou une partie des entrées et de la puissance dissipée en ajoutant ou retirant des éléments $\mathbb{R}$ multiports de couplage).

Du point de vue de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses, l'intérêt réside surtout dans la possibilité désormais d'élargir la classe de problèmes pouvant être traités. Cette procédure permettra notamment de diminuer les exigences en termes de rédaction du cahier des charges (les spécifications traduites n'auront plus besoin d'être nécessairement traduites comme des fonctions explicites du temps ou de certaines variables du modèle).

Remarques :

- Lors de l'application de la procédure 4 (page 173), si le modèle bond graph initial présente des détecteurs d'effort (resp. de flux), il convient de les dupliquer également pour former le modèle bond graph optimisant (cette remarque restera notamment valable pour les extensions de la procédure qui seront présentées par la suite).
- Pour des questions de clarté, la procédure 4 (page 173) n'a été présentée que dans le cas où tous les éléments $\mathbb{R}$ sont en causalité résistance (comme l'illustre la figure 4.5). Cependant, celle-ci reste valable dans le cas général (*i.e.* présence d'éléments $\mathbb{R}$ en causalité résistance et en causalité conductance) comme le montre l'article [Mar08] grâce au concept de dualisation partielle (annexe H.1). Il convient alors de remplacer la sous-matrice $\frac{1}{2}\left[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{R_{opt}}^T\right]$ par la sous-matrice $\frac{1}{2}[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{T}]$ où $\mathbf{R_{opt}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr} & \mathbf{R_{opt}}_{rc} \\ \mathbf{R_{opt}}_{cr} & \mathbf{R_{opt}}_{cc} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr}^T & -\mathbf{R_{opt}}_{cr}^T \\ -\mathbf{R_{opt}}_{rc}^T & \mathbf{R_{opt}}_{cc}^T \end{pmatrix}$ (les indices $_r$ et $_c$ correspondent respectivement à une causalité résistance et conductance lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale). Dans le cas d'éléments R 1-ports, notons que, quelque soit la causalité, $R_{opt} = T = R_{opt}^T$ et donc $\frac{1}{2}\left[R_{opt} + T\right] = R_{opt}$ (cette remarque nous sera notamment utile pour les exemples suivants).
- Même si ce cas n'a pas été ici explicitement présenté, la procédure 4 (page 173) reste valable lorsque le modèle bond graph en causalité intégrale présente des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée à condition que les dépendances ainsi engendrées puissent être résolues de manière à écrire le modèle d'état sous une forme explicite (seule hypothèse de départ lors de l'application de la procédure).

4.4.3 Exemple

Considérons comme exemple d'application, un filtre électrique passe-bas du second ordre, connecté à un générateur de courant u (Fig. 4.6, exemple tiré de l'article [Che06]).

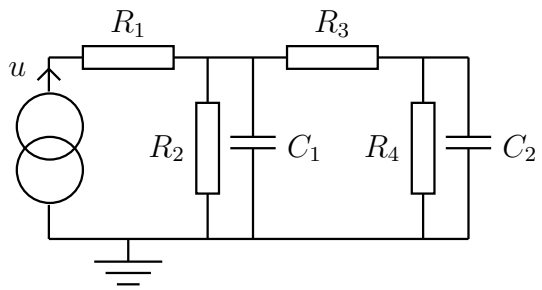


FIGURE 4.6 – Schéma technologique d'un filtre électrique

Conformément aux règles de modélisation bond graph, ce système peut alors être représenté par le modèle bond graph de la figure 4.7.

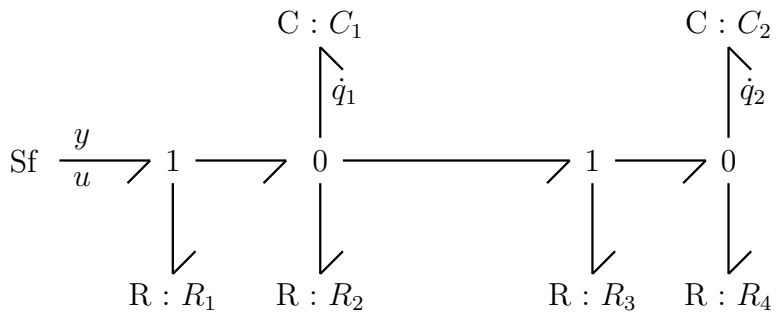


FIGURE 4.7 – Modèle bond graph du filtre électrique

Formulation du problème d'optimisation

Supposons que le but de l'étude soit de déterminer l'entrée en intensité u permettant de minimiser la puissance dissipée par les résistances électriques R_1, R_2 et R_4. L'étude se formule alors comme un problème d'optimisation avec pour :

- Objectif : déterminer u tel que :

$$\min_{q_1,q_2,u} V \tag{4.10}$$

  où q_1 et q_2 sont respectivement les charges associées aux condensateurs C_1 et C_2 ;
- Indice de performance :

$$V = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[P_{diss,R_1} + P_{diss,R_2} + P_{diss,R_4}\right] dt \tag{4.11}$$

  où P_{diss,R_1}, P_{diss,R_2} et P_{diss,R_4} sont les puissances dissipées respectivement par les résistances R_1, R_2 et R_4.
- Contraintes :
  - les équations d'état du système ;
  - des conditions aux limites fixées sur les temps et les états initiaux et finaux.

Remarque : Comme P_{diss,R_1} est une fonction exclusivement de l'entrée u (en réalité, $P_{diss,R_1} = R_1 \cdot u^2$), R_1 joue ici le rôle de cœfficient de pondération pour l'entrée u dans

l'indice de performance V.

Construction du modèle bond graph augmenté

En appliquant au modèle bond graph initial (Fig. 4.7) la procédure 4 (page 173), nous obtenons alors le modèle bond graph augmenté (Fig. 4.8) correspondant au problème d'optimisation (4.10)-(4.11).

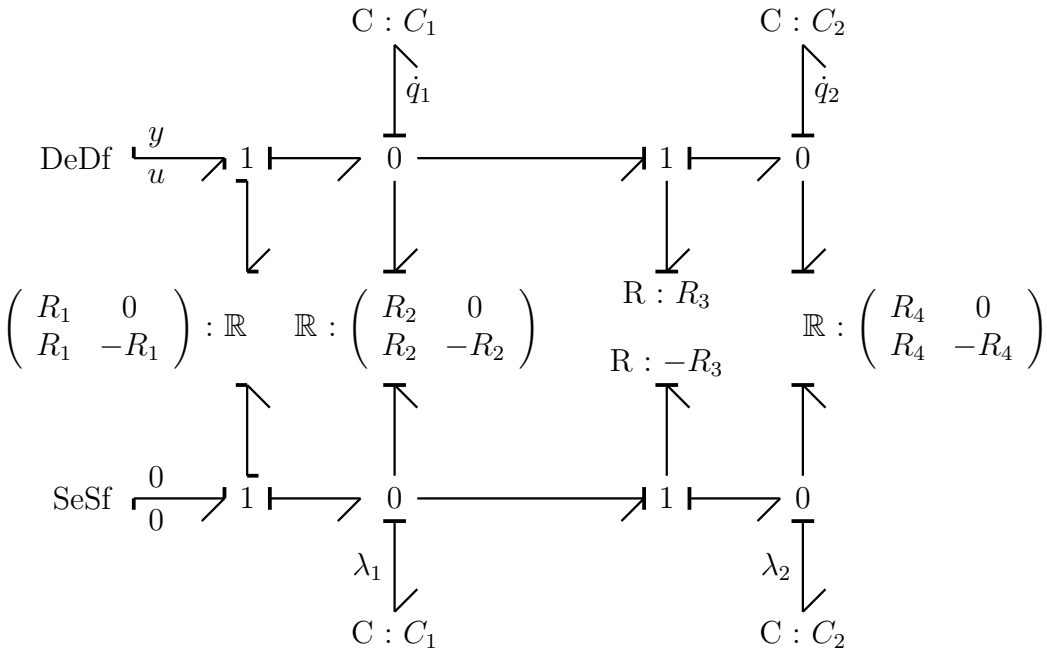


FIGURE 4.8 – Modèle bond graph augmenté dans l'exemple du filtre électrique

L'exploitation de ce modèle bond graph augmenté conduit au système d'équations suivant, système qui aurait été obtenu en appliquant le principe de PONTRYAGIN de manière analytique :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \cdot \frac{1}{C_1} \cdot q_1 + \frac{1}{R_3 C_2} \cdot q_2 - \frac{1}{R_1} \cdot \lambda_1 \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{R_3 C_1} \cdot q_1 - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \cdot \frac{1}{C_2} \cdot q_2 \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{1}{R_2 C_1^2} \cdot q_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \cdot \frac{1}{C_1} \cdot \lambda_1 - \frac{1}{R_3 C_1} \cdot \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{1}{R_4 C_2^2} \cdot q_2 - \frac{1}{R_3 C_2} \cdot \lambda_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \cdot \frac{1}{C_2} \cdot \lambda_2 \\ u = -\frac{1}{R_1} \cdot \lambda_1 \end{cases}$$

Remarque : Les conditions d'optimalité par rapport aux vecteurs d'état et de co-état obtenues à l'issue du modèle bond graph augmenté sont, en toute rigueur, reformulées par rapport à celles qui seraient obtenues en appliquant le principe de PONTRYAGIN de manière analytique. Elles correspondent aux conditions d'optimalité où le vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ a été remplacé par son expression en fonction des vecteurs d'état et de co-état $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ (ici, dans l'exemple, u a été remplacé par $-\frac{1}{R_1} \cdot \lambda_1$ dans la condition d'optimalité par rapport à q_1). Cette expression en fonction de $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ est donnée par la condition d'optimalité sur $\mathbf{u}$.

4.4.4 Précisions sur la mise en œuvre de la procédure

Maintenant que la méthode de représentation bond graph d'un problème d'optimisation a été illustrée sur un exemple, revenons plus généralement sur quelques points complémentaires utiles à sa mise en œuvre.

Règle de propagation de la bicausalité

Lors de l'application de la procédure 4 (page 173), seule une affectation bicausale du modèle bond graph augmenté permet d'obtenir des conditions d'optimalité conforme au principe de Pontryagin. Cette bicausalité se justifie notamment par le fait que le problème d'optimisation peut être vu quelque part comme un modèle inverse : l'idée est bien de déterminer les entrées du système à partir d'un critère donné. Notons toutefois qu'il est intéressant de propager cette bicausalité d'une certaine manière : comme le montre la figure 4.5 (page 173), nous proposons de propager la bicausalité de sorte qu'elle traverse les éléments $\mathbb{R}$ de couplage correspondant aux pondérations sur les entrées (*i.e.* les éléments $\mathbb{R} : \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}e} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}e} \end{pmatrix}$ et $\mathbb{R} : \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}f} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}f} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}f} \end{pmatrix}$). En l'occurrence, si cette règle n'est pas observée, l'affectation de la bicausalité conduira alors à des conditions d'optimalité sous forme implicite qu'il faudra alors retravailler pour se ramener à la forme explicite des conditions d'optimalité exprimées par Pontryagin [Pon62].

Reprenons l'exemple du filtre électrique pour illustrer ce propos. À la section précédente, la propagation de la bicausalité à travers l'élément de couplage $\mathbb{R} : \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ R_1 & -R_1 \end{pmatrix}$ (élément correspondant, dans ce cas, à la pondération sur l'entrée u) nous a permis d'obtenir une structure de jonction résoluble pour le modèle bond graph augmenté : nous avons pu l'exploiter et en déduire les conditions d'optimalité correspondantes. Si, désormais, nous repartons du même modèle bond graph augmenté et propageons la bicausalité à travers, par exemple, l'élément $\mathbb{R} : \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ R_2 & -R_2 \end{pmatrix}$, nous obtenons alors un système d'équations implicites (Fig. 4.9) qui doit être retravaillé pour obtenir les conditions d'optimalité de Pontryagin sous forme explicite. Ici, la causalité du modèle bond graph initial en est même modifiée.

Rôle des cœfficients de pondération

L'indice de performance V tel que nous l'avons considéré présente deux termes principaux à savoir $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R}_\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ et P_{diss}. Aussi, les problèmes d'optimisation correspondants visent à minimiser non seulement une partie de la puissance dissipée mais sont souvent présentés comme minimisant également une partie de l'énergie apportée au système.

Une autre interprétation possible réside dans l'interprétation physique des cœfficients de pondération. En effet, puisque les entrées d'un modèle correspondent à des sources qui, en pratique, ne sont pas idéales, la matrice de pondération peut dès lors être vue comme caractérisant l'impédance interne de ces sources. Les problèmes d'optimisation impliquant ce type d'indice de performance peuvent alors être vus comme des problèmes de minimisation de la puissance P_{diss} et de la puissance dissipée au niveau des sources [Nai03].

Par commodité, nous supposerons dans ce mémoire que la matrice $\mathbf{R}_\mathbf{u}$ de pondération des entrées est une matrice diagonale et que la valeur numérique de ses cœfficients sera

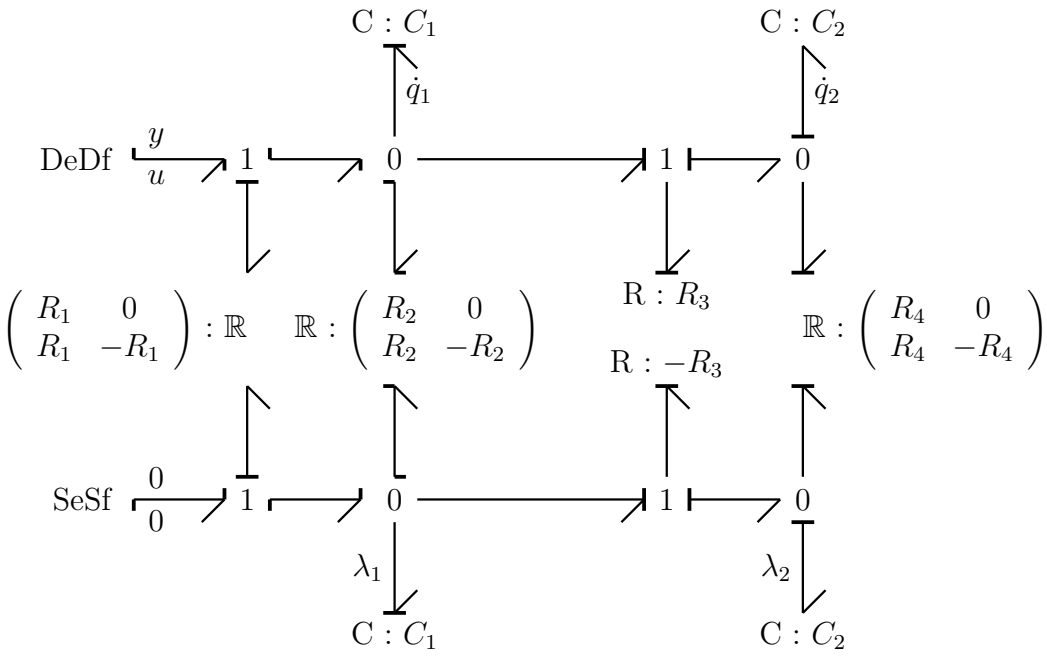


FIGURE 4.9 – Modèle bond graph augmenté dans l'exemple du filtre électrique lorsque la bicausalité n'est pas propagée à travers un élément $\mathbb{R}$ de pondération sur les entrées

strictement positive et fixée de manière arbitraire. En pratique, ce choix pourra notamment être guidé par :

- la caractérisation physique des sources (impédances internes) ;
- les exigences du cahier des charges (celui-ci peut être plus restrictif sur la minimisation de certaines puissances dissipées) ;
- les ordres de grandeur des puissances dissipées (un cœfficient de pondération élevé pourra « forcer » en quelque sorte la minimisation d'une puissance dissipée pourtant très faible par rapport à d'autres phénomènes) ;
- la saturation des entrées.

Cependant, même si cette problématique n'est ici que très brièvement évoquée, la détermination pertinente de la matrice $\mathbf{R_u}$ reste un problème à part entière qui n'a volontairement pas été abordé au cours de ces travaux de thèse.

Nature des solutions

Comme nous l'avons précisé à la section 4.3.2 (page 165), les conditions d'optimalité issues du principe de PONTRYAGIN (donc du modèle bond graph augmenté) sont, en général, des conditions simplement nécessaires et non suffisantes : leur résolution assure uniquement l'existence d'un triplet $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}^*)$ annulant la variation première δV de l'indice de performance. Or, cette annulation est une condition nécessaire pour l'obtention d'une solution extrémalisant V mais est non suffisante. Afin de vérifier que la solution trouvée $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}^*)$ corresponde bien à un minimum de V et non à un maximum ou à un point d'inflexion, il convient de vérifier que [Nai03] : la variation seconde $\delta^2 V$ de l'indice de performance soit positive ou encore que la matrice $\mathbf{\Pi}$ évaluée au point $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}^*)$ soit

définie positive[17] avec $\mathbf{\Pi}$ définie de sorte que :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_p}{\partial \mathbf{x}^2} & \frac{\partial^2 H_p}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial^2 H_p}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 H_p}{\partial \mathbf{u}^2} \end{pmatrix}$$

où H_p est la fonction de Pontryagin issue du problème d'optimisation, $\mathbf{x}$ le vecteur d'état et $\mathbf{u}$ le vecteur d'entrée.

Dès lors, appliquons cette condition aux problèmes d'optimisation (4.1)-(4.5) (page 164) considérés dans ce mémoire lorsque le modèle d'état du modèle bond graph initial peut se mettre sous la forme (4.9) (page 168). Pour cela, par souci de concision et sans perdre en généralité (le cas général peut être traité grâce au principe de dualisation partielle expliqué à l'annexe H.1), supposons ici que les entrées (resp. les sorties) associées aux phénomènes dissipatifs sont toutes des efforts (resp. des flux) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_R = \mathbf{e}_R \\ \mathbf{y}_R = \mathbf{f}_R \end{cases} \tag{4.12}$$

Comme les lois caractéristiques des phénomènes dissipatifs sont supposées être linéaires, nous pouvons également relier ces deux grandeurs entre elles par l'équation suivante :

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}_R \tag{4.13}$$

où $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs.

Ainsi, en remplaçant les équations (4.12) et (4.13) dans le système (4.9), la représentation port-hamiltonienne du modèle bond graph initial est alors équivalente à :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R^T}] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{G_u^T} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{y_R} = \mathbf{G_R^T} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \end{cases} \tag{4.14}$$

Construisons maintenant la fonction de Pontryagin $H_p = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ correspondant à ce type de problème d'optimisation. Ici, compte tenu de l'indice de performance (4.3) et de la représentation d'état (4.14), nous obtenons :

$$H_p = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u^T} \cdot \mathbf{R_u} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e^T_{R_{opt}}} \cdot \mathbf{f_{R_{opt}}} + \boldsymbol{\lambda^T} \cdot [[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R^T}] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u}] \tag{4.15}$$

De plus, puisque $\mathbf{e}_{R_{opt}}$ et $\mathbf{f}_{R_{opt}}$ vérifient tous deux les équations (4.12), (4.13) et (4.14), ceci est encore équivalent à :

$$\begin{aligned} H_p = & \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u^T} \cdot \mathbf{R_u} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{G^T_{R_{opt}}} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}]^T \cdot \mathbf{R^T_{opt}} \cdot [\mathbf{G^T_{R_{opt}}} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}] \\ & + \boldsymbol{\lambda^T} \cdot [[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R^T}] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u}] \end{aligned} \tag{4.16}$$

où $\mathbf{G_{R_{opt}}} \in \mathbb{R}^{n \times r_{opt}}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et les phénomènes dissipatifs considérés dans l'indice de performance.

17. Une matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ carrée et symétrique (*i.e.* $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$) est *définie positive* si et seulement si $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^q, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} > 0$ [Gan66, Ric01].

Ainsi, le calcul des dérivées partielles secondes de H_p nous permet d'obtenir :

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}} \cdot \mathbf{R_{opt}}^T \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R_u} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, pour notre type de problème d'optimisation et puisque nous avons supposé la matrice de pondération $\mathbf{R_u}$ comme diagonale et à valeurs positives, la condition énoncée précédemment se réduit à vérifier que la matrice $\mathbf{H} \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}} \cdot \mathbf{R_{opt}}^T \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{H}$ est définie positive.
Notons cependant qu'il s'agit ici d'un cas très particulier où l'hypothèse de linéarité du modèle bond graph initial induit une matrice $\mathbf{\Pi}$ indépendante de $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\lambda}$ et $\mathbf{u}$ et où la nature de la solution issue de Pontryagin peut être déterminée à l'aide d'une condition simplifiée. Ceci ne sera pas le cas dans le contexte général et la condition ne pourra plus être simplifiée afin de statuer sur la nature des solutions trouvées.

Remarques :

- La condition portant sur le fait que la matrice $\mathbf{H} \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}} \cdot \mathbf{R_{opt}}^T \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{H}$ doit être définie positive est automatiquement vérifiée lorsque la matrice $\mathbf{R_{opt}}$ est elle-même définie positive.
- La condition décrite ici ne permet d'éliminer que des solutions qui ne correspondraient pas à un minimum de l'indice de performance. Cependant, elle ne garantit pas l'obtention du minimum global (si ce n'est en vérifiant *a posteriori* toutes les solutions trouvées).

Stabilité des conditions d'optimalité

Calculons l'expression formelle des conditions d'optimalité dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps. En nous plaçant dans le cadre d'étude de la section précédente et en utilisant l'expression (4.16) de la fonction de Pontryagin correspondante, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H_p(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} &= \left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R}^T\right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{\partial H_p(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \\
\Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{1}{2}\cdot \mathbf{H}^T\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}\cdot {\mathbf{R_{opt}}}^T\cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x} \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\mathbf{x}^T\cdot \mathbf{H}^T\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}\cdot {\mathbf{R_{opt}}}^T\cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}}^T\cdot \mathbf{H}\right]^T \\
&\quad -\left[\boldsymbol{\lambda}^T\left[\mathbf{J}-\mathbf{G}_{\mathbf{R}}\cdot \mathbf{R}\cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{R}}}^T\right]\mathbf{H}\right]^T \\
\Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{1}{2}\cdot \mathbf{H}^T\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}\left[\mathbf{R_{opt}}+{\mathbf{R_{opt}}}^T\right]\cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x} \\
&\quad +\mathbf{H}^T\left[-\mathbf{J}^T+\mathbf{G}_{\mathbf{R}}\cdot \mathbf{R}^T\cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{R}}}^T\right]\boldsymbol{\lambda} \\
\Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{1}{2}\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}\left[\mathbf{R_{opt}}+{\mathbf{R_{opt}}}^T\right]\cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x} \\
&\quad +\mathbf{H}\left[\mathbf{J}+\mathbf{G}_{\mathbf{R}}\cdot \mathbf{R}^T\cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{R}}}^T\right]\boldsymbol{\lambda}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

car d'une part, les phénomènes de stockages d'énergie étant réversibles, $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$ et, d'autre part, la structure d'un système port-hamiltonien est telle que la matrice $\mathbf{J}$ est anti-symétrique et donc $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H_p(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{R_u}\cdot \mathbf{u}+\left[\boldsymbol{\lambda}^T\cdot \mathbf{G_u}\right]^T = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{R_u}\cdot \mathbf{u}+{\mathbf{G_u}}^T\cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{u} = -{\mathbf{R_u}}^{-1}\cdot {\mathbf{G_u}}^T\cdot \boldsymbol{\lambda}
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

puisque, la matrice $\mathbf{R_u}$ étant supposée ici diagonale et à cœfficients strictement positifs, elle est automatiquement inversible.

Ainsi, en remplaçant l'expression (4.19) de $\mathbf{u}$ en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$ dans les équations (4.17) et (4.18), résoudre les conditions d'optimalité issues du principe de Pontryagin revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$
\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \mathbf{A_{opt}}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}
$$

avec $\mathbf{A_{opt}} = \begin{pmatrix} \left[\mathbf{J}-\mathbf{G}_{\mathbf{R}}\cdot \mathbf{R}\cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{R}}}^T\right]\mathbf{H} & -{\mathbf{R_u}}^{-1}\cdot {\mathbf{G_u}}^T \\ -\frac{1}{2}\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}\left[\mathbf{R_{opt}}+{\mathbf{R_{opt}}}^T\right]{\mathbf{G}_{\mathbf{R_{opt}}}}^T\cdot \mathbf{H} & \mathbf{H}\left[\mathbf{J}+\mathbf{G}_{\mathbf{R}}\cdot \mathbf{R}^T\cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{R}}}^T\right] \end{pmatrix}.$

En étudiant la trace de la matrice d'état de ce système, nous obtenons alors [Mar08] :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{A_{opt}}) &= \mathrm{tr}(\left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R}^T\right] \mathbf{H}) + \mathrm{tr}(\mathbf{H}\left[\mathbf{J} + \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{G_R}^T\right]) \\
&= \mathrm{tr}(\left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R}^T\right] \mathbf{H}) + \mathrm{tr}(\left[\mathbf{J}^T + \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R}^T\right] \mathbf{H}^T) \\
&\qquad \text{car } \forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{q \times q}, \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \mathrm{tr}(\mathbf{M}^T) \\
&= \mathrm{tr}(\left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R}^T\right] \mathbf{H}) + \mathrm{tr}(\left[-\mathbf{J} + \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R}^T\right] \mathbf{H}) \\
&\qquad \text{car } \mathbf{H}^T = \mathbf{H} \text{ et } \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}. \\
&= \mathrm{tr}(\left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R}^T\right] \mathbf{H}) - \mathrm{tr}(\left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R}^T\right] \mathbf{H}) \\
&\qquad \text{car } \forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{q \times q}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \mathbf{M} = \alpha \cdot \mathrm{tr}(\mathbf{M}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dès lors, comme la trace d'une matrice est invariante et représente la somme des valeurs propres du système, nous pouvons conclure que si le système admet une valeur propre à partie réelle strictement négative alors celui-ci admet également une valeur propre à partie réelle strictement positive. Par conséquent, les conditions d'optimalité forment un système généralement instable et ce, quelles que soient les conditions initiales et finales imposées.

Le lecteur intéressé pourra se référer au livre de Lewis et Syrmos [Lew95] où cette instabilité des problèmes d'optimisation est plus largement traitée, une instabilité qui peut notamment revêtir une grande importance lors de la simulation numérique de ces problèmes.

4.5 Représentation bond graph d'un problème d'optimisation : extension à une certaine classe de modèles non linéaires

Dans la section 4.4 (page 167), nous avons vu que de précédents travaux ont montré qu'il était possible de représenter la solution exacte d'un problème d'optimisation (ou tout au moins les conditions d'optimalité dont la résolution conduit à la solution exacte) à l'aide d'un modèle bond graph. Une procédure de construction de modèle bond graph augmenté a ainsi été établie et démontrée. Cependant, celle-ci n'a été développée que dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps.

Afin d'étendre progressivement le champ d'application de cette procédure à une classe plus générale de systèmes, l'objectif de cette section consiste à traiter la représentation bond graph d'un problème d'optimisation dans le cas de systèmes non linéaires. En l'occurrence, afin d'initier de tels travaux, nous nous attarderons ici sur une classe très particulière de systèmes où les non linéarités apparaissent exclusivement au niveau des phénomènes de stockage d'énergie. Après avoir appliqué de manière analytique le principe de Pontryagin sur la formulation port-hamiltonnienne d'un tel système, nous montrerons comment les conditions d'optimalité correspondantes peuvent être représentées dans le formalisme bond graph et comment la procédure de construction de modèle bond graph augmenté doit ainsi être modifiée. L'extension de la procédure sera ensuite récapitulée puis illustrée

par deux exemples portant respectivement sur des éléments de stockage non linéaires 1-ports et multiports.

Hypothèse : Dans toute cette section 4.5, les modèles d'état (4.4) (page 164) des systèmes considérés sont supposés explicites (même hypothèse qu'à la section précédente). Aussi, ces modèles peuvent être non linéaires avec des non linéarités ne portant que sur les lois caractéristiques des phénomènes de stockage d'énergie [18]. À ce titre, tout modèle bond

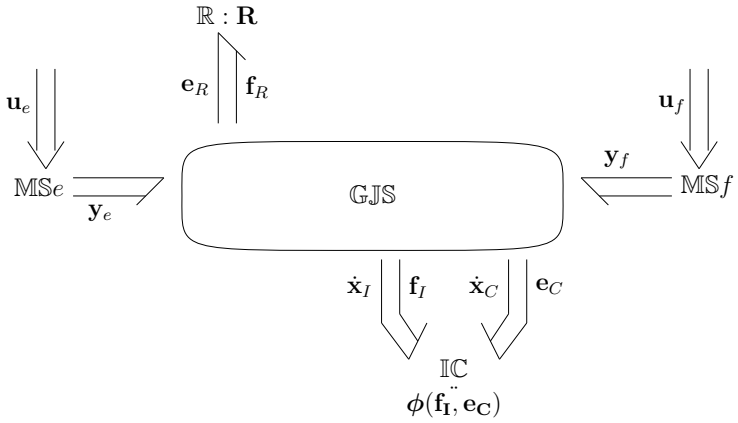


FIGURE 4.10 – Modèle bond graph générique (cas de stockages d'énergie non linéaires)

graph étudié dans cette section a la structure générique du modèle de la figure 4.10 et est supposé correspondre à la formulation port-hamiltonienne explicite [Gol01] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{u_R} \\ \mathbf{y} = \mathbf{G_u^T} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{y_R} = \mathbf{G_R^T} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \tag{4.20}$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état d'ordre minimal (*i.e.* constitué uniquement de variables d'état indépendantes) associé aux éléments de stockage d'énergie, $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I^T & \mathbf{x}_C^T \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{x}_I$ (resp. $\mathbf{x}_C$) le vecteur d'état associé aux éléments $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{C}$) ;
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{u_e}^T & \mathbf{u_f}^T \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{u_e}$ (resp. $\mathbf{u_f}$) le vecteur d'entrée en effort (resp. en flux) ;
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sortie constitué des variables de puissance conjuguées au vecteur d'entrée $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{y_e}^T & \mathbf{y_f}^T \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{y_e}$ (resp. $\mathbf{y_f}$) le vecteur de sortie en flux (resp. en effort) ;
- $\mathbf{u_R} \in \mathbb{R}^r$ (resp. $\mathbf{y_R} \in \mathbb{R}^r$) est le vecteur d'entrée (resp. de sortie) associé aux phénomènes dissipatifs ;
- H est l'Hamiltonien du système, à savoir une fonction du vecteur d'état $\mathbf{x}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et représentant l'énergie totale stockée dans le système ;

18. Si cette hypothèse est certes très restrictive, celle-ci reste néanmoins volontaire car elle nous permet d'initier de premiers travaux sur le traitement de systèmes non linéaires (la construction du modèle bond graph augmenté nécessite notamment de bien localiser l'origine des non linéarités). Il va sans dire que d'autres développements devront être entrepris afin de pouvoir traiter progressivement tout type de non linéarité.

- $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie ;
- $\mathbf{G_u} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et les entrées ;
- $\mathbf{G_R} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et ceux dissipatifs ;
- les matrices $\mathbf{J}$, $\mathbf{G_u}$ et $\mathbf{G_R}$ sont supposées indépendantes du vecteur d'état $\mathbf{x}$ puisqu'ici seules les lois caractéristiques des phénomènes de stockage d'énergie sont considérées comme pouvant être non linéaires.

Remarque : Cette formulation englobe tout naturellement le cas d'étude considéré à la section 4.4 (page 167) puisque, dans le cas linéaire [Mar08] : $\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{x}$.

4.5.1 D'une formulation port-hamiltonienne ...

Supposons maintenant que l'objectif de l'étude soit de déterminer l'entrée optimale permettant de minimiser la puissance dissipée par certains phénomènes. Le problème se réduit alors à un problème d'optimisation tel qu'il a été formulé par les équations (4.1)-(4.5) (page 164).

Avant de s'attarder sur une traduction en langage bond graph, déterminons dans un premier temps l'expression générique des conditions d'optimalité issues d'un tel problème, en appliquant le principe de Pontryagin de manière analytique.

Hypothèses

Si le cas général peut être démontré grâce au concept de dualisation partielle (annexe H.1 et [Mar08]), supposons ici, par souci de concision, que les entrées (resp. les sorties) associées aux phénomènes dissipatifs sont toutes des efforts (resp. des flux) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_R = \mathbf{e}_R \\ \mathbf{y}_R = \mathbf{f}_R \end{cases} \tag{4.21}$$

Comme les lois caractéristiques des phénomènes dissipatifs sont supposées être linéaires, nous pouvons également relier ces deux grandeurs entre elles par l'équation suivante :

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{R}\cdot\mathbf{f}_R \tag{4.22}$$

où $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ est la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_R} & \mathbf{R_{opt}} \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{R_R}$ (resp. $\mathbf{R_{opt}}$) est la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs non pris en compte (resp. pris en compte) dans l'indice de performance V.

Ainsi, en remplaçant les équations (4.21) et (4.22) dans le système (4.20), la représentation d'état s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{G_R^T}\right]\cdot\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G_u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{G_u^T}\cdot\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{y_R} = \mathbf{G_R^T}\cdot\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \tag{4.23}$$

Application du principe de Pontryagin

Appliquons maintenant le principe de PONTRYAGIN au problème d'optimisation (4.1)-(4.5) lorsque le modèle d'état du système étudié se met sous la forme (4.23). Pour cela, il convient de construire dans un premier temps la fonction de PONTRYAGIN $H_p = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ et d'en déduire ensuite les conditions d'optimalité associées à un tel problème.

Ici, compte tenu de l'indice de performance (4.3) et de la représentation d'état (4.23), nous obtenons :

$$H_p = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u^T} \cdot \mathbf{R_u} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e^T_{R_{opt}}} \cdot \mathbf{f_{R_{opt}}} + \boldsymbol{\lambda^T} \cdot \left[\left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G^T_R} \right] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} \right]$$

Aussi, puisque $\mathbf{e}_{R_{opt}}$ et $\mathbf{f}_{R_{opt}}$ vérifient tous deux les équations (4.21), (4.22) et (4.23), ceci est encore équivalent à :

$$\begin{aligned} H_p = & \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u^T} \cdot \mathbf{R_u} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{G^T_{R_{opt}}} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \cdot \mathbf{R^T_{opt}} \cdot \left[\mathbf{G^T_{R_{opt}}} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \\ & + \boldsymbol{\lambda^T} \cdot \left[\left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G^T_R} \right] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} \right] \end{aligned} \tag{4.24}$$

Les conditions d'optimalité (4.25) permettent alors d'obtenir la solution optimale pour le triplet $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})$ conformément aux conditions aux limites fixées $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}_f$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H_p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H_p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{4.25}$$

Celles-ci conduisent notamment dans notre cas à :

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G^T_R} \right] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}} = & -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{u^T} \cdot \mathbf{R_u} \cdot \mathbf{u} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{G^T_{R_{opt}}} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \cdot \mathbf{R^T_{opt}} \cdot \left[\mathbf{G^T_{R_{opt}}} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\boldsymbol{\lambda^T} \cdot \left[\left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G^T_R} \right] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} \right] \right) \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\mathbf{R_u} \cdot \mathbf{u} + \left[\boldsymbol{\lambda^T} \cdot \mathbf{G_u} \right]^T = \mathbf{0} \tag{4.28}$$

Comme dans le cas linéaire, l'équation (4.26) n'est autre que l'équation d'état du système étudié tandis que les équations (4.27) et (4.28) traduisent, elles, les conditions d'optimalité par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{\lambda}$ et $\mathbf{u}$.

4.5.2 ... vers une formulation bond graph

D'après GOLO *et al.* [Gol01], le système port-hamiltonien régi par les équations (4.20) peut être représenté de manière équivalente par le modèle bond graph de la figure 4.11.

Ce modèle reflète donc d'ores et déjà la première condition d'optimalité issue du principe de Pontryagin. Afin de traduire en langage bond graph les deux autres conditions, à savoir celles par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{\lambda}$ et $\mathbf{u}$, l'idée est de partir de ce modèle bond graph initial et de lui coupler un modèle bond graph optimisant. Le modèle bond graph augmenté ainsi obtenu permettra de représenter le système d'équations fournissant la solution optimale $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}^*)$: le modèle bond graph initial reflétant la condition (4.26) sur l'état, le modèle bond graph optimisant représentant la condition (4.27) sur le co-état et leur couplage traduisant la prise en compte de l'indice de performance dont notamment la condition (4.28) sur les entrées.

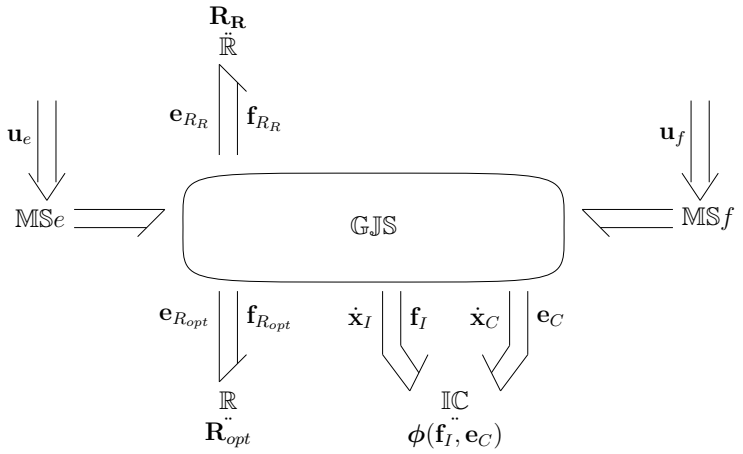


Figure 4.11 – Traduction bond graph de la condition d'optimalité sur le vecteur d'état : modèle bond graph initial (cas de stockages d'énergie non linéaires)

Traduction de la condition sur le vecteur de co-état

Par souci de clarté, procédons par étapes et notons les différents termes de l'équation (4.27) :

$$\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot \mathbf{u^T}\cdot \mathbf{R_u}\cdot \mathbf{u}\right)$$
$$\mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot \left[\mathbf{G^T_{R_{opt}}}\cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \cdot \mathbf{R^T_{opt}}\cdot \left[\mathbf{G^T_{R_{opt}}}\cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]\right)$$
$$\mathbf{C} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\lambda}^T\cdot \left[\left[\mathbf{J}-\mathbf{G_R}\cdot \mathbf{R}\cdot \mathbf{G^T_R}\right]\cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G_u}\cdot \mathbf{u}\right]\right)$$

Tout d'abord, comme $\mathbf{R_u}$ et $\mathbf{u}$ ne sont pas des fonctions de $\mathbf{x}$, nous pouvons conclure que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{4.29}$$

Ensuite, concernant $\mathbf{B}$, les développements analytiques conduisent à :

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= -\frac{1}{2}\cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{G^T_{R_{opt}}}\cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)\cdot \left[\mathbf{R_{opt}}+\mathbf{R^T_{opt}}\right]\cdot \mathbf{G^T_{R_{opt}}}\cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot \mathbf{H^T}(\mathbf{x})\cdot \mathbf{G_{R_{opt}}}\cdot \left[\mathbf{R_{opt}}+\mathbf{R^T_{opt}}\right]\cdot \mathbf{G^T_{R_{opt}}}\cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\end{aligned} \tag{4.30}$$

où $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ est la matrice hessienne de l'Hamiltonien H du système (dans le cas de stockages d'énergie non linéaires, cette matrice hessienne peut dépendre de $\mathbf{x}$).
Enfin, comme $\mathbf{G_u}$, $\boldsymbol{\lambda}$ et $\mathbf{u}$ ne sont pas des fonctions de $\mathbf{x}$, l'expression de $\mathbf{C}$ peut se simplifier conformément aux développements ci-dessous à :

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R^T} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right) \\ &= -\mathbf{H^T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J^T} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{H^T}(\mathbf{x}) \cdot \left[\mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R^T}\right]^T \cdot \boldsymbol{\lambda}\end{aligned} \tag{4.31}$$

Finalement, en récapitulant les expressions (4.29), (4.30) et (4.31) des termes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ et en utilisant les propriétés respectivement de symétrie [19] de la matrice $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ et d'anti-symétrie de la matrice $\mathbf{J}$, nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{R_{opt}^T}\right] \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}^T} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \left[\mathbf{J} + \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R^T} \cdot \mathbf{G_R^T}\right] \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{4.32}$$

Maintenant que l'expression de $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ a pu être mise en forme, il convient de traduire celle-ci en modèle bond graph optimisant. Afin de faciliter la construction de ce modèle, scindons l'expression de $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ en deux parties telles que :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot [\boldsymbol{\Lambda}_\lambda + \boldsymbol{\Lambda}_{opt}] \tag{4.33}$$

où :

$$\boldsymbol{\Lambda}_\lambda = \left[\mathbf{J} + \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R^T} \cdot \mathbf{G_R^T}\right] \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{opt} = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{R_{opt}^T}\right] \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}^T} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \tag{4.35}$$

Avant d'analyser l'expression (4.34) plus en détails, revenons à l'équation d'état (4.23) du système étudié :

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R^T}\right] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u}$$

En rappelant que, par définition, le vecteur $\mathbf{x}^+$ constitué des variables de co-énergie du modèle bond graph initial vérifie la relation $\mathbf{x}^+ = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ et donc que $\dot{\mathbf{x}}^+ = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}$, l'équation d'état peut alors être reformulée en termes de variables de co-énergie sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}^+ = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R^T}\right] \cdot \mathbf{x}^+ + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} \tag{4.36}$$

En comparant alors cette équation (4.36) à l'expression (4.34) :

$$\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}}^+ : \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_R^T}\right] \cdot \mathbf{x}^+ + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G_u} \cdot \mathbf{u} \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \qquad\qquad \searrow \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} : \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \left[\mathbf{J} - \mathbf{G_R} \cdot [-\mathbf{R}]^T \cdot \mathbf{G_R^T}\right] \cdot \boldsymbol{\lambda}\end{array}$$

Nous constatons alors que le terme $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\lambda$ peut être vu comme la représentation port-hamiltonienne d'un modèle bond graph optimisant où :

19. Rappelons que cette propriété est due à la réversibilité des phénomènes de stockage d'énergie.

- le vecteur de co-état $\boldsymbol{\lambda}$ joue le rôle de variable de co-énergie, $\boldsymbol{\lambda^T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_I}^T & \boldsymbol{\lambda_C}^T \end{pmatrix}$ avec $\boldsymbol{\lambda_I}$ (resp. $\boldsymbol{\lambda_C}$) le vecteur de variables de co-énergie associé aux éléments $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{C}$) ;
- la structure de jonction est identique à celle du modèle bond graph initial ;
- la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs est $-\mathbf{R^T}$;
- les sources associées sont des sources d'effort et de flux nuls (**étape 4**).

Par analogie avec la relation $\dot{\mathbf{x}}^+ = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}$ et en notant $\mathbf{e}_{\lambda_I}$ (resp. $\mathbf{f}_{\lambda_C}$) le vecteur d'effort (resp. de flux) associé à l'élément bond graph ayant pour flux $\boldsymbol{\lambda}_I$ (resp. pour effort $\boldsymbol{\lambda}_C$), calculer la partie $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\lambda$ de $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ revient alors à caractériser les éléments de stockage d'énergie du modèle bond graph optimisant par la relation : $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\lambda_I}^T & \mathbf{f}_{\lambda_C}^T \end{pmatrix}^T$. Si du fait de la non linéarité de $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ par rapport à $\mathbf{x}$, cette loi caractéristique ne peut être mise sous une forme intégrale, l'article [Ses96] montre en effet que, même s'il est plutôt inhabituel de travailler avec les variables de co-énergie en représentation bond graph, il est possible de caractériser les éléments multiports $\mathbb{IC}$ à l'aide de variables de co-énergie prises comme variables d'état [20].

Ainsi, construire le modèle bond graph optimisant revient à dupliquer le modèle bond graph initial (**étape 1**) puis à le modifier de sorte que les lois caractéristiques associées aux phénomènes de stockage soient remplacées par $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\lambda_I}^T & \mathbf{f}_{\lambda_C}^T \end{pmatrix}^T$ et que celles associées aux phénomènes dissipatifs soient tranposées et de signes opposés (**étape 2**).

Cependant, la traduction de la condition sur le vecteur de co-état n'est pas terminée pour autant : il convient de s'attarder maintenant sur la traduction du terme $\boldsymbol{\Lambda}_{opt}$. Comme nous l'avons vu lors des calculs précédents, ce terme provient de la dérivation de l'indice de performance par rapport à $\mathbf{x}$. De plus, comme $\mathbf{f_{R_{opt}}}$ vérifie également les équations (4.21) et (4.23), son expression peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Lambda}_{opt} = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{G_{R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{R_{opt}^T}\right] \cdot \mathbf{f_{R_{opt}}}$$

Ainsi, le terme $\boldsymbol{\Lambda}_{opt}$ contribue au calcul d'une partie d'un effort $\mathbf{e_{R_{opt},\lambda}}$ du modèle bond graph optimisant à travers la structure de jonction caractérisée par la matrice $\mathbf{G_{R_{opt}}}$. Cette partie de $\mathbf{e_{R_{opt},\lambda}}$ étant calculée à partir du flux $\mathbf{f_{R_{opt}}}$ appartenant au modèle bond graph initial, le terme $\boldsymbol{\Lambda}_{opt}$ ne peut alors être traduit qu'en couplant les deux modèles bond graph au niveau de l'élément $\mathbb{R}$ multiport associé à l'énergie dissipée minimisée comme le montre la figure 4.12 (**étape 3-A**) [Mar08].

20. Remarquons que le vecteur d'état $\mathbf{x}$ du modèle bond graph initial modulant la relation $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\lambda_I}^T & \mathbf{f}_{\lambda_C}^T \end{pmatrix}^T$, le modèle bond graph optimisant sera couplé au modèle bond graph initial au niveau des éléments de stockage non linéaires et fera donc intervenir la notion d'éléments de stockage d'énergie multiports. De plus, en notant, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_C \end{pmatrix} = \boldsymbol{\phi}\left(\mathbf{f}_I, \mathbf{e}_C\right)$ la loi caractéristique des éléments de stockage d'énergie du modèle bond graph initial, nous avons alors $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_I \\ \mathbf{e}_C \end{pmatrix} = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \boldsymbol{\phi}^{-1}\left(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_C\right)$ et donc $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_I \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_C \end{pmatrix} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\boldsymbol{\lambda}_I} \\ \mathbf{f}_{\boldsymbol{\lambda}_C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_C)}{\partial \mathbf{x}_I} & \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_C)}{\partial \mathbf{x}_C} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\boldsymbol{\lambda}_I} \\ \mathbf{f}_{\boldsymbol{\lambda}_C} \end{pmatrix}$.

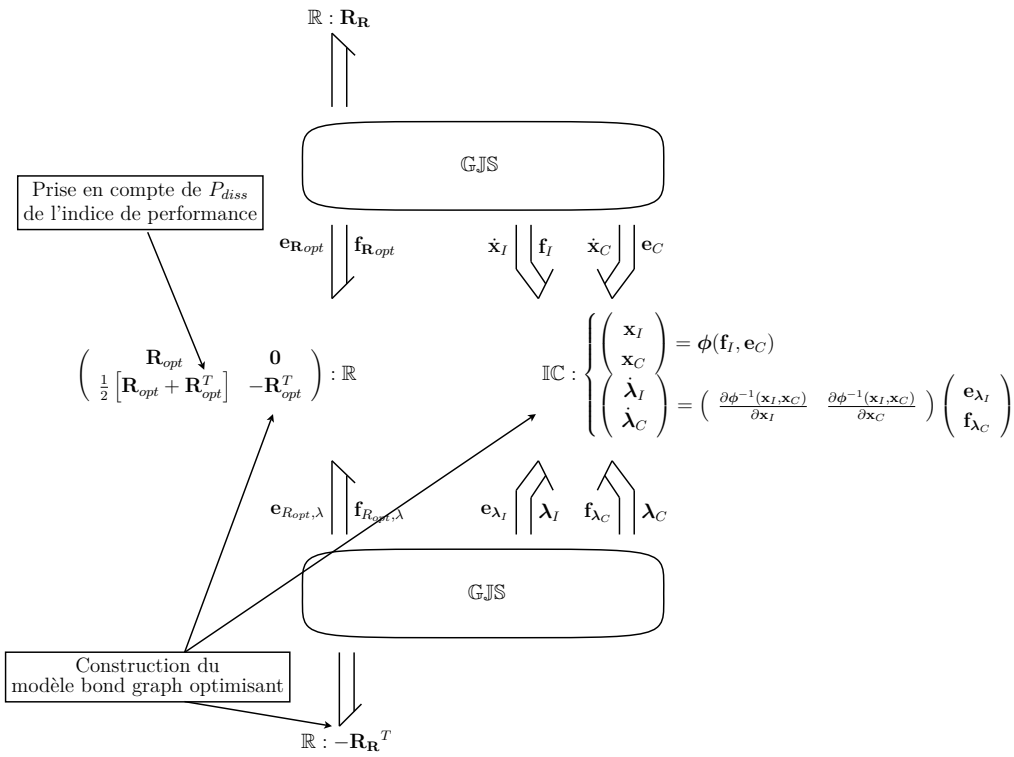


FIGURE 4.12 – Traduction bond graph de la condition d'optimalité sur le vecteur de co-état (cas de stockages d'énergie non linéaires)

Traduction de la condition sur les entrées

Enfin, il reste à traduire la condition d'optimalité sur les entrées. Pour cela, réécrivons cette condition (4.28) sous la forme suivante :

$$\mathbf{R_u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{G_u^T} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

Cette équation peut être vue comme un bilan (de flux (resp. d'efforts) si l'on considère la composante $\mathbf{u_e}$ (resp. $\mathbf{u_f}$) de $\mathbf{u}$) entre le vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ issu du modèle bond graph initial à travers le phénomène dissipatif caractérisé par $\mathbf{R_u}$ et le vecteur de co-état $\boldsymbol{\lambda}$ appartenant au modèle bond graph optimisant à travers la structure de jonction caractérisée par la matrice $\mathbf{G_u}$. Traduire en langage bond graph la condition d'optimalité sur les entrées consiste alors, selon [Mar08], à coupler les deux modèles bond graph de sorte que (Fig. 4.13) :

- de nouveaux éléments $\mathbb{R}$ multiports soient introduits entre la structure de jonction et chaque source ;
- la matrice caractéristique de ces nouveaux éléments $\mathbb{R}$ multiports soit $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{u_e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{u_e} & -\mathbf{R}_{u_e} \end{pmatrix}$ pour les entrées en effort et $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{u_f} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{u_f} & -\mathbf{R}_{u_f} \end{pmatrix}$ pour celles en flux (**étape 3-B**) ;
- les sources $\mathbb{MS}e$ et $\mathbb{MS}f$ soient remplacées par des doubles détecteurs $\mathbb{D}e\mathbb{D}f$ dans le modèle bond graph initial et par des doubles sources $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ d'effort et de flux nuls dans le modèle bond graph optimisant (**étape 4**).

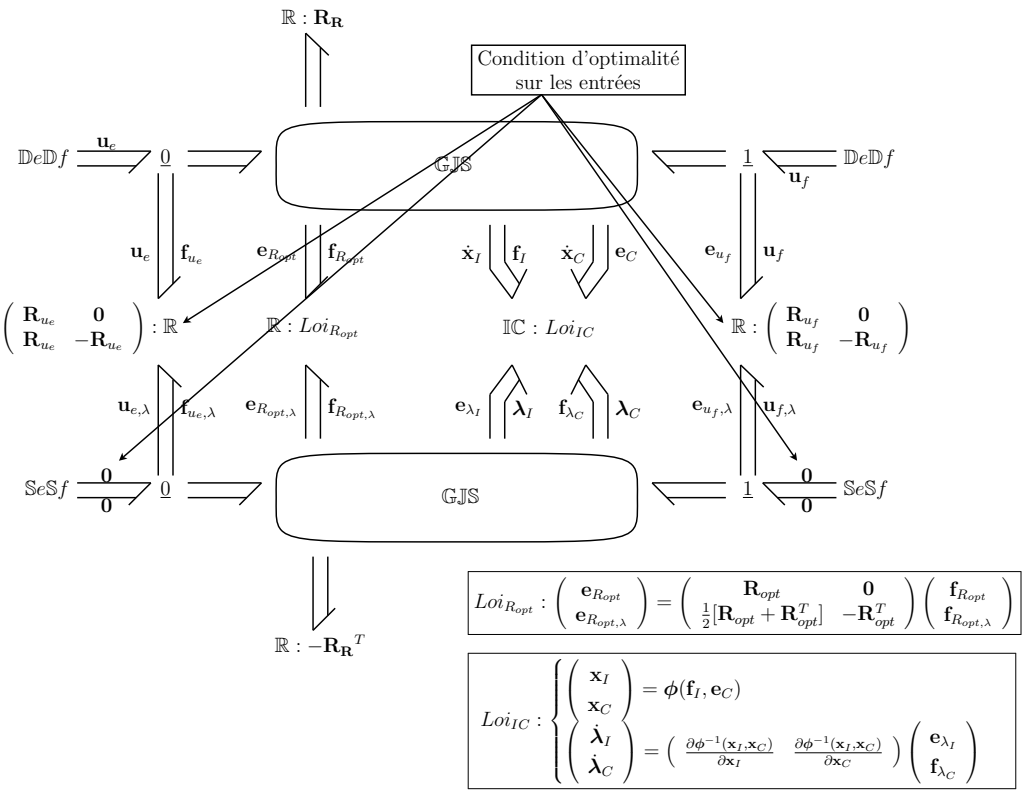


FIGURE 4.13 – Traduction des conditions d'optimalité sur les vecteurs d'état, de co-état et d'entrée : modèle bond graph augmenté (cas de stockages d'énergie non linéaires)

Finalement, l'hypothèse de non linéarité portant uniquement sur les phénomènes de stockage d'énergie, la manipulation des phénomènes dissipatifs ainsi que la traduction bond graph de la condition d'optimalité sur les entrées restent ici identiques au cas linéaire lors de la construction du modèle bond graph augmenté. Seul diffère le traitement des éléments de stockage d'énergie.

4.5.3 Extension de la procédure bond graph d'optimisation

À l'image du cas linéaire, la résolution du problème d'optimisation (4.1)-(4.5) (page 164) par le principe de PONTRYAGIN peut également être représentée, dans le cas de système à stockages d'énergie non linéaires, par l'intermédiaire d'un modèle bond graph augmenté, couplage entre le modèle bond graph initial du système étudié et un modèle bond graph optimisant. Conformément à ce qui a été démontré à la section précédente, l'extension de la procédure bond graph d'optimisation (procédure 4, page 173) s'énonce de la manière suivante :

Procédure 5

Construction de modèles bond graph optimisants dans le cas de stockages d'énergie non linéaires

Pour tout problème d'optimisation formulé sur un système à stockages d'énergie non linéaires et consistant à déterminer le vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ *de sorte que l'indice de performance* (4.3) *soit minimisé, que les équations d'état* (4.20) *soient prises comme contraintes et que des conditions initiales et finales sur le temps et l'état soient fixées, les conditions d'optimalité issues du principe de* PONTRYAGIN *peuvent être obtenues de manière graphique par l'exploitation causale d'un modèle bond graph augmenté, construit en suivant les étapes suivantes :*

Étape 1 : Duplication (Fig. 4.14). *Dupliquer le modèle bond graph initial, c'est-à-dire le modèle bond graph correspondant au système étudié. La partie ainsi dupliquée sera désignée par la suite par modèle bond graph optimisant (sur la figure 4.14, l'élément* $\mathbb{R} : \mathbf{R_{opt}}$ *(resp.* $\mathbb{R} : \mathbf{R_R}$*) désigne les phénomènes dissipatifs pris en compte (resp. non pris en compte) dans l'indice de performance* V*).*

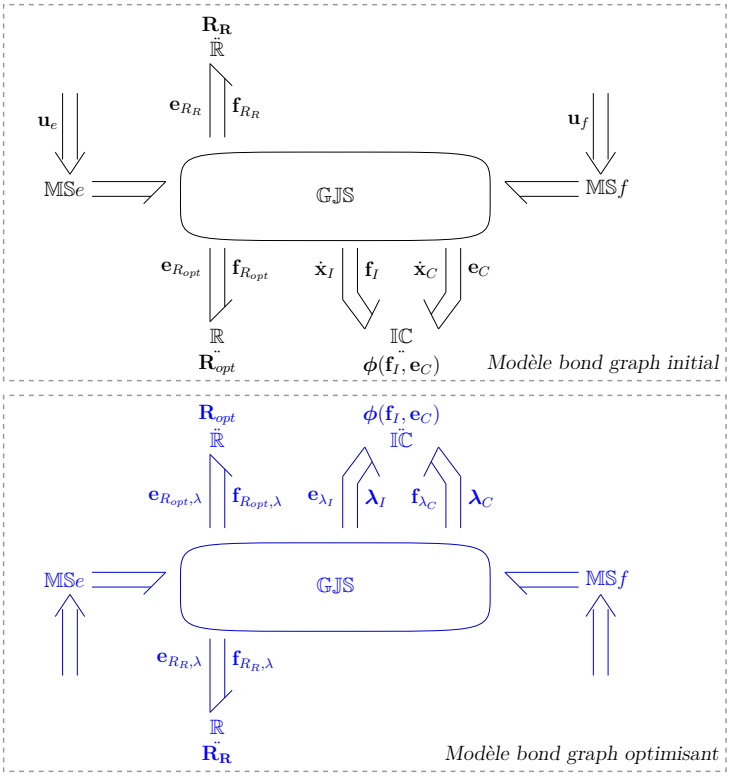


FIGURE *4.14 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas de stockages d'énergie non linéaires : étape 1*

Étape 2 : Caractéristiques du modèle bond graph optimisant (Fig. 4.15). *Dans le modèle bond graph optimisant, remplacer les matrices caractéristiques* $\mathbf{R_R}$ *et* $\mathbf{R_{opt}}$ *des éléments* $\mathbb{R}$ *respectivement par* $-\mathbf{R_R}^T$ *et* $-\mathbf{R_{opt}}^T$ *puis modifier les lois caractéristiques associées aux phénomènes de stockage d'énergie de sorte que :*

– *pour les éléments* $\mathbb{I}$ *:*

$$\mathbf{f}_I = \phi_I^{-1}(\mathbf{x}_I) \quad \textit{devienne} \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_I = \frac{\partial(\phi_I^{-1}(\mathbf{x}_I))}{\partial \mathbf{x}_I} \cdot \mathbf{e}_{\lambda_I}$$

– *pour les éléments* $\mathbb{C}$ *:*

$$\mathbf{e}_C = \phi_C^{-1}(\mathbf{x}_C) \quad \textit{devienne} \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_C = \frac{\partial(\phi_C^{-1}(\mathbf{x}_C))}{\partial \mathbf{x}_C} \cdot \mathbf{f}_{\lambda_C}$$

– *pour les éléments* $\mathbb{IC}$ *:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_C \end{pmatrix} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{f}_I, \mathbf{e}_C) \quad \textit{devienne} \quad \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_I \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x}_I,\mathbf{x}_C)}{\partial \mathbf{x}_I} & \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x}_I,\mathbf{x}_C)}{\partial \mathbf{x}_C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\boldsymbol{\lambda}_I} \\ \mathbf{f}_{\boldsymbol{\lambda}_C} \end{pmatrix}$$

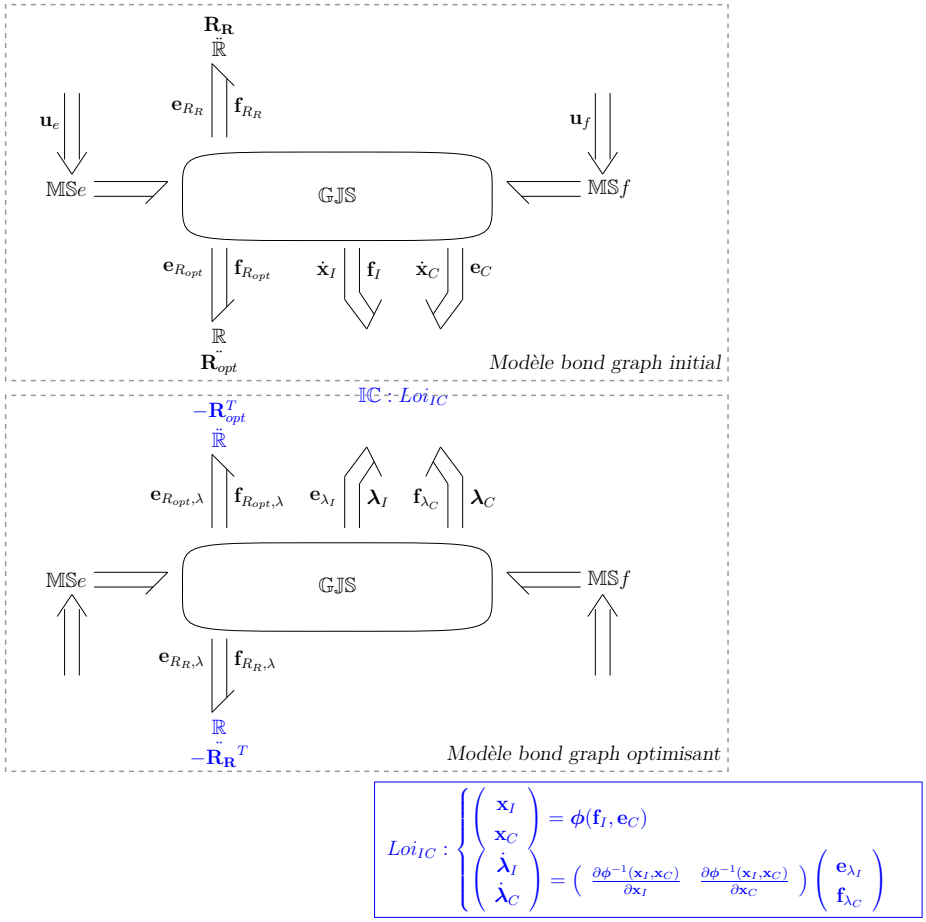
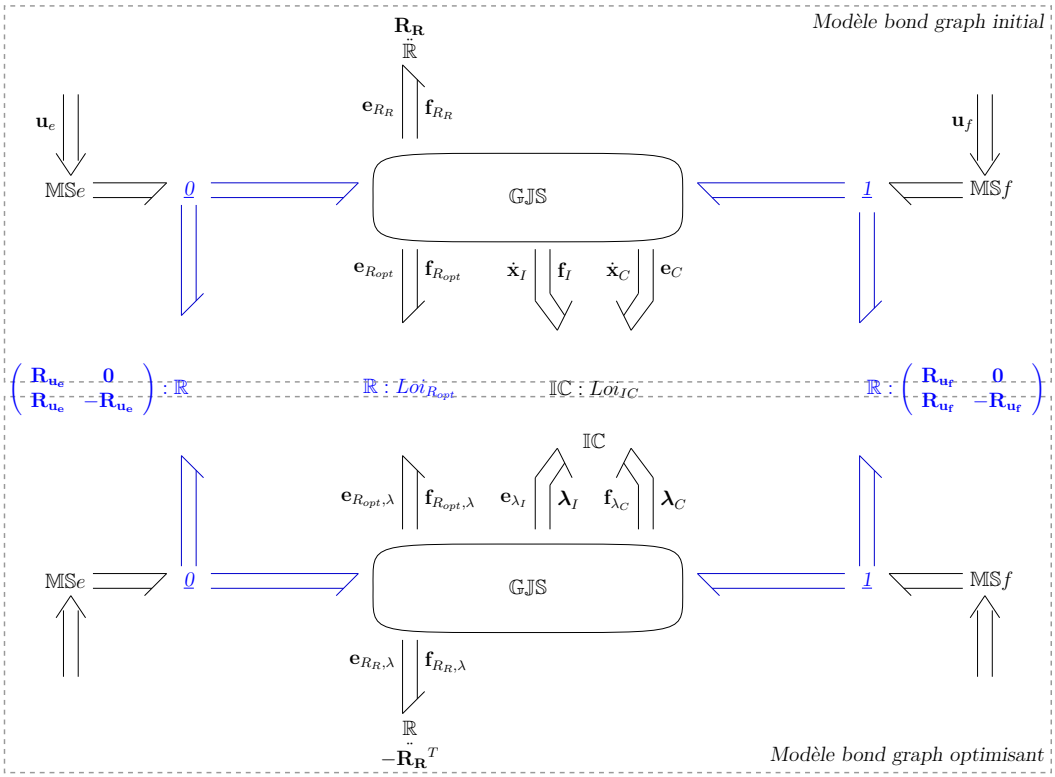


FIGURE *4.15 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas de stockages d'énergie non linéaires : étape 2*

Étape 3 : Prise en compte de l'indice de performance (Fig. 4.16).

- *A - Pour les phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance, coupler les éléments $\mathbb{R}$ multiports correspondants dans les modèles bond graph initial et optimisant. Ensuite, ajouter sous la diagonale de la matrice caractéristique de l'élément, la sous-matrice* $\frac{1}{2}[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{R_{opt}}^T]$.
- *B - Pour les entrées, insérer une jonction tableau* $\underline{\mathbf{0}}$ *(resp.* $\underline{\mathbf{1}}$*) entre la structure de jonction et chaque source d'effort (resp. de flux) puis leur connecter un élément $\mathbb{R}$ multiport par paire de sources correspondantes dans les modèles bond graph initial et optimisant. Pour les sources d'effort (resp. de flux), leur associer la matrice caractéristique* $\begin{pmatrix} \mathbf{R_{u_e}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R_{u_e}} & -\mathbf{R_{u_e}} \end{pmatrix}$ *(resp.* $\begin{pmatrix} \mathbf{R_{u_f}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R_{u_f}} & -\mathbf{R_{u_f}} \end{pmatrix}$ *).*

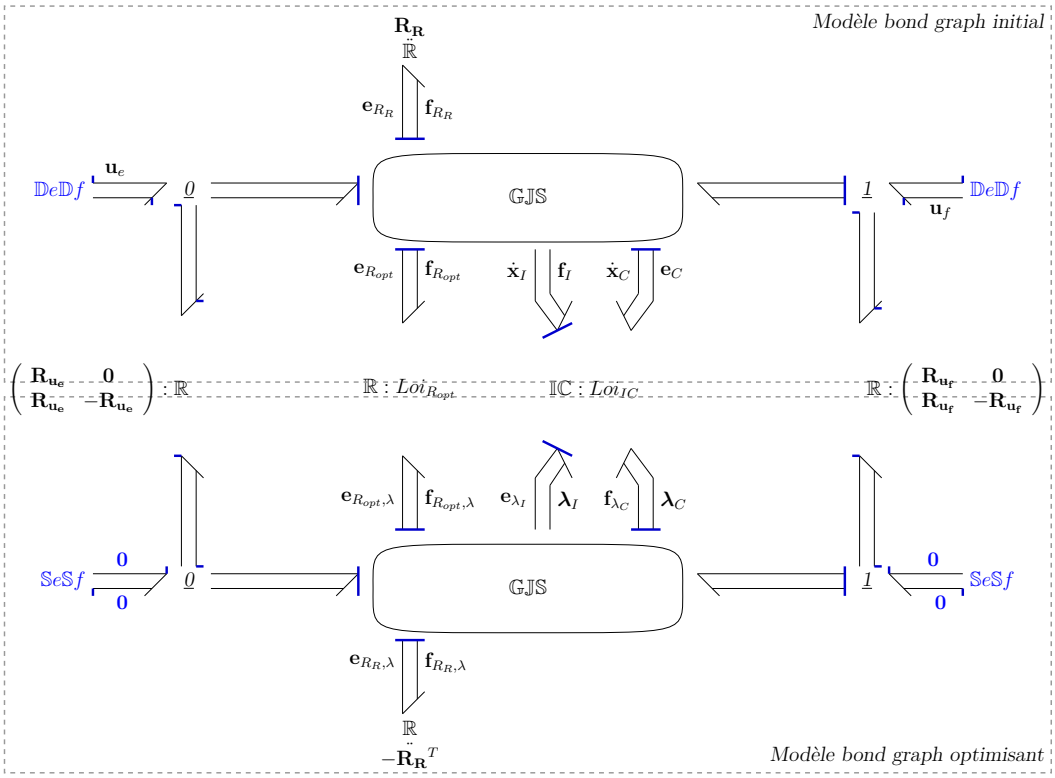


$$Loi_{R_{opt}} : \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{R_{opt}} \\ \mathbf{e}_{R_{opt},\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{opt} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T] & -\mathbf{R}_{opt}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{R_{opt}} \\ \mathbf{f}_{R_{opt},\lambda} \end{pmatrix}$$

$$Loi_{IC} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_C \end{pmatrix} = \phi(\mathbf{f}_I, \mathbf{e}_C) \\ \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_I \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^{-1}(\mathbf{x}_I,\mathbf{x}_C)}{\partial \mathbf{x}_I} & \frac{\partial \phi^{-1}(\mathbf{x}_I,\mathbf{x}_C)}{\partial \mathbf{x}_C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\lambda_I} \\ \mathbf{f}_{\lambda_C} \end{pmatrix} \end{cases}$$

FIGURE *4.16 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas de stockages d'énergie non linéaires : étape 3*

Étape 4 : Affectation de la bicausalité (Fig. 4.17). *Remplacer les éléments* $\mathbb{MS}e$ *et* $\mathbb{MS}f$ *correspondants aux entrées par des doubles détecteurs* $\mathbb{D}e\mathbb{D}f$ *dans le modèle bond graph initial, et, par des doubles sources* $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ *imposant des vecteurs d'effort et de flux nuls dans le modèle bond graph optimisant. Enfin, propager la bicausalité des doubles sources vers les doubles détecteurs à travers les éléments* $\mathbb{R}$ *multiports introduits pour prendre en compte les pondérations des entrées à déterminer par optimisation.*



$$Loi_{R_{opt}} : \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{R_{opt}} \\ \mathbf{e}_{R_{opt},\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{opt} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T] & -\mathbf{R}_{opt}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{R_{opt}} \\ \mathbf{f}_{R_{opt},\lambda} \end{pmatrix}$$

$$Loi_{IC} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_C \end{pmatrix} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{f}_I, \mathbf{e}_C) \\ \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_I \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^{-1}(\mathbf{x}_I,\mathbf{x}_C)}{\partial \mathbf{x}_I} & \frac{\partial \phi^{-1}(\mathbf{x}_I,\mathbf{x}_C)}{\partial \mathbf{x}_C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\lambda_I} \\ \mathbf{f}_{\lambda_C} \end{pmatrix} \end{cases}$$

FIGURE *4.17 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas de stockages d'énergie non linéaires : étape 4*

Remarques :

– Dans son ensemble, nous avons vu que l'extension de la procédure différait seulement dans la manipulation des lois caractéristiques associées aux phénomènes de stockages d'énergie. Nous retrouvons toutefois le cas de stockages d'énergie linéaire traité à la procédure 4 (page 173). En effet, si nous prenons l'exemple d'éléments $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{C}$) linéaires et 1-ports, nous avons $x_I = \phi(f_I) = I \cdot f_I$ (resp. $x_C = \phi(f_C) = C \cdot e_C$). Par conséquent, $\dot{\lambda}_I = \frac{\partial \phi^{-1}(x_I)}{\partial x_I} \cdot e_{\lambda_I} = \frac{e_{\lambda_I}}{I}$ (resp. $\dot{\lambda}_C = \frac{\partial \phi^{-1}(x_C)}{\partial x_C} \cdot f_{\lambda_C} = \frac{f_{\lambda_C}}{C}$) et il suffit

donc de simplement dupliquer leurs lois caractéristiques dans le modèle bond graph optimisant.

– Encore une fois, l'extension de la procédure a été présentée dans le cas où tous les éléments $\mathbb{R}$ sont en causalité résistance. De la même façon que dans le cas linéaire, il suffira pour traiter le cas général (*i.e.* présence d'éléments $\mathbb{R}$ en causalité résistance et en causalité conductance) de remplacer la sous-matrice $\frac{1}{2}\left[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{R_{opt}}^T\right]$ par la sous-matrice $\frac{1}{2}[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{T}]$ où $\mathbf{R_{opt}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr} & \mathbf{R_{opt}}_{rc} \\ \mathbf{R_{opt}}_{cr} & \mathbf{R_{opt}}_{cc} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr}^T & -\mathbf{R_{opt}}_{cr}^T \\ -\mathbf{R_{opt}}_{rc}^T & \mathbf{R_{opt}}_{cc}^T \end{pmatrix}$ (les indices $_r$ et $_c$ correspondent respectivement à une causalité résistance et conductance lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale).

4.5.4 Exemple de stockage non linéaire 1-port

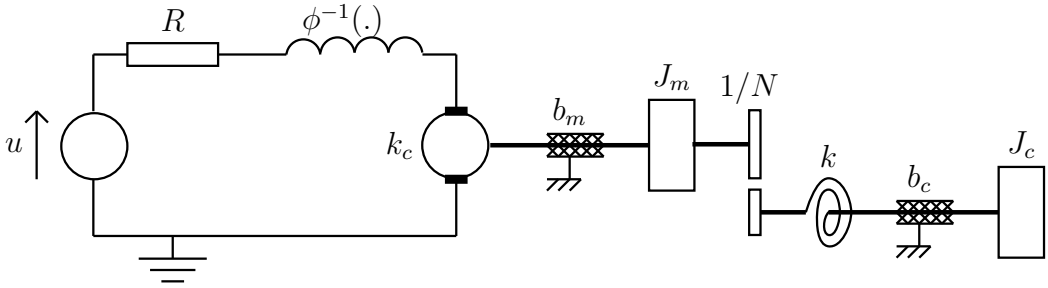


FIGURE 4.18 – Schéma technologique d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu

Prenons comme exemple d'application, une charge en rotation d'inertie J_c et actionnée par un moteur à courant continu (Fig. 4.18). Modélisons l'induit du moteur comme étant la mise en série d'une source de tension u, d'une résistance R et d'une bobine ayant pour loi caractéristique non linéaire la fonction ϕ^{-1}. Supposons que le couplage électromécanique est caractérisé par la constante de couple k_c et que la transmission de l'arbre moteur d'inertie J_m à l'arbre de charge de raideur k s'effectue par l'intermédiaire d'un réducteur de rapport fixe $\frac{1}{N}$ accouplé à l'arbre moteur. Enfin, prenons en compte les frottements visqueux b_m et b_c présents respectivement sur l'arbre moteur et sur l'arbre de sortie.

Conformément aux règles de modélisation bond graph, ce système peut alors être représenté par le modèle bond graph causal de la figure 4.19.

Formulation du problème d'optimisation

Supposons maintenant que le but de l'étude est de déterminer l'entrée u permettant de minimiser la puissance dissipée par les frottements visqueux situés sur l'arbre de sortie. L'étude correspond alors à un problème d'optimisation avec pour :

- Objectif : déterminer u tel que :

$$\min_{p_1,p_2,p_3,q,u} V \tag{4.37}$$

où p_1 est le flux magnétique dans la bobine, p_2 et p_3 sont les moments cinétiques associés respectivement à l'arbre moteur et à l'arbre de sortie et q est l'angle de torsion de l'arbre de sortie.

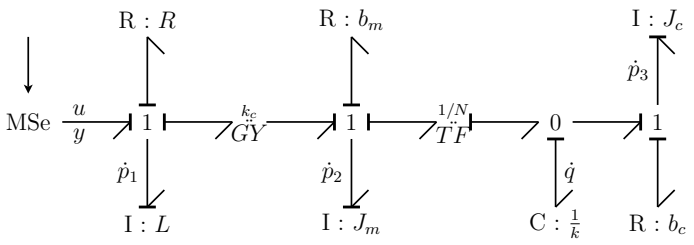


FIGURE 4.19 – Modèle bond graph initial causal issu de l'exemple d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu (cas d'un élément de stockage d'énergie non linéaire)

- Indice de performance :

$$V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{R_u} + P_{diss,b_c} \right] dt \tag{4.38}$$

où P_{diss,b_c} est la puissance dissipée par les frottements visqueux de cœfficient b_c sur l'arbre de sortie et R_u est le cœfficient de pondération de l'entrée u.

- Contraintes :
  - les équations d'état du système [21] ;
  - des conditions fixées sur les temps et les états initiaux et finaux.

Construction du modèle bond graph augmenté

En appliquant au modèle bond graph initial (Fig. 4.19) la procédure 5 décrite à la section précédente (page 194), nous obtenons alors le modèle bond graph augmenté (Fig. 4.20) correspondant au problème d'optimisation donné (4.37)-(4.38).

L'exploitation de ce modèle bond graph augmenté conduit au système d'équations suivant, système qui aurait été obtenu en appliquant le principe de PONTRYAGIN de manière analytique :

$$\begin{cases} \dot{p_1} = -R_u \cdot \lambda_1 - R \cdot \phi^{-1}(p_1) - \frac{k_c}{J_m} \cdot p_2 \\ \dot{p_2} = k_c \cdot \phi^{-1}(p_1) - \frac{b_m}{J_m} \cdot p_2 - \frac{k}{N} \cdot q \\ \dot{p_3} = -\frac{b_c}{J_c} \cdot p_3 + k \cdot q \\ \dot{q} = \frac{1}{N \cdot J_m} \cdot p_2 - \frac{1}{J_c} \cdot p_3 \\ \dot{\lambda}_1 = R \cdot \frac{\partial \phi^{-1}(p_1)}{\partial p_1} \cdot \lambda_1 - k_c \cdot \frac{\partial \phi^{-1}(p_1)}{\partial p_1} \cdot \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{k_c}{J_m} \cdot \lambda_1 + \frac{b_m}{J_m} \cdot \lambda_2 - \frac{1}{N \cdot J_m} \cdot \lambda_4 \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{b_c}{J_c^2} \cdot p_3 + \frac{b_c}{J_c} \cdot \lambda_3 + \frac{1}{J_c} \cdot \lambda_4 \\ \dot{\lambda}_4 = \frac{k}{N} \cdot \lambda_2 - k \cdot \lambda_3 \\ u = -R_u \cdot \lambda_1 \end{cases}$$

21. Tout comme la procédure dans le cas linéaire, remarquons encore une fois qu'il n'est pas nécessaire de déterminer au préalable les équations d'état du système pour appliquer la procédure de construction du modèle bond graph augmenté.

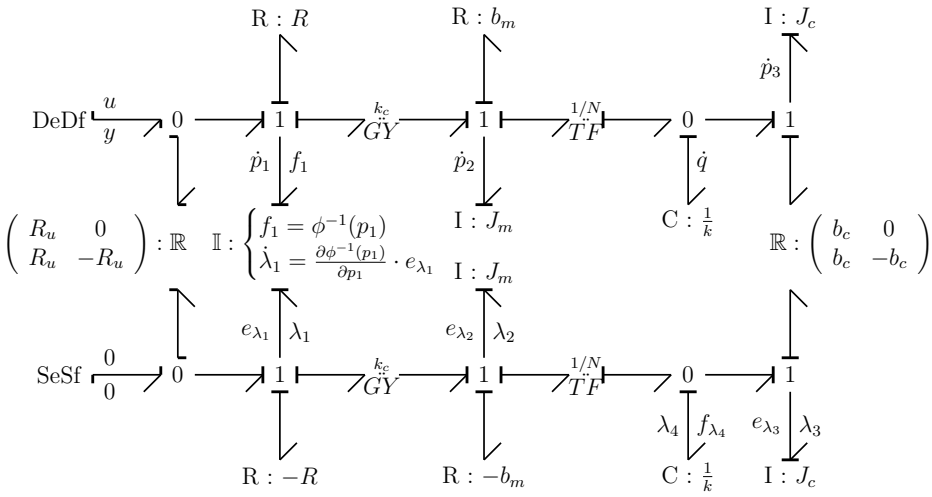


FIGURE 4.20 – Modèle bond graph augmenté issu de l'exemple d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu (cas d'un élément de stockage d'énergie non linéaire)

Remarque : Comme dans le cas linéaire, les conditions d'optimalité issues du modèle bond graph augmenté correspondent, plus exactement, à celles issues du principe de PONTRYAGIN où le vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ a été remplacé par son expression en fonction des vecteurs d'état et de co-état $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ (ici, dans l'exemple, u a été remplacé par $-R_u \cdot \lambda_1$ dans la condition d'optimalité par rapport à p_1).

4.5.5 Exemple de stockage non linéaire multiport

L'exemple suivant illustre l'application de la procédure précédente à des éléments multiports non linéaires. Pour cela, considérons l'exemple d'un problème d'optimisation formulé sur un haut-parleur électrodynamique (Fig. 4.21).

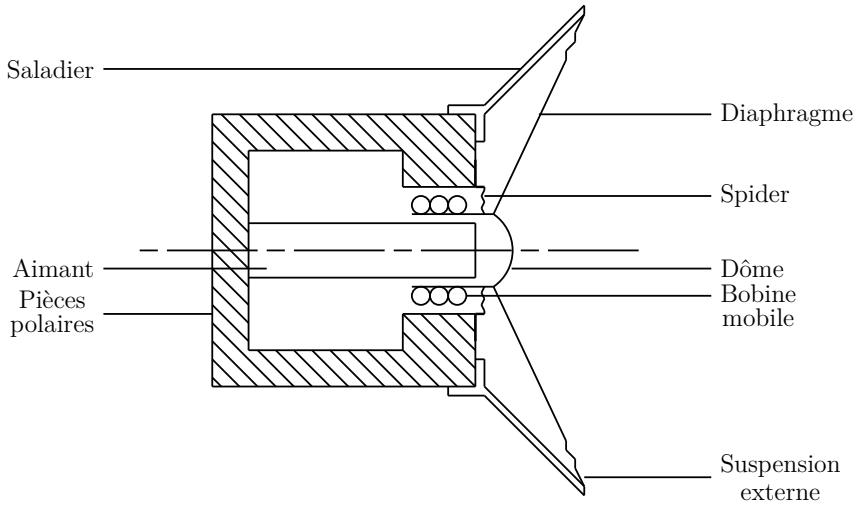


FIGURE 4.21 – Schéma technologique d'un haut-parleur électrodynamique

Un tel haut-parleur est composé [Ros86] :
- d'un diaphragme, membrane conique à symétrie circulaire, fermé à son sommet par le dôme et suspendu élastiquement à sa base par une suspension externe et à son sommet par une suspension interne appelée spider ;
- d'une bobine mobile dont le support cylindrique est solidaire du diaphragme à son sommet ;
- d'un circuit magnétique constituant la partie moteur électrodynamique ;
- d'un saladier qui est une sorte de châssis ajouré.

Aussi, un tel système peut être modélisé par l'intermédiaire de symboles électriques en distinguant trois parties différentes (Fig. 4.22) [Ros86] :
- une partie électrique où l'amplificateur audio est supposé se comporter comme une source de tension u d'impédance interne R_a, la bobine mobile est modélisée par une inductance propre de loi caractéristique non linéaire L_e et les pertes dans le moteur (pertes dues aux effets JOULE dans la bobine mobile et aux effets FOUCAULT dans le circuit magnétique) sont représentées par une résistance équivalente R_e ;
- une partie mécanique où l'inductance m représente la masse de la partie mobile du système (*i.e.* diaphragme, bobine, suspensions), où un condensateur C_m correspond à la compliance mécanique due aux suspensions externes et internes, et où une résistance R_m modélise les pertes d'énergie dues principalement aux phénomènes de frottement au niveau des suspensions ;
- une partie acoustique où les impédances $\underline{Z_f}$ et $\underline{Z_b}$ représentent respectivement le rayonnement acoustique avant et arrière.

Ces parties sont couplées par deux éléments à deux ports. Le premier modélise le couplage entre les domaines électriques et mécaniques à travers les lois de LENZ et de LAPLACE. Le cœfficient correspondant, appelé cœfficient électrodynamique, est égal à Bl où B est l'intensité du champ magnétique et l est la longueur du conducteur constituant la bobine. Quant au second élément à deux ports, celui-ci correspond au couplage des domaines mécaniques et acoustiques. Son cœfficient S correspond à l'aire de la base du

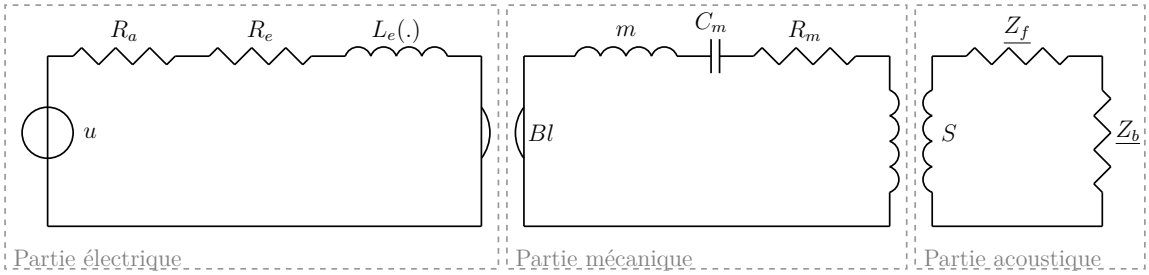


FIGURE 4.22 – Schéma symbolique d'un haut-parleur électrodynamique

diaphragme.

Par souci de concision, en négligeant alors la partie acoustique du modèle et l'influence de la compliance C_m, ce système peut être représenté par le modèle bond graph de la figure 4.23.

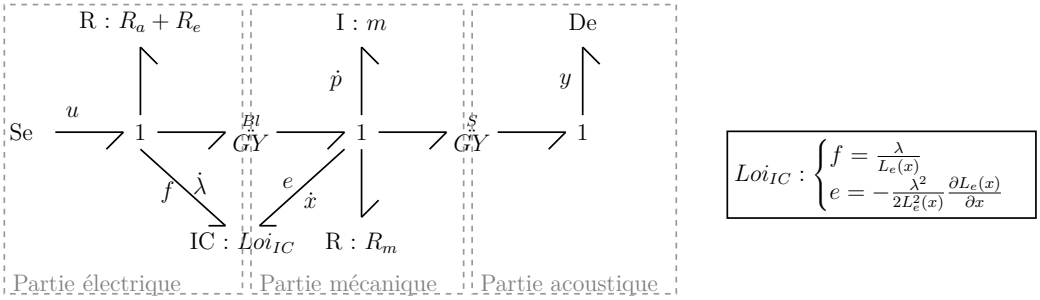


FIGURE 4.23 – Modèle bond graph initial issu de l'exemple du haut-parleur électrodynamique (cas d'un élément de stockage d'énergie non linéaire)

Formulation du problème d'optimisation

Supposons alors que le but de l'étude soit de déterminer l'entrée en tension u de sorte à minimiser simultanément l'apport d'énergie et la puissance dissipée par les phénomènes de frottement dans les suspensions [22]. L'étude s'apparente alors à un problème d'optimisation avec pour :

– Objectif : déterminer u tel que :

$$\min_{p,\lambda,x,u} V \tag{4.39}$$

où p est la quantité de mouvement associée à la partie mobile du système, λ est le flux magnétique dû à l'inductance propre de la bobine et x est le déplacement de la bobine.

– Indice de performance :

$$V = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{u^2}{R_u} + P_{diss,R_m} \right] dt \tag{4.40}$$

22. Ce type de problème peut s'imaginer pour générer des sons particuliers dans le cadre, par exemple, d'un contrôle audio actif.

où P_{diss,R_m} est la puissance dissipée par les frottements au niveau des suspensions et R_u est le cœfficient de pondération sur l'entrée u.

- Contraintes :
  - les équations d'état du système ;
  - des conditions fixées sur les temps et les états initiaux et finaux.

Construction du modèle bond graph augmenté

En appliquant au modèle bond graph initial (Fig. 4.23) la procédure 5 décrite à la section 4.5.3 (page 194), nous obtenons alors le modèle bond graph augmenté (Fig. 4.24) correspondant au problème d'optimisation donné (4.39)-(4.40).

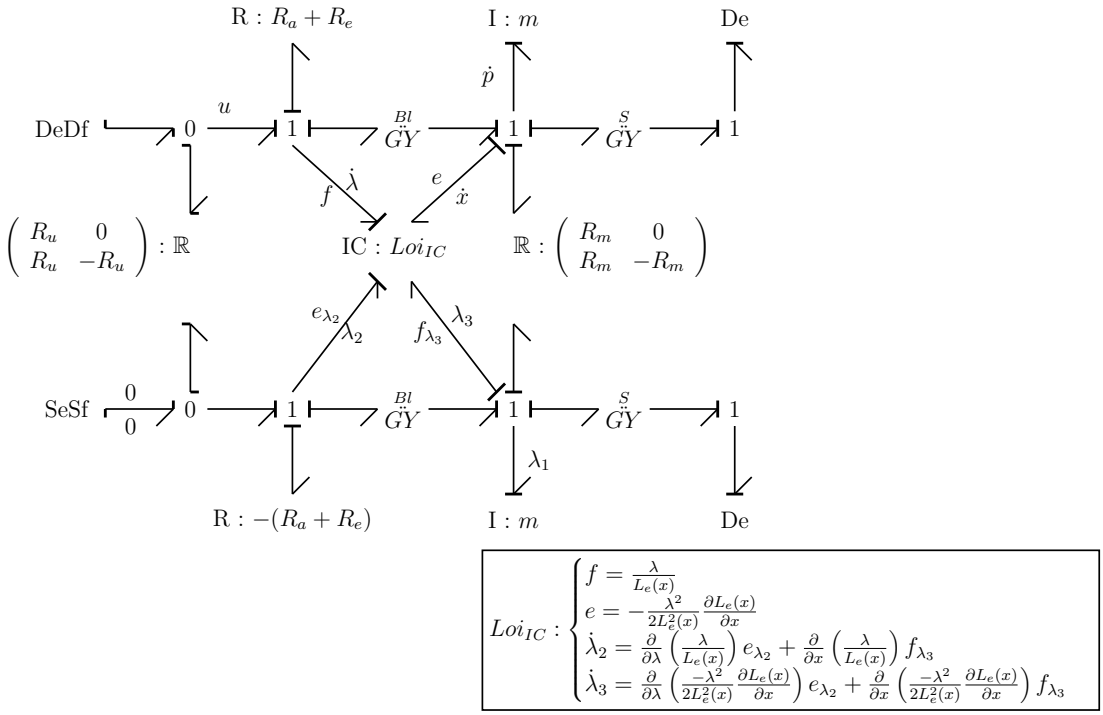


FIGURE 4.24 – Modèle bond graph augmenté issu de l'exemple du haut-parleur électrodynamique (cas d'un élément de stockage d'énergie non linéaire)

L'exploitation de ce modèle bond graph augmenté conduit au système d'équations suivant, système qui aurait été obtenu en appliquant le principe de PONTRYAGIN de manière analytique :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{R_m}{m} p + \frac{Bl}{L_e(x)} \lambda + \frac{\lambda^2}{2L_e^2(x)} \frac{\partial L_e(x)}{\partial x} \\ \dot{\lambda} = -\frac{Bl}{m} p - \frac{(R_a+R_e)}{L_e(x)} \lambda - R_u \lambda_2 \\ \dot{x} = \frac{1}{m} p \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{R_m}{m^2} p + \frac{R_m}{m} \lambda_1 + \frac{Bl}{m} \lambda_2 - \frac{1}{m} \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_2 = -\left(\frac{Bl}{L_e(x)} + \frac{\lambda}{L_e^2(x)} \frac{\partial L_e(x)}{\partial x}\right) \lambda_1 + \frac{(R_a+R_e)}{L_e(x)} \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_3 = \left(\frac{Bl\lambda}{L_e^2(x)} \frac{\partial L_e(x)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda^2}{2L_e^2(x)} \frac{\partial L_e(x)}{\partial x}\right)\right) \lambda_1 - \frac{(R_a+R_e)\lambda}{L_e^2(x)} \frac{\partial L_e(x)}{\partial x} \lambda_2 \\ u = -R_u \lambda_2 \end{cases}$$

Remarque : Encore une fois, les conditions d'optimalité issues du modèle bond graph augmenté correspondent à celles issues du principe de PONTRYAGIN où le vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ a été remplacé par son expression en fonction des vecteurs d'état et de co-état $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ (ici, dans l'exemple, u a été remplacé par $-R_u \cdot \lambda_2$ dans la condition d'optimalité par rapport à λ).

4.6 Couplage méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique

Contrairement à l'application classique du principe de PONTRYAGIN qui nécessite de nombreux développements analytiques, le premier avantage de la procédure bond graph d'optimisation (que ce soit dans le cas exclusivement linéaire ou à stockages d'énergie non linéaires) réside dans le fait que les conditions d'optimalité sont obtenues de manière graphique. Néanmoins, si cet argument est attractif d'un point de vue de l'optimisation, n'en oublions pas pour autant nos motivations initiales quant à l'établissement d'une telle procédure : celles d'étendre la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses aux problèmes d'optimisation et donc aux problèmes de cahier des charges de nature hétérogène.

En effet, si la procédure bond graph d'optimisation n'a été énoncée jusqu'à présent que sur des modèles bond graph initiaux directs (les équations d'état prises comme contraintes du problème d'optimisation étaient supposées être des fonctions des variables d'état et des variables d'entrées physiques du système), celle-ci doit également trouver un intérêt dans la méthodologie en s'adaptant au traitement simultané d'une inversion et d'une optimisation.

Si la procédure de construction de modèle bond graph augmenté doit certes être plus profondément développée (afin notamment de traiter des non linéarités sur n'importe quel type de phénomène physique et dans la structure de jonction), l'objectif de cette section est de montrer, *via* un exemple, la faisabilité du couplage méthodologie de dimensionnement/optimisation, et de justifier ainsi l'intérêt potentiel de notre démarche dans le contexte du dimensionnement des systèmes mécatroniques. Pour cela, après avoir précisé le cadre d'étude et reformulé les problèmes de dimensionnement considérés sous la forme de problèmes « mixtes » d'inversion et d'optimisation (sous-section 4.6.1), cette section est divisée en deux parties principales :

- une première portant sur une nouvelle extension de la procédure bond graph d'optimisation (sous-section 4.6.2, page 203). Cette extension au cas où seule une partie des variables d'entrées d'un modèle bond graph direct sont à déterminer par optimisation permettra de traiter par la suite le caractère « mixte » de nos problèmes de couplage ;
- une seconde montrant, sur un exemple, comment le couplage entre la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses et la procédure bond graph d'optimisation peut effectivement être mis en œuvre (sous-section 4.6.3, page 207).

Hypothèse : Afin d'initier ces travaux sur le couplage de la méthodologie de dimensionnement avec de l'optimisation dynamique, nous nous placerons dans toute cette section

dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps.

4.6.1 Formulation d'un problème de dimensionnement en un problème mixte d'inversion et d'optimisation

Lorsqu'une inversion complète du modèle est impossible ou ne suffit pas à répondre à un problème de dimensionnement donné, nous avons vu à la section 4.2 (page 161) qu'il pouvait être intéressant de coupler inversion et optimisation. Pour le couplage de la méthodologie de dimensionnement avec de l'optimisation dynamique, nous supposons ici que le cahier des charges est de nature hétérogène et peut être séparé en deux parties :

- l'une où les spécifications peuvent être traduites comme des fonctions dépendant explicitement du temps (spécifications dites ici de type 1) ;
- l'autre où les contraintes de conception peuvent s'exprimer sous la forme de problème de minimisation d'énergie (spécifications dites ici de type 2).

Dès lors, l'idée principale du couplage est de reformuler le problème de dimensionnement en un problème « mixte » d'inversion et d'optimisation afin de traiter simultanément des spécifications de type 1 et 2. Aussi, de par cette nature mixte, l'inversion des modèles ne sera que partielle (*i.e.* seules une partie des variables de sortie seront inversées par rapport à une partie des variables d'entrée physique du système) et l'optimisation ne portera que sur une partie des variables d'entrée du modèle. Les problèmes d'optimisation considérés ici seront donc légèrement différents de ceux formulés à la section 4.3.1 (page 163) dans le sens où :

- l'objectif sera désormais :

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{u}_{opt}} V \tag{4.41}$$

  où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u^T & \mathbf{u}_{opt}^T \end{pmatrix}^T$ avec $\mathbf{u}_u \in \mathbb{R}^{m_u}$ le vecteur des entrées qui sont connues et $\mathbf{u}_{opt} \in \mathbb{R}^{m_{opt}}$ le vecteur des entrées qui sont à déterminer par optimisation ;
- et l'indice de performance n'impliquera que ces variables d'entrée à déterminer par optimisation ;

$$V = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[\mathbf{u}_{opt}^T \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} + P_{diss}\right] dt \tag{4.42}$$

  où :
  - $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \in \mathbb{R}^{m_{opt}\times m_{opt}}$ est la matrice de pondération des entrées à déterminer par optimisation, supposée diagonale, $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}} \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}}$ (resp. $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}}$) celle associée aux entrées en effort (resp. en flux) ;
  - P_{diss} est la puissance dissipée par tout ou une partie des phénomènes dissipatifs présents dans le système, $P_{diss} = \mathbf{e}_{R_{opt}}^T \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}}$ où $\mathbf{e}_{R_{opt}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$ (resp. $\mathbf{f}_{R_{opt}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$) est le vecteur d'effort (resp. de flux) associé aux phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance.

4.6.2 Extension de la procédure bond graph d'optimisation au cas où seule une partie des entrées du modèle est à déterminer par optimisation

En dehors de toute inversion, puisque les problèmes d'optimisation considérés ici sont légèrement différents de ceux initialement considérés pour établir la procédure bond graph d'optimisation, il convient de voir dans quelle mesure cette procédure peut être adaptée à ce nouveau type de problème. Le but de cette section est donc d'étendre une nouvelle fois la procédure cette fois-ci aux cas où, non pas la totalité, mais seule une partie des variables d'entrée est à déterminer par optimisation. Énoncé de cette nouvelle procédure et exemple d'application sont notamment fournis.

Nouvelle extension de la procédure bond graph d'optimisation

Comme démontré à l'annexe H.2, les conditions d'optimalité issues de la résolution d'un problème d'optimisation du type (4.41)-(4.42) peuvent également être représentées par l'intermédiaire d'un modèle bond graph augmenté. Il suffit pour cela de suivre la procédure bond graph d'optimisation initiale (procédure 4, page 173) et d'y ajouter simplement une étape 3-C afin de traiter les variables d'entrée (ou plus exactement les sources correspondant aux variables d'entrée) qui ne sont pas à déterminer par optimisation. Plus précisément, cette modification aboutit à la procédure de construction suivante :

Procédure 6

Construction de modèles bond graph optimisants dans le cas linéaire

Pour tout problème d'optimisation formulé sur un système linéaire et invariant dans le temps et consistant à déterminer une partie $\mathbf{u_{opt}}$ *du vecteur d'entrée* $\mathbf{u}$ *de sorte que l'indice de performance* (4.42) *soit minimisé, que les équations d'état soient prises comme contraintes et que des conditions initiales et finales sur le temps et l'état soient fixées, les conditions d'optimalité issues du principe de* Pontryagin *peuvent être obtenues de manière graphique par l'exploitation causale d'un modèle bond graph augmenté, construit en suivant les étapes suivantes :*

Étape 1 : Duplication. *Dupliquer le modèle bond graph initial, c'est-à-dire le modèle bond graph correspondant au système étudié. La partie ainsi dupliquée sera désignée par la suite par modèle bond graph optimisant.*

Étape 2 : Caractéristiques du modèle bond graph optimisant. *Dans le modèle bond graph optimisant, remplacer les matrices caractéristiques* $\mathbf{R_R}$ *et* $\mathbf{R_{opt}}$ *des éléments* $\mathbb{R}$ *respectivement par* $-\mathbf{R_R}^T$ *et* $-\mathbf{R_{opt}}^T$ *(l'élément* $\mathbb{R} : \mathbf{R_{opt}}$ *(resp.* $\mathbb{R} : \mathbf{R_R}$*) désigne les phénomènes dissipatifs pris en compte (resp. non pris en compte) dans l'indice de performance* V*).*

Étape 3 : Prise en compte de l'indice de performance.

- *A - Pour les phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance, coupler les éléments* $\mathbb{R}$ *multiports correspondants à la fois dans les*

modèles bond graph initial et optimisant. Ensuite, ajouter sous la diagonale de la matrice caractéristique de l'élément, la sous-matrice $\frac{1}{2}[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{T}]$ *où* $\mathbf{R_{opt}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr} & \mathbf{R_{opt}}_{rc} \\ \mathbf{R_{opt}}_{cr} & \mathbf{R_{opt}}_{cc} \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr}^T & -\mathbf{R_{opt}}_{cr}^T \\ -\mathbf{R_{opt}}_{rc}^T & \mathbf{R_{opt}}_{cc}^T \end{pmatrix}$ *(les indices* $_r$ *et* $_c$ *correspondent respectivement à une causalité résistance et conductance lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale).*

– *B - Pour les entrées à déterminer par optimisation, insérer une jonction tableau* $\underline{\mathbf{0}}$ *(resp.* $\underline{\mathbf{1}}$*) entre la structure de jonction et chaque source d'effort (resp. de flux) puis leur connecter un élément* $\mathbb{R}$ *multiport par paire de sources correspondantes dans les modèles bond graph initial et optimisant. Pour les sources d'effort (resp. de flux), leur associer la matrice caractéristique* $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_e,opt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_e,opt} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_e,opt} \end{pmatrix}$ *(resp.* $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_f,opt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_f,opt} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_f,opt} \end{pmatrix}$ *).*

– *C - Pour les entrées qui ne sont pas à déterminer par optimisation, remplacer les éléments correspondants* $\mathbb{MS}e$ *et* $\mathbb{MS}f$ *respectivement par des sources* $\mathbb{S}e$ *de vecteur d'effort nul et des sources* $\mathbb{S}f$ *de vecteur de flux nul dans le modèle bond graph optimisant uniquement.*

Étape 4 : Affectation de la bicausalité. *Remplacer les éléments* $\mathbb{MS}e$ *et* $\mathbb{MS}f$ *correspondants aux entrées à déterminer par optimisation par des doubles détecteurs* $\mathbb{D}e\mathbb{D}f$ *dans le modèle bond graph initial, et, par des doubles sources* $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ *imposant des vecteurs d'effort et de flux nuls dans le modèle bond graph optimisant. Enfin, propager la bicausalité des doubles sources vers les doubles détecteurs à travers les éléments* $\mathbb{R}$ *multiports introduits pour prendre en compte les pondérations des entrées à déterminer par optimisation.*

Remarque : Nous nous sommes placés ici dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps. Cependant, en reprenant la démonstration de l'annexe H.2, nous pouvons montrer que l'extension de la procédure 6 aux systèmes à stockages d'énergie non linéaires est possible : il suffit pour cela de rajouter à l'étape 3-A les modifications sur les éléments de stockage d'énergie décrites lors de la procédure 5 (page 194).

Exemple

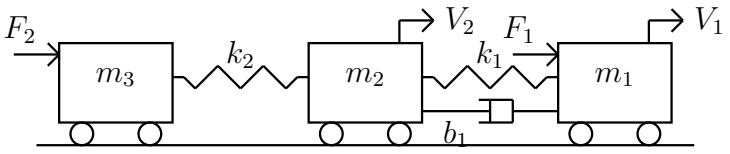


FIGURE 4.25 – Schéma technologique de trois masses en série

Afin d'illustrer la nouvelle extension de la procédure bond graph d'optimisation, considérons ici l'exemple de trois masses en série, reliées entre elles par des ressorts de raideurs k_1 et k_2 et un amortisseur de cœfficient b_1 (Fig. 4.25). Deux forces F_1 et F_2 sont imposées respectivement aux masses m_1 et m_3 et les vitesses V_1 et V_2 des masses m_1 et m_2 sont

considérées comme étant les sorties du système.

Conformément aux règles de modélisation bond graph, ce système peut alors être représenté par le modèle bond graph causal de la figure 4.26.

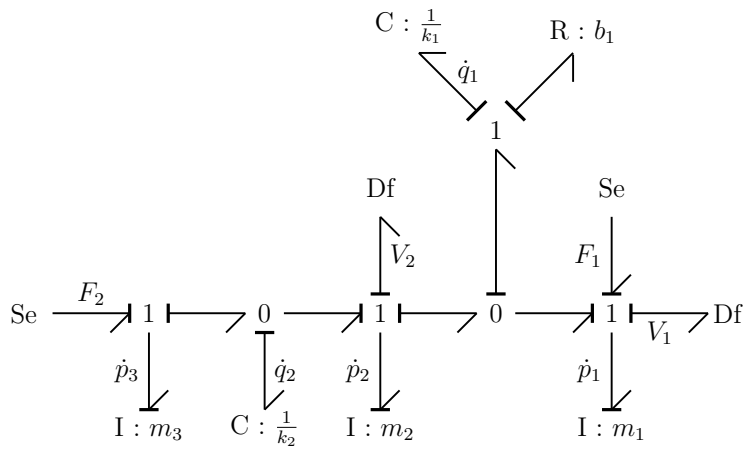


FIGURE 4.26 – Modèle bond graph causal de l'exemple des trois masses en série

Supposons alors que l'évolution de la force F_2 soit donnée et que l'étude consiste à résoudre un problème d'optimisation avec pour :

- Objectif :

$$\min_{p_1,p_2,p_3,q_1,q_2,F_1} V \tag{4.43}$$

  où p_1, p_2 et p_3 sont les quantités de mouvements associées respectivement aux masses m_1, m_2 et m_3 et q_1 et q_2 sont les déplacements associés respectivement aux ressorts de raideurs k_1 et k_2.
- Indice de performance :

$$V = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{F_1^2}{R_{F_1}} + P_{diss,b_1}\right)dt \tag{4.44}$$

  où P_{diss,b_1} est la puissance dissipée par l'amortisseur de cœfficient b_1 et R_{F_1} est le cœfficient de pondération de l'entrée F_1.
- Contraintes :
  - les équations d'état du système étudié ;
  - des conditions fixées sur les temps et les états initiaux et finaux.

Construction du modèle bond graph augmenté

En appliquant au modèle bond graph initial (Fig. 4.26) la procédure 6 (page 204), nous obtenons alors le modèle bond graph augmenté (Fig. 4.27) correspondant au problème d'optimisation (4.43)-(4.44).

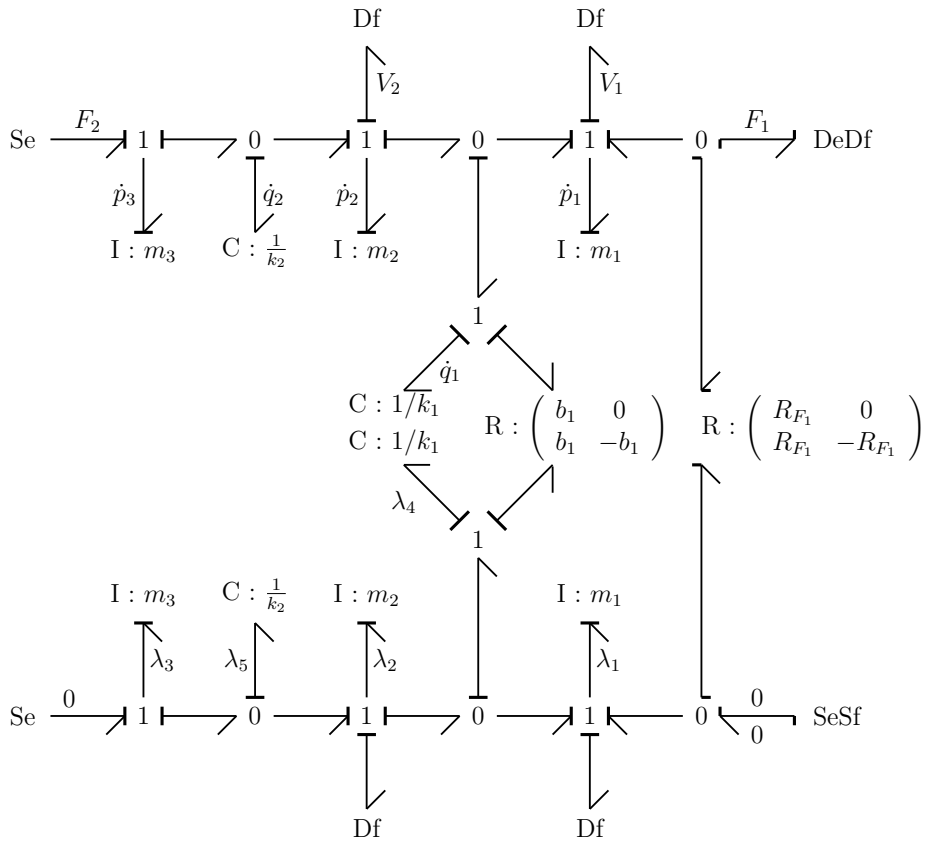


FIGURE 4.27 – Modèle bond graph augmenté issu de l'exemple des trois masses en série (cas où seule une partie des entrées est déterminée par optimisation)

L'exploitation de ce modèle bond graph augmenté conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{b_1}{m_1} \cdot p_1 + \frac{b_1}{m_2} \cdot p_2 + k_1 \cdot q_1 - R_{F_1} \cdot \lambda_1 \\ \dot{p}_2 = \frac{b_1}{m_1} \cdot p_1 - \frac{b_1}{m_2} \cdot p_2 - k_1 \cdot q_1 + k_2 \cdot q_2 \\ \dot{p}_3 = -k_2 \cdot q_2 + F_2 \\ \dot{q}_1 = -\frac{1}{m_1} \cdot p_1 + \frac{1}{m_2} \cdot p_2 \\ \dot{q}_2 = -\frac{1}{m_2} \cdot p_2 + \frac{1}{m_3} \cdot p_3 \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{b_1}{m_1^2} \cdot p_1 + \frac{b_1}{m_1 \cdot m_2} \cdot p_2 + \frac{b_1}{m_1} \cdot \lambda_1 - \frac{b_1}{m_1} \cdot \lambda_2 + \frac{1}{m_1} \cdot \lambda_4 \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{b_1}{m_1 \cdot m_2} \cdot p_1 - \frac{b_1}{m_2^2} \cdot p_2 - \frac{b_1}{m_2} \cdot \lambda_1 + \frac{b_1}{m_2} \cdot \lambda_2 - \frac{1}{m_2} \cdot \lambda_4 + \frac{1}{m_2} \cdot \lambda_5 \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{1}{m_3} \cdot \lambda_5 \\ \dot{\lambda}_4 = -k_1 \cdot \lambda_1 + k_1 \cdot \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_5 = -k_2 \cdot \lambda_2 + k_2 \cdot \lambda_3 \\ F_1 = -R_{F_1} \cdot \lambda_1 \end{cases} \tag{4.45}$$

Remarques : Ce système (4.45) correspond aux conditions d'optimalité issues du principe de PONTRYAGIN et pour lesquelles F_1 aurait été remplacée par $-R_{F_1} \cdot \lambda_1$. De plus, notons que l'entrée F_2 étant supposée connue (donc fixée), aucune condition d'optimalité ne doit être formulée par rapport à cette variable.

4.6.3 Exemple de couplage

Maintenant que la procédure bond graph d'optimisation a été étendue au cas où seule une partie des variables d'entrée est à déterminer par optimisation, il convient de voir comment celle-ci peut s'appliquer à des modèles bond graph inverses et donc comment méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique peuvent être couplées.

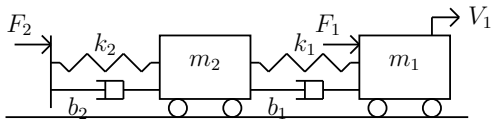


FIGURE 4.28 – Schéma technologique de deux masses en série

Afin d'étudier la faisabilité d'un tel couplage, considérons dans toute cette section l'exemple de deux masses en série, reliées entre elles par des ressorts de raideurs k_1 et k_2 et des amortisseurs de cœfficients b_1 et b_2 en parallèle et soumises à l'action de deux efforts F_1 et F_2 (Fig. 4.28). Conformément aux règles de modélisation bond graph, ce système peut alors être représenté par le modèle bond graph causal de la figure 4.29.

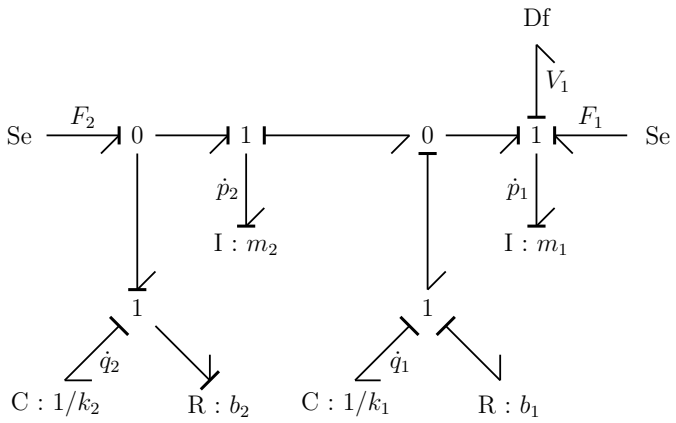


FIGURE 4.29 – Modèle bond graph causal de deux masses en série

Aussi, supposons alors que le problème de dimensionnement soit de déterminer les efforts F_1 et F_2 de sorte que :

- la vitesse V_1 de la première masse m_1 suive une trajectoire prédéfinie $V_{1_{ref}}$ (spécification n°1) ;
- l'énergie dissipée P_{diss,b_2} par le deuxième amortisseur de cœfficient visqueux b_2 soit minimisée (spécification n°2).

Comme nous l'avons vu lors de la section 4.6.1 (page 202), l'idée principale du couplage est alors de reformuler ce problème de dimensionnement en un problème « mixte » permettant de satisfaire simultanément la spécification n°1 par inversion et la spécification n°2

par optimisation dynamique. Basées sur cet exemple, les sections suivantes vont notamment s'attacher à présenter les deux approches possibles pour résoudre un tel couplage : la première où le modèle est partiellement inversé avant d'être optimisé et la seconde où, au contraire, le problème d'optimisation est formulé avant l'inversion. Pour finir, ces deux manières de formuler le problème seront ensuite discutées et une extension de la procédure bond graph d'optimisation pour traiter ce type de couplage sera également proposée.

Approche 1 : inversion puis optimisation

Dans cette section, adoptons la première approche consistant à inverser le modèle avant de formuler le problème d'optimisation.

Dans l'exemple des deux masses en série, satisfaire la spécification n°1 revient à partir du modèle bond graph direct et à l'inverser partiellement par rapport au couple de variables (F_1, V_1). Une analyse acausale puis causale de ce modèle nous permet de montrer qu'il existe une ligne de puissance E/S et un chemin causal E/S entre ces deux variables F_1 et V_1 (Fig. 4.30).
Le modèle ayant une structure arborescente, celui-ci est donc inversible par rapport au couple de variables (F_1, V_1) comme l'illustre la figure du tableau 4.1 (test d'inversibilité 2, page 135).
En exploitant le modèle bond graph bicausal ainsi obtenu, il peut ainsi être conclu que (Tab. 4.1) :

- la spécification $V_{1_{ref}}$ doit être au moins une fois dérivable (puisque le chemin causal E/S ① est le seul chemin d'ordre BG minimal entre $V_{1_{ref}}$ et F_1, nous pouvons en effet conclure que $n_{1e} = 1$ d'après le théorème 6, page 146)
- la partie dynamique résultante du modèle inverse est régie par les équations d'état (4.46) ;
- l'entrée recherchée F_1 est calculée à partir de l'équation (4.48).

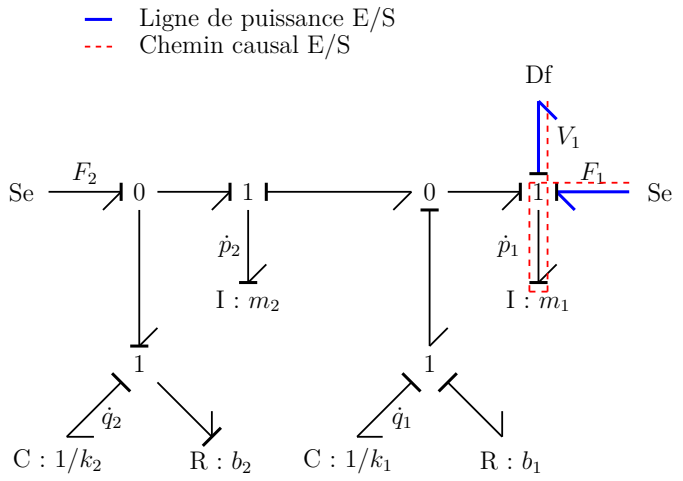


FIGURE 4.30 – Analyse du modèle bond graph de deux masses en série

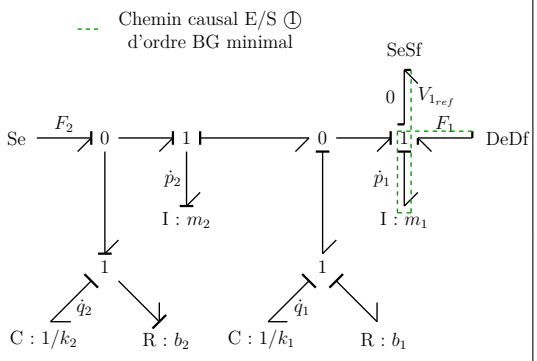
Modèle bond graph :	Modèle d'état :
	$$\begin{cases} \dot{p}_2 = b_1 V_{1_{ref}} - \frac{b_1}{m_2} p_2 - k_1 q_1 + F_2 \\ \dot{q}_1 = -V_{1_{ref}} + \frac{1}{m_2} p_2 \\ \dot{q}_2 = -\frac{k_2}{b_2} q_2 + \frac{1}{b_2} F_2 \end{cases} \quad (4.46)$$ Équations de sortie : $$p_1 = m_1 V_{1_{ref}} \quad (4.47)$$ $$F_1 = m_1 \dot{V}_{1_{ref}} + b_1 V_{1_{ref}} - \frac{b_1}{m_2} p_2 - k_1 q_1 \quad (4.48)$$

TABLE 4.1 – Inversion partielle du modèle direct par rapport au couple de variables (F_1, V_1)

Une fois cette première étape effectuée, la spécification n°2 peut être traitée en considérant uniquement la partie dynamique du modèle inverse et en formulant le problème d'optimisation suivant : « *trouver l'entrée F_2 de sorte que l'indice de performance $V = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{F_2^2}{R_{F_2}} + P_{diss,b_2}\right) dt$ soit minimisé, les conditions initiales et finales sur le temps et l'état soient fixées et le modèle d'état* (4.46) *soit pris comme contrainte* ». Les inconnues du problème d'optimisation sont alors les variables $(p_2, q_1, q_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, F_2)$. Après avoir déterminé l'expression $P_{diss,b_2} = \frac{(-k_2 q_2 + F_2)^2}{b_2}$, la construction de la fonction de PONTRYAGIN aboutit à[23] :

$$H_p = \frac{1}{2}\frac{F_2^2}{R_{F_2}} + \frac{1}{2b_2}\left(-k_2 q_2 + F_2\right)^2 + \lambda_2\left(b_1 V_{1_{ref}} - \frac{b_1}{m_2} p_2 - k_1 q_1 + F_2\right)$$
$$+ \lambda_3\left(-V_{1_{ref}} + \frac{1}{m_2} p_2\right) + \lambda_4\left(-\frac{k_2}{b_2} q_2 + \frac{1}{b_2} F_2\right)$$

L'application classique du principe de PONTRYAGIN conduit alors aux conditions d'optimalité (4.49).

23. Si le cas où la puissance P_{diss} dépend explicitement du vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ n'a pas été présenté jusqu'à maintenant dans la démonstration de la procédure de construction d'un modèle bond graph optimisant, celui-ci est cependant traité et justifié à l'annexe H.2 (page 378).

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_2} \\ \dot{q}_1 = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_3} \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial H_p}{\partial \lambda_4} \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H_p}{\partial p_2} \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H_p}{\partial q_1} \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H_p}{\partial q_2} \\ \frac{\partial H_p}{\partial F_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_2 = b_1 V_{1_{ref}} - \frac{b_1}{m_2} p_2 - k_1 q_1 + F_2 \\ \dot{q}_1 = -V_{1_{ref}} + \frac{1}{m_2} p_2 \\ \dot{q}_2 = -\frac{k_2}{b_2} q_2 + \frac{1}{b_2} F_2 \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{b_1}{m_2} \lambda_2 - \frac{1}{m_2} \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 = k_1 \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{k_2^2}{b_2} q_2 + \frac{k_2}{b_2} \lambda_4 + \frac{k_2}{b_2} F_2 \\ (\frac{1}{R_{F_2}} + \frac{1}{b_2}) F_2 = \frac{k_2}{b_2} q_2 - \lambda_2 - \frac{1}{b_2} \lambda_4 \end{cases} \tag{4.49}$$

Par conséquent, selon l'approche 1, trouver une solution $(p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, F_1, F_2)$ satisfaisant simultanément les spécifications n°1 et n°2 sur V_1 et P_{diss,b_2} revient à résoudre le système suivant, composé des équations (4.47), (4.48) et (4.49) :

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = b_1 V_{1_{ref}} - \frac{b_1}{m_2} p_2 - k_1 q_1 + F_2 \\ \dot{q}_1 = -V_{1_{ref}} + \frac{1}{m_2} p_2 \\ \dot{q}_2 = -\frac{k_2}{b_2} q_2 + \frac{1}{b_2} F_2 \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{b_1}{m_2} \lambda_2 - \frac{1}{m_2} \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 = k_1 \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{k_2^2}{b_2} q_2 + \frac{k_2}{b_2} \lambda_4 + \frac{k_2}{b_2} F_2 \\ p_1 = m_1 V_{1_{ref}} \\ F_1 = m_1 \dot{V}_{1_{ref}} + b_1 V_{1_{ref}} - \frac{b_1}{m_2} p_2 - k_1 q_1 \\ \left(\frac{1}{R_{F_2}} + \frac{1}{b_2}\right) F_2 = \frac{k_2}{b_2} q_2 - \lambda_2 - \frac{1}{b_2} \lambda_4 \end{cases} \tag{4.50}$$

Parallèlement, d'un point de vue bond graph, comme la partie dynamique du modèle inverse peut être vue d'une certaine manière comme un modèle direct où $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_2 & q_1 & q_2 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{u}_u = \left(V_{1_{ref}}\right)$ et $\mathbf{u}_{opt} = (F_2)$, la procédure 6 (procédure de construction de modèle bond graph optimisant quand une seule partie des entrées est optimisée, page 204) est ici applicable. Les seules différences résident dans le fait que :

- chaque double source $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ représentant une entrée connue dans le modèle bond graph initial (*e.g.* $V_{1_{ref}}$ dans le cas des deux masses en série) doit être remplacée par une double source $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ imposant à la fois un flux et un effort nuls dans le modèle bond graph optimisant ;
- chaque double détecteur $\mathbb{D}e\mathbb{D}f$ du modèle bond graph initial doit être simplement dupliqué dans le modèle bond graph optimisant.

En respectant ces modifications et en appliquant les quatre étapes de la procédure 6 (page 204), nous obtenons alors le modèle bond graph augmenté de la figure 4.31. Une exploitation analytique de ce modèle conduit en particulier aux mêmes conditions d'optimalité (4.50) (toujours à la différence près que l'entrée à déterminer par optimisation a été remplacée par son expression en fonction des vecteurs d'état et de co-état).

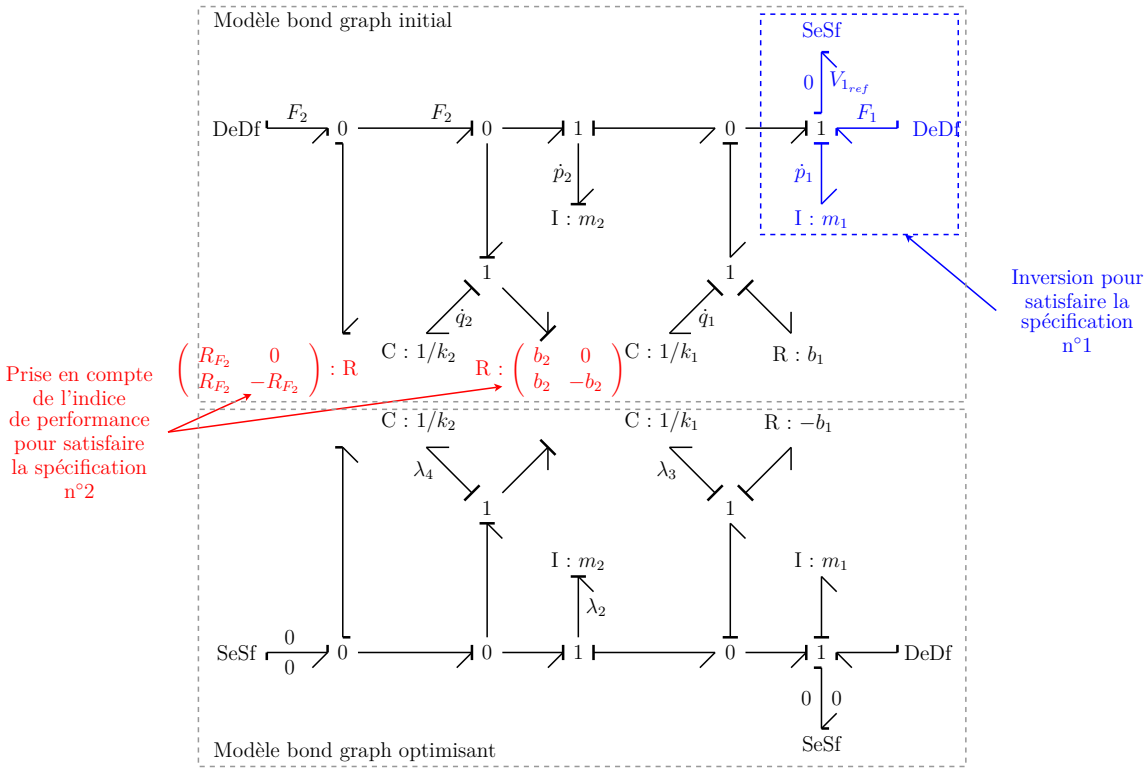


FIGURE 4.31 – Modèle bond graph augmenté couplant inversion et optimisation

Approche 2 : optimisation puis inversion

Procédons désormais à la deuxième approche consistant à formuler le problème d'optimisation avant celui d'inversion.

Dans l'exemple des deux masses en série, ceci revient alors à partir du modèle bond graph direct (Tab. 4.2) gouverné par le modèle d'état (4.51) et l'équation de sortie (4.52).

D'une part, la spécification n°1 permet de formuler la contrainte suivante :

$$V_{1_{ref}} = \frac{1}{m_1} p_1 \tag{4.53}$$

D'autre part, satisfaire la spécification n°2 revient à formuler le problème de minimisation d'énergie suivant : « *trouver les entrées* F_1 *et* F_2 *de sorte que l'indice de performance* $V = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{F_2^2}{R_{F_2}} + P_{diss,b_2}\right) dt$ *soit minimisé, les conditions initiales et finales sur le temps et l'état soient fixées et le modèle d'état* (4.51) *soit pris comme contrainte* ». Aussi, comme l'inconnue F_1 est déterminée à la fois par inversion et par optimisation, l'espace de recherche des solutions pour F_1 doit être restreint à un espace de recherche où la contrainte (4.53) est vérifiée. Cependant, comme cette contrainte (4.53) est une contrainte algébrique, le principe de PONTRYAGIN n'est plus applicable : nous devons ici considérer

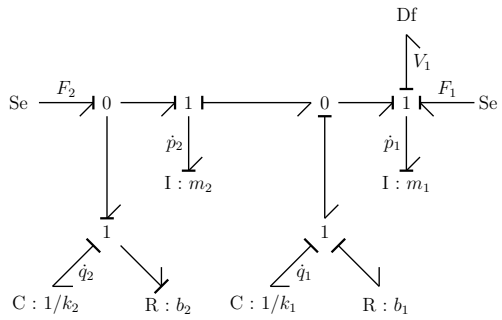
Modèle bond graph :	Modèle d'état :
	$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{b_1}{m_1}p_1 + \frac{b_1}{m_2}p_2 + k_1q_1 + F_1 \\ \dot{p}_2 = \frac{b_1}{m_1}p_1 - \frac{b_1}{m_2}p_2 - k_1q_1 + F_2 \\ \dot{q}_1 = -\frac{1}{m_1}p_1 + \frac{1}{m_2}p_2 \\ \dot{q}_2 = -\frac{k_2}{b_2}q_2 + \frac{1}{b_2}F_2 \end{cases}$ (4.51) Équation de sortie : $V_1 = \frac{1}{m_1}p_1$ (4.52)

TABLE 4.2 – Modèle direct

les conditions d'optimalité fournies par les équations d'EULER-LAGRANGE (4.54) pour résoudre le problème ([Pun72] et annexe F sur la méthode variationnelle classique).

$$\begin{cases} \frac{\partial F_a(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0 \\ \frac{\partial F_a(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}} = 0 \\ \frac{\partial F_a(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}_{opt}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{opt}} = 0 \end{cases} \tag{4.54}$$

où $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de co-état, q est le nombre de contraintes, $\phi_i(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = 0$ est la $i^{\text{ième}}$ contrainte et $F_a = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \phi_i(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ est nommée *fonction augmentée* ou *Lagrangien augmenté*.

Remarque : De la même façon que pour le principe de PONTRYAGIN, aucune condition d'optimalité ne doit être écrite par rapport aux variables d'entrée connues (ici, les variables d'entrée physique du modèle qui sont déterminées par inversion).

Dans le cas des deux masses en série, la construction de la fonction augmentée aboutit à :

$$\begin{aligned} F_a = & \frac{1}{2}\frac{F_2^2}{R_{F_2}} + \frac{1}{2b_2}\left(-k_2q_2 + F_2\right)^2 + \lambda_1\left(-\frac{b_1}{m_1}p_1 + \frac{b_1}{m_2}p_2 + k_1q_1 + F_1 - \dot{p}_1\right) \\ & + \lambda_2\left(\frac{b_1}{m_1}p_1 - \frac{b_1}{m_2}p_2 - k_1q_1 + F_2 - \dot{p}_2\right) + \lambda_3\left(-\frac{1}{m_1}p_1 + \frac{1}{m_2}p_2 - \dot{q}_1\right) \\ & + \lambda_4\left(-\frac{k_2}{b_2}q_2 + \frac{1}{b_2}F_2 - \dot{q}_2\right) + \lambda_5\left(V_{1_{ref}} - \frac{1}{m_1}p_1\right) \end{aligned}$$

Puis, la formulation des équations d'EULER-LAGRANGE conduit au système (4.55).

$$\begin{cases} \frac{\partial F_a}{\partial \lambda_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{\lambda}_1} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial \lambda_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{\lambda}_2} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial \lambda_3} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{\lambda}_3} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial \lambda_4} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{\lambda}_4} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial \lambda_5} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{\lambda}_5} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{p}_1} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{p}_2} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{q}_1} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{q}_2} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial F_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{F}_1} = 0 \\ \frac{\partial F_a}{\partial F_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F_a}{\partial \dot{F}_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{b_1}{m_1}p_1 + \frac{b_1}{m_2}p_2 + k_1 q_1 + F_1 \\ \dot{p}_2 = \frac{b_1}{m_1}p_1 - \frac{b_1}{m_2}p_2 - k_1 q_1 + F_2 \\ \dot{q}_1 = -\frac{1}{m_1}p_1 + \frac{1}{m_2}p_2 \\ \dot{q}_2 = -\frac{k_2}{b_2}q_2 + \frac{1}{b_2}F_2 \\ V_{1_{ref}} = \frac{1}{m_1}p_1 \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{b_1}{m_1}\lambda_1 - \frac{b_1}{m_1}\lambda_2 + \frac{1}{m_1}\lambda_3 - \frac{1}{m_1}\lambda_5 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{b_1}{m_2}\lambda_1 + \frac{b_1}{m_2}\lambda_2 - \frac{1}{m_2}\lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 = -k_1\lambda_1 + k_1\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{k_2^2}{b_2}q_2 + \frac{k_2}{b_2}\lambda_4 + \frac{k_2}{b_2}F_2 \\ \lambda_1 = 0 \\ \left(\frac{1}{R_{F_2}} + \frac{1}{b_2}\right)F_2 = \frac{k_2}{b_2}q_2 - \lambda_2 - \frac{1}{b_2}\lambda_4 \end{cases} \tag{4.55}$$

Une fois cette première étape terminée, la spécification n°1 peut être prise en compte en inversant le modèle par rapport au couple de variable (F_1, V_1). En procédant à une telle inversion de manière analytique et en substituant λ_1 par sa valeur, ceci nous conduit alors à conclure que trouver une solution $(p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, F_1, F_2)$ revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = b_1 V_{1_{ref}} - \frac{b_1}{m_2}p_2 - k_1 q_1 + F_2 \\ \dot{q}_1 = -V_{1_{ref}} + \frac{1}{m_2}p_2 \\ \dot{q}_2 = -\frac{k_2}{b_2}q_2 + \frac{1}{b_2}F_2 \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{b_1}{m_2}\lambda_2 - \frac{1}{m_2}\lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 = k_1\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{k_2^2}{b_2}q_2 + \frac{k_2}{b_2}\lambda_4 + \frac{k_2}{b_2}F_2 \\ p_1 = m_1 V_{1_{ref}} \\ F_1 = m_1\dot{V}_{1_{ref}} + b_1 V_{1_{ref}} - \frac{b_1}{m_2}p_2 - k_1 q_1 \\ \left(\frac{1}{R_{F_2}} + \frac{1}{b_2}\right)F_2 = \frac{k_2}{b_2}q_2 - \lambda_2 - \frac{1}{b_2}\lambda_4 \end{cases} \tag{4.56}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_5 = -b_1\lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \tag{4.57}$$

Notons cependant que, puisque λ_1 et λ_5 apparaissent chacun dans une seule équation, leur résolution est indépendante de la résolution des autres variables. En réalité, résoudre le système (4.56) suffit pour répondre au problème de dimensionnement considéré et déterminer les variables p_1, p_2, q_1, q_2, F_1 et F_2.

Enfin, notons que ce système (4.56) est identique aux conditions d'optimalité (4.50) obtenues par la première approche. Par conséquent, une traduction bond graph du système (4.56) est identique à celle issue de la première approche (Fig. 4.31). Le modèle bond graph augmenté de la figure 4.32, équivalent mais simplifié, est également possible.

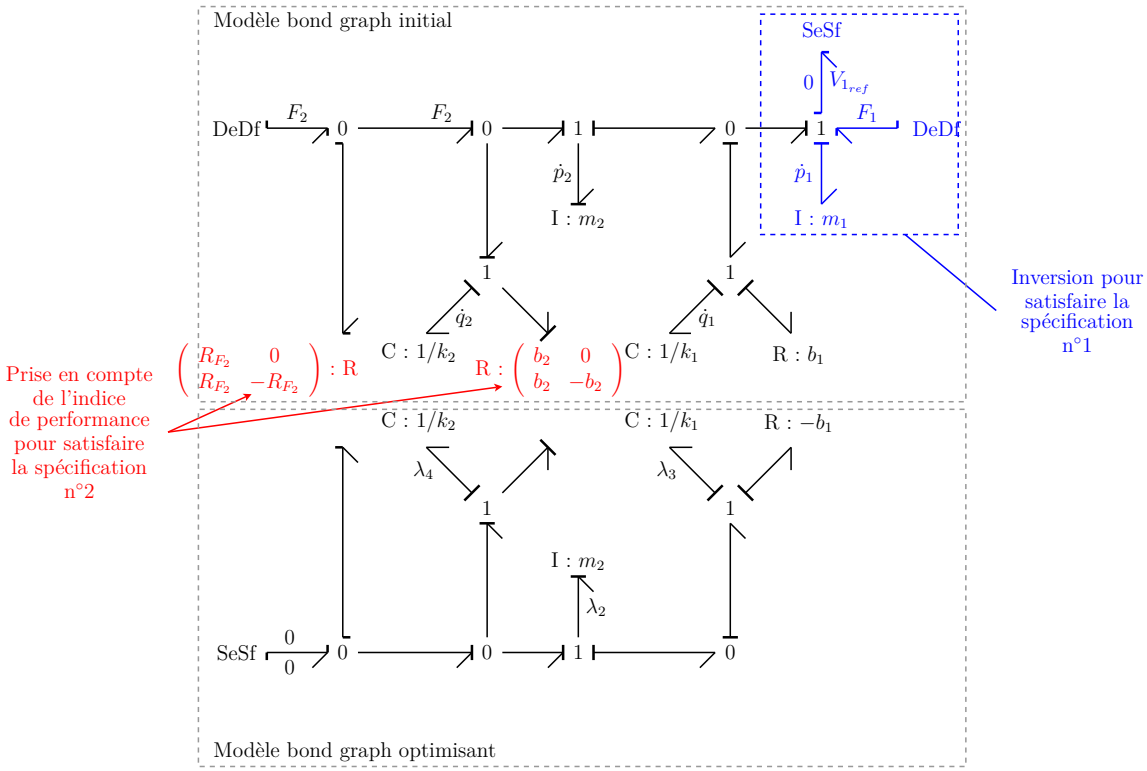


FIGURE 4.32 – Modèle bond graph augmenté simplifié couplant inversion et optimisation

Remarque : Les conditions d'optimalité (4.57) sur les multiplicateurs de LAGRANGE λ_1 et λ_5 peuvent être également retrouvées par l'intermédiaire du modèle bond graph augmenté non simplifié de la figure 4.31 comme le montre la figure 4.33.

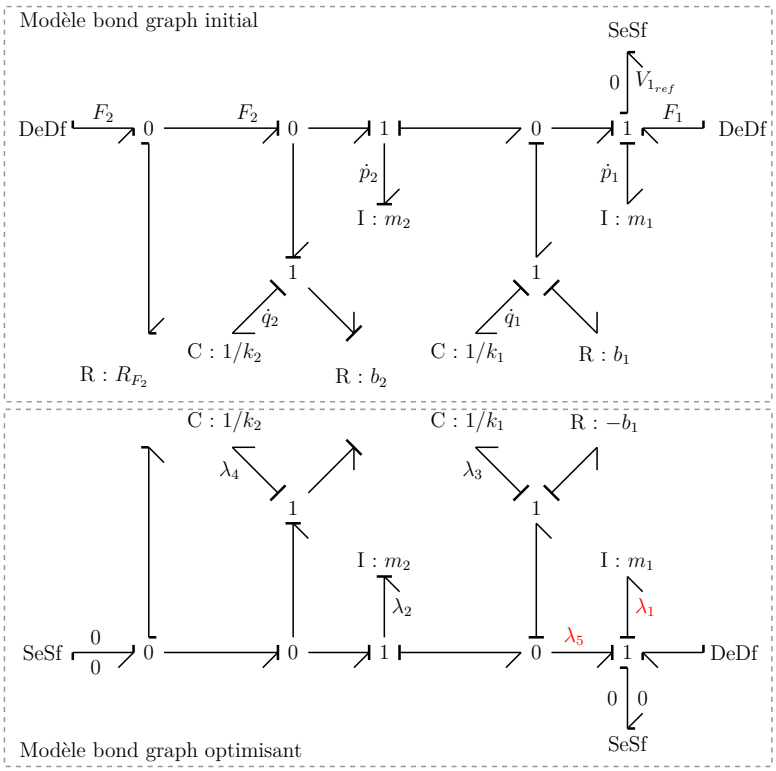


FIGURE 4.33 – Traduction bond graph des conditions d'optimalité (4.57) sur les multiplicateurs de LAGRANGE supplémentaires λ_1 et λ_5

Discussion des deux approches

Les sections précédentes ont présenté deux approches possibles pour coupler inversion et optimisation dynamique sur l'exemple de deux masses en série. Ici, intéressons nous plus particulièrement aux caractéristiques propres de ces approches et établissons une brève comparaison au niveau algébrique d'une part, puis au niveau bond graph.

À première vue, au niveau algébrique, l'approche 2 consistant à optimiser le modèle direct puis à l'inverser semble plus compliquée à mettre en œuvre que l'approche 1. En effet, cette approche 2 nécessite d'anticiper l'inversion en considérant *a priori* une contrainte additionnelle pour le problème d'optimisation (*e.g.* une des équations de sortie du modèle direct). Sans une telle anticipation, il n'y a aucune garantie que les solutions trouvées satisfassent les spécifications d'inversion et répondent ainsi à la totalité du cahier des charges imposé par le problème de dimensionnement. Si cette tâche est relativement aisée pour l'exemple traité ici, celle-ci ne s'avère pas si simple dans le cas général. De plus, prendre en compte des contraintes supplémentaires implique l'introduction de variables supplémentaires (*e.g.* λ_1 et λ_5 dans l'exemple des deux masses en série) et donc également de conditions d'optimalité supplémentaires (*e.g.* le système (4.57) dans l'exemple des deux masses en série). Pour des problèmes de dimensionnement comportant de nombreuses spécifications et où il est nécessaire de considérer de nombreuses contraintes, cette

approche 2 apparaît comme plus compliquée dans le sens où elle entraîne la résolution d'un système d'équations non simplifié. Aussi, le nombre d'inconnues, *a priori* plus grand que celui impliqué par l'approche 1, demandera potentiellement plus de temps de calcul. Ici, l'exemple des deux masses en série est un cas particulier où la résolution des variables supplémentaires est indépendante de la résolution des autres variables et où la simplification des conditions d'optimalité peut se faire manuellement. Cependant, dans le cas général, cette simplification n'est pas aussi explicite.

Quoiqu'il en soit, notons toutefois que le besoin de séparer le problème d'inversion du problème d'optimisation est, bien entendu, dû à la nécessité de présenter les calculs et les étapes de construction du modèle bond graph augmenté dans un ordre chronologique. En pratique, les deux approches (inversion puis optimisation ou optimisation puis inversion) fournissent des conditions d'optimalité équivalentes dont la traduction bond graph sera identique. De plus, les résolutions numériques des équations issues de l'inversion et de l'optimisation seront effectuées simultanément.

Cependant, puisque par nécessité nous devons procéder à la construction du modèle bond graph augmenté par étapes, l'approche 1 consistant à inverser puis à optimiser le modèle, apparaît plus aisée à mettre en œuvre que l'approche 2 : une fois le modèle partiellement inversé, le problème d'optimisation peut être formulé sans avoir besoin d'anticiper une quelconque contrainte supplémentaire. En effet, si le problème d'optimisation est formulé sur la partie dynamique du modèle inverse, celui-ci prend alors automatiquement en compte les contraintes dues à l'inversion et cela, sans introduire de variable λ_i supplémentaire. De plus, cette approche nous permet, d'une certaine manière, de bien poser le problème de dimensionnement :

- si toutes les entrées sont entièrement déterminées par les sorties spécifiées, ceci signifie que le modèle a été entièrement inversé. Ajouter une spécification supplémentaire sous la forme d'un problème d'optimisation reviendrait alors à obtenir un problème de dimensionnement sur-contraint et sans solution ;
- si quelques entrées restent indéterminées après l'inversion du modèle, ceci signifie que le problème de dimensionnement est sous-contraint et qu'il est possible d'ajouter des spécifications supplémentaires.

Suite à ce premier exemple de couplage entre inversion et optimisation, nous proposons ici une procédure générique de construction de modèles bond graph optimisants dans le cas linéaire d'un problème « mixte » d'inversion et d'optimisation (procédure 7) même s'il ne s'agit ici que d'une première conjecture et qu'une démonstration théorique devra, en toute rigueur, être établie.

Procédure 7

Construction de modèles bond graph optimisants dans le cas linéaire d'un problème « mixte » d'inversion et d'optimisation

Pour tout problème d'optimisation formulé sur un système linéaire et invariant dans le temps et consistant à déterminer une partie $\mathbf{u_u}$ *du vecteur d'entrée par inversion et une partie* $\mathbf{u_{opt}}$ *du vecteur d'entrée* $\mathbf{u}$ *par optimisation de sorte que l'indice de performance* (4.42) *soit minimisé, que les équations d'état soient prises comme contraintes et que des conditions initiales et finales sur le temps et l'état soient fixées, les conditions d'optimalité issues du principe de* PONTRYAGIN *peuvent être obtenues de manière graphique par l'exploitation causale d'un modèle bond graph augmenté, construit en suivant les étapes suivantes :*

Étape 1 : Inversion (Fig. 4.34). *Remplacer les sources (d'effort et/ou de flux) associées au vecteur d'entrée* $\mathbf{u_u}$ *par des doubles détecteurs* $\mathbb{D}e\mathbb{D}f$. *Ensuite, remplacer les détecteurs (d'effort et/ou de flux) associés :*

- *au vecteur de sortie en effort* $\mathbf{y}_{u,e}$ *par des doubles sources* $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ *imposant le vecteur d'effort* $\mathbf{y}_{e,ref}$ *et un vecteur de flux nul ;*
- *au vecteur de sortie en flux* $\mathbf{y}_{u,f}$ *par des doubles sources* $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ *imposant le vecteur de flux* $\mathbf{y}_{f,ref}$ *et un vecteur d'effort nul.*

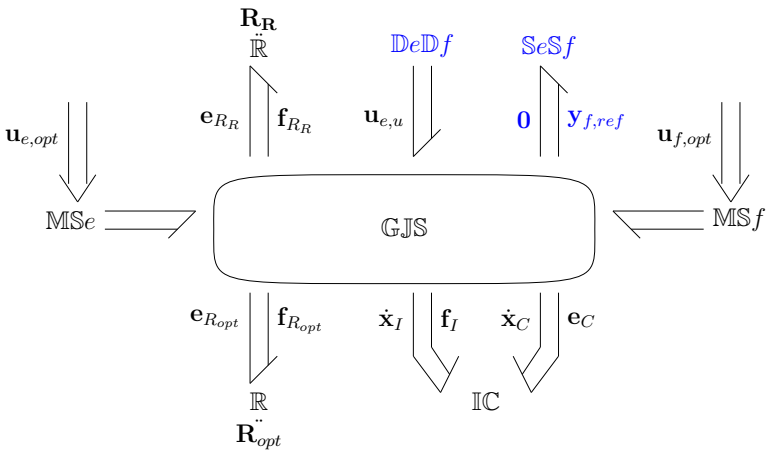


FIGURE *4.34 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas d'un problème « mixte » d'inversion et d'optimisation : étape 1 (cas linéaire)*

Étape 2 : Duplication (Fig. 4.35). *Dupliquer le modèle bond graph initial obtenu à l'étape précédente. La partie ainsi dupliquée sera désignée par la suite par modèle bond graph optimisant.*

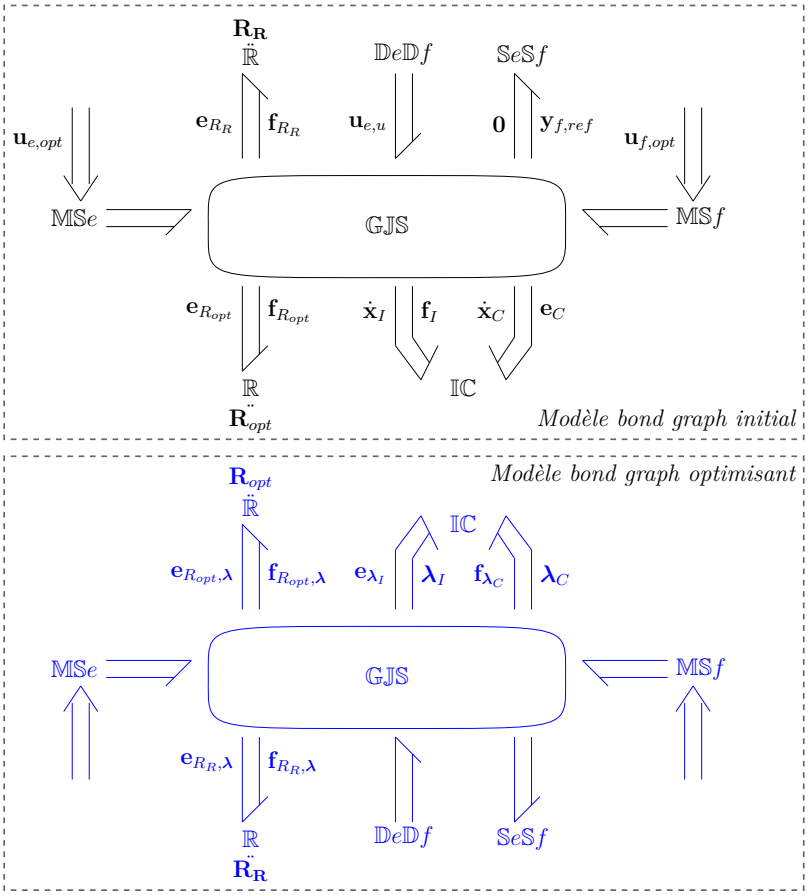


FIGURE *4.35 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas d'un problème « mixte » d'inversion et d'optimisation : étape 2 (cas linéaire)*

Étape 3 : Caractéristiques du modèle bond graph optimisant (Fig. 4.36). *Dans le modèle bond graph optimisant, remplacer les matrices caractéristiques* $\mathbf{R_R}$ *et* $\mathbf{R_{opt}}$ *des éléments* $\mathbb{R}$ *respectivement par* $-\mathbf{R_R}^T$ *et* $-\mathbf{R_{opt}}^T$ *(l'élément* $\mathbb{R}$: $\mathbf{R_{opt}}$ *(resp.* $\mathbb{R}$: $\mathbf{R_R}$*) désigne les phénomènes dissipatifs pris en compte (resp. non pris en compte) dans l'indice de performance* V*).*

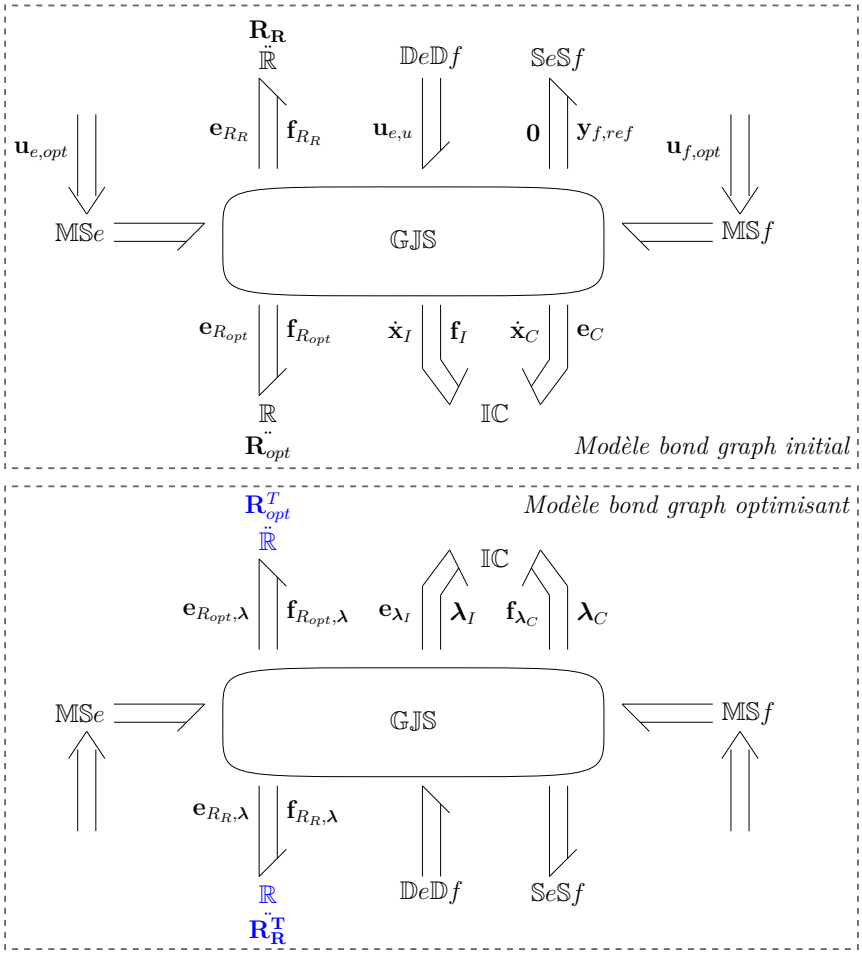


FIGURE *4.36 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas d'un problème « mixte » d'inversion et d'optimisation : étape 3 (cas linéaire)*

Étape 4 : Prise en compte de l'indice de performance (Fig. 4.37).

- *A - Pour les phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance, coupler les éléments $\mathbb{R}$ multiports correspondants à la fois dans les modèles bond graph initial et optimisant. Ensuite, ajouter sous la diagonale de la matrice caractéristique de l'élément, la sous-matrice $\frac{1}{2}\left[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{T}\right]$ où $\mathbf{R_{opt}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr} & \mathbf{R_{opt}}_{rc} \\ \mathbf{R_{opt}}_{cr} & \mathbf{R_{opt}}_{cc} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}^T_{rr} & -\mathbf{R_{opt}}^T_{cr} \\ -\mathbf{R_{opt}}^T_{rc} & \mathbf{R_{opt}}^T_{cc} \end{pmatrix}$ (les indices $_r$ et $_c$ correspondent respectivement à une causalité résistance et conductance lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale).*
- *B - Pour les entrées à déterminer par optimisation, insérer une jonction tableau $\underline{\mathbf{0}}$ (resp. $\underline{\mathbf{1}}$) entre la structure de jonction et chaque source d'effort (resp. de flux) puis leur connecter un élément $\mathbb{R}$ multiport par paire de sources correspondantes dans les modèles bond graph initial et optimisant. Pour les sources d'effort (resp. de flux), leur associer la matrice caractéristique $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_e,opt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_e,opt} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_e,opt} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_f,opt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_f,opt} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_f,opt} \end{pmatrix}$).*

– *C - Pour les entrées qui ne sont pas à déterminer par optimisation, remplacer les éléments correspondants $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ par des doubles sources $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ imposant à la fois un vecteur d'effort et un vecteur de flux nuls dans le modèle bond graph optimisant uniquement.*

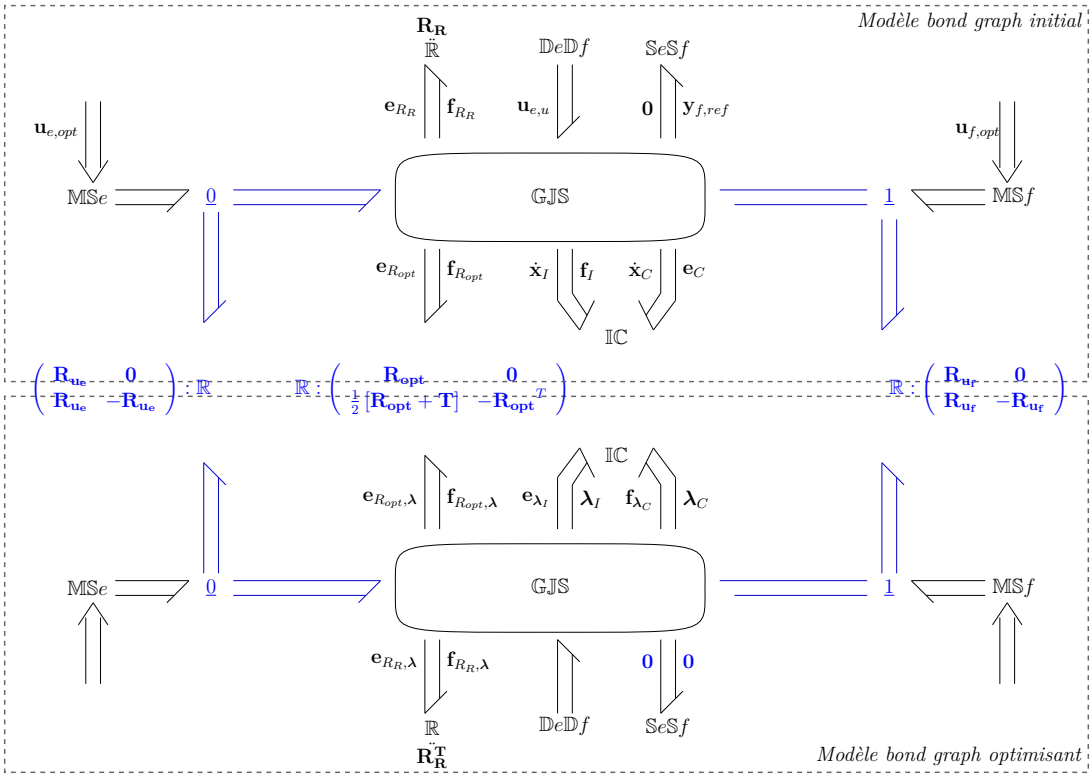


FIGURE *4.37 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas d'un problème « mixte » d'inversion et d'optimisation : étape 4 (cas linéaire)*

Étape 5 : Affectation de la bicausalité (Fig. 4.38). *Remplacer les éléments $\mathbb{MS}e$ et $\mathbb{MS}f$ correspondants au vecteur d'entrée $\mathbf{u_{opt}}$ par des doubles détecteurs $\mathbb{D}e\mathbb{D}f$ dans le modèle bond graph initial, et, par des doubles sources $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ imposant des vecteurs d'effort et de flux nuls dans le modèle bond graph optimisant. Enfin, propager la bicausalité des doubles sources vers les doubles détecteurs à travers les éléments $\mathbb{R}$ multiports introduits pour prendre en compte les pondérations des entrées à déterminer par optimisation.*

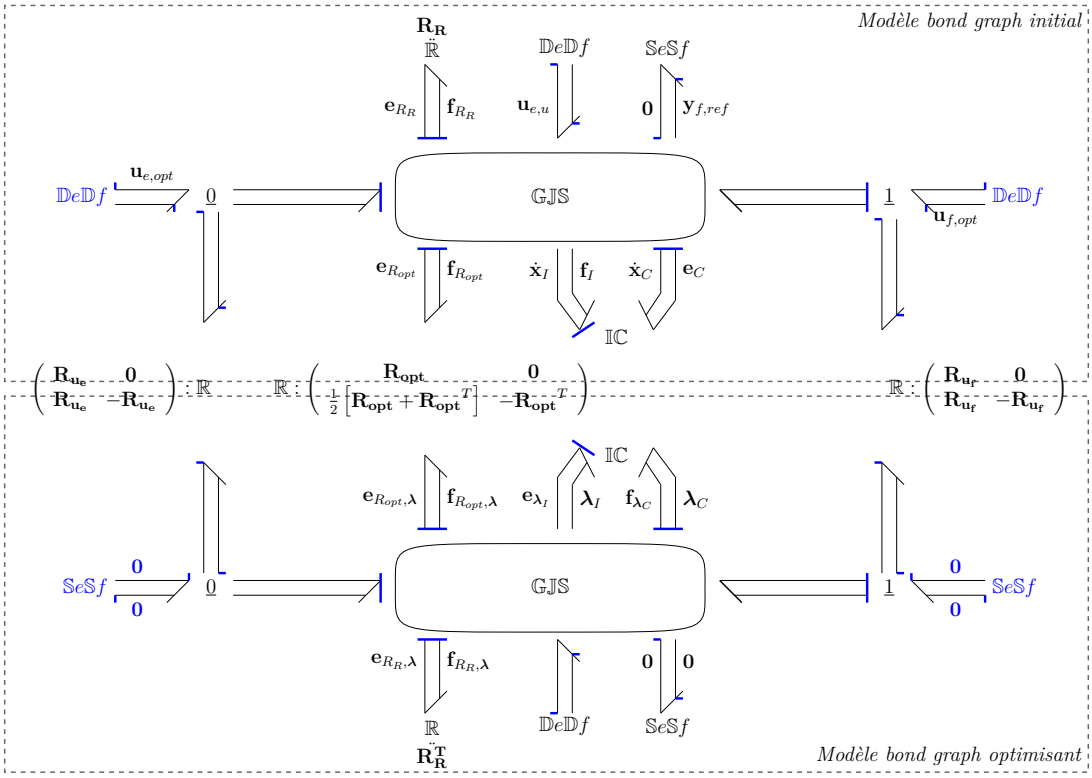


FIGURE *4.38 – Procédure de construction de modèle bond graph augmenté dans le cas d'un problème « mixte » d'inversion et d'optimisation : étape 5 (cas linéaire)*

Remarques :

- Pour des questions de clarté, les figures présentées lors de la procédure 7 illustrent uniquement le cas où toutes les variables d'entrée à déterminer par inversion sont des efforts et toutes les spécifications imposées sont des flux. Cependant, le principe de construction de modèles bond graph optimisants reste le même lorsque les variables d'entrée à determiner par inversion et les spécifications imposées sont des efforts et/ou des flux.
- Avant d'appliquer la procédure 7, il faut, en toute rigueur, procéder à l'analyse structurelle du modèle bond graph initial afin de vérifier qu'il est bien inversible par rapport aux couples de variables d'entrée et de sortie envisagés.

4.7 Conclusion

Afin d'étendre *in fine* la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses à des problèmes de conception plus généraux, nous avons essayé d'aborder dans ce chapitre le cas de spécifications ne se traduisant non plus comme des fonctions explicites du temps mais comme des problèmes d'optimisation (ou tout au moins ici comme des problèmes de minimisation d'énergie).

De récents travaux ont déjà établi, dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps, une procédure bond graph d'optimisation. Grâce à la construction d'un modèle bond graph augmenté, celle-ci permet notamment d'obtenir les conditions d'optimalité

dont la résolution analytique fournit la solution au problème d'optimisation donné. D'un point de vue de l'optimisation dynamique, les avantages d'une telle procédure résident dans le fait qu'elle systématise l'obtention des équations du problème d'optimisation sans développer les conditions d'optimalité et qu'elle facilite l'interprétation physique de l'impact de chaque critère d'optimisation. Ce type de formulation graphique trouve un intérêt au sein de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses. Couplée à de l'inversion, celle-ci permettra potentiellement de traiter des cahiers des charges de nature hétérogène (cas de spécifications comportant des suivis de trajectoires et des problèmes d'optimisation par exemple). Globalement, cette procédure permet de réduire finalement les exigences en termes de rédaction du cahier des charges pour que la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses soit applicable sur un plus large panel de problèmes.

Une fois présentés les enjeux d'un tel couplage et les principes de cette procédure bond graph d'optimisation, les contributions de ce chapitre (résumées pour partie dans les deux communications [Jar08b, Jar09a] et dans l'article en cours de soumission [Jar09b]) se sont dès lors attachées à renforcer nos justifications quant à l'intérêt potentiel d'une telle démarche :

- d'une part, en étendant la procédure bond graph d'optimisation à une certaine classe de systèmes non linéaires, premier pas vers la considération de systèmes globalement non linéaires ;
- d'autre part, en prouvant sur l'exemple de deux masses en série, la possibilité de coupler réellement la méthodologie de dimensionnement à de l'optimisation dynamique.

Sur cet exemple, nous avons pu :

- légitimer le couplage entre inversion et optimisation (finalement rien n'interdit de prendre comme contraintes d'optimisation des équations d'état issues d'un modèle inverse puisque mathématiquement, comme dans le cas d'un modèle direct, cela revient à prendre en compte un système d'équations algébro-différentielles) ;
- établir une première conjecture quant à l'application de la procédure bond graph d'optimisation à des modèles inverses ;
- illustrer le fait qu'un tel couplage permet de réunir potentiellement les avantages de l'inversion et de l'optimisation tout en limitant leurs inconvénients (la procédure d'optimisation permet de traiter des contraintes de conception qui ne peuvent s'exprimer sous la forme de fonctions du temps tandis que l'inversion impose une contrainte plus forte en termes de suivi de trajectoire [24] par exemple).

Cependant, il est important de souligner que ce chapitre ne constitue en soi qu'une première étape vers un couplage complet de la méthodologie de dimensionnement à de l'optimisation dynamique. Les travaux présentés méritent d'être plus largement développés concernant notamment l'extension de la procédure bond graph d'optimisation aux modèles inverses (la conjecture établie sur l'exemple est-elle toujours valable dans le cas général ?).

24. comparée par exemple à un problème d'optimisation cherchant à minimiser l'erreur entre la sortie réelle et une sortie spécifiée.

Enfin, si ce présent chapitre est restreint à la résolution analytique des problèmes d'optimisation, le chapitre suivant achève quant à lui cette résolution en abordant la résolution numérique des conditions d'optimalité issues des modèles bond graph augmentés.

Chapitre 5

Contribution à la phase de dimensionnement : optimisation dynamique dans la méthodologie - Résolution numérique

Sommaire

5.1 Introduction 226

5.2 Difficultés numériques et méthodes employées pour la résolution des conditions d'optimalité 226

5.3 Résolution numérique dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires 229

5.3.1 Solution analytique pour le co-état initial 230

5.3.2 Méthode pour approximer la solution analytique du co-état initial 232

5.3.3 Exemple linéaire de problème d'optimisation dynamique 234

5.3.4 Exemple linéaire de couplage entre méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique 236

5.4 Résolution numérique dans le cas de problèmes d'optimisation non linéaires 238

5.4.1 Méthode globale de résolution des conditions d'optimalité . . . 239

5.4.2 Exemple linéaire de problème d'optimisation dynamique 241

5.4.3 Exemple non linéaire de problème d'optimisation dynamique . 244

5.5 Conclusion 249

5.1 Introduction

Afin d'élargir la classe de problèmes pouvant être traités par la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses, nous nous sommes intéressés, lors du chapitre précédent, aux cas de cahiers des charges de nature hétérogène où une partie des spécifications ne s'expriment pas comme des fonctions explicites du temps (et donc ne peuvent pas être considérées pour une inversion) mais comme des problèmes d'optimisation visant à minimiser une certaine puissance dissipée par le système. Par la construction graphique d'un modèle bond graph augmenté, nous avons notamment vu qu'il était possible, pour un problème d'optimisation donné, d'obtenir de manière systématique les conditions d'optimalité associées.

Cependant, l'obtention de ces conditions d'optimalité ne constitue en soi qu'une résolution partielle du problème d'optimisation : seule la résolution de ces conditions d'optimalité fournit effectivement la solution optimale $\left(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}^*_{opt}\right)$. Si la résolution analytique de ces équations (algébro-différentielles en général) est mathématiquement illusoire pour des problèmes de grandes tailles et comportant de fortes non linéarités, le recours *a posteriori* à une résolution numérique est indispensable.

Ce dernier chapitre se focalise sur cette problématique et achève ainsi la résolution des problèmes d'optimisation initiée lors du chapitre précédent. Après avoir détaillé les difficultés qu'engendre la résolution des conditions d'optimalité et établi un bref état de l'art sur les méthodes employées, ce chapitre étudie plus spécifiquement une méthode basée notamment sur l'existence d'une solution analytique pour le co-état initial $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$ dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires [1]. Le cas de problèmes d'optimisation non linéaires ne permettant pas d'établir une solution analytique générique pour le co-état initial, la contribution de ce chapitre se situe dans la dernière section où une autre méthode de résolution est appliquée grâce notamment à la mise en œuvre d'une discrétisation globale dans le temps des conditions d'optimalité.

5.2 Difficultés numériques et méthodes employées pour la résolution des conditions d'optimalité

Plaçons nous dans le cadre du chapitre précédent et considérons des problèmes de minimisation d'énergie ayant pour :

– Objectif : déterminer le vecteur d'entrée $\mathbf{u}_{opt}$ tel que :

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{u}_{opt}} V$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système étudié et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u^T & \mathbf{u}_{opt}^T \end{pmatrix}^T$ est le vecteur d'entrée du système étudié avec $\mathbf{u}_u \in \mathbb{R}^{m_u}$ le vecteur des entrées qui sont supposées connues et $\mathbf{u}_{opt} \in \mathbb{R}^{m_{opt}}$ le vecteur des entrées qui sont à déterminer par optimisation ;

1. Un problème d'optimisation sera ici dit linéaire lorsque l'indice de performance et les contraintes associées (ici le modèle d'état du système à optimiser) conduisent à des conditions d'optimalité linéaires.

– Indice de performance :

$$V = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\right) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left[\mathbf{u}_{opt}^T \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} + P_{diss}\right] dt \tag{5.1}$$

où :
  – $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \in \mathbb{R}^{m_{opt} \times m_{opt}}$ est la matrice de pondération des entrées à déterminer par optimisation ;
  – P_{diss} est la puissance dissipée par tout ou une partie des phénomères dissipatifs présents dans le système, $P_{diss} = \mathbf{e}_{R_{opt}}^T \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}}$ où $\mathbf{e}_{R_{opt}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$ (resp. $\mathbf{f}_{R_{opt}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$ est le vecteur d'effort (resp. de flux) associé aux phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance.

– Contraintes :
  – les équations d'état (5.2) du système étudié ;

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}\right) \tag{5.2}$$

  – les conditions aux limites sur le temps et l'état sont fixées :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \end{cases} \tag{5.3}$$

En utilisant une méthode indirecte de résolution telle que le principe de Pontryagin (principe rappelé à la section 4.3.2, page 165 ou encore à l'annexe F.2), nous avons alors vu que la résolution de tels problèmes d'optimisation passait par l'obtention des conditions d'optimalité suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H_p(t,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H_p(t,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_p(t,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}_{opt}} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{5.4}$$

où $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de co-état et $H_p\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\right) = \mathcal{L}\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\right) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}\right)$ est la fonction de Pontryagin.

Une fois ces conditions d'optimalité obtenues (*e.g.* de manière analytique ou bien en construisant un modèle bond graph augmenté comme nous l'avons vu au chapitre précédent), il convient alors de résoudre ce système (5.4) pour obtenir la solution finale $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}_{opt}^*)$ du problème d'optimisation considéré. Constitué d'équations en général algébro-différentielles, ce système peut très vite devenir impossible à résoudre de manière analytique surtout lorsque de fortes non linéarités y sont également présentes [2]. Le recours à des méthodes de résolution numérique est donc nécessaire.

De plus, puisque l'état initial et l'état final ont été fixés, la résolution des conditions d'optimalité doit tenir compte des contraintes (5.3) et revient donc, à ce stade, à résoudre un problème de conditions aux limites (*Two-Point Boundary Value Problem*) [Bie04, Ber06, Cos08]. La principale difficulté liée à la résolution d'un tel problème réside notamment dans le fait que :

2. Les non linéarités des conditions d'optimalité proviennent de la non linéarité des contraintes prises en compte (ici le modèle d'état du système étudié) et/ou d'une non linéarité de l'indice de performance considéré.

1. si la valeur de l'état initial $\mathbf{x}(t_0)$ est imposée, la valeur du co-état initial $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$ est, elle, inconnue et empêche toute résolution par intégration directe du système (5.4) ;
2. la valeur du co-état initial ne peut être choisie arbitrairement sous peine d'obtenir un état final différent de l'état final imposé $\mathbf{x}_f$.

Afin de franchir ces obstacles, Biegler et Grossmann [Bie04] ou encore Bertolazzi *et al.* [Ber06] distinguent principalement quatre types de méthodes :

– méthode « *invariant embedding* » : l'objectif de cette approche est de transformer le problème de conditions aux limites en un problème de la valeur initiale[3] (*Initial Value Problem*) notamment en considérant la valeur initiale du co-état comme étant une variable supplémentaire du problème (voir les travaux originaux de Bellman [Bel60, Bel63] et les articles de Costanza [Cos08, Cos07] pour plus de détails sur la mise en œuvre). Le principal inconvénient est que cette méthode aboutit à un système de dimension plus élevée que le problème de conditions aux limites original ;

– méthode de tir simple (*single shooting method*) [Bry75, Ber06] : cette méthode consiste à fixer une valeur de démarrage $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_0$ pour le co-état initial puis à intégrer le système (5.4) des conditions d'optimalité. L'état final obtenu $\widehat{\mathbf{x}}(t_f)$ est ensuite comparé à l'état final imposé $\mathbf{x}_f$ et la valeur estimée $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_0$ du co-état initial est alors plusieurs fois réajustée en procédant à des intégrations successives jusqu'à ce que l'état final imposé soit obtenu (*i.e.* $\widehat{\mathbf{x}}(t_f) \approx \mathbf{x}_f$). La solution obtenue est cependant très sensible par rapport à la valeur de démarrage $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_0$ choisie ;

– méthode de tirs multiples (*multiple shooting method*) [Fab96, Sto02, Jab05, Mit07] : cette approche divise l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ en sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ et applique la méthode de tir simple à chacun de ces intervalles. Ce « découpage » du problème permet notamment de diminuer la sensibilité de la solution par rapport aux valeurs de démarrage ;

– méthode de discrétisation (ou méthode globale) [Bry75, Ber06, Mir08, Cab08] : cette méthode consiste à discrétiser les conditions d'optimalité (5.4) sur tout l'intervalle de temps de manière à former, avec les conditions aux limites (5.3), un système carré (*i.e.* autant d'équations que d'inconnues) d'équations algébriques (éventuellement non linéaires). Une fois les dérivées des variables d'état et de co-état approximées par le schéma de discrétisation choisi, le système discrétisé est alors résolu par une méthode numérique, par exemple, du type Newton-Raphson[4]. La connaissance de la valeur initiale du co-état est alors calculée mais n'est pas requise pour lancer la résolution. Cette méthode aboutit, de manière générale, à une plus grande précision mais au prix cependant de plus grands efforts de calcul.

Enfin, à ces quatre types de méthodes, nous pouvons ajouter les méthodes basées sur le calcul direct du co-état initial $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$ [Dol05, Che06]. Basées sur l'existence d'une solution

3. Ce type de problème est également appelé problème de Cauchy.
4. Plus de détails sur cette méthode sont, par exemple, donnés dans le livre de Gourdin et Boumahrat [Gou83].

analytique, celles-ci ne sont cependant valables que dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires.

La suite de ce chapitre est consacrée à l'étude de quelqu'unes des méthodes précédemment citées. En allant progressivement vers une complexité croissante, nous étudions dans un premier temps une méthode de calcul du co-état initial dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires puis, nous présentons nos premiers travaux sur la mise en œuvre d'une méthode globale de résolution des conditions d'optimalité dans le cas de problèmes d'optimisation non linéaires. Des exemples de modèles bond graph augmentés sont également repris et quelques résultats de simulations numériques sont présentés.

5.3 Résolution numérique dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires

Pour mettre en évidence les difficultés qu'engendre la résolution des conditions d'optimalité, plaçons nous tout d'abord dans le contexte le plus simple, à savoir celui des problèmes d'optimisation linéaires. Par conséquent, les systèmes étudiés dans cette section sont supposés linéaires et invariants dans le temps tels que leurs équations d'état peuvent être mises sous la forme port-hamiltonienne suivante (annexes G et H.2) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^{T}\right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^{T}\right] \cdot \mathbf{u} \tag{5.5}$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état d'ordre minimal (*i.e.* constitué uniquement de variables d'état indépendantes) associé aux éléments de stockage d'énergie ;
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u^T & \mathbf{u}_{opt}^T \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{u}_u \in \mathbb{R}^{m_u}$ (resp. $\mathbf{u}_{opt} \in \mathbb{R}_{m_{opt}}$) le vecteur des entrées connues (resp. des entrées à déterminer par optimisation) ;
- $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice hessienne de H où H est l'Hamiltonien du système, à savoir une fonction du vecteur d'état $\mathbf{x}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et représentant l'énergie totale stockée dans le système ;
- $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs ;
- les indices $_{\mathbf{x}}$, $_{\mathbf{R}}$ et $_{\mathbf{u}}$ sont respectivement associés aux phénomènes de stockage d'énergie, aux phénomènes dissipatifs et au vecteur d'entrée ;
- $\forall(_{\mathbf{i},\mathbf{j}}) \in \{_{\mathbf{x},\mathbf{R},\mathbf{u}}\}, \mathbf{G}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ représente une matrice associée à la structure de jonction entre des phénomènes de type $_{\mathbf{i}}$ et $_{\mathbf{j}}$.

Plus particulièrement, après avoir prouvé l'existence dans ce cas particulier d'une solution analytique pour le calcul du co-état initial, nous aborderons une méthode d'approximation de cette solution avant de la mettre en œuvre sur deux exemples issus du chapitre précédent : le premier concernant l'optimisation d'un filtre électrique (exemple de la section 4.4.3, page 174) puis le second reprenant l'exemple de couplage entre méthodologie de dimensionnement et optimisation (exemple de la section 4.6.3, page 207). Il est à noter que les résultats présentés ici ont initialement été développés par Chereji *et al.* [Che06]. La seule contribution réside dans la généralisation des résultats aux cas où

seule une partie des entrées du système sont à optimiser et où les conditions d'optimalité forment un système non autonome.

5.3.1 Solution analytique pour le co-état initial

Dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps, les lois caractéristiques des phénomènes dissipatifs sont linéaires. Par conséquent, $\mathbf{e}_{R_{opt}} = \mathbf{R}_{opt} \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}}$ où $\mathbf{R}_{opt} \in \mathbb{R}^{r_{opt} \times r_{opt}}$ est la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance. La puissance dissipée à minimiser peut ainsi s'écrire sous la forme $P_{diss} = \mathbf{f}_{R_{opt}}^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}}$.

Dès lors, la forme de l'indice de performance (5.1) (page 227) ainsi que celle de l'équation d'état (5.5) (page 229) conduisent à obtenir les conditions d'optimalité suivantes (annexe H.2) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \mathbf{u} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}} = &- \frac{1}{2} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{u}\right] \\ &+ \mathbf{H} \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} + \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \boldsymbol{\lambda}\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}0 = &\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u_u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \mathbf{u}_u + \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \mathbf{u}_{opt}\right] \\ &+ \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R}}{}^T\right]^T \cdot \boldsymbol{\lambda}\end{aligned} \tag{5.8}$$

où, selon le même principe de notation que précédemment :

- les indices $_{\mathbf{x}}$, $_{\mathbf{R}}$, $_{\mathbf{R}_{opt}}$, $_{\mathbf{u}}$, $_{\mathbf{u}_u}$ et $_{\mathbf{u}_{opt}}$ sont respectivement associés aux phénomènes de stockage d'énergie, à tous les phénomènes dissipatifs présents au sein du système, aux phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance, au vecteur d'entrée, au vecteur des entrées connues et au vecteur des entrées à déterminer par optimisation ;
- $\forall(_{\mathbf{i},\mathbf{j}}) \in \{_{\mathbf{x}}, _{\mathbf{R}}, _{\mathbf{R}_{opt}}, _{\mathbf{u}}, _{\mathbf{u}_u}, _{\mathbf{u}_{opt}}\}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ représente une matrice associée à la structure de jonction entre des phénomènes de type $_{\mathbf{i}}$ et $_{\mathbf{j}}$.

En résolvant l'équation (5.8) par rapport au vecteur $\mathbf{u}_{opt}$ et en supposant que la matrice $\mathbf{W} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}}{}^T$ est inversible, la condition d'optimalité sur les entrées à déterminer par optimisation peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{opt} = &- \frac{1}{2} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u_u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{u}_u\right] \\ &- \mathbf{W}^{-1} \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R}}{}^T\right]^T \cdot \boldsymbol{\lambda}\end{aligned} \tag{5.9}$$

Par conséquent, en remplaçant $\mathbf{u}_{opt}$ par son expression (5.9) dans les équations (5.6) et (5.7), les conditions d'optimalité sur l'état et le co-état peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_a \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} + \mathbf{B}_a \mathbf{u}_u \tag{5.10}$$

où $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{a_{11}} & \mathbf{A}_{a_{12}} \\ \mathbf{A}_{a_{21}} & \mathbf{A}_{a_{22}} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{a_1} \\ \mathbf{B}_{a_2} \end{pmatrix}$ avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{a_{11}} &= \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right] \mathbf{H} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R}}{}^T\right] \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \mathbf{H} \\
\mathbf{A}_{a_{12}} &= -\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R}}{}^T\right] \mathbf{W}^{-1} \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R}}{}^T\right]^T \\
\mathbf{A}_{a_{21}} &= -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H} \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}} \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \mathbf{H} \\
&\quad + \frac{1}{4} \cdot \mathbf{H} \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}} \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \mathbf{H} \\
\mathbf{A}_{a_{22}} &= \mathbf{H}\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} + \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{H} \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}} \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \mathbf{W}^{-1} \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R}}{}^T\right]^T \\
\mathbf{B}_{a_1} &= \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_u},\mathbf{R}}{}^T\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R}}{}^T\right] \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \mathbf{G}_{\mathbf{u_u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \\
\mathbf{B}_{a_2} &= -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H} \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}} \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \mathbf{G}_{\mathbf{u_u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \\
&\quad + \frac{1}{4} \cdot \mathbf{H} \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}} \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \mathbf{G}_{\mathbf{u_u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T
\end{aligned}$$

Ainsi, résoudre les conditions d'optimalité (5.6)-(5.8) revient à résoudre le système différentiel ordinaire (5.10) par rapport à $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\lambda}$. Une fois les solutions $\mathbf{x}^*$ et $\boldsymbol{\lambda}^*$ trouvées, la commande optimale $\mathbf{u}_{opt}^*$ pourra être déterminée à partir de l'équation algébrique (5.9). Le système (5.10) étant un système linéaire et invariant dans le temps, la littérature montre que celui-ci admet pour solution la solution analytique suivante [Kai80] [5] :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{pmatrix} &= \exp^{\mathbf{A}_a \cdot (t-t_0)} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \exp^{\mathbf{A}_a \cdot (\tau - t_0)} \mathbf{B}_a \mathbf{u}_u(\tau)\, d\tau \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1(t-t_0) & \mathbf{M}_2(t-t_0) \\ \mathbf{M}_3(t-t_0) & \mathbf{M}_4(t-t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1(t-t_0) \\ \mathbf{N}_2(t-t_0) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

En réécrivant l'expression de $\mathbf{x}(t)$ au temps $t = t_f$, nous obtenons alors :

$$\mathbf{x}(t_f) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1(t_f - t_0) & \mathbf{M}_2(t_f - t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) \end{pmatrix} + \mathbf{N}_1(t_f - t_0)$$

Soit, en prenant en compte les conditions aux limites imposées $\mathbf{x}_0$ sur l'état initial et $\mathbf{x}_f$ sur l'état final :

$$\mathbf{x}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1(t_f - t_0) & \mathbf{M}_2(t_f - t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) \end{pmatrix} + \mathbf{N}_1(t_f - t_0)$$

5. Nous rappelons que, par définition [Mol03] :

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q \times q}, \exp^{\mathbf{A} \cdot t} = \mathbf{I}_q + t \cdot \mathbf{A} + \frac{t^2 \cdot \mathbf{A}^2}{2!} + \dots$$

où $I_q \in \mathbb{R}^{q \times q}$ est la matrice identité. De plus, lorsque la matrice $\mathbf{A}$ est la matrice d'état d'un système linéaire et invariant dans le temps, la matrice $\boldsymbol{\phi}(t) = \exp^{\mathbf{A} \cdot t}$ est appelée matrice de transition d'état (*state transition matrix*) [Joh71].

En supposant la matrice $\mathbf{M}_2(t_f - t_0)$ inversible, nous pouvons ainsi en déduire que le co-état initial peut être déterminé de manière analytique par la formule :

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = [\mathbf{M}_2(t_f - t_0)]^{-1} [\mathbf{x}_f - \mathbf{M}_1(t_f - t_0) \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{N}_1(t_f - t_0)] \tag{5.12}$$

Le modèle d'état du système étant supposé connu, il est alors possible de calculer les matrices $\mathbf{M}_1(t_f - t_0)$, $\mathbf{M}_2(t_f - t_0)$ et $\mathbf{N}_1(t_f - t_0)$ et donc de calculer effectivement la valeur initiale du co-état qui permettra d'aboutir aux conditions finales $\mathbf{x}_f$ fixées. Connaissant alors $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$, le système (5.10) peut ensuite être résolu par intégration directe afin d'achever la résolution du problème d'optimisation considéré.

5.3.2 Méthode pour approximer la solution analytique du co-état initial

De nombreuses méthodes existent pour calculer les exponentielles de matrices ou les intégrales d'exponentielles de matrices[6]. Parmi elles, nous pouvons citer, par exemple, l'approximation de Padé, le développement en série de Taylor, la méthode des équations différentielles ordinaires, les méthodes polynomiales telles que celles d'interpolation de Lagrange ou de Newton ou encore les méthodes basées sur la décomposition des matrices comme celles utilisant la forme canonique de Jordan ou bien la décomposition de Schur. Cependant, le comparatif très complet de Moler et Van Loan [Mol03] montre que, si chacune de ces méthodes présente des avantages et des inconvénients, aucune ne se distingue réellement des autres : le choix de l'une d'entre elles dépend de la précision recherchée, des capacités de calcul mises à disposition,...

Dans l'objectif de déterminer le co-état initial à partir de son expression analytique (5.12), le calcul de telles exponentielles est requis afin d'évaluer les matrices $\mathbf{M}_1(t_f - t_0)$, $\mathbf{M}_2(t_f - t_0)$ et $\mathbf{N}_1(t_f - t_0)$. Par simplicité de mise en œuvre, nous choisissons d'utiliser ici la méthode dite des équations différentielles ordinaires [Mol03, Dol05, Mou09]. Cette méthode permet d'estimer les cœfficients des matrices $\mathbf{M}_1(t_f - t_0)$, $\mathbf{M}_2(t_f - t_0)$ et $\mathbf{N}_1(t_f - t_0)$ par intégration numérique du système différentiel ordinaire (5.10) en imposant $[t_0, t_f]$ comme intervalle de simulation, en choisissant des conditions initiales arbitraires pour $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ et en prenant des valeurs particulières pour $\mathbf{u}_u$. En choisissant judicieusement ces valeurs arbitraires, cette méthode permet de calculer les différentes colonnes des matrices recherchées de manière simple et relativement découplée. En particulier [Mou09] :

- pour le calcul des matrices $\mathbf{M}_1(t_f - t_0)$ et $\mathbf{M}_2(t_f - t_0)$, il convient de fixer le vecteur $\mathbf{u}_u$ à zéro et de simuler le système (5.10) en imposant des conditions initiales nulles pour toutes les variables exceptée une variable où sa valeur initiale est fixée à 1. Cette simulation donnant une des colonnes $\mathbf{m}_{1_i}(t_f - t_0)$ ou $\mathbf{m}_{2_i}(t_f - t_0)$ des matrices $\mathbf{M}_1(t_f - t_0)$ et $\mathbf{M}_2(t_f - t_0)$, l'opération est ensuite répétée $2N$ fois (une fois pour chaque variable $\{x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$) de sorte que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\mathbf{m}_{1_i}(t_f - t_0) = \widehat{\mathbf{x}}(t_f)$$

6. Voir les nombreuses références citées dans la rétrospective de Moler et Van Loan [Mol03].

lorsque $\widehat{\mathbf{x}}(t_f)$ est obtenu en simulant (5.10) à partir des conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_i(t_0) = 1 \\ \forall k \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}, x_k(t_0) = 0 \\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \lambda_k(t_0) = 0 \end{cases}$$

Et :

$$\mathbf{m}_{2_i}(t_f - t_0) = \widehat{\mathbf{x}}(t_f)$$

lorsque $\widehat{\mathbf{x}}(t_f)$ est obtenu en simulant (5.10) à partir des conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_k(t_0) = 0 \\ \lambda_i(t_0) = 1 \\ \forall k \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}, \lambda_k(t_0) = 0 \end{cases}$$

– pour le calcul de la matrice $\mathbf{N}_1(t_f - t_0)$: il convient de fixer les valeurs initiales de toutes les variables à zéro puis de simuler une fois le système (5.10) avec un vecteur $\mathbf{u}_u$ suivant l'évolution initialement considérée lors de la formulation du problème d'optimisation. Les cœfficients de la matrice $\mathbf{N}_1(t_f - t_0)$ sont alors calculés de la manière suivante :

$$\mathbf{N}_1(t_f - t_0) = \widehat{\mathbf{x}}(t_f)$$

où $\widehat{\mathbf{x}}(t_f)$ est la valeur finale obtenue pour l'état lorsque toutes les conditions initiales sont fixées à zéro et $\mathbf{u_u}$ suit l'évolution initialement considérée lors de la formulation du problème d'optimisation.

La section suivante illustre sur deux exemples la résolution numérique complète des conditions d'optimalité dont notamment la mise en œuvre de cette méthode d'approximation d'exponentielles de matrices. La démarche suivie se déroule en quatre étapes :

1. Estimation des matrices $\mathbf{M}_1(t_f - t_0)$, $\mathbf{M}_2(t_f - t_0)$ et $\mathbf{N}_1(t_f - t_0)$ par la méthode des équations différentielles ordinaires ;
2. Calcul, grâce à l'équation (5.12), du co-état initial $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$ à partir des conditions aux limites imposées sur l'état initial et l'état final ;
3. Intégration des conditions d'optimalité (5.10) sur l'état et le co-état à partir de l'état initial imposé $\mathbf{x}_0$ et du co-état initial calculé à l'étape précédente ;
4. Détermination de la commande optimale $\mathbf{u}^*_{opt}$ à partir de l'équation (5.9) et des évolutions de l'état et du co-état obtenues à l'étape précédente.

Plutôt que de déterminer l'expression formelle des conditions d'optimalité pour les résoudre, notons que les étapes 1 et 3 ont notamment été réalisées en simulant directement le modèle bond graph augmenté associé au problème considéré [7]. Les simulations présentées dans ce qui suit ont notamment été conduites grâce au logiciel MS1 [MS1] et un de ses solveurs associés : ESACAP [ESA].

7. Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre précédent, rappelons en effet que le modèle bond graph associé au problème d'optimisation représente les conditions d'optimalité où le vecteur $\mathbf{u}_{opt}$ a été remplacé par son expression en fonction de $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\lambda}$. Cette manipulation correspond exactement à ce que nous avons fait pour obtenir le système différentiel ordinaire (5.10).

5.3.3 Exemple linéaire de problème d'optimisation dynamique

Reprenons l'exemple du filtre électrique de la section 4.4.3, page 174 (rappel du schéma technologique à la figure 5.1).

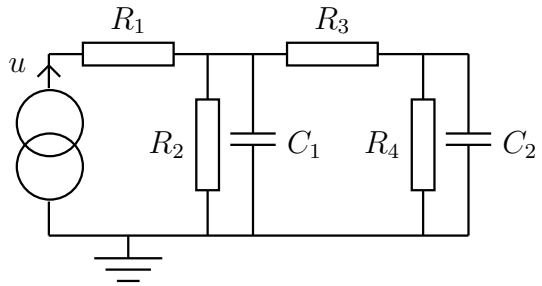


FIGURE 5.1 – Schéma technologique d'un filtre électrique

Dans cet exemple, le problème d'optimisation considéré consiste à : « déterminer l'entrée en intensité u de sorte que la puissance dissipée par les résistances R_1, R_2 et R_4 soit minimisée, que des conditions aux limites sur l'état initial et final soient respectées et que les équations d'état du système soient prises comme contraintes ». Dans le chapitre précédent, nous avons alors vu que les conditions d'optimalité associées à ce problème d'optimisation pouvaient être obtenues grâce au modèle bond graph augmenté de la figure 4.8 (Fig. 5.2).

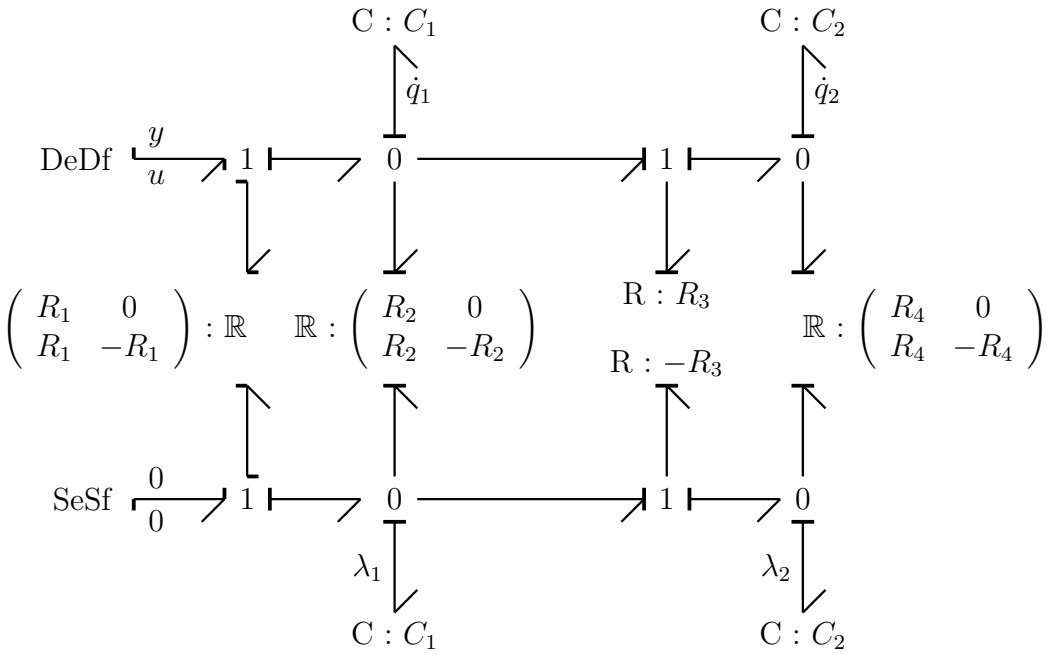


FIGURE 5.2 – Modèle bond graph augmenté dans l'exemple du filtre électrique

En prenant comme valeurs numériques celles indiquées dans le tableau 5.1 et en appliquant la méthode de calcul du co-état initial expliquée à la section 5.3.2, nous obtenons

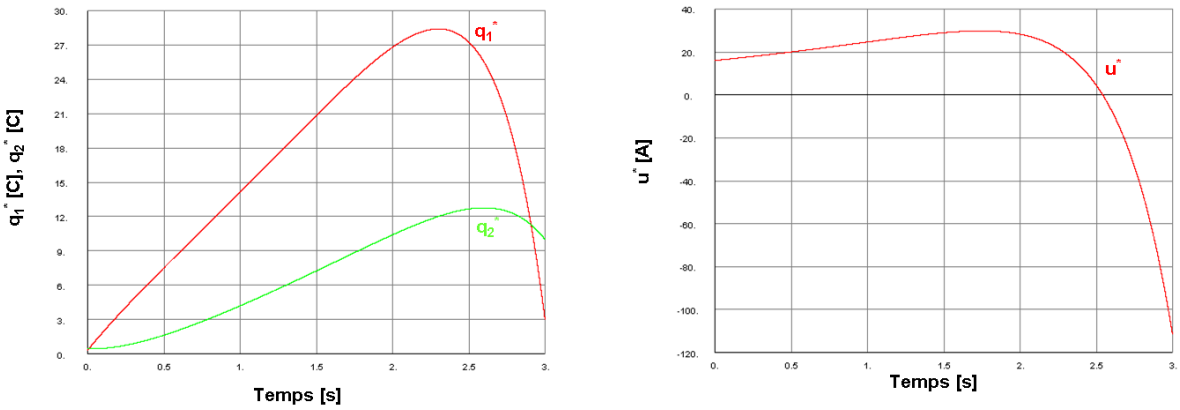
alors :

$$\begin{cases} \lambda_1(t_0) \approx -320.92069 \text{ C.F}^{-1} \\ \lambda_2(t_0) \approx -209.42243 \text{ C.F}^{-1} \end{cases}$$

Paramètres du modèle	$C_1 = 1.0$ F
	$C_2 = 1.0$ F
	$R_1 = 10.0\ \Omega$
	$R_2 = 10.0\ \Omega$
	$R_3 = 1.0\ \Omega$
	$R_4 = 1.0\ \Omega$
Paramètres du problème d'optimisation	$t_0 = 0$ s
	$t_f = 3.0$ s
Conditions initiales sur l'état	$q_1(t_0) = 0.33$ C
	$q_2(t_0) = 0.45$ C
Conditions finales sur l'état	$q_1(t_f) = 3.0$ C
	$q_2(t_f) = 10.0$ C

TABLE 5.1 – Valeurs numériques choisies pour l'exemple du filtre électrique

En réinjectant ces valeurs de co-état initial dans le modèle bond graph augmenté de la figure 5.2, une simulation numérique de ce modèle nous permet d'obtenir le triplet de solution optimale (q_1^*, q_2^*, u^*) (Fig.5.3).



(a) Variables d'état

(b) Entrée optimale en intensité

FIGURE 5.3 – Résolution numérique du problème d'optimisation associé à l'exemple du filtre électrique

À l'issue de ces résultats numériques, nous constatons notamment que les évolutions calculées des variables d'état q_1 et q_2 vérifient bien les conditions finales imposées (*i.e.* $q_1(t_f) \approx 3.0$ C et $q_2(t_f) \approx 10.0$ C) [8].

8. En réalité, l'état final obtenu $q_1(t_f) = 2.9295$ C et $q_2(t_f) = 9.98492$ C est légèrement différent de l'état final imposé $q_{1_f} = 3.0$ C et $q_{2_f} = 10.0$ C. Cette imprécision est due à l'approximation des exponentielles de matrices mais aussi aux erreurs d'arrondis et de troncatures.

5.3.4 Exemple linéaire de couplage entre méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique

Reprenons maintenant l'exemple de couplage entre méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique (exemple de la section 4.6.3, page 207). Comme l'illustre la figure 4.28 (Fig. 5.4), celui-ci concerne deux masses en séries, reliées entre elles par des ressorts et amortisseurs en parallèle et soumises à l'action de deux efforts F_1 et F_2.

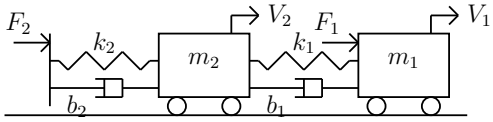


FIGURE 5.4 – Schéma technologique de deux masses en série

Dans cet exemple, le problème de dimensionnement considéré est de déterminer les efforts F_1 et F_2 de sorte que :

- la vitesse V_1 de la première masse m_1 suive une trajectoire prédéfinie $V_{1_{ref}}$ (spécification n°1) ;
- l'énergie dissipée P_{diss,b_2} par le deuxième amortisseur de cœfficient visqueux b_2 soit minimisée (spécification n°2).

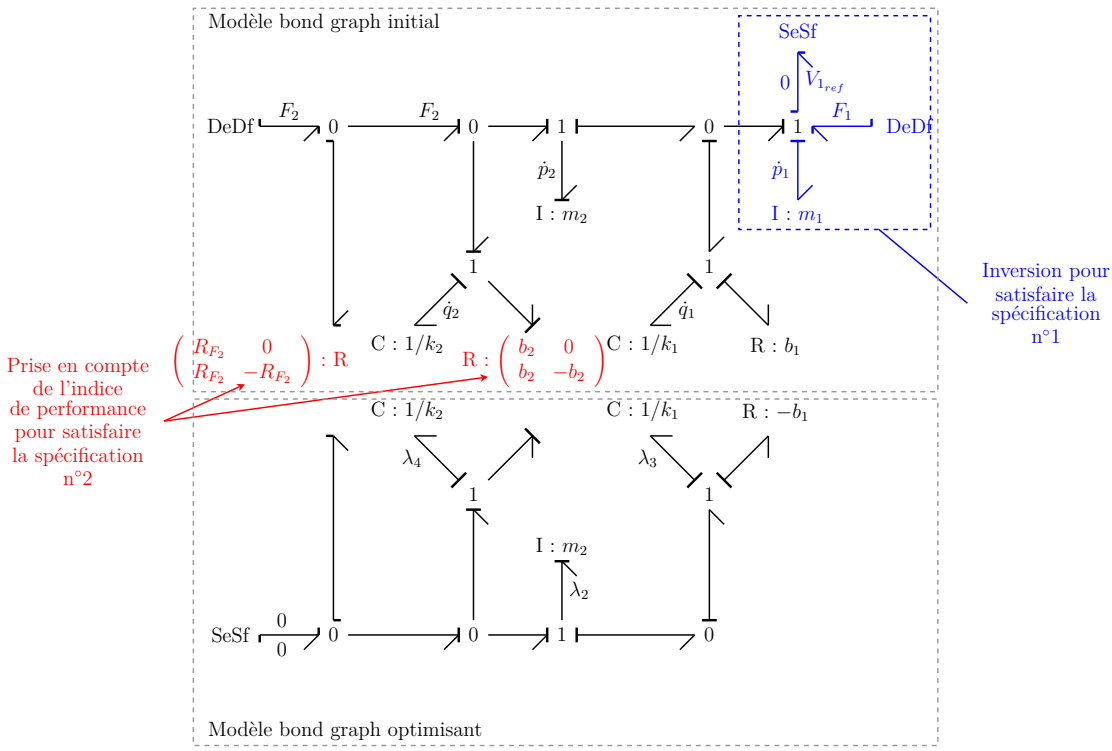


FIGURE 5.5 – Modèle bond graph augmenté couplant inversion et optimisation dans l'exemple des deux masses en série

L'objectif initial est de résoudre ce problème de dimensionnement en couplant inversion et optimisation afin de satisfaire simultanément les spécifications n°1 et n°2. Nous avons déjà vu que cette résolution implique la résolution des conditions d'optimalité (4.50) (page 210) qui peuvent être représentées de manière équivalente par le modèle bond graph augmenté de la figure 4.32 (Fig. 5.5).

La démarche décrite à la section 5.3.2 a alors été appliquée pour résoudre ces conditions d'optimalité. Le tableau 5.2 récapitule notamment les valeurs numériques fixées par le cahier des charges et celles choisies pour paramétrer le modèle. À ce sujet, remarquons que le cahier des charges ne peut pas imposer des conditions initiales et finales sur l'état de manière totalement arbitraire : ces valeurs doivent être cohérentes avec les sorties spécifiées (ou plus généralement avec le vecteur $\mathbf{u}_u$ des entrées connues du modèle). Ici, en l'occurrence, seules les valeurs de p_1 doivent être compatibles avec la trajectoire imposée $V_{1_{ref}}$, les valeurs initiales et finales des autres variables peuvent être choisies arbitrairement [9].

Paramètres du modèle	$m_1 = 10.0$ kg $m_2 = 5.0$ kg $k_1 = 1.0$ N/m $k_2 = 2.0$ N/m $b_1 = 0.1$ N/(m.s^{-1}) $b_2 = 0.4$ N/(m.s^{-1})
Paramètres du problème d'optimisation	$t_0 = 0$ s $t_f = 5$ s $R_{F_2} = 10.0$ $V_{1_{ref}}(t) = \sin(t)$ m.s^{-1}
Conditions initiales sur l'état	$p_{1_0} = m_1 V_{1_{ref}}(t_0) = 0$ kg.m.s^{-1} $p_{2_0} = 0.5$ kg.m.s^{-1} $q_{1_0} = 0.4$ m $q_{2_0} = 0.3$ m
Conditions finales sur l'état	$p_{1_f} = m_1 V_{1_{ref}}(t_f) \approx -9.58924$ kg.m.s^{-1} $p_{2_f} = 1.0$ kg.m.s^{-1} $q_{1_f} = 2.5$ m $q_{2_f} = 5.0$ m

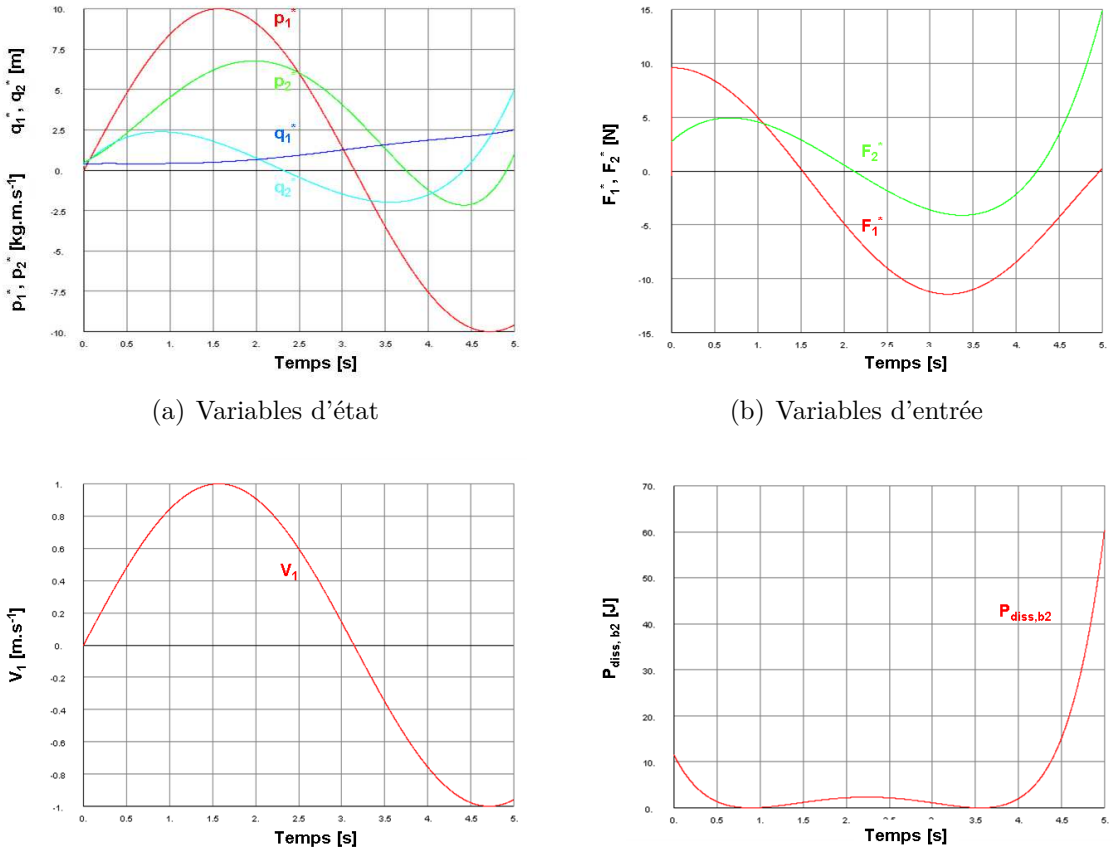
TABLE 5.2 – Valeurs numériques des paramètres choisis dans l'exemple des deux masses en série

Grâce au logiciel MS1 [MS1], la méthode du calcul du co-état initial expliquée à la section 5.3.2 nous a permis d'obtenir :

$$\begin{cases} \lambda_2(t_0) \approx -1.75168 \text{ m.s}^{-1} \\ \lambda_3(t_0) \approx -3.02466 \text{ N} \\ \lambda_4(t_0) \approx -1.55337 \text{ N} \end{cases}$$

9. Rappelons également que l'ordre d'essentialité de la sortie associée étant égal à 1, la trajectoire spécifiée $V_{1_{ref}}$ devait être au moins une fois dérivable (section 4.6.3, page 207).

Après avoir injecté ces valeurs initiales, la simulation numérique du modèle bond graph augmenté de la figure 5.5 (et donc la résolution numérique des conditions d'optimalité (4.50), page 210) a été menée également sous le logiciel MS1. La figure 5.6 présente ainsi les évolutions obtenues pour les variables d'état, les entrées optimales et les deux variables représentant les spécifications initiales : V_1 et P_{diss,b_2}.



(a) Variables d'état

(b) Variables d'entrée

(c) Spécification n°1

(d) Spécification n°2

FIGURE 5.6 – Résolution numérique du couplage optimisation/inversion dans l'exemple des deux masses en série

Nous pouvons ainsi vérifier qu'à l'instant t_f, les variables d'état atteignent bien les valeurs finales fixées [10] (Fig. 5.6(a)) et que la spécification n°1 est bien satisfaite puisque la vitesse V_1 de la première masse suit la forme sinusoïdale de $V_{1_{ref}}$ (Fig. 5.6(c)).

5.4 Résolution numérique dans le cas de problèmes d'optimisation non linéaires

Dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires, nous avons détaillé à la section précédente une méthode de résolution numérique des conditions d'optimalité associées.

10. ou tout au moins que les valeurs finales obtenues atteignent les valeurs finales fixées à une erreur de tolérance près.

Après transformation des conditions d'optimalité en un système différentiel ordinaire, cette méthode se base sur la connaissance, dans le cas linéaire, d'une solution analytique générique pour un tel système. Associée aux conditions aux limites imposées sur l'état initial et l'état final, cette solution nous permet de déterminer une expression analytique générique pour le calcul du co-état initial et nous permet ainsi d'achever la résolution des conditions d'optimalité par simple intégration.

Cependant, dans le cas de problèmes d'optimisation non linéaires, l'application d'une telle méthode n'est plus possible puisque :

- certaines non linéarités peuvent rendre *a priori* illusoire la résolution analytique de la condition d'optimalité par rapport au vecteur $\mathbf{u}_{opt}$ des entrées à déterminer par optimisation, ce qui peut ainsi empêcher la transformation des conditions d'optimalité en un système différentiel ordinaire ;
- si toutefois le problème a pu être mis sous la forme d'un système différentiel ordinaire, celui-ci est un système non linéaire dont aucune solution analytique générique ne peut, cette fois-ci, être établie (sauf cas particulier).

Pour faire face à ces obstacles, cette section étudie une autre méthode de résolution des conditions d'optimalité à savoir, ici, une méthode globale de résolution (voir les différents types de méthodes présentés à la section 5.2, page 226). Après en avoir détaillé le principe et les différentes étapes, cette méthode est associée pour la première fois à la procédure bond graph d'optimisation. La mise en œuvre de cette méthode globale de résolution est notamment illustrée à l'aide de deux exemples : le premier exemple reprend l'exemple linéaire du filtre électrique à titre de comparaison avec la méthode de la section 5.3 (page 229) tandis que le second exemple justifie l'utilisation de la méthode globale de résolution sur un cas d'optimisation non linéaire.

5.4.1 Méthode globale de résolution des conditions d'optimalité

Dans le cas de problèmes d'optimisation non linéaires, plusieurs auteurs ont d'ores et déjà appliqué une méthode globale de résolution des conditions d'optimalité. Parmi eux, nous pouvons citer entre autres : Bryson et Ho [Bry75], Da Lio *et al.* [Da 99] pour leur application sur la manœuvrabilité d'un véhicule, Bertolazzi *et al.* [Ber05, Ber06] dans le contexte des systèmes multicorps, Caboussat et Leonard [Cab08] pour l'étude de populations de particules ou encore Miranda *et al.* [Mir08] concernant l'optimisation de processus chimiques.

Dans son principe, afin de s'affranchir de la non-connaissance *a priori* de la valeur du co-état initial, la méthode globale de résolution consiste à discrétiser les conditions d'optimalité (équations algébro-différentielles) de manière à ramener le problème à la résolution d'un système carré (*i.e.* autant d'équations que d'inconnues) purement algébrique (système éventuellement non linéaire si les conditions d'optimalité non discrétisées sont non linéaires). Pour cela, la démarche à suivre se déroule en cinq étapes :

1. S'il est possible de le faire, résolution analytique de la condition d'optimalité par rapport au vecteur $\mathbf{u}_{opt}$ puis substitution de $\mathbf{u}_{opt}$ par son expression en fonction de $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\lambda}$ et $\mathbf{u}_u$ dans les conditions d'optimalité par rapport à l'état et au co-état

(étape facultative permettant de restreindre par la suite la dimension du système discrétisé) ;

2. Division de l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ en sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$;
3. Choix d'un schéma de discrétisation puis discrétisation des conditions d'optimalité par rapport à l'état et au co-état (plus éventuellement discrétisation de la condition d'optimalité par rapport à $\mathbf{u}_{opt}$ si l'étape 1 n'a pu être réalisée) ;
4. Résolution par une méthode numérique (*e.g.* méthode de type NEWTON-RAPHSON [Gou83]) du système discrétisé obtenu à l'issue de l'étape précédente (système carré et algébrique) ;
5. Si l'étape 1 a pu être réalisée, détermination *a posteriori* du vecteur d'entrée optimal $\mathbf{u}_{opt}$ à partir des évolutions de l'état et du co-état calculées à l'étape précédente.

Cette méthode permet ainsi d'obtenir directement une solution discrétisée valable sur tout l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$. Par la même occasion, la valeur du co-état initial est donc également calculée même si, ici, cette valeur n'est par la suite pas exploitée.

Bien entendu, la démarche présentée ici ne se veut être qu'une démarche générale. De nombreuses variantes pourront être trouvées en fonction : de la discrétisation de l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ (discrétisation à pas $t_{i+1} - t_i$ constant, à pas variable), du choix du schéma de discrétisation pour les conditions d'optimalité (*e.g.* méthode d'EULER [11], développement limité en série de TAYLOR à l'ordre 2 ou plus, méthode de RUNGE et KUTTA, méthode des différences finies [Bak76]) ou encore du choix de la méthode de résolution du système discrétisé (*e.g.* méthode de NEWTON-RAPHSON [Bak76] ou une de ses variantes comme celle de VON MISES [Gou83]). En fonction des choix effectués, ces méthodes pourront fournir une solution plus ou moins précise et seront plus ou moins coûteuses en temps et en effort de calcul. Ici, afin d'initier nos premiers travaux sur l'utilisation dans la procédure bond graph d'optimisation d'une méthode globale de résolution, nous avons choisi de mettre en œuvre la version la plus simple de cette démarche globale de résolution, à savoir de réaliser :

- une discrétisation de l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ à pas $h = t_{i+1} - t_i$ constant ;
- une discrétisation des conditions d'optimalité par la méthode d'EULER explicite.

La méthode d'EULER explicite consiste notamment à approximer la dérivée d'une application $\mathbf{m}$ à un instant t_i de sorte que :

$$\dot{\mathbf{m}}(t_i) \approx \frac{\mathbf{m}_{i+1} - \mathbf{m}_i}{t_{i+1} - t_i}$$

où $\mathbf{m}_i$ est, par notation, une approximation de l'application $\mathbf{m}$ à l'instant t_i. Aussi, toute équation différentielle ordinaire :

$$\dot{\mathbf{m}}(t_i) = \mathbf{n}\left(\mathbf{z}_1(t_i), \ldots, \mathbf{z}_q(t_i)\right)$$

est par conséquent approximée par la relation algébrique suivante :

$$\mathbf{m}_{i+1} = \mathbf{m}_i + (t_{i+1} - t_i) \cdot \mathbf{n}\left(\mathbf{z}_{1_i}, \ldots, \mathbf{z}_{q_i}\right)$$

11. La méthode d'EULER consiste en fait à effectuer un développement limité en série de TAYLOR à l'ordre 1.

où les notations $\mathbf{z}_{1_i}$, ..., $\mathbf{z}_{q_i}$ désignent une approximation respectivement des applications $\mathbf{z}_1$, ..., $\mathbf{z}_q$ à l'instant t_i.
Ainsi, en appliquant cette méthode d'Euler explicite, les conditions d'optimalité de la forme (5.13) seront approximées par le système discrétisé (5.14).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}\right) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}\right) \\ \mathbf{k}\left(\mathbf{u}_{opt}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}\right) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, N-1\}, \begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + h \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i\right) \\ \boldsymbol{\lambda}_{i+1} = \boldsymbol{\lambda}_i + h \cdot \mathbf{g}\left(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{u}_i\right) \end{cases} \\ \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \mathbf{k}\left(\mathbf{u}_{opt_i}, \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{u}_i\right) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_N = \mathbf{x}_f \end{cases} \tag{5.14}$$

où :

- N est le nombre de points de discrétisation ;
- $h = \frac{t_f - t_0}{N-1}$ est le pas constant de discrétisation ;
- $\forall i \in \{1, \ldots, N-1\}, t_i = t_0 + h \cdot i$;
- par notation, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $\mathbf{x}_i$, $\boldsymbol{\lambda}_i$, $\mathbf{u}_{opt_i}$ et $\mathbf{u}_i$ sont respectivement des approximations des vecteurs $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{u}_{opt}$ et $\mathbf{u}$ à l'instant t_i.

La section suivante met en application cette méthode globale de résolution dans le cadre de deux études. En reprenant l'exemple linéaire du filtre électrique, la première étude sert de comparaison entre méthode de résolution globale et méthode du calcul du co-état initial (méthode présentée à la section 5.3.2, page 232). Quant à la seconde étude, celle-ci justifie l'intérêt et la faisabilité d'une méthode globale de résolution dans le cas d'un problème d'optimisation non linéaire. Des résultats numériques issus de simulations effectuées cette fois-ci sous Matlab [Mat] (premier exemple) ou Maple [Mapa] (deuxième exemple) sont notamment présentés.

5.4.2 Exemple linéaire de problème d'optimisation dynamique

Reprenons l'exemple du filtre électrique de la section 5.3.3 (page 234). Initialement introduit à la section 4.4.3 (page 174), nous avons déjà vu que les conditions d'optimalité

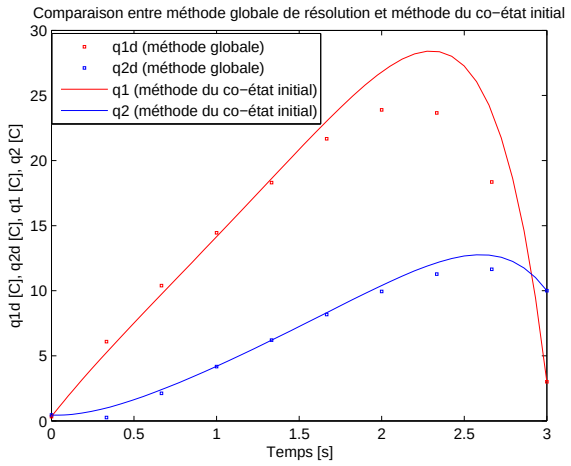
et les conditions aux limites associées correspondent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\frac{1}{C_1}\cdot q_1 + \frac{1}{R_3C_2}\cdot q_2 - \frac{1}{R_1}\cdot\lambda_1 \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{R_3C_1}\cdot q_1 - \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\cdot\frac{1}{C_2}\cdot q_2 \\ \dot{\lambda}_1 = -\frac{1}{R_2C_1^2}\cdot q_1 + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\frac{1}{C_1}\cdot\lambda_1 - \frac{1}{R_3C_1}\cdot\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{1}{R_4C_2^2}\cdot q_2 - \frac{1}{R_3C_2}\cdot\lambda_1 + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\cdot\frac{1}{C_2}\cdot\lambda_2 \\ u = -\frac{1}{R_1}\cdot\lambda_1 \\ q_1(t_0) = q_{1_0} \\ q_2(t_0) = q_{2_0} \\ q_1(t_f) = q_{1_f} \\ q_2(t_f) = q_{2_f} \end{cases} \tag{5.15}$$

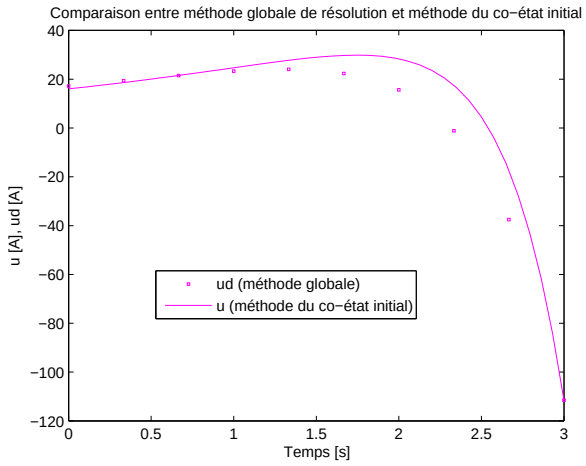
Issu du modèle bond graph augmenté de la figure 5.2 (page 234), ce système correspond plus exactement aux conditions d'optimalité où l'entrée u a été remplacée par son expression en fonction de λ_1 dans les conditions d'optimalité par rapport au vecteur d'état $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ et par rapport au vecteur de co-état $\boldsymbol{\lambda}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. La première étape de la méthode globale de résolution a donc d'ores et déjà été effectuée. En suivant les étapes 2 et 3 expliquées à la section 5.4.1 (page 239), la discrétisation du système (5.15) conduit à l'obtention du système algébrique suivant à $5N$ équations et $5N$ inconnues q_{1_i}, q_{2_i}, λ_{1_i}, λ_{2_i} et u_i :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,\ldots,N-1\}, \begin{cases} q_{1_{i+1}} = q_{1_i} - h\cdot\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\frac{1}{C_1}\cdot q_{1_i} + h\cdot\frac{1}{R_3C_2}\cdot q_{2_i} - h\cdot\frac{1}{R_1}\cdot\lambda_{1_i} \\ q_{2_{i+1}} = q_{2_i} + h\cdot\frac{1}{R_3C_1}\cdot q_{1_i} - h\cdot\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\cdot\frac{1}{C_2}\cdot q_{2_i} \\ \lambda_{1_{i+1}} = \lambda_{1_i} - h\cdot\frac{1}{R_2C_1^2}\cdot q_{1_i} + h\cdot\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot\frac{1}{C_1}\cdot\lambda_{1_i} - h\cdot\frac{1}{R_3C_1}\cdot\lambda_{2_i} \\ \lambda_{2_{i+1}} = \lambda_{2_i} - h\cdot\frac{1}{R_4C_2^2}\cdot q_{2_i} - h\cdot\frac{1}{R_3C_2}\cdot\lambda_{1_i} + h\cdot\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)\cdot\frac{1}{C_2}\cdot\lambda_{2_i} \end{cases} \\ \forall i \in \{1,\ldots,N\}, u_i = -\frac{1}{R_1}\cdot\lambda_{1_i} \\ q_{1_1} = q_{1_0} \\ q_{2_1} = q_{2_0} \\ q_{1_N} = q_{1_f} \\ q_{2_N} = q_{2_f} \end{cases}$$

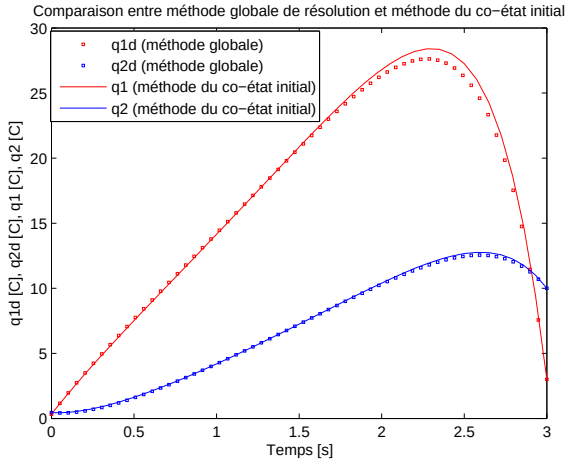
En prenant les mêmes paramètres que ceux utilisés lors de la résolution par la méthode du co-état initial (Tab. 5.1, page 235) et en résolvant ce système algébrique grâce à la fonction `solve` de Matlab, nous obtenons les résultats numériques de la figure 5.7 respectivement pour $N = 10$, $N = 60$ et $N = 300$.



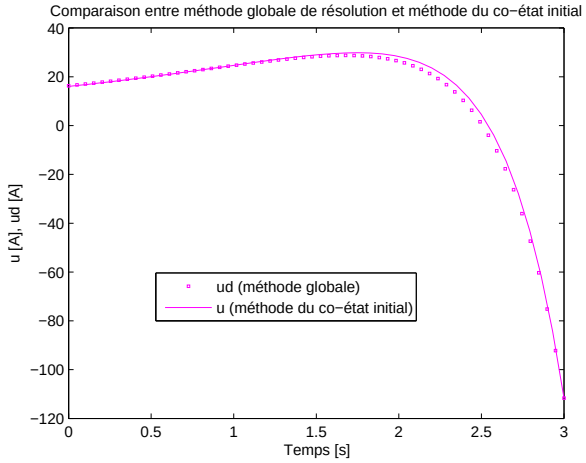
(a) Variables d'état (cas où $N = 10$)



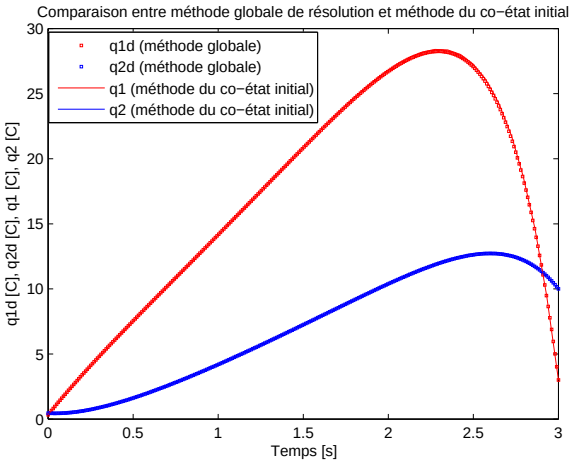
(b) Entrée optimale en intensité (cas où $N = 10$)



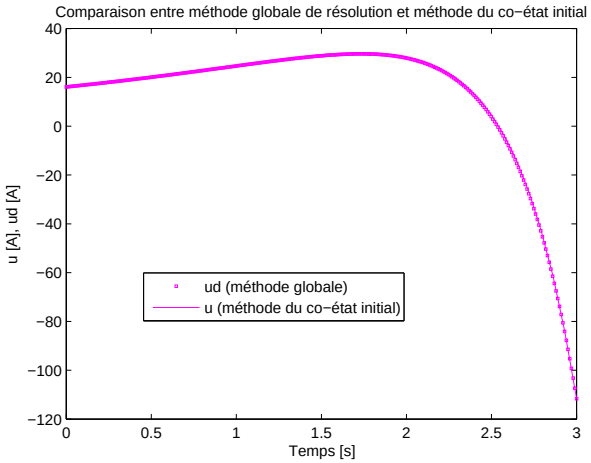
(c) Variables d'état (cas où $N = 60$)



(d) Entrée optimale en intensité (cas où $N = 60$)



(e) Variables d'état (cas où $N = 300$)



(f) Entrée optimale en intensité (cas où $N = 300$)

FIGURE 5.7 – Résolution numérique du problème d'optimisation associé à l'exemple du filtre électrique : comparaison entre méthode globale et méthode du co-état initial

Par construction même de la méthode globale de résolution, nous constatons que les conditions aux limites sont toujours vérifiées. De plus, plus le nombre de point de discrétisation est important, plus la solution discrétisée est précise et se rapproche de la solution analytique au problème d'optimisation (solution évaluée ici par la méthode du co-état initial).

5.4.3 Exemple non linéaire de problème d'optimisation dynamique

Dans cette section, résolvons un problème d'optimisation non linéaire sur l'exemple d'un supercondensateur.

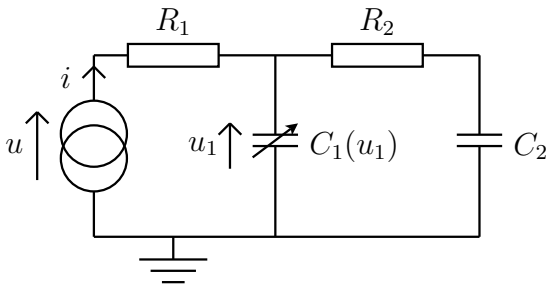


FIGURE 5.8 – Schéma technologique d'un supercondensateur

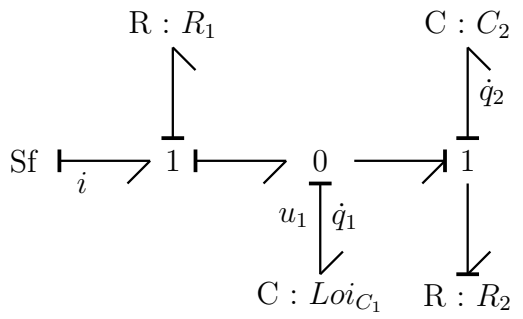
Vu comme un intermédiaire entre les condensateurs classiques et les batteries, l'intérêt d'un tel dispositif réside dans sa capacité à restituer l'énergie plus rapidement qu'une batterie. Si plusieurs modélisations existent afin de représenter un tel système [Dia09], nous choisissons ici de caractériser le supercondensateur par le modèle à deux branches établi par BONERT et ZUBIETA [Zub00] et repris notamment par DIAB [Dia09]. Ce modèle repose sur la partition de l'énergie électrostatique du supercondensateur en deux parties :

- une première partie où l'énergie est rapidement stockée ou disponible ;
- et une seconde partie où, à l'inverse, l'énergie est lentement stockée ou disponible.

Dès lors, le supercondensateur peut être vu comme l'association de deux modules (Fig. 5.8) [Jug09] :

- un premier comportant une résistance R_1 et un condensateur C_1 à capacité variable ($C_1(u_1) = C_v u_1 + C_0$ où u_1 est la tension aux bornes du condensateur C_1). Ce condensateur est dit principal et rend compte de l'évolution de l'énergie durant les périodes de charge ou de décharge ;
- un second comportant une résistance R_2 et un condensateur C_2. Ce module, dit lent, permet de décrire la redistribution interne de l'énergie après les périodes de charge ou de décharge.

En supposant la charge et la tension du condensateur C_1 nulles à l'instant initial (*i.e.* $q_1(t_0) = 0$ et $u_1(t_0) = 0$), il peut être montré que la loi caractéristique de ce condensateur peut également se mettre sous la forme [Jug09] : $u_1 = \frac{C_0}{C_v}\left(\sqrt{1 + \frac{2C_v q_1}{C_0^2}} - 1\right)$. Conformément aux règles de modélisation bond graph énoncées à l'annexe A, le supercondensateur peut alors être représenté par le modèle bond graph de la figure 5.9.



$$\boxed{Loi_{C_1} : u_1 = \frac{C_0}{C_v}\left(\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}-1\right)}$$

FIGURE 5.9 – Modèle bond graph causal d'un supercondensateur

Supposons alors que le but de l'étude soit de déterminer l'entrée en intensité i permettant de minimiser la puissance dissipée par la résistance R_2. L'étude s'apparente alors à un problème d'optimisation avec pour :

- Objectif : déterminer i tel que :

$$\min_{q_1,q_2,i} V \tag{5.16}$$

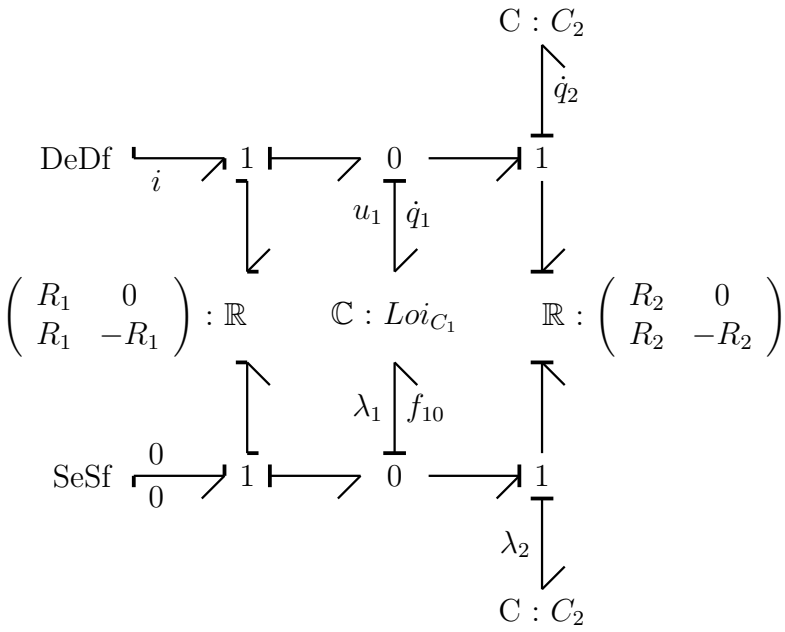
  où q_1 et q_2 sont respectivement les charges associées aux condensateurs C_1 et C_2 ;
- Indice de performance :

$$V = \int_{t_0}^{t_f} \left[R_1 \cdot i^2 + P_{diss,R_2}\right] dt \tag{5.17}$$

  où P_{diss,R_2} est la puissance dissipée par la résistance R_2.
- Contraintes :
  - les équations d'état du modèle de supercondensateur ;
  - des conditions aux limites fixées sur les temps et les états initiaux et finaux.

Remarque : Comme pour l'exemple du filtre électrique, il n'est pas utile de faire apparaître un terme supplémentaire de pondération de l'entrée i puisque R_1 modélise déjà en quelque sorte le caractère non idéal de la source de courant.

En appliquant au modèle bond graph initial (Fig. 5.9) la procédure bond graph d'optimisation 5 (page 194), nous obtenons alors le modèle bond graph augmenté de la figure 5.10 correspondant au problème d'optimisation (5.16)-(5.17).



$$Loi_{C_1} : \begin{cases} u_1 = \frac{C_0}{C_v}\left(\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}-1\right) \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{C_0}{C_v}\left(\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}-1\right)\right) f_{10} = \frac{1}{C_0\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}} f_{10} \end{cases}$$

FIGURE 5.10 – Modèle bond graph augmenté dans l'exemple d'un supercondensateur

L'exploitation de ce modèle bond graph augmenté conduit à l'obtention des conditions d'optimalité suivantes :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -\frac{C_0}{C_v R_2}\left(\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}-1\right) + \frac{1}{C_2 R_2}\cdot q_2 - \frac{1}{R_1}\cdot\lambda_1 \\ \dot{q}_2 = \frac{C_0}{C_v R_2}\left(\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}-1\right) - \frac{1}{C_2 R_2}\cdot q_2 \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{1}{C_v R_2\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}} - \frac{1}{C_v R_2} + \frac{1}{C_0 C_2 R_2\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}}\cdot q_2 + \frac{1}{C_0 R_2\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}}\cdot\lambda_1 - \frac{1}{C_0 R_2\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}}}\cdot\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{C_0}{C_v C_2 R_2}\sqrt{1+\frac{2C_v q_1}{C_0^2}} - \frac{C_0}{C_v C_2 R_2} - \frac{1}{C_2^2 R_2}\cdot q_2 - \frac{1}{C_2 R_2}\cdot\lambda_1 + \frac{1}{C_2 R_2}\cdot\lambda_2 \\ i = -\frac{1}{R_1}\cdot\lambda_1 \end{cases} \tag{5.18}$$

Encore une fois ce système correspond plus exactement aux conditions d'optimalité où l'entrée i a été remplacée par son expression en fonction de λ_1 dans les conditions d'optimalité par rapport à l'état et au co-état. La première étape de la méthode globale de résolution des conditions d'optimalité a donc d'ores et déjà été effectuée. En suivant les étapes 2 et 3 expliquées à la section 5.4.1 (page 239), la discrétisation du système (5.18) associé aux contraintes de conditions aux limites conduit à l'obtention du système algé-

brique suivant à 5N équations et 5N inconnues q_{1_i}, q_{2_i}, λ_{1_i}, λ_{2_i} et i_i :

$$\forall i \in \{1, N-1\}, \begin{cases} q_{1_{i+1}} = q_{1_i} - \frac{h \cdot C_0}{C_v R_2}\left(\sqrt{1 + \frac{2C_v q_{1_i}}{C_0^2}} - 1\right) + \frac{h}{C_2 R_2} \cdot q_{2_i} - \frac{h}{R_1} \cdot \lambda_{1_i} \\ q_{2_{i+1}} = q_{2_i} + \frac{h \cdot C_0}{C_v R_2}\left(\sqrt{1 + \frac{2C_v q_{1_i}}{C_0^2}} - 1\right) - \frac{h}{C_2 R_2} \cdot q_{2_i} \end{cases} \tag{5.19}$$

$\forall i \in \{1, N-1\}$,

$$\begin{cases} \lambda_{1_{i+1}} = \lambda_{1_i} + \frac{h}{C_v R_2 \sqrt{1+\frac{2C_v q_{1_i}}{C_0^2}}} - \frac{h}{C_v R_2} + \frac{h}{C_0 C_2 R_2 \sqrt{1+\frac{2C_v q_{1_i}}{C_0^2}}} \cdot q_{2_i} + \frac{h}{C_0 R_2 \sqrt{1+\frac{2C_v q_{1_i}}{C_0^2}}} \cdot (\lambda_{1_i} - \lambda_{2_i}) \\ \lambda_{2_{i+1}} = \lambda_{2_i} + \frac{h \cdot C_0}{C_v C_2 R_2}\sqrt{1 + \frac{2C_v q_{1_i}}{C_0^2}} - \frac{h \cdot C_0}{C_v C_2 R_2} - \frac{h}{C_2^2 R_2} \cdot q_{2_i} - \frac{h}{C_2 R_2} \cdot \lambda_{1_i} + \frac{h}{C_2 R_2} \cdot \lambda_{2_i} \end{cases} \tag{5.20}$$

$$\forall i \in \{1, N\}, i_i = -\frac{1}{R_1} \cdot \lambda_{1_i} \tag{5.21}$$

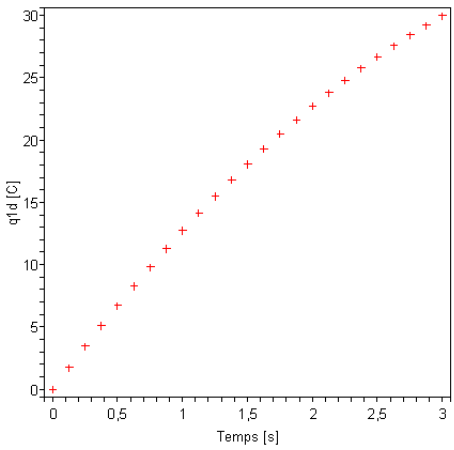
$$\begin{cases} q_{1_1} = q_{1_0} \\ q_{2_1} = q_{2_0} \\ q_{1_N} = q_{1_f} \\ q_{2_N} = q_{2_f} \end{cases} \tag{5.22}$$

Afin de faciliter la résolution de ce système algébrique non linéaire, nous choisissons de résoudre simultanément les systèmes discrétisés (5.19), (5.20) et (5.22) afin de calculer les évolutions de l'état optimal (q_1^*, q_2^*) et du co-état optimal $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$. L'entrée optimale i^* n'est elle déterminée qu'*a posteriori* à partir de ces évolutions et grâce aux relations du système (5.21). Notons toutefois que si cette démarche permet de diminuer la dimension du système algébrique à résoudre, celle-ci n'est ici possible que parce que l'entrée i a été remplacée par son expression en fonction de λ_1 dans les conditions d'optimalité par rapport à l'état et au co-état.

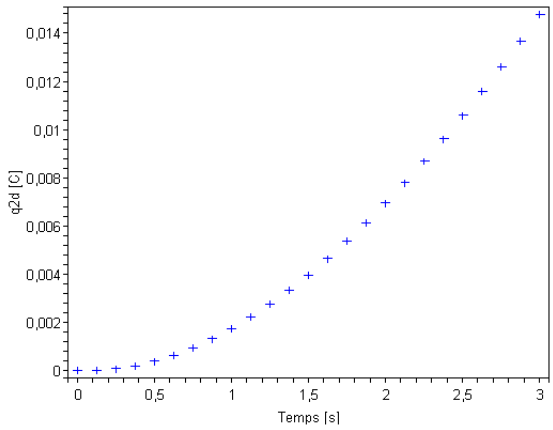
Paramètres du modèle	$R_1 = 0.000470\ \Omega$
	$R_2 = 1.905\ \Omega$
	$C_0 = 1742$ F
	$C_v = 502.8$ F.V^{-1}
	$C_2 = 166$ F
Paramètres du problème d'optimisation	$t_0 = 0$ s
	$t_f = 3.0$ s
Conditions initiales sur l'état	$q_1(t_0) = 0.0$ C
	$q_2(t_0) = 0.0$ C
Conditions finales sur l'état	$q_1(t_f) = 29.9852$ C
	$q_2(t_f) = 0.0147787$ C

TABLE 5.3 – Valeurs numériques pour l'exemple du supercondensateur

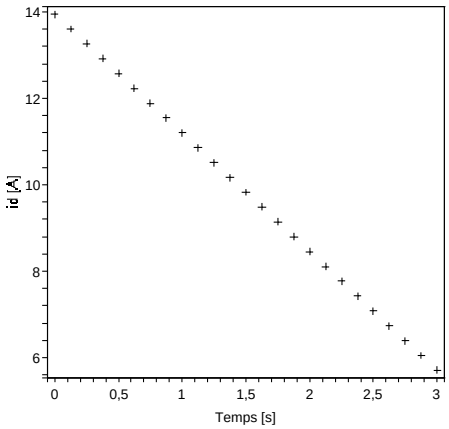
En prenant comme valeurs de paramètres celles indiquées dans [Dia09, Jug09] (Tab. 5.3) et en utilisant la fonction `fsolve` de Maple, nous obtenons les résultats numériques de la figure 5.11 pour $N = 25$.



(a) Variable d'état q_1^*



(b) Variable d'état q_2^*



(c) Entrée optimale en intensité i^*

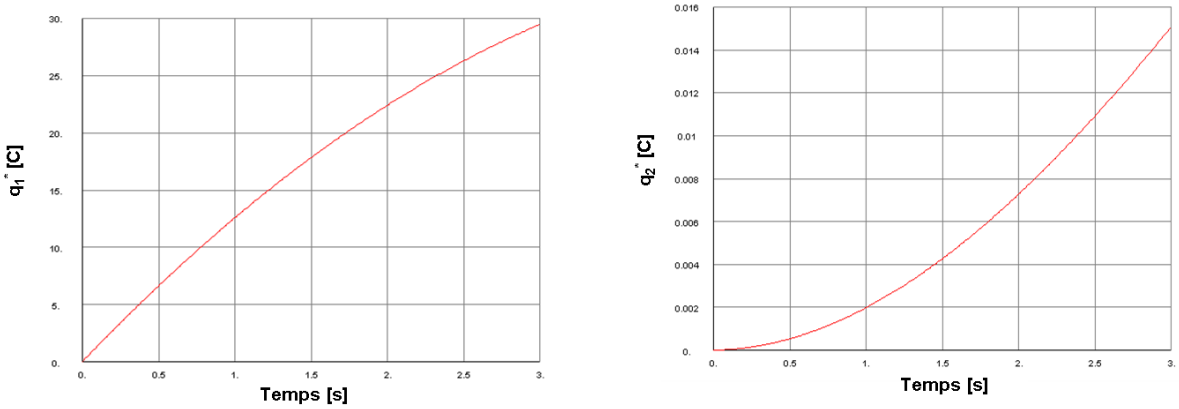
FIGURE 5.11 – Résolution numérique du problème d'optimisation associé à l'exemple du supercondensateur : méthode globale de résolution (cas où $N = 25$)

Dans ce cas de figure, puisque le problème d'optimisation est non linéaire, la méthode du co-état initial de la section 5.3.2 (page 232) ne peut être appliquée à titre de comparaison pour vérifier la cohérence des résultats issus de la méthode globale de résolution. Cependant, en réinjectant l'entrée optimale i^* obtenue (Fig. 5.11(c)) dans le modèle bond graph initial du supercondensateur (Fig. 5.9), une simulation numérique sous MS1 nous permet de montrer que, sous une telle entrée, le système atteint l'état final imposé $q_{1_f} = 29.9852$ C et $q_{2_f} = 0.0147787$ C à une imprécision près puisque nous obtenons (Fig. 5.12) :

$$\begin{cases} q_1(t_f) = 29.4649 \text{ C} \\ q_2(t_f) = 0.0150745 \text{ C} \end{cases}$$

Si l'ordre de grandeur de l'état final est respecté, l'imprécision peut être due :

- aux erreurs d'arrondis et de troncatures ;
- à la « simplicité » du schéma de discrétisation choisi (une discrétisation des équations par un développement de TAYLOR à un ordre plus élevé peut accroître la précision



(a) Variable d'état q_1^*

(b) Variable d'état q_2^*

FIGURE 5.12 – Evolutions dynamiques des variables d'état après injection, dans le modèle bond graph initial du supercondensateur, de la commande optimale i^* obtenue par la méthode globale de résolution

de la solution discrétisée) ;

– à un nombre de points de discrétisation insuffisant.

Sur ce dernier point, notons que, même si l'exemple du supercondensateur est ici relativement simple, la fonction `fsolve` de Maple ne trouve plus de solution dès que $N \geq 26$. Par conséquent, si les résultats sont encourageants pour une première application, de nouveaux travaux doivent être entrepris pour améliorer la méthode globale de résolution ici mise en œuvre aussi bien sur les méthodes de discrétisation des conditions d'optimalité (*e.g.* schémas d'ordre supérieur, discrétisation à pas non constant) que sur les méthodes de résolution numérique du système algébrique ainsi généré. À ce sujet, WRIGHT [Wri92] et CABOUSSAT et LEONARD [Cab08] donnent, respectivement dans le cas linéaire et non linéaire, quelques pistes en tenant compte de la structure par blocs du système discrétisé et en mettant en œuvre quelques techniques de factorisation.

5.5 Conclusion

Le chapitre précédent a abordé la résolution de problèmes d'optimisation dans le langage bond graph et était limité, pour un problème d'optimisation donné, à la détermination des conditions d'optimalité associées. Cependant, l'obtention de ces conditions d'optimalité n'est qu'une première étape vers la résolution complète du problème. Afin d'achever la résolution des problèmes d'optimisation initiée dans le chapitre précédent, ce chapitre a donc été consacré à la résolution des conditions d'optimalité. Si leur résolution analytique est illusoire dans le cas général (*e.g.* systèmes de grandes dimensions, présence de fortes non linéarités), ce chapitre est surtout orienté vers leur résolution numérique. Deux méthodes de résolution sont notamment étudiées. La première méthode dite méthode du co-état initial est uniquement valable dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires. Elle permet de calculer la valeur *a priori* inconnue du co-état initial afin de résoudre ensuite les conditions d'optimalité par simple intégration. À l'inverse, valable aussi bien dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires ou non linéaires, la seconde

méthode est, elle, beaucoup plus générale. Appelée méthode globale de résolution, celle-ci consiste à discrétiser les conditions d'optimalité sur tout l'intervalle de temps afin de ramener le problème à la résolution d'un système algébrique carré. Quelques exemples de mise en œuvre de ces deux méthodes ainsi que quelques résultats issus de simulations numériques sont également présentés.

Enfin, notons que si les précédents travaux de Chereji *et al.* [Che06] avaient initié la résolution des conditions d'optimalité dans le contexte de la procédure bond graph d'optimisation, ceux-ci ne traitaient qu'un cas restreint de problèmes d'optimisation linéaires. À cette occasion, ce chapitre a notamment permis :

- d'appliquer la méthode du co-état initial à une classe élargie de problèmes d'optimisation (cas où seule une partie des entrées est à déterminer par optimisation et où les conditions d'optimalité forment un système non autonome) ;
- de mettre en œuvre une méthode globale de résolution notamment sur un exemple de problème d'optimisation non linéaire.

En poussant notre étude jusqu'à la simulation, ce chapitre nous a permis de compléter les travaux théoriques précédents et d'aborder ainsi toute la chaîne de résolution d'un problème de dimensionnement. Ne faisant pas partie du cœur des objectifs de cette thèse, ce chapitre ne se veut cependant qu'être une première approche vers la résolution numérique de nos problématiques d'optimisation. De très nombreuses autres pistes doivent être investies afin d'améliorer notamment la mise en œuvre de la méthode globale de résolution qui nous apparaît surtout prometteuse pour le traitement de problèmes d'optimisation non linéaires (possibilité d'appliquer des schémas de discrétisation plus complexes, de tirer avantage de la structure par blocs du système discrétisé, ...).

Conclusion générale

Principalement bibliographiques, les deux premiers chapitres ont permis de décrire le contexte dans lequel s'inscrit cette thèse.

En l'occurrence, après avoir défini brièvement la notion de *systèmes mécatroniques*, le premier chapitre a introduit la conception de ces systèmes de manière générale. Si la difficulté de concevoir de tels systèmes tient essentiellement à leur caractère plurisdisciplinaire, les concepts d'*ingénierie concourante*, de *cycle de conception en V* et de *prototypage virtuel* ont notamment été abordés comme étant autant de moyens de réduire les coûts et les temps d'études au cours du processus de conception. À cette occasion, l'intérêt d'une modélisation hiérarchisée du système par l'intermédiaire d'un langage multi-domaine et acausal a été avancé. En effet, le principe d'acausalité permet de décrire la physique du système sans se soucier de l'objectif pour lequel le modèle en question sera utilisé. Il autorise ainsi la réutilisation des modèles et donc la capitalisation des efforts de modélisation. Le chapitre s'est ensuite orienté vers un problème particulier de la démarche de conception, objet des travaux de ce mémoire : celui de la sélection des composants (ou celui du *dimensionnement*) d'une chaîne d'actionnement d'un système mécatronique. L'approche classique par *modèles directs* (*i.e.* modèles dont les grandeurs données correspondent aux entrées physiques du système) a alors été présentée puis, quelques *critères de sélection* comme ceux de Newton Jr [New50] ou de Cœuillet [Coe69] ont été discutés. Nous avons ainsi montré que l'approche classique demande de nombreuses itérations « essai → erreur → correction » sans toutefois garantir l'existence et l'obtention d'une solution optimale. Quant aux critères de sélection présentés, nous avons vu que, même s'ils avaient été établis pour choisir au mieux les composants, ceux-ci ne tenaient compte que d'une vue simplifiée de la structure de la chaîne d'actionnement et ne considéraient les spécifications du cahier des charges que dans des cas statiques jugés critiques.

Afin de diminuer le nombre d'itérations du processus de conception, le deuxième chapitre a légitimé la formulation du problème de dimensionnement sous la forme d'un *problème inverse* (*i.e.* les grandeurs inconnues du problème de dimensionnement sont calculées à partir de la connaissance des sorties spécifiées). Ce type de formulation est un moyen de prendre en considération le cahier des charges dans sa globalité (*i.e.* à tout instant du fonctionnement) et de procéder à un dimensionnement cette fois-ci selon des critères dynamiques. Après avoir rappelé les principes de l'inversion de modèle en automatique, certaines méthodes de dimensionnement basées sur l'inversion ont été présentées comme celles du calcul des efforts moteurs en robotique, de Potkonjak et Vukobratović [Pot86, Vuk87] ou encore de Dequidt [Deq98, Deq00]. Nous avons notamment montré que ces méthodes permettaient d'obtenir des critères de sélection plus pertinents mais

qu'elles étaient malheureusement peu générales en termes d'application. Après avoir justifié l'utilisation du langage bond graph pour la modélisation des systèmes mécatroniques, la *méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses* a été largement présentée. Proposée par le laboratoire AMPÈRE et initialement élaborée par Scavarda et Amara [Ama91] puis par Fotsu-Ngwompo *et al.* [Fot97a, Ngw01a, Ngw01b], nous en avons alors décrit ses principes ainsi que ses différentes étapes à suivre. Ses avantages ont également été démontrés. Grâce au principe de bicausalité introduit par Gawthrop [Gaw95], cette méthodologie permet de systématiser l'inversion de modèles et est ainsi beaucoup plus générale que les méthodes précédentes. Ainsi, le concepteur peut désormais « remonter » les spécifications du cahier des charges successivement à chaque étage de la chaîne d'actionnement. De plus, par rapport à l'approche classique par modèles directs, cette méthodologie permet :

- de vérifier, grâce à sa phase d'*analyse structurelle*, et ce avant toute simulation, si le problème de dimensionnement est bien posé et si les spécifications ont été correctement choisies (notamment si elles sont atteignables par la structure du modèle choisi). Ceci permet ainsi de garantir l'existence et l'obtention d'une solution ;
- de diminuer, grâce à l'inversion, le nombre d'itérations du processus de conception. En déterminant les inconnues du problème de dimensionnement directement à partir des spécifications sur les sorties du système, cette méthodologie permet de calculer ce qui est exactement requis pour satisfaire le cahier des charges et assure ainsi un dimensionnement au plus juste.

En outre, l'intérêt industriel de cette méthodologie a été démontré d'une part dans son utilisation pour des problèmes autres que le problème de dimensionnement (*e.g.* problème de synthèse d'architecture, de synthèse paramétrique, ...) et, d'autre part, en illustrant, par le biais des travaux de Mechin [Mec03a] et Laffite [Laf04], sa mise en œuvre sur deux cas d'étude issus du domaine automobile (dimensionnement d'une direction assistée électrique puis d'une chaîne de traction).

De manière à la rendre de plus en plus exploitable par les industriels, la suite du mémoire s'est attachée à développer certains aspects de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses et ce, conformément aux objectifs fixés dans le cadre du projet ANR SIMPA2-C6E2 (déploiement de la phase d'analyse structurelle et résolution par optimisation dynamique des problèmes de dimensionnement qui ne peuvent être complètement traités par inversion).

Résumé des contributions

Afin de promouvoir auprès des industriels la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses et plus particulièrement sa phase d'analyse structurelle, la fin du second chapitre a reflété les travaux entrepris sur la transposition de la méthodologie dans le formalisme Modelica, formalisme largement plébiscité par les industriels. Malgré des points communs aux deux formalismes bond graph et Modelica (notamment de par leur caractère acausal et multi-disciplinaire), nous avons ainsi montré que les étapes d'analyse structurelle requises pour mettre en œuvre la méthodologie de dimensionnement ne pouvaient être directement transposables à l'étude de modèles écrits en langage Modelica. Récapitulés dans la communication [Jar08c], ces travaux nous ont notamment

permis de mettre en évidence qu'un certain type et qu'un niveau minimum d'information sur le système étaient nécessaires pour mener à bien cette phase d'analyse structurelle.

Cette comparaison entre les formalismes bond graph et Modelica a dès lors motivé l'écriture du troisième chapitre afin tout d'abord de détailler les mécanismes de l'analyse structurelle d'un modèle bond graph mais aussi d'en préciser son domaine de validité. En effet, après avoir défini l'analyse structurelle comme permettant d'observer un certain nombre de propriétés indépendamment des valeurs numériques attribuées aux paramètres du modèle, ce troisième chapitre s'est attaché à confronter l'approche bond graph aux approches *modèle d'état* et *système structuré* pour lesquelles la notion d'analyse structurelle a également été définie. Les formes matricielles puis graphiques de ces approches ont alors été présentées et les différentes terminologies relatives à chacune d'elles ont été détaillées en annexes. De cette comparaison entre ces différents formalismes, nous avons alors mis en évidence l'existence de différents niveaux de description (locale ou globale) et de différents niveaux d'information (information sur la structure énergétique, sur la structure mathématique ou sur la phénoménologie du modèle) propres à chaque formalisme. Selon le formalisme choisi et selon l'exploitation ou non de ces différents niveaux de description et d'information, nous avons alors montré qu'il existe également différents niveaux d'analyse d'un modèle. À l'image des travaux initiés par Rahmani [Rah93] lors du calcul de rang de matrice, nous avons alors établi une classification de ces différents niveaux d'analyse dans un cadre plus générique (*i.e.* indépendamment du type de propriété recherché). À cet effet, quatre niveaux d'analyse ont notamment été proposés :

- le niveau structuré, propre à l'approche système structuré et où seule la structure mathématique du modèle est considérée (les paramètres du modèle sont supposés indépendants entre eux) ;
- le niveau BG-structurel, propre à l'approche bond graph et où seule la structure énergétique du modèle est considérée ;
- le niveau comportemental, valable, par exemple, pour l'approche bond graph et l'approche modèle d'état, où non seulement la structure du modèle est prise en compte mais aussi certaines dépendances *via* les lois de comportement des phénomènes modélisés ;
- le niveau numérique où les paramètres du modèle sont remplacés par leur valeur numérique (ce niveau ne faisant ainsi plus référence au concept d'analyse structurelle).

Replacés dans une démarche de conception et placés dans un ordre chronologique, nous avons alors montré en quoi ces différents niveaux d'analyse pouvaient être mis à profit. Ceux-ci permettent de jalonner la phase d'analyse structurelle de sorte que si une propriété recherchée P_0 n'est pas vérifiée, des pistes pour la reconception du système sont toutefois fournies : l'ingénieur en charge de l'étude sait à quel niveau d'analyse la propriété n'est pas vérifiée et peut dès lors identifier quel type d'information sur le système il doit modifier pour que cette propriété soit finalement obtenue. Enfin, de manière plus détaillée, cette différence de niveaux a été illustrée lors de la détermination, sur quelques exemples, de certaines propriétés. En particulier, nous avons pu :

- étendre la notion de famille de cycles causaux à la notion de famille bond graph (définitions 9, 10 et 11, page 91) afin de permettre la détermination bond graph du déterminant de la matrice système sans avoir recours à la construction de modèles bond graph réduits (théorème 2, page 91) ;

- reformuler, conformément aux différents niveaux d'analyse, les propriétés permettant de calculer les ordres relatifs des sorties d'un système à partir d'un modèle bond graph (propriétés 1 et 2, page 115) ;
- retrouver, par l'intermédiaire des différents niveaux de description, la procédure énoncée par Fotsu-Ngwompo [Fot97a] pour déduire le modèle d'état associé à un modèle bond graph lorsque celui-ci présente des boucles algébriques (procédure 13, page 337).

Les deux dernières sections de ce chapitre (sections 3.5 et 3.6), quant à elles, ont eu pour objectif de traiter également de l'analyse structurelle mais cette fois-ci dans un cadre un peu moins général et surtout orienté vers la conception de systèmes mécatroniques. En détaillant successivement les différentes étapes à mener pour étudier l'inversibilité et les ordres d'essentialité d'un modèle, nous avons alors montré l'utilité de l'analyse structurelle tout au long de la démarche de conception. En pratique et fort des différents niveaux d'analyse précédemment identifiés, ce chapitre a également été l'occasion de reprendre un certain nombre de résultats existants au niveau bond graph qui, s'ils ne se montraient pas nécessairement contradictoires, pouvaient paraître ambigus dans leur mise en œuvre notamment par l'étude de chemins causaux E/S parfois BG-différents, parfois BG-disjoints. Les contributions de ce chapitre, résumées pour partie dans les références [Jar08a, El 09], ont notamment permis :

- au niveau du modèle de conception : de comparer deux procédures permettant de tester l'inversibilité d'un modèle bond graph et d'identifier pour quels objectifs et pour quels niveaux d'analyse chacune d'elles pouvait être utilisée (Tab. 3.6, page 137) ;
- au niveau de la rédaction du cahier des charges :
  - de simplifier la procédure causale existante pour déterminer les ordres d'essentialité des sorties d'un modèle bond graph (théorème 5, page 145) et ce, selon les différents niveaux d'analyse bond graph (théorèmes 7 et 8, pages 153 et 154) ;
  - de proposer en collaboration avec El Feki *et al.* une procédure simple pour déterminer les ordres d'essentialité d'un modèle bond graph directement à partir de l'analyse du modèle bond graph bicausal associé (théorème 6, page 146) ;
  - d'énoncer dans le contexte de la conception un critère de dérivabilité sur les sorties spécifiées du cahier des charges (propriété 3, page 152).

En outre, l'annexe E a également permis d'éclaircir la différence sur la considération de chemins causaux E/S BG-différents ou BG-disjoints pour étudier la structure à l'infini d'un modèle bond graph en proposant une étude selon différents niveaux d'analyse (théorèmes 19, 20, 21 et 22, pages 352 et 353).

Les développements des deux derniers chapitres sont motivés par la problématique suivante : comment utiliser la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses lorsque la phase d'analyse structurelle révèle que le problème de dimensionnement ne peut pas être complètement formulé sous la forme d'un problème inverse (par exemple lorsque les spécifications ne sont pas adéquates pour une inversion) ?

Ainsi, afin d'étendre *in fine* la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses à des problèmes de conception plus généraux, le quatrième chapitre a dès

lors considéré le cas d'un cahier des charges avec des spécifications de nature hétérogène, plus conforme aux contraintes réelles des industriels énoncées aussi bien en termes de suivis de trajectoires qu'en termes de problèmes d'optimisation. Après avoir détaillé l'intérêt de coupler la méthodologie de dimensionnement avec l'optimisation dynamique, quelques rappels d'optimisation dynamique ont été présentés puis, le problème de la représentation bond graph d'un problème d'optimisation a été abordé. Établie dans le cadre de systèmes linéaires et invariants dans le temps, la procédure bond graph d'optimisation de Marquis-Favre *et al.* [Mar08] a alors été présentée : celle-ci permet, par l'intermédiaire d'un modèle bond graph augmenté, d'obtenir les conditions d'optimalité dont la résolution analytique fournit la solution au problème d'optimisation considéré. D'un point de vue de l'optimisation dynamique, nous avons ensuite vu que les avantages d'une telle procédure résidaient dans le fait qu'elle systématisait l'obtention des équations du problème d'optimisation sans recours au calcul formel et qu'elle facilitait également l'interprétation physique de l'impact de chaque critère d'optimisation. D'un point de vue de la méthodologie de dimensionnement, nous avons vu que cette procédure permettait de diminuer potentiellement les exigences en termes de rédaction du cahier des charges. À partir de ce moment, les contributions de ce chapitre (résumées pour partie dans les deux communications [Jar08b, Jar09a] et dans l'article en cours de soumission [Jar09b]) se sont dès lors attachées à renforcer nos justifications quant à l'intérêt potentiel de la procédure bond graph d'optimisation :

- d'une part, en l'étendant à une certaine classe de systèmes non linéaires, premier pas vers la considération de systèmes globalement non linéaires (procédure 5, page 194) ;
- d'autre part, en l'étendant à des problèmes où seule une partie des entrées du modèle est à déterminer par optimisation (procédure 6, page 204) ;
- mais aussi, en prouvant sur un exemple, la possibilité de coupler réellement la méthodologie de dimensionnement avec l'optimisation dynamique.

À l'issue de cet exemple, une première conjecture quant à l'application de la procédure bond graph d'optimisation à des modèles inverses (et donc quant à la mise en œuvre du couplage de la méthodologie de dimensionnement avec l'optimisation dynamique) a finalement été proposée (procédure 7, page 221).

Enfin, si le quatrième chapitre ne s'est intéressé à la résolution des problèmes d'optimisation qu'à travers l'obtention de leurs conditions d'optimalité associées, le cinquième chapitre a été consacré à la résolution numérique de ces équations. En effet, la résolution analytique étant illusoire dans le cas général (*e.g.* systèmes de grandes dimensions, présence de fortes non linéarités), plusieurs méthodes de résolution numérique ont alors été présentées afin de pallier la difficulté de satisfaire les conditions aux limites sur le temps et l'état fixées par le cahier des charges. Deux méthodes de résolution ont particulièrement été étudiées. La première méthode, dite méthode du co-état initial, permet de résoudre les conditions d'optimalité par simple intégration mais est uniquement valable dans le cas de problèmes d'optimisation linéaires. Appelée méthode globale de résolution, la seconde méthode consiste, quant à elle, à discrétiser les conditions d'optimalité sur tout l'intervalle de temps afin de ramener le problème à la résolution d'un système algébrique carré. Dans le contexte de la procédure bond graph d'optimisation, quelques exemples de mise en œuvre de ces méthodes ont été présentés et quelques résultats issus de simulations

numériques ont été fournis. Enfin, notons que si les précédents travaux de Chereji *et al.* avaient initié la résolution des conditions d'optimalité dans le contexte de la procédure bond graph d'optimisation, ceux-ci ne traitaient qu'un cas restreint de problèmes d'optimisation linéaires. En termes de contributions, ce chapitre a été l'occasion :

- d'appliquer la méthode du co-état initial à une classe élargie de problèmes d'optimisation (cas où seule une partie des entrées est à déterminer par optimisation et où les conditions d'optimalité forment un système non autonome) ;
- de mettre en œuvre une méthode globale de résolution notamment sur un exemple de problème d'optimisation non linéaire.

Perspectives

Au niveau de l'analyse structurelle, plusieurs perspectives peuvent être envisagées. Si la plupart du temps nous avons fait l'hypothèse de modèles bond graph en causalité préférentiellement intégrale ne possédant pas d'élément de stockage d'énergie en causalité dérivée, il serait intéressant d'élargir nos travaux à cette classe de systèmes dans la mesure où leur apparition est souvent due à la non modélisation de certains phénomènes qu'il n'est parfois pas pertinent de réintroduire et où l'élimination de ces éléments en causalité dérivée n'est pas toujours évidente *a posteriori* . Ces situations correspondant en particulier à la notion de modèles d'état généralisés de la forme $\begin{cases} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$, certaines notions, comme la définition de la matrice système, devront être étendues. À ce sujet, les travaux de Malabre [Mal89] sur ces extensions ainsi que ceux de Mouhri [Mou00] sur l'analyse bond graph de systèmes généralisés nous semblent être une piste à explorer en parallèle des travaux de Reinschke [Rei94, Rei97] sur l'analyse de ces systèmes en digraphe. D'autre part, pour être tout à fait général, il serait également intéressant d'étendre tous les résultats de l'analyse structurelle à la manipulation de systèmes non linéaires. Sans être exhaustif, les travaux de Lichiardopol et Sueur [Lic06] sur l'extension de certaines propriétés bond graph dans le cas de systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps ou bien les travaux de Glumineau et Moog [Glu89] sur la définition des ordres d'essentialité pour des systèmes non linéaires affines en la commande pourront être, à notre sens, mis à profit pour l'extension de la phase d'analyse structurelle de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses.

Au niveau du couplage de la méthodologie de dimensionnement avec l'optimisation dynamique, de nombreux travaux doivent être envisagés pour assurer une réelle viabilité industrielle. Au niveau théorique tout d'abord, tout comme la phase d'analyse structurelle, la procédure bond graph d'optimisation doit être plus largement étendue aux cas de systèmes non linéaires. Si ce mémoire n'a permis d'entrevoir que les modifications à entreprendre dans le cas d'éléments de stockages d'énergie non linéaires, il est en effet important de voir l'impact de non linéarités présentes cette fois-ci sur d'autres éléments tels que des éléments dissipatifs ou des éléments de la structure de jonction. Ceux-ci pourraient notamment s'avérer plus lourd de conséquence en termes de modifications de la procédure puisqu'*a priori* la présence de telles non linéarités induirait la non linéarité de plusieurs termes de la représentation port-hamiltonienne du modèle bond graph

et donc induirait de plus gros efforts de construction lors de l'établissement du modèle bond graph optimisant. La combinaison de plusieurs linéarités présentes simultanément sur différents types d'élément serait également à étudier. En outre, la conjecture proposée sur l'adaptation de la procédure bond graph d'optimisation au traitement de modèles bond graph inverses doit être, en toute rigueur, justifiée théoriquement afin de vérifier sa validité effective dans le cas général et non pas seulement sur l'exemple exposé ici. De plus, le choix des matrices de pondération sur les entrées de l'indice de performance reste un problème à part entière que nous n'avons pas traité. Dans le cas d'un couplage entre inversion et optimisation, de nombreuses applications peuvent, à notre sens, être imaginées (l'exemple traité ici concernait un problème de détermination d'entrée optimale mais des problèmes de génération de trajectoires peuvent également être envisagés). La phase d'analyse structurelle peut également être largement mise à profit : celle-ci permettrait notamment de mettre en évidence les couples (entrée, sortie) « compatibles », c'est-à-dire par rapport auxquels l'inversion peut être menée. Ensuite, au niveau de la résolution numérique des conditions d'optimalité, nous considérons ici que nous n'avons présenté qu'une première approche. De très nombreuses pistes doivent être investies afin d'améliorer notamment la mise en œuvre de la méthode globale de résolution, méthode qui nous paraît prometteuse pour la résolution de problèmes d'optimisation non linéaires (possibilité d'utiliser des schémas de discrétisation plus complexes à des ordres plus élevés, de tirer avantage de la structure par blocs du système discrétisé, ...). Une étude comparative avec d'autres algorithmes classiques d'optimisation doit également être menée en termes de rapport temps de calcul/précision/difficulté traitée. Enfin, nous imaginons l'implémentation d'une passerelle logicielle systématisant l'obtention des conditions d'optimalité à partir d'un modèle bond graph augmenté et automatisant la discrétisation et la résolution numérique de ces équations.

Bibliographie personnelle

[El 09] El Feki, M., Jardin, A., Marquis-Favre, W. Determination of essential orders from a bond graph model. 2009. En préparation.

[Jar08a] Jardin, A., El Feki, M., Marquis-Favre, W., Thomasset, D., Bideaux, E. Use of structural analysis in a bond graph-based methodology for sizing mechatronic systems. In *Proceedings of the 7th edition of France-Japan, 5th Europe-Asia Congress on Mechatronics*, Le Grand Bornand, France, mai 2008.

[Jar08b] Jardin, A., Marquis-Favre, W., Thomasset, D. Représentation bond graph de problèmes d'optimisation dynamique : extension aux systèmes à stockages d'énergie non-linéaires. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bucarest, Roumanie, septembre 2008.

[Jar08c] Jardin, A., Marquis-Favre, W., Thomasset, D., Guillemard, F., Lorenz, F. Study of a sizing methodology and a modelica code generator for the bond graph tool ms1. In *Proceedings of the 6th International Modelica Conference*, pages 125–134, Bielefeld, Allemagne, mars 2008.

[Jar09a] Jardin, A., Marquis-Favre, W., Thomasset, D. Bond graph sizing of mechatronic systems : Coupling of inverse modelling with dynamic optimization. In *Proceedings of the 6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, pages 1929–1938, Vienne, Autriche, février 2009.

[Jar09b] Jardin, A., Marquis-Favre, W., Thomasset, D. Coupling of inverse modelling with dynamic optimization in a bond graph sizing context. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 2010. En cours de soumission.

[Mou09] Mouhib, O., Jardin, A., Marquis-Favre, W., Bideaux, E., Thomasset, D. Optimal control problem in bond graph formalism. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 17(1) :240–256, janvier 2009.

Bibliographie

[AFN94] AFNOR. Management des systèmes - ingénierie intégrée - concepts généraux et introduction aux méthodes d'application. Norme NF X50-415, décembre 1994.

[AFN08] AFNOR. Mécatronique - vocabulaire. Norme NF E01-010, novembre 2008.

[Ama91] Amara, M. *Contribution à l'étude des aspects énergétiques en robotique mobile.* Thèse, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, juin 1991. 300 p.

[Bak76] Bakhvalov, N. *Méthodes numériques.* 1976.

[Bel60] Bellman, R., Kalaba, R., Milton Wing, G. Invariant imbedding and the reduction of two-point boundary value problems to initial value problems. In *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, volume 46, pages 1646–1649, décembre 1960.

[Bel63] Bellman, R., Kalaba, R. A note on hamilton's equations and invariant imbedding. *Quarterly of Applied Mathematics*, XXI :166–168, 1963.

[Bel07] Bell, J., Snooke, N., Price, C. A language for functional interpretation of model based simulation. *Advanced Engineering Informatics*, 21(4) :398–409, octobre 2007.

[Ber97a] Bertrand, J.M. *Analyse structurelle et commande par découplage entrée-sortie des modèles bond graphs.* Thèse, Université des sciences et technologies de Lille, Villeneuve-d'Ascq, FRANCE, 1997. 164 p.

[Ber97b] Bertrand, J.M., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. On the finite and infinite structures of bond-graph models. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 3, pages 2472–2477, Orlando, Floride, USA, octobre 1997.

[Ber01] Bertrand, J.M., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Input-output decoupling with stability for bond graph models. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 1(1) :39–58, 2001.

[Ber03] Bertram, T., Bekes, F., Greul, R., Hanke, O., Haß, C., Hilgert, J., Hiller, M., Öttgen, O., Opgen-Rhein, P., Torlo, M., Ward, D. Modelling and simulation for mechatronic design in automotive systems. *Control Engineering Practice*, 11(2) :179–190, février 2003.

[Ber05] Bertolazzi, E., Biral, F., Da Lio, M. Symbolic-numeric indirect method for solving optimal control problems for large multibody systems - the time-optimal racing vehicle example. *Multibody System Dynamics*, 13(2) :233–252, mars 2005.

[Ber06] Bertolazzi, E., Biral, F., Da Lio, M. Symbolic-numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 185(2) :404–421, janvier 2006.

[Bid94] Bidard, C. *Graphes de liaison torsoriels pour la modélisation et l'analyse cinéstatiques des mécanismes.* Thèse, Université Claude Bernard de Lyon, Lyon, France, 1994. 229 p.

[Bid03] Bideaux, E., Smaoui, M., Brun, X., Thomasset, D. Design of a compliant positionning control using an inverse method. In *Proceedings of the International Power Transmission and Motion Control Workshop*, pages 147–162, Bath, Angleterre, septembre 2003.

[Bie04] Biegler, L.T., Grossmann, I.E. Retrospective on optimization. In *Computers and Chemical Engineering*, volume 28, pages 1169–1192, juillet 2004.

[Bir89] Birkett, S.H., Roe, P.H. The mathematical foundations of bond graphs - ii. duality. *Journal of the Franklin Institute*, 326(5) :691–708, 1989.

[Bor92] Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J.P., Rotella, F., Zambettakis, I. Modélisation et identification des processus. In Editions TECHNIP, *Méthodes et Techniques de L'ingénieur*, volume 2. 1992.

[Bor99] Borutzky, W. Bond graph modeling from an object oriented modeling point of view. *Simulation Practice and Theory*, 7(5-6) :439–461, décembre 1999.

[Brö95] Bröhl, A.P. *Das V-Modell - Der Standard für Softwareentwicklung (2ème édition).* 1995.

[Bre84] Breedveld, P.C. *Physical systems theory in terms of bond-graphs.* Thèse, Twente University of Technology, Enschede, Pays-Bas, 1984.

[Bre85a] Breedveld, P.C. A definition of the multibond graph language. In *Proceedings of the 11th International Association for Mathematics and Computers in Simulation (IMACS) World Congress on Scientific Computation*, volume 4, pages 325–328, Oslo, Norvège, 5-9 août 1985.

[Bre85b] Breedveld, P.C. Multibond graph elements in physical systems theory. *Journal of the Franklin Institute*, 319(1-2) :1–36, janvier-février 1985.

[Bro65a] Brockett, R.W. Poles, zeros, and feedback : State space interpretation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10(2) :129–135, avril 1965.

[Bro65b] Brockett, R.W., Mesarović, M.D. The reproducibility of multivariable systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 11 :548–563, 1965.

[Bro72] Brown, F.T. Direct application of the loop rule to bond graphs. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 94(3) :253–261, septembre 1972.

[Bro97] Broenink, J.F. Bond-graph modeling in modelica. In *European Simulation Symposium*, Passau, Allemagne, octobre 1997.

[Bro99] Broenink, J.F. Object-oriented modeling with bond graphs and modelica. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, volume 31 of *Simulation Series*, pages 163–168, San Francisco, USA, janvier 1999.

[Bry75] Bryson, A.E., Ho, Y.C. *Applied Optimal Control : optimization, estimation, and control.* Hemisphere Publishing Corp. Washington, 1975.

[Cab99] Cabanellas, J.M., Félez, J. Dynamic systems optimization based on pseudo bond graph. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 50–55, San Francisco, USA, janvier 1999.

[Cab08] Caboussat, A., Leonard, A. Numerical method for a dynamic optimization problem arising in the modeling of a population of aerosol particles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 346(11-12) :677–680, 2008.

[Cel05] Cellier, F.E., Nebot, A. The modelica bond-graph library. In Gerhard Schmitz ed., *Proceedings of the 4th International Modelica Conference*, pages 57–65, Hamburg, Allemagne, mars 2005.

[Che06] Chereji, B., Mouhib, O., Marquis-Favre, W., Thomasset, D., Pousin, J., Picq, M. An optimal control problem : bond graph representation and solver implementation. In Breitenecker ed., *Proceedings of the 5th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, pages 8–14, Vienna, Austria, February 2006.

[Coe69] Coeuillet, J. Choix des moteurs de servomécanismes. *Automatisme - Tome XIV*, 2(2) :56–67, février 1969.

[Com82] Commault, C., Dion, J.M. Structure at infinity of linear multivariable systems : A geometric approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3) :693–696, juin 1982.

[Com86] Commault, C., Descusse, J., Dion, J.M., Lafay, J.F., Malabre, M. New decoupling invariants : the essential orders. *International Journal of Control*, 44(3) :689–700, septembre 1986.

[Com91] Commault, C., Dion, J.M., Perez, A. Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7) :884–887, juillet 1991.

[Com93] Commault, C., Dion, J.M., Benahcene, M. On dynamic decoupling of structured systems. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1330–1335, San Antonio, USA, décembre 1993.

[Com94] Comerford, R. Mecha...what ? *IEEE Spectrum*, 31(8) :46–49, août 1994.

[Cos07] Costanza, V. Finding initial costates in finite-horizon nonlinear-quadratic optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods*, 29(3) :225–242, 2007.

[Cos08] Costanza, V., Rivadeneira, P.S. Finite-horizon dynamic optimization of nonlinear systems in real time. *Automatica*, 44(9) :2427–2434, septembre 2008.

[Cra68] Crandall, S.H., Karnopp, D.C., Kurtz, E.F.Jr., Pridmore-Brown, D.C. *Dynamics of mechanical and electromechanical systems.* McGraw-Hill, 1968.

[Cre71] Cremer, M. A precompensator of minimal order for decoupling a linear multivariable system. *International Journal of Control*, 14(6) :1089–1103, décembre 1971.

[Da 99] Da Lio, M., Cossalter, V., Lot, R., Fabbri, L. A general method for the evaluation of vehicle manoeuvrability with special emphasis on motorcycles. *Vehicle System Dynamics*, 31(2) :113–135, février 1999.

[Daa06] Daafouz, J., Fliess, M., Millerioux, G. Une approche intrinsèque des observateurs linéaires à entrées inconnues. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bordeaux, France, mai-juin 2006.

[Dam03] Damić, V., Montgomery, J. *Mechatronics by Bond Graphs - An Object-Oriented Approach to Modelling and Simulation.* Springer, 2003.

[Dan91] Daniel, R.W., Hewit, J.R. Editorial. *Mechatronics*, 1(1) :i–ii, 1991.

[Dau93] Dauphin-Tanguy, G., Scavarda, S. *Systèmes non linéaires 1. Modélisation - estimation*, volume 1, chapter Modélisation des systèmes physiques par bond-graphs, pages 35–112. Masson, 1993.

[Dau99a] Dauphin-Tanguy, G. Les bond graphs et leur application en mécatronique. In *Techniques de l'ingénieur*, numéro s7222. 1999.

[Dau99b] Dauphin-Tanguy, G., Rahmani, A., Sueur, C. Bond graph aided design of controlled systems. *Simulation Practice and Theory*, 7(5) :493–513, décembre 1999.

[Dau00] Dauphin-Tanguy, G. Les bond graphs. In *Traité IC2 Information - Commande - Communication*, 383 pages. Hermès Sciences, Paris, 2000.

[De 05] De Giorgi, R., Sesmat, S., Bideaux, E. Using inverse models for determining orifices mass flow rate characteristics. In *the Sixth Japan Symposium on Fluid Power*, Tskuba, Japan, novembre 2005.

[Dec98] Decreuse, C., Feschotte, D. Ingénierie simultanée. In *Techniques de l'ingénieur*, numéro a5310. 1998.

[Deq98] Dequidt, A. *Contribution à une approche interdisciplinaire de la conception des systèmes mécaniques commandés - Application aux axes des machines.* Thèse, Université de Valenciennes, Valenciennes, France, 1998.

[Deq00] Dequidt, A., Castelain, J.-M., Valdès, E. Mechanical pre-design of high performance motion servomechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 35(8) :1047–1063, août 2000.

[Der05] Derkaoui, A. *Dimensionnement pour des critères dynamiques et énergétiques de systèmes mécatroniques comportant des sous-systèmes à paramètres répartis.* Thèse, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 2005.

[Des82] Descusse, J., Dion, J.M. On the structure at infinity of linear square decoupled systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4) :971–974, août 1982.

[Dia09] Diab, Y. *Etude et modélisation des supercondensateurs : applications aux systèmes de puissance.* Thèse, Université Claude Bernard - Lyon I, Villeurbanne, France, 2009.

[Dio93] Dion, J.M., Commault, C. Feedback decoupling of structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7) :1132–1135, juillet 1993.

[Dio03] Dion, J.M., Commault, C., van der Woude, J. Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica*, 39(7) :1125–1144, juillet 2003.

[Dje07] Djeziri, M.A., Ould Bouamama, B., Merzouki, R. Diagnostic robuste par l'approche bond graph. In *Journées Doctorales Modélisation Analyse et Conduite des Systèmes dynamiques*, Reims, France, juillet 2007.

[Dje08] Djeziri, M.A., Ould Bouamama, B., Merzouki, R., Dauphin-Tanguy, G. Bond graph model based monitorability analysis. In *Proceedings of the 7th France-Japan, 5th Europe-Asia Congress on Mecatronics*, Le Grand Bornand, France, mai 2008.

[Dol05] Dolcini, P., Canudas de Wit, C., Béchart, H. Improved optimal control of dry clutch engagement. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, juillet 2005.

[Don09] Donaire, A., Junco, S. Derivation of input-state-output port-hamiltonian systems from bond graphs. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 17(1) :137–151, janvier 2009.

[Dor69] Dorato, P. On the inverse of linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 5(1) :43–48, janvier 1969.

[Dym92] Dymola Software. http ://www.dynasim.se/index.htm (consulté le 14.10.2009). 1992.

[El 08a] El Feki, M., Di Loreto, M., Bideaux, E., Thomasset, D., Marquis-Favre, W. On the role of essential orders on feedback decoupling and model inversion : bond graph approach. In *Proceedings of the 22th European Conference on Modelling and Simulation*, Nicosia, Chypre, juin 2008.

[El 08b] El Feki, M., Di Loreto, M., Bideaux, E., Thomasset, D., Ngwompo, R.F. Structural properties of inverse models represented by bond graph. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, Séoul, Corée, juillet 2008.

[Elm97] Elmqvist, H., Boudaud, F., Broenink, J., Brück, D., Ernst, T., Fritzson, P., Jeandel, A., Juslin, K., Klose, M., Mattsson, S.E., Otter, M., Sahlin, P., Tummescheit, H., Vangheluwe, H. Modelica - a unified object-oriented language for physical systems modeling, version 1. Rappport technique, Modelica Design Group, septembre 1997. Disponible sur : http ://www.modelica.org/ (consulté le 06.10.2009).

[ESA] ESACAP Simulation Program. http ://www.ecs.dtu.dk/esacap.htm (consulté le 14.10.2009).

[Eva79] Evans, F.J., Schizas, C. Digraph analysis of large-scale systems : the system primitive. *Electronics Letters*, 15(20) :613–614, septembre 1979.

[Fab96] Fabien, B.C. Numerical solution of constrained optimal control problems with parameters. *Applied Mathematics and Computation*, 80(1) :43–62, novembre 1996.

[Fal67] Falb, P.L., Wolovich, W.A. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(6) :651–659, décembre 1967.

[Fav97] Favre, W. *Contribution à la représentation bond graph des systèmes mécaniques multicorps*. Thèse, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 1997.

[Fee01] Feenstra, P.J., Mosterman, P.J., Biswas, G., Breedveld, P.C. Bond graph modeling procedures for fault detection and isolation of complex flow processes. In *Proceedinfs of the International Conference on Bond Graph Modeling and simulation*, Phœnix, USA, janvier 2001.

[Fer04] Ferretti, G., Magnani, G., Rocco, P. Virtual prototyping of mechatronic systems. *Annual Reviews in Control*, 28(2) :193–206, 2004.

[Fli86] Fliess, M. A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems. *System & Control Letters*, 8(2) :147–151, décembre 1986.

[Fot96] Fotsu Ngwompo, R., Scavarda, S., Thomasset, D. Inversion of linear time-invariant siso systems modelled by bond graph. *Journal of the Franklin Institute*, 333(2) :157–174, mars 1996.

[Fot97a] Fotsu-Ngwompo, R. *Contribution au dimensionnement des systèmes sur des critères dynamiques et énergétiques - approche par Bond Graph.* Thèse, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 1997.

[Fot97b] Fotsu-Ngwompo, R., Scavarda, S., Thomasset, D. Bond graph methodology for the design of an actuating system : application to a two-link manipulator. In *IEEE International Conference on Simulation, Man and Cybernetics*, volume 3, pages 2478–2483, Orlando, USA, octobre 1997.

[Fot98] Fotsu-Ngwompo, R. Développement d'une méthodologie de dimensionnement des éléments d'un système : application au cas d'une suspension hydropneumatique. Rapport technique, Laboratoire d'Automatique Industrielle, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 1998.

[Fra79a] Franksen, O.I., Falster, P., Evans, F.J. Structural aspects of controllability and observability - i. tensorial aggregation. *Journal of the Franklin Institute*, 308(2) :79–104, août 1979.

[Fra79b] Franksen, O.I., Falster, P., Evans, F.J. Structural aspects of controllability and observability - ii. digraph decomposition. *Journal of the Franklin Institute*, 308(2) :105–124, août 1979.

[Fri04] Fritzson, P. *Principles of Object-Oriented Modeling and Simulation with Modelica 2.1.* ISBN 0-471-471631. Wiley-IEEE Press, 2004.

[Fri06] Fritzson, P. Tutorial : Introduction to object-oriented modeling and simulation with openmodelica. Rapport technique, Modelica Association, 2006. Disponible sur : http ://www.modelica.org/ (consulté le 06.10.2009).

[Fro17] Frobenius, G. *Über zerlegbare Determinanten*, volume XVIII. Sitzungsber König. Preuss. Akad. Wiss., 1917.

[Gan66] Gantmacher, F.R. *Théorie des matrices - Tome 1.* Dunod Paris, 1966.

[Gan07] Gandanegara, G., Roboam, X., Charles Maré, J., Sareni, B. Synthesis of an electro hydrostatic actuator from bicausal bond graphs. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modeling and simulation*, pages 71–78, San Diego, USA, janvier 2007.

[Gaw91] Gawthrop, P.J. Bond graphs : a representation for mechatronic systems. *Mechatronics*, 1(2) :127–156, 1991.

[Gaw95] Gawthrop, P.J. Bicausal bond graphs. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modeling and simulation*, pages 83–88, Las Vegas, USA, janvier 1995.

[Gaw00a] Gawthrop, P.J. Sensitivity bond graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 337(7) :907–922, novembre 2000.

[Gaw00b] Gawthrop, P.J., Ronco, E. Estimation and control of mechatronic systems using sensitivity bond graphs. *Control Engineering Practice*, 8(11) :1237–1248, novembre 2000.

[Gil69] Gilbert, E.G. Decoupling of multivariable systems by state feedback. *SIAM Journal of Control*, 7(1) :50–63, février 1969.

[Glo76] Glover, K., Silverman, L.M. Characterization of structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(4) :534–537, août 1976.

[Glu89] Glumineau, A., Moog, C.H. Essential orders and the non-linear decoupling problem. *International Journal of Control*, 50(5) :1825–1834, 1989.

[Glu92] Glumineau, A., Moog, C.H. Nonlinear morgan's problem : Case of $(p+1)$ inputs and p outputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(7) :1067–1072, juillet 1992.

[Gol80] Goldstein, H. *Classical mechanics, Second edition.* Addison-Wesley Publishing Company, 1980.

[Gol01] Golo, G., van der Schaft, A.J., Breedveld, P.C., Maschke, B.M. Implicit hamiltonian formulation of bond graphs. In *Proceedings of the 2nd Workshop on Automotive Control, Nonlinear and Adaptive COntrol European project*, pages 351–372, Lund, Suède, 2001.

[Gol02] Golo, G. *Interconnection structures in port-based modelling : tools for analysis and simulation.* Thèse, Drebbel Institute for Mechatronics, University of Twente, Enschede, Pays Bas, 2002.

[Gon08] Gonzalez, G., Galindo, R. Removing the algebraic loops of a bond graph model. *Proceedings of the IMechE Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 222(6) :543–556, 2008.

[Gou83] Gourdin, A., Boumahrat, M. *Méthodes numériques appliquées (avec nombreux problèmes résolus en Fortran IV).* ISBN : 2-85206-198-8. Lavoisier Tec & Doc, 1983.

[Haf06] Haffaf, H., Ould Bouamama, B., Dauphin-Tanguy, G. Matroid algorithm for monitorability analysis of bond graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 343(1) :111–123, janvier 2006.

[Hir79] Hirschorn, R.M. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6) :855–865, décembre 1979.

[IFA09] IFAC Technical Committees. http ://tc.ifac-control.org/4/2/scope (consulté le 14.10.2009). 2009.

[Ise96a] Isermann, R. Modeling and design methodology for mechatronic systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1(1) :16–28, mars 1996.

[Ise96b] Isermann, R. On the design and control of mechatronic systems - a survey. *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, 43(1) :4–15, février 1996.

[Ise08] Isermann, R. Mechatronic systems - innovative products with embedded control. *Control Engineering Practice*, 16(1) :14–29, janvier 2008.

[Jab05] Jabeur, M. *Méthodes géométriques en mécanique spatiale et aspects numériques.* Thèse, Université de Bourgogne, France, 2005.

[Jag93] Jagou, P. *Concurrent engineering : la maîtrise des coûts, des délais et de la qualité.* Hermès, 1993.

[Joh71] Johnson, J. C., Phillips, C. L. An algorithm for the computation of the integral of the state transition matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(2) :204–205, avril 1971.

[Jug09] Jugy, C. Projet hybus : Modélisation du coffre erc150 et dimensionnement des supercondensateurs pour trolleys bus hybrides. Rapport de projet de fin d'études, Laboratoire AMPÈRE, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 2009.

[Jun01] Junco, S. A bond graph approach to control systems synthesis. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modelling and simulation*, Phoenix, USA, janvier 2001.

[Jun02] Junco, S., Garnero, G., Donaire, A. Suivi de trajectoire de vitesse du moteur série à courant continu : une approche bond graph. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, pages 400–405, Nantes, France, juillet 2002.

[Jun05] Junco, S., Donaire, A., Achir, A., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Non-linear control of a series direct current motor via flatness and decomposition in the bond graph domain. *Proceedings of the IMechE - Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 219(3) :215–230, 2005.

[Kai80] Kailath, T. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

[Kar75] Karnopp, D.C., Rosenberg, R.C. *System Dynamics : A Unified Approach*. 1975.

[Kar77] Karnopp, D.C. Lagrange's equations for complex bond graph systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 99(4) :300–306, 1977.

[Kar90] Karnopp, D.C., Margolis, D.L., Rosenberg, R.C. *System Dynamics : A Unified Approach -2nd edition-*. 1990.

[Kay07] Kayani, S.A. On automated design of mechatronic systems through bond-graphs and genetic programming. *IEEE Multidisciplinary Engineering Education Magazine*, 2(4) :15–17, décembre 2007.

[Kay08] Kayani, S.A., Malik, M.A. Bond-graphs + genetic programming : Analysis of an automatically synthesized rotary mechanical system. In *Proceedings of the 2008 GECCO conference companion on Genetic and evolutionary computation*, pages 2165–2168, Atlanta, USA, juillet 2008.

[Kön31] König, D. Graphen und matrizen. *Mat. Fiz. Lapok.*, 38 :116–119, 1931.

[Kyu96] Kyura, N., Oho, H. Mechatronics - an industrial perspective. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1(1) :10–15, mars 1996.

[Laf04] Laffite, J. *Aide à la conception et au dimensionnement énergétique et dynamique de systèmes mécatroniques par une approche inverse : application aux chaînes de transmission automobiles*. Thèse, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 2004.

[Leb03] Lebrun, M. Simulation et cao en automatique et mécatronique. In *Techniques de l'ingénieur*, numéro s7260. 2003.

[Lew95] Lewis, F.L., Syrmos, V.L. *Optimal Control*. John Wiley & Sons Inc., 1995.

[Lic06] Lichiardopol, S., Sueur, C. Decoupling of non-linear bond-graph models. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pages 2237–2242, Munich, Allemagne, octobre 2006.

[Lic07] Lichiardopol, S. *Etude de la dualité des modèles bond graphs. Application à la commande.* Thèse, Ecole Centrale de Lille, Villeneuve d'Ascq, France, 2007.

[Lin74] Lin, C.T. Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(3) :201–208, juin 1974.

[Lin02] Lin-Shi, X., Retif, J.-M., Allard, B., Morel, H. Non-linear control design for a boost converter using bond graphs. *Proceedings of the IMechE Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 216(1) :1–11, 2002.

[Lin08] Lino, P., Maione, B. *Robotics, Automation and Control*, chapter Multi-Domain Modeling and Control in Mechatronics : the Case of Common Rail Injection Systems. Pecherková, P., Flídr, M., Duník, J., octobre 2008. Disponible sur : http ://intechweb.org/book.php ?id=40 (consulté le 06.10.2009).

[LMS07] LMS Imagine.Lab Amesim Software. http ://www.lmsintl.com/imagine-amesim-intro (consulté le 14.10.2009). 2007.

[Lo,02] Lo, C.H., Wong, Y.K., Rad, A.B., Chow, K.M. Fusion of qualitative bond graph and genetic algorithms : a fault diagnosis application. *ISA Transactions*, 41(4) :445–456, octobre 2002.

[Lor96] Lorenz, F. Modelling level : A question of semantics. In *Symposium on modelling, analysis and simulation, CESA'96 IMACS Multiconference : computational engineering in systems applications*, pages 1198–1202, Lille, France, juillet 1996.

[Lou09] Louca, L.S., Stein, J.L. Energy-based model reduction of linear systems. In *Proceedings of the 6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, pages 629–639, Vienne, Autriche, février 2009.

[Mal89] Malabre, M. Generalized linear systems : geometric and structural approaches. *Linear Algebra and its Applications*, 122-124 :591–621, septembre-novembre 1989.

[Mapa] Maple Software. http ://www.maplesoft.com/products/maple/index.aspx (consulté le 14.10.2009).

[Mapb] MapleSim. http ://www.maplesoft.com/products/maplesim/inde x.aspx (consulté le 14.10.2009).

[Mar02] Margolis, D. Bond graphs, modeling, and simulation in industry : Some examples where costly mistakes could have been avoided. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 3, octobre 2002.

[Mar05] Marquis-Favre, W., Chereji, B., Thomasset, D., Scavarda, S. A bond graph representation of an optimal control problem : the example of the dc motor. In *Proceedings of the International Conference of Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 239–244, New Orleans, USA, janvier 2005.

[Mar08] Marquis-Favre, W., Mouhib, O., Chereji, B., Thomasset, D., Pousin, J., Picq, M. Bond graph formulation of an optimal control problem for linear time-invariant systems. *Journal of the Franklin Institute*, 345(4) :349–373, juillet 2008.

[Mar09] Marquis-Favre, W., Thomasset, D., Jardin, A. Document support pour la spécification et le développement du module d'analyse structurelle du projet

simpa2. Rapport technique, Laboratoire AMPÈRE, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, mars 2009.

[Mas55] Mason, S.J. Feedback theory : Further properties of signal flow graphs. Rapport technique 303, Research Laboratory of Electronics, MIT, Cambridge, USA, 1955.

[Mas88] Maschke, B. A transformation from bond graphs to system graphs. In *Proceedings ASME Winter Annual Meeting, Automated Modelling for Design*, volume DCS-8, pages 23–31, Chicago, USA, 1988.

[Mas92a] Maschke, B.M., van der Schaft, A.J. Port-controlled hamiltonian systems : modelling origins and systemtheoretic properties. In *Proceedings of the 2nd IFAC NOLCOS*, pages 282–288, Bordeaux, France, juin 1992.

[Mas92b] Maschke, B.M., van der Schaft, A.J., Breedveld, P.C. An intrinsic hamiltonian formulation of network dynamics : Non-standard poisson structures and gyrators. *Journal of the Franklin Institute*, 329(5) :923–966, septembre 1992.

[Mas05] Maschke, B.M., van der Schaft, A.J. From conservation laws to port-hamiltonian representations of distributed-parameter systems. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, juillet 2005.

[Mat] Matlab Software. http ://www.mathworks.fr/products/matlab/ (consulté le 14.10.2009).

[May81] Mayeda, H. On structural controllability theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(3) :795–798, juin 1981.

[Mec03a] Mechin, O. *Conception des systèmes de la liaison au sol : Contribution à la définition du cahier des charges.* Thèse, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 2003.

[Mec03b] Mechin, O., Marquis-Favre, W., Scavarda, S., Ferbach, P. Sizing of an electric power steering system on dynamic and energetic criteria. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modeling and simulation*, pages 137–147, Orlando, USA, janvier 2003.

[Mil03] Miled, F. *Contribution à une méthodologie de conception des systèmes dynamiques actifs.* Thèse, Université de Franche-Comté et Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, France, 2003.

[Mir08] Miranda, M., Reneaume, J.M., Meyer, X., Meyer, M., Szigeti, F. Integrating process design and control : An application of optimal control to chemical processes. *Chemical Engineering and Processing*, 47(11) :2004–2018, octobre 2008.

[Mit07] Mitsiouk, A. *Contribution à l'optimisation des systèmes dynamiques : application au génie des procédés.* Thèse, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 2007.

[Mod99] Modelica Language. http ://www.modelica.org (consulté le 14.10.2009). 1999.

[Mod00] Modelica Association. Modelica - a unified object-oriented language for physical systems modeling - tutorial. Rapport technique 1.4, Modelica Association, décembre 2000. Disponible sur http ://www.modelica.org/documents/ModelicaTutorial14.pdf (consulté le 14/10/2009).

[Mol03] Moler, C., Van Loan, C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Review*, 45(1) :3–49, 2003.

[Mor64] Morgan, B.S. The synthesis of multivariable systems by state variable feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(4) :405–411, octobre 1964.

[Mor69] Mori, T. Mecha-tronics. Rapport technique Memo 21.131.01, Yaskawa Internal Trademark Application, juillet 1969.

[Mos99] Mosiek, D. *Procédures graphiques pour l'analyse structurelle de systèmes physiques modélisés par bond graphs.* Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, Villeneve d'Ascq, France, 1999.

[Mou00] Mouhri, A. *Etude structurelle des systèmes généralisés par l'approche bond graph.* Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, Villeneuve d'Ascq, France, 2000.

[Mou06] Mouhib, O., Chereji, B., Marquis-Favre, W., Thomasset, D., Pousin, J., Picq, M. Procedure for the bond graph construction of an optimal control problem. In *Proceedings of the 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization*, pages 69–74, Paris, France, avril 2006.

[MS1] MS1 Software. http ://www.lorsim.be (consulté le 14.10.2009).

[Nai03] Naidu, D.S. *Optimal control systems.* ISBN 0-8493-0892-5. CRC Press, 2003.

[New50] Newton Jr, G.C. What size motor for proper operation of servomechanism ? *Machine Design*, 22 :125–130, 200–202, 1950.

[Ngw99] Ngwompo, R.F., Scavarda, S. Dimensioning problems in system design using bicausal bond graphs. *Simulation Practice and Theory*, 7(5-6) :577–587, décembre 1999.

[Ngw01a] Ngwompo, R.F., Scavarda, S., Thomasset, D. Physical model-based inversion in control systems design using bond graph representation, part 1 : theory. *Proceedings of ImechE, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 215(2) :95–103, 2001.

[Ngw01b] Ngwompo, R.F., Scavarda, S., Thomasset, D. Physical model-based inversion in control systems design using bond graph representation, part 2 : applications. *Proceedings of ImechE, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 215(12) :105–112, 2001.

[Ngw05] Ngwompo, R.F., Bideaux, E., Scavarda, S. On the role of power lines and causal paths in bond graph-based model inversion. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 78–85, New Orleans, USA, janvier 2005.

[Nij82] Nijmeijer, H. Invertibility of affine nonlinear control systems : a geometric approach. *System & Control Letters*, 2(3) :163–168, octobre 1982.

[Nij86] Nijmeijer, H. Right invertibility for a class of nonlinear control systems : a geometric approach. *System & Control Letters*, 7(2) :125–132, avril 1986.

[Oll06] Ollero, A., Boverie, S., Goodall, R., Sasiadek, J., Erbe, H., Zuehlke, D. Mechatronics, robotics and components for automation and control, ifac milestone report. *Annual Reviews in Control*, 30(1) :41–54, 2006.

[Ort99] Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B., Escobar, G. Energy-shaping of port-controlled hamiltonian systems by interconnection. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1646–1651, Phoenix, USA, décembre 1999.

[Ort02] Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B., Escobar, G. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4) :585–596, avril 2002.

[Oul06] Ould Bouamama, B., Dauphin-Tanguy, G. Modélisation par bond graph - applications aux systèmes énergétiques. In *Techniques de l'ingénieur*, numéro be8281. 2006.

[Pay61] Paynter, H. *Analysis and Design of Engineering Systems*. ISBN 0-262-16004-8. The M.I.T. Press, Cambridge, USA, 1961.

[Pay88] Paynter, H.M., Busch-Vishniac, J. Wave-scattering approaches to conservation and causality. *Journal of the Franklin Institute*, 325(3) :295–313, 1988.

[Per92] Perdon, A.M., Conte, G., Longhi, S. Invertibility and inversion of linear periodic systems. *Automatica*, 28(3) :645–648, mai 1992.

[Pet62] Petri, C.A. Kommunikation mit automaten. Rapport technique Schrift Nr 2, Rheinisch-Westfäliches Institut für Intrumentelle Mathematik an der Universität Bonn, Bonn, Allemagne, 1962.

[Pir09] Pirvu, A.-M., Dauphin-Tanguy, G., Kubiak, P. Automatic adaptation of a bond graph model to transfer function specifications. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 17(1) :257–270, janvier 2009.

[Pon62] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, E. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience, 1962.

[Por69] Porter, W.A. Decoupling of and inverses for time-varying linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(4) :378–380, août 1969.

[Pot86] Potkonjak, V., Jaksic, N. Contribution to a computer-aided choice of d.c. motors for manipulation robots. *Robotica*, 4 :37–41, 1986.

[Pun72] Pun, L. Introduction à la pratique de l'optimisation. In *Techniques de l'automatisme*, 324 pages. Dunod, 1972.

[Rah92] Rahmani, A., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Formal determination of controllability/observability matrices for multivariable systems modelled by bond graph. In *Proceedings of IMACS/SICE International Symposium of Robotics, Mechatronics and Manufacturing System*, pages 573–580, Kobe, Japon, septembre 1992.

[Rah93] Rahmani, A. *Etude structurelle des systèmes linéaires par l'approche bond graph*. Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, France, 1993.

[Rah96] Rahmani, A., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. On the infinite structure of systems modelled by bond graph : Feedback decoupling. In *Proceedings of the IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 3, pages 1617–1622, Beijing, Chine, octobre 1996.

[Rah97] Rahmani, A., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Approche des bond graphs pour l'analyse structurelle des systèmes linéaires. *Linear Algebra and its Applications*, 259 :101–131, juillet 1997.

[Rah98] Rahmani, A., Dauphin-Tanguy, G. Symbolic determination of state matrices from bond graph model with derivative causality. In *Proceedings of the IEEE-SMC IMACS Multiconference Computation Engineering in System Applications*, pages 499–515, Hammamet, Tunisie, avril 1998.

[Red93a] Redfield, R.C. Dynamic system synthesis with a bond graph approach : Part ii-conceptual design of an inertial velocity indicator. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 115(3) :364–369, septembre 1993.

[Red93b] Redfield, R.C., Krishnan, S. Dynamic system synthesis with a bond graph approach : Part i- synthesis of one-port impedances. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 115(3) :357–363, septembre 1993.

[Rei88] Reinschke, K.J. Multivariable control : A graph-theoretic approach. In Springer-Verlag, editor, *Lecture notes in control and information sciences*, ISBN 0-387-18899-1, 274 pages. Berlin, 1988.

[Rei94] Reinschke, K.J. Graph-theoretic approach to symbolic analysis of linear descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, 197-198 :217–244, janvier-février 1994.

[Rei97] Reinschke, K.J. Digraph characterization of structural controllability for linear descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, 266 :199–217, novembre 1997.

[Rek65] Rekasius, Z.V. Decoupling of multivariable systems by means of state variable feedback. In *Proceedings of the 3rd Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*, pages 439–448, Monticello, USA, octobre 1965.

[Res90] Respondek, W. *Nonlinear controllability and optimal control*, chapter Right and left invertibility of nonlinear control systems, pages 133–176. ISBN 0-8247-8258-5. 1990.

[Ric01] Richard, J.P. Algèbre et analyse pour l'automatique. In *Systèmes automatisés : Information - Commande - Communication*, ISBN 2-7462-0198-4, 406 pages. Hermès Science, 2001.

[Ros70] Rosenbrock, H.H. *State-Space and Multivariable Theory.* Thomas Nelson and sons LTD, Grande Bretagne, 1970.

[Ros77] Rosenbrock, H.H., van der Weiden, A.J.J. Inverse systems. *International Journal of Control*, 25(3) :389–392, mars 1977.

[Ros79] Rosenberg, R.C., Andry, A.N. Solvability of bond graph junction structures with loops. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 26(2) :130–137, février 1979.

[Ros80] Rosenberg, R.C., Moultrie, B. Basis order for bond graph junction structures. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 27(10) :909–920, octobre 1980.

[Ros86] Rossi, M. Electroacoustique. In *Traité d'électricité*, volume XXI. Presses polytechniques romandes, Lausanne, Suisse, 1986.

[Rze03] Rzevski, G. On conceptual design of intelligent mechatronic systems. *Mechatronics*, 13(10) :1029–1044, décembre 2003.

[Sai69] Sain, M.K., Massey, J.L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(2) :141–149, april 1969.

[Sch67] Schultz, D.G., Melsa, J.L. State functions and linear control systems. In *McGraw-Hill Series in Electronic Systems*, ISSN 0-07-055655-5, 435 pages. McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

[Sch81] Schizas, C., Evans, F.J. A graph theoretic approach to multivariable control system design. *Automatica*, 17(2) :371–377, mars 1981.

[Sci94] Scicos Software. http ://www.scicos.org/ (consulté le 14.10.2009). 1994.

[Seo03] Seo, K., Fan, Z., Hu, J., Goodman, E. Toward a unified and automated design methodology for multi-domain dynamic systems using bond graphs and genetic programming. *Mechatronics*, 13(8-9) :851–885, octobre 2003.

[Ses96] Sesmat, S., Scavarda, S. An improved causality notation for bond graph representation. In *CESA IMACS Multiconference : computational engineering in systems applications*, pages 298–302, Lille, France, juillet 1996.

[Shi76] Shields, R.W., Boyd Pearson, J. Structural controllability of multiinput linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(2) :203–212, avril 1976.

[Sil68] Silverman, L.M. Properties and application of inverse systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(4) :436–437, août 1968.

[Sil69] Silverman, L.M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions of Automatic Control*, 14(3) :270–276, juin 1969.

[Sim07] Simscape. http ://www.mathworks.fr/products/simscape/techni calliterature.html (consulté le 14.10.2009). 2007.

[Sin81] Singh, S.N. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :595–598, avril 1981.

[Soc] Société SNR. http ://www.snr-bearings.com/mechatronics/fr/fr-fr/index.cfm (consulté le 14.10.2009).

[Sto02] Stoer, J., Bulirsch, R. Introduction to numerical analysis. In *Texts in Applied Mathematics*, volume 12. Springer-Verlag, New York, 2002.

[Sud86] Suda, N., Hatanaka, T. Structural properties of systems represented by bond graphs. In *Proceedings of the World IMACS Conference on Complex and Distributed Systems : Analysis, Simulation and Control*, volume 4, pages 73–80, Paris, France, 1986.

[Sue92] Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Poles and zeros of multivariable linear systems : a bond graph approach. In G. Dauphin-Tanguy P.C. Breedveld, editor, *IMACS Transactions, Bond Graph for Engineers*, pages 211–228. Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1992.

[Sue92] Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Grassmann Algebra and Bond-graph Modelling. *Journal of the Franklin Institute*, 329(6) :1129–1146, 1992.

[Sue93] Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Bond graph determination of controllability subspaces for pole assignment. In *Proceedings of the International Conference*

on Systems, Man and Cybernetics, volume 1, pages 14–19, Le Touquet, France, octobre 1993.

[Tan88] Tan, S., Vandewalle, J. Inversion of singular systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(5) :583–587, mai 1988.

[Tho90] Thoma, J.U. *Simulation by bond-graphs*. Springer Verlag, Berlin and New York, 1990.

[Tré05] Trélat, E. Contrôle optimal : théorie & applications. In *Mathématiques Concrètes*, ISBN 2-7117-7175-X, 242 pages. Vuibert, Paris, 2005.

[Tra03] Travé-Massuyès, L., Dague, P. Modèles et raisonnements qualitatifs. In *Systèmes automatisés : Information - Commande - Communication*, ISBN 2-7462-0744-3, 364 pages. Hermès Science, 2003.

[Ull92] Ullman, D.G. *The mechanical design process*. McGraw-Hill, New York, USA, 1992.

[van91] van der Woude, J.W. On the structure at infinity of a structured system. *Linear Algebra and its Applications*, 148 :145–169, avril 1991.

[van94] van Dijk, J. *On the role of bond graph causality in modelling mechatronic systems*. Thèse, University of Twente, Enschede, Pays Bas, 1994.

[van03a] van Amerongen, J. Mechatronic design. *Mechatronics*, 13(10) :1045–1066, décembre 2003.

[van03b] van Amerongen, J., Breedveld, P. Modelling of physical systems for the design and control of mechatronic systems. *Annual Reviews in Control*, 27(1) :87–117, 2003.

[van04] van der Schaft, A.J., Maschke, B.M. Port-hamiltonian systems : a theory for modeling, simulation and control of complex physical systems. In *Tutorial in Control and Decision Conference*, Atlantis, Bahamas, décembre 2004.

[van06] van der Schaft, A. Port-hamiltonian systems : an introductory survey. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, volume 3, pages 1339–1365, Madrid, Espagne, août 2006.

[Var82] Vardulakis, A.I.G., Limebeer, D.J.N., Karcanias, N. Structure and smith-macmillan form of a rational matrix at infinity. *International Journal of Control*, 35(4) :701–725, avril 1982.

[Ver04] Verein Deutscher Ingenieure. Entwicklungsmethodik für mechatronische systeme (design methodology for mechatronic systems). Norme VDI 2206, Verein Deutscher Ingenieure, Berlin : Beuth Verlag GmbH, juin 2004.

[Vuk87] Vukobratovic, M., Katic, D., Potkonjak, V. Computer-assisted choice of electrohydraulic servosystem for manipulation robots using complete mathematical models. *Mechanism and Machine Theory*, 22(5) :431–439, 1987.

[Wei64] Weiss, L. On a question related to the control of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(2) :176–177, avril 1964.

[Wil74] Willsky, A.S. On the invertibility of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(3) :272–274, juin 1974.

[Wla91] Wlasowski, M., Lorenz, F. How to determine the solvability of bond graph linear junction structures. *Journal of the Franklin Institute*, 328(5-6) :855–869, 1991.

[Wri92] Wright, S.J. Stable parallel algorithms for two-point boundary value problems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13(3) :742–764, mai 1992.

[Wu,95] Wu, S.T., Youcef-Toumi, K. On relative degrees and zero dynamics from physical system modeling. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 117(2) :205–217, 1995.

[Xia00] Xia, X. *Contribution de l'analyse du comportement dynamique et énergétique par le bond graph bicausal.* Thèse, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 2000.

[Xia01] Xia, X., Scavarda, S. Adjoint system by using the representation of bond graph. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modelling and simulation*, pages 15–20, Phoenix, USA, janvier 2001.

[Yam85] Yamada, T., Saga, T. A sufficient condition for structural decouplability of linear nonsquare systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(9) :918–921, septembre 1985.

[You66] Youla, D.C., Dorato, P. On the inverse of linear dynamical systems. Rapport technique PIBMRI-1319-66, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, USA, mars 1966.

[You96] Youcef-Toumi, K. Modeling, design, and control integration : a necessary step in mechatronics. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1(1) :29–38, mars 1996.

[Zad63] Zadeh, L.A., Desoer, C.A. Linear systems theory : The state space approach. In *Series in Systems Science*, 628 pages. McGraw-Hill, 1963.

[Zub00] Zubieta, L., Bonert, R. Characterization of double-layer capacitors for power electronics applications. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 36(1) :199–204, janvier-février 2000.

Annexe A

Le langage bond graph

Cette annexe a pour but de présenter les bases du langage bond graph. Après un court historique, les éléments principaux du langage, la procédure de construction d'un modèle ainsi que le principe de causalité seront notamment décrits. En cela, cette annexe ne constitue qu'une introduction succincte au langage. Le lecteur intéressé pourra compléter celle-ci grâce notamment aux livres de référence dans ce domaine : [Kar90, Dau00].

A.1 Description

Le langage bond graph est un langage de modélisation basé sur la description graphique des transferts d'énergie impliqués au sein d'un système. Grâce à une représentation unifiée, il permet d'aborder tous les domaines de la physique et d'envisager ainsi la modélisation de systèmes complexes. Un modèle bond graph est un modèle de connaissance et il peut être vu comme un intermédiaire entre une représentation technologique (*i.e.* schéma fonctionnel) et un modèle analytique [1] (*i.e.* modèle équationnel).

A.2 Historique

Inventé en 1959 puis publié pour la première fois en 1961 par Paynter [Pay61], le langage bond graph a ensuite été formalisé par Karnopp et Rosenberg [Kar75]. Celui-ci est alors apparu en Europe dès la fin des années 70 notamment aux Pays-Bas, en Suisse et en France par l'intermédiaire d'auteurs tels que Breedveld [Bre84], Thoma [Tho90], Dauphin-Tanguy et Scavarda [Dau93].

A.3 Éléments de base du langage

Après avoir introduit le langage bond graph comme un outil de modélisation d'un système du point de vue énergétique, les notions de *variables de puissance* et de *variables d'énergie* sont définies. Les principaux éléments nécessaires à une telle modélisation sont

1. Il est cependant important de noter qu'à un modèle bond graph est intrinsèquement lié un modèle mathématique. En effet, nous verrons dans la suite de cette annexe qu'à chaque élément bond graph correspond une (ou plusieurs) équation(s) décrivant les lois de la physique du système (*e.g.* relation caractéristique d'un phénomène, loi de conservation,...).

alors présentés : que ce soit pour la représentation des différents phénomènes énergétiques ou pour la formulation de leurs interconnexions.

A.3.1 Concepts et variables utilisées

Apport, stockage et dissipation d'énergie

De manière générale, un système ne peut être mis en mouvement que par l'utilisation d'énergie. Un moyen de rendre compte de son comportement dynamique passe alors par la description de cette utilisation en dressant un certain « bilan énergétique » du système. Il convient alors d'identifier les quantités d'énergie transmises au système (énergie apportée), celles réparties à travers le système (énergie stockée) puis celles restituées à son environnement (énergie dissipée). Procéder ainsi permet notamment d'avoir une approche identique quelque soit le domaine physique considéré (Tab. A.1).

Domaine physique	**Source d'énergie**	**Stockage d'énergie**	**Dissipation d'énergie**
Mécanique de translation	Vérin	Masse en mouvement, ressort	Frottement, amortisseur
Mécanique de rotation	Moteur	Inertie en rotation, barre de torsion	Frottement sur palier
Hydraulique	Pompe, Compresseur	Accumulateur, chambre de vérin	Orifice, restriction
Thermo-dynamique	Pompe à chaleur	Capacité thermique	Conduction

Table A.1 – Exemples de composants d'apport, de stockage et de dissipation d'énergie dans différents domaines physiques

Le langage bond graph se propose justement d'adopter ce point de vue en distinguant d'entrée ces trois types de phénomènes. De plus, il permet une description de la façon dont sont interconnectés ces différents phénomènes grâce à la notion de *lien de puissance*.

Représentation des flux d'énergie

Considérons deux sous-systèmes Σ_A et Σ_B tels qu'une liaison physique existe entre eux (*e.g.* une pompe accouplée directement à un moteur), le langage bond graph consiste alors à représenter le flux d'énergie entre ces deux sous-systèmes par l'intermédiaire d'un *lien de puissance* ou *bond* (Fig. A.1).

$$\Sigma_A \; \frac{e(t)}{f(t)} \nearrow \; \Sigma_B$$

Figure A.1 – Représentation bond graph du flux d'énergie entre les sous-systèmes Σ_A et Σ_B

Ce lien porte les variables d'effort $e(t)$ et de flux $f(t)$ mises en jeu pour le calcul de la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ entre Σ_A et Σ_B de sorte que :

$$\mathcal{P}(t) = e(t)f(t)$$

Aussi, par convention :
- la direction de la demi-flèche du lien de puissance est celle du flux d'énergie (sur la figure A.1, la puissance correspondante $\mathcal{P}(t)$ sera positive si le transfert d'énergie se fait effectivement du sous-système Σ_A vers le sous-système Σ_B) ;
- la variable de flux $f(t)$ est généralement placée du côté de la demi-flèche (et donc la variable d'effort $e(t)$ placée de l'autre côté).

Variables de puissance

La puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ échangée entre deux sous-systèmes Σ_A et Σ_B est définie comme le produit de deux variables complémentaires $e(t)$ et $f(t)$. Par définition, ces variables sont donc des *variables de puissance*. Indépendamment du domaine physique considéré, elles sont classées en deux types : les *variables généralisées d'effort* et celles *de flux* (voir Tab. A.2 pour quelques exemples).

Variables d'énergie

Par définition, la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ mesure le taux instantané d'énergie transférée entre deux sous-systèmes Σ_A et Σ_B. Aussi, l'énergie $\mathcal{E}(t)$ peut être calculée par intégration de la puissance instantanée par rapport au temps de sorte que :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{P}(\tau)\, d\tau = \mathcal{E}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau)f(\tau)\, d\tau$$

Dans le cas de stockages d'énergie réversibles, des *variables d'énergie* sont alors définies de la manière suivante :

$$p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau)\, d\tau$$

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

Ces variables caractérisent l'état énergétique d'un système. Elles constitueront **le vecteur d'état du modèle bond graph**. Indépendamment du domaine physique considéré, elles sont appelées *moment généralisé* (variable $p(t)$) et *déplacement généralisé* (variable $q(t)$).

De par leurs définitions sous la forme d'intégrales de variables de puissance en découlent automatiquement les relations suivantes :

$$\dot{p}(t) = e(t)$$
$$\dot{q}(t) = f(t)$$

Le tableau A.2 présente notamment quelques exemples sur la nature physique de ces différentes variables et ce, dans différents domaines.

Domaine physique	Variables de puissance		Variables d'énergie	
	Effort **e**	**Flux** **f**	**Moment généralisé** **p**	**Déplacement généralisé** **q**
Mécanique de translation	Force (N)	Vitesse (m/s)	Quantité de mouvement ($kg.m/s$)	Déplacement (m)
Mécanique de rotation	Couple ($N.m$)	Vitesse angulaire (rad/s)	Moment cinétique ($kg.m^2.rad/s$)	Angle (rad)
Electrique	Tension (V)	Courant (A)	Flux magnétique total (Wb)	Charge (C)
Hydraulique	Pression (Pa)	Débit volumique (m^3/s)	Moment de pression ($Pa.s$)	Volume (m^3)
Magnétique	Force magnéto-motrice (A)	Dérivée du flux magnétique (Wb/s)		Flux magnétique (Wb)
Chimie	Potentiel chimique ($J/mole$)	Débit molaire ($mole/s$)		Mole ($mole$)
Thermo-dynamique	Température (K)	Débit d'entropie (W/K)		Entropie (J/K)

Table A.2 – Variables de puissance et d'énergie (et leurs unités SI) associées à différents domaines de la physique

A.3.2 Éléments bond graph

Comme nous l'avons déjà précisé, le langage bond graph permet de représenter graphiquement les différents phénomènes énergétiques impliqués dans un système ainsi que la manière dont ces phénomènes sont interconnectés. Le lecteur pourra trouver dans cette section une liste des principaux éléments bond graph nécessaires à une telle modélisation. À chaque élément correspond une représentation graphique et une loi caractéristique, loi qui sera notamment utilisée pour la mise en équation du système. Dans cette section, le symbole « = » utilisé pour présenter ces relations représente bien une égalité au sens mathématique du terme. Il ne présage en rien d'une orientation *a priori* de l'équation (*i.e.* le membre à gauche du symbole n'est pas forcément déterminé par celui situé à sa droite).

Éléments liés aux phénomènes d'apport, de stockage et de dissipation d'énergie

Les éléments bond graph liés aux phénomènes énergétiques peuvent se classer en deux catégories : les *éléments passifs* et les *éléments actifs*.

	Élément bond graph	**Représentation graphique, loi caractéristique et énergie**	**Exemple physique**
Éléments passifs	C stockage d'énergie sans dissipation	$\frac{e(t)}{f(t)}$ C $q(t) - \Phi_C(e(t)) = 0$ $\mathcal{E}(q_t) = \mathcal{E}(q_0) + \int_{q_0}^{q_t} e(\widehat{q})\, d\widehat{q}$	Ressort, accumulateur, capacité électrique,...
	I stockage d'énergie sans dissipation	$\frac{e(t)}{f(t)}$ I $p(t) - \Phi_I(f(t)) = 0$ $\mathcal{E}(p_t) = \mathcal{E}(p_0) + \int_{p_0}^{p_t} f(\widehat{p})\, d\widehat{p}$	Masse, inertie, inductance électrique,...
	R dissipation d'énergie	$\frac{e(t)}{f(t)}$ R $e(t) - \Phi_R(f(t)) = 0$ $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau) f(\tau)\, d\tau$	Frottements, secs, visqueux, dissipation par effet Joule,...
Éléments actifs	Se source d'énergie imposant l'effort	$E(t)$: Se $\frac{e(t)}{f(t)}$ $e(t) = E(t)$ $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau) f(\tau)\, d\tau$	Source de pression, source de tension,
	Sf source d'énergie imposant le flux	$F(t)$: Sf $\frac{e(t)}{f(t)}$ $f(t) = F(t)$ $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau) f(\tau)\, d\tau$	Source de courant, ...

TABLE A.3 – Éléments bond graph liés aux phénomènes : stockage, dissipation et apport d'énergie

Les *éléments passifs* sont dénommés ainsi car ils correspondent à des phénomènes physiques qui transforment la puissance fournie en énergie stockée (élément bond graph C ou I) ou dissipée (élément bond graph R). Par convention, les liens de puissance connectés à ces éléments sont donc représentés comme entrants (Tab. A.3). Les énergies associées aux éléments bond graph de stockage d'énergie s'expriment en fonction des variables de moment généralisé $p(t)$ (pour les éléments I) ou de déplacement généralisé $q(t)$ (pour les éléments C). Les variables de flux $f(t)$ (pour les éléments I) ou d'effort $e(t)$ (pour les éléments C) sont dites *variables de co-énergie*[2].

2. Rappelons que la *co-énergie* $\mathcal{E}^+$ est définie de sorte que $\mathcal{E}(x) + \mathcal{E}^+(x^+) = xx^+$ où $\mathcal{E}$ est l'énergie, x

Les *éléments actifs* quant à eux tiennent leur dénomination au fait qu'ils correspondent à une source idéale d'énergie capable d'imposer une variable d'effort (élément bond graph Se) ou une variable de flux (élément bond graph Sf) quelle que soit la manière dont est connectée la source au système. Au contraire des éléments précédents, par convention, les liens de puissance connectés à ces éléments sont donc représentés comme sortants (Tab. A.3).

Éléments liés à l'interconnexion des phénomènes

Une fois les phénomènes énergétiques identifiés, il convient de s'intéresser à la manière dont ceux-ci s'interconnectent afin de représenter le système dans sa globalité. Les éléments bond graph permettant de décrire une telle interconnexion se distinguent là encore en deux catégories : les *éléments de jonction* et les *éléments de transduction*. De plus, chacun d'entre eux est connecté à plusieurs liens de puissance. Ils sont donc dits *multiports*.

	Élément bond graph	**Représentation graphique et lois caractéristiques**	**Exemple physique**
Éléments de jonction	jonction 0 conservation de la puissance	$e_2(t)\,f_2(t)$ $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$ 0 $\frac{e_3(t)}{f_3(t)}$ $\begin{cases} e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \\ f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \end{cases}$	Contrainte cinématique, loi des mailles, ...
	jonction 1 conservation de la puissance	$e_2(t)\,f_2(t)$ $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$ 1 $\frac{e_3(t)}{f_3(t)}$ $\begin{cases} e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \\ f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \end{cases}$	Équations de Newton-Euler, loi des nœuds, ...

Table A.4 – Éléments bond graph liés à l'interconnexion des phénomènes : éléments de jonction

Les *éléments de jonction* permettent d'interconnecter des phénomènes énergétiques selon qu'ils partagent une même variable d'effort (jonction 0) ou une même variable de flux (jonction 1). Les signes apparaissant dans les relations caractéristiques de ces éléments dépendent de l'orientation des liens de puissance qui leurs sont connectés : une variable est pondérée par un signe + si le lien correspondant est entrant et par un signe − si le

est la variable d'énergie et x^+ celle de co-énergie. Au signe près donc, la co-énergie est la transformée de Legendre de l'énergie par rapport à la variable de co-énergie. Ces deux notions d'énergie et de co-énergie ne sont équivalentes que dans le cas linéaire.

lien est sortant. Si nos représentations du tableau A.4 se sont limitées à trois liens de puissance, autant de liens que nécessaire peuvent être ajoutés à ces éléments de jonction.

	Élément bond graph	**Représentation graphique et lois caractéristiques**	**Exemple physique**
Éléments de transduction	TF transformateur, transducteur instantané et sans dissipation d'énergie	$\overset{e_1}{\underset{f_1}{\rightharpoonup}} \overset{m}{TF} \overset{e_2}{\underset{f_2}{\rightharpoonup}}$ $\begin{cases} e_1(t) - me_2(t) = 0 \\ mf_1(t) - f_2(t) = 0 \end{cases}$ où m est le module du transformateur	Bras de levier, réducteur mécanique, transformateur électrique, ...
	GY gyrateur, transducteur instantané et sans dissipation d'énergie	$\overset{e_1(t)}{\underset{f_1(t)}{\rightharpoonup}} \overset{r}{GY} \overset{e_2(t)}{\underset{f_2(t)}{\rightharpoonup}}$ $\begin{cases} e_1(t) - rf_2(t) = 0 \\ rf_1(t) - e_2(t) = 0 \end{cases}$ où r est le module du gyrateur	Gyroscope à vitesse constante, conversion électromécanique d'un moteur à courant continu, ...

TABLE A.5 – Éléments bond graph liés à l'interconnexion des phénomènes : éléments de transduction

Les *éléments de transduction* permettent quant à eux d'interconnecter des phénomènes énergétiques appartenant bien souvent à des domaines physiques différents. Ces couplages entre domaines peuvent s'exprimer sous la forme d'une relation entre deux variables d'effort (élément bond graph TF) ou bien entre une variable d'effort et une variable de flux (élément bond graph GY) (Tab. A.5).

Quelques éléments utiles à l'analyse

Si les entrées du modèle sont explicitement représentées par des phénomènes idéalisés d'apport d'énergie (éléments bond graph Se et Sf), il peut être utile pour des besoins d'analyse[3] de faire également apparaître les sorties du système. Pour cela, de nouveaux éléments passifs ont été introduits. Il s'agit de détecteur d'effort (élément bond graph De) et de flux (élément bond graph Df) (Tab. A.6). Ils correspondent en quelque sorte à des capteurs idéaux. La puissance qui leur est associée est nulle et, placés sur des jonctions adéquates, leur ajout ne modifie en rien le comportement dynamique du modèle.

3. Notamment pour des besoins d'analyse structurelle comme lors du chapitre 3.

	Élément bond graph	**Représentation graphique et loi caractéristique**	**Exemple physique**
Éléments passifs	De détecteur d'effort imposant un flux nul	$\frac{e(t)}{f(t)}$ De $f(t) = 0$	Voltmètre, dynamomètre,...
	Df détecteur de flux imposant un effort nul	$\frac{e(t)}{f(t)}$ Df $e(t) = 0$	Ampèremètre, capteur de débit, ...

Table A.6 – Éléments bond graph de détection de variable de puissance

Aussi, nous verrons au chapitre 3 qu'il est parfois utile de calculer le gain de *chemins causaux* (définitions 5 et 32, pages 86 et 325) pour mener à bien l'analyse structurelle d'un modèle bond graph. Le tableau A.7 présente les transmittances des principaux éléments bond graph dans le cas linéaire.

Éléments bond graph	**Causalités**	**Transmittances**
$\frac{e(t)}{f(t)}$ C : C	Causalité intégrale	$\frac{1}{Cs}$
$\frac{e(t)}{f(t)}$ C : C	Causalité dérivée	Cs
$\frac{e(t)}{f(t)}$ I : I	Causalité intégrale	$\frac{1}{Is}$
$\frac{e(t)}{f(t)}$ I : I	Causalité dérivée	Is
$\frac{e(t)}{f(t)}$ R : R	Causalité résistance	R
$\frac{e(t)}{f(t)}$ R : R	Causalité conductance	$\frac{1}{R}$

Table A.7 – Transmittance des principaux éléments bond graph (cas linéaire)

Remarques :

- À l'exception des éléments bond graph I, C, 0 et 1, les lois caractéristiques des éléments bond graph peuvent être fonction d'un signal de modulation. Dans ce cas, une lettre M est rajoutée à la représentation graphique de l'élément correspondant. Par exemple, si le module m d'un transformateur n'est pas constant, l'élément sera alors noté MTF.
- Les éléments de jonction 0 et 1 et de transduction TF et GY sont tous des éléments bond graph conservatifs en puissance. Certains couplages entre domaines physiques peuvent faire intervenir des phénomènes de dissipation ou d'apport d'énergie (*e.g.* microphone à condensateur, solénoïde, conduction thermique). Dans ce cas, ceux-ci seront modélisés par des éléments R, I, C, voire IC multiports où il y aura autant de liens de puissance que de domaines physiques impliqués (voir [Dau00] pour plus de détails).

A.4 Construction d'un modèle bond graph

A.4.1 Procédure générale

De manière générale, la modélisation en langage bond graph d'un système donné se déroule en trois grandes étapes.
La première étape consiste à étudier l'architecture du système. L'ingénieur en charge de la modélisation adopte alors une *approche systémique* : il doit décomposer le système en composants, puis chaque composant en sous-composants, *etc.* jusqu'à obtenir des « briques élémentaires ». Il modélise alors l'interconnexion [4] de ces différents composants ou « briques » sous la forme de *modèle bond graph à mots* ou *word bond graph* (Fig. A.2).

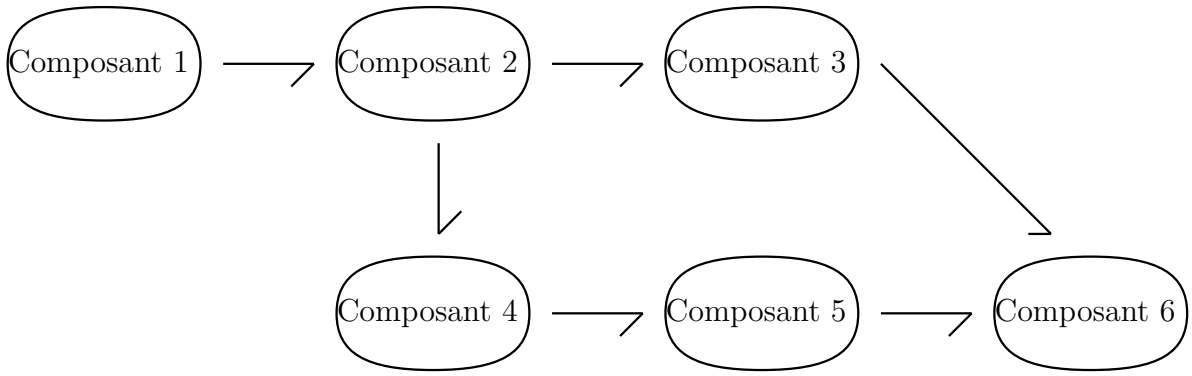


FIGURE A.2 – Exemple de modèle bond graph à mots (*word bond graph*)

La deuxième étape consiste à préciser le modèle bond graph de chaque « brique élémentaire » en adoptant cette fois-ci une *approche phénoménologique*. L'ingénieur en charge de la modélisation doit identifier les phénomènes énergétiques et représenter leur interconnexion. Conformément au principe fondamental de conservation d'énergie « énergie

4. Cette interconnexion peut être due à l'architecture physique même du système ou bien, pour des systèmes à paramètres répartis, à l'étude d'un schéma de discrétisation tel que nous pouvons le trouver en mécanique des milieux continus.

apportée = énergie stockée + énergie dissipée », il fixe ainsi la structure du modèle bond graph (Fig. A.3).

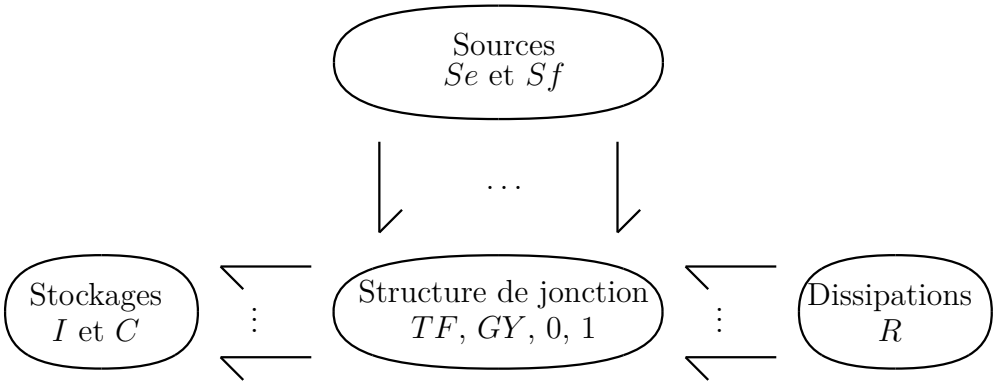


FIGURE A.3 – Structure générique d'un modèle bond graph

Enfin, la troisième étape consiste à associer à chaque phénomène énergétique (éléments bond graph I, C et R) une loi caractéristique particulière, fonction du degré de précision désiré (loi linéaire ou non).

Remarque : Si les lois caractéristiques des phénomènes énergétiques sont nécessaires, la construction d'un modèle bond graph ne requiert cependant pas l'écriture explicite des lois générales de conservation : celles-ci sont implicitement représentées par les éléments bond graph de jonction 0 et 1 et de transduction TF et GY.

La procédure 8 permet notamment de reprendre ces trois grandes étapes de construction dans le cas de modèles relativement simples, 0D [5] et issus de la mécanique (de translation ou de rotation), de l'électrique et/ou de l'hydraulique. Des procédures de construction plus complexes peuvent être établies, comme pour les systèmes multicorps [Kar90, Fav97].

5. Ici, un modèle sera qualifié de *0D* lorsqu'il représentera un système à paramètres localisés.

Procédure 8 (*[Fav97]*)

Construction d'un modèle bond graph (cas de modèles 0D issus de l'électrique, l'hydraulique, la mécanique de translation et la mécanique de rotation)

1. *Identifier les différents domaines de la physique présents dans le système.*
2. *Choisir une référence de potentiel, de pression, de vitesse de translation et de rotation.*
3. *À chaque nœud distinct de potentiel, de pression, attacher une jonction* 0 *et, à chaque vitesse de translation et de rotation, attacher une jonction* 1*. Nommer les variables liées à ces potentiels et ces vitesses.*
4. *Insérer une jonction* 1 *entre les jonctions* 0 *et inversement pour les domaines de la mécanique.*
5. *Placer les liens de puissance faisant alors apparaître les différences de potentiels, de pressions, de vitesses de translation et de rotation (Fig. A.4).*

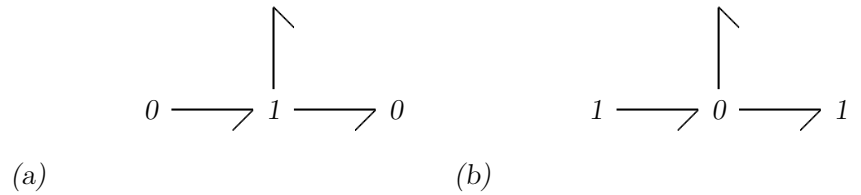


FIGURE *A.4 – Jonctions et liens de puissance faisant apparaître (a) les différences de potentiels et de pressions, (b) les différences de vitesses [Fav97]*

6. *Placer les éléments de transduction appropriés entre les domaines d'énergie du système.*
7. *Connecter les éléments* I*,* C *et* R *aux liens libres correspondant aux phénomènes modélisés et en indiquant leur paramètre (ou leur loi caractéristique).*
8. *Éliminer les liens de puissance nulle, c'est-à-dire où l'une des deux variables de puissance est nulle et simplifier les structures graphiques (Tab. A.8).*

Règle	***Modèle bond graph***	***Modèle bond graph simplifié***
R1	0	
R2	1	
R3	1 1	1
R4	0 0	0

TABLE *A.8 – Règles de simplification d'un modèle bond graph*

A.4.2 Exemple

Afin d'illustrer la procédure de construction précédente, considérons l'exemple d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu.

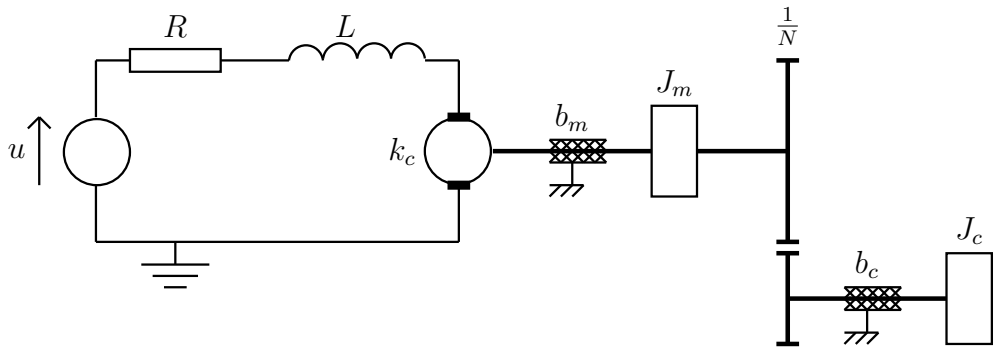


FIGURE A.5 – Schéma technologique d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu

Cet exemple est caractérisé notamment par (Fig. A.5) :
- un circuit électrique composé d'une source de tension u, d'une résistance électrique R et d'une bobine de paramètre constant L en série ;
- un couplage électromécanique de constante de couple k_c ;
- un arbre de sortie moteur, d'inertie J_m, supposé infiniment raide et soumis à des frottements visqueux de cœfficient b_m ;
- un réducteur de rapport $\frac{1}{N}$;
- un arbre de charge, d'inertie J_c, supposé lui-aussi infiniment raide et soumis à des frottements visqueux de cœfficient b_c.

Pour modéliser ce système en langage bond graph, il convient tout d'abord de construire son modèle word bond graph (Fig. A.6). Conformément à l'approche systémique, celui-ci est composé de quatre composants qui sont : la source de tension, le moteur électrique, le réducteur et la charge. Un capteur peut éventuellement être ajouté si nous supposons vouloir observer la vitesse de rotation de l'arbre de charge.

FIGURE A.6 – Modèle word bond graph d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu

Puis, la seconde phase de construction du modèle consiste à associer un modèle bond graph à chaque composant et à identifier ainsi les différents phénomènes énergétiques impliqués au sein de ceux-ci. Ici, après une analyse phénoménologique du système, nous obtenons un modèle bond graph (Fig. A.7) où :

- l'élément Se représente l'apport d'énergie dû à la source de tension ;
- les trois éléments I correspondent respectivement au stockage d'énergie magnétique dans l'inductance du moteur et aux énergies cinétiques des deux arbres en rotation ;
- les trois éléments R sont respectivement associés à la dissipation d'énergie par effet Joule au niveau de la résistance interne du moteur et aux frottements visqueux présents sur les deux arbres ;
- l'élément GY permet de décrire le couplage électromécanique au sein du moteur ;
- l'élément TF représente le comportement du réducteur, considéré ici comme parfait (*i.e.* pas de perte de puissance) ;
- l'élément Df caractérise le capteur de vitesse, supposé ici comme idéal.

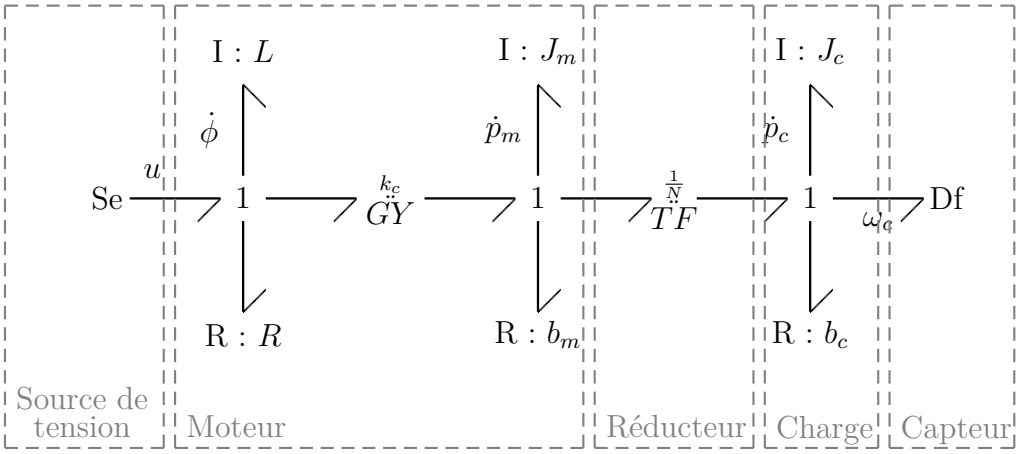


FIGURE A.7 – Modèle bond graph d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu

Le flux magnétique ϕ et les moments cinétiques p_m et p_c des deux arbres sont les variables d'état de ce modèle bond graph. Pour obtenir un modèle complet, il suffit enfin de préciser les lois caractéristiques de chaque élément I, C et R. Ici, nous supposons que ces lois sont toutes linéaires : chacune d'elle est alors déterminée par la donnée d'un seul paramètre (*e.g.* la représentation R :R signifie que la loi caractéristique associée à l'élément R est $e(t) = Rf(t)$).

A.5 Schéma de calcul associé à un modèle bond graph

Jusqu'à présent, nous avons défini un modèle bond graph comme étant un moyen graphique de représenter les échanges d'énergie au sein d'un système. Ce côté graphique facilite notamment l'interprétation physique du comportement dynamique du système. Cependant, il ne faut pas pour autant oublier qu'à chaque élément bond graph est intrinsèquement associée une (ou plusieurs) relation(s) mathématique(s) : que ce soit une loi caractéristique pour les éléments I, C et R ou des lois de conservation pour les éléments 0, 1, TF et GY. Pour le moment, ces relations ont été présentées sans parti pris sur leurs orientations et sans hypothèse sur la nature des grandeurs données et à déterminer des

modèles. Les modèles bond graph présentés jusqu'alors sont ainsi dits *acausaux* : ils ne reflètent que la physique du système.

Cependant, pour des besoins de simulation (et parfois d'analyse), l'orientation des équations est nécessaire : celles-ci doivent être mises sous la forme d'une séquence d'affectations, une séquence qui permet de partir de la donnée des grandeurs connues pour arriver à déterminer les grandeurs inconnues. Cette section traite de deux concepts qui permettent de mettre en évidence ces orientations de calcul dans le modèle bond graph : la causalité et la bicausalité. Nous verrons notamment qu'elles permettent d'aboutir à ce que nous appelons des modèles bond graph *causaux* ou *bicausaux* et qu'elles permettent d'organiser les équations en un schéma de calcul orienté. Au contraire de la section précédente, le symbole « := » utilisé ici pour décrire les équations du modèle indique un sens précis de calcul, à savoir, le membre de gauche est déterminé par l'évaluation du membre de droite.

A.5.1 Causalité

Principe général

Soient deux sous-systèmes Σ_A et Σ_B physiquement connectés. Le flux d'énergie entre ces deux sous-systèmes est alors modélisé en langage bond graph par un lien de puissance (Fig. A.1, page 278). En plus d'adapter directement leur puissance, ces deux sous-systèmes ont également les mêmes efforts et flux à leurs ports de sorte que :

$$\begin{cases} e_A - e_B = 0 \\ f_A - f_B = 0 \end{cases}$$

où e_A et f_A (resp. e_B et f_B) sont l'effort et le flux associés au sous-système Σ_A (resp. Σ_B).

Conformément au principe physique de causalité, seules deux situations peuvent alors avoir lieu :

- soit le sous-système Σ_A impose l'effort à Σ_B qui réagit à son tour en imposant le flux à Σ_A :

$$\begin{cases} e_B := e_A \\ f_A := f_B \end{cases} \tag{A.1}$$

- soit le sous-système Σ_A impose le flux à Σ_B qui réagit à son tour en imposant l'effort à Σ_A :

$$\begin{cases} e_A := e_B \\ f_B := f_A \end{cases} \tag{A.2}$$

En langage bond graph, ces relations de cause à effet, traduisant une orientation précise du schéma acausal (A.5.1), sont représentées par l'ajout d'un *trait causal* sur le lien de puissance (Fig. A.8). Par convention, ce trait causal est placé près de l'élément pour lequel l'effort est imposé. Sa position est strictement indépendante de l'orientation du lien de puissance (*i.e.* du sens de la demi-flèche).

(a) Correspondant au schéma de calcul (A.1)

(b) Correspondant au schéma de calcul (A.2)

FIGURE A.8 – Représentation bond graph du principe de causalité

Causalité des différents éléments bond graph

L'orientation des relations mathématiques et donc le placement des traits causaux sont soumis à quelques règles. Les tableaux A.9 et A.10 récapitulent notamment les différents schémas de calcul possibles pour chacun des éléments bond graph présentés précédemment.

À cette occasion, nous pouvons remarquer que :

- par définition, les éléments bond graph Se, Sf, De et Df sont à causalité imposée (*e.g.* un capteur d'effort impose un flux nul et le trait causal associé est donc nécessairement placée du côté de l'élément De). Ces éléments permettent de préciser quelles sont les grandeurs données et à déterminer du modèle ;
- certaines causalités sont parfois impossibles pour certains éléments bond graph lorsque leurs lois caractéristiques sont mathématiquement non inversibles ;
- deux règles strictes [6] doivent être satisfaites au niveau des éléments de jonction :
  - un et un seul trait causal doit être placé près d'une jonction 0 ;
  - un et un seul trait causal doit être placé éloigné d'une jonction 1.

Affectation de la causalité

Jusqu'à présent, nous avons vu comment représenter graphiquement l'orientation d'une équation locale associée à un élément bond graph précis. Pour organiser toutes ces équations locales en un modèle global de simulation, il convient d'attribuer un trait causal à chaque lien de puissance présent dans le modèle bond graph du système. Cette affectation suit les règles définies par les éléments à causalité fixe et par les éléments de jonction.

Par exemple, la procédure SCAP [7] (procédure 9) permet, entre autres, de propager la causalité de manière à faciliter l'obtention du modèle d'état du système [8]. Pour ce type de calcul, comme l'expression des dérivées par rapport au temps des variables d'état est recherchée, une causalité intégrale sera préférentiellement affectée aux éléments de stockage d'énergie.

6. En toute rigueur, ces deux règles ne suffisent pas pour des modèles bond graph contenant des cycles de liens. Dans ce cas, BIDARD [Bid94] a démontré qu'il fallait tenir compte de règles supplémentaires plus globales en utilisant les notions de *cycles* et de *cocycles*.

7. *i.e.* Sequential Causality Assignment Procedure

8. Le chapitre 3 montre que cette procédure peut également être utilisée à des fins d'analyse structurelle.

Éléments bond graph et causalités possibles	**Schémas de calcul associés**	**Commentaires**
$\frac{e(t)}{f(t)}$ C	$e(t) := \Phi_C^{-1}(\int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau + q(t_0))$	Causalité intégrale
$\frac{e(t)}{f(t)}$ C	$f(t) := \frac{d}{dt}(\Phi_C(e(t)))$	Causalité dérivée
$\frac{e(t)}{f(t)}$ I	$f(t) := \Phi_I^{-1}(\int_{t_0}^{t} e(\tau)\, d\tau + p(t_0))$	Causalité intégrale
$\frac{e(t)}{f(t)}$ I	$e(t) := \frac{d}{dt}(\Phi_I(f(t)))$	Causalité dérivée
$\frac{e(t)}{f(t)}$ R	$e(t) := \Phi_R(f(t))$	Causalité résistance
$\frac{e(t)}{f(t)}$ R	$f(t) := \Phi_R^{-1}(e(t))$	Causalité conductance

TABLE A.9 – Causalités possibles pour les différents éléments bond graph

Procédure 9 (*[Kar90]*)

Affectation de la causalité préférentielle intégrale (procédure SCAP)

1. *Pour chaque élément à causalité imposée (sources et éléments non inversibles), affecter la causalité obligatoire et la propager à travers le modèle bond graph en utilisant les contraintes de causalité des éléments de jonction* 0 *et* 1 *et des éléments* TF *et* GY.
2. *Pour chaque élément de stockage d'énergie, affecter une causalité préférentiellement intégrale si possible et la propager de la même façon qu'à l'étape 1.*
3. *S'il reste des éléments R non déterminé causalement, affecter une causalité arbitraire à un de ces éléments et la propager comme précédemment.*
4. *Répéter l'étape 3 jusqu'à ce que tous les éléments R soient causalement déterminés.*
5. *Si le modèle bond graph n'est pas entièrement causal, affecter une causalité arbitraire à un lien sans trait causal et la propager comme précédemment.*
6. *Répéter l'étape 5 jusqu'à ce que le modèle bond graph soit entièrement déterminé causalement.*

Dans cette procédure, des conflits de causalité peuvent apparaître comme le non respect des contraintes au niveau des éléments de jonction. Dans ce cas, certaines causalités non obligatoires doivent être changées et la causalité propagée à nouveau. Si, malgré tous les changements possibles, les conflits persistent, le modèle est à revoir. Au contraire, si les conflits sont résolus, la procédure aboutit à des modèles bond graph contenant éven-

Éléments bond graph et causalités possibles	**Schémas de calcul associés**	**Commentaires**
$E(t)$: Se $\frac{e(t)}{f(t)}$	$e(t) := E(t)$	Causalité unique et imposée
$F(t)$: Sf $\frac{e(t)}{f(t)}$	$f(t) := F(t)$	Causalité unique et imposée
$\frac{e(t)}{f(t)}$ De	$f(t) := 0$	Causalité unique et imposée
$\frac{e(t)}{f(t)}$ Df	$e(t) := 0$	Causalité unique et imposée
$\frac{e_1(t)}{f_1(t)}\ \overset{m}{\ddot{TF}}\ \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$ $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}\ \overset{m}{\ddot{TF}}\ \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$	$\begin{cases} e_1(t) := me_2(t) \\ f_2(t) := mf_1(t) \end{cases}$ $\begin{cases} e_2(t) := \frac{1}{m}e_1(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{m}f_2(t) \end{cases}$	Deux causalités uniquement
$\frac{e_1(t)}{f_1(t)}\ \overset{r}{\ddot{GY}}\ \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$ $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}\ \overset{r}{\ddot{GY}}\ \frac{e_2(t)}{f_2(t)}$	$\begin{cases} e_1(t) := rf_2(t) \\ e_2(t) := rf_1(t) \end{cases}$ $\begin{cases} f_2(t) := \frac{1}{r}e_1(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{r}e_2(t) \end{cases}$	Deux causalités uniquement
$e_2(t)$ $f_2(t)$ $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$ 0 $\frac{e_3(t)}{f_3(t)}$	$\begin{cases} e_2(t) := e_1(t) \\ e_3(t) := e_1(t) \\ f_1(t) := -f_2(t) - f_3(t) \end{cases}$	un seul et unique effort est imposé sur la jonction 0
$e_2(t)$ $f_2(t)$ $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$ 1 $\frac{e_3(t)}{f_3(t)}$	$\begin{cases} e_1(t) := -e_2(t) - e_3(t) \\ f_2(t) := f_1(t) \\ f_3(t) := f_1(t) \end{cases}$	un seul et unique flux est imposé sur la jonction 1

TABLE A.10 – Causalités possibles pour les différents éléments bond graph (suite)

tuellement des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée : ceci indique alors la présence d'équations algébriques dans le modèle d'état du système (voir la thèse de VAN DIJK [van94] pour plus de détails).

Remarque : D'autres procédures de propagation de la causalité existent. Elles permettent d'anticiper l'apparition de conflits (*e.g.* la procédure MSCAP [9] de VAN DIJK [van94]) ou bien sont destinées à une autre mise en forme des équations (*e.g.* la procédure LCAP [10] [Kar77] vise à générer les équations de LAGRANGE du système).

A.5.2 Bicausalité

Principe général

Lors de la section précédente, nous avons vu que la causalité bond graph permet de traduire graphiquement les orientations des relations mathématiques associées au modèle. Cependant, celle-ci ne s'intéresse qu'aux schémas de calcul ayant un sens technologique : conformément au principe de causalité au sens de la physique, si un sous-système Σ_A impose un effort à un sous-système Σ_B alors celui-ci réagit nécessairement en imposant le flux à Σ_A.

Du point de vue mathématique, deux autres schémas de calcul peuvent pourtant être déduits du schéma acausal (A.5.1) (page 290) :

- un premier schéma où le sous-système Σ_A détermine à la fois l'effort et le flux pour Σ_B :

$$\begin{cases} e_B := e_A \\ f_B := f_A \end{cases} \tag{A.3}$$

- et un deuxième schéma où, cette fois-ci, le sous-système Σ_B détermine à la fois l'effort et le flux pour Σ_A :

$$\begin{cases} e_A := e_B \\ f_A := f_B \end{cases} \tag{A.4}$$

Ces deux schémas n'ont évidemment rien de physique puisqu'ils ne correspondent pas à une réalité de comportement. Néanmoins ils peuvent être utilisés pour orienter un calcul dans un sens bien particulier. Ces nouvelles possibilités de calcul ont été introduites en langage bond graph grâce au concept de bicausalité de GAWTHROP [Gaw95]. En scindant le trait causal classique en deux demi-traits causaux, ce dernier a permis de dissocier l'affectation des variables d'effort de celle des variables de flux (Fig. A.9) [11].

(a) Correspondant au schéma de calcul (A.3)

(b) Correspondant au schéma de calcul (A.4)

FIGURE A.9 – Représentation bond graph du principe de bicausalité

9. *i.e.* Modified Sequential Causality Assignment
10. *i.e.* Lagrangian Causality Assignment Procedure
11. Une autre notation de la bicausalité est également fournie par JUNCO dans [Jun01]

De nouveaux éléments bond graph capables d'imposer (ou de se voir imposer) à la fois un effort et un flux ont également été introduits (Tab. A.11).

Élément bond graph	**Représentation graphique et loi caractéristique**	**Exemple physique**
$SeSf$ double source imposant l'effort et le flux	$E(t)$, $F(t)$: SeSf $\frac{e(t)}{f(t)}$ $\begin{cases} e(t) = E(t) \\ f(t) = F(t) \end{cases}$	Pas d'interprétation physique possible
$DeDf$ double détecteur d'effort et de flux	$\frac{e(t)}{f(t)}$ DeDf	Pas d'interprétation physique possible

Table A.11 – Éléments bond graph utiles à la propagation de la bicausalité

Ainsi, si la causalité bond graph pouvait être confondue avec la notion de causalité au sens de la physique, la bicausalité, elle, ne représente plus du tout des relations de cause à effet. Elle est dédiée à la représentation de schémas calculatoires non nécessairement physiques. À ce titre, la bicausalité peut être vue comme une extension de la causalité bond graph.

Bicausalité des différents éléments bond graph

Les tableaux A.12, A.13 et A.14 récapitulent les différents schémas bicausaux possibles pour chacun des éléments bond graph vus jusqu'à présent ainsi que leurs éventuelles utilisations.

Affectation de la bicausalité

Comme précédemment, des procédures existent pour attribuer des traits bicausaux aux liens de puissance d'un modèle bond graph. Dans ces cas, l'organisation des équations en un modèle global de simulation repose, d'une part, sur la propagation de la bicausalité des éléments double sources $SeSf$ vers les éléments double détecteurs $DeDf$ et, d'autre part, sur une affectation causale (au sens classique) des autres éléments du modèle.

La procédure SCAPI [12] (procédure 10), par exemple, permet de propager la bicausalité de manière à construire le modèle inverse d'un système à m entrées et m sorties. Là encore comme un modèle d'état est recherché, une causalité intégrale sera préférentiellement affectée aux éléments de stockage d'énergie.

12. *i.e.* Sequential Causality Assignment Procedure for Inversion

Éléments bond graph et bicausalités possibles	**Schémas de calcul associés**	**Utilisations éventuelles**
$\overset{e(t)}{\underset{f(t)}{\rightarrow}}$ C	$e(t), f(t) \rightarrow \Phi_C()\,?$	Synthèse paramétrique, identification, caractérisation
$\overset{e(t)}{\underset{f(t)}{\rightarrow}}$ I	$e(t), f(t) \rightarrow \Phi_I()\,?$	
$\overset{e(t)}{\underset{f(t)}{\rightarrow}}$ R	$e(t), f(t) \rightarrow \Phi_R()\,?$	
$E(t)$, $F(t)$: SeSf $\overset{e(t)}{\underset{f(t)}{\rightarrow}}$	$\begin{cases} e(t) := E(t) \\ f(t) := F(t) \end{cases}$	Départ d'affectation bicausale
$\overset{e(t)}{\underset{f(t)}{\rightarrow}}$ DeDf	$e(t)\,?$, $f(t)\,?$	Arrivée d'affectation bicausale

Table A.12 – Bicausalités possibles pour les différents éléments bond graph

Éléments bond graph et bicausalités possibles	**Schémas de calcul associés**	**Utilisations éventuelles**
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{m}{\ddot{TF}}$ $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} e_1(t) := me_2(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{m} f_2(t) \end{cases}$	Propagation de la bicausalité (bicausalité traversante)
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{m}{\ddot{TF}}$ $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} e_2(t) := \frac{1}{m} e_1(t) \\ f_2(t) := mf_1 \end{cases}$	
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{m}{\ddot{TF}}$ $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} m := \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \\ e_1(t) := me_2(t) \end{cases}$	Synthèse paramétrique, identification, caractérisation, synthèse de loi de commande en boucle ouverte (bicausalité débouchante)
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{m}{\ddot{TF}}$ $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} m := \frac{e_1(t)}{e_2(t)} \\ f_2(t) := mf_1(t) \end{cases}$	
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{m}{\ddot{TF}}$ $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} m := \frac{e_1(t)}{e_2(t)} \\ f_1(t) := \frac{1}{m} f_2(t) \end{cases}$	
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{m}{\ddot{TF}}$ $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} m := \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \\ e_2(t) := \frac{1}{m} e_1(t) \end{cases}$	
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{r}{\ddot{GY}}$ $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} e_1(t) := rf_2(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{r} e_2(t) \end{cases}$	Propagation de la bicausalité (bicausalité traversante)
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{r}{\ddot{GY}}$ $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} f_2(t) := \frac{1}{r} e_1(t) \\ e_2(t) := rf_1(t) \end{cases}$	

TABLE A.13 – Bicausalités possibles pour les différents éléments bond graph (suite)

Éléments bond graph et bicausalités possibles	**Schémas de calcul associés**	**Utilisations éventuelles**
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{r}{\cdots}$ GY $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} r := \frac{e_2(t)}{f_1(t)} \\ e_1(t) := r f_2(t) \end{cases}$	Synthèse paramétrique, identification, caractérisation, synthèse de loi de commande en boucle ouverte (bicausalité débouchante)
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{r}{\cdots}$ GY $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} r := \frac{e_2(t)}{f_1(t)} \\ f_2(t) := \frac{1}{r} e_1(t) \end{cases}$	
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{r}{\cdots}$ GY $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} r := \frac{e_1(t)}{f_2(t)} \\ f_1(t) := \frac{1}{r} e_2(t) \end{cases}$	
$e_1(t)$ $f_1(t)$ $\overset{r}{\cdots}$ GY $e_2(t)$ $f_2(t)$	$\begin{cases} r := \frac{e_1(t)}{f_2(t)} \\ e_2(t) := r f_1(t) \end{cases}$	
$e_2(t)$ $f_2(t)$ $e_1(t)$ $f_1(t)$ 0 $e_3(t)$ $f_3(t)$	$\begin{cases} e_2(t) := e_3(t) \\ e_1(t) := e_3(t) \\ f_1(t) := -f_2 - f_3 \end{cases}$	Propagation de la bicausalité (bicausalité traversante)
$e_2(t)$ $f_2(t)$ $e_1(t)$ $f_1(t)$ 1 $e_3(t)$ $f_3(t)$	$\begin{cases} e_1(t) := -e_2(t) - e_3(t) \\ f_2(t) := f_3(t) \\ f_1(t) := f_3(t) \end{cases}$	

TABLE A.14 – Bicausalités possibles pour les différents éléments bond graph (suite)

Procédure 10 (*[Fot97a, Ngw05]*)

Affectation de la bicausalité (procédure SCAPI)

1. *Dans le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, choisir un ensemble de lignes de puissance E/S disjointes associées à des chemins causaux E/S disjoints*[13]*. S'il n'existe pas de tel ensemble alors le modèle n'est pas inversible et la procédure s'arrête.*
2. *Dans le modèle bond graph acausal, remplacer les sources (resp. les détecteurs) associées aux entrées (resp. aux sorties) par des double détecteurs $DeDf$ (resp. des doubles sources $SeSf$).*
3. *Pour chaque élément dont la causalité est imposée (source, élément non inversible), affecter cette causalité obligatoire et propager cette causalité à travers la structure de jonction en respectant les contraintes de causalité des jonctions* 0 *et* 1 *et des éléments TF et GY.*
4. *Le long de chaque ligne de puissance choisie à l'étape 1, propager la bicausalité de la double source vers le double détecteur. Puis, propager la causalité à travers le modèle bond graph en utilisant les contraintes de causalité des jonctions* 0 *et* 1 *et des éléments TF et GY. Si des conflits causaux ou des boucles causales non résolubles apparaissent, recommencer les étapes précédentes avec un autre ensemble de lignes de puissances E/S disjointes. Si aucun de ces ensembles ne résout les conflits causaux, alors le système n'est pas inversible et la procédure s'arrête.*
5. *Pour les éléments de stockage d'énergie, affecter une causalité préférentiellement intégrale si possible et la propager à travers le modèle bond graph comme à l'étape précédente.*
6. *S'il reste des éléments R non déterminés causalement, affecter une causalité arbitraire sur un de ces éléments et la propager comme précédemment.*
7. *Répéter l'étape 6 jusqu'à ce que chaque élément R soit déterminé causalement.*
8. *Si le modèle bond graph n'est pas complètement déterminé causalement, affecter une causalité arbitraire sur un lien bond graph sans trait causal et la propager comme précédemment.*
9. *Répéter l'étape 8 jusqu'à ce que le modèle bond graph soit complètement déterminé causalement.*

Remarque : Inspirée de la procédure MSCAP de van Dijk, notons qu'une autre procédure existe pour l'inversion d'un modèle bond graph : nommée MSCAPI[14] [Fot97a] et plus élaborée, celle-ci permet notamment d'éviter l'apparition de conflits causaux lorsque les modèles bond graph considérés contiennent des cycles de liens.

14. *i.e.* Modified Sequential Causality Assignment for Inversion

A.6 Logiciels

Enfin, pour finir et à titre d'information, le tableau A.15 fournit une liste non exhaustive de logiciels disponibles et supportant le langage bond graph.

Logiciels	**Statut**		**Description**
	Commercial	**Gratuit**	
20-sim Controllab Products B.V.	x		- éditeur graphique - simulation
Bond Graph Toolbox for Mathematica Virtual Dynamics	x		- éditeur graphique - simulation - calcul symbolique
MS1 LorSim SA	x		- éditeur graphique - analyse structurelle - simulation - export en langage Matlab, Modelica, ACSL, ESACAP
Symbols Shakti Hightech Consultant DPS Technologies	x		- éditeur graphique - simulation - transformation automatique en fonction de transfert - export en langage Matlab
CAMP-G Cadsim Engineering	x		- éditeur graphique - analyse causale - simulation - export en langage Matlab, ACSL, CSSL
Java Applet for Bond Graph Miskloc		x	- éditeur graphique - simulation - systèmes non complexes et linéaires
MTT Gawthrop		x	- éditeur graphique - export vers GNU Octave

Table A.15 – Exemples de logiciels supportant l'outil bond graph

Les résultats numériques de ce mémoire ont notamment été obtenus grâce au logiciel MS1 de LorSim SA.

Annexe B

Le langage Modelica

Cette annexe présente une courte introduction au langage Modelica. Après un bref historique sur la genèse de ce langage, les éléments de base ainsi que les principes de construction d'un modèle Modelica sont évoqués. Cette annexe n'a d'autres objectifs que d'aider le lecteur néophyte à mieux visualiser les principales caractéristiques du langage. Le lecteur intéressé par de plus amples détails pourra consulter les références [Mod99, Mod00, Fri04, Fri06].

B.1 Description

Gratuit et non propriétaire, le langage Modelica est un langage de description de systèmes mathématiques orienté objet. Dans le contexte de la modélisation physique, il permet de représenter le comportement dynamique de systèmes complexes impliquant n'importe quel domaine de la physique. Son originalité relève principalement du fait qu'il permet une description hiérarchisée et acausale du système, deux propriétés utiles à la construction et à la gestion des bibliothèques de modèles.

B.2 Historique

Initiée par Elmqvist de la société Dynasim AB, l'élaboration du langage Modelica a commencé en 1996 dans le cadre du projet ESPRIT SiE-WG [1]. Visant en priorité à augmenter la réutilisabilité et la portabilité des modèles, il s'agissait ici de prendre en compte les caractéristiques des différents langages de modélisation existants et de comprendre pourquoi jusqu'alors aucun d'entre eux n'avait réussi à s'imposer comme standard. Les développeurs des langages Allan, Dymola, NMF, ObjectMath, Omola, SIDOPS+, Smile ainsi que plusieurs industriels ont alors participé à l'élaboration de ce projet jusqu'en décembre 1999 où sont apparues les premières spécifications fonctionnelles du langage Modelica. Les évolutions sont désormais régies dans le cadre d'une association à but non lucratif : l'association Modelica [Mod99].

1. *i.e.* Simulation in Europe basic research Working Group

B.3 Éléments de base du langage

B.3.1 Principales caractéristiques

Le langage Modelica est un langage :

- *non lié à une discipline ou à un métier* : il permet de décrire de manière unifiée différents domaines de la physique et assure ainsi une certaine portabilité.

- *orienté objet avec des propriétés d'encapsulation*[2] *et d'héritage*[3] : ceci permet de créer notamment des modèles hiérarchisés et facilite la définition de modèles très génériques et donc réutilisables.

- *acausal* : les équations ne seront orientées qu'une fois le code compilé (donc qu'une fois l'expérimentation précisée). Là encore, ceci permet la réutilisation de modèle et diminue par conséquent la redondance des bibliothèques (ici un seul modèle suffit à décrire un composant alors qu'auparavant plusieurs modèles étaient nécessaires suivant le type de calcul qui était envisagé par la suite).

- *non lié à un propriétaire* ce qui permet de diminuer les dépendances vis-à-vis de fournisseurs de logiciels spécifiques et assure ainsi une certaine pérennité des modèles.

B.3.2 Sémantique

Notions de *classes*

Comme dans tout langage orienté objet, tout est décrit en langage Modelica à l'aide de *class*. Les spécifications du langage définissent notamment les sept *classes* particulières suivantes :

- `model` qui, comme son nom l'indique, permet de décrire des modèles ;
- `block` qui est utilisé pour la description de modèles sous le formalisme d'un bloc avec déclaration explicite des entrées et des sorties. La description reste acausale mais permet de restreindre le type de connexions possibles avec d'autres modèles ;
- `connector` qui permet de décrire la manière dont les différentes *classes* de l'étude se connectent entre elles ;
- `function` qui permet d'implémenter des fonctions sous la forme d'algorithmes ;
- `type` qui permet de définir les unités des variables ;
- `package` qui autorise l'encapsulation de plusieurs *classes* dans une même et seule *class* et qui est ainsi utile pour la création de bibliothèques de modèles ;
- `record` qui permet, par exemple, de paramétrer un modèle dans une *class* autre que celle du modèle principal.

Enfin, toutes ces *classes* sont englobées dans la *class* générique `class` qui peut être utilisée dans n'importe quel contexte.

2. L'*encapsulation* permet de n'autoriser qu'un type précis de connexion avec d'autres modèles.
3. L'*héritage* permet de définir des modèles génériques partiels. Ces modèles servent généralement de base pour la construction de modèles complets plus spécifiques.

Remarque : Comme dans tout langage orienté objet, le langage Modelica n'est pas interprété de manière séquentielle et il est donc possible d'utiliser une *class* avant de l'avoir déclarée.

Structure d'un modèle

La structure d'une *class* `class` ou `model` est relativement générique et est découpée en deux sections principales : l'une pour la déclaration des paramètres et des variables et l'autre pour la description des équations (Tab. B.1).

```
model NomDuModele
  // Déclaration des paramètres : ← commentaire
  parameter Real NomDuParametre1 = ValeurDuParametre1;
  parameter Real NomDuParametre2 = ValeurDuParametre2;
  ...;
  // Déclaration des variables :
  Real NomDeLaVariable1;
  Real NomDeLaVariable2;
  ...;
equation
  // Ecriture des équations :
  Equation1;
  Equation2;
  ...;
end NomDuModele;
```

TABLE B.1 – Structure générique d'un modèle élémentaire Modelica

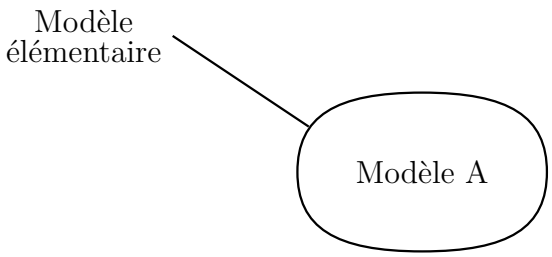


FIGURE B.1 – Modèle élémentaire sans connecteur

Cette structure sert généralement à définir des modèles élémentaires qui ne présentent pas de point de couplage possible avec d'autres modèles (Fig. B.1). Pour définir de tels points de connexion, il convient alors de définir un modèle de connecteur et de l'intégrer dans le modèle élémentaire considéré (Tab. B.2 et Fig. B.2).
La définition préalable du modèle de connecteur s'effectue à l'aide d'une *class* `connector` dont la structure est un peu particulière puisque son code ne doit jamais contenir d'équation (Tab. B.3).

```
model NomDuModele
  // Déclaration des paramètres : ← commentaire
  parameter Real NomDuParametre1 = ValeurDuParametre1;
  parameter Real NomDuParametre2 = ValeurDuParametre2;
  ...;
  // Déclaration des variables :
  Real NomDeLaVariable1;
  Real NomDeLaVariable2;
  ...;
  // Instanciation du modèle de connecteur :
  NomDuConnecteur NomInstanceC1;
equation
  // Ecriture des équations :
  Equation1;
  Equation2;
  ...;
end NomDuModele;
```

TABLE B.2 – Structure générique d'un modèle élémentaire Modelica avec connecteur

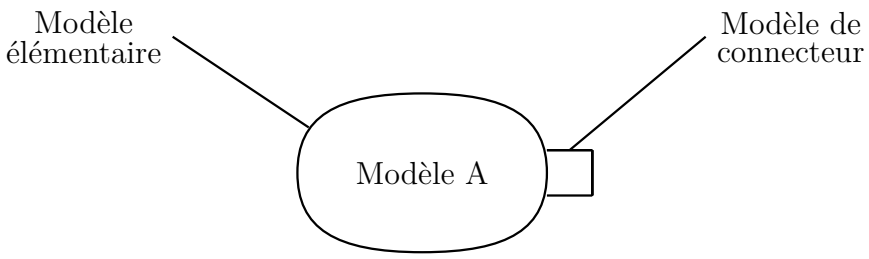


FIGURE B.2 – Modèle élémentaire avec connecteur

```
connector NomDuConnecteur
  // Déclaration des variables de connexion : ← commentaire
  Real NomDeLaVariable1;
  flow Real NomDeLaVariable2;
end NomDuConnecteur;
```

TABLE B.3 – Structure générique d'un modèle de connecteur Modelica

En réalité, une *class* `connector` comporte généralement [4] deux types de variables (celles de type `flow` et celles qui ne le sont pas) et c'est ce typage des variables qui va donner des indications au compilateur pour générer automatiquement les équations de connexion. Par exemple, considérons l'assemblage de deux modèles élémentaires A et B (Fig. B.3). Le code Modelica correspondant à cette assemblage demande alors deux instanciations du modèle élémentaire et la définition d'une équation `connect` (Tab. B.4).

4. Un seul de ces deux types de variables peut également être déclaré.

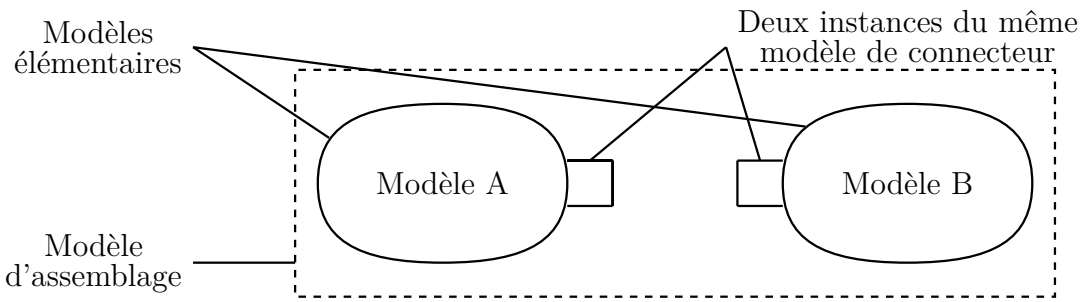


FIGURE B.3 – Assemblage de deux modèles élémentaires

```
model NomDeLAssemblage
  // Instanciation des modèles élémentaires : ← commentaire
  NomDuModeleElementaire1 ModeleA, ModeleB;
  ...;
equation
  connect(ModeleA.NomInstanceC1,ModeleB.NomInstanceC1);
  ...;
end NomDeLAssemblage;
```

TABLE B.4 – Structure générique d'un assemblage de modèles élémentaires Modelica

Lors de la compilation, conformément à la définition du modèle de connecteur, les deux équations suivantes seront alors générées (les variables de type `flow` sont sommées et leur somme est égale à zéro tandis que les autres variables sont égales entre elles) :

$$\begin{aligned}&\text{ModeleA.NomInstanceC1.NomDeLaVariable1}\\&= \text{ModeleB.NomInstanceC1.NomDeLaVariable1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{ModeleA.NomInstanceC1.NomDeLaVariable2}\\&+ \text{ModeleB.NomInstanceC1.NomDeLaVariable2} = 0\end{aligned}$$

Quelques mots clés

À titre d'information, le tableau B.5 récapitule quelques mots clés utiles pour la construction de modèle Modelica.

B.4 Construction d'un modèle Modelica

Afin de mieux comprendre l'élaboration d'un modèle Modelica, cette section présente deux procédures pour la construction respective d'un modèle élémentaire et d'un assemblage de modèles. Ces deux procédures sont illustrées chacune à l'aide d'un exemple simple.

Notons cependant qu'en pratique, il est rare de devoir coder entièrement un modèle « manuellement ». De nombreux logiciels existent désormais et permettent d'assembler des

Mot clé	Fonction
`partial`	Préfixe permettant de déclarer la *class* comme incomplète
`extends`	Préfixe permettant d'utiliser des modèles incomplets (déclarés `partial`) et d'hériter de leurs propriétés (variables + équations)
`parameter`	Préfixe permettant de déclarer un paramètre
`constant`	Préfixe permettant de déclarer une constante universelle
`Real`	Préfixe permettant de déclarer une variable comme étant de type réel
`Integer`	Préfixe permettant de déclarer une variable comme étant un entier
`Boolean`	Préfixe permettant de déclarer une variable comme étant de type booléen
`start`	Permet d'attribuer une valeur initiale à une variable
`time`	Permet de faire appel à la variable de temps
`der`	Fonction de dérivation
`sin`	Fonction sinus
`cos`	Fonction cosinus
`algorithm`	Mot clé permettant de déclarer les équations sous la forme d'affectations
`when`	Construction d'une boucle conditionnelle
`for`	Construction d'une boucle conditionnelle
`if`	Construction d'une instruction conditionnelle
`annotation`	Permet de définir l'icône graphique qui sera associée au modèle considéré

TABLE B.5 – Quelques mots clés du langage Modelica

modèles élémentaires à l'aide d'icônes technologiques (utilisation des librairies Modelica existantes avec possibilité de modifier le code).

B.4.1 Construction d'un modèle simple ou modèle élémentaire

Procédure générale

Procédure 11

Construction d'un modèle Modelica élémentaire

1. *Déclarer les types de variables mises en jeu à l'aide de* classes `type` *;*
2. *Déclarer les paramètres mis en jeu (*i.e. *nommer les paramètres et leur donner une valeur numérique) ;*
3. *Déclarer les variables mises en jeu (*i.e. *nommer les variables, préciser leur type et, si besoin, leur donner une valeur initiale grâce à l'attribut* `start`*) ;*
4. *Écrire les équations du modèle.*

Exemple

Considérons ici l'exemple simple d'une résistance électrique linéaire (Fig. B.4) et supposons que le but soit de modéliser uniquement son comportement lorsque celle-ci est soumise à une tension sinusoïdale $u = A\sin(wt)$.

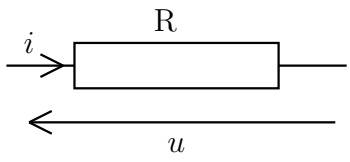


FIGURE B.4 – Schéma technologique d'une résistance électrique

La première étape consiste alors à définir les unités des variables mises en jeu à savoir ici la tension u et l'intensité i. Ces types de variables sont définies à l'aide de *classes* `type` comme le montre le tableau B.6.

`type Tension = Real(unit='V')`
`type Courant = Real(unit='A')`

TABLE B.6 – Définition des types de variables impliquées dans un modèle de résistance électrique linéaire

Comme indiquées dans la procédure 11, les étapes suivantes consistent alors à déclarer les paramètres R (résistance), A (amplitude de l'excitation) et w (période de l'excitation), les variables u (tension) et i (courant) puis à écrire les équations $u = Ri$ (loi de comportement de la résistance) et $u = A\sin(wt)$ (loi d'excitation). Le tableau 11 montre notamment le code Modelica final ainsi obtenu.

```
model Resistance
  parameter Real R = 10;
  parameter Real A = 2;
  parameter Real w = 0.1;
  Tension u;
  Courant i;
equation
  u = A*sin(w*time);
  u = R*i;
end Resistance;
```

TABLE B.7 – Modèle élémentaire Modelica d'une résistance électrique linéaire

B.4.2 Construction d'un assemblage de modèles

Procédure générale

Procédure 12

Construction d'un assemblage de modèles élémentaires Modelica

1. *Déclarer les types de variables mises en jeu à l'aide de* classes `type` *;*
2. *Définir les modèles de connecteurs à l'aide de* classes `connector` *;*
3. *Définir des modèles génériques partiels à l'aide de* classes `partial model`*. Grâce au mécanisme d'héritage, ces modèles serviront de base pour la construction des modèles élémentaires ;*
4. *Construire les modèles élémentaires (ou modèles de composant) ;*
5. *Écrire un modèle principal dédié à l'assemblage des modèles élémentaires ;*
6. *Instancier les différents modèles élémentaires qui ont été préalablement construits ;*
7. *Assembler les instances de modèles à l'aide d'équations de type* `connect`*.*

Exemple

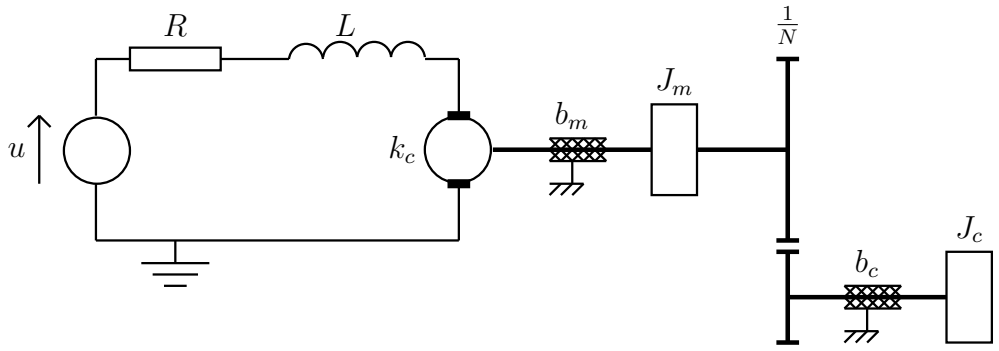


FIGURE B.5 – Schéma technologique d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu

Afin d'illustrer la procédure précédente et de mieux visualiser les différences avec une modélisation bond graph, considérons à nouveau l'exemple d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu (Fig. B.5) [5].

En appliquant la procédure précédente et en se basant sur les types, les connecteurs et les modèles de composants définis dans la librairie standard modelica (Modelica Standard Library) [6], une modélisation hiérarchisée du système peut alors s'écrire sous la forme du code Modelica présenté dans le tableau B.8.

5. Cet exemple est détaillé dans l'annexe A.
6. Ceci explique notamment pourquoi les noms des composants et des variables sont en anglais.

```
model LoadDCMotor
  // Instanciation et paramètrage des modèles élémentaires :
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.ConstantVoltage Source(V=1);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Resistor R(R=8.0);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Inductor L(L=0.001);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.EMF emf(k=0.031);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Ground G;
  Modelica.Mechanics.Rotational.Inertia Jm(J=0.0000018),Jc(J=0.0004);
  Modelica.Mechanics.Rotational.Damper bm(d=0.0001),bc(d=0.0001);
  Modelica.Mechanics.Rotational.IdealGear TF(ratio=20.0);
  Modelica.Mechanics.Rotational.SpeedSensor Sensor;
equation
  // Assemblage de la partie électrique :
  connect(Source.p, R.n);
  connect(R.p, L.n);
  connect(L.p, emf.n);
  connect(emf.p, Source.n);
  connect(Source.n, G.p);
  // Assemblage de la partie mécanique :
  connect(emf.flange_b, Jm.flange_a);
  connect(Jm.flange_b, bm.flange_a);
  connect(bm.flange_b, TF.flange_a);
  connect(TF.flange_b, bc.flange_a);
  connect(bc.flange_b, Jc.flange_a);
  connect(Jc.flange_b, Sensor.flange_a);
end LoadDCMotor;
```

TABLE B.8 – Modèle Modelica principal d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu

B.5 Logiciels

Le langage Modelica rencontre un vif intérêt dans la communauté industrielle et de plus en plus de logiciels disponibles sur le marché sont désormais capables de supporter ce nouveau langage, comme en témoigne le tableau B.9 (liste non exhaustive).

Logiciels Editeurs	**Statut**		**Description**
	Commercial	**Gratuit**	
Dymola Dassault Systèmes	x		- éditeur graphique - gestion de bibliothèques - simulation - export vers Matlab/Simulink
LMS Imagine.Lab AMESim LMS	x		- import de modèles Modelica - connexion avec blocs AMESim - simulation
MathModelica System Designer MathCore	x		- éditeur graphique - simulation - lien avec Mathematica
MOSILAB Fraunhofer-Gesellschaft	x		- modélisation - simulation
MS1 LorSim SA	x		- export de modèles bond graph en Modelica
SimulationX ITI	x		- éditeur graphique - gestion de bibliothèques - simulation
OpenModelica Linköping University		x	- éditeur textuel - simulation
Scilab/Scicos INRIA		x	- éditeur graphique - gestion de bibliothèques - simulation
SimForge Politecnico di Milano		x	- éditeur graphique - simulation

Table B.9 – Exemples de logiciels supportant le langage Modelica

Annexe C

Outils de l'analyse structurelle

Cette annexe a pour objectif de préciser un certain nombre de définitions et de concepts utiles à la mise en œuvre de l'analyse structurelle, que ce soit sous une approche modèle d'état, système structuré ou bien bond graph. Servant de support à la compréhension du chapitre 3, cette annexe permet entre autres de fournir quelques précisions sur les outils d'analyse d'un digraphe ou d'un modèle bond graph (notions de longueur, poids/gain d'un chemin orienté/chemin causal, de cycle/cycle causal, ...) et de détailler la détermination de certaines propriétés structurelles comme :

- l'ordre relatif d'une sortie (définition 12, page 312 et propriétés 4, 5 et 6, pages 312, 322 et 326) ;
- le polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ (définition 13, page 313 et théorèmes 10 et 12, pages 317 et 329) ;
- la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (définition 14, page 313) et plus particulièrement son déterminant $\det \mathbf{P}(s)$ (théorème 11, page 320).

Notons que la notion de structure à l'infini d'un système (notion notamment mise en œuvre dans notre étude des ordres d'essentialité pour l'adéquation spécifications/structure du modèle, section 3.6, page 139) fait l'objet quant à elle d'une annexe particulière : l'annexe E.

Hypothèses : De même qu'au chapitre 3, sauf mention contraire, la notion de « modèle bond graph causal » fera implicitement référence dans cette annexe à un modèle bond graph affecté d'une causalité préférentiellement intégrale. Aussi, les systèmes considérés seront des systèmes linéaires et invariants dans le temps dont la représentation d'état pourra être mise sous une forme explicite du type :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \tag{C.1}$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)^T$ représente le vecteur d'entrée et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)^T$ celui de sortie. Sauf cas contraire, les modèles bond graph correspondants ne posséderont donc pas d'élément de stockage d'énergie en causalité dérivée (lorsque les modèles sont en causalité préférentiellement intégrale) et leurs boucles algébriques (s'il en existe) seront toujours résolubles.

C.1 Approche modèle d'état

Commençons par étudier différents types de propriétés structurelles qu'il peut être intéressant d'étudier grâce à une approche modèle d'état sous forme matricielle puis graphique.

C.1.1 Représentation matricielle

Dans un premier temps, étudions la détermination de propriétés structurelles selon une approche algébrique (*i.e.* grâce à une approche modèle d'état sous forme matricielle).

Définition 12

*L'**ordre relatif**[1] n'_i associé à la sortie y_i correspond au nombre minimal de dérivations de y_i nécessaire pour faire apparaître une des composantes du vecteur d'entrée* $\mathbf{u}$.

Propriété 4 (*Modèle d'état → ordre relatif*)

*L'**ordre relatif** n'_i d'une sortie y_i peut être calculé, de manière équivalente, suivant l'une de ces méthodes :*

(1) [Bro65a, Dau00] n'_i est égal au minimum des degrés des fonctions de transfert composant la ligne $\mathbf{t}_i(s)$ de la matrice de transfert.

(2) [Bro65a, Des82, Com86] n'_i peut être calculé de sorte que :

$$n'_i = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \mathbf{d}_i \neq \mathbf{0} \\ \inf\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \{k \ \mid \ \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \neq \mathbf{0}\} \end{cases}$$

(3) [Bro65a, Des82] n'_i est égal à l'ordre du zéro à l'infini du système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i)$ (ou zéro à l'infini par ligne), à savoir :

$$n'_i = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{k \ \mid \ \lim_{s \to \infty} s^k \mathbf{t}_i(s) \neq \mathbf{0}\}$$

où $\mathbf{c}_i$ (resp. $\mathbf{d}_i$) est la $i^{\text{ième}}$ ligne de $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{D}$) et $\mathbf{t}_i(s) = \mathbf{c}_i(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{d}_i$.

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu (exemple de la section 2.5.3, page 65), nous pouvons déduire de son modèle d'état (3.2) (page 79) que :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{J_m} p \\ \dot{y} &= \frac{k_c}{L J_m} \phi - \frac{b_m}{J_m^2} p \\ \ddot{y} &= \frac{k_c}{L J_m} u - \frac{k_c}{L J_m} \left(\frac{R}{L} + \frac{b_m}{J_m}\right) \phi + \frac{1}{J_m^2} \left(\frac{b_m^2}{J_m} - \frac{k_c^2}{L}\right) p \end{aligned}$$

Selon l'approche algébrique, l'*ordre relatif* de la sortie y est donc égal à 2.

1. L'ordre relatif est également désigné par *degré relatif* ou encore *indice caractéristique* [Daa06].

Définition 13 (*Modèle d'état → $P_{\mathbf{A}}(s)$ [Gan66, Ric01]*)

*Le **polynôme caractéristique** d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est égal à $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Il peut s'écrire sous la forme :*

$$P_{\mathbf{A}}(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s^{n-i}$$

En résolvant l'équation $P_{\mathbf{A}}(s) = 0$, notons que ce polynôme caractéristique permet de déterminer les valeurs propres du système et donc de donner quelques indications sur son comportement dynamique (et notamment sur sa stabilité).

Exemple :

Considérons le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{R}{I_2} & \frac{R}{I_3} & \frac{1}{C} \\ 0 & \frac{R}{I_2} & -\frac{R}{I_3} & 0 \\ \frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q \end{pmatrix} \end{cases} \tag{C.2}$$

D'après la définition 13 (page 313), le *polynôme caractéristique* correspondant $P_{\mathbf{A}}(s)$ est alors égal à :

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}}(s) =& \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ =& s^4 + \left(\frac{R}{I_2} + \frac{R}{I_3}\right) s^3 + \left(\frac{1}{I_1 C} + \frac{1}{I_2 C}\right) s^2 + \left(\frac{R}{I_1 I_2 C} + \frac{R}{I_1 I_3 C} + \frac{R}{I_2 I_3 C}\right) s \end{aligned} \tag{C.3}$$

Définition 14 (*[Rah93]*)

*La **matrice système** $\mathbf{P}(s) \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+m)}$ associée à un système Σ de modèle d'état (C.1) est définie telle que[2] :*

$$\mathbf{P}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

2. Cette définition vient de l'écriture du modèle d'état (C.1) (page 311) en transformée de Laplace (C.4), écriture qui peut être également mise sous la forme (C.5).

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases} \tag{C.4}$$

Lié au déterminant de la matrice de transfert du système[3] $\det \mathbf{T}(s)$, le calcul du déterminant de la matrice système $\det \mathbf{P}(s)$ permet, entre autres, de tester l'inversibilité d'un système (section 3.5.1, page 124). Toutefois, notons dès à présent que la détermination de tels déterminants suppose que le système soit carré ($m = p$) et que la relation qui les lie utilise la notion de polynôme caractéristique introduite précédemment (définition 13, page 313).

Exemple :

Considérons le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{I_1} & -\frac{R_1}{I_2} & \frac{R_1}{I_3} \\ -\frac{R_1}{I_1} & -\frac{R_1+R_2}{I_2} & \frac{R_1+R_2}{I_3} \\ \frac{R_1}{I_1} & \frac{R_1+R_2}{I_2} & -\frac{R_1+R_2}{I_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R_1}{I_1} & \frac{R_1}{I_2} & -\frac{R_1}{I_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{C.6}$$

La *matrice système* $\mathbf{P}(s)$ de ce modèle s'exprime alors sous la forme :

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s + \frac{R_1}{I_1} & \frac{R_1}{I_2} & -\frac{R_1}{I_3} & 1 & 0 \\ \frac{R_1}{I_1} & s + \frac{R_1+R_2}{I_2} & -\frac{R_1+R_2}{I_3} & 0 & 1 \\ -\frac{R_1}{I_1} & -\frac{R_1+R_2}{I_2} & s + \frac{R_1+R_2}{I_3} & 0 & 0 \\ -\frac{R_1}{I_1} & -\frac{R_1}{I_2} & \frac{R_1}{I_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\det \mathbf{P}(s) = -\frac{1}{I_3}\left(\frac{R_1^2}{I_1 I_2} - \frac{R_1(R_1+R_2)}{I_1 I_2}\right) = \frac{R_1 R_2}{I_1 I_2 I_3} \tag{C.7}$$

C.1.2 Représentation graphique

Selon la même démarche, étudions désormais la détermination de propriétés structurelles mais cette fois-ci selon une approche digraphe (*i.e.* approche modèle d'état sous forme graphique). Pour cela, introduisons auparavant plusieurs outils utiles à l'analyse structurelle d'un digraphe comme la notion de chemin orienté et de cycle.

$$\begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(s) \\ -\mathbf{U}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(0) \\ -\mathbf{Y}(s) \end{pmatrix} \tag{C.5}$$

Aussi, d'autres références telles que [Sue92] définissent la matrice système (parfois également appelée matrice de Rosenbrock) telle que $\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$. Cependant, ceci ne change rien quant à la valeur de son déterminant.

3. D'après la formule de Schur, lorsque s est différent d'une valeur propre du système [Gan66, Ric01] :

$$\det \mathbf{P}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}) = P_{\mathbf{A}}(s) \det \mathbf{T}(s)$$

où $\mathbf{T}(s)$ représente la matrice de transfert du système.

Outils utiles à l'analyse d'un digraphe

Définition 15 (*[Yam85, Rah97, Rah93]*)

*Un **chemin orienté** $\mathcal{P}$ est une séquence d'arcs orientés dans le même sens et où le sommet de départ de l'arc suivant correspond au sommet d'arrivée de l'arc précédent. Par conséquent, il se présente sous la forme :*

$$\mathcal{P} = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{q-1}, v_q)\}$$

Définition 16 (*[Yam85, Com93]*)

*Un **chemin orienté entrée/sortie (E/S)** est un chemin orienté dont le sommet de départ correspond à une entrée du modèle et le sommet d'arrivée correspond à une sortie.*

Définition 17 (*[Com93]*)

*Deux chemins orientés sont dits **disjoints** s'ils n'ont aucun sommet en commun (et donc aucun arc orienté en commun).*

Définition 18 (*[Yam85, Com93, Rah97]*)

*La **longueur** d'un chemin orienté $\mathcal{P}$ correspond au nombre d'arcs orientés contenu dans la séquence $\mathcal{P}$.*

Définition 19 (*[Yam85]*)

*Le **poids** d'un chemin orienté $\mathcal{P}$ est égal au produit des poids des arcs orientés composant la séquence $\mathcal{P}$.*

Exemple :

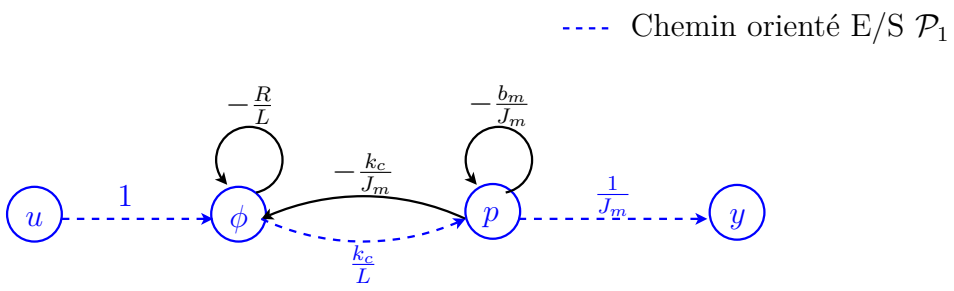


FIGURE C.1 – Exemple de *chemin orienté* dans le cas du moteur à courant continu

Le modèle d'état (3.2) (page 79) du moteur à courant continu (exemple de la section 2.5.3, page 65) peut être représenté par le digraphe de la figure C.1. Un *chemin orienté E/S* possible entre l'entrée u et la sortie y est $\mathcal{P}_1 = \{(u, \phi), (\phi, p), (p, y)\}$ (Fig. C.1). Sa longueur est égale à 3 et son poids à $\frac{k_c}{LJ_m}$.

Définition 20 (*[Rah93]*)

*Un **cycle** est un chemin orienté dont les extrémités coïncident. Il est dit **élémentaire**, si les sommets parcourus ne sont rencontrés qu'une seule fois (sauf pour le sommet de départ). De plus, un cycle élémentaire est dit **minimal** s'il ne contient aucun autre cycle.*

Définition 21 (*[Rah93]*)

*La **longueur d'un cycle** est égale au nombre d'arcs qui composent ce cycle. Elle correspond également au nombre de sommets contenus dans ce cycle (un cycle de longueur égale à 1 est appelé **boucle**).*

Définition 22

*Le **poids d'un cycle** est égal au poids du chemin orienté fermé correspondant.*

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu (exemple de la section 2.5.3, page 65), le *chemin orienté* $\mathcal{P}_2 = \{(\phi, p), (p, \phi)\}$ correspond à un cycle de *longueur* 2 et de *poids* $-\frac{k_c^2}{LJ_m}$ (Fig. C.1). Le *chemin orienté* $\mathcal{P}_3 = \{(\phi, \phi)\}$ correspond lui à une *boucle* de poids $-\frac{R}{L}$ (Fig. C.1).

Propriétés structurelles déduites de l'analyse d'un digraphe

Concernant maintenant la détermination des propriétés structurelles, afin d'établir un parallèle avec la représentation d'état matricielle, Mason [Mas55] a formulé une méthode permettant de calculer les cœfficients du polynôme caractéristique à partir de n'importe quel type de graphe. Reinschke, quant à lui, a introduit en 1988 la notion de familles de cycles sur un digraphe débouchant ainsi sur une procédure de détermination du polynôme caractéristique sur ce type spécifique de graphe.

Définition 23 (*[Rei88]*)

*Deux cycles sont dits **disjoints** s'ils ne possèdent aucun sommet (et donc aucun arc) en commun.*

Définition 24 (*[Rei88]*)

*Une **famille de cycles** $\mathcal{F}_i$ est un ensemble de cycles disjoints.*

Définition 25

*La **longueur** $l_{\mathcal{F}_i}$ **d'une famille de cycles** $\mathcal{F}_i$ correspond au nombre de sommets contenus dans cette famille.*

Définition 26

*Le **poids** $G_{\mathcal{F}_i}$ **d'une famille de cycles** $\mathcal{F}_i$ est égal au produit des poids des cycles composant la famille considérée.*

Théorème 10 (*Digraphe* $\rightarrow$ $P_{\mathbf{A}}(s)$ *[Rei88, Rah93]*)

La valeur de chaque cœfficient α_i $(1 \leq i \leq n)$ du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ peut être déterminée à partir du digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ associé à la matrice $\mathbf{A}$ de sorte que[4] *:*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha_i = \sum_{\substack{\mathcal{F}_k \text{ tel que} \\ l_{\mathcal{F}_k} = i}} (-1)^{d_k} G_{\mathcal{F}_k}$$

où :
- *$\mathcal{F}_k$ est la $k^{\text{ième}}$ famille de cycles ;*
- *$l_{\mathcal{F}_k}$ est la longueur de la famille de cycles $\mathcal{F}_k$;*
- *$G_{\mathcal{F}_k}$ est le poids de la famille de cycles $\mathcal{F}_k$;*
- *d_k est le nombre de cycles disjoints contenus dans la famille $\mathcal{F}_k$.*

En particulier :
- α_1 correspond à la somme des poids de tous les cycles de longueur 1, chaque poids étant multiplié par -1 ;
- α_2 correspond à la somme des poids de tous les cycles de longueur 2 (chaque poids étant multiplié par -1) et des poids de toutes les paires de deux cycles disjoints de longueur 1 (le poids des paires étant alors multiplié par $(-1)^2 = 1$) ;
- α_3 correspond à la somme des poids de tous les cycles de longueur 3 (chaque poids étant multiplié par -1), des poids des familles de cycles disjoints composées d'un cycle de longueur 2 et d'un cycle de longueur 1 (le poids de chaque famille étant alors multiplié par $(-1)^2 = 1$) et des poids des familles de trois cycles disjoints de longueur 1 (le poids de chaque famille étant alors multiplié par $(-1)^3 = -1$) ;
- ...

Exemple :

Considérons le digraphe (Fig. C.2) correspondant à la matrice $\mathbf{A}$ du modèle d'état (C.2) (page 313).

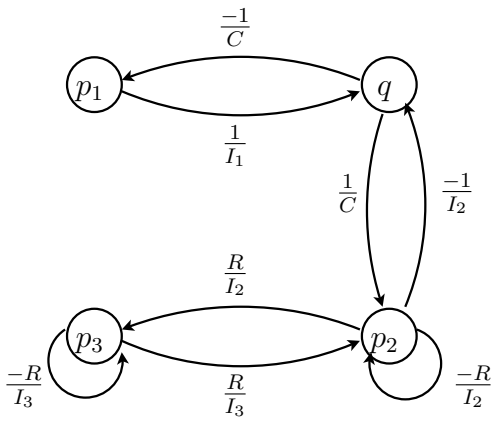


FIGURE C.2 – Exemple de digraphe pour le calcul du polynôme caractéristique

4. Le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ associé à la matrice $\mathbf{A}$ est construit de la même manière qu'un digraphe associé à un modèle d'état sauf qu'il n'y pas lieu ici de faire apparaître les sommets d'entrée et de sortie et les arcs correspondants aux matrices $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$.

L'analyse de ce digraphe permet de calculer les cœfficients α_i du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ (Tab. C.1 et C.2). En appliquant le théorème 10, nous obtenons ainsi d'après l'approche digraphe :

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{A}}(s) &= s^4 + \left(\frac{R}{I_2} + \frac{R}{I_3}\right) s^3 + \left(\frac{1}{I_1 C} + \frac{1}{I_2 C} + \frac{R^2}{I_2 I_3} - \frac{R^2}{I_2 I_3}\right) s^2 \\
&\quad + \left(\frac{R}{I_1 I_2 C} + \frac{R}{I_1 I_3 C} + \frac{R}{I_2 I_3 C}\right) s + \frac{R^2}{I_1 I_2 I_3 C} - \frac{R^2}{I_1 I_2 I_3 C} \\
&= s^4 + \left(\frac{R}{I_2} + \frac{R}{I_3}\right) s^3 + \left(\frac{1}{I_1 C} + \frac{1}{I_2 C}\right) s^2 + \left(\frac{R}{I_1 I_2 C} + \frac{R}{I_1 I_3 C} + \frac{R}{I_2 I_3 C}\right) s
\end{aligned}$$

Ce résultat est identique à celui obtenu *via* l'approche algébrique (équation (C.3), page 313).

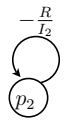
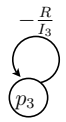
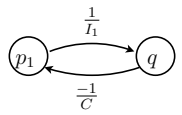
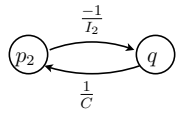
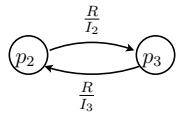
α_i	Familles de cycles sur le digraphe	$(-1)^{d_k} G_{\mathcal{F}_k}$
α_1	(a) Cycle $\mathcal{C}_1$ de longueur 1 ($d = 1$). 	$\frac{R}{I_2}$
	(b) Cycle $\mathcal{C}_2$ de longueur 1 ($d = 1$). 	$\frac{R}{I_3}$
α_2	(c) Cycle $\mathcal{C}_3$ de longueur 2 ($d = 1$). 	$\frac{1}{I_1 C}$
	(d) Cycle $\mathcal{C}_4$ de longueur 2 ($d = 1$). 	$\frac{1}{I_2 C}$
	(e) Cycle $\mathcal{C}_5$ de longueur 2 ($d = 1$). 	$-\frac{R^2}{I_2 I_3}$

TABLE C.1 – Calcul des cœfficients α_i du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ par l'approche digraphe

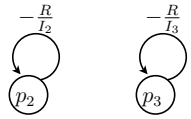
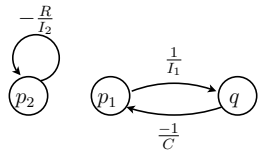
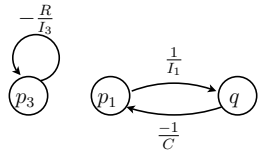
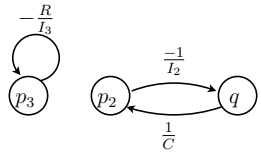
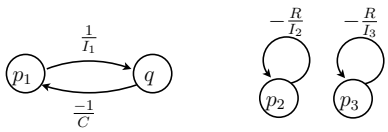
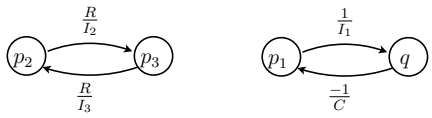
α_i	Familles de cycles sur le digraphe	$(-1)^{d_k} G_{\mathcal{F}_k}$
α_2	(a) Famille $\mathcal{F}_1$ de cycles ($\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$) de longueur 2 ($d = 2$). 	$\frac{R^2}{I_2 I_3}$
α_3	(b) Famille $\mathcal{F}_2$ de cycles ($\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$) de longueur 3 ($d = 2$). 	$\frac{R}{I_1 I_2 C}$
	(c) Famille $\mathcal{F}_3$ de cycles ($\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$) de longueur 3 ($d = 2$). 	$\frac{R}{I_1 I_3 C}$
	(d) Famille $\mathcal{F}_4$ de cycles ($\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$) de longueur 3 ($d = 2$). 	$\frac{R}{I_2 I_3 C}$
α_4	(e) Famille $\mathcal{F}_5$ de cycles ($\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$) de longueur 4 ($d = 3$). 	$\frac{R^2}{I_1 I_2 I_3 C}$
	(f) Famille $\mathcal{F}_6$ de cycles ($\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_5$) de longueur 4 ($d = 2$). 	$\frac{-R^2}{I_1 I_2 I_3 C}$

TABLE C.2 – Calcul des cœfficients α_i du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ par l'approche digraphe (suite)

De plus, afin d'interpréter graphiquement le calcul des cœfficients de la matrice de transfert puis le calcul du déterminant de la matrice système (définition 14, page 313), Reinschke a également proposé d'introduire des arcs de retour sur le digraphe du système (*i.e.* des arcs de poids -1 entre les sommets de sortie et les sommets d'entrée) et d'étudier ensuite les familles de cycles comportant ces arcs de retour.

Théorème 11 (*Digraphe* $\rightarrow$ $\det \mathbf{P}(s)$ *[Rei88]*)

Soit $\mathcal{G}(\Sigma)$ le digraphe associé à un système Σ caractérisé par le quadruplet de matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$.
Le déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ associée à Σ est alors donné par l'expression suivante :

$$\det \mathbf{P}(s) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{m\}} s^{n-k}$$

où :

- *$\mathcal{G}(\Sigma')$ est le digraphe obtenu à partir du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma)$ en ajoutant un arc de poids -1 entre chaque sommet de sortie et chaque sommet d'entrée ;*
- *n et m correspondent respectivement aux nombres de sommets d'état et d'entrée ;*
- *$\rho_k^{\{m\}}$ correspond, sur le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma')$, à la somme des poids des familles de cycles contenant $k_{\mathcal{F}_l} = k$ sommets d'état[5] et au moins m arcs de retour. Dans ce calcul, le poids de chaque famille $\mathcal{F}_l$ doit être multiplié par $(-1)^{d_l}$ où d_l est le nombre de cycles disjoints contenus dans la famille. Le poids doit également être multiplié par $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_l}}$ où $\sigma_{\mathcal{F}_l}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sommets de sortie de la famille $\mathcal{F}_l$ dans l'ordre initial des sommets de sortie lorsque les cycles de la famille sont ordonnés dans l'ordre initial des sommets d'entrée.*

Remarque : En toute rigueur, Reinschke énonce le théorème dans le cas où $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ mais la démonstration utilisée est facilement généralisable dans le cas contraire. Rappelons de plus que le calcul d'un tel déterminant suppose que le système soit carré (*i.e.* même nombre de sommets d'entrée que de sortie).

5. Lorsqu'une famille $\mathcal{F}_i$ de cycles contient k sommets d'état, elle est dite *de largeur* k [Rei88].

Exemple :

Considérons le digraphe correspondant au modèle d'état (C.6) (page 314).

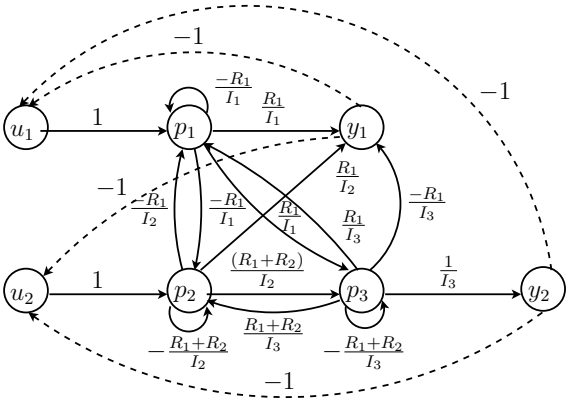
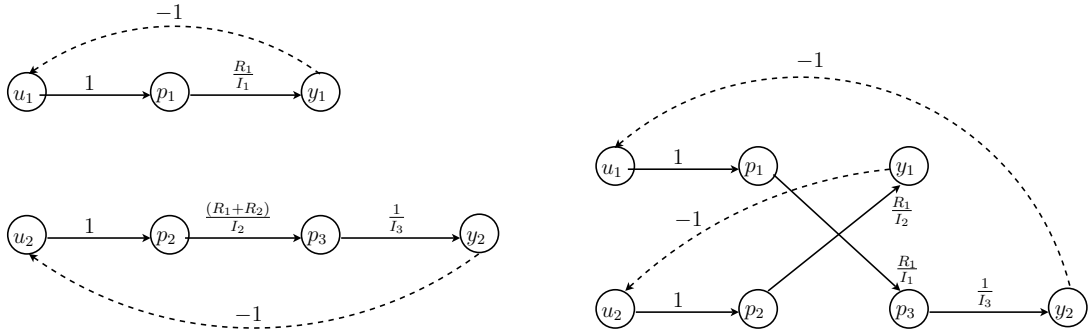


FIGURE C.3 – Exemple de digraphe pour le calcul du déterminant de la matrice système

L'étude de ce digraphe (digraphe obtenu à partir du modèle d'état (C.6) (page 314) et en ajoutant les arcs de retour appropriés, Fig. C.3) nous permet de montrer que seules existent deux familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ contenant deux cycles disjoints possédant chacun un arc de retour (Fig. C.4(a) et C.4(b)).



(a) Famille $\mathcal{F}_1$ de deux cycles disjoints chacun contenant un arc de retour

(b) Famille $\mathcal{F}_2$ de deux cycles disjoints chacun contenant un arc de retour

FIGURE C.4 – Calcul du déterminant de la matrice système par l'approche digraphe

D'après le théorème 11, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{P}(s) &= (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_1}}(-1)^{d_1} G_{\mathcal{F}_1} s^{n-k_{\mathcal{F}_1}} + (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_2}}(-1)^{d_2} G_{\mathcal{F}_2} s^{n-k_{\mathcal{F}_2}} \\
&= (-1)^0(-1)^2 \left(\frac{-R_1}{I_1}\right)\left(\frac{-(R_1+R_2)}{I_2 I_3}\right) s^{3-3} + (-1)^1(-1)^2 \left(\frac{-R_1}{I_1 I_3}\right)\left(\frac{-R_1}{I_2}\right) s^{3-3} \\
&= \frac{R_1 R_2}{I_1 I_2 I_3}
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'approche digraphe permet bien ici de retrouver un résultat identique à l'approche algébrique (équation (C.7), page 314).

C.2 Approche système structuré

Étudions désormais les mêmes propriétés structurelles que celles présentées pour l'approche algébrique mais cette fois-ci abordons-les selon une approche système structuré sous forme matricielle d'une part, puis sous forme graphique d'autre part.

C.2.1 Représentation matricielle

Les définitions relatives à l'ordre relatif d'une sortie (définition 12, page 312), au polynôme caractéristique (définition 13, page 313) et à la matrice système (définition 14, page 313) sont toujours valables dans le cas de systèmes structurés.

C.2.2 Représentation graphique

Outils utiles à l'analyse d'un digraphe structuré

Les concepts de chemin orienté, cycle, famille de cycles, chemins disjoints, longueur et poids d'un chemin ou d'un cycle, qui ont été définis à la section C.1.2 (page 314) pour les digraphes, restent valables pour les digraphes structurés.

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu (exemple de la section 2.5.3, page 65), nous avons déjà vu que le *système structuré* correspondait à la représentation matricielle (3.3) (page 81). De plus, ce système structuré peut être représenté de manière équivalente par le *digraphe structuré* de la figure C.5.

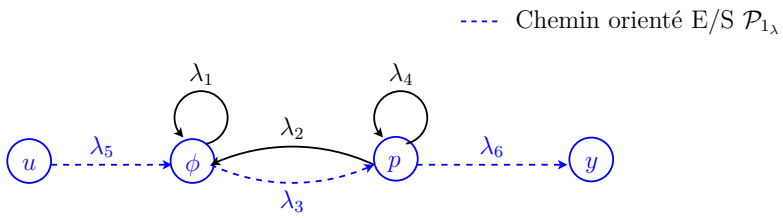


FIGURE C.5 – *Digraphe structuré* de l'exemple d'un moteur à courant continu

Un chemin orienté E/S possible entre l'entrée u et la sortie y sur le *digraphe structuré* de la figure C.5 est $\mathcal{P}_{1_\lambda} = \{(u,\phi),(\phi,p),(p,y)\}$. Sa *longueur* ainsi que son *poids* sont respectivement égaux à 3 et $\lambda_5\lambda_3\lambda_6$.

Propriétés structurelles déduites de l'analyse d'un digraphe structuré

Propriété 5 (*Digraphe structuré → ordre relatif [Dio93]*)

*Sur un digraphe structuré, l'***ordre relatif** $n'_{\boldsymbol{\lambda},i}$ *de la sortie* y_i *peut être calculé de sorte que :*

$$n'_{\boldsymbol{\lambda},i} = l_{\boldsymbol{\lambda},i} - 1$$

où $l_{\boldsymbol{\lambda},i}$ *est la longueur minimale qu'un chemin orienté puisse avoir entre la sortie* y_i *et n'importe quelle entrée.*

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu (exemple de la section 2.5.3, page 65), le chemin $\mathcal{P}_{1_\lambda}$ de la figure C.5 est le plus court chemin (en termes de longueur) existant entre la sortie y et l'entrée u. Nous avons déjà vu que sa longueur était égale à 3 : l'ordre relatif n'_{1_λ} de la sortie y est donc égal à $3 - 1 = 2$ selon l'approche digraphe structuré.

Enfin, notons que les théorèmes 10 (page 317) et 11 (page 320) permettant de calculer respectivement le polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ du système et le déterminant de la matrice système associée $\det \mathbf{P}(s)$ sont également applicables à l'analyse de digraphes structurés.

C.3 Approche bond graph

Même si un modèle bond graph est intrinsèquement lié à un modèle mathématique (annexe A), celui-ci ne se formalise qu'à l'aide d'une représentation graphique. À l'image des sections précédentes, donnons ici quelques précisions sur les outils nécessaires à l'analyse d'un modèle bond graph puis, indiquons les procédures à suivre pour déterminer l'ordre relatif d'une sortie, le polynôme caractéristique et le déterminant de la matrice système directement à partir d'un modèle bond graph.

C.3.1 Outils utiles à l'analyse d'un modèle bond graph

Définition 27 (*[Fot97a]*)

*L'**ordre BG d'un modèle bond graph** est égal au nombre $n_{I(I)}$ d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale lorsque le modèle est en causalité préférentiellement intégrale. Ce nombre correspond à la dimension du vecteur d'état et donc au nombre de conditions initiales qu'il est nécessaire de fixer pour lancer une simulation. Il est égal au nombre de variables d'état qui sont statiquement indépendantes.*

Définition 28 (*[Fot97a, van94]*)

*L'**ordre BG d'un système d'équations représenté par un modèle bond graph** est donné par $n_{I(I)} - n_{I(D)}$ où $n_{I(I)}$ (resp. $n_{I(D)}$) représente le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale (resp. dérivée). Cet ordre correspond au nombre de variables d'état dynamiquement indépendantes*[6].

6. Ainsi, il correspond également au rang de la matrice d'état correspondante $\mathbf{A}$ pour un modèle associé à un système linéaire et invariant dans le temps.

Exemple :

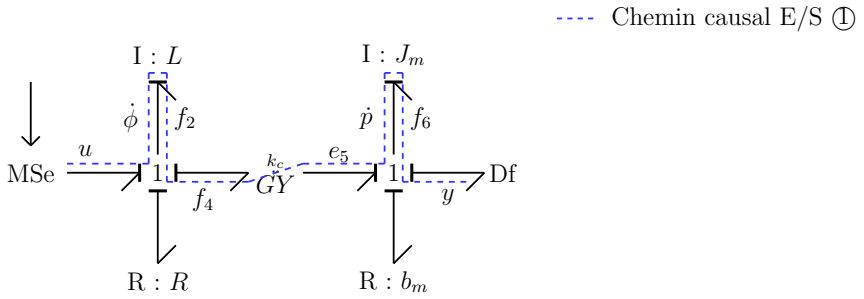


FIGURE C.6 – *Modèle bond graph causal* de l'exemple du moteur à courant continu

Dans le cas du moteur à courant continu (exemple de la section 2.5.3, page 65), deux éléments de stockage d'énergie (les éléments I :L et I :J_m) en causalité intégrale sont présents sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale (Fig. 3.5, page 85, reprise à la Fig. C.6). L'*ordre BG du modèle* $n_{I(I)}$ est donc égal à 2. De plus, lorsque le modèle est affecté d'une causalité préférentiellement dérivée, la causalité de ces deux éléments de stockage d'énergie est changée en causalité dérivée. Par conséquent, $n_{I(D)} = 0$ et l'*ordre BG du système d'équations* est égal à $2 - 0 = 2$.

Définition 29 (*[Rah92]*)

Sur un modèle bond graph causal, la ***longueur BG*** $l_k(v_i, v_j)$ ***d'un chemin causal*** ⓚ *entre une variable* v_i *et une autre variable* v_j *est égale au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale rencontrés le long de ce chemin.*

Définition 30 (*[Fot97a]*)

*Sur un modèle bond graph causal, l'****ordre BG*** $\omega_k(v_i, v_j)$ ***d'un chemin causal*** ⓚ *entre une variable* v_i *et une autre variable* v_j *est défini de sorte que*[7] *:*

$$\omega_k(v_i, v_j) \stackrel{\text{def}}{=} n_I - n_D$$

où n_I *(resp.* n_D*) est le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (resp. dérivée) rencontrés le long de ce chemin.*

Définition 31 (*[Fot97a]*)

Sur un modèle bond graph causal, la ***longueur BG*** $l_{\mathcal{E}_k}$ *(resp. l'****ordre BG*** $\omega_{\mathcal{E}_k}$*)* ***d'un ensemble*** $\mathcal{E}_k$ *de chemins causaux BG-disjoints est égale à la somme des longueurs BG (resp. ordres BG) de tous les chemins constituant cet ensemble.*

7. Par cohérence avec les développements historiques de la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses [Fot97a], nous conserverons tout au long du mémoire le vocable d'*ordre BG* d'un chemin causal. Cependant, notons que cette notion est équivalente à la notion de *longueur généralisée* d'un chemin causal présentée dans les travaux de BERTRAND *et al.* [Ber97a, Ber97b].

Définition 32 (*[Bor92, Rah93, Rah96]*)

Sur un modèle bond graph causal, le ***gain BG*** $G_k(s)$ ***d'un chemin causal*** ⓚ *peut être calculé de la manière suivante :*

$$G_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n_0+n_1} \cdot \prod_{i=1}^{\alpha} (m_i)^{h_i} \cdot \sum_{j=1}^{\beta} (r_j)^{k_j} \cdot T_r(s) \tag{C.8}$$

où :

- s *est la variable de* Laplace *;*
- n_0 *(resp.* n_1*) est le nombre total de changement d'orientation des liens au niveau des jonctions* 0 *(resp. des jonctions* 1*) lorsque le chemin est parcouru suivant la variable de flux (resp. d'effort) ;*
- α *(resp.* β*) est le nombre d'éléments* TF *(resp.* GY*) rencontrés le long du chemin causal ;*
- m_i *(resp.* r_j*) est le module du* $i^{\text{ième}}$ *élément* TF *(resp.* $j^{\text{ième}}$ *élément* GY*) rencontré le long du chemin causal ;*
- $h_i = \pm 1$ *(resp.* $k_j = \pm 1$*) suivant la causalité du* $i^{\text{ième}}$ *élément* TF *(resp.* $j^{\text{ième}}$ *élément* GY*) rencontré le long du chemin causal ;*
- $T_r(s)$ *est le produit des transmittances des éléments* I*,* R *et* C *rencontrés le long du chemin causal*[8]*. Si aucun de ces éléments n'intervient dans ce chemin causal,* $T_r(s) = 1$*.*

Définition 33

Le ***gain statique*** $\tilde{G}_k(v_i, v_j)$ ***d'un chemin causal*** ⓚ *entre les variables* v_i *et* v_j *correspond au terme constant du gain BG* $\tilde{G}_k(s)$ *de ce chemin.*

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu (exemple de la section 2.5.3, page 65), l'exemple de chemin causal de la figure C.6 (page 324) traverse deux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale. De plus, il ne passe par aucun élément en causalité dérivée. Sa *longueur BG* ainsi que son *ordre BG* sont donc égaux à 2. Enfin, grâce à l'équation (C.8) (page 325), nous pouvons en déduire que son *gain BG* est égal à $\frac{k_c}{LJ_m s^2}$ et que son *gain statique* vaut $\frac{k_c}{LJ_m}$.

Définition 34 (*[Rah93, Dau00]*)

Une ***boucle causale*** *est un chemin causal fermé (c'est-à-dire un chemin qui part et qui arrive sur la même variable) entre deux éléments de type* R*,* I *ou* C*. Une boucle causale ne peut passer deux fois par la même variable de puissance et traverse au maximum deux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale.*

8. Le tableau A.7 (page 284) de l'annexe A indique les valeurs de transmittances selon la causalité des éléments I, R et C.

Exemple :

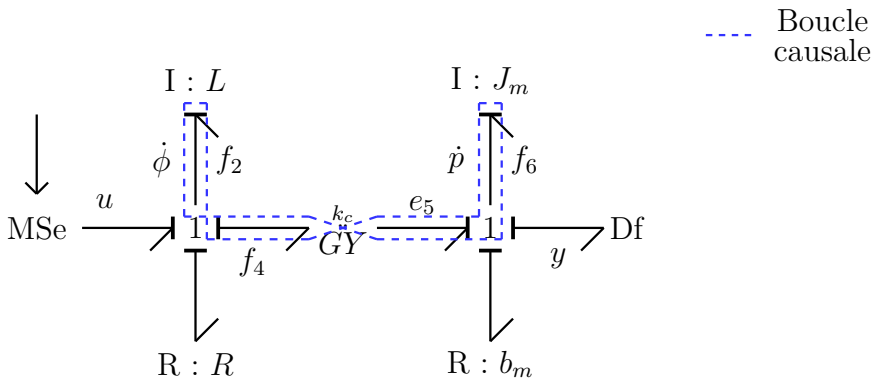


FIGURE C.7 – Exemple de *boucle causale* sur le modèle de moteur à courant continu

Dans le cas du moteur à courant continu (exemple de la section 2.5.3, page 65), une boucle causale existe entre les deux éléments I de stockage d'énergie (Fig. C.7).

C.3.2 Propriétés structurelles déduites de l'analyse d'un modèle bond graph

Propriété 6 (*Modèle bond graph → ordre relatif [Wu,95, Fot97a]*)

*Sur un modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, l'**ordre relatif BG** $n'_{BG,i}$ de la sortie y_i est égal à $\omega_{min_{BG,i}}$, l'ordre BG minimal qu'un chemin causal puisse avoir entre la sortie y_i et n'importe quelle entrée.*

Exemple :

Dans le cas du moteur à courant continu (exemple de la section 2.5.3, page 65), un chemin causal existe entre l'unique sortie y et l'unique entrée u (Fig. C.6, page 324). Celui-ci est le seul à présenter un ordre BG minimal : l'*ordre relatif BG* de la sortie y est égal à l'ordre BG de ce chemin soit 2.

Remarquons que la propriété 6 de WU et YOUCEF-TOUMI est applicable aux modèles contenant des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée (lorsque les modèles sont en causalité préférentiellement intégrale). L'exemple suivant permet notamment d'illustrer cette généralisation.

Exemple :

Considérons le modèle bond graph de la figure C.8.

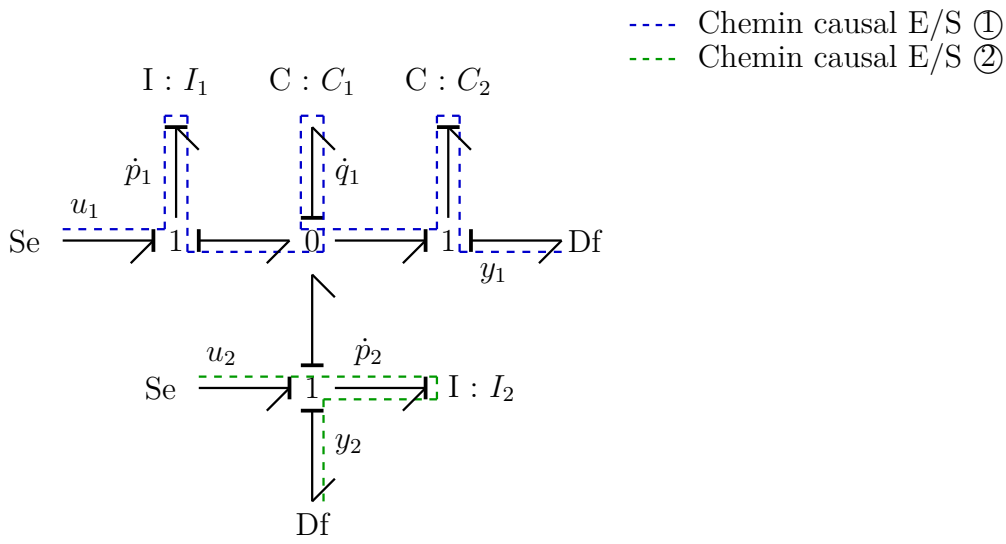


FIGURE C.8 – Modèle bond graph contenant un élément de stockage d'énergie en causalité dérivée

Une analyse causale de ce modèle nous montre alors que les chemins causaux les plus courts (en termes à la fois de longueur BG et d'ordre BG) entre n'importe quelle entrée et les sorties y_1 et y_2 sont respectivement les chemins causaux ① et ②. Par conséquent, en considérant les ordres BG de ces chemins, nous obtenons : $n'_{BG,1} = 1$ et $n'_{BG,2} = 1$.
Parallèlement, le modèle d'état associé peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ \frac{C_1}{(C_1+C_2)I_1} & \frac{C_1}{(C_1+C_2)I_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C_2}{(C_1+C_2)I_1} & \frac{C_2}{(C_1+C_2)I_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

D'où :

$$\mathbf{c_1B} = \begin{pmatrix} \frac{C_2}{(C_1+C_2)I_1} & \frac{C_2}{(C_1+C_2)I_2} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow n'_1 = 1$$
$$\mathbf{c_2B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{I_2} \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow n'_2 = 1$$

Ainsi, d'après l'approche algébrique (propriété 4, page 312), les ordres relatifs des sorties y_1 et y_2 sont tous deux égaux à 1. Dans cet exemple, nous constatons donc bien que la considération des ordres BG des chemins causaux nous permet d'obtenir des résultats identiques à ceux fournis par l'approche algébrique (une démonstration est donnée dans l'article [Wu,95]).

Cependant, comme souligné par Wu et Youcef-Toumi [Wu,95], même si cette propriété est plus générale que celle énoncée dans [Rah96], celle-ci présente une exception. Par exemple, s'il existe deux chemins causaux présentant un même ordre BG minimal $\omega_{min_{BG,i}}$, impliquant la même sortie y_i et la même entrée et, dont la somme de leurs gains s'annule, alors l'ordre relatif de la sortie associée (ordre relatif au sens de l'approche algébrique) est plus grand que $\omega_{min_{BG,i}}$. En réalité, nous pouvons seulement affirmer que $n'_i \geq \omega_{min_{BG,i}}$ dans le cas général [Wu,95, Fot97a] (de plus amples détails sur la prise en compte de cette exception sont donnés à la section 3.4.4, page 111).

En outre, afin de transcrire, dans le formalisme bond graph, le théorème de Reinschke permettant de déterminer le polynôme caractéristique d'un système (théorème 10, page 317), il convient de décrire tout d'abord ce que peut être un cycle et une famille de cycle sur un modèle bond graph. Pour cela, Rahmani [Rah93] a introduit les définitions suivantes dont notamment la notion de cycle causal.

Définition 35 (*[Rah93]*)

*Un **cycle causal** $\mathcal{C}_i$ est un chemin causal fermé pouvant contenir plusieurs éléments de stockage d'énergie distincts*[9].

Définition 36

*Le **gain BG** $G_{\mathcal{C}_i}$ (resp. **gain statique** $\tilde{G}_{\mathcal{C}_i}$) **d'un cycle causal** $\mathcal{C}_i$ est égal au gain BG (resp. gain statique) du chemin causal fermé correspondant.*

Définition 37 (*[Rah93]*)

*Sur un modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, deux cycles causaux sont dits **BG-différents** s'ils ne possèdent aucun élément de stockage d'énergie en causalité intégrale en commun.*

Définition 38 (*[Rah93]*)

*Une **famille de cycles causaux** $\mathcal{F}_i$ est un ensemble de cycles causaux BG-différents*[10].

Définition 39 (*[Rah93]*)

*Le **gain BG** $G_{\mathcal{F}_i}$ (resp. **gain statique** $\tilde{G}_{\mathcal{F}_i}$) **d'une famille de cycles** $\mathcal{F}_i$ est égal au produit des gains BG (resp. gains statiques) des cycles causaux composant la famille considérée.*

9. Ainsi, la notion de cycle causal est une généralisation de la notion de boucle causale, qui elle, ne pouvait contenir au maximum que deux éléments de stockage d'énergie (définition 34, page 325). De plus, notons que cette définition de Rahmani [Rah93] rejoint celle de van Dijk [van94] où un cycle causal est défini comme étant un chemin causal le long d'une *boucle de liens*, c'est-à-dire le long d'une cascade alternée de liens et d'éléments bond graph constituant une chaîne fermée.

10. Notons ici la différence avec la notion de famille de cycles selon l'approche digraphe (définition 24, page 316) qui considère, elle, des cycles disjoints au sens des digraphes.

Définition 40 (*[Rah93]*)

Sur un modèle bond graph causal, la ***longueur BG*** $l_{\mathcal{C}_i}$ *(resp.* $l_{\mathcal{F}_i}$*)* ***d'un cycle causal*** $\mathcal{C}_i$ *(resp.* ***d'une famille de cycles causaux*** $\mathcal{F}_i$*) est égale au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale rencontrés le long de ce cycle (resp. contenus dans cette famille).*

En se basant sur ces dernières définitions, Rahmani a dès lors pu établir un théorème permettant de déterminer le polynôme caractéristique d'un système directement à partir de son modèle bond graph :

Théorème 12 (*Modèle bond graph* $\rightarrow$ $P_{\mathbf{A}}(s)$ *[Rah93]*)

La valeur de chaque cœfficient α_i $(1 \leq i \leq n)$ *du polynôme caractéristique* $P_{\mathbf{A}}(s)$ *peut être déterminée à partir du modèle bond graph associé de sorte que :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha_i = \sum_{\substack{\mathcal{F}_k \text{ tel que} \\ l_{\mathcal{F}_k} = i}} (-1)^{d_k} \tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$$

où :
- $\mathcal{F}_k$ *est la* $k^{\text{ième}}$ *famille de cycles causaux ;*
- $l_{\mathcal{F}_k}$ *est la longueur de la famille de cycles causaux* $\mathcal{F}_k$ *;*
- $\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$ *est le gain statique de la famille de cycles causaux* $\mathcal{F}_k$ *;*
- d_k *est le nombre de cycles causaux BG-différents contenus dans la famille* $\mathcal{F}_k$*.*

Exemple :

Considérons le modèle bond graph de la figure C.9 correspondant au modèle d'état (C.2) (page 313).

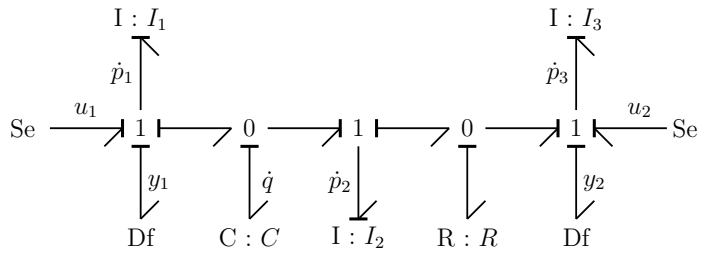


Figure C.9 – Exemple de modèle bond graph pour le calcul du polynôme caractéristique

L'analyse causale de ce modèle bond graph permet de calculer les cœfficients α_i du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ (Tab. C.3, C.4 et C.5). Le théorème 12 conduit à :

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}}(s) &= s^4 + \left(\frac{R}{I_2} + \frac{R}{I_3}\right) s^3 + \left(\frac{1}{I_1 C} + \frac{1}{I_2 C} + \frac{R^2}{I_2 I_3} - \frac{R^2}{I_2 I_3}\right) s^2 \\ &\quad + \left(\frac{R}{I_1 I_2 C} + \frac{R}{I_1 I_3 C} + \frac{R}{I_2 I_3 C}\right) s + \frac{R^2}{I_1 I_2 I_3 C} - \frac{R^2}{I_1 I_2 I_3 C} \\ &= s^4 + \left(\frac{R}{I_2} + \frac{R}{I_3}\right) s^3 + \left(\frac{1}{I_1 C} + \frac{1}{I_2 C}\right) s^2 + \left(\frac{R}{I_1 I_2 C} + \frac{R}{I_1 I_3 C} + \frac{R}{I_2 I_3 C}\right) s \end{aligned}$$

Le résultat ainsi obtenu est bien identique au résultat fourni par l'approche algébrique (équation (C.3), page 313).

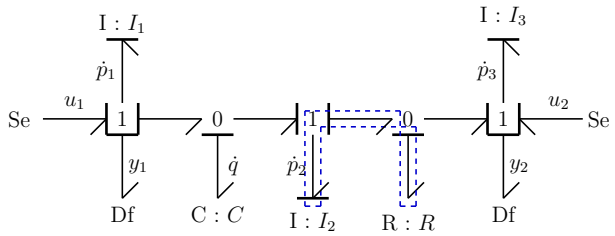
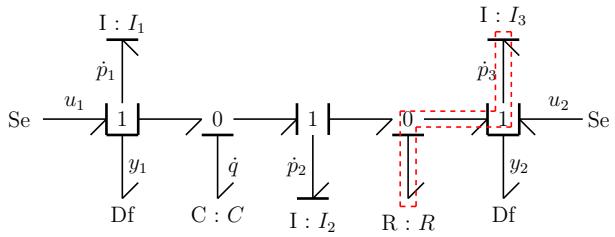
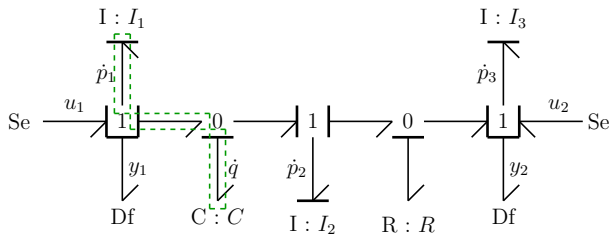
α_i	Familles de cycles causaux sur le modèle bond graph	$(-1)^{d_k}\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
α_1	(a) Cycle $\mathcal{C}_1$ de longueur 1 ($d = 1$). 	$\frac{R}{I_2}$
	(b) Cycle $\mathcal{C}_2$ de longueur 1 ($d = 1$). 	$\frac{R}{I_3}$
α_2	(c) Cycle $\mathcal{C}_3$ de longueur 2 ($d = 1$). 	$\frac{1}{I_1 C}$

TABLE C.3 – Calcul des cœfficients α_i du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ par l'approche bond graph

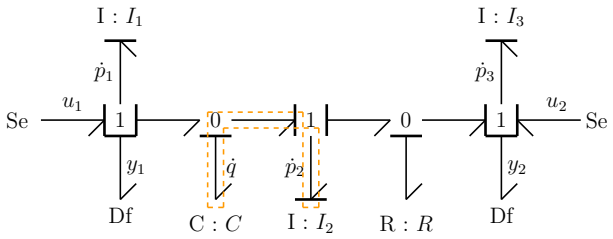
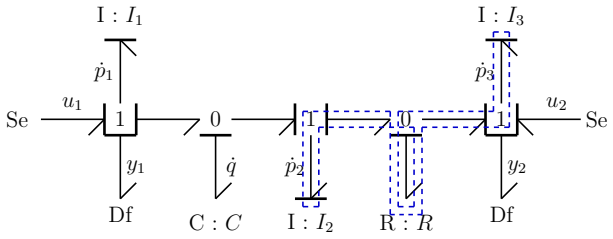
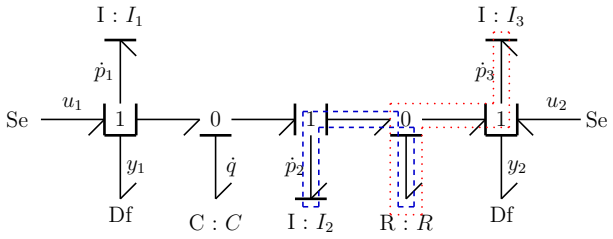
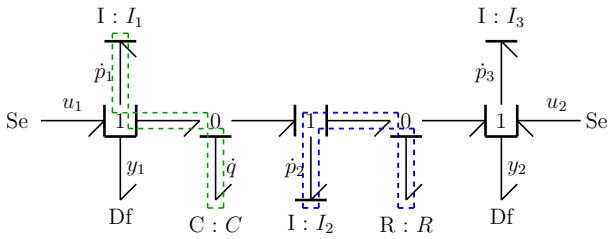
α_i	Familles de cycles causaux sur le modèle bond graph	$(-1)^{d_k}\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
α_2	(a) Cycle $\mathcal{C}_4$ de longueur 2 ($d = 1$). 	$\frac{1}{I_2 C}$
	(b) Cycle $\mathcal{C}_5$ de longueur 2 ($d = 1$). 	$-\frac{R^2}{I_2 I_3}$
	(c) Famille $\mathcal{F}_1$ de cycles ($\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$) de longueur 2 ($d = 2$). 	$\frac{R^2}{I_2 I_3}$
α_3	(d) Famille $\mathcal{F}_2$ de cycles ($\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$) de longueur 3 ($d = 2$). 	$\frac{R}{I_1 I_2 C}$

TABLE C.4 – Calcul des cœfficients α_i du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ par l'approche bond graph (suite)

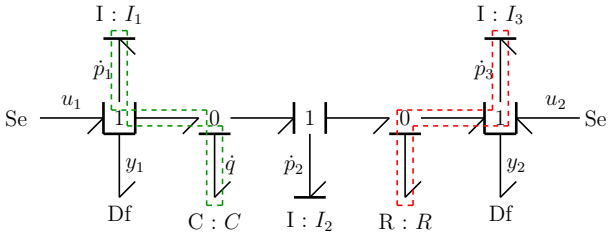
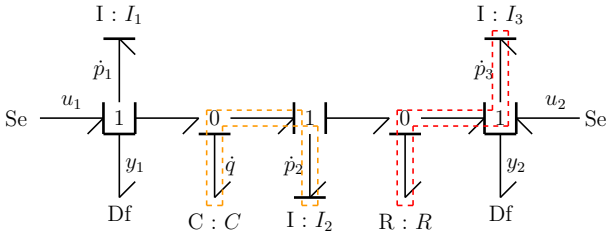
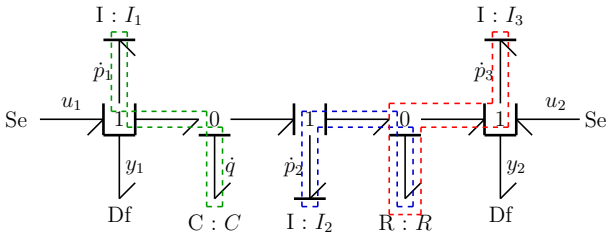
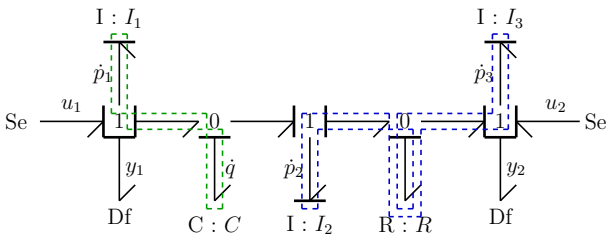
α_i	Familles de cycles causaux sur le modèle bond graph	$(-1)^{d_k}\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
α_3	(a) Famille $\mathcal{F}_3$ de cycles ($\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$) de longueur 3 ($d = 2$). 	$\frac{R}{I_1 I_3 C}$
	(b) Famille $\mathcal{F}_4$ de cycles ($\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_4$) de longueur 3 ($d = 2$). 	$\frac{R}{I_2 I_3 C}$
α_4	(c) Famille $\mathcal{F}_5$ de cycles ($\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$) de longueur 4 ($d = 3$). 	$\frac{R^2}{I_1 I_2 I_3 C}$
	(d) Famille $\mathcal{F}_6$ de cycles ($\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_5$) de longueur 4 ($d = 2$). 	$\frac{-R^2}{I_1 I_2 I_3 C}$

TABLE C.5 – Calcul des cœfficients α_i du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ par l'approche bond graph (suite 2)

De plus, de manière à transposer, dans le formalisme bond graph, le théorème de Reinschke sur le calcul du déterminant de la matrice système (théorème 11, page 320), la notion de modèle bond graph réduit a été introduite par Rahmani [Rah93] puis précisée par Bertrand [Ber97a].

Définition 41 (*[Ber97a]*)

Soit un modèle bond graph possédant un ensemble $\mathcal{E}_k$ de chemins causaux E/S BG-différents. Le ***modèle bond graph réduit*** *[associé à $\mathcal{E}_k$] est le modèle bond graph obtenu en éliminant tous les éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale contenus dans cet ensemble $\mathcal{E}_k$ de chemins causaux E/S BG-différents.*

Plus précisément [Ber97a] :

- Les éléments du modèle bond graph réduit ne doivent avoir subi aucun changement de causalité.
- Les liens bond graph et éléments de structure de jonction générant un conflit de causalité doivent ainsi être otés.
- Les sources, détecteurs ou éléments résistifs pour lesquels ces manipulations imposent un changement de causalité doivent aussi être éliminés.

Exemple :

Considérons le modèle bond graph de la figure C.10.

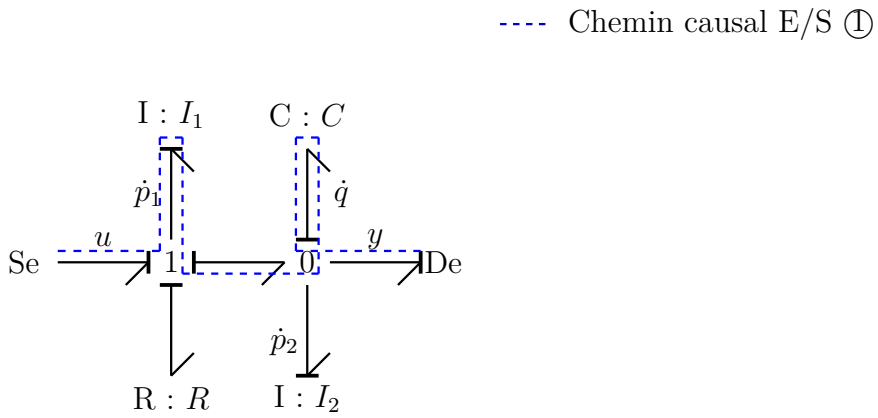


Figure C.10 – Exemple de modèle bond graph pour illustrer la notion de modèle bond graph réduit

Une analyse causale nous permet de montrer qu'il existe un chemin causal ① entre l'entrée u et la sortie y. D'après la définition 41 et les règles de construction précédentes, le *modèle bond graph réduit* associé au chemin causal ① correspond alors au modèle bond graph de la figure C.11.

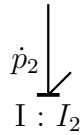


FIGURE C.11 – Modèle bond graph réduit associé au chemin causal E/S ①

Une fois cette notion de modèle bond graph réduit introduite, RAHMANI [Rah93] puis BERTRAND [Ber97a] ont dès lors proposé une méthode pour calculer le déterminant de la matrice système $\det \mathbf{P}(s)$ directement à partir d'un modèle bond graph (voir le théorème 1, page 89).

Annexe D

Prise en compte des boucles algébriques

Vue comme complément au chapitre 3, cette annexe a pour but de souligner la cohérence des différents niveaux de description proposés à la section 3.4.2 (page 100) en redémontrant, par leur intermédiaire, un certain nombre de résultats lorsque certaines boucles algébriques apparaissent dans le modèle bond graph. En l'occurrence, cette annexe permet :

- de retrouver le résultat de Fotsu-Ngwompo [Fot97a] sur l'extension de la procédure 1 (page 96) pour déduire le modèle d'état d'un modèle bond graph dans le cas où celui-ci présente des boucles algébriques (section D.1) ;
- d'appliquer ce dernier résultat pour étendre le théorème 12 (page 329) permettant de calculer le polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ à partir d'un modèle bond graph (section D.2).

Si aucun résultat nouveau n'est fondamentalement avancé et si d'autres travaux sur la prise en compte des boucles algébriques s'avéreront en pratique bien plus pertinents ([Sue92, van94, Gon08]), cette annexe permet d'argumenter une nouvelle fois en faveur de l'importance de distinguer différents niveaux de description. En outre, elle permet également de sensibiliser le lecteur aux différents types de chemins causaux qu'il peut rencontrer (notions de chemin élémentaire ou généralisé) et à certaines difficultés de mise en œuvre des procédures lorsque le modèle bond graph contient des boucles algébriques.

Hypothèses : Les modèles considérés ici sont supposés vérifier les mêmes hypothèses qu'au chapitre 3 en imaginant cependant que ceux-ci peuvent également contenir des boucles algébriques. Toutefois, nous supposons toujours que les modèles bond graph étudiés ne possèdent pas d'élément de stockage d'énergie en causalité dérivée lorsque ceux-ci sont affectés d'une causalité préférentiellement intégrale.

D.1 Détermination du modèle d'état

Compte tenu des différents niveaux d'analyse énoncés à la section 3.4.3 (page 106), revenons sur les procédures de détermination de la représentation matricielle d'état à partir d'un modèle graphique (modèle digraphe ou bond graph). Pour cela, conservons les notations du chapitre 3 où a_{ij} (resp. b_{ij}, c_{ij} et d_{ij}) représente le cœfficient situé sur la

$i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$) du modèle d'état.

D.1.1 Approche digraphe

La construction même d'un digraphe nécessite la connaissance préalable du modèle d'état sous forme matricielle. Les cœfficients matriciels de cette représentation d'état correspondent aux poids des différents arcs composant le digraphe (voir l'introduction aux digraphes, section 3.3.1, page 80). Par conséquent, la présence de boucles algébriques est supposée avoir été déjà prise en compte lors de l'écriture du modèle d'état sous forme analytique et la procédure pour obtenir le digraphe correspondant n'est pas modifiée.

D.1.2 Approche bond graph

Lors de la section 3.4.1 (page 96), une procédure permettant de déterminer les cœfficients matriciels de la représentation d'état directement à partir d'un modèle bond graph (procédure 1, page 96) a déjà été présentée. Cependant, cette procédure a été énoncée et illustrée dans le cas de modèles bond graph ne présentant ni boucle algébrique, ni élément de stockage en causalité dérivée (lorsque le modèle est en causalité préférentiellement intégrale). À la lumière des niveaux d'information et de description relatifs aux approches algébriques et bond graph, reprenons le cas où des boucles algébriques et résolubles existent (l'hypothèse d'absence d'élément de stockage d'énergie en causalité dérivée étant conservée).

Selon l'approche algébrique, dans une telle situation, la présence de boucles algébriques implique l'ajout d'une équation algébrique supplémentaire dans le modèle d'état de sorte que :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A_1}\mathbf{x} + \mathbf{B_1}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{h} \\ \mathbf{h} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{h} + \mathbf{H}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C_1}\mathbf{x} + \mathbf{D_1}\mathbf{u} + \mathbf{J}\mathbf{h} \end{cases} \tag{D.1}$$

où $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_q)^T$ est le vecteur constitué des variables de puissance impliquées dans les boucles algébriques et q est le nombre de boucles algébriques [1].

Par analogie avec les résultats de la procédure 1 (page 96), nous pouvons alors conclure qu'une traduction bond graph possible est la suivante :

1. La notation est inspirée de celle de Maschke dans [Mas88].

Procédure 13 (*Prise en compte des boucles algébriques*)

Soit un modèle bond graph représentant un système linéaire et invariant dans le temps et correspondant à un modèle d'état de la forme (D.1).
Les cœfficients des matrices correspondantes peuvent alors être calculés de sorte que :

$$\forall(i,j),\begin{cases} a_{1_{ij}} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \tilde{G}_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i) \\ b_{1_{ij}} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k(u_j,\dot{x}_i) \\ e_{ij} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(h_j,\dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k(h_j,\dot{x}_i) \\ f_{ij} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,h_i)=1} \tilde{G}_k(\dot{x}_j,h_i) \\ g_{ij} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(h_j,h_i)=0} \tilde{G}_k(h_j,h_i) \\ h_{ij} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(u_j,h_i)=0} \tilde{G}_k(u_j,h_i) \\ c_{1_{ij}} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \tilde{G}_k(\dot{x}_j,y_i) \\ d_{1_{ij}} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(u_j,y_i)=0} \tilde{G}_k(u_j,y_i) \\ j_{ij} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(h_j,y_i)=0} \tilde{G}_k(h_j,y_i) \end{cases}$$

où $\tilde{G}_k(v_i,v_j)$ correspond au gain statique du chemin causal ⓚ existant entre les variables v_i et v_j et dont l'ordre est $\omega_k(v_i,v_j)$.

Cependant, une telle procédure requiert la détermination de nombreux cœfficients et il peut être intéressant d'obtenir une représentation d'état directement sous une forme ODE[2]. En effet, puisque les boucles algébriques sont supposées être résolubles, la matrice $(\mathbf{I}-\mathbf{G})$ est inversible ($\mathbf{I}$ représente la matrice identité) et l'expression de $\mathbf{h}$ en fonction de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{u}$ peut être obtenue :

$$\mathbf{h} = (\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1}\mathbf{F}\mathbf{x} + (\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u} \tag{D.2}$$

En écrivant alors $(\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\mathbf{G}^i$ et en remplaçant $\mathbf{h}$ par son expression (D.2) dans (D.1), le modèle d'état peut être mis sous une forme ODE de sorte que :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

où $\mathbf{A} = \left[\mathbf{A_1} + \mathbf{E}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}\mathbf{G}^i\right)\mathbf{F}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\mathbf{B_1} + \mathbf{E}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}\mathbf{G}^i\right)\mathbf{H}\right]$, $\mathbf{C} = \left[\mathbf{C_1} + \mathbf{J}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}\mathbf{G}^i\right)\mathbf{F}\right]$ et $\mathbf{D} = \left[\mathbf{D_1} + \mathbf{J}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}\mathbf{G}^i\right)\mathbf{H}\right]$.

2. *i.e.* Ordinary Differential Equations

Sans perdre en généralité (le raisonnement sera applicable aux cœfficients des autres matrices), étudions alors la traduction bond graph du cœfficient a_{ij}. Par définition du produit matriciel et selon les résultats précédents, nous remarquons que :

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= a_{1_{ij}} + \sum_{k_1=1}^{q}\sum_{k_2=1}^{q} e_{ik_1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(g_{k_1,k_2}\right)^l\right) f_{k_2 j} \\
&= a_{1_{ij}} + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{q}\sum_{k_2=1}^{q} e_{ik_1}\left(g_{k_1,k_2}\right)^l f_{k_2 j} \\
&= \sum_{\substack{\boxed{k_0} \text{ tel que} \\ \omega_{k_0}(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1}} \tilde{G}_{k_0}(\dot{x}_j,\dot{x}_i) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{q}\sum_{k_2=1}^{q} \sum_{\substack{\boxed{k_3} \text{ tel que} \\ \omega_{k_3}(h_{k_1},\dot{x}_i)=0}} \sum_{\substack{\boxed{k_4} \text{ tel que} \\ \omega_{k_4}(h_{k_2},h_{k_1})=0}} \sum_{\substack{\boxed{k_5} \text{ tel que} \\ \omega_{k_5}(\dot{x}_j,h_{k_2})=1}} \tilde{G}_{k_3}(h_{k_1},\dot{x}_i)\left(\tilde{G}_{k_4}(h_{k_2},h_{k_1})\right)^l \tilde{G}_{k_5}(\dot{x}_j,h_{k_2}) \\
&= \sum_{\substack{\boxed{k_0} \text{ tel que} \\ \omega_{k_0}(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1}} \tilde{G}_{k_0}(\dot{x}_j,\dot{x}_i) + \sum_{\substack{\boxed{k_1} \text{ tel que} \\ \omega_{k_1}(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1}} \tilde{G}_{k_1}(\dot{x}_j,\dot{x}_i) \\
&= \sum_{\substack{\boxed{k} \text{ tel que} \\ \omega_{k}(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1}} \tilde{G}_{k}(\dot{x}_j,\dot{x}_i)
\end{aligned}$$

en notant $\tilde{G}_{k_1}(\dot{x}_j,\dot{x}_i) = \tilde{G}_{k_3}(h_{k_1},\dot{x}_i)\left(\tilde{G}_{k_4}(h_{k_2},h_{k_1})\right)^l \tilde{G}_{k_5}(\dot{x}_j,h_{k_2})$.

Finalement, nous retombons ainsi sur le résultat énoncé pour les modèles bond graph sans boucle algébrique (procédure 1, page 96). Comme l'évoque Fotsu-Ngwompo [Fot97a], la différence réside simplement dans l'étude des chemins causaux qui ne sont plus uniquement des *chemins élémentaires* (définition 42) mais aussi des *chemins généralisés* (définition 43) : la détermination des cœfficients matriciels doit tenir compte des chemins causaux passant une infinité de fois dans les boucles algébriques.

Définition 42

Un chemin causal (resp. un cycle causal) est dit ***élémentaire*** *si et seulement si, dans la suite ordonnée de variables qui le caractérise, chaque variable (d'effort ou de flux) n'apparaît qu'une seule et unique fois.*

Définition 43

Un chemin causal (resp. un cycle causal) est dit ***généralisé*** *si et seulement si, dans la suite ordonnée de variables qui le caractérise, au moins une variable (d'effort ou de flux) apparaît plusieurs fois.*

Cette particuliarité est liée spécifiquement au caractère local du niveau de description propre à l'approche bond graph. Cependant, si l'infinité de ces chemins ne peut être en

pratique totalement parcourue, il est tout de même possible de calculer la limite de la série des gains statiques de ces chemins. En effet, considérons un chemin causal élémentaire ⓚ entre les variables v_i et v_j, d'ordre BG $\omega_k(v_i, v_j)$, de gain statique $\tilde{G}_k(v_i, v_j)$ et possédant une variable commune avec une boucle algébrique de gain $\tilde{G}_0$. En reprenant le raisonnement de Fotsu-Ngwompo [Fot97a], il existe alors une infinité de chemins causaux entre ces mêmes variables v_i et v_j, de même ordre BG $\omega_k(v_i, v_j)$ et de gains statiques respectifs $\tilde{G}_k(v_i, v_j)$, $\tilde{G}_k(v_i, v_j)\tilde{G}_0$, $\tilde{G}_k(v_i, v_j)(\tilde{G}_0)^2$, ... La somme infinie de ces gains vaut alors[3] :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \tilde{G}_k(v_i, v_j) \left(\tilde{G}_0\right)^l = \frac{\tilde{G}_k(v_i, v_j)}{1 - \tilde{G}_0}$$

Exemple :

Considérons le modèle bond graph de la figure D.1.

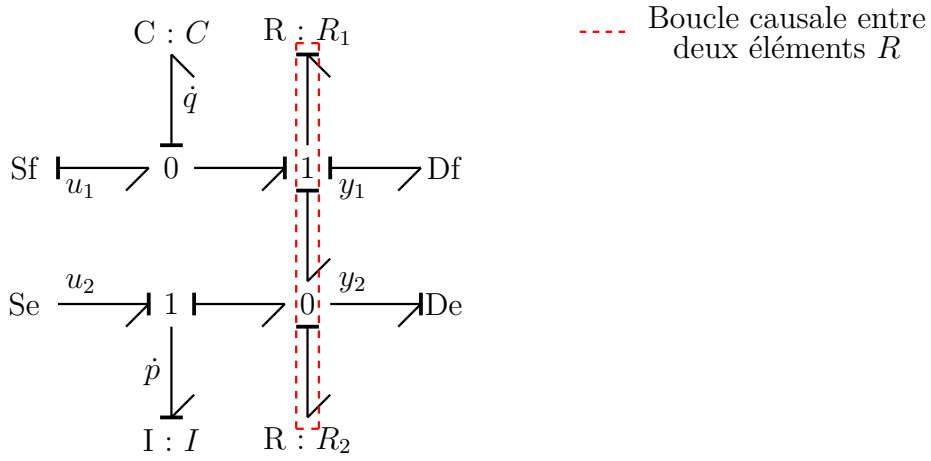
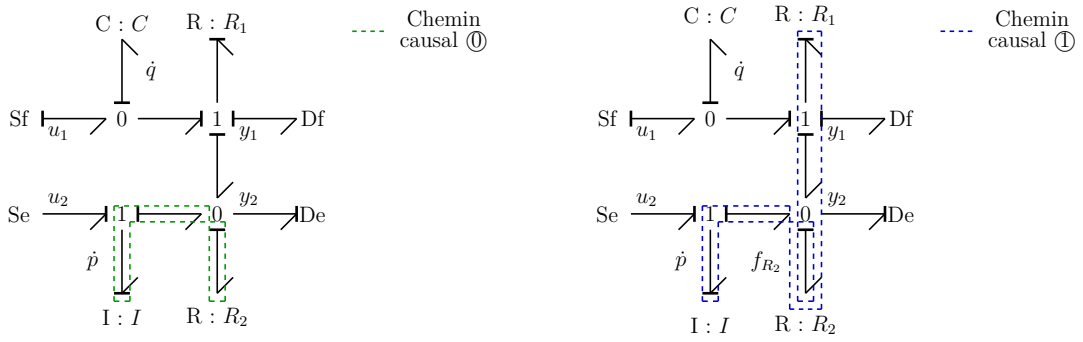


Figure D.1 – Modèle bond graph présentant une boucle entre deux éléments R

Une fois affectée la causalité préférentiellement intégrale, nous constatons alors qu'il existe une boucle causale d'ordre BG 0 entre les deux éléments $R : R_1$ et $R : R_2$: il s'agit donc d'une boucle algébrique. Aussi, en écrivant les différentes équations de jonction et les lois caractéristiques des éléments bond graph, nous obtenons le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)I} & -\frac{R_2}{(R_1+R_2)C} \\ \frac{R_2}{(R_1+R_2)I} & -\frac{1}{(R_1+R_2)C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{(R_1+R_2)I} & \frac{1}{(R_1+R_2)C} \\ \frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)I} & \frac{R_2}{(R_1+R_2)C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \end{cases} \tag{D.3}$$

3. Nous retrouvons dans ce calcul la condition de résolubilité des boucles énoncée par Rosenberg et Andry [Ros79] : le gain $\tilde{G}_0$ de la boucle algébrique doit être différent de 1 pour assurer la convergence de la série.



(a) Chemin causal élémentaire (b) Chemin causal généralisé

FIGURE D.2 – Détermination du cœfficient a_{11} dans le cas d'une boucle entre deux éléments R

Pour obtenir ce modèle d'état directement par scrutation des chemins causaux sur le modèle bond graph, il convient alors de considérer les chemins causaux élémentaires ainsi que ceux généralisés qui passent une infinité de fois dans la boucle $(R_1 - R_2)$. Par exemple, pour calculer le cœfficient a_{11}, il convient de tenir compte du chemin causal élémentaire ⓪ (Fig. D.2(a)) ainsi que des chemins causaux généralisés tel que le chemin ① (Fig. D.2(b)) qui parcourent la boucle $(R_1 - R_2)$ 1 fois, 2 fois, ... Par conséquent, le cœfficient a_{11} se calcule de sorte que :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{G}_0(\dot{p},\dot{p}) \left(\tilde{G}_1(f_{R_2}, f_{R_2})\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{-R_2}{I}\right) \left(\frac{-R_2}{R_1}\right)^l \\ &= \frac{-R_2}{I} \frac{1}{1+\frac{R_2}{R_1}} = \frac{-R_1 R_2}{(R_1+R_2)I} \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien un résultat identique avec le modèle d'état (D.3) (page 339). Le reste des cœfficients peut être obtenu de manière analogue en appliquant les autres étapes de la procédure 1 (page 96).

Ainsi, si le principe de la procédure reste strictement le même, son application pratique aux modèles possédant des boucles algébriques est rendue plus difficile : il n'y a plus un nombre fini de chemins causaux à étudier mais une infinité. Ici, le niveau de description plus détaillé de l'approche bond graph complexifie grandement la procédure d'obtention du modèle d'état.

Remarque : D'autres méthodes sur la prise en compte ou la suppression des boucles algébriques d'un modèle bond graph ont été proposées par SUEUR et DAUPHIN-TANGUY [Sue92], VAN DIJK [van94] et GONZALEZ et GALINDO [Gon08]. Notons également les travaux de MOUHRI [Mou00] sur l'obtention du modèle d'état généralisé lorsque le modèle bond graph présente, lorsqu'il est affecté d'une causalité préférentiellement intégrale, des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée (le modèle obtenu est de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}).$$

D.2 Détermination du polynôme caractéristique

Intéressons nous désormais à la détermination du polynôme caractéristique d'un système $P_{\mathbf{A}}(s)$. En suivant le même raisonnement que précédemment, là encore, comme pour la détermination de la représentation matricielle d'état, la procédure se complexifie sensiblement si le modèle bond graph considéré possède des boucles algébriques résolubles. Si la méthode digraphe (théorème 10, page 317) reste la même, la mise en œuvre de la méthode bond graph change quelque peu (théorème 12, page 329) : pour calculer les cœfficients du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$, il convient d'étudier les familles de cycles causaux élémentaires (définition 42, page 338) mais aussi généralisés (définition 43, page 338).

Exemple :

Reprenons l'exemple introduit à la section précédente (Fig. D.1, page 339) et possédant une boucle causale $(R_1 - R_2)$ (Fig. D.3).

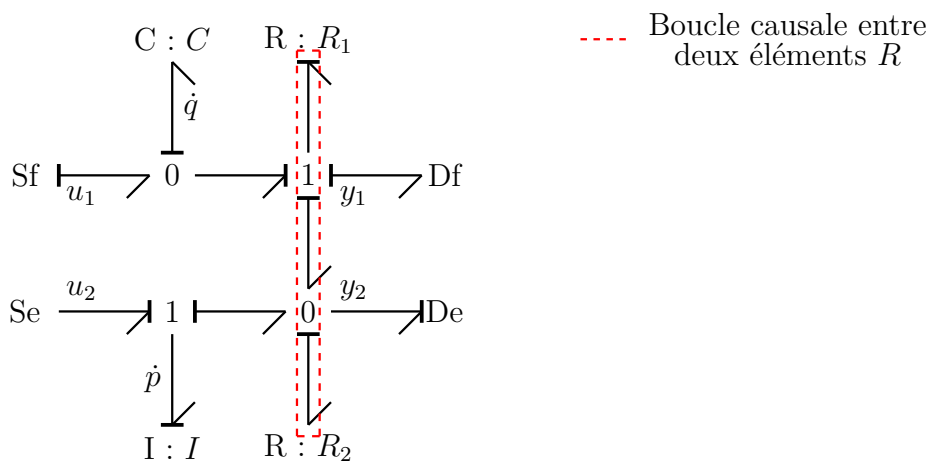


FIGURE D.3 – Exemple de modèle bond graph contenant une boucle algébrique pour le calcul du polynôme caractéristique

Approche algébrique : D'après le modèle d'état correspondant (D.3) (page 339), le polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ est alors égal à :

$$P_{\mathbf{A}}(s) = s^2 + \left(\frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)I} + \frac{1}{(R_1+R_2)C}\right) s + \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2 IC} + \frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)^2 IC}$$

Approche digraphe et bond graph : L'analyse du digraphe correspondant à la matrice **A** (Fig. D.4) ainsi que l'analyse causale du modèle bond graph de la figure D.3 permet de calculer les cœfficients α_i du polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}(s)$ (Tab. D.1 et D.2).

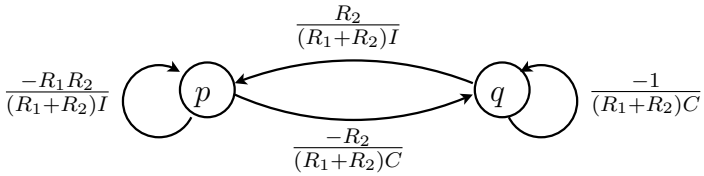


FIGURE D.4 – Exemple de digraphe pour le calcul du polynôme caractéristique

Si la procédure reste strictement la même sur le digraphe, celle sur le modèle bond graph se complique un peu puisqu'il convient d'étudier également les cycles causaux non élémentaires (*i.e.* ceux qui passent plusieurs fois par au moins une même variable) et de calculer les séries des gains statiques de ces cycles (comme nous l'avons vu lors de la section précédente). En prenant cette précaution, les théorèmes 10 (page 317) et 12 (page 329) conduisent aussi bien pour l'approche digraphe que pour l'approche bond graph à :

$$P_{\mathbf{A}}(s) = s^2 + \left(\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)I} + \frac{1}{(R_1+R_2)C}\right)s + \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2IC} + \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2IC}$$

Les deux approches aboutissent alors bien à un résultat identique à l'approche algébrique.

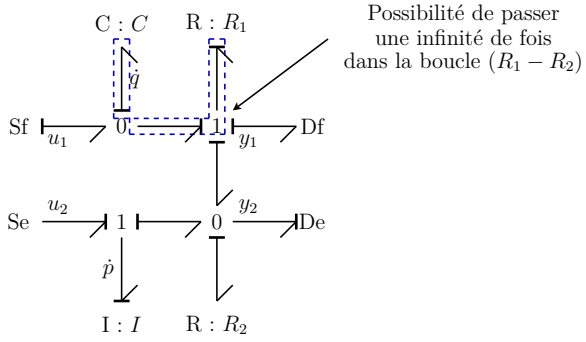
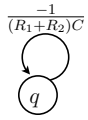
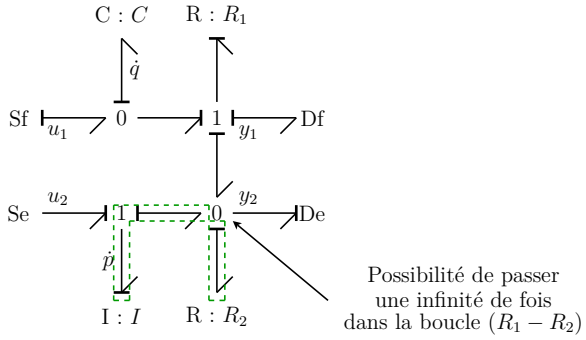
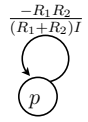
α_i	Familles de cycles causaux sur le modèle bond graph	Familles de cycles sur le digraphe	$(-1)^{d_k}\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
α_1	(a) Cycle de longueur 1 ($d = 1$).  $\Rightarrow \frac{-1}{R_1 C}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{-R_2}{R_1}\right)^l = \frac{-1}{(R_1+R_2)C}$	(b) Cycle de longueur 1 ($d = 1$).  	$\frac{1}{(R_1+R_2)C}$
	(c) Cycle de longueur 1 ($d = 1$).  $\Rightarrow \frac{-R_2}{I}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{-R_2}{R_1}\right)^l = \frac{-R_1 R_2}{(R_1+R_2)I}$	(d) Cycle de longueur 1 ($d = 1$).  	$\frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)I}$

TABLE D.1 – Calcul des cœfficients α_i dans le cas d'une boucle algébrique

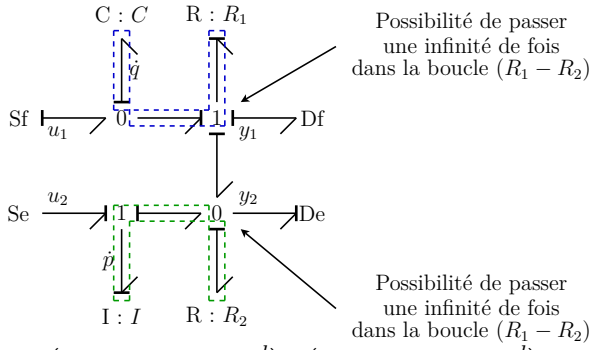
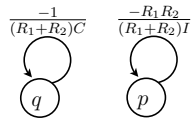
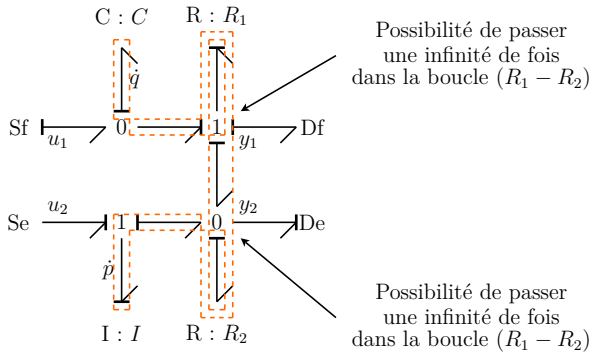
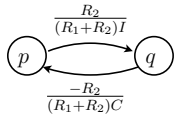
α_i	Familles de cycles causaux sur le modèle bond graph	Familles de cycles sur le digraphe	$(-1)^{d_k}\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
α_2	(a) Famille de cycles de longueur 2 ($d = 2$).  $\Rightarrow \left(\frac{-1}{R_1 C}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{-R_2}{R_1}\right)^l\right)\left(\frac{-R_2}{I}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{-R_2}{R_1}\right)^l\right) = \frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)^2 IC}$	(b) Famille de cycles de longueur 2 ($d = 2$).  	$\frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)^2 IC}$
	(c) Cycle de longueur 2 ($d = 1$).  $\Rightarrow \frac{-R_2^2}{R_1^2 IC}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{-R_2}{R_1}\right)^l\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{-R_2}{R_1}\right)^l\right) = \frac{-R_2^2}{(R_1+R_2)^2 IC}$	(d) Cycle de longueur 2 ($d = 1$).  	$\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2 IC}$

TABLE D.2 – Calcul des cœfficients α_i dans le cas d'une boucle algébrique (suite)

Remarque : Par souci de concision, aucun exemple comportant au moins une boucle algébrique n'est présenté ici pour illustrer le calcul du déterminant de la matrice système. Les théorèmes évoqués au chapitre 3 et à l'annexe C (théorèmes 11, 1 et 2, pages 320, 89 et 91) restent cependant valables dans de tels cas : comme dans les sections précédentes, il convient simplement d'être vigilant et de bien prendre en compte, au niveau bond graph, tous les chemins causaux généralisés.

Annexe E

Précisions sur la structure à l'infini

Dans le cadre du chapitre 3, cette annexe vise à donner quelques précisions sur la notion de structure à l'infini d'un système, notion dont il est fait largement appel lors, entre autres, de nos calculs sur les ordres d'essentialité des sorties du système (utiles notamment pour déterminer les critères de dérivabilité que doivent satisfaire les spécifications d'un problème inverse de conception, voir section 3.6, page 139).

Après avoir rappelé la définition de la structure à l'infini d'un système et précisé comment celle-ci pouvait être déterminée grâce à une approche algébrique (section E.1), cette annexe s'intéresse aux méthodes bond graph de détermination du nombre et de l'ordre des zéros à l'infini d'un système (section E.2). Outre une reformulation des résultats existants selon différents niveaux d'analyse utiles lors d'une démarche de conception (voir section 3.4.4, page 115), cette annexe constitue également l'occasion de lever certaines ambiguïtés de la littérature bond graph sur l'étude ici de chemins causaux BG-différents ou BG-disjoints.

Hypothèses : Les modèles considérés ici sont supposés vérifier les mêmes hypothèses qu'au chapitre 3.

E.1 Approche algébrique et résultats préliminaires

Pour commencer, voyons ici comment la structure à l'infini d'un système peut être étudiée selon une approche algébrique et présentons quelques résultats préliminaires pour aborder ensuite les méthodes bond graph de détermination de cette structure à l'infini.

E.1.1 Définition et procédure de calcul

Introduite en 1982 par Vardulakis [Var82], la factorisation de Smith - McMillan à l'infini d'une matrice a permis de définir la structure à l'infini d'un système, structure qui nous est notamment utile pour étudier, lors de la section 3.6 (page 139), la notion d'ordre d'essentialité.

Théorème 13 (*Forme de* Smith-McMillan *à l'infini [Var82, Ric01]*)

Toute matrice $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ rationnelle de rang r peut être factorisée comme suit :

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{B}_1(s)\mathbf{\Lambda}(s)\mathbf{B}_2(s)$$

où :

- $\mathbf{B}_1(s)$ *et* $\mathbf{B}_2(s)$ *sont des matrices bicausales*[1] *;*
- $\mathbf{\Lambda}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Delta}_\infty(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ *avec* $\mathbf{\Delta}_\infty(s) = \begin{pmatrix} s^{-n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{-n_r} \end{pmatrix}$ *et* $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r$.

Définition 44 (*[Ric01]*)

Soit un système Σ représenté par une matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$.
L'ensemble $\{n_1, \ldots, n_r\}$ apparaissant dans la factorisation de Smith-McMillan *à l'infini de la matrice $\mathbf{T}(s)$ représente la* ***structure à l'infini du système****. Si $n_i \leq 0$ (resp. $n_i \geq 0$), on dit du système Σ qu'il possède un* ***pôle*** *(resp.* ***zéro****) à l'infini d'ordre n_i.*

Remarque : Ici, nous nous intéresserons uniquement aux cas de systèmes ayant un sens physique donc associés à des matrices de transfert propres[2]. Dans ce cas, les systèmes ne possèdent que des zéros à l'infini. De plus, notons que la structure à l'infini d'un système a déjà été implicitement évoquée lors de la propriété 4 (page 312) puisque l'ordre relatif d'une sortie y_i est en réalité l'ordre de l'unique zéro à l'infini du sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{c}_i, \mathbf{d}_i)$.

Ainsi, la factorisation de Smith-McMillan de la matrice de transfert d'un modèle permet de calculer et de définir la structure à l'infini associée à ce modèle (théorème 13, page 346 et définition 44, page 346). Afin de faciliter les calculs, une autre méthode existe cependant pour calculer les ordres des zéros à l'infini d'un système sans avoir recours à cette factorisation :

Théorème 14 (*[Com91, Dio93, Ric01]*)

Soit $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ une matrice de transfert rationnelle propre de rang r.
Le système correspondant admet alors r zéros globaux à l'infini dont les ordres n_1, $\ldots$, n_r peuvent être calculés de sorte que :

$$\begin{cases} n_1 = \delta_1 \\ n_i = \delta_i - \sum_{j=1}^{i-1} n_j \end{cases}$$

où δ_i est le plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs[3] *d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$.*

1. Une matrice $\mathbf{B}(s)$ est dite *bicausale* ou *bipropre* si et seulement si $\lim_{s\to\infty} \det \mathbf{B}(s)$ est une constante non nulle [Ric01].

2. Une matrice rationnelle $\mathbf{T}(s)$ est dite *propre* si et seulement si tous ses cœfficients $t_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}$ sont des fractions rationnelles en s de sorte que $\deg(n_{ij}(s)) \leq \deg(d_{ij}(s))$ [Ric01].

3. Un *mineur* d'une matrice est le déterminant d'une de ses sous-matrices carrées. Il est dit *d'ordre i* lorsque la sous-matrice en question est de dimension i [Gan66].

Exemple :

Soit la matrice de transfert suivante : $\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} s^{-2} & s^{-4} \\ s^{-1} & s^{-3} \end{pmatrix}$. Il est clair que $\det(\mathbf{T}(s)) = 0$ et $\text{rang}(\mathbf{T}(s)) = 1$. Cette matrice possède donc un seul zéro à l'infini. De plus, les sous-matrices d'ordre 1 correspondent aux cœfficients de la matrice. Ces cœfficients présentent des zéros d'ordres respectifs 2, 4, 1 et 3. Donc $\delta_1 = 1$ et l'ordre n_1 du seul zéro à l'infini de la matrice $\mathbf{T}(s)$ est égal à 1.

E.1.2 Résultats préliminaires pour la détermination graphique de la structure à l'infini

Pour faciliter par la suite la lecture des ordres des zéros à l'infini au niveau graphique (*e.g.* au niveau bond graph), il est intéressant de relier les ordres des zéros à l'infini de la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ à ceux de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (définition 14, page 313) comme le montrent les résultats suivants.

Théorème 15 (*[Com91]*)

Soit $\mathbf{T}(s)^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \in \mathbb{R}^{i\times i}$ *la sous-matrice déduite de la matrice* $\mathbf{T}(s)$ *en ne sélectionnant que les lignes* $h_1,\ldots,h_i$ *et les colonnes* $j_1,\ldots,j_i$ *et* $\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ *l'ordre du zéro à l'infini de son déterminant* $\det\left(\mathbf{T}(s)^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right)$. *Alors :*

$$\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} = n - \beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$$

où :

- n *est la dimension du vecteur d'état du système associé à la matrice de transfert* $\mathbf{T}(s)$ *;*
- $\beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ *est le degré de* $\det\left(\mathbf{P}(s)^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i}\right)$ *;*
- $\mathbf{P}(s)^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i} \in \mathbb{R}^{(n+i)\times(n+i)}$ *est la sous-matrice déduite de la matrice* $\mathbf{P}(s)$ *en ne sélectionnant que les lignes* $1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i$ *et les colonnes* $1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i$ *(les* n *premières lignes des* n *premières colonnes de* $\mathbf{P}(s)$ *sont conservées).*

Exemple :

Soit le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} \end{cases}$$

Alors, par définition, la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ et la matrice système $\mathbf{P}(s)$ correspondantes sont égales à :

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{2}{s-3} & \frac{1}{s-3} \\ \frac{1}{s-3} & \frac{2}{s-3} & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & s-3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par notation, nous avons alors : $\mathbf{T}(s)_{1,2}^{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}$. Ainsi $\det(\mathbf{T}(s)_{1,2}^{1,3}) = \frac{1}{(s-1)(s-3)}$ et donc $\delta_{2_{1,2}^{1,3}} = 2$.
En raisonnant cette fois-ci avec la matrice système, il convient d'étudier dans ce cas la sous-matrice $\mathbf{P}(s)_{1,2,3,4}^{1,2,3,5} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & s-3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nous obtenons alors

$$\det(\mathbf{P}(s)_{1,2,3,4}^{1,2,3,5}) = 1$$

et donc $\beta_{2_{1,2,3,4}^{1,2,3,5}} = 0$. Dans ce cas particulier, nous vérifions donc bien : $\delta_{2_{1,2}^{1,3}} = 2 = 2 - 0 = n - \beta_{2_{1,2,3,4}^{1,2,3,5}}$.

Théorème 16

Soit δ_i le plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$. Alors :

$$\delta_i = n - \beta_i$$

où n est la dimension du vecteur d'état du système associé à $\mathbf{T}(s)$ et β_i est le plus grand degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{P}(s)$.

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent et calculons par exemple δ_1. Pour cela, il convient d'étudier les sous-matrices non nulles d'ordre 1 (donc les cœfficients non nuls) de la matrice $\mathbf{T}(s)$ (Tab. E.1).

Sous-matrice	Ordre du zéro à l'infini correspondant
$T(s)^1_1 = \frac{1}{s-1}$	$\delta_{1^1_1} = 1$
$T(s)^1_2 = \frac{2}{(s-1)(s-3)}$	$\delta_{1^1_2} = 2$
$T(s)^2_2 = \frac{2}{s-3}$	$\delta_{1^2_2} = 1$
$T(s)^3_2 = \frac{1}{s-3}$	$\delta_{1^3_2} = 1$
$T(s)^1_3 = \frac{1}{s-3}$	$\delta_{1^1_3} = 1$
$T(s)^2_3 = \frac{2}{s-3}$	$\delta_{1^2_3} = 1$
$T(s)^3_3 = \frac{1}{s-3}$	$\delta_{1^3_3} = 1$

TABLE E.1 – Calcul de l'ordre d'un zéro à l'infini par étude de la matrice de transfert

Par conséquent, nous constatons que : $\delta_1 = \min\{\delta_{1^1_1}, \delta_{1^1_2}, \delta_{1^2_2}, \delta_{1^3_2}, \delta_{1^1_3}, \delta_{1^2_3}, \delta_{1^3_3}\} = 1$ D'autre part, pour calculer β_1, il convient d'étudier cette fois-ci les sous-matrices d'ordre $n+1 = 3$ de la matrice $\mathbf{P}(s)$ (Tab. E.2).

Sous-matrice	Déterminant	Degré correspondant
$\mathbf{P}(s)^{1,2,3}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 1 \\ -2 & s-3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$s-3$	$\beta_{1^{1,2,3}_{1,2,3}} = 1$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,4}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -2 & s-3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0	$-\infty$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,5}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -2 & s-3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0	$-\infty$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,3}_{1,2,4} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 1 \\ -2 & s-3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\beta_{1^{1,2,3}_{1,2,4}} = 0$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,4}_{1,2,4} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -2 & s-3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$2s-2$	$\beta_{1^{1,2,4}_{1,2,4}} = 1$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,5}_{1,2,4} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -2 & s-3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$s-1$	$\beta_{1^{1,2,5}_{1,2,4}} = 1$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,3}_{1,2,5} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 1 \\ -2 & s-3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$s-1$	$\beta_{1^{1,2,3}_{1,2,5}} = 1$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,4}_{1,2,5} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -2 & s-3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$2s-2$	$\beta_{1^{1,2,4}_{1,2,5}} = 1$
$\mathbf{P}(s)^{1,2,5}_{1,2,5} = \begin{pmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -2 & s-3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$s-1$	$\beta_{1^{1,2,5}_{1,2,5}} = 1$

TABLE E.2 – Calcul de l'ordre d'un zéro à l'infini par étude des degrés des mineurs de la matrice système

Par conséquent :

$$\beta_1 = \max\{\beta_{1^{1,2,3}_{1,2,3}}, \beta_{1^{1,2,3}_{1,2,4}}, \beta_{1^{1,2,4}_{1,2,4}}, \beta_{1^{1,2,5}_{1,2,4}}, \beta_{1^{1,2,3}_{1,2,5}}, \beta_{1^{1,2,4}_{1,2,5}}, \beta_{1^{1,2,5}_{1,2,5}}\} = 1$$

Ici, nous vérifions donc bien : $\delta_1 = 1 = 2 - 1 = n - \beta_1$.

Grâce à ces résultats algébriques, connaissant les degrés des mineurs de la matrice système $\mathbf{P}(s)$, il sera alors très facile de déduire les ordres des zéros à l'infini de la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$. Encore une fois, si le passage par la matrice système peut sembler plus fastidieux au niveau algébrique (nous avons vu dans les exemples précédents que ceci requiert le calcul notamment de mineurs d'ordres plus importants), nous verrons par la suite que ceci facilite l'interprétation graphique et reste bien souvent utile pour les démonstrations théoriques.

E.2 Approche bond graph

Par anticipation de contraintes potentielles sur la synthèse de commande, l'ingénieur en charge de la conception d'un système peut avoir besoin de déterminer au préalable sa structure à l'infini pour vérifier s'il est, par exemple, découplable[4]. Dans ce cas, le nombre r de zéros à l'infini et les ordres n_i de ces zéros à l'infini (définition 44, page 346) sont recherchés pour la conception jusqu'alors retenue. Des méthodes bond graph existent d'ores et déjà pour déterminer ces grandeurs. Afin de détecter au plus tôt une conception qui ne présenterait pas une structure à l'infini en adéquation avec les spécifications imposées, les sections suivantes visent alors à redémontrer puis à reformuler ces résultats conformément aux différents niveaux d'analyse proposés à la section 3.4.3 (page 106). En outre, de par la redémonstration des résultats, ces sections seront l'occasion de lever une certaine ambiguïté de la littérature bond graph sur la scrutation ici de chemins causaux BG-différents ou BG-disjoints.

E.2.1 Théorèmes existants

Jusqu'à présent, deux théorèmes ont été établis afin de déterminer la structure à l'infini du système directement à partir de son modèle bond graph :

Théorème 17 (*Modèle bond graph → nombre zéros à l'infini [Ber97b]*)

Sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, le nombre r_{BG} de zéros à l'infini du système est égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux E/S ***BG-différents*** *puisse contenir.*

4. La découplabilité du système peut également être déterminée en étudiant les ordres d'essentialité des sorties du modèle [Glu89].

Théorème 18 (*Modèle bond graph → ordres des zéros à l'infini [Ber97b]*)

Les ordres des zéros globaux à l'infini peuvent être calculés de la façon suivante :

$$\begin{cases} n_{BG,1} = L_1 \\ n_{BG,i} = L_i - L_{i-1} \end{cases}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, L_i représente la longueur BG minimale qu'un ensemble de i chemins causaux E/S ***BG-différents*** *puisse avoir.*

E.2.2 Reformulation des théorèmes existants selon les différents niveaux d'analyse

Maintenant que l'approche algébrique et que les résultats bond graph existants ont été présentés, reformulons ces derniers résultats selon les différents niveaux d'analyse proposés à la section 3.4.3 (page 106). Afin d'étayer notre argumentation sur l'utilité des différents niveaux d'analyse pour orienter au plus tôt les reconceptions, la notion de structure à l'infini BG-structurelle est ainsi introduite. À l'image de ce qui est présenté pour la reformulation du calcul en bond graph de l'ordre relatif d'une sortie (section 3.4.4, page 111), une reformulation aux niveaux d'analyse BG-structurel et comportemental est proposée pour la détermination bond graph :

1. du nombre r_{BG} de zéros à l'infini ;
2. des ordres $n_{BG,i}$ des zéros à l'infini.

Ces résultats servent notamment de support théorique pour l'illustration de la section 3.4.4 (page 115).

Nombre de zéros à l'infini selon l'approche bond graph

Comme nous l'avons vu lors du théorème 17 (page 350), la littérature bond graph montre l'existence d'un théorème permettant de calculer le nombre r_{BG} de zéros à l'infini directement à partir d'un modèle bond graph [Ber97b, Ber01]. En particulier, ce théorème affirme que ce nombre r_{BG} est égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux E/S BG-différents puisse contenir. Cependant, comme nous l'avons précédemment annoncé, une ambiguïté dans la formulation de ce théorème existe : les références [Ber97b, Ber01] préconisent l'étude des chemins causaux E/S BG-différents tandis que les références [Sue92, Dau00] parlent, elles, de chemins causaux E/S BG-disjoints. Dès lors, une question légitime se pose quant à la mise en œuvre du théorème : quel type de chemins causaux faut-il finalement étudier ? Cette section vise justement à éclaircir ce point tout en tenant compte des différents niveaux d'analyse établis au chapitre 3. Les raisonnements suivants permettent notamment de montrer les deux résultats suivants :

Théorème 19 (*niveau d'analyse BG-structurel*)

Sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, le nombre r_{BG-s} de zéros ***BG-structurels*** *à l'infini du système est égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux E/S* ***BG-disjoints*** *puisse contenir.*

Théorème 20 (*niveau d'analyse comportemental*)

Sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, le nombre r de zéros à l'infini du système est égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux E/S ***BG-disjoints*** *puisse contenir* ***pour assurer l'inversibilité d'un sous-système de dimension*** *r.*

Remarque : Puisque le niveau d'analyse comportemental est le même pour l'approche algébrique et l'approche bond graph, il n'y a plus lieu dans le théorème 20 d'ajouter l'indice $_{BG}$ à la notation r du nombre de zéros à l'infini.

Ces théorèmes peuvent en effet être justifiés de la manière suivante. D'après l'approche algébrique (théorème 14, page 346), le nombre de zéros à l'infini du système est égal au rang r de sa matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$. Or, par définition du rang, ceci signifie :
- qu'au moins un mineur d'ordre r est non nul ;
- et que tout mineur d'ordre strictement supérieur à r est nécessairement nul.

Le fait qu'il existe un mineur d'ordre r non nul montre qu'un sous-système de dimension r est inversible et donc qu'il existe nécessairement au moins un ensemble de r chemins causaux E/S BG-disjoints assurant cette inversibilité (critère d'inversibilité 4, page 130). Au contraire, si tout mineur d'ordre supérieur à r est nul, ceci signifie que tout sous-système de dimension strictement supérieure à r est non inversible :
- cas $n°1$: soit parce qu'il n'existe aucun ensemble contenant plus de r chemins causaux E/S BG-disjoints (non inversibilité BG-structurelle) ;
- cas $n°2$: soit parce qu'il existe plusieurs ensembles contenant plus de r chemins causaux E/S BG-disjoints mais que la somme signée[5] de leurs gains s'annule (non inversibilité comportementale).

Ainsi en termes de niveaux d'analyse :
- soit nous restreignons notre étude à une analyse BG-structurelle. Les gains des ensembles sont alors supposés indépendants et seul le cas $n°1$ est considéré. Nous parlons alors de zéros **BG-structurels** (théorème 19, page 352) ;
- soit l'étude se place au niveau de l'analyse comportementale. Les gains des ensembles sont alors pris en compte et les cas n°1 et n°2 sont considérés. Les zéros obtenus sont identiques à ceux obtenus par l'approche algébrique (théorème 20, page 352).

En outre, concernant le type de chemins causaux E/S à considérer notons que, pour le niveau d'analyse comportementale, nous pouvons resteindre l'étude aux chemins causaux E/S BG-disjoints puisque ce sont obligatoirement ces chemins qui assurent l'inversibilité du système (s'il est inversible). Bien entendu, comme les chemins causaux BG-disjoints sont également des chemins causaux BG-différents, il n'est pas faux de considérer les chemins causaux BG-différents pour déterminer le nombre de zéros à l'infini : au contraire de ce que nous allons voir à la section suivante, pour la détermination du nombre de

5. Nous appelons *somme signée* la somme des gains de plusieurs ensembles de chemins causaux où chaque gain a été préalablement multiplié par $(-1)^{\sigma_{\mathcal{E}_k}} P_{R,\mathcal{E}_k}(s)$ (voir le théorème 1, page 89).

zéros à l'infini et pour un niveau d'analyse comportemental, la considération des chemins BG-différents ou BG-disjoints conduit ici au même résultat.

Remarque : Le cas où le nombre de zéros à l'infini ne correspond pas au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux E/S BG-disjoints puisse contenir (cas par exemple où la somme signée des gains de ces ensembles de chemins s'annule) a déjà été évoqué dans un exemple de l'article [Sue92] sans toutefois parler de niveaux différents d'analyse.

Ordre des zéros à l'infini selon l'approche bond graph

Maintenant que plusieurs précisions ont été apportées sur le calcul du nombre de zéros à l'infini, attardons nous sur la détermination bond graph des ordres des zéros à l'infini. Lors des sections précédentes, une méthode a notamment été présentée (théorème 18, page 351). Celle-ci indique que chaque ordre $n_{BG,i}$ peut être calculé de sorte que :

$$\begin{cases} n_{BG,1} = L_1 \\ n_{BG,i} = L_i - L_{i-1} \end{cases}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, L_i représente la longueur BG minimale qu'un ensemble de i chemins causaux E/S BG-différents puisse avoir. Cependant, là encore, comme pour le nombre de zéros à l'infini, une ambiguïté existe : les références [Ber97b, Ber01] utilisent les chemins causaux E/S BG-différents tandis que les références [Sue92, Dau00] étudient, elles, les chemins causaux E/S BG-disjoints. De la même manière qu'à la section précédente, cette section vise d'une part à lever cette ambiguïté sur le type de chemins à considérer puis, d'autre part, à injecter la notion de niveaux d'analyse en démontrant les théorèmes suivants :

Théorème 21 (*niveau d'analyse BG-structurel*)

*Les ordres des zéros **BG-structurels** à l'infini peuvent être calculés de sorte que :*

$$\begin{cases} n_{BG-s,1} = L_{1_s} \\ n_{BG-s,i} = L_{i_s} - L_{i-1_s} \end{cases}$$

*où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, L_{i_s} représente la longueur BG minimale d'un ensemble de i chemins causaux E/S **BG-différents** puisse avoir.*

Théorème 22 (*niveau d'analyse comportemental*)

Les ordres des zéros à l'infini peuvent être calculés de sorte que :

$$\begin{cases} n_1 = L_1 \\ n_i = L_i - L_{i-1} \end{cases}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale :

$$L_i = \min_{\substack{(j_1,\ldots,j_i) \in ([\![1,m]\!])^i \\ (h_1,\ldots,h_i) \in ([\![1,m]\!])^i}} \{ \min_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \in [\![0,n]\!]} \{ l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \mid \rho_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}^{\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\}} \neq 0 \} \}$$

où :

- *n et m sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'entrées ;*
- *$\rho_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}^{\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\}}$ correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph de longueur BG égale à $l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}$ et contenant comme chemins causaux uniquement i chemins causaux E/S **BG-différents** entre les variables d'entrée $u_{j_1},\ldots,u_{j_i}$ et les variables de sortie $y_{h_1},\ldots,y_{h_i}$. Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph $\mathcal{F}_k$ doit être multiplié par $(-1)^{d_k}$ où d_k est le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique doit également être multiplié par $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_k}}$ où $\sigma_{\mathcal{F}_k}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties $y_{h_1}, \ldots, y_{h_i}$ dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les i chemins causaux de la famille $\mathcal{F}_k$ sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Remarque : Encore une fois, puisque le niveau d'analyse comportemental est le même pour l'approche algébrique et l'approche bond graph, il n'y a plus lieu dans le théorème 22 d'ajouter l'indice $_{BG}$ à la notation des ordres des zéros à l'infini.

Afin de démontrer ces théorèmes, scindons notre raisonnement en démontrant tout d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 1 (*niveau d'analyse BG-structurel*)

*Soit $\delta_{BG-s,i}$ le plus petit ordre des zéros **BG-structurels** à l'infini des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$. Alors :*

$$\forall i \in \{1,\ldots,r_{BG-s}\}, \delta_{BG-s,i} = L_{i_s}$$

*où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, L_{i_s} représente la longueur BG minimale qu'un ensemble de i chemins causaux E/S **BG-différents** puisse avoir.*

Lemme 2 (*niveau d'analyse comportemental*)

Soit δ_i le plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$. Alors :

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\},$$

$$\delta_i = L_i = \min_{\substack{(j_1, \ldots, j_i) \in (\llbracket 1, m \rrbracket)^i \\ (h_1, \ldots, h_i) \in (\llbracket 1, m \rrbracket)^i}} \{ \min_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \in \llbracket 0, n \rrbracket} \{ l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \mid \rho_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}^{\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\}} \neq 0 \} \}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale :

- *n et m sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'entrées ;*
- *$\rho_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}^{\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\}}$ correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph de longueur BG égale à $l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}$ et contenant comme chemins causaux uniquement i chemins causaux E/S **BG-différents** entre les variables d'entrée $u_{j_1}, \ldots, u_{j_i}$ et les variables de sortie $y_{h_1}, \ldots, y_{h_i}$. Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph $\mathcal{F}_k$ doit être multiplié par $(-1)^{d_k}$ où d_k est le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique doit également être multiplié par $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_k}}$ où $\sigma_{\mathcal{F}_k}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties $y_{h_1}, \ldots, y_{h_i}$ dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les i chemins causaux de la famille $\mathcal{F}_k$ sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Pour cela, notons δ_i le plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$ et β_i le plus grand degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{P}(s)$ et essayons, dans un premier temps, de trouver une relation entre ces nombres δ_i, β_i et L_i.
Nous avons vu, d'après le théorème 16 (page 348), que $\delta_i = n - \beta_i$ où n correspond à la dimension du vecteur d'état et donc au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale (définition 27, page 323). Aussi, les β_i peuvent être calculés de sorte que :

$$\begin{aligned}\beta_i &= \max_{\substack{(j_1, \ldots, j_i) \in (\llbracket 1, m \rrbracket)^i \\ (h_1, \ldots, h_i) \in (\llbracket 1, m \rrbracket)^i}} \{ \beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} \} \\ &= \max_{\substack{(j_1, \ldots, j_i) \in (\llbracket 1, m \rrbracket)^i \\ (h_1, \ldots, h_i) \in (\llbracket 1, m \rrbracket)^i}} \{ \deg \left(\det \left(\mathbf{P}(s)^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i} \right) \right) \}\end{aligned}$$

Si $\det \left(\mathbf{P}(s)^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i} \right) = 0$, alors ce déterminant n'est pas à considérer pour le calcul des ordres des zéros à l'infini.

Si $\det \left(\mathbf{P}(s)^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i} \right) \neq 0$:
Considérer la sous-matrice $\mathbf{P}(s)^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i}$, revient alors, au niveau bond graph, à considérer le modèle bond graph obtenu en supprimant du modèle bond graph du système les sources et les détecteurs (d'effort et/ou de flux) ne correspondant pas respectivement aux entrées $u_{j_1}, \ldots, u_{j_i}$ et aux sorties $y_{h_1}, \ldots, y_{h_i}$ (Fig. E.1[6] dans le cas où les entrées

6. La notation $\mathbb{GJS}$ dénote une structure de jonction généralisée (*Generalized Junction Structure*) [Bre85a].

correspondent toutes à des sources d'effort).

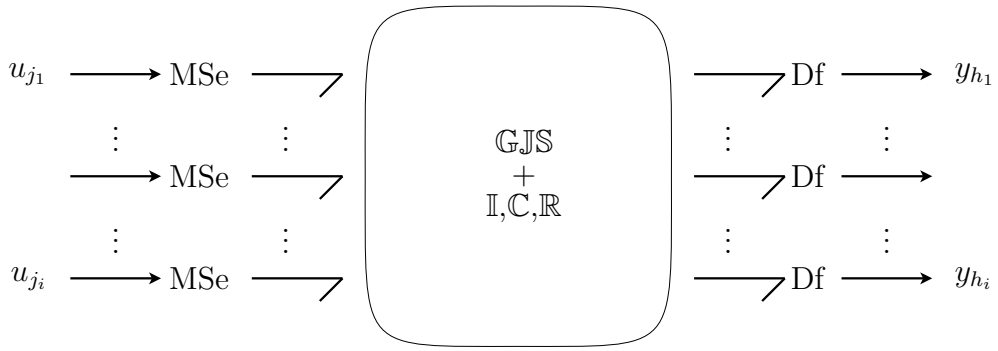


FIGURE E.1 – Correspondance entre la sous-matrice $\mathbf{P}(s)_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i}^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}$ et le modèle bond graph du système étudié

Dès lors, en appliquant à ce nouveau modèle bond graph le théorème 2 (page 91) pour calculer le déterminant de sa matrice système, nous obtenons alors :

$$\det\left(\mathbf{P}(s)_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i}^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}\right) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}\}} s^{n-k}$$

en appliquant le théorème 2 (page 91)

$$\underset{s\to+\infty}{\sim} \rho_{l_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}^{\{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}\}} s^{n-l_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}$$

en notant $l_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}$ la longueur BG minimale qu'une famille bond graph $\mathcal{F}_{k_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}$ (définition 9, page 91) puisse avoir sur le modèle de la figure E.1 lorsque, parmi ses chemins causaux, elle contient exactement i chemins causaux E/S BG-différents entre les entrées $u_{j_1}, \ldots, u_{j_i}$ et les sorties $y_{h_1}, \ldots, y_{h_i}$

Deux cas peuvent alors se présenter :

- cas n°1 : $\rho_{l_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}^{\{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}\}} \neq 0$

  Puisqu'une famille bond graph $\mathcal{F}_{k_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}$ est constituée au minimum d'un ensemble $\mathcal{E}_{k_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}$ de i chemins causaux E/S BG-différents entre les entrées $u_{j_1}, \ldots, u_{j_i}$ et les sorties $y_{h_1}, \ldots, y_{h_i}$, la longueur BG minimale $l_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}$ d'une telle famille correspond à la longueur BG minimale $L_{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}$ qu'un tel ensemble $\mathcal{E}_{k_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}$ puisse avoir sur le modèle bond graph de la figure E.1, alors :

  $$\beta_{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}} = \deg\left(\det\left(\mathbf{P}(s)_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i}^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}\right)\right) = n - l_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i} = n - L_{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}$$

  Et par conséquent :

  $$\delta_{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}} = l_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i} = L_{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}$$

– cas n°2 : $\rho_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}^{\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\}} = 0$

Pour pouvoir déterminer le degré de $\det\left(\mathbf{P}(s)^{1,\ldots,n,n+j_1,\ldots,n+j_i}_{1,\ldots,n,n+h_1,\ldots,n+h_i}\right)$, il faut alors considérer les familles bond graph $\mathcal{F}_{k^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ de longueur égale à $l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} + 1$ puis vérifier que le cœfficient $\rho_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}+1}^{\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\}}$ correspondant ne s'annule pas. Si ce cœfficient est nul, il faut alors recommencer le raisonnement en considérant les familles bond graph de longueur égale à $l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} + 2$ puis, vérifier à nouveau que le cœfficient $\rho_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}+2}^{\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\}}$ ne s'annule pas. Si ce n'est pas le cas, il faut alors recommencer ces vérifications avec des familles bond graph de longueurs $l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} + 3$, $l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} + 4$, ... jusqu'à trouver un cœfficient non nul. Ici, nous avons alors :

$$\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} = \min_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \in [\![0,n]\!]} \{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \mid \rho_{l^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}^{\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\}} \neq 0\}$$

Ainsi, là encore et puisque $\delta_i = \min\limits_{\substack{(j_1,\ldots,j_i) \in ([\![1,m]\!])^i \\ (h_1,\ldots,h_i) \in ([\![1,m]\!])^i}} \{\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}\}$:

– soit nous restreignons notre étude à une analyse BG-structurelle où les gains des familles sont alors supposés indépendants. Quels que soient les indices $h_1, \ldots, h_i$ et $j_1, \ldots, j_i$ choisis, seul le cas n°1 est considéré ce qui permet d'énoncer le lemme 1 (page 354) ;
– soit l'étude se place au niveau de l'analyse comportementale. Les gains des familles ne sont alors plus supposés comme indépendants et les cas n°1 et n°2 sont étudiés ce qui mène au lemme 2 (page 355).

Remarque : Si le critère bond graph pour calculer les δ_i peut sembler fastidieux, celui-ci permet, en pratique, de nous affranchir d'un certain nombre de calculs qui sont nécessaires pour mettre en œuvre l'approche algébrique. En effet, l'approche algébrique demande la détermination de l'expression formelle complète de chaque mineur de la matrice système pour en déduire son degré. L'approche bond graph, elle, ne procède pas à la détermination de l'expression complète de chaque mineur : elle vise à déterminer directement le degré du mineur en ne s'intéressant qu'au premier monôme non nul et de plus haut degré.

Maintenant que les deux lemmes 1 et 2 (page 354) ont été démontrés, démontrons les théorèmes 21 et 22 (page 353).

Pour $i = 1$, d'après l'approche algébrique (théorème 14, page 346), nous savons que $n_1 = \delta_1$. Or d'après le lemme 1 page 354 (resp. 2, page 355), il a été démontré que $\forall i \in \{1 \ldots r_{BG-s}\}, \delta_{BG-s,i} = L_{i_s}$ (resp. $\forall i \in \{1 \ldots r\}, \delta_i = L_i$). Le résultat $n_{BG-s,1} = L_{1_s}$ (resp. $n_1 = L_1$) est donc immédiat. Le théorème 21 page 353 (resp. 22, page 354) est bien vérifié.

Pour $i \geq 2$:

$$\begin{aligned}
L_{i_s} - L_{i-1_s} =& \delta_{BG-s,i} - \delta_{BG-s,i-1} \\
& \text{d'après le lemme 1 (page 354)} \\
=& \left(n_{BG-s,i} + \sum_{j=1}^{i-1} n_{BG-s,j} \right) - \left(n_{BG-s,i-1} + \sum_{j=1}^{i-2} n_{BG-s,j} \right) \\
& \text{d'après le théorème 14 (page 346)} \\
=& \sum_{j=1}^{i} n_{BG-s,j} - \sum_{j=1}^{i-1} n_{BG-s,j} \\
=& n_{BG-s,i}
\end{aligned}$$

De même, en appliquant cette fois-ci le lemme 2 (page 355), il peut être démontré que $L_i - L_{i-1} = n_i$. Les théorèmes 21 et 22 (page 353) sont donc bien vérifiés pour tout i.

Finalement, nous constatons donc que les équations du théorème 18 (page 351) sont bien vérifiées mais qu'il convient encore une fois de préciser leurs domaines de validité : la longueur BG L_i notamment sera calculée différemment selon le niveau d'analyse considéré (théorèmes 21 et 22, page 353). De plus, notons qu'à l'inverse de la détermination du nombre de zéros à l'infini, le calcul de leurs ordres implique cette fois-ci l'étude des chemins causaux E/S BG-différents et non uniquement BG-disjoints (que ce soit d'ailleurs au niveau BG-structurel ou comportemental). En effet, conformément au théorème 2 (page 91), seule l'étude de ce type de chemins permet de calculer le degré des mineurs de $\mathbf{P}(s)$.

Remarque : Comme pour le calcul du nombre de zéros à l'infini, le cas où la somme signée des gains des ensembles de i chemins causaux E/S BG-différents s'annule a déjà été évoqué dans l'article [Sue92] sans toutefois parler de niveaux différents d'analyse.

Annexe F

Méthodes indirectes de résolution d'un problème d'optimisation

Dans le contexte de nos travaux sur l'optimisation (chapitres 4 et 5), cette annexe a pour objectif de fournir au lecteur quelques éléments théoriques supplémentaires concernant les méthodes indirectes de résolution utilisées au cours de ce mémoire. En l'occurrence, cette annexe permettra d'éclaircir certains points sur les différentes formulations du principe de Pontryagin qui peuvent être trouvées dans la littérature. Elle permettra également de présenter la méthode variationnelle classique d'Euler-Lagrange et de montrer en quoi celle-ci est plus générale.

F.1 Cadre d'étude

Soit un système Σ dont le comportement est régi par le modèle d'état suivant :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{F.1}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée.

Supposons alors que le problème d'optimisation consiste à « *trouver le vecteur d'entrée* $\mathbf{u}(t)$ *optimal de sorte que l'indice de performance* (F.2) *soit minimisé, les conditions* (F.3) *initiales et finales sur le temps et l'état soient fixées et le modèle d'état* (F.1) *soit pris comme contrainte* ».

$$V(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt \tag{F.2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = x_0 \\ \mathbf{x}(t_f) = x_f \end{cases} \tag{F.3}$$

Remarque : L'étude est ici restreinte aux indices de performance se présentant sous forme intégrale. Ceci n'est pas limitatif dans le sens où toute partie algébrique d'un tel indice peut être ramenée à une forme intégrale [1] [Pun72].

1. En d'autres termes, tout problème de Mayer (indice de performance sous forme algébrique) peut être transformé en problème de Lagrange (indice de performance sous forme intégrale).

F.2 Le principe du minimum de Pontryagin

Comme nous l'avons évoqué en début d'annexe, plusieurs formulations du principe de PONTRYAGIN peuvent être trouvées dans la littérature. Ici, puisqu'aucune contrainte supplémentaire sur les variables d'entrée n'est prise en compte dans le problème d'optimisation, seules les versions *faibles* du principe de PONTRYAGIN seront présentées dans cette section. Notons toutefois que des formulations plus générales de celui-ci pourront notamment être trouvées dans les références [Nai03, Tré05].

F.2.1 Formulation « automaticienne »

Théorème 23 (*[Pon62, Tré05]*)

***Principe du minimum faible de* Pontryagin**

Si le vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ *est optimal pour l'indice de performance* (F.2) *conformément aux contraintes* (F.1)*, alors il existe une application* $\mathbf{p}$ *absolument continue sur* $[t_0, t_f]$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*, appelée* vecteur de co-état *(ou* vecteur adjoint*), et un réel* $p_0 \geq 0$*, tels que le couple* $(\mathbf{p}, p_0)$ *est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout* $t \in [t_0, t_f]$ *:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), p_0, \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{p}(t)} \tag{F.4}$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), p_0, \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \tag{F.5}$$

$$\frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), p_0, \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{0} \tag{F.6}$$

où H *est le Hamiltonien associé au système* (F.1) *et à l'indice de performance* (F.2) *tel que :*

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), p_0, \mathbf{u}(t)) = p_0 \cdot \mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{p}^T(t) \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Remarque : La convention $p_0 \geq 0$ conduit au principe du minimum. Pour obtenir le principe du maximum (*i.e.* cette fois-ci pour maximiser et non minimiser l'indice de performance), il suffit de changer cette convention en $p_0 \leq 0$ [Tré05].

F.2.2 Formulation « mécanicienne »

Théorème 24 (*[Sch67, Nai03]*)

***Principe du minimum faible de* Pontryagin**

Si le vecteur d'entrée $\mathbf{u}$ *est optimal pour l'indice de performance* (F.2) *conformément aux contraintes* (F.1)*, alors il existe une application* $\boldsymbol{\lambda}$ *absolument continue sur* $[t_0, t_f]$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*, appelée* vecteur de co-état *(ou* vecteur adjoint*), telle que les*

équations suivantes sont vérifiées :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H_p(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)} \tag{F.7}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H_p(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \tag{F.8}$$

$$\frac{\partial H_p(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{0} \tag{F.9}$$

où H_p est la fonction de PONTRYAGIN *associée au système* (F.1) *et à l'indice de performance* (F.2) *telle que :*

$$H_p(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

F.2.3 Comparaison des deux formulations

Les formulations 23 et 24 du principe du minimum de PONTRYAGIN ne diffèrent que dans la construction des Hamiltoniens H et H_p : la fonction de PONTRYAGIN H_p semble, en effet, être un cas particulier du Hamiltonien H où le réel $p_0 = 1$. Aussi, si nous reprenons les conditions d'optimalité (F.4)-(F.6) fournies par la formulation 23, nous constatons qu'en posant $\boldsymbol{\lambda}(t) = \frac{1}{p_0} \cdot \mathbf{p}(t)$, nous retombons exactement sur les conditions d'optimalité (F.7)-(F.9) fournies par la formulation 24 [2] :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial\Big(p_0 \cdot \mathcal{L} + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{f}\Big)}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial\Big(p_0 \cdot \mathcal{L} + p_0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}\Big)}{\partial (p_0 \cdot \boldsymbol{\lambda})} = \frac{p_0}{p_0} \cdot \frac{\partial\Big(\mathcal{L} + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}\Big)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\
\Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H_p}{\partial \boldsymbol{\lambda}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial\Big(p_0 \cdot \mathcal{L} + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{f}\Big)}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial\Big(p_0 \cdot \mathcal{L} + p_0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}\Big)}{\partial \mathbf{x}} = -p_0 \cdot \frac{\partial\Big(\cdot\mathcal{L} + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}\Big)}{\partial \mathbf{x}} \\
\Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -\frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial\Big(p_0 \cdot \mathcal{L} + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{f}\Big)}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial\Big(p_0 \cdot \mathcal{L} + p_0 \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}\Big)}{\partial \mathbf{u}} = p_0 \cdot \frac{\partial\Big(\mathcal{L} + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}\Big)}{\partial \mathbf{u}} \\
\Leftrightarrow \mathbf{0} &= \frac{\partial H_p}{\partial \mathbf{u}}
\end{aligned}$$

En réalité, les deux formulations sont donc bien équivalentes et conduisent aux mêmes solutions optimales : seule l'évolution du vecteur de co-état différera à un facteur d'échelle près. La formulation 24 revenant finalement à diviser tout le système par le réel p_0 est d'ailleurs qualifiée de formulation *normale*. Aussi, par simplicité, nous avons choisi de

2. La variable de temps t est ici volontairement omise pour des questions de clarté des calculs.

retenir pour notre démarche cette formulation ne faisant pas apparaître le réel p_0.

Enfin, cette différence de formulation trouve son origine par l'adoption de points de vue différents pour démontrer le principe de PONTRYAGIN :

- la démonstration de la formulation 23 est basée sur une approche que nous qualifierons automaticienne dans le sens où le problème d'optimisation est résolu en choisissant comme objet d'étude non pas le système (F.1) mais le système augmenté (F.10).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \dot{\mathbf{x}}^0(t) = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \tag{F.10}$$

- la démonstration de la formulation 24 est calquée sur une approche plus mécanicienne dans le sens où elle repose sur le principe de fonction augmentée issue de la méthode d'EULER-LAGRANGE (théorème 25).

F.3 Méthode variationnelle classique

Théorème 25 (*[Pun72, Nai03]*)

Si l'indice de performance (F.2) *est extrémalisé conformément aux contraintes* (F.11) *:*

$$\phi_i\left(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)\right) = 0, \quad i \in \{1, \ldots, q\} \tag{F.11}$$

Alors il existe un vecteur $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^q$*, tel que les* conditions d'EULER-LAGRANGE *suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_a(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)}\right) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial F_a(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_a(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)}\right) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial F_a(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_a(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)}\right) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\lambda}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & \ldots & \lambda_q(t) \end{pmatrix}^T$ *est le vecteur constitué des* multiplicateurs de LAGRANGE *et* F_a*, appelée* fonction augmentée*, est définie de sorte que :*

$$F_a(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \sum_{i=0}^{q} \left(\lambda_i(t) \cdot \phi_i\left(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)\right)\right)$$

F.4 Brève comparaison entre le principe de Pontryagin et la méthode variationnelle classique

Si la méthode de PONTRYAGIN peut paraître plus simple en termes de mise en œuvre, la méthode variationnelle classique est beaucoup plus générale. Contrairement au principe

de Pontryagin, elle permet, entre autres, de prendre pour contraintes des systèmes d'équations implicites d'ordre quelconque (et donc pas nécessairement explicites et du premier ordre comme l'impose le principe de Pontryagin).

Annexe G

Formulation port-hamiltonienne d'un modèle bond graph

Afin de mieux comprendre le cadre théorique utilisé pour démontrer la procédure bond graph d'optimisation et ses extensions (chapitre 4), cette annexe vise à présenter quelques éléments de base sur la formulation port-hamiltonienne d'un modèle bond graph. Si cette annexe ne reprend que des extraits de travaux (notamment [van06] et [Gol02]), celle-ci pourra être avantageusement complétée par la lecture de références beaucoup plus complètes comme celles de VAN DER SCHAFT et MASCHKE [Mas92b, Mas92a, van04, Mas05, van06], ou encore de GOLO [Gol01, Gol02].

G.1 Description

La formulation port-hamiltonienne d'un modèle bond graph peut être vue comme une mise en forme particulière du modèle d'état qu'il représente. Par exemple, dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps, le modèle d'état s'écrit généralement sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur d'état constitué de variables d'énergie et $\mathbf{u}$ et $\mathbf{y}$ sont respectivement les vecteurs d'entrée et de sortie constitués de variables conjuguées de puissance.
À la différence de cette représentation classique, la formulation port-hamiltonienne décompose quant à elle chacune des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ en plusieurs matrices de sorte que :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{J} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \left[{\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[{\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \mathbf{u} \end{cases}$$

où chacune de ces matrices est caractérisée par un type de phénomène ou la structure de jonction dans le modèle bond graph (*e.g.* les matrices $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}$, et $\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}$ sont caractérisées par la structure de jonction tandis que la matrice $\mathbf{R}$ correspond aux phénomènes dissipatifs).
Cette mise en forme permet notamment de mieux identifier, au niveau mathématique, les contributions de chaque type de phénomène sur l'évolution comportementale du système.

G.2 Bref historique des systèmes port-hamiltoniens

Comme l'explique VAN DER SCHAFT dans [van06], les systèmes port-hamiltoniens trouvent leur origine dans l'approche Hamiltonienne classique de la mécanique analytique. Basée sur le *principe de moindre action*, celle-ci permet, grâce aux équations d'EULER-LAGRANGE et à la transformée de LEGENDRE, d'écrire les équations de mouvement dites d'HAMILTON. Pour un système mécanique, ces équations de mouvement sont données sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{p},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{p},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f_g} \end{cases}$$

où :

- l'Hamiltonien $H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ représente l'énergie totale stockée dans le système ;
- $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_k \end{pmatrix}^T$ correspond aux coordonnées généralisées des k degrés de liberté du système ;
- $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix}^T$ est le vecteur des moments généralisés ;
- $\mathbf{f_g} = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_m \end{pmatrix}^T$ correspond au vecteur des forces généralisées.

Ainsi, le bilan d'énergie (G.1) permet de retrouver le *principe de conservation de l'énergie* : l'énergie du système augmente en quantité égale au travail fourni.

$$\frac{dH(\mathbf{p},\mathbf{q})}{dt} = \frac{\partial^T H(\mathbf{p},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^T H(\mathbf{p},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial^T H(\mathbf{p},\mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{f} = \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{f} \tag{G.1}$$

Dès lors, en définissant la sortie du système comme étant le vecteur $\mathbf{e}$ de vitesses généralisées ($\mathbf{e} = \dot{\mathbf{q}}$), le modèle d'état de tels systèmes peut se mettre plus généralement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{e} = \mathbf{B}^T(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \end{cases} \tag{G.2}$$

Initialement, les systèmes port-hamiltoniens ont été définis comme une généralisation de cette formulation (G.2) où le modèle d'état du système serait de la forme [van06] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{e} = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases}$$

où :

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ correspond aux coordonnées généralisées du système ;
- $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, appelée matrice de structure, est une matrice anti-symétrique [1].

Ensuite, la prise en compte de phénomènes dissipatifs et une formulation géométrique du problème d'interconnection énergétique de sous-systèmes ont permis de prendre en considération des systèmes plus généraux dont le comportement était également régi par des équations algébriques. Grâce notamment à la notion de *structure de* DIRAC, le concept

1. *i.e.* $\mathbf{J}^T(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}(\mathbf{x})$.

de système port-hamiltonien a ainsi été élargi à celui de système port-hamiltonien implicite [Gol01, Gol02, van06].

Remarque : Seule la notion de système port-hamiltonien non implicite est utilisée dans ce mémoire.

G.3 Formulation port-hamiltonienne d'un modèle - bond graph

D'un point de vue bond graph, un système peut être vu comme une interconnexion de phénomènes de stockage (*e.g.* éléments $\mathbb{I}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{IC}$) et de dissipation d'énergie (*e.g.* éléments $\mathbb{R}$), qui est régie par des équations de bilan (*e.g.* équations liées aux jonctions 0 et 1) et de conservation de puissance (*e.g.* équations liées aux éléments $\mathbb{TF}$ et $\mathbb{GY}$). En reformulant cette interconnexion sous une forme géométrique et en prenant comme Hamiltonien l'énergie totale stockée dans le système, Maschke *et al.* [Mas92b] puis Golo *et al.* [Gol01, Gol02] ont démontré qu'un modèle bond graph correspondait à un système port-hamiltonien et, par conséquent, que son modèle d'état pouvait être mis sous une forme port-hamiltonienne. Cette section est divisée en deux parties. La première partie présente la formulation port-hamiltonienne très générale d'un modèle bond graph tandis que la seconde s'attarde, elle, sur une version simplifiée, souvent étudiée dans la littérature [Mas92a, Ort99, Ort02, van06].

G.3.1 Formulation générale

D'après Golo [Gol02], le modèle d'état d'un modèle bond graph sans source dépendante [2] peut généralement [3] être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{is}} = \mathbf{G}_{\mathbf{is},\mathbf{is}} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{is}}} + \mathbf{G}_{\mathbf{is},\mathbf{ds}} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{ds}} + \mathbf{G}_{\mathbf{is},\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{R}} + \mathbf{G}_{\mathbf{is},\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_{\mathbf{is},\mathbf{iv}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{iv}} \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{ds}}} = \mathbf{G}_{\mathbf{ds},\mathbf{is}} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{is}}} + \mathbf{G}_{\mathbf{ds},\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_{\mathbf{ds},\mathbf{iv}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{iv}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{R}} = \mathbf{G}_{\mathbf{R},\mathbf{is}} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{is}}} + \mathbf{G}_{\mathbf{R},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{R}} + \mathbf{G}_{\mathbf{R},\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_{\mathbf{R},\mathbf{iv}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{iv}} \\ \mathbf{0} = \mathbf{\Omega}\left(\mathbf{y}_{\mathbf{R}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}\right) \\ \mathbf{y}_{\mathbf{u}} = \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{is}} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{is}}} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{ds}} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{ds}} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{R}} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{iv}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{iv}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{iv}} = \mathbf{G}_{\mathbf{iv},\mathbf{is}} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{\mathbf{is}}} + \mathbf{G}_{\mathbf{iv},\mathbf{ds}} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{ds}} + \mathbf{G}_{\mathbf{iv},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{R}} + \mathbf{G}_{\mathbf{iv},\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_{\mathbf{iv},\mathbf{iv}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{iv}} \end{cases} \tag{G.3}$$

où :

2. Des hypothèses de modélisation peuvent conduire à des situations physiques impossibles (*e.g.* deux sources de tension mises en parallèle). Ce type de problème fait référence, selon la terminologie de Golo, à la présence de *sources dépendantes*. L'hypothèse d'absence de telles sources n'est donc pas trop contraignante : quelque part, elle vérifie simplement que le modèle bond graph considéré correspond bien à un système qui a un sens technologique.

3. Cette affirmation est à moduler car Golo précise que le modèle bond graph en question doit être *standard* et *régulier*. Si cette classe de modèle est relativement générale, le lecteur intéressé est invité à lire la thèse de Golo [Gol02] pour de plus amples détails sur ces notions (notions qui ne peuvent être ici développées par souci de concision).

- $\mathbf{x}$ est le vecteur d'état constitué de variables d'énergie tel que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_{is}}^T & \mathbf{x_{ds}}^T \end{pmatrix}^T$ avec $\mathbf{x_{is}}$ (resp. $\mathbf{x_{ds}}$) le vecteur des variables d'état indépendantes (resp. dépendantes) ;
- $\mathbf{u_u}$ est le vecteur d'entrée ;
- $\mathbf{y_u}$ est le vecteur de sortie, constitué des variables de puissance conjuguées au vecteur d'entrée $\mathbf{u}$;
- $\mathbf{u_R}$ (resp. $\mathbf{y_R}$) est le vecteur d'entrée (resp. de sortie) associé aux phénomènes dissipatifs ;
- $\mathbf{u_{iv}}$ (resp. $\mathbf{y_{iv}}$) est le vecteur d'entrée (resp. de sortie) associé aux éléments bond graph FC et EC [4] ;
- H est l'Hamiltonien du système, il représente la quantité totale d'énergie stockée ;
- $\mathbf{\Omega}$ caractérise le comportement des phénomènes dissipatifs présents dans le système ;
- $\forall(_{i,j}) \in \{_{is,ds}, _{R}, _{u}, _{iv}\}$, les matrices $\mathbf{G_{i,j}}$ sont des matrices associées à la structure de jonction du modèle bond graph [5].

Pour ce type de formulation, il peut être également montré que [Gol02] :
- par définition des éléments FC et EC, $\mathbf{u_{iv}} = \mathbf{0}$;
- $\forall(_{i,j}) \in \{_{is,ds}, _{R}, _{u}, _{iv}\}$, $\mathbf{G_{i,j}} = -\mathbf{G_{j,i}}^T$.

Une procédure permettant de déduire d'un modèle bond graph le modèle d'état correspondant directement sous la formulation port-hamiltonienne (G.3) peut être trouvée dans les références [Gol02, Don09].

G.3.2 Formulation « simplifiée »

Lorsque le modèle bond graph ne présente aucune contrainte cinématique ou dynamique et ne présente aucune dépendance au niveau des variables d'état [6], la formulation précédente se simplifie grandement. En l'occurrence, dans le cas où les phénomènes dissipatifs sont linéaires ($\mathbf{u_R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{y_R}$ avec $\mathbf{R}$ la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs telle que $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ [7]), Golo montre que la formulation port-hamiltonienne se

4. Les éléments bond graph FC et EC correspondent respectivement à des contraintes idéales en flux ($f = 0$) et en effort ($e = 0$) [Gol02]. Ils permettent notamment de modéliser certaines contraintes cinématiques ou dynamiques et de faire apparaître de manière explicite les multiplicateurs de Lagrange.

5. Les indices $_{is}$, $_{ds}$, $_{R}$, $_{u}$ et $_{iv}$ sont issus de la terminologie de Golo et correspondent respectivement aux termes *independent states*, *dependent states*, *resistive*, *input* et *internal variables* [Gol02].

6. ou tout au moins lorsque ces contraintes et dépendances ont pu être résolues

7. Lorsque la matrice $\mathbf{R}$ est symétrique, nous parlons alors de loi caractéristique sous une forme d'Onsager par analogie avec les *relations de réciprocité* que ce dernier a établies pour des phénomènes thermodynamiques irréversibles. Cependant, si cette propriété est souvent vérifiée, elle ne l'est pas de manière systématique : les éléments $\mathbb{R}$ multiports présentant des ports à causalité mixte (*i.e.* certains ports sont en causalité résistance tandis que d'autres sont en causalité conductance) et/ou intégrant le comportement d'un gyrateur ne pourront pas être mis sous la forme d'Onsager mais sous une forme qualifiée cette fois-ci de Casimir [Kar75]. Notons toutefois que, lors de la construction de modèles bond graph optimisants, nous n'avons pas tenu compte du caractère symétrique ou non des matrices caractéristiques des phénomènes dissipatifs afin de rester le plus général possible. Dans ce cas particulier, les formes des lois caractéristiques des éléments $\mathbb{R}$ de couplage dont notamment l'expression de la matrice $\mathbf{T}$ pourront être simplifiées (annexe H.1).

ramène à la forme suivante [Gol02] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} & = \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \mathbf{u}_\mathbf{u} \\ \mathbf{y}_\mathbf{R} & = -{\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}}^T \cdot \mathbf{u}_\mathbf{u} \\ \mathbf{y}_\mathbf{u} & = \left[-{\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}}^T - \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left[-{\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}}^T - \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \mathbf{u}_\mathbf{u} \end{cases} \tag{G.4}$$

où $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathbf{is}$ et l'indice $_{is}$ a été remplacé par l'indice $_x$.

Selon les conventions de signe adoptées pour les vecteurs de sortie $\mathbf{y}_\mathbf{R}$ et $\mathbf{y}$, cette formulation peut également prendre la forme suivante [8] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} & = \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \mathbf{u}_\mathbf{u} \\ \mathbf{y}_\mathbf{R} & = {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}}^T \cdot \mathbf{u}_\mathbf{u} \\ \mathbf{y}_\mathbf{u} & = \left[{\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left[{\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}}^T + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \mathbf{u}_\mathbf{u} \end{cases}$$

Cette dernière formulation ainsi qu'une version encore plus simplifiée où les variables de sortie sont supposées ne pas dépendre explicitement des variables d'entrée sont utilisées dans ce mémoire pour démontrer la procédure bond graph d'optimisation ainsi que ses extensions (voir chapitre 4 et annexe H.2).

Remarques :

- Les matrices $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}$ et $\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{u}}$ sont parfois respectivement notées $\mathbf{J}_\mathbf{x}$ (voire $\mathbf{J}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté) et $\mathbf{J}_\mathbf{u}$.
- Dans le cas de systèmes exclusivement linéaires et invariants dans le temps [Mar08] :

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$$

  où $\mathbf{H}$ est la matrice hessienne de $H(\mathbf{x})$, *i.e.* $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 H(\mathbf{x})}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix}$ avec, par notation, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$.
- Selon les non linéarités de la structure de jonction du modèle bond graph considéré, les matrices $\mathbf{G}_\mathbf{i,j}$ et $\mathbf{R}$ pourront dépendre des vecteurs $\mathbf{x}_\mathbf{is}$ et $\mathbf{u}_\mathbf{u}$ (voire des vecteurs $\mathbf{x}_\mathbf{ds}$ et $\mathbf{u}_\mathbf{iv}$ dans le cas le plus général).

G.4 Exemple

Afin d'illustrer la formulation port-hamiltonienne d'un modèle bond graph, reprenons l'exemple d'un moteur à courant continu (Fig. G.1) et son modèle bond graph associé (Fig. G.2).

8. Pour déterminer les formulations (G.3) et (G.4), Golo a notamment pris comme convention que chaque source (d'effort ou de flux) est reliée au reste du modèle par un lien bond graph entrant (*i.e.* la demi-flèche orientée vers la source) [Gol02].

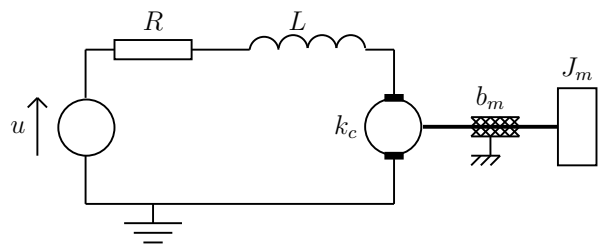


FIGURE G.1 – Schéma technologique d'un moteur à courant continu

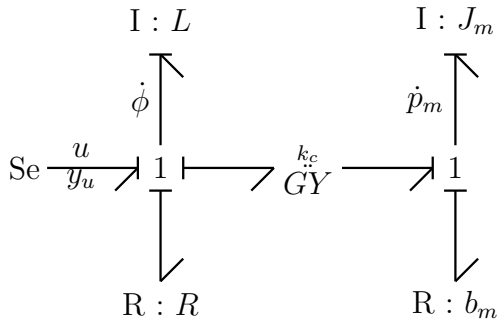


FIGURE G.2 – Modèle bond graph causal d'un moteur à courant continu

Au chapitre 2 section 2.5.3, nous avons vu que les équations d'état correspondantes étaient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_c}{J_m} \\ \frac{k_c}{L} & -\frac{b_m}{J_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ p_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \end{pmatrix}$$

où :

- ϕ est le flux magnétique de la bobine et p_m correspond au moment cinétique de l'arbre de sortie du moteur ;
- u est la commande en tension du moteur.

De plus, en notant y_u la variable de puissance conjuguée à l'entrée u, une analyse causale du modèle bond graph nous permet de conclure que :

$$\begin{pmatrix} y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ p_m \end{pmatrix}$$

Puisque la matrice caractéristique des phénomènes dissipatifs peut s'écrire ici :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & b_m \end{pmatrix}$$

et que l'énergie totale stockée dans le système est égale à :

$$H(\phi, p_m) = \frac{\phi^2}{2L} + \frac{p_m^2}{2J_m}$$

Nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H(\phi,p_m)}{\partial \phi^2} & \frac{\partial^2 H(\phi,p_m)}{\partial \phi \partial p_m} \\ \frac{\partial^2 H(\phi,p_m)}{\partial p_m \partial \phi} & \frac{\partial^2 H(\phi,p_m)}{\partial {p_m}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, le modèle d'état associé au modèle bond graph de la figure G.2 peut s'exprimer sous la forme port-hamiltonienne suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p}_m \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & -k_c \\ k_c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & b_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ p_m \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ p_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Annexe H

Démonstrations relatives à la procédure bond graph d'optimisation

Cette annexe a pour objectif de donner quelques éléments complémentaires utiles à la justification théorique de la procédure bond graph d'optimisation (chapitre 4). Cette annexe traite notamment :

- du concept de dualisation partielle, concept utilisé afin de simplifier nos démonstrations en ramenant nos études au cas où tous les éléments $\mathbb{R}$ sont en causalité résistance (section H.1) ;
- de l'extension de la procédure bond graph d'optimisation dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps lorsque seule une partie des variables d'entrée est à déterminer par optimisation (section H.2).

H.1 Dualisation partielle

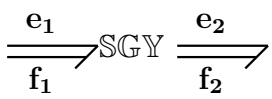


FIGURE H.1 – Représentation bond graph d'un gyrateur simplectique

Par souci de simplification, nos démonstrations sur la traduction bond graph d'un problème d'optimisation reposent sur le concept de *dualisation*, concept introduit par BREEDVELD [Bre85b]. Dans son principe, cette dualisation est réalisée par l'intermédiaire d'un élément *gyrateur simplectique* ou *gyrateur unité* (Fig. H.1) et permet d'inverser la nature des variables de puissance grâce à la loi caractéristique suivante :

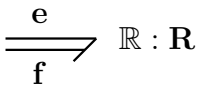
$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité [1].

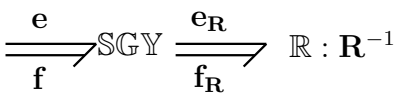
1. De ce fait, une propriété importante est notamment que la mise en série de deux éléments $\mathbb{SGY}$ multiports est équivalente à un lien bond graph multiport.

En l'occurrence, ce principe de dualisation nous a permis de ne considérer dans nos raisonnements qu'un seul type de causalité pour les éléments dissipatifs. Reprenons le raisonnement de l'article [Mar08] et voyons ici comment le cas général peut être traité (*i.e.* présence d'éléments $\mathbb{R}$ en causalité résistance et en causalité conductance) et notamment ce que deviennent alors les matrices $-\mathbf{R_R}^T$, $-\mathbf{R_{opt}}^T$ et $\mathbf{R_{opt}}^T$ apparaissant dans le modèle bond graph optimisant.

H.1.1 Dualisation totale d'éléments $\mathbb{R}$ multiports



(a) Élément $\mathbb{R}$ multiport original



(b) Élément $\mathbb{R}$ multiport dualisé

FIGURE H.2 – Dualisation totale d'un élément $\mathbb{R}$ multiport

Afin de mieux comprendre la suite des raisonnements, expliquons dans un premier temps la dualisation totale d'un élément $\mathbb{R} : \mathbf{R}$ multiport.

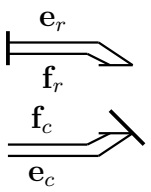
Soit un élément $\mathbb{R} : \mathbf{R}$ multiport quelconque (Fig. H.2(a)). La dualisation de la totalité de ses ports par l'ajout d'un élément $\mathbb{SGY}$ permet alors de le rendre équivalent au modèle bond graph de la figure H.2(b). Cette équivalence se démontre grâce aux développements suivants (en supposant $\mathbf{R}$ inversible) :

$\mathbf{e} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}$	selon la loi caractéristique de l'élément $\mathbb{R}$ original
$\Leftrightarrow \mathbf{f}_R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_R = \mathbf{0}$	selon la loi caractéristique de l'élément $\mathbb{SGY}$
$\Leftrightarrow \mathbf{e}_R - \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{f}_R = \mathbf{0}$	ce qui donne la loi caractéristique de l'élément $\mathbb{R}$ dualisé

H.1.2 Dualisation partielle d'éléments $\mathbb{R}$ multiports

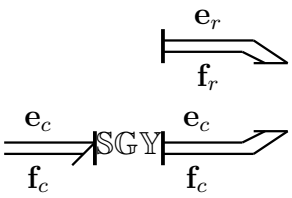
Dans nos démonstrations, le concept de dualisation est utilisé sous une forme partielle et dans un contexte causal. Celui-ci nous permet notamment de ne traiter qu'un seul type de causalité (en l'occurrence une causalité résistance) pour les éléments dissipatifs $\mathbb{R}$. Si nous avons vu à la section précédente la dualisation totale de tels éléments, étudions ici leur dualisation partielle.

Pour cela, considérons un élément $\mathbb{R} : \mathbf{R^g}$ multiport (Fig. H.3(a)) supposé représenter la totalité des phénomènes dissipatifs d'un modèle bond graph donné (modèle quelconque et tout à fait général). Sans perdre en généralité, nous pouvons ordonner les ports de cet



$$\mathbb{R} : \mathbf{R^g} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{rr} & \mathbf{R}_{rc} \\ \mathbf{R}_{cr} & \mathbf{R}_{cc} \end{pmatrix}$$

(a) Élément $\mathbb{R}$ multiport original



$$\mathbb{R} : \mathbf{R^g_d} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{rr} - \mathbf{R}_{rc} \cdot \mathbf{R}_{cc}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{cr} & \mathbf{R}_{rc} \cdot \mathbf{R}_{cc}^{-1} \\ -\mathbf{R}_{cc}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{cr} & \mathbf{R}_{cc}^{-1} \end{pmatrix}$$

(b) Élément $\mathbb{R}$ multiport partiellement dualisé

FIGURE H.3 – Dualisation partielle d'un élément $\mathbb{R}$ multiport

élément $\mathbb{R} : \mathbf{R^g}$ « global » de sorte que les premiers ports correspondent aux phénomènes dissipatifs en causalité résistance et les derniers ports à ceux en causalité conductance, c'est-à-dire de sorte que sa matrice caractéristique soit égale à :

$$\mathbf{R^g} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{rr} & \mathbf{R}_{rc} \\ \mathbf{R}_{cr} & \mathbf{R}_{cc} \end{pmatrix}$$

où les indices $_r$ et $_c$ correspondent respectivement à une causalité résistance et conductance lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale.

L'introduction d'un élément $\mathbb{SGY}$ au modèle H.3(a) telle qu'elle est réalisée à la figure H.3(b), nous permet alors de dualiser uniquement les ports en causalité conductance. Aussi, l'équivalence entre les matrices caractéristiques de l'élément $\mathbb{R} : \mathbf{R^g}$ original et de l'élément $\mathbb{R} : \mathbf{R^g_d}$ dualisé est montrée dans le raisonnement suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r - \mathbf{R}_{rr} \cdot \mathbf{f}_r - \mathbf{R}_{rc} \cdot \mathbf{f}_c = \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_c - \mathbf{R}_{cr} \cdot \mathbf{f}_r - \mathbf{R}_{cc} \cdot \mathbf{f}_c = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{selon la loi caractéristique de l'élément } \mathbb{R} : \mathbf{R^g} \text{ original}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_r = (\mathbf{R}_{rr} - \mathbf{R}_{rc} \cdot \mathbf{R}_{cc}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{cr}) \cdot \mathbf{f}_r + \mathbf{R}_{rc} \cdot \mathbf{R}_{cc}^{-1} \cdot \mathbf{e}_c \\ \mathbf{f}_c = -\mathbf{R}_{cc}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{cr} \cdot \mathbf{f}_r + \mathbf{R}_{cc}^{-1} \cdot \mathbf{e}_c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{f}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{rr} - \mathbf{R}_{rc} \cdot \mathbf{R}_{cc}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{cr} & \mathbf{R}_{rc} \cdot \mathbf{R}_{cc}^{-1} \\ -\mathbf{R}_{cc}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{cr} & \mathbf{R}_{cc}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{e}_c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{e}_{R^g_d} = \mathbf{R^g_d} \cdot \mathbf{f}_{R^g_d} \qquad \text{ce qui donne la loi de l'élément } \mathbb{R} : \mathbf{R^g_d} \text{ dualisé}$$

Suite à cette dualisation, nous obtenons ainsi un nouvel élément $\mathbb{R}$ multiport, équivalent à l'élément dissipatif original, mais ne présentant cette fois-ci que des ports en causalité résistance.

Remarque : La composition de deux dualisations partielles permet de revenir sur une causalité originelle. Pour revenir à la causalité originelle d'un élément, il suffit donc de procéder à nouveau à une dualisation partielle sur les mêmes ports.

H.1.3 Application du principe de dualisation partielle à la construction de modèle bond graph optimisant

Appliquons maintenant le principe de dualisation partielle à la construction de modèle bond graph optimisant.

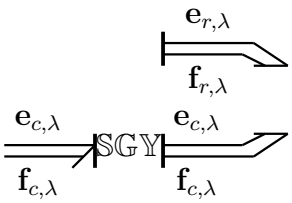
Soit un problème d'optimisation du type (4.1)-(4.5) (page 164) formulé sur un modèle bond graph quelconque. Sans perdre en généralité, les phénomènes dissipatifs présents au sein de ce modèle peuvent alors être représentés par :

- un élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt}}$ multiport modélisant tous les phénomènes dissipatifs du modèle impliqués dans le critère à minimiser ;
- un élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R}}$ multiport modélisant tous les phénomènes dissipatifs du modèle qui ne sont pas impliqués dans le critère à minimiser.

Dans le cas général, plusieurs ports de ces éléments $\mathbb{R}$ peuvent être en causalité résistance et d'autres en causalité conductance.

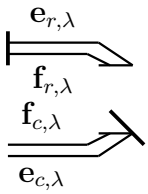
Nous avons vu à la section 4.4.2 (page 169) que, dans le cas où tous les ports des éléments $\mathbb{R}$ étaient en causalité résistance, la procédure bond graph d'optimisation impliquait l'apparition des matrices $-\mathbf{R_R}^T$, $-\mathbf{R_{opt}}^T$ et $\mathbf{R_{opt}}^T$ dans le modèle bond graph optimisant. Voyons ici quelles matrices apparaissent dans le cas où les ports de ces éléments sont en causalité résistance et conductance (cas « global »).

Que devient la matrice $-\mathbf{R_R}^T$ dans le cas « global » ?



$$\mathbb{R} : -\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}}\right)^T = \begin{pmatrix} -\left(\mathbf{R}_{rr} - \mathbf{R}_{rc}\cdot\mathbf{R}_{cc}^{-1}\cdot\mathbf{R}_{cr}\right)^T & \left(\mathbf{R}_{cc}^{-1}\cdot\mathbf{R}_{cr}\right)^T \\ -\left(\mathbf{R}_{rc}\cdot\mathbf{R}_{cc}^{-1}\right)^T & -\left(\mathbf{R}_{cc}^{-1}\right)^T \end{pmatrix}$$

(a) Élément $\mathbb{R} : -\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}}\right)^T$ apparaissant dans le modèle bond graph optimisant



$$\mathbb{R} : -\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R}}\right)^T = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_{rr}^T & -\mathbf{R}_{cr}^T \\ -\mathbf{R}_{rc}^T & -\mathbf{R}_{cc}^T \end{pmatrix}$$

(b) Élément $\mathbb{R} : -\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}}\right)^T$ partiellement dualisé

FIGURE H.4 – Dualisation partielle de l'élément $\mathbb{R} : -\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}}\right)^T$ multiport apparaissant dans le modèle bond graph optimisant

Considérons l'élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R}}$. En suivant les notations précédentes, sa matrice caractéristique $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R}}$ peut alors être décomposée de sorte que : $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{rr} & \mathbf{R}_{rc} \\ \mathbf{R}_{cr} & \mathbf{R}_{cc} \end{pmatrix}$. Confor-

mément à ce que nous avons vu lors des sections précédentes, une dualisation partielle de ses ports en causalité conductance conduit alors à l'obtention d'un élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}}$ de sorte que : $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{rr} - \mathbf{R}_{rc}\mathbf{R}_{cc}^{-1}\mathbf{R}_{cr} & \mathbf{R}_{rc}\mathbf{R}_{cc}^{-1} \\ -\mathbf{R}_{cc}^{-1}\mathbf{R}_{cr} & \mathbf{R}_{cc}^{-1} \end{pmatrix}$. Aussi, la totalité des ports de ce nouvel élément est en causalité résistance. La procédure d'optimisation telle qu'elle a été présentée jusqu'ici s'applique donc et nous pouvons affirmer qu'à cet élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}}$ correspondra un élément $\mathbb{R}$: $-\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}}\right)^T$ dans le modèle bond graph optimisant avec : $-\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}}\right)^T = \begin{pmatrix} -\left(\mathbf{R}_{rr} - \mathbf{R}_{rc}\mathbf{R}_{cc}^{-1}\mathbf{R}_{cr}\right)^T & \left(\mathbf{R}_{cc}^{-1}\mathbf{R}_{cr}\right)^T \\ -\left(\mathbf{R}_{rc}\mathbf{R}_{cc}^{-1}\right)^T & -\left(\mathbf{R}_{cc}^{-1}\right)^T \end{pmatrix}$.

Cependant, en procédant à une dualisation partielle de cet élément $\mathbb{R}$: $-\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R},\mathbf{d}}\right)^T$ (Fig. H.4(a) et H.4(b)), nous obtenons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \mathbf{e}_{r,\lambda} = \left(-\mathbf{R}_{rr}^T + \mathbf{R}_{cr}^T\left(\mathbf{R}_{cc}^{-1}\right)^T\mathbf{R}_{rc}^T\right)\cdot\mathbf{f}_{r,\lambda} + \mathbf{R}_{cr}^T\left(\mathbf{R}_{cc}^{-1}\right)^T\cdot\mathbf{e}_{c,\lambda} \\ \mathbf{f}_{c,\lambda} = -\left(\mathbf{R}_{cc}^{-1}\right)^T\mathbf{R}_{rc}^T\cdot\mathbf{f}_{r,\lambda} - \left(\mathbf{R}_{cc}^{-1}\right)^T\cdot\mathbf{e}_{c,\lambda} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} \mathbf{e}_{r,\lambda} = -\mathbf{R}_{rr}^T\cdot\mathbf{f}_{r,\lambda} - \mathbf{R}_{cr}^T\left(\mathbf{R}_{cc}^{-1}\right)^T\mathbf{R}_{cc}^T\cdot\mathbf{f}_{c,\lambda} \\ \mathbf{e}_{c,\lambda} = -\mathbf{R}_{cc}^T\cdot\mathbf{f}_{c,\lambda} - \mathbf{R}_{rc}^T\cdot\mathbf{f}_{r,\lambda} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} \mathbf{e}_{r,\lambda} = -\mathbf{R}_{rr}^T\cdot\mathbf{f}_{r,\lambda} - \mathbf{R}_{cr}^T\cdot\mathbf{f}_{c,\lambda} \\ \mathbf{e}_{c,\lambda} = -\mathbf{R}_{rc}^T\cdot\mathbf{f}_{r,\lambda} - \mathbf{R}_{cc}^T\cdot\mathbf{f}_{c,\lambda} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r,\lambda} \\ \mathbf{e}_{c,\lambda} \end{pmatrix} = -\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R}}\right)^T\cdot\begin{pmatrix} \mathbf{f}_{r,\lambda} \\ \mathbf{f}_{c,\lambda} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dans le cas général, la présence d'un élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R}}$ dans le modèle bond graph initial implique donc la construction d'un élément $\mathbb{R}$: $-\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R}}\right)^T$ dans le modèle bond graph optimisant. La procédure bond graph d'optimisation reste donc inchangée à ce niveau dans le cas général (cas où les éléments dissipatifs peuvent être en causalité résistance ou conductance).

Que devient la matrice $-\left(\mathbf{R}_{\mathbf{opt}}\right)^T$ dans le cas « global » ?

Dans le cas où tous les ports des éléments $\mathbb{R}$ sont en causalité résistance, la présence d'un élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}_{\mathbf{opt}}$ dans le modèle bond graph initial implique la construction d'un élément $\mathbb{R}$: $-\left(\mathbf{R}_{\mathbf{opt}}\right)^T$ dans le modèle bond graph optimisant correspondant.

Dans le cas général (*i.e.* présence d'éléments dissipatifs en causalité résistance ou conductance), en appliquant un raisonnement strictement identique à celui de la section précédente (il suffit de remplacer la matrice $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{R}}$ par la matrice $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt}}$), nous pouvons conclure que la procédure reste valable et que la présence d'un élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt}}$ dans le modèle bond graph initial engendre la construction d'un élément $\mathbb{R}$: $-\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt}}\right)^T$ dans le modèle bond graph optimisant.

Que devient la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{opt}}{}^T$ dans le cas « global » ?

Enfin, dans le cas où tous les ports des éléments $\mathbb{R}$ sont en causalité résistance, la procédure bond graph d'optimisation fait également correspondre à la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{opt}}$ du

modèle bond graph initial une matrice ${\mathbf{R}_{\mathbf{opt}}}^T$ dans le modèle bond graph optimisant correspondant (cette matrice apparaît notamment au niveau du bloc extradiagonal inférieur de la matrice caractéristique de l'élément $\mathbb{R}$ de couplage entre le modèle bond graph initial et le modèle bond graph optimisant).

Considérons l'élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt}}$. En suivant les notations précédentes, sa matrice caractéristique peut alors être décomposée de sorte que : $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rr}} & \mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}} & \mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}} \end{pmatrix}$. Conformément à la section H.1.2, une dualisation partielle de ses ports en causalité conductance conduit à l'obtention d'un élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt},\mathbf{d}}$ de sorte que : $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt},\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rr}} - \mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}}{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}}\right) & \mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}}{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1} \\ -{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}} & {\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1} \end{pmatrix}$. Aussi, la totalité des ports de ce nouvel élément est en causalité résistance. La procédure d'optimisation telle qu'elle a été présentée jusqu'ici s'applique donc et nous pouvons affirmer qu'à cette matrice $\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt},\mathbf{d}}$ correspondra une matrice $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt},\mathbf{d}}\right)^T$ dans le modèle bond graph optimisant avec : $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt},\mathbf{d}}\right)^T = \begin{pmatrix} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rr}} - \mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}}{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}}\right)^T & -\left({\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}}\right)^T \\ \left(\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}}{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\right)^T & \left({\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\right)^T \end{pmatrix}$.

En procédant à une dualisation partielle de cet élément $\mathbb{R}$: $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{g}}_{\mathbf{opt},\mathbf{d}}\right)^T$, nous obtenons alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \mathbf{e}_{r,\lambda} = \left(\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rr}} - \mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}}{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}}\right)^T \cdot \mathbf{f}_r - \left({\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}}\right)^T \cdot \mathbf{e}_{c,\lambda} \\ \mathbf{f}_c = \left(\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}}{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{f}_r + \left({\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{e}_{c,\lambda} \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \mathbf{e}_{r,\lambda} = \left({\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rr}}}^T - {\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}}}^T \left({\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\right)^T {\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}}}^T\right) \cdot \mathbf{f}_r - {\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}}}^T \left({\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{e}_{c,\lambda} \\ \mathbf{e}_{c,\lambda} = -{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^T \left(\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}}{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{f}_r + {\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^T \cdot \mathbf{f}_c \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r,\lambda} \\ \mathbf{e}_{c,\lambda} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{f}_c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

en posant $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} {\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rr}}}^T & -{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cr}}}^T \\ -{\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{rc}}}^T & {\mathbf{R}_{\mathbf{opt}_{cc}}}^T \end{pmatrix}$.

Dans le cas général, il suffira donc de faire apparaître la matrice $\mathbf{T}$ dans le modèle bond graph optimisant à la place de la matrice ${\mathbf{R}_{\mathbf{opt}}}^T$.

Finalement, en récapitulant les résultats des trois dernières sous-sections, pour étendre la procédure bond graph d'optimisation au cas où les éléments dissipatifs peuvent être en causalité résistance ou conductance, il suffit simplement de remplacer la sous-matrice $\frac{1}{2}\left[\mathbf{R}_{\mathbf{opt}} + {\mathbf{R}_{\mathbf{opt}}}^T\right]$ par la sous-matrice $\frac{1}{2}\left[\mathbf{R}_{\mathbf{opt}} + \mathbf{T}\right]$ lors de la construction du modèle bond graph augmenté.

H.2 Optimisation d'une seule partie des entrées

Maintenant que le principe de dualisation partielle a été expliqué et nous a permis de prouver que nos démonstrations pouvaient se restreindre à l'étude de modèles où les éléments dissipatifs sont tous en causalité résistance, démontrons ici l'extension de la

procédure bond graph d'optimisation au cas où seule une partie des variables d'entrée est à déterminer par optimisation (procédure 6, page 204). Cette démonstration nous permettra également d'étendre de manière implicite la procédure initiale 4 (procédure où toutes les variables d'entrée sont à déterminer par optimisation, page 173) à une classe plus générale de systèmes linéaires et invariants dans le temps : celle où les sorties peuvent dépendre explicitement des variables d'entrée.

H.2.1 Rappel de la procédure

Avant d'en démontrer ses fondements théoriques, rappelons ici l'extension de la procédure bond graph d'optimisation au cas où seule une partie des variables d'entrée d'un système linéaire et invariant dans le temps est à déterminer par optimisation (procédure 6, page 204).

Procédure 14

Construction de modèles bond graph optimisants dans le cas linéaire

Pour tout problème d'optimisation formulé sur un système linéaire et invariant dans le temps et consistant à déterminer une partie $\mathbf{u_{opt}}$ *du vecteur d'entrée* $\mathbf{u}$ *de sorte que l'indice de performance* (4.42) *soit minimisé, que les équations d'état soient prises comme contraintes et que des conditions initiales et finales sur le temps et l'état soient fixées, les conditions d'optimalité issues du principe de* PONTRYAGIN *peuvent être obtenues de manière graphique par l'exploitation causale d'un modèle bond graph augmenté, construit en suivant les étapes suivantes :*

Étape 1 : Duplication. *Dupliquer le modèle bond graph initial, c'est-à-dire le modèle bond graph correspondant au système étudié. La partie ainsi dupliquée sera désignée par la suite par modèle bond graph optimisant.*

Étape 2 : Caractéristiques du modèle bond graph optimisant. *Dans le modèle bond graph optimisant, remplacer les matrices caractéristiques* $\mathbf{R_R}$ *et* $\mathbf{R_{opt}}$ *des éléments* $\mathbb{R}$ *respectivement par* $-\mathbf{R_R}^T$ *et* $-\mathbf{R_{opt}}^T$ *(l'élément* $\mathbb{R}$: $\mathbf{R_{opt}}$ *(resp.* $\mathbb{R}$: $\mathbf{R_R}$*) désigne les phénomènes dissipatifs pris en compte (resp. non pris en compte) dans l'indice de performance* V*).*

Étape 3 : Prise en compte de l'indice de performance.

- *A - Pour les phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance, coupler les éléments* $\mathbb{R}$ *multiports correspondants à la fois dans les modèles bond graph initial et optimisant. Ensuite, ajouter sous la diagonale de la matrice caractéristique de l'élément, la sous-matrice* $\frac{1}{2}\left[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{T}\right]$ *où* $\mathbf{R_{opt}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr} & \mathbf{R_{opt}}_{rc} \\ \mathbf{R_{opt}}_{cr} & \mathbf{R_{opt}}_{cc} \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr}^T & -\mathbf{R_{opt}}_{cr}^T \\ -\mathbf{R_{opt}}_{rc}^T & \mathbf{R_{opt}}_{cc}^T \end{pmatrix}$ *(les indices* $_r$ *et* $_c$ *correspondent respectivement à une causalité résistance et conductance lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale).*
- *B - Pour les entrées à déterminer par optimisation, insérer une jonction tableau* $\underline{\mathbf{0}}$ *(resp.* $\underline{\mathbf{1}}$*) entre la structure de jonction et chaque source d'effort (resp. de*

flux) puis leur connecter un élément $\mathbb{R}$ multiport par paire de sources correspondantes dans les modèles bond graph initial et optimisant. Pour les sources d'effort (resp. de flux), leur associer la matrice caractéristique $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}} \end{pmatrix}$ *(resp.* $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}} \end{pmatrix}$ *).*

– *C - Pour les entrées qui ne sont pas à déterminer par optimisation, remplacer les éléments correspondants $\mathbb{MS}e$ et $\mathbb{MS}f$ respectivement par des sources $\mathbb{S}e$ de vecteur d'effort nul et des sources $\mathbb{S}f$ de vecteur de flux nul dans le modèle bond graph optimisant uniquement.*

Étape 4 : Affectation de la bicausalité. *Remplacer les éléments $\mathbb{MS}e$ et $\mathbb{MS}f$ correspondants aux entrées à déterminer par optimisation par des doubles détecteurs $\mathbb{D}e\mathbb{D}f$ dans le modèle bond graph initial, et, par des doubles sources $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ imposant des vecteurs d'effort et de flux nuls dans le modèle bond graph optimisant. Enfin, propager la bicausalité des doubles sources vers les doubles détecteurs à travers les éléments $\mathbb{R}$ multiports introduits pour prendre en compte les pondérations des entrées à déterminer par optimisation.*

H.2.2 Démonstration

Après avoir précisé le cadre d'étude pour lequel la procédure 14 a été établie, la démonstration de celle-ci se déroule en deux principales étapes : une première consistant à appliquer le principe de Pontryagin de manière analytique puis une seconde où l'enjeu est de traduire en langage bond graph les conditions d'optimalité ainsi obtenues.

Comparativement à la démonstration originelle de la procédure bond graph d'optimisation dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps [Mar08], cette démonstration se distingue de par :

– la classe traitée de systèmes linéaires et invariants dans le temps. En supposant que les sorties du modèle peuvent cette fois-ci dépendre explicitement des entrées, nous voyons notamment que des termes supplémentaires apparaissent dans les conditions d'optimalité sans finalement n'avoir d'incidence sur la construction du modèle bond graph augmenté correspondant ;
– le nombre de variables d'entrée à déterminer par optimisation. En effet, seule une partie des variables d'entrée sera ici supposée être à déterminer par optimisation. L'autre partie des variables d'entrée étant supposée connue, aucune condition d'optimalité ne doit être écrite par rapport à ces variables fixées et nous montrons ici quelle incidence cela représente sur la construction du modèle bond graph augmenté.

Enfin, notons qu'ici encore nous ferons l'hypothèse de modèles bond graph ne présentant que des éléments dissipatifs en causalité résistance. Comme pour les démonstrations précédentes de la procédure bond graph d'optimisation, le principe de dualisation partielle pourra être utilisé pour montrer qu'il suffit, pour traiter le cas général (*i.e.* éléments dissipatifs en causalité résistance et conductance), de remplacer dans la procédure la sous-

matrice $\frac{1}{2}\left[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{R_{opt}}^T\right]$ par la sous-matrice $\frac{1}{2}\left[\mathbf{R_{opt}} + \mathbf{T}\right]$ où $\mathbf{R_{opt}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr} & \mathbf{R_{opt}}_{rc} \\ \mathbf{R_{opt}}_{cr} & \mathbf{R_{opt}}_{cc} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R_{opt}}_{rr}^T & -\mathbf{R_{opt}}_{cr}^T \\ -\mathbf{R_{opt}}_{rc}^T & \mathbf{R_{opt}}_{cc}^T \end{pmatrix}$ (les indices $_r$ et $_c$ correspondent respectivement à une causalité résistance et conductance lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentiellement intégrale).

Cadre d'étude

Considérons ici un modèle bond graph représentant un système linéaire et invariant dans le temps dont le modèle d'état peut se mettre sous une forme explicite. Sans perdre en généralité et grâce au concept de dualisation partielle, supposons ici que les entrées (resp. les sorties) associées aux phénomènes dissipatifs sont toutes des efforts (resp. des flux) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_R = \mathbf{e}_R \\ \mathbf{y}_R = \mathbf{f}_R \end{cases}$$

Comme expliqué à l'annexe G, son modèle d'état peut alors se mettre sous la forme port-hamiltonienne suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{G_{x,x}} - \mathbf{G_{x,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{x,R}}^T\right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G_{x,u}} - \mathbf{G_{x,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{u,R}}^T\right] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{(H.1)}$$

$$\mathbf{y}_R = \mathbf{G_{x,R}}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G_{u,R}}^T \cdot \mathbf{u} \quad \text{(H.2)}$$

$$\mathbf{y} = \left[\mathbf{G_{x,u}}^T + \mathbf{G_{u,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{x,R}}^T\right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G_{u,u}}^T + \mathbf{G_{u,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{u,R}}^T\right] \cdot \mathbf{u} \quad \text{(H.3)}$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état d'ordre minimal (*i.e.* constitué uniquement de variables d'état indépendantes) associé aux éléments de stockage d'énergie, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_I}^T & \mathbf{x_C}^T \end{pmatrix}^T$ avec $\mathbf{x_I}$ (resp. $\mathbf{x_C}$) le vecteur des variables d'énergie associées aux éléments $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{C}$) ;
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_e}^T & \mathbf{u_f}^T \end{pmatrix}^T$ avec $\mathbf{u_e}$ (resp. $\mathbf{u_f}$) le vecteur d'entrée en effort (resp. en flux) ;
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sortie constitué des variables de puissance conjuguées au vecteur d'entrée $\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y_e}^T & \mathbf{y_f}^T \end{pmatrix}^T$ avec $\mathbf{y_e}$ (resp. $\mathbf{y_f}$) le vecteur de sortie en flux (resp. en effort) ;
- $\mathbf{u_R} \in \mathbb{R}^r$ (resp. $\mathbf{y_R} \in \mathbb{R}^r$) est le vecteur d'entrée (resp. de sortie) associé aux phénomènes dissipatifs ;
- $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice hessienne de H où H est l'Hamiltonien du système, à savoir une fonction du vecteur d'état $\mathbf{x}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et représentant la totalité de l'énergie stockée dans le système ;
- $\mathbf{G_{x,x}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie ;
- $\mathbf{G_{u,u}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les sorties et les entrées ;
- $\mathbf{G_{x,u}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et les entrées ;

- $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et ceux dissipatifs ;
- $\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les entrées du modèle et les phénomènes dissipatifs ;
- $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ est la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs.

Dès lors, supposons que l'objectif de l'étude soit de résoudre un problème d'optimisation ayant pour :

- Objectif :

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{u}_{opt}} V \tag{H.4}$$

  où $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u^T & \mathbf{u}_{opt}^T \end{pmatrix}^T$ avec $\mathbf{u}_u \in \mathbb{R}^{m_u}$ le vecteur des entrées connues (ou déterminées par inversion dans le cas d'un couplage inversion/optimisation) et $\mathbf{u}_{opt} \in \mathbb{R}^{m_{opt}}$ le vecteur des entrées qui sont à déterminer par optimisation ;
- Indice de performance :

$$V = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\right) dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[\mathbf{u}_{opt}^T \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} + P_{diss}\right] dt \tag{H.5}$$

  où :
  - $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \in \mathbb{R}^{m_{opt}\times m_{opt}}$ est la matrice de pondération des entrées à déterminer par optimisation, supposée diagonale, $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}} \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}}$ (resp. $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}}$) celle associée aux entrées en effort (resp. en flux) ;
  - P_{diss} est la puissance dissipée par tout ou une partie des phénomènes dissipatifs présents dans le système, $P_{diss} = \mathbf{e}_{R_{opt}}^T \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}}$ où $\mathbf{e}_{R_{opt}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$ (resp. $\mathbf{f}_{R_{opt}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$) est le vecteur d'effort (resp. de flux) associé aux phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance.
- Contraintes :
  - les équations d'état (H.1) du système étudié ;
  - des conditions aux limites fixées sur les temps et les états initiaux et finaux.

Application du principe de Pontryagin

Afin de démontrer la procédure 14, appliquons le principe de Pontryagin au problème d'optimisation (H.4)-(H.5).

Pour cela, construisons dans un premier temps la fonction de Pontryagin $H_p = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ puis appliquons les conditions d'optimalité (H.6) pour trouver le système d'équations fournissant la solution analytique au problème.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H_p(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{H_p(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_p(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}_{opt}} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{H.6}$$

Ici, compte-tenu de l'indice de performance (H.5) et de la représentation d'état (H.1)-(H.3), nous obtenons [2] :

$$\begin{aligned}
H_p = & \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{opt}^T \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{u} \right]^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{u} \right] \\
& + \boldsymbol{\lambda}^T \left[\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T \right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T \right] \cdot \mathbf{u} \right]
\end{aligned}$$

où :

- $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de co-état ;
- $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}} \in \mathbb{R}^{n \times r_{opt}}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et les phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance ;
- $\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}} \in \mathbb{R}^{m \times r_{opt}}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les entrées du modèle et les phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance ;
- $\mathbf{R}_{opt} \in \mathbb{R}^{r_{opt} \times r_{opt}}$ est la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance.

Les conditions d'optimalité nous conduisent alors à :

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T \right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T \right] \cdot \mathbf{u} \tag{H.7}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\lambda}} = & - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{opt}^T \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} \right) \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{u} \right]^T \mathbf{R}_{opt}^T \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{u} \right] \right) \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\boldsymbol{\lambda}^T \left[\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T \right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T \right] \cdot \mathbf{u} \right] \right)
\end{aligned} \tag{H.8}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\frac{1}{2} \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{u} \right]^T \mathbf{R}_{opt}^T \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{u} \right] \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\boldsymbol{\lambda}^T \left[\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T \right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T \right] \cdot \mathbf{u} \right] \right)
\end{aligned} \tag{H.9}$$

L'équation (H.7) n'est autre que l'équation d'état du système étudié tandis que les équations (H.8) et (H.9) traduisent les conditions d'optimalité par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{\lambda}$ et $\mathbf{u}_{opt}$.

Remarque : Puisque le vecteur $\mathbf{u_u}$ est supposé connu, notons qu'aucune condition d'optimalité ne doit être écrite par rapport à ce vecteur. Notons également que, contrairement à la classe de systèmes énoncés au chapitre 4 (classe de systèmes linéaires et invariants dans

2. Notons en effet que :
   - $\mathbf{e}_{R_{opt}} = \mathbf{R_{opt}} \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}}$ puisque que les phénomènes dissipatifs sont supposés être ici linéaires ;
   - $\mathbf{f}_{R_{opt}} = \mathbf{y}_{R_{opt}}$ puisque nous avons supposé que toutes les sorties associées aux phénomènes dissipatifs sont des flux ;
   - $\mathbf{y}_{R_{opt}}$ vérifie l'équation (H.2).

le temps où les sorties ne peuvent dépendre explicitement des entrées du modèle), de nouveaux termes apparaissent dans la formulation des conditions d'optimalité (comparaison des équations (H.7)-(H.9) aux conditions d'optimalité (4.17)-(4.19), page 180).

Traduction des conditions d'optimalité en langage bond graph

Comme nous l'avons vu à l'annexe G, l'équation (H.7) peut être représentée de manière équivalente par le modèle bond graph de la figure H.5 (l'élément $\mathbb{R}$: $\mathbf{R_R}$ désigne les phénomènes dissipatifs non pris en compte dans l'indice de performance et, par notation, $\mathbf{u}_{e,u}$ (resp. $\mathbf{u}_{f,u}$) correspond aux variables d'entrée en effort (resp. en flux) connues tandis que $\mathbf{u}_{e,opt}$ (resp. $\mathbf{u}_{f,opt}$) dénote les variables d'entrée en effort (resp. en flux) à déterminer par optimisation). Ce modèle reflète donc d'ores et déjà la première condition d'optimalité issue du principe de Pontryagin. Afin de traduire en langage bond graph les deux autres conditions, à savoir celles par rapport aux vecteurs $\boldsymbol{\lambda}$ et $\mathbf{u}_{opt}$, l'idée est de partir de ce modèle bond graph initial et de lui coupler un modèle bond graph optimisant. Le modèle bond graph augmenté ainsi obtenu permettra de représenter le système d'équations fournissant la solution optimale $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}^*_{opt})$: le modèle bond graph initial reflétant la condition (H.7) sur l'état, le modèle bond graph optimisant représentant la condition (H.8) sur le co-état et leur couplage traduisant la prise en compte de l'indice de performance dont notamment la condition (H.9) sur les entrées à déterminer par optimisation.

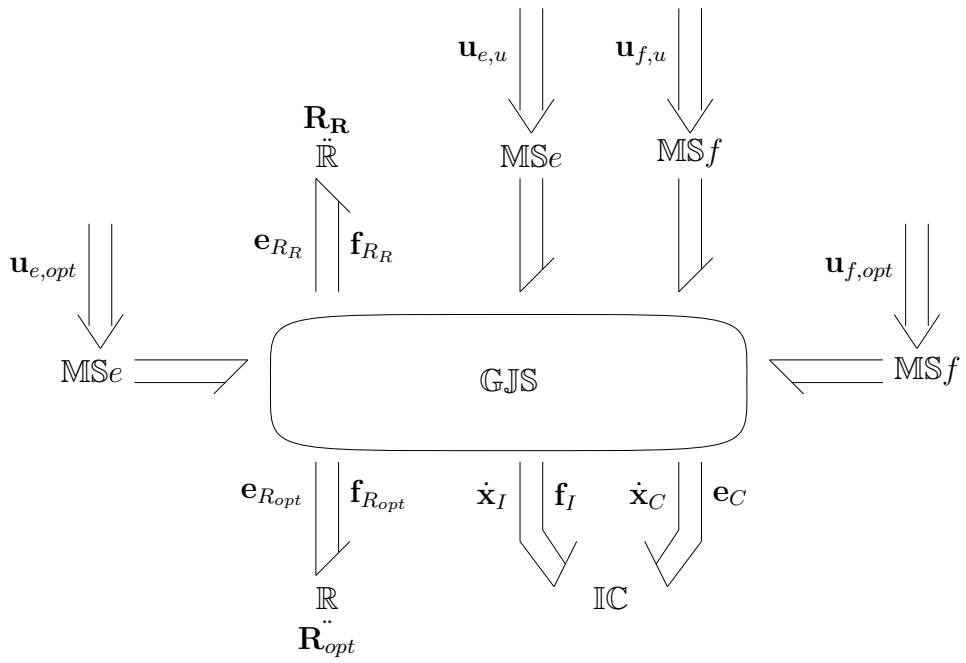


Figure H.5 – Modèle bond graph initial (cas linéaire)

Traduction de la condition sur le co-état
Par souci de clarté, procédons par étapes et notons les termes de la condition sur le co-état (H.8) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot \mathbf{u}_{opt}^T\cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}}\cdot \mathbf{u}_{opt}\right)\\
\mathbf{B} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}+\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{u}\right]^T \mathbf{R}_{opt}^T\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}+\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{u}\right]\right)\\
\mathbf{C} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\lambda}^T\left[\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}-\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}\cdot \mathbf{R}\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right]\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}+\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}-\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}\cdot \mathbf{R}\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T\right]\cdot \mathbf{u}\right]\right)
\end{aligned}$$

Tout d'abord, comme $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}}$ et $\mathbf{u}_{opt}$ ne sont pas des fonctions de $\mathbf{x}$, nous pouvons facilement conclure que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{H.10}$$

Ensuite, concernant $\mathbf{B}$, en considérant la propriété de symétrie de la matrice $\mathbf{H}$ (propriété due à la réversibilité des phénomènes de stockage d'énergie), les développements analytiques conduisent à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} =& -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}\right]^T\cdot \mathbf{R}_{opt}^T\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}\right]\right)\\
&-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}\right]^T\cdot \mathbf{R}_{opt}^T\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{u}\right]\right)\\
&-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{u}\right]^T\cdot \mathbf{R}_{opt}^T\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}\right]\right)\\
&-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{u}\right]^T\cdot \mathbf{R}_{opt}^T\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{u}\right]\right)\\
=& -\frac{1}{2}\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}\cdot\left[\mathbf{R}_{opt}+\mathbf{R}_{opt}^T\right]\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}\\
&-\frac{1}{2}\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}\cdot\left[\mathbf{R}_{opt}+\mathbf{R}_{opt}^T\right]\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{H.11}$$

Enfin, comme $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}$, $\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}$, $\boldsymbol{\lambda}$ et $\mathbf{u}$ ne sont pas des fonctions de $\mathbf{x}$, $\mathbf{H}$ est symétrique et $\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}$ est anti-symétrique, l'expression de $\mathbf{C}$ peut se simplifier, conformément aux développements ci-dessous, à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} =& -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\lambda}^T\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}-\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}\cdot \mathbf{R}\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right]\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}\right)\\
&-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\boldsymbol{\lambda}^T\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}}-\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}\cdot \mathbf{R}\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T\right]\cdot \mathbf{u}\right)\\
=&\mathbf{H}\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}-\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}\cdot(-\mathbf{R})^T\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right]\cdot\boldsymbol{\lambda}
\end{aligned} \tag{H.12}$$

Finalement, en récapitulant les expressions (H.10), (H.11) et (H.12) des termes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\lambda}} =& -\frac{1}{2}\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}\cdot\left[\mathbf{R}_{opt}+\mathbf{R}_{opt}^T\right]\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{H}\cdot \mathbf{x}+\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T\cdot \mathbf{u}\right]\\
&+\mathbf{H}\cdot\left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}-\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}\cdot(-\mathbf{R})^T\cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right]\cdot\boldsymbol{\lambda}
\end{aligned}$$

Maintenant que l'expression de $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ a pu être mise en forme, il convient de traduire celle-ci en modèle bond graph optimisant. Afin de faciliter la construction de ce modèle, scindons l'expression de $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ en deux parties telles que :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{H} \cdot [\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{\Lambda}_{opt}] \tag{H.13}$$

où :

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\lambda} = \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot (-\mathbf{R})^T \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{H.14}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{opt} = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}{}^T \cdot \mathbf{u}\right] \tag{H.15}$$

Avant d'analyser l'expression (H.14) plus en détails, revenons à l'équation d'état (H.1) du système étudié :

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \mathbf{u}$$

En rappelant que, par définition, le vecteur $\mathbf{x}^+$ constitué des variables de co-énergie du modèle bond graph initial vérifie la relation $\mathbf{x}^+ = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ et donc que $\dot{\mathbf{x}}^+ = \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ dans le cas linéaire, l'équation d'état peut alors être reformulée en termes de variables de co-énergie sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}^+ = \mathbf{H} \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \mathbf{x}^+ + \mathbf{H} \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \mathbf{u} \tag{H.16}$$

En comparant alors cette équation (H.16) à l'expression (H.14) :

$$\begin{array}{l}
\dot{\mathbf{x}}^+ : \mathbf{H} \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \mathbf{x}^+ + \mathbf{H} \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \mathbf{u} \\
\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \\
\dot{\boldsymbol{\lambda}} : \mathbf{H} \cdot \left[\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}} \cdot (-\mathbf{R})^T \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}{}^T\right] \cdot \boldsymbol{\lambda}
\end{array}$$

Nous constatons alors que le terme $\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\lambda}}$ peut être vu comme la représentation port-hamiltonienne d'un modèle bond graph optimisant où :

- le vecteur de co-état $\boldsymbol{\lambda}$ joue le rôle de variable de co-énergie, $\boldsymbol{\lambda}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_I^T & \boldsymbol{\lambda}_C^T \end{pmatrix}$ avec $\boldsymbol{\lambda}_I$ (resp. $\boldsymbol{\lambda}_C$) le vecteur de variables de co-énergie associé aux éléments $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{C}$) ;
- la structure de jonction est identique à celle du modèle bond graph initial ;
- la matrice associée aux phénomènes dissipatifs est $-\mathbf{R}^T$;
- les sources du modèle bond graph optimisant sont des sources de vecteurs d'effort nuls et des sources de vecteurs de flux nuls (**étape 3-C** et **étape 4**).

En notant $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\lambda}_I}$ (resp. $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\lambda}_C}$) le vecteur d'effort (resp. de flux) associé à l'élément bond graph ayant pour flux $\boldsymbol{\lambda}_I$ (resp. pour effort $\boldsymbol{\lambda}_C$), calculer la partie $\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\lambda}}$ de $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ revient alors à caractériser les éléments de stockage d'énergie du modèle bond graph optimisant par la relation $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{H} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\boldsymbol{\lambda}_I}^T & \mathbf{f}_{\boldsymbol{\lambda}_C}^T \end{pmatrix}^T$, ce qui correspond finalement à la loi caractéristique des éléments de stockage d'énergie du modèle bond graph initial (la seule différence étant qu'elle est ici formulée en fonction des variables de co-énergie et sous forme différentielle). Ainsi, construire le modèle bond graph optimisant, revient finalement à dupliquer le modèle bond graph initial (**étape 1**) puis à le modifier simplement de sorte que les lois caractéristiques associées aux phénomènes dissipatifs soient transposées et de signes opposés (**étape 2**) et que les sources correspondant aux variables d'entrée en effort (resp.

en flux) connues soient remplacées par des sources de vecteur d'effort (resp. de vecteur de flux) nul (**étape 3-C**).

Cependant, la traduction de la condition sur le vecteur de co-état n'est pas terminée pour autant : il convient de s'attarder maintenant sur la traduction du terme $\mathbf{\Lambda}_{opt}$. Comme nous l'avons vu lors des calculs précédents, ce terme provient de la dérivation de l'indice de performance par rapport à $\mathbf{x}$. De plus, comme $\mathbf{f}_{R_{opt}}$ vérifie également les équations $\mathbf{e}_{R_{opt}} = \mathbf{R}_{opt} \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}}$, $\mathbf{f}_{R_{opt}} = \mathbf{y}_{R_{opt}}$ et (H.2), son expression peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{\Lambda}_{opt} = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{x},R_{opt}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}}$$

Ainsi, le terme $\mathbf{\Lambda}_{opt}$ contribue au calcul d'une partie d'un effort $\mathbf{e}_{R_{opt},\boldsymbol{\lambda}}$ du modèle bond graph optimisant à travers la structure de jonction caractérisée par la matrice $\mathbf{G}_{\mathbf{x},R_{opt}}$. Cette partie de $\mathbf{e}_{R_{opt},\boldsymbol{\lambda}}$ étant calculée à partir d'un flux $\mathbf{f}_{R_{opt}}$ appartenant au modèle bond graph initial, le terme $\mathbf{\Lambda}_{opt}$ ne peut alors être traduit qu'en couplant les deux modèles bond graph comme le montre la figure H.6 (**étape 3-A**).

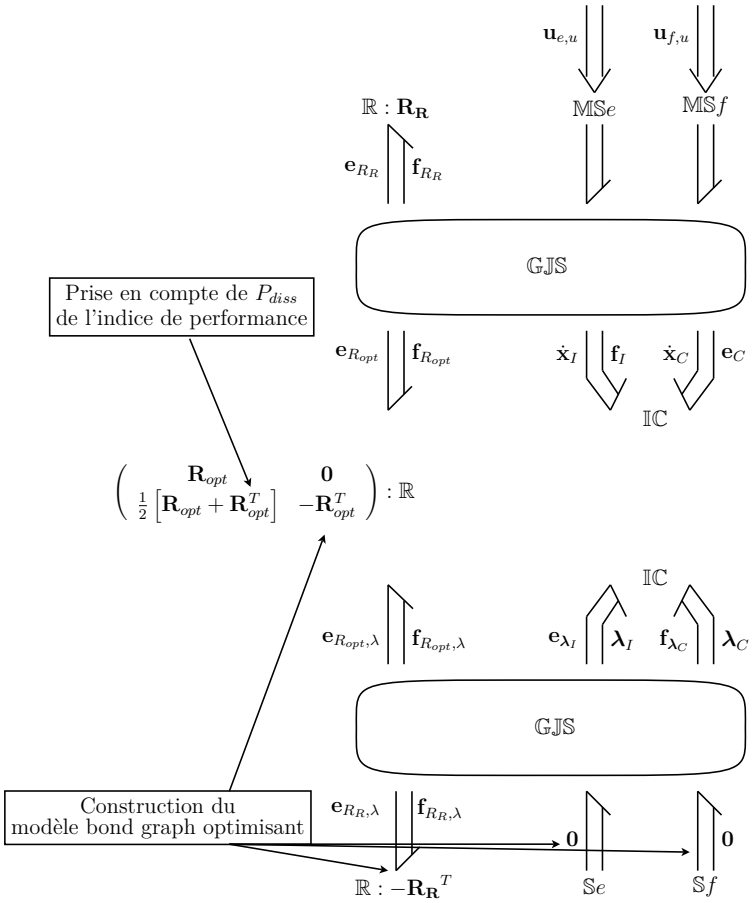


FIGURE H.6 – Traduction bond graph de la condition d'optimalité sur le co-état (cas linéaire où seule une partie des entrées est à déterminer par optimisation)

Traduction de la condition sur les entrées à déterminer par optimisation
Enfin, il reste à traduire la condition d'optimalité sur les entrées à déterminer par optimisation. Pour cela, calculons au préalable les termes suivants :

$$\mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{G_{x,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G_{u,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u} \right]^T \mathbf{R}_{opt}^T \left[\mathbf{G_{x,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G_{u,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u} \right] \right)$$
$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\boldsymbol{\lambda}^T \left[\left[\mathbf{G_{x,x}} - \mathbf{G_{x,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{x,R}}^T \right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \left[\mathbf{G_{x,u}} - \mathbf{G_{x,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{u,R}}^T \right] \cdot \mathbf{u} \right] \right)$$

Tout d'abord, comme $\mathbf{G_{u,R_{opt}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G_{u_u,R_{opt}}} & \mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}} \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{G_{u_u,R_{opt}}} \in \mathbb{R}^{m_u \times r_{opt}}$ (resp. $\mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}} \in \mathbb{R}^{m_{opt} \times r_{opt}}$) la matrice associée à la structure de jonction entre les entrées fixées (resp. à déterminer par optimisation) et les phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance, l'expression de $\mathbf{D}$ peut se réduire à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} = & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{G_{x,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \right]^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot \mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_{opt} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{G_{u_u,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_u \right]^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot \mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_{opt} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_{opt} \right]^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot \mathbf{G_{x,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_{opt} \right]^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot \mathbf{G_{u_u,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_u \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_{opt} \right]^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot \mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_{opt} \right) \\
= & \frac{1}{2} \cdot \mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T \right] \cdot \mathbf{G_{x,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \\
& + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T \right] \cdot \mathbf{G_{u_u,R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_u \\
& + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T \right] \cdot \mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}}^T \cdot \mathbf{u}_{opt} \\
= & \frac{1}{2} \cdot \mathbf{G_{u_{opt},R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T \right] \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}}
\end{aligned} \tag{H.17}$$

De la même façon, comme $\mathbf{G_{x,u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G_{x,u_u}} & \mathbf{G_{x,u_{opt}}} \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{G_{x,u_u}} \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$ (resp. $\mathbf{G_{x,u_{opt}}} \in \mathbb{R}^{n \times m_{opt}}$) la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et les entrées fixées (resp. à déterminer par optimisation), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \left[\mathbf{G_{x,x}} - \mathbf{G_{x,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{x,R}}^T \right] \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \left[\mathbf{G_{x,u}} - \mathbf{G_{x,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{u,R}}^T \right] \cdot \mathbf{u} \right) \\
= & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \left[\mathbf{G_{x,u_u}} \cdot \mathbf{u}_u + \mathbf{G_{x,u_{opt}}} \cdot \mathbf{u}_{opt} \right] \right) \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{opt}} \left(\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \left[\mathbf{G_{x,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{u_u,R}}^T \cdot \mathbf{u}_u + \mathbf{G_{x,R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G_{u_{opt},R}}^T \cdot \mathbf{u}_{opt} \right] \right) \\
= & \mathbf{G_{x,u_{opt}}}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{G_{u_{opt},R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{G_{x,R}}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}
\end{aligned} \tag{H.18}$$

Ainsi, en récapitulant les expressions (H.17) et (H.18), la condition (H.9) sur les entrées à déterminer par optimisation devient :

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}} + \left[{\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}}}^T - \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R}}}^T\right] \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{H.19}$$

En notant :

- r_r la dimension de la matrice $\mathbf{R_R}$;
- $\mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_R}} & \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_R}} \in \mathbb{R}^{m_{opt} \times r_r}$ (resp. $\mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \in \mathbb{R}^{m_{opt} \times r_{opt}}$) la matrice associée à la structure de jonction entre les entrées à déterminer par optimisation et les phénomènes dissipatifs non pris en compte (resp. pris en compte) dans l'indice de performance ;
- $\mathbf{u}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{e,u}^T & \mathbf{u}_{f,u}^T \end{pmatrix}^T$ avec $\mathbf{u}_{e,u}$ (resp. $\mathbf{u}_{f,u}$) le vecteur des variables d'entrée en effort (resp. en flux) connues ;
- $\mathbf{u}_{opt} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{e,opt}^T & \mathbf{u}_{f,opt}^T \end{pmatrix}^T$ avec $\mathbf{u}_{e,opt}$ (resp. $\mathbf{u}_{f,opt}$) le vecteur des variables d'entrée en effort (resp. en flux) à déterminer par optimisation.

Puis, en utilisant les notations précédemment introduites comme $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} {\mathbf{R_R}}^T & {\mathbf{R_{opt}}}^T \end{pmatrix}^T$, la condition d'optimalité (H.19) par rapport aux entrées à déterminer par optimisation peut se mettre également sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = {} & \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} \\ & + \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}} + \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \cdot (-\mathbf{R_{opt}})^T \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} \\ & + {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}}}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_R}} \cdot (-\mathbf{R_R})^T \cdot {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_R}}}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \tag{H.20}$$

De plus, en utilisant encore une fois l'analogie entre le modèle d'état du modèle bond graph initial formulé en variable de co-énergie et le modèle d'état du modèle bond graph optimisant, nous pouvons conclure en reprenant les notations de la figure H.6 que :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{R_{opt}} &= {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_{opt}}}}^T \cdot \mathbf{u} & \rightarrow \mathbf{f}_{R_{opt},\boldsymbol{\lambda}} &= {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_{opt}}}}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{R_R} &= {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_R}}}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + {\mathbf{G}_{\mathbf{u},\mathbf{R_R}}}^T \cdot \mathbf{u} & \rightarrow \mathbf{f}_{R_R,\boldsymbol{\lambda}} &= {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{R_R}}}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dès lors, en injectant ces expressions dans l'équation (H.20), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = {} & \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} \\ & + \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T\right] \cdot \mathbf{f}_{R_{opt}} + (-\mathbf{R_{opt}})^T \cdot \mathbf{f}_{R_{opt},\boldsymbol{\lambda}}\right] \\ & + {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}}}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_R}} \cdot (-\mathbf{R_R})^T \cdot \mathbf{f}_{R_R,\boldsymbol{\lambda}} \end{aligned}$$

Soit, en utilisant les lois caractéristiques des éléments $\mathbb{R}$ du modèle bond graph optimisant :

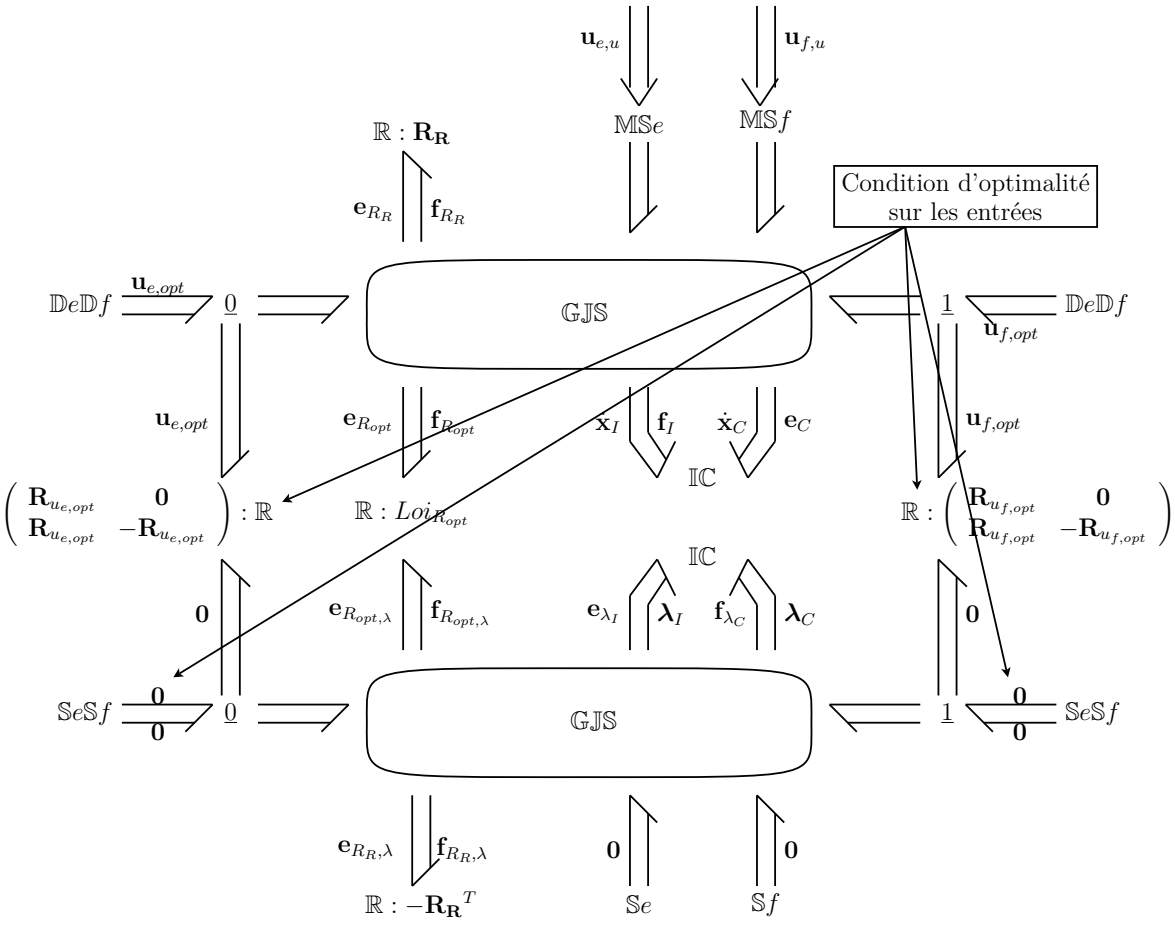
$$\mathbf{0} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}} \cdot \mathbf{u}_{opt} + \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}} \cdot \mathbf{e}_{R_{opt},\boldsymbol{\lambda}} + {\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}}}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_R}} \cdot \mathbf{e}_{R_R,\boldsymbol{\lambda}} \tag{H.21}$$

Par conséquent, la condition d'optimalité (H.21) par rapport aux entrées à déterminer par optimisation peut être vue comme un bilan (de flux (resp. d'efforts) si l'on considère la composante $\mathbf{u}_{e,opt}$ (resp. $\mathbf{u}_{f,opt}$) de $\mathbf{u}_{opt}$) entre :

- le vecteur des variables d'entrée à déterminer par optimisation $\mathbf{u}_{opt}$ issu du modèle bond graph initial à travers l'élément dissipatif caractérisé par la pondération $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{opt}}$;
- le vecteur d'effort $\mathbf{e}_{R_{opt},\boldsymbol{\lambda}}$ issu du modèle bond graph optimisant à travers la structure de jonction caractérisée par la matrice $\mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_{opt}}}$;
- le vecteur de co-état $\boldsymbol{\lambda}$ appartenant au modèle bond graph optimisant à travers la structure de jonction caractérisée par la matrice ${\mathbf{G}_{\mathbf{x},\mathbf{u_{opt}}}}^T$;
- et le vecteur d'effort $\mathbf{e}_{R_R,\boldsymbol{\lambda}}$ issu du modèle bond graph optimisant à travers la structure de jonction caractérisée par la matrice $\mathbf{G}_{\mathbf{u_{opt}},\mathbf{R_R}}$.

Traduire en langage bond graph la condition d'optimalité sur les entrées à déterminer par optimisation consiste alors à coupler les deux modèles bond graph de sorte que (Fig. H.7) :

- de nouveaux éléments $\mathbb{R}$ multiports soient introduits entre la structure de jonction et chaque entrée à déterminer par optimisation ;
- la matrice caractéristique de ces nouveaux éléments $\mathbb{R}$ multiports soit $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{e,opt}} \end{pmatrix}$ pour les entrées en effort à déterminer par optimisation et $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_{f,opt}} \end{pmatrix}$ pour celles en flux (**étape 3-B**) ;
- les sources $\mathbb{MS}e$ et $\mathbb{MS}f$ correspondant aux entrées fixées soient remplacées respectivement par des sources $\mathbb{S}e$ de vecteur d'effort nul et des sources $\mathbb{S}f$ de vecteur de flux nul dans le modèle bond graph optimisant uniquement (**étape 3-C**) ;
- les sources $\mathbb{MS}e$ et $\mathbb{MS}f$ correspondant aux entrées à déterminer par optimisation soient remplacées par des doubles détecteurs $\mathbb{D}e\mathbb{D}f$ dans le modèle bond graph initial et par des doubles sources $\mathbb{S}e\mathbb{S}f$ de vecteurs d'effort et de flux nuls dans le modèle bond graph optimisant (**étape 4**).



$$Loi_{R_{opt}} : \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{R_{opt}} \\ \mathbf{e}_{R_{opt,\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{opt} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}[\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T] & -\mathbf{R}_{opt}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{R_{opt}} \\ \mathbf{f}_{R_{opt,\lambda}} \end{pmatrix}$$

FIGURE H.7 – Modèle bond graph augmenté (cas linéaire où seule une partie des entrées est à déterminer par optimisation)

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : **JARDIN** DATE de SOUTENANCE : **15 Janvier 2010**

Prénoms : **Audrey**, Cécile, Anne-Laure

TITRE :

CONTRIBUTION A UNE METHODOLOGIE DE DIMENSIONNEMENT DES SYSTEMES MECATRONIQUES : ANALYSE STRUCTURELLE ET COUPLAGE A L'OPTIMISATION DYNAMIQUE

NATURE : **Doctorat** Numéro d'ordre : **2010 ISAL 0003**

Ecole doctorale : **Electronique, Electrotechnique, Automatique (EEA)**

Spécialité : **Energie et Systèmes**

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RESUME : Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la conception de systèmes mécatroniques et traite plus spécifiquement du problème de leur dimensionnement. Dans ce sens, elle s'intéresse aux méthodes permettant de sélectionner les composants constituant leurs chaînes d'actionnement afin de satisfaire au mieux un cahier des charges donné. Puisque les lois concurrentielles actuelles demandent un renouvellement fréquent des produits malgré une complexité toujours croissante, les démarches adoptées pour traiter ce type de problème se doivent d'être les moins coûteuses en termes financiers mais aussi en termes de temps d'étude. Pour diminuer le nombre d'itérations du processus de conception, une solution possible est de reformuler le problème sous la forme d'un problème inverse où les inconnues du problème de dimensionnement sont directement calculées à partir des spécifications du cahier des charges sur les sorties du système. Dans cette optique, le laboratoire AMPERE propose une méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses. L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de cette méthodologie d'une part dans sa phase d'analyse structurelle (phase permettant de vérifier avant toute simulation si le problème inverse est correctement posé) puis, d'autre part, dans sa phase de dimensionnement (phase durant laquelle l'inversion du modèle est effectivement mise en œuvre puis exploitée).

Concernant la phase d'analyse structurelle, le mémoire s'attache à détailler les mécanismes d'une telle analyse dans le langage bond graph mais vise aussi à préciser son domaine de validité. Pour cela, une comparaison de l'approche bond graph aux approches Modelica, système structuré et modèle d'état permet de mettre en évidence l'existence de plusieurs niveaux d'information et de description sur le système. Selon l'exploitation ou non de ces différents niveaux d'information et de description, plusieurs niveaux d'analyse sont ensuite proposés : le niveau structuré, le niveau BG-structurel et le niveau comportemental. Il est également montré comment ces différents niveaux d'analyse peuvent être mis à profit dans une démarche de conception et comment ceux-ci permettent de reformuler certaines propriétés bond graph selon la phase de conception dans laquelle nous nous trouvons (*e.g.* les propriétés au niveau d'analyse BG-structurel permettent d'infirmer ou de valider l'architecture du système).

Concernant la phase de dimensionnement, le mémoire aborde le cas où le problème de dimensionnement ne peut se formuler complètement sous la forme d'un problème inverse et où la méthodologie ne peut s'appliquer directement. Pour cela, le problème de la représentation bond graph d'un problème d'optimisation dynamique est étudié afin de traiter des spécifications qui ne peuvent s'exprimer sous forme de fonctions dépendant explicitement du temps. Une procédure bond graph d'optimisation est à cette fin reprise puis étendue notamment à une classe de systèmes non linéaires. Enfin, un exemple de couplage entre méthodologie de dimensionnement et optimisation dynamique est effectivement mis en œuvre jusqu'à l'obtention de résultats numériques afin d'illustrer la faisabilité de la méthodologie tout au long du processus de conception.

MOTS-CLES : systèmes mécatroniques, bond graph, analyse structurelle, inversion de modèles dynamiques, dimensionnement, optimisation dynamique

Laboratoire (s) de recherche : **Laboratoire AMPERE – UMR CNRS 5005 – INSA de Lyon**

Directeur de thèse : **MARQUIS-FAVRE Wilfrid**

Président de jury : **MALABRE Michel**

Composition du jury :
- Rapporteurs : **JUNCO Sergio**, **ROBOAM Xavier** et **SUEUR Christophe**
- Examinateurs : **MALABRE Michel** et **THOMASSET Daniel**
- Invités : **BENJELLOUN-DABAGHI Zakia**, **BOUSKELA Daniel**, **GUILLEMARD Franck** et **LORENZ Francis**
- Directeur de thèse : **MARQUIS-FAVRE Wilfrid**