



Fluides Quantiques et Dispositifs à Polaritons

Simon Pigeon

► To cite this version:

Simon Pigeon. Fluides Quantiques et Dispositifs à Polaritons. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2011. Français. NNT : . tel-00597945

HAL Id: tel-00597945

<https://theses.hal.science/tel-00597945>

Submitted on 2 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris Diderot - Paris 7

École doctorale : ED518

DOCTORAT

Physique

SIMON PIGEON

FLUIDES QUANTIQUES ET DISPOSITIFS À
POLARITONS

Thèse dirigée par

CRISTIANO CIUTI

Soutenue le 28/02/2011

Jury

Mme.	Sara DUCCI	Présidente du jury
M.	Alexey KAVOKIN	Rapporteur
Mme.	Anna MINGUZZI	Rapporteuse
M.	Cristiano CIUTI	Directeur de thèse
Mme.	Jacqueline BLOCH	Examinatrice
M.	Alberto BRAMATI	Examineur

FLUIDES QUANTIQUES ET DISPOSITIFS À POLARITONS

SIMON PIGEON

28 février 2011

Un ami : – Alors les polaritons,
ça avance ? ? ?
Moi : – ... ? ! ?

Remerciements

Je souhaite ici remercier tous les gens qui m'ont, non seulement permis de réaliser ma thèse, mais surtout de la réaliser dans de très bonnes conditions. Il est indéniable qu'un travail de thèse en sciences exactes à l'heure actuelle, comporte une bonne part de hasard. On ne peut le nier. Ce hasard m'a fait commencer ma thèse dans la physique des polaritons alors que celle-ci arrivait à maturité aussi bien expérimentalement que théoriquement. Ce hasard, qui me fit m'intégrer dans un projet comportant des équipes et des personnes aussi dynamiques qu'enthousiastes, me fut donc plus que favorable. Je souhaite ici remercier tous ceux qui ont rendu ce hasard possible.

Comme responsable en chef, je tiens à remercier plus que chaleureusement, Cristiano Ciuti alias "chef". Il fut l'initiateur et l'un des maîtres d'oeuvre de cette aventure. Bien évidemment, je le remercie de son encadrement constant au cours de ces années, de ces explications enflammées et de ses conseils plus qu'avisés, mais surtout, je le remercie pour m'avoir donné ma chance. Cet ami, que je baptisai "chef" afin d'insister sarcastiquement sur le rapport de hiérarchie, je continuerai à l'appeler "chef" mais aujourd'hui, davantage pour insister sur le respect et l'estime que j'ai pour lui. Donc, Chef merci!!!

Un autre responsable de ce hasard, n'est autre que Iacopo Carusotto, avec qui, je peux le dire, j'ai eu la chance et l'honneur de travailler. Cristiano et Iacopo, sont dans la vie des vrais amis. Ils partagent une même passion pour la physique. Cette passion fut, pour le novice que j'étais, un vrai remontant et un vrai stimulant. Un grand merci à toi Iacopo pour m'avoir accueilli durant l'été 2009 à Trento. Cela m'aura permis, en plus de percer une partie des mystères des turbulences dans les superfluides de polaritons, de découvrir ce beau pays d'où viennent tant de mes collaborateurs : l'Italie. Pour ça et pour tout, merci Iacopo.

Je souhaite remercier ici, Sara Ducci, qui accepta sans la moindre hésitation de faire partie de mon jury et d'en être la présidente. Merci aussi pour sa lecture critique de ma thèse ainsi que pour ses commentaires et corrections. Et un bravo tout particulier pour sa maîtrise de la langue de Molière qui en bluffa plus d'un(e)s. Même si Xavier m'avait prévenu, je reste impressionné. Un grand merci aussi aux deux rapporteurs de ma thèse : Alexey Kavokin et Anna Minguzzi. M. Alexey Kavokin est une des personnes qui a permis l'essor de la physique des polaritons dont je parle précédemment, ainsi qu'un physicien d'une réelle vivacité d'esprit (j'en sais quelque chose pour avoir lu un grand nombre de ses articles). L'avoir en tant que rapporteur de ma thèse fut un honneur. Un merci aussi tout particulier à Anna Minguzzi qui accepta d'être ma rapporteuse (bien que n'étant pas particulièrement familière de la physique des polaritons), ainsi que pour ses questions et critiques qui me furent plus que profitables.

Je souhaiterais maintenant remercier mes collaborateurs expérimentaux. On a tendance à opposer le travail des théoriciens et celui des expérimentateurs. Si en effet, il existe des différences indéniables sur les méthodes et sur les objets d'études, il ne faut pas non plus tomber dans la caricature économiste et parler de "division du travail dans la production scientifique". J'en veux pour preuve mon expérience personnelle et je remercie mes collaborateurs

Remerciements

expérimentaux pour avoir su dépasser ces caricatures.

Un grand merci à Jacqueline Bloch et Alberto Bramati pour avoir accepté de faire partie de mon jury mais aussi pour m'avoir permis de collaborer avec eux et leurs équipes respectives (au LPN et au LKB) aussi dynamiques l'une que l'autre.

Parmi les moteurs de ce dynamisme, hier au LKB et aujourd'hui au LPN, je souhaite remercier tout particulièrement et très chaleureusement, Alberto Amo qui arriva à Paris en même temps que moi et avec qui j'ai eu un réel grand plaisir à travailler. Durant ces trois ans, il fut vraiment stimulant aussi bien par ton enthousiasme que par sa motivation sans faille. Et j'ose espérer qu'il aura un retour rétrospectif sur notre collaboration aussi favorable que moi. Muchas gracias tio, te debo mucho !

Je souhaiterais aussi remercier nommément plusieurs autres de mes collaborateurs du LKB entre lesquels, Elisabeth Giacobino, Claire Adrados, Jérôme Léfrère, Ferruccio Pisanello, Vera Giulia Sala, Romain Hivet et Godefroy Lemenager. Un grand merci aussi à mes collaboratrices du LPN, à savoir Esther Wertz et Lydie Ferrier.

Bien qu'omise jusqu'à présent, je me dois d'ajouter une autre équipe expérimentale avec laquelle j'ai eu la chance de travailler. Il s'agit de l'équipe de Jérôme Tignon au sein du LPA, et tout particulièrement Timothée Lecomte. Si je n'avais qu'un seul regret cela serait celui de ne pas avoir trouvé le temps de me pencher plus à fond sur les questions que ses manips et lui ont soulevées.

Mais il me faut aussi remercier ici mes collègues du laboratoire MPQ. Bien entendu, je remercie Sylvie Rousset et Carlo Sirtori ainsi que Anne Servouze, de m'avoir accueilli au sein de ce jeune et dynamique laboratoire qui, je le crois, est promis à un bel avenir. Je souhaite aussi remercier Thomas Coudreau en tant que directeur de l'école doctorale mais aussi et surtout en tant que collègue, avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à discuter. Un merci tout spécial à mes collègues de bureau - amis - co-thésards (ou pas), c'est à dire : Simone De Liberato, Pierre Nataf, David Hagenmüller et Motoaki Bamba, mais aussi aux nouvelles recrues : Juan Restrepo, Luc Nguyen-thê et Alexandre Baksic. Et bien évidemment, un grand merci à toutes ces personnes qui furent des collègues, mais qui ne le restèrent pas longtemps et prirent rapidement le statut d'amis. J'entends par là entre autres : Séb' (alias "Whiteman"), Xav', Nicolas, Ludivine, Carole, mais aussi Erwan, Daria, Quentin, Romain, Sébastien, Pauline, Paolo, et tous ceux que j'ai oublié et qui ne m'en tiendront pas rigueur.

Le meilleur pour la fin, un grand merci à tout mon entourage pour avoir été là et surtout pour me permettre de voir les polaritons sous un jour ... comment dire ... plus pragmatique ! Et mon dernier remerciement reviendra à mon papa, ma maman et ma douce pour leur soutien continu au cours de ces trois années (qui fut plus qu'un simple soutien orthographique) et pour tout le reste. Je leur aurais bien donné mon grade de Docteur pour les remercier, mais en plus de ne pas être possible, l'un d'entre eux en a déjà un et les deux autres conviendront avec moi que Docteur Pigeon c'est quand même plus drôle !!! Merci beaucoup.

Table des matières

Introduction	2
1 Polaritons excitoniques en microcavité semiconductrice	5
A Polaritons	6
B Microcavités semiconductrices	8
B.1 Cavités optiques	9
B.2 Microcavités semiconductrices	11
B.3 Couplage à l'environnement	12
C Excitons de puits quantiques	13
C.1 Physique des semiconducteurs et excitons	14
C.2 Puits quantiques et excitons	16
C.3 Interactions exciton-exciton	18
D Polaritons excitoniques	19
D.1 Interaction exciton-photon de cavité	19
D.2 Base excito-photonique et base polaritonique	21
D.3 Interaction polariton-polariton	22
Conclusion	24
Bibliographie du chapitre 1	25
2 Oscillation paramétrique optique dans les micropiliers	28
A Oscillateurs paramétriques optiques	30
A.1 Optique non-linéaire	30
A.2 Mélange à quatre ondes et OPO	31
A.3 Corrélations	34
A.4 OPO à polaritons	35
B Microcavités piliers	38
B.1 Système physique	38
B.2 Hamiltonien associé au plot	39
C Oscillation paramétrique $(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{4})$	44
C.1 Équations du champ moyen et solutions stationnaires	44
C.2 Fluctuations autour du champ moyen	46
C.3 Corrélations dans le modèle analytique	49
D Résultats numériques et comparaisons avec l'expérience	51
D.1 Présentation des simulations Monte Carlo quantiques	52
D.2 Oscillation paramétrique : numériques <i>vs.</i> expériences	57

D.3	Corrélation et modes "frustrés"	61
	Conclusion et Perspectives	64
	Bibliographie du chapitre 2	66
3	Fluide et Superfluide de Polaritons	69
A	Superfluidité dans les atomes	71
A.1	Gaz de Bose et condensation	71
A.2	Superfluidité	72
A.3	Régimes d'écoulement	77
B	Superfluidité des polaritons	79
B.1	Condensation à l'état solide	80
B.2	Superfluide de polaritons excitoniques	81
B.3	Résultats numériques et expérimentaux	87
B.4	Effet Čerenkov dans un fluide de polaritons	90
C	Turbulences et superfluide de polaritons	93
C.1	Cas des atomes	94
C.2	Cas des polaritons	96
C.3	Piégeage de vortex	101
D	Défauts et polarisation de spin	103
D.1	Hamiltonien effectif dépendant du spin	103
D.2	Résultats numériques et expérimentaux	107
	Conclusion et Perspectives	113
	Bibliographie du chapitre 3	115
	Conclusion générale	120
	Annexes	123

Introduction

S'il y a bien deux concepts nés en même temps que la physique, dans l'histoire de l'humanité, ce sont ceux de la lumière et de la matière. Sans remonter aussi loin, on notera que déjà Descartes concevait le monde comme constitué de substance pensante (liée à l'esprit), et d'une substance étendue (liée à la matière). Cette conception de la matière héritée des conceptions scolastiques perdura durant de nombreuses années, bien que parsemée de débat sur l'existence du vide par exemple ou, sur la nature fondamentale de la matière. Gassendi, un atomiste contradicteur de Descartes, est celui à qui l'on doit la première théorie corpusculaire de la lumière, faisant ainsi le premier, le rapprochement entre la lumière et la matière. Bien que par la suite, soutenue par Newton, cette théorie sera détrônée par la théorie ondulatoire de Huyghens basée sur une analogie avec les ondes sonores, éloignant, de nouveau, la lumière de la matière. Avec l'établissement des équations de Maxwell, la conception ondulatoire prédomine. À cette même époque, les thèses atomistes se voient définitivement acceptées. Au XIX^e siècle, tout oppose donc la lumière et la matière. L'une est faite d'ondes et l'autre d'atomes. Il faudra attendre 1905, que Einstein se penche sur la lumière, pour que la théorie corpusculaire revienne sur le devant de la scène. Étudiant l'entropie de rayonnement des corps noirs, il remarque que cette dernière (dans l'approximation des faibles densités), "varie en fonction du volume selon la même loi que l'entropie d'un gaz parfait ou d'une solution diluée"¹. Ce rapprochement sera affirmé, ensuite, avec l'établissement de la dualité onde-particule formalisée par Louis de Broglie en 1924². C'est notamment sur ces bases que la mécanique quantique est formalisée dans les années qui suivent³.

Dans cette nouvelle mécanique, la lumière comme la matière peuvent avoir des comportements identiques. Par exemple, les atomes de statistique bosonique, comme les photons constituant la lumière (des bosons eux aussi) peuvent condenser dans le même état, donnant lieu à un condensat de Bose-Einstein, état quantique macroscopique de la matière dans lequel les particules ne sont plus discernables. Ceci dit, la lumière et les photons gardent une spécificité particulière par rapport à la matière : ils n'interagissent pas dans le vide. Ils n'interagissent pas entre eux mais peuvent le faire avec la matière et même parfois de façon importante voir même de façon non linéaire. Il faudra attendre 30 ans après l'établissement de la mécanique quantique et surtout attendre l'invention du laser, pour observer ces effets non linéaires. Lorsqu'un faisceau

1. EINSTEIN, A. (1905) : Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, **322** :132.

2. DE BROGLIE, L. (1923) : Waves and Quanta. *Nature*, **112** :540.

3. VON NEUMANN, J. (1955) : *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press.

lumineux suffisamment intense traverse un milieu matériel, l'onde électromagnétique qu'il porte va perturber le milieu traversé. Cette perturbation va en retour modifier l'onde lumineuse propageante. La lumière, via un milieu matériel, peut interagir avec elle-même. On a donc propagation non-linéaire de la lumière. Dans de telles conditions, la lumière acquiert la propriété qui lui manquait pour se comporter comme la matière. Cela permet l'observation de phénomènes tels que l'oscillation paramétrique optique bien connue aujourd'hui.

Mais cette interaction entre un milieu matériel et un faisceau lumineux qui s'y propage, peut exhiber un comportement bien plus riche encore. Il est possible dans des systèmes tels que les microcavités semiconductrices, que nous allons étudier dans ce travail, d'obtenir une interaction tellement forte que les perturbations causées dans le matériel par la lumière et la lumière elle-même deviennent indistingables. C'est à J. J. Hopfield⁴ en 1958, que l'on doit cette idée d'intriquer un milieu et la lumière qui s'y propage. L'état propre d'un tel système est donc à la fois composé de matière et de lumière. Ces deux états qui ont longtemps semblé si différents sont ainsi réunis dans un seul et même état appelé **polariton**. C'est cet état si particulier qui va être le fil conducteur de cette thèse de doctorat. Au jour d'aujourd'hui, l'avantage de la lumière est sa grande contrôlabilité. On peut facilement générer des faisceaux monochromatiques et cohérents. De son côté, la matière a l'avantage de présenter des effets très riches liés à la physique quantique. Les polaritons permettent de marier ces deux avantages et d'avoir ainsi un système idéal pour non seulement la génération d'états non classiques de la lumière, mais aussi pour l'étude d'états quantiques de la matière.

L'histoire des polaritons reste une histoire récente. Bien que découverte expérimentalement il y a plus de 30 ans⁵, ce n'est que récemment que la physique des polaritons a véritablement pris de l'ampleur. Jusqu'alors, c'était leur mise en évidence expérimentale qui monopolisait une partie de la communauté scientifique. Grâce aux progrès continus dans le contrôle et la fabrication des dispositifs basés sur les semiconducteurs, la physique des polaritons et surtout celle des polaritons excitoniques, a connu de grandes avancées. Sortant de son carcan de phénomène exotique, les polaritons excitoniques sont devenus des particules contrôlables et donc utilisables. Dans le premier chapitre de ce travail, nous tacherons d'introduire ce que cache le mot *polariton*. Suite à quoi, c'est sur les cavités optiques, dispositifs indispensables à l'obtention des polaritons, que notre attention se portera. Suivra une description des excitons, pseudo-particules présentes dans les semiconducteurs qui sont de très bons prétendants pour l'observation et la manipulation des polaritons. Enfin, nous étudierons comment, des photons de cavité et des excitons de puits quantiques apparaissent les polaritons.

Leur mixité mélangeant les propriétés de la lumière et celle de la matière en ont très vite fait des candidats idéaux pour l'optique non linéaire ainsi que pour l'optique quantique. L'oscillation paramétrique optique, tout comme la génération d'états non classiques de la lumière font partie des applications possibles des polaritons. Tel que le montrera le second chapitre, cette voie de recherche est toujours aujourd'hui un

4. HOPFIELD, J. J. (1958) : Theory of the Contribution of Excitons to the Complex Dielectric Constant of Crystals. *Phys. Rev.*, **112** :1555.

5. FRÖHLICH, D., E. MOHLER, & P. WIESNER (1971) : Observation of Exciton Polariton Dispersion in CuCl. *Phys. Rev. Lett.*, **26** :554.

domaine actif qui recèle bien des interrogations à éclaircir. Apportant ma contribution personnelle dans ce domaine, nous verrons dans un second chapitre l'utilisation des polaritons pour la fabrication d'un oscillateur paramétrique optique micrométrique. Avant de voir en détail les résultats obtenus, nous introduirons brièvement quelques notions d'optique non linéaire et d'optique quantique afin d'avoir les outils nécessaires à la compréhension du phénomène étudié. Nous caractériserons notre système puis nous exposerons les résultats obtenus démontrant l'oscillation paramétrique optique dans les micropiliers étudiés. Nous terminerons ce second chapitre par une discussion sur l'étude des corrélations et nous analyserons en quoi elles nous donnent une meilleure compréhension des effets multimodes présents dans un tel système.

Plus récemment, et dû en grande partie aux continues évolutions et améliorations dans la maîtrise des procédés de fabrication et dans notre compréhension de cette pseudo-particule, les polaritons ont mis le pied dans un autre domaine de la physique plus inattendu. Dans ce dernier, les polaritons ne sont plus des candidats pour la fabrication de dispositifs, mais ils sont des systèmes permettant l'étude d'états quantiques macroscopiques de la matière, comme par exemple la condensation de Bose-Einstein ou encore la superfluidité⁶. C'est le troisième et dernier chapitre qui nous permettra d'étudier comment et en quoi ces phénomènes peuvent être présents dans la matière condensée, ainsi que les avantages et inconvénients d'un tel système par rapport à d'autres déjà existants. Nous commencerons par présenter un autre système bien documenté ayant des caractéristiques proches : les atomes ultra froids. Ce qui nous permettra d'introduire des notions clefs, comme par exemple la superfluidité et la condensation de Bose-Einstein. Suivra la démonstration de l'application aux polaritons excitoniques en cavité de concepts aussi fondamentaux que ceux précédemment cités. Pour aller plus loin, nous nous attarderons sur l'impressionnante similarité entre la physique des atomes froids et celle des polaritons, qui permettent l'observation de régime turbulent dans des fluides non classiques. Mais aussi, nous montrerons quelles peuvent être les différences et avantages de ce système hors équilibre qu'est le nôtre. Nous terminerons ce dernier chapitre par nous intéresser aux effets de polarisation de spin des polaritons ou comment générer artificiellement des défauts. Ces résultats ouvrent la voie à une grande quantité d'expériences fondamentales pour notre compréhension de la physique quantique.

Ce sont donc bien ces deux aspects qui vont nous intéresser dans ce travail : l'aspect dispositif pour l'optique non linéaire et l'optique quantique ainsi que l'aspect fluide quantique. J'espère par ce travail démontrer aux lecteurs l'intérêt et la richesse de la recherche que j'ai effectué pendant mes trois années de thèse.

6. LEGGETT A.J. : (2006) *Quantum liquids*, Oxford graduate texts.

PITAEVSKII L., & S. STRINGARI (2003) : *Bose-Einstein Condensation*, Oxford science publications.

Chapitre 1

Polaritons excitoniques en microcavité semiconductrice

Ce premier chapitre nous servira d'introduction générale à la physique des polaritons excitoniques en microcavité semiconductrice. Dans un premier temps nous nous intéresserons au concept même de polariton (partie A). Puis, nous nous intéresserons à la partie photonique de notre système : la microcavité semiconductrice (partie B). Viendra ensuite, l'étude de la partie électrique qui correspondra aux excitons dans les puits quantiques (partie C). Et enfin, nous verrons comment, couplant cette partie lumière et cette partie matière, on peut faire apparaître, sous certaines conditions, les polaritons excitoniques en microcavité semiconductrice. Suite à quoi nous conclurons en détaillant certaines de leurs propriétés ainsi que les approximations dans lesquelles nous nous placerons (partie D).

Ce chapitre étant un chapitre d'introduction simplifié et non exhaustif à la physique des polaritons excitoniques, les personnes déjà familières avec cette physique sont invitées à se reporter directement au chapitre 2 ou 3.

Sommaire

A	Polaritons	6
B	Microcavités semiconductrices	8
B.1	Cavités optiques	9
B.2	Microcavités semiconductrices	11
B.3	Couplage à l'environnement	12
C	Excitons de puits quantiques	13
C.1	Physique des semiconducteurs et excitons	14
C.2	Puits quantiques et excitons	16
C.3	Interactions exciton-exciton	18
D	Polaritons excitoniques	19
D.1	Interaction exciton-photon de cavité	19
D.2	Base excito-photonique et base polaritonique	21
D.3	Interaction polariton-polariton	22
	Conclusion	24
	Bibliographie du chapitre 1	25

A Polaritons

Avant de rentrer dans le vif du sujet, une précision d'ordre sémantique peut être faite. Le choix des noms donnés aux entités traitées comme des particules (comme par exemple les phonons, magnons, plasmons, rotons, etc.), étant purement arbitraire, il peut en résulter une certaine confusion. Nous parlerons dans cette thèse de *polariton* qui tire son nom du préfixe "*polari-*" lié à la polarisabilité diélectrique ou magnétique d'un milieu et du suffixe "*-on*" utilisé pour désigner une particule. Il existe une autre quasiparticule appelée *polaron*, dont le nom est lui aussi composé d'un préfixe se référant à la polarisabilité d'un milieu, mais elle désigne un phénomène bien distinct. Ces dernières apparaissent grâce à l'interaction d'un électron avec la polarisation électrique qu'il induit dans le milieu de propagation. Phénomène, qui comme nous le verrons dans ce qui suit, n'a pas grand chose à voir avec nos *polaritons* qui eux sont liés à la propagation de photons et non pas d'électrons.

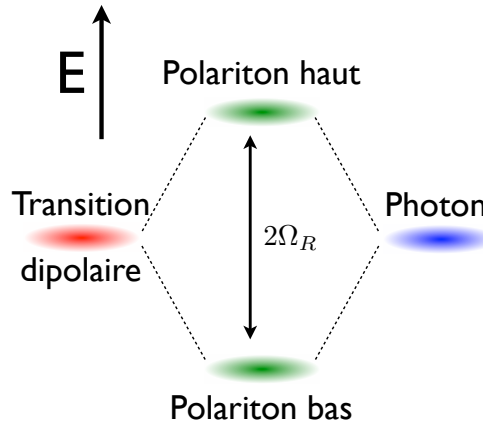


FIGURE 1.1 – Schéma énergétique des polaritons. Le niveau rouge correspond à une transition dipolaire électrique ou magnétique, tandis que le niveau bleu de droite à l'énergie des photons. Les deux niveaux verts correspondent aux niveaux d'énergie des deux polaritons ainsi formés : le polariton haut et le polariton bas.

Les polaritons sont des quasiparticules qui apparaissent lorsque une onde électromagnétique interagit fortement avec une transition dipolaire électrique ou magnétique. La dite transition dipolaire est caractérisée par sa faculté à émettre ou à absorber des photons à une énergie bien définie. Lorsqu'un mode photonique de même énergie interagit avec cette transition, si la dispersion en énergie de la transition ainsi que celle du mode photonique associé est assez faible, alors on observe une répulsion des niveaux d'énergie des photons et de celui de la transition, comme schématisé sur la figure 1.1. Ce phénomène peut se comprendre comme une hybridation entre l'émetteur (la transition) et la lumière émise (le mode du champ électromagnétique). Les deux modes résultants peuvent être interprétés en termes de pseudo-particules appelées polaritons. Deux types de polaritons apparaissent : les polaritons hauts (appelés *Upper Polaritons* ou *UP*) et les polaritons bas (appelés *Lower Polaritons* ou *LP*). Comme nous le verrons pour le cas des polaritons excitoniques, ces deux polaritons sont complémentaires. La

distance énergétique entre les deux niveaux polaritoniques est appelée l'écartement de Rabi. Ce dernier dépend, comme son nom l'indique, de la fréquence de Rabi.

Pour comprendre d'où vient cet effet de répulsion des niveaux, revenons rapidement sur l'interaction entre une transition dipolaire et un mode du champ électromagnétique. Pour simplifier prenons le cas d'une transition atomique entre deux niveaux, appelés $|1\rangle$ et $|2\rangle$, distant d'une énergie E_{12} . Lorsque que l'électron de l'atome passe du niveau excité $|2\rangle$ au fondamental $|1\rangle$, il émet un photon d'énergie $E_{12} = \hbar\omega_0$. Et réciproquement, si un photon est absorbé par un électron de l'atome dans son état fondamental, alors ce dernier passe dans un état excité d'énergie $E_1 + \hbar\omega_0$. Dans l'espace libre un tel processus est déterminé par le couplage entre le mode du champ (photon d'énergie $\hbar\omega_0$) et la transition atomique.

Intéressons-nous à ce couplage. Soit le Hamiltonien de couplage entre le champ électromagnétique et l'électron de l'atome, caractérisé par l'opérateur potentiel vecteur $\hat{\mathbf{A}}$ et d'impulsion $\hat{\mathbf{p}}$:

$$H_{dip} = \frac{e}{m_0} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$$

avec $-e$ la charge de l'électron et m_0 sa masse. On peut donc définir la constante de couplage entre un état à un photon avec l'électron dans le niveau fondamental, et l'état à zéro photon avec l'électron dans son état excité : $\hbar\Omega_R = D_{ef}E_0$ avec $E_0 = \sqrt{\hbar\omega_0/2\epsilon_0\mathcal{V}}$ l'énergie du champ du vide pour un mode d'énergie $\hbar\omega_0$ et D_{ef} le moment dipolaire effectif de la transition. ϵ_0 est la permittivité du vide et $\mathcal{V}$ la taille d'un volume arbitraire de quantification. Lorsque l'on multiplie par N le nombre d'atome (chacun considéré isolé), on a $\Omega_R(N) = \sqrt{N}\Omega_R$. C'est en 1937 que I. I. Rabi [1] démontra la présence de ce phénomène dans les dipôles magnétiques de spin 1/2, soumis à un champ magnétique.

Plaçons maintenant l'atome dans une cavité à résonance avec la transition. Cela permet entre autre de sélectionner un seul mode du champ électromagnétique (pour plus de détail sur les cavités optiques, voir la partie B). Cela se traduit par une augmentation de la constante de couplage d'un facteur $Q\lambda^3/V$ avec Q le facteur de qualité de la cavité, λ la longueur de la cavité et V le volume de la cavité. Cette augmentation du couplage est aussi appelée effet Purcell [2]. Synthétiquement on force notre émetteur à n'émettre que dans un seul mode, ce qui a pour effet de "renforcer" ce couplage. Ce régime est appelé régime de **couplage faible** (voir figure 1.2). Lorsque le couplage devient plus important que les pertes du système, alors la modification apportée par ce couplage champ-matière ne peut plus être traitée en termes d'effet Purcell. L'hybridation entre l'émetteur et la lumière est dans ce cas si important que malgré les pertes, il y a levé de la dégénérescence entre la transition et le mode du champ. Un photon émis par une transition pourra interagir à nouveau avec cette transition, d'où la présence d'un phénomène d'hybridation lumière-matière. Ce régime de **couplage fort** est caractérisé par une fréquence de Rabi plus importante que les pertes associées au système (figure 1.2) : $\gamma < \Omega_R < \omega_0$. Ce couplage est décrite par ce Hamiltonien de couplage suivant :

$$H_{coupl} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_R (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger)$$

Avec respectivement $\hat{a}^{(\dagger)}$ et $\hat{b}^{(\dagger)}$ les opérateurs bosoniques de création (annihilation) d'un photon et d'une excitation dipolaire, associée à un vecteur d'onde $\mathbf{k}$. On peut

distinguer un autre cas encore. Lorsque $\omega_0 \leq \Omega_R$, on a un régime dit **couplage ultra-fort** [3]. Il donne lieu à de riches et nouveaux effets physiques [4].

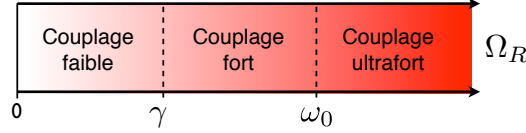


FIGURE 1.2 – Différents régimes de couplage en fonction de la fréquence de Rabi du vide Ω_R . On a un régime de couplage faible pour $\Omega_R < \gamma$ les pertes ; un régime de couplage fort pour $\gamma < \Omega_R < \omega_0$ la fréquence de la transition et un régime de couplage ultra-fort pour $\omega_0 \leq \Omega_R$.

La nature du régime dans lequel le système est choisi, dépend de la fréquence de Rabi du vide associée. Cette dernière peut être modulée d'un système à l'autre, via essentiellement Q le facteur de qualité de la cavité et N la densité de transition dipolaire (qui peut correspondre à une densité atomique, excitonique ou encore électronique) et même dans certains cas modulée à même le système [5, 6]. Pour notre part, nous travaillerons toujours dans le régime de couplage fort avec des fréquences de Rabi du vide typiquement de l'ordre de 10^{-2} eV, des transitions de l'ordre 1 eV et enfin des pertes de l'ordre 10^{-4} eV. Pour finir, faisons une analogie avec un système mécanique. Soient deux pendules couplés par un ressort d'une certaine raideur. Si cette raideur est nulle, alors les deux pendules oscillent indépendamment l'un de l'autre. Si la raideur est non nulle alors leurs oscillations sont perturbées par le ressort, ce qui correspond au régime de couplage faible. Maintenant, si la raideur est importante alors les deux pendules ne pourront osciller que conjointement, c'est l'équivalent du régime de couplage fort. Les fréquences d'oscillations possibles dépendent de la masse de chaque pendule et peuvent être soit en phase soit déphasés l'un par rapport à l'autre. Ces deux modes d'oscillation sont assez analogues aux polaritons. Pour les polaritons, c'est la transition dipolaire et la lumière qui jouent le rôle des oscillateurs.

Pour le moment n'allons pas plus loin dans la description des polaritons. Par souci de compréhension, cette description sera faite dans le cadre particulier des polaritons excitoniques. Avant cela, revenons sur les cavités optiques qui sont un élément essentiel pour créer des polaritons.

B Microcavités semiconductrices

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux microcavités semiconductrices. Comme nous venons de le voir, la cavité optique est un système nécessaire pour la création de polaritons. Dans un premier temps (partie B.1), nous traiterons du cas général de la cavité optique autrement appelée cavité Fabry-Perot. Puis, nous focaliserons notre attention sur les microcavités semiconductrices en particulier (partie B.2). Enfin, nous nous intéresserons au couplage d'une cavité avec son environnement (partie B.3).

B.1 Cavités optiques

Dans la partie précédente, nous avons parlé de mettre un système possédant une transition dipolaire dans une cavité. La cavité a pour objectif de sélectionner un mode du champ électromagnétique. Comme nous l'avons vu, cela permet d'augmenter le couplage entre la transition et le champ. Une cavité correspond à un résonateur optique, aussi appelée cavité Fabry-Pérot, qui tire son nom de C. Fabry et A. Perot, qui ont pour la première fois utilisé ce dispositif comme un interféromètre pour étudier l'atmosphère en 1913 [7].

Ce dispositif est assez simple. Il consiste en deux miroirs face à face, dans le cas d'une cavité planaire. En fonction de la distance entre ces deux miroirs, on peut sélectionner la longueur d'onde souhaitée. Chaque miroir est caractérisé par un coefficient de réflexion et de transmission. Le dispositif complet (les deux miroirs espacés), comme représenté sur la figure 1.3, a un coefficient de transmission et de réflexion très dépendant de la fréquence. Certaines énergies bien quantifiées du champ peuvent traverser la cavité, alors que pour d'autres, la cavité est totalement opaque. On peut montrer que $p\lambda_c = 2n_cL$ avec λ_c , n_c et L respectivement la longueur d'onde pour laquelle la cavité est transparente, l'indice optique de la cavité et la largeur de la cavité et où p est un entier naturel positif (voir figure 1.3). À chaque p correspond un mode propre du champ de cavité.

Plus généralement, dans un milieu d'indice optique n_c , la relation qui lie l'énergie du champ $\hbar\omega_c$ avec son vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est la suivante :

$$E_c(\mathbf{k}) = \frac{\hbar c}{n_c} |\mathbf{k}| = \frac{\hbar c}{n_c} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (1.1)$$

avec c la vitesse de la lumière. La dispersion associée est représentée figure 1.3. Si maintenant on étudie le cas d'une cavité planaire, la relation reste correcte. Seulement k_z , si z est la direction normale aux plans des miroirs, est quantifié.

$$k_z = |\mathbf{k}| \cos(\theta) = \frac{\pi}{n_c L} p \quad (1.2)$$

où θ est l'angle d'incidence de la lumière (angle entre la normale aux miroirs Oz et le faisceau incident). Quant aux autres directions de l'espace, celles dans le plan, aucune contrainte ne s'applique sur elles. Si on prend la direction Ox colinéaire à la composante dans le plan du vecteur d'onde du faisceau incident, on a la relation suivante : $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_y)^T = (|\mathbf{k}| \sin(\theta), 0)^T$. On voit donc qu'il y a une relation directe entre l'angle d'incidence d'un faisceau sur la cavité et le vecteur d'onde dans le plan. Sur la figure 1.3, on peut voir le profil de la dispersion dans un tel cas (2D) pour $p = 1$.

Dans le cas de $k_{\parallel} \ll k_z$, ce qui sera notre cas tout au long de ce manuscrit, on peut faire l'approximation dite parabolique suivante (en pointillés sur la figure 1.3) :

$$\hbar\omega_c(k_{\parallel}) \simeq \frac{\hbar c k_z}{n_c} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_c} \quad (1.3)$$

Avec $m_c = n_c \hbar c / \hbar c$ la masse associée aux photons de cavité. Pour se donner un ordre d'idée, dans les cavités employées, nous avons $m_c \simeq 5.10^{-7} m_e$ avec m_e la masse d'un électron.

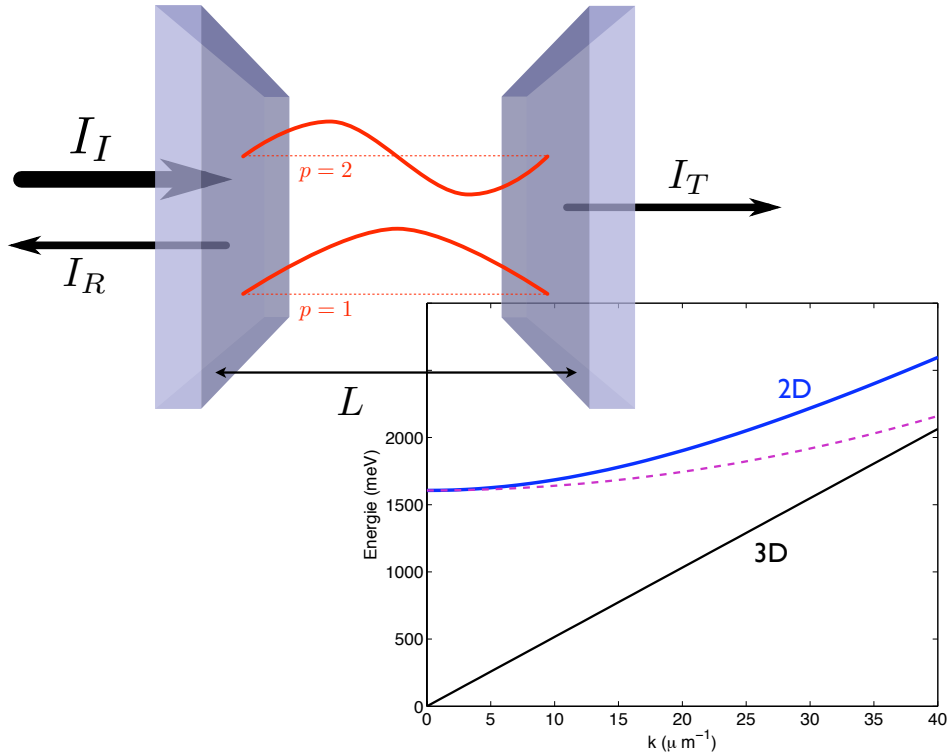


FIGURE 1.3 – Dans la partie supérieure, est schématisé une cavité optique. Les deux rectangles violets représentent les miroirs. Les flèches noires montrent le faisceau incident I_I , le faisceau réfléchi I_R et le faisceau transmis I_T . Quant aux traits rouges à l'intérieur de la cavité, ils symbolisent les 2 premiers modes propres du champ de cavité. Le graphique inférieur, indique en bleu la dispersion en énergie du mode fondamental ($p = 1$) d'une cavité planaire de largeur $L = 100$ nm en fonction du moment dans le plan. Par comparaison, est tracée en noir la dispersion en énergie pour un champ non confiné (3D). La ligne pointillée indique la dispersion dans l'approximation parabolique ($n_{cav} = 3.8$).

Dans ce travail, nous souhaitons travailler à des longueurs d'onde telles que $\lambda \simeq 800$ nm, pour correspondre au mieux aux expériences réalisées. Ce qui implique que L doit être égale à la moitié de la longueur d'onde soit, à une longueur inférieure au micron, d'où leur nom de *microcavité*.

B.2 Microcavités semiconductrices

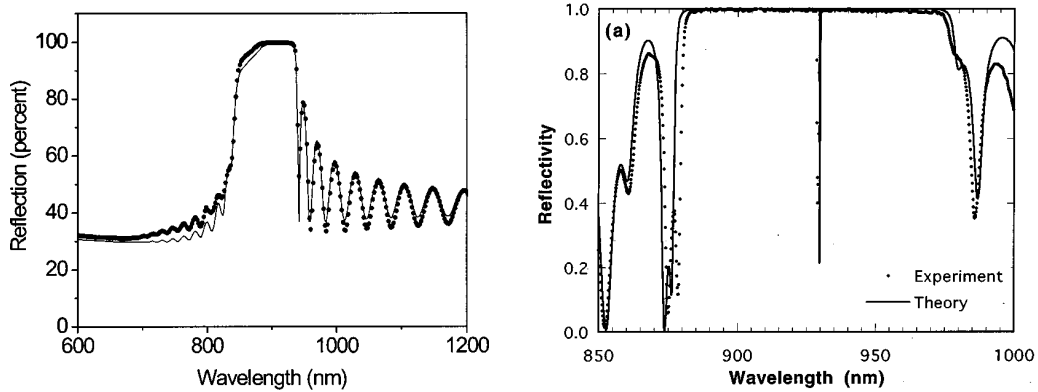


FIGURE 1.4 – À gauche, un exemple de spectre obtenu pour la réflectivité d'un miroir de Bragg en GaAs (extraite de la référence [8]) et à droite, un exemple de celui d'une microcavité vide (extraite de la référence [9]).

Les microcavités semiconductrices ont pour spécificité en plus de leur taille réduite, la nature des miroirs employés. Les miroirs métalliques typiques ne peuvent pas être utilisés ici car, aux longueurs d'onde souhaitées, leur réflectivité n'est pas suffisante. On utilise des miroirs appelés miroir de Bragg du nom de leur inventeur William Lawrence Bragg. Grâce à eux, on peut atteindre, avec des dimensions micrométriques, une réflectivité supérieure à 99% (figure 1.4 de gauche). De plus, cette réflectivité est plus contrôlable que dans le cas de réflecteur métallique.

Ces miroirs consistent en une alternance de milieux d'indices diélectriques différents et d'épaisseurs le quart de la longueur d'onde que l'on souhaite réfléchir. Un faisceau lumineux frappant la surface de l'échantillon sous incidence normale, subit à chaque interface des réflexions qui interfèrent entre elles, de façon destructive. Il en résulte une réflectivité très importante qui ne sera limitée que par la rugosité aux interfaces, ainsi que par le nombre d'alternance. Bien entendu, la réflectivité d'un tel miroir est fortement dépendante de la longueur d'onde. Dans les cas qui nous intéressent, la *stop-band* est de l'ordre de 200 nm (figure 1.4 de gauche) et dépend de la différence d'indice optique entre les deux milieux constitutifs.

Pour créer la cavité Fabry-Perot souhaitée, il nous faut disposer de deux miroirs de Bragg séparés d'une distance L_c . Le champ à l'intérieur de la cavité n'est pas confiné exclusivement entre les deux miroirs. Il pénètre dans les miroirs de Bragg. La longueur effective de notre cavité sera donc $L = L_c + L_{DBR}$ avec L_{DBR} la longueur de pénétration dans le miroir de Bragg [10]. Il faut donc penser un tel système dans son ensemble. La clef est la longueur d'onde avec laquelle on souhaite travailler. D'elle, découlera

l'épaisseur des couches des miroirs de Bragg et la largeur de la cavité L_c . Lorsque la longueur d'onde de la cavité coïncide avec la bande d'arrêt des miroirs, on obtient une réflectivité comme montrée sur la figure 1.4 de droite, typique de ce type de résonateur. Au centre de la *stop-band*, on a un pic très étroit où la réflectivité est faible. Ce pic correspond au premier mode du champ de la cavité. La largeur de ce pic, appelée élargissement de photon de cavité, est reliée au temps de vie dans la cavité de ces derniers : $\tau_C = \hbar/\gamma_C$, avec τ temps de vie est γ_C la largeur de raie des photons. Typiquement, la largeur de raie des cavités de GaAs utilisées ou simulées est de l'ordre de 0.1meV, ce qui donne un temps de vie des photons dans la cavité d'environ 5 ps. Comme nous le verrons par la suite, ce temps de vie extrêmement court ne sera pas sans incidence sur la physique des polaritons. Une dernière quantité communément utilisée dans la physique en cavité, et dont nous avons déjà parlé dans la première partie, est le facteur de qualité de la cavité $Q = \omega_C/\gamma_C$, avec ω_C la fréquence propre de la cavité (de l'ordre de 10000 pour ce qui nous concerne).

Bien entendu, d'autres géométries de cavité peuvent être imaginées et fabriquées. Nous reviendrons dans le chapitre 2 sur d'autres dimensionnalités ainsi que leurs intérêts.

B.3 Couplage à l'environnement

Dans le formalisme Hamiltonien de la seconde quantification, qui sera le formalisme utilisé dans ce manuscrit, l'énergie cinétique du champ électromagnétique de cavité est décrit par le Hamiltonien suivant [11] :

$$H_C = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_C(\mathbf{k}) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.4)$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde dans le plan ($\mathbf{k}_{\parallel}$) ; ω_C la dispersion des photons de cavité précédemment décrite à l'équation (1.1). $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ et $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ correspondent respectivement à l'opérateur annihilation et à l'opérateur création d'un photon de cavité suivant les règles de commutation bosonique : $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$. Notons que par la suite le terme 1/2 sera négligé pour la simple raison qu'il est constant et que l'origine des énergies peut être choisie arbitrairement. Les photons de cavité sont donc des bosons bidimensionnels sans interaction.

L'introduction d'un champ électromagnétique dans la cavité s'accompagne de pertes radiatives par le même canal. Ceci correspond à un couplage entre les excitations de cavité et le champ électromagnétique extérieur, indispensable à l'observation de la dynamique intracavité. Mais il existe d'autres types de pertes, qui peuvent être radiative ou non, mais qui ne permettent pas l'observation de la dynamique interne à la cavité. Un d'entre eux, par exemple, correspond à un couplage entre le champ et les modes dits "guidés". Pour un angle d'incidence important, on a réflexion totale à l'intérieur de la cavité [12]. Ce processus n'est pas sans intérêt, loin de là, on citera par exemple les fibres optiques, qui sont basées sur ce phénomène. Mais dans notre cas, ces modes à grand $\mathbf{k}_{\parallel}$, ont un gros inconvénient par rapport aux modes non-guidés. Ils sont compliqués à extraire, donc à observer. Dans la suite du manuscrit, étant donné que nous travaillerons avec des $\mathbf{k}_{\parallel}$ petits, nous négligerons ces types de pertes.

Intéressons-nous plus en détail aux pertes radiatives. Comme nous l'avons dit, une cavité est caractérisée par, entre autre sa largeur de raie γ_C . Le mode interne à la cavité est couplé à l'extérieur considéré comme un continuum des modes du champ [13]. Le Hamiltonien de couplage peut s'écrire :

$$H_{C-ext} = \int d\omega \left(\sum_{\mathbf{k}} \hbar \Gamma[\omega] \hat{a}_{\mathbf{k},\omega}^\dagger \hat{\alpha}_{\omega,\mathbf{k}} + h.c. \right) \quad (1.5)$$

avec, $\hat{\alpha}_{\omega,\mathbf{k}}$, l'opérateur de destruction d'un photon de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et d'énergie $\hbar\omega$, à l'extérieur de la cavité. $\Gamma[\omega]$ correspond au couplage entre le champ intérieur et l'extérieur, et varie lentement avec ω . Cette méthode de traitement est dite approximation du quasi-mode [13].

On peut écrire l'équation Heisenberg régissant la dynamique du mode $\hat{a}_{\mathbf{k}}$:

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_{\mathbf{k},\omega}}{dt} = \hbar\omega_C(\mathbf{k})\hat{a}_{\mathbf{k},\omega} + \int d\omega \hbar \Gamma[\omega] \hat{\alpha}_{\omega,\mathbf{k}}(t) \quad (1.6)$$

En faisant de même avec $\hat{\alpha}_{\omega,\mathbf{k}}$ on obtient une équation résolvable. En réinjectant ce résultat dans (1.6), on obtient :

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k},\omega}}{dt} = -i\omega_C(\mathbf{k})\hat{a}_{\mathbf{k},\omega} - \frac{\gamma_C}{2} - i\hat{F}_{\mathbf{k}}^C(t) \quad (1.7)$$

Avec $\hbar\gamma_C = \frac{2\pi}{\hbar}\Gamma^2$ la largeur de raie et

$$\hat{F}_{\mathbf{k}}^C(t) = \int d\omega \hbar \Gamma[\omega] \hat{\alpha}_{\omega,\mathbf{k}}(t) e^{-i\omega t} \quad (1.8)$$

la force de Langevin associée au champ extérieur qui agit sur le mode de cavité associé à l'opérateur $\hat{a}_{\mathbf{k}}$.

Nous voilà donc en possession de notre champ électromagnétique confiné avec une largeur de raie très étroite. Cela nous permet d'espérer avoir un bon couplage avec une transition dipolaire. Reste maintenant à disposer de cette transition dipolaire. Parmi la variété des systèmes donnant lieu à une telle transition, dans cette thèse, nous considérerons les **excitons de puits quantiques**.

C Excitons de puits quantiques

Ici, nous tacherons dans un premier temps d'introduire les excitons (partie C.1). Nous verrons comment ces pseudo-particules apparaissent dans un semiconducteur massif. Puis, nous verrons l'effet d'un confinement quantique sur ces pseudo-particules (partie C.2). Enfin, nous nous intéresserons à certaines de leurs propriétés et en particulier à leurs interactions (partie C.3).

Le choix des excitons peut être qualifié d'historique au vu du travail publié par J. J. Hopfield [14] en 1958. Il fit la prédiction théorique de l'existence des polaritons dans un cristal semiconducteur massif présentant une transition excitonique. Comme nous allons le voir, les excitons sont des pseudo-particules. Issus historiquement de la physique des semiconducteurs [15], d'autres types d'excitons ont depuis été mis en évidence dans d'autres milieux, comme par exemple les solides organiques [16].

C.1 Physique des semiconducteurs et excitons

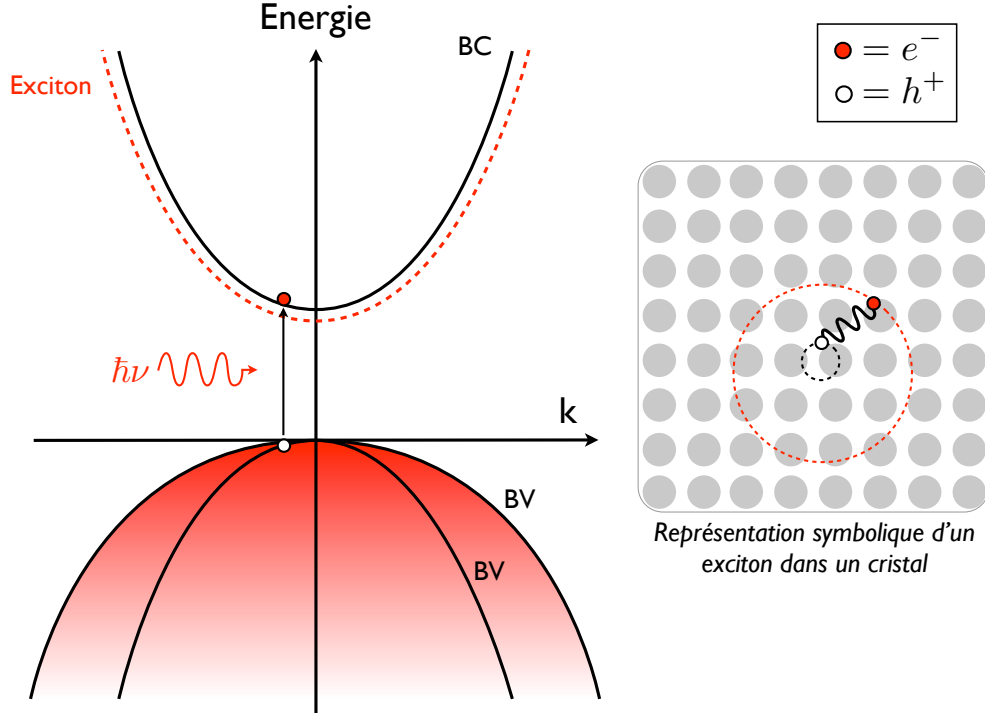


FIGURE 1.5 – Schéma de la dispersion, en fonction de moment d'un semiconducteur à gap direct, avec en pointillés rouges le niveau excitonique. On peut voir, sur la gauche, le processus d'absorption d'un photon d'énergie $\hbar\nu$ donnant lieu à la promotion d'un électron e^- dans la bande de conduction et à la création d'un trou h^+ dans la bande de valence. À droite, est schématisé dans l'espace réel, l'appareillement de l'électron et du trou donnant lieu à un exciton. En pointillés sont représentées les trajectoires respectives du trou et de l'électron dans un cristal, schématisé par les cercles gris.

Les semiconducteurs sont des matériaux isolants à température nulle et métalliques à plus haute température (en l'absence de dopage). Le niveau de Fermi d'un tel matériau se situe dans un *gap* d'énergie, autrement appelé bande interdite, comme représenté sur la figure 1.5. Encadrant ce *gap*, nous avons en-dessous du niveau de Fermi, la bande de valence (BV) qui est remplie d'électrons et au-dessus la bande de conduction (BC) vide à température nulle. À l'aide d'un photon d'énergie égale ou supérieure à l'énergie du *gap*, on peut faire passer un électron dans la bande de conduction. La résistivité d'un tel matériau étant fortement liée à la densité d'électron dans la bande de conduction, il va de soit qu'un tel processus change drastiquement les propriétés électroniques du semiconducteur. C'est d'ailleurs le processus inverse qui est couramment utilisé dans des dispositifs tels que les LEDs, ou encore les lasers à semiconducteur. Ce processus d'excitation a pour résultat de laisser une place vacante dans la bande de valence, appelée trou et notée h^+ , de charge positive. Si on fait l'approximation d'un

semiconducteur à bande parabolique, en prenant l'origine des énergies au sommet de la bande de valence, alors, l'énergie de la bande de valence s'écrit $E_v = -\hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m_h$ et pour la bande de conduction $E_c = E_g + \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m_e$ avec E_g l'énergie du *gap* et m_h et m_e respectivement la masse des trous et celle des électrons. L'électron passé dans la bande de conduction, noté e^- , étant de charge négative, une attraction coulombienne va apparaître entre ces deux particules. Cela a pour effet de diminuer l'énergie de la paire électron-trou. C'est là qu'apparaissent les **excitons**. Pour voir un développement complet sur la théorie des excitons, je vous renvoie au chapitre 1 de la référence [17]. La paire électron-trou peut être traitée formellement comme une pseudo-particule appelée exciton, qui a pour coordonnées relatives $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h$, un centre de masse de coordonnée $\mathbf{R} = (m_e \mathbf{r}_e + m_h \mathbf{r}_h) / M$, où $M = m_e + m_h$ la masse de l'exciton. À noter que cette pseudo-particule est composée de deux particules chargées mais elle a, quant à elle, une charge totale nulle. L'énergie de cet exciton peut être écrite comme suit :

$$E_X(\mathbf{k}, n) = E_g - E_b(n) + \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2M} \quad (1.9)$$

avec ici l'énergie qui dépend du vecteur d'onde du centre de masse $\mathbf{k}$ et de la densité électronique n . $E_b(n)$ correspond à l'énergie de liaison et naît de l'interaction coulombienne électron-trou.

$$E_b(n) = \frac{\hbar}{2\mu a_B^* n^2} = \frac{R_y^*}{n^2} \quad (1.10)$$

où $\mu = m_e m_h / (m_e + m_h)$, la masse réduite de l'exciton et $a_B = \hbar \epsilon / e^2 \mu$, son rayon de Bohr (d'environ de 100 Å dans le GaAs) avec ϵ est la constante diélectrique du milieu. Le spectre d'absorption correspondant à un tel matériau est schématisé sur la figure 1.7. Les excitons se traduisent par un pic, à une énergie inférieure à celle de la transition électron-trou.

Une analogie couramment utilisée pour schématiser les excitons est l'atome d'hydrogène et son orbite 1s. Le trou jouerait le rôle du proton (de par sa masse importante), comme représenté sur la droite de image 1.5. L'analogie est poussée généralement jusqu'à parler, en plus du rayon de Bohr a_B^* , d'énergie de Rydberg des excitons R_y^* pour quantifier l'énergie de liaison (équation 1.10). Pour le GaAs, on a $R_y^* \sim 4.5$ meV.

Les excitons peuvent être considérés comme des particules [18], alors, on peut leur associer un opérateur de création et un d'annihilation, respectivement $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$. Le Hamiltonien associé s'écrira :

$$H_X = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_X(\mathbf{k}) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \quad (1.11)$$

Il peut être montré que l'exciton dans l'approximation de faible densité électronique est un boson [17, 19, 20] (faible devant a_B^{-3}). Ce qui peut se comprendre en termes de distance inter-exciton plus importante que son rayon de Bohr. Ici, nous ne traiterons pas de l'écart à la bosonité des excitons, car les régimes dans lesquels nous travaillons sont de densité trop faible pour espérer expérimenter cet écart.

Les excitons ne sont pas les seules particules composites qui existent dans les semiconducteurs. Biexcitons ($2h^+ + 2e^-$), trions ($h^+ + 2e^-$), sont autant de pseudo-particules qui peuvent être mises en évidence dans ces systèmes. Cela dit, étant des

appareilllements d'ordre supérieur, leur stabilité ainsi que leurs effets seront considérés négligeables.

Voilà donc notre transition dipolaire qui donne lieu au processus suivant : absorption d'un photon $\rightarrow$ création d'un exciton ; destruction d'un exciton $\rightarrow$ émission d'un photon. Il nous reste un souci. Les excitons de *bulk*, dont on parle ici, lorsqu'ils se détruisent, émettent des photons dans toutes les directions de l'espace. Pour obtenir nos polaritons, il nous faut coupler le plus efficacement possible les photons ainsi émis aux excitons. De plus, au vu des dimensionnalités de notre cavité (micrométrique), il nous faut nous intéresser aux excitons lorsque le système considéré est un **puits quantique**.

C.2 Puits quantiques et excitons

De manière générale, en mécanique quantique, ce qui est appelé puits quantique est une zone de l'espace où une particule donnée subit un minimum de potentiel. Le principal effet d'un tel puits est, s'il est assez profond en énergie, de donner naissance à une discrétisation des niveaux d'énergie de cette particule. Cela dit, le terme "puits quantique" désigne aussi plus spécifiquement un type d'hétérostructure semiconductrice, dans laquelle les électrons de la bande de conduction et les trous de la bande de valence "subissent" ce puits de potentiel. Cette structure est composée d'une couche du milieu semiconducteur qui nous intéresse, entourée par un semiconducteur de *gap* plus grand, comme représenté figure 1.6. Il y a donc discontinuité dans la direction de croissance, de l'énergie. Il en résulte, comme schématisé figure 1.6, une discrétisation de certains niveaux. L'énergie de confinement des niveaux quantifiés des trous comme des électrons dépend directement de la largeur L du puits et dans le cas d'un puits de potentiel infini, on peut écrire :

$$E_p^{e/h} = p^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_{e/h} L^2} \quad (1.12)$$

avec $m_{e/h}$ la masse des électrons/trous et p le nombre quantique associé aux niveaux confinés. Dans la suite de ce travail, seul les excitons associés au niveau $p = 1$ seront considérés parce que les suivants sont éloignés en énergie de $4R_y^* \sim 20$ meV. Un effet direct de ce confinement est d'augmenter l'énergie du *gap* effectif : $E_g^{ef} = E_g + E_1^e + E_1^h$. Par conséquent, cela va aussi modifier l'énergie des excitons qui sont sensibles au *gap* effectif.

Le schéma 1.7 montre l'effet de la dimensionnalité d'un semiconducteur sur son absorption. On peut y voir comment cette réduction modifie le profil d'absorption des

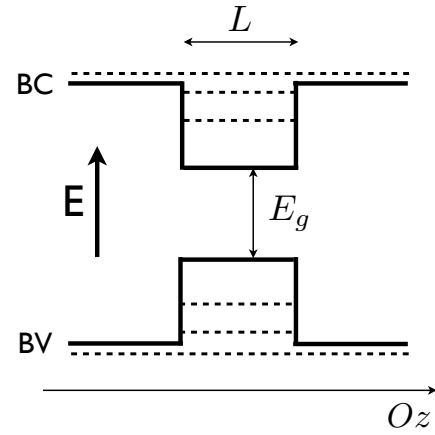


FIG. 1.6 – Énergie en fonction de la direction de croissance Oz d'un puits quantique de largeur L pour une vecteur d'onde $\mathbf{k} = 0$ avec la bande de conduction (BC) et la bande de valence (BV). En pointillé sont indiqués deux niveaux confinés et un non confiné dans le puits.

photons en racine carrée pour le *bulk*, en marches d'escalier pour le 2D (plan), en pics décroissants en racine carrée pour le 1D (fil), et enfin en delta de Dirac pour le 0D (boîte).

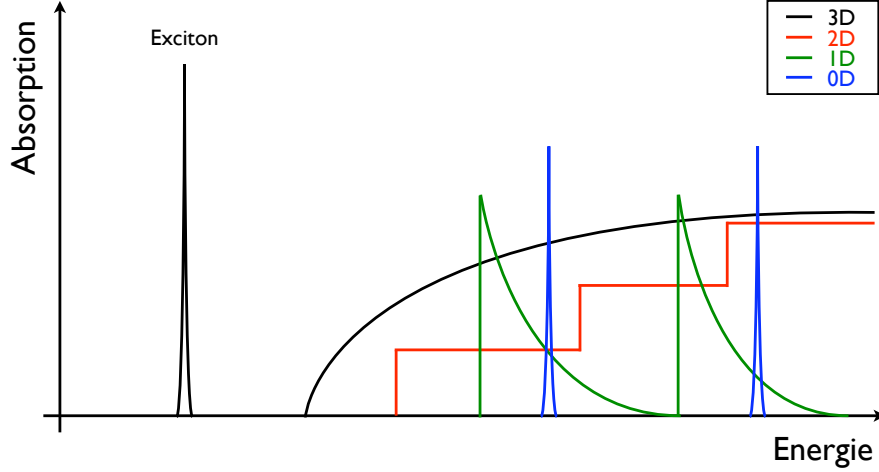


FIGURE 1.7 – Absorption en fonction de l'énergie d'un semiconducteur "bulk" (3D) en noir, puits quantique (2D) en rouge, filaire (1D) en vert et boîte (0D). La dimensionnalité du système ne change pas le profil d'absorption des excitons et l'énergie de liaisons augmente lorsqu'on réduit la dimensionnalité du système.

Analysons rapidement l'effet du confinement sur les excitons. Dans le cas où, $L \gg a_B$ alors on observe que la dynamique dans les directions du plan des excitons n'est pas perturbée. Dans le cas où $L < a_B$, l'énergie de liaison $E_b(n)$ change. Elle augmente. Dans un cas purement 2D, on a le rayon de Bohr de l'exciton 2D qui est deux fois plus grand que pour le cas 3D ($a_B^{*2D} = 2a_B^{*3D}$) et l'énergie de liaison (Rydberg) est multipliée par quatre ($R_y^{*2D} = 4R_y^{*3D}$). Ce qui nous permet de séparer d'autant plus le niveau excitonique de la bande de conduction.

Comme le montre schématiquement la figure 1.7, ce pic a une certaine largeur γ_X . Comme nous l'avons fait précédemment pour la cavité, cette largeur peut être associée à un temps de vie des excitons dans le puits quantique. Contrairement aux cavités, ce paramètre est moins bien maîtrisé. Il est principalement dû aux rugosités d'interface et peut se traduire dans les équations du mouvement par un terme similaire à celui de l'équation (1.5) qui couple, ici, les excitons à un réservoir excitonique. Ce qui les associe au terme de perte γ_X ainsi qu'à une force de Langevin :

$$\frac{d\hat{b}_{\mathbf{k}}}{dt} = -i\omega_X(\mathbf{k})\hat{b}_{\mathbf{k}} - \frac{\gamma_X}{2} - i\hat{F}_{\mathbf{k}}^X(t) \quad (1.13)$$

De façon similaire à ce que l'on a dit pour les modes guidés des microcavités, on a ici le même phénomène appelé : cône de lumière. Seuls les excitons ayant un vecteur d'onde dans le plan $k_{\parallel} \leq E_X/\hbar c$ peuvent émettre des photons hors du puits. Pour les autres, les photons émis sont piégés dans le puits par réflexion totale à l'intérieur du puits et donc perdus pour l'observation. Pour les mêmes raisons que précédemment ($\mathbf{k}_{\parallel}$ petit), ici aussi ces pertes seront négligées.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas parlé d'un des aspects importants des excitons. Contrairement aux photons, les excitons peuvent être considérés comme des bosons **en interaction**. Et comme nous allons le voir tout au long de cette thèse, c'est en grande partie grâce à ces interactions que les polaritons excitoniques ont un si grand intérêt.

C.3 Interactions exciton-exciton

Les excitons sont des particules électriquement neutres, ce n'est pas pour autant qu'elles n'interagissent pas. Étant composés d'électrons et de trous appariés, un grand nombre d'interactions est possible. Ce problème à N corps peut être approché en considérant les excitons comme les excitations élémentaires du milieu [21] et en traitant la corrélation coulombienne comme une interaction effective entre excitons. On peut en déduire, pour les excitons, un Hamiltonien effectif de bosons en interaction. Pour aboutir au Hamiltonien effectif, on utilise une méthode [18, 20, 22] basée sur la transformation d'Usui [23]. Notons que des méthodes récentes [24, 25] aboutissent à des coefficients d'interactions différents. Toutefois, ceux-ci sont du même ordre de grandeur. En ce qui concerne la comparaison avec l'expérience, soulignons d'une part que le rayon de Bohr de l'exciton n'est pas connu très précisément (renormalisation en fonction de la densité, confinement variable du puits quantique), et que, d'autre part, la densité d'excitations n'est pas connue avec une précision très élevée (spot d'excitation inhomogène). Dans cette thèse, nous avons utilisé des coefficients issus de l'expérience et dans certains cas, nous avons étudié de façon systématique la dépendance des résultats en fonction de la valeur de l'interaction. Dans un tel modèle on peut résumer les interactions en deux termes distincts : l'interaction dite coulombienne et celle dite de saturation ou encore de Pauli.

Interactions coulombiennes

Ce terme rendant compte des interactions exciton-exciton pourra s'écrire :

$$H_{XX} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}^{XX} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \quad (1.14)$$

avec $V_{\mathbf{q}}^{XX}$ potentiel d'interaction effectif et où nous avons négligé le terme de l'énergie cinétique renormalisé par l'interaction d'échange [18, 26].

Nous considérons le terme d'interaction effectif exciton-exciton comme un potentiel constant, de la même manière que l'interaction entre atomes dans un gaz d'atomes froids [27]. En effet, dans la suite de ce travail, nous nous intéressons essentiellement à des vecteurs d'onde petits devant a_B^{-1} . Par conséquent, le potentiel d'interaction effectif $V_{\mathbf{q}}^{XX}$ évolue peu en fonction de $\mathbf{q}$ [18, 26]. On écrit donc $V_{\mathbf{q}}^{XX} \simeq V_0^{XX}$. La valeur du coefficient d'interaction est $V_0^{XX} = \frac{6e^2 a_B}{\epsilon_A}$ [28].

Interactions de saturation

Le nature physique de cette interaction est moins évidente à saisir. Elle naît de la nature même des électrons et des trous qui composent nos excitons. Ce sont des

fermions et respectent donc le principe d'exclusion de Pauli. Si $\hat{a}$ est un opérateur d'annihilation d'un photon de vecteur d'onde $\mathbf{k}$, alors le Hamiltonien lié à cet effet peut s'écrire :

$$H_{Xsat} = - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \frac{\hbar \Omega_R}{n_{sat} A} \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} + h.c. \quad (1.15)$$

Il est intéressant de remarquer que $V_{sat} = \hbar \Omega_R / (n_{sat} A)$, la constante de saturation dépend de la fréquence de Rabi du vide Ω_R . $n_{sat} = \frac{7}{16\pi a_B^*}$ est la densité de saturation de l'exciton [18, 29, 30]. Comme son nom l'indique, au delà d'une certaine densité, on aura une diminution du couplage entre le champ et la transition dipolaire excitonique, qui tendra à empêcher la création de nouveaux excitons et donc à limiter la création de polaritons.

Dans la suite de ce travail, cette interaction de saturation sera négligée car les systèmes choisis ne permettent pas d'obtenir des effets significativement observables de ce terme [18]. Cela dit, comme l'a montré mon prédécesseur, A. Verger [31], un tel effet peut avoir un rôle déterminant dans des phénomènes, comme le blocage quantique de Coulomb.

Récapitulons : nous avons un mode du champ bien contrôlé (partie B) et une transition dipolaire elle aussi bien quantifiée (partie C). Intéressons-nous à leur interaction.

D Polaritons excitoniques

Il va bien entendu résulter des deux éléments précédemment cités (la microcavité et les excitons) les polaritons excitoniques, tant attendus. Dans un premier temps, nous verrons comment analytiquement de telles pseudo-particules apparaissent (partie D.1). Ce qui nous amènera à détailler les polaritons excitoniques et à voir les rapports qu'ils entretiennent avec les photons de cavité et les excitons (partie D.2). Et nous finirons, comme nous l'avons fait pour les excitons, par présenter les interactions agissantes entre polaritons (partie D.3). Tout au long de cette partie, nous tacherons de préciser le cadre de notre étude ainsi que les approximations qui leur sont liées.

D.1 Interaction exciton-photon de cavité

La figure 1.8 montre une représentation schématique du dispositif étudié qui comprend un puits quantique au centre d'une microcavité réalisé à l'aide de deux miroirs de Bragg. C'est de cette union de ces deux dispositifs que vont naître les polaritons.

L'interaction entre le milieu diélectrique et le champ électromagnétique se traite comme un couplage entre électrons et photons [14, 32] :

$$H_I = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \hbar G(\mathbf{q}) \left(\hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{c}_{1, \mathbf{k}+\mathbf{q}} \hat{c}_{2, \mathbf{k}}^\dagger + h.c. \right) \quad (1.16)$$

Où $\hat{c}_{i, \mathbf{k}}$ est un opérateur d'annihilation d'un électron dans la bande i . $G(\mathbf{q})$ est l'élément de la matrice du moment dipolaire électrique liée à la transition. En réécrivant cela à

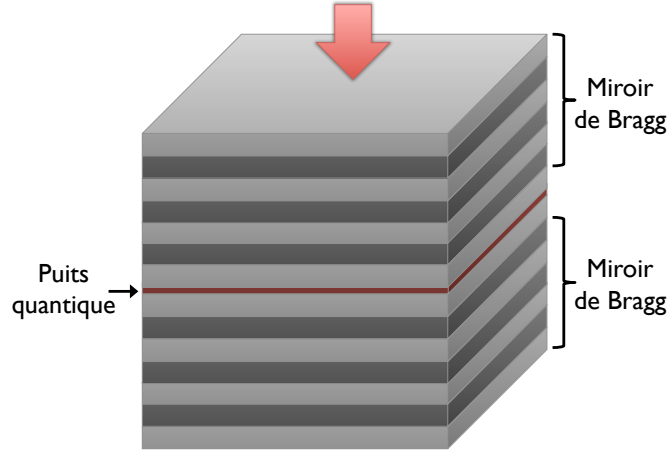


FIGURE 1.8 – Schéma d'une microcavité planaire réalisée grâce à deux miroirs de Bragg et contenant un puits quantique en son centre (en rouge). La flèche rouge représente l'excitation laser du système.

partir des opérateurs excitoniques, et en négligeant les termes anti-résonants, on obtient le Hamiltonien effectif de couplage suivant :

$$H_{XC} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \Omega_R \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) \quad (1.17)$$

Avec Ω_R la constante de couplage entre les excitons et les photons, ou fréquence de Rabi du vide (déjà mentionnée dans la partie A). Comme nous l'avons dit, cette dernière est cruciale pour obtenir le couplage fort. Elle dépend de la force d'oscillateur des excitons f , de la taille de la cavité L et surtout du recouvrement entre la fonction d'onde des excitons et celle des photons de cavité [17, 33].

$$\hbar \Omega_R = \sqrt{\frac{f e^2}{2 n_c^2 L M \epsilon_0}} \quad (1.18)$$

avec M la masse des excitons.

La fonction d'onde dans la direction de croissance des photons de cavité possède plusieurs noeuds. Si l'on place un puits quantique à un de ces noeuds, le couplage sera nul. Au contraire, si on le place à un anti-noeud, le couplage est maximal (équation (1.18)). Pour augmenter encore ce couplage, une technique employée est de multiplier le nombre de puits quantiques [34]. Dans ce cas, la constante de couplage est proportionnelle à $\sqrt{N}$, la racine carrée du nombre de puits. Cela vient du fait qu'en multipliant le nombre de puits, on augmente la force d'oscillation globale des excitons par N [35].

La figure 1.9 montre deux résultats expérimentaux de mise en évidence de couplage fort qui donne lieu à un dédoublement du pic d'absorption de la cavité (voir figure 1.4). À gauche, la première mise en évidence de ce phénomène dans des microcavités à puits quantiques par C. Weisbuch *et al.*, en 1992 [36], et à droite, des résultats plus récents

de J. Bloch *et al.*, en 1998 [34]. On peut voir que lorsque l'on a un bon accord entre la fréquence de la cavité et celle des excitons, le dédoublement apparaît.

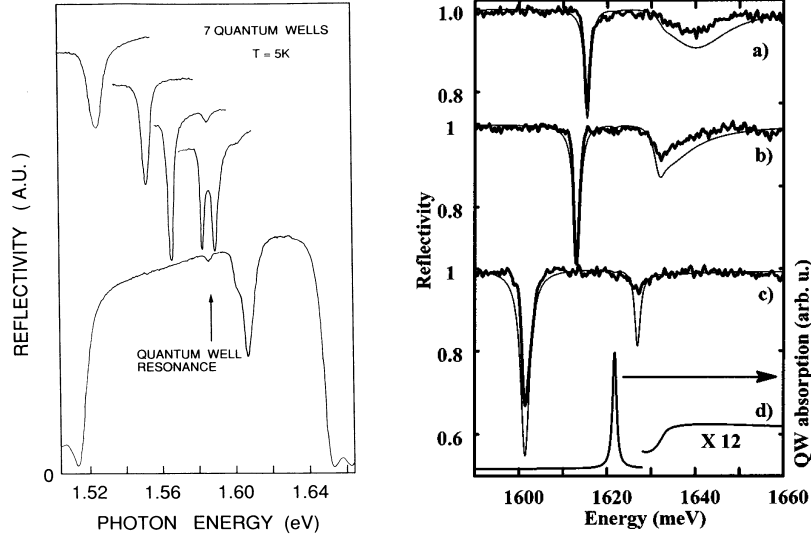


FIGURE 1.9 – Exemples de spectre de réflectivité extrait de la référence [36] à gauche et de la référence [34]. Avec pour le premier, un dédoublement de Rabi d'environ 8 meV et pour le second, de 19 meV. Pour l'un comme pour l'autre, on peut voir que les polaritons sont très sensibles à l'accord exciton-photon.

Observons maintenant comment cela se traduit en termes Hamiltonien.

D.2 Base excito-photonique et base polaritonique

Négligeons dans un premier temps les interactions entre excitons ainsi que les pertes et ne gardons que les termes de couplages linéaires. Dans ce cas, le Hamiltonien des excitons en interaction avec les photons de cavité s'écrit :

$$\begin{aligned} H_0 &= H_C + H_X + H_{XC} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_C(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_X(\mathbf{k}) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\Omega_R (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Un tel cas peut être une bonne approximation, à condition d'avoir une cavité de très grande finesse et une densité excitonique faible. Si on diagonalise le Hamiltonien H_0 , on trouve des états propres qui sont des états mixtes exciton-photon. Ces nouveaux états sont appelés **polaritons**. On peut alors réécrire H_0 dans cette nouvelle base :

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{LP}(\mathbf{k}) \hat{p}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{p}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{UP}(\mathbf{k}) \hat{u}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{u}_{\mathbf{k}} \quad (1.20)$$

Ici, $\hat{p}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{u}_{\mathbf{k}}$ sont respectivement des opérateurs bosoniques de polaritons bas (*lower polaritons*) et hauts (*upper polaritons*) qui respectent les règles de commutation

suivantes : $[\hat{p}_{\mathbf{k}}, \hat{p}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ et $[\hat{u}_{\mathbf{k}}, \hat{u}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. $\omega_{LP}(\mathbf{k})$ et $\omega_{UP}(\mathbf{k})$ correspondent à la dispersion associée à chacun de ces deux types de polaritons.

$$\omega_{UP/LP}(\mathbf{k}) = \frac{\omega_X(\mathbf{k}) + \omega_C(\mathbf{k})}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_X(\mathbf{k}) - \omega_C(\mathbf{k}))^2 + 4\Omega_R^2} \quad (1.21)$$

On peut voir l'allure de ces dispersions sur la figure 1.10. Le régime de couplage fort, dans lequel nous nous trouvons, modifie significativement la dispersion du système.

Deux quantités très utiles à définir lorsque l'on parle de polaritons sont la fraction excitonique $X_{\mathbf{k}}^2$ et la fraction photonique $C_{\mathbf{k}}^2$ de notre particule. Elles nous indiquent quelle est la part de matière et de lumière des polaritons. On peut exprimer les opérateurs polaritoniques en fonction des opérateurs excitoniques et photoniques, comme suit :

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_{\mathbf{k}} \\ \hat{u}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\mathbf{k}} & C_{\mathbf{k}} \\ -C_{\mathbf{k}} & X_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_{\mathbf{k}} \\ \hat{a}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Ces coefficients $X_{\mathbf{k}}$ et $C_{\mathbf{k}}$ sont couramment appelés coefficients de Hopfield [14]. Ils s'écrivent de la façon suivante :

$$X_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_R}{\omega_{LP}(\mathbf{k}) - \omega_C(\mathbf{k})} \right)^2}} \quad \text{et} \quad C_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{LP}(\mathbf{k}) - \omega_C(\mathbf{k})}{\Omega_R} \right)^2}} \quad (1.23)$$

La dépendance de ces coefficients, en fonction du vecteur d'onde dans le plan $\mathbf{k}$, est représentée sur la figure 1.10 par le dégradé de couleurs. Cette fraction qui va déterminer une partie de la dynamique des polaritons est très dépendante du désaccord exciton-photon ($\delta_{XC} = \omega_X(\mathbf{k}) - \omega_C(\mathbf{k})$). Plus l'accord est bon, plus les polaritons seront hybrides. La transformation étant unitaire, les deux coefficients sont liés par la relation $X_{\mathbf{k}}^2 + C_{\mathbf{k}}^2 = 1$.

À partir de cette nouvelle base dite polaritonique, voyons ce qu'il advient des interactions non-linéaires.

D.3 Interaction polariton-polariton

Si maintenant on rajoute le terme d'interaction coulombienne exciton-exciton H_{XX} , on a le Hamiltonien total sans perte :

$$\begin{aligned} H &= H_C + H_X + H_{XC} + H_{XX} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_C(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_X(\mathbf{k}) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \Omega_R \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_0^{XX} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ce dernier, dans la base polaritonique, en négligeant les polaritons hauts, s'écrit :

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{LP}(\mathbf{k}) \hat{p}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{p}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{0, \mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{LP-LP} \hat{p}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \hat{p}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger \hat{p}_{\mathbf{k}} \hat{p}_{\mathbf{k}'} \quad (1.25)$$

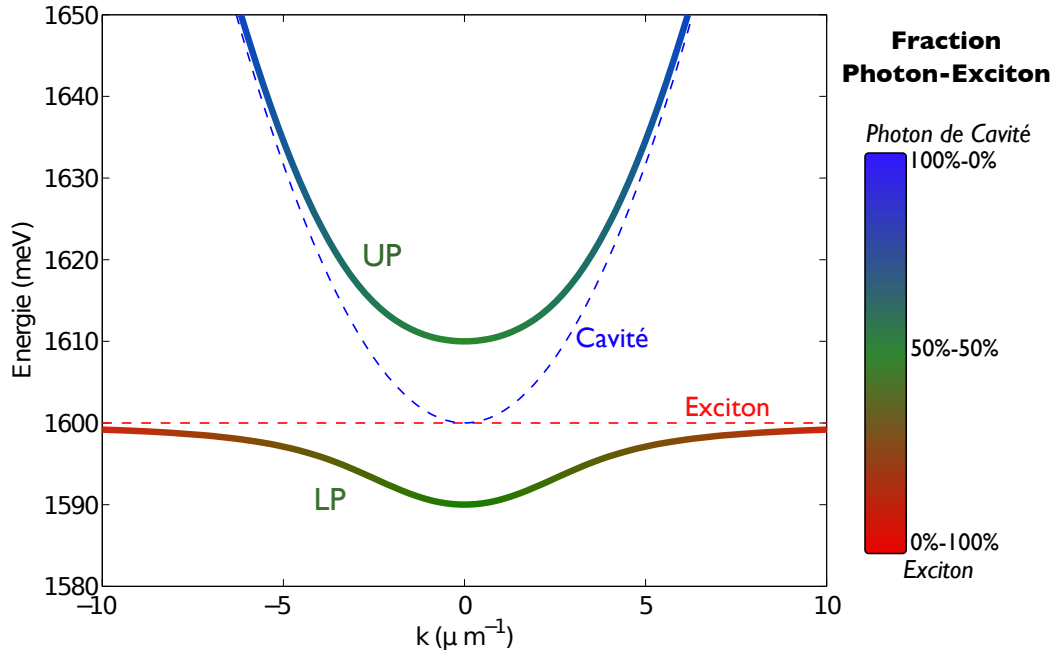


FIGURE 1.10 – Dispersion des polaritons hauts (notée UP) en bleu et vert, et des polaritons bas (notée LP) en rouge et vert. Le dégradé de couleurs représente en rouge la fraction excitonique ($X_{\mathbf{k}}^2$) et en bleu la fraction photonique ($C_{\mathbf{k}}^2$). Le vert correspond à des polaritons mi-photon mi-exciton. En pointillés rouges et bleus sont respectivement représentées la dispersion des excitons et celle de la cavité. Les paramètres utilisés ici sont : $\hbar\omega_C(0) = \hbar\omega_X(0) = 1600$ meV, $\hbar\Omega_R = 10$ meV, ainsi que $k_z = 25 \mu\text{m}^{-1}$.

Avec bien entendu, $V_{0,\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{LP-LP} = X_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^* X_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^* X_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}'} V_0^{XX}$. Par la suite, on notera cette constante d'interaction exciton-exciton $g = V_0^{XX} A/2$ avec A , la surface des puits quantiques avec comme valeur $\hbar g = 0.01 \text{ meV} \cdot \mu\text{m}^{-2}$, valeur estimée théoriquement [28].

Si on regarde les dispersions représentées sur la figure 1.10, on remarquera que celle des excitons dessinée en pointillés rouges semble plate. Les excitons ont une masse effective beaucoup plus importante que celle des photons de cavité. Le couplage fort fait naître les polaritons à condition que l'énergie des excitons et des photons de cavité soient bien accordée. Alors on aura un couplage fort seulement pour une petite gamme de valeur du moment $\mathbf{k}$. Étant donné que l'énergie des excitons varie très peu en fonction de $\mathbf{k}$ par rapport à celle des photons, on fait l'approximation de la masse infinie pour les excitons, soit : $\omega_X(\mathbf{k}) = \omega_X(0)$. En réalité, on a $m_X \simeq 10^4 m_C$. Rappelons que de se limiter à l'étude des $\mathbf{k}$ petits permet aussi de s'affranchir des pertes dues aux modes guidés de la cavité et du puits quantique, dont nous avons parlé précédemment. Le niveau d'énergie $\hbar\omega_X^0$ est couramment associé à un réservoir excitonique.

Arrêtons-nous là pour le moment en ce qui concerne les interactions. Notons que dans cette approche seules les interactions directes polariton-polariton ont été prises en compte. Les interactions indirectes via les biexcitons ou via les excitons noirs par exemple ne sont pas traitées ici [37]. Nous reviendrons dans le chapitre 3 sur ces interactions pour prendre en compte les effets de spin.

Conclusion

Après cette courte introduction très simplifiée, nous voilà donc prêts pour entrer dans le vif du sujet. Nous avons tout d'abord vu ce que désignait le terme *polariton* : une pseudo-particule naissant de l'interaction forte entre la matière et la lumière. Suite à quoi, nous nous sommes intéressés aux propriétés des cavités optiques, éléments indispensables à l'existence des polaritons, et plus particulièrement à celles des microcavités semiconductrices. Viennent ensuite les excitons qui jouent, pour nous, le rôle de la transition dipolaire. Ces excitons qui ont la particularité de pouvoir être considérés comme des bosons bidimensionnels en interaction. Et enfin, nous avons vu comment cette hybridation entre un émetteur et les photons émis pouvaient se traduire en termes de pseudo-particules et donner les **polaritons excitoniques**.

De plus nous avons vu, à l'aide de plusieurs approximations, comment nous pouvions restreindre le cadre théorique d'étude. La prise en compte des seuls polaritons bas, l'approximation de la masse effective infinie des excitons, et la densité de saturation infinie, sont autant d'approximations qui, loin d'être dénuées de réalité comme nous le verrons, permettront un traitement analytique plus complet du système. Bien entendu, cette thèse de doctorat ne prétend pas couvrir toute la physique des polaritons excitoniques. La physique propre à l'excitation non résonante par exemple, ne sera pas du tout traitée ici. Notre cadre d'étude est donc la branche basse des polaritons excitoniques, excitée à petit angle d'incidence et à résonante.

Bibliographie du Chapitre 1

- [1] RABI, I. I. (1937): Space Quantization in a Gyating Magnetic Field. *Phys. Rev.*, **51**:652.
- [2] PURCELL, E. M., H. C. TORREY, & R. V. POUND (1946): Resonance Absorption by Nuclear Magnetic Moments in a Solid. *Phys. Rev.*, **69**:37.
- [3] CIUTI, C., G. BASTARD, & I. CARUSOTTO (2005): Quantum vacuum properties of the intersubband cavity polariton field. *Phys. Rev. B*, **72**:115303.
- [4] NATAF, P. & C. CIUTI (2010): Vacuum Degeneracy of a Circuit QED System in the Ultrastrong Coupling Regime. *Phys. Rev. Lett.*, **104**:23601.
- [5] GUNTER, G., A. A. ANAPPARA, J. HEES, A. SELL, G. BIASIOL, L. SORBA, S. DE LIBERATO, C. CIUTI, A. TREDICUCCI, A. LEITENSTORFER, & R. HUBER (2009): Sub-cycle switch-on of ultrastrong light-matter interaction. *Nature*, **458**(7235):178–81.
- [6] HAGENMÜLLER, D., S. DE LIBERATO, & C. CIUTI (2010): Ultrastrong coupling between a cavity resonator and the cyclotron transition of a two-dimensional electron gas in the case of an integer filling factor. *Phys. Rev. B*, **81**:235303.
- [7] MULLIGAN, J. F. (1998): Who were Fabry and Pérot? *Am. J. Phys.*, **66**:797.
- [8] HASTINGS, S., M. DE DOOD, H. KIM, W. MARSHALL, H. EISENBERG, & D. BOUWMEESTER (2005): Ultrafast optical response of a high-reflectivity GaAs/AlAs Bragg mirror. *Appl. Phys. Lett.*, **86**(3):031109–3.
- [9] STANLEY, R., R. HOUDRE, U. OESTERLE, M. GAILHANOU, & M. ILEGEMS (1994): Ultrahigh finesse microcavity with distributed Bragg reflectors. *Appl. Phys. Lett.*, **65**(15):1883–1885.
- [10] PANZARINI, G., L. C. ANDREANI, A. ARMITAGE, D. BAXTER, M. S. SKOLNICK, V. N. ASTRATOV, J. S. ROBERTS, A. V. KAVOKIN, M. R. VLADIMIROVA, & M. A. KALITEEVSKI (1999): Exciton-light coupling in single and coupled semiconductor microcavities: Polariton dispersion and polarization splitting. *Phys. Rev. B*, **59**:5082.
- [11] COHEN-TANNOUDJI, C., J. DUPONT-ROC, & G. GRYNBERG (2001): *Processus d'interaction entre photons et atomes*. CNRS Éditions - EDP Sciences.
- [12] SAVONA, V., F. TASSONE, C. PIERMAROCCHI, A. QUATTROPANI, & P. SCHWENDIMANN (1996): Theory of polariton photoluminescence in arbitrary semiconductor microcavity structures. *Phys. Rev. B*, **53**:77905.
- [13] CIUTI, C. & I. CARUSOTTO (2006): Input-output theory of cavities in the ultrastrong coupling regime: The case of time-independent cavity parameters. *Phys. Rev. A*, **74**:33811.
- [14] HOPFIELD, J. J. (1958): Theory of the Contribution of Excitons to the Complex Dielectric Constant of Crystals. *Phys. Rev.*, **112**:1555.
- [15] FRENKEL, J. (1931): On the transformation of light into heat in solids. I. *Phys. Rev.*, **37**:17.

- [16] WANNIER, G. H. (1937): The Structure of Electronic Excitation Levels in Insulating Crystals. *Phys. Rev.*, **52**:191.
- [17] YAMAMOTO, Y., F. TASSONE, & H. CAO (2000): *Semiconductor cavity quantum electrodynamics*. Springer.
- [18] ROCHAT, G., C. CIUTI, V. SAVONA, C. PIERMAROCCHI, A. QUATTROPANI, & P. SCHWENDIMANN (2000): Excitonic Bloch equations for a two-dimensional system of interacting excitons. *Phys. Rev. B*, **61**:79958.
- [19] KNOX, R. S. (1963): *Theory of excitons*. Academic Press.
- [20] HANAMURA, E. & H. HAUG (1977): Condensation effects of excitons. *Phys. Rep.*, **33**:209.
- [21] SHAM, L. J. & T. M. RICE (1966): Many-Particle Derivation of the Effective-Mass Equation for the Wannier Exciton. *Phys. Rev.*, **144**:708.
- [22] HIROSHIMA, T. (1989): Nonresonant excitonic optical nonlinearity in semiconductors. *Phys. Rev. B*, **40**(6):3862.
- [23] USUI, T. (1960): Excitations in a High Density Electron Gas. I. *Progress of Theoretical Physics*, **23**:787.
- [24] COMBESCOT, M., O. BETBEDER-MATIBET, & R. COMBESCOT (2007): Exciton-exciton scattering: Composite boson versus elementary boson. *Phys. Rev. B*, **75**(17):174305.
- [25] GLAZOV, M., H. OUERDANE, L. PILOZZI, G. MALPUECH, A. KAVOKIN, & A. D'ANDREA (2009): Polariton-polariton scattering in microcavities: A microscopic theory. *Phys. Rev. B*, **80**(15):155306.
- [26] PITAEVSKIĬ, L. P. & S. STRINGARI (2003): *Bose-Einstein condensation*. Oxford University Press.
- [27] DALFOVO, F., S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII, & S. STRINGARI (1999): Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, **71**:463.
- [28] CIUTI, C., V. SAVONA, C. PIERMAROCCHI, A. QUATTROPANI, & P. SCHWENDIMANN (1998): Role of the exchange of carriers in elastic exciton-exciton scattering in quantum wells. *Phys. Rev. B*, **58**:7926.
- [29] TASSONE, F. & Y. YAMAMOTO (1999): Exciton-exciton scattering dynamics in a semiconductor microcavity and stimulated scattering into polaritons. *Phys. Rev. B*, **59**:67632.
- [30] CIUTI, C., P. SCHWENDIMANN, & A. QUATTROPANI (2003): Theory of polariton parametric interactions in semiconductor microcavities. *Semicond. Sci. Technol.*, **18**:279.
- [31] VERGER, A., C. CIUTI, & I. CARUSOTTO (2006): Polariton quantum blockade in a photonic dot. *Phys. Rev. B*, **73**:193306.
- [32] HUANG, K. (1951): On the Interaction between the Radiation Field and Ionic Crystals. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **208**:352.

-
- [33] SAVONA, V., C. PIERMAROCCHI, A. QUATTROPANI, P. SCHWENDIMANN, & F. TASSONE (1999): Optical properties of microcavity polaritons. *Phase Transitions*, **68**(1):169 – 279.
 - [34] BLOCH, J., T. FREIXANET, J. Y. MARZIN, V. THIERRY-MIEG, & R. PLANEL (1998): Giant Rabi splitting in a microcavity containing distributed quantum wells. *Appl. Phys. Lett.*, **73**:1694.
 - [35] HOUDRÉ, R., C. WEISBUCH, R. P. STANLEY, U. OESTERLE, P. PELLANDINI, & M. ILEGEMS (1994): Measurement of cavity-polariton dispersion curve from angle resolved photoluminescence experiments. *Phys. Rev. Lett.*, **73**:2043.
 - [36] WEISBUCH, C., M. NISHIOKA, A. ISHIKAWA, & Y. ARAKAWA (1992): Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, **69**:3314.
 - [37] VLADIMIROVA, M., S. CRONENBERGER, D. SCALBERT, K. KAVOKIN, A. MIARD, A. LEMAÎTRE, J. BLOCH, D. SOLNYSHKOV, G. MALPUECH, & A. KAVOKIN (2010): Polariton-polariton interaction constants in microcavities. *Phys. Rev. B*, **82**(7):075301.

Chapitre 2

Oscillation paramétrique optique dans les micropiliers

L'histoire des oscillateurs paramétriques optiques (OPO) est fortement liée à la physique des lasers et de façon générale à l'optique non-linéaire. Ces dispositifs permettent notamment, d'améliorer la contrôlabilité des lasers comme par exemple, en permettant la génération de faisceaux cohérents dans des gammes d'énergie difficilement atteignables par les lasers usuels. Mais ils ont aussi montré qu'ils pouvaient être employés pour générer des états de la lumière non classiques comme des états intriqués ou encore des états comprimés. L'importance que ces dispositifs ont pris ces dernières années s'explique entre autre par de nouveaux débouchés industriels comme la cryptographie quantique. Mais cela s'explique aussi parce que grâce à ces OPO, l'étude et la connaissance des propriétés quantiques de la lumière a fait un bond considérable.

Parmi la diversité des matériaux et dispositifs permettant l'oscillation paramétrique, l'utilisation des polaritons excitoniques est plutôt récente. Bien que ces pseudo-particules ont été prédites et observées dans le *bulk* il y a plus de 40 ans, il faudra attendre quelques 30 ans et leur démonstration dans les microcavités à puits quantiques pour en faire un dispositif très prometteur en optique non-linéaire. Un de leurs points forts est l'intégrabilité dont ils font preuve. Ce qui est bien illustré par le dispositif étudié ici : un micropilier de quelques microns de section et d'une dizaine de microns de hauteur. Mais plus encore, le contrôle des propriétés de cet oscillateur paramétrique optique à polaritons est ce qui explique les nombreux espoirs placés dans ces dispositifs. La mixité des polaritons, mi-lumière et mi-matière, permet de combiner des effets propres aux excitons comme l'interaction coulombienne, à des photons pour obtenir des bosons en interaction observables. C'est d'ailleurs initialement sur la base de cette propriété que l'étude des polaritons excitoniques s'est développée ces dernières années. Et c'est ce qui va nous intéresser ici : conversion paramétrique, oscillation paramétrique, faisceaux corrélés classiquement et quantiquement sont autant de processus et d'effets qui vont être étudiés.

Cette partie sur l'oscillation paramétrique optique (OPO) dans des micropiliers s'organisera comme suit. Dans la partie A, après avoir rapidement rappelé en quoi consiste ce processus d'oscillation paramétrique optique, nous verrons quels ont été les résultats précédemment obtenus avec d'autres systèmes exploitant les polaritons. Dans une seconde partie, la partie B, nous nous arrêterons plus longuement sur le système que nous avons étudié : le micropilier. Nous détaillerons, bien entendu ses caractéristiques pour ensuite regarder de plus près le processus d'oscillation paramétrique possible et souhaité dans un tel système. Suite à quoi, nous expliciterons le modèle utilisé afin de rendre compte de l'oscillation paramétrique ainsi que les approximations associées et ses limites. Enfin nous comparerons les résultats expérimentaux, obtenus dans l'équipe de J. Bloch du LPN, aux résultats numériques que nous avons obtenus (partie D). Nous finirons dans cette même partie par l'analyse des résultats numériques qui nous en disent beaucoup sur la nature du processus étudié.

Sommaire

A	Oscillateurs paramétriques optiques	30
A.1	Optique non-linéaire	30
A.2	Mélange à quatre ondes et OPO	31
A.3	Corrélations	34
A.4	OPO à polaritons	35
B	Microcavités piliers	38
B.1	Système physique	38
B.2	Hamiltonien associé au plot	39
C	Oscillation paramétrique $(2, 3) \rightarrow (1, 4)$	44
C.1	Équations du champ moyen et solutions stationnaires	44
C.2	Fluctuations autour du champ moyen	46
C.3	Corrélations dans le modèle analytique	49
D	Résultats numériques et comparaisons avec l'expérience	51
D.1	Présentation des simulations Monte Carlo quantiques	52
D.2	Oscillation paramétrique : numériques <i>vs.</i> expériences	57
D.3	Corrélation et modes "frustrés"	61
	Conclusion et Perspectives	64
	Bibliographie du chapitre 2	66

A Oscillateurs paramétriques optiques

Il s'agit ici d'introduire la physique associée aux oscillateurs paramétriques optiques (OPO). Pour ce faire, nous rappellerons brièvement quelques notions d'optique non-linéaire (partie A.1). Ce qui nous amènera tout naturellement à introduire les OPO (partie A.2). Nous verrons comment cet effet se traduit en termes mathématiques. Suite à quoi, dans la partie A.3, nous nous intéresserons à un effet très important et très intéressant lié aux processus paramétriques : les corrélations. Après cette revue assez générale, nous nous intéresserons plus particulièrement aux polaritons excitoniques et en quoi ils peuvent se révéler de très bons candidats pour la fabrication d'OPO. Pour ce faire nous introduirons dans la partie A.4 différentes architectures étudiées dans la littérature et les résultats obtenus.

A.1 Optique non-linéaire

Ce que l'on connaît aujourd'hui sous le nom d'**optique non-linéaire** est un domaine de la physique très récent. Ce n'est qu'à la moitié du XX^e siècle que cette branche de la physique s'est constituée comme telle. Bien entendu, l'invention du laser, mis en évidence par Théodore Maiman en 1960 [1] fut déterminant. On peut prendre l'année 1961 comme son année de naissance, avec la génération de seconde harmonique d'un faisceaux laser par transmission à travers une lamelle de quartz réalisée par P.A. Franken [2]. C'est seulement deux ans plus tard que la première analyse théorique de ce résultat sera publiée [3]. C'est dire à quel point ce sujet a tout de suite intéressé la communauté des physiciens. Aujourd'hui, ce domaine a donné naissance à beaucoup de sous-domaines qui vont des applications en spectroscopie à la génération d'impulsions ultrabrèves, en passant par l'étude de phénomène comme les "supercontinuum".

L'optique non-linéaire se fixe comme objectif l'étude de la propagation de la lumière dans des milieux dits "non-linéaires". Les milieux transparents en première approximation, ne perturbent pas la lumière qui les traverse. La direction de propagation du champ électromagnétique peut changer mais son spectre de fréquence reste inchangé. Lorsqu'on regarde au delà de cette approximation, c'est à dire pour des intensités lumineuses importantes, il apparaît qu'il se produit une modification substantielle du spectre de la lumière transmise. C'est pourquoi on considère alors la propagation comme non-linéaire. Voyons comment cela se traduit à l'aide du concept de polarisation.

La propagation d'une onde électromagnétique intense dans la matière peut affecter la polarisation du milieu. En retour, cette onde peut être affectée par cette polarisation diélectrique induite par le champ même. La polarisation diélectrique $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ en un point $\mathbf{r}$ est reliée au champ électrique au point $\mathbf{r}$, et c'est la **susceptibilité diélectrique** notée χ qui caractérise cette relation. Pour déterminer cette dernière, on peut, à l'aide d'un traitement semi-classique, chercher à déterminer le mouvement des charges de la matière sous l'effet d'un champ classique monochromatique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ lié à la lumière. Cette description est semi-classique car le champ est traité classiquement alors que la matière elle est traitée quantiquement. Cela se révèle généralement une approximation satisfaisante étant donnée l'intensité du champ employé. Un milieu non-linéaire ou encore polarisable sous l'effet de $\mathbf{E}$ atteint un régime forcé, caractérisé par son moment

dipolaire électrique D_{ef} dont nous avons déjà eu l'occasion de parler dans le premier chapitre.

Considérons une seule direction de l'espace (cas 1D), typiquement celle que l'on appellera z et qui correspond à la direction de croissance de nos microcavités, donc la direction de confinement de la lumière (voir chapitre 1). Alors la polarisation d'un milieu quelconque pourra s'écrire :

$$\begin{aligned} P &= \epsilon_0 \chi^{(1)} E + \epsilon_0 \chi^{(2)} EE + \epsilon_0 \chi^{(3)} EEE + \dots \\ &= P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \dots \end{aligned}$$

avec $P^{(n)} = \epsilon_0 \chi^{(n)} E \dots E$ la polarisation d'ordre n . De l'importance des différents ordres de susceptibilités dépendra la non-linéarité du matériau utilisé. Typiquement un milieu dit linéaire aura $\chi^{(n)}$ pour $n > 1$ négligeable. Bien qu'existant les effets non-linéaires seront négligeables.

Pour plus de convenance, plaçons-nous dans l'espace des fréquences. On montre que pour une onde i de fréquence ω_i et d'amplitude $E(\omega_i)$ la polarisation d'ordre n devient :

$$P^{(n)}(\mathbf{r}, \omega_1 + \dots + \omega_n) = \epsilon_0 \chi^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) E(\mathbf{r}, \omega_1) \dots E(\mathbf{r}, \omega_n) \quad (2.1)$$

À chaque ordre de cette polarisation peut être associé un processus d'optique non-linéaire. Par exemple, à l'ordre deux, on a la génération de seconde harmonique ou encore une conversion paramétrique. À l'ordre trois, aussi appelé **mélange à quatre ondes**, celui qui nous intéresse, on peut avoir la génération de troisième harmonique mais aussi une autre forme de conversion paramétrique. À noter que comme le montre l'équation (2.1), la polarisation d'ordre n est proportionnelle au champ à l'ordre n . Par conséquent, plus l'ordre est important plus, les effets sont difficiles à observer. Bien entendu plusieurs de ces susceptibilités peuvent être présentes en même temps. Ce qui est caractéristique d'effet comme l'effet Kerr-optique qui combine en même temps un effet Pockels (ordre 2) et une susceptibilité d'ordre 3.

Pour notre part, c'est le processus de conversion paramétrique d'ordre trois qui va nous intéresser. Un des processus lié à cette conversion, appelé amplification paramétrique peut se décrire de la façon suivante :

$$P^{(3)}(\omega_s, \omega_s, \omega_c) = \epsilon_0 \chi^{(3)}(\omega_p, \omega_p, \omega_s) E(\omega_p) E(\omega_p) E(\omega_s)$$

avec ω_p la fréquence de pompe (faisceau incident), ω_s de signal et ω_c du complémentaire.

En réalité la description semi-classique précédente ne peut pas traduire le mélange à quatre ondes qui va nous intéresser. Car il nécessite de prendre en compte les fluctuations du champ. Attardons-nous donc sur ce mélange à quatre ondes.

A.2 Mélange à quatre ondes et OPO

Le mélange à quatre ondes se décrit par une susceptibilité d'ordre 3 : $\chi^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Intéressons-nous au cas de l'amplification paramétrique optique. C'est-à-dire, un milieu sur lequel on fait converger deux faisceaux lasers : un très intense appelé laser de pompe $E_p(\omega_p)$ et un autre moins intense appelé laser de sonde $E_s(\omega_s)$. Le résultat de l'interaction entre ces deux faisceaux et le milieu de non-linéarité $\chi^{(3)}$ adaptée, est

l'amplification de $E_s(\omega_s)$, la génération d'un nouveau faisceau appelé complémentaire (ou *idler*) $E_c(\omega_c)$ et par conséquent une diminution de l'intensité de $E_p(\omega_p)$. Bien entendu, on aura la relation suivante entre les différentes fréquences : $2\omega_p = \omega_s + \omega_c$. On amplifie donc un signal avec une pompe via la génération d'un faisceau complémentaire.

La conversion paramétrique optique est le même processus à ceci près que nous n'avons comme faisceaux incident que la pompe comme représentés figure 2.1 et au centre de l'image 2.2. On peut différencier plusieurs cas ici. Celui, par exemple, où $\omega_p/2 = \omega_s = \omega_c$, est appelé *dégénéré*. Pour notre part, nous nous intéresserons au cas le plus général où $\omega_s \neq \omega_c$. Un processus d'ordre 2, aussi appelé conversion paramétrique, existe mais il implique la relation suivante : $\omega_p = \omega_s + \omega_c$. À ne pas confondre, donc. Mais pour que notre processus ait lieu de façon effective, il faut en réalité plus que l'accord en énergie. Il faut aussi **accord de phase**.

Pour comprendre ce phénomène, nous n'allons pas résoudre les équations de Maxwell, par souci de concision. Essayons quand même qualitativement de comprendre ce qui se passe. On peut dire que dans le milieu non-linéaire, l'onde de pompe se propage à une certaine vitesse déterminée par sa fréquence ω_p et l'indice optique du milieu. À chaque instant, soit à l'endroit où elle se trouve, elle génère la sonde et le complémentaire. Ces derniers se propagent eux aussi, mais avec une autre vitesse qui va dépendre de leurs fréquences respectives. Au point suivant, la pompe va générer de nouveau la sonde et du complémentaire et ces derniers vont interagir avec leurs précédents. Cette interaction entre deux ondes de même fréquence et de même direction de propagation peut être aussi bien constructive que destructive. Il va de soit qu'une interaction destructive ne nous intéressera pas car elle rend le processus inobservable. C'est pourquoi il faut avoir accord de phase pour observer ces phénomènes.

$$2n(\omega_p)\omega_p = n(\omega_s)\omega_s + n(\omega_c)\omega_c$$

avec $n(\omega) = ck/\omega$ l'indice optique dans du milieu où c est la vitesse de la lumière et k le vecteur d'onde. On peut donc montrer la relation suivante dite d'accord de phase :

$$2\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_c \quad (2.2)$$

Il existe différentes méthodes pour obtenir cet accord de phase. La première d'entre elles, consiste à utiliser la biréfringence. On peut aussi fabriquer des métamatériaux crés par une alternance de milieu (comme pour les miroirs de Bragg) qui donneront un quasi-accord de phase. Dans notre cas, c'est directement la dispersion des polaritons qui nous donnera les conditions de possibilité d'une telle conversion.

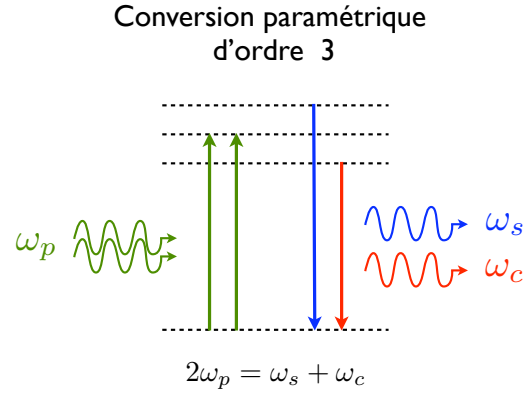


FIG. 2.1 – Schéma représentant la conversion paramétriques d'ordre 3. Avec en dessous la conservation de l'énergie associée.

Il nous faut maintenant parler de la présence de la cavité dans notre système. Comme on l'aura sans doute compris, pour nous le rôle du milieu nonlinéaire sera joué par les excitons de puits quantiques et l'accord de phase et d'énergie par la dispersion des polaritons. Mais le rôle de la cavité quant à lui est loin d'être négligeable.

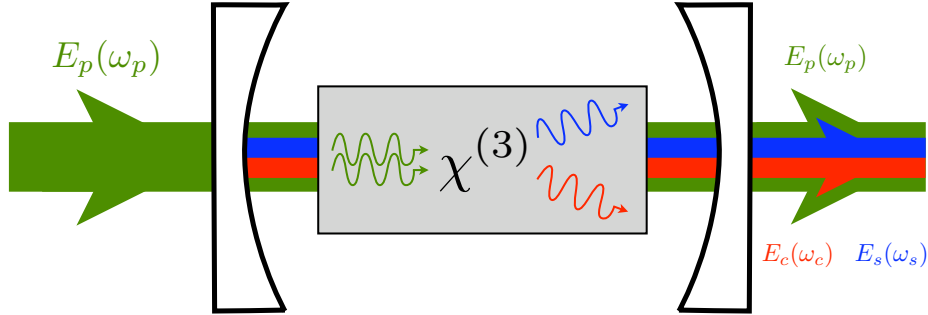


FIGURE 2.2 – Schéma figurant le mélange à quatre ondes dans un OPO. Le rectangle grisé correspond au milieu de susceptibilité d'ordre trois $\chi^{(3)}$. Le processus de mélange à quatre ondes est schématisé par deux photons verts donnant lieu à un bleu pour le signal et un rouge pour le complémentaire. Ce milieu est entouré de deux miroirs. En entrée on a un faisceau pompe $E_p(\omega_p)$ et en sortie une faisceau pompe $E_p(\omega_p)$, un signal $E_s(\omega_s)$ et un complémentaire $E_c(\omega_c)$.

Le mélange à quatre ondes est un processus faiblement efficient. Comme tout milieu de propagation, ce dernier comporte des pertes. Il faut donc que le processus de conversion soit plus important que les pertes. Pour augmenter l'efficacité de ce processus, il nous faut combiner à la fois la conversion avec l'amplification paramétrique optique. Pour ce faire, on dispose notre matériaux non-linéaire dans une cavité comme représentée sur la figure 2.2. Basiquement, l'idée est de faire osciller les rayonnements, et donc de permettre son amplification par passages successifs dans le milieu non-linéaire. C'est pourquoi ces systèmes sont appelés **oscillateurs paramétriques optiques**. On peut y voir certaines similitudes avec les lasers. Cela dit, dans ce cas la pompe n'a pas besoin d'être absorbée par le milieu, la conversion paramétrique est directe. De plus, dans le cas du laser, signal et complémentaire sont dégénérés en énergie ainsi qu'en phase, ce qui n'est pas le cas pour nous (sauf pour le cas particulier). La cavité, comme nous l'avons dit dans le premier chapitre, est caractérisée par une fréquence de résonance et une largeur de raie. Cette dernière détermine les pertes du système. Dans un tel système pour une certaine puissance de pompe, un seuil est atteint à partir duquel la conversion et l'amplification seront plus importantes que les pertes. Cette puissance est appelée **seuil d'oscillation paramétrique** ou encore *threshold*. En plus de ce seuil, la cavité peut donner lieu, et ce sera notre cas, à une bistabilité. Mais nous y reviendrons plus en détail dans la partie C. De manière générale la fréquence de la cavité est très importante car en fonction de la configuration d'oscillation choisie, elle peut être résonante avec la pompe ou le signal et/ou le complémentaire. Dans notre cas, on aura toujours résonance avec la pompe. Quant au signal et au complémentaire, de par les propriétés des polaritons, ils seront aussi à résonance (cf. 1.9).

Si les OPO permettent la génération de faisceaux monochromatiques intenses dans

des gammes qui ne sont pas atteintes par les lasers, ce n'est pas leur seul intérêt. Que se soit la génération de faisceaux corrélés ou encore de paires de photons jumeaux, les OPO sont de très bons candidats pour la génération d'états quantiques de la lumière. Ils constituent la base de nouvelles technologies comme la cryptographie quantique, la téléportation, ou encore un hypothétique ordinateur quantique. Intéressons-nous à la définition et la mise en évidence de faisceaux corrélés.

A.3 Corrélations

En physique, deux variables sont considérées comme corrélées s'il existe un lien (quelqu'il soit) entre elles. C'est un terme très employé en physique aussi bien en traitement du signal qu'en physique statistique mais aussi en physique quantique. Une distinction est faite entre corrélations classiques et corrélations quantiques. Les premières indiquent une interdépendance entre différentes variables et les secondes sont plus fortes et indiquent un comportement quantique.

Le caractère quantique de la lumière ne peut apparaître sans ambiguïté avec les quantités que nous avons calculé jusqu'à présent. Le calcul des corrélations quantiques entre le signal et le complémentaire va nous permettre de remédier à ce problème. C'est le bruit de la somme et surtout, le bruit de la différence en intensité qui va nous intéresser [25, 107, 119, 120]. Cette quantité nous indique à quelle point les fluctuations de la population de deux modes du champ sont corrélées. Lorsque ces corrélations dépassent la limite classique standard des fluctuations poissonniennes alors il y a corrélation quantique entre les deux modes. Notons les deux modes étudiés (1) et (2) et $\hat{N}_i$ l'opérateur lié à leur population. Pour définir la fonction de corrélation souhaitée, il nous est nécessaire de recourir à la fonction d'autocorrélation de la différence (ou la somme) des populations en régime stationnaire :

$$C_{\pm}(\tau) = \langle \hat{N}_{\pm}(t) \hat{N}_{\pm}(t + \tau) \rangle - \langle \hat{N}_{\pm}(t) \rangle \langle \hat{N}_{\pm}(t + \tau) \rangle$$

avec $\hat{N}_{\pm} = \hat{N}_1 \pm \hat{N}_2$ la somme (différence) des populations. Nous nous intéresserons dans notre étude à l'autocorrélation à $\tau = 0$.

Pour caractériser la nature des corrélations que nous observons, nous normalisons la corrélation par le résultat associé à deux états cohérents non corrélés :

$$\sigma_{\pm}(0) = \frac{\langle \hat{N}_{\pm}^2(t) \rangle - \langle \hat{N}_{\pm}(t) \rangle^2}{\langle \hat{N}_{\pm}(t) \rangle}$$

Ici il s'agit de comparer les variances de chaque population.

La différence de variance des populations peut se définir depuis le spectre de fréquence. C'est à partir de la densité spectrale de $\sigma_{\pm}$, $S_{\sigma_{\pm}}[\omega]$ que l'on peut remonter aux corrélations :

$$\sigma_{\pm}(0) = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_n[\omega] \quad (2.3)$$

Pour plus d'informations et de détails sur l'oscillation paramétrique, l'accord de phase, le bruit quantique, les états intriqués, etc, je renvoie le lecteur à certains livres et *review* d'optique non linéaire ou quantique très complet [4–6]. Mais pour le moment, voyons succinctement plusieurs types d'OPO, déjà bien connus, utilisant les polaritons excitoniques pour réaliser du mélange à quatre ondes.

A.4 OPO à polaritons

Voici deux exemples caractéristiques d'OPO à polaritons excitoniques. Un premier avec une géométrie simple : une cavité planaire, et un second avec une plus complexe : une cavité triple.

Oscillation à l'angle *magique*

C'est en 2000 que P. G. Savvidis *et al.* ont mis en évidence expérimentalement l'existence d'un processus d'amplification paramétrique [7] assisté par polaritons excitoniques. Le système étudié consistait en une cavité planaire contenant des puits quantiques. L'excitation était résonnante et pulsée à un angle qui sera appelé *magique* (16.5° en l'occurrence). Suite à quoi, la même année, la théorie venant appuyer cette expérience fut faite [8]. Ont suivi, la démonstration de cette amplification en régime continu [9] et le rapprochement avec l'oscillation paramétrique optique [10].

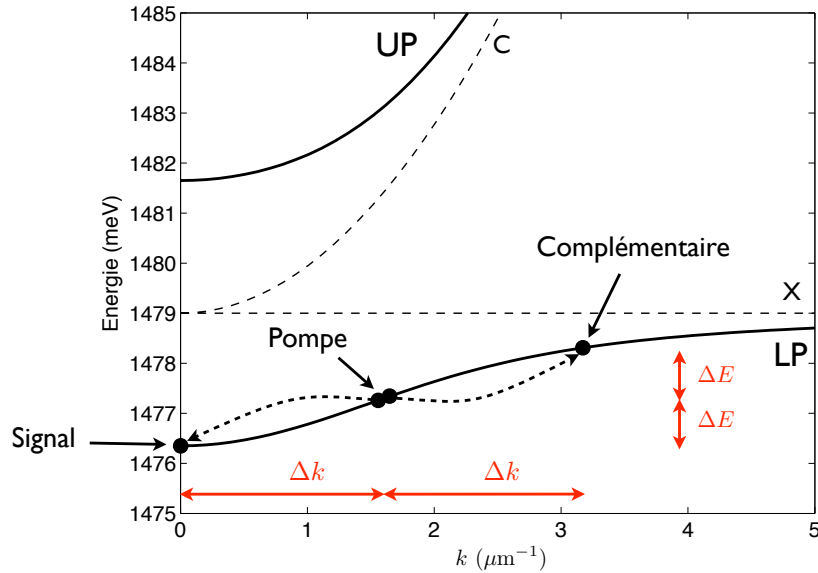


FIGURE 2.3 – Dispersion des polaritons hauts (UP) et bas (LP) d'une cavité planaire (C). Y est schématisé le processus paramétrique à l'angle magique, où deux polaritons créés à cet angle k_p sont diffusés vers un polariton signal $k_s = 0$ et un complémentaire $k_c = 2k_p$.

L'idée est de se servir de la dispersion atypique des polaritons bas pour générer un processus paramétrique. Cette dispersion que l'on peut voir figure 1.10 et figure 2.3, a la particularité d'avoir un point d'inflexion à un angle (vecteur d'onde dans le plan) dit *magique*. Cela permet de remplir à la fois la condition d'accord en énergie $2\omega_p = \omega_s + \omega_c$ et celle d'accord de phase $2k_p = k_s + k_c$. C'est bien entendu sur ce point d'inflexion que la pompe sera ajustée. Ce qui donnera naissance à deux polaritons qui via l'interaction polariton-polariton, diffuseront l'un dans un mode signal à $k_s = 0$ et l'autre dans une mode complémentaire à $k_c = 2k_p$.

La principale limitation de ce système vient de la différence de composition entre le signal et le complémentaire. En effet, le signal étant en centre de zone, il sera fortement

photonique (correspond au maximum de la part photonique des polaritons bas). Quant au complémentaire, au contraire il sera très excitonique. Sachant que ne sont observées que les fractions photoniques, le complémentaire sera difficilement observable. Le travail réalisé en 2005 par S. Savasta dans une cavité planaire excitée à l'angle *magique* par deux pompes, donnera la première preuve de la cohérence des processus d'oscillation paramétrique assisté par polariton [11]. Une telle configuration donne deux signaux générés et deux complémentaires pas forcément dégénérés. L'attention s'est portée sur les complémentaires et sur le fait que lorsqu'ils étaient dégénérés ils interagissaient consécutivement.

Dans une cavité planaire, une autre configuration permet l'oscillation paramétrique. C'est une configuration où les faisceaux sont dégénérés en énergie. Deux pompes de vecteur d'onde opposés ($\mathbf{k}_{p1} = (0; k_p)^T$ et $\mathbf{k}_{p2} = (0; -k_p)^T$ par exemple) sont à résonance avec la dispersion des polaritons bas. On observe alors l'apparition d'un faisceau signal et d'un complémentaire à $\mathbf{k}_s = (k_p; 0)^T$ et $\mathbf{k}_c = (-k_p; 0)^T$. Ce processus a plusieurs avantages : les énergies sont dégénérées, et surtout les fractions photoniques du signal et du complémentaire sont strictement les mêmes. Ici seules des corrélations classiques ont été observées. On remarquera le travail théorique de mon prédécesseur A. Verger [12] qui a démontré numériquement que les corrélations quantiques atteignables ne pouvaient pas dépasser les 50% (3 dB). Pour plus d'informations je renvoie le lecteur aux thèses de M. Romanelli [13] et de A. Verger [14]. Mais des systèmes plus complexes ont été fabriqués et étudiés afin d'augmenter la diversité des processus d'oscillation.

Cavité triple

Si j'ai choisi de parler de ce type de microcavité parmi la variété de celle qui permet d'observer l'oscillation paramétrique optique c'est parce que sa structure même permet l'observation d'oscillations de géométries variées et donc de bien illustrer les potentialités de l'OPO à polaritons excitoniques.

Ce système consiste donc en un empilement de 3 microcavités planaires couplées. Ou encore, ce qui est équivalent, en une alternance de miroirs de Bragg (BM) et de puits quantiques (QW) soit : BM/QW/BM/QW/BM/QW/BM (voir figure 2.4 de droite). La dispersion d'une telle microcavité en régime de couplage fort est montrée figure 2.4. Le couplage entre les différentes cavités donne lieu à un dédoublement des états photoniques. Soit avec trois cavités, on a 3 niveaux photoniques distincts couplés. Le couplage inter-cavité dépend de l'épaisseur du miroir les séparant. Chaque cavité est couplée à des puits quantiques. Cela donne lieu, en couplage fort, à 3 branches de polaritons bas représentées figure 2.4 et 3 de polaritons hauts. Voyons quels sont les différents processus paramétriques déjà mis en évidence expérimentalement par C. Diederichs au cours de son doctorat [15, 16].

- Le **processus à l'angle magique** (en bleu figure 2.4) dont nous avons parlé précédemment. Notons cela dit qu'ici ce processus peut avoir lieu sur chacune des trois branches de polariton bas.
- Le **processus vertical** (en rouge figure 2.4) qui pour une excitation à $\omega_p(k_p = 0) = \omega_{LP2}(0)$ donne un signal et un complémentaire à $k_s = k_c = 0$ et à $\omega_s + \omega_c = 2\omega_p$. L'avantage de cette oscillation est d'avoir un signal et un complémentaire, tous deux, comme la pompe, dégénérés en vecteur d'onde ce qui est un plus pour

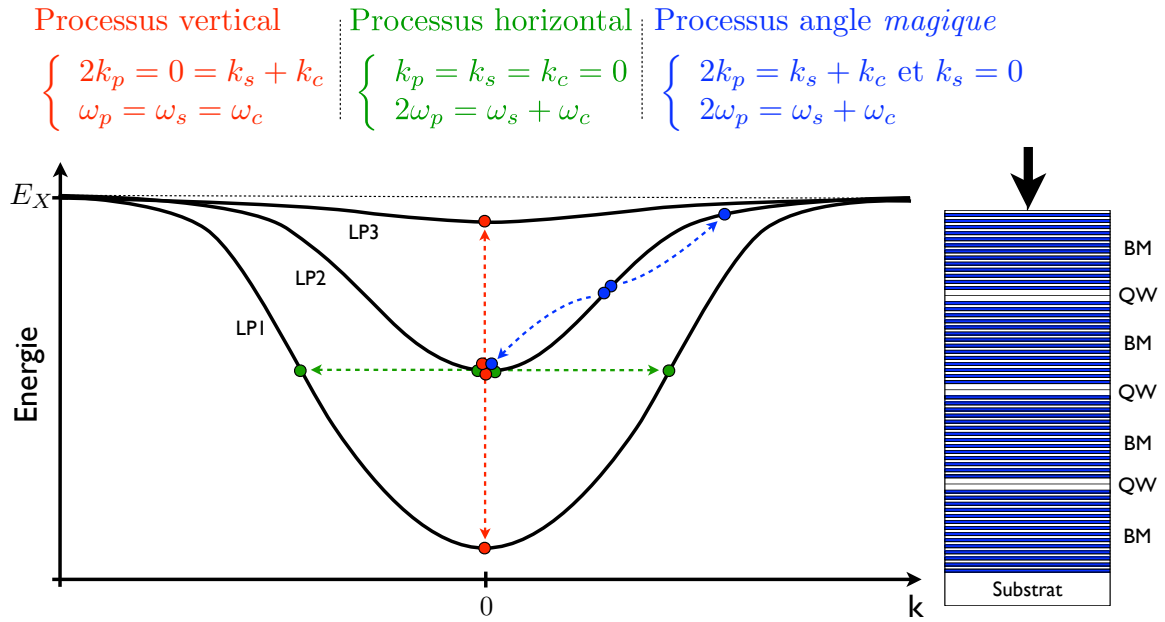


FIGURE 2.4 – À droite est schématisée la microcavité triple et sa succession de miroirs de Bragg (BM) et de puits quantiques (QW). À gauche, est dessinée la dispersion des polaritons bas et ses trois branches (LP1, LP2 et LP3). Les flèches et points représentent quelques-uns des différents processus paramétriques à quatre ondes permis par ces polaritons bas. Au-dessus, sont indiqués les accords de phase et d'énergie correspondant. En rouge, le processus dit vertical, en vert celui dit d'horizontal, et en bleu celui à l'angle magique.

l'intégrabilité du système. De plus, l'écart en énergie dépend essentiellement du couplage entre cavités, donc il est facilement contrôlable. Quant aux inconvénients, le principal est la différence de nature des polaritons signal et complémentaire. L'un est très excitonique et l'autre très photonique, à la manière de ce que l'on a pour l'angle magique.

- Le **processus horizontal** (en vert figure 2.4), pour une excitation en $\omega_p(k_p = 0) = \omega_{LP2}(0)$ donne deux polaritons : un en k_s et ω_s et l'autre en $k_c = -k_s$ et $\omega_c = \omega_s$. Processus qui ne souffre pas de la non homogénéité des polaritons créés. Le signal et le complémentaire ont strictement la même composition. Par contre, leurs vecteurs d'onde seront opposés.

Les corrélations entre les différents signaux émis ont été étudiés et ont mis en évidence une réduction de bruit en dessous du bruit quantique standard de 7% (0.3 dB) [16].

Au vu des résultats obtenus sur la génération de faisceaux corrélés avec d'autres types d'OPO par exemple avec le titanyl phosphate de potassium (KTP), on sera surpris par ces résultats si faibles. En effet, les records de compression de bruit en intensité sont aujourd'hui supérieurs de 90% (11.5 dB) [17, 18]. Notons la jeunesse des polaritons. Il est déjà remarquable qu'en moins de 20 ans d'étude on en soit déjà à l'observation et la production de faisceaux non classiques.

Le système qui nous intéresse n'a pas un design aussi complexe, ce qui ne l'empêche pas d'être très riche au moment de comprendre la physique de ces oscillations paramétriques optiques assistées par les polaritons excitoniques. Détaillons les propriétés de ces micropiliers.

B Microcavités piliers

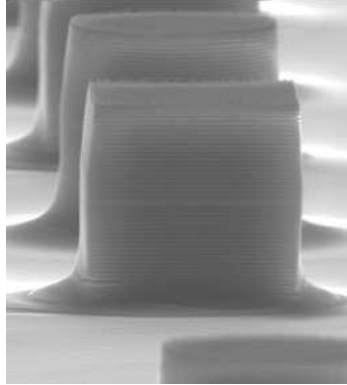


FIGURE 2.5 – Image réalisée au microscope électronique à balayage d'une microcavité gravée en forme de plot carré. La largeur du plot est de $5\ \mu\text{m}$. Image réalisée au LPN.

Ce sont donc des plots micrométriques carrés similaires à celui montré figure 2.5 que nous avons étudiés. Nous allons tout d'abord décrire le système physique (partie B.1), puis nous verrons comment il peut être décrit en termes Hamiltonien et quelles approximations il est raisonnable de faire (partie B.2).

B.1 Système physique

Ce plot ou pilier est une microcavité semiconductrice 0D. Sans rentrer dans les détails de la fabrication (que j'ignore d'ailleurs), ce que nous pouvons dire c'est qu'une microcavité planaire contenant des puits quantiques est réalisée suite à quoi un masque est déposé dessus, ce qui permet une gravure par voie chimique [19]. Le résultat obtenu est l'image 2.5 réalisé par microscopie à balayage.

On peut d'ores et déjà faire plusieurs remarques. Tout d'abord on aura bien compris que le confinement dans la direction de croissance z (direction verticale sur la figure 2.5) est d'une toute autre nature que celui réalisé dans les deux autres directions x et y . Dans la direction de croissance, ce confinement est assuré par des miroirs de Bragg dont nous avons déjà parlé. Et dans les directions x et y c'est simplement la discontinuité de l'indice optique qui permet de confiner la lumière dans le pilier. En termes de fonction d'onde des polaritons, cela signifie qu'elle sera très confinée suivant la direction de z et assez peu dans les autres directions. Cette discontinuité d'indice agit comme une cavité dans les directions du plan de la microcavité gravée (voir partie C Chapitre 1). Donc, comme pour la direction de croissance avec le miroir de Bragg, cela donne naissance à des états discrets suivant les directions confinées. Le confinement a lieu pour les trois

directions de l'espace. Cela implique une discrétisation totale des niveaux photoniques de la cavité. L'espacement des niveaux obtenus dépendra essentiellement de la taille de notre pilier. Le confinement dans le plan peut être réalisé par d'autres méthodes. Citons la méthode employée à l'EPFL (Laussane) qui consiste à graver légèrement la cavité. Le miroir de Bragg déposé dessus présentera un décalage dépendant de la position [20]. Dans une moindre mesure un confinement peut être obtenu à l'aide d'une onde acoustique [21], mais aussi d'une pression locale exercée sur la cavité [22], ou encore par dépôt de bande métallique en surface de la cavité [23].

Une autre remarque d'ordre général sur les microcavités et leurs miroirs de Bragg, est qu'une cavité planaire a deux faces. Par rapport à une excitation normale à une face, on peut s'intéresser soit à la transmission soit à la réflexion. De plus, pompant le système proche de la résonance, on négligera les réflexions externes. En fonction des cas on module le nombre de paires dans les miroirs de Bragg pour contrôler la réflectivité de ces derniers. De cette façon, on optimise la collection et on minimise les pertes dues aux deux directions d'échappement des photons. Dans le cas qui nous concerne ici, c'est par réflexion que le système est étudié, ce qui n'est pas sans poser des problèmes comme nous le verrons. Intéressons-nous au Hamiltonien associé.

B.2 Hamiltonien associé au plot

De façon générale, le Hamiltonien dans l'espace réel, associé à une microcavité planaire, s'écrit [24] :

$$H = \int d\mathbf{x} \sum_{ij=\{X,C\}} \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{x}) h_{ij}^1 (-i\nabla) \hat{\Psi}_j(\mathbf{x}) \quad (2.4a)$$

$$+ \frac{\hbar g}{2} \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}_X^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_X^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) \quad (2.4b)$$

$$+ \int d\mathbf{x} F_p(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega_p t} \hat{\Psi}_C^\dagger(\mathbf{x}) + h.c. , \quad (2.4c)$$

avec $\hat{\Psi}_{C(X)}$ la fonction d'onde des photons de cavité (excitons) et où le terme (2.4a) correspond au Hamiltonien sans interaction, (2.4b) à l'interaction entre excitons et (2.4c) à l'interaction entre la cavité et la pompe. $\mathbf{h}^1$ peut s'écrire :

$$\mathbf{h}^1 = \mathbf{h}^0 + \hbar \begin{pmatrix} V_C(\mathbf{x}) - i\frac{\gamma_C}{2} & 0 \\ 0 & V_X(\mathbf{x}) - i\frac{\gamma_X}{2} \end{pmatrix}$$

avec $\gamma_{C(X)}$ la largeur de raie des photons de cavité (excitons) et $V_{C(X)}(\mathbf{x})$ un potentiel photonique (excitonique) extérieur. Nous n'avons pas encore parlé de ce potentiel photonique (excitonique). Il permet de modéliser les modulations spatiales des caractéristiques des photons (excitons) : modulation de l'énergie. Il permet de reproduire de très nombreux phénomènes physiques comme des défauts dans la cavité (voir chapitre 3), ou encore comme nous allons le voir le confinement des modes dans une géométrie 0D.

Pour ce qui est de $\mathbf{h}^0$, le Hamiltonien standard sans interaction sans perte et sans potentiel particulier, on a :

$$\mathbf{h}^0 = \hbar \begin{pmatrix} \omega_C(-i\nabla) & \Omega_R \\ \Omega_R & \omega_X^0 \end{pmatrix}$$

Avec $\omega_C(-i\nabla)$ la dispersion de la cavité et ω_X^0 celle des excitons. Rappelons que nous faisons l'approximation $\omega_X(-i\nabla) \approx \omega_X^0$.

Le passage de l'espace réel à l'espace réciproque se fait comme suit :

$$\hat{\Psi}_C(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\sqrt{A}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\sqrt{A}} \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (2.5)$$

Avec A la surface de la cavité, et $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\dagger)}$ l'opérateur création (annihilation) d'un photon de vecteur d'onde dans le plan $\mathbf{k}$, et $\hat{b}_{\mathbf{k}}^{(\dagger)}$ l'opérateur création (annihilation) d'un exciton de vecteur d'onde dans le plan $\mathbf{k}$.

Dans le cas de notre pilier de dimension $L_x \times L_y$, on prendra $V_X(\mathbf{x}) = 0$ et :

$$V_C(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L_x \text{ et } 0 < y < L_y, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6)$$

C'est bien entendu, une approximation, mais qui est raisonnable étant donné la différence d'indice entre la cavité et l'air ($n_{\text{GaAs}}/n_{\text{air}} = 3.4$). Cela revient à négliger le champ évanescent qui prend place à l'extérieur de la cavité dans le plan. On peut résoudre les équations de Maxwell pour le champ dans la cavité. On obtient $\phi_C(x, y)$ la composante spatiale dans le plan des fonctions d'onde des photons de cavité (représentée figure 2.6) en fonction de deux nombres quantiques n_x et n_y . On trouvera une série de solutions telles que :

$$\phi_{n_x, n_y}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}(n_x + 1)\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}(n_y + 1)\right)$$

La fonction d'onde des photons peut être décrite dans cette nouvelle base comme suit :

$$\hat{\Psi}_C(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_x, n_y} \phi_{n_x, n_y}(\mathbf{x}) \hat{a}_{n_x, n_y}(t)$$

Pour les excitons, sachant que la densité d'état est très importante autour de $\hbar\omega_X^0$ de part leur masse infinie, toute base est base propre des excitons. On prendra donc la même base que celle des photons de cavité.

$$\hat{\Psi}_X(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_x, n_y} \phi_{n_x, n_y}(\mathbf{x}) \hat{b}_{n_x, n_y}(t)$$

On peut donc réécrire notre Hamiltonien dans cette nouvelle base en posant $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ et $\mathbf{l}$ les vecteurs d'indices des niveaux : $\mathbf{i} = (n_{ix}, n_{iy})$. Alors on aura :

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\mathbf{i}} \left(\hat{a}_{\mathbf{i}}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{i}}^\dagger \right) \begin{pmatrix} \omega_C^{\mathbf{i}} - i\frac{\gamma_C}{2} & \Omega_R \\ \Omega_R & \omega_X^0 - i\frac{\gamma_X}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbf{i}} \\ \hat{b}_{\mathbf{i}} \end{pmatrix} \\ & + \frac{\hbar g}{2} \sum_{\mathbf{ijkl}} \hat{b}_{\mathbf{i}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{l}} \Pi_{\mathbf{ijkl}} + \sum_{\mathbf{i}} \left(\mathcal{F}_{\mathbf{i}} e^{-i\omega_p t} \hat{a}_{\mathbf{i}}^\dagger + h.c. \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

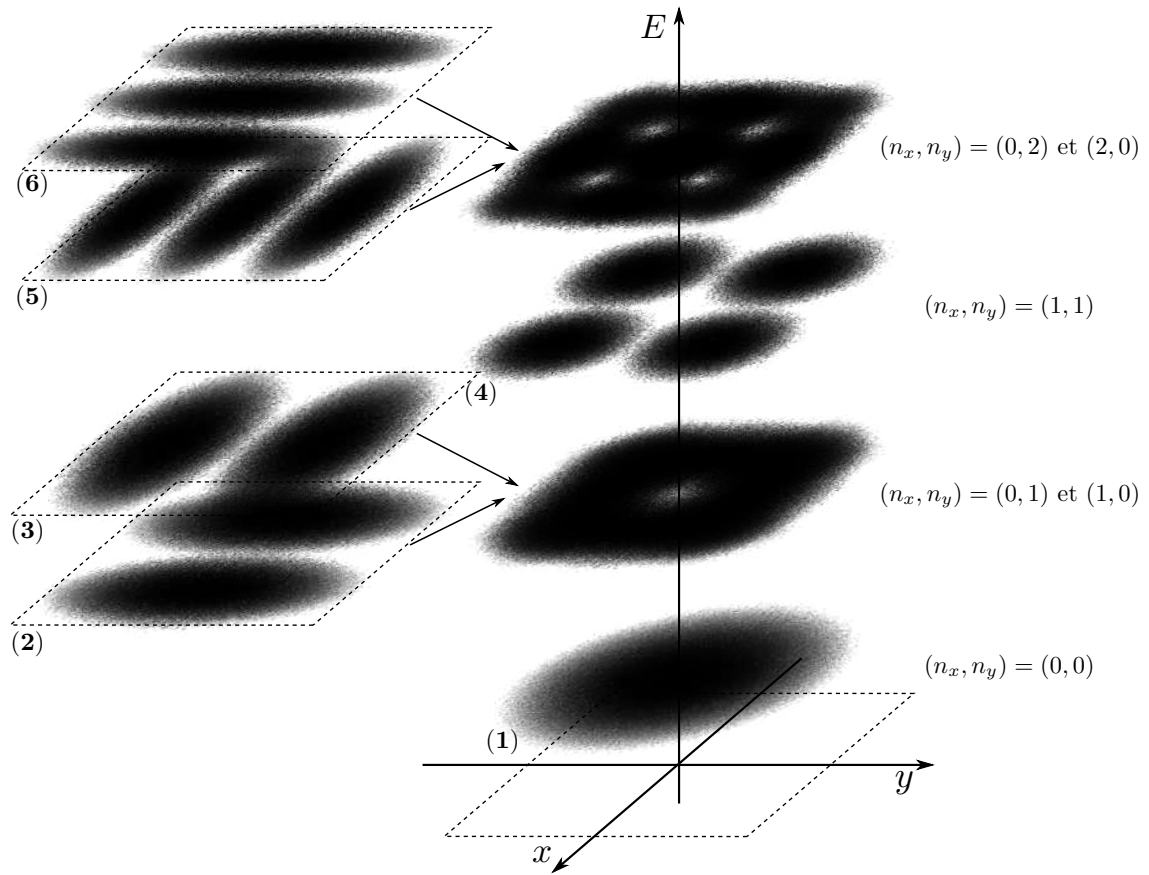


FIGURE 2.6 – Profil spatial des fonctions d'onde des états propres de la cavité 0D ϕ_{n_x, n_y} dans l'espace réel. Seul les six premiers niveaux sont représentés. Le carré à la base représente la surface du pilier ici carré. À droite, sont représentés les profils des niveaux dégénérés. À gauche du dessin, sont indiqués les nombres quantiques associés à chaque niveau.

Avec $\mathcal{F}_i(t) = \hbar \int d\mathbf{x} F_p(\mathbf{x}, t) \phi_i^\dagger(\mathbf{x})$ le recouvrement de la pompe et du mode $\mathbf{i}$. En outre :

$$\Pi_{ijkl} = \int_0^{L_x} d\mathbf{x} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \phi_k(\mathbf{x}) \phi_l(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

décrit le recouvrement entre les modes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{l}$. On peut bien entendu réécrire encore le Hamiltonien dans la base des polaritons (on néglige les polaritons hauts) :

$$H = \sum_{\mathbf{i}} \left(\omega_{LP}^{\mathbf{i}} - i \frac{\gamma_{LP}}{2} \right) \hat{p}_{\mathbf{i}}^\dagger \hat{p}_{\mathbf{i}} + \frac{\hbar}{2} \sum_{ijkl} g_{ijkl}^{LP} \Pi_{ijkl} \hat{p}_{\mathbf{i}}^\dagger \hat{p}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{p}_{\mathbf{k}} \hat{p}_{\mathbf{l}} + \sum_{\mathbf{i}} \left(\mathcal{F}_i e^{-i\omega_p t} \hat{p}_{\mathbf{i}}^\dagger + h.c. \right) \quad (2.9)$$

Avec $g_{ijkl}^{LP} = g X_i X_j X_k X_l$ où X_i est la fraction excitonique du niveau polaritonique $\mathbf{i}$.

Dans cette nouvelle base, les états propres du champ photonique auront une énergie quantifié, d'après (1.1) comme suit :

$$\hbar\omega_C^{\mathbf{i}} = \frac{\hbar c}{n_c} \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi}{L_x} (n_x + 1) \right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_y} (n_y + 1) \right)^2}$$

Où $n_{x/y}$ est un entier naturel et $L_{x/y}$ la taille du plot. Bien entendu k_z est lui aussi quantifié via la cavité. On remarquera que dans le cas d'un plot carré $L_x = L_y$ alors les niveaux tels que $n_x \neq n_y$ sont dégénérés en énergie comme représentés sur la figure 2.6.

Intéressons-nous maintenant plus particulièrement aux processus paramétriques. Nous avons dit que pour observer un processus paramétrique il faut accord de phase. $\mathbf{k}$ n'étant plus un nombre quantique adéquat, il nous faut regarder de plus près l'intégrale de recouvrement (2.8) qui dépend fortement, comme nous allons le voir, des deux nouveaux nombres quantiques (n_x, n_y) . On se limitera dans la suite aux quatre premiers niveaux de notre plot. Parmi la zoologie des valeurs de Π_{ijkl} seuls quelques-uns sont non nuls, résumés ici :

$$\Pi_{ijkl} = \begin{cases} \frac{9}{4L_x L_y} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{j} = \mathbf{k} = \mathbf{l} & \text{(cas 1)} \\ \frac{3}{2L_x L_y} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 0) \text{ ou } (1, 1) \text{ et } \mathbf{k} = \mathbf{l} = (1, 0) \text{ ou } (0, 1) & \text{(cas 2)} \\ \frac{1}{L_x L_y} & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 0) \text{ et } \mathbf{k} = \mathbf{l} = (1, 1), \text{ ou } \mathbf{i} = \mathbf{j} = (1, 0) \text{ et } \mathbf{k} = \mathbf{l} = (0, 1), \text{ ou } \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \neq \mathbf{k} \neq \mathbf{l} & \text{(cas 3)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.10)$$

On remarque que pour avoir $\Pi_{ijkl} \neq 0$, il faut que la somme des indices n_x et n_y soit paire. Cette intégrale ne prend pas en compte la conservation de l'énergie. En la prenant en compte, nous avons les règles de sélection des processus de diffusion possible qui peuvent être représentées comme sur la figure 2.7. On peut distinguer plusieurs processus distincts. Tout d'abord, l'effet Kerr (en bleu figure 2.7) qui correspond au *cas 1* (2.10) qui fait interagir deux polaritons et donne deux nouveaux polaritons, tout ça dans le même état. Cet effet est présent pour chaque niveau. Ensuite, on a l'interaction d'échange entre deux polaritons (en vert figure 2.7), ou deux polaritons de niveaux

distincts via l'interaction échangent de niveau. Ici aussi, tous les niveaux peuvent être combinés deux à deux. Et enfin, la conversion paramétrique qui nous intéresse tout particulièrement (en rouge figure 2.7) qui à un polariton du niveau $\mathbf{2} = (0, 1)$ et un de $\mathbf{3} = (1, 0)$ fait correspondre un en $\mathbf{1} = (0, 0)$ le fondamental et un en $\mathbf{4} = (1, 1)$.

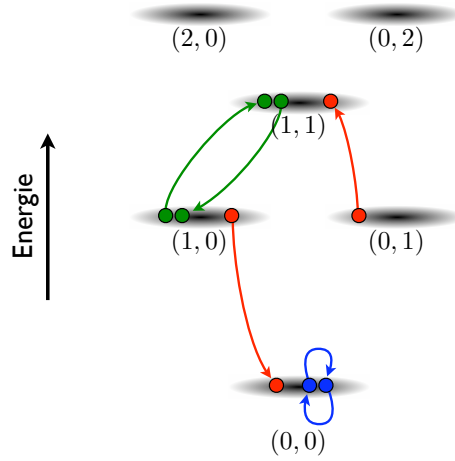


FIGURE 2.7 – Schéma des niveaux polaritoniques d'un plot carré. Représenté en différentes couleurs ici les différents processus paramétriques dus à l'interaction Coulombienne (ne sont représentés que les processus où il y a conservation de l'énergie). En bleu, un processus à un mode qui donne lieu à l'effet Kerr. Le processus en vert est dit d'échange car il intervertit deux polaritons de niveau différent. Et enfin, en rouge le processus à quatre modes de conversion paramétrique.

Sur ce schéma (figure 2.7), une approximation a été faite. On suppose que les niveaux $\mathbf{1}$ et $\mathbf{4}$ sont équidistants en énergie de $\mathbf{2}$ et $\mathbf{3}$. On peut montrer que pour obtenir cette condition il faut en première approximation une fréquence de Rabi plus de 3 fois plus grande que ω_1 . Autant dire que nous en sommes loin. Malgré cela rien n'empêche le processus d'avoir lieu. La raison principale est qu'il faut prendre en compte l'élargissement des modes γ . Si l'écart à l'accord en énergie est inférieur à γ , alors le processus est possible. Dans les conditions simulées qu'on analysera dans la partie D, le désaccord moyen est de $\hbar(\omega_4 - \omega_2 + \omega_1 - \omega_3)/2 \approx 0.08$ meV alors que la largeur de raie moyenne des excitons et des photons est de $\gamma = 0.15$ meV, par exemple. Un autre facteur à prendre en compte lorsque l'on parle d'accord en énergie est le décalage vers le bleu que subissent les polaritons, dû à leurs interactions. Mais nous y reviendrons dans la partie suivante.

Notre plot est décrit avec le Hamiltonien (2.7) dans sa base propre et nous avons vu que la conversion paramétrique était possible. Attardons-nous plus longuement sur ce processus.

C Oscillation paramétrique $(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{4})$

Maintenant que nous avons bien décortiqué notre système, via son Hamiltonien, et posé le modèle utilisé, nous allons pouvoir nous intéresser plus spécifiquement au processus paramétrique $(\mathbf{2}, \mathbf{3}) \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{4})$. Où $\mathbf{1} = (0, 0)$ le niveau fondamental qui correspondra au signal, $\mathbf{2} = (0, 1)$ et $\mathbf{3} = (1, 0)$ les niveaux de pompe et $\mathbf{4} = (1, 1)$ le complémentaire. On va donc dans un premier temps (partie C.1) écrire les équations dans l'approximation du champ moyen. Après quoi, dans la partie C.2, nous inclurons des perturbations autour du champ moyen pour voir se réaliser le processus paramétrique souhaité. Et enfin, nous terminerons cette partie (partie C.3) par l'étude des corrélations entre les modes oscillants.

C.1 Équations du champ moyen et solutions stationnaires

Ici, nous cherchons avant tout à déterminer la solution stationnaire de notre système. Nous avons quatre états à considérer. Pour ce faire, on utilise la représentation d'Heisenberg (2.11) qui nous permet de déterminer les équations du mouvement pour les différents opérateurs de notre système.

$$i\hbar \frac{d\hat{a}}{dt} = [H, \hat{a}] \quad (2.11)$$

En partant de la base exciton-photon propre au pilier (2.7), on trouve :

$$i \frac{d\hat{a}_{\mathbf{i}}}{dt} = \left(\omega_{\mathbf{C}}^{\mathbf{i}} - i \frac{\gamma_{\mathbf{C}}}{2} \right) \hat{a}_{\mathbf{i}} + \Omega_R \hat{b}_{\mathbf{i}} + \mathcal{F}_{\mathbf{i}}(t) e^{-i\omega_p t} \quad (2.12a)$$

$$i \frac{d\hat{b}_{\mathbf{i}}}{dt} = \left(\omega_X^0 - i \frac{\gamma_X}{2} \right) \hat{b}_{\mathbf{i}} + \Omega_R \hat{a}_{\mathbf{i}} + 2 \sum_{\mathbf{jkl}} g_{\mathbf{ijkl}} \hat{b}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{l}} \quad (2.12b)$$

avec $g_{\mathbf{ijkl}} = \frac{g}{2} \Pi_{\mathbf{ijkl}}$ l'interaction exciton-exciton dans la base du pilier.

D'après ce que l'on a vu dans la partie B.2, l'oscillation paramétrique peut avoir lieu lorsque l'on pompe les niveaux $\mathbf{2}$ et $\mathbf{3}$. On peut donc négliger dans un premier temps la population des modes $\mathbf{1}$ et $\mathbf{4}$. Ce qui s'écrit $b_{\mathbf{i}} = \langle \hat{b}_{\mathbf{i}} \rangle$ et $a_{\mathbf{i}} = \langle \hat{a}_{\mathbf{i}} \rangle$ pour $\mathbf{i} = \mathbf{2}$ ou $\mathbf{3}$ alors que pour $\mathbf{i} = \mathbf{1}$ ou $\mathbf{4}$ on pose $\hat{b}_{\mathbf{i}} = \hat{a}_{\mathbf{i}} = 0$. On pose $\langle \hat{a}_{\mathbf{i}} \rangle = a_{\mathbf{i}}^{ss} e^{-i\omega_p t}$ et $\langle \hat{b}_{\mathbf{i}} \rangle = b_{\mathbf{i}}^{ss} e^{-i\omega_p t}$ avec $a_{\mathbf{i}}^{ss}$ et $b_{\mathbf{i}}^{ss}$ correspondant aux solutions stationnaires (approximation de l'onde tournante). Ce qui nous donne à partir des équations (2.12), pour les niveaux $\mathbf{2}$ et $\mathbf{3}$ pompés, les équations du champ moyen suivantes :

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}_{\mathbf{i}} &= \left(\omega_{\mathbf{C}}^{\mathbf{i}} - \omega_p - i \frac{\gamma_{\mathbf{C}}}{2} \right) a_{\mathbf{i}}^{ss} + \Omega_R b_{\mathbf{i}}^{ss} \\ 0 &= \left(\omega_X^0 - \omega_p - i \frac{\gamma_X}{2} + 2g_{\mathbf{iiii}} |b_{\mathbf{i}}^{ss}|^2 + 4g_{\mathbf{ijjj}} |b_{\mathbf{j}}^{ss}|^2 \right) b_{\mathbf{i}}^{ss} + 2g_{\mathbf{ijjj}} b_{\mathbf{j}}^{ss2} b_{\mathbf{i}}^{ss\dagger} e^{-i2\omega_p t} + \Omega_R a_{\mathbf{i}}^{ss} \end{aligned}$$

avec $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$. Ici $g_{\mathbf{ijjj}} = 1/L_x L_y$ (voir les équations (2.10)). Dans la base polaritonique, cela donne :

$$-\mathcal{F}_{\mathbf{i}} = \left(\omega_{LP}^{\mathbf{i}} - \omega_p - i \frac{\gamma_{LP}}{2} + 2g_{\mathbf{iiii}}^{LP} |p_{\mathbf{i}}^{ss}|^2 + 4g_{\mathbf{ijjj}}^{LP} |p_{\mathbf{j}}^{ss}|^2 \right) p_{\mathbf{i}}^{ss} + 2g_{\mathbf{ijjj}}^{LP} p_{\mathbf{j}}^{ss2} p_{\mathbf{i}}^{ss\dagger} e^{-i2\omega_p t} \quad (2.13)$$

Attardons-nous un instant sur ce champ moyen et sur les informations que nous pouvons en tirer. Dans l'équation (2.13), on a le terme $2g_{\text{iiii}}^{LP}|p_{\text{i}}^{ss}|^2$ qui fait interagir le mode i avec lui même et qui dépend de la densité de polariton dans ce mode. Cela a pour effet de créer un décalage vers le bleu (augmentation de l'énergie) du niveau considéré lorsque la densité augmente. Comme nous le verrons par la suite, cet effet est loin d'être anecdotique. Le terme $4g_{\text{ijij}}^{LP}|p_{\text{j}}^{ss}|^2$ est similaire, à l'exception près que cette fois c'est la densité du mode j qui va modifier l'énergie du mode i . Précisons que $4g_{\text{ijij}} \approx 2g_{\text{iiii}}$ ce qui signifie que cet effet est significatif.

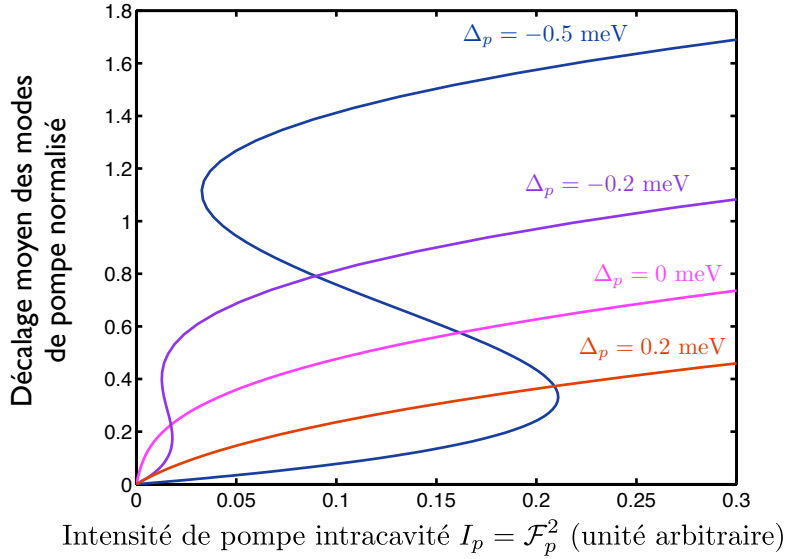


FIGURE 2.8 – Décalage moyen des modes pompés normalisé par la largeur des modes γ_{LP} induit par l'intensité de pompe I_p intracavité pour différents désaccords entre l'énergie des polaritons des modes **2** et **3** et l'énergie de pompe Δ_p . Les paramètres sont $L_x \times L_y = 3 \times 3.2 \mu\text{m}$, $\hbar\omega_X^0 = 1605.6 \text{ meV}$, $\hbar\omega_C(0) = 1601.7 \text{ meV}$, $\gamma_C = \gamma_X/2 = 0.1 \text{ meV}$, $k_z = 27 \mu\text{m}^{-1}$, $\Omega_R = 7.5 \text{ meV}$ et $g_{ef} = 0.015 \text{ meV}$.

La figure 2.8 montre comment varie le champ moyen des modes de pompe (l'équation (2.13)) en fonction de l'intensité de pompage intracavité. Pour être plus précis, c'est le rapport entre le décalage en énergie des niveaux pompés et leur largeur qui est tracé. Le paramètre clef de cette équation est le décalage moyen entre les modes pompés et l'énergie de la pompe $\Delta_{pi} = \omega_{LP}^i - \omega_p$. Ici on prendra $\Delta_p = (\Delta_{p2} + \Delta_{p3})/2$. Lorsque $\Delta_p \geq 0$ (pompe décalée vers le rouge) la courbe a une allure en racine. Plus l'excitation sera importante, plus le *shift* des niveaux va être important. Et plus il est important plus la pompe est décalée et donc interagit peu avec les niveaux. Maintenant lorsque $\Delta_p < 0$ (pompe décalée vers le bleu), on a un tout autre type de courbe. C'est une courbe typique d'une bistabilité. Trois zones peuvent être distinguées. La première, lorsque l'intensité de la pompe est faible. Dans ce cas, on peut négliger les termes d'interaction car la densité est très faible. Les équations du champ moyen deviennent donc linéaires d'où son nom de régime linéaire. Le second est la partie de la courbe où elle rebrousse chemin. Il apparaît lorsque les décalages pompe-polariton est du même ordre que le *shift* subi par les niveaux. Puis, vient le régime non-linéaire,

qui a un profil en racine comme lorsque que $\Delta_p > 0$. Dans ce cas, le décalage effectif (décalage polariton-pompe plus les termes de *shift*) est positif, donc la pompe est de moins en moins bien couplée à ces modes. Cette courbe bistable du champ moyen nous intéressera plus particulièrement dans le chapitre 3.

Comme nous avons pu voir les équations des champs moyens nous donnent beaucoup d'informations sur la relation entre la pompe et les niveaux excités. Par contre, à aucun moment le processus qui nous intéresse n'apparaît : l'oscillation paramétrique. Pour le faire apparaître, il nous faut regarder la stabilité de notre solution stationnaire liée au champ moyen, c'est à dire les fluctuations autour de ce champ moyen.

C.2 Fluctuations autour du champ moyen

Pour étudier la stabilité de la solution stationnaire nous allons supposer que les états sont définis comme la somme d'un champ moyen et d'une perturbation : $\hat{p}_i = \langle \hat{p}_i \rangle + \delta \hat{p}_i e^{-i\omega_p t} = (p_i^{ss} + \delta \hat{p}_i) e^{-i\omega_p t}$. Soit d'après ce qui a été dit précédemment :

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &= \delta \hat{p}_1 e^{-i\omega_p t} \\ \hat{p}_2 &= (p_2^{ss} + \delta \hat{p}_2) e^{-i\omega_p t} \\ \hat{p}_3 &= (p_3^{ss} + \delta \hat{p}_3) e^{-i\omega_p t} \\ \hat{p}_4 &= \delta \hat{p}_4 e^{-i\omega_p t} .\end{aligned}$$

On peut définir les équations du mouvement de ces perturbations de la même façon que ce qui vient d'être fait pour le champ moyen. Soit :

$$\delta \phi(t) = \left(\delta \hat{p}_1(t), \delta \hat{p}_2(t), \delta \hat{p}_3(t), \delta \hat{p}_4(t), \delta \hat{p}_1^\dagger(t), \delta \hat{p}_2^\dagger(t), \delta \hat{p}_3^\dagger(t), \delta \hat{p}_4^\dagger(t) \right)^T .$$

On aura l'équation d'évolution de nos perturbations :

$$i \frac{d}{dt} \delta \phi(t) = \mathcal{L} \cdot \delta \phi(t) \quad (2.14)$$

C'est les valeurs propres de matrice $\mathcal{L}(\langle \hat{p}_2 \rangle, \langle \hat{p}_3 \rangle, t)$ qui vont nous intéresser. La partie imaginaire de ces dernières est associée aux pertes du système. La résolution du système d'équations différentielles décrit par $\mathcal{L}(t)$ comportera une exponentielle du type : $e^{-\gamma t}$ avec γ la partie imaginaire des valeurs propres. Donc si $\gamma < 0$ on aura une divergence de la perturbation. On considère que les valeurs associées de $\langle \hat{p}_2 \rangle$ et $\langle \hat{p}_3 \rangle$ sont instables. Voyons de quoi est composé $\mathcal{L}(t)$.

En prenant en compte l'existence ou non d'un champ moyen non nul et en nous limitant aux perturbations au premier ordre, on trouve :

$$i \frac{d\delta \hat{p}_i}{dt} = \left(\omega_{LP}^i - \omega_p - i \frac{\gamma_{LP}}{2} \right) \delta \hat{p}_i + 2 \sum_j^{\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}} g_{ij\mathbf{p}\mathbf{q}} \left(2 \langle \hat{p}_{\mathbf{p}}^\dagger \rangle \langle \hat{p}_{\mathbf{q}} \rangle \delta \hat{p}_j + \langle \hat{p}_{\mathbf{p}} \rangle \langle \hat{p}_{\mathbf{q}} \rangle \delta \hat{p}_j^\dagger \right)$$

Pour ce qui est du terme non linéaire on a une première somme sur tous les indices et une seconde seulement sur les indices des niveaux pompés **2** et **3**.

Suivant les propriétés de g_{ijkl} la relation peut se simplifier en :

$$i \frac{d\delta\hat{p}_i}{dt} = \left(\omega_{LP}^i - \omega_p - i \frac{\gamma_{LP}}{2} \right) \delta\hat{p}_i + 2 \sum_{\mathbf{p}}^{\{2,3\}} g_{ij\mathbf{p}\mathbf{p}} \left(2|p_{\mathbf{p}}^{ss}|^2 \delta\hat{p}_i + p_{\mathbf{p}}^{ss2} \delta\hat{p}_i^\dagger e^{2i\omega_p t} \right) \\ + 2 \sum_{i \neq j}^{\{1,2,3,4\}} \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{q}}^{\{2,3\}} g_{ij\mathbf{p}\mathbf{q}} \left(2\langle\hat{p}_{\mathbf{p}}^\dagger\rangle\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}\rangle\delta\hat{p}_j + \langle\hat{p}_{\mathbf{p}}\rangle\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}\rangle\delta\hat{p}_j^\dagger \right) \quad (2.15)$$

Les informations liées au processus d'oscillation sont contenues dans le dernier terme.

On peut donc maintenant écrire la matrice de Bogoliubov $\mathcal{L}$ liée à notre système. Avant de le faire, remarquons que nous avons quatre états et leurs conjugués soit une matrice 8×8 . Ici nous avons pris en compte tous les processus décrits dans la partie B.2. De plus, les fluctuations des modes de pompes ne nous intéressent pas particulièrement. Tout cela pour dire que nous allons nous restreindre dans la matrice $\mathcal{L}$ aux seules fluctuations des niveaux **1** et **4**. Ce qui donnera une matrice 4×4 . En faisant cela, on néglige les effets Kerr présents sur les niveaux de pompe ainsi que celle d'échange entre ces derniers et les niveaux oscillants. On a donc $\delta\hat{p}_2 = \delta\hat{p}_3 = 0$ et pour $j = \{1, 4\}$ on trouve :

$$i \frac{d\delta\hat{p}_i}{dt} = \left(\omega_{LP}^i - \omega_p - i \frac{\gamma_{LP}}{2} \right) \delta\hat{p}_i + \frac{g_0}{L_x L_y} \left(4\langle\hat{p}_2^\dagger\rangle\langle\hat{p}_3\rangle\delta\hat{p}_j + 4\langle\hat{p}_3^\dagger\rangle\langle\hat{p}_2\rangle\delta\hat{p}_j + 4\langle\hat{p}_2\rangle\langle\hat{p}_3\rangle\delta\hat{p}_j^\dagger \right. \\ \left. + 6|p_2^{ss}|^2\delta\hat{p}_i + 3p_2^{ss2}\delta\hat{p}_i^\dagger e^{2i\omega_p t} + 6|p_3^{ss}|^2\delta\hat{p}_i + 3p_3^{ss2}\delta\hat{p}_i^\dagger e^{2i\omega_p t} \right) \quad (2.16)$$

Cela donne la matrice $\mathcal{L}(t)$ suivante :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \Delta_{LP}^1 + 6g_p \overline{|p_{\mathbf{p}}^{ss}|^2} & 4g_p \overline{\langle\hat{p}_{\mathbf{p}}^\dagger\rangle\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}\rangle} & 3g_p \overline{p_{\mathbf{p}}^{ss2}} & 2g_p \langle\hat{p}_2\rangle\langle\hat{p}_3\rangle \\ 4g_p \langle\hat{p}_{\mathbf{p}}^\dagger\rangle\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}\rangle & \Delta_{LP}^4 + 6g_p \overline{|p_{\mathbf{p}}^{ss}|^2} & 2g_p \langle\hat{p}_2\rangle\langle\hat{p}_3\rangle & 3g_p \overline{p_{\mathbf{p}}^{ss2}} \\ -3g_p \overline{p_{\mathbf{p}}^{ss*2}} & -2g_p \langle\hat{p}_2^\dagger\rangle\langle\hat{p}_3^\dagger\rangle & -\Delta_{LP}^{1*} - 6g_p \overline{|p_{\mathbf{p}}^{ss}|^2} & -4g_p \langle\hat{p}_{\mathbf{p}}^\dagger\rangle\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}\rangle \\ -2g_p \langle\hat{p}_2^\dagger\rangle\langle\hat{p}_3^\dagger\rangle & -3g_p \overline{p_{\mathbf{p}}^{ss*2}} & -4g_p \langle\hat{p}_{\mathbf{p}}^\dagger\rangle\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}\rangle & -\Delta_{LP}^{4*} - 6g_p \overline{|p_{\mathbf{p}}^{ss}|^2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Avec $\Delta_{LP}^i = \omega_{LP}^i - \omega_p - i \frac{\gamma_{LP}}{2}$, $g_p = 2g_0/L_x L_y$, $\overline{|p_{\mathbf{p}}^{ss}|^2} = (|p_2^{ss}|^2 + |p_3^{ss}|^2)/2$, $\overline{\langle\hat{p}_{\mathbf{p}}^\dagger\rangle\langle\hat{p}_{\mathbf{q}}\rangle} = (\langle\hat{p}_2^\dagger\rangle\langle\hat{p}_3\rangle + \langle\hat{p}_3^\dagger\rangle\langle\hat{p}_2\rangle)/2$, $\overline{p_{\mathbf{p}}^{ss2}} = (p_2^{ss2} + p_3^{ss2})e^{2i\omega_p t}/2$.

La diagonalisation de cette matrice de Bogoliubov nous donne une série de valeurs propres $\omega_i^\pm$ associées aux différents modes $\mathbf{i}$ qui dépendent de la population dans les modes pompés p_2^{ss} et p_3^{ss} . Lorsqu'il n'y a pas d'excitation, on a les valeurs propres suivantes : $\omega_i^\pm(0) = \pm\omega_i - i\gamma_i/2$ avec $\gamma_i = \gamma_{LP}$. Sur la figure 2.9, on peut voir à gauche ces valeurs propres (partie réelle et imaginaire) en fonction du champ moyen. On peut en déduire la stabilité de la solution stationnaire qui est représentée à droite par la même courbe que sur la figure 2.8 ($\Delta_p = 0$ meV) avec en noir la partie stable et en couleur la partie instable. Partie instable qui est associée à des valeurs pour lesquelles la partie imaginaire d'au moins un des $\omega_i^\pm(p^{ss})$ est supérieure à zéro (en violet pour deux et en rouge pour une). Sur la partie imaginaire, la zone **A** en violet définit une zone d'instabilité. Pour ce qui est de la partie réelle, cela correspond au point où l'on a

$\Re(\omega_1^\mp) = \Re(\omega_4^\pm)$. Cela nous indique que ce sont ces deux modes qui interviennent dans l'instabilité et donc que nous avons notre processus de type paramétrique. La zone **B** en rouge indique une autre zone d'instabilité concernant une seule valeur propre. C'est donc une autre forme d'instabilité pour laquelle c'est $\omega_1^\pm$ qui intervient ce qui indique une instabilité de type Kerr. On voit sur la partie réelle d'ailleurs qu'on a $\omega_1^- = \omega_1^+$. Notons que le niveau **1** est situé sous l'énergie de la pompe, l'interaction entre polaritons tendra donc à le rapprocher de la pompe. C'est ce qui se passe dans cette zone **B** où l'énergie renormalisée des polaritons coïncide avec l'énergie de pompe ce qui permet cet effet Kerr. Et enfin, la zone **C** en violet comme la **A** fait intervenir deux valeurs propres. Cela dit, le type d'instabilité est ici moins évident à déterminer.

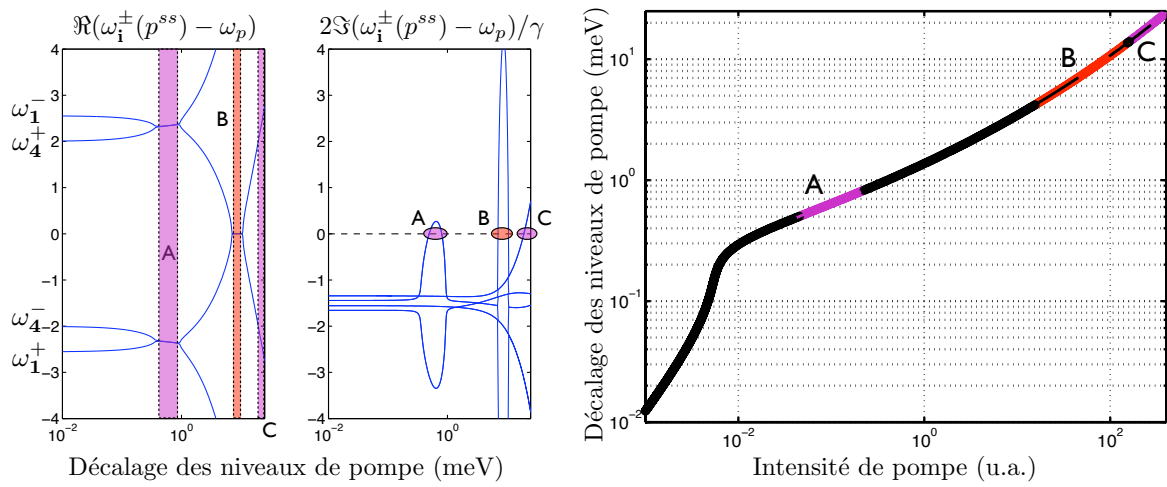


FIGURE 2.9 – *Champ moyen et stabilité.* À gauche la partie réelle et imaginaire des valeurs propres de $\mathcal{L}$ en fonction du champ moyen ($\hbar g_p |p_p^{ss}|^2$). Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 2.8 avec $\Delta_p = -0.2$ meV.

Sur la courbe du champ moyen, sont indiqués sur les parties bicolores (noir et couleur) les écarts trouvés entre les résultats obtenus avec la matrice (2.17) et la matrice prenant en compte aussi les perturbations dans les modes de pompe **2** et **3**. L'écart trouvé est important pour la zone **B** et **C** mais bien plus négligeable pour la zone **A**, ce qui nous conforte dans l'utilisation de ce modèle simplifié pour l'étude de l'oscillation paramétrique dans la zone **A**.

Toute la démarche précédente peut être réalisée à partir de la base exciton-photon. Des résultats analogues seront obtenus. Il est important de noter qu'avec ce modèle, on peut clairement voir que les fluctuations des niveaux oscillants donnent lieu à l'oscillation paramétrique. Quant à la nature des fluctuations, les niveaux n'étant en interaction qu'avec le bain extérieur et avec le réservoir excitonique (voir chapitre 1), ce sont bien les fluctuations quantiques du vide ou forces de Langevin qui permettent cette oscillation.

Qui dit processus paramétrique dit, corrélation quantique. Intéressons-nous maintenant sur le calcul de ces corrélations.

C.3 Corrélations dans le modèle analytique

Ce sont bien entendu les corrélations entre les modes oscillants **1** et **4** qui vont nous intéresser. Dans le modèle décrit dans la partie B, nous n'avons pas fait intervenir le bruit quantique du vide. Nous avons juste considéré des fluctuations de nos modes propres. Partant de l'équation (2.14) à laquelle nous ajoutons un terme de bruit, on obtiendra une équation de Langevin de nos perturbations [25] :

$$i \frac{d}{dt} \delta\phi(t) = \mathcal{L} \delta\phi(t) + f_L \quad (2.18)$$

Ici f_L est un vecteur des forces de Langevin (F_L^i) qui, à chaque niveau propre des polaritons, associe un bruit (blanc) qui modélise la fluctuation du vide. Par définition, $\langle F_L^i \rangle = 0$ la valeur moyenne de la fluctuation du vide (ou force de Langevin) est nulle.

On pourra donc écrire dans la base polaritonique et dans l'espace des fréquences :

$$\begin{pmatrix} \delta\hat{p}_1[\omega] \\ \delta\hat{p}_2[\omega] \\ \delta\hat{p}_3[\omega] \\ \delta\hat{p}_4[\omega] \\ \delta\hat{p}_1^\dagger[2\omega_p - \omega] \\ \delta\hat{p}_2^\dagger[2\omega_p - \omega] \\ \delta\hat{p}_3^\dagger[2\omega_p - \omega] \\ \delta\hat{p}_4^\dagger[2\omega_p - \omega] \end{pmatrix} = \mathcal{G}[\omega_p, \omega] \begin{pmatrix} \tilde{F}_L^1[\omega] \\ \tilde{F}_L^2[\omega] \\ \tilde{F}_L^3[\omega] \\ \tilde{F}_L^4[\omega] \\ -\tilde{F}_L^{1\dagger}[2\omega_p - \omega] \\ -\tilde{F}_L^{2\dagger}[2\omega_p - \omega] \\ -\tilde{F}_L^{3\dagger}[2\omega_p - \omega] \\ -\tilde{F}_L^{4\dagger}[2\omega_p - \omega] \end{pmatrix}$$

Avec $\mathcal{G} = -(\omega\mathbb{I} + \mathcal{L})^{-1}$, où $\mathbb{I}$ est la matrice identité.

Sachant que $\sigma_-(0)(\tau)$ rend compte des corrélations du bruit du nombre de polaritons dans les modes **1** et **4**, on peut l'écrire en fonction des perturbations des opérateurs de création et d'annihilation, comme écrit dans l'équation (2.3). Alors on aura pour $\tau = 0$ et $\delta\hat{p}_i = \hat{p}_i - \langle \hat{p}_i \rangle$:

$$\sigma_-(0) = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_{\sigma_-}[\omega] = \frac{1}{\langle \hat{n}^+ \rangle} \int \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \delta\hat{n}^-[\omega] \delta\hat{n}^-[\omega'] \rangle e^{-i(\omega+\omega')t_0} \quad (2.19)$$

Avec $\delta\hat{n}^\pm = \delta\hat{n}_1 \pm \delta\hat{n}_4 = \delta\hat{p}_1^\dagger \delta\hat{p}_1 \pm \delta\hat{p}_4^\dagger \delta\hat{p}_4$. Notons que dans notre étude des corrélations entre les bruits d'intensité des modes **1** et **4** on a $\hat{n}^+ = \hat{n}_1 + \hat{n}_4$. Ce qui nous donne pour la fluctuation sur le nombre de particules du mode **i** :

$$\delta\hat{n}_i[\omega] = \int d\omega' \sum_{j=1}^8 \left(\mathcal{G}_{i,j}[\omega_p, \omega] \mathcal{G}_{j,i}^\dagger[\omega_p, \omega'] \right) f_L[\omega] * f_L^{*T}[\omega']$$

Avec $\mathcal{G}_{i,j}$ les éléments de la matrice $\mathcal{G}$ et f_L le vecteur des forces de Langevin dans l'espace des fréquences. Sachant que $\langle \tilde{F}_L^i[\omega] \tilde{F}_L^{j\dagger}[\omega'] \rangle = 4\pi\Gamma[\omega] \delta(\omega - \omega') \delta_{ij}$ et comme nous l'avons dit dans le chapitre 1 on considère que $\Gamma[\omega] = \gamma/2$. Pour être plus exact, on doit prendre $\Gamma[\omega] = \Theta[\omega]\gamma/2$ avec $\Theta[\omega]$ la fonction Heaviside. Cela nous permet de ne pas prendre en compte ce qui se passe pour $\omega < 0$, qui correspond à des effets

remontant le temps... et donc peu de rapport avec le monde physique étudié. Alors on peut écrire que

$$\langle \delta \hat{n}_i[\omega] \rangle = 2\pi\gamma\Theta[\omega] \sum_{j=1}^8 \mathcal{G}_{i,j}[\omega_p, \omega] \mathcal{G}_{j,i}^\dagger[\omega_p, -\omega]$$

Mais d'après l'équation (2.19), nous avons besoin de $\langle \delta \hat{n}_i[\omega] \delta \hat{n}_j[\omega'] \rangle$ qui s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \delta \hat{n}_i[\omega] \delta \hat{n}_j[\omega'] = & \int \int \sum_{k=1}^8 \left(\mathcal{G}_{i,k}[\omega_p, \omega] \mathcal{G}_{k,i}^\dagger[\omega_p, \omega'] \right) \sum_{k=1}^8 \left(\mathcal{G}_{j,k}[\omega_p, \omega'] \mathcal{G}_{k,j}^\dagger[\omega_p, \omega] \right) \\ & \times f_L[\omega] * f_L^{*T}[\omega'] * f_L[\omega'] * f_L^{*T}[\omega] d\omega' d\omega \end{aligned}$$

Avec $\{f_L[\omega] * f_L^{*T}[\omega'] * f_L[\omega'] * f_L^{*T}[\omega]\}_{ij} = f_{Li}[\omega] f_{Lj}^*[\omega'] \sum_{k=1}^8 (f_{Lk}^*[\omega'] f_{Lk}[\omega])$ donc la moyenne vaut :

$$\{\langle f_L[\omega] * f_L^{*T}[\omega'] * f_L[\omega'] * f_L^{*T}[\omega] \rangle\}_{ij} = \begin{cases} 32\pi^2\gamma^2\Theta[\omega]\Theta[\omega']\delta(\omega - \omega')\delta(\omega' - \omega) \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{n}_i[\omega] \delta \hat{n}_j[\omega'] \rangle = & 32\pi^2\gamma^2\Theta[\omega]\Theta[\omega'] \\ & \times \sum_{k=1}^8 \left(\mathcal{G}_{i,k}[\omega_p, \omega] \mathcal{G}_{k,i}^\dagger[\omega_p, -\omega'] \right) \sum_{k=1}^8 \left(\mathcal{G}_{j,k}[\omega_p, \omega'] \mathcal{G}_{k,j}^\dagger[\omega_p, -\omega] \right) \end{aligned}$$

Reste à intégrer les différents coefficients $\langle \delta \hat{n}_i[\omega] \delta \hat{n}_j[\omega'] \rangle$ sur ω' pour avoir la densité spectrale de bruit et à faire de même sur ω pour avoir la fonction de corrélation à $\tau = 0$.

Notons que cette démarche a une sérieuse limite. Elle n'est, bien entendu valable que lorsque le champ moyen est stable. Par conséquent, on ne peut avoir accès qu'aux corrélations juste avant ou juste après le régime d'oscillation. Car ce dernier, comme nous l'avons dit, se traduit par une instabilité du champ moyen. Les résultats sont représentés sur la figure 2.10. On peut voir autour de la zone **A** en violet, identifiée dans la partie C.2 comme une zone d'instabilité paramétrique, que les corrélations chutent très fortement en dessous de 1. Pour ce qui est des deux autres zones **B** et **C** les corrélations entre les modes **1** et **4** sont très mauvaises à leur proximité. Cela vient du fait que ces zones d'instabilité sont générées par des processus nonlinéaires autres que l'oscillation des modes **1** et **4**. Contrairement à ce qui a été décrit dans les équations précédentes, les calculs représentés sur les courbes de la figure 2.10 correspondent aux corrélations entre les bruits photoniques des modes **1** et **4** et non pas celles des bruits polaritoniques. Si les équations n'ont pas été explicitées ici, c'est pour la simple raison qu'elles sont très volumineuses. $\mathcal{G}$ dans la base excito-phonique est une matrice 16×16 . Les résultats représentés correspondent à cette base par souci de réalisme. Les mesures expérimentales étant réalisées sur le champ photonique, les valeurs calculées le sont aussi.

On s'attend donc à observer de très fortes corrélations entre le signal et le complémentaire dans le régime d'oscillation paramétrique. Pour aller plus loin, il nous faut

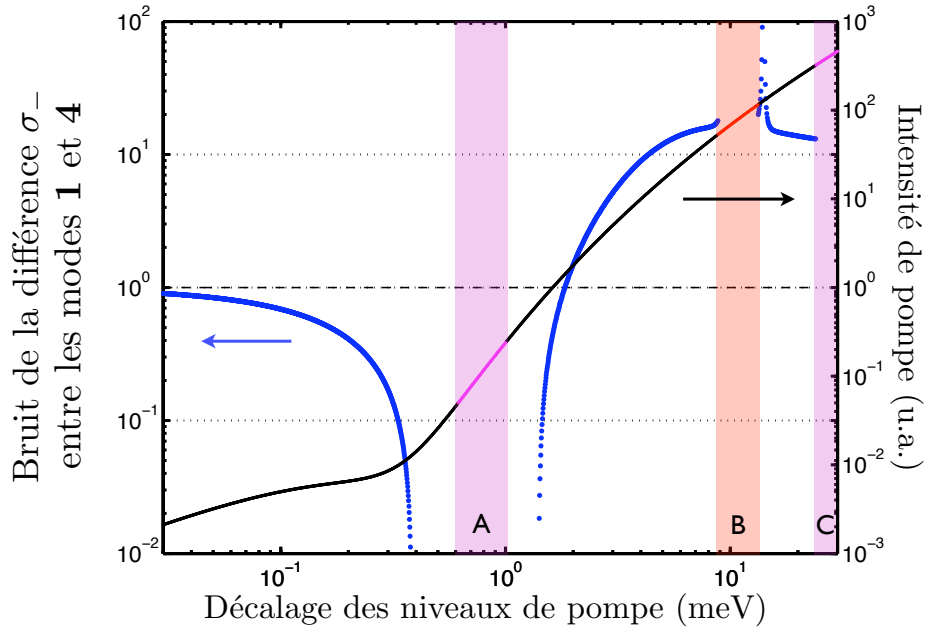


FIGURE 2.10 – Fonction de corrélation normalisée, en bleu et la population dans les modes de pompe en fonction du décalage excitonique des modes de pompes. Comme pour la figure 2.9, les zones A, B, et C définissent les instabilités du champ moyen. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 2.8.

recourir à des techniques numériques permettant de prendre en compte ces fluctuations ou bruits quantiques aussi que le caractère multimode de notre système. En effet, avec ce modèle théorique du champ moyen, on assume que les perturbations sont très petites devant ce champ moyen. Ce qui dans le régime d'oscillation paramétrique n'est plus vrai, car la population est macroscopique dans les états oscillants 1 et 4. C'est donc la principale limitation de ce modèle. La technique numérique utilisée quant à elle, a pour avantage de ne pas nous limiter aux approximations précédentes.

D Résultats numériques et comparaisons avec l'expérience

Les résultats présentés dans cette partie ont été exposés dans un article publié en 2010 [26] dans lequel l'oscillation paramétrique a été démontré dans les micropiliers. Les expériences ont été réalisées au Laboratoire de Photonique et Nanostructures (LPN) du CNRS à Marcoussis, en France par l'équipe dirigée par Jacqueline Bloch. Le propos de cet article était de confronter les résultats expérimentaux à des simulations numériques de type Monte Carlo quantique. Ce sont ces dernières qui vont nous intéresser tout particulièrement. Nous allons dans un premier temps expliquer succinctement en quoi consiste une simulation Monte Carlo, pour ensuite nous intéresser à la caractérisation du système ou comment, depuis les données expérimentales, nous remontons

jusqu'aux paramètres de nos simulations (partie D.1). Nous regarderons et commenterons ensuite les résultats obtenus, bien évidemment en regard de ceux obtenus par les expériences (partie D.2). Nous finirons cette partie ainsi que ce chapitre (partie D.3) par une discussion sur le caractère multimode de notre système et sur les effets que cela a sur le calcul des corrélations.

D.1 Présentation des simulations Monte Carlo quantiques

Avant de parler des résultats obtenus, il nous faut présenter en quoi consiste une simulation Monte Carlo quantique et plus précisément en quoi consistent nos simulations. Pour étudier l'oscillation paramétrique dans notre système de façon complète et son évolution, nous cherchons les solutions numériques des équations stochastiques de la représentation de Wigner des champs bosoniques du photon et de l'exciton. Avec cette technique, nous sondons la dynamique du système, en prenant en compte son caractère multimode, indispensable à la compréhension des phénomènes en jeu dans une telle configuration. Dans le modèle théorique présenté précédemment, seuls quatre modes sont pris en compte. Ici tous les modes possibles le sont. Le caractère multimode en optique quantique est loin d'être anecdotique, produisant des effets très importants [27]. Cet algorithme Monte Carlo nous donne aussi accès aux fluctuations autour du champ moyen, quelques soient leurs intensités.

Pour une description de l'algorithme utilisé dans ce travail et des équations associées, ainsi qu'une définition de ce qu'est un algorithme Monte Carlo quantique, je renvoie le lecteur à l'annexe A. Disons seulement que l'algorithme originellement développé par I. Carusotto et C. Ciuti en 2005 [28] est basé sur les excitons et les photons de cavité et non sur les polaritons. Le code correspondant a été initialement écrit pour simuler des cavités planaires [12, 28]. Pour passer à une géométrie 0D, il suffit d'implémenter le profil du potentiel de la cavité $V_C(\mathbf{x})$ comme indiqué équation (2.6). Le potentiel extra-pilier ne pouvant être infini, il a été choisi une énergie de 500 meV qui au vu de la fenêtre d'énergie dans laquelle nous travaillons (la dizaine de meV), est très grande. Dés à présent, voyons quels en sont les autres paramètres pertinents et comment ils ont été déterminés.

Paramètres du Monte Carlo

Le paramétrage des simulations Monte Carlo est réalisé à partir des données expérimentales obtenues au LPN. Le spectre de luminescence réalisé par excitation non résonnante est représenté en rouge sur la figure 2.11. À partir de l'énergie des différents pics, on peut remonter jusqu'aux paramètres qui vont nous intéresser. Après extrapolation linéaire (sans prendre en compte l'interaction polariton-polariton) on obtient la courbe en pointillés noirs. Si on simule avec ces mêmes paramètres, c'est la courbe bleue que l'on obtient. Cette dernière n'est pas obtenue avec une simulation d'excitation non résonnante (cela n'est pas réalisable avec notre programme car il ne prend pas l'interaction exciton-phonon en compte) mais avec une simulation d'un pulse localisé spatialement et temporellement ($\delta t = 0.05$ ps et $\delta x = 0.05$ μm). La composante temporelle du pulse nous permet d'exciter toutes les énergies relevantes de notre système et la composante spatiale, tous les moments. Plusieurs remarques peuvent être faites.

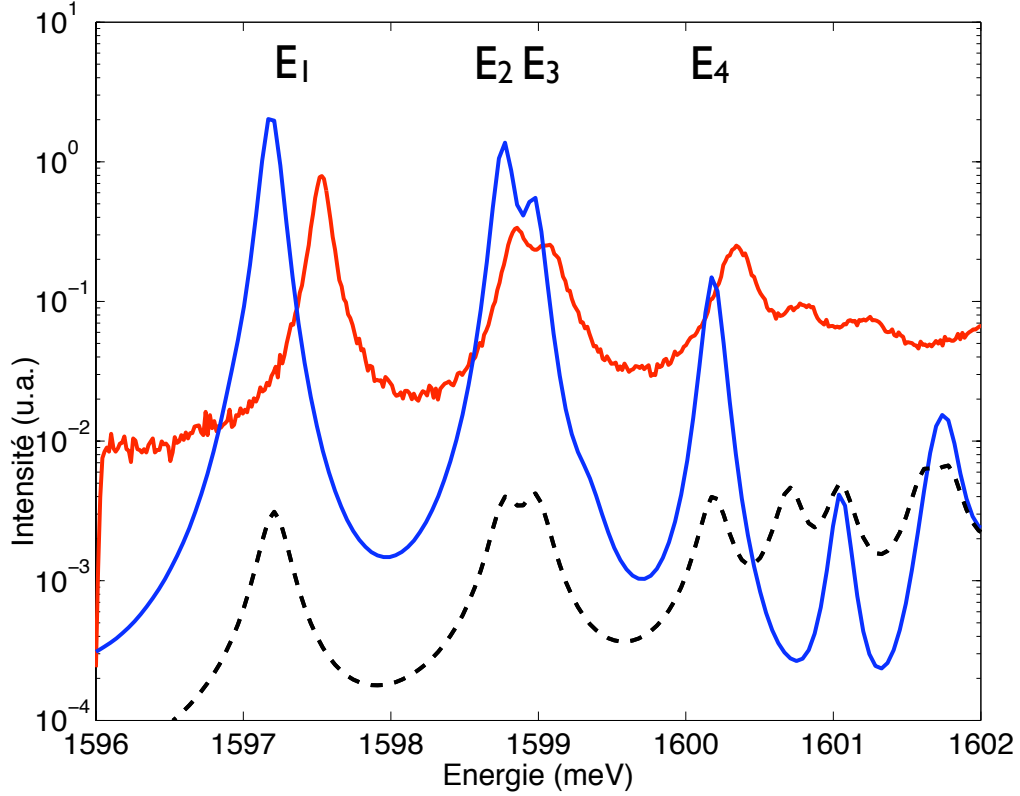


FIGURE 2.11 – Spectre de luminescence non-résonante d'un pilier de $3 \times 3.2 \mu\text{m}$. En rouge les résultats expérimentaux, en bleu le spectre d'absorption obtenu numériquement et en pointillés noirs le calcul analytique (régime linéaire) avec les mêmes paramètres que ceux du Monte Carlo. La courbe bleue est obtenue à l'aide d'une excitation gaussienne temporellement et spatialement localisée ($\delta t = 0.05 \text{ ps}$ et $\delta x = 0.05 \mu\text{m}$) à une énergie quasi-résonnante ($\Delta_p = E_p - (E_2 + E_3)/2 = 1.5 \text{ meV}$). Les autres paramètres sont $\hbar\omega_X^0 = 1605.6 \text{ meV}$; $\hbar\omega_C(0) = 1601.7 \text{ meV}$, $\gamma_C = \gamma_X/2 = 0.1 \text{ meV}$, $k_z = 27 \mu\text{m}^{-1}$, $\Omega_R = 7.5 \text{ meV}$ et $g = 0.01 \text{ meV}$. Ce sont les mêmes paramètres que pour la figure 2.8.

Tout d'abord, on remarque sur la courbe expérimentale de la figure 2.11 que le second pic est dédoublé. Cela vient de la levée de la dégénérescence des niveaux **(2)** et **(3)** qui est dû au fait que le pilier n'est pas exactement carré. Cette asymétrie donne ce léger espacement de leur énergie. À partir de cet espacement, on remonte facilement à la taille du plot qui est approximativement de $3 \times 3.2 \mu\text{m}$.

L'énergie des excitons est quant à elle évaluée à 1605.6 meV et pour les photons de cavité planaire équivalente à $k = 0 \mu\text{m}^{-1}$ à 1601.7 meV. La largeur de raie des excitons elle est prise égale à 0.2 meV pour les excitons et 0.1 meV pour la cavité. Pour les autres paramètres on a $k_z = 27 \mu\text{m}^{-1}$, $\Omega_R = 7.5 \text{ meV}$ et $g = 0.01 \text{ meV}$. Ces paramètres sont obtenus par les expérimentateurs.

Reconstruction des modes d'oscillation

L'idée est ici, à partir du spectre 2.11, de reconstruire la distribution impulsionnelle des modes. Ce qui revient à filtrer spectralement la fluorescence. Les résultats expérimentaux, numériques et analytiques, sont dessinés sur la figure 2.12. Cette reconstruction est faite dans l'espace réciproque mais peut très bien être faite dans l'espace réel.

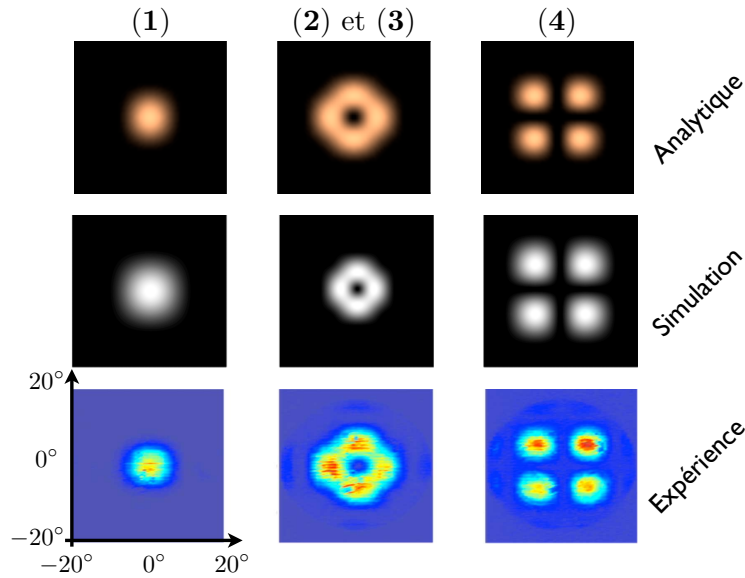


FIGURE 2.12 – Reconstruction des quatre premiers modes propres du pilier. En haut en cuivre les profils obtenus grâce au calcul analytique (équation (2.20)) pour les mêmes paramètres que la figure 2.11. Au centre, en gris, les résultats numériques pour les mêmes paramètres que la figure 2.11 et en bas, en échelle de couleurs, les résultats de l'expérience pour une excitation non résonante.

Sachant que $n_i(\mathbf{x}) = \langle \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_i(\mathbf{x}) \rangle = \phi_i^2(\mathbf{x}) \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle$, on en déduit que seul $\phi_i^2(\mathbf{x})$ nous intéresse. Pour passer dans l'espace réciproque, une transformée de Fourier nous donne la distribution à attendre : $|\mathcal{F}(\phi_i(\mathbf{x}), \mathbf{k})|^2 = |\int d\mathbf{x} \phi_i(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}|^2 / \sqrt{L_x L_y}$. Car $n_i(\mathbf{k}) =$

$\langle \mathcal{F}(\hat{\Psi}_1^\dagger(\mathbf{x}), \mathbf{k}) \mathcal{F}(\hat{\Psi}_1(\mathbf{x}), \mathbf{k}) \rangle = |\mathcal{F}(\phi_1(\mathbf{x}), \mathbf{k})|^2 \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle$. Analytiquement on trouve :

$$\mathcal{F}(\phi_1(\mathbf{x}), \mathbf{k}) = \frac{-1}{2L_x L_y} \left(\alpha_j(k_x) + \beta_j(k_x) \right) \left(\alpha_j(k_y) + \beta_j(k_y) \right) \quad (2.20)$$

Avec :

$$\alpha_i(k_u) = \begin{cases} iL_u & \text{si } k_u = -\frac{\pi}{L_u}(n_{i,u} + 1) \\ \frac{(-1)^{n_{i,u}+1} e^{ik_u L_u} - 1}{\frac{\pi}{L_i}(n_{i,u} + 1) + k_u} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta_i(k_u) = \begin{cases} iL_u & \text{si } k_u = -\frac{\pi}{L_u}(n_{i,u} + 1) \\ \frac{(-1)^{n_{i,u}+1} e^{ik_u L_u} - 1}{\frac{\pi}{L_u}(n_{i,u} + 1) - k_u} & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit donc bien sur la figure 2.12 la correspondance entre théorie, simulations et résultats expérimentaux. Cela nous conforte d'autant plus, à la fois sur la validité de notre modèle et sur celle de nos simulations.

Avant de se focaliser sur l'oscillation paramétrique, il nous reste une subtilité quant à l'excitation, à préciser.

Subtilité de l'excitation

Pour le moment, nous n'avons pas particulièrement focalisé notre attention sur l'excitation du système. L'effet dont nous allons parler n'est pas facile à distinguer expérimentalement, mais il est important à signaler car numériquement il a beaucoup d'importance et aide à la compréhension de la physique liée à notre système.

Comme nous l'avons dit, pour obtenir l'oscillation paramétrique de notre système il nous faut l'exciter à résonance avec les niveaux **(2)** et **(3)**. Précédemment nous avons dit qu'une faible levée de dégénérescence avait lieu dans le système étudié. Cette dernière n'aura que très peu d'influence sur la dynamique de notre système étant donné qu'elle est du même ordre que la largeur en énergie de nos modes. Par contre, la position de la pompe sur le pilier va être déterminante comme le montre la figure 2.13.

On peut noter que lorsque la pompe est parfaitement centrée sur le pilier et à résonance avec les mode **(2)** et **(3)**, la population dans ces modes est nulle (figure 2.13.a). Seul le mode **(1)** est légèrement peuplé et ce, dû à la largeur du mode. Lorsque la pompe est placée légèrement décalée verticalement alors, le mode **(3)** est fortement peuplé (figure 2.13.b). La population du mode **(2)** n'est pas nulle, cela vient de l'interaction d'échange entre ces deux modes que l'on a pu voir dans les équations du champ moyen (2.13). Cela dit, elle est trop décalée pour donner lieu à un processus paramétrique. Et enfin, lorsque la pompe est décalée verticalement et horizontalement (figure 2.13.c), on peut observer un processus d'oscillation paramétrique ainsi qu'une population homogène dans les modes **(2)** et **(3)**. Rappelons qu'ici, les paramètres pour ces trois simulations sont exactement les mêmes, à l'exception bien entendu de la position de la pompe.

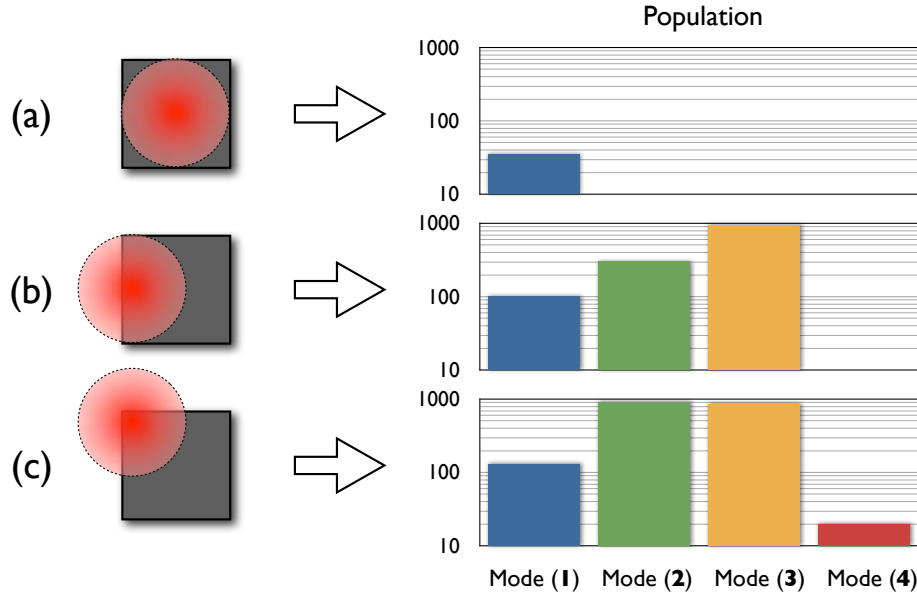


FIGURE 2.13 – Population dans les quatre premiers modes en fonction de la position de la pompe. Simulation pour une excitation résonante avec les modes (2) et (3) pour un plot carré de $4.15 \mu\text{m}$. À gauche est indiquée la position relative de la pompe (cercle rouge) sur le pilier (rectangle gris). (a) correspond à une excitation centrée sur le plot, (b) à une excitation centrée verticalement et décalée horizontalement et (c) décalé verticalement et horizontalement. Les paramètres sont $\hbar\omega_X^0 = 1607 \text{ meV}$, $\hbar\omega_C(0) = 1599 \text{ meV}$, $\gamma_C = \gamma_X = 0.1 \text{ meV}$, les autres sont identiques à ceux de la figure 2.11. La puissance de pompe est la même pour les trois configurations.

L'origine de ce phénomène est à chercher dans la distribution spatiale des modes de pompe et dans l'intégrale de recouvrement entre la pompe et ces modes (2) et (3) : $\mathcal{F}_i(t)$ explicitée dans la partie B.2. Pour une onde plane, quelque soit son énergie, on aura toujours $\mathcal{F}_i(t) = 0$ pour $i \neq 1$. Pour le cas d'un spot gaussien, cela dépendra de sa position. S'il est centré sur la cavité, on aura comme pour l'onde plane $\mathcal{F}_i(t) = 0$ pour $i \neq 1$. Cela explique pourquoi, sur la figure 2.13.a, seul le mode (1) présente une population. À l'heure d'avoir un pompage symétrique horizontalement avec le plot, le mode (3) et le mode (1) sont les seuls à avoir un recouvrement non nul. Comme nous venons de le dire, la population dans le mode (2), qui apparaît sur la figure 2.13.b, vient de l'important couplage qu'il existe entre les modes (2) et (3). Et enfin, lorsque la pompe n'a pas de symétries communes avec le plot alors tous les modes ont un recouvrement non nul et on peut alors injecter une population dans le ou les modes souhaités comme dans la figure 2.13.c où les populations des modes de pompe sont équivalentes et où on voit l'apparition de l'oscillation paramétrique des modes (2) et (3) aux modes (1) et (4).

Comme cela a été dit, cela a peu d'application en pratique car la focalisation sur les piliers est réalisée à l'aide d'un objectif de microscope et le spot a peu de chance d'être une gaussienne parfaitement symétrique. Cependant, cela explique pourquoi l'injection des polaritons dans les modes de pompe n'est pas si évidente. Des petits déplacements

ou asymétries peuvent donner lieu à de grands changements dans l'injection. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à l'oscillation paramétrique. Pour les simulations qui suivent, grand soin a été apporté à ne pas avoir une pompe présentant des symétries relatives à celles du pilier, afin d'avoir une population dans les modes (2) et (3) suffisante et homogène.

D.2 Oscillation paramétrique : numériques vs. expériences

Focalisons notre attention sur l'oscillation paramétrique et sur ses caractéristiques. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps, nous intéresser aux spectres du pilier en excitation résonnante et à ses variations en fonction de la puissance d'excitation, pour ensuite comparer les puissances du signal et du complémentaire.

Spectres de l'OPO

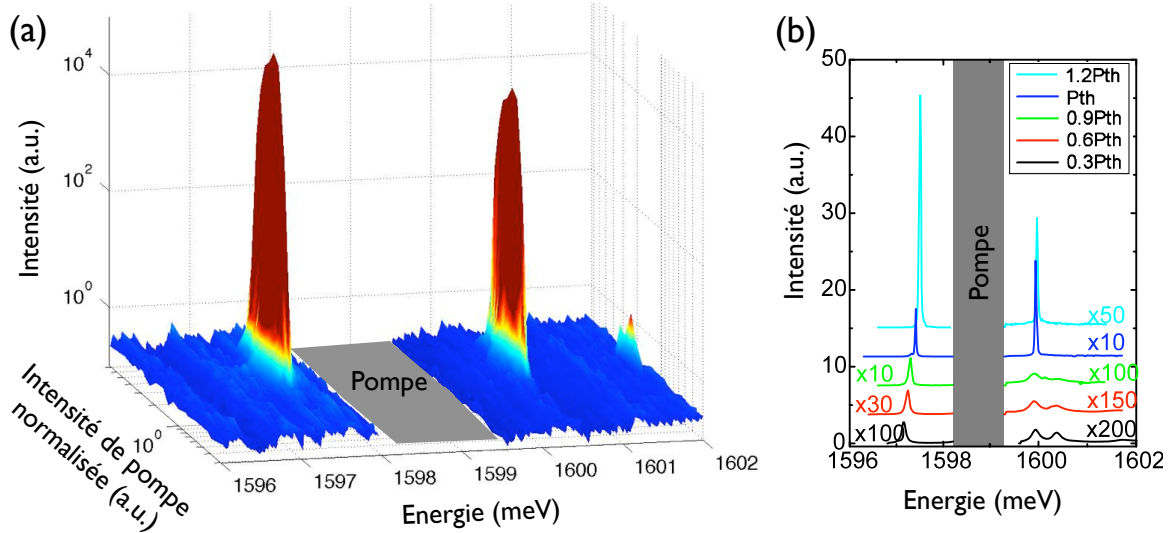


FIGURE 2.14 – Spectre en excitation résonnante du plot au niveau des modes (2) et (3) en fonction de l'intensité de pompe normalisée à la puissance seuil (P_{th}). Résultats des simulations Monte Carlo en (a) et de l'expérience en (b). Les paramètres des simulations sont les mêmes que pour la figure 2.11 à l'exception du detuning laser-polariton qui est nul ici. Images extraites de la référence [26].

Les spectres sont représentés sur la figure 2.14.a pour les simulations et 2.14.b pour les résultats expérimentaux obtenus au LPN. La pompe est masquée car bien plus intense que le signal et le complémentaire. Sur ces deux images, on observe bien la présence d'un seuil avant lequel l'oscillation n'apparaît pas. Sur les résultats expérimentaux avant le seuil, on arrive à distinguer faiblement les différents modes propres du système comme les modes (1) et (4) ou encore les modes (5) et (6). Par contre, ils ne sont pas visibles dans le cas des simulations. Cela vient de l'interaction avec les phonons acoustiques qui n'a pas été pris en compte dans les simulations. Seront dénommés respectivement signal et complémentaire les deux pics de part et d'autre de la pompe.

Le signal étant celui à plus basse énergie (autour de 1597 meV) et le complémentaire celui à plus haute (autour de 1605 meV).

On remarque cette fois sur les résultats numériques la présence d'un autre pic plus faible proche de 1602 meV. Sa faible intensité le rend inobservable expérimentalement. Si l'on filtre, comme on l'a fait dans la partie précédente, l'image est trop bruitée pour en retirer quelques informations directement. Mais si l'on projette cette distribution sur la base des états propres du plot (calcul de la fonction de corrélation spatiale), on trouve qu'il semble correspondre à un mélange des modes (1, 2) et (2, 1). C'est donc un processus d'oscillation paramétrique parasite qui à partir de deux polaritons du mode (1, 1) (mode (4)) donne soit un polariton dans le mode (0, 1) (mode (2)) et un dans le mode (2, 1) ou un polariton dans le mode (1, 0) (mode (3)) et un dans le mode (1, 2).

Revenons au signal et au complémentaire. Les résultats de la reconstruction de la distribution dans l'espace réciproque en excitation résonnante sont dessinés figure 2.15. On y voit, encore une fois, que les simulations et les expériences ont une très bonne correspondance. Pour le signal, on observe un unique lobe et pour le complémentaire quatre. Ces modes ressemblent beaucoup aux modes (1) et (4). Le signal correspond à 75% au mode (1) et le complémentaire à environ 55% au mode (4). Dans la partie suivante, nous reparlerons de la relation entre mode propre du pilier et mode d'oscillation paramétrique.

Maintenant que l'oscillation paramétrique est mise en évidence, concentrons-nous sur les caractéristiques du signal et du complémentaire.

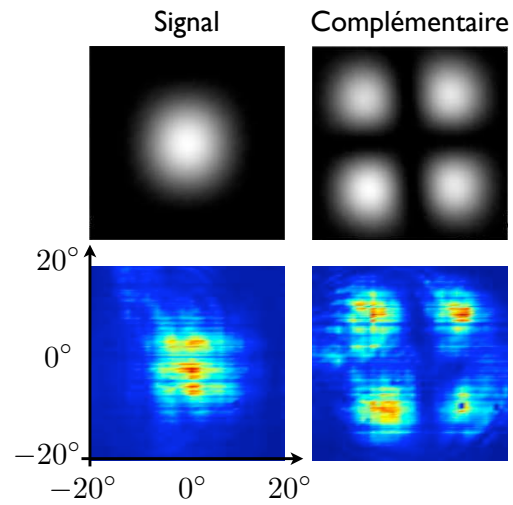


FIG. 2.15 – *Reconstruction de la distribution dans l'espace réciproque après filtrages du spectre de la figure 2.14, des modes oscillants. À gauche, le signal et à droite le complémentaire. En haut, les résultats des simulations et en bas, ceux des expériences.*

Caractéristiques du signal et du complémentaire

C'est avant tout l'intensité, ainsi que la largeur spectrale de nos deux faisceaux, qui va nous intéresser. Ces données sont représentées pour les simulations et pour les expériences sur la figure 2.16. Les figures 2.16.a et 2.16.b correspondent à l'intensité intégrée en fonction de la puissance de pompe. Un seuil apparaît au niveau duquel les quatre courbes expérimentent un brusque changement, qui correspond au début de l'oscillation paramétrique.

En ce qui concerne les figures 2.16.c et 2.16.d, c'est à dire la largeur spectrale du signal et du complémentaire, plusieurs remarques peuvent être faites. Tout d'abord sur les résultats expérimentaux on peut voir que dans le régime d'oscillation la largeur semble saturée autour de 0.05 meV. Cela vient de la limite de résolution du spectromètre utilisé. En ce qui concerne les simulations, pour plus de précision les pics, correspondant au signal et au complémentaire, sont ajustés à une lorentzienne de la-

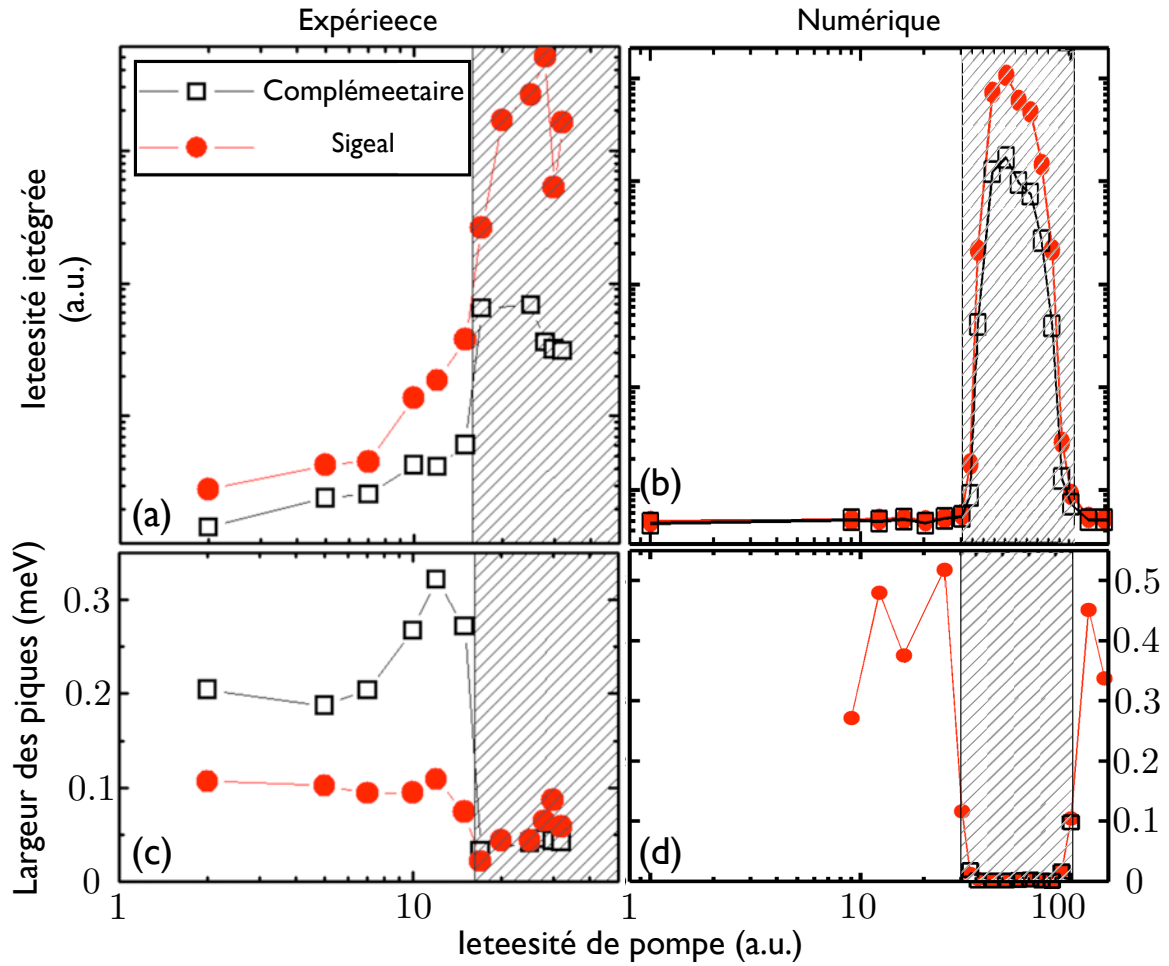


FIGURE 2.16 – Caractéristiques de notre OPO en fonction de la puissance de pompe. À gauche, (a) et (c) correspondent aux résultats expérimentaux et à droite, (b) et (d) aux simulations pour les mêmes paramètres que la figure 2.14. En haut, les graphes (a) et (b) correspondent à la variation de l'intensité intégrée du signal (cercles rouges) et du complémentaire (carrés noirs) en fonction de l'intensité de pompe. En bas, les graphes (c) et (d) reproduisent la largeur des pics en fonction de l'intensité de pompe. La zone hachurée définit le régime d'oscillation paramétrique. Images extraites de la référence [26].

quelle on déduit la largeur de ces pics. Que ce soit sur les simulations numériques ou sur les données expérimentales, on observe au niveau du seuil une réduction drastique de la largeur de raie de nos deux faisceaux.

On remarque sur les résultats numériques (figures 2.16.b et 2.16.d) que nous avons extinction de l'oscillation. Cela se traduit bien évidemment pas la diminution de l'intensité intégrée des pics mais aussi pas un élargissement de ces derniers. Un tel phénomène a aussi été observé expérimentalement. C'est sur ce phénomène peu commun que nous allons nous attarder maintenant.

Extinction de l'OPO et accord de phase

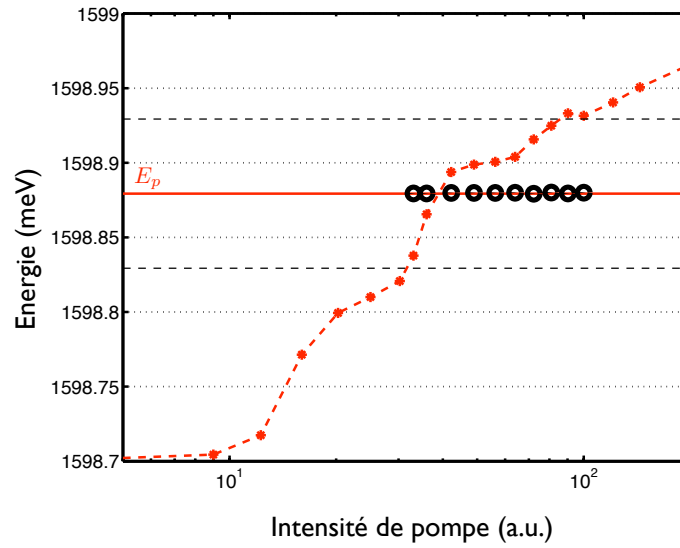


FIGURE 2.17 – Accord de phase. En trait plein rouge : l'énergie de la pompe ; en pointillés noirs : l'énergie de la pompe plus et moins la largeur de raie des modes ; en cercles noirs : l'accord de phase constaté entre le signal et le complémentaire : $(E_s + E_c)/2$. Les points rouges correspondent à l'accord de phase entre le mode (1) et (4) en tenant compte de la renormalisation due à la population excitonique de chaque mode : $(\tilde{E}_1 + \tilde{E}_4)/2$. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 2.14.

Si nous nous reportons aux résultats du modèle analytique traités dans la partie précédente, on peut voir sur la courbe du champ moyen 2.9 que la zone **A** d'instabilité donnant l'oscillation paramétrique s'étend sur une certaine gamme d'énergie, suivie d'une nouvelle zone de stabilité. Ce qui correspond à l'observation expérimentale et numérique. Cet effet a déjà été prédit théoriquement [29] pour des cavités planaires excitées à l'angle magique mais c'est la première observation expérimentale. Afin de mieux comprendre les processus en jeu, concentrons-nous sur les résultats numériques. Sur la figure 2.17, on peut voir différentes courbes traitant de l'accord de phase. Le trait rouge correspond à l'énergie du laser de pompe. En cercle noir, on a l'accord de phase constaté entre le signal, le complémentaire et la pompe : $(E_s + E_c)/2$. L'accord est vraiment très bon, bien que, comme cela a été dit dans la partie B.2, théoriquement

on ne peut avoir accord parfait. Quant aux étoiles rouges elles indiquent l'accord de phase estimé entre le mode (1) et (4) renormalisé par la population excitonique dans le plot. Les traits en pointillés noirs correspondent à l'énergie du laser plus ou moins la largeur des modes.

$$\tilde{E}_i = \hbar\tilde{\omega}_i = \frac{\omega_C^i + \omega_X^0 + gn_X}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_C^i - \omega_X + gn_X)^2 + 4\Omega_R^2}$$

où $n_X = \langle \Psi_X \Psi_X^\dagger \rangle$ la densité excitonique dans le plot.

On voit bien que c'est le décalage excitonique qui nous permet d'avoir un très bon accord de phase. En effet, pour une pompe de faible intensité, donc une population excitonique faible, le désaccord est d'environ 0.3 meV. Au fur et à mesure que cette densité excitonique augmente, l'accord de phase s'affine jusqu'à être assez bon pour permettre l'oscillation. Un bon accord de phase est défini par rapport à la largeur de nos modes. On voit bien que l'oscillation se produit lorsque l'on a l'accord de phase estimé, compris entre plus ou moins la largeur de raie des modes. Ensuite, la densité devient si importante que l'accord de phase est détruit. C'est l'accord de phase, dépendant de la densité excitonique, qui explique pourquoi l'oscillation a lieu malgré les conditions initiales peu favorables, ainsi que, pourquoi notre OPO s'éteint lorsque l'intensité d'excitation, donc la densité excitonique est trop importante.

Après avoir bien compris qualitativement et quantitativement l'oscillation paramétrique, notre attention va se porter sur les corrélations, ce qui va nous permettre de mettre en évidence l'importance du caractère multimode du système.

D.3 Corrélation et modes "frustrés"

Nous avons vu que les simulations étaient en très bon accord avec les expériences. Le modèle présenté dans la partie C semble lui aussi correspondre. Attardons-nous sur cette correspondance. Dans un premier temps, nous allons exposer les résultats numériques obtenus pour les corrélations entre les modes (1) et (4) et les comparer avec ceux obtenus analytiquement. Ensuite, afin d'illustrer notre propos, nous étudierons les résultats numériques obtenus pour une configuration proche de celle étudiée, ce qui nous permettra d'observer plus clairement le caractère multimode du système.

Corrélation : révélateur de multimodalité

Ce sont les corrélations entre le bruit des modes 1 et 4 qui vont nous intéresser. Les résultats de ces corrélations donnés par le modèle analytique sont présentés dans la partie C.3, et nous indiquent que le signal et le complémentaire doivent être fortement corrélés. Regardons les résultats obtenus avec les simulations. Pour ce faire, les quadratures nécessaires ont été implémentées. C'est à dire : $\overline{n_i(t)}$ et $\overline{n_i(t)n_j(t)}$ où — correspond aux moyennes sur les configurations du Monte Carlo (cf. Annexe A pour la relation entre les opérateurs et les fonctions complexes des simulations Monte Carlo).

Comme le montre la figure 2.18, qui représente la fonction de corrélation du bruit de la population des modes (1) et (4), les résultats ne sont pas ceux attendus. Ils sont loin d'être en accord avec ce qui a été obtenu avec le modèle (figure 2.10). C'est sous le

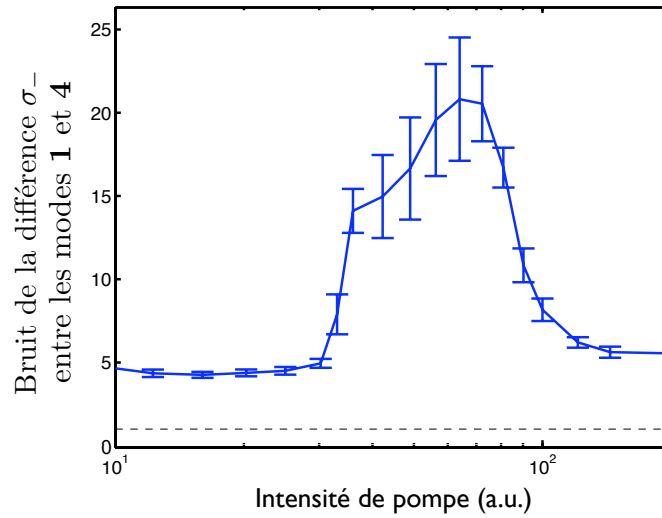


FIGURE 2.18 – *Fonction de corrélation quantique normalisée entre les modes (1) et (4) en fonction de la puissance de pompe, déterminé avec l'aide des simulations Monte Carlo. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 2.14.*

seuil d'oscillation que nous avons les meilleurs résultats, tout en restant loin de la limite quantique standard. Au dessus du seuil, nous avons un excès de bruit très important alors que nous nous attendions à de fortes corrélations. On peut donc conclure que nous n'avons pas de corrélations quantiques entre les modes (1) et (4) dans ce régime d'oscillation paramétrique.

Alors pourquoi avons-nous un tel écart entre notre modèle à 4 modes et les simulations Monte Carlo multimodes ? Revenons à la figure 2.18. Dans le modèle analytique, nous avons considéré que l'OPO oscillait dans les modes (1) et (4). Modes qui sont les modes propres de notre système, comme nous l'avons vu sur la figure 2.12, en régime linéaire. Mais cela ne signifie pas pour autant qu'il s'agit des modes oscillants. Sur la figure 2.15, nous avons reconstruit la distribution des modes oscillants, dans laquelle on observait l'oscillation. À première vue, ils ont une bonne concordance (en termes de distribution) avec ceux utilisés dans le modèle. Si on calcule la fonction de corrélation spatiale entre les modes (1) et (4) du modèle et ceux obtenus dans le régime d'oscillation avec les simulations, on trouve une correspondance à 75% pour le signal avec le mode (1) et de 55% pour le complémentaire avec le mode (4). Les modes oscillants sont bien proches des modes du modèle mais ils ne correspondent pas exactement. Et c'est ce désaccord qui va expliquer la mauvaise concordance des résultats. Les modes dans lesquels nous avons l'oscillation sont des modes "frustrés". Ce sont des combinaisons linéaires des modes utilisés dans le modèle analytique. Le calcul de corrélation de bruit σ_- étant calculé sur la base du régime linéaire, les corrélations sont nécessairement dégradées.

Pour illustrer pleinement ce caractère multimode, regardons les résultats obtenus lorsqu'on change légèrement les paramètres des simulations.

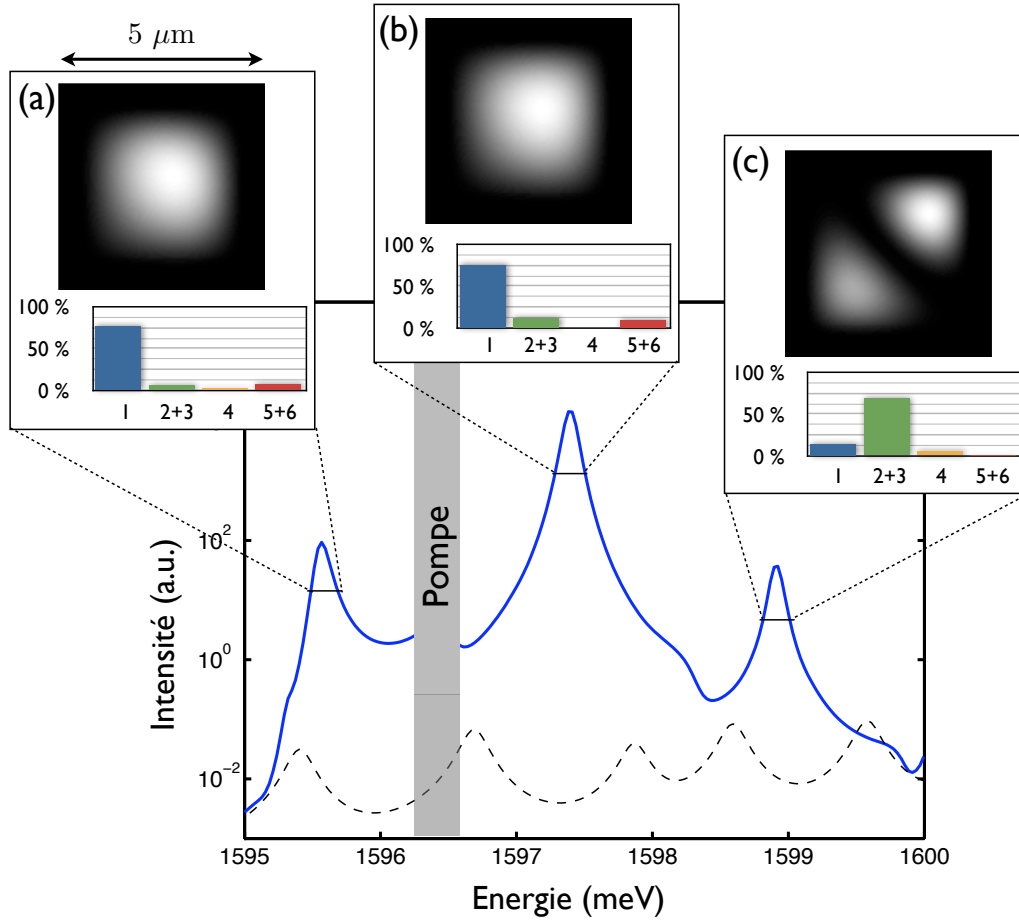


FIGURE 2.19 – Spectre pour un pilier de $4.15 \times 4.15 \mu\text{m}$ avec un désaccord entre la pompe et le mode (2) (ou (3) ici équivalent car dégénéré) de $\Delta_p = 0.2 \text{ meV}$. En bleu, le résultat de la simulation et en pointillés noirs l'extrapolation analytique des modes propres du pilier (équivalent au spectre en régime linéaire). En (a), (b) et (c) est représentée l'analyse des différents pics présents sur le spectre, comprenant dans la partie supérieure leur distribution spatiale et au-dessous leur composition en fonction des six premiers modes propres du régime linéaire. Les résultats sont obtenus pour une intensité de pompe $I_p = 10^4 \text{ a.u.}$. Les paramètres sont $\hbar\omega_X^0 = 1607 \text{ meV}$, $\hbar\omega_C(0) = 1599 \text{ meV}$ et $\gamma_C = \gamma_X = 0.1 \text{ meV}$. Les autres paramètres sont les mêmes que pour la figure 2.11.

Mode propre ou mode "frustré"

Ces simulations ont été réalisées pour un plot carré de $4.15 \times 4.15 \mu\text{m}$, avec un désaccord entre la pompe et le mode **(2)** (ou **(3)** ici équivalent car ils sont dégénérés) de $\Delta_p = 0.2 \text{ meV}$ (décalage vers le rouge de la pompe). Les résultats sont reproduits sur la figure 2.19. On constate qu'il y a sur le spectre, un processus d'oscillation paramétrique. Les pics **(a)** et **(b)** sont équidistants de la pompe. Pour ce qui est du troisième pic, on a équidistance entre ce dernier **(c)** et **(a)** par rapport au pic **(b)**. Ce qui traduit un second processus paramétrique. On remarque qu'aucun des pics ne coïncide avec le spectre en régime linéaire, dessiné en pointillés noirs sur la figure 2.19, à l'exception du premier dont l'écart peut être dû à une population de polaritons importante. Ce qui tend à nous indiquer que l'oscillation ne prend pas place dans les modes **(1)** et **(4)**.

Regardons de plus près chacun de ces pics. Sur la figure 2.19, est indiqué pour chaque pic sa distribution spatiale reconstruite par filtrage spectral ainsi que l'accord entre cette distribution et les modes exposés dans la partie B.1. Le premier pic en **(a)** correspond assez bien au mode fondamental **(1)** : un peu plus de 75% de correspondance. Par contre, le pic **(b)** lui ne correspond pas du tout au mode **(4)** : 0.2% de correspondance seulement. Il correspond plus au mode **(1)** (75.2%). Le mode **(4)** n'intervenant pas dans cette oscillation paramétrique, il va de soi que les corrélations entre le mode **(1)** et ce dernier seront faibles. Quant au pic **(c)**, il correspond principalement aux modes de pompe **(2)** et **(3)** (symétriquement 34.3%).

Comme le montrent ces résultats, il est assez simple, d'obtenir dans ces micropiliers, un processus d'oscillation paramétrique, mais rien ne dit que les modes oscillants seront les modes propres du pilier en régime linéaire. Des résultats similaires ont été obtenus au sein du LPN, pour ce qui est de la distribution des modes oscillants avec un désaccord positif $\Delta_p > 0 \text{ meV}$. Le caractère multimode de notre système a ici une importance primordiale et le modèle à quatre modes présenté dans la partie B ne peut pas rendre compte d'un tel processus.

Il semble donc que le caractère multimode du système soit en cause. À l'heure de s'intéresser aux corrélations quantiques, il ne peut être négligé. Cela dit, la frustration des modes oscillants étant liée à l'écartement en énergie de ces derniers, une solution qui permettrait de forcer l'oscillation dans les modes étudiés analytiquement, serait de diminuer la taille du plot. Les conditions d'oscillation devraient être plus dures à obtenir (oscillation plus dépendante du désaccord exciton-photon et polariton-pompe par exemple) mais en contre-partie elle devrait être plus propre (monomode).

Conclusion et Perspectives

Pour conclure, grâce à cette étude nous comprenons mieux l'oscillation paramétrique dans les microcavités piliers en régime de couplage forte. Dans un premier temps, nous avons vu comment on pouvait modéliser ce système par quatre niveaux aux règles de diffusion bien établies. Ces règles indiquaient plusieurs processus de diffusion dont diffusion par oscillation paramétrique des modes **(2,3)** vers les modes **(1,4)**. Suite à quoi, nous nous sommes attachés à montrer que les symétries existantes entre la pompe et le pilier pouvaient changer dramatiquement l'efficacité d'injection dans les

modes choisis. Puis, nous avons montré que dans un tel modèle, les corrélations entre le mode **1** et **4** étaient éminemment quantiques.

Afin de pousser plus loin notre étude, nous avons utilisé des simulations Monte Carlo, qui nous ont permis de comparer nos résultats à ceux obtenus au sein du LPN. La concordance entre les deux fut remarquable, mettant en évidence l'existence d'un processus d'oscillation paramétrique dans ces piliers micrométriques. Des caractéristiques des faisceaux signal et complémentaire produits, jusqu'à leurs distributions ont pu être reproduites. Nous avons aussi compris le rôle déterminant de la renormalisation due aux interactions exciton-exciton, dans l'accord de phase. Cette renormalisation engendre l'extinction de l'oscillation paramétrique à forte puissance. Mais surtout, nous avons compris le rôle déterminant des effets multimodes en nous intéressant aux corrélations dans les simulations. En effet, on a pu voir que si l'oscillation peut prendre place dans les modes **1** et **4** utilisés dans le modèle, elle pouvait aussi avoir lieu dans d'autres modes. Cet effet explique pourquoi il ne nous a pas été possible de les observer numériquement, et nous indique aussi que si l'on diminuait la taille du pilier, on pourrait favoriser l'oscillation dans les modes **1** et **4**. D'un autre côté l'étude des corrélations des modes "frustrés" oscillants devrait révéler aussi des effets quantiques très riches.

La route est donc ouverte pour l'étude détaillée des corrélations quantiques dans les microcavités 0D telles que ces piliers. Cette étude des oscillations paramétriques est à relier à toute une série de propositions faites récemment. Études se basant sur des géométries 0D, pour générer d'autres types d'états non classiques de la lumière par exemple [27, 30, 31]. Ainsi, couplant plusieurs micropiliers de façon adéquate on peut imaginer augmenter la constante d'interaction non-linéaire, ou encore séparer plus facilement le signal du complémentaire.

Bibliographie du Chapitre 2

- [1] BUCHWALD, J. Z. (2007): Huygens' methods for determining optical parameters in bi-refrarence. *Arch. Hist. Exact Sci.*, **61**:67.
- [2] FRANKEN, P. A., A. E. HILL, C. W. PETERS, & G. WEINREICH (1961): Generation of Optical Harmonics. *Phys. Rev. Lett.*, **7**:118.
- [3] ARMSTRONG, J. A., N. BLOEMBERGEN, J. DUCUING, & P. S. PERSHAN (1962): Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric. *Phys. Rev.*, **127**:1918.
- [4] LOUDON, R. & P. KNIGHT (1987): Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, **34**:709.
- [5] BOYD, R. W. (2008): *Nonlinear optics*. Academic Press.
- [6] SCULLY, M. O. & M. S. ZUBAIRY (1997): *Quantum optics*. Cambridge University Press.
- [7] SAVVIDIS, P. G., J. J. BAUMBERG, R. M. STEVENSON, M. S. SKOLNICK, D. M. WHITTAKER, & J. S. ROBERTS (2000): Angle-Resonant Stimulated Polariton Amplifier. *Phys. Rev. Lett.*, **84**:1547.
- [8] CIUTI, C., P. SCHWENDIMANN, B. DEVEAUD, & A. QUATTROPANI (2000): Theory of the angle-resonant polariton amplifier. *Phys. Rev. B*, **62**:4825.
- [9] STEVENSON, R. M., V. N. ASTRATOV, M. S. SKOLNICK, D. M. WHITTAKER, M. EMAM-ISMAIL, A. I. TARTAKOVSKII, P. G. SAVVIDIS, J. J. BAUMBERG, & J. S. ROBERTS (2000): Continuous Wave Observation of Massive Polariton Redistribution by Stimulated Scattering in Semiconductor Microcavities. *Phys. Rev. Lett.*, **85**:3680.
- [10] BAUMBERG, J. J., P. G. SAVVIDIS, R. M. STEVENSON, A. I. TARTAKOVSKII, M. S. SKOLNICK, D. M. WHITTAKER, & J. S. ROBERTS (2000): Parametric oscillation in a vertical microcavity: A polariton condensate or micro-optical parametric oscillation. *Phys. Rev. B*, **62**:1451131.
- [11] SAVASTA, S., O. D. STEFANO, V. SAVONA, & W. LANGBEIN (2005): Quantum Complementarity of Microcavity Polaritons. *Phys. Rev. Lett.*, **94**:246401.
- [12] VERGER, A., I. CARUSOTTO, & C. CIUTI (2007): Quantum Monte Carlo study of ring-shaped polariton parametric luminescence in a semiconductor microcavity. *Phys. Rev. B*, **76**:115324.
- [13] ROMANELLI, M. (2005): *Mélange à quatre ondes de polaritons dans des microcavités semi-conductrices*. Doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- [14] VERGER, A. (2007): *Etude théorique des propriétés non-classiques de la lumière émise par des microcavités semiconductrices dans le régime de couplage fort*. Doctorat, Université Paris VI.
- [15] DIEDERICHS, C., J. TIGNON, G. DASBACH, C. CIUTI, A. LEMAÎTRE, J. BLOCH, P. ROUSSIGNOL, & C. DELALANDE (2006): Parametric oscillation in vertical triple microcavities. *Nature*, **440**:904.

- [16] DIEDERICH, C. (2007): *Oscillation paramétrique optique et génération de photons jumeaux dans des microcavités de semiconducteurs*. Doctorat, Université de Paris VI.
- [17] HEIDMANN, A., R. J. HOROWICZ, S. REYNAUD, E. GIACOBINO, C. FABRE, & G. CAMY (1987): Observation of quantum noise reduction on twin laser beams. *Phys. Rev. Lett.*, **59**:2555.
- [18] MEHMET, M., H. VAHLBRUCH, N. LASTZKA, K. DANZMANN, & R. SCHNABEL (2010): Observation of squeezed states with strong photon-number oscillations. *Phys. Rev. A*, **81**(1):013814.
- [19] BAJONI, D., P. SENELLART, E. WERTZ, I. SAGNES, A. MIARD, A. LEMAÎTRE, & J. BLOCH (2008): Polariton Laser Using Single Micropillar GaAs-GaAlAs Semiconductor Cavities. *Phys. Rev. Lett.*, **100**:47401.
- [20] KAITOUNI, R. I., O. E. DAÏF, A. BAAS, M. RICHARD, T. PARAISO, P. LUGAN, T. GUILLET, F. MORIER-GENOUD, J. D. GANIÈRE, J. L. STAEHLI, V. SAVONA, & B. DEVEAUD (2006): Engineering the spatial confinement of exciton polaritons in semiconductors. *Phys. Rev. B*, **74**:155311.
- [21] CERDA-MÉNDEZ, E. A., D. N. KRIZHANOVSKII, M. WOUTERS, R. A. BRADLEY, K. BIERMANN, K. GUDA, R. HEY, P. V. SANTOS, D. SARKAR, & M. S. SKOLNICK (2010): Polariton Condensation in Dynamic Acoustic Lattices. *Phys. Rev. Lett.*, **105**:116402.
- [22] BALILI, R., V. HARTWELL, D. SNOKE, L. PFEIFFER, & K. WEST (2007): Bose-Einstein Condensation of Microcavity Polaritons in a Trap. *Science*, **316**:1007.
- [23] LAI, C. W., N. Y. KIM, S. UTSUNOMIYA, G. ROUMPOS, H. DENG, M. D. FRASER, T. BYRNES, P. RECHER, N. KUMADA, T. FUJISAWA, & Y. YAMAMOTO (2007): Coherent zero-state and π -state in an exciton-polariton condensate array. *Nature*, **450**:529.
- [24] CARUSOTTO, I. & C. CIUTI (2004): Probing Microcavity Polariton Superfluidity through Resonant Rayleigh Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, **93**:166401.
- [25] LANGEVIN, P. (1908): Sur la théorie du mouvement brownien. *C.R. Hebd. Seances Acad. Sci.*, **146**:530–533.
- [26] FERRIER, L., S. PIGEON, E. WERTZ, M. BAMBA, P. SENELLART, I. SAGNES, A. LEMAÎTRE, C. CIUTI, & J. BLOCH (2010): Polariton parametric oscillation in a single micropillar cavity. *Appl. Phys. Lett.*, **97**:1105.
- [27] BAMBA, M., S. PIGEON, & C. CIUTI (2010): Quantum Squeezing Generation versus Photon Localization in a Disordered Planar Microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, **104**:213604.
- [28] CARUSOTTO, I. & C. CIUTI (2005): Spontaneous microcavity-polariton coherence across the parametric threshold: Quantum Monte Carlo studies. *Phys. Rev. B*, **72**:125335.
- [29] WHITTAKER, D. M. (2005): Effects of polariton-energy renormalization in the microcavity optical parametric oscillator. *Phys. Rev. B*, **71**:115301.
- [30] KARR, J. P., A. BAAS, R. HOUDRÉ, & E. GIACOBINO (2004): Squeezing in semiconductor microcavities in the strong-coupling regime. *Phys. Rev. A*, **69**:31802.

-
- [31] LIEW, T. C. H. & V. SAVONA (2010): Single Photons from Coupled Quantum Modes.
Phys. Rev. Lett., **104**:183601.

Chapitre 3

Fluide et Superfluide de Polaritons

Si précédemment nous nous sommes intéressés aux polaritons d'un point de vue proche de l'optique quantique, dans cette partie nous allons les aborder d'un point de vue hydrodynamique. Nous allons interpréter les polaritons comme un fluide ou ce qui est équivalent un gaz en interaction. Pour ce faire, précisons d'ores et déjà les conditions dans lesquelles cette interprétation prend place.

Dans une cavité planaire excitée à résonance, si l'angle d'incidence est suffisamment faible (comprendre inférieur à l'angle *magique*) les processus d'oscillations paramétriques sont négligeables. Par contre, les interactions polariton-polariton, elles, sont toujours présentes. Ce qui permet de considérer les polaritons comme un fluide. Un fluide bosonique bidimensionnel qui aura la particularité d'être en partie constitué de lumière et de matière. Si cette vision hydrodynamique de la lumière n'est pas réservée aux polaritons (description identique possible dans les milieu Kerr), elle prend avec eux une dimension particulière.

Les propriétés des polaritons permettent, en effet, de générer plusieurs types de fluide, et dans différents régimes d'écoulement. Les régimes d'écoulement iront du cas subsonique au cas supersonique, en passant bien entendu par le cas turbulent. Mais nous nous intéresserons aussi tout particulièrement à deux états liquides très différents observables dans les polaritons excitoniques. Les fluides classiques qui nous permettront de caractériser des effets dus au spin et à la polarisation des polaritons et de démontrer encore une fois la grande contrôlabilité des polaritons et leurs grandes potentialités. Mais c'est un autre état liquide, que peuvent prendre les polaritons, qui va nous intéresser tout particulièrement : la superfluidité. Nous nous intéresserons à la transition entre un fluide classique de polariton et cet état quantique macroscopique. Bien que ce concept fut initialement introduit pour des atomes d'hélium à une température proche de zéro, il convient tout à fait aux polaritons, dans certaines conditions, comme nous le verrons.

Dans la partie A, nous rappellerons ce qu'est la superfluidité et quels sont les critères permettant sa mise en évidence. Nous rappellerons aussi quel rapport cet état de la matière entretient avec les condensats de Bose-Einstein. Nous introduirons aussi succinctement les différents régimes d'écoulement possibles pour un fluide classique et quels liens ils entretiennent avec la superfluidité. Puis, nous verrons en quoi ce concept s'applique aux polaritons excités à résonance. Suite à quoi, nous rapporterons la première démonstration expérimentale de la superfluidité des polaritons, ainsi que son pendant numérique réalisé durant ce doctorat, dans la partie B. Puis, dans la partie C, nous focaliserons notre attention sur les écoulements turbulents dans les superfluides, et plus particulièrement sur la formation hydrodynamique de vortex dans les superfluides de polaritons. Et enfin, dans une dernière partie (partie D), nous regarderons de plus près les propriétés de spin et de polarisation des polaritons, propriétés qui, comme nous le verrons, permettent de contrôler le potentiel effectif subi par les polaritons et ainsi ouvrir la voie à un grand nombre d'expériences permettant de mieux comprendre ces états si particuliers de la matière.

Sommaire

A	Superfluidité dans les atomes	71
A.1	Gaz de Bose et condensation	71
A.2	Superfluidité	72
A.3	Régimes d'écoulement	77
B	Superfluidité des polaritons	79
B.1	Condensation à l'état solide	80
B.2	Superfluide de polaritons excitoniques	81
B.3	Résultats numériques et expérimentaux	87
B.4	Effet Čerenkov dans un fluide de polaritons	90
C	Turbulences et superfluide de polaritons	93
C.1	Cas des atomes	94
C.2	Cas des polaritons	96
C.3	Piégeage de vortex	101
D	Défauts et polarisation de spin	103
D.1	Hamiltonien effectif dépendant du spin	103
D.2	Résultats numériques et expérimentaux	107
	Conclusion et Perspectives	113
	Bibliographie du chapitre 3	115

A Superfluidité dans les atomes

Cette partie va nous servir à introduire les concepts associés à cette propriété qu'est la superfluidité. Dans un premier temps (partie A.1), nous partirons du gaz de Bose pour en venir au condensat de Bose-Einstein. Puis, nous regarderons la relation qui lie la superfluidité et ces condensats, et comment peut être décrit un tel état (partie A.2). Et enfin, nous nous attarderons sur les différents régimes d'écoulement des fluides, ainsi que la relation qu'ils entretiennent avec la superfluidité (partie A.3).

A.1 Gaz de Bose et condensation

S. N. Bose en 1924 proposa une statistique pour décrire les photons, qui prend en compte l'indiscernabilité des photons et la possibilité d'en avoir plusieurs dans un même état. En 1924-1925, A. Einstein généralisa cette statistique aux particules de spin entier. Statistique qui est aujourd'hui connue comme la distribution de Bose-Einstein et qui peut s'écrire comme suit :

$$n_i = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) - 1}$$

où n_i correspond au nombre de particules dans le niveau d'énergie E_i , μ le potentiel chimique, k_B la constante de Boltzmann et T la température. A. Einstein pointa du doigt qu'à l'équilibre thermodynamique et à basse température, des bosons identiques, sans interaction entre eux, devaient se condenser tous dans le même état et devenir indiscernables, ce qui est aujourd'hui connu comme condensation de Bose-Einstein.

Sur la figure 3.1, est schématisé le passage d'un gaz de bosons à haute température, descriptible classiquement, à basse température condensée. À haute température la vitesse d'une particule peut être représentée par un vecteur (figure 3.1.a). Les particules ont une distance moyenne notée d . À plus basse température (figure 3.1.b), les particules ne peuvent plus être décrites classiquement et sont caractérisées par leur longueur d'onde thermique de Broglie λ_{dB} , qui s'écrit :

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (3.1)$$

avec m la masse d'un boson, k_B la constante de Boltzmann, et T la température. À encore plus basse température (figure 3.1.c) comme l'indique l'équation (3.1), la

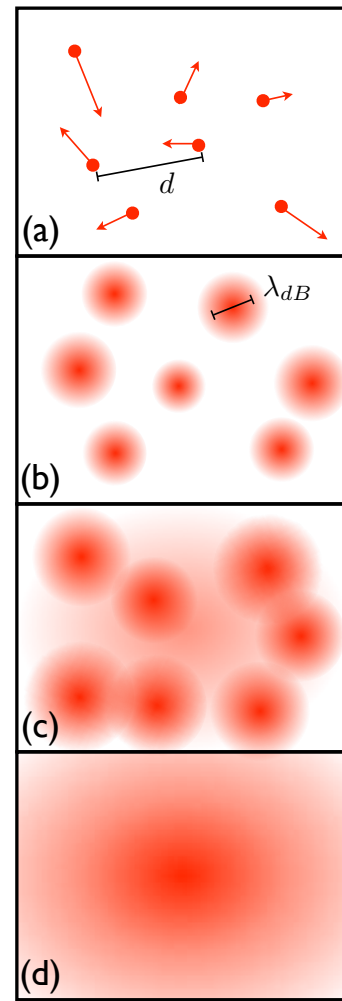


FIG. 3.1 – Schéma représentant la transition d'un gaz de bosons classique à un condensat de Bose-Einstein.

fonction d'onde devient telle que le recouvrement des paquets d'ondes devient non nul ($\lambda_{dB} \approx d$). Une partie du gaz peut être décrite par une fonction d'onde macroscopique, cela correspond à une fraction de gaz condensée et une autre non-condensée. Enfin, comme le montre la figure 3.1.d, à température nulle, tous les paquets d'ondes sont confondus. On a un condensat de Bose-Einstein pur, qui correspond donc à un état macroscopique quantique de la matière dans lequel les particules sont indiscernables et décrites par une fonction d'onde macroscopique. C'est en 1995 que la première observation expérimentale d'un tel phénomène a été réalisée dans les atomes ultra-froids, par M. H. Anderson *et al.* [1]. Les températures de condensation atteintes étaient de l'ordre de 100 nK. La vapeur de Rubidium utilisée à ces fins était suffisamment diluée pour que les interactions entre particules n'empêchent pas cette condensation.

La faiblesse des interactions explique pourquoi le modèle idéal de gaz parfait initialement proposé permet de décrire cette phase condensée. Cela dit, un tel modèle ne peut rendre compte que partialement de la dynamique propre à ce système. Seule la prise en compte des interactions permet d'expliquer la taille du condensat piégé, sa superfluidité ou encore ses fréquences d'oscillation, lorsqu'on le fait vibrer. Dans l'approximation du champ moyen, on peut définir la fonction d'onde globale d'un condensat de N atomes comme $\hat{\Psi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = \prod_N \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}_i)$, avec $\hat{\Psi}_i$ la fonction d'onde des particules individuelles. On aura par définition $\int |\hat{\Psi}|^2 d\mathbf{x} = N$. Basé sur cette approximation, ainsi que sur le modèle du pseudopotentiel d'interaction, L. P. Pitaevskii [2] et E. P. Gross [3] ont tous deux montré, au début des années 1960, que l'évolution de la fonction d'onde $\hat{\Psi}$ pouvait s'écrire :

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{x})}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) + g|\hat{\Psi}(\mathbf{x})|^2 \right) \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

avec m la masse des particules, V un potentiel extérieur et g la constante de couplage proportionnelle à a_s la longueur de diffusion entre les particules telle que $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$. La minimisation de la fonctionnelle énergie permet de déterminer un potentiel chimique μ pour la solution stationnaire qui est $\mu = \partial E/\partial N = gN$ dans le cas homogène. Il transcrit la renormalisation de l'énergie de l'état propre du système causée par les interactions. Grâce à la résonance de Feshbach, l'interaction entre particules peut être contrôlée via un champ magnétique. Ce qui permet d'étudier des phénomènes comme les isolants de Mott ou encore la continuité entre le concept de condensation de Bose-Einstein et celui de paire de Cooper de la théorie BCS de la supraconductivité. Cette équation de Gross-Pitaevskii est aussi connue sous le nom d'équation de Schrödinger non linéaire.

Mais focalisons notre attention sur un des phénomènes présent dans ces condensats en interaction : la superfluidité.

A.2 Superfluidité

La superfluidité a été découverte dans l'Helium (^4He) par P. Kapitza, J. F. Allen, et D. Misener en 1937 [4, 5]. Elle consiste en un nouvel état liquide de l'hélium en deçà du *point lambda* à 2.17 K, dans lequel la conductivité thermique est très importante, et

donc la viscosité très faible¹. C'est donc bien avant la mise en évidence de la condensation de Bose-Einstein dans les atomes ultra froids qu'a eu lieu la découverte de la superfluidité.

F. London est le premier, en 1938, à remarquer que la température de la transition superfluide de l'hélium 4 (2,17 K) est du même ordre de grandeur que celle de condensation de Bose-Einstein d'un gaz parfait de même densité que l'hélium liquide (3,2 K), d'où son intuition que les deux phénomènes étaient liés [6]. Les interactions entre atomes d'hélium étant trop importantes pour être négligées, le modèle du gaz parfait semble difficile à appliquer ici. Des expériences récentes ont montré que s'il existe bien une relation entre ces deux phénomènes, elle n'est pas aussi directe que ce qu'avait suggéré F. London. Seul 10% environ de l'hélium 4, dans sa phase superfluide, est condensé [7].

L'avancée majeure dans la compréhension de ce phénomène date de 1941 et est due à L. Landau [8]. Il a développé un modèle basé sur deux fluides en interaction. Notons que L. Tisza, en 1938, avait déjà suggéré cette idée [9]. La physique de l'hélium 4 à très basse température est très complexe, du fait des fortes interactions entre atomes. C'est pourquoi, la modélisation par un fluide classique et un fluide condensé permet de simplifier la description. Cette description phénoménologique a permis de définir plusieurs comportements propres à un tel fluide, sur lesquels nous allons revenir. Une autre étape importante, dans la compréhension de ces fluides atypiques, fut celle permise par le travail de N. N. Bogoliubov en 1946 [10]. Il a permis d'obtenir un modèle non phénoménologique le diagramme de dispersion linéaire des superfluides pour de faible excitation comme le montre la courbe bleue de la figure 3.2. Pour ce qui est du reste de la courbe de dispersion de l'hélium, son explication sera faite par R. Feynman et M. Cohen, en 1956 [11]. Cette partie de la courbe s'explique en termes de pseudo particules appelées *rotons*.

Attardons-nous sur les différents critères permettant la mise en évidence de la superfluidité

Différents critères de la superfluidité

Différents critères, dont trois suggérés par L. Landau dès 1941, permettent de mettre en évidence les propriétés superfluides d'un fluide et dans certains cas d'en déterminer la fraction.

L'expérience du seau tournant : Aussi appelée expérience de Hess-Fairbank, en référence à la première mise en évidence en 1967 [12], elle consiste à faire tourner le récipient contenant le superfluide. Si la vitesse de rotation est inférieure à une vitesse critique $\Omega < \Omega_v$, le fluide ne bouge pas. Au delà de cette vitesse critique, il y a apparition de vortex de moment angulaire quantifié. Ce phénomène a été longuement étudié. Ph. Nozières et D. Pines ont mis en évidence que la réponse superfluide pouvait se comprendre en termes de réponse à un champ vectoriel extérieur analogue à l'effet Meissner des supraconducteurs. Les contributions au niveau théorique de R. Feynman

1. Démonstration et explication vidéo de la transition de phase superfluide de l'hélium 4 de 1963 : <http://www.alfredleitner.com/superfluid.html>

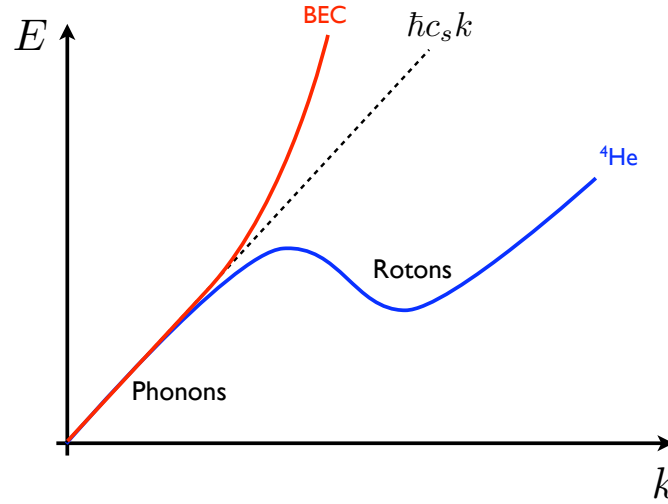


FIGURE 3.2 – Dispersion de l'énergie des excitations élémentaires de l'hélium 4 superfluide en bleu et d'un condensat de Bose-Einstein avec interaction en rouge dans le repère galiléen dans lequel le superfluide est au repos. En pointillés, la dispersion des phonons dans le superfluide.

et L. Onsager ont montré que le moment angulaire des vortex ainsi formés devait être quantifié et égal à nh/m , où h est la constante de Planck, n un entier et m la masse des éléments constituant le superfluide. Nous reparlerons de ces vortex dans les superfluides dans la partie C de ce chapitre.

Courant persistant : Aussi appelé metastabilité de supercourant. Si on place de l'hélium liquide (non superfluide) dans un anneau tournant, le fluide tourne avec l'anneau. On refroidit l'hélium liquide en-dessous du point lambda alors que l'anneau tourne. Si on arrête la rotation de l'anneau, alors le superfluide continue de tourner et ce, sans perte de charge. Le superfluide tourne, en théorie pour une durée indéfinie. Il est dans un état métastable qui donne lieu à un supercourant. Cet effet, contrairement au précédent, ne peut exister que dans des superfluides. Les condensats sans interactions ne présentent pas un tel effet. Ces courants persistants ont été observés expérimentalement dans l'hélium en 1964 [13]. Pour ce qui est des atomes froids il faut attendre 2005 pour la première réalisation d'un condensat annulaire [14] et 2007 pour la mise en évidence de courant persistant [15].

Second son : Cet effet est dû aux excitations collectives thermiques. Dans un superfluide, la conduction thermique se fait non par diffusion mais par une propagation similaire à celle des ondes sonores, d'où le nom de second son. Cela donne lieu à une discontinuité dans la conductivité thermique de l'hélium, qui est modérée en phase fluide et extrêmement élevée dans sa phase superfluide [16]. Il est à l'origine d'un effet spectaculaire, appelé effet fontaine².

2. <http://www.alfredleitner.com/superfluid.html>

Effet Josephson : Lorsqu'un superfluide est séparé en deux par une barrière de potentiel, on peut observer un *tunneling* cohérent à travers la barrière. Cela donne lieu à des oscillations dites de Josephson [17, 18]. Le nom vient de l'analogie faite entre les paires de Cooper de la théorie BCS et le superfluide. Ces analogies ont récemment fait l'objet de beaucoup d'études résumées sous le nom de *BEC-BCS crossover*. J'invite le lecteur intéressé par la question à se référer au livre de A. J. Leggett "*Quantum Liquids*" [19].

Il existe d'autres effets qui découlent plus ou moins directement de ceux vus précédemment (écoulement sans viscosité, expansion anisotrope, oscillation collective, etc.). Nous nous contenterons d'en décrire un dernier, qui est celui qui va nous intéresser tout particulièrement dans la suite de ce travail. Bien que, L. Landau prédit trois effets dont celui du seau tournant et celui de second son, c'est ce dernier qui est généralement appelé : **critère de Landau de superfluidité**.

Critère de Landau de superfluidité

L. Landau [8] explique que pour un superfluide s'écoulant à une vitesse v , le Hamiltonien du système peut s'écrire $H = H_0 - v\hat{p}$ avec H_0 le Hamiltonien au repos et $\hat{p}$ l'opérateur impulsion. Ici l'énergie du fondamental de H aura un moment total de l'ordre de $J = Nmv$ avec N le nombre de particules. Par conséquent, son état fondamental aura une énergie supérieure à celui de H_0 . Ce fluide en déplacement est donc dans un état métastable. La création d'une excitation coûtera, par conséquent, une énergie $E(p) - vp$. À température nulle le superfluide n'est perturbé que si $E(p) - vp \geq 0$. Donc, tant que $v \leq v_c$, avec

$$v_c = \min_p \left(\frac{E(p)}{p} \right), \quad (3.3)$$

on a un fluide en déplacement dans son état fondamental, soit un superfluide. Cela rejoint le critère du courant persistant, énoncé plus haut.

À partir de l'équation de Gross-Pitaevskii (3.2), on peut déterminer le spectre des excitations élémentaires d'un tel fluide. Pour ce faire, on utilise la transformation de N. N. Bogoliubov, qui consiste à écrire :

$$\hat{\Psi}(t) = \left(\hat{\Psi}_0 + \hat{u}_j e^{-i\omega_j t} + \hat{v}_j^* e^{i\omega_j t} \right) e^{-i\mu t}$$

En réécrivant l'équation 3.2 pour u_j et v_j , dans le cas homogène, on trouve la dispersion suivante :

$$E_{\pm}(k) = \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^2 + \hbar^2 k^2 c_s^2}$$

avec $c_s = \sqrt{gn/m}$ la vitesse du son dite de Bogoliubov, qui correspond à la vitesse du son dans le condensat. On peut distinguer deux cas.

- Pour $k \gg 2mc_s/\hbar$ dans ce cas $E(k) \approx \hbar^2 k^2 / 2m$ ce qui correspond à la dispersion d'une particule libre.
- Pour $k \ll 2mc_s/\hbar$ alors on a $E(k) \approx \hbar c_s k$. Pour les excitations de petit moment, on a donc une réponse linéaire caractéristique de phonons.

Sur la figure 3.2, on peut voir en rouge ces deux différents régimes. Notons que cette figure nous donne la dispersion du fluide en mouvement dans un repère en mouvement avec lui. Alors que, les figures 3.3, elles donnent la même dispersion mais dans le repère du laboratoire. Pour un tel superfluide, on n'a pas d'excitation possible tant que la vitesse d'écoulement est inférieure à cette vitesse du son : $v < c_s$. Les seules excitations possibles nécessitent $v > c_s$. On a donc la vitesse critique de L. Landau qui coïncide avec celle du son de Bogoliubov : $v_c = c_s$. Dans le cas de l'hélium superfluide, il y a une nuance. Dus aux rotons, on peut avoir des excitations pour $v < c_s$. On aura, dans ce cas, une vitesse critique liée aux rotons et non aux phonons. Cette différence importante entre les deux systèmes est clairement visible sur la figure 3.2. Dans ce qui suivra, nous laisserons de côté le cas de l'hélium car moins proche du système qui nous intéresse, pour nous focaliser sur le cas des condensats d'atomes.

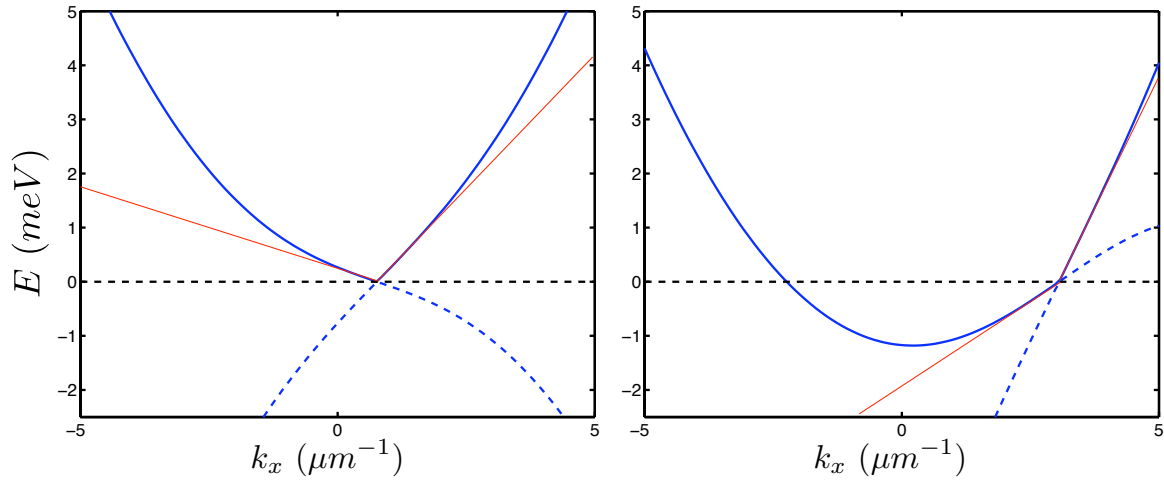


FIGURE 3.3 – Dispersion des modes de Bogoliubov d'un condensat de Bose Einstein pour une vitesse du son de $c_s = 1 \mu\text{m.ps}^{-1}$. En rouge, l'approximation linéaire pour les excitations de petit moment. À gauche, la vitesse du fluide est des $v = c_s/2$ et à droite, de $v = 2c_s$. Le graphe de gauche est équivalent modulo une transformation Galiléenne à la courbe rouge de la figure 3.2.

Sur les figures 3.3, sont représentées deux dispersions pour un condensat à gauche, s'écoulant à une vitesse $v < c_s$ qui correspond à un régime subsonique, soit ici au régime superfluide à proprement parler. Dans un tel régime, la diffusion élastique est inhibée et donc la viscosité tend vers zéro. À droite, on a la dispersion pour une vitesse d'écoulement $v > c_s$. Soit un régime supersonique, encore appelé Čerenkov, dans lequel le fluide ne peut plus être considéré comme superfluide car il peut présenter des excitations de quasiparticules correspondant à des phonons du condensat.

Maintenant que nous avons vu comment se traduit cette superfluidité dans l'espace réciproque, intéressons-nous à l'espace réel, et plus particulièrement à ce qui se passe lorsque que l'on stimule la diffusion élastique, en plaçant un objet dans le flux du fluide.

A.3 Régimes d'écoulement

Avant de cibler le cas des superfluides, intéressons-nous à un modèle simple, d'un gaz parfait sans interaction. Ce modèle simple, emprunté à I. Carusotto, permet de bien comprendre ce à quoi on peut s'attendre quant aux effets produits par un objet placé dans la course d'un fluide.

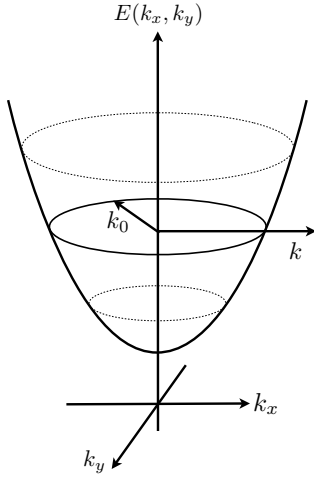


FIG. 3.4 – Dispersion d'un gaz parfait de particule de masse m_0 . Ici est représenté le cas supersonique où $k > k_0$.

Dans un gaz parfait constitué de particules de masse m_0 , lorsqu'un objet se déplace lentement (par rapport à la vitesse du son) à une vitesse $v = \hbar k/m$, on a émission d'ondes de pression par l'objet dans toutes les directions de l'espace. Ces ondes de pression peuvent être interprétées en termes de phonons acoustiques. Prenons le cas inverse : un objet fixe et un gaz de vitesse d'écoulement $v = \hbar k/m_0$. La dispersion d'un tel milieu est parabolique comme représentée figure 3.4, telle que : $E(\mathbf{k}) = \hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m_0$. La fonction d'onde de notre gaz pourra s'écrire comme une onde progressive de vecteur d'onde k : $\Psi(x, y) \propto \exp(ikx)$ et la diffusion élastique engendrée par l'objet prendra place sur le cercle de rayon k_0 , dans l'espace réciproque, ce qui équivaut à produire une onde circulaire centrée sur l'objet en question, de vecteur d'onde k_0 : $\Psi'(x, y) \propto \exp(ik_0 \sqrt{x^2 + y^2})$. On aura interférence entre ces deux ondes. Les maximums de ces franges d'interférence auront lieu pour : $kx + 2\pi n = k_0 \sqrt{x^2 + y^2}$,

avec $n \in \mathbb{N}$. On peut distinguer trois cas différents : subsonique, limite et supersonique. On peut réécrire la relation entre x , y et n :

$$\left(\frac{k_0^2 - k^2}{4\pi^2 n^2} \right) y^2 + \left(\frac{(k_0^2 - k^2)^2}{4\pi^2 n^2 k_0^2} \right) \left(x - \frac{2\pi n k}{k_0^2 - k^2} \right)^2 = 1 \quad (3.4)$$

Cas subsonique : $k < k_0$

Dans ce cas, l'équation (3.4) correspond à des ellipses concentriques dont un foyer est localisé sur l'objet (pour nous $x = y = 0$) et l'autre en $y = 0$ et $x = 2\pi n k / (k_0^2 - k^2)$. Le grand rayon vaut $a = 2\pi n k_0 / (k_0^2 - k^2)$ et le petit rayon $b = 2\pi n / \sqrt{(k_0^2 - k^2)}$. L'allure des franges est représentée sur la figure 3.5. La distance entre les franges à l'avant du défaut est égal à $2\pi / (k_0 + k)$.

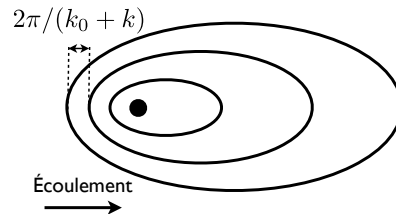


FIG. 3.5 – Allure des franges d'interférence pour le cas subsonique. Le point noir représente l'objet fixe.

Cas limite : $k = k_0$

On peut réécrire la relation entre x , y et n , ce qui donne :

$$x = -\frac{k_0}{4\pi n}y^2 + \frac{\pi n}{k_0}$$

Cette fois ce sont des hyperboles suivant la direction de propagation que l'on aura. Leur foyer est en $\pi n/k_0$ sur l'axe x . Ce cas correspond à une vitesse d'écoulement égale à la vitesse du son dans le fluide. L'allure des franges est représentée schématiquement sur la figure 3.6 et leur séparation à l'avant de l'objet est de π/k_0 .

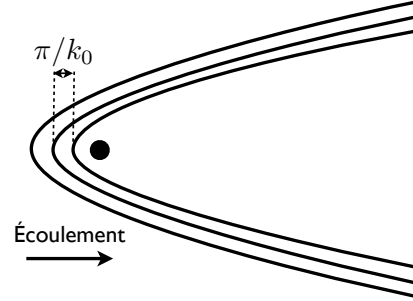


FIG. 3.6 – Allure des franges d'interférence pour le cas limite.

Cas supersonique : $k > k_0$

D'après l'équation (3.4), on peut déduire que le profil sera doublement hyperbolique en fonction du signe de n , dont l'origine sera sur l'axe x à une distance de $2\pi n k/(k_0^2 - k^2)$, de demi axe focal $a = 2\pi n k_0/(k_0^2 - k^2)$ et de demi axe non focal $b = 2\pi n/\sqrt{(k_0^2 - k^2)}$. Comme représentées figure 3.7, les hyperboles ont la même asymptote de coefficient directeur $\sqrt{k^2 - k_0^2}/k_0$ et l'angle entre l'horizontal et l'asymptote est déterminé par $\tan(\theta) = (k_0/\sqrt{k^2 - k_0^2})$ ou encore $\sin(\theta) = c_s/v$ avec $c_s = \partial E/\partial k = \hbar^2 k_0/m$ [20]. L'espacement entre les franges à l'avant de l'objet sera de $2\pi/(k_0 + k)$.

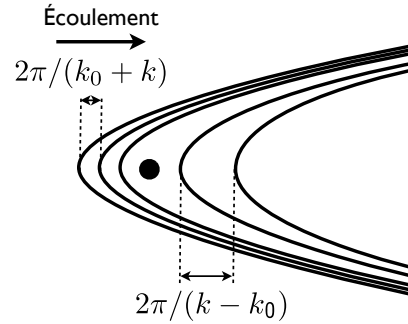


FIG. 3.7 – Allure des franges d'interférence pour le cas supersonique.

Comme on l'aura compris, en régime subsonique, le front d'onde sera parabolique voir elliptique. Mais cela ne sera pas observable dans le cas d'un superfluide. Comme représenté sur la figure 3.3 de gauche, le fluide n'a qu'un seul niveau d'énergie disponible et non pas tout un cercle, comme représenté sur la figure 3.4. Donc la diffusion élastique est impossible. Par conséquent, elle s'écoule autour de défauts comme s'il n'y en avait pas.

Le dernier cas (supersonique) qui est aussi appelé onde de choc, est très courant et observable, aussi bien pour un canard (pigeon!) se déplaçant sur un lac, que pour un projectile lancé à vive allure. Les ondes émises par diffusion élastique dans le fluide, dues à la présence de l'objet sont plus lentes que leur vitesse de propagation. Ce qui donne un front d'onde linéaire caractéristique. Un phénomène très similaire en physique des particules, appelé effet Čerenkov, consiste en une particule chargée se déplaçant

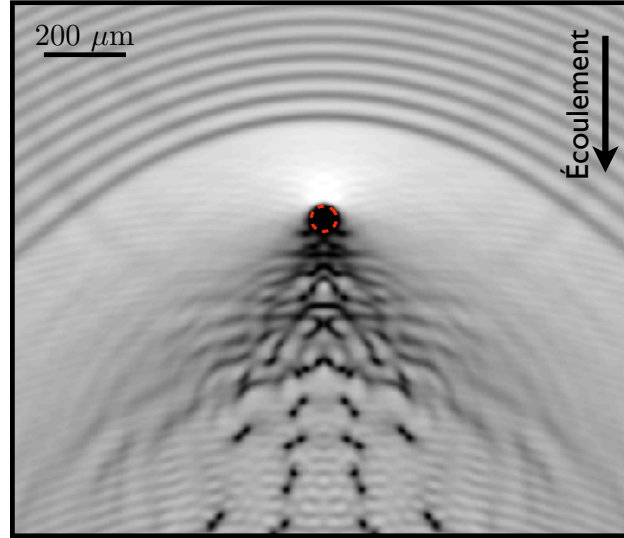


FIGURE 3.8 – Résultat de simulation d'un condensat en interaction s'écoulant à travers un défaut de $80\ \mu\text{m}$ indiqué en pointillés rouges avec une vitesse d'écoulement $v = 1.1c_s$.

dans un milieu à une certaine vitesse v . Elle induit une polarisation locale dans le milieu qui peut donner lieu à une émission lumineuse. Lorsque la vitesse de phase de cette onde émise est inférieure à la vitesse de la particule, alors une interaction constructive entre les différentes ondes émises donne lieu à un rayonnement caractéristique. L'image typique de cet effet est celle des réacteurs nucléaires, donc la piscine dans laquelle ils sont plongés émet une lumière bleue. La figure 3.8 montre les résultats de simulation de condensat en interaction s'écoulant à travers un défaut. On voit nettement à l'avant du défaut des modulations de la densité qui correspondent à ce qui a été dit dans le cas supersonique. En effet, ici la vitesse d'écoulement est 10% plus élevée que celle du son de Bogoliubov. La présence de turbulences à l'arrière du défaut, indiqué en pointillés rouges, seront discutée dans la partie C.1.

Voici ce qu'on pouvait dire sur les superfluides génériques (atomiques) et sur la superfluidité en général. Intéressons-nous à l'application de ce concept aux polaritons excitoniques.

B Superfluidité des polaritons

La superfluidité est fortement liée à la condensation de Bose Einstein, c'est pourquoi dans ce qui suit, nous commencerons par nous intéresser à la condensation à l'état solide (partie B.1) et plus particulièrement la condensation des polaritons. Suite à quoi, nous rentrerons dans le vif du sujet : la superfluidité des polaritons. Nous analyserons théoriquement comment cet effet se traduit pour ce système qu'est la microcavité semiconductrice (partie B.2). Pour ensuite en venir aux résultats expérimentaux obtenus au laboratoire LKB à Paris, dans l'équipe de A. Bramati et aux simulations de ces ré-

sultats (partie B.3). Nous finirons cette partie B par des résultats sur l'effet Čerenkov précédemment cité dans ces fluides de polaritons (partie B.4).

B.1 Condensation à l'état solide

Le concept de condensation de Bose-Einstein par définition s'applique aux bosons. Mais à l'image des atomes bosoniques comme l'hélium 4 qui sont composés de protons, neutrons et électrons, d'autres particules composées peuvent présenter cette phase condensée. En théorie, toutes quasi-particules bosoniques peuvent prétendre à la condensation. Que ce soient les phonons, plasmons, polarons et magnons ou encore les excitons et bien sûr les polaritons. Tous ces condensats sont regroupés sous l'appellation de **condensat de Bose-Einstein à l'état solide**, car les pseudo particules précédemment citées apparaissent dans des phases solides de la matière. Cela a pour conséquence principale que leur observation (prédite ou effective) ne nécessite pas des températures aussi basses que pour les atomes (de l'ordre du microkelvin pour les atomes et de l'ordre de la dizaine de kelvin pour les condensats en phase solide). Ce très grand avantage par rapport aux atomes est dû à la faible masse de ces bosons ainsi qu'à la possibilité d'atteindre de très fortes densités.

La première observation d'un tel condensat fut obtenue en 2000 pour des magnons [21] pour une température de 14 K. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, les excitons sont des bosons, donc peuvent prétendre à la condensation. Leur principale différence avec les photons ou encore les magnons sont les interactions existantes entre particules. Cela dit, la condensation de telles quasi-particules s'est révélée impossible jusqu'à maintenant. En cause, la dynamique interne aux excitons qui recèle des états noirs (non observables optiquement), dans lesquels la condensation se ferait [22]. Une condensation d'excitons a malgré tout bien été observée, mais pour des excitons de bi-couche [23]. Ces excitons indirects naissent de la proximité de deux puits quantiques qui permet l'appareillement d'un trou d'une couche avec un électron de conduction de l'autre.

Une autre méthode pour s'affranchir des états noirs des excitons, est de coupler très fortement les états brillants à un champ électromagnétique, c'est à dire d'utiliser les polaritons.

Condensation des polaritons

Bien que pas directement connectée à la superfluidité que nous allons expliciter dans un instant, la condensation des polaritons se doit de figurer dans cette thèse. Ne serait-ce que pour en comprendre les différences.

Cette condensation fut démontrée en 2006 par J. Kasprzak *et al.* à l'EPFL de Lausanne [25]. La température de l'échantillon était de 19K. Sur la figure 3.9 on peut voir un image extraite de la thèse de J. Kasprzak [24] qui figure, en haut la densité de polaritons dans l'espace réciproque en fonction de l'énergie. Sur la première image, on peut distinguer la branche basse des polaritons. Les images du bas correspondent à la densité intégrée sur l'énergie dans l'espace réciproque. Les deux sets de trois images figurent trois excitations de pompe différentes. On voit que lorsque l'intensité d'excitation augmente la population augmente dans le bas de la branche, soit au centre de l'espace

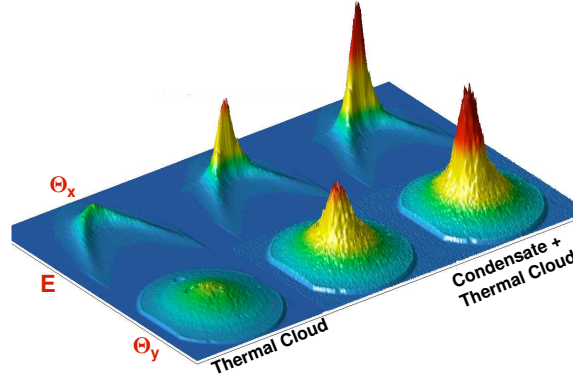


FIGURE 3.9 – Observation de la condensation polaritonique par excitation non résonnante. En haut, la densité polaritonique dans l'espace réciproque (Θ_x, Θ_y) en fonction de l'énergie (E) et en bas, intégré en énergie. Les trois graphes correspondent à trois excitations de pompe différente. Image extraite de la référence [24].

réciproque. On passe d'une distribution thermique (*thermal cloud*) à une distribution thermique plus une condensée (*condensate + thermal cloud*). L'excitation employée ici est non résonnante et c'est la principale différence avec notre configuration. Cela consiste à exciter à une énergie bien plus haute que celle des polaritons bas (≈ 100 meV) et grâce à des cascades de désexcitation (émission de phonons) les polaritons vont diffuser vers les niveaux d'énergie les plus bas. Dans ces désexcitations, les interactions ainsi que la forme particulière de la dispersion des polaritons jouent un rôle déterminant. Bien entendu, comme explicité dans la partie A, ce condensat doit avoir des propriétés de superfluidité car les polaritons sont des particules en interaction [26, 27]. La configuration du système rend difficile l'évaluation des critères précédemment cités et donc la mise en évidence de la superfluidité.

B.2 Superfluide de polaritons excitoniques

La première prédiction théorique de propriétés de superfluidité pour les polaritons excitoniques excités à résonance est due à I. Carusotto et C. Ciuti [28, 29]. Quant à la première observation directe, elle a été réalisée 5 ans plus tard, en 2009, par A. Amo *et al.* [30] au laboratoire Kastler Brossel (LKB).

Notons les résultats obtenus aussi par A. Amo *et al.*, à l'université Autonoma de Madrid, sur la propagation d'une goutte superfluide de polariton [31]. Ici l'excitation est à l'angle *magique* à laquelle on ajoute un pulse à grand angle au niveau du complémentaire. Cela a pour effet de créer une goutte de superfluide au niveau du signal (proche de $k = 0$). L'observation de la propagation de cette goutte montre une dispersion constante au cours du temps, ce qui indique un comportement superfluide.

Pour notre part nous nous intéressons à un autre type d'excitation : une excitation résonnante ou presque résonnante. Voyons la théorie associée à cette configuration. Ce développement correspond au travail réalisé par I. Carusotto et C. Ciuti [28, 29]. L'idée principale est assez similaire à ce qui a été fait dans le chapitre 2. On va déterminer les

équations du champ moyen, suite à quoi nous déterminerons la stabilité de ce champ moyen, à l'aide de la linéarisation de Bogoliubov appliquée aux perturbations.

Équations du champ moyen

D'après l'équation 1.24, on peut écrire les équations d'évolution de des opérateurs $\hat{a}^{(\dagger)}$ de création (annihilation) d'un photon de cavité et ceux $\hat{b}^{(\dagger)}$ correspondants aux excitons. Le résultat s'écrit comme suit :

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_C(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_X(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{F}_p(\mathbf{x}, t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}^0 & + \begin{pmatrix} V_C(\mathbf{x}) - i\frac{\gamma_C}{2} & 0 \\ 0 & V_X(\mathbf{x}) - i\frac{\gamma_X}{2} + g|\hat{\Psi}_X(\mathbf{x}, t)|^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_C(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_X(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où :

$$\mathbf{h}^0 = \begin{pmatrix} \omega_C(-i\nabla) & \Omega_R \\ \Omega_R & \omega_X^0 \end{pmatrix}$$

et avec :

- $\hat{\Psi}_C(\mathbf{x}, t)$ et $\hat{\Psi}_X(\mathbf{x}, t)$ respectivement le champ associé aux photons et aux excitons.
- $\mathbf{x}$ le vecteur position dans le plan perpendiculaire à la direction de croissance ($\mathbf{x} = (x \ y)^T$).
- $V_C(\mathbf{x})$ et $V_X(\mathbf{x})$ respectivement les potentiels extérieurs photoniques et excitoniques.
- γ_C et γ_X respectivement la largeur de raie de la cavité et des excitons.
- g le potentiel d'interaction exciton-exciton.
- $\hbar\omega_C$ et $\hbar\omega_X^0$ respectivement l'énergie de la cavité et celle des excitons.
- Ω_R la fréquence de Rabi du vide.
- $\hat{F}_p(\mathbf{x}, t)$ l'amplitude de l'excitation laser.

On peut faire un rapprochement entre cette équation (3.5) et l'équation (3.2). En réécrivant l'équation (3.5) dans la base polaritonique (restreint aux polaritons bas uniquement) cela devient encore plus évident :

$$i \frac{d}{dt} \hat{\Psi}_{LP}(\mathbf{x}, t) = \left(\omega_{LP}(-i\nabla) + V_{LP}(\mathbf{x}) - i\frac{\gamma_{LP}}{2} + g_{LP}|\hat{\Psi}_{LP}(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \hat{\Psi}_{LP}(\mathbf{x}, t) + \hat{F}_p(\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

Avec $V_{LP} = |X_{\mathbf{k}}|^2 V_X + |C_{\mathbf{k}}|^2 V_C$ le potentiel extérieur vu par les polaritons bas et $g_{LP} = |X_{\mathbf{k}}|^4 g$ la constante d'interaction entre polaritons bas aux mêmes modes (voir chapitre 1 partie D.3). On peut noter trois différences principales : (i) Le terme de perte γ_{LP} vient du temps de vie fini des excitons et des photons dans le système. Ici le temps de vie $\tau = \hbar/\gamma_{LP}$ est de l'ordre de la dizaine de pico-secondes, alors que le temps de vie caractéristique dans un piège optique des atomes est de l'ordre de la seconde. Pour compenser ces pertes, il faut donc continuellement pomper notre système sans quoi la dynamique propre du système nous serait inaccessible. (ii) C'est la seconde différence avec l'équation de Gross-Pitaevskii (3.2), le terme de pompe $\hat{F}_p$. (iii) La dernière différence vient de la dispersion qui n'est pas parabolique pour les polaritons.

Cela dit, l'approximation de la dispersion parabolique pour des excitations de faible vecteur d'onde dans le plan, se révèle une approximation raisonnable et permet de simplifier les calculs. Ces équations (3.5) et (3.6) correspondent donc à des équations de Gross-Pitaevkii hors équilibre.

Dans cette partie de traitement analytique, on prendra le cas simple d'une onde plane d'excitation sans potentiels extérieurs ($V_C = V_X = 0$). L'excitation sera traitée classiquement tel que $\hat{F}_p(\mathbf{x}, t) \approx F_p e^{i(\mathbf{k}_p \mathbf{x} - \omega_p t)}$ avec F_p l'amplitude de la pompe, $\mathbf{k}_p$ le vecteur d'onde dans le plan et $\hbar\omega_p$ l'énergie de la pompe.

Si on fait l'approximation du champ moyen : $\psi_{C(X)} = \langle \hat{\Psi}_{C(X)} \rangle = \psi_{C(X)}^{ss} e^{i(\mathbf{k}_p \mathbf{x} - \omega_p t)}$, où $\psi_{C(X)}^{ss}$ correspond à la solution stationnaire pour chacun des deux champs, on peut écrire les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\omega_X^0 - \omega_p - i\frac{\gamma_X}{2} + g|\psi_X^{ss}|^2 \right) \psi_X^{ss} + \Omega_R \psi_C^{ss} &= 0 \\ \left(\omega_C(\mathbf{k}_p) - \omega_p - i\frac{\gamma_C}{2} \right) \psi_C^{ss} + \Omega_R \psi_X^{ss} &= -F_p \end{aligned} \quad (3.7)$$

La même démarche peut être faite avec les polaritons et donner l'équation suivante, si on considère uniquement les polaritons bas :

$$\left(\omega_{LP}(\mathbf{k}_p) - \omega_p - i\frac{\gamma_{LP}}{2} + g_{LP}|\psi_{LP}^{ss}|^2 \right) \psi_{LP}^{ss} = -F_p \quad (3.8)$$

avec ψ_{LP}^{ss} la solution stationnaire du champ moyen pour les polaritons. On rappellera que l'on a ici $\psi_{LP}^{ss} = X_{\mathbf{k}_p} \psi_X^{ss} + C_{\mathbf{k}_p} \psi_C^{ss}$.

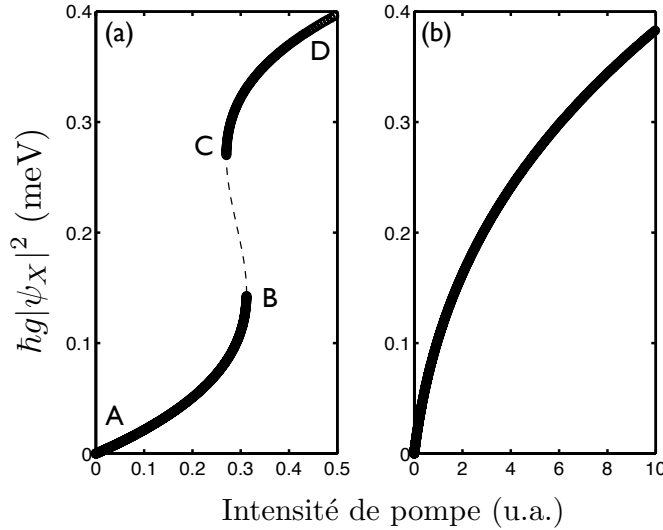


FIGURE 3.10 – Solution stationnaire du champ moyen pour un désaccord polariton-pompe de $\Delta_p = \hbar\omega_{LP}(\mathbf{k}_p) - \hbar\omega_p = -0.1$ meV pour (a) et de $\Delta_p = 0.1$ meV pour (b). La partie en pointillés de la figure (a) correspond à un champ instable. Les paramètres employés sont les suivants : $\hbar\omega_X^0 = 1485$ meV, $\hbar\omega_C(0) = 1483$ meV, $\hbar\gamma_X = 0.12$ meV, $\hbar\gamma_C = 0.075$ meV, $\hbar\Omega_R = 2.65$ meV, $\hbar g = 0.01$ meV. μm^{-2} , $k_z = 28$ μm^{-1} et $k_p = -0.3367$ μm^{-1} .

Sur la figure 3.10 on peut voir l'évolution de la solution stationnaire du champ moyen en fonction de l'intensité de pompe $I_p = |F_p|^2$. Pour être plus précis, ce n'est pas la solution stationnaire mais le décalage en énergie induit par les interactions $\hbar g_{LP} |\psi_{LP}^{ss}|^2$ en fonction de I_p . La figure 3.10.a correspond à un désaccord polariton pompe négatif de $\Delta_p = -0.1$ meV et la figure 3.10.b pour un positif de $\Delta_p = 0.1$ meV. On retrouve ce que l'on a dit dans le chapitre 2. Lorsque la pompe est en dessous de la dispersion des polaritons ($\Delta_p > 0$), l'injection dans le mode k_p des polaritons se fait de moins en moins bien (profil en racine) au fur et à mesure que la densité augmente (figure 3.10.b). Lorsque la pompe est au-dessus de la dispersion des polaritons bas ($\Delta_p < 0$), comme indiqué sur la figure 3.10.a, on peut distinguer trois régions. Au niveau du point **A**, on aura un régime linéaire dans lequel les interactions exciton-exciton sont négligeables. Cette zone correspond à des décalages induits inférieur au désaccord Δ_p . Entre le point **B** et **C**, on a une zone d'instabilité sur laquelle nous allons revenir. Enfin après **C**, on retrouve une caractéristique proche de la figure 3.10.b, en racine, due au décalage effectif entre les polaritons et la pompe plus important que le désaccord Δ_p . Ce décalage effectif peut être écrit de la façon suivante : $\tilde{\Delta}_p = \hbar \omega_{LP}(\mathbf{k}_p) + \hbar g n_X - \hbar \omega_p = \Delta_p + \hbar g n_X$ où n_X est la densité moyenne d'exciton.

Attardons-nous maintenant sur la stabilité de cette solution.

Linéarisation de Bogoliubov

Là encore, la méthode est très similaire à celle qui a été vue dans le chapitre 2. Il s'agit de regarder comment de petites fluctuations autour de ce champ moyen évoluent. Pour ce faire, on pose : $\hat{\Psi}_{C(X)} = \psi_{C(X)} + \delta\psi_{C(X)} = \left(\psi_{C(X)}^{ss} e^{i\mathbf{k}_p \mathbf{x}} + \delta\phi_{C(X)}(\mathbf{x}, t) \right) e^{-i\omega_p t}$. Les équations du mouvement de $\delta\phi_{C(X)}(\mathbf{x}, t)$ les perturbations s'écrivent :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \delta\phi = \mathcal{L} \cdot \delta\phi \quad (3.9)$$

où $\delta\phi = (\delta\phi_X \ \delta\phi_C \ \delta\phi_X^* \ \delta\phi_C^*)^T$. Pour résoudre un tel système il faut nous placer dans l'espace réciproque. Étant donné que nous nous sommes placés dans le cas d'onde plane, on aura : $\delta\tilde{\phi}_{C(X)}(\mathbf{k}) = \delta\phi_{C(X)}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$. La matrice $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ devient $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_p)$ et on peut écrire d'après (3.9) la relation suivante :

$$\left((\omega_j^\pm(\mathbf{k}) - \omega_p) \mathbf{1} - \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_p) \right) \delta\tilde{\phi} = 0 \quad (3.10)$$

avec :

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_p) = \begin{pmatrix} \omega_X^0 + 2g|\psi_X^{ss}|^2 - i\frac{\gamma_X}{2} & \Omega_R & g\psi_X^{ss2} e^{2i\mathbf{k}_p \mathbf{x}} & 0 \\ \Omega_R & \omega_C(\mathbf{k}) - i\frac{\gamma_C}{2} & 0 & 0 \\ -g\psi_X^{ss*2} e^{-2i\mathbf{k}_p \mathbf{x}} & 0 & 2\omega_p - \omega_X^0 - 2g|\psi_X^{ss}|^2 - i\frac{\gamma_X}{2} & -\Omega_R \\ 0 & 0 & -\Omega_R & 2\omega_p - \omega_C(\mathbf{k}) - i\frac{\gamma_C}{2} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

avec $\omega_j^\pm(\mathbf{k})$ les valeurs propres de $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_p)$. Notons que l'on a symétrie par rapport à $\mathbf{k}_p$ ainsi que par rapport à ω_p de ω_j^+ et ω_j^- . Ici j correspond aux différents états

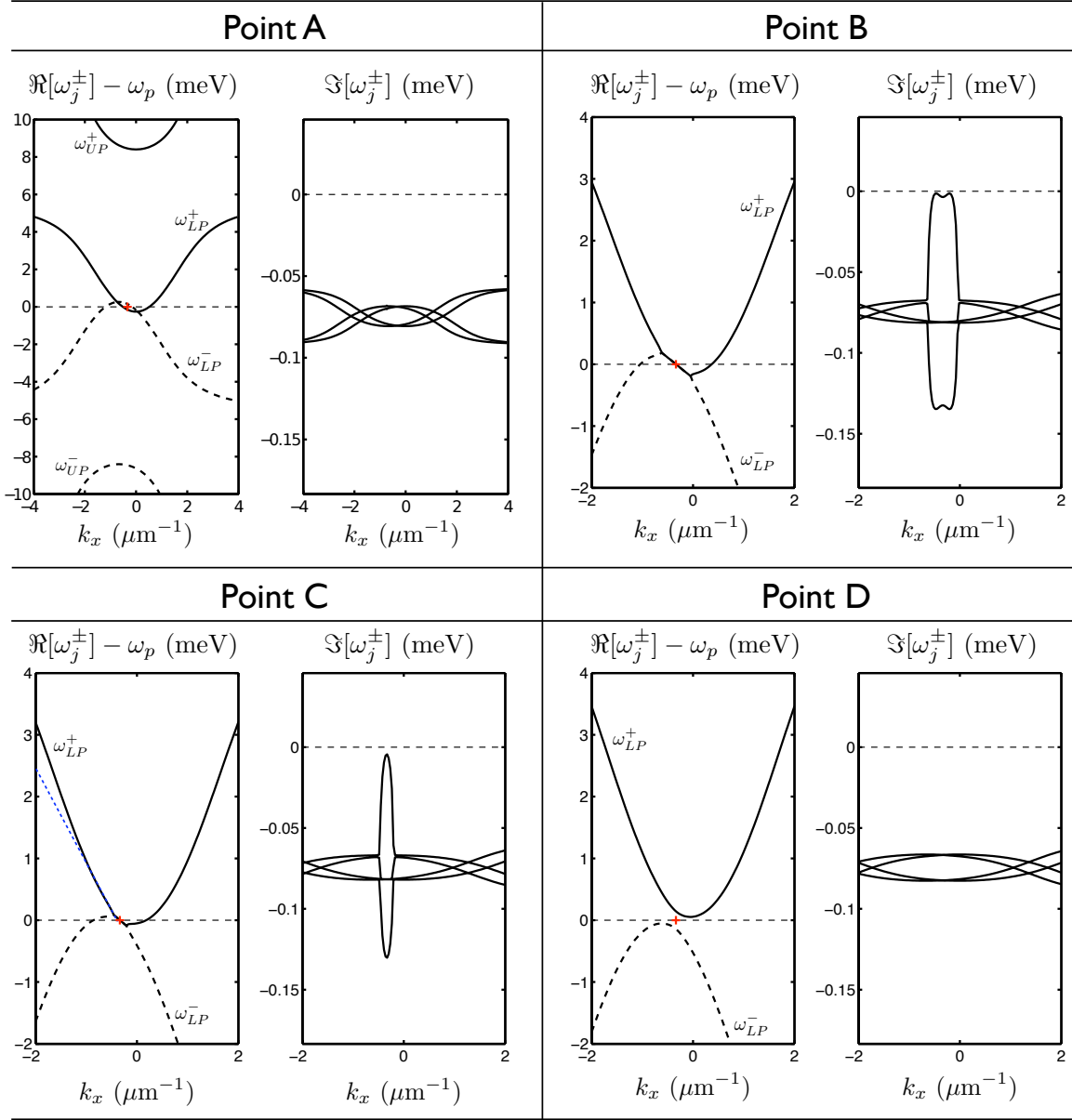


FIGURE 3.11 – Partie réelle et imaginaire des $\omega_j^\pm$ pour en fonction de $\mathbf{k}$ pour différentes valeurs de champ moyen. La croix rouge correspond au vecteur d'onde et à l'énergie de la pompe. Seules les valeurs proches de zéro sont montrées ici. Les courbes **A**, **B**, **C** et **D** correspondent aux différents points indiqués sur la figure 3.10.a. Les paramètres sont les mêmes que pour cette dernière figure.

polaritoniques du système. Si on néglige les interactions non linéaires, on retrouve la dispersion des polaritons hauts et bas décrite dans le chapitre 1. À partir de ces valeurs propres, on peut déterminer la stabilité de la solution stationnaire précédemment étudiée. Lorsque la partie imaginaire des valeurs propres est positive, cela signifie que les perturbations divergent, donc que le champ moyen est instable. La partie entre **B** et **C** de la figure 3.10.a correspond à ce cas. Notons ici que la condition est $\Im[\omega_j^\pm(\mathbf{k})] > 0$ quelque soit $\mathbf{k}$ et quelque soit j , alors ϕ_X^{ss} est instable. Contrairement au chapitre 2 ici ce n'est pas la zone d'instabilité qui va nous intéresser, mais la zone stable.

Sur la figure 3.11, est représentée la partie imaginaire et réelle de $\omega_j^\pm(\mathbf{k})$ en fonction de $\mathbf{k}$ correspondant à différents points de la courbe 3.10.a. Pour le point **A**, on se trouve dans un régime de faible excitation donc ψ_X^{ss} est négligeable. On retrouve donc la dispersion caractéristique des polaritons. Pour le point **B**, on se trouve juste avant l'instabilité, et on voit que la partie imaginaire est proche de zéro. La partie réelle montre une dispersion fortement modifiée par l'interaction exciton-exciton. Le point **C** correspond à la fin de zone d'instabilité. La partie imaginaire est proche de zéro. Quant à la partie réelle, elle donne à voir une dispersion modifiée, elle aussi. On peut y voir une grande similitude avec l'image de droite de la figure 3.3, avec une partie linéaire, indiquée en pointillés bleus. Cela correspond au régime de superfluidité des polaritons. L'état d'excitation du système est le seul disponible donc aucune dispersion n'est possible. Si on regarde attentivement cette figure, on peut voir que le minimum de la dispersion ne semble pas être confondu exactement avec l'excitation. Bien entendu si on prend en compte la largeur des modes polaritoniques, on comprendra que cet écart n'est pas significatif. Ici $\gamma_{LP} \approx 0.1$ meV et on trouve un écart entre la pompe et le minimum de dispersion d'environ 0.07 meV. Pour le point **D**, loin de l'instabilité, on se trouve encore dans un régime de superfluidité. La dispersion dessinée correspond à celle des perturbations autour de la solution stationnaire. Au vu de cette dispersion aucune perturbation ne peut prendre place dans le fluide. Pas seulement parce qu'il n'y a pas de niveau d'énergie plus bas, mais aussi parce qu'il n'y a plus de niveau d'énergie disponible du tout à l'énergie de la pompe ou même en-dessous. Pour une vue plus dynamique, le lecteur peut se reporter à l'annexe B.1, où se trouve une vidéo sur laquelle est présentée, conjointement, l'évolution du champ moyen, de la partie réelle de la matrice de Bogoliubov ainsi que de la partie imaginaire.

On peut faire une dernière remarque. Nous avons dit que dans le cas des atomes en interaction le potentiel chimique μ était déterminé par les interactions entre atomes et par leur densité. Il correspond à la fréquence d'oscillation du système à l'équilibre. Ici, pour les polaritons, c'est la fréquence d'excitation qui correspond au potentiel chimique $\mu = \hbar\omega_p$. Un des avantages d'un tel système est que ce potentiel chimique peut être facilement modulable. En effet, dans les condensats d'atomes moduler la densité d'atome est très délicat, de même pour la constante d'interaction. Dans le cas des polaritons, les paramètres d'excitation nous donnent directement accès à ce potentiel chimique mais aussi à la vitesse de propagation des polaritons dans le plan ($\mathbf{v} = \partial\omega_{LP}/\partial\mathbf{k}$), ainsi qu'à leur densité. Même la constante d'interaction (dans une moindre mesure) est ici contrôlable, sachant que $g_{LP} = |X_{\mathbf{k}_p}|^4 g$. Autrement dit, on a l'avantage d'avoir un accès direct à tous les paramètres du système.

Afin de pouvoir caractériser le régime d'écoulement d'un tel fluide, on peut s'inté-

resser à sa dispersion. Cela dit, la linéarité de la dispersion, qui est une preuve directe de la superfluidité, reste très difficile à observer expérimentalement. Plus simplement, si on place un défaut sur le passage du fluide, on pourra directement mettre en évidence son régime d'écoulement, comme nous allons voir.

B.3 Résultats numériques et expérimentaux

Pour reproduire les résultats expérimentaux, le modèle analytique n'est plus suffisant ; il faut prendre en compte l'inhomogénéité de la pompe ainsi que la présence du défaut. Pour ce faire, on utilise les équations de Gross-Pitaevskii pour les polaritons (3.5), dans lesquelles les opérateurs $\hat{\Psi}_{X(C)}$ ont été remplacés par des valeurs complexes (représentation de Wigner). Dans le cas où les potentiels V_C et V_X sont nuls, alors ce programme nous donne les mêmes résultats que ceux trouvés avec le modèle du champ moyen précédemment traité. On implémentera, grâce au potentiel $V_C(\mathbf{x})$, un défaut localisé de taille équivalente à ce qui a été observé expérimentalement et on prendra 1 meV comme hauteur énergétique. Dans ce qui suit l'excitation sera gaussienne avec $\sigma_{x/y} = 45 \mu\text{m}$ et centrée sur le défaut. Pour plus de développement sur ce modèle et sur la relation qu'il entretient avec les simulations Monte Carlo utilisées dans le chapitre 2, je renvoie le lecteur à l'annexe A. Notons que, contrairement à ce qui a été fait dans le chapitre 2, ici c'est le faisceau transmis qui est analysé. Les expériences sont réalisées à 4K. Pour plus d'informations sur l'échantillon utilisé et le *setup* expérimental, voire la référence [30].

Les résultats obtenus au sein du LKB à Paris (expérimentaux) ainsi que ceux obtenus durant ce travail de thèse sont représentés conjointement sur la figure 3.12. La partie supérieure (figure 3.12.a) correspond aux résultats expérimentaux et la partie inférieure (figure 3.12.b) aux simulations numériques. Pour chaque set d'images, il y a, en échelle de gris, numérotés de **I** à **III**, les images en champ proche et en échelle de couleurs, numérotés de **IV** à **VI**, les images en champ lointain. Pour les images en champ proche, on peut distinguer au centre un défaut. Ici trois puissances d'excitation sont représentées.

En **bleu** à gauche, on peut voir le résultat de l'interaction entre un faisceau de pompe de faible intensité et la microcavité. Sur l'image **a-I** ainsi que sur l'image **b-I**, on peut voir des fronts d'onde elliptiques typiques de l'écoulement d'un fluide classique en régime subsonique. Dans l'espace réciproque (image **a-IV** et **b-IV**) un point de très forte intensité, noté par un point noir, correspond à l'excitation. On distingue en plus très nettement un anneau dit anneau de Rayleigh, caractéristique d'une diffusion élastique. On en conclut que nous sommes en présence d'un fluide de polaritons diffusé par le défaut. Ces images correspondent au régime linéaire montré sur le point **A** de la figure 3.11.

En **rouge** au centre, on se trouve à une excitation intermédiaire. Dans l'espace réel (**a-II** et **b-II**), on peut voir que les franges elliptiques ont partiellement disparu. Alors que dans l'espace réciproque (**a-V** et **b-V**), l'anneau de Rayleigh collapse.

Enfin en **vert** à droite, l'excitation est suffisante pour atteindre le régime superfluide. Cela se traduit dans l'espace réel par une disparition totale des franges due à la diffusion élastique (**a-III** et **b-III**). Reste une densité polaritonique ne comportant que très

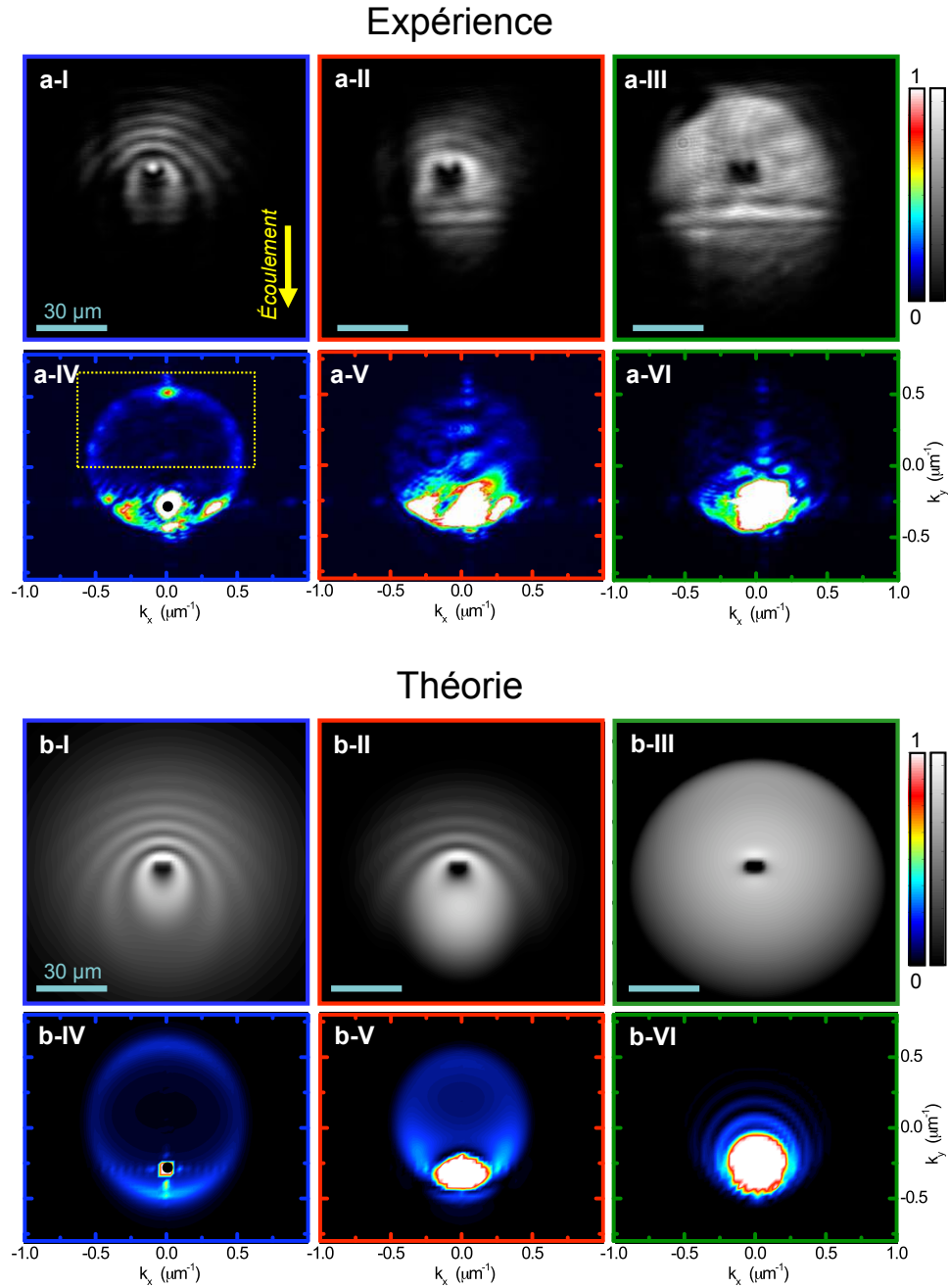


FIGURE 3.12 – Résultats expérimentaux (en haut, figure **a**) et numériques (en bas, figure **b**). Trois régimes sont représentés : en bleu à gauche, le régime de faible excitation (régime linéaire), en rouge au centre, le régime intermédiaire (régime précurseur de superfluidité) et en vert à droite, le régime de forte excitation (régime superfluide). Les images numérotées de **I** à **III** en échelle de gris représentent la densité de polaritons dans l'espace réel. Le défaut est visible au centre. La flèche jaune indique la direction d'écoulement du fluide. Les images numérotées de **IV** à **VI**, en échelle de couleurs, correspondent à la distribution des polaritons dans l'espace des **k**. Le rectangle jaune de la figure **a-IV** renvoie à la figure 3.13.b. Les paramètres des expériences et des simulations sont identiques et correspondent à ceux de la figure 3.10 à l'exception de l'excitation qui est, ici, gaussienne centrée sur le défaut ($\sigma_{x/y} = 45 \mu\text{m}$). Images extraites de la référence [30].

peu (**a-III**) voire aucune (**b-III**) modulation. Le défaut, quant à lui, est parfaitement visible. L'écoulement du fluide se fait sans être perturbé par le défaut. On a écoulement superfluide. Si on regarde l'espace réciproque maintenant (**a-VI** et **b-VI**), l'anneau Rayleigh y a complètement disparu. Il ne reste plus qu'un point, confondu avec le laser de pompe. On retrouve bien ce qui avait été dit dans la partie précédente et ce que montre la dispersion de Bogoliubov du point **C** (figure 3.11). Le seul niveau d'énergie disponible est confondu avec la pompe ce qui inhibe toute diffusion élastique, ce qui correspond à la définition du régime superfluide donnée précédemment.

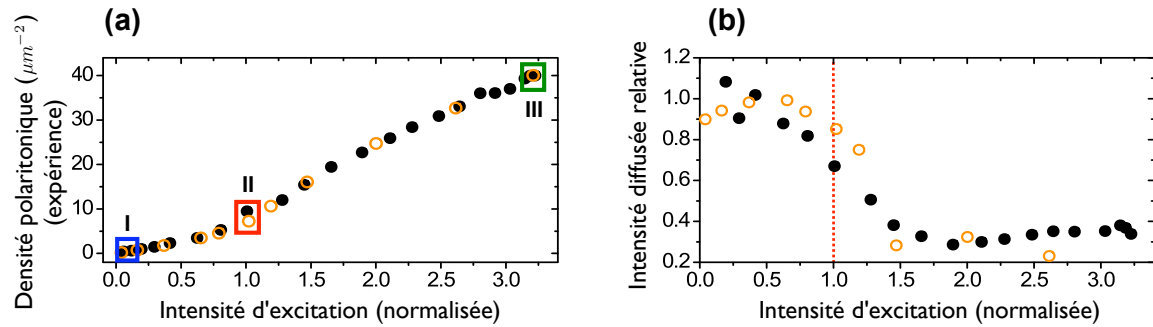


FIGURE 3.13 – La figure **a** montre la densité polaritonique, en fonction de l'intensité d'excitation. En cercles pleins noirs, les résultats expérimentaux et en cercles vides oranges les résultats numériques. Les rectangles bleus, rouges et verts numérotés **I**, **II** et **III** correspondent aux différents régimes montrés sur la figure 3.12. La figure **b** représente l'intensité diffusée par rapport à l'intensité totale en fonction de l'énergie d'excitation. L'intensité diffusée est prise comme l'intensité à l'intérieur du rectangle jaune de la figure 3.12. **a-IV**. Images extraites de la référence [30].

Sur la figure 3.13.a, on a la densité totale des polaritons en fonction de la puissance d'excitation normalisée par rapport au seuil (régime d'excitation transitoire indiqué en rouge sur la figure 3.12). Les cercles oranges correspondent aux résultats simulés tandis que les cercles noirs pleins correspondent, eux, aux résultats expérimentaux. On peut voir un remarquable accord sur la tendance des deux courbes. Par contre, au vu de la courbe de champ moyen tracée sur la figure 3.10.a, on ne retrouve pas de courbe de bistabilité. Cela vient de l'excitation gaussienne de notre système. Les rectangles de couleurs, numérotés de **I** à **III**, indiquent la position des points correspondants aux images montrées sur la figure 3.12. Quant à la figure 3.13.b, elle nous donne à voir l'intensité diffusée normalisée en fonction de la puissance d'excitation. L'intensité diffusée étant prise comme l'intensité émise à l'intérieur du rectangle jaune indiqué sur l'image 3.12. **a-IV**. Comme précédemment, les résultats expérimentaux sont représentés par des cercles noirs pleins et ceux des simulations, par des cercles oranges. On voit bien qu'une fois le seuil franchi, l'intensité diffusée décroît rapidement, ce qui corrobore le collapse de l'anneau de diffusion élastique énoncé précédemment.

Afin de compléter ces résultats, le lecteur pourra se reporter à l'annexe B.1 où l'on y trouvera deux vidéos, une pour les expériences et une pour les simulations, montrant l'évolution de la densité polaritonique, conjointement dans l'espace réel et réciproque pour différentes intensités de pompe. On y verra que la disparition des franges y est

d'autant plus claire ainsi que le collapse de l'anneau de diffusion Rayleigh.

Ainsi nous avons mis en évidence l'existence d'une phase superfluide dans les polaritons excitoniques excités de façon résonnante. Mais à l'image de ce qui a été observé dans les atomes, peut-on atteindre des régimes d'écoulement supersoniques ? C'est ce que nous allons voir.

B.4 Effet Čerenkov dans un fluide de polaritons

Une des nombreuses propriétés d'un superfluide est d'être non perturbée par la présence d'un défaut tant que sa vitesse est subsonique. La transition entre le régime subsonique et supersonique peut bien entendu être obtenue en variant la vitesse, mais aussi en variant le décalage polariton-pompe (pour plus de développements voir partie C).

Dans le modèle analytique

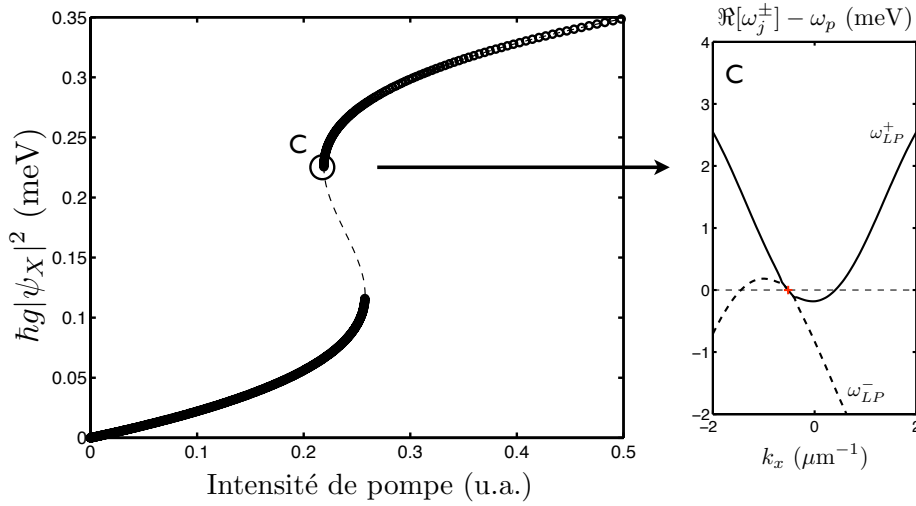


FIGURE 3.14 – À gauche, la solution stationnaire du champ moyen pour un désaccord polariton-pompe de $\Delta_p = -0.106$ meV et pour un vecteur d'onde de la pompe de $k_p = -0.52 \mu\text{m}^{-1}$. La partie en pointillés correspond à un champ instable. À droite, les valeurs propres (partie réel) de la matrice de Bogoliubov correspondant au point **C** indiqué sur le champ moyen. La croix rouge indique l'énergie et le vecteur d'onde de la pompe. Les paramètres employés sont les suivants : $\hbar\omega_X^0 = 1484.25$ meV, $\hbar\omega_C(0) = 1483.3$ meV, $\hbar\Omega_R = 2.15$ meV et $k_z = 27 \mu\text{m}^{-1}$. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.10.

À l'aide du modèle présenté dans la partie B.2, en changeant les paramètres ($\Delta_p = -0.106$ meV et $k_p = -0.52 \mu\text{m}^{-1}$), on trouve la solution stationnaire du champ moyen représentée 3.14 à gauche. La courbe est très ressemblante à celle présentée figure 3.10 à gauche. Le champ moyen varie peut avec les paramètres. Par contre, à l'heure d'observer les perturbations du champ moyen et leur comportement, on va voir un changement significatif. La dispersion des modes de Bogoliubov est représentée figure 3.14

à droite. Seule est représentée la partie réelle des valeurs propres de la matrice de Bogoliubov (3.11) et pour une unique valeur du champ moyen, notée $\mathbf{C}$, indiquée sur le graphe de gauche. On peut voir que, contrairement à ce que montre le point $\mathbf{C}$ de la figure 3.11, ici, la pompe n'est plus confondue avec le minimum d'énergie du système. De plus, on a ici un écart d'environ 0.2 meV qui est bien supérieur à la largeur des modes $\gamma_{LP} \approx 0.1$ meV. La diffusion élastique est donc permise, et par conséquent, nous ne sommes plus dans un régime superfluide mais dans le régime Čerenkov [20]. Ce qui doit se traduire dans l'espace réel par des fronts d'ondes linéaires, comme nous l'avons vu dans la partie A.3.

Résultats expérimentaux et numériques

Ce qui a été prédit numériquement et observé expérimentalement pour une excitation gaussienne ($\sigma_{x/y} = 45 \mu\text{m}$), est représenté sur la figure 3.15. Cette fois encore, sont représentés conjointement les résultats expérimentaux en haut (figure 3.15.a) et simulés en bas (figure 3.15.b). En échelle de gris et pour chaque partie (numérotée de **I** à **III**) on peut voir la densité polaritonique dans l'espace réel. Sur ces images, on distingue au centre le défaut. En-dessous et en échelle de couleurs (numérotée de **IV** à **VI**), on a la distribution dans l'espace réciproque des polaritons. Trois régimes d'excitation sont représentés.

En **bleu**, un régime d'excitation faible qui correspond au régime linéaire. Pour ce qui est des images dans l'espace réel (**a-I** et **b-I**), au vu du régime linéaire de la configuration précédente, ici, les franges sont moins elliptiques et plus paraboliques. Ici, on est proche du régime supersonique et ce, même en régime linéaire. Dans l'espace réciproque (**a-IV** et **b-IV**), cela se traduit par une excitation de pompe très proche de l'anneau Rayleigh. Anneau clairement visible, ce qui nous confirme que nous sommes en présence d'un fluide classique de polaritons.

En **rouge**, un régime intermédiaire pour lequel les résultats en espace réel (**a-II** et **b-II**) montre une disparition des franges paraboliques et l'apparition de nouvelles plus linéaires. Quant à l'espace réciproque (**a-V** et **b-V**), cette fois encore l'anneau Rayleigh montre un collapse.

Enfin, les images en régime de fortes excitations, sont indiquées en **vert** sur la figure 3.15. Dans l'espace réel (**a-III** et **b-III**), on peut voir distinctement que contrairement aux mêmes images de la figure 3.12, le défaut perturbe le fluide. On ne se trouve donc plus dans un régime superfluide. La perturbation créée, montre deux franges linéaires, qui comme on l'a vu est typique d'un écoulement supersonique. C'est donc bien un effet Čerenkov qui est observé ici. Il est plus délicat de conclure sur l'espace réciproque (**a-VI** et **b-VI**). Comme on l'a montré, l'effet Čerenkov se traduit par un anneau de diffusion élastique, pas totalement effondré. L'élargissement des modes du système ne permet pas d'y avoir accès directement.

Sur la figure 3.16, la densité polaritonique totale est représentée comme précédemment, en fonction de l'intensité d'excitation normalisée, avec en noir, les résultats expérimentaux et en orange, ceux simulés. Ici aussi, l'accord entre expérience et simulation est très bon. Les rectangles de couleurs numérotés de **I** à **III** renvoient aux différents régimes d'excitation représentés figure 3.15. Là encore le désaccord apparent entre les résultats du modèle analytique, présenté figure 3.14 et ces résultats, est principalement

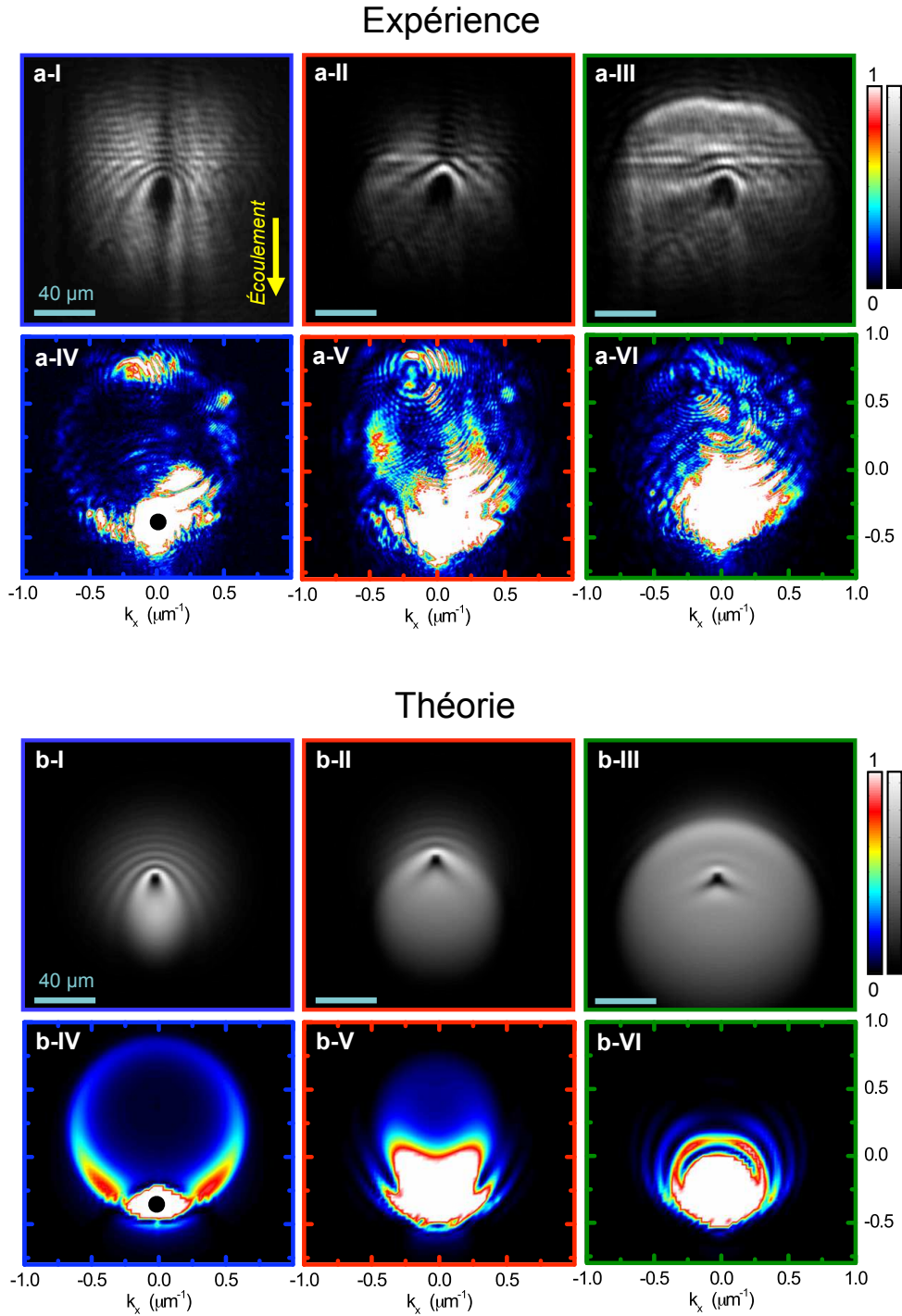


FIGURE 3.15 – Résultats expérimentaux (en haut, figure **a**) et numériques (en bas, figure **b**). Trois régimes sont représentés : en bleu à gauche, le régime de faible excitation (régime linéaire), en rouge au centre, le régime intermédiaire (régime précurseur de l'effet Čerenkov) et en vert à droite, le régime de forte excitation (régime Čerenkov). Les images numérotées de **I** à **III** en échelle de gris représentent la densité de polaritons dans l'espace réel. Le défaut est visible au centre. Les images numérotées de **IV** à **VI** en échelle de couleur correspondent à la distribution des polaritons, dans l'espace des moments. Les paramètres des expériences et des simulations sont identiques et correspondent à ceux de la figure 3.14, à l'exception de l'excitation qui est, ici, gaussienne centrée sur le défaut ($\sigma_{x/y} = 45 \mu\text{m}$). Images extraites de la référence [30].

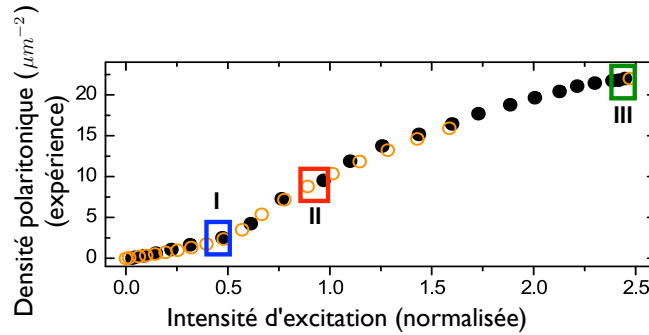


FIGURE 3.16 – Cette figure montre la densité polaritonique en fonction de l'intensité d'excitation. En cercles pleins noirs, les résultats expérimentaux et en cercles vides oranges, les résultats numériques. Les rectangles bleu, rouge et vert numérotés **I**, **II** et **III** correspondent aux différents régimes montrés sur la figure 3.15. Image extraite de la référence [30].

dû au profil gaussien de l'excitation.

À l'image de ce qui a été fait pour le régime superfluide, deux vidéos sont disponibles dans l'annexe B.2, où on pourra y voir l'évolution de la densité polaritonique à la fois dans l'espace réel et dans l'espace réciproque pour différentes intensités de pompe.

À titre de conclusion partielle, on peut dire que si la superfluidité des polaritons a été prédite théoriquement pour une onde plane d'excitation, l'observation ainsi que la simulation de ces observations confirment l'existence d'un tel état chez ces bosons en interaction, que sont les polaritons excitoniques. Cette caractérisation de la superfluidité a été faite en termes d'écoulement sans diffusion, à travers un défaut. On a aussi pu montrer qu'en plus d'avoir des propriétés superfluides proches de celles de l'hélium 4, le passage dans un régime supersonique avait les mêmes effets. Cela dit, l'aspect thermodynamique d'un tel fluide reste aujourd'hui encore à étudier, de même que le rôle de la fraction condensée sur les propriétés de cet état. Mais c'est un autre aspect qui va nous intéresser maintenant : l'aspect hydrodynamique.

C Turbulences et superfluide de polaritons

Dans un premier temps (partie C.1), nous nous intéresserons au cas des superfluides d'atomes pour lequel les turbulences ont déjà largement étudiées. Suite à quoi, dans la partie C.2, nous verrons quelles sont les principales différences entre les atomes et les polaritons et ce que cela implique en termes de turbulences. Suivra l'étude du régime d'écoulement turbulent et de ses limites. Pour finir (partie C.3), nous présenterons une méthode permettant de fixer et contrôler les turbulences en tirant profit des particularités de ces superfluides.

Il peut paraître surprenant à l'heure de parler de fluide sans viscosité (superfluide) de parler de turbulences. En effet, dans un fluide classique il est usuel de définir un écoulement turbulent, lorsque l'énergie par unité de surface d'un fluide en mouvement est relativement importante, devant les forces de viscosité que le fluide oppose au

déplacement. Avec une telle définition, un écoulement superfluide semble ne pouvoir n'être que turbulent, vu sa viscosité presque nulle. Cela dit, de par ces propriétés, apparaît dans ce fluide, une viscosité *quantique*. En fonction des conditions on aura donc plusieurs régimes d'écoulement possible.

C.1 Cas des atomes

Dans le cas d'un système dilué ($na^3 \ll 1$ avec a la longueur de diffusion) et à température nulle, on peut négliger les fluctuations : $\hat{\Psi} \approx \Psi$ et on a $n = |\Psi|^2$ avec $n(\mathbf{x})$ la densité locale. Le champ du condensat Ψ peut être décomposé en son module et en une phase S tel que : $\Psi(\mathbf{x}) = \sqrt{n(\mathbf{x})} \exp(iS(\mathbf{x}))$. Sachant cela, on peut définir la vitesse locale du superfluide $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, tel que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{x}, t) \quad (3.12)$$

L'équation (3.2) se traduira donc en deux équations, faisant intervenir principalement la densité locale n et la vitesse locales $\mathbf{v}$ du superfluide :

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (3.13a)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \left(V_{ext} + gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \right) = 0 \quad (3.13b)$$

Plusieurs différences entre un fluide classique, régi par les équations de Navier-Stokes, et les superfluides, sont visibles ici. En premier lieu un superfluide est irrotationnel. Cela se voit tout particulièrement dans la second équation. Dans une fluide classique le terme $\nabla(m\mathbf{v}^2/2)$ s'écrit $m(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ (terme d'advection). En second lieu, il n'y a pas dans l'équation (3.13b) de terme faisant intervenir la viscosité. Par contre, le terme $-\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n}$, appelé pression quantique, peut être relié à une forme de viscosité [32]. À l'heure de négliger cette pression (approximation de Thomas-Fermi), on remarque que l'équation (3.13b) devient analogue à l'équation d'Euler pour un gaz parfait (sans viscosité). On voit qu'un superfluide n'est pas un fluide parfait et donc que la production de turbulence y est possible.

Un paramètre couramment employé dans l'étude des superfluides est la *healing length* ou longueur de cicatrisation ou encore longueur de corrélation qui se définit comme suit :

$$\xi = (8\pi na)^{-1/2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mgn}} \quad (3.14)$$

Cette longueur caractérise la distance sur laquelle la fonction d'onde du condensat "cicatrise" ou retourne à sa valeur initiale, lorsqu'il est perturbé localement.

Vortex

Les propriétés des superfluides font que le rotationnel de la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ est nul. Cela ne signifie pas pour autant que si on fait tourner un tel fluide, le champ de vitesse restera inchangé. Cela signifie que sa rotation sera très différente de celle d'un fluide

conventionnel et dépendra de Ω la vitesse de rotation du fluide. L'énergie d'inertie emmagasinée sera convertie en vortex. L. Onsager [33] et R. P. Feynman [34] ont montré que l'intégrale de la vitesse autour de ces vortex doit être un nombre quantifié :

$$2\pi n \frac{\hbar}{m} = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.15)$$

avec n un nombre entier. Ω joue le rôle ici de la vitesse de propagation du fluide présenté dans la partie A.2, on retrouve qu'en-dessous d'une certaine vitesse de rotation $\Omega_v = E_v/L$ [35] le fluide restera dans l'état fondamental, avec E_v l'énergie portée par un vortex et L le moment angulaire de rotation auquel le fluide est soumis. Lorsque ce moment angulaire augmente on observe l'apparition progressive de vortex qui forme un réseau de vortex ordonné [36], comme cela a été observé dans l'hélium 4, en 1979 [37] ainsi que dans les condensats de Bose-Einstein, en 2000 [38]. Le superfluide se trouve dans un état métastable. Si la vitesse de rotation dépasse une certaine valeur critique Ω_c , équivalent du critère de Landau, le superfluide se trouve dans un état instable [39]. D'autres méthodes ont permis la création de vortex. Entre autres, on notera celle qui consiste à imprimer une phase au condensat à l'aide d'un laser [40].

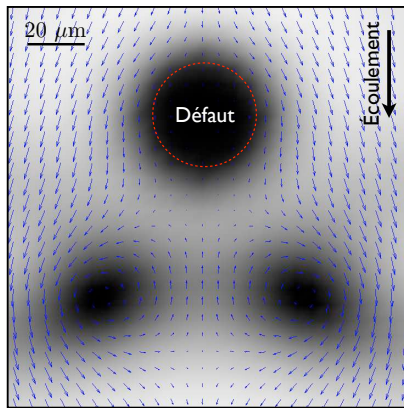


FIG. 3.17 – Zoom sur la densité d'un superfluide atomique (simulation) en écoulement proche d'un défaut indiqué en pointillés rouges. Les flèches bleues indiquent la vitesse locale du fluide.

Mais cette méthode du seau tournant ne se trouve pas être très adaptée à notre configuration. Pour notre part, nous nous intéresserons à un schéma plus proche de ce que L. Landau décrit dans la référence [8]. Cela consiste à étudier un superfluide s'écoulant à travers un défaut comme vu dans la partie précédente. Bien que jamais observé expérimentalement dans les superfluides d'atomes, dû à la nécessité d'avoir un piège optique, permettant ou bien cette propagation ou bien la propagation d'un défaut sur une distance suffisante, cette configuration a largement été étudiée et l'est toujours théoriquement [41–48].

D'après ce qu'on a dit dans la partie 3.12, nous avons un écoulement superfluide tant que la vitesse du fluide ne dépasse pas une certaine vitesse critique (au sens de Landau). Dans les atomes, cette vitesse du fluide est confondue avec la vitesse du son de Bogoliubov c_s . Au-delà de cette vitesse l'écoulement sera supersonique. Mais, on peut mettre en évidence que la présence d'un défaut opaque la densité du fluide. Densité directement liée à la vitesse du son $c_s = \sqrt{\hbar g n / m}$. Ces modulations aux abords du défaut peuvent donner lieu à la création de turbulence comme par exemple des vortex. Une nouvelle vitesse critique v_c peut être déterminée, tel que $v_c = \sqrt{2/11} c_s \approx 0.43 c_s$ [41, 46], au-delà de laquelle il y a formation de turbulence. Pour avoir une expression plus précise, on peut montrer que $v_c = \hbar / m d \ln(d/\xi)$ [49], avec d le diamètre d'un défaut circulaire placé sur la course du fluide. Le régime turbulent correspondra donc à une vitesse du fluide comprise entre la vitesse critique v_c et la vitesse du son c_s . Dans ce régime, des paires de vortex (un

vortex et un antivortex respectivement de phase tournant de 2π et -2π) se forment sur les bords du défaut. Sur la figure 3.17, est représentée la densité calculée aux abords d'un défaut d'un condensat d'atomes. À l'arrière de ce défaut, deux vortex (un vortex et un antivortex) sont visibles. Les flèches bleues indiquent la vitesse locale du fluide. On voit clairement que cette vitesse tourne autour des vortex. Il a récemment été montré (théoriquement) que les vortex produits pouvaient créer des allées de Bénard-Von Karman [48], phénomène bien connu en turbulence hydrodynamique.

Solitons noirs obliques

En plus de ces vortex d'énergie bien quantifiée la spécificité des écoulements superfluides ne s'arrête pas là. En régime supersonique, on va voir apparaître non pas des turbulences comme dans les fluides usuels mais des paires de solitons obliques noirs.

Avant de les détailler, il nous faut préciser la terminologie employée. Un soliton ou onde solitaire, est considéré couramment comme une onde auto-entretenu se propageant dans un milieu non-linéaire. Ce sont des phénomènes courants en physique non-linéaire. Ces solitons peuvent être noirs ou brillants, traduisant un excès ou un déficit de densité. On notera qu'à une dimension, l'étude d'un superfluide en régime turbulent donne naissance, non pas à des vortex (nécessite au moins deux dimensions), mais à des solitons [50, 51]. La méthode citée précédemment qui consiste à imprimer avec un laser une phase sur un condensat, permet d'observer la propagation de cette onde solitaire dans ce liquide [52, 53]. Mais dans le régime supersonique d'un superfluide s'écoulant à travers un défaut, l'émission de vortex au bord du défaut devient si important qu'il y a recouvrement entre eux. Recouvrement qui va créer une paire d'ondes solitaires stationnaires comme accrochées au défaut. La phase tournante des vortex de 2π (ou -2π) se transforme en saut de phase le long de cette ligne noire, au maximum égal à π . Sur la figure 3.8, une grande quantité de vortex est émise par le défaut alors que nous nous trouvons dans le régime Čerenkov. Les solitons nécessitent un certain temps pour se stabiliser. Des travaux récents, ont montré que ces solitons restaient stables, tant que la vitesse du fluide était supérieure à celle du son [54, 55].

Intéressons-nous au cas d'un superfluide hors équilibre comme celui décrit dans la partie précédente.

C.2 Cas des polaritons

Le caractère hors équilibre, comme nous allons le voir, change de façon importante la dynamique des turbulences. Mais avant de rentrer dans les détails, précisons que la présence de turbulences dans des milieux lasers [56], ainsi que dans les milieux de non-linéarité optique de type Kerr [57], a déjà fait l'objet de plusieurs études. D'autres études plus poussées ont permis de mettre en évidence la présence de solitons statiques dans ces mêmes milieux ainsi que la relation qu'ils entretiennent avec les vortex [58]. Notons aussi que de nombreuses études et mise en évidence la présence de vortex dans des systèmes polaritoniques excités hors-résonances [59–61]. Mais ces milieux ne permettent pas l'étude d'un écoulement hydrodynamique d'un superfluide à travers un défaut.

Excitation résonante ou fixation de phase

La formation de vortex ainsi que de solitons qui se traduisent par une modulation locale de la phase, se trouve en compétition avec la phase fixe imposée par l'excitation. En effet, comme nous l'avons vu, les turbulences, aussi bien les vortex que les solitons, sont caractérisées par une modulation locale de la phase. D'un autre côté, l'excitation résonante impose la phase de la pompe au superfluide. Il y a donc frustration de la phase et par conséquent, inhibition de la génération de turbulence. Dans le cas d'une excitation homogène, on ne pourra pas voir la formation de turbulence. Afin de résoudre ce problème, il a été proposé d'éteindre brutalement l'excitation [62]. Ainsi, la frustration de phase disparaît et les turbulences et leurs modulations de la phase associée peuvent se former. C'est une solution proche de ce qui a été expérimentée récemment par une équipe de L'EPFL de Lausanne, où l'excitation n'était plus en continue mais pulsée. La dynamique des polaritons étant très rapide, le superfluide peut être créé pendant la durée d'un pulse, et ensuite se propager autant que faire se peut. Le principal inconvénient de cette technique c'est la vitesse de la dynamique. La durée de vie des polaritons étant de l'ordre de la dizaine de picosecondes, l'observation d'un superfluide de polaritons en l'absence d'excitation ne peut perdurer sur plus de quelques dizaines de picosecondes. Ce qui, ne permet pas d'observer les solitons obliques car leur établissement passe par un régime transitoire souvent plus long que le temps de vie du superfluide.

Afin de palier à ces problèmes, l'idée que nous avons proposé est de créer un réservoir de polaritons superfluides qui s'écouleraient à travers un défaut. Dans le réservoir en amont du défaut, la phase est fixe et le superfluide se trouve dans un régime stationnaire. Le défaut est situé à l'extérieur du réservoir, proche de celui-ci, et dans la direction du flux. En d'autres termes et comme représenté sur la figure 3.18, il suffit de masquer une partie du spot d'excitation continue, en prenant grand soin de ne pas exciter le système au niveau du défaut. Excitation qui aurait pour effet d'inhiber la formation de turbulence. Aussi, la phase du superfluide est totalement libre de contrainte et peut être modulée.

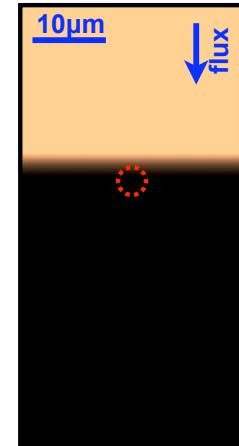


FIG. 3.18 – Profil d'excitation. En pointillés rouges est indiqué là où sera positionné le défaut.

Simulations des différents régimes

Des simulations ont été réalisées avec le même programme que celui utilisé pour la partie B, avec une grille de 256×128 points. La configuration choisie diffère légèrement. Le temps de vie des polaritons est pris de l'ordre de 30 picosecondes et le désaccord exciton-photon est de 4 meV. Les polaritons bas sont par conséquent très excitoniques, ce qui équivaut à une interaction effective polariton-polariton importante. L'excitation est prise à angle fixe ($k_p = 1 \mu\text{m}^{-1}$). Le contrôle des paramètres pertinents est fait via la densité (connecté à la vitesse du son). Quant à l'énergie de l'excitation, elle sera ajustée afin d'augmenter la gamme de densité atteignable. La densité polaritonique varie comme la racine carrée de l'excitation, par conséquent, on aura $c_s \propto I_p^{1/4}$. Par

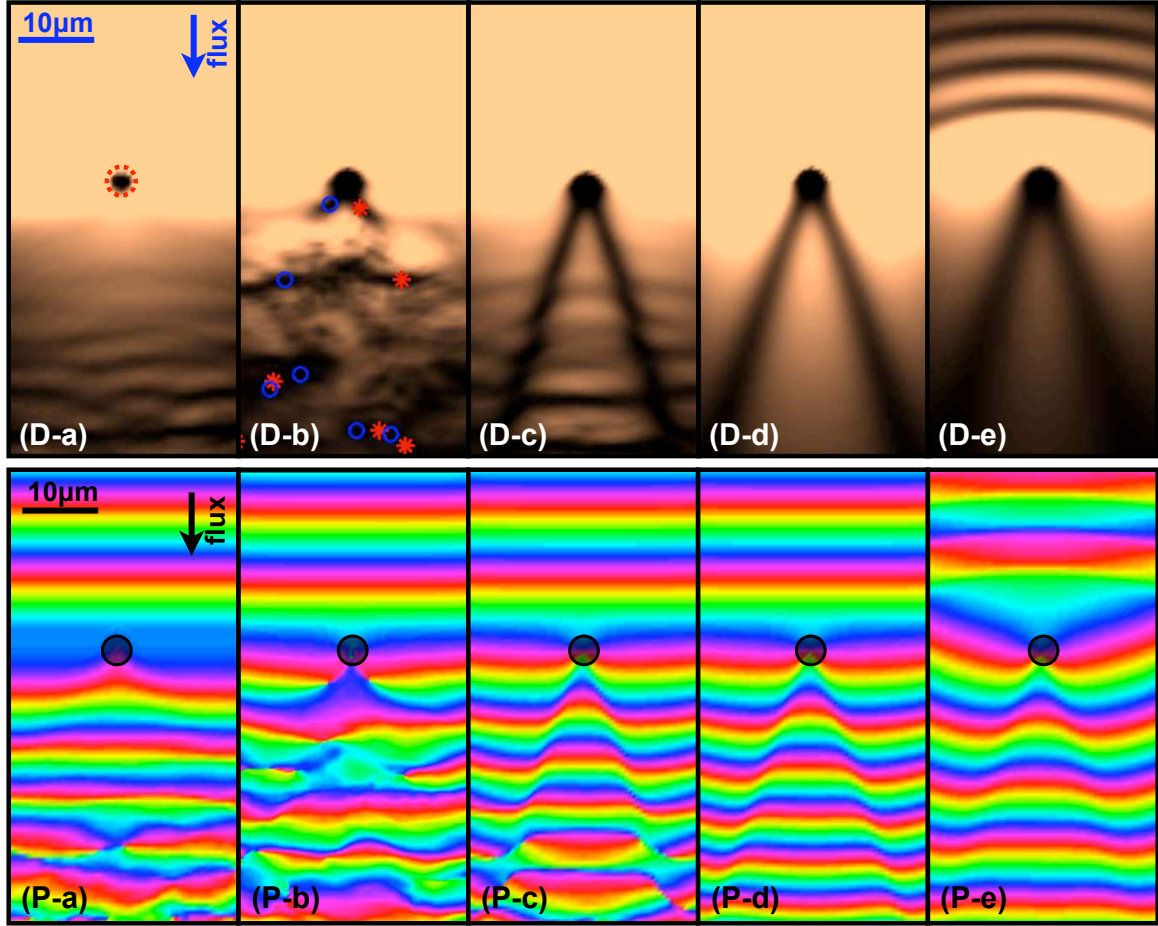


FIGURE 3.19 – Densité polaritonique en haut (image *D*) et la phase en bas (image *P*) pour différents rapports v/c_s . La vitesse du fluide est la même pour chaque image ($k_p = 1 \mu\text{m}^{-1}$). De l'image (a) à (e) le rapport v/c_s croît, soit la densité décroît. Avec respectivement v/c_s au niveau de l'équateur (comme indiqué figure 3.20) de 0.037 , 0.76 ± 0.03 , 0.93 ± 0.02 , 1.02 ± 0.02 et 1.72 ± 0.13 . Plus précisément, les différents paramètres pris sont : $\hbar\omega_X(k=0) = 1479 \text{ meV}$, $\hbar\omega_C(k=0) = 1483 \text{ meV}$, $\hbar\gamma_{X,C} = 0.02 \text{ meV}$, et $\hbar\Omega_R = 2.65 \text{ meV}$. Cavity photon mass $m_C = 40.10^{-6}m_e$. La masse des excitons m_X est prise infinie. Le potentiel du défaut (photonique) est de $V_C = 20 \text{ meV}$. Pour chaque image on a : $\Delta_p = -0.5 \text{ meV}$, $F_p^{\text{max}}/\gamma_C = 5.10^5 \mu\text{m}^{-1}$ (a); $\Delta_p = -0.5 \text{ meV}$, $F_p^{\text{max}}/\gamma_C = 250 \mu\text{m}^{-1}$ (b); $\Delta_p = -0.4 \text{ meV}$, $F_p^{\text{max}}/\gamma_C = 250 \mu\text{m}^{-1}$ (c); $\Delta_p = -0.3 \text{ meV}$, $F_p^{\text{max}}/\gamma_C = 250 \mu\text{m}^{-1}$ (d); $\Delta_p = -0.1 \text{ meV}$, $F_p^{\text{max}}/\gamma_C = 20 \mu\text{m}^{-1}$ (e). Les images sont toutes stationnaires en temps, à l'exception de (b). Les simulations sont réalisées pour une grille de 256×128 points. Note : l'échelle de couleur des images (D) est légèrement saturée.

contre la densité en régime superfluide varie linéairement en fonction du désaccord : $n_{\min} \approx \Delta_p / (3\hbar g |X_{kp}|^4)$, ou $n_{\min}$ correspond à la densité minimale dans le régime non-linéaire (point **C** de la figure 3.10). Donc, le son de Bogoliubov variera comme la racine du désaccord pompe-polariton.

Sur la figure 3.19, on peut voir un résumé des résultats obtenus. Les images notées (**D**) correspondent à la densité photonique normalisée, quant aux images notées (**P**), elles correspondent à la phase. La vitesse du fluide est dirigée vers le bas, comme indiquée par les flèches bleue et noire. Le rapport v/c_s est pris croissant de (**a**) à (**e**). La vitesse du son et donc la densité décroissent de (**a**) à (**e**). Le diamètre du défaut est de l'ordre de quatre fois la longueur de cicatrisation ξ . La vitesse du son est évaluée localement à partir de la densité excitonique.

Le rapport de la vitesse du fluide et de la vitesse de Bogoliubov pour la figure 3.19.a est de $v/c_s \approx 0.04$ soit inférieur à v_c/c_s . D'après ce qui a été dit dans la partie C cela correspond à un régime superfluide sans turbulences. Comme le montre la densité photonique (**D-a**) on a bien un régime superfluide sans turbulences. Le fluide s'écoule sans être modifié par le défaut. La densité décroît rapidement après le défaut. À cause des erreurs numériques, lorsque la densité devient très faible, des modulations apparaissent. Sur l'image de la phase, visible sur l'image **P-a**, on voit distinctement que la phase est très peu modulée après le défaut. On remarquera qu'on a une accélération du fluide après le défaut. Cela vient du potentiel effectif vu par les polaritons. Dans le réservoir (au-dessus du défaut), la densité polaritonique importante donne lieu à un décalage vers le bleu de l'énergie des polaritons. Lorsque le fluide sort du réservoir la densité diminuant, l'énergie de ce décalage diminuera d'autant. Les polaritons sont donc accélérés par ce gradient d'énergie effectif. Cet effet est visible sur toutes les images de phase.

Sur les images (**b**), on a $v/c_s = 0.76 \pm 0.03$. La vitesse du fluide se trouve comprise entre la vitesse critique v_c , et la vitesse du son c_s ce qui correspond à un régime superfluide turbulent. Comme le montre l'image (**D-b**), on a bien après le défaut modulation de la densité. Le fluide est perturbé par le défaut, ce qui montre que nous nous trouvons dans un régime de turbulences. Sur l'image de la phase (**P-b**), on distingue clairement plusieurs points autour desquels la phase tourne de $\pm 2\pi$, ce qui indique des turbulences quantiques. Pour évaluer la présence de vortex (ou anti-vortex), on intègre la phase autour de chaque point [47]. Les points correspondants à une intégrale de $\pm 2\pi$ sont indiqués sur l'image (**D-b**) par une étoile rouge (vortex) et par un cercle bleu (anti-vortex). Ces deux images correspondent à une image à un temps donné. Par contre, les autres images correspondent à une solution stationnaire. Dans cette configuration, on a émission périodique de vortex. Une vidéo de ce régime turbulent est disponible dans l'annexe B.3. On peut y voir la propagation des vortex et antivortex à l'arrière du défaut, voire la recombinaison de certains d'entre eux. La désintégration des vortex ainsi que leurs recombinaisons donnent lieu à des ondes de pression circulaires propageantes ; ces dernières, additionnées aux erreurs numériques, donnent lieu aux importantes modulations de la densité après le défaut.

Pour ce qui concerne les images **c**, on trouve $v/c_s = 0.93 \pm 0.02$. Soit un rapport proche de l'unité. Lorsque le nombre de Mach (v/c_s) est proche de 1, les solitons tendent à se stabiliser [55]. Comme le montre la densité photonique (image (**D-c**)), il y a bien

une paire de solitons, mais pas exactement rectiligne. Cela correspond à une solution stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii : une paire de solitons en limite stabilité.

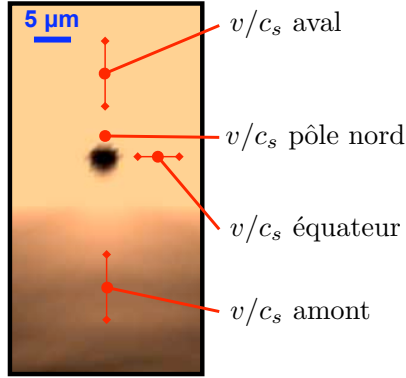


FIG. 3.20 – Différents points de détermination de la vitesse du son locale correspondant au tableau 3.1.

La phase visible sur l'image **P-c** donne à voir que chaque soliton correspond à un saut de phase d'un peu moins de π . Lorsque le nombre de Mach augmente légèrement $v/c_s = 1.02 \pm 0.02$, on peut voir sur l'image **D-d** que les solitons se stabilisent. Quant au saut de phase visible sur l'image (**P-d**), il diminue légèrement (environ 0.6π). Mais ce régime, où $v/c_s > 1$ correspond au régime Čerenkov. Alors que, comme le montre l'image **D-d**, aucune frange avant le défaut n'apparaît. Cela s'explique par le fait que la densité dans le réservoir et celle au niveau du défaut sont différentes. Cette différence donne lieu, dans le réservoir, à un nombre de Mach de 0.73, alors qu'il est de 1.02 au niveau du défaut. Le fluide est donc subsonique dans le réservoir et supersonique après. Dans le tableau 3.1, sont résumées certaines valeurs du nombre de Mach pour différents points des simulations, pour chacun des cinq régimes présentés sur la figure 3.19. Les points en question, appelés *amont* pour le réservoir, *pôle nord*, *équateur* et *aval* pour l'arrière du défaut, sont précisés sur la figure 3.20.

	a	b	c	d	e
v/c_s amont	0.003	0.623 ± 0.08	0.67	0.73	4.1 ± 1.8
v/c_s pôle nord	0.003	0.579	0.616	0.67	1.15
v/c_s équateur	0.037	0.76 ± 0.03	0.93 ± 0.02	1.02 ± 0.02	1.72 ± 0.13
v/c_s aval	1.4 ± 0.3	2.3 ± 0.7	2.2 ± 1.5	2.22 ± 0.42	4 ± 0.5

TABLE 3.1 – Valeurs du rapport de la vitesse du fluide sur la vitesse du son (nombre de Mach) correspondant aux images de la figure 3.19 pour différents points indiqués figure 3.20.

Les images **e** correspondent à $v/c_s = 1.72 \pm 0.13$ au niveau du défaut et à $v/c_s = 4.1 \pm 1.8$ dans le réservoir. Cette fois, quelque soit la position où l'on évalue le nombre de Mach, il sera supérieur à l'unité. Tout le système est dans un état supersonique. Cela correspond bien à ce qui est observé sur les images **e** de la figure 3.19. Des franges Čerenkov apparaissent à l'avant du défaut (dans le réservoir), et à l'arrière une paire de solitons est clairement visible. On notera, comme le montre l'image (**P-e**), que le saut de phase associé aux solitons est ici encore plus petit que précédemment (environ $\pi/2$).

Par conséquent, on voit bien que le contrôle de la densité des polaritons via l'intensité d'excitation, et que le désaccord polariton-pompe nous permettent d'explorer les différents régimes d'écoulement d'un superfluide. De plus, les critères d'écoulement déterminés dans les superfluides hors équilibre s'avèrent correspondre à ceux à l'équilibre. De récentes expériences ont permis de mettre en évidence la présence de solitons obliques noirs dans un superfluide de polaritons excitoniques.

C.3 Piégeage de vortex

Le système présenté précédemment, consistant à exciter fortement les polaritons au dessus du défaut, ne semble pas permettre l'observation de vortex dans des conditions raisonnables. En effet, la vitesse de propagation des vortex et des anti-vortex étant d'environ $0.6 \mu\text{m.ps}^{-1}$ l'observation de leur propagation nécessitera une caméra ultra rapide. Pour palier à ce problème, nous allons exposer une idée présentée dans l'article [63], qui permet à la fois de fixer les paires de vortex et de les contrôler.

Piège triangulaire et réseau de vortex

L'idée consiste à utiliser la pompe pour créer, comme précédemment, les vortex mais aussi pour les piéger. Pour ce faire, on ne va pas se contenter de pomper juste au-dessus du défaut. Seule une zone bien définie sera laissée sans excitation. Sur le figure 3.21, on peut voir une telle excitation. Le triangle noir correspond dans l'espace réel, à la zone non excitée. En pointillés rouges on a la position du défaut. La forme triangulaire n'est pas nécessaire pour piéger une paire de vortex-antivortex mais comme nous allons le voir, elle permet de faire mieux. Dans ces simulations, les bords du triangle sont gaussiens, de largeur $\sigma = 1 \mu\text{m}$, pour correspondre au mieux à des conditions réalistes. Une dynamique similaire a été observée avec des frontières plus douces encore.

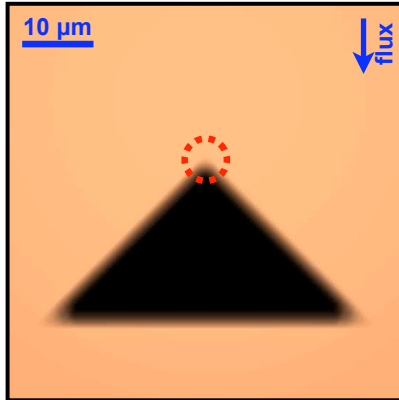


FIG. 3.21 – Profil d'excitation permettant le piégeage de vortex et anti-vortex. En pointillés rouges est indiqué la où sera positionné le défaut. Image extraite de la référence [63].

La figure 3.22.a illustre le résultat d'une telle configuration. On y distingue clairement un cercle noir de $8 \mu\text{m}$ de diamètre correspondant au défaut, ainsi qu'une forme triangulaire résultant de l'excitation de profil correspondant à la figure 3.21. Mais surtout, on voit clairement la présence de quatre paires de vortex indiquées par les étoiles rouges (vortex) et les cercles bleus (antivortex). Les images ici présentées sont moyennées sur plus de 300 ps. On a donc un réseau auto-organisé de vortex et d'antivortex stables dans le temps. Comme précédemment, la présence de vortex est vérifiée par intégration autour de chaque point de la grille. Le réseau de vortex-antivortex est stationnaire. Les vortex sont fixés par le profil de pompe. L'utilisation d'une autre forme de piège ne permet de fixer qu'une paire de vortex sur les bords inférieurs du piège. Dans le cas du triangle, on voit clairement l'établissement d'un réseau temporellement stable. L'origine de cette stabilité est à chercher dans les effets dus à la continuité de la phase. Il existe bien entre l'intérieur et l'extérieur, un petit désaccord des énergies effectives des polaritons, mais il est de l'ordre de la dizaine de micro-électron-volt. Par contre, il se trouve qu'à l'extérieur du triangle la phase est imposée par la pompe, alors que dans le triangle, elle est libre d'être modulée. Les vortex créés dans le triangle possèdent une phase tournante. Ils y sont piégés et ne peuvent pas sortir du triangle. Par un double effet de minimisation de la rotation de la phase et de propagation hydrodynamique, une paire de vortex

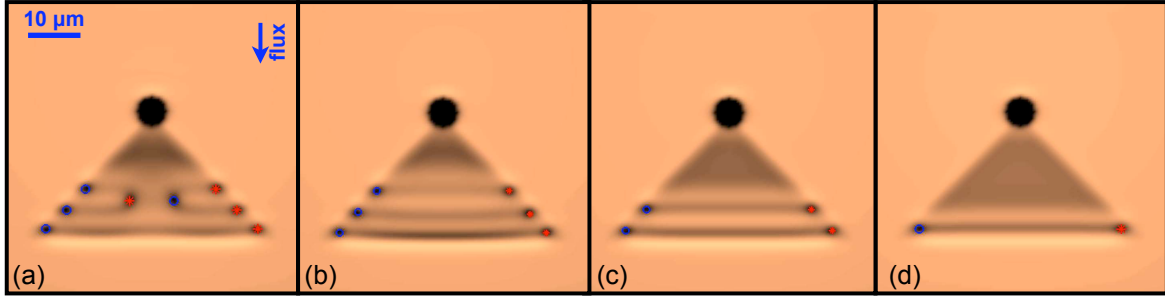


FIGURE 3.22 – Densité photonique normalisée pour différentes puissances d’excitation à l’intérieur du triangle I_p^{in} . Les conditions d’excitation à l’extérieur du triangle sont telles que $v/c_s = 0.45 > 0.43$ ($\Delta_p = -0.8$ meV et $I_p^{out} = 100$ u.a.). Les différentes images correspondent à des solutions stationnaires. Le rapport entre l’excitation interne et externe au triangle est tel que $I_p^{in}/I_p^{out} = 0.01$ pour (a), $I_p^{in}/I_p^{out} = 0.017$ pour (b), $I_p^{in}/I_p^{out} = 0.05$ pour (c) et $I_p^{in}/I_p^{out} = 0.1$ pour (d). Simulations réalisées pour une grille de 128×128 points. Quant aux autres paramètres, ils sont identiques à ceux de la figure 3.19. Images extraites de la référence [63].

est systématiquement piégée sur le bord inférieur du triangle. Quant aux autres vortex, ils seront attirés par les bords droits et gauches pour cette même raison de minimisation de la rotation de la phase. La distance verticale entre vortex latéraux correspond à $2\pi/k_p$. Quant à la paire centrale, elle naît d’effets hydrodynamiques complexes induits par les autres vortex.

Mais, si on peut fixer des vortex avec le profil d’excitation présenté, ainsi que créer un réseau auto-organisé de vortex-antivortex, on peut aller plus loin. On peut contrôler ce réseau de vortex.

Contrôle des vortex piégés

Plusieurs paramètres de ce piège peuvent être facilement contrôlables. Tout d’abord, en modifiant les conditions d’excitation (Δ_p ainsi que I_p^{out} l’excitation en dehors du triangle) on peut modifier la longueur de cicatrisation et donc la taille des vortex. Ensuite, en modulant le vecteur d’onde de la pompe (angle d’excitation) la distance entre les vortex sera modifiée.

En plus de ces modulations de taille et d’écartement, on peut contrôler la densité de vortex. Lorsque l’on pompe à faible puissance à l’intérieur du triangle noir de la figure 3.21, on peut modifier le nombre de paires de vortex-antivortex.

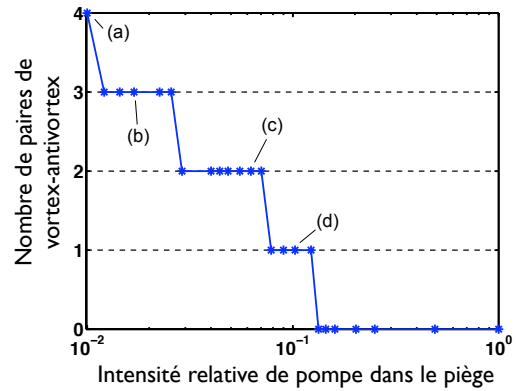


FIG. 3.23 – Nombre de paires de vortex-antivortex en fonction de l’intensité relative à l’intérieur du piège. Image extraite de la référence [63].

Sur la figure 3.22, sont montrés la densité photonique ainsi que la position des vortex (étoile rouge) et antivortex (cercle bleu) pour différentes intensités d'excitation à l'intérieur du triangle I_p^{in} . Lorsque l'on augmente I_p^{in}/I_p^{out} , on voit que les paires disparaissent une à une. Le nombre de paires de vortex, en fonction du rapport entre l'intensité d'excitation intérieure au triangle et l'intensité extérieure, est représenté sur la figure 3.23. Lorsque la puissance $I_p^{in} \approx 0.1 I_p^{out}$, l'établissement d'une paire est possible. La frustration de phase imposée par cette nouvelle excitation n'est pas suffisante pour inhiber la formation de vortex, comme le montre la figure 3.22.d. Si l'on diminue encore progressivement cette excitation interne, on permet la formation d'une nouvelle paire (figure 3.22.c), d'une troisième (figure 3.22.b) et enfin d'une quatrième (figure 3.22.a). À des excitations encore plus faibles, des solutions quasi-stables apparaissent très sensibles aux symétries du problème. C'est à dire que certains vortex et anti-vortex orbitent les uns autour des autres. Via cette excitation interne au triangle, on a donc un très bon contrôle sur la densité de paires dans le piège.

Dans cette partie, nous avons pu montrer que les régimes turbulents des superfluides de polaritons suivaient la même dynamique que les superfluides atomiques. Une des principales différences des superfluides hors-équilibre est la contrôlabilité et l'indépendance de paramètres telles que le potentiel chimique, la vitesse d'écoulement dans le plan et la densité. Cela permet d'avoir très simplement accès aux différents régimes d'écoulement superfluide. De plus, utilisant les propriétés liées à la phase de notre système, on peut contrôler les vortex créés et les manipuler. L'ensemble de ces résultats sont résumés dans l'article [63]. Mais la contrôlabilité des polaritons ne s'arrête pas là. Comme nous allons le voir maintenant, même le défaut peut être contrôlé.

D Défauts et polarisation de spin

Dans cette dernière partie, nous allons nous intéresser à la polarisation de spin des polaritons. L'idée ici est d'utiliser les propriétés de polarisation de spin des polaritons pour contrôler le potentiel effectif, vu par les polaritons. Pour ce faire, dans une première partie (D.1), nous verrons comment le Hamiltonien du système peut être décrit à l'heure de prendre en compte le spin des excitons et la polarisation de la lumière. Suivront (partie D.2) les résultats obtenus expérimentalement et numériquement qui consistent en l'utilisation de ces propriétés de polarisation de spin pour générer des défauts artificiels.

D.1 Hamiltonien effectif dépendant du spin

Jusqu'à maintenant, dans cette thèse, les effets dus à la polarisation des photons de cavité ainsi que ceux dus aux spins des excitons n'ont pas été pris en compte. Comme nous l'avons vu, cette "omission" n'a pas eu d'influence particulière quant à la reproduction des résultats expérimentaux obtenus. Cela vient du fait qu'en première approximation, le couplage entre les différentes polarisations des polaritons est nul. Autrement dit, les polaritons d'une polarisation circulaire donnée, pour de petits angles d'excitation, sont aveugles à ceux de l'autre polarisation [64]. Mais avant de revenir

sur cette approximation, il nous faut reprendre les définitions données dans le chapitre 1 de la microcavité optique ainsi que celle des excitons, afin de prendre en compte la polarisation et le spin. Cela nous amènera à redéfinir le Hamiltonien effectif du système. L'analyse de la polarisation de spin des polaritons ainsi que des effets qu'elle peut induire (effet Hall de spin optique par exemple) ont déjà fait l'objet de plusieurs études aussi bien théoriques [65–68] qu'expérimentales [69].

Excitons et spins

Dans un semi-conducteur massif à gap direct III-V, comme le GaAs, les électrons de la bande de conduction ont un moment cinétique orbital nul (orbitales s) et donc un moment cinétique total $J_c = 1/2$. Les électrons de la bande de valence ont un moment cinétique orbital égal à 1 (orbitales p). Leur moment cinétique total J_v peut donc valoir $1/2$ ou $3/2$. L'interaction spin-orbite provoque une levée de dégénérescence entre les états de moment cinétique total $J_v = 1/2$ et $J_v = 3/2$. La bande $J_v = 1/2$ est repoussée à des énergies plus basses (*split-off band*). Quant à l'autre bande ($J_v = 3/2$), elle se décompose en deux avec des dispersions différentes. On identifie la bande des trous lourds avec une moment cinétique suivant z de $\pm 3/2$ et celle des trous légers de $\pm 1/2$.

Le confinement lié aux puits quantiques implique une levée de dégénérescence des trous lourds et légers. Ces derniers sont repoussés à des énergies plus basses. Dans un puits quantique, l'axe de croissance du puits est l'axe z de quantification "naturel" du système. Par conséquent, les excitons de puits quantique naissent de l'appariement d'un électron de bande de conduction, de moment cinétique $\pm 1/2$, avec un trou lourd de moment cinétique $\pm 3/2$. Les excitons ainsi créés auront comme moment cinétique total $J = 1$ ou 2 .

La conservation du moment cinétique total du système, dans le processus d'interaction entre un exciton et un photon, impose que le moment cinétique total des deux soit égal [70]. Le moment cinétique total d'un photon étant de 1, par conséquent les états excitoniques de moment cinétique total $J_X = 2$, seront optiquement inactifs (appelés excitons noirs). Un photon d'incidence normal au puits ($\mathbf{k}_p = 0$) créera donc s'il a une polarisation circulaire droite ($\sigma+$ de moment cinétique $+1$) un exciton de moment cinétique $+1$ ($J_v^z = 3/2$; $J_c^z = -1/2$), s'il est de polarisation circulaire gauche ($\sigma-$) un exciton de moment cinétique -1 ($J_v^z = -3/2$; $J_c^z = 1/2$). D'autres types de polarisations des photons créeront des superpositions linéaires de ces deux états. Lorsque l'incidence n'est pas normale ($\mathbf{k}_p \neq 0$), alors, même une polarisation circulaire donne lieu à une superposition d'états de polarisation de spin des excitons. On peut définir le Hamiltonien des excitons isolés sans interaction, comme :

$$H_X^0 = \hbar\omega_X^0 \sum_{\mathbf{k}} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}}^{+\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{-\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}^- \right) \quad (3.16)$$

L'énergie et la dispersion en énergie est identique pour les deux spins. Quant à la masse des excitons, elle reste considérée comme infinie, pour les mêmes raisons que précédemment. Le Hamiltonien d'interaction explicité dans la partie C.3 du chapitre 1 peut être réécrit :

$$H_{XX} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} V_{\mathbf{q}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4}^{XX} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\sigma_1\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{\sigma_2\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\sigma_3} \hat{b}_{\mathbf{k}'}^{\sigma_4} \quad (3.17)$$

avec $\sigma_i = \pm 1$ le spin des excitons. En fonction des σ_i , on peut distinguer plusieurs potentiels d'interaction $V_{\mathbf{q},\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4}^{XX}$. Lorsque $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$, on retrouve le terme d'interactions exciton-exciton, vu dans le chapitre 1, avec $\hbar g = \hbar g_{++} = \hbar g_{--} = V_0^{XX} A/2$. Cela correspond aux interactions exciton-exciton de même spin. Maintenant lorsque $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_4 = 0$, en première approximation le potentiel d'interaction est nul [64]. Ceci dit, il peut être montré, qu'aux ordres supérieurs, ce potentiel n'est pas nul. Pour des vecteurs d'onde importants, ainsi que pour des conditions particulières, liés aux biexcitons, ce potentiel peut devenir important [71]. En fonction de la configuration du système étudié, on peut aussi avoir une interaction attractive ou répulsive entre exciton de spins différents. On définira $\hbar g_{+-}(\mathbf{q}) = V_{\mathbf{q},\mp,\pm,\mp,\pm}^{XX} A/2$ [68]. Quant aux autres processus d'interaction, ils correspondent à des interactions de type *spin flip*. Étant des processus lents, ils seront négligés [72].

L'équation (3.17) s'écrit :

$$\begin{aligned} H_{XX} = & \hbar g_{++} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{+\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{+\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}'}^+ + \hbar g_{--} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}-} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{-\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}}^- \hat{b}_{\mathbf{k}'}^- \\ & + 2\hbar \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} g_{+-} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{+\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{-\dagger} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}'}^- + \hat{b}_{\mathbf{k}}^- \hat{b}_{\mathbf{k}'}^+ \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dans le cas qui nous intéresse d'une excitation résonnante à petit vecteur d'onde, on aura un seul type d'interaction entre excitons possible, celui pour lequel $\mathbf{q} = 0$ et $\mathbf{k} = \mathbf{k}' = \mathbf{k}_p$. Pour ce qui nous concerne, et au vu des comparaisons effectuées avec l'expérience (voir figure 3.24) nous prendrons $g_{+-} = +0.1g_{++}$. Dans cette approche seules les interactions directes impliquant le spin ont été prises en compte. Pour un développement plus complet sur ces interactions je renvoie le lecteur à la référence [73].

La partie photonique de notre système souffre aussi d'effets dus à la polarisation de la lumière.

Microcavités et polarisations

Le champ de cavité $\hat{\Psi}_C$ peut être décomposé en un champ de polarisation circulaire droit $\sigma+$, noté $\hat{\Psi}_C^+$, et un autre de polarisation circulaire gauche $\sigma-$, noté $\hat{\Psi}_C^-$. Ces deux champs permettent respectivement d'exciter des excitons de spin ± 1 . Ils sont couplés par un terme mélangeant les deux polarisations. Ce mélange a pour origine une levée de dégénérescence entre les modes TM et TE d'une microcavité. Le désaccord est nul lorsque le vecteur d'onde incident est normal au plan de la cavité ($\mathbf{k}_p = 0$) et peut atteindre typiquement quelques micro-électronvolts dans les systèmes étudiés. Dans la base des polarisations circulaires, le Hamiltonien de cette cavité peut s'écrire [65] :

$$H_C^{\text{spin}} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \left(\omega_C(\mathbf{k}) - i \frac{\gamma_C}{2} \right) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^{+\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{-\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- \right) \quad (3.19a)$$

$$+ \sum_{\mathbf{k}} \hbar \Omega_{LT}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{+\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \Omega_{LT}^*(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^{-\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \quad (3.19b)$$

avec $\hbar\Omega_{\text{LT}}(\mathbf{k})$ appelé le dédoublement longitudinal-transverse (*longitudinal-transvers splitting*) et peut s'écrire dans l'espace réel [74] :

$$\hbar\Omega_{\text{LT}}(-i\nabla) = \frac{\hbar^2}{4\mu} \left(\frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

avec $\mu = m_l m_t / (m_t - m_l)$ une constante qui dépend de la masse des photons des modes transverses m_t et de celle m_l des modes longitudinaux.

Polaritons et polarisations de spin

En prenant en compte le couplage entre un exciton de spin donné et le photon de polarisation correspondant ($|+1, \sigma+\rangle$ et $|-1, \sigma-\rangle$), on peut déterminer les équations du mouvement correspondant. Bien entendu, le couplage entre un exciton de spin $+1$ et un photon de polarisation $\sigma-$ est nul (idem pour -1 et $\sigma+$). Ce qui nous donnera pour $\hat{\Psi}_{C(X)}(\mathbf{x}, t)$, le champ photonique (excitonique) :

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{C+}(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_{C-}(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_{X+}(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_{X-}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{p+}(\mathbf{x}, t) \\ F_{p-}(\mathbf{x}, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\mathbf{h}^1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{++}|\hat{\Psi}_{X+}|^2 + 4g_{+-}|\hat{\Psi}_{X-}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{--}|\hat{\Psi}_{X-}|^2 + 4g_{-+}|\hat{\Psi}_{X+}|^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{C+}(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_{C-}(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_{X+}(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_{X-}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

avec $F_{p\pm}(\mathbf{x}, t)$ l'excitation de polarisation circulaire $\sigma\pm$. Notons qu'une excitation linéaire pourra se décrire dans la base des polarisations circulaires $\sigma+$ et $\sigma-$, comme :

$$F_p^{\leftrightarrow}(\mathbf{x}, t) = \frac{F_p(\mathbf{x}, t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_p^{\updownarrow}(\mathbf{x}, t) = \frac{F_p(\mathbf{x}, t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{h}^1$ le hamiltonien sans interaction et avec perte du système :

$$\mathbf{h}^1 = \begin{pmatrix} \omega_C(-i\nabla) - i\frac{\gamma_C}{2} & \Omega_{\text{LT}}(-i\nabla) & \Omega_R & 0 \\ \Omega_{\text{LT}}(-i\nabla) & \omega_C(-i\nabla) - i\frac{\gamma_C}{2} & 0 & \Omega_R \\ \Omega_R & 0 & \omega_X^0 - i\frac{\gamma_X}{2} & 0 \\ 0 & \Omega_R & 0 & \omega_X^0 - i\frac{\gamma_X}{2} \end{pmatrix}$$

Ces équations du mouvement montrent clairement que le couplage entre les deux polarisations de spin des polaritons se fera via le couplage longitudinal-transvers de la cavité $\Omega_{\text{LT}}(-i\nabla)$. Par contre, un autre effet, qui va tout particulièrement nous intéresser, apparaît grâce aux excitons. Si les excitons d'une polarisation donnée sont sensibles à la densité de cette même polarisation, elle est aussi sensible à la population

de l'autre polarisation, via le terme g_{+-} . L'équation (3.20) peut être écrite dans la base polaritonique, en se limitant aux polaritons bas :

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{LP+}(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_{LP-}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{p+}^{LP}(\mathbf{x}, t) \\ F_{p-}^{LP}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}^1 & \begin{pmatrix} g_{++}^{LP} |\hat{\Psi}_{LP+}|^2 + 4g_{+-}^{LP} |\hat{\Psi}_{LP-}|^2 & 0 \\ 0 & g_{--}^{LP} |\hat{\Psi}_{LP-}|^2 + 4g_{-+}^{LP} |\hat{\Psi}_{LP+}|^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{LP+}(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\Psi}_{LP-}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

où $F_{p\pm}^{LP} = |C_{\mathbf{k}}|^2 F_{p\pm}$ avec $C_{\mathbf{k}}$ la fraction photonique des polaritons et pour ce qui est du Hamiltonien $\mathbf{h}^1$ sans interaction, on a :

$$\mathbf{h}^1 = \begin{pmatrix} \omega_{LP}(-i\nabla) - i\frac{\gamma_{LP}}{2} & \Omega_{LT}^{LP}(-i\nabla) \\ \Omega_{LT}^{LP}(-i\nabla) & \omega_{LP}(-i\nabla) - i\frac{\gamma_{LP}}{2} \end{pmatrix}$$

où $\Omega_{LT}^{LP} = |C_{\mathbf{k}}|^2 \Omega_{LT}$. Ces équations du mouvement 3.21 des polaritons correspondent à deux équations de Gross-Pitaevskii hors équilibre couplées.

En se plaçant à de petits angles (petits $\mathbf{k}_p$), on peut négliger le couplage linéaire Ω_{LT} entre les deux polarisations. Par conséquent, seule l'interaction d'échange de spin des excitons reste. Comme nous l'avons dit, cette interaction rend sensible une population de polarisation donnée à la population de l'autre polarisation. Une population importante localisée dans la polarisation circulaire $\sigma-$ va induire un décalage local en énergie proportionnel à $\hbar g_{+-} n^+$ dans la polarisation $\sigma+$. Ce qui équivaldrait à créer un **défaut artificiel** dans la polarisation $\sigma+$ et donc à modifier la propagation des polaritons dans cette polarisation [75].

D.2 Résultats numériques et expérimentaux

Afin de simuler le comportement des polaritons en prenant en compte la polarisation, nous avons généralisé le programme utilisé dans le chapitre concernant la superfluidité et les turbulences. Pour plus de détails voir l'annexe A. L'objectif est de reproduire les résultats expérimentaux réalisés au sein du LKB à Paris par A. Amo et collaborateurs. La majorité des paramètres nécessaires pour les simulations sont les mêmes que dans la partie B (cf. figure 3.10). Pour ce qui est du couplage Ω_{LT} , il est négligé car l'excitation est presque normale. Approximation qui comme le montrera la concordance des résultats expérimentaux et numériques est tout à fait raisonnable.

Défaut induit ponctuel

En focalisant un faisceau contrôle de polarisation circulaire, donnée sur la cavité, et en excitant légèrement avec un faisceau signal l'autre polarisation, on souhaite révéler l'effet induit par le faisceau de contrôle. Les vecteurs d'onde et les fréquences du faisceau signal et du contrôle sont identiques. On peut écrire le terme d'excitations gaussiennes tels que : $F_{p+}(\mathbf{x}) = F_s \exp((\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0s})^2 / 2\sigma_s^2)$ et $F_{p-}(\mathbf{x}) = F_c \exp((\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0c})^2 / 2\sigma_c^2)$ avec $\mathbf{x}_{0i}$ la position de la gaussienne et σ_i sa largeur. On prendra $\sigma_c = 0.8 \mu\text{m}^{-1}$ et $\sigma_s = 25 \mu\text{m}^{-1}$.

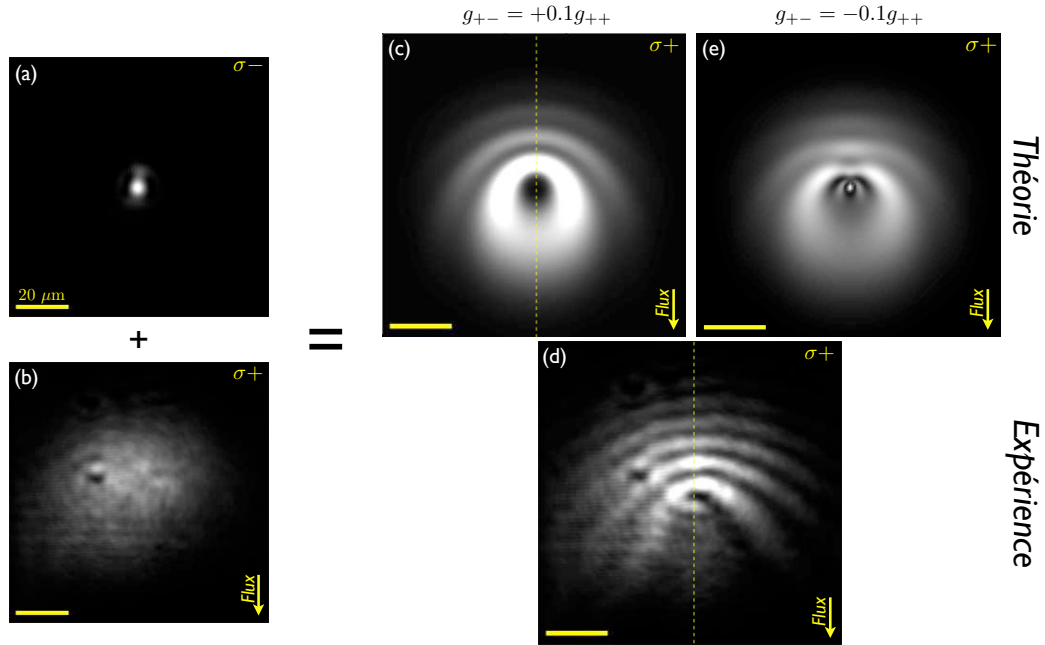


FIGURE 3.24 – Densité photonique dans l’espace réel pour différentes polarisations indiquées en haut à droite de chaque image. Les images (a) et (b) représentent respectivement la transmission à travers la cavité d’un faisceau contrôle de polarisation $\sigma-$ et d’un faisceau signal de polarisation $\sigma+$. Les images (c) et (e) pour la théorie et (d) pour l’expérience, représentent la densité photonique dans la polarisation $\sigma+$ lorsque l’on a, à la fois le faisceau contrôle et le faisceau signal. Les images (c) et (e) correspondent respectivement à des simulations avec $g_{+-} = +0.1g_{++}$ et $g_{+-} = -0.1g_{++}$. La ligne en pointillés jaunes indique la position d’analyse de la visibilité des franges explicitées figure 3.26. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.10. Images extraites de la référence [75].

Sur la figure 3.24, sont représentées la transmission dans l’espace réel pour différentes excitations et différentes polarisations. Soient deux faisceaux de polarisations opposées ($\sigma-$ pour le faisceau contrôle et $\sigma+$ pour le signal). La figure 3.24.a montre la transmission à travers la cavité du faisceau contrôle focalisé. La figure 3.24.b indique celle du signal. Le signal utilisé, est faiblement intense de telle manière à être dans le régime linéaire et non superfluide. Quant aux images (c) et (e) pour la théorie et (d) pour l’expérience elles montrent l’effet dans la polarisation du signal ($\sigma+$) du contrôle sur la distribution des polaritons. On voit que lorsqu’on a à la fois le contrôle et le signal, bien que de polarisation opposée cela modifie grandement le profil du signal. On voit ici clairement sur les images (c) et (e) l’importance du signe de g_{+-} . Dans notre cas, $g_{+-} > 0$ correspond mieux aux résultats expérimentaux représentés sur l’image (d). On peut y voir qu’à proximité d’où est focalisé le contrôle, apparaissent dans la polarisation opposée des franges identiques à celles observées dans le cas d’un fluide de polaritons s’écoulant à travers un défaut (cf. images a-I et b-I de la figure 3.12). Deux vidéos sont disponibles dans l’annexe B.4 qui montrent comment évolue de la distribution de densité du signal en fonction de la puissance du faisceau contrôle, calculée numériquement et observée expérimentalement.

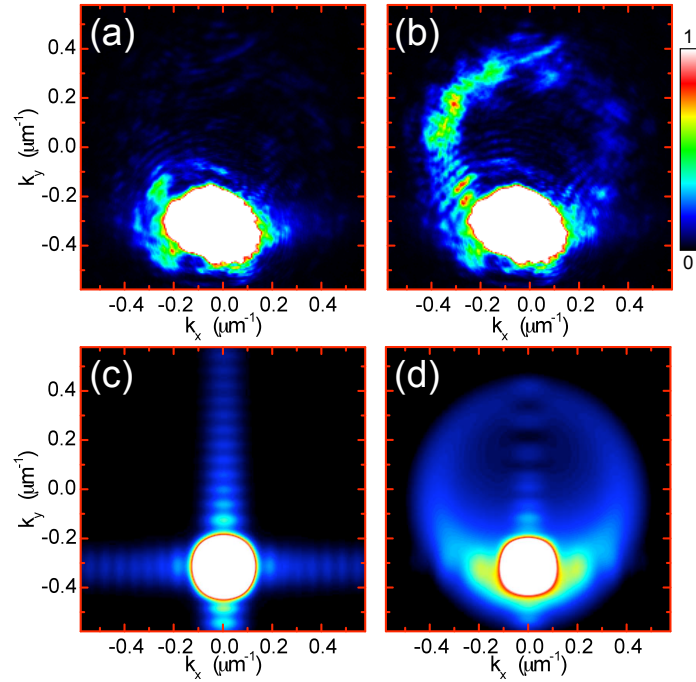


FIGURE 3.25 – Évolution de la distribution normalisée dans l'espace réciproque du fluide polaritonique dans la polarisation du signal ($\sigma+$). En haut les images (a) et (b) correspondent aux résultats expérimentaux. Quant aux images (c) et (d) elles correspondent aux résultats numériques. Les images (a) et (c) indiquent la distribution lorsque l'intensité du contrôle est faible et les images (b) et (d) lorsqu'elle est plus importante. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.24. Images extraites de la référence [75].

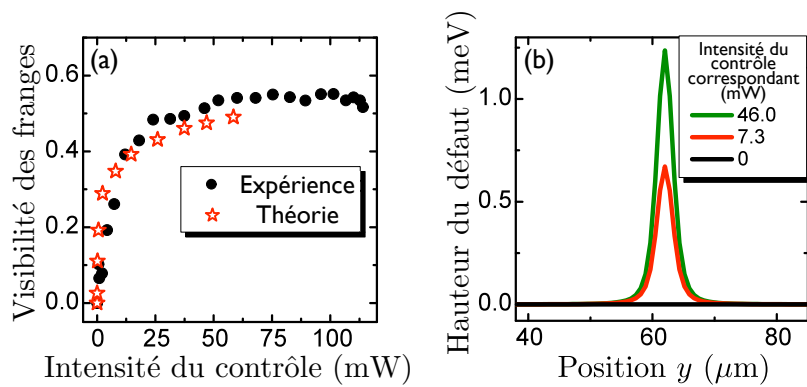


FIGURE 3.26 – Le graphique (a) correspond à l'analyse de la visibilité des franges pour les résultats expérimentaux et numériques. Les franges analysées sont prises le long des lignes en pointillés indiqués sur les figures 3.24.c et d. Le graphique (b) indique le profil et la hauteur du défaut estimé pour différentes intensités de contrôle. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.24. Images extraites de la référence [75].

Si l'on s'attarde toujours dans la polarisation du signal sur l'effet produit dans l'espace réciproque on remarquera, comme le montre les images 3.25, un effet similaire à ce qui est visible sur les images **a-IV** et **b-IV** de la figure 3.12. Lorsque l'intensité du contrôle est faible le fluide s'écoule sans diffusion élastique. Cela se traduit par une distribution dans l'espace réciproque, centrée sur le vecteur d'onde de la pompe, comme le montre les figures 3.25.a pour l'expérience et 3.25.c pour les simulations. Les résultats numériques de la figure 3.25.c montrent deux lignes de "diffusion" verticales et horizontales se croisant au niveau du vecteur d'onde la pompe. Il s'agit d'un artefact numérique dû à la grille carrée prise pour simuler notre système. Au fur et à mesure qu'augmente l'intensité du contrôle, apparaît de plus en plus clairement l'anneau Rayleigh, indiquant un processus de diffusion élastique. Les images (**b**) et (**d**) correspondent respectivement aux images en espace réel 3.24.c et 3.24.d. L'anneau Rayleigh y apparaît clairement mettant en évidence la présence de diffusion élastique.

Pour aller plus loin, on peut chercher à déterminer la hauteur du défaut ainsi induit. Pour ce faire, on compare la visibilité des franges observées expérimentalement et numériquement, comme représenté sur la figure 3.26.a. Visibilité qui correspond au ratio entre un minimum d'intensité et un maximum consécutif proche du défaut. Grâce à quoi, on a une correspondance quantitative entre les deux types de résultats. Les simulations nous donnant directement accès à la densité excitonique $|\psi_{X\pm}|^2$, de laquelle on peut déduire la hauteur énergétique du défaut induit. Dans notre cas, on aura $h = \hbar g_{+-} |\psi_{X-}|^2$. La hauteur représentée sur la figure 3.26.b peut malgré la petitesse de l'interaction inter-spin atteindre le milli-électronvolt. Cela vient du fait qu'en focalisant le contrôle, on peut atteindre des densités excitoniques locales très importantes, de l'ordre de $10^2 \mu\text{m}^{-2}$.

Défaut induit linéique et polarisation linéaire

Afin de bien montrer l'intérêt ainsi que la contrôlabilité de ces défauts induits, une autre configuration a été étudiée. Il s'agit toujours d'avoir un faisceau contrôle qui créera le défaut et un faisceau signal qui nous permettra de l'observer, à la différence près que cette fois le premier sera polarisé verticalement et le second horizontalement. On peut réécrire le Hamiltonien linéaire $\mathbf{h}^1$ de l'équation (3.20) dans cette nouvelle base des polarisations linéaires. Bien évidemment une telle base de polarisation donnera lieu à des couplages importants entre les différentes polarisations linéaires. Mais si on s'attarde sur la matrice rendant compte des interactions entre excitons, elle peut se réécrire comme suit, dans la base des polarisations linéaires :

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} g_{++} (|\hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow}|^2 + 4|\hat{\Psi}_X^{\uparrow}|^2 - \hat{\Psi}_X^{\uparrow\dagger} \hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow}) + g_{+-} |\hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow}|^2 & g_{++} (2i|\hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow}|^2 + 2i|\hat{\Psi}_X^{\uparrow}|^2 - \hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow\dagger} \hat{\Psi}_X^{\uparrow}) + g_{+-} \hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow\dagger} \hat{\Psi}_X^{\uparrow} \\ g_{++} (2i|\hat{\Psi}_X^{\uparrow}|^2 + 2i|\hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow}|^2 - \hat{\Psi}_X^{\uparrow\dagger} \hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow}) + g_{+-} \hat{\Psi}_X^{\uparrow\dagger} \hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow} & g_{++} (|\hat{\Psi}_X^{\uparrow}|^2 + 4|\hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow}|^2 - \hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow\dagger} \hat{\Psi}_X^{\uparrow}) + g_{+-} |\hat{\Psi}_X^{\uparrow}|^2 \end{pmatrix}$$

avec $\hat{\Psi}_X^{\leftrightarrow}$ et $\hat{\Psi}_X^{\uparrow}$ les fonctions d'onde des excitons respectives dans des polarisations horizontales et verticales. Comme on peut le voir, cette nouvelle base complexifie beaucoup le problème. Les deux polarisations sont très dépendantes l'une de l'autre. Malgré cela, on peut remarquer que le terme faisant intervenir la densité dans la polarisation opposée est prédominant. Les interactions entre excitons de même polarisation sont caractérisées par une constante interaction de $g_{\uparrow\uparrow} = g_{\leftrightarrow\leftrightarrow} = g_{++} + g_{+-}$. Alors que les

effets produits par une population de polarisation linéaire donnée dans l'autre polarisation ont pour constante d'interaction $g_{\uparrow\leftrightarrow} = g_{\leftrightarrow\uparrow} = 4g_{++}$. Étant donné que $g_{++} \gg g_{+-}$, l'interaction entre polarisations linéaires croisées est l'interaction prédominante. La génération de défaut induit sera d'autant plus facile. Le décalage créé par le contrôle se comportera comme un défaut artificiel dans la polarisation du signal comme précédemment. Cela reste vrai dans notre configuration essentiellement parce qu'on a $\Psi_X^\uparrow$, le contrôle très localisé et très intense.

Le principe pour étudier ce défaut induit est le même que précédemment. Le contrôle est de polarisation verticale et fortement focalisé. Le signal de polarisation opposée, horizontale, excite une légère population de polaritons. Ce sont les variations de la distribution de ces polaritons qui nous indiquent la présence du dit défaut induit.

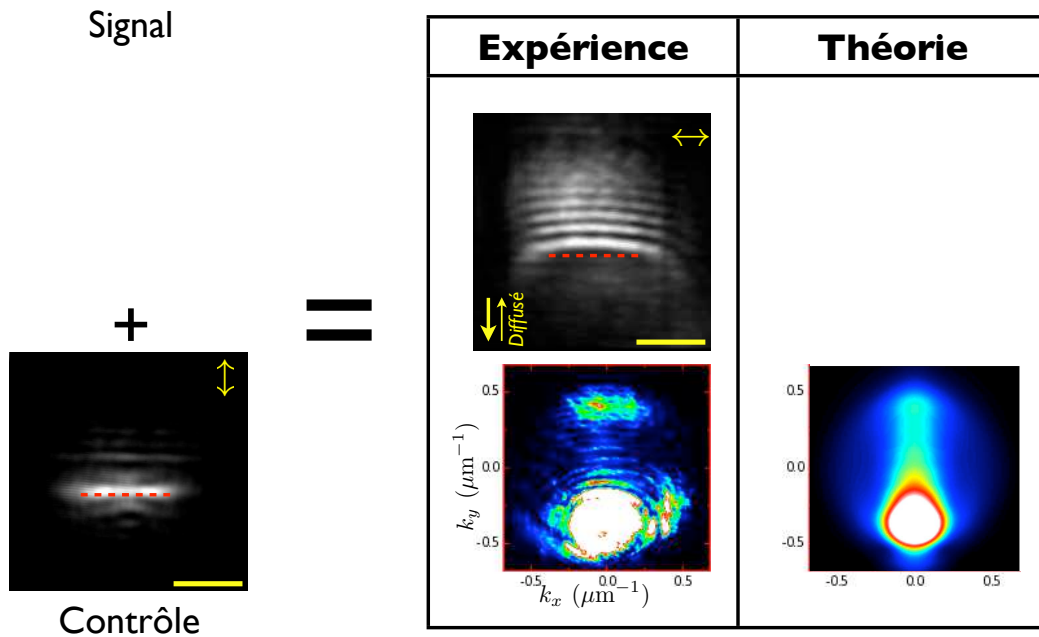


FIGURE 3.27 – Les images (a) et (b) représentent la densité photonique dans l'espace réel du signal seul pour (a) dans la polarisation qui est la sienne (horizontale) et pour (a) du contrôle seul dans sa polarisation (verticale). Dans le coin droit des images en espace réel, est indiquée la polarisation d'observation. Les images (c) et (d) montrent respectivement pour l'expérience et pour la théorie les résultats dans la polarisation du signal d'une excitation conjointe du contrôle et du signal. (c-I) et (d-I) pour l'espace réel et (c-II) et (d-II) pour l'espace réciproque. La ligne en pointillés rouges indique la position du contrôle et les flèches jaunes la direction de propagation ou de diffusion du fluide. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.24. Images extraites de la référence [75].

Deux types de défauts ont été étudiés. Le premier dont les résultats sont représentés sur la figure 3.27, correspond à un défaut linéique normal à la direction de propagation du fluide de polariton. Les paramètres sont les mêmes que précédemment. Les images (a) et (b) représentent la distribution dans l'espace réel des polaritons (densité photonique) pour respectivement le signal seul, dans la polarisation horizontale et le contrôle seul, dans la polarisation verticale. La direction de diffusion du fluide est indiquée sur

la figure (a) par une flèche jaune. À droite, sont représentés les résultats ((c) pour les expériences et (d) pour la théorie, lorsque que l'on a à la fois le signal et le contrôle agissant sur la cavité. En haut, les images (c-I) et (d-I) donnent à voir la distribution des polaritons dans l'espace réel. On voit très clairement l'apparition de franges générées par l'interférence entre le flot de polaritons incidents et celui rétro-diffusé. La ligne en pointillés rouges indique la position du contrôle. Dans l'espace réciproque visible sur les images (c-II) et (d-II), on voit clairement les effets du processus de diffusion produit par le défaut induit. Sur une ligne allant de k_p à $-k_p$, on observe la présence de la population diffusée avec une population légèrement plus importante autour de $-k_p$. Les différences entre les résultats expérimentaux et numériques tiennent principalement dans le profil du contrôle qui réfléchira d'autant mieux les polaritons que son profil sera abrupte.

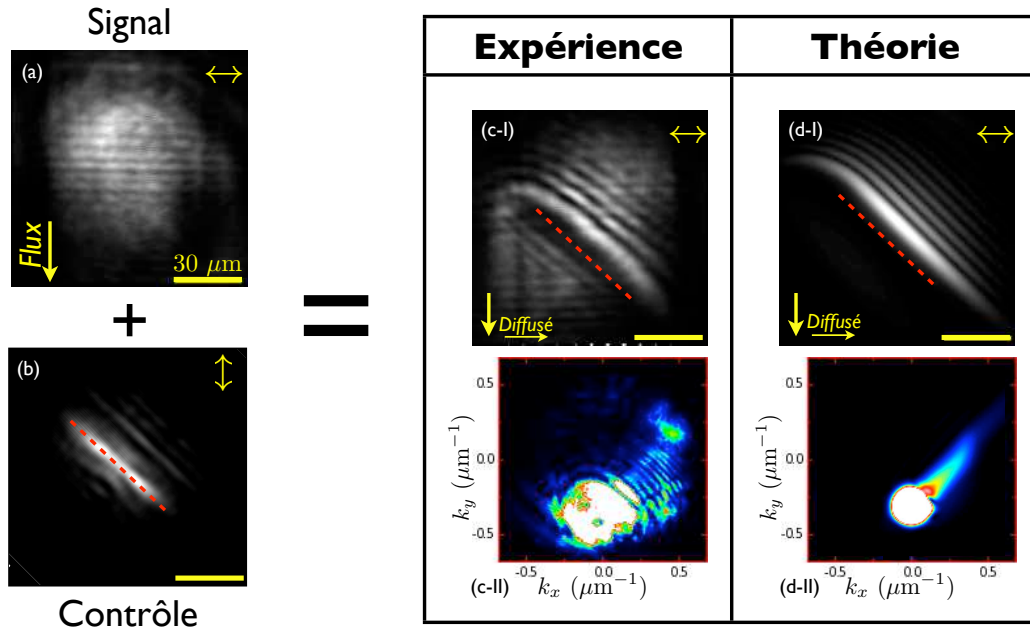


FIGURE 3.28 – Les images (a) et (b) représentent la densité photonique dans l'espace réel du signal seul pour (a) dans la polarisation qui est la sienne (horizontale) et pour (a) du contrôle seul dans sa polarisation (verticale). Les images (c) et (d) montrent respectivement pour l'expérience et pour la théorie les résultats dans la polarisation du signal d'une excitation conjointe du contrôle et du signal. (c-I) et (d-I) pour l'espace réel et (c-II) et (d-II) pour l'espace réciproque. La ligne en pointillés rouges indique la position du contrôle et les flèches jaunes la direction de propagation ou de diffusion du fluide. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.24. Images extraites de la référence [75].

La figure 3.28 correspond à la même expérience que précédemment mais cette fois avec un défaut non pas normal à la direction de propagation des polaritons mais incliné, approximativement à 45° . Les images (a) et (b) représentent ici aussi la distribution dans l'espace réel des polaritons respectivement pour le signal seul dans la polarisation horizontale et le contrôle seul dans la polarisation verticale. À droite, on a les résultats (c) pour les expériences et (d) pour la théorie, lorsque que l'on a à la fois le signal

et le contrôle. On remarque que cette fois les franges dans l'espace réel ne sont plus verticales mais obliques (images **(c-I)** et **(d-I)**). Dans l'espace réciproque visible sur les images **(c-II)** et **(d-II)**, on voit que le processus de diffusion se fait suivant une ligne à 45° . Ici aussi les franges correspondent à une interaction entre le champ polaritonique incident et celui réfléchi.

Comme on a pu le voir dans cette partie, les propriétés de polarisation peuvent permettre de contrôler le potentiel effectif vu par une population de polarisation donnée. Ainsi, la génération de défaut induit, de profil arbitraire, peut être parfaitement contrôlée. Cela ouvre la porte à bien des expériences, comme par exemple l'étude de localisation d'Anderson, à l'image de ce qui a été fait dans les atomes froids [76] ou encore l'étude de la transition isolant de Mott-Superfluide [77].

Conclusion et Perspectives

Au cours de ce troisième et dernier chapitre nous nous sommes intéressés aux polaritons excitoniques dans les microcavités planaires, en excitation résonnante à petit angle. La dynamique hors-équilibre d'un fluide de polaritons peut, comme nous avons vu dans la partie B, permettre d'atteindre un régime superfluide. Dans ce régime, le fluide s'écoule sans viscosité (critère de Landau). Cela a été mis en évidence pour une configuration d'un fluide s'écoulant à travers un défaut. Bien qu'étant un système hors-équilibre, ce superfluide présente bien des avantages. Via les paramètres d'excitation, il est possible de contrôler aisément la vitesse d'écoulement ainsi que la densité. Cela permet de passer d'un régime d'écoulement superfluide à un régime Čerenkov facilement. Ces superfluides de lumière pourraient donner naissance à de nouvelles lignes de transmission optique sans perte. L'étude des corrélations pourrait aussi permettre de mieux comprendre cet état quantique de la matière à l'état solide.

À partir de ce superfluide hors équilibre, nous avons cherché à mettre en évidence, comme ce qui a été fait pour les atomes, la présence de turbulences, elles aussi quantiques. En effet, lorsqu'un superfluide s'écoule à travers un défaut, bien que s'écoulant sans viscosité, via la pression quantique, la formation de vortex de moment quantifié est permise. Nous avons montré que, bien que la dynamique hors-équilibre semble inhiber leurs formations, grâce à une excitation de profil non-homogène, la formation de vortex peut être rendue possible. Grâce à cela, il nous a été possible d'étudier numériquement, pour des conditions réalistes, la transition du régime superfluide sans turbulences au régime Čerenkov en passant par un régime turbulent. Cela met en évidence l'existence d'une vitesse critique en deçà de laquelle le fluide coule sans former de turbulences. De plus, lorsque la vitesse du fluide tend vers celle du son on voit l'apparition de solitons noirs obliques. Cela permet de rendre possible une étude expérimentale approfondie des turbulences hydrodynamiques dans un superfluide, étude difficilement réalisable dans les superfluides d'atomes.

Plus que cela encore, nous avons mis en évidence la possibilité, à l'aide d'un profil d'excitation particulier, de fixer des paires de vortex et antivortex, ainsi que de former un réseau auto-organisé de ces turbulences. Utilisant les propriétés hors-équilibre du système, il est possible de contrôler aussi bien la distribution que la densité des turbu-

lences dans le piège. Ce contrôle des vortex permet d'entrevoir l'étude précise de ces turbulences et de leur stabilité ainsi que leurs interactions. Ces turbulences sont des phénomènes se retrouvant dans bien des domaines de la physique.

Et enfin dans une dernière partie D, nous avons montré comment, en utilisant les propriétés de polarisation et de spin des polaritons il été possible de contrôler le potentiel effectif subi par les polaritons. Permettant ainsi de générer des défauts artificiels comme nous l'avons montré. Il va de soi que ces défauts artificiels combinés aux propriétés superfluides des polaritons ainsi qu'aux turbulences dans ces superfluides ouvrent la voie à de très nombreuses expériences fondamentales quand à l'exploration de la physique quantique.

Bibliographie du Chapitre 3

- [1] ANDERSON, M. H., J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, & E. A. CORNELL (1995): Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, **269**:198.
- [2] PITAEVSKII, L. P. (1961): Vortex lines in an imperfect bose gas. *Soviet Physics JETP-USSR*, **13**(2):451–454.
- [3] GROSS, E. P. (1963): Hydrodynamics of a Superfluid Condensate. *Journal of Mathematical Physics*, **4**:195.
- [4] ALLEN, J. F. & A. D. MISENER (1938): Flow of Liquid Helium II. *Nature*, **141**:75.
- [5] KAPITZA, P. (1938): Viscosity of Liquid Helium below the λ -Point. *Nature*, **141**:74.
- [6] LONDON, F. (1938): The λ -Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy. *Nature*, **141**:643.
- [7] SOSNICK, T. R., W. M. SNOW, & P. E. SOKOL (1990): Deep-inelastic neutron scattering from liquid 4He. *Phys. Rev. B*, **41**:70021.
- [8] LANDAU, L. (1941): Theory of the Superfluidity of Helium II. *Phys. Rev.*, **60**:356.
- [9] TISZA, L. (1938): Transport Phenomena in Helium II. *Nature*, **141**:913.
- [10] BOGOLIUBOV, N. (1946): Problems of dynamic theory in statistical physics (Problemy Dinamicheskoi Teorii v Statisticheskoi Fiziki). *Gostekhizdat*.
- [11] FEYNMAN, R. P. & M. COHEN (1956): Energy Spectrum of the Excitations in Liquid Helium. *Phys. Rev.*, **102**:1189.
- [12] HESS, G. B. & W. M. FAIRBANK (1967): Measurements of Angular Momentum in Superfluid Helium. *Phys. Rev. Lett.*, **19**:216.
- [13] REPPY, J. D. & D. DEPATIE (1964): Persistent Currents in Superfluid Helium. *Phys. Rev. Lett.*, **12**:187.
- [14] GUPTA, S., K. W. MURCH, K. L. MOORE, T. P. PURDY, & D. M. STAMPER-KURN (2005): Bose-Einstein Condensation in a Circular Waveguide. *Phys. Rev. Lett.*, **95**:143201.
- [15] RYU, C., M. F. ANDERSEN, P. CLADÉ, V. NATARAJAN, K. HELMERSON, & W. D. PHILLIPS (2007): Observation of Persistent Flow of a Bose-Einstein Condensate in a Toroidal Trap. *Phys. Rev. Lett.*, **99**:260401.
- [16] LANE, C. T., H. A. FAIRBANK, & W. M. FAIRBANK (1947): Second Sound in Liquid Helium II. *Phys. Rev.*, **71**:600.
- [17] CATALIOTTI, F. S., S. BURGER, C. FORT, P. MADDALONI, F. MINARDI, A. TROMBETTONI, A. SMERZI, & M. INGUSCIO (2001): Josephson Junction Arrays with Bose-Einstein Condensates. *Science*, **293**:843.

- [18] RICHARDS, P. L. & P. W. ANDERSON (1965): Observation of the Analog of the ac Josephson Effect in Superfluid Helium. *Phys. Rev. Lett.*, **14**:540.
- [19] LEGGETT, A. J. (2006): *Quantum Liquids*. Oxford University Press.
- [20] CARUSOTTO, I., S. X. HU, L. A. COLLINS, & A. SMERZI (2006): Bogoliubov-Čerenkov Radiation in a Bose-Einstein Condensate Flowing against an Obstacle. *Phys. Rev. Lett.*, **97**:260403.
- [21] NIKUNI, T., M. OSHIKAWA, A. OOSAWA, & H. TANAKA (2000): Bose-Einstein Condensation of Dilute Magnons in TiCuCl_3 . *Phys. Rev. Lett.*, **84**:5868.
- [22] COMBESCOT, M., O. BETBEDER-MATIBET, & R. COMBESCOT (2007): Bose-Einstein Condensation in Semiconductors: The Key Role of Dark Excitons. *Phys. Rev. Lett.*, **99**:176403.
- [23] BUTOV, L. V., A. ZRENNER, G. ABSTREITER, G. BÖHM, & G. WEIMANN (1994): Condensation of indirect excitons in coupled AlAs/GaAs quantum wells. *Phys. Rev. Lett.*, **73**:304.
- [24] KASPRZAK, J. (2006): *Condensation of exciton polaritons*. Doctorat, Université Joseph-Fourier - Grenoble I.
- [25] KASPRZAK, J., M. RICHARD, S. KUNDERMANN, A. BAAS, P. JEAMBRUN, J. KEELING, F. M. MARCHETTI, M. H. SZYMANSKA, R. ANDRE, J. L. STAEHLI, V. SAVONA, P. B. LITTLEWOOD, B. DEVEAUD, & L. S. DANG (2006): Bose-Einstein condensation of exciton polaritons. *Nature*, **443**:409.
- [26] KAVOKIN, A., G. MALPUECH, & F. P. LAUSSY (2003): Polariton laser and polariton superfluidity in microcavities. *Phys. Lett. A*, **306**:187.
- [27] KAVOKIN, A. & G. MALPUECH (2003): *Cavity polaritons*. Academic Press.
- [28] CARUSOTTO, I. & C. CIUTI (2004): Probing Microcavity Polariton Superfluidity through Resonant Rayleigh Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, **93**:166401.
- [29] CIUTI, C. & I. CARUSOTTO (2005): Quantum fluid effects and parametric instabilities in microcavities. *Phys. Status Solidi B*, **242**:2224.
- [30] AMO, A., J. LEFRERE, S. PIGEON, C. ADRADOS, C. CIUTI, I. CARUSOTTO, R. HOU DRÉ, E. GIACOBINO, & A. BRAMATI (2009): Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities. *Nat. Phys.*, **5**:805.
- [31] AMO, A., D. SANVITTO, F. P. LAUSSY, D. BALLARINI, E. D. VALLE, M. D. MARTIN, A. LEMAÎTRE, J. BLOCH, D. N. KRIZHANOVSKII, M. S. SKOLNICK, C. TEJEDOR, & L. VIÑA (2009): Collective fluid dynamics of a polariton condensate in a semiconductor microcavity. *Nature*, **457**:291.
- [32] MINGUZZI, A. & M. P. TOSI (1999): Visco-elastic spectra of a dilute Bose fluid. *Physica B*, **262**:361.
- [33] ONSAGER, L. (1949): Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento*, **6**:279.

- [34] FEYNMAN, R. P. & M. COHEN (1955): The Character of the Roton State in Liquid Helium. *Progress of Theoretical Physics*, **14**:261.
- [35] DALFOVO, F., S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII, & S. STRINGARI (1999): Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, **71**:463.
- [36] BUTTS, D. A. & D. S. ROKHSAR (1999): Predicted signatures of rotating Bose-Einstein condensates. *Nature*, **397**:327.
- [37] YARMCHUK, E. J., M. J. V. GORDON, & R. E. PACKARD (1979): Observation of Stationary Vortex Arrays in Rotating Superfluid Helium. *Phys. Rev. Lett.*, **43**:214.
- [38] MADISON, K. W., F. CHEVY, W. WOHLLEBEN, & J. DALIBARD (2000): Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **84**:806.
- [39] ENGELS, P., I. CODDINGTON, P. C. HALJAN, V. SCHWEIKHARD, & E. A. CORNELL (2003): Observation of Long-Lived Vortex Aggregates in Rapidly Rotating Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **90**:170405.
- [40] DOBREK, Ł., M. GAJDA, M. LEWENSTEIN, K. SENGSTOCK, G. BIRKL, & W. ERTMER (1999): Optical generation of vortices in trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, **60**:3381.
- [41] FRISCH, T., Y. POMEAU, & S. RICA (1992): Transition to dissipation in a model of superflow. *Phys. Rev. Lett.*, **69**:1644.
- [42] JACKSON, B., J. F. MCCANN, & C. S. ADAMS (1998): Vortex Formation in Dilute Inhomogeneous Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **80**:3903.
- [43] JOSSERAND, C., Y. POMEAU, & S. RICA (1999): Vortex shedding in a model of superflow. *Physica D*, **134**:111.
- [44] JACKSON, B., J. F. MCCANN, & C. S. ADAMS (2000): Dissipation and vortex creation in Bose-Einstein condensed gases. *Phys. Rev. A*, **61**:51603.
- [45] BERLOFF, N. G. & P. H. ROBERTS (2000): Motions in a Bose condensate: VII. Boundary-layer separation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**:4025.
- [46] WINIECKI, T., B. JACKSON, J. F. MCCANN, & C. S. ADAMS (2000): Vortex shedding and drag in dilute Bose-Einstein condensates. *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **33**:4069.
- [47] GIORGETTI, L., I. CARUSOTTO, & Y. CASTIN (2007): Semiclassical field method for the equilibrium Bose gas and application to thermal vortices in two dimensions. *Phys. Rev. A*, **76**:13613.
- [48] SASAKI, K., N. SUZUKI, & H. SAITO (2010): Bénard-von Kármán Vortex Street in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **104**:150404.
- [49] FEYNMAN, R. P. (1955): Application of quantum mechanics to liquid helium. *Progress in low temperature physics*.
- [50] HAKIM, V. (1997): Nonlinear Schrödinger flow past an obstacle in one dimension. *Phys. Rev. E*, **55**:2835.

- [51] PAVLOFF, N. (2002): Breakdown of superfluidity of an atom laser past an obstacle. *Phys. Rev. A*, **66**:13610.
- [52] BURGER, S., K. BONGS, S. DETTMER, W. ERTMER, K. SENGSTOCK, A. SANPERA, G. V. SHLYAPNIKOV, & M. LEWENSTEIN (1999): Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **83**:5198.
- [53] DENSCHLAG, J., J. E. SIMSARIAN, D. L. FEDER, C. W. CLARK, L. A. COLLINS, J. CUBIZOLLES, L. DENG, E. W. HAGLEY, K. HELMERSON, W. P. REINHARDT, S. L. ROLSTON, B. I. SCHNEIDER, & W. D. PHILLIPS (2000): Generating Solitons by Phase Engineering of a Bose-Einstein Condensate. *Science*, **287**:97.
- [54] EL, G. A., A. GAMMAL, & A. M. KAMCHATNOV (2006): Oblique Dark Solitons in Supersonic Flow of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, **97**:180405.
- [55] KAMCHATNOV, A. M. & L. P. PITAEVSKII (2008): Stabilization of Solitons Generated by a Supersonic Flow of Bose-Einstein Condensate Past an Obstacle. *Phys. Rev. Lett.*, **100**:160402.
- [56] BRAMBILLA, M., F. BATTIPEDE, L. A. LUGIATO, V. PENNA, F. PRATI, C. TAMM, & C. O. WEISS (1991): Transverse laser patterns. I. Phase singularity crystals. *Phys. Rev. A*, **43**:5090.
- [57] COULLET, P., L. GIL, & F. ROCCA (1989): Optical vortices. *Optics Communications*, **73**(5):403–408.
- [58] SWARTZLANDER, G. A. & C. T. LAW (1992): Optical vortex solitons observed in Kerr nonlinear media. *Phys. Rev. Lett.*, **69**:2503.
- [59] WOUTERS, M. & V. SAVONA (2009): Creation and detection of vortices in polariton condensates. *arXiv*:0904.2966.
- [60] LIEW, T. C. H., Y. G. RUBO, & A. V. KAVOKIN (2008): Generation and Dynamics of Vortex Lattices in Coherent Exciton-Polariton Fields. *Phys. Rev. Lett.*, **101**:187401.
- [61] LAGOUDAKIS, K. G., T. OSTATNICKÝ, A. V. KAVOKIN, Y. G. RUBO, R. ANDRÉ, & B. DEVEAUD-PLÉDRAN (2009): Observation of Half-Quantum Vortices in an Exciton-Polariton Condensate. *Science*, **326**:974. (c) 2009: Science.
- [62] BOLDA, E. L., R. Y. CHIAO, & W. H. ZUREK (2001): Dissipative Optical Flow in a Nonlinear Fabry-Pérot Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, **86**:416.
- [63] PIGEON, S., I. CARUSOTTO, & C. CIUTI (2010): Hydrodynamic nucleation of vortices and solitons in a resonantly excited polariton superfluid. *arXiv*:1006.4755.
- [64] CIUTI, C., V. SAVONA, C. PIERMAROCCHI, A. QUATTROPANI, & P. SCHWENDIMANN (1998): Role of the exchange of carriers in elastic exciton-exciton scattering in quantum wells. *Phys. Rev. B*, **58**:7926.
- [65] PANZARINI, G., L. C. ANDREANI, A. ARMITAGE, D. BAXTER, M. S. SKOLNICK, V. N. ASTRATOV, J. S. ROBERTS, A. V. KAVOKIN, M. R. VLADIMIROVA, & M. A. KALITEEVSKI (1999): Exciton-light coupling in single and coupled semiconductor microcavities: Polariton dispersion and polarization splitting. *Phys. Rev. B*, **59**:5082.

- [66] SHELYKH, I. A., G. MALPUECH, A. V. KAVOKIN, & P. BIGENWALD (2004): Spin dynamics of interacting exciton polaritons in microcavities. *Phys. Rev. B*, **70**:115301.
- [67] KAVOKIN, A. V., G. MALPUECH, & M. GLAZOV (2005): Optical Spin Hall Effect. *Phys. Rev. Lett.*, **95**:136601.
- [68] SHELYKH, I. A., Y. G. RUBO, G. MALPUECH, D. D. SOLNYSHKOV, & A. V. KAVOKIN (2006): Polarization and Propagation of Polariton Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, **97**:66402.
- [69] LEYDER, C., M. ROMANELLI, J. P. KARR, E. GIACOBINO, T. C. H. LIEW, M. GLAZOV, A. V. KAVOKIN, G. MALPUECH, & A. BRAMATI (2007): Observation of the optical spin Hall effect. *Nat. Phys.*, **3**:628.
- [70] MAIALLE, M. Z., E. A. DE ANDRADA E SILVA, & L. J. SHAM (1993): Exciton spin dynamics in quantum wells. *Phys. Rev. B*, **47**:87926.
- [71] WOUTERS, M. (2007): Resonant polariton-polariton scattering in semiconductor microcavities. *Phys. Rev. B*, **76**:45319.
- [72] VINATTIERI, A., J. SHAH, T. C. DAMEN, D. S. KIM, L. N. PFEIFFER, M. Z. MAIALLE, & L. J. SHAM (1994): Exciton dynamics in GaAs quantum wells under resonant excitation. *Phys. Rev. B*, **50**:67688.
- [73] VLADIMIROVA, M., S. CRONENBERGER, D. SCALBERT, K. KAVOKIN, A. MIARD, A. LE-MAÎTRE, J. BLOCH, D. SOLNYSHKOV, G. MALPUECH, & A. KAVOKIN (2010): Polariton-polariton interaction constants in microcavities. *Phys. Rev. B*, **82**(7):075301.
- [74] FLAYAC, H., I. A. SHELYKH, D. D. SOLNYSHKOV, & G. MALPUECH (2010): Topological stability of the half-vortices in spinor exciton-polariton condensates. *Phys. Rev. B*, **81**:45318.
- [75] AMO, A., S. PIGEON, C. ADRADOS, R. HOUDRÉ, E. GIACOBINO, C. CIUTI, & A. BRAMATI (2010): Light engineering of the polariton landscape in semiconductor microcavities. *Phys. Rev. B*, **82**:81301.
- [76] BILLY, J., V. JOSSE, Z. ZUO, A. BERNARD, B. HAMBRECHT, P. LUGAN, D. CLEMENT, L. SANCHEZ-PALENCIA, P. BOUYER, & A. ASPECT (2008): Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*, **453**(7197):891–894.
- [77] GREINER, M., O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH, & I. BLOCH (2002): Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, **415**:39.

Conclusion générale

Les polaritons excitoniques naissant de l'interaction forte entre un champ électromagnétique confiné de cavité et la transition excitonique de puits quantiques, permettent, comme nous avons pu le voir tout au long de cette thèse, de manipuler et générer indistinctement des états quantiques de la matière et de la lumière. Étant des bosons en interaction, mi-lumière mi-matière, les polaritons sont de très bons candidats pour la réalisation d'oscillateurs paramétriques optiques ainsi que pour la génération d'états non classiques de la lumière.

Après un premier chapitre d'introduction à la physique des polaritons excitoniques, nous nous sommes focalisés, dans un second chapitre, sur cet aspect. L'oscillation paramétrique optique qui nous a intéressée prend place, ici, dans des géométries 0D : micropilier. Dans une cavité 0D, les modes du champ de la cavité sont discrétisés dans les directions du plan. De cette discrétisation, naît en régime de couplage fort, des niveaux polaritoniques discrets. Nous avons montré analytiquement, numériquement ainsi que expérimentalement, la possibilité d'un processus d'oscillation paramétrique optique entre différents modes polaritoniques dans un tel système¹. La comparaison entre les méthodes d'analyse et les résultats expérimentaux ont montré un remarquable accord allant même jusqu'à permettre la reconstruction de la distribution des modes oscillants. En plus d'illustrer à quel point les modèles analytiques et numériques permettent de reproduire et de prédire le comportement des systèmes polaritoniques, cette mise en évidence ouvre la voie à la réalisation de dispositifs intégrés micrométriques pour l'optique non-linéaire. De plus, via l'étude des corrélations entre les faisceaux signal et complémentaire générés, nous avons pu mettre en évidence le caractère multimode de ce processus d'oscillation. Ainsi, bien que discretisés, les différents modes propres du pilier ont une influence directe sur le processus d'oscillation paramétrique. Ces effets indésirables pourraient être dépassés en diminuant les dimensions des piliers. En effet, l'espacement des modes du champ devenant plus important, l'influence qu'ils auront les uns sur les autres sera moins importante². De telles conditions permettront, très certainement, la génération de faisceaux corrélés quantiquement bien définis, permettant ainsi, la fabrication de OPO micrométriques. Les applications d'un tel dispositif pourraient aller de la cryptographie quantique, à la téléportation en passant bien

1. FERRIER, L., S. PIGEON, E. WERTZ, M. BAMBA, P. SENELLART, I. SAGNES, A. LEMAITRE, C. CIUTI, & J. BLOCH (2010) : Polariton parametric oscillation in a single micropillar cavity. *Appl. Phys. Lett.*, **97** :1105.

2. BAMBA, M., S. PIGEON, & C. CIUTI (2010) : Quantum squeezing generation versus photon localization in a disordered planar microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, **104** :213604.

entendu, par l'ordinateur quantique. Mais, au delà d'un simple pilier, des dispositifs plus complexes basés sur cette géométrie peuvent aussi donner des effets plus riches en non-linéarité permettant, demain, la réalisation de sources micrométriques de photons uniques ou de paires de photons.

L'autre aspect des polaritons traité dans ce manuscrit, correspondant au chapitre 3, consiste à utiliser leurs propriétés pour observer des états quantiques macroscopiques. Les polaritons de par leur mixité, permettent de sonder des phases telles que la superfluidité. Suivant les critères donnés par L. Landau³, on peut définir cet état comme un fluide s'écoulant sans viscosité. Les polaritons excités à résonance, étant des bosons en interaction, peuvent atteindre ce régime si particulier⁴. L'étude de la superfluidité des polaritons excitoniques permet la caractérisation d'aspects de la superfluidité jusqu'aujourd'hui difficilement observables. En raison du temps de vie fini des polaritons ce superfluide est un régime éminemment hors-équilibre, ce qui lui confère d'importantes spécificités. À l'heure de s'intéresser aux turbulences ces spécificités imposent que les excitations topologiques (vortex ou solitons) ne peuvent apparaître que dans une zone non excitée. À l'aide d'un profil d'excitation adapté, nous avons montré qu'il était possible de s'accommoder de cette particularité et de générer des turbulences. Au-delà de s'en accommoder il est possible d'utiliser les propriétés de fluide hors-équilibre pour piéger des vortex, permettant ainsi de les contrôler⁵. Ce contrôle permettra très certainement de mieux comprendre ces phénomènes turbulents si complexes que sont les vortex. De plus, utilisant les propriétés de polarisations de spin des polaritons, il a été montré comment il était possible de générer des défauts locaux artificiels. Un tel contrôle ouvre la voie à toute une série d'expériences fondamentales s'intéressant au rôle de la dimensionnalité ou encore à celui du désordre dans la superfluidité. Ces défauts induits donnent les moyens nécessaires à la mise en évidence de la transition de Mott ou même BKT (Berezinsky-Kosterlitz-Thouless) dans les polaritons excitoniques.

Dans ce travail de doctorat, deux aspects fondamentaux des polaritons ont été traités, tous deux très porteurs. L'un, axé sur les dispositifs d'optique quantique et l'autre sur les fluides quantiques. Bien que ces deux aspects semblent fondamentalement distincts, ils sont en réalité très liés. Lorsque l'on s'intéresse aux polaritons, comme nous l'avons dit, la distinction lumière-matière devient obsolète. Les phénomènes d'optique non-linéaire sont directement reliés aux propriétés des excitons de puits quantiques, particules propres à la matière. Et quant à la superfluidité, elle est liée autant aux excitons qu'aux photons, permettant ainsi la superfluidité de la lumière. Reste à première vue une différence fondamentale entre les deux chapitres de résultats de ce manuscrit : la dimensionnalité. C'est ici, pour moi un des points les plus porteurs de la physique des polaritons. Créer des passerelles entre les effets liés aux basses dimensionnalités et ceux liés aux états quantiques macroscopiques permettra de mieux comprendre le fonctionnement intime de la matière. Le champ des possibles ouvert par cet état, dans lequel la lumière émise est confondue avec son émetteur, se révélera sans doute l'un des do-

3. LANDAU, L. (1941) : Theory of the Superfluidity of Helium II. *Phys. Rev.*, **60** :356.

4. AMO, A., J. LEFRERE, S. PIGEON, C. ADRADOS, C. CIUTI, I. CARUSOTTO, R. HOUDRÉ, E. GIACOBINO, & A. BRAMATI (2009) : Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities. *Nat. Phys.*, **5** :805.

5. PIGEON, S., I. CARUSOTTO, & C. CIUTI (2010) : Hydrodynamic nucleation of vortices and solitons in a resonantly excited polariton superfluid. *arXiv* :1006.4755v1.

maines les plus féconds de la physique des semiconducteurs de ce début de XXI^e siècle, comme l'ont récemment démontré l'importante place faite aux polaritons lors de la conférence ICPS (2010) et le nombre croissant de publications sur ce sujet.

Annexes

Liste des Annexes

A	Monte Carlo quantique	124
A.1	Définition	124
A.2	Monte Carlo quantique pour les polaritons	124
A.3	Définition d'opérateurs dans le cadre du chapitre 2	125
B	Vidéos sur les superfluidités et fluides de polaritons	128
B.1	Vidéos sur la mise en évidence de la superfluidité	128
B.2	Vidéos sur la mise en évidence de l'effet Čerenkov	131
B.3	Vidéo sur les turbulences dans les superfluides de polariton . .	134
B.4	Vidéos sur la génération de défaut via les interactions de spin	134
C	Publications et actes de conférences	137

A Monte Carlo quantique

Cette annexe va dans un premier temps nous permettre d'exposer le fonctionnement d'un algorithme Monte Carlo et plus particulièrement du Monte Carlo quantique utilisé au cours de cette thèse. Cela nous permettra aussi d'explicitier plus en détail la relation entre les simulations Monte Carlo et les simulations Gross-Pitaevskii. Enfin, nous verrons comment on peut traduire différents opérateurs dans les simulations Monte Carlos.

A.1 Définition

Les techniques de calcul numérique Monte Carlo visent à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires (techniques probabilistes). Son nom vient de l'importante présence de casino à Monte Carlo et du fait que les jeux pratiqués dans ces établissements sont basés, eux aussi, sur des processus aléatoires. Historiquement développé par N. Metropolis et S. Ulam [1] en 1947, il sera plus amplement étudié dans le cadre de la fabrication de la bombe atomique aux Etats Unis en 1949 par J. Neumann et S. Ulam. Aujourd'hui, ces applications vont de la finance aux jeux vidéos en passant bien sûr par la physique. Une grande quantité de sous-algorithmes se sont développés. En ce qui nous concerne, c'est les techniques Monte Carlo dites quantiques qui vont nous intéresser.

Avant d'en parler en détail revenons brièvement sur le principe de fonctionnement général du Monte Carlo. Un exemple simple permet de bien comprendre : on veut mesurer la surface d'un lac dans un pré, mais sans y avoir accès directement. La seule information que l'on ait, est le son qu'une pierre lancée dans le pré produit. Ce son nous permet de savoir si elle a atteint le lac ou non. Sachant cela et la taille du pré il nous suffira de lancer N pierres aléatoirement dans le près. Alors le rapport entre le nombre de pierres qui ont atteint le lac et le nombre de pierres total est égal au rapport entre la surface du lac et celle du pré.

Dans le cas d'un algorithme Monte Carlo quantique, il n'est pas question de mesurer des surfaces mais des représentations de champ en prenant en compte le bruit quantique. Il sert à simuler des systèmes quantiques, généralement avec pour objectif de résoudre des problèmes à plusieurs corps. Dans notre cas, il nous servira à calculer les représentations du champ des photons et des excitons qui fondent les polaritons.

A.2 Monte Carlo quantique pour les polaritons

Il consiste à appliquer le formalisme de la représentation de Wigner aux champs photoniques et excitoniques. La représentation de Wigner, des champs $\hat{\Psi}_{C/X}(\mathbf{x})$, est définie par une fonction de distribution de quasiprobabilité $W[\psi_{C/X}]$ dans l'espace fonctionnel des champs à valeurs complexes $\psi_{C/X}$ [2]. Afin d'implémenter cette distribution dans un modèle numérique, nous travaillons avec une grille discrète finie, de $n_x \times n_y$ points séparés de façon régulière, dans une boîte de dimensions $L_x \times L_y$.

Dans le cas d'un système dilué ($\gamma_{C/X} \gg g/(l_x l_y)$), l'évolution de la distribution W peut être approchée, en utilisant l'approximation de Wigner tronquée [3], par une équation de Fock-Planck. La matrice de diffusion de cette équation est alors définie

positive, sans les termes d'ordre supérieur, garantissant que W reste toujours positive. Nous pouvons donc représenter le problème par l'intermédiaire de l'équation différentielle stochastique des champs $\psi_{C/X}$:

$$d \begin{pmatrix} \psi_C(\mathbf{x}) \\ \psi_X(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = -idt \begin{pmatrix} F_p(\mathbf{x}, t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{4dV}} \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_C} dW_C(\mathbf{x}) \\ \sqrt{\gamma_X} dW_X(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$-idt \left[\mathbf{h}^0 + \begin{pmatrix} V_C(\mathbf{x}) - i\frac{\gamma_C}{2} & 0 \\ 0 & V_X(\mathbf{x}) - i\frac{\gamma_X}{2} + g(|\psi_X(\mathbf{x})|^2 - \frac{1}{dV}) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_C(\mathbf{x}) \\ \psi_X(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

où dV est le volume d'une maille élémentaire de la grille et $dW_{C/X}(\mathbf{x})$ sont les termes de bruit blanc. Ils sont donc de moyenne nulle et non-corrélés, soit :

$$\overline{dW_i(\mathbf{x})dW_i(\mathbf{x}')}=0 \quad \text{et} \quad \overline{dW_i(\mathbf{x})dW_j^*(\mathbf{x}')}=2dt\delta_{\mathbf{x},\mathbf{x}'}\delta_{i,j}$$

La condition initiale est une cavité vide, les champs sont donc tous décrits par des variables aléatoires gaussiennes non corrélées, par conséquent à $t = 0$, on a :

$$\overline{\psi_i(\mathbf{x})\psi_i(\mathbf{x}')}=0 \quad \text{et} \quad \overline{\psi_i(\mathbf{x})\psi_j^*(\mathbf{x}')}=\frac{1}{2dV}\delta_{i,j}$$

L'algorithme décrit ici, est dû à I. Carusotto et C. Ciuti. On pourra retrouver tous les détails dans la référence [4]. Il s'agit de moyenner un grand nombre de configuration. Chaque configuration évolue en obéissant à l'équation numérique (22). Partant d'une solution connue, le vide dans la cavité, on fait évoluer adiabatiquement l'excitation jusqu'aux conditions souhaitées. À chaque pas temporel, est ajouté le terme de bruit blanc correspondant au bruit quantique présent dans le système. Notons que ce bruit joue un rôle prépondérant en cas de phénomènes de basse intensité. À haute intensité, la dynamique est dominée par les effets classiques. Cependant, notre équation permet d'évaluer la statistique des champs dans chacun de ces régimes.

Champ moyen et équation de Gross-Pitaevskii

Lorsque que les bruits blancs dW_i sont mis à zéro, on obtient les équations de Gross-Pitaevskii hors équilibre utilisées dans le chapitre 3 de ce manuscrit. Étant des équations de champ moyen, elles ne prennent pas en compte de processus stochastique. Il n'est donc pas nécessaire de moyenner sur un grand nombre de configuration pour obtenir des résultats convergents.

A.3 Définition d'opérateurs dans le cadre du chapitre 2

Pour déterminer les valeurs prises par les observables, nous devons calculer leurs valeurs moyennes à partir des champs stochastiques donnés par les simulations. Pour cela, on doit faire la moyenne des résultats de l'équivalent classique de l'observable sur toutes les configurations. Les moments de la fonction de Wigner donnent la valeur moyenne des opérateurs totalement symétrisés, soit :

$$\langle O_1 \dots O_N \rangle_W = \frac{1}{N!} \sum_P \langle \hat{O}_{P(1)} \dots \hat{O}_{P(N)} \rangle$$

où la somme est faite sur toutes les permutations de l'ensemble $\{1...N\}$. Chaque opérateur $\hat{O}_i$ désigne ici la composante d'un champ quantique, tandis que O_i est le champ stochastique correspondant.

Opérateurs du première ordre

Si on s'intéresse aux opérateurs champs photoniques $\hat{\Psi}_C(\mathbf{x})$ ou excitoniques $\hat{\Psi}_X(\mathbf{x})$, on peut rappeler la relation entre ces opérateurs champs de l'espace réel et correspondant de l'espace réciproque :

$$\hat{\Psi}_C(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{L_x L_y}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{L_x L_y}} \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

Dans les simulations on a une grille de taille $L_x \times L_y$ découpée en $n_x \times n_y$ points. Donc on aura la relation suivante :

$$\Psi_C(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}} \quad \text{et} \quad \Psi_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} b_{\mathbf{k}}$$

Où l'on a $\psi_{X,C}$ qui correspond à la représentation de Wigner des champ $\hat{\Psi}_{X,C}$. On appellera par la suite $\hat{a}$ et $\hat{b}$ les opérateurs liés aux photons et aux excitons et α et β les valeurs stochastiques correspondantes dans les simulations Monte Carlo. Par définition, la valeur moyenne des opérateurs correspond à la valeur moyenne sur les configurations des représentations de Wigner. On a $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \rangle = \langle \Psi(\mathbf{x}) \rangle_W$, $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle = \langle a_{\mathbf{k}} \rangle_W$ et $\langle \hat{b}_{\mathbf{k}} \rangle = \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_W$.

Intéressons-nous plus particulièrement au cas du micropilier exposé dans le chapitre 2. Dans un tel cas, le champ de cavité ainsi que celui d'exciton peuvent être décomposés sur la base des états propres du micropilier. Pour $\hat{a}_j$ et $\hat{b}_j$, les opérateurs liés aux photons et aux excitons dans le mode propre du plot j , on a donc :

$$\hat{\Psi}_C(\mathbf{x}) = \sum_j \phi_j(\mathbf{x}) \hat{a}_j \quad \text{et} \quad \hat{\Psi}_X(\mathbf{x}) = \sum_j \phi_j(\mathbf{x}) \hat{b}_j$$

Avec $\phi_j(\mathbf{x})$ la distribution spatial du mode j . Donc, on en déduit :

$$\hat{a}_j = \int d\mathbf{x} \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_C(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \hat{b}_j = \int d\mathbf{x} \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_X(\mathbf{x})$$

Dans les simulations, on aura :

$$a_j = \sum_{\mathbf{x}} \delta\mathbf{x} \phi_j(\mathbf{x}) \Psi_C(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad b_j = \sum_{\mathbf{x}} \delta\mathbf{x} \phi_j(\mathbf{x}) \psi_X(\mathbf{x})$$

avec $\delta\mathbf{x} = L_x L_y / n_x n_y$.

À l'aide de ces égalités, on peut établir la relation qui relie les moments des champs stochastiques aux différentes observables du champ, comme par exemple la population de photons au sein de la cavité, définie telle que $\hat{N}_C(\mathbf{x}) = \hat{\Psi}_C^\dagger \hat{\Psi}_C$. Par définition on aura $\langle N_C(\mathbf{x}) \rangle_W = \langle \Psi_C^\dagger \Psi_C \rangle_W = \langle \hat{\Psi}_C^\dagger \hat{\Psi}_C + \hat{\Psi}_C \hat{\Psi}_C^\dagger \rangle / 2$. Soit $\langle \hat{N}_C(\mathbf{x}) \rangle = \langle \hat{\Psi}_C^\dagger \hat{\Psi}_C \rangle = \langle \Psi_C^\dagger \Psi_C \rangle_W - 1/2$.

On s'intéresse maintenant, aux opérateurs de populations de photons dans les modes j : $\hat{N}_{C,j} = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$. On peut définir ces opérateurs à partir des opérateurs de champ introduits précédemment :

$$\hat{N}_{C,j} = \left| \int d^2\mathbf{x} \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_C(\mathbf{x}) \right|^2$$

Dans les simulations, on trouvera :

$$\langle \hat{N}_{C,j} \rangle = \langle a_j^\dagger a_j \rangle_W - \frac{1}{2} = \left\langle \left| \sum_{\mathbf{x}} \phi_j(\mathbf{x}) \psi_C(\mathbf{x}) \delta\mathbf{x} \right|^2 \right\rangle_W - \frac{1}{2}$$

Des observables d'ordre plus élevé, ainsi que leurs moments stochastiques associés, peuvent être déterminés de façon similaire.

Bibliographie de l'annexe A

- [1] METROPOLIS, N. & S. ULAM (1949): The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, **44**(247):335–341.
- [2] WALLS, D. F. & J. D. HARVEY (1994): *Quantum optics VI: proceedings of the Sixth International Symposium on Quantum Optics, Rotorua, New Zealand, January 24-28, 1994* - Page 211. Springer-Verlag.
- [3] STEEL, M. J., M. K. OLSEN, L. I. PLIMAK, P. D. DRUMMOND, S. M. TAN, M. J. COLLETT, D. F. WALLS, & R. GRAHAM (1998): Dynamical quantum noise in trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, **58**:4824.
- [4] CARUSOTTO, I. & C. CIUTI (2005): Spontaneous microcavity-polariton coherence across the parametric threshold: Quantum Monte Carlo studies. *Phys. Rev. B*, **72**:125335.