



**HAL**  
open science

# Une contribution à la théorie de Hodge p-adique entière et de torsion

Xavier Caruso

► **To cite this version:**

Xavier Caruso. Une contribution à la théorie de Hodge p-adique entière et de torsion. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2010. tel-00598126

**HAL Id: tel-00598126**

**<https://theses.hal.science/tel-00598126v1>**

Submitted on 4 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES  
UNIVERSITÉ DE RENNES 1

*Mention : Mathématiques*  
Ecole doctorale Matisse

présentée par

**Xavier Caruso**

soutenue le 3 juin 2011

---

**Une contribution à la théorie de  
Hodge  $p$ -adique entière et de torsion**

---

*Composition du jury :*

Laurent Berger	École Normale Supérieure de Lyon
Christophe Breuil	Université Paris Sud
Antoine Chambert-Loir	Université Rennes 1
Pierre Colmez	Université Paris 6
Jean-Marc Fontaine	Université Paris Sud
Michael Rapoport	Universität Bonn

*Rapporteurs :*

Jean-Marc Fontaine	Université Paris Sud
Mark Kisin	Harvard University
Michael Rapoport	Universität Bonn



# Remerciements

Un grand nombre de personnes ont contribué, et contribuent encore, à forger le mathématicien que je suis devenu, prêt aujourd'hui à soutenir une habilitation à diriger les recherches. Ces quelques lignes en introduction de ce mémoire leur sont traditionnellement dédiées.

Bien entendu, je pense, en premier lieu, à mes rapporteurs Jean-Marc Fontaine, Mark Kisin et Michael Rapoport. En plus d'avoir accepté de lire et d'évaluer mon travail, tous les trois ont fondé des théories magnifiques dans lesquelles je continue inlassablement à puiser mon inspiration et ont, de fait, exercé sur ma recherche une influence considérable. Qu'ils soient ici remerciés pour tout ce qu'ils m'ont apporté.

Beaucoup d'autres mathématiciens méritent exactement de la même façon ma reconnaissance. Me viennent à l'esprit, tout d'abord, Laurent Berger, Christophe Breuil et Pierre Colmez, qui ont en outre accepté de faire partie de mon jury. Parmi eux, le rôle qu'a joué Christophe Breuil, en dirigeant ma thèse et donc mes premiers pas en recherche, a été décisif, et je lui suis extrêmement reconnaissant de m'avoir initié aux beautés (parfois cachées) de la théorie de Hodge  $p$ -adique. Mon principal coauteur, Tong Liu, avec qui j'ai entretenu une correspondance fournie, a toujours su me poser des questions motivantes et m'expliquer avec clarté ses idées et ses objectifs. J'ai beaucoup appris à ses côtés, et ce fut toujours, pour moi, un plaisir de travailler avec lui.

Depuis 2006, je travaille à l'Université de Rennes dans un laboratoire et une équipe dynamiques et sympathiques. L'ambiance au quotidien est des plus agréables, et je tiens à remercier tous mes collègues — et également tout le personnel administratif — qui contribuent chaque jour à créer dans les bureaux et les couloirs cette atmosphère à la fois sérieuse et décontractée, si favorable à l'épanouissement. Je tiens à écrire un mot particulier pour Antoine Chambert-Loir dont les connaissances et les intérêts mathématiques m'impressionnent continuellement et qui a également accepté de faire partie de mon jury. À Rennes, j'ai eu la chance de rencontrer David Lubicz avec qui nous avons entamé une collaboration sur l'étude des aspects algorithmiques de la théorie de Hodge  $p$ -adique. Je lui suis très reconnaissant de s'être engagé sans retenue dans ce domaine des mathématiques, qui pouvait *a priori* lui paraître hostile, étant cryptographe de formation. Avec David Lubicz, nous encadrons la thèse de Jérémy Le Borgne, à qui j'aimerais aussi adresser mes remerciements. Remerciements pour son travail, sa bonne humeur, et surtout pour s'intéresser avec autant de passion au sujet que nous lui avons proposé.

D'octobre 2009 à septembre 2010, j'ai passé une année merveilleuse à Moscou. Je remercie toutes les personnes qui m'ont accueilli chaleureusement en Russie, et notamment le directeur du laboratoire Poncelet, Michel Tsfasman. Plus encore, je remercie Michel Balazard qui m'a proposé cette aventure et avec qui je l'ai partagée. En complément de la recherche, je prends aussi beaucoup de plaisir à montrer la beauté des mathématiques à tout public intéressé. J'écris en particulier régulièrement des articles dans la Revue de Mathématiques Spéciales (RMS) et, à cette occasion, je remercie Yves Duval qui a toujours lu et corrigé avec patience et minutie les versions préliminaires de mes textes. Je suis très reconnaissant à Étienne Ghys, d'une part, pour m'avoir fait confiance en me proposant d'être billetiste pour le site Images des Mathématiques et, d'autre part, pour m'avoir fait connaître Jos Leys, à la fois artiste, travailleur, passionné, avec qui nous avons réalisé le film « Mais où est donc le petit côté ? ». Travailler avec Jos a été plus qu'un plaisir.

Enfin, je remercie ma femme, Sandrine, pour son amour, son sourire, sa grâce, son aide, son soutien, pour tout ce qu'elle m'apporte au quotidien.



# Introduction

La théorie de Hodge  $p$ -adique est une branche des mathématiques qui est née des travaux de Fontaine dans les années 1970, et s'est depuis énormément développée jusqu'à devenir aujourd'hui incontournable dans plusieurs domaines de l'arithmétique (théorie des formes modulaires ou automorphes et lien avec les représentations galoisiennes, correspondance de Langlands  $p$ -adique, *etc.*). Un de ses objectifs est l'étude, et en particulier la classification, des représentations à coefficients dans un anneau  $p$ -adique du groupe de Galois absolu d'un corps local de caractéristique mixte de  $(0, p)$ . Lorsque l'espace des coefficients est  $\mathbb{Q}_p$  ou l'une de ses extensions finies, la théorie est bien comprise : on sait définir les notions de représentations cristallines, semi-stables et de de Rham, et on sait décrire celles-ci à l'aide d'outils efficaces qui sont les  $\phi$ -modules filtrés ou certaines de leurs variantes.

Par contre, beaucoup de points restent encore obscurs lorsque l'on s'intéresse aux représentations (libres ou de torsion) à coefficients dans  $\mathbb{Z}_p$ , ou plus généralement dans l'anneau des entiers d'un corps  $p$ -adique. Après quelques frémissements dûs à Fontaine, Laffaille et Messing, l'étude des aspects entiers et de torsion de la théorie n'a véritablement pris son essor qu'à la fin des années 1990 avec les travaux de Breuil. Complétée ensuite par d'autres mathématiciens, et notamment Kisin, la théorie de Hodge  $p$ -adique entière et de torsion commence aujourd'hui à prendre forme. Cependant, beaucoup de résultats restent encore partiels (on entend par là qu'ils ne s'appliquent que sous des hypothèses restrictives) et on ne sait pas encore, dans tous les cas, faire le lien entre les différents angles d'attaque qui ont été imaginés.

Le but de ce mémoire est de présenter de façon cohérente et synthétique les résultats que j'ai obtenus dans ce domaine. La première partie (assez longue) est introductive : elle est consacrée à la présentation de l'état de l'art en théorie de Hodge  $p$ -adique entière et de torsion en 2006 (ce qui correspond à la fin de ma thèse), et se termine par une introduction détaillée aux parties suivantes. Pour le moment, étant donné que les objets principaux n'ont pas encore été présentés, il est assez difficile d'en dire davantage si ce n'est, très brièvement et de façon très grossière, que le fil directeur de mon travail est l'extension des théories de Breuil et de Kisin, avec pour objectif au loin l'obtention d'une bonne définition de la catégorie des représentations semi-stables de torsion couplée à une description efficace de celle-ci *via* des objets d'algèbre linéaire ou semi-linéaire.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Table des matières</b>	<b>7</b>
<b>1 Présentation des acteurs</b>	<b>9</b>
1.1 Le problème du foncteur mystérieux . . . . .	9
1.2 Les $(\phi, N)$ -modules filtrés de Fontaine . . . . .	11
1.3 Structures entières pour les $(\phi, N)$ -modules filtrés . . . . .	12
1.4 La théorie en torsion . . . . .	15
1.5 Oubli de l'opérateur de monodromie . . . . .	17
1.6 Récapitulatif et introduction aux parties suivantes . . . . .	21
<b>2 Catégories de Breuil en grande ramification</b>	<b>23</b>
2.1 L'étude des objets $\mathcal{M}(\rho)$ . . . . .	23
2.2 L'axiomatique des pylonets . . . . .	25
2.3 Application à la théorie de Hodge $p$ -adique . . . . .	26
2.4 Le foncteur $M_{\text{st}}$ . . . . .	28
<b>3 Dimensions des variétés de Kisin</b>	<b>31</b>
3.1 Énoncé des résultats . . . . .	32
3.2 Raffinement de la stratification . . . . .	34
3.3 Un problème de programmation linéaire . . . . .	36
3.4 Généralisations éventuelles . . . . .	39
<b>4 Sur l'image essentielle des foncteurs <math>T_{\text{cris}}</math> et <math>T_{\text{st}}</math></b>	<b>41</b>
4.1 Réduction à l'action de l'inertie . . . . .	41
4.2 Bornes pour l'action sur la semi-simplifiée . . . . .	43
4.3 Bornes pour l'action de l'inertie sauvage . . . . .	46
4.4 Prolongement de l'action de $G_{\infty}$ . . . . .	48
<b>5 La théorie des <math>(\phi, \tau)</math>-modules</b>	<b>51</b>
5.1 Une équivalence de catégories . . . . .	51
5.2 Réseaux dans les $(\phi, \tau)$ -modules . . . . .	53
5.3 Le logarithme de $\tau$ . . . . .	55
5.4 Lien avec la théorie de Kisin et applications . . . . .	58
<b>Bibliographie</b>	<b>61</b>





# Chapitre 1

## Présentation des acteurs

Dans tout ce mémoire, on fixe un nombre premier  $p$  et un corps  $K$  de caractéristique nulle, complet pour une valuation discrète  $v_K$  normalisée par  $v_K(K^*) = \mathbb{Z}$ . On désigne par  $\mathcal{O}_K$  son anneau des entiers et on suppose que le corps résiduel de  $K$ , noté  $k$ , est parfait de caractéristique  $p$ . On note  $W = W(k)$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ . On note  $\phi$  le Frobenius sur  $W$  et sur  $W[1/p]$ . Le corps  $K$  apparaît naturellement comme une extension finie et totalement ramifiée de  $W[1/p]$ .

On fixe  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$ . La valuation  $v_K$  se prolonge à  $\bar{K}$  en une valuation que l'on note encore  $v_K$ . On peut ainsi parler de l'anneau des entiers de  $\bar{K}$  et de son corps résiduel, que l'on note respectivement  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  et  $\bar{k}$ . Ce dernier corps  $\bar{k}$  est une clôture algébrique de  $k$ . Soit  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  (resp.  $G_k = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ ) le groupe de Galois absolu de  $K$  (resp. de  $k$ ). On a un morphisme naturel surjectif  $G_K \rightarrow G_k$  dont le noyau est par définition le sous-groupe d'inertie  $I_K$  de  $G_K$ .

Enfin, si  $q = p^h$  est une puissance de  $p$ , on note  $\mathbb{F}_q$  l'unique sous-corps de cardinal  $q$  de  $\bar{k}$  ; il est formé des  $x \in \bar{k}$  solutions de l'équation  $x^q = x$ .

### 1.1 Le problème du foncteur mystérieux

Une des origines de la théorie de Hodge  $p$ -adique se situe dans le problème du foncteur mystérieux posé par Grothendieck en 1970. Celui-ci s'énonce comme suit : à une variété  $X$  sur  $\text{Spec } K$ , que l'on suppose propre et lisse pour simplifier, on sait associer plusieurs invariants cohomologiques classiques et notamment, pour tout entier  $r$  :

- le  $r$ -ième groupe de cohomologie étale  $p$ -adique de  $X_{\bar{K}} = X \times_K \bar{K}$ , noté  $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  : il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{Q}_p$  muni d'une action de groupe  $G_K$  ;
- le  $r$ -ième groupe de cohomologie de de Rham de  $X$ , noté  $H_{\text{dR}}^r(X)$  : il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie sur  $K$  muni d'une filtration  $\text{Fil}^i H_{\text{dR}}^r(X)$ .

En comparant avec la cohomologie de Betti, on savait déjà démontrer à l'époque que les deux groupes de cohomologie précédents avaient la même dimension respectivement comme espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $K$ . Grothendieck s'est alors demandé s'il était possible d'aller plus loin dans cette comparaison. Typiquement, peut-on reconstruire l'une des deux cohomologies à partir de l'autre par une recette purement algébrique ? C'est cela le problème du foncteur mystérieux.

Il serait malheureusement trop long de faire un historique complet de cette question dans ce mémoire d'habilitation ; aussi on se borne à présenter (une partie de) la réponse à l'interrogation de Grothendieck apportée par la théorie de Hodge  $p$ -adique dans le cas favorable où la variété  $X$  a réduction semi-stable (ce qui inclut le cas de bonne réduction) sur  $\mathcal{O}_K$ . Un théorème de comparaison avec la cohomologie log-cristalline permet alors de munir le groupe de cohomologie de de Rham  $H_{\text{dR}}^r(X)$  d'une  $W[1/p]$ -structure  $D \subset H_{\text{dR}}^r(X)$  sur laquelle sont définis un Frobenius  $\phi : D \rightarrow D$  semi-linéaire par rapport à  $\phi$ , et un opérateur  $W[1/p]$ -linéaire nilpotent  $N : D \rightarrow D$  vérifiant  $N\phi = p\phi N$ .

Un des résultats principaux de la théorie de Hodge  $p$ -adique dit que, muni de ces structures supplémentaires, la cohomologie de de Rham de  $X$  suffit à reconstruire la cohomologie étale  $p$ -adique de  $X$  via une recette explicite (mais, somme toute, assez complexe) découverte par Fontaine. Pour expliquer cette recette, il faut introduire certains

anneaux, dits de période. On commence par l'anneau  $R$  défini par  $R = \varprojlim_{s \geq 0} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ , les applications de transition étant données par le Frobenius. En d'autres termes, un élément  $x$  de  $R$  est une suite  $(x_s)_{s \geq 0}$  d'éléments de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  telle que  $x_{s+1}^p = x_s$  pour tout entier  $s$ . Il est clair que  $R$  est un anneau de caractéristique  $p$ , sur lequel l'élévation à la puissance  $p$  est une bijection. De plus, si  $C$  (resp.  $\mathcal{O}_C$ ) désigne le complété de  $\bar{K}$  (resp.  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ ), on dispose d'une application multiplicative surjective  $\theta : R \rightarrow \mathcal{O}_C$  définie par  $x = (x_s) \mapsto \lim_{s \rightarrow \infty} \hat{x}_s^{p^s}$  où  $\hat{x}_s \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$  désigne un relevé quelconque de  $x_s$  (on montre que la limite précédente existe dans  $\mathcal{O}_C$  et ne dépend pas du choix des relevés). L'association  $x \mapsto v_K(\theta(x))$  définit une valuation (non discrète)  $v_R$  sur  $R$ . En particulier,  $R$  est intègre. De plus, l'application  $\theta$  se prolonge en un morphisme d'anneaux  $\theta : W(R) \rightarrow \mathcal{O}_C$ ,  $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n \theta(x_n^{1/p^n})$ . Celui-ci est encore surjectif et on montre que son noyau est un idéal principal de  $W(R)$  engendré par n'importe quel élément  $x \in \ker \theta$  dont la réduction modulo  $p$  est de valuation 1. Si  $\underline{p} = (p_s)$  est un élément de  $R$  avec  $p_1 = \sqrt[p]{p}$ , un exemple de tel générateur est l'élément  $[\underline{p}] - p$  (où  $[\underline{p}] \in W(R)$  désigne le représentant de Teichmüller de  $\underline{p}$ ). De même si  $\pi$  est une uniformisante de  $K$  dont le polynôme minimal sur  $W[1/p]$  est notée  $E(u)$ , et si  $\underline{\pi} = (\pi_s) \in R$  est tel que  $\pi_1 = \sqrt[p]{\pi}$ , alors l'élément  $E([\underline{\pi}])$  engendre  $\ker \theta$ . Le premier véritable anneau de périodes introduit par Fontaine est  $B_{\text{dR}}^+$  : il est défini comme le complété de  $W(R)[1/p]$  pour la topologie définie par l'idéal  $\ker \theta$ . Il est naturellement muni de la filtration  $\text{Fil}^i B_{\text{dR}}^+ = (\ker \theta)^i \cdot B_{\text{dR}}^+$ . On définit également l'anneau  $A_{\text{cris}}$  comme le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissance divisées de  $W(R)$  par rapport à l'idéal  $\ker \theta$ , et on pose  $B_{\text{cris}}^+ = A_{\text{cris}}[1/p]$ . Étant donné que le Frobenius naturel sur  $W(R)$  envoie  $\ker \theta$  sur  $\ker \theta + pW(R)$ , il s'étend naturellement en des endomorphismes de  $A_{\text{cris}}$  et  $B_{\text{cris}}^+$ .

On n'est pas encore au bout de nos peines car l'anneau qui va jouer un rôle pour comparer les cohomologies étale  $p$ -adique et de de Rham est  $B_{\text{st}}^+$ . Abstraitement, il est défini simplement comme l'anneau de polynômes  $B_{\text{cris}}^+[X]$  où  $X$  est une nouvelle variable. Il s'envoie naturellement dans  $B_{\text{dR}}^+$  par l'application  $\iota$  qui est l'identité sur  $B_{\text{cris}}^+$  et associe à  $X$  l'élément

$$\log\left(\frac{[\underline{p}]}{p}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{ip^i} \xi^i \quad \text{où } \xi = [\underline{p}] - p.$$

La série précédente converge bien car  $\xi \in \text{Fil}^1 B_{\text{dR}}^+$ . On peut montrer que  $\text{id} \otimes \iota : K \otimes_{W[1/p]} B_{\text{st}}^+ \rightarrow B_{\text{dR}}^+$  est injective. La filtration sur  $B_{\text{dR}}^+$  induit donc, par restriction, une filtration sur  $K \otimes_{W[1/p]} B_{\text{st}}^+$ . Par ailleurs, le Frobenius sur  $B_{\text{cris}}^+$  s'étend à  $B_{\text{st}}^+$  en posant  $\phi(X) = pX$ . L'anneau  $B_{\text{st}}^+$  est en outre muni d'un opérateur  $N$ , dit de *monodromie*, défini par  $N(P) = -\frac{dP}{dX}$  où  $P \in B_{\text{st}}^+$  est un polynôme à coefficients dans  $B_{\text{cris}}^+$ . On a la relation importante  $N\phi = p\phi N$ .

En plus de toutes les structures qui viennent d'être introduites, on a une action tautologique de  $G_K$  sur  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  qui s'étend successivement à  $R$ ,  $W(R)$ ,  $B_{\text{dR}}^+$ ,  $B_{\text{cris}}^+$ ,  $B_{\text{st}}^+$  et  $K \otimes_{W[1/p]} B_{\text{st}}^+$ . Cette action préserve la filtration et commute à  $\phi$  et  $N$  lorsque ces opérateurs sont définis.

**Théorème 1.1.1.** *Soit  $X$  une variété propre et lisse sur  $K$ , admettant un modèle semi-stable sur l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$ . Soit  $D$  la  $W[1/p]$ -structure vivant dans  $H_{\text{dR}}^r(X)$  donnée par la cohomologie log-cristalline. Alors, pour tout entier  $r \geq 0$ , on a :*

$$H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) = \text{Hom}_{W[1/p], \text{Fil}, \phi, N}(D, B_{\text{st}}^+)^{\vee}$$

où la notation «  $\vee$  » fait référence à la représentation duale et où l'espace  $\text{Hom}_{W[1/p], \text{Fil}, \phi, N}(D, B_{\text{st}}^+)$  regroupe tous les morphismes  $W[1/p]$ -linéaires  $f : D \rightarrow B_{\text{st}}^+$  compatibles à  $\phi$ ,  $N$  et tels que la composée  $\iota \circ (\text{id} \otimes f) : K \otimes_{W[1/p]} D \rightarrow K \otimes_{W[1/p]} B_{\text{st}}^+ \rightarrow B_{\text{dR}}^+$  respecte la filtration.

*Remarque 1.1.2.* Dans le cas où  $X$  a bonne réduction sur  $\mathcal{O}_K$ , on peut remplacer  $B_{\text{st}}^+$  par  $B_{\text{cris}}^+$  et oublier l'opérateur  $N$ .

Le théorème précédent a une longue histoire. Il a été conjecturé sous cette forme<sup>1</sup> initialement par Fontaine et Jenksen. Fontaine et Messing en ont ensuite démontré les premiers cas dans [23] en 1987. La première démonstration complète est due à Faltings en 1999 (voir [22]) et est basée sur sa théorie des extensions presque-étales. Pratiquement en même temps, reprenant et mettant ensemble plusieurs idées en vogue à l'époque (essentiellement la log-géométrie

<sup>1</sup>Classiquement, au lieu de  $\text{Hom}_{W[1/p], \text{Fil}, \phi, N}(D, B_{\text{st}}^+)^{\vee}(r)$ , on considère plutôt le sous-espace de  $D \otimes_{W[1/p]} B_{\text{st}}^+[1/t]$  (où  $t \in B_{\text{st}}^+$  est la période du caractère cyclotomique) formé des éléments dans le zéro-ième cran de la filtration (pour la filtration produit tensoriel après extension des scalaires à  $K$ ) qui sont fixes par  $\phi$  et annulés par  $N$ . Les deux formulations sont directement équivalentes, mais celle du théorème 1.1.1 est plus en adéquation avec les conventions qui seront adoptées dans la suite de ce mémoire, et évite de surcroît de travailler avec  $B_{\text{st}}^+[1/t]$  (et en particulier d'introduire l'élément  $t$ ).

introduite par Fontaine et Illusie et développée par Kato, et la cohomologie syntomique déjà utilisée dans l'approche de Fontaine et Messing), Tsuji a obtenu une seconde preuve basée sur des arguments différents (voir [48]).

On clôt ce paragraphe là-dessus bien que le théorème 1.1.1 ait depuis été généralisé à de nombreuses autres situations. En réalité, l'essentiel des résultats qui vont être présentés dans ce mémoire d'habilitation est de nature arithmétique plutôt que géométrique, et c'est la raison pour laquelle on ne s'étend pas davantage sur les aspects cohomologiques de la théorie de Hodge  $p$ -adique.

## 1.2 Les $(\phi, N)$ -modules filtrés de Fontaine

La théorie des  $(\phi, N)$ -modules filtrés est en quelque sorte une abstraction de ce qui vient d'être présenté : au lieu de considérer une variété (concrète) et sa cohomologie de de Rham, on part de la donnée (abstraite) d'un  $W[1/p]$ -espace vectoriel muni d'opérateurs  $\phi$  et  $N$  et d'une filtration après extension des scalaires à  $K$ , le tout satisfaisant aux propriétés dégagées précédemment. À partir de là, en reprenant la formule du théorème 1.1.1, on construit des représentations de  $G_K$ , dont il est raisonnable de penser qu'elles revêtent un intérêt particulier. De façon plus précise, Fontaine définit un  $(\phi, N)$ -module filtré comme la donnée de :

- un  $W[1/p]$ -espace vectoriel de dimension finie  $D$  ;
- une application  $\phi$ -semi-linéaire bijective  $\phi : D \rightarrow D$  ;
- un opérateur  $W[1/p]$ -linéaire  $N : D \rightarrow D$  vérifiant  $N\phi = p\phi N$  (on vérifie immédiatement que cette condition implique que  $N$  est nilpotent) ;
- une filtration décroissante  $(\text{Fil}^i D_K)_{i \in \mathbb{Z}}$  de  $D_K = K \otimes_{W[1/p]} D$  telle que  $\text{Fil}^{-r} D_K = D_K$  et  $\text{Fil}^r D_K = 0$  pour  $r$  suffisamment grand.

On dit que le  $(\phi, N)$ -module filtré  $D$  est *effectif* si  $\text{Fil}^0 D_K = D_K$  et, dans ce cas<sup>2</sup>, on associe à  $D$  une représentation galoisienne  $V_{\text{st}}(D)$  définie par :

$$V_{\text{st}}(D) = \text{Hom}_{W[1/p], \text{Fil}, \phi, N}(D, B_{\text{st}}^+)$$

l'action de  $G_K$  sur  $V_{\text{st}}(D)$  provenant de son action naturelle sur  $B_{\text{st}}^+$ . Sans hypothèse supplémentaire, la dimension de la représentation  $V_{\text{st}}(D)$  ainsi obtenue sur  $\mathbb{Q}_p$  est toujours inférieure à la dimension de  $D$  sur  $W[1/p]$ , mais elle n'est en général pas égale. Si l'égalité a lieu, on dit que  $D$  est *admissible*. On note  $\text{Mod}_{/W[1/p]}^{\infty, \phi, N}$  la catégorie des  $(\phi, N)$ -modules filtrés effectifs et  $\text{Mod}_{/W[1/p]}^{\infty, \phi, N, 0}$  la sous-catégorie pleine formée de ceux qui sont admissibles. Plus généralement, si  $r$  est un entier, on note  $\text{Mod}_{/W[1/p]}^{r, \phi, N}$  (resp.  $\text{Mod}_{/W[1/p]}^{r, \phi, N, 0}$ ) la catégorie des  $(\phi, N)$ -modules filtrés effectifs (resp. des  $(\phi, N)$ -modules filtrés effectifs admissibles)  $D$  tels que  $\text{Fil}^{r+1} D_K = 0$ . On a  $\text{Mod}_{/W[1/p]}^{\infty, \phi, N} = \bigcup_{r \geq 0} \text{Mod}_{/W[1/p]}^{r, \phi, N}$  et  $\text{Mod}_{/W[1/p]}^{\infty, \phi, N, 0} = \bigcup_{r \geq 0} \text{Mod}_{/W[1/p]}^{r, \phi, N, 0}$ .

**Théorème 1.2.1** (Fontaine). *Le foncteur  $V_{\text{st}}$  défini sur  $\text{Mod}_{/W[1/p]}^{\infty, \phi, N, 0}$  est pleinement fidèle.*

*De plus, si  $D$  est un  $(\phi, N)$ -module filtré effectif admissible de dimension  $d$ , on a :*

$$C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_{\text{st}}(D) = \bigoplus_{i=1}^d C(h_i)$$

où les  $h_i$  sont les sauts de la filtration, c'est-à-dire les  $h$  tels que  $\text{Fil}^h D_K \neq \text{Fil}^{h+1} D_K$ , l'entier  $h$  apparaissant un nombre de fois égal à la dimension sur  $K$  du quotient  $\text{Fil}^h D_K / \text{Fil}^{h+1} D_K$ .

Si  $V$  est une  $\mathbb{Q}_p$ -représentation de dimension  $d$  de  $G_K$  telle que  $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$  se décompose sous la forme  $\bigoplus_{i=1}^d C(h_i)$  pour des  $h_i \in \mathbb{Z}$ , on dit que  $V$  est de *Hodge-Tate*, et les entiers  $h_i$  sont alors appelés ses *ponds de Hodge-Tate*. Il résulte donc du théorème 1.2.1 que toutes les représentations de la forme  $V_{\text{st}}(D)$  sont de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ . En réalité, être isomorphe à un  $V_{\text{st}}(D)$  est plus contraignant que cela ; par définition, une représentation ayant cette propriété est dite *semi-stable* à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ . Les représentations *cristallines* à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ , quant à elles, sont celles qui correspondent aux  $(\phi, N)$ -modules filtrés effectifs sur lesquels l'opérateur  $N$  est nul, ce que l'on appelle plus couramment des  $\phi$ -modules filtrés effectifs. On notera

<sup>2</sup>Lorsque  $D$  n'est pas effectif, la représentation  $V_{\text{st}}(D)$  peut encore se définir en remplaçant  $B_{\text{st}}^+$  par  $B_{\text{st}}^+[1/t]$  dans la formule donnée ci-après. Tous les résultats de ce numéro persistent avec cette modification. Toutefois, à partir du numéro suivant, l'hypothèse d'effectivité (qui n'est en aucun cas contraignante car, quitte à twister, on peut toujours supposer qu'elle est satisfaite) deviendra inévitable.

en particulier que les représentations cristallines sont semi-stables. Le théorème 1.2.1 assure que  $V_{\text{st}}$  réalise une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des  $\phi$ -modules filtrés (resp. des  $(\phi, N)$ -modules filtrés) effectifs admissibles et celles des représentations cristallines (resp. semi-stables) à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ . Il est également possible de donner des quasi-inverses de ces foncteurs : si  $V_{\text{st}}(D)$  est une représentation semi-stable, le  $(\phi, N)$ -module filtré admissible  $D$  se retrouve par la formule  $D = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_{\text{st}}(D), B_{\text{st}}^+)$  (les structures supplémentaires de  $B_{\text{st}}^+$  induisent sur  $D$  une structure de  $(\phi, N)$ -module filtré).

Par ailleurs, d'après un fameux théorème de Colmez et Fontaine, on sait dire quels sont les  $(\phi, N)$ -modules filtrés (effectifs) admissibles sans avoir à calculer la représentation galoisienne associée. Pour expliquer cette caractérisation, il faut au préalable introduire les nombres de Hodge et de Newton d'un  $(\phi, N)$ -module filtré. Lorsque  $D$  est un  $(\phi, N)$ -module filtré de dimension 1 sur  $W[1/p]$ , le *nombre de Hodge* de  $D$  est défini comme l'unique entier  $h$  tel que  $\text{Fil}^h D_K \neq \text{Fil}^{h+1} D_K$  tandis que, si  $x$  désigne un élément non nul de  $D$ , le *nombre de Newton* de  $D$  est la valuation  $p$ -adique de l'élément  $\lambda \in W[1/p]$  tel que  $\phi(x) = \lambda x$  (on vérifie immédiatement que la valuation de  $\lambda$  ne dépend pas du choix de  $x$ ). Lorsque  $D$  est de dimension arbitraire, on commence par remarquer que le déterminant de  $D$  (*i.e.* sa puissance extérieure maximale) hérite d'une structure de  $(\phi, N)$ -module filtré, et on définit les nombres de Hodge et de Newton de  $D$  comme étant ceux de  $\det D$ .

**Théorème 1.2.2** (Colmez, Fontaine). *Un  $(\phi, N)$ -module filtré effectif  $D$  est admissible si, et seulement si  $t_H(D) = t_N(D)$  et, pour tout  $D' \subset D$  stable par  $\phi$  et  $N$  et muni de la filtration induite, on a  $t_H(D') \leq t_N(D')$ .*

De la combinaison des théorèmes 1.2.1 et 1.2.2, on déduit une description complète en termes d'algèbre (semi-)linéaire de la catégorie des représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ . Par ailleurs, le théorème 1.1.1 assure que toutes les représentations provenant de la cohomologie étale  $p$ -adique des variétés propres et lisses sur  $K$ , ayant réduction semi-stable sur  $\mathcal{O}_K$ , sont semi-stables à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ , et même plus précisément que, dans le cas du  $H^r$ , les poids de Hodge-Tate sont compris entre  $-r$  et 0 (d'après ce que l'on sait de la filtration sur la cohomologie de de Rham). On sait donc décrire à l'aide d'objets relativement simples une large classe de représentations galoisiennes intéressantes dans le sens où elles proviennent de la géométrie.

### 1.3 Structures entières pour les $(\phi, N)$ -modules filtrés

Dans tout ce qui précède, on a seulement considéré des représentations à coefficients dans  $\mathbb{Q}_p$ . Toutefois, pour de nombreuses questions, on aimerait également disposer d'une théorie permettant de manipuler des représentations à coefficients dans  $\mathbb{Z}_p$ , libres ou de torsion, typiquement les réseaux à l'intérieur des représentations semi-stables considérées précédemment, les quotients de deux tels réseaux, ou encore les représentations données par la cohomologie étale des variétés à coefficients dans  $\mathbb{Z}_p$  ou  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ . Pour traiter ces questions, une idée naturelle est de définir des structures entières à l'intérieur des  $(\phi, N)$ -modules filtrés. Le premier essai dans cette direction remonte à 1982 et est dû à Fontaine et Laffaille (voir [24]) ; les résultats qu'obtiennent ces auteurs ont toutefois l'inconvénient de ne fonctionner que dans le cas des représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans  $\{0, \dots, p-2\}$  avec  $K = W[1/p]$ . Il a fallu attendre la fin des années 1990 et les premiers travaux de Breuil pour pouvoir traiter les premiers cas de représentations semi-stables non cristallines, initialement toujours sous l'hypothèse  $K = W[1/p]$ . Les résultats de Breuil ont été ensuite étendus à des corps  $K$  arbitraires, tout d'abord dans ma thèse puis par Liu dans [41]. La fin de ce numéro est consacrée à la présentation (succincte) de cette théorie.

#### 1.3.1 Les $(\phi, N)$ -modules filtrés sur $S[1/p]$

On fixe une uniformisante  $\pi$  de  $K$  et on note  $E(u)$  son polynôme minimal sur  $W[1/p]$  ; c'est un polynôme d'Eisenstein dont le degré  $e$  est égal au degré de l'extension  $K/W[1/p]$ . On introduit l'anneau  $S$  défini comme le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de  $W[u]$  par rapport à l'idéal principal engendré par  $E(u)$ . Les éléments de  $S$  s'écrivent explicitement comme des séries infinies :

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \frac{u^n}{q(n)!}, \quad a_n \in W, \quad a_n \text{ converge vers } 0$$

où  $q(n)$  désigne le quotient dans la division euclidienne de  $n$  par  $e$ . L'anneau  $S$  est muni en outre d'un certain nombre de structures supplémentaires en correspondance avec celles que l'on a déjà vu apparaître sur les  $(\phi, N)$ -modules filtrés ; il y a

- une filtration  $\text{Fil}^i S$  définie comme la filtration à puissances divisées ;
- un Frobenius  $\phi : S \rightarrow S$  agissant par  $\phi$  sur les coefficients  $a_n \in W$ , et envoyant  $u$  sur  $u^p$  ;
- un opérateur  $N : S \rightarrow S$ , dit de *monodromie*, défini par  $N(s) = -u \cdot \frac{ds}{du}$ .

Ces données satisfont à un certain nombre de relations : on a  $N\phi = p\phi N$ ,  $N(\text{Fil}^i S) \subset \text{Fil}^{i-1} S$  pour tout entier  $i > 0$  et si  $i < p - 1$ , le Frobenius  $\phi$  envoie  $\text{Fil}^i S$  sur  $p^i S$ . En outre, elles s'étendent sans problème à  $S[1/p]$ . Les réseaux évoqués dans l'introduction du §1.3 ne vivent en réalité pas dans les  $(\phi, N)$ -modules filtrés (effectifs admissibles) eux-mêmes, mais dans certaines variantes définies sur  $S[1/p]$  qui leur sont canoniquement associées.

**Définition 1.3.1** (Breuil). Un  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $S[1/p]$  est la donnée de :

- un  $S[1/p]$ -module libre de rang fini  $\mathcal{D}$  ;
- une filtration décroissante  $\text{Fil}^i \mathcal{D}$  telle que pour tout  $s \in \text{Fil}^i S[1/p]$  et tout  $x \in \text{Fil}^j \mathcal{D}$  (où  $i$  et  $j$  sont des entiers), on ait  $sx \in \text{Fil}^{i+j} \mathcal{D}$  et, pour  $r$  suffisamment grand, on ait  $\text{Fil}^{-r} \mathcal{D} = \mathcal{D}$  et  $\text{Fil}^r \mathcal{D} \subset \text{Fil}^1 S[1/p] \cdot \mathcal{D}$  ;
- une application  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  dont l'image engendre  $\mathcal{D}$  ;
- un morphisme  $W[1/p]$ -linéaire  $N : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  vérifiant
  - la condition de Leibniz :  $N(sx) = N(s)x + sN(x)$  pour tout  $s \in S[1/p]$  et tout  $x \in \mathcal{D}$  ;
  - la transversalité de Griffiths :  $N(\text{Fil}^i \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^{i-1} \mathcal{M}$  pour tout entier  $i$  ;
  - la relation de commutation  $N\phi = p\phi N$

Un  $(\phi, N)$ -module filtré  $\mathcal{D}$  sur  $S[1/p]$  est dit *effectif* si  $\text{Fil}^0 \mathcal{D} = \mathcal{D}$ .

On note  $\text{Mod}_{S[1/p]}^{r, \phi, N}$  la catégorie des  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $S[1/p]$ .

*Remarque 1.3.2.* Dans la suite lorsque l'on parlera de  $(\phi, N)$ -module filtré sans plus de précision, il s'agira toujours d'un  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $W[1/p]$  dans le sens du §1.2. Toutefois, lorsque l'on voudra insister, on pourra employer également le terme de  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $W[1/p]$  ou celui de  $(\phi, N)$ -module filtré de Fontaine.

Toujours suivant Breuil, à un  $(\phi, N)$ -module filtré  $\mathcal{D}$  sur  $S[1/p]$ , on peut associer un  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $W[1/p]$ . On pose pour cela  $D = \mathcal{D}/u\mathcal{D}$  ; c'est un espace vectoriel sur  $W[1/p]$  sur lequel le Frobenius et l'opérateur  $N$  passent au quotient. La définition de la filtration sur  $D_K = K \otimes_{W[1/p]} D$  est un peu plus délicate et découle du lemme suivant.

**Lemme 1.3.3** (Breuil). *Il existe une unique section de la projection canonique  $D \rightarrow D$  qui est compatible au Frobenius.*

La section  $s : D \rightarrow \mathcal{D}$  donnée par le lemme induit une flèche injective  $D \rightarrow \mathcal{D}/\text{Fil}^1 S[1/p] \mathcal{D}$  et, par suite, un morphisme canonique  $\alpha : D_K \rightarrow \mathcal{D}/\text{Fil}^1 S[1/p] \mathcal{D}$  étant donné que l'espace d'arrivée est naturellement un  $K$ -espace vectoriel (puisque  $S[1/p]/\text{Fil}^1 S[1/p] \simeq K$ ). On vérifie en outre que  $\alpha$  est injectif, ce qui implique finalement en comparant les dimensions que c'est un isomorphisme. La filtration sur  $D_K$  est alors définie comme la réduction modulo  $\text{Fil}^1 S[1/p]$  de celle sur  $\mathcal{D}$ .

**Théorème 1.3.4** (Breuil). *La construction précédente définit une équivalence de catégories entre la catégorie des  $(\phi, N)$ -modules filtrés sur  $S[1/p]$  et celle des  $(\phi, N)$ -modules filtrés sur  $W[1/p]$ . Via cette équivalence, les modules effectifs se correspondent.*

Les démonstrations du lemme 1.3.3 et du théorème 1.3.4 se trouvent dans l'article de Breuil [1]. De même, dans cette référence, on trouve une construction explicite d'un quasi-inverse du foncteur  $\mathcal{D} \mapsto D$ . De plus, dans le cas admissible, il est expliqué comment reconstruire la représentation galoisienne correspondant à  $D$  directement à partir de  $\mathcal{D}$ . Pour cela, il faut encore introduire de nouveaux anneaux de périodes. Le plus important dans ce contexte est  $\hat{A}_{\text{st}}$ , qui vaut par définition  $A_{\text{cris}} \langle X \rangle$  où la notation  $\langle X \rangle$  fait référence au complété  $p$ -adique de l'algèbre polynômiale à puissances divisées en la variable  $X$ . On a, sur  $\hat{A}_{\text{st}}$ , les mêmes structures que sur  $S$  :

- une filtration  $\text{Fil}^i \hat{A}_{\text{st}}$  définie comme le produit de convolution de la filtration sur  $A_{\text{cris}}$  et de celle donnée par les puissances divisées ;
- un Frobenius  $\phi : \hat{A}_{\text{st}} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$  qui agit sur  $A_{\text{cris}}$  par le Frobenius défini dans le §1.1 et envoie  $X$  sur  $\frac{(1+X)^p - 1}{p}$  ;
- un opérateur  $N : \hat{A}_{\text{st}} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$  qui envoie une série  $P(X)$  sur  $(1+X) \frac{dP}{dX}$ .

L'anneau  $\hat{A}_{\text{st}}$  est de surcroît muni d'une action du groupe de Galois  $G_K$ . Elle dépend du choix d'un système compatible de racines  $p^s$ -ièmes de l'uniformisante  $\pi$  fixée, c'est-à-dire, si l'on préfère, d'un élément  $\bar{\pi} \in R$  dont la 0-ième coordonnée est  $\pi$ . Ce choix étant fait, on pose  $\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma(\bar{\pi})}{\bar{\pi}} \in R$  pour tout  $\sigma \in G_K$ . L'action galoisienne sur  $\hat{A}_{\text{st}}$  est alors définie comme suit : sur  $A_{\text{cris}}$ , le groupe  $G_K$  agit comme dans le §1.1, tandis que  $\sigma \in G_K$  agit sur la somme  $1 + X$  par multiplication par  $[\varepsilon(\sigma)]$  (il envoie donc  $X$  sur  $[\varepsilon(\sigma)](1 + X) - 1$ ). Breuil démontre dans [1] que l'ensemble des points fixes de  $\hat{A}_{\text{st}}$  sous l'action de  $G_K$  s'identifie canoniquement à  $S$  par l'intermédiaire du morphisme de  $W$ -algèbres  $S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$ ,  $u \mapsto \frac{[\bar{\pi}]}{1+X}$ . En particulier,  $\hat{A}_{\text{st}}$  apparaît de façon naturelle comme une  $S$ -algèbre. Si  $D$  est un  $(\phi, N)$ -module filtré admissible sur  $W[1/p]$ , et si  $\mathcal{D}$  est le  $(\phi, N)$ -module sur  $S[1/p]$  qui lui correspond, Breuil montre que la représentation  $V_{\text{st}}(D)$  s'obtient à partir de  $\mathcal{D}$  par la formule suivante :

$$V_{\text{st}}(D) = \text{Hom}_{S[1/p], \text{Fil}, \phi, N}(\mathcal{D}, \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \hat{A}_{\text{st}}) \quad (1.1)$$

où la notation  $\text{Hom}_{S[1/p], \text{Fil}, \phi, N}$  signifie que l'on prend les morphismes  $S[1/p]$ -linéaires compatibles à la filtration, au Frobenius et à l'opérateur de monodromie, et où l'action de Galois sur  $V_{\text{st}}(D)$  provient de son action sur  $\hat{A}_{\text{st}}$ .

Dans la suite, un  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $S[1/p]$  sera dit *admissible* si le  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $W[1/p]$  qui lui correspond l'est.

### 1.3.2 Les modules fortement divisibles

Les modules fortement divisibles sont les réseaux dans les  $(\phi, N)$ -modules filtrés sur  $S[1/p]$  qui ont été évoqués précédemment. Ceux-ci ne sont pas définis en toute généralité mais seulement lorsque la filtration est concentrée entre les crans 0 et  $p-2$ . Pour gagner en flexibilité, il est souvent plus commode de fixer un entier  $r \in \{0, \dots, p-2\}$  et de se restreindre aux  $(\phi, N)$ -modules filtrés (effectifs) tels que  $\text{Fil}^0 \mathcal{D} = \mathcal{D}$  et  $\text{Fil}^{r+1} \mathcal{D} \subset \text{Fil}^1 S[1/p] \mathcal{D}$ . Les  $\text{Fil}^i \mathcal{D}$  sont tous entièrement déterminés par  $\text{Fil}^r \mathcal{D}$  ; par exemple, pour  $0 \leq i < r$ , on a :

$$\text{Fil}^i \mathcal{D} = \{ x \in \mathcal{D} \mid E(u)^{r-i} \mathcal{D} \in \text{Fil}^r \mathcal{D} \}.$$

**Définition 1.3.5.** L'entier  $r$  étant toujours fixé, un *module fortement divisible* sur  $S$  est la donnée de :

- un  $S$ -module  $\mathcal{M}$  libre de rang fini ;
- un sous-module  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  contenant  $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$  ;
- une application  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que le  $S$ -module engendré par  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$  soit exactement  $p^r \mathcal{M}$  ;
- un opérateur  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vérifiant :
  - la condition de Leibniz :  $N(sx) = N(s)x + sN(x)$  pour tout  $s \in S$  et tout  $x \in \mathcal{M}$  ;
  - la transversalité de Griffiths :  $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
  - la relation de commutation  $N\phi = p\phi N$

On note  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi, N}$  leur catégorie.

Il est aisé de voir que si  $\mathcal{M}$  est un module fortement divisible sur  $S$ , alors  $\mathcal{D} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{M}$  muni de l'unique filtration déterminée par  $\text{Fil}^r \mathcal{D} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Fil}^r \mathcal{M}$  est un  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $S[1/p]$ . Breuil démontre en outre dans [5] qu'il est toujours admissible<sup>3</sup>. Par ailleurs, à un  $\mathcal{M}$  comme précédemment, on peut associer une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation galoisienne par la formule :

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{S, \text{Fil}^r, \phi, N}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}}) \quad (1.2)$$

où comme toujours la notation signifie que l'on ne considère que les morphismes  $S$ -linéaires compatibles à  $\text{Fil}^r$ ,  $\phi$  et  $N$ . Encore une fois, le groupe  $G_K$  agit sur  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  par l'intermédiaire de son action naturelle sur  $\hat{A}_{\text{st}}$ . En tant que  $\mathbb{Z}_p$ -module, la représentation  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est libre et son rang est égal à celui de  $\mathcal{M}$  sur  $S$ . De la formule (1.1), il suit alors que  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  définit un réseau à l'intérieur de la représentation semi-stable  $V_{\text{st}}(D)$ .

**Théorème 1.3.6.** *Le foncteur  $T_{\text{st}}$  défini par la formule (1.2) réalise une anti-équivalence de catégories entre  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi, N}$  et la catégorie des  $\mathbb{Z}_p$ -réseaux stables par  $G_K$  à l'intérieur des représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate dans  $\{0, \dots, r\}$ .*

<sup>3</sup>Dans cette même référence, il démontre également, sous l'hypothèse  $er < p-1$ , une réciproque qui dit que tout  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $S[1/p]$  s'obtient en inversant  $p$  à partir d'un module fortement divisible sur  $S$ .

Le théorème précédent a d'abord été obtenu par Breuil dans le cas où  $e = 1$  (i.e.  $K = W[1/p]$ ) comme conséquence d'une étude minutieuse des objets de torsion (voir §1.4 ci-après pour plus de détails à ce sujet). En suivant les mêmes techniques, je l'ai ensuite étendu dans ma thèse sous l'hypothèse  $er < p - 1$ . Le cas général a enfin été établi par Liu dans [41] par des méthodes complètement différentes, basées en grande partie sur la théorie de Kisin qui sera présentée (succinctement) dans la suite de ce mémoire au §1.5.2.

## 1.4 La théorie en torsion

Lorsque l'on dispose de structures entières (en l'occurrence, ici, de modules fortement divisibles), on est tout de suite tenté de considérer des quotients de ceux-ci afin de développer une théorie en torsion, dans le but double d'étudier les représentations quotients correspondantes, mais aussi de mieux comprendre les structures entières elles-mêmes (avec pour objectif, par exemple, de démontrer le théorème 1.3.6). Cette approche a été tout d'abord développée par Breuil dans le cas  $e = 1$  dans [2], puis étendue par l'auteur dans sa thèse sous l'hypothèse légèrement moins restrictive  $er < p - 1$ .

### 1.4.1 Les catégories de Breuil

- On définit la catégorie  $'\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  dont les objets sont la donnée de
- un  $S$ -module  $\mathcal{M}$  de type fini ;
  - un sous-module  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  contenant  $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$  ;
  - une application  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vérifiant

$$\forall s \in \text{Fil}^r S, \forall x \in \mathcal{M}, \quad \phi_r(sx) = \frac{1}{c^r} \cdot \phi(s) \cdot \phi(E(u)^r x) \quad \text{avec} \quad c = \frac{\phi(E(u))}{p} \in S^\times \quad (1.3)$$

et dont l'image engendre  $\mathcal{M}$  en tant que  $S$ -module ;

- un opérateur  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vérifiant :
  - la condition de Leibniz :  $N(sx) = N(s)x + sN(x)$  pour tout  $s \in S$  et tout  $x \in \mathcal{M}$  ;
  - la transversalité de Griffiths :  $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$  ;
  - la relation de commutation  $(cN) \circ \phi_r = \phi_r \circ (E(u)N)$ .

On appelle  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  la sous-catégorie pleine de  $'\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  formée des objets  $\mathcal{M}$  qui sont annihilés par  $p$  et définissent des modules libres sur  $S/pS$ . On a une notion de suite exacte courte dans  $'\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  : une suite  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  est dite exacte si elle est exacte comme suite de  $S$ -modules et si elle induit une suite exacte  $0 \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{M}' \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ . Soit  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  la plus petite sous-catégorie pleine de  $'\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  contenant  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  et stable par extensions.

*Remarque 1.4.1.* L'écriture précédente diffère un peu de celle de la définition 1.3.5. La raison en est simplement que, dans le cas de torsion, il faut être prudent avec les divisions par  $p$ .

La formule

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{S, \text{Fil}^r, \phi, N}(\mathcal{M}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \hat{A}_{\text{st}})$$

définit un foncteur contravariant  $T_{\text{st}}$  de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  dans la catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_K)$  des  $\mathbb{Z}_p$ -représentations de  $G_K$  de longueur finie. On peut montrer par ailleurs que si  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$  sont deux modules fortement divisibles, alors le quotient  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2$  est un objet de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  et que l'on a une suite exacte de représentations galoisiennes  $0 \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}_2) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}_1) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow 0$  (attention au sens des flèches !).

**Théorème 1.4.2.** *On suppose  $er < p - 1$ . Alors, la catégorie  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  est abélienne et, en tant que modules, les noyaux et conoyaux dans cette catégorie sont les noyaux et conoyaux des applications  $S$ -linéaires sous-jacentes. De plus, le foncteur  $T_{\text{st}} : \text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_K)$  est exact, pleinement fidèle et son image essentielle est stable par quotients et sous-objets.*

Ce théorème est démontré dans [2] dans le cas où  $e = 1$  et dans [10] dans le cas général. Il est à noter que la preuve de la seconde partie du théorème (concernant les propriétés du foncteur  $T_{\text{st}}$ ) repose de façon cruciale sur l'étude des objets simples de la catégorie  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  qui ne sera présentée que plus loin dans ce mémoire (voir



§1.4.2). Toutefois, bien qu'on puisse objecter que cela brise la logique déductive, il nous a semblé qu'au niveau de l'exposition, il était plus commode et plus agréable de regrouper les deux résultats essentiels du théorème 1.4.2 dans un unique énoncé.

Dans le cas où  $er \geq p - 1$ , il n'est plus vrai que les catégories  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  sont abéliennes, ni que le foncteur  $T_{\text{st}}$  est plein. On reviendra longuement sur cette question dans le §2. On signale enfin, sans s'attarder sur la question, que, dans le monde de torsion, on dispose encore d'un analogue du théorème 1.1.1 établissant un lien entre la cohomologie étale  $p$ -adique et la cohomologie log-cristalline<sup>4</sup>.

**Théorème 1.4.3.** *Soit  $X$  une variété propre et lisse sur  $K$ , admettant un modèle semi-stable sur l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$ . Soient  $n > 0$  et  $r \geq 0$  deux entiers. On suppose  $er < p - 1$  et  $e(r - 1) < p - 1$  si  $n$  et  $e$  sont tous les deux strictement supérieurs à 1.*

*Le groupe de cohomologie log-cristalline  $\mathcal{M} = H^r((X_n/\text{Spec } S_n)_{\text{log-cris}}, \mathcal{O}_{X_n/\text{Spec } S_n})$  (où  $X_n$  est vu sur  $\text{Spec } S_n$  via l'épaississement  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n) \rightarrow \text{Spec } S_n$ ,  $u \mapsto \pi$ ) est alors canoniquement muni d'une structure d'objet de  $\text{Mod}_{/S_n}^{r,\phi,N}$  pour laquelle on a un isomorphisme canonique :*

$$H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{M})^\vee.$$

À nouveau, ce théorème est un résultat de Breuil dans le cas où  $e = 1$  (voir [3]), et a été ensuite généralisé par l'auteur dans la version ci-dessus dans [11]. Le théorème implique en particulier que les représentations de torsion issues de la cohomologie étale  $p$ -adique des « bonnes » variétés sont dans l'image essentielle du foncteur  $T_{\text{st}}$ . Les résultats qui vont être présentés dans le §4 s'appliquent donc en particulier à ces représentations.

## 1.4.2 Description des objets simples

Comme dans le théorème 1.4.2, on se place dans le cas où  $er < p - 1$ . Une première étape importante pour comprendre la structure de la catégorie abélienne  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  est d'étudier ses objets simples. On introduit, pour ce faire, la définition suivante.

**Définition 1.4.4.** On note  $\mathcal{R}$  le quotient de  $\mathbb{Q}$  par la relation d'équivalence  $\sim$  définie par :

$$x \sim y \iff \exists n, m \in \mathbb{N}, \quad p^n x \equiv p^m y \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (1.4)$$

La relation  $\sim$  se visualise de façon agréable lorsque l'on écrit  $x$  et  $y$  en base  $p$ . En effet, puisque ces nombres sont rationnels, on sait que la suite de leurs décimales est périodique à partir d'un certain rang. Les nombres  $x$  et  $y$  sont alors équivalents pour  $\sim$  si, et seulement si les suites de chiffres qui se repètent pour  $x$  et  $y$  sont identiques (à une permutation circulaire près). D'après ce qui vient d'être dit, *via* l'écriture en base  $p$ , un élément de  $\rho \in \mathcal{R}$  peut être interprété comme une suite périodique  $(\rho_n)$  à valeurs dans  $\{0, \dots, p - 1\}$ , à condition de prendre soin d'identifier, d'une part, deux suites qui se déduisent l'une de l'autre par un décalage des indices et, d'autre part, la suite constante égale à 0 avec la suite constante égale à  $p - 1$ . Pour tout  $\rho \in \mathcal{R}$ , on note  $h(\rho)$  la plus petite période de la suite associée  $(\rho_n)$ ; cela ne dépend évidemment pas du choix de  $(\rho_n)$ . Si  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  est un représentant irréductible de  $\rho$  tel que  $b$  ne divise pas  $p$  (il est clair qu'un tel représentant existe toujours), l'entier  $h(\rho)$  s'interprète également comme l'ordre de  $b$  modulo  $p$ .

L'entier  $r$  étant toujours fixé, on note  $\mathcal{R}_{\leq er}$  l'ensemble des éléments  $\rho \in \mathcal{R}$  dont la suite  $(\rho_n)$  associée prend ses valeurs dans  $\{0, \dots, er\}$  ou est constante égale à  $p - 1$ . À un élément  $\rho \in \mathcal{R}_{\leq er}$ , on associe un objet  $\mathcal{M}(\rho)$  de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  libre de rang  $h = h(\rho)$  sur  $S/pS$ ; si  $(\rho_n)$  désigne une suite périodique correspondant à  $\rho$  qui n'est pas constante égale à  $p - 1$ , l'objet  $\mathcal{M}(\rho)$  est défini comme suit :

- en tant que  $S$ -module,  $\mathcal{M}(\rho) = (S/pS)e_1 \oplus (S/pS)e_2 \oplus \dots \oplus (S/pS)e_h$ ;
- le sous-module  $\text{Fil}^r \mathcal{M}(\rho)$  est celui engendré par les  $u^{er-\rho_i} e_i$ , pour  $1 \leq i \leq h$ ;
- le Frobenius  $\phi_r$  sur  $\mathcal{M}(\rho)$  est défini par les égalités  $\phi_r(u^{er-\rho_i} e_i) = e_{i+1}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$  avec la convention  $e_{h+1} = e_0$ ;
- l'opérateur de monodromie  $N$  sur  $\mathcal{M}(\rho)$  est défini par  $N(e_i) = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ .

<sup>4</sup>Pour la définition de la cohomologie log-cristalline, on renvoie à [37].

Si on remplace la suite  $(\rho_n)$  par une autre obtenue par décalage des indices, les objets précédemment définis sont isomorphes entre eux ; ainsi  $\mathcal{M}(\rho)$  ne dépend bien que de  $\rho \in \mathcal{R}$  comme le sous-entend la notation. On prendra garde par ailleurs au fait que l'opérateur  $N$  n'est pas nul sur  $\mathcal{M}(\rho)$  ; en effet, la relation de Leibniz implique par exemple que  $N(ue_i) = N(u)e_i = -ue_i$  pour tout  $i$ .

**Théorème 1.4.5.** *Les objets  $\mathcal{M}(\rho)$  sont simples et deux à deux non isomorphes. De plus, si  $k$  est algébriquement clos, tout objet simple de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  est isomorphe à l'un des  $\mathcal{M}(\rho)$ .*

On sait en outre calculer explicitement la représentation galoisienne associée *via* le foncteur  $T_{\text{st}}$  aux objets  $\mathcal{M}(\rho)$ . Pour ce mémoire, on se contente de présenter le résultat lorsque le corps  $k$  est algébriquement clos ce qui, en d'autres termes, revient à calculer uniquement la restriction de la représentation au sous-groupe d'inertie. On introduit dans un premier temps le caractère

$$\omega_h : I_K \rightarrow \mathbb{F}_{p^h}, \sigma \mapsto \frac{\sigma(\eta)}{\eta} \quad \text{où } \eta \in \bar{K}, \eta^{p^h-1} = \pi. \quad (1.5)$$

Il s'agit, par définition, du caractère fondamental de Serre de niveau  $h$  (tel que défini par exemple dans [47]). Par ailleurs, si  $\theta : I_K \rightarrow \mathbb{F}_{p^h}$  est un caractère, on note  $\mathbb{F}_{p^h}(\theta)$  la  $\mathbb{F}_{p^h}$ -représentation de  $I_K$  de dimension 1 correspondante. Bien entendu, par restriction des scalaires,  $\mathbb{F}_{p^h}(\theta)$  est aussi une  $\mathbb{F}_p$ -représentation de dimension  $h$ .

**Théorème 1.4.6.** *Pour tout  $\rho = (\rho_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{R}_{\leq er}$ , on a, en notant  $h = h(\rho)$  :*

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho)) \simeq \mathbb{F}_{p^h}(\omega_h^{p^{h-1}\rho_1 + \dots + p\rho_{h-1} + \rho_h})$$

en tant que  $\mathbb{F}_p$ -représentations de  $I_K$ .

*Remarque 1.4.7.* Le nombre rationnel  $\frac{p^{h-1}\rho_1 + \dots + p\rho_{h-1} + \rho_h}{p^h-1}$  (ayant pour numérateur l'exposant qui apparaît sur le caractère  $\omega_h$  dans le théorème précédent, et pour dénominateur l'ordre de ce caractère) est un représentant de  $\rho$  considéré comme élément de  $\mathcal{R}$ .

Une conséquence du théorème 1.4.6 est que, pour tout  $\rho \in \mathcal{R}_{\leq er}$ , la représentation  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$  est munie d'une structure de  $\mathbb{F}_{p^h}$ -espace vectoriel. Ceci peut paraître surprenant à première vue, mais peut en réalité se retrouver directement par un argument élémentaire de théorie des représentations si l'on sait que la représentation  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$  est irréductible. En effet, le lemme de Schur dit alors que les endomorphismes de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$  qui commutent à l'action galoisienne forment un corps  $E$ . Celui-ci est clairement fini et de caractéristique  $p$  ; il est donc isomorphe à  $\mathbb{F}_{p^d}$  pour un certain entier  $d$ . On a, par ailleurs, une action tautologique de  $E$  sur  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$ , qui fait apparaître ce dernier espace comme un  $E$ -espace vectoriel. En utilisant l'irréductibilité de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$ , on montre alors que  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$  est de dimension 1 sur  $E$  et, par suite, que  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_{p^h}$  comme voulu.

Les théorèmes 1.4.5 et 1.4.6 sont démontrés dans l'article [10]. Comme cela a déjà été dit, ils jouent un rôle important dans la démonstration des propriétés du foncteur  $T_{\text{st}}$  qui ont été énoncées précédemment dans le théorème 1.4.2. Combinés au théorème 1.4.3, ils permettent également d'obtenir des contraintes sur l'action de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée des représentations du type  $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$  lorsque les entiers  $n$  et  $r$  vérifient les hypothèses du théorème 1.4.3, répondant ainsi par l'affirmative à une question qu'avait posée Serre dans [47]. À ce sujet, on renvoie au §5.3 de [11] pour plus de détails.

## 1.5 Oubli de l'opérateur de monodromie

À force de manipuler les objets de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$ , on se rend compte que, dans un certain nombre de cas (par exemple pour démontrer tous les théorèmes qui ont été énoncés précédemment), l'opérateur de monodromie joue un rôle très marginal, presque fantomatique. Cette constatation amène à introduire, puis à étudier pour elles-mêmes, les catégories  $\text{Mod}_{/S}^{r,\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$ ) définies de manière analogue à  $\text{Mod}_{/S}^{r,\phi,N}$  (resp.  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$ ) sauf que l'on omet partout la donnée de  $N$ . À un objet de  $\mathcal{M}$  de  $\text{Mod}_{/S}^{r,\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$ ), on sait encore associer une représentation galoisienne par la formule :

$$T_{\text{cris}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{S, \text{Fil}^r, \phi}(\mathcal{M}, A_{\text{cris}}) \quad (\text{resp. } T_{\text{cris}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{S, \text{Fil}^r, \phi}(\mathcal{M}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\text{cris}}))$$

où  $A_{\text{cris}}$  est vu comme une  $S$ -algèbre *via* le morphisme structural  $S \rightarrow A_{\text{cris}}$ ,  $u \mapsto [\pi]$ . Il faut toutefois faire attention à ce que  $T_{\text{cris}}(\mathcal{M})$  n'est pas muni d'une action de tout le groupe de Galois  $G_K$  étant donné que celui-ci n'agit pas trivialement sur  $S \subset A_{\text{cris}}$ . Par contre, si on note  $\pi_s$  les composantes de l'élément  $\pi \in R$  considéré précédemment, et si on pose  $K_s = K(\pi_s)$  et  $K_\infty = \bigcup_{s \geq 1} K_s$ , le sous-groupe  $G_\infty = \text{Gal}(\bar{K}/K_\infty)$  de  $G_K$  agit, lui, trivialement sur  $S$ . De ce fait, l'espace  $T_{\text{cris}}(\mathcal{M})$  hérite d'une action de  $G_\infty$ . Breuil démontre en outre que si  $\mathcal{M}$  de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$ , alors la projection  $\hat{A}_{\text{st}} \rightarrow A_{\text{cris}}$ ,  $X \mapsto 0$  induit un isomorphisme  $G_\infty$ -équivariant  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{cris}}(\mathcal{M})$ . Autrement dit, si on désigne par  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{libre}}(G)$  (resp.  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G)$ ) la catégorie des  $\mathbb{Z}_p$ -représentations continues libres de rang fini (resp. de longueur finie) d'un groupe topologique  $G$ , les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_{/S}^{r,\phi,N} & \xrightarrow{T_{\text{st}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{libre}}(G_K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Mod}_{/S}^{r,\phi} & \xrightarrow{T_{\text{cris}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{libre}}(G_\infty) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N} & \xrightarrow{T_{\text{st}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi} & \xrightarrow{T_{\text{cris}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_\infty) \end{array}$$

(dans lesquels les flèches verticales désignent les foncteurs évidents) sont commutatifs.

### 1.5.1 Le lien avec la théorie du corps des normes

Dans ce qui précède, on a vu apparaître les représentations du sous-groupe  $G_\infty$ . Or, celles-ci sont complètement classifiées, de façon indépendante, par certains  $\phi$ -modules *via* la théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger (voir [50]). Il semble ainsi se dessiner un pont — que l'on peut espérer profond et fructueux — entre, d'une part, ces  $\phi$ -modules et, d'autre part, la théorie de Breuil, et plus particulièrement les catégories  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$ .

Avant de pouvoir en dire davantage, il est nécessaire de faire quelques rappels au sujet de la théorie du corps des normes et de son utilisation pour classifier les représentations de  $G_\infty$ . On rappelle pour commencer qu'on a déjà introduit au §1.1 l'anneau  $R = \varprojlim_{s \geq 0} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ , et qu'on a vu en particulier que celui-ci était intègre et même muni d'une valuation (non discrète)  $v_R$ . Son corps des fractions  $\text{Frac } R$  est ainsi bien défini, et on peut montrer qu'il est algébriquement clos. Le morphisme d'anneaux  $\iota : k \rightarrow R$ ,  $\lambda \mapsto (\lambda^{p^{-s}})_{s \geq 0}$  (on rappelle que  $k$  est supposé parfait) fait de  $R$  une  $k$ -algèbre. L'élément  $\pi \in R$  est de valuation strictement positive, ce qui permet de prolonger  $\iota$  en un morphisme d'anneaux  $k((u)) \rightarrow \text{Frac } R$ ,  $P(u) \mapsto P(\pi)$ . Par abus, on note encore  $k((u))$  son image par  $\iota$  dans  $\text{Frac } R$ . Soit  $k((u))^{\text{sep}}$  la clôture séparable de  $k((u))$  dans  $\text{Frac } R$ . Le groupe  $G_\infty$  agit naturellement sur  $R$  et laisse fixe point par point  $k((u))$ . Ainsi, il stabilise  $k((u))^{\text{sep}}$  et on récupère, de ce fait, un morphisme de groupes  $G_\infty \rightarrow \text{Gal}(k((u))^{\text{sep}}/k((u)))$ . Un des résultats principaux de la théorie du corps des normes est que ce morphisme est un isomorphisme. À partir de maintenant, on identifiera ces deux groupes sans commentaire supplémentaire.

Si  $A$  est un anneau muni d'un endomorphisme  $\phi : A \rightarrow A$ , on définit un  $\phi$ -module sur  $A$  comme la donnée d'un  $A$ -module  $M$  de type fini muni d'un endomorphisme  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi : M \rightarrow M$ . Lorsque ce dernier induit un isomorphisme  $\text{id} \otimes \phi : A \otimes_{\phi, A} M \rightarrow M$ , on dit que le  $\phi$ -module  $M$  est *étale*. Ce qui précède s'applique en particulier avec  $A = k((u))$  muni du Frobenius usuel (*i.e.* l'élévation à la puissance  $p$ ), et on peut ainsi parler de  $\phi$ -modules étales sur  $k((u))$ . Le résultat suivant, qui est une conséquence simple du théorème de Hilbert 90 sur le calcul de la cohomologie galoisienne du groupe  $\text{GL}_d$ , est dû à Fontaine.

**Théorème 1.5.1** (Fontaine). *Les foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{F}_p\text{-représentations de} \\ \text{dimension finie de } G_\infty \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \phi\text{-modules étales sur } k((u)) \right\} \\ T & \mapsto & \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_\infty]}(T, k((u))^{\text{sep}}) \\ \text{Hom}_{k((u)), \phi}(M, k((u))^{\text{sep}}) & \leftarrow & M \end{array}$$

sont des anti-équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

À partir de là, toujours suivant Fontaine, on déduit par relèvement modulo  $p^n$  puis passage à la limite, un théorème de classification pour les  $\mathbb{Z}_p$ -représentations de  $G_\infty$  libres ou de torsion. Pour énoncer ce nouveau résultat, on a besoin d'introduire l'anneau

$$\mathcal{E}^{\text{int}} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i u^i \mid a_i \in W, \lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = 0 \right\}.$$

Il est muni de la valuation  $p$ -adique qui en fait un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel  $k((u))$ . Par ailleurs, il se plonge naturellement dans  $W(\text{Frac } R)$  en envoyant  $u$  sur  $[\pi]$ . Le Frobenius usuel sur  $W(\text{Frac } R)$  définit par restriction et corestriction un endomorphisme  $\phi : \mathcal{E}^{\text{int}} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{int}}$  qui induit le Frobenius usuel sur  $k((u))$  après réduction modulo  $p$ . Il fait donc sens de parler de  $\phi$ -modules étales sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . On pose  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\text{int}}[1/p]$  et on note  $\mathcal{E}^{\text{nr}}$  l'unique extension non ramifiée de  $\mathcal{E}$ , incluse dans  $W(\text{Frac } R)[1/p]$ , dont le corps résiduel est égal à  $k((u))^{\text{sep}}$ . Soit encore  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{nr}}$  l'anneau des entiers de  $\mathcal{E}^{\text{nr}}$ ; on a  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{nr}} = \mathcal{E}^{\text{nr}} \cap W(\text{Frac } R)$  dans  $W(\text{Frac } R)[1/p]$ . La généralisation du théorème 1.5.1 dit alors que l'on a les deux anti-équivalences de catégories suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_\infty) & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \phi\text{-modules étales sur } \mathcal{E}^{\text{int}} \\ \text{de longueur finie comme } \mathcal{E}^{\text{int}}\text{-modules} \end{array} \right\} \\ T & \mapsto & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{E}^{\text{int}, \text{nr}}) \\ \text{Hom}_{\mathcal{E}^{\text{int}, \phi}}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{E}^{\text{int}, \text{nr}}) & \leftarrow & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{libre}}(G_\infty) & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \phi\text{-modules étales sur } \mathcal{E}^{\text{int}} \\ \text{libres de rang fini comme } \mathcal{E}^{\text{int}}\text{-modules} \end{array} \right\} \\ T & \mapsto & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathcal{E}^{\text{int}, \text{nr}}) \\ \text{Hom}_{\mathcal{E}^{\text{int}, \phi}}(M, \mathcal{E}^{\text{int}, \text{nr}}) & \leftarrow & M \end{array}$$

En composant ces anti-équivalences de catégories avec  $T_{\text{cris}}$ , on obtient des foncteurs qui, à un objet de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r, \phi}$  ou  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi}$ , associent un  $\phi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . Peut-on comprendre ces foncteurs sans avoir à passer par les représentations galoisiennes ? Si l'on regarde avec un peu d'attention les objets mis en jeu, plusieurs indices montrent que la réponse ne semble pas évidente ; par exemple, dans le cas de torsion, l'élément  $u$  est nilpotent dans tous les  $S/p^n S$  (et donc dans tous les objets de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r, \phi}$ ) alors qu'il est inversible dans  $k((u))$  et, plus généralement dans, tous les  $\mathcal{E}^{\text{int}}/p^n \mathcal{E}^{\text{int}}$ . Pour passer d'un monde à l'autre, il semble donc nécessaire d'avoir un troisième type d'objets permettant de faire le lien. Il s'agit là de l'approche suivie par Breuil. De façon plus précise, il a introduit dans [6] et [4] l'anneau  $\mathfrak{S} = W[[u]]$  ainsi que de nouvelles catégories  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r, \phi}$  et  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r, \phi}$  de  $\phi$ -modules définis sur  $\mathfrak{S}$ . Voici, légèrement remaniée après certains travaux de Liu, la définition précise de ces catégories.

**Définition 1.5.2** (Breuil, Liu). Un objet de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r, \phi}$  est la donnée d'un  $\phi$ -module  $\mathfrak{M}$  sur  $\mathfrak{S}$  qui est libre de rang fini comme  $\mathfrak{S}$ -module et qui vérifie la condition suivante :

$$\text{le } \mathfrak{S}\text{-module engendré par } \phi(\mathfrak{M}) \text{ contient } E(u)^r \mathfrak{M}. \quad (1.6)$$

Un objet de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r, \phi}$  est la donnée d'un  $\phi$ -module  $\mathfrak{M}$  sur  $\mathfrak{S}$  qui est de longueur finie comme  $\mathfrak{S}$ -module, qui n'a pas de  $u$ -torsion et qui vérifie la condition (1.6).

*Remarque 1.5.3.* Les catégories précédentes gardent un sens pour un entier quelconque  $r$ . On peut même les définir pour  $r = \infty$  en convenant que  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\infty, \phi} = \bigcup_{r \geq 0} \text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r, \phi}$  et  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{\infty, \phi} = \bigcup_{r \geq 0} \text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r, \phi}$ . Cette remarque prendra toute son importance lorsque l'on étudiera au §1.5.2 la théorie de Kisin.

Les objets de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r, \phi}$  et  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r, \phi}$  sont directement liés aux  $\phi$ -modules sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  : si  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , l'extension des scalaires de  $\mathfrak{S}$  à  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  définit un foncteur de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r, \phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r, \phi}$ ) dans la catégorie des  $\phi$ -modules étales sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  qui sont libres de rang fini (resp. de longueur finie) en tant que  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ -module. Ces foncteurs ne sont pas essentiellement surjectifs et, par définition, un objet dans leur image essentielle est dite *de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$*  (si  $r = \infty$ , on dit également *de  $E(u)$ -hauteur finie*). Il est en outre montré dans [19] (voir proposition 3.1) que si un  $\phi$ -module étale libre sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  est de  $E(u)$ -hauteur finie, alors il admet un *unique*  $\mathfrak{S}$ -réseau stable par  $\phi$  qui est un objet de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r, \phi}$ . Ce résultat d'unicité n'est par contre plus vrai dans le cas de torsion ; à ce propos, on étudiera au §3 les espaces de modules de ces réseaux, et on verra à ce moment qu'ils sont généralement très loin d'être réduits à un point.

En parallèle de cela, Breuil a aussi établi un lien entre les catégories  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r, \phi}$  et  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi}$  d'une part, et  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r, \phi}$  et  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r, \phi}$  d'autre part, en construisant des foncteurs  $M_{\mathfrak{S}} : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r, \phi} \rightarrow \text{Mod}_{/S}^{r, \phi}$  et  $M_{\mathfrak{S}_\infty} : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r, \phi} \rightarrow \text{Mod}_{/S_\infty}^{r, \phi}$ . À un objet  $\mathfrak{M}$  de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r, \phi}$  ou de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r, \phi}$ , ils associent l'objet  $\mathcal{M} = S \otimes_{\phi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  où le morphisme  $\phi : \mathfrak{S} \rightarrow S$  est celui

qui envoie  $u$  sur  $u^p$ . Les structures supplémentaires sur  $\mathcal{M}$  sont définies comme suit :  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  est l'image inverse de  $\text{Fil}^r S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  par l'application  $\text{id} \otimes \phi : \mathcal{M} \rightarrow S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , et  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  est la composée  $(\frac{\phi}{p^r} \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \phi)$ . Il est immédiat de vérifier que l'objet  $\mathcal{M}$  ainsi obtenu muni de ces structures supplémentaires est dans la catégorie  $\text{Mod}_{/S}^{r,\phi}$  ou  $\text{Mod}_{/S_{\infty}}^{r,\phi}$  selon que  $\mathfrak{M}$  était à l'origine un objet de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r,\phi}$  ou  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_{\infty}}^{r,\phi}$ .

**Théorème 1.5.4.** *Les foncteurs  $M_{\mathfrak{S}}$  et  $M_{\mathfrak{S}_{\infty}}$  sont des équivalences de catégories. De plus, la composée  $T_{\text{cris}} \circ M_{\mathfrak{S}}$  (resp.  $T_{\text{cris}} \circ M_{\mathfrak{S}_{\infty}}$ ) associe à un objet  $\mathfrak{M}$  de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r,\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_{\infty}}^{r,\phi}$ ) la représentation de  $G_{\infty}$  associée au  $\phi$ -module  $\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ .*

Dans le cas des objets annulés par  $p$ , ce théorème est dû à Breuil et est prouvé dans [6]. Dans le cas général, la seconde partie du théorème était certainement déjà connue de Breuil et apparaît en filigrane dans plusieurs de ses travaux, mais il semble qu'elle ait été pour la première fois écrite noir sur blanc sous cette forme et dans cette généralité par Kisin dans [39]. Enfin, en ce qui concerne la première assertion du théorème, c'est dans le cas général le fruit d'un travail en collaboration avec Liu (voir [13], théorèmes 2.2.1 et 2.3.1).

## 1.5.2 La théorie de Kisin

Dans ce paragraphe, on donne un aperçu très bref (en se bornant exclusivement à ce qui sera utile dans la suite) de la théorie développée par Kisin dans [38] et [39]. Si l'on met bout à bout un certain nombre de résultats qui ont été rappelé précédemment dans ce mémoire, on s'aperçoit que les objets de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r,\phi}$  sont reliés aux  $(\phi, N)$ -modules filtrés de Fontaine. En effet, à un objet de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r,\phi}$ , on peut associer d'abord un module fortement divisible sur  $S$  en utilisant le foncteur  $M_{\mathfrak{S}}$ , module qui donne ensuite, en inversant  $p$ , un  $(\phi, N)$ -module filtré effectif admissible sur  $S[1/p]$  qui correspond finalement par l'équivalence du théorème 1.3.4 à un  $(\phi, N)$ -module filtré effectif admissible sur  $W[1/p]$ .

Un des objectifs de la théorie de Kisin — qui est celui sur lequel on souhaite mettre l'accent dans ce mémoire — est de reconstruire ce lien entre objets de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{r,\phi}$  et  $(\phi, N)$ -modules filtrés effectifs admissibles en passant par un chemin différent, qui est celui des  $(\phi, N_{\nabla})$ -modules sur  $\mathcal{O}$ . Un des avantages absolument remarquable de l'approche de Kisin est que sa construction fonctionne pour tout entier  $r \geq 0$ , alors que le passage par la théorie de Breuil imposait *de facto* la restriction sévère  $r < p - 1$ .

Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des séries en la variable  $u$  convergeant dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Il contient clairement  $\mathfrak{S}[1/p]$  et se plonge dans  $B_{\text{cris}}^+$  en envoyant comme d'habitude  $u$  sur  $[\pi]$ . Le Frobenius de  $B_{\text{cris}}^+$  définit par restriction un endomorphisme de  $\mathcal{O}$  encore noté  $\phi$ . On considère l'élément  $\lambda$  défini par le produit convergeant suivant :

$$\lambda = \prod_{n=0}^{\infty} \phi^n \left( \frac{E(u)}{E(0)} \right).$$

Il vérifie manifestement  $\frac{E(u)}{E(0)} \cdot \phi(\lambda) = \lambda$  et permet de munir l'anneau  $\mathcal{O}$  d'un opérateur de dérivation  $N_{\nabla}$  défini par  $N_{\nabla} = -u\lambda \frac{d}{du}$ . On introduit la catégorie  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{r,\phi,N_{\nabla}}$  dont un objet consiste en la donnée des points suivants :

- un  $\mathcal{O}$ -module  $\mathcal{M}$  libre de rang fini ;
- un morphisme  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  qui est tel que le conoyau de  $\text{id} \otimes \phi : \mathcal{O} \otimes_{\phi,\mathcal{O}} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  soit annulé  $E(u)^r$  ;
- un opérateur  $N_{\nabla} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vérifiant la loi de Leibniz (i.e.  $N_{\nabla}(ax) = N_{\nabla}(a)x + aN_{\nabla}(x)$  pour tout  $a \in \mathcal{O}$  et  $x \in \mathcal{M}$ ) et la relation  $N_{\nabla} \circ \phi = p \cdot \frac{E(u)}{E(0)} \cdot \phi \circ N_{\nabla}$ .

Comme précédemment, on note aussi  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\infty,\phi,N_{\nabla}} = \bigcup_{r \geq 0} \text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{r,\phi,N_{\nabla}}$ . Un résultat essentiel de [39] est la construction d'une équivalence de catégorie  $\mathcal{K}$  allant de la catégorie des  $(\phi, N)$ -modules filtrés effectifs sur  $W[1/p]$  dans la catégorie  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\infty,\phi,N_{\nabla}}$ . On note  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\infty,\phi,N_{\nabla},0}$  (resp.  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{r,\phi,N_{\nabla},0}$ ) la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\infty,\phi,N_{\nabla}}$  (resp.  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{r,\phi,N_{\nabla}}$ ) correspondant à la sous-catégorie des  $(\phi, N)$ -modules filtrés admissibles<sup>5</sup>. Kisin démontre encore deux résultats importants pour ce qui va suivre, à savoir que pour tout objet  $\mathcal{M}$  de  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\infty,\phi,N_{\nabla}}$ ,

- i) le  $\phi$ -module  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$  (muni de l'opérateur  $\phi$  déduit par extension des scalaires) est étale et correspond à la restriction à  $G_{\infty}$  de la représentation semi-stable associée à  $\mathcal{K}^{-1}(\mathcal{M})$  ;

<sup>5</sup>Kisin donne une caractérisation de  $\text{Mod}_{/\mathcal{O}}^{\infty,\phi,N_{\nabla},0}$  en termes de filtrations par les pentes à la Kedlaya, On se contente de renvoyer à [39] pour plus de précisions à ce sujet.

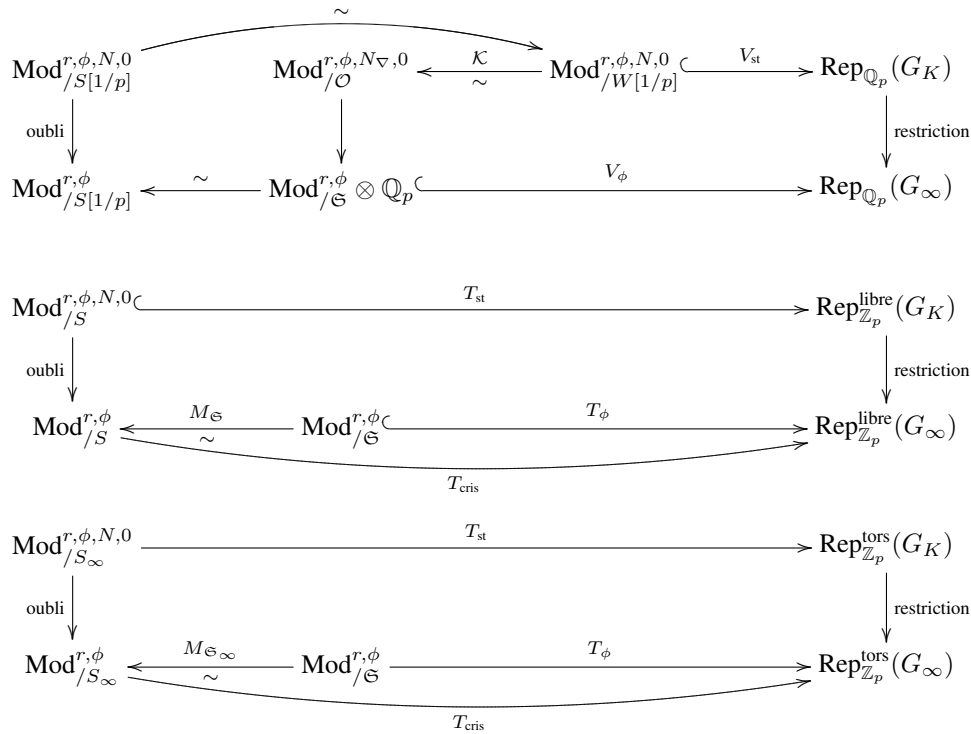


FIG. 1.1 – Diagramme récapitulatif des objets introduits dans le §1

- ii) tout réseau de  $\mathcal{K}^{-1}(\mathcal{M})$  stable par  $G_\infty$  est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  ; on rappelle que l'on entend par là qu'il existe dans le  $\phi$ -module sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  correspondant (qui vit à l'intérieur de  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ ) un  $\mathfrak{S}$ -réseau (nécessairement unique) qui est un objet de  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{r,\phi}$  (en particulier, il est stable par  $\phi$ ).

Comme corollaire de ces propriétés, on trouve que toute représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$  est de  $E(u)$ -hauteur finie, et même plus précisément de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  dès que les poids de Hodge-Tate sont dans  $\{0, \dots, r\}$ . La propriété ii) permet en outre de construire un foncteur  $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{r,\phi,N\nabla,0} \rightarrow \text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{r,\phi} \otimes \mathbb{Q}_p$ , où la notation  $\ll \otimes \mathbb{Q}_p \gg$  signifie que l'on forme la catégorie à isogénie près<sup>6</sup>.

## 1.6 Récapitulatif et introduction aux parties suivantes

Un récapitulatif de toutes les catégories et de tous les foncteurs introduits dans cette partie est présenté dans les trois diagrammes commutatifs de la figure 1.1. Dans ces diagrammes, la lettre  $r$  désigne un élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , et les flèches  $\hookrightarrow$  représentent des foncteurs pleinement fidèles. Lorsque  $r \geq p - 1$ , les catégories d'objets sur  $S$  ou  $S[1/p]$  ainsi que les foncteurs qui les mettent en jeu ne sont pas définis, et doivent donc être effacés des diagrammes. Les foncteurs  $V_\phi$  et  $T_\phi$  n'ont pas encore été introduits : à un objet  $\mathfrak{M}$ , ils font correspondre simplement la représentation de  $G_\infty$  associé au  $\phi$ -module  $\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ .

L'opération d'inversion de  $p$  définit des foncteurs partant des catégories du deuxième diagramme et aboutissant dans celles qui leur correspondent dans le premier diagramme. De même, la réduction modulo une puissance de  $p$  (fixée) définit des foncteurs allant du second diagramme dans le troisième. Lorsque l'on ajoute ces foncteurs sur la figure 1.1, on obtient un diagramme tridimensionnel qui est encore commutatif.

Lorsque  $r$  est fini, toutes les catégories précédentes sont équipées d'une dualité que l'on désignera dans toute la suite par le symbole  $\star$  : cela signifie que le dual d'un objet  $X$  sera systématiquement noté  $X^\star$ . Pour des raisons de compatibilité, on choisit une dualité twistée (par rapport à la dualité classique) sur les catégories représentations ; de façon plus précise, si  $T$  est une représentation de  $G_K$  ou  $G_\infty$  et si  $X^\vee$  désigne son dual au sens usuel, on définit  $X^\star = X^\vee(r)$  (où la notation  $\langle (r) \rangle$  correspond au twist de Tate). Pour la définition des autres dualités, on se

<sup>6</sup>Cela signifie que les objets sont les mêmes, mais que les ensembles de morphismes sont tensorisés par  $\mathbb{Q}$

contente de renvoyer à la littérature : en ce qui concerne les  $(\phi, N)$ -modules filtrés de Fontaine, il s'agit d'une construction classique par exemple expliquée dans [27] ; sur les catégories de Breuil, elle a été définie par l'auteur dans [9], chapitre V ; enfin, sur les catégories de  $\phi$ -modules sur  $\mathfrak{S}$ , la construction est due à Liu et est donnée dans [42], §3.1. Tous les foncteurs dont il a été question jusqu'à présent (qu'ils sont covariants ou contravariants) sont compatibles à la dualité.

Les diagrammes de la figure 1.1 résument, à peu de choses près, l'état d'avancement des théories de Breuil et de Breuil-Kisin<sup>7</sup> (si l'on excepte les applications) en 2006, c'est-à-dire approximativement à la fin de la thèse de l'auteur. Un examen rapide de ces diagrammes fait apparaître plusieurs lacunes flagrantes, notamment :

- a) dans la théorie de torsion lorsque  $er \geq p - 1$ , les propriétés des foncteurs  $T_\phi$ ,  $T_{\text{cris}}$  et  $T_{\text{st}}$  (et des catégories sur lesquelles ces foncteurs sont définis) n'apparaissent pas ;
- b) il manque un équivalent de la catégorie de Kisin  $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{r, \phi, N_{\nabla}, 0}$  dans les cas entiers et de torsion ; ceci est particulièrement gênant lorsque  $r \geq p - 1$  car les catégories de Breuil ne sont alors pas non plus définies, et on ne dispose donc finalement aucune description complète des réseaux et de leurs quotients dans les représentations semi-stables ;
- c) les images essentielles des foncteurs vers les représentations galoisiennes ne sont pas précisées.

Le fil directeur de mes travaux depuis 2006 est de combler — ou, pour le moins, d'apporter des éléments dans cette direction — les lacunes qui viennent d'être mises en évidence. Dans la suite de ce mémoire, je présente les principaux résultats que j'ai obtenus dans cette direction.

Les parties 2 et 3 traitent du point a) selon deux points de vue différents : dans le §2, on étudie les propriétés « catégoriques<sup>8</sup> » des foncteurs  $T_{\text{cris}}$  et  $T_{\text{st}}$ , alors que dans le §3, on s'intéresse à la structure géométrique de ses fibres. À la fin de la partie 2, et plus précisément au §2.4, on donne également une première réponse au point c) dans le cas des objets annulés par  $p$  : on définit un foncteur  $M_{\text{st}} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K) \rightarrow \text{Mod}_{S_1}^{r, \phi, N}$  et on montre qu'une représentation  $T$  est dans  $T_{\text{st}}(\text{Mod}_{S_1}^{r, \phi, N})$  si, et seulement si  $\dim_{S_1} M_{\text{st}}(T) = \dim_{\mathbb{F}_p}(T)$ . Dans ce cas, en outre,  $M_{\text{st}}(T)$  est un objet (particulier) de  $\text{Mod}_{S_1}^{r, \phi, N}$  qui s'envoie sur  $T$  par  $T_{\text{st}}$ .

Dans la partie 4, on poursuit l'étude du point c) selon un angle d'attaque différent. Plutôt que de chercher à caractériser les représentations dans l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$  à l'aide d'anneaux de périodes<sup>9</sup>, on dégage des propriétés communes simples (portant typiquement sur l'action du sous-groupe d'inertie) partagées par ces représentations. Cela fournit des conditions nécessaires pour qu'une représentation soit dans l'image essentielle de  $T_{\text{cris}}$  et de  $T_{\text{st}}$ . Dans le cas du foncteur  $T_{\text{cris}}$  et des représentations annulées par  $p$ , on obtient également des conditions suffisantes de même nature.

Dans son article [43], Liu apporte une première réponse au point b) : il définit des catégories de  $(\phi, \hat{G})$ -modules qui remplissent exactement les cases restées vides dans les diagrammes de la figure 1.1. Dans la partie 5 de ce mémoire, on réinterprète les constructions de Liu dans un contexte plus général, et on aboutit ce faisant à la théorie des  $(\phi, \tau)$ -modules. Comme corollaire de cette étude, on obtient trois applications intéressantes : la première dit que, sous certaines hypothèses (vérifiées par exemple lorsque  $e = 1$ ), qu'une représentation est semi-stable dès que sa restriction à  $G_\infty$  est de  $E(u)$ -hauteur finie ; la seconde est une nouvelle classification en termes de  $(\phi, N_{\nabla})$ -modules des réseaux dans les représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$  ; enfin, la dernière est une amélioration des résultats de la partie 4 concernant l'image du foncteur  $T_{\text{st}}$ .

<sup>7</sup>Pour avoir un panorama plus complet de la théorie de Hodge  $p$ -adique, il faudrait encore ajouter la théorie des  $(\phi, \Gamma)$ -modules, de la surconvergence — incluant notamment la théorie des modules de Wach —, du lien avec les équations différentielles  $p$ -adiques, ainsi que tous les aspects géométriques qui sont, dans ce mémoire, largement passés sous silence.

<sup>8</sup>C'est-à-dire, qui s'expriment en termes de la théorie des catégories.

<sup>9</sup>Ceux-ci interviennent dans la définition du foncteur  $M_{\text{st}}$ .

## Chapitre 2

# Catégories de Breuil en grande ramification

Comme cela a déjà été dit, l'hypothèse  $er < p - 1$  est essentielle pour avoir les résultats du théorème 1.4.2. Le but de cette section, qui consiste l'objet des articles [13] et [17], est de décrire la structure des catégories  $\text{Mod}_{S_\infty}^{r,\phi,N}$  et du foncteur  $T_{\text{st}}$  sans aucune hypothèse sur  $e$ . L'idée centrale consiste à s'attarder sur l'étude des fibres  $T_{\text{st}}$ , c'est-à-dire des « ensembles »  $T_{\text{st}}^{-1}(T)$  où  $T$  est une représentation galoisienne donnée. Lorsque  $er < p - 1$ , le résultat de pleine fidélité implique que celles-ci sont réduites à un point. *A contrario*, lorsque  $er \geq p - 1$ , elles peuvent être beaucoup plus complexes, mais elles possèdent malgré tout une structure d'ordre intéressante qui permet de mener une étude efficace des catégories de Breuil.

### 2.1 L'étude des objets $\mathcal{M}(\rho)$

En guise d'introduction, on se propose d'étudier une situation particulière intéressante, dans laquelle les propriétés que l'on souhaitera mettre en valeur dans la suite apparaissent déjà de façon très visible. Bien que cette étude ne soit pas essentielle, on espère en la menant donner une bonne première intuition de la théorie et faciliter ainsi la lecture des parties suivantes bien plus abstraites et, par là même, plus ardues si l'on n'a pas déjà une idée de l'objectif final.

On rappelle que l'on a introduit des objets  $\mathcal{M}(\rho)$  dans le §1.4.2 lors de l'étude des objets simples de  $\text{Mod}_{S_\infty}^{r,\phi,N}$  dans le cas  $er < p - 1$ . Dans le cas où  $er \geq p - 1$  (qui est celui qui nous intéresse désormais), les objets  $\mathcal{M}(\rho)$  sont définis de façon analogue. Comme il faut toutefois faire attention à ce que l'on entend par là, on redonne ci-dessous la définition.

On commence par introduire l'ensemble  $\mathcal{R}_{\leq er}$  formé des suites périodiques d'éléments de  $\{0, \dots, er\}$  où l'on a identifié deux suites qui se déduisent l'une de l'autre par décalage des indices. À tout élément  $\rho = (\rho_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{R}_{\leq er}$ , on associe ensuite l'objet  $\mathcal{M}(\rho)$  défini de même qu'au §1.4.2, c'est-à-dire, si  $h$  est la plus petite période de la suite  $(\rho_n)$ , défini par :

- en tant que  $S$ -module,  $\mathcal{M}(\rho) = (S/pS)e_1 \oplus (S/pS)e_2 \oplus \dots \oplus (S/pS)e_h$  ;
- le sous-module  $\text{Fil}^r \mathcal{M}(\rho)$  est celui engendré par les  $u^{er-\rho_i} e_i$ , pour  $1 \leq i \leq h$  ;
- le Frobenius  $\phi_r$  sur  $\mathcal{M}(\rho)$  est défini par les égalités  $\phi_r(u^{er-\rho_i} e_i) = e_{i+1}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$  avec la convention  $e_{h+1} = e_0$  ;
- l'opérateur de monodromie  $N$  sur  $\mathcal{M}(\rho)$  est défini par  $N(e_i) = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ .

Le théorème 1.4.6 qui calcule l'image de  $\mathcal{M}(\rho)$  par le foncteur  $T_{\text{st}}$  s'étend sans difficulté au cas de grande ramification, ce qui signifie que l'on a l'égalité

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho)) \simeq \mathbb{F}_{p^h}(\omega_h^{p^{h-1}\rho_1 + \dots + p\rho_{h-1} + \rho_h})$$

en tant que  $I_K$ -représentations (on rappelle que  $I_K$  désigne le sous-groupe d'inertie de  $G_K$ ). On suppose à partir de maintenant pour simplifier que le corps résiduel  $k$  est algébriquement clos, de sorte que  $G_K = I_K$ . Ainsi la



formule précédente décrit entièrement la représentation galoisienne  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$ . On rappelle que  $\mathcal{R}$  désigne le quotient de  $\mathbb{Q}$  par la relation d'équivalence  $\sim$  définie par la formule (1.4). Si  $\rho$  est un élément de  $\mathcal{R}_{\leq er}$  représenté par la suite  $(\rho_n)_{n \geq 1}$ , la classe du nombre rationnel  $\frac{p^{h-1}\rho_1 + \dots + p\rho_{h-1} + \rho_h}{p^h - 1}$  dans  $\mathcal{R}$  ne dépend que de  $\rho$  et on la note  $t_{\text{st}}(\rho)$ . Il n'est pas difficile de montrer (en utilisant que  $\omega_h$  est d'ordre  $p^h - 1$ ) que, si  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux éléments de  $\mathcal{R}_{\leq er}$  représentés par des suites dont la plus petite période est la même, on a  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho)) \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho'))$  si, et seulement si  $t_{\text{st}}(\rho) = t_{\text{st}}(\rho')$ . Dans le cas où les plus petites périodes diffèrent et valent respectivement  $h$  et  $h'$ , on déduit seulement de l'égalité  $t_{\text{st}}(\rho) = t_{\text{st}}(\rho')$  que  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))^{\oplus m'} \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho'))^{\oplus m}$  où  $\frac{m}{m'}$  est l'écriture sous forme irréductible de la fraction  $\frac{h}{h'}$ . Dans la suite, on supposera toujours que  $h = h'$  afin d'éviter ce type de complications, mais il faut retenir que cette hypothèse n'est en aucun cas essentielle.

On se rend ainsi compte que la fonction  $t_{\text{st}}$  reflète les propriétés du foncteur  $T_{\text{st}}$  agissant sur les objets  $\mathcal{M}(\rho)$ . Étudier cette fonction n'est pas une tâche difficile : si  $er < p - 1$ , on voit immédiatement qu'elle est injective (ce qui est en accord avec la pleine fidélité de  $T_{\text{st}}$  dans ce cas) tandis que si  $er \geq p - 1$ , elle est surjective et admet une section canonique  $m_{\text{st}}$  qui à un élément de  $\mathcal{R}$  associe la suite périodique des chiffres <sup>1</sup> en base  $p$ , pris suffisamment loin après la virgule. Lorsque  $er \geq p - 1$ , on pose  $\max = m_{\text{st}} \circ t_{\text{st}}$ . Pour tout  $\rho \in \mathcal{R}_{\leq er}$ , on a alors  $t_{\text{st}} \circ \max(\rho) = t_{\text{st}}(\rho)$ , ce qui implique que, si  $\rho$  et  $\max(\rho)$  sont représentés par des suites de même plus petite période, alors les représentations  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\max(\rho)))$  et  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$  sont isomorphes.

**Proposition 2.1.1.** *On suppose  $er \geq p - 1$ . Soit  $\rho \in \mathcal{R}_{\leq er}$  tel que les plus petites périodes correspondant aux éléments  $\rho$  et  $\max(\rho)$  soient égales. Alors, il existe un morphisme  $f : \mathcal{M}(\rho) \rightarrow \mathcal{M}(\max(\rho))$  dans la catégorie  $\text{Mod}_{/S_{\infty}}^{r, \phi, N}$  tel que  $T_{\text{st}}(f)$  soit un isomorphisme.*

*Démonstration.* On se contente de donner les idées principales de la démonstration, laissant les détails au lecteur. On choisit  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  un représentant de  $\rho$ , on note  $h$  sa plus petite période et on définit  $(\rho'_n)_{n \geq 1}$  comme la suite des décimales de  $\frac{p^{h-1}\rho_1 + \dots + p\rho_{h-1} + \rho_h}{p^h - 1}$ . La plus petite période de la suite  $(\rho'_n)_{n \geq 1}$  est encore  $h$  par hypothèse et, pour tout entier  $i \geq 1$ , la différence  $d_i = \sum_{n \geq 0} \frac{\rho_{n+i} - \rho'_{n+i}}{p^n}$  est un entier (multiple de  $p$ ). Par ailleurs, la suite des  $d_i$  est périodique de période  $h$ , et il est facile de montrer que tous les  $d_i$  sont compris entre 0 et  $er$ . Enfin, si  $e_i$  (resp.  $e'_i$ ) désigne la base de  $\mathcal{M}(\rho)$  (resp.  $\mathcal{M}(\max(\rho))$ ) qui apparaît dans sa définition, on montre que le morphisme  $f$  donné par  $e_i \mapsto u^{d_i} e'_i$  convient.  $\square$

En ajoutant un argument qui consiste à comparer les automorphismes de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$  et  $\mathcal{M}(\max(\rho))$ , on peut montrer plus généralement que tout automorphisme de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$  se relève en un morphisme  $\mathcal{M}(\rho) \rightarrow \mathcal{M}(\max(\rho))$  dans la catégorie  $\text{Mod}_{/S_{\infty}}^{r, \phi, N}$ . Une autre généralisation directe de la proposition précédente dit que, si  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux éléments de  $\mathcal{R}_{\leq er}$  ayant la même plus petite période et la même image par  $t_{\text{st}}$ , alors il existe un morphisme  $g : \mathcal{M}(\rho) \rightarrow \mathcal{M}(\rho')$  si, et seulement si  $\sum_{n \geq 0} \frac{\rho_{n+i}}{p^n} \geq \sum_{n \geq 0} \frac{\rho'_{n+i}}{p^n}$  pour tout  $i$ . Cette famille d'inégalités définit une relation d'ordre sur chaque fibre de  $t_{\text{st}} : \mathcal{R}_{\leq er} \rightarrow \mathcal{R}$  pour laquelle, un élément  $q \in \mathcal{R}$  étant fixé,  $m_{\text{st}}(q)$  est le plus grand élément de la fibre au-dessus de  $q$  (ceci justifie la notation  $\max$  utilisée). On voit ainsi se dessiner la structure d'ordre évoquée sur les fibres de  $T_{\text{st}}$  évoquée en introduction du §2.

Tout ceci n'est pas sans rappeler les résultats de Raynaud, publiés dans [45], sur les modèles entiers des schémas en groupes finis et plats sur  $\text{Spec } K$ . En effet, dans *loc. cit.*, il démontre que ces modèles, lorsqu'ils existent, forment naturellement un ensemble ordonné qui admet un plus grand élément ; on parle de modèle maximal. En examinant plus attentivement l'argumentation de Raynaud, on se rend compte qu'il démontre son théorème d'existence en prouvant que l'ensemble ordonné  $\mathcal{G}$  des modèles vérifie les deux propriétés suivantes :

- $c$  est un *sup-semi-treillis*, i.e. toute partie de  $\mathcal{G}$  admet une borne supérieure ;
- il est « *noethérien* », i.e. toute suite croissante d'éléments de  $\mathcal{G}$  est stationnaire.

La relation d'ordre définie précédemment sur les ensembles  $t_{\text{st}}^{-1}(q)$  vérifie, en fait, également ces propriétés. L'analogie entre les deux situations n'est donc, semble-t-il, pas superficielle. En vérité, cela n'est pas réellement surprenant car Breuil a démontré dans [7] que, lorsque  $r = 1$ , la catégorie  $\text{Mod}_{/S_{\infty}}^{r, \phi, N}$  est équivalente à celle des schémas en groupes finis et plats sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  et que le foncteur  $T_{\text{st}}$  s'interprète comme le foncteur « fibre générique » (la donnée d'un schéma en groupes fini et plat sur  $\text{Spec } K$  étant bien équivalente à celle d'une représentation de torsion de  $G_K$ ). L'étude des objets  $\mathcal{M}(\rho)$  menée précédemment suggère fortement que les résultats de Raynaud devraient s'étendre aux catégories  $\text{Mod}_{/S_{\infty}}^{r, \phi, N}$  pour tout  $r < p - 1$ .

<sup>1</sup> On convient que, dans le cas où il y a plusieurs développements possibles, on privilégie celui qui est ultimement constant égal à 0.

## 2.2 L'axiomatique des pylonets

Le but de cette partie est d'introduire une axiomatique abstraite et générale supposée rendre compte de la situation entrevue précédemment. On met temporairement de côté la théorie de Hodge  $p$ -adique pour faire un peu de théorie générale des catégories. Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}$  deux catégories et  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  un foncteur contravariant entre ces catégories. On ne fait pour l'instant aucune hypothèse, mais on introduit d'ores et déjà les deux axiomes suivants.

**(Ax1)** *Le foncteur  $T$  est fidèle.*

**(Ax2)** *La catégorie  $\mathcal{C}$  admet des sommes amalgamées, la catégorie  $\mathcal{A}$  admettent des produits fibrés, et le foncteur  $T$  commute à ceux-ci.*

Si  $A$  est un objet de  $\mathcal{A}$ , la fibre de  $T$  au-dessus de  $A$  est la catégorie  $\mathcal{F}_A$  définie comme suit. Ses objets sont les couples  $(C, f)$  où  $C$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $f$  est un isomorphisme (dans la catégorie  $\mathcal{A}$ ) de  $T(C)$  dans  $A$ , tandis qu'un morphisme de  $(C_1, f_1)$  dans  $(C_2, f_2)$  est la donnée d'une flèche  $g : C_1 \rightarrow C_2$  dans  $\mathcal{C}$  telle que  $f_2 = f_1 \circ T(g)$ . Sous **(Ax1)**, les ensembles de morphismes dans les catégories fibres  $\mathcal{F}_A$  ont tous au plus un élément ; en effet, si  $g : (C_1, f_1) \rightarrow (C_2, f_2)$  est un tel morphisme, son image par  $T$  est entièrement déterminée (elle vaut  $f_1^{-1} \circ f_2$ ). De façon classique, cette propriété permet de définir un préordre sur l'« ensemble » des objets de  $\mathcal{F}_A$  en convenant que  $(C_1, f_1) \leq (C_2, f_2)$  s'il existe effectivement un morphisme de  $(C_1, f_1)$  dans  $(C_2, f_2)$ . La donnée de ce préordre permet réciproquement de reconstruire entièrement  $\mathcal{F}_A$ . La plupart des propriétés classiques des ordres se traduisent en outre directement dans le langage des catégories : par exemple, un élément maximal est un objet final et une borne supérieure est une somme directe. Cette remarque motive l'introduction de l'axiome suivant.

**(Ax3)** *Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , soit la fibre  $\mathcal{F}_A$  est vide, soit elle admet un objet final.*

Si  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  satisfait aux axiomes **(Ax1)**, **(Ax2)** et **(Ax3)**, on peut construire un foncteur  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  comme suit. Si  $C$  est un objet de  $\mathcal{C}$ , la fibre  $\mathcal{F}_{T(C)}$  est non vide puisqu'elle contient le couple  $(C, \text{id})$ . En vertu de **(Ax3)**, elle admet donc un objet maximal que l'on note<sup>2</sup>  $(\text{Max}(C), \alpha_C)$ . Ceci définit le foncteur  $\text{Max}$  sur les objets. La propriété universelle de l'objet final implique l'existence, pour tout  $C \in \mathcal{C}$ , d'un morphisme canonique  $\iota_C : C \rightarrow \text{Max}(C)$  tel que  $\alpha_C$  et  $T(\iota_C)$  sont inverses l'un de l'autre. Définir le foncteur  $\text{Max}$  sur les morphismes est plus compliqué et utilise **(Ax2)**. Si  $f : C_1 \rightarrow C_2$  est un morphisme dans la catégorie  $\mathcal{C}$ , on commence par introduire la somme amalgamée  $C'_2 = C_2 \oplus_{C_1} \text{Max}(C_1)$  où les flèches  $C_1 \rightarrow C_2$  et  $C_1 \rightarrow \text{Max}(C_1)$  sont respectivement  $f$  et  $\iota_{C_1}$ . L'axiome **(Ax2)** assure que  $C'_2$  existe bien et, en outre, que  $T(C'_2)$  est canoniquement isomorphe à  $T(C_2)$  puisque  $\iota_{C_1}$  est envoyé sur un isomorphisme par  $T$ . Afin d'éviter bon nombre de complications d'ordre technique<sup>3</sup>, on oublie à partir de maintenant les identifications et on suppose que  $T(C_2) = T(C'_2)$  en tant qu'objets de  $\mathcal{C}$  et que le morphisme naturel  $g : C_2 \rightarrow C'_2$  est envoyée par  $T$  sur l'identité. On a alors  $\text{Max}(C_2) = \text{Max}(C'_2)$  et  $\iota_{C_2} = g \circ \iota_{C'_2}$ , ce qui permet de définir  $\text{Max}(f)$  comme la composée  $\iota_{C'_2} \circ h$  où  $h : \text{Max}(C_1) \rightarrow C'_2$  est le morphisme naturel provenant de la définition de  $C'_2$  comme somme amalgamée. Le fait que  $\text{Max}$  commute à la composition des morphismes n'est pas complètement évident mais est bien vrai. On a aussi  $\text{Max} \circ \text{Max} = \text{Max}$ , ce qui, cette fois, se vérifie immédiatement.

On dit qu'un objet  $C$  de  $\mathcal{C}$  est *maximal* si le morphisme  $\iota_C : C \rightarrow \text{Max}(C)$  est un isomorphisme. On note  $\text{Max}(\mathcal{C})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  constituée des objets maximaux. Le fait que  $\text{Max} \circ \text{Max} = \text{Max}$  implique que  $\text{Max}(\mathcal{C})$  est aussi l'image essentielle du foncteur  $\text{Max}$  ; ceci justifie la notation employée. On montre également (voir propositions 1.2.6 et 1.2.7 de [17]) que la corestriction  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Max}(\mathcal{C})$  est à la fois une rétraction et un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion  $\text{Max}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ , et qu'elle réalise en outre la localisation de la catégorie  $\mathcal{C}$  par rapport à la classe des morphismes  $f$  tels que  $T(f)$  est un isomorphisme<sup>4</sup>. La catégorie  $\text{Max}(\mathcal{C})$  apparaît donc finalement à la fois comme une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ , une catégorie « quotient » de  $\mathcal{C}$  et aussi comme l'une de ses localisations.

On a dit précédemment qu'afin de démontrer l'existence d'un modèle entier maximal pour les schémas en groupes finis et plats sur  $\text{Spec } K$ , Raynaud passait par un chemin légèrement détourné en prouvant que l'ordre naturel

<sup>2</sup>Bien sûr, l'objet maximal n'est pas unique mais seulement unique à unique isomorphisme près. Ceci conduit à un certain nombre de problèmes de logique qui sont résolus dans [17] et que l'on passe sous silence dans ce mémoire.

<sup>3</sup>Pour une définition complète et rigoureuse (qui est bien plus pénible), on renvoie à [17].

<sup>4</sup>Cela signifie que tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$  (où  $\mathcal{X}$  est une catégorie quelconque), qui est tel que  $F(f)$  est un isomorphisme dès que  $T(f)$  en est un, se factorise de façon unique par  $\text{Max}$ .

sur l'ensemble de ces modèles entiers définissait un sup-semi-treillis noethérien. Dans le contexte général d'un foncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  considéré ici, la démarche de Raynaud se formalise sans difficulté et conduit à l'introduction des deux axiomes suivants.

**(Ax3a)** Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , la catégorie  $\mathcal{F}_A$  admet des sommes directes.

**(Ax3b)** Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , et pour toute suite infinie de morphismes dans  $\mathcal{F}_A$  :

$$(C_1, f_1) \xrightarrow{g_1} (C_2, f_2) \xrightarrow{g_2} (C_3, f_3) \xrightarrow{g_3} \dots \xrightarrow{g_{n-1}} (C_n, f_n) \xrightarrow{g_n} \dots$$

il existe un entier  $N$  tel que  $g_n$  soit un isomorphisme pour tout  $n \geq N$ .

L'axiome **(Ax3a)** traduit la propriété de sup-semi-treillis, tandis que l'axiome **(Ax3b)** correspond au caractère noethérien. Il est clair que, sous **(Ax1)**, les deux axiomes **(Ax3a)** et **(Ax3b)** impliquent **(Ax3)**.

**Définition 2.2.1.** Un *pylonet* est un foncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  vérifiant les axiomes **(Ax1)**, **(Ax2)**, **(Ax3a)** et **(Ax3b)**.

Comme **(Ax1)**, **(Ax3a)** et **(Ax3b)** impliquent ensemble **(Ax3)**, à un pylonet  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ , on peut associer un foncteur  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et une catégorie  $\text{Max}(\mathcal{C})$ . Un cas particulièrement intéressant pour les applications que l'on a en vue est décrit par l'axiome suivant :

**(Ax4)** La catégorie  $\mathcal{C}$  est additive, la catégorie  $\mathcal{A}$  est abélienne et le foncteur  $T$  est additif.

Un pylonet vérifiant **(Ax4)** est appelé un *pylonet additif*. On prendra garde au fait que cela suppose que  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne, et pas seulement une catégorie additive. Cela ne devrait néanmoins pas être gênant pour les applications car  $\mathcal{A}$  sera systématiquement instanciée en une catégorie de représentations galoisiennes, et sera donc en particulier toujours abélienne. De façon générale, sous **(Ax4)**, l'axiome **(Ax2)** est équivalent à l'existence de conoyaux dans  $\mathcal{C}$ , et au fait que  $T$  transforme conoyaux en noyaux. Le théorème suivant est démontré dans [17] (voir lemme 1.5.1 et proposition 1.5.3).

**Théorème 2.2.2.** Soit  $T$  un pylonet additif. Alors, le foncteur  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est additif.

Si on suppose en plus que  $\mathcal{C}$  admet des noyaux et que  $T$  transforme noyaux en conoyaux, alors la catégorie  $\text{Max}(\mathcal{C})$  est abélienne et la restriction du foncteur  $T$  à cette catégorie (qui est un foncteur entre catégories abéliennes) est exact.

*Remarque 2.2.3.* Dans le cas où les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}$  sont munis de dualité et que le foncteur  $T$  commute à celles-ci, l'hypothèse additionnelle faite dans le théorème précédent découle de **(Ax2)**.

## 2.3 Application à la théorie de Hodge $p$ -adique

On rappelle que la notation  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  formée des objets annulés par  $p$ .

**Théorème 2.3.1.** Les foncteurs  $T_{\text{cris}} : \text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_\infty)$  et  $T_{\text{st}} : \text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_K)$  sont des pylonets additifs.

De plus, si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$ ) et  $T'$  une sous- $G_\infty$ -représentation de  $T = T_{\text{cris}}(\mathcal{M})$  (resp. une sous- $G_K$ -représentation de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ), alors il existe un unique quotient  $\mathcal{M}'$  de  $\mathcal{M}$  qui est un objet de  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$ ) et pour lequel, en notant  $f$  la projection canonique  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ ,  $T_{\text{cris}}(f)$  (resp.  $T_{\text{st}}(f)$ ) s'identifie à l'inclusion  $T' \hookrightarrow T$ .

**Corollaire 2.3.2.** L'image essentielle des foncteurs  $T_{\text{cris}}$  et  $T_{\text{st}}$  agissant respectivement sur  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  et  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  est stable par quotients et sous-objets.

*Remarque 2.3.3.* Il paraît plus que raisonnable de penser que les résultats précédents s'étendent au foncteur  $T_{\text{st}}$  défini sur toute la catégorie  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$ . Toutefois, des complications techniques surviennent dans le cas non tué par  $p$  qui font que la preuve n'est pas encore écrite dans cette généralité.

Comme toutes les catégories qui interviennent dans le théorème 2.3.1 sont munies de dualité et que les foncteurs  $T_{\text{cris}}$  et  $T_{\text{st}}$  commutent à celle-ci, le théorème 2.2.2 dans sa totalité s'applique à ces foncteurs sans vérification supplémentaire. Ainsi, par exemple, la catégorie  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  est équipée d'un foncteur  $\text{Max} : \text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N} \rightarrow \text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  tel que  $T_{\text{st}} \circ \text{Max} = T_{\text{st}}$  et dont l'image essentielle  $\text{Max}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  est une sous-catégorie abélienne de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  en restriction à laquelle  $T_{\text{st}}$  définit un foncteur exact. Au sujet des objets  $\mathcal{M}(\rho)$  étudiés dans le §2.1, on a  $\text{Max}(\mathcal{M}(\rho)) = \mathcal{M}(\max(\rho))$  pour tout  $\rho \in \mathcal{R}_{\leq er}$ . Ceci implique en particulier que  $\mathcal{M}(\rho)$  est maximal si, et seulement si  $\rho = \max(\rho)$ . Par ailleurs, les  $\mathcal{M}(\rho)$  qui sont maximaux sont deux à deux non isomorphes (par exemple, car ils s'envoient par  $T_{\text{st}}$  sur des représentations deux à deux non isomorphes) et, lorsque  $k$  est algébriquement clos, ce sont exactement les objets simples de cette catégorie.

On fera attention, par contre, au fait que les noyaux et conoyaux ne se calculent pas de la façon usuelle ni dans  $\text{Max}_{/S_\infty}^{r,\phi}$ , ni dans  $\text{Max}_{/S_1}^{r,\phi,N}$ . En ce qui concerne la catégorie  $\text{Max}_{/S_\infty}^{r,\phi}$ , on trouvera dans [13] une explication détaillée sur le calcul des noyaux, des conoyaux, des images et des coimages.

Les catégories  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  et  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  admettent un certain nombre de variantes (obtenues en ajoutant des coefficients et/ou des données de descente) qui interviennent de façon essentielle dans plusieurs questions liées aux extensions de la conjecture de modularité de Serre (voir par exemple [28] et [21]). Le théorème 2.3.1 s'étend à ces catégories sans difficulté, et donne d'ailleurs un éclairage intéressant sur les calculs menés dans le §3.4 de [28].

La démonstration du théorème 2.3.1 se découpe en deux temps clairement identifiés : on démontre tout d'abord la partie du théorème qui concerne le foncteur  $T_{\text{cris}}$  puis, en se basant fortement sur cette première étape, on déduit les résultats analogues pour  $T_{\text{st}}$ . Dans les deux paragraphes suivants, on donne quelques indications plus précises sur chacun de ces deux mouvements.

### 2.3.1 Le cas du foncteur $T_{\text{cris}}$ : passage par les $\phi$ -modules sur $\mathcal{E}^{\text{int}}$

Étant donné que les catégories  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  et  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$  sont équivalentes *via* le foncteur  $M_{\mathfrak{S}_\infty}$  et que  $T_{\text{cris}} = T_\phi \circ M_{\mathfrak{S}_\infty}$ , on peut remplacer partout  $T_{\text{cris}}$  par le foncteur  $T_\phi : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_\infty)$ . Or celui-ci s'écrit comme la composée :

$$\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi} \xrightarrow{\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} -} \text{Mod}_{/\mathcal{E}^{\text{int},\infty}}^\phi \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_\infty)$$

où  $\text{Mod}_{/\mathcal{E}^{\text{int},\infty}}^\phi$  est la catégorie des  $\phi$ -modules étales sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  qui sont de longueur finie en temps que  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ -modules. Comme le second foncteur est une équivalence de catégories, on peut encore remplacer partout  $T_\phi$  par le premier foncteur d'extension des scalaires à  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . On commence par montrer que celui-ci est un pylonet additif, en vérifiant un par un les axiomes **(Ax1)**, **(Ax2)**, **(Ax3a)**, **(Ax3b)** et **(Ax4)**. Les axiomes **(Ax1)** et **(Ax4)** sont évidents. L'axiome **(Ax2)**, quant à lui, résulte de la platitude de  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  sur  $\mathfrak{S}$ . L'axiome **(Ax3)** n'est pas non plus difficile car dire que  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}'$  sont deux objets de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$  dans une même fibre revient à dire que ce sont deux  $\mathfrak{S}$ -réseaux dans un même  $\phi$ -module sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  et on peut vérifier que leur somme au sens usuel du terme définit encore un objet de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$  (il s'agit de s'assurer que la condition (1.6) est encore satisfaite, ce qui résulte de l'injectivité de l'opérateur  $\phi$  agissant sur un  $\phi$ -module étale) et que celui-ci a la propriété universelle de la somme amalgamée dans la catégorie fibre.

L'axiome **(Ax3b)** est un peu plus délicat. Une méthode possible consiste à remarquer que si  $\mathfrak{M} \hookrightarrow \mathfrak{M}'$  est un morphisme injectif dont le conoyau  $\mathfrak{C}$  est de longueur finie comme  $\mathfrak{S}$ -module, on déduit du lemme du serpent l'égalité suivante :

$$(p-1) \cdot \text{lg}_{\mathfrak{S}} K = (p-1) \cdot \text{lg}_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{M} / \langle \phi(\mathfrak{M}) \rangle) - \text{lg}_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{M}' / \langle \phi(\mathfrak{M}') \rangle).$$

À partir de la condition (1.6), on peut démontrer par ailleurs que la longueur du quotient  $\mathfrak{M} / \langle \phi(\mathfrak{M}) \rangle$  est majorée par  $er \cdot \text{lg}_{\mathcal{E}^{\text{int}}}(\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$ . Ainsi si on a une suite de morphismes dans une même fibre de  $T_\phi$ , c'est-à-dire une suite croissante  $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{M}_n \subset \dots$  de  $\mathfrak{S}$ -réseaux dans un même  $\phi$ -module étale  $M$  sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  de longueur finie, on obtient :

$$(p-1) \cdot \text{lg}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}_n / \mathfrak{M}_1) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{lg}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}_{i+1} / \mathfrak{M}_i) \leq er \cdot \text{lg}_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M$$

pour tout  $n$ . Ainsi les entiers  $\text{lg}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}_{n+1} / \mathfrak{M}_n)$  sont nuls à partir d'un certain rang, ce qui revient encore à dire  $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{n+1}$  pour  $n$  suffisamment grand. L'axiome **(Ax3b)** est démontré.

*Remarque 2.3.4.* La preuve donnée dans [13] (voir démonstration du lemme 3.2.4) est un peu différente et conduit à une borne légèrement meilleure de la plus grande longueur d'une suite strictement croissante. Il résulte en particulier de cette démonstration que, dans le cas où  $er < p - 1$ , chaque fibre contient au plus un objet (à isomorphisme près).

Il reste encore à démontrer le second alinéa du théorème 2.3.1. Or, si on le traduit en termes du foncteur  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi} \rightarrow \text{Mod}_{/\mathcal{E}^{\text{int}},\infty}^\phi$  d'extension des scalaires à  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , il dit simplement que si  $\mathfrak{M} \in \text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$  est un réseau dans un  $\phi$ -module étale  $M$  et si  $f : M \rightarrow M'$  est un morphisme surjectif entre  $\phi$ -modules étales, alors il existe un unique réseau  $\mathfrak{M}' \subset M'$  qui est un objet de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$  et qui apparaît comme un quotient de  $\mathfrak{M}$  via  $f$ . En ces termes, cela devient évident ; en effet, la dernière propriété implique immédiatement que, nécessairement,  $\mathfrak{M}' = f(\mathfrak{M})$  et il ne reste plus qu'à vérifier que cet espace est bien un objet de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$ .

*Remarque 2.3.5.* Tout ce qui a été fait à partir du moment où l'on a remplacé la catégorie  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  par  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  est valable pour tout  $r$ , et pas uniquement sous l'hypothèse  $r < p - 1$ . En particulier, le foncteur  $T_\phi : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_\infty)$  est un pylonet additif pour tout  $r$ , et les résultats du théorème 2.2.2 (y compris ceux de la deuxième partie puisque  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$  est munie d'une dualité) s'appliquent à ce foncteur sans restriction sur  $r$ .

### 2.3.2 Opérateur de monodromie et prolongement de l'action à $G_K$

Pour passer de l'énoncé portant sur  $T_{\text{cris}}$  à celui sur  $T_{\text{st}}$ , l'idée est d'étudier avec attention le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N} & \xrightarrow{T_{\text{st}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_K) \\ \text{oubli} \downarrow & & \downarrow \text{restriction} \\ \text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi} & \xrightarrow{T_{\text{cris}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_\infty) \end{array}$$

Par exemple, pour commencer, il résulte directement de la fidélité de  $T_{\text{cris}}$  et de celle du foncteur d'oubli  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N} \rightarrow \text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  que  $T_{\text{st}}$  est lui aussi fidèle. Autrement dit, on a déjà démontré **(Ax1)**. L'axiome **(Ax3b)** s'obtient par un argument du même type. Pour le reste, le clé réside dans la proposition suivante.

**Proposition 2.3.6.** *Soient  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$ ,  $\mathcal{M}' \in \text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi}$  et  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme surjectif dans  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi}$ . On suppose que  $T_{\text{cris}}(\mathcal{M}')$  (identifié grâce à  $T_{\text{cris}}(f)$  à une sous- $G_\infty$ -représentation de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ) est stable par  $G_K$ . Alors, il existe sur  $\mathcal{M}'$  un unique opérateur de monodromie pour lequel  $f$  est un morphisme dans  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$ .*

Pour démontrer cette proposition, l'idée essentielle, qui apparaît initialement dans les travaux de Liu, est de montrer que, si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$ , l'action de  $G_K$  sur  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  détermine complètement l'action de l'opérateur  $N$  sur  $\mathcal{M}$  par une formule explicite (qui fait intervenir le logarithme de l'action d'un élément  $\tau \in G_K$  qui, avec  $G_\infty$ , engendre tout  $G_K$ ). Utilisant cela, on déduit de la stabilité par  $G_K$  de  $T_{\text{cris}}(\mathcal{M}')$  que le noyau de  $f$  est stable par  $N$ , à partir de quoi on conclut directement en définissant  $N$  sur  $\mathcal{M}'$  par passage au quotient. Le lecteur intéressé pourra trouver les détails manquants dans le §2.2 de [17].

La propriété énoncée dans le second alinéa du théorème 2.3.1 s'obtient directement en mettant ensemble son analogue pour  $T_{\text{cris}}$  déjà démontré précédemment et la proposition 2.3.6. Une fois cela acquis, la construction des conoyaux dans  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  devient aisée. En effet, si  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  est un morphisme dans cette catégorie, on vérifie que l'unique quotient de  $\mathcal{M}'$  correspondant à la sous-représentation de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$  noyau de  $T_{\text{st}}(f)$  vérifie la propriété universelle des conoyaux dans  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$ . Il est clair en outre, par construction, que  $T_{\text{st}}$  envoie conoyaux sur noyaux. On a donc déjà établi **(Ax2)**. Pour **(Ax3a)**, l'argument est analogue : si  $T \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_K)$  et  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  sont deux objets de la fibre de  $T_{\text{st}}$  au dessus de  $T$ , on vérifie que leur somme amalgamée est donnée par l'unique quotient de  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}'$  en correspondance avec la sous-représentation diagonale de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') = T \oplus T$ .

## 2.4 Le foncteur $M_{\text{st}}$

Les résultats que l'on vient d'obtenir en grande ramification ne sont pas encore aussi complets que ceux du théorème 1.4.2 valables dans le cas  $er < p - 1$ . En effet, il manque encore un équivalent de la pleine fidélité de  $T_{\text{st}}$ . Celui-ci s'énonce comme suit.

**Proposition 2.4.1.** *La restriction du foncteur  $T_{\text{st}}$  à la sous-catégorie pleine  $\text{Max}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  est pleinement fidèle.*

Une méthode possible pour démontrer la proposition précédente — qui n’est certes pas la plus efficace, mais qui conduit cependant à des développements intéressants — est de construire un foncteur  $M_{\text{st}} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K) \rightarrow \text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  tel que  $M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}}$  soit isomorphe au foncteur  $\text{Max}$ .

Partant d’une représentation  $T$  annihilée par  $p$ , l’idée initiale pour définir  $M_{\text{st}}(T)$  est de copier ce que l’on sait déjà faire dans le cas des représentations semi-stables et des  $(\phi, N)$ -modules filtrés de Fontaine, c’est-à-dire de considérer l’espace :

$$\mathcal{M} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_K]}(T, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \hat{A}_{\text{st}}) = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_K]}(T, \hat{A}_{\text{st}}/p)$$

la dernière simplification étant possible car  $pT = 0$ . Clairement,  $\mathcal{M}$  est un module sur  $S/pS$ . Il est en outre muni d’un sous-module  $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_K]}(T, \text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st}}/p)$  et d’opérateurs  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  et  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  induits par leurs analogues sur  $\hat{A}_{\text{st}}$ . Ces opérateurs vérifient les relations de commutation attendues mais  $\mathcal{M}$  est, malgré tout, encore loin d’être un objet de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$ . En effet, il n’est pas vrai en général que  $\mathcal{M}$  est libre de rang fini sur  $S/pS$ , ni que  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$  engendre  $\mathcal{M}$ . La suite de la construction du foncteur  $M_{\text{st}}$  consiste à appliquer certaines modifications  $\mathcal{M}$  pour le forcer à vérifier ces deux dernières propriétés.

### 2.4.1 Première modification : imposer la « surjectivité » de $\phi_r$

La méthode pour imposer que  $\phi_r(\mathcal{M})$  engendre tout  $\mathcal{M}$  est, dans son idée, très simple. On définit  $\mathcal{M}_1$  comme le sous-module de  $\mathcal{M}$  engendré par  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$  et on pose  $\text{Fil}^r \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1 \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . Si  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}_1)$  engendre tout  $\mathcal{M}_1$ , on a terminé. Sinon on itère la construction précédente, *i.e.* on définit  $\mathcal{M}_2$  comme le sous-module engendré par  $\phi_r(\mathcal{M}_1 \cap \text{Fil}^r \mathcal{M})$  et ainsi de suite. On définit ainsi une suite décroissante  $(\mathcal{M}_i)_{i \geq 1}$  de sous-modules de  $\mathcal{M}$ . Si celle-ci stationne à partir d’un certain rang, la limite  $\mathcal{M}_\infty$  est telle que  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}_\infty)$  engendre  $\mathcal{M}_\infty$ . Malheureusement, l’anneau  $S/pS$  n’étant pas un artinien (il n’est même pas noethérien), rien n’assure *a priori* que c’est toujours le cas.

On évite ce problème en quotientant par  $\text{Fil}^p S$ . Plus précisément, on commence par poser  $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\text{Fil}^p S \mathcal{M}$  et  $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} = \text{Fil}^r \mathcal{M}/\text{Fil}^p S \mathcal{M}$ . Ce sont des modules sur l’anneau artinien  $\tilde{S} = S/(pS + \text{Fil}^p S) \simeq k[u]/u^{ep}$  et est donc, en particulier, artinien. Par ailleurs, la relation (1.3) impose que  $\phi_r$  s’annule sur  $\text{Fil}^p S \mathcal{M}$ , et donc que celui-ci passe au quotient pour définir un opérateur  $\phi_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ . À partir de là, on peut comme précédemment construire une suite décroissante de sous- $\tilde{S}$ -modules  $\tilde{\mathcal{M}}_i$  de  $\tilde{\mathcal{M}}$ . On a alors le lemme crucial suivant.

**Lemme 2.4.2.** *Le module  $\tilde{\mathcal{M}}_1$  est de type fini sur  $\tilde{S}$ .*

La démonstration de ce lemme n’est pas du tout triviale. La méthode consiste, dans un premier temps, à relier  $\tilde{\mathcal{M}}_1$  à  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_K]}(T, \hat{A})$  où  $\hat{A}$  est le sous- $\tilde{S}$ -module de  $\hat{A}_{\text{st}}/(p\hat{A}_{\text{st}} + \text{Fil}^p \hat{A}_{\text{st}})$  engendré par  $\frac{\phi}{p^r}(\text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st}})$  puis, dans un second temps, à étudier l’espace des points fixes  $\hat{A}^{G_L}$  où  $G_L$  est un sous-groupe ouvert de  $G_K$  qui agit trivialement sur  $T$ . Cette dernière étude repose sur une description explicite de  $\hat{A}$ , combinée à l’utilisation d’une généralisation adéquate en torsion du théorème d’Ax-Sen-Tate, due à Le Borgne (voir [40]).

Une fois le lemme établi, la conclusion est immédiate : par le caractère artinien de  $\tilde{S}$ , la suite des  $\tilde{\mathcal{M}}_i$  stationne et sa limite  $\tilde{\mathcal{M}}_\infty$  est bien tel que  $\phi_r(\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_\infty)$  engendre  $\tilde{\mathcal{M}}_\infty$ . Il est vrai que l’on pourrait ne pas être satisfait de ce résultat et chercher à revenir aux objets définis sur  $S$  (ceux sans les *tilde*). Toutefois, plutôt que maintenant, il sera plus simple de faire cela en même temps que la seconde modification.

### 2.4.2 Deuxième modification : assurer la liberté de $M_{\text{st}}(T)$

L’objet  $\tilde{\mathcal{M}}_\infty$  n’est en général pas libre sur  $\tilde{S}$ ; ce n’est donc pas encore le bon. On dispose toutefois d’une méthode classique, introduite et déjà utilisée avec succès par Breuil, pour faire face à ce type de situations. Son fondement est la remarque suivante : pour tout objet  $\mathcal{N}$  de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$ , l’application  $\text{id} \otimes \phi_r$  induit un isomorphisme

$$S/pS \otimes_{\phi, k[u]/u^e} \frac{\text{Fil}^r \mathcal{N}}{u^e \text{Fil}^r \mathcal{N} + \text{Fil}^p S \mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}.$$

Ainsi, on peut reconstruire  $\mathcal{N}$  à partir du quotient  $\frac{\text{Fil}^r \mathcal{N}}{u^e \text{Fil}^r \mathcal{N} + \text{Fil}^p S \mathcal{N}}$ . Si l'on applique cette recette à partir de  $\tilde{\mathcal{M}}_\infty$  à la place de  $\mathcal{N}$ , on est amené à considérer le module

$$S/pS \otimes_{\phi, k[u]/u^e} \frac{\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}}{u^e \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}} \quad (2.1)$$

qui semble un candidat sérieux pour être le bon objet  $M_{\text{st}}(T)$  que l'on souhaite définir. Et, de fait, on peut bel et bien démontrer qu'il est libre sur  $S/pS$  en prouvant que le quotient  $\frac{\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_\infty}{u^e \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_\infty}$  est un module libre sur  $k[u]/u^e$ . La démonstration de cette dernière propriété n'est cependant pas évidente, et procède en plusieurs étapes selon le schéma suivant. On démontre tout d'abord, par un argument facile de bidualité, que, pour tout  $x$  non nul dans  $\tilde{\mathcal{M}}_\infty$ , il existe un morphisme  $f \in \text{Hom}_{S, \text{Fil}^r, \phi, N}(\tilde{\mathcal{M}}_\infty, \hat{A})$  qui ne s'annule pas sur  $x$ . On vérifie ensuite, en utilisant une description explicite de  $\hat{A}$ , que tout  $y \in \text{Fil}^r \hat{A}$  annulé par  $u^{e-1}$  est également annulé par  $\phi_r$ . Sachant cela, on conclut comme suit. On note  $d$  le nombre de générateurs minimal de  $\tilde{\mathcal{M}}_\infty$  et on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une famille génératrice  $(x_1, \dots, x_{d'})$  de  $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_\infty$  telle que  $u^{e-1}x_1 = 0$  et  $d' \leq d$ . Pour tout  $f \in \text{Hom}_{S, \text{Fil}^r, \phi, N}(\tilde{\mathcal{M}}_\infty, \hat{A})$ , on a  $u^{e-1}f(x_1) = 0$  et donc, par ce qui a été annoncé en préliminaire,  $f \circ \phi_r(x_1) = \phi_r \circ f(x_1) = 0$ . Ainsi  $\phi_r(x_1) = 0$ , ce qui implique que  $\tilde{\mathcal{M}}_\infty$ , qui est engendré par  $\phi_r(\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_\infty)$ , est engendré par strictement moins de  $d'$  éléments, et donc *a priori* strictement moins que  $d$ . C'est une contradiction.

### 2.4.3 Conclusion

Il n'est maintenant plus difficile de vérifier que l'objet, que l'on note  $M_{\text{st}}(T)$ , défini par le produit tensoriel de l'équation (2.1) est dans la catégorie  $\text{Mod}_{/S_1}^{r, \phi, N}$ . Par ailleurs, par un argument classique de bidualité, on récupère pour tout  $T$  de la forme  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = T_{\text{st}}(\text{Max}(\mathcal{M}))$  (pour un certain  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/S_1}^{r, \phi, N}$ ), des morphismes  $\alpha : \text{Max}(\mathcal{M}) \rightarrow M_{\text{st}}(T)$  et  $\beta : T \rightarrow T_{\text{st}} \circ M_{\text{st}}(T)$ . Un argument formel montre  $T_{\text{st}}(\alpha) \circ \beta = \text{id}_T$ . En particulier,  $\beta$  est injectif et, par la deuxième partie du théorème 2.3.1, il existe un objet  $\mathcal{M}'$  de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r, \phi, N}$  muni d'un morphisme surjectif  $\gamma : M_{\text{st}}(T) \rightarrow \mathcal{M}'$  tel que  $T_{\text{st}}(\gamma) = \beta$ . La composée  $\gamma \circ \alpha : \text{Max}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}'$  s'envoie alors par  $T_{\text{st}}$  sur l'identité de  $T$  et est donc, elle-même, un isomorphisme puisque  $\text{Max}(\mathcal{M})$  est maximal. On en déduit que  $\text{Max}(\mathcal{M})$  apparaît comme un facteur direct de  $M_{\text{st}}(T)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\mathcal{M}'' \in \text{Mod}_{/S_1}^{r, \phi, N}$  tel que  $M_{\text{st}}(T) = \text{Max}(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{M}''$ . Pour montrer que  $\mathcal{M}'' = 0$ , on considère l'ensemble des  $x \in M_{\text{st}}(T)$  qui sont dans le noyau de tous les éléments de l'image de  $\beta$  : en reprenant la construction de  $M_{\text{st}}(T)$ , on montre qu'il est inclus dans  $u \cdot M_{\text{st}}(T)$ , à partir de quoi on déduit que  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}'') = 0$  et on conclut.

On déduit de ce qui précède, d'une part, que  $M_{\text{st}}(T)$  est bien maximal et, d'autre part, que la composée  $M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}} : \text{Max}_{/S_1}^{r, \phi, N} \rightarrow \text{Max}_{/S_1}^{r, \phi, N}$  est bien l'identité. Le fait que la composée dans l'autre sens soit également l'identité résulte à ce niveau par exemple de la pleine fidélité de  $T_{\text{st}}$  (mais peut également se démontrer directement sans difficulté).

On signale finalement, sans démonstration, la proposition suivante qui donne un critère permettant de reconnaître

**Proposition 2.4.3.** *Une représentation  $T \in \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$  est dans l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$  si, et seulement si  $\dim_{S_1} M_{\text{st}}(T) = \dim_{\mathbb{F}_p} T$ .*

*Remarque 2.4.4.* On notera que l'on a toujours l'inégalité  $\dim_{S_1} M_{\text{st}}(T) = \dim_{\mathbb{F}_p} T$ .

## Chapitre 3

# Dimensions des variétés de Kisin

Ce nouveau chapitre, dont le but est de présenter les résultats de [20], s'inscrit dans un certain sens dans la continuité du précédent puisque l'on poursuit l'étude des fibres des foncteurs  $T_{\text{cris}}$  ; il s'en distingue néanmoins nettement par le point de vue adopté qui n'est maintenant plus « catégorique » mais géométrique.

Comme cela a déjà été fait dans le §2.3.1, pour étudier les fibres de  $T_{\text{cris}}$ , on s'empresse d'utiliser l'équivalence de catégorie  $M_{\mathfrak{S}_\infty}$  afin de remplacer ce foncteur par  $T_\phi$  et, par la même, la catégorie  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi}$  par  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_1}^{r,\phi}$ . On n'est ainsi plus tenu par l'hypothèse  $r < p - 1$  et, de fait, à partir de maintenant, on autorise  $r$  à être n'importe quel entier naturel. On fixe une  $\mathbb{F}_p$ -représentation galoisienne  $T$  de dimension finie, et on note  $M$  le  $\phi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}/p\mathcal{E}^{\text{int}} = k((u))$  qui lui est associé. La fibre de  $T_\phi$  au-dessus de  $T$  s'interprète alors comme l'ensemble des  $k[[u]]$ -réseaux de  $M$  qui sont des objets de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_1}^{r,\phi}$ . Or, cet ensemble apparaît naturellement comme les points d'une variété algébrique  $\mathcal{X}_{\leq er}(M)$  définie sur  $k$  que l'on peut définir par son foncteur des points : à toute  $k$ -algèbre  $R$ , on fait correspondre l'ensemble  $\mathcal{X}_{\leq er}(M)(R)$  des sous- $R[[u]]$ -modules  $L$  de  $R((u))^d$  qui sont tels que :

- i)  $L$  est un réseau de  $R((u)) \otimes_{k((u))} M$ , c'est-à-dire que  $L$  est un  $R[[u]]$ -module localement libre de type fini (pour la topologie de  $\text{Spec } R$ ) et le morphisme naturel  $L \otimes_{R[[u]]} R((u)) \rightarrow M$  est un isomorphisme ;
- ii)  $L$  est stable par  $\phi$  et le  $R[[u]]$ -module engendré par  $\phi(L)$  contient  $u^{er}L$  (où  $\phi$  opère sur  $R((u)) \otimes_{k((u))} M$  en envoyant  $s \otimes x$  sur  $s^p \otimes \phi(x)$ ).

Il est possible de légèrement généraliser la situation précédente à moindre frais en remplaçant le Frobenius  $\phi$  agissant sur  $k((u))$  par un opérateur plus général  $\sigma$  qui prend la forme suivante :

$$\sigma : \sum_{i \gg -\infty} a_i u^i \mapsto \sum_{i \gg -\infty} a_i^{p^h} u^{bi}$$

où  $h$  est un entier relatif (éventuellement nul) et  $b$  est un entier  $\geq 2$ . Le  $\phi$ -module étale  $M$  sur  $k((u))$  est alors remplacé par un  $\sigma$ -module étale, c'est-à-dire un  $k((u))$ -espace vectoriel  $M$  de dimension finie muni d'un endomorphisme  $\sigma$ -semi-linéaire  $\sigma : M \rightarrow M$  tel que  $\text{id} \otimes \sigma : \mathfrak{S} \otimes_{\sigma, \mathfrak{S}} M \rightarrow M$  soit un isomorphisme. Les variétés  $\mathcal{X}_{\leq er}(M)$  sont définies de façon identique. Cette généralisation peut paraître superficielle mais, au moins autoriser le cas  $(h, b) = (0, p)$  revêt une grande importance car l'on retrouve ce faisant certaines variétés qui avaient été introduites par Kisin dans [38] (puis reprises par Pappas et Rapoport dans une plus grande généralité dans [44]) pour résoudre des questions de modularité de premier plan. Suivant Pappas et Rapoport, on donne le nom de *variétés de Kisin* aux variétés  $\mathcal{X}_{\leq er}(M)$ .

Peu de choses sont connues au sujet de la géométrie des variétés de Kisin. Lorsque  $(h, b) = (0, p)$  et lorsque  $M$  est de dimension 2 sur  $k((u))$  (ce qui est un cas intéressant car il est le plus directement en lien avec les formes modulaires), on dispose toutefois d'un certain nombre de résultats dûs à Kisin lui-même (voir [38]), Hellmann (voir [30] et [31]) et Imai (voir [32], [33] et [34]). Dans ce chapitre, on s'intéresse à une situation « orthogonale » qui est celle où  $M$  est le  $\sigma$ -module trivial de dimension  $d \geq 2$  (i.e.  $M = k((u))^d$  avec l'action de  $\sigma$  coordonnée par coordonnée).



### 3.1 Énoncé des résultats

On se place dans la situation qui vient d'être décrite : on ne fait aucune hypothèse sur  $h$ , ni sur  $b$  mais on choisit pour  $M$  le  $\sigma$ -module trivial de dimension  $d$  où  $d$  désigne un entier  $\geq 2$ . Dans la suite, au lieu de noter  $\mathcal{X}_{\leq er}(M)$  la variété de Kisin correspondante, on écrira simplement  $\mathcal{X}_{\leq er}$ . Les résultats que l'on va présenter ci-après — et qui, on le rappelle, font l'objet de l'article [20] — concernent exclusivement la dimension de  $\mathcal{X}_{\leq er}$ , ainsi que de quelques unes de ses sous-variétés. Dans tout ce qui suit, la notation  $[x]$  désigne la partie entière du réel  $x$ , c'est-à-dire le plus grand nombre entier  $\leq x$ .

**Théorème 3.1.1.** *Si  $h \neq 0$ , on a :*

$$\left[ \frac{d^2}{4} \right] \cdot \left[ \frac{er - b + 2}{b + 1} \right] \leq \dim_k \mathcal{X}_{\leq er} \leq \left[ \frac{d^2}{4} \right] \cdot \frac{er}{b + 1}.$$

*Si  $h = 0$ , on a :*

$$\left[ \frac{d^2}{4} \right] \cdot \left[ \frac{e - b + 2}{b + 1} \right] \leq \dim_k \mathcal{X}_{\leq er} \leq \frac{d(d-1)}{2} + \left[ \frac{d^2}{4} \right] \cdot \frac{er}{b + 1}.$$

On insiste sur le fait que le théorème n'affirme en aucune façon que les variétés  $\dim_k \mathcal{X}_{\leq er}$  sont équidimensionnelles, ni même que l'inégalité annoncée vaut pour toutes les composantes irréductibles. Le nombre  $\dim_k \mathcal{X}_{\leq er}$  désigne bien uniquement la plus grande dimension d'une composante irréductible.

On en vient maintenant aux sous-variétés de  $\mathcal{X}_{\leq er}$  qui ont été évoquées précédemment. Pour les définir, on se donne un  $d$ -uplet d'entiers  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$  tel que  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_d$  et on introduit l'ensemble

$$\mathcal{X}_\mu(k) = \left\{ \text{réseaux } L \text{ de } M \mid \begin{array}{l} \text{il existe une base } e_1, \dots, e_d \text{ de } L \text{ telle que} \\ u^{\mu_1} e_1, \dots, u^{\mu_d} e_d \text{ soit une base de } \sigma(k[[u^{1/b}]] \otimes_{k[[u]]} L) \end{array} \right\}$$

qui, comme la notation le suggère, apparaît naturellement comme l'ensemble des  $k$ -points d'une variété algébrique  $\mathcal{X}_\mu$ . On pose aussi  $\mathcal{X}_{\leq \mu} = \bigcup_{\mu' \leq \mu} \mathcal{X}_{\mu'}$  où l'on convient que  $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_d)$  est plus petit ou égal à  $\mu$  si  $\mu'_1 + \dots + \mu'_t \leq \mu_1 + \dots + \mu_t$  pour tout  $t \in \{1, \dots, d\}$  avec égalité si  $t = d$ . Lorsque  $\mu_1 \leq er$  et  $\mu_d \geq 0$ , les variétés  $\mathcal{X}_{\leq \mu}$  et  $\mathcal{X}_\mu$  sont des sous-variétés de  $\mathcal{X}_{\leq er}$  qui sont respectivement fermées et localement fermées.

**Définition 3.1.2.** On dit qu'un  $d$ -uplet  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$  est :

- *$b$ -régulier* si  $\mu_i - \mu_{i+1} \leq b(\mu_{d-i} - \mu_{d-i+1})$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  ;
- *intégralement  $b$ -régulier* s'il est  $b$ -régulier, si tous les  $\mu_i$  sont entiers et si  $b-1$  divise  $\mu_1 + \dots + \mu_d$  ;
- *fortement intégralement  $b$ -régulier* s'il est intégralement  $b$ -régulier et vérifie en plus :

$$\mu_{d-1} - \mu_d \leq b(\mu_1 - \mu_2) - d(b^2 - 1).$$

Si  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$  est  $b$ -régulier, alors  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_d$ , tandis que réciproquement si les  $\mu_i$  sont rangés par ordre décroissant et deux à deux distincts, le  $d$ -uplet  $\mu$  est  $b$ -régulier pour  $b$  suffisamment grand. Pour la suite, il sera en outre commode de munir  $\mathbb{R}^d$  du produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$  et d'introduire le vecteur  $\vec{\rho} = (\frac{d-1}{2}, \frac{d-3}{2}, \dots, \frac{1-d}{2}) \in \mathbb{R}^d$  (la  $i$ -ième coordonnée est donnée par la formule  $\frac{d+1}{2} - i$ ).

**Théorème 3.1.3.** *Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_d$ . Si  $b-1$  ne divise pas  $\mu_1 + \dots + \mu_d$ , alors la variété  $\mathcal{X}_\mu$  est vide. On suppose à partir de maintenant que  $b-1$  divise  $\mu_1 + \dots + \mu_d$ .*

*On pose  $\varepsilon = 1$  si  $h = 0$  et  $\varepsilon = 0$  dans le cas contraire. Alors, il existe un entier  $\delta \in \{0, 1, \dots, \varepsilon \cdot \frac{d(d-1)}{2}\}$  tel que l'on ait la congruence :*

$$\dim_k \mathcal{X}_\mu \equiv \delta - \sum_{i=1}^d i \cdot \mu_i \pmod{b-1}.$$

*En particulier, si  $h \neq 0$ , on a :*

$$\dim_k \mathcal{X}_\mu \equiv - \sum_{i=1}^d i \cdot \mu_i \pmod{b-1}.$$

On suppose maintenant en plus  $b \geq 1 + \lfloor \frac{(d-1)^2}{4} \rfloor$ . Alors on a :

$$\dim_k \mathcal{X}_\mu \leq \varepsilon \cdot \frac{d(d-1)}{2} + (b-1) \cdot \min_{w \in \mathfrak{S}_d} \sum_{i=1}^d \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i \cdot \frac{d+1-i-w^n(i)}{b^n}$$

où  $\mathfrak{S}_d$  désigne le groupe des permutations de  $\{1, \dots, d\}$  et  $w^n = w \circ \dots \circ w$  ( $n$  fois). En outre, si  $\mu$  est  $b$ -régulier, alors le minimum précédent est atteint pour  $w = w_0 : i \mapsto d+1-i$  et vaut  $\frac{1}{b^2-1} \cdot \langle 2\bar{\rho} | \mu \rangle_d$  (le produit de ce minimum par  $(b-1)$  est donc égal à  $\frac{1}{b+1} \cdot \langle 2\bar{\rho} | \mu \rangle_d$ ).

On suppose toujours  $b \geq 1 + \lfloor \frac{(d-1)^2}{4} \rfloor$ . Il existe des constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  (qui ne dépendent que de  $d$  et  $b$ ) telles que si les  $\mu_i$  vérifient en plus  $\mu_i \geq \mu_{i+1} + c_1$  pour tout  $i$ , alors :

$$\dim_k \mathcal{X}_\mu \geq -c_2 + (b-1) \cdot \min_{w \in \mathfrak{S}_d} \sum_{i=1}^d \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i \cdot \frac{d+1-i-w^n(i)}{b^n}.$$

Il est clair que les sommes infinies qui apparaissent dans les formules du théorème précédent convergent. Étant donné que toute permutation  $w$  est d'ordre fini, on peut même facilement calculer leur limite qui s'exprime toujours comme le produit de  $\mu_i$  par un nombre rationnel, ce dernier étant même la valeur en  $b$  d'une fraction rationnelle à coefficients entiers.

**Théorème 3.1.4.** Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$  tel que  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_d$ . On pose  $\varepsilon = 1$  si  $h = 0$  et  $\varepsilon = 0$  dans le cas contraire. Alors :

$$-(d-1)^2 - \frac{(d-2)^2}{4} + \sup_{\substack{\mu' \leq \mu \\ \mu' \text{ f.i. } b\text{-rég.}}} \frac{\langle 2\bar{\rho} | \mu' \rangle_d}{b+1} \leq \dim_k \mathcal{X}_{\leq \mu} \leq \varepsilon \cdot \frac{d(d-1)}{2} + \frac{\langle 2\bar{\rho} | \mu \rangle_d}{b+1}.$$

Si, en outre,  $b \geq 1 + \max(d, \lfloor \frac{(d-1)^2}{4} \rfloor)$ , alors la majoration peut être renforcée comme suit :

$$\dim_k \mathcal{X}_{\leq \mu} \leq \varepsilon \cdot \frac{d(d-1)}{2} + \sup_{\substack{\mu' \leq \mu \\ \mu' \text{ } b\text{-rég.}}} \frac{\langle 2\bar{\rho} | \mu' \rangle_d}{b+1}.$$

Il est utile de commenter un peu le théorème. Pour la première assertion, on remarque que si  $\mu$  est lui-même fortement intégralement  $b$ -régulier, alors la borne supérieure qui apparaît est atteinte pour  $\mu' = \mu$ . Ainsi le théorème dit, dans ce cas, que la quantité  $\frac{\langle 2\bar{\rho} | \mu \rangle_d}{b+1}$  est une bonne approximation de la dimension de  $\mathcal{X}_{\leq \mu}$ . La deuxième assertion mérite, quant à elle, une discussion plus approfondie. Tout d'abord, il est facile de prouver que la borne supérieure qui apparaît est plus petite ou égale — et en général strictement plus petite, du moins si  $\mu$  n'est pas lui-même  $b$ -régulier — que  $\frac{\langle 2\bar{\rho} | \mu \rangle_d}{b+1}$  ; ainsi, comme cela est déjà précisé dans l'énoncé du théorème, la majoration écrite est meilleure que la précédente. Par ailleurs, on a clairement  $\mathcal{X}_{\leq \mu} = \bigcup_{\mu' \leq \mu} \mathcal{X}_{\leq \mu'}$ , d'où on déduit que :

$$\dim_k \mathcal{X}_{\leq \mu} = \sup_{\mu' \leq \mu} \dim_k \mathcal{X}_{\leq \mu'}.$$

L'inégalité du théorème dit donc *en substance* que, si  $b \geq 1 + \max(d, \lfloor \frac{(d-1)^2}{4} \rfloor)$ , les variétés  $\mathcal{X}_{\leq \mu'}$ , pour  $\mu' \leq \mu$  non  $b$ -régulier, n'apportent pratiquement pas de nouvelles dimensions à  $\mathcal{X}_{\leq \mu}$ . Notamment, contrairement à ce qui se passe dans le cas des variétés de Deligne-Lusztig affines, il n'est pas clair — et ce n'est d'ailleurs en général pas vrai — que l'essentiel de la dimension de  $\mathcal{X}_{\leq \mu}$  est concentré dans la variété  $\mathcal{X}_\mu$ . Du fait que  $\mathcal{X}_\mu$  est un ouvert dans  $\mathcal{X}_{\leq \mu}$ , il suit que  $\mathcal{X}_{\leq \mu}$  n'est généralement pas équidimensionnelle lorsque  $\mu$  n'est pas  $b$ -régulier.

Dans les deux sous-parties suivantes, on donne une idée générale de la démonstration du théorème 3.1.3<sup>1</sup>. Celle-ci se découpe en deux parties clairement différenciées qui correspondent respectivement au §3.2 et au §3.3. La première d'entre elles, très inspirée de [49], consiste à raffiner à leur tour les variétés  $\mathcal{X}_\mu$  par des sous-variétés localement fermées  $\mathcal{X}_\varphi$  dont on sait calculer la dimension. Écrivant alors que la dimension de  $\mathcal{X}_\mu$  est égale au maximum des dimensions des  $\mathcal{X}_\varphi$ , on aboutit à un nouveau problème de programmation linéaire entière que l'on résout ensuite, de manière approchée, dans la seconde partie de la preuve.

<sup>1</sup>La démonstration des deux autres théorèmes suit une méthode semblable.

### 3.2 Raffinement de la stratification

Pour définir les variétés  $\mathcal{X}_\varphi$ , la première étape consiste à associer une donnée combinatoire  $\varphi$  à chaque  $k[[u]]$ -réseau  $L$  de  $M = k((u))^d$ . Pour cela, on note  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $M$ . On considère également l'espace  $M_{k((u^{1/b}))} = k((u^{1/b})) \otimes_{k((u))} M = k((u^{1/b}))^d$  dont une base sur  $k((u^{1/b}))$  est formée des vecteurs  $1 \otimes e_i$ . Soit  $\text{val}$  la valuation naturelle sur  $k((u^{1/b}))$  normalisée par  $\text{val}(u) = 1$ . On a donc  $\text{val}(u^{1/b}) = \frac{1}{b}$ . Pour tout couple  $(v, i) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times \{1, \dots, d\}$ , on pose

$$B_{v,i} = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in k((u)) \mid \begin{array}{l} \text{val}(x_1) > v, \dots, \text{val}(x_{i-1}) > v, \text{val}(x_i) = v, \\ \text{val}(x_{i+1}) \geq v, \dots, \text{val}(x_d) \geq v \end{array} \right\} \subset M_{k((u^{1/b}))}.$$

Lorsque  $(v, i)$  parcourt  $\frac{1}{b}\mathbb{Z} \times \{1, \dots, d\}$ , les  $B_{v,i}$  recouvrent  $M_{k((u^{1/b}))}$  privé du vecteur nul. Un nombre réel  $a \in ]0, 1[$  étant fixé, on pose  $\|x\| = a^{\text{val}(x)}$  pour tout  $x \in k((u))$ . À un  $k[[u]]$ -réseau  $L$  de  $M$ , il est alors associé une norme  $\|\cdot\|_L$  sur  $M$  : si  $(f_1, \dots, f_d)$  est une  $k[[u]]$ -base de  $L$ , elle est définie par  $\|\sum_{i=1}^d \lambda_i f_i\|_L = \max_{1 \leq i \leq d} \|\lambda_i\|$ . Pour tout couple  $(v, i)$  comme précédemment, on note  $\tilde{\varphi}_i(L)(v)$  le nombre défini par :

$$\text{dist}_{0,L}(\sigma(B_{v,i} \cap (k[[u^{1/b}]] \otimes_{k[[u]]} L))) = a^{\tilde{\varphi}_i(L)(v)}$$

où  $\text{dist}_{0,L}$  désigne la distance à l'origine pour la norme  $\|\cdot\|_L$ . Il peut arriver que l'intersection  $B_{v,i} \cap (k[[u^{1/b}]] \otimes_{k[[u]]} L)$  soit vide ; dans ce cas, la distance considérée n'est pas définie, et on convient que  $\tilde{\varphi}_i(L)(v) = -\infty$ . Par contre, lorsqu'elle est définie, cette distance ne s'annule jamais étant donné que 0 n'appartient à aucun  $B_{v,i}$  ; il n'y a donc aucun problème, dans ce cas, pour extraire le logarithme en base  $a$ .

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $L$  un réseau de  $M$ . Les fonctions  $\tilde{\varphi}_i(L) : \frac{1}{b}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ ,  $v \mapsto \tilde{\varphi}_i(L)(v)$  vérifient les propriétés suivantes.*

1. *Pour tout  $i$ , la fonction  $\tilde{\varphi}_i(L)$  est strictement croissante où, par un léger abus d'écriture, l'on entend par là que  $\tilde{\varphi}_i(L)$  est croissante et qu'elle est strictement croissante sur l'ensemble où elle prend des valeurs finies.*
2. *Pour tout  $i$ , il existe un entier  $\tilde{q}_i(L)$  tel que*
  - *la fonction  $\tilde{\varphi}_i(L)$  prend des valeurs finies exactement sur l'intervalle  $[\tilde{q}_i(L), +\infty[$ , et*
  - *pour  $v$  suffisamment grand, on a  $\tilde{\varphi}_i(L)(v) = bv - \tilde{q}_i(L)$ .*
3. *Pour  $j \in \{1, \dots, d\}$ , il existe des fonctions croissantes  $\psi_j(L) : \mathbb{Z} \rightarrow \frac{1}{b}\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  telles que  $\psi_1(L) \leq \psi_2(L) \leq \dots \leq \psi_d(L)$  et pour tout couple  $(v, \mu) \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , il y a autant d'indices  $i \in \{1, \dots, d\}$  tels que  $\mu = \tilde{\varphi}_i(L)(v)$  que d'indices  $j \in \{1, \dots, d\}$  tels que  $v = \psi_j(L)(\mu)$ .*

*Ces fonctions sont en outre uniquement déterminées.*

4. *Si  $\mu_1(L), \dots, \mu_d(L)$ , avec  $\mu_1(L) \geq \dots \geq \mu_d(L)$ , sont les exposants des diviseurs élémentaires du  $k[[u]]$ -module engendré par  $\sigma(L)$  par rapport à  $L$ , alors, pour tout  $i$ , la fonction  $\psi_i$  prend des valeurs finies exactement sur l'intervalle  $[\mu_i(L), +\infty[$ .*

Si  $L$  est un réseau de  $M$ , on définit aussi des fonctions  $\varphi_1(L), \dots, \varphi_d(L) : \frac{1}{b}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  en convenant que pour tout  $v \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ , les nombres  $\varphi_1(L)(v), \dots, \varphi_d(L)(v)$  sont les mêmes que  $\tilde{\varphi}_1(L)(v), \dots, \tilde{\varphi}_d(L)(v)$  mais triés par ordre décroissant. Les fonctions précédentes vérifient donc tautologiquement l'inégalité  $\varphi_1(L) \geq \varphi_2(L) \geq \dots \geq \varphi_d(L)$  et satisfont encore aux quatre alinéas de la proposition 3.2.1 : les entiers  $\mu_j(L)$  restent inchangés tandis que les  $\tilde{q}_i(L)$  sont *a priori* permutés. Dans la suite, l'entier correspondant à la fonction  $\varphi_i(L)$  sera noté  $q_i(L)$ .

On appelle  $\Phi_{\mathbb{Z}}$  l'ensemble des  $d$ -uplets de fonctions  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  satisfaisant aux conditions de la proposition 3.2.1 et vérifiant en outre  $\varphi_1 \geq \dots \geq \varphi_d$ . Étant donné un élément  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  de  $\Phi_{\mathbb{Z}}$ , il est commode pour mieux visualiser les  $\varphi_i$  de les prolonger à tout  $\mathbb{R}$  en posant  $\varphi_i(q) = \varphi_i(v) + b(q - v)$  si  $v \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$  et  $q \in [v, v + \frac{1}{b}[$ . On a représenté sur la figure 3.1 un exemple de telles fonctions (prolongées) lorsque  $d = 4$  ; on voit immédiatement qu'elles ont une forme bien particulière qui semble possible de décrire avec peu de paramètres. Pour en arriver à une telle description, on introduit les points  $Q_{i,j}(\varphi)$  (pour  $1 \leq i \leq j \leq d$ ) représentés sur la figure 3.1. De façon formelle, dans le cas où  $\varphi_1 > \dots > \varphi_d$ , les coordonnées  $(q_{i,j}(\varphi), \mu_{i,j}(\varphi))$  des points  $Q_{i,j}$  sont définies par :

- l'abscisse  $q_{i,j}(\varphi)$  est la borne inférieure des nombres réels  $q$  tels que  $\psi_j \circ \varphi_i(q) \geq q$ , et
- l'ordonnée  $\mu_{i,j}(\varphi)$  est la borne inférieure des nombres réels  $\mu$  tels que  $\varphi_i \circ \psi_j(\mu) \geq \mu$

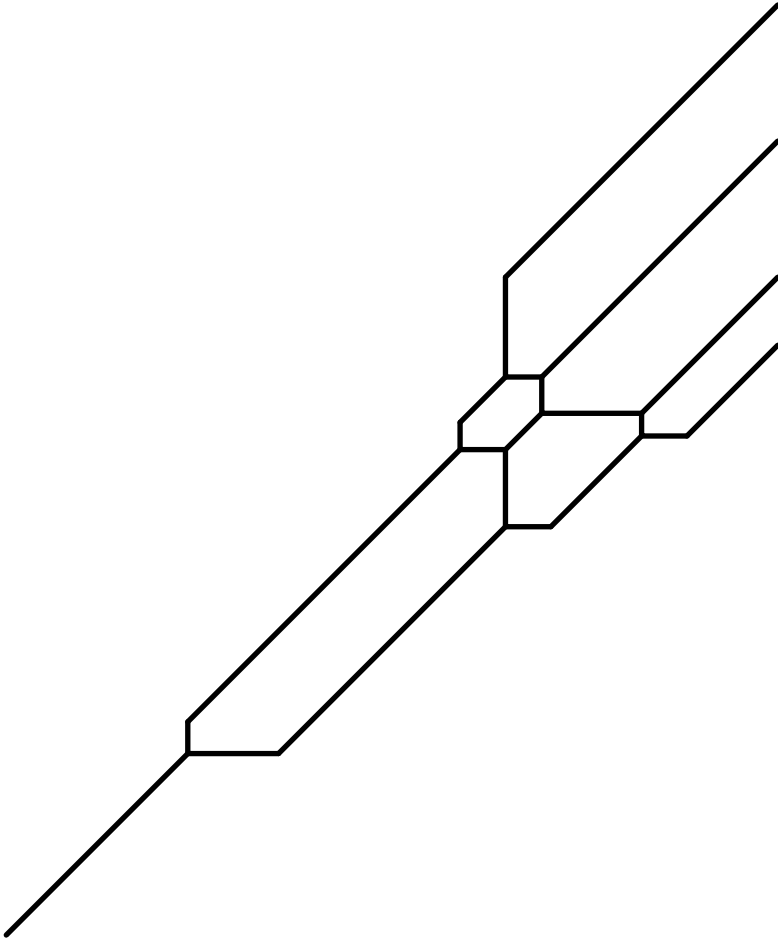


FIG. 3.1 – Un exemple de  $d$ -uplet  $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  satisfaisant aux conditions de la proposition 3.2.1

où les  $\psi_j$  sont les fonctions données par l'assertion 3 de la proposition 3.2.1. Lorsque deux fonctions  $\varphi_i$  prennent la même valeur à un même point, la définition des  $q_{i,j}(\varphi)$  et  $\mu_{i,j}(\varphi)$  est plus complexe et on renvoie simplement au §1.2.3 de [20] pour une explication sur qu'il convient de faire dans ce cas. Une étude combinatoire plutôt longue et technique, mais sans réelle difficulté, permet d'aboutir à la proposition suivante.

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $I$  l'ensemble des couples  $(i, j)$  tels que  $1 \leq i \leq j \leq d$ . L'application  $\varphi \mapsto Q_{i,j}(\varphi)$  réalise une bijection de  $\Phi_{\mathbb{Z}}$  sur le sous-ensemble de  $(\mathbb{Q}^2)^I$  formés des uplets  $(q_{i,j}, \mu_{i,j})_{(i,j) \in I}$  tels que*

$$\mu_{i,i} = bq_{i,i} - q_{i,d} \quad ; \quad \mu_{i+1,j} - \mu_{i,j} = b(q_{i,j-1} - q_{i,j}) \quad (3.1)$$

$$q_{i,j} \geq q_{i,j+1} \quad ; \quad q_{i,j} \leq q_{i+1,j+1} \quad ; \quad \mu_{i,j} \geq \mu_{i+1,j+1} \quad (3.2)$$

$$\mu_{i,j} \in \mathbb{Z} \quad ; \quad \mu_{i,i} + \mu_{i,i+1} + \cdots + \mu_{i,d} \equiv 0 \pmod{b-1} \quad (3.3)$$

pour tous  $i$  et  $j$  pour lequel cela à un sens.

Les égalités (3.1) permettent d'exprimer les  $\mu_{i,j}$  en fonction des  $q_{i,j}$  et réciproquement. On peut donc se contenter de retenir uniquement les  $q_{i,j}$ , ou uniquement les  $\mu_{i,j}$ . La contrepartie est que, dans ce cas, certaines des inégalités (3.2) s'écrivent de manière nettement plus compliquée.

Pour  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ , on peut montrer que l'ensemble  $\mathcal{X}_{\varphi}(k)$  formé des réseaux  $L \subset M$  tels que  $\varphi_i(L) = \varphi_i$  pour tout  $i$  apparaît naturellement comme les  $k$ -points d'une variétés algébriques  $\mathcal{X}_{\varphi}$ . L'assertion 4 de la proposition 3.2.1 montre, en outre, que  $\mathcal{X}_{\varphi}$  est incluse dans  $\mathcal{X}_{\mu}$  pour  $\mu = (\mu_{1,1}(\varphi), \dots, \mu_{1,d}(\varphi))$ . On en déduit que si  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ , on a :

$$\dim_k \mathcal{X}_{\mu} = \sup_{\substack{\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}} \\ \mu_i(\varphi) = \mu_i, \forall i}} \dim_k \mathcal{X}_{\varphi}. \quad (3.4)$$

Par ailleurs, on sait calculer — ou seulement estimer si  $h = 0$  — la dimension des variétés  $\mathcal{X}_{\varphi}$ .

**Théorème 3.2.3.** *Soit  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ . Alors, si  $h \neq 0$ , on a :*

$$\dim_k \mathcal{X}_{\varphi} = \sum_{j=1}^d (d+1-j) \cdot \mu_{1,j}(\varphi) - \sum_{(i,j) \in I} \mu_{i,j}(\varphi).$$

Si  $h = 0$ , on a seulement :

$$0 \leq \dim_k \mathcal{X}_{\varphi} - \left( \sum_{j=1}^d (d+1-j) \cdot \mu_{1,j}(\varphi) - \sum_{(i,j) \in I} \mu_{i,j}(\varphi) \right) \leq \frac{d(d-1)}{2}.$$

En mettant ensemble le théorème précédent et les conditions (3.3), on obtient directement la congruence du théorème 3.1.3. Dans ce mémoire, on ne dira rien sur la démonstration (plutôt longue et technique) du théorème 3.2.3 ; le lecteur intéressé par une preuve complète pourra se reporter au §1.3.2 de [20].

### 3.3 Un problème de programmation linéaire

Pour alléger les écritures, on se place dans toute la suite dans le cas où  $h \neq 0$ . Un  $d$ -uplet  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$  étant fixé, la dimension de la variété  $\mathcal{X}_{\mu}$  est égale au maximum des

$$\dim(\varphi) = \sum_{j=1}^d (d+1-j) \cdot \mu_{1,j}(\varphi) - \sum_{(i,j) \in I} \mu_{i,j}(\varphi) \quad (3.5)$$

où  $\varphi$  parcourt le sous-ensemble de  $\Phi_{\mathbb{Z}}$  formé des éléments tels que  $\mu_{1,i}(\varphi) = \mu_i$  pour tout  $i$ . Vue la forme des formules (3.1), (3.2), (3.3) et (3.5), on est ramené à trouver le maximum d'une forme linéaire sur l'intersection dans  $(\mathbb{Q}^2)^I$  d'un réseau et d'un polytope convexe. C'est ce que l'on appelle un problème de *programmation linéaire entière*, et on dispose pour l'attaquer d'outils classiques, à l'instar du théorème suivant (qui est une variante, adaptée à la situation, du théorème de dualité en programmation linéaire).

**Théorème 3.3.1.** *On se donne :*

- un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie ;
- un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$  sur  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E$  ;
- un cône convexe  $Q \subset E$ , c'est-à-dire un sous-ensemble non vide de  $E$  stable par addition et par multiplication par les nombres réels positifs ou nuls ;
- un  $\mathbb{Z}$ -réseau  $R$  de  $E$  ;
- des vecteurs  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n, \vec{\delta}$  de  $E$  (où  $n$  désigne un certain entier).

On note  $Q^*$  le cône dual<sup>2</sup> de  $Q$  dans  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E$ . On définit l'ensemble :

$$A = \{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid (y_1 \vec{f}_1 + \dots + y_n \vec{f}_n) - \vec{\delta} \in Q^* \} \quad (3.6)$$

et la fonction :

$$\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sup_{\substack{x \in Q \cap R \\ f(x)=y}} \langle x | \vec{\delta} \rangle_E \quad \text{où } f(x) = (\langle x | \vec{f}_1 \rangle_E, \dots, \langle x | \vec{f}_n \rangle_E).$$

Alors, il existe un vecteur  $y_0 \in \mathbb{Q}^n$  et une constante  $c \in \mathbb{R}$ , pour tout  $y \in f(R)$ , on ait :

$$-c + \inf_{a \in A} \langle a | y - y_0 \rangle_n \leq \alpha(y) \leq \inf_{a \in A} \langle a | y \rangle_n$$

où  $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$  est le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .

Si on prend pour  $E$  l'espace  $(\mathbb{Q}^2)^I$  muni du produit scalaire usuel, pour  $Q$  le cône défini par les égalités (3.1) et les inégalités (3.2), pour  $R$  le réseau défini par les conditions (3.3), pour  $\vec{f}_i$  le vecteur tel que l'application  $\langle \cdot | \vec{f}_i \rangle_E$  soit la projection sur la coordonnée  $\mu_{1,i}$  et, enfin, pour  $\vec{\delta}$  le vecteur tel que  $\langle \varphi | \vec{\delta} \rangle_E = \dim(\varphi)$  pour tout  $\varphi \in \Phi_{\mathbb{Z}}$ , la fonction  $\alpha$  résultante calcule la dimension de la variété  $\mathcal{X}_{\mu}$ . À partir de maintenant, on note  $A$  l'ensemble défini par la formule (3.6) à partir des paramètres précédents. À quelques explicitions près (que l'on ne détaillera pas ici), le théorème 3.1.3 que l'on cherche à démontrer résulte donc du lemme suivant.

**Lemme 3.3.2.** *On se place dans la situation décrite précédemment et, pour tout  $w \in \mathfrak{S}_d$ , on note  $\vec{\rho}_w$  le vecteur de  $\mathbb{R}^d$  suivant :*

$$\vec{\rho}_w = \left( (b-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d+1-i-w^n(i)}{b^n} \right)_{1 \leq i \leq d}.$$

On a alors, pour  $b$  suffisamment grand et pour tout  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$  tel que  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_d$ , l'égalité  $\inf_{a \in A} \langle a | \mu \rangle_n = \inf_{w \in \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle_n$ .

La démonstration du lemme est assez longue et technique. L'idée directrice est d'étudier les sommets du polytope convexe  $A$ . On commence par mettre de côté les  $\mu_{i,j}$  en utilisant les égalités (3.1) qui permettent de les exprimer en fonction des  $q_{i,j}$ . Le problème est que, ce faisant, la troisième inégalité de la ligne (3.2) devient extrêmement compliquée et rend les calculs impraticables. Pour contourner cet obstacle, on commence par remplacer  $Q$  par le cône plus gros  $Q_{\max}$  des  $(q_{i,j})_{(i,j) \in I} \in \mathbb{Q}^I$  telles que  $q_{i,j} \geq q_{i,j+1}$  et  $q_{i,j} \leq q_{i+1,j+1}$  ; autrement dit, on oublie momentanément l'inégalité compliquée. Le cône dual de  $Q_{\max}$  se calcule à l'aide du théorème classique suivant de théorie des graphes.

**Théorème 3.3.3.** *Soit  $G$  un graphe orienté simple dont on note  $S$  l'ensemble de ses sommets. On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^S$  des suites de nombres réels  $(x_s)_{s \in S}$  indexées par  $S$  et, à l'intérieur de celui-ci, on définit le cône  $Q_G$  formé des suites  $(x_s)_{s \in S}$  telles que  $x_s \geq x_{s'}$  dès qu'il existe, dans  $G$ , une arête de  $s$  vers  $s'$ . Alors, si  $\mathbb{R}^S$  est muni du produit scalaire usuel, une suite  $(x_s)_{s \in S}$  appartient au cône dual  $Q_G^*$  si, et seulement si*

$$\sum_{s \in S} x_s = 0 \quad \text{et} \quad \forall S' \subset S \text{ admissible, } \sum_{s \in S'} x_s \leq 0$$

où une partie  $S' \subset S$  est dite admissible si toute arête de  $G$  ayant son origine dans  $S'$  a aussi son but dans  $S'$ .

<sup>2</sup>On rappelle que si  $K$  est un cône dans un espace euclidien  $E$ , son cône dual est l'ensemble des vecteurs  $x \in E$  tels que  $\langle x | y \rangle_E \geq 0$  pour tout  $y \in K$ .

Dans la situation présente, on trouve qu'une famille  $(v_{i,j})_{(i,j) \in I}$  est dans  $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} Q_{\max})^*$  si, et seulement si

$$\sum_{(i,j) \in I} v_{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad \forall J \subset I \text{ admissible, } \sum_{(i,j) \in J} v_{i,j} \leq 0$$

où une partie de  $I$  est admissible si, dès qu'elle contient  $(i, j)$ , elle contient aussi  $(i, j + 1)$  et  $(i - 1, j - 1)$  pour peu que ces éléments soient dans  $I$ . Il est utile de remarquer que les parties admissibles de  $I$  sont naturellement en bijection avec les parties de  $\{1, \dots, d\}$  : à  $T = \{t_1, \dots, t_s\} \subset \{1, \dots, d\}$  avec  $t_1 > \dots > t_s$ , on fait correspondre le sous-ensemble de  $I$  des couples  $(i, j)$  tels que  $i \leq s$  et  $j > d - t_i$ . À partir de là, on déduit une description explicite de  $A_{\max}$  (l'ensemble  $A$  associé à  $Q_{\max}$  par la formule (3.6)) en termes d'intersection de demi-espaces. De façon légèrement plus précise, on montre qu'un vecteur  $(y_1, \dots, y_d)$  est dans  $A_{\max}$  si, et seulement si

$$y_1 + \dots + y_d = 0 \quad \text{et} \quad g_T(y) \geq 0, \quad \forall T \subset \{1, \dots, d\}$$

où les  $g_T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions affines complètement explicites. Les points extrémaux de  $A_{\max}$  s'obtiennent facilement à partir de là : ce sont les points dont la somme des coordonnées est nulle, qui sont à l'intersection de  $(d - 1)$  autres hyperplans affines indépendants parmi ceux d'équations  $g_T(y) = 0$ , et qui de plus appartiennent à  $A_{\max}$ . Un calcul montre que, pour  $b$  suffisamment grand, cela se produit si, et seulement si les  $T$  qui interviennent dans l'intersection forment, avec  $\emptyset$  et  $\{1, \dots, d\}$ , un « drapeau complet » de  $\{1, \dots, d\}$ , i.e. s'il existe  $w \in \mathfrak{S}_d$  telle que ces  $T$  soient exactement les  $\{w(1), \dots, w(i)\}$  pour  $1 \leq i \leq d - 1$ . On voit comme ceci apparaître le groupe des permutations ! Et, lorsque l'on termine le calcul, on trouve que les points extrémaux de  $A_{\max}$  sont exactement les vecteurs  $\vec{\rho}_w$  qui apparaissent dans l'énoncé du lemme 3.3.2.

Il s'agit maintenant de faire le lien entre  $A_{\max}$  et  $A$ . Déjà, de l'inclusion  $Q \subset Q_{\max}$ , on déduit  $A_{\max} \subset A$ . Par ailleurs, en reprenant les définitions, il est facile de voir que  $A$  est stable par addition d'un élément de  $C$  où  $C \subset \mathbb{R}^d$  est l'ensemble des  $(y_1, \dots, y_d)$  tels que  $y_1 + \dots + y_d = 0$  et  $y_1 + \dots + y_i \geq 0$  pour tout  $i$ . Ainsi  $A_{\max} + C \subset A$ . Le miracle est que, si  $b$  est suffisamment grand, cette inclusion est en fait une égalité ! Pour en arriver là, la démarche générale est la suivante. On remarque d'abord que les points extrémaux de  $A_{\max} + C$  forment un sous-ensemble des points extrémaux de  $A_{\max}$ , et sont donc tous de la forme  $\vec{\rho}_w$ . Pour tout  $w \in \mathfrak{S}_d$ , on note  $D_w$  le cône convexe tel qu'au voisinage de  $\vec{\rho}_w$ , on ait  $A_{\max} = \vec{\rho}_w + D_w$ . On a alors :

$$A_{\max} + C = \bigcap_{w \in \mathcal{S}_d} (\vec{\rho}_w + D_w + C)$$

où l'on a noté  $\mathcal{S}_d$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{S}_d$  correspondant aux points extrémaux de  $A_{\max} + C$ . Ainsi, il suffit de montrer que  $A \subset \vec{\rho}_w + D_w + C$  pour tout  $w \in \mathcal{S}_d$  et donc *a fortiori* que cette inclusion vaut pour tout  $w \in \mathfrak{S}_d$ . Pour cela, enfin, l'idée est d'interpréter l'ensemble  $A_w = \vec{\rho}_w + D_w + C$  comme l'ensemble  $A$  associé *via* la formule (3.6) à un certain cône  $Q_w$  inclus dans  $Q$  ; la conclusion en résultera. Une fois que l'on a pensé à raisonner ainsi, la construction de  $Q_w$  est assez naturelle : une permutation  $w$  étant fixée, on note  $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_{d-1}$  le drapeau correspondant et, pour tout  $s$ ,  $I_s$  la partie admissible associée à  $T_s$ . Les  $I_s$  forment une partition croissante de  $I$ . En posant de surcroît  $I_d = I$ , on peut définir l'ordre d'un élément  $(i, j) \in I$  comme le plus petit entier  $s$  tel  $(i, j) \in I_s$ . À son tour, cela permet de définir un nouveau graphe  $G_w$  : ses sommets sont les éléments de  $I$ , et on convient qu'il y a une arête de  $(i, j)$  vers  $(i', j')$  si l'ordre de  $(i, j)$  est inférieur ou égal à celui de  $(i', j')$ . Le cône  $Q_w$  est enfin défini comme l'intersection de  $Q_{G_w}$  (voir théorème 3.3.3 pour la définition du cône associé à un graphe) et de  $D = \{(q_{i,j}) \in E \mid \mu_{1,1} \geq \mu_{1,2} \geq \dots \geq \mu_{1,d}\}$  où les  $\mu_{i,j}$  sont définis à partir des  $q_{i,j}$  à l'aide des formules (3.1). Du théorème 3.3.3, il suit facilement une description explicite de  $Q_w^*$ , à partir de laquelle on trouve bien que l'ensemble  $A$  associé à  $Q_w$  est  $A_w$ . Il ne reste donc plus qu'à montrer que  $Q_w \subset Q$ , ce qui résulte de considérations purement combinatoires (élémentaires mais localement astucieuses) que l'on ne détaille pas ici. (On pourra consulter les §3.2.2 et 3.2.3 de [20] pour une preuve complète de cette inclusion.)

Enfin, à partir de la description de  $A$  que l'on vient d'obtenir, le lemme 3.3.2 suit facilement. En effet, l'infimum des  $\langle a | \mu \rangle$  est le même qu'on le prenne sur les  $a \in A$  ou sur les  $a \in A_{\max}$  puisque  $\langle c | \mu \rangle \geq 0$  pour tout  $c \in C$ . Enfin, puisque les  $\vec{\rho}_w$  sont les points extrémaux de  $A_{\max}$ , il est aussi égal à l'infimum des  $\langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle$  pour  $w$  parcourant  $\mathfrak{S}_d$ .

### 3.4 Généralisations éventuelles

Il est vrai que les théorèmes 3.1.1, 3.1.3 et 3.1.4 peuvent sembler ni vraiment intéressants, ni faciles à appliquer car ils énoncent finalement, sous des hypothèses assez fortes, des résultats peu précis. En réalité, il faut plutôt les considérer comme un premier pas vers un résultat plus général que comme une fin en soi. Il me semble par exemple raisonnable de conjecturer que, les trois théorèmes précédents s'étendent à un  $\sigma$ -module étale  $M$  quelconque sans autre modification que celle d'adapter la valeur des constantes. (Pour un énoncé précis, on renvoie à la conjecture 4.5 de [20].)

Mais, mieux encore, le théorème 3.1.3 semble montrer la voie d'une vaste généralisation. En effet, il se trouve que la définition des variétés  $\mathcal{X}_\mu$  et  $\mathcal{X}_{\leq \mu}$  peut s'étendre à un groupe réductif connexe déployé quelconque (le cas qui a été considéré précédemment est celui de  $GL_d$ ). Plus précisément, on considère un groupe réductif connexe  $G$  défini sur le corps  $k$  (que, pour simplifier, l'on suppose algébriquement clos) et  $T \subset G$  un tore maximal. Soit  $X_*(T)$  le groupe des caractères de  $T$ . On fixe une chambre de Weyl dans  $X_*(T) \otimes \mathbb{R}$  dont l'adhérence est notée  $C$ . Si  $\lambda \in X_*(T)$ , on note  $u^\lambda$  l'image de  $u \in \mathbb{G}_m(k((u)))$  dans  $T(k((u))) \subset G(k((u)))$ . La décomposition de Cartan dit que  $G(k((u)))$  s'écrit comme l'union disjointe des doubles classes  $G(k[[u]]) \cdot u^\mu \cdot G(k[[u]])$  où  $\mu$  parcourt l'ensemble des copoids dominants. On définit par ailleurs un opérateur  $\sigma$  agissant sur  $G(k((u)))$  de la façon suivante : on fixe un morphisme de groupes algébriques  $\sigma_0 : G \rightarrow G$  qui induit une bijection sur les  $k$ -points (on rappelle que  $k$  est supposé algébriquement clos) et on pose  $\sigma = G(u \mapsto u^b) \circ \sigma_0(k((u)))$  où le premier morphisme est l'application déduite par functorialité du morphisme d'anneaux  $k((u)) \rightarrow k((u))$ ,  $\sum_{i \gg -\infty} a_i u^i \mapsto \sum_{i \gg -\infty} a_i u^{bi}$ , et le second est l'application induite par  $\sigma_0$  sur les  $k((u))$ -points. Si  $\mu$  est un copoids dominant et si  $A \in G(k((u)))$ , on peut alors définir des variétés  $\mathcal{X}_\mu^G(A)$  dont les  $k$ -points sont :

$$\mathcal{X}_\mu^G(A)(k) = \left\{ g \in \frac{G(k((u)))}{G(k[[u]])} \mid g^{-1} A \sigma(g) \in G(k[[u]]) \cdot u^\mu \cdot G(k[[u]]) \right\}.$$

La variété  $\mathcal{X}_\mu^G(A)$  est toujours de dimension finie, et on peut encore s'interroger sur la valeur de cette dimension. Dans cette optique, on peut se demander si les résultats obtenus pour  $\mathcal{X}_\mu$  ont une chance de s'étendre. Un premier fait encourageant est que les formules du théorème 3.1.3, et notamment l'expression

$$(b-1) \cdot \min_{w \in \mathfrak{S}_d} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle_d \quad \text{où} \quad \vec{\rho}_w = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d+1-i-w^n(i)}{b^n} \right)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d \quad (3.7)$$

qui est une bonne approximation de la dimension de  $\mathcal{X}_\mu$ , se réinterprètent naturellement en termes du système de racines de  $GL_d$ . En effet, déjà, le groupe  $\mathfrak{S}_d$  n'est autre que le groupe de Weyl de  $GL_d$ . Par ailleurs, si l'on fait agir ce groupe de manière naturelle sur  $\mathbb{R}^d$  — c'est-à-dire par  $w \cdot (y_1, \dots, y_d) = (y_{w^{-1}(1)}, \dots, y_{w^{-1}(d)})$  — le vecteur  $\vec{\rho}_w$  s'exprime en fonction de  $\vec{\rho} = (\frac{d+1}{2} - i)_{1 \leq i \leq d}$  comme suit :

$$\vec{\rho}_w = (b-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{\rho} + w^{-n} \vec{\rho}}{b^n} = \vec{\rho} + (b-1) \cdot (bw-1)^{-1}(\vec{\rho})$$

au moins lorsque  $b$  est assez grand pour que l'endomorphisme  $bw-1$  de  $\mathbb{R}^d$  soit inversible. Il ne reste plus, pour obtenir une réécriture complète, qu'à constater que  $\vec{\rho}$  est égal à la demi-somme des racines positives du système de racines  $A_d$ . Ces remarques motivent la conjecture suivante.

**Conjecture 3.4.1.** *Soit  $G$  un groupe réductif connexe sur  $k$ . Soit  $T$  un tore maximal de  $G$ . On note  $W$  le groupe de Weyl associé et on fixe une fois pour toutes le choix d'une chambre de Weyl. Soient  $\vec{\rho}$  la demi-somme des racines positives de  $G$  et  $A \in G(k((u)))$ . Alors, il existe des constantes  $b_0$  et  $c_0$  telles que pour tout  $b \geq b_0$ , on ait :*

$$\dim_k \mathcal{X}_\mu^G(A) \leq c_0 + \inf_{w \in W} \langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle \quad \text{où} \quad \vec{\rho}_w = \vec{\rho} + (b-1) \cdot (bw-1)^{-1}(\vec{\rho})$$

pour tout copoids dominant  $\mu$ .

Il paraît aussi raisonnable de croire qu'une minoration de la dimension de  $\mathcal{X}_\mu^G(A)$  par une expression du même type soit valable, au moins lorsque  $\mu$  vérifie une certaine condition d'intégrité et reste suffisamment lors



de la frontière de la chambre de Weyl. Malgré tout, l'étude de certains exemples pour  $G = \mathrm{GL}_2$  montre quelques comportements singuliers que je ne comprends pas encore comment intégrer dans ce contexte général. Je préfère donc encore rester prudent et évasif à ce sujet.

Le mot le plus long  $w_0$  de  $W$  échange les racines positives et les racines négatives. Ainsi  $w_0(\vec{\rho}) = -\vec{\rho}$  et, par suite,  $\vec{\rho}_{w_0} = \frac{2\vec{\rho}}{b+1}$  ; on retrouve donc encore une fois ce vecteur particulier. Fort de cette remarque, la conjecture 3.4.1 donne également une indication sur la façon d'étendre la définition de copoids  $b$ -réguliers : un copoids dominant  $\mu$  est dit  $b$ -régulier lorsque le minimum des produits scalaires  $\langle \vec{\rho}_w | \mu \rangle$  ( $w \in W$ ) est atteint lorsque  $w$  est le mot le plus long  $w_0$ , c'est-à-dire lorsque  $\langle \vec{\rho} + (b+1) \cdot (bw-1)^{-1}(\vec{\rho}) | \mu \rangle \geq 0$  pour tout  $w \in W$ . Cette définition s'étend à tous les  $\mu \in X_*(T) \otimes \mathbb{R}$ . Ceci permet de proposer également une conjecture pour la dimension des variétés  $\mathcal{X}_{\leq \mu}$  définies comme la réunion des  $\mathcal{X}_{\mu'}^G(A)$  où  $\mu'$  décrit l'ensemble des copoids dominants tels que  $\mu - \mu'$  s'écrive comme une combinaison linéaire à coefficients positifs des racines simples correspondant au choix de la chambre de Weyl  $C$ .

**Conjecture 3.4.2.** *Soit  $G$  un groupe réductif connexe sur  $k$ . Soit  $T$  un tore maximal de  $G$ . On note  $W$  le groupe de Weyl associé et on fixe une fois pour toutes le choix d'une chambre de Weyl. Soient  $\vec{\rho}$  la demi-somme des racines positives de  $G$  et  $A \in G(K)$ . Alors, pour  $b$  suffisamment grand, il existe des constantes  $c_1$  et  $c_2$  et un élément  $\mu_0 \in X_*(T) \otimes \mathbb{R}$  tels que :*

$$-c_2 + \sup_{\substack{\mu' \leq \mu \\ \mu' - \mu_0 \text{ } b\text{-rég.}}} \frac{\langle 2\vec{\rho} | \mu' \rangle_d}{b+1} \leq \dim_k \mathcal{X}_{\leq \mu}^G(A) \leq c_1 + \sup_{\substack{\mu' \leq \mu \\ \mu' \text{ } b\text{-rég.}}} \frac{\langle 2\vec{\rho} | \mu' \rangle_d}{b+1}$$

où  $\mu'$  désigne, ici, un copoids réel.

Un cas particulièrement intéressant, qui apparaît déjà dans l'article [38] de Kisin, est celui où l'on suppose le corps  $k$  parfait (par exemple  $k = \mathbb{F}_p$ ), où l'on se donne une extension finie  $\ell$  de  $k$  et où l'on considère le groupe  $G$  défini comme la restriction des scalaires à la Weil de  $\ell$  à  $k$  de  $\mathrm{GL}_d$ . Les variétés obtenues ont alors encore une interprétation arithmétique puisqu'elles apparaissent comme certaines espaces de modules de schémas en groupes définis sur des corps locaux. Lorsque  $d = 2$ , le calcul de leur dimension a déjà été accompli par Imai dans [34] et, dans ce cas, les résultats qu'il obtient sont en accord avec les conjectures précédentes.

Demeure encore malgré tout le problème de l'imprécision : au lieu des formules approchées obtenues ou conjecturées précédemment, on aimerait bien entendu avoir des formules exactes. Je n'ai pour l'instant aucun résultat, ni aucune conjecture précise dans cette direction. Il semble cependant intéressant de comparer la forme générale des formules du théorème 3.1.3 avec les formules connues pour les dimensions des variétés de Deligne-Lusztig, démontrées dans [29] et [49]. Un rapide coup d'œil à ces références montre que cette dimension s'écrit comme le somme d'une contribution linéaire (qui s'exprime en terme de produit scalaire avec le vecteur  $\rho$ ) et d'une contribution bornée. Il semble donc que l'on ait, ici, identifié l'analogue de la partie linéaire. Ne reste donc « plus » qu'à comprendre celui de la partie bornée.

## Chapitre 4

# Sur l'image essentielle des foncteurs $T_{\text{cris}}$ et $T_{\text{st}}$

On rappelle que dans le §2.4 (proposition 2.4.3), on a déjà obtenu un critère pour caractériser, parmi toutes les  $\mathbb{F}_p$ -représentations de dimension finie de  $G_K$ , lesquelles proviennent d'un objet de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r,\phi,N}$  via le foncteur  $T_{\text{st}}$ . Celui-ci est tout à fait dans l'esprit des définitions des représentations  $B$ -admissibles de Fontaine, et il partage à la fois ses avantages (caractérisation complète, bonnes propriétés tanakiennes), et ses inconvénients, liés pour l'essentiel à la présence d'un anneau de périodes compliqué. Ici, c'est le foncteur  $M_{\text{st}}$  qui est défini de manière complexe et, par voie de conséquence, qui est très délicat à manipuler. En outre, la caractérisation précédente a, pour l'instant, le défaut de ne fonctionner que pour les représentations annulées par  $p$ .

Le but de cette partie est de mettre en évidence un certain nombre de propriétés simples partagées par toutes les représentations dans l'image essentielle des foncteurs  $T_{\text{st}}$  et  $T_{\text{cris}}$  définis sur les catégories  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$  et  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  ou même, parfois, uniquement sur certaines sous-catégories. Les résultats présentés ci-après ne correspondent pas à une unique publication de l'auteur, mais à différents extraits des articles [17], [18] et [19] remis en contexte.

### 4.1 Réduction à l'action de l'inertie

On rappelle que, dans le groupe de Galois  $G_K$ , vit naturellement le sous-groupe d'inertie  $I_K$ . Celui-ci s'identifie canoniquement au groupe de Galois absolu  $G'_K$  de  $K' = W'[1/p][\pi]$  où  $W' = W(\bar{k}) \supset W$ . À ces nouvelles données  $W'$  et  $G'_K$  sont associées de nouvelles catégories de modules et de nouveaux foncteurs. Avec des notations évidentes (on a ajouté des *prime* pour les objets correspondant aux représentations de  $I_K = G'_K$ ), les deux diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Mod}_{/S}^{r,\phi,N} & \xrightarrow{T_{\text{st}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{libre}}(G_K) \\
 S' \otimes_S \downarrow & & \downarrow \text{restriction} \\
 \text{Mod}_{/S'}^{r,\phi,N} & \xrightarrow{T'_{\text{st}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{libre}}(G'_K)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Mod}_{/S}^{r,\phi} & \xrightarrow{T_{\text{cris}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{libre}}(G_\infty) \\
 S' \otimes_S \downarrow & & \downarrow \text{restriction} \\
 \text{Mod}_{/S'}^{r,\phi} & \xrightarrow{T'_{\text{cris}}} & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{libre}}(G'_\infty)
 \end{array}$$

sont commutatifs. On a bien entendu des diagrammes analogues dans le cas de torsion. On notera, par ailleurs, que le groupe  $G'_\infty$  (défini à partir de  $K'$  de même que  $G_\infty$  était défini à partir de  $K$ ) est égal à  $G_\infty \cap I_K$ .

**Théorème 4.1.1.** *Une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation  $T$  de  $G_\infty$  est dans l'image essentielle de  $T_{\text{cris}}$  si, et seulement si sa restriction à  $G'_\infty$  est dans l'image essentielle de  $T'_{\text{cris}}$ .*

*Une  $\mathbb{F}_p$ -représentation  $T$  de  $G_K$  est dans l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$  si, et seulement si sa restriction à  $I_K$  est dans l'image essentielle de  $T'_{\text{st}}$ .*

Il ne fait pratiquement aucun doute que le théorème précédent s'étende, dans le cas de  $T_{\text{st}}$ , à toutes les  $\mathbb{Z}_p$ -représentations. Toutefois, le cas des représentations non annulées par  $p$  n'est pour l'instant pas connu, la raison

étant que la démonstration repose sur l'utilisation du foncteur  $M_{\text{st}}$  qui, dans l'état actuel des connaissances, n'est défini que sur  $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$ .

Le théorème 4.1.1 est démontré, dans le cas du foncteur  $T_{\text{st}}$ , dans [17] (voir proposition 4.2.1). Ci-après, on commence par rappeler les idées essentielles de cette démonstration puis on montre, par la suite, comment elles s'étendent au cas de  $T_{\text{cris}}$ .

On part de  $\mathcal{M}'$  un objet de  $\text{Mod}_{/S'_1}^{r,\phi,N}$  et de  $T$  une représentation de  $G_K$  dont la restriction à  $G'_K$  s'identifie à  $T'_{\text{st}}(\mathcal{M}')$ . Le but est de montrer que  $T$  est dans l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$ . Pour cela, on remarque d'abord qu'il existe une extension galoisienne  $\ell$  de  $k$  telle que  $\mathcal{M}'$  soit défini sur l'anneau  $S_L$  correspondant à  $L = \text{Frac } W(\ell)[\pi]$ . Le groupe de Galois  $G_L = \text{Gal}(\bar{K}/L)$  est un sous-groupe de  $G_K$ , tandis que le quotient  $G_K/G_L$  s'identifie au groupe de Galois de l'extension résiduelle  $\ell/k$ . En outre, quitte à agrandir  $\ell$ , on peut supposer que la représentation galoisienne associée à l'objet correspondant  $\mathcal{M}_L$  de  $\text{Mod}_{/S_{L,1}}^{r,\phi,N}$  est isomorphe à  $T|_{G_L}$ . D'après les résultats de la partie 2.4, on a un isomorphisme canonique  $\text{Max}(\mathcal{M}_L) \simeq M_{\text{st}}(T|_{G_L})$ . Or, par ailleurs, en revenant à la définition de  $M_{\text{st}}$ , on peut construire une action naturelle de  $G_K$  sur  $M_{\text{st}}(T|_{G_L})$  : sur l'espace  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_L]}(T, \hat{A}_{\text{st}}/p)$ , elle est donnée par la formule habituelle  $(\sigma f)(x) = \sigma f(\sigma^{-1}x)$  (pour  $\sigma \in G_K$ ,  $f : T \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}/p$  un morphisme  $G_L$ -équivariant et  $x \in T$ ), et on vérifie ensuite qu'elle s'étend à  $M_{\text{st}}(T|_{G_L})$ . Clairement, l'action de  $G_K$  sur  $M_{\text{st}}(T|_{G_L})$  se factorise par le quotient  $G_K/G_L \simeq \text{Gal}(\ell/k)$ . Maintenant, en travaillant modulo  $u^{ep}$ , on déduit de la nullité de  $H^1(\text{Gal}(\ell/k), \text{GL}_{\text{erd}}(\ell))$  (où  $d$  est la dimension de  $T$ ), que  $\mathcal{M}_L^{\text{Gal}(\ell/k)} \otimes_k \ell \simeq \mathcal{M}_L$ . On pose alors  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_L^{\text{Gal}(\ell/k)}$  et on vérifie enfin que l'on a un isomorphisme  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_K) \simeq T$ , qui est de surcroît  $G_K$ -équivariant. Ainsi  $T$  est bien dans l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$ .

Pour étendre la démonstration précédente au cas de  $T_{\text{cris}}$ , la première étape consiste bien sûr à définir l'analogue du foncteur  $M_{\text{st}}$  dans ce cadre, c'est-à-dire à définir un foncteur  $M_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_\infty) \rightarrow \text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  qui est un quasi-inverse à gauche de  $T_{\text{cris}}$ . Pour cela, on peut utiliser l'équivalence de catégories  $M_{\mathfrak{S}_\infty}$  afin de remplacer  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$  par  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$  et  $T_{\text{st}}$  par  $T_\phi$  ; on est ainsi ramené à construire un foncteur  $M_\phi : \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{tors}}(G_\infty) \rightarrow \text{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$  tel que la composée  $M_\phi \circ T_\phi$  soit équivalente à l'identité. Ceci a déjà été fait en réalité dans le §3.5 de [13]. Pour ce mémoire, on se contente de rappeler qu'il est défini par une formule explicite de la forme :

$$M_\phi(T) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{S}^{f,r}) \quad (4.1)$$

où  $\mathfrak{S}^{f,r}$  est un certain sous-anneau de  $\mathcal{E}^{\text{int},\text{nr}}$  stable par le Frobenius  $\phi$  et l'action de  $G_\infty$ . On est à présent prêt à démontrer complètement le théorème 4.1.1. On reprend pour cela les arguments qui ont été présentés précédemment dans le cas du foncteur  $T_{\text{st}}$ . On se donne un objet  $\mathcal{M}'$  de  $\text{Mod}_{/S'_1}^{r,\phi}$  et une représentation  $T$  de  $G_\infty$  dont la restriction à  $G'_\infty$  vaut  $T'_{\text{st}}(\mathcal{M}')$ . Comme dans le cas de  $T_{\text{st}}$ , on montre qu'il existe une extension non ramifiée  $L$  de  $K$  telle que  $\mathcal{M}'$  provienne par extension des scalaires d'un objet  $\mathcal{M}_L \in \text{Mod}_{/S_L}^{r,\phi}$  dont la représentation de  $G_{L,\infty} = G_L \cap G_\infty$  associée s'identifie à  $T|_{G_{L,\infty}}$ . On dispose en outre d'une action naturelle de  $G_K$  sur  $M_{\text{cris}}(T|_{G_{L,\infty}})$  : sur  $M_\phi(T|_{G_{L,\infty}})$ , elle est définie par l'égalité  $(\sigma f)(x) = \sigma f(\sigma^{-1}x)$ , et le foncteur  $M_\mathfrak{S}$  permet de la transporter sur  $M_{\text{cris}}(T|_{G_{L,\infty}})$ . Si  $T$  est annulé par  $p$ , on conclut comme dans le cas de  $T_{\text{st}}$  en invoquant la trivialité du groupe de cohomologie non abélienne  $H^1(\text{Gal}(\ell/k), \text{GL}_{\text{erd}}(\ell))$  (où  $d$  est la dimension de  $T$  et  $\ell$  est le corps résiduel de  $L$ ). Pour les représentations de torsion en général, on procède par récurrence sur la plus petite puissance de  $p$  qui annule  $T$  en raisonnant à nouveau avec  $M_\phi$  à la place de  $M_{\text{cris}}$ . On pose  $T' = pT$  et  $T'' = T/pT$ . Soient également  $M$ ,  $M'$  et  $M''$  les  $\phi$ -modules étales sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  associées à  $T$ ,  $T'$  et  $T''$  respectivement. Les  $\phi$ -modules associés aux restrictions à  $G_{L,\infty}$  (pour un  $L$  comme précédemment) de ces représentations sont alors, dans l'ordre,  $\mathfrak{S}_L \otimes_{\mathfrak{S}} M$ ,  $\mathfrak{S}_L \otimes_{\mathfrak{S}} M'$  et  $\mathfrak{S}_L \otimes_{\mathfrak{S}} M''$ . De plus, en restriction à  $G_{L,\infty}$ , les représentations  $T'$  et  $T''$  sont dans l'image de  $T_{\text{st}}$  puisque ce sont respectivement une sous-représentation et un quotient de  $T$ . Ainsi, par hypothèse de récurrence, elles sont elles-mêmes dans l'image de  $T_{\text{st}}$ . Ceci signifie que l'on a des isomorphismes  $\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}' \simeq M'$  et  $\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}'' \simeq M''$  où, par définition,  $\mathfrak{M}' = M_\phi(T'_{|G_{L,\infty}})^{G_K}$  et  $\mathfrak{M}'' = M_\phi(T''_{|G_{L,\infty}})^{G_K}$ . Si on note de même  $\mathfrak{M} = M_\phi(T_{|G_{L,\infty}})^{G_K}$ , on a le diagramme commutatif suivant à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}'' & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}' & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} H^1(G_K, M_\phi(T''_{|G_{L,\infty}})) \\ & & \sim \downarrow & & \downarrow & & \sim \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Or  $M_\phi(T''_{|G_{L,\infty}}) = \mathfrak{S}_L \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}''$  et, par définition, l'action de  $G_K$  sur  $\mathfrak{M}''$  est triviale. Il en résulte, par une application du théorème d'Hilbert 90, que le groupe de cohomologie  $H^1(G_K, M_\phi(T''_{|G_{L,\infty}}))$  s'annule. Le lemme des cinq

implique alors que  $\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{G}} \mathfrak{M} \simeq M$ , c'est-à-dire que  $\mathfrak{M}$  est un réseau dans  $M$ . Comme c'est aussi par ailleurs un objet de  $\text{Mod}_{\mathcal{G}_{\infty}}^{T, \phi}$ , on en déduit bien que  $T$  est dans l'image essentielle de  $T_{\phi}$ , et donc aussi dans celle de  $T_{\text{cris}}$ . Un passage à la limite permet finalement de traiter le cas des représentations libres sur  $\mathbb{Z}_p$ .

## 4.2 Bornes pour l'action sur la semi-simplifiée

Suite au théorème 4.1.1, on se permet de supposer, à partir de maintenant, que le corps résiduel  $k$  est algébriquement clos. On a alors  $G_K = I_K$ .

### 4.2.1 Classification des représentations irréductibles de $G_K$ et $G_{\infty}$

Avec l'hypothèse supplémentaire qui vient d'être faite, les représentations irréductibles de torsion de  $G_K$  sont complètement classifiées par les caractères fondamentaux de Serre  $\omega_h$  définis par la formule (1.5). Plus précisément une telle représentation  $T$  est, tout d'abord, nécessairement annulée par  $p$  (car, dans le cas contraire,  $pT$  serait une sous-représentation non triviale) et son anneau d'endomorphismes  $E$  est un corps fini de caractéristique  $p$  sur lequel  $T$  est de dimension 1. Si  $h$  est la dimension de  $T$  sur  $\mathbb{F}_p$ , on a donc un isomorphisme non canonique  $E \simeq \mathbb{F}_{p^h}$ . L'action galoisienne sur  $T$ , vu comme espace vectoriel sur  $\mathbb{F}_{p^h}$  grâce à l'isomorphisme précédent, se fait par l'intermédiaire d'une puissance  $\omega_h^n$  de  $\omega_h$ , pour un entier  $n$  défini modulo  $p^h - 1$ . Si on modifie l'isomorphisme entre  $E$  et  $\mathbb{F}_{p^h}$ , l'exposant  $n$  est multiplié par une puissance de  $p$ . Les chiffres en base  $p$  de l'entier  $n$  ne dépendent donc de  $T$ ; ils sont appelés les *ponds de l'inertie modérée* de  $T$ .

Mieux encore, on peut remarquer que la classe de  $\frac{n}{p^h-1}$  dans l'ensemble quotient  $\mathcal{R}$  (voir définition 1.4.4) ne dépend, elle aussi, que de  $T$ . À toute représentation irréductible (de dimension finie) de  $G_K$ , on sait donc associer un élément de  $\mathcal{R}$  que l'on appellera, dans la suite, son *invariant*. Il n'est pas très difficile de montrer que cette construction définit une bijection entre  $\mathcal{R}$  et l'ensemble des  $\mathbb{F}_p$ -représentations (de dimension finie) irréductibles de  $G_K$  à isomorphisme près. De plus, en reprenant les notations du §2.1, le théorème 1.4.6 assure que, pour  $\rho \in \mathcal{R}_{\leq er}$ , l'invariant de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$  est  $\max(\rho)$ . En particulier, si  $\rho$  est lui-même maximal, c'est-à-dire si  $\rho \in \mathcal{R}$ , l'invariant de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}(\rho))$  est  $\rho$ . Conséquemment, si  $er < p - 1$ , certaines représentations irréductibles de  $G_K$  n'apparaissent pas dans l'image de  $T_{\text{st}}$  (ce sont celles qui ont des poids de l'inertie modérée strictement supérieur à  $er$ ), alors qu'au contraire, si  $er \geq p - 1$ , elles y sont toutes. Bien sûr, cette conclusion vaut encore pour les représentations semi-simples puisque le foncteur  $T_{\text{st}}$  est additif.

Toute l'argumentation précédente vaut encore si l'on remplace  $G_K$  par  $G_{\infty}$ , ce qui se traduit par la proposition ci-après.

**Proposition 4.2.1.** *La restriction à  $G_{\infty}$  définit une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles (resp. semi-simples) de  $G_K$  et les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles (resp. semi-simples) de  $G_{\infty}$ .*

En réalité, on peut aussi démontrer cette proposition par des méthodes directes. Pour cela, on fixe un système compatible  $(\varepsilon_s)_{s \geq 1}$  de racines primitives  $p^s$ -ièmes de l'unité, et on choisit un élément  $\tau \in G_K$  tel que  $\tau(\pi_s) = \varepsilon_s \pi_s$  pour tout entier  $s \geq 1$ . Le groupe  $G_K$  est alors engendré par  $G_{\infty}$  et  $\tau$ . Soit  $K^{\text{mr}}$  l'extension maximale modérément ramifiée de  $K$ ; elle est obtenue, à partir de  $K$ , en ajoutant les racines  $n$ -ième de  $\pi$  pour tout  $n$  premier avec  $p$ . Les extensions  $K_{\infty}$  et  $K^{\text{mr}}$  sont linéairement disjointes sur  $K$  puisque la première est une  $p$ -extension et que la seconde est de degré premier à  $p$ . Ainsi, on peut choisir  $\tau$  de façon à ce qu'il agisse trivialement sur  $K^{\text{mr}}$ , ce qui revient à dire que l'on peut imposer que  $\tau$  soit dans le sous-groupe d'inertie sauvage. Or on sait que ce dernier groupe agit trivialement sur toute  $\mathbb{F}_p$ -représentation irréductible, et donc également sur toute  $\mathbb{F}_p$ -représentation semi-simple, de  $G_K$ . La proposition résulte facilement de cela.

### 4.2.2 Le polygone de l'inertie modérée

On a vu précédemment que, dans le cas où  $er < p - 1$ , les poids de l'inertie modérée d'une représentation irréductible dans l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$  étaient tous majorés par  $er$ . Par exactitude de  $T_{\text{st}}$  et stabilité de son image essentielle par sous-objets et quotients, cette propriété s'étend à toutes les représentations dans l'image

essentielle de  $T_{\text{st}}$  si on définit ses poids de l'inertie modérée comme la concaténation des poids de l'inertie modérée de chacun de ces quotients de Jordan-Hölder. Dans ce paragraphe, on donne une version plus précise de ce résultat, valable uniquement pour les objets annihilés par  $p$ , et qui fait intervenir, du côté des  $(S/pS)$ -modules, les diviseurs élémentaires de l'inclusion  $\text{Fil}^r \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ . Les espaces  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}$  étant des modules sur l'anneau  $S/pS$  qui n'est pas principal, il est utile de préciser ce que l'on entend par *diviseur élémentaire* dans ce cadre. On peut en réalité montrer, simplement en remarquant que  $\text{Fil}^p S \cdot \mathcal{M} \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$ , que le quotient  $\mathcal{M}/\text{Fil}^p S \cdot \mathcal{M}$  est un module libre sur  $k[u]/u^{ep}$ , et qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $\mathcal{M}$  et des entiers  $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_d$  uniquement déterminés tels que

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = \text{Fil}^p S \cdot \mathcal{M} + \sum_{i=1}^d u^{\nu_i} e_i \mathcal{M}.$$

Les entiers  $\nu_i$  sont, en outre, compris entre 0 et  $er$  et, par un léger abus de langage, ce sont eux que l'on appelle les *exposants des diviseurs élémentaires* de l'inclusion  $\text{Fil}^r \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ . Si  $\mathfrak{M}$  est l'objet de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r, \phi}$  en correspondance avec  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/S_1}^{r, \phi}$  et si les  $\mu_i$  sont les exposants des diviseurs élémentaires rangés par ordre décroissants considérés dans la partie 3, alors il est immédiat de vérifier la relation  $\mu_i = er - \nu_{d+1-i}$ .

**Définition 4.2.2.** Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r, \phi}$  de dimension  $d$ , et soient  $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_d$  les exposants des diviseurs élémentaires de l'inclusion  $\text{Fil}^r \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ . Le *polygone de Hodge* de  $\mathcal{M}$  est le polygone reliant dans le plan les poids de coordonnées  $(i, ir - \frac{\nu_1 + \dots + \nu_i}{e})$  pour  $1 \leq i \leq d$ .

Soit  $T$  une  $\mathbb{F}_p$ -représentation de dimension  $d$  de  $G_\infty$ , et soient  $m_1 \leq \dots \leq m_d$  les poids de l'inertie modérée de  $T$ . Le *polygone de l'inertie modérée* de  $T$  est le polygone reliant dans le plan les poids de coordonnées  $(i, \frac{m_1 + \dots + m_i}{e})$  pour  $1 \leq i \leq d$ .

Les pentes successives du polygone de Hodge de  $\mathcal{M}$  (resp. du polygone de l'inertie modérée de  $T$ ) sont égales à  $r - \frac{\nu_i}{e}$  (resp. à  $\frac{m_i}{e}$ ) pour  $i$  variant entre 1 et  $d$ . Il suit des inégalités supposées sur les  $\nu_i$  et les  $m_i$ , que ces deux polygones sont convexes.

**Proposition 4.2.3** (avec D. Savitt). *On suppose  $er < p - 1$ . Pour tout objet  $\mathcal{M}$  de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r, \phi}$  (resp. de  $\text{Mod}_{/S_1}^{r, \phi, N}$ ), le polygone de Hodge de  $\mathcal{M}$  est situé en-dessous du polygone de l'inertie modérée de  $T_{\text{cris}}(\mathcal{M})$  (resp. de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ) et ceux-ci ont même point terminal.*

La démonstration de cette proposition est plutôt simple et fait l'objet du lemme 10 de [12]. Elle procède par dévissage de la façon suivante. En utilisant le théorème 1.4.6, on vérifie tout d'abord immédiatement que le résultat est vrai si  $\mathcal{M}$  est un objet simple. On conclut ensuite en comparant les pentes des polygones de Hodge de  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}''$  lorsque l'on a une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ , ce qui se fait en considérant les dimensions de  $\frac{u^n \mathcal{M}}{u^n \mathcal{M} + \text{Fil}^r \mathcal{M}}$  et des quotients analogues pour  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}''$ .

En théorie de Hodge  $p$ -adique, la notion de polygone de Hodge est initialement associé aux  $(\phi, N)$ -modules filtrés sur  $W[1/p]$ . Plus précisément, le polygone de Hodge d'un tel module  $D$  est défini par ses pentes successives : on convient que ce sont les sauts de la filtration  $\text{Fil}^i D_K$  comptés avec multiplicité, c'est-à-dire, si  $D$  est admissible, les poids de Hodge-Tate de la représentation  $V_{\text{st}}(D)$ . Via l'équivalence de catégories entre  $(\phi, N)$ -modules filtrés sur  $W[1/p]$  et  $(\phi, N)$ -modules filtrés sur  $S[1/p]$ , on peut donc également associer un polygone de Hodge à tout  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $S[1/p]$  et par suite, pour  $r < p - 1$ , à tout objet de  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi, N}$ , simplement en se rappelant qu'un tel objet définit un  $(\phi, N)$ -module filtré sur  $S[1/p]$  en inversant  $p$ . Étant donné  $\hat{\mathcal{M}} \in \text{Mod}_{/S}^{r, \phi, N}$  — ou, à vrai dire, même simplement dans  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi}$  car l'opérateur de monodromie n'intervient à aucun moment dans cette histoire —, la question se pose de comparer le polygone de Hodge de  $\hat{\mathcal{M}}$  et celui de  $\mathcal{M} = \hat{\mathcal{M}}/p\hat{\mathcal{M}}$ .

**Proposition 4.2.4** (avec D. Savitt). *Avec les notations précédentes, le polygone de Hodge de  $\hat{\mathcal{M}}$  est situé en dessous de celui de  $\mathcal{M}$  et ces deux polygones ont même point terminal.*

À nouveau, la démonstration de cette proposition n'est pas difficile ; elle fait l'objet du lemme 9 de [12]. La première étape (très classique) consiste à interpréter les poids de Hodge-Tate en termes des diviseurs élémentaires de l'inclusion  $S[1/p] \otimes_S \text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}} \subset S[1/p] \otimes_S \hat{\mathcal{M}}$ . Forts de cela, la comparaison entre les diviseurs élémentaires au niveau de  $S[1/p] \otimes_S \hat{\mathcal{M}}$  d'une part, et au niveau de  $\hat{\mathcal{M}}/p\hat{\mathcal{M}}$  d'autre part, suit d'une estimation sur les valuations de certains mineurs.

Il est intéressant de mettre ensemble les deux propositions 4.2.3 et 4.2.4, et de reformuler le résultat qui en découle en termes de représentations. Voici ce que l'on obtient.

**Théorème 4.2.5.** *Soit  $V$  une représentation semi-stable à poids de Hodge Tate  $\geq 0$  et  $< \frac{p-2}{e}$ , et soit  $T \subset V$  un réseau stable par l'action galoisienne. Alors le polygone de Hodge de  $V$  (c'est-à-dire celui dont les pentes successives sont les poids de Hodge-Tate de  $V$  rangés par ordre croissant) est situé en-dessous du polygone de l'inertie modérée de  $T/pT$  et, de surcroît, ces deux polygones ont même point terminal.*

Ce point de vue présente un intérêt car, par un théorème de Brauer et Nesbitt, la semi-simplifiée<sup>1</sup> de la représentation  $T/pT$  ne dépend que de  $V$  (et pas du choix du réseau  $T$ ) ; il en est donc de même de son polygone de l'inertie modérée qui apparaît ainsi comme un invariant de la représentation semi-stable  $V$  elle-même. Le théorème 4.2.5 établit donc un lien entre deux invariants naturels des représentations semi-stables.

Un cas particulier notable du théorème 4.2.5 est celui où  $e = 1$  et la représentation  $V$  est cristalline. Dans ce cas, les techniques introduites par Fontaine et Laffaille dans [24] suffisent à établir le résultat et donnent même plus, à savoir que les polygones de Hodge de  $V$  et de l'inertie modérée de  $T/pT$  coïncident.

Enfin, les représentations semi-stables possèdent un autre invariant usuel qui est leur polygone de Newton. On peut se demander comment celui-ci est relié aux deux autres polygones étudiés précédemment. Dans [12], toujours sous l'hypothèse  $er < p - 1$ , on montre que tant que les polygones de Hodge et de Newton coïncident, le polygone de l'inertie modérée coïncide aussi avec eux. De façon générale, on peut se demander s'il est toujours vrai que le polygone de l'inertie modérée est coincée entre le polygone de Hodge et le polygone de Newton. Pour l'instant, cette question reste ouverte.

### 4.2.3 Un exemple en dimension 2

En guise d'illustration du théorème 4.2.5, David Savitt et moi-même avons calculé les polygones de Hodge et de l'inertie modérée d'une petite famille de représentations cristallines  $V(\mathcal{L})$  de dimension 2, paramétrée par un élément  $\mathcal{L} \in K \setminus \mathbb{Q}_p$ . Cette famille est décrite par les  $\phi$ -modules correspondant qui sont les  $D(\mathcal{L})$  définis comme suit :

$$\begin{cases} D(\mathcal{L}) = W[1/p]e_1 \oplus W[1/p]e_2 \\ \varphi(e_1) = pe_1, \varphi(e_2) = pe_2 \\ \text{Fil}^1 D(\mathcal{L})_K = \text{Fil}^2 D(\mathcal{L})_K = K(\mathcal{L}e_1 + e_2) \\ \text{Fil}^0 D(\mathcal{L})_K = D(\mathcal{L})_K, \text{Fil}^3 D(\mathcal{L})_K = 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement qu'ils sont tous admissibles (la condition  $\mathcal{L} \notin \mathbb{Q}_p$  sert à ce niveau). Le polygone de Hodge de  $D(\mathcal{L})$  se lit directement sur la description précédente : il a pour pentes 0 et 2. Le polygone de l'inertie modérée est, par contraste, bien plus difficile à calculer. Rien que pour le décrire, on a besoin d'un certain nombre de notations supplémentaires. On commence par écrire  $\mathcal{L}$  sous la forme  $\mathcal{L} = a + p^n \mathcal{L}_0$  où  $a \in \mathbb{Q}_p$  et  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'une des deux hypothèses suivantes :

- i)  $v_K(\mathcal{L}_0) = 0$  et l'image de  $\mathcal{L}_0$  dans le corps résiduel n'appartient pas au sous-corps premier
- ii)  $0 < v_K(\mathcal{L}_0) < e$ .

Une telle écriture existe bien car on a supposé que  $\mathcal{L}$  n'était pas élément de  $\mathbb{Q}_p$ . On définit encore  $L_0 \in W[1/p][u]$  comme l'unique polynôme de degré  $< e$  tel que  $L_0(\pi) = \mathcal{L}_0$ . Comme  $0 \leq v_K(\mathcal{L}_0) < e$ ,  $L_0$  est à coefficients dans  $W$ . On appelle  $\lambda$  son terme constant. On note  $L'_0$  et  $E'$  les polynômes dérivés respectifs de  $L_0$  et  $E$ . On pose enfin  $v = \frac{1}{e} \cdot v_K\left(\frac{pL'_0(\pi)}{E'(\pi)(\phi(\lambda) - \mathcal{L}_0)}\right)$ .

**Théorème 4.2.6** (avec D. Savitt). *On suppose  $2e < p - 1$ . Alors les pentes du polygone de l'inertie modérée de  $T/pT$  où  $T$  est un réseau stable par Galois dans  $V(\mathcal{L})$  sont  $1 - \min(v, 1)$  et  $1 + \min(v, 1)$ .*

La démonstration de ce théorème n'est rien d'autre qu'un calcul long et fastidieux en théorie de Breuil, présenté intégralement dans [16]. Malgré tout, le théorème est intéressant car il donne les premiers exemples de représentations cristallines pour lesquelles les polygones de Hodge et de l'inertie modérée ne coïncident pas ! Le résultat simple de Fontaine et Laffaille, valable pour  $e = 1$ , est donc faux en général. Ceci est à rapprocher de certains calculs antérieurs de Breuil et Mézard (voir [8]) dont l'une des conclusions est que cette égalité entre

<sup>1</sup>C'est-à-dire, la somme directe de tous ses quotients de Jordan-Hölder.

polygones de Hodge et de l'inertie modérée ne vaut pas non plus en général pour les représentations semi-stables même lorsque  $e = 1$ . Le cas de Fontaine-Laffaille apparaît donc comme très isolé.

### 4.3 Bornes pour l'action de l'inertie sauvage

Précédemment, on s'était toujours empressé de semi-simplifier toutes les représentations de torsion, ce qui avait pour conséquence directe de rendre triviale l'action du sous-groupe d'inertie sauvage. Dans ce paragraphe, au contraire, on ne semi-simplifie plus et on se concentre sur l'étude de la ramification sauvage. Les résultats que l'on souhaite présenter s'exprime en termes de la filtration de ramification sur les groupes  $G_K$  et  $G_\infty$  ; on est donc contraint de commencer par quelques rappels à leur sujet.

#### 4.3.1 Rappels sur les filtrations de ramification

Soit  $\kappa$  un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est parfait de caractéristique  $p$ . Pour toute extension finie  $\kappa'$  de  $\kappa$ , on appelle  $v_{\kappa'}$  la valuation sur  $\kappa'$  normalisée par  $v_{\kappa'}(\kappa'^{\times}) = \mathbb{Z}$ . Si  $\kappa'$  est une extension galoisienne finie de  $\kappa$  de groupe de Galois  $G$ , la *filtration de ramification en numérotation inférieure* de  $G$  est la filtration  $(G_{(\lambda)})_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$  définie comme suit :

$$G_{(\lambda)} = \{ \sigma \in G \mid v_{\kappa'}(\sigma(x) - x) \geq \lambda, \forall x \in \mathcal{O}_{\kappa'} \}$$

où  $\mathcal{O}_{\kappa'}$  est l'anneau des entiers de  $\kappa'$ . Les  $G_{(\lambda)}$  sont des sous-groupes distingués de  $G$ , et la filtration qu'ils forment est décroissante, exhaustive et séparée. On introduit la fonction  $\varphi_{\kappa'/\kappa} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\varphi_{\kappa'/\kappa}(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{\text{Card } G_{(t)}}{\text{Card } G_{(1)}} dt.$$

C'est une fonction affine par morceaux, concave et bijective, dont on note  $\psi_{\kappa'/\kappa}$  l'inverse. La *filtration de ramification en numérotation supérieure* est définie par l'égalité  $G^{(\mu)} = G_{(\psi_{\kappa'/\kappa}(\mu))}$  pour tout réel  $\mu \geq 0$ . On renvoie à [46], chap. IV pour les propriétés usuelles la concernant, et en particulier le théorème d'Herbrand. La filtration de ramification en numérotation supérieure s'étend à une extension galoisienne  $\kappa'/\kappa$  non nécessairement finie en posant :

$$\text{Gal}(\kappa'/\kappa)_{(\mu)} = \varprojlim_{\kappa''} \text{Gal}(\kappa''/\kappa)_{(\mu)}$$

où la limite projective est prise sur toutes les extensions finies galoisiennes  $\kappa''$  de  $\kappa$  incluses dans  $\kappa'$ . Dans le cas où  $\kappa'/\kappa$  est une extension algébrique séparable non galoisienne, on ne peut certes pas définir de filtration sur le groupe de Galois puisque celui-ci n'existe pas mais les fonctions  $\varphi_{\kappa'/\kappa}$  et  $\psi_{\kappa'/\kappa}$ , elles, gardent un sens ; on peut les définir, par exemple, grâce aux formules :

$$\psi_{\kappa'/\kappa}(\mu) = \int_0^\mu [I_\kappa : I_{\kappa'} G_\kappa^{(t)}] dt \quad \text{et} \quad \varphi_{\kappa'/\kappa} = \psi_{\kappa'/\kappa}^{-1}$$

où  $I_\kappa$  et  $I_{\kappa'}$  sont respectivement les sous-groupes d'inertie des groupes de Galois absolus de  $\kappa$  et  $\kappa'$  (voir [50], §1.2.1). La théorie qui vient d'être rappelée brièvement s'applique en particulier aux corps  $\kappa = K$  et  $\kappa = k((u))$ . Les groupes de Galois absolus  $G_K$  et  $\text{Gal}(k((u))^{\text{sep}}/k((u))) \simeq G_\infty$  héritent ainsi d'une filtration de ramification en numérotation supérieure notée respectivement  $(G_K^{(\mu)})$  et  $(G_\infty^{(\mu)})$ .

#### 4.3.2 Le cas des représentations de $G_\infty$

On commence par étudier les représentations dans l'image essentielle du foncteur  $T_{\text{cris}}$ , et même plus précisément dans celle du foncteur  $T_\phi$  ; on n'est ainsi pas contraint de supposer que  $r < p - 1$ .

**Théorème 4.3.1.** *Pour tout entier  $n \geq 1$ , pour tout objet  $\mathfrak{M}$  de  $\text{Mod}_{\mathbb{G}_\infty}^{r,\phi}$  annulé par  $p^n$ , et pour tout*

$$\mu > \max\left(1, \frac{erp^n}{p-1}\right) \tag{4.2}$$

le sous-groupe  $G_\infty^{(\mu)}$  agit trivialement sur  $T_\phi(\mathfrak{M})$ .

Soit  $T$  une  $\mathbb{F}_p$ -représentation de dimension finie de  $G_\infty$ , et soit  $r$  un entier tel que  $G_\infty^{(\mu)}$  agisse trivialement sur  $T$  pour tout  $\mu > \frac{er}{p-1}$ . Alors  $T$  est dans l'image par  $T_\phi$  d'un objet de  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$ .

**Remarque 4.3.2.** La seconde partie du théorème n'est qu'une réciproque très partielle de la première partie. Tout d'abord, elle ne concerne que les objets annulés par  $p$  mais, même dans ce cas, la borne sur  $\mu$  qui apparaît diffère par un facteur  $p$  de celle de la formule (4.2).

La première assertion du théorème 4.3.1 est démontrée sous une forme légèrement plus générale dans le §2.2.2 de [19] tandis que la seconde est, elle, démontrée dans le §2.2.4 de ce même article. On rappelle ci-dessous les grandes lignes de la preuve.

En ce qui concerne l'obtention de la borne sur la ramification (*i.e.* la première partie du théorème), la méthode reprend en fait, pour l'essentiel, les idées que Fontaine a introduites dans [25]. Dans la suite, si  $L$  est une extension de  $k((u))$ , on notera  $\mathcal{O}_L$  son anneau des entiers,  $v_L$  la valuation sur  $L$  normalisée par  $v_L(L^*) = \mathbb{Z}$  et, pour tout entier  $m$ ,  $\mathfrak{a}_E^{>m}$  l'idéal des éléments  $x \in L$  tels que  $v_L(x) > m$ . L'ingrédient principal de la démonstration consiste à réinterpréter la filtration de ramification de  $G_\infty$  à l'aide de la propriété dite  $(P_m)$ . Par définition, elle est satisfaite par une extension  $L$  de  $k((u))$  si pour toute extension algébrique  $E$  de  $k((u))$ , il existe un  $k((u))$ -plongement de  $L$  dans  $E$  dès lors qu'il existe un morphisme de  $k[[u]]$ -algèbres  $\mathcal{O}_L \rightarrow \mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>m}$  (où, bien sûr,  $\mathcal{O}_L$  et  $\mathcal{O}_E$  désignent les anneaux d'entiers respectifs de  $L$  et  $E$ ).

**Proposition 4.3.3** (Fontaine, Yoshida). *Soit  $L$  une extension finie galoisienne de  $k((u))$  de groupe de Galois  $G$ . On définit :*

- l'entier  $m_0$  comme la borne inférieure des réels  $m$  tels que  $L$  satisfasse à  $(P_m)$ , et
- l'entier  $\mu_0$  comme la borne inférieure des réels  $\mu$  tel que  $G^{(\mu)} = \{\text{id}_L\}$ .

Alors  $m_0 = \mu_0$ .

On se place à présent dans la situation du théorème 4.3.1 et on appelle  $L$  l'extension de  $k((u))$  découpée par  $T_\phi(\mathfrak{M})$ , c'est-à-dire la plus petite extension de  $k((u))$  dont le groupe de Galois absolu agit trivialement sur  $T_\phi(\mathfrak{M})$ . Il est clair que  $L$  est une extension finie galoisienne de  $k((u))$  et que, pour ce que l'on souhaite obtenir, il suffit de montrer que  $L$  satisfait à la propriété  $(P_m)$  lorsque  $m = \max(1, \frac{erp^n}{p-1})$ . La clé pour ce faire est le lemme 4.3.4 ci-après, qui consitue l'essentiel de l'originalité de ce travail. Pour l'énoncer, on a besoin de fixer au préalable des notations supplémentaires : on se donne<sup>2</sup> un élément  $\mathfrak{t} \in W(R)$  tel que  $\phi(\mathfrak{t}) = E(u)\mathfrak{t}$  et, si  $A$  est un sous-anneau de  $W(R)$  et  $x \in W(R)$ , on note  $x^+A$  l'intersection dans  $W(R)$  de  $A$  et  $x\mathfrak{m}_{W(R)}$  où  $\mathfrak{m}_{W(R)}$  désigne l'idéal maximal de  $W(R)$ .

**Lemme 4.3.4.** *On se donne une extension algébrique  $E$  de  $k((u))$  incluse dans  $k((u))^{\text{sep}}$ , et un morphisme  $\mathfrak{S}$ -linéaire  $f : \mathfrak{M} \rightarrow W_n(\mathcal{O}_E)/(E(u)^r\mathfrak{t}^r)^+W_n(\mathcal{O}_E)$  compatible à  $\phi$ . Alors, il existe un unique morphisme  $\mathfrak{S}$ -linéaire  $\mathfrak{M} \rightarrow W_n(\mathcal{O}_E)$  qui est compatible à  $\phi$  et congru à  $f$  modulo  $(\mathfrak{t}^r)^+W_n(\mathcal{O}_E)$ .*

La démonstration du lemme se fait, sans surprise, par approximations successives ; elle est un peu pénible à rédiger proprement mais ne présente pas de difficulté conceptuelle particulière dès lors que l'on maîtrise la démonstration du lemme du Hensel. Une fois le lemme 4.3.4 établi, on démontre la propriété  $(P_m)$  pour  $m = \max(1, \frac{erp^n}{p-1})$  de la façon suivante. Tout d'abord, en revenant à la définition du foncteur  $T_\phi$ , on vérifie que, pour toute extension finie  $E$  de  $k((u))$  incluse dans  $k((u))^{\text{sep}}$ , on a  $T_{\text{cris}}(\mathfrak{M})^{G_E} = \text{Hom}_{\mathfrak{S},\phi}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E))$  (où  $G_E$  désigne le groupe de Galois absolu de  $E$ ). Tout élément  $\psi \in T_{\text{cris}}(\mathfrak{M})$  peut donc en particulier être vu comme un morphisme  $\mathfrak{S}$ -linéaire  $\mathfrak{M} \rightarrow W_n(\mathcal{O}_L)$  compatible à  $\phi$ . Ainsi, si on se donne  $E$  comme précédemment et  $f : \mathcal{O}_L \rightarrow \mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>m}$  un morphisme d'anneaux, on obtient par composition par  $f$  une application  $T_{\text{cris}}(\mathfrak{M}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S},\phi}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E/\mathfrak{a}_E^{>m}))$  qui, après avoir vérifié que  $W_n(\mathfrak{a}_E^{>m}) \subset (E(u)^r\mathfrak{t}^r)^+W_n(\mathcal{O}_E)$ , fournit à son tour une application  $T_{\text{cris}}(\mathfrak{M}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S},\phi}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E)/(E(u)^r\mathfrak{t}^r)^+W_n(\mathcal{O}_E))$ . En vertu du lemme 4.3.4, celle-ci se relève en une flèche

$$\Psi : T_{\text{cris}}(\mathfrak{M}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S},\phi}(\mathfrak{M}, W_n(\mathcal{O}_E)) = T_{\text{cris}}(\mathfrak{M})^{G_E}.$$

En utilisant que  $m \geq 1$ , on vérifie que  $\Psi$  est injective, d'où il suit que l'espace  $T_{\text{cris}}(\mathfrak{M})^{G_E}$  compte au moins autant d'éléments que  $T_{\text{cris}}(\mathfrak{M})$ . Il en résulte que ces deux ensembles sont égaux, à partir de quoi on déduit que  $G_E$  agit trivialement sur  $T_{\text{cris}}(\mathfrak{M})$ . Ainsi, par définition de  $L$ , on a  $L \subset E$ , et on a ainsi bien vérifié la propriété  $(P_m)$ .

<sup>2</sup>Il est facile de montrer qu'un tel élément existe toujours (voir lemme 2.8 de [19]).



On conclut par une phrase au sujet de la démonstration de la réciproque (*i.e.* de la deuxième du théorème 4.3.1). La méthode consiste à construire un antécédant  $\mathfrak{M}$  de  $T$  dans  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}_{\infty}}^{r,\phi}$  simplement en appliquant le foncteur  $M_{\phi}$  introduit lors de la démonstration du théorème 4.1.1 et à utiliser des bornes classiques sur la ramification (que l'on trouve par exemple dans [46]) pour montrer que  $M_{\phi}(T)$  a la bonne dimension.

### 4.3.3 Le cas des représentations de $G_K$

Lors de la démonstration de la proposition 4.2.1 (celle donnée après son énoncé), on a vu qu'une représentation non sauvagement ramifiée de  $G_K$  est entièrement déterminée par sa restriction à  $G_{\infty}$ . En fait, de la même façon, il est vrai qu'une représentation de  $G_K$  sur laquelle le sous-groupe  $G_{\infty}^{(\mu)}$  agit trivialement (pour un certain nombre réel  $\mu$  donné) est entièrement déterminée par sa restriction à un  $G_s = \text{Gal}(K_s/K)$  (où on rappelle que  $K_s = K(\pi_s)$ ) pour un entier  $s$  ne dépendant que de  $\mu$  et de  $K$ . En effet, si on considère un élément  $\tau$  comme dans la démonstration de la proposition 4.2.1, il résulte de calculs élémentaires que, pour tout  $s$  suffisamment grand, l'automorphisme  $\tau^{p^s}$  s'exprime comme le commutateur de  $\tau$  et d'un élément  $\sigma_s \in G_{\infty}$  qui est envoyé par le caractère cyclotomique sur un élément de valuation  $s$ . Cette dernière condition assure que, si  $s$  dépasse une certaine limite (qui s'exprime uniquement en fonction de  $\mu$  et de  $K$ ), on a  $\sigma_s \in G_{\infty}^{(\mu)}$ . Il en résulte que, pour de tels  $s$ ,  $\tau^{p^s}$  agit trivialement sur la représentation considérée. À partir de là, du théorème 4.3.1 et d'une étude parallèle de la ramification de l'extension  $K_{\infty}/K$ , on déduit le théorème suivant.

**Théorème 4.3.5.** *Il existe une constante  $c(K)$  ne dépendant que du corps  $K$  telle que l'assertion suivante soit vraie : pour tout entier  $n \geq 1$ , pour tout objet  $\mathfrak{M}$  de  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}_{\infty}}^{r,\phi}$  annulé par  $p^n$ , pour toute représentation  $T$  de  $G_K$  dont la restriction à  $G_{\infty}$  est isomorphe à  $T_{\phi}(\mathfrak{M})$ , et pour tout  $\mu > c(K) + e \cdot \log_p r$ , le sous-groupe  $G_K^{(\mu)}$  agit trivialement sur  $T$ .*

Lorsque  $r < p - 1$ , le théorème précédent s'applique en particulier aux représentations de la forme  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  pour un objet  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{\mathfrak{S}_{\infty}}^{r,\phi,N}$  annulé par  $p^n$ . Pour tout  $r$ , la théorie de Kisin indique qu'il s'applique aussi aux quotients annulés par  $p^n$  de deux réseaux dans une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate dans  $\{0, \dots, r\}$ . On verra en fait par la suite au §5.4.3 que, pour ces représentations particulières, la constante  $c(K)$  peut même être choisie indépendamment de  $K$ .

De façon générale, cette constante  $c(K)$  s'exprime de façon explicite en fonction des invariants de ramification usuels de  $K$ . Par exemple, si  $e$  est premier avec  $p$  (*i.e.* si l'extension  $K/W[1/p]$  est modérément ramifiée), on peut choisir  $c(K) = 1 + e + \frac{e}{p-1}$ .

Par contre, à l'inverse de ce qui a été vu précédemment avec le groupe  $G_{\infty}$ , on ne dispose pour l'instant d'aucune condition suffisante simple pour qu'une représentation  $T$  de  $G_K$  (même annulée par  $p$ ) soit dans l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$ . On sait simplement dire — mais il s'agit alors d'un corollaire immédiat de la deuxième partie du théorème 4.3.1 — qu'étant donné un entier  $r$ , une  $\mathbb{F}_p$ -représentation  $T$  de  $G_K$  sur laquelle le sous-groupe  $G_K^{(\mu)}$  agit trivialement pour tout  $\mu > 1 + \frac{e}{p-1} + e \cdot (1 + \log_p r)$  se restreint à  $G_{\infty}$  en une représentation qui est dans l'image essentielle de  $T_{\phi}$ .

## 4.4 Prolongement de l'action de $G_{\infty}$

Dans le théorème 4.3.5, on s'est donné un prolongement de la représentation  $T_{\phi}(\mathfrak{M})$  à tout le groupe  $G_K$ . L'argument donné au début du paragraphe §4.3.3 montre que, pour un entier  $s$  suffisamment grand, l'action de  $G_s$  sur tous ces prolongements est la même (puisque l'action de  $\tau^{p^s}$  sur ces prolongements est triviale). Avec un peu de calcul, on peut en outre préciser le « suffisamment grand » ; on trouve que la conclusion annoncée vaut dès que :

$$s > c'(K) + n + \log_p r \tag{4.3}$$

où  $c'(K)$  est, à nouveau, une constante ne dépendant que des invariants de ramification de  $K$ . Simplement en décrétant que  $\tau^{p^s}$  agit trivialement, on peut montrer que réciproquement, pour tout  $\mathfrak{M} \in \text{Mod}_{\mathfrak{S}_{\infty}}^{r,\phi}$ , la représentation  $T_{\phi}(\mathfrak{M})$  se prolonge de façon canonique — mais attention, pas nécessairement de façon unique — à  $G_s$  dès que  $s$  satisfait à l'inégalité (4.3). Il se trouve en fait que ce résultat peut être très légèrement amélioré en utilisant d'autres méthodes, le gain consistant à avoir une constante absolue à la place de  $c'(K)$ . Plus précisément :

**Proposition 4.4.1** (avec T. Liu). *Soit  $\mathfrak{M}$  un objet de  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$ . Si  $r = 1$  (resp. si  $r > 1$ ), la représentation  $T_\phi(\mathfrak{M})$  admet un prolongement canonique et fonctoriel à  $G_K$  (resp. à  $G_s$  pour tout  $s > n - 1 + \log_p r$ ).*

*Remarque 4.4.2.* À ce niveau, l'amélioration donnée de la proposition ci-dessus peut paraître anecdotique. On verra cependant dans la suite qu'elle joue un rôle important dans l'étude des quotients de réseaux dans les représentations semi-stables.

Le cas  $r = 1$  est classique : il résulte de l'équivalence entre objets de  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$  et schémas en groupes finis et plats sur  $\mathcal{O}_K$ . On a toutefois trouvé intéressant de l'inclure dans l'énoncé de la proposition 4.4.1, d'une part, pour avoir un énoncé aussi précis que possible et, d'autre part, pour mieux mettre en valeur le contraste qu'il y en a entre les cas  $r = 1$  et  $r > 1$ .

Lorsque  $r > 1$ , la proposition 4.4.1 est démontrée<sup>3</sup> dans le §2 de [18]. L'idée générale est assez proche de celle de la démonstration du théorème 4.3.1 et utilise, en tout cas, comme outil essentiel, le lemme 4.3.4. Celui-ci implique, en effet, que  $T_\phi(\mathfrak{M})$  s'identifie à l'image de l'application

$$\rho : \text{Hom}_{\mathfrak{S},\phi} \left( \mathfrak{M}, \frac{W_n(\mathcal{O}_L)}{(E(u)^r \mathfrak{t}^r) + W_n(\mathcal{O}_L)} \right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S},\phi} \left( \mathfrak{M}, \frac{W_n(\mathcal{O}_L)}{(\mathfrak{t}^r) + W_n(\mathcal{O}_L)} \right)$$

où  $L$  désigne une extension galoisienne de  $k((u))$  suffisamment grande<sup>4</sup>, par exemple  $L = k((u))^{\text{sep}}$ . Or, l'action naturelle de  $G_K$  sur  $W_n(R)$  définit par restriction puis passage au quotient une action canonique de  $G_K$  sur  $W_n(\mathcal{O}_L)/(E(u)^r \mathfrak{t}^r) + W_n(\mathcal{O}_L)$  et  $W_n(\mathcal{O}_L)/(\mathfrak{t}^r) + W_n(\mathcal{O}_L)$ . Pour conclure, il suffit de montrer que, si  $s > n - 1 + \log_p r$ , le sous-groupe  $G_s$  agit sur ces deux derniers espaces de façon  $\mathfrak{S}$ -linéaire. Ceci revient encore à dire que  $\sigma u \equiv u \pmod{(E(u)^r \mathfrak{t}^r) + W_n(\mathcal{O}_L)}$  pour tout  $\sigma \in G_s$  (avec toujours  $s > n - 1 + \log_p r$ ). Cette dernière congruence se démontre finalement par un calcul facile et totalement explicite, l'action de  $G_K$  sur l'élément  $u$  étant simple et entièrement connue.

<sup>3</sup>Sous une forme un peu plus faible, mais les arguments s'adaptent sans difficulté.

<sup>4</sup>On peut également prendre  $L = \text{Frac } R$ , et c'est le choix qui est fait dans [18].



## Chapitre 5

# La théorie des $(\phi, \tau)$ -modules

Dans les chapitres précédents, on a pu constater à de nombreuses reprises l'utilité et l'efficacité de la théorie de Kisin pour étudier aussi bien les catégories de Breuil  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi, N}$  et  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r, \phi, N}$  que les représentations semi-stables elles-mêmes, en outre sans restriction sur les poids de Hodge-Tate. La théorie de Kisin souffre toutefois d'un défaut parfois ennuyeux : dans les cas entier et de torsion, elle ne permet pas *a priori* de décrire que l'action du sous-groupe  $G_\infty$ . En termes de modules de Breuil, cela revient à dire que travailler avec la catégorie  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi}$  en remplacement de  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi, N}$  revient *de facto* à oublier l'opérateur de monodromie, et conduit généralement par la suite à un certain nombre d'imprécisions ou de complications.

Une première réponse à ce problème a été proposée par Liu dans l'article [43] où il définit la notion de  $(\phi, \hat{G})$ -module. La théorie des  $(\phi, \tau)$ -modules, qui va être présentée dans cette partie, peut être considérée à la fois comme une réinterprétation et une généralisation du travail de Liu. Réinterprétation car, bien que proche dans l'esprit, le point de vue adopté n'est pas tout à fait de même nature : au lieu de s'appuyer sur la théorie de Hodge  $p$ -adique telle que présentée jusqu'à présent dans ce mémoire, il se base plutôt sur des techniques issues de la théorie des  $(\phi, \Gamma)$ -modules, qui s'avèrent être plus puissantes. Notamment, et c'est à ce niveau qu'apparaît la généralisation, elles permettent de ne pas se limiter aux représentations semi-stables mais, bel et bien, de traiter toutes les représentations. Les résultats qui vont être présentés dans la suite sont tous issus de [19], article dans lequel le lecteur trouvera une présentation plus complète de la théorie.

### 5.1 Une équivalence de catégories

Avant d'en arriver à la théorie de Kisin proprement dite, c'est-à-dire aux objets des catégories  $\text{Mod}_{/S}^{r, \phi}$  et  $\text{Mod}_{/S_\infty}^{r, \phi}$ , on examine le cas plus simple des  $\phi$ -modules étales sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , sur lequel reposera grandement toute la suite.

On suppose à partir de maintenant que  $p$  est un nombre impair<sup>1</sup>. On rappelle que  $(\pi_s)$  (resp.  $(\varepsilon_s)$ ) désigne un système compatible de racines  $p^s$ -ièmes de  $\pi$  (resp. de l'unité). Le lemme 5.1.2 de [41] assure que les extensions  $K_\infty$  et  $\bigcup_{s \geq 1} K(\varepsilon_s)$  sont linéairement disjointes. Si l'on note  $K_\infty(\varepsilon_\infty)$  la composée de ces deux extensions, le caractère cyclotomique  $\chi$  fournit un morphisme  $\text{Gal}(K_\infty(\varepsilon_\infty)/K) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  dont le noyau est isomorphe à  $\mathbb{Z}_p$ , engendré par un élément  $\bar{\tau}$ . Soit  $\tau$  un élément du sous-groupe d'inertie sauvage de  $G_K$  qui relève  $\bar{\tau}$  (on vérifie qu'un tel élément existe bien). On a alors les propriétés suivantes :

- la suite des  $\tau^{p^s}$  converge vers l'identité de  $G_K$  ;
- l'automorphisme  $\tau$  fixe les  $\varepsilon_s$  et, quitte à modifier ces derniers, on peut supposer que  $\tau(\pi_s) = \varepsilon_s \pi_s$  ;
- le groupe  $G_K$  est engendré par  $\tau$  et  $G_\infty$ .

La dernière affirmation implique, en particulier, qu'il suffit, pour connaître l'action de  $G_K$ , de connaître celle de  $G_\infty$  et celle de  $\tau$ . L'action de  $G_\infty$  étant décrite par le  $\phi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  associé (par la correspondance expliquée au §1.5.1), on est amené à comprendre comment l'action de  $\tau$  se lit sur cette donnée. S'inspirant de la théorie des  $(\phi, \Gamma)$ -modules, étant donné une représentation  $T$  disons libre sur  $\mathbb{Z}_p$  pour fixer les idées, on est tenté de définir une action de  $\tau$  sur le  $\phi$ -module étale associé  $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathcal{E}^{\text{int}, \text{nr}})$  par la formule  $\tau f : x \mapsto \tau f(\tau^{-1}x)$

<sup>1</sup> Il doit être possible d'étendre les résultats à suivre au cas où  $p = 2$  mais, pour l'instant, cela n'a pas été fait.

(pour  $f \in M$ ). Toutefois, cela ne fonctionne pas tel quel pour deux raisons : d'une part, il s'avère que l'espace  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{nr}}$  n'est pas stable sous l'action de  $\tau$  et, d'autre part, même si l'était, le morphisme  $\tau f$  qui en découlerait serait  $(\tau G_\infty \tau^{-1})$ -équivariant, et non pas  $G_\infty$ -équivariant. Pour contourner ce double problème, on remplace, d'une part,  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{nr}}$  par l'anneau plus vaste  $W(\text{Frac } R)$  (voir §1.5.1 pour un rappel des définitions) sur lequel l'action de  $\tau$  est défini et, d'autre part,  $G_\infty$  par le sous-groupe plus petit  $H_\infty = \ker \chi|_{G_\infty}$  qui est distingué dans  $G_K$ . En d'autres termes, à la place de  $M$ , on considère l'espace  $M_\tau = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_\infty]}(T, W(\text{Frac } R))$ ; c'est un  $W(\text{Frac } R)^{H_\infty}$ -module sur lequel  $\tau$  agit via la formule écrite précédemment. Pour simplifier les écritures à venir on pose  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} = W(\text{Frac } R)^{H_\infty}$ . Le lien entre  $M$  et  $M_\tau$  est donné par le lemme suivant, démontré dans [19] (voir lemme 1.19).

**Lemme 5.1.1.** *Pour toute  $\mathbb{Z}_p$ -représentation libre de rang fini  $T$  de  $G_\infty$ , dont le  $\phi$ -module étale associé est noté  $M$ , l'application naturelle  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M \rightarrow M_\tau$  est un isomorphisme.*

Par abus de langage, on note encore  $\tau$  l'automorphisme de  $M_\tau$  correspondant à l'action de  $\tau$ . Celui-ci fait de  $M$  un  $(\phi, \tau)$ -module dans le sens de la définition suivante.

**Définition 5.1.2.** Un  $(\phi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  est la donnée de

- un  $\phi$ -module étale sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , noté  $M$ ;
- un endomorphisme  $\tau$ -semi-linéaire  $\tau : \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M \rightarrow \mathcal{E}_\tau^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M$  qui commute à  $\phi_{\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}} \otimes \phi$  et vérifie, pour tout  $g \in G_\infty$  tel que  $\chi(g) \in \mathbb{N}$ , la relation suivante :

$$\forall x \in M, \quad (g \otimes \text{id}) \circ \tau(x) = \tau^{\chi(g)}(x). \quad (5.1)$$

*Remarque 5.1.3.* On peut montrer que, sous les axiomes de la définition, la suite des  $\tau^{p^s}$ , agissant sur  $M_\tau$ , converge vers l'identité. Il en résulte que l'application  $\tau^a$  est bien définie pour tout  $a \in \mathbb{Z}_p$ , et un passage à la limite dans (5.1) montre que cette formule est valable sans hypothèse sur  $\chi(g)$ .

**Théorème 5.1.4.** *Le foncteur :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_p\text{-représentations} \\ \text{libres de type fini de } G_K \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (\phi, \tau)\text{-modules} \\ \text{libres sur } (\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}}) \end{array} \right\}$$

$$T \mapsto (M, \tau)$$

(où  $M$  est le  $\phi$ -module étale associé à  $T$  et  $\tau$  l'opérateur défini précédemment) est une anti-équivalence de catégories.

Bien sûr, le théorème précédent admet des variantes (qu'on laisse au lecteur le soin d'imaginer et d'écrire) pour les représentations de torsion, d'une part, et pour les  $\mathbb{Q}_p$ -représentations, d'autre part. Sa démonstration n'est pas difficile. Elle est donnée dans le §1.2.2 de [19] pour ce qui concerne les  $\mathbb{F}_p$ -représentations et le §1.3.2 de ce même article dans le cas général.

En réalité, le théorème 5.1.4 possède un vice caché ; celui-ci réside dans le fait que l'anneau  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  qui intervient dans la définition des  $(\phi, \tau)$ -modules est très compliqué à décrire et, par conséquent, encore très mal compris. Voici quelques ingrédients qui permettent d'en apprécier la difficulté. Tout d'abord, bien sûr,  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  s'identifie à l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps  $F_\tau = (\text{Frac } R)^{H_\infty}$  qui, par un théorème d'Ax, s'identifie à l'adhérence du perfectisé de  $F_\infty = (k((u))^{\text{sep}})^{H_\infty}$ . Or, le corps  $F_\infty$  lui-même n'est pas simple à décrire. Une façon d'y parvenir néanmoins consiste à introduire les groupes  $H_m$  définis comme le noyau de la restriction de  $(\chi \bmod p^m)$  à  $G_\infty$ . Les  $H_m$  forment une suite décroissante de sous-groupes d'indice fini de  $G_\infty$  dont l'intersection est  $H_\infty$ . En vertu de la correspondance de Galois, les corps  $F_m = (k((u))^{\text{sep}})^{H_m}$  forment donc une suite d'extensions finies de  $k((u))$  dont l'union exhaustive  $F_\infty$ . À niveau fini, chacun des  $F_m$  est un corps local de la forme  $k((u_m))$  pour un certain  $u_m \in F_\infty$ . Cependant, expliciter ces éléments  $u_m$  n'a pas l'air simple ; certes, pour  $m$  suffisamment grand, l'extension  $F_{m+1}/F_m$  est une extension d'Artin-Schreier mais, concrètement, il ne semble pas facile de trouver un polynôme d'Artin-Schreier qui la décrive. En outre, si l'on s'intéresse réellement à  $F_\infty$ , et plus à un  $F_m$  fixé, on peut simplement dire qu'il est engendré par tous les  $u_m$ , ce qui revient à voir les éléments de ce corps comme des séries de Laurent en l'une des variables  $u_m$ , celle-ci étant toutefois non spécifiée. Via cette description, faire des opérations dans  $F_\infty$  demande de « réduire à la même variable », ce qui n'est pas facile étant donné que les relations de dépendance entre les  $u_m$  ne sont pas bien comprises. Évidemment, comme l'on s'y attend, passer au perfectisé,

au complété puis aux vecteurs de Witt ne simplifie pas les choses. Plus précisément, perfectiser revient à autoriser des exposants fractionnaires dont le dénominateur est une puissance de  $p$ , compléter consiste à autoriser toutes les variables  $u_m$  à intervenir simultanément dans une même série (celles-ci étant alors soumises à des relations que l'on ne sait pour l'instant pas décrire explicitement), sous réserve de surcroît que certaines conditions de convergence délicates à écrire soient remplies. Enfin, travailler avec les vecteurs de Witt introduit également son lot habituel de complications. Dans les §§5.2 et 5.3, on verra toutefois que dans un certain nombre de cas, on sait remplacer cet anneau peu ragoutant qu'est  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  par des sous-anneaux plus sympatiques. Le cas le plus favorable est celui des représentations libres sur  $\mathbb{Z}_p$  (traité au §5.3) pour lequel on va montrer que l'automorphisme  $\tau$  s'écrit comme l'exponentielle d'une application *presque* définie sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ .

## 5.2 Réseaux dans les $(\phi, \tau)$ -modules

Pour faire le lien entre les  $(\phi, \tau)$ -modules que l'on vient d'introduire et les théories de Breuil et de Breuil-Kisin, l'idée qui s'impose est de chercher à définir des  $\mathfrak{S}$ -structures à l'intérieur des  $(\phi, \tau)$ -modules. Pour cela, on définit l'anneau  $\mathfrak{S}_\tau = W(R) \cap \mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  et on introduit la définition suivante.

**Définition 5.2.1.** Soit  $M$  un  $(\phi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  annulé par une puissance de  $p$  (resp. libre comme  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ -module). Un  $\phi$ -réseau de  $M$  est la donnée d'un sous- $\mathfrak{S}$ -module de type fini (resp. libre de rang fini)  $\mathfrak{M}$  de  $M$  tel que

- a) l'application naturelle  $\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow M$  est un isomorphisme ;
- b)  $\mathfrak{M}$  est stable par  $\phi$ .

On dit que  $\mathfrak{M}$  est un  $(\phi, \tau)$ -réseau de  $M$  s'il vérifie en plus la condition :

- c)  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  est stable par  $\tau$ .

En accord avec la terminologie introduite au §1.5.1, on dit qu'un  $\phi$ -réseau  $\mathfrak{M}$  de  $M$  est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  si le  $\mathfrak{S}$ -module engendré par  $\phi(\mathfrak{M})$  contient  $E(u)^r \mathfrak{M}$ , et qu'il est de  $E(u)$ -hauteur finie s'il est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  pour un certain entier  $r$ .

### 5.2.1 Résultats d'existence

Dans le cas de torsion, il est facile de vérifier que tout  $(\phi, \tau)$ -module  $M$  sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  admet un  $\phi$ -réseau. En outre, tout tel  $\phi$ -réseau  $\mathfrak{M}$  est de  $E(u)$ -hauteur finie. En effet, puisque  $M$  est étale comme  $\phi$ -module, pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ , il existe un élément  $\lambda_x \in \mathfrak{S}$  tel que  $\lambda_x x$  appartienne au sous-module engendré par  $\phi(\mathfrak{M})$ . Maintenant, si on note  $p^n$  une puissance de  $p$  qui annule  $M$ , il est facile de voir que  $\lambda_x$  admet un multiple dans  $\mathfrak{S}/p^n \mathfrak{S}$  qui est de la forme  $E(u)^{r_x}$  pour un certain entier  $r_x$ . Autrement dit, on peut supposer que  $\lambda_x = E(u)^{r_x}$ . Enfin, comme  $\mathfrak{M}$  est de type fini sur  $\mathfrak{S}$ , on peut choisir  $r_x$  indépendamment de  $x$ , ce qui permet de conclure. *A contrario*, un  $(\phi, \tau)$ -module libre sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  n'admet pas toujours un  $\phi$ -réseau. Un contre-exemple très simple est donné par le  $(\phi, \tau)$ -module correspondant à la représentation galoisienne  $\mathbb{Z}_p(-1)$  (voir [19], §2.1.2 pour plus de précisions). Enfin, en ce qui concerne l'existence de  $(\phi, \tau)$ -réseaux, on a la proposition suivante.

**Proposition 5.2.2.** Soit  $M$  un  $(\phi, \tau)$ -module sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$ , libre ou de torsion, et soit  $r$  un nombre entier. Alors,  $M$  admet un  $(\phi, \tau)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  si, et seulement si  $M$  admet un  $\phi$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ .

*Remarque 5.2.3.* Il résulte de la proposition et de ce qui a été vu avant que tout  $(\phi, \tau)$ -module de torsion sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  admet un  $(\phi, \tau)$ -réseau. On rappelle que, de plus, tout tel réseau est nécessairement de  $E(u)$ -hauteur finie.

La démonstration de la proposition 5.2.2 est basée sur une étude de l'ensemble  $\mathcal{R}_{\mathfrak{S}}^{r, \phi}(M)$ , ordonné par inclusion, des  $\phi$ -réseaux  $\mathfrak{M}$  de  $M$  qui sont de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ . Dans le cas où  $M$  est de torsion, on a déjà vu au §2.3.1, que  $\mathcal{R}_{\mathfrak{S}}^{r, \phi}(M)$  admet un plus petit élément  $\mathfrak{M}_{\min}$ . L'image de  $\mathfrak{M}_{\min}$  par  $\tau$  est alors encore de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ , à partir de quoi on déduit, en s'appuyant sur la minimalité, que  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_{\min}$  est stable par  $\tau$ . Ainsi  $\mathfrak{M}_{\min}$  est un  $(\phi, \tau)$ -réseau de  $M$ .

Dans le cas où  $M$  est libre, la clé consiste à montrer que  $\mathcal{R}_{\mathfrak{S}}^{r, \phi}(M)$  est réduit à un élément. Une fois cela fait, la conclusion s'obtient comme dans le cas de torsion : si  $\mathfrak{M}$  est l'unique élément de  $\mathcal{R}_{\mathfrak{S}}^{r, \phi}(M)$ , on montre que  $\tau(\mathfrak{M})$

est encore de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ , d'où il suit que l'opérateur  $\tau$  stabilise  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Dans le cas où  $M$  correspond à une représentation semi-stable, l'unicité du  $\phi$ -réseau de  $M$  est contenue dans le théorème de Kisin. Dans le cas général, toutefois, on a semble-t-il besoin d'un autre argument qui est présenté dans le §3.1.2 de [19].

### 5.2.2 Un premier contrôle de l'action de $\tau$

En plus d'apparaître comme un passage obligatoire pour faire le lien entre la théorie des  $(\phi, \tau)$ -modules et celles de Breuil et Breuil-Kisin, la notion de  $(\phi, \tau)$ -réseaux permet aussi de mieux appréhender l'action de  $\tau$ , dans le sens où elle permet de remplacer l'anneau  $W(\text{Frac } R)^{H_\infty}$  — qui, comme cela a été expliqué à la fin du §5.1, est loin d'être commode — par un espace plus petit et à l'apparence un peu plus agréable.

Plus précisément, on rappelle que pour tout entier  $m$ , on a défini le sous-groupe  $H_m$  de  $G_\infty$  comme le noyau de  $(\chi \bmod p^m)_{|G_\infty}$ , ainsi que le corps  $F_m = (k((u))^{\text{sep}})^{H_m} \subset \text{Frac } R$ . Ce dernier est une extension finie de  $k((u))$ , qui s'écrit donc sous la forme  $k((u_m))$  pour un certain entier élément  $u_m \in R$ . Pour tout entier  $m$  à nouveau, on définit  $\mathcal{E}_m$  comme l'unique extension non ramifiée de  $\mathcal{E}$ , incluse dans  $W(\text{Frac } R)[1/p]$ , de corps résiduel  $F_m$  : concrètement, les éléments de  $\mathcal{E}_m$  sont des séries de la forme  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \hat{u}_m^i$  où  $\hat{u}_m \in \mathcal{E}_m$  est un relevé de  $u_m$  et les  $a_i$  forment une suite bornée d'éléments de  $W[1/p]$  qui tend vers 0 lorsque  $i$  tend vers  $-\infty$ . On pose  $\mathfrak{S}_m = \mathcal{E}_m \cap W(R)$  ; on a alors simplement  $\mathfrak{S}_m = W[[\hat{u}_m]]$ . Pour en terminer avec les notations, on rappelle que la lettre  $t$  désigne un élément de  $W(R)$  vérifiant  $\phi(t) = E(u)t$  et que si  $A$  est un sous-anneau de  $W(R)$ , ou plus généralement un module sur un tel sous-anneau, et  $x \in W(R)$ , on note  $x^+ A$  l'intersection dans  $W(R)$  de  $A$  et  $x \mathfrak{m}_{W(R)}$  où  $\mathfrak{m}_{W(R)}$  désigne l'idéal maximal de  $W(R)$ .

**Proposition 5.2.4.** *Il existe une constante  $c''(K)$  ne dépendant que de  $K$  telle que pour tout entier  $r$  et tout  $(\phi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  (dans un certain  $(\phi, \tau)$ -module non précisé) de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ , on ait, en notant  $s_0$  le plus petit entier  $\geq c''(K) + \log_p r$ , l'inclusion suivante :*

$$(\tau^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset \left( (t^r)^+ \mathfrak{S}_\tau + \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n > s - s_0}} p^n \mathfrak{S}_{s_0 - s + n} \right) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \quad (5.2)$$

pour tout entier  $s \geq 0$ .

Bien sûr, il est important de remarquer que si  $\mathfrak{M}$  est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ , alors il est également de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r'$  pour tout  $r' \geq r$ . En appliquant la proposition 5.2.4 s'applique pour tous ces  $r'$ , on obtient un contrôle plus précis de l'action de  $\tau^{p^s}$ . Au final, la conclusion que l'on obtient est qu'au lieu d'avoir à travailler avec l'anneau  $\mathcal{E}_\tau^{\text{int}}$  dont les éléments s'écrivent comme des séries en une infinité des variables (les  $\hat{u}_m$ ) faisant intervenir des exposants dans  $\mathbb{Z}[1/p]$  et soumises à des conditions de convergence délicates, on peut généralement supposer que les termes dont les exposants ne sont pas des entiers naturels n'apparaissent pas et écrire de façon très explicite les conditions de convergence qui étaient auparavant obscures. Malgré tout, les éléments qui restent après ces simplifications ont toujours une écriture compliquée, et ne se laissent pas manipuler facilement.

Quelques mots, pour conclure ce paragraphe, sur la démonstration de la proposition 5.2.4. Par un argument de passage à la limite, on se ramène à démontrer que si  $\mathfrak{M}$  est annulé par  $p^n$ , alors

$$(\tau^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset ((t^r)^+ \mathfrak{S}_\tau + \mathfrak{S}_{t-s}) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \quad (5.3)$$

pour tout entier  $s$  et tout entier  $t \geq c''(K) + n - 1 + \log_p r$ . La première étape consiste à vérifier qu'il existe une constante  $c''(K)$  ne dépendant que de  $K$  telle que pour tout  $t \geq c''(K) + n - 1 + \log_p r$ , l'action de  $\tau^{p^t}$  sur  $u \in W_n(R)$  soit triviale modulo  $E(u)^r t^r$ . Ceci implique l'existence d'un opérateur  $\tau_{\text{triv}}^{(p^t)}$  sur le  $\phi$ -réseau  $M$  qui en fait un  $(\phi, \tau^{p^t})$ -module<sup>2</sup>, que l'on note  $\mathfrak{M}_{\text{triv}}$ . En effet, par ce qui vient d'être dit, l'identité vérifie la relation de commutation attendue modulo  $(E(u)^r t^r)^+ \mathfrak{S}_\tau$ , et un argument (plutôt technique) du type « lemme de Hensel », semblable à celui utilisé pour démontrer le lemme 4.3.4 permet à partir de là de construire  $\tau_{\text{triv}}^{(p^t)}$  par approximations successives. Il résulte de surcroît de cette construction que  $\tau_{\text{triv}}^{(p^t)}$  est congru à l'identité modulo  $(t^r)^+ \mathfrak{M}$ . Un autre

<sup>2</sup>Au cas où la définition ne serait pas transparente, la donnée d'un  $(\phi, \tau^{p^t})$ -module est équivalente à celle d'un  $(\phi, \tau)$ -module pour le corps de base  $K_t$ .

ingrédient essentiel de la démonstration est le théorème 4.3.5 qui donne une borne sur l'action de l'inertie sauvage. En effet, celui-ci implique que, quitte à augmenter un peu la constante  $c''(K)$ , pour les mêmes  $t$  que précédemment, l'action de  $\tau^{p^t}$  est triviale sur les représentations de  $G_t$  associées respectivement à  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}_{\text{triv}}$ . Cela indique que  $\tau^{p^t} = \tau_{\text{triv}}^{(p^t)}$ , et donc que  $\tau^{p^t}$  est congru à l'identité modulo  $(t^r)^+\mathfrak{M}$ . L'inclusion (5.3) est ainsi démontrée lorsque  $s \geq t$ . Pour les  $s < t$ , on remarque que pour tout  $\gamma \in G_\infty$  tel que  $v_p(\chi(\gamma) - 1) \geq t - s$ , le commutateur  $\gamma\tau^{p^s}\gamma^{-1}\tau^{-p^s}$  est dans  $G_t$  et donc agit trivialement sur  $\mathfrak{M}$  modulo  $(t^r)^+\mathfrak{M}$ . Autrement dit, pour tout  $x \in \mathfrak{M}$  et tout  $\gamma$  comme précédemment, l'élément  $\tau^{p^s}(x)$  est fixé modulo  $(t^r)^+\mathfrak{M}$  par l'action de  $\gamma \otimes \text{id}$ . Il en résulte par un théorème d'Ax que  $(\tau_{\mathfrak{M}}^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset W_n(F_{t-s}^{\text{perf, int}}) \otimes_{\mathfrak{S}/p^n\mathfrak{S}} \mathfrak{M} + (t^r)^+\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  où, pour un entier  $m$  donné, on a noté  $F_m^{\text{perf, int}}$  l'anneau des entiers du perfectisé de  $F_m$ . Étant donné que  $\mathfrak{M}$  est de type fini, il existe un entier  $\nu_0$  tel que l'on puisse remplacer dans l'inclusion précédent  $F_{t-s}^{\text{perf, int}}$  par l'anneau plus petit  $\varphi^{-\nu_0}(F_{t-s}^{\text{int}})$  où, bien entendu,  $F_{t-s}^{\text{int}}$  est l'anneau des entiers de  $F_{t-s}$ . Il suit de la commutation de  $\phi$  et  $\tau^{p^s}$  qu'en fait :

$$(\tau_{\mathfrak{M}}^{p^s} - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset ((\mathfrak{S}/p^n\mathfrak{S}) \cdot W_n(\varphi^{\nu-\nu_0}(F_{t-s}^{\text{int}}))) \otimes_{\mathfrak{S}/p^n\mathfrak{S}} \mathfrak{M} + (E(u)^r t^r)^+\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

pour tout entier  $\nu \geq 0$ . La conclusion résulte alors de l'inclusion  $W_n(\varphi^N(F_{t-s}^{\text{int}})) \subset \mathfrak{S}_{t-s}/p^n\mathfrak{S}_{t-s}$  valable dès que  $N$  dépasse  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

### 5.3 Le logarithme de $\tau$

Dans le cas des  $(\phi, \tau)$ -modules libres sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ , ou ce qui revient au même des représentations libres sur  $\mathbb{Z}_p$ , il est possible de décrire l'action de  $\tau$  de façon plus efficace en utilisant le logarithme. Pour expliquer comment cela fonctionne, on commence par fixer un  $(\phi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  dans un  $(\phi, \tau)$ -module  $M$  sur  $(\mathcal{E}^{\text{int}}, \mathcal{E}_\tau^{\text{int}})$  qui est libre (de rang fini) sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . Par définition,  $\mathfrak{M}$  est donc un module libre sur  $\mathfrak{S}$  et l'opérateur  $\tau$  induit un endomorphisme de  $\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . L'idée, qui n'est pas nouvelle, est d'étudier le logarithme de  $\tau$  défini par la formule usuelle :

$$\log \tau = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\text{id} - \tau)^i}{i}.$$

Le problème est qu'il n'est pas clair que cette formule ait un sens car, d'une part, les divisions par  $i$  ne sont pas toujours définies dans  $\mathfrak{M}$  et, d'autre part, la convergence de la série ne coule pas de source, à tel point d'ailleurs qu'elle semble même impossible à avoir dans le cas où  $\tau$  n'induit pas un endomorphisme unipotent modulo l'idéal maximal de  $\mathfrak{S}_\tau$ . On va voir néanmoins ci-après que, sous certaines hypothèses, on peut assurer l'existence de ce logarithme.

#### 5.3.1 Énoncé du théorème de convergence

On rappelle que  $\mathcal{O}$  désigne l'anneau des séries convergentes dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Pour tout entier  $i \geq 0$ , soit  $\mathcal{R}_i^{\text{int}}$  le sous-anneau de  $\mathcal{O}$  formé des séries  $\sum_{n \geq 0} a_n u^n$  pour lesquelles la quantité  $v_p(a_n) + i \cdot \log_p n$  est uniformément minorée pour  $n \geq 1$ . On a  $\mathcal{R}_0^{\text{int}} = \mathfrak{S}[1/p]$ , et il est facile de vérifier que l'opérateur  $N_\nabla$  de Kisin (voir §1.5.2 pour la définition) envoie  $\mathcal{R}_i^{\text{int}}$  sur  $\mathcal{R}_{i+1}^{\text{int}}$  pour tout  $i$ . Soit encore  $\mathfrak{S}_\nabla$  le sous- $\mathfrak{S}$ -module de  $\mathcal{R}_1^{\text{int}}$  formé des séries de la forme  $P_0(u) + \sum_{n \geq 1} \frac{P_n(u)}{p^{n+1}} u^{e(p^n-1)/(p-1)}$  où les  $P_n(u)$  sont des polynômes à coefficients dans  $W$ . Le Frobenius  $\phi$  agit sur tous les espaces précédents.

**Théorème 5.3.1.** *Soit  $\mathfrak{M}$  un  $(\phi, \tau)$ -réseau à l'intérieur d'un  $(\phi, \tau)$ -module libre sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$ . On suppose que  $\mathfrak{M}$  est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  pour un certain entier  $r$ , et que  $\text{id} \otimes \tau$  agit sur le produit tensoriel  $\bar{k} \otimes_{\mathfrak{S}_\tau} (\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$  comme l'identité. Alors la série*

$$\frac{1}{pt} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\text{id} - \tau)^i}{i} \tag{5.4}$$

converge vers un opérateur  $N_\nabla : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S}_\nabla \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  qui vérifie

- la relation de Leibniz  $N_\nabla(ax) = N_\nabla(a) \otimes x + aN_\nabla(x)$  pour tout  $a \in \mathfrak{S}$  et tout  $x \in \mathfrak{M}$ , et
- la relation de commutation  $N_\nabla \circ \phi = E(u) \cdot (\phi \otimes \phi) \circ N_\nabla$ .



De plus, si les opérateurs  $N_{\nabla}^{(i)} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{R}_i^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  sont définis par  $N_{\nabla}^{(0)} = \text{id}$  et la formule de récurrence

$$N_{\nabla}^{(i+1)} = iu \cdot \frac{d\lambda}{du} \cdot N_{\nabla}^{(i)} + N_{\nabla} \circ N_{\nabla}^{(i)},$$

on a  $\tau(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{(pt)^i}{i!} N_{\nabla}^{(i)}(x)$ , pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ .

Dans le cas où  $K$  ne contient pas de racines primitives  $p$ -ièmes de l'unité, ce qui se produit par exemple lorsque  $e < p - 1$ , l'hypothèse sur  $\text{id} \otimes \tau$  est automatiquement satisfaite. En effet, il existe alors dans  $G_{\infty}$  un élément  $\gamma$  tel que  $\chi(\gamma)$  ne soit pas congru à 1 modulo  $p$ . De la relation (5.1) qui apparaît dans la définition des  $(\phi, \tau)$ -modules, il suit que  $\tau^{\chi(\gamma)-1}$  agit trivialement sur  $k \otimes_{\mathfrak{S}_{\tau}} (\mathfrak{S}_{\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$ . Par continuité, il en est de même de  $\tau^{p^s}$  pour  $s$  suffisamment grand. Comme  $p^s$  et  $\chi(\gamma) - 1$  sont premiers entre eux, on en déduit que  $\tau$  lui-même agit trivialement sur le produit tensoriel précédent.

### 5.3.2 Les grandes lignes de la démonstration du théorème 5.3.1

La démonstration complète du théorème 5.3.1 est donnée dans les §§3.2.2, 3.2.3 et 3.3.1 de [19]. Elle consiste à montrer, tout d'abord, que la série (5.4) converge dans un espace suffisamment gros, puis à réduire petit à petit cet espace jusqu'à arriver finalement à  $\mathfrak{S}_{\nabla} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  comme annoncé. Comparativement, la première étape est nettement plus simple et se déroule comme suit. On commence par montrer que l'action de  $\text{id} \otimes \tau$  est non seulement triviale sur  $\bar{k} \otimes_{\mathfrak{S}_{\tau}} (\mathfrak{S}_{\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$  mais aussi sur  $W(\bar{k}) \otimes_{\mathfrak{S}_{\tau}} (\mathfrak{S}_{\tau} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$  : si  $f$  est l'endomorphisme induit sur ce dernier espace, on conclut en utilisant, d'une part, que  $f \equiv \text{id} \pmod{p}$  (ce que l'on sait par hypothèse) et, d'autre part, qu'il existe un entier  $s$  tel que  $f^{p^s} = \text{id}$  (ce qui s'obtient de même que dans le dernier alinéa du §5.3.1). En notant  $\mathfrak{m}_R$  l'idéal maximal de  $R$ , on en déduit qu'il existe un élément  $Z \in W(\mathfrak{m}_R)$ , que l'on peut supposer non divisible par  $p$ , tel que  $\tau(x) - x \in Z W(\mathfrak{m}_R) + p W(\mathfrak{m}_R)$  pour tout  $x \in W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Étant donné que l'idéal  $Z W(\mathfrak{m}_R) + p W(\mathfrak{m}_R)$  est stable par  $\tau$ , il en résulte que

$$(\tau - \text{id})^i(\mathfrak{M}) \subset \left( \sum_{j=0}^i p^{i-j} Z^j W(\mathfrak{m}_R) \right) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

puis que la série définissant  $\log \tau(x)$  converge dans l'espace  $W(R)[Z/p]^{\wedge} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  où, par définition,  $W(R)[Z/p]^{\wedge}$  est le complété  $p$ -adique de l'anneau quotient  $W(R)[Z']/(pZ' - Z)$ . En examinant plus précisément les dénominateurs, on s'aperçoit même que  $(\log \tau)(\mathfrak{M}) \subset W(\mathfrak{m}_R)^{Z\text{-dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  où  $W(\mathfrak{m}_R)^{Z\text{-dp}}$  est l'adhérence dans  $W(R)[Z/p]^{\wedge}$  du  $W(R)$ -module  $\sum_{m \geq 0} \frac{Z^{pm}}{p^m} W(\mathfrak{m}_R)$ .

La seconde étape, par contre, est bien longue et plus délicate. Elle est schématisée par le diagramme de la figure 5.1 qui montre le chemin à emprunter pour passer de  $W(\mathfrak{m}_R)^{Z\text{-dp}}$  à  $\mathfrak{S}_{\nabla}$ . La plupart des espaces intermédiaires n'ont pas encore été définis à ce niveau ; que le lecteur ne s'inquiète pas, cela se fera au fur et à mesure. On peut néanmoins d'ores et déjà préciser que  $\nu$  est la valuation  $R$ -adique de la réduction modulo  $p$  de l'élément  $Z$ . Il s'agit donc d'un nombre rationnel strictement positif.

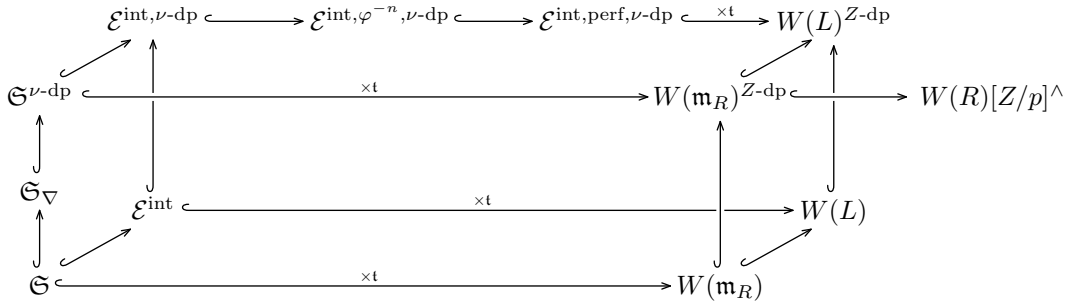
Le premier espace qui apparaît sur la route est  $W(L)^{Z\text{-dp}}$ . Dans cette notation, la lettre  $L$  désigne simplement le corps  $\text{Frac } R$  et, par définition,  $W(L)^{Z\text{-dp}}$  désigne la somme amalgamée de  $W(L)$  et  $W(\mathfrak{m}_R)^{Z\text{-dp}}$  au dessus de  $W(\mathfrak{m}_R)$ . Si l'on note  $|\cdot|_p$  la norme sur  $W[1/p]$  normalisée par  $|p|_p = \frac{1}{p}$ , le module suivant  $\mathcal{E}^{\text{int, perf, } \nu\text{-dp}}$  est défini comme l'espace des séries formelles de la forme

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}[1/p]} a_q u^q, \quad a_q \in W[1/p]$$

vérifiant les conditions de convergence suivantes :

- pour tout  $q \in \mathbb{Z}[1/p]$ , on a  $|a_q|_p < \max(p, \frac{e+q(p-1)}{\nu(p-1)})$  ;
- le coefficient  $a_q$  tend vers 0 lorsque  $q$  tend vers  $-\infty$  ;
- pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des  $q \in \mathbb{Z}[1/p]$  tels que  $|a_q|_p > \varepsilon$  est discret<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Avec la condition précédente, cela revient à dire qu'il intersecte tous les intervalles  $]-\infty, A]$  selon un ensemble fini.

FIG. 5.1 – Divers  $\mathfrak{S}$ -modules intervenant dans la démonstration du théorème 5.3.1

La stratégie de la preuve est la suivante. Le logarithme de  $\tau$  est tout d'abord construit dans l'anneau  $W(R)[Z/p]^\wedge$ . On montre ensuite qu'il redescend à  $\mathfrak{S}^\nabla$  en empruntant le chemin suivant :  $W(\mathfrak{m}_R)^{Z\text{-dp}}$ ,  $W(L)^{Z\text{-dp}}$ ,  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}$ ,  $\mathcal{E}^{\text{int}, \nu\text{-dp}}$ ,  $\mathfrak{S}^{\nu\text{-dp}}$  et enfin  $\mathfrak{S}^\nabla$ .

Ces conditions assurent que l'association  $\sum_{q \in \mathbb{Z}[1/p]} a_q u^q \mapsto t \sum_{q \in \mathbb{Z}[1/p]} a_q [\pi^q]$  définit un morphisme (injectif)  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}} \rightarrow W(L)^{Z\text{-dp}}$ . Dans la suite, son image sera notée  $t \mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}$  ou  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}(1)$ , tandis que l'image d'un élément  $x \in \mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}$  sera notée simplement  $tx$ . On passe de  $W(L)^{Z\text{-dp}}$  à  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}$  par un argument galoisien. En effet, en prenant le logarithme de la relation de commutation (5.1), on trouve que, pour tout  $x \in \mathfrak{M}$  et tout  $g \in G_\infty$ , l'automorphisme  $(g \otimes \text{id})$  agit trivialement sur  $\log \tau(x) \in W(L)^{Z\text{-dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  par multiplication par  $\chi(g)$ . Or, par un argument basé sur un théorème d'Ax calculant  $L^{G_\infty}$ , on montre (voir lemme 3.7 de [19]) que l'ensemble des  $x \in W(L)^{Z\text{-dp}}$  tels que  $g(x) = \chi(g)x$  pour tout  $g \in G_\infty$  est exactement  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}$ . Il en résulte directement que  $N_\nabla$  est bien défini sur  $\mathfrak{M}$  et qu'il prend ses valeurs dans  $\frac{1}{p} \cdot \mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ .

L'anneau suivant sur le chemin est  $\mathcal{E}^{\text{int}, \nu\text{-dp}}$ , qui est défini comme l'ensemble des séries de  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}$  ne faisant intervenir que des exposants entiers relatifs. La prochaine étape consiste donc à démontrer que  $N_\nabla(\mathfrak{M}) \subset \frac{1}{p} \cdot \mathcal{E}^{\text{int}, \nu\text{-dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Pour cela, on commence par vérifier les relations de Leibniz et de commutation à  $\phi$  qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 5.3.1 ; ceci ne présente pas de difficulté particulière. Forts de cela, la méthode pour redescendre à  $\mathcal{E}^{\text{int}, \nu\text{-dp}}$  est la suivante. Pour tout entier  $n$ , on introduit le sous-anneau  $\mathcal{E}^{\text{int}, \varphi^{-n}, \nu\text{-dp}}$  de  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}$  formé des séries  $\sum_{q \in \mathbb{Z}} a_{p^{-n}q} u^{p^{-n}q}$  et pour tout couple d'entiers  $(N, Q)$ , on note  $I_{N, Q}$  l'idéal de  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}$  formé des séries pour lesquelles  $v_p(a_q) \geq N$  pour tout  $q < Q$ . À partir de la définition de  $\mathcal{E}^{\text{int}, \text{perf}, \nu\text{-dp}}$ , il suit facilement l'existence pour tout couple  $(N, Q)$  d'un entier  $n$  tel que :

$$pN_\nabla(\mathfrak{M}) \subset (\mathcal{E}^{\text{int}, \varphi^{-n}, \nu\text{-dp}} + I_{Q, N}) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}. \quad (5.5)$$

En utilisant la relation de commutation entre  $\tau$  et  $\phi$  et le fait que  $\mathfrak{M}$  est de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ , on montre que si  $Q$  et  $N$  vérifient  $(p-1)Q \geq (N+e)h$ , alors l'inclusion (5.5) est aussi valable en remplaçant  $n$  par  $n-1$ . Par récurrence, elle est donc aussi valable pour  $n=0$ , et on conclut en faisant tendre  $N$  et  $Q$  vers l'infini.

L'espace  $\mathfrak{S}^{\mu\text{-dp}}$ , qui est la prochaine étape, est défini comme le sous- $\mathfrak{S}$ -module  $\mathcal{E}^{\text{int}, \mu\text{-dp}}$  formé des séries  $\sum_{q \in \mathbb{Z}} a_q u^q$  pour lesquelles  $a_q = 0$  dès que  $q$  est strictement négatif. Pour montrer que  $N_\nabla$  prend ses valeurs dans  $\frac{1}{p} \cdot \mathfrak{S}^{\mu\text{-dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ , il suffirait de montrer que l'ensemble des éléments  $x \in \mathcal{E}^{\text{int}, \mu\text{-dp}}$  tels que  $tx \in W(\mathfrak{m}_R)^{Z\text{-dp}}$  est exactement  $\mathfrak{S}^{\mu\text{-dp}}$ . Malheureusement, ceci n'est vrai que sous l'hypothèse additionnelle  $W[1/p](\pi^p) = K$ . Pour l'instant, on suppose donc qu'elle est vérifiée. Pour montrer la propriété annoncée, on peut commencer par se débarrasser des puissances divisées. On est ainsi ramené à montrer que  $\mathfrak{S}$  est égal à l'ensemble  $\mathfrak{S}'$  des éléments  $x \in \mathcal{E}^{\text{int}}$  tels que  $tx \in W(\mathfrak{m}_R)$ . On montre alors d'abord, par un argument de valuation, que  $\mathfrak{S}'$  est un  $\mathfrak{S}$ -module libre de rang 1 engendré par un élément de la forme  $\frac{1}{B(u)}$  où  $B$  est un polynôme de la forme  $u^d + p(b_{d-1}u^{d-1} + \dots + b_0)$  avec  $b_i \in W$ . Du fait que la fraction  $\frac{E(u)}{\phi(B(u))}$  appartient à  $\mathfrak{S}'$  (vérification immédiate), on déduit que  $\phi(B(u))$  divise  $B(u)E(u)$ . En évaluant cette divisibilité aux racines de  $\phi(B(u))$ , on déduit que  $d=0$  (en utilisant  $W[1/p](\pi^p) = K$ ), ce qui implique finalement que  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}$  comme attendu.

Il reste à arriver à  $\mathfrak{S}^\nabla \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Or, on remarque que  $\mathfrak{S}^\nabla$  n'est en fait rien d'autre que  $\frac{1}{p} \cdot \mathfrak{S}^{1/(p-1)\text{-dp}}$ . Il suffit donc de justifier que l'on peut choisir  $\nu = \frac{1}{p-1}$ . Pour ce faire, on montre plus précisément que l'on peut prendre  $Z = t$

et on utilise, à cette fin, la deuxième partie du théorème 5.3.1 qui donne une formule permettant de reconstruire l'opérateur  $\tau$  à partir de  $N_\nabla$ . Pour terminer la démonstration du théorème 5.3.1, il ne reste donc plus qu'à démontrer cette formule, ce qui se fait à l'aide d'un calcul un peu fastidieux mais sans grosse difficulté. On ne donne pas plus de détails dans ce mémoire, et on renvoie le lecteur intéressé à la démonstration de la proposition 3.12 de [19].

On ne dira pas grand chose dans ce mémoire sur le cas (peu fréquent) où  $W[1/p](\pi^p) \neq K$ , si ce n'est que l'idée — due à Liu — consiste à reconstruire non pas le  $(\phi, N_\nabla)$ -module à la Kisin, mais directement le  $(\phi, N)$ -module filtré de Fontaine en passant par un avatar de la théorie de Breuil qui fonctionne pour tout  $r$ . Pour plus de détails à ce sujet, on renvoie au §3.2.3 de [19].

## 5.4 Lien avec la théorie de Kisin et applications

Comme la notation le sous-entend clairement, l'opérateur  $N_\nabla$  fourni par le théorème 5.3.1 n'est pas sans lien avec l'opérateur  $N_\nabla$  de la théorie de Kisin brièvement rappelée au §1.5.2. Plus précisément, on suppose que l'uniformisante  $\pi$  est choisie de telle sorte que  $W[1/p](\pi^p) = K$  et on considère  $T$  un réseau dans une représentation semi-stable  $V$  de  $G_K$  à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ . Par la théorie de Kisin, on sait que le  $(\phi, \tau)$ -module  $M$  associé à  $T$  admet un unique  $\phi$ -réseau  $\mathfrak{M}$  qui est de  $E(u)$ -hauteur finie et, en vertu de la démonstration de la proposition 5.2.2, ce  $\phi$ -réseau est en fait un  $(\phi, \tau)$ -réseau. Par ailleurs, à la représentation semi-stable  $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ , Kisin associe également un objet de la catégorie  $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{r, \phi, N_\nabla, 0}$ , c'est-à-dire un  $(\phi, N_\nabla)$ -module  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{O}$ . Les espaces  $\mathfrak{M}$  et  $\mathcal{M}$  sont alors liés par la relation  $\mathcal{M} = \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  et, au niveau des opérateurs  $N_\nabla$ , on montre<sup>4</sup> que le  $(\phi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  vérifie les hypothèses du théorème 5.3.1 et que l'opérateur  $N_\nabla$  qui s'en déduit coïncide avec la restriction à  $\mathfrak{M}$  de celui que l'on a par ailleurs sur  $\mathcal{M}$ .

### 5.4.1 Représentations de $E(u)$ -hauteur finie et représentations semi-stables

L'interprétation de  $N_\nabla$  en termes de  $(\phi, \tau)$ -modules admet un certain nombre d'applications, dont la plus immédiate est une caractérisation de  $(\phi, \tau)$ -modules libres sur  $\mathcal{E}^{\text{int}}$  qui correspondent à des réseaux dans les représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ . Plus précisément, on a le théorème suivant.

**Théorème 5.4.1.** *On se donne  $T$  une représentation de  $G_K$ , libre sur  $\mathbb{Z}_p$ . Soit  $M$  le  $(\phi, \tau)$ -module associé à  $T$ . Alors  $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$  est semi-stable à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$  si, et seulement si  $M$  admet un  $(\phi, \tau)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  de  $E(u)$ -hauteur finie tel que l'action de  $\tau$  sur  $k \otimes_{\mathfrak{S}_\tau} (\mathfrak{S}_\tau \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$  soit triviale.*

Après ce qui a déjà été expliqué, la démonstration de ce théorème n'est pas difficile. En effet, on sait déjà, par le théorème de Kisin et ce qui a été rappelé précédemment, que si  $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$  est semi-stable à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ , alors  $M$  admet un  $(\phi, \tau)$ -réseau satisfaisant aux propriétés requises. Réciproquement, si l'on suppose l'existence d'un tel réseau, le théorème 5.3.1 permet de construire un opérateur  $N_\nabla : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S}_\nabla \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . La relation de Leibniz permet de le prolonger en un endomorphisme de  $\mathcal{M} = \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ . Ce faisant, on définit un objet de la catégorie  $\text{Mod}_{\mathcal{O}}^{r, \phi, N_\nabla, 0}$  auquel on peut associer, par la théorie de Kisin, une représentation semi-stable  $V$  à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ . On sait en outre décrire le  $(\phi, \tau)$ -module  $M$  correspondant à  $V$  : en tant que  $\phi$ -module, il est égal à  $\mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M} = \mathcal{E}^{\text{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  muni que  $\phi \otimes \phi$ , tandis que l'action de  $\tau$  s'obtient à partir de  $N_\nabla$  par la recette du théorème 5.3.1. On en déduit que  $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$  et  $V$  correspondent au même  $(\phi, \tau)$ -module, et donc sont isomorphes. Finalement  $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$  est bien semi-stable à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$ .

On a vu que si  $K$  ne contient pas de racines primitives  $p$ -ièmes de l'unité, alors l'action de  $\tau$  sur n'importe quel  $(\phi, \tau)$ -réseau est automatiquement triviale modulo l'idéal maximal. Ainsi, sous cette hypothèse, il résulte du théorème 5.4.1 qu'une représentation  $V$  est semi-stable à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$  si, et seulement si elle est de  $E(u)$ -hauteur finie, c'est-à-dire, par définition, s'il existe un réseau  $T \subset V$  stable par  $G_\infty$  dont le  $\phi$ -module associé admet un  $\phi$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur finie. On notera que, dans cette caractérisation, il n'est plus du tout question de l'opérateur  $\tau$  ; autrement dit, sous les hypothèses précédentes, le caractère semi-stable d'une représentation de  $G_K$  se lit uniquement sur sa restriction à  $G_\infty$  (on peut se ramener à des poids de Hodge-Tate  $\geq 0$  en twistant).

<sup>4</sup>Ce résultat est essentiellement dû à Liu.

En travaillant non pas avec des  $(\phi, \tau)$ -modules, mais avec des  $(\phi, \tau^{p^s})$ -modules (qui décrivent uniquement l'action du sous-groupe  $G_s$ ), on montre que le résultat précédent se généralise à un corps  $K$  quelconque sous la forme suivante.

**Théorème 5.4.2.** *Soit  $s$  le plus grand entier tel que  $K$  contienne une racine primitive  $p^s$ -ième de l'unité. Alors toute représentation de  $E(u)$ -hauteur finie de  $G_K$  devient semi-stable en restriction au sous-groupe (distingué)  $\text{Gal}(\bar{K}/K(\sqrt[p^s]{\pi}))$ .*

### 5.4.2 Une nouvelle classification des réseaux dans les représentations semi-stables

Une autre application du lien tenu entre la théorie de Kisin et celle des  $(\phi, \tau)$ -modules est l'obtention d'une nouvelle classification des réseaux dans les représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$  en termes de  $(\phi, N_\nabla)$ -modules.

**Définition 5.4.3.** Un  $(\phi, N_\nabla)$ -réseau est la donnée d'un objet  $\mathfrak{M}$  de  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\infty, \phi}$  muni d'un morphisme  $N_\nabla : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{S}_\nabla \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  vérifiant

- la relation de Leibniz  $N_\nabla(ax) = N_\nabla(a) \otimes x + aN_\nabla(x)$  pour tout  $a \in \mathfrak{S}$  et tout  $x \in \mathfrak{M}$ , et
- la relation de commutation  $N_\nabla \circ \phi = E(u) \cdot (\phi \otimes \phi) \circ N_\nabla$ .

On note  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\infty, \phi, N_\nabla}$  la catégorie des  $(\phi, N_\nabla)$ -réseaux, les morphismes étant les applications  $\mathfrak{S}$ -linéaires commutant à  $\phi$  et  $N_\nabla$ . En vertu du théorème 5.3.1, on dispose d'un foncteur, noté  $\mathcal{K}^{\text{int}}$ , de la catégorie des réseaux stables par  $G_K$  à l'intérieur des représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate  $\geq 0$  dans  $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\infty, \phi, N_\nabla}$ . On a alors la proposition immédiate suivante.

**Proposition 5.4.4.** *Le foncteur  $\mathcal{K}^{\text{int}}$  est pleinement fidèle. De plus, un  $(\phi, N_\nabla)$ -réseau  $\mathfrak{M}$  est dans son image essentielle si, et seulement si l'endomorphisme  $\tau$  de  $W(R)[t/p]^\wedge \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  défini ci-dessus stabilise  $W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ .*

La condition qui vient d'apparaître n'est pas très commode car il ne semble *a priori* pas facile de décider si un élément de  $W(R)[t/p]^\wedge$  appartient à  $W(R)$ . Typiquement, si l'on écrit cet élément comme une série en  $\frac{t}{p}$ , on obtient un nombre infini de conditions à examiner. Toutefois, la proposition suivante, qui se démontre par un argument à la Hensel, permet de se ramener à un nombre fini de vérifications.

**Proposition 5.4.5.** *On suppose que  $W[1/p](\pi^p) = K$ . Soit  $\mathfrak{M}$  un  $(\phi, N_\nabla)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$ . Alors,  $\mathfrak{M}$  est dans l'image essentielle de  $\mathcal{K}^{\text{int}}$  si, et seulement si, pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ , la somme finie*

$$x + pt \cdot N_\nabla^{(1)}(x) + \frac{(pt)^2}{2} \cdot N_\nabla^{(2)}(x) + \cdots + \frac{(pt)^r}{r!} \cdot N_\nabla^{(r)}(x) \quad (5.6)$$

appartient à  $\left(W(R) + \left(\frac{t}{p}\right)^r \mathfrak{m}_{W(R)} W(R)[t/p]^\wedge\right) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$  où  $\mathfrak{m}_{W(R)}$  désigne l'idéal maximal de  $W(R)$ .

**Corollaire 5.4.6.** *Tout  $(\phi, N_\nabla)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur  $\leq p - 1$  est dans l'image essentielle de  $\mathcal{K}^{\text{int}}$ .*

### 5.4.3 Une borne plus précise pour la ramification sauvage des représentations semi-stables

Une adaptation immédiate de la deuxième partie du théorème 5.3.1 fournit, pour tout entier  $s$ , une expression de  $\tau^{p^s}$  en fonction de l'opérateur  $N_\nabla$ ; plus précisément, en reprenant les notations du théorème, on a  $\tau^{p^s}(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{(p^{s+1}t)^i}{i!} N_\nabla^{(i)}(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{M}$ . À partir de là, on obtient que, si  $\mathfrak{M}$  désigne l'unique  $(\phi, \tau)$ -réseau de  $E(u)$ -hauteur  $\leq r$  dans le  $(\phi, \tau)$ -module associé à un réseau dans une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate dans  $\{0, \dots, r\}$ , alors pour tout  $s > n - 1 + \log_p r$  et tout  $\sigma \in G_s$ , on a :

$$(\sigma - \text{id})(\mathfrak{M}) \subset ((t^r)^+ \mathfrak{S}_\tau + p^n \mathfrak{S}_\tau) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

De cette estimation, on déduit la proposition suivante.

**Proposition 5.4.7.** *Soient  $n$  et  $r$  deux entiers positifs. Soit  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) un quotient annulé par  $p^n$  de deux réseaux stables par  $G_K$  dans une représentation semi-stable. Soit  $f : T_1 \rightarrow T_2$  une application linéaire  $G_\infty$ -équivariante. Alors  $f$  est  $G_s$ -équivariante pour tout  $s > n - 1 + \log_p r$ .*

Il est intéressant de rapprocher cette dernière proposition de la proposition 4.4.1. En effet, mises ensemble, elles disent que si  $\mathfrak{M}$  est un objet de  $\text{Mod}_{\mathfrak{S}_\infty}^{r, \phi}$  annulé par  $p^n$ , la représentation  $T_\phi(\mathfrak{M})$  se prolonge de façon canonique à  $G_s$  pour tout  $s > n - 1 + \log_p r$  et que, par ailleurs, parmi tous les prolongements possibles, il en existe au plus un qui est la restriction à  $G_s$  d'un quotient de deux réseaux dans une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate dans  $\{0, \dots, r\}$ . On montre, en fait, que dans le cas où il existe bel et bien un prolongement du type précédent, il coïncide avec ce prolongement canonique. À partir de là, et avec encore un peu de travail, on déduit enfin le théorème suivant qui précise le théorème 4.3.5 dans le contexte des représentations semi-stables.

**Théorème 5.4.8.** *Soit  $r$  un entier positif. Soit  $T$  le quotient de deux réseaux stables par  $G_K$  dans une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate dans  $\{0, \dots, r\}$ . On se donne un entier  $n$  tel que  $p^n T = 0$ . Si  $\frac{r}{p-1}$  s'écrit sous la forme  $p^\alpha \beta$  avec  $\alpha' \in \mathbb{N}$  et  $\frac{1}{p} < \beta' \leq 1$ , alors pour tout*

$$\mu > 1 + e(n + \alpha) + \max\left(e\beta - \frac{1}{p^{n+\alpha}}, \frac{e}{p-1}\right)$$

le sous-groupe de ramification  $G_K^{(\mu)}$  agit trivialement sur  $T$ .

# Bibliographie

- [1] C. Breuil, *Représentations  $p$ -adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224
- [2] C. Breuil, *Construction de représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327
- [3] C. Breuil, *Cohomologie étale de  $p$ -torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620
- [4] C. Breuil, *Schémas en groupes et corps des normes*, disponible à <http://www.ihes.fr/~breuil/publications.html> (1998)
- [5] C. Breuil, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122
- [6] C. Breuil, *Une application du corps des normes*, Compositio math. **117** (1999), 189–203
- [7] C. Breuil, *Groupes  $p$ -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Annals of Mathematics **152** (2000), 489–549
- [8] C. Breuil, A. Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de  $GL_2(\mathbb{Z}_p)$  et de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$  en  $\ell = p$* , Duke math. J. **115** (2002), 205–310
- [9] X. Caruso *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, thèse de doctorat (2005)
- [10] X. Caruso, *Représentations  $p$ -adiques semi-stables dans le cas  $er < p - 1$* , J. reine. angew. Math. **594** (2006), 35–92
- [11] X. Caruso, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, Invent. math. **171** (2008), 629–699
- [12] X. Caruso, D. Savitt, *polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables*, Math. Ann. **343** (2009), 773–789
- [13] X. Caruso, T. Liu, *Quasi-semi-stable representations*, Bull. Soc. Math. **137** (2009), 185–223
- [14] *Sur la classification de quelques  $\phi$ -modules simples*, Mosc. Math. J. **9** (2009), 562–568
- [15] X. Caruso, *Classification of integral models of  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})_K$  via Breuil-Kisin theory*, J. of Algebra **323** (2010), 1955–1957
- [16] X. Caruso, D. Savitt, *Poids de l'inertie modérée de certaines représentations cristallines*, J. Théor. Nombres Bordeaux **22** (2010), 79–96
- [17] X. Caruso,  *$\mathbb{F}_p$ -représentations semi-stables*, à paraître à Ann. Inst. Fourier
- [18] X. Caruso, T. Liu, *Some bounds for ramification of  $p^n$ -torsion semi-stable representations*, J. of Algebra **325** (2011), 70–96
- [19] X. Caruso, *Représentations galoisiennes  $p$ -adiques et  $(\varphi, \tau)$ -modules*, prépublication (2010), 43 pages
- [20] X. Caruso, *Estimation des dimensions de certaines variétés de Kisin*, prépublication (2010), 53 pages
- [21] M. Emerton, T. Gee, F. Herzig, *Weight cycling and Serre-type conjectures for unitary groups*, en préparation
- [22] G. Faltings, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuations rings*, J. Amer. Math. Soc **12** (1999), 117–144
- [23] J.M. Fontaine, W. Messing,  *$p$ -adic periods and  $p$ -adic étale cohomology*, Contemporary math. **67** (1987), 179–207
- [24] J.-M. Fontaine, G. Laffaille, *Construction de représentations  $p$ -adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982) no. 4, 547–608

- [25] J.-M. Fontaine, *Il n'y a pas de variété abélienne sur  $\mathbb{Z}$* , Invent. Math. **81** (1985), 515–538
- [26] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes  $p$ -adiques*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111
- [27] J.-M. Fontaine, *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 113–184
- [28] T. Gee, *On the weights of mod  $p$  Hilbert modular forms*, à paraître à Invent. Math.
- [29] U. Görtz, T. Haines, R. Kottwitz, D. Reuman, *Dimensions of some affine Deligne-Lusztig varieties*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **39** (2006), pp. 467–511
- [30] E. Hellmann, *On the structure of some moduli spaces of finite flat group schemes*, Mosc. Math. J. **9** (2009), pp. 531–561
- [31] E. Hellmann, *Connectedness of Kisin varieties for  $GL_2$* , à paraître dans Advances in Math.
- [32] N. Imai, *On the connected components of moduli spaces of finite flat models*, Amer. J. of Math. **132** (2010), 1189–1204
- [33] N. Imai, *Finite flat models of constant group schemes of rank two*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 3827–3833
- [34] N. Imai, *Ramification and moduli spaces of finite flat models*, à paraître à Ann. Inst. Fourier
- [35] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Geometry and Number Theory, John Hopkins University Press (1989), 191–224
- [36] K. Kato, *Semi-stable reduction and  $p$ -adic étale cohomology*, Astérisque **223**, Soc. Math. France (1994), 269–293
- [37] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Geometry and Number Theory, John Hopkins University Press (1989), 191–224
- [38] M. Kisin, *Moduli of finite flat group schemes and modularity*, Ann. of Math. **170** (2009), No 3, 1085–1180.
- [39] M. Kisin, *Crystalline representations and  $F$ -crystals*, Algebraic Geometry and Number Theory, Drinfeld 50th Birthday volume, 459–496
- [40] J. Le Borgne, *Optimisation du théorème d’Ax-Sen-Tate et application à un calcul de cohomologie galoisienne  $p$ -adique*, Ann. Inst. Fourier **60** (2010), 1105–1123
- [41] T. Liu, *Lattices in semi-stable representations : proof of a conjecture of Breuil*, Compositio Math. **144** (2008), 61–88.
- [42] T. Liu, *Torsion  $p$ -adic Galois representations*, Ann. Scient. ENS **40** (2007), 633–674
- [43] T. Liu, *A note on lattices in semi-stable representations*, Math. Ann. **346** (2010), 117–138.
- [44] G. Pappas, M. Rapoport,  *$\Phi$ -modules and coefficient spaces*, Mosc. Math. J. **9** (2009), pp. 625–663
- [45] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$* , Bull. Soc. math. France **102** (1974), 241–280
- [46] J.P. Serre, *Corps locaux*, troisième édition, Hermann (1968)
- [47] J.P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d’ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15** (1972), 259–331
- [48] T. Tsuji,  *$p$ -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. **137** (1999), 233–411
- [49] E. Viehmann, *The dimension of some affine Deligne-Lusztig varieties*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **39** (2006), pp. 513–526
- [50] J.P. Wintenberger, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (1983), no. 1, 59–89
- [51] M. Yoshida, *Ramification of local fields and Fontaine’s property  $(P_m)$* , disponible à <http://arxiv.org/abs/0905.1171>