



**HAL**  
open science

# Analyse et commande des systèmes non linéaires complexes : application aux systèmes dynamiques à commutation

Jaâfar Ben Salah

► **To cite this version:**

Jaâfar Ben Salah. Analyse et commande des systèmes non linéaires complexes : application aux systèmes dynamiques à commutation. Autre. Université Claude Bernard - Lyon I, 2009. Français. NNT : 2009LYO10230 . tel-00599364

**HAL Id: tel-00599364**

**<https://theses.hal.science/tel-00599364>**

Submitted on 9 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée

à l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

École doctorale E.E.A.

Spécialité : Automatique

Présentée et soutenue publiquement le 03/12/2009

par

**Jaâfar BEN SALAH**

## **Analyse et commande des systèmes non linéaires complexes : Application aux systèmes dynamiques à commutation**

Directeurs de thèse : Claire VALENTIN (Université Claude Bernard Lyon1)  
Hamadi JERBI (Faculté des Sciences de Sfax)  
Cheng-Zhong XU (Université Claude Bernard Lyon1)

Jury : Claude IUNG, Professeur ENSEM Nancy (Rapporteur, président)  
Hervé GUEGUEN, Professeur SUPELEC Rennes (Rapporteur)  
Mohamed Ali HAMMAMI, Professeur FSS Sfax (Examinateur)  
Xianyi ZENG, Professeur ENSAIT Roubaix (Examinateur)  
Claire VALENTIN, Professeur UCB Lyon1 (Co-Directeur de thèse)  
Hamadi JERBI, Professeur FSS Sfax (Co-Directeur de thèse)  
Cheng-Zhong XU, Professeur UCB Lyon1 (Co-Directeur de thèse)



## UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON I

### Président de l'Université

Vice-Président du Conseil Scientifique

Vice-Président du Conseil d'Administration

Vice-Présidente du Conseil des Études et de la Vie Universitaire

Secrétaire Général

**M. le Professeur L. COLLET**

M. le Professeur J.F. MORNEX

M. le Professeur G. Annat

M. le Professeur D. SIMON

M. G. GAY

## COMPOSANTES SANTÉ

Faculté de Médecine Lyon Est - Claude Bernard

Faculté de Médecine Lyon Sud - Charles Mérieux

UFR d'Odontologie

Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques

Institut des Sciences et Techniques de Réadaptation

Département de Formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine

Directeur : M. le Professeur J. Etienne

Directeur : M. le Professeur F-N Gilly

Directeur : M. le Professeur D. Bourgeois

Directeur : M. le Professeur F. Locher

Directeur : M. le Professeur Y. Matillon

Directeur : M. le Professeur P. Farge

## COMPOSANTES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Faculté des Sciences et Technologies

UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives

Observatoire de Lyon

Institut des Sciences et des Techniques de l'Ingénieur de Lyon

Institut Universitaire de Technologie A

Institut Universitaire de Technologie B

Institut de Science Financière et d'Assurance

Institut Universitaire de Formation des Maîtres

Directeur : M. le Professeur F. Gieres

Directeur : M. C. Collignon

Directeur : M. B. Guiderdoni

Directeur : M. le Professeur J. Lieto

Directeur : M. le Professeur C. Coulet

Directeur : M. le Professeur R. Lamartine

Directeur : M. le Professeur J-C. Augros

Directeur : M. R. Bernard

# Avant propos

Les travaux de recherches présentés dans ce mémoire ont été effectués en cotutelle entre le Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (LAGEP) de l'Université Claude Bernard Lyon 1 et le Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Sfax (FSS).

Tout d'abord, je remercie Monsieur Hatem Fessi, directeur du LAGEP, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Je veux également remercier Monsieur Mohamed Ali Hammami, Professeur à la Faculté des Sciences de Sfax et Directeur de l'équipe Stabilité et Commande des Systèmes, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe.

Je remercie très particulièrement Madame Claire Valentin, Professeur à l'Université Lyon 1. Mes remerciements exprimés ici ne seront jamais à la hauteur vu ton implication dans ce travail. Je t'exprime toute ma reconnaissance pour ton aide, tes conseils, ton soutien et ta disponibilité. Sois assurée, Claire, de tout mon respect et de ma profonde amitié.

Je remercie très particulièrement Monsieur Hamadi JERBI, Professeur à la Faculté des Sciences de Sfax. Merci Hamadi pour ton accueil, ton encadrement, tes conseils, ton soutien scientifique inestimable, ton application dans le travail, ton dynamisme et ta bonne humeur. Sois assuré, Hamadi, de tout mon respect et de ma profonde amitié.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Monsieur Cheng-Zhong Xu, Professeur à l'Université Lyon 1, pour m'avoir accueilli sous sa co-direction, pour ses conseils et ses aides scientifiques.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du personnel, administratif et technique, du LAGEP qui m'a aidé à accomplir mon travail dans les meilleures conditions et dans un environnement très agréable.

Last but not least, pour leurs encouragements et leur soutien sans faille, je remercie mes supporters inconditionnels : Ma femme, mes parents, mes sœurs et mes frères. Je voudrais leur exprimer toute ma reconnaissance pour toute l'aide financière et morale qu'ils m'ont portée. Sans doute ce travail n'aurait jamais pu voir le jour sans eux.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) - Systèmes Dynamiques à Com- mutation (SDC)</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction aux Systèmes Dynamiques Hybrides . . . . .	3
1.2 Exemples réels et académiques des SDH . . . . .	6
1.3 Modélisation des Systèmes Dynamiques Hybrides . . . . .	10
1.3.1 Automate hybride . . . . .	10
1.3.2 Autres modèles des SDH . . . . .	11
1.4 Exemples de modélisation des SDH . . . . .	13
1.4.1 Système impulsionnel (Balle rebondissant) . . . . .	13
1.4.2 Système dynamique continu par morceaux (oscillateur électronique à valve) . . . . .	14
1.4.3 Système dynamique à commutations (Boîte de vitesses) . . . . .	16
1.5 Discontinuités dans les SDH . . . . .	17
1.6 Représentation explicite par un modèle mathématique . . . . .	18
1.6.1 Solution et exécution des SDC . . . . .	21
1.6.2 Exécution périodique hybride . . . . .	25
1.7 Conclusion . . . . .	28
<b>2 Analyse de stabilité des SDC</b>	<b>29</b>
2.1 Introduction . . . . .	29
2.2 Notions de stabilité et problématiques . . . . .	32
2.2.1 Définitions de stabilité d'un SDC . . . . .	33
2.2.2 Comportement périodique et stationnaire . . . . .	36
2.2.3 Point d'équilibre . . . . .	36
2.2.4 Cycle limite . . . . .	36
2.2.5 Cas des SDC linéaires par morceaux . . . . .	38
2.2.5.1 Stabilité du cycle limite hybride . . . . .	40
2.2.5.2 Un exemple ( <b>systèmes à deux bacs</b> ) . . . . .	41
2.3 Stabilité par Lyapunov . . . . .	45
2.3.1 Méthode directe de Lyapunov . . . . .	45
2.3.2 Méthode de Lyapunov appliquée au SDC . . . . .	46
2.3.2.1 Fonction de Lyapunov Quadratique Commune (FLQC) . . . . .	47
2.3.3 Conclusion . . . . .	49

<b>3</b>	<b>Commande des SDC</b>	<b>50</b>
3.1	Introduction à la commande . . . . .	50
3.2	Méthode géométrique de stabilisation . . . . .	53
3.2.1	Introduction . . . . .	53
3.2.2	Stabilité et cycle limite hybride . . . . .	54
3.2.3	Atteignabilité dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	60
3.2.4	Optimisation d'une séquence d'atteignabilité dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	62
3.2.5	Algorithme de synthèse d'une commande stabilisante dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	62
3.2.6	Applications . . . . .	64
3.2.6.1	Application au convertisseur d'énergie Buck . . . . .	64
3.2.6.2	Application au convertisseur d'énergie Buck-Boost . . . . .	68
3.2.6.3	Exemple non linéaire dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	74
3.2.7	Extension du théorème 3.2.1 à $\mathbb{R}^n$ . . . . .	78
3.2.8	Extension du théorème 3.2.3 à $\mathbb{R}^n$ . . . . .	79
3.2.9	Exemple non linéaire dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	80
3.2.10	Conclusion . . . . .	81
3.3	Stabilisation par méthodes de Lyapunov . . . . .	81
3.3.1	Introduction . . . . .	82
3.3.2	Outils pour l'étude de la stabilité des SDC planaires . . . . .	83
3.3.3	Calcul d'une fonction de Lyapunov commune d'un SDC . . . . .	87
3.3.3.1	<i>Etude détaillée du 1<sup>er</sup> cas : <math>A_1</math> et <math>A_2</math> stables</i> . . . . .	89
3.3.4	Commande hybride du SDC bouclé par fonction de Lyapunov commune . . . . .	97
3.3.4.1	Choix de la commande . . . . .	97
3.3.4.2	Application de la commande . . . . .	100
3.3.5	Conclusion . . . . .	104
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>107</b>

# Introduction générale

L'automatique représente une discipline scientifique qui permet l'étude des systèmes en s'appuyant sur les outils mathématiques qui permettent de représenter le plus fidèlement possible leur comportement dynamique réel pour effectuer, par la suite, leur analyse et leur commande. L'automaticien construit un schéma théorique qui décrit le comportement dynamique interne du système dans le but d'obtenir un modèle mathématique. Les problèmes résident donc dans la fidélité du modèle au processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématique exploitable.

Les domaines d'application de l'automatique sont très nombreux (la mécanique, l'électricité, la chimie, l'économie,...). La modélisation est basée sur les lois physiques (bilan de matière, bilan d'énergie, relation de cause à effet, ...) qui relient entre elles un certain nombre de grandeurs : les entrées qui reflètent les actions subies par le système de la part de son environnement extérieur, les sorties qui représentent les actions du système sur son environnement extérieur et les mesures extraites du système, et enfin l'état qui décrit le système à un instant donné. Ces lois doivent être les plus complètes possibles et représenter tous les modes de fonctionnement possibles, ainsi que toutes les interactions entre les différents modes et grandeurs.

Devant la complexité de la tâche pour certains systèmes, l'automaticien est souvent amené, à partir de considérations physiques, à considérer certaines classes de systèmes manipulables par des outils mathématiques existants. Des restrictions structurelles (linéaires vis-à-vis de l'entrée, convexité, prépondérance d'une évolution par rapport à une autre, ...) produisant des approximations de modèles sont parfois considérées et définissent des hypothèses vraies sur le modèle de base. Des exemples sont l'approche multi-modèle pour l'analyse et la commande des systèmes non linéaires dans [50] et [16], la théorie des systèmes LTI (Linear time-invariant, voir par exemple [70]) qui provient déjà des mathématiques appliquées, le traitement du signal, la théorie du contrôle, et d'autres domaines techniques, aussi l'approche Hamiltonienne (voir par exemple [60]) qui représente d'une manière structurée toute les configurations possibles du système physique. Parfois, de telles hypothèses ou restrictions ne sont pas vraies ou sont insuffisantes pour simplifier le modèle du système en restant fidèle au processus physique. Ces systèmes sont appelés systèmes dynamiques complexes et peuvent être définis comme des systèmes composés de nombreux éléments différenciés interagissant entre eux de manière non triviale (interactions non linéaires, boucles de rétroaction, etc.). Une classe très connue de ces systèmes est la classe des Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) où il y a interaction entre des processus continus où l'évolution de l'état est décrite d'une façon continue par rapport au temps et des processus à événements discrets pour lesquels l'état est ordonné suivant une séquence d'événements. L'étude de ces systèmes a fait de grands progrès au cours des quinze dernières années, tant du point de vue des méthodes que de la formalisation et des

outils de modélisation, de commande, de stabilité et de simulation.

Ce travail porte sur l'étude des systèmes dynamiques hybrides et plus particulièrement une classe spécifique et très importante de ces systèmes qui sont les systèmes dynamiques à commutation (SDC) comme les convertisseurs d'énergie électrique. Il sera consacré principalement au développement de méthodes de commande stabilisante qui nécessitent naturellement une modélisation pertinente et une analyse préalable de ces systèmes.

Ce mémoire, composé de trois chapitres principaux, en plus des introduction, conclusion et perspectives, est organisé de la façon suivante :

**Chapitre I** : Le premier chapitre est un résumé bibliographique sur les définitions, les méthodes de modélisation, et le calcul des solutions (exécution hybride) des systèmes dynamiques hybrides (SDH) et plus particulièrement des Systèmes Dynamiques à Commutation (SDC). Il donne aussi les motivations de ces travaux. Ces divers concepts sont illustrés sur des exemples académiques et applications plus proches de la pratique.

**Chapitre II** : Le deuxième chapitre est dédié, dans une première partie, à la présentation des bases mathématiques nécessaires à l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques hybrides, de leurs comportements périodiques et stationnaires (point de fonctionnement, point d'équilibre, cycle limite, ...) et de leurs différences avec les systèmes dynamiques continus vis à vis de ces comportements. Puis le cas des SDC linéaires par morceaux sera traité en détail sur l'exemple des 2 bacs. Dans une deuxième partie, on présentera la stabilité par Lyapunov et la manière d'utiliser les fonctions de Lyapunov dans l'analyse de stabilité des SDC.

**Chapitre III** : Le troisième chapitre est intégralement consacré à la commande des systèmes dynamiques à commutation et aux difficultés liées à la conception d'une commande stabilisante efficace de ces systèmes. Dans cette partie deux méthodes de commande sont présentées. La première est une méthode qui s'appuie sur les propriétés géométriques des champs de vecteurs : un cycle limite hybride est construit autour du point de fonctionnement désiré de manière optimale, après avoir prouvé son existence. Ce cycle définit la région finale à atteindre par le système commandé depuis son état initial suivant une trajectoire incluse dans le domaine de fonctionnement global. Cette trajectoire est formée par une séquence de modes de fonctionnement, trouvée par inférence arrière jusqu'à atteindre la région initiale du système, et du temps de séjour dans chaque mode trouvé par optimisation d'un critère donné (durée totale, énergie dépensée, ...) [64, 65]. La deuxième méthode présente une nouvelle approche de stabilisation des SDC basée sur la théorie de Lyapunov. Le cas du SDC formé par deux sous-systèmes linéaires affines en l'état, stables et d'état dans  $\mathbb{R}^2$  est détaillé : une fonction de Lyapunov quadratique commune à tous les sous-systèmes est calculée, puis utilisée dans la conception de la commande directe des commutateurs [63].

# Chapitre 1

## Systemes Dynamiques Hybrides (SDH) - Systemes Dynamiques à Commutation (SDC)

### 1.1 Introduction aux Systemes Dynamiques Hybrides

De manière générale, un système continu se caractérise par une évolution continue de ses états en fonction du temps. Les variables d'état de ces systèmes peuvent donc prendre un nombre infini de valeurs, qui évoluent dans un espace mathématique continu. Les modèles les plus couramment utilisés pour ces systèmes sont les représentations d'états qui donnent un équivalent mathématique de l'évolution du système sous forme d'équations différentielles et algébriques et les fonctions de transfert pour les systèmes linéaires.

Un système à événements discrets possède pour sa part un nombre fini d'états, chacun représentant un mode ou une phase de fonctionnement distincte du procédé. C'est pourquoi l'espace mathématique dans lequel se trouvent ces états est discret. L'évolution de ces systèmes se traduit par une suite ordonnée d'événements ou séquence d'événements qui génèrent le passage d'un état à un autre. L'évolution de ces systèmes peut donc également s'exprimer en terme de séquence d'états rencontrés. La durée de séjour dans chacun de ces états n'est pas systématiquement connue et donc, le temps n'apparaît pas comme la valeur de référence, comme pour les systèmes continus. Les modèles les plus communément utilisés sont les réseaux de Petri, les automates à états finis ou encore le grafcet. Le nombre d'états étant fini, ces modèles proposent une représentation graphique ou mathématique de chacun d'eux.

Un système dynamique hybride (SDH) est un système dynamique faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continu et événementiel. Le terme hybride se réfère au couplage de phénomènes continus et discrets au sein d'un système (Voir figure 1.1). Un tel système est classiquement constitué de processus continus interagissant avec ou supervisés par des processus discrets. Ils résultent également de l'organisation hiérarchique des systèmes de contrôle/commande complexes, ou de l'interaction entre des algorithmes discrets de planification et des algorithmes continus de commande.

La plupart des systèmes réels sont composés de sous-processus continus qui sont démarrés, reconfigurés et arrêtés par une commande logique, à états discrets (systèmes de

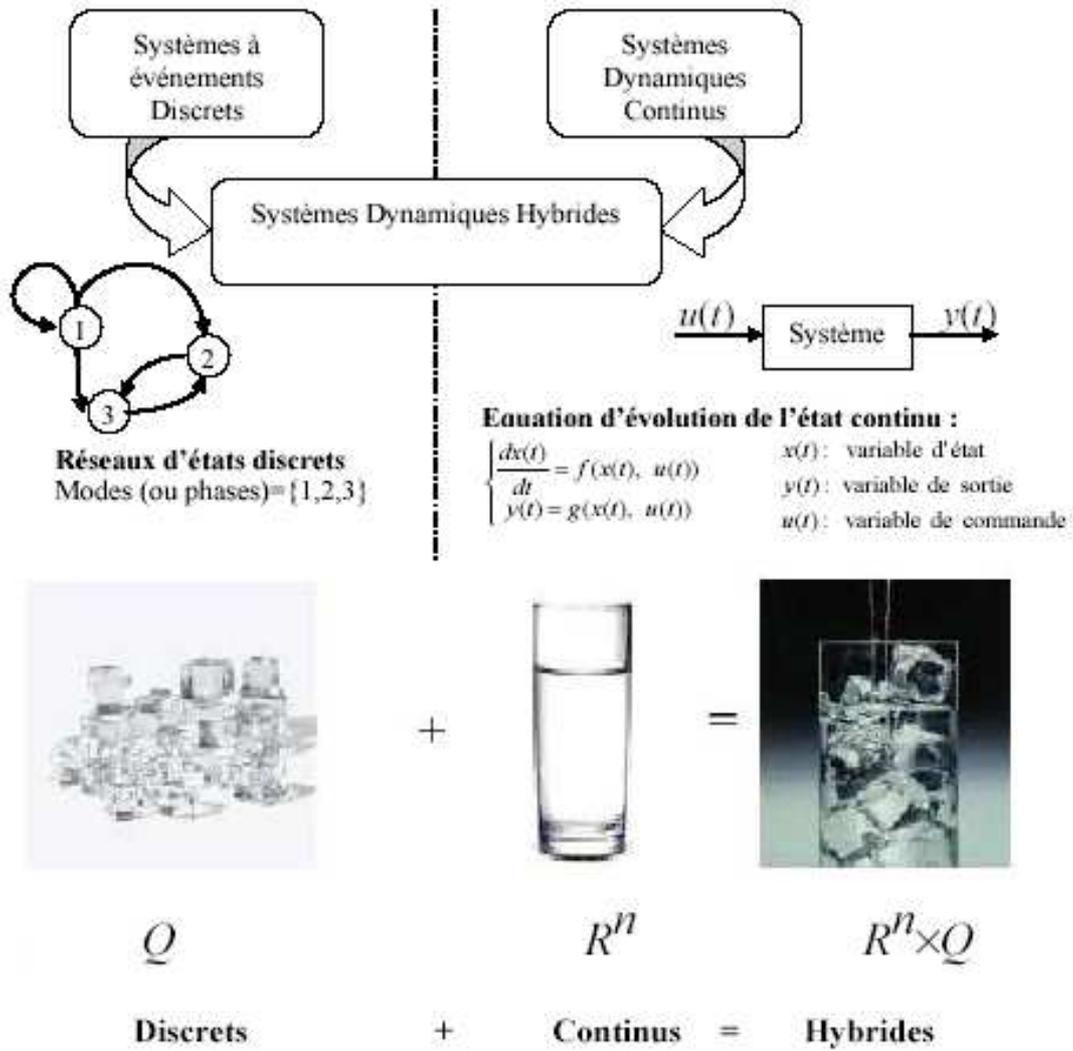


FIG. 1.1 – Couplage continu-discret au sein d'un système hybride [78, 9]

transport ou production chimique par exemple). L'évolution de ces systèmes est à la fois continue et événementielle. Pour garantir le bon fonctionnement d'un ensemble automatisé réel il est nécessaire de prendre en compte simultanément les aspects continus et événementiels de sa dynamique. Pour répondre à ce besoin, les SDH ont été introduits.

Depuis plus de quinze ans et de plus en plus, les SDH prennent un grand intérêt dans le domaine de la recherche puisqu'on les retrouve dans de nombreuses applications : Systèmes mécaniques, électroniques et électroniques de puissance, robotique, industrie automobile [38], trafic de contrôle aérien, etc., qui sont des systèmes avec un couplage entre les dynamiques continues et les dynamiques événementielles. Ils présentent des progrès théoriques intéressants dus à leurs multidisciplinarités naturelles et jouent un rôle important dans de nombreux problèmes réels. Le caractère hybride du système peut provenir du système lui-même ou de sa commande. C'est le cas, par exemple, de la commande tout ou rien d'un système continu à plusieurs modes de fonctionnements. Un tel système est appelé système dynamique à commutations (SDC). Pour plus du détail sur ces systèmes voir [42].

De nombreux problèmes mal traités par les approches homogènes sont résolus par l'approche hybride :

- variation de structure liée aux différents modes de fonctionnement du système. Pour les systèmes à structures variables le lecteur peut se référer par exemple à [60] ou [82],
- variation de paramètres au cours de fonctionnement du système, citons par exemple les travaux sur la suspension CRONE effectués par l'équipe d' A. Oustaloup pour PSA/Citroën [51],
- commande discontinue (par exemple par relais ou impulsions), pour plus de détails voir l'exemple du paragraphe 1.4.1,
- modélisation de phénomènes transitoires rapides par des commutations de modèles (ouverture ou fermeture des vannes dans les procédé hydraulique, blocage et amorçage des semi-conducteurs dans les convertisseurs de puissances,...).

d'où l'intérêt de l'étude de ces systèmes par cette approche.

Comprendre et maîtriser les phénomènes complexes engendrés par les systèmes hybrides est et à toujours été une tâche difficile mais fortement nécessaire pour pouvoir simuler, contrôler, estimer et anticiper leur comportement. Ceci à incité les chercheurs de disciplines différentes et surtout ceux d'automatique, informatique et mathématiques à développer des approches interdisciplinaires de modélisation, d'analyse et de commande de ces systèmes.

Pour conclure cette présentation générale des systèmes dynamiques hybrides, il est intéressant de préciser que ce thème de recherche est abordé par des communautés scientifiques d'origines différentes donnant lieu à des publications scientifiques nombreuses avec certains ouvrages qui y sont entièrement dédié [91], [38], [21], [90], [4], [87]. De plus, des conférences internationales de très bon niveau traitent uniquement de ce vaste domaine : Hybrid Systems : Computation and Control (HSCC); Analysis and Design of Hybrid

Systems (ADHS) ; et des sessions spéciales y sont régulièrement consacrées parmi les plus grandes conférences : Conference on Decision Control (CDC) ; American Conference on Control (ACC) ; European Conference on Control (ECC), ....

Les systèmes dynamiques à commutations (SDC) représentent une classe de systèmes dynamiques hybrides composée d'une famille de sous-systèmes à dynamique continue représentée par des équations différentielles et d'une loi logique qui donne le sous-système actif (voir [42] pour plus de détails sur ces systèmes). La motivation pour l'étude de ces systèmes vient du fait :

- que certains systèmes, en pratique, sont fondamentalement multi-modèles, composés de plusieurs sous-systèmes, dans le sens où plusieurs dynamiques de systèmes apparaissent dans le comportement suite à des changements d'état d'actionneurs discrets par exemple.
- que certaines méthodes de contrôle intelligent sont basées sur l'idée de commutation entre plusieurs contrôleurs.
- et qu'il faut bien orchestrer les commutations suivant le fonctionnement désiré du SDC.

Dans ce chapitre, on verra les principales classes et méthodes de modélisation des systèmes hybrides en donnant des exemples physiques pour mieux comprendre le phénomène hybride et ces modèles. Puis on verra la notion de solution et exécution hybride pour la classe des systèmes dynamiques à commutations (SDC).

## 1.2 Exemples réels et académiques des SDH

### Système informatique : Disque dur

Un disque dur est un boîtier où l'on trouve des plateaux rigides en rotation. Les faces de ces plateaux sont recouvertes d'une couche magnétique sur laquelle sont stockées les données. Ces données sont écrites en code binaire  $[0,1]$  sur le disque grâce à une tête de lecture/écriture. Suivant le flux électrique continu qui traverse cette tête, le champ magnétique local est modifié pour écrire soit un 1, soit un 0, à la surface du disque. Pour lire, c'est le même principe qui est utilisé, mais dans l'autre sens : le champ magnétique local engendre un flux électrique au sein de la tête qui dépend de la valeur précédemment écrite, pour lire un 1 ou un 0. Les phénomènes de lecture noté R et d'écriture noté W peuvent décrire l'état discret du système. On aura deux états de fonctionnement du système :

1.  $(R,W)=(1,0)$  : le système est en mode de lecture.
2.  $(R,W)=(0,1)$  : le système est en mode d'écriture.

Donc un disque dur est un SDH dont les phénomènes continus sont la rotation des plateaux et les phénomènes discrets sont le mode lecture, le mode écriture et l'information portée par le champs électrique (il peut également recevoir des commandes symboliques comme la réinitialisation et des messages d'erreurs).

### système à relais : Thermostat

Les systèmes physiques avec interrupteurs et/ou relais peuvent être naturellement modélisés sous forme de systèmes hybrides. Toutefois, dans de nombreux cas, le changement de dynamique a une certaine hystérésis qui peut être décrite par la fonction  $h$  à deux valeurs  $(-1, 1)$  donnée dans la figure 1.2. Considérons le comportement du thermostat

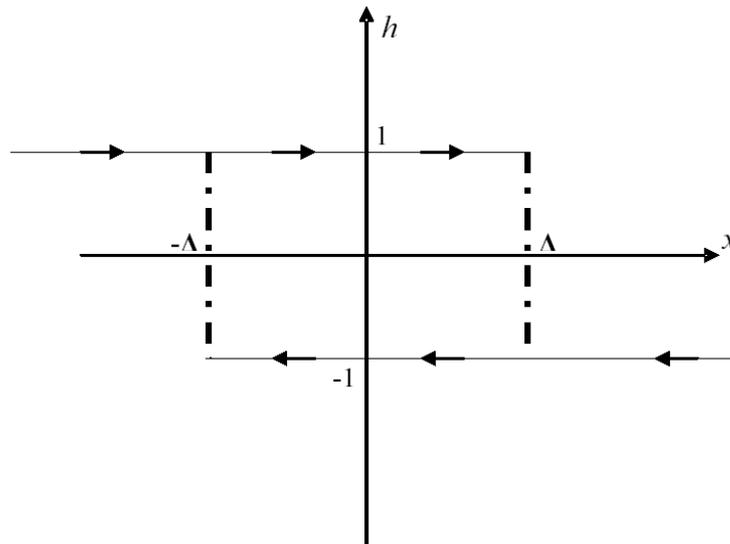


FIG. 1.2 – Fonction hystérésis

d'une pièce avec chauffage électrique, dont on veut régler la température. La variation de la température va dépendre de la valeur de la température et de l'état précédent de fonctionnement du thermostat, avec : "chauffage allumé" si  $h = 1$  et "chauffage éteint" si  $h = -1$ . Donc la chambre commandée en température est un système hybride décrit, pas uniquement par le comportement continu de la température (décrit par des EDO), mais aussi par des événements de franchissement de seuils ( $x \leq -\Delta$  et  $x \geq \Delta$ ) qui donnent deux états discrets ( $h = -1, h = 1$ ) et par l'effet "mémoire" définie par la largeur de l'hystérésis  $2\Delta$ .

L'évolution de la température autour d'une consigne désirée  $T$ , est donnée dans la figure 1.3.

### Système électrique : convertisseur statique d'énergie

Le fonctionnement d'un convertisseur statique d'énergie électrique se décompose en une succession d'états de fonctionnement élémentaires, commandée par un(des) interrupteur(s) électronique(s). À chaque état correspond un circuit électrique à dynamique continue différente du précédent, obtenu par la modification de l'interconnexion des différentes branches du convertisseur. Pour modifier ces interconnexions, donc les modes de fonctionnement du circuit, on utilise des interrupteurs électroniques (transistor, thyristor, diode, ...) piloté en régime de commutation (ouverture et fermeture très rapides).

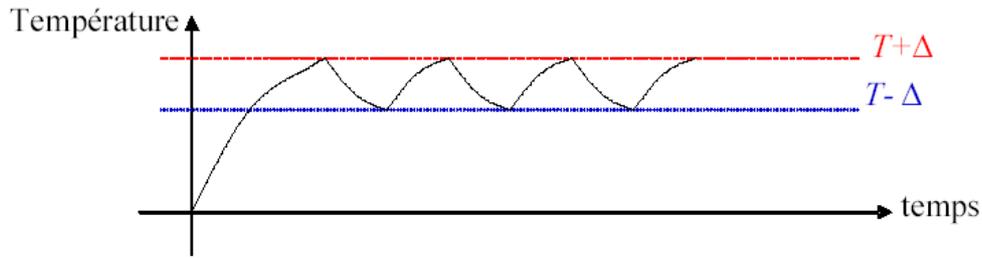


FIG. 1.3 – Température commandée par un thermostat avec hystérésis

Les interconnexions possibles représentent les états discrets (modes, phases) du système. L'exemple du convertisseur Boost est donné figure 1.4.

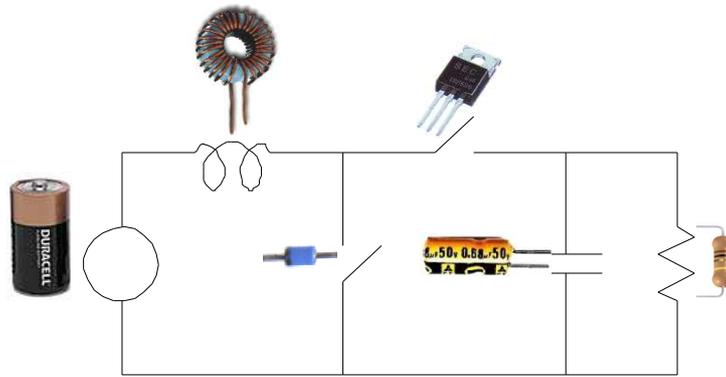


FIG. 1.4 – Convertisseur d'énergie électrique Boost et ses composants

### Système mécanique : embrayage d'un véhicule automobile

Dans un véhicule automobile, l'embrayage est un dispositif d'accouplement entre le moteur et l'élément de transmission. Il est nécessaire parce que le moteur doit pouvoir continuer à tourner même si le véhicule est à l'arrêt. Le désaccouplement facilite aussi le changement de rapport de vitesse. Dans la figure 1.5,  $J_1$  et  $J_2$  sont les moments d'inertie respectivement du moteur et de la chaîne de transmission. Le moteur applique un couple  $Q_1$  qui fait tourner l'arbre à une vitesse  $w_1$ , qui par l'intermédiaire de l'embrayage génère un couple appliqué à l'élément de transmission qui se traduit par une vitesse de rotation  $w_2$  du véhicule. La vitesse d'un véhicule est continue par morceaux selon trois phases de fonctionnement (états discrets) pour le dispositif d'embrayage :

1. En position embrayée : l'embrayage transmet intégralement la puissance fournie (la voiture roule et l'axe moteur est lié à l'axe des roues). Quand le véhicule roule, l'embrayage doit assurer une transmission complète du couple moteur, c'est à dire sans glissement.
2. En position débrayée : La situation est équivalente au point mort. L'embrayage désaccouple temporairement le moteur et les roues lors des changements de rap-

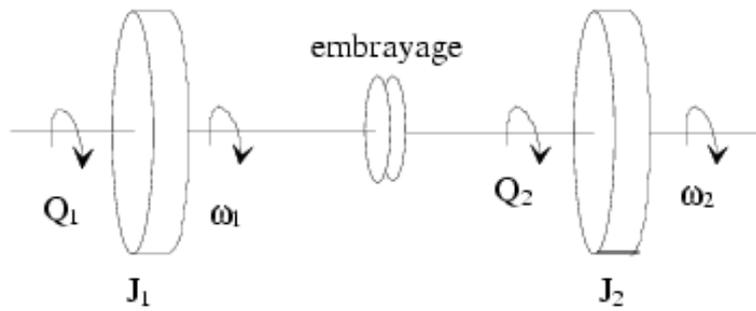


FIG. 1.5 – Système d'embrayage mécanique

ports de vitesses. La transmission est interrompue. Le moteur peut continuer à tourner sans entraîner les roues.

3. En phase transitoire de glissement : au démarrage du véhicule, l'embrayage assure un accouplement progressif entre l'arbre moteur et l'arbre de transmission. Pendant cette phase, l'arbre moteur et l'arbre de transmission ne tournent pas à la même vitesse ; il y a alors glissement entre les disques, donc dissipation d'énergie, sous forme de chaleur.

## 1.3 Modélisation des Systèmes Dynamiques Hybrides

Plusieurs méthodes de modélisation des systèmes dynamiques hybrides ont été proposées dans la littérature : automate hybride, différentes définitions de réseaux de Petri interprétés, bond graph hybrides, formulation Hamiltonienne, ... [91], [69], [11], [78], [15], [13], [52], [54]. Dans [54], les auteurs proposent une méthode de modélisation très générale des SDH dans laquelle ils ont bien détaillé les SDH en boucle ouverte, les SDH en boucle fermée et la commande hybride. La méthode utilisée dépend des habitudes du chercheur et du problème à résoudre : simulation, analyse, commande, vérification, ... Un des modèles les plus utilisés est l'automate hybride.

### 1.3.1 Automate hybride

La définition suivante est motivée par [72], [14], [2] et [33]. Cette définition d'un **automate hybride** sera notre référence dans la suite du mémoire.

**Définition 1.3.1** *Un automate hybride est un septuplé*

$$H = (\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{X}, U, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$$

où :

1.  $\mathcal{Q}$  est l'ensemble dénombrable des états discrets (ou modes).
2.  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  est l'ensemble des transitions (ou arêtes).
3.  $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_q, q \in \mathcal{Q}\}$  est la collection des domaines d'évolution des états continus,  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ .  
 $\forall q \in \mathcal{Q}, \mathcal{X}_q$  est un sous ensemble de  $\mathcal{X}$  d'intérieur non vide qui représente le domaine d'évolution de la variable d'état continue quand l'état discret du système est  $q$  (nommé aussi par certains "invariant").
4.  $U = \{U_q, q \in \mathcal{Q}\}$  est la collection des domaines de contrôle continu.  
 $\forall q \in \mathcal{Q}, U_q$  est un sous ensemble compact de  $\mathbb{R}^p$ ,  $p$  étant la dimension du vecteur de commande.
5.  $\mathcal{F} = \{f_q, q \in \mathcal{Q}\}$  est la collection des champs de vecteurs.  
 $\forall q \in \mathcal{Q}, f_q : \mathcal{X}_q \times U_q \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
6.  $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_e, e \in \mathcal{E}\}$  est la collection des gardes.  
 $\forall e = (q_1, q_2) \in \mathcal{E}, \mathcal{G}_e \subseteq \mathcal{X}_{q_1}$ .
7.  $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_e, e \in \mathcal{E}\}$  est la collection des fonctions de mise à jour (resets).  
 $\forall e = (q_1, q_2) \in \mathcal{E}, \mathcal{R}_e : \mathcal{G}_e \rightarrow \mathcal{X}_{q_2}$ .

#### Remarque 1.3.1

- Si les équations différentielles associées aux éléments de  $\mathcal{F}$  sont autonomes (i.e.  $f_q : \mathcal{X}_q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) (pas de commande continue), l'automate hybride est défini par le sextuplet :

$$H = (\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$$

- Dans le modèle de l'automate hybride, l'espace d'état continu comme l'ensemble de commande peuvent varier avec l'état discret, par exemple pour tenir compte des défauts qui peuvent survenir dans le système. Par exemple, la déconnection d'un contrôleur dynamique lors d'une surintensité provoque le passage d'un fonctionnement en boucle fermée à un fonctionnement en boucle ouverte ce qui peut induire une diminution de l'ordre du système.

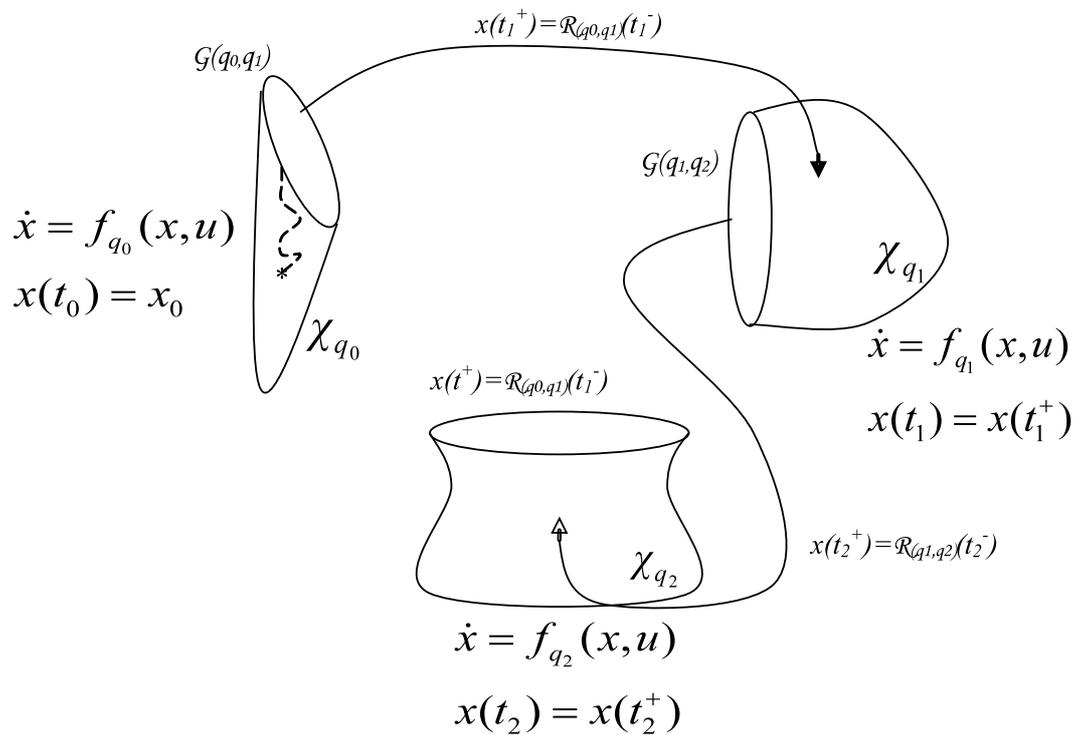


FIG. 1.6 – Exemple d'exécution d'un automate hybride

La figure 1.6 représente une exécution d'un automate hybride. A partir d'un état initial continu  $x(t_0) = x_0$  et discret  $q(t_0) = q_0$  (i.e. un état initial hybride  $(x_0, q_0)$ ), le système évolue suivant le champ de vecteur  $f_{q_0}(x, u)$  avec  $u \in U_{q_0}$ , dans le domaine  $\mathcal{X}_{q_0}$ , jusqu'à un instant  $t_1$  où une transition vers l'état  $q_1$  est enclenchée, la garde  $\mathcal{G}_{q_0, q_1}$  étant respectée. La fonction reset  $\mathcal{R}_{q_0, q_1}$  met à jour l'état continu  $x$  à  $x_{q_1}$ , qui est un point de  $\mathcal{X}_{q_1}$ . Ce processus est répété pour chaque transition.

### 1.3.2 Autres modèles des SDH

#### – Réseaux de Petri hybrides :

Les Réseaux de Petri (RdP) hybrides sont une extension du modèle de base classique des systèmes à événements discrets et permettent de modéliser les systèmes

dynamiques hybrides sur les mêmes base conceptuelles. Ils se caractérisent par un sextuplet :

$$H = (P, T, Pre, Post, m_0, h)$$

tel que  $P$  est l'ensemble fini et non vide des places,  $T$  l'ensemble fini non vide des transition,  $Pre : P \times T \rightarrow \mathbb{R}^+$  est l'application d'incidence avant,  $Post : P \times T \rightarrow \mathbb{R}^+$  est l'application d'incidence arrière,  $m_0 : P \rightarrow \mathbb{R}^+$  est le marquage initial, et  $h : P \cup T \rightarrow \{D, C\}$ , appelée "fonction hybride", indique pour chaque noeud s'il est discret ou continu. Pour plus de détails sur les réseaux de Petri hybrides voir [22, 1, 54, 20, 19].

– **Modèle à Complémentarité Linéaire (Linear Complementarity, LC) :**

Ce modèle est initialement développé pour modéliser les systèmes mécaniques sous contraintes d'inégalité, et par la suite à été étendu aux systèmes hybrides (par exemple à des circuits électriques avec diode idéale). Pour plus de détails sur les modèles à complémentarité linéaire et à complémentarité linéaire étendue (ELC), le lecteur pourra se référer à [69] et [71].

– **Modèle affine par morceaux (PieceWise Affine, PWA) :**

Un système hybride peut être vu comme un système non linéaire formé de plusieurs sous-systèmes affines, chaque sous-système évoluant dans une région étant définie par des inégalités sur les états et les entrées du système. Pour cela, le modèle PWA peut représenter certaines classes de systèmes hybrides (voir [61],[5]). Un PWA est défini de façon suivante :

$$PWA : \dot{x} = A_i x + B_i u + D_i \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{X}_i.$$

Avec  $\mathcal{X}_i$  la partition polyédrique de l'espace d'état et de commande,  $A_i$  la matrice d'état et  $B_i$  la matrice de commande. Chaque  $\mathcal{X}_i$  peut être défini par l'inégalité suivante :

$$\mathcal{X}_i = \{(x, u) / C_i \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq d_i\}$$

avec  $C_i$  et  $d_i$  de dimensions appropriées.

– **Modèle mixte dynamique et logique (Mixed Logic Dynamic, MLD) :**

Le modèle mixte dynamique et logique permet de modéliser plusieurs classes de systèmes hybrides, comme par exemple les systèmes hybrides linéaires, les systèmes logiques séquentiels et les systèmes linéaires sous contraintes. Il permet donc de modéliser tout système incluant des états, des entrées et des sorties mixtes (continues et logiques), ainsi que des systèmes faisant intervenir des contraintes. Pour en savoir plus sur ce modèle et ses utilisations dans les problèmes classiques de l'automatique tels que la commande, l'estimation, l'identification et la détection des pannes le lecteur peut se référer à la thèse de Jean THOMAS [78].

Il a été démontré dans Bemporad et al.[5] que les modèles PWA et MLD sont équivalents.

Nos travaux dans cette thèse seront principalement sur les systèmes dynamiques à commutation. Leur modèle est représenté dans le paragraphe 1.6 sous une formalisation mathématique qui n'est autre que le modèle Automate Hybride 1.3.1 décrit d'une façon

mathématique en représentant explicitement le comportement continu suivant l'état discret du système ainsi que l'évolution de cette variable discrète dans le temps en fonction de l'évolution de l'état continu et vice versa de l'ancienne valeur de la variable discrète.

Pour mieux se familiariser avec les systèmes hybrides, leurs classes et leurs modélisations, des exemples illustratifs par classe de systèmes les plus connus sont donnés par la suite. Ces exemples sont tous modélisés par des automates hybrides qui restent le modèle le plus général qui nous permettra par la suite, si besoin, de déduire tous les autres types de modèles hybrides suivant la classe de systèmes étudié.

## 1.4 Exemples de modélisation des SDH

Le formalisme des systèmes hybrides est très général et englobe de nombreuses classes de systèmes. Par les exemples suivants, on essaiera de vous présenter celles qui nous paraissent les plus significatives.

### 1.4.1 Système impulsionnel (Balle rebondissant)

On considère une balle de masse  $m$  soumise à l'action de gravité [36]. On la laisse tomber d'une hauteur  $z_0$  avec une vitesse initiale nulle. L'altitude de la balle  $z(t)$  suit donc l'équation différentielle  $m\ddot{z} = -mg$ . Quand  $z(t) = 0$ , la balle touche le sol, rebondit et sa vitesse change de signe suivant l'équation  $\dot{z}(t^+) = -c\dot{z}(t^-)$ , avec  $c \geq 0$  réel.

Soit  $x_1 = z(t)$  et  $x_2 = \dot{z}(t)$ , l'automate hybride de la balle rebondissant suivant 1.3.1 est donné par (voir figure 1.7) :

1.  $\mathcal{Q} = \{q\}$  un seul état discret (ou mode).
2.  $\mathcal{E} = \{e\} = (q, q)$  transition unique d'un mode à lui même.
3.  $\mathcal{X}_q = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , le domaine d'évolution de l'état continu  $(x_1, x_2)$ .
4.  $U = \emptyset$ , pas de contrôle continu.
5.  $f_q(x_1, x_2) = (x_2, -g)$  est le champ de vecteur du mode  $q$ .
6.  $\mathcal{G}_e = \{x_1 = 0\}$  est la garde qui représente le contact de la balle avec le sol.
7.  $\mathcal{R}_e(x_1, x_2) = \{x_1, -cx_2\}$  est la ré-initialisation sur la variable d'état continue à faire au moment du contact.

Par définition, un système impulsionnel [67] décrit l'évolution d'une variable continue  $x(t)$  régie par une équation différentielle sous contrainte. Lorsque  $x(t)$  vérifie une certaine condition, on lui affecte une nouvelle valeur (impulsion).

Dans le cadre hybride ces systèmes correspondent aux systèmes possédant un seul mode ( $\mathcal{Q} = \{q\}$ ) et une seule transition ( $\mathcal{E} = \{e = (q, q)\}$ ) autorisant la réinitialisation de la variable d'état continue via une fonction de reset  $R_e$ .

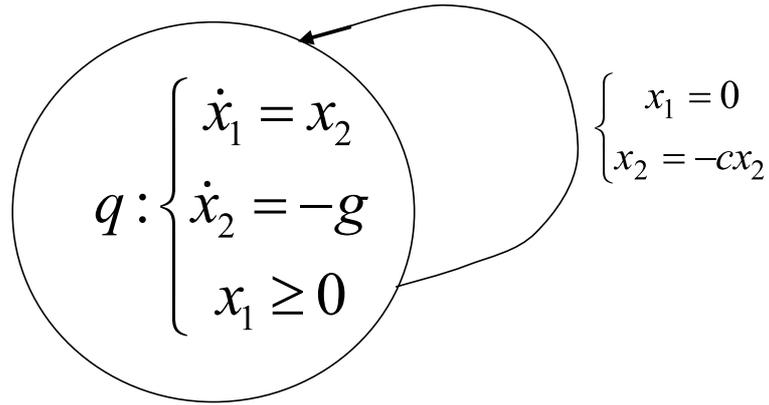


FIG. 1.7 – Automate hybride de la balle rebondissant [36]

### 1.4.2 Système dynamique continu par morceaux (oscillateur électronique à valve)

L'oscillateur électronique à valve [58], [3] est un circuit composé d'une valve électronique, d'un circuit oscillant de type RLC et d'un dispositif de rétroaction par induction électromagnétique (voir figure 1.8). Une attention particulière a été portée à ce montage car c'est le circuit le plus simple exhibant des oscillations de type cycle limite (voir paragraphes 1.6.2 et 3.2.2 pour plus de détails). En appliquant la loi des mailles dans le

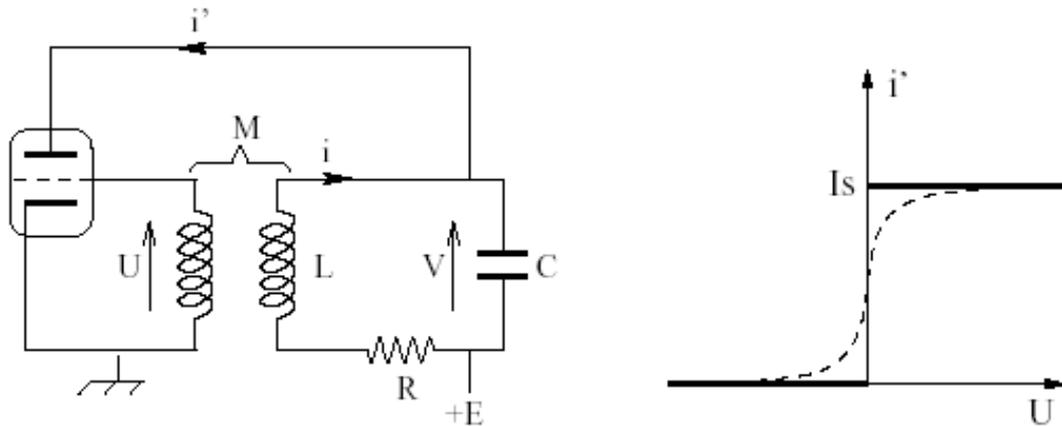


FIG. 1.8 – Gauche : oscillateur électronique à valve. Droite : Caractéristique de la valve

circuit RLC et la loi des noeuds au point de branchement de la valve électronique et du circuit RLC, on obtient les équations

$$Ri + V + L \frac{di}{dt} = 0, i = i' + C \frac{dv}{dt} \implies LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i'.$$

Le courant entrant à l'anode de la valve est donné par l'intensité  $i'$  et dépend exclusivement de la tension  $U$  appliquée à la grille. La caractéristique  $i'(U)$  est représentée en pointillé sur la partie droite de la figure 1.8. Si les oscillations de la tension  $U$  sont d'amplitude suffisante, l'intensité  $i'$  est, la plupart du temps égale, soit à 0, soit à  $I_s$ . On peut alors raisonnablement représenter les propriétés d'une telle valve par la caractéristique idéale dessinée en gras sur la partie droite de la figure 1.8. Par conséquent,

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = \begin{cases} 0 & \text{si } U < 0 \\ I_s & \text{si } U > 0 \end{cases}$$

La tension  $U$  est la différence de potentiels aux bornes de la bobine en série avec la valve et couplée à la bobine du circuit RLC. Le courant d'intensité  $i$  crée un champ magnétique à l'intérieur de la bobine du circuit RLC. Ce champ magnétique, à son tour, induit un courant dans la bobine reliée à la grille de la valve. Cette action rétroactive se traduit par l'équation :

$$U = -M \frac{di}{dt}.$$

On suppose que les bobines sont agencées de manière à avoir  $M < 0$ . On a donc :

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{di}{dt} < 0 \\ I_s & \text{si } \frac{di}{dt} > 0 \end{cases}$$

En choisissant les variable d'états  $x_1 = i$  et  $x_2 = \frac{di}{dt}$ , l'oscillateur électronique peut être modélisé par un système dynamique continu par morceaux (linéaire ici) :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 & \text{si } x_2 < 0 \\ -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{I_s}{LC} & \text{si } x_2 > 0 \end{cases}$$

et l'automate correspondant est représenté sur la figure 1.9. Dans le cadre de la définition 1.3.1, un système dynamique continu par morceaux est donc un système hybride

présentant les particularités suivantes :

- $\mathcal{Q}$  est l'ensemble indexant les sous domaines  $\mathcal{X}_q$ . Le domaine de définition  $\mathcal{X}$  de l'équation différentielle est un sous-ensemble fermé et connexe de  $\mathbb{R}^n$ . Il est découpé en sous domaines  $\mathcal{X}_q$  fermés, d'intérieur non vide et deux à deux disjoints, leur union couvre tout l'espace  $\mathcal{X}$  et sur chaque domaine  $\mathcal{X}_q$ , on définit un champ de vecteur  $f_q$ .
- Si l'on appelle  $\partial\mathcal{X}_q$ , la frontière de  $\mathcal{X}_q$ ,  $\mathcal{E} = \{(q, q') \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} / \partial\mathcal{X}_q \cap \partial\mathcal{X}_{q'} \neq \emptyset\}$ . On ne peut passer d'un domaine  $\mathcal{X}_q$  au domaine  $\mathcal{X}_{q'}$ , que s'ils ont une frontière commune.
- $\mathcal{G}_e = \partial\mathcal{X}_q \cap \partial\mathcal{X}_{q'}$ . On ne peut passer d'un domaine à un autre qu'en franchissant leur frontière commune.
- Il n'y a pas de ré-initialisation de la variable d'état continue,  $\mathcal{R}_e(x) = x$ .

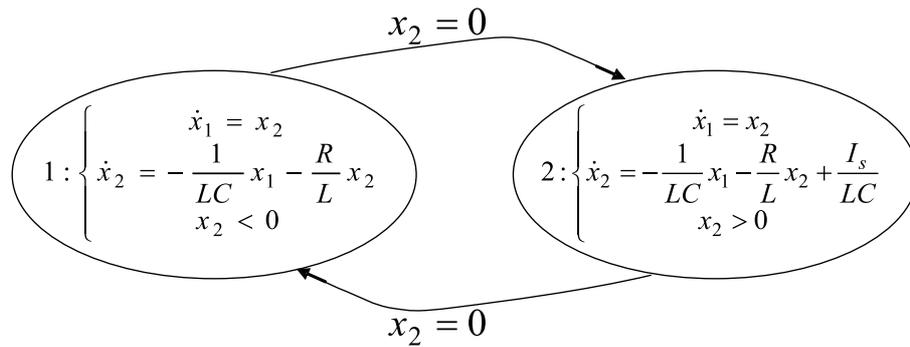


FIG. 1.9 – Automate hybride de l'oscillateur électronique à valve [30]

### 1.4.3 Système dynamique à commutations (Boîte de vitesses)

Soit un véhicule motorisé en déplacement sur un axe (voir [29], [38], [15] pour cet exemple). Le conducteur agit sur ce véhicule de deux façons différentes. D'abord, via la pédale d'accélération, il contrôle l'alimentation en carburant représentée par la variable  $u(t) \in [0, u_{max}]$ , ensuite avec la boîte à vitesses, il change le rapport actif de la vitesse. Pour simplifier encore le modèle du système véhicule, on suppose que la boîte à vitesses a seulement deux rapports actifs que l'on note  $q(t) \in \{1, 2\}$  et que le conducteur peut passer ces rapports de vitesse librement (ceci reste une hypothèse théorique). On note  $x_1$  la position du véhicule et  $x_2$  sa vitesse. Le système est alors décrit par les équations :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x, q, u) \end{aligned}$$

Il peut être modélisé par l'automate hybride suivant d'après la définition 1.3.1 :

1.  $\mathcal{Q} = 1, 2$ .
2.  $\mathcal{E} = (1, 2), (2, 1)$ .
3.  $\mathcal{X}_q = \mathbb{R}^2, \forall q \in \mathcal{Q}$ .
4.  $U_q = [0 \ u_{max}], \forall q \in \mathcal{Q}$ .
5.  $f_q(x_1, x_2, u) = (x_2, f(x, q, u)), \forall q \in \mathcal{Q}$ .
6.  $\mathcal{G}_{(1,2)} = \mathcal{G}_{(2,1)} = \mathbb{R}^2$ .
7.  $\mathcal{R}_{(1,2)}(x) = \mathcal{R}_{(2,1)}(x) = \{x\}$

De cet exemple, on peut dire qu'un système dynamique à commutations ou *switched system* (voir par exemple [42], [24]) est un système hybride dans lequel la variable discrète  $q$  n'est pas vue comme une variable d'état mais comme une variable de commande d'évolution libre sur tout le domaine  $\mathcal{X}_q$  (c.à.d qu'il n'y a pas de contraintes de garde). Par conséquent, d'après la définition 1.3.1, le système dynamique à commutation vérifie la propriété  $\mathcal{G}_e = \mathcal{X}_q, \forall e \in \mathcal{E}$ . On reviendra plus en détail sur ces systèmes dans les chapitres suivants.

## 1.5 Discontinuités dans les SDH

La notion de discontinuité dans les SDH conduit à distinguer des changements brusques ou instantanés de l'état (traduits par des sauts) ou du modèle dynamique (traduits par des commutations). Ces changements peuvent être commandés ou autonomes.

- **Commutation autonome** : Lorsqu'une des variables d'état continues atteint certains seuils, les équations d'évolution ou une partie (champs de vecteur) décrivant le comportement continu du système changent brusquement. On dit que le système a eu un changement de mode de fonctionnement (ou phase). Dans l'exemple de l'oscillateur électronique à valve (voir figure 1.8), c'est le cas pour le courant  $i'$  quand  $U$  change de signe.
- **Commutation commandée (ou contrôlée)** : Dans ce cas les équations d'évolution ou une partie changent instantanément suite à une action de commande introduite dans le but d'obtenir un comportement désiré, donc à une action extérieure au système considéré. C'est le cas du passage des vitesses par le conducteur dans l'exemple de la boîte à vitesses.

**Remarque 1.5.1** *On rappelle que dans la théorie des systèmes différentiels (ou systèmes dynamiques continus), les attributs "autonome" et "commandé" ont les significations suivantes : Soit un système avec une variable d'état  $x$ , on dit que  $\dot{x} = f(x)$  est un système autonome et  $\dot{x} = f(x, u)$  est un système commandé de commande  $u$  continue.*

- **Saut autonome** : cette fois l'état ou certaines de ses composantes changent brusquement de valeur lorsqu'un seuil est atteint. C'est le cas dans l'exemple de la balle rebondissant dans lequel la vitesse change de signe au moment du choc.
- **Saut commandé (ou contrôlé)** : L'état ou une partie change instantanément sous l'influence d'une action extérieure. C'est le cas du montant dans un compte pendant des opérations de virement ou de retrait. Aussi c'est le cas pour le débit lors de l'ouverture et la fermeture d'une vanne dans un procédé physico-chimique sous l'hypothèse que la fermeture et l'ouverture des vanne sont des gestes instantanées.

**Remarque 1.5.2** *En réalité, un saut d'état ou une commutation ne sont pas rigoureusement instantanés. Mais le fait que leurs durées sont très inférieures aux durées physiques d'évolution du système, ils sont considérés comme tels dans l'approche hybride. Par exemple, dans la cas d'un moteur électrique entraînant une charge, les temps de commutation de l'électronique de puissance (quelques microsecondes) sont très inférieurs aux constantes de temps électriques (quelques millisecondes), mécaniques (quelques secondes), ou thermiques (quelques minutes) du moteur lui même.*

## 1.6 Représentation explicite par un modèle mathématique

A partir des modèles et des exemples vus dans les paragraphes 1.2 et 1.4, on peut dire qu'un SDH couple des automates finis décrivant les successions d'état et les événements discrets et des équations différentielles décrivant les phénomènes continus. Les phénomènes événementiels ont des évolutions constantes par morceaux au cours du temps dont les changements traduisent l'occurrence de certains événements. Ceci peut se traduire par un champs de vecteur non nul entre ces événements et une fonction de transition qui détermine l'état discret suivant.

Une approche continue par modèle mathématique peut donc être représenté par une évolution continue et une fonction de transition continue presque partout (sauf aux instants d'occurrence des événements), par contre cette fonction est bien définie à droite et à gauche de ces instants. Pour plus de détails sur ce type de modélisation, vous pouvez consulter [23],[14],[55]. Cette modélisation est préféré d'autant plus par les mathématiciens que par les automaticiens qui l'utilisent de plus en plus quand ils s'intéressent à la commande des systèmes hybrides en générale et plus précisément en systèmes à commutation, par exemple [23], [11], [26] et [7].

Dans la suite, nous attachons à ce type de modélisation dont le but de construire la commande des système à commutation affines en l'état.

La représentation explicite du modèle mathématique des SDH contrôlé dans l'espace d'état s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), q(t), u(t)) \\ q(t^+) = g(x(t), q(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}^p$  sont les variables continues respectivement d'état et de commande,  $q \in \mathcal{Q}$  la variable d'état discrète et la notation ' $t^+$ ' indique l'instant ' $t + \epsilon$ ' avec  $\epsilon$  positif et suffisamment petit.

La fonction  $g$  exprime l'évolution de la variable d'état discrète qui dépend des valeurs présentes des variables d'états continus  $x$  et discrètes  $q$ , ainsi que de la commande continue  $u(t)$  du système. Les champs de vecteurs  $f$  sont supposés suffisamment réguliers (à la limite localement Lipchitz).

Quand le système hybride est contrôlé par un retour d'état continu [55] ou le contrôle continu est inexistant, le système en boucle fermé est dite système hybride autonome et on peut le modéliser comme en [88], [11] et [7] et s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), q(t)) = f_q(x) \\ q(t^+) = g(x(t), q(t)) = g_q(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

Le couple  $(x, q)$  qui donne l'état du système au cours du temps est appelé état hybride et est disponible explicitement (et dans le possible analytiquement) par calcul avec cette présentation du modèle hybride, d'où le nom du modèle "explicite". Par contre dans un automate hybride la partie événementielle (qui est dans la fonction de transition  $g$  dans 1.2) est représenté graphiquement.

En partant de  $(x_0, q_0)$ , la trajectoire continue de l'état obéit à l'équation (1.2) et si  $(x(\cdot), q_0)$  atteint une certaine garde  $\mathcal{G}$  à l'instant  $t_1$ , alors l'état devient  $(x(\cdot), q_1)$  et l'évolution continue selon (1.2).

La fonction  $g : \mathbb{R}^n \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  décrit le changement de l'état discret du système.

Chaque état discret  $q \in \mathcal{Q}$  est associé avec un champs de vecteur du sous-système,  $f(x, q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Cette fonction peut être simplement écrite  $f_q(x)$ , et on verra par la suite que toutes ces fonctions qui représentent les dynamiques des sous-systèmes sont supposées continues localement Lipchitzienne pour garantir les conditions d'existence et d'unicité de la solution.

Quand on a un système hybride autonome composé d'une famille de sous-systèmes à dynamique continue (de type équation différentielle ou équation récurrente) et une loi logique qui indique un sous-système actif, on parle d'un système dynamique à commutation (SDC). L'évolution du système dynamique à commutation se fait de la façon suivante (voir figure 1.10 pour une illustration dans  $\mathbb{R}^2$ ) : Les sous-systèmes  $f_q(x)$  évoluent suivant leurs propres dynamiques dans un espace d'état continu. Dès que la trajectoire  $x(t)$  franchit une contrainte ou seuil (représenté dans l'interface continu/discret par des pointillés sur

la figure 1.10), l'interface continu/discret traduit ce franchissement par des événements  $e_q$  qui rendent actif un sous-système  $q \in \mathcal{Q}$  (ces événements peuvent aussi être des événements de temps). Le SED (Système à Événements Discrets) reçoit ces événements, décide quel est le prochain sous-système actif  $q(t^+) \in \mathcal{Q}$  suivant l'état précédent du système (NB : un SED est vue comme un automate déterministe). L'interface continu/discret et le SED forme ensemble la logique de commutation et donne le signal de commutation  $\sigma$  définie presque par tout  $\forall t \geq 0$  et de valeurs dans  $\mathcal{Q}$ .

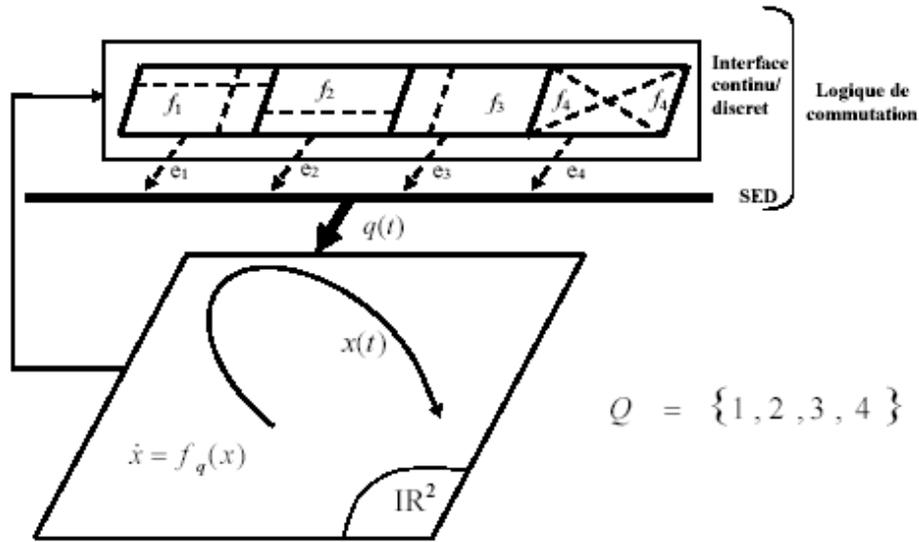


FIG. 1.10 – Execution des systèmes dynamiques à commutation

Formellement, un système à commutation est défini par une famille de sous-systèmes :

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x), \quad (1.3)$$

avec  $\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{Q}$  est dite signal de commutation. Ce signal est représenté par une fonction constante par morceaux  $\sigma$  à nombre fini de discontinuité dans un temps fini en formant les instants de commutations.  $\sigma$  prend ces valeurs constantes entre deux commutations successives, chaque valeur est traduite par un sous-système actif. En effet,  $\sigma(t) \in \mathcal{Q} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , où  $\mathcal{Q}$  est l'ensemble d'indices qui spécifie le sous-système actif, donc l'état discret du système à commutation. Le choix du sous-système actif peut être lié à un critère temporel (dans ce cas on parle d'un signal de commutation qui dépend du temps), à des régions ou surfaces déterminées dans l'espace d'état (dans ce cas on parle d'un signal de commutation qui dépend de l'état), ou à un paramètre d'entrée extérieur (dans ce cas on parle d'un événement d'entrée).

1. Événement de temps : Si la dynamique du système change après une durée prédéfinie appelée temporisation, alors le système commute sur un événement de temps (redressement commandé, hacheur ou onduleur dont la commande est a priori connue par un rapport cyclique). On dit aussi que l'événement est externe.
2. Événement d'état : Si la dynamique du système change quand la trajectoire traverse ou atteint une surface de commutation (seuil, contrainte) alors le système commute

sur un événement d'état (redressement monophasé par une diode dans lequel la dynamique change lorsque le courant devient négatif). On dit aussi que l'événement est interne. La figure 1.10 illustre ce type d'événement.

**Remarque 1.6.1** *Les SDC peuvent être classés suivant la manière dont la loi de commutation  $\sigma$  est construite. On dit :*

- “SDC autonome” si son évolution est autonome, c'est à dire qu'elle ne dépend pas explicitement d'un signal de commutation  $\sigma$ , mais que ce signal est le résultat des franchissements de seuils des variables d'état dans l'espace d'état continu. Nous n'avons alors pas de contrôle direct sur les événements discrets. On dit que le SDC à une évolution ou exécution autonome.
- “SDC Commandé” ou “contrôlé” quand la fonction de commutation  $\sigma$  représente une commande conçue dans le but d'obtenir un comportement désiré. On dit que le SDC obéit au signal de commande  $\sigma$ .

Pour plus de précisions sur les SDC autonomes et commandés, le lecteur peut se référer au paragraphe 1.1.3 dans [42] de Daniel Liberzon.

Un SDC est dit Linéaire par morceaux si tous les champs de vecteurs  $f_{\sigma(t)}(x)$  des sous-systèmes sont linéaires pour tout  $\sigma(t) \in \mathcal{Q}$ , est défini par :

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + B_{\sigma(t)} \quad (1.4)$$

### 1.6.1 Solution et exécution des SDC

A partir du modèle hybride (1.1) et des exemples vus on peut aborder intuitivement la notion de solution d'un système dynamique hybride. L'exécution est caractérisée par l'évolution des variables  $\sigma(t)$  et  $x(t)$ . Par la suite, on va formaliser ceci en s'inspirant essentiellement des travaux de J. Lygeros, K. H. Johansson, S. Sastry and M. Egerstedt [45] résumés dans la thèse de A. Girard [30] et du Second International Workshop, HSCC'99 dans le livre [85].

L'espace d'état d'un SDH contrôlé est hybride, et on note cet espace :

$$\mathcal{H}_c = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^p$$

avec  $\mathbb{R}^+$  l'espace temps,  $\mathbb{R}^n$  l'espace des états continus,  $\mathcal{Q}$  l'espace des états discrets et  $\mathbb{R}^p$  l'espace des commandes continues.

Dans le cas des SDH autonomes ou des SDC, cet espace se réduit à :

$$\mathcal{H} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{Q}.$$

On note aussi l'ensemble des conditions initiales hybrides par  $\mathcal{H}_0$  tel que :

$$(t_0, x_0, q_0) \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}.$$

Le phénomène hybride se traduit dans l'exécution du système par l'évolution de l'état hybride  $(t, x(t), \sigma(t)) \in \mathbb{H}$  simultanément au cours du temps. Cette exécution nous donne une fonction  $\sigma$  constante par morceaux définie entièrement par les instants  $t_i$  de ses points de discontinuité et de ses valeurs successives qui traduisent l'état discret  $q$  du SDC. Pour bien décrire la séquence des instants de transition du système on définit une trajectoire temporisée.

**Définition 1.6.1 : (Trajectoire temporisée)**

Une trajectoire temporisée d'un SDC est une séquence strictement croissante du temps, fini ou infinie,

$$\tau = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_N).$$

On peut la définir aussi comme une séquence non vide semi-ouverte

$$\tau = ([t_0, t_1), [t_1, t_2), \dots) = (\tau_0, \tau_1, \tau_2 \dots).$$

avec  $\tau_i = [t_i, t_{i+1}), i \in \mathbb{N}$ .

On dit que  $\tau$  est une trajectoire temporisée :

- finie, si  $N < \infty$ ,
- limitée, si  $\sum_0^N \tau_i < \infty$ ,
- infinie, si  $N = \infty$ , et
- illimitée, si  $\sum_0^N \tau_i = \infty$ .

**Définition 1.6.2 : (Signal de commutation hybride)**

Un signal de commutation hybride  $\sigma$  d'un SDC est une fonction constante par morceaux définie P.P(presque partout) par une séquence finie ou infinie de couples temps et états discrets

$$\sigma(t) = (\tau, S) = ((t_0, q_0), (t_1, q_1), (t_2, q_2), \dots) = (([t_0, t_1), q_1), ([t_1, t_2), q_2) \dots),$$

avec  $\tau$  la trajectoire temporisée hybride et  $S = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$  l'enchaînement de la séquence de commutation ou aussi la séquence d'états discrets du signal de commutation.

**Définition 1.6.3 : (Trajectoire d'état hybride ou Exécution hybride d'un SDC)**

La trajectoire de l'état hybride, nommée aussi exécution hybride, d'un SDC, notée  $e_H = (\tau, S, x)$  est le triplet formé par la trajectoire temporisée hybride  $\tau = ([t_0, t_1), [t_1, t_2), \dots)$ , la séquence d'états discrets  $S = (q_0, q_1, q_2, \dots)$  et la séquence  $x = (x_{q_0}, x_{q_1}, x_{q_2}, \dots)$  absolument continue et différentiable dans le temps de valeur dans  $\mathbb{R}^n$  ( $x_{q_j} : [t_j, t_{j+1}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la partie de trajectoire continue  $x(t)$  issu du champs de vecteur  $f_{q_j}$  du sous-système actif  $q_j$ ), vérifiant les conditions suivantes :

1. *évolution continue* :  $\forall t \in [t_j, t_{j+1}) \subset \tau, \forall x_{q_j}(t) \in x$  on a :

$$\frac{d}{dt}x_{q_j}(t) = f_{q_j}(x_{q_j}(t))$$

2. *évolution discrète* :  $\forall t_j \subset \tau$  on a :

- $e = (q(t^-), q(t^+)) \in \mathcal{E}$
- $x(t^-) \in \mathcal{G}_e$
- $x(t^+) \in \mathcal{R}_e(x(t^-))$

On dit qu'un SDC accepte une exécution hybride  $e_H$  depuis une condition initiale  $(t_0, q(t_0), x(t_0))$ . Cette exécution peut être :

- **Maximale** : si  $e_H$  n'est le préfixe d'aucune autre exécution dans  $\mathbb{H}$ ,
- **finie**, si  $\tau$  est finie et limitée,
- **infinie**, si  $\tau$  est soit infinie, soit illimitée ( $e_H$  ne peut pas être le préfixe d'une autre exécution),
- **Zéno**, Si  $\tau$  est infinie et limité. Le SDH a une infinité de transitions en un temps fini (voir exemple de la balle rebondissant).

Dans le cas où le SDC n'accepte pas de sauts d'état continu, la fonction de mise à jour  $\mathcal{R}_e$  (ou reset) sera tout simplement l'identité, c.à.d. il n'y a pas de ré-initialisation de la variable d'état continu. Autrement dit  $x(t^+) = x(t^-)$ .

Dans tous les travaux présentés dans ce mémoire, les SDC considérés ne présentent pas de sauts sur les variables d'état continues.

**Remarque 1.6.2** Une exécution infinie est maximale.

Pour garantir l'unicité de l'exécution pour un SDC, l'hypothèse suivante est prise en considération dans toute la suite (pour plus de détail voir [30]) :

**Hypothèse 1.6.1** :

*Tous les SDC considérés sont des SDH déterministes et non bloquants.*

Cela veut dire, qu'à partir de toute condition initiale  $(t_0, q(t_0), x(t_0))$ , le SDC (1.3) accepte une unique exécution infinie ou maximale  $(\tau, S, x)$ , et que toute exécution  $e_H$  ayant comme condition initiale  $(t_0, q(t_0), x(t_0))$  est un préfixe de  $(\tau, S, x)$ .

En effet, un système hybride est non bloquant si pour toute condition initiale  $(t_0, q(t_0), x(t_0)) \in$

$\mathbb{H}_0$  il existe une exécution infinie  $(\tau, S, x) \in \mathbb{H}$ . Il est déterministe s'il existe une unique exécution maximale. D'après la remarque 1.6.2 toute exécution infinie est maximale. Donc  $(\tau, S, x)$  est l'unique exécution maximale et toute autre exécution partant de la même condition initiale  $(t_0, q(t_0), x(t_0))$  sera un préfixe.

La solution d'un SDC est décrite par l'évolution de la variable d'état continu suivant une structure de commutation (ou une commande discrète) bien déterminée. Par la suite, une définition unifiée de la solution hybride pour les SDC commandés (SDC-C) est donnée.

**Définition 1.6.4 (Solution hybride d'un SDC-C)** *La solution hybride d'un SDC-C qui a subi, à partir d'une condition initiale de  $\mathbb{H}_0$ , une exécution  $e_H$  suivant un signal de commutation  $\sigma$  est le couple  $\phi_c = (x(t), \sigma(t))$ .*

L'existence d'une solution bien définie pour un SDC-C doit être assurée. Les dynamiques continues doivent être définies de telle sorte que la solution en temps continu entre deux commutations successives (ou aussi solution par mode de fonctionnement) est bien définie. Il est supposé que tous les champs de vecteur  $f_q(x)$  du SDC sont continus Lipschitz, ou au moins localement Lipschitz (voir énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz). Alors, il existe une solution unique évoluant à partir de l'état initial.

**Théorème 1.6.1 (Cauchy-Lipschitz)** : *Considérons  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction à valeurs réelles. Si la fonction est lipchitz, c'est-à-dire si  $f$  vérifie la condition de Lipschitz :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n, \text{ il existe une constante } L > 0 \text{ telle que } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

*alors, à partir d'une condition initiale  $x_0$ , il existe une et une seule solution  $x(t)$  du système décrit par le champs de vecteur  $\dot{x} = f(x)$ , définie pour tout  $t \geq 0$*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau))d\tau$$

En physique classique, ce théorème est à rapprocher de la notion de déterminisme : si un système suit une loi d'évolution donnée, les mêmes causes (les conditions initiales) produisent les mêmes effets. Ce qui veut dire, pour un SDC dont les sous-systèmes sont Lipschitz, qu'en partant de l'état initial hybride  $(x_0, q_0)$  et en commutant suivant le signal de commutation  $\sigma(t)$ , la solution hybride est unique.

**Hypothèse 1.6.2** *Dans tous les travaux présentés dans ce mémoire, les SDC considérés ne présentent pas de sauts sur les variables d'état continues et respectent tous l'hypothèse du théorème 1.6.1 garantissant l'unicité de la solution.*

Par contre, dans le cas général, un SDC avec un signal de commutation inconnu a priori (SDC non commandé) aura une solution hybride dite "généralisée" qui définit toutes les solutions issues d'une condition initiale hybride  $(t_0, x_0, q_0) \in \mathbb{H}_0$  suivant différentes structures de commutation  $\sigma$ .

**Définition 1.6.5 (Solution généralisée hybride)** On appelle solution généralisée hybride d'un SDC (1.3), passant par un point  $x_0$  à un instant  $t_0$ , la fonction  $\phi(t)$  (notée aussi  $\phi(t, q_0, x_0)$ ) continue définie sur un intervalle de temps  $\mathcal{I}$  non vide telle que  $\phi(t_0) = x_0$  et  $\frac{d\phi}{dt} = f_q(\phi(t))$  avec  $q = \sigma(t) \in \mathcal{Q}$ .

Si le signal de commande du SDC,  $\sigma$ , est connu, défini presque partout (même aux instants de discontinuités ce signal est bien défini à gauche (à  $t^-$ ) et à droite (à  $t^+$ )), cet intervalle de temps sera la trajectoire temporisée hybride,  $\mathcal{I} = \tau_0 \cup \tau_1 \cup \tau_2 \cup \dots$ .

La solution généralisée est élémentaire et représentée par la solution hybride du SDC-C, donc  $\phi(t) = (x(t), \sigma(t))$ .

## 1.6.2 Exécution périodique hybride

Les SDH présentent fréquemment des comportements périodiques (voir par exemple [34]). Par conséquent, il est nécessaire de développer des outils mathématiques pour le calcul et l'analyse de stabilité des exécutions périodiques. Les travaux menés sur ce sujet ont d'abord porté sur l'extension du théorème de Poincaré Bendixon, qui dit que "Un ensemble limite non vide compact d'un système dynamique plan, qui ne contient pas de point d'équilibre, est une orbite périodique", et sur l'analyse de stabilité des systèmes hybrides. Ainsi, Matveev et Savekin [48] ont généralisé le théorème de Poincaré aux systèmes hybrides constants par morceaux et plans (la variable d'état continue prend ses valeurs dans  $R^2$ ). Puis, Simic et al. dans [73] ont généralisé un théorème de Poincaré Bendixon hybride pour tout SDH plan.

Cependant, le problème du calcul des exécutions périodiques a été peu traité. Même dans le cas le plus traité simple d'un système dynamique plan, continu et linéaire par morceaux avec deux modes de fonctionnement, l'utilisation de méthodes numériques est nécessaire pour résoudre le système de deux équations à deux inconnues. Mais A. Girard dans sa thèse [30] a étendu ces techniques au calcul des exécutions des systèmes linéaires par morceaux et propose une généralisation du concept d'application de Poincaré aux SDH. La notion d'exécution périodique est assez intuitive. Cela signifie qu'il existe une période  $T$ , strictement positive, telle que les variables hybrides (discrète et continue) du SDC ont la même valeur à un instant  $t \in \tau$  et à l'instant  $t + T \in \tau$ . De proche en proche, on montre que les variables  $q$  (ou aussi  $\sigma(t)$ ) et  $x$  ont la même valeur à l'instant  $t + kT$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, la trajectoire temporisée associée à une exécution périodique est nécessairement illimitée.

**Définition 1.6.6 (Exécution périodique)**

Une exécution  $e_{H_p} = (\tau_p, S_p, x)$  est dite périodique si la trajectoire temporisée  $\tau_p$  est illimitée et qu'il existe une période d'exécution  $T > 0$  telle que  $\forall t \in \tau_p, q(t + T) = q(t) \in S_p$  et  $x(t + T) = x(t) \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.6.1 (Illustration sur le convertisseur d'énergie buck commandé)** Le buck est un convertisseur électrique DC/DC abaisseur de tension. Le circuit classique du Buck est donné figure 1.11.  $T$  et  $D$  sont les interrupteurs du système (électriquement ce sont des semi-conducteurs) fonctionnant en tout ou rien.  $D$  est une diode à commutation autonome et  $T$  est un transistor (ou thyristor) commandé. Pour que le circuit puisse fonctionner en mode de fonctionnement continu (pas de discontinuité du courant dans la bobine et pas de court-circuit de la source de tension), le cas où les deux interrupteurs sont ouverts est éliminé et seulement deux modes de fonctionnement (deux dynamiques)

du SDC sont possibles puisque le cas où les deux interrupteurs sont fermés court-circuite la source de tension  $E$ , donc ce mode est aussi indésirable. Ces deux dynamiques peuvent être décrites par les champs de vecteurs de la forme  $\dot{x} = f_q(x)$  suivante :

$$SDC : \begin{cases} \dot{x} = f_1(x) = Ax + B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U}{L} \end{bmatrix} & \text{-- mode 1--} \\ \dot{x} = f_2(x) = Ax = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x & \text{-- mode 2--} \end{cases} \quad (1.5)$$

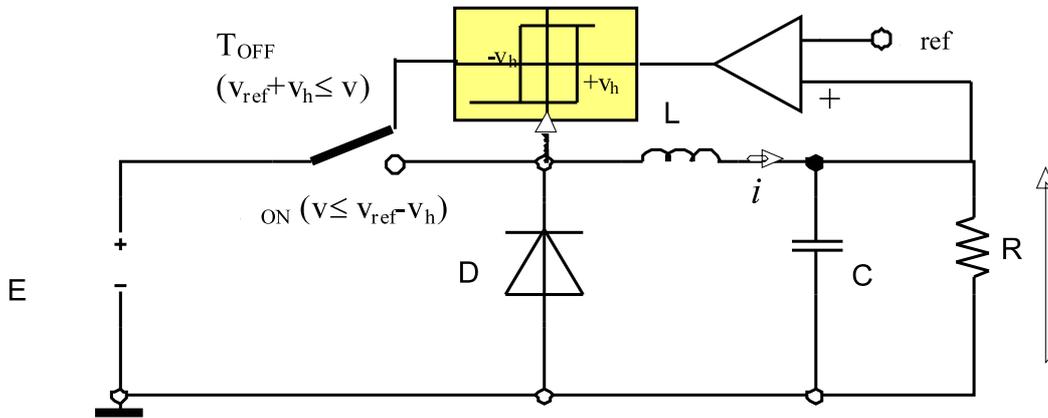


FIG. 1.11 – Convertisseur statique Buck commandé

avec  $q \in \{1, 2\} = \mathcal{Q}$  et  $x = [v \ i]^T = [x_1 \ x_2]^T$ . Le mode 1 représente  $T$  fermé et  $D$  bloquée (abrégé  $T=1$  et  $D=0$ ) et le mode 2 représente  $T$  ouvert et  $D$  passante (abrégé  $T=0$  et  $D=1$ ). Le convertisseur Buck est donc un système dynamique hybride. En effet des variables discrètes (état des interrupteur  $T$  et diode  $D$ ) et des variables continues (courant et tension) apparaissent simultanément. Il a deux dynamiques continues différents suivant les domaines de fonctionnement suivants (voir figure 1.12). Le Buck commandé peut être donc modélisé par un modèle mathématique explicite de la forme (1.2) avec le champ de vecteurs  $f_q \in \{f_1, f_2\}$  et la fonction de transition  $g_q$  qui est définie par l'hystérésis choisi de largeur  $2v_h$  en tension et de  $i_h$  en courant telle que :

$$g_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } v < v_{ref} - v_h \text{ et } i < i_{sat} - i_h \\ 2 & \text{si } v > v_{ref} + v_h \text{ ou } i > i_{sat} \\ \sigma(t^-) & \text{sinon (effet mémoire)} \end{cases} \quad (1.6)$$

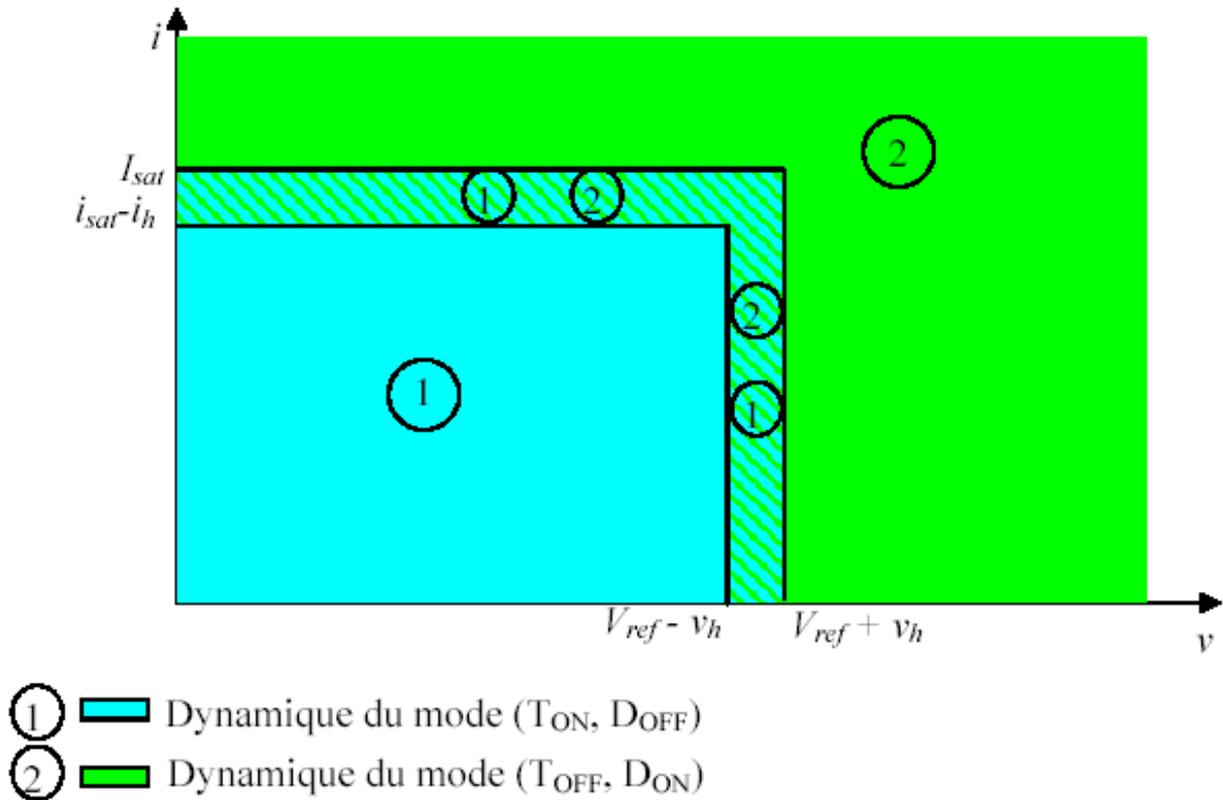


FIG. 1.12 – Domaines de fonctionnement du convertisseur buck commandé

Le comportement du convertisseur Buck commandé à partir de son point de repos ( $v = 0V, i = 0A$ ) avec les valeurs numériques :  $E = 20V, L = 20mH, C = 47F, R = 22\Omega, v_{ref} = 12V, i_{sat} = 1A, v_h = 10mV$  et  $i_h = 50mA$  est étudié. L'évolution de l'état hybride (état continu et état discret) du Buck pendant un temps de  $10ms$  est donné figure 1.13.

La commutation se fait par retour d'état non linéaire après une comparaison de la tension de sortie  $v$  avec une tension de référence  $v_{ref}$ . Ainsi, la commande se fera directement sur les variables discrètes. Le convertisseur Buck commandé est bien un SDC (1.3). Le signal de commutation (à droite en bas de la figure 1.13) est défini par  $\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \times \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ , avec  $\sigma(t) = 1$  signifie que la dynamique du *mode* 1 est active (T=1 D=0) et  $\sigma(t) = 2$  signifie que la dynamique du *mode* 2 est active (T=0 D=1).

Les temps de commutation associés à cette commande forment la trajectoire temporelle hybride suivante :

$$\tau = (0, 1.2373ms, 1.332ms, 1.4368ms, 2.5598ms, 3.7108ms, 4.3343ms, 5.0828ms, 5.5162ms, 6.0803ms, 6.4232ms, 6.892ms, 7.1872ms, 7.6043ms, 7.873ms, 8.2608ms, 8.5148ms, 8.8862ms, 9.132ms, 9.4942ms, 9.7352ms, 10ms),$$

La séquence d'états discrets est  $S = \{1, 2\}^{11}$ , et le signal de commande est :

$$\sigma(t) = ((0ms, 1), (1.2373ms, 2), (1.332ms, 1), (1.4368ms, 2), (2.5598ms, 1), (3.7108ms, 2), (4.3343ms, 1), (5.0828ms, 2), (5.5162ms, 1), (6.0803ms, 2), (6.4232ms, 1), (6.892ms, 2), (7.1872ms, 1), (7.6043ms, 2), (7.873ms, 1), (8.2608ms, 2), (8.5148ms, 1), (8.8862ms, 2), (9.132ms, 1), (9.4942ms, 2), (9.7352ms, 1), (10ms, 2)).$$

Cette exécution hybride du Buck commandé est finie puisque  $\tau$  est fini. Mais on remarque que la trajectoire converge vers un cycle qui se répète d'une façon déterministe et non bloquante. Donc, le système peut continuer à évoluer pendant un temps infini. Depuis la condition initiale  $(0, 1, [0 \ 0])$  le Buck commandé accepte une unique exécution maximale de préfixe  $e_H = (\tau, S, x)$ . Après un temps fini d'exécution, la solution hybride  $\phi_c$  du SDC-C commandé a une exécution périodique de période  $T = 58.48ms$ .

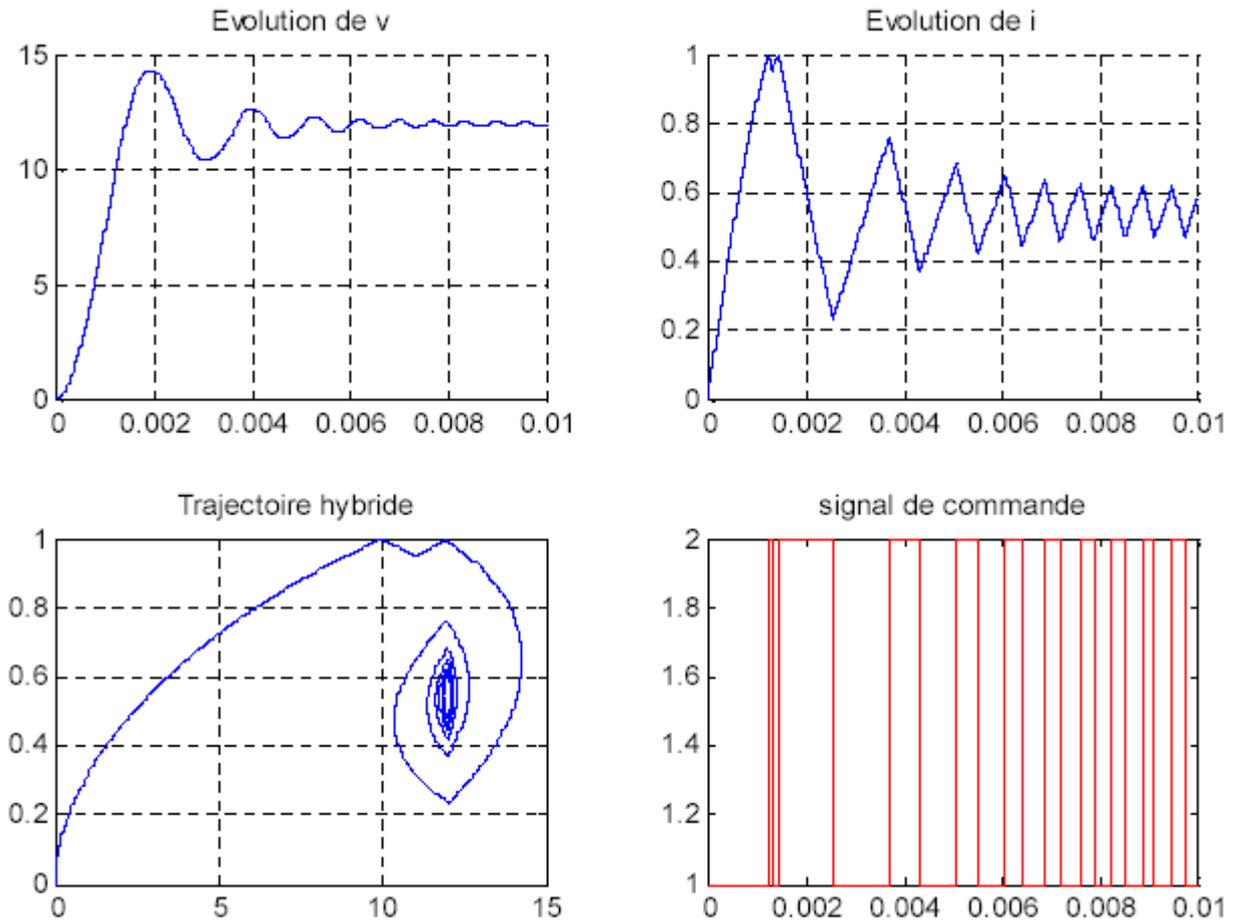


FIG. 1.13 – Exécution hybride du convertisseur Buck commandé avec hystérésis

## 1.7 Conclusion

Ce chapitre présente une introduction aux systèmes dynamiques à commutation, dans laquelle on a essayé de donner les pré-requis nécessaires pour comprendre les effets hybrides dans ces systèmes. A travers des exemples explicatifs et des méthodes de modélisation utilisées dans le domaine des SDH, on a essayé d'exprimer nos motivations pour les SDC, qui sont une classe des SDH, très présente dans les applications industrielles. Dans les chapitres qui suivent nous nous intéresserons aux méthodes d'analyse de stabilité et de stabilisation des SDC.

# Chapitre 2

## Analyse de stabilité des SDC

### 2.1 Introduction

Pour un système donné, il est intéressant d'étudier sa stabilité pour connaître son comportement et ses performances après un temps suffisamment grand. Cet intérêt pour la stabilité a commencé par la question majeure de Lagrange (1736-1813) concernant le problème de la stabilité du système solaire et a motivé la recherche mathématique dans ce sens. Puis, en mathématiques et en automatique, la notion de stabilité de Lyapunov (1857-1918) apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques. Bien que cette notion de stabilité reste assez intuitive avec les expériences et/ou les simulations, Lyapunov reste le premier à avoir formulé mathématiquement cette idée à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle. Depuis, il est une référence -stabilité au sens de Lyapunov - dans l'étude de stabilité. L'idée consiste à dire que, si un système démarre autour d'un point  $x$  à un instant  $t = 0$ , et que ses trajectoires formées par tous les points décrivant les états possibles du système restent autour de ce point  $x$  à tout instant  $t > 0$ , alors  $x$  est stable au sens de Lyapunov. De plus, si tous ces points convergent vers  $x$  alors  $x$  est asymptotiquement stable. Même après les grandes évolutions des logiciels de simulation, le fait de simuler une trajectoire du système depuis un état initial donné, n'est pas suffisant pour évaluer le comportement global du système, puisque, à chaque condition initiale correspond une trajectoire différente donc, pour étudier correctement le comportement du système en général, il faudrait simuler à partir d'une infinité de points initiaux, ce qui est loin d'être réalisable. Lyapunov nous a donné une méthode facile à manipuler pour tester la stabilité à l'origine : soit un système donné, s'il existe une fonction qui s'annule uniquement à l'origine, définie strictement positive ailleurs, et qui décroît (resp. décroît strictement) quand le système évolue dans le temps, alors on peut conclure que le système est stable autour de l'origine (resp. asymptotiquement stable). Cette fonction est appelée fonction de Lyapunov et généralement notée  $V(x)$ . Elle définit, en quelque sorte, l'énergie du système en n'importe quel point de l'espace d'état.

Dans la littérature, par exemple dans [42],[32] et [7] nous trouverons principalement trois façons d'étudier la stabilité des Systèmes Dynamiques à Commutation (SDC). Citons les par degré de complexité croissante :

1. La séquence de commutation est inconnue a priori, on s'intéresse alors à la stabilité sous commutation arbitraire [43, 42].

2. Vérifier que le système est stable pour une séquence de commutation donnée [62, 37, 55].
3. Etudier l'existence puis la conception d'un signal de commutation qui garantit la stabilité du système [7, 18, 35].

Pour une présentation intuitive, considérons dans un premier temps un espace d'état continu de dimension deux de même que l'espace d'état discret. Si, pour une commutation arbitraire, le système commuté est Asymptotiquement Stable (A.S), alors il n'y aura pas de problème de conception de la commande (voir chapitre 2.1 dans [42]). Sinon il faut chercher les contraintes de commutation qui rendent le système à commutation stable. Ces contraintes peuvent conduire à des événements d'état ou des événements du temps. Le respect de ces contraintes permet d'obtenir une loi de commande qui stabilise le système. On verra par la suite toutes les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité des SDC commandés arbitrairement ou avec commutations sous contraintes.

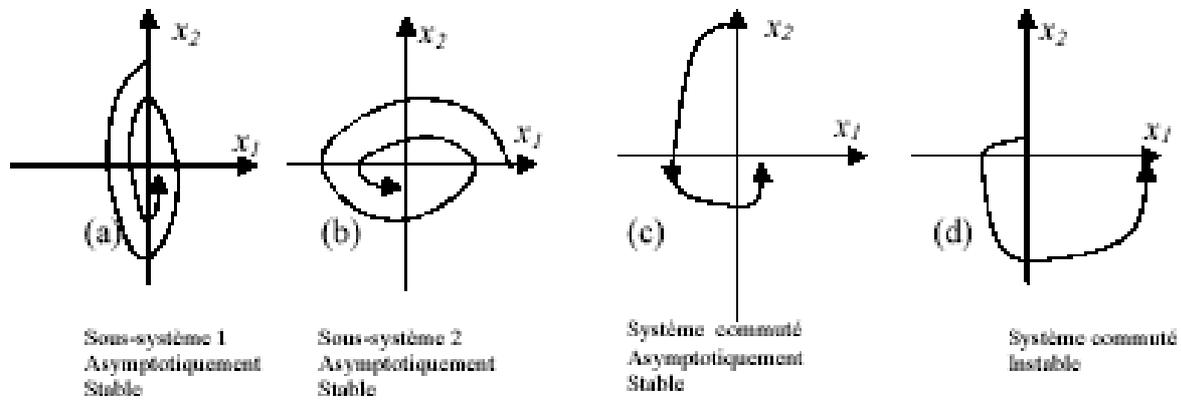
La figure 2.1 représente les différents cas de stabilité d'un SDC suivant la stabilité des sous-systèmes et la manière de commuter entre eux :

- Cas où les sous-systèmes sont asymptotiquement stables (sous-systèmes a et b) : si le sous-système (a) est actif dans les quadrants 2 et 4 ( $x_1x_2 \leq 0$ ) et le sous-système (b) est actif dans les quadrants 1 et 3 ( $x_1x_2 > 0$ ), le système commuté (c) est asymptotiquement stable à l'origine, alors que si c'est l'inverse le système commuté (d) est instable.
- Cas où un sous-système est asymptotiquement stable (sous-système a') et l'autre instable (sous-système b) : si le sous-système (a') est actif dans les quadrants 2 et 4 et le sous-système (b') est actif dans les quadrants 1 et 3, le système commuté (d') est asymptotiquement stable à l'origine, alors que si c'est l'inverse le système commuté (c') est instable.
- Cas où les deux sous-systèmes sont instables (sous-systèmes a'' et b''). Si le sous-système (a'') est actif dans les quadrants 2 et 4 et le sous-système (b'') est actif dans les quadrants 1 et 3, le système commuté (d'') est asymptotiquement stable à l'origine, alors que, si c'est l'inverse le système commuté (c'') est instable.

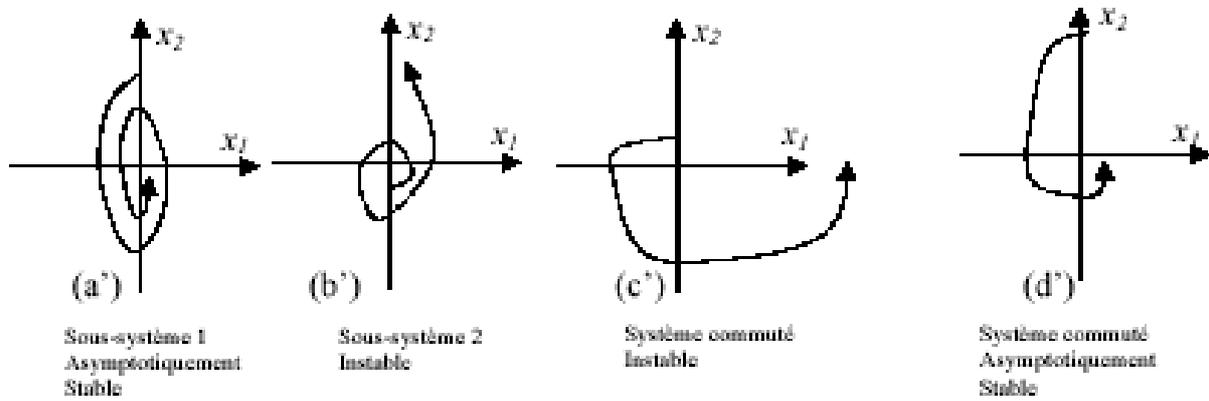
Ces trois cas de figure montrent que tous les cas sont possibles en ce qui concerne la stabilité des systèmes dynamiques à commutations. Donc, la stabilité ou l'instabilité individuelle des sous-systèmes ne suffisent pas pour conclure sur la stabilité du système dynamique à commutation associé.

Le plus souvent, les SDC étudiés ne sont pas stabilisables par commutation arbitraire et la commande n'est pas connue a priori. Dans ce travail on s'intéresse à la synthèse de commandes stabilisantes des SDC par différentes méthodes.

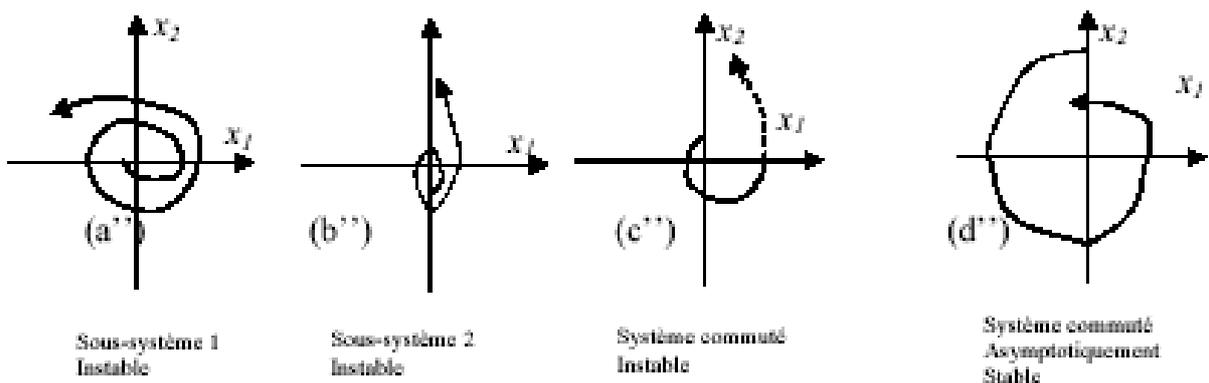
Si l'on utilise la méthode de Lyapunov, pour qu'un SDC (1.3) soit stable, il est nécessaire que, dans chaque intervalle de temps où le mode  $q$  est actif, on puisse trouver une fonction de Lyapunov décroissante. Ensuite, les instants de commutation (passage du mode  $q$  au mode  $q'$ ) doivent être déterminés pour que cette fonction composée soit globalement décroissante. Donc des contraintes supplémentaires sur les commutations du



Commutation entre sous-systèmes stables



Commutation entre un sous-système stable et un instable



Commutation entre deux sous-systèmes instables

FIG. 2.1 – Présentation intuitive dans  $\mathbb{R}^2$  sur la stabilité des SDC

système devront être respectées.

Dans notre étude on va s'intéresser aux systèmes à commutation dont une loi de commande  $\sigma$ , si elle existe, définit, à un instant donné un seul sous système de (1.2) actif. Ceci vérifie l'hypothèse que le SDC-C est déterministe et non bloquant au cours de la totalité du temps d'exécution.

## 2.2 Notions de stabilité et problématiques

Pour un système physique, les configurations à énergie minimale sont caractérisées par les points d'équilibres et les phénomènes périodiques. Le concept de stabilisation de ces systèmes est traduit par la recherche d'une telle configuration plutôt qu'une autre. Par contre, la stabilité, qui est portée par les propriétés qualitatives des solutions des SDC  $\phi(t)$ , peut être définie par (voir [7]) :

- L'état hybride  $(x, q)$  dans sa globalité, dans ce cas on parle de la propriété globale (stabilité totale ou absolue, attractivité totale, etc). Ces notions n'ont en général que peu d'intérêt.
- Seulement la partie continue  $x$  et ce indépendamment de la partie discrète ou du signal de commutation, on parle alors de la propriété uniforme par rapport à  $q$  ou  $\sigma$ .
- l'état continu  $x$  connaissant le signal de commutation  $\sigma$ . On parle de propriété conditionnelle.

Dans nos travaux, et afin de faciliter la présentation des modèles ainsi que la recherche du signal de commutation, nous travaillerons uniquement sur des SDC (2.1) stationnaires dans lesquels le temps n'apparaît pas explicitement dans les équations différentielles. Les sous-systèmes considérés dans les SDC sont autonomes (dans le sens où ils ne dépendent pas d'une commande continue) :

$$\dot{x} = f_\sigma(x), \quad x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

et dans le cas linéaire :

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

**Remarque 2.2.1 :**

- Dans le cas où les sous-systèmes ne sont pas autonomes, on suppose qu'il existe un feedback qui les rend autonomes en boucle fermée.
- Les sous-systèmes linéaires de degré  $n$  affines en l'état peuvent toujours se transformer en sous-systèmes autonomes de dimension  $n + 1$ .

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\sigma & B_\sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 2.2.1 Définitions de stabilité d'un SDC

Ce paragraphe rappelle quelques définitions sur la stabilité à l'origine des SDC (2.1) [7],[62]. Elles sont très générales car on peut toujours ramener l'étude de la stabilité d'un système à l'étude de sa stabilité à l'origine par un simple changement de variables.

**Définition 2.2.1** (Stabilité Uniforme et Conditionnelle par rapport à  $\sigma$ )

Un SDC est dit :

- Uniformément Stable (U.S) à l'origine par rapport à  $\sigma$  (voir figure 2.2) si :  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$  tel que :  $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\epsilon)\mathcal{B}^n \implies \phi(t, x_0, q_0) \in \epsilon\mathcal{B}^n, \forall t \geq 0, \forall \sigma(t)$ .
- Conditionnellement Stable (C.S) à l'origine par rapport à  $\sigma$  (voir figure 2.3), si :  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon, \sigma(t)) > 0$  tel que :  $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\epsilon, \sigma(t))\mathcal{B}^n \implies \phi|_{\sigma(t)}(t, x_0) \in \epsilon\mathcal{B}^n, \forall t \geq 0$ .

$\phi(t, x_0, q_0)$  étant la trajectoire généralisée du SDC et  $\phi|_{\sigma(t)}(t, x_0)$  la trajectoire continue du SDC connaissant son signal de commutation hybride  $\sigma(t)$ .

$\mathcal{B}^n$  est la boule ouverte unité centrée à l'origine ( $\mathcal{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ ) et  $\epsilon\mathcal{B}^n$  est la boule ouverte centrée à l'origine de rayon  $\epsilon$ .

C.à.d que la stabilité uniforme d'un SDC par rapport au signal de commande  $\sigma$  est traduite par la stabilité de sa solution généralisée hybride  $\phi$  pour n'importe quelle exécution hybride  $e_H$ . Cette définition est illustrée par la figure 2.2. Par contre, la stabilité conditionnelle est traduite par la stabilité de la solution hybride du SDC-C après une exécution suivant le signal de commutation  $\sigma$  donné. Cette définition est illustrée par la figure 2.3.

Autrement dit, la stabilité uniforme d'un SDC est traduite par la stabilité du SDC sous commutation arbitraire et la stabilité conditionnelle traduit la stabilité sous contrainte d'un SDC.

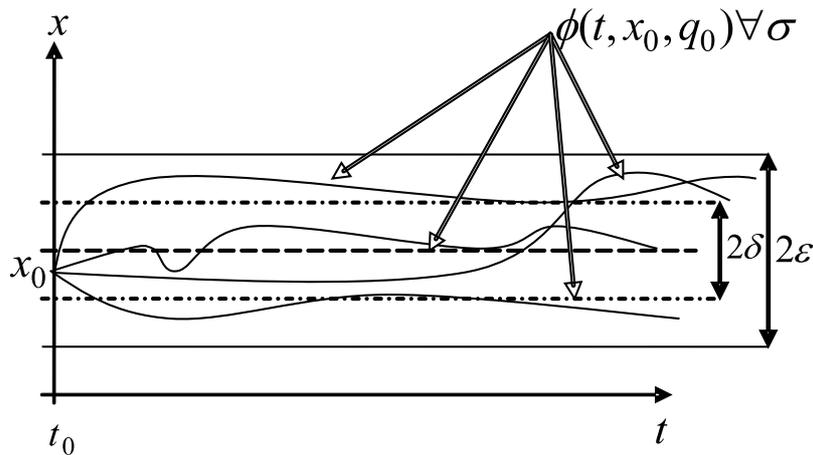


FIG. 2.2 – stabilité uniforme à l'origine d'un SDC

**Définition 2.2.2** (Attractivité Uniforme et Conditionnelle par rapport à  $\sigma$ )

Un SDC est dit :

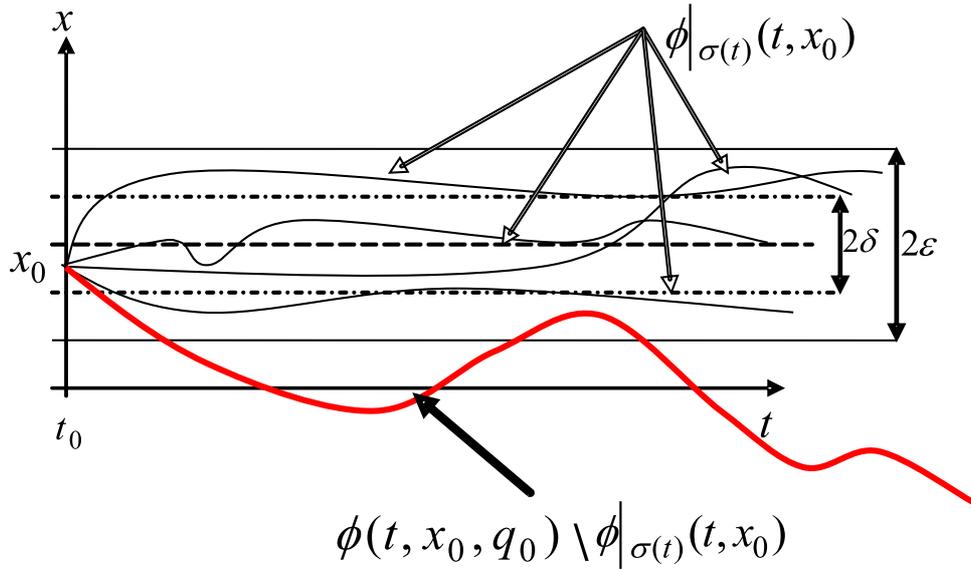


FIG. 2.3 – Stabilité conditionnelle à l'origine d'un SDC

- Uniformément Attractif (U.A) à l'origine par rapport à  $\sigma$ , si :  $\exists \delta > 0$  tel que :  $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta \mathcal{B}^n \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, x_0, q_0)\| = 0, \forall t \geq 0, \forall \sigma(t)$ .
- Conditionnellement Attractif (C.A) à l'origine par rapport à  $\sigma$ , si  $\exists \delta(\sigma) > 0$  tel que :  $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\sigma) \mathcal{B}^n \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi|_{\sigma(t)}(t, x_0)\| = 0$ .

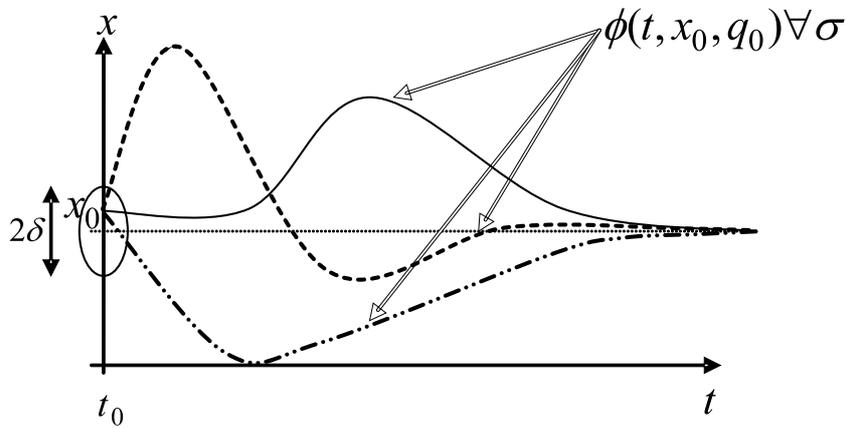


FIG. 2.4 – Attractivité uniforme de l'origine d'un SDC

L'attractivité uniforme par rapport à  $\sigma$  traduit qu'en s'écartant légèrement du point d'équilibre, la solution généralisée hybride  $\phi$  pour n'importe quelle exécution hybride  $e_H$  du système, revient sur ce point après un certain temps (même infini). Cette définition est illustrée par la figure 2.4. Par contre l'attractivité conditionnelle traduit qu'en s'écartant légèrement du point d'équilibre, la solution hybride du SDC-C après une exécution suivant un signal de commutation  $\sigma$  donné, revient sur ce point après un certain temps (même infini). Cette définition est illustrée par la figure 2.5.

Il est important de rappeler qu'un point équilibre peut être attractif sans être stable (il

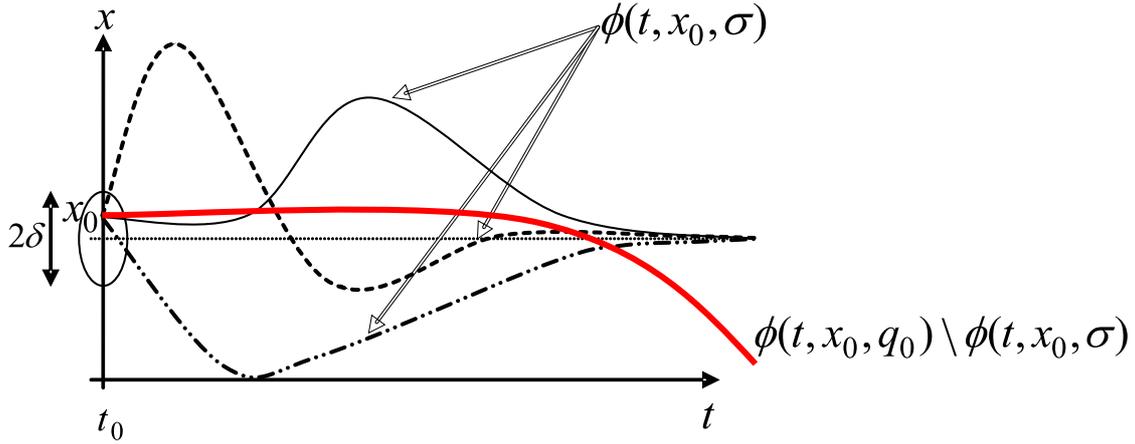


FIG. 2.5 – Attractivité conditionnelle de l'origine d'un SDC

suffit qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\phi(t, x_0, q_0)$  diverge, i.e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, x_0, q_0)\| = \infty$  et vice-versa (par exemple les oscillateurs).

De même que la stabilité, l'attractivité uniforme d'un SDC est traduite par une attractivité sous commutation arbitraire, et l'attractivité conditionnelle est traduite par l'attractivité sous contrainte du SDC.

On peut par la suite, définir la stabilité asymptotique qui est, pour un système donné, la combinaison de sa stabilité et de son attractivité.

**Définition 2.2.3** (*Stabilité Asymptotique Uniforme et Asymptotique Conditionnelle par rapport à  $\sigma$* )

L'origine d'un SDC est Uniformément Asymptotiquement Stable, U.A.S, (resp. Conditionnellement, C.A.S) si elle est U.S et U.A (respectivement C.S et C.A).

Le concept de stabilité exponentielle contient une information supplémentaire qui est la rapidité de convergence vers l'origine.

**Définition 2.2.4** (*Stabilité Exponentielle Uniforme et Exponentielle Conditionnelle par rapport à  $\sigma$* )

L'origine d'un SDC est dite :

- U.E.S Uniformément Exponentiellement Stable si :  $\exists \delta > 0, \exists \alpha > 0$  et  $\exists \beta \geq 1$  tels que :  $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta \mathcal{B}^n \implies \phi(t, x_0, q_0) \in \beta \exp(-\alpha t) \|x_0\| \mathcal{B}^n, \forall t \geq 0, \forall \sigma(t)$ .
- C.E.S Conditionnellement Exponentiellement Stable si :  $\exists \delta(\sigma(t)) > 0, \alpha(\sigma(t)) > 0$  et  $\exists \beta(\sigma(t)) \geq 1$  tels que :  $\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\sigma(t)) \mathcal{B}^n \implies \phi|_{\sigma(t)}(t, x_0) \in \beta \exp(-\alpha t) \|x_0\| \mathcal{B}^n, \forall t \geq 0$ .

$\alpha$  est appelé le taux (ou rapidité) de convergence exponentielle : il est dit uniforme ou non selon le type de stabilité exponentielle considérée.

Cette rapidité, dans les SDC, dépend bien évidemment de la façon dont le système commute, donc du signal de commutation lui-même,  $\sigma$ , puisque le type de stabilité dépend de ce signal.

### 2.2.2 Comportement périodique et stationnaire

D'une façon générale, pour un système donné, quand le temps tend vers l'infini la solution en temps continu  $x(t)$  peut atteindre un point stationnaire. Pour les systèmes commandés, ce point stationnaire est typiquement le point fixe désiré ou l'état stable de fonctionnement. Le système peut aussi atteindre un comportement périodique qui définit les conditions de fonctionnement du système dans son état stable. Ces caractéristiques en régime permanent se retrouvent aussi dans les SDC.

### 2.2.3 Point d'équilibre

Dans chaque sous-système dynamique continu stable du SDC (2.1) il existe un point d'équilibre. On parle donc de point d'équilibre d'un mode. Le point  $x_e$  est un point d'équilibre du mode  $q \in \mathcal{Q}$  s'il vérifie  $f_q(x_e) = 0$ . Il peut être isolé (quand il n'a pas d'autres points d'équilibre autour) ou une partie d'un ensemble de points d'équilibres. Les points d'équilibre peuvent être stables, instables, ou asymptotiquement stables.

**Définition 2.2.5** *Un point d'équilibre  $x_e$  d'un sous-système du SDC (2.1) est :*

- **Stable** si,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

- *Instable* s'il n'est pas stable.
- *Asymptotiquement stable* s'il est stable et  $\delta$  peut être choisi tel que :

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e.$$

- *Globalement Asymptotiquement Stable* s'il est stable et, que, pour tout point initial  $x(0)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ .

### 2.2.4 Cycle limite

Dans l'étude des systèmes continus, on parle généralement des phénomènes oscillatoires qui se produisent dans la dynamique du système. On dit qu'un système donné oscille (avec une amplitude constante) quand il présente une solution périodique,  $x(t+T) = x(t), \forall t \geq t_0$ , après chaque durée  $T$  appelée période du système (ou d'oscillation) [86]. L'image dans l'espace d'état de la solution périodique est une trajectoire fermée, appelée généralement orbite périodique. Un cycle limite est un cas spécial d'une orbite périodique dans laquelle la trajectoire est en même temps fermée et isolée (indiquant la nature d'attractivité ou de répulsion des trajectoires passant non loin du cycle). Ainsi, même s'il existe plusieurs trajectoires fermées dans l'espace d'état, seules celles qui sont isolées sont des cycles limites. Concernant les systèmes linéaires, ils peuvent avoir plusieurs trajectoires fermées, mais elles ne sont jamais isolées. Les cycles limites ne concernent donc que les systèmes non linéaires donc les systèmes hybrides et plus particulièrement les systèmes à commutation. C'est la raison pour laquelle les cycles limites sont très difficiles à étudier car les outils

existants et développés dans la théorie des systèmes linéaires ne peuvent pas être appliqués ou ne sont pas toujours efficaces. La motivation derrière l'étude des cycles limites est basée sur leur importance dans les applications réelles et le manque d'outils mathématiques pour les étudier.

Comme les points d'équilibre, les cycles limites peuvent être stable, instables ou asymptotiquement stables.

Considérons la solution généralisée d'un SDC passant par  $x_0$  à l'instant  $t_0$ . Le phénomène périodique aura lieu quand :

$$\phi(t + T) = \phi(t), \quad t > t_0, \quad T > 0.$$

L'image de cette solution dans l'espace d'état est une orbite fermée représentant un cycle limite  $\gamma$  défini par :

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n | x(t) = \phi(t), 0 < t < T\}.$$

Pour donner les définitions sur la stabilité du cycle  $\gamma$ , on a besoin d'introduire le concept de voisinage d'une orbite, pour cela on définit :

$$U_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n | \text{dist}(x, \gamma) < \epsilon\}$$

avec  $\text{dist}(x, \gamma)$ , la distance minimum entre le point  $x$  et le point de  $\gamma$  le plus proche, tel que,

$$\text{dist}(x, \gamma) = \inf_{y \in \gamma} \|x - y\|.$$

Maintenant la stabilité du cycle limite peut être définie :

**Définition 2.2.6** *Un cycle limite  $\gamma$  est dit :*

- *Stable, si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :*

$$x_0 \in U_\delta \Rightarrow x(t) \in U_\epsilon, \forall t \geq 0$$

- *Instable, s'il n'est pas stable*

- *Asymptotiquement Stable, s'il est stable et que  $\delta$  peut être choisi tel que :*

$$x_0 \in U_\delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \gamma) = 0$$

- *Globalement Asymptotiquement Stable, s'il est stable et que pour tout  $x(0)$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \gamma) = 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

Cette définition est réduite à la définition 2.2.5 si  $\gamma$  représente juste un point d'équilibre. Une solution périodique d'un SDC forme donc un cycle limite de commutation et une région de fonctionnement (orbite fermée) autour du point désiré  $x_d$ . Il existe une infinité de cycles limites autour de  $x_d$  définis par différentes conditions initiales. Ces cycles peuvent être, par exemple, les résultats d'une commande qui utilise la commutation pour atteindre un point désiré. Un exemple académique connu qui illustre ce cas est la commande du thermostat présenté paragraphe 2.2.5.2.

Dans les cas réels, on essaye toujours de faire fonctionner les SDC autour d'un point d'équilibre désiré, alors l'étude en régime permanent se réduit à étudier un cycle limite qui est périodique et stationnaire.

**Théorème 2.2.1** *Soient  $x_{ij}, \forall \{i, j\} \in \mathcal{Q}$ , les points de commutation du SDC (2.1) du mode  $i$  au mode  $j$ . Si ces points convergent vers des points fixes  $x_{ij}^0$ , on dit que la solution du SDC tend vers un cycle limite hybride.*

En effet, si les points de commutation  $x_{ij}$  sont convergents, on a un signal de commutation qui se répète, donc la même séquence de modes ainsi que les mêmes temps de séjour dans ces modes. A partir de l'unicité de la solution pour un état initial hybride donné  $(t_i, x(t_i), q_j, \{i, j\} \in \mathcal{Q})$ , l'orbite formée par les trajectoires issues de ces points et les dynamiques respectives à la séquence des modes sera une orbite fermée et stationnaire. La trajectoire du système dans l'espace d'état réel tend vers un cycle limite hybride.

Des événements d'état qui ont lieu périodiquement forment une séquence de commutation répétitive et stationnaire. Donc un cycle limite de commutation peut localiser une région autour d'un point de fonctionnement désiré ou bien le point désiré même, si le système est zeno.

Soit  $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$  l'ensemble des transitions d'une telle séquence de commutation répétitive qui forme un cycle limite hybride. On nommera l'exécution due à cet ensemble de transitions  $e_{H_0}$ . Deux cas sont possibles pour le fonctionnement du SDC, voir figure 2.6 pour l'illustration :

– **Point de fonctionnement :**

$x_f$  est un point de fonctionnement du SDC dit "SDC-Zeno" si son exécution  $e_H$  tend vers  $e_{H_0}$  et que les points de commutation  $x_{ij}$  tendent vers  $x_f$  pour tout  $(i, j) \in \mathcal{E}_0$ . Le système commute donc à une fréquence infiniment grande irréalisable en pratique.

– **Cycle limite hybride :**

$\gamma$  est un cycle limite hybride du SDC si son exécution  $e_H$  tend vers  $e_{H_0}$  et que les points de commutation  $x_{ij}$  tendent vers  $x_{ij}^0$  pour tout  $(i, j) \in \mathcal{E}_0$  avec  $x_{ij}^0 \neq x_{i'j'}^0$ .

Donc, un "SDC-Zeno" est un SDC dont le cycle limite est réduit à un point.

Pour enlever le problème de commutation des commutateurs un nombre infini de fois dans un temps fini, les automaticiens utilisent souvent un hystérésis juste avant leurs commandes en tout ou rien.

## 2.2.5 Cas des SDC linéaires par morceaux

Les systèmes linéaires par morceaux (1.4) sont des SDC caractérisés par un ensemble de sous-systèmes linéaires affines en l'état :

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma \quad (2.3)$$

avec  $x \in IR^n$  l'état continu du SDC, et  $\sigma$  un signal de commutation qui représente la commande, et assure le changement entre les dynamiques de ses sous-systèmes

$$\sigma(t) \in \mathcal{Q} = \{1, \dots, M\} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.4)$$

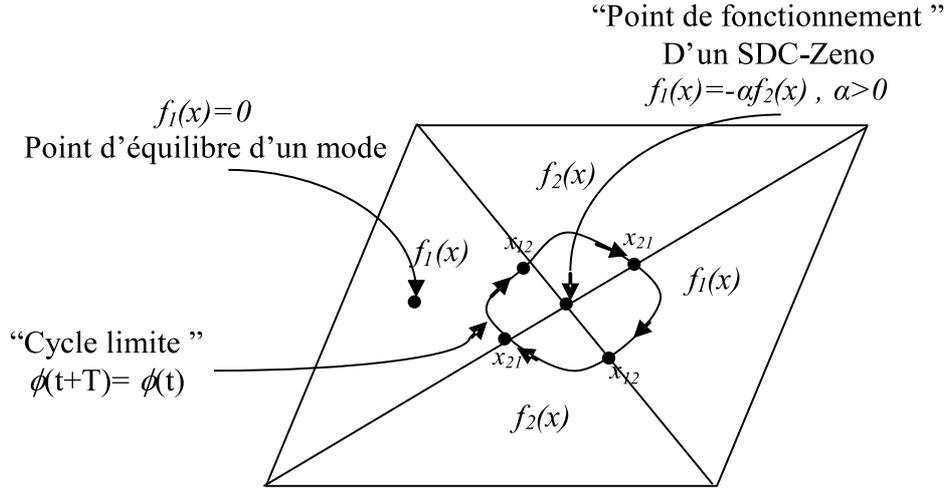


FIG. 2.6 – Point de fonctionnement, points d'équilibres et cycle limite d'un SDC

Ce changement de mode a lieu dans l'espace d'état, quand la trajectoire continue  $x(t)$  arrive sur une surface de commutation. Ces surfaces sont généralement représentées par :

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{G}_{(i,j)} = 0, \{i, j\} \in \mathcal{Q}\}. \quad (2.5)$$

qui représentent la commutation du mode  $i$  au mode  $j$ .

Dans [32, 62], les auteurs ont considérés que ces surfaces étaient des hyperplans de type

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C_{ij}x + d_{ij} = 0\}$$

où  $C_{ij}$  est un vecteur de dimension  $n$  et  $\{i, j\} \in \{1, \dots, N\}$ .

On définit

$$\mathcal{X}_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(t) = i\} \text{ pour } i \in \mathcal{Q}.$$

Dans [32], une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un cycle limite hybride a été présentée. Après avoir présenté cette condition pour un cycle limite à deux points de commutation, l'auteur a étendu ses résultats pour des cycles à  $k$  points de commutation.

**proposition 2.2.1 (voir [32])** *Considérons le SDC (2.3)-(2.4). On suppose qu'il existe une solution périodique  $\gamma$  avec  $k$  commutations par cycle, représentées par  $k$  points de commutation  $x_{ij}^0$  sur  $k$  surfaces de commutation différentes et une période du cycle  $T = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ , avec  $T_i > 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$  les temps de séjour dans chaque mode du cycle. Alors  $\forall x_{ij} \in S_{ij}, \forall x_{li} \in S_{li}$  avec  $\{i, j, l\} \in \mathcal{Q}^3$ , et  $x_{ij}$  est un point de commutation qui succède au point de commutation  $x_{li}$ , on aura :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{ij} = e^{A_i T_i} x_{li} + (e^{A_i T_i} - I) A_i^{-1} B_i, \quad \forall (i, j), (l, i) \in \mathcal{E}_0 \\ C_{ij} x_{ij} + d_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E}_0 \\ (C_{ij} (e^{A_i t} x_{li} + (e^{A_i t} - I) A_i^{-1} B_i) + d_{ij})^2 > 0 \quad \forall t \in [0, T_i[, \forall (l, i) \in \mathcal{E}_0, \forall (i, j) \in \mathcal{E} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

et la solution périodique du cycle limite hybride  $\gamma$  peut être obtenue avec une condition initiale  $x_{ij}^0 \in S_{ij}$  par

$$x_{ij}^0 = [I - e^{A_{k-i+1}T_{k-i+1}} \dots e^{A_i T_i}] \sum_{n=1}^{k-1} e^{A_k T_k} \dots e^{A_{n+1} T_{n+1}} (e^{A_n T_n} - I) A_n^{-1} B_n + (e^{A_k T_k} - I) A_k^{-1} B_k.$$

La première égalité de (2.6) représente la solution du point de commutation à partir du point de commutation précédent, suivant la dynamique du mode actif. La deuxième égalité confirme l'appartenance du point de commutation à une surface de commutation. La troisième condition garantit que la trajectoire entre deux points de commutation successifs ne coupe aucune surface de commutation.

Pour trouver le point fixe  $x_{ij}^0 \in S_{ij}$  du cycle limite hybride  $\gamma$ , on résout récursivement l'évolution de la trajectoire du cycle. Le résultat désiré peut être obtenu par la méthode de Poincaré sachant que  $x_{ij} = x_{ij}^0$ . Pour plus de détails sur la démonstration de la proposition 2.2.1, le lecteur peut se référer aux travaux de Gonçalves [32] et Rubensson [62].

### 2.2.5.1 Stabilité du cycle limite hybride

Soit un SDC (1.4). On suppose qu'il existe un cycle limite hybride  $\gamma$  périodique de période  $T$ . La stabilité de ce cycle sera déterminée par la méthode de Poincaré ou Poincaré Maps (voir par exemple [40] pour plus de détails). Il est possible d'analyser la stabilité locale en utilisant des Poincaré Maps. L'idée est de perturber un point de commutation et d'analyser comment la perturbation évolue pendant un cycle de commutation. La trace de la perturbation pendant un cycle est représentée avec une matrice de transition en temps discret. Les valeurs propres de la matrice déterminent si la perturbation diminue après un cycle d'évolution ou non. Ceci indique si le cycle limite est stable ou non.

Considérons une trajectoire entre deux surfaces de commutation successives,  $S_{ij}$  et  $S_{li}$   $\{(i, j), (l, i)\} \in \mathcal{E}_0^2$ , définie par la première égalité de (2.6). La perturbation du point  $x_{jl}$  due à une perturbation sur le point de commutation  $x_{li}$  est donnée par :

$$dx_{ij} = \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_{li}} dx_{li} + \frac{\partial x_{ij}}{\partial T_i} dT_i = e^{A_i T_i} dx_{li} + (A_i x_{li} + B_i) dT_i \quad (2.7)$$

où  $dT_i$  est le petit changement de temps de séjour dans le mode  $i$ .

Par la suite, on introduit la notion de déviation sur un hyperplan de commutation  $S_{ij}$ , due à une perturbation sur le point de commutation  $x_{ij}$  et sur le temps de séjour  $T_i$  dans le mode  $i$  :

$$dS_{ij} = C_{ij} \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_{li}} dx_{li} + C_{ij} \frac{\partial x_{ij}}{\partial T_i} dT_i = C_{ij} e^{A_i T_i} dx_{li} + C_{ij} (A_i x_{ij} + B_i) dT_i \quad (2.8)$$

Les contributions de  $dx_{ij}$  et de  $dT_i$  devraient donner une déviation virtuelle zéro sur la surface de commutation puisque le point de commutation appartient à l'hyperplan de commutation

$$dS_{ij} = 0 \Rightarrow dT_i = -\frac{C_{ij} e^{A_i T_i}}{C_{ij} (A_i x_{ij} + B_i)} dx_{li} \quad (2.9)$$

Ceci nous permet de trouver la trace de la perturbation sur  $x_{ij}$  due à celle de  $x_i$  en combinant les équations (2.7) et (2.9)

$$dx_{ij} = \left( I - \frac{(A_i x_{ij} + B_i) C_{ij}}{C_{ij}(A_i x_{ij} + B_i)} \right) e^{A_i T_i} dx_i \quad (2.10)$$

La stabilité du cycle limite est donc liée à la stabilité de ces points de commutation  $x_{ij}, (i, j) \in \mathcal{E}_0$ . Ces points sont stables si la Jacobienne de l'application "Poincaré" de la relation (2.10) a toutes ses valeurs propres à l'intérieur du cercle unitaire.

**proposition 2.2.2** *Considérons le SDC (2.3)-(2.4). On suppose qu'il existe un cycle limite  $\gamma$ , avec une période de cycle  $T$ , qui est transversal ( $C_{ij}(A_i x_{ij} + B_i) \neq 0$ ) à toutes les surfaces de commutation  $S_{ij}, (i, j) \in \mathcal{E}_0$  aux points respectifs  $x_{ij}$ . Soit  $W_i, i \in \{1, \dots, k\}$  telle que*

$$W_i = \left( I - \frac{(A_i x_{ij} + B_i) C_{ij}}{C_{ij}(A_i x_{ij} + B_i)} \right) e^{A_i T_i}.$$

$\gamma$  est un cycle limite localement stable, si les valeurs propres de la fonction  $W = W_k W_{k-1} \dots W_2 W_1$  sont toutes à l'intérieur du cercle unitaire. Il est instable si au moins une valeur propre de  $W$  est à l'extérieur du cercle unité.

### 2.2.5.2 Un exemple (systèmes à deux bacs )

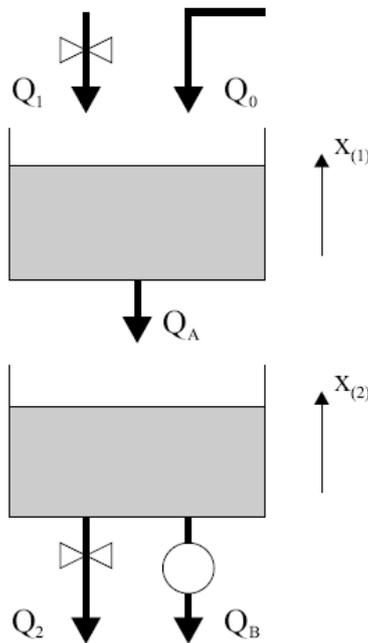


FIG. 2.7 – système à deux bacs

Le système à deux bacs de la figure 2.7 [62] est utilisé pour illustrer l'analyse de stabilité des cycles limites vue dans la paragraphe précédente. Ce système est constitué de deux bacs et deux vannes  $Q_1$  et  $Q_2$ . Dans toute l'analyse on suppose que ces vannes fonctionnent en tout ou rien *on/off*. Le bac 1 est alimenté par un débit constante  $Q_0$  avec le débit  $Q_1$  commandé par la première vanne. La sortie  $Q_A$  du bac 1 alimente le deuxième bac qui a deux sorties, une supposée à débit constant,  $Q_B$ , réglé par une pompe, et une

à débit  $Q_2$  commandé par la deuxième vanne.

Le système est linéarisé autour du point de fonctionnement désiré (2.12), et l'objectif est de garder les deux niveaux des bacs entre deux limites en utilisant une stratégie de commutation en tout ou rien des vannes. Les deux états *on* et *off* par vanne, donnent quatre configurations possibles. Chaque configuration désigne une dynamique différente. Il en résulte quatre modes de fonctionnement représentant les modes discrets du systèmes.

Le système est tel qu'il est instable au point de fonctionnement pour chaque mode. Sans modifier les réglages des débits, les réservoirs seront soit inondés soit vidés. La commutation (ouverture et fermeture des vannes) est basée sur les niveaux de l'eau,  $x_{(1)}$  et  $x_{(2)}$ , dans les réservoirs.  $x = [x_{(1)} \ x_{(2)}]$  représente le vecteur d'état continu du système. Pour chaque état continu initial il y aura un unique mode discret initial associé :

$$\begin{aligned}
 i = 1 : & \text{ off/off} & x_{(1)} \geq 0, \ x_{(2)} < 0 \\
 i = 2 : & \text{ on/off} & x_{(1)} < 0, \ x_{(2)} < 0 \\
 i = 3 : & \text{ off/on} & x_{(1)} \geq 0, \ x_{(2)} \geq 0 \\
 i = 4 : & \text{ on/on} & x_{(1)} < 0, \ x_{(2)} \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

(2.11) indique les modes discrets et les régions de l'espaces d'état où ils sont utilisés.

Les valeurs numériques (2.12) sont utilisées pour les simulations et les fonctions de commutation associées à chaque hyperplan ou surface de commutation sont données en (2.13).

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
 s_{12} &= s_{34} = x(1) + 1 \\
 s_{13} &= s_{23} = -x(2) + 1 \\
 s_{43} &= -x(1) + 1 \\
 s_{31} &= s_{42} = x(2)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dans la figure 2.8, des simulations sont données pour différentes conditions initiales. Les axes correspondent aux niveaux d'eau dans les réservoirs (le niveau du bac 2,  $x_{(2)}$ , sur l'axe des ordonnées et le niveau du bac 1,  $x_{(1)}$ , sur l'axe des abscisses). Les lignes en pointillés correspondent aux surfaces de commutation.

A partir de simulations, il semble raisonnable de supposer qu'il existe un cycle limite stable vers lequel les trajectoires continues du système convergent. Ce cycle limite est périodique et par simulation, on constate qu'il passe par trois surfaces de commutations successives  $S_{12}$ ,  $S_{23}$  et  $S_{31}$ . Dans la section suivante, il sera montré comment trouver une expression de ce cycle.

En simulation et en utilisant un solveur non linéaire basé sur la méthode de Newton-Raphson pour résoudre le problème non linéaire (3.6), et avec les valeurs numériques données en (2.12), on trouve les temps et les points de commutations (2.14) suivants :

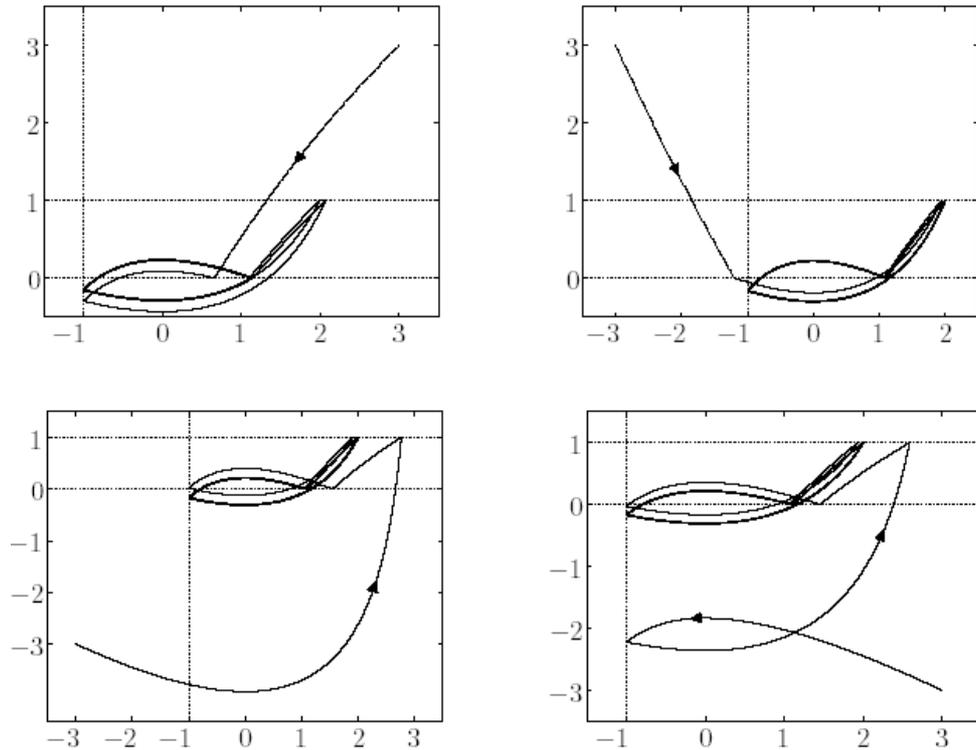


FIG. 2.8 – simulations à partir de différents états initiaux

$$T_1^0 = 0.252; \quad T_2^0 = 1.134; \quad T_3^0 = 1.387$$

$$x_{12}^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.16 \end{bmatrix},$$

$$x_{23}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

$$x_{31}^0 = \begin{bmatrix} 1.11 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par la suite, dans le cas des SDC linéaires par morceaux, la stabilité locale du cycle limite hybride est vérifiée en utilisant la proposition 2.2.2. Les applications  $W_1, W_2$  et  $W_3$  correspondent à des perturbations lors du passage entre les surfaces  $S_{31}, S_{12}$  et  $S_{23}$ . Les Jacobiennes des applications de Poincaré évaluées à partir de (2.10) ont les mêmes valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.11 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On peut donc conclure que le cycle limite défini par les surfaces de commutations successives  $S_{31}, S_{12}$  et  $S_{23}$  et les trajectoires qui les relient, sont localement stables et que le

SDC, avec cette commande, compense toute "petite" perturbation du système.

Avec cette méthode de Poincaré, on peut conclure sur la stabilité locale des points de commutation des systèmes. Or généralement on s'intéresse à la stabilité globale des systèmes ainsi qu'à certaines propriétés : stabilité uniforme ou conditionnelle, Asymptotique ou exponentielle.

Une fois ces propriétés bien définies, il se pose le problème classique de savoir s'il est possible de vérifier ces propriétés sans avoir à calculer explicitement les solutions. Nous utiliserons les fonctions de Lyapunov pour cela.

## 2.3 Stabilité par Lyapunov

Avant de présenter comment on peut analyser la stabilité des systèmes à commutation par la méthode de Lyapunov, il est nécessaire de rappeler quelques définitions préliminaires, quelques concepts et quelques outils sur la stabilité par Lyapunov en continu [40, 68].

### 2.3.1 Méthode directe de Lyapunov

Considérons une fonction  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  (i.e. continûment différentiable). Cette fonction est dite définie positive si elle est nulle en zéro ( $\varphi(0) = 0$ ) et positive ailleurs ( $\varphi(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ ). Elle est dite non bornée si  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Théorème 2.3.1** [68] Soit  $x_e = 0$  (l'origine) un point d'équilibre du système autonome  $\dot{x} = f(x)$ , avec  $x(0) = x_0$ . Soit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble qui contient l'origine. S'il existe une fonction  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que :

$$\begin{aligned} &\bullet V(x) \text{ est définie positive sur } D \\ &\bullet \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0 \text{ (resp. } < 0 \text{), } \forall x \in D \end{aligned} \tag{2.15}$$

alors l'origine est stable (resp. Asymptotiquement stable).

La fonction de Lyapunov  $V$  permet de définir un ensemble de niveaux défini par (voir figure 2.9) :

$$L_C = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq C\} \text{ avec } C \in \mathbb{R}^{+*}. \tag{2.16}$$

Une fois que la trajectoire rentre dans l'un de ces ensembles  $L_C$ , elle doit y rester, et puisque  $\dot{V}(x) \leq 0$  ceci implique que si  $V(x) = C$  à  $t = t_0$ , alors  $V(x(t)) \leq V(x(t_0)) \leq C, \forall t \geq t_0$ .

Pour montrer le théorème 2.3.1, il suffit de montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$

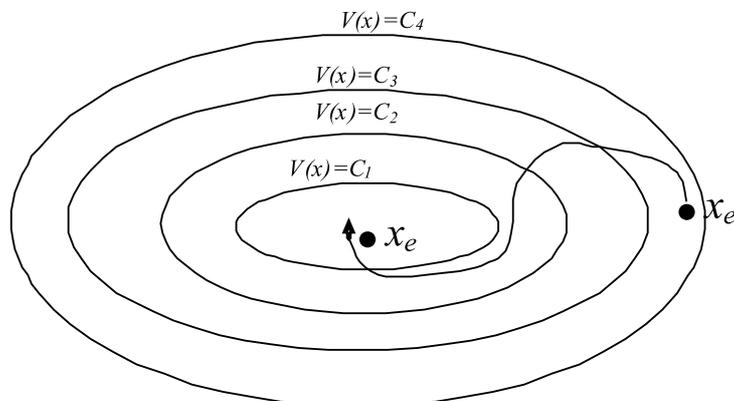


FIG. 2.9 – Ensemble des niveaux  $V(x) = C_1, V(x) = C_2, V(x) = C_3, V(x) = C_4$  ainsi qu'une trajectoire  $x(t)$ .

telle que :  $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$ .

Souvent, la fonction de Lyapunov  $V$  possède une forme quadratique en  $x$  :

$$V(x) = x^T P x$$

avec  $P$  symétrique définie positive ( $P = P^T > 0$ ).

Pour les systèmes linéaires autonomes,

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.17}$$

le théorème 2.3.1 de Lyapunov est équivalent au théorème suivant :

**Théorème 2.3.2** *Le système (2.17) est stable (resp. asymptotiquement stable), si et seulement si  $A$  est Hurwitz (resp. toutes ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives)*

$$\Leftrightarrow \exists P = P^T > 0 / A^T P + P A \leq 0 \text{ (resp. } < 0 \text{)}$$

La puissance du théorème de Lyapunov est un atout dans l'analyse des systèmes, car il permet de conclure sur la stabilité d'un système dynamique grâce à des équations algébriques. Mais, toute la difficulté est de trouver une fonction de Lyapunov  $V(x)$  dans le cas général ou la matrice  $P$  dans le cas linéaire. C'est à partir de ce théorème que l'on formule des LMI (Linear Matrix Inequalities) permettant de trouver les matrices adéquates en utilisant des méthodes d'optimisation pour conclure sur la stabilité mais également sur la robustesse des systèmes dynamiques. Le théorème de Lyapunov est aussi à la base de certaines commandes, citons, par exemple, le sliding mode.

### 2.3.2 Méthode de Lyapunov appliquée au SDC

En plus des difficultés rencontrées dans l'analyse de stabilité des systèmes continus, qui parfois reste très compliquée, les systèmes à commutation imposent des conditions supplémentaires pour conclure sur leur stabilité. Cela vient de l'influence des changements brusques de dynamique et de l'influence des dynamiques discrètes sur les dynamiques continues et vice versa. Les trois classes d'exemples de la figure 2.1 représentent d'une façon intuitive ces influences et les conditions sur l'état du SDC à respecter au moment de la commutation.

Ces conditions supplémentaires à vérifier et à prendre en considération pour les SDC augmentent, d'un côté, la complexité du problème de stabilité, et de l'autre, l'intérêt de l'étude de la stabilité de ces systèmes.

Néanmoins, dans la littérature, il existe plusieurs exemples qui prouvent qu'en général nous ne pouvons pas conclure sur la stabilité du SDC en étudiant séparément les composantes continues.

**Théorème 2.3.3** *(Théorème de stabilité par Lyapunov pour les SDC)*

*Soit  $x_e = 0$  (l'origine) un point d'équilibre du SDC autonome (1.3), avec  $x(0) = x_0$  et*

$\sigma(0) = q_0$ . On suppose qu'il existe un ensemble  $D \subseteq \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^n$  tel que  $(q, x_e) \in D$  pour certains  $q \in \mathcal{Q}$ . S'il existe une fonction  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que :  $\forall q \in \mathcal{Q}$

$$\bullet V(q, x_e) = 0$$

$$\bullet V(q, x) > 0, \forall (q, x) \in D - \{0\}$$

$$\bullet \dot{V}(q, x) = \frac{dV(q, x)}{dt} = \frac{\partial V(q, x)}{\partial x} f_q(x) \leq 0 \text{ (resp. } < 0), \forall (q, x) \in D \quad (2.18)$$

• Pour toute exécution hybride  $e_H = (\tau, S, x)$  partant de  $(q_0, x_0)$ , et tout  $q' \in \mathcal{Q}$ , la séquence  $\{V(q(t_i), x(t_i)) : q(t_i) = q'\}$  est non croissante,

alors l'origine est stable (resp. Asymptotiquement stable).

Cette fonction de Lyapunov  $V(q, x)$  est appelée "Lyapunov-like" (voir figure 2.10).

L'inconvénient de ce théorème est que la séquence doit être évaluée, ce qui oblige à intégrer les champs de vecteurs, donc on perd l'avantage fondamental de la théorie de Lyapunov. De plus, ce n'est pas toujours aisé de dériver une telle fonction de Lyapunov. Toutefois, pour certaines classes de systèmes linéaires en l'état, des méthodes de calcul existent pour dériver ces fonctions [66].

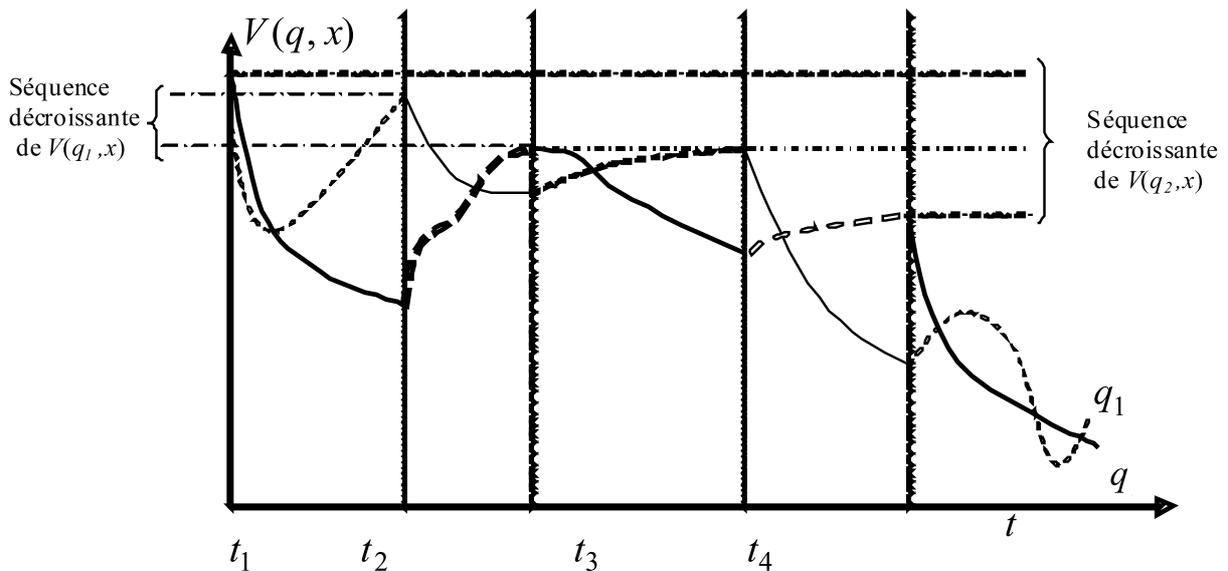


FIG. 2.10 – Fonctions "Lyapunov-Like" d'un SDC formé de deux modes  $q_1$  et  $q_2$

### 2.3.2.1 Fonction de Lyapunov Quadratique Commune (FLQC)

(en anglais : Quadratic Common Lyapunov Function (QCLF))

Les théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 de stabilité par Lyapunov des systèmes continus peuvent avoir des extensions directes qui fournissent des outils de base pour l'étude de la stabilité uniforme des systèmes à commutation (2.1) et (2.2). L'obtention de ces extensions nécessite l'existence d'une fonction de Lyapunov unique et commune à tous les modes du SDC ((2.1) ou (2.2)) qui aura son dérivé négatif le long sa trajectoire hybride  $e_H$  (suivant une exécution acceptée). Ici on s'intéresse à l'obtention de la condition de G.U.A.S (Globalement Uniformément Asymptotiquement Stable) et/ou G.C.A.S (Globalement Conditionnellement Asymptotiquement Stable) du SDC.

**Théorème 2.3.4** Soit  $x_e = 0$  (l'origine) un point d'équilibre du système (2.1), avec  $(x(0) = 0, \sigma(0) = q_0)$ . Soit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble qui contient l'origine. S'il existe une fonction  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que :

$$\begin{aligned} &\bullet V(x) \text{ est définie positive sur } D \\ &\bullet \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_\sigma(x) \leq 0 \text{ (resp. } < 0), \forall x \in D, \forall \sigma \in \mathcal{Q} \end{aligned} \quad (2.19)$$

alors l'origine est globalement uniformément stable (resp. Globalement Uniformément Asymptotiquement stable).

Ce théorème est connu dans le domaine hybride de même que le théorème 2.3.1 en continu. Une fois que la fonction  $V$  du théorème 2.3.4 existe, le SDC (2.1) est convenablement stable avec des commutations arbitraires.

Pour avoir la stabilité du SDC sous commutations arbitraires, trois conditions sont nécessaires :

1. le SDC soit autonome de la forme du (2.1),
2. tout les sous-systèmes sont stables individuellement,
3. l'origine est un point d'équilibre stable à tout les modes.

Alors, il n'est plus nécessaire de faire le contrôle de commutation pour la stabilité. Si non, nous devons trouver la bonne commutation entre les sous-systèmes et nous avons besoin de plus de restriction sur les moments de commutations pour garantir la stabilité du système.

L'existence d'une FLQC est une condition suffisante, mais n'est pas nécessaire pour la stabilité des SDC.

En utilisant la relation avec les inclusions différentielles [42, 49], des auteurs ont exprimés ce problème de stabilité en termes de fonction de Lyapunov quasi-quadratique en reformulant le SDC (2.1) sous forme d'une inclusion différentielle.

**Théorème 2.3.5** [49] L'origine  $x = 0$  de l'inclusion différentielle

$$\dot{x} \in F = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_M\} \quad (2.20)$$

est asymptotiquement stable si et seulement si, il existe une fonction de Lyapunov  $V(x)$  strictement convexe, homogène (du second ordre) et quasi-quadratique :

$$V(x) = x^T P(x)x$$

$$P(x) = P^T(x) = P(\tau x), \quad \forall x \neq 0 \text{ et } \tau \neq 0$$

dont la dérivée satisfait l'inégalité :

$$\dot{V} \leq -\gamma \|x\|^2, \quad \gamma > 0.$$

Autrement dit, l'origine de l'inclusion différentielle linéaire (2.20) dans  $\mathbb{R}^n$  est asymptotiquement stable, si et seulement si, il existe un nombre  $m \geq n$ , une matrice  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^n$  de rang  $n$  et  $M$  matrices

$$\Gamma_s = (\gamma_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \forall k = \{1, \dots, M\},$$

à diagonale dominante négatives, tels que la relation

$$A_k^T \mathcal{L} = \mathcal{L} \Gamma_k^T, \quad \forall k = \{1, \dots, M\}$$

soit vérifiée.

Ceci implique que la stabilité des systèmes à commutation est liée à l'existence d'une fonction de Lyapunov commune pour l'ensemble des sous-systèmes. D'un point de vue pratique, la recherche numérique ou analytique d'une telle fonction  $V(x) = x^T P(x)x$ , ou aussi d'une matrice  $\mathcal{L}$ , n'est pas aisée. Cette difficulté à obliger les auteurs à limiter leurs recherches à des fonction de Lyapunov quadratiques de la forme

$$V(x) = x^T P x,$$

avec  $P$  une matrice constante.

Une condition suffisante de stabilité des SDC linéaires de la forme (2.2) est l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique.

L'existence d'une telle fonction pour le système (2.2) peut être exprimée en termes d'inégalités matricielles linéaires LMI (Linear Matrix Inequality - LMI ) [8]

$$A_q^T P + P A_q < 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q}$$

dont la solution peut être trouvée par des algorithmes d'optimisation convexe.

**Théorème 2.3.6** *Considérons le système (2.2), S'il existe une matrice  $P$ , S.D.P ( $P = P^T > 0$ ), telle que*

$$A_q^T P + P A_q \leq 0 \quad (\text{resp. } < 0), \quad \forall q \in \mathcal{Q}, \quad (2.21)$$

*alors l'origine est globalement stable (resp. globalement exponentiellement stable) à l'origine et la fonction  $V(x) = x^T P x$  est une fonction de Lyapunov de ce système.*

L'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune peut, une fois trouvée, être utilisée dans la stabilisation des SDC. Cette existence se traduit par une stabilité ou une stabilisation quadratique.

### 2.3.3 Conclusion

Dans ce chapitre différents critères et problématiques de stabilité et de stabilisation rencontrés dans l'étude des SDC ont été présentés. Dans le chapitre suivant, de nouvelles méthodes de synthèse de commandes de ces systèmes sont présentées dont l'une s'appuie sur la fonction de Lyapunov quadratique commune des SDC linéaires affines en l'état.

# Chapitre 3

## Commande des SDC

### 3.1 Introduction à la commande

Dernièrement, les progrès des logiciels et des outils informatiques ont apporté beaucoup de souplesse et d'efficacité pour la simulation des systèmes complexes. Les logiciels de simulation peuvent apporter une aide non négligeable à l'utilisateur qui souhaite décrire et synthétiser la commande d'un système physique qui l'intéresse, dans la représentation (langage, schéma, ...) à laquelle il est habitué quelque soit le domaine d'utilisation (physique, chimie, électronique, électrotechnique ou nucléaire par exemple). De nombreux logiciels sont dédiés à une classe particulière de systèmes, on peut citer par exemple Psim en électronique de puissance, ANSYS en mécanique, ... Certains logiciels de simulations intègrent des bibliothèques de composants de base et des modèles élémentaires du domaine comme les vannes, tuyaux, diodes, thyristors, divers semi-conducteurs en électronique de puissance, ... et leur utilisation permet de gagner un temps non négligeable dans l'approfondissement de la connaissance du système et dans la conception de sa commande.

Malgré ses avantages, il est évident que la simulation, basée sur un modèle qui est une abstraction de la réalité, est une approche qui ne permet pas d'étudier tous les cas possibles et comporte un risque d'erreur important dans l'interprétation des résultats.

Par conséquent, d'autres méthodes plus formelles sont nécessaires en vue de caractériser, sans calculs explicites, tous les comportements possibles d'un système donné, commandé ou non. De nombreuses méthodes ont été développées par les automaticiens et les informaticiens.

Dans les systèmes dynamiques à commutation, trois voies d'études sont plus particulièrement étudiées [91]. La première s'intéresse à la vérification de propriétés classiques des systèmes à événements discrets telles que l'atteignabilité des états, le déterminisme et le blocage du système, à partir de modèles comme les automates hybrides ou différents types de réseaux de Petri. Un problème fondamental de la vérification des SDC est celui du calcul de l'espace d'état atteignable à partir d'un état hybride initial. La deuxième s'intéresse à la stabilité des systèmes au sens continu, et se base sur des extensions de la théorie de Lyapunov car les notions classiques de stabilité des systèmes continus et les méthodes de Lyapunov ne sont pas directement applicables aux SDC. Et la troisième voie s'intéresse à l'étude de la trajectoire en se basant sur l'aspect géométrique des dynamiques du système.

De manière complémentaire aux démarches d'analyse de stabilité vues dans les précédents chapitre 2 et 3, l'objectif de la synthèse de commande est de développer un contrôleur garantissant que l'exécution  $e_H$  du SDC en boucle fermée est non-bloquante, déterministe, n'entre dans des régions interdites de l'espace d'état hybride (respecte des contraintes de fonctionnement) et est stable dans une région de fonctionnement désirée. Contrairement au cas des systèmes continus ou à événements discrets où les problèmes de conception de commande sont mieux connus et maîtrisés, la commande des SDC est encore un problème ouvert de recherche. Ainsi, la formalisation du problème de commande des systèmes à commutation en lui-même reste une formulation spécifique à chaque auteur ou groupe d'auteurs et il est difficile de dégager une formulation unifiée de ce problème. De même les notions de commandabilité et d'atteignabilité des SDC ont des définitions différentes selon les travaux.

Différentes méthodes de commande existent pour traiter différents problèmes de commande de certaines classes de systèmes dynamiques hybrides. Il n'est pas possible d'être exhaustif dans ce domaine donc nous citerons celles qui sont présentées, entre autre, dans [91] :

- Commande par modèle moyen en utilisant des approches approximatives pour ramener le problème de commande des systèmes dynamiques hybride à un problème de commande continue.
- Commande séquentielle permettant de piloter l'exécution d'un automate hybride d'une région initiale de l'espace d'état hybride jusqu'à une région finale désirée tout en respectant des contraintes exprimées en terme de valeurs limites sur les variables continues, de séquençement d'états discrets,...
- Commande optimale des systèmes hybrides à base de modèles continus commutant. Cette approche est une extension du principe du maximum de Pontryaguine.
- Commande basée sur la théorie de Lyapunov en vue de la régulation autour d'un point de fonctionnement pris comme origine du système inter-connecté ; la démarche proposée consiste à concevoir des régulateurs locaux dans un premier temps pour chaque sous-système et à les adapter ensuite pour prendre en compte les interactions au niveau du système global.
- Commande prédictive des systèmes hybrides non linéaires [39].

En résumé, l'analyse et la commande des SDC s'appuient sur un ensemble de méthodes et de concepts qu'il faut adapter à la classe particulière de systèmes et aux objectifs concernés. Cette non unicité des concepts et des solutions s'explique par le fait que les SDC font partie des systèmes complexes (non linéaires et/ou non continus) et qu'il n'est pas envisageable de définir une théorie de la commande unifiée comparable à celle des systèmes linéaires à dynamique continue ou à des systèmes à événements discrets.

Des progrès importants ont été réalisés au niveau de l'analyse de stabilité et de la synthèse de commande pour des familles spécifiques des systèmes dynamiques hybrides (systèmes linéaires par morceaux, systèmes à commutation, ...). Mais la synthèse de lois

de commande avec ou sans contraintes reste un domaine largement ouvert (robustesse, performances, retard, saturations, etc) [42], [53], [17] et [46].

Plusieurs résultats importants de stabilité et de stabilisation des systèmes dynamiques à commutation sont présentés dans [7], où les auteurs ont clarifié les propriétés de stabilité (stabilité totale, stabilité uniforme et stabilité conditionnelle) ainsi que les notions et outils classiques de ce domaine (solution hybride, temps de séjour, fonction de Lyapunov commune, fonctions multiples de Lyapunov,...). Puis des méthodes de stabilisation sont données dans le cas linéaire et non linéaire (stabilisation uniforme).

Dans ce chapitre, deux méthodes différentes de commande stabilisante sont présentées : une méthode basée sur les propriétés géométriques des champs de vecteurs des sous-systèmes du SDC [64] et [65], et une autre qui utilise la théorie de Lyapunov [63] .

## 3.2 Méthode géométrique de stabilisation

Dans cette partie, nous proposons une nouvelle méthode de synthèse de commande des systèmes dynamiques à commutation dont l'espace d'état à valeurs réelles est de dimension deux de même que l'espace d'état discret. L'objectif est de développer un algorithme permettant de commander le système d'un état initial vers un cycle limite hybride déterminé de manière optimale autour d'un état de fonctionnement du système et qui respecte des contraintes physiques de comportement. Pour cela une condition nécessaire et suffisante d'existence et de stabilité d'un cycle limite hybride composé d'une séquence de deux modes de fonctionnement est présentée. La méthode de commande stabilisante pour atteindre ce cycle limite hybride et y rester est détaillée. La méthode proposée est illustrée sur deux convertisseurs d'énergie "Buck" et "Buck-Boost", alimentant une charge résistive, qui sont deux systèmes linéaires très utilisés en électronique et électronique de puissance, puis sur un système non-linéaire dans  $\mathbb{R}^2$ . Ensuite, l'extension à  $\mathbb{R}^n$  est étudiée et illustrée sur un SDC non linéaire dans  $\mathbb{R}^3$  [64, 65].

### 3.2.1 Introduction

Les systèmes dynamiques à commutations (SDC) constituent une classe importante de systèmes dynamiques hybrides dans lesquels plusieurs modes de fonctionnement se succèdent de manière autonome ou commandée. Il s'agit de systèmes dynamiques classiquement constitués d'un processus dans lequel peuvent avoir lieu des commutations autonomes (provoquées par des diodes, des chocs, ...) ou contrôlée (provoquées par des transistors, relais ...). La commande est discrète ou séquentielle.

Une famille très étudiée de systèmes à commutation et dont la loi de commande est difficile à synthétiser à cause des évolutions rapides du système est la famille des convertisseurs d'énergie électrique. La méthode la plus utilisée dans l'industrie pour ces systèmes est la modulation de largeur d'impulsion (MLI) connue par sa simplicité de mise en oeuvre (comparaison du signal de référence à une porteuse triangulaire). En contre-partie, cette méthode manque de fiabilité dans certains cas. Par exemple, dans [6] les auteurs illustrent l'instabilité du convertisseur multicellulaire (où multiniveaux) à nombre non premier de cellules, commandé par MLI et propose une commande directe et rapide basée sur une approche géométrique en respectant un cycle limite de commutation optimal à fréquence de commutation imposée par les caractéristiques des semi-conducteurs et qui peut être synthétisée pour un nombre quelconque de cellules. Une autre loi de commande est proposée pour ce même convertisseur dans [57]. Elle est basée sur des surfaces de commutation calculées par une méthode issue de Lyapunov qui force l'énergie du système à décroître continûment dans le temps.

Dans le travail présenté ici, on s'intéresse à développer un algorithme permettant de commander le SDC (1.3) d'un état initial vers un cycle limite hybride déterminé de manière optimale autour d'un état de fonctionnement désiré du système et qui respecte des contraintes physiques de comportement définies par des hypersurfaces (de dimension  $n - 1$  si le SDC est de dimension  $n$ ) ou des contraintes de temps (durée minimum entre deux commutations, ...). Les hypersurfaces pourront être aussi des surfaces de commutation pour que les contraintes soient respectées. Deux étapes sont nécessaires : tout d'abord, trouver le cycle limite hybride optimal stable autour du point de fonctionnement désiré

$x_d$  (en terme de respect des contraintes et de commandabilité) puis trouver une séquence de commande hybride optimale (en temps, énergie, ...) qui permette d'atteindre ce cycle. Des solutions exactes ont été proposées pour effectuer la deuxième étape dans le cas de systèmes du génie des procédés à dynamiques assez lentes [46]. La méthode présentée en [47] pour traiter cette étape est applicable à une classe de systèmes dynamiques à commutation dont l'espace d'état à valeurs réelles est de dimension deux. La commande est donc constituée d'une séquence temporisée de commutations entre plusieurs champs de vecteurs. Cette séquence sera aussi appelée séquence hybride, elle est composée d'une séquence de modes discrets associés chacun à une durée de séjour. Pour que cette commande soit réalisable en pratique, il est nécessaire que le système soit commandable de l'état initial vers le cycle limite hybride final et qu'un nombre fini d'événements discrets ait lieu dans un temps fini (système non zéno).

L'étude de commandabilité consiste à montrer qu'il existe au moins une séquence de commutation hybride qui permet d'atteindre la région finale depuis l'état initial. Elle est réalisée analytiquement par inférence arrière dans l'espace d'état continu [46], [47].

### 3.2.2 Stabilité et cycle limite hybride

**proposition 3.2.1** *la classe des systèmes considérés dans cette partie est composée des systèmes dynamiques à commutations de type (1.3) autonomes ou commandées avec mémoire (les conditions de commutations dépendent de l'état présent, des états précédents et du point de fonctionnement désiré  $x_d$ , c'est-à-dire que l'espace d'état à valeurs réelles n'est pas partitionné) dont l'espace d'état à valeurs réelles est de dimension deux de même que l'espace d'état discret et dont les sous-systèmes correspondant aux deux modes de fonctionnement ont des représentations d'état explicites continues linéaires ou non linéaires.*

Notons qu'il est possible de rendre stable un système dynamique à commutations composé de sous-systèmes instables et inversement [42].

**proposition 3.2.2** *La classe des SDC considérée dans les théorèmes 3.2.5 et 3.2.6 est formée par la classe des systèmes définie dans la proposition 3.2.1 étendue à  $\mathbb{R}^n$ .*

On considère le SDC temps invariant (les champs de vecteur ne dépendent pas explicitement du temps  $t$ )  $\dot{x} = f(x, q_i)$  avec  $i = \{1, 2\}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Il est composé de deux modes de fonctionnement,  $q_1$  et  $q_2$ , à champs de vecteurs supposés lipschitziens dans  $\mathbb{R}^n$ . La méthode présentée consiste à synthétiser une loi de commutation ou fonction de transition qui stabilise le SDC sur un cycle limite hybride autour du point de fonctionnement désiré  $x_d$ . Cette loi de commutation ne fait donc pas partie du modèle du SDC a priori comme on peut le voir dans certaines références (par exemple [32] ou [62]).

L'étude de la stabilité d'un SDC consiste à déterminer s'il existe au moins un cycle limite hybride stable autour du point de fonctionnement désiré  $x_d$ . La méthode la plus utilisée pour l'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes en général, y compris les systèmes à commutation, est celle de Lyapunov [42], [10], [32], [12], [62]. Par contre la construction de ces fonctions est et a toujours été une tâche difficile surtout dans le cas des systèmes non linéaires. Des résultats de construction des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux pour des systèmes linéaires par morceaux ont été proposés, par

exemple, dans [37] et [56]. Dans sa thèse Gonçalves [32] définit des conditions d'existence et de stabilité des cycles limites pour des systèmes linéaires par morceaux (PLS) à partir de surfaces de commutation connues.

L'approche présentée ici concerne la synthèse de commande donc les surfaces de commutation ne sont pas connues a priori. Une nouvelle méthode, issue de l'étude des propriétés géométriques des champs de vecteurs est présentée dans cette partie. Cette méthode est applicable à tous les SDC de la classe définie dans la proposition 3.2.1 et est étendue à  $\mathbb{R}^n$ .

L'état d'un système dynamique à commutations est hybride (continu, discret) :  $(x, q_j) \in \mathbb{R}^n \times L$  avec  $L = \{q_j, j \in \{1, 2\}\}$ . On note  $(x_0, f(x, q_i), \tau_{q_i})$  avec  $i \in \{1, 2\}$  la solution de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x, q_i)$  après un temps écoulé  $\tau_{q_i}$  et avec la condition initiale,  $x(0) = x_0$ . C'est le point de l'espace d'état à valeurs réelles atteint par le système au bout d'une durée  $\tau_{q_i}$  avec la dynamique du mode de fonctionnement  $q_i$  et depuis l'état initial  $x_0$ .

Supposons que chacun des deux modes de fonctionnement,  $q_1$  et  $q_2$  ont un point d'équilibre  $x_{e1}$  et  $x_{e2}$  (égaux ou différents) et qu'ils soient globalement asymptotiquement stables, i.e. que, quelque soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $i \in \{1, 2\}$ ,  $\lim_{\tau_{q_i} \rightarrow \infty} (x_0, f(x, q_i), \tau_{q_i}) = x_{ei}$ . Si  $x_d = x_{e1}$  ou  $x_d = x_{e2}$  alors le point de fonctionnement désiré pourra être atteint exactement, donc  $x_d$  sera un point d'équilibre pour le SDC. Sinon, s'il existe, un cycle limite hybride s'établit autour de  $x_d$ .

**Définition 3.2.1** Soient  $x_{c1}$  et  $x_{c2}$  deux points de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $x_{c1} \neq x_{c2}$ .  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  est le cycle limite hybride du SDC  $\dot{x} = f(x, q_i)$ , avec  $i \in \{1, 2\}$ , entre les points de commutation  $x_{c1}$  et  $x_{c2}$ , si et seulement si, il existe  $(\tau_{c1}, \tau_{c2}) \in \mathbb{R}^{+*2}$  tel que :  $x_{c1} = (x_{c2}, f(x, q_1), \tau_{c1})$  et  $x_{c2} = (x_{c1}, f(x, q_2), \tau_{c2})$ . On peut écrire :  $CC(x_{c1}, x_{c2}) = \{(x_{c2}, f(x, q_1), \tau_{q_1}) / \tau_{q_1} \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } 0 \leq \tau_{q_1} \leq \tau_{c1}\} \cup \{(x_{c1}, f(x, q_2), \tau_{q_2}) / \tau_{q_2} \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } 0 \leq \tau_{q_2} \leq \tau_{c2}\}$ .

Le cycle  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  est unimodal [62] car il ne contient que deux commutations entre les deux modes de fonctionnement.

**Définition 3.2.2** Un lacet est défini par une application continue sur  $[a, b]$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \rightarrow \gamma(t)$  telle que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Un cycle limite hybride tel qu'il existe au moins un point  $x \in CC(x_{c1}, x_{c2})$  tel que  $f(x, q_1) \neq -f(x, q_2)$  est un lacet dans  $\mathbb{R}^n$ .

Comme  $x_{c1} \neq x_{c2}$ , un tel cycle limite hybride est non dégénéré en un point.

Si  $\forall x \in CC(x_{c1}, x_{c2}), f(x, q_1) = -f(x, q_2)$ , le cycle limite hybride est composé de deux trajectoires opposées et se réduit à un arc de courbe, la trajectoire effectuant un aller-retour entre les deux points de commutation, et  $\tau_{c1} = \tau_{c2}$ . Un exemple de cycle limite hybride pour lequel il existe au moins un point  $x \in CC(x_{c1}, x_{c2})$  tel que  $f(x, q_1) \neq -f(x, q_2)$  est donné figure 3.2.

Remarquons qu'un cycle limite hybride est une trajectoire fermée composée de deux dynamiques, contrairement à une orbite périodique dans l'espace d'état qui est générée par une seule dynamique continue (une seule représentation d'état temps invariant  $\dot{x} = f(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ).

Une trajectoire du SDC depuis un état hybride initial  $(x_0, q_i)$  avec  $i \in \{1, 2\}$  jusqu'à un état hybride  $(x_c, q_k)$  avec  $k \in \{1, 2\}$  appartenant au cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  est obtenue par commutations entre deux champs de vecteurs  $f(x, q_i)$  avec  $i \in \{1, 2\}$  selon une séquence de phases (modes),  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n_s}\}$  et une trajectoire temporisée  $\tau = \{\tau_{s_1}, \tau_{s_2}, \dots, \tau_{s_{n_s}}\}$ .  $n_s$  est la longueur de la séquence  $S$  ou le nombre de commutations dans la séquence de commande  $S$ .  $f(x, q_{s_k})$ , avec  $1 \leq s_k \leq n_s$ , est le champ de vecteurs actif pendant le  $k^{\text{ième}}$  mode  $q_{s_k}$  de la séquence  $S$  pendant un temps  $\tau_{s_k}$  appelé temps de séjour dans le mode  $q_{s_k} \in \{q_1, q_2\}$ . La trajectoire est donc définie, par la solution  $\phi_c(t)$ , de la manière suivante :

$$\phi_c(t) = x_0 \xrightarrow{\phi_{q_{s_1}}(t)} (x_0, f(x, q_{s_1}), \tau_{s_1}) \xrightarrow{\phi_{q_{s_2}}(t)} (x_1, f(x, q_{s_2}), \tau_{s_2}) \xrightarrow{\phi_{q_{s_3}}(t)} (x_2, f(x, q_{s_3}), \tau_{s_3}) \cdots \xrightarrow{\phi_{q_{s_{n_s}}}(t)} x_c = (x_{c-1}, f(x, q_{s_{n_s}}), \tau_{s_{n_s}}), x_c \in CC(x_{c1}, x_{c2}).$$

Cette trajectoire continue est composée d'une succession de trajectoires continues ayant des dynamiques différentes. Il y a donc discontinuité du champ de vecteur aux instants de commutation.

La durée totale pour atteindre le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  est donc :  $t_c = \tau_{s_1} + \tau_{s_2} + \dots + \tau_{s_{n_s}}$ .

**Définition 3.2.3** *L'intérieur du lacet  $L_\gamma$  défini par l'application continue  $\gamma$  est l'union d'ouverts bornés délimités par ce lacet. Il est noté  $Int(L_\gamma)$ . Un exemple dans lequel l'intérieur du lacet est formé d'un seul ouvert borné, est donné figure 3.1.*

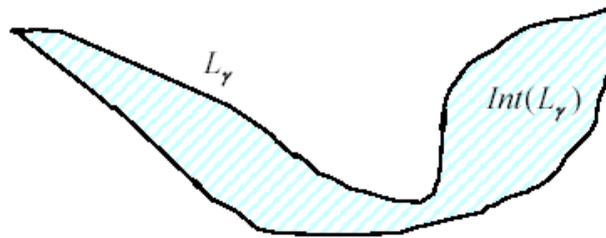


FIG. 3.1 – Intérieur du lacet  $L_\gamma$ .

**Remarque 3.2.1** *A l'intérieur d'un cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  qui ne contient aucun des points d'équilibre des champs de vecteurs  $f(x, q_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , il existe une infinité de cycles limites hybrides.*

**Démonstration** : Un cycle limite hybride est formé par les deux trajectoires de champs  $f(x, q_1)$  et  $f(x, q_2)$  passant par  $x_{c1}$  et  $x_{c2}$ . En utilisant le fait que ces champs sont de classe  $C^1$ , on peut dire qu'au voisinage de ces deux trajectoires on a une infinité de trajectoires qui prennent les mêmes formes et, par conséquent, forment une infinité de cycles limites hybrides dans  $Int(CC(x_{c1}, x_{c2}))$ .

Les résultats suivants de cette section sont énoncés et démontrés dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 3.2.4**  $E = \{z \in \mathbb{R}^2 / \det(f(z, q_1), f(z, q_2)) = 0 \text{ et } \langle f(z, q_1) | f(z, q_2) \rangle < 0\}$  est l'ensemble de points pour lesquels les champs de vecteurs  $f(x, q_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  sont colinéaires et de sens opposés.

Nous noterons  $\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2})) \cup CC(x_{c1}, x_{c2})$  de la manière suivante :  $\overline{\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))}$ .

**Théorème 3.2.1** *Considérons le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  de  $\mathbb{R}^2$  avec  $x_{c1} \neq x_{c2}$  et tel qu'il existe au moins un point  $x \in CC(x_{c1}, x_{c2})$  tel que  $f(x, q_1) \neq -f(x, q_2)$ . Si son intérieur,  $\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))$ , ne contient aucun des points d'équilibre des deux modes de fonctionnement  $q_1$  et  $q_2$ , il existe un ensemble non vide de points  $z$  de  $\mathbb{R}^2$ , tels que  $z \in E \cap \overline{\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))}$ . Autrement dit,  $E \cap \overline{\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))} \neq \emptyset$ .*

**Démonstration :** Considérons la fonction  $\varphi(t) = \det(f(z(t), q_1), f(z(t), q_2))$  avec  $z(t) = (x_{c2}, f(x, q_1), t)$  et  $0 \leq t \leq \tau_{c1}$ .  $\varphi$  est continue puisque les deux champs de vecteurs sont continus dans la classe de systèmes qui nous intéresse et que, si  $t \mapsto [f(z(t), q_1), f(z(t), q_2)]$  est une fonction de classe  $C^k$  à valeurs dans les matrices carrées d'ordre 2, alors  $\varphi : t \mapsto \det([f(z(t), q_1), f(z(t), q_2)])$  est également de classe  $C^k$ .

On peut raisonner de la façon suivante. Dans le cycle, on fixe une partie de trajectoire de  $f(\cdot, q_1)$  définie par  $A = \{(x_{c2}, f(x, q_1), t) \text{ avec } 0 \leq t \leq \tau_{c1}\}$ . Ensuite on trace toutes les portions de trajectoires de  $f(\cdot, q_2)$  qui démarrent de chaque point de  $A$  et qui sont à l'intérieur du cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ . Comme deux trajectoires du même champ de vecteurs ne se coupent jamais, on a donc une famille de cycles qui sont emboîtés l'un à l'intérieur de l'autre. On a donc des ensembles non vides de  $\overline{\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))}$  qui sont emboîtés l'un à l'intérieur de l'autre et sont ordonnés par inclusion. D'après le lemme de Zorn [92] (tout ensemble ordonné inductif non vide admet au moins un élément minimal), cette famille admet un élément minimal qui ne peut pas être un cycle, puisqu'à l'intérieur d'un cycle on peut toujours trouver un autre cycle (continuité des deux champs), mais un point,  $z$ . L'intersection entre la trajectoire fixée  $\{(x_{c2}, f(x, q_1), t) \text{ avec } 0 \leq t \leq \tau_{c1}\}$  et la trajectoire de  $f(\cdot, q_2)$  qui passe par  $z$  est réduite à ce point  $z$ , donc  $\det(f(z, q_1), f(z, q_2)) = 0$ . De plus,  $\langle f(z, q_1) | f(z, q_2) \rangle > 0$  autour de  $z$  signifierait qu'il n'y a pas de cycle autour de  $z$  ce qui est en contradiction avec le fait que c'est l'élément minimal, donc  $\langle f(z, q_1) | f(z, q_2) \rangle < 0$ . La figure 3.2 illustre le cas où  $\varphi(0)\varphi(\tau_{c1}) > 0$ .

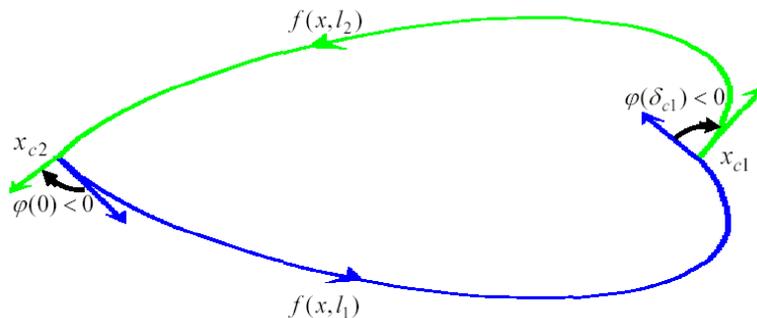


FIG. 3.2 – Exemple de cycle limite hybride d'un SDC du second ordre à deux modes de fonctionnement : cas où  $\varphi(0)\varphi(\tau_{c1}) > 0$ .

**Remarque 3.2.2** Si  $\varphi(0) < 0$  et  $\varphi(\tau_{c1}) > 0$ , la démonstration est beaucoup plus simple. Dans ce cas, la continuité de la fonction  $\varphi(t)$  implique qu'il existe un point  $z(t_0)$  avec  $0 \leq t_0 \leq \tau_{c1}$  tel que  $\varphi(t_0) = 0$ . Ce cas est illustré sur la figure 3.3.

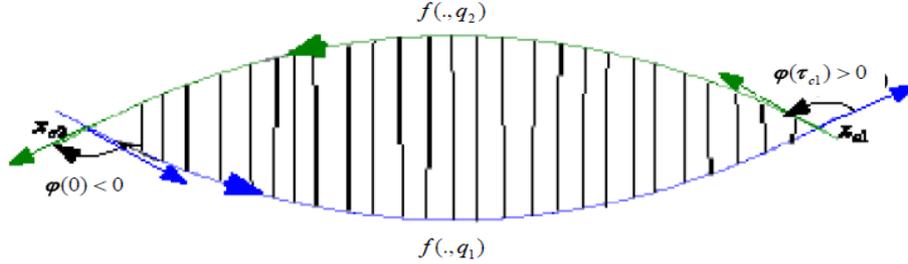


FIG. 3.3 – Exemple de cycle limite hybride d'un SDC du second ordre à deux modes de fonctionnement. Cas où  $\varphi(0) < 0$  et  $\varphi(\tau_{c1}) > 0$ . La partie hachurée est l'intérieur du cycle,  $Int(CC(x_{c1}, x_{c2}))$ .

**Théorème 3.2.2** Soit  $C_i(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, i \in \{1, 2\}$ , les représentations paramétriques des trajectoires respectives des champs de vecteurs  $f(., q_1)$  et  $f(., q_2)$ . On dit que  $C_1$  et  $C_2$  sont transverses en un point  $z$ , si et seulement si les mêmes premières différentielles différentes de  $C_1$  et  $C_2$  en ce point sont les différentielles impaires.

**Démonstration** : Soit  $C_1(\mathbb{R})$  et  $C_2(\mathbb{R})$  les courbes paramétrées par  $t$  décrivant les trajectoires solutions des champs de vecteurs respectivement  $f(., q_1)$  et  $f(., q_2)$ . Soit  $z \in \mathbb{R}^2$  un point de passage des deux courbes  $C_1$  et  $C_2$ . Avec un changement d'origine en  $z$  (ceci en temps et de l'espace), et au voisinage de cette nouvelle origine on peut écrire :

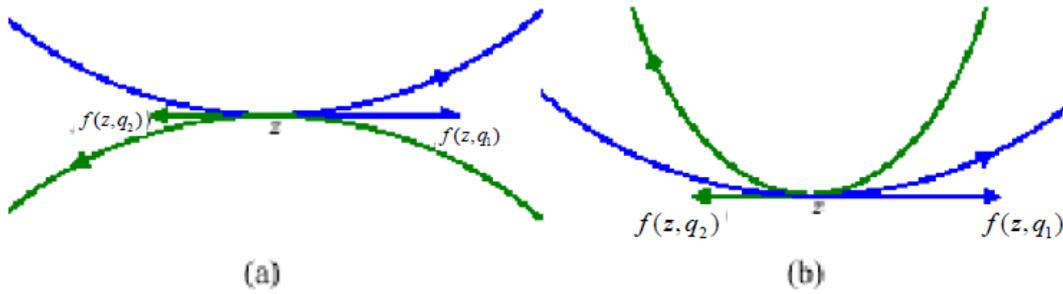
$$\begin{cases} C_1(0) = C_2(0) = z, \\ C_1(t) = z + tC_1'(0) + \frac{t^2}{2}C_1''(0) + \frac{t^3}{6}C_1'''(0) + \dots \\ C_2(t) = z + tC_2'(0) + \frac{t^2}{2}C_2''(0) + \frac{t^3}{6}C_2'''(0) + \dots \end{cases} \quad (3.1)$$

$$C_1(t) - C_2(t) = t(C_1'(0) - C_2'(0)) + \frac{t^2}{2}(C_1''(0) - C_2''(0)) + \frac{t^3}{6}(C_1'''(0) - C_2'''(0)) + \dots$$

D'où  $C_1(t) - C_2(t)$  change de signe quand les premières coefficients non nulles sont ceux de  $t^n$ , avec  $n$  impaires. Donc le point  $z$  est un point transverse des deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  si et seulement si les premières différentielles différentes de  $C_1(t)$  et  $C_2(t)$  sont les différentielles impaires.

**Théorème 3.2.3** Pour tout point  $z \in E \neq \emptyset$  tel que les trajectoires issus des champs de vecteurs  $f(., q_1)$  et  $f(., q_2)$  ne sont pas transverses (pour plus de détails sur cette condition le lecteur peut se référer à [79]) en ce point, il existe un cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  tel que  $z \in Int(CC(x_{c1}, x_{c2})) \cup CC(x_{c1}, x_{c2})$  i.e.  $z \in Int(CC(x_{c1}, x_{c2}))$ .

**Démonstration** : Pour  $z \in E$ , on a  $f(z, q_1) = \alpha f(z, q_2)$  avec  $\alpha < 0$ . La figures 3.4 montrent, dans  $\mathbb{R}^2$ , les deux formes possibles, (a) et (b), de trajectoires non transverses en  $z$  solutions de  $f(., q_1)$  et  $f(., q_2)$  qui passent par ce point,  $z$ , et en son voisinage. Tout

FIG. 3.4 – trajectoires non transverses en  $z \in E$  de  $f(., q_1)$  et  $f(., q_2)$ 

point de  $f(., q_1)$  ou  $f(., q_2)$  est un point ordinaire (pas de point d'inflexion, ni de point de rebroussement).

Sachant que les deux champs de vecteurs  $f(z, q_1)$  et  $f(z, q_2)$  sont continus, il s'ensuit que les trajectoires issues de ces deux champs dans l'espace d'état ont une des deux formes, (a) et (b), données par la figures 3.5 dans un voisinage de  $z$ . Donc autour du point  $z$ , s'il

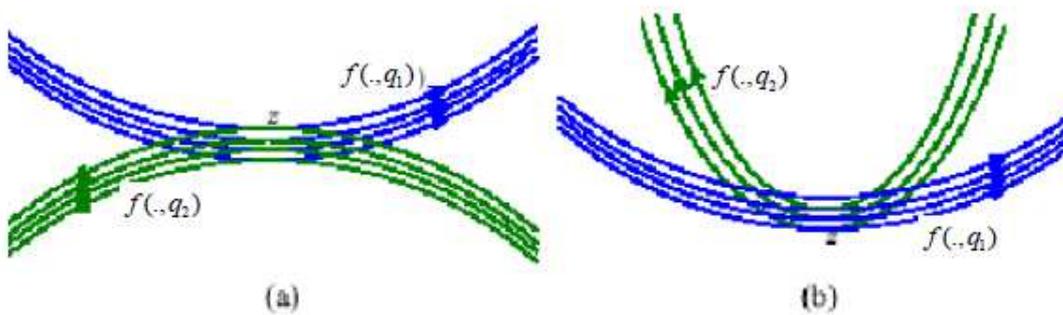


FIG. 3.5 – Motivation géométrique du théorème 3.2.3

Dans le cas où les trajectoires solutions de  $f(., q_1)$  et  $f(., q_2)$  sont transverses en  $z \in E$ , figure 3.6, on ne peut pas construire un cycle limite hybride autour de  $z$ . On peut, facilement, et à partir de la figure 3.6, (a) et (b), vérifier qu'il n'existe pas un cycle limite hybride avec un temps d'exécution infiniment petit et qui contient ce point  $z$ .

En effet,  $z \in E \implies \det(C'_1(0), C'_2(0)) = 0$ . Soit  $k = \langle C'_1(0) \rangle^\perp$  (de même direction que  $C'_1(0)$ ). A partir des équations 3.1 on a :

$$\begin{cases} \langle C_1(t), k \rangle = \frac{t^2}{2} \langle C''_1(0), k \rangle + \frac{t^3}{6} \langle C'''_1(0), k \rangle + \dots \\ \langle C_2(t), k \rangle = \frac{t^2}{2} \langle C''_2(0), k \rangle + \frac{t^3}{6} \langle C'''_2(0), k \rangle + \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

Donc, si  $\langle C''_1(0), k \rangle \neq \langle C''_2(0), k \rangle$ , c'est les cas de figures 3.5, un cycle limite hybride existe autour du point  $z$ . Sinon, et  $\langle C'''_1(0), k \rangle \neq \langle C'''_2(0), k \rangle$ , le cas de la figure 3.6 aura lieu, et un cycle limite hybride ne peut exister.

On poursuivant le même raisonnement, on peut conclure que, pour qu'un cycle limite hybride existe autour d'un point de  $E$ , il faut que les premières différentielles différentes des solutions de deux champs de vecteurs  $f(., q_1)$  et  $f(., q_2)$  en ce point soient les différentielles paires.

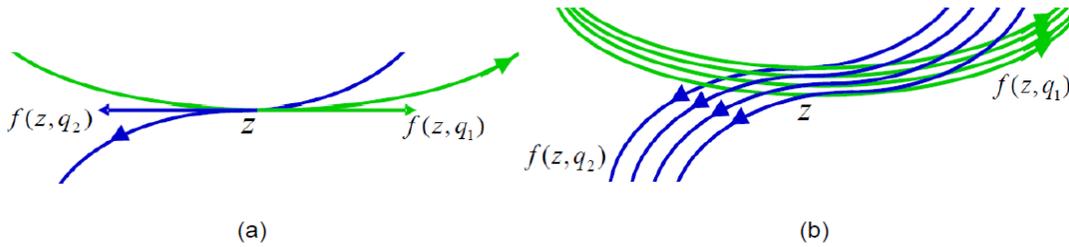


FIG. 3.6 – trajectoires transverses en  $z \in E$  de  $f(\cdot, q_1)$  et  $f(\cdot, q_2)$

Dans la suite, et sans perdre de généralité sur la définition de l'ensemble  $E$ , on suppose que tous les points de cette ensemble,  $E$ , vérifient la propriété de la non transversalité.

Il existe un nombre infini de cycles limites hybrides autour de chaque point de  $E$ . Donc, si  $x_d \in E$ , alors il existe un cycle limite hybride entre deux points de commutations différents, sur lequel le SDC peut être stabilisé. Si  $x_d$  n'appartient pas à  $E$ , il suffit de trouver le point de l'ensemble  $E$ , non vide, le plus proche de  $x_d$  et de déterminer un cycle limite hybride sur lequel se stabilise le système en régime permanent, qui inclut  $x_d$  et qui respecte les contraintes physiques imposées par le système (durée minimale entre deux commutations, valeurs limites de l'état à ne pas dépasser, ...). Rappelons aussi que  $CC(x_d, x_d)$  est un cycle stable dégénéré en un point qui n'a de sens physique que si  $x_d = x_{e1}$  ou  $x_d = x_{e2}$ . Sinon, le fonctionnement du SDC est alors Zeno, c'est-à-dire qu'il y a un nombre infini de commutations à un temps donné car la durée du cycle devient nulle (fréquence de commutation infinie).

### 3.2.3 Atteignabilité dans $\mathbb{R}^n$

Soit  $\Omega$ , le domaine global de fonctionnement composé des contraintes globales du système. Il est représenté par les  $g$  inégalités linéaires suivantes :

$\forall k \in \{1, \dots, g\}, C_k x + d_k \leq 0$ , avec  $C_k$  de dimension  $n$  et  $d_k$  étant une constante.

**Définition 3.2.5** Soit le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ . On définit :

$$A_1 = \{(z, -f(x, q_1), t) \in \Omega, \forall z \in CC(x_{c1}, x_{c2}) \text{ et } t \geq 0\}$$

$$B_1 = \{(z, -f(x, q_2), t) \in \Omega, \forall z \in CC(x_{c1}, x_{c2}) \text{ et } t \geq 0\}$$

⋮

$$A_{i+1} = \{(z, -f(x, q_1), t) \in \Omega, \forall z \in B_i \text{ et avec } t \geq 0\}$$

$$B_{i+1} = \{(z, -f(x, q_2), t) \in \Omega, \forall z \in A_i \text{ et avec } t \geq 0\}$$

⋮

Ce sont les ensembles de trajectoires qui définissent toutes les inférences arrières suivant les flux des champs de vecteurs à partir du cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ . Il est à noter que l'ensemble de ces  $A_i$  et  $B_i$  ne définit pas nécessairement une partition de l'espace d'état.

Une condition nécessaire et suffisante d'atteignabilité d'un SDC commutant entre deux champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$  est donnée dans le théorème 3.2.4 suivant :

**Théorème 3.2.4** Soit  $D = (\bigcup_{i \geq 1} A_i) \cup (\bigcup_{i \geq 1} B_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ , le domaine global d'atteignabilité du système. Si  $x_0 \in D$ , il existe une séquence avec un nombre fini de commutations, qui amène l'état du système du point  $x_0$  au cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ .

**Démonstration** : soit un point  $x_0 \in D$ , alors il existe un entier  $J \geq 1$  tel que  $x_0 \in A_J$  et

$$x_0 = (z_J, -f(x, q_1), \tau_{s_J}) \text{ avec } z_J \in B_{J-1} \text{ et } z_J = (z_{J-1}, -f(x, q_2), \tau_{s_{J-1}}) \text{ avec } z_{J-1} \in A_{J-2} \cdots$$

Par inférence :

$$x_0 = ((a \in CC(x_{c1}, x_{c2})), -(f(x, q_i) \circ f(x, q_j) \circ f(x, q_i) \circ \cdots \circ f(x, q_i)), \sum_{k=1}^J \tau_{s_k})$$

$$\text{avec } (q_i, q_j) \in \{q_1, q_2\}^2$$

Par conséquent :

$$a = ((x_0 \in D), f(x, q_i) \circ f(x, q_j) \circ f(x, q_i) \circ \cdots \circ f(x, q_i), \sum_{k=1}^J \tau_{s_k})$$

avec  $\tau_{s_k}$ , le temps de séjour du système dans le mode qui correspond à la  $k^{\text{ième}}$  phase dans la séquence  $S$  de commutation.

Après un choix du cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ , toutes les trajectoires possibles sont déterminées par inférences arrières, à partir de ce cycle, suivant la définition 3.2.5, en respectant le domaine global de fonctionnement  $\Omega$ . Ces trajectoires s'arrêtent dès que la solution vérifie une des égalités  $C_k x + d_k = 0$ . Si  $\Omega \subset D$ , alors, pour tout point  $x_0$  de  $\Omega$ , le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  est atteignable par commutation. Sinon, il faut que le point initial  $x_0$  soit dans  $D \subset \Omega$  pour qu'il existe au moins une séquence de commutation possible qui amène le SDC de ce point  $x_0$  au cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ .

Pour tout point  $x_0$  de  $D$ , toutes les séquences de commande possibles incluses dans  $D$  et qui amènent le système de l'état initial  $x_0$  à un état final qui fait partie du cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ , peuvent être calculées.

L'analyse de commandabilité est détaillée dans la thèse de Manon [46] sous les hypothèses suivantes :

1. Il n'y a que deux variables d'états réelles,  $x \in \mathbb{R}^2$ .
2. Les champs de vecteurs associés à chaque phase sont linéaires de la forme  $\dot{x} = A_i x + b_i$ .
3. Les équations différentielles décrivant la dynamique de chaque phase doivent être localement de type lipchitzien par rapport à  $x$ , avec  $A$  diagonalisable.
4. Les valeurs propres de  $A$  doivent être réelles strictement négatives, distinctes ou non (solution convergente et pas de champ de vecteurs tournant).
5. Les contraintes sur les variables d'états sont linéaires, donc les régions de l'espace décrites par ces contraintes sont monotones.

Cette analyse consiste à construire l'ensemble des régions de l'espace d'état depuis lesquelles le cycle limite hybride final peut être atteint depuis l'état initial, en respectant les

contraintes globales de fonctionnement,  $\Omega$ . La construction de cet ensemble est terminée dès que le point initial est inclus dans l'une de ces régions, ce qui signifie qu'il existe au moins une séquence de commutation hybride qui permet d'atteindre la région finale depuis l'état initial. Cette construction est réalisée analytiquement par inférence arrière dans l'espace d'état continu. Elle est détaillée dans [47, 46].

La seule hypothèse commune aux travaux de Manon [46] et aux nôtres est la première. Le théorème 3.2.4 est donc une extension des résultats de Manon.

### 3.2.4 Optimisation d'une séquence d'atteignabilité dans $\mathbb{R}^n$

Soit  $S$  une séquence de phases (modes) obtenue par commutations entre deux champs de vecteurs  $f(x, q_i)$  avec  $i \in \{1, 2\}$  et qui définit une trajectoire d'un état hybride initial  $(x_0, q_i)$  à un état hybride final  $(x_f, q_f)$  du SDC.  $n_S$  est la longueur de la séquence  $S$ .  $f(x, q_{s_k})$ , avec  $1 \leq s_k \leq n_S$ , est le champ de vecteurs actif pendant le  $k^{\text{ième}}$  mode  $q_{s_k}$  de la séquence  $S$  pendant un temps  $\tau_{s_k}$ .  $x_0$  et  $x_f$  sont respectivement l'état réel initial et l'état réel final de la trajectoire du SDC. Le problème d'optimisation consiste alors à commander le système selon cette séquence de commande,  $S$ , en minimisant le critère suivant :

$$t_c = \min_S \left( \sum_{k=1}^{n_S} \tau_{s_k} \right) \quad (3.3)$$

Avec  $t_c$ , le temps total que met le système pour atteindre l'état hybride final  $(x_f, q_f)$  à partir de son état hybride initial  $(x_0, q_i)$ .

Le critère coût à minimiser,  $t_c$ , dépend des temps de séjours  $\tau_{s_k}$ . Pour tout  $t$  tel que  $0 \leq t \leq t_c$ , le vecteur d'état  $x$  doit appartenir au domaine global d'atteignabilité,  $D$ , du système. Les contraintes d'égalités à respecter en fin de trajectoire assurent que la trajectoire aboutit sur le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ . La minimisation se fait donc en respectant les contraintes suivantes :

- $\forall x \in D, \exists s_k \in S / \forall \tau \in [0 \tau_{s_k}], (x, f(x, q_{s_k}), \tau) \in D,$
- $x_f = (x_0, f(x, q_{s_1}) \circ f(x, q_{s_2}) \circ f(x, q_{s_3}) \circ \dots \circ f(x, q_{s_{n_S}}), \sum_{k=1}^{n_S} \tau_{s_k}) \in CC(x_{c1}, x_{c2}).$

Après avoir présenté comment trouver un cycle limite hybride optimal sur lequel le système se stabilise et une trajectoire optimale pour l'atteindre, selon un critère d'optimisation donné, on peut maintenant présenter l'algorithme de synthèse d'une commande stabilisante pour les systèmes dynamiques à commutation (SDC) de la classe définie dans la proposition 3.2.1.

### 3.2.5 Algorithme de synthèse d'une commande stabilisante dans $\mathbb{R}^2$

L'algorithme de synthèse d'une commande stabilisante d'un SDC de la classe définie par la proposition 3.2.1 comporte six étapes :

1. Ecrire le modèle du SDC sous la forme :  $\dot{x} = f(x, q_i)$  avec  $i \in \{1, 2\}$ .
2. Déterminer l'ensemble  $E$  donné par la définition 3.2.4 :
  - Si  $E \neq \emptyset$ , alors un cycle limite hybride existe et le SDC est stabilisable. Passer à l'étape 3.
  - Si  $E = \emptyset$ , le SDC n'est pas stabilisable.
3. Fixer le point de fonctionnement désiré  $x_d$  puis déterminer  $x_{dE}$  le point de  $E$  autour duquel sera construit le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ .
  - Si  $x_d \in E$ , alors  $x_{dE} = x_d$ .
  - Sinon,  $x_{dE} \in E$  est tel que  $d(x_{dE}, x_d) = \min_{z \in E} d(z, x_d)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et

$$J(z) = d(z, x_d) + \lambda \det(f(z, q_1), f(z, q_2)).$$

Le point  $x_{dE}$  est la solution en  $z$  du problème d'optimisation sous contraintes  $\min_z J(z)$  sous les contraintes que

$$\langle (f(z, q_1), f(z, q_2)) \rangle < 0$$

et

$$\det(f(z, q_1), f(z, q_2)) = 0.$$

Et on aura

$$\text{grad}(J)_{x_{dE}} = \left[ \frac{\partial J}{\partial z_1}, \frac{\partial J}{\partial z_2}, \frac{\partial J}{\partial \lambda} \right] = 0$$

4. Déterminer le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  autour de  $x_{dE}$  qui respecte le cahier des charges.
 

Par définition, on peut toujours construire au moins un cycle limite hybride dont l'intérieur inclut  $x_{dE}$ . On cherche le cycle pour lequel la plus petite durée entre deux commutations est égale à la durée minimum imposée par les contraintes technologiques et qui respecte les contraintes sur l'état. Si ce cycle existe, passer à l'étape 5. Sinon, relacher une contrainte ou choisir un autre point  $x_{dE}$ .
5. Déterminer par inférence arrière, l'ensemble des régions depuis lesquelles le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  peut être atteint (suivant la définition 3.2.5) jusqu'à ce que le point initial soit inclus dans une région, ceci en respectant les contraintes globales de fonctionnement. Cela donne donc les séquences de commutation possibles qui commandent le système d'un état hybride initial jusqu'au cycle limite hybride désiré.
6. Déterminer par optimisation (en temps, en énergie, ...), les instants de commutation de la séquence d'atteignabilité trouvée dans l'étape précédente qui permettent d'obtenir la durée d'atteignabilité  $t_c$  la plus courte.

Cet algorithme de synthèse d'une commande stabilisante nous permet de déterminer un cycle limite hybride du fonctionnement du système qui réponde aux contraintes de temps et d'état, d'établir les régions de l'espace d'état réel pour lesquelles un point du cycle est atteignable et de synthétiser une commande stabilisante.

### 3.2.6 Applications

Dans cette partie, l'algorithme de synthèse de commande précédent sera appliqué, dans un premier temps, à la commande des convertisseurs d'énergie électrique DC-DC, Buck et Buck-Boost qui sont des SDC linéaires, puis dans un deuxième temps à un système non-linéaire dans  $\mathbb{R}^2$ .

#### 3.2.6.1 Application au convertisseur d'énergie Buck

Le convertisseur d'énergie électrique DC-DC, Buck, est un abaisseur de tension. Son schéma donné figure 1.11 et son modèle présenté dans le paragraphe 1.6.2 sont rappelés ici, pour la synthèse d'une commande stabilisante. Le circuit classique du Buck est donné figure 3.7. T et D sont les interrupteurs du système (électriquement ce sont des semi-conducteurs) fonctionnant en tout ou rien. D est une diode à commutation autonome et T est un transistor (ou thyristor) commandé. Pour que le circuit puisse fonctionner en mode de fonctionnement continu (pas de discontinuité du courant dans la bobine et pas de court-circuit de la source de tension), le cas où les deux commutateurs sont ouverts est éliminé et seulement deux modes de fonctionnement du SDC sont utilisés : le mode  $q_1$  représente T fermé et D bloquée (abrégié T=1 et D=0) et le mode  $q_2$  représente T ouvert et D passante (abrégié T=0 et D=1). Le but est de définir un cycle limite hybride pour ce système, qui reste le plus proche possible d'un point désiré  $x_d$  ainsi qu'une trajectoire pour atteindre ce cycle qui respecte toutes les contraintes de fonctionnement. La séquence de commande résultante est une séquence de commutations durant laquelle la charge reçoit de l'énergie de la source quand T est fermé et dissipe de l'énergie en mode autonome quand T est ouvert.

Appliquons maintenant l'algorithme de synthèse de commande stabilisante décrit dans la section précédente sur le circuit Buck ayant les caractéristiques suivantes :  $U = 20V$ ,  $L = 20mH$ ,  $C = 47\mu F$ ,  $R = 22\Omega$ .

Le système est décrit par le modèle  $\dot{x} = f(x, q_i)$  suivant, avec  $i \in \{1, 2\}$  et  $x = [V \ i]^T = [x_1 \ x_2]^T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, q_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U}{L} \end{bmatrix} \quad \text{mode } q_1 \\ \dot{x} = f(x, q_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x \quad \text{mode } q_2 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

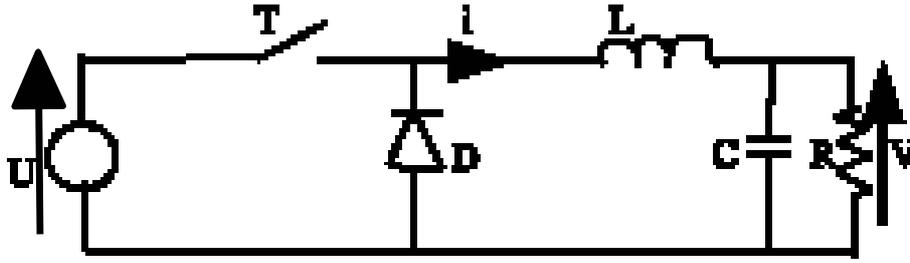


FIG. 3.7 – convertisseur d'énergie Buck

Ce SDC est linéaire par morceaux (PLS : Piecewise Linear System) et fait bien partie de la classe définie par la proposition 3.2.1.

Déterminons donc l'ensemble  $E$  :

$$E = \{z \in \mathbb{R}^2 / \det(f(z, q_1), f(z, q_2)) = 0 \text{ et } \langle f(z, q_1) | f(z, q_2) \rangle < 0\}$$

$$\begin{cases} \det(f(z, q_1), f(z, q_2)) = 0 \Leftrightarrow x_1 = Rx_2 \\ \langle f(z, q_1) | f(z, q_2) \rangle < 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{x_1}{RC} + \frac{x_2}{C}\right)^2 + \frac{x_1}{L^2}(x_1 - U) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1(x_1 - U) < 0 \Leftrightarrow 0 < x_1 < U$$

Donc  $E = \{z \in \mathbb{R}^2 / z_1 = Rz_2 \text{ et } 0 < z_1 < U\}$  est un segment de droite de pente  $\frac{1}{R}$  et d'extrémités  $(0, 0)$  et  $(U, \frac{U}{R})$  (le segment de droite qui relie les deux points d'équilibre stables des deux sous-systèmes associés aux deux modes de fonctionnement du Buck,  $x_{e1}$  et  $x_{e2}$ ).  $E$  est l'ensemble des points autour desquels peut être construit un cycle limite hybride pour ce système.

La figure 3.8 donne, en simulation, les dynamiques des deux modes de fonctionnement du Buck associées aux champs de vecteurs  $f(x, q_1)$  (courbes bleues) et  $f(x, q_2)$  (courbes rouges) ainsi que l'ensemble  $E$  (segment de droite). On peut vérifier intuitivement la propriété des points de  $E$ .

On remarque que, si  $x_d$  n'appartient pas à l'ensemble  $E$ , plus il est proche de  $E$ , plus le cycle limite hybride est "petit".

Si  $x_d$  n'appartient pas à l'ensemble  $E$ ,  $x_{dE}$  est déterminé tel que  $d(x_{dE}, x_d) = \min_{z \in E} d(z, x_d)$ . Les fluctuations autour de  $x_d$  dans le cycle limite hybride dépendent donc de sa distance à  $E$ . Le temps de cycle sera borné en choisissant  $x_d$  à l'intérieur du cycle limite hybride  $CC(x_{12}, x_{21})$  le plus "petit", avec  $x_{12}$  et  $x_{21}$  deux points de  $\mathbb{R}^2$  qui sont les points de commutation du cycle  $CC(x_{12}, x_{21})$  comme c'est le cas dans la définition 3.2.1.

D'après les équations (3.4) on a :

$$x_{12} = (x_{21}, f(x, q_1), \tau_{c_1}) = e^{A\tau_{c_1}} x_{21} + \int_0^{\tau_{c_1}} e^{A(\tau_{c_1}-t)} B dt$$

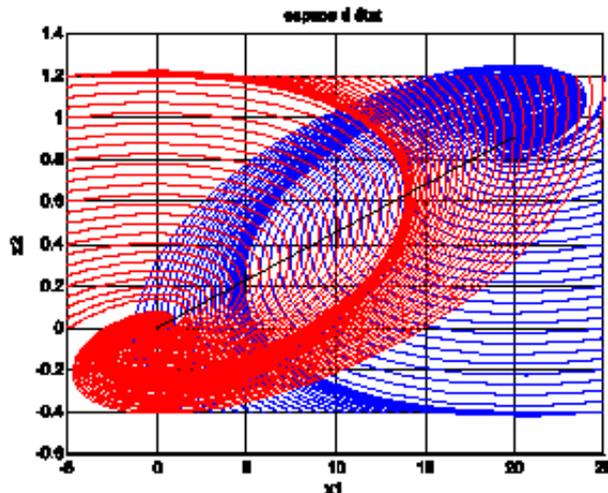


FIG. 3.8 – Dynamiques du Buck et ensemble E

$$x_{21} = (x_{12}, f(x, q_2), \tau_{c_2}) = e^{A\tau_{c_2}} x_{12}$$

Avec  $\tau_{c_1}$  et  $\tau_{c_2}$  les temps de séjours dans le cycle limite hybride en mode  $q_1$  et  $q_2$  respectivement.

Les points de commutations sont donc :

$$\begin{cases} x_{12} = (I - e^{A(\tau_{c_1} + \tau_{c_2})})^{-1} A^{-1} (e^{A\tau_{c_1}} - I) B \\ x_{21} = e^{A\tau_{c_2}} x_{12} \end{cases}$$

Pour un temps de séjour  $\tau_{c_2}$  dans le mode  $q_2$  et en partant d'un point  $x_{12}$  on peut, en respectant le théorème 3.2.3, construire un cycle limite  $CC(x_{c_1}, x_{c_2})$  tel que  $x_{dE}$  soit dans ce cycle. Pour un  $\tau_{c_1}$  et  $\tau_{c_2}$  fixés, on a un seul cycle qui passe par les points fixes  $x_{12}$  et  $x_{21}$  définis explicitement par les relations ci-dessus.

Puis, on trouve le domaine global d'atteignabilité  $D$  par la méthode d'inférence arrière présentée définition 3.2.5 et par la propriété du théorème 3.2.4. sachant que  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x_1 \leq x_{1max} \text{ et } 0 \leq x_2 \leq x_{2max}\}$ . Dans ce cas,  $D = \Omega$ . On peut donc conclure que le système est contrôlable, et qu'il existe des séquences de commutation possibles pour amener le système de son état initial jusqu'au cycle limite hybride  $CC(x_{12}, x_{21})$ , dans la totalité de son domaine global de fonctionnement  $\Omega$ .

Les résultats de synthèse et de simulation sont présentés figure 3.9. Le point de fonctionnement désiré est  $x_d = [15 \text{ V } 0.7 \text{ A}] \notin E$ .  $\tau_{c_1}$  et  $\tau_{c_2}$  sont choisis tels que  $x_{dE}$  soit à l'intérieur du cycle limite. Pour le convertisseur d'énergie Buck, en valeur moyenne, on a :  $V_{dE} = \tau_{c_1} * U / (\tau_{c_1} + \tau_{c_2})$  avec  $U = 20V$  et  $V_{dE} = 15V$ . Donc  $\tau_{c_1} = 3\tau_{c_2}$ .  $\tau_{c_2}$  est fixé tel que la fréquence de fonctionnement maximum des interrupteurs soit respectée.

Le choix de  $\tau_{c1} = 0.24 \text{ ms}$  et  $\tau_{c2} = 0.33\tau_{c1}$  permet de former un cycle autour de  $x_d$ . En effet, pour le convertisseur d'énergie Buck, en valeur moyenne, on a :  $V_d = \tau_{c1} * U / (\tau_{c1} + \tau_{c2})$  avec  $U = 20$  et  $V_d = 15$ .

Ces temps de séjours dans chaque mode  $\tau_{c1}$  et  $\tau_{c2}$  donnent les points de commutation  $x_{12} = [15.007 \text{ V } 0.711 \text{ A}]$  et  $x_{21} = [15.005 \text{ V } 0.651 \text{ A}]$ .

Le domaine de fonctionnement global est défini par :  $x_{1max} = 25\text{V}$ ,  $x_{2max} = 1.2\text{A}$  et  $x_{1min} = 0\text{V}$  et  $x_{2min} = 0\text{A}$ . Donc, les séquences de commande possibles et admissibles en partant du point de repos du système  $x_0 = [0 \ 0]^T$  et jusqu'à l'état final  $x_f = [14.968 \ 0.681]^T$  situé sur  $(x_{21}, f(x, q_1), \tau_{q1})$  avec  $0 < \tau_{q1} < \tau_{c1}$  sont de la forme  $(q_1, q_2)^k$ ,  $q_2(q_1, q_2)^k$ ,  $(q_1, q_2)^k q_1$  ou  $q_2(q_1, q_2)^k q_1$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Le choix de la séquence de commutation se fait par optimisation en temps, en minimisant le temps d'atteignabilité  $t_c$  (3.3), ce qui donne la séquence de commande en temps minimal du système  $(q_1, q_2)$  et les temps de séjour dans chaque mode  $\tau_{s1} = 1.407 \text{ ms}$  et  $\tau_{s2} = 0.565 \text{ ms}$ , soit  $t_c = 1,972 \text{ ms}$ .

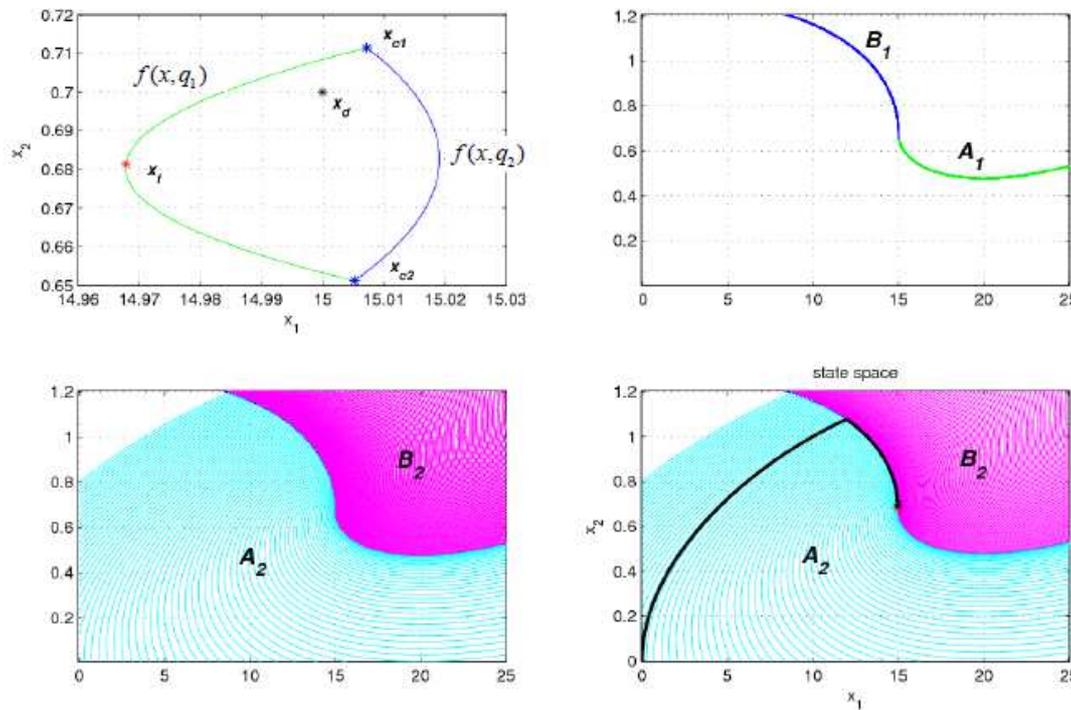


FIG. 3.9 – Commande stabilisante du convertisseur Buck

Pour étudier le rejet des perturbations provoquées par la charge, supposons qu'on a une variation de la charge  $\Delta R = R2 - R1$ . L'approximation linéaire des expressions des points de commutations est

$$\begin{cases} x_{12} = -A^{-1}B \frac{\tau_{c1}}{\tau_{c1} + \tau_{c2}} = \begin{bmatrix} U \\ U/R \end{bmatrix} \frac{\tau_{c1}}{\tau_{c1} + \tau_{c2}} \\ x_{21} = (I + A\tau_{c2})x_{12} \end{cases}$$

La perturbation de la charge donne une variation des points de commutations  $\Delta x_{12}$  et

$\Delta x_{21}$  telle que

$$\Delta x_{12} = \Delta x_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U}{R_2} - \frac{U}{R_1} \end{bmatrix} \frac{\tau_{c1}}{\tau_{c1} + \tau_{c2}}$$

Donc, une perturbation sur la charge est totalement rejetée en tension, et le cycle limite hybride varie verticalement dans l'espace d'état  $(x_1, x_2)$ .

De même si une variation  $\Delta U$  de la tension de la batterie a lieu, les variations des points de commutation seront alors :

$$\begin{cases} \Delta x_{12} = \begin{bmatrix} \Delta U \\ \frac{\Delta U}{R} \end{bmatrix} \frac{\tau_{c1}}{\tau_{c1} + \tau_{c2}} \\ \Delta x_{21} = (I + A\tau_{c2})\tau x_{12} \end{cases}$$

Il y a alors deux possibilités :

- Si  $U$  augmente, alors l'ensemble invariant  $E$  s'élargit et on peut toujours construire un cycle limite hybride autour du même point de fonctionnement désiré  $x_d$  en jouant sur le rapport  $\frac{\tau_{c1}}{\tau_{c1} + \tau_{c2}}$ .
- Si  $U$  diminue, il faut étudier si le cycle  $CC(x_{12}, x_{21})$  est encore réalisable autour du même point de  $E$  ou non. Autrement dit si le point  $x_{dE}$  de l'ancien ensemble  $E$  ne sort pas du nouvel ensemble  $E'$ . Dans le cas où il reste à l'intérieur on peut construire le même cycle en augmentant le rapport  $\frac{\tau_{c1}}{\tau_{c1} + \tau_{c2}}$ , sinon on est obligé de changer de cycle.

### 3.2.6.2 Application au convertisseur d'énergie Buck-Boost

Le convertisseur d'énergie électrique DC-DC, Buck-Boost est une alimentation à découpage qui convertit une tension continue en une autre tension continue de plus faible ou plus grande valeur mais de polarité inverse. Le schéma classique de ce convertisseur est donné figure 3.10. T et D sont les interrupteurs du système (électriquement ce sont des semi-conducteurs) fonctionnant en tout ou rien. D est une diode à commutation autonome et T est un transistor (ou thyristor) commandé. Le fonctionnement d'un convertisseur Buck-Boost peut être divisé en deux configurations suivant l'état de l'interrupteur T. Dans l'état passant, l'interrupteur T est fermé, conduisant ainsi à une augmentation de l'énergie stockée dans l'inductance ( $L$ ). Dans l'état bloqué, l'interrupteur T est ouvert, l'inductance est reliée à la charge et à la capacité, il en résulte un transfert de l'énergie accumulée dans l'inductance vers la capacité et la charge. La tension de sortie du

Buck-Boost est de polarité inverse de celle d'entrée et peut varier de 0 à  $-\infty$  (pour un convertisseur idéal). Pour que ce système puisse fonctionner en mode de fonctionnement continu (pas de discontinuité du flux ou du courant dans la bobine), les cas où les deux interrupteurs sont ouverts ou fermés sont éliminés et seulement deux modes de fonctionnement du SDC sont utilisés : le mode  $q_1$  représente T fermé et D bloquée (abrégé T=1 et D=0) et le mode  $q_2$  représente T ouvert et D passante (abrégé T=0 et D=1). Le but est de définir un cycle limite hybride pour ce système qui reste le plus proche possible d'un point désiré  $x_d$  ainsi qu'une trajectoire pour atteindre ce cycle qui respecte toutes les contraintes de fonctionnement. Appliquons maintenant l'algorithme de synthèse de

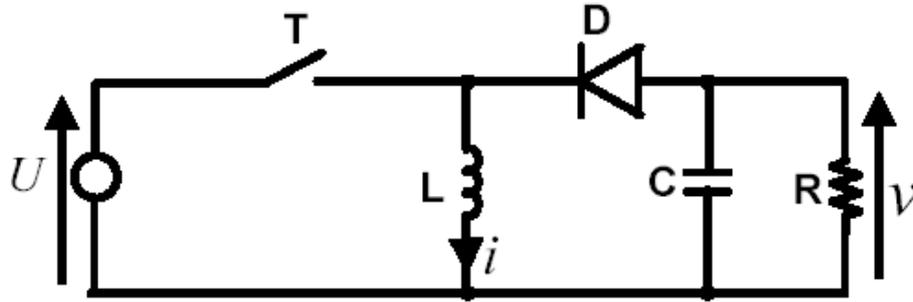


FIG. 3.10 – convertisseur d'énergie Buck-Boost

commande stabilisante décrit dans la section précédente sur le circuit Buck-Boost ayant les caractéristiques suivantes :  $U = 24V$ ,  $L = 100\mu H$ ,  $C = 220\mu F$ ,  $R = 20\Omega$ . Le système est décrit par le modèle  $\dot{x} = f(x, q_i)$  suivant, avec  $i \in \{1, 2\}$  et  $x = [V \ i]^T = [x_1 \ x_2]^T$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, q_1) = A_1 x + B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U}{L} \end{bmatrix} \\ \dot{x} = f(x, q_2) = A_2 x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (3.5)$$

Ce SDC est linéaire par morceaux (PLS : Piecewise Linear System) et fait bien partie de la classe définie par la proposition 3.2.1.

Il faut signaler aussi que le mode 1 est instable, puisque le courant augmente linéairement au cours du temps quand T est fermé, tandis que le mode 2 (T ouvert) est stable à l'origine.

Déterminons donc l'ensemble  $E$  :

$$E = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \det(f(z, q_1), f(z, q_2)) = 0 \text{ et } \langle f(z, q_1) | f(z, q_2) \rangle < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \det(f(z, q_1), f(z, q_2)) = 0 \Leftrightarrow z_2 = \frac{z_1}{R} \left( \frac{z_1}{U} - 1 \right) \\ \langle f(z, q_1) | f(z, q_2) \rangle < 0 \Leftrightarrow z_1 \left( \frac{z_1^2}{R^2 C^2 U} + \frac{U}{L^2} \right) < 0 \end{cases}$$

Donc  $E = \{z \in \mathbb{R}^2 / z_2 = \frac{z_1}{R}(\frac{z_1}{U} - 1) \text{ et } z_1 < 0\}$ .  $E$  est l'ensemble des points autour desquels peut être construit un cycle limite hybride stable pour ce système.

La figure 3.11 donne, en simulation, les dynamiques des deux modes de fonctionnement du Buck-Boost associées aux champs de vecteurs  $f(x, q_1)$  (courbes noires : champ instable monotone) et  $f(x, q_2)$  (courbes rouges : champ tournant stable) ainsi que l'ensemble  $E$  (courbe bleue). On peut vérifier intuitivement les propriétés des points de  $E$  données dans les théorèmes 3.2.1 et 3.2.3.

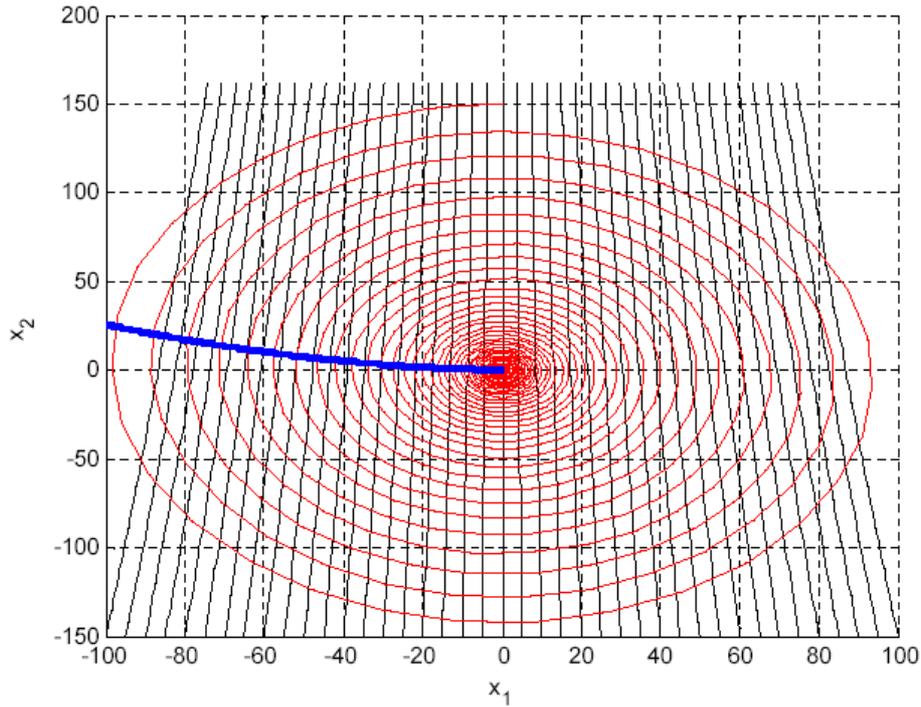


FIG. 3.11 – Dynamiques du Buck-Boost et ensemble  $E$

Si  $x_d$  n'appartient pas à l'ensemble  $E$ ,  $x_{dE}$  est déterminé tel que  $d(x_{dE}, x_d) = \min_{z \in E} d(z, x_d)$ . Le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  est déterminé tel que :

- $\tau_{c1} > \tau_{min}$  et  $\tau_{c2} > \tau_{min}$ , ( $\tau_{min}$ , durée minimum technologique entre deux commutations).
- Le temps de cycle,  $\tau_{c1} + \tau_{c2}$ , est borné.
- $\max_{x \in CC(x_{c1}, x_{c2})} d(x, x_d) < \text{valeur admissible technologique}$ .

S'il n'existe pas de solution, il est nécessaire de changer un ou plusieurs composants du système, car le comportement désiré ne peut pas être obtenu.

D'après les équations (3.5), on a :

$$x_{c1} = (x_{c2}, f(x, q_1), \tau_{c1}) = e^{A_1 \tau_{c1}} x_{c2} + \int_0^{\tau_{c1}} e^{A_1(\tau_{c1}-t)} B dt$$

$$x_{c2} = (x_{c1}, f(x, q_2), \tau_{c2}) = e^{A_2 \tau_{c2}} x_{c1}$$

Avec  $\tau_{c_1}$  et  $\tau_{c_2}$  les temps de séjour dans le cycle limite hybride en mode  $q_1$  et  $q_2$  respectivement.

Les points de commutations sont donc :

$$\begin{cases} x_{c_1} = (I - e^{(A_1\tau_{c_1} + A_2\tau_{c_2})})^{-1} e^{A_1\tau_{c_1}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U}{L}\tau_{c_1} \end{bmatrix} \\ x_{c_2} = e^{A_2\tau_{c_2}} x_{c_1} \end{cases} \quad (3.6)$$

Pour un temps de séjour  $\tau_{c_2}$  dans le mode  $q_2$  et en partant d'un point  $x_{c_1}$  on peut, en respectant le théorème 3.2.3, construire un  $CC(x_{c_1}, x_{c_2})$  telle que  $x_{dE} \in E$  soit dans ce cycle. Pour un  $\tau_{c_1}$  et  $\tau_{c_2}$  fixés, on a un seul cycle qui passe par les points fixes  $x_{c_1}$  et  $x_{c_2}$  définis explicitement par les relations ci-dessus. Si le point de fonctionnement désiré est  $x_d = [-42V \ 6A]^T \notin E$ , le point  $x_{dE} \in E$  le plus proche de  $x_d$  est  $x_{dE} = [-42.05V \ 5.78A]^T$  (étape 3 de l'algorithme). Le choix de  $\tau_{c_1} + \tau_{c_2} = 200\mu s$  et  $\frac{\tau_{c_1}}{\tau_{c_2}} = 1.75$  permet de former un cycle autour de  $x_{dE}$  qui donne les points de commutation  $x_{c_1} = [-41.98V \ 7.3A]^T$  et  $x_{c_2} = [-42.1V \ 4.25A]^T$  d'après les équations (3.6).

Puis, le domaine global d'atteignabilité,  $D$ , est déterminé par inférence arrière (méthode présentée définition 3.2.5) en respectant le domaine global de fonctionnement  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 / -50V \leq x_1 \leq 0V \text{ et } 0A \leq x_2 \leq 30A\}$  du système. Pour cela, toutes les régions  $A_i$  et  $B_i$  sont calculées jusqu'au moment, à la  $N^{ième}$  itération, où on a  $A_{N+1} = B_N$ . Alors,  $D = (\bigcup_{i \geq 1} A_i) \cup (\bigcup_{i \geq 1} B_i) = A_{N+1} = B_N$ . Les 4 premières  $A_i$ , les 4 premières  $B_i$  et le domaine global d'atteignabilité  $D$  (toute la partie colorée de  $\Omega$ ) sont représentés figure 3.12. On remarque que les régions  $A_i$  et  $B_i$  s'élargissent petit à petit ( $A_{i-1} \subset A_i$  et  $B_{i-1} \subset B_i$ ). D'après le théorème 3.2.4, on peut conclure que le système est contrôlable pour tout  $x_0$  choisi dans  $D$ , et qu'il existe des séquences de commutation pour amener le système de son état initial  $x_0$  au cycle limite hybride  $CC(x_{c_1}, x_{c_2})$ .

Les séquences de commande possibles qui amènent le SDC d'un point initial  $x_0 \in D$  quelconque à un point final  $x_f \in CC(x_{c_1}, x_{c_2})$  sont de la forme  $(q_1, q_2)^k$ ,  $(q_1, q_2)^k q_1$ ,  $(q_2, q_1)^k$  et  $(q_2, q_1)^k q_2$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

L'optimisation sous contrainte de la séquence de commutation (séquence et temps de séjour dans chaque mode de fonctionnement) qui permet d'atteindre le cycle limite hybride  $CC(x_{c_1}, x_{c_2})$  à partir de l'état de repos du système  $x_0 = [0 \ 0]^T \in D$ , est faite en temps, en respectant les contraintes imposées par  $\Omega$ . L'état final atteint sur le cycle est  $x_f = [-42V \ 6.55A]^T$  et appartient à  $(x_{c_2}, f(x, q_1), \tau_{q_1})$  avec  $0 < \tau_{q_1} < \tau_{c_1}$ . Cela donne la séquence de commande en temps minimal  $(q_1, q_2)^6$ . Remarquons que toute séquence plus courte ne permet pas d'atteindre le cycle depuis l'état de repos, en respectant les contraintes de fonctionnement, et que toute séquence plus longue donne une durée totale d'atteignabilité plus grande. Les temps de séjour dans chaque mode sont :

$$\begin{aligned} \tau_{s_1} &= 125.0\mu s, \tau_{s_2} = 152.5\mu s, \tau_{s_3} = 59.76\mu s, \\ \tau_{s_4} &= 80.98\mu s, \tau_{s_5} = 71.46\mu s, \tau_{s_6} = 68.54\mu s, \\ \tau_{s_7} &= 78.90\mu s, \tau_{s_8} = 65.24\mu s, \tau_{s_9} = 89.23\mu s, \\ \tau_{s_{10}} &= 42.21\mu s, \tau_{s_{11}} = 64.15\mu s, \tau_{s_{12}} = 58.12\mu s, \\ \text{soit } tc &= 956.1\mu s. \end{aligned}$$

La trajectoire du SDC commandé, à partir de son état de repos jusqu'au cycle limite hybride choisi est donnée figure 3.13.

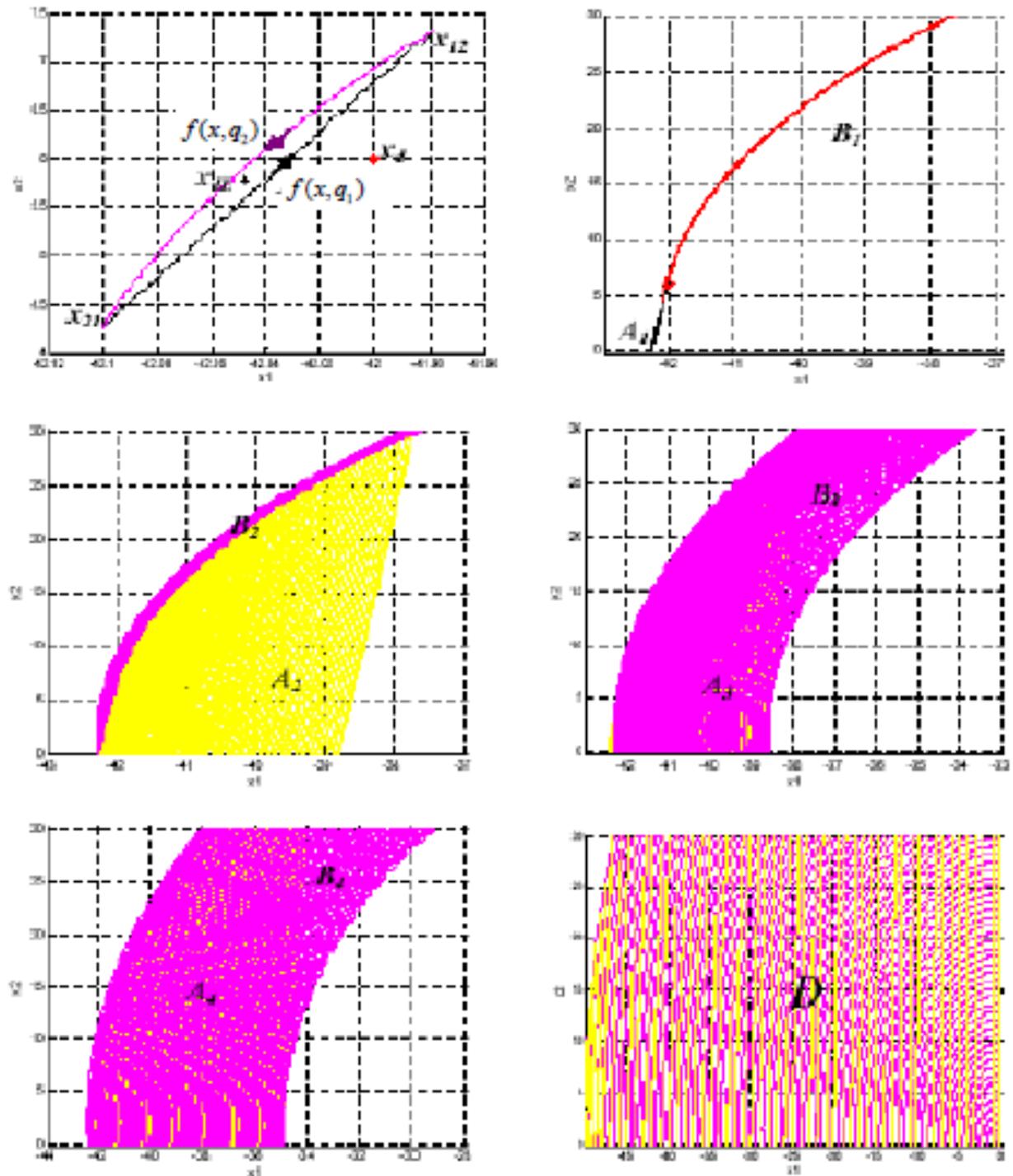


FIG. 3.12 – Résultats de synthèse du cycle limite hybride et du domaine d'atteignabilité  $D$  du convertisseur Buck-Boost.

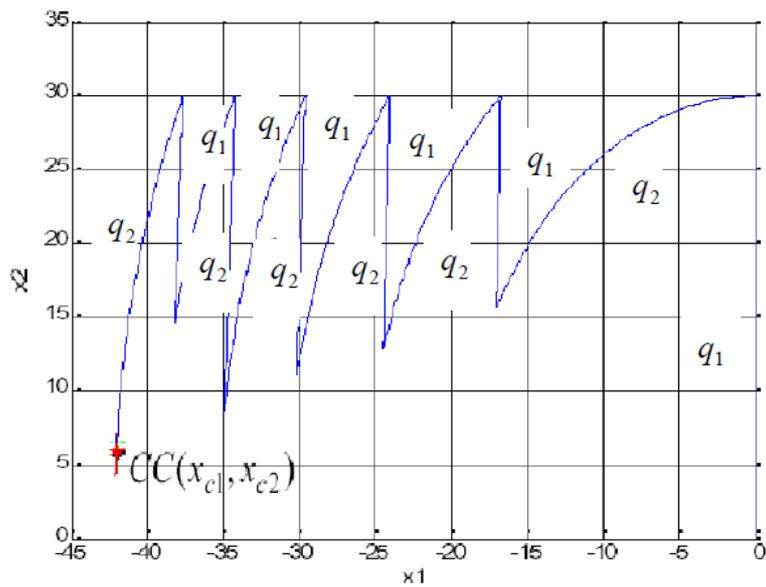


FIG. 3.13 – Trajectoire pour atteindre le cycle limite hybride du Buck-Boost

Dans certains cas, comme on vient de voir dans l'exemple du Buck-Boost, il est plus intéressant de former un cycle limite hybride qui contient le point  $x_{d_E}$  mais pas le point désiré  $x_d$ , ceci dans le but d'avoir un cycle avec moins de fluctuations sur les variables d'état. Donc, suivant le cahier des charges (Précision sur les états du système, fréquences de commutation permises pour les interrupteurs, ...) et la position de  $x_{d_E}$  par rapport à  $x_d$ , on étudiera s'il est intéressant que le point de fonctionnement désiré  $x_d$  soit inclus dans l'intérieur du cycle limite hybride choisi ou non.

Dans la section suivante, la méthode de commande est appliquée à un SDC de  $\mathbb{R}^2$  dont les sous-systèmes sont non linéaires.

### 3.2.6.3 Exemple non linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Dans cet exemple, l'algorithme de la partie précédente est utilisé pour la conception de la commande du SDC non linéaire,  $\dot{x} = f_i(x)$ ,  $x = [x_1 \ x_2]^T$  formé par deux sous-systèmes de champs de vecteurs :

$$\begin{cases} f_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 - x_1^3 - 5x_2 - x_2^3 \\ 6x_1 + x_1^3 - 3x_2 - x_2^3 \end{pmatrix} \\ f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1^2 - x_1^3 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.7)$$

L'objectif est de définir un cycle limite hybride du SDC, sur lequel le système reste le plus proche possible du point désiré  $x_d$ , ainsi que de trouver la trajectoire la plus rapide pour atteindre ce cycle à partir d'un état initial en respectant les contraintes de fonctionnement (domaine global de fonctionnement et domaine global d'atteignabilité) pendant toute l'exécution du SDC.

Ce système (3.7) fait partie de la classe de SDC définie dans la proposition 3.2.1.

A noter que le mode  $q_1$  est stable à l'origine (trajectoire en forme de spirale dans la figure 3.14), mais le mode  $q_2$  est instable (trajectoire hyperbolique dans la figure 3.14).

Maintenant, déterminons l'ensemble des points,  $E$ , autour desquels un cycle limite hybride stable du SDC peut être construit :  $E = \{z \in \mathbb{R}^2 / \det(f_1(z), f_2(z)) = 0 \text{ et } \langle f_1(z) | f_2(z) \rangle < 0\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \det(f_1(z), f_2(z)) = 0 \Leftrightarrow -8z_1^2 - 30z_1z_2 + 2z_1^4 - 6z_1^3z_2 - 7z_2^2 - 4z_2^3z_1 - z_2^4 - 6z_1^3 \\ -z_1^5 + 3z_1^2z_2 + z_1^2z_2^3 + z_1^6 - z_1^3z_2^3 = 0. \\ \langle f_1(z) | f_2(z) \rangle < 0 \Leftrightarrow (-2z_1 - z_1^3 - 5z_2 - z_2^3)(z_2 + z_1^2 - z_1^3) + \\ (6z_1 + z_1^3 - 3z_2 - z_2^3)(4z_1 + 2z_2) < 0. \end{cases}$$

La figure 3.14 donne les dynamiques des deux modes du SDC (3.7) associées aux champs de vecteurs  $f_1(x)$  (trajectoire en forme de spirale, stable tracée en noir) et  $f_2(x)$  (trajectoire hyperbolique instable tracée en rouge) et l'ensemble  $E$  (la courbe en bleu est l'ensemble des points qui respectent la condition  $\det(f_1(z), f_2(z)) = 0$ , et la courbe en vert l'ensemble des points qui respectent la condition  $\langle f_1(z) | f_2(z) \rangle = 0$ ). Les propriétés des points de l'ensemble  $E$  données dans les théorèmes 3.2.1 et 3.2.3 peuvent être intuitivement vérifiées. En effet, les propriétés  $\det(f_1(z), f_2(z)) = 0$  et  $\langle f_1(z) | f_2(z) \rangle < 0$  assurent qu'un cycle limite hybride du SDC existe autour d'un point de  $E$ . Soit  $x_d = [-1 \ 5]^T \notin E$ . Le point de  $E$  le plus proche de  $x_d$ , tel que  $d(x_{dE}, x_d) = \min_{z \in E} d(z, x_d)$ , est  $x_{dE} = [-0.89 \ 5.01]^T \in E$ . Le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  est défini en choisissant un des points de commutation autour de  $x_d$ , par exemple  $x_{c2} = [-0.5 \ 5.5]^T$ . Le deuxième point de commutation peut être calculé à partir des champs de vecteurs, ici  $f_1(x)$  du sous-système 1. Les champs de vecteurs sont lipschitz, d'où le fait que la solution soit unique pour les deux modes  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ . Le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  passant par le point de commutation  $x_{c2} = [-0.5 \ 5.5]^T$  aura comme deuxième point de commutation  $x_{c1} = [-1.29 \ 4.71]^T$ . Ce cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  est donné dans la figure 3.15.

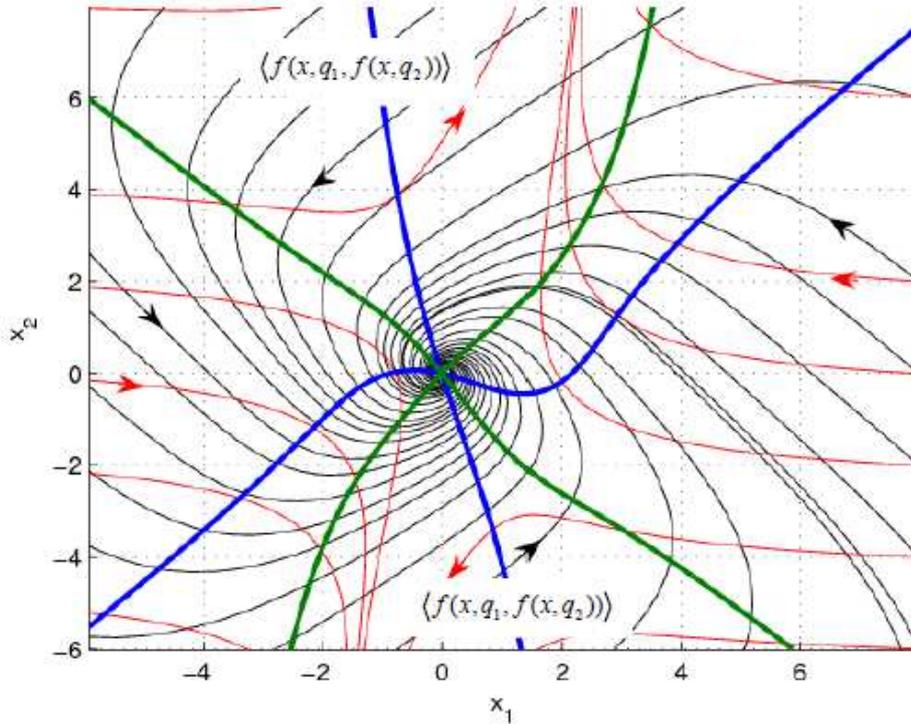


FIG. 3.14 – Dynamiques des deux sous-systèmes non linéaires (trajectoires noire et rouge) et ensemble  $E$  (partie gauche haute et partie droite basse des courbes bleue)

Ensuite, le domaine global d'atteignabilité  $D$  peut être déterminé par inférence arrière depuis ce cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  (voir définition 3.2.5) en respectant le domaine global de fonctionnement du système,  $\Omega$ .  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x_1 \leq 2 \text{ et } -2 \leq x_2 \leq 8\}$ . Toutes les régions  $A_i$  et  $B_i$  sont calculées jusqu'à ce que la condition  $A_{N+1} = B_N$  soit satisfaite. D'où,  $D = (\bigcup_{i \geq 1} A_i) \cup (\bigcup_{i \geq 1} B_i) = A_{N+1} = B_N$ .

La figure 3.16 présente toutes les régions de l'espace d'état continu décrites par les  $A_i$  et les  $B_i$  ainsi que  $\Omega$  et  $D$ .

Notons que les régions  $A_i$  et  $B_i$  grandissent petit à petit ( $A_{i-1} \subset A_i$  et  $B_{i-1} \subset B_i$ ).

Suivant le théorème 3.2.4, le SDS (3.7) est contrôlable pour tout  $x_0 \in D$ , et il existe forcément une séquence de commutation qui conduit le système de son état initial  $x_0$  vers sa région finale qui est le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ .

Les séquences de commutation possibles sont :  $(q_1, q_2)^k$ ,  $(q_1, q_2)^k q_1$ ,  $(q_2, q_1)^k$  et  $(q_2, q_1)^k q_2$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

L'optimisation sous contraintes de ces séquences de commutation pour atteindre  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  depuis un état initial de  $D$ , est réalisée avec le critère du temps, en prenant en considération les contraintes imposées par  $\Omega$ .

La trajectoire atteint le cycle limite hybride au point  $x_f = [-1.2 \ 4.8]^T \in (x_{c2}, f_1(x), \tau_1)$  avec  $0 < \tau_1 < \tau_{c1}$ . La figure 3.17 présente trois exemples de trajectoires qui conduisent le SDC (3.7) de trois points initiaux de  $D$  au cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  avec un temps total minimal d'atteignabilité :

- Si  $x_0 = [-1.5 \ 5]^T$ , la séquence de commutation est  $(q_1, q_2)$ , les temps de séjour dans chaque mode sont ( $\tau_{s_1} = 2.97ms, \tau_{s_2} = 63.89ms$ ) et le temps total d'atteignabilité

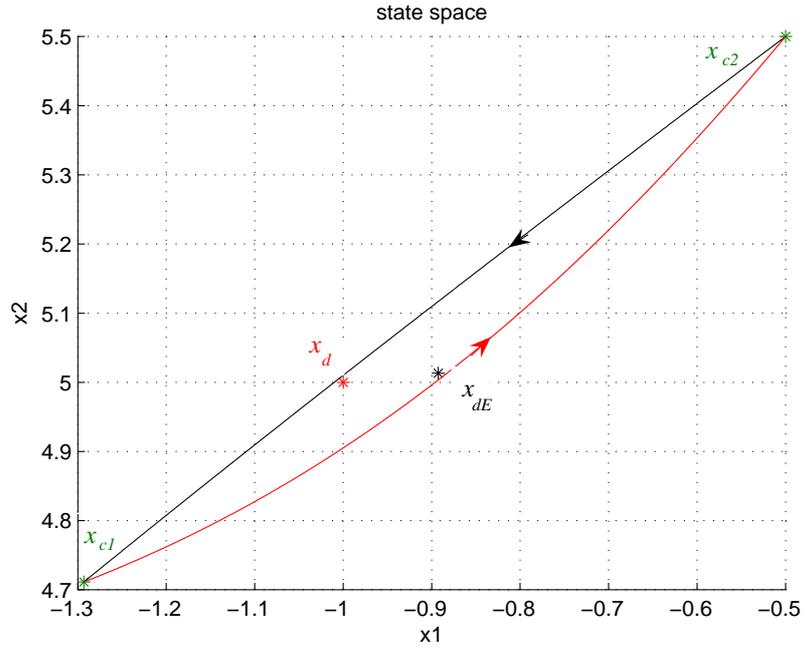


FIG. 3.15 – cycle limite hybride du SDC non linéaire dans  $\mathbb{R}^2$  (3.7)

est  $tc = 66.86ms$  (trajectoire en rose).

- Si  $x_0 = [2 \ 1]^T$ , la séquence de commutation est  $(q_1, q_2, q_1, q_2, q_1, q_2, q_1)$ , les temps de séjour dans chaque mode sont  $(\tau_{s_1} = 2,97ms, \tau_{s_2} = 344,66ms, \tau_{s_3} = 0,78ms, \tau_{s_4} = 61,13ms, \tau_{s_5} = 0.61ms, \tau_{s_6} = 53,54ms, \tau_{s_7} = 12.35ms)$  et le temps total d'atteignabilité est  $tc = 476.02ms$  (trajectoire en noir).
- Si  $x_0 = [-1 \ 3]^T$ , la séquence de commutation est  $(q_2, q_1)$ , les temps de séjour dans chaque mode sont  $(\tau_{s_1} = 464.36ms, \tau_{s_2} = 10.61ms)$  et le temps global d'atteignabilité est  $tc = 474.97ms$  (trajectoire en bleue).

Il est à noter qu'il n'existe pas de séquence de commutation plus courte pour atteindre le cycle limite hybride depuis ces états initiaux tout en respectant les contraintes imposées par  $\Omega$ . Toute séquence plus longue donne un temps total d'atteignabilité plus grand.

Pour étendre les théorèmes 3.2.1 et 3.2.3 dans  $\mathbb{R}^n$ , l'idée est de trouver un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , qui est une surface comprenant le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ . Ainsi, les preuves des théorèmes 3.2.1 et 3.2.3 étendus à  $\mathbb{R}^n$ , peuvent être réalisées sur ce sous-ensemble de dimension 2.

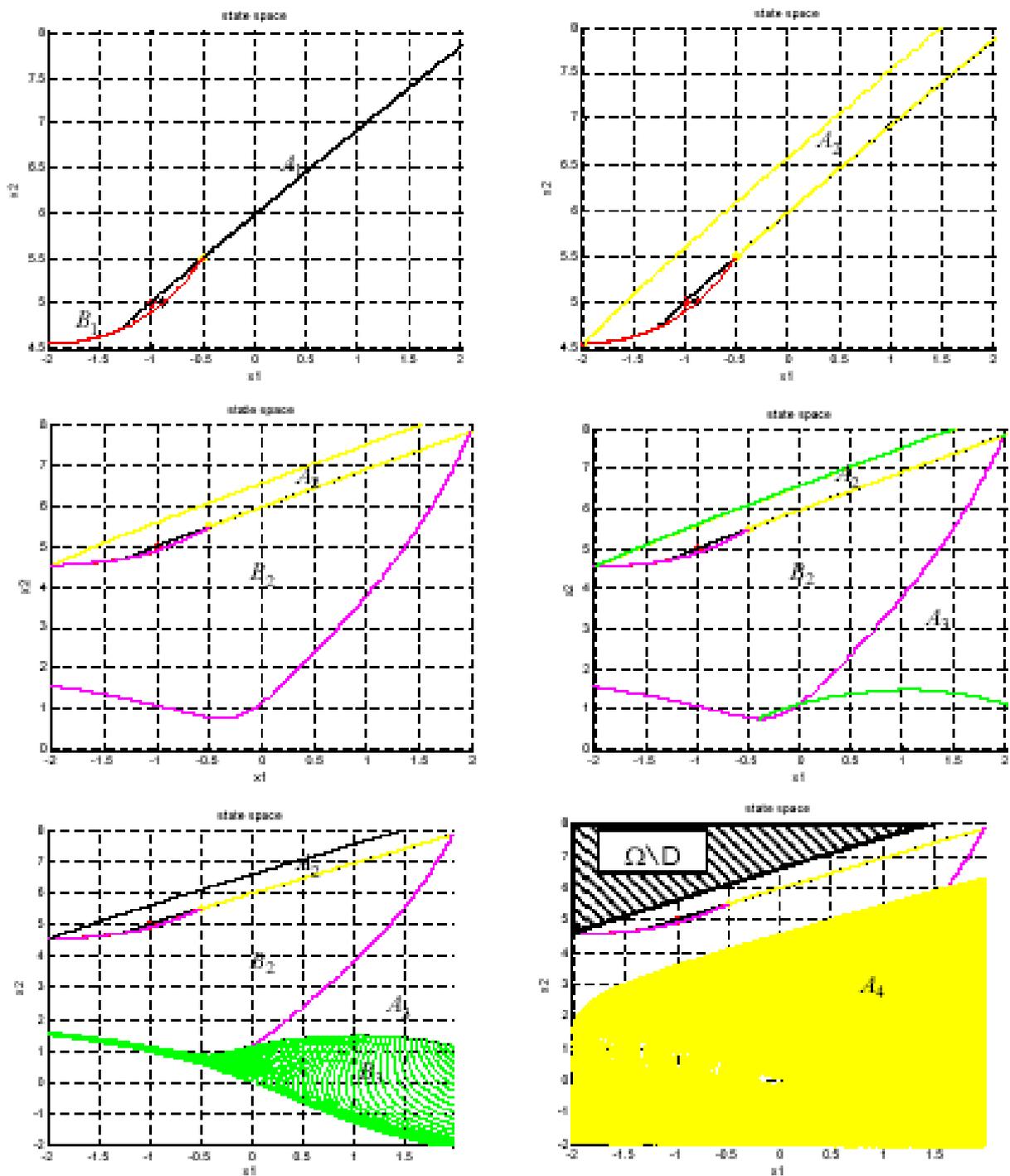


FIG. 3.16 – Résultats de synthèse du cycle limite hybride et du domaine d'atteignabilité  $D$  du SDC non linéaire dans  $\mathbb{R}^2$  (3.7)

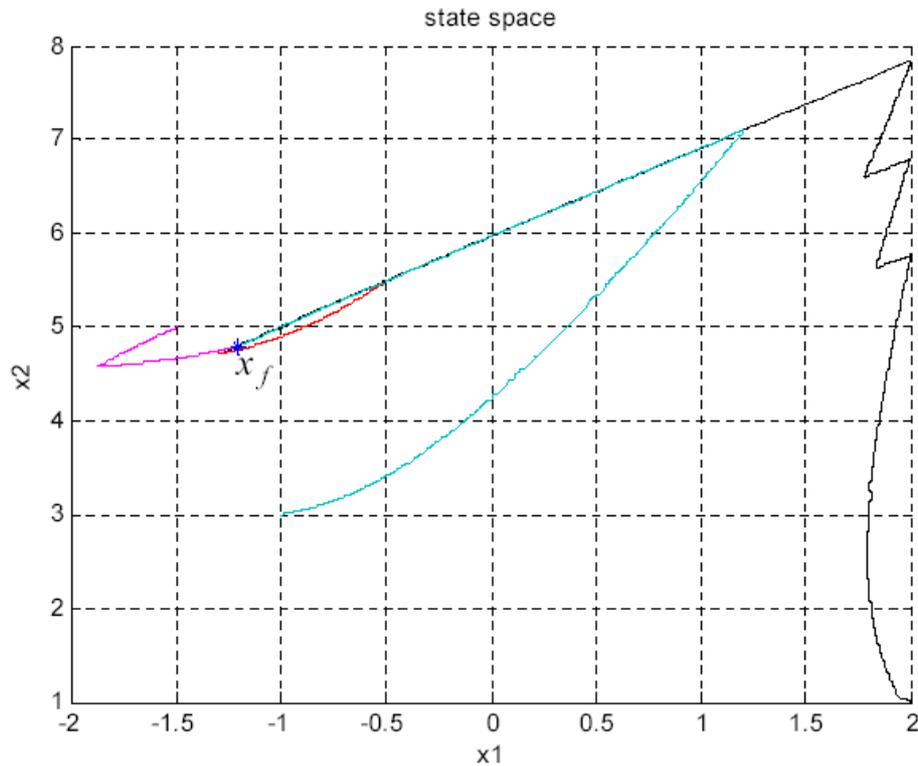


FIG. 3.17 – Trajectoires du SDC non linéaire commandé à partir de différents points initiaux

### 3.2.7 Extension du théorème 3.2.1 à $\mathbb{R}^n$

Considérons un système dynamique à commutation, SDC, formé par les deux champs de vecteurs suivants :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \dot{x} = f_i(x) = [f_i^1(x) \ f_i^2(x), \dots, f_i^n(x)]^T \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n.$$

Maintenant, considérons une fonction  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n-2} \\ x &\mapsto \varphi(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-2}(x)]^T \end{aligned}$$

**Définition 3.2.6**  $b \in \mathbb{R}^{n-2}$  est un vecteur régulier de  $\varphi$  si et seulement si  $\forall a \in \varphi^{-1}(b)$ ,  $\text{rang}(J_\varphi(a)) = n - 2$ , avec

$$J_\varphi(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

étant la matrice jacobienne de  $\varphi$  au point  $a$ .

i.e.  $b$  n'est pas un point stationnaire de  $\varphi$  et il existe une sous-matrice de  $J_\varphi(a)$  d'ordre  $n-2$  tel que son déterminant est non nul.

Par la suite, on note :

- $\mathcal{M} = \varphi^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) = b\}$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  de dimension 2.
- $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{R}^n / \exists \eta < 0 / (f_1(z) = \eta f_2(z))\}$ . Dans le plan,  $\mathcal{E}$  représente  $E$  qui est l'ensemble des points sur lesquels les champs de vecteurs  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont colinéaires et de directions opposées.
- $T_a\mathcal{M} = \ker(J_\varphi(a))$  est l'ensemble des champs de vecteurs qui sont tangents au sous-ensemble  $\mathcal{M}$  au point  $a$ . Alors,  $T_a\mathcal{M}$  est orthogonal à  $\text{grad}(\varphi_j(a))$ ,  $j \in \{1, \dots, n-2\}$ .

**Théorème 3.2.5** *Considérons un SDC de la classe définie dans la proposition 3.2.2. Soit  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un cycle limite hybride avec  $x_{c1} \neq x_{c2}$  et tel qu'il existe au moins un point  $x \in CC(x_{c1}, x_{c2})$  tel que  $f_1(x) \neq -f_2(x)$ . Considérons  $x_0 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$  ( $\neq \phi$ ) et  $\gamma \in \mathbb{R}^{*+}$ . Si  $\forall x \in \mathcal{B}(x_0, \gamma) \cap \mathcal{M}$ ,  $\forall i \in \{1, 2\}$  et  $\forall j \in \{1, \dots, n-2\}$ ,  $\langle f_i(x) | \text{grad}(\varphi_j(x)) \rangle = 0$ , et si son intérieur,  $\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))$ , ne contient aucun des points d'équilibre des dynamiques  $f_1$  et  $f_2$ , alors, il existe un ensemble non vide de points  $z \in \mathbb{R}^n$ , tel que  $z \in \mathcal{E} \cap \overline{\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))} \subset \mathcal{B}(x_0, \gamma) \cap \mathcal{M}$  i.e.  $\mathcal{E} \cap \overline{\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))} \neq \phi$ .*

**Démonstration.** Comme  $\forall i \in \{1, 2\}$  et  $\forall j \in \{1, \dots, n-2\}$ ,  $\langle f(x, q_i) | \text{grad}(\varphi_j(x)) \rangle = 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{B}(x_0, \gamma) \cap \mathcal{M}$ , la trajectoire  $x(t)$  reste dans  $\mathcal{B}(x_0, \gamma) \cap \mathcal{M}$ , quelque soit sa durée d'exécution. Alors, si  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  existe, il est nécessairement sur  $\mathcal{B}(x_0, \gamma) \cap \mathcal{M}$ . De plus, si  $\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))$  ne contient aucun point d'équilibre des dynamiques  $f_1$  et  $f_2$ , la démonstration du théorème 3.2.5 est équivalente à celle du théorème 3.2.1 pour conclure que  $\mathcal{E} \cap \overline{\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))} \neq \phi$ .

### 3.2.8 Extension du théorème 3.2.3 à $\mathbb{R}^n$

**Théorème 3.2.6** *Considérons  $x_0 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$  ( $\neq \phi$ ) et  $\gamma > 0$ . Si  $\forall x \in \mathcal{B}(x_0, \gamma) \cap \mathcal{M}$ ,  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n-2\}$ ,  $\langle f_i(x) | \text{grad}(\varphi_j(x)) \rangle = 0$ , un cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  existe autour du point  $x_0$  (tel que  $x_0 \in \overline{\text{Int}(CC(x_{c1}, x_{c2}))}$ ).*

**Démonstration.** La démonstration du théorème 3.2.6 se fait de la même manière que celle du théorème 3.2.3 car  $\mathcal{E} \cap \mathcal{M}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}$  est une surface qui contient le cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$ .

Alors, l'existence d'un cycle limite hybride pour un SDC est directement liée à l'existence du sous-ensemble  $\mathcal{M} \neq \phi$  qui est défini par l'existence du point régulier de la

fonction  $\varphi$ . Le sous-ensemble  $\mathcal{M}$  est la surface qui contient le cycle limite hybride. Si le SDC commute entre deux sous-systèmes (deux modes discrets) avec des dynamiques continues dans  $\mathbb{R}^2$ , cet ensemble  $\mathcal{M}$  est le plan  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.2.9 Exemple non linéaire dans $\mathbb{R}^3$

Considérons deux champs de vecteurs de dimension trois pour illustrer les théorèmes 3.2.5 et 3.2.6 :

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ -x_1^2 x_2 + x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ -x_1 + x_3^2 \\ -x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Considérons la fonction  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1 \ x_2 \ x_3) &\longmapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

$\forall b \in \mathbb{R}^{*+}, \forall a \in \varphi^{-1}(b), \text{rang}(J_\varphi(a)) = 1$ . Donc,  $b$  est un point régulier de  $\varphi$ .

Le sous-ensemble dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{M} = \varphi^{-1}(b)$ , est la sphère :

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b, b \in \mathbb{R}^{*+}\}$$

$\mathcal{E}$  est l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $f_1(x) = \eta f_2(x)$ , avec  $\eta < 0$ .

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 x_2 x_3 = 1\}.$$

On choisit  $b = 6$  pour assurer que  $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ . Un quadrant du sous-ensemble  $\mathcal{M}$ , de l'ensemble  $\mathcal{E}$  et de leurs intersections est donné figure 3.18.

Puisque  $\forall i \in \{1, 2\}, \forall x \in \mathcal{M}, \langle f_i(x) | \text{grad}(\varphi(x)) \rangle = 0$ , alors, pour  $x_0 \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$  ( $\neq \emptyset$ ) et  $\gamma > 0, \forall x \in \mathcal{B}(x_0, \gamma) \cap \mathcal{M}, \langle f_i(x) | \text{grad}(\varphi(x)) \rangle = 0$  et un cycle limite hybride  $CC(x_{c1}, x_{c2})$  existe autour du point  $x_0$ .

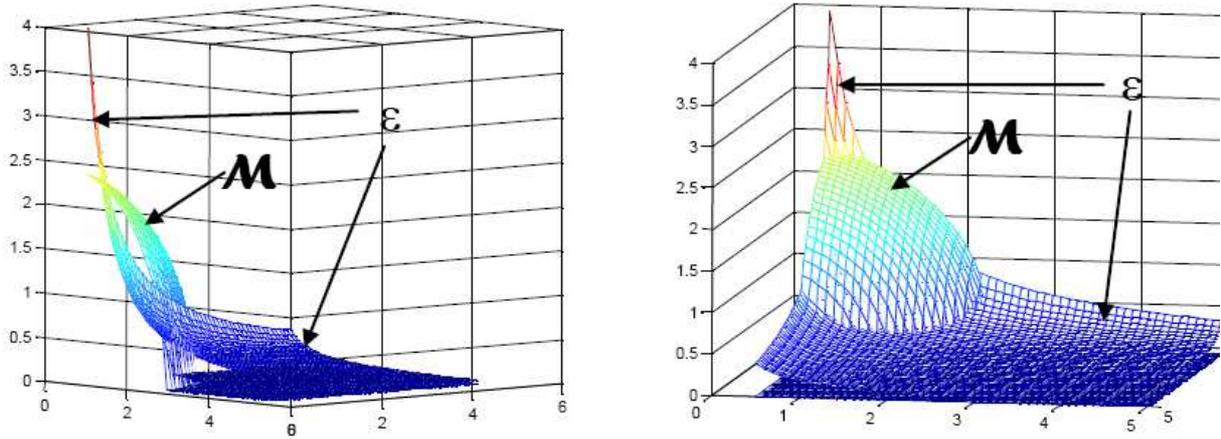


FIG. 3.18 – Sous-ensemble  $\mathcal{M}$  et ensemble  $\mathcal{E}$  de l'exemple 3.2.9 non linéaire dans  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.2.10 Conclusion

Dans cette partie, un algorithme de synthèse d'une commande stabilisante a été présenté pour la classe de systèmes à commutations du second ordre donnée dans la proposition 3.2.1. Cette méthode de commande est basée sur une approche géométrique. Deux étapes sont nécessaires : tout d'abord, trouver le cycle limite hybride optimal stable autour du point de fonctionnement désiré  $x_d$  (en terme de respect des contraintes sur l'état et sur la durée entre deux commutations) puis trouver une séquence de commande hybride optimale (en temps, énergie, ...) qui permette d'atteindre ce cycle. Une condition nécessaire et suffisante d'existence et de stabilité d'un cycle limite hybride composé d'une séquence de deux modes de fonctionnement est présentée dans  $\mathbb{R}^2$ . Le théorème 3.2.4 est une extension des résultats de Manon pour trouver une séquence de commande hybride optimale en temps qui permette d'atteindre un cycle limite hybride. Les théorèmes 3.2.5 et 3.2.6 étendent la condition nécessaire et suffisante d'existence et de stabilité du cycle limite hybride pour les systèmes à champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^n, n > 2$ . Donc, on peut déduire que la synthèse de la commande stabilisante peut être aussi étendue à  $\mathbb{R}^n, n > 2$ .

## 3.3 Stabilisation par méthodes de Lyapunov

Nous présentons dans ce chapitre une nouvelle approche que nous avons développée pour résoudre le problème de stabilisation des SDC à sous-systèmes linéaires affines en l'état, par une loi de commande discrète appliquée directement aux commutateurs. Cette commande est basée sur une fonction de Lyapunov quadratique commune à tous les sous-systèmes et de sa variation suivant la dynamique de chaque sous-système [63].

### 3.3.1 Introduction

Les SDC (linéaires) [42, 76] sont constitués par une famille de sous-systèmes continus décrivent par un ensemble d'équations différentielles (linéaires), ou dans le cas discrétisé par des équations de récurrence, et d'une loi de commutation constante par morceau qui orchestre la commutation entre ces sous-systèmes (indiquant le sous-système active a un instant  $t$  donné). chaque sous-système active, représente un état discret du SDC. Si l'espace d'état continu est de dimension deux ( $x \in \mathbb{R}^2$ ), on parle d'un SDC de second ordre.

Les SDC linéaires du second ordre ( $x \in \mathbb{R}^2$  et sous-systèmes linéaires) ont attiré l'attention des chercheurs, même s'ils restent la classe la plus simple des SDC. Mais, la simplicité de leur forme mathématique ne diminue pas leurs intérêts dus à leur présence dans l'ingénierie et l'industrie. Un des problèmes qui reste encore difficile pour ces systèmes est la stabilisation (voir par exemple [35, 18, 75, 26, 89] et [74]). Pour plus de généralités sur les problèmes de stabilité et de stabilisation des SDC, voir [43]. Aussi des résultats importants sur la stabilité et la stabilisation des SDC sont présentés dans [7], où les auteurs ont précisé les propriétés de stabilité (la stabilité totale, uniforme et conditionnelle), ainsi que les concepts et outils utilisés pour ces systèmes (solution hybride, temps de séjour, fonction de Lyapunov commune, multiples fonctions de Lyapunov ,...). Ensuite, les méthodes de stabilisation uniforme sont fournies dans le cas linéaire et non linéaire.

La recherche de fonctions de Lyapunov, c'est-à-dire de fonctions qui sont associées à une représentation étendue de l'énergie du système, est une étape très importante dans l'analyse de stabilité et dans la stabilisation des systèmes. Pour la stabilisation des SDC, la recherche d'une loi de commutation stabilisante peut être réduite à la recherche de fonctions de Lyapunov (voir [74, 7, 26, 89, 66]). Puis, les objectifs de la commande (optimalité, robustesse,...), en prenant en compte les contraintes physiques de fonctionnement du système, imposent la manière d'utiliser ces fonctions pour synthétiser une "bonne" commande. La recherche de fonctions de Lyapunov est donc une étape dans la synthèse de loi de commande.

Notre objectif est d'obtenir des méthodes génériques de construction de ces fonctions de Lyapunov pour les SDC. Ici, nous étudions les SDC linéaires du second ordre avec deux états discret (deux sous-systèmes).

Supposons que nous avons deux différents sous-systèmes linéaires dans  $\mathbb{R}^2$ . Le SDC généré par ces sous-systèmes est défini comme suit :

$$\dot{x} = A_i x + B_i \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3.8)$$

Notre objectif est de stabiliser le SDC 3.8 autour (stabilité au sens de Lyapunov) ou sur (stabilité asymptotique) un point  $x_d$  avec une loi de commutation par un choix judicieux du sous-système actif suivant l'appartenance de la variable d'état continue aux régions

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{le sous-système } i \text{ peut être actif}\}.$$

La stabilisation se fait en deux étapes :

1. Trouvez une région bornée non vide de l'espace d'état continu, contenant  $x_d$ , qui représente un minimum d'énergie,  $V_{min}$ , et telle que, une fois atteinte par le système, il existe toujours une loi de commande qui garantit que le système reste dans cette région. Cette région est appelée région de stabilité du système à commutation. A noter que si le minimum d'énergie est égal à zéro, la région de la stabilité se réduit à un point et la stabilité est asymptotique.
2. Garantir la stabilité à l'extérieur de la région de stabilité et l'existence d'au moins une séquence de commutation entre les deux sous-systèmes qui conduit le SDC dans la région (ou le point) de stabilité.

Pour résoudre le problème de stabilisation, une mesure de l'énergie du SDC est nécessaire. La première intuition est de trouver une bonne fonction de Lyapunov commune candidate (localement définie positive, et décroissante dans  $\Omega_i$ ) associée à la mesure de l'énergie des deux sous-systèmes et avec un minimum atteignable par commutation. Puisque les sous-systèmes sont linéaires, le plus simple est de choisir une fonction de Lyapunov quadratique. La conception de cette fonction est détaillée par la suite.

A noter que, dans cette étude, l'ensemble des  $\{\Omega_i\}_{i \in \{1,2\}}$  ne forme pas forcément une partition de l'espace d'état continu. Chaque  $\Omega_i$  peut être borné ou non. Dans [59] le cas d'une partition de l'espace d'état continu en régions polyédriques est discuté et une méthode de commande optimale est présentée.

Tout d'abord, nous rappelons quelques définitions et théorèmes sur la stabilité des SDC linéaires planaires, ainsi que des propriétés géométriques dans le plan qui sont nécessaires pour la compréhension de ce travail. Ensuite, on présentera les problèmes de stabilité traités basés sur le concept de Fonction de Lyapunov Quadratique Commune (QCLF) et les principaux résultats que nous avons obtenus pour des SDC linéaires commutant entre deux sous-systèmes.

### 3.3.2 Outils pour l'étude de la stabilité des SDC planaires

Soit le SDC du second ordre (3.8). On suppose que  $\det(A_i) \neq 0, \forall i \in \{1,2\}$  (cela évite de choisir les variables d'état linéairement dépendantes).

L'étude la stabilité du système autour d'un point  $x_d$  dans la base-x, est équivalente à l'étude de sa stabilité autour de l'origine de la base-y après le changement de variable suivant :  $y = x - x_d$ . Alors, la dynamique du système dans la base-y  $x = x_d$ , est écrite sous la forme :

$$\dot{y} = f_i(y) = A_i y + b_i \quad (3.9)$$

avec  $y \in \mathbb{R}^2$ ,  $i \in \{1,2\}$  et  $b_i = A_i x_d + B_i$

Soit  $P = P^T > 0$  une matrice symétrique définie positive (SDP). Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V(y) = \frac{1}{2} y^T P y$$

et sa dérivée :

$$q_i(y) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \dot{y} = y^T P A_i y + y^T P b_i.$$

On note :

- $\Omega$ , le domaine global de fonctionnement défini par les contraintes globales du SDC. Il est représenté par les  $n$  inégalités linéaires suivantes :  
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, C_k x + d_k \leq 0$  avec  $C_k$  un vecteur de dimension 2 et  $d_k$  une constante.
- $\Omega_i = \{y \in \mathbb{R}^2 / q_i(y) < 0\}$ , la région dans laquelle il est souhaitable que le mode  $i$  soit actif, pour atteindre au mieux l'objectif de cette approche qui est de concevoir une commande qui minimise l'énergie dépensée par le système.
- $\Omega_s(V_{min}) = \{y \in \mathbb{R}^2 / V(y) \leq V_{min} \text{ avec } V_{min} \in \mathbb{R}^+\}$ , la région de stabilité du système, bornée par le niveau d'énergie  $V_{min}$ . La notion de stabilité est considérée ici dans le sens classique de la définition de la stabilité, c'est-à-dire que, dès que  $x$  est entré dans  $\Omega_s$ , il existe toujours une commande qui permet à l'état  $x$  de rester dans  $\Omega_s$ .
- $\bar{\Omega}_i$ , le complément de  $\Omega_i$  dans  $\mathbb{R}^2$ .  $\bar{\Omega}_i = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_i$ .
- $S_i$  la surface isotrope de  $q_i(y)$ , i.e  $S_i = \{y \in \mathbb{R}^2 / q_i(y) = 0\}$ .

Une condition suffisante pour stabiliser le système (3.8) est :

**Théorème 3.3.1** *Si  $\Omega = \bigcup \Omega_i \bigcup \Omega_s(V_{min})$ , le système (3.8) est stabilisable par une loi de commutation autour du point  $x_d$  dans le domaine  $\Omega$ .*

### Démonstration :

Soit  $\Omega = \bigcup \Omega_i \bigcup \Omega_s(V_{min})$  le domaine global de fonctionnement (en respectant les contraintes) du système (3.8). Soit  $y_0$  le point initiale du système.  $\Omega_s(V_{min})$  est, par définition, la région dans la quelle une fois la trajectoire  $y(t)$  rentre de dont il y reste. D'ou, si  $y_0 \in \Omega_s(V_{min})$ , le théorème 3.3.1 est satisfaite. Mais, si  $y_0 \in \Omega \setminus \Omega_s(V_{min})$ ,  $\exists i \in \{1, 2\} / y_0 \in \Omega_i$ , alors la trajectoire du système  $y(t)$  converge vers cette région  $\Omega_s(V_{min})$  avec une loi de commutation telle que,  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists j \in \{1, 2\} / y(t) \in \Omega_j$ , qui conduit la trajectoire  $y(t)$  de l'état initial  $y_0$  à  $\Omega_s(V_{min})$ , puisque  $\Omega_s(V_{min})$  contient l'origine et  $q_j(y) < 0$ . Donc le système

(3.8) est stabilisable dans le domaine  $\Omega$ .

**Remarque 3.3.1** *L'origine et le point  $-A_i^{-1}b_i$  sont deux vecteurs isotropes de  $q_i(y) \Rightarrow \{(0 \ 0)^T, -A_i^{-1}b_i\} \in S_i$ .*

**Définition 3.3.1**  *$E = \{y \in \mathbb{R}^2 / \det(f_1(y), f_2(y)) = 0 \text{ et } \langle f_1(y) | f_2(y) \rangle < 0\}$  est l'ensemble de points pour lesquels les deux champs de vecteurs  $f_i(y)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  sont colinéaires et de direction opposée.  $E$  est donc l'ensemble non vide de points autour desquels le SDC peut être stabilisé.*

*Cet ensemble  $E$  peut être aussi défini par :  $E = \{y \in \mathbb{R}^2 / A_1y + b_1 = \alpha(A_2y + b_2) \text{ avec } \alpha < 0\}$ .*

Suivant les valeurs propres des matrices  $A_1$  et  $A_2$ ,  $E$  peut prendre la forme d'une partie d'une ellipse, d'une hyperbole, ou d'un segment quand  $A_1 = A_2$ .

**Théorème 3.3.2** *Soit le système(3.9) stabilisable par commutation autour de l'origine, et  $S_1$  et  $S_2$  les surfaces isotropes respectivement de  $q_1$  et  $q_2$ . S'il existe  $y \in S_1 \cap S_2 / y_E \neq (0 \ 0)^T$  alors  $y_E \in E$ .*

**Démonstration :**

Soit  $y_E \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow q_i(y_E) = 0, \forall i \in \{1, 2\} \Leftrightarrow y^T(PA_iy_E + Pb_i) = 0, \forall i \in \{1, 2\}$  avec  $P$  une matrice S.D.P  $\Rightarrow y \perp (PA_iy_E + Pb_i), \forall i \in \{1, 2\} \Rightarrow \det(A_1y_E + b_1, A_2y_E + b_2) = 0$   
 $\Rightarrow A_1y_E + b_1 = \alpha(A_2y_E + b_2)$ .

Ainsi, la combinaison convexe des deux dynamiques [42],  $A_1y + b_1$  et  $A_2y + b_2$ , donne le système bidimensionnel mono-entrée suivant :

$$\dot{y} = u(t)(A_1y + b_1) + (1 - u(t))(A_2y + b_2), u(t) \in [0 \ 1].$$

On a :

$$\frac{dV}{dt}(y_E) = \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y}(y_E) = 0,$$

Or

$$\frac{\partial V}{\partial y} = y^T P \neq [0 \ 0], \forall y \neq [0 \ 0]^T, \text{ avec } P = P^T > 0$$

$\Rightarrow \dot{y}|_{y_E} = 0 \Rightarrow u(t) + (1 - u(t))\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{u(t)}{u(t)-1}$ , avec  $u(t) \in [0 \ 1] \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}^-$ .

Puisque le point  $y_E$  n'est pas un point stationnaire pour les deux dynamiques des sous-systèmes, i.e  $A_1y_E + b_1 \neq 0$  et  $A_2y_E + b_2 \neq 0$ , alors  $\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$ .

d'ou,  $A_1y + b_1 = \alpha(A_2y + b_2)$  avec  $\alpha < 0$ . Donc,  $y \in E$ .

**Lemme 3.3.1** *Si le système (3.9) est stabilisable par commutation autour de l'origine et si les deux surfaces isotropes  $S_1$  et  $S_2$  respectivement de  $q_1$  et  $q_2$  sont tangentes en un seul point  $y$ , alors ce point est l'origine et est un point de  $E$ . Alors,  $b_1 = \alpha b_2$ ,  $\alpha < 0$ .*

**Démonstration :**

Suivant la remarque 3.3.1, l'origine est forcément un vecteur isotrope de  $q_1$  et  $q_2$ , donc  $(0 \ 0)^T \in S_1$  et  $(0 \ 0)^T \in S_2$ . Comme  $S_1$  est tangente à  $S_2$  en un seul point, il existe un seul point commun à ces deux surfaces, donc ce point est l'origine. Les tangentes à l'origine aux surfaces isotropes  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement :

$$\begin{cases} T_0^1 = \langle \text{grad}(q_1)_0 \rangle^\perp = \langle Pb_1 \rangle^\perp \\ T_0^2 = \langle \text{grad}(q_2)_0 \rangle^\perp = \langle Pb_2 \rangle^\perp \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det(Pb_1, Pb_2) = 0$$

Suivant le théorème 3.3.1,  $b_1 = \alpha b_2$  avec  $\alpha < 0$ , donc l'origine est un point de  $E$ .

**Remarque 3.3.2 :**

- $\{-A_1^{-1}b_1, -A_2^{-1}b_2\} \notin E$  (puisque le produit scalaire des deux champs de vecteurs en ces deux points est nul).
- Tous les points de l'ensemble  $E$  sont asymptotiquement stables pour le SDC(3.9).

Etudions maintenant la forme géométrique des surfaces isotropes  $S_i$  et des régions de l'espace d'état continu  $\Omega_i$ . Elle dépend de la forme quadratique  $y^T(PA_i)y$ .

**Définition 3.3.2** Soit une forme quadratique réelle dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $q(x) = x^T Q x$  (Notons que la matrice  $Q$  n'est pas forcément symétrique). Il existe toujours une base orthonormée, dite de Sylvester, telle que  $q = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$ ,  $x'$  étant les coordonnées du vecteur  $X$  dans cette base. La signature de  $q$  est le couple  $(p, k)$  avec  $p$  et  $k$  respectivement le nombre de coefficients  $\lambda_i$  strictement positifs et strictement négatifs. Elle est notée :  $\text{sig}(q) = (p, k)$ . Dans  $\mathbb{R}^2$ , si  $p + k = 2$  la forme quadratique est non dégénérée.

**Remarque 3.3.3** Les surfaces isotropes  $S_i$  et les ensembles  $\Omega_i$  ont l'une des quatre formes suivantes :

- Si  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (2, 0)$ , alors  $S_i$  est une ellipse et  $\Omega_i$  son intérieur.
- Si  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (0, 2)$ , alors  $S_i$  est une ellipse et  $\Omega_i$  son extérieur.
- Si  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (1, 1)$  et  $\tilde{b}_i \neq (\tilde{b}_{i1}, \pm \tilde{b}_{i1})^T$ , (avec  $\tilde{b}_i$  l'image de  $b_i$  dans la base orthogonale des matrices  $A_i^T P + PA_i$ ) alors  $S_i$  est constituée de deux hyperboles symétriques qui limitent l'ensemble  $\Omega_i$ .
- Si  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (1, 1)$  et  $\tilde{b}_i = (\tilde{b}_{i1}, \pm \tilde{b}_{i1})^T$ , alors  $S_i$  est constituée de deux droites qui se croisent en  $x_d$  et qui limitent l'ensemble  $\Omega_i$ .

**Théorème 3.3.3** Soit  $A_i$  la matrice définie dans (3.9) avec les valeurs propres  $\lambda_{i_1}$  et  $\lambda_{i_2}$  :

- Si  $\det(A_i) = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} > 0$  et  $\text{trace}(A_i) = \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} < 0$  ( $A_i$  stable), alors il existe  $P = P^T > 0$  /  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (0, 2)$ .
- Si  $\det(A_i) = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} < 0$  ( $A_i$  instable), alors  $\forall P = P^T > 0$ ,  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (1, 1)$ .
- Si  $\det(A_i) = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} > 0$  et  $\text{trace}(A_i) = \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} > 0$  ( $-A_i$  stable), alors il existe  $P = P^T > 0$  /  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (2, 0)$ .

**Démonstration :**

Si  $P$  est une matrice S.D.P, les valeurs propres de  $A_i$  et  $PA_i$  ont le même signe. Alors, suivant les trois possibilités des valeurs propres de  $A_i$ , les trois cas du théorème 3.3.3 suivent.

### 3.3.3 Calcul d'une fonction de Lyapunov commune d'un SDC

Une nouvelle méthode générique pour trouver une fonction de Lyapunov quadratique commune à tous les modes du système (3.9) est présentée dans cette partie (QCLF Quadratic Commun Lyapunov Function). Soit  $V(y) = y^T P y$  avec  $P = P^T > 0$ , une fonction de Lyapunov quadratique associée à tous les modes de fonctionnement du SDC. Cette fonction doit permettre de stabiliser le SDC sur un minimum d'énergie  $V_{min}$ , à déterminer. La recherche de cette fonction  $V$  revient à celle de la matrice  $P$ , symétrique définie positive, qui assure la stabilisation du système (3.9). Remarquez que, si cette fonction existe, la stratégie de commande qui permet la commutation d'une dynamique du système à une autre seulement sur les surfaces isotropes, peut former une loi de commutation qui stabilise le système, mais elle n'est pas nécessairement optimale (en temps, en énergie, ...). Par exemple, pour la commande optimale en énergie, la transition vers le sous-système qui permet la plus grande décroissance de  $V(y)$  doit être autorisée, même en dehors des surfaces isotropes.

Il existe six cas à traiter, suivant les caractéristiques des matrices  $A_i$  (theorem 3.3.3) :

1.  $A_i$  stable  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,
2.  $(-A_1)$  et  $A_2$  stable,
3.  $(-A_i)$  stable  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,
4.  $A_i$  à une seule valeur propre positive  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,
5.  $A_1$  stable et  $A_2$  à une seule valeur propre positive,
6.  $A_1$  à une seule valeur propre positive et  $(-A_2)$  stable.

La présentation détaillée de ces six cas devra être menée de la façon suivante :

1. Si  $A_i$  stable,  $\forall i \in \{1, 2\}$ , il existe, forcément, une matrice  $P = P^T > 0$  telle que  $\text{sig}(y^T(PA_1)y) = (0, 2)$ . Il faut donc calculer la matrice  $P$  qui nous permet de construire la fonction QCLF pour laquelle  $V_{min}$  est la valeur minimale à atteindre

par le système. Il existe alors deux cas :

- (a) Il existe une matrice  $P = P^T > 0$  qui vérifie les LMI's :  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (0, 2), \forall i \in \{1, 2\}$ .
- (b) Sinon, il existe une matrice  $P = P^T > 0$  qui vérifie les LMI's :  $\text{sig}(y^T(PA_1)y) = (0, 2)$  et  $\text{sig}(y^T(PA_2)y) = (1, 1)$  (ou inversement).

La région de stabilité du système,  $\Omega_s$ , est alors définie par le niveau d'énergie de la fonction de Lyapunov  $V(y) = y^T P y$  qui respecte toutes les contraintes de fonctionnement et tel que  $\cup_{i \in \{1, 2\}} \Omega_i \cup \Omega_s = \Omega$ . Il sera discuté plus tard. Donc, il existe forcément une loi de commutation qui stabilise le système dans cette région  $\Omega_s$  (par exemple après la commutation lente entre les deux sous-systèmes (voir liberzon) ou en laissant un des deux sous-systèmes et un seul évoluer).

2. Si  $(-A_1)$  et  $A_2$  sont stables, trois cas sont possibles pour calculer la matrice  $P$  de la QCLF :

- (a) Il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que  $\text{sig}(y^T(PA_2)y) = (0, 2)$  et  $\text{sig}(y^T(PA_1)y) = (1, 1)$ .
- (b) Il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que  $\text{sig}(y^T(PA_2)y) = (0, 2)$  et  $\text{sig}(y^T(PA_1)y) = (2, 0)$ .
- (c) Il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que  $\text{sig}(y^T(PA_2)y) = (1, 1)$  et  $\text{sig}(y^T(PA_1)y) = (1, 1)$ .

Le fait qu'il existe, forcément, une matrice  $P = P^T > 0$  qui corresponde à un des trois cas précédents permet de conclure à l'existence d'une région de stabilité  $\Omega_s$  du système et garantit que  $\cup_{i \in \{1, 2\}} \Omega_i \cup \Omega_s = \Omega$ . Donc, forcément il existe une loi de commutation qui stabilise le système dans cette région  $\Omega_s$ .

3. Si  $(-A_i)$  stable  $\forall i \in \{1, 2\}$ , existe-t-il une matrice SDP  $P = P^T$  telle que  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (1, 1), \forall i \in \{1, 2\}$  ?

Concernant l'existence de cette matrice  $P = P^T$ , toute une discussion doit être menée. Par la suite on verra qu'une telle matrice  $P$  telle que  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (1, 1), \forall i \in \{1, 2\}$  est la seule possibilité pour pouvoir stabiliser le système en  $\Omega_s$  en l'initialisant sur n'importe quel point de  $\Omega$ . Donc, intuitivement on peut dire que la stabilité et la stabilisation du SDC dans ce cas est conditionnelle si on veut utiliser une QCLF.

4. Si  $A_i$  instable  $\forall i \in \{1, 2\}$ , existe-t-il une matrice SDP  $P = P^T$  telle que  $\text{sig}(y^T(PA_i)y) = (1, 1), \forall i \in \{1, 2\}$  ? i.e. le cas 1. La stabilité par QCLF est donc liée à l'existence d'une telle matrice.

5. Si  $A_1$  stable et  $A_2$  instable, il existe une matrice  $P = P^T$  telle que  $\text{sig}(y^T(PA_2)y) = (0, 2)$ . Si une telle matrice  $P$  vérifie aussi  $\text{sig}(y^T(PA_1)y) = (1, 1)$ , on a une région  $\Omega_s$  qui représente un minimum d'énergie du SDC, Sinon existe-t-il une matrice

$P = P^T$  telle que  $\text{sig}(y(PA_i)y) = (1, 1), \forall i \in \{1, 2\}$  et qui a une autre région de stabilité  $\Omega_s$ . L'existence d'un  $P$  qui résout l'un de ces deux problèmes donne bien  $\cup \Omega_{i \in \{1, 2\}} \cup \Omega_s = \Omega$ . Donc, il existe une loi de commutation qui stabilise le système dans cette région  $\Omega_s$ . Ceci dit que la stabilité du SDC par commutation reste conditionnelle. On verra par la suite ces conditions.

6. Si  $A_1$  instable et  $(-A_2)$  stable, existe-t-il une matrice  $P = P^T$  telle que  $\text{sig}(y(PA_i)y) = (1, 1), \forall i \in \{1, 2\}$  ?

Dans ce mémoire, seulement le 1<sup>er</sup> cas sera détaillé. Les autres cas font partie des perspectives de ce travail.

### 3.3.3.1 Etude détaillée du 1<sup>er</sup> cas : $A_1$ et $A_2$ stables

Si les  $A_i, i \in \{1, 2\}$  sont stables, alors il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que  $\text{sig}(y^T(PA_1)y) = (0, 2)$  (respectivement  $\text{sig}(y^T(PA_2)y) = (0, 2)$ ). Le raisonnement est équivalent, donc seulement le cas où  $\text{sig}(y^T(PA_1)y) = (0, 2)$  sera étudié. Suivant la matrice  $P$  choisie et la matrice  $A_2$  du système, deux sous-cas sont possibles :

- **Sous-cas a** : Si  $\text{sig}(y^T(PA_2)y) = (0, 2)$ ,  $S_1$  et  $S_2$  sont deux ellipses qui passent toutes les deux par le vecteur isotrope  $(0 \ 0)^T$  et  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont respectivement les extérieurs de  $S_1$  et  $S_2$ . De plus, le vecteur isotrope  $-A_1^{-1}b_1$  de  $q_1$  appartient à  $S_1$  et  $-A_2^{-1}b_2$ , vecteur isotrope de  $q_2$  appartient à  $S_2$ . Il existe alors deux possibilités :

- \* Si les deux ellipses sont tangentes (illustration dans l'exemple 3.3.1), d'après le lemme 3.3.1, elles sont forcément tangentes à l'origine  $y = (0 \ 0)^T$  qui est un point de  $E$ . Donc,  $x_d$  est un point de fonctionnement asymptotiquement stable du SDC.

D'après le lemme 3.3.1 les deux vecteurs tangentes en ce point sont liés  $Pb_1 = \alpha Pb_2 \Rightarrow b_1 = \alpha b_2 \Rightarrow A_1 x_d + B_1 = \alpha(A_2 x_d + B_2) \Rightarrow x_d = (A_1 - \alpha A_2)^{-1}(\alpha B_2 - B_1), \alpha < 0$ .

De plus, on a  $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \{0\} = \mathbb{R}^2$ , donc on peut stabiliser le SDC asymptotiquement sur le point  $x_d$  avec une loi de commande qui dépend de la fonction de Lyapunov  $V(y) = y^T P y$  définie par la matrice  $P$ .

La construction de cette matrice  $P$ , dans ce cas, revient à résoudre le problème 3.3.4 d'inégalités matricielles linéaires (Linear matrix inequality ou LMI) .

Pour la commande et son optimisation on verra par la suite.

**Problème 3.3.4** Sachant que  $x_d \in E$ , trouver une matrice  $P = P^T > 0$  qui vérifie les inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{cases} A_1^T P + P A_1 < 0 \\ A_2^T P + P A_2 < 0 \end{cases}$$

Pour plus de détails sur la résolution des LMI's, le lecteur peut se référer à [42] et [44].

**Exemple 3.3.1** Soit un SDC formé par deux sous-systèmes affines en état définis par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solution du problème 3.3.4 donne :

$$P = \begin{bmatrix} 1.406 & 0.277 \\ 0.277 & 0.318 \end{bmatrix}$$

Figure 3.19, l'ensemble  $E$  est représenté en gras en vert. Il est composé de deux parties d'une hyperbole. L'origine est en  $x_d = [5.143 \ -4]^T$  dans le repère  $(x_1, x_2)$ . Les niveaux d'énergie sont représentés par les ellipses noires ( $V = \text{constante}$ ). Le mode  $i \in \{1, 2\}$  peut être actif dans  $\Omega_i = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_i$ .

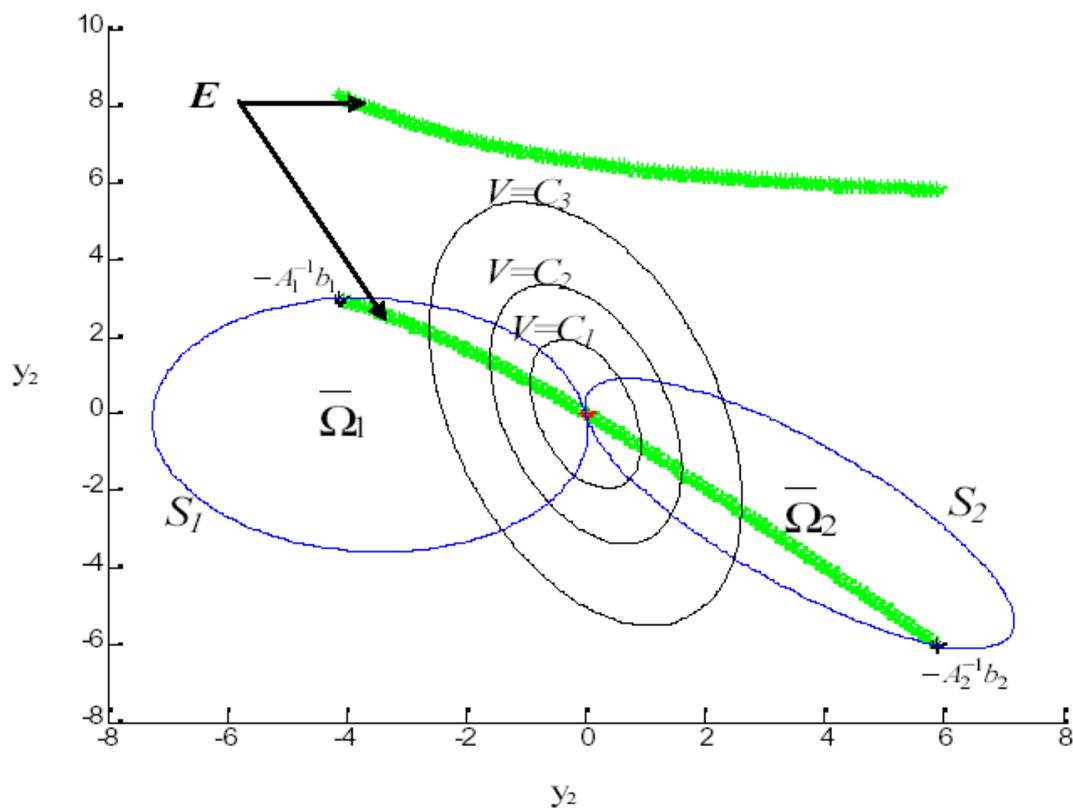


FIG. 3.19 – Sous-systèmes stables avec  $S_1$  et  $S_2$  deux ellipses tangentes

\* Si les deux ellipses ne sont pas tangentes, elles se croisent forcément en deux points distincts (illustration dans l'exemple 3.3.2). Définissons  $T = \bigcap \bar{\Omega}_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  la région de "turbulence" du système. Pour tout point  $y \in T$ ,  $q_i(y) \geq 0$ ,  $\forall i \in \{1, 2\}$ . Donc l'origine (au point  $x_d$ ) ne peut pas être atteinte asymptotiquement. Par conséquent, dès que la trajectoire du système rentre dans  $T$ , la zone de turbulence, elle s'éloigne de l'origine. Pour que le SDC soit le plus stable possible il faut donc minimiser  $T$ . La trajectoire restera autour de l'origine, car on peut toujours construire un niveau d'énergie,  $V(y) = C$ , qui contient  $T$  pour définir une région de stabilité du système telle que  $T \subset \{y \in \mathbb{R}^2 / V(y) \leq C, C \in \mathbb{R}^+\}$ . D'après le théorème 3.3.2, il existe un point  $y_E \in E$  tel que  $y_E \in S_1 \cap S_2$  et  $y_E \neq (0, 0)^T$ . D'où  $y_E \in T$ , car  $S_1 \cap S_2 \subset \bigcap \bar{\Omega}_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  (car les  $\bar{\Omega}_i$  sont des ensembles fermés). Pour minimiser  $T$  on doit donc, trouver le point  $y_E$  le plus proche de l'origine et qui garantit l'existence d'une matrice  $P = P^T > 0 / \text{sig}(y^T P A_i y) = (0, 2) \forall i \in \{1, 2\}$ . Soit  $y_{dE}$  ce point, et  $V_{min} = y_{dE}^T P y_{dE}$  le minimum d'énergie du système. On peut écrire :

$$\begin{cases} y_{dE} \in S_1 \Rightarrow q_1(y_{dE}) = 0 \\ y_{dE} \in S_2 \Rightarrow q_2(y_{dE}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y_{dE} | P A_1 y_{dE} + P b_1 \rangle = 0 \\ \langle y_{dE} | P A_2 y_{dE} + P b_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (y_{dE} \perp P(A_1 y_{dE} + b_1)) \Rightarrow P(A_1 y_{dE} + b_1) = \langle y_{dE} \rangle^\perp.$$

Soit  $f_1 = A_1 y_{dE} + b_1$ . Soit  $B_1 = (f_1, f_1^\perp)$  la nouvelle base orthonormée (O.N.B.) dans  $\mathbb{R}^2$ , l'ancienne O.N.B étant  $B_0 = ([1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T)$ . Le changement de base de  $B_0$  à  $B_1$  est donné par la transformation linéaire,  $M = [f_1, f_1^\perp]$ . Donc :

$$P f_1 = (y_{dE}^\perp)_{B_0} = (M y_{dE}^\perp)_{B_1} = [(M y_{dE}^\perp)_1 \ (M y_{dE}^\perp)_2]_{B_1}^T$$

Comme  $P$  est symétrique,  $P f_1^\perp$  prend la forme :

$$P f_1^\perp = [(M y_{dE}^\perp)_2 \ \beta]_{B_1}^T, \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow P = M \tilde{P} M^{-1},$$

avec

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} (M y_{dE}^\perp)_1 & (M y_{dE}^\perp)_2 \\ (M y_{dE}^\perp)_2 & \beta \end{bmatrix}_{B_1}.$$

Rechercher la matrice  $P$  qui donne le minimum d'énergie  $V_{min}$ , revient donc à trouver le couple  $(\beta, y_{dE})$  solution du problème 3.3.5.

**Problème 3.3.5** Sachant que  $x_d \notin E$ , trouver  $\beta$  et  $y_{dE}$  tels que :

$$\begin{cases} y_{dE} = \inf_E(\|y\|) \\ P = M \begin{bmatrix} (M y_{dE}^\perp)_1 & (M y_{dE}^\perp)_2 \\ (M y_{dE}^\perp)_2 & \beta \end{bmatrix}_{B_1} M^{-1} > 0 \\ A_i^T P + P A_i < 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

Ce problème est un problème d'optimisation sous contraintes qui consiste à trouver le minimum de la distance entre l'origine et  $y_{dE}$  pour trouver la matrice  $P$  optimale. La première contrainte assure que la matrice  $P$  est SDP, et la deuxième garantit que la matrice  $P$  déterminée garantit bien que la signature de la dérivée  $q$  de la fonction de Lyapunov  $V$  est  $(0, 2) \forall i \in \{1, 2\}$ , pour que les surfaces isotropes  $S_1$  et  $S_2$  soient des ellipses. La solution en  $P$  du problème, si elle existe, donne la fonction de Lyapunov qui stabilise le SDC à un minimum d'énergie décrit par  $V_{min} = y_{dE}^T P y_{dE}$ .

**Remarque 3.3.4 :**

*Si une telle matrice  $P$  existe, elle n'est pas unique.*

**Exemple 3.3.2** Reprenons l'exemple 3.3.1 avec  $x_d = [5 \ -2]^T$  (i.e  $(0 \ 0)^T \notin E$ ). La solution du problème 3.3.5 donne  $y_{dE} = [-0.031; -1.841]$  et  $\beta = 0.1853$  (en utilisant Matlab). Ceci nous permet de trouver la matrice  $P$  telle que :

$$P = \begin{bmatrix} 0.652 & 0.021 \\ 0.021 & 0.156 \end{bmatrix}.$$

La figure 3.20 représente la partie intéressante autour de  $x_d$  dans l'espace d'état.  $S_1$  et  $S_2$  sont deux ellipses, car les valeurs propres de  $A_1^T P + P A_1$  sont  $-0.98$  et  $-0.0005$ , et de  $A_2^T P + P A_2$  sont  $-0.35$  et  $-0.0013$ .  $T$  représente l'intersection de  $\bar{\Omega}_1$  et  $\bar{\Omega}_2$ .  $E$  est composé des deux parties d'hyperboles représentées en vert. Le niveau d'énergie  $V_{min}$  sur lequel le SDC sera stabilisé est aussi une ellipse.

• **Sous-cas b** : Si la matrice  $P = P^T > 0$  telle que  $sig(y^T(PA_2)y) = (0, 2)$  et  $sig(y^T(PA_1)y) = (0, 2)$  n'existe pas, alors  $sig(y^T(PA_2)y) = (1, 1)$  et  $S_2$  est une hyperbole passant par l'origine et le point  $-A_2^{-1}b_2$ . Rappelons que  $S_1$  est une ellipse. Suivant la matrice  $P$  choisie et la matrice  $A_2$  du système, deux sous-cas sont possibles, comme le sous-cas précédent :

\* Si les deux surfaces isotropes  $S_1$  et  $S_2$  sont tangentes, d'après le lemme 3.3.1, ces surfaces sont tangentes à l'origine qui est un point de  $E$ . Donc, trouver la matrice  $P$  de manière générique revient à résoudre la LMI du problème suivant :

**Problème 3.3.6** Le point  $x_d \in E$ , Déterminer la matrice  $P = P^T > 0$  telle que :

$$\begin{cases} A_1^T P + P A_1 < 0 \\ sig(y^T P A_2 y) = (1, 1) \end{cases}$$

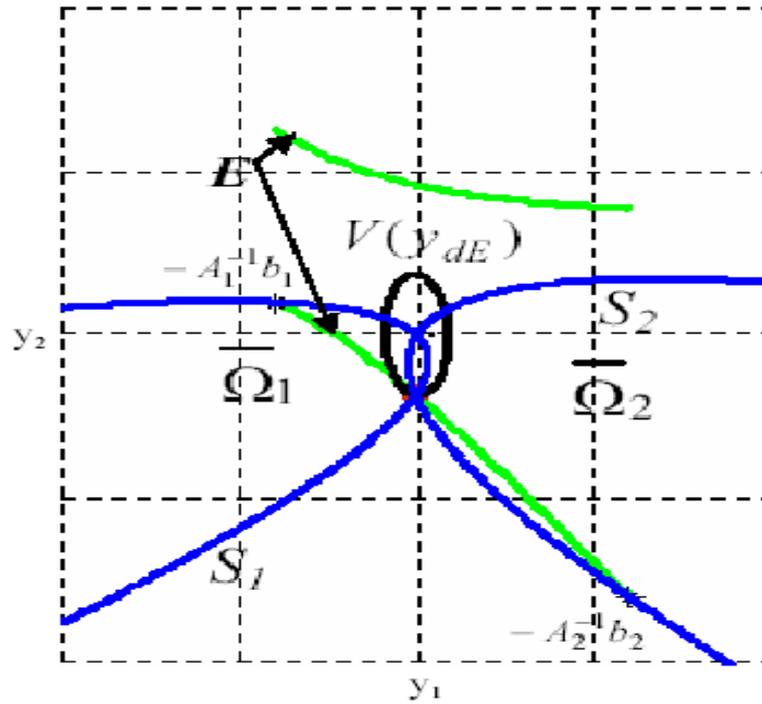


FIG. 3.20 – Sous-systèmes stables.  $S_1$  et  $S_2$  deux ellipses avec zone de turbulence dans la O.N.B  $B_1$

La solution en  $P$  du problème est la solution de la LMI  $A_1^T P + P A_1 < 0$ . En effet,  $A_1$  et  $A_2$  sont deux matrices Hurwitz et il n'existe pas de matrice  $P = P^T > 0 / \text{sig}(y^T (P A_i) y) = (0, 2) \forall i \in \{1, 2\}$ . L'inexistence de  $P$  peut être prouvée par l'existence des matrices symétriques et non-négatives  $R_0, R_1$  et  $R_2$ , qui ne sont pas toutes nulles, telles que :

$$R_0 = A_1 R_1 + R_1 A_1^T + A_2 R_2 + R_2 A_2^T.$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à S. Boyd and al. dans [8].

Alors, si une telle matrice  $P = P^T > 0 / A_1^T P + P A_1 < 0$  existe, nécessairement  $\text{sig}(y^T P A_2 y) = (1, 1)$ . Le système commuté est par conséquent asymptotiquement stable à l'origine.

Dans ce cas, si les deux surfaces isotropes  $S_1$  et  $S_2$  sont tangentes avec  $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0)\}$ , la stabilité asymptotique du système à commutation est évidente, car il existe à tout instant et en tout point de l'espace d'état continu, au moins un sous-système pour lequel la fonction de Lyapunov  $V$  trouvée est strictement décroissante.

Par contre, si les deux surfaces isotropes  $S_1$  et  $S_2$  sont tangentes à l'origine et se croisent aussi en deux autres points  $y_1$  et  $y_2$ , d'après le théorème 3.3.2, ces deux points sont aussi des points de  $E$ . Donc,  $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0), y_1, y_2\} \subset E$ . Dans ce cas, il existe une région de turbulence  $T = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ . Cette zone de turbulence n'a pas d'effet sur la stabilité du système puisque l'origine n'en fait pas partie, mais par contre il faut prendre en compte cette contrainte dans la conception de la commande, par exemple en évitant le

passage de la trajectoire continue du SDC par cette zone de turbulence  $T$ . L'origine reste localement asymptotiquement stable. L'exemple 3.3.3 illustre ces deux cas.

**Exemple 3.3.3** Soit le SDC (3.9) généré par les deux sous-systèmes linéaires dans le plan ( $x \in \mathbb{R}^2$ ), suivants :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ 2 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 2 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont stables, mais on ne peut pas trouver de matrice  $P = P^T > 0$  /  $A_i^T P + P A_i < 0 \forall i \in \{1, 2\}$ . En effet, si une telle matrice  $P$  existait, alors :  $(A_1 + A_2)^T P + P(A_1 + A_2) < 0 \Rightarrow (A_1 + A_2)$  stable (Hurwitz). Or, ce n'est pas le cas car les valeurs propres de  $(A_1 + A_2)$  sont  $-1.2$  et  $0.8$ .

La solution du problème 3.3.6, pour un point de fonctionnement  $x_{d1} = (0.55 \ 1.3)^T \in E$  (point tangent étant défini par  $\alpha_1 = -0.1$ ) dans les coordonnées de  $(x_1, x_2)$  donne

$$P = \begin{bmatrix} 151.1 & 0.312 \\ 0.312 & 75.138 \end{bmatrix}.$$

La figure 3.21 illustre ce cas. L'ensemble  $E$  est représenté par l'hyperbole verte. L'ellipse  $S_1$  et l'hyperbole  $S_2$  sont en bleu et les niveaux d'énergie sont représentés par les ellipses noires. Avec ce point de fonctionnement  $x_{d1}$ , on a  $S_1 \cap S_2 = \{(0 \ 0)^T\}$ .

Par contre, si le point de fonctionnement est  $x_{d2} = (0.57 \ 1.88)^T$ , le point tangent est défini par  $\alpha_2 = -0.2$ . La solution en  $P$  du problème 3.3.6 est la même que celle du cas où  $x_d = x_{d1}$ , car elle est indépendante de  $x_d$ . Mais, quand  $x_d = x_{d2}$ , on a  $S_1 \cap S_2 = \{(0 \ 0)^T, (-0.855 \ -4.175)^T, (-0.9 \ -4.152)^T\}$ . La figure 3.22 illustre ce deuxième cas.

\* Si les deux surfaces isotropes  $S_1$  et  $S_2$  sont non tangentes, l'origine  $y = (0 \ 0)^T$  dans le système de coordonnées  $(y_1, y_2)$ , i.e  $x_d$  dans le système de coordonnées  $(x_1, x_2)$ , n'appartient pas à  $E$ . Le problème à résoudre pour trouver une matrice  $P$  est le suivant :

**Problème 3.3.7** Le point  $x_d \notin E$ , trouver  $\beta$  et  $y_{dE}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{dE} = \inf_E(\|y\|) \\ P = M \begin{bmatrix} (My_{dE}^\perp)_1 & (My_{dE}^\perp)_2 \\ (My_{dE}^\perp)_2 & \beta \end{bmatrix}_{B_1} M^{-1} > 0 \\ A_1^T P + P A_1 < 0 \end{array} \right.$$

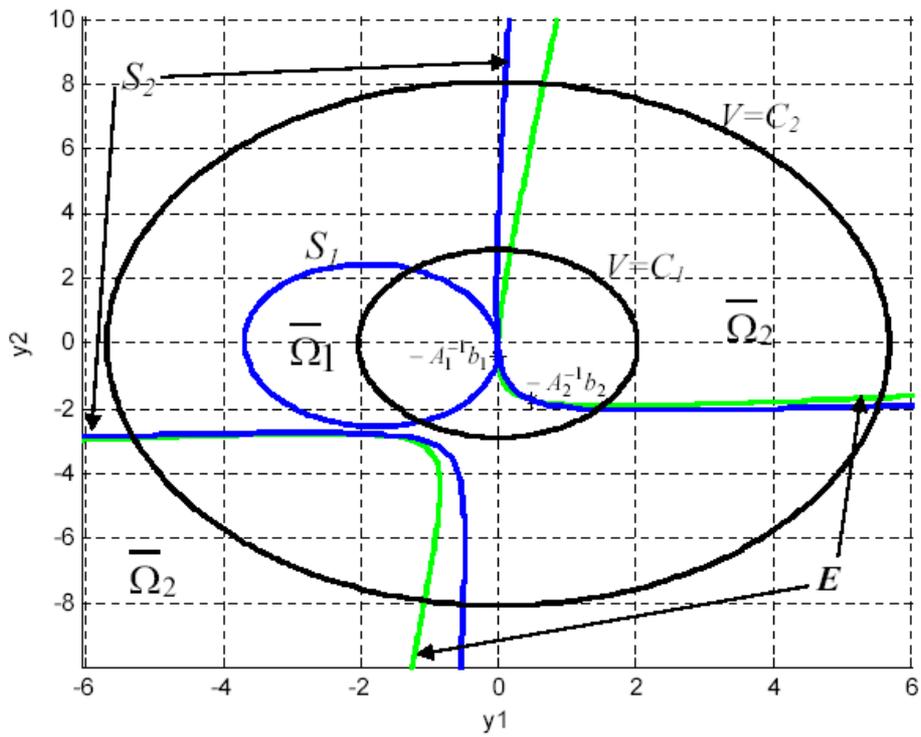


FIG. 3.21 – Sous-systèmes stables avec  $S_1$  une ellipse tangente à  $S_2$  qui est une hyperbole en un seul point  $x_{d1} \in E$ . Pas de région de turbulence.

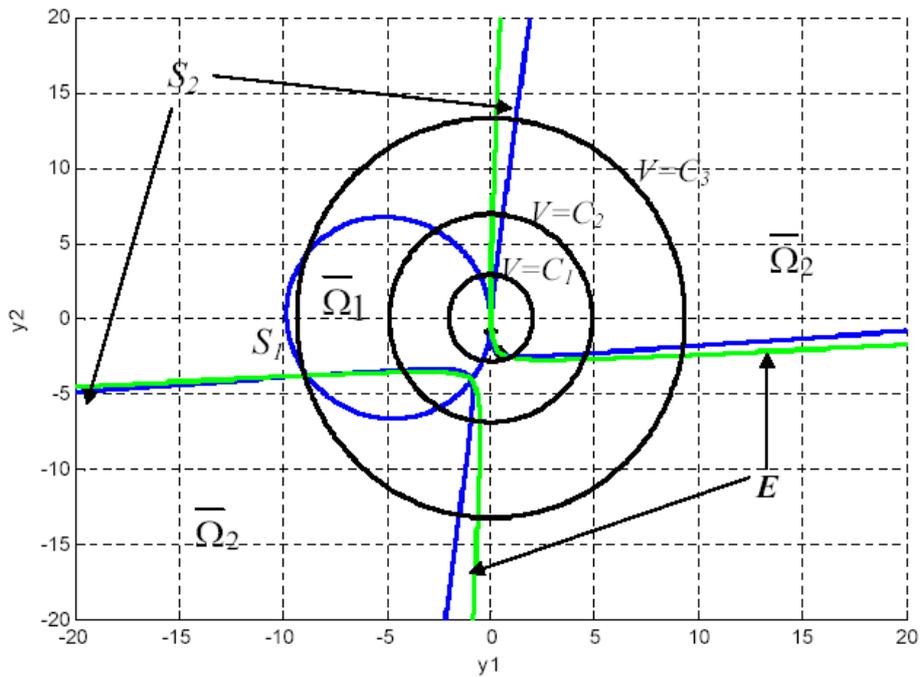


FIG. 3.22 – Sous-systèmes stables avec  $S_1$  une ellipse tangente à  $S_2$  qui est une hyperbole. Point de fonctionnement  $x_{d2} \in E$ . Avec région de turbulence.

**Exemple 3.3.4** Reprenons l'exemple 3.3.3 avec  $x_{d3} = (0.5 \ 1)^T$ . La solution du problème 3.3.7 donne  $y_{dE} = [0.37 \ -0.027]^T$  avec  $\beta = 5$  et :

$$P_3 = \begin{bmatrix} 4.65 & -1.08 \\ -1.08 & 1.88 \end{bmatrix}.$$

Figure 3.23, l'ellipse  $S_1$  et l'hyperbole  $S_2$  sont représentées en bleu, l'ensemble  $E$  est représenté en vert et les niveaux d'énergie sont représentés en noir. La région de stabilité de ce système est limitée par le niveau d'énergie  $V = C_4$  qui est un minimum d'énergie dans lequel le SDC peut être stabilisé, car  $\Omega_s(C_4) = \{y \in \mathbb{R}^2 / V(y) \leq C_4 \text{ avec } C_4 \in \mathbb{R}^+\}$  est la plus petite région de stabilité qui contient intégralement la zone de turbulence  $T$ . Ce niveau d'énergie est caractérisé par le point  $y_{dE}$  et la matrice  $P$  ( $V = y_{dE}^T P y_{dE}$ ).

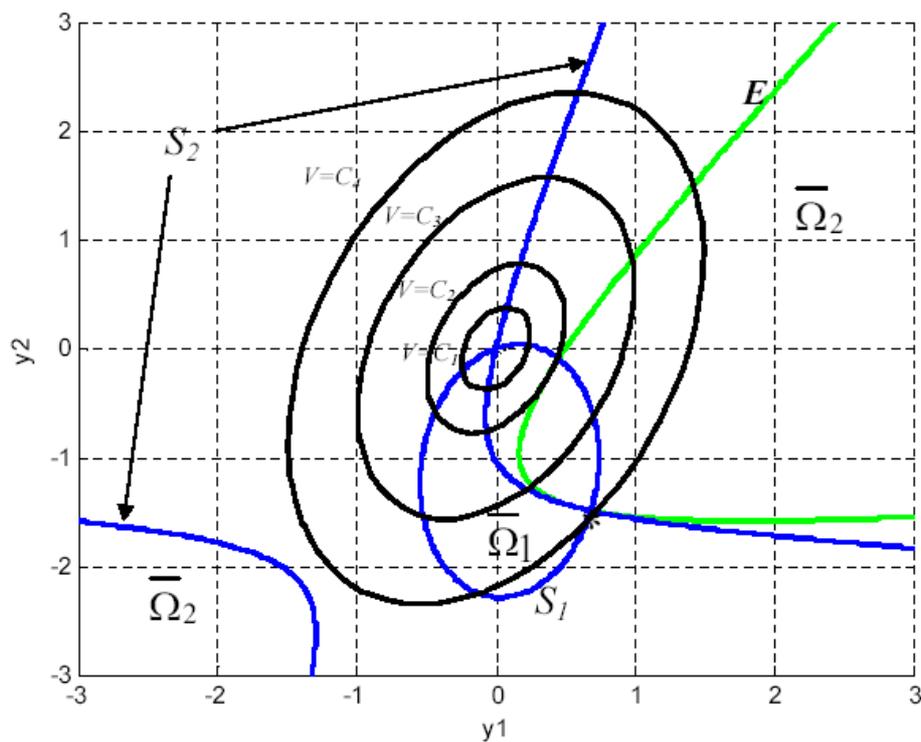


FIG. 3.23 – Sous-systèmes stables.  $S_1$  est une ellipse tangente à  $S_2$  qui est une hyperbole. Point de fonctionnement  $x_{d3} \notin E$ , avec zone de turbulence

Une fois la fonction de Lyapunov qui stabilise le système est déterminé, on peut se procéder par la suite à une commande par optimisation d'énergie de la façon suivante : Soit  $q = q_1 - q_2$  une fonction quadratique, puisque  $q_1$  et  $q_2$  le sont. Suivant le signe de  $q$  au cours du temps, on peut construire une loi de commutation pour le SDC, qui sera un signal constante par morceau.

### 3.3.4 Commande hybride du SDC bouclé par fonction de Lyapunov commune

#### 3.3.4.1 Choix de la commande

L'objectif de la commande est de stabiliser le SDC (3.9) (respectivement le SDC (3.8)) autour de l'origine (respectivement autour de  $x_d$ ).

Le SDC (3.9) commandé, sera représenté en boucle fermée par un retour d'état non linéaire :

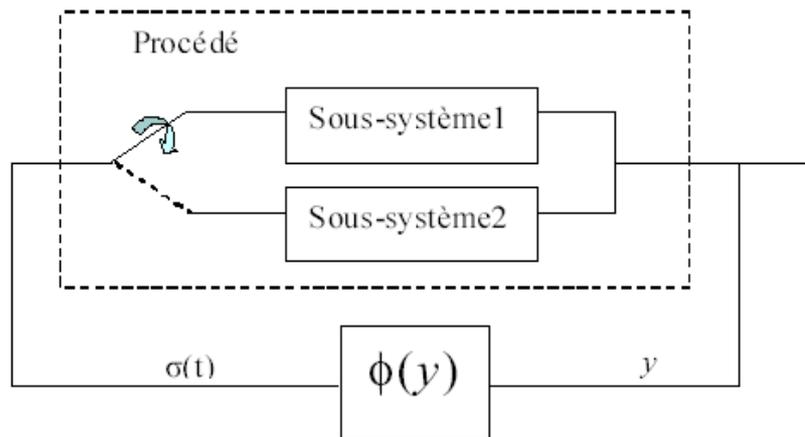


FIG. 3.24 – SDC commandé (SDC en boucle fermée)

Les dynamiques des deux sous-systèmes sont représentées par les champs de vecteurs (linéaires dans notre cas)  $f_i(y), i \in \{1, 2\}$ .

Une fois que la QCFL qui assure la stabilité du SDC défini par (3.8) est déterminée, une commande stabilisante qui dépend de la stabilité ou de l'instabilité des matrices  $A_i$  des champs de vecteurs, doit être construite suivant des critères à spécifier.

Dans cette partie on s'intéressera à la commande optimale en énergie qui amène le système d'un point initial (ou d'une région initiale) vers un point final (ou une région finale) en garantissant que l'énergie du SDC atteindra le plus vite possible son minimum au point désiré (ou dans la région désirée).

Le paragraphe précédent donne une méthode pour construire une matrice  $P$  qui définit une fonction de Lyapunov  $V(x)$  commune à tous les modes. Cette fonction remplit bien la propriété de stabilisation donnée dans le théorème 3.3.1 i.e. que l'union des régions de fonctionnement possibles des sous-systèmes  $\cup \Omega_i$  et de la région de stabilité  $\Omega_s$  couvre toute la région globale de fonctionnement du SDC,  $\Omega$ .

Le système (3.9) commandé sera donc sous la forme correspondante à la figure 3.24) :

$$\dot{y} = A_\sigma + b_\sigma, \quad (3.10)$$

avec  $\sigma(t) = \phi(y(t))$  la commande constante par morceaux du SDC (3.10),  $\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \{1, 2\}$ . Elle change de valeur suite à des événements d'état puisque les événements sont internes. La dynamique du système commandé change quand la trajectoire atteint une surface définie explicitement en fonction des variables d'état. Dans notre cas, cette surface est notée  $S_q$  et dépend des dérivées de la fonction de Lyapunov calculée précédemment. Par conséquent, pour tout point  $y \in \Omega$ , à instant donné  $t$ ,  $\sigma(t) \in \{1, 2\}$ .

Le problème de commande est donc résolu une fois que la matrice  $P$  de la fonction QCFL est trouvée.

En effet, soit les deux fonctions quadratiques  $q_1$  et  $q_2$ , les dérivées de cette QCLF respectivement suivant les dynamiques (sous-systèmes ou modes) 1 et 2 du SDC. Ces fonctions quadratiques représentent les variations de cette fonction suivant ces deux sous-systèmes. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que les surfaces isotropes à ces fonctions quadratiques sont  $S_1$  et  $S_2$  et peuvent prendre la forme d'une droite, d'une hyperbole ou d'une ellipse.

Soit  $q = q_1 - q_2$ , une fonction qui déterminera le sous-système avec la fonction  $V$  la plus décroissante quand les deux fonctions  $q_1$  et  $q_2$  sont décroissantes ou au moins l'une d'elle l'est, ou le sous-système qui fait croître le moins la fonction  $V$  quand les deux fonctions  $q_1$  et  $q_2$  sont croissantes. A cette fonction  $q$ , on associe aussi une surface isotrope :

$$S_q = \{y \in \mathbb{R}^2 / q(y) = q_1(y) - q_2(y) = 0\}.$$

Puisque  $y^T P A_1 y$  et  $y^T P A_2 y$  sont des formes quadratiques, alors  $y^T P (A_1 - A_2) y$  en est une aussi, et  $S_q$  est aussi une surface en forme de droite, hyperbole ou ellipse.

Dans la suite, cette surface isotrope  $S_q$  de  $q$  sera la surface de commutation du SDC.

Une représentation explicite de la commande  $\sigma$  est :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } q(y) < 0 \\ 2 & \text{si } q(y) > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

On remarque que cette commande peut être une commande par mode glissant (Sliding Mode Control SMC) [82, 81, 80, 83, 84] et [25] sur la surface de commutation  $S_q$ . En effet, suivant les champs de vecteurs  $f_1$  et  $f_2$ , la surface  $S_q$  sera une surface de glissement ou une simple surface de commutation. Dans ce dernier cas, les autres surfaces de commutation de la commande seront les surfaces isotropes  $S_1$  et  $S_2$  et le niveau d'énergie  $V = V_{min}$ . A chaque instant, certaines conditions sur la trajectoire sont testées pour décider si le même mode doit continuer à être actif ou pas.

La commande par Sliding-mode fait partie des commandes à structure variable (Variable Structure Control, VSC) [25, 80]. Ces commandes ont commencé à être étudiées il y a assez longtemps (1967). L'avantage de ces commandes est leur robustesse, c.a.d. qu'elles

permettent d'être particulièrement insensible aux perturbations extérieures et aux incertitudes du modèle, et l'on évite ainsi de concevoir des modèles complexes incluant ces perturbations et ces incertitudes. Par contre, une des difficultés de cette commande réside justement dans le choix (par construction) de la surface de commutation,  $S$ , sur laquelle le système commandé va "glisser" pour atteindre le point (ou la région) final(e). Une des méthodes simples pour construire une telle commande par mode glissant, présentée par Utkin dans ses travaux [80, 82, 81], est la méthode de *commande équivalente*.

Par ce type de commande, le système en boucle fermée sera le système Filippov [27]

$$\dot{y} = \begin{cases} f_1(y) & \text{si } y \in \mathcal{X}_1 \\ f_2(y) & \text{si } y \in \mathcal{X}_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

avec,

$$\mathcal{X}_1 = \{y : q(y) < 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_2 = \{y : q(y) > 0\}$$

Notre objectif est d'abord de guider le système vers la surface de commutation  $S_q$  (on parle d'atteignabilité de cette surface par le SDC), puis de le faire glisser le long de cette surface grâce à de rapides et incessantes commutations entre certains sous-systèmes (on parle de l'atteignabilité du point désiré  $x_d$ ), pour réussir enfin à le stabiliser dans une région autour du point de fonctionnement désiré (on parle de la stabilité du point de fonctionnement désiré  $x_d$ ). Une représentation intuitive du problème est présentée figure 3.25.

Si, au bout d'un certain temps, la séquence de commande discrète qui permet de rester dans la région finale est répétitive, et que la trajectoire dans l'espace d'état continu décrit toujours le même motif, alors on dit qu'on atteint un cycle limite hybride  $\gamma$ . Le paragraphe 2.24 donne plus de détails sur les cycles limites.

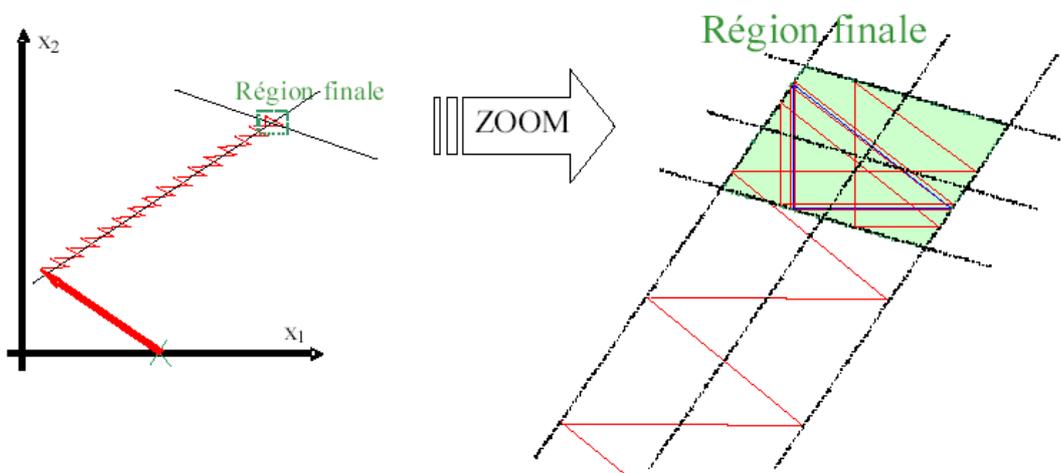


FIG. 3.25 – Représentation intuitive du Sliding Mode Control : atteignabilité et stabilité

### 3.3.4.2 Application de la commande

Pour appliquer la commande par SMC au SDC, on procède de la façon suivante : Soit  $S_q = \{y : q(y) = q_1(y) - q_2(y) = 0\}$  la surface de commutation sur laquelle le SDC commandé va glisser pour atteindre le point (ou la région) désiré. Etant donné le choix de cette surface, la condition de glissement (sliding mode) du SDC est garantie une fois que le système est arrivé, par commutation, sur cette surface  $S_q$ . Il reste donc à garantir la condition d'atteignabilité de  $S$  (reaching mode). Pour cela, il faut discuter les deux cas ou les deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont tangentes ou non.

- Si  $S_1$  et  $S_2$  sont tangentes, alors forcément elles sont tangentes à l'origine. L'origine est un point de  $S_1 \Leftrightarrow q_1([0 \ 0]^T) = 0$ . De même, l'origine est un point de  $S_2 \Leftrightarrow q_2([0 \ 0]^T) = 0$ . Donc  $q([0 \ 0]^T) = 0$ , et l'origine est un point de  $S_q$ . Or, par construction,  $P$  est choisie telle que la trajectoire  $y(t)$  converge vers l'origine qui est un point de  $S_q$ . Donc la surface de commutation  $S_q$  est forcément atteignable par l'un des champs de vecteurs  $f_1$  ou  $f_2$ . Ainsi, suivant la loi de commande  $\sigma(t)$  de (3.11), la surface  $S_q$  est atteignable par le champs de vecteur  $f_1$  si  $y \in \mathcal{X}_1 = \{y : q(y) < 0\}$ , et par le champs de vecteur  $f_2$  si  $y \in \mathcal{X}_2 = \{y : q(y) > 0\}$ .
- Maintenant, si  $S_1$  et  $S_2$  sont non tangentes, alors par construction de  $P$ , la trajectoire  $y(t)$  converge vers un point  $y_{dE}$  qui définit un minimum de la fonction de Lyapunov  $V_{min} = y_{dE}^T P y_{dE}$ , de même que dans le cas précédent,  $y_{dE} \in S_q$ . Donc la surface de commutation  $S_q$  est aussi atteignable par le champs de vecteur  $f_1$  si  $y \in \mathcal{X}_1 = \{y : q(y) < 0\}$ , et par le champs de vecteur  $f_2$  si  $y \in \mathcal{X}_2 = \{y : q(y) > 0\}$ .

Le dernier problème à éviter lors de la conception de cette commande est le phénomène de "chattering".

Le terme "chattering" décrit un phénomène d'oscillations à fréquence finie, sur les variables de l'état, qui se manifeste lors de la mise en oeuvre des commandes par modes glissants. Il est causé par les imperfections des organes de commutation - ne pouvant travailler à une fréquence théoriquement infinie - et la présence des fonctions 'signes' (" $<$ " et " $>$ ") dans la loi de commande (3.11) par modes glissants. Cette commutation à haute fréquence peut exciter des dynamiques non modélisées, comme les dynamiques propres des actionneurs ou capteurs, souvent négligées dans le modèle car elles sont généralement plus rapides que la dynamique du système étudié. Mais, pour les commandes par modes glissants, puisque les oscillations ont une fréquence infinie dans le cas 'idéal', cette hypothèse ne tient plus, et il convient d'étudier de près l'influence de ces dynamiques négligées. Le problème de "chattering" est donc un handicap sérieux lors de l'application pratique des modes glissants.

Pour éviter à ce phénomène de se produire le long de la surface de commutation, on place, comme l'indique la figure 3.26 un hystérésis dans la boucle, à la suite du calcul de la surface  $S$ . Le SDC commandé par SMC sera donc schématisé en boucle fermée comme dans la figure 3.26, avec le signal de commutation  $\sigma$  défini par :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } q(y) > h \\ 0 & \text{si } q(y) < h \\ \sigma(t^-) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.13)$$

avec  $\sigma(t^-) = \sigma(t - \Delta t)$ ,  $\Delta t$  infiniment petit et  $2h$  la largeur de l'hystérésis.

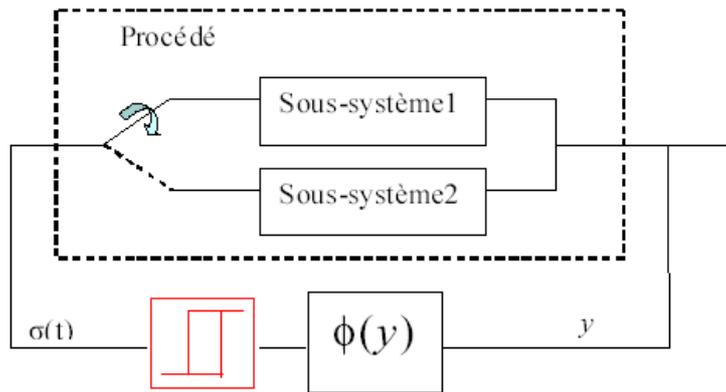


FIG. 3.26 – Système commandé par SMC à hystérésis

Par la suite, cette méthode de commande, suivant la loi (3.13), est appliquée aux exemples 3.3.1 et 3.3.2 de la section 3.3.3.

**Exemple 3.3.5** Reprenons l'exemple 3.3.1. La fonction de Lyapunov  $V = y^T P y$  est donnée par la matrice :

$$P = \begin{bmatrix} 1.406 & 0.277 \\ 0.277 & 0.318 \end{bmatrix}$$

déjà calculée précédemment dans l'exemple 3.3.1.

En appliquant la loi de commande (3.13) avec

$$q(y) = y^T P ((A_1 - A_2)y + (b_1 - b_2)) = y^T P ((f_1 - f_2)) \quad \text{et } h = 0.1,$$

le SDC sera stabilisé asymptotiquement à l'origine (en  $x_d = [5.143 \ -4]^T$  dans le repère  $(x_1, x_2)$ ).

Les résultats de simulation sont représentés figures 3.27 et 3.28.

**Exemple 3.3.6** Reprenons l'exemple 3.3.2. La fonction de Lyapunov est donnée par la matrice :

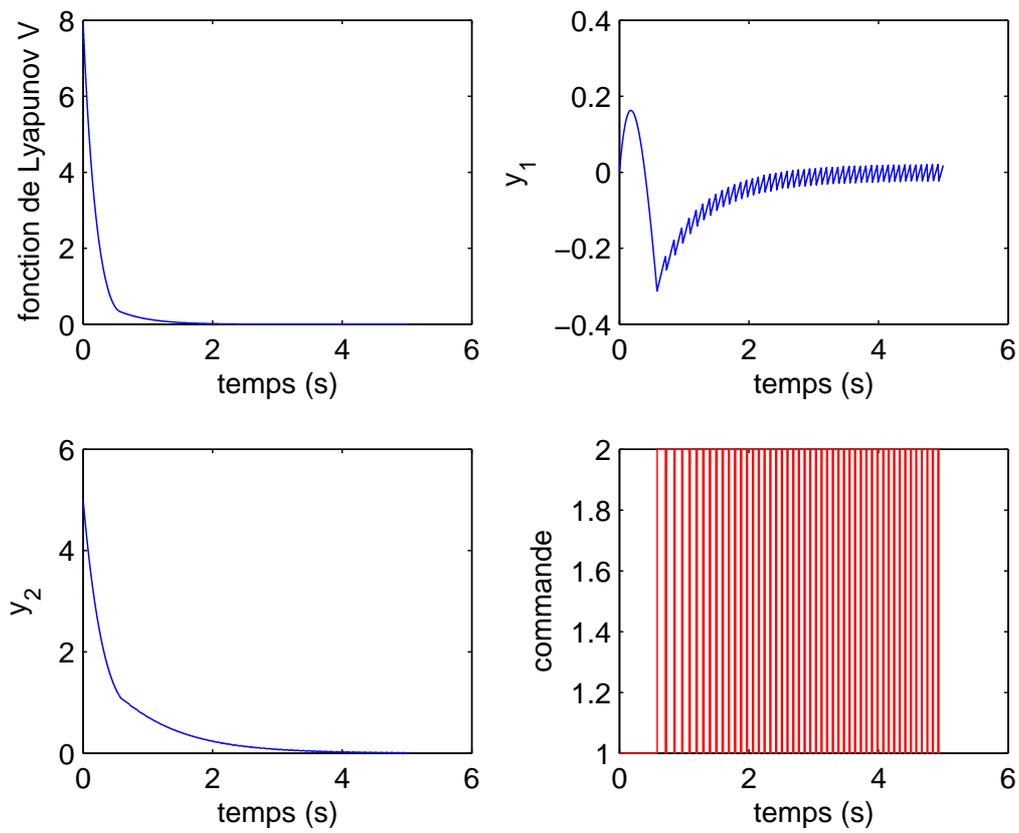


FIG. 3.27 – Résultats des simulations de l'exemple 3.3.1 stabilisé par retour d'état : Évolution de  $V$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  et de la commande discrète

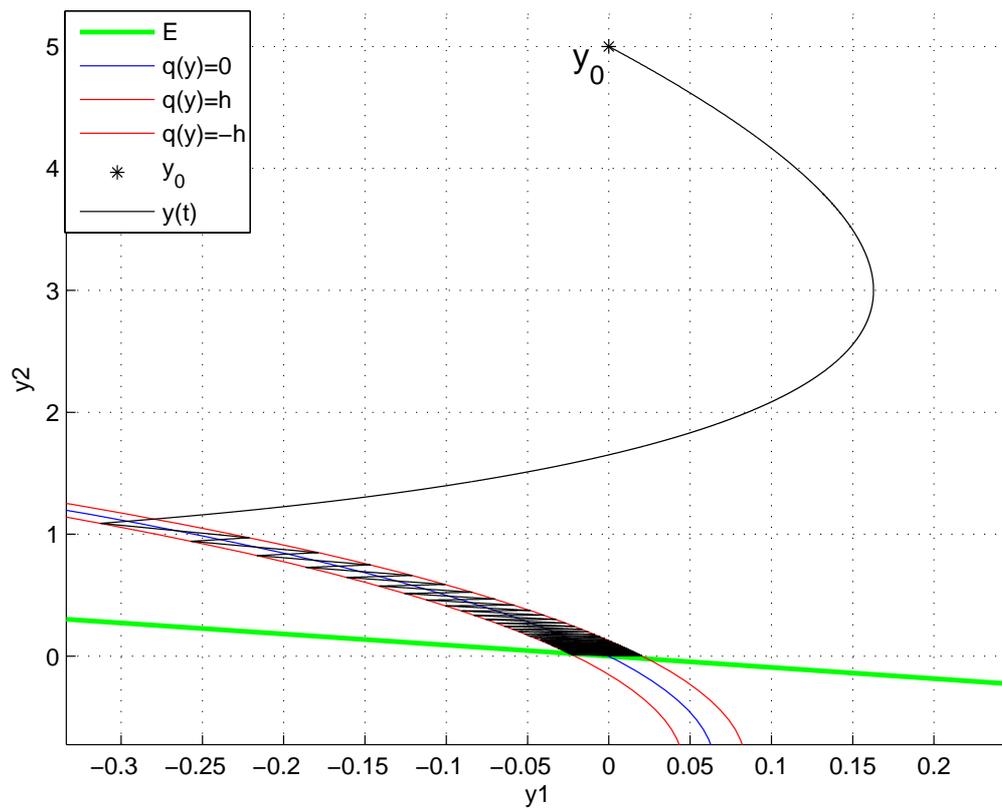


FIG. 3.28 – Résultats des simulations de l'exemple 3.3.1 stabilisé par retour d'état : Évolution dans l'espace d'état.

$$P = \begin{bmatrix} 0.652 & 0.021 \\ 0.021 & 0.156 \end{bmatrix}.$$

En appliquant la loi de commande (3.13), avec  $h=0.1$ , le SDC sera stabilisé asymptotiquement au point  $y_{dE} = [-0.031; -1.841]$ , solution du problème 3.3.5. Les résultats de simulation sont représentés figures 3.29 et 3.30.

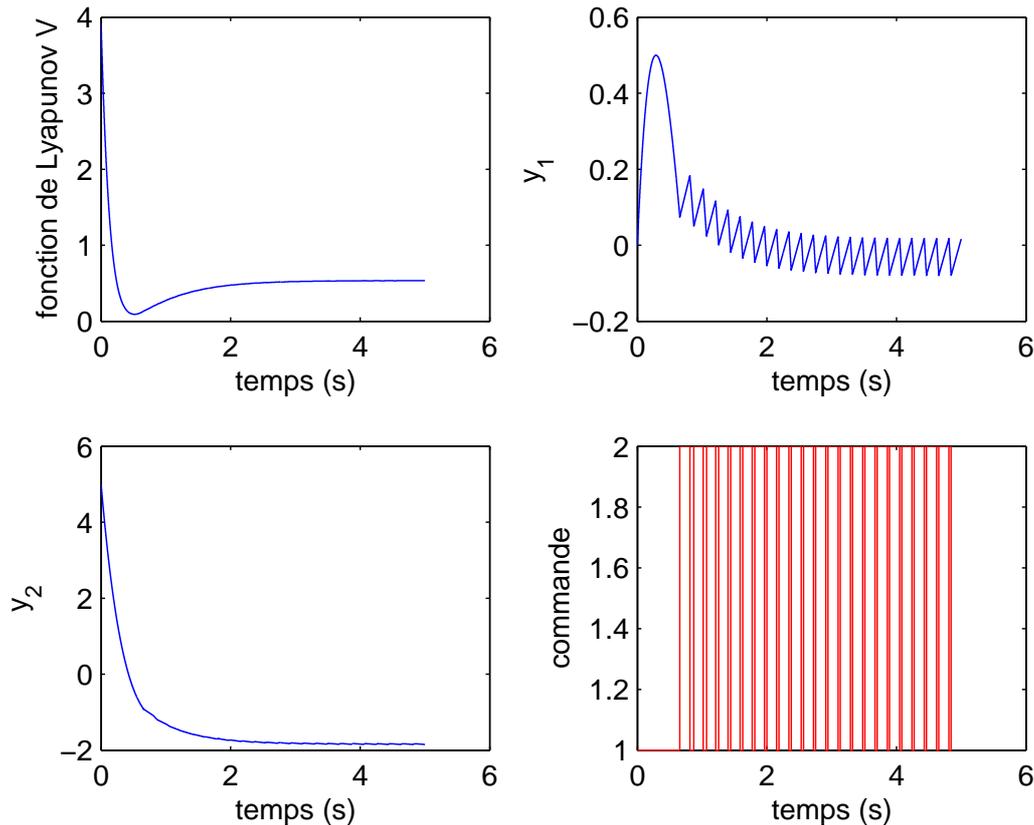


FIG. 3.29 – Résultats des simulations de l'exemple 3.3.2 stabilisé par retour d'état : Évolution de  $V$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  et de la commande discrète

On remarque que la commande du SDC des exemples 3.3.5 et 3.3.6 stabilise le système au point désiré si ce point est un point de l'ensemble  $E$  (exemple 3.3.5) et au point de  $E$  le plus proche du point désiré si ce point ne fait pas partie de l'ensemble  $E$  (exemple 3.3.6).

Aussi, l'hystérésis  $2h$  permet d'éviter le phénomène "Zeno".

On peut donc conclure que cette méthode de commande stabilisante est facile à concevoir une fois que la "bonne" fonction de Lyapunov est trouvée, si elle existe.

### 3.3.5 Conclusion

Dans cette partie, une méthode de calcul et de conception d'une fonction quadratique de Lyapunov commune (CQLF) pour tous les sous-systèmes du SDC linéaire a été présentée. Cette CQLF définit la région attractive de chaque sous-système dans l'espace d'état

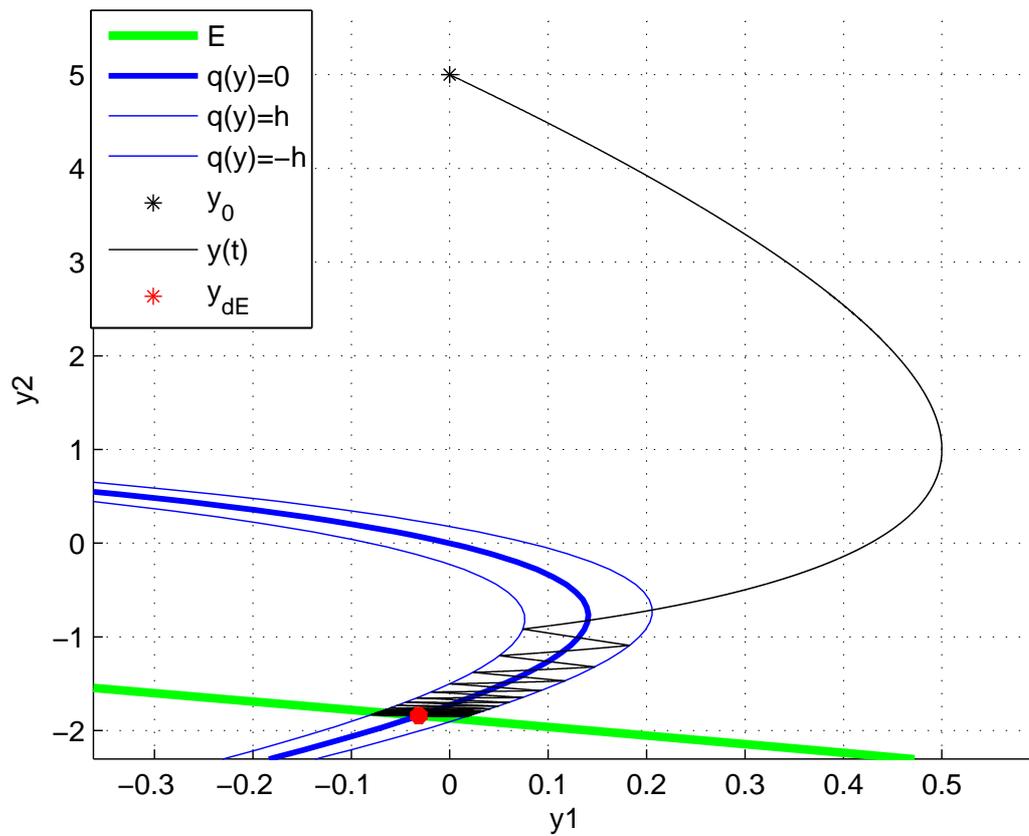


FIG. 3.30 – Résultats des simulations du SDC de l'exemple 3.3.2 stabilisé par retour d'état : Évolution dans l'espace d'état.

continu.

La discussion de tous les cas a été détaillée dans le plan ( $\mathbb{R}^2$ ) pour les six cas possibles suivant la stabilité des sous-systèmes i.e suivant la forme géométrique des surfaces isotropes et de la dérivée de la fonction de Lyapunov c.à.d la signature de  $q_i$  ( $sig(y^T(A_i^T P + P A_i)y)$ ) de tous les sous-systèmes,  $i \in \{1, 2\}$ . Le type de stabilité du système commuté (global, uniforme, conditionnel, asymptotique ou non, local ou global,...) dépend fortement du point de fonctionnement désiré.

Le calcul de la fonction de Lyapunov commune à tous les sous-systèmes est une étape cruciale dans la conception de la commande stabilisante des systèmes à commutation.

En perspectives de ce travail, les cinq autres cas doivent être détaillés dans  $\mathbb{R}^2$ , puis, cette méthode d'analyse et conception doit être étendue au cas de deux sous-systèmes de l'espace d'état continu dans  $\mathbb{R}^n$ . Et, enfin, un objectif intéressant serait de généraliser cette méthode pour tous les SDC à sous-systèmes linéaires.

# Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude des systèmes dynamiques à commutation (SDC) et particulièrement aux convertisseurs statiques d'énergie électrique (appelés aussi hacheurs dans le vocabulaire des électrotechniciens). Notre travail a été principalement consacré à l'analyse et à la commande de ces systèmes. Le corps de ce manuscrit concerne la problématique de la synthèse de commande des SDC, dont une première partie dédiée à la présentation d'une nouvelle méthode de commande stabilisante des SDC linéaires basée sur la théorie de Lyapunov, et une deuxième partie dédiée à une nouvelle méthode de commande stabilisante applicable à tous systèmes à commutation du plan avec deux modes de fonctionnement, qu'ils soient linéaires ou non linéaires.

Pour aider les auteurs à bien comprendre cette problématique de commande des SDC, une présentation préliminaire a été effectuée sur les aspects hybrides des SDC, les méthodes de modélisation, les notions spécifiques à l'hybride, les outils mathématiques ainsi que les méthodes d'analyse de stabilité et de stabilisation.

Dans le premier chapitre, nous avons donné quelques définitions sur les aspects hybrides des SDC dans le but de bien différencier ces systèmes des systèmes non linéaires continus et nous avons donné les méthodes de modélisation les plus connus dans ce domaine. Puis, nous avons discuté de l'influence de la nature hybride du système sur la trajectoire d'un SDC et exprimé la notion d'exécution hybride avec les solutions hybrides d'un SDC suivant une exécution donnée. Ensuite, les exécutions hybrides répétitives ont été exprimées pour définir ce que l'on appelle une exécution périodique.

L'analyse de stabilité des SDC a été présentée dans le deuxième chapitre, en deux parties. Dans une première partie, nous avons donné les bases mathématiques nécessaires à l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques hybrides et des SDC, puis, les comportements périodiques et stationnaires (point de fonctionnement, point d'équilibre, cycle limite, ...) des SDC ainsi que leurs différences avec les systèmes dynamiques continus vis à vis de ces comportements. Le cas des SDC linéaires par morceaux a été traité en détails et illustré par une application au système classique des deux bacs, du génie des procédés. Dans une deuxième partie, la stabilité par Lyapunov a été présentée ainsi que la manière d'utiliser ces fonctions dans l'analyse de stabilité des SDC.

Le troisième chapitre constitue le corps de ce travail, et est intégralement consacré à la commande des SDC ainsi qu'aux difficultés liées à la conception d'une commande stabilisante efficace de ces systèmes, appliquée directement aux interrupteurs. Deux méthodes de commande ont été présentées.

La première méthode est une méthode qui s'appuie sur les propriétés géométriques des champs de vecteurs. Tout d'abord, un cycle limite hybride est construit autour du point

de fonctionnement désiré, de manière optimale (en termes de respect des contraintes sur l'état et sur la durée entre deux commutations), après avoir prouvé son existence. Ce cycle définit la région finale à atteindre par le système commandé depuis son état initial, suivant une trajectoire incluse dans le domaine de fonctionnement global du SDC. Cette trajectoire est formée par une séquence de modes de fonctionnement, trouvée par inférence arrière jusqu'à atteindre la région initiale du système, et du temps de séjour dans chaque mode trouvé par optimisation d'un critère donné (durée totale, énergie dépensée, ...). L'inférence arrière est utilisée pour trouver toutes les séquences de commande possibles du SDC, qui permettent d'atteindre le cycle limite hybride. Elle est basée sur le théorème 3.2.4 qui est une extension des résultats de Manon [46]. Une condition nécessaire et suffisante d'existence et de stabilité d'un cycle limite hybride composé d'une séquence de deux modes de fonctionnement est présentée dans  $\mathbb{R}^2$ . Les théorèmes 3.2.5 et 3.2.6 étendent cette condition pour les systèmes à champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^n, n > 2$ . Donc, on peut déduire que la synthèse de la commande stabilisante peut être aussi étendue à  $\mathbb{R}^n, n > 2$ .

En perspective de cette partie, il serait intéressant de traiter en détail des applications moins académiques de l'extension de cette méthode aux SDC formés par deux sous-systèmes non linéaires de  $\mathbb{R}^n, n > 2$ .

La deuxième est une nouvelle méthode de calcul et de conception d'une fonction quadratique de Lyapunov commune (CQLF) pour tous les sous-systèmes du SDC. Cette CQLF définit la région attractive de chaque sous-système dans l'espace d'état continu. Six cas sont possibles suivant la stabilité des sous-systèmes (on parle donc d'un espace d'état non partitionné). Puis, une discussion est menée suivant la forme géométrique des surfaces isotropes de la dérivée de la fonction de Lyapunov (signature de la dérivée de la fonction de Lyapunov  $q_i$  de tous les sous-systèmes). Le cas des SDC formés par deux sous-systèmes linéaires affines en l'état, stables et d'état dans  $\mathbb{R}^2$  est détaillé : une fonction de Lyapunov quadratique commune à tous les sous-systèmes est calculée, puis utilisée dans la conception de la commande directe des interrupteurs. Il faut signaler que le type de stabilité du SDC commandé (globale, uniforme, conditionnelle, asymptotique ou non, ...) dépend fortement du point de fonctionnement désiré.

Le calcul de la fonction de Lyapunov commune à tous les sous-systèmes est une étape cruciale dans la conception de la commande stabilisante des systèmes à commutation. En perspective de cette partie, il serait intéressant d'étudier les cinq autres cas suivant les combinaisons des deux sous-systèmes stables ou instables dans  $\mathbb{R}^2$ . Puis, cette méthode d'analyse et de conception doit être étendue au cas de deux sous-systèmes de l'espace d'état continu dans  $\mathbb{R}^n$ . Et, enfin, un objectif intéressant serait de généraliser cette méthode pour tous les SDC à sous-systèmes linéaires.

# Bibliographie

- [1] H. Alla and R. David. Continuous and hybrid petri nets. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 8(1) :159–188, 1998.
- [2] R. Alur, C. Courcoubetis, N. Halbwachs, T. A. Henzinger, P. H. Ho, X. Nicollin, A. Olivero, J. Sifakis, and S. Yovine. The algorithmic analysis of hybrid systems. *Theoretical Computer Science*, 138 :3–34, 1995.
- [3] A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E Khaikin. *Theory of oscillators*. Pergamon, 1966.
- [4] B. Zurita Ares, P.G. Park, C. Fischione, A. Speranzon, and K. H. Johansson. On power control for wireless sensor networks : System model, middleware component and experimental evaluation. In *IFAC European Control Conference (ECC'07)*, 2007.
- [5] A. Bemporad, G. Ferrari, and M. Morari. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 :1864–1876, 2000.
- [6] O. Bethoux and J-P. barbot. Commande permettant le contrôle du convertisseur multicellulaire série à nombre non premier de cellules. *e-STA*, 4 :44–49, 2007.
- [7] R. Bourdais, L. Hetel, J. Daafouz, and W. perruquetti. Stabilité et stabilisation d’une classe de système dynamiques hybrides. In *Systèmes dynamiques hybrides*, volume 41 of *JESA*, pages 819–853. Hermes, 2007.
- [8] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in systems and control theory. *SIAM, Philadelphia*, 1994.
- [9] M. Branicky. Models of hybrid systems. In *2nd HYCON PhD School on Hybrid Systems*, 2007.
- [10] M. S. Branicky. Stability of switched and hybrid systems. In *33rd Proceeding IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3498–3503, Lake buena FL USA, 1994.
- [11] M. S. Branicky. *Studies in hybrid systems : Modeling, Analysis, and control*. PhD thesis, Massachusetts Institue of Tech, 1995.
- [12] M. S. Branicky. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transaction on Automatic control*, 43(4) :457–482, 1998.
- [13] M. S. Branicky, V. S. Borkar, and S. K. Mitter. A unified frame work for hybrid control. In *11th Int. Conf. on Analysis and Optomization of systems,*, 1994.
- [14] M. S. Branicky, V. S. Borkar, and S. K. Mitter. A unified frame work for hybrid control : model and optimal control theory. *IEEE Trans. Automatic Control*, 43(1) :31–45, 1998.
- [15] R. W. Brockett. *Essays on Control : Prespectives in the theory and it’s applications*. Editer par H. L. Trentelman and Jan C. Willems, Birkhäuser, 1993. Chapitre 2 : Hybrid models for motion control systems.

- [16] M. Chadli. *Stabilité et commande de systèmes décrits par des structures multimodèles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Centre de recherche en Automatique de Nancy (CRAN), 2002.
- [17] S. Chaieb, D. Boutat, A. Benali, and F. Kartz. Dynamic control of switched linear systems : a common lyapunov function approach. In *45th Proceeding IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego CA USA, December 2006.
- [18] D. Cheng. Stabilization of planar switched systems. *Systems and Control Letters*, 51 :79–88., Feb 2004.
- [19] M. Chouikha and E. Schnieder. Modelling continuous-discrete systems with hybrid petri nets. In *In IEEE-MC Multiconference on Computational Engeneering in Systems Applications*, pages 606–612, 1998.
- [20] M. Chouikha, S. Wegele, and E. Schnieder. Modelling and analysis of continuous-discrete systems with hybrid petri nets. In *the Proceedings of the IFAC Congress 99*, 1999.
- [21] J. Daafouz and H. Guéguen. *Système dynamiques hybrides*, volume 41 of *JESA*. HERMES Sciences publications, 2007.
- [22] R. David and H. Alla. Petri nets for modeling of dynamic systems - a survey. *Automatica*, 30(2) :175–202, 1994.
- [23] R. A. Decarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. In *Proceedings of the IEEE*, volume 88, pages 1069–1082, July 2000.
- [24] N. H. El-Farri and P. D. Christofieds. Switching and feedback laws for control of constrained switched nonlinear systems. In M. R. Greenstreet C. J. Tomlin, editor, *Hybrid Systems : Computation and Control*, pages 164–178, 2001. no. 2289 in LNCS.
- [25] S. V. Emelyanov. *Variable Structure Control Systems*. Moscow, Nauka., 1967.
- [26] E. Moulay, R. Bourdais, and W. Perruquetti. Stabilization of nonlinear switched systems using control lyapunov functions. *Nonlinear Analysis : Hybrid systems*, 1 :482–490, 2007.
- [27] A. Filippov. Differential equations with discontinuous right-hand side. *American Mathematical Society Translations*, 2 :199–231, 1964.
- [28] A. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1988.
- [29] M. Garavello and B. Piccolli. Hybrid necessary principles : an application to car with gears. In *Proc. IFAC Conf. ADHS 2003*. Elsevier, 2003.
- [30] A. Girard. *Analyse Algorithmique des Systèmes Hybrides*. Phd thesis, INPG, Septembre 2004.
- [31] A. Gollü and P. Varaiya. Hybrid dynamical systems. In *28th CDC*, pages 2708–2712, 1989.
- [32] J. M. Gonçalves. *Constructive Global Analysis of Hybrid Systems*. Phd thesis, Massachusetts Institute of Technology, September 2000.
- [33] T. A. Henzinger. The theory of hybrid automata. In *Proceedings of the 11th Annual Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 278–292. IEEE Computer Society Press, 1996.

- [34] I. A. Hiskens. Stability of hybrid system limit cycles : application to the compassgait biped robot. In *IEEE CDC*, pages 774–779, 2001.
- [35] Q. Hu and D. Cheng. Stabilizer design of planar switched linear systems. *Systems and Control Letters*, 57 :876–879., Oct 2008.
- [36] K. H. Johansson, J. Lygeros, S. Sastry, and M. Egerstedt. Simulation of zeno hybrid automata. *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 1999.
- [37] M. Johansson and A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 43(4) :555–559, April 1998.
- [38] R. Johansson and A. Rantzer, editors. *Nonlinear and Hybrid Systems in Automotive Control*. Springer, 2003.
- [39] G. Karer, G. Mu sis, I . Skrjanc, and B. Zupancic. Model predictive control of nonlinear hybrid systems with discrete inputs employing a hybrid fuzzy model. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 2(2) :491–509, June 2008.
- [40] K. H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Inc, 2 edition, 1996.
- [41] Y. Kuznetsov, S. Rinaldi, and A. Gragnani. One-parameter bifurcations in planar filippov. *systems. Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2002.
- [42] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. ISBN 0-8176-4297-8. Birkhäuser, 2003.
- [43] D. Liberzon and R. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, Oct 1999.
- [44] D. Liberzon and R. Tempo. Common lyapunov functions and gradient algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49 :990–994., 2004.
- [45] J. Lygeros, K. H. Johansson, S. Sastry, and M. Egerstedt. On the existence of execution of hybrid automata. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 1999.
- [46] P. Manon. *Sur l’optimisation des séquences de fonctionnement des systèmes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Univ. Claude Bernard Lyon 1, 2001.
- [47] P. Manon, C. Valentin-Roubinet, and G. Gilles. Optimal control of hybrid dynamical systems : Application in process engineering. *Control Engineering Practice*, 10 :133–149, 2002.
- [48] A. S. Matveev and A. V. Savkin. *Qualitative theory of hybrid dynamical systems*. Birkhäuser, 2000.
- [49] A. Molchanov and E. Pyatnitskiy. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems and Control Letters*, 13 :59–64, 1989.
- [50] R. Murray-Smith and T. A. Johansen. *Multiple model approaches to modelling and control*. Taylor & Francis, 1997.
- [51] A. Oustaloup, X. Moreau, and M. Nouillant. The crone suspension. *Control Engineering Practice*, Volume 4(8 ISSN 0967-0661, DOI : 10.1016/0967-0661(96)00109-8.) :Pages 1101–1108, August 1996. ISSN 0967-0661, DOI : 10.1016/0967-0661(96)00109-8.
- [52] P. A. Peleties and R. A. Decarlo. A modeling strategy for hybrid systems based on event structures. *Discrete Event Dynamic Systems : Theory and Applications*, pages 39–69, 1993.

- [53] S. Pettersson. Synthesis of switched linear systems. In *42nd Proceeding IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii USA, December 2003.
- [54] S. Pettersson and B. Lennartson. Hybrid modelling focused on hybrid petri nets. In *2nd European Workshop on Real-time and Hybrid systems*, pages 303–309, 1995.
- [55] S. Pettersson and B. Lennartson. Stability and robustness for hybrid systems. In *35th Conf. Decision and Contr.*, pages 1202–1207, 1996.
- [56] S. Pettersson and B. Lennartson. An lmi approach for stability analysis of nonlinear systems. *EEC, Brussel, Belgique*, Juillet 1997.
- [57] D. Pinon, M. Fadel, and T. Meynard. Commande par mode glissant d’un hacheur à deux cellules : étude de l’installation des cycles limites. *Revue internationale de Genie Electrique*, 1(3) :393–415, 1998.
- [58] L. S. Pontryagin. *Ordinary differential equations*. Mass, 1962.
- [59] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45, Apr 2000.
- [60] M. Magos Rivera. *Sur la modélisation des systèmes dynamiques à topologie variable : une formulation Hamiltonienne à ports paramétrée*. PhD thesis, LAGEP-Université Claude Bernard-Lyon1, février 2005.
- [61] A. Rondepierre. Piecewise affine systems controllability and hybrid optimal control. In *In Proceedings of the 2005 International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2005.
- [62] M. Rubensson. *Stability properties of Switched Dynamical Systems : A Linear matrix Inequality Approach*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, April 2003.
- [63] J. Ben Salah, C.Valentin, and H.Jerbi. Quadratic common lyapunov fonction design for planar linear switched system stabilization. In *10th in the EUCA Series of European Control Conference*, pages 2091–2096, Budapest, Hungary, 23-26 August 2009.
- [64] J. Ben Salah, H. Jerbi, C. Valentin, and C. Z. Xu. Synthèse géométrique du cycle limite hybride optimal et de la commande d’une classe de systèmes dynamiques à commutation. *e-revue Sciences et Technologies de l’Automatique*, 5(4) :33–41, 2008.
- [65] J. Ben Salah, C. Valentin, H. Jerbi, and C.Z.Xu. Geometric synthesis of an optimal hybrid limit cycle and non-linear switched dynamical system stabilizing control. *Systems and Control Letters*, 2009. Soumis le 30 avril 2009.
- [66] J. Ben Salah, C. Valentin, H. Jerbi, and C. Z. Xu. Hybrid control of switched systems : Application to a power converter. Monastir, Tunisie, 24-26 octobre 2008. 1st International Workshop on Systems Engineering Design & Applications (SENDA).
- [67] A. S. Samoilenko and N. A. Perestyuk. Impulsive differential equations. *Series on Nonlinear Science*, World Scientific, 1995.
- [68] S. Sastry. *Nonlinear systems : analysis, stability, and control*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [69] A. J. Van Der Schaft and J. M. Schumacher. Complementarity modeling of hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 :483–490, 1998.
- [70] M. Schetzen. *Linear time-invariant systems*. Wiley-IEEE Press, Decembre 2002.
- [71] B. De Schutter and B. De Moor. The extended linear complementarity problem. *Mathematical Programming*, 60(71) :289–325, 1995.

- [72] S. Simic, K. H. Johansson, S. Sastry, and J. Lygeros. Towards a geometric theory of hybrid systems. In B. H. Krogh N. Lynch, editor, *Hybrid Systems : Computation and Control (HSCC)*, number 1790 in LNCS, pages 421–436. Springer, 2000.
- [73] S. N. Simic, K. H. Johansson, J. Lygeros, and S. Sastry. Hybrid limit cycles and hybrid poincaré-bendixon. In *In IFAC World Congress*, pages 22–26, 2002.
- [74] Y.G. Sun and L. Wang. Stabilization of planar discrete-time switched systems : Switched lyapunov functional approach. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, Sept 2008.
- [75] Y.G. Sun, L. Wang, and G. Xie. Necessary and sufficient conditions for stabilization of discrete-time planar switched systems. *Volume 65 of Nonlinear Analysis*, pages 1039–1049, Sept 2006.
- [76] Z. Sun and S.S. Ge. *Switched Linear Systems : Control and Design*. Springer, 2005.
- [77] L. Tevernini. Differential automata models of hysteresis. *A. Visintin, editor, Models of Hysteresis*, pages 163–174. Longman, Harlow, 1993.
- [78] J. Thomas. *Estimation et commande prédictive à horizon glissant de systèmes hybrides*. Thèse, Supélec, Novembre 2004.
- [79] G. Charlot U. Boscain and M. Sigalotti. Stability of planar nonlinear switched systems. *DCDS-A*, 15(2) :415–432, June 2006.
- [80] V. I. Utkin. *Sliding modes and their application in Variable Structure System*. M. I. R. Publisher, 1978.
- [81] V. I. Utkin. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [82] V.I. Utkin. *Sliding Modes and their Application in Variable Structure system*. MIR Publishers, Moscow, 1974. (1978 English Translation).
- [83] V.I. Utkin. *Sliding mode in control and optimization*. Springer, Berlin, 1992.
- [84] V.I. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding mode in control in electromechanical systems*. systems & control. Francis & Taylor, London, avril 1999.
- [85] F. W. Vaandrager and J. H. van Schuppen, editors. *Hybrid Systems : Computation and Control*, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science 1569. Second International Workshop, HSCC'99, Berg en Dal, The Netherlands, Springer, March 29-31 1999.
- [86] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 1990.
- [87] E. Witrant, P.G. Park, M. Johansson, C. Fischione, and K.H. Johansson. Predictive control over wireless multi-hop networks. In *IEEE Conference on Control Applications (CCA'07)*, 2007.
- [88] H. S. Witsenhausen. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. In *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 11, pages 161–167, 1966.
- [89] X. Xu, G. Zhai, and S.He. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. *Nonlinear Analysis : Hybrid systems*, 2 :196–208., 2008.
- [90] J. Zaytoon. *Automation of Mixed Process Hybrid Dynamical Systems*, volume 32. European Journal of Automation, 1998.
- [91] J. Zaytoon. *Systèmes dynamiques hybrides*. HERMES Sciences publications, 2001.
- [92] M. Zorn. A remark on method in transfinite algebra. *Bull. Amer. Math. Soc*, 41 :667–670, 1935.



**Titre** : Analyse et commande des systèmes non linéaires complexes : Application aux systèmes dynamiques à commutation.

**Résumé** : Ce mémoire de thèse présente deux nouvelles approches pour l'analyse et la commande des systèmes non-linéaires complexes, comme les systèmes dynamiques à commutation de la classe des convertisseurs d'énergie électrique. Ces systèmes ont plusieurs modes de fonctionnement et ont un point de fonctionnement désiré qui, en général, n'est le point d'équilibre d'aucun des modes. Dans cette classe de systèmes, la commutation d'un mode de fonctionnement à un autre est commandée selon une loi qui doit être synthétisée. Par conséquent, la synthèse de commande implique l'étude des conditions qui permettent à un cycle limite stable de s'établir au voisinage du point de fonctionnement désiré, puis de la trajectoire de commande qui permet de l'atteindre en respectant les contraintes physiques de comportement (courant maximum supporté par les composants, ...) ou les contraintes de temps (durée minimum entre deux commutations, ...). Le cycle limite sera qualifié d'hybride car il est composé de plusieurs dynamiques (deux dans ces travaux).

La première méthode développée s'appuie sur les propriétés géométriques des champs de vecteurs et est une extension d'une partie des travaux de thèse de Manon au LAGEP. Une condition nécessaire et suffisante d'existence et de stabilité d'un cycle limite hybride composé d'une séquence de deux modes de fonctionnement dans  $\mathbb{R}^2$  est présentée. Ce cycle définit la région finale à atteindre par le système depuis son état initial, par une trajectoire déterminée de manière optimale selon un critère donné (durée totale, énergie dépensée, ...). La méthode proposée est appliquée aux convertisseurs d'énergie Buck et Buck-Boost alimentant une charge résistive. Une extension à  $\mathbb{R}^n$  a été proposée et démontrée. Elle est illustrée sur un système non-linéaire dans  $\mathbb{R}^3$ .

La deuxième méthode est développée dans  $\mathbb{R}^2$  et basée sur la théorie de Lyapunov, bien connue en automatique pour étudier la stabilité des systèmes non-linéaires et concevoir des commandes stabilisantes. Il s'agit de déterminer par une approche géométrique, une fonction de Lyapunov quadratique commune aux deux modes de fonctionnement du système, qui permette d'obtenir un cycle limite hybride stable le plus proche possible du point de fonctionnement désiré et une commande stabilisante directe des interrupteurs.

**Mots-clés** : Modélisation hybride, commande stabilisante, stabilité, Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH), Systèmes Dynamiques à Commutation (SDC), cycle limite hybride, fonction de Lyapunov, convertisseurs d'énergie.

**Title** : Analysis and control of complex nonlinear systems : Application to switched dynamical systems.

**Abstract** : This PhD-thesis presents two new approaches for the analysis and control of complex nonlinear systems, such as switching dynamic systems of the class of power converters. These systems have several modes of operation and a desired operating point, which, in general, is not the equilibrium point of any mode. In this class of systems, switching from one mode to another is controlled by a switching law to be designed. Therefore, the synthesis of a control law involves the study of the conditions that allow a stable limit cycle to settle near the desired operating point, and of the control trajectory to reach this limit cycle and stabilize on it, meeting the constraints due to the physical behavior (maximum current supported by the components, ...) or time constraints (minimum duration between two switchings, ...). The limit cycle is called hybrid because it is composed of several dynamics (two in this work).

The first method is based on the geometric properties of vector fields and is an extension of part of the PhD-thesis of Manon at LAGEP. A necessary and sufficient condition of existence and stability of a hybrid limit cycle consisting of a sequence of two operating modes, is presented in  $\mathbb{R}^2$ . This limit cycle defines the final region to be reached by the system from its initial state, along a trajectory determined optimally according to a given criterion (total duration, energy expended, ...). This method is applied to the Buck and Buck-Boost power converters with a resistive load. An extension to  $\mathbb{R}^n$  has been proposed and demonstrated. It is illustrated on a nonlinear system in  $\mathbb{R}^3$ .

The second method is developed in  $\mathbb{R}^2$ , based on the Lyapunov theory, well known in automatic control for studying the stability of nonlinear systems and designing stabilizing control methods. The objective is to design, with a geometric approach, a quadratic Lyapunov function common to both modes of operation, which defines a stable hybrid limit cycle closest to the desired operating point and a direct stabilizing control of the switches.

**keywords** : Hybrid modeling, stabilizing control, stability, hybrid dynamic systems (SDH), switched dynamical systems (SDS), Hybrid limit cycle, Lyapunov function, power converters.