



**HAL**  
open science

# COUPLAGE DES INDUCTANCES PAR RAYONNEMENT MAGNETIQUE. ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE

Jimmy Lorange

► **To cite this version:**

Jimmy Lorange. COUPLAGE DES INDUCTANCES PAR RAYONNEMENT MAGNETIQUE. ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2001. Français. NNT: . tel-00599643

**HAL Id: tel-00599643**

**<https://theses.hal.science/tel-00599643>**

Submitted on 10 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INPG**

***Spécialité : « Génie électrique »***

préparée au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (LEG)  
dans le cadre de l'Ecole Doctorale « E.E.A.T.S. »  
présentée et soutenue publiquement

par

**Jimmy LORANGE**

**Ingénieur INPG**

le 15 Novembre 2001

**Titre :**

**Couplage des inductances par rayonnement  
magnétique. Etude théorique et expérimentale**

---

***Directeur de thèse : Jean-Pierre KéraDEC***

---

**Jury**

M. Daniel ROYE	Président
M. François COSTA	Rapporteur
Mme. Betty SEMAIL	Rapporteur
M. Jean-Pierre KERADEC	Directeur de thèse
M. Jean-Luc SCHANEN	Co-encadrant
M. Bruno COGITORE	Co-encadrant





## Remerciements

Que ceux que j'ai côtoyé pendant trois ans me pardonnent : mes premiers remerciements vont à ma famille, à mon île...

Je tiens à remercier chaleureusement plusieurs personnes : Jean-Pierre Rognon, Directeur du LEG, qui m'a accueilli dans ce laboratoire, Yves Nold, Directeur de la société Microspire, qui m'a accordé sa confiance pour mener cette étude, Betty Semail et François Costa qui ont accepté la lourde tâche de rapporter sur un mémoire provisoire dont la présentation était vraiment très...provisoire et Daniel Roye qui m'a fait le plaisir et l'honneur de présider le Jury.

Mes deux directeurs de thèses : Jean-Pierre Keradec et Jean-Luc Schanen tiennent une place privilégiée dans ce chapitre. Leurs conseils passionnés et éclairés, leur soutien moral agrémenté de calembours m'ont été très précieux. Que chacun trouve ici sa part de ma reconnaissance. Je n'oublie pas Bruno Cogitore, responsable recherche et développement de Microspire, dont l'intérêt pour mon travail ne s'est jamais démenti au cours de ces trois ans. Les résultats expérimentaux obtenus à la fin de ce travail doivent beaucoup à son sens de l'organisation (un peu trop militaire parfois).

Plusieurs personnes n'ont pas ménagé leur peine pour m'aider à élaborer le banc de mesures : Claude Brun, Thierry Creuzet, Paul Todaro et Stéphane Catellani. Sans leurs idées et leur efficacité pratique, celui-ci en serait encore au stade de projet. Qu'ils trouvent ici la marque de ma reconnaissance. Merci à Lehdî Kismoune qui m'a bien aidé durant la dernière campagne de mesures. Mes vœux l'accompagnent pour le peaufinage et l'industrialisation de cet appareillage.

Je finirai en remerciant tous les membres du LEG et notamment les thésards de la salle EPTÉ, qui marient avec bonheur ambiance conviviale et travail sérieux.







# Table des Matières



<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>7</b>
<b>CHAPITRE I. BASES PHYSIQUES ET OUTILS MATHÉMATIQUES ..</b>	<b>11</b>
<b>I.1. Introduction .....</b>	<b>13</b>
<b>I.2. Rappel des lois de la magnétostatique .....</b>	<b>13</b>
I.2.1. Equations locales de la magnétostatique.....	13
I.2.2. Potentiel vecteur $\vec{A}$ .....	14
I.2.3. Potentiel pseudo-scalaire U. Equation de Laplace scalaire.....	15
I.2.4. Expressions des potentiels en fonction des sources. ....	16
<b>I.3. Caractérisation du champ autour d'une source.....</b>	<b>17</b>
I.3.1. Harmoniques sphériques scalaires complexes et réelles.....	17
I.3.2. Solutions de l'équation de Laplace. Développement multipolaire.....	19
I.3.3. Expressions des harmoniques sphériques réelles jusqu'à l'ordre 4.....	21
I.3.4. Champs simples.....	22
I.3.5. Représentations graphiques des harmoniques sphériques réelles.....	23
I.3.6. Systèmes présentant une symétrie de révolution.....	28
I.3.7. Harmoniques sphériques vectorielles complexes et réelles.....	29
I.3.8. Développement multipolaire vectoriel.....	31
I.3.9. Courant sphérique équivalent.....	32
<b>I.4. Lien champ émis – source .....</b>	<b>33</b>
I.4.1. Champ créé par une densité de courant.....	33
I.4.2. Champ créé par une densité d'aimantation.....	34
I.4.3. Représentation dipolaire équivalente .....	35
<b>I.5. Lien champ reçu - tension induite. Réciprocité. Couplage.....</b>	<b>36</b>
I.5.1. Tension induite par un champ reçu.....	36
I.5.2. Emission et réception d'une boucle de courant. Réciprocité.....	37
I.5.3. Changement de repère.....	38
<b>I.6. Conclusion.....</b>	<b>39</b>

<b>CHAPITRE II. CAHIER DES CHARGES ET CONSEQUENCES METROLOGIQUES.</b> .....	41
<b>II.1. Introduction</b> .....	41
<b>II.2. Mesure de l'induction.</b> .....	43
II.2.1. Le champ radial, image du potentiel. ....	42
II.2.2. Limitation du nombre de termes multipolaires. ....	44
II.2.3. Antenne d'induction.....	45
II.2.4. Dimensions de l'antenne.....	47
II.2.5. Précision du positionnement. ....	49
II.2.6. Conditionnement et mesures redondantes.....	52
II.2.7. Répartition régulières des points de mesure sur une sphère.....	53
<b>II.3. Détection synchrone.</b> .....	55
II.3.1. Ordre de grandeur de l'induction à mesurer. ....	55
II.3.2. Principe de fonctionnement.....	58
II.3.3. Choix d'un signal de référence. ....	59
II.3.4. Choix de l'impédance d'entrée.....	62
II.3.5. Choix du filtre .....	64
II.3.6. Choix des gains .....	66
<b>II.4. Conclusion</b> .....	68
<b>CHAPITRE III. REALISATION ET CALIBRATION. DU BANC DE MESURE.</b> .....	69
<b>III.1. Introduction</b> .....	69
<b>III.2. Matériel et étalonnages.</b> .....	70
III.2.1. Appareils de mesures utilisés .....	70
III.2.2. Sondes de tension et de courant .....	71
III.2.3. Choix et tests des câbles.....	73
<b>III.3. Réalisation du banc de mesure.</b> .....	74
III.3.1. Cahier des charges de la partie mécanique.....	74

III.3.2. Réalisation mécanique.....	76
III.3.3. Automatisation. ....	77
<b>III.4. Calibration et validation.....</b>	<b>79</b>
III.4.1. Calibration d'une antenne boucle.Bobine de Helmholtz. ....	79
III.4.2. Validation. Mesure de l'induction d'une spire circulaire. ....	83
III.4.3. Coefficients du développement multipolaire. ....	88
<b>III.5. Conclusion.....</b>	<b>90</b>
<b>CHAPITRE IV. LES PREMIERES MESURES .....</b>	<b>93</b>
<b>IV.1. Introduction. ....</b>	<b>93</b>
<b>IV.2. Mesures sur les SESI.....</b>	<b>94</b>
IV.2.1. Quelques conventions .....	94
IV.2.2. Présentation des SESI.....	97
IV.2.3. Essais préliminaires sur la SESI 18 22K.....	97
IV.2.4. Comparaison SESI 18 22K / tore équivalent.....	102
IV.2.5. Comparaison SESI 15 12K / tore équivalent.....	105
IV.2.6. Effet du blindage .....	106
IV.2.7. Inversion des roles composant antenne.....	108
<b>IV.3. Détermination des coefficients et comportement dipolaire. ....</b>	<b>110</b>
<b>IV.4. Conclusion.....</b>	<b>114</b>
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>117</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>121</b>

<b>ANNEXE A. OPERATEURS DIFFÉRENTIELS EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES.</b> .....	127
<b>ANNEXE B. HARMONIQUES SPHÉRIQUES ET DÉVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE.</b> .....	129
<b>B.1. Introduction.</b> .....	129
<b>B.2. Harmoniques sphériques.</b> .....	130
B.2.1. Définition. ....	130
B.2.2. Principales propriétés. ....	130
<b>B.3. Resolution de l'équation de Laplace.</b> .....	132
B.3.1. Equation de Laplace et potentiel pseudo-scalaire. ....	132
B.3.2. Résolution en coordonnées sphériques.....	133
B.3.3. Expressions du potentiel pseudo-scalaire et de l'induction .....	134
B.3.4. Champ polaire .....	135
B.3.5. Identification directe du champ.....	136
B.3.6. Harmoniques sphériques scalaires réelles. ....	137
B.3.7. Système présentant une symétrie de révolution. ....	138
<b>B.4. Expressions explicites des harmoniques sphériques reelles..</b> 140	
B.4.1. Introduction. ....	140
B.4.2. Développement en fonction de $z$ . ....	141
B.4.3. Développement en fonction de $\theta$ .....	141
B.4.4. Obtention par récurrence des fonctions de Legendre associées. ....	143
B.4.5. Calcul des harmoniques sphériques par récurrence. ....	144
B.4.6. Champ uniforme.....	146
B.4.7. Expressions des harmoniques sphériques réelles jusqu'à l'ordre 4.....	147
<b>B.5. Introduction élémentaire des harmoniques sphériques réelles. ...</b>	
.....	148
B.5.1. Introduction. ....	148
B.5.2. Périodicité et séries de Fourier. ....	148
B.5.3. Unicité. ....	149

B.5.4.	Parité.....	149
B.5.5.	Conclusion provisoire. ....	150
<b>B.6.</b>	<b>Potentiel vecteur et harmoniques sphériques vectorielles.....</b>	<b>151</b>
B.6.1.	Recherche du potentiel vecteur .....	151
B.6.2.	Les harmoniques sphériques vectorielles.....	153
B.6.3.	Les harmoniques sphériques vectorielles réelles.....	155
B.6.4.	Courant sphériques équivalent. ....	156
B.6.5.	Conclusion.....	157

**ANNEXE C. ETUDES DES SYMÉTRIES DES CHAMPS ÉMIS. .... 159**

<b>C.1.</b>	<b>Symétries ponctuelles .....</b>	<b>159</b>
C.1.1.	Triangles de Möbius sur un pavage plan.....	159
C.1.2.	Triangles de Möbius sur la sphère.....	160
C.1.3.	Groupes de symétrie ponctuelle. ....	160
<b>C.2.</b>	<b>Quelques symétries des harmoniques sphériques réelles .....</b>	<b>162</b>
<b>C.3.</b>	<b>Répartition régulière de points de mesure sur une sphère.....</b>	<b>163</b>

**ANNEXE D. TENSEURS DANS UN ESPACE EUCLIDIEN..... 169**

<b>D.1.</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>169</b>
<b>D.2.</b>	<b>Changement de base .....</b>	<b>170</b>
D.2.1.	Univers physique et espace vectoriel. ....	170
D.2.2.	Conséquences d'un changement de base. ....	170
D.2.3.	Espace vectoriel euclidien.....	171
<b>D.3.</b>	<b>Deux types de composantes pour un vecteur.....</b>	<b>172</b>
D.3.1.	Un vecteur atypique : le gradient .....	172
D.3.2.	Composantes contravariantes et covariantes.....	173
D.3.3.	Convention d'Einstein .....	175
<b>D.4.</b>	<b>Fondements de l'algèbre tensorielle. ....</b>	<b>176</b>
D.4.1.	Grandeurs physiques à composantes nombreuses.....	176

D.4.2.	Définition d'un tenseur .....	177
D.4.3.	Produit tensoriel, contraction, produit contracté .....	178
D.4.4.	Tenseur fondamental .....	179
D.4.5.	Symétrie et antisymétrie.....	179
<b>D.5.</b>	<b>Développement en série de Taylor.</b> .....	<b>180</b>
D.5.1.	Fonction scalaire quelconque de l'espace.....	180
D.5.2.	Développement du potentiel pseudoscalaire .....	182
D.5.3.	Tenseurs moments multipolaires.....	183

# Introduction Générale





## INTRODUCTION GENERALE

Les études menées ces dernières années, au LEG notamment, au sujet des composants magnétiques ont abouti à une bonne connaissance de leur comportement électrique ainsi qu'à des méthodes de caractérisation de ce comportement. Bien que cette étude ne soit pas close, les conclusions disponibles permettent aujourd'hui de traiter de nombreux problèmes pratiques de façon satisfaisante.

L'étude présentée ici aborde un aspect différent du comportement de ces composants. A l'expérience, on constate que les composants magnétiques proches ont tendance à se coupler. Ils peuvent même se coupler à des composants non magnétiques tels que des pistes de circuits imprimés. Dans certains domaines de l'électronique, l'existence de ces phénomènes est connue. Ainsi, la disposition des inductances d'un filtre d'enceinte acoustique n'est pas uniquement guidée par le gain de place et, dans certains équipements "sensibles" (spatial) on a vu des horloges se désynchroniser parce que l'inductance de filtrage d'une alimentation captait l'induction rayonnée par un autre composant. Il serait donc utile de mieux comprendre ces couplages involontaires.

L'étude directe du couplage entre deux composants magnétiques est difficile et restrictive. Difficile parce que le placement du second composant par rapport au premier présente six degrés de liberté (position et orientation relatives). Restrictive, parce qu'à partir d'une telle étude, il sera difficile de savoir comment l'un des composants se couplerait avec par exemple, le câblage. C'est pourquoi nous étudierons l'émission puis la réception avant d'aborder le couplage.

Afin de spécifier les performances de rayonnement d'un composant, notre partenaire industriel souhaite disposer d'un banc de caractérisation. Un tel outil sera très utile également pour valider les théories que nous serons amenés à développer. L'objectif fixé consiste à mesurer le champ émis par des composants magnétiques de moins de 10 cm d'arête, jusqu'à une distance égale à 10 fois leur demi arête (50 cm max), à des fréquences allant de 100 kHz à 10 MHz. Dans ces conditions, la longueur d'onde dans le vide reste supérieure à 30 m.

Notre souci est non seulement d'acquiescer des valeurs expérimentales mais également de les présenter avec une compacité compatible avec une feuille de spécification. Si on considère que la mesure des trois composantes de l'induction émise par un composant, à une distance donnée, avec un échantillonnage de  $15^\circ$  sur les deux angles conduit à un fichier de 1700 valeurs, la compacité est loin d'être acquise ! Pourtant, nous parviendrons à synthétiser l'ensemble des valeurs mesurées par un petit nombre (quinze au maximum et parfois trois seulement) de paramètres et nous montrerons comment ces paramètres se modifient lorsque le composant est orienté différemment.

Cet impératif de compacité va de pair avec la recherche d'une représentation synthétique des phénomènes, indispensable à leur compréhension. Ces considérations nous ont amenés à choisir un outil adapté : le développement multipolaire. A l'image des séries de Fourier, ce développement consiste à décomposer le champ observé en une combinaison linéaire de champs de formes fixées une fois pour toutes. La description du champ étudié ne demande ensuite que la donnée des composantes de cette décomposition, ce qui peut être très compact. Les formes de base se caractérisent par leur ordre qui joue un rôle comparable au rang des harmoniques : au fur et à mesure que le rang augmente, les fonctions varient de plus en plus vite avec les angles. Pour décrire un champ anguleux avec précision il faut faire appel à des champs d'ordres élevés. Cependant, l'éloignement lisse le champ : même lorsque celui-ci est anguleux près de sa source, il devient plus lisse dès que l'on s'en éloigne un peu. Donc, si on ne s'impose pas une trop grande précision près du composant, un petit nombre de composantes suffit à la description. En définitive, tant qu'on ne recherche pas une très grande précision à proximité immédiate du composant, la pratique montre que 15 composantes fournissent une précision acceptable et même souvent luxueuse.

Le premier chapitre sera consacré à la présentation des bases physiques sur lesquelles repose cette étude ainsi qu'à l'introduction de l'outillage mathématique qui permet la présentation synthétique évoquée ci-dessus. Même lorsqu'elles sont originales, les démonstrations mathématiques longues sont rejetées en annexes afin, dans un premier temps, de mettre en avant les idées directrices. Bien que les fonctions harmoniques sphériques soient connues depuis longtemps des physiciens, ce travail a fourni l'occasion de nouveaux développements. Les fonctions présentées habituellement sont complexes, nous montrons comment revenir à des fonctions réelles. Grâce à l'établissement d'une nouvelle relation de récurrence, nous explicitons les 24 premières fonctions réelles et nous en donnons plusieurs

présentations graphiques. Les fonctions connues sont scalaires et permettent de développer commodément le potentiel pseudo-scalaire. Nous introduisons les harmoniques sphériques vectorielles, bien adaptées à l'écriture du potentiel vecteur. Seul le potentiel vecteur permet de lier le champ émis au courant source et le champ reçu à la tension induite.... Ces développements montrent en particulier que sitôt que les propriétés d'émission d'un composant sont connues, ses propriétés de réception s'en déduisent.

Le chapitre II est consacré à l'étude des conséquences du cahier des charges sur la chaîne de mesure. Nous montrons d'abord qu'il est envisageable, pour connaître l'induction tout autour d'un composant, de ne mesurer que sa composante radiale sur une surface sphérique qui entoure la source. Nous montrons ensuite qu'il est possible de limiter à 15 le nombre des paramètres à mesurer tout en préservant une précision suffisante. Quelques contraintes complémentaires nous amènent à choisir une antenne boucle qu'il faudra déplacer autour de la source de rayonnement. Nous étudions alors l'incidence des paramètres géométriques sur la précision de la mesure. Les influences du diamètre de l'antenne et de la précision du positionnement sont ainsi cernées. Après ces considérations théoriques, nous estimons l'induction à mesurer et la tension à détecter. Il apparaît alors que le recours à une détection synchrone est incontournable car il faut ramener le bruit de mesure aux alentours de 10 nV. Pour terminer, nous nous intéressons au principe de la détection synchrone afin de mieux comprendre l'incidence de certains de ses réglages.

Le banc de mesure réalisé est présenté de façon extensive dans le chapitre III. La réalisation de la partie mécanique, objet de soins particuliers, est présentée en détail ainsi que le logiciel qui permet d'automatiser les déplacements de la sonde et l'acquisition des données. Nous insistons également sur certaines précautions qui, à l'usage, se sont révélées indispensables pour réduire le bruit de mesure aux alentours de 30 nV. A titre d'exemple, la disposition relative des appareils et le choix de certains câbles se sont révélés très critiques. Nous exposons également comment les quinze paramètres choisis sont extraits des mesures réalisées. Enfin, après avoir étalonné l'antenne de mesure, nous testons l'ensemble du montage en caractérisant l'induction émise par une spire.

Le chapitre IV montre les premières mesures réalisées sur des composants industriels de petite taille fabriqués par Microspire. Bien que cette étude n'en soit qu'au début, plusieurs conclusions peuvent être dégagées concernant les composants et le mode opératoire de la

mesure a été affiné pour limiter l'incidence des fils d'amenées de courant sur le résultat présenté. Ce travail concret nous amène à soulever une vraie difficulté : comment rendre compte de cette caractérisation d'une façon précise et compréhensible ? Plusieurs méthodes sont avancées....



# Chapitre I :

## Bases Physiques

et

## Outils Mathématiques



## CHAPITRE I. BASES PHYSIQUES ET OUTILS MATHÉMATIQUES

### I.1. Introduction

Pour aborder le couplage magnétique de deux dispositifs éloignés, nous allons successivement étudier l'émission du champ magnétique puis sa réception. Cette étude se fait dans le cadre de la magnétostatique dont nous rappelons les lois fondamentales au début de ce chapitre.

Nous cherchons ensuite à décrire le champ magnétique émis par un dispositif en tout point de l'espace qui l'entoure. Pour définir la position d'un point il faut se donner un repère et un système de coordonnées. Il nous a semblé naturel, pour ce problème, de choisir les coordonnées sphériques. Ceci fait, nous avons constaté que le problème soulevait de nombreuses et importantes difficultés mathématiques. C'est pourquoi une large partie de ce chapitre est consacrée à la présentation des outils mathématiques qui nous ont permis de les surmonter. Cependant, afin de faciliter la perception des idées directrices de ce travail et de montrer l'intérêt des outils mathématiques choisis, nous avons organisé une lecture en deux temps. Pour ne pas masquer l'enchaînement des idées, les démonstrations longues sont reléguées en annexes, même lorsqu'elles constituent un apport original de ce travail. Les annexes sont rédigées de manière à ce que le lecteur trouve le nécessaire pour justifier et exploiter ce travail.

Dès que l'on cherche à décrire un champ en coordonnées sphériques, le recours aux fonctions harmoniques sphériques s'avère incontournable. Ces fonctions apparaissent notamment lors de la résolution de l'équation de Laplace où chacune d'elles exprime la variation angulaire d'un potentiel multipolaire. Ces fonctions sont l'objet d'une littérature abondante [AYANT pp 144-153] si bien que, dans un premier temps, nous nous bornons à résumer leurs définitions et propriétés utiles et à rappeler comment les solutions de l'équation de Laplace leur sont liées.

L'usage répété d'un outil incite à en rechercher des améliorations et des simplifications. Les extensions évoquées ci-dessous relèvent de ce processus. Elles visent à étendre la portée, à faciliter l'utilisation et à simplifier la présentation des harmoniques

sphériques. Tout d'abord, selon leur définition standard, les harmoniques sphériques sont complexes alors que, pour notre usage, nous aurons besoin de fonctions réelles. Nous montrerons qu'un changement de base simple mène à une base réelle puis nous réécrivons les solutions de l'équation de Laplace en faisant appel à ces fonctions réelles. Ensuite, expliciter les expressions des harmoniques sphériques en partant de la définition habituelle nécessite de longs calculs. Grâce à l'introduction d'une relation de récurrence nouvelle, nous présenterons une méthode beaucoup plus directe pour atteindre ce but. Nous montrerons enfin que, sans recours aux fonctions de Legendre associées, les séries de Fourier donnent une idée assez précise des harmoniques sphériques.

En magnétostatique, l'équation de Laplace mène à l'induction par le biais du potentiel pseudo-scalaire. Ceci est utile mais, malheureusement, il n'est pas facile de relier ce potentiel aux courants qui engendrent le champ. Nous montrerons comment, en partant du potentiel pseudo-scalaire, se déduit le potentiel vecteur qui seul permet d'établir ce lien. Cela nous amènera à introduire une famille de fonctions vectorielles orthonormées que nous nommerons "harmoniques sphériques vectorielles". Des fonctions semblables ont été introduites il y a longtemps par Durand [DURAND pp 255] en s'appuyant sur un raisonnement différent mais elles semblent aujourd'hui oubliées. Nous définirons également les harmoniques sphériques vectorielles réelles.

D'autre part, on considère la plupart du temps que l'espace de la physique est tridimensionnel et que les lois physiques mettent en relation des nombres (ou scalaires) et des vecteurs. Dans ce cadre, une grandeur orientée se représente par un vecteur qui, dans un repère donné, se caractérise par trois composantes. Nous allons voir que ces notions intuitives doivent être précisées car, par exemple, deux types de composantes peuvent caractériser un vecteur et ces deux ensembles de composantes ne se transforment pas de la même façon lors d'un changement de repère. Nous verrons aussi que la vision de la physique résumée ci-dessus est trop restrictive : dans l'espace à trois dimensions, la physique met en œuvre non seulement des grandeurs caractérisées par 1 et 3 composantes mais aussi par 9, 27, ..., les moments multipolaires que nous serons amenés à utiliser en fournissent un bon exemple. Pour que les relations liant ces grandeurs gardent la même forme dans tous les repères, leurs composantes doivent varier de façons coordonnées lors d'un changement de repère.

L'algèbre tensorielle fournit les outils adaptés aux extensions envisagées ci-dessus. Dans l'espace à trois dimensions, un tenseur d'ordre  $n$  se décrit par  $3^n$  composantes. Les lois de transformation des composantes des tenseurs sont telles que, lors d'un changement de base, la forme des relations qui lient ces tenseurs se conserve. Nous verrons que l'algèbre tensorielle englobe les scalaires, les vecteurs, ..., et qu'elle permet d'écrire de façon rigoureuse le développement en série de Taylor d'une fonction scalaire autour d'un point. Enfin et surtout, ce formalisme, qui s'étend à des espaces de dimensions supérieures à 3, donne une assise rigoureuse au développement multipolaire en précisant la nature du moment multipolaire d'ordre  $2^n$  et en indiquant comment ses composantes varient lors d'un changement de repère.

## **I.2. Rappel des lois de la magnétostatique**

### **I.2.1. Equations locales de la magnétostatique.**

Les quatre équations Maxwell décrivent complètement le comportement du champ électromagnétique et, aujourd'hui, on sait les établir naturellement dans le cadre de la relativité restreinte. Elles relient deux champs vectoriels électriques et deux champs vectoriels magnétiques aux charges qui les créent et sur lesquels ils agissent.

La magnétostatique restreint ce domaine d'étude très vaste à celui des interactions entre courants stationnaires. Dans ce cadre, seuls les deux champs magnétiques que l'on nomme respectivement induction  $\vec{B}$  et excitation  $\vec{H}$  demeurent utiles. Leur comportement est fixé par deux des équations de Maxwell que nous rappelons ci-dessous et qui résument toutes leurs propriétés locales.

Le champ vectoriel "induction magnétique"  $\vec{B}$  est à flux conservatif, ce qui s'exprime localement par :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \tag{I.1}$$

L'excitation magnétique  $\vec{H}$  résulte du déplacement de charges électriques, ou courant électrique, qui est décrit, à l'échelle macroscopique, par le vecteur "densité de courant"  $\vec{J}$ .

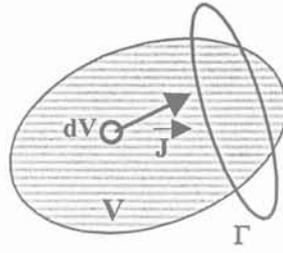


Figure 1. Distribution volumique de courants

La circulation de  $\vec{H}$  le long d'un contour fermé  $\Gamma$  est reliée à la densité du courant qui la crée par le théorème d'Ampère. Localement ceci s'écrit :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{I.2})$$

Dans le vide, les deux champs de vecteurs sont proportionnels :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (\text{I.3})$$

La relation (I.3), dans laquelle  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  est la perméabilité du vide, demeure valable partout hors des matériaux magnétiques.

### 1.2.2. Potentiel vecteur $\vec{A}$ .

D'après (I.1), il existe un champ vectoriel  $\vec{A}$ , appelé potentiel vecteur, tel qu'en tout point :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (\text{I.4})$$

Le rotationnel d'un gradient étant nul,  $\vec{A}$  n'est défini, par (I.4), qu'à un gradient près. Pour que le potentiel vecteur soit unique, on lui impose une contrainte supplémentaire. Celle généralement adoptée en magnétostatique se nomme "jauge de Coulomb". Elle suppose que la divergence du potentiel vecteur est nulle en tout point :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (\text{I.5})$$

A l'aide de la transformée de Fourier [Ayant p.49] des champs, on montre que le potentiel vecteur de divergence nulle qui donne la bonne induction est unique.

Dans un matériau non magnétique, le potentiel vecteur est relié directement à la densité de courant par "l'équation de Poisson". Cette équation s'établit en partant des équations (I.2) à (I.4) en adoptant la jauge de Coulomb (I.5).

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{J} \quad (\text{I.6})$$

Lorsque la distribution de courant est confinée dans une région  $V$  de l'espace, la relation (I.6) prend, hors de cette région, une forme plus simple appelée "équation de Laplace vectorielle".

$$\Delta \vec{A} = 0 \quad (\text{I.7})$$

### **I.2.3. Potentiel pseudo-scalaire $U$ . Equation de Laplace scalaire.**

Dans une zone où aucun courant ne circule, par exemple hors de  $V$ , on peut aussi considérer que l'induction  $\vec{B}$  dérive d'un potentiel pseudo-scalaire  $U$ . En effet, puisque le membre de droite de (I.2) s'annule, il existe une fonction  $U$ , appelée potentiel pseudo-scalaire, telle que :

$$\vec{B} = -\operatorname{grad} U \quad (\text{I.8})$$

Soulignons que le champ  $U$  contient toutes les informations permettant de trouver l'induction. Le rapprochement de (I.1) et (I.8) conduit à "l'équation de Laplace scalaire" :

$$\Delta U = 0 \quad (\text{I.9})$$

La relation I.9 n'est pas applicable dans une zone où circulent des courants. Pour la compléter, il suffit de rappeler deux points. Tout d'abord, en régime stationnaire, la densité de

charge  $\rho$  ne varie pas avec le temps et, de ce fait, la densité de courant satisfait une condition supplémentaire.

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{\mathbf{J}} = 0 \qquad (\text{I.10})$$

Dans ces conditions  $\vec{\mathbf{J}}$  dérive d'un potentiel vecteur qu'on identifie avec l'aimantation  $\vec{\mathbf{M}}$ , ou densité de moment dipolaire, du milieu.

$$\vec{\mathbf{J}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}} \qquad (\text{I.11})$$

Dans une zone où l'aimantation n'est pas nulle, l'induction est donnée par I.12

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 (\vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}) \qquad (\text{I.12})$$

Enfin, en s'appuyant sur I.1, I.12 mène à l'équation scalaire I.13 dite de Poisson, qui généralise l'équation de Laplace scalaire I.9 :

$$-\operatorname{div}(\mu_0 \vec{\mathbf{H}}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U = \operatorname{div}(\mu_0 \vec{\mathbf{M}}) \qquad (\text{I.13})$$

#### 1.2.4. Expressions des potentiels en fonction des sources.

Les équations de Poisson I.6 et I.13 lient les sources aux potentiels. En utilisant la transformée de Fourier à trois dimensions, on établit aisément [Ayant, pp.48-50] les relations intégrales qui donnent les potentiels en fonction des sources. Dans ces relations  $\vec{\mathbf{r}}$  définit la position du point P où on évalue le potentiel et  $\vec{\mathbf{r}}'$  celle d'un point courant S de la source.

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} dV \qquad (\text{I.14})$$

$$U(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{-\operatorname{div} [\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}')]}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} dV \qquad (\text{I.15})$$

La relation 1.13 montre que la quantité  $-\mu_0 \operatorname{div} \bar{\mathbf{M}}$  joue, dans l'équation de Poisson, le même rôle que  $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$  en électrostatique.

### 1.3. Caractérisation du champ autour d'une source.

#### 1.3.1. Harmoniques sphériques scalaires complexes et réelles.

Dans un milieu non magnétique sans source, l'induction magnétique peut se déduire de deux potentiels distincts : le potentiel vectoriel  $\bar{\mathbf{A}}$  ou le potentiel pseudo-scalaire  $U$ . Le premier vérifie l'équation de Laplace vectorielle (I.7), tandis que le second satisfait l'équation de Laplace scalaire (I.9). Si l'espace est rapporté à des coordonnées sphériques, les solutions de ces équations s'expriment à l'aide de fonctions spéciales : les harmoniques sphériques (scalaires ou vectorielles). Ces fonctions sont étudiées en détail dans l'annexe B. Par la suite nous appellerons "développement multipolaire" la solution générale des équations de Laplace exprimée à l'aide des harmoniques sphériques. Dans un premier temps, nous nous intéressons aux solutions de l'équation de Laplace scalaire.

Dans le repère sphérique  $\mathcal{R}_{sp}$  d'origine  $O$ , tout point  $P$  peut être situé par sa distance  $r$  à  $O$ , son élévation,  $\theta$  et son azimut,  $\phi$ . [LEGRIS].

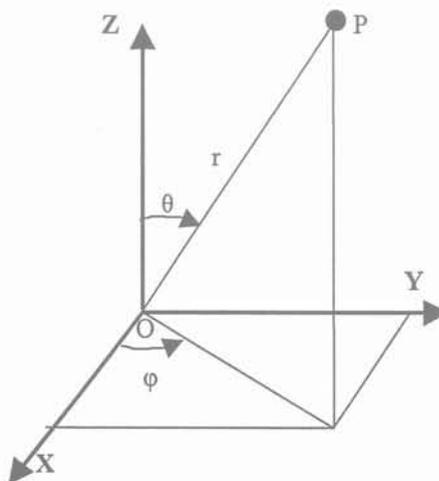


Figure 2. Coordonnées sphériques.

On appelle harmoniques sphériques scalaires les fonctions des coordonnées angulaires sphériques,  $\theta, \varphi$  définie par :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = k_{n,m} \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{jm\varphi} \quad (I.16)$$

où :

-  $n$  est un entier positif ou nul et  $m$  est un entier compris entre  $-n$  et  $+n$

$$- k_{n,m} = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$$

-  $P_n^m(z)$  est la fonction de Legendre associée qui se calcule comme suit :

$$P_n^m(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \cdot \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}} (z^2 - 1)^n \quad (I.17)$$

Les relations (I.16) et (I.17) suffisent à expliciter complètement les fonctions  $Y_n^m$ . Ces fonctions constituent une base orthonormée pour les fonctions  $f(\theta, \varphi)$  de carré sommable définies sur la sphère unité, ce qui présente de nombreux avantages pour les calculs.

Selon cette définition habituelle, les harmoniques sphériques sont des fonctions complexes dont l'argument varie avec l'azimut  $\varphi$ . Lorsqu'on est certain de chercher un champ réel (celui d'une spire par exemple) cela n'est pas très compréhensible : il est plus commode de rapporter une fonction réelle à une base de fonctions réelles. Pour trouver une telle base, observons que la seule partie complexe des fonctions  $Y_n^m$  définies par (I.16) est l'exponentielle qui fixe leur dépendance par rapport à  $\varphi$  et remarquons que les fonctions  $Y_n^0$  sont réelles et ne dépendent pas de  $\varphi$ .

Pour obtenir des fonctions réelles associées aux  $m$  non nuls, nous procédons de la même manière que pour passer des séries de Fourier à coefficients complexes à celles à coefficients réels : nous regroupons les fonctions de  $m$  opposés. Il en résulte que deux fonctions  $Y_{C_n}^m$  et  $Y_{S_n}^m$  sont associées à chaque valeur de  $m$  positif. Leurs expressions s'obtiennent en remplaçant l'exponentielle complexe respectivement par  $\sqrt{2} \cos m\varphi$  et par  $\sqrt{2} \sin m\varphi$ . L'ensemble de des fonctions  $Y_n^0, Y_{C_n}^m$  et  $Y_{S_n}^m$  constitue également une base orthonormée pour les fonctions  $f(\theta, \varphi)$ .

Après avoir montré comment ces fonctions sont impliquées dans les solutions de l'équation de Laplace, nous donnons, au paragraphe 3.3, les expressions de toutes les fonctions réelles indépendantes obtenues pour  $n$  allant de 0 à 4 ainsi que plusieurs représentations graphiques qui aident à imaginer les variations de ces fonctions.

L'annexe B détaille davantage les propriétés des harmoniques sphériques. La définition usuelle des harmoniques sphériques (1.16, 1.17), ne mène à l'écriture explicite de ces fonctions qu'au terme de plusieurs étapes de calculs intermédiaires longs et fastidieux. C'est probablement pour cette raison qu'elles ne figurent pas dans les formulaires. Les fonctions réelles, introduites par cette étude, s'en déduisent ensuite. Afin de disposer de leurs expressions, nous avons établi une nouvelle relation de récurrence qui facilite grandement l'accès direct à ces fonctions. Pour compléter, nous montrons qu'une bonne part de ces expressions se déduit... des séries de Fourier.

### **1.3.2. Solutions de l'équation de Laplace scalaire. Développement multipolaire.**

En coordonnées sphériques, le laplacien s'écrit sous la forme donnée dans l'annexe A et l'équation de Laplace scalaire se présente comme suit :

$$\Delta U = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{I.18})$$

Pour la résoudre, nous faisons appel à la méthode de séparation des variables qui suppose que la fonction  $U$  peut se présenter comme un produit de trois fonctions dont chacune ne dépend que d'une variable. Ensuite, puisque les harmoniques sphériques se présentent déjà comme le produit de deux fonctions variant respectivement suivant  $\theta$  et  $\varphi$ , nous développons la partie angulaire des fonctions cherchées en harmoniques sphériques :

$$U(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Psi(\varphi) = R(r) \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{I.19})$$

Le détail de la résolution figure dans l'annexe B. La solution générale comprend deux familles de solutions. La première conduit à des champs qui décroissent lorsque  $r$  croît. Nous dirons qu'elle représente le champ émis et nous lui attribuerons l'indice  $e$ .

$$U^e(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \cdot \left( \alpha s_{n,0}^e Y_n^0(\theta, \varphi) + \sum_{m=1}^n (\alpha s_{n,m}^z YC_n^m(\theta, \varphi) + \beta s_{n,m}^e YS_n^m(\theta, \varphi)) \right) \right] \quad (I.20)$$

Contrairement à l'habitude, nous avons exprimé ce potentiel directement en fonction des harmoniques sphériques scalaires réelles. Les sources de champ sont supposées être contenues par une sphère de rayon R et l'expression (I.20) n'est applicable qu'à l'extérieur de cette sphère.

Le potentiel pseudo-scalaire, tel qu'il apparaît dans (I.20) permet de trouver l'induction émise par une source d'extension limitée : il suffit d'en calculer le gradient. Cette relation prend le nom de développement multipolaire et les termes dont la variation radiale est en  $r^{-(n+1)}$  sont appelés "potentiels multipolaires d'ordre 2<sup>n</sup>". Suivant le degré m, leur variation angulaire peut prendre 2n + 1 formes distinctes dont chacune est décrite par une harmonique sphérique scalaire réelle.

Sur le plan pratique, il est intéressant de remarquer que plus l'ordre est élevé, plus la décroissance est rapide. Cela permet d'envisager de limiter le nombre des termes de (I.20) sans beaucoup nuire à la précision de cette représentation. Les représentations auxquelles nous accédons expérimentalement en négligeant les termes d'indice  $n > 3$  sont suffisamment proches de la réalité pour étudier les couplages parasites et ceci est d'autant plus vrai que la distance qui sépare les composants est grande. La plupart du temps, lorsque la distance atteint, disons 5 fois la taille des composants, le terme dipolaire suffit.

L'expression (I.20) montre que si on se borne à l'ordre 3, 15 composantes scalaires (3 + 5 + 7) suffisent à caractériser le champ régnant dans tout l'espace situé au-delà de R. D'autre part, l'expression du gradient en coordonnées sphériques donne accès à l'induction et montre que sa composante radiale est proportionnelle au potentiel. Cette propriété est exploitée pour trouver expérimentalement les composantes du développement (I.20). En effet, dès que le potentiel à une distance donnée est connu, le calcul des composantes est possible : l'orthogonalité des fonctions choisies rend cette opération comparable à la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique.

Les champs de la seconde famille de solutions croissent avec r. Nous les associons au champ reçu et nous les affectons d'un indice r. L'expression du potentiel créé par des sources extérieures, à l'intérieur d'une sphère de rayon R, s'écrit en remplaçant, dans (I.20),

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \quad \text{par} \quad \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

$$U^r(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot \left( \alpha s_{n,0}^r Y_n^0(\theta, \varphi) + \sum_{m=1}^n (\alpha s_{n,m}^r YC_n^m(\theta, \varphi) + \beta s_{n,m}^r YS_n^m(\theta, \varphi)) \right) \right] \quad (I.21)$$

Ce développement sera exploité pour évaluer les effets du champ sur le composant récepteur.

### I.3.3. Expressions des harmoniques sphériques réelles jusqu'à l'ordre 4.

Afin de préciser la perception de ces fonctions, nous donnons dans le tableau 1 ci-dessous leurs expressions telles qu'elles sont établies dans l'annexe B.

Les fonctions **YS** se déduisent des fonctions **YC** en remplaçant  $\cos(m\varphi)$  par  $\sin(m\varphi)$  ce qui équivaut à une rotation de  $\pi / 2m$  autour de l'axe Oz.

<b>Terme polaire.</b>
$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
<b>Termes dipolaires.</b>
$Y_1^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \cos \theta$
$YC_1^1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \sin \theta \cdot \sqrt{2} \cos \varphi$
<b>Termes quadrupolaires.</b>
$Y_2^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos 2\theta + 1)$
$YC_2^1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin 2\theta \cdot \sqrt{2} \cos \varphi$
$YC_2^2(\theta, \varphi) = -\frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (\cos 2\theta - 1) \cdot \sqrt{2} \cos 2\varphi$

<b>Termes octupolaires.</b>
$Y_3^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta)$
$YC_3^1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{21}{\pi}} (5 \sin 3\theta + \sin \theta) \sqrt{2} \cos \varphi$
$YC_3^2(\theta, \varphi) = -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} (\cos 3\theta - \cos \theta) \sqrt{2} \cos 2\varphi$
$YC_3^3(\theta, \varphi) = \frac{1}{32} \sqrt{\frac{35}{\pi}} (\sin 3\theta - 3 \sin \theta) \sqrt{2} \cos 3\varphi$
<b>Termes hexapolaires.</b>
$Y_4^0(\theta, \varphi) = \frac{3}{128} \sqrt{\frac{1}{\pi}} (35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9)$
$YC_4^1(\theta, \varphi) = -\frac{3}{32} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} (7 \sin 4\theta + 2 \sin 2\theta) \sqrt{2} \cos \varphi$
$YC_4^2(\theta, \varphi) = -\frac{3}{64} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} (7 \cos 4\theta - 4 \cos 2\theta - 3) \sqrt{2} \cos 2\varphi$
$YC_4^3(\theta, \varphi) = \frac{3}{64} \sqrt{\frac{35}{\pi}} (\sin 4\theta - 2 \sin 2\theta) \sqrt{2} \cos 3\varphi$
$YC_4^4(\theta, \varphi) = \frac{3}{128} \sqrt{\frac{35}{2\pi}} (\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3) \sqrt{2} \cos 4\varphi$

### I.3.4. Champs simples.

Le gradient d'une fonction constante étant nul partout, l'induction reçue (B.26) est nulle partout si  $n = 0$ . D'autre part, le champ émis associé à  $n = 0$  (champ polaire) est nul en raison de la conservation du flux de l'induction magnétique (B.34). Le développement multipolaire des potentiels émis (I.20) et reçu (I.21) commence donc en réalité au terme  $n = 1$ .

D'autre part, pour  $n = 1$ , l'induction reçue est uniforme. En effet, pour  $m = 0$  :

$$\vec{B}_{i,0}^r(r, \theta) = -\frac{1}{R} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \vec{i}_r - \sin \theta \vec{i}_\theta]$$

Il est facile de voir que cette induction (B.58) est parallèle à Oz :

$$\mathbf{B}_z = -\frac{1}{R} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

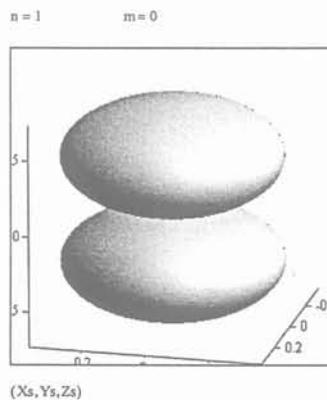
L'induction associée à  $m = 1$  est uniforme également, de même amplitude, mais parallèle à Oy. Bien entendu, celle associée à  $Y_{S_1}^1$  est uniforme et parallèle à Ox. Nous retiendrons que tout champ uniforme se décompose suivant ces trois champs multipolaires.

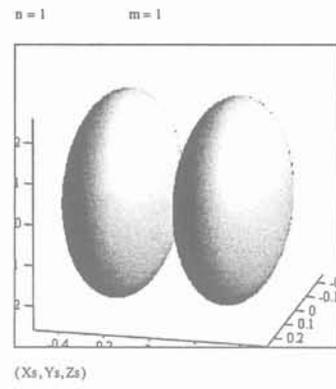
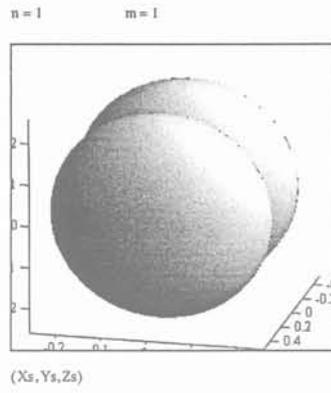
### **1.3.5. Représentations graphiques des harmoniques sphériques réelles.**

Trois représentations 3D qui se complètent sont proposées successivement. La première met en évidence le module du potentiel vecteur et les symétries de rotation. Les surfaces sont tracées en donnant au rayon vecteur une longueur égale à la valeur absolue de l'harmonique sphérique réelle dans la direction correspondante. La surface est ensuite éclairée suivant une direction immuable. A gauche **YC**, à droite **YS**. Notons que cette représentation du potentiel est également une représentation de la composante radiale de l'induction qui lui est proportionnelle. C'est cette composante qui sera mesurée lors de l'identification.

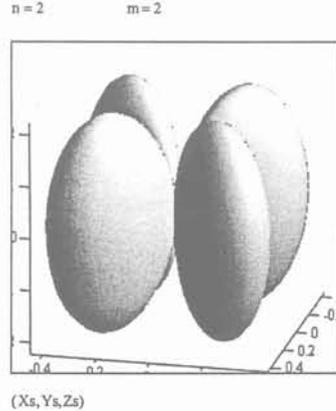
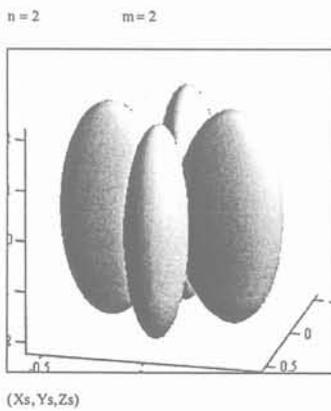
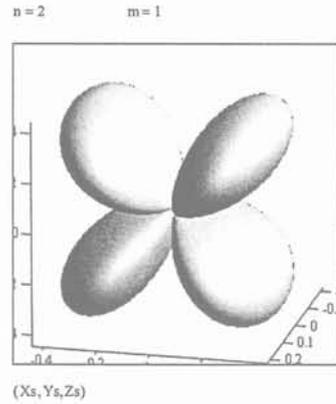
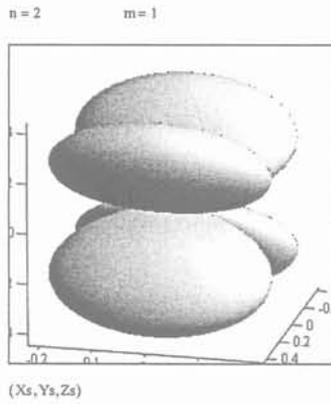
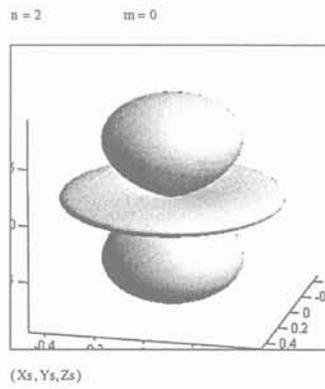
Ces représentations montrent que toutes ces fonctions n'ont pas des formes distinctes : certaines se déduisent d'autres par une rotation...

**n = 1 : 1 forme unique.**

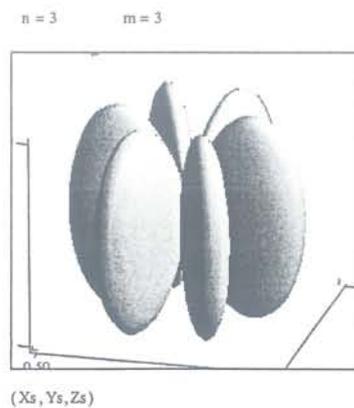
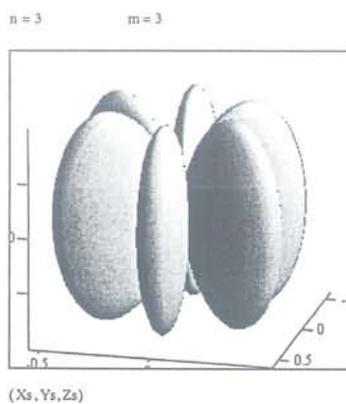
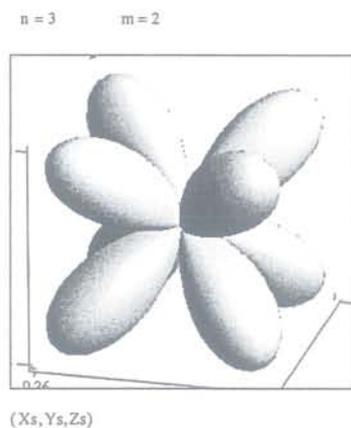
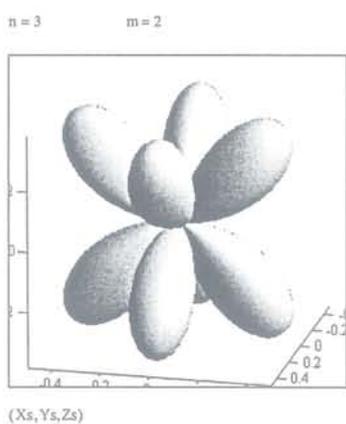
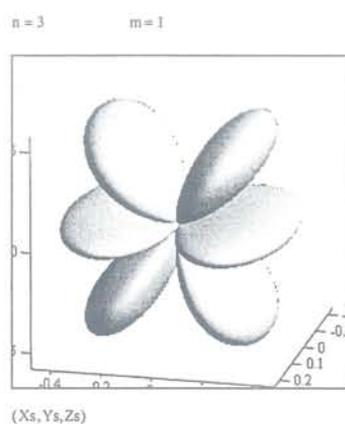
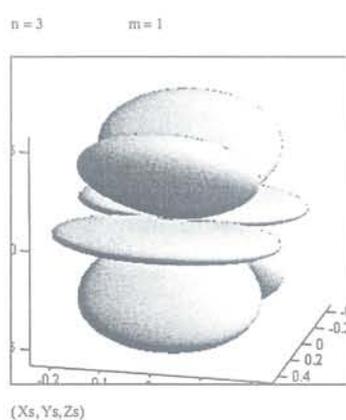
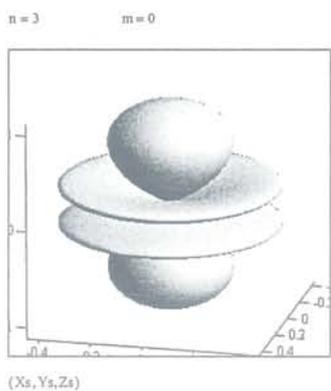




$n = 2$  : 2 formes distinctes.

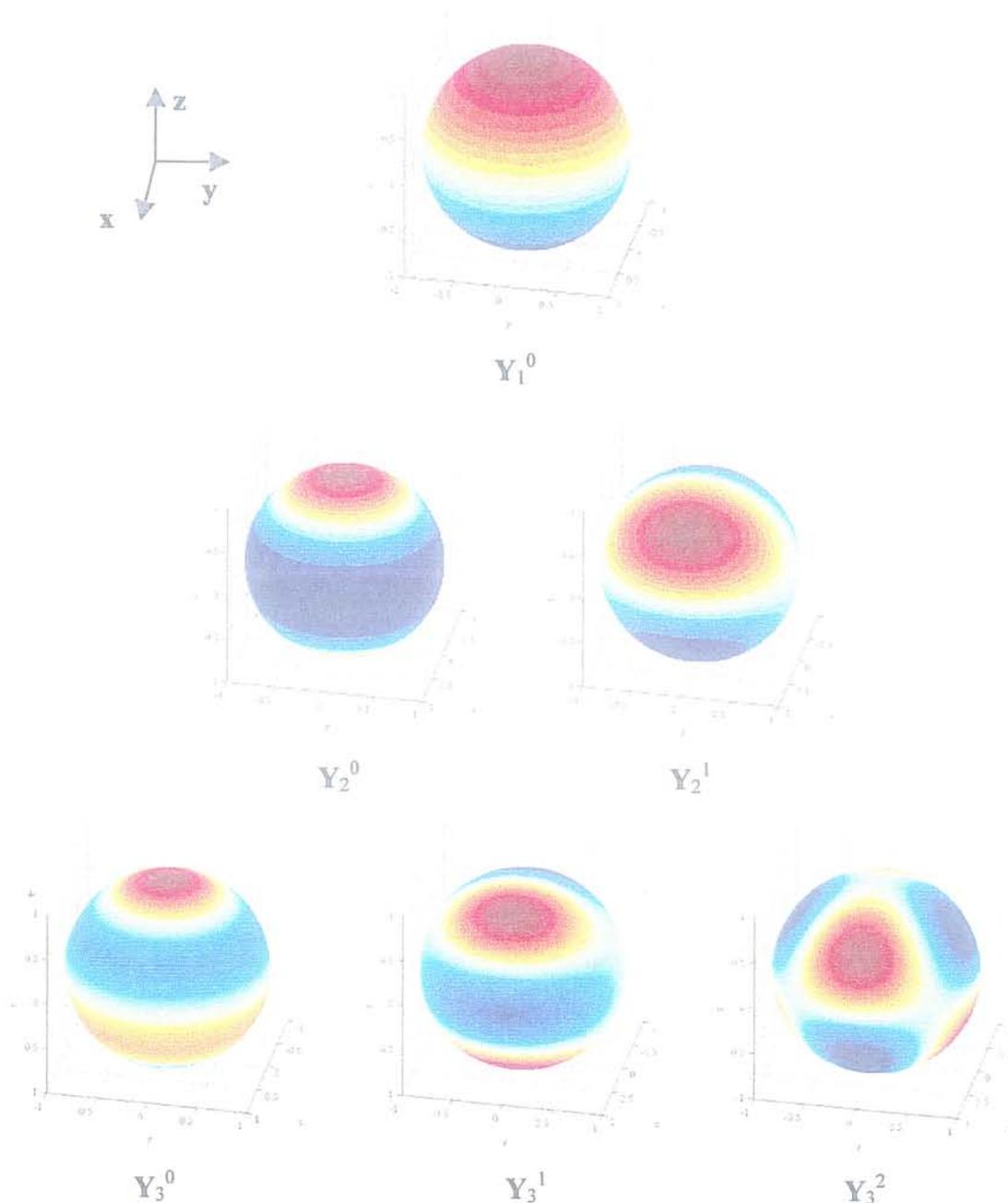


$n = 3$  : 3 formes distinctes.



Ces quelques exemples montrent que, bien que linéairement indépendantes, certaines de ces fonctions se ressemblent. On savait déjà que les  $Y_S$  se déduisaient des  $Y_C$  par une rotation autour de l'axe vertical  $Oz$ . On voit maintenant que d'autres rotations peuvent être invoquées pour effectuer d'autres rapprochements. En se limitant à l'ordre 3, seulement 6 formes de cartes des champs se distinguent.

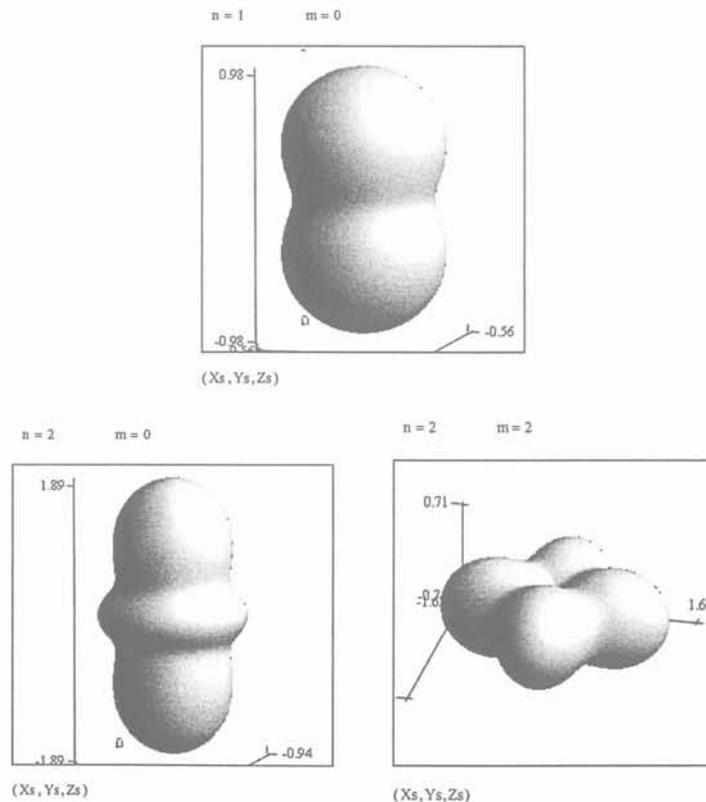
Du fait qu'elle ne prend en compte que le module des fonctions, la représentation précédente masque la parité par rapport à l'origine des coordonnées ou par rapport à un plan.

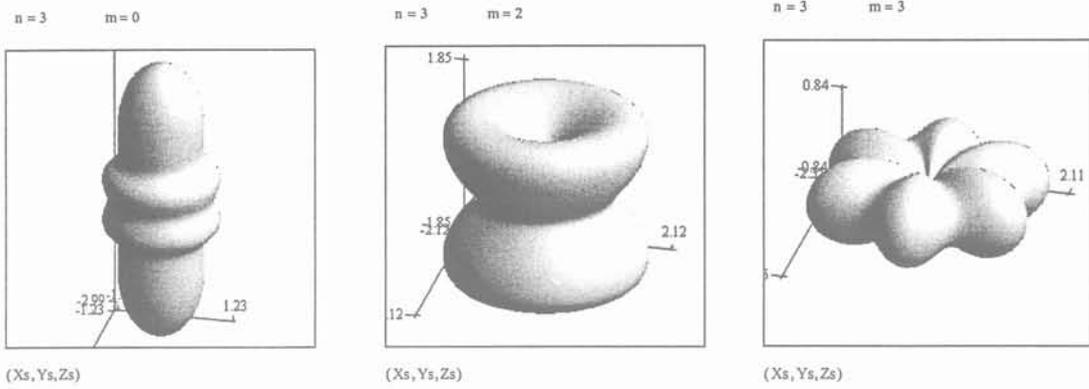


A l'opposé, cette nouvelle représentation montre, dans chaque direction, la valeur algébrique de l'harmonique sphérique en allant des couleurs froides pour les valeurs négatives aux couleurs chaudes pour les valeurs positives.

Nous observons cette fois qu'en raison du caractère pseudo-scalaire du potentiel représenté, la parité de cette fonction est inverse de celle de la densité de courant qui la crée. Une surface qui montre une symétrie impaire est le reflet d'une distribution de courant paire et inversement. Il en est ainsi par exemple du champ dipolaire  $Y_1^0$  qui semble impair par rapport au plan XOY. Ce champ pourrait être émis par une spire circulaire placée sur ce plan, la distribution de courant correspondante serait paire par rapport à ce même plan. Une étude plus complète de la symétrie est proposée à l'annexe C.

Nous terminons par une représentation plus concrète. Les précédentes concernaient le potentiel, elles n'étaient représentatives que de la composante radiale de l'induction. Les graphiques qui suivent s'attachent à présenter le module de l'induction. Ils constituent donc une représentation de la tension maximum induite dans une spire. L'éloignement de la spire étant fixé, celle-ci est orientée à chaque fois pour recueillir la tension maximum (cas le plus défavorable). La tension ainsi recueillie varie suivant la direction où on la place par rapport à la source. C'est ce que montrent les figures qui suivent.





### I.3.6. Systèmes admettant une symétrie de révolution.

Pour certains systèmes admettant une symétrie de révolution (spire, bobine de Helmholtz,...), il est facile d'évaluer, sur l'axe, la composante de l'induction parallèle à cet axe. Nous allons montrer qu'il est très rapide de déduire, de cette fonction, les coefficients du développement multipolaire et, par suite, de connaître l'induction dans tout l'espace.

En plaçant l'axe Oz sur l'axe de révolution, il est supposé qu'au départ nous connaissons, pour une induction qui ne dépend pas de  $\varphi$ , la composante  $B_r$  aux points où  $\theta = 0$  ou  $\pi$ . A cause de la symétrie de révolution, seuls les termes pour lesquels  $m = 0$  interviennent dans le développement et il est facile d'écrire l'expression de  $B_r$  :

$$\begin{aligned} B_r^r(z,0) &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{R}\right)^{n-1} n \cdot as_{n,0}^r Y_n^0(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} as_{n,0}^r \frac{n}{R} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \left(\frac{z}{R}\right)^{n-1} \end{aligned} \quad (I.22)$$

$$\begin{aligned} B_r^e(z,0) &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{z}\right)^{n+2} (n+1) \cdot as_{n,0}^e Y_n^0(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} as_{n,0}^e \frac{n+1}{R} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \left(\frac{R}{z}\right)^{n+2} \end{aligned} \quad (I.23)$$

Lorsque l'induction est connue pour  $0 < z < R$ , son expression doit être assimilée à (I.22). On constate dans ce cas que les composantes du développement sont, à un multiplicateur près, les coefficients du développement en série de Mac Laurin de l'induction connue en fonction de la variable  $z/R$ . A l'opposé, lorsque l'induction est connue pour  $z > R$ , elle doit être développée en fonction de la variable  $R/z$  avant de procéder à l'identification avec (I.23).

### **I.3.7. Harmoniques sphériques vectorielles complexes et réelles.**

Nous avons vu que le potentiel pseudo-scalaire permet effectivement de décrire le champ émis et de le caractériser. Cependant, pour savoir comment le champ émis est lié aux courants de la source ou pour connaître les tensions qu'il engendre dans une boucle de fil, le potentiel vecteur s'avère nécessaire.

Considérons le potentiel pseudo-scalaire  $U_n^m$  défini par :

$$U_n^m(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (I.24)$$

C'est l'un des termes du développement (I.20) exprimé à l'aide des harmoniques complexes. Dans l'annexe B (§ 6.1) nous montrons que le potentiel vecteur associé à ce potentiel multipolaire s'écrit :

$$\begin{aligned} A_{nr}^m &= 0 \\ A_{n\theta}^m &= \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_n^m \\ A_{n\varphi}^m &= \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{-1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_n^m \end{aligned} \quad (I.25)$$

Soit, sous une forme plus compacte :

$$\overline{\mathbf{A}}_n^m(r, \theta, \varphi) = \frac{-1}{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \vec{r} \wedge \overline{\mathbf{grad}} Y_n^m \quad (I.26)$$

Ce potentiel vecteur orthoradial conduit à la même induction que le potentiel scalaire et sa divergence est nulle. L'expression trouvée est donc correcte et c'est la seule compatible avec la jauge de Coulomb.

Cette expression montre le potentiel vecteur sous la forme du produit d'une fonction scalaire de  $r$  par une fonction vectorielle orthoradiale de  $\theta$  et  $\varphi$ . Afin de faciliter la décomposition ultérieure du potentiel vecteur, nous définissons, dans l'annexe B, l'espace vectoriel  $E_v$  des fonctions orthoradiales (donc nécessairement vectorielles) des coordonnées

angulaires et nous montrons que les fonctions définies ci-dessous, que nous nommons "harmoniques sphériques vectorielles", constituent une base orthonormée pour Ev.

$$\overline{\mathbf{Y}}_n^m = \frac{\vec{\mathbf{r}} \wedge \overline{\mathbf{grad}} \mathbf{Y}_n^m}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (\text{I.27})$$

Ces champs jouent, pour le potentiel vecteur, un rôle analogue à celui tenu par les harmoniques sphériques scalaires pour le potentiel scalaire. Notons que,  $\mathbf{Y}_0^0$  étant constante sur la sphère,  $\overline{\mathbf{Y}}_0^0$  est nulle. Le développement d'une fonction  $\vec{\mathbf{F}}$  de Ev, sur la base définie par (I.27) s'écrit :

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{v_{n,m}} \cdot \overline{\mathbf{Y}}_n^m \quad (\text{I.28})$$

Comme pour les harmoniques scalaires, nous avons introduit les fonctions réelles associées qui constituent également une base orthonormée Pour Ev. Le gradient étant un opérateur linéaire, ces fonctions se déduisent simplement des harmoniques scalaires réelles :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{Y}}_n^0 &= \frac{\vec{\mathbf{r}} \wedge \overline{\mathbf{grad}} \mathbf{Y}_n^0}{\sqrt{n(n+1)}} \\ \overline{\mathbf{Y}}_n^m &= \frac{\vec{\mathbf{r}} \wedge \overline{\mathbf{grad}} \mathbf{Y}_n^m}{\sqrt{n(n+1)}} \\ \overline{\mathbf{Y}}_n^m &= \frac{\vec{\mathbf{r}} \wedge \overline{\mathbf{grad}} \mathbf{Y}_n^m}{\sqrt{n(n+1)}} \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

Notons que  $\overline{\mathbf{Y}}_n^0$  est dirigée suivant  $\vec{\mathbf{i}}_\varphi$  et ne dépend que de  $\theta$ . Le développement de  $\vec{\mathbf{f}}(\theta, \varphi)$  sur cette base s'écrit :

$$\vec{\mathbf{f}}(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_{v_{n,0}} \overline{\mathbf{Y}}_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^n \left( \alpha_{v_{n,m}} \overline{\mathbf{Y}}_n^m(\theta, \varphi) + \beta_{v_{n,m}} \overline{\mathbf{Y}}_n^m(\theta, \varphi) \right) \right] \quad (\text{I.30})$$

### I.3.8. Développement multipolaire vectoriel.

Nous avons vu que, pour le champ émis, chaque terme du développement multipolaire peut être caractérisé, au choix, par un potentiel pseudo-scalaire ou par un potentiel vecteur. Les relations impliquées étant linéaires, le potentiel vecteur global est la somme de tous ces termes. Ainsi, le développement multipolaire du potentiel vecteur du champ émis s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}}^e(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n a v^e_{n,m} \overline{\mathbf{Y}}_n^m(\theta, \varphi) \\ \vec{\mathbf{A}}^e(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left[ a v^e_{n,0} \overline{\mathbf{Y}}_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^n \left( \alpha v^e_{n,m} \overline{\mathbf{Y}}_n^m(\theta, \varphi) + \beta v^e_{n,m} \overline{\mathbf{Y}}_n^m(\theta, \varphi) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

Tandis que celui du champ reçu, qui se calcule de la même façon, prend la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}}^r(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=-n}^n a v^r_{n,m} \overline{\mathbf{Y}}_n^m(\theta, \varphi) \\ \vec{\mathbf{A}}^r(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[ a v^r_{n,0} \overline{\mathbf{Y}}_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^n \left( \alpha v^r_{n,m} \overline{\mathbf{Y}}_n^m(\theta, \varphi) + \beta v^r_{n,m} \overline{\mathbf{Y}}_n^m(\theta, \varphi) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Puisque  $\overline{\mathbf{Y}}_0^0$  est nulle, les coefficients  $a v^e_{0,0}$  et  $a v^r_{0,0}$  n'apparaissent pas dans ces développements. Les relations suivantes montrent comment les coefficients  $a s_{n,m}$  et  $a v_{n,m}$  sont liés :

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \neq 0 \quad a v^e_{n,m} &= -\sqrt{\frac{n+1}{n}} a s^e_{n,m} \quad \text{et} \quad a s^e_{0,0} = 0 \\ a v^r_{n,m} &= \sqrt{\frac{n}{n+1}} a s^r_{n,m} \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

Grâce à (I.33) il est possible, à tout moment, de passer du potentiel scalaire au potentiel vecteur et réciproquement. Cette relation s'applique également lorsque l'on exprime les potentiels à l'aide des harmoniques sphériques réelles.

L'induction émise, telle qu'elle se déduit du potentiel vecteur, ne comporte pas de terme qui décroisse en  $r^{-2}$ . Comme l'induction dérive du potentiel scalaire, celui-ci ne peut

décroître selon  $r^{-1}$ . Ce constat confirme le fait qu'il n'existe pas de champ polaire magnétique et il nous autorise à ôter le terme facteur de  $as_{0,0}^e$  du développement du potentiel pseudo-scalaire.

### 1.3.9. Courant sphérique équivalent.

Considérons, à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère de rayon  $R$ , les solutions de l'équation de Laplace de mêmes indices  $n$  et  $m$ . Puisque les variations angulaires de ces potentiels sont identiques, il est possible d'assurer la continuité de la composante radiale de l'induction en tout point de la sphère de rayon  $R$ . En partant de l'expression du gradient en coordonnées sphériques, il est facile de voir que cette continuité est assurée si :

$$as_{n,m}^r = -\frac{n+1}{n} as_{n,m}^e \tag{I.34}$$

Si l'égalité ci-dessus est assurée, seule la composante tangentielle peut être discontinue. Physiquement, une telle discontinuité peut être attribuée à un courant superficiel. Ainsi, en  $r = R = 1$ , il faut un courant de surface égal à :

$$\vec{J}_s = \vec{r} \wedge (\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1}) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{2n+1}{n} as_{n,m}^e \vec{r} \wedge \overline{\text{grad}} [Y_n^m(\theta, \varphi)] \tag{I.35}$$

Une nouvelle fois on voit apparaître les fonctions vectorielles (I.27). En fait, il est naturel qu'un courant circulant à la surface d'une sphère, qui se décrit au moyen d'une fonction vectorielle qui appartient à l'espace  $E_v$  défini plus haut, se décompose sur la base constituée par ces fonctions.

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de l'étude ci-dessus. Tout d'abord, lorsque le courant calculé circule sur la sphère, il engendre aussi bien le champ extérieur que le champ intérieur et ceci est vrai quelque soit le terme du développement multipolaire considéré. Ainsi, vue de l'extérieur, la sphère peut émettre le même champ que n'importe quel système interne. Elle peut tout aussi bien, à l'intérieur, remplacer un système externe quelconque. Lorsqu'en simulation on veut soumettre un dispositif de dimensions limitées à un champ particulier, il suffit de définir le courant adéquat sur la sphère extérieure. Enfin, si on place cette sphère

autour d'un dispositif équivalent à une certaine densité de courant superficielle et que l'on force, sur la sphère, la densité inverse, on annule le champ partout à l'extérieur....

## I.4 Lien champ émis – source

### I.4.1. Champ créé par une densité de courant

Considérons une distribution de courants  $\vec{J}$ , confinée dans un volume  $V$  contenant l'origine  $O$  du repère. Notons  $\vec{rs}$  le rayon vecteur d'un point  $S$  quelconque intérieur à  $V$  et intéressons nous au potentiel vecteur créé en un point  $P$  extérieur à  $V$ , de rayon vecteur  $\vec{r}$ . L'expression générale du potentiel vecteur est donnée par (I.14). Lorsque le volume  $V$  est entouré par une sphère de rayon  $R$ , le développement en harmoniques sphériques vectorielles tel qu'il se présente dans (I.31) est possible. Les coefficients de ce développement s'écrivent :

$$av_{n,m}^e = \frac{\mu_0}{2n+1} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \int_V \vec{J} \cdot \vec{Y}_{n,m}^*(\theta_s, \varphi_s) \cdot rs^n \cdot dV \quad (I.36)$$

Si on exploite les fonctions réelles, les coefficients admettent des expressions similaires :

$$\begin{aligned} av_{n,0}^e &= \frac{\mu_0}{2n+1} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \int_V \vec{J} \cdot \vec{Y}_n^0(\theta_s, \varphi_s) \cdot rs^n \cdot dV \\ \alpha v_{n,m}^e &= \frac{\mu_0}{2n+1} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \int_V \vec{J} \cdot \vec{Y}_n^m(\theta_s, \varphi_s) \cdot rs^n \cdot dV \\ \beta v_{n,m}^e &= \frac{\mu_0}{2n+1} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \int_V \vec{J} \cdot \vec{Y}_n^m(\theta_s, \varphi_s) \cdot rs^n \cdot dV \end{aligned} \quad (I.37)$$

L'égalité (I.37) montre comment les composantes  $av_{n,0}^e$ ,  $\alpha v_{n,m}^e$  et  $\beta v_{n,m}^e$  qui caractérisent le champ émis hors de la sphère dépendent de la distribution volumique des courants.

Intéressons nous maintenant au cas particulier, commun en pratique, où le courant circule dans un fil dont les dimensions transversales sont très petite vis à vis des autres dimensions de la source. Ce fil, parcouru par un courant  $I$ , suit un parcours quelconque sans

sortir du volume  $V$ . Dans cette situation, (I.36) et (I.37) doivent être aménagées car la quantité  $\vec{J} \cdot dV$  est mal définie. Pour cela, remarquons que le volume  $V$  dans lequel circulent les courants se limite désormais au volume du fil. Considérons ensuite un petit tronçon de conducteur de longueur orientée  $\vec{dl}$  et de section  $\vec{ds}$  il vient :

$$\vec{J} \cdot dV = \vec{J} \cdot (\vec{ds} \cdot \vec{dl}) = (\vec{J} \cdot \vec{ds}) \cdot \vec{dl} = I \cdot \vec{dl} \quad (I.38)$$

Cette égalité s'appuie sur le fait que  $\vec{J}$  et  $\vec{dl}$  sont parallèles et sur l'hypothèse suivant laquelle le courant fini  $I$  traverse la surface élémentaire  $\vec{ds}$ . Les composantes multipolaires se calculent maintenant en remplaçant l'expression de  $\vec{J} \cdot dV$  par  $I \cdot \vec{dl}$ .

$$\begin{aligned} aV_{n,m}^e &= \frac{\mu_0 \cdot I}{2n+1} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \int_V \vec{Y}_{n,m}^*(\theta_s, \varphi_s) \cdot rs^n \cdot \vec{dl} \\ aV_{n,0}^e &= \frac{\mu_0 \cdot I}{2n+1} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \int_V \vec{Y}_n^0(\theta_s, \varphi_s) \cdot rs^n \cdot \vec{dl} \\ \alpha V_{n,m}^e &= \frac{\mu_0 \cdot I}{2n+1} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \int_V \vec{Y}C_n^m(\theta_s, \varphi_s) \cdot rs^n \cdot \vec{dl} \\ \beta V_{n,m}^e &= \frac{\mu_0 \cdot I}{2n+1} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \int_V \vec{Y}S_n^m(\theta_s, \varphi_s) \cdot rs^n \cdot \vec{dl} \end{aligned} \quad (I.39)$$

Dès que l'on sait décrire la forme d'une boucle de courant, ces relations permettent de prévoir le champ qu'elle rayonne.

#### **1.4.2. Champ créé par une densité d'aimantation**

On peut, pour l'établir, partir de l'équivalence d'une telle distribution avec une distribution de courant. Un résultat connu de la théorie des matériaux magnétiques indique qu'une densité d'aimantation  $\vec{M}$  répartie dans un volume  $V$  crée le même potentiel qu'une densité de courant  $\vec{J}$  circulant dans le volume  $V$ , jointe à une densité  $\vec{K}$  circulant sur la surface  $S$  limitant  $V$ . En notant  $\vec{n}$  le vecteur unité normal à la surface, ces deux densités sont données par :

$$\vec{J} = \text{rot } \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{K} = \vec{M} \wedge \vec{n} \quad (\text{I.40})$$

Il ne reste plus, dès lors, qu'à remplacer  $\vec{J}$  par ces expressions dans (I.38). Notons que pour la densité superficielle il faut écrire :

$$\vec{J} \cdot \vec{Y} \cdot dV = \vec{M} \wedge \vec{n} \cdot \vec{Y} \cdot dV = -\vec{M} \wedge \vec{Y} \cdot \vec{ds} \quad (\text{I.41})$$

### **1.4.3. Représentations dipolaires équivalentes.**

Il est commun de représenter un dipôle élémentaire par une spire de très petite taille. L'étude du champ émis par une spire circulaire justifie ceci car l'écart entre le champ de la spire et celui associé à son terme dipolaire est inférieur à 1% sitôt que la distance d'observation est supérieure à 5 fois le rayon de la spire. Dans cette optique, le moment dipolaire associé à la composante  $\alpha v_{1,0}^e$  peut être représenté par une petite spire de centre O et d'axe Oz. Les expressions des harmoniques sphériques ainsi que leurs représentations graphiques montrent que les champs associés aux composantes  $\alpha v_{1,1}^e$  et  $\beta v_{1,1}^e$  se déduisent du précédent par des rotations adéquates. On peut leur associer des spires d'axes respectifs Oy et Ox. Pour simplifier la représentation, on peut ne représenter qu'une spire unique à condition d'orienter son axe parallèlement au vecteur moment dipolaire.

Afin de disposer d'une image de la source créant chaque terme multipolaire, un auteur a imaginé de la représenter par un agencement d'un petit nombre de dipôles. La représentation proposée pour chaque terme est justifiée par le développement limité du champ émis par cet agencement particulier [WIKSOW 84], [WIKSOW85]. On observe en effet que pour obtenir, au premier ordre, le champ d'un quadrupole, il faut annuler le moment dipolaire du système, de même que pour créer un champ octupolaire, il faut annuler les moments dipolaires et quadrupolaires.

Les agencements correspondants aux six formes de champs distinctes recensées plus haut sont représentés et les composantes  $a_{n,0}$ ,  $\alpha_{n,m}$  et  $\beta_{n,m}$  sont exprimées en fonction du moment dipolaire élémentaire  $\vec{D}$  (Dx,Dy,Dz) et de la distance  $r_m$  séparant les dipôles.

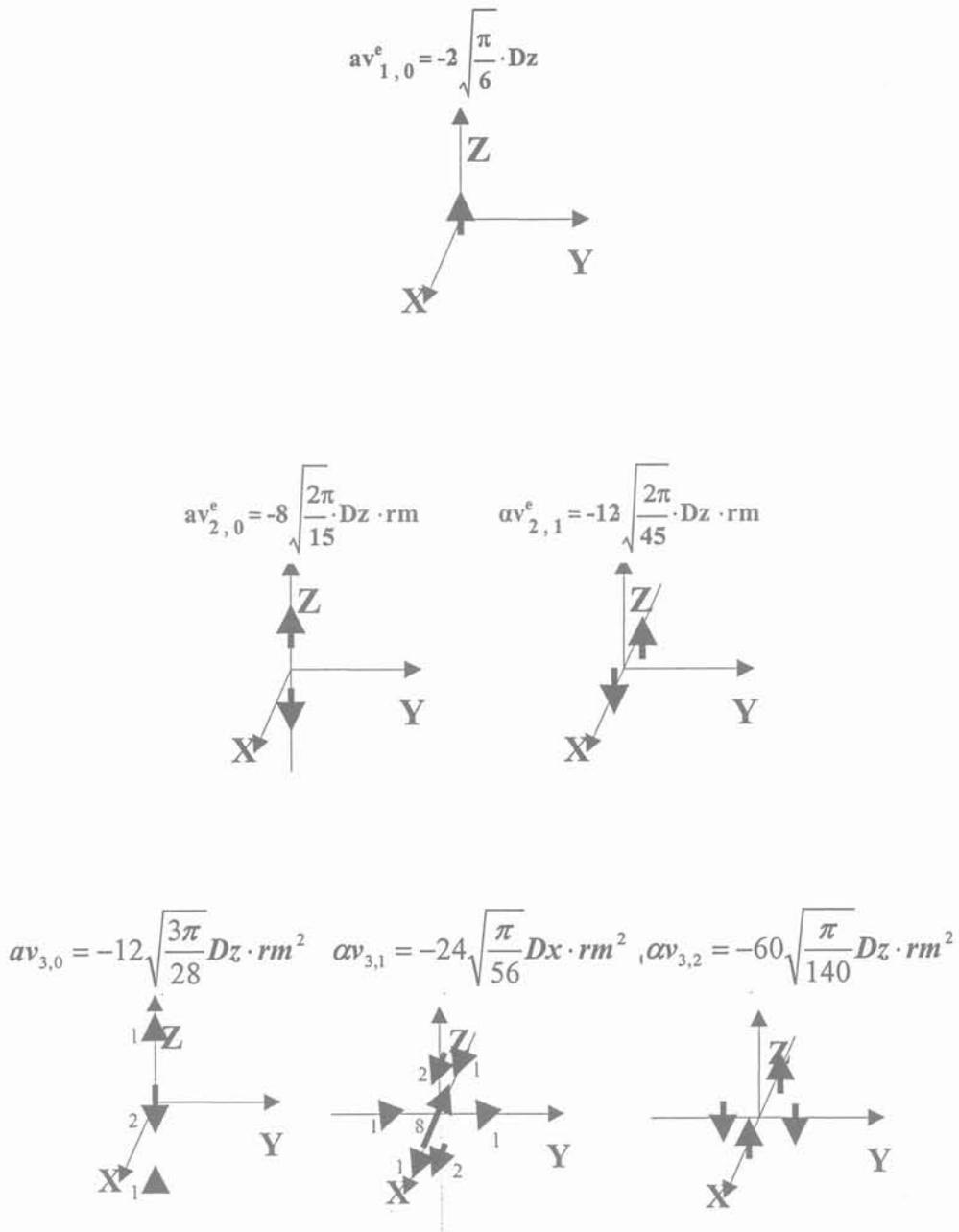


Figure IV.3 : Représentations dipolaires équivalentes.

## I.5. Lien champ reçu - tension induite. Réciprocité.

### Couplage.

#### I.5.1. Tension induite par un champ reçu.

Après avoir étudié l'émission du champ, nous nous intéressons maintenant à sa réception. Supposons qu'un circuit filiforme C localisé près de l'origine du repère soit soumis

à un champ extérieur sinusoïdal et évaluons la tension  $V_{ab}$  qui apparaît à ses bornes. En nous appuyant sur les lois habituelles, nous pouvons écrire :

$$V_{ab} = j\omega\phi = j\omega \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = j\omega \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (I.42)$$

Le potentiel vecteur du champ reçu se développe en harmoniques vectorielles suivant (I.32), ce qui mène à :

$$V_{ab} = j\omega \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=-n}^n av_{n,m}^r \overline{Y_n^m}(\theta, \varphi) \cdot d\vec{l} \quad (I.43)$$

Soit :

$$V_{ab} = j\omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n av_{n,m}^r \frac{1}{R^n} \oint_C \overline{Y_n^m}(\theta, \varphi) \cdot r^n \cdot d\vec{l} \quad (I.44)$$

### 1.5.2. Emission et réception d'une boucle de courant. Réciprocité.

Observons les différents termes de la somme sur  $n$  et  $m$ . Chacun dépend d'une composante qui décrit le champ incident. Cette composante est multipliée par une intégrale dont le résultat est scalaire et qui caractérise la sensibilité du circuit. Notons  $av_{n,m}^s$  cette intégrale (indice  $s$  comme susceptibilité), il vient :

$$V_{ab} = j\omega \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n av_{n,m}^r \cdot av_{n,m}^s \quad \text{avec : } av_{n,m}^s = \frac{1}{R^n} \oint_C \overline{Y_n^m}(\theta, \varphi) \cdot r^n \cdot d\vec{l} \quad (I.45)$$

On constate maintenant que les composantes de la susceptibilité d'un circuit donné sont à peu de choses près identiques à celles de son émissivité.

$$av_{n,m}^s = \frac{\mu_0 \cdot I}{R} \frac{1}{2n+1} \cdot av_{n,m}^{e*} \quad (I.46)$$

La relation ci-dessus constitue un résultat important. Puisque les coefficients qui caractérisent l'émission se déduisent de ceux qui caractérisent la réception du même circuit, l'étude expérimentale du champ émis par un composant permet de savoir comment il se comporte à la réception...et réciproquement. Cela constitue la propriété de réciprocité.

Enfin, puisque notre objectif était d'étudier le couplage de deux dispositifs, l'idéal serait de pouvoir calculer l'inductance mutuelle. Il n'est pas nécessaire de développer complètement les calculs pour voir comment y parvenir. Nous savons maintenant écrire le potentiel vecteur du champ rayonné et, par suite, son potentiel pseudo-scalaire. L'étude de ce dernier au voisinage du récepteur consiste à le développer en série de Taylor autour de ce point (annexe D). Nous savons ensuite présenter ce résultat sous la forme d'un développement en harmoniques sphériques scalaires, puis vectorielles. Il ne reste plus alors qu'à évaluer la tension induite à l'aide des résultats du paragraphe précédent.

### **1.5.3. Changement de repère.**

Nous avons vu comment caractériser le champ autour d'un composant en le décomposant en un petit nombre de champs élémentaires et nous avons une représentation de la perturbation maximum qu'un tel champ produit aux bornes d'une spire. Il reste à préciser, par exemple, comment cette tension varie en fonction de l'orientation de cette spire, c'est à dire quand on la tourne par rapport au repère de la source. En clair, il faut maintenant s'intéresser à la façon dont les champs varient lorsqu'on tourne le composant dans le repère où son comportement est connu.

Le développement multipolaire a montré que le champ émis par un composant se caractérise par les coefficients de ce développement. Puisque ceci est vrai dans n'importe quel repère, il faut trouver comment calculer ces coefficients dans un repère quelconque lorsque leurs valeurs sont connues dans un autre. Les changements de repère envisagés ici sont uniquement des rotations du repère autour de son origine.

Deux méthodes sont envisageables pour parvenir à ce résultat. La première consiste à décomposer une rotation quelconque en un produit de trois rotations successives suivant le processus dit "des angles d'Euler" et à exploiter le théorème d'addition des harmoniques sphériques. La seconde se base sur le calcul tensoriel. Dès qu'il est établi que les composantes

du développement multipolaire appartiennent à plusieurs tenseurs, leurs lois de transformation au cours d'un changement de repère quelconque sont établies. Si la première méthode est parfois plus rapide, la seconde met en œuvre un formalisme dont la portée est bien plus large et qui est indispensable pour écrire des relations entre des grandeurs physiques caractérisées par plus de trois composantes. Elle seule peut, par exemple, mener à une écriture générale de la mutuelle impédance.

Dans l'annexe E nous présentons les bases du calcul tensoriel et nous nous en servons pour montrer comment faire le développement en série de Taylor d'une fonction scalaire de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Le caractère tensoriel des moments multipolaires et leurs liens avec le développement en série de Taylor est également établi.

## **Conclusion.**

En vue de comprendre le couplage magnétique d'objets distants, nous avons décidé d'étudier successivement l'émission puis la réception de ce champ. Pour décrire le champ magnétique émis ou reçu par un objet de dimensions limitées nous avons choisi de rapporter l'espace à des coordonnées sphériques. Ce choix semble naturel, surtout lorsqu'on s'éloigne de cet objet, car la distance  $r$  joue un rôle à la fois simple et important.

La description, en coordonnées sphériques, des champs émis et reçus nécessite le recours à des fonctions particulières : les harmoniques sphériques. Ces fonctions sont connues depuis longtemps : nous avons rappelé leurs principales propriétés et la façon dont elles interviennent dans la résolution de l'équation de Laplace. Nous leur avons apporté plusieurs extensions originales en vue, dans un premier temps, d'accéder rapidement à l'écriture explicite des fonctions réelles. Ceci a permis, notamment, de fournir quelques représentations graphiques de ces fonctions. L'introduction des harmoniques vectorielles constitue un autre apport important de ce chapitre. Ces fonctions sont indispensables pour formuler le développement multipolaire du potentiel vecteur et elles permettent, par là même, de lier l'induction émise au courant source, ainsi que la tension reçue à l'induction incidente. Ces deux liens étant établis, il apparaît que la susceptibilité d'un composant à un champ incident est prévisible dès que son émissivité est caractérisée.

En apprenant à décrire les champs émis et reçus, nous avons rencontré des ensembles de valeurs scalaires (les composantes) qui les caractérisent mais qui dépendent du repère choisi. Afin de savoir ce que deviennent ces grandeurs lorsque l'orientation du composant dans le repère est modifiée, nous avons fait appel au formalisme tensoriel qui permet de surmonter élégamment ces difficultés.

Enfin, pour faciliter la lecture du document, nous avons reporté en annexes les démonstrations mathématiques longues. Nous espérons ainsi que les idées directrices de ce travail émergeront plus nettement à la première lecture et nous souhaitons également convaincre le lecteur que les mathématiques choisies sont les seules adaptées à ce problème. Le lecteur motivé, qui ne connaît pas nécessairement ces domaines, trouvera dans les annexes mathématiques des documents introductifs assez complets qui présentent les concepts physiquement avant de les formaliser.



## Chapitre II :

# Cahier des Charges

et

# Conséquences Métrologiques





## CHAPITRE II. CAHIER DES CHARGES ET CONSEQUENCES METROLOGIQUES.

### II.1 Introduction

Nous souhaitons étudier, entre 100 kHz à 10 MHz, l'induction qui règne à proximité des composants magnétiques. Cette gamme de fréquence coïncide avec celle des signaux auxquels sont soumis la plupart des composants magnétiques de moyenne puissance, de quelques VA à quelques centaines de VA. Les composants étudiés sont supposés rentrer dans un cube de 10 cm d'arête et le champ sera mesuré jusqu'à une distance égale à 10 fois leur demi côté, soit à 50 cm maximum pour les plus gros d'entre eux. On souhaite que la représentation demeure précise lorsqu'on se rapproche du composant, au moins jusqu'à trois fois sa demi largeur.

Pour aborder la mesure du champ, il est important de savoir si l'on se situe en champ proche ou en champ lointain. La limite entre les deux comportements est parfois un peu ambiguë mais on admet généralement qu'à une distance inférieure au sixième de la longueur d'onde les hypothèses de champ proche sont applicables [IEE], [PAUL]. Ici, dans le pire des cas, notre cahier des charges nous amène à un dixième de cette limite. C'est donc sans hésiter que nous adoptons l'hypothèse du champ proche. Ainsi, le champ magnétique est supposé se propager indépendamment du champ électrique, conformément aux lois de la magnétostatique.

Les lois de la magnétostatique étant applicables, nous allons nous efforcer de tirer les bénéfices de la théorie multipolaire développée au chapitre précédent. Puisque ses termes décroissent d'autant plus vite avec l'éloignement que leur ordre  $n$  est grand, nous pouvons espérer décrire le champ émis avec une précision raisonnable en ne conservant, de la somme, qu'un petit nombre de ses premiers termes. D'une manière générale, le nombre de termes à retenir dépend de la forme du champ rayonné par le composant, de la précision avec laquelle on veut le connaître et de la distance minimale jusqu'à laquelle on souhaite assurer cette précision. En pratique, nous nous sommes limités à identifier les termes relatifs aux 3 premiers ordres, soit 15 coefficients. Nous verrons que cela suffit dans bien des cas.

D'après l'expression théorique de la composante radiale de l'induction, la connaissance de cette grandeur sur une sphère suffit pour déduire les coefficients du développement multipolaire. Bien que d'autres méthodes soient envisageables, nous avons retenu celle-ci en raison de sa simplicité théorique. Cependant, l'induction radiale n'est jamais relevée en tout point d'une sphère : le nombre des mesures demeure fini. En théorie, pour trouver 15 coefficients, il faut 15 mesures indépendantes. En pratique le mauvais conditionnement des matrices nous contraint à prendre davantage de mesures et à exploiter leur redondance à l'aide de la méthode des moindres carrés. Un problème géométrique difficile se pose alors : comment répartir un nombre suffisant de points de mesure régulièrement sur une surface sphérique ?

Pour ne pas perturber le champ étudié, il faut que le capteur n'inclue, bien sur, aucun matériau magnétique. Cependant, cette précaution ne suffit pas. Il ne faut pas non plus que ce capteur comporte la moindre masse métallique : à 10 MHz et même en dessous, celle-ci serait le siège de courants induits qui modifieraient considérablement le champs reçu. Pour cette raison, nous avons choisi d'utiliser une antenne boucle réalisée en fil fin et nous la chargerons par une impédance aussi forte que possible pour recueillir une tension identifiable directement à  $d\Phi/dt$ . La caractérisation du champ rayonné nécessitera le déplacement de cette antenne autour du composant testé. Il est clair que le diamètre de l'antenne, ainsi que la précision du positionnement influenceront sur la précision du résultat. Nous tentons de cerner l'incidence de ces paramètres avant d'aborder la réalisation mécanique.

Afin de préserver la finesse de l'analyse angulaire, la spire de mesure ne doit pas être trop large. Le champ à mesurer étant faible, la tension à détecter sera très faible. Un calcul d'ordre de grandeur montrera que cette tension est, dans la majorité des cas, inférieure à  $1 \mu V$ . Cette valeur nous amène à viser un bruit de l'ordre de 10 nV, ce qui nous contraint à recourir à une détection synchrone. Comme tout appareil d'instrumentation sensible, la détection synchrone nécessite des précautions d'usage. Une bonne compréhension du fonctionnement de l'appareil est utile pour choisir, en toute connaissance de cause, les accessoires adéquats et les réglages les mieux adaptés à la mesure. C'est pourquoi nous exposons le principe de ce dispositif avant de nous intéresser à sa réalisation pratique ainsi qu'à ses limites et ses réglages principaux.

## II.2 Mesure de l'induction.

### II.2.1. L'induction radiale, image du potentiel.

Nous avons vu, au cours du premier chapitre, que le développement en harmoniques sphériques du potentiel pseudo scalaire émis par le composant émetteur s'écrit selon (I.20). Dans cette zone sans source, l'induction magnétique dérive du potentiel scalaire :

$$\vec{\mathbf{B}} = - \overline{\text{grad}} U \quad (\text{II.1})$$

Selon l'expression du gradient en coordonnées sphériques (Annexe A), la composante radiale de l'induction est égale à la dérivée du potentiel scalaire par rapport au rayon :

$$\mathbf{B}_r(r, \theta, \varphi) = - \frac{\partial U(\vec{\mathbf{r}})}{\partial r} \quad (\text{II.2})$$

Cette dérivation n'affecte que le terme en  $r^{-(n+1)}$  (ou  $r^n$  pour le champ reçu) et non les fonctions harmoniques sphériques, indépendantes du rayon :

$$\mathbf{B}_r^e(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot \left( \alpha s_{n,0}^e \mathbf{Y}_n^0(\theta, \varphi) \dots + \sum_{m=1}^n (\alpha s_{n,m}^e \mathbf{Y}C_n^m(\theta, \varphi) + \beta s_{n,m}^e \mathbf{Y}S_n^m(\theta, \varphi)) \right) \right] \quad (\text{II.3})$$

Au facteur  $n + 1$  près, cette expression implique les mêmes coefficients que le potentiel scalaire. L'étude des deux autres composantes montre que la composante radiale de l'induction est la plus commode à utiliser pour accéder aux coefficients du développement.

Lorsque la composante radiale de l'induction est connue sur la sphère de rayon  $R$ , l'orthogonalité des harmoniques sphériques permet de retrouver la composante associée à chacune en effectuant le produit scalaire (Annexe B.7) à la composante radiale de l'induction émise. Nous verrons au paragraphe II.2.5 comment s'y prendre lorsque l'induction radiale n'est connue qu'en un nombre fini de points de la surface  $r = R$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}^e \mathbf{r} | \mathbf{Y}_n^0 \rangle &= \alpha s_{n,0}^e \cdot (n+1) \\ \langle \mathbf{B}^e \mathbf{r} | \mathbf{Y}C_n^m \rangle &= \alpha s_{n,m}^e \cdot (n+1) \\ \langle \mathbf{B}^e \mathbf{r} | \mathbf{Y}S_n^m \rangle &= \beta s_{n,m}^e \cdot (n+1) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

### II.2.2. Limitation du nombre de termes multipolaires.

Selon le développement en harmoniques sphériques du potentiel pseudo-scalaire émis, plus on se rapproche de la source et plus les termes d'ordres supérieurs influent sur la valeur du potentiel émis.

Dans le cas de l'émission, le potentiel pseudo-scalaire est composé de termes qui évoluent en  $r^{-(n+1)}$  ce qui signifie que, pour une précision fixée et au-delà d'une distance choisie, le potentiel peut s'exprimer par une somme tronquée. Dans de telles conditions, il existe un ordre  $n$  jusqu'au quel il faut poursuivre le développement pour obtenir la précision cherchée. Inversement, pour une précision et un ordre  $n$  fixés, une distance minimale à partir de laquelle la somme tronquée donne le potentiel pseudo-scalaire  $U^e$  avec la précision voulue, peut être déterminée.

Pour évaluer l'influence de la troncature du développement, développons l'inverse de la distance qui intervient dans les calculs de potentiels (II.5). Cette fonction est solution de l'équation de Laplace (potentiel créé par une charge électrostatique placée en  $\overline{R_s}$ ). En notant  $\overline{r}$  et  $\overline{R_s}$  les vecteurs de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  et  $(R_s, \theta_s, \phi_s)$  son développement, qui ne converge que si  $r > R_s$ , s'écrit :

$$\frac{1}{\|\overline{r} - \overline{R_s}\|} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4 \cdot \pi}{2n+1} \right) \cdot \left( \frac{R_s}{r} \right)^n \cdot \left[ \begin{array}{l} Y_n^0(\theta, \phi) \cdot Y_n^0(\theta_s, \phi_s) \dots \\ + \sum_{m=1}^n \left( YC_n^m(\theta, \phi) \cdot YC_n^m(\theta_s, \phi_s) + \right. \\ \left. YS_n^m(\theta, \phi) \cdot YS_n^m(\theta_s, \phi_s) \right) \end{array} \right] \quad (II.5)$$

Une limitation du nombre de termes conduit inévitablement à une erreur sur le calcul de cette fonction. Nous avons calculé cette quantité en limitant la sommation (II.5) à un ordre  $n$  variant de 1 à 3, afin d'évaluer le rayon  $R$  minimal à partir duquel l'évaluation donnée par la série atteint 1% de précision. Pour fixer les idées, nous avons supposé que la distance  $R_s$  était égale à 5mm.

Ordre $n$	$\infty$	3	2	1
Distance minimale	5mm	1.3cm	1.8cm	3.7cm

Tableau II.1. Distance minimale, pour un ordre donné, à partir de laquelle la distance est évaluée avec une précision inférieure à 1%, hors d'une sphère de rayon 5 mm.

Ce calcul nous autorise à supposer que l'erreur relative résultant d'une troncature après le troisième ordre est inférieure à 1% tant que la distance source antenne reste supérieure à 2,6 fois la demi arête de la source. Ce calcul, qui a le mérite de ne pas dépendre de la forme réelle la distribution de courant, doit être considéré comme un repère. Les composantes  $as_{n,0}^e$ ,  $\alpha s_{n,m}^e$  et  $\beta s_{n,m}^e$  du champ rayonné par un composant présentent des ordres de grandeurs totalement indépendants les uns des autres. Dans le cas extrême où seuls les trois premiers ordres seraient nuls, il est clair que notre affirmation serait mise en défaut ! Cependant, dans un cas semblable le rayonnement résiduel serait très faible et il n'est pas certain qu'il constituerait encore un sujet d'étude intéressant sur le plan pratique !

Nous limitons donc désormais le développement du potentiel aux termes d'ordre 3. Théoriquement il est décrit par 16 coefficients, mais le terme polaire étant nul (Annexe B.3.4), le potentiel est décrit par 15 composantes. Il faudra avoir à l'esprit que cette approximation cesse d'être précise si on approche trop près du composant, c'est-à-dire à moins de deux fois et demi sa demi arête. On notera  $U^e\text{approx}(\mathbf{r},\theta,\phi)$  le potentiel tronqué à l'ordre 3 :

$$U^e\text{approx}(\mathbf{r},\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^3 \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \cdot \left( a_{n,0} Y_n^0(\theta,\varphi) + \sum_{m=1}^n (\alpha_{n,m} YC_n^m(\theta,\varphi) + \beta_{n,m} YS_n^m(\theta,\varphi)) \right) \right] \quad (\text{II.6})$$

Pour évaluer l'erreur résultant de la troncature, il faut penser au fait que le potentiel s'annule en certains points. Pour obtenir une erreur relative significative, nous rapportons l'écart à la valeur maximum prise par le potentiel à la distance considérée.

$$\frac{U^e(\vec{r}) - U^e\text{approx}(\mathbf{r},\theta,\varphi)}{\max(U^e(\vec{r}))} \quad (\text{II.7})$$

On notera  $B_r^e\text{approx}(\mathbf{r},\theta,\phi)$  l'induction radiale tronquée, elle aussi, à l'ordre 3.

$$B_r^e\text{approx}(\mathbf{r},\theta,\varphi) = \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=1}^3 \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot \left( as_{n,0}^e Y_n^0(\theta,\varphi) + \sum_{m=1}^n (\alpha s_{n,m}^e YC_n^m(\theta,\varphi) + \beta s_{n,m}^e YS_n^m(\theta,\varphi)) \right) \right] \quad (\text{II.8})$$

L'erreur relative commise sur l'induction radiale se définit comme celle associée au potentiel pseudo-scalaire (II.7).

### II.2.3. Antenne d'induction.

Comme signalé plus haut, dans les conditions de distance et de fréquence choisies, les hypothèses de champ proche s'appliquent et le champ magnétique autour du composant peut être mesuré à l'aide d'une spire de diamètre  $d$  [IEE], [BERNEHEM], [KANDA 84], [KANDA 99]. Lorsque celle-ci est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , la tension à ses bornes est fixée par la variation du flux à travers la surface  $S$  qu'elle limite (Fig. II.1) :

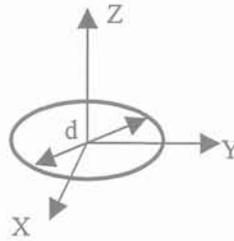


Figure II.1. Antenne boucle circulaire.

$$e = \frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (\text{II.9})$$

En régime sinusoïdal, cette tension est l'image de la moyenne, sur la surface de la spire (Fig. II.2), de la composante de l'induction normale à la spire (Baxe). Notons que l'induction cherchée et la tension mesurée sont en quadrature.

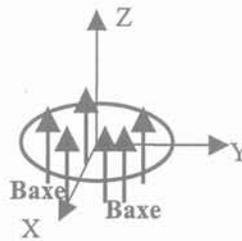


Figure II.2. Moyennage spatial de l'antenne boucle.

$$\bar{e} = j \cdot (2 \cdot \pi \cdot f \cdot \pi \cdot d^2 / 4) \cdot \overline{B_{axe}} \quad (\text{II.10})$$

Cette formule est applicable tant que la charge de la spire est négligeable, ce qui suppose en particulier que la capacité parasite totale (câble + spires) ne modifie pas la tension délivrée. Ce point doit être vérifié expérimentalement, jusqu'à 10 MHz, par une mesure

d'impédance de la spire. Tout écart notable à un comportement inductif dans la zone des fréquences d'intérêt doit éveiller l'attention ! Ainsi, bien qu'en théorie une bobine de  $n$  spires identiques délivre  $n$  fois plus de tension, le nombre de spires de l'antenne doit rester petit pour tenir compte de la limitation évoquée ci-dessus.

Les antennes de champ du commerce sont des boucles confectionnées à l'aide d'un câble coaxial (Fig. II.3). L'âme et le blindage de l'extrémité du câble sont soudés au blindage et une entaille interrompt le blindage au milieu de la boucle. Le blindage réduit ainsi les effets du champ électrique extérieur sans gêner l'apparition de la tension résultant de la variation d'induction.

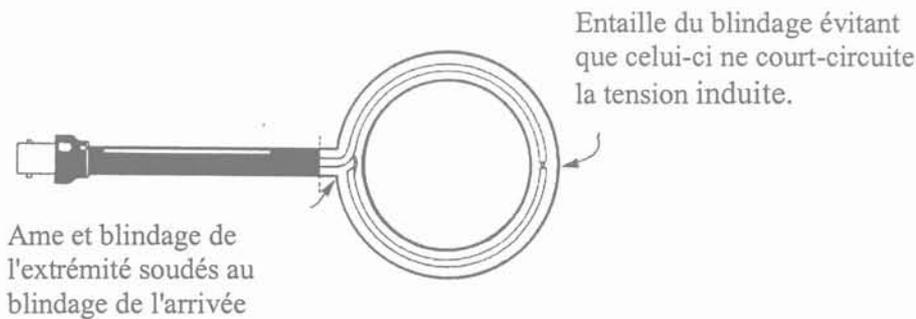


Figure II.3. Antenne de champ magnétique commerciale.

Cette précaution est indispensable si la mesure se fait en champ lointain (fréquence ou distance de mesure élevée). En champ proche (tension d'antenne uniquement due au champ magnétique), elle est superflue. Bien évidemment, le recours à un câble blindé pour relier l'antenne aux appareils électroniques demeure obligatoire pour limiter les tensions parasites induites le long de cette connexion.

#### **II.2.4. Dimensions de l'antenne.**

Telle que nous l'employons, la sonde de champ délivre une tension proportionnelle à la moyenne de l'induction radiale sur sa surface et, puisqu'elle ne donne que cette valeur globale, la valeur d'induction déduite est assimilée à l'induction radiale régnant au milieu de la spire. Il est clair que la dimension de la spire est source d'imprécision puisque nous prenons pour une valeur locale quelque chose qui n'est que la moyenne de cette grandeur autour du point...

Pour comprendre l'incidence de ce moyennage, on peut recourir à l'analogie avec un problème de traitement du signal. Imaginons qu'on dispose d'un filtre "moyenne glissante" qui effectue la moyenne du signal d'entrée sur un intervalle temporel de largeur  $T$ . Peut-on retrouver la forme du signal d'entrée en ne connaissant que celle du signal de sortie ? Cette question admet une réponse simple tant que  $T$  est beaucoup plus petit que la plus petite des périodes des composantes du signal. De la même façon, il faut que la spire soit vue, depuis l'origine du repère, sous un angle beaucoup plus petit que la période angulaire de l'harmonique sphérique d'ordre le plus élevé.

L'erreur commise est d'autant plus grande que la dérivée seconde de l'induction radiale est grande sur la surface considérée. Nous avons évalué l'erreur maximale résultant de cette moyenne, en fonction du rayon de l'antenne rapporté à la distance source-antenne. Ce calcul a été mené pour les termes des trois premiers ordres du développement multipolaire. Il est présenté à la figure II.4. On voit que, si le champ est représenté par ses termes d'ordres 1, 2 et 3, pour prétendre à une précision de 5% de la valeur maximum atteinte sur la sphère, la distance minimale d'observation doit être supérieure ou égale à 5,4 fois le diamètre de l'antenne. Pour atteindre 1% ce rapport doit être au moins égal à 13.

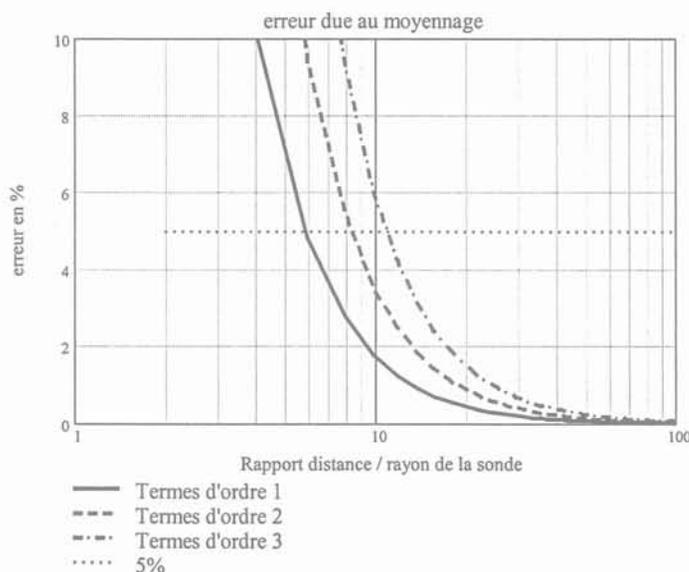


Figure II.4 : Erreur relative due au diamètre de la sonde.

L'épaisseur de l'antenne est également une source d'incertitude. Si celle-ci est épaisse, le plan qui détermine la position de l'antenne est mal défini. Une épaisseur égale à 1% de la distance source antenne donne une incertitude de 0,5% sur cette distance  $r$  et de 2,5% sur une induction qui varie en  $r^{-5}$ . Nous considérons que ceci constitue une limite raisonnable.

## II.2.5. Précision du positionnement

Pour cartographier le champ autour du composant émetteur, il est indispensable de positionner la sonde de champ par rapport au composant. Nous allons évaluer l'incidence de la précision de ce positionnement sur la caractérisation. Le composant est placé à l'origine d'un repère et la position de l'antenne, toujours orientée de façon orthoradiale, est repérée par les coordonnées sphériques de son centre dans ce repère (Fig. II.5). Deux axes de rotations sont nécessaires pour faire varier les coordonnées angulaires  $\theta$  et  $\phi$ .

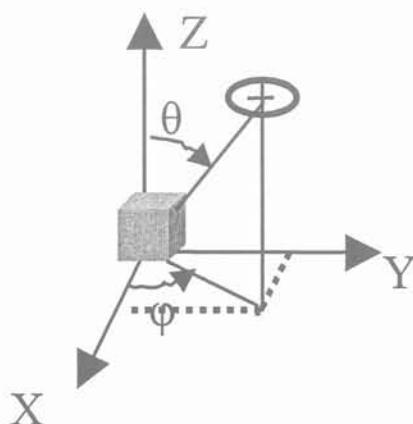


Figure II.5. Positionnement relatif du composant et de l'antenne.

La précision du repérage influe sur la précision de l'identification du champ émis. A titre d'exemple, une erreur donnée sur la distance source antenne cause une erreur relative d'autant plus faible que la sonde est loin de l'émetteur. En outre, puisque l'induction radiale d'un terme d'ordre  $n$  décroît en  $r^{-(n+2)}$ , l'erreur relative évoquée ci-dessus a des conséquences plus grandes pour des termes d'ordre plus élevé. Ainsi, une erreur donnée sur la distance peut engendrer une erreur plus ou moins grande suivant la proximité des points de mesures vis-à-vis de la source émettrice et l'ordre des termes cherchés. Afin d'illustrer ce phénomène, pour chaque terme d'ordre  $n$  nous avons estimé l'effet de la précision sur la distance figure II.6 [ISKRA].

Avec une erreur sur la distance de 1 mm, il faut mesurer le terme d'ordre 1 à une distance supérieure à 5 cm, pour obtenir une précision de 5%. Pour un champ à variation plus rapide, il faut s'éloigner davantage. Ainsi, la même erreur sur les termes d'ordre 2 et 3, exige de se placer au moins respectivement à 8 et à 11 cm. En pratique, la distance minimale de travail dépend de l'influence relative des différents termes. Si, par exemple, le terme d'ordre 3

a une grande influence sur le champ, on fixe la distance minimale de travail à 5 cm, pour une précision de 10%. Notons que l'incertitude sur cette distance n'est pas entièrement due à une imprécision mécanique. Pour préserver la précision, l'épaisseur de l'antenne, déjà évoquée au paragraphe précédent, doit être sévèrement limitée.

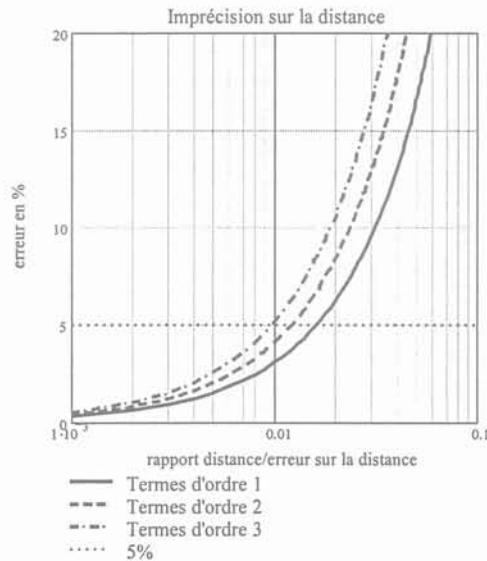


Figure II.6. Influence d'une incertitude sur la distance composant antenne sur la précision du champ mesuré.

Les conséquences des erreurs concernant les angles dépendent également de l'ordre du terme du développement multipolaire. Plus l'ordre du terme est élevé plus ce dernier varie rapidement en fonction des angles. Les termes d'ordres élevés sont donc plus sensibles à une légère erreur sur les angles et l'erreur commise est plus grande dans les directions où l'induction radiale varie le plus.

Nous avons tracé les erreurs maximales dues à l'incertitude sur l'angle  $\phi$  (Fig. II.7). L'erreur est fonction de la variation de l'harmonique près de cet angle. Les harmoniques de rang  $(n, m)$  ont une période de  $2\pi / m$  selon l'angle  $\phi$ . La conséquence de l'incertitude sur l'angle  $\phi$  dépend donc de la valeur de  $m$ . Compte tenu des symétries des harmoniques sphériques réelles, il suffit d'étudier les fonctions de type  $\cos(m\phi)$  pour obtenir toutes les informations nécessaires. Les erreurs maximales sont localisées à proximité des points où les fonctions s'annulent ou sont très faibles. Afin d'aboutir à des valeurs significatives, il est utile, comme pour le potentiel, de les rapporter à la valeur maximale relevée sur la sphère.

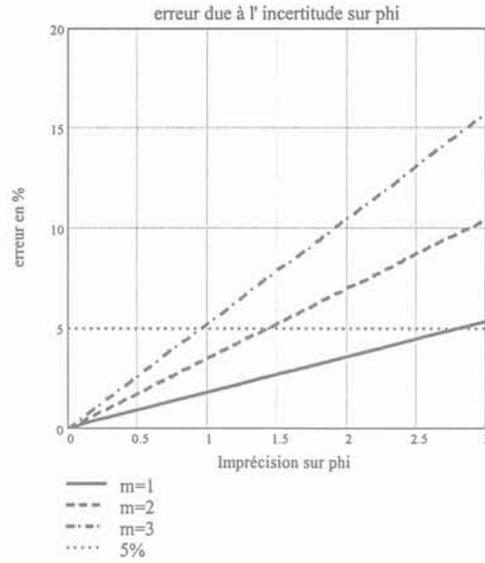


Figure II.7. Influence, sur la précision, d'une incertitude sur l'angle  $\phi$

Il apparaît qu'une incertitude maximale de 2 degrés sur l'angle  $\phi$ , entraîne, au pire, une erreur maximale de 10% sur les coefficients du développement en harmoniques sphériques. Une étude similaire concernant l'angle  $\theta$  (Fig. II.8) nous montre qu'il faut limiter son incertitude à 2 degrés pour atteindre la même précision.

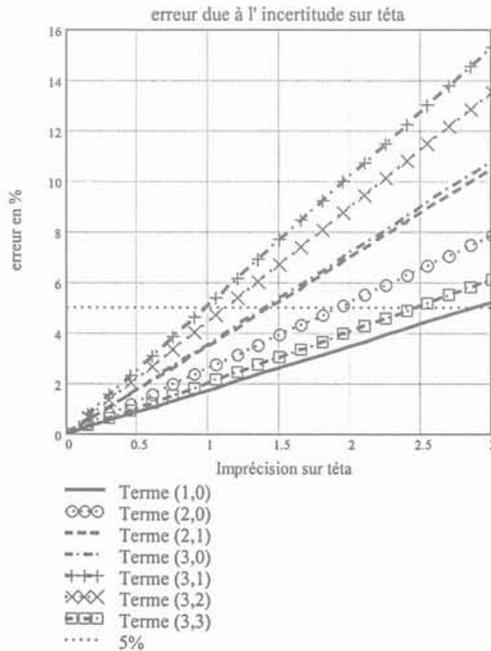


Figure II.8. Influence, sur la précision, d'une incertitude sur l'angle  $\theta$ .

### **II.2.6. Conditionnement et mesures redondantes.**

Afin de déterminer les 15 coefficients du développement multipolaire, il suffit, en théorie, de 15 mesures linéairement indépendantes. Chaque mesure est considérée comme une combinaison linéaire des 15 premiers termes du développement. En notant  $[B]$  le vecteur colonne des valeurs mesurées et supposées exactes de l'induction radiale et  $[X]$  le vecteur colonne des coefficients à déterminer, cela se traduit par :

$$[B] = [A] [X] \quad (II.11)$$

La matrice  $[A]$  est composée des valeurs des fonctions de type  $r^{-(n+2)} \cdot Y_n^0$ ,  $r^{-(n+2)} \cdot Y_n^m$ ,  $r^{-(n+2)} \cdot Y_n^m$ , aux points de mesures. La détermination des coefficients revient à inverser l'équation (II.11). En pratique, non seulement les erreurs de mesures font que l'équation (II.11) n'est pas rigoureusement respectée, mais en outre les composantes de  $[A]$  sont d'ordres de grandeurs très différents, puisque divisées par une puissance différente de la distance, si bien qu'on ne peut rarement inverser  $[A]$  : le système d'équation est mal conditionné. Pour palier cette difficulté, nous prenons davantage de points de mesures (souvent plus d'une centaine) : le système surdéterminé ainsi obtenu est ensuite résolu à l'aide de la méthode des moindres carrés.

En pratique on se fixe une distance de mesure  $R_{mes}$  et un nombre de points de mesures (généralement compris entre 30 et 200) répartis le plus régulièrement possible sur la sphère de mesure de rayon  $R_{mes}$ . La cohérence du résultat est évaluée en comparant la valeur de l'induction mesurée à la valeur déduite du développement trouvé. Pour que notre approximation au troisième ordre soit admissible, il faut que les termes d'ordres supérieurs soient vraiment négligeables. Attention aux mesures trop proches, trop riches en harmoniques, qui pourraient engendrer des repliements de spectres...

En cas de doute sur le bien fondé de la troncature, nous avons envisagé d'opérer de manière progressive, en réalisant des séries de mesures à des distances de plus en plus petites du composant. Les points les plus éloignés permettent de déduire avec précision les termes dipolaires qui sont prépondérants. On teste la cohérence du résultat à la même distance. Si le résultat est positif, on prend une nouvelle série de mesures à distance moindre. On analyse alors l'écart entre l'induction mesurée et celle résultant de l'identification dipolaire. En principe, on peut en déduire quelques termes suivants (quadrupolaires,...).

Parfois il est utile de savoir si certaines composantes du développement sont négligeables. Si la comparaison de termes d'un ordre  $n$  donné entre eux ne pose aucun problème majeur, l'opération est plus délicate pour des termes d'ordres différents car ils n'ont pas la même dimension. Il est alors recommandé de comparer les grandeurs  $\frac{a_{s_{n,m}}}{R_{mes}^n}$ ,  $\frac{\alpha_{s_{n,m}}}{R_{mes}^n}$ ,  $\frac{\beta_{s_{n,m}}}{R_{mes}^n}$  où  $R_{mes}$  est la distance unique à la quelle tous les coefficients ont été évalués. Des comparaisons de ce type montrent que, parfois, l'émission d'un composant se décrit très correctement par un nombre de paramètres bien inférieur à 15.

### II.2.7. Répartition régulière des points de mesure sur une sphère.

Afin de répartir régulièrement des points de mesure sur une sphère, la première idée qui vient à l'esprit est consiste à les espacer régulièrement sur l'intervalle  $[0 ; \pi]$  pour l'élévation  $\theta$  et sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  pour l'azimut  $\phi$ . Nous utilisons parfois des répartitions de ce type qui autorisent certaines représentations graphiques simples et rapides (Fig. II.9).

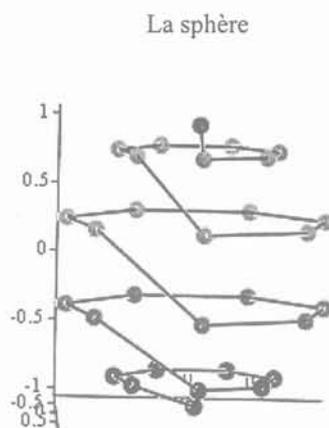


Figure II.9. Echantillonnage angulaire régulier.

Cette disposition, quoique régulière en angle, ne conduit pas à une répartition régulière des points sur la surface : ceux-ci sont concentrés vers les deux pôles. Pourtant, pour caractériser le champ d'un composant inconnu, il est logique de répartir des points de mesure autour de lui sans privilégier aucune direction. Dans cette optique, nous avons cherché à placer des points équidistants sur la sphère. Intuitivement, il semblait logique de disposer 4 points aux sommets d'un tétraèdre, 6 aux centres des faces d'un cube, 8 aux sommets d'un cube, 12 au milieu des arêtes d'un cube. Bref, la construction des polyèdres réguliers ou semi-réguliers paraissait un bon guide.

Nous présentons ci-dessous deux dispositions de points satisfaisantes à cet égard. Pourtant, il ne faut pas sous-estimer la difficulté du problème posé. Disposer des points régulièrement espacés sur une sphère est un sujet de recherches mathématiques encore d'actualité aujourd'hui. Voir à ce sujet l'article de Marcel Berger "Le problème des dictateurs ennemis" dans *La Recherche, Spécial Mathématiques*, n°346, oct 2001, pp. 38-44.

Comme nous le justifions dans l'annexe C, les deux dispositions retenues se rapporte au plus compliqué des polyèdres réguliers : l'icosaèdre. Nous donnons ci-dessous les coordonnées de ses points remarquables, les calculs correspondants sont développés en annexe C. Pour repérer simplement les points, nous plaçons deux sommets opposés sur l'axe Oz, symétriquement par rapport à l'origine du repère et nous choisissons l'origine des azimuts de telle manière qu'un autre sommet est en  $\varphi = 0$ . De cette façon, l'azimut de tous les points remarquables est un multiple de 18 degrés.

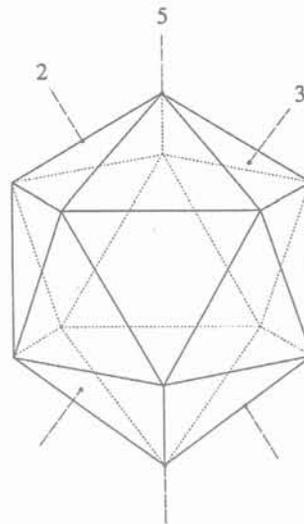


Figure II.10. Le polyèdre régulier le plus complexe : l'icosaèdre.

Commençons par les 30 milieux d'arêtes. Ils se répartissent sur 5 plans normaux à Oz, disposés symétriquement par rapport au plan équatorial. Sur ce plan se trouvent 10 points répartis tous les  $36^\circ$  tandis que sur chacun des 4 autres se trouvent 5 points séparés de  $72^\circ$ . Au total, cela fait bien 30 points.

$$\theta = 31,72^\circ ; 58,18^\circ ; 90^\circ ; 121,72^\circ \text{ et } 148,18^\circ \quad (\text{II.12})$$

En dehors des deux pôles, les sommets sont disposés sur deux plans symétriques par rapport à l'équateur. Sur chacun de ces plans se trouvent 5 sommets.

$$\theta = 63,44^\circ \quad \text{et} \quad 116,56^\circ \quad (\text{II.13})$$

Enfin, les 20 centres de faces sont répartis sur quatre plans, symétriques deux à deux par rapport à l'équateur.

$$\theta = 29,41^\circ \quad 87,15^\circ \quad 92,85^\circ \quad 150,59^\circ \quad (\text{II.14})$$

Nous ne savons pas comment placer plus de 30 points (milieux des arêtes) équidistants sur une sphère. Cependant, des dispositions convenables s'obtiennent en prenant les sommets de l'icosaèdre et en pavant ses triangles par des hexagones (fig. II.11). L'exemple représenté consiste à joindre aux  $12 + 20 + 30 = 62$  points remarquables, 3 points supplémentaires par face, ce qui nous procure 122 points au total.

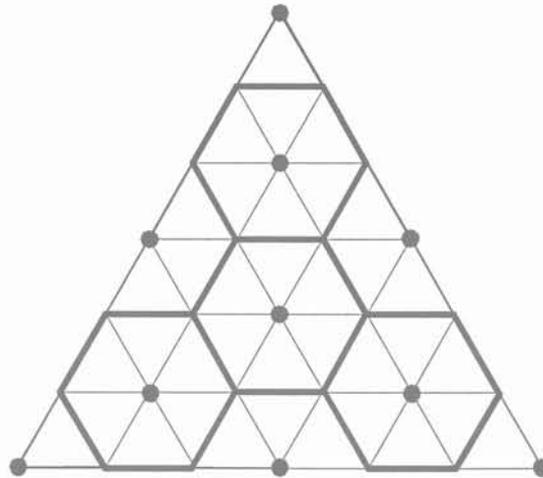


Figure II.11. Comment disposer 122 points régulièrement sur une sphère.

## **II.3. Détection synchrone.**

### **II.3.1. Ordre de grandeur du champ à mesurer.**

Afin d'accéder à cette évaluation, considérons une inductance réalisée sur un pot de type FP en ferrite de diamètre extérieur 3 cm et de  $\mu_r = 2000$ . Supposons en outre qu'à 1 MHz ce composant fonctionne avec une induction efficace de 50 mT (valeur très usitée). Puisque la

composante tangentielle de l'excitation se conserve au passage de la surface séparant deux milieux, l'induction qui règne à l'extérieur du composant est de l'ordre de 50 mT/2000, soit : 25  $\mu$ T. Puisque cette induction présente, comme le pot, une symétrie de rotation, il est probable que son rayonnement est, en première approximation, analogue à celui d'une spire. Nous supposons qu'il s'agit d'un dipôle d'axe Oz. Cette forme de champ donne lieu à une décroissance de toutes les composantes de l'induction en  $1/r^3$ . Puisque l'induction est connue à 1,5 cm de l'origine, nous pouvons la déduire à la distance maximum de mesure, soit 15 cm :

$$B = 25 \mu\text{T} \cdot (1,5/15)^3 = 25 \text{ nT}$$

Remarquons que tant que l'induction à la surface du composant reste du même ordre et qu'on envisage des mesures à une distance égale à 10 fois le demi coté du composant, l'induction à mesurer a peu de chance de changer notablement ! On peut objecter que notre calcul concerne  $B_\theta$  alors que nous allons mesurer  $B_r$ . La représentation du module de l'induction d'un dipôle montre qu'entre  $B_r$  au pôle et  $B_\theta$  à l'équateur, le rapport n'est pas très grand et les expressions des composantes précisent qu'il vaut 2.

Cette induction est donc très faible mais, pour estimer la vraie difficulté de la mesure, il faut évaluer la tension recueillie aux bornes de la spire de mesure. Pour qu'à 15 cm de distance le capteur préserve une résolution angulaire raisonnable, nous lui attribuons un diamètre de 1 cm. Un calcul rapide montre que la tension induite dans ces conditions vaut 12,5  $\mu$ V. Elle est, bien sur, dix fois plus faible à 100 kHz ! Les seuls paramètres sur lesquels on peut espérer jouer sont ceux de la sonde : son diamètre et son nombre de spires. Nous avons déjà dit pourquoi il ne fallait pas trop augmenter le diamètre des spires et l'augmentation du nombre de spires ne doit pas conduire la capacité parasite à shunter notablement le capteur à 10 MHz ! Bref, il est risqué de tabler sur un grand nombre de spires pour accroître la sensibilité...

L'espoir de pouvoir mesurer des tensions plus grandes qu'un microvolt est donc bien mince. Dans certains cas favorables, à très courte distance ...peut-être ! Il faut donc se préparer à mesurer des tensions en ne tolérant qu'un bruit de l'ordre de 10 nV ( = 1 % de 1  $\mu$ V). Le calcul précédent met hors course de nombreux appareils. Seuls des appareils de traitement du signal réalisant un filtrage très étroit sont capables d'une telle performance. On

doit donc envisager d'exploiter un Boxcar ou une détection synchrone. La détection synchrone est bien adaptée au régime sinusoïdal. Elle fournit non seulement l'amplitude du signal mais également sa phase. En outre, depuis quelques années, un fournisseur, Stanford, propose un modèle qui travaille jusqu'à 200 MHz alors que les concurrents sont limités à 10 MHz dans le meilleur des cas.

### **II.3.2. Principe de fonctionnement**

La détection synchrone permet la mesure de signaux alternatifs de très faible amplitude (jusqu'à quelques nV) [STANFORD] sous réserve que l'on dispose d'un signal, de fréquence rigoureusement identique et de plus grande amplitude pouvant servir de référence. La mesure du signal peut se faire de façon précise, même si celui-ci est noyé dans un bruit plus grand que lui.

Le principe consiste à réaliser un filtrage extrêmement étroit centré sur la fréquence du signal de référence. La bande passante des bruits non rejetés étant très faible, le signal apparaît nettoyé. Pour réaliser ce filtrage, un modulateur abaisse la fréquence du signal d'une valeur égale à la fréquence de la référence de telle manière que le filtre passe bas opère directement sur l'écart de ces deux fréquences. C'est ainsi qu'on obtient une largeur de bande de 1 Hz lorsqu'on mesure un signal à 1 MHz. Dans notre banc, le signal de référence est fourni par le générateur qui alimente le composant magnétique testé.

Pour réaliser un modulateur aussi peu bruyant que possible, on commande des interrupteurs qui modifient le gain au cours du temps. Ainsi par exemple, il est facile de multiplier le signal d'entrée par une fonction carré valant alternativement +1 et -1. En pratique cette commande du gain est synchronisée sur le signal de référence par une boucle à verrouillage de phase.

Omettons, dans un premier temps, les harmoniques de rang 3 et supérieurs de la fonction carrée. Le produit du signal par cette fonction carrée fait apparaître, comme toute modulation d'amplitude, la somme et la différence de leurs deux fréquences. Dans ces conditions, un filtre passe-bas placé en sortie du modulateur laisse passer la différence tandis qu'il bloque la somme. Le signal qu'on en extrait ( $e_1$ ) ne peut donc provenir que d'une composante de fréquence égale à celle de la référence, à la bande passante près du filtre passe-

bas. On a donc opéré un filtrage de largeur  $2 f_c$  ( $f_c$  est la fréquence de coupure du filtre passe-bas) centré sur la fréquence de référence.

Si le signal d'entrée est exactement à la fréquence de la référence, le signal moyen qui traverse le filtre est proportionnel au cosinus de son déphasage avec la référence. Il n'est maximum que si le déphasage est nul. En réalisant une seconde chaîne de traitement identique à la première mais dont le modulateur est commandé en quadrature par rapport au précédent, on obtient le signal  $e_2$  (Fig. II.12). On dispose ainsi de deux signaux  $e_1$  et  $e_2$  proportionnels aux deux composantes du signal d'entrée : celle en phase et celle en quadrature avec la référence.

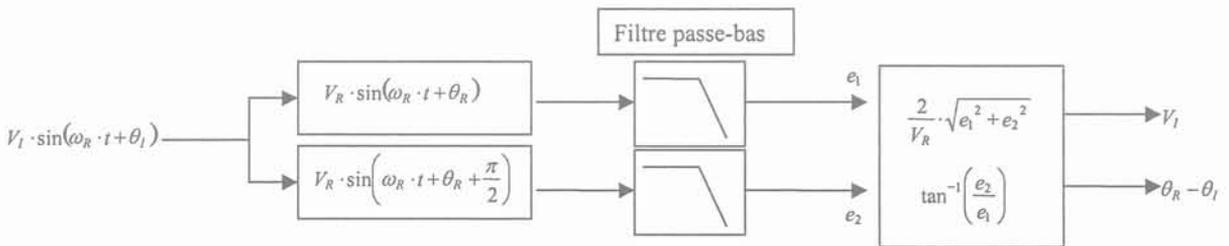


Figure II.12. Schéma bloc de la détection synchrone.

A partir des signaux  $e_1$  et  $e_2$ , l'appareil choisi (Stanford SR844, Fig. II.13), effectue le calcul de l'amplitude du signal et de son déphasage par rapport à la référence à l'aide d'un processeur de signal.

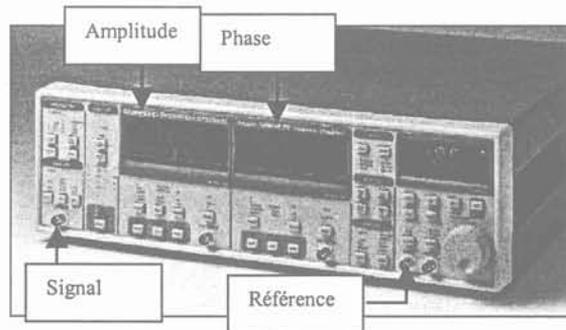


Figure II.13. La détection synchrone.

Le principe exposé permet de comprendre l'essentiel du fonctionnement de l'appareil. Il est cependant utile de revenir sur la décomposition du signal carré de multiplication. Si la référence est à 1 MHz, il est certain qu'à la sortie du filtre le signal sera représentatif des signaux d'entrée de fréquences très proches de 1 MHz. Cependant, le signal carré comprend

également des harmoniques à 3 MHz, 5MHz, .... Puisque ces fonctions multiplient le signal d'entrée au même titre que le signal à 1 MHz, elles sont susceptibles de faire apparaître un signal de très faible fréquence qui passe le filtre si, dans le signal d'entrée, se trouvent des composantes à ces fréquences. D'après la décomposition du signal carré en série de Fourier, l'harmonique 3 n'est diminué que d'un rapport  $1 / 3$  (i.e. -10 dB). Dans l'hypothèse où des signaux parasites dont les fréquences coïncident avec celles des harmoniques impairs de la fréquence de référence, un filtre placé avant la modulation peut s'avérer utile.

### **II.3.3. Choix d'un signal de référence.**

Pour exploiter le SR844 nous devons disposer d'un signal externe utilisable comme signal de référence. Deux contraintes guident le choix du signal exploité en tant que tel. D'une part, la boucle à verrouillage de phase qui, dans l'appareil, génère du carré à partir de ce signal, introduit un déphasage qui dépend de la forme du signal de référence introduit. Nous montrerons en particulier que ce déphasage varie avec l'amplitude du signal de référence, surtout si celui-ci n'est pas carré. D'autre part, l'amplitude maximale du signal de référence externe doit être de 0,7 V.

Notre générateur de fonctions possède une sortie ECL parfaitement synchronisée avec la sortie principale. Cette sortie délivre un signal carré de même fréquence que le signal principal et d'amplitude 0.5V. L'amplitude de cette sortie ne dépend pas de celle du signal principal et nous avons vérifié que le déphasage, à une fréquence donnée, de la sortie principale par rapport à la sortie ECL ne dépend pas de l'amplitude du signal principal. C'est donc cette sortie ECL que nous utiliserons systématiquement comme référence. L'entrée "référence externe" de la détection synchrone, offre deux valeurs d'impédance d'entrée :  $50 \Omega$  ou  $10 \text{ k}\Omega // 40 \text{ pF}$ . La sortie ECL du générateur présentant une impédance de  $50 \Omega$ , nous choisissons naturellement de la relier, par un câble  $50 \Omega$ , à l'impédance d'entrée  $50 \Omega$ . De cette façon, nous évitons les déformations du signal dues aux ondes stationnaires.

L'essai suivant met en évidence la constance de la phase du signal issu du générateur, par rapport à la référence choisie, lorsqu'on change son amplitude. La mesure s'effectue, à 1 MHz, en prenant deux câbles de même longueur afin de connecter la sortie ECL du générateur de fonctions à l'entrée référence de la détection synchrone et en injectant un signal sinusoïdal (inférieur à 5V) à l'entrée de la détection synchrone. Les câbles de même longueur permettent d'éliminer le déphasage induit par la propagation le long du câble.

Calibre	Amplitude	Déphasage
1 V	.315 V	147.51°
300 mV	129.49 mV	147.27°
100 mV	86.15 mV	147.44°
30 mV	14.571 mV	147.47°
10 mV	5.316 mV	147.86°
3 mV	2.263 mV	148.28°
1 mV	1.0835 mV	148.7°

Tableau II.2. Déphasage en fonction de l'amplitude du signal à mesurer.

Le tableau II.2 a été établi en adoptant, pour la détection synchrone, une constante de temps de filtrage de 300ms et la plus grande réserve dynamique possible. Pour des amplitudes très différentes du signal d'entrée, donc des calibres différents, le déphasage entre la référence externe et le signal à mesurer est pratiquement constant. Les petites variations observées sont dues aux changements de calibres (amplification correspondant, dans chaque cas, à la plus grande réserve dynamique).

En inversant le rôle du signal de référence externe (ECL) et celui du signal sinusoïdal nous mettons en évidence l'incidence de l'amplitude du signal de référence lorsque celui-ci est sinusoïdal. Dans les mêmes conditions que précédemment, nous obtenons les résultats du tableau II.3. Il est clair qu'en passant de 25 à 66 mV le signal sinusoïdal, exploité comme référence, a provoqué une variation de phase apparente de 10 degrés que rien ne justifie ! Il est clair que, sa phase étant indépendante de l'amplitude du signal principal, le signal ECL du générateur de fonctions semble être le mieux adapté au rôle référence externe.

Référence : ECL		Référence : signal	
Amplitude du signal sinusoïdal	Phase ECL-tension	Amplitude du signal ECL	Phase tension-ECL
66.3 mV	147.51°	191.72 mV	-16.7°
24.92 mV	147.99°	173.64 mV	-6.55°

Tableau II.3. Influence du choix de la référence sur la mesure de phase.

Une sortie du SR844 permettant d'accéder au signal de référence interne, nous avons utilisé l'oscilloscope Tektronix TDS 754D pour visualiser ce dernier ainsi que le signal ECL du générateur de fonction (Fig. II.14). Même si le signal ECL fourni par le générateur de fonctions est bruité, la détection synchrone parvient, en général, à suivre la fréquence du signal. On constate cependant que la qualité du signal de référence est importante. A quelques fréquences peu nombreuses où le signal ECL est déformé, la détection synchrone ne parvient pas à se synchroniser. Ce point doit être examiné lors du choix d'un générateur de fonctions.

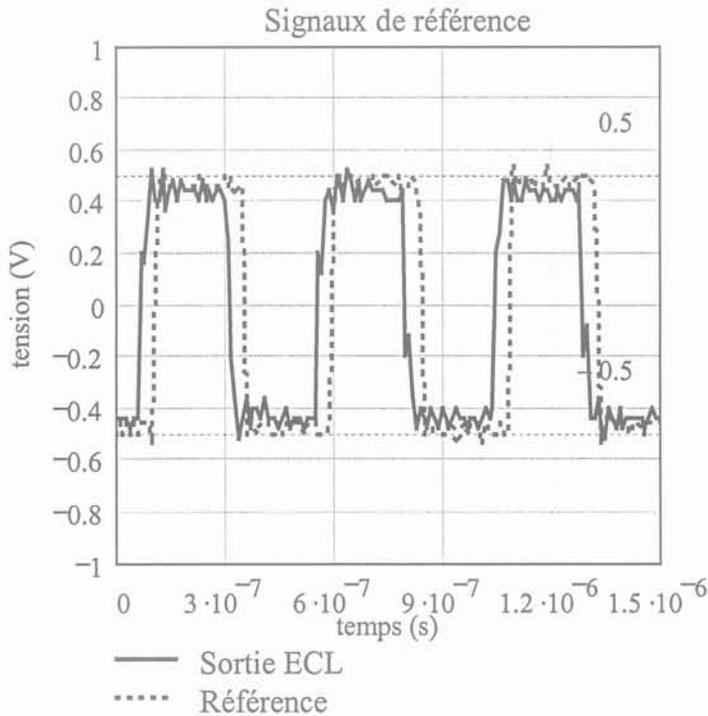


Figure II.14. Sortie ECL et référence interne de la détection synchrone.

Initialement, nous pensions mesurer le déphasage du signal d'antenne par rapport au courant source. Cependant, l'utilisation de la sonde de courant comme source de référence n'est pas judicieuse car, sa mesure ne présentant pas une amplitude constante, la phase de ce signal constituerait une référence... fugitive. Comme expliqué plus haut, nous avons préféré utiliser le signal de synchronisation du générateur BF (sortie ECL). Les mesures de déphasages se déduisent donc toutes d'une soustraction, tous les signaux utiles étant envoyés sur l'entrée signal à tour de rôle. Ainsi, pour connaître le déphasage de la tension par rapport au courant dans le composant, on mesure le déphasage du courant puis celui de la tension tous deux par rapport au signal de référence puis on soustrait les deux valeurs.

### II.3.3. Choix de l'impédance d'entrée.

Le SR844 propose deux valeurs d'impédances d'entrée pour le signal :  $50 \Omega$  ou  $1 M\Omega$ . L'impédance de  $1 M\Omega$  est assurée par un préamplificateur qui ajoute un bruit supplémentaire à la mesure. Il est cependant intéressant de réfléchir attentivement à ce choix.

L'impédance de  $50 \Omega$  s'impose lorsqu'il est possible d'adapter le câble de liaison à la source des deux côtés, c'est-à-dire lorsque la source de signal présente une impédance de  $50 \Omega$ . En revanche, étant donné que les atténuateurs et les filtres d'entrée passifs, sont directement connectés à l'entrée, leur effet dépend fortement de l'impédance de la source. Par exemple, si la source fait  $50 \Omega$ , l'atténuation de 20 dB n'a aucune incidence sur la phase, alors que si elle est très peu impédante, passer de 0 à -20 dB modifie la phase observée de  $10^\circ$  à 100 kHz.

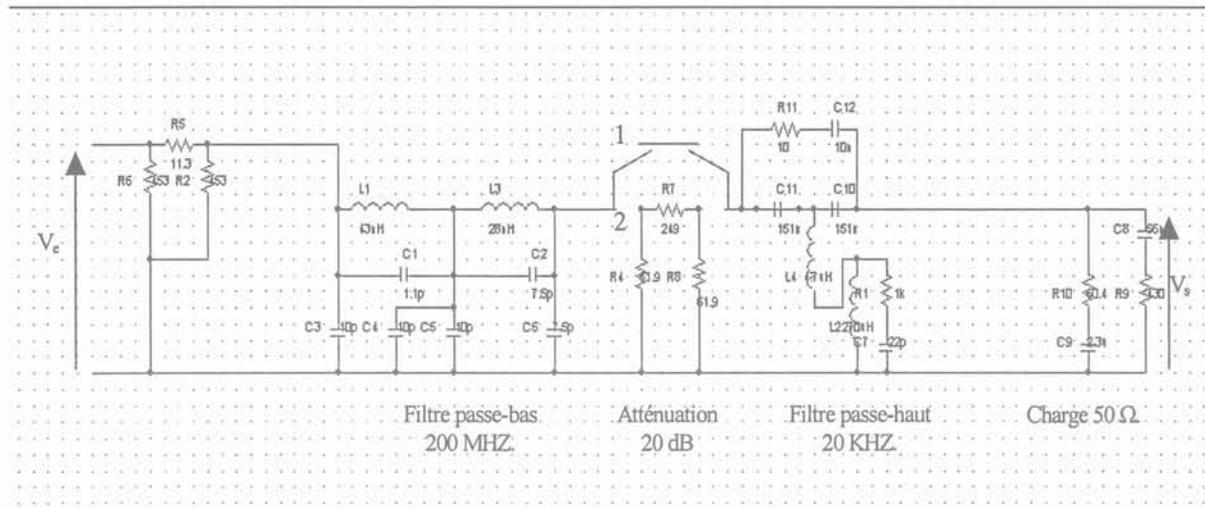


Figure II.15. Etage d'entrée  $50 \Omega$  avec ou sans atténuation.

Pour chiffrer ces phénomènes, nous avons introduit les schémas des circuits d'entrée dans le logiciel PSpice (Fig. II.15) afin de simuler leur réponse fréquentielle. Cette étude a été menée sur la bande de 10 kHz à 100 MHz. Le diagramme de Bode de la transmittance de l'étage est tracé pour les deux positions de l'atténuateur. Nous allons voir que le comportement fréquentiel dépend largement de l'impédance de la source (= antenne).

L'écart des deux courbes de module confirme la différence de 20 dB dans la gamme de fréquence 100 kHz-100 MHz, suivant l'atténuation choisie. Le diagramme de phase montre également un comportement fréquentiel très différent suivant l'atténuation, surtout en dessous de 1 MHz. Ainsi, pour des fréquences proche de 100 kHz, l'atténuation modifie la phase d'une dizaine de degré.

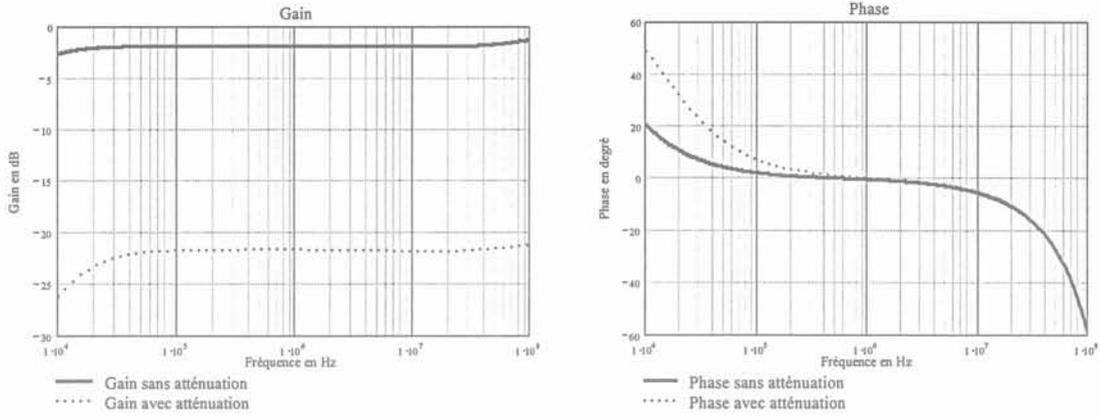


Figure II.16. Diagramme de Bode de l'étage d'entrée  $50 \Omega$  avec et sans atténuation.  
Impédance de source nulle.

En fait, ce problème disparaît dès que la source présente une impédance de  $50 \Omega$ . La tension mesurée par la détection synchrone est alors égale à la moitié de la tension à vide de la source (division provoquée par l'impédance de source et l'impédance d'entrée) (Fig. II.17) mais la phase ne varie plus suivant l'atténuation (Fig. II.18).

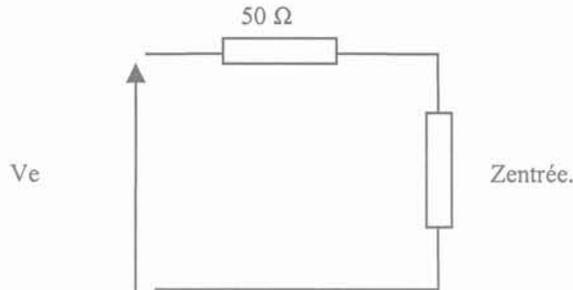


Figure II.17. Atténuation de tension due à l'adaptation d'impédance.

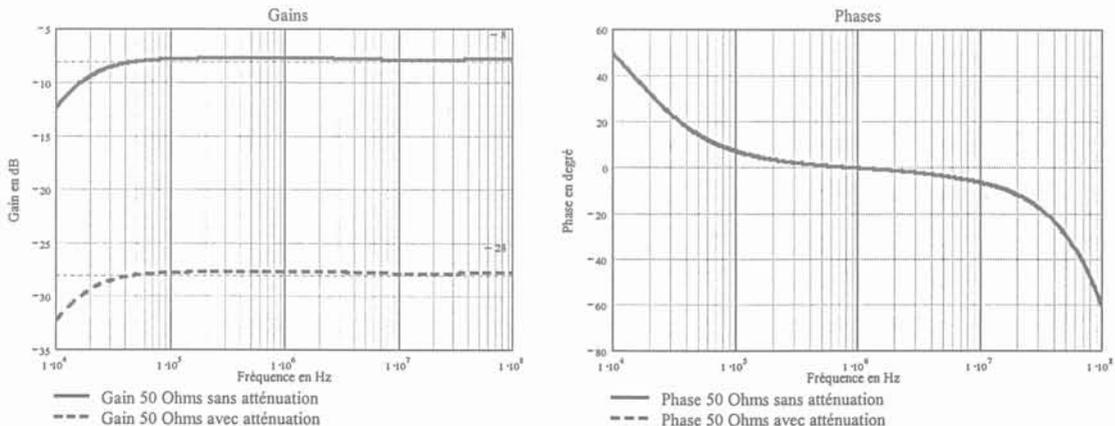


Figure II.18. Diagramme de Bode de l'étage d'entrée  $50 \Omega$  avec et sans atténuation.  
Impédance de source  $50 \Omega$ .

Ce problème d'adaptation d'impédance ne se pose pas dans le cas de l'entrée  $1\text{ M}\Omega$ , puisque le préamplificateur joue le rôle de séparateur. Le choix de l'atténuation n'a alors aucune incidence sur le comportement fréquentiel de l'entrée.

En définitive, si nous mettons à part le cas d'une source de signal qui fait  $50\ \Omega$ , nous utiliserons l'entrée  $1\text{ M}\Omega$  sauf si le signal est très faible (il faut éviter tout bruit d'amplification supplémentaire) et que la fréquence est au-delà de  $1\text{ MHz}$  (la variation de phase est tolérable). Attention cependant : la valeur de  $1\text{ M}\Omega$  ne représente pas l'impédance à toute fréquence. Sans compter l'impédance du câble de liaison, cette résistance est shuntée par une capacité de  $30\text{pF}$  dont l'incidence peut s'avérer non négligeable. A titre d'exemple, si la source présente une impédance de  $50\ \Omega$ , elle constitue, avec la capacité d'entrée, un filtre passe bas dont la fréquence de coupure vaut  $106\text{ MHz}$ . A  $10\text{ MHz}$  ce filtre introduit un déphasage de  $4\text{ degrés}$ .

### **II.3.5. Choix du filtre.**

En choisissant, pour le filtre, une constante de temps et un ordre élevés on réduit la bande passante d'entrée. C'est dans cette faible bande passante que réside l'intérêt de la détection synchrone. En effet, considérons un amplificateur faible bruit qui possède un bruit d'entrée blanc de l'ordre de  $3\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Conformément à l'hypothèse du bruit blanc, l'amplitude de la tension de bruit ramenée à l'entrée vaut :  $e = 3 \cdot 10^{-9} \sqrt{\text{Bp}}$ .

Ce bruit est donc 100 fois plus faible si la bande passante  $\text{Bp}$  est de  $1\text{ Hz}$  ( $3\text{ nV}$ ), valeur réalisable avec une détection synchrone, que si elle est de  $10\text{ kHz}$  ( $300\text{nV}$ ) comme le permettent les filtres standard. Malheureusement, il est impossible de réduire indéfiniment la bande passante car, plus la constante de temps du filtre ou l'ordre de celui-ci sont grands, plus le temps d'établissement de la mesure est important. En prolongeant inconsidérément la durée de la mesure, on s'expose à des dérives.... Comme toujours, le choix final résulte d'un compromis.

L'appareil utilisé est équipé d'un filtre passe-bas numérique. De ce fait, il offre un vaste choix de constantes de temps permet de sélectionner l'ordre du filtre entre 1 et 4. La

figure II.19 présente le gain des différents filtres passe-bas pour une constante de temps identique et un nombre de pôles (un ordre) variable.

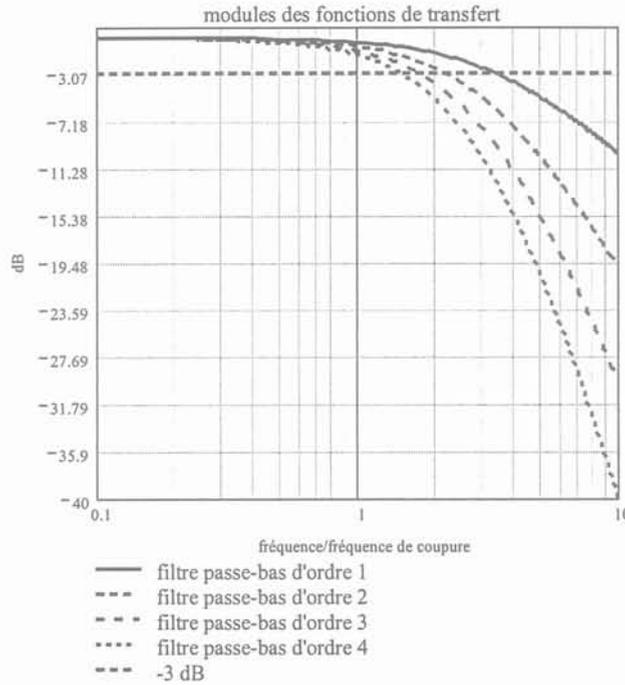


Figure II.19. Diagrammes de Bode des filtres disponibles.

On peut choisir la bande passante en jouant sur l'ordre ou sur la constante de temps du filtre. Le tableau II.4 donne les bande passantes à  $-3\text{dB}$  pour les 4 ordres et pour 2 constantes de temps distinctes. La figure II.20 présente les réponses indicielles de filtres qui se distinguent par leurs nombres de pôles.

Pente	Nombre de Pôles.	$B_p$	$B_p$	
			$\tau=100\text{ ms}$	$\tau=300\text{ ms}$
-6 dB/oct	1	$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$	1.6 Hz	.53 Hz
-12 dB/oct	2	$\frac{.644}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$	1.02 Hz	.34 Hz
-18 dB/oct	3	$\frac{.51}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$	.8 Hz	.27 Hz
-24 dB/oct	4	$\frac{.435}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$	.69 Hz	.23 Hz

Tableau II.4. Bande passante des filtres en fonction du nombre de pôles.

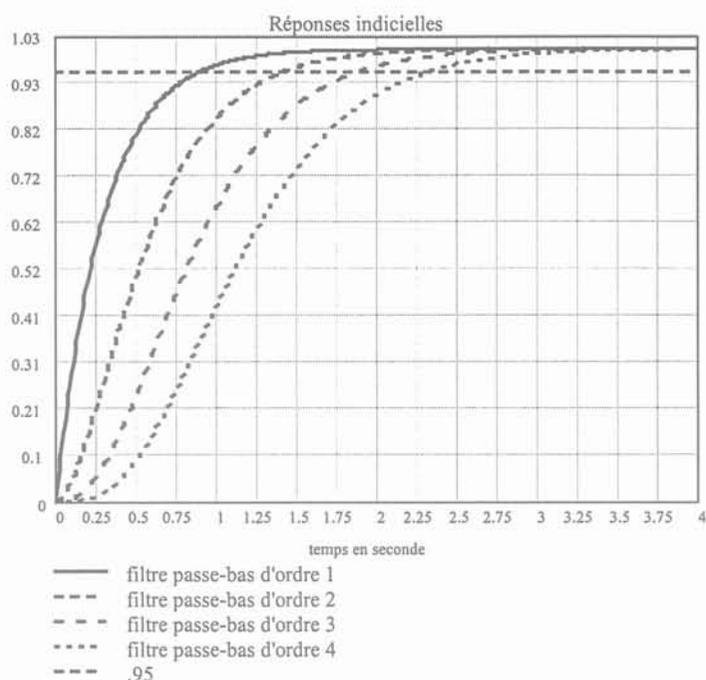


Figure II.20 : Réponse indicielles des filtres pour les différents nombres de pôles.

Selon le tableau II.5, un filtre d'ordre 2 de constante de temps 300 ms suffit pour obtenir une bande passante d'entrée inférieure au Hz. Son temps d'établissement à 5 % est d'environ 1,5 s (Tableau II.4). Ces réglages sont ceux retenus pour l'emploi du SR844.

Pente	Nombres de Pôles.	$t_{r5\%}$	$t_{r5\%}$	
			$\tau=100$ ms	$\tau=300$ ms
-6 dB/oct	1	$3\tau$	300 ms	900 ms
-12 dB/oct	2	$4.74\tau$	474 ms	1.423 s
-18 dB/oct	3	$6.3\tau$	630 ms	1.889 s
-24 dB/oct	4	$7.754\tau$	775 ms	2.326 s

Tableau II.5. Temps d'établissement des filtres en fonction du nombre de pôles.

### II.3.6. Choix des gains.

Le SR844 permet d'atténuer ou d'amplifier le signal reçu et ce, à deux stades du traitement du signal (Fig. II.21) : directement à l'entrée du signal (préamplification) ou après le multiplexage. Amplifier le signal dès l'entrée permet de minimiser les interférences

internes dues, par exemple, au signal de référence. En revanche, un bruit trop amplifié peut saturer les circuits de traitements.

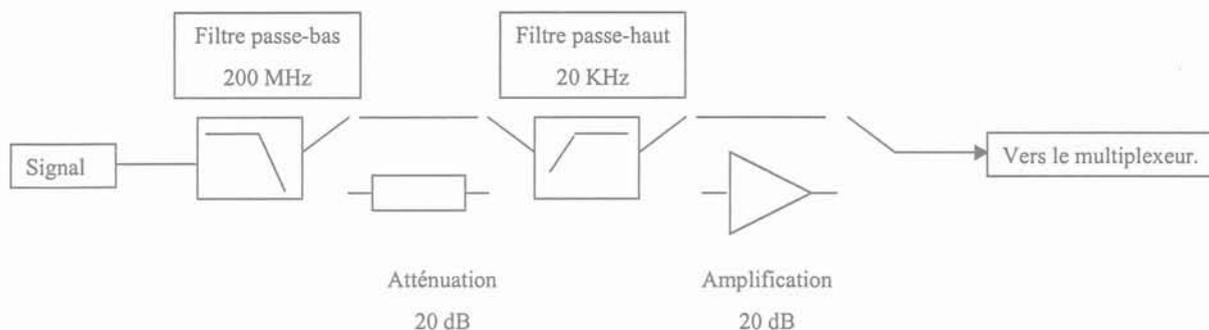


Figure II.21. Schéma bloc de l'étape d'atténuation ou d'amplification à l'entrée.

Amplifier après le multiplexage (Fig. II.22) diminue le risque de saturation des circuits de modulation mais le signal peut être trop faible pour être traité correctement par l'étage de multiplexage et le DSP....

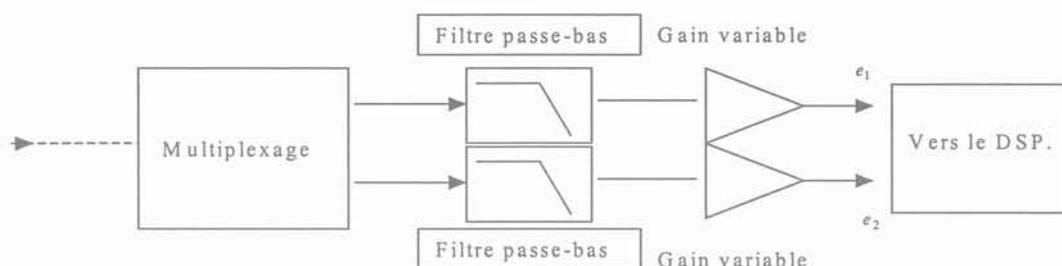


Figure II.22. Schéma bloc de l'étape d'atténuation ou d'amplification après le multiplexage.

Dans chaque cas, on peut appliquer des gains de  $\pm 20$  dB au signal traité. Pour obtenir la meilleure immunité au bruit, le mieux est d'affecter au gain sa valeur maximum dans les deux cas et de le réduire uniquement en cas de saturation.

Ce choix n'est pas entièrement libre. Systématiquement, pour les calibres supérieurs ou égaux à 300 mV l'étage d'entrée atténue tandis que pour les calibres inférieurs ou égaux à 10  $\mu$ V (30  $\mu$ V en cas de choix de 1 M $\Omega$  comme impédance d'entrée) il amplifie. En revanche,

pour les calibres intermédiaires l'utilisateur peut choisir et, puisque ces paramètres influent sur le bruit ramené à l'entrée, il détermine ainsi la qualité des résultats obtenus.

## **II.4 Conclusion.**

Dans ce chapitre, nous avons montré que la mesure de la composante radiale de l'induction à une distance fixée suffisait pour connaître entièrement l'induction régnant partout autour d'un composant. Nous avons également indiqué qu'en pratique 15 paramètres donnaient une description tout à fait convenable de ce champ. Bien que cela soit souhaitable, il est difficile de placer des points de mesure régulièrement sur une sphère. Nous avons présenté une disposition correcte pour 30 points et une disposition convenable pour 122 points.

Pour mesurer une induction entre 100 kHz et 10 MHz sans la perturber, il faut utiliser un capteur dénué de matériau magnétique et peu susceptible de faire circuler des courants induits (pas de masses métalliques !). Nous avons choisi d'exploiter une antenne boucle. Un calcul d'ordre de grandeur a montré que les inductions et les tensions à mesurer étaient très faibles et qu'il fallait que l'appareil de mesure présente un bruit de quelques dizaines de nV au maximum pour mesurer, avec une précision raisonnable des tensions de l'ordre de 1  $\mu$ V. Cela a orienté notre choix vers une détection synchrone. La gamme des fréquences de travail, la possibilité de mesurer simultanément les composantes en phase et en quadrature et les possibilités de programmation ont fixé notre choix sur le modèle SR844 de Stanford.

Après avoir dégagé le principe de la mesure, nous nous sommes attachés à étudier l'incidence de divers paramètres géométriques sur sa précision. Nous avons ainsi examiné l'incidence de la surface du capteur, de la mesure de la distance source antenne, et des erreurs de position angulaire. Nous disposons maintenant de repères sérieux pour aborder la réalisation mécanique du banc.

Enfin, nous nous sommes intéressés au principe de la détection synchrone ainsi qu'à l'incidence de ses principaux réglages. Nous avons mis en évidence l'intérêt d'utiliser un signal spécifique pour servir de référence et nous avons montré qu'il était préférable de régler l'impédance d'entrée de la détection sur 1 M $\Omega$  plutôt que sur 50  $\Omega$ , même si le câble utilisé

pour la liaison présente cette impédance caractéristique. Nous avons également dégagé quelques règles à respecter pour régler ses gains et choisir ses filtres.





# Chapitre III :

## Réalisation et Etalonnage du Banc de Mesure





## **CHAPITRE III. REALISATION ET ETALONNAGE DU BANC DE MESURE.**

### **III.1 Introduction .**

Dans ce chapitre nous examinons comment mettre en œuvre les principes dégagés au cours du chapitre précédent. Après avoir inventorié le matériel mis en œuvre, nous réalisons quelques tests complémentaires pour mieux connaître certaines caractéristiques critiques de ce matériel. L'obtention de mesures de phase fiables nécessite, en particulier, la prise en compte des temps de propagation dans les câbles et dans les sondes. Soulignons également l'importance du choix des câbles et de la disposition des appareils pour réduire le niveau de bruit.

Nous abordons ensuite la partie mécanique. Le cahier des charges s'appuie sur les études de sensibilité au positionnement menées au chapitre précédent et certains choix sont guidés par le souci d'assurer la stabilité mécanique indispensable à la reproductibilité des mesures. La réalisation est ensuite décrite en détail. En raison de leurs masses métalliques, des précautions sont prises pour éloigner les moteurs qui commandent les déplacements.

Afin d'épargner à l'utilisateur la partie fastidieuse du déplacement de la sonde et de la saisie des valeurs, un ordinateur pilote les déplacements de l'antenne et récupère les deux composantes (phase et quadrature) de sa tension. Le programme fait appel au logiciel de programmation graphique Labview. Il va jusqu'au calcul des composantes du développement multipolaire. Après s'être assuré de la qualité de l'acquisition, l'utilisateur peut récupérer un fichier de mesure qu'il exploitera ensuite sous Mathcad ou Excel.

Etant donné qu'il n'est pas facile de connaître précisément la sensibilité d'une antenne boucle de petit diamètre, nous confectionnons des bobines d'Helmholtz puis nous étalonnons notre antenne.

Pour finir, le meilleur moyen d'évaluer la qualité des mesures consiste à mesurer un champ connu. Nous analysons en détail l'induction émise par une spire circulaire. Nous

découvrons en particulier que l'incidence du champ parasite rayonné par les amenées de courant n'est pas négligeable. Cela nous amène à affiner notre processus de mesure mais l'essentiel de la méthode est conforté par cet essai.

## III.2 Matériel et étalonnages.

### III.2.1. Appareils de mesure utilisés.

En dépit des difficultés évoquées au chapitre II, le schéma de principe de la mesure (Fig. III.1) demeure très simple.

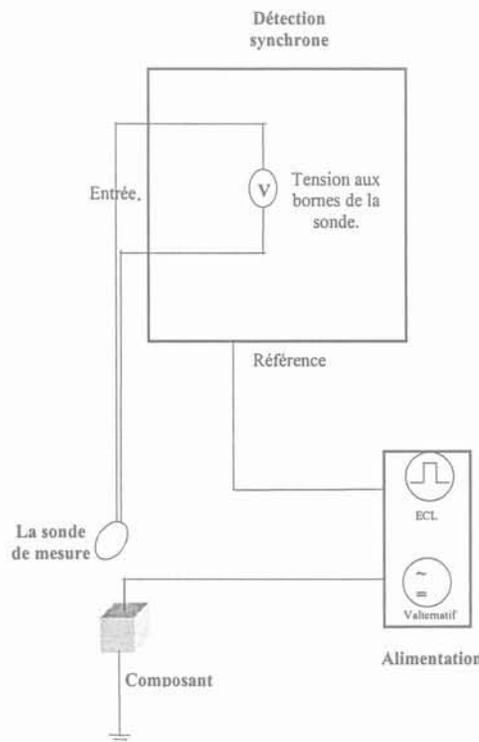


Figure III.1 : Principe de mesure.

Le composant est alimenté par un générateur de fonctions (TOELNER 7707) suivi d'un amplificateur de puissance (NF Electronic Instrument 4055) utilisable du continu jusqu'à 10 MHz. Cet amplificateur de puissance peut délivrer, au moins, une tension maximale de 35 V et, simultanément, un courant maximal de 0,7 A jusqu'à 10 MHz. Son gain lui permet d'être piloté par une tension d'entrée limitée à  $\pm 10V$ . Dans certaines circonstances, pour augmenter le niveau d'induction du composant, il est souhaitable de réaliser une adaptation d'impédance à l'aide de quelques composants passifs placés en sortie de l'amplificateur.

D'une manière générale les transformateurs sont préférables aux circuits accordés qui nécessitent d'être redimensionnés à chaque fréquence. Signalons pour finir que le remplacement du générateur de fonctions par un modèle programmable (Tektronix) est prévu.

Pour ajouter une composante continue au signal d'alimentation, nous disposons d'une alimentation continue Hewlett-Packard que nous couplons à la sortie de l'amplificateur à l'aide d'un montage passif. L'alimentation continue pouvant fournir 30 V et 5 A, cette solution est préférable à l'adjonction d'un décalage continu à l'entrée de l'amplificateur qui délivrerait, au mieux, le courant limite de l'amplificateur en continu, soit 1 A. L'alimentation continue travaille à tension constante ou à courant constant suivant la charge connectée à la sortie et les réglages de tension et de courant.

### **III.2.2. Sondes de tension et de courant.**

Afin de connaître le courant traversant le composant ainsi que la tension à ses bornes, nous utilisons deux sondes passives Tektronix : une sonde de courant PS6022 et une sonde de tension P6019B. Toutes deux possèdent une atténuation d'un facteur 10 qui permet à l'ensemble sonde-détection synchrone de mesurer des courants et des tensions respectivement supérieurs à l'Ampère et au Volt. Le comportement fréquentiel (sensibilité, impédance) varie selon l'atténuation choisie si bien que nous devons procéder à 4 calibrations distinctes mais les deux sondes utilisées ont une bande passante bien plus large que la bande de fréquence visée 100 kHz - 10 MHz. Les temps de retard introduits par ces sondes sont de quelques ns.

Afin de mieux connaître ces sondes, nous procédons à quelques essais. Pour tester la sonde de tension, nous mesurons, à une fréquence donnée et de deux manières différentes, la tension délivrée par la sortie 50  $\Omega$  d'un générateur de fonctions. D'abord nous connectons sa sortie à l'entrée de la détection synchrone à l'aide d'un câble coaxial. Ensuite, nous relevons la tension à la sortie de ce câble coaxial à l'aide de la sonde de tension.

Les mesures sont effectuées sur l'entrée 1 M $\Omega$  de la détection synchrone avec un filtre d'entrée d'ordre 2, de constante de temps 300 ms. Les calibres choisis sont de 300mV pour la mesure directe et de 30mV pour la mesure à l'aide de la sonde. Nous avons ainsi l'information sur la valeur efficace et la phase de chaque grandeur. Comme cela apparaît plus clairement sur la figure III.2, le retard de cette sonde est proche de 8,9 ns. Cette valeur est un peu supérieure à celle indiquée par le constructeur : 7 ns.

P6019B			Détection sync.	
Fréquence	Val. eff.	Phase	Val. eff.	Phase
100 kHz	20.36	92.9	220	92.77
250 kHz	20.3	94.47	219.7	95.09
500 kHz	20.27	85.61	218.6	86.95
1 MHz	20.3	76.56	218.3	79.6
1.5 MHz	20.2	69.3	216.4	74.03
2.5 MHz	20.29	62.7	217.6	69.08

Tableau III.1. Retard et atténuation de la sonde de tension P6019B.

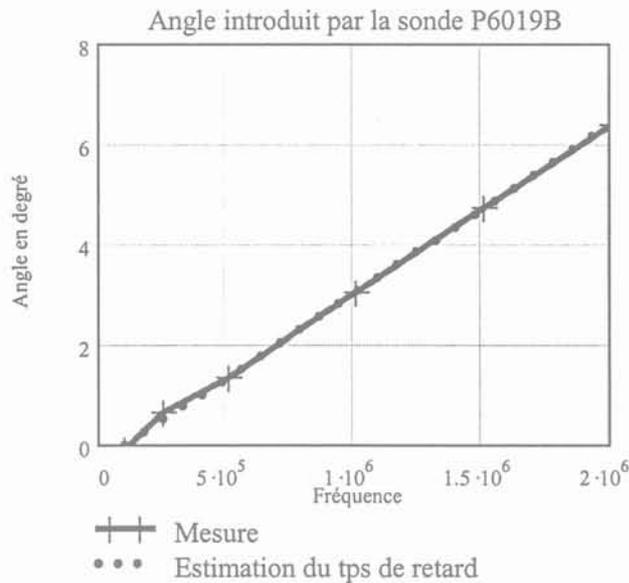


Figure III.2 : Retard de la sonde de tension P6019B.

Pour identifier le comportement fréquentiel de la sonde de courant nous connectons une résistance de 50 Ω au générateur de fonctions puis nous comparons l'indication de notre sonde de courant à la tension, relevée à l'aide de la sonde de tension, aux bornes de la résistance de 50 Ω.

Ces mesures apportent des informations précieuses concernant les retards induits par les sondes de tension et de courant ainsi que leurs sensibilités à la fréquence de mesure. C'est pourquoi nous le réalisons avant toute mesure et à chaque fréquence.

### III.2.3. Choix et test des câbles.

Les câbles coaxiaux 50  $\Omega$  standards RG58 ne présentent pas une immunité suffisante aux bruits extérieurs et ils introduisent des tensions parasites dues, notamment, à des effets piézoélectriques du diélectrique. Nous avons tenté, en vain, de relier l'antenne à la détection synchrone à l'aide de tels câbles, y compris en les entourant de tresses de cuivre. Le bruit restait prohibitif. Ce problème a été résolu en recourant à un câble spécialement étudié, dit "antisignal", de référence Alcatel RG58 AS-PG. Disposant de ce câble, nous l'avons utilisé non seulement pour relier l'antenne mais également pour alimenter le composant et pour réaliser la connexion de référence. Ce câble bénéficiant d'un blindage amélioré, l'utiliser pour les connexions haut niveau réduit le rayonnement de ces dernières. Ce rayonnement, synchrone avec le signal utile, ne serait pas rejeté par la détection synchrone !

La fréquence des signaux à mesurer pouvant atteindre 10 MHz, l'exploitation des phases doit prendre en compte les temps de propagation le long des câbles ainsi que le comportement fréquentiel des sondes (de courant, de tension, ...). Nous avons réalisé quelques essais sur les câbles choisis afin d'estimer leur temps de propagation. La valeur typique du retard introduit par un câble 50  $\Omega$  courant, est de 5 ns / m dans l'hypothèse TEM [PAUL],[WESTON]. Cette valeur a été contrôlée à l'aide de la détection synchrone. Après avoir relié l'entrée signal 50  $\Omega$  de la détection synchrone à la sortie 50  $\Omega$  de notre générateur de fonction par un câble 50  $\Omega$ , nous avons mesuré, à plusieurs fréquences, le déphasage introduit par l'insertion d'un mètre de câble supplémentaire. Ces mesures ont été effectuées avec la réserve dynamique maximale, une constante de temps de 300 ms et un calibre de 100 mV.

Fréquence	Tension	Phase	Tension (câble 1m)	Phase (câble 1m)	Retard
998.4 khz	85.82 mV	147.37°	85.67 mV	145.42°	<b>5.43 ns</b>
1.997 MHz	85.73 mV	139.03°	85.60 mV	135.16°	<b>5.38 ns</b>
1.509 MHz	85.8 mV	142.85°	85.7 mV	139.95°	<b>5.34 ns</b>

Tableau III.2: Mesure du retard introduit par le câble coaxial.

La cohérence des résultats est remarquable si on songe qu'un centième de ns permet à l'onde de parcourir 2 mm ! Nous retiendrons que le retard introduit par ces câbles est voisin de 5,4 ns / m.

Nous ne pouvons pas terminer cette évocation du câblage sans souligner l'importance, sur le niveau de bruit, du placement des appareils les uns par rapport aux autres. Nous avons du, en particulier, éloigner l'amplificateur de la détection synchrone. Un câblage minutieux des alimentations secteur contribue également à l'amélioration des performances. Pour réduire la surface des boucles de terre, une seule barrette (filtrée) de distribution secteur, disposée sur le rack de mesure, est utilisée. Les longueurs excédentaires de cordons sont pliées en deux puis roulées et fixées pour réduire leur rayonnement....

Nous avons également repéré quelques fréquences bruitées par notre environnement qu'il n'est pas difficile d'éviter lorsqu'on ne laisse passer qu'une bande de 1Hz. En définitive, cette mesure jouit maintenant d'une très grande immunité aux bruits.

### III.3. Réalisation du banc de mesure.

#### III.3.1. Cahier des charges de la partie mécanique.

Pour cartographier le champ autour du composant magnétique, il faut positionner l'antenne, dont l'axe passe toujours par l'origine du repère, par rapport au composant. Pour ce faire, le composant est placé au centre du repère et son orientation est repérée. La position de l'antenne est ensuite définie par les coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  de son centre dans ce repère. L'élévation  $\theta$  varie de 0 à  $\pi$ , tandis que l'azimut  $\phi$  varie de 0 à  $2\pi$ . Pour les deux angles la résolution visée est de 1 degré. Ce chiffre semble convenable pour répartir jusqu'à 122 points régulièrement sur la sphère. Conformément au cahier des charges déjà présenté, la distance  $r$  sera toujours inférieure à 50 cm.

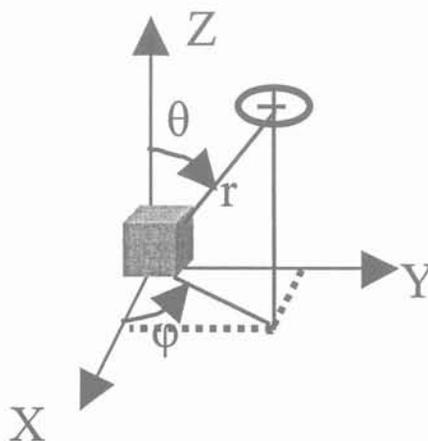


Figure III.3: Positionnement de la sonde.

S'agissant d'un système d'étude, nous souhaitons préserver la possibilité de réaliser un échantillonnage spatial fin. Etant donné que le nombre de points à caractériser peut largement dépasser la centaine, il est indispensable d'automatiser les déplacements de la sonde et la saisie de la mesure. C'est pourquoi nous utilisons un ordinateur pour piloter les déplacements et recueillir les deux composantes (en phase et en quadrature) de la tension de l'antenne. Pour commencer, seuls les déplacements angulaires et l'acquisition des mesures sont automatisés. Automatiser l'éloignement radial de la sonde ne semble pas urgent puisque les valeurs de l'induction radiale relevées à une distance fixée donnent accès aux composantes  $a_{n,0}$ ,  $\alpha_{n,m}$ , et  $\beta_{n,m}$  qui définissent le champ dans tout l'espace autour du composant.

Nous avons recensé et comparé tous les moyens d'effectuer les déplacements angulaires relatifs. Nous en concluons que, pour assurer la reproductibilité et la précision du positionnement, les deux rotations doivent s'effectuer autour d'axes de directions fixes et perpendiculaires. Le composant doit tourner autour de l'un des axes et l'antenne autour de l'autre. Nous faisons tourner le composant autour de l'axe vertical car c'est celui qui le garde dans la position la plus stable. En clair, un bras supportant l'antenne tourne autour d'un axe horizontal qui règle l'élévation  $\theta$  tandis que le composant tourne autour d'un axe vertical qui permet d'ajuster l'azimut  $\varphi$ . Il faut veiller à ne pas tordre les câbles de plus d'un demi-tour, afin d'éviter de dégrader leur propriétés et les efforts dangereux qui s'exerceraient sur le composant ou sur l'antenne.

Pour d'éviter l'apparition de champs parasites dus à des courants induits, aucun matériau conducteur ne doit être placé à moins de 70 cm du composant testé. Ce chiffre résulte d'une multitude d'essais réalisés en approchant, sous différentes incidences, une tôle de transformateur. Pour cette raison et afin de bénéficier de la commodité qu'apporte la transparence, le banc est réalisé en plexiglas. La recherche de roulements non métalliques pour faciliter la rotation des axes mécaniques n'a pas été simple mais, finalement, nous avons trouvé des roulements à rouleaux en verre.

Les rotations sont assurées par des moteurs pas à pas. Afin de maintenir leurs masses métalliques à distance suffisante, les transmissions des mouvements s'effectuent par l'intermédiaire de courroies crantées et d'un axe en plexiglas.

Après ces études préliminaires menées en commun, la réalisation mécanique a été confiée à Claude Brun du LEG et l'automatisation à Thierry Creuzet et Paul Todaro de l'IUT GE et II 1 de Grenoble.

### III.3.2. Réalisation mécanique.

Outre son bâti, le banc (Fig. III.4) comporte un bras mobile selon  $\theta$  et un plateau mobile selon  $\phi$ , entraînés en rotation par des moteurs pas à pas. Le bras supporte une antenne de mesure fabriquée au LEG tandis que le composant à tester est fixé au centre du plateau. Cette disposition offre un bon compromis entre la stabilité du composant et la facilité de mise en œuvre.

Deux moteurs pas à pas assurent les rotations. La transmission du mouvement se fait par l'intermédiaire d'un axe en plexiglas et d'une courroie crantée pour le bras et via une courroie crantée pour le plateau. Les rapports de réduction ont été calculés de telle manière qu'à un pas du moteur corresponde un incrément de un degré et ce, pour les deux angles.

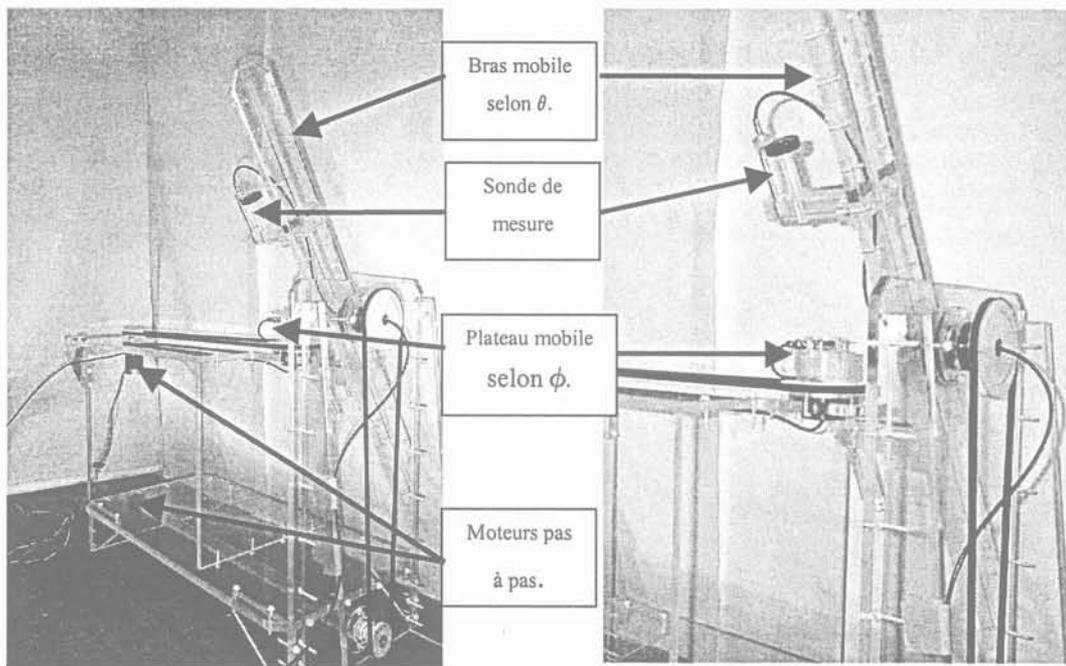


Figure III.4 : Le banc de mesure.

L'antenne (figure III.5) est fabriquée à l'aide d'un câble blindé, la boucle étant réalisée en soudant l'âme du câble au blindage. La connexion entre la sonde de mesure et le câble de mesure fait appel à une prise SMA qui présente à la fois une bonne immunité au bruit et un

faible encombrement. La sonde est montée sur un support cylindrique en plexiglas qui, accessoirement, écarte de 10 cm la boucle de mesure du métal de la prise SMA.

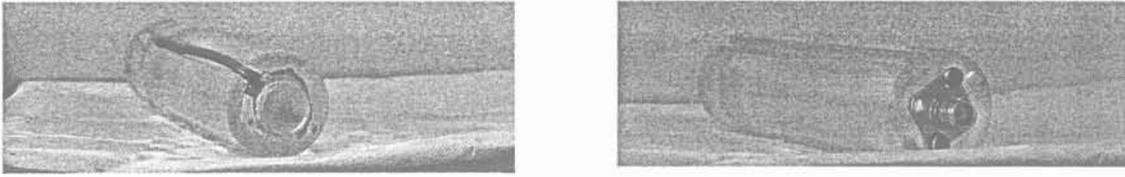


Figure III.5 : La sonde de champ.

L'antenne de mesure est fixée sur le bras mobile par l'intermédiaire d'un porte-antenne (figure III.6) qui peut-être vissé tout les 5 cm le long du bras mobile. Ce porte-antenne est équipé d'une vis millimétrique qui peut déplacer la sonde de mesure sur 7 cm. Le pas de cette vis est de 1 mm : un tour de molette déplace la sonde de 1 mm. Ce système permet de positionner la sonde de façon précise sur toute la longueur du bras.

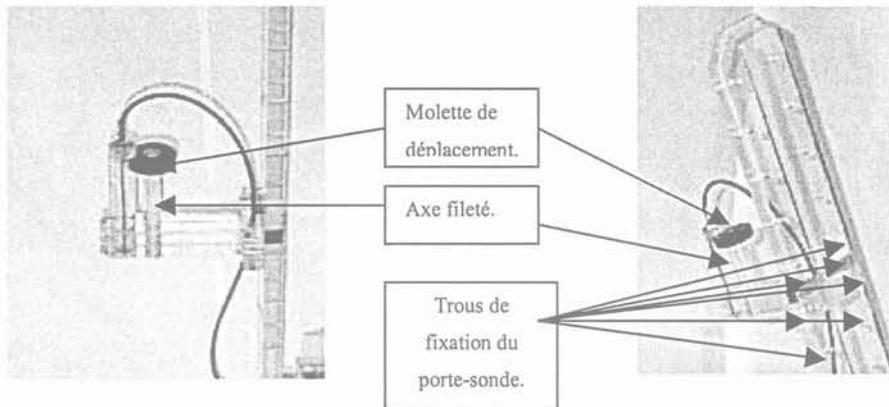


Figure III.6. Le porte-antenne.

Le composant est fixé au centre du repère à l'aide d'un dispositif de serrage qui le maintient tout en permettant l'introduction des sondes de mesure de l'alimentation. Il est positionné à l'aide de trous de centrages et des cales de différentes hauteurs permettent d'amener son centre en face de l'axe de rotation du bras.

### **III.3.3. Automatisation.**

Conformément à la demande de Microspire, la programmation du déplacement des sondes et l'acquisition des données s'appuie sur le logiciel de programmation graphique

LabView de National Instruments. L'acquisition des grandeurs mesurées met en œuvre une liaison d'instrumentation IEEE 488. Cette automatisation recourt au matériel suivant.

- Deux cartes de commandes pour piloter les moteurs pas à pas. Celles-ci reçoivent des informations provenant d'une carte d'entrées/sorties insérée dans le PC et pilotée par le programme,
- Une carte optocoupleur assurant l'isolation galvanique de la carte PC par rapport à la carte de commande,
- Une carte d'interface IEEE 488 pour dialoguer avec la détection synchrone et, bientôt, avec le générateur de fonctions.

Le but du programme est de piloter le déplacement de la sonde suivant un parcours défini par l'utilisateur, d'effectuer les mesures et d'archiver les grandeurs intéressantes. Le format d'acquisition doit être compatible avec un tableur du commerce.

Dans un premier temps l'utilisateur définit les points à explorer. Ces points sont repérés par leurs coordonnées ( $\theta$ ,  $\varphi$ ) et le programme propose deux modes de définition. Le premier mode retient une suite de couples de coordonnées angulaires à "visiter". Le second enregistre un intervalle pour chacune des deux coordonnées angulaires et un pas pour le parcourir. Il est possible de sauvegarder et de charger les parcours définis suivant les deux modes.

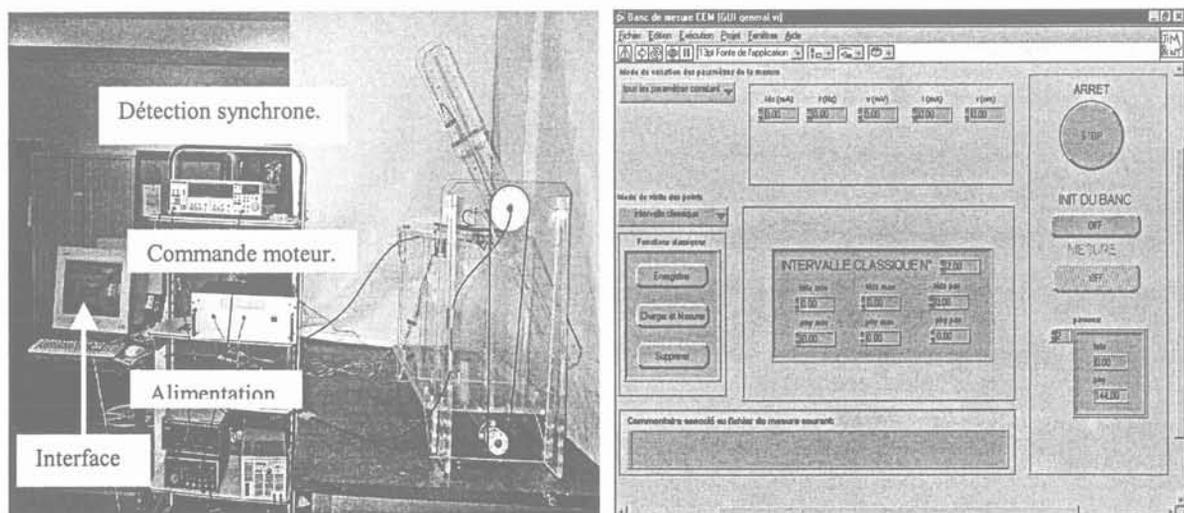


Figure III.7. L'automatisation et l'interface graphique.

Le programme gère les formes d'ondes commandant les moteurs pas à pas sans que l'utilisateur ne le soupçonne, les chronogrammes permettant la marche des moteurs ayant été mémorisés une fois pour toutes.

Le déplacement se fait de façon séquentielle : d'abord selon  $\theta$ , ensuite selon  $\varphi$ . Pour éviter de torsader ou de briser les câbles, la commande limite les rotations à + ou – un demi-tour pour  $\varphi$  et + ou – un quart de tour pour  $\theta$ .

La dernière opération à effectuer est la mesure du champ. Ceci est fait en envoyant des instructions à la détection synchrone via l'interface IEEE 488. Nous avons développé une interface graphique (figure III.8) qui permet d'accéder aux principaux réglages de la détection synchrone. On peut ainsi sélectionner : l'impédance d'entrée, le filtre, le calibre, les gains, et l'adresse IEEE 488. Pendant l'acquisition on accède à la fréquence de mesure, aux composantes du signal et à l'état de la détection synchrone. Cet état regroupe des informations importantes conditionnant la fiabilité des mesures : sorties saturées ou non, référence stable ou non, étage d'entrée saturé ou non. Par exemple la valeur 1 correspond à une mesure sans problème particulier tandis que la valeur 129 indique un problème lié à la fréquence de référence.

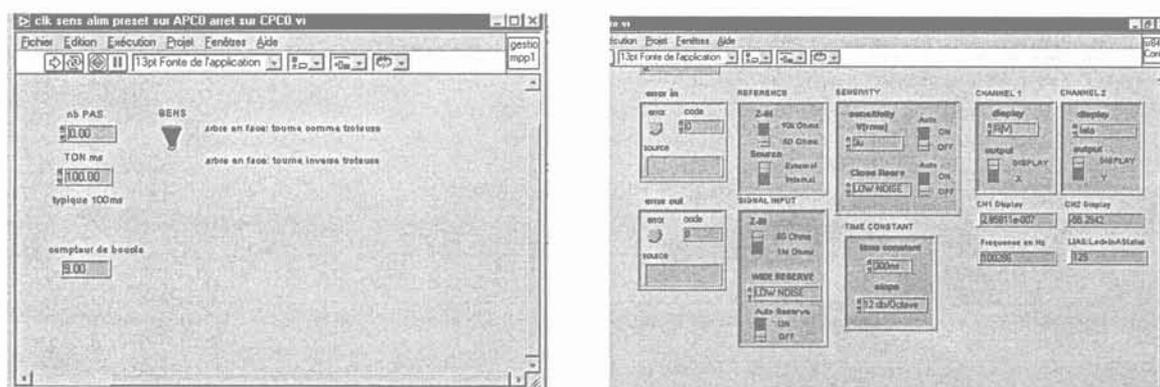


Figure III.8 : Commande des moteurs et configuration de la détection synchrone.

## III.4 Etalonnage et validation.

### III.4.1. Etalonnage d'une antenne boucle. Bobine de Helmholtz.

S'il est clair que la sensibilité de l'antenne dépend de sa surface, cette dernière n'est pas toujours simple à mesurer, en particulier lorsque la boucle est d'un diamètre comparable à

celui du fil. A titre d'exemple, pour parvenir à une bonne résolution angulaire sur des petits composants, nous avons été amenés à réaliser une sonde de mesure en enroulant deux spires de fil isolé de diamètre 1 mm autour d'un picot de rayon 4 mm. Devant un tel capteur on comprend qu'il est difficile de déduire le diamètre effectif, à mieux que 1% près, d'une simple mesure dimensionnelle.

Pour palier cette difficulté, nous avons confectionné une bobine de Helmholtz [KHÖLER]. Ce dispositif se compose de deux spires circulaires identiques et coaxiales dont l'écartement est égal au rayon. Ces deux spires sont parcourues dans le même sens par le même courant  $I$ .

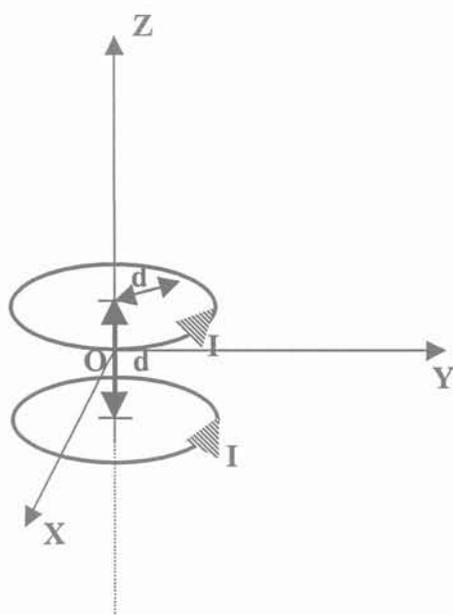


Figure III.9 : Bobine de Helmholtz

Ce dispositif fournit une induction proportionnelle à  $I$ , réputée pour être pratiquement uniforme dans un espace non négligeable autour de son centre, ce qui rend les étalonnages peu sensibles aux erreurs de placement. L'induction centrale  $B_c$ , exprimée en Tesla, est donnée par :

$$B_c = \frac{8 \mu_0}{5\sqrt{5} R} I \quad (\text{III.1})$$

Les deux spires sont réalisées sur du circuit imprimé en fibre de verre. Leur rayon, ainsi que leur écartement, a été fixé à 8 cm. Afin de les utiliser convenablement, nous avons

étudié plus précisément la cartographie de l'induction délivrée. Ce système est invariant par rotation et symétrique par rapport au plan XOY. L'induction magnétique émise est donc invariante par rotation et antisymétrique par rapport à XOY.

L'étude du champ au centre du dispositif permet de délimiter une zone où le champ peut-être considéré comme homogène. La figure II.10 présente la variation relative (en %) du module de l'induction entre le centre du dispositif et un point situé à un rayon donné ou à une distance donnée. Ces courbes résultent des expressions analytiques du champ établies comme indiqué au paragraphe I.3.6.

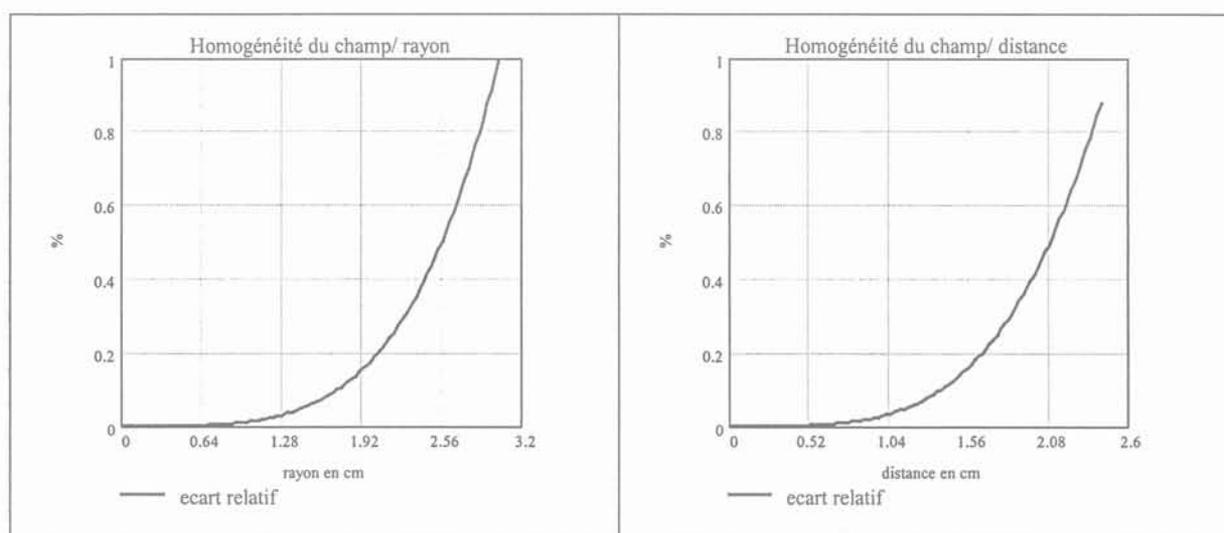


Figure III.10. Homogénéité du champ de bobines de Helmholtz de rayon 8 cm.

En tolérant, au maximum, un écart relatif de 1%, on peut considérer que le champ est homogène dans un cylindre de diamètre et de hauteur 5 cm centré sur l'origine du repère. L'induction régnant au cœur de ce dispositif, à l'intérieur du volume cylindrique ainsi défini, est donc connue avec une précision suffisante pour étalonner une antenne boucle avec une incertitude inférieure à 1 %.

Expérimentalement, le courant  $I$ , qui traverse la bobine à une fréquence donnée, est mesuré à l'aide de la sonde de courant Tektronix préalablement étalonnée. La tension induite aux bornes de l'ensemble antenne câble de liaison est mesurée à l'aide de la détection synchrone. Connaissant l'induction centrale, la fréquence et le nombre des spires, l'amplitude de la tension mesurée permet de remonter facilement à leur rayon effectif.

Les résultats de l'étalonnage de la petite antenne évoquée au début de ce paragraphe figurent ci-dessous. Les mesures ont été effectuées sur une plage de fréquence de 2 MHz. On voit (Fig. III.11) qu'en moyenne le rayon effectif est de 4.8 mm, ce qui cohérent avec la taille du picot et l'épaisseur de 1mm du fil utilisé.

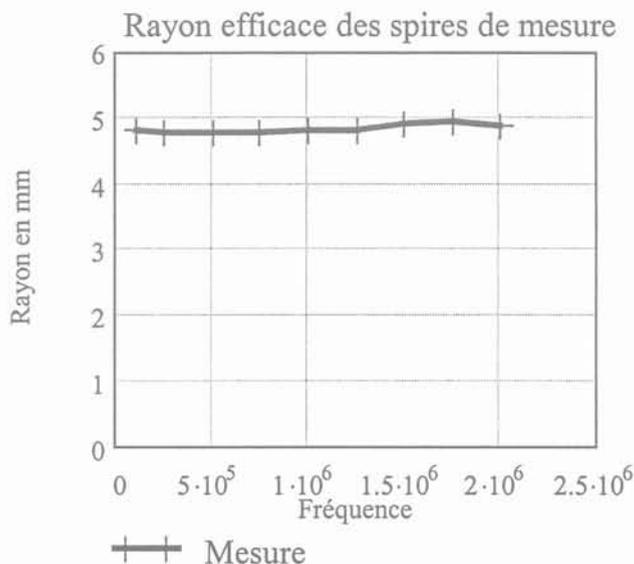


Figure III.11 : Mesure du rayon effectif de l'antenne.

Comme lors de son utilisation, l'antenne est reliée à la détection synchrone par un câble coaxial d'environ 3,5 m de longueur. L'étalonnage réalisé donne accès également au déphasage introduit par cet ensemble (Fig. III.12).

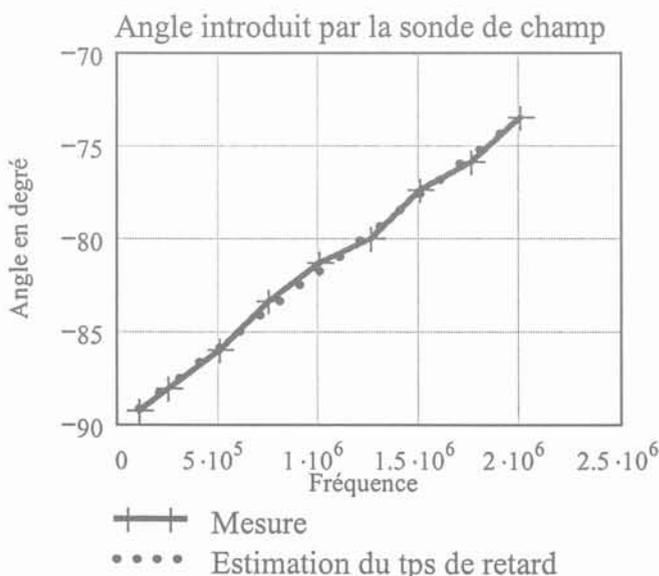


Figure III.12 : Retard de la sonde de champ.

Deux remarques à propos de cet essai. Tout d'abord, tant que le temps de propagation n'intervient pas, on s'attend à trouver un déphasage de + 90 degrés. Il suffit cependant d'inverser les deux bornes de la spire pour relever un déphasage de - 90 degrés ! D'autre part, un rapide calcul montre que le retard visible ici est voisin de 25 ns, ce qui est trop pour 3,5 m de câble coaxial ( $5,4 \times 3,5 = 18,9$  ns). Les 6 ns excédentaires sont probablement dus au fait que la sonde de mesure du courant n'était pas placée à ras de la bobine d'Helmholtz. Nous enquêtons....

### III.4.2. Validation. Mesure de l'induction d'une spire circulaire.

Afin de prendre confiance dans les résultats fournis par le banc, nous allons relever l'induction émise par un dispositif connu : une spire circulaire. Nous installons pour cela, comme indiqué par la figure III.13, une boucle de courant circulaire de 2,5 cm de rayon.

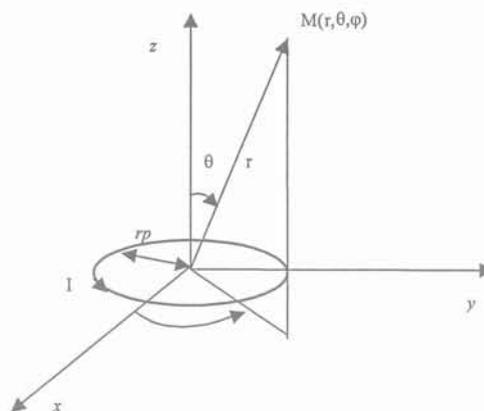


Figure III.13 : Boucle de courant circulaire.

Le champ magnétique de ce dispositif est invariant par rotation selon  $\varphi$  et symétrique par rapport au plan  $xOy$ . Son développement multipolaire s'obtient également à l'aide de la méthode présentée en I.3.6.

Nous mesurons l'induction radiale émise par la spire parcourue par un courant de 1.6 A efficace. La tension aux bornes de la sonde de champ est relevée moyennant un

échantillonnage spatial de  $10^\circ$  pour l'élévation  $\theta$  et de  $72^\circ$  pour l'azimut  $\phi$ . Une première série de mesure a est effectuée à 18 cm de distance.

La figure III.14 montre l'évolution de la tension d'antenne en fonction de  $\theta$ . Pour faire apparaître l'invariance suivant  $\phi$ , six courbes relevées pour six azimuts différents ont été superposées. Comme il se doit, elles sont toutes antisymétriques par rapport à  $\theta = \pi/2$ .

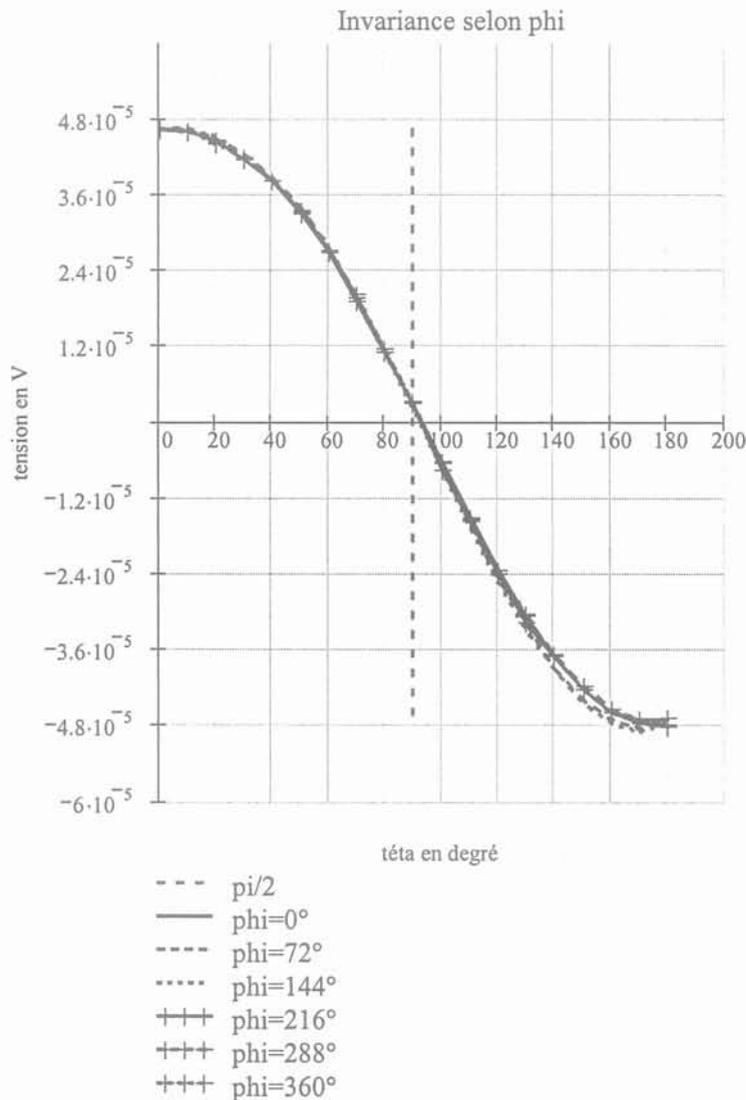


Figure III.14 : Invariance selon  $\phi$  de l'induction d'une spire circulaire.

Ces courbes sont déduites de l'amplitude fournie par la détection synchrone. En traçant la variation de la phase du signal on remarque le déphasage de 90 degrés introduit par l'antenne. Comme la précédente, cette courbe montre un léger décalage angulaire selon  $\theta$ , de l'ordre de 4 degrés. Nous avons découvert après cette mesure que l'axe de l'antenne passait à 5 mm de l'origine du repère, ce que nous avons corrigé par la suite.

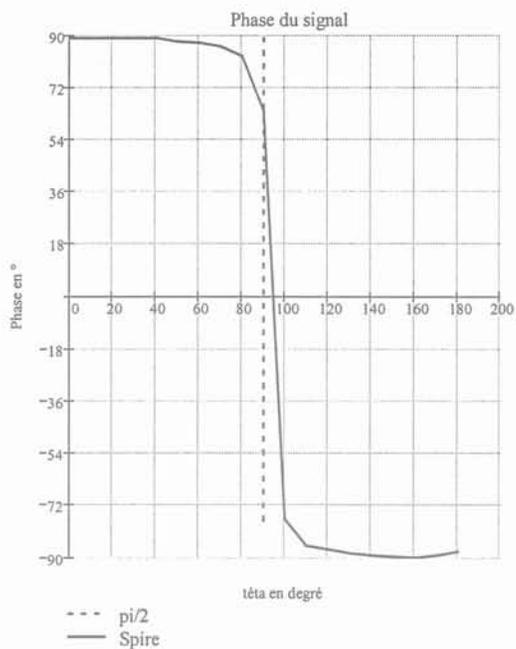


Figure III.15 : Phase du signal

Afin de tester la sensibilité du dispositif de mesure, nous avons retracé la courbe de module après avoir réduit le courant dans un rapport 7 puis 20. Les courbes présentées (Fig. III.16) sont remises à l'échelle. La superposition des courbes montre déjà que le bruit aléatoire est inférieur à la centaine de nV. Ceci sera précisé un peu plus tard.

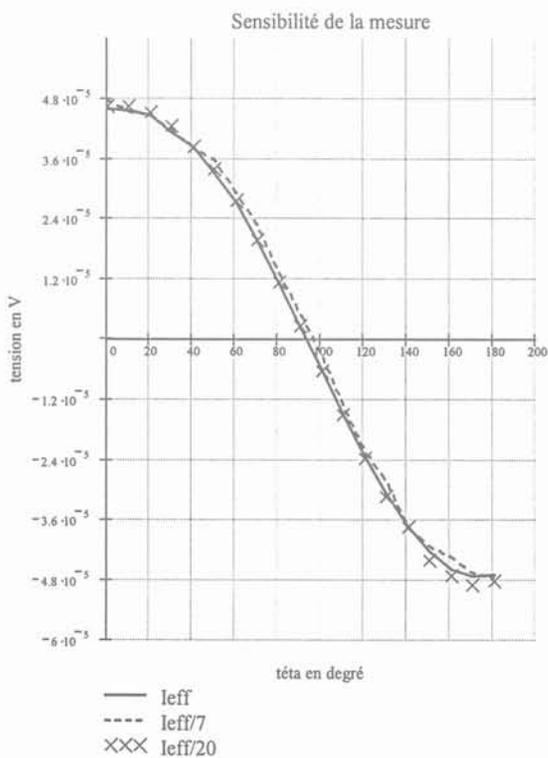


Figure III.16 : Sensibilité de la mesure.

La sensibilité de la sonde de champ a été étalonnée à l'aide des bobines de Helmholtz : elle comporte deux spires de rayon effectif de 4,8 mm. Puisque d'autre part l'induction d'une spire circulaire est connue, il est possible de comparer les mesures à leur prévision théorique. La figure III.17 superpose les valeurs mesurées à celles calculées. Elle permet de conclure que le banc de mesure est maintenant prêt à être utilisé.

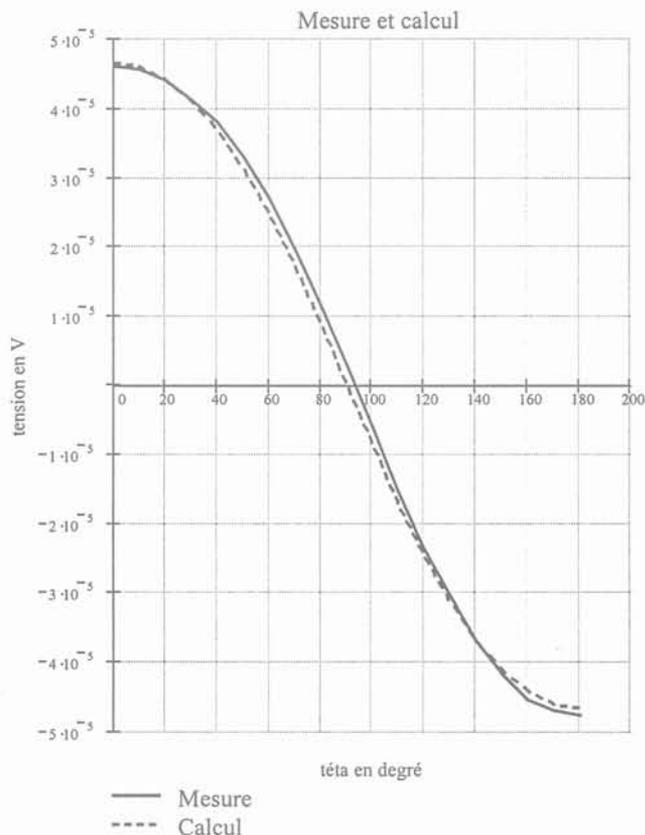


Figure III.17 : Comparaison des courbes obtenues par la mesure et par le calcul.

La figure III.18 propose une comparaison analogue mais à une distance plus petite du composant : 13 cm au lieu de 18 cm. On remarque que lorsque l'on s'approche de l'amenée de courant, vers  $\theta = 180^\circ$ , la valeur mesurée s'écarte de la valeur théorique. Ce phénomène, parfaitement reproductible, est très certainement dû au champ émis par le câble qui relie l'alimentation à la spire émettrice car, maintenant que nous sommes à 13 cm de l'origine, l'antenne passe très près de l'amenée de courant lorsque  $\theta = 180^\circ$ . Pour corriger cet effet indésirable, nous avons refait la mesure après avoir placé un court-circuit au ras du composant et réajusté le courant d'alimentation à sa valeur initiale. En soustrayant cette induction à celle obtenue lors de la première mesure, on élimine une bonne partie du rayonnement de l'amenée de courant. Bien qu'imparfaite (en théorie et en pratique) cette correction est suffisamment efficace pour que nous la mettions en œuvre systématiquement.

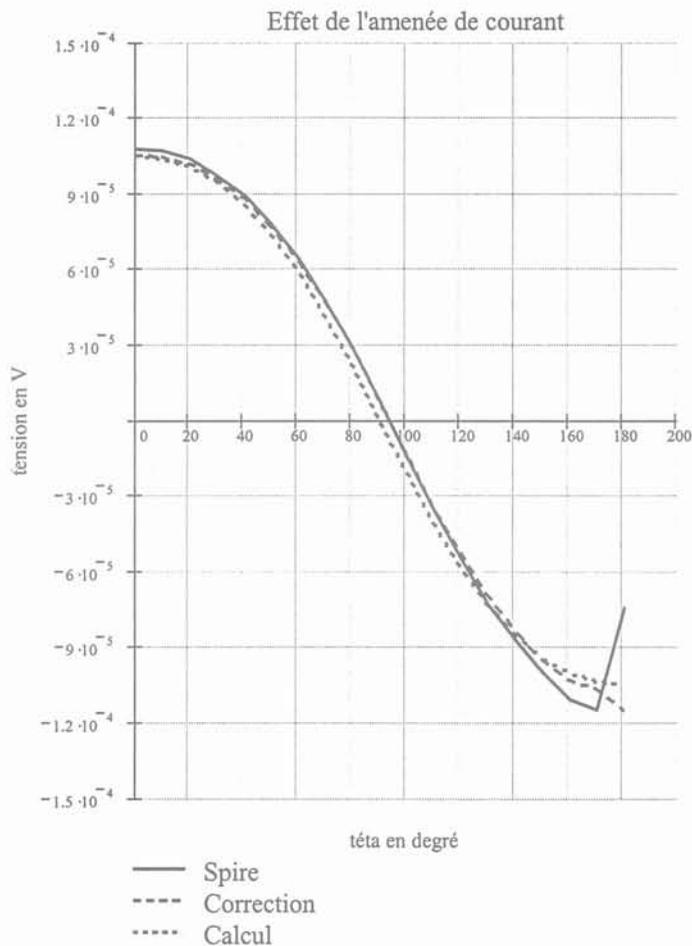


Figure III.18 : Influence de l'amenée de courant.

Notons au passage que si un câble coaxial est censé ne pas rayonner, cela n'est établi théoriquement que pour un câble rectiligne. Faute d'évidence expérimentale, l'incidence de sa courbure sur son rayonnement n'a jamais été évoquée sérieusement.

### III.4.3. Coefficients du développement multipolaire.

Nous allons appliquer la détermination des coefficients par la méthode des moindres carrés sur les points de mesures du champ émis par la boucle de courant de la partie II.4. Dans cet exemple, nous ne faisons pas varier le rayon de mesure. Rappelons que la spire est alimentée par un courant de 1,6 A efficace et que la mesure a été effectuée à 18 cm avec un échantillonnage spatial de  $10^\circ$  pour l'élévation  $\theta$  et de  $72^\circ$  pour l'azimut  $\phi$ . L'identification permet d'obtenir les 15 termes retenus pour caractériser l'émission. Puisque le champ magnétique est proportionnel à l'intensité du courant traversant la boucle, nous avons rapporté les coefficients à la valeur du courant.

$$\frac{\text{Coeff}}{I_{\text{eff}}} =$$

$\beta_{1,1}$	2.657e-5
$a_{1,0}$	4.133e-3
$\alpha_{1,1}$	-7.172e-5
$\beta_{2,2}$	7.176e-6
$\beta_{2,1}$	-7.266e-6
$a_{2,0}$	-9.915e-6
$\alpha_{2,1}$	2.761e-6
$\alpha_{2,2}$	4.439e-6
$\beta_{3,3}$	-8.717e-7
$\beta_{3,2}$	-1.658e-7
$\beta_{31}$	-2.276e-7
$a_{3,0}$	-1.866e-6
$\alpha_{3,1}$	-9.243e-8
$\alpha_{3,2}$	-1.909e-7
$\alpha_{3,3}$	2.457e-7



Tableau III.3: Coefficients du développement multipolaire.

En les comparant, on remarque qu'un coefficient est nettement prépondérant. Dans ce cas particulier, le moment dipolaire dirigé verticalement domine tous les autres, ce qui ne constitue pas une surprise ! La figure III.19 permet la comparaison entre une série de mesures et la reconstruction du champ à l'aide de 15 coefficients, puis à l'aide du seul coefficient retenu  $a_{1,0}$ . La bonne correspondance des courbes nous montre que l'identification de l'émission de la boucle de courant est satisfaisante et que, la caractérisation peut parfois se contenter d'un nombre de coefficients bien inférieur à 15...

Revenons à la série des mesures effectuées à 13 cm et qui a mis en évidence l'influence de l'amenée de courant. La figure III.20 compare l'induction reconstruite à partir du développement multipolaire établi ci-dessus à 16 cm, à la courbe effectivement mesurée à 13 cm. Sauf pour  $\theta$  voisin de  $180^\circ$ , l'écart n'est jamais très grand. Ceci prouve en particulier que les lois établies pour les variations des champs multipolaires avec la distance sont correctes.

Finalement, il faut noter que la détermination des coefficients est peu influencée par la perturbation due à l'amenée de courant. Non seulement nous lui apportons une correction mais encore peu de points subissent cette perturbation parmi la centaine de points de mesure, même s'ils sont un peu concentrés vers les pôles. En définitive, sauf dans quelques situations

défavorables, ce phénomène ne devrait pas devrait pas perturber notablement la caractérisation globale du composant.

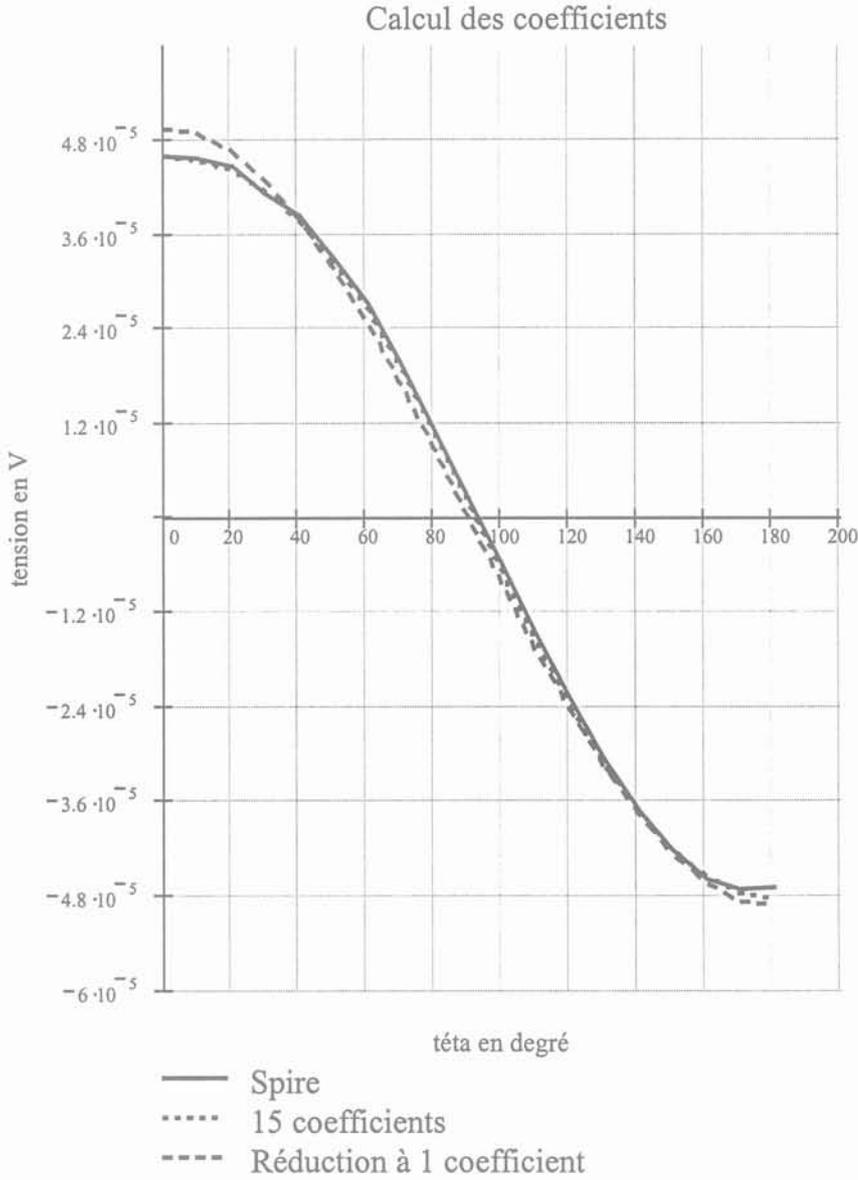


Figure III.19 : Reconstruction de l'induction à l'aide des moments multipolaires.

La caractérisation de cette spire s'appuie sur un assez grand nombre de points de mesure pour accéder à la valeur des coefficients, ce qui est peu adapté à une étude rapide de l'émission. Théoriquement, à une distance donnée, 15 mesures indépendantes réparties sur la sphère suffisent à l'identification. Nous avons vu cependant qu'il est préférable de miser sur la redondance pour éviter les problèmes de conditionnement de matrices. Les dispositions de 30 et 122 points décrites en II.2.7 devraient offrir un bon compromis mais nous ne les avons pas encore testées.

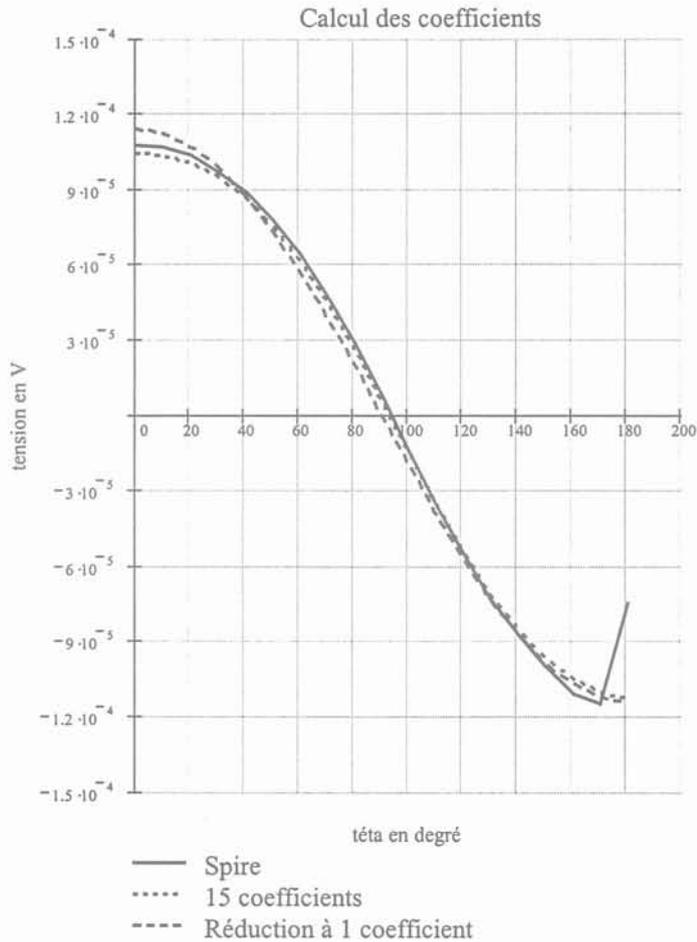


Figure III.20 : Reconstruction de l'induction à 13 cm à l'aide du développement caractérisé à 16 cm.

### III.4 Conclusion

Après avoir présenté le banc et, en grande partie, justifié les choix réalisés, nous avons étalonné le capteur principal. Nous avons ensuite procédé à l'étude de l'induction d'une spire circulaire. Cette étude nous a fait découvrir l'importance des champs parasites émis par les amenées de courant et nous a incité à affiner notre procédure de mesure. La résolution et la reproductibilité des résultats et la précision de la comparaison avec les valeurs théoriques semblent suffisants pour aborder l'étude de champs plus originaux.

L'interprétation de la phase du champ devra se faire avec prudence, après avoir éliminé les effets de tous les temps de propagation dans les câbles, ce qui n'est pas simple. Nous réfléchissons à un étalonnage plus direct de la phase...



Chapitre IV :  
Les Premières  
Mesures



## **CHAPITRE IV. LES PREMIERES MESURES.**

### **IV.1. Introduction.**

Maintenant que l'outil expérimental est au point, nous allons le mettre en œuvre pour étudier des composants industriels. Nous aimerions répondre à quelques questions que se pose le concepteur dont voici quelques exemples. Le rayonnement de l'inductance est-il du même ordre de grandeur que celui de la bobine démunie de son circuit magnétique que je sais calculer ? Deux inductances électriquement équivalentes ont-elles des propriétés voisines quant à leur rayonnement ? Le composant blindé émet-il moins que le composant qui ne l'est pas et quel facteur gagne-t-on à l'utiliser ? Le rayonnement d'un composant magnétique est-il plus important que celui des autres composants ? Ce composant est-il plus susceptible que les autres ? Peut-on le spécifier par un petit nombre de données ?

Avant d'aborder la caractérisation proprement dite, nous aimerions rappeler que notre objectif est toujours l'étude du couplage des inductances. Les études précédentes ont montré que la question simple dont nous sommes parti : "Où placer le composant B qui va se trouver dans le champ du composant A pour qu'il soit le moins possible perturbé ?" n'admet pas de réponse unique. La réponse dépend autant de la victime B que du coupable A. Par exemple, si B se comporte comme une spire, il sera sensible à un champ homogène. En revanche, s'il se comporte comme une paire de spires identiques coaxiales, décalées sur leur axe commun et connectées en opposition, un champ homogène n'induirait aucune tension dans B et l'intensité de la perturbation ne dépendra que du gradient du champ. En général, c'est là où le champ est le plus petit que son gradient est le plus fort. Donc, ce qui est parfait dans la première hypothèse est désastreux dans l'autre... Cela s'imagine, cela se justifie théoriquement comme quelque chose de possible mais est-ce réaliste ? Seule l'expérimentation permettra de le savoir. Compte tenu de la sensibilité de l'appareillage développé, nous pouvons nous attendre à quelques surprises.

Le programme ci-dessus est vaste et il a été abordé trois mois avant le bouclage de ce mémoire. Il ne faudra donc pas être surpris par le caractère inachevé de certains essais ou de certaines réflexions. Il faut en particulier dire que, les tensions présentées tout au long de ce chapitre sont celles en quadrature avec le courant d'alimentation du composant. Cette

composante, qui est induite par une mutuelle inductance idéale, était de loin la plus forte lors de nos essais, probablement parce qu'ils ont été conduits à une fréquence assez basse : 250 kHz. D'autres essais menés à 2 MHz, dont un petit nombre a été présenté lors de la soutenance, nous ont contraint à prendre en compte les deux composantes : l'induction n'était plus du tout en phase avec le courant. Précisons que la prise en compte de ces déphasages ne remet en cause ni nos développements théoriques ni nos méthodes expérimentales et qu'elle est intégrée dans notre traitement logiciel des mesures. Simplement, cette prise en compte complique la présentation car il faut présenter deux fois plus de données.

## IV.2. Mesures sur les SESI.

### IV.2.1. Quelques conventions.

La caractérisation d'un composant doit mener, au bout du compte, aux 15 composantes multipolaires choisies. Ces composantes sont relatives à un repère et elles dépendent de l'orientation du composant dans ce repère. Ainsi, les trois premières forment le vecteur moment dipolaire, les cinq suivantes constituent le tenseur d'ordre 2 moment quadropolaire et les 7 suivantes se regroupent en un tenseur d'ordre 3 nommé moment octupolaire. Pour représenter ces grandeurs le repère doit être spécifié et l'orientation du composant dans ce repère également. Prenons l'exemple du moment dipolaire. Sa représentation vectorielle est très simple (Fig.IV.1) :

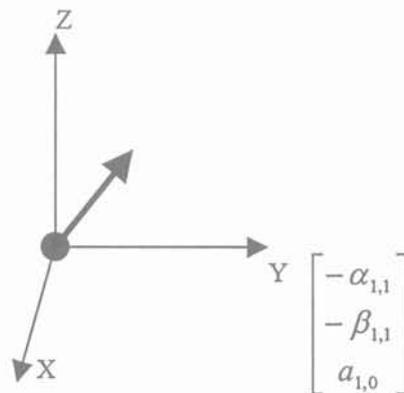


Figure IV.1. Composantes du moment dipolaire.

Cela définit un champ dans le repère mais, pour l'interpréter, il reste à savoir comment le composant était orienté dans ce repère durant sa caractérisation. Le repérage nécessaire est assuré par deux indexes représentant les axes Ox et Oy collés sur le composant (Fig. IV.2).

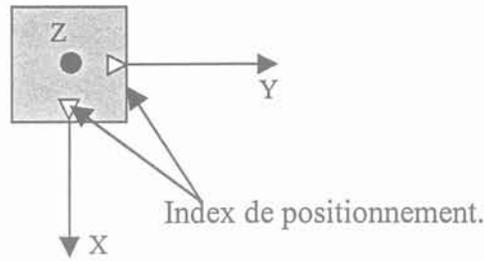


Figure IV.2. Orientation du composant dans le repère.

Pour représenter la variation d'une grandeur scalaire sur une sphère, c'est-à-dire en fonction des variables angulaires, nous avons parfois recours à une représentation en courbe de niveaux sur un plan (Fig.IV.3). Ceci est plus facile à mettre en œuvre et presque aussi parlant que des couleurs sur une sphère.

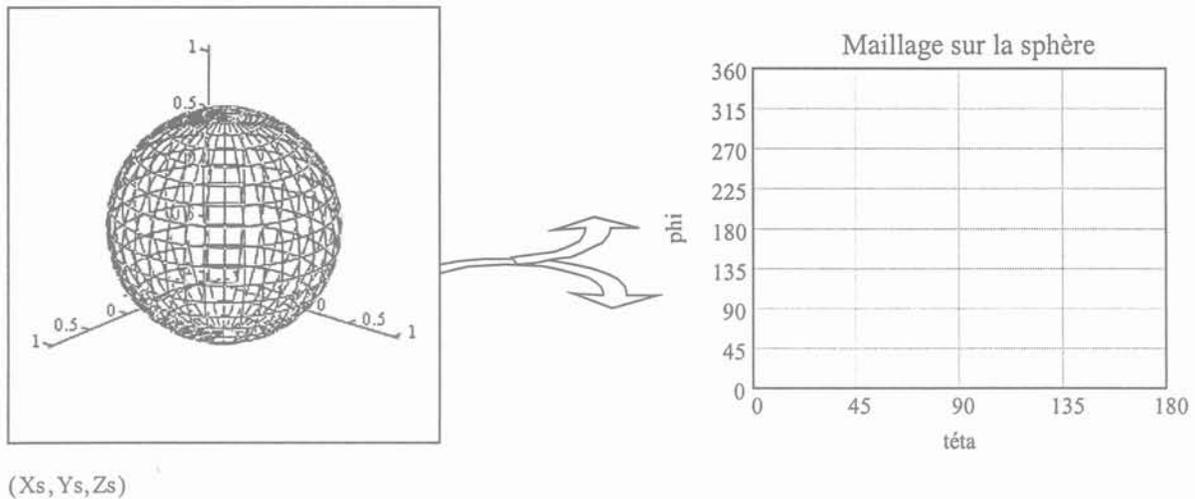


Figure IV.3 : Le maillage de la sphère.

Cette représentation n'est pas bijective car les pôles de la sphère sont définis pour n'importe quelle valeur de  $\phi$  et pour  $\theta$  valant 0 ou 180°. Cependant cette représentation nous renseigne qualitativement sur le type d'émission. La figure IV.5 représente l'induction radiale émise par l'octupole  $a_{3,0}$ . Les parties rouges correspondent au maximum du champ et les parties sombres au minimum.

Pour un terme du développement multipolaire, cette représentation ne varie pas suivant l'éloignement. En revanche, pour le champ complet dont les différents termes ne

varient pas de la même façon avec la distance, l'image sera plus contrastée et plus marbrée à courte distance.

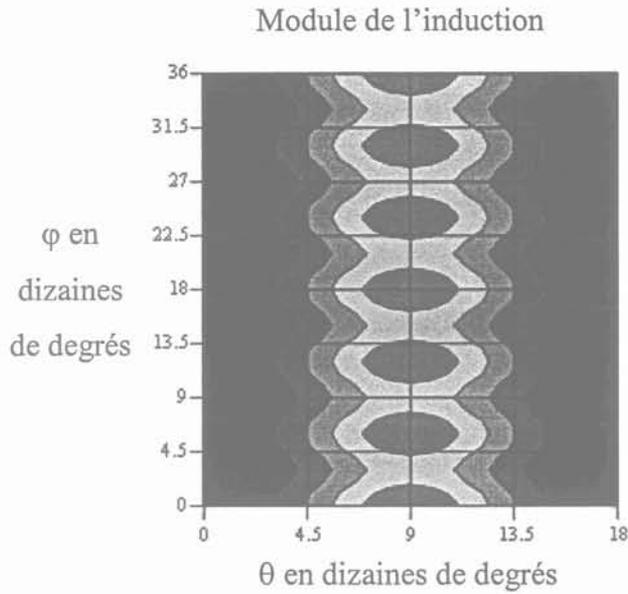


Figure IV.5. Représentation en courbes de niveaux d'un champ octupolaire.

Lorsqu'il n'est pas nul le terme dipolaire est celui qui domine à grande distance. C'est pourquoi nous l'utilisons souvent comme approximation du champ réel. C'est en quelques sortes l'approximation au premier harmonique. Cependant, plus on s'approche du composant, plus cette approximation est discutable. C'est pourquoi cette représentation sera complétée par un graphique représentant la variation de l'écart quadratique moyen sur l'induction mesurée, en fonction de la distance. Nous parlerons alors de "taux de distorsion".

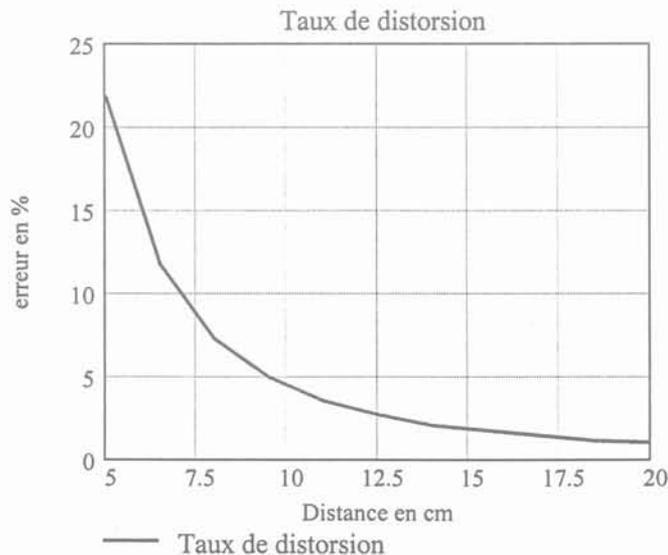


Figure IV.6. Taux de distorsion par rapport au champ dipolaire.

#### IV.2.2 Présentation des SESI.

Microspire propose une gamme d'inductances bas profil dites "SESI" destinée aux applications travaillant en environnement sévère (automobile, avionique, spatial). La bobine d'une SESI (Surface mount Energy Storage Inductance), réalisée en fil thermo-adhérent, est enrobée dans de la résine puis insérée dans un circuit magnétique en double E. Ces inductances, destinées à lisser le courant continu de sortie de convertisseurs d'énergie DC/DC, ont été conçues pour remplacer des inductances toriques prévues pour les mêmes applications. Elles éliminent des composantes essentiellement situées entre 100 kHz et 1 MHz.

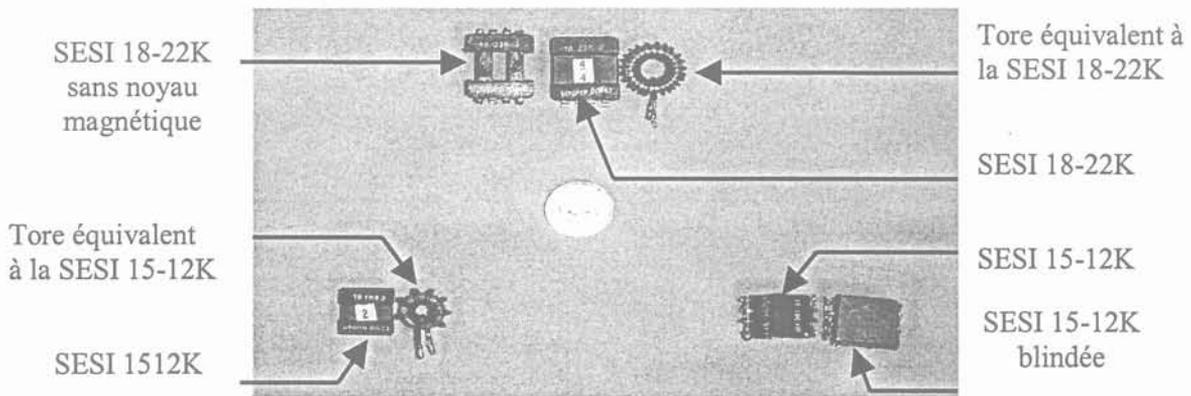


Figure IV.6. Les composants testés. Au centre, une pièce de 1 franc donne l'échelle.

#### IV.2.3 Essais Préliminaires sur la SESI 18-22K.

Pour disposer d'un élément de comparaison, nous mesurons le champ rayonné par la SESI 18-22K, non équipée de son circuit magnétique. La figure IV.7 montre la tension mesurée aux bornes de la sonde de champ en fonction de  $\theta$  pour plusieurs valeur de  $\phi$ . La bobine est alimentée par un courant de 1,4 Aeff à 250 kHz et la mesure est effectuée à 17 cm de distance. Pour cette mesure, nous choisissons un échantillonnage spatial de  $72^\circ$  en  $\phi$  et de  $10^\circ$  en  $\theta$ .

L'induction émise par cette bobine qui comporte de nombreuses spires est suffisamment forte (tension aux bornes de la sonde de l'ordre de la dizaine de  $\mu V$ ) pour que la mesure ne soit pas perturbée par la spire (unique !) de l'amenée de courant. Bien que les

spires soient rectangulaires, on remarque que l'émission est très voisine de celle d'une bobine à air cylindrique d'axe Oz : l'induction ne varie presque pas selon  $\phi$  et elle est symétrique par rapport au plan horizontal. Pour passer des tensions aux inductions, il suffit de rappeler que l'antenne utilisée comprend 2 spires de rayon 4,8. mm. A la fréquence de travail, cela donne une sensibilité de  $0,23 \mu\text{V} / \text{nT}$ .

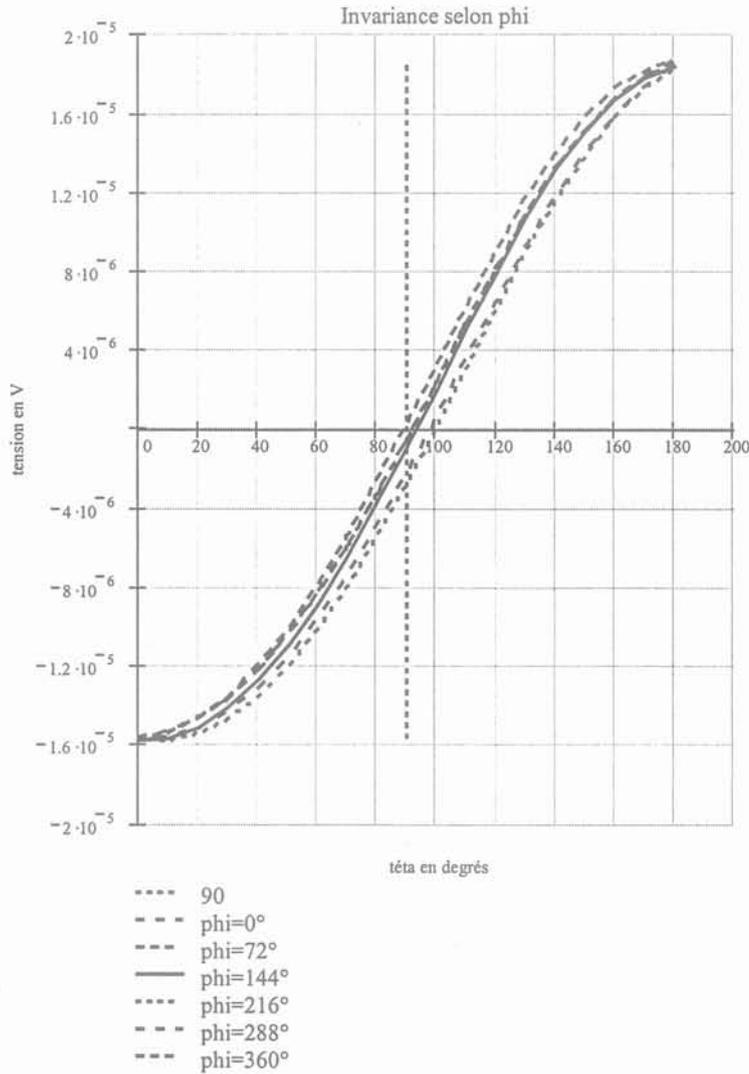


Figure IV.7 : Rayonnement de la SESI 18-22K sans noyau magnétique.

Caractérisons maintenant le rayonnement de la SESI 18 22K complète, munie de son circuit magnétique, en l'alimentant par un courant purement sinusoïdal de 1,2 Aeff à 250 kHz. La figure IV.8 montre sa position durant la caractérisation.

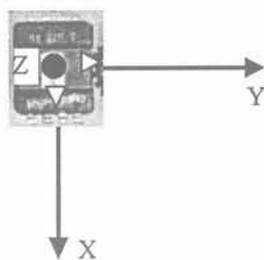


Figure IV.8. Orientation de la SESI 18-22K durant sa caractérisation.

Comme pour l'essai précédent, la mesure est effectuée à 17 cm de distance et le pas angulaire est de  $72^\circ$  pour  $\phi$  et de  $10^\circ$  pour  $\theta$ . La figure IV.9 montre, pour les 5 valeurs de  $\phi$ , la variation de la tension de la sonde en fonction de  $\theta$  lorsque le courant d'alimentation vaut 1,2 Aeff.

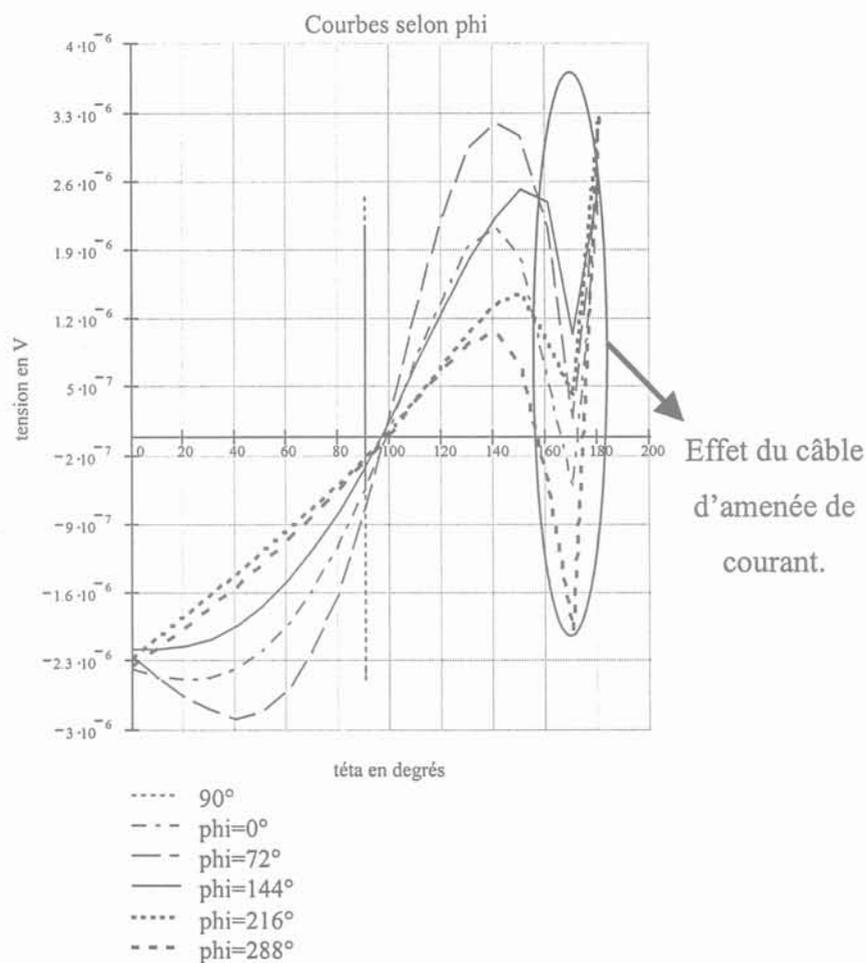


Figure IV.9. Incidence du câble d'amenée de courant.

Malgré la faiblesse du signal à mesurer, les points relevés prennent place sur des courbes bien régulières. La dispersion verticale est largement inférieure à un dixième de division crête à crête soit 70 nV en fait elle est proche de 30 nV. Il faut donc chercher à expliquer la forme des courbes par la physique, sans attribuer les écarts au bruit électronique.

En comparant les essais menés sans (Fig. IV.7) puis avec (Fig. IV.8) circuit magnétique, il apparaît que, pour un même courant d'alimentation, l'induction rayonnée est plus faible en présence du circuit magnétique. En ramenant le courant de l'essai mené sans circuit magnétique (1,4 A) à la valeur de test du composant complet (1,2 A), la tension maximum recueillie est environ 6 fois plus faible pour le composant complet. Ceci explique que les courbes présentent une forme moins académiques : certains champs dus à l'alimentation du composant, négligeables en l'absence de circuit magnétique, ne peuvent pas être ignorés en sa présence. Cela est bien visible pour la perturbation apportée par le câble.

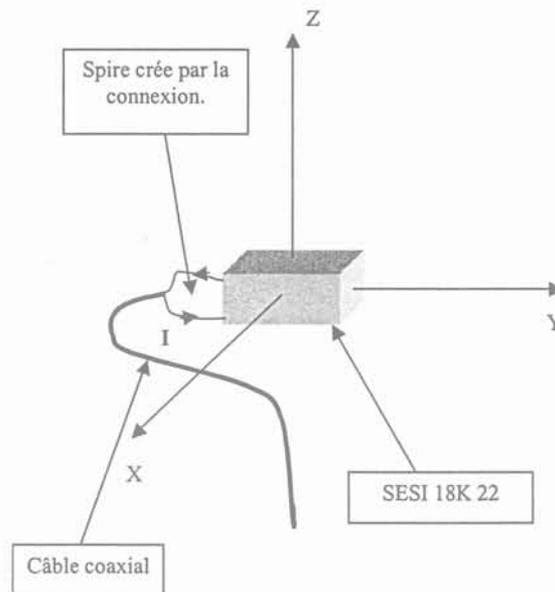


Figure IV.10. Positionnement de l'amenée de courant.

Comme pour la spire (Chapitre III), le câble coaxial et la connexion contribuent au champ mesuré d'une façon sensible. La figure IV.10 montre, de façon caricaturale, comment la connexion composant-câble coaxial délimite naturellement une spire accolée au composant. Etant donné que cette boucle est actuellement mise à profit pour insérer la sonde de courant le plus près possible du composant, il est impossible d'annuler sa surface. Cette sonde est éloignée avant la mesure d'induction pour éviter tout effet de son circuit magnétique. Ensuite,

le rayonnement du câble d'alimentation est particulièrement visible là où il est courbé et, bien sûr, lorsque l'antenne passe très près de lui. Ces conditions sont réunies lorsque  $\theta = 180^\circ$  et surtout lorsque la distance de mesure approche de 13 cm car, sur le banc, le câble coaxial passe sous le composant (Fig. IV.10).

Afin de mieux séparer la contribution du composant de celle de sa connectique, nous relevons l'induction émise après avoir placé un court-circuit à ras du composant en déplaçant les conducteurs aussi peu que possible. Après la mise en place du court-circuit, le courant d'alimentation est ramené à sa valeur précédente. Nous pouvons ainsi comparer (Fig. IV.11) le rayonnement de la SESI alimentée (Ici, par 0,45 A) à celui de sa connectique.

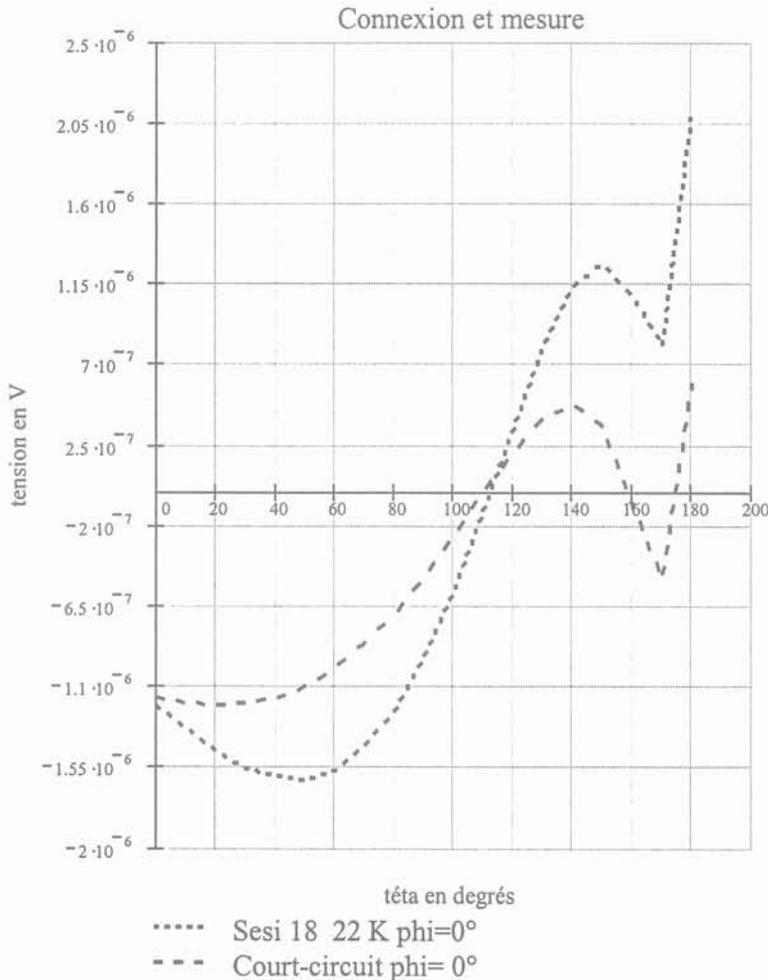


Figure IV.11. Rayonnement de la SESI 18-22K et de sa connectique seule.

La perturbation autour de  $\theta = 180$  est brutale : elle doit être attribuée à la partie du câble qui, à cet endroit, est proche de la sonde. Il n'en demeure pas moins que le rayonnement

de l'amenée de courant est partout grossièrement égal à la moitié de celui du composant alimenté. La soustraction des deux courbes élimine une bonne part de la contribution de l'alimentation. Observons cependant que le champ attribué à l'amenée de courant inclut celui rayonné par le fil ajouté pour réaliser le court-circuit alors que ce fil est absent lorsque le composant est alimenté. On soustrait un champ qui ne devrait pas l'être...

Ces courbes suscitent plusieurs observations. Tout d'abord, en dépit de la faiblesse des signaux à mesurer, le bruit de la mesure semble ne plus constituer un obstacle sur le chemin d'une caractérisation précise. Ensuite, lors du test du composant complet, la contribution de la connectique au rayonnement observé est importante. Elle est probablement responsable de la perte de la symétrie de rotation autour de Oz car, même en supposant que le rayonnement propre du composant est toujours celui d'un dipôle parallèle à Oz, le moment dipolaire de la spire d'alimentation n'est ni placé à l'origine du repère, ni nécessairement parallèle à Oz. Enfin, le câble coaxial d'amenée de courant n'est pas innocent. La nullité supposée de son rayonnement est mise en défaut dès qu'il est courbé : près de  $\theta = 180^\circ$ , toutes les courbes le montre.

#### **IV.2.4 Comparaison SESI 18-22K / tore équivalent.**

D'un point de vue industriel, il est intéressant de comparer les champs rayonnés par deux composants censés remplir la même fonction. Dans ce but, après avoir caractérisé le rayonnement de la SESI 18 22K (d'inductance  $22,4 \mu\text{H}$ ), nous allons caractériser celui du tore équivalent qu'elle remplace. Comme la SESI, le tore est alimenté par un courant purement sinusoïdal de  $1,2 \text{ Aeff}$  à  $250 \text{ kHz}$  et la photo ci-dessous montrent la position dans laquelle il est caractérisé.

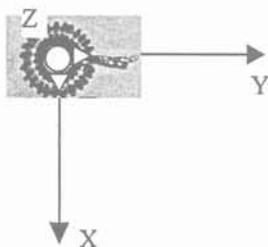


Figure IV.12. Positionnement du tore équivalent à la SESI 18-22K durant sa caractérisation.

Comme pour la SESI, nous avons comparé l'induction mesurée composant alimenté avec l'induction résiduelle composant court-circuité. Les conditions de mesures étaient identiques à celles choisies pour la SESI initialement (1,2 A). Les résultats obtenus (Fig. IV.13) sont plus favorables que pour la SESI : le rapport des inductions relevées avec et sans court-circuit est un peu plus grand, si bien que la correction d'amenée de courant devrait être plus précise.

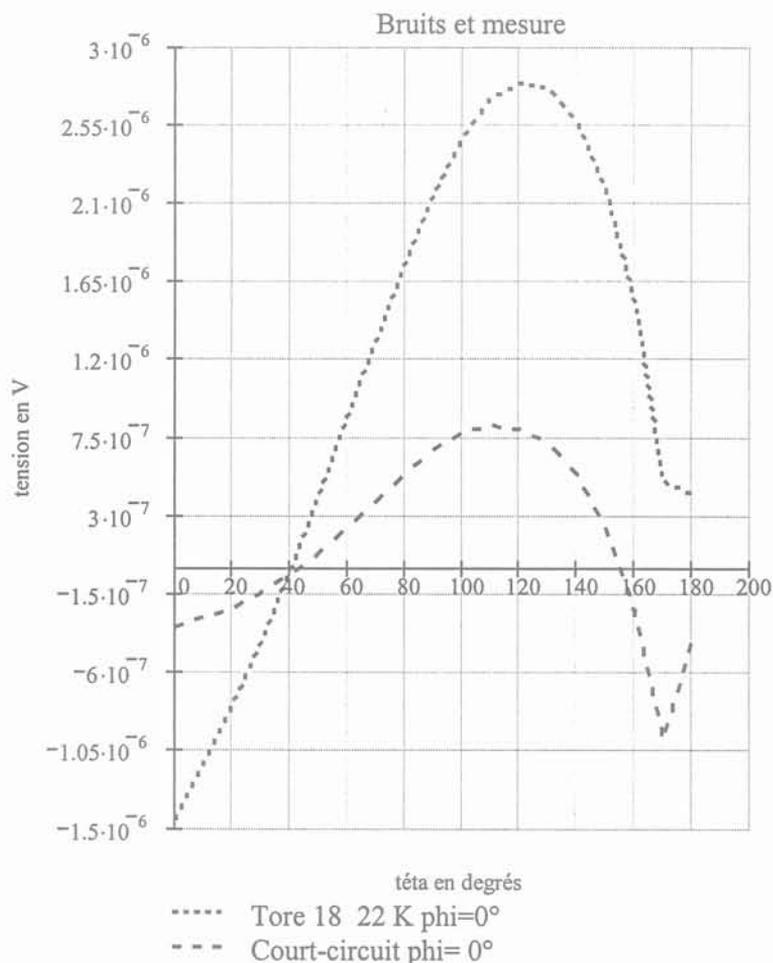


Figure IV.13 : Le tore équivalent à la SESI 18-22K et la connexion.

Avertissement : Pour la plupart des mesures qui suivent, la part imputée à l'amenée de courant est soustraite. Cette correction n'est pas parfaite, nous l'avons dit, et des irrégularités des courbes subsistent autour de  $\theta = 180^\circ$ . Elles sont essentiellement dues au câble d'amenée de courant. Afin d'éviter des redites, nous ne mentionnerons plus ce phénomène et nous analyserons les courbes en omettant les points proche de  $\theta = 180^\circ$ .

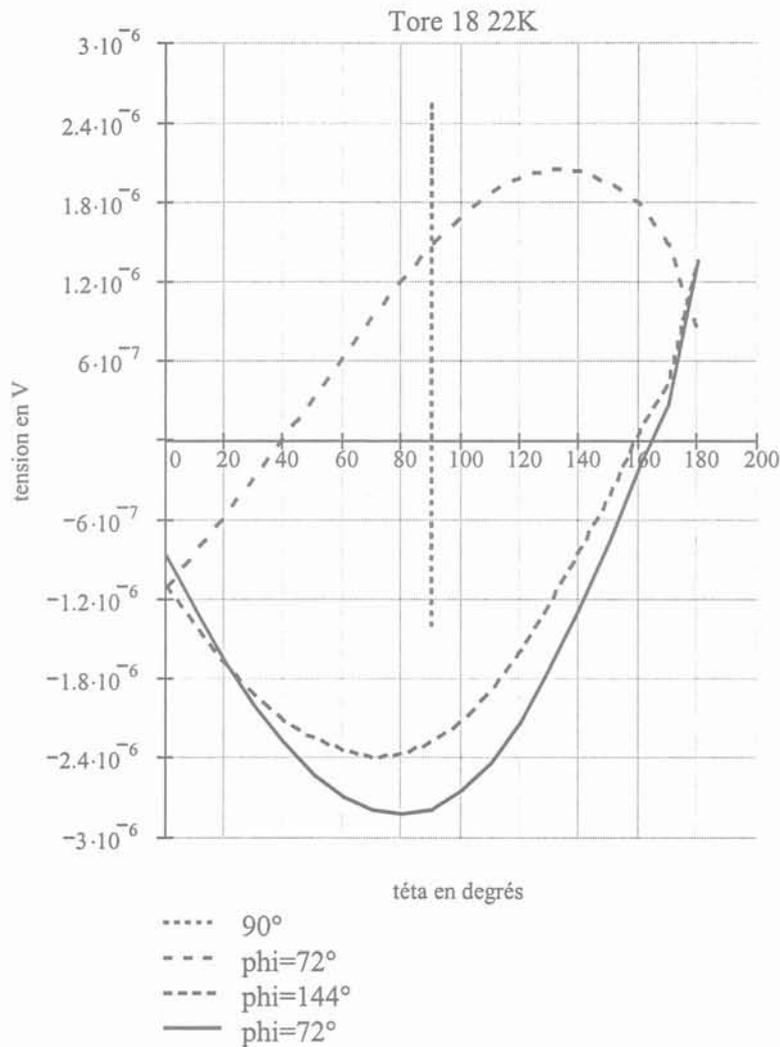


Figure IV.14. Rayonnement du tore équivalent à la SESI 18-22K.

Il est difficile de comparer directement les courbes présentées pour savoir lequel du tore ou de la SESI rayonne le plus car les rayonnements ne présentent pas la même distribution angulaire. On peut, au mieux, remarquer que le maximum de tension recueillie est voisin de  $3 \mu\text{V}$  pour les deux composants. Que le champ soit essentiellement dipolaire dans les deux cas est plausible mais son orientation n'est pas la même pour les deux composants. Il faudra donc évaluer les composantes multipolaires pour conclure sérieusement. On peut en revanche remarquer que si le rayonnement du tore semble bien être dipolaire l'orientation de son moment est totalement inattendue : il est au minimum à  $60^\circ$  de son axe !

Ces essais préliminaires montrent que la connaissance du rayonnement de l'amenée de courant (câble + connexion) est indispensable pour évaluer le champ rayonné par le composant seul. Ce qui apparaît gênant ici est, à la réflexion, un résultat intéressant de ce

travail : nous savons désormais qu'un câble coaxial, même de très bonne qualité, émet et donc reçoit, dès lors qu'il n'est pas rectiligne et/ou vrillé. Ce point, qui mériterait d'être précisé, n'a pas été intégré dans la conception du banc et il est probable qu'il suscitera quelques modifications à l'avenir.

Sur le plan industriel, on peut déduire de ces premières mesures que le rayonnement maximum de la SESI est du même ordre que celui du tore. Après le calcul des composantes multipolaires le module du moment dipolaire des composants sera connu et on saura quelle erreur on commet en négligeant les autres termes. La comparaison sera alors fondée.

#### IV.2.5 Comparaison SESI 15 12K / tore équivalent.

Cette seconde comparaison concerne la SESI 15 12K, d'inductance  $2 \mu\text{H}$ , et son tore équivalent. Les deux composants sont alimentés par un courant efficace de  $1,5 \text{ A}$  à la fréquence de  $250 \text{ kHz}$ . Nous mesurons le champ tous les  $36^\circ$  en  $\phi$  et tous les  $10^\circ$  en  $\theta$ . Pour chaque valeur de  $\phi$  nous traçons la valeur de l'induction en fonction de  $\theta$  (Fig. IV.15). Sur les 10 courbes présentées, la contribution de l'amenée de courant est déduite.

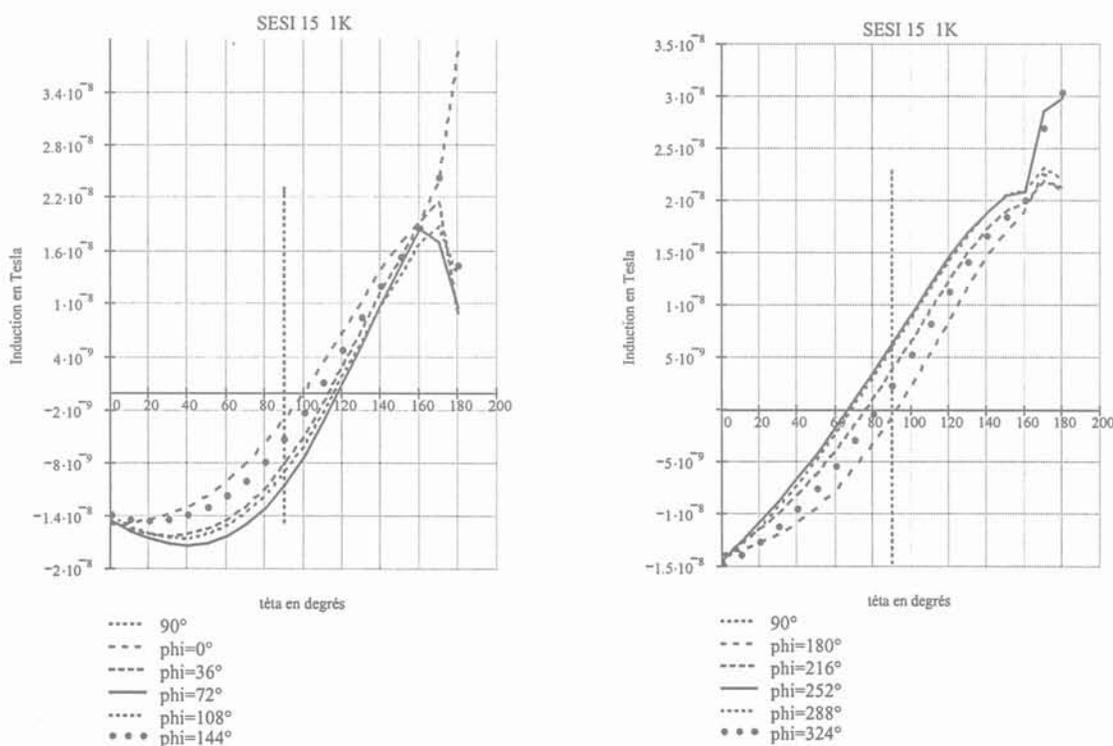


Figure IV.15. Rayonnement de la SESI 15-12K.

L'induction maximale mesurée pour la SESI avoisine 15 nT. Cette valeur est proche de celle mesurée pour le tore qui avoisine 18 nT (Fig. IV.16). Les champs maximums rayonnés par le tore et la SESI sont donc du même ordre de grandeur.

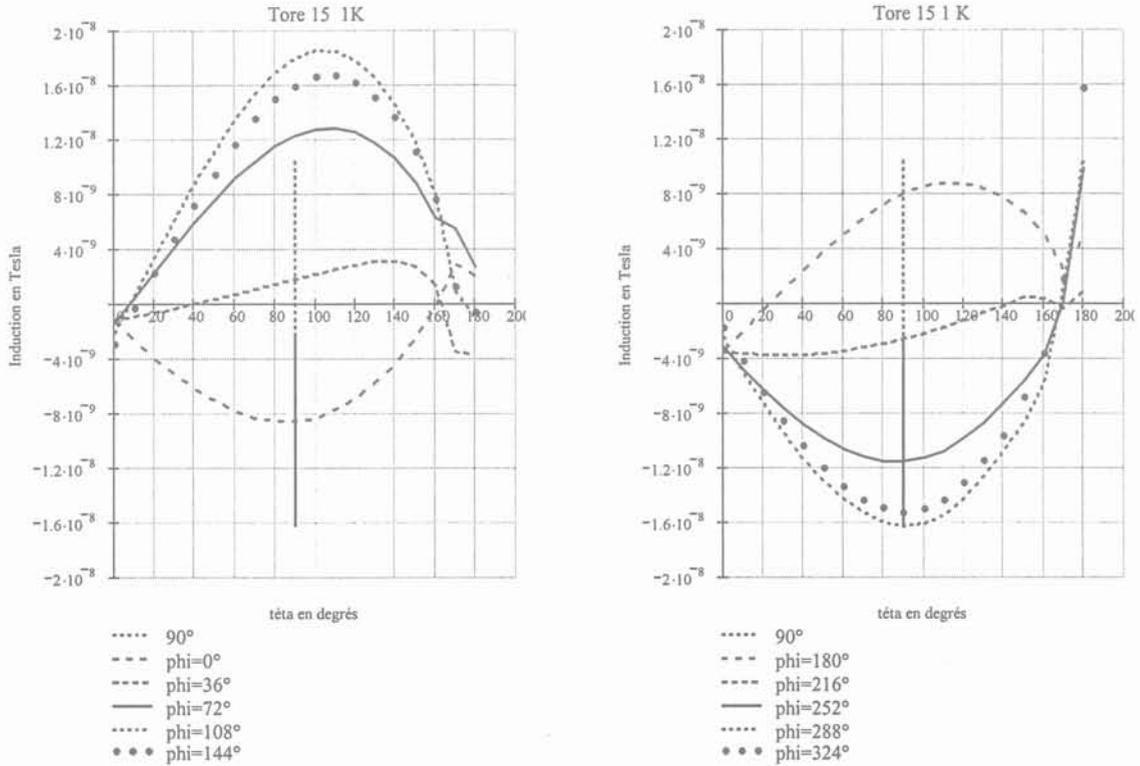


Figure IV.16. Rayonnement du tore équivalent à la SESI 15-12K.

Le champ rayonné par la SESI est, comme celui d'une spire d'axe Oz, maximum vers les pôles. Contrairement à ce que nous pensions, ce n'est pas le cas du tore et cela confirme les observations faites à propos du tore précédent. Une étude plus détaillée du mode d'émission des composants est développée dans la partie IV.4.

#### IV.2.6. Efficacité du blindage

Afin de fournir un composant adapté à des environnements sensibles; Microspire a développé une variante de la SESI 15 12K équipée d'un blindage. Afin de chiffrer l'efficacité de ce blindage, les émissions de deux composants : l'un muni d'un blindage, l'autre pas sont comparées. Les deux composants sont alimentés par un courant efficace de 0,74 A à la fréquence de 250 kHz et le champ est mesuré tous les  $36^\circ$  en  $\phi$  et tous les  $10^\circ$  en  $\theta$ . Les mesures sont effectuées à 17 cm.

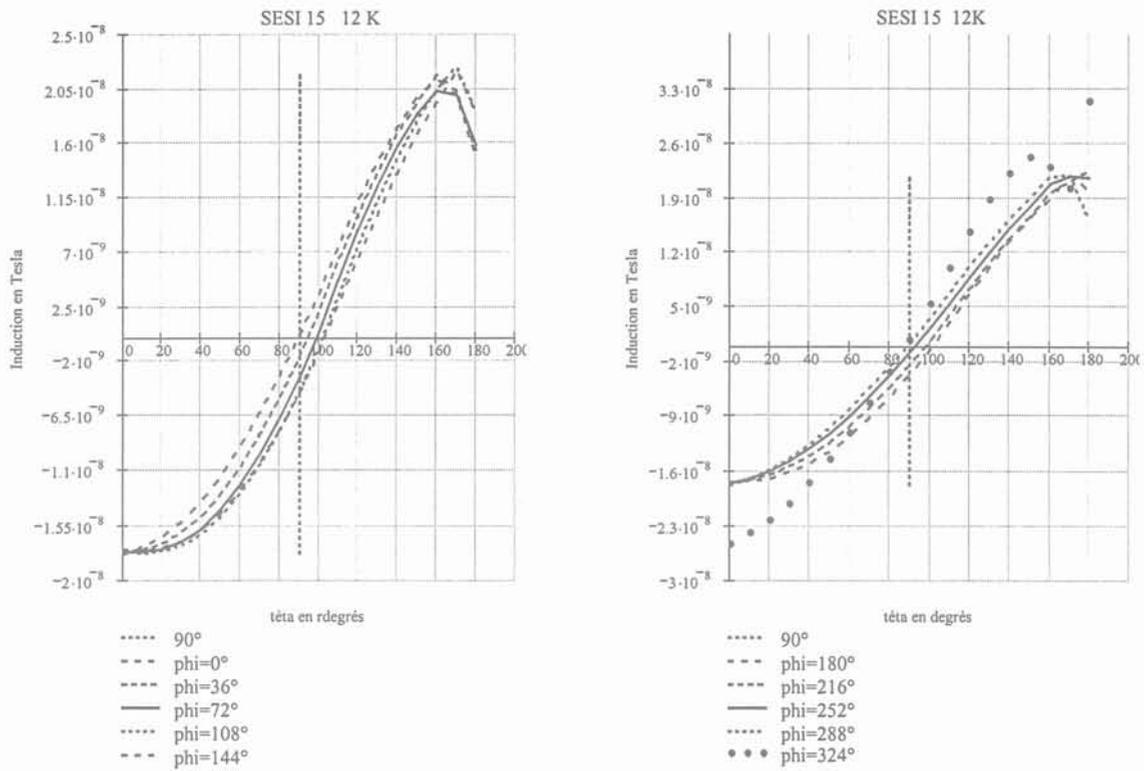


Figure IV.17. Induction rayonnée par la SESI 15-12K standard.

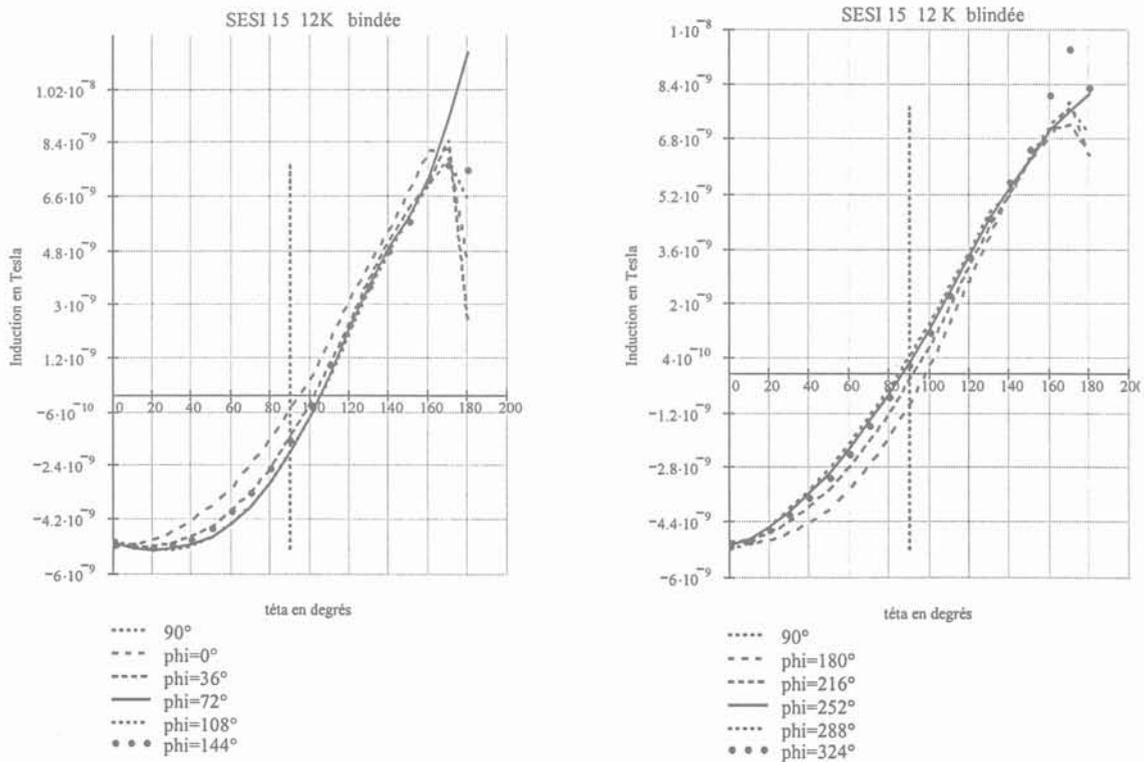


Figure IV.18. Induction rayonnée par la SESI 15-12K blindée.

Comme nous l'avons déjà dit, la SESI rayonne à peu de choses près comme une spire d'axe Oz. L'induction maximale relevée par la sonde est de l'ordre de 16 nT pour la SESI standard contre 5 nT pour la SESI blindée (figure IV.17). Cette fois la conclusion est nette : le blindage est efficace, il réduit d'un facteur supérieur à trois l'induction rayonnée.

#### **IV.2.7 Inversion des rôles composant antenne.**

A bien y réfléchir, chacune des mesures effectuées est une mesure de mutuelle inductance : le courant injecté dans un système magnétique induit une tension qui est mesurée et c'est le quotient qui nous intéresse. Dans le cadre de la magnétostatique et tant que le système testé est linéaire et passif, la réciprocité s'applique : l'injection d'un courant identique dans la sonde fait apparaître la même tension aux bornes du composant [DEGAUQUE-HAMELIN Chapitre 10].

Nous allons vérifier ceci en utilisant le banc de mesure de façon originale : nous inversons le rôle de la sonde de champ et du composant. Nous allons essayer de retrouver ainsi les caractéristiques des deux SESI déjà testées. Les autres conditions de mesure sont maintenues. Le composant est placé au centre du repère et orienté comme précédemment. La distance sonde composant est de 17 cm et le pas du déplacement angulaire est de  $72^\circ$  en  $\phi$  et de  $10^\circ$  en  $\theta$ . La sonde de mesure est traversée par un courant de 0,5 A à 250 kHz.

Pour retrouver exactement les résultats précédents, il aurait fallu corriger l'effet de l'amenée de courant, c'est à dire soustraire la tension induite dans l'amenée court-circuitée. Ceci n'a pas été fait. Les formes de courbes sont pourtant très semblables et les tensions obtenues en  $\theta = 0$ , ramenées à un même courant injecté sont de 2,5  $\mu\text{V}$  dans un cas contre 3,5  $\mu\text{V}$  dans l'autre. Il est possible qu'une erreur se soit glissée en notant la valeur du courant injectée mais nous n'avons pas eu le temps de le vérifier.

En revanche, et ce résultat de serait pas remis en cause par l'erreur évoquée ci-dessus, les tensions relevées aux bornes de la SESI standard (Fig. IV.19) sont à peu près 3 fois supérieures à celles recueillies par la SESI blindée (Fig. IV.19). Ceci confirme que, pour une même excitation, la SESI blindée est moins susceptible que le composant sans blindage.

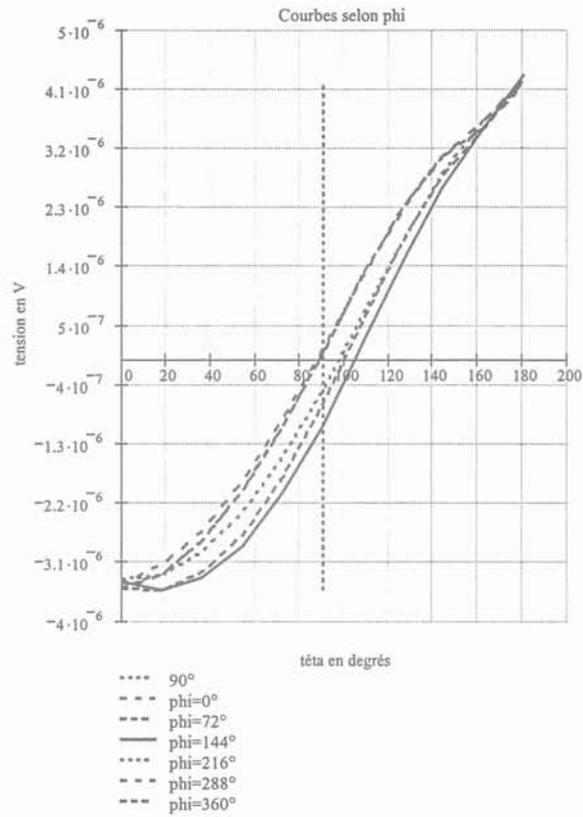


Figure IV.19. Susceptibilité à l'induction de la SESI 15-12K.

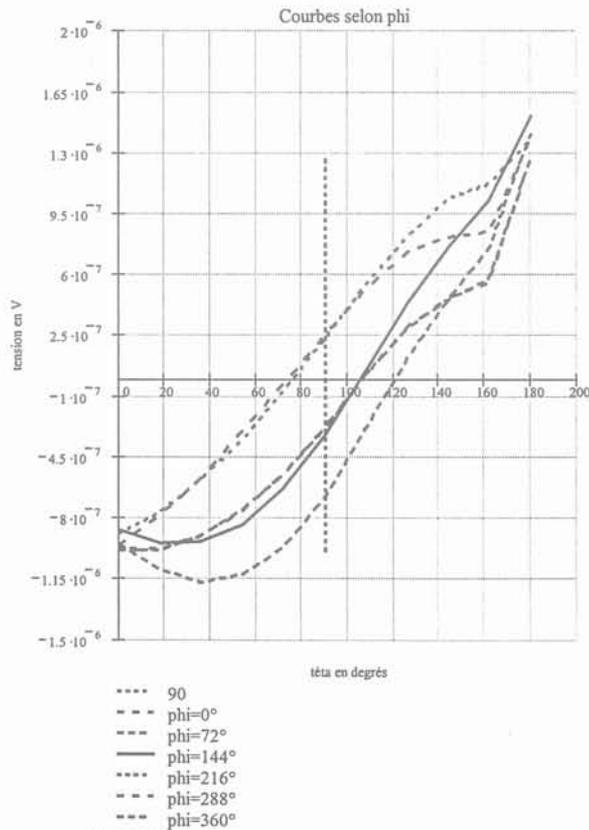


Figure IV.20. Susceptibilité à l'induction de la SESI 15-12K blindée.

Ainsi, sur le plan expérimental un choix s'offre à nous. Pour qu'une mesure de mutuelle soit peu perturbée par le bruit, il faut que le côté alimenté soit adapté la source pour que l'injection soit aussi grande que possible et que l'autre côté présente une l'impédance telle que la détection synchrone puisse délivrer son meilleur facteur de bruit. L'inversion des rôles testée ici incite à injecter le courant du côté le plus favorable pour cette double adaptation. Ceci peut changer d'une position angulaire à l'autre, d'une fréquence à l'autre et surtout, d'un composant à l'autre. A nous de penser à cette possibilité.

### IV.3. Coefficients multipolaires et comportement dipolaire.

La valeur des 15 composantes recherchées a été calculée pour 4 inductances. Tant que le comportement reste linéaire, ces composantes ne dépendent pas du courant injecté.

Rang	Coefficients	SESI 15 1K	TORE 15 1K	SESI 15 12K	SESI 15 12K blindée
0	$\beta_{1,1}$	1.403e-4	-2.637e-4	6.031e-5	3.677e-5
1	$a_{1,0}$	-2.933e-4	-3.694e-5	-6.912e-4	-2.063e-4
2	$\alpha_{1,1}$	2.182e-5	1.398e-4	-6.858e-5	-6.112e-6
3	$\beta_{2,2}$	-5.114e-7	-5.980e-7	-2.040e-7	-2.073e-7
4	$\beta_{2,1}$	4.758e-7	1.417e-6	2.011e-6	6.378e-7
5	$a_{2,0}$	4.060e-6	-2.427e-7	6.130e-6	3.270e-6
6	$\alpha_{2,1}$	5.317e-7	-1.178e-6	1.752e-6	1.918e-7
7	$\alpha_{2,2}$	-4.997e-8	-6.449e-7	1.618e-8	7.688e-8
8	$\beta_{3,3}$	-5.079e-9	1.008e-8	7.880e-9	2.629e-9
9	$\beta_{3,2}$	-1.333e-8	1.029e-8	-2.881e-9	-6.319e-9
10	$\beta_{3,1}$	4.629e-8	3.899e-8	4.442e-8	3.928e-8
11	$a_{3,0}$	-6.522e-8	1.068e-8	-1.029e-7	-4.914e-8
12	$\alpha_{3,1}$	8.936e-9	4.055e-8	1.188e-8	1.700e-8
13	$\alpha_{3,2}$	6.615e-9	-2.038e-8	2.109e-8	-1.513e-8
14	$\alpha_{3,3}$	-5.817e-9	-4.926e-9	2.370e-8	-4.044e-9
<b>Erreur :</b>		3.093E-10	3.891E-10	5.262E-10	1.319E-10

Tableau IV.1. Composantes multipolaires de l'émission de 4 inductances distinctes.

Afin de tester la plausibilité de cette décomposition, nous avons calculé, pour chaque composant et pour un courant de 1A, l'écart quadratique moyen distinguant l'induction radiale

mesurée de celle reconstituée à partir des 15 coefficients. Ces erreurs sont de l'ordre de la centaine de pT ce qui est convenable pour des inductions dont le maximum avoisine la dizaine de nT.

A 13,5 cm l'induction émise par les 4 composants est décrite en grande partie par les 3 premiers coefficients c'est-à-dire par les 3 composantes du moment dipolaire. Etant donné que nous sommes ici à 8 ou 9 fois la demi arête du composant, nous pouvons nous y attendre. Puisque le module de l'induction d'un dipôle ne varie que dans un rapport 2 sur la sphère, ces composants offriront peu de zones d'ombre pour se cacher de l'induction rayonnée.

Comme mentionné lors de la présentation des courbes, l'émission des SESI ressemble à celle d'une spire d'axe Oz : la composante la plus forte est  $a_{1,0}$ . Ceci ne constitue tout de même qu'une approximation grossière qui est grandement améliorée par la prise en compte de l'orientation réelle du moment dipolaire ( $25^\circ$  d'écart pour la SESI 15 1K).

L'émission du tore, essentiellement dipolaire elle aussi, n'est pas orientée comme celle des SESI. Sa composante la plus grande est  $\beta_{1,1}$ , ce qui indique que le moment dipolaire est à peu près parallèle à Oy en réalité, il est à  $84^\circ$  de l'axe du tore....

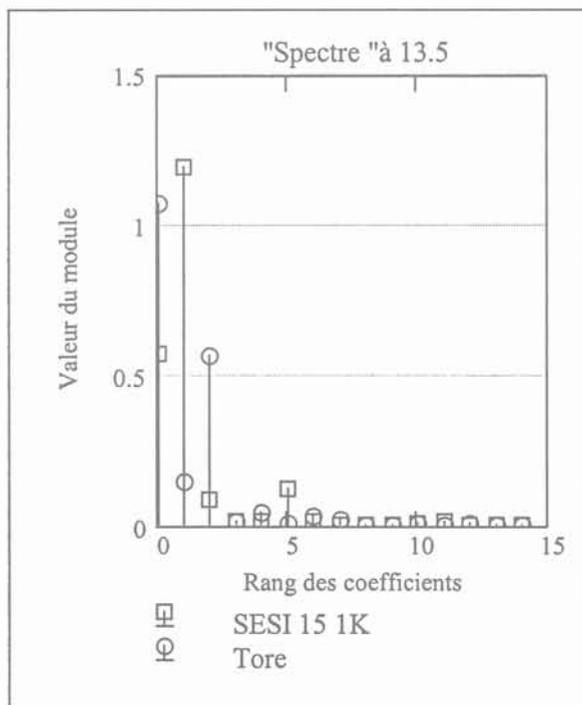


Figure IV.21. Spectres de la SESI 15-12K et du tore équivalent.

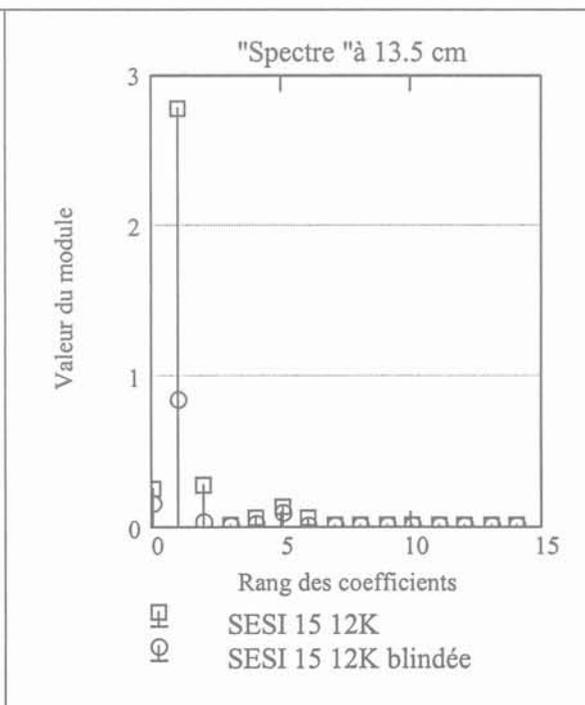


Figure IV.22. Spectres de la SESI 15-12K et de la SESI 15-12K blindée.

La zone grisée du tableau IV.1 est celle des trois composantes du moment dipolaire que nous pouvons utiliser en première approximation pour décrire le champ. Nous avons calculé le module de chaque type de champ à la distance de mesure. Ceci se fait en appliquant le produit hermitique, défini au chapitre I, au potentiel vecteur ou scalaire. Ainsi on peut déterminer à la distance considérée la contribution de chaque coefficient au rayonnement total. On parlera du "spectre" de rayonnement à la distance considérée.

Nous avons aussi tracé le taux de distorsion de l'approximation dipolaire en fonction de la distance. Nous estimons l'approximation suffisamment précise si ce taux est inférieur ou égal à 15 %. Ainsi l'approximation dipolaire ou la donnée des 15 coefficients est équivalente jusqu'à environ la moitié de la distance de mesure, soit 7 cm.

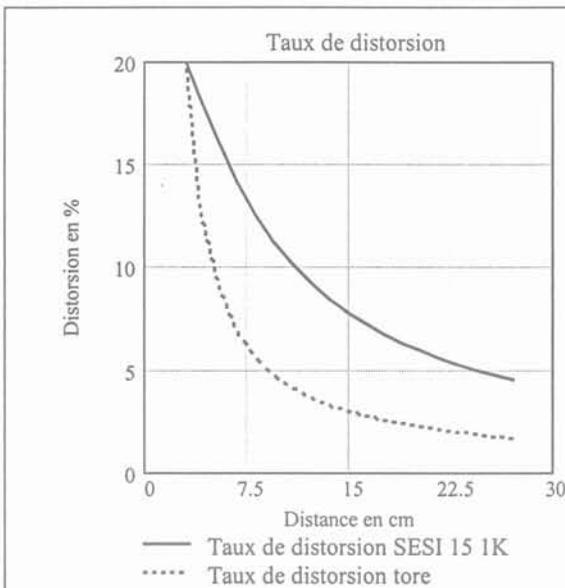


Figure IV.20. Taux de distorsion de l'approximation dipolaire pour la SESI 15-12K et le tore équivalent.

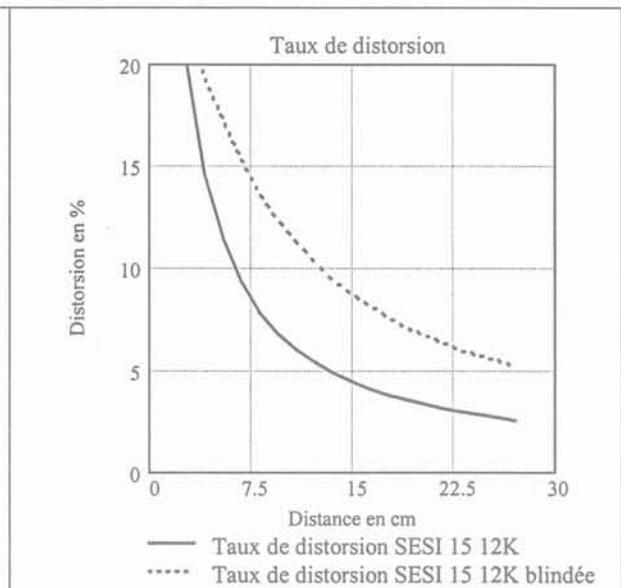


Figure IV.21. Taux de distorsion de l'approximation dipolaire pour la SESI 15-12K et de la SESI 15-12K blindée.

Pour finir, la figure IV.22 représente le module de l'induction rayonnée à la distance de mesure par la SESI 15 1K et par son tore équivalent. Nous avons adopté la représentation en courbes de niveaux décrite dans la partie IV.1.

Le module de l'induction rayonnée par la SESI est presque uniforme. On ne peut donc pas trouver un emplacement où le composant victime serait moins exposé.

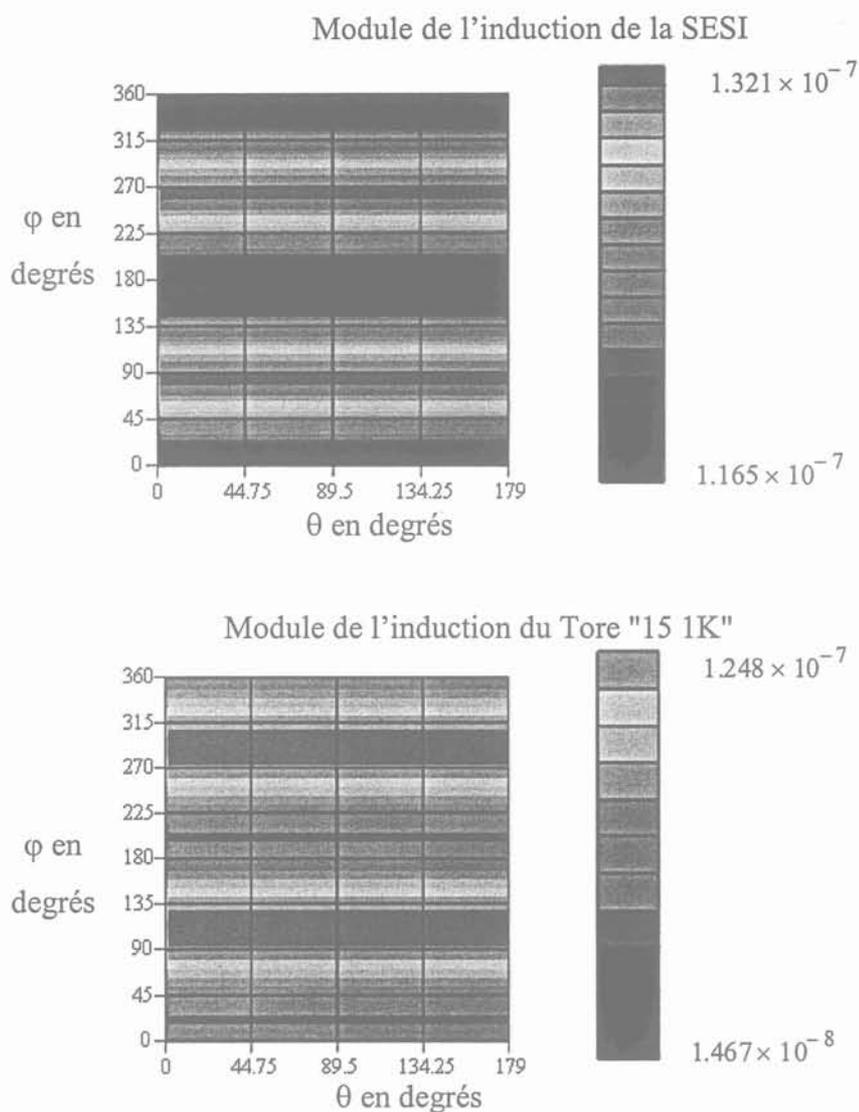


Figure IV.22. Représentation par des courbes de niveaux du module de l'induction émise par la SESI 15 1K et par le tore équivalent.

L'induction émise par le tore montre des zones où le champ est environ 9 fois plus petit que sa valeur maximale. Cette information est une première indication pour le positionnement de composants de ce type.

Souvent, comme c'est le cas pour la SESI 15-12K, l'étude du module de l'induction ne sera pas suffisante et il faudra avoir recours à l'étude des composantes de l'induction. En effet, le couplage dépend entre autre de l'orientation du composant victime et de sa direction privilégiée de susceptibilité.

Seules les comparaisons de toutes les composantes des grandeurs vectorielles décrivant le rayonnement et la susceptibilité permettent à coup sûr d'identifier des positionnement de couplage minimum entre deux composants

## **IV.4. Conclusion.**

Au cours de ce chapitre nous avons présenté la première utilisation du banc de mesure pour caractériser le rayonnement de composants industriels. Pour cette première étude nous nous sommes intéressés à des composants de très petites tailles. En dépit du fait qu'il a entraîné des difficultés expérimentales, ce choix a permis d'établir quelques informations intéressantes sur le fonctionnement du banc de mesure, sur champ rayonné par les composants ainsi que sur celui du à la connectique. Faute de temps, quelques caractérisations n'ont pas été exploitées complètement et quelques vérifications complémentaires sont absentes.

Une grande satisfaction réside dans le fait qu'en dépit de la faiblesse des signaux à mesurer, la dispersion des valeurs n'a jamais constitué un obstacle à la caractérisation précise d'un composant. En revanche, la sensibilité de l'électronique a mené à la découverte de phénomènes non pris en compte lors de notre réflexion métrologique. Ainsi, l'émission des câbles coaxiaux courbés incite à la fois à étudier ce phénomène méconnu et à éviter de courber ces câbles sur le banc. Même si cette électronique fonctionne bien, il reste une marge de progression. Ainsi, nous avons vu que dans certains cas, l'inversion composant sonde peut être utile, la surface et le nombre de spires n'ont pas été optimisés, la surface de la spire d'alimentation peut probablement être réduite...

L'influence de la connectique sur l'induction mesurée est apparue avec une ampleur insoupçonnée. En fait, en dépit de leur nom, les composants magnétiques n'émettent ni plus ni moins de champ magnétique que les autres composants parcourus par des courants d'amplitude analogue. Nous avons vu que, avec ou sans circuit magnétique, le champ rayonné par une bobine ne varie que d'un rapport cinq. On peut en déduire que réduire le rayonnement des composants magnétiques ne sera utile que s'il est accompagné d'un effort analogue concernant les autres composants et le câblage. Cette situation est connue en électronique analogique : le constructeur d'un composant performant est obligé, par le biais de notices d'applications, d'indiquer à sa clientèle comment implanter le composant, quelles technologies

choisir pour les composants associées.... C'est à ce prix que les clients obtiennent les performances visées et que le fournisseur les garde.

Concernant les composants étudiés, nous avons établi que les SESI ne rayonnent pas davantage que les tores équivalents, et que le blindage adjoint au SESI réduit leur rayonnement et leur susceptibilité par un facteur 3. Pour autant, nous n'avons pas tout compris. Pourquoi le moment dipolaire des tores est-il si incliné sur leur axe ? Quelle est la part due aux connexions du composant ? La réduction de l'émission des composant devra probablement prendre en compte la disposition des picots de sortie...

Il est apparu clairement que la comparaison des courbes présentées ici est difficile. Seule la connaissance des composantes multipolaires mène à des conclusions fiables. En revanche, il est possible que sur ce plan on puisse revoir les exigences à la baisse. Dans plusieurs cas étudiés la description par le moment dipolaire s'est révélée suffisante et il n'est pas exclu que cette description simple suffise, dans de nombreux cas, à une évaluation rapide.

Faute de temps, nous n'avons pas mis en œuvre la totalité de nos outils théoriques : l'étude des déphasages champ courant notamment devrait être instructive. Nous n'avons pas non plus exploité les présentations élaborées au chapitre 1. Dans un avenir proche, ce banc sera permettra de savoir comment l'induction émise dépend de la structure du composant. Des études pourront par exemple être menées sur le rôle du matériau ou sur celui de la géométrie du circuit magnétique. A l'instar de ce qui se fait pour les navires, il est envisageable d'annihiler le champ émis à l'aide de boucles de courant intégrées au composant.





Conclusion  
Générale



## CONCLUSION GENERALE

Cette thèse représente, pour le LEG et Microspire, un premier pas vers la compréhension des couplages magnétiques parasites. Cette étude, née d'une préoccupation industrielle, s'est révélée bien plus difficile que prévu. Nous n'avons trouvé aucune étude antérieure couvrant ce sujet dans ce domaine de fréquence (100 kHz – 10MHz). Des mathématiques compliquées ont du être employées pour mener à bien l'approche analytique et la caractérisation expérimentale a nécessité des mesures de très faibles tensions.

Néanmoins, à l'issue de cette thèse, plusieurs résultats théoriques sont acquis. Nous savons comment décrire l'induction émise par un composant à l'aide de 15 paramètres et souvent moins. Nous savons aussi que ces paramètres caractérisent également la sensibilité du composant au champ extérieur. Les outils mathématiques développés ont amené un langage descriptif synthétique et précis : champ dipolaire, quadripolaire, tenseur moment d'ordre  $n$ .... Un gros effort de simplification de la présentation et de représentation graphique offre au lecteur la possibilité de se familiariser rapidement avec les variations des fonctions harmoniques sphériques, si utiles pour décrire les champs.

La définition, la conception, la réalisation et la mise au point du banc de mesure ont nécessité un long travail initié un peu avant la thèse et poursuivi durant toute sa durée. Les inductions à mesurer se chiffrent en nT et la résolution spatiale souhaitée limite les tensions à mesurer à quelques  $\mu$ V. De nombreux essais et validations ont été nécessaires pour se rapprocher des limites fixées par les spécifications des appareils (bruit actuel : 30nV). Le choix et la disposition du moindre câble se sont révélés critiques. Les pièces métalliques ont du être éloignées et la disposition relative des divers appareils optimisée. Aujourd'hui, indépendamment des montages qui fonctionnent à proximité, les mesures sont reproductibles, le bruit aléatoire ne nous gêne plus : il est très inférieur au nT. Lorsque nous parlons de parasites, nous faisons référence aux rayonnements imputables, en grande partie, aux amenées de courant : ils s'ajoutent à celui du composant étudié et gênent son observation.

Les mesures sont maintenant automatisées : le banc commande les déplacements de la sonde et procède à l'acquisition des données. Lors d'une caractérisation il synthétise par 15 paramètres les valeurs relevées pour l'induction en plus d'une centaine de points répartis sur

une sphère. La théorie développée montre comment déduire de ces paramètres : l'induction en tout point extérieur au composant ou la tension induite aux bornes du composant par un champ extérieur quelconque. Ainsi résumées, les caractéristiques correspondantes du composant pourraient être mentionnées sur la feuille de spécifications par le constructeur.

Une première série de mesures a porté sur des composants industriels de Microspire. Ces mesures étaient délicates car les composants n'émettaient pas beaucoup. Néanmoins, nous avons mis en lumière l'importance des amenées de courant jusqu'au composant, nous avons chiffré l'effet d'un blindage, nous avons comparé les champs de deux composants concurrents. Si certaines mesures ont apporté des confirmations, d'autre en revanche ont surpris. Ainsi par exemple, le moment dipolaire d'une inductance torique est apparu très incliné par rapport à l'axe du tore.

Surmonter les difficultés a été long. Nous souhaitons bien sûr aller plus loin.

Plus loin dans l'étude théorique. Tant que la magnétostatique est applicable, notre approche semble valable en présence de matériaux magnétiques homogènes, isotropes et linéaires, même si certains points restent à étayer concernant le couplage des composants dans ce cas. En revanche, en raison de l'énorme permittivité des ferrites Mn-Zn, la longueur d'onde dans ce matériau est centimétrique dès 1 MHz. Peut-on encore parler de champ proche à 10 cm ? La symétrie de la matrice impédance des systèmes couplés passifs linéaires est établie en statique (magnétostatique pour les mutuelles inductances, électrostatique pour les coefficients d'influences, loi d'Onsager pour les résistances) alors qu'elle semble applicable en très haute fréquence (réciprocité). Sur quelle symétrie physique repose-t-elle ? Quelle est sa limite de validité ?

Plus loin dans le perfectionnement du banc de mesure. Plusieurs modifications, déjà à l'étude, visent à simplifier l'utilisation, à améliorer l'ergonomie de l'interface informatique, à rendre les résultats encore plus reproductibles, à en simplifier la présentation. Cependant, deux objectifs prioritaires ont été dégagés : optimiser la sensibilité des sondes (surface, nombre de spires,...) et calibrer précisément et simplement les mesures de déphasages. Pour comprendre les déphasages observés entre l'induction mesurée et le courant source, il a fallu examiner les circuits internes de la détection synchrone et en particulier de ses filtres. A 10 MHz, un degré de déphasage correspond à un décalage temporel de 0,3 ns : les temps de

propagation dans les câbles ne peuvent pas être négligés. Pour interpréter les déphasages avec sécurité, il faut mettre au point une procédure d'étalonnage aussi directe que possible.

Ce travail a été confié à Lehdi Khismoune qui a débuté une thèse C.N.A.M, en collaboration avec Microspire, le 1<sup>er</sup> septembre 2001. Toujours à propos de la mesure, une étude théorique large devrait être conduite. Le choix de la composante radiale était le plus simple. Est-ce le meilleur sur le plan de la sensibilité ? Quel est le meilleur échantillonnage spatial ? Quelle est la méthode la plus précise pour déduire les composantes du champ des échantillons relevés ? Peut-on réduire le champ émis par l'amenée de courant ?

Plus loin concernant l'étude des composants. Maintenant que le banc de mesure est opérationnel, une étude systématique du rayonnement des composants est envisageable. Le rôle de la géométrie et des caractéristiques des matériaux sur le rayonnement peut désormais être cerné. Pour parvenir à quelques certitudes, il faudra sortir de la caractérisation des composants industriels et confectionner, à titre d'éprouvettes, des composants caricaturaux. Bien entendu les résultats devront être corrélés avec une approche analytique au moins approximative. Pour finir, il sera utile de rapprocher ces observations de simulations à éléments finis. En cette circonstance, les mathématiques développées durant ce travail pourraient se révéler utiles pour déduire les moments multipolaires d'une simulation...

A plus long terme, ces études pourraient déboucher sur un outil d'aide à la conception :

- du composant magnétique pour qu'il émette le moins possible dans tout l'espace ou seulement dans certaines directions
- du circuit électrique pour, par exemple, positionner les différents composants afin de minimiser leurs couplages.

Pour finir sur une note futuriste, il est désormais envisageable de réaliser un scanner à convertisseurs. Le déplacement de l'antenne de mesure peut être remplacé par la commutation d'une multitude de boucles fixes et certains systèmes électroniques peuvent se substituer à la détection synchrone pour traiter un signal périodique mais non sinusoïdal. Un appareil de ce style permettrait, au-delà de la confrontation aux normes de la CEM rayonnée, de localiser les principales sources de perturbation...





# Bibliographie



## Bibliographie

- [AYANT] Y. AYANT et M.BORG  
*Fonctions spéciales.*  
Dunod, Paris, 1971
- [BERNEHEM] M.BERNEHEM  
*Création et mesure de champs magnétiques quasi dipolaires.*  
L'onde électrique 1983, vol 63, n°3
- [DEGAUQUE-HAMELIN] P.DEGAUQUE et J.HAMELIN  
*Compatibilité électromagnétique : bruits et perturbations radioélectriques.*  
Dunod 1990
- [DURAND] E.DURAND.  
*Magnétostatique.*  
Masson et Cie 1968
- [IEE] *IEE standard methods for measuring electromagnetic field strength of sinusoidal continuous waves, 30 Hz to 30 GHz*  
IEE standard collection, electromagnetic compatibility, 1996
- [ISKRA] S.ISKRA, I.P.MACFARLANE  
*H-filed sensor measurement errors in the near-field of a magnetic dipole source.*  
IEE transactions on electromagnetic compatibility, vol 31, n°3  
Août 1989

- [KANDA 84] M.KANDA  
*An electromagnetic near-field sensor for simultaneous electric and magnetic field measurement.*  
IEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Août 1984
- [KANDA 99] M.KANDA,  
*An optically linked three-loop antenna system for determining the near field characteristics from an Electrically small source.*  
EMC 1999 ZURICH
- [KERADEC] J.P. KERADEC, E.LAVEUVE, J.ROUDET  
*Multipolar developpement of vector potential for parallel wires, application to the study of eddy currents effects in transformer winding.*  
IEEE Transactions on magnetics, vol 27 ,n°5 septembre 1991.
- [KÖHLER] W. KÖHLER  
*Calibration of low frequency electric and magnetic field probes.*  
EMC 1996 ROME
- [LANDAU-LIFSHITZ 1] L.LANDAU, E. LIFSHITZ  
*Théorie des champs*  
Edition Mir
- [LANDAU-LIFSHITZ 2] L.LANDAU, E. LIFSHITZ  
*Electrodynamique des milieux continus.*  
Edition Mir

- [LE COAT] G.LE COAT  
Discrétion électromagnétique des machines électriques tournantes.  
Thèse, Institut Nationale Polytechnique de Grenoble, Mars 1992
- [LEGRIS] M.LEGRIS  
Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche.  
Thèse, Institut Nationale Polytechnique de Grenoble, Novembre 1996
- [LICHNEROWICZ] A.LICHNEROWICZ.  
Elements de calcul tensoriel.
- [LORANGE 99] J.LORANGE, J.P KERADEC, B.COGITORE ,JL SCHANEN.  
Etude du champ rayonné par les composants magnétiques : les apports du développement.  
NUMELEC 1999
- [LORANGE 00] J.LORANGE, J.P KERADEC, B.COGITORE ,JL SCHANEN.  
Comment caractériser le champ magnétique émis par un composant.  
EPF 2000 LILLE
- [LORANGE 01] J.LORANGE, J.P KERADEC , B.COGITORE, JL SCHANEN, C.BRUN, T.CREUZET.  
Industrial Characterization of the field radiated by a magnetic component. Theoretical and experimental aspect.  
EPE 2001 GRATZ

- [PAPIN,A.KAUFMANN] D.PAPIN, A.KAUFMANN  
*Cours de calcul tensoriel.*
- [PAUL] C.R PAUL  
*Introduction to electromagnetic compatibility.*  
Whiley and Sons 1973
- [SIVARDIERE] J.SIVARDIERE  
*La symétrie en mathématiques,physique et chimie.*  
Collection Grenoble  
Sciences, Presses Universitaires de Grenoble 1995.
- [STANFORD] STANFORD RESEARCH SYSTEM  
SR844 Manual
- [TEKTRONIX] ABC's of probes  
*[http://www.tektronix.com/Measurement/App\\_Notes/ABCsProbes/60W\\_6053\\_7.pdf](http://www.tektronix.com/Measurement/App_Notes/ABCsProbes/60W_6053_7.pdf)*
- [WESTON] D.A.WAESTON  
*Electromagnetic compatibility : principles and applications.*
- [WIKSWOW 84] JOHN P. WIKSOW, Jr and KENNETH R. SWINNEY  
*A comparison of scalar multipole expansions.*  
Journal of Applied Physic, Decembre 1984

- [WIKSWOW 85] JOHN P. WIKSOW, KENNETH R. SWINNEY  
*Scalar multipole expansions and their dipôle equivalents.*  
Journal of Applied Physic, Decembre 1985, vol. 57, n°9
- [WORN] S.B.WORN  
*On the relation between radiated and conducted RF emission tests.*  
EMC 1999 ZURICH

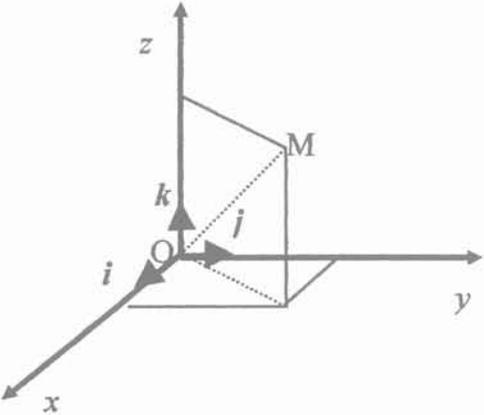
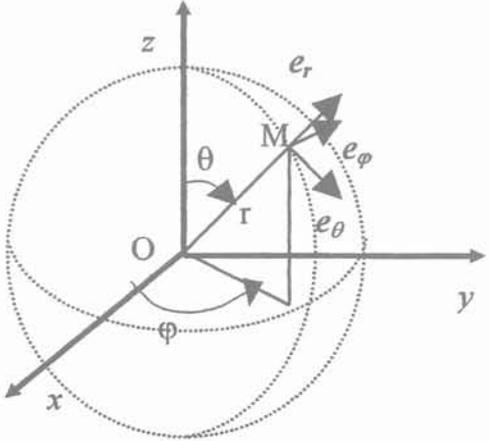




# Annexes



## ANNEXE A. OPERATEURS DIFFERENTIELS EN COORDONNEES CARTESIENNES ET SPHERIQUES.

Repère Cartésien	Repère Sphérique
	
$\begin{bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}$	
$\vec{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$\vec{OM} = \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{bmatrix}$
<p>Soit <math>f</math> une fonction scalaire et <math>\vec{F}</math> une fonction vectorielle de l'espace physique de dimension 3</p>	
$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k}$	$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$
$\vec{\text{rot}}(\vec{F}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \vec{i} + \dots$ $\begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \vec{k}$	$\vec{\text{rot}}(\vec{F}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta \cdot F_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right] \cdot \vec{e}_r + \dots$ $\left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot F_\varphi)}{\partial r} \right] \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r \cdot F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \cdot \vec{e}_\varphi$

$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} F_\varphi$
$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \dots$ $+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Enfin, le laplacien vectoriel s'écrit :

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_x \vec{i} + \Delta F_y \vec{j} + \Delta F_z \vec{k}$$

en coordonnées cartésiennes et

$$\Delta \vec{F} = \begin{bmatrix} \left[ \Delta F_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left( F_r \sin \theta + \sin \theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + F_\theta \cos \theta + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_r \\ \left[ \Delta F_\theta - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{F_\theta}{2} - \sin^2 \theta \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_\theta \\ \left[ \Delta F_\varphi - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{F_\varphi}{2} - \sin \theta \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \cos \theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

en coordonnées sphériques.

Ref : "Calcul et analyse vectoriels", Ch de Cidracs, Dunod.





## **ANNEXE B. HARMONIQUES SPHERIQUES ET DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE.**

### **B.1. Introduction**

Dès que l'on cherche à décrire un champ en coordonnées sphériques, le recours aux fonctions harmoniques sphériques s'avère incontournable. Ces fonctions apparaissent notamment lors de la résolution de l'équation de Laplace où chacune d'elles exprime la variation angulaire d'un potentiel multipolaire. Ces fonctions sont l'objet d'une littérature abondante [Ayant pp. 144-153] si bien que, dans un premier temps, nous nous bornons à résumer leurs définitions et propriétés utiles et à rappeler comment les solutions de l'équation de Laplace s'en déduisent.

Nous montrons ensuite qu'un changement de base simple mène de cette base complexe à une base réelle, bien plus commode dans certains cas, puis nous réécrivons les potentiels et inductions solutions de l'équation de Laplace en faisant appel à ces fonctions réelles.

Expliciter les expressions des harmoniques sphériques en partant de la définition habituelle nécessite de longs calculs. Grâce à la démonstration d'une nouvelle relation de récurrence, nous proposons une méthode beaucoup plus directe pour y parvenir.

Nous montrerons également que, sans recourir aux fonctions de Legendre associées, les séries de Fourier donnent une idée assez précise des harmoniques sphériques.

En magnétostatique, l'équation de Laplace mène à l'induction par le biais du potentiel pseudo-scalaire. Ceci est très utile mais, malheureusement, il n'est pas facile de relier ce potentiel aux courants qui engendrent le champ. Seul le potentiel vecteur permet d'établir ce lien. Nous montrons comment écrire le développement multipolaire du potentiel vecteur et, pour ce faire, nous introduisons une famille de fonctions vectorielles orthonormées que nous nommons "harmoniques sphériques vectorielles". Des fonctions semblables ont été introduites depuis longtemps par Durand [ ] en s'appuyant sur un raisonnement différent mais elles

semblent aujourd'hui oubliées. Nous définirons également les harmoniques sphériques vectorielles et réelles.

## B.2. Harmoniques sphériques.

### B.2.1. Définition.

On appelle "harmonique sphérique" une fonction des coordonnées angulaires sphériques  $\theta, \varphi$  définie par :

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = k_{n,m} \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{jm\varphi} \quad (B.1)$$

où :

-  $n$  est un entier positif ou nul et  $m$  est un entier compris entre  $-n$  et  $+n$

$$- k_{n,m} = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$$

-  $P_n^m(z)$  est la fonction de Legendre associée qui se calcule comme suit :

$$P_n^m(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \cdot \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}} (z^2 - 1)^n \quad (B.2)$$

### B.2.2. Principales propriétés.

Les relations (B.1) et (B.2) suffisent à expliciter complètement les fonctions  $Y_n^m$ . Ces fonctions présentent de nombreuses propriétés intéressantes. Nous ne mentionnons ici que celles qui nous sont les plus utiles.

#### *Dépendance et parité.*

En partant de (B.1) et (B.2), on montre que [Ayant p.146], bien qu'étant linéairement indépendantes, les fonctions  $Y_n^{-m}$  et  $Y_n^m$  se déduisent l'une de l'autre.

$$Y_n^{-m} = (-1)^m \cdot Y_n^{m*} \quad (B.3)$$

On montre également que la parité de la fonction par rapport à l'origine du repère ne dépend que de  $n$ . Etant donné que les coordonnées respectives de deux points symétriques par rapport à l'origine sont  $(\theta, \varphi)$  et  $(\pi - \theta, \varphi + \pi)$  :

$$Y_n^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^n \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{B.4})$$

### Dérivées.

Les dérivées de ces fonctions par rapport aux deux variables présentent des propriétés remarquables. La première découle de la dépendance exponentielle vis à vis de  $\varphi$ . En lui adjoignant l'équation différentielle des fonctions de Legendre associées (B.5) on établit (B.6).

$$\frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = j m Y_n^m(\theta, \varphi)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P_n^m(\cos \theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_n^m(\cos \theta) = -n(n+1) P_n^m(\cos \theta) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \varphi^2} \right] = -n(n+1) Y_n^m \quad (\text{B.6})$$

### Orthogonalité.

L'ensemble des fonctions  $f(\theta, \varphi)$  de carré sommable sur la sphère de rayon unité, constitue un espace vectoriel. Nous définissons, dans cet espace, le produit hermitique (B.7) dont la pondération est uniforme sur toute la surface de la sphère :

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \mathbf{f}(\theta, \varphi)^* \cdot \mathbf{g}(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (\text{B.7})$$

Les  $Y_n^m$  constituent une base orthonormée de l'espace des fonctions  $f(\theta, \varphi)$ , c'est-à-dire que :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_{n'}^{m'}(\theta, \varphi)^* \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \delta_{n, n'} \cdot \delta_{m, m'} \quad (\text{B.8})$$

L'orthogonalité de cette base découle de celle (B.9) des fonctions de Legendre associées et de celle (B.10) des exponentielles complexes :

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) \cdot P_{n'}^{m'}(\cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{2(n+m)!}{(2n+1) \cdot (n-m)!} \delta_{n, n'} \quad (\text{B.9})$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-jm'\varphi} \cdot e^{jm\varphi} \cdot d\varphi = 2\pi \delta_{m,m'} \quad (\text{B.10})$$

*Développement d'une fonction en série des  $Y_n^m$ .*

Les  $Y_n^m$  constituent une base orthonormée, que nous supposons complète, de l'ensemble des fonctions de carré sommable sur la sphère de rayon unité. En conséquence, la décomposition d'une fonction  $f(\theta, \varphi)$  sur cette base s'écrit :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{B.11})$$

Les composantes complexes  $a_{n,m}$  s'évaluent en effectuant le produit hermitique de la fonction de base considérée par la fonction à développer.

$$a_{n,m} = \langle Y_n^m, f \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \varphi)^* \cdot f(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (\text{B.12})$$

### B.3. Résolution de l'équation de Laplace.

#### B.3.1. Equation de Laplace et potentiel pseudo-scalaire.

L'étude du champ régnant dans une région dépourvue de sources conduit, en magnétostatique comme en électrostatique, à l'équation de Laplace. Rappelons qu'en magnétostatique, l'induction dérive, dans le cas général, d'un potentiel vecteur.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \rightarrow \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\text{et : } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}$$

Dans une région dépourvue de courants, le rotationnel de  $\vec{B}$  est nul, ce qui permet de considérer que ce champ dérive d'un potentiel scalaire ou, plus exactement, pseudo-scalaire car  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur. Ce potentiel  $U$  est défini par :

$$\vec{B} = - \text{grad } U \quad (\text{B.14})$$

si bien que, compte tenu de (B.13), ce potentiel satisfait, lui aussi, l'équation de Laplace.

$$\text{div}(\overline{\text{grad}} U) = \Delta U = 0 \quad (\text{B.15})$$

### B.3.2. Résolution en coordonnées sphériques

Pour résoudre l'équation de Laplace (B.15) en coordonnées sphériques, nous faisons appel à la méthode de séparation des variables et, tout naturellement, nous développons la partie angulaire des fonctions cherchées en harmoniques sphériques. Commençons par écrire le laplacien en coordonnées sphériques (Annexe A).

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{B.16})$$

La méthode de séparation des variables suppose que la fonction  $U$  se présente comme le produit de trois fonctions dont chacune ne dépend que d'une variable. Puisque les harmoniques sphériques sont déjà le produit de deux fonctions (l'une de  $\theta$ , l'autre de  $\varphi$ ), nous écrirons :

$$U(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Psi(\varphi) = R(r) \cdot Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{B.17})$$

En reportant (B.17) dans (B.16), il apparaît que :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial R}{\partial r} = - \frac{1}{Y_n^m \cdot \sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta}) + \frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial \varphi^2} \right] \quad (\text{B.18})$$

L'égalité doit être satisfaite en tout point alors que le membre de gauche n'est fonction que de  $r$  et que celui de droite ne dépend que de  $\theta$  et  $\varphi$ . Ceci n'est possible que si les deux membres sont constamment égaux à une même constante. D'après (B.6), le membre de droite est égal à  $n(n+1)$ . Le membre de gauche admet donc la même valeur et il en résulte une équation différentielle qui permet de trouver la dépendance radiale de la fonction cherchée.

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} = n(n+1) \quad \rightarrow \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (\text{B.19})$$

Il semble opportun de rechercher, pour (B.19), des solutions de la forme  $r^p$ .

$$R = r^p \rightarrow p(p-1) + 2p - n(n+1) = p^2 + p - n(n+1) = 0$$

$$p = \frac{-1 \pm (2n+1)}{2} \quad \text{soit : } p = n \quad \text{et} \quad p = -(n+1) \quad (\text{B.20})$$

Puisque  $r^n$  et  $r^{-(n+1)}$  sont deux fonctions linéairement indépendantes, la solution générale de (B.16), pour chaque harmonique sphérique, est une combinaison de ces deux fonctions. Cependant, si toutes les sources de champ sont localisées à l'intérieur d'une sphère de rayon  $R$  (nous parlerons alors de champ émis), le champ tend vers 0 à l'infini et seul le terme en  $r^{-(n+1)}$  doit être retenu. Si, inversement, les sources de champ sont toutes à l'extérieur de la sphère (il s'agit ici du champ reçu), le champ reste fini lorsque  $r = 0$  et c'est le terme en  $r^n$  qui doit être gardé.

### B.3.3. Expressions du potentiel pseudo-scalaire et de l'induction

Dans le cas où les sources sont localisées dans une sphère (champ émis), nous mettons un indice supérieur  $e$  sur les composantes et les solutions de (16) prennent la forme :

$$U^e(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n a_{n,m}^e Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{B.21})$$

Ainsi, la solution générale de l'équation de Laplace est une combinaison linéaire de termes que nous appellerons champs multipolaires. Le potentiel pseudo-scalaire multipolaire  $U_n^{em}$  d'ordre  $2^n$  et de degré  $m$ , s'écrit :

$$U_n^{em}(r, \theta, \varphi) = \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{B.22})$$

La définition (B.14), jointe à l'expression du gradient en coordonnées sphériques (Appendice A), conduit directement à l'induction associée à chacun de ces termes :

$$\overline{\mathbf{B}}_n^e(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left[ -(n+1) \mathbf{Y}_n^m \bar{\mathbf{i}}_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{Y}_n^m \bar{\mathbf{i}}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{Y}_n^m \bar{\mathbf{i}}_\varphi \right] \quad (\text{B.23})$$

Si, à l'opposé, les sources se trouvent à l'extérieur d'une sphère de rayon  $R$  (champ reçu), le champ créé à l'intérieur s'obtient de la même manière mais nous remplaçons l'indice  $e$  par  $r$ .

$$\mathbf{U}^r(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=-n}^n a_{n,m}^r \mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{U}_n^m(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{r}{R}\right)^n \mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi) \quad (\text{B.25})$$

$$\overline{\mathbf{B}}_n^m(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{r} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[ n \mathbf{Y}_n^m \bar{\mathbf{i}}_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{Y}_n^m \bar{\mathbf{i}}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{Y}_n^m \bar{\mathbf{i}}_\varphi \right] \quad (\text{B.26})$$

#### B.3.4. Champ polaire.

Intéressons-nous un moment aux termes associés à  $n = 0$  (et donc  $m = 0$ ). La définition (B.1-B.2) des harmoniques sphériques montre que  $\mathbf{Y}_0^0(\theta, \varphi)$  est constante sur toute la sphère :

$$\mathbf{Y}_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Il découle alors de la relation d'orthogonalité (B.8) que, pour toute autre harmonique sphérique, l'intégrale ci-dessous est nulle.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta = 0$$

Grâce à ce résultat et en s'appuyant sur (B.23) ou (B.26) on montre facilement que le flux d'un terme multipolaire à travers une sphère  $r = R$  est nul, sauf, pour le champ émis, si  $n = 0$ . En fait, les solutions de l'équation de Laplace assurent la nullité du flux à travers toute surface limitant un domaine dans lequel l'équation s'applique partout, ce qui n'est pas le cas de la surface considérée. La conservation du flux étant plus générale que l'équation de Laplace, il

faut éliminer le terme associé à  $n = 0$  du champ émis (B.21), ce qui confirme l'inexistence de monopôles magnétiques et donc de champ polaires. Nous pouvons également faire disparaître le terme associé à  $n = 0$  du champ reçu (B.24) puisque, selon (B.26), l'induction qui lui est associée est nulle.

### **B.3.5. Identification directe du champ.**

Sur une sphère de rayon  $R$  quelconque, la composante radiale de  $\vec{B}$  (B.23) varie comme  $Y_n^m$ . Cela facilite l'identification du champ émis et la détermination expérimentale des coefficients  $as_{m,n}^e$  du développement multipolaire (B.21). Si nous disposons de la valeur de la composante radiale de l'induction à la distance quelconque  $r = R$ , nous pouvons écrire :

$$B_r(R, \theta, \varphi) \cdot R = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n+1) \cdot as_{n,m}^e \cdot Y_n^m(\theta, \varphi)$$

Ceci correspond au développement en harmoniques sphériques (B.11) de la fonction définie par le membre de gauche. La relation (B.12) nous indique comment déduire ses composantes :

$$(n+1) \cdot as_{n,m}^e = \langle Y_n^m, B_r(R, \theta, \varphi) \cdot R \rangle$$

soit, en explicitant le produit hermitique :

$$as_{n,m}^e = \frac{R}{n+1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \varphi)^* \cdot B_r(R, \theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (B.27)$$

La valeur de  $R$  utilisée ici doit être reprise dans l'expression (B.21) du potentiel. L'identification du champ reçu peut se faire suivant le même principe, en remplaçant (B.23) par (B.26). Il vient alors :

$$as_{n,m}^r = -\frac{R}{n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \varphi)^* \cdot B_r(R, \theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (B.28)$$

### B.3.6. Harmoniques sphériques scalaires réelles.

Le développement (B.11) s'applique aussi bien à une fonction réelle qu'à une fonction complexe. Si  $f(\theta, \varphi)$  est réelle, (B.12) et (B.3) montrent que  $a_{n, -m}$  se déduit de  $a_{n, m}$  :

$$a_{n, -m} = (-1)^m \cdot a_{n, m}^* \quad (\text{B.29})$$

En pratique il est plus commode de rapporter une fonction réelle (scalaire ou vectorielle) à une base de fonctions réelles. Pour définir une telle base, observons que la seule partie complexe des fonctions  $Y_n^m$  (B.1) est l'exponentielle qui fixe leur dépendance par rapport à  $\varphi$ . On remarque aussi que toutes les fonctions  $Y_n^0$  sont réelles et ne dépendent pas de  $\varphi$ .

Considérons maintenant le sous-espace à deux dimensions, sous-tendu par les fonctions  $Y_n^m$  et  $Y_n^{-m}$  ( $m$  non nul). La projection  $f_{\perp}$  d'une fonction sur ce sous-espace s'écrit :

$$f_{\perp}(\theta, \varphi) = a_{n, m} Y_n^m(\theta, \varphi) + a_{n, -m} Y_n^{-m}(\theta, \varphi)$$

D'après (B.3), la seconde fonction de base est, à peu de choses près, la conjuguée de la première. On a donc une dépendance en  $\exp(jm\varphi)$  pour la première et en  $\exp(-jm\varphi)$  pour la seconde. Comme pour les séries de Fourier, nous procédons, dans ce sous-espace, à un changement de base qui nous mène à deux fonctions de base orthonormées et réelles, proportionnelles respectivement à  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$ . Posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{YC}_n^m(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ Y_n^m(\theta, \varphi) + (-1)^m Y_n^{-m}(\theta, \varphi) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ Y_n^m(\theta, \varphi) + Y_n^m(\theta, \varphi)^* \right] \\ \mathbf{YS}_n^m(\theta, \varphi) &= \frac{1}{j\sqrt{2}} \left[ Y_n^m(\theta, \varphi) - (-1)^m Y_n^{-m}(\theta, \varphi) \right] = \frac{1}{j\sqrt{2}} \left[ Y_n^m(\theta, \varphi) - Y_n^m(\theta, \varphi)^* \right] \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

L'ensemble de des fonctions  $Y_n^0$ ,  $\mathbf{YC}_n^m$  et  $\mathbf{YS}_n^m$  constitue une base orthonormée réelle pour l'espace des fonctions  $f(\theta, \varphi)$ . Les fonctions introduites ici se déduisent des précédentes en remplaçant  $\exp(jm\varphi)$  respectivement par  $\sqrt{2} \cos(m\varphi)$  et par  $\sqrt{2} \sin(m\varphi)$ . Le tableau

(B.T1) regroupe les expressions de toutes les fonctions indépendantes obtenues pour n allant de 0 à 4. Le développement de  $f(\theta, \varphi)$  sur cette base s'écrit :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ as_{n,0} Y_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^n (\alpha s_{n,m} YC_n^m(\theta, \varphi) + \beta s_{n,m} YS_n^m(\theta, \varphi)) \right] \quad (B.31)$$

Les coefficients s'obtiennent, comme précédemment, à l'aide du produit hermitique (B.7) mais la conjugaison complexe est ici sans objet puisque toutes les fonctions impliquées sont réelles. En outre,  $Y_n^0$  ne dépend pas de  $\varphi$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} as_{n,0} &= \langle Y_n^0, f \rangle = \int_0^\pi Y_n^0(\theta) \cdot \sin \theta \cdot \left( \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \cdot d\varphi \right) \cdot d\theta \\ \alpha s_{n,m} &= \langle YC_n^m, f \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi YC_n^m(\theta, \varphi) \cdot f(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \\ \beta s_{n,m} &= \langle YS_n^m, f \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi YS_n^m(\theta, \varphi) \cdot f(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \end{aligned} \quad (B.32)$$

La solution générale (B.21) de l'équation de Laplace (B.16) exprimée à l'aide de ces fonctions réelles prend la forme :

$$U^e(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[ as_{n,0}^e Y_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^n (\alpha s_{n,m}^e YC_n^m(\theta, \varphi) + \beta s_{n,m}^e YS_n^m(\theta, \varphi)) \right] \quad (B.33)$$

Ceci pour le champ émis. L'expression du champ reçu est très semblable :

$$U^r(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \left[ as_{n,0}^r Y_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^n (\alpha s_{n,m}^r YC_n^m(\theta, \varphi) + \beta s_{n,m}^r YS_n^m(\theta, \varphi)) \right] \quad (B.34)$$

### **B.3.7. Système présentant une symétrie de révolution.**

Plaçons l'axe Oz sur l'axe de révolution. Les développements (B.33) et (B.34) se simplifient : seuls les termes pour lesquels  $m = 0$  sont présents et les harmoniques sphériques correspondantes sont réelles. Comme par ailleurs il est souvent facile de calculer, sur l'axe, la composante axiale de l'induction, nous allons montrer que le même calcul conduit rapidement au développement multipolaire (B.33 ou B.34).

Supposons, pour commencer, que nous connaissions cette induction à l'intérieur d'une sphère ne contenant aucune source. D'après (B.34) nous avons :

$$B_r^i(r, \theta) = -\frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n as_{n,0}^r Y_n^0(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} as_{n,0}^r Y_n^0(\theta) \quad (B.34)$$

Sur Oz, cette expression ne dépend plus que de z. En outre, il découle de (B.2) que  $P_n^0(1) = 1$ . Ainsi, lorsque  $z > 0$  ( $\theta = 0$  et  $r = z$ ), l'induction admet une écriture simple.

$$B_r^i(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} \left(\frac{z}{R}\right)^{n-1} as_{n,0}^r \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \quad (B.35)$$

Notons que, pour vérifier la continuité de l'induction axiale en  $z = 0$ , il faut tenir compte du fait que le vecteur de base  $\bar{i}_r$  change d'orientation lorsque  $\theta$  passe de 0 à  $\pi$ . A l'évidence, l'expression (B.35) s'identifie facilement au développement en série de Mac Laurin de la fonction  $B_z^r(z)$ . Ainsi, dès que cette fonction est connue, son développement en série de Mac Laurin, par rapport à la variable  $z/R$ , fournit un accès direct aux coefficients du développement multipolaire.

Lorsque l'induction est connue à l'extérieur de la sphère qui contient les courants, la même méthode s'applique à condition de prendre  $R/z$  comme variable de Mac-Laurin. C'est ainsi que nous avons calculé les premiers moments de la spire de courant circulaire (B.37). En reportant  $as_{1,0}^e$  dans (B.26) on montre que l'induction dipolaire est proportionnelle à :  $I \cdot R^2$ .

$$B_z^c(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{\left(\frac{R}{z}\right)^3}{\left[1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (B.36)$$

$$B_z^c(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[ \left(\frac{R}{z}\right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^5 + \frac{15}{8} \left(\frac{R}{z}\right)^7 - \frac{35}{16} \left(\frac{R}{z}\right)^9 + \frac{315}{128} \left(\frac{R}{z}\right)^{11} - \dots \right]$$

$$as_{1,0}^e = \frac{\mu_0 I}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}}, \quad as_{3,0}^e = -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{7}}, \quad as_{5,0}^e = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{5}{8} \sqrt{\frac{\pi}{11}} \dots \quad (B.37)$$

## B.4. Expressions explicites des harmoniques sphériques réelles.

### B.4.1. Introduction.

La présentation des harmoniques sphériques scalaires et complexes adoptée précédemment (B.1 et B.2) est celle choisie par tous les manuels. Force est de constater que lorsqu'on veut disposer de l'écriture explicite de ces fonctions, des calculs pénibles restent à faire. Ce qui suit vise à y parvenir plus rapidement.

Pour expliciter les expressions des fonctions de Legendre associées qui apparaissent dans les harmoniques sphériques, nous partons de la définition (B.2) de laquelle il ressort que l'entier  $m$  ne peut pas prendre n'importe quelle valeur. Tout d'abord, la dérivation d'un polynôme de degré  $2n$  donne invariablement 0 si elle est répétée plus de  $2n$  fois. Cette situation se rencontre dès que  $m + n > 2n$ . D'autre part, la relation (B.3) découle [Ayant p. 141] de la dépendance des fonctions  $P_n^m$  et  $P_n^{-m}$  :

$$P_n^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(z) \quad (\text{B.38})$$

Nous retiendrons que  $m$  peut prendre les  $2n + 1$  valeurs telles que :  $-n \leq m \leq n$  et que pour d'autres valeurs de l'entier  $m$ , ces fonctions sont nulles.

Afin d'illustrer la relation (B.38), comparons deux fonctions de Legendre associées dont les expressions s'obtiennent facilement : celles d'indices  $m = n$  et  $m = -n$ . La première fait intervenir une dérivée  $2n$ -ième qui ne peut provenir que de  $z^{2n}$  et la seconde ne met en œuvre aucune dérivation.

$$P_n^n(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{n}{2}}}{2^n n!} (2n)! \quad (\text{B.39})$$

$$P_n^{-n}(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{-n}{2}}}{2^n n!} (z^2 - 1)^n = \frac{(1-z^2)^{\frac{n}{2}}}{2^n n!} (-1)^n \quad (\text{B.40})$$

Ces deux expressions sont en accord avec (B.38)

### B.4.2. Développement en fonction de $z$ .

Compte tenu de (B.38), nous restreignons désormais notre étude aux cas où  $m \geq 0$ . D'après la définition (B.2), si  $m$  est pair, la fonction de Legendre est un polynôme de degré :

$$m + [2n - (n + m)] = n$$

Lorsque  $m$  est impair, un terme  $\sqrt{1 - z^2}$  reste en facteur et le polynôme est de degré  $n - 1$ . Dans les deux cas, le polynôme ne comprend que des termes de degrés pairs si son degré est pair et inversement. Pour écrire cette fonction, nous encadrons par des crochets toute borne de sommation dont on ne garde que la valeur entière. Ainsi :

$$\mathbf{P}_n^m(z) = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A_q^m z^{n-2q} \quad \text{si } m \text{ est pair,} \quad (\text{B.41})$$

$$\text{et } \mathbf{P}_n^m(z) = \sqrt{1 - z^2} \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} B_q^m z^{(n-1)-2q} \quad \text{si } m \text{ est impair.} \quad (\text{B.42})$$

### B.4.3. Développement en fonction de $\theta$ .

Au sein des harmoniques sphériques,  $z = \cos\theta$ . Les fonctions de Legendre associées sont donc périodiques en  $\theta$  et il est loisible de les écrire sous la forme de leur développement en série de Fourier. Suivant (B.41) et (B.42), ces fonctions mettent en oeuvre des puissances entières de  $\cos\theta$  qui, pour  $m$  impair, sont multipliées par  $\sin\theta$ . Ainsi, lorsque  $m$  est pair, le terme  $z^{n-2q}$  est une fonction paire qui prend la forme :

$$\cos^{n-2q} \theta = \left( \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \right)^{n-2q} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2q}{2}\right]} a_k \cos[(n-2q-2k)\theta]$$

Ce développement n'implique que les harmoniques de même parité que  $n$  et il s'arrête au rang  $n - 2q$ . Si  $n$  est pair, le dernier terme de la somme est indépendant de  $\theta$ . En reportant dans (B.41), on obtient la forme générale des fonctions de Legendre pour  $m$  pair :

$$P_n^m(\cos\theta) = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_q \cos[(n-2q)\theta] \quad (\text{B.43})$$

Lorsque  $m$  est impair, chaque terme peut être regardé comme la dérivée d'un terme de type pair puisque :

$$\cos^{n-1-2q} \theta \sin \theta = \frac{-1}{n-2q} \frac{d}{d\theta} (\cos^{n-2q} \theta)$$

L'écriture générale admet donc la même forme que la dérivée de (B.43) :

$$P_n^m(\cos\theta) = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \beta_q^m \sin[(n-2q)\theta] \quad (\text{B.44})$$

Vérifions ceci en explicitant  $P_n^n(\cos\theta)$  en fonction de  $\theta$ . D'après (B.39) on a :

$$P_n^n(\cos\theta) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sin^n \theta = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{1}{2^n j^n} \sum_{k=0}^n C_k^n (e^{j\theta})^{n-k} (-e^{-j\theta})^k$$

$$\text{où : } C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Les exponentielles complexes des termes d'indices  $k$  et  $n - k$  montrent des exposants de signes opposés. Regroupons-les mais, puisque celui d'indice  $k = n/2$  est seul, son coefficient doit être divisé par deux. Nous écrivons ceci à l'aide du symbole de Kronecker  $\delta_{p,q}$  qui vaut 1 si  $p = q$  et 0 sinon. Conformément à (B.43) et (B.44), cette relation s'écrit (B.45) pour  $n$  pair ou (B.46) pour  $n$  impair:

$$P_n^n(\cos\theta) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} (2n)!}{2^{2n-1} n!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_k^n (-1)^k \left(1 - \frac{\delta_{n,2k}}{2}\right) \cos[(n-2k)\theta] \quad (\text{B.45})$$

$$P_n^n(\cos \theta) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (2n)!}{2^{2n-1} n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_k^n (-1)^k \sin[(n-2k)\theta] \quad (B.46)$$

#### B.4.4. Obtention par récurrence des fonctions de Legendre associées.

Afin d'expliciter les expressions (B.43) et (B.44) nous allons maintenant établir une relation de récurrence. La relation (B.2) suggère que la dérivée de  $P_n^m$  doit être liée à  $P_n^{m+1}$ . Examinons ceci.

$$P_n^{m+1}(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{d}{dx} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (B.47)$$

$$\text{or : } \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n = P_n^m(x) 2^n n! (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \quad (B.48)$$

En reportant (B.48) dans (B.47) il vient :

$$P_n^{m+1}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_n^m(x)}{dx} + m x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} P_n^m(x)$$

soit, en revenant à la variable  $\theta$ ,

$$P_n^{m+1}(\cos \theta) = \sin \theta \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{-\sin \theta} + m \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta)$$

$$\text{ou : } P_n^{m+1}(\cos \theta) = - \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} + m \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \quad (B.49)$$

En appliquant (B.49) au calcul de  $P_n^{-m+1}$ , il vient :

$$P_n^{-m+1}(\cos \theta) = - \frac{dP_n^{-m}(\cos \theta)}{d\theta} - m \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_n^{-m}(\cos \theta)$$

A l'aide de (B.38) revenons aux fonctions d'indices supérieurs de signes opposés :

$$(-1)^{m-1} \frac{(n-m+1)!}{(n+m-1)!} P_n^{m-1}(\cos\theta) = -(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[ \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} + m \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \right]$$

$$(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(\cos\theta) = \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} + m \frac{\cos\theta}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \quad (\text{B.50})$$

Le rapprochement de (B.49) et (B.50) permet d'éliminer les fonctions trigonométriques.

$$(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(\cos\theta) = \left[ 2 \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} + P_n^{m+1}(\cos\theta) \right]$$

En remplaçant  $m - 1$  par  $m$  il vient une relation très commode pour calculer les fonctions qui interviennent dans les harmoniques sphériques.

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{(n+m+1)(n-m)} \left[ 2 \frac{dP_n^{m+1}(\cos\theta)}{d\theta} + P_n^{m+2}(\cos\theta) \right] \quad (\text{B.51})$$

Puisque nous connaissons  $P_n^n(\cos\theta)$  (cf. B.45 et B.46) et que nous savons que pour  $m > n$  ces fonctions sont nulles, nous pouvons déduire toutes les autres fonctions de même indice inférieur. Ainsi, en partant de (B.45) ou (B.46), (B.51) conduit de proche en proche à la décomposition en série de Fourier des fonctions de  $\theta$  cherchées. A titre d'exemple, on établit rapidement que :

$$P_n^{n-1}(\cos\theta) = \frac{1}{n} \frac{dP_n^n(\cos\theta)}{d\theta} \quad (\text{B.52})$$

#### B.4.5 Calcul des harmoniques sphériques par récurrence.

La démarche précédente est transposable à l'obtention directe des harmoniques sphériques car de (B.51) découle une relation de récurrence analogue pour les  $YC_n^m$ . Compte tenu de (B.1, B.45 et B.46) nous écrivons désormais les  $YC_n^m$  sous la forme suivante.

$$YC_n^m(\theta, \varphi) = K_{n,m} \left[ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,m}^k \cos[(n-2k)\theta] \right] \sqrt{2} \cos(m\varphi) \quad \text{pour } m \text{ pair, } (\text{B.53})$$

$$\text{et } \mathbf{YC}_n^m(\theta, \varphi) = K_{n,m} \left[ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,m}^k \sin[(n-2k)\theta] \right] \sqrt{2} \cos(m\varphi) \text{ pour } m \text{ impair} \quad (\text{B.54})$$

Dans ces relations :

$$K_{n,m} = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}}{2^{2n} n!} \sqrt{\frac{2n+1}{\pi}} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \quad (\text{B.55})$$

Dans le cas où  $m = n$ , pour que cette écriture soit conforme aux expressions (B.44) et (B.45), il faut que :

$$A_{n,n}^k = C_k^n (-1)^k \left( 1 - \frac{\delta_{n,2k}}{2} \right) \quad (\text{B.56})$$

On voit que les coefficients  $A_{n,n}^k$  sont égaux aux coefficients du binôme, à l'exception, lorsque  $n$  est pair, du dernier associé à  $k = n/2$  (partie indépendante de  $\theta$  dans B.53) qui est divisé par deux. Le signe adopté pour  $K_{n,m}$  est tel que  $A_{n,m}^0$  est positif et, pour  $n$  et  $m$  donnés, les signes de ces coefficients sont alternés.

Les fonctions  $\mathbf{YC}_n^m$  étant nulles pour  $m > n$ , il faut maintenant établir la relation de récurrence qui découle de (B.51). Pour cela, il faut exprimer les  $\mathbf{P}_n^m$  figurant dans (B.51) en fonction des  $\mathbf{YC}_n^m$  de mêmes indices. En rapprochant (B.1), (B.30) et (B.53), il vient :

$$\mathbf{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{2n-1} n!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,m}^k \cos(n-2k)\theta \quad \text{pour } m \text{ pair,}$$

$$\mathbf{P}_n^m(\cos \theta) = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{2n-1} n!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_{n,m}^k \sin(n-2k)\theta \quad \text{pour } m \text{ impair.}$$

Pour reporter dans (B.51), il faut tenir compte du fait que la fonction dérivée est associée à un  $m$  de parité différente. Après un calcul sans difficulté, il vient :

$$A_{n,m}^k = 2(n-2k) A_{n,m+1}^k - (n+m+2)(n-m-1) A_{n,m+2}^k \quad (\text{B.57})$$

Les expressions B.53 à B.57 fournissent rapidement tous les coefficients utiles. Les expressions des harmoniques sphériques données sur la page suivante pour  $n$  allant jusqu'à 4, ont été obtenues de cette façon.

#### **B.4.6 Champ uniforme.**

L'observation de ces fonctions montre tout d'abord que l'induction reçue (B.26) est nulle partout si  $n = 0$ . Nous éliminons désormais, du champ reçu, les termes associés à  $n = 0$ . D'autre part, pour  $n = 1$ , l'induction décrite est uniforme. En effet, pour  $m = 0$  :

$$\vec{\mathbf{B}}_{1,0}^r(r, \theta) = -\frac{1}{R} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \vec{\mathbf{i}}_r - \sin \theta \vec{\mathbf{i}}_\theta]$$

Il est facile de voir que cette induction est parallèle à Oz:

$$\mathbf{B}_z = -\frac{1}{R} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \tag{B.58}$$

L'induction associée à  $m = 1$  est uniforme également, de même amplitude, mais parallèle à Oy. Bien entendu, celle associée à  $\mathbf{Y}\mathbf{S}_1^1$  est uniforme et parallèle à Ox. Il est clair désormais que tout champ uniforme se décompose suivant ces trois champs multipolaires.

Tableau T.1. Harmoniques sphériques réelles jusqu'à l'ordre 4.

Les fonctions **YS** se déduisent des fonctions **YC** en remplaçant  $\cos(m\varphi)$  par  $\sin(m\varphi)$  ce qui équivaut à une rotation de  $\pi / 2m$  autour de l'axe Oz.

$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
$Y_1^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \cos \theta$
$YC_1^1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \sin \theta \cdot \sqrt{2} \cos \varphi$
$Y_2^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos 2\theta + 1)$
$YC_2^1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin 2\theta \cdot \sqrt{2} \cos \varphi$
$YC_2^2(\theta, \varphi) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} (\cos 2\theta - 1) \cdot \sqrt{2} \cos 2\varphi$
$Y_3^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{7}{\pi}} (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta)$
$YC_3^1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{16}\sqrt{\frac{21}{\pi}} (5 \sin 3\theta + \sin \theta) \sqrt{2} \cos \varphi$
$YC_3^2(\theta, \varphi) = -\frac{1}{16}\sqrt{\frac{105}{2\pi}} (\cos 3\theta - \cos \theta) \sqrt{2} \cos 2\varphi$
$YC_3^3(\theta, \varphi) = \frac{1}{32}\sqrt{\frac{35}{\pi}} (\sin 3\theta - 3 \sin \theta) \sqrt{2} \cos 3\varphi$
$Y_4^0(\theta, \varphi) = \frac{3}{128}\sqrt{\frac{1}{\pi}} (35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9)$
$YC_4^1(\theta, \varphi) = -\frac{3}{32}\sqrt{\frac{5}{2\pi}} (7 \sin 4\theta + 2 \sin 2\theta) \sqrt{2} \cos \varphi$
$YC_4^2(\theta, \varphi) = -\frac{3}{64}\sqrt{\frac{5}{2\pi}} (7 \cos 4\theta - 4 \cos 2\theta - 3) \sqrt{2} \cos 2\varphi$
$YC_4^3(\theta, \varphi) = \frac{3}{64}\sqrt{\frac{35}{\pi}} (\sin 4\theta - 2 \sin 2\theta) \sqrt{2} \cos 3\varphi$
$YC_4^4(\theta, \varphi) = \frac{3}{128}\sqrt{\frac{35}{2\pi}} (\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3) \sqrt{2} \cos 4\varphi$

## B.5. Introduction élémentaire des harmoniques sphériques réelles.

### B.5.1. Introduction.

Afin de disposer d'une image plus accessible des harmoniques sphériques, nous avons tenté d'introduire les harmoniques sphériques sans recourir aux fonctions de Lagrange associées. Faute de temps, nous ne sommes pas parvenu à en établir toutes les propriétés mais peu s'en faut. Pensant que cette approche peut être utile, nous la reproduisons ci-dessous.

Nous nous intéressons ici aux fonctions réelles des coordonnées sphériques angulaires qui réunissent des propriétés très communément admises pour les solutions des problèmes de physique. Ces fonctions sont supposées être définies de façon unique en tout point de la sphère et admettre la séparation des variables, ce qui signifie qu'elles peuvent s'écrire comme le produit de fonctions qui ne dépendent chacune que d'une variable. En notant  $\theta$  et  $\varphi$  les angles des coordonnées sphériques, ceci se transcrit de la manière suivante :

$$\mathbf{H}(\theta, \varphi) = \mathbf{F}(\theta) \cdot \mathbf{G}(\varphi)$$

Nous nous proposons de développer ces fonctions sur une base ne mettant en œuvre que des fonctions trigonométriques élémentaires.

### B.5.2. Périodicité et séries de Fourier.

Pour qu'en tout point de la sphère la fonction prenne une valeur unique nous pouvons, au choix, limiter les intervalles de variation des coordonnées angulaires  $\theta$  et  $\varphi$  ou imposer à la fonction de reprendre la même valeur à chaque fois que les coordonnées désignent le même point. La seconde possibilité implique une périodicité de  $2\pi$  vis à vis des deux angles, c'est pourquoi nous la choisissons. Bien entendu, afin de tirer parti de cette périodicité, nous postulons désormais que les fonctions  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  possèdent chacune les propriétés requises (conditions de Dirichlet) pour être décomposables en séries de Fourier. Dès lors,  $\mathbf{H}$  peut se représenter sous la forme d'un produit de deux développements en séries de Fourier.

$$\mathbf{H}(\theta, \varphi) = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \right] \cdot \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cos(m\varphi) + \beta_m \sin(m\varphi) \right]$$

Ainsi écrite, la fonction  $\mathbf{H}$  apparaît comme la combinaison linéaire d'un ensemble infini de fonctions qui forment la base d'un espace vectoriel. Pour que les fonctions élémentaires introduites par (B.58) constituent une base, il faut que chacune d'entre elles appartienne à l'espace vectoriel, c'est à dire réunisse les propriétés postulées plus haut. Nous allons voir que certaines de ces fonctions doivent être éliminées parce qu'elles ne respectent pas toutes ces conditions.

### **B.5.3. Unicité.**

Remarquons tout d'abord que les points de coordonnées  $[\theta ; \varphi]$  et  $[-\theta ; \varphi + \pi]$  coïncident quelles que soient les coordonnées  $\theta$  et  $\varphi$ . Les fonctions de base convenables doivent donc reprendre la même valeur après cette transformation. Sur  $\mathbf{G}(\varphi)$  cette transformation a un effet très simple : si  $m$  est pair, la valeur de la fonction ne change pas, s'il est impair, elle change de signe. Il en résulte que les fonctions de  $\varphi$  impliquant un  $m$  pair ne sont compatibles qu'avec des fonctions paires de  $\theta$  et réciproquement.

Après ces restrictions,  $\mathbf{H}$  peut encore prendre deux formes distinctes :

$$\text{si } m \text{ est pair, } \quad \mathbf{H}(\theta, \varphi) = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\theta) \right] \cdot (\alpha_m \cos(m\varphi) + \beta_m \sin(m\varphi))$$

$$\text{si } m \text{ est impair } \quad \mathbf{H}(\theta, \varphi) = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\theta) \right] \cdot (\alpha_m \cos(m\varphi) + \beta_m \sin(m\varphi))$$

D'autre part, si  $m$  n'est pas nul, toutes les valeurs de  $\mathbf{G}(\varphi)$  se retrouvent en  $\theta = 0$  et en  $\theta = \pi$ . Pour que  $\mathbf{H}$  ait une valeur unique en ces points, il est nécessaire que  $\mathbf{F}(\theta)$  s'y annule. C'est pourquoi, lorsque  $m$  est pair et non nul, la somme des coefficients  $a_k$  doit être nulle.

### **B.5.4. Parité.**

Par analogie avec la parité des fonctions d'une variable, la parité de  $\mathbf{H}$  par rapport à l'origine des coordonnées se définit comme suit. Le point  $P'$ , opposé du point  $P$  de coordonnées  $[\theta ; \varphi]$ , par rapport à l'origine, a pour coordonnées  $[\pi - \theta ; \varphi + \pi]$ . Si  $\mathbf{H}$  garde, en  $P'$ , la valeur qu'elle avait en  $P$ , elle est dite paire, si sa valeur change de signe, elle est dite

impaire. Comme dans le cas des fonctions d'une variable, une fonction quelconque peut toujours se décomposer en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Lors d'une translation de  $\pi$ ,  $G(\varphi)$  varie comme  $(-1)^m$ , tandis que le changement de  $\theta$  en  $\pi - \theta$  multiplie  $F(\theta)$  par 1 ou par  $-1$  suivant que seules des valeurs paires ou impaires de  $k$  sont impliquées dans son développement. En conséquence, quelle que soit la parité de  $m$ , la séparation des parties paire et impaire de  $H$  s'opère en ne conservant, dans le développement de  $F(\theta)$ , que des termes de rang pair ou impair.

	H paire	H impaire
m pair	$F(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2k)\theta$	$F(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2k+1)\theta$
m impair	$F(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2k+1)\theta$	$F(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2k)\theta$

### **B.5.5. Conclusion provisoire.**

L'ensemble des fonctions trouvées est plus vaste que celui des harmoniques sphériques. La valeur de  $m$  n'est, par exemple, pas limitée à  $n$ . Pour dégager les harmoniques sphériques de cet ensemble, il faut imposer des contraintes supplémentaires. Une contrainte non évoquée jusqu'ici doit impérativement être respectée : la valeur de la fonction ne doit pas changer si on remplace  $\theta$  et  $\varphi$  par  $\theta'$  et  $\varphi'$ , coordonnées du même point de la sphère unité dans un second repère qui résulte de la rotation du premier autour de son origine. Il faut également que ces fonctions apparaissent comme des fonctions homogènes des coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  lorsqu'on se déplace sur la sphère unité. Il est probable que la prise en compte de ces contraintes supplémentaires mène aux expressions générales (B.53) et (B.54), au coefficient près car la valeur de celui-ci résulte que de la normalisation de la fonction.

## B.6. Potentiel vecteur et harmoniques sphériques vectorielles.

### B.6.1. Recherche du potentiel vecteur

Nous allons montrer que, pour chaque terme du développement multipolaire défini par son potentiel pseudo-scalaire  $U_n^m$ , il existe un potentiel vecteur  $\overline{\mathbf{A}_n^m}$ , normal au rayon vecteur  $\vec{r}$ , qui mène à la bonne induction. Nous verrons ensuite que l'expression trouvée est unique. Pour commencer, identifions les composantes  $B_\theta$  et  $B_\varphi$  du champ émis à celles du rotationnel de  $\overline{\mathbf{A}_n^m}$  en supposant que celui-ci est orthoradial.

$$-\frac{1}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{Y}_n^m = \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot -\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \sin \theta \cdot A_{n\varphi}^m) \quad (\text{B.59})$$

$$-\frac{1}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{Y}_n^m = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_{n\theta}^m) \quad (\text{B.60})$$

En intégrant ces deux relations par rapport à  $r$ , on trouve  $A_{n\theta}^m$  et  $A_{n\varphi}^m$  :

$$A_{n\varphi}^m = \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{-1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{Y}_n^m \quad (\text{B.61})$$

$$A_{n\theta}^m = \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{Y}_n^m \quad (\text{B.62})$$

Pour être admissible, ce potentiel vecteur doit aussi donner correctement la composante radiale. L'expression du rotationnel conduit à :

$$\mathbf{B}_{nr}^m = \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{-1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{Y}_n^m \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{Y}_n^m \right) \right]$$

soit :

$$\mathbf{B}_{nr}^m = \frac{1}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{-1}{n} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{Y}_n^m \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \mathbf{Y}_n^m \right] \quad (\text{B.63})$$

Ce qui, d'après (B.6), coïncide exactement avec la composante donnée par (B.23). Par ailleurs, il est intéressant de montrer que la divergence de  $\vec{A}_n^m$  est nulle. En effet :

$$\text{div } \vec{A}_n^m = \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mu_0 \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_n^m) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \mu_0 \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{-1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_n^m \right]$$

$$\text{et : } \text{div } \vec{A}_n^m = \frac{1}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_n^m - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_n^m \right] = 0$$

Comme cela se démontre à l'aide de la transformée de Fourier du champ, un potentiel vecteur qui donne la bonne induction et dont la divergence est nulle est unique. En partant de (B.61) et (B.62) nous pouvons écrire le potentiel vecteur d'ordre n sous d'autres formes :

$$\vec{A}_n^m(r, \theta, \varphi) = \frac{-1}{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \vec{r} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(Y_n^m) = \frac{1}{n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r} Y_n^m) \quad (\text{B.64})$$

De la même façon, le potentiel vecteur d'ordre n du champ reçu s'écrit :

$$\vec{A}_n^m(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^n \vec{r} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(Y_n^m) = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^n \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r} Y_n^m) \quad (\text{B.65})$$

Le développement du potentiel vecteur du champ émis s'écrit maintenant :

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n -\sqrt{\frac{n+1}{n}} a_{n,m}^e \frac{\vec{r} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} Y_n^m}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (\text{B.66})$$

Tandis que celui du champ reçu prend la forme :

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=-n}^n \sqrt{\frac{n}{n+1}} a_{n,m}^r \frac{\vec{r} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} Y_n^m}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (\text{B.67})$$

### B.6.2. Les harmoniques sphériques vectorielles.

Chaque terme des décompositions (B.66) et (B.67) apparaît comme le produit d'une fonction scalaire radiale par un champ de vecteur orthoradial qui, selon (B.61) et (B.62), ne dépend que des coordonnées angulaires. L'ensemble des champs de vecteurs de ce type et de carré sommable constitue un espace vectoriel que nous notons  $\mathcal{A}$ . A titre d'exemple, la densité d'un courant circulant sur la surface d'une sphère est un champ de ce type.

Pour faciliter le calcul des composantes de ces champs (B.66) et (B.67) lorsque seul le potentiel total est connu, il est judicieux de rapporter ces champs à une base orthonormée, ce qui nécessite de définir, au préalable, un produit hermitique sur  $\mathcal{A}$ . Celui que nous adoptons se caractérise, comme (B.7), par une répartition uniforme sur la surface de la sphère.

$$\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^\pi \vec{F}^* \cdot \vec{G} \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (\text{B.68})$$

Nous introduisons maintenant un ensemble de champs de vecteurs orthoradiaux  $\vec{Y}_n^m$  que nous nommons "harmoniques sphériques vectorielles". Ceux-ci jouent, pour le potentiel vecteur, un rôle analogue à celui tenu par les harmoniques sphériques habituelles pour le potentiel scalaire.

$$\vec{Y}_n^m = \frac{\vec{r} \wedge \overline{\text{grad}} Y_n^m}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (\text{B.69})$$

Ces champs apparaissent naturellement dans (B.66) et (B.67). Montrons qu'ils constituent une base orthonormée pour  $\mathcal{A}$ . En rapprochant (B.61), (B.62) et (B.64), on peut écrire :

$$\vec{Y}_n^m = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[ \frac{-1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_n^m}{\partial \varphi} \vec{i}_\theta + \frac{\partial Y_n^m}{\partial \theta} \vec{i}_\varphi \right]$$

et, en revenant à (B.1), le produit hermitique (B.68) de deux de ces fonctions prend la forme :

$$\langle \vec{Y}_{n'}^{m'}, \vec{Y}_n^m \rangle = \frac{k_{n,m} \cdot k_{n',m'}}{\sqrt{n(n+1)} \sqrt{n'(n'+1)}} \int_0^{2\pi} e^{-jm'\varphi} e^{-jm\varphi} d\varphi \cdot \int_0^\pi \left[ \frac{m' \cdot m}{\sin^2 \theta} P_{n'}^{m'}(\cos \theta) \cdot P_n^m(\cos \theta) + \frac{dP_{n'}^{m'}(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

La somme sur  $\varphi$  ne porte que sur les exponentielles complexes. On peut l'évaluer selon (B.10) et, en conséquence, écrire  $m' = m$  dans le reste de l'expression. En intégrant par parties le terme où apparaissent les dérivées par rapport à  $\theta$ , il vient :

$$\langle \vec{Y}_{n'}^{m'}, \vec{Y}_n^m \rangle = \frac{k_{n,m} \cdot k_{n',m}}{\sqrt{n(n+1)} \sqrt{n'(n'+1)}} 2\pi \delta_{m',m} \cdot \int_0^\pi \left[ \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_{n'}^m(\cos \theta) - \frac{\partial^2 P_{n'}^m(\cos \theta)}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial P_{n'}^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right] P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

Le crochet s'écrit sous une forme (B.5) qui permet l'intégration :

$$\langle \vec{Y}_{n'}^{m'}, \vec{Y}_n^m \rangle = \frac{k_{n,m} \cdot k_{n',m}}{\sqrt{n(n+1)} \sqrt{n'(n'+1)}} 2\pi \delta_{m',m} \int_0^\pi n(n+1) P_{n'}^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

Après un calcul sans difficulté s'appuyant sur (B.9), on aboutit à la relation cherchée :

$$\langle \vec{Y}_{n'}^{m'}, \vec{Y}_n^m \rangle = \delta_{n,n'} \cdot \delta_{m,m'} \quad (\text{B.70})$$

Le développement d'une fonction vectorielle  $\vec{F}$  de  $A$ , sur la base définie par (B.69), s'écrit :

$$\vec{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} \vec{Y}_n^m \quad (\text{B.71})$$

$$\text{où } a_{n,m} = \langle \vec{Y}_n^m, \vec{F} \rangle \quad (\text{B.72})$$

Le rapprochement de (B.66), (B.69) et (B.71) montre comment sont liés les coefficients  $a_{n,m}$  et  $a_{n,m}$  caractérisant le champ émis.

$$av^e_{n,m} = -\sqrt{\frac{n+1}{n}} as^e_{n,m} \quad (B.73)$$

De la même façon, pour le champ reçu on a :

$$av^r_{n,m} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} as^r_{n,m} \quad (B.74)$$

Grâce à (B.73) et (B.74) il est possible, à tout moment, de passer du potentiel scalaire au potentiel vecteur et réciproquement.

### **B.6.3. Les harmoniques sphériques vectorielles réelles.**

Etant donnée la dépendance des harmoniques sphériques vectorielles par rapport aux scalaires, plusieurs propriétés des harmoniques vectorielles se déduisent directement de celles de leurs homologues scalaires. Ainsi par exemple les propriétés (B.3) et (B.4) des harmoniques scalaires ont leur pendant sur les vectorielles. Les harmoniques d'indices  $m$  et  $-m$  sont liées :

$$\overrightarrow{Y_n^{-m}} = (-1)^m \cdot \overrightarrow{Y_n^m}^* \quad (B.75)$$

et la parité de la fonction par rapport à l'origine du repère ne dépend que de  $n$ .

$$\overrightarrow{Y_n^m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^n \cdot \overrightarrow{Y_n^m}(\theta, \varphi) \quad (B.76)$$

En s'appuyant sur (B.75), il est facile de former des fonctions purement réelles ou imaginaires. En procédant ainsi, on garde la fonction réelle et on divise par  $j$  la fonction imaginaire. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{YC_n^m}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \overrightarrow{Y_n^m}(\theta, \varphi) + (-1)^m \overrightarrow{Y_n^{-m}}(\theta, \varphi) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \overrightarrow{Y_n^m}(\theta, \varphi) + \overrightarrow{Y_n^m}(\theta, \varphi)^* \right] \\ \overrightarrow{YS_n^m}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{j\sqrt{2}} \left[ \overrightarrow{Y_n^m}(\theta, \varphi) - (-1)^m \overrightarrow{Y_n^{-m}}(\theta, \varphi) \right] = \frac{1}{j\sqrt{2}} \left[ \overrightarrow{Y_n^m}(\theta, \varphi) - \overrightarrow{Y_n^m}(\theta, \varphi)^* \right] \end{aligned} \quad (B.77)$$

Le gradient étant un opérateur linéaire, ces fonctions se déduisent simplement des harmoniques scalaires réelles :

$$\overline{Y}_n^0 = \frac{\vec{r} \wedge \overline{\text{grad}} Y_n^0}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \overline{YC}_n^m = \frac{\vec{r} \wedge \overline{\text{grad}} YC_n^m}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \overline{YS}_n^m = \frac{\vec{r} \wedge \overline{\text{grad}} YS_n^m}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (\text{B.78})$$

L'ensemble des fonctions  $\overline{Y}_n^0$ ,  $\overline{YC}_n^m$  et  $\overline{YS}_n^m$  constitue une base orthonormée réelle pour l'espace des fonctions  $\vec{f}(\theta, \varphi)$ . Notons que  $\overline{Y}_n^0$  est dirigée suivant  $\vec{i}_\varphi$  et ne dépend que de  $\theta$ . Le développement de  $\vec{f}(\theta, \varphi)$  sur cette base s'écrit :

$$\vec{f}(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \alpha v_{n,0} \overline{Y}_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^n \left( \alpha v_{n,m} \overline{YC}_n^m(\theta, \varphi) + \beta v_{n,m} \overline{YS}_n^m(\theta, \varphi) \right) \right] \quad (\text{B.79})$$

Les composantes s'obtiennent à l'aide du produit hermitique (B.68) et, compte tenu des remarques faites ci-dessus, le calcul des composantes de degré  $m$  nul est un peu plus simple :

$$\begin{aligned} \alpha v_{n,0} &= \langle \overline{Y}_n^0, \vec{f} \rangle = \int_0^\pi \overline{Y}_n^0(\theta) \cdot \sin \theta \cdot \left( \int_0^{2\pi} \vec{f}(\theta, \varphi) \cdot d\varphi \right) \cdot d\theta \\ \alpha v_{n,m} &= \langle \overline{YC}_n^m, \vec{f} \rangle = \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \overline{YC}_n^m(\theta, \varphi) \cdot \vec{f}(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \\ \beta v_{n,m} &= \langle \overline{YS}_n^m, \vec{f} \rangle = \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \overline{YS}_n^m(\theta, \varphi) \cdot \vec{f}(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

#### B.6.4. Courant sphérique équivalent.

Considérons, à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère de rayon  $R$ , les solutions de l'équation de Laplace de mêmes indices  $n$  et  $m$ . Puisque les variations angulaires de ces potentiels sont identiques, il est possible d'assurer la continuité de la composante radiale de l'induction en tout point de la sphère de rayon  $R$ . En partant des expressions (B.23) et (B.26) de l'induction, il est facile de voir que cette continuité est assurée si :

$$as_{n,m}^r = -\frac{n+1}{n} as_{n,m}^e \quad (\text{B.81})$$

Si l'égalité ci-dessus est assurée, seule la composante tangentielle peut être discontinue. Physiquement, une telle discontinuité peut être attribuée à un courant superficiel. Ainsi, en  $r = R = 1$ , il faut un courant de surface égal à :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{J}}_s &= \vec{r} \wedge (\overline{\mathbf{H}}_{t2} - \overline{\mathbf{H}}_{t1}) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{2n+1}{n} as_{n,m}^e \vec{r} \wedge \overline{\text{grad}} [\mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi)] \\ &= -\frac{1}{\mu_0} as_{n,m}^e (2n+1) \sqrt{\frac{n+1}{n}} \overline{\mathbf{Y}}_n^m \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

Comme déjà signalé, un courant circulant à la surface d'une sphère se décrit au moyen d'une fonction vectorielle qui appartient à l'espace  $\mathbf{A}$ . Il est donc normal qu'il se décompose sur la base constituée par les fonctions (B.69).

### **B.6.5. Conclusion.**

Des relations de récurrence nouvelles qui permettent d'explicitier rapidement les harmoniques sphériques réelles ont été introduites. Grâce à elles, les expressions ont été explicitées jusqu'à l'ordre 4.

Une introduction élémentaire de ces fonctions, basée sur la décomposition en séries de Fourier a été présentée. Ce travail laisse entrevoir la possibilité de ce passer des fonctions associées de Legendre, ce qui rendrait ces fonctions accessibles à un public plus large...

L'introduction des harmoniques sphériques vectorielles constitue cependant l'apport principal de cette partie. Plusieurs conséquences peuvent en être tirées. Tout d'abord, lorsque le courant calculé circule sur la sphère, il engendre aussi bien le champ extérieur que le champ intérieur et ceci est vrai quelque soit le terme du développement multipolaire considéré. Ainsi, vue de l'extérieur, la sphère peut émettre le même champ que n'importe quel système interne. Elle peut tout aussi bien, à l'intérieur, remplacer un système externe quelconque. Lorsqu'en simulation on veut soumettre un dispositif de dimensions limitées à un champ particulier, il suffit de définir le courant circulant sur une sphère circonscrite. Ceci se fait aisément en donnant les composantes du courant sur la base constituée par les harmoniques sphériques vectorielles. Enfin, si on place cette sphère autour d'un dispositif équivalent à une certaine densité de courant superficielle et que l'on force, sur la sphère, la densité inverse, on annule le champ partout à l'extérieur....







## ANNEXE C. ETUDES DES SYMETRIES DES CHAMPS EMIS.

### C.1. Symétries Ponctuelles

#### C.1.1. Triangles de Möbius sur un pavage plan.

Le motif géométrique qui recouvre un plan infini (pavage) peut présenter des invariances par rotation. On appelle centre de rotation d'ordre  $n$  un point autour duquel une rotation de  $2\pi/n$  laisse le motif inchangé. Les motifs représentés sur la figure 1 font apparaître des centres de rotation d'ordre : 4 et 2 pour le premier, 6, 3 et 2 pour le second.

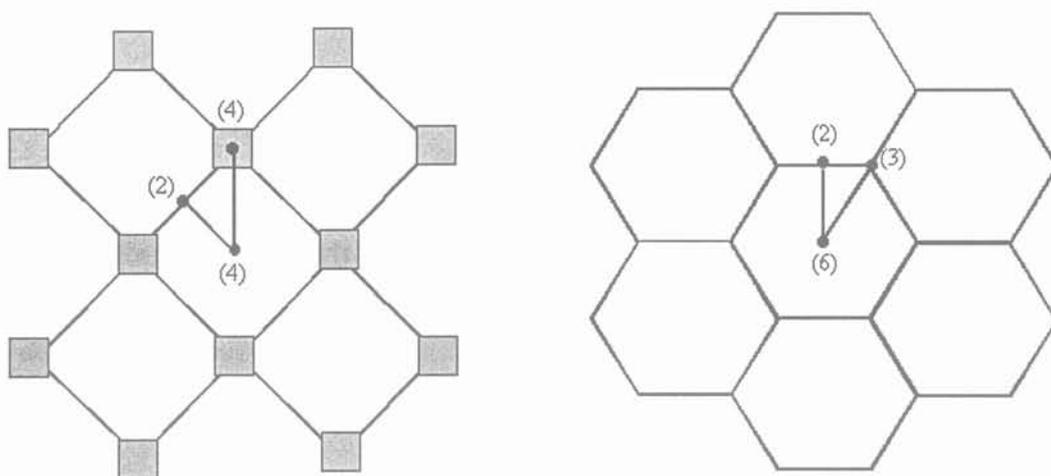


Figure C.1. Symétries par rotation de pavages plans.

Traçons un triangle en joignant trois centres de symétrie. En choisissant des centres suffisamment proches, le triangle obtenu n'en contient ni n'en touche aucun autre. On appelle triangle de Möbius un tel triangle, disposé de telle manière que chacun de ses angles soit égal à  $\pi/n$  où  $n$  est l'ordre du centre qui s'y trouve.

La somme des trois angles du triangle de Möbius est, bien sur, égale à  $\pi$ . Les ordres de rotations étant entiers, ils ne peuvent prendre que trois valeurs distinctes : 2, 3, 4 et 6 et ces valeurs ne sont pas toutes compatibles.

### C.1.2. Triangles de Möbius sur la sphère.

Un solide de dimensions finies peut être entouré par une sphère. Suivant sa forme, il peut présenter une invariance par rotation d'ordre  $n$  autour d'un axe passant par le centre de cette sphère. Il peut même admettre plusieurs axes de rotation concourants d'ordres différents. On définit le triangle de Möbius comme pour le pavage plan mais, ici, il repose sur la sphère et il est limité par des plans qui contiennent le centre de la sphère. La surface d'un tel triangle s'exprime simplement [Schaum p.10] en fonction de ses trois angles  $\alpha, \beta, \gamma$  :

$$S = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot R^2 \quad \text{C.1}$$

### C.1.3. Groupes de symétrie ponctuelle.

Puisque  $S$  est positive, la somme des trois angles doit rester supérieure à  $\pi$ , alors que chacun est lié à l'ordre de l'axe qui passe par le sommet correspondant. Il en résulte que [Sivardière] :

$$\frac{\pi}{n_1} + \frac{\pi}{n_2} + \frac{\pi}{n_3} > \pi \quad \rightarrow \quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > 1$$

Les seules possibilités se résument à 4 combinaisons des ordres  $n_1, n_2$  et  $n_3$ .

Groupe de symétrie ponctuelle	$n_1$	$n_2$	$n_3$	Nombre de triangles de Möbius	Nombre d'axes d'un ordre donné :					Polyèdre régulier de même symétrie
					2	3	4	5	$n$	
N 2	$n$	2	2	$4n$	$n$	--	--	--	1	
2 3	2	3	3	24	3	4	--	--	--	Tétraèdre
4 3 2	4	3	2	48	6	4	3	--	--	Cube, Octaèdre
5 3 2	5	3	2	120	15	10	--	6	--	Dodécaèdre, icosaoèdre

Tableau T.C.1. Symétries de rotation d'un objet de dimensions finies.

Pour chaque combinaison, le calcul de la surface du triangle de Möbius permet de connaître le nombre total de ces triangles sur la sphère. Le nombre d'axes d'un ordre donné se déduit de celui des triangles de Möbius en remarquant qu'un axe d'ordre  $n$  est au sommet de  $2n$  triangles et que cet axe traverse la sphère en deux points.

Ainsi, le nombre de façons distinctes de combiner des axes de symétries est très limité. Les symétries d'ordre 6 ou supérieures ne sont conciliables qu'avec des symétries d'ordre 2 et, contrairement au pavage plan, on peut envisager une symétrie d'ordre 5. Comme on le voit sur la figure 2, l'icosaèdre peut se construire en meulant les sommets du dodécaèdre, perpendiculairement aux axes d'ordre 3, jusqu'à mi-arête.

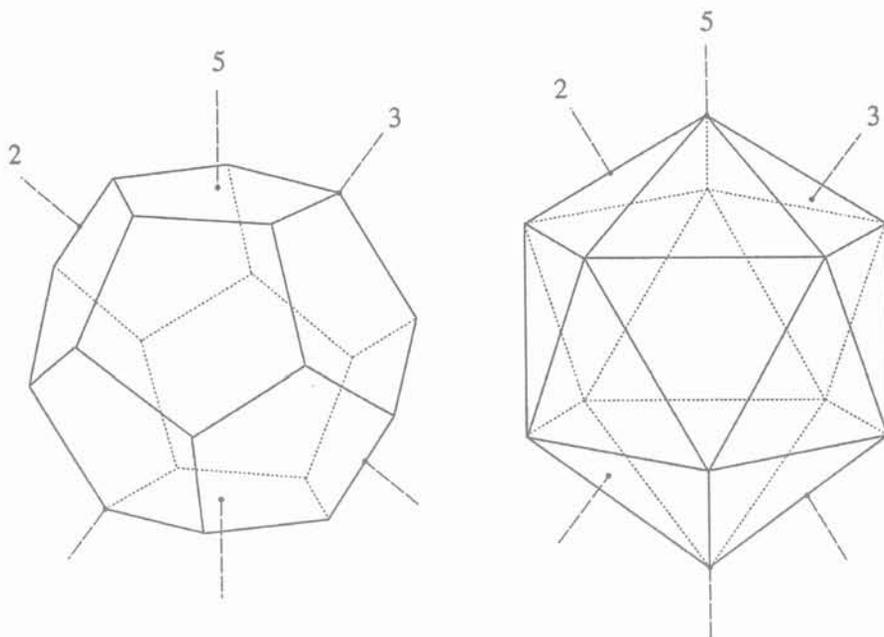


Figure C.2. Dodécaèdre et icosaèdre réguliers.

Puisque l'effet possède au moins les symétries de sa cause, si la source de champ présente des symétries, le champ présentera les mêmes. En se reportant aux représentations graphiques des harmoniques sphériques du Chapitre 1, il est facile de voir quel groupe de symétrie est représentatif de chaque harmonique réelle.

## C.2. Quelques symétries des harmoniques sphériques réelles.

Suivant le tableau 1 de cette annexe, la symétrie par rotation quelconque (donc d'ordre infini) autour d'un axe n'est compatible avec aucune autre sauf une rotation d'ordre 2 autour d'un axe perpendiculaire. C'est le cas des  $Y_n^m$  lorsque  $m = 0$  et que  $n$  est paire.

Les harmoniques sphériques réelles présentent une symétrie d'ordre  $m$  autour de l'axe Oz. Puisque nous nous limitons pour l'instant aux termes octupolaires,  $m$  est au plus égal à 3. Nous voyons que, contrairement à la symétrie d'ordre 2, qui est compatible avec une symétrie d'ordre quelconque suivant un axe perpendiculaire, la symétrie par rotation d'ordre 3 peut coexister avec des axes d'ordre 2, 3, 4 ou 5 mais les deux derniers ne surviennent que pour des ordres multipolaires supérieurs à 3.

Pour étudier la symétrie par rapport au plan xOy, rappelons la définition des harmoniques sphériques scalaires:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot P_n^m(\cos\theta) \cdot e^{jm\varphi}$$

Dans cette expression :

- $n$  est un entier positif ou nul et  $m$  est un entier compris entre  $-n$  et  $+n$ .

- $P_n^m(z)$  est la fonction de Legendre associée qui se calcule comme suit :

$$P_n^m(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \cdot \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}} (z^2 - 1)^n$$

Lors du passage d'un point à son symétrique par rapport à xOy, seul  $\cos\theta$  change de signe. La symétrie étudiée coïncide donc avec la parité de la fonction de Legendre associée.

Celle-ci est composée de la fonction paire  $(1-z^2)^{\frac{m}{2}}$  et de la dérivée  $(n+m)$ ième de la fonction paire  $(z^2 - 1)^n$ . Chaque dérivation changeant la parité, la grandeur  $\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}} (z^2 - 1)^n$  présente la parité de  $(n+m)$ .

Ainsi, si  $(n + m)$  est paire,  $Y_n^m$  présente une symétrie paire par rapport au plan Oxy et inversement.

Puisque les fonctions harmoniques sphériques sont linéairement indépendantes, si une fonction de l'espace vectoriel qu'elles sous-tendent présente une symétrie, toutes les fonctions de sa décomposition présentent la même. Ainsi par exemple :

- une fonction invariante dans une rotation quelconque autour de Oz n'aura, dans sa décomposition que des  $Y_n^m$  partageant cette propriété, c'est-à-dire des  $Y_n^0$ .
- une fonction qui présente une symétrie paire par rapport au plan xOy n'aura, dans sa décomposition, que des termes tels que  $n + m$  soit pair.

### **C.3. Répartition régulière des points de mesure sur une sphère.**

Pour caractériser le champ d'un composant inconnu, il est logique de répartir des points de mesure autour de lui sans privilégier aucune direction. Dans cette optique, nous avons cherché à placer des points équidistants sur la sphère. Intuitivement, il semble possible de disposer 4 points aux sommets d'un tétraèdre, 6 aux centres des faces d'un cube, 8 aux sommets d'un cube, 12 au milieu des arêtes d'un cube. Bref, la construction des polyèdres réguliers ou semi-réguliers semble un bon guide.

Nous allons découvrir ci-dessous deux dispositions de points qui sont satisfaisantes à cet égard. Pourtant, il ne faut pas sous-estimer la difficulté du problème posé. Disposer des points régulièrement espacés sur une sphère est un sujet de recherches mathématiques encore d'actualité aujourd'hui. Voir à ce sujet l'article de Marcel Berger "Le problème des dictateurs ennemis" dans La Recherche, Spécial Mathématiques, n°346, oct 2001, pp. 38-44.

Pour commencer, cherchons les coordonnées angulaires des points remarquables (milieux des arêtes, sommets, milieux des faces) de l'icosaèdre (fig. C.3) en supposant que deux de ses sommets opposés sont situés sur l'axe Oz, symétriquement par rapport à l'origine du repère.

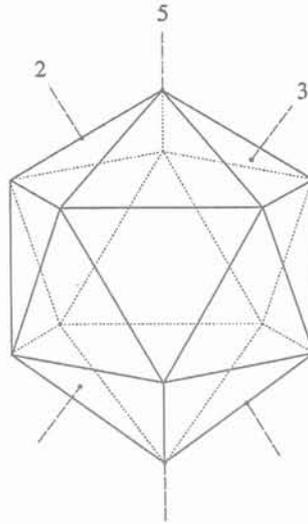


Figure C.3. Le polyèdre régulier le plus complexe : l'icosaèdre.

La figure C.4 montre une coupe méridienne de l'icosaèdre qui passe le sommet S2. La partie droite, non représentée, se déduit de la partie gauche par symétrie par rapport au centre O de la sphère. Sur la demi coupe montrée on remarque 3 sommets (S1, S2 et S3), 2 milieux d'arêtes (A1 et A2) et 2 centres de faces (F1 et F2).

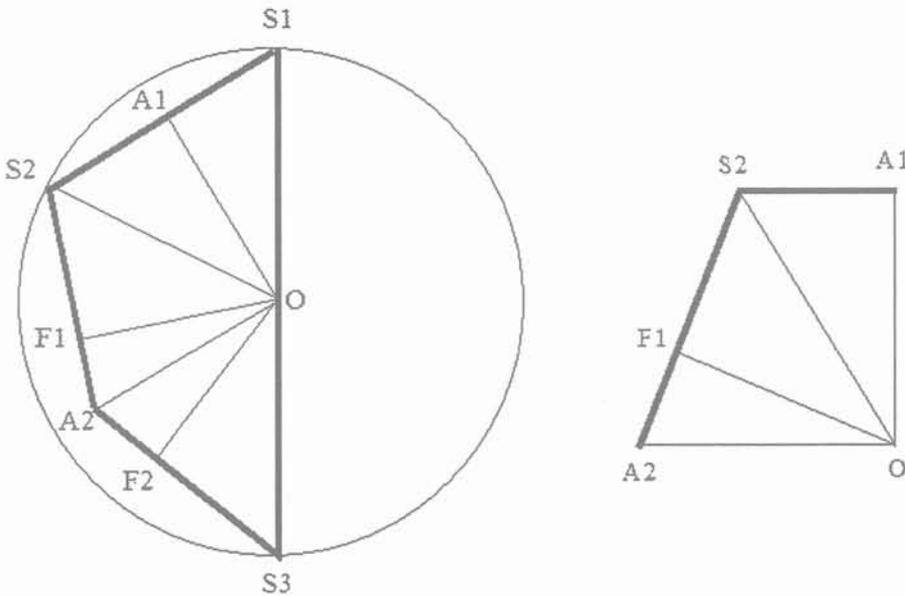


Figure C.4. Coordonnées des points remarquables de l'icosaèdre.

De nombreuses propriétés caractérisent cette figure. Les segments S2A2 et S3A2 ont mêmes longueurs : ce sont les hauteurs de triangles équilatéraux identiques. Ils mesurent  $\sqrt{3}/2$  fois l'arête S1S2. Les centres des faces F1 et F2 sont éloignés du tiers de cette longueur

par rapport au milieu de la base A2 des triangles. Puisque tous les sommets des faces triangulaires sont sur la sphère, le segment qui joint le centre d'une face au centre de la sphère est normal à cette face. A1 étant le milieu de S1S2, l'angle A2OA1 est droit, ce qui apparaît bien sur la vue partielle de droite. Enfin, les longueurs OA1 et OA2 sont égales : ce sont celles qui séparent les milieux des arêtes du centre de la sphère.

Commençons par situer les 30 milieux d'arêtes. Ils se répartissent sur 5 plans normaux à Oz et disposés symétriquement par rapport au plan équatorial. Sur ce plan se trouvent 10 points répartis tous les 36° tandis que sur chacun des 4 autres se trouvent 5 points séparés de 72°. Au total, cela fait bien 30 points.

Notons a la longueur de l'arête de l'icosaèdre et b la distance qui sépare le milieu d'une arête du centre de la sphère, les hauteurs des faces mesurent  $h = a\sqrt{3}/2$ . Le théorème de Pythagore appliqué à cette figure conduit à deux égalités utiles :

$$r^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (C.2)$$

$$h^2 = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 \quad (C.3)$$

A l'aide de (C.3) nous exprimons a en fonction de b, puis nous reportons dans (C.2) pour déduire b/r. Il vient ainsi, en notant  $\alpha$  l'angle A1OS2 :

$$\frac{b}{r} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = 0,850651 = \cos \alpha \quad (C.4)$$

$\alpha$  s'en déduit directement ainsi que son complément  $\beta$  égal à S3OA2. En définitive, les milieux des arêtes sont situés sur les plans définis par :

$$\theta = 31,72^\circ ; 58,18^\circ ; 90^\circ ; 121,72^\circ \text{ et } 148,18^\circ \quad (C.5)$$

En dehors des deux pôles, les sommets sont disposés sur deux plans symétriques par rapport à l'équateur. La figure C.4 montre que le sommet S2 est situé en  $\theta = 2\alpha$ . Les sommets sont donc disposés sur les plans :

$$\theta = 63,44^\circ \quad \text{et} \quad 116,56^\circ \quad (\text{C.6})$$

Enfin, les centres des faces sont répartis sur quatre plans, symétriques deux à deux par rapport à l'équateur. Le plus bas est situé en F2 et l'angle F2OS3 est égal à S2OF1. Notons  $\gamma$  cet angle. Les relations dans le triangle S2OF1 jointes à (C.4) montrent que :

$$\sin \gamma = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{30}} = 0,491123 \quad \text{soit} \quad \gamma = 29,41^\circ \quad (\text{C.7})$$

Les élévations  $\theta$  des centres de faces sont égales à  $\gamma$  et son supplément ainsi qu'à  $2\alpha + \gamma$  et son supplément. Finalement,

$$\theta = 29,41^\circ \quad 87,15^\circ \quad 92,85^\circ \quad 150,59^\circ \quad (\text{C.8})$$

Si l'origine des azimuts est dans le plan S1S2S3, l'azimut de tous les points remarquables étudiés est un multiple de 18 degrés.

Nous ne savons pas comment placer plus de 30 points (milieux des arêtes) équidistants sur une sphère. Cependant, des dispositions convenables s'obtiennent en prenant les sommets de l'icosaèdre et en pavant ses triangles par des hexagones. La plus simple consiste à prendre les  $12 + 20 + 30 = 62$  points remarquables et à leur adjoindre 60 points obtenus en pavant chacun des 20 triangles équilatéraux comme indiqués ci-dessous. Au total, cela fait 122 points. La technique mise en œuvre conduit à un pavage de la sphère par 12 pentagones (centrés sur les sommets de l'icosaèdre) et des hexagones. En modifiant la taille de ces polygones réguliers, on obtient des dispositions convenables de points plus ou moins nombreux.

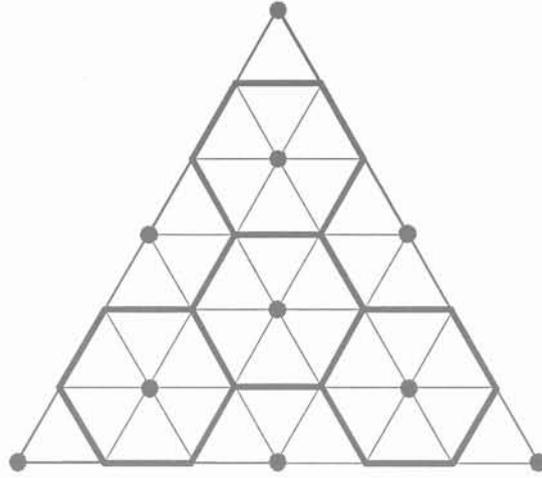


Figure C.5. Comment disposer 122 points régulièrement sur une sphère.

Pour la disposition de la figure C.5 62 des points sont les points remarquables placés précédemment et chacun des 60 points supplémentaires est sur la bissectrice d'un angle formé par un rayon qui passe par un sommet et par un autre qui passe par le centre d'une face. La demi somme des deux vecteurs unités associés à ces points présente donc la bonne orientation; il est facile d'en déduire les coordonnées angulaires recherchées.







## ANNEXE D. TENSEURS DANS UN ESPACE EUCLIDIEN.

### D.1. Introduction

On considère la plupart du temps que l'espace de la physique est tridimensionnel et que les lois physiques mettent en relation des nombres (ou scalaires) et des vecteurs (à trois composantes). Dans ce cadre, une grandeur orientée se représente naturellement par un vecteur et, dans un repère donné, elle se caractérise par trois composantes.

Nous allons voir que ces notions intuitives doivent être précisées car, par exemple, deux types de composantes, qui ne se transforment pas de la même façon lors d'un changement de repère, peuvent caractériser un vecteur. Nous verrons aussi que la vision de la physique résumée ci-dessus est trop restrictive : dans l'espace à trois dimensions, la physique met en œuvre non seulement des grandeurs caractérisées par 1 et 3 composantes mais aussi par 9, 27, .... Pour que les lois qui relient ces grandeurs s'écrivent de la même manière dans tous les repères, les composantes de ces diverses grandeurs doivent varier de façon coordonnée lors d'un changement de repère.

L'algèbre tensorielle fournit les outils adaptés aux extensions envisagées ci-dessus. Dans l'espace à trois dimensions, un tenseur d'ordre  $n$  se décrit par  $3^n$  composantes qui, lors d'un changement de base, se transforment d'une manière bien précise. Les lois de transformation choisies sont telles que les relations entre tenseurs d'ordres divers s'écrivent de la même façon dans toutes les bases. Nous verrons que ce cadre englobe les scalaires et les vecteurs (mêmes pseudo) et qu'il permet d'écrire de façon rigoureuse le développement en série de Taylor d'une fonction scalaire autour d'un point. Enfin et surtout, ce formalisme donne une assise rigoureuse au développement multipolaire en précisant la nature du moment multipolaire d'ordre  $2^n$  et en indiquant comment ses composantes varient lors d'un changement de repère. Soulignons également que le calcul tensoriel, qui s'étend à des espaces de dimensions supérieures à 3, est un outil irremplaçable pour l'étude du champ électromagnétique dans l'espace à 4 dimensions de la relativité restreinte.

## D.2. Transformation des composantes lors d'un changement de base

### D.2.1. Univers physique et espace vectoriel.

A proprement parler, l'espace de la géométrie ordinaire, dans laquelle se déroulent les phénomènes physiques, n'est pas un espace vectoriel : c'est un espace ponctuel affine. Pour désigner un de ses points, il faut se donner un repère qui rassemble une origine et une base. Ceci étant précisé, il n'est pas nécessaire, pour ce qui nous intéresse ici, d'approfondir cette distinction. Nous adopterons le langage courant des physiciens qui parlent de changement de base lorsqu'ils effectuent un changement de repère. A l'usage, il est facile de voir quand cette distinction devient indispensable et cette simplification de langage s'avère sans risque.

### D.2.2. Conséquences d'un changement de base.

La notion d'espace vectoriel étant supposée connue du lecteur, nous ne rappelons ici que les relations essentielles afin d'introduire les notations que nous adoptons.

Soit  $\{\vec{e}_i\}$  l'ensemble des  $n$  vecteurs qui constituent la base  $B$  d'un espace vectoriel  $E_n$  de dimension  $n$ . Un vecteur quelconque  $\vec{x}$  de cet espace admet la décomposition suivante :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{e}_i \quad (D.1)$$

Les nombres  $a_i$  sont appelés composantes de  $\vec{x}$  sur  $B$ . Lorsqu'on procède à un changement de base, il est naturel de définir les vecteurs de la nouvelle base ( $B'$ ) par leurs composantes dans l'ancienne. Ceci fait, il devient possible d'exprimer les composantes du vecteur  $\vec{x}$  dans  $B'$  en fonction de celles qu'il avait dans  $B$ .

$$\vec{e}_{j'} = \sum_{i=1}^n A_{j',i} \cdot \vec{e}_i \quad \text{et, réciproquement,} \quad \vec{e}_i = \sum_{j=1}^n A'_{i,j'} \cdot \vec{e}_{j'} \quad (D.2)$$

En remplaçant, dans (D.1), les vecteurs de B par leurs développements (D.2) sur B', on obtient le développement de  $\vec{x}$  sur B' et l'expression de ses nouvelles composantes.

$$a_{j'} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot A'_{i,j'} \quad (D.3)$$

et, réciproquement,

$$a_i = \sum_{j'=1}^n a_{j'} \cdot A_{j',i} \quad (D.4)$$

En passant successivement de B à B' puis de B' à B on retrouve les composantes dans B. Il est facile de voir que cela entraîne, entre les tableaux A et A', la relation suivante :

$$\sum_{j'=1}^n A'_{i,j'} \cdot A_{j',k} = \delta_{i,k} \quad (D.5)$$

où  $\delta_{i,k}$ , appelé symbole de Kronecker, vaut 1 si les deux indices sont égaux et 0 sinon. Pour revenir à un langage plus connu, les deux matrices A et A' sont inverses l'une de l'autre.

### **D.2.3. Espace vectoriel euclidien.**

Lorsque l'on postule, dans l'espace à trois dimensions, que la distance entre deux points se déduit des coordonnées de ces points par le théorème de Pythagore, l'espace ponctuel affine devient un "espace ponctuel euclidien". Plus généralement, l'espace vectoriel est qualifié d'euclidien si la distance (ou norme) découle de l'introduction d'un produit scalaire. Les axiomes du produit scalaire et ceux de la norme d'un vecteur permettent de définir la longueur d'un vecteur et l'angle formé par deux vecteurs. Grâce à ces notions complémentaires, on peut définir les bases orthonormées dans lesquelles les calculs sont beaucoup plus simples.

Dans un espace euclidien, l'ensemble des produits scalaires des vecteurs de base pris deux à deux et rangé sous forme de tableau reflète la plupart des propriétés de la base. Il aura une très grande importance dans la suite à chaque fois que nous supposerons que les espaces vectoriels sont euclidiens.

$$g_{i,j} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (D.6)$$

### D.3. Deux types de composantes pour un vecteur.

#### D.3.1. Un vecteur atypique : le gradient

Le gradient d'un champ scalaire définit une grandeur orientée habituellement regardée comme un vecteur. Nous allons montrer que ses composantes ne se transforment pas comme indiqué par (D.3).

Dans un espace vectoriel rapporté à une base orthonormée B le gradient de la fonction scalaire f se définit par :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \quad (D.7)$$

Supposons maintenant que l'on veuille rapporter ce vecteur à la base B', très semblable à B mais dont seul le premier vecteur de base est 3 fois plus long (B' n'est donc plus orthonormée !). On a :

$$\vec{e}_x' = 3 \cdot \vec{e}_x, \quad \vec{e}_y' = \vec{e}_y, \quad \text{et} \quad \vec{e}_z' = \vec{e}_z$$

Ce qui se traduit par :

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On s'attend, en conséquence, à ce que les nouvelles composantes soient données par :

$$\begin{aligned} \text{grad}_{x'} f &= \frac{1}{3} \text{grad}_x f \\ \text{grad}_{y'} f &= \text{grad}_y f \\ \text{grad}_{z'} f &= \text{grad}_z f \end{aligned}$$

Pourtant, si nous revenons à la définition (D.7), la composante suivant x' ne semble pas devoir prendre cette valeur :

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx'} = 3 \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{puisque } x' = \frac{1}{3} x \dots$$

La variation de cette composante est en sens inverse de celui prévu ! Il est va de soi que ce problème se manifeste de la même façon lorsque c'est un autre vecteur de base qui change de longueur et même si plusieurs changent simultanément. Soulignons cependant que cette difficulté n'apparaît pas si la seconde base est, comme la première, orthonormée. Néanmoins, un champ vectoriel (électrique par exemple) doit pouvoir être décrit sans ambiguïté dans une base quelconque !

Pour mieux situer l'origine du problème, revenons à la définition générale du gradient. Celle-ci postule que, lors d'un déplacement élémentaire  $\overline{dr}$ , la variation d'une fonction scalaire s'écrit :

$$df = \overline{\text{grad } f} \cdot \overline{dr} \quad (\text{D.8})$$

Puisque  $df$  est un scalaire, cette quantité est invariante lors d'un changement de base. Dès lors, si un changement de base divise les coordonnées de  $\overline{dr}$  par 3, il est logique que celles du gradient soient multipliées par trois ! Lorsque le changement de base est moins particulier, la relation (D.7) permet de savoir comment se transforment les composantes du gradient. Il suffit d'exprimer  $dx$  en fonction de  $dx'$ ,  $dy'$  et  $dz'$  puis de répéter l'opération pour les autres composantes du gradient. On établit ainsi que, lors du passage de  $B$  à  $B'$ , elles se transforment selon le tableau  $A$  qui, comme le montre (D.5), est la matrice inverse de  $A'$ .

Ces considérations dépassent le cadre du gradient. En effet, à chaque fois qu'un vecteur est défini de telle façon que son produit scalaire par un vecteur standard est invariant lors d'un changement de base, ses composantes doivent varier comme celles du gradient. Il faut donc se résigner à faire cohabiter deux types de composantes de vecteurs : celles qui varient de la façon habituelle (D.3) et celles qui varient en sens inverse.

### D.3.2. Composantes contravariantes et covariantes

Lors du passage de  $B$  à  $B'$ , le tableau  $A$  définit les vecteurs de  $B$  dans  $B'$  et c'est ce même tableau qui permet de calculer les composantes d'un vecteur dans  $B'$  en fonction de ses composantes dans  $B$ . Pour cette raison, les composantes de ce type seront qualifiées de

contravariantes tandis qu'à l'opposé, celles qui varient comme les composantes du gradient seront dites *covariantes*. Pour les reconnaître, l'indice des composantes contravariantes sera placé en haut alors que celui des composantes covariantes sera situé en bas. Afin d'éviter toute confusion, l'élévation à une puissance sera signalée par des parenthèses. Nous allons montrer maintenant qu'un vecteur normal admet des composantes covariantes et réciproquement.

Sur B, le vecteur  $\vec{x}$  se décompose suivant (D.1) mais ses composantes standards, c'est à dire contravariantes, doivent désormais être repérées par un indice placé en haut.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n a^i \cdot \vec{e}_i \quad (D.9)$$

Nous appellerons composantes covariantes de  $\vec{x}$  les quantités :

$$a_i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i \quad (D.10)$$

Cette appellation se justifie par la façon dont ces quantités se transforment lors du passage de B à B'. Dans B' la définition ci-dessus conduit en effet à :

$$a_{j'} = \vec{x} \cdot \vec{e}_{j'} = \vec{x} \cdot \sum_{i=1}^3 A_{j'}^i \cdot \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 A_{j'}^i \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^3 A_{j'}^i \cdot a_i \quad (D.11)$$

Soulignons que désormais, pour assurer la cohérence de nos notations, nous inscrivons le second indice des matrices A et A' définies par (D.2) en haut. Il est maintenant facile de voir comment les composantes covariantes se déduisent des composantes contravariantes.

$$a_i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i = \left( \sum_{j=1}^3 a^j \cdot \vec{e}_j \right) \cdot \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 a^j \cdot \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 a^j \cdot g_{i,j} \quad (D.12)$$

C'est donc le tableau  $g_{i,j}$  qui permet de passer des composantes contravariantes aux composantes covariantes. Cette dépendance étant linéaire, le passage inverse fait appel au tableau (= matrice) inverse. On commence à mesurer l'importance du tableau  $g_{i,j}$ .

Bien qu'elle se limite à un espace à deux dimensions, la figure D.1 permet de mémoriser la différence entre composantes contravariantes (parallélogramme) et composantes covariantes (projection orthogonale) d'un même vecteur. Il est clair que ces composantes coïncident si la base est orthonormée...

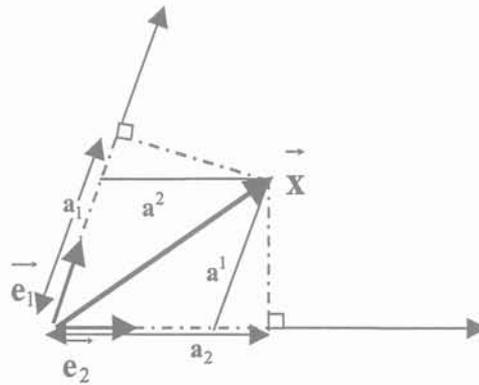


Figure D.1. Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur du plan.

Pour finir, revenons au gradient. Nous avons vu que le calcul habituel lui affecte des composantes covariantes. En conséquence nous écrirons ces dernières avec un indice en position basse comme indiqué ci-dessous.

$$\partial_i \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i} \quad (\text{D.13})$$

### D.3.3. Convention d'Einstein

Cette convention vise uniquement à alléger l'écriture ce qui, à l'usage, s'avère quasiment indispensable. Elle repose sur deux règles. Tout d'abord, dans l'espace euclidien de dimension 3, les composantes d'un vecteur  $\mathbf{p}$  ne sont pas repérées par des lettres distinctes  $(x, y, z)$  mais par un indice variant de 1 à 3 et placé en haut ( $p^1, p^2, p^3$ ) ou en bas ( $p_1, p_2, p_3$ ) suivant qu'il s'agit d'une composante contravariante ou covariante. Rappelons que l'élévation à une puissance ne s'applique désormais qu'à une quantité mise entre parenthèses. Ensuite, à chaque fois qu'une somme de monômes faisant apparaître un indice supérieur et un indice inférieur identiques doit être effectuée en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles (soit 1 à 3 dans un espace à trois dimensions), le signe de sommation est sous-entendu.[PAPIN] :

Avec cette convention, le produit scalaire s'exprime, en fonction des composantes, sans qu'aucune addition ni qu'aucun signe sigma n'apparaisse explicitement :

$$\vec{p} \cdot \vec{s} = (p^i \cdot \vec{e}_i) \cdot (s^j \cdot \vec{e}_j) = p^i \cdot s^j \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = p^i \cdot s^j \cdot g_{i,j} = p^i \cdot s_i \quad (\text{D.14})$$

Ce qui, compte tenu de la commutativité du produit scalaire, peut également s'écrire :

$$\vec{p} \cdot \vec{s} = p_i \cdot s^i \quad (\text{D.15})$$

Les indices  $i$  et  $j$  sont des variables dite muettes qui prennent toutes les valeurs allant de 1 à 3. Pour assurer la cohérence avec cette notation, la matrice de changement de base est désormais présentée avec un indice en haut. De cette façon, les relations (D.3) s'écrivent :

$$a'_j = a_i \cdot A^i_j \quad \text{et} \quad a_i = a'_j \cdot A^j_i \quad (\text{D.16})$$

## D.4. Fondements de l'algèbre tensorielle.

### D.4.1. Grandeurs physiques à composantes nombreuses

Même en physique classique, il n'est pas inhabituel de voir des grandeurs qui, dans un repère donné, se caractérisent par plus de trois composantes. Il en est ainsi, par exemple, de la permittivité d'un diélectrique anisotrope qui lie linéairement l'induction électrique  $\vec{D}$  au champ électrique  $\vec{E}$ . Avec les notations habituelles on a :

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{i,j} \cdot E_j$$

Cette permittivité se caractérise donc par 9 composantes. Pour aller plus loin, signalons que certains diélectriques sont sensibles à une induction magnétique appliquée extérieurement. Celle-ci provoque une petite variation de la permittivité qui lui est liée linéairement.

$$\Delta\varepsilon_{i,j} = \sum_{k=1}^3 \Gamma_{i,j,k} \cdot B_k$$

La grandeur à trois indices impliquée ici possède 27 composantes... En élasticité, des grandeurs à 4 indices (81 composantes) s'introduisent tout aussi naturellement. Pour que les lois exprimées par ces grandeurs soient valides dans n'importe quel repère, il faut que les transformations de leurs composantes lors des changements de base soient coordonnées. La théorie des tenseurs atteint parfaitement cet objectif.

#### D.4.2. Définition d'un tenseur

Dans un espace vectoriel euclidien à trois dimensions nous disons qu'un ensemble de  $3^n$  réels constitue les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre  $n$  si ces quantités se transforment, lors d'un changement de base, comme les  $3^n$  réels définis par les produits :

$$a^i \cdot a^j \cdot a^k \dots \text{comprenant } n \text{ termes} \quad (\text{D.17})$$

Les indices  $i, j$  et  $k$  prennent toutes les valeurs allant de 1 à 3 et les  $a^i$  sont les composantes contravariantes d'un vecteur quelconque  $\vec{a}$ .

De la même façon, un ensemble de  $3^n$  réels constitue les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre  $n$  si ces quantités se transforment, lors d'un changement de base, comme les  $3^n$  réels définis par :

$$a_i \cdot a_j \cdot a_k \dots \text{comprenant } n \text{ termes} \quad (\text{D.18})$$

Les  $a_i$  sont alors les composantes covariantes du vecteur  $\vec{a}$ .

On définit enfin les composantes mixtes,  $p$  fois contravariantes et  $q$  fois covariantes ( $p + q = n$ ), d'un tenseur d'ordre  $n$  par un ensemble de  $3^n$  réels qui se transforment, lors d'un changement de base, comme :

$$a^i \cdot a^j \dots a_{k_1} \cdot a_{l_1} \dots \text{comprenant } p \text{ termes du premier type} \quad (\text{D.19})$$

et  $q$  du second

Pour finir, il est utile de préciser que tout ensemble de  $3^n$  scalaires rencontré en physique n'est pas systématiquement un tenseur. Pour qu'il le soit, il doit respecter l'une des lois de changement de base D.17 à D.19 regroupées sous le nom de : "*premier critère de tensorialité*".

#### D.4.3. Produit tensoriel, contraction, produit contracté

Considérons deux tenseurs T1 et T2 d'ordres respectifs n1 et n2. Il est facile de vérifier, en s'appuyant sur (D.17) à (D.19), que les  $(n1 \cdot n2)$  produits de leurs composantes (contravariantes, covariantes ou mixtes) respectives forment un tenseur T3 d'ordre  $n3 = n1 + n2$ . Ce tenseur T3 est appelé produit tensoriel de T1 par T2. Ce produit est commutatif.

Le produit tensoriel d'un tenseur T par lui-même, répété n fois, est la puissance tensorielle  $n^{\text{ième}}$  de T. Ainsi, les quantités (D.17) à (D.19) qui servent à la définition des tenseurs sont les composantes de la puissances tensorielles  $n^{\text{ième}}$  du vecteur  $\vec{a}$ . De la même façon, l'ensemble des dérivées secondes de la fonction f constitue l'ensemble des composantes deux fois covariantes du tenseur dérivée seconde de f et celui-ci peut être regardé comme le carré tensoriel du gradient. En revenant à (D.13) on peut écrire :

$$\partial_i \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i} \quad \rightarrow \quad \partial_{i,j}^2 \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \mathbf{f} \quad (\text{D.20})$$

Soit, d'autre part, un tenseur T d'ordre n. Considérons l'un de ses jeux de composantes mixtes. L'ensemble des  $3^{n-2}$  nombres qui s'obtiennent en donnant la même valeur i à un indice covariant et à un indice contravariant, puis en effectuant la somme des résultats associés à toutes les valeurs de i, se transforment selon (D.17) à (D.19) : c'est donc un tenseur d'ordre  $n - 2$ . Ainsi, une contraction des composantes p fois contravariantes et q fois covariantes d'un tenseur d'ordre  $n = p + q$  donne les composantes  $p - 1$  fois contravariantes et  $q - 1$  fois covariantes d'un tenseur d'ordre  $n - 2$ .

La contraction peut être répétée plusieurs fois. A chaque fois l'ordre du tenseur obtenu diminue de 2 unités. Si elle est répétée jusqu'à l'obtention d'un scalaire, le tenseur est dit complètement contracté. Enfin, lorsque après un produit tensoriel on contracte deux indices provenant chacun d'un tenseur, le résultat est un tenseur appelé produit contracté.

Des propriétés ci-dessus découle une réciproque importante qui permet de savoir si un ensemble de  $3^n$  valeurs, soupçonné d'être le jeu de composantes d'un tenseur d'ordre  $n$ , l'est vraiment. Si le produit contracté d'un tenseur par l'ensemble testé est un tenseur, la réponse est oui. Cette propriété est connue sous le nom de "second critère de tensorialité".

#### **D.4.4. Tenseur fondamental**

Pour illustrer ce qui précède, montrons que les  $g_{i,j}$  définies par (D.6) sont les composantes d'un tenseur. En résumant la relation (D.12), celle-ci apparaît comme le produit contracté des grandeurs à tester par les composantes contravariantes d'un vecteur (ou tenseur d'ordre 1).

$$a_i = g_{i,j} \cdot a^j$$

Puisque ce produit donne les composantes d'un vecteur, nous pouvons conclure que les  $g_{i,j}$  sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre 2. Ce tenseur particulier est appelé tenseur fondamental. Nous avons souligné son importance à plusieurs reprises.

#### **D.4.5. Symétrie et antisymétrie**

On dira qu'un tenseur est symétrique par rapport à deux indices de même nature (contravariants ou covariants) si la permutation de ces deux indices n'affecte pas les valeurs de ses composantes. Ainsi, le tenseur dérivée seconde défini par (D.20) est symétrique par rapport à ses deux indices (covariants). Par extension, on dit qu'un tenseur d'ordre  $n$  est complètement symétrique si ses composantes toutes contravariantes (ou toutes covariantes) sont symétriques par rapport à n'importe quelle paire d'indices.

Dans l'espace à 3 dimensions, un tenseur complètement symétrique se caractérise par  $N_s$  composantes indépendantes. La relation (D.21) qui donne la valeur de  $N_s$  s'établit facilement. Puisque les indices ne peuvent prendre que trois valeurs, le problème se ramène à savoir combien de lots distincts on peut former en assemblant  $n$  boules pouvant prendre chacune une couleur parmi trois.

$$N_s = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = C_n^{n+2} \quad (D.21)$$

Dans un espace de dimension  $d$  quelconque, cette relation devient :  $N_s = C_n^{n+d-1}$ .

D'une façon similaire, si la permutation de deux indices (de même nature) ne change que le signe des composantes, on dit que le tenseur est antisymétrique. Si ceci est vrai pour n'importe quel couple d'indices, le tenseur est dit complètement antisymétrique.

Dans l'espace à  $d$  dimensions, un tenseur d'ordre  $n$  complètement antisymétrique ne possède que  $N_a$  composantes indépendantes :  $N_a = C_n^d$ . Si  $d = 3$ ,

$$N_a = C_n^3 \tag{D.22}$$

Ainsi, dans l'espace à trois dimensions les tenseurs complètement antisymétriques d'ordre 2 et 3 se caractérisent respectivement par 3 et 1 composantes indépendantes. Il est facile de montrer que ces composantes se transforment comme celles d'un pseudovecteur pour l'ordre 2 et d'un pseudoscalaire pour l'ordre 3. On constate que ces objets mathématiques utiles trouvent naturellement leur place dans le formalisme tensoriel.

Les propriétés de symétrie ne sont pas affectées par un changement de base.

## **D.5. Développement en série de Taylor.**

### **D.5.1. Fonction scalaire quelconque de l'espace.**

Sous sa forme habituelle, le développement en série de Taylor donne une approximation, aussi précise que l'on veut, au point  $x_0 + \Delta x$ , d'une fonction scalaire de  $f(x)$  connue au point  $x_0$ .

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \Delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \cdot \Delta x^n$$

Cette formule s'étend aisément lorsqu'on veut évaluer une fonction scalaire de deux variables autour d'un point où elle est connue. Il suffit d'envisager le déplacement suivant  $y$  après celui suivant  $x$ . En arrêtant la dérivation au second ordre, il vient :

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \Delta x^2 + \dots \\ & + \frac{\partial f}{\partial y} \left( 1 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \Delta x^2 \right) \cdot \Delta y + \dots \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left( 1 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \Delta x^2 \right) \cdot \Delta y^2 + \dots \end{aligned}$$

...où toutes les dérivées sont calculées en  $[x_0, y_0]$ . Notons qu'en suivant un chemin parallèle à  $y$  d'abord et à  $x$  ensuite on aurait obtenu le même résultat. Après élimination des dérivées d'ordre supérieur à 2 et mise en ordre des termes, il reste :

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \dots \end{aligned}$$

La fonction  $f$  étant un scalaire (ou tenseur d'ordre 0) de l'espace à deux dimensions, le membre de droite est nécessairement une somme de scalaires. Mis à part le premier terme qui est naturellement scalaire, chacun des termes suivants apparaît comme le produit complètement contracté du tenseur dérivée d'ordre  $n$  par le tenseur déplacement élémentaire à la puissance tensorielle  $n$ . Ainsi interprété, ce résultat se généralise facilement et les notations de l'algèbre tensorielle permettent d'écrire, sous une forme compacte, le développement de Taylor d'une fonction scalaire de l'espace à trois dimensions.

$$f(\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}) = f(\vec{r}_0) + \partial_i f \cdot \Delta x^i + \frac{1}{2} \partial^2_{i,j} f \cdot \Delta x^i \cdot \Delta x^j + \dots + \frac{1}{n!} \partial^n_{i,j,k,\dots} f \cdot \Delta x^i \cdot \Delta x^j \cdot \Delta x^k \dots \quad (D.23)$$

Comme tout tenseur d'ordre  $n$  dans un espace à trois dimensions, le tenseur dérivée d'ordre  $n$  ( $\partial^n_{i,j,k,\dots}$ ) se caractérise par  $3^n$  composantes. Cependant, puisque l'ordre de la dérivation par rapport à deux variables est indifférent, le tenseur dérivée d'ordre  $n$  est symétrique par rapport à toutes ses paires d'indices : il est complètement symétrique. Il ne possède donc que  $C_n^{n+2}$  composantes indépendantes.

### D.5.2. Développement du potentiel pseudo scalaire.

Tel qu'il est présenté par (D.23), le développement en série de Taylor s'applique à toute fonction scalaire et en particulier au potentiel scalaire ou pseudoscalaire. Cependant, là où celui-ci satisfait l'équation de Laplace, le nombre de ses dérivées indépendantes d'ordre  $n$  est plus petit que celui indiqué ci-dessus. Ainsi par exemple de la relation (D.24) il résulte qu'une des trois dérivées secondes impliquées se déduit des deux autres. Le tenseur dérivée seconde n'a donc pas 6 mais seulement 5 composantes indépendantes.

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (D.24)$$

L'impact de cette relation ne se borne pas à l'ordre 2. En effet, parmi les dérivées d'ordre 3 on trouve :

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \Delta U = 0$$

Deux relations analogues s'obtiennent en dérivant par rapport à  $y$  et  $z$ . L'ensemble revient à écrire que le gradient du Laplacien est nul. Le gradient ayant trois composantes, trois relations lient les dérivées troisièmes qui ne sont plus que  $10 - 3 = 7$  à être indépendantes. De la même façon, parmi les dérivées quatrièmes on peut former la dérivée seconde du Laplacien. Ses six composantes sont nulles ce qui réduit d'autant le nombre des composantes indépendantes de la dérivée quatrième. Ce raisonnement se généralise en notant que pour la dérivée d'ordre  $n$  le nombre de relations supplémentaires est égal à égal à celui des composantes indépendantes de la dérivée d'ordre  $n - 2$ .

$$N_{hs} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{[(n-2)+1][(n-2)+2]}{2} = 2n+1 \quad (D.25)$$

En définitive, le tenseur dérivée d'ordre  $n$  d'une fonction satisfaisant l'équation de Laplace ne possède que  $2n + 1$  composantes indépendantes.

### D.5.3. Tenseurs moments dipolaires.

Le développement multipolaire du champ reçu (D.26, cf B.34) donne le potentiel  $U$  au voisinage de l'origine ( $\vec{r}_0 = 0$ ).

$$U^r(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \left[ \alpha s_{n,0}^r Y_n^0(\theta) + \sum_{m=1}^n (\alpha s_{n,m}^r YC_n^m(\theta, \varphi) + \beta s_{n,m}^r YS_n^m(\theta, \varphi)) \right] \quad (D.26)$$

Le développement multipolaire se caractérise, pour chaque valeur de l'ordre  $n$ , par  $2n + 1$  composantes : 1 associée à  $m = 0$  et 2 pour chaque autre valeur de  $m$ . C'est précisément le nombre de composantes indépendantes du tenseur dérivée d'ordre  $n$ . Afin de comparer ces termes, exprimons ceux du développement multipolaire en coordonnées cartésiennes. Puisque le terme d'ordre 0 est absent (cf annexe B), nous admettons que  $U^r$  est nulle à l'origine des coordonnées. La comparaison des 3 termes associés à  $n = 1$  est plus intéressante.

$$U_1^r = \frac{\alpha s_{1,0}^r}{R} r Y_1^0(\theta) + \frac{\alpha s_{1,1}^r}{R} r YC_1^1(\theta, \varphi) + \frac{\beta s_{1,1}^r}{R} r YS_1^1(\theta, \varphi)$$

En se reportant aux expressions des trois harmoniques impliquées, on exprime ce résultat en fonction des coordonnées cartésiennes.

$$U_1^r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{R} (-\alpha s_{1,1}^r x - \beta s_{1,1}^r y + \alpha s_{1,0}^r z)$$

Le potentiel étant scalaire, on constate qu'il prend la forme d'un produit contracté de deux tenseurs dont l'un est le vecteur  $\vec{r}$  de composantes contravariantes  $x, y, z$ . Le second est un vecteur  $\vec{G}$  dont les composantes covariantes sont :

$$G_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{R} \alpha s_{1,1}^r \quad G_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{R} \beta s_{1,1}^r \quad G_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{R} \alpha s_{1,0}^r \quad (D.27)$$

Puisque le développement s'applique à des distances très petites, le rapprochement avec (D.23) montre que  $G_i = \partial_i U$ . Autrement dit, ce vecteur est le gradient de  $U$  à l'origine.

Procédons de la même façon pour le terme associé à  $n = 2$  qui se caractérise par 5 composantes indépendantes.

$$U_2 = \frac{as_{2,0}^r}{R^2} \cdot r^2 Y_2^0(\theta) + \frac{\alpha s_{2,1}^r}{R^2} \cdot r YC_2^1(\theta, \varphi) + \frac{\beta s_{2,1}^r}{R^2} \cdot r YS_2^1(\theta, \varphi) \\ + \frac{\alpha s_{2,2}^r}{R^2} \cdot r YC_2^2(\theta, \varphi) + \frac{\beta s_{2,2}^r}{R^2} \cdot r YS_2^2(\theta, \varphi)$$

Après avoir explicité les harmoniques sphériques,  $U_2$  prend la forme d'un produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 2 par le carré tensoriel du vecteur  $\vec{r}$ .

$$r^2 \cdot Y_2^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (2z^2 - y^2 - x^2)$$

$$r^2 YC_2^1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{\pi}} 2xz$$

$$r^2 YS_2^1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{\pi}} 2yz$$

$$r^2 YC_2^2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{\pi}} (x^2 - y^2)$$

$$r^2 YS_2^2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{\pi}} 2xy$$

$$U_2^r = \frac{1}{R^2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left[ as_{2,0}^r (2z^2 - y^2 - x^2) - \alpha s_{2,1}^r 2\sqrt{3} xz - \beta s_{2,1}^r 2\sqrt{3} yz \right. \\ \left. + \alpha s_{2,2}^r \sqrt{3} (x^2 - y^2) + \beta s_{2,2}^r 2\sqrt{3} xy \right]$$

$$U_2^r = \frac{1}{R^2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left[ (\alpha s_{2,2}^r \sqrt{3} - as_{2,0}^r) x^2 + \beta s_{2,2}^r \sqrt{3} xy - \alpha s_{2,1}^r \sqrt{3} xz + \beta s_{2,2}^r \sqrt{3} yx \right. \\ \left. - (as_{2,0}^r + \alpha s_{2,2}^r \sqrt{3}) y^2 - \beta s_{2,1}^r \sqrt{3} yz - \alpha s_{2,1}^r \sqrt{3} zx - \beta s_{2,1}^r \sqrt{3} zy + 2 as_{2,0}^r z^2 \right] \quad (D.28)$$

En rapprochant cette écriture de celle du terme d'ordre 2 de (D.23), on identifie le tenseur formé par les composantes quadrupolaires au tenseur dérivée seconde de  $U$ . On vérifie au passage que la somme des termes diagonaux du premier est nulle. Cette particularité était attendue puisque, en raison de l'équation de Laplace, la même opération donne 0 sur le tenseur dérivée seconde.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{bmatrix} -as_{2,0}^r + \alpha s_{2,2}^r \sqrt{3} & \beta s_{2,2}^r \sqrt{3} & -\alpha s_{2,1}^r \sqrt{3} \\ \beta s_{2,2}^r \sqrt{3} & -as_{2,0}^r - \alpha s_{2,2}^r \sqrt{3} & -\beta s_{2,1}^r \sqrt{3} \\ -\alpha s_{2,1}^r \sqrt{3} & -\beta s_{2,1}^r \sqrt{3} & 2 as_{2,0}^r \end{bmatrix} \quad (D.29)$$

Les relations (D.30) montrent la correspondance inverse.

$$as_{2,0}^r = \sqrt{\frac{\pi}{5}} \cdot R^2 \cdot \partial_{3,3} U(0,0,0) \quad (D.30)$$

$$\alpha s_{2,1}^r = -2 \sqrt{\frac{\pi}{15}} \cdot R^2 \cdot \partial_{1,3} U(0,0,0) \quad \beta s_{2,1}^r = -2 \sqrt{\frac{\pi}{15}} \cdot R^2 \cdot \partial_{2,3} U(0,0,0)$$

$$\alpha s_{2,2}^r = \sqrt{\frac{\pi}{15}} R^2 (2 \partial_{1,1} U(0,0,0) + \partial_{3,3} U(0,0,0)) \quad \beta s_{2,2}^r = 2 \sqrt{\frac{\pi}{15}} \cdot R^2 \cdot \partial_{1,2} U(0,0,0)$$

Nous avons poursuivi jusqu'à l'ordre 3. Les relations obtenues figurent ci-dessous.

$$\begin{aligned} \partial_{111}^3 U &= \frac{1}{R^3} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} \frac{3}{4} (2\sqrt{3} \alpha s_{31} - \sqrt{5} \alpha s_{33}) & \partial_{112}^3 U &= \frac{1}{R^3} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} \frac{1}{4} (2\sqrt{3} \beta s_{31} - 3\sqrt{5} \beta s_{33}) \\ \partial_{113}^3 U &= \frac{1}{R^3} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} \frac{1}{4} (-6\sqrt{2} as_{30} + 2\sqrt{30} \alpha s_{32}) & \partial_{123}^3 U &= \frac{1}{R^3} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} 3\sqrt{30} \beta s_{32} \\ \partial_{133}^3 U &= \frac{-1}{R^3} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} 2\sqrt{3} \alpha s_{31} & \partial_{222}^3 U &= \frac{1}{R^3} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} \frac{3}{4} (2\sqrt{3} \beta s_{31} + \sqrt{5} \beta s_{33}) \\ \partial_{223}^3 U &= \frac{-1}{R^3} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} \frac{1}{2} (\sqrt{30} \alpha s_{32} + 3\sqrt{2} as_{30}) & \partial_{233}^3 U &= \frac{1}{R^3} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} \frac{1}{4} \sqrt{3} \beta s_{31} \\ \partial_{333}^3 U &= \frac{-1}{R^3} \sqrt{\frac{7}{2\pi}} 3\sqrt{2} as_{30} & & \end{aligned} \quad (D.31)$$

Et réciproquement :

$$as_{30} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{7}} R^3 \partial_{333}^3$$

$$\alpha s_{31} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{21}} R^3 \partial_{133}^3$$

$$\beta s_{31} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{21}} R^3 \partial_{233}^3$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{S_{32}} &= -\sqrt{\frac{\pi}{105}} R^3 (2\partial_{223}^3 + \partial_{333}^3) & \beta_{S_{32}} &= 2\sqrt{\frac{\pi}{105}} R^3 \partial_{123}^3 \\
 \alpha_{S_{33}} &= -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{35}} R^3 (4\partial_{111}^3 + 3\partial_{133}^3) & \beta_{S_{33}} &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{35}} R^3 (4\partial_{222}^3 + 3\partial_{223}^3) \quad (D.32)
 \end{aligned}$$

Les relations établies pour les 3 premiers coefficients relatifs à  $m = 0$  confirment le lien exploité (B.35) pour trouver le champ d'une distribution de courant admettant Oz comme axe de révolution.

En conclusion, en généralisant les relations (D.27), (D.29) et (D.31), on peut dire que les  $2n + 1$  composantes multipolaires d'ordre  $n$  peuvent être disposées pour former un tenseur covariant complètement symétrique d'ordre  $n$ . Dès que cette mise en forme est faite, l'algèbre tensorielle nous enseigne comment transformer ces grandeurs lors d'un changement de base.

Considérons une inductance perturbatrice alimentée par un courant  $I$ . Si on connaît ses composantes multipolaires, on sait évaluer son potentiel en tout point externe : il est partout proportionnel à  $I$ . En dérivant l'expression du champ émis autour de la position du composant victime, on obtient le développement multipolaire du champ autour de ce composant. De cette façon, si on connaît les composantes multipolaires de la victime, on peut évaluer la tension induite à ses bornes (I.33), (I.45). C'est ainsi qu'on peut évaluer la mutuelle inductance en fonction des composantes multipolaires des deux inductances. Nous n'avons pas eu le temps de mettre ceci en application et il s'est avéré que, pour les composants étudiés, le terme dipolaire, très simple à manier, constituait déjà une approximation convenable.



