HAL
open science

Modélisation de la fragmentation dynamique par la méthode des éléments discrets

Vincent Michaut

To cite this version:

Vincent Michaut. Modélisation de la fragmentation dynamique par la méthode des éléments discrets. Autre. Ecole Centrale Paris, 2011. Français. NNT : 2011ECAP0010 . tel-00601766

HAL Id: tel-00601766

https://theses.hal.science/tel-00601766

Submitted on 20 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES « ÉCOLE CENTRALE PARIS »

THÈSE

présentée par

Vincent MICHAUT

pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : Modélisation numérique, Dynamique des Sols

Laboratoire d'accueil : Mécanique des Sols, Structures et Matériaux

SUJET : MODÉLISATION DE LA FRAGMENTATION DYNAMIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS DISCRETS

Soutenue le : 31 janvier 2011

devant un jury composé de :

Mme. MODARESSI Arézou, Directrice de Thèse
M. MOLINARI Jean-François, Co-Directeur de thèse
M. MARIOTTI Christian, Encadrant CEA
M. BAILLY Patrice, Rapporteur
M. BARDET Jean-Pierre, Rapporteur
M. DARVE Felix
M. FORQUIN Pascal

À ma femme Nicole...

Remerciements

Je n'aurai jamais imaginé écrire ces phrases il y a un peu plus de trois ans, quand j'ai commencé ma thèse. Une thèse n'est jamais une tâche facile, mais elle m'a apportée beaucoup de choses, que ce soit professionnellement ou dans ma vie privée.

Tout d'abord, je tiens à remercier du fond du cœur ma femme, Nicole. Je n'oublierai jamais ton précieux soutien ainsi que tout l'amour que tu me donnes à chaque instant. Durant cette thèse, il y a eu deux événements qui ont été les plus beaux dans ma vie : ma rencontre avec toi et notre enfant qui est attendu cette année. Sans toi, je n'aurai pas pu écrire ce mémoire. Également un grand merci à toi pour tout le temps que tu as passé à lire et relire ce mémoire... Ca m'a beaucoup touché.

Ensuite, j'aimerais remercier personnellement et exprimer toute ma gratitude envers mon encadreur au CEA, M. Christian Mariotti, pour m'avoir soutenu tout au long de cette thèse, sa très grande patience avec moi, et la qualité de son suivi. Vous m'avez beaucoup apporté sur le plan humain. Un grand merci à vous Christian.

Mes remerciements vont également à M. Jean-François Molinari, qui a codirigé ce travail et pour la qualité de son suivi lors de mes deux premières années de thèse. Cette colaboration a été très enrichissante par bien des aspects, et merci à vous pour les chaleureux accueils que j'ai eu lors de mes déplacements sur Lausanne, et pour vos précieux conseils.

Je tiens également à remercier Madame Arezou Modaressi, ma directrice de thèse à l'École Centrale de Paris, pour avoir dirigé cette thèse, de son bon déroulement, ainsi que de sa grande gentillesse et les bons commentaires pour l'élaboration de ce mémoire.

Ma gratitude va également envers Messieurs Patrice Bailly et Jean-Pierre Bardet pour leurs nombreux commentaires et critiques constructives sur mon travail, leur gentillesse et d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie M. Felix Darve pour avoir accepté de présider mon jury de thèse et ses précieux conseils lors de notre petite entrevue à Grenoble.

Je remercie M. Pierre-Franck Piserchia, notre chef de laboratoire, pour ses qualités humaines et qui a toujours su être à mon écoute, que ce soit pour le milieu professionnel ou personnel, et pour les moyens qu'il a mis à disposition pour la réalisation de mon projet au sein du CEA.

Je remercie tous mes amis thésards au sein de notre laboratoire, Laurent Monasse, Julien Marty, Julien Candelier, Géraldine Garcia, Christophe Haynes, Sébastien Eveillard, Romain Pilon. Je finirai par la personne que j'ai apprécié le plus, Augustin Jehl, en ces derniers mois de thèse délicats, pour nos belles conversations sur le monde lointain et pour notre belle amitié.

Un grand merci également à toutes les autres personnes au sein du laboratoire, je pense à Magaly Arlery, Jean-Yves Vinçont, Françoise Le Piver pour son soutien durant mes présentations en conférence ou au CEA. Merci à vous tous.

Je pense aussi à ma famille, ma mère et mon père, qui ont toujours été présents pour moi, et mes soeurs, pour leur constant soutien durant toute cette thèse. Je vous dois beaucoup, je suis ce que je suis aujourd'hui grâce à vous.

Une vie après thèse commence maintenant avec ma petite famille.

Résumé

L'objectif de ce travail de thèse a été de modéliser avec une méthode aux éléments discrets la fracturation en tension, et plus particulièrement la fragmentation dynamique, sur des matériaux fragiles pour de hautes vitesses de déformation.

La fragmentation est un phénomène irréversible, non linéaire et aléatoire. Elle intervient dans de nombreux domaines de la vie courante, quelque soit l'échelle considérée.

La modélisation numérique de ce phénomène permettrait une prédiction de certains paramètres statistiques de la fragmentation, comme le nombre de fragments, la taille des fragments, la distribution de la taille des fragments, etc.

Pour cette thèse, la Méthode des Éléments Discrets (DEM) s'est révélée être un excellent moyen pour simuler la fracturation en raison de sa nature discrète.

Toutefois, une bonne méthode de simulation numérique ne suffit pas à elle seule pour modéliser la fragmentation dynamique. Un critère de rupture doit également être inséré, afin d'introduire un endommagement. Ce critère de rupture s'écrit au niveau d'un lien entre deux particules et il engendre un dommage, en faisant décroître la contrainte locale jusqu'à l'obtention d'une fissuration discrète.

Dans un premier temps, un critère de rupture de Camacho-Ortiz [24] a été introduit dans une méthode aux éléments discrets. Ce critère se traduit par un endommagement en fonction d'une ouverture de fissure.

Ce premier critère a donné de bons résultats comparé à ceux de [69,88,97,143–147] sur la convergence des paramètres de la fragmentation sur des cas simples, mais nécessite un grand nombre de particules.

Dans un second temps, afin d'envisager la modélisation de la fragmentation sur des cas plus complexes en trois dimensions à de hautes vitesses de déformation, un second critère de rupture a été introduit. Ce critère de rupture s'appuie sur une approche physique différente, qui prend en compte l'hétérogénéité des matériaux fragiles avec leurs défauts susceptibles d'évoluer et de provoquer une rupture locale. Pour cela, il fait intervenir une loi probabiliste de Weibull afin d'introduire des défauts par élément de volume. Ce critère a été développé par C. Denoual, P. Forquin et F. Hild [31,33,42–44].

Tout d'abord, ce second critère de rupture a été testé sur des cas simples en obtenant une convergence des paramètres statistiques de la fragmentation avec un nombre environ 10 fois moins important de particules que pour la première méthode. Un cas plus complexe en trois dimensions de modélisation de barre d'Hopkinson en trois dimensions a permis de tester de manière « qualitative »la méthode.

Mots-clés

Méthode des éléments discrets, Critère de rupture de Camacho-Ortiz, Critère de rupture probabiliste de Weibull, Convergence des paramètres statistiques de la fragmentation (nombre de fragments, tailles des fragments, etc.).

Abstract

The objective of this thesis work is to model the high-strain rate and dynamic fragmentation of brittle materials using the Discrete Element Method. Fragmentation is an irreversible, nonlinear and random phenomenon. It can be found in many practical applications in engineering and can take place at various length scales.

This research work takes advantages of computer simulations to model this phenomenon and to predict a few statistical parameters related to fragmentation including number, size, and size distribution of fragments. To this effect, the Discrete Element Method was found to simulate efficiently fracturing, which is a discrete phenomenon by nature.

However, an efficient computer simulation is not sufficient for representing fragmentation. It also needs to account for a rupture criterion and a damage criterion. This rupture criterion is defined at the contact points between particles where it generates a local damage that decreases the local stress until a discrete crack appears.

In a first step, the rupture criterion of Camacho-Ortiz [24] has been introduced in the Discrete Element Method. This criterion expresses damage as a function of crack opening. When the local stress reaches a rupture threshold, it decreases linearly with the crack opening until the rupture is obtained.

This first criterion gives good results on the convergence of fragmentation parameters in simple cases [69, 88, 97, 143–147], but requires a great number of particles.

In a second step, another rupture criterion has been introduced for simulating the fragmentation of more complex three-dimensional structures for high-strain rates. This rupture criterion is based on a different physical approach that accounts for heterogeneous brittle materials with defects.

These defects can evolve and cause local failure. They are introduced per unit volume elementusing a Weibull probability distribution [31, 33, 42–44]. This distribution depends on the local stress until the local stress reaches an activation threshold. After that, the defects propagate and form areas of relaxation in which defect cannot evolve. The damage evolves as these areas of relaxation evolve.

This second rupture criterion has been validated in simple cases by examining the convergence of the statistical parameters of fragmentation. Compared to the first criterion, the second criterion requires ten times fewer particles. After, a more complex three-dimensional case, dynamic tensile tests in Hopkinson bars, has been treated.

Keywords

Discrete Element Method, Rupture Criterion of Camacho-Ortiz, Weibull probability rupture criterion, Convergence of the statistical parameters of the fragmentation (number of the fragments, size of the fragments, etc.).

Table des matières

Remerciements **3**

Résumé **5**

Abstract **6**

Table des matières **7**

Table des figures **11**

Introduction **1**

1 État de l'art **7**
1 Introduction 7
2 La fragmentation et ses différents mécanismes physiques associés . . . 8
2.1 La fragmentation 8
2.2 Quelques domaines d'applications de la fragmentation 9
2.3 La physique de la rupture 11
3 Les différentes méthodes numériques pour modéliser la fragmentation dynamique 18
3.1 Introduction 18
3.2 Les modèles énergétiques [5, 60] 19
3.3 Les méthodes « classiques »basées sur les éléments finis 22
3.4 Les méthodes non basées sur les éléments finis 28
3.5 Modélisation de la propagation des ondes de choc [112] 29
4 La méthode des éléments discrets 30
4.1 Introduction 30
4.2 Les différents modèles éléments discrets 30
4.3 Le modèle élément discret employé dans cette thèse 32
5 Le critère de rupture de Camacho-Ortiz [24] 37
6 Conclusion de cette étude bibliographique 39

2 Modélisation de la fragmentation **41**
1 Presentation of the Discrete Element Method 43
1.1 Shape of the particles 43
1.2 Geometrical description of the system 43
1.3 Expression of forces and moments between particles 44
1.4 Numerical scheme 45
1.5 Cohesive law 45

2 Dynamic fragmentation of a Ceramic beam 46
2.1 Problem definition 46
2.2 Numerical results 47
3 Conclusions 52

3 Éléments discrets en deux dimensions avec un critère de rupture de Camacho-Ortiz 53
1 Introduction 53
2 Modèlisation numérique avec un critère de rupture de Camacho-Ortiz introduit dans des éléments discrets d'une plaque 2D en traction biaxiale 54
2.1 Les conditions initiales 54
2.2 Les paramètres du matériau 54
2.3 Les différents types de maillages utilisés 55
3 Résultats 56
3.1 Étude de la convergence des différentes énergies en fonction du nombre de particules 56
3.2 Les fragments 58
3.3 Impact du type de maillage sur la fragmentation 59
3.4 Influence du degré de dispersion pour les maillages aléatoires de Voronoi sur les résultats 61
3.5 Analyse des résultats du modèle 2D 63
4 Synthèse des résultats avec un critère de rupture de Camacho-Ortiz . 64

4 Introduction d'un modèle probabiliste dans une méthode aux éléments discrets 65
1 Introduction 65
2 Influence des « défauts »sur les propriétés mécaniques d'un matériau . 66
2.1 Le rôle collectif des défauts 67
2.2 Dispersion des contraintes de rupture 67
2.3 Les effets d'échelle : notion de volume effectif ou de surface effective 68
2.4 Les différentes approches probabilistes [84] 68
3 Modélisation d'un processus de fragmentation simple : approche probabiliste de Weibull [84] 70
3.1 La genèse de l'approche de Weibull 70
3.2 Les hypothèses du modèle : principe du lien le plus faible . . . 70
3.3 Modélisation de l'activation des défauts par une loi de probabilité de Poisson 71
3.4 Caractérisation de la densité de défauts $\boldsymbol{\lambda}$ 72
3.5 Influence du volume et définition de la variable de volume effectif $\boldsymbol{Z_{eff}}$ 73
3.6 Caractérisation des paramètres statistiques de Weibull 75
4 Modélisation d'un processus de fragmentation multiple : « modèle de Denoual »ou « modèle d'occultation » 77
4.1 Caractérisation d'une variable d'endommagement 80
5 Implémentation du modèle d'endommagement probabiliste dans le code aux éléments discrets 81

5.1 Introduction d'une contrainte seuil $\boldsymbol{\sigma_k}$ **aléatoire** 81
5.2 Dimensionnement du problème 83
5.3 Description du changement de variable utilisé 83
5.4 Intégration formelle de la loi d'endommagement pour l'expansion de défauts « surfacique »(2D) 84
5.5 Intégration formelle de la loi d'endommagement pour l'expansion de défauts « volumique »(3D) 85
5.6 Calcul de l'endommagement $\boldsymbol{D}$à chaque pas de temps 87
6 Tests de validation de la loi 88
6.1 Test de traction dynamique sur deux particules 88
6.2 Test de traction sur une barre en une dimension 91
6.3 Traction biaxiale sur une plaque en céramique 96
7 Conclusions du chapitre 98

5 Applications **101**
1 Introduction 101
2 Les barres d'Hopkinson : les tests expérimentaux et quelques principes physiques mis en jeux 101
2.1 Les différents tests de Barres d'Hopkinson 102
2.2 Les essais expérimentaux 104
3 Modélisation numérique en trois dimensions de barre d'Hopkinson en traction dynamique par une combinaison éléments discrets/méthode probabiliste de Denoual 105
3.1 Les conditions aux limites et les paramètres des matériaux . . 105
4 Conclusions du chapitre 111

Conclusions et perspectives **113**

Bibliographie **117**

Table des figures

1 Quelques exemples de fragmentations dynamiques 2

1.1 Un exemple de fragmentation dynamique : une assisette cassée en plusieurs morceaux 8
1.2 Un exemple de fragmentation quasi-statique : une assiette cassée en deux morceaux 8
1.3 Vue aérienne d'une mine de diamants en Inde [149] 10
1.4 Illustration d'une brèche de faille (faille de décrochement du couloir ouest du Petit Som, dans le massif de la Chartreuse en France) [148] . 11
1.5 Fragmentation d'une roche en laboratoire soumise à une vitesse de déformation de 140 s^{-1} [34] 11
1.6 Fragmentation d'une roche en laboratoire soumise à une vitesse de déformation de 400 s^{-1} [34] 11
1.7 Courbe contrainte/déformation [98] 12
1.8 Courbe contrainte/déformation dans le cas des ruptures fragile et ductile [98] 13
1.9 Les différents modes de rupture [98] 13
1.10 Évolution du rapport $\frac{K_I^{dyn}}{K_{Iu}^{dyn}}$ en fonction de la vitesse de propagation [98] 18
1.11 Influence de la vitesse de fissuration sur le facteur d'intensité des contraintes [51], avec Cr la vitesse des ondes de Rayleigh 19
1.12 Bifurcation de fissure expliquée par les contraintes en pointe de fissure [138] 20
1.13 Fonctions universelles de vitesses en mode I et II [98] 21
1.14 Description de l'insertion des interfaces « cohésives » [144] 27
1.15 32
1.16 Schéma du critère de rupture modifié de Camacho-Ortiz et les différentes énergies associées [97] 38

2.1 Description of two particles in interaction 43
2.2 Irreversible linear decaying law used in the discrete models 45
2.3 Initial conditions 47
2.4 Evolution of the stress and the number of fragments in the beam ($\dot{\epsilon_0} = 5 \times 10^5 s^{-1}$, the beam is modelled with 400 particles) 48
2.5 Cohesive energy dependence on mesh size for a one-dimensional beam fragmentation problem 49
2.6 Damage cartography along the beam (strain rate = $4 \times 10^3 s^{-1}$) . . . 49

2.7 Fragment size distribution corresponding to a 4×10^5 particles mesh at strain rate $\dot{\epsilon}_0 = 5 \times 10^5 s^{-1}$ (converged model) 50
2.8 Average fragment size normalized vs. strain rate normalized (homogeneous beam) 51

3.1 Maillage « carré » 55
3.2 Maillage de Voronoi régulier 55
3.3 Maillage de Voronoi aléatoire 55
3.4 Étude de la convergence des différentes énergies pour un maillage avec des particules de forme « carré »en fonction du nombre de particules . 56
3.5 Étude de la convergence des différentes énergies pour un maillage de Voronoi régulier en fonction du nombre de particules 57
3.6 Étude de la convergence des différentes énergies pour un maillage de Voronoi aléatoire (20%) en fonction du nombre de particules 57
3.7 Nombre de fragments en fonction du nombre de particules pour un maillage « carré » 58
3.8 Nombre de fragments en fonction du nombre de particules pour un maillage de Voronoi avec un degré de dispersion de 50 % 58
3.9 Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage à forme « carré ». 59
3.10 Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage de Voronoi régulier 60
3.11 Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage de Voronoi aléatoire avec un taux de dispersion de 20% 60
3.12 Étude du nombre de fragments en fonction du taux de dispersion pour un modèle numérique composé d'environ 120 000 particules 61
3.13 Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage avec un taux de dispersion géométrique de 1% 62
3.14 Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage avec un taux de dispersion géométrique de 2% 62
3.15 Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage avec un taux de dispersion géométrique de 10% 63

4.1 Une dislocation est un défaut à l'échelle atomique correspondant à une discontinuité dans l'organisation de la structure cristalline. Elle est susceptible de provoquer une rupture au sein d'un matériau. [54] . 66
4.2 Différents défauts susceptibles de provoquer une rupture 67
4.3 L'étude des caractéristiques des différents défauts présents dans un matériau fait intervenir les lois de probabilité, notamment la loi de Weibull [74] 68
4.4 Évolution de la contrainte ultime en fonction de la largeur d'une plaque fissurée en béton en traction pour différentes vitesses de chargement (Ref. [56]) 69
4.5 Wallodi Weibull (1887-1979) 70

4.6 Échantillon A en traction uniaxiale avec un volume V_A et un chargement en traction avec une contrainte σ_A 73
4.7 Échantillon B en traction uniaxiale avec un volume $2 \times V_A$ (deux échantillons A montés en série) et un chargement avec une contrainte σ_A 73
4.8 Schématisation de la disparité des défauts suivant le module de Weibull 75
4.9 Banc de flexion à quatre points du Laboratoire de Mécanique et Matériaux du génie civil de l'université de Cergy-Pontoise 77
4.10 Principe du mécanisme d'occultation [31] 78
4.11 Les conditions aux limites du test de traction dynamique sur deux particules et un lien 88
4.12 Évolution de l'endommagement en fonction du module de Weibull pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 5.10^5$ s^{-1} 89
4.13 Contrainte ultime σ_{max} en fonction de la vitesse de déformation pour un module de Weibull $m = 9.3$ 90
4.14 Convergence de l'energie cinétique en fonction de la vitesse de déformation 92
4.15 Nombre de fragments en fonction de la densité de maillage pour deux vitesses de déformation 94
4.16 Distribution de la taille des fragments en fonction de la densité de maillage pour une vitesse de déformation de 10^5s^{-1} 94
4.17 Distribution de la taille des fragments en fonction de la densité de maillage pour une vitesse de déformation de 10^4 s^{-1} pour des maillages « standards »et des maillages aléatoires à 5%. 95
4.18 Convergence de l'énergie cinétique en fonction de la densité de maillage pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^5$ s^{-1} avec un maillage avec des particules de forme « carré » 97
4.19 Distribution de la taille des fragments en fonction de la densité de maillage avec des particules de forme « carré »pour une vitesse de déformation de 10^5 s^{-1} 98

5.1 Le test de compression dynamique avec les barres d'Hopkinson [86] . 102
5.2 Configuration du test expérimental pour le système d'Hopkinson en traction dynamique [17] 103
5.3 Essai d'écaillage aux barres de Hopkinson, test développé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux à Metz, par B. Erzar et P. Forquin [37, 48] 103
5.4 Rapport de la contrainte de rupture dynamique sur la contrainte de rupture statique [22] 104
5.5 Résultats de l'essai N°2 : fracturation de l'éprouvette à deux endroits différents [22] 105
5.6 Les conditions aux limites du modèle 106
5.7 Maillage 3D de l'échantillon, maillé avec plus de 500 000 particules . 106
5.8 Visualisation de la vitesse aux capteurs J_1, J_2, J_3, J_4 et J_5 pour une vitesse d'impact de 7 m/s 107
5.9 Zoom du capteur J_1 lors de la propagation de l'onde incidente 108

5.10 Fracturation de l'éprouvette pour une vitesse d'impact de 7m.s^{-1}. *Au niveau des échelles, le rouge indique une compression de l'ordre de $-10^6 Pa$ et le violet une onde de traction de l'ordre de $10^6 Pa$. Le vert/jaune matérialise une pression presque nulle.* 109
5.11 Visualisation de la vitesse dans l'éprouvette et des macro-fracturations en fonction de la vitesse d'impact du projectile 110
5.12 Résultats d'un essai de traction dynamique avec des barres de Hopkinson avec une vitesse d'impact de 7m/s 114
5.13 Perspectives : Exemple d'une modélisation plus complexe avec de la flexion : le comportement au souffle de structures en béton armé [106] 116

Introduction

Un cas simple qui permet d'illustrer la fragmentation est de laisser tomber une assiette sur le sol. Elle se casse en plusieurs morceaux. On peut également citer le cas où la sécheresse, occasionnée par la canicule de l'été 2003, a fait craqueler le mur de nombreuses habitations en Europe. Ces deux observations proviennent du même phénomène physique : la fragmentation.

Physiquement, la fragmentation est un phénomène irréversible, non linéaire et aléatoire. Elle intervient dans de nombreux domaines de la vie courante, mais aussi lors d'événements exceptionnels, comme la collision d'une météorite sur l'atmosphère, de glissements de terrain lors de séismes, etc. Une des particularités de la fragmentation est son caractère multi-échelle : des échelles nanoscopiques aux échelles astronomiques, elle survient à toutes les échelles de la physique.

La conception d'un modèle numérique fiable de fragmentation permettrait d'apporter une meilleure compréhension de ce phénomène physique majeur, avec ses différents mécanismes complexes. Ce modèle pourrait également permettre une meilleure prédiction de certains paramètres statistiques de la fragmentation, comme le nombre de fragments, la taille des fragments, la distribution de la taille des fragments, etc.

Cette prédiction pourrait se révéler déterminante dans différents domaines :

- Dans le domaine indutriel : Par exemple, dans l'industrie minière, où la modélisation numérique de la fragmentation pourrait permettre l'élaboration de nouvelles méthodes d'abattage des roches à l'explosif, permettant ainsi de réaliser une distribution des tailles de fragments optimale avec une utilisation minimale d'explosif ;
- Dans le domaine d'applications militaires : la modélisation de la fragmentation est également un plus lors de la conception de blindages, par exemple dans le cas d'impact de missiles. Cet outil permettrait d'optimiser la géométrie et les matériaux employés dans ces blindages ;
- Dans le domaine civil : la prédiction de la fragmentation pourrait être un outil de conception de nouveaux bâtiments permettant de mieux résister aux séismes les plus violents, etc.

D'autres champs d'applications pourraient être le broyage d'agrégats de carrières. Ce processus consomme beaucoup d'énergie, et la modélisation de la fragmentation pour cette application serait un outil capital pour diminuer cette consommation d'énergie [100]. Une autre application est la fragmentation des roches au sein des failles sismique. Cette modélisation pourrait permettre de mieux comprendre les différents mécanismes intervenant lors d'un séisme [35]. On peut également citer comme application le cas de la compaction des poudres métalliques ou de céramiques.

Les domaines d'application de la fragmentation sont donc importants dans tous les domaines, que ce soit sur le plan économique (le broyage d'agrégats de carrières), ou civil (amélioration des outils de prédiction des séismes).

D'énormes progrès ont été accomplis ces dernières décennies dans l'analyse et la modélisation des mécanismes de rupture d'un matériau. La mécanique linéaire élastique de la rupture [15] fournit en particulier un cadre théorique qui permet de décrire la propagation des fissures. Ces prédictions sont en bon accord avec les observations expérimentales tant que le matériau considéré est suffisamment homogène et que la vitesse de déformation reste assez lente (généralement inférieure à $100s^{-1}$). En revanche, elles échouent largement dans les cas dynamiques (supérieure à $1000s^{-1}$).

(a) Impact d'une météorite

(b) Séisme d'Agadir (Maroc) du 29 février 1960

(c) Impact d'un missile sur un char de combat

(d) Mine de dimant dans le Yakoutie en Russie

FIGURE 1 – Quelques exemples de fragmentations dynamiques

Savoir modéliser numériquement la fragmentation dynamique est donc un sujet actuel suscitant beaucoup d'intêrets dans le milieu de la Recherche internationale. Depuis plusieurs dizaines d'années, tous relèvent les mêmes défis : concevoir des matériaux plus ou moins résistants, maximiser ou minimiser le nombre de fragments, contrôler leur taille et leur forme, ou plus généralement, mieux comprendre ce phénomène physique. Par conséquent, il est indispensable de posséder de bons moyens de prédiction numérique de la fragmentation.

Historiquement, ces moyens de prédiction ont commencé dès les années trente. Des ingénieurs ont d'abord tenté d'établir des lois empiriques décrivant l'état résul-

tant de la fragmentation, le nombre de fragments et la distribution de leur taille. Seul les conséquences de la fragmentation, c'est à dire à l'état final, étaient étudiées sans la préoccupation de l'évolution temporelle du processus physique [11, 91, 118].

Afin d'expliquer plus rigoureusement les observations expérimentales, les théoriciens ont modélisé la fragmentation avec une approche statistique décrivant les incertitudes liées à la microstructure du matériau. La théorie de Poisson a été ainsi maniée durant plus d'un demi siècle. Elle est à l'origine de nombreuses théories (Mott [99], Grady [58–62], etc.). Ces théories permettent une prédiction en supposant que seule l'énergie cinétique locale est utilisée pour la propagation d'une fissure.

Toutefois, ces théories montrent aujourd'hui leurs limites car elles ne peuvent pas inclure les phénomènes non-linéaires internes, qui agissent également sur la formation des fragments et leurs distributions de tailles. Les méthodes numériques avec les outils informatiques actuels sont les moyens les plus adaptés pour la modélisation de ces non-linéarités et de voir leurs influences sur le résultat final.

Plusieurs méthodes numériques pour la modélisation de la fragmentation peuvent être employées, et classées en deux catégories :

- Tout d'abord, les méthodes avec maillage ; Ces méthodes dérivent de la mécanique des milieux continus. Dans cette classe, les méthodes par éléments finis sont les plus représentatives [9]. Ces méthodes peuvent être adaptées à la fragmentation, mais demandent un remaillage constant du domaine lors des avancements des fissures. Toutefois, de nouvelles méthodes, sans avoir à remailler le domaine sont apparues ces dernières années, comme les méthodes X-FEM [107] ou les méthodes cohésives [88, 97, 143–146] où des élements dits « cohésifs »sont introduits dynamiquement. On peut également citer les méthodes des équations intégrales ne maillant que le contour du domaine [39, 79].

- Ensuite, les méthodes dîtes « sans maillage ». Ces méthodes ont la particularité de pouvoir traiter naturellement les problèmes de rupture, les grandes déformations et les problèmes de contact, sans nécessiter un remaillage du domaine. Dans ces méthodes, on peut citer les méthodes « Smooths Particle Hydrodynamics » [76], les méthodes aux éléments discrets, les « lattice models » [21, 23, 27, 70, 93, 124, 124]. Dans ces méthodes, le domaine d'étude est divisé de manière discrète, où chaque partie du domaine est une particule. Ces particules sont reliées entre-elles par des liens. Le principal intérêt de ces méthodes est bien sûr leurs grandes capacités à traiter la fracturation. En revanche, le coût de calcul est plus lourd que les méthodes avec maillage et la gestion des contacts et des forces est complexe.

Pour cette thèse, la méthode des éléments discrets nous a paru être la méthode la plus efficace pour modéliser des phénomènes où la fragmentation dynamique intervient. En effet, cette approche numérique permet de faciliter la modélisation de ces fracturations faisant intervenir de multiples contacts entre les surfaces fissurées. De plus, ces méthodes s'avèrent parallélisables.

La méthode que nous avons employée [93] est une méthode de « Lattice Models »qui s'inspire à la fois des méthodes particulaires, et des méthodes aux éléments discrets. Cette méthode se distingue des méthodes particulaires existantes par le fait que les particules sont déformables, et peuvent avoir des formes quelconques

(particules de Voronoi en 2D et 3D, etc.) L'avantage d'avoir ces particules à formes quelconques est que la matière peut être modélisée sans espace vacant. Le code utilisé est le code aux éléments discrets « Mka3D© »développé par Christian Mariotti pour les besoins du CEA en matière de modélisation de séismes à très grande échelle.

Le choix de la méthode numérique étant fait, la question s'est posée sur la modélisation de la fracturation en elle même. Cette modélisation s'appuie sur des critères de rupture qui introduisent un endommagement au sein du matériau.

Actuellement, plusieurs critères de rupture ont été proposés :

- Un critère de rupture « discret »développé à l'origine par Camacho-Ortiz [24]. Ce critère traduit un endommagement suivant une ouverture de fissure. Il se dit discret dans la mesure où il décrit un endommagement pour un lien. Il a été utilisé avec succès par J.F. Molinari dans la méthode des éléments cohésifs [88,97,143–146]. Ce critère de rupture permet une convergence du nombre de fragments et de l'énergie dissipée dans le processus de la fragmentation, mais nécessite un grand nombre de particules. Le développement d'une méthode multi-échelle, pour avoir une convergence plus rapide des énergies dissipées, est aussi délicate.
- Un critère de rupture probabiliste où des défauts sont introduits de manière probabiliste avec des lois de Weibull dans un élément de volume. Ce critère, s'appuyant non pas sur une approche discrète mais sur un élément de volume, permet une approche multi-échelle efficace. Ce critère de rupture a été introduit par C. Denoual [31] et utilisé dans des codes commerciaux aux éléments finis comme Abaqus©pour traiter des problèmes de fragmentation comme des tests d'impacts sur tranche. En revanche, aucune étude n'a été portée sur la convergence des énergies dissipées, et le nombre de fragments avec ce type d'approche.

Dans un premier temps, l'objectif a été de valider l'approche aux éléments discrets en introduisant un critère de rupture de Camacho-ortiz simplifié [24] pour simuler un problème simple de poutre 1D en traction dynamique. Pour cette validation, nous avons étudié et comparé nos résultats, sur la convergence des différentes énergies dissipées, et les statistiques sur les fragments, avec ceux de [88,97,143–146]. Après cette phase de validation, notre préoccupation s'est portée sur la modélisation de cas plus complexes en deux dimensions avec ce critère, en centrant l'étude sur les convergences des paramètres de fragmentation et l'aspect « qualitatif »des fragments. Pour cela, nous avons étudié un modèle numérique en deux dimensions de plaque en traction bi-axiale. Ce modèle nous a permis de voir que les approches numériques mises en place permettaient d'obtenir la convergence des énergies dissipées, du nombre de fragments et d'avoir une statistique cohérente sur la distribution des tailles de ces derniers, mais seulement pour de faibles vitesses de déformation. Toutefois, ce modèle a également pu mettre en évidence plusieurs points. Tout d'abord, les résultats sont très dépendants du type de maillage utilisé. Ensuite, un grand nombre de particules sont nécessaires pour obtenir la convergence de ces différents paramètres pour les fortes vitesses de déformation, rendant très difficile, avec les moyens informatiques actuels, la modélisation de la fragmentation pour des cas plus complexes en deux dimensions. Les modèles à trois dimensions sont avec ce critère de fracturation tout simplement impossible.

Les analyses de ces premiers résultats ont amené à recentrer l'étude pour intro-

duire un autre critère de fracturation, dit « volumique ». Ce critère ne décrit pas l'endommagment pour chaque lien, mais pour tout un élément de volume.

Dans un second temps, l'objectif a été d'introduire dans le modèle discret un critère de rupture probabiliste. Ce critère introduit des défauts avec des lois de Weibull dans des élements de volume. Cette approche probabiliste est donc par nature « multi-échelle »et permet a priori une convergence des paramètres de fragmentation plus rapide même si le maillage est grossier.

Le premier chapitre passe tout d'abord en revue quelques applications concrètes de la fragmentation. Il montre ensuite un aperçu des différentes techniques numériques utilisées pour la modélisation de la fracturation, de la méthode des éléments finis, en passant par les méthodes ne maillant que le contour, et les méthodes sans maillage comme la méthode des éléments discrets. La propagation des ondes de chocs en milieu hétérogène est également passée en revue.

Le second chapitre reprend en intégralité un article en anglais que nous avons soumis au journal « Engineering Fracture Mechanics »validant le critère de rupture de Camacho-Ortiz introduit dans notre méthode des éléments discrets pour un modèle simple de poutre en traction dynamique.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation d'un cas plus complexe en deux dimensions avec le critère de rupture de Camacho-Ortiz introduit dans notre méthode des éléments discrets, et expose les différents problèmes de convergence rencontrés.

Le quatrième chapitre décrit la physique et l'introduction du modéle probabiliste de Denoual. Ce modèle a été tout d'abord développé par C. Denoual et F. Hild [31–33], puis utilisé et étendu par P. Forquin [37,43–45,48]. Dans ce modèle probabiliste, des défauts sont introduits avec une loi de Weibull. De très simples applications pour illustrer les bienfaits de cette introduction de ce modèle probabiliste au sein d'une méthode aux éléments discrets seront effectuées.

Enfin, le cinquième chapitre sera dédié à l'application en trois dimensions de barre d'Hopkinson en traction dynamique, qui permettra de tester de manière « qualitative »la méthode.

Chapitre 1

État de l'art

1 Introduction

Ce chapitre bibliographique est consacré à l'analyse de la fragmentation dynamique et de sa modélisation numérique. Cet état des lieux qui y est dressé n'est pas exhaustif mais permet de passer en revue la physique de la fragmentation et les différentes techniques numériques pour la modéliser. Le lecteur intéressé par certains sujets peut se reporter à la section de la bibliographie pour consulter des ouvrages plus complets, sur les méthodes numériques employées, ou sur les critères de rupture de la fragmentation.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante. Dans une première partie, la fragmentation, ainsi que des applications concrètes, et les phénomènes physiques associés seront abordés, comme la physique de la rupture et ses différents modes, la fissuration, et la propagation des fissures. Dans une seconde partie, différentes méthodes numériques permettant de modéliser la fracturation seront passées en revue, que ce soit pour les régimes statique ou dynamique :

- Les modèles énergétiques de Grady-Kipp [58–62] et de Glenn-Chudnovsky [5], qui émettent l'hypothèse que toute l'énergie cinétique locale est convertie en énergie de surface et que les énergies de déformation sont négligées ;
- Les méthodes numériques « classiques »basées sur les éléments finis ; Dans ce paragraphe, une brève description générale de la méthode par éléments finis sera effectuée et différentes variantes de cette méthode pour traiter les problèmes de fracturation seront énoncées, comme la méthode des éléments « cohésifs » [24, 88, 97, 143–146], les méthodes sur la partition de l'unité (méthodes X-FEM entre autres), les méthodes numériques basées sur le remaillage du domaine [102, 113] et le relâchement des noeuds [13, 82, 139] ;
- Les méthodes numériques qui ne sont pas basées sur les élements finis, comme la méthode des éléments de frontière (ou méthode des équations intégrales) [39, 79] , les méthodes particulaires [21, 27] et les méthodes discrètes [93, 124].

Un paragraphe décrira diverses méthodes numériques pour la propagation des ondes de choc en milieu hétérogène, qui peuvent survenir dans les cas d'impact à haute vitesse.

Une troisième partie sera consacrée à une étude approfondie des méthodes aux éléments discrets, qui ont été utilisées pour cette thèse. Après avoir décrit brièvement

les différents types de méthodes discrètes disponibles, l'expression des moments et des forces de notre modèle sera donnée, ainsi que le schéma de résolution numérique.

Enfin, dans une dernière partie, différents types de critères de rupture pouvant être introduits dans les codes aux éléments discrets seront présentés, à savoir des critères de rupture de type « discrets »(critère de Camacho-Ortiz) [103], et des critères de rupture dits « volumiques »(critères probabilistes) [6,31–33,43–47,63,119].

2 La fragmentation et ses différents mécanismes physiques associés

2.1 La fragmentation

Un des aspects les plus importants de la fragmentation dynamique est qu'un corps de matériau fragile ou quasi-fragile, à la fin du processus de la rupture, est divisé en de nombreux morceaux (Fig.1.1). Dans des conditions de chargement statique ou quasi-statique, un corps est souvent soit endommagé ou seulement cassé en deux morceaux (Fig.1.2).

FIGURE 1.1 – Un exemple de fragmentation dynamique : une assisette cassée en plusieurs morceaux

FIGURE 1.2 – Un exemple de fragmentation quasi-statique : une assiette cassée en deux morceaux

Sous l'effet de l'impulsion d'une charge, un matériau fragile ou quasi-fragile se fragmente en de nombreux morceaux. Une telle charge peut être due à l'impact avec un autre corps, une radiation énergétique fournie, par exemple, par des rayons X, un choc thermique, une onde de choc, etc. La fracturation et la fragmentation des matériaux sont en général opposées à leur résistance. En effet, d'un point de vue stabilité d'une structure, elles sont indésirables. Cependant, il y a une large gamme de procédés industriels tels que les tirs à explosifs, la démolition, etc. où la fracturation et la fragmentation deviennent désirables.

D'un point de vue physique, la fragmentation dynamique est un processus impliquant un certain nombre de mécanismes. Dans la plupart des cas, ce processus est trop complexe pour être traité seulement par des théories déterministes. Aussi, des approches statistiques doivent également être considérées. Un travail pionnier, incorporant des considérations statistiques sur la fragmentation des matériaux ductiles a été rapporté par Mott en 1947 [99]. Des aspects statistiques et géométriques

de la fragmentation des matériaux fragiles ont été introduits par Grady et Kipp [60] en 1982.

Actuellement, les modèles de Grady (1982) et de Glenn-Chudnovsky (1986) [5] sont probablement les modèles théoriques les plus utilisés. Ils utilisent des approches énergétiques pour prédire la taille des fragments. Récemment, la modélisation de la fracturation, essentiellement dans un but de prévention de la rupture, a été l'objet de nombreux calculs numériques. Toutefois, la modélisation précise de la fragmentation est toujours un véritable challenge pour la communauté scientifique, car une multitude de phénomènes physiques interviennent.

Le paragraphe suivant traite quelques phénomènes physiques intervenant dans la fragmentation, comme la physique de la rupture et de la propagation de fissure.

2.2 Quelques domaines d'applications de la fragmentation

Le but de cette partie est de décrire quelques domaines d'applications non exhaustif, comme le broyage d'agrégats de carrières, et les modélisations numériques associées pour la fragmentation « industriel ». On peut citer également la fragmentation de roche dans les zones de failles sismiques, exemple de fragmentation « naturel ». Une autre application concrète à la fragmentation pourrait être la compaction des poudres de céramique.

Le broyage d'agrégats

Les domaines d'application du broyage d'agrégats Les différentes utilisations pour ce domaine d'application peuvent être :

- le concassage pour les pavés, graviers de rivière, des rochers, des résidus de minerai, etc ;
- le concassage de l'asphalte et du béton, des agrégats de construction, des agrégats de basalte, agrégats de granit, matériau de rembourrage, des agrégats de calcaire, etc ;
- les projets hydroélectriques, routes, chemins de fer à grande vitesse, ponts, pistes d'aéroport, et des travaux municipaux, etc ;
- les matériaux de construction, matériaux ignifuges, métallurgie, industrie chimique, l'exploitation minière, le ciment ;
- les matériaux de haute pureté de fabrication comme le verre et sable de quartz.

Comme on peut le voir, les domaines d'applications pour le broyage d'agrégats sont extrêmement variés.

Le broyage d'agrégats de carrières La fragmentation est un phénomène qui est très souvent utilisé dans le broyage d'agrégats de carrières, et qui consomme beaucoup d'énergie. Or, on est dans un contexte mondial où l'énergie n'a jamais été aussi couteuse, et difficile à obtenir. De plus, la demande mondiale pour ces ressources croit, comme pour l'uranium, ou certains métaux comme l'étain pour les soudures et sont non renouvellables... Aussi, l'extraction de ces minéraux est de plus en plus difficile, et on assiste à un développement d'opérations souterraines d'extraction de plus en plus profondes et avec des environnements géotechniques de plus en plus délicats. Les méthodes d'extraction traditionnelles sont dangereuses et

non rentables. Sur la Fig.1.3, on peut observer une mine de diamants en Inde, dans laquelle on peut voir l'ampleur et la difficulté de l'extraction du diamant.

FIGURE 1.3 – Vue aérienne d'une mine de diamants en Inde [149]

Le rôle de la modélisation numérique de la fragmentation est donc considéré comme la voie de l'avenir pour la prédiction quantitative de la réaction de la masse rocheuse et les décisions de conception opérationnelle. De plus, cette modélisation peut également avoir un rôle afin de diminuer l'énergie consommée dans le broyage [100, 142].

La compaction de poudres

Un autre domaine possible de l'application de la fragmentation est la compaction de poudre. Pour cette application, la méthode des éléments discrets appliquée avec un critère de rupture peut donner des informations sur les déformations non-linéaires des grains. Le lecteur peut se référer [77, 128, 142].

La fragmentation de roche dans les failles sismiques

Les failles sont des cassures de l'écorce terrestre, dans lesquelles il y a un déplacement relatif des deux blocs séparés. La longueur des failles peut être très variable : de métrique, à kilométrique, comme la faille de San Andréas en Californie. Les failles sont les causes de la majorité des tremblements de terre, dus principalement au glissement rapide sur le plan de faille quand les contraintes « emmagasinées »pendant une longue période intersismique se libèrent.

Ces contraintes provoquent une fragmentation de la roche pour constituer des brèches de faille. La Fig.1.4 illustre ce phénomène.

Ainsi, lors d'un séisme, les parois d'une faille peuvent glisser l'une contre l'autre, à grande vitesse (de l'ordre de plusieurs mètres par seconde). La déformation engendrée, qui a lieu autour de cette faille, se fait à des taux de déformations élevés, provoquant la fragmentation et la pulvérisation des roches.

L'étude de la fragmentation de ces roches dans les zones de failles sismiques pourrait aider à une meilleure compréhension des mécanismes mise en jeux lors d'un séisme. Des chercheurs tentent actuellement de reproduire ces phénomènes en laboratoire [34, 35]. Les Fig.1.5 et 1.6 illustrent ces phénomènes.

FIGURE 1.4 – Illustration d'une brèche de faille (faille de décrochement du couloir ouest du Petit Som, dans le massif de la Chartreuse en France) [148]

Des modélisations numériques avec des éléments discrets ont été effectuées de ces matériaux dans les failles sismiques. Des progès ont été accomplis ces dernières années dans les modèles numériques de prévision, notamment dans la compréhension de la micro-mécanique qui détermine l'évolution des matériaux dans ces failles. Ces modèles numériques ont permis de démontrer que ces matériaux ont une distribution granulométrique avec des propriétés de fractals [1, 120, 121].

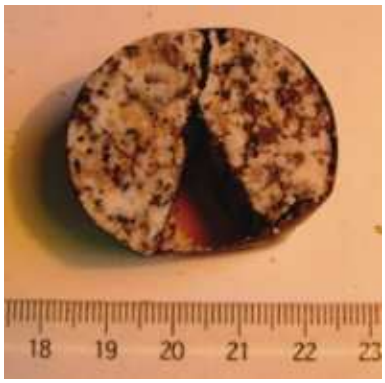


FIGURE 1.5 – Fragmentation d'une roche en laboratoire soumise à une vitesse de déformation de 140 s^{-1} [34]

FIGURE 1.6 – Fragmentation d'une roche en laboratoire soumise à une vitesse de déformation de 400 s^{-1} [34]

2.3 La physique de la rupture

Les différents modes de rupture

La courbe contrainte/déformation (Fig.1.7), issue par exemple, d'essais de traction sur des éprouvettes jusqu'à la rupture, fait souvent apparaître deux zones lors de la déformation du matériau [87] :

- Une zone élastique, dans laquelle contraintes et déformations sont liées proportionnellement. Le matériau revient à son état d'origine lorsque la sollicitation cesse ;

– Une zone plastique, pour laquelle le matériau ne revient pas à son état d'origine lorsque la sollicitation cesse.

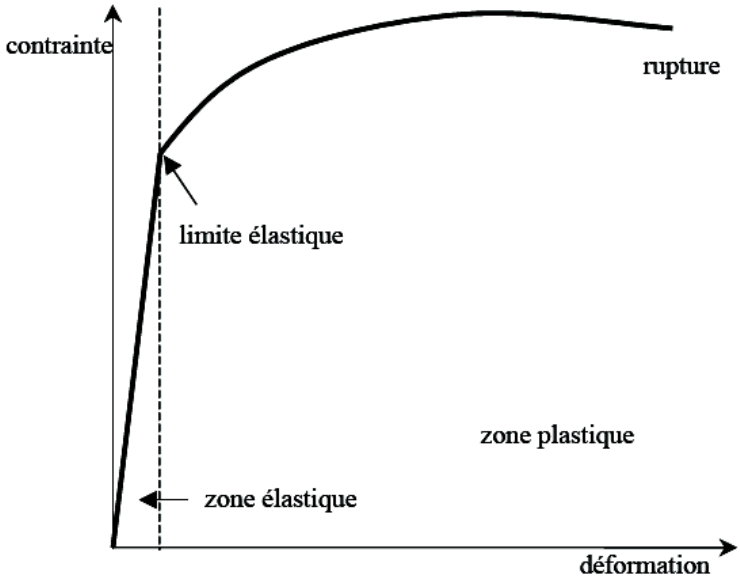


FIGURE 1.7 – Courbe contrainte/déformation [98]

Au regard de la cristallographie (c'est à dire à l'échelle des grains atomiques), les déformations élastiques et permanentes respectent la cohésion de la matière. De ce fait, la rupture survient lorsque cette cohésion est détruite. Elle opère par création de discontinuités surfaciques ou volumiques au sein de la matière. Il s'agit de microfissures de l'ordre du micron, qui deviennent des macrofissures en atteignant des dimensions de l'ordre du millimètre, et enfin, des fissures apparentes, à l'échelle des structures mécaniques. Deux mécanismes de rupture locale sont décrits : la rupture fragile et la rupture ductile.

La rupture fragile

La rupture fragile est caractérisée par une cassure sans déformation plastique, ou avec une déformation plastique très faible. La déformation avant rupture est donc presque exclusivement élastique. L'énergie de rupture, qui est présentée par l'aire sous la courbe contrainte déformation est faible, comme nous le montre la Fig.1.8.

Le phénomène fragile correspond au cas où les dislocations ne peuvent pas se déplacer, ou dont les mouvements sont difficiles et limités. C'est le cas des géomatériaux dans lesquels les caractéristiques de résistance ont été fortement augmentées. Ainsi, très généralement, la fragilité augmente avec la limite d'élasticité. Les ruptures fragiles, se faisant sans déformation plastique, se produisent par décohésion de plans cristallographiques. En somme, la rupture fragile se produit lorsque les liaisons interatomiques se rompent sans déformation plastique globale.

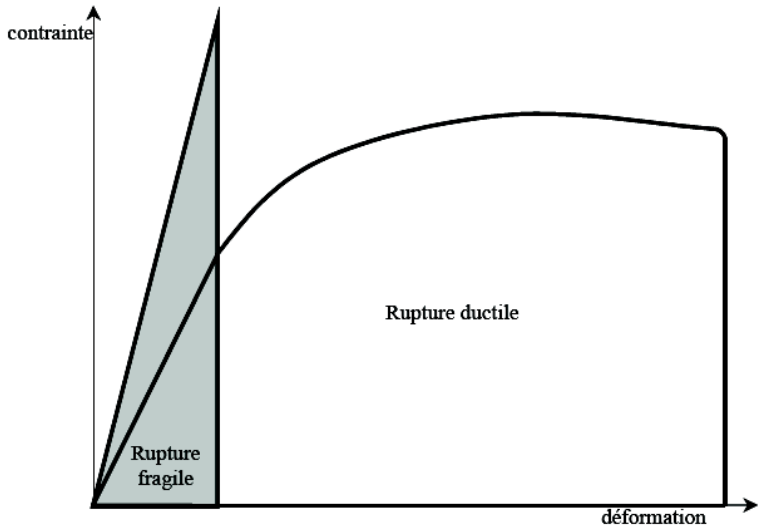


FIGURE 1.8 – Courbe contrainte/déformation dans le cas des ruptures fragile et ductile [98]

La définition d'une fissure [98]

Une fissure est défnie comme la surface séparant localement un solide en deux parties. Le champ de déplacement est alors discontinu à travers cette surface et les trois composantes vectorielles de cette discontinuité forment les trois modes de rupture [15, 49, 83, 90, 110], qui sont représentés dans la Fig.1.9 :

- Mode I : mode d'ouverture de la fissure, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation ;
- Mode II : mode de cisaillement dans le plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation ;
- Mode III : mode de cisaillement hors plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure.

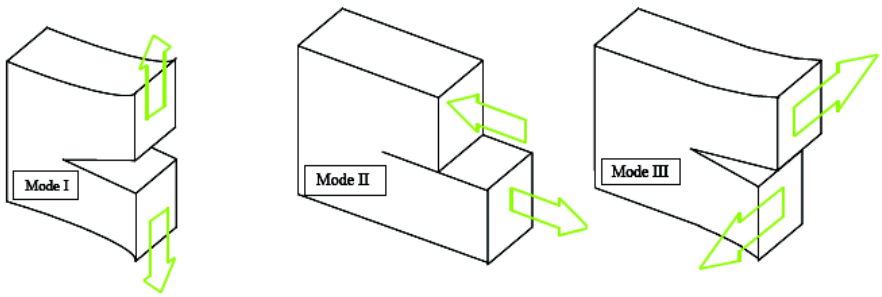


FIGURE 1.9 – Les différents modes de rupture [98]

L'objet de la mécanique de la rupture est l'étude des évolutions de cette surface, c'est à dire la propagation de la fissure en fonction des chargements appliqués et des caractéristiques du matériau constituant le solide. Prévoir le comportement de la fissure dans le milieu fissuré s'apparente à prévoir sa propagation dans un critère

de ruine. Tout paramètre ou toute valeur issu de plusieurs paramètres caractérisant la propagation d'une fissure, comparé à sa valeur critique (mesurée expérimentalement), peut servir de critère de ruine à condition de déterminer la valeur critique du chargement qui déclenche la croissance de la fissure et la direction selon laquelle la fissure se propagera. Un critère de ruine permet de connaître le comportement de la fissure à un instant donné. Cependant, certaines fissures se propagent à une certaine vitesse jusqu'à la ruine. Dans ce cas, la connaissance de la vitesse de propagation s'avère primordiale.

On s'intéresse particulièrement à deux mécanismes physiques de la rupture par fissuration, à savoir la rupture fragile et la rupture ductile. Ces deux mécanismes peuvent intervenir selon deux types de fissuration [15, 110] :

- la fissuration brutale : pour les matériaux à très haute résistance, les contraintes de travail sont très élevées. Une énergie potentielle est ainsi créée. La présence de petites fissures peut alors conduire à une rupture brutale qui souvent ne s'accompagne pas de déformation plastique macroscopique par suite de la très faible ductilité du matériau au voisinage de la fissure ;
- la fissuration successive : il s'agit ici, d'une succession de mécanismes (fragile-ductile) qui, sous contraintes répétées, entraîne une fissuration progressive, appelée habituellement la rupture par fatigue. Cette fissuration peut intervenir sans déformation appréciable avec un grand nombre de variations de cycles de contraintes, ou elle peut s'accompagner de grandes déformations plastiques et intervenir à petit nombre de cycles. On parle de la fatigue « oligocyclique ».

Sur le plan industriel, la rupture brutale intervient de façon exceptionnelle, mais néanmoins catastrophique. Dans le cas de la rupture par fissuration successive, la plupart des structures, soumises aux charges répétées, sont vulnérables à ce phénomène. Bien que de nombreux facteurs mécaniques influencent la fissuration, les développements de la mécanique de la rupture ont montré que trois facteurs majeurs contrôlent le comportement de la structure à la fissuration :

- la résistance à la rupture du matériau : il s'agit d'une grandeur intrinsèque au matériau qui peut être définie comme étant l'aptitude du matériau à résister à une singularité (fissure) existante au sein du matériau. Plusieurs valeurs expérimentales peuvent décrire cette résistance ;
- la taille de la fissure existante : la fissuration à partir de discontinuités. Ces discontinuités sont représentées par les fissures dont les dimensions géométriques sont d'une extrême importance vis-à-vis du comportement de la fissuration ;
- la trajectoire de charge appliquée à la structure : le niveau des contraintes et le niveau de leurs variations sont étroitements liés au comportement de la fissuration, ainsi qu'au type de celle-ci.

Ces trois facteurs peuvent être mis respectivement sous les étiquettes : critère de ruine, de géométrie, et de conditions aux limites. Ils ne sont pas exclusifs.

Pour résumer, quatre types de propagation de fissure se distinguent [15, 110] :

- une fissuration brutale provoquant une rupture fragile où la loi de comportement du matériau reste dans le domaine élastique linéaire (et élasto-plastique mais à petites déformations) ;
- une fissuration brutale provoquant une rupture ductile où la loi de comporte-

ment du matériau est généralement élasto-plastique à grandes déformations ;
- une fissuration progressive fragile (dont l'effet se cumule avec le nombre de cycles), la loi de comportement considérée est élastique linéaire, la vitesse de fissuration est lente (10^{-7} à 10^{-4}mm/cycle de chargement). Cette fissuration est constatée sous charge répétée (fatigue à grand nombre de cycles) ;
- une fissuration progressive ductile, la loi de comportement considérée est élasto-plastique à petites déformations ; la vitesse de fissuration est relativement rapide. Cette fissuration est provoquée sous charge répétée (fatigue à petit nombre de cycles appelée oligocyclique).

La rupture en dynamique [98]

La mécanique de la rupture traite bien l'état de contrainte autour de fissures chargées de manière statique. Cependant, lorsque les fissures se propagent rapidement, le problème n'est pas encore maîtrisé. De nombreux phénomènes viennent interférer avec la fissure en développement, tels que la sensibilité du comportement à la vitesse de déformation, la bifurcation de fissure, son accélération et sa décélération, la dépendance du facteur d'intensité des contraintes à la vitesse de chargement, etc. Ils sont à la base du développement de la rupture dynamique. Les effets dynamiques influent sur la mécanique et sur le comportement du matériau.

Il est nécessaire d'introduire les termes d'inertie dans les équations locales du mouvement lorsque l'hypothèse d'un événement statique n'est pas vérifiée. En dynamique, les équations locales du mouvement prennent donc en compte, en plus, les termes d'inertie :

$$\boxed{\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i} \tag{1.1}$$

avec :
- $i, j = x, y, z$ les coordonnées dans un repère fixe par rapport au matériau ;
- σ_{ij} la composante du tenseur des contraintes ;
- u_i la composante du vecteur déplacement ;
- ρ la masse volumique ;
- f_i la composante du vecteur des forces volumiques.

Le terme $\rho \ddot{u}_i$ est caractéristique des problèmes dynamiques. Pour des milieux élastiques isotropes, en régime dynamique, pour des vitesses de propagation de fissures élevées [3,52], deux constantes apparaissent lors de la résolution des équations du mouvement. Elles sont caractéristiques de la vitesse de propagation des ondes longitudinales C_1 et transversales C_2.

Expression de la célérité des ondes longitudinales C_1 :

$$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \tag{1.2}$$

Expression de la célérité des ondes de cisaillement C_2 :

$$C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \tag{1.3}$$

avec E le module de Young, ν le coefficient de Poisson, λ et μ les coefficients de Lamé.

Facteurs d'intensité des contraintes en dynamique Freund et Rice [50] ont montré que l'analyse quasi-statique d'une fissure chargée dynamiquement conduit à une estimation fausse des champs de contraintes et de déplacements en pointe de fissure. Par conséquent, des changements ont été apportés à ces formulations. La forme des équations établies par Irwin [75] est conservée mais le facteur d'intensité de contrainte en statique K est remplacé par son homologue en dynamique $K^{dyn}(t)$. Son calcul analytique n'est possible que dans le cas d'une structure infinie. Dans les autres cas, le calcul par simulation numérique est nécessaire.

Le facteur d'intensité de contraintes dynamiques $K^{dyn}(t)$ évolue dans le temps. Partom et Boriskovsky [105] ont montré une élévation de $K^{dyn}(t)$ pendant un temps caractéristique déterminé par le rapport de la vitesse des ondes de Rayleigh sur la longueur de fissure.

Une nouvelle méthode de détermination de $K^{dyn}(t)$ a été proposée et expérimentée par Bui, Maigre et Rittel [16] pour une fissure subissant un chargement transitoire. Cette méthode, qui s'applique à une fissure stationnaire chargée dynamiquement, associe la connaissance des efforts et des déplacements aux points de chargement à une simulation numérique donnant des champs de référence.

Propagation de fissure Le cas d'une fissure, soumise à un chargement dynamique, se propageant en mode I est pris comme exemple. La pointe de fissure suit une trajectoire notée $a(t)$. Sa vitesse de propagation instantanée est : $v = \dot{a}$. En introduisant un repère dont l'origine coïncide avec la pointe de fissure, le champ asymptotique des contraintes s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \frac{K^{dyn}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{ij} (\theta) + O(1) \tag{1.4}$$

La forme ainsi obtenue est la même qu'en statique. La singularité en $r^{-1/2}$ sur les contraintes, établie par Irwin [75], est conservée dans les équations dynamiques. Le facteur d'intensité de contraintes dépend de la vitesse de propagation de fissure. Cette remarque se justifie par le développement asymptotique du champs des contraintes, en mode I et en déformation plane. Ce champ de contraintes s'écrit à partir de paramètres adimensionnels, pour un matériau élastique. La vitesse de propagation de la pointe de fissure v intervient dans l'écriture des paramètres adimensionnels :

$$\beta_1 = \sqrt{1 - (v/C_1)^2} \tag{1.5}$$

$$\beta_2 = \sqrt{1 - (v/C_2)^2} \tag{1.6}$$

$$D = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2 \tag{1.7}$$

Les formules des fonctions $\sum_{ij}$ en dynamique du champ des contraintes ont été établies tout d'abord dans le cas d'une fissure se propageant à vitesse constante par Rice [116] et Sih [125]. Elles ont été généralisées au cas d'une fissure se propageant selon une trajectoire arbitraire par Nilson [101], Clifton [26] et Freund [51].

Les facteurs d'intensité dynamique des contraintes s'expriment ainsi :

$$K_I^{dyn} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{22}(\theta = 0) \tag{1.8}$$

$$K_{II}^{dyn} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{12}(\theta = 0) \tag{1.9}$$

On peut introduire un facteur d'intensité des déplacements par analogie avec le cas statique :

$$K_{Iu}^{dyn} = \lim_{r \to 0^+} \frac{E}{4(1-v^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u_1(\theta = \pi) \tag{1.10}$$

Lorsqu'une fissure se propage, le facteur d'intensité dynamique des contraintes, en mode I, ($K_I^{dyn} = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi r}\sigma_{22}(\theta = 0)$), n'est plus égal au facteur d'intensité des déplacements exprimé ci-dessus. Le rapport entre ces deux grandeurs est alors donné par la relation :

$$\frac{K_I^{dyn}}{K_{Iu}^{dyn}} = \frac{D(1-\nu)}{\beta_1(1-\beta_2^2)} \tag{1.11}$$

avec β_1, β_2 et D qui sont décrits aux Eqs.1.5, 1.6 et 1.7.

Le rapport de l'équation précédente est représenté en fonction de v/C_2 sur la Fig.1.10. Lorsque la vitesse de propagation tend vers 0, les effets dynamiques s'atténuent et le rapport tend vers 1. Ce rapport s'annule pour v tendant vers une valeur de la célérité des ondes de Rayleigh Cr (solution de l'équation $D = 0$).

Influence de la vitesse de fissuration Beaucoup de résultats amènent à penser que K_I^{dyn} augmente d'autant plus que la vitesse de propagation de fissure est élevée. Cependant, les études de Freund [51] sur des matériaux laissent supposer une décroissance de la ténacité dynamique pour les faibles vitesses de propagation.

Bifurcation de fissure En théorie, la vitesse des ondes générées par la rupture de l'interface, dans le plan de la fissure, ne peut pas dépasser la vitesse des ondes de Rayleigh Cr. A cette vitesse, le champ de contrainte en pointe de fissure n'a plus le temps de s'établir et constitue une vitesse limite théorique [109].

Une explication de ce phénomène est apporté par Yoffé [138]. Elle s'appuie sur la Fig. 1.12, qui représente la composante $\sigma_{\theta\theta}$ en mode I d'un matériau parfaitement élastique pour plusieurs vitesses de propagation. Si la vitesse est supérieure à $0.6C_2$, le maximum de $\sigma_{\theta\theta}$ n'est plus en $\theta = 0°$ mais autour de $\theta = 60°$, de part et d'autre du plan de fissure. Ceci peut expliquer qu'au delà de cette vitesse la fissure bifurque et se sépare en deux fissures formant un angle de 120° entre elles. Yoffé a montré par ailleurs que, pour un matériau réel, cette vitesse de bifurcation est comprise entre

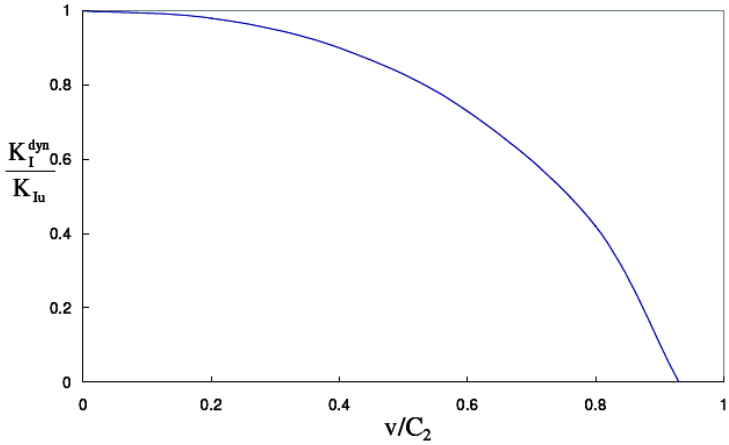


FIGURE 1.10 – Évolution du rapport $\frac{K_I^{dyn}}{K_{Iu}^{dyn}}$ en fonction de la vitesse de propagation [98]

$0.5C_2$ et $0.8C_2$. Cette vitesse, inférieure à la vitesse des ondes de Rayleigh, Cr, est donc une vitesse limite pratique qui ne peut être dépassée par les fissures.

Taux de restitution d'énergie en dynamique Une formule du type d'Irwin [75] pour le taux de restitution d'énergie existe aussi en dynamique :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}[(K_I^{dyn})^2 f_I(v) + (K_{II}^{dyn})^2 f_{II}(v)] + (\frac{1+\nu}{E})(K_{III}^{dyn})^2 f_{III}(v) \tag{1.12}$$

avec f_I et f_{II} et f_{III} des fonctions universelles de la célérité de la fissure représentées à la Fig.1.13 :

$$\begin{cases} f_I(v) = & \frac{\beta_1(1-\beta_2^2)}{(1-\nu)D} \\ f_{II}(v) = & \frac{\beta_2(1-\beta_2^2)}{(1-\nu)D} \\ f_{III}(v) = & \frac{1}{\beta_2} \end{cases} \tag{1.13}$$

3 Les différentes méthodes numériques pour modéliser la fragmentation dynamique

3.1 Introduction

L'objet de ce paragraphe est de donner un aperçu général des différentes méthodologies numériques pour la modélisation de la fracturation, que ce soit en statique ou en dynamique. Il n'est pas exhaustif. Dans un premier temps, le modèle énergétique de Grady-Kipp [58–62] sera exposé, qui émet l'hypothèse que toute l'énergie

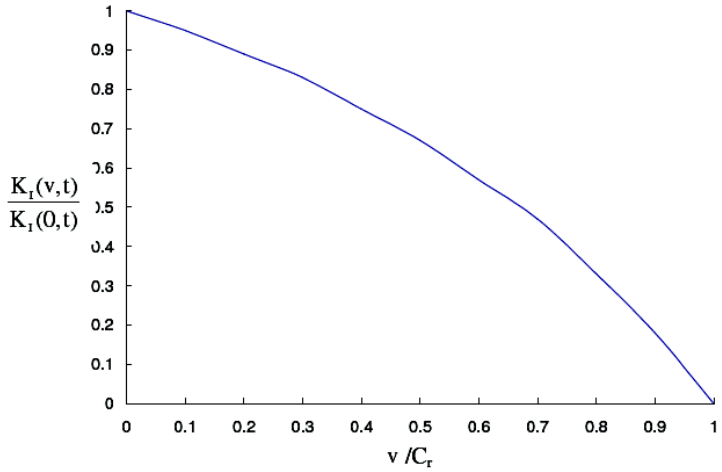


FIGURE 1.11 – Influence de la vitesse de fissuration sur le facteur d'intensité des contraintes [51], avec Cr la vitesse des ondes de Rayleigh

cinétique locale est convertie en énergie de surface. Dans un second temps, les différentes approches basées sur la méthode des éléments finis [9] seront présentées, comme les méthodes de relâchement des nœuds [82, 135, 139], les méthodes de remaillage [102,113], les méthodes des éléments cohésifs où des interfaces sont insérées suivant la propagation des fissures, les méthodes sur la partition de l'unité [7], comme les méthodes des éléments étendus X-FEM [107]. Dans un dernier temps, un aperçu sera effectué sur les approches numériques qui ne sont pas basées sur les éléments finis, comme la méthode des équations intégrales [39, 79].

3.2 Les modèles énergétiques [5, 60]

Le modèle de Grady-Kipp [58–62]

Une conséquence d'un chargement intense et bref sur un solide, comme une explosion, peut mener à sa fragmentation en plusieurs morceaux. Les efforts courants pour expliquer les effets dynamique de la fracture et de la fragmentation ont été concentrés sur la description des défauts inhérents ou induits menant à la fracture et les interactions avec les conditions aux limites. Bien que la caractérisation précise de la structure des défauts est importante, elle ne suffit pas à expliquer le processus d'activation des défauts, les contraintes de fracturation mesurées et la taille des fragments dans les cas dynamiques. Le principe de l'équilibre énergétique apparaît jouer un rôle majeur. Dans le modèle de Grady-Hipp, une approche quantitative est proposée où la surface ou l'aire d'interface créée par le processus de la fragmentation est gouverné par un équilibre des surfaces ou des énergies d'interface et une énergie locale cinétique ou d'inertie. Dans ce modèle, les effets de l'énergie de déformation sont négligés.

Pour aider à la compréhension de ces modèles, nous allons étudier l'obtention des tailles de fragments moyens pour des modèles en une, deux et trois dimensions.

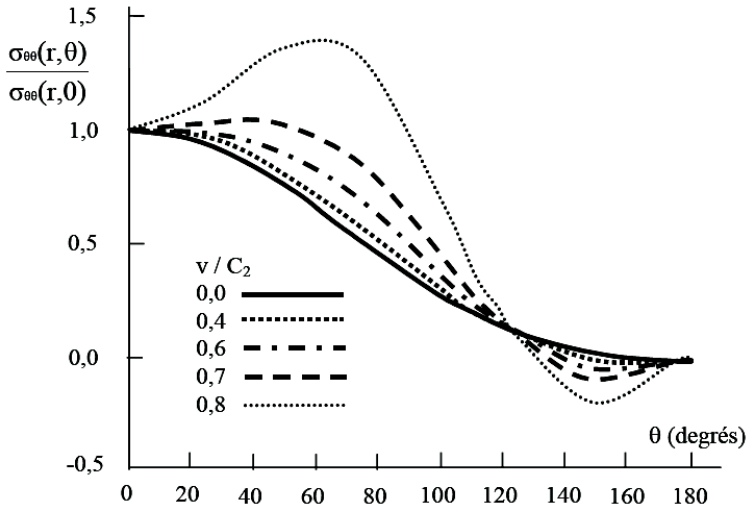


FIGURE 1.12 – Bifurcation de fissure expliquée par les contraintes en pointe de fissure [138]

Volumes et surfaces des fragments

$$V = \begin{cases} d & \text{(1D)}, \\ \pi d^2/4 & \text{(2D)}, \\ \pi d^3/6 & \text{(3D)}, \end{cases} \tag{1.14}$$

Chaque fragment a une expansion à la vitesse de déformation uniforme $\dot{\epsilon} = \frac{\dot{d}}{d}$. La vitesse de déformation volumique $\frac{\dot{V}}{V}$ et le taux de densité relative $\frac{\dot{\rho}}{\rho}$ sont tel que :

$$\frac{\dot{V}}{V} = (-\frac{\dot{\rho}}{\rho}) = \begin{cases} \dot{\epsilon} & \text{(1D)}, \\ 2\dot{\epsilon} & \text{(2D)}, \\ 3\dot{\epsilon} & \text{(3D)}, \end{cases} \tag{1.15}$$

Comme les fragments sont en expansion uniforme, la vitesse matérielle relative au centre de chaque fragment est linéairement distribuée tel que :

$$v(x) = r\dot{\epsilon}, \begin{cases} r \in [-d/2, d/2] & \text{(1D)}, \\ r \in [0, d/2] & \text{(2D ou 3D)}, \end{cases} \tag{1.16}$$

et l'énergie cinétique locale relative au centre de masse peut être évaluée tel que :

$$T' = \begin{cases} \displaystyle\int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{2}(r\dot{\epsilon})^2 \rho dr = \frac{1}{24}\rho\dot{\epsilon}^2 d^3 & \text{(1D)}, \\ \displaystyle\int_{0}^{d/2} \frac{1}{2}(r\dot{\epsilon})^2 \rho(2\pi r) dr = \frac{1}{64}\rho\dot{\epsilon}^2 \pi d^4 & \text{(2D)}, \\ \displaystyle\int_{0}^{d/2} \frac{1}{2}(r\dot{\epsilon})^2 \rho(4\pi r^2) dr = \frac{1}{80}\rho\dot{\epsilon}^2 \pi d^5 & \text{(3D)}. \end{cases} \tag{1.17}$$

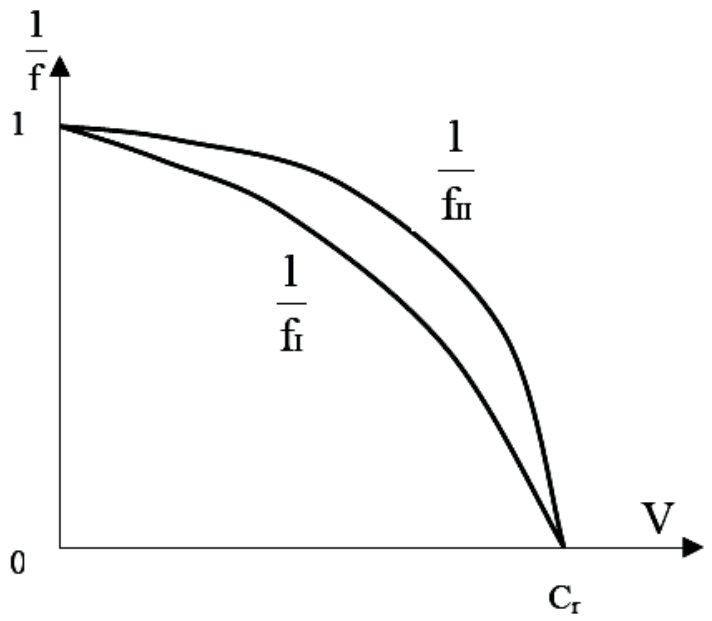


FIGURE 1.13 – Fonctions universelles de vitesses en mode I et II [98]

L'énergie de surface des fragments est calculée par :

$$\Gamma = S\gamma_c = \begin{cases} 2\gamma_c = G_c & \text{(1D)}, \\ \pi d\gamma_c = \dfrac{\pi d G_c}{2} & \text{(2D)}, \\ \pi d^2\gamma_c = \dfrac{\pi d^2 G_c}{2} & \text{(3D)}. \end{cases} \tag{1.18}$$

où γ_c est l'énergie de surface qui est la moitié de l'énergie de fracturation G_c $\gamma_c = G_c/2$.

La théorie de la densité d'énergie totale minimum Il existe deux théories d'énergie pour estimer la taille des fragments. Dans la première théorie, l'hypothèse est faite que quand un fragment est créé, sa densité d'énergie totale, à savoir $(T' + \Gamma)/V$ est minimale.

En substituant 1.17, 1.18 et 1.14 dans la condition stationaire $\dfrac{\partial(T' + \Gamma)/V}{\partial d} = 0$, et avec quelques changements mathématiques, on obtient cette formulation :

$$d = \begin{cases} \left(\dfrac{12G_c}{\rho\dot{\epsilon}^2}\right)^{1/3} & \text{(1D)}, \\ \left(\dfrac{16G_c}{\rho\dot{\epsilon}^2}\right)^{1/3} & \text{(2D)}, \\ \left(\dfrac{20G_c}{\rho\dot{\epsilon}^2}\right)^{1/3} & \text{(3D)}. \end{cases} \tag{1.19}$$

La théorie de l'équilibre énergétique Selon cette théorie, quand survient la fragmentation, l'énergie cinétique locale est convertie en énergie de surface. En sub-

stituant 1.17 et 1.18 en une condition d'équilibre d'énergie : $T' = \Gamma$, nous obtenons :

$$d = \begin{cases} \left(\dfrac{24G_c}{\rho\dot{\epsilon}^2}\right)^{1/3} & \text{(1D)}, \\ \left(\dfrac{32G_c}{\rho\dot{\epsilon}^2}\right)^{1/3} & \text{(2D)}, \\ \left(\dfrac{40G_c}{\rho\dot{\epsilon}^2}\right)^{1/3} & \text{(3D)}. \end{cases} \tag{1.20}$$

A noter que les tailles des fragments estimées par la théorie de l'équilibre de l'énergie sont $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$ fois celles données par les estimations de la densité d'énergie minimale.

3.3 Les méthodes « classiques »basées sur les éléments finis

La méthode des éléments finis [9, 55, 109]

En analyse numérique, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement de certains systèmes physiques et de calculer par exemple le comportement d'objets même très complexes, à condition qu'ils soient continus et décrits par une équation aux dérivées partielles linéaire.

Ces méthodes numériques sont très employées aujourd'hui. Cette approche est décrite notamment dans des ouvrages comme [9, 109].

La méthode de relâchement des noeuds [108]

Cette méthode consiste à bloquer les noeuds du ligament d'une fissure tant qu'ils ne sont pas rompus. Lorsqu'un critère de rupture est satisfait, on en déduit la nouvelle position de la fissure, et on relâche les noeuds correspondants.

Il existe plusieurs manières de relâcher les noeuds :

- Le relâchement instantané est le schéma le plus simple mais le risque de produire des chocs numériques est grand en dynamique ;
- Le schéma qui consiste à imposer à la force de décroître linéairement dans le pas de temps est sans doute le plus répandu.

Enfin, il existe d'autres variantes du schéma précédent. Par exemple, Malluck et al [92] propose un schéma où la force diminue de façon à maintenir le facteur d'intensité des contraintes K constant durant le pas de temps. Cette méthode nécessite la connaissance préalable du trajet de fissure et impose à la pointe de fissure de se situer sur un noeud. Elle permet de simuler des ruptures en 2D, mais est beaucoup plus difficile à mettre en oeuvre en 3D lorsque le front de fissure n'est pas rectiligne. Elle a notamment été utilisée par Kobayashi [82], Bouyne [135], et Yuritzinn [139] pour l'analyse d'essais de rupture fragile. En dynamique, le relâchement de noeuds provoque des oscillations qui sont peu réalistes en pointe de fissure.

Les méthodes de remaillage [108]

Pour avoir une bonne approximation des champs à proximité du front de fissure, le maillage doit être suffisamment fin lors de la propagation. C'est pourquoi, il semble nécessaire de remailler la fissure lors de sa propagation. Les algorithmes de remaillage sont souvent complexes et délicats à mettre en oeuvre. On peut extraire deux sources d'erreur. D'abord, après une opération de remaillage, il est nécessaire de projeter les champs de la solution du pas précédent sur le nouveau maillage. Comme les solutions discrétisées sur différents maillages ne sont pas les mêmes, une simple projection ne conduit pas à des champs en équilibre. Une étape supplémentaire de ré-équilibrage est donc souvent introduite en prenant garde à conserver fermée la surface de fissure fraîchement introduite par le remaillage. Malheureusement, cette étape de ré-équilibrage ne garantit pas la conservation de l'énergie mécanique du système pendant la projection.

Ensuite, tout comme pour la méthode de relâchement de noeud, il est nécessaire de libérer la nouvelle surface de fissure. Finalement, ces opérations de projection et de relâchement modifient l'énergie du système discret de manière purement numérique. L'influence de ces mouvements d'énergie sur l'application d'un critère de propagation est étudiée en élastodynamique par Réthoré [113].

Entre la méthode de relâchement de noeud et le remaillage, le « Moving element method »présentée par Nishioka [102] consiste à repositionner les noeuds des éléments proches de la pointe de fissure pour tenir compte de sa nouvelle position. L'utilisation d'éléments finis espace-temps peut aussi être considérée comme une variante des méthodes de remaillage puisque la discrétisation de la géométrie varie au cours du temps. Le principe de ces éléments est de considérer le temps de la même manière que les variables d'espace, et de remplacer les traditionnels schémas temporels basés sur les différences finies par des approximations de type éléments finis, ou même par des formulations de type Galerkin discontinu.

Élimination d'éléments (« Element deletion method ») [108]

Cette méthode consiste à attribuer une valeur proche de zéro au module de Young des éléments satisfaisant un critère de rupture donné. La masse correspondante peut aussi être éliminée. Cette méthode simple à mettre en œuvre est très utilisée dans le milieu industriel mais elle est également très grossière. L'énergie consommée par l'avancée de la fissure dépend de la taille de maille. En effet, lors de sa propagation, l'énergie d'un élément est annulée ; donc plus le volume des éléments est augmenté, plus de l'énergie est dissipée. Afin d'atténuer cette dépendance à la taille de maille, les lois de comportement sont modifiées en faisant dépendre le taux de restitution d'énergie à la taille et au volume de l'élément.

Les méthodes basées sur la partition de l'unité

Le concept de partition de l'unité (« Partition of Unity Method ») a été introduit par Babuska et Melenk [7]. Cette méthode consiste à améliorer la qualité de la solution fournie par la méthode des éléments finis non pas en raffinant le maillage, mais en injectant des enrichissements dans la base de fonctions a priori proches de la solution attendue ; Cette méthode s'applique donc particulièrement bien à tout

problème présentant une singularité ou une couche limite dans sa solution. Mathématiquement, une partition de l'unité de l'espace Ω est un ensemble de fonctions $\{N_i\}$ qui vérifie notamment la propriété essentielle :

$$\sum_i N_i(\underline{x}) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \tag{1.21}$$

Si $\{\Phi_{i,p}\}$ constitue une base de fonctions, en espèrant qu'elle soit une bonne approximation locale, on peut construire et ajouter à cette approximation l'ensemble de fonctions $\{N_i\Phi_{i,p}\}$. Il faut toutefois être prudent car rien ne garantit que cet ensemble de fonctions soit une base, et l'existence de deux fonctions trop proches peut conduire à un mauvais conditionnement de la matrice à résoudre. Si cet ensemble consitue une base de fonctions indépendantes, alors on peut enrichir l'approximation de la manière suivante :

$$u(\underline{x}) = \sum_i N_i(\underline{x})u_i + \sum_{i,p} N_i(\underline{x})\Phi_{i,p}(\underline{x})a_{i,p} \tag{1.22}$$

L'équation 1.22 permet de se rendre compte que la fonction $\Phi(\underline{x})$ peut être exactement représentée grâce à la présence de la base de fonctions enrichies.

En pratique, et pour des raisons de coûts de calculs, on limite l'introduction de fonctions de la base d'enrichissement aux sous-domaines Ω_i, $i \in I_\Phi$ où cela est nécessaire. I_Φ représente par exemple l'ensemble des noeuds des éléments appartenant à la zone que l'on souhaite enrichir. Ainsi on crée une couche d'éléments de transition pour lesquels une partie seulement des noeuds est enrichie et qui ne vérifie donc plus vraiment la propriété de partition de l'unité. Chessa [25] démontre que le traitement de cette zone de transition a des conséquences sur l'ordre de convergence de la méthode et propose de masquer l'influence des fonctions d'enrichissement en éliminant les termes indésirables introduits par les fonctions d'enrichissement dans cette couche d'éléments de transition.

Autres méthodes utilisant la partition de l'unité Le concept de partition de l'unité permet l'introduction d'une fonction arbitrairement discontinue dans le champ de déplacement. Il ouvre ainsi la porte à une nouvelle approche de la modélisation des phénomènes de rupture. Dans ce cadre, on distingue :

- La modélisation du volume ;
- La modélisation de la zone de rupture.

Ainsi, les modèles classiques de la mécanique des milieux continus (élastique, plastique, viscoplastique, endommageable, ...) s'appliquent directement au volume, tandis que le traitement de la fissure est réalisé avec la méthode de partition de l'unité en :

- Ajoutant simplement des fonctions « saut »lorsqu'un critère de rupture est vérifié ;
- Introduisant un segment cohésif qui coupe de manière arbitraire un élément qu'un critère désigne comme rompu.

Le premier cas est présenté par Simone [126] avec une loi non-locale d'endommagement pour la partie continue. L'auteur montre que l'ajout de fonction « saut »permet de maîtriser le comportement du matériau une fois le dommage critique atteint.

Le second cas représente une avancée importante dans l'utilisation des modèles cohésifs. L'utilisation de la partition de l'unité permet de résoudre les problèmes de trajet de fissure dépendant du maillage et de raideurs numériques de l'interface. Cette méthode est en fait très proche de la méthode X-FEM originale, puisqu'au lieu d'utiliser des fonctions singulières en pointe de fissure, on introduit des zones cohésives censées être représentatives du processus de rupture. Cette méthode est très prisée, car elle permet de s'affranchir des problèmes d'éléments de transition et d'intégration numérique des fonctions singulières.

La méthode des éléments finis étendus X-FEM Basée sur le concept de partition de l'unité présenté au paragraphe précédent, la méthode des éléments finis étendus (« eXtented Finite Element Method ») est une idée originale de Belytschlo et Black [10]. Les champs asymptotiques solutions du problème d'une fissure dans un milieu élastique sont connus (voir Eq. 1.23), et peuvent être exprimés comme une combinaison linéaire de la base F_j.

$$\begin{cases} u_1(\underline{x})_{r\to 0} = \dfrac{1}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}[K_I \cos\dfrac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) + K_{II}\sin\dfrac{\theta}{2}(\kappa + 2 + \cos\theta)] \\ u_2(\underline{x})_{r\to 0} = \dfrac{1}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}[K_I \cos\dfrac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) + K_{II}\sin\dfrac{\theta}{2}(\kappa - 2 + \cos\theta)] \\ u_3(\underline{x})_{r\to 0} = \dfrac{1}{2\mu}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}[K_{III}\sin\dfrac{\theta}{2}] \end{cases} \tag{1.23}$$

La constante de Kolosov est donnée par :

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformations planes} \\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contraintes planes} \end{cases}$$

$$u_i(\underline{x})_{r\to 0} = \sum_j F_j(\underline{x}) u_{ij} \tag{1.24}$$

où $F_j(\underline{x}) = \sqrt{r}\begin{cases} \sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\sin(\theta) \\ \cos(\theta/2) \\ \cos(\theta/2)\sin(\theta) \end{cases}$

Grâce à la méthode de partition de l'unité, ces enrichissements sont ajoutés au champs de déplacement.

Ensuite, Moës et al [107] éliminent complètement les opérations de remaillage en ajoutant une fonction discontinue dans la base d'enrichissement (voir Eq. 1.25). Ainsi le remaillage ne présente plus une contrainte lors de la modélisation par éléments finis de propagation de fissure.

$$H(\underline{x}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \Phi > 0 \\ -1 & \text{si } \Phi < 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

où Φ représente la seconde coordonnée du repère local attaché à la pointe de fissure. La généralisation de ce repère local est réalisé par Stolarska et al [130] en utilisant un couple de fonctions de niveau (Φ, Ψ) qui définissent implicitement la position du plan et du front de fissure. Gravouil et al [64] généralisent l'utilisation des fonctions de niveau au cas tridimensionnel et donnent un schéma numérique pour actualiser les fonctions de niveau basées sur la résolution d'équations de type Hamilton-Jacobi.

L'enrichissement du champ de déplacement est réalisé de manière locale selon la position de l'élément par rapport au plan et au front de fissure, c'est à dire selon les valeurs des fonctions de niveau.

La stratégie d'enrichissement peut être résumée par cette équation :

$$\underline{u}(\underline{x}) \simeq \sum_i N_i(\underline{x}).\left(\underline{u_i} + H(\underline{x_i}).\underline{a_i} + \sum_{k=1,..4} F_k(\underline{x_j}).\underline{b_{i,k}}\right) \tag{1.26}$$

soit $\underline{u}(\underline{x}) \simeq \sum_i N_i(\underline{x})\underline{q_i}$ où $N_i = \{N_i, N_iH, N_iF_k\}$

L'utilisation de la méthode X-FEM, bien que récente, a connu un vif succès pour des cas de propagation de fissure très divers :

- Rupture par fatigue [36, 64] ;
- Rupture fragile élasto-dynamique [115, 140] ;
- Déchirure ductile [135] ;
- Fissuration multiple [14].

Grâce à la base de fonction d'enrichissement judicieusement choisie, la méthode des éléments finis étendus permet d'avoir une bonne qualité de solution même avec des maillages relativement grossiers. Cependant, il apparaît certains cas où l'échelle de la structure diffère beaucoup de l'échelle des phénomènes associés à la fissure (cas des fissures courtes par exemple). C'est pourquoi, le couplage de la méthode X-FEM avec des méthodes multi-échelles peut être envisagé.

Méthode des éléments cohésifs

Les modèles d'interface endommageable (dits de zones « cohésives ») sont basés sur le modèle de Dugdale-Barenblatt [8]. Ce dernier suppose l'existence d'une zone de transition d'une longueur caractéristique en pointe de fissure à l'intérieur de laquelle la séparation des surfaces est progressive. La loi de comportement à l'intérieur de cette zone d'épaisseur nulle définit le modèle de la zone cohésive, et consiste en général en une relation liant les contraintes d'ouverture avec l'ouverture elle-même.

C'est la méthode « cohésive »proposée par [24, 97, 103, 143–146]. Cette méthode s'appuie sur la méthode des éléments finis. Toutefois, afin de mieux traîter la fracturation et le développement et la propagation de la fissuration dans les matériaux, des interfaces « cohésives »sont insérées entre les éléments le long des directions

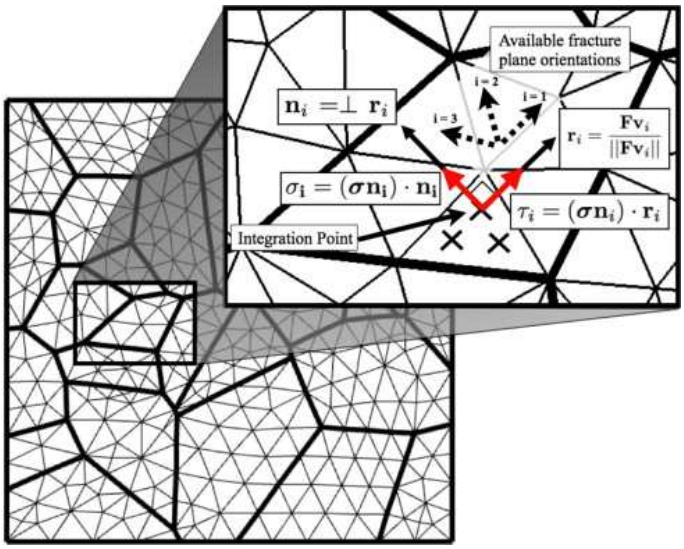


FIGURE 1.14 – Description de l'insertion des interfaces « cohésives » [144]

crystallographiques hypothétiques. En effet, dans les matériaux réels, la fracturation peut intervenir le long des plans crystallographiques dans le groupe d'éléments. La fracturation peut aussi plus probablement intervenir sur un plan donné dû à la combinaison de la contrainte résolue et de la dureté de la fracture. La Fig. 1.14 montre comment sont insérées ces interfaces « cohésives ».

Dans cette méthode, des interfaces sont dynamiquement insérées à travers un grain basé sur deux critères :

- La contrainte normale résolue σ ;
- La contrainte de cisaillement τ.

Cette insertion d'interfaces est effective si :

$$\sigma \geq \sigma_{crit} \tag{1.27}$$

ou

$$\tau \geq \tau_{crit} \tag{1.28}$$

où σ_{crit} et τ_{crit} sont respectivement les contraintes normales et de cisaillement critiques.

Ces valeurs sont obtenues à partir des essais expérimentaux de mono-cristaux. L'évaluation du critère d'insertion est décrite schématiquement dans la Fig. 1.14.

Durant la simulation, la direction de glissement de chaque point d'intégration des éléments finis est obtenue en projetant le gradient de déformation local, F sur chacune des orientations des grains, v_i où la variable i représente la direction de l'espace et varie de 1 à 3 :

$$r_i = \frac{\underline{\underline{F}}\underline{v_i}}{||\underline{\underline{F}}\underline{v_i}||} \tag{1.29}$$

La contrainte normale résolue, σ_i est donnée par la relation :

$$\sigma_i = (\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n_i}).\underline{n_i} \tag{1.30}$$

où n_i est la normale au plan de glissement ($n_i = \perp r_i$) et σ le champ de contrainte local au point d'intégration. La contrainte de cisaillement résolue est donnée par la relation :

$$\tau_i = (\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n_i}).\underline{r_i} \tag{1.31}$$

Dès que le test $\sigma_i \geq \sigma_{crit}$ ou $\tau_i \geq \tau_{crit}$ est positif à un point d'interaction donné, l'insertion d'interfaces est accomplie par l'extension d'un vecteur ligne des deux côtés gauche et droit des coordonnées du point d'intégration le long de l'orientation jusqu'à ce que le vecteur ligne croise la limite des grains (Fig.1.14). A noter que les fissures sont supposées être droites à travers un grain.

Très intéressante sur le plan technique, cette méthode présente néanmoins quelques inconvénients. Tout d'abord, elle introduit un élément d'épaisseur nul, mais de rigidité fini, qui modifie la rigidité globale de la structure, ce qui, en dynamique, pertube le trajet des ondes mécaniques. De plus, il faut connaître le trajet de la fissure a priori. L'argument le plus souvent reproché à ce modèle est le fait qu'il introduit une dépendance au maillage et la direction de propagation montre une forte dépendance à la construction du maillage en terme d'orientation et de taille des éléments.

C'est avec cette méthode que l'on a comparé nos résultats sur la fragmentation pour un modèle de poutre en traction dynamique uniaxiale.

3.4 Les méthodes non basées sur les éléments finis

La méthode des équations intégrales [39, 79]

Le principe de la méthode des équations intégrales consiste à transformer des équations aux dérivées partielles dans le volume de la pièce en équations intégrales sur le contour. Historiquement, la méthode des équations intégrales a été développée de deux manières distinctes : l'une des deux est une approche physique intuitive, appelée la méthode des discontinuités de déplacements. Cette approche consiste à chercher en premier lieu des valeurs des perturbations fictives dont les effets sur le contour sont les conditions aux limites spécifiées, ensuite à calculer le reste des inconnues du contour qui sont obtenues indirectement. Cette approche est appelée la « Méthode des Équations Intégrales Indirectes ». L'autre approche est une approche plus mathématique. Elle est basée sur les théorèmes de réciprocité de Maxwell-Betti et la solution élémentaire de Kelvin, qui permettent de relier directement les inconnues du contour aux conditions aux limites. Cette approche est appelée la « Méthode des Équations Intégrales Directes ».

Le principal intêret de cette méthode consiste à ne mailler que le contour. Quand une fracture intervient, un nouveau contour est créé et est susceptible de se propager en fonction de l'état des containtes. C'est une métode efficace pour traiter la mécanique de la rupture dans les régimes statiques, notamment pour étudier les problèmes de fatigue.

3.5 Modélisation de la propagation des ondes de choc [112]

Cette partie est consacrée aux différents schémas numériques pour la modélisation de la propagation des ondes de choc. Cette modélisation ne s'applique pas pour le code aux éléments discrets Mka3D©, mais pour des méthodes par éléments finis par exemple. En effet, le schéma employé est un schéma explicite avec un pas de temps variable pour prendre en compte l'augmentation de la célérité des ondes.

Les ondes de choc sont une des manisfestations les plus intenses et spectaculaires de la non-linéarité. Ces ondes de choc peuvent être d'origine naturelle (explosions volcaniques, tonnerre) ou constituer une nuisance sonore associée au bruit des transports (bang sonique des avions supersoniques ou des trains entrant dans des tunnels, etc.). Les ondes de choc sont caractérisées par une variation brusque de la pression, sur un temps très court par rapport à la durée du signal. En conséquence, le spectre fréquentiel est très étendu. Les distances de propagation sont souvent grandes également, plusieurs centaines de longueur d'onde.

La propagation de ces ondes de choc entraîne :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1.32}$$

L'Eq.1.32 peut directement être intégrée [57, 78, 129, 133, 137], mais nécessite de grandes ressources de calculs [30].

Pour palier à ce problème, la plupart des études essayent de s'orienter vers des modèles moins exigeants en ressource de calculs. Ces modèles ont pour but de factoriser l'Eq.1.32. Ainsi, l'Eq.1.32 peut se factoriser de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial p}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial p}{\partial t}\right) \tag{1.33}$$

De cette factorisation 1.33, seule la seconde partie est conservée, correspondant à propagation des ondes vers $+x$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{1.34}$$

Cette Eq.1.34 est nommée équation « one-way ».

La vitesse du son dépend de l'amplitude instantanée $c \approx c_0 + \frac{\beta P}{\rho_0 c_0}$, l'Eq.1.34 devient :

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{1}{2}\frac{\partial P^2}{\partial T} \tag{1.35}$$

avec $P = \frac{p}{P_0}$, $X = \dfrac{x}{L_C}$.

L_c peut s'écrire :

$$L_c = \frac{1}{k\beta M} \tag{1.36}$$

avec M le nombre de Mach acoustique, $\beta \approx 3.5$ dans l'eau, k le nombre d'onde et $T = \omega_0(t - \frac{x}{c_0})$.

L'Eq.1.35 peut s'écrire également :

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \mu \frac{\partial P^2}{\partial T} \tag{1.37}$$

L'objetif consiste ensuite en la résolution de l'Eq.1.37, qui est l'équation de Burger avec la théorie des chocs faibles.

Pour la résolution de cette équation, il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution :

- « shock fitting ;
- shock capturing.

Quelques références sur la propagation des ondes de choc Pour de plus amples information sur le sujet de la propagation des ondes de choc, le lecteur peut se référer [19, 28, 111, 132]

4 La méthode des éléments discrets

4.1 Introduction

La méthode des éléments discrets est une famille de méthodes numériques dédiée aux géomatériaux. Elle fut introduite en 1971 par Cundall [27]. Cette méthode se dit discrète dans le sens où on considère que chaque particule constitue une entité à part entière. On s'intéresse au mouvement de chaque particule interagissant avec ses voisines. La méthode des éléments discrets a été largement développé dans différents domaines de la physique ces 30 dernières années. Ils ont comme origine l'étude des matériaux fragiles granulaires, comme le béton, les céramiques. Actuellement, les méthodes discrètes peuvent également traiter des matériaux de type ductile comme les métaux avec l'emploi de maillage sans espace interstitiel et avec des méthodes où les particules peuvent se déformer et en prenant en compte les rotations et les mouvements dans les trois dimensions de l'espace.

Ces méthodes utilisent des particules qui interagissent entre elles par des liens contenant des moments et des forces. Comme cette méthode discrète ne requiert pas une approche continue, elle est très bien adaptée pour traiter la fracturation, les matériaux hétérogènes, comme les géomatériaux. Par conséquent, c'est une méthode susceptible d'intéresser de nombreux domaines, comme la mécanique des sols, des roches, pour le traitement de problèmes géotechniques notamment.

4.2 Les différents modèles éléments discrets

Historiquement, on peut remarquer, que parmi les méthodes existantes, l'évolution de ces méthodes est étroitement liée à la représentation cinématique de celle-ci. Par la suite, nous allons décrire la méthode des éléments discrets en les classant selon la richesse de leur description cinématique. Dans un premier temps, nous décrirons les modèles n'incluant que des translations, ou encore appellés « Distinct Element Method » [27, 70] puisque ces méthodes sont la genèse de l'ensemble de ces méthodes.

Nous décrirons ensuite ce que l'on appelle les « Lattice models » [21, 124] parce qu'ils incluent en plus des translations et des rotations dans les trois directions de

l'espace. Et enfin, « les modèles à particules déformables » [93] qui incluent en plus une description de la déformation locale des particules.

Distinct Element Method [27,70] Initialement, les méthodes discrètes permettent d'obtenir pour chaque particule le déplacement en translation que l'on note u_i pour la particule i. Son utilisation est adaptée pour des milieux granulaires et les lois.

La description du modèle se fait par l'intermédiaire des lois suivantes :

$$\underline{\underline{M}}_i \ddot{u}_i = \sum_j \underline{\underline{F}}^{int}_{j\to i} + \underline{\underline{F}}^{ext}_i \tag{1.38}$$

Avec :

- $\underline{\underline{M}}_i = \begin{pmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_i \end{pmatrix}$ la matrice élémentaire de masse associée à la particule i avec $m_i = \int_{\Delta_i} \rho dx$ et ρ la densité.
- $\underline{\underline{F}}^{int}_{j\to i}$ l'effort d'interaction de la particule j avec la particule i.

Il existe bien entendu d'autres modèles concernant les lois d'interaction entre particules comme les méthodes « Molecular Dynamics » [65] où les lois d'interaction sont représentées par des forces normales dérivant de potentiels ou encore la méthode « Non Smooth Contact Dynamics » [76] où l'interpénétration des particules est minimisée avec des lois discontinues.

Les « Lattices Models » [4,21,107,124] Les modèles décrits ici sont plus riches puisqu'ils permettent de prendre en compte le déplacement en translation u et en rotation θ. Généralement, les lois d'interaction entre particules sont des ressorts ou des poutres. La description du modèle se fait par l'intermédiaire des lois suivantes :

$$\underline{\underline{M}}_i \ddot{u}_i = \sum_j \underline{\underline{F}}^{int}_{j\to i} + \underline{\underline{F}}^{ext}_i \tag{1.39}$$

$$\underline{\underline{I}} \ddot{\theta}_i = \sum_j \underline{\underline{M}}^{int}_{j\to i} + \underline{\underline{M}}^{ext}_i \tag{1.40}$$

Avec :

- $\underline{\underline{M}}_i = \begin{pmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_i \end{pmatrix}$ la matrice élémentaire de masse associée à la particule i avec $m_i = \int_{\Delta_i} \rho dx$ et ρ la densité.
- $\underline{\underline{I}}_i$ est le moment d'inertie quadratique avec $\underline{\underline{I}}_i = \int_{\Delta_i} \rho \|x - x_i\|^2 dx$
- $F^{int}_{j\to i}$ et $M^{int}_{j\to i}$sont respectivement l'effort et le moment d'interaction de la particule j avec la particule i.

Bilan sur les « Lattices Models »et la « Distinct Element Model » Pour ces méthodes discrètes, la forme des particules est généralement de forme sphérique, afin de simplifier la gestion des contacts et le calcul des forces et des moments d'interaction entre les particules. Par conséquent, l'emploi de ces méthodes n'est

pas très adapté pour la modélisation des milieux cohésifs comme des roches ou des céramiques. L'emploi de particules sphériques ne permet pas de modéliser tout l'espace. En effet, il reste des espaces interstitiels entre les particules. Les matériaux ne peuvent donc être simulés de manière précise.

4.3 Le modèle élément discret employé dans cette thèse

Pour cette thèse, le code aux éléments discrets Mka3D©développé par Christian Mariotti [93] a été utilisé. Cette partie a pour but de décrire le principe de la méthode employée, notamment pour le calcul des forces et des moments, le schéma de résolution numérique, ainsi qu'une description de la forme des particules.

Description géométrique du système

Généralement, dans les méthodes discrètes, la plupart des auteurs utilisent des particules de forme sphérique, afin notamment de simplifier le calcul des contacts entre les particules. Toutefois, dans notre cas, pour la modélisation de géomatériaux comme le béton ou les céramiques, l'utilisation de sphères pose problème en raison de l'espace interstitiel vacant entre les sphères, mais également en raison de la difficulté pour obtenir des maillages le plus dense possible. Pour cette thèse, nous avons employé des particules de forme soit rectangulaire ou des maillages de Voronoi. Avec ces types de maillages, tout l'espace est modélisé sans volume interstitiel vacant.

Description des paramètres

Nous allons définir dans ce paragraphe les différents paramètres du modèle élément discret. La Fig.1.15 permet d'illustrer ces définitions.

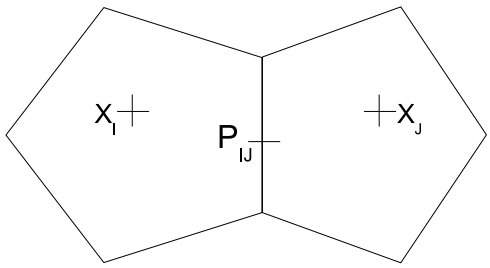


FIGURE 1.15

On note :

- La position initiale du point X_i que l'on note X_I^o, le centre géométrique de la particule i.
- La distance initiale d'équilibre entre les particules I et J :

$$D_{IJ}^{eq} = \|\underline{X_I^0 X_J^0}\|$$

- Le vecteur normal extérieur initial pour le lien IJ :

$$\underline{n}_{IJ}^0 = \frac{1}{D_{IJ}^{eq}} \underline{X_I^0 X_J^0}$$

- Le coefficient de pondération pour la distance entre X_I^0 et l'interface : α_{IJ}^I est le ratio de la distance de X_I à l'interface des particules I et J sur la distance D_{IJ}^{eq} entre X_I^0 et X_J^0. En général, pour un maillage de Voronoi régulier, $\alpha_{IJ}^I = \frac{1}{2}$

- Les deux vecteurs $\underline{s}_{IJ}^0$ et $\underline{t}_{IJ}^0$ qui sont contenus dans le plan d'interface entre les particules I et J. Ces deux vecteurs servent de référence afin d'évaluer la torsion entre les particules I et J.

$$\underline{n}_{IJ}^0 \wedge \underline{s}_{IJ}^0 = \underline{t}_{IJ}^0$$

De plus, nous calculons, pour chaque particule les axes principaux d'inertie, qui forment un repère orthonormé dans lequel la matrice symétrique d'inertie $\underline{\underline{R}}_I^0$ se réduit à une matrice diagonale avec les principaux moments d'interties comme termes sur la diagonale. Cette matrice diagonalisée servira de référence pour les calculs futurs. Pour chaque particule I, nous posons I_1, I_2 et I_3 les principaux moments d'inertie, avec $I_1 = d_2 + d_3$, $I_2 = d_1 + d_3$ et $I_3 = d_1 + d_2$. Dans le repère d'inertie, nous avons :

$$\underline{\underline{R}}_I^0 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Nous supposons que la matrice $\underline{\underline{R}}_I^0$ est indépendante du temps. Une matrice importante pour la dynamique des solides est la matrice $\underline{\underline{D}}_I$ suivante :

$$\underline{\underline{D}}_I = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Nous déterminons ensuite les variables cinématiques des particules. Le mouvement de la particule I est entièrement décrit à chaque pas de temps t par la position des centres de masse, que nous désignons par le vecteur position $\underline{X}_I$ et sa matrice de rotation $\underline{\underline{Q}}_I$ de la position initiale de la particule jusqu'à sa position au temps t. La matrice $\underline{\underline{Q}}_I$ décrit donc la rotation qui transporte le repère d'inertie initial de la particule I au repère d'inertie de la particule I au temps t dans le référentiel galilléen fixé où les mouvements des particules sont calculés. La matrice d'inertie dans le repère fixé $\underline{\underline{R}}_I$ au temps t peut par conséquent être écrit de cette façon :

$$\underline{\underline{R}}_I = \underline{\underline{Q}}_I \cdot \underline{\underline{R}}_I^0 \cdot \underline{\underline{Q}}_I^{-1} \tag{1.41}$$

De ces variables cinématiques, nous pouvons définir d'autres variables qui pourront être utilisées pour calculer les forces et les moments entre les particules :

- La vitesse linéaire $\underline{v}_I$:

$$\underline{v}_I = \frac{d\underline{X}_I}{dt}$$

- Nous introduisons une carte utile, $\underline{\underline{j}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \underline{\underline{j}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Sinon, nous pouvons définir $\underline{\underline{j}}$ tel que :

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^3,\ \underline{\underline{j}}(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \wedge \underline{y}$$

- Le vecteur vitesse de rotation dans le repère fixe $\underline{\Omega}_I$: le vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\underline{\underline{j}}(\underline{\Omega}_I) = \frac{d\underline{\underline{Q}}_I}{dt}\underline{\underline{Q}}_I^T \tag{1.42}$$

- Le vecteur vitesse de rotation dans le repère d'inertie $\underline{\omega}_I$: le vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\underline{\underline{j}}(\underline{\omega}_I) = \underline{\underline{Q}}_I^T \frac{d\underline{\underline{Q}}_I}{dt}$$

  Nous pouvons écrire la relation liant ces deux vecteurs vitesse de rotation :

$$\underline{\Omega}_I = \underline{\underline{Q}}_I \cdot \underline{\omega}_I \tag{1.43}$$

- La distance entre les particules I et J au temps t :

$$D_{IJ} = \|\underline{X}_J - \underline{X}_I\|$$

- Le vecteur normal externe pour le lien IJ au temps t :

$$\underline{n}_{IJ} = \frac{1}{D_{IJ}}(\underline{X}_J - \underline{X}_I)$$

- La déformation volumique ε_I de la particule I : elle est définie comme étant la somme de toutes les contributions des déformations du lien entre la particule I et les particules voisines.

$$\varepsilon_I = \sum_{J \in \mathcal{V}_I} \frac{\alpha_{IJ}^I S_{IJ}(D_{IJ} - D_{IJ}^{eq})}{V_I + 3\frac{\nu}{1-2\nu}V_I^l}$$

– La déformation volumique interpolée pour le lien (IJ) :

$$\varepsilon_{IJ} = \alpha_{IJ}^{I}\varepsilon_I + \alpha_{IJ}^{J}\varepsilon_J$$

– La différence entre les points P_{IJ}^I et P_{IJ}^J : le point P_{IJ}^I est défini comme la position du point P_{IJ} au temps t avec le mouvement de corps rigide de la particule I, et inversement, le point P_{IJ}^J est défini comme la position du point P_{IJ} au temps t avec le mouvement de corps rigide de la particule J.

$$\underline{X_I P_{IJ}^I} = \underline{\underline{Q}}_I \underline{X_I^0 P_{IJ}} \text{ and } \underline{X_J P_{IJ}^J} = \underline{\underline{Q}}_J \underline{X_J^0 P_{IJ}}$$

La différence peut par conséquent être décrite comme le vecteur suivant :

$$\underline{\Delta u}_{IJ} = \underline{P_{IJ}^I P_{IJ}^J} \tag{1.44}$$

$$= \underline{X_J} - \underline{X_I} + \underline{\underline{Q}}_J \cdot \underline{X_J^0 P_{IJ}} - \underline{\underline{Q}}_I \cdot \underline{X_I^0 P_{IJ}} \tag{1.45}$$

Expression des forces et des moments

Nous pouvons maintenant donner l'expression des forces et des moments entre les particules. L'expression suivante des forces a été adaptée pour simuler le comportement d'un matériau en élasticité linéaire, mais d'autres expressions du calcul des forces peuvent être décrites permettant une modélisation de cas plus complexes. Ceci est possible en additionnant des forces amorties pour dissiper l'énergie dans le matériau.

Nous notons E le module de Young, et ν le coefficient de Poisson pour le matériau. Nous obtenons l'expression suivante pour la force normale par de la particule J sur la particule I :

$$\underline{F}_{IJ}^n = \left(S_{IJ}\frac{E}{1+\nu}\frac{D_{IJ} - D_{IJ}^{eq}}{D_{IJ}^{eq}} + S_{IJ}\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{IJ} \right) \underline{n}_{IJ} \tag{1.46}$$

Cette force représente la force de compression entre les particules.

Pour la force tangentielle appliquée à la particule J sur la particule I, nous avons cette expression :

$$\underline{F}_{IJ}^t = \frac{S_{IJ}}{D_{IJ}^{eq}}\frac{E}{1+\nu}\left(D_{IJ}^{eq}\underline{n}_{IJ} + \underline{\underline{Q}}_J \cdot \underline{X_J^0 P_{IJ}} - \underline{\underline{Q}}_I \cdot \underline{X_I^0 P_{IJ}} \right) \tag{1.47}$$

Cette force est la force de cisaillement entre les particules.

Si nous faisons la somme de ces deux forces, nous obtenons la force totale appliquée à la particule J sur la particule I, dont l'expression est plus simple.

$$\underline{F}_{IJ} = \frac{S_{IJ}}{D_{IJ}^{eq}}\frac{E}{1+\nu}\underline{\Delta u}_{IJ} + S_{IJ}\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{IJ}\underline{n}_{IJ} \tag{1.48}$$

Cette expression peut être comparée avec la loi de Hooke en élasticité linéaire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} \tag{1.49}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes, et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ le tenseur des déformations.

Le premier terme de l'équation (1.49) correspond au premier terme de l'équation (1.48) (C'est la contribution de la déformation du lien seul (IJ)), et le second terme de l'équation (1.49) correspond au second terme de l'équation (1.48) (C'est la contribution de la déformation globale de la force normale de la particule I).

Le premier moment à être considéré est par conséquent le moment induit par la force totale au centre de masse de la particule :

$$\underline{M}^t_{IJ} = \underline{P^I_{IJ} X_I} \wedge \underline{F}_{IJ} = -\frac{S_{IJ}}{D^{eq}_{IJ}} \frac{E}{1+\nu} (\underline{\underline{Q}}_I \cdot \underline{X^0_I P_{IJ}}) \wedge \underline{\Delta u}_{IJ} \tag{1.50}$$

En complément, nous avons besoin également de considérer le moment de flexion du lien entre les particules I et J. Pour cela, nous avons besoin de prendre en compte le comportement du matériau sous la torsion et la flexion. Si on note R^s_{IJ} et R^t_{IJ} les principaux moments d'inertie de la surface entre les particules I et J en association avec les principaux axes $\underline{s}^0_{IJ}$ et $\underline{t}^0_{IJ}$, nous pouvons écrire le moment de flexion sous la forme :

$$\underline{M}^f_{IJ} = \frac{E}{D^{eq}_{IJ}} \left(R^s_{IJ} \phi_s \underline{s}^0_{IJ} + R^t_{IJ} \phi_t \underline{t}^0_{IJ} \right) + \frac{E}{D^{eq}_{IJ}(1+\nu)} (R^s_{IJ} + R^t_{IJ}) \phi_n \underline{n}^0_{IJ} \tag{1.51}$$

où nous supposons que la flexion et la torsion sont petites, et où nous notons ϕ_n, ϕ_s et ϕ_t les angles de torsions respectifs autour de l'axe $\underline{n}_{IJ}$ et l'angle de flexion autour des axes $\underline{s}^0_{IJ}$ et $\underline{t}^0_{IJ}$.

Pour calculer les angles ϕ_n, ϕ_s et ϕ_t, nous utilisons la relation relative des axes $\underline{n}^0_{IJ}$, $\underline{s}^0_{IJ}$ et $\underline{t}^0_{IJ}$ soumis à un mouvement de corps rigides des particules I et J. Toutefois, comme les trois mouvements sont combinés dans les grandes rotations de particules, cette expression est plutôt sous la forme :

$$\underline{M}^f_{IJ} = \frac{E S_{IJ}}{D^{eq}_{IJ}} \Big(\alpha_n (\underline{\underline{Q}}_I \cdot \underline{n}^0_{IJ}) \wedge (\underline{\underline{Q}}_J \cdot \underline{n}^0_{IJ}) + \alpha_s (\underline{\underline{Q}}_I \cdot \underline{s}^0_{IJ}) \wedge (\underline{\underline{Q}}_J \cdot \underline{s}^0_{IJ}) + \alpha_t (\underline{\underline{Q}}_I \cdot \underline{t}^0_{IJ}) \wedge (\underline{\underline{Q}}_J \cdot \underline{t}^0_{IJ}) \Big) \tag{1.52}$$

où les coefficients α_n, α_s et α_t sont déterminés par l'équation de passage (1.51) dans le cas des petites rotations.

Nous avons par conséquent :

$$\alpha_n = \frac{\nu (R^s_{IJ} + R^t_{IJ})}{2(1+\nu) S_{IJ}} \tag{1.53}$$

$$\alpha_s = \frac{(2+\nu) R^t_{IJ} - \nu R^s_{IJ}}{2(1+\nu) S_{IJ}} \tag{1.54}$$

$$\alpha_t = \frac{(2+\nu) R^s_{IJ} - \nu R^t_{IJ}}{2(1+\nu) S_{IJ}} \tag{1.55}$$

Dans des soucis de simplification, nous pourrons continuer à noter ces coefficients α_n, α_s et α_t et nous pourrons utiliser leurs expressions explicites seulement si utilité.

Nous définissons le moment total appliqué à la particule J sur la particule I :

$$\underline{M}_{IJ} = \underline{M}^t_{IJ} + \underline{M}^f_{IJ}$$

Avec toutes ces forces et ces moments, le modèle discret est maintenant complet.

Schéma numérique employé

Pour déterminer le mouvement de chaque particule soumise à ces forces et à ces moments, un schéma numérique explicite de type « Leapfrog »est mis en place à l'aide des équations de la dynamique :

$$m_I \ddot{\underline{X}}_I = \sum_{J \in \mathcal{V}_I} \underline{F}_{IJ} + \underline{F}^{ext}_I \tag{1.56}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{\underline{R}}_I \cdot \underline{\Omega}_I\right) = \sum_{J \in \mathcal{V}_I} \underline{M}_{IJ} + \underline{M}^{ext}_I \tag{1.57}$$

Pour la résolution du système, un schéma numérique explicite de type « Leapfrog »est mis en place :

$$\dot{\underline{X}}_I(t) = \dot{\underline{X}}_I(t - \Delta t) + \ddot{\underline{X}}_I(t)\Delta t \tag{1.58}$$

$$\underline{X}_I(t + \Delta t) = \underline{X}_I(t) + \dot{\underline{X}}_I \Delta t \tag{1.59}$$

5 Le critère de rupture de Camacho-Ortiz [24]

L'objet de ce paragraphe est l'étude d'une approche afin de quantifier l'endommagement quand une fracture dans le matériau intervient.

Contrairement aux approches précédentes de la fracturation, qui ont été en grande partie fondées sur des théories continues de l'endommagement, les auteurs Camacho-Ortiz [103] ont explicitement suivi l'initiation et la propagation de multiples fissures. Ces fissures peuvent se diviser en branches et se fusionner et éventuellement, conduire à la formation de fragments.

Dans ce modèle, une loi de cohésion, modélisant une diminution progressive de la tension avec l'augmentation de l'ouverture de la fissure, est introduite. Cette loi cohésive détermine le travail de séparation des éléments, ou l'énergie de fracturation, requis pour la formation complète de nouveaux fragments. Cette loi de fracturation de Camacho-Ortiz a été introduite dans les méthodes des éléments cohésifs afin de décrire le comportement à la rupture [24, 88, 103, 143–147]. Un critère de seuil contrôle l'apparition de l'endommagement : l'endommagement est activé dès que la contrainte σ devient supérieure à la contrainte seuil σ_c.

Quand l'endommagement est activé, la contrainte locale suit la loi linéaire qui est présentée sur la Fig.1.16. Quand la vitesse de l'ouverture de la fissure est positive (cas de figure d'un chargement) :

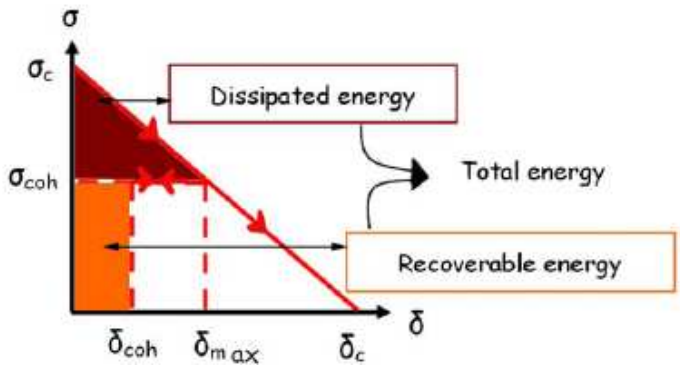


FIGURE 1.16 – Schéma du critère de rupture modifié de Camacho-Ortiz et les différentes énergies associées [97]

$$\frac{\sigma_{coh}}{\sigma_c} = 1 - \frac{\delta_{coh}}{\delta_c} \tag{1.60}$$

Quand l'ouverture de la fissure actuelle est inférieure à l'ouverture maximale atteinte durant le calcul :

$$\frac{\sigma_{coh}}{\sigma_c} = 1 - \frac{\delta_{max}}{\delta_c} \tag{1.61}$$

Les Eqs. 1.60 et 1.61 décrivent l'ouverture et la fermeture de la fissure. L'endommagement local D est directement lié à l'ouverture maximal. Il est compris entre 0 (initiation de l'endommagement) et 1 (le lien est complétement cassé) :

$$D = min(\frac{\delta_{max}}{\delta_c}, 1) \tag{1.62}$$

A noter que le chemin de décharge n'est pas conventionnel sur la Fig.1.16 car il fait l'hypothèse d'un modèle en une dimension. L'énergie associée pour l'ouverture de la fissure est divisée en une énergie dissipée E_{diss} et une énergie de recouvrement E_{rec}. Quand le lien est complétement cassé, l'énergie dissipée totale est :

$$G_c = \frac{\sigma_c \delta_c}{2} \tag{1.63}$$

Quand le lien est partiellement ouvert, les énergies E_{diss} et E_{rec} sont exprimées :

$$E_{diss} = D^2 G_c \tag{1.64}$$

$$E_{rec} = \sigma_{coh}\delta_{coh} = 2(1-D)\frac{\delta_{coh}}{\delta_c} G_c \tag{1.65}$$

Quand la fissure est sur le chemin d'ouverture, et $\delta_{coh} = \delta_{max}$, l'énergie de recouvrement est :

$$E_{rec} = 2(1 - D)DG_c \tag{1.66}$$

Ce critère de rupture a été mis en place dans la méthode des éléments cohésifs [24, 88,97,103,143–146]et a fournit de bons résultats dans le domaine de la fragmentation dynamique. On a introduit cette loi dans notre code aux éléments discrets. Dans la méthode aux éléments cohésifs, des éléments « cohésifs »sont introduits en fonction de cette loi quand la contrainte locale est supérieure à la contrainte seuil σ_c. Par analogie, dans notre code aux éléments discrets, la loi a été introduite pour décrire l'évolution de l'ouverture de la fissure et actualiser l'état de la contrainte locale en fonction de l'endommagement. C'est une loi de type « discrète »dans la mesure où la loi est appliquée par lien.

6 Conclusion de cette étude bibliographique

La modélisation numérique de la fragmentation dynamique est un challenge, car elle fait intervenir la propagation de fissures à de hautes vitesses. Les phénomènes physiques à prendre en considération sont nombreux, comme on a pu le voir.

Dans ce chapitre bibliographique, plusieurs méthodes numériques ont été passées en revue. Les méthodes énergétiques, s'appuyant sur la loi de Poisson, comme les modèles de Grady-Kipp [60] ou de Glenn-Chudnovsky [5], montrent leurs limites car elles ne peuvent pas inclure les phénomènes non-linéaires internes, qui agissent également sur la formation des fragments et leurs distributions de tailles. Ensuite, les méthodes classiques basées sur les éléments finis montrent aussi certaines limites, par leurs natures continues. L'utilisation de zones cohésives est relativement difficile à mettre en œuvre notamment pour se prémunir de la dépendance au maillage. Enfin, les méthodes sans maillage, comme la méthode des éléments discrets, avec leurs natures discrètes, permettent de réaliser des simulations efficaces et bien adaptées à ce type de problème.

La simulation de la fracturation nécessite, en plus d'une méthode de simulation numérique efficace, l'insertion d'un critère de rupture afin de quantifier un endommagement. Dans ce chapitre, le critère de rupture de Camacho-ortiz [24] a été étudié. Il est notamment utilisé dans les méthodes « cohésives » [88, 97, 143–147] avec de bons résultats, mais nécessite un temps de calcul relativement coûteux pour des cas complexes en deux dimensions.

Les deux prochains chapitres vont être l'objet de l'introduction de ce critère de rupture dans la méthode des éléments discrets qui a été employée dans cette thèse, afin de valider l'approche des éléments discrets pour la fragmentation dynamique.

Dans les deux derniers chapitres, un autre critère de rupture, fondé sur l'introduction de défauts avec une loi probabiliste de Weibull et développé par Denoual [31], sera introduit dans la méthode des éléments discrets. Avec ce critère, les simulations numériques seront moins coûteuses en temps de calculs et permettront de modéliser des structures en trois dimensions à de hautes vitesses de déformation.

Chapitre 2

Modélisation de la fragmentation

Avant propos

Ce chapitre reprend l'intégralité d'un article que l'on a soumis en publication dans le journal « Engineering Fracture Mechanics », écrit en collaboration avec Christian Mariotti au CEA et Jean-François Molinari à l'EPFL.

Il est consacré à la validation du modèle discret pour le traitement de la fragmentation dynamique. Pour cette partie, le critère de rupture discret de Camacho-Ortiz [24]a été implémentée dans le code aux éléments discrets « Mka3D ».

Après un bref rappel de la méthode aux éléments discrets, du critère de Camacho-Ortiz, nous présentons la description du modèle de fragmentation qui est un modèle simplifié de poutre en une dimension soumise à des fortes vitesses de déformations provoquant ainsi la rupture et la fragmentation. L'étude des résultats se base sur la convergence de l'énergie dissipée de fracturation et de l'énergie totale du modèle, le nombre de fragments, la distribution de la taille des fragments et est mise en confrontation directe avec d'autres modèles de prédiction numériques (Méthode des éléments « cohésifs » [88, 97, 143–147]), ou analytiques (Grady [58–62], Glenn et Chudnovsky [5]).

Abstract

The aim of this paper is to validate the Discrete Element Method (DEM) approach to treat dynamic fragmentation problems. The method, which meshes a domain with discrete particles that can possibly debond and contact, is ideally suited to model structures under severe damage. The validation test consists of a simple one-dimensional ceramic beam model, which is subjected to intense tensile loading, up to fragmentation. The paper studies the fracture energy dissipated (or number of fragments) during fragmentation as function of number of particles. The obtained results are systematically compared to results obtained through a continuum approach. We show that the fracture energy dissipated in the DEM converges to a well-defined value which is function of the imposed strain rate and material properties, in close accordance to continuum approaches.

Introduction

Since their first use by Hoover et al [70] in models for crystalline materials, and Cundall and Strack [27] for geotechnical problems, discrete elements methods have found a large field of applications in granular materials, soil, and rock mechanics. These methods model materials using a set of particles that interact with one another by forces and moments defined by micro beams. A main criticism of this approach is the computational and memory cost of the simulation. The motion of each particle, interacting with its neighbour particles, has to be computed, and a large number of particles must be used in order to model the material behavior accurately. However, the capacity to break links between particles and the easy handling of contact make it a natural method for the study of dynamic fragmentation, especially under compressive loading.

Dynamic fragmentation processes are controlled by complex physical events and are challenging for numerical methods. Microcracks initiate at multiple sites, propagate dynamically, and eventually coalescence to form fragments. Depending on the applied strain rate and the material subjected to the loading, a multitude of fragments can be generated, with large variations in sizes and shapes. Knowledge about the fragments sizes statistics, and the total energy dissipated is essential in many applications such as crash protection or blast loading mitigation. As stated above DEM is an attractive approach to tackle fragmentation problems in regimes in which multiple contacts are expected to occur between fragments. This is the case, in compressive failure under large confinement pressures. Yet, to the best of our knowledge, no prior study has evaluated the capacity of DEM approaches to converge, with an increasing particles number, to a well-defined number fragment. The main objective of the paper is to assess the validity of the DEM approaches. Due to the large number of fragments that are generated, we limit ourselves to a simple one-dimensional beam which is subjected to intense loading. Our platform to conduct the simulations is a DEM code, named Mka3D (M for Mechanics, k for stiffness between particles and a for acceleration), which was developped by one of the coauthors [93] to model 3D impacts and landslides. The next section describes some essential features of Mka3d. We also describe our attempt to model failure of bonds between particles with a cohesive law. Section 3 presents the obtained results.

We study the dependence of the fracture energy (and number of fragments) dissipated during fragmentation as function of particle density, as well as the number of fragments. A comparison is made with energy models as well as with numerical results obtained with continuum numerical models.

1 Presentation of the Discrete Element Method

In this section we expose the salient features of discrete element methods, and in particular those of Mka3D software.

1.1 Shape of the particles

In order to discretize the material for a DEM study, several methods have been suggested. Most authors working on granular materials use spheres (Shiu W et al [124], Calvetti [21]) so as to simplify the computation of contacts between particles. However, this method is not adapted as the interstitial vacuum between spheres cannot account for the compacity of the solid. In this paper, we choose to define particles with polygonal shape particles in order to fill the whole volume.

1.2 Geometrical description of the system

The equations of motions are discretized in time and to compute the motions of each particle at each time interval, one needs to define the forces and moments applied on each particle. We refer to a particle by the position of its center of Voronoi. For instance, in Fig. 2.1, particle I is at time t at the position X_I. Note that the interface between particles I and J is equidistant to points X_I and X_J and is orthogonal to vector $\underline{X_I X_J}$. For completeness, we detail only below how the normal force is computed between particles.

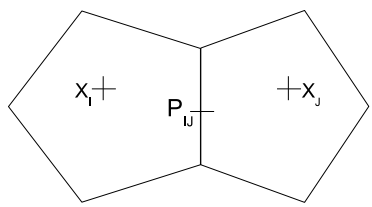


FIGURE 2.1 – Description of two particles in interaction

Several parameters need to be defined for each particle I. They are the initial position of the particle X_I^0, its mass m_I, its volume V_I, and its inertia matrix $\underline{\underline{R}}_I$. In addition, we need to establish the set of parameters necessary to compute interactions between particles. Definition of the parameters for each particle and link between particles. These are :

The initial distance between particle I and J : $D_{IJ}^{eq} = \|\underline{X_I^0 X_J^0}\|$ (the notation ^{eq} means equilibrium)

The initial normal vector for link IJ : $\underline{n}_{IJ}^0 = \frac{1}{D_{IJ}^{eq}} \underline{X_I^0 X_J^0}$

The ponderation coefficient $\alpha_{IJ}^I = \frac{\|X_I^0 P_{IJ}^0\|}{D_{IJ}^{eq}}$ ($\alpha_{IJ} = 0.5$ for the Voronoi meshes)
The surface for the interface between particles I and J : S_{IJ}
The center of mass of the planar interface between particle I and J : P_{IJ}
The distance between particles I and J at time t :

$$D_{IJ} = \|\underline{X_I X_J}\|$$

The exterior normal vector for link IJ at time t :

$$\underline{n}_{IJ} = \frac{1}{D_{IJ}}(\underline{X_I X_J})$$

The volumic deformation ϵ_v^I of particle I : it is defined as the sum of all contributions of deformation of links between particle I and the surrounding particles.

$$\epsilon_v^I = \frac{1}{V^I} \sum_{J \in \mathcal{V}_I} \alpha_{IJ}^I S_{IJ}(D_{IJ} - D_{IJ}^{eq}) \tag{2.1}$$

The volumic deformation of link IJ :

$$\epsilon_v^{IJ} = \alpha_{IJ}^I \epsilon_v^I + \alpha_{IJ}^J \epsilon_v^J \tag{2.2}$$

With these variables, we can define the normal force for the links between particles.

1.3 Expression of forces and moments between particles

When two particles are in contact, it is necessary to define the law of interaction between them in terms of forces and moments. We have two types of forces and one type of moment to define for a general two-dimensional case :
A normal compression force : $\underline{F}_{IJ}^n$
A tangential force : $\underline{F}_{IJ}^t$
A moment applied to the particle I by the link between I and J, which acts in the out-of-plane direction : $\underline{M}^{IJ}$
But, for our simple one-dimensional ceramic model, we define only in this paper the normal compression force $\underline{F}_{IJ}^n$. The definition of the tangential force and the moments applied to the particle are fully-detailed in [93].

The normal compression force $\underline{F}_{IJ}^n$

We note E Young's modulus and ν Poisson's ratio for the material. In the computation of the normal compression force, two terms are defined for crack-link between I and J :
A stiffness force $\underline{F}_{IJ}^{ns}$

$$\underline{F}_{IJ}^{ns} = k_n \delta U_n \underline{n}_{IJ} \tag{2.3}$$

with

$$k_n = \frac{\Delta F_n}{\Delta U_n} = \frac{S^{IJ}}{D_{IJ}^{eq}} \frac{\Delta \sigma_n}{\Delta \epsilon_n} = \frac{S^{IJ}}{D_{IJ}^{eq}} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{2.4}$$

and $\delta U_n = D_{IJ} - D_{IJ}^{eq}$

A volumic deformation force $\underline{F}_{IJ}^{nv}$ based on the deformation of both particles :

$$\underline{F}_{IJ}^{nv} = k_n \frac{\nu}{1-\nu}(D_{IJ}^{eq}\epsilon_v^{IJ} - \delta U_n)\underline{n_{IJ}} \tag{2.5}$$

The total normal compression force $\underline{F}_{IJ}^{n}$ (the sum of the stiffness and volumic deformation force) :

$$\underline{F}_{IJ}^{n} = (S_{IJ}\frac{E}{(1+\nu)}\frac{(D_{IJ} - D_{IJ}^{eq})}{D_{IJ}^{eq}} + S_{IJ}\epsilon_v^{IJ}\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)})\underline{n}_{IJ} \tag{2.6}$$

1.4 Numerical scheme

With these forces, the model is now complete. To determine the accelerations, the system is then solved through the resolution of Newton's dynamics for each particle.

$$m_I\underline{\ddot{X}}_I = \sum_{J\in\mathcal{V}_I} \underline{F}_{IJ} + \underline{F}_I^{ext} \tag{2.7}$$

The motion of the particle is solved classically in considering the particle I as a solid of mass m_I.

The accelerations are integrated first to give the velocities. The velocities are then integrated to give the positions or the rotations at the next step.

$$\underline{\dot{X}_I}(t) = \underline{\dot{X}_I}(t-\Delta t) + \underline{\ddot{X}_I}(t)\Delta t \tag{2.8}$$

$$\underline{X_I}(t+\Delta t) = \underline{X_I}(t) + \underline{\dot{X}_I}\Delta t \tag{2.9}$$

1.5 Cohesive law

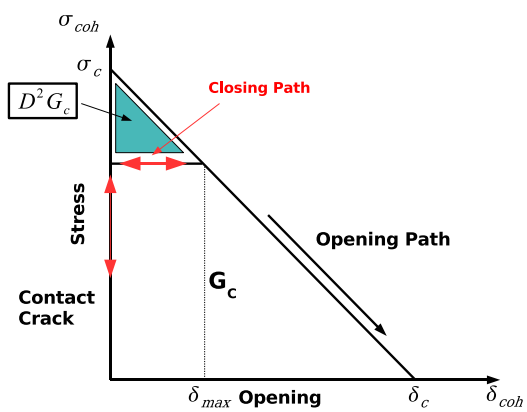


FIGURE 2.2 – Irreversible linear decaying law used in the discrete models

An essential feature of our approach is the coupling between the discrete element method and a cohesive law to mode cracking and dissipative mechanism. There

we follow the cohesive law adopted in [88, 97, 143–147] which is a variation of the Camacho-Ortiz [24] irreversible linear-decreasing cohesive law. (Fig. 2.2)

Within this model, a cohesive beam will be inserted at any time, any point, when the following is satisfed :

$$\sigma(X,t) \geq \sigma_c(X) \tag{2.10}$$

where $\sigma_c(X)$ is the local stress of the bar. A cohesive law, which links the crack's cohesive stress σ_{coh} to the crack opening distance δ_{coh} describes the growth behavior of the nucleated crack. The proposed initially rigid, linear decaying, irreversible cohesive law is :

$$\frac{\sigma_{coh}}{\sigma_c} = 1 - \frac{\delta_{coh}}{\delta_c},\ for\ \dot{\delta}_{coh} > 0,\ \delta_{coh} = \delta_{max},\ D < 1.0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\sigma_{coh}}{\sigma_c} = 1 - \frac{\delta_{max}}{\delta_c},\ for\ \dot{\delta}_{coh} < \delta_{max},\ D < 1.0, \tag{2.12}$$

where σ_c is the maximum cohesive stress, identical to the local material stress and δ_c is the critical opening distance of the nucleated crack. The maximum crack opening displacement that is attained, δ_{max}, is used as the internal variable that describes the damage development of the cohesive element. Eq.2.11 applies when the crack is opening. In Eq.2.12 the crack's opening distance is positive but less than δ_{max} (closing or reloading). The monotonic-increasing damage number D is defined as :

$$D = min(\frac{\delta_{max}}{\delta_c}, 1.0) \tag{2.13}$$

When D reaches unity, the cracking point is completely broken, leaving the cohesive stress to vanish at any positive δ_{coh}. At this point, the fracture energy G_c dissipated by the crack is :

$$G_c(X) = \frac{\sigma_c(X)\delta_c(X)}{2} \tag{2.14}$$

When D is between 0 and the unity, the link is damaged but not broken. The fracture energy G dissipated by the crack is :

$$G = D^2 \cdot G_c$$

2 Dynamic fragmentation of a Ceramic beam

2.1 Problem definition

A one-dimensional bar located in the region $(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ along the X axis is considered (Fig. 2.3). The bar is linear elastic before fracture. The initial conditions of the beam are :

$$v(X,0) = \dot{\epsilon}_0 X \tag{2.15}$$

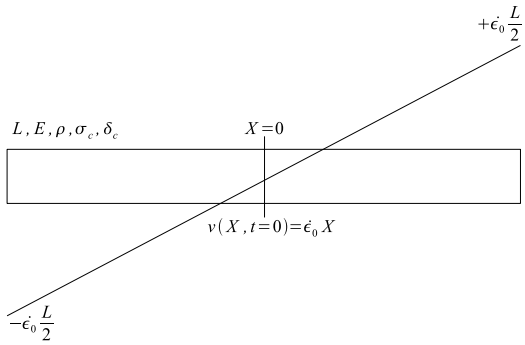


FIGURE 2.3 – Initial conditions

In this paper, we assume that the beam is homogeneous, with the critical failure strength $\sigma_c = 300\ MPa$ and the fracture energy $G_c = 100\ N/m$. The material parameters assumed are those of a fictitious ceramic, with $\rho = 2750\ kg/m^3$, $E = 275\ GPa$, and the elastic bar wave speed $c = 10^4\ m/s$. The critical crack opening distance, calculated through Eq.2.14 is 0.667 μm. The length of the bar is $L = 50\ mm$.

In the convergence studies, two types of meshes will be used. The terminology "standard mesh" refers to a mesh in which the distance between particles is uniform. By contrast, "random meshes" have a varying inter-particles distance. For instance by a 20% random mesh, we imply that the length of each particle can vary between 0.8 and 1.2 δL, where δL is the average separation.

2.2 Numerical results

We conduct in this section a series of calculations to test numerical convergence of DEM at various strain rates. While the number of fragments increases with strain rate, each test results share characteristics. These can be visualized in Fig. 2.4, which represents the evolution with time of the average stress in the beam (left vertical axis) as well as the number of fragments (right vertical axis), for an applied strain rate of $5 \times 10^5\ s^{-1}$. In this initial model the beam is represented by a total of 400 particles. This small number introduces a severe mesh dependency as all cohesive springs between particles will be broken, i.e. the test yields 400 fragments and modelled by 400 particles. Nonetheless, several essential features can be extrated from the figure.

For the evolution of the stress, we have two phases : a first phase with a linearly increase of the stress until tensile strength ; a second phase with the decrease of the stress corresponding to the opening of the fractures in the model (With our cohesive law, the stress do not fall directly to 0 after the tensile strength).

When the stress is equal to 0, all links have a damage equal to 1, and the beam is completely fragmented.

Molinari, Zhou, Ramesh [144] and later Molinari et.al [97] have treated the question of the convergence of the fragmentation damage energy for a similar test

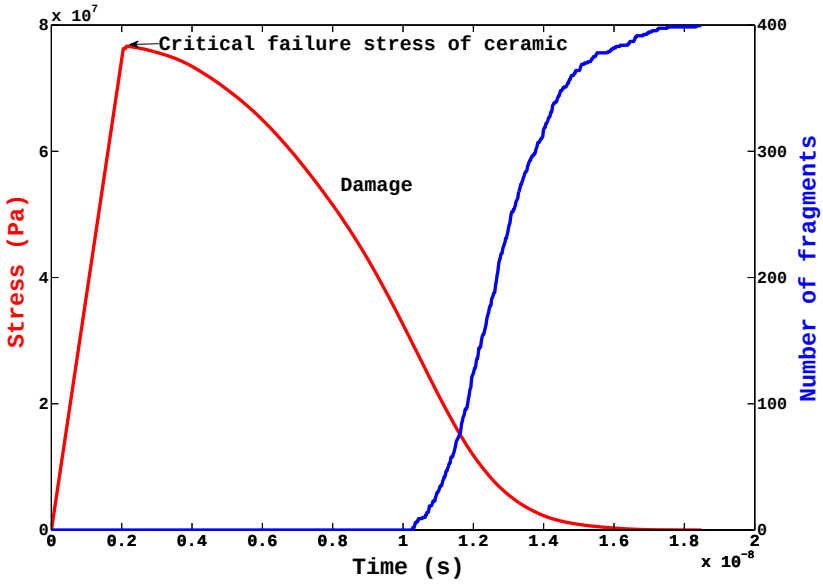


FIGURE 2.4 – Evolution of the stress and the number of fragments in the beam ($\dot{\epsilon_0} = 5 \times 10^5 s^{-1}$, the beam is modelled with 400 particles)

case. Both references were based on continuum-mechanics approaches, either a semi-analytical approach (methods of characteristics) or finite elements, and in both cases the numerical schemes converged in an energetic sense to a well-defined number of fragments for all strain rates considered.

In this paper, we wish to repeat this test for Mka3D discrete-element method software [93]. Fig. 2.5 represents the total energy dissipated during fragmentation with respect to the number of particles , and for five different strain rates, from $5 \times 10^3\ s^{-1}$ to $5 \times 10^5\ s^{-1}$.

In the process of fragmentation, we make a distinction between two types of cohesive energy. We call the "fully broken cohesive energy" the dissipated energy within links that are fully broken ($D = 1$). We refer to "partially damaged cohesive energy" corresponding to the cohesion energy dissipated by the damaged links, but not fully broken. The total cohesive energy dissipated is the sum of both contributions.

In the Fig. 2.5, we observe that for all strain rates, we converge to a a finite value of dissipated cohesive energy. This value of cohesion energy is an increasing function of the strain rate. For an intermediate strain rate (for example $5 \times 10^3\ s^{-1}$), there is less kinetic energy to convert into cohesion energy, which yields to a lower dissipated cohesive energy than at higher strain rates.

For coarse meshes, the dissipated cohesive energy is directly proportional to the number of particles. This trend is observed for all strain rates. This severe mesh dependence implies that all particles end up fully broken and thus the fragment size depends directly on the mesh size. It is therefore necessary to have a large number of particles to converge. This required number of particles increases with strain rate.

We have also studied the influence of random mesh for the strain rate of $5 \times 10^5\ s^{-1}$. For this strain rate, a random mesh of 20% allows the convergence of the dissipated cohesion energy with 10^4 particles. With the same conditions, a uniform

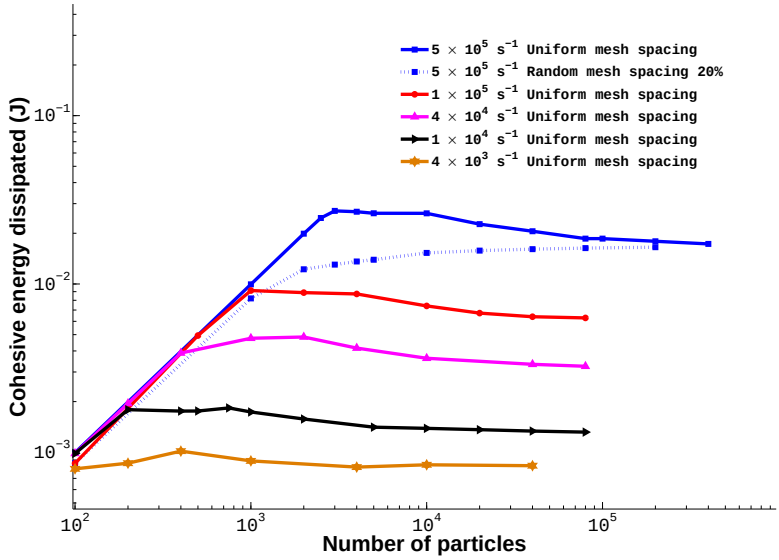


FIGURE 2.5 – Cohesive energy dependence on mesh size for a one-dimensional beam fragmentation problem

mesh converges to a cohesion energy with 2×10^5 particles, a factor twenty difference. Therefore as in [97], with random meshes, the model converges faster than with uniform meshes. This result can be explained by the fact that the process of fragmentation is a random process, which can be better captured by a random mesh. This random nature is seen in Fig. 2.6 which shows a test case with $\dot{\epsilon}_0 = 5 \times 10^3 s^{-1}$ (beam is modelled with 400 discrete particles). We observe strong (random) variations of the local damage number at cohesive links (recall that when the damage number equals 1, the link is fully broken, whereas a damage number between 0 and 1, implies a partially damaged link).

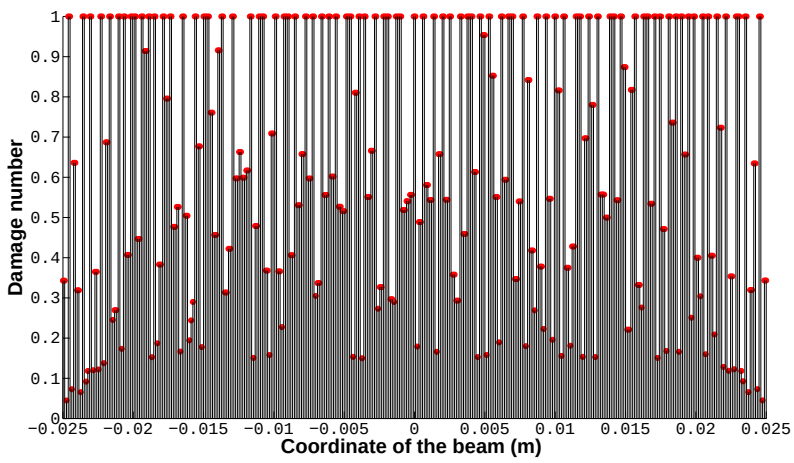


FIGURE 2.6 – Damage cartography along the beam (strain rate $= 4 \times 10^3 s^{-1}$)

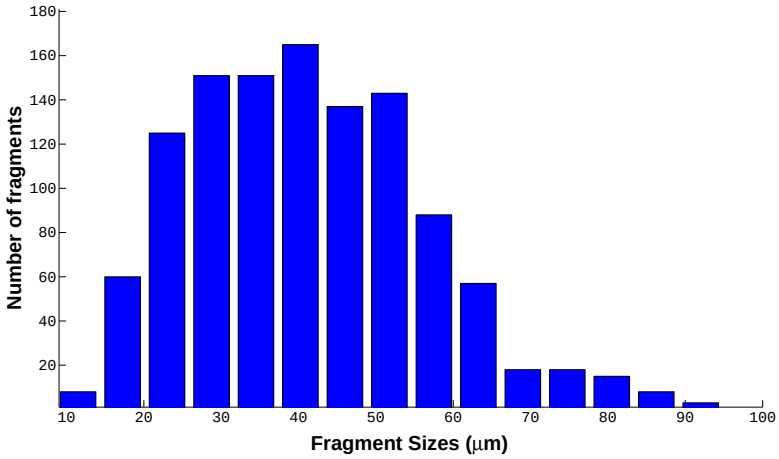


FIGURE 2.7 – Fragment size distribution corresponding to a 4×10^5 particles mesh at strain rate $\dot{\epsilon}_0 = 5 \times 10^5 s^{-1}$ (converged model)

Miller et al [95] presented expressions for the average fragment size $\bar{s}$ in a one-dimensional uniaxial stress case according to the Grady [60] and Glenn and Chudnovsky [58] models. Using the relationship $G_c = K_c^2/E$, these expressions are :

Grady :

$$\bar{s} = (\frac{24G_c}{\rho\dot{\epsilon}_0^2})^{1/3} \tag{2.16}$$

Glenn and Chudnovsky :

$$\bar{s} = 4\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\sinh(\frac{\phi}{3}) \tag{2.17}$$

where

$$\phi = \sinh^{-1}[\beta(\frac{3}{\alpha})^{3/2}] \tag{2.18}$$

$$\alpha = \frac{3\sigma_c^2}{\rho E\dot{\epsilon}_0^2} \tag{2.19}$$

$$\beta = \frac{3}{2}\frac{G_c}{\rho E\dot{\epsilon}_0^2} \tag{2.20}$$

Glenn and Chudnovsky's theory gives a quasi-static fragment size estimate :

$$\bar{s}_{quasistatic}|_{Glenn-Chudnovsky} = \frac{4\beta}{\alpha} = \frac{2EG_c}{\sigma_c^2} \tag{2.21}$$

According to these models, when fragmentation happens, the local kinetical energy (and elastic energy for Glenn Chudnovsky's model) is converted into surface energy.

These theoretical curves are also presented in Fig. 2.8 for comparison.

The computed variation of the average fragment size $\bar{s}$ with the applied tensile strain rate $\dot{\epsilon}_0$ is shown in the log-log plots of Fig. 2.8, together with the predictions

of existing models for the fragmentation. In Fig. 2.8, we have normalized the average fragment size $\bar{s} = L_0/N_0$ by $EG_c\sigma_c^2$, and the strain rate $\dot{\epsilon}$ by $c\sigma^3/E^2G_c$.

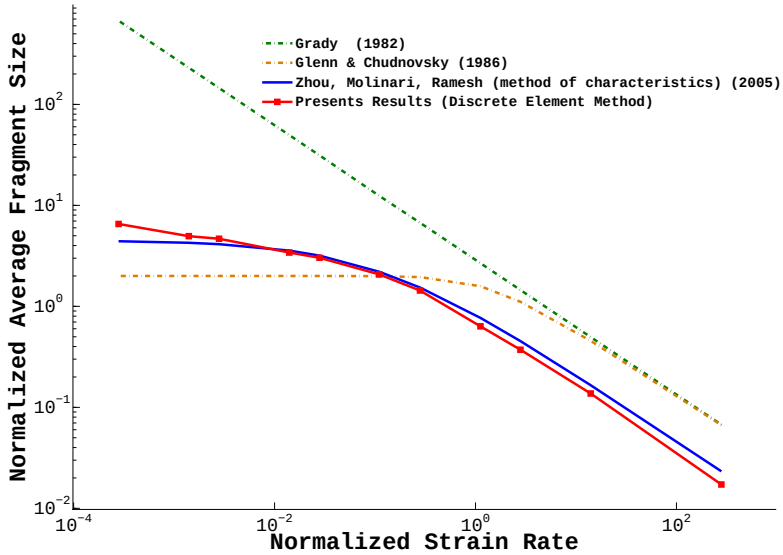


FIGURE 2.8 – Average fragment size normalized vs. strain rate normalized (homogeneous beam)

Our numerical results for the average fragment size $\bar{s}$ have a similarly trend than Glenn and Chudnovsky's estimate, but are quantitatively different over the entire strain rate range. In the low strain rate region ($10 - 10^3\ s^{-1}$), our average fragment size $\bar{s}$ (in the order of 2000 μm) is about four times the value of $\overline{s}_{quasistatic}|_{Glenn-Chudnovsky}$, which is 611 μm. In the high strain rate region ($> 10^5\ s^{-1}$), our average fragment sizes are smaller by a factor of the order of 6. These differences can be understood in terms of energetics. At low strain rates, where strain energy is the dominant influence on the fragmentation process, only a part of the strain energy stored in the beam before fracture is used for the creation of new crack surfaces. In the high strain rate region, where the kinetic energy is the dominant source of energy for the creation of new surfaces ; our results show that additional energy sources (external work, global kinetic energy) must be contributing to create additional fracture surfaces (in the Grady and Glenn-Chudnovsky models, only the local kinetic energy is used for fracture at the high rates).

DEM and the continuum numerical approach (method of characteristics, Molinari, Zhou and Ramesh [144] and finite elements [97]) have a very similar trend in the calculation of the average fragment size, and this for the whole strain-rate range.

For the strain rates between 5×10^2 and $1 \times 10^4\ s^{-1}$ are almost identical. For the high strain rate region ($> 1 \times 10^4\ s^{-1}$), our results are slightly smaller than [97]. For example, for a strain rate of $5 \times 10^5\ s^{-1}$, the DEM gives an average fragment size of 41.8 μm and of 50.6 μm with [97], which may be due to a larger restitution of energy after particles and fragments contacts. For the low strain rates ($< 5 \times 10^2\ s^{-1}$), our method gives an average fragment size of 2000 μm and of 1349 μm for the method of characteristics.

3 Conclusions

The main objective of this paper has been to validate the Discrete Element Method to treat dynamic fragmentation. For this validation, we have studied the question of the cohesion energy convergence for strain rates from 10 to 10^7 s^{-1}, and compared our average fragments sizes with other existing fragmentation models. We have seen that the DEM results converge to a well-defined cohesive energy and therefore to final number of fragments which does not depend on mesh density for fine enough meshes. Our numerical results differ from analytical energy models. However, they are in relatively close agreement with results obtained through numerical continuum approaches. This agreement demonstrates that discrete approaches are a reliable tool to simulate fragmentation at the microscopic level. Like finite-element methods, DEM approaches can capture the complex random process of damage localization. However, significant advances will have to be made to model realistic macroscopic fragmentation failure. The computational cost is to date prohibitive to tackle 3D fragmentation of structures of around a meter in size. New theories will have to be developed to include the microscopic dissipative fragmentation mechanisms within a homogenized macroscopic setting.

Chapitre 3

Éléments discrets en deux dimensions avec un critère de rupture de Camacho-Ortiz

1 Introduction

Après les tests de validation du critère de rupture de Camacho-Ortiz introduit dans notre méthode discrète sur un modèle simple de poutre en traction dynamique (chapitre 2), une simulation numérique d'une plaque en traction biaxiale a été proposée dans ce chapitre afin d'étudier la convergence des paramètres statistiques de la fragmentation en fonction du nombre de particules. Ce modèle numérique en deux dimensions a comme principal intêret de voir la robustesse des méthodes employées, d'une part la méthode discrète pour la partie « simulation numérique », et d'autre part le critère de rupture pour quantifier l'endommagement créé par la fracturation.

La seconde dimension rajoute une certaine complexité dans le modèle numérique. En effet, non seulement il faut prendre en compte une force supplémentaire suivant l'axe Y, mais également les moments d'inertie, les moments des forces, compliquant sensiblement les calculs, ainsi qu'une gestion du contact plus complexe.

Enfin, en deux dimensions, le problème de la génération de poussière (toutes les particules qui fragmentent) peut intervenir, dû à la gestion des contacts très complexe à mettre en œuvre. Des études ont déjà été effectuées sur des modèles en deux dimensions, comme des tests d'impact de missiles sur des dalles de béton, en donnant des résultats assez satisfaisants par rapport aux observations expérimentales, mais aucune étude n'a été effectuée à ce jour concernant la convergence de l'énergie dissipée, le nombre de fragments et l'étude statistique de ces fragments. Les résultats de la modélisation numérique jusqu'à présent se sont donc fondés sur des données « qualitatitives ».

Pour une simulation numérique en une dimension, nous avons vu dans le chapitre 2 que, plus la vitesse de déformation imposée est importante, et plus un nombre important de particules sont nécessaires pour avoir une indépendance des paramètres statistiques de la fragmentation. Ce phénomène apparaît également pour ce modèle en deux dimensions. Ainsi, nous avons présenté ici nos résultats que pour une vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = 10^4$ s^{-1}, qui est la vitesse maximale pour avoir une convegence des paramètres statistiques sans de gros coûts de calculs.

Déjà, avec cette vitesse de déformation, un million de particules sont nécessaires pour obtenir une convergence, ce qui est considérable dans le cas d'une méthode aux éléments discrets. Tous les calculs ont été effectués en parallèle jusque 64 processeurs sur le supercalculteur du CEA. Nous avons également étudié des vitesses de déformations plus élevées, mais sans avoir de convergence numérique.

Dans ce chapitre, nous présenterons tout d'abord le modèle étudié, avec les conditions initiales et le matériau utilisé, puis, les résultats et les différences obtenus entre différents types de maillages seront présentés. Enfin, nous émettrons quelques commentaires sur l'utilisation de ce critère de rupture sur des modèles plus complexes.

2 Modèlisation numérique avec un critère de rupture de Camacho-Ortiz introduit dans des éléments discrets d'une plaque 2D en traction biaxiale

2.1 Les conditions initiales

Le modèle présenté ici est une plaque en traction biaxiale.

On impose les conditions initiales à l'instant $t = 0$ de type :

$$\begin{cases} V(X, t = 0) = \dot{\epsilon} X \\ V(Y, t = 0) = \dot{\epsilon} Y \end{cases} \tag{3.1}$$

dans notre cas $\dot{\epsilon} = 10^4 s^{-1}$ (la plus forte vitesse de déformation pour laquelle nous obtenons des convergences avec des temps de calculs « raisonnables »).

La plaque est ensuite laisée libre.

Ce modèle présente l'avantage que les particules sont en traction entre elles suivant les deux axes X et Y. La loi d'endommagement de Camacho-Ortiz n'étant valable qu'en traction, elle peut donc être activée suivant ces deux axes.

2.2 Les paramètres du matériau

Le matériau utilisé est le même que celui présenté pour le chapitre 2. Il s'agit d'une céramique, donc un matériau « fragile », et pouvant se fragmenter lors de sollicitations dynamiques.

Les caractéristiques de cette céramique sont décrites dans le tableau3.1.

Céramique utilisée :	
Module de Young E (GPa)	275
Densité ρ	2.75
Énergie de fracturation σ_c (N/m)	100
Longueur de fissuration critique (μm)	0.667
Célérité c (m/s)	10000

TABLE 3.1 – Les caractéristiques mécaniques de la céramique modélisée

2.3 Les différents types de maillages utilisés

Afin d'étudier l'influence du maillage sur les résultats, comme pour le modèle en une dimension, l'étude a porté sur plusieurs types de maillages pour modéliser la plaque :

- Un maillage avec des particule de forme « carré », où toutes les particules ont la même surface ;
- Un maillage avec des particules de Voronoi, où toutes les particules ont la même surface ;
- Un maillage avec des particules de Voronoi avec des surfaces aléatoires.

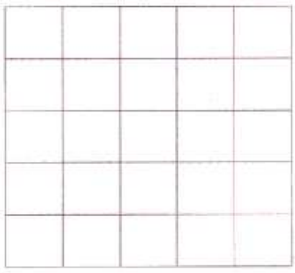


FIGURE 3.1 – Maillage « carré »

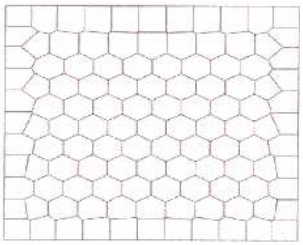


FIGURE 3.2 – Maillage de Voronoi régulier

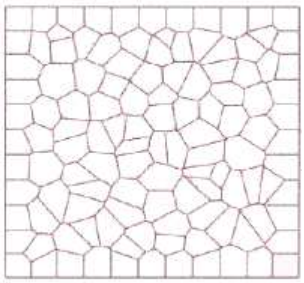


FIGURE 3.3 – Maillage de Voronoi aléatoire

Pour les maillages de Voronoi aléatoires, on introduit la notion de « degré de dispersion ». Ce degré de dispersion représente la capacité d'un maillage d'avoir des particules de surface différente.

3 Résultats

3.1 Étude de la convergence des différentes énergies en fonction du nombre de particules

Nous nous intéressons ici à l'étude de la convergence des différentes énergies, à savoir les énergies de cohésion dû à la fracturation, mais également l'énergie cinétique consommée par le modèle durant la simulation. Dans l'appellation « énergies de cohésion », nous distinguons trois types d'énergies :

- L'énergie de cohésion pour les liens non cassés mais endommagés ;
- L'énergie de cohésion de rupture, qui est l'énergie dissipée pour les liens cassés ;
- L'énergie de cohésion totale, qui est la somme de ces deux énergies.

Ces différentes énergies de cohésion sont calculées par l'équation 2.11, qui est en fonction de la contrainte locale et de l'ouverture de fissure. L'énergie cinétique consommée par le modèle est due en partie à la décohésion du matériau, mais également à l'énergie potentielle emmagasinée, qui est très faible. Avec le maillage « carré »(Fig. 3.4), et le maillage de Voronoi aléatoire (Fig. 3.6), toutes les énergies convergent. Le maillage aléatoire assure une convergence plus rapide que le maillage « carré », avec une énergie dissipée totale d'environ 2000J, contre 3000J pour l'autre maillage.

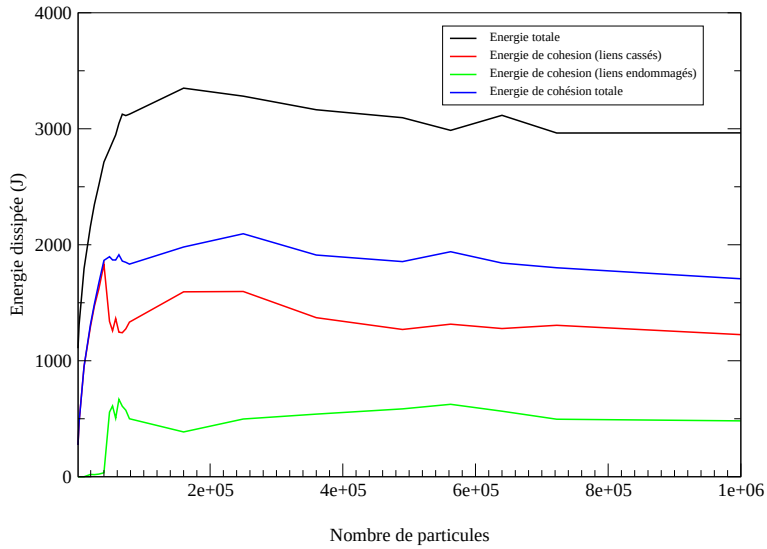


FIGURE 3.4 – Étude de la convergence des différentes énergies pour un maillage avec des particules de forme « carré »en fonction du nombre de particules

Par contre, le maillage de Voronoi régulier (Fig. 3.5) ne permet pas de convergence des énergies dissipées. On a des résultats où l'énergie dissipée varie exponentiellement suivant le nombre de particules.

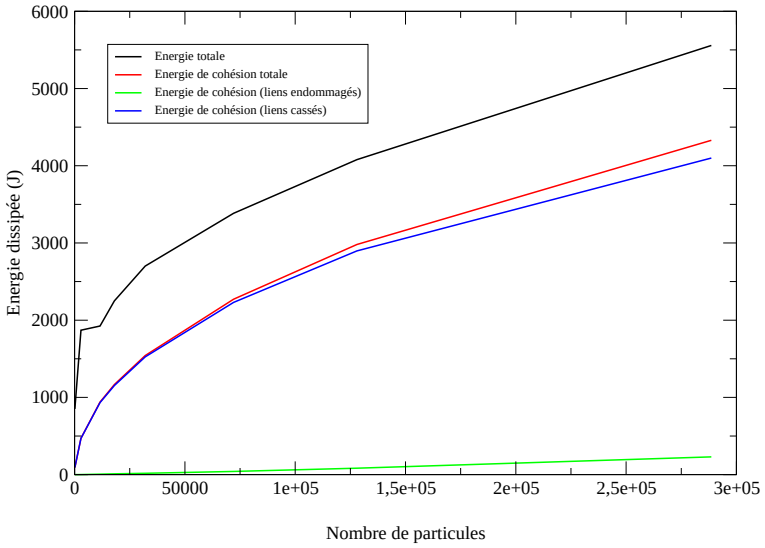


FIGURE 3.5 – Étude de la convergence des différentes énergies pour un maillage de Voronoi régulier en fonction du nombre de particules

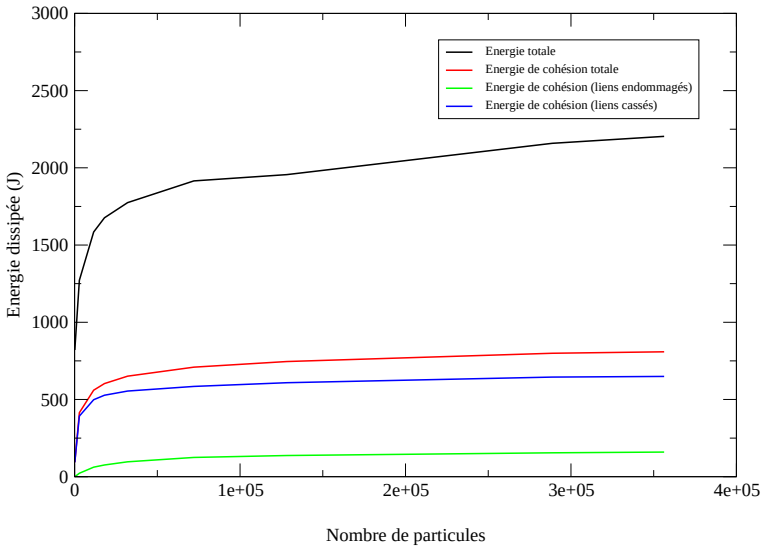


FIGURE 3.6 – Étude de la convergence des différentes énergies pour un maillage de Voronoi aléatoire (20%) en fonction du nombre de particules

3.2 Les fragments

Dans cette partie, le but est d'étudier le nombre de fragments en fonction du nombre de particules.

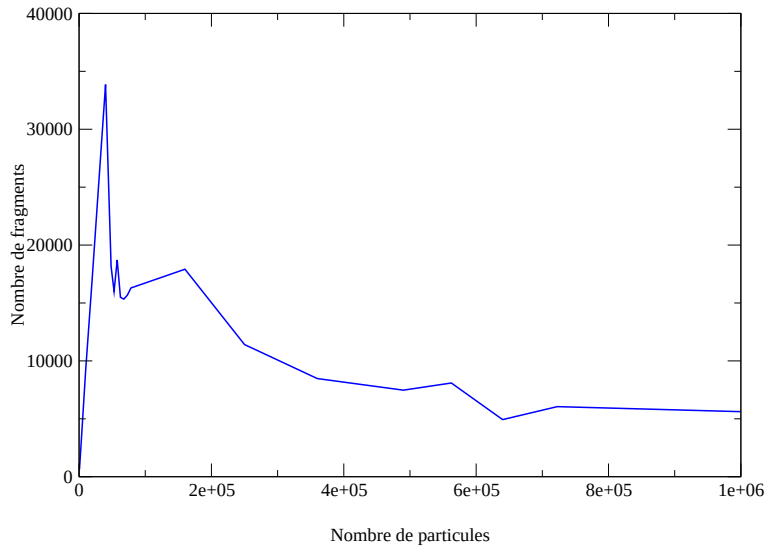


FIGURE 3.7 – Nombre de fragments en fonction du nombre de particules pour un maillage « carré »

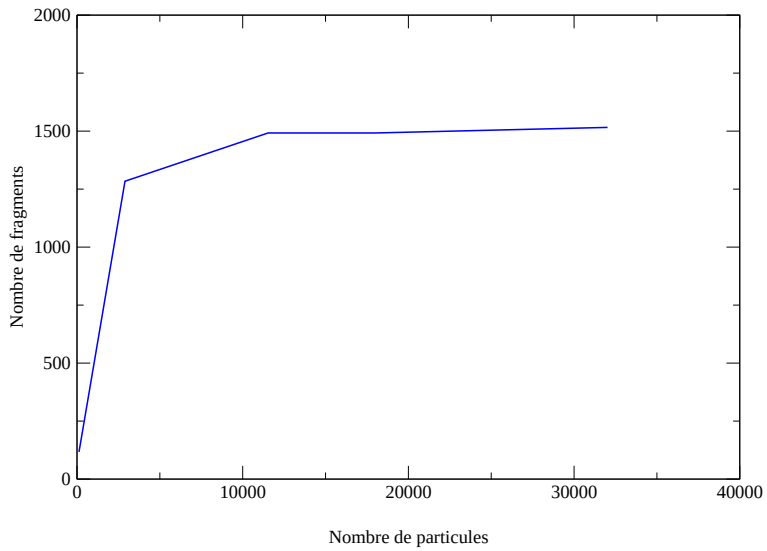


FIGURE 3.8 – Nombre de fragments en fonction du nombre de particules pour un maillage de Voronoi avec un degré de dispersion de 50 %

Le nombre de fragments formés est dépendant de l'énergie dissipée par cohésion. Si l'énergie dissipée n'a pas convergé, le nombre de fragments diverge également. Seuls les résultats pour le maillage « carré »(Fig. 3.7), et pour le maillage de Voronoi aléatoire avec une dispersion de 50 % (Fig. 3.8)sont présentés ici. La convergence du nombre de fragments est beaucoup plus rapide pour un maillage aléatoire de Voronoi que pour un maillage constant. Pour un maillage de Voronoi aléatoire avec une dispersion de 50 %, le nombre de fragments converge avec environ 10000 particules, alors que pour un maillage « carré », 800000 particules sont nécessaires pour avoir seulement un début de convergence. La courbe de convergence est également beaucoup plus lisse pour un maillage aléatoire de Voronoi. Ces résultats étaient également constatés pour la simulation de la poutre en traction dynamique avec les maillages constants et aléatoires.

3.3 Impact du type de maillage sur la fragmentation

L'analyse de la convergence des énergies dissipées et du nombre de fragments montrent une grande dépendance au maillage. Une convergence est constatée pour les maillages à forme « carré »et pour les maillages aléatoires de Voronoi, mais pas pour les maillages de Voronoi réguliers avec des surfaces constantes.

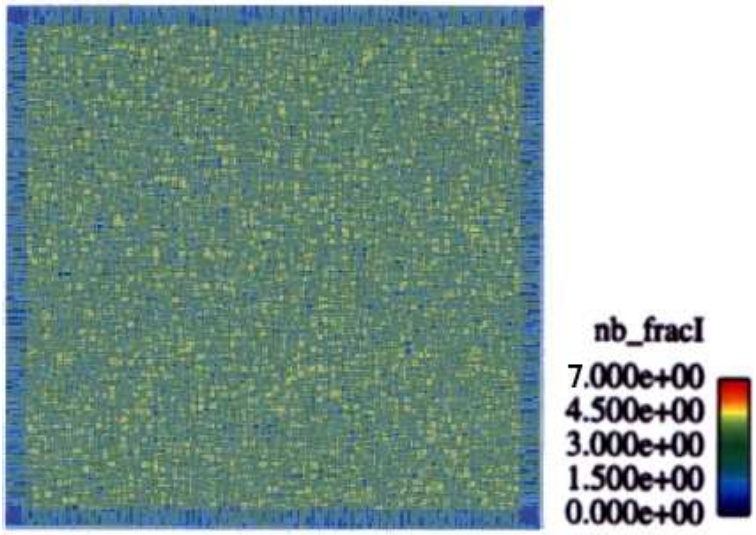


FIGURE 3.9 – Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage à forme « carré ».

Les Fig.3.9, Fig. 3.10 et Fig. 3.11 montrent l'état d'endommagement des liens de la plaque. Sur les maillages « carré »et de Voronoi aléatoire, tous les liens n'ont pas été rompu, et on peut voir sur la Fig. 3.11 les fragments après déplacement. Les fragments formés pour ce maillage sont beaucoup moins fins que pour le maillage « carré »et ont des formes très aléatoires.

Ces formes de fragments aléatoires correspondent d'ailleurs mieux à la réalité, où le processus de la fragmentation est un phénomène aléatoire.

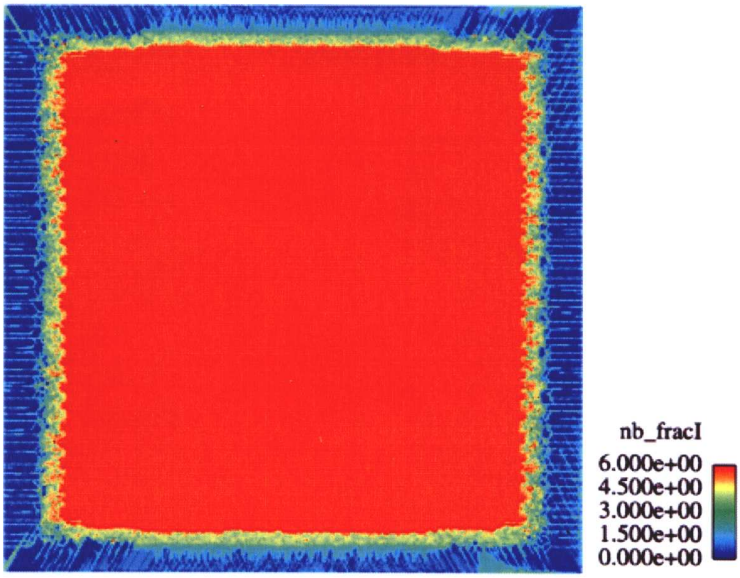


FIGURE 3.10 – Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage de Voronoi régulier

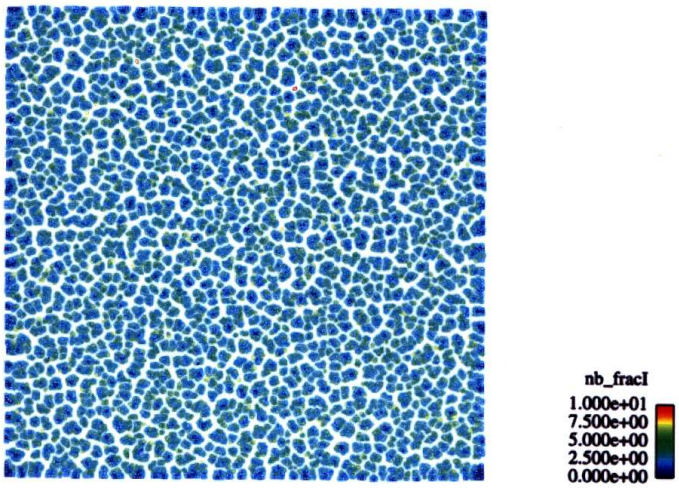


FIGURE 3.11 – Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage de Voronoi aléatoire avec un taux de dispersion de 20%

En revanche, pour le maillage régulier avec des particules de Voronoi, on peut voir sur la Fig. 3.10 que la totalité des liens ont rompu dans le milieu de la plaque, avec un effet de bord beaucoup plus marqué que pour les deux autres maillages.

Ces effets de bords sont dus à la réflexion des ondes de choc qui détend les efforts dans les liens au niveau du bord de la plaque.

Pour des maillages « carré », la taille des fragments est beaucoup plus petite pour un maillage de Voronoi aléatoire, que ce soit avec un degré de dispersion de 20 ou 50 %. **Les résultats montrent une grande dépendance au type de maillage utilisé.**

3.4 Influence du degré de dispersion pour les maillages aléatoires de Voronoi sur les résultats

Nous avons vu que les maillages aléatoires de Voronoi ont une convergence du nombre de fragments et des énergies dissipées, mais pas les maillage de voronoi standard.

Pour essayer de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu, nous avons donc étudié l'influence du taux de dispersion (plus ce taux est élevé et plus les surfaces de chaque particule variera) sur les différents paramètres de la fragmentation.

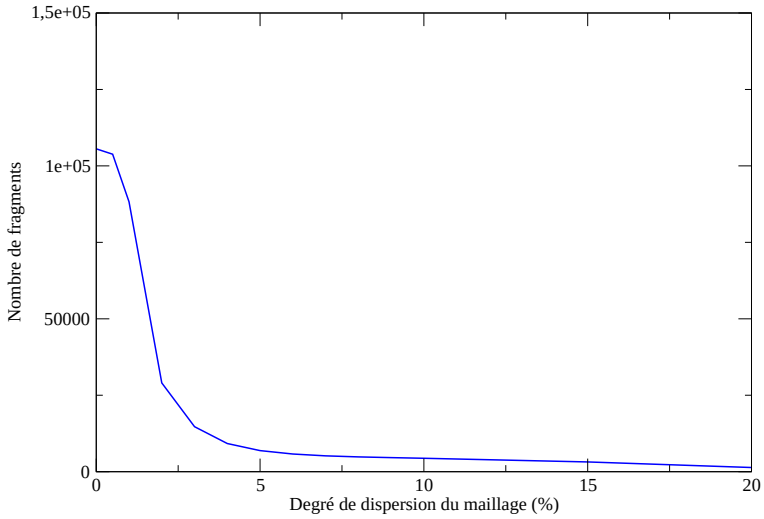


FIGURE 3.12 – Étude du nombre de fragments en fonction du taux de dispersion pour un modèle numérique composé d'environ 120 000 particules

La figure 3.12 montre l'influence de la dispersion géométrique du maillage sur les résultats de la fragmentation.

Plus le degré de dispersion géométrique du maillage est élevé, correspondant à des maillages où les surfaces de chaque particule peuvent varier d'autant plus, et plus le nombre de fragments est stable. On peut même dire qu'avec un taux de dispersion supérieur à 5 % , le nombre de fragments est constant pour un modèle numérique composé d'environ 120000 particules.

En revanche, pour de faibles taux de dispersion, les maillages se rapprochent plus des maillages de Voronoi classiques, et le nombre de fragments est plus important.

Et pour de très faibles taux de dispersion, presque tout le maillage se fragmente, en analogie avec les maillages de Voronoi réguliers.

Étude des cartographies des fragments

Nous nous intéressons ici à la cartographie des fragments en fonction du degré de dispersion géométrique pour les maillages de Voronoi.

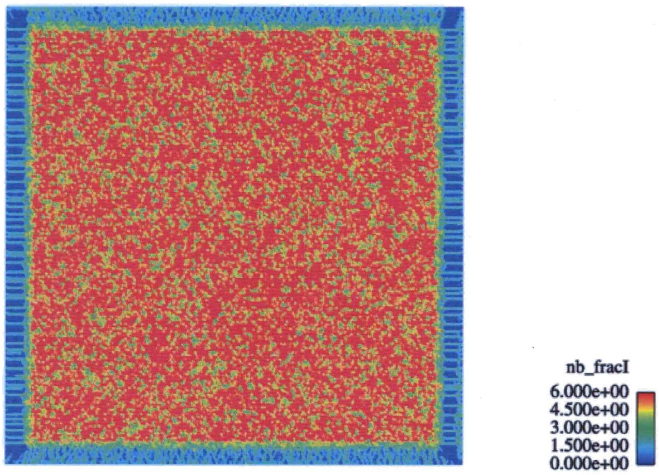


FIGURE 3.13 – Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage avec un taux de dispersion géométrique de 1%

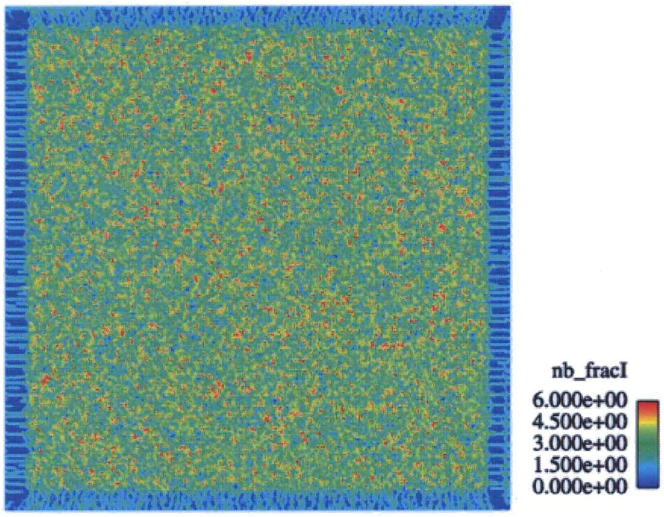


FIGURE 3.14 – Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage avec un taux de dispersion géométrique de 2%

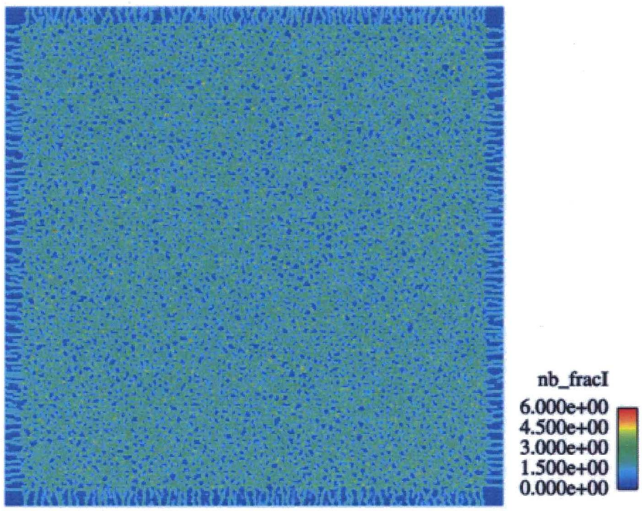


FIGURE 3.15 – Visualisation de la rupture du nombre de liens rompus par particule dans la plaque pour un maillage avec un taux de dispersion géométrique de 10%

3.5 Analyse des résultats du modèle 2D

Les résultats exposés ici sont obtenus pour une vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = 10^4$ s^{-1}, correspondant à la vitesse où une convergence était constatée pour certains maillages étudiés (le maillage « carré », et le maillage de Voronoi aléatoire). Des calculs avec de plus fortes vitesses de déformations ont été éffectués, mais sans convergence du nombre de fragments et des différentes énergies dissipées en raison du temps de calculs important.

Ce qui ressort de cette étude, est l'extrême dépendance du maillage sur les résultats. En effet, seul les maillages à particules « carrées »et les maillages aléatoires de Voronoi, avec un taux de dispersion géométrique d'au moins 1%, permettent une convergence de tous les paramètres statistiques de la fragmentation. Pour les maillages de Voronoi réguliers, ainsi que pour les maillages aléatoires de Voronoi avec un faible taux de dispersion (inférieur à 1 %), il n'y a pas de convergence pour tous les paramètres étudiés.

Les principales explications de cette extrême dépendance des résultats au maillage sont les conditions initiales de la plaque. En effet, les conditions du type $V(X, t = 0) = \dot{\epsilon}X$ et $V(Y, t = 0) = \dot{\epsilon}Y$ imposent des axes « privilégiés »à 45 $^\circ$, où les vitesses des particules sont les plus importantes. Sur les maillages de Voronoi réguliers, et pour des faibles taux de dispersion, nous pouvons voir sur la Fig.3.2 que l'orientation des liens entre les particules est orientée globalement à 40-45 $^\circ$, correspondant aux axes où la vitesse est maximale. En revanche, les maillages de Voronoi où le taux de dispersion est suffisament élevé permettent de ne pas avoir d'orientation privilégiée. De même, l'orientation des liens pour le maillage « carré »s'écarte des axes à 45 $^\circ$.

Ce qui ressort également de ces résultats est la dépendance de la convergence sur la nature du maillage. En effet, comme pour le modèle de poutre en une dimension, les maillages aléatoires se montrent beaucoup plus performants sur la qualité et la rapidité de la convergence, et pour tous les paramètres.

4 Synthèse des résultats avec un critère de rupture de Camacho-Ortiz

Notre approche numérique en introduisant un critère de rupture de Camacho-Ortiz dans des éléments discrets a permis d'obtenir une convergence de tous les paramètres statistiques de la fragmentation, que ce soit pour des modélisation en une ou deux dimensions.

Pour le modèle discret en deux dimensions, même si les résultats ne peuvent pas être confrontés avec des observations expérimentales, ils semblent très encourageants. Les différentes statistiques sur les fragments sont comparables à la modélisation de la poutre en traction dynamique, que ce soit pour la distribution de la taille fragments, les tailles de fragments moyens, les convergences des énergies dissipées ou du nombre de fragments.

Comme limitations, les simulations numériques n'ont été effectuées que pour des vitesses de déformations jusque 10^4 s^{-1}. Le nombre nécessaire de particules pour avoir une convergence des paramètres statistiques sont en effet dépendants de la vitesse de déformation imposée, et plus cette vitesse est élevée, et plus le nombre nécessaire de particules sera important. Pour la vitesse de déformation étudiée dans ce chapitre $\dot{\epsilon} = 10^4 s^{-1}$, 1 million de particules étaient nécessaires, et les résultats obtenus ont requis un grand nombre de processeurs (64 processeurs) pendant plusieurs jours.

Comme autre limitation, avec ce critère de rupture, le maillage doit être suffisament fin (environ 3 fois plus de particules sont nécessaires que le nombre de fragments total) pour avoir une indépendance des paramètres statistiques de la fragmentation sur le nombre de particules.

Ces deux limites rendent impossible la modélisation de la fragmentation dynamique à de grandes vitesses de déformations sur des cas complexes en deux ou trois dimensions.

Pour remédier à ces limites, deux solutions peuvent être envisagées :

- La première consiste à raffiner davantage les maillages, pour lesquels tout les paramètres convergent ;
- **La seconde consiste à introduire un autre critère de rupture probabiliste qui est plus proche de la physique du matériau en introduisant des défauts de manière probabiliste. Cette seconde solution permettrait une convergence plus rapide des énergies dissipées avec des maillages plus grossiers tout en ayant une bonne distribution de la taille des fragments.**

La première solution n'est pas enviseageable avec les moyens informatiques actuels et cette solution n'est donc pas à retenir. Seule la seconde solution est viable. C'est le thème abordé dans le prochain chapitre.

Chapitre 4

Introduction d'un modèle probabiliste dans une méthode aux éléments discrets

1 Introduction

Notre objectif est de combiner un modèle de simulation numérique, en l'occurence une méthode aux éléments discrets, et un critère de rupture représentatif des constatations expérimentales. L'objet de ce chapitre est d'introduire une approche physique différente des premiers chapitres, avec un critère de rupture qui puisse prendre en compte non seulement l'hétérogénéité des matériaux fragiles mais également leurs défauts ponctuels répartis aléatoirement dans le volume susceptibles d'évoluer et de provoquer une rupture locale.

Ce critère de rupture sera par conséquent bien spécifique à chaque matériau. Il devra également prendre en compte l'aspect probabiliste observé dans les essais expérimentaux. Pour cela, des défauts seront introduits par élément de volume avec une approche probabiliste. Cette modélisation de la rupture sera plus proche de la réalité physique des matériaux, et le challenge est ainsi de voir l'impact de cette approche sur la convergence des paramètres de fragmentation, comme la convergence des énergies dissipées, la taille moyenne des fragments, etc.

Dans un premier temps, nous verrons comment les défauts peuvent avoir une grande influence sur les propriétés mécaniques d'un matériau. Notamment avec la notion d'échelle qu'ils font intervenir, également sur la contrainte de rupture. Nous verrons également un bref aperçu des différents types d'approches probabilistes existants.

Dans un second temps, le modèle proabiliste de fragmentation simple de Weibull [134], reposant sur le principe du maillon le plus faible, sera décrit, pour les cas où la vitesse de déformation est faible (régimes statiques et faiblement dynamique). Ce modèle se révèle être un cas particulier du modèle d'« occultation »de Denoual [31,42]. Ensuite, le modèle de Denoual sera énoncé pour la modélisation de la fragmentation multiple [31, 37, 40–48], puis combiné à notre méthode aux éléments discrets.

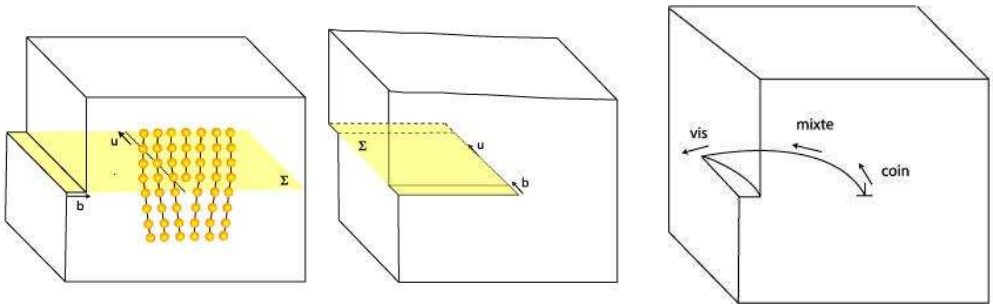
Enfin, dans une dernière partie, des premiers tests de validation sur des cas simples seront effectués pour voir la bonne mise en place de ce modèle probabiliste

au sein de la méthode aux éléments discrets.

2 Influence des « défauts »sur les propriétés mécaniques d'un matériau

Tous les matériaux contiennent des « défauts ». Un défaut est un élément étranger qui perturbe l'ordre théorique du matériau et sa continuité. Leurs présences modifient par conséquent le fonctionnement du matériau et de ses diverses propriétés physiques, notamment mécaniques.

Suivant l'échelle considérée, ils sont désignés par des termes différents : lacune, cavité, faute (fautes d'empilement), dislocations dans un réseau cristallin parfait, etc. La plupart de ces défauts sont susceptibles de provoquer la création de macro fissure suivi par une rupture du matériau suivant l'état de la contrainte locale. Les Fig.4.1 et 4.2 montrent des exemples de défauts, comme les différents types de dislocation, les formation de cavité au sein du matériau, les lacunes atomiques. Ces simples défauts « courants »peuvent être la source de l'amorçage d'une rupture.



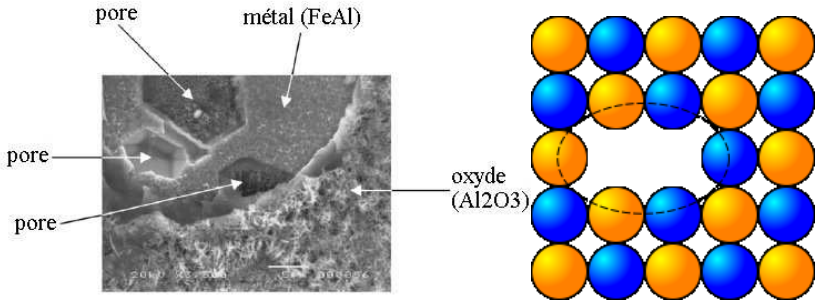
(a) Dislocation vis (b) Dislocation coin (c) Dislocation mixte

FIGURE 4.1 – Une dislocation est un défaut à l'échelle atomique correspondant à une discontinuité dans l'organisation de la structure cristalline. Elle est susceptible de provoquer une rupture au sein d'un matériau. [54]

Dans cette section, seuls les défauts provoquant une rupture seront évoqués. Ce sont les points faibles du matériau. Ils peuvent avoir une forme quelconque, et des dimensions généralement supérieures au micromètre. Ces défauts sont appelés des concentrateurs de contraintes, car ils provoquent un accroissement local des contraintes tel qu'il peut être suffisant pour que la résistance intrinsèque du matériau soit atteinte (la résistance intrinsèque est la résistance à la rupture du matériau en l'absence de défauts).

L'effet des défauts est particulièrement important lorsque leur croissance est instantanée et entraîne une rupture brutale. Les matériaux fragiles y sont particulièrement sensibles : céramiques, verre, béton.

Les défauts sont donc un élément fondamental des matériaux. Ils exercent un certain nombre d'effets sur la résistance à la rupture.



(a) Cavité [12] (b) Lacune atomique

FIGURE 4.2 – Différents défauts susceptibles de provoquer une rupture

2.1 Le rôle collectif des défauts

Les défauts, présents de manière aléatoire dans le volume du matériau, forment des populations statistiques, et ils sont distribués au sein du matériau. Si l'on considère deux échantillons identiques d'un même matériau, c'est à dire ayant la même forme et les mêmes dimensions, il n'y a aucune raison pour que les défauts qu'ils contiennent soient identiques en tout point de l'échantillon.

Dans le cas d'une population de même nature (la population est dite unique), ils se différencient par leurs dimensions, leurs orientations, et leurs positions au sein du solide. A ces différences, on peut éventuellement ajouter la forme. Dans le cas de plusieurs populations, ils diffèrent en outre par leurs natures.

Pour ces raisons, le défaut le plus sévère dans chaque échantillon n'aura pas forcément les mêmes caractéristiques. Dans le cas le plus simple d'une unique population, et d'un champ de contraintes uniforme, la sévérité des défauts dépend de la taille et de l'orientation par rapport au champ des contraintes. Dans le cas d'un champ non uniforme, elle dépend en plus de la position par rapport au champ des contraintes. Dans le cas de plusieurs populations, la nature des défauts est un facteur supplémentaire.

On peut donc en déduire que les défauts forment des populations où le hasard intervient. L'étude de ces différentes caractéristiques doit faire introduire des lois probabilistes pour bien modéliser ces populations de défauts, avec une densité de probabilité et une fonction de répartition (Fig.4.3).

2.2 Dispersion des contraintes de rupture

La rupture de plusieurs échantillons géométriquement identiques avec un matériau identique, ne se produit pas sous la même contrainte, mais plutôt sous des contraintes différentes d'un échantillon à l'autre. La contrainte de rupture dépend des caractéristiques du défaut le plus sévère dans chaque éprouvette. D'ailleurs, lors d'essais expérimentaux, l'effort à rupture mesuré et la contrainte à rupture calculée numériquement présentent une très forte dispersion, de l'ordre de 30 %. Il n'est donc pas raisonnable de proposer une valeur fixe de la contrainte à rupture pour des matériaux fragiles, cette variable est par conséquent à essence statistique.

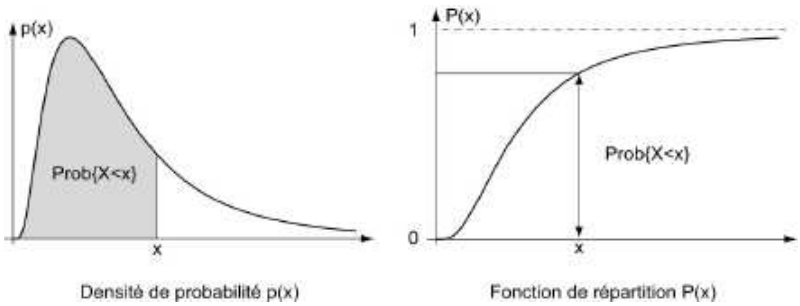


FIGURE 4.3 – L'étude des caractéristiques des différents défauts présents dans un matériau fait intervenir les lois de probabilité, notamment la loi de Weibull [74]

2.3 Les effets d'échelle : notion de volume effectif ou de surface effective

La mécanique de la rupture fait également intervenir la notion d'échelle. Avec cette notion, la contrainte de rupture dépend directement des dimensions de chacun des échantillons. Plus les échantillons sont de grande taille, plus la contrainte nécessaire pour provoquer la rupture est petite. Cet effet s'explique par le fait que les chances de présence d'un défaut critique sont plus grandes lorsque le volume est grand. La Fig.4.4 illustre ce phénomène lors d'essais de traction dynamique sur des éprouvettes fissurées en béton [56].

Afin de pouvoir comparer la résistance à la rupture pour différents champs de contraintes, modes de sollicitation ou volumes, on fait intervenir la notion de volume « effectif »(ou une surface « effective »pour les cas en deux dimensions). Cette variable permet d'exprimer la probabilité de rupture sous une forme simple, et unique, quel que soit le champ de contraintes.

Le volume effectif se définit comme étant le volume équivalent d'un solide constitué du même matériau qui, soumis de manière uniforme à la contrainte maximale, aura la même probabilité de rupture que le volume initial, soumis aux sollicitations imposées [29, 68].

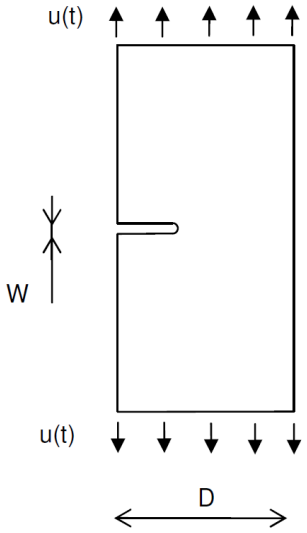
La contrainte maximale fait référence au maximum de la contrainte suivant une direction du champ des contraintes sous des sollicitations données :

$$\boxed{\sigma_{max} = Max[\sigma(X, Y, Z)]} \tag{4.1}$$

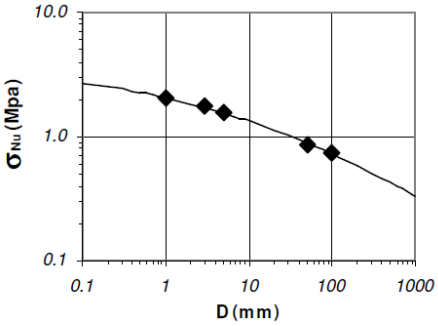
$\sigma(X, Y, Z)$ représente la valeur de la contrainte au point de coordonnées (X, Y, Z).

2.4 Les différentes approches probabilistes [84]

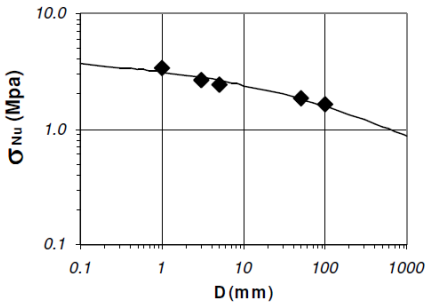
La rupture des matériaux fragiles est en général déterminée par la présence de populations de défauts qui apparaissent tout au long du cycle de vie des pièces fabriquées à l'aide de ces matériaux et le chargement appliqué à la structure. La rupture est un événement aléatoire, et la résistance à la rupture est une variable statistique. Les valeurs de la résistance à la rupture d'éprouvettes identiques présentent une certaine dispersion. Elles dépendent de la forme et des dimensions des éprouvettes, des



(a) Modèle de plaque fissuré en traction dynamique



(b) Cas d'un chargement « lent »



(c) Cas d'un chargement « rapide »

FIGURE 4.4 – Évolution de la contrainte ultime en fonction de la largeur d'une plaque fissurée en béton en traction pour différentes vitesses de chargement (Ref. [56])

conditions d'essai. Elles sont sensibles aux effets d'échelle et au champ de contraintes, en raison de la présence de populations diverses de défauts qui sont sollicitées de manière différente d'une éprouvette à l'autre. Les contraintes de rupture mesurées sur des éprouvettes données ne sont caractéristiques que de ces éprouvettes. Elles ne peuvent être employées telles quelles pour prévoir la rupture de pièces différentes, sous d'autres sollicitations.

Les approches probabilistes permettent d'établir les relations entre les trois critères fondamentaux de la rupture :

- Les caractéristiques des populations de défauts ;
- Les contraintes ;
- La probabilité de rupture.

Les approches probabilistes de la rupture fragile peuvent être classées en deux familles principales :

- Les approches fondées sur des raisonnements purement statistiques. Elles se

placent à l'échelle macroscopique, et elles sont de nature phénoménologique. La plus connue est l'approche de Weibull ;

– Les approches qui considèrent les défauts en tant qu'entités physiques. Elles reposent sur une description de la distribution des défauts et nécessitent des critères de propagation des défauts (critère de rupture). On distingue la théorie de la contrainte élémentaire, et la théorie fondée sur la fonction de distribution des longueurs de fissures.

Les approches probabilistes de la rupture fragile reposent sur le concept du lien le plus faible. La rupture complète de la pièce ou de l'élément de volume considéré est provoquée par la croissance brutale du défaut le plus sévère.

3 Modélisation d'un processus de fragmentation simple : approche probabiliste de Weibull [84]

Après avoir présenté le rôle des défauts sur les propriétés mécaniques d'un matériau fragile, et les effets d'échelle associés, le modèle probabiliste de Weibull pour la modélisation de la fragmentation simple va être exposé.

3.1 La genèse de l'approche de Weibull

L'approche probabiliste de Weibull se classe dans la famille des approches phénoménologiques et macroscopiques. Le nom de Wallodi Weibull est attaché au domaine de la statistique traitant des durées de vie des matériels et donc de l'étude statistique de leur panne. Weibull s'intéressa aux problèmes de résistance des matériaux, en particulier à ceux de fatigue et de rupture des tubes à vide. C'est pour ces domaines d'application qu'apparaît en 1939 pour la première fois la distribution de Weibull. L'intérêt de cette distribution, outre ses propriétés analytiques satisfaisantes, est de permettre un bon ajustement d'une grande variété de problèmes de rupture.

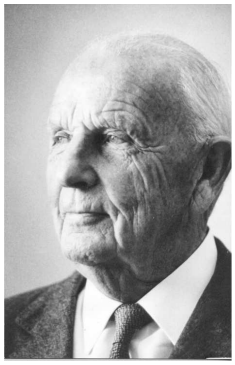


FIGURE 4.5 – Wallodi Weibull (1887-1979)

3.2 Les hypothèses du modèle : principe du lien le plus faible

Le critère de rupture de Weibull repose sur le principe du concept du lien le plus faible. Ce critère s'appuie sur deux hypothèses « fortes » :

Première hypothèse : la rupture de l'élément de volume contenant le premier défaut activé entraîne la rupture de toute la structure. Cette hypothèse est basée sur le concept du lien le plus faible. Le matériau est vu comme une suite de mailles placées en série.

Seconde hypothèse : Les valeurs limites de la résistance à la rupture de chaque élément de volume du matériau sont considérées comme des variables aléatoires

indépendantes. L'hétérogénéité du matériau est par conséquent pris en compte et il n'y a pas d'interaction entre les défauts.

3.3 Modélisation de l'activation des défauts par une loi de probabilité de Poisson

La loi de Poisson

En théorie des probabilités, la loi de Poisson est une loi de probabilité discrète, c'est à dire qu'elle utilise des variables « discrètes »que l'on peut « dénombrer »chacune des issues possibles et leurs donner un numéro. Cette loi permet notamment la description d'un nombre d'évènements dans des intervalles spatiaux, comme des surfaces ou des volumes, correpondant à notre cas d'application, l'activation de défauts dans un volume.

Cette activation des défauts sera par conséquent modélisée par une loi de probabilité de Poisson.

Dans cette loi, si le nombre moyen d'occurences dans cet intervalle est λ, alors la probabilité qu'il existe exactement k occurences (k étant un entier naturel, $k = 0, 1, 2, ...$) est :

$$\boxed{p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)} \tag{4.2}$$

Application de la loi de Poisson à l'activation des défauts

Dans notre cas, la loi de Poisson est utilisée pour modéliser l'activation des défauts d'un matériau soumis à une contrainte. L'événenement ponctuel est ici l'activation d'un défaut. Ainsi, dans un élément de volume V donné, la population de défauts est modélisée par le paramètre λ de la loi de Poisson, qui correspond à une densité de défauts quand le matériau est soumis à une contrainte donnée. Le paramètre k, qui doit être une valeur entière prise par une variable aléatoire déterminant le nombre de défauts activés présents sur le volume donné. $k = 0$ correspond à la survie de l'échantillon (aucun défaut dans l'élément de volume considéré), et $k > 1$ correspond à la présence d'au moins un défaut activé et donc à la rupture.

En reprenant la loi de Poisson dans l'Eq. 4.2, la probabilité de trouver k défauts dans un volume V est donnée par :

$$\boxed{P_k(V) = \frac{(\lambda V)^k}{k!} e^{-\lambda V}} \tag{4.3}$$

avec λ la densité de défauts par unité de volume et V le volume de l'élément considéré.

Pour avoir la probabilité de n'avoir aucun défaut qui soit activé dans l'élément de volume V considéré, correspondant à la probabilité de survie P_s, la variable k doit être nulle. L'Eq. 4.3 devient :

$$\boxed{P_{k=0}(V) = e^{-\lambda V}} \tag{4.4}$$

3.4 Caractérisation de la densité de défauts $\boldsymbol{\lambda}$

Définition de $\boldsymbol{\lambda}$

λ est le paramètre représentant la population de défauts pour le matériau : il est écrit ici sous la forme d'une densité d'activation des défauts au sein du matériau sous une contrainte locale σ par unité de volume V_0. Plus la valeur de la contrainte locale σ augmente, et plus la densité de défauts activés est grande. Weibull a donné une relation de cette densité de défauts activés λ en fonction de la contrainte locale σ, en posant $\lambda_0 = \dfrac{1}{V_0}$:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m = \lambda_0\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m} \tag{4.5}$$

Ce sont les observations expérimentales qui ont poussé Weibull à choisir une loi puissance en m pour représenter la variable λ.

Définition des paramètres de Weibull [31,134]

Afin de modéliser la dispersion de la valeur de la densité d'activation de défauts λ, deux paramètres ont été introduits par Weibull :

- Le paramètre $\boldsymbol{m}$ appelé le **module de Weibull** ;
- Le paramètre $\dfrac{\boldsymbol{\lambda_0}}{\boldsymbol{\sigma_0^m}}$ appelé le **facteur d'échelle** ou **paramètre de Weibull**.

La caractérisation de ces paramètres se fait dans le paragraphe suivant.

Détermination de la probabilité de rupture

L'Eq. 4.4 donne la probabilité de survie P_S de l'élément de volume V considéré. La probabilité de rupture, que l'on note P_F est donc le problème inverse :

$$P_F = 1 - P_S \tag{4.6}$$

En partant des Eq. 4.4 et 4.6, nous obtenons la probabilité de rupture avec les paramètres de Weibull :

$$\boxed{P_F = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right] = 1 - \exp\left[-V\lambda_0\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right]} \tag{4.7}$$

Cette variable $\boldsymbol{P_R}$ est la probabilité d'avoir au moins un défaut activé écrit en fontion de la contrainte locale $\boldsymbol{\sigma}$ et des deux paramètres de Weibull ($\boldsymbol{m}$ et $\dfrac{\boldsymbol{\lambda_0}}{\boldsymbol{\sigma_0^m}}$) .

3.5 Influence du volume et définition de la variable de volume effectif Z_{eff}

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu la notion de volume effectif, où la contrainte de rupture dépend directement des dimensions de l'échantillon. Nous allons démontrer ici comment le volume d'un échantillon peut influencer la contrainte de rupture globale .

Nous allons partir d'un échantillon A en traction uniaxiale avec une contrainte σ_A, schématisé sur la Fig.4.6.

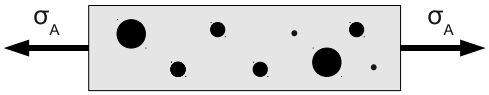


FIGURE 4.6 – Échantillon A en traction uniaxiale avec un volume V_A et un chargement en traction avec une contrainte σ_A

Pour cet échantillon A, la probabilité de survie P_S^A s'écrit :

$$P_S^A = 1 - P_R^A \tag{4.8}$$

avec P_R^A la probabilité de rupture de l'échantillon.

Considérons à présent un échantillon B, qui est un montage en série de deux échantillons A soumis à ce même état de contrainte (Fig.4.7).

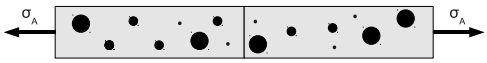


FIGURE 4.7 – Échantillon B en traction uniaxiale avec un volume $2 \times V_A$ (deux échantillons A montés en série) et un chargement avec une contrainte σ_A

Pour cet échantillon B, qui a un volume $V_B = 2V_A$, sa probabilité de survie P_S^B s'écrit :

$$P_S^B = 1 - P_R^B = (1 - P_R^A).(1 - P_R^A) = (1 - P_R^A)^2 \tag{4.9}$$

Cette équation peut se mettre sous cette forme :

$$\ln(1 - P_R^B) = 2\ln(1 - P_R^A) \tag{4.10}$$

On peut faire le même raisonnement, cette fois avec un échantillon de longueur n fois plus grand (et avec un volume V_n n fois plus grand que le volume V_A) que l'échantillon A :

$$\ln(1 - P_R^n) = n \ln(1 - P_R^A) \tag{4.11}$$

Ainsi, pour un échantillon de volume V, on peut en déduire une relation entre les différentes probabilités de rupture P_R , P_R^A de l'échantillon de référence, et les différents volumes liés V, V_A :

$$\ln(1 - P_R) = \frac{V}{V_A} \ln(1 - P_R^A) \tag{4.12}$$

Ainsi, pour un chargement uniaxial homogène dans un échantillon de volume V, la probabilité de rupture s'écrit :

$$\boxed{P_R = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_A}\left(\frac{\sigma}{\sigma_A}\right)^m\right]} \tag{4.13}$$

Cette démonstration sur des échantillons soumis à une traction uniaxiale permet de montrer que la loi de Weibull prend en compte le volume et qu'il a une influence sur les contraintes de rupture.

La notion de volume « effectif » [29, 68]

Lors du paragraphe précédent, la démonstration sur l'influence du volume a été effectuée sur des volumes V soumis à une contrainte uniforme uniaxiale sans prendre en compte l'influence du chargement sur la répartition des contraintes dans l'échantillon. Au sein de cet échantillon, l'activation de défauts dans une zone modifie considérablement les contraintes locales aux alentours de ces défauts.

Pour remédier à ce problème, nous pouvons introduire un coefficient α représentatif de l'hétérogénéité des contraintes au sein de l'échantillon. Pour cela, nous introduisons un volume effectif Z_{eff} :

$$Z_{eff} = V\alpha \tag{4.14}$$

la variable Z_{eff} représente le volume que devrait avoir un échantillon fictif en traction, qui soumis à la contrainte maximale aurait la même probabilité de rupture que l'échantillon étudié. Cette variable est calculée par [29, 68] :

$$Z_{eff} = \int_\Omega \left(\frac{\langle\sigma\rangle}{\sigma_F}\right)^m d\Omega \tag{4.15}$$

où σ_F est la contrainte principale maximale dans la structure.

La probabilité de rupture s'écrit pour un échantillon quelconque de volume V, soumis à une contrainte maximale dans toute la stucture σ_m et en introduisant une contrainte seuil σ_u d'activation de la loi :

$$\boxed{P_R = 1 - \exp\left[-Zeff\lambda_0\left(\frac{\sigma_m - \sigma_u}{\sigma_0}\right)^m\right]} \tag{4.16}$$

en posant $\lambda_0 = \dfrac{1}{V_0}$

Nota :

La contrainte σ_u est la contrainte en dessous de laquelle la probabilité de rupture est nulle. Afin de simplifier les analyses, on considérera que $\sigma_u = 0$.

3.6 Caractérisation des paramètres statistiques de Weibull

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que la loi de Weibull fait intervenir deux paramètres statistiques propres à chaque matériau, à savoir le module de Weibull m et le facteur d'échelle $\dfrac{\lambda_0}{\sigma_0^m}$. Le but de ce paragraphe est, dans un premier temps, d'apporter une signification physique à ces deux paramètres, et dans un second temps, de pouvoir les définir avec des grandeurs mesurables que les essais expérimentaux peuvent fournir.

Le module de Weibull m

Le module de Weibull $\boldsymbol{m}$ est un **paramètre matériau** qui représente l'état de dispersion des défauts pour un matériau donné.

- Pour des faibles valeurs du module de Weibull, il y a une grande disparité des défauts au sein du matériau engendrant une grande disparité sur les valeurs des contraintes de rupture au sein du volume V du matériau utilisé.
- Pour des valeurs élevées du module de Weibull, au contraire, il y a une faible disparité de défauts, avec une faible disparité des contraintes de rupture au sein du volume V du matériau utilisé.

(a) Module de Weibull faible (b) Module de Weibull élevé

FIGURE 4.8 – Schématisation de la disparité des défauts suivant le module de Weibull

Le paramètre de Weibull $\dfrac{\lambda_0}{\sigma_0^m}$ [31]

Ce paramètre n'a aucune signification physique directe. En quelque sorte, il traduit la valeur moyenne de la distribution des contraintes de rupture et l'échelle d'étude pour le matériau. Pour déterminer avec des essais expérimentaux ce paramètre, il est donc nécessaire d'introduire une relation liant le paramètre de Weibull à la valeur moyenne de la distribution des contraintes de rupture.

Quelques valeurs de m :	
Céramiques	$1 < m < 20$
Bétons	$2 < m < 15$
Fibres céramiques	$m \approx 5$
Composites	$m \approx 30$
Aciers	$50 < m < 100$

TABLE 4.1 – Quelques valeurs du module de Weibull pour différents types de matériaux [84]

La variance de la loi de Weibull nous permet d'établir cette relation [31] :

$$\sigma_w = \frac{\sigma_0}{(Z_{eff}\lambda_0)^{\frac{1}{m}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right) \tag{4.17}$$

avec σ_w la contrainte moyenne statistique des contraintes de rupture et Γ la fonction gamma définit par :

$$\Gamma : z \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \tag{4.18}$$

En mettant l'Eq. 4.17 à la puissance m :

$$\sigma_w^m = \frac{\sigma_0^m}{Z_{eff}\lambda_0}\Gamma^m\left(\frac{m+1}{m}\right) \tag{4.19}$$

On en déduit donc la relation :

$$\boxed{\frac{\lambda_0}{\sigma_0^m} = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)}{\sigma_w}\right)^m Z_{eff}} \tag{4.20}$$

Détermination expérimentale des paramètres statistiques

L'objectif est de déterminer par des essais expérimentaux les deux paramètres statistiques de Weibull pour un matériau donné. La détermination de ces paramètres exige en général un grand nombre d'essais afin de prendre en compte l'aspect probabiliste. Habituellement, ce sont des essais de flexion à trois ou quatre points qui sont réalisés, notamment sur des bancs de flexion quatre points, comme nous le montre la Fig.4.9.

Ces paramètres sont donc définis pour des chargements quasi-statiques. Nous avons donc émis l'hypothèse d'étendre ces valeurs pour des sollicitations quasi-statiques à des sollicitations dynamiques, en supposant que la contrainte critique d'un défaut est peu dépendante de la vitesse de chargement. Cette hypothèse peut être acceptable lorsque le matériau est fragile, comme les céramiques, les bétons, etc. Une faible sensibilité à la vitesse de déformation lors de la rupture des défauts est observée.

FIGURE 4.9 – Banc de flexion à quatre points du Laboratoire de Mécanique et Matériaux du génie civil de l'université de Cergy-Pontoise

4 Modélisation d'un processus de fragmentation multiple : « modèle de Denoual »ou « modèle d'occultation »

Dans le paragraphe précdent, le modèle probabiliste de Weibull a été présenté. Dans ce modèle, seule une modélisation simple peut être modélisée, avec l'hypothèse du lien le plus faible, entraînant la rupture de l'ensemble de la structure. Toutefois, dans les cas où le chargement impose des vitesses de déformation dynamique et où de nombreuses fracturations peuvent intervenir, ce modèle Weibull ne peut plus être employé seul. Il est donc nécessaire de prendre en compte l'évolution physique de chacun des défauts au sein de la structure. L'objet de ce paragraphe est de présenter le modèle probabiliste de Denoual dénommé encore modèle d'« occultation » [31, 37, 40–48]. Dans ce modèle, chaque défaut est susceptible d'évoluer ou de rester inactif en fonction non seulement de l'état de la contrainte locale mais également selon l'évolution des défauts dans son voisinage. Les mécanismes de la méthode d'« occultation »seront tout d'abord évoqués, qui ont pour but de faire évoluer ou non ces défauts, puis l'évolution temporelle et les probabilités d'occultation.

Les mécanismes du modèle d'« occultation »

La direction des contraintes est supposée constante et uniaxiale. La Fig.4.10 présente de manière très simplifiée le schéma de principe de l'occultation pour une meilleure compréhension physique de ce mécanisme.

Dans un premier temps, un premier défaut est considéré au temps T_1, suivant l'état de la contrainte locale $\sigma(T_1)$ au point M_1 du domaine. Ce premier défaut provoque une fissure, créant ainsi une zone « occultée »$Z_0(T - T_1)$ qui va croître avec le temps, suivant l'état des contraintes $(T \geq T_1)$.

Dans un second temps, au temps physique T_2, un second défaut rompt et provoque une seconde fissure, produisant une autre zone « occultée ». Par la suite, un troisième, puis un quatrième défaut sont créés. Comme ces défauts sont dans des zones « occultées », ils ne peuvent pas se propager.

Ce mécanisme fait donc intervenir deux zones distinctes :

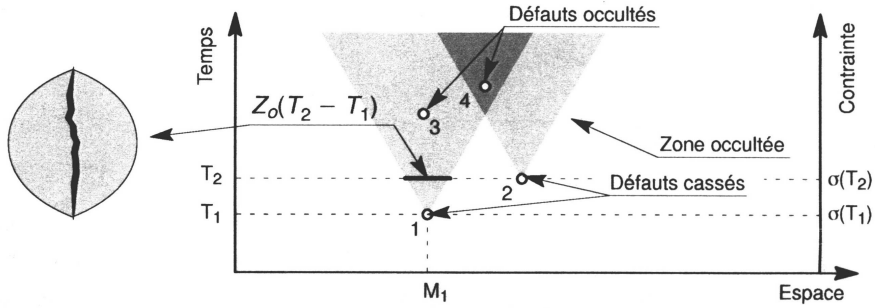


FIGURE 4.10 – Principe du mécanisme d'occultation [31]

- Une zone non endommagée, où des fissures peuvent s'amorcer ; Cette région est matérialisée en blanc sur la Fig.4.10 ;
- Une zone endommagée ou « occultée », où l'état de contrainte est décroissant et où aucune nouvelle fissure ne peut s'amorcer. Cette zone est matérialisée en gris sur la Fig.4.10.

Dans la partie précédente, nous avons vu que la distribution des défauts suit un processus Poissonnien de densité $\lambda_t[\sigma(T)]$ dans l'Eq.4.5.

Ainsi, dans le modèle d'« occultation », pour une contrainte locale supérieure ou égale à $\sigma(T)$, l'ensemble des défauts se divise en un ensemble de défauts « occultés »(de densité $\lambda_0[\sigma(T)]$) et un ensemble de défauts effectivement rompus (de densité $\lambda_b[\sigma(T)]$) :

$$\boxed{\lambda_b[\sigma(T)] = \lambda_t[\sigma(T)] - \lambda_0[\sigma(T)]} \tag{4.21}$$

Une nouvelle fissure est amorcée à un point du domaine p si un défaut existe au point considéré et si ce point ne se situe pas dans une zone occultée :

$$\boxed{\frac{d\lambda_b}{dt}[\sigma(T)] = \frac{d\lambda_t}{dt}[\sigma(T)](1 - P_0(T))} \tag{4.22}$$

avec comme conditions initiales $\lambda_b(0) = \lambda_t(0) = 0$.

Évolution des zones « occultées »

Dans les zones où les défauts peuvent se développer, c'est à dire dans les zones « non occultées », les défauts vont pouvoir se rompre, former des fissures en engendrant des zones « occultées ».

Le volume occulté V_o représente l'expansion temporelle du volume du défaut initial Z_0 qui s'est formé au temps t :

$$V_o = Z_0(T - t) \tag{4.23}$$

Z_0 peut être une surface ou un volume suivant la dimension du problème étudié. Pour des raisons de simplification d'écriture, la vitesse de propagation des fissures peut être supposée constante. L'Eq.4.23 devient :

kC avec C la vitesse de la propagation du son dans le matériau sain. La forme des zones « occultées »est également suposée constante.

$$\boxed{Z_0(T-t) = S\left[kC\left(T-t\right)\right]^n} \tag{4.24}$$

avec kC la vitesse de propagation des fissures constant, C la vitesse de propagation du son dans le matériau sain ($C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$) et S un paramètre de forme.

Pour le paramètre de forme S, pour un cas en trois dimensions, les défauts peuvent être assimilés à des sphères, et $S = \frac{4}{3}\pi$.

Pour un cas d'expansion en 2D, le cas le plus usuel est $S = 2\pi$, correspondant à la surface d'un disque.

Le coefficient k permet l'ajustement de la vitesse maximale de propagation de la fissure. De nombreuses études expérimentales ont été consacrées à l'étude de ce coefficient [31] et ont permis d'admettre que la vitesse kC d'une fissure tend rapidement vers une asymptote que l'on peut approximer par $0.38C$. Pour toute la suite de ce projet, on a pris comme valeur $k = 0.4$.

Nota :

Le paramètre n représente la dimension du problème étudié pour la propagation des défauts. Ainsi, pour un problème global en trois dimensions, les défauts peuvent être modélisés en deux ou trois dimensions. Pour notre projet, nous avons fait l'hypothèse que les défauts constitués sont des surfaces, et la dimension du problème pour la modélisation des défauts est donc $n = 2$.

La probabilité d'occultation

La probabilité est la probabilité pour qu'un point p du domaine étudié au temps physique T soit occulté, où il ne peut y avoir d'amorçage ou de croissance d'une fissure. Pour définir cette probabilité, on peut regarder le problème inverse si dans le passé du point considéré il y a un défaut qui est susceptible de l'occulter. Deux zones peuvent être distinguées. Dans une première zone, l'amorçage d'un défaut au temps $t < T$ n'a aucune influence sur le point p. Dans une seconde zone, tout défaut rompu occultera le point p.

La probabilité d'occultation $P_0(T)$ est écrite comme le produit de probabilités élémentaires $\Delta P_{\nexists}(t)$ pour qu'il n'y ait pas de nouveaux défauts au cours d'un incrément de temps ΔT dans une zone $Z_0(T-t)$:

$$1 - P_0(T) = \prod_t^T \Delta P_{\nexists}(t) \tag{4.25}$$

Comme pour le modèle de Weibull, l'amorçage des défauts pendant une durée ΔT suit également un processus Poissonnien d'intensité $\dfrac{d\lambda_t}{dt}\left[\sigma(t)\right]$:

$$\Delta P_{\nexists}(t) = \exp\left[-\frac{d\lambda_t}{dt}[\sigma(t)]\Delta Z_0(T-t)\right] \tag{4.26}$$

La probabilité $P_0(T)$ devient alors :

$$1 - P_0(T) = \sum_{t=0}^{T} \frac{d\lambda_t}{dt}[\sigma(t)]\Delta Z_0(T-t) \tag{4.27}$$

soit encore de manière continue :

$$\boxed{P_0(T) = 1 - \exp\left[-\int_0^T \frac{d\lambda_t}{dt}[\sigma(t)]Z_0(T-t)dt\right]} \tag{4.28}$$

4.1 Caractérisation d'une variable d'endommagement

Afin d'implémenter de modèle probabiliste au sein d'un code de calcul numérique, il est nécessaire d'introduire un endommagement ainsi qu'une loi de son évolution temporelle. Cette implémentation numérique exige une description continue de l'altération des contraintes par les défauts. Dans ce paragraphe, nous définirons tout d'abord cette variable d'endommagement, puis son évolution temporelle.

Définition de la variable d'endommagement D

La variable $P_0(T)$, dans l'Eq.4.28 a été introduite, qui est la probabilité qu'un point soit occulté par un autre défaut. Cette variable traduit donc en quelque sorte des « surfaces d'endommagement »où des macro défauts inhibent tous les autres défauts puisque le matériau est endommagé.

Cette variable $P_0(T)$ peut être un estimateur pour une variable d'endommagement D :

$$\boxed{D(T) \doteq P_0(T)} \tag{4.29}$$

Évolution temporelle de l'endommagement

Afin d'introduire cet endommagement dans notre code aux éléments discrets, nous devons disposer d'une écriture incrémentale décrivant l'évolution de l'endommagement pour chaque pas de temps de calcul. En partant des Eq.4.28 et 4.29, on obtient la relation suivante :

$$\boxed{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{1}{1-D_i}\frac{dD_i}{dt}\right) = \lambda_t[\sigma_i(t)]n!S(kC)^n} \tag{4.30}$$

où $\sigma_i(t)$ est la contrainte locale.

Cette loi d'évolution est activée que lorsque $\frac{d\sigma_i}{dt} > 0$ et $\sigma_i > 0$.

Lorsque $\frac{d\sigma_i}{dt} < 0$ ou $\sigma_i \leq 0$, l'évolution de l'endommagement est interrompue.

Actualisation des contraintes

En introduisant cette variable d'endommagement D, nous pouvons par conséquent actualiser les contraintes « macroscopiques »Σ avec les contraintes « effectives »σ :

$$\boxed{\Sigma = (1 - D)\sigma} \tag{4.31}$$

Ainsi, quand la variable d'endommagement sera nulle, le lien ne sera pas endommagé et la contrainte macroscopique sera égale à la contrainte effective. Quand la variable d'endommagement vaudra l'unité, le lien sera complétement cassé et la contrainte effective sera nulle.

Nota :

Dans leurs différents travaux, les auteurs Denoual, Forquin et Hild utilisent la notion d'anisotropie de l'endommagement, pour décrire dans les trois directions de l'espace l'altération des contraintes. Dans ce travail de thèse, afin d'étudier le comportement du modèle probabiliste de ces auteurs, nous avons seulement implémenté la traction uniaxiale de l'endommagement, sans tenir compte de cette anisotropie. Cette hypothèse est valable pour des cas tests uniquement en tension qui sont proposés dans ce travail.

Le lecteur peut se référer aux références [31, 37, 43–45, 48] pour l'anisotropie de l'endommagement.

En outre, Forquin et Hild [42] montre que le modèle de Weibull est un cas particulier du modèle d'occulation : dans le cas d'une fragmentation simple, la probabilité d'occultation correspond à la probabilité de rupture énoncée par Weibull tandis que cette même probabilité d'occultation correspond à la variable d'endommagement énoncée par Denoual dans le cas d'une fragmentation multiple.

Enfin, le lecteur peut également se référer à ces mêmes références pour avoir des notions fondamentales comme l'adimensionnement du modèle de fragmentation, la transition entre fragmentation simple et multiple.

5 Implémentation du modèle d'endommagement probabiliste dans le code aux éléments discrets

Dans les parties précédentes, le modèle d'« occultation »des auteurs Denoual, Forquin et Hild ont été exposés pour une fragmentation multiple, ainsi que le modèle probabilite de Weibull dans le cas d'une fragmentation simple, qui est un cas particulier du modèle d'« occultation ».

L'objectif de ce paragraphe est d'appliquer ce modèle d'« occultation »pour introduire un endommagement au niveau des liens entre les particules dans notre méthode aux éléments discrets. Dans un premier temps, nous évoquerons le fait d'introduire une contrainte seuil d'activation aléatoire afin d'amorcer le processus d'endommagement du modèle d'« occultation ». Puis, dans un second temps, l'écriture incrémentale de l'endommagement de ce modèle (Eq.4.30) sera intégrée de manière formelle pour être implémentée au sein de la méthode aux éléments discrets.

5.1 Introduction d'une contrainte seuil σ_k aléatoire

Jusqu'à présent, le calcul de la densité de défauts donné par l'Eq.4.5, s'effectuait pour une contrainte macroscopique uniaxiale σ **homogène**. Cette hypothèse est correcte dans le cas où les variations de la contrainte autour de la moyenne

sont faibles. Toutefois, dans le cas de matériaux avec des variations de la contrainte autour de la moyenne plus importantes, les écarts-types de cette contrainte macroscopique ne sont plus négligeables. Il est donc nécessaire d'introduire une contrainte seuil aléatoire σ_k pour chaque lien. Cette contrainte correspond à la contrainte seuil d'activation des défauts et est déterminée de manière probabiliste à l'aide d'une loi de Weibull.

Détermination du nombre des défauts pour un lien en fonction de la contrainte seuil σ_k

Le nombre de défauts N_l pour le lien l considéré de volume élémentaire Z_{EL} devient :

- Si $\sigma < \sigma_k$: Si la contrainte dans un lien est inférieure à la contrainte seuil d'activation σ_k de ce lien, il n'y a aucun défaut dans le volume du lien :

$$\boxed{N_l = 0} \tag{4.32}$$

- Si $\sigma \geq \sigma_k$: Si la contrainte dans un lien est supérieure ou égale à la contrainte seuil d'activation σ_k de ce lien, le nombre de défaut activé est :

$$\boxed{N_l = Z_{EL}\lambda_0 \left(\frac{\sigma - \sigma_k}{\sigma_0}\right)^m} \tag{4.33}$$

avec Z_{EL} le volume élémentaire pour le lien considéré.

Détermination de la contrainte seuil d'activation σ_k pour chaque lien

Dans ce modèle, chaque lien a une contrainte seuil d'activation des défauts, qui est déterminée de manière probabiliste suivant le volume élémentaire du lien. La valeur de cette contrainte d'activation σ_k est établie en utilisant un générateur de nombres aléatoires réel $p \in [0; 1]$ et en utilisant une loi de Weibull :

$$p = 1 - \exp\left[-Z_{EL}\lambda_0 \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_0}\right)^m\right] \tag{4.34}$$

avec Z_{EL} le volume élémentaire du lien considéré.

L'Eq.4.34 permet d'établir directement la valeur de la contrainte seuil d'activation σ_k en fonction de ce générateur, des paramètres statistiques de la loi de Weibull et du volume élémentaire du lien :

$$\boxed{\sigma_k = \sqrt[m]{-\frac{\ln(1-p)}{Z_{EL}\lambda_0}\sigma_0^m}} \tag{4.35}$$

L'avantage de cette méthodologie est que l'on introduit la contrainte seuil d'activation σ_k de manière probabiliste et il y a non seulement une variation aléatoire des propriétés mécaniques du matériau à l'échelle globale, notamment pour le calcul de la probabilité de rupture, mais aussi à l'échelle locale, c'est à dire à l'échelle d'un lien. **Ainsi, le matériau est dès lors défini par un ensemble d'éléments discrets, et sa modélisation est couplée avec toute la structure.**

5.2 Dimensionnement du problème

Dans l'Eq.4.30, la variable n matérialise le dimensionnement du problème pour décrire le comportement géométrique des défauts.

Pour modéliser des problèmes en trois dimensions, comme des cas de barres de Hopkinson en 3D, nous pouvons avoir deux dimensionnements possibles pour le comportement géométrique des défauts :

- soit la modélisation des défauts se fait par une expansion de « défauts plans », créant ainsi des surfaces d'endommagement. Dans ce cas, la variable de dimensionnement n vaut deux (2D) et nous devons intégrer deux fois la loi d'évolution ;
- soit la modélisation des défauts se fait par expansion de cavités, créant ainsi non pas des surfaces mais des volumes d'endommagement. Dans ce cas, la variable de dimensionnement vaut 3 (3D) et la loi d'évolution doit être intégrée trois fois.

5.3 Description du changement de variable utilisé

Nous allons intégrer dans le temps la loi d'évolution d'endommagement de l'eq 4.30.

Pour cela, nous allons poser :

$$\boxed{\frac{1}{1-D_i}\frac{dD_i}{dt} = X} \tag{4.36}$$

Avec ce changement de variable, l'équation 4.30 s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}X = \lambda_t[\sigma_i(t)]n!S(kC)^n = \lambda_0\left(\frac{\sigma_i(t)}{\sigma_0}\right)^m n!S(kC)^n \tag{4.37}$$

On peut également poser :

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{\sigma_0^m}n!S(kC)^n \tag{4.38}$$

La fonction $\lambda_t[\sigma_i(t)]$ dépend de la fonction temporelle $\sigma_i(t)$ qui peut être décrite de la façon suivante :

$$\sigma_i(t) = \sigma_i(0) + t\Delta\sigma_i \tag{4.39}$$

avec $\sigma_i(0)$ la valeur de la contrainte σ_i au début du pas de temps considéré (soit à $t = 0$).

La définition de $\Delta\sigma_i$, qui est la variation de la contrainte σ_i pendant le pas de temps considéré est :

$$\Delta\sigma_i = \frac{\sigma_i(t) - \sigma_i(0)}{t - t_0} \tag{4.40}$$

avec $t_0 = 0$ le début du pas de temps considéré.

En posant $\beta = \sigma_i(0)$ et les changements de variable aux Eq.4.36 et 5.5, l'Eq.4.37 peut se réécrire de cette manière :

$$\boxed{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}X = \alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^m} \tag{4.41}$$

La loi d'évolution temporelle de l'endommagement est intégrée pour chaque pas de temps de calcul dans le code aux éléments discrets, soit entre 0 et t, avec t la longueur temporelle du pas de temps considéré.

Remarques :

L'évolution de l'endommagement fait intervenir σ^m. Pour des raisons de convergence, nous ne pouvons donc pas intégrer de manière numérique l'Eq. 4.37. Cette loi d'endommagement, s'appuyant directement sur l'écriture de la loi de Weibull, varie avec la puissance du module de Weibull. La valeur de l'intégrale serait donc très dépendante du pas de temps utilisé. Pour remédier à ces problèmes, il est donc nécessaire d'intégrer de manière formelle ces intégrales.

5.4 Intégration formelle de la loi d'endommagement pour l'-expansion de défauts « surfacique »(2D)

Dans le cas où les défauts sont modélisés par des surfaces d'endommagement, l'Eq. 4.37 devient :

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = 2.\lambda_t[\sigma_i(t)]S(kC)^2 = \alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^m} \tag{4.42}$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = 2.\frac{\lambda_0}{\sigma_0^m}S(kC)^2 \\ \beta = \sigma_i(0) \end{cases}$$

Calcul de la fonction X

Le calcul de la fonction X consiste à intégrer sur un pas de temps la dérivée de la fonction X entre 0 et t.

Le calcul de cette intégrale est :

$$X = X_0 + \int_0^t \dot{X}dt = X_0 + \int_0^t \alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^m dt = X_0 + \left[\frac{\alpha\,(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i}\right]_0^t \tag{4.43}$$

La fonction X est alors :

$$\boxed{X = X_0 + \frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i}} \tag{4.44}$$

avec X_0 la valeur de la fonction X au début du pas de temps considéré.

Calcul de l'intégrale de la fonction X

Le calcul de l'intégrale de la fonction X consiste à intégrer sur un pas de temps de longueur t la fonction X, c'est à dire entre 0 et t.

Le calcul de cette intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_0^t X dt &= \int_0^t \left(X_0 + \frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} \right) dt \\ &= \left[t\left(X_0 - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} \right) + \frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+2}}{(m+1)(m+2)\Delta\sigma_i^2} \right]_0^t\end{aligned} \tag{4.45}$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}\int_0^t X dt =& t\left[X_0 - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} \right] + \frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+2}}{(m+2)(m+1)(\Delta\sigma_i)^2} \\ &- \frac{\alpha\beta^{m+2}}{(m+2)(m+1)(\Delta\sigma_i)^2}\end{aligned} \tag{4.46}$$

5.5 Intégration formelle de la loi d'endommagement pour l'-expansion de défauts « volumique »(3D)

Dans le cas où les défauts sont modélisés par des cavités volumiques, l'Eq. 4.37 devient :

$$\boxed{\frac{d^2X}{dt^2} = 6.\lambda_t[\sigma_i(t)]S(kC)^3 = \alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^m} \tag{4.47}$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = 6.\frac{\lambda_0}{\sigma_0^m} S(kC)^3 \\ \beta = \sigma_i(0) \end{cases}$$

Calcul de la dérivée de la fonction X

Le calcul de la dérivée de la fonction X consiste à intégrer la dérivée seconde de la fonction X sur un pas de temps, c'est à dire entre 0 et t.

Le calcul de la dérivée de la fonction X s'écrit alors :

$$\dot{X} = \dot{X}_0 + \int_0^t \ddot{X}(t)dt = \dot{X}_0 + \int_0^t \alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^m = \dot{X}_0 + \left[\frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} \right]_0^t \tag{4.48}$$

La fonction X est alors :

$$\boxed{\dot{X} = \dot{X}_0 + \frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i}} \tag{4.49}$$

avec $\dot{X}_0$ la valeur au début du pas de temps de la dérivée de cette fonction.

Calcul de la fonction X

Le calcul de la fonction X consiste à intégrer la dérivée de la fonction X sur un pas de temps :

$$\begin{aligned} X =& X_0 + \int_0^t \dot{X}(t)dt \\ =& X_0 + \int_0^t \left(\dot{X}_0 + \frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} \right) dt \\ =& X_0 + \left[\frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+2}}{(m+2)(m+1)\Delta\sigma_i^2} \right]_0^t + \left[t \left(\dot{X}_0 - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} \right) \right]_0^t \end{aligned} \tag{4.50}$$

La fonction X vaut alors :

$$\begin{aligned} X = X_0 + t \left[\dot{X}_0 - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} \right] + & \frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+2}}{(m+2)(m+1)(\Delta\sigma_i)^2} \\ & - \frac{\alpha\beta^{m+2}}{(m+2)(m+1)(\Delta\sigma_i)^2} \end{aligned} \tag{4.51}$$

avec X_0 la valeur de la fonction X au début du pas de temps.

Calcul de l'intégrale de la fonction X

Le calcul de l'intégrale de la fonction consiste à intégrer la fonction X sur un pas de temps :

$$\begin{aligned} Y = \int_0^t X(t)dt = \frac{1}{2}t^2 \left[\dot{X}_0 - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} \right] \\ + t \left[X_0 - \frac{\alpha\beta^{m+2}}{(m+2)(m+1)(\Delta\sigma_i)^2} \right] + \int_0^t \left(\frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+2}}{(m+2)(m+1)(\Delta\sigma_i)^2} \right) dt \end{aligned} \tag{4.52}$$

Cette intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} Y =& t \left[X_0 - \frac{\alpha\beta^{m+2}}{(m+1)(m+2)(\Delta\sigma_i)^2} \right] \\ & + \frac{1}{2}t^2 \left[\dot{X}_0 - \frac{\alpha\beta^{m+1}}{(m+1)\Delta\sigma_i} \right] + \frac{\alpha(\beta + t\Delta\sigma_i)^{m+3}}{(m+3)(m+2)(m+1)(\Delta\sigma_i)^3} \\ & - \frac{\alpha\beta^{m+3}}{(m+3)(m+2)(m+1)(\Delta\sigma_i)^3} \end{aligned} \tag{4.53}$$

5.6 Calcul de l'endommagement D à chaque pas de temps

Après avoir intégré n fois la variable X de l'Eq.4.36, on va s'intéresser à présent au calcul de l'endommagement à la fin du pas de temps considéré. Le calcul de l'endommagement consiste en la résolution d'un schéma d'évolution de type explicite.

On part de l'équation 4.36 :

$$\frac{1}{1-D}\frac{dD}{dt} = X = -\frac{d}{dt}\ln(1-D) \tag{4.54}$$

L'écriture incrémentale devient alors :

$$\boxed{\ln\left(\frac{1-D^{t+\Delta t}}{1-D^{t}}\right) = -\int_0^t X(t)dt} \tag{4.55}$$

On fait le changement de variable suivant, correspondant :

$$\int_0^t X(t)dt = Y \tag{4.56}$$

À partir de l'écriture incrémentale établie dans l'Eq. 4.55, on en déduit la valeur de l'endommagement à la fin du pas de temps considéré :

$$\boxed{\boldsymbol{D^{t+\Delta t} = 1 - (1 - D^{t})\exp(-Y)}} \tag{4.57}$$

Il s'agit d'un schéma de calcul explicite et c'est sous cette forme qu'est implémentée l'endommagement dans le code aux éléments discrets.

Remarques :

L'endommagement est implémenté dans la surface (modélisation en deux dimensions) ou dans le volume (modélisation en trois dimensions) de chaque lien, entre deux particules.

6 Tests de validation de la loi

Après avoir montré les fondements mathématiques du modèle probabiliste de Weibull, nous allons à présent effectuer différents tests de validation. Dans un premier temps, des tests « benchmarks »seront proposés à partir de cas simples en une dimension, afin de voir le comportement du modèle et de comparer nos différents résultats avec ceux de Denoual [31]. Dans un second temps, nous effectuerons des tests de traction dynamique sur des barres en une dimension ou de traction biaxiale de plaques en deux dimensions. Ces tests sont semblables effectués aux chapitre 2 et 3 et permettront de comparer directement les résultats de ces deux approches.

6.1 Test de traction dynamique sur deux particules

Nous allons commencer par un test simple : un test de traction en régime dynamique modélisé sur deux particules. Dans ce test, une particule est encastrée, et sur la seconde particule, un déplacement de type $v = \dot{\varepsilon}x$ est imposé. L'introduction des défauts, et de l'endommagement résultant suivant la contrainte locale, se fait au niveau de la surface du lien. Les conditions aux limites sont illustrées sur la Fig.4.11.

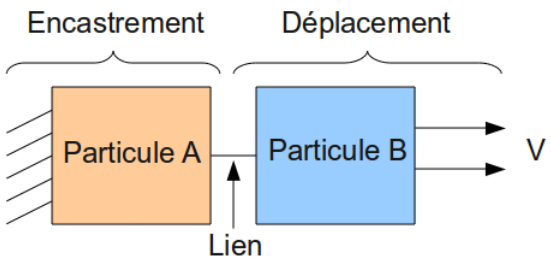


FIGURE 4.11 – Les conditions aux limites du test de traction dynamique sur deux particules et un lien

Le matériau utilisé est une céramique dont les caractéristiques sont décrites dans le tableau 4.2.

Ce test permet de vérifier :

- l'évolution temporelle de l'endommagement ; Pour cette étude, le module de Weibull m pourra varier entre 5 et 15, avec tous les autres paramètres du matériau constant. La vitesse de déformation sera constante : $\dot{\varepsilon} = 5.10^5$ s.$^{-1}$.
- l'évolution de la contrainte ultime en fontion de la vitesse de déformation imposée. Dans cette configuration, le module de Weibull sera constant ($m = 9.3$), et la vitesse de déformation variable, $\dot{\varepsilon}$ variant de 10^4 à 10^7 s^{-1}.

Paramètres	S-SiC
Module de Young E (GPa)	410
Coefficient de Poisson ν	0.15
Densité ρ	3.15
Module de Weibull m	5 à 15
Contrainte moyenne σ_w (MPa)	370
Volume effectif Z_{eff} (mm^3)	1.70
Célérité c (m/s)	11408

TABLE 4.2 – Les paramètres de la céramique SiC utilisée [31]

Évolution temporelle de l'endommagement

On va s'intéresser à étudier l'évolution temporelle de l'endommagement en fonction du module de Weibull m, qui varie de 5 à 15. En dehors du module de Weibull, l'ensemble des paramètres caractéristiques sont donnés dans la table 4.2. Comme on l'a vu dans les précédents paragraphes, ce module permet de caractériser la dispersion des défauts dans un matériau. Lorsque ce module est élevé, la disparité des défauts est d'autant plus faible, ainsi que la disparité sur les valeurs des contraintes d'activation des défauts. Ainsi, pour un même matériau, où seul le module de Weibull est variable, l'évolution de l'endommagement sera plus rapide avec un module de Weibull plus élevé. En effet, la disparité des défauts étant beaucoup plus faible, ainsi que les contraintes d'activation, la plupart des défauts s'activeront presque en même temps, favorisant ainsi un endommagement plus rapide qu'avec un plus faible module de Weibull.

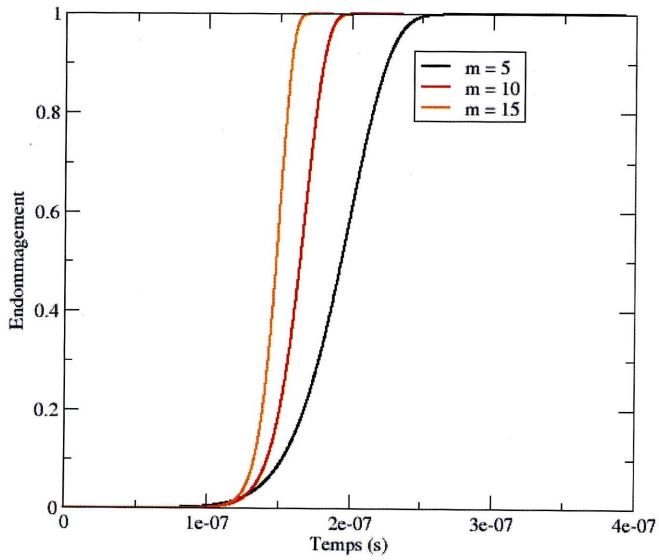


FIGURE 4.12 – Évolution de l'endommagement en fonction du module de Weibull pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 5.10^5$ s^{-1}

La Fig.4.12 illustre très bien ce phénomène physique, où est représentée l'évolution de l'endommagement pour trois modules de Weibull différents.

Remarques :

Le pas de temps utilisé dans cette simulation est de l'ordre de 10^{-11}s correspondant au pas de temps optimal. Les résultats influent très peu suivant le pas de temps lorsqu'il est plus faible que le pas de temps optimal.

Étude de la contrainte ultime en fonction de la vitesse de déformation

Le but de ce test est d'étudier la contrainte ultime en fonction de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ de la même céramique que le précédent test, mais avec un module de Weibull $m = 9.3$, correspondant exactement à la céramique dans la référence [31]. Les différentes expériences dans le génie civil, où l'utilisation des bétons est prédominante, ont permis d'observer que les matériaux fragiles, comme les céramiques ou les bétons, sont très sensibles aux vitesses de déformation imposées. Cette grande sensibilité aux vitesses de déformation se retrouve principalement dans les seuils de résistance aussi bien en traction qu'en compression.

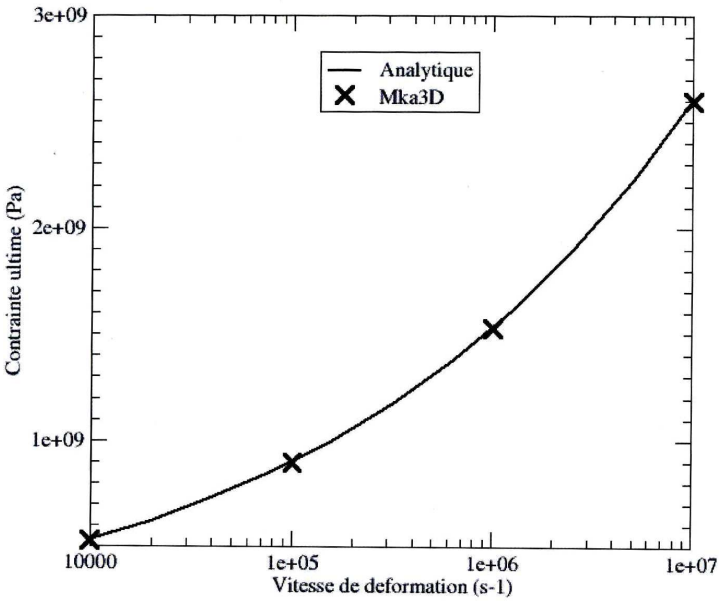


FIGURE 4.13 – Contrainte ultime σ_{max} en fonction de la vitesse de déformation pour un module de Weibull $m = 9.3$

La Fig.4.13 illustre ce phénomène physique, à savoir l'augmentation de la résistance apparente en traction avec la vitesse de déformation.

Pour des vitesses de déformation inférieures à 10^5s^{-1}, l'augmentation de la contrainte ultime de rupture en fonction de la vitesse de déformation est relativement faible. Ainsi, pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^4$s^{-1}, la contrainte ultime est de

$\sigma = 5.10^8$Pa. Pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^5 s^{-1}$, soit dix fois supérieur, la contrainte ultime est de $\sigma = 8.5\ 10^8$Pa, soit seulement 50% de plus.

Pour des vitesses de déformation supérieures à $\dot{\varepsilon} = 10^6$s^{-1}, l'évolution de la contrainte ultime en fonction de la vitesse de déformation est beaucoup plus importante. Ainsi, pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^6$s^{-1}, la contrainte ultime est de $\sigma = 1.8\ 10^9$Pa. Pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^7$s^{-1}, la contrainte ultime est de $\sigma = 2.6\ 10^9$Pa. Pour une décade de la vitesse de déformation, le rapport résistance dynamique/résistance statique a doublé. Et entre les faibles et les fortes vitesses de déformation, ce rapport est de cinq. On peut également remarquer que les résultats numériques de l'approche aux éléments discrets avec l'introduction d'un critère de rupture probabiliste sont très proches de la solution analytique.

Conclusions sur le test

Ces premiers tests sont en accord également avec les solutions analytiques et les résultats de Denoual [31].

6.2 Test de traction sur une barre en une dimension

Il s'agit du même test que celui vu au chapitre 2. Il permet de comparer et de confronter directement les résultats en utilisant le critère de Camacho-Ortiz avec le modèle probabiliste de Denoual. Ce test diffère du paragraphe précédent dans la mesure où il y a un nombre de particules variable.

On considère une barre de longueur L localisée dans la région $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ dont les conditions initiales sont les suivantes :

A l'instant $t = 0$:

$$V(X, 0) = \dot{\varepsilon}_0(X) \tag{4.58}$$

Les conditions de l'essai	
Longueur de la barre :	50 mm
Vitesses de déformation étudiées :	de 10 à 10^7 s^{-1}

TABLE 4.3 – Les conditions initiales de l'essai

L'échantillon est ensuite laissé libre. Pour les paramètres du matériau, nous avons repris les mêmes caractéristiques physiques pour le module de Young, le coefficient de Poisson, la densité et la contrainte de rupture, que le matériau utilisé dans le chapitre 2. Ils sont donnés dans la table 4.4. Le module de Weibull m ainsi que le volume effectifs ont été repris de la table 4.2.

Paramètres	Céramique
Module de Young E (GPa)	275
Coefficient de Poisson ν	0.15
Densité ρ	2.75
Module de Weibull m	9
Contrainte moyenne σ_w (MPa)	300
Volume effectif Z_{eff} (mm^3)	1.70
Célérité c (m/s)	10000

TABLE 4.4 – Les caractéristiques de la céramique utilisée

Les résultats

Pour des vitesses de déformation allant de 10 à 10^7 s^{-1}, la convergence de l'énergie cinétique consommée en fonction du nombre de particules et des vitesses de déformation, le nombre de fragments formés en fonction de la densité de maillage, et la distribution de la taille des fragments ont été étudiés.

La Fig.4.14 montre l'énergie cinétique consommée dans le modèle numérique en fonction de la densité de maillage allant jusqu'à 10000 particules, pour deux vitesses de déformation de 10^4 et 10^5s^{-1}. Cette énergie cinétique consommée est obtenue en faisant la différence entre l'énergie cinétique de toute la structure à l'état initial et à l'état final.

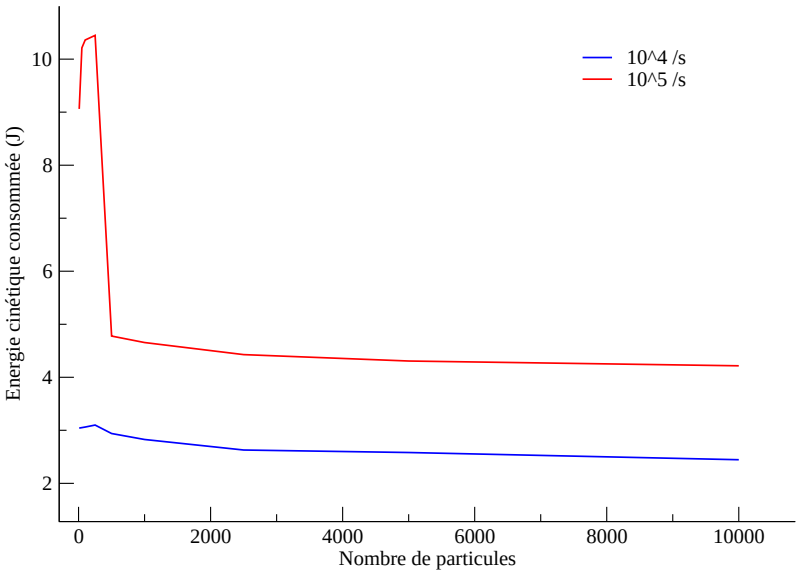


FIGURE 4.14 – Convergence de l'energie cinétique en fonction de la vitesse de déformation

Ces résultats sont à comparer directement avec la Fig.2.5 du chapitre 2 avec la loi de Camacho-Ortiz, où le nombre de particules nécessaires pour avoir une convergence de l'énergie était proportionnel à la vitesse de déformation. La Fig.4.14 présentée ici montre une évolution de l'énergie cinétique consommée en fonction de la densité de maillage très différente. En effet, avec l'introduction de ce modèle probabiliste, le comportement de la convergence de l'énergie cinétique consommée n'est plus fonction de la vitesse de déformation imposée mais seulement fonction de la densité de maillage. La vitesse de la convergence de l'énergie cinétique consommée est donc indépendante de la vitesse de déformation de la sollicitation imposée, et le principal paramètre à prendre en compte est le nombre de particules. On remarque également, que pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^5 s^{-1}$, l'énergie cinétique consommée converge pour seulement 400 particules contre plus de 1000 avec la première loi. Trois fois moins de particules sont nécessaires pour avoir une convergence de l'énergie consommée, ainsi que le temps de calcul CPU.

La Fig.4.15 illustre la convergence du nombre de fragments en fonction du nombre de particules pour deux vitesses de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^4$ et 10^5 s^{-1}.

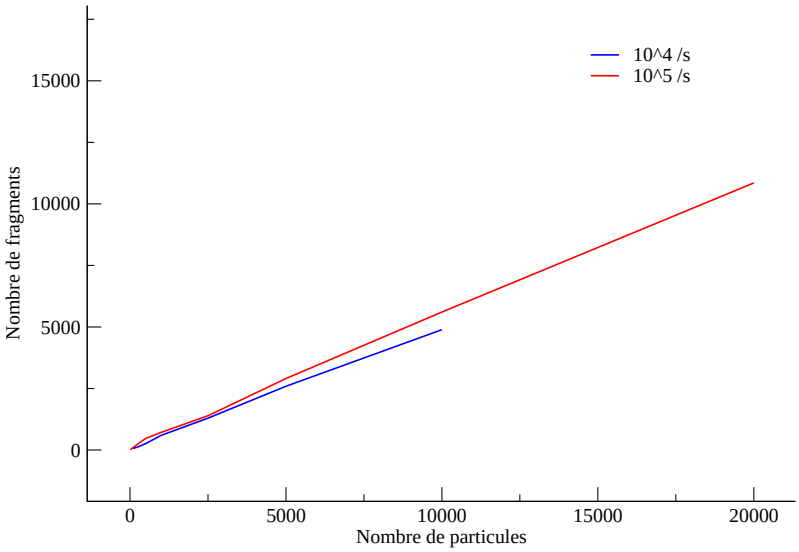


FIGURE 4.15 – Nombre de fragments en fonction de la densité de maillage pour deux vitesses de déformation

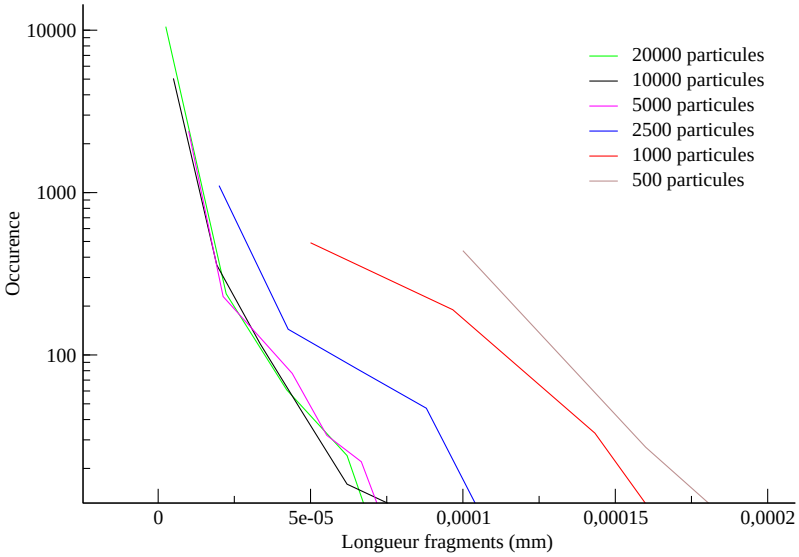


FIGURE 4.16 – Distribution de la taille des fragments en fonction de la densité de maillage pour une vitesse de déformation de 10^5s^{-1}

Cette figure nous renseigne sur le nombre total des fragments macroscopiques qui se sont formés. Quelque soit la vitesse de déformation, on peut remarquer que le nombre de fragment macroscopique ne converge pas, car il y a une apparition

de poussière constituée d'une particule. C'est pour cette raison que le nombre de fragments formés est assez peu sensible à la vitesse de déformation.

La Fig.4.16 montre la distribution des fragments pour un maillage « standard », où toutes les particules ont la même longueur, tandis que la Fig.4.17 permet la confrontation de la distribution des tailles de fragments entre des maillages « standards »et des maillages aléatoires, où la longueur de chaque particule peut avoir une différence de plus ou moins 5%.

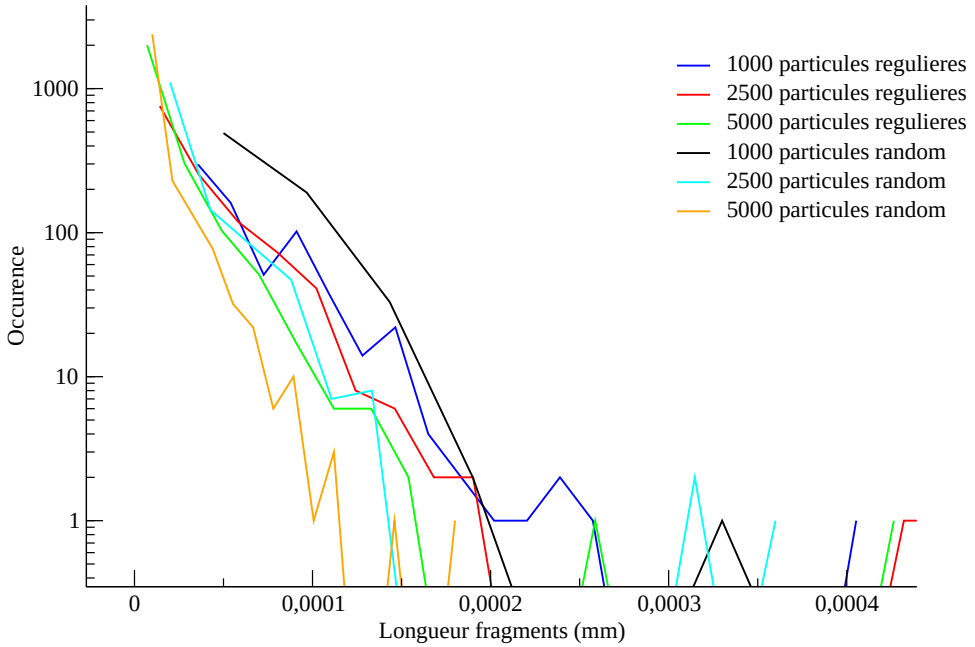


FIGURE 4.17 – Distribution de la taille des fragments en fonction de la densité de maillage pour une vitesse de déformation de 10^4 s^{-1} pour des maillages « standards »et des maillages aléatoires à 5%.

Les Figs.4.16 et 4.17 permettent d'apprécier le critère de convergence de la distribution de la taille des fragments de ce modèle probabiliste. Ces figures montrent en effet, qu'avec ce modèle probabiliste, même si le nombre de fragments n'a pas encore convergé, la distribution de la taille des fragments peut devenir homogène avec un nombre restreint de particules. En outre, la convergence de la distribution de la taille des fragments est insensible au type de maillage utilisé. Enfin, on a pu voir également que le nombre de fragments macroscopiques n'avait pas convergé. Ce phénomène est tout à fait normal, puisque le modèle probabiliste intègre déjà les fragments d'une taille plus petite que la taille de la particule du maillage.

Les conclusions de ces tests

Les résultats de ces tests pour la traction dynamique d'une barre en céramique nous ont permis de constater les principaux intérêts de l'implémentation d'un modèle probabiliste dans un code de calcul aux éléments discrets.

Ce modèle probabiliste permet d'avoir une convergence du nombre de fragments macroscopiques, des énergies avec un nombre restreint de particules. En outre, ce modèle permet également d'avoir une convergence de la distribution des tailles de fragments.

6.3 Traction biaxiale sur une plaque en céramique

Ce test est identique à celui présenté au chapitre 3. Il permet encore une fois de pouvoir comparer les deux méthodes d'endommagement. Pour les résultats, l'étude s'est essentiellement portée sur la convergence de l'énergie cinétique dissipée par la fracturation ainsi que sur la distribution de la taille des fragments en fonction de la densité de maillage pour une vitesse de déformation donnée.

Les conditions initiales et les paramètres du matériau utilisé

Les conditions initiales sont identiques que pour le chapitre 3 : Il s'agit d'une traction biaxiale d'une plaque avec la même céramique.

$$\begin{aligned} V(x, t = 0) &= \dot{\varepsilon} x \\ V(y, t = 0) &= \dot{\varepsilon} y \end{aligned} \tag{4.59}$$

Ensuite, pour $t > 0$, la plaque est laissée libre. Les paramètres du matériau sont identiques que lors du paragraphe précédent (tableau 4.4).

Les résultats

La Fig.4.18 montre l'énergie cinétique totale consommée par le modèle, qui est directement liée à l'énergie dissipée par la fracturation. Pour cette simulation en deux dimensions, le modèle probabiliste permet une convergence de l'énergie dissipée avec environ 10000 particules contre 100000 particules avec la loi de Camacho-Ortiz (Fig.3.4), pour un maillage avec des particules de forme « carré ».

Nota :

La Fig.4.18 montre l'énergie cinétique consommée par le modèle numérique. Dans les essais expérimentaux, il est très difficile d'avoir cette valeur. En outre, l'énergie consommée est directement dépendante du modèle de fragmentation employée. Ce qui est important de voir dans l'anlyse de ces résultats, c'est l'énergie cinétique consommée converge vers une valeur.

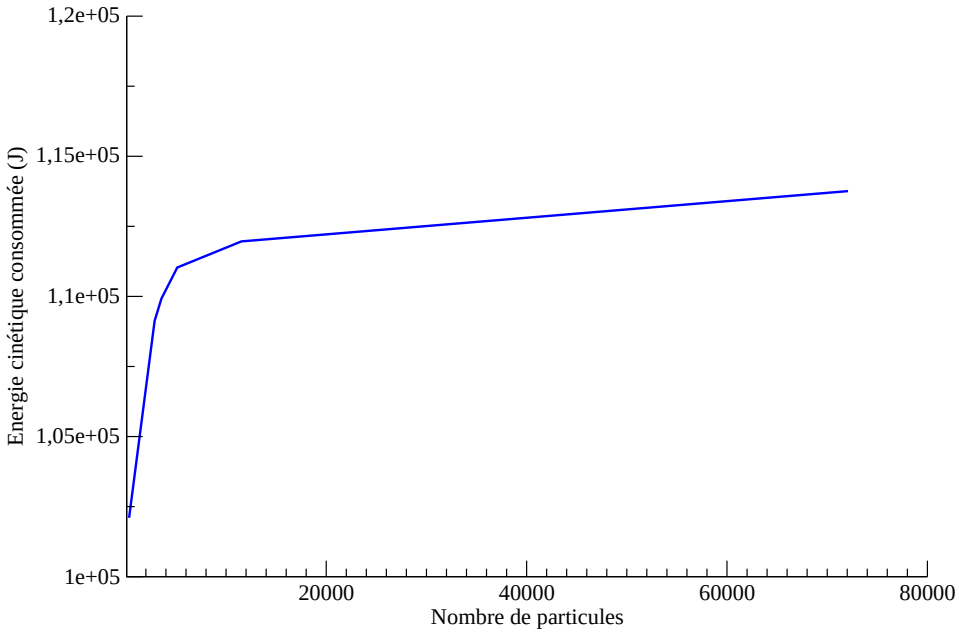


FIGURE 4.18 – Convergence de l'énergie cinétique en fonction de la densité de maillage pour une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^5$ s^{-1} avec un maillage avec des particules de forme « carré »

La Fig.4.19 montre, comme pour la simulation de la barre, l'intérêt de cette méthodologie sur la qualité de la convergence de la distribution des tailles des fragments.

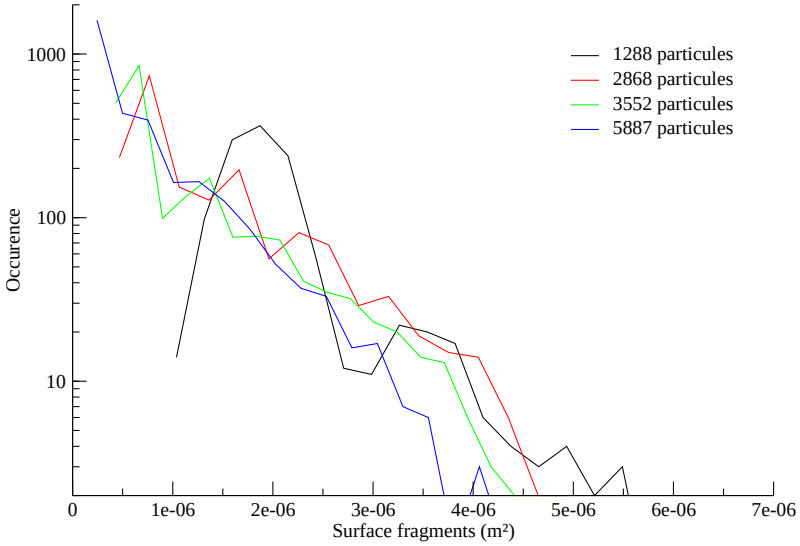


FIGURE 4.19 – Distribution de la taille des fragments en fonction de la densité de maillage avec des particules de forme « carré »pour une vitesse de déformation de 10^5 s^{-1}

En effet, la distribution de la taille des fragments est respectée avec seulement 3000 particules, pour un maillage avec des particules à forme « carré », en considérant que la taille des fragments converge avec le maillage le plus fin. Avec un si faible nombre de particules, ce modèle probabiliste est capable de prédire la taille des fragments que peut « capter »ce maillage. Avec l'autre loi, environ 100000 particules étaient nécessaires pour avoir cette convergence, car avec l'autre loi de fracturation, la distribution de la taille des fragments n'était respectée que quand l'ensemble des paramètres de fracturation avait convergé.

7 Conclusions du chapitre

L'objectif de ce chapitre était d'introduire un critère de rupture probabiliste dans une méthode aux éléments discrets afin d'obtenir une convergence plus rapide des paramètres statistiques de la fragmentation, comme la distribution de la taille des fragments, etc, afin de pouvoir simuler des structures complexes à de hautes vitesses de déformation.

Le modèle probabliste de Denoual [31,37,40–48] a été introduit dans la méthode des éléments discrets. Avec ce modèle, un nombre de défauts est inséré avec une loi de Poisson dans la surface ou le volume d'un lien entre deux particules en fonction de la contrainte locale σ_i qui est déterminée par la méthode discrète. Seul un nombre de défauts se propagent et créent des surfaces de relaxation, où aucun autre

défaut ne peut se développer. L'ensemble de ces surfaces de relaxation traduit un endommagement au sein du matériau.

Dans ce chapitre, des tests simples de tractions dynamiques ont été effectués. Ces tests ont permis d'observer que ce modèle probabiliste, inséré dans une méthode discrète, donne des résultats prometteurs quant à la qualité de la prédiction des paramètres statistiques de la fragmentation avec un temps de calcul CPU nettement diminué par rapport au critère de rupture de Camacho-Ortiz [24] (temps de calcul CPU divisé par 10 pour des vitesses de déformation de $10^5 s^{-1}$ pour des tests de barre en traction dynamique).

Sur la modélisation d'une plaque en traction biaxiale, ce modèle numérique s'est montré particulièrement efficace quant à la convergence de la distribution de la taille des fragments, ainsi que les énergies dissipées, tout en nécessitant un faible nombre de particules et temps CPU de calcul.

La modélisation d'une structure plus complexe en trois dimensions sera traitée au cours du prochain chapitre.

Chapitre 5

Applications

1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'appliquer à un cas plus complexe en trois dimensions le modèle probabiliste de Denoual, que l'on a vu dans le précédent chapitre et que l'on a introduit dans le code aux éléments discrets Mka3D©. A noter que ce modèle probabiliste n'a été implémenté qu'en tension.

De nombreuses techniques expérimentales sont actuellement employées pour étudier les mécanismes impliqués lors de solicitations dynamiques et mesurer certaines grandeurs mécaniques (contraintes, déplacements ou déformations lors d'impacts). Parmi les plus répandues, nous citerons les essais de compression ou de traction dynamique avec des barres d'Hopkinson.

Des tests de simulation numérique de barres d'Hopkinson en traction dynamique seront pratiqués en trois dimensions. L'objet de ce test est de voir « qualitativement »l'introduction de ce modèle probabiliste dans la méthode aux éléments discrets, mais également de pouvoir modéliser numériquement en trois dimensions un cas de fragmentation dynamique.

2 Les barres d'Hopkinson : les tests expérimentaux et quelques principes physiques mis en jeux

Les dispositifs à barres d'Hopkinson sont des outils expérimentaux qui permettent d'effectuer des sollicitations (traction, compression ou torsion) à de grandes vitesses de déformation (jusqu'à 5000 s^{-1}). Cette technique est largement utilisée pour la détermination des propriétés mécaniques des matériaux à ces vitesses de déformation.

Dans cette section, après un bref rappel historique de l'emploi des barres d'Hopkinson et de la physique qui l'anime, des tests expérimentaux seront présentés avec l'emploi d'un mirco-béton en MB50 comme échantillon pour des vitesses d'impact allant de 7 à 15$m.s^{-1}$. Les résultats de ces essais expérimentaux permettront de les comparer « qualitativement »aux simulations numériques en utilisant une méthode aux éléments discrets, dans laquelle le modèle probabiliste de Denoual comme critère de rupture a été introduit.

2.1 Les différents tests de Barres d'Hopkinson

Dans ce paragraphe, les différentes techniques de tests de barres d'Hopkinson seront exposées, comme les essais de compression ou de traction dynamique. Ensuite, la durée de l'onde incidente créée par l'impact du projectile sur la barre sera décrite.

Test de compression dynamique avec des « barres d'Hopkinson »

Dans ce cas de figure, l'échantillon est placé entre une barre d'entrée (barre de transmission) et une barre de sortie. Un projectile est lancé sur l'extrémité libre de la barre d'entrée. Ce choc génère une onde qui se propage dans la barre d'entrée. A la surface de contact barre d'entrée/échantillon, une partie de cette onde se propage dans l'échantillon et l'autre partie est réfléchie dans la barre d'entrée. L'onde transmise traverse ensuite l'échantillon et rencontre la surface échantillon/barre de sortie. Une partie de cette onde est une nouvelle fois réfléchie et traverse à nouveau en sens inverse l'échantillon. L'onde réfléchie dans la barre de sortie est ensuite piégée dans une barre appelée « piégeur d'onde ». C'est grâce à cette barre de sortie et à ce « piégeur d'onde »que l'onde réfléchie dans l'échantillon est une onde de compression. La Fig.5.1 illustre le dispositif.

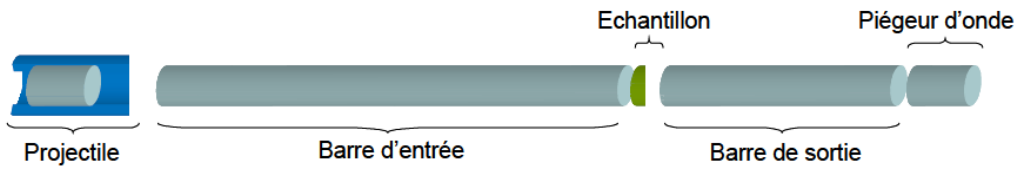


FIGURE 5.1 – Le test de compression dynamique avec les barres d'Hopkinson [86]

Tests de traction dynamique

Le dispositif expérimental d'essai a été développé par A. Brara et J.R. Klepaczko au LPMM, à l'université de Metz [17]. Il consiste à générer une onde de pression à une extrémité d'un échantillon cylindrique et à laisser l'autre extrémité libre. Le procédé expérimental est décrit sur la Fig.5.2, et est relativement simple. Une nouvelle configuration expérimentale d'essais d'écaillage a été proposée par B. Erzar et P. Forquin [37,48]. Cette configuration, ainsi que la méthode de dépouillement ont été validées par une série de simulations numériques par éléments finis. Les résultats ont donné des résistance du MB50, micro-béton employé, de l'ordre de 10 à 16 MPa sur la plage de vitesse de déformation de 30 à 150 s^{-1}.

Après l'impact du projectile sur une grande barre en aluminium de 1 m de longueur, une onde incidente σ de compression est générée dans la barre et transmise en grande partie à l'échantillon en béton par propagation. L'onde de compression σ^+ transmise à l'échantillon se réfléchit ensuite en une onde de traction σ^- quand elle atteint l'extrémité de l'échantillon libre, appelée l'interface libre. Suivant la vitesse de l'impact, il y a une superposition des ondes faisant apparaître un processus de fracturation simple ou multiple. Les signaux incidents et réfléchis sont mesurés par

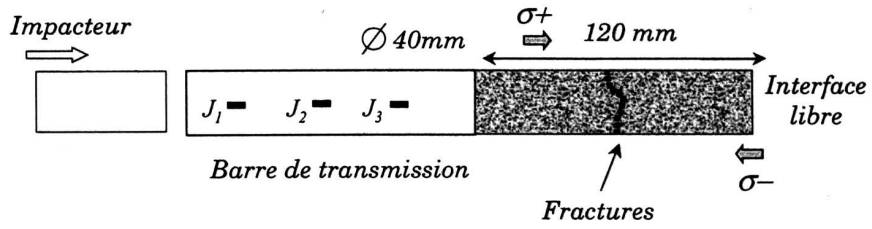


FIGURE 5.2 – Configuration du test expérimental pour le système d'Hopkinson en traction dynamique [17]

l'intermédiaire de jauges de déformation sensibles J_1, J_2, J_3, que l'on peut observer sur la Fig .5.2. La propagation des ondes est mono-dimensionnelle.

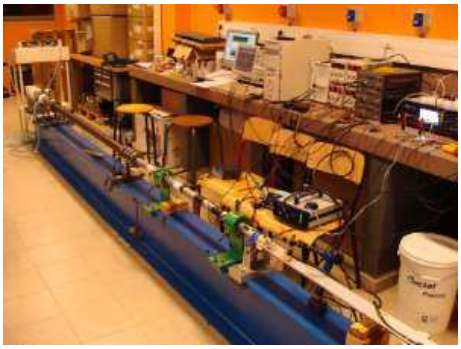


FIGURE 5.3 – Essai d'écaillage aux barres de Hopkinson, test développé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux à Metz, par B. Erzar et P. Forquin [37, 48]

C'est sur ce cas de figure que nous avons fait nos simulations numériques afin de comparer nos résultats et ceux des essais expérimentaux.

Les mécanismes de rupture dans un matériau granulaire

Lorsque la vitesse de sollicitation augmente fortement, le mode de rupture peut changer : la fissuration essentiellement intergranulaire en traction statique, devient transgranulaire lorsque la vitesse de déformation augmente. La sollicitation ne « perçoit »plus un milieu composite homogène qui casse au point le plus faible (le joint grain-ciment) mais deux milieux, les grains et le ciment. L'augmentation de la résistance en traction s'explique par une augmentation de résistance dynamique de la pate cimentaire [48].

Durée de l'onde de contrainte incidente créée lors d'un impact sur une interface

Au moment de l'impact du projectile sur la barre de transmission, une partie de l'onde est transmise à la barre et l'autre est réfléchie dans le projectile. Une onde de décharge est ainsi créée. Quand cette onde atteint l'extrémité opposée à la face d'impact, le projectile se décolle de la barre. La durée de l'onde envoyée dans la

barre de transmission est donc le double du temps de parcours des ondes élastiques dans le projectile. Ainsi, pour un projectile de longueur L dont la vitesse des ondes élastiques est c, la durée de l'onde est donnée par :

$$\boxed{T = \frac{2L}{c}} \tag{5.1}$$

Lors des simulations numériques avec notre méthode aux éléments discrets, la durée de l'onde incidente et la valeur de la contrainte réfléchie dans la barre de transmission, seront vérifiées.

2.2 Les essais expérimentaux

Nous nous sommes appuyés sur une campagne expérimentale qui a été effectuée au sein du LPMM, et développée par A. Brara et J.R. Klepaczko [17]. Cette campagne a consisté principalement en trois séries d'essais de traction à barres d'Hopkinson sur un microbéton MB50. A noter que des essais plus récents ont été effectués par B. Erzar et P. Forquin [37, 48]. Nous présentons ici les résultats concernant la fissuration dans le matériau. Si le lecteur souhaite approfondir sur ce sujet, il peut se référer aux différentes références citées.

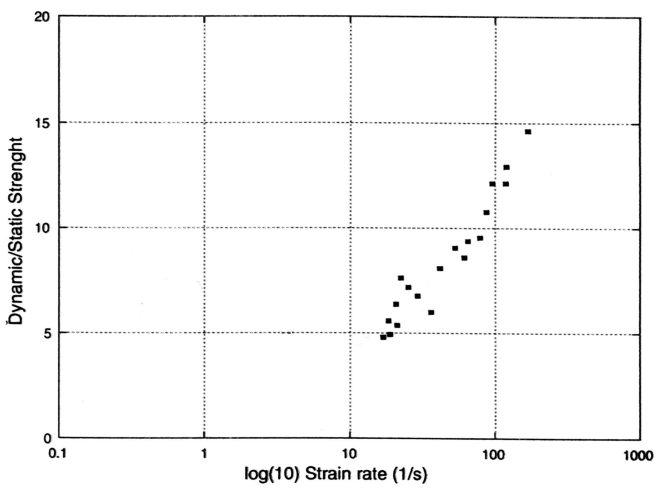


FIGURE 5.4 – Rapport de la contrainte de rupture dynamique sur la contrainte de rupture statique [22]

La Fig.5.4 présente l'évolution du rapport de la contrainte de rupture dynamique sur la contrainte de rupture statique obtenue expérimentalement.

Lors de l'essai N°1 avec une contrainte incidente de 38MPa, une seule fracture s'est développée à $x_r = 69$mm de l'interface libre.

Deux fractures (donc trois fragments) sont apparues lors de l'essai N°2. La Fig.5.5 montre ces deux macro-fracturations. La première fracturation est située à $x_r = 42$mm et la seconde à 61mm de l'interface libre.

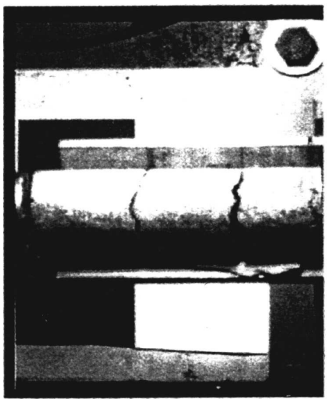


FIGURE 5.5 – Résultats de l'essai N°2 : fracturation de l'éprouvette à deux endroits différents [22]

Les phénomènes physiques induisant ces effets de vitesse peuvent être de différentes natures :

- présence de ménisques d'eau dans les pores du béton ;
- mécanisme de rupture modifié ;
- temps critique de rupture.

3 Modélisation numérique en trois dimensions de barre d'Hopkinson en traction dynamique par une combinaison éléments discrets/méthode probabiliste de Denoual

Après avoir exposé quelques principes physiques qui régissent les barres d'Hopkinson, et les résultats des différents essais expérimentaux [17], nous allons pouvoir à présent confronter de manière « qualitative »nos simulations numériques à ces résultats concrets.

Un modèle numérique en trois dimensions sera présenté, avec des vitesses d'impact du projectile allant de 7 à 12m.s^{-1}, correspondant aux essais expérimentaux N°2 et N°3.

3.1 Les conditions aux limites et les paramètres des matériaux

Les conditions aux limites

Les conditions aux limites sont décrites sur la Fig.5.6. Une vitesse V est imposée au projectile au temps $t = 0$. La barre de transmission ainsi que l'échantillon sont laissés libres. Les capteurs J_1, J_2, J_3, J_4 et J_5 ont été reproduits dans la barre de transmission afin de suivre l'onde de propagation de la contrainte incidente provoquée par l'impact du projectile sur la barre de transmission.

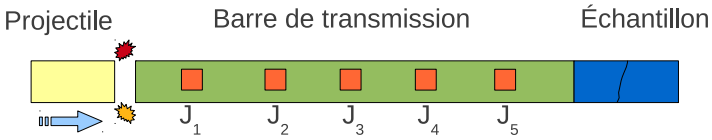


FIGURE 5.6 – Les conditions aux limites du modèle

Les maillages utilisés

La description des maillages utilisés est décrite dans le tableau 5.1.

Pièce	Longueur (m)	Nombre de particules (3D)
Projectile	0.08	1564
Barre de transmission	1	92 532
Échantillon	0.12	503 429
Total		597 525

TABLE 5.1 – Descriptions des maillages

Sur la Fig.5.7, le maillage en trois dimensions de l'échantillon cylindrique en MB50 est représenté. Le modèle complet, avec les trois pièces, est constitué de près de 600 000 particules. Ces maillages sont relativement denses pour une méthode aux éléments discrets, et chaque calcul a nécessité près d'une semaine de calcul sur 32 processeurs.

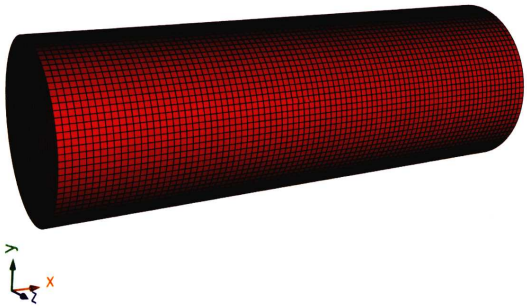


FIGURE 5.7 – Maillage 3D de l'échantillon, maillé avec plus de 500 000 particules

Les paramètres des matériaux

Le projectile, et la barre de transmission sont modélisés avec les propriétés d'un alliage d'aluminium de type T5. L'échantillon est un micro-béton de type MB50.

Les différentes caractéristiques générales de ces matériaux et utilisés dans les calculs sont représentées dans le tableau 5.2, comme le module de Young, le coefficient de Poisson, ou les caractéristiques statistiques de la loi de Weibull, comme le module de Weibull ou le volume effectif. Ces paramètres ont été établis dans la Ref. [48].

Remarques : Ces paramètres donnent une augmentation de résistance beaucoup plus faible que celle mesurée par Brara et Klepacko [17] mais conforme à celle mesurée par Erzar et Forquin en appliquant une autre méthode de dépouillement.

Paramètres	MB50	T5
Module de Young E (GPa)	42	69.5
Coefficient de Poisson ν	0.21	0.32
Densité ρ	2.340	2.7
Module de Weibull m	12	30
Contrainte moyenne σ_w (MPa)	9.99	1000
Volume effectif Z_{eff} (mm^3)	39.9	350
Célérité c (m/s)	4236	5074

TABLE 5.2 – Les paramètres matériau du MB50 [48] (MB50-dry) et du T5

Propagation de l'onde incidente de contrainte dans la barre de transmission

L'objet de ce paragraphe est d'étudier la propagation de l'onde incidente de contrainte, créée par l'impact du projectile dans la barre de transmission.

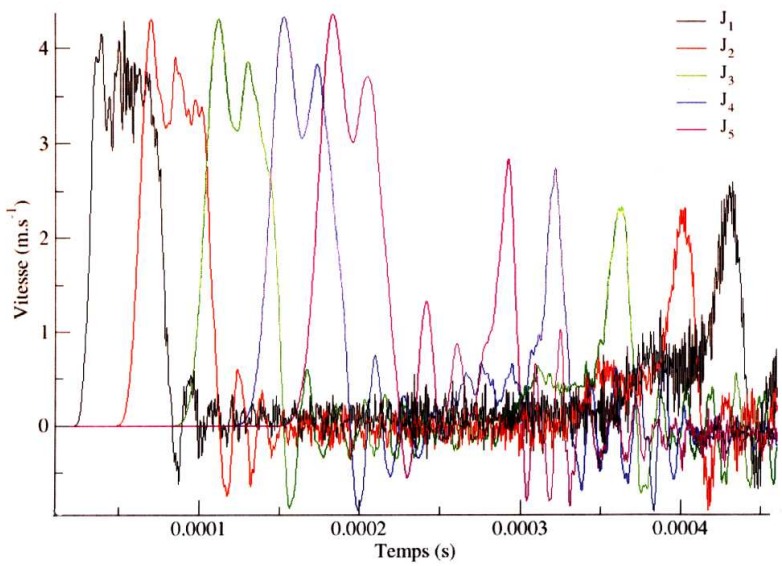


FIGURE 5.8 – Visualisation de la vitesse aux capteurs J_1, J_2, J_3, J_4 et J_5 pour une vitesse d'impact de 7 m/s

La Fig.5.8 visualise la vitesse qu'enregistrent tous les capteurs de la barre de transmission.

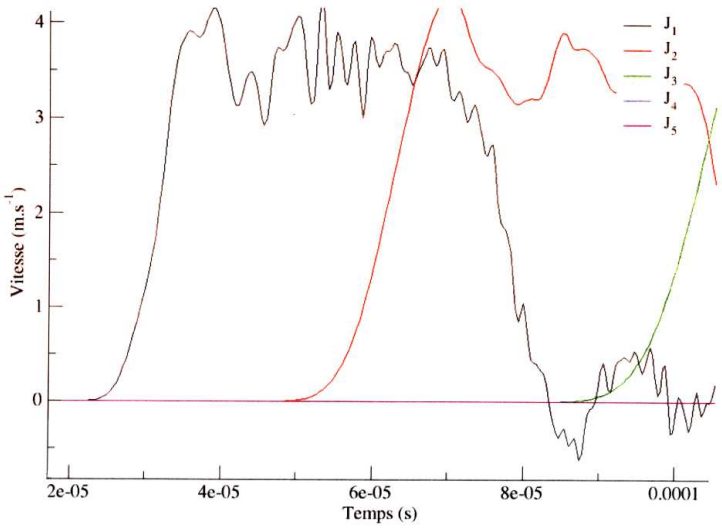


FIGURE 5.9 – Zoom du capteur J_1 lors de la propagation de l'onde incidente

La Fig.5.9 permet de visualiser la vitesse enregistrée par le capteur J_1 au moment du passage de l'onde incidente. Ce profil de vitesse permet de déterminer la valeur de la vitesse transmise, qui est égale à la moitié de la vitesse incidente, soit 3.5m.s^{-1}. La durée de l'onde incidente est d'environ 3.15 10^{-5}s, correspondant à la valeur théorique.

La fracturation de l'échantillon en fonction de la vitesse d'impact du projectile

La Fig.5.10 permet de voir l'évolution de la vitesse au sein de l'échantillon à divers moments durant la propagation de l'onde incidente, qui a été transmise du projectile dans la barre de transmission, puis de la barre de transmission dans l'échantillon. Sur la Fig.5.10a, la vitesse dans l'échantillon est nulle et homogène. L'onde incidente, en rouge sur la figure, correspondant à une vitesse de 3.5m.s^{-1}, se propage (Figs.5.10b, 5.10c, 5.10d). Quand l'onde a atteint l'extrémité libre de l'échantillon, elle est entièrement réfléchie, et d'une onde de compression, elle devient une onde de traction, de vitesse opposée. L'onde de traction se propage ensuite en sens inverse, visible sur les Fig.5.10e, 5.10f et 5.10g. Cette onde de traction engendre ensuite une macro-fissuration, nettement visible sur la Fig.5.10h, relativement proche de l'interface barre de transmission/échantillon.

La visualisation des macro-fracturations suivant la vitesse d'impact du projectile est visible sur la Fig.5.11. Ces résultats montrent que le nombre de macro-fractures est variable suivant la vitesse d'impact du projectile.

Les résultats

Suivant la vitesse d'impact :

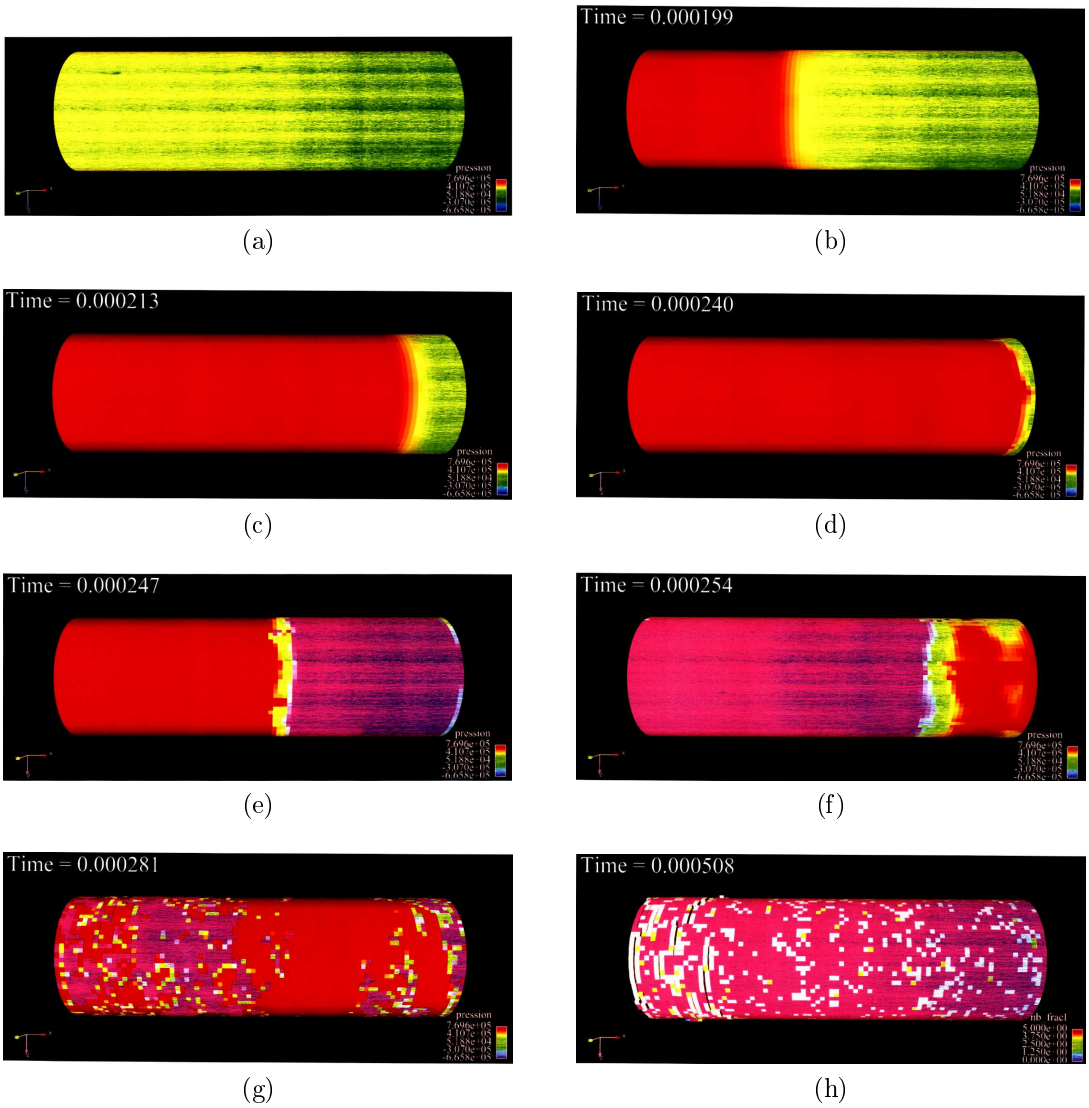
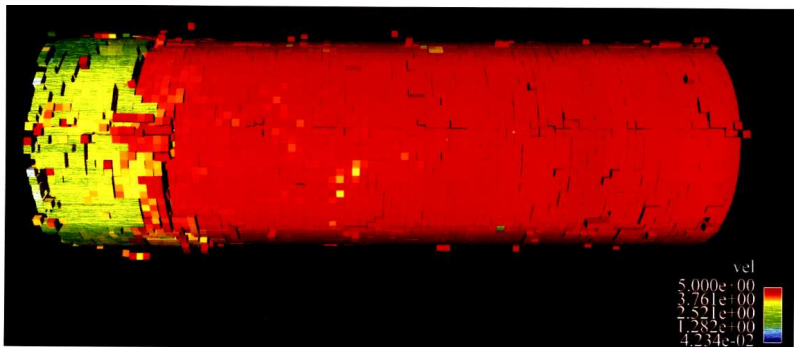
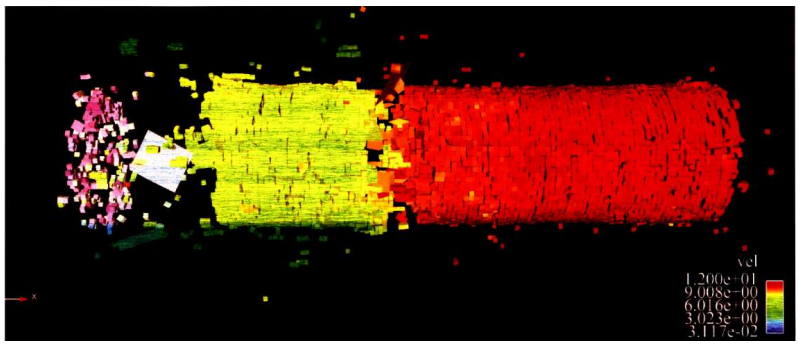


FIGURE 5.10 – Fracturation de l'éprouvette pour une vitesse d'impact de 7m.s^{-1}. *Au niveau des échelles, le rouge indique une compression de l'ordre de $-10^6 Pa$ et le violet une onde de traction de l'ordre de $10^6 Pa$. Le vert/jaune matérialise une pression presque nulle.*

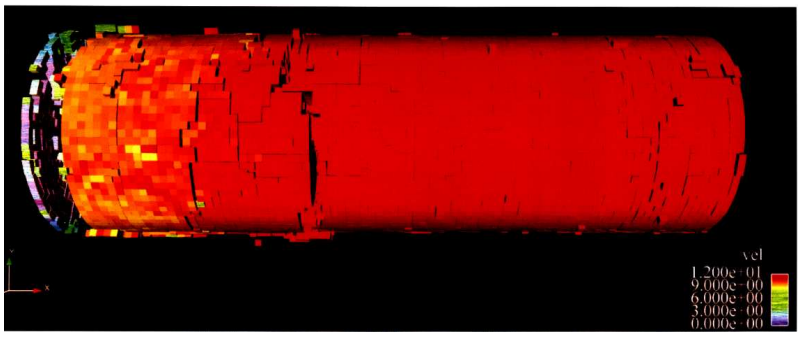
- Ainsi, pour une vitesse d'impact de 7m.s^{-1}, une seule fracture est engendrée par l'onde incidente en traction, à environ $x_r = 30$mm du bord de l'interface barre de transmission/échantillon. On peut également remarquer le gradient de vitesse entre les deux fragments, celui le plus proche de l'interface a une vitesse d'environ 2.5m/s, alors que l'autre fragment a une vitesse de 5m.s^{-1}.
- Pour une vitesse d'impact de 12m.s^{-1}, deux macro-fractures apparaissent, à environ $x_r = 60$mm du bord de l'interface barre de transmission/échantillon pour la première fracture, et $x_r = 10$mm pour la seconde. Il y a donc trois macro-fragments qui apparaissent.
- Pour une vitesse d'impact de 15m.s^{-1} trois macro-fractures sont présentes, à environ $x_r = 55$mm du bord de l'interface barre de transmission/échantillon



(a) Vitesse d'impact : 7m.s^{-1}. *Au niveau des échelles, le rouge indique une vitesse de* $5m.s^{-1}$*, et le jaune une vitesse de* $2.5m.s^{-1}$.



(b) Vitesse d'impact : 12m.s^{-1}. *Au niveau des échelles, le rouge indique une vitesse de* $12m.s^{-1}$*, le jaune une vitesse de* $6m.s^{-1}$*, et le violet une vitesse nulle.*



(c) Vitesse d'impact : 15m.s^{-1}. *Au niveau des échelles, le rouge indique une vitesse de* $12m.s^{-1}$*, l'orange une vitesse de* $9m.s^{-1}$*, et le violet une vitesse presque nulle.*

FIGURE 5.11 – Visualisation de la vitesse dans l'éprouvette et des macro-fracturations en fonction de la vitesse d'impact du projectile

pour la première fracture, à environ $x_r = 32$mm pour la seconde, et environ $x_r = 10$mm pour la dernière, engendrant ainsi quatre macro-fragments.

Toutefois, dans les résultats numériques, il y a une apparition d'une macrofracturation proche de la barre de transmission, et qui n'est pas observée expérimentalement. Il y a également une sous-estimation des niveaux de pression.

4 Conclusions du chapitre

L'objet de ce chapitre était d'appliquer à une structure plus complexe le modèle probabiliste de Denoual combiné à la méthode des éléments discrets. Ce test était destiné à observer de manière « qualitative »le phénomène de la fragmentation sur un modèle en trois dimensions en traction. A noter qu'un modèle numérique en trois dimensions est beaucoup plus complexe à mettre en œuvre qu'un modèle en deux dimensions, notamment pour le calcul des forces et des moments entre les particules, nécessitant un temps de calcul plus long.

Cet essai a été modélisé avec un nombre relativement restreint de particules, mais suffisant pour pouvoir capter l'onde incidente créée par l'impact du projectile sur la barre de transmission.

Malgré un maillage relativement grossier, ces modèles numériques en traction dynamique sont capables d'avoir une macrofracturation assez voisine des essais expérimentaux, et qui évolue en fonction de la vitesse d'impact du projectile. Toutefois, comme on l'a vu dans le précédent paragraphe, il y a une macrofracturation proche de la barre de transmission. « Qualitativement », ces premières simulations numériques sont prometteuses, et l'introduction de l'anisotropie dans le modèle pourrait remédier à ces problèmes.

Conclusions et perspectives

L'objectif de ce travail de thèse a été de modéliser avec une méthode aux éléments discrets la fracturation, et plus particulièrement la fragmentation dynamique, sur des matériaux fragiles pour de hautes vitesses de déformation.

La modélisation numérique de la fragmentation est un challenge, car c'est un phénomène non linéaire, et statistique. La modélisation de ce phénomène consiste à établir des modèles numériques permettant de prédire les différentes données statistiques des fragments, comme la taille des fragments, le nombre de fragments formés, l'énergie dissipée par la fracturation, etc.

La fracturation, et plus encore la fragmentation dynamique, est par nature discrète. Pour cette thèse, la Méthode des Éléments Discrets (DEM) s'est révélée être un excellent moyen pour simuler cette fracturation dynamique en raison de sa nature qui est également discrète.

Toutefois, une bonne méthode de simulation numérique ne suffit pas à elle seule pour modéliser la fragmentation dynamique. Un critère de rupture doit également être inséré, afin d'introduire un endommagement. Ce critère de rupture s'écrit au niveau d'un lien entre deux particules et il engendre un dommage, en faisant décroître la contrainte locale jusqu'à l'obtention d'une fissuration discrète. Il doit également être dépendant du matériau modélisé.

Dans la première partie de la thèse, un critère de rupture de Camacho-Ortiz [24] a été introduit dans notre méthode d'éléments discrets comme premier critère de rupture. Ce critère se traduit par un endommagement en fonction d'une ouverture de fissure. Quand la contrainte locale atteint une contrainte seuil de rupture, elle décroît linéairement en fonction d'une ouverture de fissure. Quand l'ouverture de fissure atteint une ouverture maximale de rupture, la contrainte locale devient nulle et le lien est rompu.

Ce critère de rupture a été testé sur une simulation simple de poutre en traction dynamique uni-axiale, et a montré des résultats équivalents à une méthode par éléments finis où ce même critère avait été introduit [97]. Une simulation de plaque en traction bi-axiale en deux dimensions a également été testée, avec des faibles vitesses de déformations. Malgré une bonne convergence des paramètres statistiques de la fragmentation, ce critère de rupture nécessite un grand nombre de particules, rendant impossible la modélisation de cas complexes à de hautes vitesses de déformation avec les moyens informatiques actuels. Enfin, avec ce critère de rupture, des paramètres statistiques, comme l'énergie dissipée par la fracturation ou la distribution de la taille des fragments, sont indépendants du nombre de particules que si le nombre de fragments formés est lui aussi indépendant.

Afin d'envisager la modélisation de la fragmentation sur des modèles plus complexes, notre objectif a été de combiner aux éléments discrets un autre critère de

rupture, plus représentatif des observations expérimentales de la fragmentation dynamique. Ce second critère de rupture s'appuie sur une approche physique différente, qui prend en compte l'hétérogénéité des matériaux fragiles avec leurs défauts susceptibles d'évoluer et de provoquer une rupture locale.

Ce critère de rupture, développé par Denoual et Hild, fait intervenir une loi probabiliste de Weibull [31, 42] afin d'introduire des défauts par élément de volume. Quand la contrainte locale atteint une contrainte seuil d'activation, des défauts sont introduits avec une loi de Weibull en fonction de la contrainte locale. Ensuite, ces défauts se propagent en formant des zones de relaxation où aucun défaut ne peut évoluer. L'endommagement est introduit avec ces surfaces de relaxation.

Ce modèle probabiliste, introduit dans notre méthode aux éléments discrets, a été validé dans un premier temps sur des cas simples. Ces modèles numériques ont permis de rendre indépendant au nombre de particules des paramètres statistiques comme l'énergie dissipée ou la distribution des tailles des macro-fragments avec des maillages grossiers. Le gain sur le nombre de particules nécessaires de ce critère de rupture pour avoir une convergence dans le code aux éléments discrets est de l'ordre de 100 entre les deux approches, pour des hautes vitesses de déformation supérieures à $\dot{\epsilon} = 10^4 s^{-1}$.

Une modélisation en trois dimensions de barre d'Hopkinson en traction dynamique a également été effectuée, afin d'observer de manière « qualitative »dans un premier temps les intérêts de cette méthodologie. Ces premiers essais ont été capables d'observer une macrofracturation assez voisine des essais expérimentaux, et qui évolue en fonction de la vitesse d'impact du projectile. Mais, sur ces tests, une macrofracturation proche de la barre de transmission est observée, qui n'est pas visible dans les essais expérimentaux (Fig.5.12).

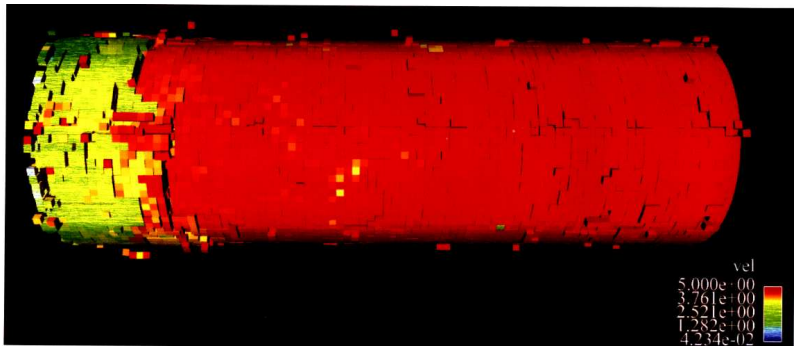


FIGURE 5.12 – Résultats d'un essai de traction dynamique avec des barres de Hopkinson avec une vitesse d'impact de 7m/s

Les principaux apports de ces travaux de thèse ont porté sur deux points :

- L'introduction de critères de rupture, de nature discrète ou probabiliste, dans une méthode aux éléments discrets ;
- L'emploi des paramètres statistiques sur les fragments comme outil de validation, ainsi que des comparaisons avec des essais expérimentaux, pour valider la modélisation numérique.

Concernant les limitations, le modèle de Weibull est par essence statistique et macroscopique. Il reconnaît la présence de défauts car ils sont à l'origine de la rupture, et ils sont présents dans le matériau. La principale limitation de ce modèle est le fait qu'il ne s'intéresse qu'aux effets des défauts initiaux dans le matériau menant à la rupture et non aux causes de ces défauts. En outre, ce modèle repose sur une fonction considérée comme une caractéristique du matériau $n(\sigma)$ qui est fonction de la contrainte locale. Cette hypothèse est très forte, car la réponse des défauts dépend de leur distribution, de leur orientation, de leur nature et du champ de contraintes. La loi puissance proposée pour $n(\sigma)$ est simple et commode, mais elle n'est pas forcément toujours vraie et doit être modifiée pour les champs multiaxiaux de contraintes.

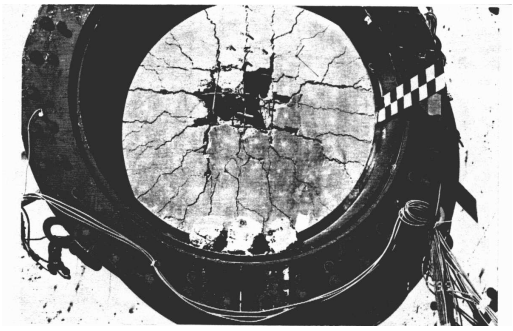
En outre, la qualité de la prédiction dépend en partie des caractéristiques des matériaux (module de Weibull, etc.) que l'on établit avec des essais expérimentaux. Une grande incertitude sur l'estimation de ces paramètres des matériaux peut conduire à une mauvaise prédiction des paramètres statistiques de la fragmentation.

Malgré ces limitations, le modèle probabiliste présente de nombreux avantages :

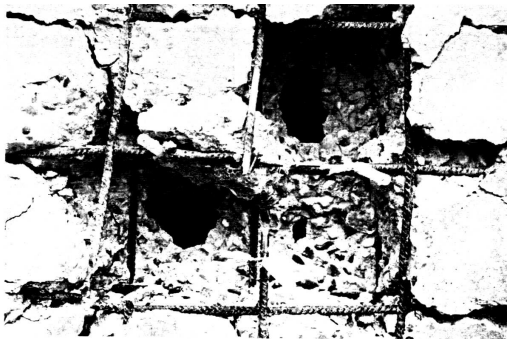
- Tout d'abord, il a une forme très simple. Il fait seulement intervenir deux paramètres qui peuvent être estimés facilement à partir des mesures de résistance à la rupture.
- Il permet de décrire la rupture et la distribution statistique des résistances à la rupture d'un grand nombre de matériaux, dans des conditions de sollicitation simple (traction uniaxiale).

Aussi, sa forme est très simple, et permet de décrire un grand nombre de matériaux, qu'ils soient fragiles ou non.

Dans cette thèse, le modèle probabiliste de Denoual a été introduit dans un code aux éléments discrets et seul des cas tests simples ont été validés. Une des perspectives de ce travail serait d'étendre cette validation à plus de cas en trois dimensions. Ensuite, la compréhension entre l'écart entre la modélisation numérique et les essais expérimentaux concernant la macrofracturation proche de la barre de transmission serait une seconde perspective. Enfin, ce modèle probabiliste n'a été implémenté que pour des cas en tension. La mise en place de l'anisotropie de l'endommagement serait une autre perspective.



(a) Dalle après un tir avec des morceaux détachés



(b) Rupture des fils d'aciers situés au centre de la dalle

FIGURE 5.13 – Perspectives : Exemple d'une modélisation plus complexe avec de la flexion : le comportement au souffle de structures en béton armé [106]

Bibliographie

[1] Abe, S., Mair, K., Effects of gouge fragment shape on fault friction : New 3D modelling results, Geophysical Research Letters, Vol.36, Issue 23 (2-5) (2009)

[2] Abedi, R., Haber, R., Thite, S., Erickson, J., An adaptative space-time discontinuous Galerkin method for linear elastodynamics, Revue Européenne de Mécanique Numérique, vol.15, 609-758 (2006)

[3] Achenbach, J.D., Bazant, Z.P., Elastodynamic near tip stress and displacements fields for rapidly propagating crack in orthotropic materials, J. Appl. Mech., Vol.97 (183-189) (1975)

[4] D'Addetta, G., Kun, F., Ramm, E., On the application of a discrete model to the fracture process of cohesive granular materials, Granul. Matter, 4, 77-90 (2002)

[5] Allen, M., Tildesley, D., Computers Simulations of liquids, Oxford University Press (1987)

[6] Arias, A., Forquin, P., Zaera, R., Navarro, C., Relationship between static and compressive behaviour of particle-reinforced cement composites, Composites : PartB, 39, 1205-1215 (2008)

[7] Babuska, I., Melenk, J.M., The partition of unity method, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol.40, 727-758 (1997)

[8] Barenblatt, G.I., On the wedging of brittle bodies, Original Research article, J. of Appl. Mathematics and Mechanics, Vol.24 (993-1015) (1960)

[9] Batoz, J.L., Dhatt, G., Modélisation par des structures par éléments finis, Pu Laval Presse Univers (2002)

[10] Belytschko, T., Black, T., Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol.45, 601-620 (1999)

[11] Bennett, J.G., Broken coal., J. of the Institude of Fuel, Vol. 10 (22-39) (1936)

[12] Boutin, R., Micrographie électronique à balayage, Université de La Rochelle (France), Centre commun d'analyse (1998)

[13] Bouyne, E, Propagation et arrêt de fissure de clivage dans l'acier 2 1/4Cr-1 Mo, thèse, Paris : École des Mines de Paris (1999)

[14] Budyn, E., Zi, G., Moes, N., Belytschko, T., A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing, Int. J. of Num. Methods in Eng., Vol.61 (1741-1770) (2004)

[15] Bui, H.D., Mécanique de la rupture fragile, ISBN : 2-225-48312-4, Masson, Paris (1977)

[16] Bui, H.D., Maigre, H., Rittel, D., A new approach to the experimental determination of the dynamic stress intensity factor, Int. J. Solids Struct., vol.29 (2881-2895) (1992)

[17] Brara, A., Klepackzo, J.R., Étude expérimentale de l'écaillage du béton, rapport interne N°02/98/LPMM (1998)

[18] Brajer, X., Hild, F., Roux, S., ON the dynamic fragmentation of glass : a meso-damage model, Int. J. of. Frac. (2010)

[19] Burgers, J.M., Further statistical problems connected with the solution of a simple nonlinear partial differential equation, Proc. Kon. Nederlanse Akad. van Wet., Series b, Vol. 57 (159-169) (1954)

[20] Cagnoux, J., Déformation et ruine d'un verre pyrex soumis à un choc intense : étude expérimentale et modélisation du comportement. Thèse d'état, Université de Poitiers

[21] Calvetti, F., Discrete modelling of granular materials and geotechnical problems, Europ.J. of Envi. and Civil Eng., 12, 951-965 (2008)

[22] Camborde, F., Modélisation du comportement dynamique du béton, application aux problèmes d'impacts et d'explosions, thèse (1999)

[23] Camborde, F., Mariotti, C., Donze, F.V., Numerical study of rock and concrete behaviour by discrete element modelling, Comput. Geotech., 27(4), 225-247 (2000)

[24] Camacho, G.T., Ortiz, M., Computational modelling of impact damage in brittle materials, Int. J. Solids Struct., 33, 2899-2938 (1996)

[25] Chessa, J., Wang, H., Belytschko, T., On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite element, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol.57, 1015-1038 (2003)

[26] Clifton, R.J., Freund, L.B., On the uniqueness of plane elastodynamic solutions for running cracks, J. of elasticity, vol.4 (293-299) (1974)

[27] Cundall, P., Strack, O., A Discrete numerical model for granular assemblies, Geotech., 29, 47-65 (1979)

[28] Dagrau, F., Simulation de la propagation du bang sonique, de la CFD à l'acoustique non linéaire, thèse, Université Paris VI (2009)

[29] Davies, D.G.S., The statistical approach to engineering design in ceramics, Proceeding Brit. Ceram. Soc., Vol. 22, 429-452 (1973)

[30] Del Pino, S., Despres, B., Have, P., Jourdren, H., Piserchia, P.F., 3D Finite Volume simulation of acoustic waves in the earth atmosphere, Computers fluids, Vol.38 (765-777) (2009)

[31] Denoual, C., Approche probabiliste du comportement à l'impact du carbure de silicium : Application aux blindages moyens, thèse (1998)

[32] Denoual, C., Hild, F., A damage model for the dynamic fragmentation of brittle solids, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 183, 247-258 (2000)

[33] Denoual, C., Hild, F., Dynamic fragmentation of brittle solids : a multi-scale model, European J. of Mech., 21, 105-120 (2002)

[34] Doan, M.L., Cornet, F.H., Small pressure drop triggered near a fault by small teleseismic waves, In Earth Planet. Sci. Lett., 258 (1-2) : 207-218 (2007)

[35] Doan, M.L., Gary, G., Rock pulverisation at high strain rate near the San Andreas Fault, In Nature Geoscience. 2 :709-712 (2009)

[36] Elguedj, T., Gravouil, A., Combescure, A., Appropriate extended functions for xfem simulation of plastic fracture mechanics, Comp. Methods in Appl. Mec. and Eng., Vol.195 (501-515) (2006)

[37] Erzar, B., Forquin, P., An experimental method to determine the tensile stregth of concrete at high rates of strain, Experimental Mechanics, Vol.50 (7), 941-955 (2010)

[38] Farhat, C., Harari, I., Franca, L.P., The discontinuous enrichment method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.190, 6455-6479 (2001)

[39] Fedelinski, P., Boundary element method in dynamic analysis of structures with crack, Eng. Analysis with Boundary Element, Vol.28 (1135-1147) (2004)

[40] Forquin, P., Endommagement et fissuration de matériaux fragiles sous impact balistique, rôle de la microstructure. Ph.D. thesis, LMT Cachan, France (2003)

[41] Forquin P, Hild F Dynamic fragmentation of an ultrahigh strength concrete during edge-on impact tests. J Eng Mech , 134, (302-315)(2008)

[42] Forquin P, Hild F A probabilistic damage model of the dynamic fragmentation process in brittle materials. Adv in Appl Mech Giessen Are Feds., Vol.44, 1-72. Academic Press, San Diego, CA (2010)

[43] Forquin, P., Tran, L., Louvigné, P.F., Rota, L., Hild, F., Effect of aluminium reinforcement on the dynamic fragmentation of SiC ceramics, Int. J. of Impact Eng., 28, 1061-1076 (2003)

[44] Forquin, P., Denoual, C., Cottenot, C.E., Hild, F., Experiments and modelling of the compressive bahaviour of two SiC ceramics, Mechanics of Materials, 35, 987-1002 (2003)

[45] Forquin, P., Arias, A., Zaera, R., An experimental method of measuring the confined compression strength of geomaterials, Int. J. of Sol. and Struc., 44, 4291-4317 (2007)

[46] Forquin, P., Arias, A., Zaera, R., Role of porosity in controlling the mechanical and impact behaviours of cement-based materials, Int. J. of Impact Eng., 35, 133-146 (2008)

[47] Forquin, P., Gary, G., Gatuingt, F., A testing technique for concrete under confinement at high rates of strain, Int. J. of Impact Eng., 35, 425-446 (2008)

[48] Forquin, P., Erzar, B., Dynamic fragmentation process in concrete under impact and spalling tests, Int. J. Fracture, Vol.163, 193-215 (2010)

[49] Francois, D., Pineau, A., Zaoui, A., Comportement mécanique des matériaux : viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact, Hermès, Paris, ISBN : 2-86601-348-4, ISSN 0986-4873 (1995)

[50] Freund, L.B., Rice, J.R.,On the determination of elastodynamic crack tip stress field, Int. J. Solids Struct.,

[51] Freund, L.B., Crack propagation in an elastic solid sujected to general loading, J. Mech. Phys. sol., vol.20 (129-140) (1972)

[52] Freund, L.B., Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid, J. Elasticity, Vol.2 (341-350) (1972)

[53] Freund, L.B., Dynamic fracture mechanics, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Matematics, book (1989)

[54] Friedel, J, Les dislocations, Paris, Gauthier-Villars, 1956

[55] Garrigues, J., La méthode des éléments finis, École supérieure de Mécanique de Marseille (2002) 06)

[56] Georgin, J.F., Reynouard, J.M., Effet de vitesse et effet d'échelle dans la rupture des matériaux à matrice cimentaire, INSA Lyon

[57] Ginter, S., Liebler, M., Steiger, E., Dreyer, T., Riedlinger, R., Full-wave modelling of therapeutic ultrasound : nonlinear ultrasound propagation in ideal fluids, J. Acoust. Soc. am., Vol.111 (2049-2059) (2002)

[58] Glenn and Chudnovsky, Strain-energy effects in dynamic fragmentation, J. Appl. Phys., 59, 1379-1380 (1986)

[59] Grady, D.E., Kipp, M.E., Continuum modelling of explosive fracture in oil shale, Int. J. Rock Mech. Mining Sci. Geomech. Abstract 17, 147-157 (1980)

[60] Grady, D.E., Local inertial effects in dynamic fragmentation, J. Appl. Phys., 53, 322-325 (1982)

[61] Grady, D.E., Kipp, M.E., Geometric statistics and dynamic fragmentation, J.Appli. Phys., 58, 1210,1222 (1985)

[62] Grady, D.E., Particle size statistics in dynamic fragmentation, J. Appl. Phys., 68, 6099-6105 (1990)

[63] Grange, S., Forquin, P., Mencacci, S., Hild, F., On the dynamic fragmentation of two limestones using edge-on impact tests, Int. J. of Impact Eng., 35, 977-991 (2008)

[64] Gravouil, A., Moes, N., Belytschko, T., Non planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets : Part ii : Level set update, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol.53, 2569-2586 (2002)

[65] Griebel, Knapek, Zumbusch, Caglar, Numerische Simulation in der Molekulardynamik, Springer, ISBN 3-540-41856-3 (2004)

[66] Harthong, B., Modélisation du comportement des poudres métallisques à l'échelle du grain, thèse de l'université Joseh Fourrier de Grenoble (2010)

[67] Hajjaj, M., Propagation et arrêt de fissure dans les cuves de réacteurs à eau préssurisée, thèse, École centrale de Paris (2006)

[68] Hild, F., De la rupture des matériaux à comportement fragile, Thèse de l'université Paris VI (1992)

[69] Hild, F., Denoual, C., Forquin, P., Brajer, X., On the probabilist-deterministic transition involved in a fragmentation process of brittle materials, Comput. Struct., 81, 1241-1253 (2003)

[70] Hoover, W.G., Arthust, W.T., Olness, R.J., Two-dimensional studies of crystal stability and fluid viscosity, J.Chem. Phys., 60, 4043-4047, 1974

[71] Hopkinson, B., A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by impact of bullets, Phil. Trans., v

[72] Hopkinson, A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the impact of bullets, Phil. Trans., Royal Soc. of London, Serie A. (437-456) (1914)

[73] Huang, H., Costanzo, F., On the use of space-time finite elements in the solution of elastodynamic fracture problems, Internation Journal of fracture, vol.127, 119-146 (2004)

[74] INPL Nacy, www.tice.inpl-nancy.fr, cours de probabilité

[75] Irwin, G.R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, J. Appl. Mech., vol24 (361-364) (1957)

[76] Jean, M., The non-smooth contact dynamics method, Comp. Methods in Appl. Mechanics and Eng., Vol.177 (235-257) (1999)

[77] Jerier, J.F., Modélisation de la compression haute densité des poudres métalliques ductiles par la méthode des éléments discrets, thèse de l'université Joseph Fourier de Grenoble (2009)

[78] Kandil, O.A., Yang, Z., Bobitt, P.J., Prediction of sonic boom signature using Euler-full potential CFD with grid adaptation and shock fitting, AIAA Paper (2002-3677) (2002)

[79] Kebir, H., Roelandt, J.M., Foulquier, J., A new singular boundary element for crack problems : Applications to bolted joints, Eng. Fract. Mec., Vol.62 (497-510) (1999)

[80] Kipp, M.F., Grady, D.E., Chen, E.P., Int. J. Fract., Vol.6 471 (1980)

[81] Klepaczko, J.R.n A generale approach to rate sensitivity and constitutive modelling of FCC and BCC metals, Impact : effect of fast transient loading, Eds. W.J. Amman et al, A.A. Balkema, Vol.3 (1988)

[82] Kobayashi, A.S., Seo, K., Jou J.Y., Urabe, Y., A dynamic analysis of modified compact-tension specimens using homalite-100 and polycarbonate plates, Experimental Mechanics, vol.20, 73-79 (1980)

[83] Labbens, R., Introduction à la mécanique de la rupture, Editions Pluralis, PAris (1980)

[84] Lamon, J., Mécanique de la rupture fragile et de l'endommagement, approches statistiques et probabilistes, Ed.Lavoisier, Livre (2007)

[85] Lankford, J., Blanchard, C.R., Fragmentation of brittle materials at high rates of loading, J. Master. Sci., 26, 3067-3072

[86] Larbi, Gueraïcfie, Mise au point du dispositif à barre de pression d'Hopkinson divisée (BPHD), présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère, Université de M'Sila (2008)

[87] Lemaitre, J., Chaboche, J.L., Mécanique des matériaux solides, Bordas, ISBN 2-04-018618-2 (1988)

[88] Levy, S., Molinari, J.F., Dynamic fragmentation of ceramics, signature of defects and scaling of fragment sizes, J. of the Mech. and Physics of Sol, Vol. 58, 12-26 (2010)

[89] Levy, S., Exploring the physics behind Dynamic Fragmentation through Parallel Simulations, Thesis of EPFL (2010)

[90] Liebowitz, H., Fracture, Academix Press, New York (1969)

[91] Lienau, C.C., Random fracture for britlle solid, J. of the Franklin Institute, Vol. 221 (485-494, 674-686, 769, 787) (1936)

[92] Malluck, J.F., King, W.W., Fast fracture simulated by the conventinnal finite elements : A comparison of two energy-release algorithms, Crack Arrest Methodology and Applicarions, Vol 711, 38-53 (1980)

[93] Mariotti, C., Lamb's problem with the lattice model Mka3D, Geophys. J. Int., 171, 857-864 (2007)

[94] Menouillard T., Réthoré, J., Combescure, A., Bung, H., Efficient explicit time stepping for the X-FEM, Int. J. of Num. Methods in Eng., Vol.68 (911-939) (2006)

[95] Miller, O., Freund, L.B., Needleman, A., Modeling and simulation of dynamic fragmentation in brittle materials, Int. J. Frac., 96, 101-125 (1999)

[96] Moes, N, Dolbow, J., Belytschko, T., A finite element method for crack growth without remeshing, Int. J. Num. Meth. Eng., 46, 131-150 (1999)

[97] Molinari, J.F., Gazonas, G., Raghupathy, R., Rusinek, A., Zhou, F., The cohesive element approach to dynamic fragmentation : the question of energy convergence, Int. J. for Num. Methods in Eng., 69, 484-503 (2007)

[98] Mosnier, M., Étude expérimentale de la fissuration dynamique de plaques : application à la fragmentation de réservoirs, thèse (2006)

[99] Mott, N. F. Fragmentation of Shell Cases, Proc. Royal Soc., A189, 300-305, (1947)

[100] Mühlhaus, H.B., Hornby, P., Energy and averages in the mechanics of granular materials, Tectonophysics, Vol.335 (65-80) (2001)

[101] Nilson, F., A note on the stress-singularity at a non uniforly moving crack tip, J. of elasticity, vol4 (73-75) (1974)

[102] Nishioka, T., Atluri, S.N., Numerical modeling of dynamic crack propagation infinite bodies, by moving singular elements, Part 1 : Formulation, Journal of Applied Mechanics, vol.47, 570-582 (1980)

[103] Pandolfi, A., Krysl, P., Ortiz, M., Finite element simulation of ring expansion and fragmentation : the capturing of length and time scales through cohesive models of fracture, Int. J. Fract., 95, 279-297 (1999)

[104] Pandolfi, A., Guduru, P.R., Ortiz, M., Three dimensional cohesive-element analysis and experiments of dynamic fracture in C300 steel, International Journal of Solids and Structures, vol.37, 3733-3760 (2000)

[105] Partom, V.Z., Boriskovsky, V.G., Dynamic Fracture Mechanics - Volume 1 : Stationnary cracks, ed. Hetnarski R.B., Hemisphere Publishing Corporation (1989)

[106] Pontiroli, C., Comportement au souffle des structures en béton armé, Laboratoire de Mécanique et Technologie (E.N.S. Cachan), thèse, 1995

[107] Potyondy, D., Cundall, P., A bonded-particle model for rock, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 41, 1329-1364 (2004)

[108] Prabel, B., Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve rep, thèse, 2007

[109] Ravi-Chandar, K., Knauss, W.G., An experimental investigation into dynamic fracture mechanics. Part IV : On the interaction of stress waves with propagating cracks, Int. J. Fract., Vol.26 (189-200) (1984)

[110] Recho, N., Rupture par fissuration des structures, Hermès, PAris, ISBN : 2-86601-4888-X, ISSN 1158-3509 (1995)

[111] Rénier, M., Contribution à l'étude de la pression de radiation acoustique : application à la non linéarité de l'élasticité de cisaillement des solides mous, thèse de l'université Paris VII (2008)

[112] Rénier, M., Dagrau, F., Marchiano, R., Coulouvrat, F., HOWARD : un modèle pour la propagation d'ondes de choc acoustiques en milieu hétérogène, au-delà de l'approximation parabolique, 10ème COngrès Français d'Acoustique, Lyon (2010)

[113] Réthoré, J., Gravouil, A., Combescure, A., A stable numerical scheme for finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.193, 4493-4510 (2004)

[114] Réthoré, J., Méthode des éléments finis étendus en espace et en temps : Application à la propagation dynamique des fissures, thèse (2005)

[115] Ribeaucourt, R., Gestion du contact avec frottement le long des faces de fissures dans le cadre de la méthode X-FEM. Application à la fatigue tribologique, thèse (2006)

[116] Rice, J.P., Mathematical analysis in the mechanics of fracture, Fracture, Ed. Liebowitz H., Vol.2 (191-311) (1968)

[117] Rouabhi, A., Comportement et fragmentation dynamiques des matériaux quasi-fragiles, Thèse (2004) ol. 213A, 1914, pp. 437-456

[118] Rosin, P., Rammler, E., The laws governing the fineness of powdered coal., J. of the Institute of Fuel, Vol.7 (29-36) (1933)

[119] Rusinek, A., Zaera, R., Forquin, P., Klepaczko, J.R., Effect of plastic deformation and boundary conditions combined with elastic wave propagation on the collapse site of a crash box, Thin-Walled Struc., 46, 1143-1163 (2008)

[120] Sammis, C.G., Biegel, R.L., Fractals, fault-gouge and friction, Pure and Applied Geophysics PAGEOPH, Vol.131 (255-271) (1989)

[121] Scottl, D.R., Marone, C.J., Sammis, C.G, The apparent friction of granular fault gouge in sheared layers, Journal of Geophysical Research, Vol.00 (7231-7246) (1994)

[122] Sethian, J.A., Level set methods and fast marching methods, Cambridge University Press (1999)

[123] Shenoy, V.B., Kim, K.S., Discorder effects in dynamic fragmentation of brittle materials, J.Mech. Phys. Solids, 51, 2023-2035 (2003)

[124] Shiu, W., Donze, F.V., Daudeville, L., Penetration prediction of missiles with different nose shapes, Comput. Struc., 86, 2079-2086 (2008)

[125] Sih, G.C., Dynamic aspects of crack propagation, Inelastic behaviour of solids, Eds. Jaffre R.I. (607-634) (1970)

[126] Simone, A., Wells, G., Sluys, L., From continuous to discontinuous failure in a gradient enhanced continuum damage model, Comp. Methods in Appl. Mec. and Eng., Vol.192 (4581-4607) (2003)

[127] Song, J.H., Wang, H., Belytchko, T., A comparative study on finite element methods for dynamic fracture, Private communication (2007)

[128] Souriou, D., Compaction conventionnelle et compaction grande vitesse (CGV) de céramiques : influence du procédé de compactage sur le frittage, thèse de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne (2007)

[129] Sparrow, W. V., Raspet, R., A numerical method for general finite amplitude wave propagation in two dimensions and its application to spark pulses, J. Acoust. Soc. Am. Vol.90 (2683-2691) (1991)

[130] Stolarska, M., Chopp, D.L., Moes, N., Belytschko, T., Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol.51, 943-960 (2001)

[131] Strassburger, E., Senf, H., Rothenhäusler, H., Fracture propagation during impactin three types of ceramics, J. Phys. IV (1994)

[132] Tappert, F.D., The paraboloc approximation method, in wave Propagation and Underwater Acoustics, J.B. Keller and J.S. Papadakis eds., Springer (New York) (224-287) (1977)

[133] Vanhille, C., Campos-Pozuelo, C., Numerical simulation of two-dimensional nonlinear standing acoustic waves, J. Acoust. Soc. Am., Vol.116 (194-200) (2004)

[134] Weibull, W., A statistical theory of strength of materials, Proceedings of the Ingeniors Vetenskapsakad (151) (1939)

[135] Wells, G.N., Sluys, L.J., A new methof formodelling cohesive cracjs using finite elements, Int. J. of Num. Methods in Eng., Vol.50 (2667-2682) (2001)

[136] Xu, X.P., Needleman, A., Numerical simulations of fast crck growth in brittle solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol.42, 1397-1407 (1994)

[137] Yano, T., Inoue, Y., Strongly nonlinear waves and streaming in the near field of a circular piston, J. Acoust. Soc. am., Vol.90 (3353-3372) (1996)

[138] Yoffe, H., The moving griffith crack, Philosophical magazine, vol.42 (739-750) (1951)

[139] Yuritzinn, T., Blanchet, N., Rapport d'avancement 2004 de la fiche « Analyse du critère Kla pour l'arrêt de fissure », Rapport SEMT/LISN/RT/04-048/A, CEA, 2004

[140] Zi, G., Belytschko, T., New crack tip elements for X-FEM and applications to cohesive cracks, Int. J. or Num. Methods in Eng., Vol.57 (2221-2240) (2003)

[141] Zhou, F., Molinari, J.F., Dynamic crack propagation with cohesive elements : a methodology to address mesh dependency, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol.59, 1-24 (2004)

[142] Zhao, C., Hobbs, B.E., Walshe, J.L., Mühlhaus, H.B., Ord, A., Finite element modeling of fluid-rock interaction problems in pore-fluid saturated hydrothermal/sedimentary basins, Comp. Met. in Applied Mec. and Eng., Vol.190 (2277-2293) (2001)

[143] Zhou, F., Molinari, J.F., Ramesh, K.T., A cohesive model based fragmentation analysis : effects of strain rate and initial defects distribution, Int. J. Sol. and Struc., 42, 5181-5207 (2005)

[144] Zhou, F., Molinari, J.F., Ramesh, K.T., Analysis of the brittle fragmentation of an expanding ring, Comp. Mat. Sc., 37, 74-85 (2006)

[145] Zhou, F., Molinari, J.F., Ramesh, K.T., An elastic-visco-plastic analysis of ductile expanding ring, Int. J. of impact Eng., 33, 880-891 (2006)

[146] Zhou, F., Molinari, J.F., Ramesh, K.T., Characteristic fragment size distributions in dynamic fragmentation, Appl. Phys. Letters, 88, 261918 (2006)

[147] Zhou, F.H., Molinari, J.F., Ramesh, K.T., Effects of material properties on the fragmentation of brittle mateirals, Int. J. of Fracture, 139, 169-196 (2006)

[148] Geo-Alps, http ://www.geol-alp.com

[149] Nature-environnement, http ://nature-environnement.blogspot.com