



**HAL**  
open science

# Méthodes hilbertiennes pour la correction d'atténuation en Tomographie d'Émission Monophotonique

Elie Nasr

► **To cite this version:**

Elie Nasr. Méthodes hilbertiennes pour la correction d'atténuation en Tomographie d'Émission Monophotonique. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2008. Français. NNT: . tel-00602011

**HAL Id: tel-00602011**

**<https://theses.hal.science/tel-00602011>**

Submitted on 21 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Elie NASR**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

### DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

\*\*\*\*\*

### MÉTHODES HILBERTIENNES POUR LA CORRECTION D'ATTÉNUATION EN TOMOGRAPHIE D'ÉMISSION MONOPHOTONIQUE

\*\*\*\*\*

Soutenue le 11 Juillet 2008 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

Après avis de :

H. AMMARI	Directeur de recherches, École Polytechnique (CMAP)	<b>Rapporteur</b>
R. NOVIKOV	Directeur de recherches, Université de Nantes	<b>Rapporteur</b>

Devant la commission d'examen composée de :

H. AMMARI	Directeur de recherches, École Polytechnique (CMAP)	<b>Rapporteur</b>
J-F. CROUZET	Maître de conférences, Université Montpellier II	
C. DOSSAL	Maître de conférences, Université Bordeaux I	
C. JEANGUILLAUME	Maître de conférences (HDR), Université d'Angers	
E. OUHABAZ	Professeur, Université Bordeaux I	
A. YGER	Professeur, Université Bordeaux I	<b>Directeur</b>

## Remerciements

Une longue histoire de cinq ans a vu la lumière le 11 juillet à 15h30 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux. Des moments magiques, des moments tragiques, des plaisirs et des délires ont marqué toutes les lignes de ma thèse.

J'avais l'honneur de me battre à côté de mon directeur de thèse Alain Yger qui m'a soutenu jusqu'à la fin sans aucune faille. Il a su orienter mes premiers pas dans la recherche et m'a amené progressivement vers l'autonomie. Grand merci Alain Yger, ton accompagnement était pour moi un enseignement aussi bien humain que scientifique.

Je tiens à remercier Roman Novikov et Habib Ammari d'avoir acceptés d'être les rapporteurs de la thèse et de leurs disponibilités.

El Maati Ouhabaz a accepté de présider le jury de ma thèse, je tiens à lui témoigner le plus grand respect.

Je suis très reconnaissant envers Christian Jeanguillaume et Jean-François Crouzet, qui ont fait le déplacement pour faire partie de ce jury.

Je suis également très reconnaissant envers Charles Dossal qui a accepté d'être le membre du jury le plus jeune. Merci pour ton enthousiasme et les nombreuses discussions que nous avons partagées.

Je tiens à remercier tous les ingénieurs et les secrétaires pour leurs patiences et leurs disponibilités.

Je remercie mon collègue de bureau Abdallah d'avoir supporté le long de ces années un fumeur comme moi. N'est ce pas Baptiste ? merci à toi aussi de ne pas me laisser seul à fumer sous la pluie.

Pendant les années de travail à l'IMB j'ai dû croiser une équipe formée de très bons joueurs. Leur sport préféré s'appelle l'Amitié. Oswaldo, ta caméra est témoin de tous les agréables moments qu'on s'est partagés. Issam, tu es un sacré animateur de soirée, mais commence à acheter tes propres cigarettes ! Radouane, tu crois que tu sais danser ? Walid, je crois que Georges te va mieux (Merci Issam !). Julien, j'attends toujours la bouteille de Boukha. Anders, press play...press play. Pierre, tu veux une bière ? Ludivine, on l'a fini cette thèse. Merci à vous tous les gars (on remarque qu'il y'a peu de fille dans cette équipe. Quelle misère !). Vous étiez pour moi une deuxième famille, je vous dis aurevoir et bonne chance dans la vie.

Un énorme merci à mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi et de moi. Sans eux, cette thèse n'aurait jamais vu la lumière. Michel, Antoinette et Jawad je vous embrasse fortement.

Finalement je tiens à dire à ma petite Elsy que ta forte présence et ton soutien ont été un soulagement et une inspiration pendant la dernière ligne droite de la thèse et les autres lignes de ma vie. Je t'embrasse.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>I</b>
0.1 Principes de l'imagerie médicale . . . . .	I
0.2 Modèle analytique des mesures . . . . .	II
0.3 Correction d'atténuation en TEMP . . . . .	IV
0.4 Plan de la thèse . . . . .	IV
<b>1 Tomographie et imagerie médicale</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.2 Les Différentes Techniques d'Imagerie Médicale . . . . .	2
1.2.1 Imagerie morphologique . . . . .	2
1.2.2 Imagerie fonctionnelle . . . . .	5
1.3 La Tomographie d'Émission Monophotonique . . . . .	7
1.3.1 Les radiotraceurs . . . . .	7
1.3.2 Le dispositif de détection . . . . .	9
1.4 Types d'acquisition . . . . .	13
1.4.1 Le mode statique planaire . . . . .	13
1.4.2 Le mode tomographique . . . . .	13
1.4.3 Rangement des données : le sinogramme . . . . .	14
1.5 Les limites de l'imagerie TEMP . . . . .	15
1.5.1 Facteurs physiologiques . . . . .	15
1.5.2 Facteurs technologiques . . . . .	16
1.5.3 Facteurs physiques . . . . .	17
1.5.4 L'atténuation . . . . .	20
<b>2 Modélisation et reconstruction en TEMP</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Le modèle simplifié en TEMP . . . . .	23
2.2.1 Le modèle physique . . . . .	23
2.2.2 La transformée de Radon . . . . .	25
2.3 Méthodes analytiques de reconstruction . . . . .	27
2.3.1 Le théorème de la coupe centrale . . . . .	27

2.3.2	La rétroprojection filtrée . . . . .	29
2.3.3	Implémentation numérique de la rétroprojection filtrée . . . . .	31
2.3.4	Exemples de reconstruction numériques . . . . .	34
2.4	Méthodes algébriques de reconstruction . . . . .	37
2.4.1	Formulation algébrique du problème . . . . .	38
2.4.2	Calcul de la matrice de projection . . . . .	39
2.4.3	Dualité entre l'aspect algébrique et analytique . . . . .	40
2.4.4	Résolution itérative du problème algébrique . . . . .	40
2.4.5	Méthode MLEM . . . . .	41
2.4.6	Méthode OSEM . . . . .	43
2.4.7	Méthode ART . . . . .	44
2.5	Le modèle réaliste en TEMP . . . . .	46
2.5.1	L'atténuation . . . . .	46
2.5.2	Estimation de la carte d'atténuation du patient . . . . .	47
2.5.3	La transformée de Radon atténuée . . . . .	48
2.6	Méthodes analytiques de correction de l'atténuation . . . . .	49
2.6.1	Méthodes de correction de l'atténuation sur les projections acquises . . . . .	49
2.6.2	Méthodes de correction de l'atténuation sur les coupes reconstruites . . . . .	51
2.7	Les méthodes itératives de correction de l'atténuation . . . . .	51
2.7.1	La méthode de Chang itérative . . . . .	52
2.7.2	Modélisation de l'atténuation dans l'opérateur de projection-rétroprojection . . . . .	52
2.8	Conclusion . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Accurate attenuation correction for algebraic reconstruction technique in SPECT</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Kaczmarz's method . . . . .	61
3.3	Derivation of the algorithm . . . . .	63
3.4	Numerical simulations . . . . .	65
3.4.1	Phantoms . . . . .	66
3.4.2	Reconstruction . . . . .	67
3.4.3	Reconstruction from noisy data . . . . .	75
3.5	Conclusion and discussion . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Algorithmes et simulations numériques</b>	<b>79</b>
4.1	Introduction . . . . .	79
4.2	Le modèle direct . . . . .	79
4.2.1	Discrétisation de la transformation de Radon atténuée . . . . .	80

---

4.2.2	Algorithmes . . . . .	82
4.3	Résultats numériques . . . . .	84
4.4	Méthode de reconstruction algébrique . . . . .	87
4.4.1	Cadre mathématique . . . . .	87
4.4.2	Algorithme numérique . . . . .	88
4.5	Résultats numériques . . . . .	90
4.5.1	Dépendance en la solution initiale . . . . .	91
4.5.2	Influence de l'ordre d'acquisition . . . . .	92
4.5.3	Contraintes physiques . . . . .	94
4.5.4	Choix du paramètre de relaxation . . . . .	97
4.5.5	Reconstruction avec des données incomplètes . . . . .	98
4.6	Conclusions . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Résultats de reconstruction</b>	<b>107</b>
A.1	Solution initiale nulle . . . . .	108
A.2	Solution initiale analytique . . . . .	109
	<b>Bibliographie</b>	<b>112</b>

# Introduction

Cette thèse traite de reconstruction d'images à partir de projections parallèles atténuées. Ce problème mathématique trouve son application principale en imagerie médicale, et en particulier en tomographie d'émission monophotonique avec correction d'atténuation sous l'hypothèse que l'atténuation (supposée quelconque) est connue et quelconque sur la région d'émission. Dans un premier temps, nous décrivons les principes physiologiques et mathématiques de la tomographie d'émission monophotonique. Ensuite, nous présentons une méthode de reconstruction itérative basée sur la prise en considération du phénomène d'atténuation, principal élément perturbateur en imagerie par émission monophotonique. Cette méthode est une généralisation de l'algorithme de reconstruction algébrique classique (ART); elle introduit un terme de correction d'atténuation exact. Finalement, nous exposerons des exemples numériques et nous discuterons de la performance de notre algorithme selon le choix de plusieurs paramètres.

## 0.1 Principes de l'imagerie médicale

Mis à part le principe physique sur lequel ils sont basés, les différents modèles de scanner existants diffèrent par le type d'information qu'ils fournissent. Contrairement aux scanners à rayons X, qui fournissent une information du type anatomique, les scanners utilisés en imagerie nucléaire fournissent une information dite fonctionnelle. L'imagerie nucléaire est une imagerie par émission utilisée en médecine dans un but diagnostique; elle consiste à déterminer la distribution dans l'organisme d'une substance radioactive administrée au patient. Cette substance appelée radiotraceur, va se fixer de manière préférentielle dans l'organe à étudier (coeur, cerveau, ...). La distribution spatiale de concentration de ce radioélément indique l'état fonctionnel local des tissus, comme par exemple leur degré d'irrigation sanguine ou encore leur capacité de fixation du radioélément.

Le but en imagerie nucléaire est de déterminer, nous dirons plutôt reconstruire, une image précise de la distribution spatiale du traceur radioactif. Il existe deux modalités d'imagerie par émission :

- la tomographie d'émission monophotonique TEMP (SPECT pour Single Pho-

ton Emission Computed Tomography) pour laquelle le radiotraceur émet des photons gamma détectés par une gamma caméra ;

- la tomographie par émission TEP de positons (PET pour Positron Emission Tomography) pour laquelle le radiotraceur émet des positons qui, suite à leur annihilation avec des électrons du milieu, donnent lieu à une paire de photons gamma émis en coïncidence.

La seule information accessible sur la distribution spatiale du traceur, et donc les données du problème de reconstruction, est fournie par le scanner. Ce sera Hal Anger qui, au début des années 1960, proposera l’outil moderne de détection des rayons  $\gamma$ , la gamma-caméra : derrière un collimateur percé d’un réseau régulier de trous laissant passer les photons incidents selon une direction privilégiée, un cristal d’iodure de sodium est placé devant un réseau de photomultiplicateurs. Un circuit calcule les coordonnées du point d’impact de chaque photon sur le cristal et à partir de ces coordonnées, l’image est formée sur un oscilloscope cathodique. Les données acquises par le détecteur sont reconstruites à l’aide d’un algorithme de reconstruction afin de fournir une estimation de la distribution multidimensionnelle du radiotraceur dans l’organisme. Le problème de reconstruction d’images en TEMP se heurte cependant aux divers obstacles que sont les limites des performances des détecteurs (en termes de résolution spatiale, de résolution en énergie et de sensibilité de détection), les processus physiques qui dégradent la formation de l’image (tels l’atténuation et la diffusion) et aussi les phénomènes physiologiques liés au patient (tels que les mouvements respiratoire et cardiaque). Il est indispensable d’en tenir compte et de compenser ces divers effets pour avoir une reconstruction fiable d’images à partir des données fournies par le scanner.

## 0.2 Modèle analytique des mesures

Considérons une coupe d’organe dans laquelle une zone active est détectée. Soit  $f(x, y)$  la fonction qui représente la concentration d’activité en un point  $(x, y)$  de cette zone. Lorsque la gamma-caméra tourne autour de l’organe, elle acquiert pour chaque direction  $\theta$  de détection une projection 1D de la coupe 2D.

En effet, en première approximation, le nombre de photons captés par le collimateur au point  $s$  de la caméra est égal à la somme des photons émis le long de la droite passant par ce point et de direction  $\theta^\perp$  et est directement proportionnel à l’intégrale de la fonction  $f$  le long de cette droite (voir figures 1(a) et 1(b)). La projection parallèle de  $f$  dans la direction  $\theta^\perp$  est alors vue comme l’ensemble des intégrales de la fonction  $f$  le long de la famille de droites parallèles  $L(s, \theta) := \{(x, y), \theta = s\}$  de l’espace  $\mathbb{R}^2$ , de direction  $\theta^\perp$  et se situant à la distance  $s$  de l’origine (centre de la zone explorée). Ces projections parallèles de  $f$  régissent les intensités mesurées par la



caméra notées  $g(\theta, s)$  et modélisées par la transformée de Radon  $(\theta, s) \mapsto R_\theta[f](s)$ , définie donc par :

$$R_\theta[f](s) = \int_{\langle(x,y),\theta\rangle=s} f(x, y) d\lambda_{s,\theta}(x, y) = g(\theta, s). \quad (1)$$

Ici  $d\lambda_{s,\theta}$  représente la restriction de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$  sur la ligne  $L(s, \theta)$ , avec

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \theta^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \varphi < \varphi_{\max}.$$

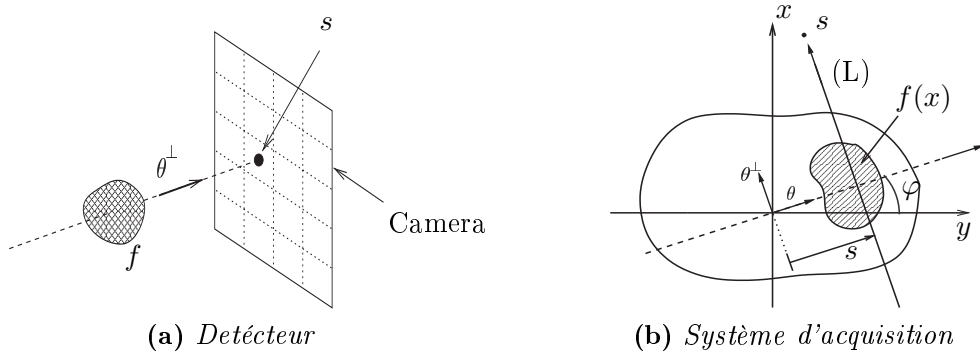


FIG. 1. Scanner

Le problème de la reconstruction d'une fonction  $f$  à partir de ses projections parallèles est aujourd'hui bien maîtrisé (voir Natterer [33]). Cependant, ce modèle est trop simplifié et fournit généralement des images reconstruites de faible qualité et donc d'intérêt limité pour le médecin. Dans la littérature, on parle de reconstruction *sans correction d'atténuation* lorsque ce modèle est tout de même utilisé.

Pour obtenir une reconstruction plus fiable de la distribution spatiale  $f$  du traceur radioactif, il est indispensable de tenir compte de l'atténuation dans le modèle aux fins de pour décrire les projections fournies par le scanner. Décrivons brièvement le phénomène d'atténuation. Les photons émis par le traceur radioactif interagissent avec la matière au cours de leur trajet entre le point d'émission et le détecteur. Les deux principales interactions entre les photons et les électrons de la matière sont l'effet photoélectrique et l'effet Compton; elles conduisent toutes deux à une atténuation du rayonnement photonique, provoquée par une absorption ou un changement de direction d'une partie des photons émis. Les effets photoélectrique et Compton au point  $(x, y)$  sont caractérisés par un coefficient linéique d'atténuation noté  $a(x, y)$ . La fonction  $a(x, y)$  est souvent appelée carte d'atténuation dans la littérature. Elle présente des valeurs ponctuelles typiques  $0.0152\text{mm}^{-1}$  pour le torse,  $0.0032\text{mm}^{-1}$  pour les poumons,  $0.0248\text{mm}^{-1}$  pour la colonne vertébrale. L'atténuation conduit à

une réduction du nombre de photons captés par la caméra d'Anger et le modèle utilisé pour les projections est alors le suivant :

$$R_{a,\theta} [f](s) = \int_{\langle(x,y), \theta\rangle=s} \exp\left(-\int_0^{+\infty} a((x,y) + t\theta^\perp) dt\right) f(x,y) d\lambda_{s,\theta}(x,y) = g_a(\theta, s). \quad (2)$$

L'application  $(s, \theta) \rightarrow R_{a,\theta} [f](s)$  est alors appelée transformation de Radon atténuée de la fonction  $f$ . Il est à noter que ce modèle ne tient pas compte d'autres phénomènes physiques tels la résolution spatiale du détecteur, le bruit statistique du processus d'émission ou encore le diffusé Compton. Néanmoins, l'atténuation est un obstacle majeur à l'obtention d'images reconstruites de qualité. Lorsque ce modèle est utilisé, on parle de reconstruction avec correction d'atténuation.

### 0.3 Correction d'atténuation en TEMP

Avant que Novikov [37] ne propose une solution analytique exacte pour l'inversion de la transformée de Radon atténuée dans un milieu atténuant non uniforme, les effets physiques dégradant la qualité des images reconstruites ont longtemps été corrigés par des méthodes analytiques appliquées aux projections (Keyes et *al.* [24]) ou aux images reconstruites (méthode de Chang [5]); ces méthodes qui restent approximatives puisqu'on supposait que l'atténuation était constante sur le volume étudié. Une approche alternative consiste à corriger ces effets par une méthode itérative (par exemple, ML-EM, gradient conjugué), lors de la reconstruction tomographique. à partir de la connaissance de la carte des coefficients d'atténuation  $a$ , le principe consiste à modéliser les phénomènes physiques et technologiques qui dégradent les images dans la paire projecteur/rétroprojecteur (Gullberg et *al.* [14]) ou encore dans la matrice système qui décrit mathématiquement le processus de formation des projections/images, ce de manière à corriger intrinsèquement de l'atténuation .

### 0.4 Plan de la thèse

Tout au long de cette thèse, nous supposerons que  $f$  et  $a$  sont des fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}^2$ , bornées et à support compact. De plus, nous considérerons la carte d'atténuation  $a(x,y)$  connue et non-uniforme sur un domaine convexe contenant le support de  $f$ .

Dans cette thèse, nous avons envisagé le problème de la reconstruction algébrique exacte et stable de  $f$  suivant des méthodes hilbertiennes avec correction d'atténuation, ce à partir des projections parallèles atténuées. Celui-ci constitue un problème mathématique relativement compliqué dont la résolution requiert avant tout la maîtrise de

l'outil mathématique qu'est la transformation de Radon atténuée. Cette transformée intégrale a été introduite à l'équation (2). En particulier, le choix d'un modèle pour la description mathématique du système d'imagerie est une donnée primordiale du problème et ne peut être décidé à la légère ; il détermine aussi bien la qualité des résultats, *via* le degré de son adéquation avec ce que nous savons du dispositif physique. Il influence aussi bien sûr grandement les développements mathématiques possibles. Tout d'abord, nous nous sommes laissés guider par le seul souci d'une bonne qualité d'image, ce qui nous a conduit à écarter les méthodes analytiques, basées sur l'inversion d'un opérateur de projection continu, car elles nous ont paru trop limitées quant à la possibilité d'incorporer un modèle réaliste de correction d'atténuation (surtout si l'on suppose que la carte d'atténuation non-uniforme et de géométrie irrégulière). Il nous fallait donc trouver un modèle approprié et adapté aux difficultés imposées par les contraintes dont nous avons parlé plus haut.

L'approche algébrique implique une discrétisation de l'ensemble du problème préalable à la conception des méthodes de résolution, à l'inverse des méthodes analytiques dans lesquelles les formules de reconstruction sont issues d'un raisonnement impliquant une distribution et des projections continues et discrétisées ensuite. Compte-tenu du fait que la distribution sera forcément reconstruite de manière discrète, mais aussi de ce que les projections sont discrètes (images composées de pixels) et séparées par des pas d'angle discrets, raisonner sur ces données discrètes paraît adapté à la situation physique concrète. L'approche algébrique donne l'opportunité de modéliser implicitement les effets parasites, notamment la carte d'atténuation, ce qui permet ainsi de simplifier le problème de reconstruction en TEMP avec correction d'atténuation.

Un système algébrique est dit consistant s'il admet une unique solution. Cette condition peut être envisagée d'un point de vue mathématique si la matrice du système est une matrice carrée de déterminant non nul. Dès lors, il devrait suffire d'avoir un nombre suffisant d'équations pour éliminer toutes les autres envisageables ; même la surdétermination du système ne devrait pas entraver l'obtention d'une solution unique. Il n'en est malheureusement pas ainsi, d'une part parce qu'une composante aléatoire existe dans les mesures sous la forme d'un bruit non négligeable, notamment en médecine nucléaire, d'autre part parce que la taille de la matrice du système est, dans les cas réels, très importante (elle peut atteindre quelques centaines de gigaoctets). Pour ces raisons, nous sommes dans le cadre d'un problème mal posé au sens de Hadamard. Pour aborder ce type de problème, on a eu recours aux méthodes d'inversion itératives, notamment la méthode de Kaczmarz pour la résolution des systèmes linéaires basée sur des principes hilbertiens et qui trouve son application en tomographie sous la nomination ART pour « *Algebraic Reconstruction Technique* ». L'objectif de cette thèse était donc de mettre en oeuvre et d'évaluer une méthode algébrique de correction d'atténuation inspirée de l'approche itératif de Kaczmarz. La première opération, visant à établir le modèle direct consiste à décomposer l'opérateur

de la transformation de Radon atténuée en deux opérateurs : le premier étant l'opérateur de la transformation de Radon non-atténué, le deuxième étant un opérateur de multiplication par une fonction modélisant la contribution de l'atténuation dans la formation des projections atténuées de l'activité  $f$ . Par la suite, le problème direct ainsi posé est résolu en appliquant la méthode itérative de Kaczmarz. La capacité de notre algorithme à reconstruire des images de bonne qualité en présence d'une atténuation irrégulière est mise à l'épreuve sur des fantômes aussi variés que possible pour couvrir des conditions réelles et tester l'influence des paramètres intervenants dans la procédure de reconstruction.

Le déroulement de notre travail suivra l'ordre suivant :

Les principes de la Tomographie d'Emission Monophotonique du point de vue de son utilisation biomédicale (ce dont traite ce travail de thèse) sont présentés au chapitre 1, ainsi que les différentes techniques d'imagerie médicale. Les limites du TEMP, résultant principalement de facteurs technologiques et physiques, sont enfin abordées : les phénomènes majeurs perturbant la formation des images que sont l'atténuation, la diffusion, la variabilité de la fonction de réponse du détecteur, sont décrits ainsi que leurs conséquences sur l'interprétation qualitative et surtout quantitative des images reconstruites.

Le chapitre 2 présente le cadre mathématique du problème de la reconstruction tomographique en décrivant tout d'abord un modèle simplifié (sans correction d'atténuation) et les méthodes d'inversion adéquates analytiques et algébriques pour le résoudre. Ensuite, après avoir décrit le phénomène d'atténuation principal phénomène dégradant l'image et empêchant une quantification fiable et précise des coupes reconstruites, on aborde le modèle réaliste qui tient compte de l'effet de l'atténuation et puis nous dressons un panorama des divers méthodes de compensation de ce dernier phénomène du point de vue analytique et itératif.

L'objectif du chapitre 3 est d'élaborer un modèle algébrique adapté au problème tomographique en TEMP avec correction d'atténuation et de le résoudre itérativement par des méthodes hilbertiennes de résolution de systèmes linéaires. Premièrement, on présente la méthode de Kaczmarz indépendamment du problème de tomographie. Deuxièmement, on pose le modèle direct en tant que système linéaire, cela en supposant que l'opérateur de la transformation de Radon atténuée est le composé de deux opérateurs comme indiqué plus haut. Ensuite, nous proposons de résoudre le problème de reconstruction ainsi posé en adaptant l'algorithme itératif de Kaczmarz à la nature du système linéaire décrivant le modèle direct. Les performances de notre algorithme ont été testées à l'aide de deux fantômes informatiques : le premier représente une activité de géométrie discontinue qui servira à mettre à l'épreuve notre méthode à reproduire les détails fins ; le second simule une activité à variation spatiale lente qui permettra de tester l'effet de projections fortement corrélées sur la vitesse de l'algorithme. Les simulations numériques ont été réalisées en présence d'une carte

d'atténuation non-uniforme et d'un nombre de projections relativement faible. Les images reconstruites avec notre méthode ont été comparées avec celles reconstruites avec l'algorithme ART classique. La reconstruction *via* cette méthode en présence de données bruitées ainsi que l'effet d'une étape de filtration seront discutés.

Dans le chapitre 4, nous exposerons l'algorithme numérique que nous avons utilisé pour l'implémentation de la méthode étudiée au chapitre 3. Nous verrons de plus comment mettre en oeuvre un algorithme numérique facilement implémentable et exploitable pour la discrétisation de la transformation de Radon atténuée. À l'aide de fantômes informatiques, nous mettrons en évidence le fait que l'erreur purement numérique est faible et que, sous cette implémentation, l'algorithme proposé converge bien (et rapidement) vers une solution très proche de l'objet avec lequel nous avons simulé les projections. Tous les paramètres sur lesquels l'expérimentateur peut jouer (tels que le coefficient de relaxation, la solution initiale, mais aussi l'ordre d'acquisition des projections et les contraintes physiques) sont importants pour obtenir le meilleur résultat, notamment en termes de résolution spatiale et de convergence numérique. Nous discuterons en détails l'effet de ces paramètres sur la performance numérique de notre algorithme. Nous nous intéresserons également à l'étude du cas de reconstruction avec des données incomplètes, *i.e.* acquises seulement sur le demi-cercle ; nous verrons ici que les résultats théoriques s'avèrent en défaut, que cet algorithme s'avère malgré tout empiriquement efficace.

Les perspectives ouvertes par ce travail et les conclusions générales de la thèse sont discutés dans le chapitre 5.



# Chapitre 1

## Tomographie et imagerie médicale

### 1.1 Introduction

L'imagerie devient un mode privilégié d'aide au diagnostic en médecine depuis que certains outils permettent de visualiser dans une certaine mesure l'intérieur du corps humain. Les techniques de reconstruction tomographique sont utilisées dans la plupart des types d'examens d'imagerie médicale ainsi que dans d'autres domaines tels que l'océanographie, la géophysique, la sismologie ou encore la météorologie. Il n'est pas dans notre propos de faire le tour des diverses techniques d'imagerie, mais seulement d'illustrer par quelques exemples la complexité des techniques généralement mises en oeuvre pour acquérir une information multidimensionnelle, puis pour en extraire ou reconstruire une image bi ou tridimensionnelle susceptible d'apporter au praticien une information spécifique d'un type de pathologie. Il existe différentes techniques d'imagerie médicale permettant d'apporter des informations aussi bien sur la morphologie et sur le fonctionnement des organes étudiés. Ces techniques sont regroupées en deux catégories nommées *imagerie structurelle* et *imagerie fonctionnelle*.

Ce premier chapitre rappelle brièvement les principes physiques de ces différentes techniques d'imagerie médicale et s'intéressera particulièrement aux principes de la *Tomographie d'Emission Monophotonique* (TEMP) qui fait partie des techniques d'imagerie nucléaire. Nous présentons aussi les phénomènes affectant la quantification des images, et en particulier les phénomènes physiques et leurs conséquences sur la fiabilité des images.

Le principe de la TEMP est basé sur l'injection d'un produit radioactif souvent appelé *radiotraceur* dans un organe du patient et l'étude de la distribution spatiale de la concentration de ce produit dont les informations sur sont fournies par le scanner. Les photons-Gamma sont détectés par une caméra équipée d'une grille de collimateurs qui sélectionnent les radiations émises suivant un angle privilégié  $\varphi$ . L'utilisation des informations sur la concentration spatiale du traceur radioactif en un point  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  permet de reconstituer l'image  $f(x, y, z)$  de l'organe concerné.

## 1.2 Les Différentes Techniques d'Imagerie Médicale

Suivant les techniques utilisées, les examens d'imagerie médicale permettent d'obtenir des informations sur l'anatomie des organes (leur taille, leur volume, leur localisation, la forme d'une éventuelle lésion, etc.) ou sur leur fonctionnement (leur physiologie, leur métabolisme, etc.). Dans le premier cas, on parle d'imagerie morphologique et dans le second d'imagerie fonctionnelle. Ces différents types de techniques sont parfois employés de façon complémentaire au sein d'un même système d'imagerie.

### 1.2.1 Imagerie morphologique

Parmi les méthodes d'imagerie morphologique, les plus couramment employées en médecine, on peut citer d'une part les méthodes tomographiques basées soit sur le rayonnement X (radiologie conventionnelle, tomodensitomètre (TDM) ou CT-scan, etc.) soit sur la résonance magnétique (IRM) et, d'autre part, les méthodes échographiques (qui utilisent les ultra-sons). Sur ce type d'examen en effet, c'est plus la forme de l'organe que sa fonction qui est étudiée, ce qui signifie que l'image morphologique ne rend compte que de la présence et de la structure des tissus, os, ou d'ailleurs toute matière.

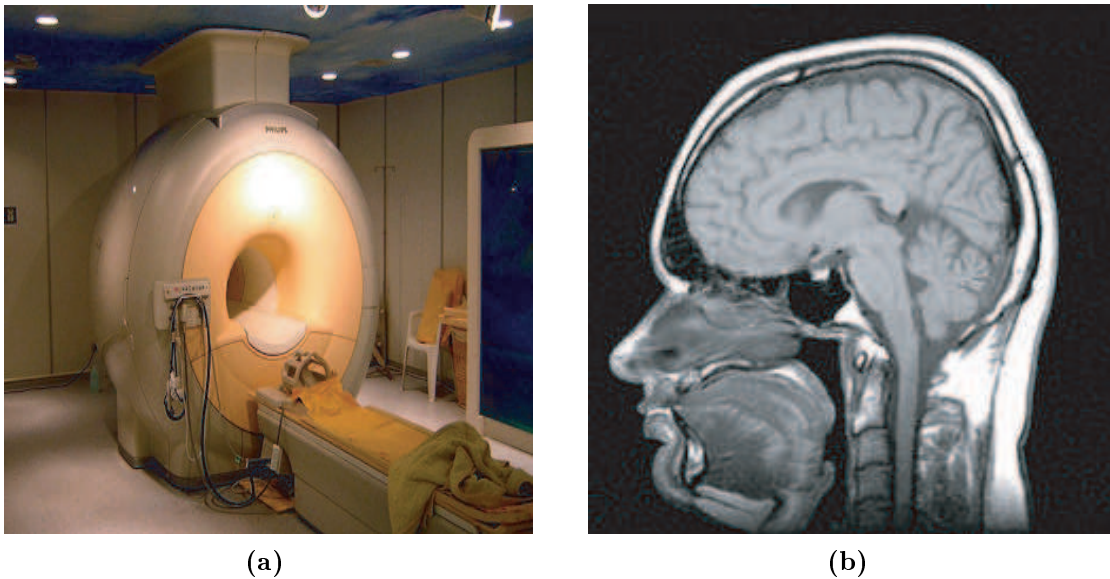
#### Imagerie par résonance magnétique

L'imagerie par résonance magnétique nucléaire (IRM) est une technique d'imagerie médicale d'apparition récente (début des années 1980) permettant d'avoir une vue 2D ou 3D d'une partie du corps, notamment du cerveau. Le nom complet de l'IRM est image à résonance magnétique nucléaire (ou IRMN); on omet souvent son caractère nucléaire. Cette omission est surtout là pour ne pas effrayer les patients qui associent souvent, et à tort, le mot nucléaire avec les rayonnements ionisants.

L'imagerie par résonance magnétique repose essentiellement sur les propriétés magnétiques des atomes et plus particulièrement de leurs noyaux que l'on étudie grâce à un champ magnétique et une onde de radiofréquence; aucune radiation ionisante n'est émise. la localisation spatiale des atomes est obtenue en ajoutant un gradient directionnel sur le champ magnétique de base. Les protons soumis au champ magnétique s'alignent parallèlement à celui-ci comme des petites boussoles. Lorsque l'on envoie des ondes radio-fréquence vers une zone donnée, ces petites boussoles vont changer de direction (démagnétisation), puis retourner à leur position initiale en émettant un signal qui est enregistré et traité par un système informatique. Ce signal dépend du tissu étudié. L'intensité du signal est reproduite point-à-point selon une échelle de gris allant du blanc au noir afin d'obtenir une image en coupe de la zone étudiée (figure 1.1b).



La résolution spatiale est liée à l'intensité du champ magnétique et à la durée de l'acquisition (en général une dizaine de minutes). L'IRM fournit les meilleures images de la morphologie cérébrale en termes de résolution spatiale et de contraste. On atteint actuellement une résolution de l'ordre du millimètre.



**FIG. 1.1.** IRM : (a) machine IRM, (b) Images IRM d'une tête humaine vue de profil en coupe sagittale. On peut voir apparaître le cerveau en gris clair entouré de liquide céphalo-rachidien (en noir), la boîte crânienne (en blanc), ainsi que d'autres tissus (langue, fosses nasales, etc.).

### La tomodensitométrie

La tomodensitométrie (TDM), dite aussi tomographie axiale calculée par ordinateur, CT-scan ou simplement scanner, est une technique d'imagerie médicale qui consiste à calculer une reconstruction 2D ou 3D des tissus à partir d'une analyse tomographique obtenue en soumettant le patient au balayage d'un faisceau de rayons X. Bien que la possibilité théorique de créer de tels appareils était connue depuis le début du siècle, ce n'est qu'au début des années 1970 qu'apparaîtront les premiers appareils dotés d'ordinateurs capables de réaliser les calculs nécessaires à la reconstruction des images. Pour la mise au point de ces techniques, Godfrey Newbold Hounsfield et Allan MacLeod Cormack seront récompensés par le Prix Nobel de médecine en 1979.

Dans les appareils modernes, l'émetteur de rayons X tourne autour du patient (figure 1.2a) en même temps que les récepteurs chargés de mesurer l'intensité des

rayons après leur passage dans le corps. Les données obtenues sont ensuite traitées par ordinateur, ce qui permet de recomposer des vues en coupe des organes ou des vues en trois dimensions. C'est donc en quelque sorte une image d'ombre qui est obtenue : plus les structures traversées sont atténuantes, plus faible est la fraction de rayonnement qui parvient jusqu'au détecteur (figure 1.2b). Cette image ne fournit donc des renseignements que sur les coefficients d'absorption en chaque point, qui sont relatifs à une énergie de rayonnement donnée (en général, plus un rayonnement est énergétique et moins il est atténué) et dépendent essentiellement de la densité des tissus auxquels ils appartiennent.

On peut faire ressortir certains tissus, en particulier les vaisseaux sanguins, en injectant un produit dit « de contraste » (souvent un complexe de l'iode) qui a la propriété de fortement absorber les rayons X et donc de rendre très visibles les tissus où ce produit est présent (qui apparaissent alors hyperdenses). On peut aujourd'hui obtenir en quelques secondes, grâce aux scanners multidétecteurs à acquisition spirale, une exploration très précise d'un large volume du corps humain.

Comme pour la radiographie, l'exposition répétée à des radiations peut être nocive pour l'organisme, mais le rapport bénéfique/risque lié à l'irradiation penche largement en faveur de la tomodensitométrie, qui en fait un examen de plus en plus largement pratiqué. L'imagerie par résonance magnétique (IRM), technique non irradiante, est une alternative. Cette dernière offre une meilleure résolution pour les tissus mous alors que la tomographie axiale calculée est supérieure pour les zones concernant les parties osseuses.

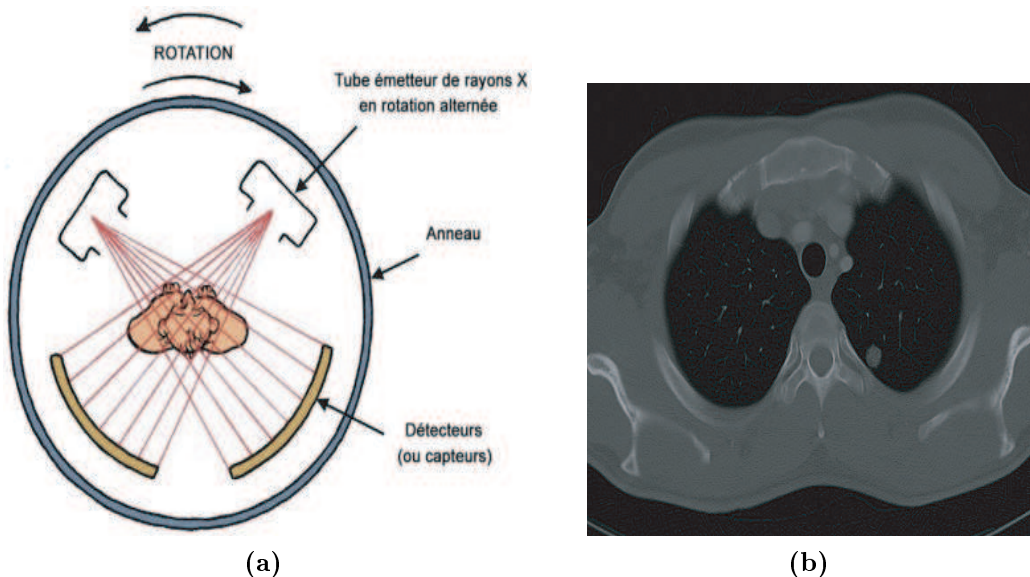


FIG. 1.2. Tomodensitométrie : (a) scanner, (b) coupe horizontale du thorax.

### 1.2.2 Imagerie fonctionnelle

Les méthodes d'imagerie fonctionnelle sont aussi très variées. Elles regroupent les techniques de médecine nucléaire comme la Tomographie d'Émission Monophotonique (TEMP) (*Single Photon Emission Computed Tomography* en anglais) et la tomographie d'Émission à Positons (TEP) (*Positron Emission Tomography* en anglais).

Ces techniques reposent sur l'administration d'un traceur, c'est-à-dire une substance repérable, car marquée par un atome radioactif émetteur Gamma, s'inscrivant dans un métabolisme, sans interférer avec celui-ci du fait que l'on en administre une quantité infinitésimale. Ainsi, les rayonnements servant à former l'image proviennent de l'objet d'étude lui-même. Sur le principe des organismes phosphorescents, le corps ou l'objet est « éclairé par sa propre lumière » et l'on parle de tomographie d'émission pour désigner les problèmes de tomographie qui sont rattachés à ce genre de procédé. On parle ainsi de tomographie d'émission monophotonique lorsque le traceur utilisé émet des photons Gamma et de tomographie par émission de positons lorsque les images sont obtenues par injection dans l'organisme d'une molécule radioactive marquée par des isotopes du carbone, du fluor ou de l'oxygène (émetteurs de positons).

Cette technique d'imagerie constitue un examen d'imagerie médicale qui permet de visualiser les activités du métabolisme et de mesurer les changements fonctionnels de l'organe étudié, plus précisément des tissus, chez les humains. Elle diffère des technologies conventionnelles aux rayons-X et par résonance magnétique qui se limitent aux images de l'anatomie. Les changements physiologiques précèdent les changements anatomiques et, par conséquent, l'imagerie fonctionnelle permet de déceler à une phase plus précoce les dommages métaboliques et ainsi à aider à contrer leur progression. Elle fournit ainsi une image quantitative du fonctionnement de l'organe étudié.

La fiabilité de la quantification des images obtenues est affectée à la fois par les limites des performances des détecteurs (résolution spatiale et en énergie, sensibilité, *etc.*), par les effets physiques tels que l'atténuation et la diffusion, qui perturbent la formation des images, par des effets physiologiques (mouvements du patient) et par des effets liés à la reconstruction tomographique.

#### La tomographie à émission de positon

Une tomographie par émission de positons est un examen d'imagerie médicale par scintigraphie réalisé dans les services de médecine nucléaire d'un hôpital.

La scintigraphie en TEP est obtenue par injection d'un traceur faiblement radioactif par voie intraveineuse. Ce traceur est le plus souvent le fluor ( $^{18}\text{F}$ ) incorporé dans une molécule de glucose formant le  $^{18}\text{F}$ -fluorodéoxyglucose (en abrégé  $^{18}\text{F}$ -FDG). Ce traceur est semblable au glucose : il se fixe au niveau des tissus qui consomment de grandes quantités de ce sucre comme les tissus cancéreux, le muscle cardiaque ou encore le cerveau. Le fluor 18, dont la demi-vie est inférieure à 2h, émet ensuite de façon temporaire des rayonnements que l'on peut suivre dans l'organisme du patient grâce

à une caméra spéciale, une caméra TEP. Le fluor 18 ainsi que les autres isotopes pouvant être utilisés (oxygène ( $^{15}\text{O}$ ), azote ( $^{13}\text{N}$ ), carbone ( $^{11}\text{C}$ )) ont une courte demi-vie, jusqu'à 110 minutes pour le fluor. Ces isotopes de courte durée nécessitent pour leur production un cyclotron.

Une caméra TEP est un appareil qui a l'aspect d'un « scanner », mais son principe de fonctionnement est différent. En effet, l'atome radioactif (par exemple, le fluor 18) se désintègre en émettant un positon. Celui-ci va s'annihiler avec un électron du milieu après un très court parcours (en général inférieur à 1 mm). Cette annihilation produit deux photons Gamma de 511 keV qui partent en direction opposée, ce qui rend possible le traitement tomographique des données. En effet, les capteurs situés tout autour du patient détectent les photons d'annihilation en coïncidence (c'est-à-dire ceux qui arrivent en même temps), ce qui permet d'identifier la ligne sur laquelle se trouve l'émission des photons. Un système informatique reconstitue ensuite à l'aide d'un algorithme de reconstruction les images de la répartition du traceur au niveau d'une partie ou de la totalité du corps sous la forme d'une image 2D ou d'un objet 3D. Les images ainsi obtenues (figure 1.3) sont dites « d'émission » (la radioactivité provient du traceur injecté au patient). Il est possible d'améliorer la qualité des images en utilisant le principe de correction d'atténuation. Lors de la traversée du corps, de nombreux photons Gamma subissent une atténuation liée aux structures traversées (faible dans l'air des poumons, forte dans les structures plus solides comme les os et muscles). Pour effectuer cette correction, on réalise des images de transmission obtenues grâce à une source radioactive qui tourne rapidement autour du patient.

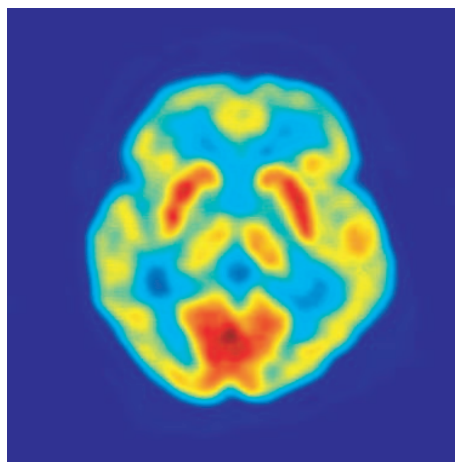


FIG. 1.3. TEP

La TEP est un examen d'imagerie qui permet d'obtenir des images du fonctionnement métabolique des organes, des tissus ou des cellules. Aujourd'hui, la plupart

des caméras TEP sont fréquemment couplées à un tomodensitomètre à rayons X (système TEP/TDM ou PET/CT en anglais), ce qui permet de superposer l'image fonctionnelle (image TEP) à sa localisation anatomique précise dans le corps (image CT). Dans ce cas la correction d'atténuation s'obtient par le tomodensitomètre beaucoup plus rapidement et est meilleure qu'avec les images de transmission avec sources radioactives.

## 1.3 La Tomographie d'Émission Monophotonique

La tomographie d'émission monophotonique est un procédé d'imagerie fonctionnelle et morphologique utilisé en médecine nucléaire dans un but diagnostique ou thérapeutique. Elle consiste à déterminer, et le plus souvent à visualiser sous forme d'images, la localisation tridimensionnelle et la concentration dans l'organisme d'un radiotraceur, substance radioactive émettrice de photons Gamma administrée au patient, en détectant les photons Gamma émis au moyen d'une Gamma-caméra. Les images acquises conduisent, après reconstruction tomographique, à l'estimation tridimensionnelle de la concentration du radiotraceur dans les coupes reconstruites. La mesure précise de la radioactivité contenue dans les images reconstruites, nommée *quantification*, est affectée par de nombreux phénomènes lors de la formation des images qui altèrent les informations extraites de ces images.

Cette section rappelle les principes physiques de la tomographie d'émission monophotonique relatifs au radiotraceur, au dispositif de détection et aux différents types d'acquisition réalisés. Nous présentons aussi les phénomènes affectant la quantification des images et en particulier les phénomènes physiques et leurs conséquences sur la fiabilité des images.

### 1.3.1 Les radiotraceurs

En 1923, Georg Von Hevesy fut le premier à employer la méthode des indicateurs radioactifs. Il montra qu'il est possible, grâce aux isotopes radioactifs, de suivre à la trace une espèce chimique, une particule, sans perturber le comportement physique, hydrodynamique ou bien chimique de l'objet que l'on suit.

Les radiotraceurs sont des molécules marquées par un isotope radioactif, choisies pour mettre en évidence certains processus physiologiques ou pathologiques. Le choix du radiotraceur dépend de sa capacité à suivre un métabolisme ou à fournir un diagnostic sur le fonctionnement d'un organe donné. Le traceur peut être un atome seul (iode 123), une molécule marquée (diphosphonate marqué au technétium 99m), une hormone marquée ou encore un anticorps marqué par un isotope. Cet isotope doit pouvoir se fixer chimiquement sur la molécule d'intérêt sans toutefois altérer les propriétés de celle-ci. La liaison doit être solide de façon à ce que l'élément radioactif ne se

détache pas, auquel cas on suivrait le parcours de l'élément radioactif et non celui de la molécule cible. L'accès *in vivo* aux informations sur le devenir du radiotracer dans l'organisme telles que sa distribution dans les tissus (distribution biologique, fixation préférentielle sur certaines cellules ...) et son évolution en fonction du temps (métabolisme, élimination et dégradation ...) permettent l'étude, d'une façon non invasive, de certains processus pathologiques (mise en évidence de métastases), physiologiques et biochimiques (*e.g.*, mesure du débit sanguin et du métabolisme du glucose).

L'isotope radioactif est également sélectionné selon les caractéristiques physiques suivantes :

- la nature de son rayonnement : les radio-isotopes émetteurs Gamma sont privilégiés car ils se prêtent bien à une détection externe et minimisent la dose d'irradiation subie par le patient ;
- la demi-vie physique de l'isotope (c'est-à-dire le temps au bout duquel sa population est réduite de moitié par désintégrations spontanées) doit être suffisamment longue pour permettre de suivre le processus physiologique considéré et suffisamment courte pour éviter une irradiation inutile ;
- l'énergie des photons Gamma émis doit être suffisamment élevée pour permettre à ceux-ci de s'échapper de l'organisme et suffisamment faible pour permettre une détection efficace par le détecteur.

En TEMP, l'isotope le plus adapté, car présentant de bonnes propriétés pour l'imagerie, est le Technétium 99 métastable noté  $^{99m}\text{Tc}$ . Le  $^{99m}\text{Tc}$  a une durée de demi-vie de 6 heures et il est émetteur de rayonnements Gamma (98%) ayant une énergie de 140 keV, sa courte demi-vie physique et l'absence de raies d'émission secondaires permettent de minimiser la dose délivrée au patient. La production du  $^{99m}\text{Tc}$  à partir du  $^{99}\text{Mo}$  est possible à partir d'un générateur portable, d'où la simplicité de l'accès en routine clinique et le faible coût. Il est utilisé dans environ 90% des examens en TEMP : par exemple, pour les examens osseux pour la détection de métastases, pour les scintigraphies ventriculaires afin de caractériser la fonction cardiaque (volume d'éjection, fraction d'éjection, etc.) en marquant des globules rouges au  $^{99m}\text{Tc}$ , pour diagnostiquer la présence de tissus non irrigués dans le myocarde en marquant des cellules du muscle cardiaque, pour le repérage du ganglion sentinelle en particulier dans le traitement chirurgical du cancer du sein.

Le radio-isotope est souvent administré par voie intraveineuse, parfois par inhalation pour étudier la ventilation pulmonaire. Il peut être administré par voie orale (spécialement pour l'étude de la vidange gastrique et des reflux gastro-oesophagiens) ou bien par voie intrathécale (spécialement pour l'étude de la circulation du liquide céphalo-rachidien).

Après administration au patient du radiotracer, celui-ci se répartit dans le(s) tissu(s) ciblés et les photons Gamma qu'il émet sont détectés par un dispositif spécifique appelé Gamma-caméra, qui fournit des images de la distribution de la radioac-

tivité dans l'organisme. Ce dispositif est décrit dans le paragraphe suivant.

### 1.3.2 Le dispositif de détection

En 1957, la Gamma-caméra ou caméra d'Anger a été développée par le physicien Hal Anger qui remplaça alors les scintigraphes à balayage utilisés en 1950.

Le rôle de la Gamma-caméra est de détecter et de comptabiliser les photons Gamma émis par le radiotracer dans l'organisme, de recueillir et de stocker des informations relatives à ces photons (position, énergie) et enfin de déterminer la localisation des sources d'émission de ces photons et d'en fournir une représentation.

Une Gamma-caméra (figure 1.4) se compose d'une ou de plusieurs têtes de détection, d'un circuit analogique fournissant la localisation des photons Gamma dans le cristal et réalisant la spectrométrie, ainsi que de processeurs assurant l'acquisition des données, leur stockage et leur traitement : corrections en ligne, reconstruction, manipulation et affichage des images.

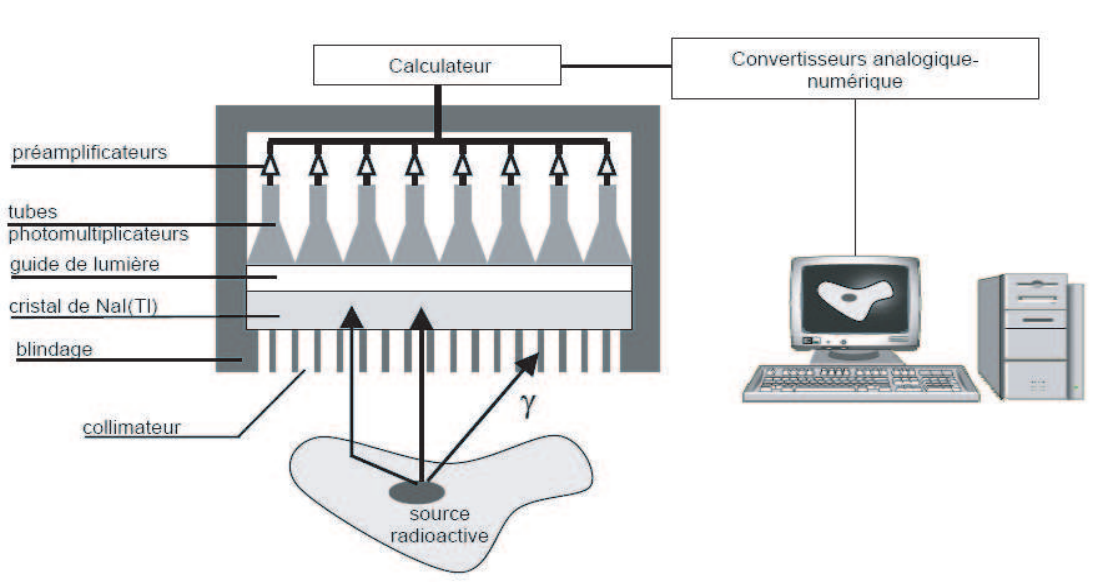


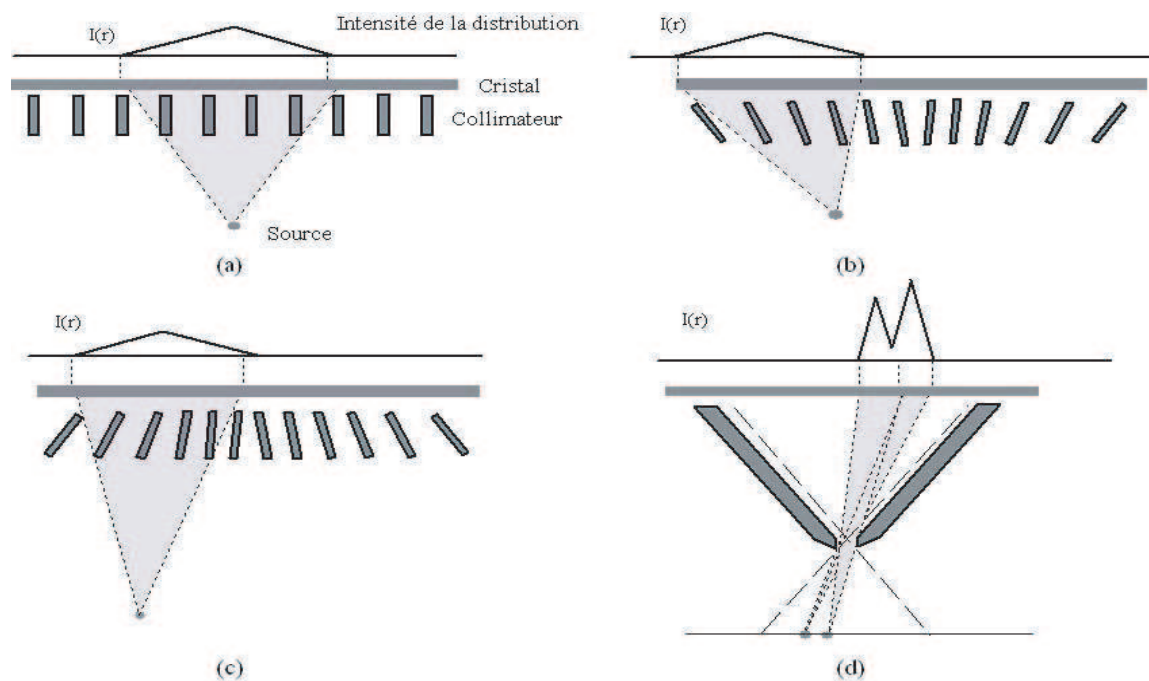
FIG. 1.4. Différents éléments composant une tête de détection de Gamma-caméra.

#### Le collimateur

On utilise un matériel absorbant pour la fabrication des collimateurs, habituellement le plomb, dans lequel un ou plusieurs trous parallèles ou inclinés sont percés

suivant un système d'axes déterminé. L'utilisation d'un collimateur permet de privilégier une direction qui correspond à la projection de la distribution de la radioactivité sur le cristal détecteur, la plus courante étant la perpendiculaire au cristal. Les photons  $\gamma$  dont le parcours n'emprunte pas ces directions sont absorbés par le collimateur avant d'atteindre le cristal. La cloison séparant deux trous voisins est appelée « septum ». L'épaisseur de plomb est calculée pour entraîner une atténuation d'au moins 95% de l'énergie des photons traversant les septas.

Le premier prototype de collimation pour la caméra d'Anger était de géométrie « pinhole » (sténopé). Le collimateur « pinhole » est employé cliniquement pour l'imagerie des petites surfaces comme la thyroïde où un agrandissement important peut être réalisé. Pour des organes de dimensions larges, le collimateur à trous parallèles est plus souvent utilisé. D'autres géométries sont également disponibles pour des applications spécifiques, à titre d'exemple, les collimateurs convergents, divergents ou encore en éventail « Fanbeam ». La figure 1.5 montre quelques exemples de géométries.



**FIG. 1.5.** Différents types de collimation pour la Gamma caméra : (a) collimateur à trous parallèles. (b) collimateur à trous convergents. (c) collimateur à trous divergents. (d) collimateur pinhole (sténopé).

Le collimateur de la gamma caméra est l'élément crucial qui détermine la sensibilité, la résolution et la qualité de l'image reconstruite. Cependant, les collimateurs classiques à trous fins et parallèles utilisés avec les gamma caméras usuelles (CPHC :



*conventional parallel holes collimator*) ont actuellement plusieurs limitations. Spécifiquement, leur sensibilité est extrêmement faible : pour  $10^4$  photons émis par le patient seulement un photon passera par un trou du collimateur et arrivera au cristal de la caméra.

Le système CACAO (*Caméra A Collimation Assistée par Ordinateur*) est une gamma caméra avec une collimation à grand trous (figure 1.6). Il a été introduit par Christian Jeanguillaume [15] [16] pour améliorer la qualité des images des systèmes SPECT. Ce système est caractérisé par des trous avec une ouverture plus grande que la résolution intrinsèque du détecteur. Cela permet d'obtenir une sensibilité géométrique bien meilleure par rapport aux autres systèmes scintigraphiques. Une valeur de l'ordre de  $10^2$  est tout à fait accessible, c'est-à-dire, pour  $10^4$  photons on détectera 100 photons avec le système CACAO contre 1 seul pour les systèmes classiques de type Anger équipé d'un collimateur à trous fins.

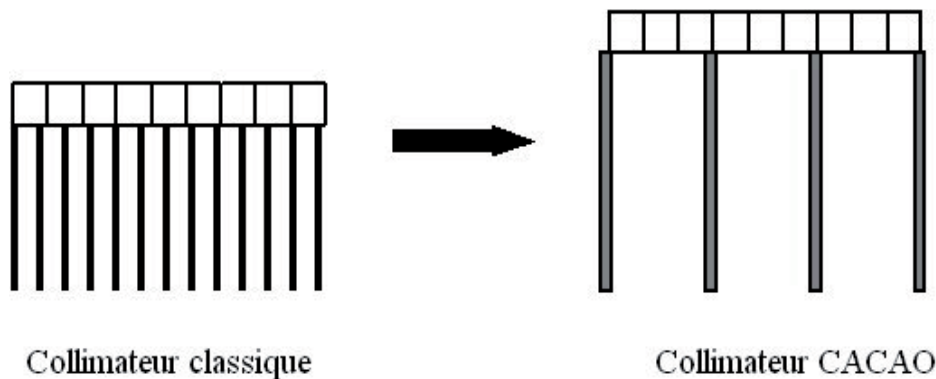


FIG. 1.6. Schéma illustrant la différence entre le collimateur classique et le collimateur CACAO.

### Le scintillateur

Le rôle du cristal scintillant est d'absorber les photons incidents et de convertir l'énergie qu'ils déposent en scintillation lumineuse. Le cristal scintillant doit avoir un pouvoir d'absorption élevé pour les photons ; c'est pour cela qu'on choisit des cristaux denses et ayant un numéro atomique élevé. On utilise souvent l'iodure de sodium dopé au thallium NaI(Tl) qui a une densité suffisante ( $3,7 \text{ g/cm}^3$ ) et un numéro atomique assez élevé (iode,  $Z = 73$ ) pour pouvoir absorber la majorité des photons ayant une énergie comprise entre 70 keV et 200 keV en quelques millimètres, soit la gamme d'énergie utilisée en routine clinique pour la tomographie d'émission monophotonique. Le cristal scintillant transforme l'énergie déposée par les photons

incidents en énergie lumineuse. Lorsqu'un photon interagit dans le cristal de NaI (Tl) *via* un effet photoélectrique ou un effet Compton, il lui cède son énergie dans le premier cas ou une partie de celle-ci dans le second cas ; le cristal à son tour émet des photons lumineux (photons de scintillation) ayant une longueur d'onde d'environ 415 nm (lumière bleu-verte dans le spectre visible) bien adaptée à un traitement par des tubes photomultiplicateurs.

Le scintillateur NaI(Tl) présente aussi un bon rendement lumineux : 13% de l'énergie déposée est réémise sous forme de photons de fluorescence d'énergie 3 eV (430 nm). Il est transparent à sa propre lumière de scintillation, ce qui n'engendre pas de pertes de lumière de scintillation liées à l'auto-absorption. Sa constante de temps de 230 ns lui permet d'enregistrer plusieurs dizaines de milliers de coups par seconde autorisant ainsi un taux de comptage élevé. Son principal inconvénient est son caractère hygroscopique (sensible à l'humidité) : il requiert donc une isolation hermétique. Afin de protéger le cristal de la lumière et de l'humidité et de minimiser la perte des photons de scintillation, on enveloppe souvent le cristal avec une couche de réflecteur ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ , MgO, époxy, ...). Le choix de l'épaisseur du cristal est un compromis entre l'efficacité de détection (plus le cristal est épais, plus la détection est efficace), et la résolution spatiale qui se dégrade quand le cristal devient plus épais.

### Les photomultiplicateurs

Un photomultiplicateur consiste en un tube transparent avec une couche photo-émisive (appelé photocathode) et une série d'électrodes dénommées dynodes. Dans une photocathode, les photons de scintillation libèrent les électrons qui sont accélérés par une différence de tension vers la première dynode rencontrée. L'énergie acquise par les électrons est suffisante pour libérer des électrons additionnels lors du choc avec la dynode ; ces électrons sont accélérés vers la dynode suivante et le processus est répété jusqu'à la dernière dynode. Ainsi, l'amplitude des impulsions dépend de la tension appliquée aux dynodes, de leur nombre et du nombre initial d'électrons libérés par la photocathode. Une amplification d'un facteur  $10^{10}$  est couramment utilisée, elle permet de détecter des photons de faible énergie (60KeV).

### L'électronique

L'impulsion électronique produite par les photomultiplicateurs doit être assez puissante pour permettre la transmission sur le câble coaxial des informations aux autres cellules électroniques. Le dispositif électronique se compose des préamplificateurs, des amplificateurs et analyseur d'amplitude. Le signal de sortie du PM sera donc amplifié et ajusté. Une analyse numérique permet d'obtenir un spectre (nombre de photons détectés en fonction de leur énergie) caractéristique du rayonnement détecté. Les impulsions sélectionnées par l'analyseur d'amplitude sont dirigées sur une échelle de comptage comportant un intégrateur du temps qui délivre alors un taux de comptage

en impulsions par seconde (ips) ou en coups/seconde (cps). À partir du comptage des photons détectés dans une fenêtre d'énergie choisie, il est possible de visualiser la répartition des sources émettrices de rayons  $\gamma$ .

## 1.4 Types d'acquisition

### 1.4.1 Le mode statique planaire

En mode statique, les informations temporelles relatives aux photons détectés ne sont pas exploitées. On exploite uniquement les informations spatiales.

Pendant une acquisition en mode statique planaire, la Gamma-caméra reste immobile et les projections acquises fournissent une information bidimensionnelle de la distribution tridimensionnelle du radiotracer dans l'organe. Cette information bidimensionnelle permet essentiellement une étude qualitative du fonctionnement de l'organe étudié, peu quantitative vu qu'on n'a pas d'informations sur la profondeur des lieux d'émission. Pour en tenir compte, une correction de l'atténuation est nécessaire.

Pour une acquisition statique planaire optimisée, il est important de choisir une fenêtre spectrométrique adaptée à l'énergie d'émission du photon et un collimateur dont le champ de vue couvre l'organe étudié et ayant une sensibilité assez élevée. Le temps d'attente après l'injection est aussi un élément important dans la mesure où il est parfois souhaitable d'attendre l'élimination du radiotracer de certains tissus pour visualiser de façon plus spécifique les organes cibles.

### 1.4.2 Le mode tomographique

Contrairement à la scintigraphie planaire, la *Tomographie d'Émission Monophotonique* est une technique où la Gamma-caméra décrit une orbite circulaire ou elliptique autour du patient et fournit des projections bidimensionnelles sous des incidences variées. La mise en oeuvre de la TEMP fournit, par rapport à la scintigraphie planaire, une amélioration de contraste entre les zones des différentes fonctions organiques, une meilleure localisation spatiale, une détection améliorée des fonctions anormales et surtout une amélioration de la quantification.

Dans le cas de la tomographie dite « transaxiale », les coupes reconstruites sont perpendiculaires à la face de détection de la Gamma-caméra. La Gamma-caméra fournit un ensemble d'images 2D, ou projections, consistant en de multiples profils, chaque profil représentant une projection 1D de la radioactivité dans une seule coupe du patient (figure 1.7a). Ainsi, l'objet 3D est divisé en de multiples sections 2D et chaque section est représentée par un ensemble de profils 1D discrets. Chaque point du profil représente la somme linéaire (en l'absence d'atténuation) des éléments d'activité le long de la direction d'exploration du détecteur telle qu'elle est déterminée par le

collimateur. Si un nombre important de données linéaires et angulaires sont acquises, il est alors possible de reconstruire des images de coupes qui représentent la distribution du radiopharmaceutique dans l'organisme.

Typiquement, une acquisition tomographique comporte 128 projections, chacune d'entre elles comprenant  $128 \times 128$  pixels et acquise pour 64 (ou 128) valeurs d'angles discrètes balayant un angle de  $360^\circ$  autour du patient. En utilisant des algorithmes de reconstruction (les différents algorithmes disponibles seront présentés au chapitre 2), il est possible d'obtenir des images de section transaxiale, sagittale, et coronale (figure 1.7b).

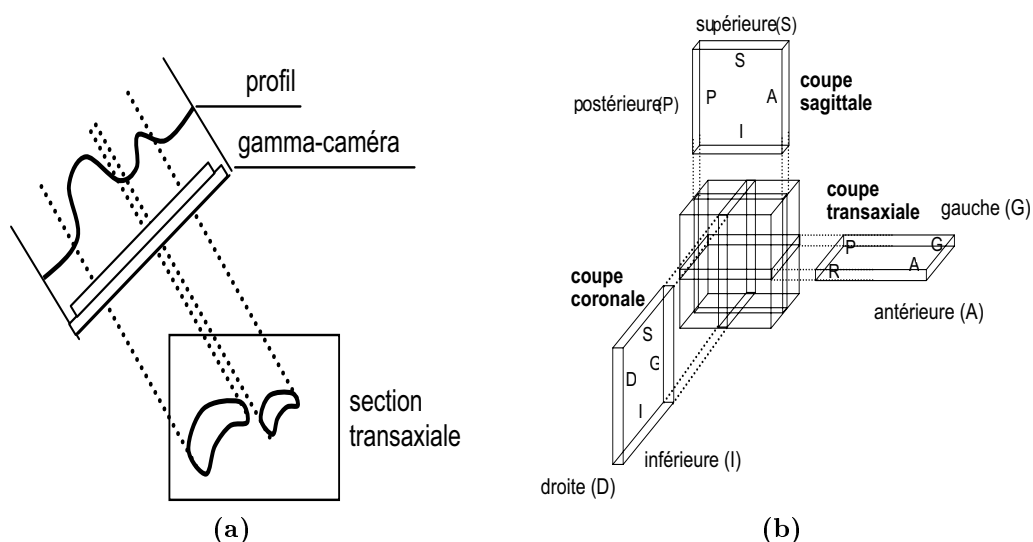


FIG. 1.7. Mode tomographique : (a) Profil obtenu à l'aide d'une gamma-caméra, (b) orientations des coupes reconstruites.

### 1.4.3 Rangement des données : le sinogramme

Tous les éléments de projection d'une coupe de l'objet sont rangés dans une matrice appelée sinogramme. Chaque ligne de la matrice représente la projection monodimensionnelle de la coupe pour un certain angle  $\varphi$ . La matrice a autant de lignes que le nombre d'angles de mesure et autant de colonnes que le nombre d'échantillons spatiaux (détecteurs) de mesure pour un angle  $\varphi$  donné.

Un point du sinogramme correspond à l'intensité mesurée dans l'angle  $\varphi$  et au détecteur dans la position  $s$  (figure 1.8). Si on néglige l'atténuation, l'intensité du pixel  $(s, \varphi)$  correspond à l'intégrale de la densité d'activité des photons de 511 keV émis tout au long de la ligne de réponse qui correspond à cette incidence.

Les détails de la modélisation mathématique de l'acquisition du sinogramme en TEMP seront exposés au chapitre 2 ; on y traitera un premier modèle simplifié en négligeant l'atténuation, puis le modèle réaliste en tenant compte de la présence d'atténuation.

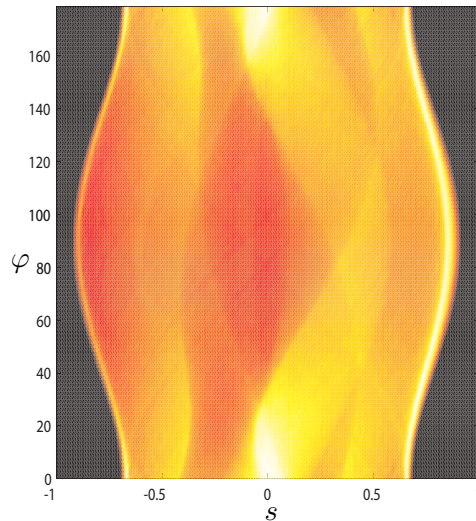


FIG. 1.8. Sinogramme : 180 prises d'angle et 128 détecteurs.

## 1.5 Les limites de l'imagerie TEMP

De nombreux facteurs affectent la précision qualitative et quantitative des images obtenues en TEMP (Rosenthal et *al.* [41]) , parmi lesquels les facteurs physiologiques relatifs au patient (émission et cinétique du radiotracer, mouvement du patient), les facteurs technologiques (performances du système de détection) et les facteurs physiques (atténuation, diffusion, bruit de mesure).

### 1.5.1 Facteurs physiologiques

Un certain nombre de facteurs physiologiques contribue à réduire le nombre de photons détectés pendant une acquisition et de fait limite la quantification des images : il s'agit de facteurs associés aux caractéristiques du radiopharmaceutique (spécificité, biocinétique, dose administrée) et de facteurs relatifs au patient.

Les radiotraceurs actuellement utilisés conduisent à une fixation plus ou moins importante sur des organes non ciblés, créant ainsi une activité de fond et réduisant le contraste dans les images.

Les problèmes des mouvements sont d'une part ceux liés aux mouvements involontaires du patient pendant la longue durée des acquisitions (en moyenne 30 min), d'autre part ceux liés aux mouvements physiologiques tels que les battements cardiaques et la respiration. Ces mouvements introduisent des flous cinétiques à l'origine d'*artefacts* dans les images reconstruites. Par exemple, en TEMP cardiaque, le mouvement respiratoire peut diminuer les rapports de fixation mesurés entre la paroi antérieure et la paroi latérale de 25% par rapport aux valeurs qui seraient mesurées en l'absence de mouvement respiratoire (Cooper et *al.* [7]).

Le temps d'acquisition constitue aussi un paramètre important : il est souvent fixé de façon à permettre d'acquérir suffisamment d'échantillons statistiques pour obtenir des images de bonne qualité et en tenant compte de la tolérance du patient pendant l'examen. En effet, les mouvements, qu'ils soient de nature physiologique (battements cardiaques, respiration, ...) ou fortuite (mouvements du patient pendant l'examen) occasionnent un flou cinétique dans les images et peuvent créer des *artefacts* non négligeables pouvant ensuite gêner l'interprétation des images. Enfin, la taille du patient affecte la fraction de photons atténués et la fraction de photons diffusés, ce qui contribue à diminuer le nombre de photons réellement détectés.

### 1.5.2 Facteurs technologiques

Les facteurs technologiques sont liés directement à l'appareillage et à ses limites. Parmi ces facteurs technologiques, que nous rappelons brièvement ici, certains sont corrigés en ligne durant l'acquisition par le processeur, mais d'autres, dont la résolution spatiale, ont des conséquences très importantes sur les projections acquises et les coupes reconstruites : ces conséquences sont présentées ci-après, ainsi que l'effet de « volume partiel » qui est lié à ces facteurs technologiques.

#### Réponse du collimateur

La variation de la fonction de dispersion ponctuelle en fonction de la distance source / détecteur a des conséquences importantes en tomographie : par exemple, une source ponctuelle décentrée va se projeter sur le détecteur avec une résolution différente suivant la position angulaire de celui-ci. Le point se trouvant au centre va se projeter avec la même résolution spatiale dans toutes les directions de projection. Qualitativement, la variation de la fonction de dispersion ponctuelle induit un flou ainsi que des distorsions géométriques dans les images reconstruites.

Dans ce cas et afin de réduire les distorsions géométriques, il est conseillé de placer l'objet ou l'organe auquel on s'intéresse le plus près possible du centre de rotation du tomographe.

### Effet de volume partiel

L'effet de volume partiel provient de la résolution spatiale du dispositif de détection. La fonction de réponse de la caméra, modélisée généralement par une gaussienne, dégrade le signal de telle sorte que le signal détecté présente une plus faible amplitude que le signal original. Cette dégradation fait qu'une partie de l'activité dans une structure est détectée à l'extérieur de cette structure et qu'une partie de l'activité extérieure à cette structure est détectée dans la structure. Ceci se traduit par une sous-estimation de la radioactivité dans les petits volumes, d'autant plus grande que les volumes deviennent petits. Cet effet est présent jusqu'à ce que la taille de l'objet soit approximativement le triple de la résolution spatiale de la caméra. Afin de montrer la nature qualitative de cet effet, prenons l'exemple d'un objet unidimensionnel rectangulaire de 2 cm de longueur et dégradons l'objet à l'aide de fonctions gaussiennes de largeur à mi-hauteur variables (figure 1.9). L'effet global des fonctions gaussiennes est d'étaler l'objet. De fait, il y aura contamination des activités entre régions voisines. Pour une structure de petite taille, la concentration de radiotracer qui lui est associée va être noyée par la fixation alentour et la structure ne pourra pas être détectée. Les biais observés dépendent donc de la taille de la structure d'intérêt, du contraste entre l'activité dans la structure et l'activité dans les tissus environnants et de l'algorithme de reconstruction.

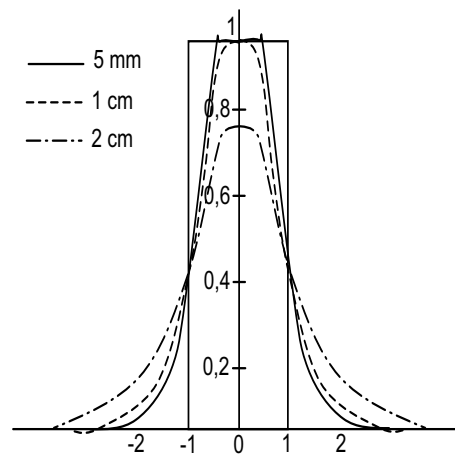


FIG. 1.9. Illustration de l'effet de volume partiel.

### 1.5.3 Facteurs physiques

Plusieurs facteurs physiques, liés aux interactions des photons dans l'organisme et dans le détecteur, perturbent le processus d'imagerie et dégradent la qualité de

l'image reconstruite en termes de contraste et de résolution. Trois facteurs affectent en fait la quantification de la radioactivité absolue, de façon plus ou moins importante selon le radiotraceur utilisé et la morphologie du patient :

- l'atténuation des photons par les tissus traversés ;
- la diffusion des photons dans le patient et le détecteur ;
- le bruit de mesure résultant de la nature statistique de l'émission des photons et le bruit affectant le signal détecté.

Le facteur physique le plus pénalisant est l'atténuation ; pour cela, on exposera sa description et ses conséquences dans la sous-section 1.5.4.

## La diffusion

Tout au long de sa trajectoire dans la matière, un photon peut subir une ou plusieurs diffusions Compton ou Rayleigh. Les photons diffusés ayant changé de direction conduisent à une information erronée sur leur position d'émission. Les photons diffusés introduisent des erreurs de localisation de l'activité présente dans l'organisme. Par exemple, en détectant des photons diffusés, on détecte de l'activité dans des régions où il n'y a pas de radiotraceur.

★ *La diffusion Rayleigh.* Dans la diffusion Rayleigh, appelée aussi diffusion cohérente, le photon incident n'interagit pas avec un seul électron mais avec tous les électrons de l'atome. L'énergie de choc du photon se trouve ainsi absorbée par la totalité de l'atome. Les électrons de ce dernier se mettent à osciller en phase avant d'émettre un photon de même énergie que le photon incident. Le photon initial incident se trouve donc finalement dévié de sa trajectoire tout en conservant son énergie principale. La probabilité d'une diffusion Rayleigh est élevée pour les photons de faible énergie et pour les matériaux de numéro atomique élevé. L'angle de diffusion est d'autant plus faible que l'énergie du photon est élevée, d'où l'importance de l'effet Rayleigh pour les faibles énergies.

★ *L'effet photoélectrique.* Un photon d'énergie  $E = h\nu$  est complètement absorbé par un atome : le photon cède son énergie à un électron lié à l'atome, appelé photoélectron, qui est éjecté avec une énergie cinétique  $E_{\text{cin}} = h\nu - E_1$ , où  $E_1$  est l'énergie de liaison de l'électron sur sa couche électronique d'origine (figure 1.10).

À la suite de l'effet photoélectrique, il se produit quasi instantanément un réarrangement du cortège électronique de l'atome, avec émission de rayons X caractéristiques ou d'électrons Auger qui emportent l'énergie d'excitation.

L'effet photoélectrique concerne en priorité les électrons les plus liés, mais il ne peut se produire avec les électrons d'une couche  $i$  que si  $h\nu > E_{1,i}$ , où  $E_{1,i}$ , est l'énergie de liaison de l'électron sur la couche  $i$ .

Les photoélectrons sont émis dans toutes les directions de l'espace, mais avec



une direction préférentielle qui dépend de l'énergie  $h\nu$  du photon incident. Pour les photons de basse énergie, la distribution est pratiquement symétrique par rapport à  $\theta = 90^\circ$ , où  $\theta$  est l'angle entre la direction du photon incident et celle de l'électron émis. Lorsque  $h\nu$  croît,  $\theta$  tend vers zéro. La section efficace photoélectrique par atome  $\sigma_{\text{Photo}}$  croît rapidement avec le numéro atomique  $Z$  et s'exprime est approximativement en :

$$\sigma_{\text{Photo}} = \frac{Z^5}{E^{3.5}}.$$

D'après l'équation précédente, on peut noter que l'effet photoélectrique est favorisé pour les milieux de numéro atomique élevé alors qu'il est une fonction décroissante de l'énergie.

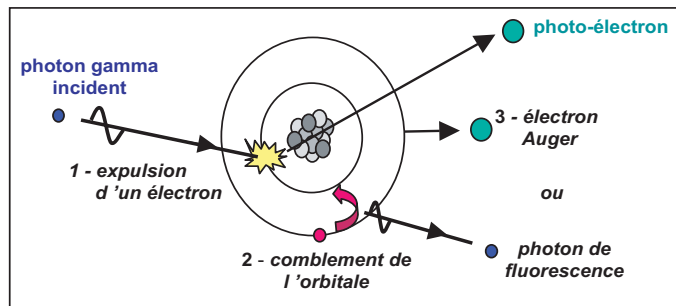


FIG. 1.10. L'effet photoélectrique.

★ *La diffusion Compton.* Une diffusion Compton se produit lorsqu'un photon (X ou Gamma) interagit avec un électron que l'on peut considérer comme libre et au repos : cet électron est lié à un atome, mais avec une énergie négligeable devant l'énergie du photon (figure 1.11). Après la collision, le photon diffusé fait l'angle  $\theta$  avec la direction du photon incident, l'électron reculant selon l'angle  $\varphi$  avec cette direction.

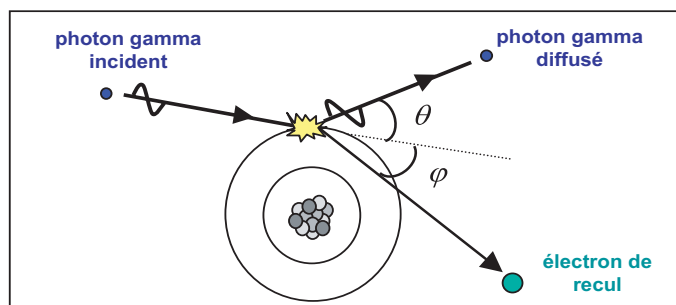


FIG. 1.11. La diffusion Compton.

Les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion du système permettent de déduire la relation entre l'énergie du photon diffusé et celle du photon incident. L'énergie de liaison de l'électron est considérée comme négligeable puisque l'effet Compton ne concerne pratiquement que les électrons appartenant aux couches périphériques de l'atome. L'énergie du photon diffusé  $h\nu'$  est alors exprimée par :

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)}$$

où  $h\nu$  est l'énergie du photon incident,  $\alpha = \frac{h\nu(\text{MeV})}{m_0c^2}$  avec  $m_0c^2$  l'énergie de masse de l'électron et  $\theta$  l'angle de diffusion du photon.

En 1929, Klein et Nishina ont formulé la relation exprimant la probabilité  $\sigma_e$  (section efficace) par électron qu'un photon d'énergie  $h\nu_0$  soit diffusé avec un angle  $\theta$  par unité d'angle solide  $\Omega$  :

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega} = r_0^2 \left[ \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \right]^2 \left[ \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right] \left[ 1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]} \right]$$

où  $r_0 = 2,818$  fm est le rayon standard de l'électron.

La section efficace par électron est obtenue en faisant l'intégrale de l'équation précédente sur tous les angles. On utilise souvent l'expression de section efficace Compton par atome :  $\sigma_{\text{Compton}} = Z \times \sigma_e$ , proportionnelle à  $Z/E$ . L'effet Compton est donc peu sensible au milieu.

## Le bruit de mesure

Le bruit correspond à une fluctuation statistique se superposant au signal et pouvant provenir du détecteur (bruit d'émission, bruit de comptage) ou de la reconstruction. L'émission des photons, la création des photoélectrons, la conversion en électrons, sont des phénomènes stochastiques, et suivent des lois de Poisson. La présence d'un bruit de nature poissonnienne introduit des erreurs et influence le rapport signal-sur-bruit. Idéalement, il est nécessaire de prendre en compte ce bruit lors de la reconstruction tomographique, et lors de l'interprétation des mesures effectuées à partir des images.

### 1.5.4 L'atténuation

#### Description du phénomène physique

Quand un faisceau de photons traverse la matière, le nombre de photons subit une décroissance exponentielle. Ce phénomène est appelé atténuation. L'atténuation

est due à l'absorption de certains photons suite à l'absorption photoélectrique et à la déflexion d'autres photons suite à des diffusions Compton à des angles suffisamment grands empêchant leur détection. Si  $I_0$  est le nombre de photons incidents et  $I$  est le nombre de photons transmis, la relation entre  $I_0$  et  $I$  est la suivante :

$$I = I_0 \times \exp(-ax), \quad (1.1)$$

où  $a$  est le coefficient d'atténuation linéique représentant la probabilité d'interaction d'un photon par unité de longueur et s'exprime en  $\text{cm}^{-1}$  et  $x$  est le parcours traversé par le photon. Le coefficient d'atténuation linéique  $a$  et la section efficace d'interaction  $\sigma$  sont liés par la relation suivante

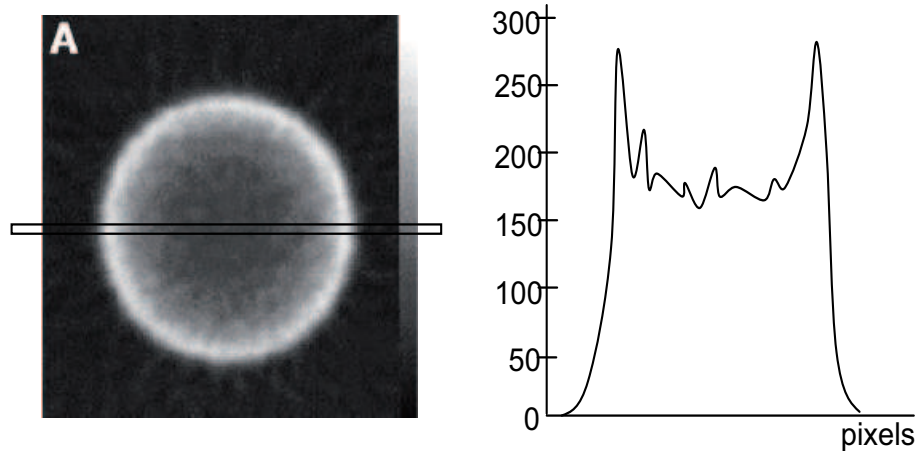
$$a = \frac{\rho \times N_A}{A} \times \sigma, \quad (1.2)$$

où  $\rho$  représente la densité du milieu traversé (en  $\text{g}/\text{cm}^3$ ),  $N_A$  le nombre d'Avogadro (en atome/mol),  $A$  la masse atomique du milieu (en  $\text{g}/\text{mol}$ ) et  $\sigma$  la section efficace totale (en  $\text{cm}^2/\text{atome}$ ). La section efficace totale  $\sigma$  s'exprime en fonction des sections efficaces des différentes interactions responsables de l'atténuation, telles l'effet photoélectrique, la diffusion Compton, la diffusion Rayleigh et la création de paires; elle s'exprime comme la somme

$$\sigma_{\text{Totale}} = \sigma_{\text{Photo}} + \sigma_{\text{Compton}} + \sigma_{\text{Rayleigh}} + \sigma_{\text{Paires}}.$$

### Conséquences de l'atténuation

L'atténuation est le facteur physique affectant le plus la quantification des images TEMP. Ce phénomène restreint le nombre de photons détectés dans les projections, ce qui dégrade le rapport signal-sur-bruit. L'atténuation produit une sous-estimation graduelle et progressive de la radioactivité du bord vers le centre de l'image, variant d'un facteur 5 jusqu'à un facteur 50 selon la taille du corps du patient; l'énergie des photons émis par le radiotracer, donc l'impact de l'atténuation, augmentent avec la profondeur : plus le lieu d'émission des photons dans l'organisme est profond, plus leur émission s'en trouvera atténuée (figure 1.12). Il en résulte d'importants biais quantitatifs.



**FIG. 1.12.** Variation de l'estimation de radioactivité sur la reconstruction d'une distribution uniforme : le profil vertical a une forme concave.

L'atténuation est un phénomène non isotrope dans l'organisme et varie en fonction de la direction à cause principalement du fait que l'organisme est composé de tissus de densité non uniforme et que l'épaisseur de tissu traversé par les photons est variable. Si l'anisotropie de l'atténuation n'est pas compensée correctement, elle peut avoir plusieurs conséquences sur les coupes reconstruites (voir Manglos et *al.* [30], 1987) :

- la résolution spatiale diminue dans les directions où l'atténuation est la plus faible et les petits volumes sont déformés dans ces mêmes directions, ce qui peut entraîner des erreurs dans la mesure de ces petits volumes ; par exemple, une source circulaire située au sein d'un objet elliptique sera déformée si l'on ne corrige pas de l'atténuation ;
- si le phénomène d'atténuation n'est pas pris en compte pendant la reconstruction tomographique, des événements sont mal positionnés et peuvent être détectés dans des régions théoriquement non actives, ce qui diminue le contraste des coupes reconstruites.

Il existe différentes méthodes pour corriger l'atténuation. On peut distinguer celles qui supposent le coefficient d'atténuation uniforme dans tout le volume à reconstruire et celles qui ne font pas cette hypothèse et prennent en compte une « carte d'atténuation ». Les corrections peuvent être appliquées avant (en corrigeant les projections), pendant ou après la reconstruction tomographique. Les méthodes de correction seront présentées au chapitre 2.

# Chapitre 2

## Modélisation et reconstruction en TEMP

### 2.1 Introduction

Ce chapitre présente la modélisation mathématique du problème tomographique tout d'abord simplifié (sans correction d'atténuation) en introduisant la transformée de Radon ainsi que les différentes méthodes analytiques et algébriques de reconstruction d'images utilisés en TEMP. Ensuite, nous introduirons un modèle plus réaliste qui tient compte de la présence de l'atténuation. Les méthodes de correction mises en oeuvre pour corriger l'atténuation seront décrites par la suite.

### 2.2 Le modèle simplifié en TEMP

Lors d'un examen SPECT, la gamma-caméra effectue un mouvement de rotation autour du patient pour acquérir sous différents angles les projections monodimensionnelles (1D) de la distribution bidimensionnelle (2D) d'activité dans l'organe à étudier. Dans cette section, nous allons présenter les aspects physiques et mathématiques de l'acquisition des projections monodimensionnelles dans le cas du modèle simplifié en tomographie *i.e.* en négligeant le facteur d'atténuation physique des photons  $\gamma$

#### 2.2.1 Le modèle physique

Le modèle physique de la propagation des photons  $\gamma$  à travers un milieu peut être formulé par l'équation du transport. En effet, considérons un faisceau de particules se propageant dans un milieu  $\Omega$  (fluide ou solide) et supposons que la vitesse des particules est constante et égale à  $v$ .

Soit  $\Phi = \Phi_t(x) = \Phi(x, t)$  la densité des particules définie à partir de leur position

spatiale  $x \in \mathbb{R}^2$  à l'instant  $t$ . Alors, l'équation de transport est donnée par l'équation aux dérivées partielles de conservation des lois de comportement des particules :

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} + v \cdot \nabla \Phi = -|v|a(x)\Phi + q(x, t), \quad (2.1)$$

où  $q(x, t)$  est le terme source, et  $a(x, t)$  est la probabilité de l'absorption des particules au point  $(x, t)$  qui modélise les facteurs de diffusion et d'atténuation des photons émis dans le milieu  $\Omega$ .

Soient  $v = |v|\theta$ ,  $f = \frac{q}{|v|}$  et  $L = \{x \in \mathbb{R}^2 / x = x_0 + s\theta^\perp\}$ , alors les particules caractérisées par leur position spatiale  $x$  se propagent le long de la ligne  $L$  ( ligne entre  $x_0$  et  $x$  et de direction  $\theta^\perp$ ).

Pour le cas où  $\Phi$  est stationnaire,  $\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = 0$  et  $v = \text{const} > 0$ , l'équation (2.1) s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial s} = -a(x)\Phi + f(x), \quad x \in L. \quad (2.2)$$

À partir de cette équation, nous pouvons déduire la modélisation de plusieurs techniques de tomographie médicale (CT scanner, TEP, TEMP).

Le système TEMP est aussi basé sur le modèle de l'équation (2.2). En effet, le traceur injecté dans le corps émet des photons vers l'extérieur de l'organe. On suppose donc que chaque voxel (élément de volume) émet des particules, que  $f(x)ds$  représente le nombre des particules émises dans ce volume radioactif et que  $\Phi = I$ , où  $I$  est l'intensité recueillie en un élément détecteur au point  $s$  de la gamma-caméra dans la direction  $\theta$ . Alors, l'équation (2.2) définie sur la ligne rectiligne  $L$  devient l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\frac{\partial I(x)}{\partial s} = f(x), \quad x \in L. \quad (2.3)$$

En supposant une collimation parfaite (trous du collimateur infiniment fins et profonds) et en négligeant l'atténuation et l'auto-absorption subie par les photons émis ( $a = 0$ ), la solution de l'équation différentielle (2.3) s'écrit :

$$I(L) = \int_{L(x)} f(x)dx, \quad (2.4)$$

où  $L(x)$  est le segment inclus dans  $L$  dont la longueur représente la distance entre le point  $x$  et le détecteur.

### 2.2.2 La transformée de Radon

Nous définissons dans ce paragraphe le cadre mathématique rigoureux de l'acquisition des données en TEMP (simplifié). Pour cela, nous introduisons la transformée de Radon comme étant la solution de l'équation (2.3) donnée par (2.4).

Considérons une coupe d'un organe dans laquelle une zone active est détectée. Soit  $f(x, y)$  la fonction qui représente la concentration d'activité en un point  $(x, y)$  de cette zone. Lorsque la gamma-caméra tourne autour de l'organe, elle acquiert pour chaque direction  $\theta$  de détection une projection 1D de la coupe 2D.

En effet, en première approximation, le nombre de photons comptés en un point  $s$  de la caméra est égal à la somme des photons émis le long de la droite passant par ce point et de direction  $\theta^\perp$  et est directement proportionnel à l'intégrale de la fonction  $f$  le long de cette droite (voir figures 2.1(a) et 2.1(b)). La projection parallèle de  $f$  dans la direction  $\theta^\perp$  est alors vue comme l'ensemble des intégrales de la fonction  $f$  le long de la famille de droites  $L(s, \theta) := \{(x, y), \theta\} = s\}$  parallèles de l'espace  $\mathbb{R}^2$ , de direction  $\theta^\perp$  et se situant à la distance  $s$  de l'origine (centre de la zone explorée). Ces projections parallèles de  $f$  régissent les intensités mesurées par la caméra notées  $g(\theta, s)$  et modélisées par la transformée de Radon  $(\theta, s) \mapsto R_\theta[f](s)$  défini donc par :

$$R_\theta[f](s) = \int_{\langle(x,y),\theta\rangle=s} f(x,y) d\lambda_{s,\theta}(x,y) = g(\theta, s). \quad (2.5)$$

Ici  $d\lambda_{s,\theta}$  représente la restriction de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$  sur la ligne  $L(s, \theta)$ , avec

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \theta^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \varphi < \varphi_{\max}.$$

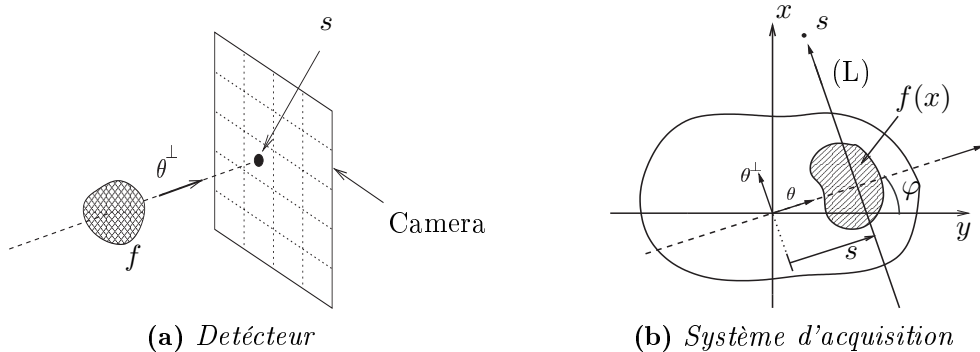


FIG. 2.1. Scanner

Considérons le repère cartésien  $(O, x, y)$  fixe lié à la distribution d'activité  $f(x, y)$  et le repère tournant  $(O, s, u)$  associé à la gamma-caméra en rotation à l'incidence  $\theta$  (figure 2.2).

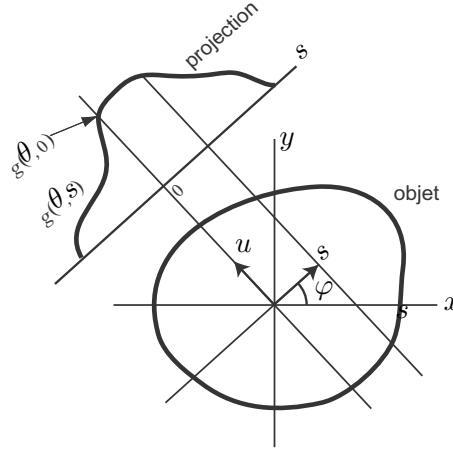


FIG. 2.2. Repère tournant

La valeur  $g(s, 0)$  est obtenue en intégrant la fonction  $f(x, y)$  le long de la ligne  $L(0, \theta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \langle (x, y), \theta \rangle = 0\}$  passant par l'origine  $O$  du repère  $(x, y)$  et de direction  $\theta^\perp$ . Les points appartenants à cette ligne vérifient :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = 0. \quad (2.6)$$

Donc l'intégration de la fonction  $f(x, y)$  le long de la ligne  $L(0, \theta)$  s'exprime en utilisant la mesure de Dirac  $\delta$  de la façon suivante :

$$g(\theta, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi) dx dy. \quad (2.7)$$

De même, la ligne  $L(s, \theta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \langle (x, y), \theta \rangle = s\}$  se situant à la distance  $s$  de l'origine du repère  $(x, y)$  et de direction  $\theta^\perp$  satisfait la relation suivante :

$$(x - s \cos \varphi) \cos \varphi + (y - s \sin \varphi) \sin \varphi = 0, \quad (2.8)$$

*i. e.*

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0, \quad (2.9)$$

puisque cette ligne est obtenu en appliquant la translation de vecteur  $(s \cos \varphi, s \sin \varphi)$  dans le repère  $(O, x, y)$  à la ligne  $L(0, \theta)$ . L'équation (2.7) s'écrit :

$$g(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) dx dy = R_\theta[f](s). \quad (2.10)$$

Puisque la mesure  $\delta$  qui figure dans l'équation (2.10) est invariante par symétrie, on a :

$$g(\theta, s) = g(\pi + \theta, -s). \quad (2.11)$$



Cette relation a une importance pour le choix des limites des paramètres  $\theta$  et  $s$  qui interviendront dans l'implémentation numérique des méthodes de reconstruction. On remarque d'après cette dernière formulation de l'opérateur  $R_\theta$  de la transformée de Radon s'exprime à l'aide d'intégrale double dans le repère  $(O, x, y)$ . Puisque la transformée de Radon est à la base une intégrale linéique, nous cherchons dans la suite à l'exprimer à l'aide d'une intégrale simple.

Les coordonnées dans les deux repères  $(O, x, y)$  et  $(O, u, s)$  sont reliées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} s = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ u = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \cos \varphi - u \sin \varphi \\ y = s \sin \varphi + u \cos \varphi \end{cases}. \quad (2.12)$$

En effectuant le changement de variables défini par (2.12) dans l'équation (2.10), on obtient

$$g(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - u \sin \varphi, s \sin \varphi + u \cos \varphi) \delta(0) ds du = R_\theta[f](s), \quad (2.13)$$

or la mesure  $\delta$  dans l'équation (2.10) porte sur la variable  $s$ , alors  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) ds = 1$ . Ce qui nous ramène à exprimer l'équation (2.13) de la façon suivante :

$$g(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - u \sin \varphi, s \sin \varphi + u \cos \varphi) du = R_\theta[f](s). \quad (2.14)$$

Cette équation représente une seconde formulation de la transformée de Radon définie par l'équation (2.5). Elle servira dans la suite à élaborer les formules d'inversion analytiques de la transformée de Radon qui serviront à mettre en oeuvre des méthodes numériques de reconstruction d'images en TEMP.

## 2.3 Méthodes analytiques de reconstruction

Les méthodes analytiques consistent à inverser analytiquement la transformée de Radon. Cela suppose que les données sont continues et que la valeur d'une projection est connue en chaque point du sinogramme. L'algorithme de reconstruction le plus répandu dans le domaine de l'imagerie est la rétroprojection filtrée (en anglais FBP pour Filtered Back Projection) ainsi que le théorème de la coupe centrale de Fourier. Leurs principaux avantages sont la rapidité et le faible nombre de paramètres qu'elles impliquent.

### 2.3.1 Le théorème de la coupe centrale

L'inversion de la transformée de Radon peut être réalisée de plusieurs manières. Dans cette sous-section, nous utiliseront un algorithme standard basé sur le théorème de la coupe centrale de Fourier pour inverser la transformée de Radon.

Nous avons vu qu'une projection  $g(s, \theta)$  de l'activité  $f(x, y)$  pouvait mathématiquement s'écrire sous la forme :

$$g(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - u \sin \varphi, s \sin \varphi + u \cos \varphi) du. \quad (2.15)$$

Calculons la transformée de Fourier monodimensionnelle  $G_\theta(\xi)$  de cette projection par rapport à la variable  $s$  :

$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - u \sin \varphi, s \sin \varphi + u \cos \varphi) \exp(-2i\pi\xi s) ds du \quad (2.16)$$

en utilisant le changement de variable défini par (2.12) dans l'équation (2.16), on obtient :

$$\begin{aligned} G_\theta(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-2i\pi\xi(x \cos \varphi + y \sin \varphi)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-2i\pi\{(\xi \cos \varphi)x + (\xi \sin \varphi)y\}) dx dy. \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'autre part, la transformée de Fourier bidimensionnelle  $F(k_x, k_y)$  de l'activité  $f(x, y)$  est :

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-2i\pi(k_x x + k_y y)) dx dy. \quad (2.18)$$

Introduisant les fréquences polaires suivantes

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

pour l'utiliser dans les équations (2.17) et (2.18) nous conduit à la relation suivante :

$$\begin{aligned} G_\theta(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-2i\pi(k_x x + k_y y)) dx dy \\ &= F(\xi \cos \varphi, \xi \sin \varphi). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nous venons de démontrer le théorème de la coupe centrale qui s'énonce ainsi : la transformée de Fourier monodimensionnelle d'une projection  $g(s, \theta)$  correspond à une coupe qui passe par l'origine et fait un angle  $\varphi$  avec l'axe des abscisses de la transformée bidimensionnelle de Fourier  $F(k_x, k_y)$  de l'activité  $f(x, y)$ .

Cette méthode permet théoriquement de reconstruire la coupe tomographique à l'aide de la transformée de Fourier inverse de  $F(k_x, k_y)$ , mais souffre toutefois de gros défauts : le nombre de projections est limité et le remplissage du plan fréquentiel n'est pas parfait surtout pour les hautes fréquences ; le calcul des transformées de Fourier ainsi que le calcul des interpolations en font une méthode longue et introduisent du bruit dans l'image reconstruite. Une autre méthode plus rapide et plus exacte doit donc être utilisée.

### 2.3.2 La rétroprojection filtrée

Une autre méthode souvent utilisée pour l'inversion de la transformée de Radon est appelée la méthode de Rétroprojection filtrée (*Filtered Back-Projection* en anglais). Nous avons vu d'après le théorème de la coupe centrale que la récupération de l'activité  $f(x, y)$  était possible en appliquant la transformée inverse 2D de Fourier à  $F(k_x, k_y)$  donnée par l'équation (2.20). Cette procédure d'inversion s'écrit :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) \exp(2i\pi(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y. \quad (2.21)$$

D'après le théorème de la coupe centrale (équation (2.20)), on peut remplacer  $F(k_x, k_y)$  par la transformée de Fourier des projections  $G_\theta(\xi)$  dans l'équation (2.21) :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(2i\pi(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y. \quad (2.22)$$

En reprenant  $\xi = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  et  $s = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ , nous pouvons faire le changement de variable consistant à passer en coordonnées polaires  $(\xi, \varphi)$ . Les bornes d'intégration de la variable  $\varphi$  deviennent 0 et  $\pi$ . Du fait de la symétrie par rapport à l'origine, le point  $(\xi, \varphi)$  a la même valeur que le point  $(-\xi, \varphi + \pi)$  : on peut donc utiliser la valeur absolue de  $\xi$  pour parcourir le plan fréquentiel et faire varier  $\varphi$  de 0 à  $\pi$ . L'équation (2.22) devient :

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) |\xi| \exp(2i\pi \xi s) d\xi \right) d\varphi. \quad (2.23)$$

L'intégrale interne représente la transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier  $G_\theta(\xi)$  de la projection  $g(\theta, s)$  multipliée par la valeur absolue de  $\xi$ . Cette intégrale est une projection filtrée  $\hat{g}(\theta, s)$  :

$$\hat{g}(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) |\xi| \exp(2i\pi \xi s) d\xi. \quad (2.24)$$

Il est donc possible de reconstruire  $f(x, y)$  par :

$$f(x, y) = \int_0^\pi \hat{g}(\theta, s) d\varphi \quad (2.25)$$

qui n'est autre que la rétroprojection des projections filtrées. Les projections sont filtrées à l'aide du filtre rampe, noté  $|\xi|$  dans l'équation (2.24). Le filtre rampe met à zéro la composante constante, ce qui a pour conséquence d'introduire des valeurs négatives, et amplifie les fréquences élevées. En pratique, le filtre rampe introduit de part et d'autre de l'objet filtré des valeurs négatives qui effacent progressivement les artefacts en étoile laissés par l'étape de projection.

Finalement, les étapes de l'algorithme de rétroprojection filtrée sont les suivantes :

- pour chaque incidence  $\theta$ , on calcule la transformée de Fourier  $G_\theta(\xi)$  de la projection  $g(\theta, s)$  ;
- on multiplie cette transformée de Fourier par le filtre rampe ;
- on calcule la transformée de Fourier inverse de chaque projection filtrée ;
- on rétroprojette les projections filtrées.

### Filtres utilisés avec la rétroprojection filtrée

En pratique, le filtrage rampe introduit de part et d'autre de l'objet filtré des valeurs négatives. Le rôle de ces valeurs négatives est d'effacer progressivement l'étalement des données laissées par les autres projections lors de l'opération de rétroprojection. D'un autre côté, la convolution des projections avec le filtre rampe a pour conséquence d'amplifier de manière très importante les hautes fréquences, correspondant principalement au bruit. Afin de réduire ce bruit, on utilise les filtres lissants (ou passe-bas).

Les filtres lissants utilisés sont souvent des filtres passe-bas dont le rôle est d'éliminer les hautes fréquences dominées par le bruit. Le filtrage peut être effectué de façons différentes :

- le filtre rampe  $|\xi|$  est multiplié par un filtre 1D, ou fenêtre d'apodisation  $H(\xi)$ , qui détermine la portion du filtre rampe utilisée lors du lissage : le filtre ainsi obtenu se comporte comme le filtre rampe aux basses fréquences et supprime les hautes fréquences. C'est la méthode la plus courante et la plus rapide car le lissage n'est réalisé que suivant une seule dimension, celle de la projection monodimensionnelle qu'on rétroprojette ;
- l'image est filtrée préalablement à l'aide d'un filtre 2D puis reconstruite par un filtre rampe, ou, ce qui est souvent équivalent, l'image est d'abord reconstruite par un filtre rampe, puis les coupes sont filtrées par un filtre 2D.

Les filtres les plus fréquemment utilisés sont le filtre de Hann et le filtre de Butterworth, mais d'autres filtres sont parfois employés, tels que le filtre de Hamming ou le filtre Shepp-Logan.

Le filtre de Hann (Gilland B et *al.* [9]) correspond à une fonction cosinus dans l'espace fréquentiel et sa formule est donnée par :

$$\begin{cases} H(\xi)_{\text{Hann}} = 0.5 \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{\xi}{\xi_c} \right) \right) & \text{si } |\xi| < \xi_c \\ H(\xi)_{\text{Hann}} = 0 & \text{si } |\xi| > \xi_c. \end{cases} \quad (2.26)$$

Le paramètre  $\xi_c$  est appelé fréquence de coupure du filtre : plus elle est basse et plus le filtre est lissant, ce qui se traduit par une forte atténuation du bruit mais aussi par

une perte des détails à haute fréquence, donc de résolution, et parfois une modification des moyennes fréquences. Ce filtre permet des calculs extrêmement rapides.

Un autre filtre fréquemment utilisé est celui de Butterworth (Gilland B et al. [9]), il dépend de deux paramètres, la fréquence de coupure  $\xi_c$  et l'ordre du filtre  $n$  qui détermine la rapidité de décroissance dans les hautes fréquences. Sa formule est donnée par :

$$\begin{cases} H(\xi)_{\text{Butterworth}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\xi}{\xi_c}\right)^n\right]^{1/2}} & \text{si } |\xi| < \xi_c \\ H(\xi)_{\text{Butterworth}} = 0 & \text{si } |\xi| > \xi_c. \end{cases} \quad (2.27)$$

S'il est correctement paramétré, le filtre de Butterworth préserve aussi les moyennes fréquences et donc la résolution. Plus l'ordre  $n$  est faible, plus le lissage est fort et moins on préserve les hautes fréquences.

### 2.3.3 Implémentation numérique de la rétroprojection filtrée

Nous avons vu dans la sous-section précédente une méthode qui permet d'inverser théoriquement et dans le cas continu la transformée de Radon. Dans cette partie, nous présentons une méthode d'implémentation numérique de la rétroprojection filtrée en discrétisant la formule (2.25) avec un certain choix des paramètres d'échantillonnage.

#### Échantillonnage

Nous utilisons un échantillonnage à pas constant pour toutes les variables dans la plupart des schémas numériques, cet échantillonnage se déclare de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x &= x_m = x_{min} + m\Delta x & m &= 0, 1, \dots, M-1 \\ y &= y_n = y_{min} + n\Delta y & n &= 0, 1, \dots, N-1 \\ s &= s_r = s_{min} + r\Delta s & r &= 0, 1, \dots, R-1 \\ \varphi &= \varphi_p = \varphi_{min} + p\Delta\varphi & p &= 0, 1, \dots, P-1. \end{aligned}$$

De plus, nous supposons que les images sont carrées et centrées :

$$\Delta x = \Delta y \quad (2.28)$$

$$M = N \quad (2.29)$$

$$x_{min} = -x_{max} = -\frac{(M-1)}{2}\Delta x \quad (2.30)$$

$$y_{min} = x_{min} = -y_{max} = -\frac{(M-1)}{2}\Delta x. \quad (2.31)$$

On signale qu'en général ce choix n'assure pas une stabilité numérique optimale, mais par contre implique une facilité dans l'implémentation numérique (voir [28] pour plus d'informations sur un échantillonnage à pas non constant).

La relation (2.11) nous permet d'avoir un choix flexible sur les limites des domaines de discrétisation des paramètres. En effet, il est possible de choisir  $s \geq 0$  et couvrir toutes les lignes d'intégrations  $L(s, \theta)$  nous amène à prendre  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . De même il est possible d'avoir des valeurs négatives de  $s$ . Dans ce cas on prend  $0 \leq \varphi < \pi$  avec  $\varphi_{min} = 0$  et  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{P}$ . Nous adopterons ce dernier choix pour la suite.

Lors de l'implémentation numérique d'un algorithme de transformation de Radon (ou Radon inverse), plusieurs facteurs doivent être pris en compte pour assurer une performance raisonnable. Premièrement, l'échantillonnage des paramètres doit être adéquat, cela se manifeste par les limites des intervalles à discrétiser. Deuxièmement, on suppose que l'activité  $f(x, y)$  que l'on cherche à reconstituer est une fonction à support compact, plus précisément nulle si  $\sqrt{x^2 + y^2} > |s_{max}|$ . Cette hypothèse implique que  $g(s, \theta) = 0$  si  $|s| > |s_{max}|$ . Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, des problèmes numériques apparaîtront puisque l'algorithme numérique ne disposera pas de toutes les valeurs non nulles nécessaires à la reconstruction.

En supposant que  $f(x, y)$  est à support compact, le point  $(x, y) = (0, 0)$  doit être tel que  $|s_{max}|$  soit minimisé. Dans ce cas, les points  $s_r$  sont distribués symétriquement autour de  $s = 0$  et  $R$  est pair, alors on a la relation suivante :

$$s_{min} = -s_{max} = -\frac{(M-1)}{2}\Delta s. \quad (2.32)$$

En plus, on prend :

$$\Delta x = \Delta s. \quad (2.33)$$

Par suite, il nous reste peu de paramètres à choisir, notamment le pas de discrétisation spatial  $\Delta x$ , la taille des images carrées  $M$  et le nombre de projections  $P$ .

### implémentation numérique

La rétroprojection filtrée est le schéma d'inversion le plus facile à implémenter. Chaque algorithme basé sur cette méthode contient deux étapes ; une étape de filtrage et une deuxième étape d'intégration (rétroprojection). Nous décrivons dans cette sous-section l'algorithme numérique de la méthode présente en introduisant les versions discrétisées de la transformée de Fourier et de son inverse.

Soit  $g(t)$  une fonction réelle continue et discrétisée uniformément, *i.e.*  $g_s(n) = g(n\Delta t)$  ; en plus, on suppose que  $g$  possède seulement  $N$  valeurs non-nulles. Dans ce cas, la transformée de Fourier est approximée par la transformée de Fourier discrète suivante :

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-2i\pi ft) dt \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} g_s(n) \exp(-2i\pi mn/N) = G_s(m). \quad (2.34)$$

Donc  $G_s(m)$  est l'approximation du spectre continu

$$G_s(m) \approx G\left(\frac{m}{N\Delta t}\right). \quad (2.35)$$

Le spectre discret dans l'équation (2.34) est calculé comme la TFD de  $n \rightarrow g_s(n)$ . De même, on définit la transformée inverse de Fourier discrète par :

$$g_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(2i\pi ft) df \approx \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} G_s(m) \exp(2i\pi mn/N) \quad (2.36)$$

L'étape de filtrage des projections  $g(\theta, s)$  est donnée par l'équation (2.24) :

$$\hat{g}(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) |\xi| \exp(2i\pi \xi s) d\xi,$$

où  $G_\theta(\xi)$  représente la transformée de Fourier des projections  $g(\theta, s)$ . L'implémentation de l'équation (2.24) consiste à calculer tout d'abord la TFD des projections  $g(\theta, s)$ , les multiplier par le filtre rampe  $|\xi|$  et puis à calculer les projections filtrées  $\hat{g}(\theta, s)$  par la ITFD de l'ensemble.

L'opérateur de rétroprojection était donné par l'équation (2.25) :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi \hat{g}(\theta, s) d\varphi \\ &= \int_0^\pi \hat{g}(\varphi, x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (2.37)$$

L'étape de filtrage étant réalisée, nous abordons maintenant l'implémentation de l'opérateur intégral de rétroprojection figurant dans l'équation (2.37). En utilisant l'échantillonnage de paramètres défini dans la partie 2.3.3, une méthode courante de discrétisation consiste à écrire (2.37) de manière approchée :

$$f(x_m, y_n) \approx \Delta\varphi \sum_{p=0}^{P-1} \hat{g}(\varphi_p, x_m \cos \varphi_p + y_n \sin \varphi_p), \quad (2.38)$$

où on effectue une interpolation monodimensionnelle dans la direction de la variable  $s$ . Pour cela, il est souvent commode d'utiliser une interpolation linéaire ou une approximation au sens des moindres carrés. Dans ces cas, les versions discretisées de l'équation (2.37) sont :

★ *Approximation au sens des moindres carrés.*

$$f(x_m, y_n) \approx \Delta\varphi \sum_{p=0}^{P-1} \hat{g}(p, [r^*]), \quad \text{où } r^*(p; m, n) = \frac{x_m \cos \varphi_p + y_n \sin \varphi_p - s_{\min}}{\Delta s} \quad (2.39)$$

★ *Interpolation linéaire.*

$$\begin{aligned}
 f(x_m, y_n) &\approx \Delta\varphi \sum_{p=0}^{P-1} (1 - \omega)\hat{g}(p, r_l) + \omega\hat{g}(p, r_l + 1) \\
 \text{où } r^*(p; m, n) &= \frac{x_m \cos \varphi_p + y_n \sin \varphi_p - s_{min}}{\Delta s} \\
 r_l &= r^*(p; m, n) \text{ et } \omega = r^* - r_l.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

On pourra utiliser un ordre élevé d'interpolation pour améliorer la qualité des images reconstruites, mais cela peut augmenter de manière significative le coût et le temps de calcul.

### 2.3.4 Exemples de reconstruction numériques

Nous présentons dans cette partie deux exemples numériques de reconstruction d'images en TEMP. Ces simulations ont été réalisées avec la méthode de rétroprojection filtrée décrite dans les parties précédentes et réalisée au sens des moindres carrés comme l'indique l'équation (2.39). Afin de réduire le bruit dans les images reconstruites, le filtre rampe  $\xi$  été multiplié dans l'étape de filtrage par la fenêtre d'apodisation  $H(\xi)_{\text{Hann}}$  définie par (2.26) avec une fréquence de coupure  $\xi_c = 1/2\Delta x$ .

Le but du premier exemple est de reconstruire le fantôme  $f^1$  montré dans la figure 2.3 et de voir comment évolue la qualité de l'image reconstruite en fonction du nombre  $P$  d'angles utilisés pour le calcul de la transformation de Radon. Le fantôme  $f^1$  représente l'image d'une combinaison linéaire des fonctions caractéristiques de cinq disques de centres  $(x_j, y_j)$  et d'intensités  $\nu_j$  :

$$f^1(x, y) = \sum_{j=1}^5 \nu_j \delta(x - x_j, y - y_j). \tag{2.41}$$

Afin de satisfaire les conditions d'échantillonnage (voir 2.3.3), le fantôme  $f^1$  et les images reconstruites ont été discrétisés symétriquement autour de  $(0, 0)$  sur une grille carrée  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$  de taille  $256 \times 256$  avec un pas de discrétisation régulier  $\Delta x = \Delta y = 2/256$ . De même, nous avons pris  $\Delta s = \Delta x$  pour le calcul de la transformation de Radon et de l'inversion par rétroprojection filtrée.



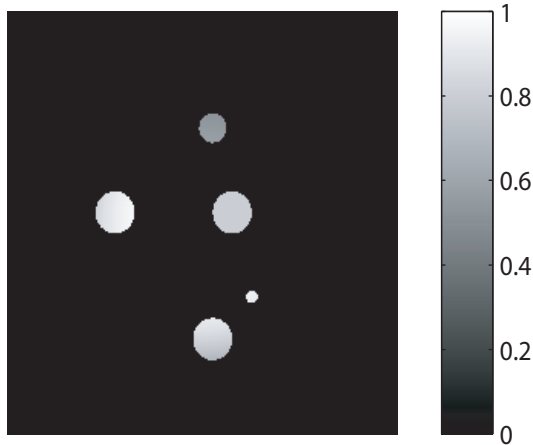


FIG. 2.3. *Fantôme  $f^1$ .*

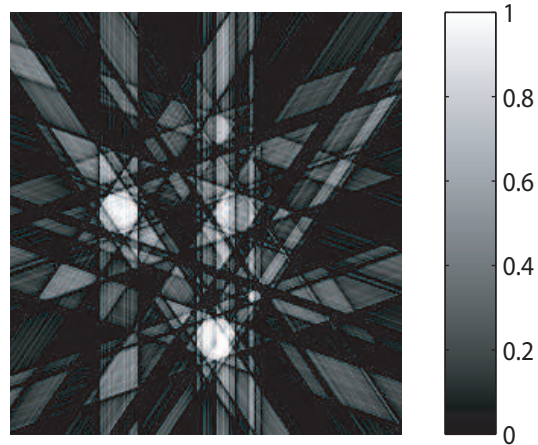


FIG. 2.4. *Rétroprojection filtrée du sinogramme avec 5 prises d'angles ( $P = 5$ ).*

La figure 2.4 montre l'image reconstruite à partir du sinogramme provenant d'une prise de 5 angles ( $P = 5$ ), elle montre bien comment la rétroprojection du sinogramme se fait suivant les 5 angles. On voit dans la figure 2.5 le résultat de reconstruction effectué avec  $P = 10$  prises d'angles, la forme des disques commence à apparaître, mais on remarque que les artefacts en étoile persistent à l'extérieur des disques. En augmentant le nombre d'angles utilisé jusqu'à  $P = 20$ , les artefacts commencent à diminuer significativement comme le montre la figure 2.6.

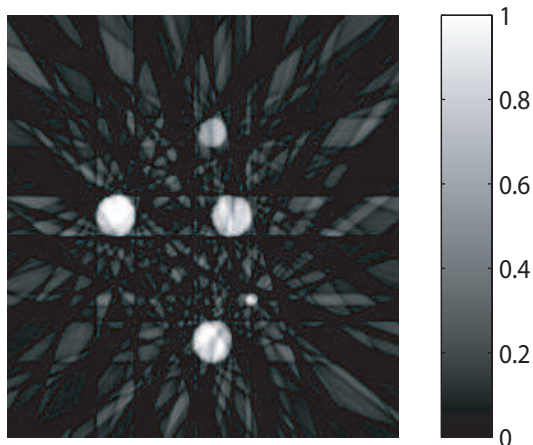


FIG. 2.5. *Rétroprojection filtrée du sinogramme avec 10 prises d'angles ( $P = 10$ ).*

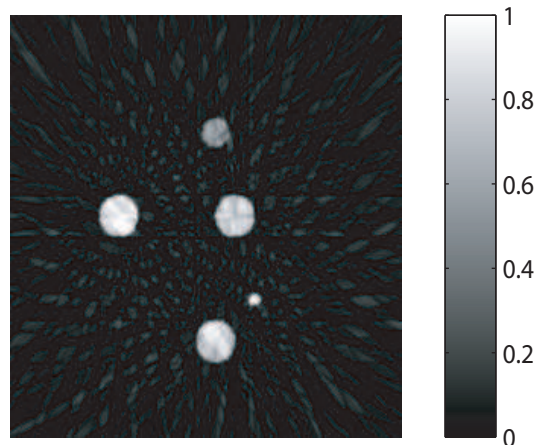


FIG. 2.6. *Rétroprojection filtrée du sinogramme avec 20 prises d'angles ( $P = 20$ ).*

nous avons vu dans l'exemple précédent que la reconstruction par rétroprojection filtrée dépend essentiellement du nombre  $P$  d'angles utilisés dans le calcul du sinogramme, mais qu'elle donne un bon résultat même avec un nombre d'angles relativement petit ( $P = 20$ ) lorsqu'il s'agit d'une reconstruction d'un fantôme possédant une structure géométrique simple.

Dans l'exemple suivant, nous avons effectué la reconstruction du fantôme de Shepp-Logan (figure 2.8) qui contient en même temps des zones étendues et des régions à géométrie fine et discontinue. Cet exemple nous permettra de tester la capacité de la méthode de rétroprojection filtrée à la reconstruction d'images à structures géométriques complexes. L'échantillonnage des paramètres dans cet exemple est le même que celui utilisé dans le premier exemple et le sinogramme (figure 2.7) a été calculé par la transformation de Radon avec une prise de 120 angles espacés régulièrement dans l'intervalle  $[0, \pi[$ .

L'image présentée dans la figure 2.9 est le résultat de reconstruction du fantôme de Shepp-Logan par la méthode de rétroprojection filtrée ; elle montre la capacité de la méthode à reconstruire des images de bonne qualité. Les détails fins sont reproduits et la présence du bruit dans l'image reconstruite est raisonnable.

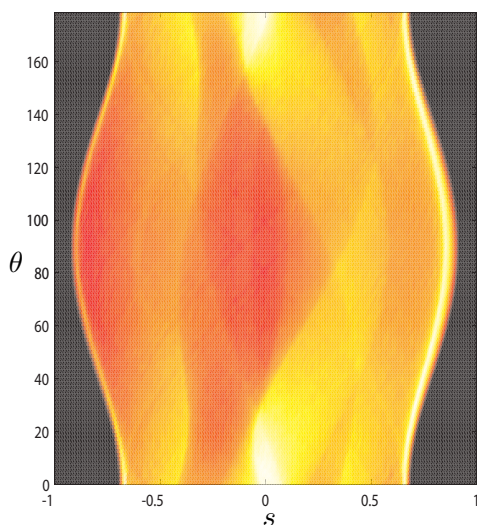


FIG. 2.7. Sinogramme du fantôme de Shepp-Logan ( $P = 120$  angles).



FIG. 2.8. *Fantôme de Shepp-Logan.*



FIG. 2.9. *Reconstruction du fantôme de Shepp-Logan par rétroprojection filtrée.*

La reconstruction des coupes tomographiques par rétroprojection filtrée reste la méthode la plus utilisée dans plusieurs applications pratiques. Elle a pour principal avantage sa rapidité. L'utilisation conjointe de filtres lissant ou contrastant permet d'avoir une bonne qualité d'image. Toutefois, la méthode ne permet pas l'élimination complète d'artefacts de reconstruction qui peuvent parfois être gênants et ne prend pas en compte des facteurs physiques comme la diffusion des photons et l'atténuation de l'organe étudié.

## 2.4 Méthodes algébriques de reconstruction

L'application des méthodes analytiques de reconstruction suppose que les données acquises sont continues. En pratique, ces dernières sont échantillonnées et numérisées. Il existe une deuxième famille de méthodes de reconstruction tomographique, mieux adaptées à des données discrètes : ce sont les méthodes algébriques.

L'approche algébrique implique une discrétisation de l'ensemble du problème antérieur à la conception des méthodes de résolution, à l'inverse des méthodes analytiques dont les formules de reconstruction sont issues d'un raisonnement sur une distribution et des projections continues et sont discrétisées ensuite. Compte tenu du fait que la distribution sera forcément reconstruite de manière discrète, mais aussi de ce que les projections sont discrètes (images composées de pixels) et séparées par des pas d'angle discrets, raisonner sur ces données discrètes paraît adapté à la situation physique concrète même si d'autres considérations basées sur la modélisation du problème justifient ce choix.

### 2.4.1 Formulation algébrique du problème

La transformation de Radon est une transformation linéaire en  $f(x, y)$ . Les versions discrètes de cette transformée le sont aussi. Pour aboutir à une formulation algébrique du problème de reconstruction, nous allons exprimer l'expression intégrale de la transformée de Radon selon la représentation matricielle suivante :

$$\begin{array}{ccc} g(\theta, s) & = & R_{\theta} f(x, y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & = & A \cdot x \end{array} \quad (2.42)$$

Dans la suite, les projections sont données par leurs valeurs discrétisées  $g(\theta_p, s_r) = g(p, r)$  et de même l'image  $f(x_m, y_n) = f(m, n)$  utilisée pour la reconstruction. La matrice  $g(p, r)$  est réordonnée en le vecteur  $b$ , tel que :

$$b_j = b_{rP+p} = g(p, r). \quad (2.43)$$

La même technique est appliquée à l'image  $f(m, n)$  pour la réordonner en le vecteur  $x$  :

$$x_i = x_{nM+m} = f(m, n). \quad (2.44)$$

L'image continue  $f(x, y)$  s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de base  $\Phi(\cdot)$  :

$$f(x, y) = \sum_m \sum_n f(m, n) \Phi(x - x_m, y - y_n) \quad (2.45)$$

avec

$$\Phi(x - x_m, y - y_n) = \begin{cases} 1 & x = x_m \text{ et } y = y_n \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \quad (2.46)$$

dans ce cas, la transformée de Radon de  $f(x, y)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} g(p, r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_m \sum_n f(m, n) \Phi(x - x_m, y - y_n) \right) \delta(s_r - x \cos \varphi_p - y \sin \varphi_p) dx dy \\ &= \sum_m \sum_n f(m, n) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - x_m, y - y_n) \delta(s_r - x \cos \varphi_p - y \sin \varphi_p) dx dy \end{aligned} \quad (2.47)$$

Par suite, les éléments de la matrice  $A$  du système donné par l'équation (2.42) sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{rP+p, nM+m} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - x_m, y - y_n) \delta(s_r - x \cos \varphi_p - y \sin \varphi_p) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) \delta((s_r - x_m \cos \varphi_p - y_n \sin \varphi_p) - x \cos \varphi_p - y \sin \varphi_p) dx dy \\ &= R_{\theta_p}[\Phi](s_r - x_m \cos \varphi_p - y_n \sin \varphi_p) \end{aligned} \quad (2.48)$$

On remarque que l'élément  $a_{i,j}$  de la matrice  $A$  est l'évaluation de la transformée de Radon de la fonction  $\Phi(\cdot)$  au point  $s$  ajusté suivant la position du pixel  $(m, n)$ .

Finalement, l'équation (2.42) s'exprime sous la forme matricielle  $b = A \cdot x$ , où le vecteur  $b$  est de taille  $I = MP$ , le vecteur  $x$  de taille  $J = M^2$  et la matrice de projection  $A$  de taille  $I \times J = MP \times M^2$ .

### 2.4.2 Calcul de la matrice de projection

La matrice  $A$  du système linéaire défini par l'équation (2.42) peut être estimée de différentes manières. L'une des méthodes les plus utilisées pour l'estimation de la matrice de projection  $A$  est basée sur l'approximation par la méthode des moindres carrés. D'autres méthodes basées sur le principe d'interpolation sont aussi mises en oeuvre grâce à leurs simplicité d'implémentation, mais demandent en revanche un coût plus élevé pour le calcul.

Autour de chaque pixel  $(x_m, y_n)$  est placé un carré  $\Delta$  de dimension  $\Delta x \times \Delta x$ , si la ligne  $L$  de paramètres  $(\theta_p, s_r)$  passe par  $\Delta$ , alors  $a_{i,j} = 1$ , sinon  $a_{i,j} = 0$ . D'après la figure 2.10 et en posant  $s' = s_r - x_m \cos \varphi_p - y_n \sin \varphi_p$ , il est facile de trouver les conditions suivantes :

$$\left( |s' \cos \varphi_p| < \frac{\Delta x}{2} \text{ et } |s' \sin \varphi_p| < \frac{\Delta x}{2} \right) \Rightarrow a_{rP+p, nM+m} = \Delta x. \quad (2.49)$$

Souvent en pratique, quand la ligne  $L$  vérifie la condition (2.49), on peut donner aux éléments  $a_{i,j}$  la valeur 1.

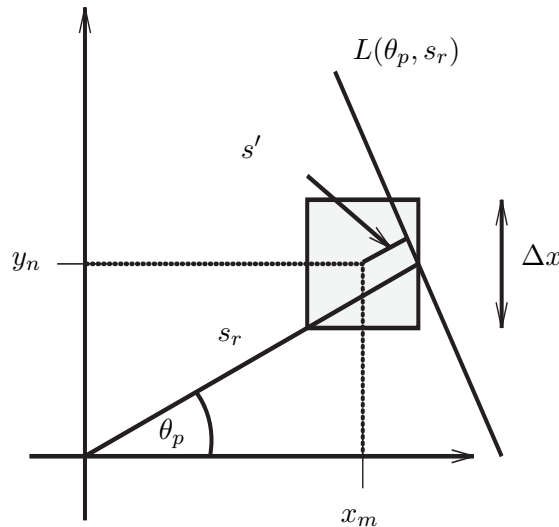


FIG. 2.10. La ligne  $L$  correspondante à  $(\theta_p, s_r)$  passe par le carré  $\Delta$  centré au pixel  $(x_m, y_n)$ .

### 2.4.3 Dualité entre l'aspect algébrique et analytique

Le formalisme algébrique de la transformée de Radon défini au paragraphe précédent implique que les opérations matricielles utilisées possèdent des équivalents analytiques. L'opération définie par l'opérateur transposé  $A^T$  de la matrice  $A$  s'écrit :

$$\tilde{x} = A^T b \quad (2.50)$$

Elle s'identifie à l'opération de rétroprojection du sinogramme discrétisé dans l'espace des images. Cette opération algébrique n'est pas reconnue dans la littérature, mais découle naturellement du formalisme algébrique du problème. En reformulant l'équation (2.42) de la façon suivante :

$$A^T b = (A^T A)x \quad (2.51)$$

la solution est donnée formellement par :

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (2.52)$$

et s'interprète en termes de méthode d'inversion analytique. En effet, la matrice  $A^T$  représente l'opération de rétroprojection (voir l'équation (2.25)) et  $(A^T A)^{-1}$  représente l'opération de filtration (voir l'équation (2.24)). Dans ce cas, l'écriture de la méthode de rétroprojection filtrée peut se déduire de l'équation (2.52), puisque :

$$\begin{aligned} x &= (A^T A)^{-1} A^T b \\ &= (A^T A)^{-1} A^T (A A^T) (A A^T)^{-1} b \\ &= (A^T A)^{-1} (A^T A) A^T (A A^T)^{-1} b \\ &= A^T (A A^T)^{-1} b, \end{aligned} \quad (2.53)$$

où  $(A A^T)^{-1} b$  représente le sinogramme filtré par le filtre rampe et  $A^T$  l'opération de rétroprojection des projections filtrées.

### 2.4.4 Résolution itérative du problème algébrique

Le système (2.42) est dit consistant s'il admet une unique solution. Cette condition peut être envisagée d'un point de vue mathématique si  $A$  est une matrice carrée de déterminant non nul, ou d'un point de vue physique puisque tout système d'équation décrivant des processus physiques doit posséder au moins une solution, à savoir la solution physique. Dès lors, il devrait suffire d'avoir un nombre suffisant d'équations pour éliminer toutes les autres envisageables ; même la surdétermination du système ne devrait pas entraver l'obtention de la solution unique.

Il n'en est malheureusement pas ainsi, d'une part parce qu'une composante aléatoire existe dans les mesures sous la forme d'un bruit non négligeable, notamment en

médecine nucléaire, et d'autre part parce que la modélisation du système qui apparaît dans la matrice  $A$  ne peut jamais atteindre un degré de précision garantissant l'exacte adéquation des données mesurées à l'objet reconstruit ; sans oublier la taille de la matrice  $A$  qui, dans les cas réels, est très importante et peut atteindre quelques centaines de giga-octets. Pour ces raisons, nous sommes dans le cadre d'un problème mal posé au sens de Hadamard. Pour aborder ce type de problème, une littérature propre aux problèmes de tomographie s'est développée parallèlement aux méthodes générales permettant de traiter les problèmes linéaires. C'est ce panorama des méthodes usuelles de reconstruction par méthodes itératives en tomographie que nous voulons exposer ici.

Dans une méthode itérative, l'estimée  $f^{(k)}$  de la distribution d'activité lors de l'itération  $k$  est calculée en fonction de l'estimée  $f^{(k-1)}$  à l'itération  $k-1$ . Les projections estimées à partir de la distribution d'activité  $f^{(k-1)}$  estimée à l'itération  $k-1$  sont comparées avec les projections mesurées et l'écart est utilisé pour calculer un facteur correctif qu'on applique à l'estimée  $f^{(k-1)}$  pour estimer la distribution de radioactivité  $f^{(k)}$  à l'itération  $k$ .

Il existe deux types de méthodes itératives, additives ou multiplicatives, qui se distinguent par la relation entre le facteur correctif et l'ancienne estimée (addition pour les méthodes additives et multiplication pour les méthodes multiplicatives).

En outre, on distingue deux catégories de méthodes itératives :

1. les méthodes itératives statistiques, qui prennent en compte la nature statistique des données. On peut citer par exemple la méthode MLEM (Maximum Likelihood Estimation Maximization) (Shepp et *al.* [42]) ainsi que sa version accélérée OSEM (Ordered Subsets Estimation Maximization) (Hudson et *al.* [18]) ;
2. les méthodes itératives algébriques qui estiment la distribution d'activité en résolvant le système d'équations linéaires (équation (2.42)) qui modélise le problème de reconstruction. Les méthodes algébriques les plus connues sont ART (Algebraic Reconstruction Technique, SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique), SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique) (G.T. Herman et *al.* [17], R. Gordon et *al.* [11]), les méthodes de descente ainsi que les méthodes de gradient conjugué (L. Kaufman et *al.* [25]).

### 2.4.5 Méthode MLEM

La méthode MLEM a d'abord été développée pour la tomographie en PET par Shepp et Vardi (Shepp et *al.* [42]), et ensuite pour la tomographie par transmission et par émission (Lange et *al.* [27]). Elle suppose que les projections contiennent un bruit statistique de nature poissonnienne incluant le bruit d'émission radioactive et le bruit de mesure ou de détection. Le but du critère du maximum de vraisemblance est

de maximiser la fonction de vraisemblance  $L(x)$ , qui représente la probabilité qu'une image  $x$  génère les données de projection mesurées. La fonction de vraisemblance  $L(x)$  est donnée par :

$$L(x) = P(b|x) = \prod_{i=1}^I \frac{(b_i^*)}{b_i!} e^{-b_i^*}, \quad (2.54)$$

où  $b^*$  est le vecteur contenant les données complètes mais non observées du sinogramme  $b$ , et on suppose que  $b^*$  correspond parfaitement à la solution

$$b^* = Ax. \quad (2.55)$$

Les coefficients  $a_{i,j}$  de la matrice  $A$  du système sont normalisés tels que :

$$\sum_{i=1}^I a_{i,j} = 1. \quad (2.56)$$

En tenant compte de la nature poissonnienne de la statistique dans les données de projection, l'algorithme MLEM propose d'estimer l'image à reconstruire en cherchant le maximum de la fonction log-vraisemblance  $l(x)$  donnée par :

$$l(x) = \log(L(x)) = \sum_{i=1}^I \left\{ - \sum_{j=1}^J a_{i,j} x_j + b_i \log \left( \sum_{j=1}^J a_{i,j} x_j \right) - \log(b_i!) \right\}. \quad (2.57)$$

La fonction  $l(x)$  est maximisée en annulant ses dérivées par rapport à  $x_j$  :

$$\frac{\partial l(x)}{\partial x_j} = - \sum_{i=1}^I a_{i,j} + \sum_{i=1}^I \frac{a_{i,j} b_i}{\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_{j'}} = -1 + \sum_{i=1}^I \frac{a_{i,j} b_i}{\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_{j'}} = 0. \quad (2.58)$$

Une contrainte de non-négativité est ajoutée et, qui résulte des conditions de Kuhn-Tucker :

$$x_j \frac{\partial l(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \forall x_j > 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial l(x)}{\partial x_j} \leq 0 \quad \forall x_j = 0. \quad (2.60)$$

L'équation (2.59) est utilisée pour dériver l'algorithme MLEM itérative suivant :

$$x_j^{(k+1)} = \frac{x_j^{(k)}}{\sum_{i'=1}^I a_{i',j}} \sum_{i=1}^I \frac{a_{i,j} b_i}{\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_{j'}^{(k)}}, \quad (2.61)$$

où  $x_j^{(k)}$  est l'estimée du pixel  $j$  de l'image  $x$  après  $k$  itérations,  $b_i$  la donnée de projection mesurée au détecteur  $i$ ,  $a_{i,j}$  l'élément du projecteur du pixel  $j$  de l'image



au détecteur de projection  $i$ ,  $\sum_{i=1}^I a_{i,j} b_i$  représente la rétroprojection du vecteur de projection  $b_i$  et  $\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_{j'}^{(k)}$  représente la projection de l'estimée de l'image  $x_{j'}^{(k)}$ . L'estimée  $x_j^{(k+1)}$  est donc obtenue à partir de l'estimée  $x_j^{(k)}$  corrigée par un facteur multiplicatif qui correspond à la rétroprojection du rapport des projections mesurées sur les projections estimées par la projection. Il y a donc deux étapes dans la reconstruction avec MLEM : la première est une projection ( $Ax^{(k)}$ ) et la deuxième est une rétroprojection  $A^T (b/Ax^{(k)})$ . Pour cette raison, on parle souvent de paire « projecteur-rétroprojecteur » ou d'opérateur de « projection-rétroprojection ».

L'algorithme MLEM possède quelques propriétés intéressantes :

- si l'estimée initiale  $x^{(0)}$  est une distribution positive, alors toutes les distributions estimées suivantes seront positives ;
- si un pixel a une valeur nulle à l'initialisation, cette valeur reste nulle ;
- le nombre d'événements total est conservé à chaque itération.

La méthode de reconstruction MLEM présente deux inconvénients majeurs : sa lenteur de convergence et son instabilité à partir d'un grand nombre d'itérations. L'algorithme MLEM converge lentement, ce qui peut nécessiter jusqu'à une centaine d'itérations et rend son utilisation en routine clinique délicate. Parmi les méthodes d'accélération existantes, citons la méthode OSEM qui commence à se répandre et sera présentée dans le paragraphe suivant. Le deuxième inconvénient associé à l'usage de MLEM est son instabilité après un grand nombre d'itérations dans le cas de données bruitées, ce qui s'accompagne de l'apparition d'artefacts de bord et de l'amplification des hautes fréquences (bruit de calcul). La solution simple consistant à arrêter les itérations avant amplification du bruit de mesure n'est pas envisageable car on risque d'arrêter l'algorithme avant sa convergence. On préférera mettre en oeuvre des méthodes de régularisation : il s'agit de méthodes reposant sur l'introduction de contraintes (spatiales, probabilistes) sur la distribution radioactive recherchée, qui permettent de stabiliser les distributions estimées.

### 2.4.6 Méthode OSEM

La méthode OSEM (Ordered Subsets Expectation Maximisation) a été développée par Hudson (Hudson et *al.* [18]) pour améliorer la rapidité de convergence de MLEM. Elle consiste à regrouper les projections en sous-ensembles ordonnés avant de leur appliquer la méthode MLEM. Les sous-ensembles sont organisés de telle façon qu'ils contiennent un maximum d'informations. La distribution estimée  $x^{(k)}$  sur le premier sous-ensemble sert d'initialisation  $x^{(0)}$  à l'algorithme MLEM appliqué au deuxième sous-ensemble et ainsi de suite. L'utilisation de l'algorithme OSEM à la place de MLEM accélère la convergence d'un facteur approximativement égal au nombre de

sous-ensembles définis.

Le découpage le plus courant est celui en sous-ensembles disjoints où les  $M$  équations de projections sont groupées en  $n$  sous-ensembles contenant chacun  $T$  équations (c'est-à-dire  $T$  mesures ou  $T$  pixels de l'image planaire de projection). On a ainsi :  $S_1 = \{1, 2, \dots, T\}, S_2 = \{T + 1, T + 2, \dots, 2T\}, \dots, S_n = \{(n - 1)T + 1, \dots, nT\}$ .

Un autre découpage possible consisterait en des sous-ensembles cumulatifs  $S_1 = \{1, \dots, T\}, S_2 = \{1, \dots, 2T\}, \dots, S_n = \{1, \dots, nT\}$ . On préfère néanmoins utiliser des sous-ensembles disjoints qui ne favorisent pas certaines mesures particulières dans la reconstruction. Au cours d'une seule itération, c'est-à-dire un passage à travers les  $n$  différents sous-ensembles, on a en effet utilisé  $n$  fois les  $T$  premières mesures et une seule fois les  $T$  dernières.

Enfin, l'algorithme EM standard s'écrit comme un cas particulier de l'OS-EM en choisissant un unique sous-ensemble contenant toutes les équations de projection  $S_1 = \{1, \dots, nT\}$ . Pour un choix donné de sous-ensembles  $S_1, \dots, S_n$ , l'algorithme OS-EM est donc une version par blocs de l'EM :

$$x_j^{(k+1)} = \frac{x_j^{(k)}}{\sum_{i' \in S_{(k)}} a_{i',j}} \sum_{i \in S_{(k)}} \frac{a_{i,j} b_i}{\sum_{j'=1}^J a_{i,j'} x_{j'}^{(k)}} \quad (2.62)$$

Les résultats de cette implémentation par blocs sont intéressants puisque, pour un niveau donné d'erreur, le nombre d'itérations requis est inversement proportionnel au niveau (choisi) de l'OSEM. Par ailleurs, les mêmes auteurs insistent sur l'ordre des sous-ensembles que l'on a intérêt à choisir en fonction de la plus grande variabilité entre deux projections traitées successivement. Notons aussi que cette dernière remarque, qui conduit à grouper dans le même sous-ensemble ou à traiter successivement des projections acquises perpendiculairement l'une à l'autre, permet d'exploiter la symétrie qui existe pour différents opérateurs de projection pris perpendiculairement.

### 2.4.7 Méthode ART

Lorsqu'on néglige l'effet de l'atténuation  $a = 0$ , il existe une méthode itérative très connue pour résoudre le problème inverse, *i.e.* l'équation (2.42) afin de trouver  $f$  de ses projections  $g(\theta, s)$ . Cette méthode est notée ART (Algebraic Reconstruction Technique) et elle est basée sur l'algorithme de résolution des systèmes d'équations linéaires proposé par Kaczmarz [22] en 1937. L'application de la méthode ART en tomographie a été introduite par Gordon et al [11] en 1970 et Herman [17] a démontré que l'implémentation de cette méthode est efficace si l'accès aux données se fait judicieusement durant la procédure itérative de reconstruction, ainsi que le choix du paramètre de relaxation. La méthode ART consiste à supposer que l'activité inconnue  $f$  est donnée sur une grille de pixels, puis à représenter l'équation (2.42) sous

forme d'un système d'équations linéaires, et finalement à résoudre le dernier système en appliquant la méthode de Kaczmarz.

### Dérivation de l'algorithme

L'équation (2.42) est représentée sous la forme du système d'équations linéaires suivant :

$$b_i = \sum_{j=1}^J a_{i,j} x_j = a_i^T x, \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.63)$$

où  $I$  est le nombre total des pixels de projections,  $a_i$  la  $i$ -ème ligne de la matrice  $A$  du système donné par l'équation (2.42),  $J$  le nombre total des pixels contenus dans l'image à reconstruire ;  $x_j$  est la concentration d'activité contenue dans le pixel  $j$  et  $b_i$  le nombre de photons détectés dans le pixel de projection  $i$ . Ainsi, la méthode ART propose de résoudre un système de  $I$  équations à  $J$  inconnues, où les  $J$  inconnues sont les valeurs d'activité dans les  $J$  pixels de l'objet à reconstruire, et chacune des  $I$  équations traduit la contribution des  $J$  pixels du volume à reconstruire à un pixel parmi les  $I$  pixels de projections.

L'algorithme de la méthode ART est basé sur l'idée de projection sur des ensembles convexes. L'idée originale consiste à projeter cycliquement la solution courante sur des hyperplans dont les équations sont celles du système (2.63). L'algorithme s'écrit donc sous la forme :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T a_i} a_i^T \quad i = 1, \dots, I. \quad (2.64)$$

Cette équation s'interprète de la manière suivante : chaque composante du vecteur  $x^{(k+1)}$  à l'itération  $k + 1$  est obtenue en ajoutant à chaque composante du vecteur  $x^{(k)}$  obtenue à l'itération précédente un coefficient qui vaut 0 si le rayon  $i$  utilisé pour la correction ne traverse pas le point  $x_j$  (dans ce cas  $a_{i,j}$  vaut 0) et qui est sinon proportionnel à la différence entre la donnée  $b_i$  (la vraie projection) et la projection recalculée à partir de  $x^{(k)}$ , égale à  $a_i^T x^{(k)}$ . Le coefficient de normalisation  $a_i^T a_i$  est la norme de la  $i$ -ème ligne de la matrice  $A$  correspondant à la donnée  $i$ . De manière géométrique, cela s'interprète comme la recherche de l'intersection entre des hyperplans dont les équations sont celles du système (2.63). Ces hyperplans s'interprètent comme des contraintes que doit respecter la solution. La recherche s'effectue par projections orthogonales successives de la solution à une itération donnée sur une des contraintes. Ainsi, au moins une des équations du système est satisfaite à chaque itération. Cette interprétation géométrique est illustrée sur la figure  $m = n = 2$ .

Une autre version de l'algorithme ART consiste à introduire un coefficient de relaxation  $\lambda_k$  dans l'équation (2.64) :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k \frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T a_i} a_i^T \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.65)$$

les coefficients  $\lambda_k$  peuvent être choisis en tant que fonctions de l'itération  $k$  (fonctions linéaires ou à décroissance exponentielle). Le bon choix de ces paramètres de relaxation peut améliorer sensiblement la convergence de l'algorithme ART et la qualité des images reconstruites.

Il est usuel d'utiliser un ordre cyclique pour les projections (l'ordre du choix de  $i$ ) utilisées à chaque itération *i.e.* de les prendre dans l'ordre d'acquisition des données du sinogramme. Ce choix n'est pas bon, ce d'autant plus que les données  $b_i$  sont fortement corrélées ; en effet, sous ces hypothèses, la correction générée après chaque projection n'est pas importante, ce qui ralentit significativement la convergence de l'algorithme. On adopte souvent une autre stratégie facile à réaliser qui consiste à choisir  $i$  d'une façon aléatoire dans l'ensemble  $S_i = \{1, \dots, I\}$  suivant une loi de probabilité à densité uniforme. On peut initialiser l'algorithme par la valeur  $x^{(0)} = 0$  ou bien par une bonne approximation de la solution cherchée à l'aide des méthodes analytiques de reconstruction (théorème de la coupe centrale ou la méthode de rétro-projection filtrée).

## 2.5 Le modèle réaliste en TEMP

Au chapitre 1, les différents facteurs physiques responsables de la dégradation de la qualité de l'image et de l'apparition de biais quantitatifs en SPECT ont été décrits. Ces principaux facteurs sont l'atténuation, la diffusion, la variation de la fonction de réponse du détecteur en fonction de sa distance par rapport à la source. L'impact nocif de ces facteurs a été aussi présenté.

Afin de remédier à ces facteurs parasites, il est nécessaire de les compenser. Différentes méthodes de correction ont été étudiées. Parmi ces méthodes, on distingue celles qui ont été développées et utilisées avec l'algorithme de rétroprojection filtrée et qui reposent sur des hypothèses simples. Bien que ces méthodes soient rapides et faciles à mettre en oeuvre, elles restent souvent approximatives dans des cas réalistes. Des méthodes de correction plus précises ont été développées dans le contexte de la reconstruction tomographique itérative. Dans cette approche, les effets parasites sont modélisés dans les opérateurs de projection et de rétroprojection.

### 2.5.1 L'atténuation

Les corrections d'atténuation ont reçu une grande attention depuis plus de 20 ans car l'atténuation des photons dans l'organe étudié peut causer des artefacts et des distorsions importantes dans les images reconstruites. Elle contribue à diminuer la densité moyenne de coups dans la portion centrale de l'image (effet de "cuvette"), ce qui rend difficile la détection des lésions profondes. L'atténuation est responsable de la perte d'un grand nombre de photons par absorption totale, ce qui conduit à

une diminution du rapport signal-sur-bruit et cause souvent une sous-estimation de l'activité de la paroi ventriculaire gauche en imagerie cardiaque, augmentant ainsi le nombre de faux positifs.

De nombreuses méthodes de compensation de l'atténuation ont été proposées et étudiées. Un effort considérable a été fourni pour trouver une solution analytique directe au problème de la transformée de Radon atténuée : des solutions ont d'abord été développées dans le cas d'un milieu atténuant uniforme de forme convexe (Metz et *al.* [31], Tretiak et *al.* [45]). Ces méthodes analytiques sont utilisées conjointement avec l'algorithme de rétroprojection filtrée et peuvent être appliquées avant, pendant ou après la reconstruction. Récemment, la transformée de Radon atténuée a été résolue analytiquement (Novikov [37]) dans le cas général d'un milieu atténuant non uniforme. Des méthodes itératives ont aussi été utilisées pour corriger de l'atténuation (voir Chang et *al.* [5], Tsui et *al.* [47]). Ces méthodes permettent de corriger de façon précise l'atténuation dans des milieux atténuants non uniformes. Le premier obstacle à la mise en oeuvre et au bon fonctionnement de méthodes de compensation d'atténuation dans un milieu non uniforme est l'estimation de la distribution d'atténuation de l'organe ou du patient.

### 2.5.2 Estimation de la carte d'atténuation du patient

La distribution d'atténuation du patient peut être obtenue à l'aide d'une source gamma externe, d'une acquisition tomодensitométrique ou d'images IRM segmentées, ou bien sans utiliser une acquisition en transmission. L'approche la plus répandue pour obtenir la carte d'atténuation d'un patient est de réaliser une tomographie par transmission (Gilland et *al.* [10]). La tomographie en transmission utilise une source externe avec laquelle on irradie le patient. La tomographie par transmission mesure l'atténuation totale des Rayons X émis par la source externe, lors de la traversée du patient.

Pour un angle d'incidence  $\theta$ , l'intensité  $I(\theta, s)$  des rayons X détectés par le détecteur du scanner opposée à la source contient la fraction des rayons X émis de la source et transmis à travers le milieu atténuant. Cette quantité  $I$  est lié à l'intensité initiale  $I_0$  des rayons X émis par la relation suivante :

$$I(\theta, s) = I_0 e^{-\int a(x,y) du} \quad (2.66)$$

Dans cette équation,  $a(x, y)$  représente le coefficient d'atténuation du milieu et le facteur exponentiel représente la probabilité qu'un rayon traverse le milieu absorbant. De l'équation (2.66), on peut déduire les projections  $P_a(\theta, s)$  du coefficient d'atténuation par la relation suivante :

$$P_a(\theta, s) = \ln\left(\frac{I_0}{P(\theta, s)}\right) = \int a(x, y) du = \int_{-\infty}^{+\infty} a(s \cos \varphi - u \sin \varphi, s \sin \varphi + u \cos \varphi) du \quad (2.67)$$

L'équation (2.66) montre que pour chaque incidence  $\theta$ , on calcule à partir de  $I_0$  et  $I(\theta, s)$  la projection  $P_a(\theta, s)$  de la carte d'atténuation  $a(x, y)$  et puis qu'en introduisant le changement de variable défini par (2.12), on aboutit à la forme suivante :

$$P_a(\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(s \cos \varphi - u \sin \varphi, s \sin \varphi + u \cos \varphi) du = R_\theta[a](s) \quad (2.68)$$

Cette équation montre que la projection  $P_a(\theta, s)$  suivant l'incidence  $\theta$  n'est que la transformation de Radon de l'atténuation (voir l'équation (2.14)). Une fois les projections de la carte d'atténuation acquises, l'estimation de la carte d'atténuation se fait alors à l'aide d'algorithmes de reconstruction tomographique classiques comme l'algorithme de rétroprojection filtrée ou celui du théorème de la coupe centrale.

L'acquisition en transmission peut être effectuée avant, après ou pendant l'acquisition en émission (Tung et *al.* [46]). Une réalisation séquentielle des acquisitions en émission et en transmission évite le problème de contamination entre les données d'émission et celles de transmission, mais engendre le problème de recalage d'images dû aux mouvements potentiels du patient entre les deux types d'acquisitions.

La formulation mathématique de la transformée de Radon atténuée est d'abord donnée avant de décrire les différentes méthodes de correction d'atténuation.

### 2.5.3 La transformée de Radon atténuée

Pour obtenir une reconstruction plus fiable de la distribution spatiale du traceur radioactif, il est indispensable de tenir compte de l'atténuation dans le modèle utilisé pour décrire les projections fournies par le scanner. Rappelons brièvement le phénomène d'atténuation. Les photons émis par le traceur radioactif interagissent avec la matière au cours de leur trajet entre le point d'émission et le détecteur. Les deux principales interactions entre les photons et les électrons de la matière sont l'effet photoélectrique et l'effet Compton. Elles conduisent toutes deux à une atténuation du rayonnement photonique, provoquée par une absorption ou un changement de direction d'une partie des photons émis. Les effets photoélectrique et Compton au point  $(x, y)$  sont caractérisés par un coefficient linéique d'atténuation noté  $a(x, y)$ . La fonction 2D  $(x, y) \rightarrow a(x, y)$  est souvent appelée carte ou bien schéma d'atténuation dans la littérature. Elle présente des valeurs ponctuelles typiques de  $0.0152\text{mm}^{-1}$  pour le torse,  $0.0032\text{mm}^{-1}$  pour les poumons et  $0.0248\text{mm}^{-1}$  pour la colonne vertébrale. L'atténuation conduit à une réduction du nombre de photons comptés par la caméra d'Anger.

Considérons une coupe d'un organe dans laquelle une zone active est détectée. Soit  $f(x, y)$  la fonction qui représente la concentration d'activité en un point  $(x, y)$  de cette zone. Lorsque la gamma-caméra tourne autour de l'organe, elle acquiert pour chaque direction  $\theta$  de détection, une projection 1D de la coupe 2D.

Les projections parallèles atténuées de la fonction  $f$  de direction  $\theta^\perp$  sont alors vues comme l'ensemble des intégrales atténuées par un facteur dépendant de l'atténuation de la fonction  $f$  le long de la famille de droites  $L(s, \theta) := \{\langle (x, y), \theta \rangle = s\}$ , toutes parallèles de l'espace  $\mathbb{R}^2$ , de direction  $\theta^\perp$  et se situant à la distance  $s$  de l'origine (centre de la zone explorée). Ces projections parallèles atténuées de  $f$  régissent les intensités mesurées  $g(\theta, s)$  par la caméra et sont modélisées par la transformée de Radon atténuée  $(\theta, s) \mapsto R_{a,\theta}[f](s)$  tel que (voir Tretiak et *al.* [45]) :

$$R_{a,\theta}[f](s) = \int_{\langle (x,y), \theta \rangle = s} \exp\left(-\int_0^{+\infty} a((x, y) + t\theta^\perp) dt\right) f(x, y) d\lambda_{s,\theta}(x, y) = g(\theta, s), \quad (2.69)$$

ici  $d\lambda_{s,\theta}$  représente la restriction de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$  sur la ligne  $L(s, \theta)$ , avec

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \theta^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{avec } 0 \leq \varphi < \varphi_{\max}.$$

Il est à noter que ce modèle ne tient pas compte d'autres phénomènes physiques tels que la résolution spatiale du détecteur, le bruit statistique du processus d'émission ou encore le diffusé Compton. Néanmoins, l'atténuation est un des obstacles majeurs à l'obtention d'images reconstruites de qualité. Lorsque ce modèle est utilisé, on parle de reconstruction avec correction d'atténuation.

## 2.6 Méthodes analytiques de correction de l'atténuation

Avant que Novikov propose une solution analytique exacte de la transformée de Radon atténuée dans un milieu atténuant non uniforme, d'autres méthodes analytiques de correction de l'atténuation ont été développées : elles reposent sur l'hypothèse que la distribution d'atténuation est uniforme dans le volume à reconstruire et donc que le coefficient d'atténuation  $a(x, y)$  au travers de ce volume traversé est constant. Cette hypothèse est légitime dans le cas d'acquisitions tomographiques cérébrales et de portions de l'abdomen, où la plupart des constituants sont des tissus mous possédant des coefficients d'atténuation proches les uns les autres. Ces méthodes analytiques peuvent être appliquées avant reconstruction sur les projections acquises ou après reconstruction sur les coupes reconstruites.

### 2.6.1 Méthodes de correction de l'atténuation sur les projections acquises

Ces méthodes consistent à multiplier les projections acquises par un coefficient correctif approximatif. Ces méthodes se regroupent en deux catégories. Celles de la

première catégorie essaient de rendre le nombre de coups dans les projections acquises indépendant de la profondeur de la source dans le volume étudié. Les méthodes de la moyenne géométrique (Jaszczak et *al.* [21]) et de la moyenne arithmétique des projections opposées (Keyes et *al.* [24]) font l'hypothèse que la distribution radioactive dans la source est uniforme et que le coefficient d'atténuation est constant dans le volume étudié. La méthode de la moyenne arithmétique effectue la somme pixel par pixel de deux projections opposées à  $180^\circ$  (l'une antérieure et l'autre postérieure), formant une image arithmétique moyenne dont le nombre de coups dépend moins de la profondeur de la source que du nombre de coups total dans la projection antérieure ou dans la projection supérieure. Dans le cas de la méthode géométrique moyenne, la moyenne géométrique des deux projections est utilisée et le nombre de coups présents dans l'image résultante est totalement indépendant de la profondeur de la source. Ces méthodes sont très simples à mettre en oeuvre mais ne sont exactes que dans le cas d'une source ponctuelle dans un milieu uniforme : elles rencontrent des limites dans le cas de sources multiples dont il faut connaître l'épaisseur et la profondeur.

D'autres méthodes proposent une solution à la transformée de Radon atténuée pour des sources multiples (Metz et *al.* [31], Tretiak et *al.* [45]), tout en considérant le coefficient d'atténuation  $a(x, y)$  connu et présentant une valeur constante  $a_0$  sur un domaine convexe contenant le support de  $f$ . Dans ce cas, la reconstruction de l'activité  $f$  est obtenue par une méthode analytique d'inversion de la transformée de Radon exponentielle notée  $R_{a_0, \theta} [f]$  et définie par :

$$R_{a_0, \theta} [f](s) = \int_{\langle (x, y), \theta \rangle = s} \exp(a_0 \times \langle (x, y), \theta^\perp \rangle) f(x, y) d\lambda_{s, \theta}(x, y) = g_{a_0}(\theta, s). \quad (2.70)$$

La formule d'inversion de la transformée de Radon exponentielle est une version modifiée de la méthode de rétroprojection filtrée ; ainsi la reconstruction exacte par cette méthode d'une fonction  $f(x, y)$  s'effectue en deux étapes : les projections exponentielles de Radon  $g_{a_0}(\theta, s)$  sont tout d'abord filtrées pour obtenir

$$\hat{g}_{a_0}(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{a_0, \theta}(\xi) K(\xi) \exp(2i\pi\xi s) d\xi \quad (2.71)$$

où  $G_{a_0, \theta}(\xi)$  représente la transformée de Fourier monodimensionnelle de la projection  $g_{a_0}(\theta, s)$  par rapport à la variable  $s$  et  $K(\xi)$  représente le filtre Rampe modifié et donné par

$$K(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{2} & \text{si } |\xi| > a_0/2\pi \\ 0 & \text{si } 0 < a_0/2\pi; \end{cases} \quad (2.72)$$

afin de retrouver  $f$ , les projections ainsi filtrées sont ensuite rétroprojetées en étant préalablement pondérées par le poids de type exponentiel  $\exp(-a_0 s)$  dépendant de  $a_0$  et de la distance de la source au centre de rotation  $s$  suivant la formule suivante :



$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \exp(-a_0 s) \hat{g}_{a_0}(\theta, s) ds \quad (2.73)$$

Cette méthode de compensation est simple à implémenter et fonctionne correctement pour des sources multiples. Par contre, elle tend à amplifier le bruit dans les projections corrigées. L'application d'un filtre lissant est nécessaire pour contrôler le niveau de bruit dans l'image reconstruite.

### 2.6.2 Méthodes de correction de l'atténuation sur les coupes reconstruites

L'une des méthodes les plus utilisées sur les coupes reconstruites est la méthode de Chang [5]. Les projections acquises sont d'abord reconstruites par un algorithme classique. Un facteur de correction est ensuite calculé en chaque point  $(x, y)$  de l'image reconstruite. Le facteur correctif  $C(x, y)$  correspond à l'inverse du facteur d'atténuation pour le pixel donné moyenné sur tous les angles de projection. L'image reconstruite est alors multipliée par les facteurs de correction pour compenser l'atténuation. Pour mettre en oeuvre cette méthode, il est nécessaire de disposer du coefficient d'atténuation moyen et d'une mesure des contours de l'objet : celle-ci est souvent obtenue en dessinant une ellipse autour des contours de l'objet. La méthode de Chang est exacte pour un point source mais tend à trop corriger certaines parties de l'image et à ne pas assez corriger certaines autres, en particulier pour les sources étendues. Plus la distribution de la source est étendue, plus l'erreur est importante. La méthode de Chang offre finalement une correction de l'atténuation permettant d'obtenir des images reconstruites de bonne qualité, en particulier pour les distributions focalisées, et un bon contraste pour les lésions froides.

## 2.7 Les méthodes itératives de correction de l'atténuation

Dans le cas de l'imagerie TEMP du coeur ou des poumons, où la région thoracique est composée de muscles, d'os et du tissu des poumons, ayant des propriétés atténuantes assez différentes, il est nécessaire de prendre en compte la non uniformité du milieu atténuant dans la méthode de correction de l'atténuation. Ceci est désormais possible avec les méthodes analytiques (Novikov [37]) mais aussi avec les méthodes de reconstruction itératives, qui permettent de réaliser une correction précise de l'atténuation dans le cas de milieux non uniformes.

### 2.7.1 La méthode de Chang itérative

La méthode de Chang originale qui supposait une atténuation uniforme a été généralisée : elle permet de calculer les coefficients de correction à appliquer aux coupes reconstruites soit à partir d'une carte d'atténuation uniforme, soit à partir d'une carte non uniforme. Une première reconstruction  $f^{(0)}(x, y)$  est corrigée de l'atténuation avec les coefficients de correction. Les coupes résultantes  $f^{(1)}(x, y)$  sont rétroprojetées et comparées aux projections acquises. Les différences observées sont rétroprojetées pour donner des coupes reconstruites, qui sont pondérées par les coefficients de correction, puis ajoutées à l'estimation courante de la distribution d'activité  $f^{(1)}(x, y)$  pour obtenir une nouvelle estimée  $f^{(2)}(x, y)$ . Ce processus peut être itéré. L'algorithme n'est alors qu'approximatif, car la distribution radioactive est étendue, mais l'avantage majeur de cette méthode est sa rapidité d'exécution. Une bonne précision quantitative peut être obtenue en une seule itération. Cependant, cette méthode tend à amplifier le bruit lorsque le nombre d'itérations devient important pour des données bruitées et il est recommandé de n'effectuer pas plus d'une, voire deux itérations.

### 2.7.2 Modélisation de l'atténuation dans l'opérateur de projection-rétroprojection

La façon la plus précise de modéliser les effets d'atténuation dans le cas d'une distribution de coefficients d'atténuation non uniforme est de modéliser analytiquement l'atténuation des photons dans l'opérateur de projection-rétroprojection, sachant que l'expression analytique du phénomène de l'atténuation est connue exactement (équation (2.68)) et sa modélisation analytique ne pose donc pas de problème théorique majeur.

Gullberg et *al.* [14] sont les premiers à proposer de modéliser l'atténuation à partir de données échantillonnées en incorporant la carte d'atténuation exacte du patient dans l'opérateur projection-rétroprojection. Seule l'atténuation est modélisée dans l'opérateur, qui est ensuite intégré à un algorithme itératif de type gradient conjugué. L'image est échantillonnée suivant des pixels carrés : pour le calcul des facteurs d'atténuation dans le milieu non uniforme, le projecteur et le rétroprojecteur pondèrent chaque valeur dans un pixel par la longueur du parcours du photon à travers ce pixel. L'implémentation discrète de l'opération de projection et de rétroprojection est la suivante :

$$\text{Opération de projection : } g_{rp} = \sum_{m,n} W_{mn}(r, p) x_{mn} \quad (2.74)$$

$$\text{Opération de rétroprojection : } x_{mn} = \sum_{m,n} W_{mn}(r, p) g_{rp} \quad (2.75)$$

où  $x_{mn}$  est le nombre de photons émis du pixel  $(m, n)$ ,  $g_{rp}$  est le nombre de photons détectés dans le bin de projection d'indices  $(r, p)$ , *i.e.* dans le détecteur de position  $r$  et de direction  $\theta_p$  et  $W_{mn}$  est le facteur de correction appliqué au pixel d'indice  $(m, n)$  dont l'expression discrète est la suivante (figure 2.11) :

$$W_{mn}(r, p) = \begin{cases} \frac{A_{mn}(r, p)}{a_{mn}} \{1 - \exp[-a_{mn}L_{mn}(r, p)]\}, & \text{si } a_{mn} > 0 \\ L_{mn}(r, p)A_{mn}(r, p), & \text{si } a_{mn} = 0, \end{cases} \quad (2.76)$$

où  $a_{mn}$  est le coefficient d'atténuation relatif au pixel  $(m, n)$ ,  $L_{mn}$  la longueur du parcours du photon à l'intérieur du pixel  $(m, n)$  pour le bin  $(r, p)$ . Le facteur d'atténuation  $A_{mn}(r, p)$  est lié à l'intégrale de l'atténuation du point  $b_{mn}$  au détecteur et on a

$$A_{mn}(r, p) = \exp \left[ - \int_{b_{mn}}^{\text{détecteur}} a(s_{rp}) ds_{rp} \right], \quad (2.77)$$

où  $b_{mn}$  est le point d'intersection du parcours du photon avec l'entrée du pixel  $(m, n)$  et  $ds_{rp}$  représente la restriction de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$  sur la ligne qui matérialise le parcours des photons.

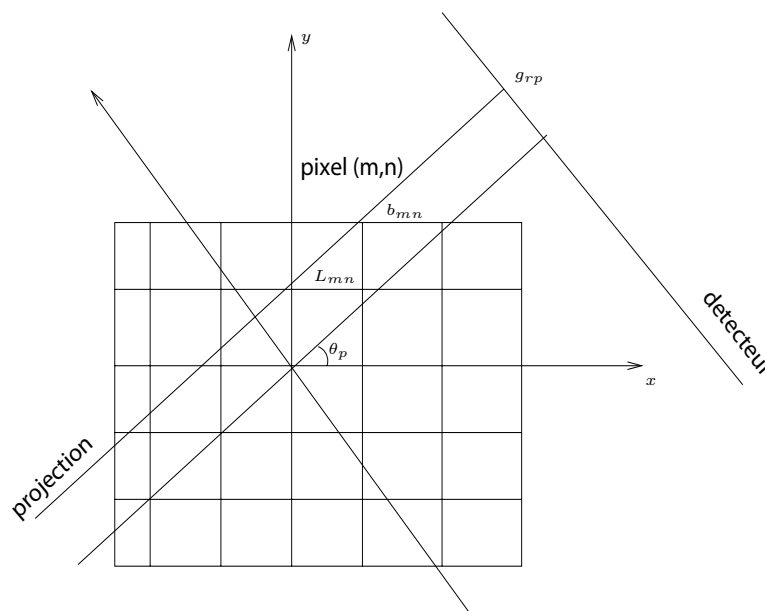


FIG. 2.11. Milieu atténuant échantillonné selon le modèle de Gullberg.

L'avantage majeur de cette méthode réside dans le fait que les facteurs d'atténuation sont calculés au fur et à mesure des opérations de projection et de rétroprojection, ce qui évite ainsi le stockage de ces facteurs qui, dans des travaux antérieurs, devaient être précalculés et stockés. Les résultats de cette technique pour la reconstruction d'un fantôme coeur-poumon ont montré une amélioration de l'uniformité de la distribution d'activité dans les images reconstruites. Ce même opérateur a aussi été intégré dans d'autres algorithmes itératifs de type MLEM pour modéliser la correction d'atténuation dans le processus itératif de l'algorithme principal de reconstruction. Cette modélisation montre une amélioration en termes de résolution spatiale et de précision de quantification en imagerie cardiaque, même sur des données acquises bruitées.

Les méthodes de correction d'atténuation itératives permettent de corriger précisément l'atténuation non uniforme pour l'imagerie du foie (Malko et *al.* [29]) et l'imagerie cardiaque en SPECT (Tsui et *al.* [47]) : la modélisation simultanée de l'atténuation et de la fonction de réponse du détecteur améliore la précision quantitative, la résolution spatiale, et réduit le bruit dans les images reconstruites. L'inconvénient de l'application de ces méthodes de correction réside dans le temps de calcul important associé : une itération nécessite plusieurs minutes et la lenteur de convergence de MLEM impose au moins une centaine d'itérations pour un résultat satisfaisant, ce qui compromet l'utilisation de tels algorithmes de reconstruction en usage clinique.

## 2.8 Conclusion

Ce chapitre fait le point sur la problématique de modélisation et reconstruction tomographique en TEMP et présente les algorithmes de reconstruction les plus utilisés, à savoir FBP, MLEM, OSEM et ART. Les diverses méthodes de compensation utilisées en combinaison avec ces différents algorithmes sont ensuite présentées, en insistant sur les hypothèses sur lesquelles elles reposent. Ces méthodes, qui visent à compenser les effets des phénomènes physiques dégradant l'image que sont l'atténuation, la diffusion et la variabilité de la réponse spatiale du détecteur, sont nécessaires pour fournir des images précises quantitativement. Beaucoup de ces méthodes sont des méthodes analytiques approximatives développées pour fonctionner avec l'algorithme FBP et qui s'avèrent être inefficaces dans des cas cliniques impliquant une anatomie du patient et une distribution radioactive complexes. La mise à disposition d'algorithmes algébriques a donné la possibilité d'inclure directement dans le processus de reconstruction les corrections de ces phénomènes physiques et d'atteindre une quantification précise des images reconstruites à l'aide de méthodes de compensation de plus en plus complexes.

La correction de l'atténuation est une étape fondamentale pour réduire les biais quantitatifs dans les images reconstruites. En tomographie cardiaque, des résultats de simulations sur un fantôme cardiaque MCAT (Tsui et *al.* [48]) ont montré une

réduction importante des artefacts et distorsions dans les images lorsqu'une correction d'atténuation (algorithme itérative de Chang) était appliquée, ainsi qu'une meilleure estimation de l'épaisseur de la paroi ventriculaire.

L'inversion analytique de la transformée de Radon atténuée est faisable analytiquement dans le cas de milieu atténuant uniforme. En revanche, une méthode de correction de l'atténuation doit tenir compte de la non-uniformité de celle-ci dans le cas où une certaine quantification précise est recherchée. En tomographie cardiaque, l'hypothèse d'une atténuation uniforme est à proscrire car elle conduit à des résultats totalement erronés : des régions ne contenant théoriquement aucune activité se voient affecter une activité non négligeable, ce qui réduit le contraste, et l'homogénéité de fixation ne peut être restaurée. Il faut donc nécessairement mettre en oeuvre une correction l'atténuation prenant en compte une carte d'atténuation spécifique au patient.

La distribution d'atténuation non uniforme dans l'objet ou le corps du patient peut être prise en compte dans un algorithme analytique (Natterer [34]) ou dans une méthode de correction itérative. Dans ce deuxième cas, deux méthodes sont fréquemment employées : la méthode de Chang itérative, pour laquelle les projections atténuées sont calculées, et la méthode consistant à modéliser le projecteur utilisé dans un algorithme de reconstruction itératif. La méthode de Chang itérative fournit des résultats quantitatifs satisfaisants après plusieurs itérations, mais cette méthode étant très sensible à l'amplification du bruit de calcul au fur et à mesure que l'on itère, seulement une ou deux itérations doivent être utilisées tout au plus. La correction d'atténuation reposant sur la modélisation de l'atténuation dans le projecteur est la méthode de correction la plus précise, conduisant à la fois à une bonne restauration du contraste et de l'homogénéité des images. Cette méthode est cependant soumise aux inconvénients associés aux méthodes de reconstruction itératives, à savoir la lenteur de convergence de l'algorithme et l'amplification du bruit de calcul qu'il convient de régulariser de façon adéquate. Les deux méthodes les plus utilisées en routine clinique sont la méthode de Chang itérative avec rétroprojection filtrée et la méthode de modélisation de l'atténuation dans OSEM.



# Chapitre 3

## Accurate attenuation correction for algebraic reconstruction technique in SPECT

**Abstract :** We present a new iterative reconstruction algorithm to improve the algebraic reconstruction technique (ART) for Single-Photon Emission Computed Tomography. Our method is a generalization of the Kaczmarz iterative algorithm for solving linear systems of equations and introduces exact and implicit attenuation correction derived from the attenuated Radon transform operator at each step of the algorithm. The performances of the presented algorithm have been tested upon various numerical experiments in presence of both strongly non-uniform attenuation and incomplete measurements data. We also tested the ability of our algorithm to handle moderate noisy data. Simulation studies demonstrate that the proposed method has a significant improvement in the quality of reconstructed images over ART. Moreover, convergence speed was improved and stability was established, facing noisy data, once we incorporate filtration procedure in our algorithm.

### 3.1 Introduction

#### The medical aspect

Single-Photon Emission Computed Tomography (SPECT) is a nuclear medical imaging mechanism used to determine the concentration of some biologically active molecules in some specific zone of a human body in terms of their activity distribution. Some radiopharmaceutical product is first injected into the patient's organ, with a Gamma-emitting isotope. The radiations are trapped by a Gamma-camera with detectors which is materialized by an acquisition plane, (see figures 3.1(a) and 3.1(b)) rotating about the patient along a grid of specific angles. The intensity of

such radiations is therefore measured in each direction orthogonal to the acquisition system plane in various angular positions.

The measured quantities of traveling photons are the exponentially weighted averages of the activity distribution along straight lines on their way from the source to the detector. The reason for the exponential weight is the presence of a position-dependent attenuation coefficient (see [23]) due to photon interaction with the organic tissue in which the radiations go through.

## The mathematical model

We will present here a two-dimensional model, so that the detector will be materialized by a grid of collimators regularly spaced along a line  $C$  which models the Gamma-camera. Let  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  denote the activity distribution and  $(x, y) \mapsto a(x, y)$  the position-dependent attenuation coefficient. When the detector is positioned in order to register radiations which propagate along lines  $L$  with direction  $\theta^\perp$ , the measured intensity  $g(\theta, s(L))$  corresponding to the radiation along such line distant from  $s = s(L)$  to the origin (the center of the exploration zone) (see figure 3.1(a) and 3.1(b)), is given by the attenuated Radon transform  $(\theta, s) \mapsto R_{a, \theta}[f](s)$  defined as :

$$R_{a, \theta}[f](s) = \int_{\langle (x, y), \theta \rangle = s} \exp\left(-\int_0^{+\infty} a((x, y) + t\theta^\perp) dt\right) f(x, y) d\lambda_{s, \theta}(x, y) = g(\theta, s). \quad (3.1)$$

Here  $d\lambda_{s, \theta}$  stands for the restriction of the Lebesgue area measure in  $\mathbb{R}^2$  to the straight line  $\langle (x, y), \theta \rangle = s$ , where

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \theta^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad 0 \leq \theta < \varphi_{\max}.$$

The unknown activity distribution is materialized in (3.1) by  $f$ . So the problem is to recover  $f$  from the projections data  $g(\theta, s)$ , assuming of course some *a priori* information about the tissue attenuation distribution  $a$ . When  $a$  is known, there are various direct (*via* analytic formulas) or iterative techniques to recover  $f$ .



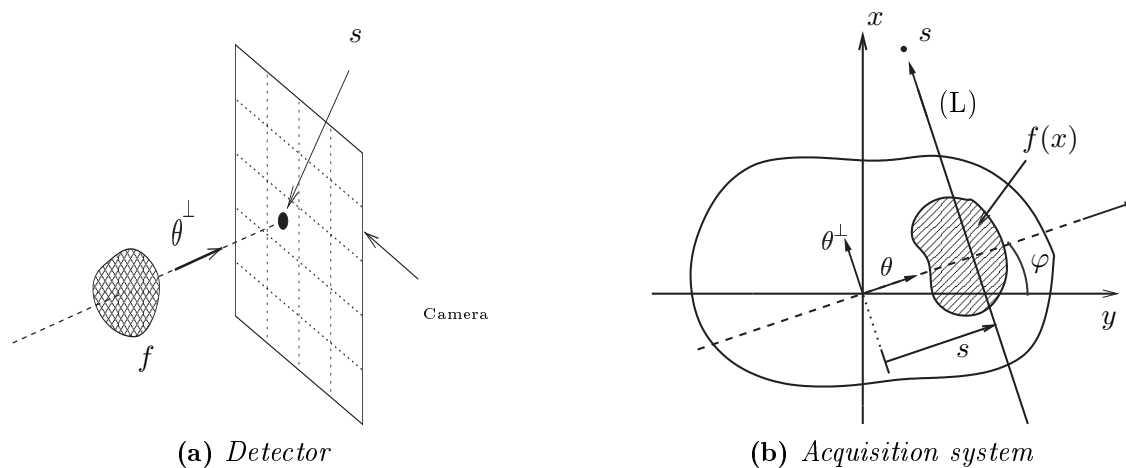


FIG. 3.1. Scanner

## Previous inversion methods

Direct analytic methods lie on explicit exact inversion formulas for the attenuated Radon transform. When  $a \equiv 0$ , the problem is solved by the classical Radon inversion formulas in dimension two (see Natterer [33] and Quinto [38] for more details about Radon's inversion formulas). When the attenuation tissue distribution  $a$  remains constant on the support of  $f$ , then the attenuated Radon transform is reduced to the exponential Radon transform, for which Tretiak and Metz [45] suggested an exact inversion formula. Nevertheless, none of these analytical methods is accurate respect to the reconstruction of  $f$  in case of an arbitrary strongly non-uniform attenuation tissue distribution, which is usually the case in any realistic SPECT problem. Novikov [37] discovered an exact analytical inversion formula for the attenuated Radon transform when  $a$  is an arbitrary tissue attenuation distribution. Another formula was proposed by Natterer [34]. See also [26] for numerical applications.

On the other hand, there is a wide family of iterative methods involving linear algebra, operator theory and statistical tools. One of the prominent iterative reconstruction methods for emission tomography is Maximum Likelihood Reconstruction using the EM algorithm, which stands for Expectation Maximization presented by Dempster *et al* [8] in its full generality. A practical implementation of the EM method in the setting of image reconstruction was proposed by Shepp and Vardi [42], where a statistical framework for the problem is given. However, EM algorithm, in itself, does not take into account the attenuation correction. Many studies have been made to incorporate attenuation correction procedure in the main EM algorithm. Tsui *et al* [47] implemented an iterative EM algorithm with attenuation correction using an attenuated projector-backprojector that uses the attenuation distribution to calculate attenuation factors for each pixel along each projection and backprojection. See also

[3] for similar studies.

Some of the iterative algorithms involve evaluation of certain analytic formulas as a part of the method. A multiplicative postprocessing technique was implemented by Chang [5] for attenuation correction using an assumed constant attenuation coefficient. This technique was modified to calculate the multiplicative attenuation compensation factor, based on a nonuniform attenuation distribution, and combined iteratively with the filtered backprojection algorithm. See Manglos *et al* [30].

With the condition  $a = 0$ , there is a well known iterative method to solve (3.1) in order to recover  $f$  from its projection  $g(\theta, s)$  with no attenuation correction. This method is known as Algebraic Reconstruction Technique and commonly denoted by ART. It is based on the well known algorithm for solving linear systems of equations proposed by Kaczmarz in 1937 [22] and later elucidated further by Tanabe [44]. The application of the ART in tomography was introduced by Gordon *et al* [11] in 1970. Later Herman [17] showed that ART can be computationally efficient by carefully arranging the order in which the collected data are accessed during the iterative reconstruction procedure, and by adaptively adjusting the relaxation parameters. ART consists in assuming that the activity distribution  $f$  is an array of unknowns, then setting (3.1) as a system of algebraic equations for the unknowns in terms of the measured projection data, and finally applying Kaczmarz method to solve the latter system. The classical ART does not take into account the attenuation of the photons. In [6], Chen *et al* proposed a method for attenuation correction and combined it with the classical ART algorithm. However their method was based on relation of attenuation coefficient and emission coefficient, which is not always available in realistic models.

## Plan of the article

In this paper we present an iterative reconstruction algorithm with implicit attenuation correction. Our approach is a generalization of the classical ART algorithm. The paper is organized as follows. In section 2 we review the general Kaczmarz method. In section 3 we apply this method to solve the equation (3.1) and derive our iterative algorithm. The main idea of our approach is based on expressing the attenuated Radon transform operator  $R_{a,\theta}$  as the decomposition of the Radon transform operator  $R_\theta$  and a multiplication operator  $L_{a,\theta}$ . This leads to find an exact and implicit expression for the attenuation correction in the iterative algorithm. In section 4 we illustrate various numerical tests performed with both optimal and suboptimal data measurements using the present algorithm and the conventional ART algorithm. These tests were done with several activity distribution phantoms and realistic strongly nonuniform attenuation distribution. From these experiments one can see that an algorithm that would not take into account the attenuation would be essentially inaccurate, while our method significantly improves reconstruction results and accelerates

convergence speed. We also include in this section reconstruction from noisy data using a filtered version of our algorithm. Finally, section 6 concludes our paper with discussions and comments.

## 3.2 Kaczmarz's method

Kaczmarz's method is an iterative method for solving linear systems of equations. In this section we will present a brief analysis of this method independently of computerized tomography. This analysis will provide the theoretical support needed to compute the algorithm for reconstruction of the activity distribution  $f$  from the emission data  $R_a[f]$  with a known tissue attenuation distribution  $a$ .

Let  $H$  and  $H_p$  for  $p = 1, \dots, P$ , be real (or complex) Hilbert spaces, and let

$$R_p : H \longrightarrow H_p \text{ for } p = 1, \dots, P$$

be  $p$  linear continuous maps from  $H$  onto  $H_p$ . Let also  $g_p \in H_p$  be given and suppose one wants to compute  $f \in H$  such that

$$R_p f = g_p \text{ for } p = 1, \dots, P. \quad (3.2)$$

This linear system can also be written as  $Rf = g$ , with

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_P \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_P \end{pmatrix} \text{ for } p = 1, \dots, P.$$

Let  $P_p$  be the orthogonal projection in  $H$  onto the affine subspace

$$\{f \in H; R_p f = g_p\}$$

with underlying vectorial subspace

$$F_p = \text{Ker } R_p.$$

We define the following operators such that

$$\begin{aligned} P_p^\omega &= (1 - \omega)I + \omega P_p \\ P^\omega &= P_P^\omega \circ \dots \circ P_1^\omega, \end{aligned}$$

where  $\omega$  is a relaxation parameter.

Then, Kaczmarz's method with relaxation for the solution of the equation (3.2) is based on the following inductive computation

$$f_k = P^\omega f_{k-1} \text{ for } k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

starting with  $f_0$  as an arbitrary initial guess. For  $\omega = 1$ , we have the classical Kaczmarz's method. Its geometric interpretation is obvious. In fact starting with  $f_0$ , we compute  $f_1$  by successive orthogonal projections of  $f_0$  onto the affine subspaces  $\{f; R_p f = g_p\}$  for  $p = 1, \dots, P$ . In order to obtain  $f_2$ , we apply the same process to  $f_1$ , and so on to reach the  $k$ th iteration of the algorithm.

Bellow we are going to give an explicit form for the equation (3.3) by evaluating  $P_p f$  for a given  $f \in H$ . We suppose that the operators  $R_p$  for  $p = 1, \dots, P$ , are surjective. Hence their adjoint operators  $R_p^* : H_p \longrightarrow H$  are injective. Also the operators  $R_p \circ R_p^*$  for  $p = 1, \dots, P$ , are injective since  $\langle R_p \circ R_p^*[u], u \rangle = \|R_p^*[u]\|^2$  for any  $u \in H_p$ . Assuming in addition that all operators  $R_p \circ R_p^*$  for  $p = 1, \dots, P$ , have closed range, we conclude that

$$R_p \circ R_p^* : H_p \longrightarrow H_p, \text{ for } p = 1, \dots, P,$$

is bijective with a continuous inverse  $(R_p \circ R_p^*)^{-1}$ .

One has

$$(\text{Ker } R_p)^\perp = \overline{\text{Im } R_p^*}, \text{ for } p = 1, \dots, P,$$

which implies that for each  $p = 1, \dots, P$ , there exists a sequence  $(u_{p,l}(f))_l \in H_p$  such that

$$P_p f - f = \lim_{l \rightarrow +\infty} (R_p^*[u_{p,l}(f)]), \text{ for } p = 1, \dots, P. \quad (3.4)$$

On the other hand we have  $R_p[P_p f] = g_p$ , for  $p = 1, \dots, P$ , which leads by applying  $R_p$  on both sides of (3.4), to

$$g_p - R_p f = \lim_{l \rightarrow \infty} [R_p \circ R_p^*(u_{p,l}(f))]. \quad (3.5)$$

Once we apply the operator  $[R_p \circ R_p^*]^{-1} : H_p \longrightarrow H_p$ , we see that the sequence  $(u_{p,l}(f))_l$  converges to  $(R_p \circ R_p^*)^{-1}(g_p - R_p f)$ , thus

$$P_p f = f + R_p^* \left[ (R_p \circ R_p^*)^{-1} (g_p - R_p f) \right], \text{ for } p = 1, \dots, P, \quad (3.6)$$

This gives an alternative form to (3.3) and tells us how to compute  $f_{k+1}$  from  $f_k$ . Therefore the iterative algorithm of Kaczmarz stands as

$$\begin{aligned} f_0^k &= f^k \\ f_p^k &= P_p^\omega f_{p-1}^k = f_{p-1}^k + \omega \left[ R_p^* \circ [R_p \circ R_p^*]^{-1} (g_p - R_p f_{p-1}^k) \right], \text{ for } p = 1, \dots, P \\ f_0^{k+1} &= f_P^k \end{aligned} \quad (3.7)$$

with the initial condition  $f^0 = f_0^0$ .

### 3.3 Derivation of the algorithm

In this section we adapt Kaczmarz's iterative method to the tomographic problem which consists in the inversion of the attenuated Radon transform and the retrieval of the unknown source  $f$  from its attenuated projections defined in (3.1) when the attenuation tissue distribution  $a$  is known. Since we are dealing with the reconstruction of cross sections of the human body, we will only treat the bi-dimensional case.

In this setting,  $H$  is the following space

$$H = L^2_{\mathbb{C}}(\overline{D(0,1)}, dx dy)$$

of measurable image-functions in the unit closed disc  $\overline{D(0,1)}$  of  $\mathbb{R}^2$ , equipped with the area Lebesgue measure  $dx dy$ .

Let  $a$  be a "sufficiently smooth", say at least continuous, complex valued function in  $\overline{D(0,1)}$

$$a : \overline{D(0,1)} \mapsto \mathbb{C},$$

which modelizes the known tissue attenuation distribution of a cross-section body materialized by  $\overline{D(0,1)}$ . For  $\theta \in [0, 2\pi[$ , we define the following operator

$$R_{a,\theta} : H \longrightarrow h := L^2_{\mathbb{C}}\left([-1, 1], \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\right)$$

where  $R_{a,\theta}$  is represented by the almost everywhere defined function in  $[-1, 1]$  with finite energy

$$s \longmapsto \int_{\langle(x,y),\theta\rangle=s} \exp\left(-\int_0^{+\infty} a((x,y) + t\theta^\perp) dt\right) I(x,y) d\lambda_{s,\theta}(x,y),$$

and  $d\lambda_{s,\theta}$  stands for the restriction of the Lebesgue area measure in  $\mathbb{R}^2$  to the line

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \langle(x,y),\theta\rangle = s\}.$$

The operator  $R_{a,\theta}$  can be written as the composition  $R_\theta \circ L_{a,\theta}$ , where  $L_{a,\theta} : H \longrightarrow H$  is the multiplication operator by the following continuous function

$$A_{a,\theta} : (x,y) \longmapsto \exp\left(-\int_0^{+\infty} a((x,y) + t\theta^\perp) dt\right) \quad (3.8)$$

and  $R_\theta : H \longrightarrow h$  is the Radon  $f \longmapsto R[f](\theta, \cdot)$  operator which assigns to  $f$  the function

$$s \longmapsto \int_{\langle(x,y),\theta\rangle=s} f(x,y) d\lambda_{s,\theta}(x,y).$$

Thus  $R_{a,\theta} = R_\theta \circ L_{a,\theta}$  is surjective since  $R_\theta$  is surjective. the adjoint operator of  $R_{a,\theta}$  is

$$R_{a,\theta}^* = L_{a,\theta}^* \circ R_\theta^* .$$

where  $L_{a,\theta}^*$  is the adjoint operator of  $L_{a,\theta}$  defined by the multiplication operator by the continuous function  $\overline{A_{a,\theta}}$  and  $R_\theta^*$  the adjoint operator of  $R_\theta$ . We have (see Natterer [33], p. 18)

$$\begin{aligned} R_\theta^* : h &\longmapsto H \\ g &\longmapsto \left( (x, y) \longmapsto \left[ \frac{g}{\sqrt{1-s^2}} \right]_{s=\langle(x,y),\theta\rangle} \right) . \end{aligned}$$

and  $R_\theta \circ R_\theta^* = 2\text{Id}_h$  (see Natterer [33], p. 144) since

$$\begin{aligned} R_\theta \circ R_\theta^* [g](s) &= \int_{\{\langle(x,y),\theta\rangle=s\}} \left( \frac{g(s)}{\sqrt{1-s^2}} \right) d\lambda_{s,\theta}(x, y) \\ &= \frac{g(s)}{\sqrt{1-s^2}} \times (2\sqrt{1-s^2}) = 2g(s) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Therefore, the operator

$$R_{a,\theta} \circ R_{a,\theta}^* = R_\theta \circ L_{a,\theta} \circ L_{a,\theta}^* \circ R_\theta^*$$

is the operator which maps the function  $g \in h$  into the following one

$$\begin{aligned} s &\longmapsto \int_{\{\langle(x,y),\theta\rangle=s\}} \frac{g(s)}{\sqrt{1-s^2}} |A_{a,\theta}(x, y)|^2 d\lambda_{s,\theta}(x, y) \\ &= \frac{g(s)}{\sqrt{1-s^2}} \int_{\{\langle(x,y),\theta\rangle=s\}} |A_{a,\theta}(x, y)|^2 d\lambda_{s,\theta}(x, y) \\ &= \frac{g(s)}{\sqrt{1-s^2}} \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \exp \left[ -2\text{Re} \left( \int_{\{0 \leq \xi \leq \sqrt{1-s^2}-t\}} a(s\theta + (t+\xi)\theta^\perp) d\xi \right) \right] dt . \end{aligned}$$

As we notice,  $R_{a,\theta} \circ R_{a,\theta}^*$  is the multiplication operator by the strictly positive bounded function  $B_{a,\theta}$  defined by

$$\begin{aligned} B_{a,\theta} : s \in [-1, 1] &\longmapsto \frac{\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \exp \left[ -2\text{Re} \left( \int_{\{0 \leq \xi \leq \sqrt{1-s^2}-t\}} a(s\theta + (t+\xi)\theta^\perp) d\xi \right) \right] dt}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= \frac{R_\theta [|A_{a,\theta}|^2]}{\sqrt{1-s^2}} . \end{aligned}$$

Such a multiplication operator is a continuous invertible operator of the space  $h$  in itself.

Consider distinct angles  $\theta_p \in [0, 2\pi[$  with  $p = 1, \dots, P$ , and  $P$  vectors  $g_1, \dots, g_P$  of the Hilbert space  $h$ . One can make explicit the orthogonal projections

$$f \in H \mapsto P_{a,p}^\omega f \in H$$

onto the subspaces  $\{f; R_{a,\theta_p}[f] = g_p\}$  for  $p = 1, \dots, P$ . Therefore the operators  $P_{a,p}^\omega$  involved in Kaczmarz's iterative algorithm are given (using (3.6)) as

$$\begin{aligned} P_{a,p}^\omega f &= f + \omega R_{a,\theta_p}^* \circ [R_{a,\theta_p} \circ R_{a,\theta_p}^*]^{-1} (g_p - R_{a,\theta_p}[f]) \\ &= f + \omega R_{a,\theta_p}^* \left( \frac{g_p - R_{a,\theta_p}[f]}{B_{a,\theta_p}} \right) \\ &= f + \omega \overline{A_{a,\theta_p}} \times \left( \frac{g_p - R_{a,\theta_p}[f]}{\sqrt{1 - s^2} B_{a,\theta_p}} \right)_{s=\langle(x,y),\theta_p\rangle} \\ &= f + \omega \overline{A_{a,\theta_p}} \times \left( \frac{g_p - R_{a,\theta_p}[f]}{R_{\theta_p}[|A_{a,\theta_p}|^2]} \right)_{s=\langle(x,y),\theta_p\rangle} \end{aligned}$$

Using the expression of  $P_{a,p}^\omega$  in (3.7), Kaczmarz's iterative algorithm in (3.7) can be written explicitly as follows

$$\begin{aligned} f_0^k &= f^k \\ f_p^k &= P_{a,p}^\omega f_{p-1}^k = f_{p-1}^k + \omega \overline{A_{a,\theta_p}} \times \left( \frac{g_p - R_{a,\theta_p}[f_{p-1}^k]}{R_{\theta_p}[|A_{a,\theta_p}|^2]} \right)_{s=\langle(x,y),\theta_p\rangle}, p = 1, \dots, P \\ f^{k+1} &= f_P^k \end{aligned} \tag{3.10}$$

starting with an arbitrary initial data  $f^0 = f_0^0$ .

## 3.4 Numerical simulations

In order to test the performances of our algorithm in reconstructing images when the tissue attenuation distribution is completely known, we simulated computer-generated phantoms for both the distribution of the activity  $f$  and the tissue attenuation distribution  $a$ . We did two numerical experiments with different image-phantoms using both optimal and strongly suboptimal data sampling. The performance of our algorithm in correcting attenuation effects was compared with the conventional ART algorithm. Also we tested the sensitivity of the algorithm to additional Gaussian noise. In order to quantitatively evaluate the results, we included  $L^2$  error estimates and compared profiles through the true activity to the corresponding profiles of the reconstructed images.

### 3.4.1 Phantoms

We generated two activity models with MATLAB. The first one, denoted phantom 1 ( see figure 3.2(a)) corresponds to the distribution

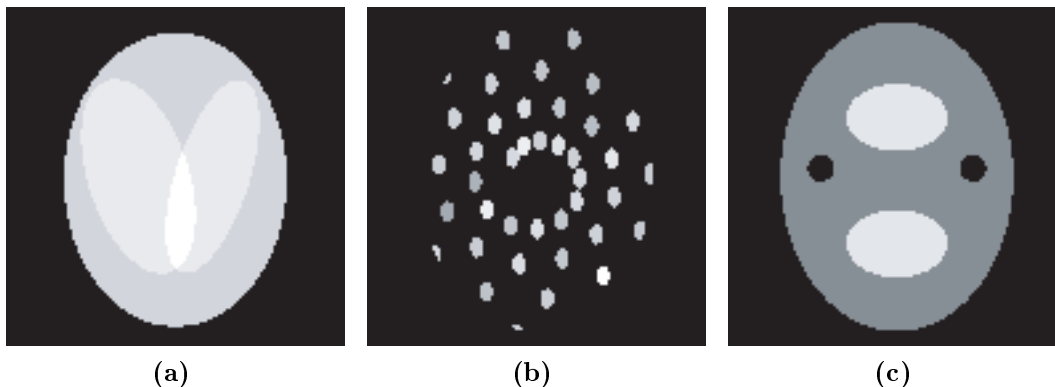
$$f(x, y) = \mu_1 \chi_{E_1}(x, y) + \mu_2 \chi_{E_2}(x, y) + \mu_3 \chi_{E_3}(x, y)$$

where  $E_1, E_2, E_3$  are characteristic functions of three large ellipses and  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  are given strictly positive constants of approximately the same size, such that  $\mu_i \simeq \mu_j$   $i \neq j$ . The attenuated projections  $g_j$  of such an activity are strongly correlated. Thus the convergence of ART can be seriously slowed. Therefore, this activity model will be used to test the ability of our algorithm to reconstruct slowly varying spatial distributions that may reduce performances of iterative algorithms.

The second one, denoted phantom 2 (see figure 3.2(b)) corresponds to an approximation of

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^M \nu_k \delta(x - x_k, y - y_k)$$

realized as a linear combination of characteristic functions of small ellipses, the  $\nu_k$  for  $k = 1, \dots, M$ , are random generated positive constants. Such kind of activity model will be used to test the capacities of the algorithm to recover “accidents” and small details in discontinuous activity distributions which may vary in a random way.



**FIG. 3.2.** *Model distributions : (a) activity phantom 1; (b) activity phantom 2; (c) attenuation.*

In order to perform a realistic model, we took a strongly non uniform tissue attenuation distribution already used in [30]. The image of our phantom of the attenuation



tissue distribution (see figure 3.2(c)) across a section of a human body shows an ellipsoidal region with axes of length 22.5 cm and 30 cm. Also figure 3.2(c) shows two smaller disjoint ellipsoidal zones with axes of length respectively 10 and 8.8 cm and two circular disjoint regions of diameter 2.5 cm. The circular and ellipsoidal regions are disjoint. The smaller ellipsoidal zones correspond to lungs, while the circular regions correspond to bones. The attenuation distribution equals to  $0.01 \text{ cm}^{-1}$  within lungs and to  $0.17 \text{ cm}^{-1}$  within bones, while it equals  $0.15 \text{ cm}^{-1}$  within the remainder part of the large ellipse.

In both experiments, all images were given on a  $M \times M$  grid with  $M$  equals to 128. The SPECT measurements were given by the attenuated Radon transform computed with  $P$  projections equispaced between 0 and  $2\pi$ . The number  $P$  of projections was chosen in order to agree with the optimal sampling condition  $P/M \simeq \pi/2$  given in [33] for transmission tomography using  $[0, \pi]$  as an angular range. Because of the involvement in our case of some nonzero tissues attenuation distribution, the SPECT measurement are computed from 0 to  $2\pi$ . Thus the optimal relation between  $M$  and  $P$  becomes  $P/M \simeq \pi$ , which is satisfied taking  $P = 400$  projections into account. Since this ratio falls frequently in practice much below the value  $\pi$ , we included numerical studies from suboptimal numbers of projections corresponding to the ratio  $P/M = \pi/5$ . This leads us to take only 80 equispaced projections in consideration.

### 3.4.2 Reconstruction

In this section we perform the reconstruction of both phantom 1 and 2 using the algorithm described in (3.10). The tissue attenuation distribution  $a$  is chosen as in the section 3.4.1.

In order to improve the stability of the reconstructed activity distribution, we will correct the solution provided by our algorithm at each iteration taking into account natural constraints which need to be fulfilled by the expected solution. Since we are dealing with the reconstruction of a cross section of human body, a non-negativity constraint is required in order to provide physical meaning to the solution (see [4] for more constraint schemes). Therefore, after each iteration  $k$  of the algorithm, the approximated activity distribution  $f^k$  which has been found will be replaced by  $\sup(f^k, 0)$ . It has been shown that the projection access order has an important impact on the convergence rate and the stability of the ART methods. Thus several schemes have been proposed in order to improve both convergence speed and reconstructed image quality (see X. Intes *et al* [19] for further details). The goal is to rearrange the measurements in such a way that the projections are closest to perpendicularity. For this end, we chose a random access scheme (see [50]) that gives better results relative to the sequential access scheme. The sequential access scheme is the natural order access. It access to the projections with respect to the order of the acquired experimental data. The relaxation parameter adjusts the projection step at each iteration

and its selection is most of the time done empirically. We have set  $w = 0.1$  based on a previous studies such in D. Ros *et al* [41]. Using iterative algorithms implies that the solution  $f$  should be initialized with a constant value or a good start guess . Another common starting guess is  $f_0 = f_{0,0} = 0$ , which will be chosen for our numerical experiments.

Therefore, in the approach which is conducted here, the algorithm depends on two parameters, namely the step  $\Delta\varphi$  of orthogonal projections on various subspaces  $\{f; R_{a,\theta_p} f = g_p\}$  and the number  $K$  of iterations. We performed two tests taking the values  $\Delta\varphi = 1$  as optimal value using 400 projections and  $\Delta\varphi = 5$  as suboptimal value using only 80 projections, in order to see how the choice of  $\Delta\varphi, K$  affects the quality of the reconstruction where  $K = 1, \dots, 30$  for both values of the parameter  $\Delta\varphi$ . To quantitatively compare reconstructed activity densities  $f^{\Delta\varphi, K}$  by our algorithm and the reconstructed activity densities  $f_{art}^{\Delta\varphi, K}$  by the classical ART with no attenuation correction to the true one  $f$ , we define the following relative errors expressed in %

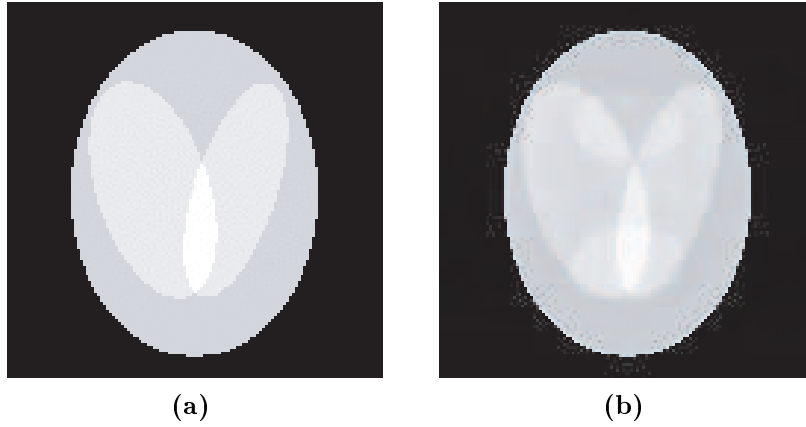
$$E^{\Delta\varphi, K} = \frac{\|f - f^{\Delta\varphi, K}\|}{\|f\|} * 100 \text{ and } E_{art}^{\Delta\varphi, K} = \frac{\|f - f_{art}^{\Delta\varphi, K}\|}{\|f\|} * 100$$

where  $\|\cdot\|$  is the  $L^2$  norm.

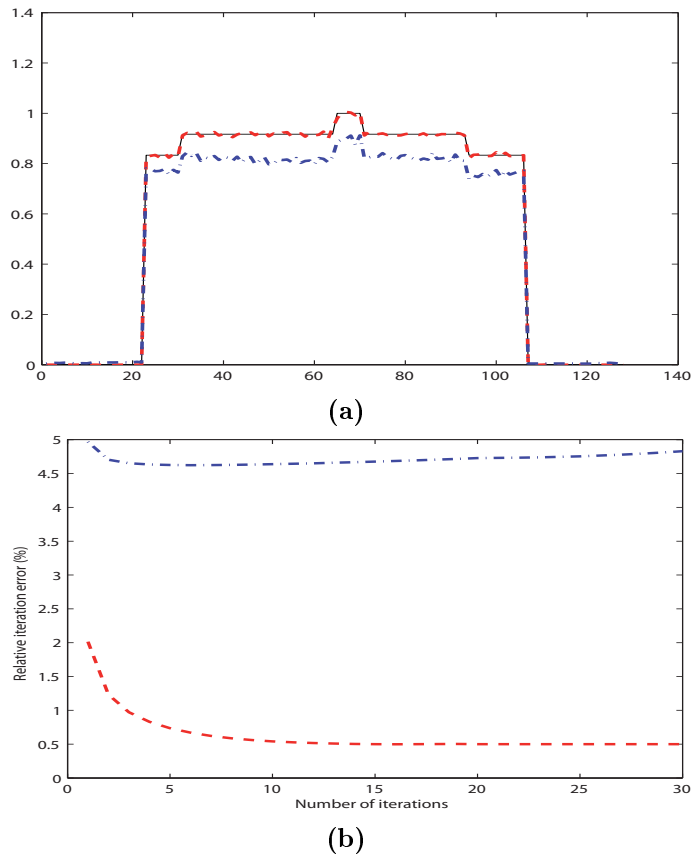
### Reconstruction in the case of slowly varying activity

The image displayed in figure 3.3(a) is the reconstructed image of the activity distribution phantom 1 with our algorithm after 10 iterations. Each iteration using a step  $\Delta\varphi$  of orthogonal projections, that is as many angles as used for the computation of the discrete attenuated Radon transform. Here the corresponding  $L^2$  relative error is  $E^{1,10} = 0.54\%$ . Figure 3.3(b) illustrates the reconstructed image by the classical ART algorithm using the same values for the parameters  $\Delta\varphi$  and  $K$ . The  $L^2$  relative error yielded is  $E_{art}^{1,10} = 4.6\%$ . The profiles drawn along the horizontal axis  $y = 0$  across the phantom 1 and the reconstructed images from both algorithms are shown respectively in figure 3.4(a), while 3.4(b) shows the relative errors  $E^{\Delta\varphi, K}$  and  $E_{art}^{\Delta\varphi, K}$  plotted as functions of the number of iterations.

Both  $L^2$  relative error and comparison of profiles show that the reconstructions obtained by the classical ART algorithm without an attenuation correction differ significantly from the original image even under optimal sampling conditions. Moreover, we notice that shadows can be seen in the reconstructed image due to non corrected attenuation effects. On the other hand, the present algorithm yields images which match perfectly the original phantom used in the simulations and shows good stability results for the solutions when the number of iterations increases. Furthermore, the strongly correlated measurements data didn't affect the convergence speed of our algorithm.



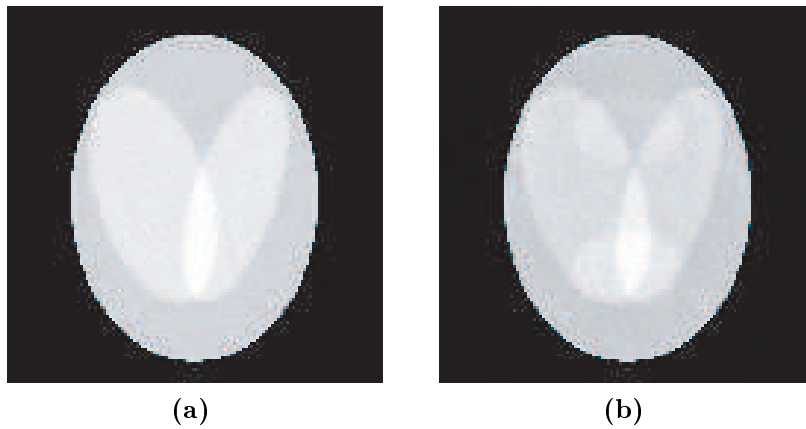
**FIG. 3.3.** Reconstruction of the activity “phantom 1” with  $\Delta\varphi = 1$  and  $K = 10$  : (a) reconstructed image  $f^{\Delta\varphi, K}$  ; (b) reconstructed image  $f_{art}^{\Delta\varphi, K}$



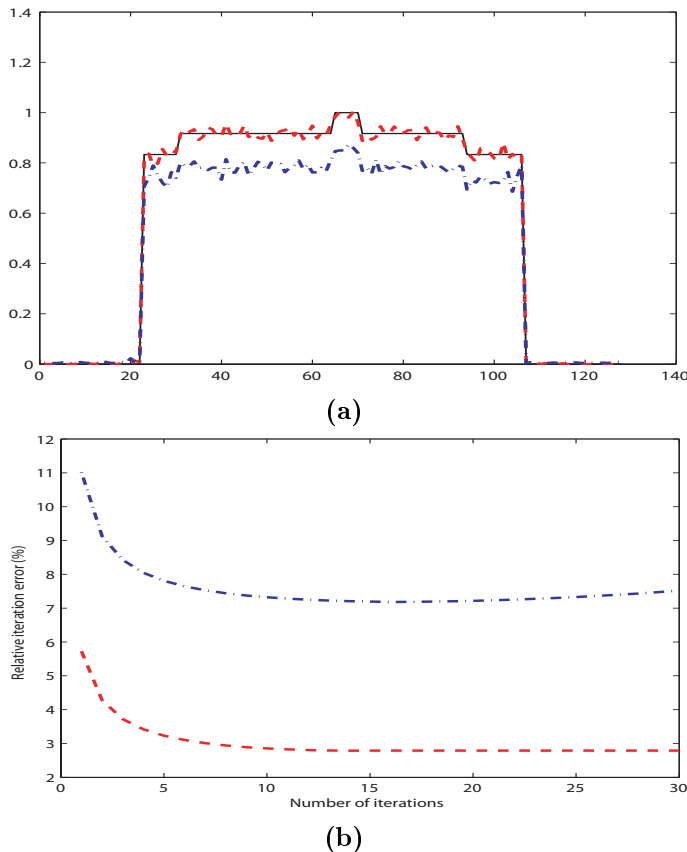
**FIG. 3.4.** Comparison results with  $\Delta\varphi = 1$  : (a) profiles of  $f$  (solid line) and the reconstructed activity distribution densities :  $f^{\Delta\varphi, K}$  (dashed line),  $f_{art}^{\Delta\varphi, K}$  (dash-dotted line) for  $y = 0$  ; (b)  $L^2$  relative error  $E^{\Delta\varphi, K}$  (dashed line) and  $E_{art}^{\Delta\varphi, K}$  (dash-dotted line) for  $K = 1, \dots, 30$ .

Also we conducted simulations when the measurements data suffered from a highly suboptimal ratio of the number between projections and the number of samples. The following numerical experiment was computed taking the value  $P/M \simeq \frac{\pi}{5}$  as a sampling ratio which corresponds to  $\Delta\varphi = 5$ . In this case we have only 80 equispaced projections in the angular range  $[0, 2\pi[$ . Figures 3.5(a) and 3.5(b) show images computed using the present algorithm and the classical ART method respectively after  $K = 10$  iterations.  $L^2$  relative error was respectively equal to  $E^{1,10} = 2.89\%$  and  $E_{art}^{1,10} = 7.5\%$ .

In order to make a quantitative comparison, we show the profiles of reconstructions and the true activity distribution, which are both taken across the horizontal axis  $y = 0$ , in figure 3.6(a). Furthermore, we display the relative errors  $E^{\Delta\varphi,K}$  and  $E_{art}^{\Delta\varphi,K}$  as functions of number of iterations  $K$ . In figure 3.6(b)  $K$  describes the interval  $[1, 30]$ . As shown in figure 3.5 and 3.6, if the reconstruction is done in the presence of strongly varying attenuation distribution and suboptimal sampling ratio, and if we do not correct or compensate the attenuation effect, then in this case the smoothness of solutions will be deteriorated and the relative error of reconstruction will linearly increase as the number of iterations increases. While using the proposed attenuation correction method, it is possible to obtain a good reconstruction with a small relative error and a stable behavior of solutions even in case of high suboptimal sampling ratio. On the other hand, the strongly correlated measurements data didn't affect the convergence speed of our algorithm.



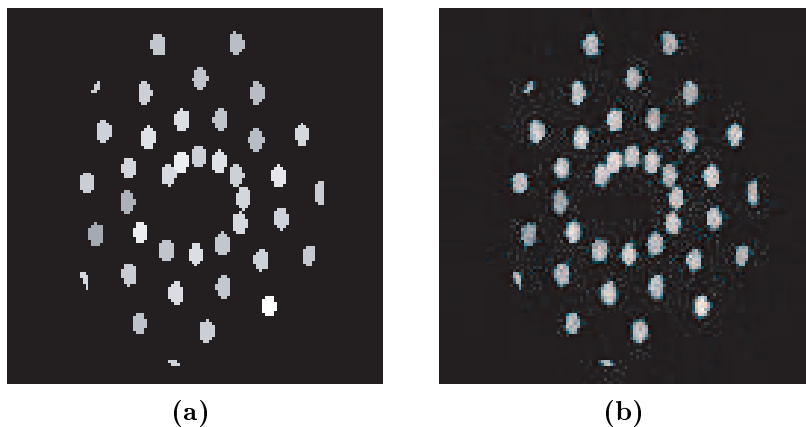
**FIG. 3.5.** Reconstruction of the activity “phantom 1” with  $\Delta\varphi = 5$  and  $K = 10$  : (a) reconstructed image  $f^{\Delta\varphi,K}$  ; (b) reconstructed image  $f_{art}^{\Delta\varphi,K}$ .



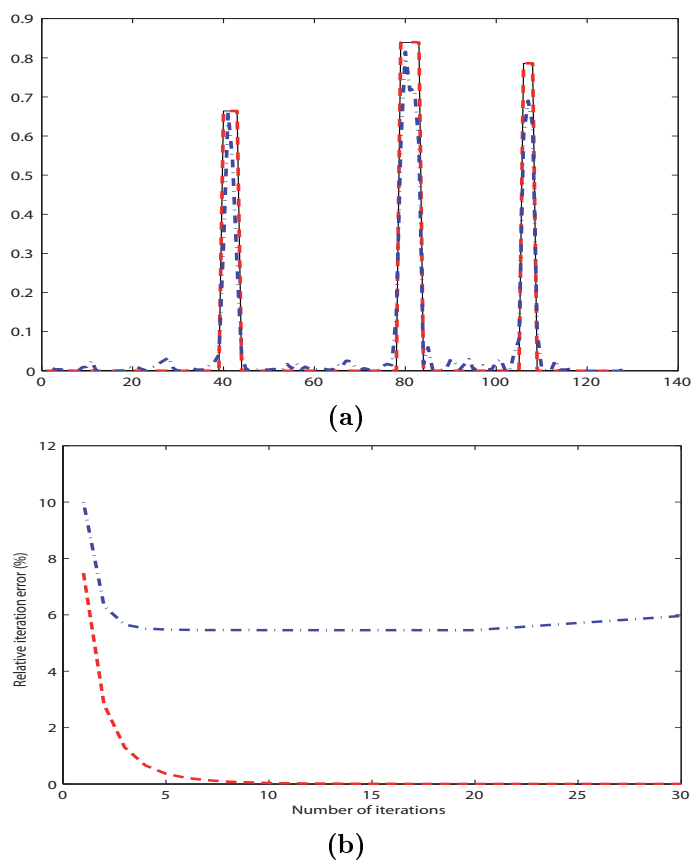
**FIG. 3.6.** Comparison results with  $\Delta\varphi = 5$  : (a) profiles of  $f$  (solid line) and the reconstructed activity distribution densities :  $f^{\Delta\varphi,K}$  (dashed line),  $f_{art}^{\Delta\varphi,K}$  (dash-dotted line) for  $y = 0$  ;  $L^2$  relative error  $E^{\Delta\varphi,K}$  (dash line) and  $E_{art}^{\Delta\varphi,K}$  (dash-dotted line) for  $K = 1, \dots, 30$  .

### Reconstruction in the case of discontinuous activity distribution

In this section we implemented our algorithm starting with “phantom 2” as the activity distribution. Figure 3.7(a) features the reconstructed activity distribution  $f^{\Delta\varphi,K}$  obtained with our algorithm after 10 iterations, each iteration using a step  $\Delta\varphi = 1$  of orthogonal projections, that is using all possible angles involved for the preliminary computation of the attenuated Radon transform. Here the corresponding  $L^2$  relative error  $E^{1,10}$  is here almost equal to 0 . Figure 3.7(b) shows the reconstructed activity distribution  $f_{art}^{\Delta\varphi,K}$  obtained with the classical ART algorithm after 10 iterations and with the same step  $\Delta\varphi = 1$ . In this case the relative error obtained is  $E_{art}^{1,10} = 5.7\%$ . In figure 3.8(a), we plotted both horizontal profiles taken at the center of the original phantom and the reconstructed images. Image 3.8(b) features the variations of the functions  $E^{\Delta\varphi,K}$  and  $E_{art}^{\Delta\varphi,K}$  for  $K$  between 1 and 30 and  $p$  equals to 1. In this case,  $E^{1,K}$  decreases much faster than  $E_{art}^{1,K}$ . Moreover  $E^{1,K}$  asymptotically converges to zero, while  $E_{art}^{1,K}$  tends to increase starting from the iteration  $K = 20$ .



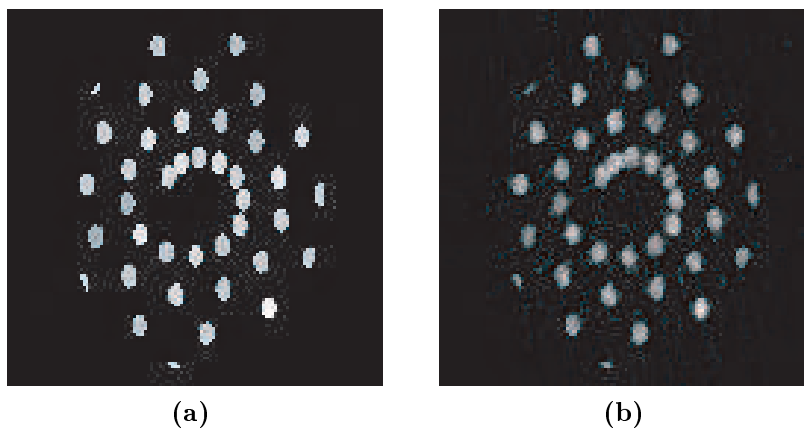
**FIG. 3.7.** Reconstruction of the activity “phantom 2” with  $\Delta\varphi = 1$  and  $K = 10$  : (a) reconstructed image  $f^{\Delta\varphi, K}$  ; (b) reconstructed image  $f_{art}^{\Delta\varphi, K}$ .



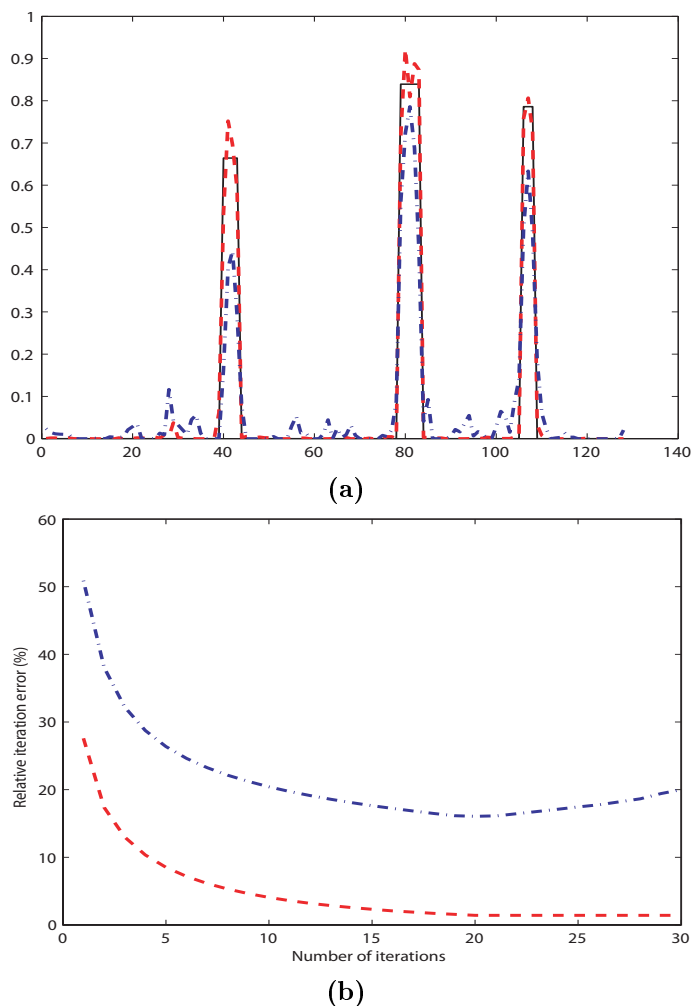
**FIG. 3.8.** Comparison results with  $\Delta\varphi = 1$  : (a) profiles of  $f$  (solid line) and the reconstructed activity distribution :  $f^{\Delta\varphi, K}$  (dashed line),  $f_{art}^{\Delta\varphi, K}$  (dash-dotted line) for  $y = 0$  ; (b)  $L^2$  relative error  $E^{\Delta\varphi, K}$  (dashed line) and  $E_{art}^{\Delta\varphi, K}$  (dash-dotted line) for  $K = 1, \dots, 30$ .

The computational examples of this section prove that using an algorithm, which do not take into account the attenuation correction in the reconstruction of distribution models, suffers of lack in accuracy (poor details reconstruction) and loss of activity intensities and brilliance. Also we noticed that oscillations appear in the reconstructed activities when these are yielded by the conventional ART algorithm. This did not happen using our approach. In fact our algorithm provides an exact reconstruction and a perfect contrast quality of phantoms containing fast varying distributions. One can see from the profiles comparison that edges of the details were reproduced accurately and perturbations didn't occur in the reconstructed image.

As in the case of slow varying activity distribution, we performed reconstruction for phantom 2 with suboptimal sampling condition. The simulations displayed in figures 3.9 and 3.10 were done by using 80 equispaced projections. For this end, we ran the algorithm setting  $\Delta\varphi = 5$ . The images shown in figure 3.9(a) and 3.9(b) illustrate the reconstructed activities  $f^{\Delta\varphi,K}$  and  $f_{art}^{\Delta\varphi,K}$  respectively after 10 iterations. The corresponding  $L^2$  relative errors were respectively 4.5% and 22.6%. The profiles taken at the axis  $x = 0$  through  $f^{\Delta\varphi,K}$  and  $f_{art}^{\Delta\varphi,K}$  are shown in figure 3.10(a) and superimposed with the corresponding profile through the true activity distribution  $f$  for comparison. Figure 3.10(b) shows how  $E_{art}^{\Delta\varphi,K}$  begins to slightly increase starting from the 19<sup>th</sup> iteration, while  $E^{\Delta\varphi,K}$  asymptotically decreases to 1.7%.



**FIG. 3.9.** Reconstruction of the activity “phantom 2” with  $\Delta\varphi = 5$  and  $K = 10$  : (a) reconstructed image  $f^{\Delta\varphi,K}$  ; (b) reconstructed image  $f_{art}^{\Delta\varphi,K}$  .



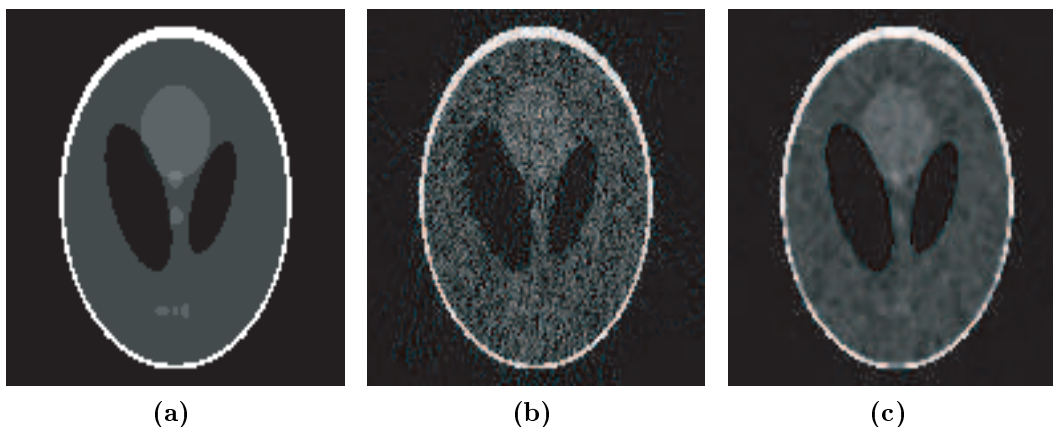
**FIG. 3.10.** Comparison results with  $\Delta\varphi = 5$  : (a) profiles of  $f$  (solid line) and the reconstructed activity distribution :  $f^{\Delta\varphi, K}$  (dashed line),  $f_{art}^{\Delta\varphi, K}$  (dash-dotted line) for  $y = 0$  ;  $L^2$  relative error  $E^{\Delta\varphi, K}$  (dashed line) and  $E_{art}^{\Delta\varphi, K}$  (dash-dotted line) for  $K = 1, \dots, 30$ .

As one can see, we obtained impressive results applying our method of reconstruction. Our algorithm displays good stability and accuracy in face of insufficient number of projections since there were no star-like artifacts in the reconstructed images. In fact the star-like artifact is a pronounced phenomenon that appears when both attenuation and suboptimal number of projection are present. Furthermore, all the details of the original phantom were reproduced. On the other hand, and under the same circumstances, the ART algorithm, which do not take into account the attenuation correction, produced low-contrast images that contain an important amount of noise level.



### 3.4.3 Reconstruction from noisy data

We conclude our presentation by the reconstruction of the "Shepp-Logan" phantom (see figure 3.11(a)) from noisy data. The Shepp-Logan phantom includes several fine objects with multiple intensity levels (details with discontinuous geometry) and also large smooth areas. Thus such an activity distribution simulates realistic models, so we used it to measure how the noisy data affects the reconstruction in terms of spatial resolution and image contrast. At first time. First the SPECT measurements were calculated by the attenuated radon transform using the same attenuation distribution described in the previous section. Then in order to generate noisy data, we added Gaussian noise with an average equals 0 and a deviance  $\sigma^2$  equals 0.1 to each projection. The resulting data had a relative mean square error of 12%. In order to satisfy practical conditions such the suboptimal sampling, we ran our algorithm with the noisy data setting  $\Delta\varphi = 5$ .



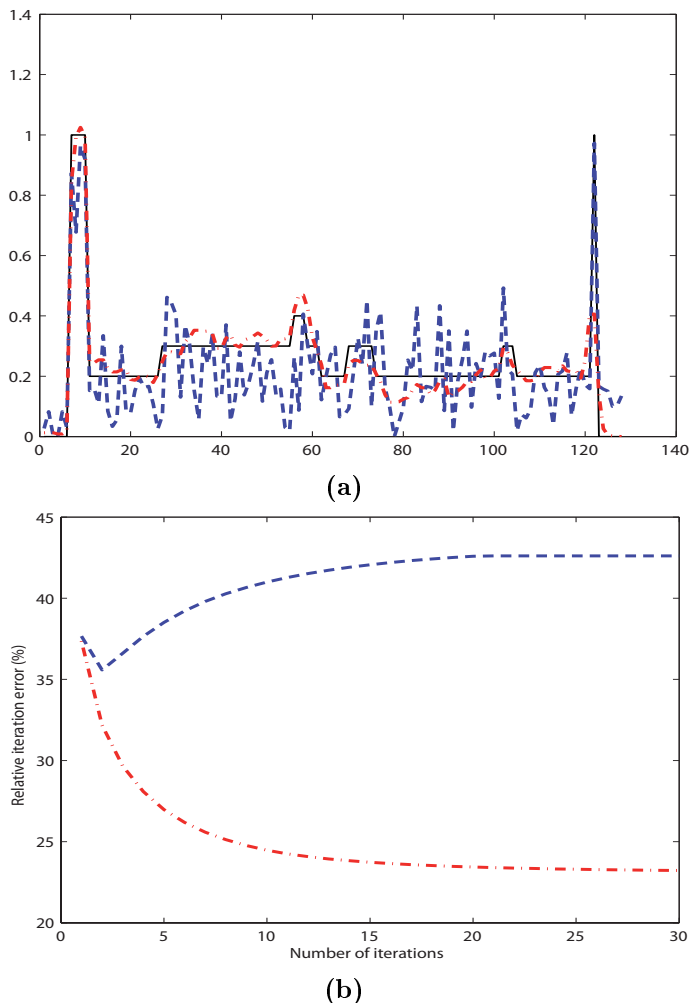
**FIG. 3.11.** *Reconstruction of phantom "Shepp-Logan" from noisy data : (a) original phantom ; (b) reconstruction without filtering ; (c) reconstruction with filtering.*

The image displayed in figure 3.11(b) was computed using the present algorithm without additional filtration and after  $K = 10$  iterations. Image in figure 3.11(c) was obtained using our method with an application of a low-frequency filtration procedure. The filtered version of our algorithm consists of two steps. At each iteration, we filtered the projections  $g_p$  for  $p = 1, \dots, 80$  with the low-frequency filter  $\hat{W}(\rho)$  given by

$$\hat{W}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\rho/\rho^{\text{cut-off}})) & |\rho| \leq \rho^{\text{cut-off}} \\ 0 & |\rho| > \rho^{\text{cut-off}}. \end{cases}$$

where  $\rho^{\text{cut-off}}$  is the cut-off frequency,  $\rho^{\text{cut-off}} \leq \rho^{\text{Nyquist}}$ . Then after each full iteration, the image  $f^{\Delta\varphi,k}$  is filtered using a 2-D median filter. Thus spikes from reconstruction noise are removed without blurring the edges. Analyzing images presented

in figure 3.11 one can observe that the low-frequency filtration reduces oscillations in the reconstructed image with a moderate loss of fine details.



**FIG. 3.12.** Comparison results : (a) profiles of  $f$  (solid line), reconstructed activity without filtering (dashed line) and reconstructed activity with filtering (dash-dotted line) for  $x = 0$ ; (b)  $L^2$  relative error evolution : without filtering (dashed line) and with filtering (dash-dotted line) for  $K = 1, \dots, 30$ .

In order to visualize how the filtration step modifies our algorithm behavior in term of the reconstruction quality and the  $L^2$  relative error, we plotted profiles taken at the vertical axis  $x = 0$  across the phantom and the reconstructed images in figure 3.12(a) and we displayed  $E^{\Delta\varphi, K}$  as a function of  $K$  for  $K = 1, \dots, 30$  in figure 3.12(b). One can see from the graphs comparison that the filtering procedure of our algorithm

greatly improves the quality of reconstruction and significantly reduces oscillations, while the relative error analysis shows a diverging behavior of our method. On the other hand, when the reconstruction is done with the filtered version of our algorithm, stable solutions occur and convergence is established.

## 3.5 Conclusion and discussion

This paper presents a method to reconstruct emission activity by an algorithm incorporating implicit and exact attenuation correction. We investigated the impact of the attenuation effects, strongly correlated projections and insufficient measurements in our reconstruction approach.

The computer simulations show that the present method can indeed be used to improve reconstructed images quality in case the of realistic arbitrary attenuation maps and gives better results than the classical ART. The present algorithm displays an accuracy in reconstructing images that contain small details even when the data measurements suffer from high suboptimal sampling. Since our algorithm need a small number of projections for accurate reconstruction, then less computational time is required.

On the other hand, a strong correlated set of projections due to a slow varying activity distribution seems to be controlled by our algorithm as it was shown by the  $L^2$  error estimate studies.

The filtered version algorithm seems to handle oscillation problems when facing moderately noisy data. We should note that it is possible to apply the present algorithm to real data, however, there is a need for further investigation to increase numeric robustness. There should be more investigations as well in both adapted filtering methods and finding the optimal choice of relaxation parameters.

In our first approach, Angles used for the reconstruction were regularly organized within  $[0, 2\pi[$ . Nevertheless, our routine allows the possibility of choosing an arbitrary set of angles, introducing for example some gaps in the list of selected angles. Since our approach will allow us to avoid angular sectors in which the attenuation takes an important role in the projections, this will be useful to accomplish studies on the reconstruction of the unknown source only when we dispose of partial information about the attenuation map.



# Chapitre 4

## Algorithmes et simulations numériques

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous exposerons l'algorithme numérique que nous avons utilisé pour l'implémentation de la méthode étudiée au chapitre 3. Nous verrons de plus comment mettre en oeuvre un algorithme numérique facile à implémenter qui a été utilisé pour la discrétisation de la transformation de Radon atténuée. À l'aide de fantômes informatiques, nous démontrerons que l'erreur purement numérique est faible et que notre implémentation de l'algorithme de correction d'atténuation converge bien (et rapidement) vers une solution très proche de l'objet avec lequel nous avons simulé les projections. Tous les paramètres sur lesquels l'expérimentateur peut jouer (tels que le coefficient de relaxation, la solution initiale, l'ordre d'acquisition des projections et les contraintes physiques) sont importants pour obtenir le meilleur résultat, notamment en termes de résolution spatiale et de convergence numérique.

### 4.2 Le modèle direct

Le problème de reconstruction en tomographie comporte deux étapes : la première consiste en un modèle direct, *i.e.* le modèle d'acquisition des projections atténuées de l'activité  $f(x)$ ; la deuxième consiste en le problème inverse en tomographie, *i.e.* la restitution de  $f(x)$  à partir du modèle direct.

On a vu au deuxième chapitre que le modèle direct est modélisé par la transformation de Radon atténuée. On propose dans cette partie un algorithme numérique simple et facile à implémenter pour la discrétisation de la transformation en question. L'algorithme a été implémenté à l'aide de quelques routines MATLAB. On décrira, dans la suite, la mise en oeuvre de cet algorithme et on montrera sa simplicité à

travers une idée naturelle de discrétisation d'intégrale le long d'une famille de droites dépendant d'un paramètre.

### 4.2.1 Discrétisation de la transformation de Radon atténuée

Rappelons tout d'abord brièvement le cadre mathématique du modèle direct et de la transformation de Radon atténuée dans le cas continu. Les projections parallèles atténuées de l'activité  $f(x, y)$  de direction  $\theta^\perp$  sont vues comme l'ensemble des intégrales atténuées par un facteur dépendant de l'atténuation  $a(x, y)$  le long de la famille de droites  $L(s, \theta) := \{ \langle (x, y), \theta \rangle = s \}$ , toutes parallèles de l'espace  $\mathbb{R}^2$ , de direction  $\theta^\perp$  et se situant à la distance  $s$  de l'origine (centre de la zone explorée). Ces projections parallèles atténuées de  $f$  régissent les intensités mesurées  $g_a(\theta, s)$  par la caméra et sont modélisées par la transformée de Radon atténuée  $(\theta, s) \mapsto R_{a,\theta}[f](s)$  (voir Tretiak et *al.* [45]) selon les relations :

$$R_{a,\theta}[f](s) = \int_{\langle (x,y), \theta \rangle = s} \exp\left(-\int_0^{+\infty} a(\langle (x,y), \theta \rangle + t\theta^\perp) dt\right) f(x, y) d\lambda_{s,\theta}(x, y) = g_a(\theta, s). \quad (4.1)$$

Ici  $d\lambda_{s,\theta}$  représente la restriction de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$  sur la ligne  $L(s, \theta)$ , avec

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \theta^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \varphi < \varphi_{\max}.$$

En pratique, l'activité  $f$  sera forcément à reconstruite de manière discrète ; le schéma d'atténuation  $a$  sera lui-même discrétisé, ainsi que les projections  $g(\theta, s)$  qui seront séparées par des pas d'angle discrets, ce qui nécessite une version discrétisée de la transformation donnée par l'équation (4.1).

On suppose dans la suite que l'activité  $f(x, y)$  et le schéma d'atténuation  $a(x, y)$  sont donnés sur une grille de pixels discrétisée symétriquement autour du centre et de taille  $M \times M$ , avec un pas de discrétisation régulier tel que  $\Delta x = \Delta y = 2/M$  ; on a alors :

$$\begin{aligned} f &= \{f(x_m, y_n), \quad m, n = 0, \dots, M-1\} \\ a &= \{a(x_m, y_n), \quad m, n = 0, \dots, M-1\}. \end{aligned}$$

De même, les angles de projection  $\varphi_p$  ( $p = 0, \dots, P-1$ ) utilisés dans les calculs sont répartis uniformément dans  $[0, 2\pi[$  avec le pas angulaire  $\Delta\varphi = 2\pi/P$ . De plus, les détecteurs donnés par les points  $s_r$  ( $r = 0, \dots, R-1$ ) sont distribués symétriquement autour de  $s = 0$  de manière à ce que  $\Delta s = \Delta x$ , ce qui nous ramène à prendre  $R = M$  (voir section 2.3.3).

Commençons tout d'abord par la discrétisation du facteur atténuant exponentiel donné par

$$A_{a,\theta}(x, y) = \exp \left( - \int_0^{+\infty} a((x, y) + t\theta^\perp) dt \right). \quad (4.2)$$

Ce facteur est l'exponentielle du terme

$$D_{a,\theta}(x, y) = - \int_0^{+\infty} a((x, y) + t\theta^\perp) dt$$

souvent nommé « *divergent beam transform* » dans la littérature. Il est responsable de l'atténuation des photons à travers leurs trajets. Sous les hypothèses de discrétisation citées dans cette section, la version discrétisée de l'équation (4.2) s'exprime de la manière suivante :

$$A_{a,\theta_p}(x_m, y_n) = \exp \left( - \Delta x \sum_{k=m}^{M-1} \sum_{l=n}^{M-1} a(x_k, y_l) \Phi(x_k - x_m \cos \varphi_p, y_l - y_n \sin \varphi_p) \right) \quad (4.3)$$

pour  $0 \leq m, n \leq M - 1$ , avec

$$\Phi(x_k - x_m \cos \varphi_p, y_l - y_n \sin \varphi_p) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k = x_m \cos \varphi_p \text{ et } y_l = y_n \sin \varphi_p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.4)$$

La discrétisation donnée par (4.3) a été réalisée en appliquant la méthode des trapèzes pour le calcul numérique de l'intégrale de l'équation (4.2) le long de la demi-droite de direction  $\theta_p^\perp$  et ayant  $(x_m, y_n)$  comme point de départ.

Les projections atténuées de l'activité  $f$  données par l'équation (4.1) sont vues comme la transformation de Radon de  $f$  multipliée par le facteur atténuant  $A_{a,\theta_p}$ , on a donc

$$g_a(\theta, s) = R_\theta [f \times A_{a,\theta_p}](s) = \int_{\langle (x,y), \theta \rangle = s} f(x, y) \times A_{a,\theta_p}(x, y) d\lambda_{s,\theta}. \quad (4.5)$$

Le facteur atténuant étant donné par (4.3), on voit, en appliquant le même principe de calcul numérique d'intégrale à l'équation (4.5), mais cette fois-ci sur la droite d'équation  $s_r - x_m \cos \varphi_p - y_n \sin \varphi_p = 0$ , que la discrétisation des projections atténuées de l'activité  $f$  s'exprime sous la forme :

$$g_a(\theta_p, s_r) = \Delta x \sum_{k=m}^M \sum_{l=n}^M [f(x_m, y_n) \times A_{a,\theta_p}(x_m, y_n)] \delta(s_r - x_m \cos \varphi_p - y_n \sin \varphi_p) \quad (4.6)$$

pour  $0 \leq p \leq P - 1$  et  $0 \leq r \leq M - 1$ .

Ce qui nous ramène à une forme discrétisée simple de la transformation de Radon atténuée, facile à implémenter avec peu de paramètres à manipuler.

## 4.2.2 Algorithmes

Nous décrivons dans cette sous-section la routine proposée pour l'implémentation de la transformation de Radon atténuée discrète donnée par (4.6). Notre routine est basée sur une idée simple et naturelle et elle utilise des routines simples qui ont été pré-implémentées sous Matlab. La routine principale `RadonAtt` utilise la sous-routine `Fanbeam` qui calcul l'exponentiel de la « *divergent beam transform* » discrétisée par l'équation (4.3). Le calcul d'intégrales numériques utilisé pour en déduire les équations (4.3) et (4.6) consiste à appliquer la méthode des trapèzes sur les équations (4.2) et (4.1) respectivement, *i.e.* à effectuer des intégrales numériques sur des droites et des demi-droites de direction  $\theta_p^\perp$ . Donc pour chaque projection qui correspond à une direction  $\theta_p^\perp$  donnée, il nous faut une procédure qui permette de détecter les pixels de la grille qui se trouvent sur les droites (ou demi-droites) ou bien à proximité de celles-ci et ensuite appliquer la méthode des trapèzes à partir des pixels ainsi sélectionnés. Cette méthode s'avère d'être compliquée à mettre en oeuvre surtout à cause de la procédure de sélection suivant des directions obliques et variables. Cette procédure de sélection coûte cher en temps de calcul et risque d'être lourde à implémenter.

Afin de surmonter cette difficulté, nous avons proposé une méthode qui consiste à faire tourner les images discrétisées suivant chaque angle de projection  $\varphi_p$ , puis à appliquer la formule des trapèzes sur les images ainsi pivotées, ce qui nous ramène à effectuer des sommations de pixels sur des lignes verticales. Par suite, l'implémentation de la transformation de Radon atténuée s'en trouve simplifiée et le temps de calcul est réduit d'une façon considérable.

### Routine `Fanbeam`

Nous expliquons dans ce paragraphe le principe et l'implémentation détaillée de la routine `Fanbeam`, étant donné un schéma d'atténuation  $a$  sur une grille de pixels de taille  $M \times M$  et un angle de projection  $\varphi_p$ . Les lignes de commandes dans l'algorithme 1 décrivent la procédure de calcul de l'exponentielle « *divergent beam transform* » du schéma d'atténuation suivant l'angle  $\varphi_p$  selon notre méthode de rotation d'images. Tout d'abord la fonction `imrotate` effectue une rotation d'angle  $-\varphi_p$  du schéma d'atténuation  $a$  représenté ici par une matrice de taille  $M \times M$ . L'image  $a$  ainsi tournée est stockée dans la matrice  $a_p$ . Ensuite, au lieu d'effectuer la somme des pixels de l'image  $a$  situés sur les demi-droites comme l'on décrit dans l'équation (4.3), nous utilisons l'image pivotée  $a_p$  pour faire des sommes sur les lignes verticales de celle-ci.

La fonction `sum1` remplace chaque élément  $a_p(m, n)$  par l'élément  $S(m, n) = \sum_{l=n}^{M-1} a(m, l)$ .

Lorsque la matrice  $S$  est calculée, nous la multiplions par le pas de discrétisation  $2/M$  et finalement l'exponentielle de la « *divergent beam transform* » est donnée par  $A = \exp(-S)$ . Nous notons que les fonctions `imrotate` et `sum1` sont pré-implémentées



sous Matlab.

```

Routine Divbeam(a,  $\varphi_p$ )
|
|  A=imrotate(a,  $-\varphi_p$ );
|
|  Pour m=0 : M-1 faire
|  |
|  |  S(m,n)=sum1(A(m,n));
|  |
|  Fin Pour
|
|  S = S * 2/M;
|  D = exp(-S);
|
|  Retourner D;
Fin

```

**Algorithme 1.** *Implémentation du facteur atténuant.*

### Routine RadonAtt

Les lignes de commande qui figurent dans l'algorithme 2 représentent la routine **RadonAtt** qui calcule la transformation de Radon atténuée discrète donnée par l'équation (4.6). La routine **RadonAtt** utilise la routine **Divbeam** pour calculer le facteur atténuant  $D_{a,\theta_p}$  pour chaque incidence  $\theta_p^\perp$ . L'activité  $f$  est discrétisée sur une grille de pixels de taille  $M \times M$  et les angles de projection utilisés sont repartis uniformément dans  $[0, 2\pi[$  avec un pas de discrétisation égal à  $2\pi/P$  ( $P$  angles). Pour un angle  $\varphi_p$  donné, l'image  $f$  est tournée dans le sens des aiguilles d'une montre suivant la fonction **imrotate** et ensuite stockée dans la matrice  $F$ . Le facteur atténuant  $D$  est calculé par la routine **Divbeam** et ensuite multiplié par  $F$  pixel par pixel ( $F$  et  $D$  sont de même taille), ce produit étant stocké dans la matrice  $FD$ . Il suffit ensuite de calculer la transformation de Radon de  $FD$  pour aboutir à la transformation de Radon atténuée de  $f$ . Pour calculer la transformation de Radon de l'image  $FD$ , nous utilisons la fonction **sum2** qui réalise la somme des pixels de l'image  $FD$  dans la direction verticale, *i.e.* remplace chaque colonne de  $FD$  par la somme de ses pixels. Finalement le résultat obtenu est stocké dans la matrice  $g$  pour former la transformation de Radon atténuée de  $f$  pour  $P$  projections utilisant  $M$  détecteurs chacune; la matrice  $g$  est donc de taille  $P \times M$ .

```
Routine RadonAtt(f, P, a)
```

```
  Pour p=0 : P-1 faire
```

```
    F=imrotate(f, -φp);
```

```
    D=Divbeam(a, φp);
```

```
    FD = F.*D;
```

```
    g = [g, sum2(FD)];
```

```
  Fin Pour
```

```
  Retourner g;
```

```
Fin
```

**Algorithme 2.** *Implémentation de la transformation de Radon atténuée*

Ces deux routines ont été implémentées sous Matlab et utilisées dans les simulations numériques réalisées dans les chapitres précédents. D'après la description des routines, on voit bien que peu de lignes de commandes et que les opérations mathématiques utilisées sont simples et nécessitent du calcul matriciel à son tour bien adapté et facile à réaliser avec Matlab. La présence de boucles a été réduite à celle d'une seule boucle For par routine, tandis que l'emploi de boucle For et While a été complètement évité, ce qui accélère les calculs d'une façon très significative.

### 4.3 Résultats numériques

Afin de tester la performance de notre algorithme, nous avons réalisé des tests numériques avec des images de différentes tailles et avec un nombre d'angles de projections variable. Pour nos simulations, nous avons opté pour un échantillonnage uniforme en la variable  $\varphi$ , c'est-à-dire

$$\varphi_p = p\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = 2\pi/P, \quad p = 0, \dots, (P-1),$$

où  $\Delta\varphi$  est le pas d'échantillonnage et  $P$  le nombre d'échantillons (nombre d'angles). L'activité  $f$  et le schéma d'atténuation  $a$  sont échantillonnés suivant des grilles carrées de  $M \times M$  pixels.

Nous désirons à présent mettre l'accent sur la dépendance (du point de vue temps de calcul) de notre algorithme en le nombre  $P$  de projections utilisées pour calculer la transformation de Radon atténuée et en la taille  $M \times M$  des images. Pour cela, nous

avons réalisé trois simulations avec des images de taille  $M \times M$  pour  $M = 256, 128, 64$  et en attribuant les valeurs  $P = 360, 180, 90$  et  $45$  à chaque simulation afin de mettre en évidence l'effet d'une diminution du nombre de projections utilisées et de la taille des images sur le temps de calcul demandé.

Nombres de projections $P$	360	180	90	45
Temps de calcul (secondes)	60.5	29.2	15.1	7.2

**TAB. 4.1.** *Temps de calcul en fonction de  $P$  pour  $M=256$ .*

Nombres de projections $P$	360	180	90	45
Temps de calcul (secondes)	13.3	6.4	3.3	1.6

**TAB. 4.2.** *Temps de calcul en fonction de  $P$  pour  $M=128$ .*

Nombres de projections $P$	360	180	90	45
Temps de calcul (secondes)	4.6	2.4	1.1	0.5

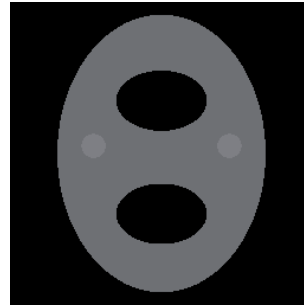
**TAB. 4.3.** *Temps de calcul en fonction de  $P$  pour  $M=64$ .*

En regardant les résultats numériques qui figurent dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3, on remarque facilement que le temps de calcul nécessaire pour simuler la transformation de Radon atténuée d'une image de taille donnée est directement proportionnel au nombre de projections  $P$ . Par contre, le temps de calcul a tendance à augmenter d'une manière considérable en fonction du paramètre  $M$  pour un nombre de projections  $P$  donné. En effet, pour  $M = 512$  et  $P = 360$  le temps de calcul est égal à 1080 secondes, et il y a eu donc une augmentation très significative par rapport au temps de calcul avec  $M = 256$ . En pratique, les images utilisées dans la reconstruction en TEMP sont de taille égale à  $128 \times 128$  ou  $256 \times 256$ , et le nombre de projections utilisées en général égal à 120 ; alors d'après les résultats numériques ci-dessus, le temps de calcul reste dans les limites raisonnables.

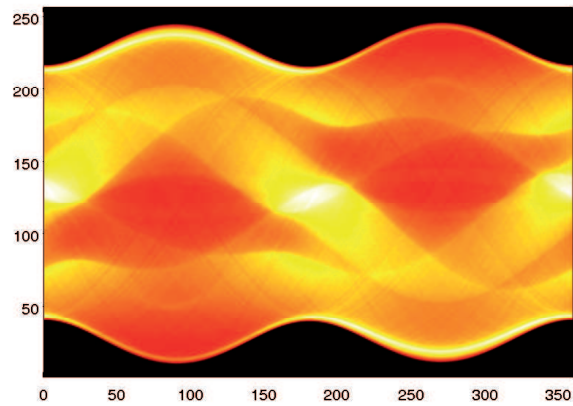
Pour tester la précision et quantifier l'erreur induite par la discrétisation numérique de la transformation de Radon atténuée, nous avons calculé la transformation de Radon de l'image représentée par le fantôme de *Shepp-logan* (figure 4.1) par le schéma d'atténuation représenté dans la figure 4.2 suivant notre méthode numérique (la taille des images étant égale à  $256 \times 256$  et le nombre de projections utilisées égal à 360) ; le sinogramme visualisant le résultat est affiché dans la figure 4.3. D'autre part, nous avons fait le même calcul avec un autre algorithme (voir figure 4.4) élaboré par G. Bal et P. Moireau [2]. Comme on le voit, les deux résultats sont visuellement adéquats, en outre l'erreur entre ces deux résultats en norme  $L^2$  a été égale à 5.2%.



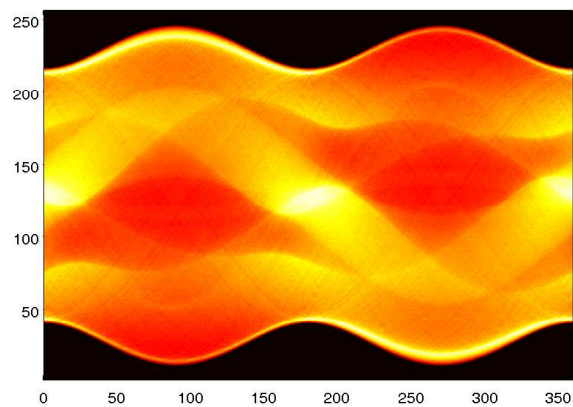
**FIG. 4.1.** *Fantôme de Shepp-logan.*



**FIG. 4.2.** *Schéma d'atténuation.*



**FIG. 4.3**



**FIG. 4.4**

## 4.4 Méthode de reconstruction algébrique

Nous avons élaboré au chapitre précédent une méthode itérative de reconstruction en TEMP avec correction exacte d'atténuation. Cette méthode est une généralisation de la méthode ART (*Algebraic Reconstruction Technique*) qui est basée sur la méthode de Kaczmarz de résolution de systèmes linéaires. Notre approche introduit un terme analytique de correction d'atténuation à chaque itération de la procédure de reconstruction. Dans cette section, nous présentons l'implémentation numérique notre méthode en explicitant la routine `InvRadonatt` qui sera utilisée ultérieurement pour l'élaboration des exemples numériques afin de tester la capacité de notre algorithme à reconstruire des images de bonne qualité dans le cas d'une atténuation quelconque.

### 4.4.1 Cadre mathématique

Rappelons brièvement le support théorique de la méthode de reconstruction proposée ; on se limitera ici au cadre de la dimension  $n = 2$  ; l'espace  $H$  sera ici l'espace

$$H = L^2_{\mathbb{C}}(\overline{D(0,1)}, dx)$$

des fonctions-source mesurables et d'énergie finie (à valeurs complexes) dans la boule unité fermée  $\overline{D(0,1)}$ , équipée de la mesure de Lebesgue  $dx dy$ .

On se donne une application continue

$$a : \overline{D(0,1)} \mapsto \mathbb{C}$$

correspondant à une répartition d'atténuation dans le milieu ambiant  $\overline{D(0,1)}$ . Pour  $\theta \in [0, 2\pi[$ , on définit l'opérateur

$$R_{a,\theta} : H \longrightarrow h := L^2([-1, 1], dt),$$

où  $R_{a,\theta}$  admet pour représentant la fonction définie presque partout dans  $[-1, 1]$  (et d'énergie finie)

$$s \longmapsto \int_{\langle(x,y),\theta\rangle=s} \exp\left(-\int_0^{+\infty} a((x,y) + t\theta^\perp) dt\right) I(x,y) d\lambda_{s,\theta}(x,y),$$

$d\lambda_{s,\theta}$  désignant la mesure de Lebesgue linéique sur la droite  $\{(x,y) ; \langle(x,y),\theta\rangle = s\}$ . L'opérateur  $R_{a,\theta}$  s'écrit comme la composée de l'opérateur continu  $L_{a,\theta}$  (de  $H$  dans lui-même) de multiplication par la fonction continue

$$A_{a,\theta} : (x,y) \longmapsto \exp\left(-\int_0^{+\infty} a((x,y) + t\theta^\perp) dt\right)$$

et de l'opérateur  $R_\theta : H \longrightarrow L^2([-1, 1], \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}})$  qui, à  $f$ , associe la fonction définie presque partout dans  $[-1, 1]$  (et d'énergie finie)

$$s \longmapsto \int_{\{(x,y), \theta\}=s} f(x, y) d\lambda_{s,\theta}(x, y).$$

L'opérateur  $R_{a,\theta} = R_\theta \circ L_{a,\theta}$  est un opérateur surjectif puisque  $R_\theta$  l'est ; l'adjoint de  $R_{a,\theta}$  est  $R_{a,\theta}^* = L_{a,\theta}^* \circ R_\theta^*$ , où  $L_{a,\theta}^*$  est l'opérateur adjoint de  $L_{a,\theta}$  défini par l'opérateur de multiplication par la fonction continue  $\overline{A_{a,\theta}}$ . Sous ces hypothèses, l'opérateur

$$R_{a,\theta} \circ R_{a,\theta}^* = R_\theta \circ L_{a,\theta} \circ L_{a,\theta}^* \circ R_\theta^*$$

est donc l'opérateur de multiplication par la fonction bornée positive et en fait strictement bornée inférieurement aussi (voir la section 3.3).

$$B_{a,\theta} : s \in [-1, 1] \longmapsto \frac{R_\theta[|A_{a,\theta}|^2]}{\sqrt{1-s^2}}$$

C'est donc un opérateur inversible continu de l'espace de Hilbert  $h$  dans lui-même. Si l'on considère différents angles  $\theta_p \in [0, 2\pi[$ ,  $p = 0, \dots, P-1$  et  $P$  éléments  $g_0, \dots, g_{P-1}$  de l'espace de Hilbert  $h$ , le calcul explicite des projections

$$f \in H \longmapsto P_{a,p}f \in H$$

sur les sous-espaces  $\{f ; R_{a,\theta_j} f = g_p\}$ ,  $p = 1, \dots, P$ , est maintenant tout à fait explicite grâce aux formules de Kaczmarz avec relaxation (voir la section 3.2) :

$$P_{a,p}^\omega f = f + \omega \overline{A_{a,\theta_p}} \times \left( \frac{g_p - R_{a,\theta_p} f}{R_{\theta_p}[|A_{a,\theta_p}|^2]} \right)_{s=\langle(x,y), \theta_p\rangle}$$

En injectant l'expression de  $P_{a,p}^\omega$  l'algorithme itératif de Kaczmarz avec relaxation, le passage de  $f^k$  à  $f^{k+1}$  avec correction d'atténuation s'écrit :

$$\begin{aligned} f_0^k &= f^k \\ f_{p+1}^k &= P_{a,p}^\omega f_p^k = f_p^k + \omega \overline{A_{a,\theta_{p+1}}} \times \left( \frac{g_{p+1} - R_{a,\theta_{p+1}}[f_p^k]}{R_{\theta_{p+1}}[|A_{a,\theta_{p+1}}|^2]} \right)_{s=\langle(x,y), \theta_{p+1}\rangle}, p = 0, \dots, P-1 \\ f^{k+1} &= f_{P-1}^k \end{aligned} \tag{4.7}$$

avec  $f^0 = f_0^0$  une solution initiale arbitraire.

#### 4.4.2 Algorithme numérique

Nous expliquons dans ce paragraphe la routine `InvRadonatt` qui a été utilisée pour implémenter numériquement, sous Matlab, l'algorithme itératif proposé par l'équation

(4.7) pour l'inversion de la transformation de Radon atténuée et ainsi la reconstruction de l'activité  $f$  à partir de ses projections atténuées. La routine `InvRadonatt` dépend de plusieurs paramètres qui peuvent influencer la vitesse de convergence et la qualité des images reconstruites ; ces paramètres sont les suivants :

1.  $\Delta\varphi$  : le pas angulaire qui détermine le nombre de projections utilisées dans la reconstruction ;
2.  $\omega$  : le paramètre de relaxation ;
3.  $\tau$  : l'ordre d'accès aux projections utilisées ;
4.  $f^0$  : la solution initiale utilisée.

```

Routine InvRadonatt(a, g,  $\Delta\varphi$ , K,  $\omega$ ,  $\tau$ ,  $f^0$ )
   $f^{k-1} = f^0$ ;
  Pour k=1 : K faire
    Pour p=1 :  $\Delta\varphi$  : 360 faire
       $G_{\tau(p)} = \text{RadonAtt}(f^{k-1}, \varphi_{\tau(p)}, a)$ ;
       $S = g(\tau(p)) - G_{\tau(p)}$ ;
       $D = \text{Divbeam}(a, \varphi_{\tau(p)})$ ;
       $D_2 = \text{Divbeam}(2 * a, \varphi_{\tau(p)})$ ;
       $R = \text{RadonAtt}(D_2, \varphi_{\tau(p)}, 0)$ ;
       $f^k = f^{k-1} + \omega * D * (S/R)$ ;
    Fin Pour
  Fin Pour
  Retourner  $f^k$ ;
Fin

```

**Algorithme 3.** Implémentation de l'algorithme itératif de reconstruction.

Étant donné le schéma d'atténuation  $a$  et les projections atténuées  $g$  de l'activité  $f$ , tous les paramètres cités ci-dessus ayant été fixés, la procédure de reconstruction selon notre méthode est décrite par les lignes de commande présentées dans l'algorithme 3. La solution est initialisée par la valeur initiale  $f^0$  et à l'itération  $k$ ,  $360/\Delta\varphi$  projections sont utilisées pour la reconstruction de la solution  $f^k$ . Le terme  $S$  est la différence entre la transformation de Radon atténuée  $G_{\tau(p)}$  de  $f^{k-1}$  suivant l'angle  $\varphi_{\tau(p)}$  et la projections atténuées  $g(\tau(p))$  de l'activité  $f$  suivant le même angle d'incidence;  $S$  ainsi calculé représente le numérateur dans l'équation (4.7). La quantité  $D$  (resp.  $D_2$ ) représente l'exponentielle de la « *divergent beam transform* » du schéma d'atténuation  $a$  (resp. du schéma d'atténuation  $2a$ ). Le dénominateur de l'équation (4.7) est obtenu en calculant la transformation de Radon de  $D_2$  suivant l'angle  $\varphi_{\tau(p)}$ . Finalement,  $f^k$  est obtenue en rajoutant le terme correctif  $\omega * D * (S/R)$  à la solution  $f^{k-1}$ . L'algorithme de reconstruction est itéré à un nombre total d'itérations  $K$  ou bien suivant un certain critère d'arrêt (convergence, minimisation d'erreur, ...).

## 4.5 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section plusieurs résultats numériques de reconstruction selon notre approche. Le but de ces exemples numériques est de mettre en évidence le rôle des paramètres intervenants dans l'algorithme de reconstruction. On verra qu'un bon choix de ces paramètres peut améliorer drastiquement la qualité des images reconstruites en terme de résolution spatiale et de qualité des contrastes, nous montrons aussi que le choix optimal des paramètres accélère la vitesse de convergence et stabilise l'erreur numérique.

En premier lieu, nous remarquons que l'initialisation de l'algorithme par une approximation de la solution cherchée à l'aide de la méthode de la retroprojection filtrée accélère la vitesse de convergence mais ne stabilise pas le comportement numérique de la méthode. Ensuite, nous étudions l'influence de l'ordre d'acquisition des données et de la condition de positivité des solutions pendant la reconstruction itérative. Le choix du paramètre de relaxation est justifié heuristiquement à l'aide d'un exemple numérique. La dernière partie de cette section est réservée à la reconstruction à partir de projections incomplètes, *i.e.* acquises sur  $[0, \pi[$  et non pas sur  $[0, 2\pi[$ .

On note que tous les tests numériques ont été réalisés avec des images discrétisées symétriquement autour de l'origine sur la grille carrée  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  de pixels et de taille  $128 \times 128$  (activité à reconstruire et schéma d'atténuation *c.f.* figure 4.5) et que le nombre de projections utilisées pour le calcul de la transformation de Radon atténuée est de 360 projections equi espacées sur  $[0, 2\pi[$  dans le cas des données complètes et de 180 projections equi espacées sur  $[0, \pi[$  dans le cas des données incomplètes (avec 128 détecteurs discrétisés symétriquement dans  $[-1, 1]$  pour chaque projection dans les deux cas).



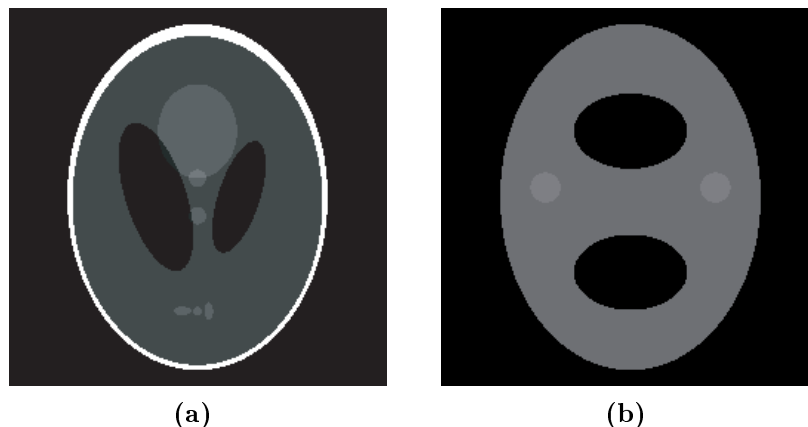


FIG. 4.5. *Fantômes : (a) image originale (Shepp-Logan) , (b) schéma d'atténuation.*

Pour la quantification de l'impact de ces divers paramètres nous avons calculé l'erreur relative  $E^k$  en pourcentage à l'itération  $k$  :

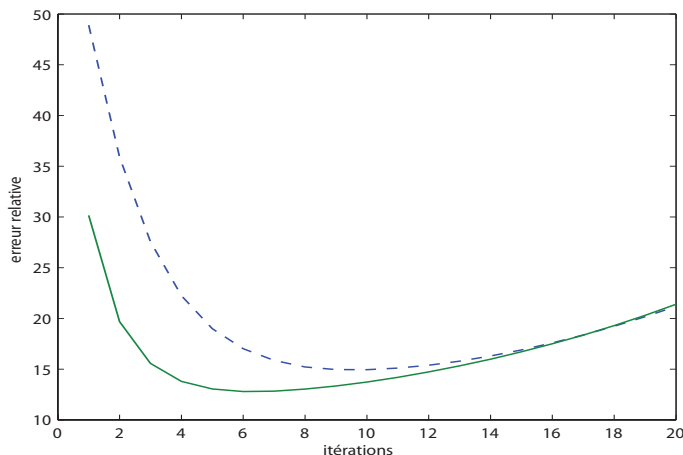
$$E^k = \frac{\|f - f^k\|}{\|f\|} * 100\%,$$

où  $f$  est l'image originale,  $f^k$  la solution trouvée après  $k$  itérations et  $\| \cdot \|$  la norme  $L^2$ . Afin de visualiser la variation de la qualité de reconstruction, on a inclut les graphes représentant la comparaison de coupes transversales correspondantes entre l'image originale et l'image reconstruite.

#### 4.5.1 Dépendance en la solution initiale

La plupart des algorithmes de reconstruction itératifs classiques (ART, MLEM, OSEM, ...) sont initialisés à la solution  $f^0 = 0$ . On propose parfois l'initialisation à une valeur constante ou bien à une bonne approximation de la solution cherchée à l'aide des méthodes analytiques classiques (théorème de la coupe centrale ou la méthode de rétroprojection filtrée) ; ceci peut avoir un impact sur la vitesse de convergence de l'algorithme itératif.

Dans cette partie nous proposons d'étudier la dépendance de notre algorithme en la solution initiale. Pour cela, on a réalisé deux tests numériques : le premier est réalisé avec comme solution initiale la fonction nulle et le deuxième avec comme solution initiale la solution calculée par la méthode de rétroprojection filtrée ( $f^0 = f_{\text{FBP}}$ ). Ces deux tests ont été réalisés en utilisant un ordre cyclique d'acquisition des données et sans contraintes physiques supplémentaires. Ensuite, nous avons tracé l'erreur relative en fonction du nombre d'itérations utilisé pour la reconstruction dans les deux exemples.



**FIG. 4.6.** Erreurs relatives  $E^k$  ( $k = 1, \dots, 20$ ) : avec solution initiale nulle (ligne brisée), avec solution initiale calculée par FBP (ligne pleine).

La figure 4.6 montre que l'initialisation par une solution calculée avec la méthode de retroprojection filtrée accélère légèrement la vitesse de convergence de notre algorithme ( $E^{10} = 14.9\%$  avec  $f^0 = 0$  et  $E^6 = 12.7\%$  avec  $f^0 = f_{\text{FBP}}$ ) mais ne réussit pas à stabiliser son comportement numérique lorsque le nombre d'itérations augmente; en revanche on remarque que l'erreur relative induite par la reconstruction avec une solution initiale  $f^0 = f_{\text{FBP}}$  commence à dépasser légèrement celle induite par une reconstruction avec une solution initiale nulle. Pour cette raison et puisque l'amélioration apportée par le choix  $f^0 = f_{\text{FBP}}$  comme solution initiale n'est pas trop significative, on adoptera dans la suite des exemples numériques une initialisation avec  $f^0 \equiv 0$ .

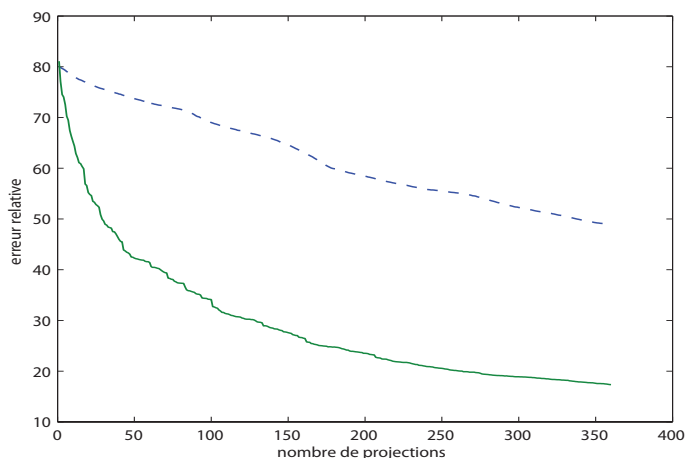
#### 4.5.2 Influence de l'ordre d'acquisition

Rappelons que notre algorithme de reconstruction est basé sur la méthode de Kaczmarz de résolution des systèmes linéaires; En effet, la recherche de la solution  $f$  consiste à projeter la solution initiale à chaque itération sur les sous-espaces définis par  $\{f; R_{a,\theta_j} f = g_p\}$  pour  $p = 0, \dots, P - 1$ , ce qui correspond en pratique à la recherche de l'intersection de ses sous-espaces ou bien à l'approximation de cette intersection.

À cet égard, il est connu depuis un certain temps que la qualité de l'approximation et le taux de convergence de la procédure itérative de reconstruction dépendent, entre autres facteurs, de l'ordre dans lequel les projections sont sélectionnées pour calculer le terme correctif. Un certain nombre de chercheurs ([17], [13]) ont fait observer qu'il était souhaitable d'ordonner les projections de telle sorte qu'elles soient faiblement

correlées. Cela signifie que les projections appliquées consécutivement doivent correspondre à de sensiblement différentes orientations angulaires. Il est en effet intuitif de remarquer que si les projections sélectionnées sont choisies à orientations similaires ou proches, on a trop tendance à biaiser la reconstruction suivant cet angle de vue ; il est clair de plus, que cela ralentit la convergence compte-tenu la redondance au niveau des informations collectées alors dans le processus itératif. Plusieurs méthodes ont été proposées pour trouver un mode d'accès aux projections durant la reconstruction afin d'optimiser le temps de calcul et d'améliorer les images reconstruites. Parmi ces méthodes, on peut citer celle basée sur la décomposition en facteurs premiers (Ros et *al.* [40]), le schéma des distances pondérées (Mueller et *al.* [32]) ou la méthode d'accès aléatoire (Van Dijk [50]). Ces techniques sont capables d'accélérer les méthodes algébriques et donnent des résultats nettement meilleurs que celles fournies par l'ordre d'accès naturel, *i.e.* l'ordre cyclique, dans lequel les données expérimentales sont généralement acquises.

Dans cette partie, on teste l'influence du processus de sélection des projections sur notre algorithme. Pour cela, nous avons comparé la reconstruction du fantôme de *Shepp-logan* avec l'ordre cyclique avec le résultat obtenu avec un processus de sélection aléatoire suivant la loi « uniforme ». La figure 4.7 visualise l'erreur relative  $E^{1,p}$  en fonction du nombre de projections utilisées  $p$  ( $p = 0, \dots, 359$ ) pour la reconstruction à la première itération. Il est clair que le mode aléatoire de sélection de projections accélère significativement le taux de convergence de notre algorithme.



**FIG. 4.7.** Erreurs relatives  $E^{1,p}$  ( $p = 0, \dots, 359$ ) : processus cyclique (ligne brisée), processus aléatoire (ligne pleine).

Pour avoir une idée du comportement global de notre méthode vis-à-vis de l'ordre suivant lequel on choisit les projections, on a tracé sur la figure 4.8 l'erreur relative  $E^k$

induite par les deux schémas d'accès aux projections (cyclique et aléatoire) en fonction du nombre d'itérations  $k$  ( $k = 1, \dots, 20$ ). Le comparatif des résultats montre bien que l'ordre aléatoire stabilise le comportement numérique global de la méthode et conduit à une erreur relative plus faible.

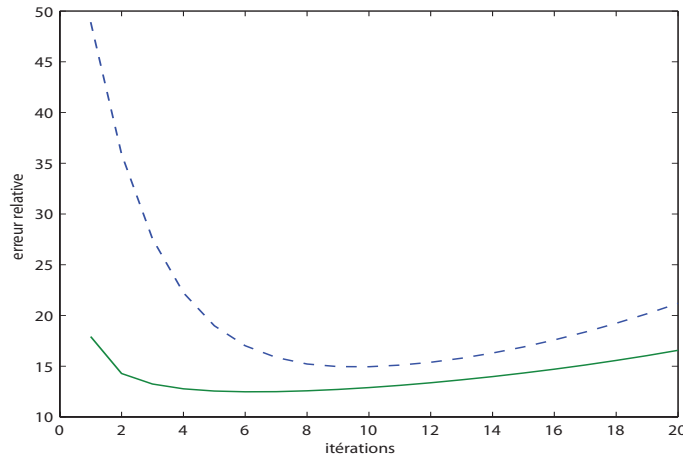
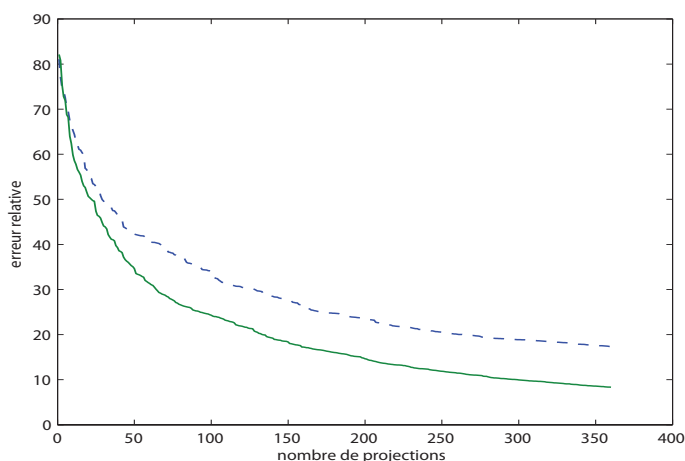


FIG. 4.8. Erreurs relatives  $E^k$  ( $k = 1, \dots, 20$ ) : processus cyclique (ligne brisée), processus aléatoire (ligne pleine).

### 4.5.3 Contraintes physiques

L'une des approches la plus simples visant à stabiliser la solution consiste à utiliser les contraintes de la solution des algorithmes de reconstruction itérative. En effet, pendant la reconstruction de l'activité du corps humain, une contrainte positive peut s'imposer ainsi probablement qu'une limite supérieure de cette activité. Par conséquent la solution peut être tronquée par 0 hors de l'intervalle compris entre ses bornes inférieures et supérieures prédites. Cette approche peut paraître un peu brutale, mais elle est souvent utilisée dans la pratique. Il est clair que l'exploitation de ces contraintes peut améliorer la stabilité des algorithmes de reconstruction itérative, il est difficile malheureusement d'en analyser les implications du point de vue théorique. Comme les algorithmes itératifs basés sur la méthode de Kaczmarz (ART classique, notre algorithme, ...) ne garantissent pas des solutions positives et puisque les images à reconstruire figurent des activités du corps humain, nous avons corrigé notre algorithme et réalisé une simulation numérique de reconstruction avec une condition de positivité (*i.e.* après un certain nombre d'itérations  $k_0$ , les valeurs négatives de  $f^{k_0}$  sont remplacées par la valeur nulle). Ensuite, afin de quantifier le gain de stabilisation apporté par l'exploitation de ces contraintes physiques sur le comportement numérique

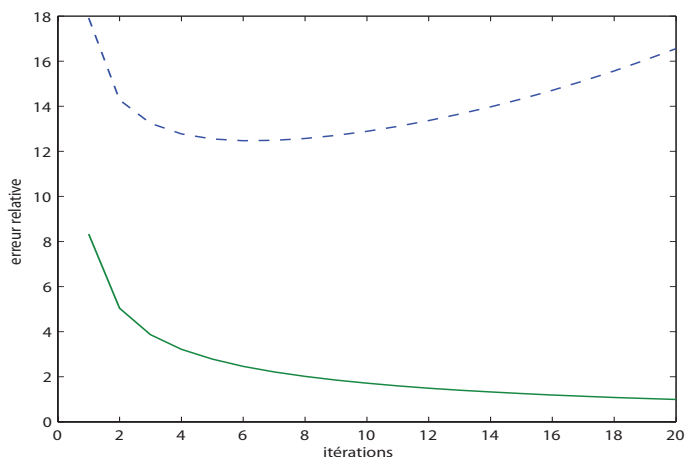
de notre méthode, nous avons comparé les résultats de reconstruction tenant compte des contraintes avec celles de reconstruction ne les prenant pas en ligne de compte. La courbe de la figure 4.9 représente l'évolution de l'erreur relative  $E^{1,p}$  à la première itération de reconstruction en fonction du nombre de projections  $p = 0, \dots, 359$ , le mécanisme de sélection de projections étant aléatoire. On voit bien qu'exploiter la contrainte de positivité accélère le taux de convergence de l'algorithme. Il est de même possible d'imposer une condition de limite supérieure égale à 1 puisque les images reconstruites sont visualisées avec un niveau de gris, cela que peut améliorer davantage la stabilité et la qualité de la reconstruction.



**FIG. 4.9.** Erreurs relatives  $E^{1,p}$  ( $p = 0, \dots, 359$ ) : sans contraintes (ligne brisée), avec contraintes (ligne pleine).

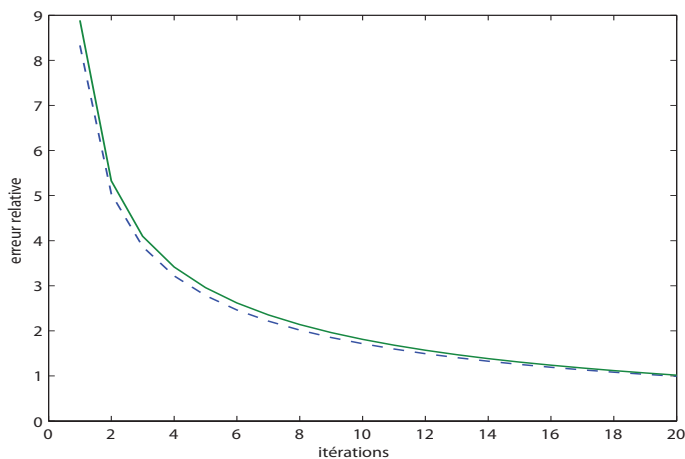
Tandis que la figure 4.10 contient la courbe représentative de l'erreur relative  $E^k$  en fonction du nombre d'itérations  $k = 1, \dots, 20$ , on voit que cette courbe nous permet de mettre en évidence l'effet stabilisateur de la contrainte de positivité ; l'erreur relative converge vers une valeur voisine de 1%.

Les algorithmes algébriques souffrent d'instabilité lorsque le nombre d'itérations augmente, du fait surtout que le problème d'inversion par projections itérées soit mal posé à cause de la grande taille du système linéaire et du bruit affectant les données. Mais il est devenu clair que notre algorithme utilisé avec un mécanisme aléatoire de sélection de projections et en exploitant une contrainte de positivité converge rapidement vers la solution cherchée et se stabilise lorsque le nombre d'itérations augmente. Par suite, notre approche une fois implementée en choisissant les bons paramètres permet de reconstruire des images exactes et de très bonne qualité (voir Annexe A), ce malgré la présence d'une carte d'atténuation quelconque et de géométrie irrégulière (*c.f.* figure 4.5(b)).



**FIG. 4.10.** Erreurs relatives  $E^k$  ( $k = 1, \dots, 20$ ) : sans contrainte (ligne brisée), avec contrainte (ligne pleine).

**Remarque:** la dépendance en la solution initiale a été évoquée précédemment et on a vu que l'initialisation de notre algorithme (sans tenir compte des contraintes et avec processus cyclique de prise de projections) par une solution cherchée à l'aide de la méthode de rétroprojection filtrée au lieu d'une solution initiale nulle peut améliorer légèrement les résultats (*c.f.* figure 4.6) surtout pour un petit nombre d'itérations. Par contre, le fait d'utiliser une solution initiale obtenue *via* la méthode de rétroprojection filtrée ne change pas le comportement instable de l'algorithme et donne des résultats similaires à ceux fournis avec  $f^0 \equiv 0$  lorsque le nombre d'itérations augmente.



**FIG. 4.11.** Erreurs relatives  $E^k$  ( $k = 1, \dots, 20$ ) avec contraintes et sélection aléatoire des projections : solution initiale nulle (ligne pleine), solution initiale calculée par FBP (ligne brisée).

La figure 4.11 compare les erreurs relatives de reconstruction  $E^k$  ( $k = 1, \dots, 20$ ) à partir de la solution initiale nulle avec celles d'une solution initiale  $f^0 = f_{\text{FBP}}$ , mais réalisées cette fois-ci avec une contrainte de positivité et un ordre d'accès aléatoire. Les résultats montrent que le comportement numérique de notre algorithme du point de vue stabilité et vitesse de convergence est exactement le même dans les deux cas ( $f^0 = 0$  ou  $f^0 = f_{\text{FBP}}$ ). Cette observation implique que notre algorithme, une fois réalisé en tenant compte de la contrainte de positivité et en prenant un mode aléatoire de sélection des projections, est indépendant du choix de la solution initiale.

#### 4.5.4 Choix du paramètre de relaxation

Un autre paramètre pouvant affecter les résultats de reconstruction des algorithmes algébriques est le paramètre de relaxation  $\omega$  (*c.f.* (4.7)). Il a été montré que le bon choix du paramètre de relaxation au cours de la reconstruction peut améliorer sensiblement la convergence de l'algorithme ART et la qualité des images reconstruites (voir [17] et [40]). Pour l'instant, nous avons utilisé un paramètre de relaxation constant  $\omega = 1$  dans la réalisation des essais numériques ; ce choix été motivé par un résultat théorique (voir [33] page 132) sur la convergence de la méthode de Kaczmarz, qui consiste à prendre  $0 < \omega < 2$  et  $f^0 = 0$ . Ce choix du paramètre de relaxation constant combiné avec la contrainte de positivité a donné des très bons résultats en terme de stabilité et de qualité d'image reconstruites (erreur relative faible) dans le cas de reconstruction avec notre algorithme.

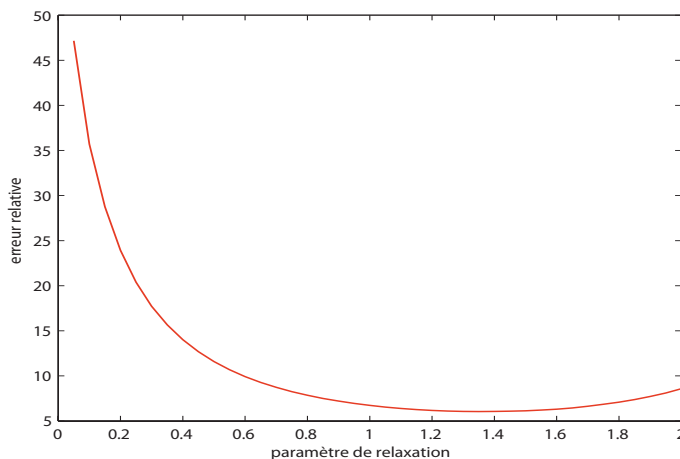


FIG. 4.12. Erreurs relatives  $E^1$  en fonction du paramètre de relaxation  $\omega$  avec  $0.05 \leq \omega < 2$ .

Il existe une autre façon de réduire les effets oscillatoires et de diminuer l'instabilité des algorithmes algébriques : il faut prendre pour cela une suite décroissante de paramètres de relaxations au fur et à mesure des itérations ; il en résulte une amélioration de la qualité de la reconstruction, mais au détriment de la vitesse de convergence. Par suite, notre choix d'un paramètre constant semble bien adapté à la nature du problème de reconstruction et évite le ralentissement de la convergence. Afin d'optimiser le choix du paramètre de relaxation constant, nous avons réalisé une suite de tests de reconstruction correspondant aux valeurs de  $\omega$  telles que  $0.05 \leq \omega \leq 2$  et on a tracé la courbe de l'erreur relative à la première itération (figure 4.12). La valeur de  $\omega = 1.35$  fournit une erreur relative minimale  $E^1 = 6.04\%$  à la première itération, tandis que la valeur  $\omega = 1$  donne une erreur relative  $E^1 = 6.8\%$ .

#### 4.5.5 Reconstruction avec des données incomplètes

Dans cette partie, nous nous intéressons à la reconstruction de l'activité  $f$  à partir des projections atténuées  $g_a(s, \theta)$  acquises sur  $[0, \pi[$  au lieu de  $[0, 2\pi[$ . En absence d'atténuation, *i.e.* quand  $a(x, y) = 0$ , il est bien connu qu'un secteur angulaire de 180 degrés est suffisant pour déterminer  $f$  de façon unique et stable, puisque dans ce cas on est censé inverser la transformation de Radon (non atténuée) et que l'on a  $g_0(s, \theta) = g_0(-s, \pi + \theta)$ . Quand  $a(x, y) \neq 0$ , les projections doivent être acquises sur  $[0, 2\pi[$  afin de reconstruire l'activité  $f$ . Par ailleurs, quand l'atténuation est constante (cas de la transformation de Radon exponentielle), Metz et Pan [31] ont montré que les projections acquises sur  $[0, 2\pi[$  contiennent des informations redondantes. Noo et Wagner [36] ont démontré analytiquement que ces informations redondantes peuvent être utilisées pour réduire l'acquisition des données à un secteur angulaire d'ouverture 180 degrés ; cette réduction angulaire est appréciable en pratique puisqu'elle réduit le temps de l'examen médical et par suite minimise les artefacts dus au mouvement du patient. De plus, en réduisant l'ouverture du secteur angulaire d'acquisition de 360 degrés à 180 degrés, le temps de l'acquisition (ou assimilation) des informations est divisé par deux et par suite le temps de calcul de reconstruction l'est aussi.

À notre connaissance, il n'existe aucun résultat mathématique sur l'inversion de la transformation de Radon atténuée ( $a(x, y)$  non uniforme) à partir d'un tel ensemble incomplet de données. Dans la pratique, on a observé que les méthodes de reconstruction itérative, comme par exemple l'algorithme de ML-EM (Maximum Likelihood Estimation Maximization) peuvent déboucher sur des résultats de reconstruction assez précis à partir des projections acquises seulement sur  $[0, \pi[$ . Mais malheureusement, à ce jour, aucun théorème de convergence n'est venu étayer cette observation.

Afin de tester la capacité de notre algorithme à reconstruire des images précises et de bonne qualité face à de telles données incomplètes, nous avons réalisé un test de reconstruction avec des projections acquises sur  $[0, \pi[$  et nous avons comparé les résultats avec celles de la reconstruction utilisant des données complètes.



Les deux tests de reconstruction ont été réalisés en utilisant une solution initiale nulle, un processus aléatoire de sélection des projections et un paramètre de relaxation constant  $\omega = 1.35$ . La figure 4.13 montre les courbes d'erreur relative des deux tests de reconstruction en fonction du nombre d'itérations; elle montre bien que notre algorithme possède un comportement stable dans le cas de reconstruction avec des données incomplètes et que la fonction d'erreur relative correspondante converge vers la valeur 1.6% (1% pour les données complètes).

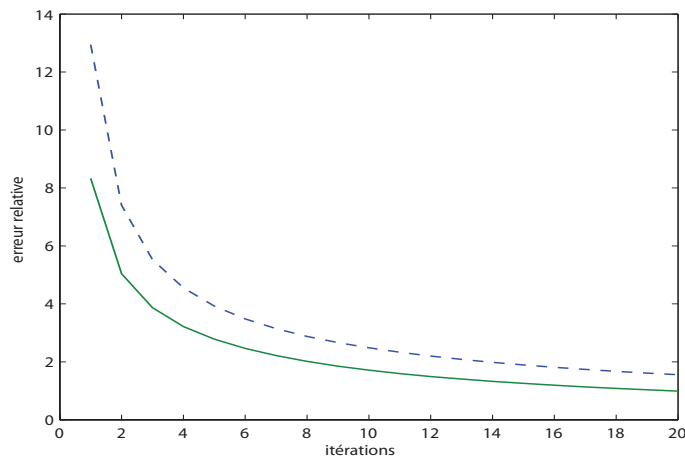


FIG. 4.13. Erreurs relatives  $E^k$  ( $k = 1, \dots, 20$ ) : données incomplètes (ligne brisée), données complètes (ligne pleine).

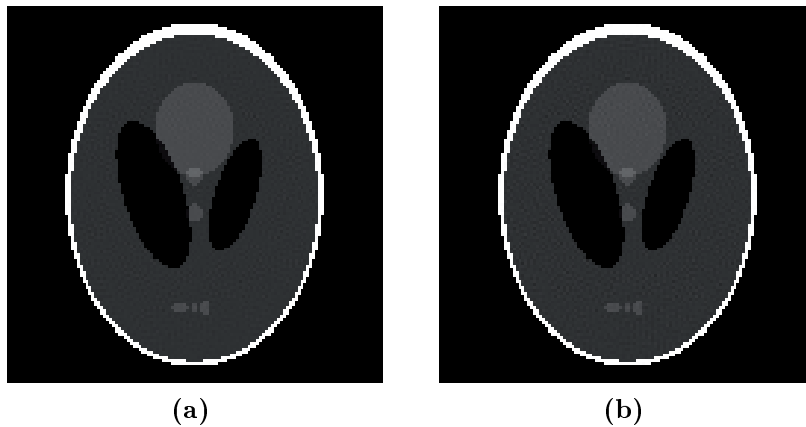
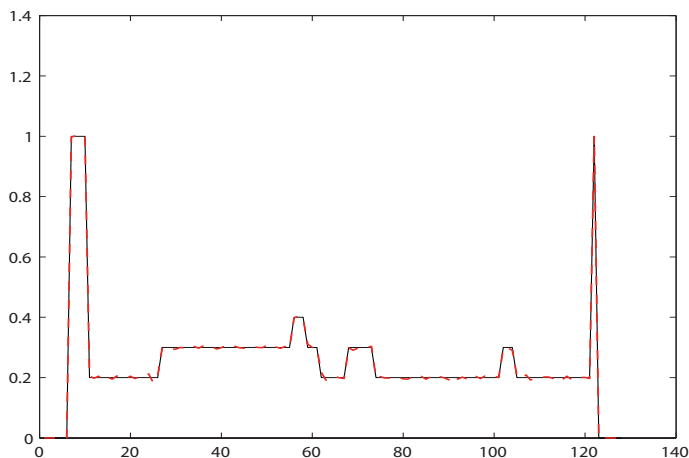


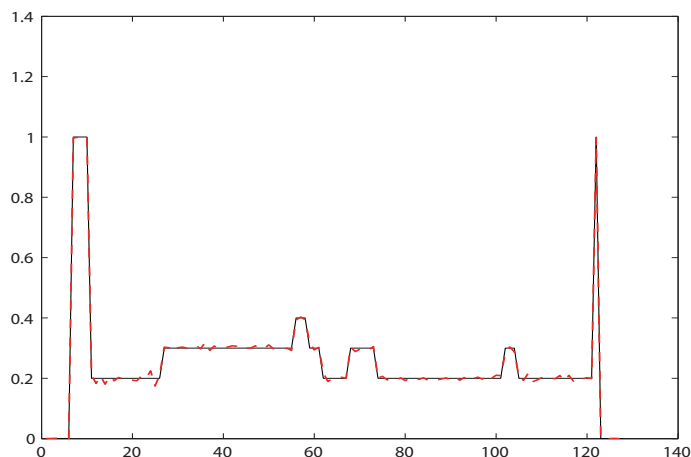
FIG. 4.14. Images reconstruites (10 itérations) : (a) données complètes, (b) données incomplètes.

La figure 4.14a (*resp.* la figure 4.14b) montre l'image reconstruite après 10 itérations à partir des données complètes (*resp.* incomplètes). Les deux images possèdent la même qualité de contraste et contiennent tous les détails de l'image originale (*c.f.* figure 4.1).

Pour mieux visualiser l'écart entre les images reconstruites et l'image originale, nous avons pris la coupe de l'image originale correspondant à la ligne verticale  $y = 0$  et on l'a comparé à la coupe correspondante des images reconstruites. Dans la figure 4.15, on voit la ligne pleine qui correspond à la coupe de l'image originale comparée à celle de l'image reconstruite après 10 itérations avec des données complètes (ligne brisée), tandis que la figure 4.16 montre la coupe de l'image originale (ligne pleine) comparée à celle de l'image reconstruite après 10 itérations avec des données incomplètes (ligne brisée). L'étude comparative des coupes montre que la reconstruction avec des données incomplètes (sur  $[0, \pi[$ ) fournit des images très proches de celles produites par une reconstruction avec des données complètes (sur  $[0, 2\pi[$ ).



**FIG. 4.15.** *Comparaison des coupes : image originale (ligne pleine), image reconstruite avec des données complètes (ligne brisée)*



**FIG. 4.16.** *Comparaison des coupes : image originale (ligne pleine), image reconstruite avec des données incomplètes (ligne brisée).*

## 4.6 Conclusions

Nous avons abordé dans ce chapitre l'aspect numérique des algorithmes utilisés pour le modèle direct et l'algorithme itératif de correction d'atténuation élaboré au chapitre 3. Nous avons mis en évidence l'impact de plusieurs paramètres sur la performance et la stabilité numérique de notre algorithme de reconstruction. Les simulations numériques ont montré que notre algorithme est indépendant de la fonction  $f^0$  à partir de laquelle on l'initie et que le choix d'un paramètre de relaxation constant au cours de la procédure de reconstruction donne des résultats satisfaisants une fois que l'on se plie à un processus aléatoire de sélection des projections et que l'on tient compte d'une contrainte de positivité pour les solutions (voir Annexe A). L'analyse des courbes d'erreur relative et la comparaison des coupes des images originales et reconstruites affirment que notre algorithme est capable de reproduire des images exactes et de bonne qualité, y compris dans le cas de reconstruction avec des données incomplètes.



# Chapitre 5

## Conclusions et perspectives

Nous avons tenté, dans ce travail, de mettre en oeuvre une méthode de reconstruction itérative basée sur des outils hilbertiens avec correction d'atténuation en TEMP, quand le schéma d'atténuation est connu et non-uniforme. Les étapes essentielles suivantes peuvent alors être dégagées :

1. Le modèle.

Le problème de reconstruction en TEMP avec correction d'atténuation peut être traité efficacement d'un point de vue algébrique ; l'idée-clé repose sur la modélisation adéquate du modèle direct, *i.e.* l'acquisition des projections parallèles atténuées de l'activité  $f$  à retrouver, ce en traduisant le problème de la reconstruction tomographique en TEMP en un système linéaire intégrant la contribution de l'atténuation dans l'expression des projections de l'activité à reconstruire.

2. La résolution.

Une fois le modèle algébrique posé, nous cherchons à le résoudre par une méthode itérative en nous servant de l'algorithme de projections itérées de Kaczmarz. Ce processus de recherche de solution semble adapté à la nature de problème mal posé du problème tomographique et bénéficie d'un support théorique à la fois riche et maléable.

3. La validation.

Au cours du troisième chapitre de la thèse, nous avons testé notre algorithme de reconstruction contre divers fantômes informatiques. L'utilisation des projections parallèles atténuées des activités représentées par ces fantômes nous a permis d'expérimenter notre algorithme de reconstruction et de montrer son aptitude à réaliser des reconstructions de qualité avec correction d'atténuation en présence d'un faible nombre de projections utilisées (80 projections) et d'une

atténuation réaliste, ouvrant ainsi la voie aux applications cliniques. La comparaison de ces résultats avec ceux réalisés *via* l'algorithme ART classique a montré l'amélioration que notre approche apporte à la qualité des images reconstruites.

#### 4. Analyse des paramètres.

Plusieurs paramètres sur lesquels l'expérimentateur peut jouer (tels le coefficient de relaxation, la solution initiale, mais aussi l'ordre d'acquisition des projections et les contraintes physiques) sont importants pour l'obtention d'une bonne résolution spatiale des images reconstruites et d'un comportement numérique stable de l'algorithme. Les études numériques menées au chapitre 4 permettent de préciser la configuration de ces paramètres qui fournit les meilleurs résultats de reconstruction et accélère la vitesse de convergence tout en stabilisant l'évolution de l'erreur relative lorsque l'on augmente le nombre d'itérations. De même, nous avons remarqué que notre méthode est capable de reproduire des images de très bonne qualité dans le cas de reconstruction avec des données acquises seulement sur le demi-cercle.

## Perspectives

Plusieurs pistes intéressantes semblent se dégager à la suite de ce travail. Du point de vue expérimental d'abord, un certain nombre de phénomènes comme la diffusion et la variation de la fonction de réponse du détecteur devraient être intégrées dans la modélisation pour améliorer les résultats de reconstruction. Une telle étude, si elle n'a pas encore été menée ailleurs, serait sans doute utile pour l'ensemble des équipes travaillant sur l'imagerie TEMP. Notre méthode a pu résister aux données modérément bruitées ; mais la reconstruction en présence de bruit poissonien (non prise en compte jusque-là) mériterait d'être étudiée afin de pouvoir tester notre algorithme face aux données issues des examens médicaux réels. Une étude plus poussée permettrait peut-être d'arriver à une démonstration théorique de convergence de notre algorithme. Une mise en correspondance avec les travaux de Natterer [33] et Herman [17] concernant les algorithmes de reconstruction algébrique serait également fort pertinente puisque nos deux approches semblent corrélées.

L'un des problèmes traités en reconstruction tomographique est celui de la détermination simultanée de l'activité  $f$  et de la carte d'atténuation  $a$  sans prise de projection supplémentaires, *i.e.* sans devoir passer par la tomographie par transmission pour la détermination préalable du schéma d'atténuation, réduisant ainsi l'irradiation du patient. Ce problème complique le processus de reconstruction en TEMP, puisque l'on suppose l'atténuation inconnue. Il existe des méthodes itératives et algébriques pour résoudre ce genre de problème en supposant l'atténuation inconnue mais s'exprimant

de manière « creuse » en fonction d'un nombre fini de paramètres ; l'objectif sera donc d'utiliser les données fournies par le scanner pour calculer ces paramètres, pour chercher ensuite la carte d'atténuation et reconstruire l'activité  $f$  en se basant sur l'approximation de  $a$ . Natterer [35] propose une méthode analytique pour la résolution du problème de détermination simultanée de  $a$  et de  $f$ , en supposant que l'atténuation  $a$  est une distortion affine d'une certaine distribution d'atténuation  $a_0$  (qu'il suppose connue), *i.e.*  $a(x) = a_0(Ax + b)$  avec  $A \in \mathcal{M}^{2 \times 2}$  et  $b \in \mathbb{R}^2$  réduisant ainsi le problème de détermination de  $a$  à la détermination des deux inconnues  $A$  et  $b$  ; ensuite il calcule ces paramètres à l'aide d'une relation de consistance analytique entre les projections atténuées de  $f$  et les projections par transmission de  $a$  (voir [33] page 49).

D'autre part, Panin *et al.* [49] donnent une approche itérative pour la reconstruction simultanée de  $a$  et de  $f$ . En premier temps, ils supposent que l'atténuation  $a$  s'écrit comme une combinaison linéaire dans un espace vectoriel d'images de dimension finie. L'expression de  $a$  est ensuite utilisée pour la linéarisation du facteur atténuant exponentiel de la transformation de Radon atténuée, ce qui conduit à un système d'équations linéaires en les coefficients de l'expression de  $a$  ; on résout, dans un premier temps ce système linéaire et la carte d'atténuation ainsi obtenue servira dans la suite à la reconstruction de l'activité  $f$  avec un algorithme d'inversion de la transformation de Radon atténuée (MLEM, Gradient conjugué, ...), une fois prise en compte la carte d'atténuation approchée obtenue à la première étape.

Nous pensons que notre algorithme ouvre une opportunité à exploiter des pistes pour la résolution du problème de la reconstruction simultanée de  $a$  et de  $f$  tout en supposant que l'atténuation est inconnue mais d'une certaine forme parcimonieuse, *i.e.* dépendant d'un petit nombre de paramètres. L'une des perspectives consiste à coupler, à chaque itération de notre algorithme, une étape de « *Matching pursuit* » visant à exprimer le schéma de l'atténuation en fonction d'éléments (les paramètres en question) et d'un dictionnaire de motifs bien adapté à la nature de reconstruction en TEMP. Le schéma de l'atténuation ainsi prédit servira à la détermination de l'activité  $f$  à l'itération suivante du processus de reconstruction de notre méthode.

Une autre approche consiste à profiter d'une étude spectrale préalable des données fournies par le scanner afin de déterminer les zones angulaires où l'atténuation perturbe le plus les projections de l'activité  $f$  ; ensuite, les projections correspondants aux zones angulaires complémentaires sont seulement utilisées pour la reconstruction de l'activité  $f$  en supposant l'atténuation nulle ; ceci vaut dès que la carte d'atténuation s'exprime naturellement dans une bases de fonctions harmoniques, *i.e.* son spectre se présente comme une combinaison de Diracs





# Annexe A

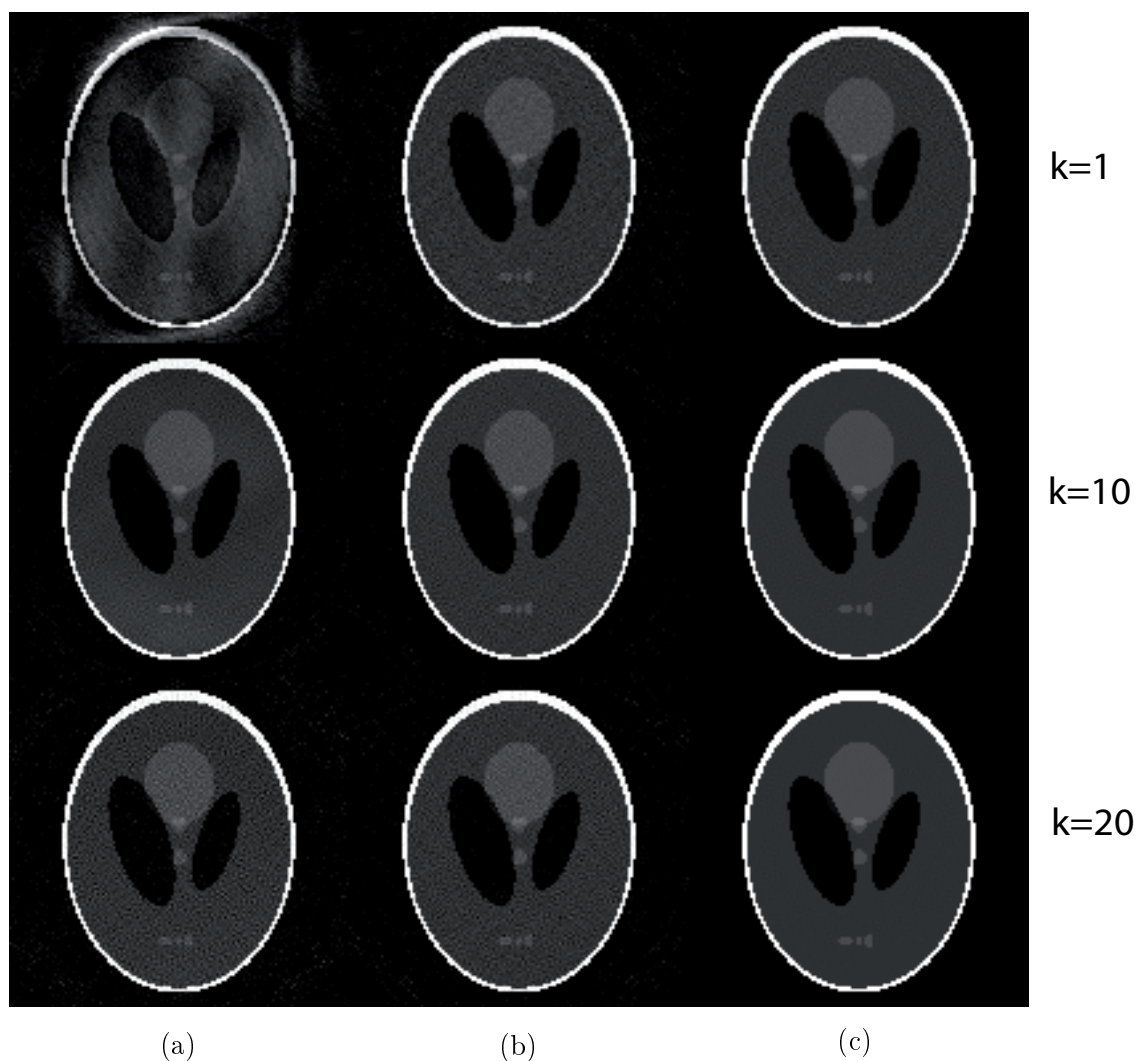
## Résultats de reconstruction

Les résultats exposés dans cet annexe sont les résultats de reconstruction du fantôme de *Shepp logan* à partir de ses projections parallèles atténuées acquises sur  $[0, 2\pi[$ ; le nombre de projections étant égal à 360, le nombre de détecteurs égal à 128, les images de taille  $128 \times 128$  et le paramètre de relaxation constant supposé égal à 1. Nous avons inclus deux cas de reconstruction : le premier réalisé avec la solution initiale nulle et le deuxième avec la solution initiale  $f_{FBP}$  calculée par la méthode de rétroprojection filtrée.

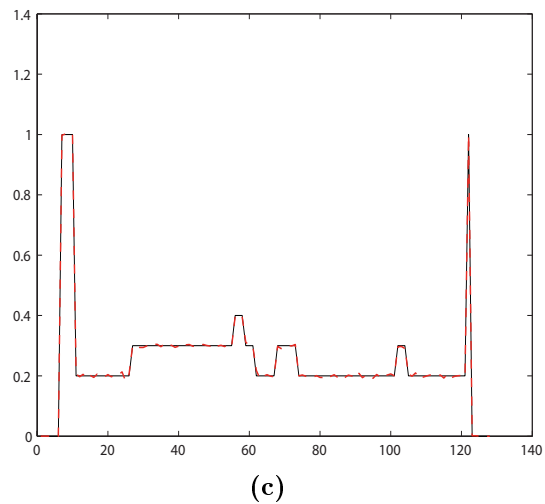
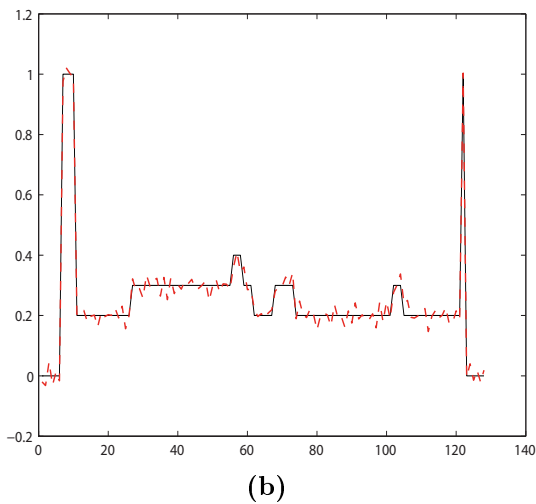
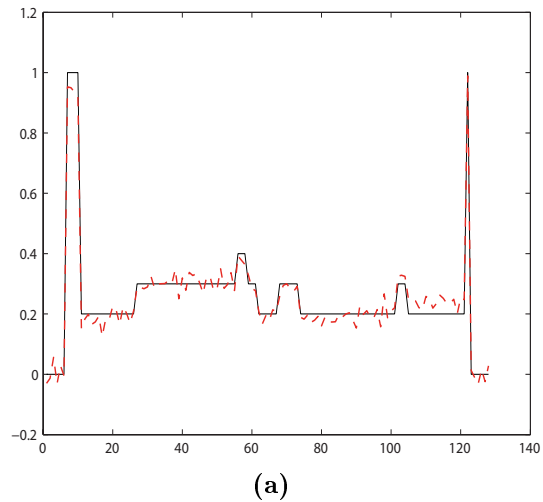
Nous avons inclus, pour la reconstruction dans les deux cas, les images reconstruites par notre algorithme suivant le choix des paramètres citées dans le chapitre 3 ; notamment, l'ordre de projection et la contrainte de positivité des solutions. De même, on a visualisé la comparaison entre de la coupe de l'image originale correspondant à la ligne verticale  $y = 0$  à la coupe correspondante des images reconstruites.

## A.1 Solution initiale nulle

La figure A.1 présente les images reconstruites avec comme solution initiale nulle. Les images de la première colonne sont reconstruites *via* un processus cyclique et sans contrainte, celles de la deuxième *via* un processus aléatoire et sans contrainte, celles de la troisième *via* un processus aléatoire intégrant une contrainte de positivité. Les lignes de la figure A.1 correspondent aux images reconstruites avec pour nombre d'itérations  $K = 1, 10$  et  $20$ . La figure A.2 présente la comparaison entre les coupes de l'image originale et les coupes des images reconstruites suivant les trois configurations de paramètres avec 10 itérations.



**FIG. A.1.** Reconstruction avec  $f^0 \equiv 0$  : (a) processus cyclique sans contrainte, (b) processus aléatoire sans contrainte, (c) processus aléatoire avec contrainte intégrée.

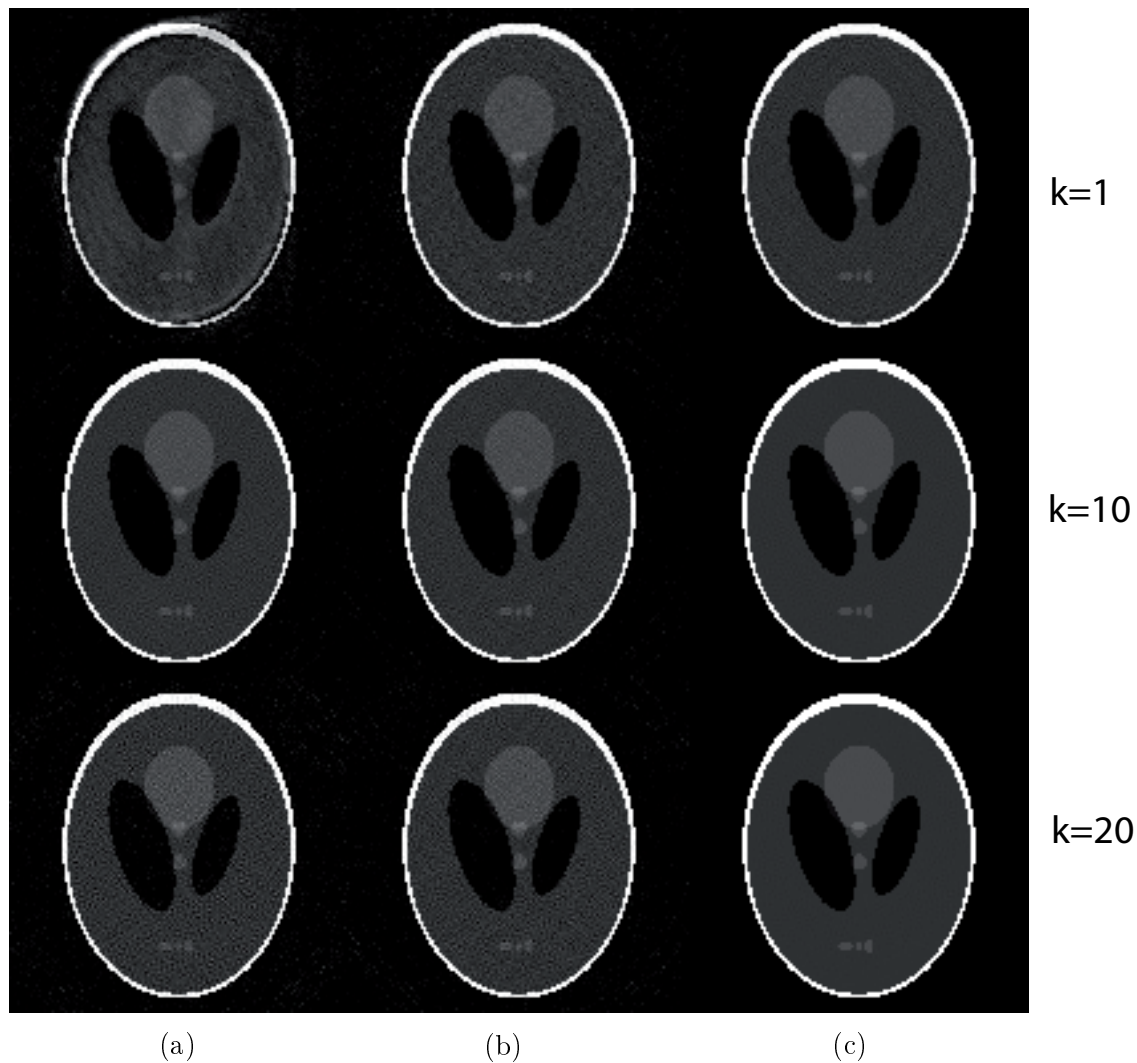


**FIG. A.2.** Comparaisons des coupes ( $f^0 \equiv f_{FBP}$  et  $K = 10$ ) : (a) processus cyclique sans contrainte, (b) processus aléatoire sans contrainte, (c) processus aléatoire avec contrainte intégrée.

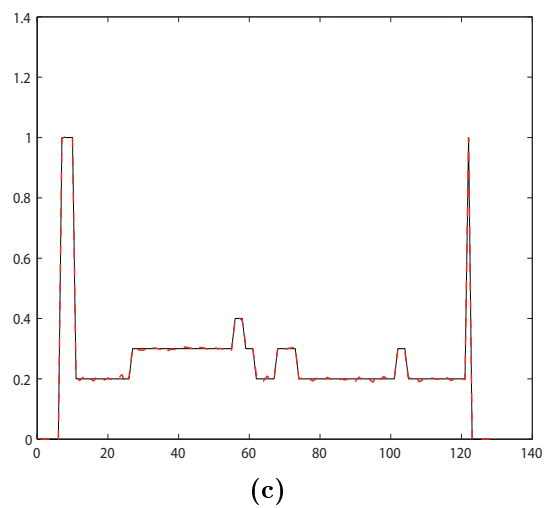
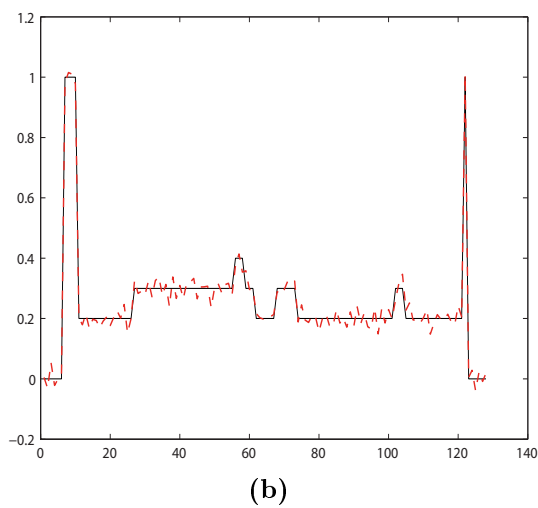
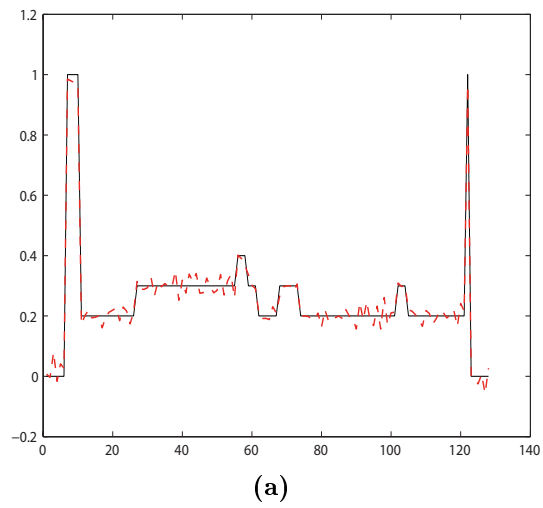
## A.2 Solution initiale analytique

La figure A.3 présente les images reconstruites avec comme solution initiale la fonction  $f_{FBP}$ . Les images de la première colonne sont reconstruites *via* un processus

cyclique et sans contrainte, celles de la deuxième *via* un processus aléatoire et sans contrainte et celles de la troisième *via* un processus aléatoire intégrant une contrainte de positivité. Les lignes de la figure A.3 correspondent aux images reconstruites avec pour nombre d'itérations  $K = 1, 10$  et  $20$ . La figure A.4 présente la comparaison entre les coupes de l'image originale et les coupes des images reconstruites suivant les trois configurations de paramètres avec 10 itérations.



**FIG. A.3.** Reconstruction avec  $f^0 \equiv f_{FBP}$  : (a) processus cyclique sans contrainte, (b) processus aléatoire sans contrainte, (c) processus aléatoire avec contrainte intégrée.



**FIG. A.4.** Comparaisons des coupes ( $f^0 \equiv f_{FBP}$  et  $K = 10$ ) : (a) processus cyclique sans contrainte, (b) processus aléatoire sans contrainte, (c) processus aléatoire avec contrainte intégrée.



# Bibliographie

- [1] G. BAL : *On the attenuated Radon transform with full and partial measurements*. Inverse Problems, 20 (2004), pp. 399–418.
- [2] G. BAL, P. MOIREAU : *Fast numerical inversion of the attenuated Radon transform with full and partial measurements*. Inverse Problems, 20 (2004), pp. 1137–1164.
- [3] W. BACKFRIEDER, S. BEKNER, G. ENGELBRECHT : *Web-based parallel ML-EM reconstruction for SPECT and SMP clusters*. Proceedings of the international conference on mathematics and engineering techniques in medicine and biological sciences, Las Vegas, Nevada, USA, (2001), pp. 25–28, CESERA Press.
- [4] Y. CENSOR : *Finite series-expansion reconstruction methods*. Proc. IEEE, 71 (1983) , pp. 409–419.
- [5] L.T. CHANG : *A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography*. IEEE Trans. Nucl. Sci., 25 (1987) , pp. 638–643.
- [6] Y-W. CHEN, Z. NAKAO, S. TAMURA : *Attenuation Correction for X-Ray Emission Computed Tomography of Laser-Produced Plasma*. IEICE, E79-A (1995), pp. 1287–1290.
- [7] J.A. COOPER, P.H. NEUMANN, B.K. MC CANDLESS : *Effect of patient motion on tomographic myocardial perfusion imaging*. J. Nucl. Med., 33 (1992), pp. 1566–1571.
- [8] A.P. DEMPSTER, N.M. LAIRD AND D.B. RUBIN : *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*. J. Roy. Stat. Soc., 39 (1977), pp. 1–38.
- [9] D.R. GILLAND, B.M.W. TSUI, W.H. MCCARTNEY , J.R. PERRY AND J. BERG : *Determination of the optimum filter function dor SPECT imaging*. J. Nucl. Med., 29 (1988), pp. 643–650.
- [10] D.R. GILLAND, R.J. JASZCZAK, K.L. GREER AND R.E COLEMAN : *Transmission imaging for nonuniform attenuation correction using a three-headed SPECT camera*. J. Nucl. Med., 39 (1998), pp. 1105–1110.
- [11] R. GORDON, R. BENDER AND G. T. HERMAN, *Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography*, J. Theor. Biol., 29 (1970), pp. 471–481.

- 
- [12] R. GORDON AND G. T. HERMAN : *Reconstruction of pictures from their projections*. Commun. Assoc. Comput. Mach., 14 (1971), pp. 759–768.
- [13] H. GUAN AND R. GORDON : *A projection access order for speedy convergence of ART : a multilevel scheme for computed tomography*. Phys. Med. Biol., 39 (1994), pp. 1005–2022.
- [14] G.T. GULLBERG, R.H. HUESMAN, J.A. MALKO, N.J. PELC AND T.F. BUDINGER : *An attenuated projector-backprojector for iterative SPECT reconstruction*. Phys. Med. Biol., 30 (1986), pp. 799–816.
- [15] C. JEANGUILLAUME : *High sensitivity gamma camera system*, 1995 : US.
- [16] C. JEANGUILLAUME : *Un perfectionnement de la gamma camera à haute sensibilité*, 1998 : Brevet France.
- [17] G.T. HERMAN AND L.B. MEYER : *Algebraic reconstruction techniques can be made computationally efficient*. IEEE Tran. Med. Imaging, 12 (1993), pp. 600–609.
- [18] H.M. HUDSON AND R.S. LARKIN : *Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data*. IEEE. Trans. Med. Imag, 13 (1994), pp. 601–609.
- [19] X. INTES, V. NTZIACHRISTOS, J. P. CULVER, A. YODH AND B. CHANCE : *Projection access order in algebraic reconstruction technique for diffuse optical tomography*. Phys. Med. Biol, 47 (2002), pp. N1-N10.
- [20] R.J. JASZCZAK, D.R. GILLAND, M.W. HANSON, S. JANG, K.L. GREER AND R.E. COLEMAN : *Fast transmission CT for determining attenuation maps using a collimated line source, rotatable air-copper-lead attenuators and fan-beam collimation*. J. Nucl. Med., 34 (1993), pp. 1577–1586.
- [21] R.J. JASZCZAK, P.H. MURPHY, D. HUARD, J.A. BURDINE : *Radionulide emission computed tomography of the head with  $^{99m}\text{Tc}$  and a scintillation camera*. J. Nucl. Med., 18 (1977), pp. 373–380.
- [22] S. KACZMARZ : *Angenährte Auflösung von Systemen hearer Gleichungen*. Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. A, 35 (1937), pp. 355–357.
- [23] A.C. KAK AND M. SLANEY : *Principles of Computerized Tomography*. IEEE Press, (1992).
- [24] J.W. KEYES JR, N. ORLANDEA, W.J. HEETDERKS, P.F. LEONARD AND W.L. ROGERS : *The humogotron-A scintillation-camera transaxial tomography*. J. Nucl. Med., 18 (1977), pp. 381–387.
- [25] L. KAUFMAN AND A. NEUMAIER : *Image reconstruction troughht regularization by envelope guided conjugate gradients*. Technical report (1993), Bell Labs.
- [26] L.A. KUNYANSKY : *New SPECT reconstruction algorithm based on the Novikov explicit inversion formula*. Inverse Problems, 17 (2001), pp. 293–306.



- 
- [27] K. LANGE, R. CARSON : *EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography*. J. Comp. Ass. Tomogr., 8 (1984), pp. 306–316.
- [28] M. MAGNUSSON : *The linogramme method for image reconstruction from projections*. PhD thesis, Linköbing tekniska högskola, Dep of electrical engineering, S-581 83 Linköbing, Sweden, 1889. Revised version 1993.
- [29] J.A. MALKO, R.L. VAN HEERTUM, G.T. GULLBERG AND W.P. KOWALSKY : *SPECT liver imaging using an iterative attenuation correction algorithm and an external flood source*. J. Nucl. Med., 27 (1986), pp. 701–705.
- [30] S.H. MANGLOS, R.I. JASZCZAK, C.E. FLOYD, L.J. HAHN, K.L. GREER, R.E. COLEMAN : *Nonisotropic attenuation in SPECT : phantom tests of quantitative effects and compensation techniques*. J. Nucl. Med, 28 (1987), pp. 1584–1591.
- [31] C.E. METZ AND X. PAN : *A unified analysis of exact methods of inverting the 2-D exponential Radon transform, with implications for noise control in SPECT*. IEEE Trans. Med. Imag, 14 (1995), pp. 643–657.
- [32] K. MUELLER, R. YAGEL, AND J.F. CORNHILL : *The Weighted Distance Scheme : A Globally Optimizing Projection Ordering Method for ART*. IEEE. Trans. Med. Imag., 16 (1997), pp. 223–230.
- [33] F. NATTERER : *The mathematics of computerized tomography*. New York, Wiley-Teunber, (1986).
- [34] F. NATTERER : *Inversion of the attenuated Radon transform Inverse Problems*. Inverse Problems, 17 (2000), pp. 113–119.
- [35] F. NATTERER : *Determination of tissue attenuation in emission tomography of optically dense media*, Inverse Problems, 9 (1993), pp. 731–736.
- [36] F. NOO AND J.M. WAGNER : *Image reconstruction in 2D SPECT with 180° acquisition*. Inverse Problems, 17 (2001), pp. 1357–71.
- [37] R.G. NOVIKOV : *An inversion formula for the attenuated X-ray transformation*. Ark. Math., 40 (2002), pp. 145–167.
- [38] T. QUINTO : *An Introduction to X-ray Tomography and Radon Transforms*. Proc. Sympos. Appl. Math., 63 (2006), pp. 1–23.
- [39] R. RAMLAU, R. CLACKDOYLE : *Accurate attenuation correction in SPECT imaging using optimization of bilinear functions and assuming an unknown spatially-varying attenuation distribution*. IEEE Nuclear Science Symposium, 3 (1998), pp. 1684–1688.
- [40] D. ROS, C. FALCÓN, I. JUVELLS AND J. PAVÍA : *The influence of a relaxation parameter on SPECT iterative reconstruction algorithms*. Phys. Med. Biol., 41 (1996), pp. 925–937.

- 
- [41] M.S. ROSENTHAL, J. CULLOM, W. HAWKINS, S.C. MOORE, B.M.W. TSUI AND M. YESTER : *Quantitative SPECT Imaging : A review and recommendations by the Focus Committee of the Society of Nuclear Medicine Computer and Instrumentation Council*. J. Nucl. Med., 36 (1995), pp. 1489–1513.
- [42] L.A. SHEPP AND Y. VARDI : *Maximum likelihood reconstruction in Positron Emission Tomography*. IEEE Trans. Med. Imag., (1982), pp. 113–122.
- [43] E.Y. SIDKY AND X. PAN : *Variable sinograms and redundant information in single-photon emission computed tomography with non-uniform attenuation*. Inverse Problems, 18 (2002), pp. 1483–1497.
- [44] K. TANABE : *Projection method for solving a singular system*. Numer. Math., 17 (1971), pp. 203–214.
- [45] O.J. TRETIK, C. METZ : *The exponential Radon transform*. SIAM. J. Appl. Math., 39 (1980), pp. 341–354.
- [46] C.H. TUNG, G.T. GULLBERG , G.L. ZENG, P.E. CHRISTIAN, F.L. DATZ AND H.T. MORGAN : *Non-uniform attenuation correction using simultaneous transmission and emission converging tomography*. IEEE. Trans. Nucl. Sci., 39 (1992), pp. 1134–1143.
- [47] B.M.W. TSUI, G.T. GULLBERG, E.R. EDGERTON, J. GLEN BALLARD, J. RANDOLPH PERRY, W.H. MCCARTNEY AND J.BERG : *Correction of nonuniform attenuation in cardiac SPECT imaging*. J. Nucl. Med., 30 (1989), pp. 497–507.
- [48] B.M.W. TSUI, E.C. FREY, X.D. ZHAO, D.S. LALUSH, R.E. JOHNSTON AND W.H. MCCARTNEY : *The importance and implementation of accurate 3D compensation methods for quantitative SPECT*. Phys. Med. Biol., 39 (1994), pp. 509–530.
- [49] V.Y. PANIN, G.L. ZENG, G.T. GULLBERG : *A method of attenuation map and emission activity reconstructions from emission data*. IEEE. Trans. Nucl. Sci., 1 (2001), pp. 131–138.
- [50] M. VAN DIJK : *Iterative methods in image reconstruction*. Ph.D. Thesis, Rijksuniversiteit Utrecht, The Netherlands, 1992.