



HAL
open science

Approche spectrale/éléments nis pour des problèmes de magnétohydrodynamique non-linéaires

Adolfo Ribeiro

► **To cite this version:**

Adolfo Ribeiro. Approche spectrale/éléments nis pour des problèmes de magnétohydrodynamique non-linéaires. Mécanique [physics.med-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2010. Français. NNT : . tel-00602145

HAL Id: tel-00602145

<https://theses.hal.science/tel-00602145>

Submitted on 21 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE PARIS-SUD
(Paris XI, Centre d'Orsay)**

Thèse de doctorat présentée
par

Adolfo RIBEIRO

Laboratoire LIMSI
(Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur)
Bâtiment 508, Campus d'Orsay

**Approche spectrale/éléments finis pour des problèmes
de magnétohydrodynamique non-linéaires**

**Soutenue le 30 Juillet 2010 devant la commission
composée de Messieurs et Mesdames**

Kai SCHNEIDER	Rapporteur
Dominique JAULT	Rapporteur
Roland GRAPPIN	Examineur
Lionel PICHON	Examineur
Caroline NORE	Directrice de thèse en codirection avec Jean-Luc Guermond

Résumé Le travail présenté dans ce manuscrit se rapporte à la résolution des équations de la magnétohydrodynamique 3D non-linéaire. Il s'inscrit dans le cadre d'un projet qui avait pour objectif de mettre en place un code non linéaire parallélisé capable de s'adapter à des géométries finies complexes, en considérant un domaine de calcul hétérogène composé de conducteurs de propriétés électro-magnétiques différentes et d'isolants. L'apport principal de ce travail a été de mettre en place une formulation numérique permettant de prendre en compte des sauts de perméabilité magnétique au sein du domaine conducteur. Pour cela, une méthode de pénalisation de type Galerkin discontinue a été retenue. Dans ce manuscrit, on trouvera des résultats numériques concernant trois applications distinctes : la génération et l'étude de la propagation d'ondes d'Alfvén dans un conteneur cylindrique fini, l'étude des effets magnétohydrodynamiques dans un disque képlerien et enfin une simulation réaliste d'une expérience dynamo (VKS2). L'originalité des simulations proposées concernant ce dernier sujet repose sur le fait qu'elles intègrent des matériaux de perméabilité magnétique élevée présents dans le dispositif expérimental. Bien que le rôle de ce type de matériaux soit bien compris et exploité en magnétostatique depuis longtemps, son impact en magnétohydrodynamique reste à préciser.

Abstract The work presented in this manuscript is part of a project that aimed to develop a new nonlinear three dimensional code for the magnetohydrodynamic equations in any axisymmetric container. The main contribution of this thesis was to develop a numerical formulation for taking into account magnetic permeability jumps within the conducting domain. For this purpose, an Interior penalty Galerkin method has been chosen. In this manuscript, we present numerical results for three different applications : the generation and study of the propagation of Alfvén waves in a finite cylindrical container, the study of magnetohydrodynamic effects in a keplerian disk and a realistic simulation of the VKS2 dynamo experiment. The originality of our numerical approach on the last topic is based on the fact that we incorporate in our simulations materials of high magnetic permeability present in the experimental set-up. Although the role of such materials is well understood and exploited in magnetostatic for long, its impact remains to be clarified in magnetohydrodynamics.

Remerciements

Je vais logiquement commencer par remercier mes encadrants de thèse, Caroline Nore et Jean-Luc Guermond sans qui ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Tant Caroline que Jean-Luc, ils ont toujours été disponibles pour mon encadrement malgré la lourde charge de travail que tous deux subissent compte tenu de leurs responsabilités. J'aimerais en particulier remercier Jean-Luc qui m'a permis de réaliser deux séjours à l'université Texas A&M dans le département de mathématiques appliquées, où j'ai pu rencontrer des personnages passionnés et passionnants. Ainsi que Caroline qui, à force d'insistance, est parvenue à me convaincre que la forme est toute aussi importante que le fond. Je tiens également à remercier chaleureusement Jacques Léorat avec qui j'ai étroitement travaillé sur des sujets touchant au domaine de l'astrophysique. Nos discussions passionnantes m'ont, entre autres, permis d'acquérir une bonne culture dans le domaine astrophysique. Il m'a également permis de relativiser dans les moments les plus difficiles. Enfin, je remercie l'équipe de géophysique du LGIT de Grenoble constituée de P. Cardin, T. Alboussiere, F. Plunian et al qui m'ont permis d'avoir un premier contact avec la recherche expérimentale en m'autorisant à participer à des campagnes de mesures d'ondes d'Alfvén avec l'expérience Galalfvén.

Je remercie Lionel Pichon d'avoir accepté de présider mon jury de thèse ainsi que mes rapporteurs D. Jault et K. Shneider d'avoir accepté d'évaluer ma thèse avec autant d'intérêt et d'assiduité. Sans oublier Roland Grappin qui a accepté d'examiner ma thèse et avec qui j'ai eu des discussions intéressantes provoquées tardivement par ma soutenance de thèse. J'espère que ces discussions riches en expérience et en connaissance se poursuivront à l'avenir.

Je voudrais remercier Patrick Le Quéré, directeur du Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, pour l'accueil qu'il m'a réservé. J'adresse également mes remerciements aux membres permanents du laboratoire.

Je n'oublierai pas de dire un grand merci aux différents doctorants et post-doctorants que j'ai croisés au cours de ces 4 années, particulièrement à B. Trouette, mon voisin de bureau avec qui nous avons tout au long de ces années entretenu des discussions tant amicales que scientifiques. Je remercie également Lyes pour sa bonne humeur et son entrain ainsi que Marx Chhay qui a su partager sans retenue son expérience du monde académique et pour ses critiques toujours constructives.

Enfin, pour terminer, un grand merci à ma famille et à tous mes amis qui ont toujours fait preuve de soutien à mon égard, et qui ont su me changer les idées quand j'en avais besoin. Je pense à Charles, Thierry, Nader, Benoît et bien d'autres. Enfin, j'aimerais manifester une attention toute particulière à Amandine pour qui cette année a été très difficile mais qui, malgré tout, m'a toujours soutenu et ce depuis près d'une dizaine d'années.

Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Généralités sur la magnétohydrodynamique	7
2.1	Equations de la magnétohydrodynamique (MHD)	7
2.1.1	Les équations de Maxwell	7
2.1.1.1	Approximation quasi-statique	8
2.1.1.2	La loi d'Ohm	9
2.1.1.3	Equations de l'induction	9
2.1.1.4	Conditions aux limites magnétiques	11
2.1.2	Les équations de Navier-Stokes	13
2.1.2.1	Conditions aux limites cinétiques	13
2.1.3	Les équations de la magnétohydrodynamique	14
2.2	L'effet dynamo	15
2.2.1	Théorèmes anti-dynamo et mécanismes de base	15
2.2.2	Quelques exemples de dynamo	18
3	Méthode numérique	21
3.1	Approximation des équations de Maxwell	21
3.1.1	Aspects géométriques	22
3.1.2	Formulation forte du problème	22
3.1.2.1	Introduction du potentiel ϕ et élimination du champ \mathbf{E}	24
3.1.3	Formulation faible du problème	25
3.1.4	Tests de convergence pour un cas d'induction en géométrie sphérique	27
3.1.4.1	Cas 1: induction dans une sphère en couches	28
3.1.4.2	Cas 2: induction dans une sphère creuse	30
3.2	Approximation des équations de Navier-Stokes	30
3.2.1	Aspects géométriques du problème	30
3.2.2	Formulation faible du problème	32
3.3	Approximation par éléments finis des équations de la MHD	32
3.3.1	Aspects géométriques	32
3.3.2	Discrétisation spatiale des équations de Maxwell	33
3.3.3	Discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes	33
3.3.4	Discrétisation temporelle	34
3.4	Méthode de parallélisation	35
3.4.1	Le système linéaire	35
3.4.2	Calcul du terme non-linéaire et tests de performance	36

4	Génération d'ondes d'Alfvén dans un cylindre	39
4.1	Introduction	39
4.2	Approche analytique des ondes d'Alfvén	41
4.2.1	Mécanisme de base de la propagation des ondes d'Alfvén	41
4.2.2	Equation de propagation	42
4.2.3	Relation de dispersion	44
4.3	Modélisation de l'excitation des ondes d'Alfvén dans une configuration idéale	45
4.3.1	Régime impulsionnel	46
4.3.2	Régime harmonique	49
4.4	Propagation d'ondes d'Alfvén dans un dispositif expérimental	50
4.4.1	Etude du régime impulsionnel	50
4.4.2	Etude du régime harmonique	53
4.4.2.1	Cas où la diffusivité magnétique est élevée	54
4.4.2.2	Cas où la diffusivité magnétique est faible	55
4.5	Etude de la réflexion d'une onde sur une couche conductrice	61
4.5.1	Influence de la couche conductrice latérale	61
4.5.2	Influence de la conductivité de la couche conductrice supérieure	62
4.6	Conclusion et perspectives	63
5	Etude des effets magnétohydrodynamiques dans un disque képlérien	65
5.1	Introduction	65
5.1.1	Mécanisme de l'instabilité magnétorotationnelle (MRI)	66
5.1.2	Modèles numériques de l'instabilité magnétorotationnelle	68
5.1.2.1	Approches locales du type « shearing box »	68
5.1.2.2	Approches globales	69
5.2	Proposition d'un modèle numérique de l'instabilité magnétorotationnelle	70
5.2.1	Etat d'équilibre initial et conditions aux limites	70
5.2.2	Equations de la MHD pour la MRI	72
5.3	Résultats de simulations axisymétriques à $Pm = 1$	72
5.3.1	Choix de la condition initiale	72
5.3.2	Evolution non linéaire à faibles nombres de Reynolds	73
5.3.2.1	Influence du nombre de Hartmann et de la taille du domaine numérique	74
5.3.2.2	Influence des conditions aux limites magnétiques	75
5.3.3	Vers un régime post-MRI chaotique	78
5.3.3.1	Evolution non linéaire à plus grands nombres de Reynolds	78
5.3.3.2	Proposition d'un modèle de basse dimensionnalité	81
5.4	Résultats de simulations non axisymétriques	86
5.4.1	Cas où la diffusion ohmique est égale à la diffusion visqueuse ($Pm = 1$)	87
5.4.2	Cas où les diffusions ohmique et visqueuse diffèrent ($Pm \neq 1$)	90
5.5	Conclusion et perspectives sur les simulations MHD d'un disque képlérien	93

6	Induction et effet dynamo dans des domaines hétérogènes	97
6.1	Introduction	97
6.2	Induction dans une géométrie cylindrique	98
6.2.1	Cas de deux disques coaxiaux présentant des bords arrondis . .	99
6.2.2	Cas de deux disques coaxiaux avec des arêtes arrondies ou droites	100
6.2.3	Induction dans des disques ferromagnétiques en contra-rotation	101
6.3	Calcul de dynamos en relation avec VKS2	102
6.3.1	Application à l'expérience VKS2	102
6.3.2	Approche numérique	105
6.3.3	Modélisation proposée	105
6.3.3.1	Ecoulement axisymétrique et dynamo cinématique . .	105
6.3.3.2	Simulation non linéaire de l'expérience	107
6.4	Conclusion et perspectives	110
7	Conclusion générale	113

Chapitre 1

Introduction générale

La magnétohydrodynamique (MHD) est une théorie permettant d'étudier le comportement d'un fluide conducteur. Le fluide conducteur peut être un métal liquide ou bien un plasma. On fait l'hypothèse que ce fluide peut être décrit par des variables moyennes, masse volumique, densité, conductivité électrique, perméabilité magnétique, etc. Le fait de conduire l'électricité lui confère la possibilité d'interagir avec un champ magnétique. En astrophysique et en géophysique, les applications de la MHD sont innombrables, nous retiendrons seulement quelques applications auxquelles nous sommes intéressés. Une première application concerne l'étude d'ondes d'Alfvén dans un fluide conducteur soumis à un champ magnétique extérieur. Une solution simple du système d'équations de la MHD est l'onde d'Alfvén qui est une onde transverse au champ magnétique se propageant le long des lignes de champ magnétique. Ces ondes se rencontrent dans plusieurs objets astrophysiques et géophysiques. Par exemple, l'observation d'ultra-violet, de Rayons X et de vent provenant du soleil suggère que la température de l'atmosphère solaire est de quelques millions de Kelvin. Une théorie expliquant une telle température avance que de l'énergie est transportée des couches profondes vers la surface via des ondes d'Alfvén qui se propagent le long des lignes de champ magnétique qui connectent la protosphère à la couronne solaire. Une autre manifestation de la MHD se rencontre dans des objets astrophysiques de très grande taille parfois visibles sans instrument comme des disques galactiques ou circumstellaires (voie lactée et système solaire). Ces disques sont constitués de poussières et de gaz qui gravitent autour d'un corps central. Leur mouvement résulte de l'équilibre hydrodynamique entre les forces gravitationnelles exercées par le corps massif situé au centre du disque et les forces centrifuges. Cet équilibre est stable d'un point de vue hydrodynamique (stable selon le critère de Rayleigh), mais des observations montrent la présence de turbulence au sein des disques. L'instabilité qui se manifeste est d'origine magnétohydrodynamique, elle est due à la présence d'un champ magnétique à grande échelle, qui déstabilise l'écoulement via un mécanisme qui est détaillé dans un chapitre de ce manuscrit. Enfin une autre manifestation des effets magnétohydrodynamiques se rencontre à l'échelle terrestre. L'hypothèse la plus probable expliquant l'existence d'un champ magnétique sur Terre est l'existence d'un effet dynamo dans le noyau liquide. Le mécanisme de dynamo consiste en la conversion d'énergie mécanique issue des mouvements du noyau liquide en énergie magnétique donnant lieu à une dynamo fluide auto-excitée au sein de ce noyau.

La description des trois problèmes physiques présentés précédemment fait appa-

raître un couplage du champ de vitesse avec le champ magnétique. Leur description doit tenir compte de l'évolution du fluide régie par les équations de Navier-Stokes. L'évolution du champ magnétique est régie par les équations de Maxwell dans lesquelles les courants de déplacement sont négligés. L'influence du champ magnétique sur le fluide se traduit par l'action de la force de Lorentz. Il existe de nombreux codes numériques non linéaires capables de résoudre un tel système d'équations couplées. On retiendra des codes spectraux périodiques tels que les codes de Ponty et al. 2008 [7] et Laval et al. 2006. Ces codes numériques sont bien adaptés à l'étude de la turbulence MHD, par exemple l'étude de turbulence générée par un forçage de type Taylor-Green [69]. Il existe également des codes sphériques adaptés à la simulation d'écoulement géophysique, ou à la simulation d'expérience dynamo sphérique telle que l'expérience de Madisson ou de Lathrop dans le Maryland. On peut citer les codes de Tilgner et al. 1998 [81], 2005 [83], dont le premier a été développé pour l'étude d'un écoulement hydrodynamique forcé par précession dans une sphère. La version de 2005 intègre la prise en compte des effets magnétiques permettant d'étudier l'effet dynamo généré dans une sphère en précession. Le code de Dormy et al. 1998 [20] est un autre exemple de code sphérique. Il est basé sur une décomposition en harmoniques sphériques permettant de simuler des écoulements géophysiques en prenant en compte des effets magnétiques et thermiques. Enfin il existe des codes numériques cylindriques axialement périodiques. Par exemple, le code de Léorat 1999 est bien adapté aux simulations de la dynamo de Riga, celui de Willis et al. 2002 est bien adapté à l'étude de l'instabilité magnétorotationnelle et à l'étude de l'effet dynamo dans des écoulements de type Taylor-Couette cylindrique.

Depuis 2003, l'objectif de l'équipe dans lequel ce travail de thèse a été réalisé était de mettre en place un code non linéaire parallélisé capable de s'adapter à des géométries finies plus complexes, en considérant un domaine de calcul hétérogène composé de conducteurs de propriétés électro-magnétiques différentes et d'isolants. En 2006, lorsque j'ai débuté ce travail de thèse, j'ai eu à ma disposition un code numérique capable de résoudre les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'induction magnétique de façon couplée (voir [48]). La motivation principale de la thèse que j'ai entreprise était de mettre en place une formulation numérique permettant de prendre en compte des sauts de perméabilité magnétique au sein du domaine conducteur. Pour cela une méthode de pénalisation de type Galerkin discontinue a été retenue (les détails d'implémentation sont présentés au chapitre 3). Le code numérique non linéaire que nous avons développé porte le nom de SFEMaNS pour Spectral Finite Element for Maxwell and Navier-Stokes. Ce code numérique présente une formulation hybride, spectrale / éléments finis. Toutes les variables vitesse, pression et champ magnétique exprimées en coordonnées cylindriques sont décomposées en série de Fourier dans la direction azimutale. Les équations de Navier-Stokes sont approchées par une méthode classique d'élément finis de Lagrange sur un maillage du plan méridien. Les équations de Maxwell sont traitées de façon similaire avec pénalisation permettant d'assurer la continuité des différentes grandeurs magnétiques sur les interfaces séparant les différentes régions hétérogènes. Cette formulation originale permet de tirer profit des deux formulations numériques : la partie spectrale permet une parallélisation relativement simple via le protocole MPI, les approximations dans le plan méridien pour chaque mode azimutal peuvent être traitées simultanément par plusieurs processeurs. La partie éléments finis agrémentée d'une méthode de pénalisation de Galerkin permet de

traiter des conditions aux limites finies pour la vitesse (adaptées à la description de dispositifs expérimentaux) et des conditions de passage naturelles pour le champ magnétique entre des domaines conducteurs et isolants.

Dans ce manuscrit, après avoir brièvement présenté les équations de la MHD ainsi que des mécanismes simples liés à celles-ci, nous présenterons dans un deuxième chapitre les détails numériques du code SFEMaNS. Dans les trois chapitres suivants, nous présenterons les résultats de simulations que nous avons obtenus au cours de ces quatre dernières années. Les trois applications auxquelles nous nous sommes intéressés concernent des simulations de fluide conducteur contenus dans des objets de géométrie cylindrique. Dans un premier temps, nous présenterons des résultats concernant la génération et l'étude de la propagation d'ondes d'Alfvén dans un conteneur cylindrique fini. Cette thématique nous a permis de valider notre approche numérique concernant la résolution des équations de la MHD dans leur version non linéaire. Ensuite, nous aborderons dans un quatrième chapitre une modélisation des effets magnétohydrodynamiques dans un disque képlerien. Du fait de leur relative simplicité, l'intérêt de nos simulations n'est pas aussi astrophysique que la plupart des simulations globales existant dans la littérature. Mais elles présentent l'avantage d'être des simulations focalisées sur l'interaction entre le champ de vitesse et le champ magnétique où les conditions aux limites sont traitées de façon rigoureuse. Dans un sixième chapitre, nous proposons une simulation réaliste d'une expérience (VKS2) ayant prouvé récemment (en 2006) la possibilité de générer un champ magnétique auto-entretenu dans un écoulement de type Von Kármán dans du sodium liquide. Le dispositif expérimental utilisant des matériaux ferromagnétiques, l'intérêt de nos simulations est double car, par rapport aux codes MHD existants nous avons le seul code numérique non-linéaire adapté aux géométries cylindriques capable de prendre en compte des sauts de perméabilité. En effet, les seules simulations non linéaires de l'expérience VKS réalisées jusqu'à ce jour ont été réalisées avec le code sphérique Parody [34]. Il est peu crédible qu'une telle différence de géométrie n'ait pas d'impact sur les comportements physiques capturés dans les simulations. Enfin un dernier chapitre sera consacré aux diverses conclusions et perspectives envisagées dans un futur plus ou moins proche afin d'approfondir et d'enrichir les simulations abordées dans ce manuscrit.

Chapitre 2

Généralités sur la magnétohydrodynamique

2.1 Equations de la magnétohydrodynamique (MHD)

La magnétohydrodynamique [72, 60], décrit la dynamique des fluides conducteurs en présence de champ magnétique. Afin de décrire le système complet des équations de la magnétohydrodynamique, nous allons d'abord introduire les équations de base de l'électrodynamique. Nous allons voir que l'évolution du champ magnétique est régie par les équations de Maxwell (dans lesquelles on néglige les courants de déplacement). La loi d'Ohm s'appliquant à tout conducteur, il nous faut introduire un paramètre adimensionné, le nombre de Reynolds magnétique Rm , qui compare le temps diffusif magnétique au temps advectif. L'évolution hydrodynamique du fluide est elle régie par les équations de Navier-Stokes. Là encore il nous faut introduire un autre paramètre adimensionné, le nombre de Reynolds cinétique Re . Celui-ci compare le temps diffusif visqueux au temps advectif. Le système formé par les deux équations précédemment évoquées forme un système non-linéaire, dans lequel la rétro-action du champ magnétique sur le fluide est décrite par la force de Lorentz et l'influence du mouvement du fluide sur le champ magnétique se manifeste au travers d'un terme appelé terme d'induction.

2.1.1 Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell décrivant l'évolution du champ électromagnétique se composent d'un système de trois équations ; l'équation de Maxwell-Faraday, l'équation de Maxwell-Ampère et l'équation de Maxwell-Gauss auquel on ajoute une contrainte sur l'induction magnétique pour interdire les monopôles magnétiques. Ces équations s'écrivent dans le référentiel du laboratoire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} & \nabla \cdot \mathbf{D} = \chi \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \chi \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

où \mathbf{E} est le champ électrique, \mathbf{H} le champ magnétique, \mathbf{D} l'induction électrique, \mathbf{B} l'induction magnétique, \mathbf{j} le courant de conduction, χ la densité volumique de charges

électriques et \mathbf{U} la vitesse du fluide par rapport au référentiel du laboratoire. On a en plus les relations suivantes entre les champs et les inductions

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.1.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.1.3)$$

avec ϵ la permittivité électrique du milieu et μ la perméabilité magnétique. Les équations 2.1.2 et 2.1.3 rendent compte des propriétés de la matière. Dans le vide ou pour un milieu amagnétique et non polarisé (i.e. pas de polarisation électrique ni d'aimantation volumique), μ et ϵ ont pour valeurs respectives les constantes bien connues : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{USI}$ et $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$, où c est la vitesse de la lumière. Pour compléter le système d'équations, on ajoute la loi d'Ohm qui relie linéairement dans le référentiel du fluide, le courant de conduction \mathbf{j}_0 au champ électrique \mathbf{E}_0 :

$$\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0 \quad (2.1.4)$$

où σ est la conductivité électrique en $\Omega^{-1}m^{-1}$ supposée constante.

2.1.1.1 Approximation quasi-statique

L'approximation quasi-statique des équations de Maxwell est valable dans le cas de problèmes faisant intervenir des vitesses lentes par rapport à la vitesse de la lumière. Elle consiste à éliminer le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère, introduit par Maxwell pour satisfaire la conservation de la charge. De façon plus qualitative rappelons que, dans un plasma d'électrons et d'ions globalement neutre, les écarts à la neutralité ne sont possibles que sur des échelles spatiales inférieures à la longueur de Debye notée λ_D et qui s'exprime comme suit :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n e^2}} \quad (2.1.5)$$

où k_B est la constante de Boltzmann ($k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{J.K}^{-1}$), T la température, n la densité particulaire et e la charge électronique ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$). Lorsqu'on s'intéresse à des phénomènes dont le temps caractéristique est plus faible que le temps T_D ($T_D = \lambda_D / v_T$ avec $v_T = \sqrt{3k_B T / m}$ est la vitesse thermique des électrons), on peut supposer que $\chi \sim 0$ dans l'équation de Maxwell-Gauss ce qui implique que $\chi U \sim 0$ dans l'équation de Maxwell-Ampère.

Dans ces conditions le système d'équations 2.1.1 se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Dans l'équation de Maxwell-Ampère comparons le terme portant sur le rotationnel avec le terme portant sur la dérivée temporelle de l'induction magnétique. De façon adimensionnée on peut écrire que $|\partial_t \mathbf{D}| / |\nabla \times \mathbf{H}| \approx \mu_0 \epsilon_0 |\mathbf{E}| \mathcal{L} / \mathcal{T} |\mathbf{B}|$. Or de la même façon l'équation de Maxwell-Faraday nous donne : $|\mathbf{E}| / |\mathbf{B}| \approx \mathcal{L} / \mathcal{T}$. En utilisant la définition

de la vitesse de la lumière c comme étant égale à $1/\mu_0\epsilon_0$, on aboutit à l'approximation suivante :

$$\frac{|\partial_t \mathbf{D}|}{|\nabla \times \mathbf{H}|} \approx \left(\frac{\mathcal{L}}{c\mathcal{T}} \right)^2 \quad (2.1.7)$$

Tant que la vitesse caractéristique du problème considéré définie comme \mathcal{L}/\mathcal{T} est faible devant la vitesse de la lumière c , le terme $\partial_t \mathbf{D}$ est négligeable devant $\nabla \times \mathbf{H}$.

2.1.1.2 La loi d'Ohm

D'un point de vue local, la loi d'Ohm peut s'énoncer en disant que la mobilité des porteurs de charge est indépendante du champ électrique \mathbf{E}_0 . Si on note ρ , la mobilité des porteurs de charge, leur vitesse peut s'écrire $\mathbf{v} = \pm \rho \mathbf{E}_0$. On peut également définir une densité de courant \mathbf{j} associée à une densité de porteurs n de la façon suivante :

$$\mathbf{j}_0 = e n \mathbf{v} = e n \rho \mathbf{E}_0 \quad (2.1.8)$$

où e est la charge électrique du porteur. La conductivité électrique du fluide peut s'exprimer comme $\sigma = e n \rho$. On aboutit alors à la loi d'Ohm locale qui prend l'expression suivante :

$$\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0 \quad (2.1.9)$$

Afin d'obtenir la loi d'Ohm dans le référentiel du laboratoire il nous faut considérer que le fluide est en mouvement galiléen à la vitesse \mathbf{U} . On peut alors appliquer les lois de transformation pour le champ électromagnétique dans la limite non relativiste. ce qui revient à dire que Le champ magnétique \mathbf{H} et le courant de conduction \mathbf{j} sont invariants par changement de référentiel. En revanche le champ électrique \mathbf{E} subit une transformation galiléenne tel que $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mu \mathbf{H}$. La loi d'Ohm dans le référentiel du laboratoire s'exprime finalement comme suit :

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mu \mathbf{H}) \quad (2.1.10)$$

Les équations de Maxwell (2.1.1) peuvent finalement s'écrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} & \text{dans le vide et le conducteur} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mu \mathbf{H}) & \text{relation d'Ampère dans le conducteur} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \text{dans le vide} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{pas de monopole magnétique} \end{array} \right. \quad (2.1.11)$$

2.1.1.3 Equations de l'induction

Considérons un fluide conducteur incompressible, de conductivité uniforme σ , animé d'une vitesse \mathbf{U} . En prenant le rotationnel de la loi d'Ohm (2.1.10) et en l'injectant dans l'équation de Maxwell-Faraday (2.1.11), de manière à éliminer le champ électrique \mathbf{E} , nous obtenons l'équation de l'induction qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (2.1.12)$$

Le produit $\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B})$ peut s'expliciter en utilisant une expression vectorielle¹ ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (2.1.13)$$

où η est la diffusivité magnétique définie comme $\eta = 1/\sigma\mu$ (m^2s^{-1}). Au membre de gauche on a un terme d'évolution, au membre de droite le premier terme représente un terme d'advection, le deuxième un terme d'étirement et le troisième un terme de diffusion. L'évolution du champ magnétique est donc gouvernée principalement par deux termes : un terme de dissipation $\Delta \mathbf{B}$ qui, pour $\eta \neq 0$, tend à dissiper les éventuelles fluctuations du champ magnétique par effet Joule et un terme d'étirement qui peut amplifier ou réduire l'intensité du champ magnétique.

Adimensionnons l'équation précédente afin d'introduire le nombre de Reynolds magnétique Rm évoqué précédemment. Considérons \mathcal{L} une longueur caractéristique, \mathcal{T} un temps caractéristique, \mathcal{U} une échelle de vitesse et \mathcal{B} une intensité caractéristique de l'induction magnétique, l'équation de l'induction adimensionnée par le temps advectif défini comme $\mathcal{T} = \mathcal{L}/\mathcal{U}$ s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu\sigma\mathcal{U}\mathcal{L}\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B} \quad (2.1.14)$$

On voit apparaître un paramètre sans dimension, le nombre de Reynolds magnétique défini comme $Rm = \mu\sigma\mathcal{U}\mathcal{L}$. Ce nombre permet de définir deux régimes asymptotiques distincts lorsque $Rm \gg 1$, la diffusivité magnétique est négligeable, on parle alors de MHD idéale et inversement, lorsque $Rm \ll 1$, les effets diffusifs dominent et les fluctuations du champ magnétique s'atténuent rapidement.

Pour un fluide infiniment conducteur, $Rm \gg 1$, le terme diffusif de l'équation de l'induction 2.1.14 est négligeable, celle-ci peut se réécrire comme suit :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (2.1.15)$$

avec $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Cette limite donne lieu à plusieurs théorèmes dont deux fondamentaux de la MHD idéale : le théorème du gel et le théorème de conservation du flux.

Le théorème du gel :

Dans un fluide infiniment conducteur (de conductivité $\sigma \gg 1$), l'ensemble des particules de fluide situées sur une même ligne de champ magnétique à l'instant $t = 0$ le restent à tout temps $t > 0$.

Le théorème de la conservation du flux ou théorème d'Alfvén : Le flux magnétique à travers un circuit fermé advecté par un fluide infiniment conducteur (de conductivité $\sigma \gg 1$) reste constant au cours du temps.

1. identité vectorielle $\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{U} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{U}$

2.1.1.4 Conditions aux limites magnétiques

Il me semble important d'aborder les différentes conditions aux limites magnétique possibles dans la résolution de l'équation de l'induction introduite précédemment. L'impact de ces différentes conditions aux limites sera discuté dans les chapitres dédiés aux différents sujets auxquels je me suis intéressé : les ondes d'Alfvén (chapitre III), l'étude des disques keplériens (chapitre IV) ainsi que le rôle de matériaux ferromagnétiques dans la dynamo expérimentale VKS (chapitre V). On distinguera trois types de conditions aux limites différentes : des conditions aux limites dites naturelles, des conditions aux limites dites de pseudo-vide (cas où la perméabilité d'un des milieux considérés est infinie), ainsi que des conditions aux limites dites supraconducteur (cas où la conductivité d'un des milieux considérés est infinie). Ces trois cas conduisent comme nous allons le voir à des conditions de passage à travers deux milieux conducteurs distinctes.

2.1.1.4.1 Conditions aux limites naturelles Considérons dans un premier temps le cas où la diffusivité magnétique $\eta \neq 0$ à travers une couche où les propriétés physiques du milieu varient rapidement. Les champs doivent alors varier rapidement. Dans le cas où cette couche est modélisée par une discontinuité ou une interface Σ séparant deux milieux homogènes, ces champs doivent vérifier des conditions de passage [72]. Le champ électrique \mathbf{E} et le champ magnétique \mathbf{H} doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 + \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_2 &= \mathbf{0}, \text{ sur } \Sigma \\ \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}_2 &= \mathbf{0}, \text{ sur } \Sigma \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

où les exposants (1) et (2) dénotent les deux domaines, \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont les normales extérieures aux domaines respectifs et Σ représente l'interface séparant les deux milieux considérés. Dans le cas instationnaire, ces quatre conditions scalaires suffisent. A l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère et en utilisant le fait que la divergence de \mathbf{B} est nulle, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 &= 0, \text{ sur } \Sigma \\ \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n}_2 &= 0, \text{ sur } \Sigma \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Ces relations de continuité provenant respectivement de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Dans les simulations numériques, des conditions doivent être imposées sur les bords du domaine numérique et l'implémentation de l'ensemble de ces contraintes dépend fortement de la géométrie considérée. Les dynamos expérimentales et naturelles apparaissent dans des régions compactes contenant un fluide conducteur (domaine 1 qui peut être une sphère, ellipse, cylindre, etc.), immergées dans un domaine infini de vide (domaine 2 qui sera forcément borné en calculs). La figure 2.4 montre des exemples de domaine de calcul pour un conducteur cylindrique.

2.1.1.4.2 Conditions aux limites dites de pseudo vide Considérons deux milieux matériels de même conductivité électrique et de perméabilités magnétiques différentes comme le représente le schéma 2.2. Considérons les vecteurs induction et champ magnétique \mathbf{B} et \mathbf{H} au niveau de l'interface séparant les deux milieux nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0, \quad \text{sur } \mathbf{S} \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{0}, \quad \text{sur } \mathbf{S} \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= \mathbf{0}, \quad \text{sur } \mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

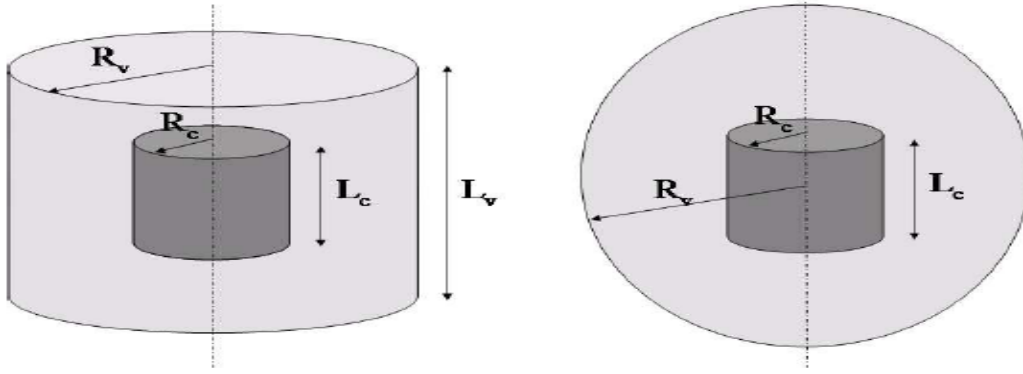


FIG. 2.1 – Exemples de domaine de calcul pour l'étude de diffusion, d'induction ou de dynamo dans un cylindre. A gauche : cylindre conducteur immergé dans un cylindre de vide ; à droite : cylindre conducteur immergé dans une sphère de vide.

Les égalités précédentes traduisent le fait que la composante normale de l'induction \mathbf{B} et les composantes tangentielles des champs \mathbf{H} et \mathbf{E} sont continues au travers de la surface S . Les équations (2.1.18) peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\mu_1 H_1 \cos \theta_1 &= \mu_2 H_2 \cos \theta_2 \\ H_1 \sin \theta_1 &= H_2 \sin \theta_2\end{aligned}\quad (2.1.19)$$

où θ_1 et θ_2 sont respectivement les angles entre la normale sortante \mathbf{n} et le vecteur induction \mathbf{B}_1 du coté 1 et le vecteur induction \mathbf{B}_2 du coté 2. Les égalités (2.1.19) conduisent à l'égalité suivante :

$$\frac{\tan \theta_1}{\mu_1} = \frac{\tan \theta_2}{\mu_2}\quad (2.1.20)$$

Cette relation est très similaire à la relation d'optique reliant les angles d'incidences et de réflexions d'un faisceau lumineux sur des milieux d'indice optique différent. Si on considère la limite où la perméabilité μ_2 tend vers l'infini, d'après la relation (2.1.20) on a deux cas de figure possibles. Soit la quantité $\tan(\theta_1)$ tend vers zéro ce qui implique que l'angle θ_1 est nul et l'angle θ_2 est quelconque. Soit la quantité $\tan(\theta_2)$ tend vers l'infini ce qui implique que l'angle θ_2 tend vers $\pi/2$ et l'angle θ_1 est quelconque. La limite $\mu \rightarrow \infty$ conduit à deux situations physique distinctes :

2.1.1.4.3 Conditions aux limites de type supraconducteur Considérons le schéma 2.2 mais cette fois-ci en prenant une permeabilité magnétique constante dans les deux domaines d'indice 1 et 2 mais des conductivités électriques différentes. Dans le cas où le domaine 2 a une conductivité électrique σ infinie, il se développe à la surface S^∞ séparant les deux milieux considérés une couche limite de courant surfacique J_s [72] tel que :

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{J}_s, \quad \text{sur } \mathbf{S} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) &= -\nabla_2 \cdot \mathbf{J}_s, \quad \text{sur } \mathbf{S} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0, \quad \text{sur } \mathbf{S} \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0, \quad \text{sur } \mathbf{S}\end{aligned}\quad (2.1.21)$$

où ∇_2 représente la divergence 2D du courant J_s créé sur l'interface S . Pour un conducteur immobile de conductivité infinie, le courant $\mathbf{J}^\infty = \sigma_2 \mathbf{E}^\infty$ doit rester fini ce qui

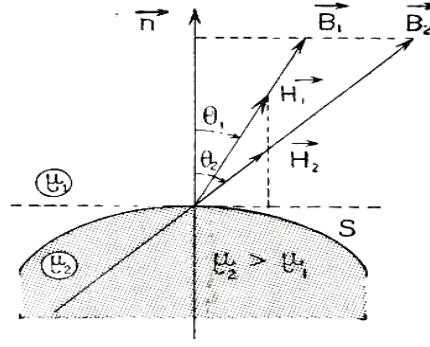


FIG. 2.2 – Schéma représentant deux milieux conducteurs de perméabilités magnétiques différentes, où S représente l'interface séparant les deux milieux, \mathbf{B}_1 l'induction magnétique du domaine 1 de perméabilité μ_1 et \mathbf{B}_2 l'induction magnétique du domaine 2 de perméabilité μ_2 (d'après [18]).

implique que le champ électrique dans le domaine 2 doit être nul. D'après l'équation de Maxwell-Faraday on en déduit que $\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{0}$, soit que $\mathbf{B}^\infty = \mathbf{0} = \mu_0 \mathbf{H}^\infty$, si on prends \mathbf{H}^∞ nul en condition initiale. On a toujours continuité de la composante normale de l'induction \mathbf{B} au travers de l'interface S (2.1.21), donc, du côté du domaine où la conductivité électrique est finie, on a $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} = \mu_0 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Le champ magnétique ne rentre pas dans le conducteur parfait. On a aussi toujours continuité des composantes tangentielles de (\mathbf{E} 2.1.21), donc, du côté du conducteur non parfait, on a $\mathbf{E}^c \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ soit $\mathbf{j}^c \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$. En résumé, en présence d'un conducteur parfait, le champ magnétique est parallèle à l'interface immobile S et le courant est perpendiculaire à celle-ci.

2.1.2 Les équations de Navier-Stokes

La description de la dynamique d'un fluide Newtonien et incompressible passe par la résolution des équations de Navier-Stokes qui s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{U} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \end{cases} \quad (2.1.22)$$

où \mathbf{U} désigne le champ de vitesse, p le champ de pression, ρ la masse volumique du fluide, ν la viscosité cinématique et \mathbf{f} un terme de forçage volumique extérieur. Adimensionnons l'équation précédente afin d'introduire le nombre de Reynolds cinétique. Considérons \mathcal{L} une longueur caractéristique, \mathcal{T} un temps caractéristique, une vitesse caractéristique \mathcal{U} ainsi qu'une pression caractéristique \mathcal{P} . L'équation de Navier-Stokes adimensionnée par le temps advectif défini comme $\mathcal{T} = \mathcal{L} / \mathcal{U}$ peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U} \quad (2.1.23)$$

avec $Re = \frac{\mathcal{U} \mathcal{L}}{\nu}$.

2.1.2.1 Conditions aux limites cinétiques

Tout comme pour la résolution de l'équation de l'induction, la résolution des équations de Navier-Stokes nécessite l'imposition de conditions aux limites. Considérons

une interface Σ séparant deux milieux de viscosités différentes, ou bien séparant un fluide et une paroi. L'équilibre local implique que :

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2, \quad \text{sur } \Sigma \quad (2.1.24)$$

Cette condition aux limites est appelée condition d'adhérence.

Il existe un autre type de condition aux limites appelée condition de glissement. Pour un fluide au contact d'une paroi cette condition aux limites revient à imposer que le fluide ne traverse pas la paroi, ce qui revient à annuler la composante normale de la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi, à tout instant. Les composantes tangentielles de la vitesse sont laissées libres. Ce type de condition aux limites n'est pas très physique mais elles présentent l'avantage d'éviter de résoudre des couches limites qui sont souvent très coûteuses en ressource numérique car proportionnelles à $1/\sqrt{Re}$.

2.1.3 Les équations de la magnétohydrodynamique

Nous avons vu que l'équation de l'induction permet de décrire l'état magnétique d'un fluide conducteur incompressible et que l'équation de Navier-Stokes permet de décrire l'état hydrodynamique de ce même fluide. Ces deux équations donnent lieu lorsqu'elles sont couplées à un système d'équations non linéaires, dans lequel le champ magnétique peut être affecté par l'état hydrodynamique du fluide via le terme d'induction magnétique. Inversement l'équilibre hydrodynamique du fluide peut être modifié par le champ magnétique via la force de Lorentz. Cette force s'exprime comme suit :

$$\mathbf{f} = (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu \mathbf{H} \quad (2.1.25)$$

en prenant $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ et $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. En substituant le terme de forçage \mathbf{f} de l'équation (2.1.22) par la force de Lorentz et en considérant l'équation de l'induction magnétique (2.1.13) on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} [(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu \mathbf{H}] + \nu \Delta \mathbf{U} \\ \partial_t \mathbf{H} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \end{cases} \quad (2.1.26)$$

auquel il faut rajouter les conditions aux limites d'adhérence ou de non glissement pour la vitesse et les conditions aux limites magnétiques vues précédemment pour le champ magnétique.

En considérant les mêmes grandeurs caractéristiques que pour l'adimensionnement réalisé pour l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'induction, on obtient le système adimensionné par le temps advectif $\mathcal{T} = \mathcal{L}/\mathcal{U}$ suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla p = A^2 [(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu \mathbf{H}] + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U} \\ \partial_t \mathbf{H} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \end{cases} \quad (2.1.27)$$

Ce système fait apparaître trois paramètres sans dimension : le nombre de Reynolds cinétique R_e , le nombre de Reynolds magnétique R_m , ainsi que le paramètre A^2 , paramètre qui compare l'énergie magnétique et l'énergie cinétique. Ce paramètre est parfois appelé paramètre d'interaction et il s'exprime comme suit :

$$A^2 = \left(\frac{\mu_0 \mathcal{H}^2}{\rho \mathcal{U}^2} \right) \quad (2.1.28)$$

2.2 L'effet dynamo

L'effet dynamo est un phénomène qui consiste en l'amplification d'un champ magnétique infinitésimal ainsi qu'à son auto-entretien par le mouvement d'un fluide conducteur. Il s'agit d'une instabilité du champ magnétique dont le paramètre de contrôle est le nombre de Reynolds magnétique R_m . L'effet d'amplification d'un champ magnétique résiduel est contenu dans le terme d'étirement $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{U}$ qui apparaît dans l'équation de l'induction (2.1.13).

Tout écoulement de fluide conducteur ne peut pas nécessairement produire un effet dynamo. Ainsi, un écoulement stationnaire d'une topologie trop simple ne pourra jamais conduire à un effet dynamo. Si l'on ne connaît pas de conditions suffisantes sur la topologie du champ de vitesse pour qu'il donne lieu à un effet dynamo, on a en revanche pu démontrer un certain nombre de théorèmes anti-dynamo exposés dans l'ouvrage de Moffatt [60].

2.2.1 Théorèmes anti-dynamo et mécanismes de base

Afin d'appréhender plus aisément certains de ces théorèmes il est commode d'introduire la décomposition dite toroïdale-poloïdale qui sera par ailleurs utilisée dans d'autres chapitres. Tout champ de vecteur solénoïdal (donc à divergence nulle) peut s'écrire de manière unique grâce à deux potentiels scalaires. En effet, prenons le champ d'induction magnétique \mathbf{B} et le champ de vitesse \mathbf{U} d'un fluide incompressible, ces champs sont tous deux à divergence nulle. Chaque champ peut donc s'exprimer de façon unique grâce à deux potentiels toroïdaux et poloïdaux de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_T + \mathbf{U}_P = \nabla \times (T_U \mathbf{e}) + \nabla \times \nabla \times (P_U \mathbf{e}) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P = \nabla \times (T_B \mathbf{e}) + \nabla \times \nabla \times (P_B \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

où T_U, T_B sont respectivement les potentiels toroïdaux des champs de vitesse et magnétique et P_U, P_B sont les potentiels poloïdaux correspondants. Le vecteur \mathbf{e} est un vecteur de base de rotationnel nul qui peut être soit radial \mathbf{e}_r en coordonnées sphériques, ou azimutal \mathbf{e}_θ en coordonnées cylindriques. Moffatt [60] utilise la décomposition pour le champ magnétique suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P = \nabla \times (T \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (P \mathbf{r}) = \\ &= -\mathbf{r} \times \nabla T - \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla P) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

où \mathbf{r} est le vecteur radial en coordonnées sphériques (r, χ, θ) . Cette décomposition permet de définir le potentiel vecteur \mathbf{A} comme suit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_T + \mathbf{A}_P = \nabla \times (P\mathbf{r}) + T\mathbf{r} + \nabla g \quad (2.2.3)$$

La partie toroïdale de \mathbf{A} est reliée à la partie poloïdale de \mathbf{B} est inversement. Cette décomposition a pour avantage de garantir que les champs exprimés sont à divergence nulle, en revanche elle conduit à des équations aux potentiels très complexes dans des géométries autres que sphériques. Une fois ceci posé citons quelques théorèmes anti-dynamo.

Théorème de Cowling [16] : un champ magnétique axisymétrique décroissant à l'infini ne peut pas être entretenu par effet dynamo et ce quelque soit le champ de vitesse. Remarquons qu'un champ de vitesse non-axisymétrique crée toujours un champ magnétique non-axisymétrique mais un champ magnétique non-axisymétrique peut en revanche être créé par un champ de vitesse axisymétrique. Une version plus restrictive de ce théorème est qu'un écoulement axisymétrique ne peut pas entretenir un champ magnétique axisymétrique.

Une démonstration simple peut être faite en considérant la décomposition (2.2.1). Pour un champ magnétique axisymétrique on obtient $\mathbf{B}_T = -\partial_\chi T \mathbf{e}_\theta$. Le potentiel \mathbf{A} défini en (2.2.3) devient $\mathbf{A}_T = -r \times \nabla P = -\partial_\chi P \mathbf{e}_\theta$. Ce potentiel est relié à la partie poloïdale du champ magnétique tel que $\mathbf{B}_P = \nabla \times \mathbf{A}_T$. En utilisant la même décomposition pour le champ de vitesse on obtient la relation suivante :

$$\mathbf{U} \times \mathbf{B} = (\mathbf{U}_P \times \mathbf{B}_T + \mathbf{U}_T \times \mathbf{B}_P) + (\mathbf{U}_P \times \mathbf{B}_P + \mathbf{U}_T \times \mathbf{B}_T) \quad (2.2.4)$$

L'hypothèse d'axisymétrie permet d'annuler le dernier terme. L'équation d'induction peut s'exprimer à l'aide de cette décomposition de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}_P}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{U}_P \times \mathbf{B}_P) + \eta \Delta \mathbf{B}_P \\ \frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{U}_P \times \mathbf{B}_T + \mathbf{U}_T \times \mathbf{B}_P) + \eta \Delta \mathbf{B}_T \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Après quelques manipulations en utilisant l'équation (2.2.3), ce système devient en coordonnées cylindriques (s, z, θ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{s} (\mathbf{U}_P \cdot \nabla) (s\mathbf{A}) &= \eta (\Delta - \frac{1}{s^2}) \mathbf{A} \\ \frac{\partial B_T}{\partial t} + s (\mathbf{U}_P \cdot \nabla) (\frac{\mathbf{B}_T}{s}) &= \eta (\Delta - \frac{1}{s^2}) \mathbf{B}_T + s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) (\frac{u_\theta}{s}). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Dans ces deux équations on voit apparaître un terme d'advection, $(\mathbf{U}_P \cdot \nabla)$, terme qui décrit l'effet de la convection du champ magnétique, ainsi qu'un terme de diffusion $\eta(\Delta - 1/s^2)$, terme qui a pour effet d'atténuer le champ magnétique éventuellement créé. Le seul terme capable de générer du champ magnétique en présence d'un gradient de la vitesse angulaire $\Omega = u_\theta/s$ le long des lignes de champ magnétique poloïdal est le terme $s(\mathbf{B}_P \cdot \nabla)(\frac{u_\theta}{s})$. Le champ poloïdal est alors étiré et amplifié par rotation différentielle. Cependant ce champ n'ayant pas de terme source, il va décroître par diffusion, la composante toroïdale \mathbf{B}_T va à son tour décroître, on a donc mort de la dynamo. Le mécanisme décrit précédemment montre bien qu'un écoulement axisymétrique ne peut pas entretenir un champ magnétique axisymétrique.

Théorème 2D Cowling [16] : un champ magnétique bidimensionnel, ne dépendant que d'une coordonnée d'espace, ne peut être auto-entretenu par effet dynamo.

Théorème toroïdal : un écoulement purement toroïdal ne peut engendrer un champ magnétique par effet dynamo.

Écoulement plan : un écoulement plan ne peut produire un effet dynamo.

Écoulement radial : Un écoulement radial de fluide compressible, de la forme $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})\mathbf{e}_r$, ne peut produire un effet dynamo.

Les écoulements capables d'engendrer un effet dynamo sont donc a priori relativement compliqués. Cependant, certains mécanismes de base de cet effet ont pu être identifiés. Nous allons en présenter deux de façon qualitative. Ces mécanismes permettent de comprendre le bouclage possible entre un champ magnétique poloïdal et un champ magnétique toroïdal. On évoquera deux effets remarquables : l'effet Ω et l'effet α .

L'effet Ω : L'effet Ω [72] est un mécanisme linéaire traduisant la création d'un champ magnétique toroïdal à partir d'un champ magnétique poloïdal. Considérons un champ magnétique poloïdal axisymétrique dans un écoulement toroïdal de fluide. D'après le théorème du champ gelé, les lignes de champ dirigées selon la direction e_z sont déformées par le champ de vitesse dirigé suivant e_θ , de telle sorte qu'une composante selon e_θ du champ magnétique est créée. La figure (2.3) présente le cas d'un champ magnétique s'exerçant au travers d'une sphère de fluide conducteur animé d'un mouvement toroïdal : dans la sphère, sous l'effet de la rotation différentielle, le champ magnétique B_{pol} est déformé par le gradient axial de la vitesse et crée une composante toroïdale B_{tor} .

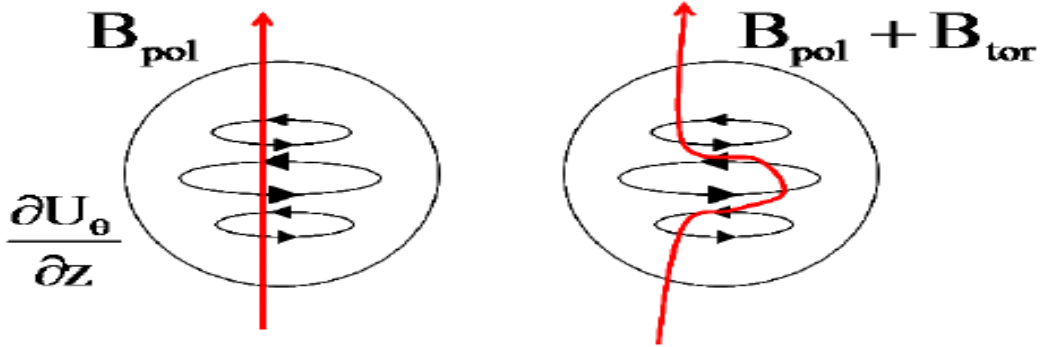


FIG. 2.3 – Construction d'une composante toroïdale B_{tor} à partir d'un champ initial poloïdal B_{pol} soumis à l'action d'un cisaillement axial $\partial U_\theta / \partial z$.

L'effet α : L'effet α est un mécanisme décrivant la création d'un champ magnétique poloïdal à partir d'un champ magnétique toroïdal, ou l'inverse, par l'intermédiaire d'un courant \mathbf{j} parallèle au champ initial. Ce mécanisme est bien plus compliqué que l'effet Ω et il existe différentes approches pour le décrire. En général, il provient d'une description dans le cadre de la théorie du champ moyen où il existe une séparation d'échelles entre le champ magnétique (à grandes échelles) et le champ de vitesse (turbulent et à petites échelles). La figure (2.4) propose une explication graphique de cet effet. Cet effet apparaît pour un écoulement d'hélicité cinétique non nulle (définie par $\mathcal{H}_v = \oint \mathbf{U} \cdot \nabla \times \mathbf{U} d\tau$ pour un volume matériel Ω). Il peut être engendré par les fluctuations non axisymétriques de l'écoulement.

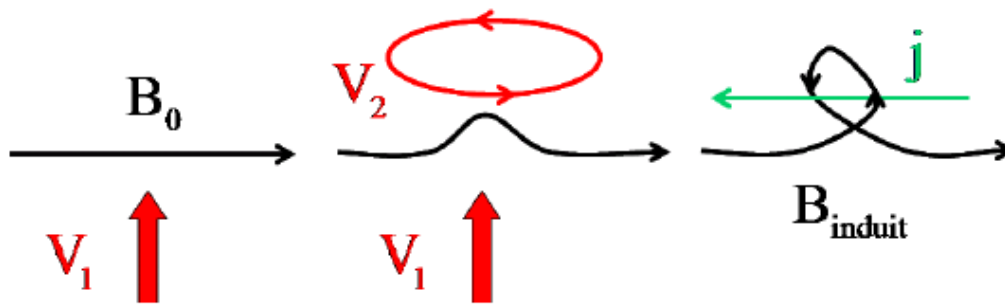


FIG. 2.4 – Explication graphique de l'effet α : un premier champ induit est généré par effet Ω à partir du champ de vitesse \mathbf{V}_1 . Une boucle de champ se forme ensuite en raison de la rotation \mathbf{V}_2 et on aboutit à un courant induit \mathbf{j} parallèle au champ initial \mathbf{B}_0 .

2.2.2 Quelques exemples de dynamo

Depuis les années 50 plusieurs modèles de dynamo ont été imaginés, certains ont donné lieu à une expérience qui a pu mettre à jour l'effet dynamo en laboratoire. Il existe plusieurs types d'expériences certaines sont de type solide comme la dynamo homopolaire de Bullard ou la dynamo de Lowes et Wilkinson. D'autres sont de type fluide, elles font intervenir des fluides conducteurs dont l'écoulement peut être libre ou contraint. Les dynamos en écoulement contraint ont souvent permis l'observation de cet effet en laboratoire, on retiendra la dynamo de G. O. Roberts de Karlsruhe et la dynamo de Ponomarenko de Riga. En revanche les expériences de dynamo où l'écoulement n'est pas contraint mais est obtenu via un forçage mécanique sont assez nombreuses mais, à ce jour, seule l'expérience de Von Kármán Sodium (VKS) a donné en lieu à l'effet dynamo. Dans le paragraphe qui suit, je me propose de présenter brièvement les différentes dynamos évoquées.

La dynamo homopolaire de Bullard (1955)

Cette dynamo est le modèle le plus simple de dynamo auto-entretenu, étudiée par Bullard. Ce dispositif consiste en un disque conducteur que l'on met en rotation dans un champ magnétique axial. Une différence de potentiels est alors induite entre le centre et le bord du disque. Un fil électrique faisant le tour de l'axe est relié d'une part à l'axe et d'autre part au bord du disque (les contacts électriques sont libres vis à vis de la rotation), voir schéma (2.5 a) . La f.e.m (force électro-motrice) induite fait circuler un courant dans cette boucle. La spire ainsi constituée va à son tour générer un champ magnétique axial qui se superpose au champ excitateur. Le dispositif donne donc lieu à une dynamo auto-excitée.

La dynamo de Lowes et Wilkinson (1963)

La dynamo de Lowes et Wilkinson est constituée de deux cylindres métalliques dont les axes de rotation sont contenus dans des plans différents pouvant tourner dans un bloc du même métal, voir schéma figure (2.5). Une rotation différentielle va se développer dans le fond du cylindre qui tourne par rapport au bloc qui est immobile. Si

une fluctuation de champ magnétique d'axe parallèle à l'un des cylindres tournants apparaît, la rotation différentielle induit un champ magnétique toroïdal qui joue le rôle d'un champ magnétique axial pour le deuxième cylindre. Si ce dernier tourne dans le bon sens, il induit alors, toujours par effet de rotation différentielle, un champ magnétique qui a une composante positive le long de l'axe du premier cylindre, amplifiant ainsi la perturbation initiale. Lorsque la vitesse des cylindres est suffisante, le champ magnétique est ainsi auto-entretenu [53].

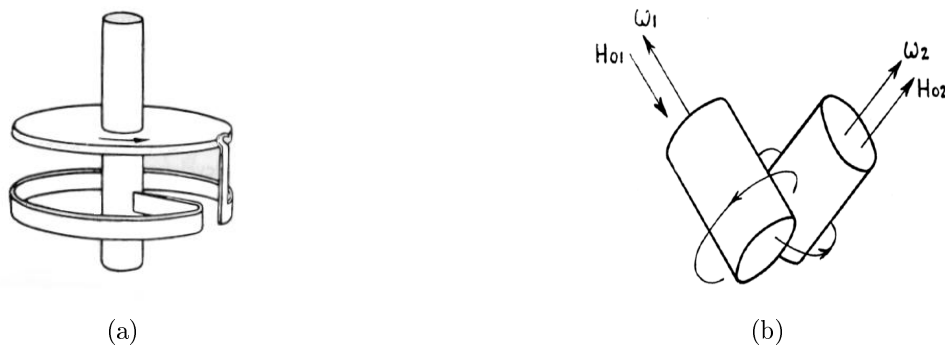


FIG. 2.5 – (a) Schéma de la dynamo homopolaire de Bullard (1955). (b) Schéma de la dynamo de Lowes et Wilkinson (1963)

La dynamo de G. O. Roberts de Karlsruhe (Allemagne)(2000)

Cette expérience [78, 82, 84, 64] utilise l'écoulement analytique de G.O. Roberts [71]. L'écoulement est périodique et indépendant de la variable axiale, son expression analytique est $\mathbf{U} = \sin(y)\mathbf{e}_x + \sin(x)\mathbf{e}_y + (\cos(x) - \cos(y))\mathbf{e}_z$. Afin de réaliser un dispositif expérimental capable de générer un écoulement proche de l'écoulement analytique de G.O. Roberts une expérience a été réalisée à Karlsruhe en Allemagne. Elle consiste en un ensemble d'écoulements hélicoïdaux de composantes axiales opposées, engendrés dans un réseau de tubes à l'aide de pompes. La figure 2.6 (a) montre le dispositif expérimental. Un dipôle magnétique stationnaire perpendiculaire à l'axe des tubes a été observé pour la première fois en février 2000, dont la valeur à saturation, à 10% au dessus du seuil, est de l'ordre de $250G$.

La dynamo de Cadarache (France)(2006)

Ce projet, appelé Von Kármán Sodium (VKS), est actuellement mené conjointement par des équipes du CEA Saclay, du CEA Cadarache et des Ecoles Normales Supérieures de Paris et de Lyon. Il met en oeuvre l'écoulement de Von Kármán dans du sodium liquide. La configuration correspond à un cylindre de rapport de forme $H/R = 1.8$ avec H la hauteur et R le rayon du cylindre. Contrairement à la dynamo précédente l'écoulement est non contraint et est forcé par la contra-rotation de deux disques munis de pales. La figure 2.6 (b) montre le dispositif expérimental. L'écoulement engendré, pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds cinétique, est très turbulent et très hélicitaire. Une première version de l'expérience utilisant des turbines en acier n'a pas mené à l'observation de l'effet dynamo, mais a permis de mettre en évidence divers mécanismes d'induction [15, 59, 67, 56]. Une seconde version, comportant des moteurs deux fois plus puissants et surtout des turbines en fer doux, a donné l'effet dynamo en

septembre 2006. Tout un chapitre de ce mémoire sera notamment consacré au rôle de ces disques en fer doux dans le succès de la dynamo observée en 2006.

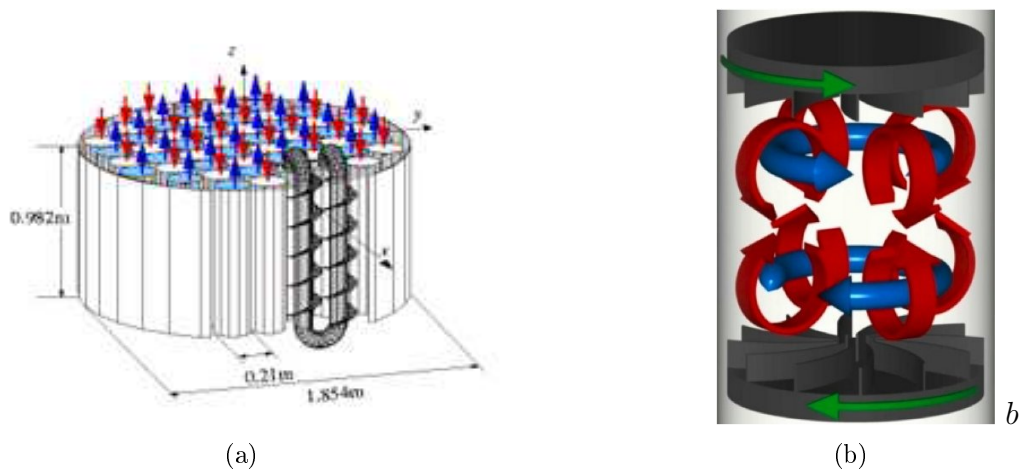


FIG. 2.6 – (a) Schéma de la dynamo de Karlsruhe (2000). (b) Schéma de la dynamo de l'écoulement de Von Kármán Sodium (VKS) située à Cadarache

Chapitre 3

Méthode numérique

Dans cette partie, nous introduisons les concepts mathématiques et les techniques numériques utilisés dans le cadre de cette thèse. L'originalité de la méthode hybride employée dans notre code numérique repose sur le fait que des éléments finis de Lagrange sont utilisés dans le plan méridien et un développement en séries de Fourier est fait dans la direction azimutale. Une première thèse réalisée par Raphaël Laguerre a permis de développer un code numérique capable de résoudre séparément les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'induction magnétique. Les applications réalisées ont essentiellement concerné l'étude de problèmes de dynamos cinématiques, c'est-à-dire que l'équation de l'induction est résolue pour un champ de vitesse fixé. A partir de 2006, deux améliorations majeures ont été apportées : (i) la prise en compte de sauts de perméabilité dans la résolution des équations de Maxwell ; (ii) une amélioration de la méthode de parallélisation dans le traitement des termes non linéaires qui couplent les équations de Navier-Stokes et les équations de Maxwell. L'implémentation a été assurée par Jean-Luc Guermond durant un de mes séjours à l'université Texas A&M de Septembre 2008 à Décembre 2008 ainsi qu'au cours d'un séjour au LIMSI de Jean-Luc Guermond en tant que professeur invité en juin 2008. Mon travail a été de suivre l'implémentation et d'en assurer la validation et l'extension à un cas physique présenté au chapitre 6.

Dans une première section est introduite la méthode implémentée afin de résoudre les équations de Maxwell avec prise en compte de sauts de perméabilité magnétique, ainsi qu'une validation de la méthode sur un problème d'induction magnétique dont la solution analytique est connue. Une deuxième partie présente brièvement la méthode utilisée pour le traitement des équations de Navier-Stokes (une présentation plus détaillée est faite dans le manuscrit de thèse de Raphaël Laguerre [48]). Enfin dans une troisième partie, on montre l'apport en terme de temps calcul des modifications apportées dans le traitement du terme non linéaire.

3.1 Approximation des équations de Maxwell

Les sections suivantes relatives aux méthodes numériques utilisées sont essentiellement la traduction d'un article "Journal of Computational Physics" en préparation qui devrait être soumis sous peu.

3.1.1 Aspects géométriques

Nous souhaitons résoudre les équations de la MHD dans un domaine hétérogène axisymétrique noté $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. La frontière de Ω est notée Γ . Le domaine Ω peut être subdivisé en un sous-domaine conducteur noté Ω_c et en un sous-domaine isolant noté Ω_v de la façon suivante :

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_c} \cup \overline{\Omega_v}, \quad \Omega_c \cap \Omega_v = \emptyset. \quad (3.1.1)$$

L'interface séparant la région conductrice de la région isolante est définie comme suit :

$$\Sigma = \partial\Omega_c \cap \partial\Omega_v. \quad (3.1.2)$$

La nouveauté de la méthode présentée réside dans le fait que la perméabilité magnétique, μ , n'est plus considérée comme constante sur l'ensemble du domaine Ω_c mais comme constante par morceaux. Le domaine conducteur Ω_c peut être subdivisé en plusieurs sous-domaines $\Omega_{c1}, \dots, \Omega_{cN}$, et la perméabilité magnétique sur chacun de ces sous-domaines est μ_1, \dots, μ_N . En d'autres termes Ω_c peut être défini comme suit :

$$\overline{\Omega_c} = \overline{\Omega_{c1}} \cup \dots \cup \overline{\Omega_{cN}}, \quad \Omega_{ci} \cap \Omega_{cj} = \emptyset, \quad \forall i, j \in \overline{1, N}. \quad (3.1.3)$$

l'interface séparant deux sous-domaines conducteurs est notée Σ_μ ,

$$\Sigma_\mu = \cup_{i,j \in \overline{1, N}} \overline{\Omega_{ci}} \cap \overline{\Omega_{cj}} \quad (3.1.4)$$

On introduit les frontières $\Gamma_c = \Gamma \cap \partial\Omega_c$ et $\Gamma_v = \Gamma \cap \partial\Omega_v$ sur lesquelles seront appliquées des conditions limites. On doit avoir $\Gamma = \Gamma_v \cup \Gamma_c$, et on note Γ_v^0 la frontière du domaine isolant contenant Γ_v . On suppose que $\partial\Omega_v$ a $J + 1$ composantes connexes, soit :

$$\Gamma_v^0, \Gamma_v^1, \dots, \Gamma_v^J. \quad (3.1.5)$$

On remarque que $\Sigma = (\Gamma_v^0 \setminus \Gamma_v) \cup \Gamma_v^1 \cup \dots \cup \Gamma_v^J$.

Pour illustrer les notations, la figure 3.1 représente deux exemples de domaine Ω , les lignes pointillées verticales représentent l'axe de symétrie; seul le plan méridien de chaque région est représenté. La figure 3.1.a représente un domaine de calcul pour $J = 2$ (soit 3 tores conducteurs entourés de vide), l'interface Σ est définie comme suit : $\Sigma = (\Gamma_v^0 \setminus \Gamma_v) \cup \Gamma_v^1 \cup \Gamma_v^2$. On note également Σ_μ l'interface séparant deux domaine conducteur de perméabilité différente. Enfin pour la figure 3.1.b on a $J = 1$, $\Gamma_v^0 = \Gamma_v$, $\Gamma_c = \emptyset$, et $\Sigma = \Gamma_v^1$, la région conductrice étant composée de deux sous-régions de conductivités différentes et de différente perméabilité magnétique μ .

3.1.2 Formulation forte du problème

Les simulation de dynamo expérimentale ou d'objet d'objet astrophysique font intervenir une région conductrice composée d'un ou plusieurs fluides conducteurs en mouvement et un ou des domaine(s) solide(s). ces domaines peuvent éventuellement présenter des sauts de conductivité et de perméabilité magnétique. L'évolution temporelle des champs électrique et magnétique dans ces domaines est modélisée par les équations de Maxwell. Le champ de vitesse associé à l'évolution du fluide vérifie les

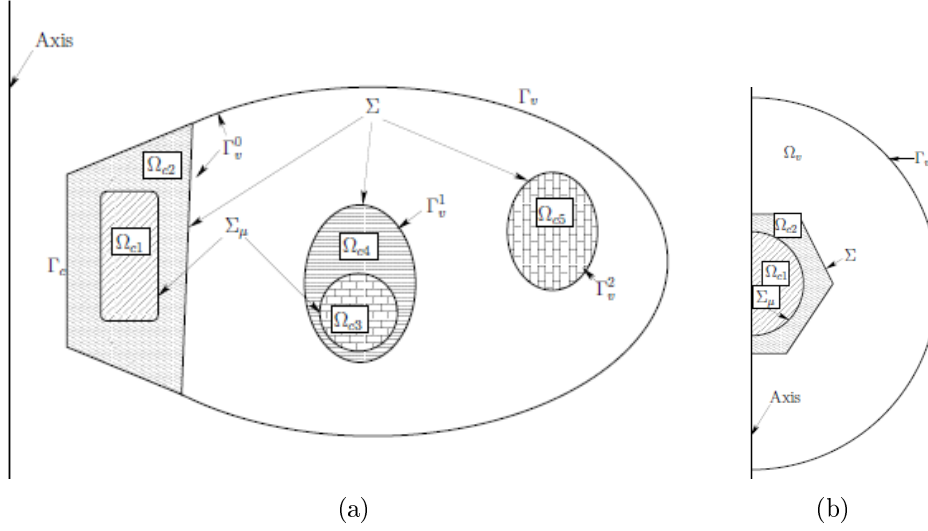


FIG. 3.1 – Deux exemples de configurations possibles pour Ω : les régions hachurées correspondent au domaine conducteur Ω_c présentant des conductivités électrique et/ou de perméabilités magnétiques différentes.

équations de Navier-Stokes incompressibles. Les interactions entre le champ électromagnétique et le champ de vitesse du fluide est prise en compte en compte via la force de Lorentz. Afin de simplifier le problème, dans cette section nous ne traitons que la partie magnétique du problème. On considère qu'au temps considéré le champ de vitesse est connu et cette quantité est notée $\tilde{\mathbf{u}}$. Dans ces conditions l'évolution du champ électromagnétique au cours du temps peut être modélisée par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \partial_t \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{E}, \text{ dans } \Omega \\ \nabla \times \mathbf{H} = \begin{cases} \sigma(\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{u}} \times \mu \mathbf{H}) + \mathbf{j}^s, & \text{dans } \Omega_c \\ 0, & \text{dans } \Omega_v \end{cases} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \text{ dans } \Omega_v \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_0, \text{ dans } \Omega_c \\ \int_{\Gamma_v^i} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad 1 \leq i \leq J \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire sortante de Γ . Ce système d'équations fait apparaître deux variables indépendantes, le temps t et l'espace. Les grandeurs \mathbf{H}_0 , \mathbf{a} et \mathbf{j}^s représentent respectivement un champ magnétique initial, une condition limite et une distribution de courant. On suppose que \mathbf{H}_0 satisfait la condition $\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}_0) = 0$. La perméabilité μ et la conductivité σ sont les paramètres physiques du problème considéré.

Soit \mathcal{U} l'échelle caractéristique du champ de vitesse $\tilde{\mathbf{u}}$ et soit c la vitesse de la lumière. On fait l'hypothèse que le rapport \mathcal{U}/c est négligeable. Dans ces conditions les courants de déplacement peuvent être négligés et ainsi annuler le terme $\epsilon \partial_t \mathbf{E}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère (cf. chapitre 1 section 1.2.1.1). Les conditions $\nabla \cdot \mathbf{E}|_{\Omega_v} = 0$ et $\int_{\Gamma_v^i} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$, $1 \leq i \leq J$ dérivent des équations de Maxwell-Ampère lorsque le rapport \mathcal{U}/c tend vers 0 (s'il n'y a pas de distribution de charges électrostatiques dans le domaine). Ces conditions assurent l'unicité de \mathbf{E} . Une présentation plus détaillée de l'analyse asymptotique de l'équation (3.1.6) est faite dans [14, 3].

Dans le paragraphe suivant on se propose d'adimensionner le système d'équations (3.1.6). Pour cela on introduit une grandeur dimensionnée \mathcal{L} qui représente une échelle spatiale caractéristique. On choisit le temps advectif comme temps de référence avec $\mathcal{T} := \mathcal{L}/\mathcal{U}$. Le fluide considéré a une densité olumiquee ρ constante, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique de référence sont notées respectivement μ_0 et σ_0 . L'échelle magnétique de référence est choisie de façon à avoir une vitesse d'Alfvén unitaire i.e. $\mathcal{H} := \sqrt{\rho\mu_0}\mathcal{U}$. Enfin, l'échelle de référence du champ électrique \mathbf{E} est définie comme $\mathcal{E} := \mu_0\mathcal{H}\mathcal{U}$. Le courant source \mathbf{j}^s et les données \mathbf{H}_0 , \mathbf{a} sont adimensionnées respectivement par $\mathcal{H}\mathcal{L}^{-1}$, \mathcal{H} et \mathcal{E} . Nous définissons le nombre de Reynolds magnétique comme suit :

$$R_m := \mathcal{U}\mathcal{L}\sigma_0\mu_0. \quad (3.1.7)$$

En conservant les mêmes symboles pour les grandeurs dimensionnées, le système (3.1.6) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu\partial_t\mathbf{H} = -\nabla\times\mathbf{E}, \text{ dans } \Omega \\ \nabla\times\mathbf{H} = \begin{cases} R_m\sigma(\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{u}}\times\mu\mathbf{H}) + \mathbf{j}^s, & \text{dans } \Omega_c \\ 0, & \text{dans } \Omega_v \end{cases} \\ \nabla\cdot\mathbf{E} = 0, \text{ dans } \Omega_v \\ \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{a}, \quad \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_0, \quad \text{dans } \Omega_c \\ \int_{\Gamma_v^i} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad 1 \leq i \leq J, \end{array} \right. \quad (3.1.8)$$

où σ et μ sont respectivement la conductivité électrique et la perméabilité magnétique relative.

3.1.2.1 Introduction du potentiel ϕ et élimination du champ \mathbf{E}

En plus des différentes hypothèses géométriques présentées précédemment, on suppose que le champ initial \mathbf{H}_0 est régulier sur Ω ainsi que $\nabla\cdot\mu_0\mathbf{H}_0|_\Omega = 0$ et $\nabla\times\mathbf{H}_0|_{\Omega_v} = 0$. On fait également l'hypothèse que le vide Ω_v est simplement connexe ou bien qu'il existe un mécanisme (par exemple une boucle de courant) qui assure que la circulation de \mathbf{H} le long de n'importe quelle région de vide est nulle pour tout t . Dans le vide la condition $\nabla\times\mathbf{H}|_{\Omega_v} = 0$ nous permet d'introduire un potentiel scalaire ϕ , défini à une constante près, tel que $\mathbf{H}|_{\Omega_v} = \nabla\phi$. On procède de même pour le champ initial \mathbf{H}_0 , ce qui nous permet d'introduire un potentiel ϕ_0 tel que $\mathbf{H}_0|_{\Omega_v} = \nabla\phi_0$. On définit \mathbf{H} le champ magnétique total de la façon suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{H}^c & \text{dans } \Omega_c \\ \nabla\phi & \text{dans } \Omega_v, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \mu^c & \text{dans } \Omega_c \\ \mu^v & \text{dans } \Omega_v. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

On note \mathbf{n}^c and \mathbf{n}^v les normales unitaires sortantes sur $\partial\Omega_c$ and $\partial\Omega_v$. De la même façon pour distinguer les limites $\lim_{\Omega_{c_i}\ni\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{x}}$ et $\lim_{\Omega_{c_j}\ni\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{x}}$ au sein de deux domaines conducteurs de perméabilité différentes où \mathbf{x} est situé sur l'interface Σ_μ soit $\mathbf{x} \in \overline{\Omega_{c_i}} \cap \overline{\Omega_{c_j}}$, on impose :

$$\mathbf{H}_1^c(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lim_{\Omega_{c_i}\ni\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{x}} \mathbf{H}^c(\mathbf{y}) & \text{si } i < j \\ \lim_{\Omega_{c_j}\ni\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{x}} \mathbf{H}^c(\mathbf{y}) & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad \mathbf{H}_2^c(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lim_{\Omega_{c_j}\ni\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{x}} \mathbf{H}^c(\mathbf{y}) & \text{si } i < j \\ \lim_{\Omega_{c_i}\ni\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{x}} \mathbf{H}^c(\mathbf{y}) & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Pour toute fonction (scalaire ou vectorielle) f qui est multi-valuée sur $\mathbf{x} \in \overline{\Omega_{ci}} \cap \overline{\Omega_{cj}}$ on définit la moyenne de f en \mathbf{x} comme suit :

$$\{f\}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})). \quad (3.1.11)$$

On introduit également $\mathbf{n}^{ci}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{n}^{cj}(\mathbf{x})$, les normales unitaires sortantes en \mathbf{x} sur les interfaces $\partial\Omega_{ci}$ et $\partial\Omega_{cj}$. On pose $\mathbf{n}_1^c(\mathbf{x}) = \mathbf{n}^{ci}(\mathbf{x})$ and $\mathbf{n}_2^c(\mathbf{x}) = \mathbf{n}^{cj}(\mathbf{x})$ si $i < j$.

Dans ces conditions on peut éliminer le champ électrique du système d'équations (3.1.6) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu^c \partial_t \mathbf{H}^c = -\nabla \times (R_m^{-1} \sigma^{-1} (\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}} \times \mu^c \mathbf{H}^c), & \text{pour tout } \Omega_{ci}, i \in \overline{1, N} \\ \mu^v \partial_t \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega_v \\ (R_m^{-1} \sigma^{-1} (\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}} \times \mu^c \mathbf{H}^c) \times \mathbf{n}^c = \mathbf{a} & \text{sur } \Gamma_c \\ \mu^v \partial_{\mathbf{n}^v} (\partial_t \phi) = -\mathbf{n}^v \cdot \nabla \times (\mathbf{n}^v \times \mathbf{a}), & \text{sur } \Gamma_v \\ \mathbf{H}_1^c \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{H}_2^c \times \mathbf{n}_2^c = 0 & \text{sur } \Sigma_\mu \\ \mu_1^c \mathbf{H}_1^c \cdot \mathbf{n}_1^c + \mu_2^c \mathbf{H}_2^c \cdot \mathbf{n}_2^c = 0 & \text{sur } \Sigma_\mu \\ \mathbf{H}^c \times \mathbf{n}^c + \nabla \phi \times \mathbf{n}^v = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \mu^c \mathbf{H}^c \cdot \mathbf{n}^c + \mu^v \nabla \phi \cdot \mathbf{n}^v = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{H}^c|_{t=0} = \mathbf{H}_0^c, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0. & \end{array} \right. \quad (3.1.12)$$

Pour plus de détails voir par exemple [37].

On peut remarquer que l'opérateur $\mathbf{n}^v \cdot \nabla \times (\cdot)$ ne fait intervenir que des dérivées tangentielles du champ magnétique sur l'interface Γ . Les deux conditions $(\mu^c \mathbf{H}^c \cdot \mathbf{n}^c + \mu^v \nabla \phi \cdot \mathbf{n}^v)|_\Sigma = 0$ et $(\mu_1^c \mathbf{H}_1^c \cdot \mathbf{n}_1^c + \mu_2^c \mathbf{H}_2^c \cdot \mathbf{n}_2^c)|_{\Sigma_\mu} = 0$ traduisent la continuité des composantes normales de l'induction magnétique au travers des interfaces Σ et Σ_μ . Ces deux contraintes découlent de la continuité des composantes tangentielles du champ électrique \mathbf{E} au travers des interfaces Σ et Σ_μ .

Dans le cas où le champ électrique est nécessaire dans nos simulations, il est calculé dans le domaine conducteur grâce à la loi d'Ohm : $\mathbf{E}^c := (R_m \sigma)^{-1} (\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}} \times \mu^c \mathbf{H}^c$. Dans les régions isolantes le champ électrique est obtenu par la résolution du problème de Cauchy-Riemann : $\nabla \times \mathbf{E}^v = -\mu^v \partial_t \nabla \phi$, $\nabla \cdot \mathbf{E}^v = 0$, $\mathbf{E}^v \times \mathbf{n}^v|_\Sigma = -\mathbf{E}^c \times \mathbf{n}^c|_\Sigma$, $\mathbf{E}^v \times \mathbf{n}^v|_{\Gamma_v} = \mathbf{a}$, et $\int_{\Gamma_i} \mathbf{E}^v \cdot \mathbf{n}^v = 0$, $1 \leq i \leq J$.

3.1.3 Formulation faible du problème

Une formulation faible du système d'équation (3.1.6) avec le champ électrique éliminé (i.e.(3.1.12)) a été réalisée dans [37] lorsque la perméabilité μ est continue. Dans cette partie on se propose de présenter une formulation faible de (3.1.12) dans le cas où la perméabilité est discontinue. Dans ce but on introduit les espaces de Hilbert suivants :

$$\mathbf{L} = \{(\mathbf{b}, \varphi) \in \mathbf{L}^2(\Omega_c) \times H_{f=0}^1(\Omega_v)\}, \quad (3.1.13)$$

$$\mathbf{X} = \{(\mathbf{b}, \varphi) \in \mathbf{H}_{\text{curl}}(\Omega_c) \times H_{f=0}^1(\Omega_v); (\mathbf{b} \times \mathbf{n}^c + \nabla \varphi \times \mathbf{n}^v)|_\Sigma = 0\}, \quad (3.1.14)$$

On munit \mathbf{L} et \mathbf{X} des normes $\mathbf{L}^2(\Omega_c) \times H^1(\Omega_v)$ et $\mathbf{H}_{\text{curl}}(\Omega_c) \times H^1(\Omega_v)$. $H_{f=0}^1(\Omega_v)$ est le sous-espace de $H^1(\Omega_v)$ composé des fonctions dont la moyenne sur Ω_v est nulle. L'espace

vectorel $\mathbf{H}_{\text{curl}}(\Omega_c)$ est composé des fonctions vectorielles dont les composantes sont L^2 -intégrables et dont le rotationnel est également L^2 -intégrable. L'espace $\mathbf{H}_{\text{div}}(\Omega)$ est composé des fonctions vectorielles à composantes L^2 -intégrable et dont la divergence est également L^2 -intégrable. Enfin les champs \mathbf{b} appartenant à $\mathbf{H}_{\text{curl}}(\Omega_c)$ sont tels que les composantes tangentielles de \mathbf{b} sont continues à travers l'interface Σ_μ , i.e. $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}_2^c = 0$.

De la même façon que dans [37] et en s'inspirant de la méthode de Pénalisation Intérieure de Galerkin (IPG) [6, 8], nous pouvons reformuler le problème de la façon suivante : Trouver une paire $(\mathbf{H}^c, \phi) \in L^2((0, +\infty); \mathbf{X}) \cap L^\infty((0, +\infty); \mathbf{L})$ (avec $\partial_t \mathbf{H}^c$ et $\partial_t \phi$ dans les espaces vectoriels appropriés) telle que pour toute paire de fonctions $(\mathbf{b}, \varphi) \in \mathbf{X}$ et pour tout $t \in [0, +\infty]$ les égalités suivantes soient vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}^c|_{t=0} = \mathbf{H}_0^c; \quad \nabla \phi|_{t=0} = \nabla \phi_0, \\ \int_{\Omega_c} [\mu^c(\partial_t \mathbf{H}^c) \cdot \mathbf{b} + ((R_m \sigma)^{-1}(\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}} \times \mu^c \mathbf{H}^c) \cdot \nabla \times \mathbf{b}] + \int_{\Omega_v} \mu^v(\partial_t \nabla \phi) \cdot \nabla \varphi \\ \quad + \int_{\Sigma_\mu} \{(R_m \sigma)^{-1}(\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}} \times \mu^c \mathbf{H}^c\} \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}_2^c) \\ \quad + \int_{\Sigma} ((R_m \sigma)^{-1}(\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}} \times \mu^c \mathbf{H}^c) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{n}^c + \nabla \varphi \times \mathbf{n}^v) \\ \quad = \int_{\Gamma_c} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{n}) + \int_{\Gamma_v} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot (\nabla \varphi \times \mathbf{n}). \end{array} \right. \quad (3.1.15)$$

Les intégrales de surface sur Σ et Σ_μ sont nulles dès que $\mathbf{b} \times \mathbf{n}^c + \nabla \varphi \times \mathbf{n}^v = 0$ et $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}_2^c = 0$, cependant si on utilise un espace d'éléments finis non conformes ces deux intégrales ne sont pas nulles (pour plus de détails voir §3.3). Les composantes tangentielles de la quantité $((R_m \sigma)^{-1}(\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}} \times \mu^c \mathbf{H}^c)$ sont égales à la moyenne des composantes tangentielles du champ électrique ; comme les composantes tangentielles du champ électrique sont continues au travers de l'interface Σ_μ , les deux termes apparaissant dans la moyenne sont par conséquent égaux.

La prise en compte de saut de permabilité magnétique est assurée grâce à l'intégrale de surface sur Σ_μ apparaissant dans (3.1.15). Cette intégrale de surface sur Σ_μ apparaît quand on multiplie l'équation de Faraday (3.1.12) par des fonctions tests \mathbf{b} continues par morceau sur les sous-domaines $\Omega_{c1}, \dots, \Omega_{cN}$. Ces fonctions tests ont des composantes tangentielles discontinues au travers de l'interface Σ_μ .

La formulation faible (3.1.15) assure naturellement la continuité de la composante normale du champ magnétique au travers de l'interface séparant deux domaines conducteurs i.e. $\mu_1^c \mathbf{H}_1^c \cdot \mathbf{n}_1^c + \mu_2^c \mathbf{H}_2^c \cdot \mathbf{n}_2^c = 0$ au travers de Σ_μ . Afin de démontrer cela, introduisons le champ électrique dans Ω_c tel que $\mathbf{E}^c := (R_m \sigma)^{-1}(\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}} \times \mu^c \mathbf{H}^c$. En utilisant des fonctions tests dont le support est dans Ω_c , on peut remarquer que, dans l'équation (3.1.15), les champs \mathbf{H}^c and \mathbf{E}^c sont reliés par la loi de Faraday telle que : $\mu^c \partial_t \mathbf{H}^c = -\nabla \times \mathbf{E}^c$ (après intégration par parties). De la même façon, en utilisant des fonctions tests dont le support est compact sur Ω_c et dont l'intersection avec Σ_μ est vide, on peut déduire de (3.1.15) que les composantes tangentielles de \mathbf{E}^c sont continues au travers de Σ_μ , i.e. $\mathbf{E}_1^c \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{E}_2^c \times \mathbf{n}_2^c = 0$ (en intégrant par partie le long de Ω_{c1} et le long de Ω_{c2}). Cette continuité implique $(\nabla \times \mathbf{E}_1^c) \cdot \mathbf{n}_1^c + (\nabla \times \mathbf{E}_2^c) \cdot \mathbf{n}_2^c = 0$ le long de Σ_μ , ce qui d'après la loi de Faraday implique que $\partial_t(\mu_1 \mathbf{H}_1^c \cdot \mathbf{n}_1^c + \mu_2 \mathbf{H}_2^c \cdot \mathbf{n}_2^c) = 0$ au travers de Σ_μ . On peut conclure que $\mu_1 \mathbf{H}_1^c \cdot \mathbf{n}_1^c + \mu_2 \mathbf{H}_2^c \cdot \mathbf{n}_2^c = 0$ au travers de l'interface Σ_μ si

cette relation est vérifiée au temps initial $t = 0$, (rappelons que \mathbf{H}_0 doit être un champ régulier et à divergence nulle sur Ω_c).

3.1.4 Tests de convergence pour un cas d'induction en géométrie sphérique

Afin de tester et valider la méthode nous permettant de prendre en compte des sauts de perméabilité magnétique dans la résolution de l'équation d'induction, nous utilisons une configuration faisant intervenir des milieux de perméabilités magnétiques différentes, pour laquelle la solution analytique est connue. Nous étudions un cas d'induction magnétique d'une sphère composite présentant des sauts de perméabilité magnétique. Ce problème est traité analytiquement par E. Durand dans [19]. Considérons une sphère conductrice constituée de deux régions de perméabilités différentes, plongée dans un champ magnétique vertical $\mathbf{H}_0 := H_0 \mathbf{e}_z$ (figure 3.2). On cherche le champ magnétique stationnaire dans trois régions distinctes : dans une première région pour $\varrho \leq R_1$, de conductivité σ_1 et de perméabilité magnétique μ_1 , dans une deuxième région de rayon $R_1 \leq \varrho \leq R_2$, de conductivité σ_2 et de perméabilité magnétique μ_2 , ainsi que dans le vide entourant les deux coquilles sphériques pour $\varrho \geq R_2$.

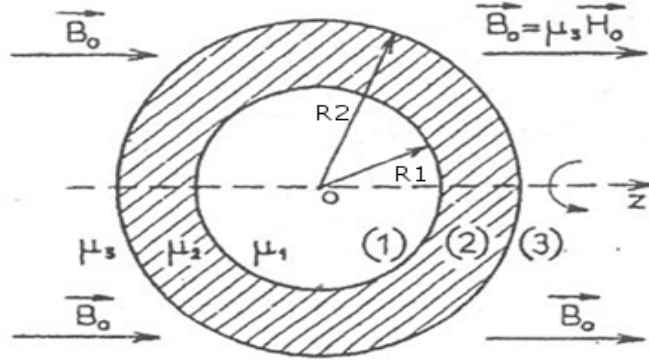


FIG. 3.2 – Schéma représentant l'induction d'une sphère en couches avec des coquilles de perméabilités magnétiques différentes [19].

Le champ magnétique doit vérifier dans les deux régions conductrices et dans le vide :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0, \quad \text{dans } \Omega := \mathbb{R}^3. \quad (3.1.16)$$

dont la solution est donnée par $\mathbf{H} = \nabla \psi$ où ψ est un potentiel scalaire qui devant vérifier $\nabla \cdot (\mu \nabla \psi) = 0$ avec $\nabla \psi \rightarrow H_0 \mathbf{e}_z$ à l'infini.

En considérant les coordonnées sphériques $(\varrho, \vartheta, \theta)$, où ϱ représente la distance à l'origine, $\vartheta \in [0, \pi]$ représente la colatitute et $\theta \in [0, 2\pi)$ représente l'azimut, on peut exprimer ce potentiel dans les trois régions de la façon suivante :

$$\psi(\varrho, \vartheta, \theta) = \begin{cases} -A\varrho \cos \vartheta, & \text{pour } \varrho \leq R_1 \\ -\left(B\varrho + C\frac{R_1^3}{\varrho^2}\right) \cos \vartheta & \text{pour } R_1 \leq \varrho \leq R_2 \\ -\left(D\frac{R_2^3}{\varrho^2} - H_0\varrho\right) \cos \vartheta & \text{pour } R_2 \leq \varrho, \end{cases} \quad (3.1.17)$$

où A , B , C et D sont des constantes. Ces constantes peuvent être calculées analytiquement en considérant la continuité de ψ et de $\mu\partial_\varrho\psi$ sur les interfaces Σ_μ et Σ (pour rappel, la continuité de ψ implique la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique sur l'interface Σ_μ , et celle de $\mu\partial_\varrho\psi$ implique la continuité de la composante normale de $\mu\mathbf{H}$). Afin de simplifier les expressions des constantes A , B , C et D , on s'intéresse au cas $\mu_1 = \mu_0$ et $\mu := \mu_2/\mu_0$. Dans ces conditions, on a :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{9\mu H_0}{(2\mu+1)(\mu+2) - 2(\mu-1)^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} \\ D &= \frac{(2\mu+1)(\mu-1) \left[\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 - 1 \right] H_0}{(2\mu+1)(\mu+2) - 2(\mu-1)^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} \\ B &= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{\mu}\right) A, \quad C = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) A. \end{aligned}$$

Ces expressions permettent d'écrire le champ magnétique en coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec $\varrho = \sqrt{r^2 + z^2}$, $z = \varrho \cos \vartheta$. Dans ces coordonnées le champ magnétique dans les zones conductrices peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{cases} \varrho \leq R_1 & R_1 \leq \varrho \leq R_2 \\ H_r = 0 & H_r = 3CR_1^3 \left(\frac{zr}{\varrho^5}\right) \\ H_\theta = 0 & H_\theta = 0 \\ H_z = -A & H_z = C \left(\frac{R_1}{\varrho}\right)^3 (3\frac{z^2}{\varrho^2} - 1) - B \end{cases} \quad (3.1.18)$$

On peut remarquer que la conductivité électrique σ n'intervient pas dans l'expression du champ magnétique. La sphère interne de rayon $\varrho = R_1$ peut donc avoir des propriétés différentes. Soit on la considère comme étant conductrice (avec $\mu_1 = \mu_0$) et, dans ce cas, on a deux domaines conducteurs à traiter $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Soit on la considère comme étant isolante, auquel cas on a un seul milieu conducteur $\Omega_c = \Omega_2$. Ces deux cas sont décrits par la même solution en régime stationnaire mais, comme nous allons le voir à la section suivante, la solution doit être approchée par deux algorithmes numériques différents. On peut faire une dernière remarque : dans la sphère de petit rayon R_1 , le champ magnétique est uniforme et vertical, tel que $\mathbf{H} = -A\mathbf{e}_z$. Or, dans la limite où $\mu \rightarrow \infty$, on a $A \rightarrow 0$, $B \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$ et $D \rightarrow \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 H_0$. Le champ magnétique tend donc vers zéro pour $\varrho \leq R_2$. Cependant, l'induction magnétique n'est pas nulle pour la coquille sphérique comprise entre R_1 et R_2 .

3.1.4.1 Cas 1 : induction dans une sphère en couches

On considère dans ce cas que la sphère interne est conductrice, par conséquent $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2$, (i.e.le milieu conducteur est constitué des deux coquilles sphériques). On prend $\mathcal{L} := R_2$ comme longueur caractéristique de référence et on pose $R_1 = \frac{1}{2}R_2$. Le vide considéré comme infini dans le cas analytique est approché par une région sphérique de rayon $10R_2$. Ici on ne considère que l'aspect magnétique du problème, on choisit $\mathcal{H} := H_0$ comme champ magnétique adimensionné.

La solution stationnaire est calculée en résolvant (3.3.15) au cours du temps, avec $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0$, jusqu'à ce que la convergence vers le régime stationnaire soit atteinte. Au niveau de la frontière du domaine de calcul Γ_v , on impose une condition limite de type Dirichlet indépendante du temps $\phi = H_0 z := H_0 \varrho \cos \vartheta$. En fonction de la valeur choisie pour la perméabilité μ , le champ magnétique pénètre plus ou moins dans la sphère conductrice, il faut dans ce cas adapter le pas de temps Δt .

Afin de tester la robustesse et l'efficacité de notre méthode, nous avons fait varier la perméabilité μ et étudié la convergence en maillage. Les maillages utilisés sont constitués d'éléments de Lagrange de type \mathbb{P}_1 ou \mathbb{P}_2 pour les grandeurs vectorielles et de type \mathbb{P}_2 pour les grandeurs scalaires. Le pas de maillage est noté h et correspond à la distance moyenne séparant deux nœuds consécutifs dans un élément \mathbb{P}_2 . Pour chaque simulation, nous avons mesuré l'erreur relative commise sur les grandeurs \mathbf{H}^c , $\nabla \times \mathbf{H}^c$, $\nabla \cdot (\mu^c \mathbf{H}^c)$ en norme L^2 , et sur le potentiel scalaire ϕ en norme H^1 . Les résultats sont présentés dans les tableaux 3.1 et 3.2.

μ	h	\mathbf{H}^c, L^2	rate	$\nabla \times \mathbf{H}^c, L^2$	rate	$\nabla \cdot (\mu^c \mathbf{H}^c), L^2$	rate	ϕ, H^1	rate
2	0.2	3.31E-2	-	5.87E-2	-	6.13E-2	-	8.14E-4	-
2	0.1	1.01E-2	1.713	1.09E-2	2.429	1.51E-2	2.021	2.95E-4	1.464
2	0.05	3.61E-3	1.484	3.26E-3	1.741	4.10E-3	1.881	1.10E-4	1.423
100	0.2	9.37E-2	-	1.18E-1	-	9.35E-2	-	2.51E-4	-
100	0.1	2.85E-2	1.717	2.53E-2	2.222	2.35E-2	1.992	7.08E-5	1.826
100	0.05	1.03E-2	1.468	8.64E-3	1.550	8.50E-3	1.467	2.48E-5	1.513

TAB. 3.1 – Cas 1, $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_2$; $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$ pour $\mu = 2$, $\Delta t = 2.510^{-2}$ pour $\mu = 100$.

μ	h	\mathbf{H}, L^2	rate	$\nabla \times \mathbf{H}, L^2$	rate	$\nabla \cdot (\mu^c \mathbf{H}^c), L^2$	rate	ϕ, H^1	rate
2	0.2	4.41E-3	-	8.06E-3	-	9.29E-3	-	3.24E-4	-
2	0.1	5.77E-4	2.934	1.41E-3	2.515	1.88E-3	2.305	4.93E-5	2.716
2	0.05	7.16E-5	3.011	3.24E-4	2.122	3.74E-4	2.330	7.41E-6	2.734
100	0.2	1.37E-2	-	1.28E-2	-	1.59E-2	-	2.48E-4	-
100	0.1	2.56E-3	2.420	1.97E-3	2.700	3.42E-3	2.217	8.33E-5	1.574
100	0.05	5.03E-4	2.348	3.87E-4	2.348	6.57E-4	2.380	2.64E-5	1.658

TAB. 3.2 – Cas 1, $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_2$; $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$ pour $\mu = 2$, $\Delta t = 2.510^{-2}$ pour $\mu = 100$.

On constate que la méthode converge bien pour des perméabilités $\mu \in [2, 200]$. On note une meilleure convergence pour le cas $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_2$, elle est cependant plus rapide pour le cas $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_2$. La figure 3.3 montre la solution stationnaire du problème étudié pour $\mu = 200$. Dans la figure 3.3 (a), on voit que la composante radiale H_r^c s'annule en $(\varrho = R_1, \vartheta = \pi/2)$, et qu'elle est continue en $(\varrho = R_1$ et $\vartheta = 0, \vartheta = \pi)$. On a bien continuité des composantes tangentielles du champ magnétique. Dans la figure 3.3 (b), on voit que la composante verticale H_z^c est continue en $(\varrho = R_1, \vartheta = \pi/2)$ et est discontinue en $(\varrho = R_1$ et $\vartheta = 0, \vartheta = \pi)$. On a bien continuité des composantes tangentielles et discontinuité de la composante normale du champ magnétique.

Enfin, les lignes de champ magnétique (tangentes à \mathbf{H}^c pour $0 \leq \varrho \leq R_2$ et à $\nabla \phi$ pour

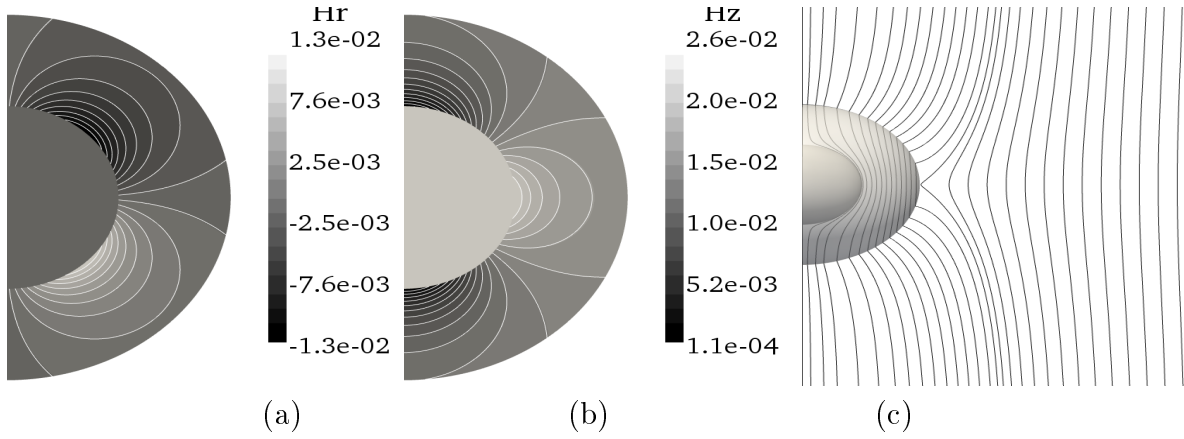


FIG. 3.3 – Solution stationnaire pour une sphère composite plongée dans un champ magnétique extérieur : (a-b) montre les composantes H_r et H_z dans le cas où la perméabilité de la coquille sphérique externe est 200 fois plus grande que celle de la sphère interne, (c) montre les lignes de champ magnétique.

$R_2 \leq \varrho$) représentées en figure 3.3 (c) sont approximativement perpendiculaires à la sphère externe dans la limite $\mu \rightarrow \infty$.

3.1.4.2 Cas 2 : induction dans une sphère creuse

On s'intéresse au même problème que précédemment en considérant que la sphère interne est isolante et non plus conductrice, i.e. $\Omega_c = \Omega_2$. Le domaine non-conducteur, Ω_v , est cette fois composé de la sphère interne Ω_1 et de l'anneau sphérique $\varrho \in (R_2, 10R_2)$. Nous avons répété les mêmes tests de référence que dans le cas précédent. On vérifie dans un premier temps qu'on a exactement les mêmes solutions que dans le cas de la sphère en couches. Les résultats sont reportés dans les tableaux 3.3 et 3.4. La méthode converge bien dans les deux cas $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_2$ et $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_2$.

3.2 Approximation des équations de Navier-Stokes

Dans cette partie on se propose de présenter brièvement comment sont approchées numériquement les équations de Navier-Stokes (pour plus de détails le lecteur peut se reporter à l'article [38] ou à la thèse de Raphaël Laguerre [48]).

3.2.1 Aspects géométriques du problème

La région conductrice Ω_c peut être composée d'une partie solide, notée Ω_{cs} , et d'une partie fluide, Ω_{cf} , de sorte que :

$$\overline{\Omega_c} = \overline{\Omega_{cs}} \cup \overline{\Omega_{cf}}, \quad \Omega_{cs} \cap \Omega_{cf} = \emptyset. \quad (3.2.1)$$

On introduit Γ_f la frontière du domaine Ω_{cf} . Dans les problèmes de MHD auxquels nous nous intéressons, la région du fluide est une sous région de $\Omega_{c1}, \dots, \Omega_{cN}$. Par exemple au regard de la figure 3.1(a), les domaines Ω_{c1} et Ω_{c3} peuvent éventuellement être des

μ	h	\mathbf{H}, L^2	rate	$\nabla \times \mathbf{H}, L^2$	rate	$\nabla \cdot (\mu^c \mathbf{H}^c), L^2$	rate	ϕ, H^1	rate
2	0.2	9.73E-2	-	2.20E-1	-	1.55E-1	-	2.95E-3	-
2	0.1	6.68E-2	0.543	6.19E-2	1.829	5.84E-2	1.408	1.60E-3	0.883
2	0.05	2.70E-2	1.307	1.15E-2	2.428	1.16E-2	2.332	5.77E-4	1.471
100	0.2	4.55E-2	-	1.11E-1	-	1.32E-1	-	3.77E-4	-
100	0.1	1.25E-2	1.864	3.48E-2	1.673	4.98E-2	1.406	1.33E-4	1.503
100	0.05	3.82E-3	1.710	1.36E-2	1.355	1.87E-2	1.413	4.42E-5	1.589

TAB. 3.3 – Cas 2, $\mathbb{P}1/\mathbb{P}2$; $\Delta t = 5.0 \cdot 10^{-4}$ pour $\mu = 2$, $\Delta t = 5.010^{-2}$ pour $\mu = 100$.

μ	h	\mathbf{H}, L^2	rate	$\nabla \times \mathbf{H}, L^2$	rate	$\nabla \cdot (\mu^c \mathbf{H}^c), L^2$	rate	ϕ, H^1	rate
2	0.2	1.01E-2	-	1.54E-2	-	1.09E-2	-	5.16E-4	-
2	0.1	1.38E-3	2.872	2.71E-3	2.507	1.47E-3	2.890	6.60E-5	2.967
2	0.05	1.49E-4	3.211	6.65E-4	2.027	2.98E-4	2.302	8.85E-6	2.899
100	0.2	7.97E-3	-	2.81E-2	-	3.00E-2	-	2.93E-4	-
100	0.1	1.85E-3	2.107	5.86E-3	2.262	1.03E-2	1.542	1.14E-4	1.362
100	0.05	4.11E-4	2.170	1.39E-3	2.076	2.48E-3	2.054	2.81E-5	2.020

TAB. 3.4 – Cas 2, $\mathbb{P}2/\mathbb{P}2$; $\Delta t = 5.0 \cdot 10^{-4}$ pour $\mu = 2$, $\Delta t = 2.510^{-2}$ pour $\mu = 100$.

régions de fluide entourées de régions solides conductrices, idem sur la figure 3.1(b). Le champ de vitesse $\tilde{\mathbf{u}}$ est nul ou égal à une rotation solide dans Ω_{cs} . Dans Ω_{cf} le champ de vitesse résulte généralement de la résolution des équations de Navier-Stokes. Dans certaines applications le champ de vitesse $\tilde{\mathbf{u}}$ résulte d'une analyse théorique ou bien de mesures expérimentales.

Tout comme nous l'avons fait précédemment on se propose de donner une version adimensionnée des équations de Navier-Stokes. Le fluide est de densité ρ constante. On adimensionne la vitesse par une échelle caractéristique \mathcal{U} et la pression par $\mathcal{P} := \rho \mathcal{U}^2$. Dans ces conditions nous voyons apparaître le nombre de Reynolds dynamique défini comme suit :

$$Re := \frac{\mathcal{U}\mathcal{L}}{\nu}. \quad (3.2.2)$$

En conservant les mêmes notations pour les grandeurs adimensionnées, nous pouvons écrire les équations de Navier-Stokes de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - Re^{-1} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu \mathbf{H}, & \text{dans } \Omega_{cf} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega_{cf} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega_{cf}, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_f} = \mathbf{d}, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

où \mathbf{d} est la vitesse imposée à la frontière du domaine fluide, \mathbf{u}_0 est la vitesse initiale au temps $t = 0$. Le terme $(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu \mathbf{H}$ est la force de Lorentz, elle rend compte de l'effet du champ magnétique sur la dynamique du fluide.

3.2.2 Formulation faible du problème

Afin de donner une formulation faible des équations de Navier-Stokes on introduit les espaces de Hilbert suivant (voir e.g.[80]) :

$$\mathbf{H}^1(\Omega_{cf}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega_{cf}), \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega_{cf})\}, \quad (3.2.4)$$

$$L^2_{f=0}(\Omega_{cf}) = \{q \in L^2(\Omega_{cf}), \int_{\Omega_{cf}} q = 0\}, \quad (3.2.5)$$

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega_{cf}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_{cf}), \mathbf{v}|_{\Gamma_f} = 0\}, \quad (3.2.6)$$

ces espaces sont munis des normes canoniques. Une formulation faible du problème consiste à trouver $\mathbf{u} \in L^2((0, +\infty); \mathbf{H}^1(\Omega_{cf}))$ et $p \in L^2((0, +\infty); L^2_{f=0}(\Omega))$ (avec la dérivé temporelle de \mathbf{u} dans un espace approprié, [80]) tels que $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}|_{\Gamma_f} = \mathbf{d}$ et pour toute paire $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_{cf}) \times L^2_{f=0}(\Omega)$ et tout $t \in (0, +\infty)$ les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_{cf}} [(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} + R_e^{-1} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}] = \int_{\Omega_{cf}} ((\nabla \times \mathbf{H}^c) \times \mu \mathbf{H}^c) \cdot \mathbf{v}, \\ \int_{\Omega_{cf}} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

L'existence de solutions faibles à ce problème quand \mathbf{H}^c est suffisamment régulier est connue et démontrée dans [80].

Finalement le problème qui doit être résolu est composé du système d'équations couplées (3.1.15)-(3.2.7). Des solutions faibles à ce problème existent si μ est constant et si $\Omega = \Omega_c$, i.e. $\Omega_v = \emptyset$, voir [30, §2.2] [75, Thm 3.1], leur unicité peut être démontrée si on fait l'hypothèse que toutes les fonctions sont suffisamment régulières. Enfin l'existence d'une solution faible au problème couplé est bien moins évidente si le champ μ est discontinu et si $\Omega_v \neq \emptyset$; cependant nous ne nous intéresserons pas à ce dernier cas.

3.3 Approximation par éléments finis des équations de la MHD

Dans cette section on se propose de présenter comment le système couplé composé des équations (3.1.15)-(3.2.7) est discrétisé. Pour une présentation plus détaillée le lecteur est renvoyé à [37, 38].

3.3.1 Aspects géométriques

Les géométries que nous étudions étant axisymétriques, on introduit Ω_v^{2D} , Ω_{c1}^{2D} , \dots , Ω_{cN}^{2D} , et Ω_{cf}^{2D} , les sections méridiennes de Ω_v , Ω_{c1} , \dots , Ω_{cN} , et Ω_{cf} . Ces sections sont maillées grâce à des éléments triangulaires quadratiques. On introduit $\{\mathcal{F}_h^v\}_{h>0}$, $\{\mathcal{F}_h^{c1}\}_{h>0}$, \dots , $\{\mathcal{F}_h^{cN}\}_{h>0}$, et $\{\mathcal{F}_h^{cf}\}_{h>0}$ les différentes familles d'éléments finis triangulaires qui constituent le maillage et \mathcal{F}_h^c l'union des maillages \mathcal{F}_h^{c1} , \dots , \mathcal{F}_h^{cN} . On fait l'hypothèse simplificatrice que \mathcal{F}_h^{cf} est un sous-ensemble de \mathcal{F}_h^c .

Pour chaque élément K appartenant au maillage $\mathcal{F}_h^v \cup \mathcal{F}_h^c$ on note $T_K : \hat{K} \rightarrow K$ la transformation quadratique qui permet de passer du triangle de référence $\hat{K} := \{(\hat{r}, \hat{z}) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \hat{r}, 0 \leq \hat{z}, \hat{r} + \hat{z} \leq 1\}$ à K .

On note Σ_h^{2D} et $\Sigma_{\mu h}^{2D}$ les familles des faces triangulaires des sections méridiennes qui forment respectivement les interfaces Σ et Σ_μ . Enfin on note respectivement Σ_h et $\Sigma_{\mu h}$ les familles des surfaces cylindriques générées par rotation autour de l'axe de symétrie des différentes faces Σ_h^{2D} and $\Sigma_{\mu h}^{2D}$. Pour toute surface cylindrique F prise dans $\Sigma_h \cup \Sigma_{\mu h}$, on note h_F le diamètre de la face qui engendre F .

3.3.2 Discrétisation spatiale des équations de Maxwell

La partie électro-statique du problème est approchée avec la même technique que celle introduite dans [37]. La caractéristique particulière de cette méthode est qu'elle est non conforme, i.e.les contraintes sur les continuités $(\mathbf{b} \times \mathbf{n}^c + \nabla \varphi \times \mathbf{n}^v)|_\Sigma = 0$ et $(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}_2^c)|_{\Sigma_\mu} = 0$ dans \mathbf{X} (voir (3.1.14)) sont relaxées et imposées de manière faible via la méthode de Pénalisation Intérieure de Galerkin (IPG).

Introduisons $\ell_{\mathbf{H}}$ et ℓ_ϕ deux entiers pris dans l'ensemble $\{1, 2\}$ tel que $\ell_\phi \geq \ell_{\mathbf{H}}$. Nous pouvons définir un premier espace d'éléments finis méridiens.

$$\mathbf{X}_h^{\mathbf{H},2D} := \{\mathbf{b}_h \in \mathbf{L}^1(\Omega_c); \mathbf{b}_h|_{\Omega_{c1}} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_{c1}}), \dots, \mathbf{b}_h|_{\Omega_{cN}} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_{cN}}), \mathbf{b}_h(T_K)|_K \in \mathbb{P}_{\ell_{\mathbf{H}}}, \forall K \in \mathcal{F}_h^c\}, \quad (3.3.1)$$

$$X_h^{\phi,2D} := \{\varphi_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_v}); \varphi_h(T_K)|_K \in \mathbb{P}_{\ell_\phi}, \forall K \in \mathcal{F}_h^v\}, \quad (3.3.2)$$

Ensuite en utilisant la notation complexe, $i^2 = -1$, le champ magnétique ainsi que le potentiel scalaire peuvent être approchés dans les espaces 3D suivants :

$$\mathbf{X}_h^{\mathbf{H}} := \{\mathbf{b} = \sum_{k=-M}^M \mathbf{b}_h^k(r, z) e^{ik\theta}; \mathbf{b}_h^k \in \mathbf{X}_h^{\mathbf{H},2D}, \overline{\mathbf{b}_h^k} = \mathbf{b}_h^{-k}, k \in \overline{0, M}\}, \quad (3.3.3)$$

$$X_h^\phi := \{\varphi = \sum_{k=-M}^M \varphi_h^k(r, z) e^{ik\theta}; \varphi_h^k \in X_h^{\phi,2D}, \overline{\varphi_h^k} = \varphi_h^{-k}, k \in \overline{0, M}\}, \quad (3.3.4)$$

où $M + 1$ est le nombre maximum de modes de Fourier.

Aucun traitement particulier n'est réalisé au niveau de l'axe, i.e.à $r = 0$. Une bonne approximation des différentes grandeurs au voisinage de l'axe est garantie grâce à l'intégration par parties et grâce à l'utilisation de la mesure $rdrdzd\theta$. Cette mesure permet d'assurer que nous travaillons bien dans les espaces de Sobolev appropriés, voir [13] pour plus de détail mathématiques sur les espaces de Sobolev.

3.3.3 Discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes

Pour approcher la partie hydrodynamique du problème on utilise l'élément fini mixte de Taylor-Hood. On introduit les espaces vectoriels de dimension finie suivants, respectivement :

$$\mathbf{V}_h^{2D} := \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_{cf}}); \mathbf{v}(T_K^{-1})|_K \in \mathbb{P}_2, \forall K \in \mathcal{F}_h^{cf}\}, \quad (3.3.5)$$

$$M_h^{2D} := \{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_{cf}}); q(T_K^{-1})|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{F}_h^{cf}\}. \quad (3.3.6)$$

Ensuite, les champs de vitesse et de pression sont approchés dans les espaces suivants :

$$\mathbf{V}_h := \{ \mathbf{v} = \sum_{k=-M}^M \mathbf{v}_h^k(r, z) e^{ik\theta}; \mathbf{v}_h^k \in \mathbf{V}_h^{2D}, \overline{\mathbf{v}_h^k} = \mathbf{v}_h^{-k}, k \in \overline{0, M} \}, \quad (3.3.7)$$

$$M_h := \{ q_h = \sum_{k=-M}^M q_h^k(r, z) e^{ik\theta}; q_h^k \in M_h^{2D}, \overline{q_h^k} = q_h^{-k}, k \in \overline{0, M} \}. \quad (3.3.8)$$

3.3.4 Discrétisation temporelle

Afin d'approcher les dérivées temporelles, on utilise un schéma du second ordre du type BDF2 (i.e. second-order Backward Difference Formula). Les termes non-linéaires sont traités explicitement via une extrapolation temporelle du second ordre, ce qui permet de découpler la partie Navier-Stokes de la partie Maxwell du problème. De plus pour le traitement hydrodynamique, la vitesse et la pression sont découplées en utilisant un algorithme prédicteur-correcteur, appelé "rotational pression-correction algorithm" décrit dans [85] et analysé dans [39].

Soit Δt le pas de temps et posons $t^n := n\Delta t$, $n \geq 0$. L'algorithme complet peut être résumé comme suit : après initialisation aux temps t^0 et t^1 , pour $n \geq 1$ on pose

$$\mathbf{u}^* = 2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}, \quad \mathbf{H}^* = 2\mathbf{H}^{c,n} - \mathbf{H}^{c,n-1}. \quad (3.3.9)$$

$$\begin{cases} D\mathbf{u}^{n+1} := \frac{1}{2}(3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}), \\ D\mathbf{H}^{c,n+1} := \frac{1}{2}(3\mathbf{H}^{c,n+1} - 4\mathbf{H}^{c,n} + \mathbf{H}^{c,n-1}), \\ D\phi^{n+1} := \frac{1}{2}(3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}). \end{cases} \quad (3.3.10)$$

ensuite, on calcule $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{V}_h$ tel que $\mathbf{u}^{n+1}|_{\Gamma_f} = \mathbf{d}_h^{n+1}$, où \mathbf{d}_h^{n+1} est une approximation de la donnée $\mathbf{d}(t^{n+1})$, et pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{h,0}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{cf}} \frac{D\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} \cdot \mathbf{v} + R_e^{-1} \nabla \mathbf{u}^{n+1} : \nabla \mathbf{v} = & - \int_{\Omega_{cf}} \mathbf{v} \cdot \nabla (\pi^n + \frac{4}{3}\psi^n - \frac{1}{3}\psi^{n-1}) \\ & + \int_{\Omega_{cf}} \mathbf{v} \cdot ((\nabla \times \mathbf{H}^*) \times \mu \mathbf{H}^* - (\nabla \times \mathbf{u}^*) \times \mathbf{u}^*), \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

La correction de pression est calculée en évaluant ψ^{n+1} et δ^{n+1} dans M_h tels que pour tout $q \in M_h$ on ait :

$$\int_{\Omega_{cf}} \nabla \psi^{n+1} \cdot \nabla q = \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega_{cf}} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla q, \quad (3.3.12)$$

$$\int_{\Omega_{cf}} q \delta^{n+1} = \int_{\Omega_{cf}} q \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \quad (3.3.13)$$

La pression est enfin corrigée en posant :

$$\pi^{n+1} = \pi^n + \psi^{n+1} - R_e^{-1} \delta^{n+1}. \quad (3.3.14)$$

Une fois que la vitesse \mathbf{u}^{n+1} est calculée on note $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ l'extension de \mathbf{u}^{n+1} à l'ensemble du domaine conducteur. L'extension $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ est non nulle uniquement si l'utilisateur veut simuler la rotation d'une partie solide conductrice, par exemple.

La solution relative à la partie magnétique du problème est calculée en une seule étape en calculant $\mathbf{H}^{c,n+1}$ dans $\mathbf{X}_h^{\mathbf{H}}$ et ϕ^{n+1} dans X_h^ϕ tel que, pour tout \mathbf{b} dans $\mathbf{X}_h^{\mathbf{H}}$ et tout φ dans X_h^ϕ , on ait :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_c} \left[\mu^c \frac{D\mathbf{H}^{c,n+1}}{\Delta t} \cdot \mathbf{b} + (R_m \sigma)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}^{c,n+1} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \right] + \int_{\Omega_v} \mu^v \frac{D\phi^{n+1}}{\Delta t} \cdot \nabla \varphi \\
& + \int_{\Sigma_\mu} \{ (R_m \sigma)^{-1} (\nabla \times \mathbf{H}^{c,n+1} - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \times \mu^c \mathbf{H}^* \} \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}_2^c) \\
& + \int_{\Sigma} \{ (R_m \sigma)^{-1} (\nabla \times \mathbf{H}^{c,n+1} - \mathbf{j}^s) - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \times \mu^c \mathbf{H}^* \} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{n}^c + \nabla \varphi \times \mathbf{n}^v) \\
& + g((\mathbf{H}^{c,n+1}, \phi^{n+1}), (\mathbf{b}, \varphi)) + s(\mathbf{H}^{c,n+1}, \mathbf{b}) \\
& = \int_{\Omega_c} (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \times \mu^c \mathbf{H}^* + (R_m \sigma)^{-1} \mathbf{j}^s) \cdot \nabla \times \mathbf{b} + \int_{\Gamma_c} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{n}) + \int_{\Gamma_v} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot (\nabla \varphi \times \mathbf{n}),
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

où

$$g((\mathbf{H}^{c,n+1}, \phi^{n+1}), (\mathbf{b}, \varphi)) := \beta_2 \sum_{F \in \Sigma_{\mu h}} h_F^{-1} \int_F (\mathbf{H}_1^{c,n+1} \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{H}_2^{c,n+1} \times \mathbf{n}_2^c) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{n}_2^c), \tag{3.3.16}$$

$$+ \beta_1 \sum_{F \in \Sigma_h} h_F^{-1} \int_F (\mathbf{H}^{c,n+1} \times \mathbf{n}^c + \nabla \phi^{n+1} \times \mathbf{n}^v) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{n}^c + \nabla \varphi \times \mathbf{n}^v),$$

$$s(\mathbf{H}^{c,n+1}, \mathbf{b}) := \gamma \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\mu^c \mathbf{H}^{c,n+1}) \nabla \cdot (\mu^c \mathbf{b}). \tag{3.3.17}$$

La forme bilinéaire g a pour but de pénaliser les quantités $\mathbf{H}^{c,n+1} \times \mathbf{n}^c + \nabla \phi^{n+1} \times \mathbf{n}^v$ et $\mathbf{H}_1^{c,n+1} \times \mathbf{n}_1^c + \mathbf{H}_2^{c,n+1} \times \mathbf{n}_2^c$ au travers des interfaces respectives Σ et Σ_μ . Cette quantité tend vers zéro lorsque le pas de grille tend vers zéro. Les coefficients β_1 and β_2 sont choisis par l'utilisateur. On utilise ordinairement le couple $(\beta_1 = 1, \beta_2 = 1)$.

De la même façon, la forme bilinéaire s sert à contrôler la divergence de $\mu^c \mathbf{H}^c$; γ est également pris d'ordre 1.

3.4 Méthode de parallélisation

Dans cette section, on présente sommairement la méthode de parallélisation (pour plus de détails se reporter à [38]). On montrera le gain significatif en temps de calcul permis grâce à une implémentation astucieuse des sous-routines de transformées de Fourier rapides de la librairie FFTW3 (pour The Fastest Fourier Transform in the West) dans la parallélisation.

3.4.1 Le système linéaire

L'algorithme décrit précédemment (3.3.9) et (3.3.17) donne lieu à chaque pas de temps à autant de systèmes linéaires indépendants que de modes de Fourier. Notons n_p et n_u le nombre de nœuds \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 , composant le maillage méridien \mathcal{F}_h^{cf} ,

Eq.	champs	taille des syst. lin.	# de syst. lin.
(3.3.11)	u_r, u_θ	$2 n_{\mathbf{u}}$	2
(3.3.11)	u_z	$n_{\mathbf{u}}$	1
(3.3.12)	$\pi := p + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$	n_p	1
(3.3.13)	δ	n_p	1
(3.3.15)	\mathbf{H}, ϕ	$3n_{\mathbf{H}} + n_\phi$	2

TAB. 3.5 – Résumé des différentes opérations linéaires

i.e. $\dim(M_h^{2D}) = n_p$ et $\dim(\mathbf{V}_h^{2D}) = 3n_{\mathbf{u}}$. Pour chaque mode de Fourier le système (3.3.11) donne lieu à deux systèmes linéaires de taille $2n_{\mathbf{u}}$ (les composantes radiale et azimutale du champ de vitesse étant couplées) et un système linéaire de taille $n_{\mathbf{u}}$ (la composante axiale du champ de vitesse étant indépendante). La résolution de (3.3.12) et de (3.3.13) conduit à deux systèmes de taille n_p . Notons $n_{\mathbf{H}}$ le nombre de nœuds \mathbb{P}_1 présents dans le maillage méridien \mathcal{F}_h^c si $\ell_{\mathbf{H}} = 1$ ou bien le nombre de nœuds \mathbb{P}_2 si $\ell_{\mathbf{H}} = 2$, notons également n_ϕ le nombre de nœuds \mathbb{P}_1 présent dans le maillage \mathcal{F}_h^v si $\ell_\phi = 1$ ou bien le nombre de nœuds \mathbb{P}_2 si $\ell_\phi = 2$. Pour chaque mode de Fourier, le système (3.3.15) donne lieu à deux systèmes linéaires de taille $3n_{\mathbf{H}} + n_\phi$; voir Table 3.5.

Les systèmes linéaires sont résolus grâce avec un solveur pré-conditionné biCG-stab. Le pré-conditionneur repose sur une factorisation LU incomplète avec seuillage (ILUT). Le nombre maximum d'entrées non nulles par ligne dans chaque factorisation est fixé à 70. La largeur de bande pour chaque pré-conditionneur est minimisée en réordonnant les degrés de liberté via une méthode de Cuthill/McKee-like (see e.g.[73, 21]). Les systèmes linéaires sont considérés comme résolus quand les résidus numériques relatifs sont inférieurs à 10^{-6} . On a observé que la complexité de l'algorithme (pré-conditionnement+biCG-stab) est de l'ordre de $\mathcal{O}(N^{1.25})$ pour un problème du type équation de Laplace, où N est le nombre des degrés de liberté.

Lorsque qu'il n'y a pas de termes non-linéaires, les systèmes linéaires associés à chaque mode de Fourier peuvent être résolus en parallèle. On peut utiliser autant de processeurs que de modes de Fourier. Malheureusement les modes ne sont pas indépendants mais couplés par des termes non-linéaires. La parallélisation est tout de même possible. Pour un nombre de modes de Fourier égal à $M + 1$, on peut faire des simulations sur N_{proc} processeurs dès que $M + 1$ est un multiple de N_{proc} . Les modes sont alors divisés en paquets de taille $N_b := (M + 1)/N_{\text{proc}}$ et chaque paquet est assigné à un processeur. Si on a $M + 1$ processeurs disponibles, on peut choisir de prendre $N_{\text{proc}} = M + 1$.

3.4.2 Calcul du terme non-linéaire et tests de performance

Par rapport à la version du code SFEMaNS existante en 2006, un effort particulier a été réalisé pour réduire les temps de communication requis dans le calcul du terme non linéaire. Dans la version antérieure du code numérique, le terme non linéaire était calculé par une méthode pseudo-spectrale sans de-aliasing utilisant des multiplications matrice-vecteur. Une implémentation astucieuse des sous-routines de transformées de Fourier rapides de la librairie FFTW3 [23] a permis d'améliorer sensiblement les temps de calcul des simulations non linéaires. Cette méthode détaillée dans [38] est basée sur

un échantillonnage homogène des différentes données échangées par les processeurs lors du calcul dans l'espace physique du terme non linéaire.

Afin d'évaluer l'efficacité de la méthode de parallélisation, nous avons évalué la partie Navier-Stokes pour les deux versions du code (avec découpage en paquets homogènes et les subroutine FFTW3 et sans découpage avec la multiplication matrice-vecteur). Les tests ont été réalisés sur le cluster IBM SP6 de l'IDRIS. Avec chaque version on résout les équations de Navier-Stokes en considérant $M + 1 = 16$ modes de Fourier complexes dans un cylindre dont la section méridienne est discrétisée en 46985 nœuds \mathbb{P}_2 . Cela donne un maillage tridimensionnel composé d'environ $1.5 \cdot 10^6$ points de grille. Si l'on compare le speed up pour les deux versions du code SFEMaNS (2006 et 2010) sur la figure 3.4, on constate que, lorsque le nombre de processeurs utilisés dans le calcul est assez élevé, le speed up est bien meilleur lorsqu'on fait un découpage en paquets homogènes répartis sur les différents processeurs utilisés dans le calcul.

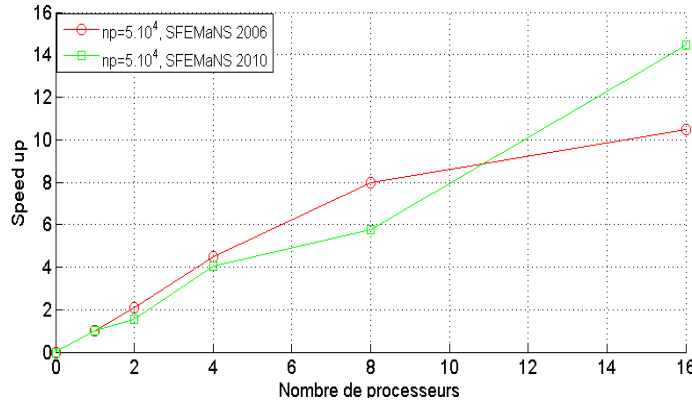


FIG. 3.4 – Tests de speed up (rapport entre le temps de calcul effectué avec un seul processeur et le temps pour un processeur pour un calcul effectué avec n processeurs en fonction de n où n est le nombre de processeurs) pour les deux versions du codes SFEMaNS

D'autres tests non détaillés ici ont montré que, pour des simulations à faible nombre de Reynolds, l'efficacité de la parallélisation est inférieure à 50%. Ceci vient du fait que les processeurs en charge des modes de Fourier élevés passent un temps négligeable à résoudre les systèmes linéaires (les coefficients de Fourier étant proches de zéro), mais participent néanmoins au calcul des produits vectoriels via les FFT. En revanche, lorsqu'on se place dans un régime moins diffusif (le nombre de Reynolds est suffisamment grand de sorte que tous les modes de Fourier sont peuplés), on retrouve des coefficients d'efficacité parallèle de l'ordre de 100% (voir Table 3.6).

# processeur(s)	1	2	4	8	16
Speed up	1.000	1.549	4.032	5.751	14.45
Efficacité	1.000	0.775	1.008	0.719	0.903

TAB. 3.6 – Test Navier-Stokes dans un régime peu diffusif pour $M + 1 = 16$, $n_g = 46985$.

En résumé, la méthode de parallélisation apparaît efficace lorsqu'il y a un mode de Fourier par processeur et que la taille des problèmes à traiter par processeur est suffisamment grande. L'application de cette méthode de résolution à des cas physiques divers s'avère très prometteuse comme les chapitres suivants vont le montrer.

Chapitre 4

Génération d'ondes d'Alfvén dans un cylindre

4.1 Introduction

Les ondes d'Alfvén sont des ondes d'origine magnétohydrodynamique qui résultent du couplage entre le champ magnétique et le champ de vitesse. En 1942, Alfvén évoque l'existence possible de telles ondes dans des fluides conducteurs plongés dans un champ magnétique [2]. Elles ont la particularité d'être transverses au champ magnétique et de se propager à une vitesse proportionnelle au champ magnétique extérieur. L'existence de ces ondes a été démontrée expérimentalement sept ans plus tard dans du Mercure liquide [54]. D'autres études expérimentales menées dans des métaux liquides et aussi dans des plasmas ont confirmé leur existence et ont permis de dégager certaines de leurs propriétés. Outre l'étude expérimentale, nous savons que les ondes d'Alfvén jouent un rôle important dans le transport d'énergie ou de moment cinétique dans de nombreux objets astrophysiques ou géophysiques. Grâce à l'évolution récente des satellites et des différents appareils de mesure, ces ondes ont fait l'objet de plusieurs observations astrophysiques et géophysiques ces dix dernières années. Elles furent observées dans la magnétosphère terrestre [87], dans des plasmas inter-stellaires [86] ainsi que dans la photosphère solaire [65].

Malgré le rôle crucial que semblent jouer ces ondes dans divers scénarios astrophysiques et géophysiques, leur étude expérimentale se heurte à divers problèmes liés aux caractéristiques des milieux utilisés. On distinguera deux catégories d'études expérimentales des ondes d'Alfvén : dans les plasmas et dans les métaux liquides. Les plasmas apparaissent comme étant le milieu naturel d'étude des ondes d'Alfvén. Leur étude expérimentale présente cependant plusieurs contraintes, du fait que ces ondes aient des fréquences propres faibles et en général inférieures ou de l'ordre de la fréquence cyclotron des ions constituant le plasma. Pour pouvoir les observer il faut recourir à des plasmas dits non collisionnels dont la fréquence cyclotron est bien plus élevée que la fréquence propre des ondes d'Alfvén mais la température et la densité de tels milieux font que toute mesure classique à l'aide d'antennes est très difficile voire impossible. A partir des années 80, de grands progrès concernant les expériences utilisant des plasmas en laboratoire ont permis de caractériser quelques propriétés fondamentales des ondes d'Alfvén. Je ne m'étendrai pas plus sur ce sujet et renvoie le lecteur à l'article de revue de Gekelman [29].

Du fait de la bonne conductivité ohmique de certains métaux liquides comme le sodium, le mercure ou le gallium, les ondes d'Alfvén peuvent également être excitées dans de tels milieux. On retiendra par exemple les expériences de Lundquist [54] et de Lehnert [52] dans lesquelles des ondes d'Alfvén axisymétriques et purement toroïdales sont excitées mécaniquement et se propagent le long des lignes de champ. Contrairement aux plasmas, le temps de diffusion ohmique étant relativement court, l'utilisation de champs magnétiques très intenses ou d'expériences de grande taille est nécessaire pour favoriser l'observation de ces ondes dans de tels milieux, ce qui a longtemps constitué une limite pour leur étude en laboratoire. On retiendra en particulier une expérience récente menée au LGIT de Grenoble (Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique). Une équipe de recherche composée entre autres de T. Alboussière, F. Plunian et P. Cardin a récemment mis au point une expérience utilisant des champs magnétiques forts de l'ordre de la dizaine de Tesla.

Cette expérience, nommée Galalfvén, consiste en la mise en évidence d'ondes d'Alfvén dans un conteneur cylindrique rempli de galinstan (un alliage de Gallium-Indium-Etain qui a l'avantage d'être liquide à température ambiante) par excitation magnétique. Ce conteneur de 10.4 cm de hauteur et de 11 cm de diamètre est placé dans un électro-aimant d'un mètre de hauteur capable de générer un champ magnétique à grande échelle quasi-uniforme et constant, orienté selon l'axe du cylindre. Le fluide est alors perturbé par une excitation magnétique axisymétrique poloidale engendrée par une bobine placée sur la face inférieure du cylindre. L'onde créée dans le cylindre est advectée par le champ magnétique extérieur, sa progression est suivie grâce à la mesure de la variation du flux magnétique au niveau de 4 bobines passives ; trois bobines positionnées autour du cylindre et une quatrième positionnée sur le couvercle supérieur du cylindre. Les métaux liquides ayant des temps de diffusion très courts, il faut utiliser des dispositifs engendrant des champs magnétiques forts (de l'ordre de la dizaine de Tesla, soit environ 200 000 fois le champ magnétique terrestre) pour pouvoir observer et suivre la propagation de ce type d'ondes. Deux modes d'excitation d'ondes d'Alfvén ont été envisagés, une excitation dite impulsienne (où la forme du courant exciteur imposé est limitée dans le temps) et une excitation harmonique (où la forme du courant exciteur imposée est sinusoïdale) . Les premières mesures expérimentales réalisées fin courant 2007 ne reflétaient pas réellement les résultats attendus. Dans le cas du régime impulsien, le motif de la force électromotrice mesurée sur les bobines passives était difficile à interpréter intuitivement. Dans le cas du régime harmonique les réponses mesurées apparaissent être indépendante de l'intensité du champ magnétique extérieur. Ceci suggérait que la réponse mesurée reflétait plus les fréquences mécaniques du dispositif que la réponse purement Alfvénique. Une des difficultés expérimentales à laquelle a été confrontée l'équipe du LGIT était de mesurer des signaux de faible amplitude dans un environnement électrique et magnétique très bruité. De plus, dans les métaux liquides, toute mesure classique de champ de vitesse telle que la PIV (Particle Image Velocimetry) ou LDV (Laser Doppler Velocimetry) est impossible. Pour toutes ces raisons, une collaboration numérique et expérimentale s'est mise en place au cours d'une école d'été sur l'effet dynamo, organisée en septembre 2007 aux Houches. L'objectif était de réaliser des simulations numériques de l'expérience les plus réalistes possibles afin d'avoir une idée de la forme de l'onde d'Alfvén pour expliquer quantitativement les motifs des forces électromotrices mesurées expérimentalement dans le régime impulsien. Il s'agissait aussi d'isoler les fréquences propres du dispositif dans

le régime harmonique .

Ce chapitre s'organise de la façon suivante : dans une première section, je vais introduire de façon théorique et analytique ce type d'ondes. Dans une deuxième section je présenterai quelques résultats numériques d'ondes d'Alfvén dans une configuration dite « idéale ». Enfin, dans une troisième section, seront présentées les simulations numériques effectuées pour modéliser l'expérience Galalfvén.

4.2 Approche analytique des ondes d'Alfvén

4.2.1 Mécanisme de base de la propagation des ondes d'Alfvén

Les principaux facteurs responsables de la formation des ondes d'Alfvén découlent des deux principes physiques suivants :

- la loi de Lenz appliquée à un fluide conducteur : les courants induits par le déplacement du fluide conducteur traversé par un champ magnétique engendrent des forces magnétiques qui s'opposent au déplacement de celui-ci,
- la seconde loi de Newton appliquée à un fluide conducteur : une force appliquée à un fluide donne lieu à une modification de la quantité de mouvement du fluide proportionnelle à l'amplitude de la force appliquée sur celui-ci dans la même direction.

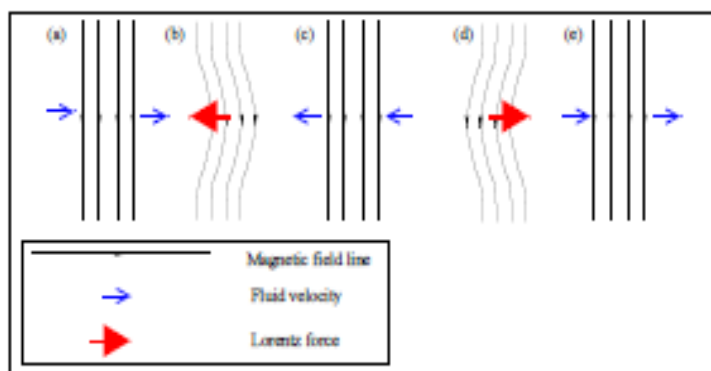


FIG. 4.1 – Mécanisme de propagation des ondes d'Alfvén, en ne considérant que l'action de la force de Lorentz sur le fluide et la conservation de la quantité de mouvement

La propagation de ces ondes dans un milieu conducteur, plongé dans un champ magnétique uniforme, peut être simplement schématisée à l'aide des deux principes évoqués précédemment via le mécanisme suivant. Considérons un fluide conducteur plongé dans un champ magnétique constant. Le fluide initialement au repos est perturbé dans la direction normale aux lignes de champ magnétique. Cette perturbation distord localement les lignes de champ magnétique (figure 4.1 a). Cette courbure des lignes de champ magnétique produit une force magnétique (la force de Lorentz) sur le fluide qui tend à redresser ces mêmes lignes de champ magnétique (via la loi de Lenz). L'application de la force de Lorentz sur le fluide change la quantité de mouvement du fluide (2^e loi de Newton) entraînant le déplacement de fluide de façon à minimiser la courbure

des lignes de champ (figure 4.1 b). Ceci a pour effet de remettre les lignes de champs dans leur position initiale (figure 4.1 c). Le processus de distorsion des lignes de champ s'inverse et le même processus qu'en (4.1 a) se produit, le cycle reprend et les lignes de champ se retrouvent localement dans leur état initial.

Ce modèle suggère que la propagation d'une onde d'Alfvén le long des lignes de champ magnétique est analogue à la propagation d'une perturbation le long d'une corde élastique. Dans les deux cas on a deux effets antagonistes qui sont responsables de la dynamique de l'onde. Dans le cas d'une corde élastique, la tension de la corde agit comme une force de rappel entraînant la propagation d'une onde transverse dans la direction perpendiculaire à la perturbation initiale. Dans le cas de la propagation d'une onde d'Alfvén, la tension magnétique (cf. chapitre 1) agit de la même façon.

L'équilibre entre l'accélération inertielle du fluide et l'accélération due à la force de Lorentz peut s'exprimer de la façon suivante au premier ordre en champ de vitesse perturbé pour un fluide parfait :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mu \mathbf{H} \quad (4.2.1)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, μ la perméabilité magnétique, \mathbf{v} le champ de vitesses, p la pression, \mathbf{H} le champ magnétique et $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$ le courant électrique. On introduit une longueur et un temps caractéristiques notés respectivement \mathcal{L}_A , \mathcal{T}_A . L'équation (4.2.1) permet d'écrire dimensionnellement, $V_A/\mathcal{T}_A = B^2/\mathcal{L}_A \rho \mu$. On a également $V_A = \mathcal{L}_A/\mathcal{T}_A$, ce qui permet de définir une vitesse caractéristique de ces ondes de la façon suivante : $V_A = B/\sqrt{\rho \mu}$ aussi appelée la vitesse d'Alfvén. Ces ondes se propagent avec une vitesse proportionnelle au champ magnétique extérieur.

4.2.2 Equation de propagation

Une autre façon d'appréhender les ondes d'Alfvén est de partir directement des équations de Navier-Stokes pour décrire la partie hydrodynamique ainsi que les équations de Maxwell qui décrivent les effets magnétiques mis en jeu lors des déplacements de courant au sein du fluide. Ce fut la démarche de H. Alfvén en 1942 présentée dans l'article [2] et reproduite ici.

Considérons les équations de Navier-Stokes et de l'induction pour un fluide incompressible de viscosité ν , de masse volumique ρ , de conductivité électrique σ et de perméabilité magnétique μ constantes et homogènes :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mu \mathbf{H} + \rho \nu \Delta \mathbf{v} \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (4.2.3)$$

L'équation (4.2.2) peut s'écrire en faisant apparaître un terme de pression magnétique $\mu \mathbf{H}^2/2$:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(p + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right) + \mu (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \rho \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (4.2.4)$$

La pression totale est alors $\Pi = p + \mu \mathbf{H}^2/2$. Supposons que le fluide est au repos et soumis à un champ magnétique \mathbf{H}_0 constant dans la direction \mathbf{z} . On suppose une perturbation du champ de vitesse dans la direction \mathbf{r} transverse au champ magnétique et on cherche une solution à pression uniforme (voir la section 4.2.3 pour la justification). Les équations de Navier-Stokes et d'induction deviennent après linéarisation :

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \mu H_0 \frac{\partial h_r}{\partial z} + \rho \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial h_r}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{\mu \sigma} \frac{\partial^2 h_r}{\partial z^2} \quad (4.2.6)$$

Si on néglige les termes de diffusion, les deux équations peuvent aisément se combiner et donner lieu à l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} = \mu \frac{H_0^2}{\rho} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (4.2.7)$$

Cette équation décrit la propagation de deux ondes transverses se propageant dans la direction $+\mathbf{z}$ ou $-\mathbf{z}$ à la vitesse dite d'Alfvén $V_A = H_0 \sqrt{\mu/\rho}$ déjà évoquée au paragraphe précédent. Il est commode d'introduire les variables de Elsasser $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v} + \mathbf{h} \sqrt{\mu/\rho}$ et $\mathbf{v}^- = \mathbf{v} - \mathbf{h} \sqrt{\mu/\rho}$. Les équations de Navier-Stokes et d'induction peuvent alors s'exprimer à l'aide de ces variables pour donner les équations suivantes :

$$\frac{\partial v_r^+}{\partial t} = \frac{H_0 \sqrt{\mu}}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial v_r^+}{\partial z} \quad (4.2.8)$$

$$\frac{\partial v_r^-}{\partial t} = -\frac{H_0 \sqrt{\mu}}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial v_r^-}{\partial z} \quad (4.2.9)$$

Dans un milieu infini comme le schématise la figure 4.2, une perturbation initiale va pouvoir se propager le long des lignes de champ magnétique à la vitesse d'Alfvén dans les directions positive et négative.

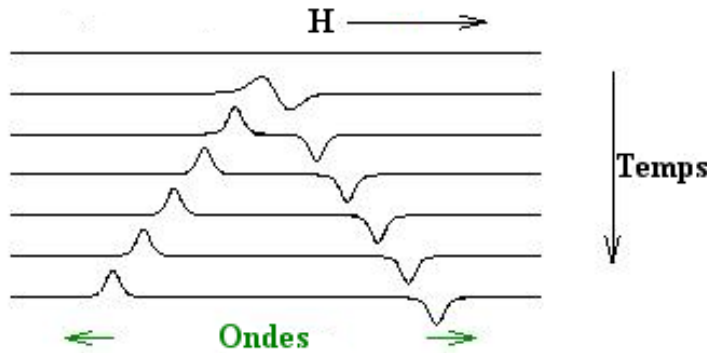


FIG. 4.2 – Schéma représentant la propagation d'une perturbation dans le sens des lignes de champ magnétique \mathbf{H} et dans le sens opposé.

Jusqu'ici nous avons considéré la limite non dissipative (pas de viscosité cinématique, ni de diffusivité ohmique), limite raisonnable à l'échelle astrophysique et géophysique. Cependant, pour des métaux liquides, la viscosité cinématique est faible mais la

diffusivité magnétique est relativement grande, soit des temps de diffusion relativement courts, ce qui représente une contrainte expérimentale. On introduit un paramètre sans dimension, le nombre de Lundquist qui permet de donner une mesure de la vitesse de diffusion ohmique de l'onde par rapport à sa vitesse de propagation. Ce nombre noté Lu est défini comme le rapport du temps de diffusion ohmique sur une distance caractéristique \mathcal{L} sur le temps de propagation de l'onde noté T_a . Ce nombre doit être supérieur à 1 pour qu'une onde d'Alfvén puisse exister. Dans le noyau liquide des planètes ou dans des objets astrophysiques ce nombre est très grand, de l'ordre de 10^3 voire infini, dans des expériences en laboratoire il dépasse difficilement la centaine.

4.2.3 Relation de dispersion

Dans cette partie, on se propose d'établir l'équation de propagation des ondes d'Alfvén dans un milieu de diffusivité magnétique $\eta = 1/\sigma\mu$ et de viscosité cinématique ν finies, plongé dans un champ magnétique uniforme \mathbf{H}_0 axial. Reprenons les équations (4.2.2) et (4.2.3) une fois linéarisées autour d'un état de base tel que $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ et $\mathbf{v} = 0 + \mathbf{v}$ où \mathbf{h} est une faible perturbation du champ magnétique et \mathbf{v} une faible perturbation du champ de vitesse. En ne gardant que les termes du premier ordre on aboutit au système suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{h} + \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{\nabla \Pi}{\rho} \quad (4.2.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{h} \quad (4.2.11)$$

Or, en dehors de la région perturbée, la pression totale Π est constante (le fluide est au repos et $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$); dans la région perturbée, la divergence de l'équation (4.2.10) donne l'équation de Laplace $\Delta \Pi = 0$. Or une solution de l'équation de Laplace qui est constante à l'extérieur d'un domaine borné l'est aussi à l'intérieur. Le terme $\frac{\nabla \Pi}{\rho}$ peut donc être éliminé de l'équation (4.2.10). Dans ces conditions, lorsque les constantes de fluide η et ν sont suffisamment petites, le système d'équations formé par (4.2.10) et (4.2.11) décrit une onde qui se propage à la vitesse \mathbf{H}_0 le long d'une ligne de champ magnétique.

Afin d'obtenir une équation d'onde, on prend la dérivée en temps de l'équation (4.2.10) soit :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \nu \Delta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (4.2.12)$$

On remplace $\partial_t \mathbf{h}$ en utilisant l'équation (4.2.11). En prenant $\eta \Delta$ de l'équation (4.2.10), on élimine \mathbf{h} , ce qui conduit à l'équation d'ondes d'Alfvén suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} - \nu \eta \Delta^2 \mathbf{v} + (\nu + \eta) \Delta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (4.2.13)$$

On cherche des solutions périodiques dans un milieu homogène infini en utilisant une décomposition de la solution en ondes planes progressives monochromatiques où chaque

variable \mathbf{v} s'écrit : $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \text{Re} \{ e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \}$ où $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$. Ceci conduit à la relation suivante :

$$\omega^2 = \left(\frac{\mu(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0)^2}{\rho} + \nu \eta k^4 \right) - i(\nu + \eta) k^2 \omega. \quad (4.2.14)$$

Dans un milieu idéal où la viscosité cinématique ν et la diffusivité magnétique seraient nulles, l'expression précédente se réduit à :

$$\omega = \pm V_A \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{H}_0}{\|\mathbf{H}_0\|} = \pm \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k} \quad (4.2.15)$$

avec pour rappel $\mathbf{V}_A = \mathbf{H}_0 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Donc, dans la limite sans dissipation, la vitesse de phase est $\omega/k = V_A \cos(\mathbf{k}, \mathbf{H}_0)$ et la vitesse de groupe est $\nabla_k \omega = \mathbf{V}_A$. Ce sont des ondes anisotropes car leurs propriétés dépendent de l'angle entre le champ magnétique appliqué et la direction de propagation de celles-ci.

4.3 Modélisation de l'excitation des ondes d'Alfvén dans une configuration idéale

Dans ce paragraphe je vais illustrer quelques caractéristiques de ces ondes. Dans ce but, j'ai réalisé des simulations numériques d'ondes d'Alfvén dans une géométrie cylindrique grâce au code SFEMaNS dont les caractéristiques sont détaillées au chapitre 2. La modélisation est la suivante : on considère un cylindre de hauteur $L = 1$ et de rayon $R = 0.5$ rempli d'un métal liquide possédant une viscosité cinématique ν et une diffusivité magnétique $\eta = 1/\sigma\mu$ plongé dans un champ magnétique \mathbf{H}_0 parallèle à l'axe de révolution du cylindre. Une faible perturbation magnétique est engendrée par une bobine excitatrice située sur la face inférieure du cylindre. Cette bobine est considérée comme étant filiforme et est placée au contact du fluide. L'évolution de l'onde dans le cylindre est suivie par la mesure de la force électromotrice notée fem définie comme : $fem = - \int (dH_z/dt) ds$.

Le problème étant axisymétrique, on réalise un maillage du plan méridien représenté sur la figure 4.3. Le maillage est constitué de deux domaines différemment résolus. Le domaine conducteur représentant le cylindre a un pas spatial plutôt faible, de l'ordre 1/160. Le deuxième domaine dans l'expérience est l'intérieur d'un solénoïde créant un champ imposé uniforme. Dans notre modélisation, ce deuxième domaine est un vide de géométrie sphérique qui est environ dix fois plus grand que le cylindre conducteur afin que le champ \mathbf{H}_0 imposé aux bords de ce vide soit uniforme dans la région du cylindre. La bobine excitatrice est représentée par le point rouge de coordonnées $(r = 0.3, z = -0.5)$. Le flux de H_z est calculé au travers de la portion du cylindre représenté en rouge à la hauteur $z = 0.5$.

Les équations de la MHD dans la limite dissipative (cf. équations (4.3.1)) sont approchées sur le maillage présenté précédemment grâce à des éléments finis de Lagrange (pour plus de détails concernant la résolution numérique utilisée, voir chapitre 2). En adimensionnant le champ magnétique avec la vitesse d'Alfvén, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla p = [(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}] + \frac{1}{R_e^A} \nabla^2 \mathbf{U} \\ \partial_t \mathbf{H} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{L\nu} \nabla^2 \mathbf{H} + \mathbf{J}_s \end{cases} \quad (4.3.1)$$

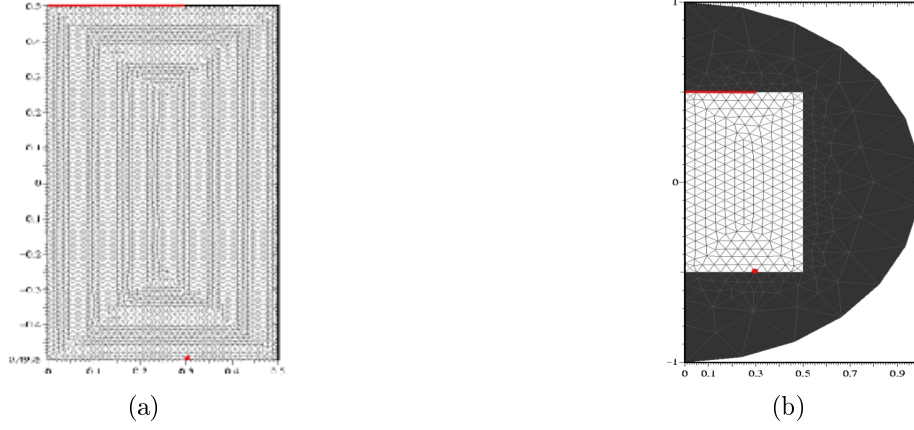


FIG. 4.3 – Type de maillage du plan méridien utilisé pour le calcul des ondes d’Alfvén : une source ponctuelle de courant azimuthal est représentée sur le couvercle inférieur, le calcul de la force électromotrice (fem) s’effectue sur le couvercle supérieur au niveau du disque rouge. (a) Maillage utilisé avec un pas spatial de $1/100$. (b) Schéma représentant l’ensemble du domaine de calcul (vide plus conducteur).

où \mathbf{J}_s est un courant donné permettant la réalisation de la perturbation magnétique dans le cylindre. On excite les ondes d’Alfvén du cylindre en appliquant un courant azimuthal du type : $J_\theta = J_0 f(t)$. $f(t)$ est une fonction temporelle qui peut être de deux types : impulsionnelle, $f(t) = (t/t_c)(1 + (t/t_c)^n)$ avec t_c un temps de coupure et n un entier influant sur la « raideur » du signal, ou harmonique du type $f(t) = \sin(\omega t)$, avec ω une pulsation. Les équations (4.3.1) font apparaître deux autres paramètres qui rendent compte des effets diffusifs : le nombre de Reynolds cinétique basé sur la vitesse d’Alfvén $R_e^A = V_A L / \nu$ avec $V_A = B_0 / \sqrt{\rho \mu} = H_0 \sqrt{\mu / \rho}$, et le nombre de Lundquist Lu défini par $Lu = \mu \sigma V_A L$. A l’aide de ces deux paramètres on définit un nombre de Prandtl magnétique noté $Pm = Lu / R_e^A$ soit $Pm = \nu \mu \sigma$. Ce nombre rend compte du temps de diffusion ohmique par rapport au temps de diffusion visqueux. Pour les métaux liquides usuels, ce nombre est de l’ordre de 10^{-5} . Les simulations numériques avec des nombres de Reynolds cinétiques élevés sont exigeants en terme de résolution spatiale, il faut avoir au minimum 3 ou 4 points de grille dans les couches limites qui varient comme $1/\sqrt{R_e^A}$ ou $1/\sqrt{Lu}$. Grâce à l’axisymétrie du problème, nous avons pu garder une valeur réaliste du nombre de Reynolds cinétique, $R_e^A = 5000$. Le nombre de Lundquist est choisi de l’ordre de la centaine de façon à ce que le temps de dissipation ohmique $T_d = \mu \sigma L^2$ soit grand devant le temps d’Alfvén $T_a = L / H_0 \sqrt{\mu / \rho}$.

4.3.1 Régime impulsionnel

Dans un premier temps on étudie la réponse impulsionnelle du cylindre. Pour cela, on fait passer un courant limité dans le temps dans la bobine excitatrice. L’amplitude du courant imposé doit rester faible de façon à ce que les non-linéarités ne soient pas très importantes. On définit un paramètre ϵ comme le rapport de la norme du champ magnétique perturbé engendré par le courant sur la norme du champ extérieur $\epsilon = |\mathbf{h}| / |\mathbf{H}_0|$.

Les simulations présentées concernent le régime linéaire pour lequel le paramètre ϵ est compris entre 10^{-2} et 10^{-3} .

Le cylindre est plongé dans un champ magnétique axial H_0 fixé à 1, la perturbation magnétique réalisée est de la forme $J_\theta = J_0 (t/t_c)(1 + (t/t_c)^3)$. Plusieurs simulations à différents Prandtl ont été réalisées. La valeur du nombre de Reynolds cinétique basé sur la vitesse d'Alfvén étant fixée à 5000, changer le Prandtl revient à changer le nombre de Lundquist, soit la diffusivité magnétique du fluide considéré. Pour un nombre de Prandtl $Pm = 0.01$, correspondant à un nombre de Lundquist $Lu = 50$, on constate (cf. figure 4.4 a) que le modèle est trop dissipatif. Une seule réflexion d'onde d'Alfvén est observée sur 10 temps d'Alfvén. Pour un nombre de Prandtl $Pm = 0.1$ correspondant à un nombre de Lundquist $Lu = 500$, les termes de diffusion magnétique sont dix fois plus faibles que précédemment. Dans ces conditions, on observe plusieurs réflexions d'onde d'Alfvén (cf. figure 4.4 b). A chaque réflexion, on remarque que l'amplitude de l'onde est atténuée, cette atténuation de forme exponentielle est essentiellement due à la diffusion ohmique, puisque $Lu < R_e^A$. Dans les deux cas on voit que l'onde se propage bien à une vitesse égale au champ magnétique extérieur fixé à 1 et arrive sur la bobine réceptrice au temps d'Alfvén $T_a = 1$.

La figure 4.4 représente la force électromotrice mesurée sur la face supérieure du cy-

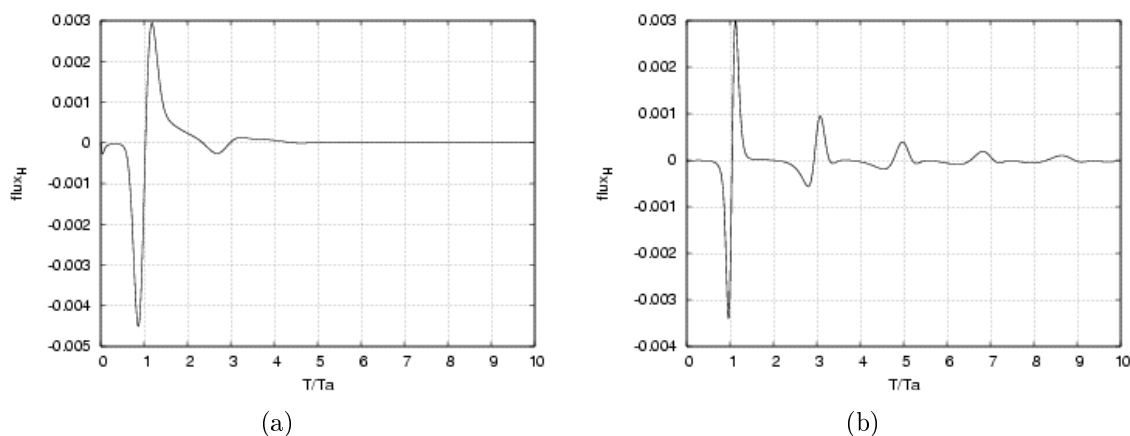


FIG. 4.4 – Force électromotrice (fem) mesurée sur la face supérieure du cylindre pour différents nombres de Lundquist et à un nombre de Reynolds cinétique fixé $R_e^A = 5000$. (a) Représente la fem pour un nombre de Lundquist $Lu = 50$ et (b) représente la fem pour un nombre de Lundquist $Lu = 500$.

lindre. On constate un minimum pour $t/T_a = 1$ ce qui correspond à l'arrivée de l'onde avant la réflexion, suivi d'un maximum plus atténué en amplitude ce qui correspond à l'éloignement de la perturbation après réflexion. Cette dissymétrie est beaucoup moins prononcée quand le nombre de Lundquist est élevé.

Lorsqu'on représente l'amplitude des composantes non nulles de la vitesse V_r, V_z et du champ magnétique H_r, H_z en un point du cylindre (cf. figure 4.5), on constate un comportement différent à la réflexion pour le champ de vitesse et le champ magnétique. Les composantes radiale H_r et axiale H_r du champ magnétique ne changent pas de signe à la réflexion, alors que les composantes V_r et V_z du champ de vitesse changent de signe. On remarque qu'avant la réflexion les composantes du champ magnétique et du champ de vitesse sont en opposition de phase, alors qu'après réflexion sur le couvercle supérieur du cylindre, elles redescendent en phase. Afin de confirmer cette

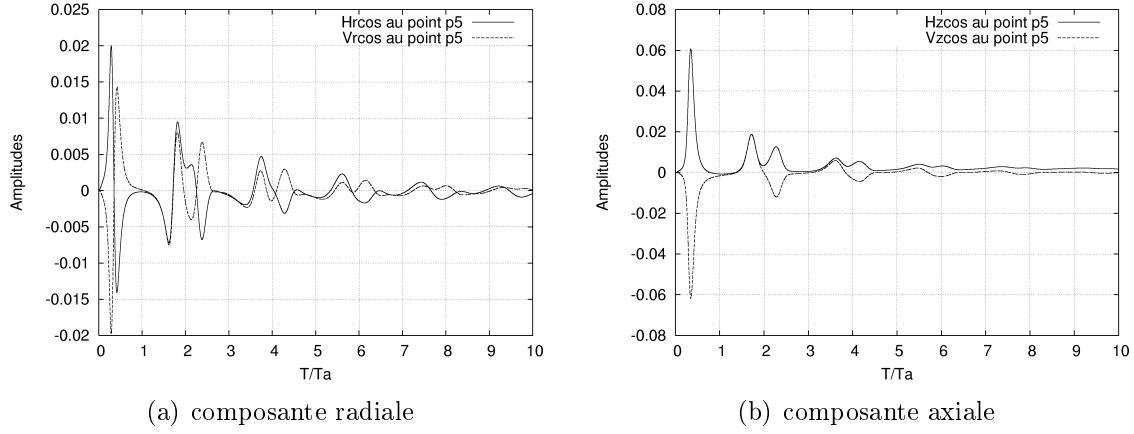


FIG. 4.5 – Signaux temporels en vitesse et en champ magnétique pour un point de coordonnées $(r = 0.25, z = -0.1)$, $Lu = 500, Pm = 0.1$.

propriété on propose de réaliser des visualisations du champ de vitesse et du champ magnétique dans le plan méridien avant et après réflexion (cf. figure 4.6). On constate que, dans le plan méridien (r, z) les champs \mathbf{U} et \mathbf{H} tournent en sens inverse avant la réflexion. Après réflexion sur le haut du cylindre, les deux champs tournent dans le même sens. Si on compare les figures 4.6 c et d, on constate que le sens de rotation du champ magnétique est resté constant à la réflexion, en revanche les figures 4.6 a et b montrent que le sens rotation du champ de vitesse a changé, ce qui est en accord avec les observations faites précédemment sur les signaux.

On a vu que les équations linéarisées ont des solutions $z^\pm = u \pm h$ qui se propagent le long de \mathbf{H}_0 à la vitesse d'Alfvén. Dans le cas d'un milieu infini, u et h peuvent être quelconques (comme une onde simple en acoustique, telle que $u = f(x-ct) + g(x+ct)$). Dans le cas de l'expérience avec un cylindre fini, u et h doivent vérifier des conditions aux limites en $r = R$ et $z = \pm L/2$ très différentes pour u et h . Nous avons bien constaté que les solutions numériques sont qualitativement du type z^\pm dans le corps du cylindre et il y a un échange entre z^+ et z^- à la réflexion.

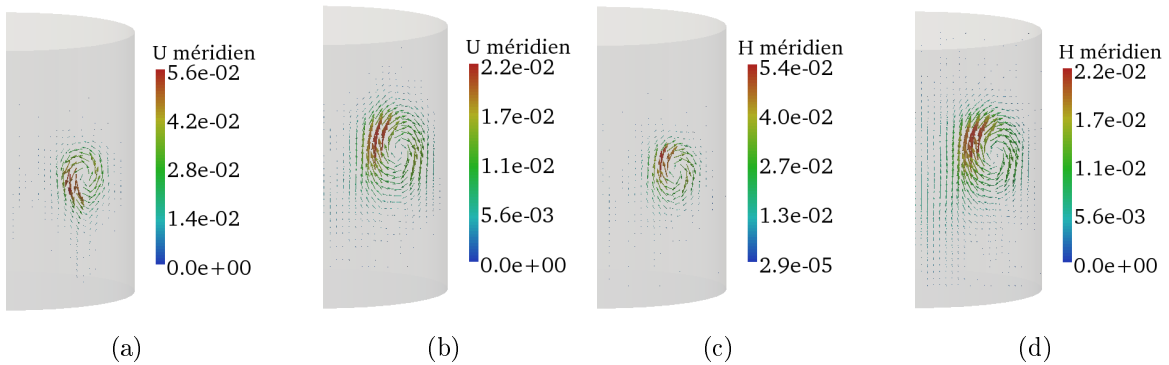


FIG. 4.6 – Champs magnétique et de vitesse méridiens avant (a,b) et après (c,d) réflexion dans le régime impulsionnel, $Lu = 500, Pm = 0.1$.

Cette étude préliminaire nous a permis de dégager plusieurs caractéristiques des ondes d'Alfvén dans un fluide incompressible magnétisé. On a vu que, dans un régime

où la dissipation ohmique est faible, des ondes transverses au champ magnétique se déplaçant à une vitesse proportionnelle au champ magnétique peuvent être excitées. On a aussi pu vérifier que ces ondes peuvent se propager dans deux directions : dans celle des lignes de champ et dans la direction opposée. On notera la propriété différente des structures hydrodynamique et magnétique à la réflexion.

4.3.2 Régime harmonique

Le cylindre peut également être excité en régime harmonique. En produisant un champ de perturbation oscillant, une réponse de résonance est attendue lorsque la fréquence de forçage est proche d'une fréquence propre d'un mode d'Alfvén du cylindre. Avec la configuration choisie, on s'attend à un temps d'aller-retour proche de 2, donc à une pulsation de résonance proche de π . Le courant injecté dans la bobine dépend d'une pulsation ω tel que $J_\theta = J_0 \sin(\omega t)$, ω variant de $\pi/2$ à 4π . Afin de produire la courbe de résonance, on excite le système avec différentes pulsations ω . La réponse est mesurée par la mesure de la *fem* sur la face supérieure du cylindre. La réponse est maximale pour les fréquences proches des modes de résonance. La figure 4.7 (c) représente la force électromotrice induite dans la bobine réceptrice divisée par la pulsation pour différentes valeurs de ω .

On observe un premier pic de résonance pour $\omega = \pi$ et un deuxième pic de plus faible en amplitude pour $\omega = 2\pi$ comme attendu. Cependant, le fait que l'onde soit spatialement étendue peut expliquer la largeur des deux pics. Pour la pulsation $\omega = \pi$, on peut considérer que l'onde est excitée à chaque réflexion sur le couvercle inférieur du cylindre.

La visualisation des structures hydrodynamiques aux deux fréquences de résonance $\omega = \pi$ et $\omega = 2\pi$ (cf. figure 4.7 (b) et 4.7 (d)) montre que l'on excite différents modes propres de résonance. Pour $\omega = \pi$, on a dans le demi-plan méridien une seule structure hydrodynamique qui résonne, la taille caractéristique de celle-ci est de l'ordre de la hauteur du conteneur. On appelle cette structure une onde dipolaire. Pour $\omega = 2\pi$, on observe dans le demi-plan méridien deux structures hydrodynamiques de taille caractéristique $1/2$ et de sens de rotation inverse, dénotées structure quadrupolaire.

Cette modélisation idéalisée de l'expérience Galalfvén nous a permis de valider notre approche numérique pour ce type de problème. Les caractéristiques des ondes d'Alfvén ont bien été approchées, tout comme le prévoyait l'approche analytique dans le régime non dissipatif. On a montré que, dans un régime d'excitation impulsionnelle et pour une certaine gamme de nombres de Prandtl Pm et de nombres de Lundquist Lu , des ondes électromagnétiques transverses au champ magnétique sont excitées et se propagent à une vitesse proportionnelle au champ magnétique extérieur dans deux directions possibles. L'excitation harmonique dans un régime faiblement non linéaire $\epsilon = |\mathbf{h}|/|\mathbf{H}_0| \sim 10^{-2}$ et très peu diffusif nous a également montré les modes propres de résonance d'un tel système.

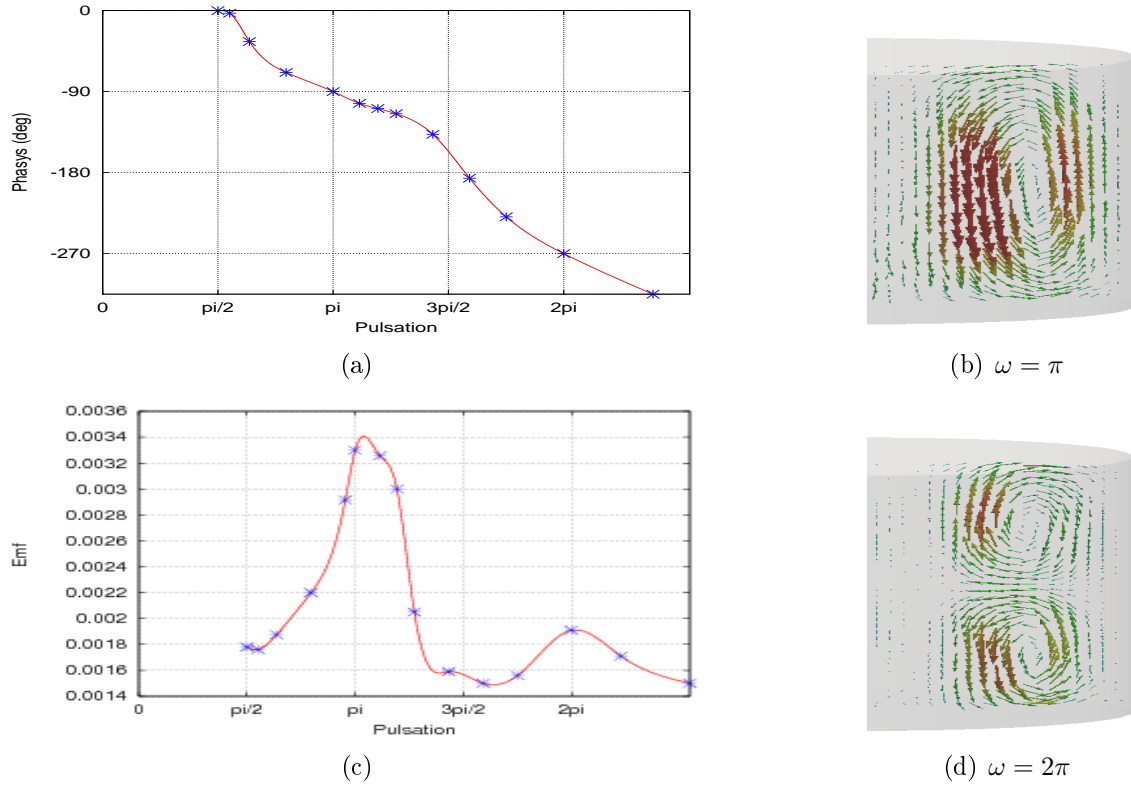


FIG. 4.7 – Réponse de résonance pour des pulsations d'excitation allant de $\omega = \pi/2$ à $\omega = 4\pi$. (a) Déphasage entre le signal émis et le signal mesuré sur la bobine haute. (c) Courbe de résonance montrant la *fem* divisée par la pulsation ω au cours du temps. Visualisation des champs de vitesse méridiens pour $\omega = \pi$ (b) et $\omega = 2\pi$ (d). Les vecteurs sont représentés dans un plan méridien.

4.4 Propagation d'ondes d'Alfvén dans un dispositif expérimental

4.4.1 Etude du régime impulsif

La simulation précédente présente plusieurs différences par rapport à l'expérience Galalfvén présentée en introduction. La paroi conductrice entourant le fluide n'est pas prise en compte et la génération de la perturbation est au contact du fluide. Afin de réaliser une modélisation plus fidèle de l'expérience, il nous faut prendre en compte l'enveloppe conductrice. La configuration exacte de la bobine excitatrice doit également être modélisée. Pour cela, on considère une bobine placée sur la face inférieure du cylindre dont la taille est en accord avec la bobine expérimentale, voir figure 4.8. La figure ci-dessous représente le schéma de ce dispositif expérimental ainsi que le maillage du demi-plan méridien. Dans nos simulations, le conteneur est modélisé par un cylindre de hauteur $L = 1$ et de rayon $R = 0.55$, ce cylindre est entouré d'une paroi conductrice de 0.02 d'épaisseur. La bobine excitatrice est modélisée par un tore de section rectangulaire dont les dimensions sont en accord avec la bobine expérimentale placée sur la surface inférieure du cylindre. Les simulations présentées sont faites avec un maillage (figure 4.8 b) quasi uniforme avec un pas de $1/200$ de façon à résoudre la couche conduc-

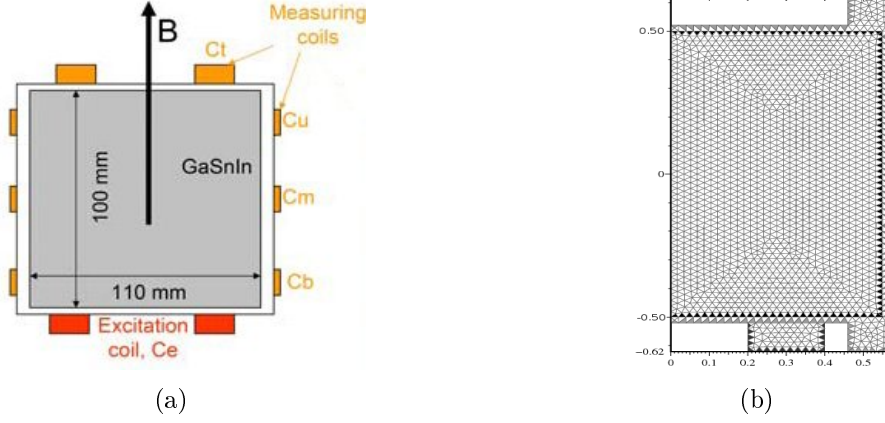


FIG. 4.8 – (a) Schéma de l'expérience Galálfvén. (b) maillage du demi-plan méridien de la simulation .

trice (environ 4 points de grille dans l'enveloppe conductrice). L'ensemble est placé dans une sphère de vide de rayon $R=10$ où un champ magnétique constant \mathbf{H}_0 orienté selon l'axe du cylindre est imposé. On excite le fluide contenu dans le cylindre en imposant un courant azimutal dans la bobine excitatrice, la forme du courant imposé est triangulaire et a des caractéristiques très similaires à l'excitation expérimentale. On prend également en compte des sauts de conductivité électrique en accord avec les données expérimentales. Les conductivités électriques sont adimensionnées par la conductivité du galinstan, ce qui donne $\sigma = 1$ dans le fluide, $\sigma = 0.4$ pour la couche conductrice en acier et $\sigma = 0.01$ pour la bobine excitatrice composée de fils de cuivre et de plastique.

Avec les champs magnétiques utilisés dans l'expérience, le nombre de Lundquist est de l'ordre de 60. Le nombre de Prandtl, étant uniquement lié au fluide utilisé, est indépendant du champ magnétique et est de l'ordre de 10^{-5} . Les simulations numériques sont réalisées pour des nombres de Lundquist proches de ceux expérimentaux. En revanche le nombre de Prandtl dans nos simulations est de l'ordre de 10^{-3} . On peut cependant supposer que le comportement qualitatif des ondes d'Alfvén peut être approché. Dans un premier temps on se propose de reproduire la réponse impulsionnelle pour différents nombres de Lundquist allant de 33 à 61.2, correspondant à des champs extérieurs allant de 7 Tesla à 13 Tesla. Tout comme précédemment dans le cas idéal, on impose un courant azimutal dans la bobine extérieure située sur la face inférieure du cylindre du type :

$$J_s = \text{Amp} \frac{(\lambda t)^2 - \alpha \exp(-(\frac{\lambda t - a}{b})^2) - \beta \exp(-(\frac{\lambda t - c}{d})^2)}{(1 + ((\lambda t) - \gamma)^9)} \quad (4.4.1)$$

Les paramètres α, β, a, c permettent d'optimiser la forme du courant de façon à être le plus proche possible de la forme du courant imposé expérimentalement. Les paramètres λ, b, d permettent de régler le temps du maximum d'amplitude afin qu'il soit en accord avec le temps du maximum expérimental pour chaque valeur de champ extérieur H_0 . Enfin l'amplitude du courant est réglée grâce au paramètre Amp, celle ci est choisie de façon à rester dans le domaine linéaire $\epsilon \sim 10^{-3}$. La force électromotrice est calculée dans le vide à proximité du cylindre en $r = 0.57$ dans différentes régions le long de la hauteur du cylindre : en $z = 0.55$ pour la bobine supérieure notée Ct , en $z = 0.44$

pour la bobine latérale haute Cu , en $z = 0$ pour la bobine latérale moyenne Cm et en $z = -0.44$ pour la bobine latérale basse Cb .

Les forces électromotrices calculées sur la bobine supérieure Ct pour les différents nombres de Lundquist sont représentées sur la figure 4.9. L'origine des temps a été décalée de façon à ce que le pic maximum d'intensité soit à $t/T_a = 0$. La valeur de la fem est représentée en fonction du temps adimensionné sur le temps d'Alfvén T_a . On constate que les ondes atteignent le haut du cylindre au temps $t = T_a$ défini comme $T_a = L/V_A = 1$ ici. Ce résultat est en accord avec la théorie : les ondes se propagent à une vitesse proportionnelle au champ magnétique extérieur. Le maximum de la force électromotrice varie linéairement avec la valeur du champ magnétique extérieur.

On s'est également intéressé à la diffusion et à la réflexion de ces ondes au cours de

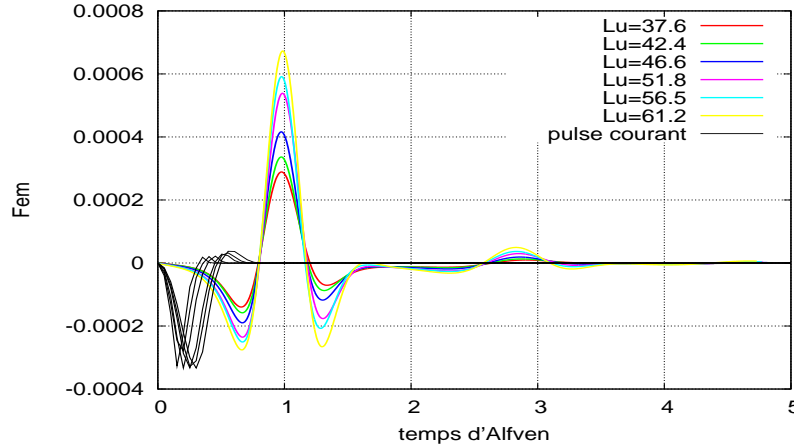


FIG. 4.9 – Force électromotrice calculée sur la bobine supérieure Ct en fonction du temps pour différents nombres de Lundquist. En noir sont représentés les courants azimutaux imposés non décalés.

leur déplacement. Afin de suivre leur déplacement on a calculé la force électromotrice sur les 3 bobines latérales, le résultat pour un nombre de Lundquist égal à 61.2 est représenté sur la figure 4.10. À gauche on représente les différentes forces électromotrices mesurées expérimentalement (en traits pleins) et calculées (en traits pointillés) sur les trois bobines latérales, on voit clairement l'effet de la diffusion ohmique sur l'onde qui s'atténue exponentiellement au cours de son déplacement. La visualisation du champ magnétique méridien montre une onde quadrupolaire (voir figure 4.10 b) car on distingue deux rouleaux de sens de rotation opposés. Ce résultat est surprenant car, lorsque l'excitation est au contact du fluide, l'onde d'Alfvén générée est de symétrie dipolaire (cf. figure 4.6). Connaissant la forme de l'onde engendrée dans le cylindre, je me suis intéressé plus particulièrement à la réflexion de l'onde sur la face supérieure du cylindre. Comme précédemment dans le cas idéal, la visualisation des champs de vitesse et des champs magnétiques méridiens montre également un comportement différent à la réflexion pour les champs de vitesse et magnétique. Si on regarde le champ de vitesse méridien avant ($t = 0.45$) et après réflexion ($t = 1.45$), on constate que le sens de rotation de l'onde est inversé alors que, pour le champ magnétique, il reste inchangé (cf. figure 4.11).

On peut également remarquer que, lors de la réflexion, l'amplitude du champ de vitesse est diminuée alors que celle du champ magnétique est augmentée. En effet, pour $t =$

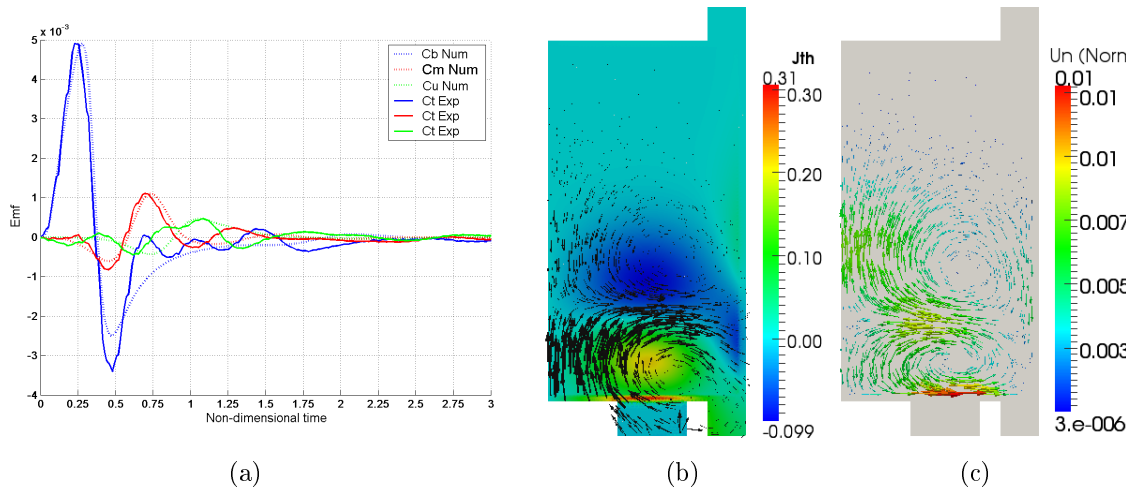


FIG. 4.10 – (a) Comparaison entre les *fem* calculées et mesurées au niveau des bobines latérales. (b) Visualisation du courant azimutal et du champ magnétique méridiens et du champ de vitesse méridien (en c) pour $t = 0.5$, pour une simulation de paramètres $Lu = 61.2$, $Pm = 0.005$.

0.95, on relève une amplitude maximum de la norme de vitesse de $5 \cdot 10^{-3}$ alors qu'après réflexion, elle n'est plus que de 10^{-3} . Pour le champ magnétique l'amplitude passe de $2 \cdot 10^{-3}$ à $3 \cdot 10^{-3}$. On a donc un transfert d'énergie cinétique en énergie magnétique au cours de la réflexion. Cette caractéristique est confirmée lorsqu'on observe les énergies cinétique et magnétique au cours du temps (figure 4.12 a). On constate dans un premier temps un transfert d'énergie magnétique en énergie cinétique (autour de $t = 0.85$), après réflexion (autour de $t = 1.15$), on voit un transfert d'énergie cinétique en énergie magnétique. Ceci est certainement dû à la présence de la paroi du cylindre qui, de par sa nature conductrice, subit des effets d'induction magnétique au contact de l'onde. Enfin l'observation de l'énergie totale au cours du temps montre qu'il y a équi-partition des énergies cinétique et magnétique. On constate également l'effet de la diffusion magnétique qui dissipe l'énergie totale au cours de la propagation de l'onde.

4.4.2 Etude du régime harmonique

Dans cette section, on se propose d'étudier la réponse harmonique du cylindre dans la configuration de l'expérience Galalfvén. Pour cela, on se place dans les mêmes conditions et on utilise le maillage présenté à la figure 4.8 b. On s'est intéressé à deux cas distincts : un premier cas très diffusif où le nombre de Lundquist est égal à 61.2, soit environ le nombre de Lundquist atteint dans l'expérience Galalfvén pour un champ magnétique extérieur $H_0 = 13$ Tesla. On a également étudié un deuxième cas 10 fois moins diffusif où le nombre de Lundquist est égal à 600. Ce cas correspondrait à la même expérience réalisée avec un fluide dix fois plus conducteur que le galinstan comme par exemple du sodium liquide qui est environ sept fois plus conducteur.

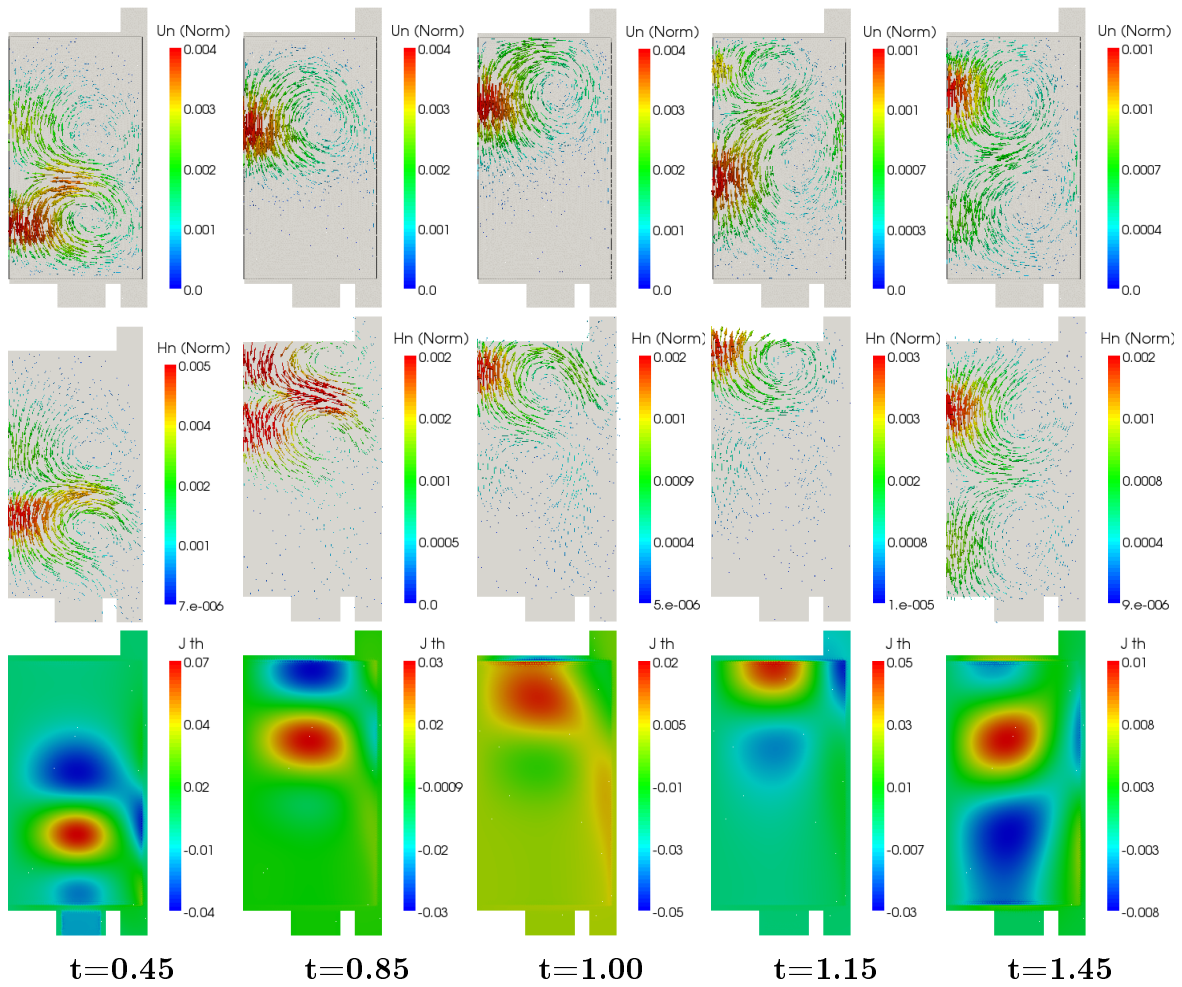


FIG. 4.11 – Visualisation des champs de vitesse (en haut), des champs magnétiques au milieu et des courants azimutaux j_θ (en bas) pour différents temps ($Lu = 61.2$, $Pm = 0.005$).

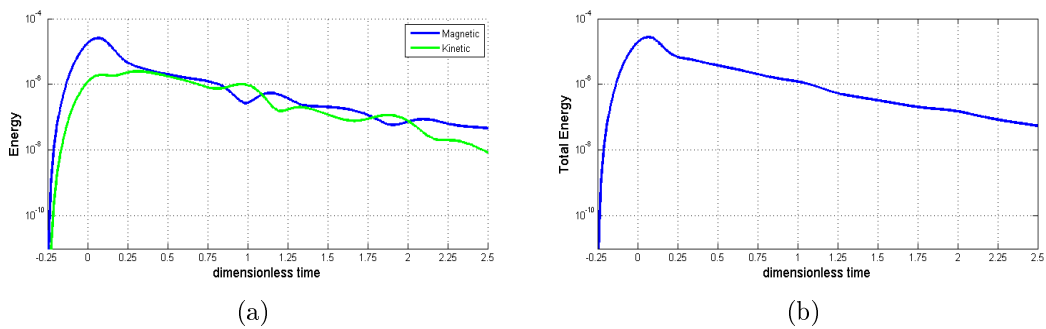


FIG. 4.12 – (a) Energies magnétique et cinétique en échelle log au cours du temps. (b) Energie totale en échelle log au cours du temps.

4.4.2.1 Cas où la diffusivité magnétique est élevée

Tout comme on a procédé dans la section 4.3.2, on injecte un courant sinusoïdal dans la bobine excitatrice de la forme : $J_\theta = J_0 \sin(\omega t)$, ω variant de $\pi/2$ à 4π , afin de produire la courbe de résonance. Les courbes de résonance ainsi que le déphasage

entre le signal imposé et la réponse du cylindre sont présentés sur la figure 4.13. On peut constater que ces deux courbes sont en bon accord avec les mesures expérimentales présentées dans [1]. On observe deux pics de résonance, élargis en $\omega \approx \pi$ et $\omega \approx 2\pi$. Les pics observés sont moins marqués que dans le cas idéal car ici la diffusivité magnétique est 10 fois plus élevée ($Lu = 61.2$), le temps de diffusion magnétique est de l'ordre de la période d'excitation imposée définie comme $T = 2\pi/\omega$. L'onde d'Alfvén s'atténue donc sur un temps comparable à la période d'excitation. La visualisation des champs de vitesse et magnétique méridiens montre alors des structures non stationnaires.

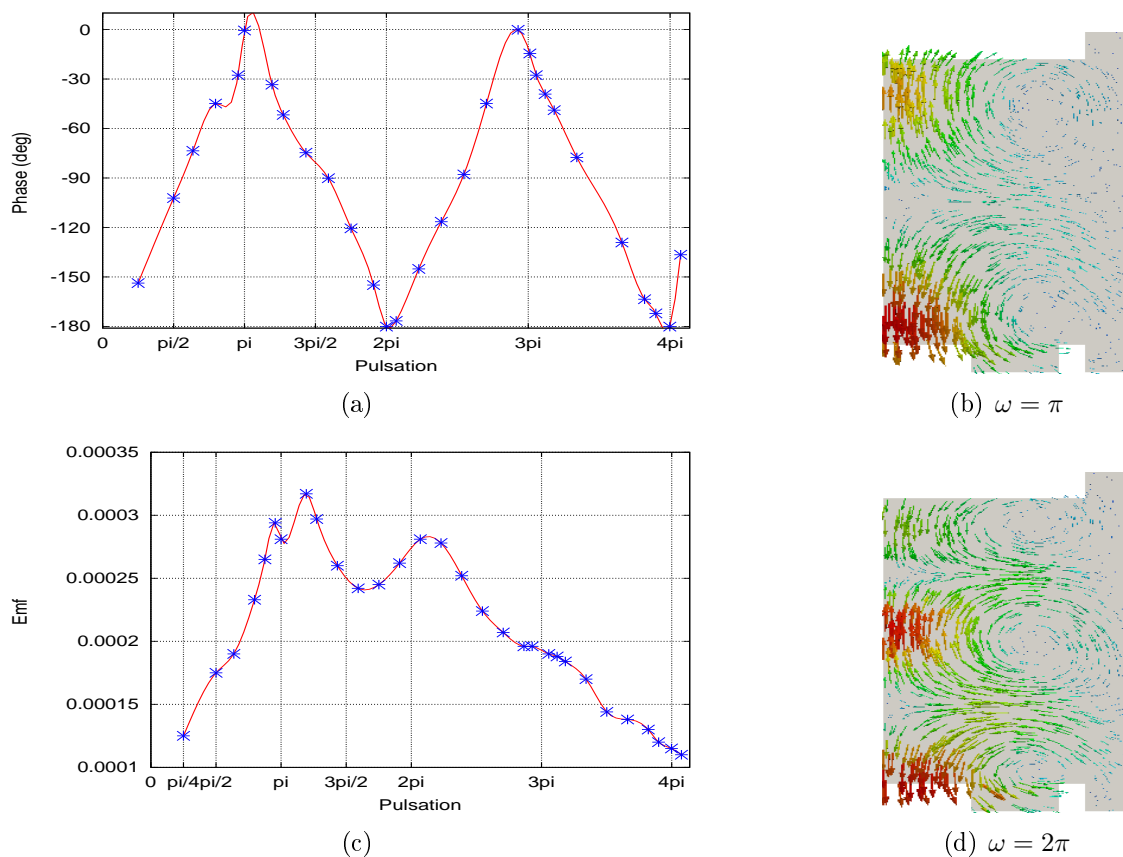


FIG. 4.13 – Réponse de résonance pour des pulsations d'excitation allant de $\omega = \pi/2$ à $\omega = 4\pi$. (a) Déphasage entre le signal émis et le signal mesuré sur la bobine haute (Ct). (c) Courbe de résonance. (b,d) Visualisation des champs de vitesse méridiens pour respectivement $\omega = \pi$ et $\omega = 2\pi$.

En conclusion, l'étude harmonique des ondes d'Alfvén n'est possible que lorsque le temps de diffusion, notamment ohmique, est grand devant la période d'excitation de ces ondes, ce que nous nous proposons d'étudier dans la section suivante.

4.4.2.2 Cas où la diffusivité magnétique est faible

Je me suis également intéressé à la réponse de résonance dans le cas où le nombre de Lundquist était dix fois plus élevé que précédemment, ce qui correspondrait au remplacement du galinstan par du sodium liquide dans le dispositif expérimental.

4.4.2.2.1 Résultats numériques pour $Lu = 600$ Dans ce cas la courbe de résonance obtenue pour ω allant de $\omega = \pi/4$ à $\omega = 4\pi$ montre trois pics de résonance distincts pour des pulsations $\omega = 3.75$, $\omega = 7.5$, $\omega = 11.5$ (voir figure 4.14).

On peut observer sur la figure 4.14 le déphasage entre le signal émis et le signal mesuré.

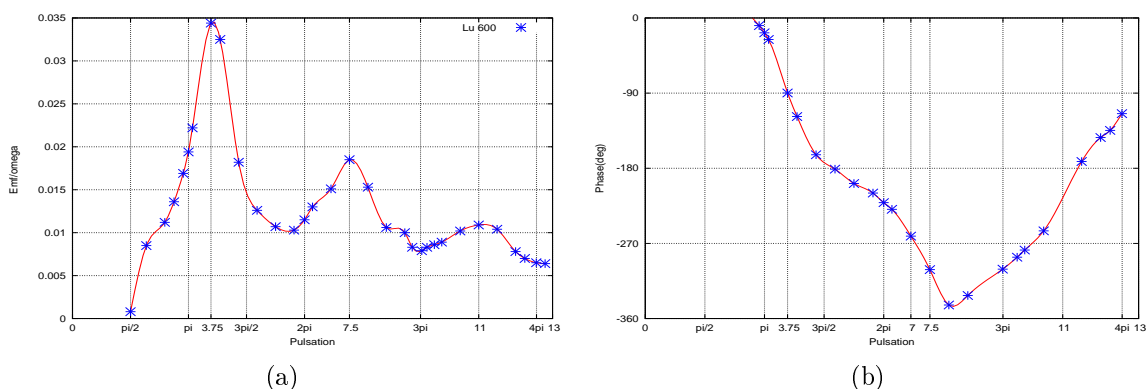


FIG. 4.14 – (a) Réponse de résonance pour des pulsations d'excitation allant de $\omega = \pi/2$ à $\omega = 13$. (b) Déphasage entre le signal émis et le signal mesuré sur la bobine haute.

Pour $\omega = 3.75$, on constate que, comme dans le cas idéal, à la résonance le déphasage est de -90 . La visualisation des champs de vitesse et magnétique méridiens aux différentes pulsations de résonance (voir figure 4.15) montre des structures stationnaires différentes pour le champ de vitesse et pour le champ magnétique. Pour $\omega = 3.75$ on

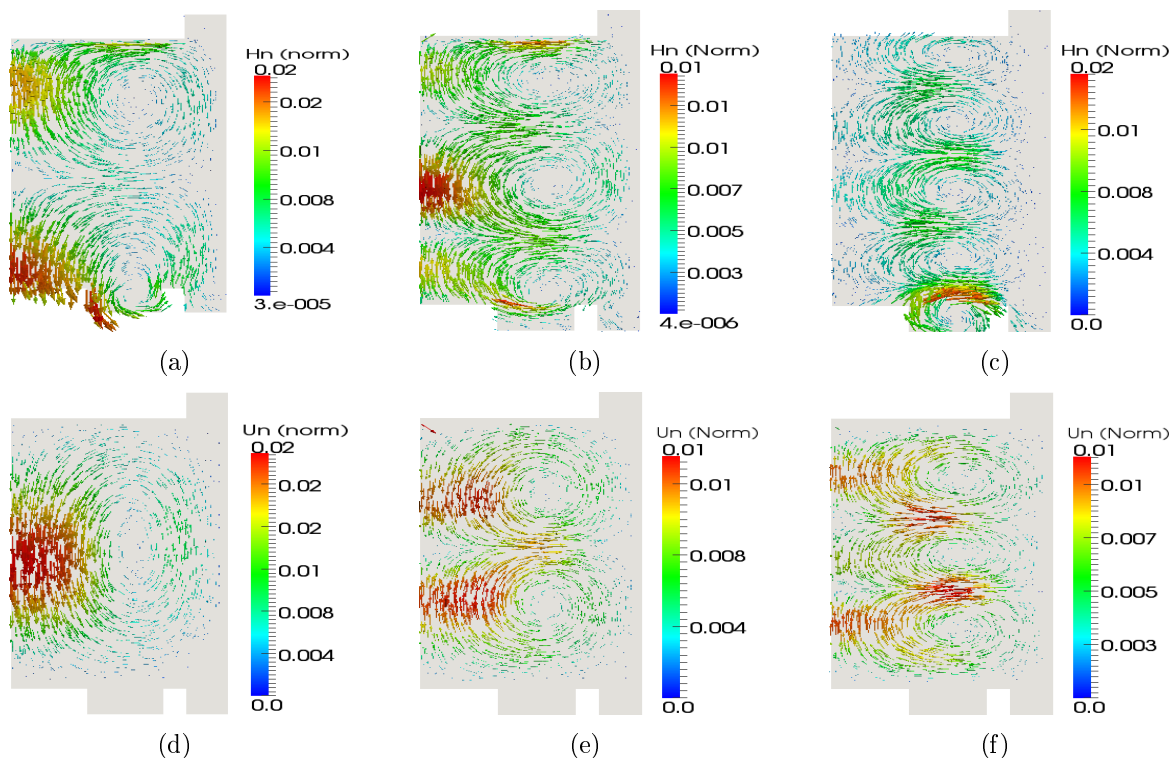


FIG. 4.15 – Visualisation des champs magnétique (a,b,c) et de vitesse (d,e,f) pour les trois pulsations de résonance $\omega = 3.75$, $\omega = 7.5$, $\omega = 11.5$.

observe une structure magnétique quadrupolaire qui résonne dans le cylindre alors que,

pour le champ de vitesse, on observe une structure dipolaire qui remplit le cylindre. Pour le premier harmonique, $\omega = 7.5$, on voit une structure magnétique de longueur d'onde $\lambda_h = 2/3$ et une structure hydrodynamique de longueur d'onde $\lambda_u = 1$. Pour le deuxième harmonique $\omega = 11.5$, on observe une structure magnétique de longueur d'onde $\lambda_h = 1/2$ et une structure hydrodynamique de longueur d'onde $\lambda_u = 2/3$. Cette différence entre les structures hydrodynamique et magnétique est certainement due au comportement différentiel de chaque structure à la réflexion, la structure magnétique conserve son signe au cours de la réflexion alors que la structure hydrodynamique change de signe.

Pour le vérifier j'ai représenté pour la pulsation $\omega = 3.75$ les champs de vitesse méridiens à différents temps $t = 1, 2, 3$ correspondant grossièrement aux instants pour lesquels le signal d'entrée $j_\theta = \sin(3.75t)$ est respectivement minimum, maximum et minimum (voir figure 4.16). On peut remarquer qu'au temps $t/T_a = 1$, soit juste avant la réflexion, on a une structure d'onde hydrodynamique quadrupolaire alors qu'au temps $t/T_a = 2$, la structure de l'onde est devenue dipolaire et semble le rester au delà. L'évolution de la structure magnétique est plus visible sur la visualisation du courant azimuthal montré en bas de la figure 4.16. A $t/T_a = 1$, l'onde se dirige de bas en haut, on a respectivement une boucle de courant positive puis négative ; à $t/T_a = 2$, l'onde se déplace de haut en bas, on retrouve une boucle de courant positive puis négative. A $t/T_a = 3$, on retrouve la même configuration qu'à $t/T_a = 1$. Donc la structure magnétique associée au courant azimuthal reste inchangée au cours du déplacement de l'onde.

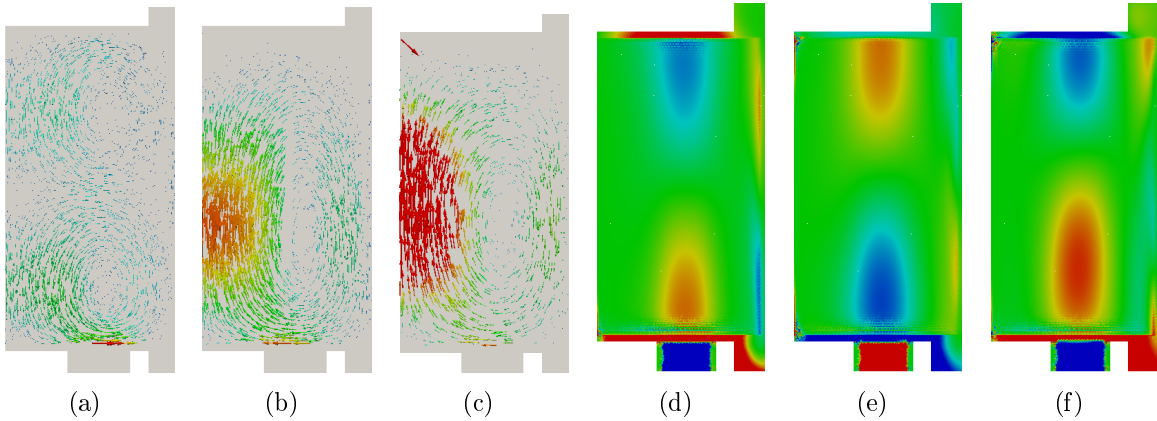


FIG. 4.16 – (a-c) Visualisation des champs de vitesse méridien à différents temps $t = 1, 2, 3$. (d-f) Visualisation du courant azimuthal aux mêmes temps pour la pulsation de résonance $\omega = 3.75$, en rouge $j_\theta > 0$, en bleu $j_\theta < 0$.

4.4.2.2 Interprétation des résultats expérimentaux de A. Jameson Une expérience relativement similaire à la modélisation proposée a été réalisée en 1964 par A. Jameson [43]. Elle consiste en un conteneur torique d'environ 20 cm de hauteur et de 60 cm de diamètre rempli de sodium liquide, placé dans un champ magnétique vertical et constant, orienté selon son axe de révolution. Un forçage harmonique est effectué grâce à une bobine torique entourant le conteneur, la réponse est mesurée grâce à une boucle de courant située au milieu du conteneur (figure 4.17 b). Le champ magnétique extérieur est d'environ $0.65T$. Avec les dimensions caractéristiques de l'expérience et

les propriétés du sodium liquide à environ 120 degrés Celsius (diffusivité magnétique ($\eta = 1/\sigma\mu = 0.82510^{-1}\text{m}^2/\text{s}$), viscosité cinématique $\nu = 0.67710^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ et masse volumique $\rho = 0.9310^3\text{kg}/\text{m}^3$), on peut construire un nombre de Lundquist $Lu \approx 40$. Jameson a cherché à montrer l'existence d'ondes d'Alfvén en étudiant la réponse du sodium liquide faiblement magnétisé à une excitation harmonique dans un régime faiblement non linéaire (ϵ de l'ordre de 10^{-4}). Les mesures expérimentales montrent un premier pic de résonance de forte amplitude environ 9 fois plus important que le champ injecté pour une fréquence $f_0 = 55V_A/\text{s}$ (où V_A est la vitesse d'Alfvén), suivi d'un deuxième pic de plus faible amplitude autour de $f_1 = 150V_A/\text{s}$ (figure 4.17 b). La fréquence de résonance f_0 adimensionnée par la vitesse d'Alfvén $V_A = 19.65\text{m}/\text{s}$ correspondant à un champ magnétique $B_0 = 0.650T$ et à la hauteur caractéristique de l'expérience $d = 0.0875\text{m}$ devient $f'_0 = 0.245$ soit une période d'excitation $T'_0 \approx 4.1$. De la même façon, la fréquence du deuxième harmonique devient $f'_1 = 0.57$ soit une période d'excitation de $T'_1 \approx 1.73$.

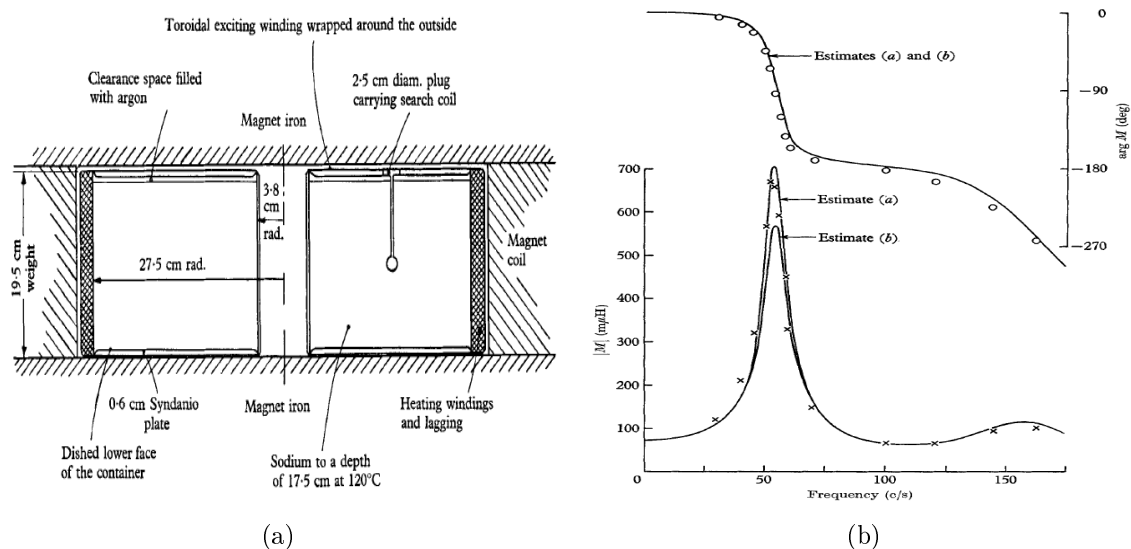


FIG. 4.17 – (a) Schéma de l'expérience de A. Jameson (1964). (b) Courbe de résonance et déphasage du signal.

4.4.2.2.3 Influence de la position de mesure permettant d'établir la courbe de résonance Nous avons essayé de comprendre pourquoi A. Jameson obtient la réponse du premier harmonique pour une fréquence trois fois supérieure au fondamental et non deux fois supérieure comme dans notre cas. Notons que l'expérience de Jameson diffère sur quelques points de l'expérience Galalfvén et par conséquent de nos simulations.

Pour un premier point, les géométries sont différentes : l'expérience de Jameson est de géométrie torique alors que l'expérience Galalfvén est cylindrique. Cependant, la géométrie cylindrique est un cas particulier de l'expérience, il suffit de considérer un tore dont le rayon interne tend vers 0 pour retrouver une géométrie cylindrique. Pour un second point, les forçages sont très différents : dans l'expérience de A. Jameson, le fluide est perturbé grâce à une bobine torique située tout autour de la cavité alors que, dans nos simulations, le fluide est perturbé par une boucle de courant localisée sur la

face inférieure du cylindre. L'expérience de A. Jameson étant symétrique par rapport au plan équatorial, l'excitation magnétique via la bobine torique va générer simultanément deux ondes aux deux extrémités du tore qui se propagent en sens opposé. Étant donné que l'amplitude d'excitation est suffisamment faible pour rester dans le régime linéaire, ces deux ondes vont évoluer sans interagir. La mesure des signaux permettant d'établir la courbe de résonance est très différente aussi dans les deux cas : pour Jameson, la mesure des grandeurs magnétiques relatives au déplacement des ondes d'Alfvén est faite dans le plan équatorial du conteneur et non sur la face supérieure comme dans nos simulations. Afin de vérifier si la position de la mesure a une quelconque influence sur la courbe de résonance mesurée, on a représenté, sur la figure 4.18 pour $Lu = 60$ et $Lu = 600$, deux courbes de résonance : une première, mesurée sur la surface supérieure du cylindre en (a) et une deuxième courbe de résonance mesurée dans le plan médian du cylindre en (b).

Dans un premier temps on peut remarquer que, pour le cas très diffusif $Lu = 60$, la mesure de la *fem* sur le couvercle supérieur du cylindre montre deux pics de résonance à $\omega_0 = 3.754$ et à $\omega_1 \approx 7$ (voir fig. 4.18 a). Le premier pic n'est pas détecté lorsqu'on mesure le champ magnétique au niveau du plan équatorial (voir fig. 4.18 b). La détection sur le couvercle supérieur semble plus efficace lorsque qu'on est dans un régime très diffusif.

Si on observe la courbe de résonance pour $Lu = 600$ mesurée sur le couvercle du cylindre, on remarque des pics d'amplitude décroissante pour le fondamental $\omega_1 = 3.75$ et tous ses harmoniques $\omega_1 = 7.5$, $\omega_2 = 11.5$, etc. Lorsque la mesure est prise dans le plan équatorial du cylindre, on ne détecte plus que les harmoniques pairs $\omega_1 = 2\omega_0 = 7.5$, $\omega_3 = 4\omega_0 \approx 14$, $\omega_5 = 6\omega_0 \approx 21$. Lorsqu'on visualise les champs magnétiques méridiens de chacun des harmoniques (figure 4.18 (c-i)), on voit que, du fait de leur géométrie torique, les structures excitées vont présenter des nœuds et des ventres en fonction des différents harmoniques excités. Dans le volume du fluide, le mode fondamental excité à $\omega_0 = 3.75$ présente un nœud en $z \approx 0$, le premier harmonique $\omega_1 = 7.5$ présente deux nœuds en $z \approx \pm 1/3$ et un ventre en $z \approx 0$, pour le deuxième harmonique on a 3 nœuds et 4 ventres, etc. Nous pouvons en déduire que, dans le cas où la géométrie de l'onde d'Alfvén est quadrupolaire, la mesure dans le plan équatorial du cylindre ne détecte que les modes possédant un nombre impair de structures (respectivement 3, 5, 7 rouleaux pour $\omega_1, \omega_3, \omega_5$).

Le forçage dans l'expérience de Jameson étant différent, on ne peut pas prévoir la structure exacte des ondes d'Alfvén qui y sont générées. Cependant, en supposant que la géométrie de l'onde est cette fois dipolaire pour ω_0 , on peut penser que, lorsque Jameson réalise sa mesure dans le plan équatorial du conteneur, il ne détecte pas le premier harmonique à $\omega'_1 = 2\omega'_0$ qui, dans ce cas, pourrait être une structure quadrupolaire à deux rouleaux, similaire au fondamental de la figure 4.18. En revanche, il détecte le deuxième harmonique à $\omega'_2 = 3\omega'_0$ qui est constitué de 3 rouleaux. Ceci expliquerait la présence de seulement deux pics séparés à f'_0 et à $3f'_0$, dans la courbe de résonance présentée à droite de la figure 4.17.

En résumé, dans cette étude, on a montré que l'étude harmonique des ondes d'Alfvén n'est possible que dans un régime où la diffusion magnétique est faible car le temps de diffusion magnétique doit être grand devant le temps de propagation des ondes. On

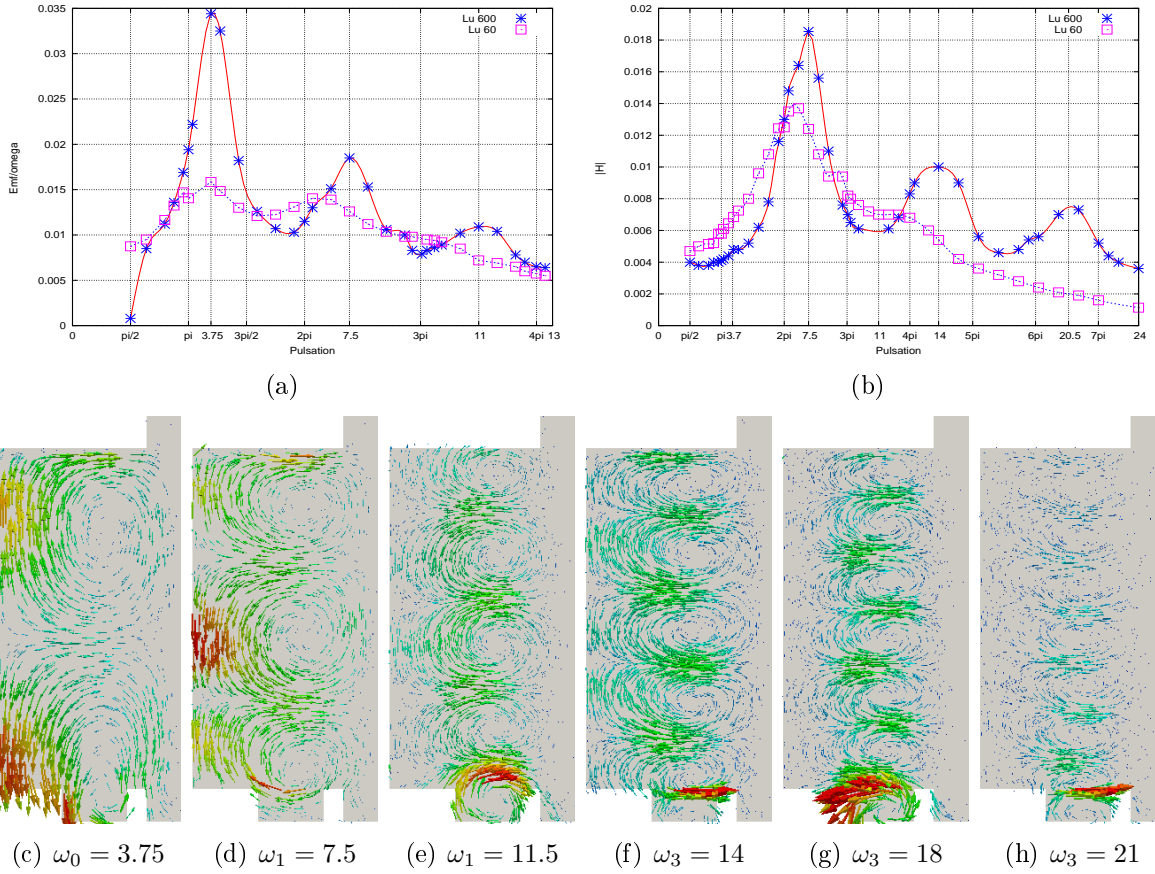


FIG. 4.18 – (a) Courbe de résonance pour $Lu = 60$ et $Lu = 600$, représentant le rapport (fem/ω) mesuré sur la surface supérieure du cylindre. (b) Courbe de résonance pour $Lu = 60$ et $Lu = 600$, représentant la norme du champ magnétique mesurée au centre du cylindre ($r = 0.5$, $z = 0$). (c-h) Visualisation du champ magnétique méridien pour la pulsation fondamentale $\omega_0 = 3.75$ et les 5 harmoniques suivants.

a également mis en évidence la différence significative entre la configuration idéale et la configuration de l'expérience Galalfvén. Dans le cas idéal, l'excitation des ondes se fait au contact du fluide, donnant lieu à une onde dipolaire en régime impulsionnel alors que, dans le cas expérimental, le fait d'exciter l'onde par une bobine torique externe donne lieu à une onde quadrupolaire. En régime harmonique, cette différence génère des modes de résonance bien distincts dans les deux configurations étudiées. Dans la configuration idéale, on observe des structures magnétique et hydrodynamique de même longueur d'onde alors que, dans la configuration de l'expérience, on a des structures magnétique et hydrodynamique différentes. Enfin, nous avons vu que la position de la mesure (soit sur le couvercle supérieur, soit dans le plan équatorial du cylindre) du champ magnétique ou de la fem liés au déplacement des ondes fournit des courbes de résonance différentes en fonction de la structure de l'onde excitée à la fréquence fondamentale (quadrupolaire ou dipolaire). La corrélation des courbes de résonance obtenues en ces deux positions pourrait nous permettre d'identifier la structure spatiale de l'onde. Etant donné que, pour des métaux liquides, il est très difficile de faire des mesures expérimentales du champ de vitesse qui pourraient nous renseigner sur la structure spatiale de l'onde, cette méthode pourrait être utilisée expérimentalement

pour déterminer la structure spatiale des ondes excitées, uniquement à partir de mesure de la *fem* en régime harmonique.

4.5 Etude de la réflexion d'une onde sur une couche conductrice

On a pu observer que la prise en compte d'une couche conductrice a une influence sur la réflexion de l'onde d'Alfvén dans l'expérience Galalfvén. Dans cette section, je me propose d'étudier l'impact de cette couche conductrice sur la dynamique de l'onde dans le régime impulsionnel, en faisant varier la conductivité de cette couche. Afin de diminuer la résolution spatiale et ainsi le temps de calcul, on considère un maillage légèrement différent de celui utilisé précédemment. Soit une cavité cylindrique de hauteur $L = 1$ et de rayon 0.55. Cette cavité possède une couche conductrice inférieure d'épaisseur $e_{\text{inf}} = 0.04$ et de conductivité fixe égale à $\sigma = 0.3$ comme dans l'expérience, une couche conductrice supérieure d'épaisseur $e_{\text{sup}} = 0.04$ et dont la conductivité varie de 10^{-3} à 10^3 . On considère deux versions de ce maillage, avec ou sans couche conductrice latérale (voir figure 4.19).

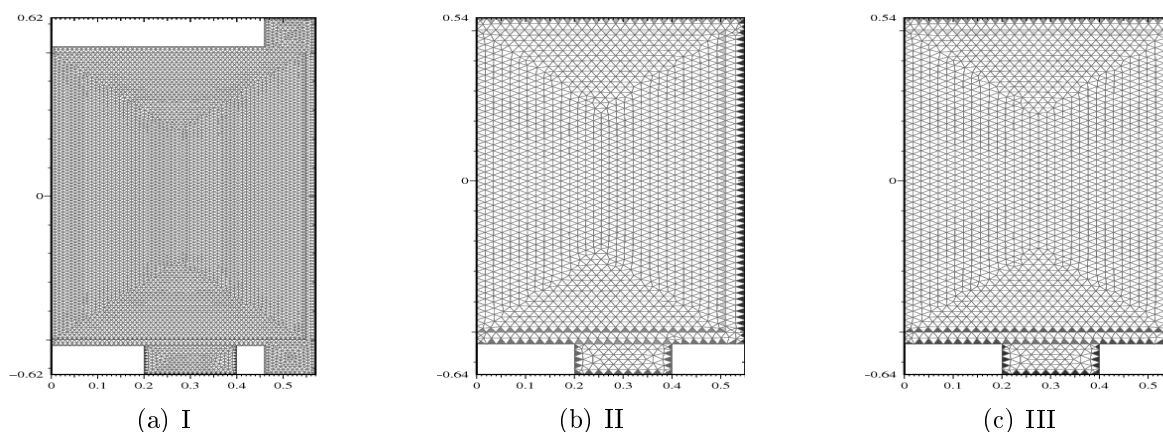


FIG. 4.19 – Différents maillages utilisés $d_x = 1/200$. (a) Maillage I modélisant l'expérience de Galalfvén, (b) maillage II avec couche conductrice d'épaisseur 0.04, (c) maillage III avec couche conductrice d'épaisseur 0.04 sans couche conductrice latérale.

4.5.1 Influence de la couche conductrice latérale

Dans un premier temps, afin d'évaluer si les ergots de l'expérience Galalfvén ou la couche conductrice ont un impact sur la dynamique des ondes, on réalise une même simulation ($Lu = 63$, $Pm = 0.005$), pour les maillages I, II et III. On excite une onde d'Alfvén avec un courant azimutal J_s dont la forme est donnée par l'équation (4.4.1), la conductivité des différentes parties solides conductrices est choisie comme dans l'expérience, soit 3 fois moins conductrice que le fluide. Si on regarde la *fem* calculée sur la bobine extérieure en ($r = 0.3$, $z = 0.57$) au cours du temps pour les 3 configurations

(figure 4.20 a), on voit que les ergots et la couche latérale ne semblent pas avoir de réel effet que ce soit sur la forme de l'onde ou sur sa dynamique. On constate tout de même une légère atténuation de l'onde lorsque la couche latérale est présente. Les énergies magnétique ou cinétique représentées en figure 4.20 (b) sont très similaires pour les trois configurations.

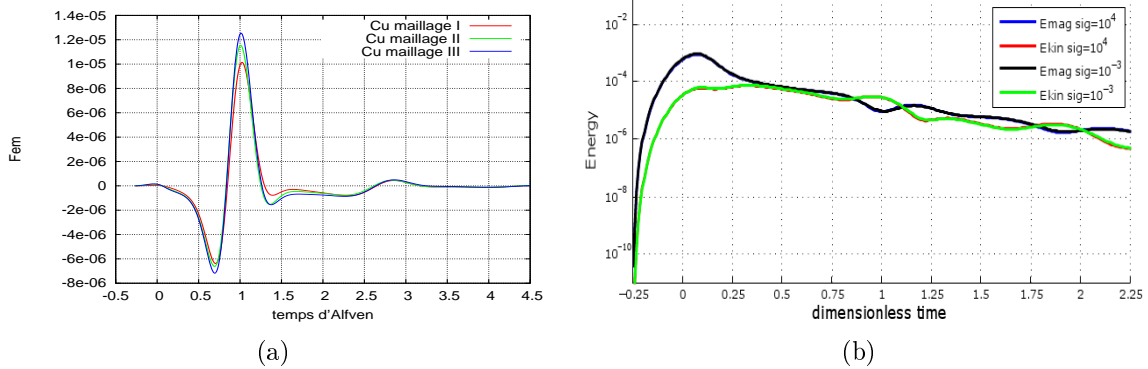


FIG. 4.20 – (a) fem calculée sur la bobine extérieure en ($r = 0.3$, $z = 0.57$), pour les maillages I, II et III représentés en figure 4.19. (b) Energies magnétique et cinétique en échelle \log dans ces trois configurations.

4.5.2 Influence de la conductivité de la couche conductrice supérieure

Nous avons vu que la couche latérale jouait un faible rôle dans la propagation de l'onde d'Alfvén. Dans cette section, on se propose d'utiliser les maillages présentés en figure 4.19, et de réaliser une même simulation en régime impulsionnel, en faisant varier la conductivité de la couche conductrice supérieure. La courbe à gauche de la figure 4.21 représente la fem calculée sur la bobine extérieure pour une large gamme de σ , la conductivité de la couche conductrice étant de 1000 fois plus conductrice à 1000 fois moins conductrice que le fluide. On peut déterminer deux régimes distincts : lorsque la conductivité de la couche conductrice est de l'ordre de celle du fluide ou supérieure, l'onde d'Alfvén est fortement atténuée au cours de la réflexion. Lorsque la conductivité de la paroi est plus faible que 0.1 fois celle du fluide, la couche conductrice n'a plus aucun effet sur la réflexion de l'onde d'Alfvén. Ce dernier cas a pour limite la réflexion pour une interface avec le vide. Si on regarde la fem calculée sur la bobine latérale moyenne située en $z = 0$ au milieu du cylindre (voir figure 4.21 b), on peut remarquer qu'après réflexion, lorsque la conductivité de la couche conductrice est élevée par rapport à celle du fluide, le délai de retour de l'onde d'Alfvén est plus court.

En effet, l'onde semble se réfléchir plus rapidement lorsque la conductivité de la couche conductrice est supérieure à celle du fluide. Afin de mieux comprendre ce phénomène, on se propose de regarder l'évolution des énergies magnétique et cinétique au cours du temps dans les cas extrêmes où la conductivité de la couche conductrice est très grande ($\sigma = 1000$) par rapport à celle du fluide ou très faible ($\sigma = 0.005$). Si on regarde l'énergie magnétique dans le conducteur et dans le vide (figure 4.22 b), on constate que seule l'énergie contenue dans la région conductrice est affectée par

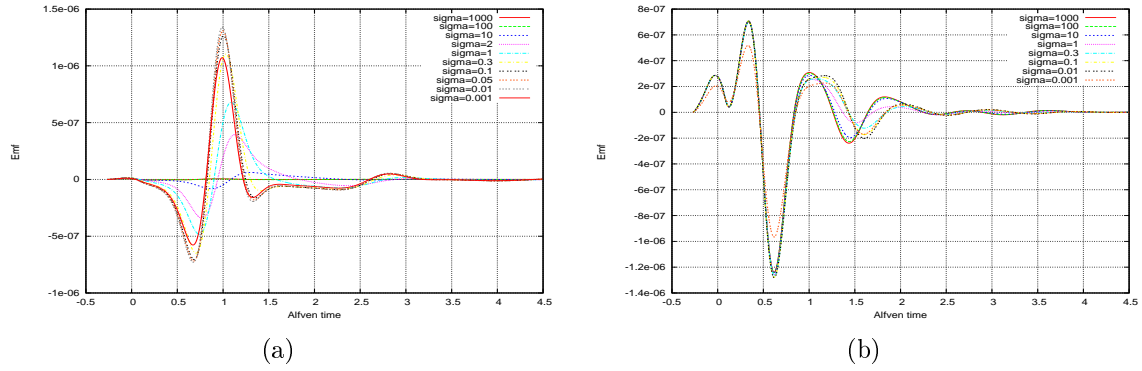


FIG. 4.21 – (a) f_{em} calculée sur la bobine extérieure en $(r = 0.3, z = 0.57)$ et sur la bobine latérale moyenne en (b) pour le troisième maillage présenté en figure 4.19 pour $Lu = 61.2$, $Pm = 0.005$ et pour différentes valeurs de la conductivité de la couche conductrice supérieure.

la conductivité de la couche supérieure. Peu avant que l'onde n'atteigne le haut du cylindre à $(t \approx 0.85)$, l'énergie contenue dans la zone conductrice diminue plus tôt et plus fortement lorsque la conductivité est élevée. Le même comportement est observé à l'approche de la face inférieure du cylindre à $(t \approx 1.85)$. L'énergie totale se conservant, cette énergie n'a pu être cédée au fluide qu'en « l'accélération » au voisinage de la couche fortement conductrice.

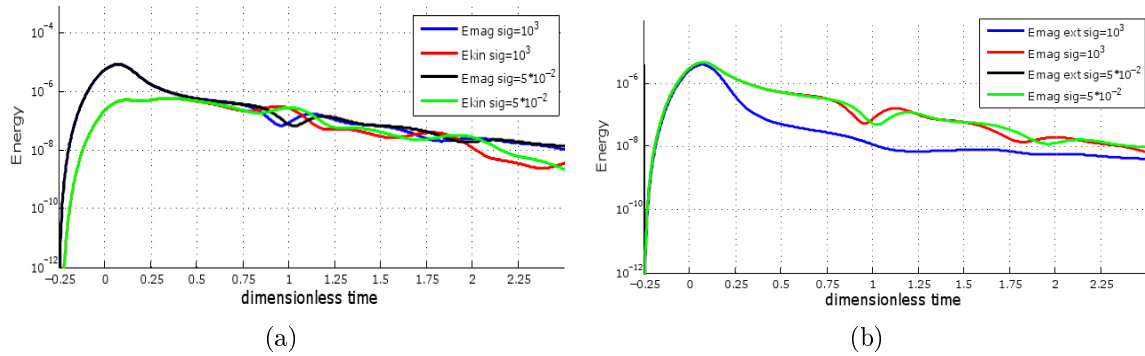


FIG. 4.22 – (a) Energies magnétique et cinétique au cours du temps pour $Lu = 60$, $Pm = 0.005$, pour différents σ . (b) Energie magnétique dans le conducteur et dans le vide au cours du temps pour les mêmes paramètres.

4.6 Conclusion et perspectives

Ce chapitre est essentiellement un compte-rendu des expériences numériques conduites pour accompagner l'expérience Galalfvén. Comme le code SFEMaNS a été conçu pour traiter des problèmes d'évolution MHD dans des domaines aux frontières axisymétriques, l'adaptation à la configuration de cette expérience a été relativement simple. Elle a surtout consisté à inclure des bobines d'excitation et de détection conformes aux spécifications choisies par les expérimentateurs. Cela a permis de rendre

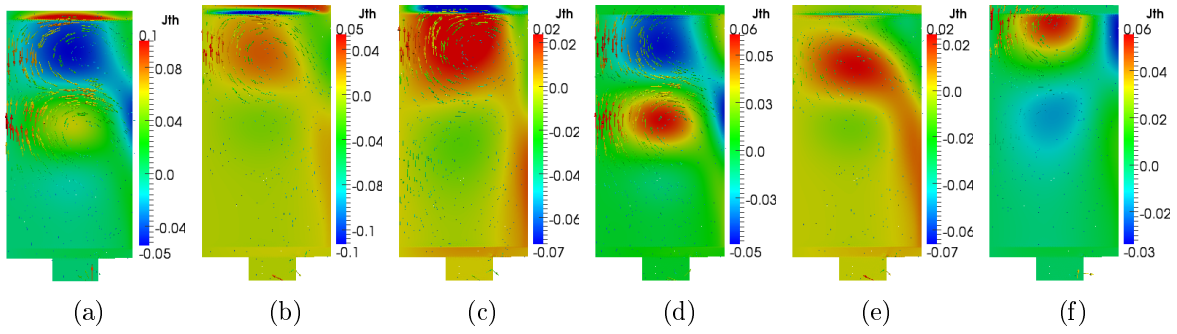


FIG. 4.23 – Visualisation du champ magnétique méridien et du courant azimutal, pour $Lu = 60$, $Pm = 0.005$, $\sigma = 10$ (a-c) et pour $\sigma = 0.05$ (f-f) à trois temps différents $t/T_a = 0.75, 1.00, 1.25$.

compte de façon satisfaisante des résultats expérimentaux obtenus jusqu'à présent [1] et de visualiser dans l'espace et dans le détail les configurations de vitesse et de champ magnétique. Il s'agit d'une première étape confirmant la faisabilité d'expériences plus ambitieuses, en cours de définition et de réalisation au LGIT de Grenoble. Ce projet expérimental est orienté vers l'étude du couplage non-linéaire des ondes d'Alfvén et des ondes inertielles, une situation qui est notamment pertinente dans le cadre géophysique pratiqué par les membres du laboratoire de Grenoble.

Autant la conception mécanique de l'expérience en rotation est délicate, autant son étude numérique est accessible simplement car il suffit soit d'imposer une vitesse de rotation globale via les conditions aux limites sur la vitesse, soit de rajouter la force de Coriolis si l'on se place dans le référentiel en rotation. La question délicate, et qui le restera quels que soient les points de fonctionnement choisis pour l'expérience, sera l'adaptation du pas de temps au champ magnétique extérieur (défini par l'intensité du champ appliqué) et à la période des ondes inertielles (définie par l'intensité de la fréquence de rotation). Dans ce projet à moyen terme, les simulations numériques pourraient servir dès à présent à mieux encadrer les paramètres de rotation et d'excitation donnant lieu à des effets physiquement intéressants et mesurables pour lesquels il y ait interaction entre les ondes inertielles et d'Alfvén.

Les résultats recensés dans ce chapitre concernent uniquement les ondes d'Alfvén axisymétriques poloïdales en régime linéaire. Ils sont la conséquence du type de forçage adopté, basé sur une boucle de courant azimutal. En géométrie cylindrique, les ondes d'Alfvén axisymétriques dans un fluide idéal peuvent se découpler en deux modes, poloïdal ou toroidal. Le rapport entre les deux modes est sélectionné par la configuration de l'excitation. On pourrait ainsi étudier les conséquences d'un forçage physiquement réalisable, avec une impulsion de courant purement radial, entre une électrode centrale et un collecteur circulaire en périphérie. Le champ magnétique créé serait toroïdal et devrait produire des ondes d'Alfvén toroïdales, analogues aux ondes de torsion produites par des oscillations mécaniques d'un disque coaxial au champ externe appliqué (expériences de Lehnert et de Lundquist). Il serait alors instructif de comparer les modalités de réflexion pour les deux modes axisymétriques, ainsi que le rôle des parois, généralisant ainsi la thématique abordée dans la section 4.5.2.

Chapitre 5

Etude des effets magnétohydrodynamiques dans un disque képlerien

5.1 Introduction

L'instabilité magnétorotationnelle (MRI) a été mise en évidence de façon indépendante par Velikhov en 1959 et par Chandrasekhar en 1960. Son importance en astrophysique a été relevée par Balbus et Hawley en 1991 [9]. Elle a depuis fait l'objet de nombreuses publications (voir par exemple l'article de revue [10]) soit théoriques soit numériques. Elle intervient dans de multiples scénarios astrophysiques faisant intervenir des phénomènes variés susceptibles d'apparaître dans des écoulements compressibles, avec moment angulaire, et soumis à un champ de gravitation central. Plusieurs simulations numériques ont été réalisées depuis les années 90, nous distinguerons trois catégories de simulations : des simulations locales (également appelées « shearing box » dans l'approximation MHD idéale [9, 10]), des simulations locales avec prise en compte de viscosité cinématique et de diffusivité magnétique [27] ainsi que des simulations globales [41], [24].

La situation la plus simple donnant naissance à cette instabilité se rencontre dans un écoulement cisailé incompressible. Ces écoulements se rencontrent dans de nombreux objets astrophysiques, par exemple, les disques proto-stellaires ou les disques galactiques. Dans ce chapitre, nous allons vérifier que de tels écoulements, linéairement stables d'un point de vue purement hydrodynamique, se déstabilisent en présence d'un champ magnétique uniforme. Cela peut être montré soit par une analyse locale du cisaillement [9], soit par une analyse globale [46, 47]. Ces approches doivent tenir compte des conditions aux limites du problème souvent difficiles à établir pour la description de tels objets. Contrairement à la plupart des simulations numériques effectuées sur ce sujet, nous avons choisi de réaliser des simulations globales sans prendre en compte le phénomène d'accrétion avec le code SFEMaNS présenté au chapitre 2.

Après avoir validé notre approche, en comparant nos simulations à certaines études analytiques linéaires [46], on s'est plus particulièrement intéressé au régime non linéaire post-MRI. Des simulations axisymétriques ainsi que tridimensionnelles ont été effec-

tuées pour différents régimes de dissipation. On montrera dans ce chapitre des régimes de saturation non turbulents correspondant à des états d'équilibre présentant des oscillations non linéaires.

5.1.1 Mécanisme de l'instabilité magnétorotationnelle (MRI)

Dans un disque de type képlerien, l'équilibre hydrostatique est obtenu lorsque les forces centrifuges appliquées sur un élément fluide compensent l'attraction gravitationnelle exercée par l'objet massif situé au centre du disque. Le profil de vitesse angulaire ainsi obtenu décroît avec le rayon en $r^{-3/2}$ et est stable d'un point de vue hydrodynamique d'après le critère de Rayleigh. Cependant, en présence de champ magnétique, cet équilibre est rompu. Pour expliquer cette instabilité, on peut faire l'analogie avec un phénomène mécanique instable en présence d'un ressort qu'on va détailler. On va décrire deux situations différentes : la première configuration est stable en l'absence de ressort, la seconde est instable à cause du ressort.

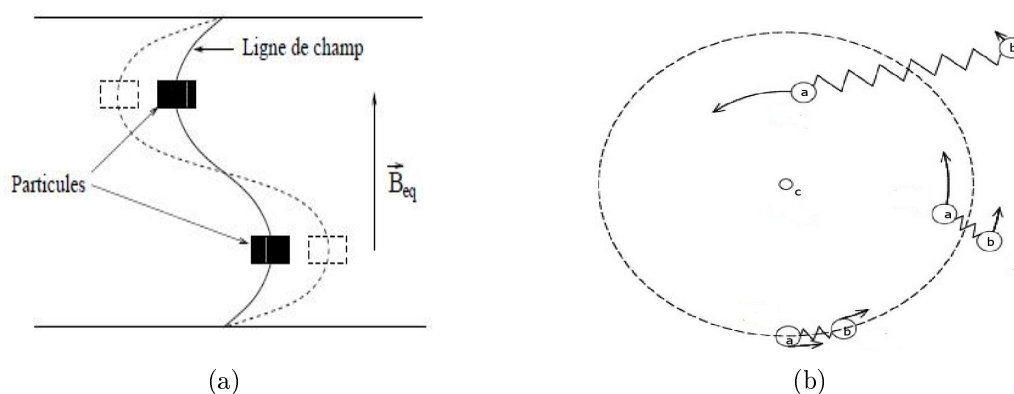


FIG. 5.1 – (a) Mécanisme illustrant l'instabilité magnétorotationnelle. (b) illustration du mécanisme

On imagine deux particules fluides (a) et (b) d'une même orbite soumise à l'attraction gravitationnelle exercée par le corps (c) (voir figure 5.1 b). On considère, par exemple, un profil de vitesse képlerien tel que la vitesse azimutale varie en l'inverse de la racine carrée du rayon et le moment cinétique en la racine carrée du rayon.

Dans la première configuration, la particule (a) placée sur une orbite de rayon plus petit va plus vite que la particule (b). Chacune des particules a son moment cinétique conservé et s'éloigne l'une de l'autre. Dans la seconde configuration, on suppose que ces masses sont liées entre elles par un ressort de constante de raideur faible. Ceci correspond au modèle d'un couple de particules fluides (a,b) appartenant à la même ligne de champ magnétique qui sont, par conséquent, liées par une tension magnétique. Le théorème du gel indique que les particules appartiennent à la même ligne matérielle, donc, d'après le théorème de Kelvin, leur moment cinétique total est conservé. Le système (particules, ressort) est en orbite autour du point (c). Le ressort est étiré par la particule (a) qui est plus rapide que la particule (b). Il ralentit la particule (a) et fait donc décroître son moment cinétique. (Il fait aussi augmenter le moment cinétique de la particule (b) car le moment total des deux particules se conserve.) La particule (a)

de moment cinétique plus faible doit se retrouver sur une orbite de rayon plus petit pour satisfaire à la valeur du moment cinétique d'équilibre. De même, la particule (b) voit son rayon augmenter. Le ressort se retrouve alors encore plus étiré, le phénomène s'accroît et le système est instable. Il y a transfert de moment cinétique de l'intérieur vers l'extérieur.

Le disque étant de hauteur finie, pour que le mécanisme décrit précédemment puisse s'appliquer, la hauteur du disque doit être supérieure à la longueur d'onde verticale de la perturbation. Ceci implique que le champ extérieur ne doit pas dépasser une certaine valeur pour que la tension magnétique ne soit pas trop importante et que la perturbation puisse ainsi déformer les lignes de champs magnétiques. L'analogie mécanique serait de remplacer le ressort par une tige rigide qui empêcherait l'éloignement des deux particules.

L'instabilité MRI est linéaire et a fait l'objet de plusieurs études analytiques [46, 47]. Ces études ont permis de dégager des plages de paramètres, notamment le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation et la valeur du champ magnétique extérieur pour lesquels l'instabilité peut se manifester (voir figure 5.2).

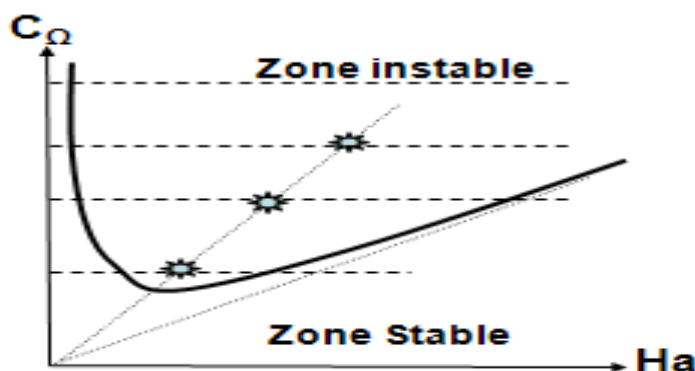


FIG. 5.2 – Espace des phases représentant le nombre de Reynolds cinétique basé sur la vitesse de rotation C_Ω en fonction du nombre de Hartmann défini comme $Ha = \mu h_0 L \sqrt{\sigma / \rho \nu}$

La courbe de stabilité marginale de la figure 5.2 représente le nombre de Reynolds cinétique basé sur la vitesse angulaire C_Ω en fonction du nombre de Hartmann. Ce paramètre adimensionné rend compte de l'intensité du champ magnétique extérieur et est défini comme $Ha = \mu h_0 L \sqrt{\sigma / \rho \nu}$ (où μ est la perméabilité magnétique, L une longueur caractéristique, σ la conductivité électrique, ρ la densité volumique et ν la viscosité cinématique du fluide considéré). Pour une vitesse angulaire donnée, le champ magnétique extérieur doit être suffisamment fort pour que l'instabilité MRI puisse se développer, mais également assez faible pour que la longueur d'onde des perturbations puisse être contenue dans la hauteur du disque (cf. figure 5.1).

5.1.2 Modèles numériques de l'instabilité magnétorotationnelle

5.1.2.1 Approches locales du type « shearing box »

A partir des années 90, de nombreuses simulations locales utilisant des modèles de boîte de cisaillement ont été réalisées. Dans ces modèles, on superpose au cisaillement képlérien, des fluctuations présentant des conditions aux limites radiales adaptées au cisaillement donné. Les conditions aux limites sont périodiques dans la direction azimutale et dans la direction axiale. Ces modélisations locales utilisent également un autre type de condition aux limites pour la vitesse : les conditions aux limites dites de « shearing sheet » développées initialement par [36] pour l'étude locale des ondes dans des spirales galactiques. Elles constituent une classe particulière de conditions aux limites périodiques qui tiennent compte de l'advection du fluide par le cisaillement moyen de l'écoulement. En pratique, pour mettre en œuvre ces conditions aux limites, il suffit, tout comme pour des conditions aux limites périodiques, de recopier la boîte de simulation de chaque côté de la zone de calcul en la décalant dans la direction du cisaillement moyen (ce qui peut être vu comme un forçage par les conditions aux limites).

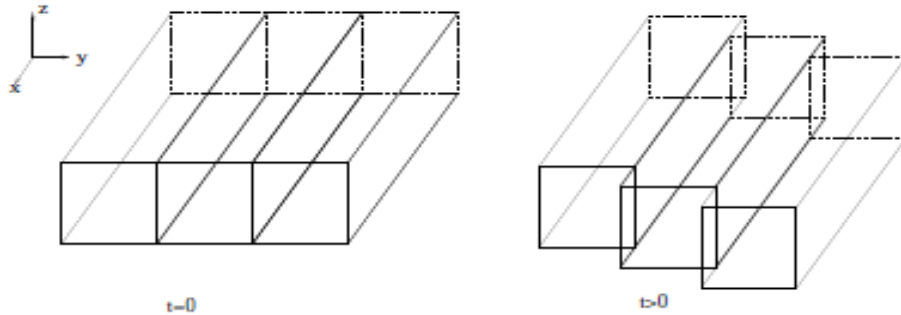


FIG. 5.3 – Principe des conditions aux limites « shearing sheet » : la boîte de simulation est recopiée de part et d'autre de la boîte calculée (au centre), en prenant en compte un décalage dû au cisaillement moyen.

Des simulations axisymétriques utilisant cette approche locale ont montré que les disques astrophysiques simulés deviennent turbulents lors de la saturation de la phase linéaire [42] (cf. figure 5.4). Elles ont également montré que la turbulence transporte le moment cinétique vers les parties externes du disque et la matière vers les parties internes, générant ainsi un phénomène d'accrétion. Ce transport est traditionnellement mesuré par un paramètre noté α qui est le rapport de la composante $W_{r\theta}$ du tenseur des contraintes et de la pression. Dans la plupart des simulations locales réalisées sans terme diffusif, l'efficacité du transport angulaire quantifiée par ce paramètre α semble diminuer avec l'augmentation de la résolution spatiale [26]. Ce résultat suggère que les taux de transport évalués à partir de simulations de MHD idéale semblent dépendre de la taille du pas spatial. Les erreurs numériques d'approximation commises font alors office de viscosité et de diffusivité numériques.

En présence de termes dissipatifs ($\nu \neq 0, \eta \neq 0$), lorsque les simulations numériques sont bien résolues, l'instabilité magnétorotationnelle peut mener à des états saturés et non turbulents [74], [26]. Par exemple, des simulations locales ont montré que la

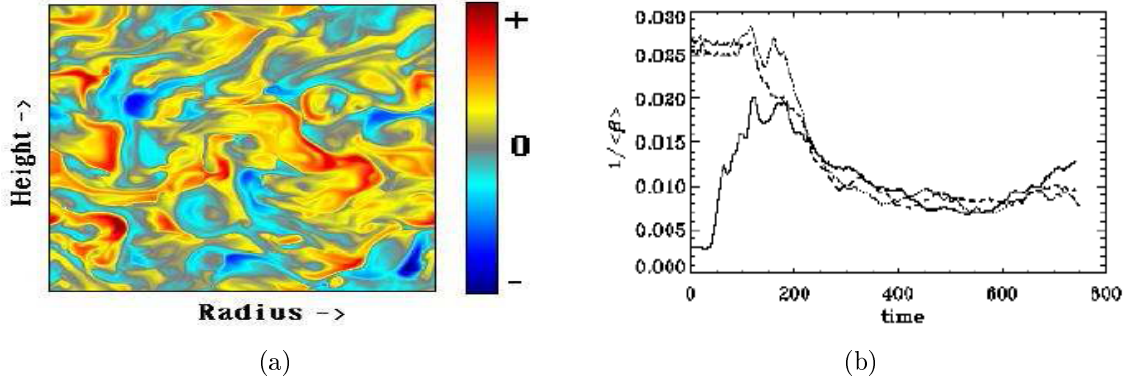


FIG. 5.4 – (a) Distribution du moment cinétique dans une simulation locale axisymétrique. La saturation de l’instabilité MRI conduit à un écoulement pleinement turbulent (extrait de Hawley & Balbus (1992) [42]). (b) Evolution temporelle de l’énergie magnétique normalisée par la pression. La courbe en trait plein montre une simulation globale où le champ initial est vertical (extrait de Steinacker [77]).

prise en compte des effets dissipatifs permet de relaminariser l’écoulement hydrodynamique turbulent, donnant lieu à des régimes de saturations laminaire [22]. Enfin, ces simulations locales ne permettent pas le développement de structures magnétiques ou hydrodynamique de grande échelle observées numériquement dans certaines simulations globales [45].

5.1.2.2 Approches globales

Avec le développement croissant de la puissance de calcul, des simulations globales de disque d’accrétion sont apparues ces dernières années [55],[41],[5]. Certaines de ces simulations semblent confirmer les résultats issus des simulations locales, notamment sur le mode de saturation de l’instabilité magnétorotationnelle en un état turbulent, comme par exemple celles réalisées par S. Fromang [24]. Cependant, bon nombre de simulations sont difficiles à interpréter à cause de l’accumulation des effets physiques simulés : compressibilité, ionisation partielle, stratifications diverses, gravitation centrale et bien d’autres quantités anisotropiques qui peuvent être sources d’instabilités donnant lieu à un état turbulent. D’autres approches globales développées récemment montrent un état de saturation non pas turbulent mais instationnaire caractérisé par des oscillations non linéaires [45]. Dans cet article, la simulation réalisée est globale, incompressible, avec prise en compte des termes de dissipation. Le domaine de calcul est un anneau mince cylindrique de petit rayon $R_1 = 1$ et de grand rayon R_2 , périodique en z . Des conditions aux limites dites perméables sont appliquées sur les rayons intérieur et extérieur de l’anneau afin d’autoriser des jets radiaux. Lorsque la longueur radiale du domaine de calcul est faible, l’instabilité MRI crée un jet radial qui expulse le flux magnétique axial en dehors du disque. Le système revient à un profil képlérien avec un champ magnétique plus faible, supprimant ainsi l’instabilité. Pour un disque plus long, un jet radial se forme aussi et pousse le flux magnétique axial, inhibant ainsi l’instabilité. Cependant, l’accrétion ramène le champ poloïdal sur une échelle de temps diffusif. Le système retrouve à la fois le même champ poloïdal avec le

bon profil képlerien, ce qui donne naissance à nouveau à un jet radial. On observe alors des oscillations cycliques avec un temps de croissance MRI et de décroissance diffusif des énergies magnétique et cinétique fluctuantes au cours du temps (voir figure 5.5 a).

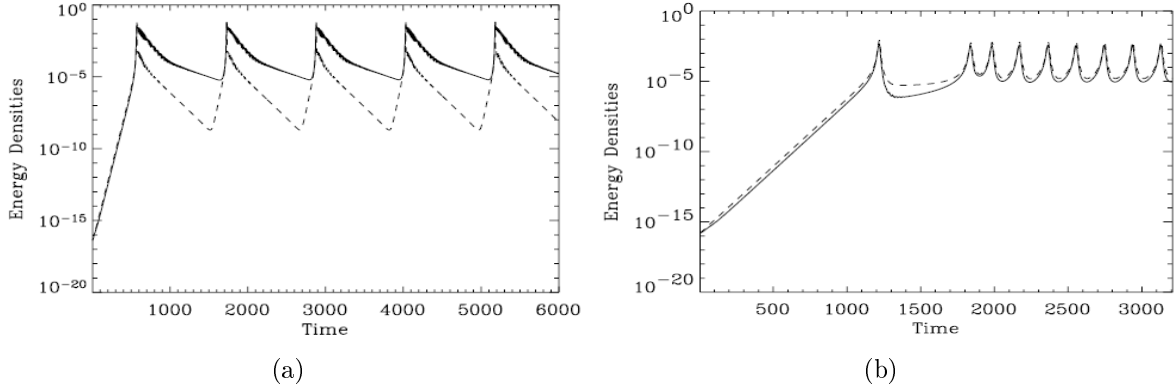


FIG. 5.5 – (a) Densités d’énergie magnétique (trait pointillé) et cinétique (trait plein) fluctuantes au cours du temps, pour une simulation de paramètres $Rm = Re = 286$, $H_0 = 0.07$, $R_2 = 4$. (b) Idem pour une simulation de paramètres $Rm = Re = 286$, $H_0 = 0.05$, $R_2 = 2$ [45].

En revanche, lorsque l’étendue radiale du disque est plus petite mais avec un champ magnétique imposé plus faible, un jet radial déplace le champ magnétique poloïdal en expulsant une partie. L’accrétion ramène un champ magnétique poloïdal plus faible vers le centre. Il se forme à nouveau un jet radial. L’évolution des énergies magnétique et cinétique fluctuantes au cours du temps est pleinement non-linéaire (voir figure 5.5 b). Ces dynamiques suggèrent que, dans les simulations proposées, la saturation de la MRI donne lieu à un régime oscillant et non pas turbulent comme c’était le cas pour les approches locales présentées en figure 5.4. Ces résultats doivent cependant être pondérés par le fait que le choix des conditions aux limites perméables appliquées radialement n’assure pas la conservation du flux magnétique dans le disque [45].

5.2 Proposition d’un modèle numérique de l’instabilité magnétorotationnelle

Par rapport aux approches présentées précédemment, nous proposons une simulation globale incompressible avec des conditions aux limites rigoureuses tant pour le champ magnétique que pour le champ de vitesse. Une des conséquences est l’absence d’accrétion dans notre modèle. Notre motivation principale étant d’étudier les interactions non linéaires entre le champ de vitesse et le champ magnétique dans les régimes post MRI, la présence d’accrétion n’apparaît pas essentielle.

5.2.1 Etat d’équilibre initial et conditions aux limites

Pour étudier les effets magnétohydrodynamiques dans un écoulement en cisaillement, nous considérons un cylindre mince d’axe de symétrie Oz et de rayon R plus

grand que sa hauteur L dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Nous étudions numériquement la perturbation d'un écoulement de type képlerien, purement azimutal $(u_r, u_\theta, u_z)(r, \theta, z, t) = (0, V(r), 0)$ et soumis à un champ magnétique extérieur uniforme $(0, 0, h_0)$.

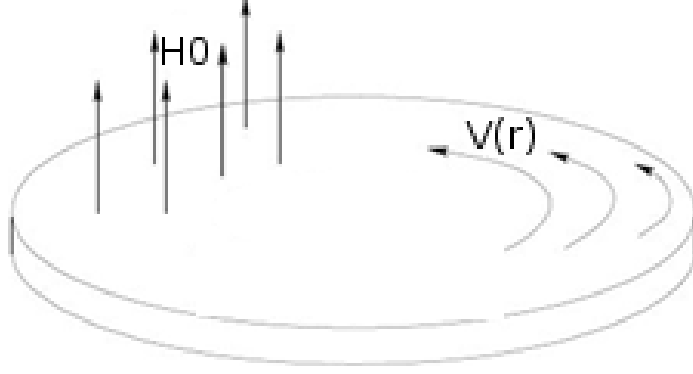


FIG. 5.6 – Schéma représentant le domaine de calcul.

Afin de pouvoir comparer avec des publications précédentes d'étude linéaire de la MRI [46, 47], nous choisissons le profil $V(r)$ utilisé par [46]. Ce profil est caractérisé par un paramètre s_0 , tel que, près de l'axe du disque ($r \ll s_0$), le fluide est en rotation solide et, loin de l'axe ($r \gg s_0$), il développe un profil képlerien :

$$V(r) = \frac{\Omega_0 r}{\left(1 + \left(\frac{r}{s_0}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.2.1)$$

Pour compenser les pertes par diffusion visqueuse, est appliquée la force motrice purement azimutale suivante :

$$f_K(r) = -\nu \left(\Delta V(r) - \frac{V(r)}{r^2} \right) = \frac{15}{2} \frac{\Omega_0 \nu}{s_0} \frac{X^2 (1 + 0.1 X^3)}{(1 + X^3)^{\frac{5}{2}}}, \quad (5.2.2)$$

où ν est la viscosité cinématique et $X = r/s_0$. Pour que $(0, V(r), 0)$ soit l'état de base cinématique, des conditions de glissement sans frottement (free-slip) sont imposées en $z = \pm L/2$: $u_z = 0, \partial u_r / \partial z = 0, \partial u_\theta / \partial z = 0$. En $r = R$, c'est-à-dire à la paroi latérale qui sépare le fluide du vide, on impose des conditions de Dirichlet : $u_r = 0, u_z = 0, u_\theta = V(R)$. Dans l'article [46], les conditions aux limites magnétiques sont telles que $\mathbf{B} \times \mathbf{n} = 0$, donc les composantes tangentielles du champ magnétique s'annulent : $B_r = 0, B_\theta = 0$ en $z = \pm L/2$. Ces conditions simplifiées seront appelées ici conditions de « pseudo-vide » (PV) et correspondent physiquement à un matériau ferromagnétique parfait en $z = \pm L/2$. Le code SFEMaNS (voir chapitre 2) que nous utilisons peut aussi bien traiter le cas des conditions PV que les conditions exactes de continuité du champ magnétique entre le conducteur et le vide dénotées « vrai-vide » (VV). Nous verrons que le choix des conditions aux limites magnétiques a une influence sur le régime post-MRI.

5.2.2 Equations de la MHD pour la MRI

Pour adimensionner les équations de la MHD, on utilise la hauteur du cylindre L et le temps de retournement $1/\Omega_0$ comme unités de longueur et de temps et $V^* = \Omega_0 L$ comme unité de vitesse. L'unité du champ magnétique est définie par $V^* \sqrt{\rho/\mu_0}$ (vitesse d'Alfvén), μ_0 étant la perméabilité magnétique du vide et ρ la densité du fluide. Les équations adimensionnées de la magnétohydrodynamique s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \mathbf{f}_K \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{H} \end{cases} \quad (5.2.3)$$

où la viscosité cinématique ν et la diffusivité magnétique η sont uniformes. Le processus diffusif est contrôlé par les deux paramètres standards : le nombre de Reynolds cinétique $Re = \Omega_0 L^2 / \nu$ et le nombre de Reynolds magnétique $Rm = \Omega_0 L^2 / \eta$. Le rapport de ces deux nombres, $Pm = Rm / Re = \nu / \eta$, est le nombre de Prandtl magnétique. La valeur numérique du champ uniforme extérieur ($h_0 = V^* H_0 \sqrt{\rho/\mu_0}$) doit être fixée par les conditions initiales. Une mesure pratique du champ est donnée par le nombre de Hartmann : $Ha = \mu_0 h_0 L \sqrt{\sigma/\rho\nu} = (LV^*/\sqrt{\nu\eta}) H_0$. On note que l'unité de longueur choisie dans [46] est la demi-hauteur du disque $L/2$, l'unité de vitesse correspondante est $\Omega_0 L/2$, d'où les relations entre leurs nombres de Reynolds magnétique C_Ω et de Hartmann Ha' et les nôtres (Rm, Ha) qui sont données par :

$$C_\Omega = \frac{Rm}{4}, \quad Ha' = \frac{Ha}{2}. \quad (5.2.4)$$

La région centrale ($r \ll s_0$) n'est *a priori* pas importante dynamiquement puisque le cisaillement y est nul. On choisit donc pour s_0 une valeur proche de la hauteur du disque, $s_0/L = 2.5$, comme dans [46]. Cette valeur détermine la vitesse azimutale maximale $V_{max} = \Omega_0 s_0 2^{1/3} / \sqrt{3}$ atteinte en $r_{max} = 2^{1/3} s_0$. Ce rayon correspond également à l'orbite où le cisaillement est maximum. Une fois la géométrie fixée par (L, R, s_0) , les paramètres de contrôle sont Pm pour le fluide, Re pour l'écoulement et Ha pour l'amplitude du champ magnétique.

5.3 Résultats de simulations axisymétriques à $Pm = 1$

5.3.1 Choix de la condition initiale

Dans un champ magnétique externe uniforme et purement axial $H_0 \mathbf{e}_z$, l'écoulement quasi-képlerien $(0, V(r), 0)$ est une solution stationnaire que l'on va perturber par un faible champ azimutal. Le régime à temps courts devrait être décrit par les équations linéarisées et relever de l'instabilité magnéto-rotationnelle pour une gamme finie de nombres de Hartmann à un nombre de Reynolds magnétique fixé. L'intervalle d'instabilité a été déterminé dans [46] pour des perturbations axisymétriques dans le cas d'un cylindre de rayon infini. La symétrie par rapport à l'équateur ($z \rightarrow -z$) de ces perturbations est primordiale et les auteurs de [47] ont montré que les perturbations magnétiques quadripolaires (i.e. \mathbf{H}_r et \mathbf{H}_θ paires en z , \mathbf{H}_z impaire en z) ont un seuil minimum de leur courbe marginale plus faible que celui des perturbations dipolaires

(i.e. \mathbf{H}_r et \mathbf{H}_θ impaires en z , \mathbf{H}_z paire en z). La parité quadrupolaire est préférée au niveau linéaire [46].

On choisit donc la perturbation suivante pour $-0.5 \leq z \leq 0.5$ et $0 \leq r \leq R$:

$$(H_r, H_\theta, H_z) = (0, \cos(\pi z) \sin(\pi r/R), 0) \quad (Q) \quad (5.3.1)$$

L'excitation est caractérisée par la plus grande échelle verticale possible dans le cylindre et s'annule en R . Par exemple, pour $Rm = 154$, la plage d'instabilité MRI s'étend de $Ha \simeq 3$ à $Ha \simeq 38$. Nous étudions d'abord le cas $Rm = 154$, $Ha = 33.6$, près de la branche à grands Ha avec $R/L = 30$. Les champs magnétique et cinétique fluctuants (ou perturbés) sont obtenus en soustrayant l'écoulement de base $V(r)$ de u_θ et le champ appliqué \mathbf{H}_0 de \mathbf{H}_z . La figure 5.7 (a) montre l'évolution temporelle des énergies magnétique et cinétique fluctuantes jusqu'à $t = 900$, soit 150 tours environ. Comme la perturbation initiale n'est pas un vecteur propre de l'instabilité, elle crée des oscillations faibles d'ondes d'Alfvén qui sont ensuite suivies par le régime MRI de $t = 20$ à $t = 70$. La figure 5.8 représente la forme des champs fluctuants au temps $t = 25$ (i.e. après 4 tours) pendant la phase linéaire MRI. Ces champs sont semblables à ceux de [46] obtenus en intégrant les équations linéarisées dans un disque de rayon infini et des conditions magnétiques PV. Le régime MRI prend fin à environ $t = 80$ (voir figure 5.7 a) lorsque la force de Lorentz, croissant de façon exponentielle, devient assez forte pour modifier l'écoulement de base quasi-képlerien et ainsi changer l'état d'équilibre hydrodynamique. Cet état toroïdal axisymétrique au départ se retrouve tri-dimensionnalisés du fait de la présence de vitesse poloïdale dans le régime non linéaire.

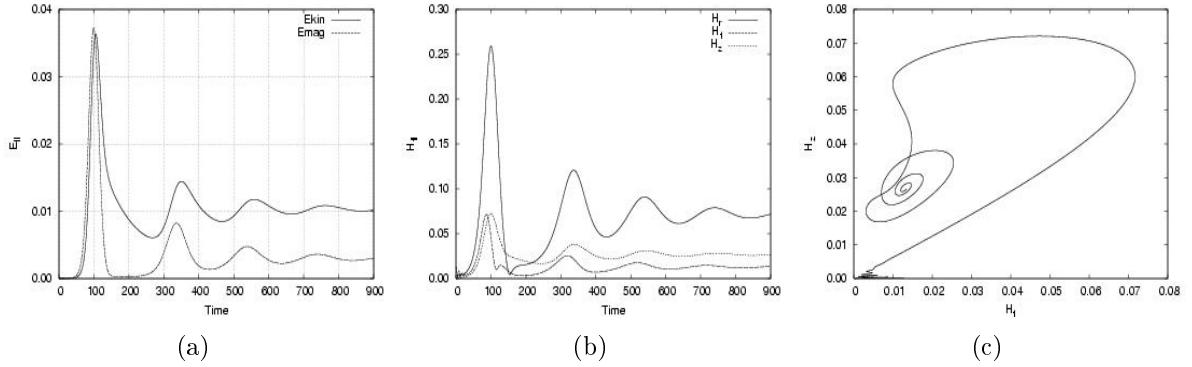


FIG. 5.7 – Disque képlerien à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$, $H_0 = 0.114$: (a) Evolution temporelle des énergies cinétique et magnétique fluctuantes; (b) Evolution temporelle des composantes magnétiques fluctuantes (H_r , H_θ , H_z); (c) Hodographe de H_z vs H_θ . Conditions aux limites PV.

5.3.2 Evolution non linéaire à faibles nombres de Reynolds

Le régime non linéaire à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$, $H_0 = 0.114$ est caractérisé par des maxima quasi-simultanés d'énergies cinétique et magnétique fluctuantes d'amplitudes décroissantes (voir figure 5.7 a). Des hodographes (figure 5.7 c) traçant une composante du champ magnétique fluctuant en fonction d'une autre (par exemple issues de

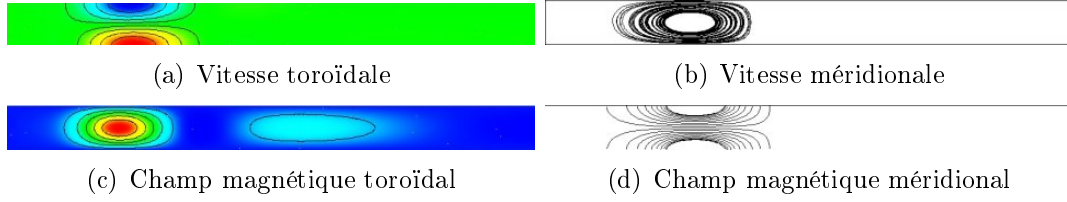


FIG. 5.8 – Vecteurs propres dans un disque képlerien à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$, $H_0 = 0.114$ et $t = 25$ pour une vue tronquée $0 \leq r/L \leq 20$ (le calcul est effectué dans un disque $R/L = 30$). L'isovaleur bleue (rouge) est négative (positive).

la figure 5.7 b) suggèrent que le système évolue à $Rm = 154$ vers un point fixe à temps longs. Aux temps courts, la composante verticale de la force de Lorentz (impaire en z) est plus faible que les deux autres composantes (aussi impaires en z) mais elle augmente plus vite et conduit à la brisure de symétrie équatoriale du champ de vitesse. Malgré la force de Lorentz, la symétrie quadrupolaire de l'état MRI est retrouvée à temps longs (voir figure 5.9) avec un quadrupole inversé (fig. 5.9 c et d).

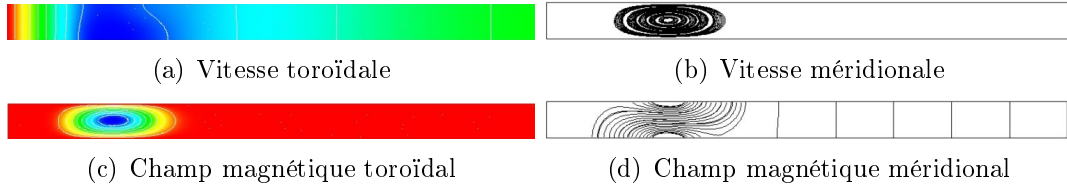


FIG. 5.9 – Champs magnétiques fluctuants dans un disque képlerien à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$, $H_0 = 0.114$ et $t = 900$ pour une vue tronquée $0 \leq r/L \leq 20$ (le calcul est effectué dans un disque $R/L = 30$). L'isovaleur bleue (rouge) est négative (positive).

Ce premier cas d'étude nous permet de valider notre modèle de l'instabilité MRI en regard de références basées sur l'intégration des équations linéarisées [46, 47] mais aussi de démontrer l'importance de la prise en compte du régime non linéaire.

5.3.2.1 Influence du nombre de Hartmann et de la taille du domaine numérique

La courbe de stabilité marginale sur laquelle nous avons basé notre étude (voir 5.2) montre une plage limitée de nombre de Hartmann, pour lesquels l'instabilité peut se développer. Lorsqu'on se place exactement sur l'une des branches, soit de droite, soit de gauche, le taux de croissance de l'instabilité est alors nul, et on est par définition au seuil de l'instabilité. Nous avons vérifié que, pour obtenir un taux de croissance maximal, nous devons nous placer au centre de la zone d'instabilité. Pour cela nous représentons en figure 5.10 deux simulations de la phase MRI pour un $Rm = 154$, pour $Ha = 33.6$ et pour $Ha = 67.2$. On peut remarquer que l'instabilité MRI se développe beaucoup plus rapidement et avec un taux de croissance beaucoup plus grand lorsqu'on est à $Ha = 33.6$, soit au centre de la zone instable.

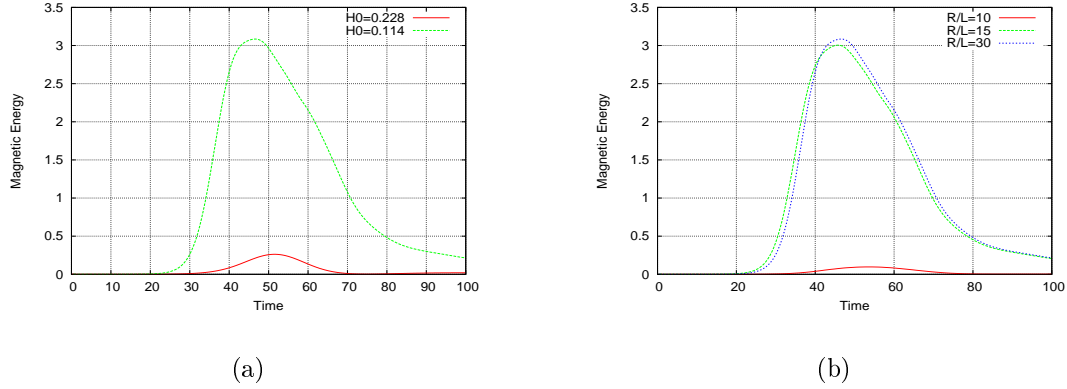


FIG. 5.10 – Evolution temporelle de l'énergie magnétique fluctuante à $t < 100$, (a) pour différents nombre sde Hartmann $Ha = 33.6$ ($H_0 = 0.125$, en vert) et $Ha = 63.2$ ($H_0 = 0.250$, en rouge). (b) Idem pour différents rapports de forme R/L et $Rm = 154$, $Ha = 33.6$.

Dans nos simulations, nous choisirons la valeur du champ magnétique extérieur H_0 qui correspond au nombre de Hartmann donnant le taux de croissance de l'instabilité maximum. Ensuite, afin de simuler de plus grands nombres de Reynolds magnétiques tout en limitant le temps calcul, nous avons choisi d'optimiser le rapport de forme R/L , tout en vérifiant que les résultats obtenus étaient inchangés. Pour cela nous avons réalisé plusieurs simulations pour des paramètres Rm , Pm , Ha identiques, en faisant varier la longueur radiale du domaine de calcul. La courbe de la figure 5.10 (b) représente l'évolution de l'énergie magnétique au cours du temps pour des domaines de calcul de rapport de forme $R/L = 10, 15, 30$. On constate que, lorsque la longueur radiale du domaine de calcul est faible, les effets de bord en $r = R_{max}$ sont néfastes pour l'instabilité MRI. En revanche, pour $R/L \geq 15$, la taille du domaine ne semble pas influencer sur les résultats obtenus. Par conséquent, dans la suite, toutes nos simulations seront faites avec un rapport de forme $R/L = 15$.

5.3.2.2 Influence des conditions aux limites magnétiques

Intéressons-nous en détail au cas $Rm = Re = 280$ et $Ha = 32$, correspondant à un champ extérieur $H_0 = 0.114$. Par rapport à la courbe de stabilité marginale présentée en figure 1 de [46], on se situe au milieu de la zone instable pour l'instabilité MRI, là où la croissance linéaire est maximale. Comparons les résultats obtenus selon les conditions aux limites magnétiques PV et VV. L'évolution temporelle des énergies magnétiques fluctuantes dans les cas PV et VV est représentée en figure 5.10 b. Elle est très similaire dans la phase linéaire de l'instabilité ($t < 50$) pendant laquelle le taux de croissance de l'instabilité MRI vaut 0.2 (PV) et 0.19 (VV). Cela donne un taux de croissance normalisé $\gamma\tau_{rot} = 1.26$ et $\gamma\tau_{rot} = 1.20$ respectivement, en accord avec les résultats de [47]. La croissance du champ magnétique se fait donc sur un temps de retournement de l'écoulement. Cependant, dans le régime non linéaire $t \gg 50$, l'évolution temporelle diffère largement : dans le cas où des conditions aux limites magnétiques de type VV sont appliquées, on observe des oscillations de l'énergie magnétique, alors que dans le cas PV, l'énergie magnétique tend asymptotiquement vers une constante.

La structure spatiale du champ magnétique fluctuant au cours du temps pour les deux types de conditions aux limites est représentée en figure 5.11.

La figure 5.12 montre que la distribution spatiale des champs à temps courts est simi-

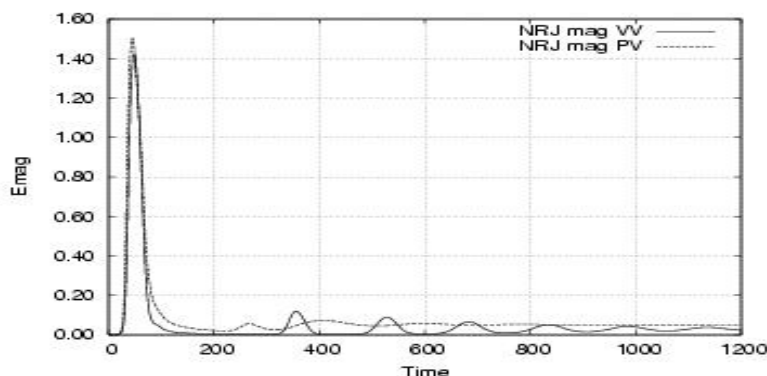


FIG. 5.11 – Energie magnétique pour les deux conditions aux limites magnétiques (VV) et (PV) ($Rm = 280$, $Pm = 1$, $Ha = 32$, $R/L = 15$).

laire dans les deux cas et suit une répartition quadrupolaire comme attendu, compte tenu de la symétrie de la perturbation (5.3.1) appliquée. L'écart entre les deux cas se manifeste aux temps intermédiaires : la figure 5.12 montre à $t = 200$ des symétries différentes (le champ magnétique toroïdal reste pair au cours du temps pour le cas PV alors qu'il peut changer de parité, devenant ainsi de symétrie dipolaire dans le cas VV). Aux temps longs, la symétrie quadrupolaire est retrouvée pour les deux cas (voir figure 5.12) mais avec des orientations opposées.

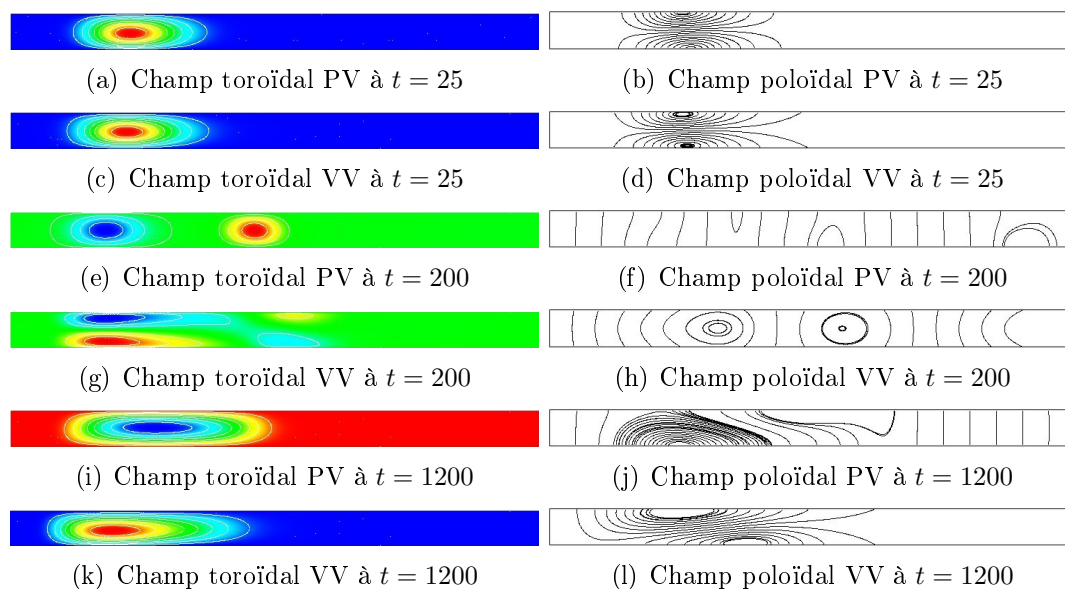


FIG. 5.12 – Visualisation des composantes poloïdale et toroïdale du champ magnétique fluctuant à différents temps ($Rm = 280$, $Pm = 1$, $Ha = 32$, $R/L = 15$).

Avant d'étudier plus en détails le régime non linéaire pour différents nombres de Reynolds magnétique, attardons-nous un moment sur la phase linéaire de l'instabilité magnétorotationnelle. Considérons la simulation présentée précédemment où des conditions aux limites de vrai-vidé VV sont appliquées. Si on regarde à temps courts l'évolution des énergies cinétique et magnétique fluctuantes (cf. figure 5.13), on constate qu'au moment du déclenchement de l'instabilité magnétorotationnelle, une partie de l'énergie cinétique est cédée au champ magnétique (environ 6%). Le champ magnétique croît de façon exponentielle avec un taux de croissance de $\gamma = 1.26$ normalisé par le temps de rotation. Cette croissance atteint un maximum vers $t = 50$, maximum qui correspond au moment où la force de Lorentz est assez intense pour agir sur le champ de vitesse et ainsi dégrader le profil képlerien qui a donné naissance à l'instabilité. La variation du profil radial de la vitesse azimutale dans le plan équatorial est représentée en figure 5.13 (c) à différents temps caractéristiques. Avant le déclenchement de l'instabilité MRI, le profil est celui donné par l'expression (5.2.1). A $t = 50$, le profil est fortement perturbé et le reste ensuite (voir à $t = 90$ et $t = 200$).

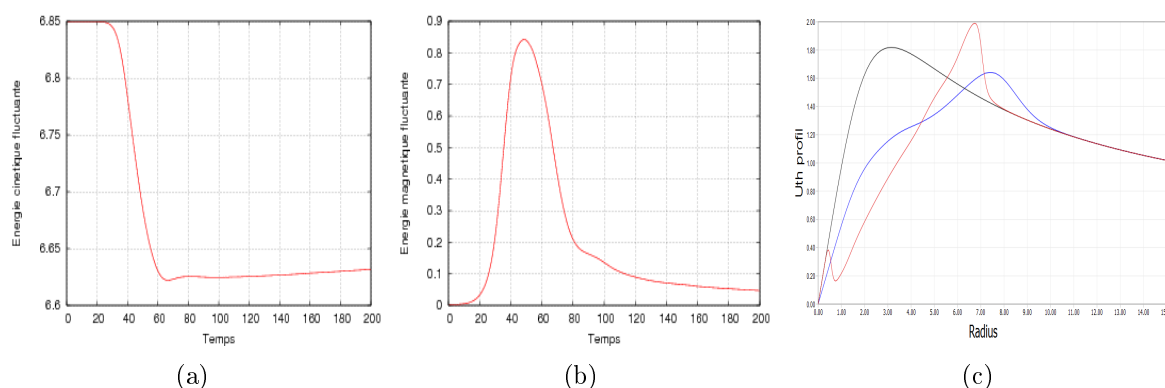


FIG. 5.13 – Energies cinétique (a) et magnétique (b) au cours du temps ($Rm = 280, Pm = 1, Ha = 32, R/L = 15$). (c) Profil radial de la vitesse azimutale $u_\theta(r, z = 0)$ à différents temps, $t = 20$ en noir, $t = 50$ en rouge et $t = 200$ en bleu.

Après cette phase linéaire, le profil de vitesse diffère de celui de l'état initial et on note l'apparition de vitesse poloïdale. Si on regarde la répartition spatiale des champs de vitesse et magnétique fluctuants à différents temps (cf. figure 5.14), on constate que l'état hydrodynamique et magnétique du disque képlerien est fortement perturbé pendant la phase MRI. Au maximum du pic MRI à environ $t = 50$, on voit une très forte composante de vitesse toroïdale fluctuante près de la zone où le cisaillement est le plus fort (en $r = r_{max}$, voir l'expression 5.2.1). L'amplitude de cette vitesse créée lors de la croissance de l'instabilité est de l'ordre de 1 alors que la vitesse képlerienne imposée dans cette zone est de l'ordre de 1.8, ce qui représente près de 55%. On observe également une deuxième zone à environ $r = 2s_0$ où la vitesse fluctuante créée est de moindre amplitude mais tournant en sens inverse de la première. Cette configuration donne lieu à une zone active où le champ magnétique fluctuant créé se localise. L'amplitude de ce champ est de l'ordre de 30% de l'amplitude du champ de vitesse képlerien imposé.

Dans le régime post-MRI, le champ magnétique décroît vers une valeur non nulle. Une forte composante de vitesse toroïdale est toujours présente (environ 30 % de la

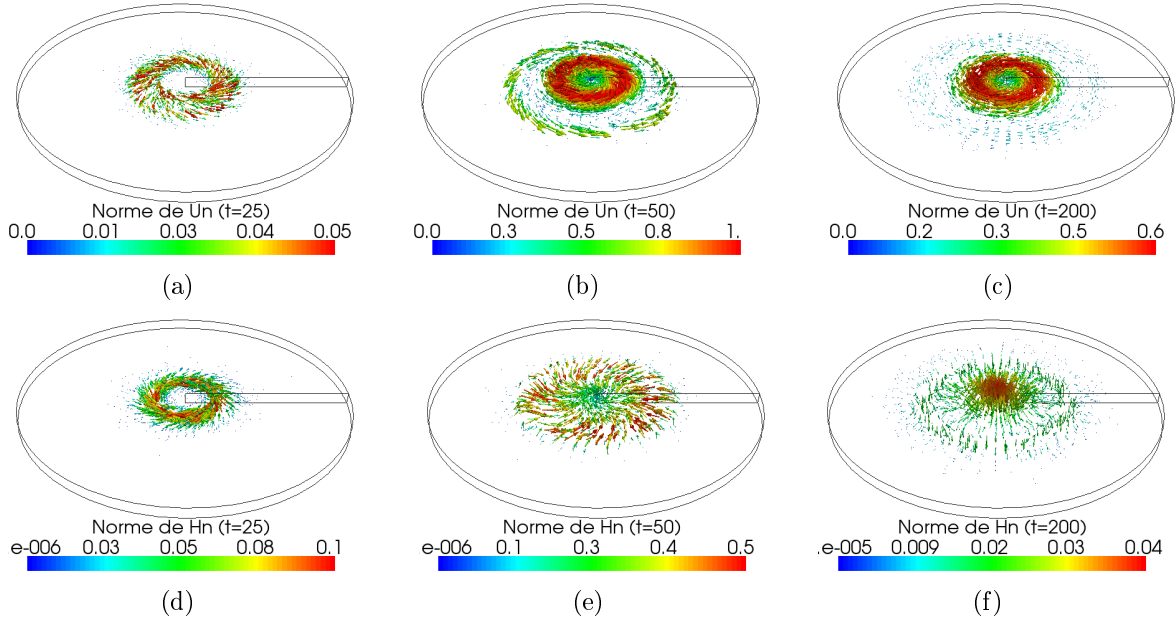


FIG. 5.14 – Visualisations du champ de vitesse fluctuant (a-c) et du champ magnétique fluctuant (d-f) à différents temps $t = 25, 50, 200$: les vecteurs sont colorés par leur norme ($Rm = 280, Pm = 1, Ha = 32, R/L = 15$).

valeur du profil de base) comme on peut le constater pour un temps de 200, soit 4 fois le temps caractéristique de l’instabilité magnétorotationnelle (cf. figure 5.13). On peut également remarquer la présence d’une faible quantité de champ magnétique fluctuant qui forme un dipôle magnétique localisé au centre du disque.

5.3.3 Vers un régime post-MRI chaotique

La comparaison pour $Rm = 280$ des deux types de conditions aux limites magnétiques PV et VV a montré des oscillations de l’énergie magnétique uniquement pour les conditions VV. De plus, ces conditions sont plus naturelles pour la continuité du champ magnétique avec le vide qui est simulé dans notre modélisation. Par la suite, seules les conditions magnétiques VV sont utilisées.

5.3.3.1 Evolution non linéaire à plus grands nombres de Reynolds

Pour des nombres de Reynolds assez faibles, le régime de saturation tend vers un point fixe car les oscillations non linéaires observées dans le régime non linéaire s’amortissent exponentiellement. Afin d’atteindre un régime non linéaire plus fluctuant, j’ai réalisé plusieurs simulations au même nombre de Hartmann mais pour des nombres de Reynolds magnétique plus élevés ($Rm = 400$ et $Rm = 700$ avec $Pm = 1$). Lorsque le nombre de Reynolds magnétique augmente, la dynamique du régime non linéaire est différente. Si on regarde l’évolution de l’énergie magnétique perturbée au cours du temps (cf. figure 5.15 a), on constate que, pour $Rm = 400$, les oscillations non linéaires s’atténuent également exponentiellement mais de façon plus lente que pour

le cas $Rm = 280$. En revanche, lorsque $Rm = 700$, on constate que l'amplitude des oscillations augmente au cours du temps. Il en est de même pour l'énergie cinétique fluctuante (voir figure 5.15 b) qui oscille en phase avec l'énergie magnétique.

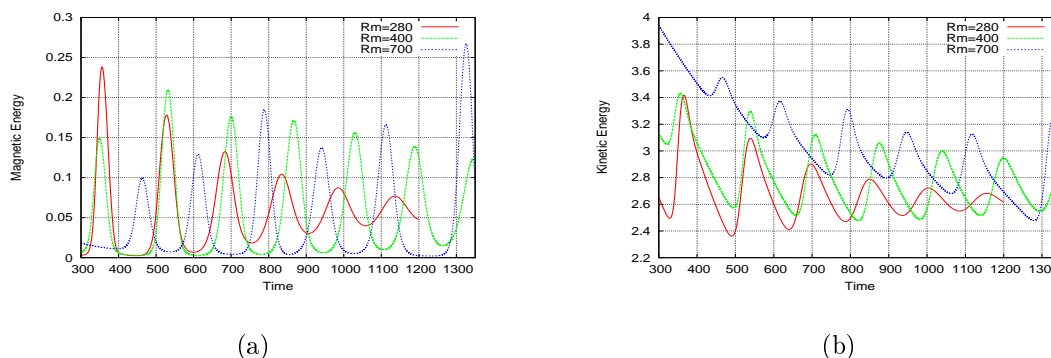


FIG. 5.15 – Energies magnétique (a) et cinétique (b) fluctuantes pour différents nombres de Reynolds magnétique Rm , $Pm = 1$, $Ha = 32$, $H_0 = 0.114$.

Ces comportements sont confirmés par l'observation de l'évolution des composantes du champ magnétique dans l'espace des phases (cf. fig. 5.16 a et c). On représente des hodographes traçant la composante azimutale du champ magnétique en fonction de sa composante radiale en un point caractéristique de coordonnées ($r = 3$, $z = 0$), pour les trois nombres de Reynolds $Rm = 280$, $Rm = 400$ et $Rm = 700$. On identifie deux points particuliers dans l'espace des phases, $Q^+ = (-0.075, 0.01)$ et $Q^- = (0.075, -0.01)$, autour desquels le système oscille. Ils correspondent à des états magnétiques quadrupolaires de signe opposé. Le point Q^+ correspond à un état magnétique quadrupolaire de même signe que la condition initiale, c'est l'opposé pour Q^- . Pour $Rm = 280$, le point Q^+ est un point fixe stable tandis que, pour $Rm = 400$, c'est le point Q^- qui est le point fixe stable. Pour $Rm = 700$, la dynamique est plus complexe : le système ne tend pas vers un des deux points fixes mais parcourt l'espace des phases autour de ces deux points instables en passant par un état dipolaire $D = (0, 0)$. Ce comportement est similaire à celui d'un système de Lorenz.

La figure 5.17 représente les lignes de champ magnétique à différents temps pour $Rm = 700$, $Pm = 1$, $Ha = 32$, $H_0 = 0.114$. On constate que, lorsque l'énergie est maximum à $t = 1110$, la structure magnétique est de symétrie quadrupolaire tandis que, lorsque l'énergie est minimum à $t = 1260$, la structure magnétique s'approche d'une structure dipolaire. Le système oscille entre ces deux états magnétiques différents. Lorsque l'énergie magnétique croît (voir $t = 1310$ dans la figure 5.17), on observe que c'est le mode quadrupolaire favorisé par l'instabilité magnétorotationnelle qui est sélectionné. Quand son amplitude est telle qu'il perturbe fortement le champ de vitesse de base (voir figure 5.18), la croissance s'arrête et donc l'énergie magnétique ne sature pas. Cette dernière se met à décroître avec un champ magnétique de symétrie dipolaire (voir $t = 1160$ dans la figure 5.17).

Une explication quantitative de ces comportements post-MRI donnant lieu à des oscillations est présentée dans l'article [44], d'autres approches asymptotiques vont éga-

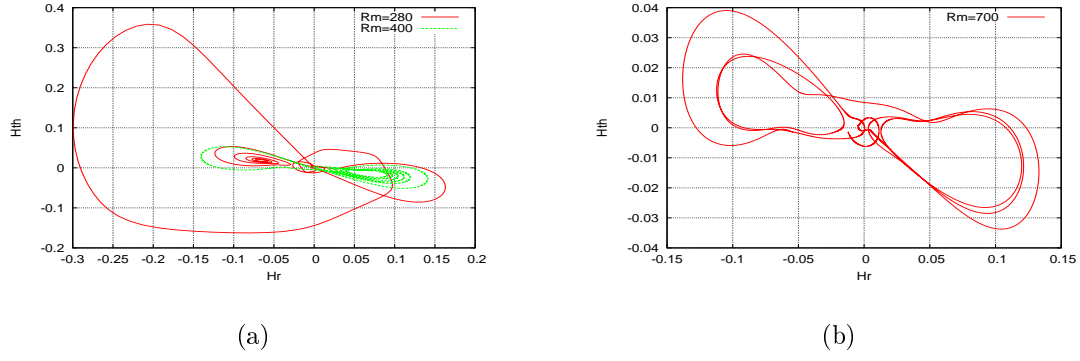


FIG. 5.16 – Composante toroïdale du champ magnétique en fonction de la composante radiale pour $Rm = 280$ et $Rm = 400$ (a), pour $Rm = 700$ (b) ($Pm = 1$, $Ha = 32$, $H_0 = 0.114$).

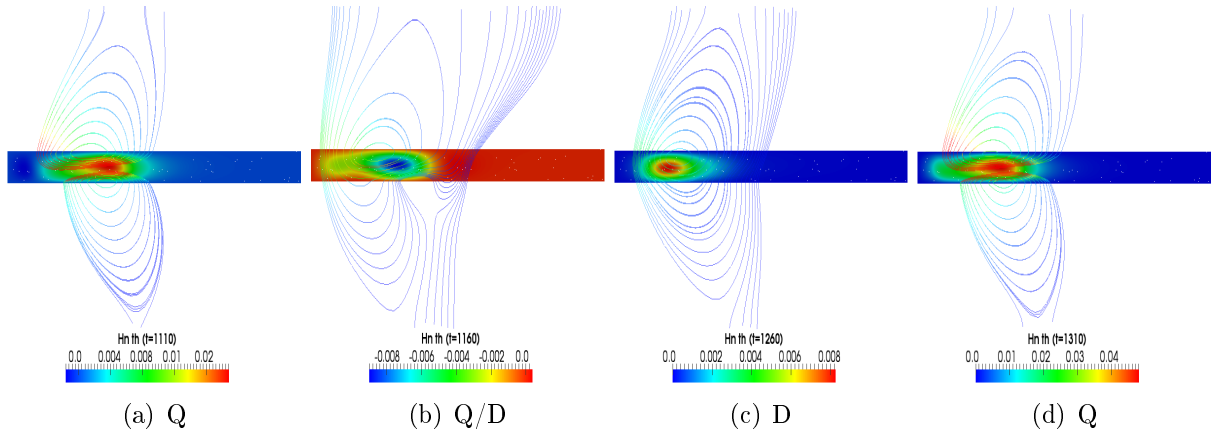


FIG. 5.17 – Lignes de champ magnétique colorées par l'énergie poloïdale dans le disque et dans le vide et contour de H_θ dans le disque : (a) $t = 1110$ au moment d'un maximum d'énergie magnétique, (b) $t = 1160$ quand l'énergie décroît, (c) $t = 1260$ au moment d'un minimum, (d) $t = 1310$ quand l'énergie magnétique recroît ($Rm = 700$, $Pm = 1$, $Ha = 32$, $H_0 = 0.114$).

lement dans cette direction. Le mécanisme suivant y est envisagé pour expliquer ces oscillations. Lors de la phase linéaire de l'instabilité MRI, le taux de croissance de l'instabilité est suffisamment rapide et élevé pour induire une diminution du cisaillement au sein du disque. Lorsque le cisaillement devient trop faible, l'instabilité s'éteint. Tant que le champ gravitationnel est capable de restaurer le profil de vitesse initiale, les conditions d'instabilité sont retrouvées et la croissance MRI peut reprendre. Le phénomène se répète de façon cyclique. Ce mécanisme suggère une dynamique oscillante des grandeurs magnétique et hydrodynamique au cours du temps comme nous l'avons observé.

Nous allons suivre la variation du profil radial de la vitesse azimutale dans le plan équatorial pour différents temps en figure 5.18. Sur la figure 5.18 (a), on représente le profil pseudo-képlerien de base ainsi que les profils radiaux de la composante de vitesse azimutale en $z = 0$ pour les deux calculs $Rm = 280$ et $Rm = 700$. On peut, remarquer que les profils sont relativement proches pour les deux Rm , on ne s'intéressera

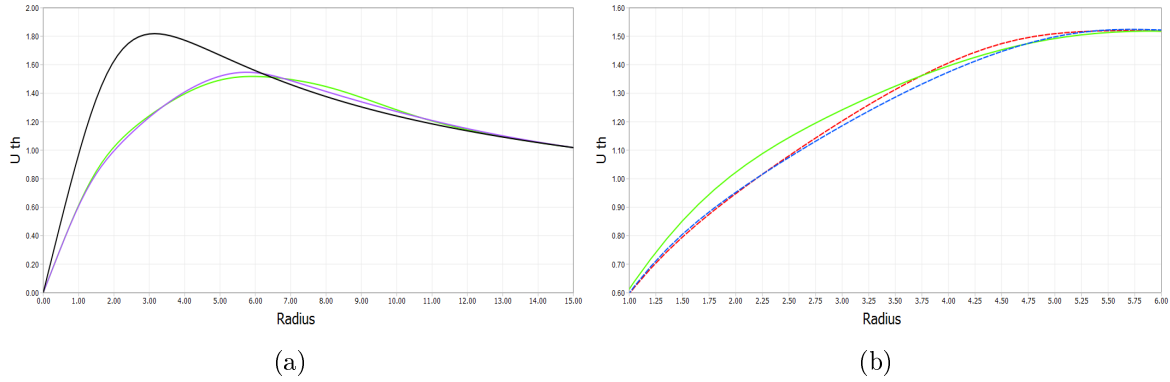


FIG. 5.18 – (a) Profil radial de $0 \leq r \leq 15$ de la vitesse azimutale dans le plan équatorial du disque pour le calcul $Rm = 280$ à $t = 1200$ en bleu, pour $Rm = 700$ à $t = 1210$ en vert avec le profil quasi-képlerien initial (en noir) à titre de comparaison. (b) Idem pour $Rm = 700$, à $t = 1110$ en bleu, à $t = 1210$ en vert et à $t = 1350$ en rouge, de $1 \leq r \leq 6$.

par la suite qu'au cas $Rm = 700$. On peut noter que le profil quasi-képlerien initial (représenté en noir) est fortement modifié par l'instabilité MRI. Dans le régime non linéaire, le cisaillement est diminué par rapport au cisaillement initial et la zone où il est maximum est décalée de $r_{max} = 2.5$ à $r \approx 5$. Si on regarde aux différents instants de la figure 5.17, on constate que les fluctuations du champ magnétique modifient le profil de vitesse, principalement dans la région $1.5 < r < 5$. Ces déformations sont dues à l'action des forces de Lorentz sur le champ de vitesse. La figure 5.19 représente la composante azimutale de la force de Lorentz à différents temps. Au moment des maxima d'énergie magnétique, à $t = 1160$ et $t = 1350$, on constate que la force de Lorentz déforme le profil de vitesse au niveau de la zone où le cisaillement est maximal, comme on peut le noter sur la figure 5.18 (a).

Ces simulations ont montré des régimes laminaires de saturation de l'instabilité MRI. Pour des nombres de Reynolds faibles, le système tend vers un point fixe où le champ magnétique est de symétrie quadrupolaire. Pour $Rm = 700$, la dynamique montre des oscillations entre deux états magnétiques de symétrie quadrupolaire différente avec des transitoires de symétrie dipolaire. Ces oscillations sont accompagnées de déformation du profil radial de la vitesse azimutale. Les dynamiques observées sont approximativement en phase lorsqu'on se déplace radialement, nous pouvons donc envisager d'établir un modèle de basse dimensionnalité capable de restituer un comportement non-linéaire similaire à ceux discutés ici.

5.3.3.2 Proposition d'un modèle de basse dimensionnalité

Intéressons-nous à la dynamique locale des différentes composantes magnétiques et hydrodynamiques. Pour cela, on représente, au cours du temps, la vitesse toroïdale perturbée et les composantes fluctuantes du champ magnétique en un point ($r = 3, z = 0$) proche du point de cisaillement maximum ($r_{max}, z = 0$). D'un point de vue qualitatif, on observe une certaine corrélation entre les différentes composantes : la dynamique de la composante toroïdale de la vitesse (oscillation entre un minimum et un maximum)

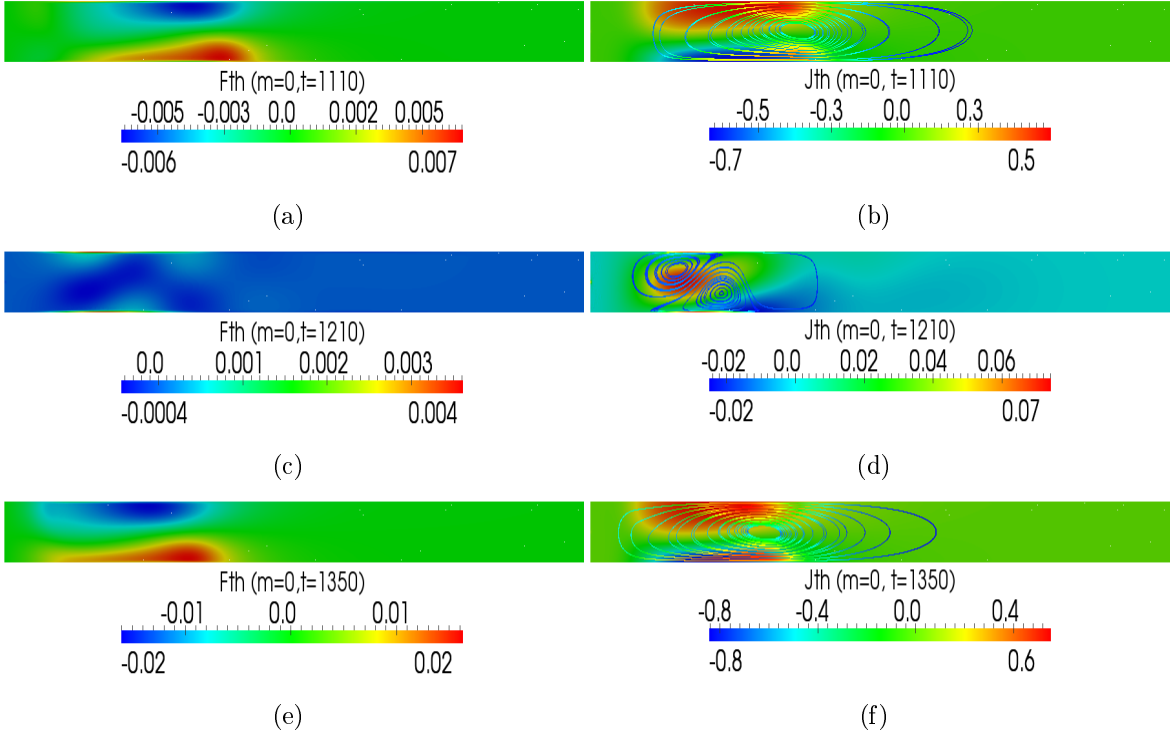


FIG. 5.19 – Visualisation d’un cycle dans le plan méridien. (a,c,e) Composante azimutale de la force de Lorentz ($Rm = 700$, $Pm = 1$, $H_0 = 0.114$), (a) $t = 1110$, (c) $t = 1210$, (e) $t = 1350$. (b,d,f) Courants poloïdaux colorés par l’énergie poloïdale, ainsi que leur composante azimutale à différents temps, (b) $t = 1110$, (d) $t = 1210$, (f) $t = 1350$, ($Rm = 700$, $Pm = 1$, $Ha = 32$, $H_0 = 0.114$).

est reliée à la croissance des grandeurs magnétiques. Par exemple, entre $t = 750$ et $t = 800$, on voit que l’augmentation de $|U_\theta|$ est suivie avec un décalage temporel d’une augmentation des différentes composantes de champ magnétique.

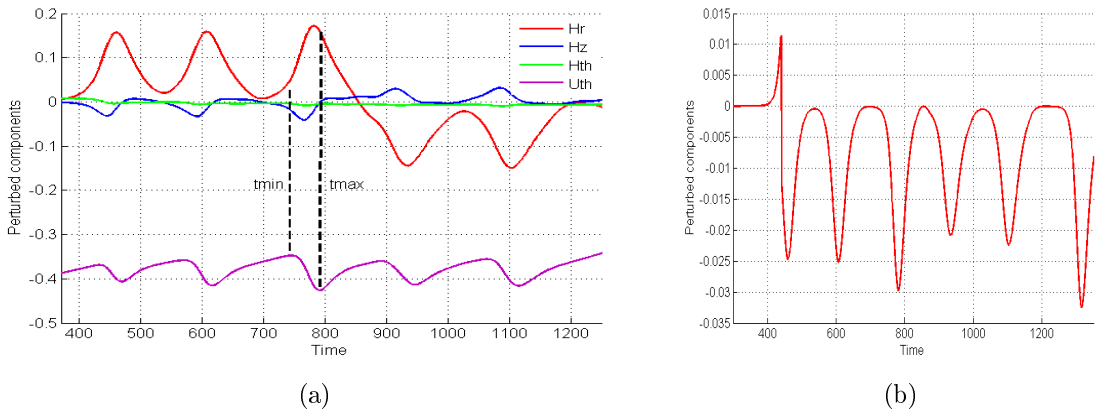


FIG. 5.20 – (a) Evolution temporelle de la vitesse toroïdale perturbée et des composantes fluctuantes du champ magnétique en un point ($r = 3$, $z = 0$) proche du point de cisaillement maximum (r_{max} , $z = 0$). (b) Evolution temporelle du produit des composantes poloïdale et toroïdale du champ magnétique ($Rm = Re = 700$, $Ha = 32$, $H_0 = 0.114$, $R/L = 15$).

Afin de vérifier que la dynamique observée en figure 5.20 n'est pas uniquement valable en un seul point de l'écoulement, on a vérifié que l'on retrouve des comportements similaires pour des points voisins. On peut vérifier sur la figure 5.21 que les grandeurs magnétiques et cinétiques évoluent au cours du temps de façon très similaire en différents points où le cisaillement est fort.

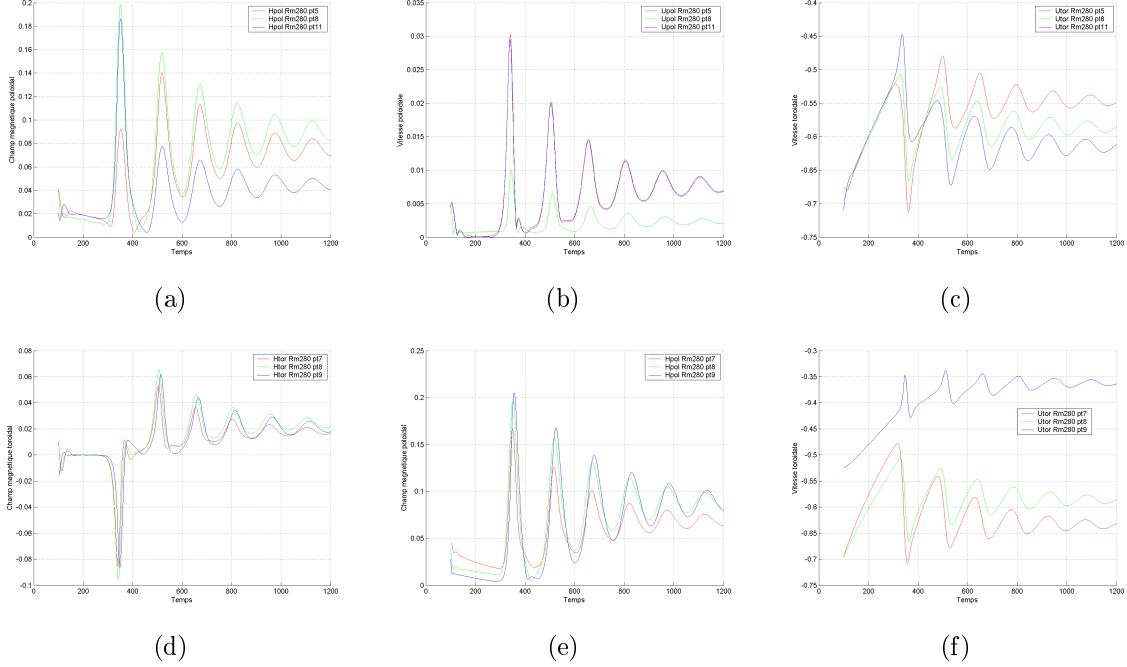


FIG. 5.21 – (a-c) Représentation des différentes composantes magnétiques et cinétiques au cours du temps en différentes positions de l'écoulement : au point 5 ($r = 3, z = -0.25$), au point 8 ($r = 3, z = 0$) et au point 11 ($r = 3, z = 0.25$). (d-f) Idem pour les points 7 ($r = 2, z = 0$), au point 8 ($r = 3, z = 0$) et au point 9 ($r = 4, z = 0$).

On cherche une représentation à zéro dimension spatiale, en un point représentatif de la dynamique ($r = R_0, z = z_0$), où les champs magnétique \mathbf{H} et de vitesse \mathbf{U} ne dépendent que du temps. Si \mathbf{e}_θ est le vecteur unitaire azimutal, l'axisymétrie conduit à la représentation des différents champs suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{H} = H_T \mathbf{e}_\theta + \nabla \times (H_P \mathbf{e}_\theta) \\ \mathbf{U} = U_T \mathbf{e}_\theta + \nabla \times (U_P \mathbf{e}_\theta) \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Considérons l'approche classique d'une dynamo $\alpha - \omega$ dans laquelle la composante toroïdale du champ magnétique est générée par la rotation différentielle présente dans l'écoulement, autrement appelé l'effet ω tandis que la composante poloïdale du champ magnétique est elle générée par effet α (voir chapitre 1). Pour conserver des relations dimensionnelles, on introduit une échelle caractéristique \mathcal{L} , permettant de définir un nombre d'onde $k = 2\pi/\mathcal{L}$. Grâce à ces grandeurs, l'évolution temporelle des composantes toroïdale et poloïdale de \mathbf{H} peut alors s'écrire de façon dimensionnée comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dH_T}{dt} = -\eta k^2 H_T + \omega H_P \\ \frac{dH_P}{dt} = -\eta k^2 H_P + \alpha k H_T \end{cases} \quad (5.3.3)$$

où η est la diffusivité magnétique. On cherche des solutions du type $e^{\gamma t}$ où γ est le taux de croissance défini comme $\gamma = -\eta k^2 \pm \sqrt{\alpha \omega k}$. On a croissance du champ magnétique par effet dynamo si γ est positif, soit si $(\alpha/\eta k) * (\omega/\eta k^2) > 1$, c'est-à-dire si le produit des deux nombres dynamos est supérieur à 1, $R_\alpha R_\omega > 1$.

On cherche maintenant à décrire la dynamique du champ de vitesse avec un minimum de variables. Dans l'instabilité MRI, le champ vertical (poloïdal) crée un champ de vitesse poloïdal, lequel est susceptible de contribuer à l'effet α . Si on veut traiter la dynamique du système aux temps longs par rapport au temps caractéristique de l'instabilité MRI (soit 4-5 périodes de révolution), on fait l'hypothèse qu'on tend vers un état où les fluctuations de la vitesse poloïdale U_P sont stationnaires (soit $dU_P/dt = 0$). Cette hypothèse implique un effet α constant ($\alpha = \alpha_0$). On représente alors l'action des forces de Lorentz uniquement sur la vitesse toroïdale fluctuante $U_T - V(R_0) = R_0(\omega - \omega_0)$ où $V(R_0)$ est la valeur en R_0 de profil quasi-képlerien initial (équation 5.2.1). Cette valeur $V(R_0) = R_0\omega_0$ donne lieu à la dynamo si $R_{\alpha_0}R_{\omega_0} > 1$.

Dans ces conditions, le modèle pour le champ de vitesse peut se résumer en l'équation suivante :

$$\frac{dR_0\omega}{dt} = -\frac{R_0(\omega - \omega_0)}{T} - cR_0H_TH_P$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{(\omega - \omega_0)}{T} - cH_TH_P \quad (5.3.4)$$

Cette équation présuppose que le produit H_TH_P , représentant la force de Lorentz, ne change pas de signe au cours du temps, ce qui peut aisément se vérifier en regardant l'évolution des composantes du champ magnétique fluctuant au cours du temps en un point où le cisaillement est maximum (cf. figure 5.20 b). On choisit alors $cH_TH_P > 0$. Le premier terme dans le membre de droite représente le forçage imposé équivalant à une force de rappel avec une constante de temps T . Le mécanisme est le suivant : la force de Lorentz $-cH_TH_P$ fait décroître le cisaillement, donc ω , assez pour que $R_{\alpha_0}R_{\omega_0} < 1$. Dans ces conditions, la dynamo cesse, les composantes poloïdale H_P et toroïdale H_T décroissent par diffusion ohmique, alors la rotation différentielle ω peut recroître et ainsi de façon cyclique. Cette équation s'apparente à celle d'une charge et d'une décharge d'une bobine. On obtient finalement un système dynamique à 3 degrés de libertés et 4 paramètres (η , α_0 , T , c). Afin de vérifier que ce modèle reproduit qualitativement les oscillations observées dans les simulations numériques, les équations 5.3.3 et 5.3.4 ont été intégrées numériquement à l'aide de matlab.

On a tenté de reproduire le comportement des différentes composantes magnétiques et cinétiques observées dans les régimes post-MRI pour les trois simulations axisymétriques étudiées ($Rm = 280$, $Rm = 400$, $Rm = 700$, $Pm = 1$, $H_0 = 0.114$) en se positionnant au point ($r = 3$, $z = 0$). En ce point, la vitesse angulaire ω_0 est prise égale à l'amplitude du cisaillement, soit $\omega_0 = 1.82$. Le paramètre η est choisi égal à $1/Rm$. Le paramètre α_0 rendant compte de l'effet α présent dans l'écoulement, on a choisi de le prendre du même ordre de grandeur que l'amplitude de la vitesse poloïdale perturbée. Les paramètres T et c sont plus arbitraires. Nos différents essais nous ont amené à faire varier T en gardant $c = 1$. Les paramètres du modèle qui donnent les résultats les plus proches de ceux obtenus dans la simulation sont résumés dans le tableau 5.1.

La comparaison entre les différentes grandeurs montre un bon accord qualitatif (voir figure 5.22).

Rm	η	α_0	T	c
280	0.0056	0.009	180	1
400	0.0025	0.007	290	1
700	0.0014	0.005	425	1

TAB. 5.1 – Tableau récapitulatif des paramètres utilisés dans le modèle pour le cas des trois simulations axisymétriques présentées en section 5.3.

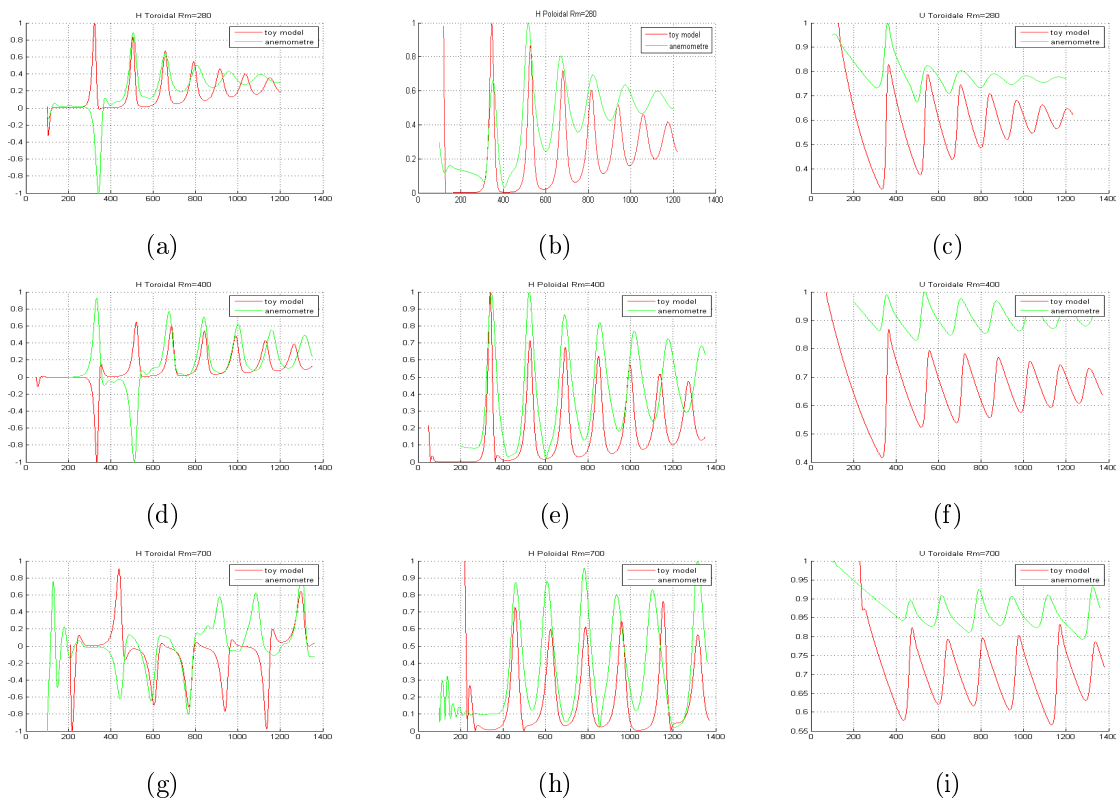


FIG. 5.22 – Comparaison entre les différentes grandeurs issues des simulations (en vert) et obtenues grâce au modèle (en rouge). (a-c) $Rm = 280$, $Pm = 1$, $Ha = 32$; (d-f) $Rm = 400$, $Pm = 1$, $Ha = 32$, $Rm = 700$, $Pm = 1$, $Ha = 32$

Si l'on représente les énergies magnétiques calculées avec le modèle et celles issues des trois simulations (cf fig. 5.23), on constate que le modèle est capable de restituer les différents comportements observés dans le régime post-MRI pour les simulations axisymétriques de la section 5.3.

La raison principale du choix de ce modèle est la recherche de simplicité et il est certain que réduire à trois degrés de liberté le disque MHD original revient à éliminer beaucoup d'effets physiques. Dans ce qui précède, nous avons estimé les paramètres du modèle par une analogie volontairement naïve avec les simulations. Si l'on veut réduire plus systématiquement ces paramètres et éventuellement tenter de relier ce modèle avec d'autres oscillateurs non-linéaires, on peut obtenir les points fixes, et les utiliser pour normaliser les variables.

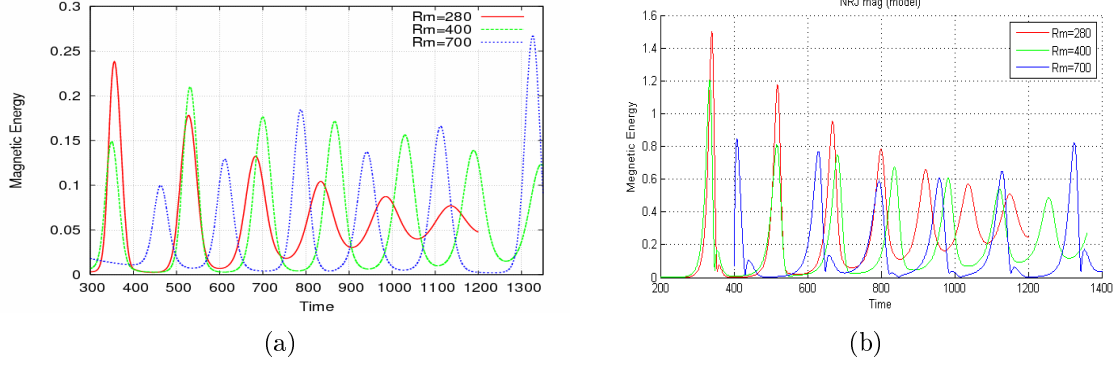


FIG. 5.23 – (a) Energie magnétique au cours du temps pour les simulations de l’instabilité MRI axisymétrique de paramètres $Rm = 280, 400, 700$. (b) Energies magnétiques au cours du temps résultant du modèle dont les paramètres sont listés dans le tableau 5.1.

Les points fixes (P^*, T^*, ω^*) sont obtenus en écrivant que $\partial_t H_T = \partial_t H_P = \partial_t \omega = 0$. On trouve dans ces conditions :

$$\begin{cases} \omega^* = \frac{\eta^2 k^3}{\alpha_0} \\ P^{*2} = \frac{\alpha_0 \omega}{T c \eta k} - \frac{\eta k^2}{T c} \\ T^* = \frac{\eta k}{\alpha_0} P^* \end{cases} \quad (5.3.5)$$

La présence de deux points fixes magnétiques traduit l’invariance des équations par inversion du champ magnétique. En définissant des nouvelles variables X, Y, Z telles que $H_T = T^* X$, $H_P = P^* Y$, $\omega = \omega^* Z$, les équations du modèle s’écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t X = -X + Y \\ \partial_t Y = -Y + XZ \\ \partial_t Z = -\frac{1}{\eta T} (Z - \frac{\omega_0}{\omega^*} - (\frac{\omega_0}{\omega^*} - 1)XY) \end{cases} \quad (5.3.6)$$

Dans ce système d’équations, les points fixes MHD sont devenus $X = Y = \pm 1, Z=1$ (et $X = Y = 0, Z = r$ dans le cas hydrodynamique). On rappelle que η décrit la dissipation ohmique, alors que T^{-1} et le paramètre $r = \omega_0/\omega^*$ sont relatifs au forçage hydrodynamique. En choisissant le temps diffusif comme unité de temps, il reste deux paramètres r et ηT . On pourrait poursuivre l’analyse en linéarisant ces équations et en étudiant la stabilité des points fixes, la période éventuelle, etc. On pourrait comparer les caractéristiques des points fixes obtenus à $Rm \leq 700$ avec ceux du modèle. Il est patent que les simulations montrent un équilibre MHD 3D complexe (post-MRI), très différent du disque képlérien initial (pré-MRI). Comme nous sommes surtout intéressés par l’apparition de turbulence dans le cas non axisymétrique ($m > 0$), nous ne développerons pas cette démarche de validation de modèle ici.

5.4 Résultats de simulations non axisymétriques

Les simulations axisymétriques de l’instabilité MRI réalisées pour la gamme de Reynolds $Rm \in [150, 700]$ n’ont montré que des états saturés stationnaires ou oscillants pour lesquels les structures magnétiques restent cohérentes et sont de géométrie quadrupolaire ou dipolaire. Nous avons également étudié cette instabilité dans le cas

tridimensionnel afin d'augmenter le nombre de degrés de liberté et d'explorer d'autres états de saturation de l'instabilité MRI. Nous avons réalisé des simulations pour différents régimes de diffusion. Dans un premier temps, nous avons repris un régime où $Pm = 1$ afin de comparer les résultats entre une simulation axisymétrique et un calcul 3D. Puis nous avons fait varier le nombre de Prandtl magnétique : $Pm = 0.5, 2, 4$.

5.4.1 Cas où la diffusion ohmique est égale à la diffusion visqueuse ($Pm = 1$)

Nous reprenons un cas caractérisé par $Rm = 700, Pm = 1, Ha = 32, H_0 = 0.114$ déjà étudié dans le cadre axisymétrique. Dans cette simulation, nous considérons 16 modes de Fourier, soit m le mode azimutal allant de 0 à 15. Nous utilisons un maillage de section méridienne rectangulaire de rapport de forme $R/L = 15$, formé d'éléments triangulaires de Lagrange d'ordre 2. Chaque élément a un pas spatial $d_h = 0.0143$, ce qui donne environ 67157 nœuds pour le champ de vitesse \mathbf{U} et magnétique \mathbf{H} ainsi que 33579 nœuds pour la pression P et 52041 nœuds pour le potentiel extérieur ϕ . Le code que nous utilisons étant parallélisé (voir chapitre 2), les simulations sont réalisées sur 16 processeurs, chaque processeur s'occupant d'un mode azimutal m .

Si on compare l'évolution des énergies magnétique et cinétique aux temps courts pour le cas axisymétrique et 3D (cf. fig. 5.24), on peut remarquer qu'elles sont très similaires aux temps courts. Si on regarde plus en détail l'évolution de l'énergie magnétique des trois premiers modes magnétiques pendant la phase MRI à $t < 30$ (voir figure 5.25 a), on constate que le mode axisymétrique est le plus instable, son taux de croissance est d'environ 1.26. Les modes $m = 1$ et $m = 2$ présentent des taux de croissance de respectivement 1.08 et 1.12. Ce résultat est en accord avec les études effectuées dans le cadre linéaire dans l'article [4] qui montrent que les modes $m = 1$ et $m = 2$ sont les deux modes non axisymétriques les plus instables présentant un taux de croissance similaire. Dans le régime non linéaire (cf. figure 5.25 b), on peut noter que les modes azimutaux élevés semblent contribuer aux fluctuations du mode $m = 0$.

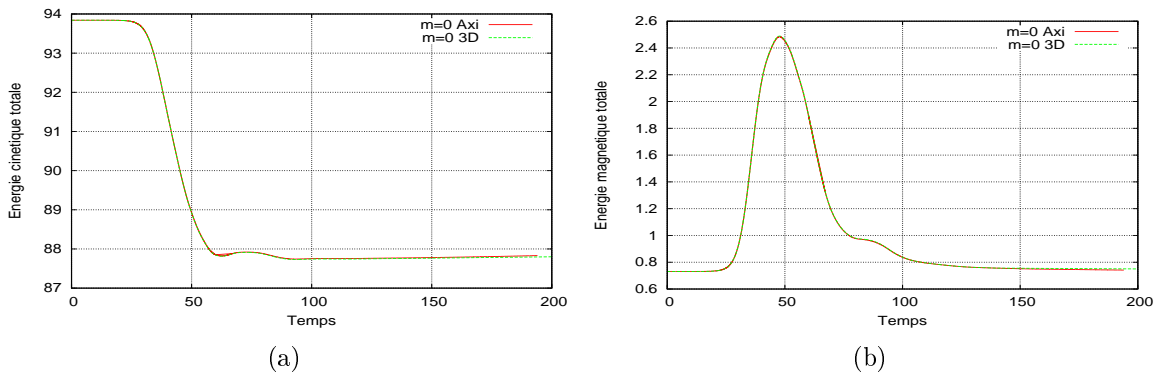


FIG. 5.24 – Energies cinétique (a) et magnétique (b) du mode $m = 0$ dans une simulation axisymétrique et pour un calcul 3D en comparaison ($Rm = 700, Pm = 1, Ha = 32, H_0 = 0.114$).

L'énergie magnétique de tous les modes en échelle logarithmique au cours du temps

(cf. figure 5.27) montre que préférentiellement les modes pairs poussent exponentiellement sur un temps d'environ 200, puis saturent pour enfin diminuer par diffusion.

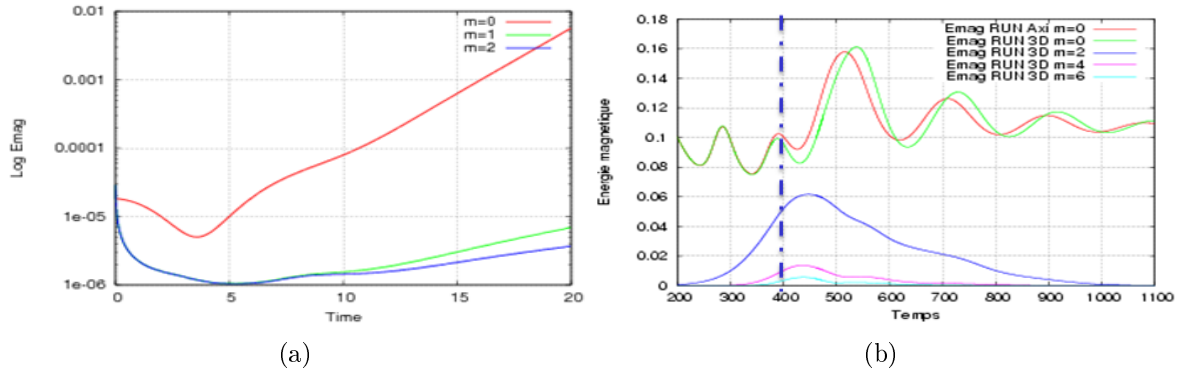


FIG. 5.25 – (a) Energie magnétique des modes $m = 0, 1, 2$ dans le cas de la simulation 3D à temps courts. (b) Energie magnétique des modes $m = 0, 2, 4, 6$ dans le cas d'une simulation 3D à temps longs. L'énergie magnétique d'un calcul axisymétrique est aussi représentée à titre de comparaison ($Rm = 700, Pm = 1, Ha = 32, H_0 = 0.114$).

Nous observons que ces modes sont excités durant la phase MRI, puis sont amplifiés par le cisaillement présent dans l'écoulement, jusqu'à atteindre un maximum. Lorsque leur longueur d'onde axiale est trop élevée par rapport à la hauteur du disque (voir figure 5.26), ils saturent et meurent par diffusion.

A ce nombre de Prandtl, seuls les modes magnétiques pairs atteignent une amplitude proche de celle du mode $m = 0$. Pour le champ de vitesse, on peut constater que ce sont également les modes pairs qui croissent préférentiellement durant le régime post-MRI puis décroissent (voir figure 5.28).

On visualise les différents modes de vitesse pairs qui sont excités sur la figure 5.29. On peut voir que le mode $m = 0$ de vitesse est le plus intense en amplitude et est localisé sur l'orbite où le cisaillement est maximum en $r = r_{max}$. Le mode $m = 2$ est de plus faible amplitude et est localisé plus vers l'extérieur du disque sur une orbite situé à environ $3 s_0$. Les modes de vitesse élevés sont beaucoup plus étalés radialement, ce qui impose d'avoir un domaine de calcul assez étendu afin de ne pas induire des effets de bord en $r = R$.

Dans cette section, je n'ai présenté que la simulation au nombre de Reynolds le plus élevé que j'ai réalisée. Bien que, durant la phase MRI, des modes élevés soient excités, ils ne le sont pas suffisamment pour interagir efficacement entre eux et finissent par s'éteindre par diffusion. Afin d'aller vers un état post-MRI plus fluctuant, nous avons deux possibilités : soit augmenter le nombre de Reynolds à $Pm = 1$, soit se placer dans un régime où les diffusions ohmique et visqueuse diffèrent. En effet, pour des nombres de Prandtl Pm élevés, il a été montré dans des études locales [24] que l'apparition de turbulence dans le régime de saturation de l'instabilité était favorisé. Nous avons retenu la deuxième possibilité car l'augmentation du nombre de Reynolds nécessiterait d'augmenter le pas de grille, donc la taille du maillage, qui, dans ce type de simulation,

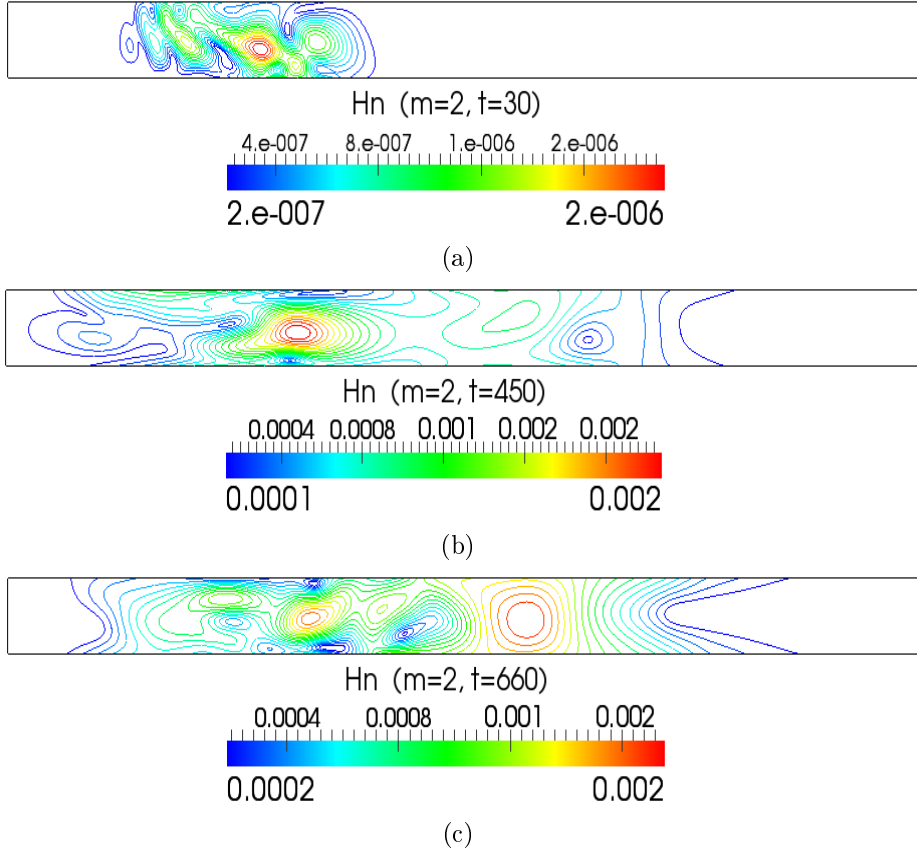


FIG. 5.26 – Visualisation dans le plan méridien des isovaleurs d'énergie pour le mode magnétique ($m=2$) à différents temps ($Rm = 700$, $Pm = 1$, $H_0 = 0.114$), (a) $t = 30$, (b) $t = 450$, (c) $t = 660$.

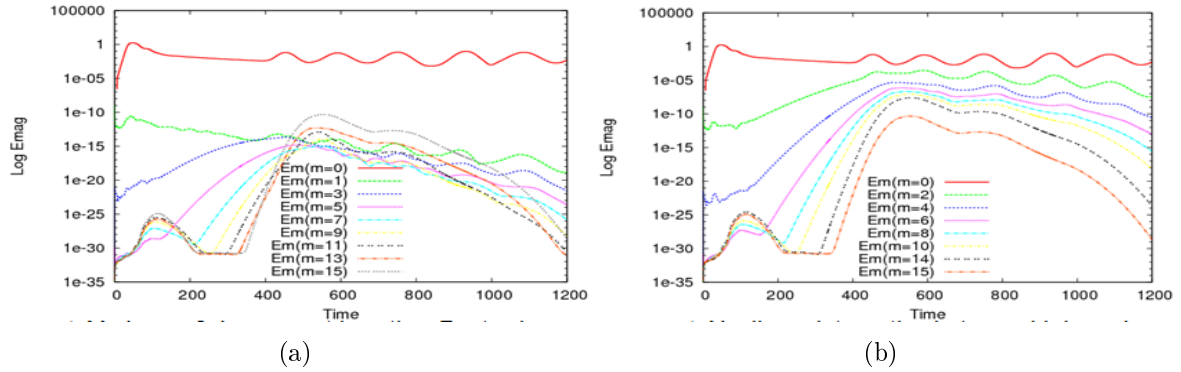


FIG. 5.27 – (a) Energie magnétique des modes impairs $m = 0, 1, 3, \dots, 15$ et du mode $m = 0$. (b) Energie magnétique des modes pairs $m = 0, 2, \dots, 14$ au cours du temps ($Rm = 700$, $Pm = 1$, $Ha = 32, H_0 = 0.114$).

influe très largement sur la taille des systèmes linéaires à traiter et par conséquent sur le temps de calcul.

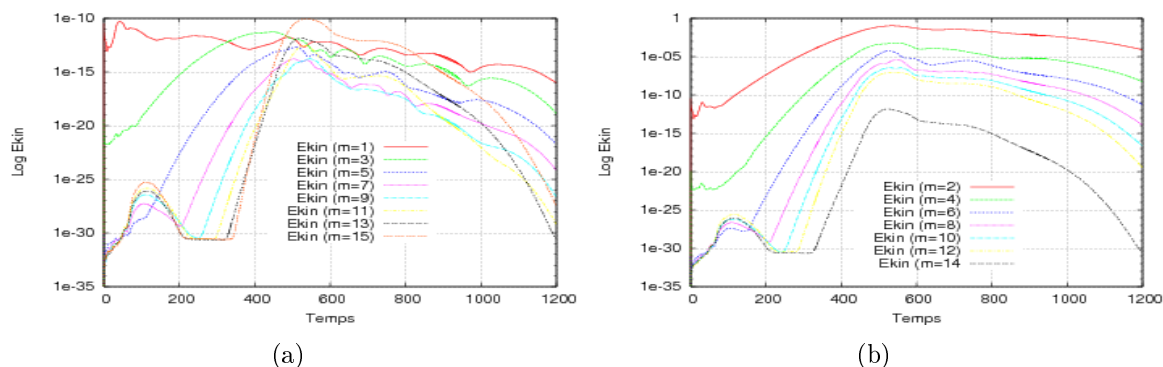


FIG. 5.28 – (a) Energie cinétique des modes impairs $m = 1, 3, \dots, 15$ et du mode $m = 0$. (b) Energie cinétique des modes pairs $m = 2, \dots, 14$ au cours du temps ($Rm = 700$, $Pm = 1$, $Ha = 32$, $H_0 = 0.114$).

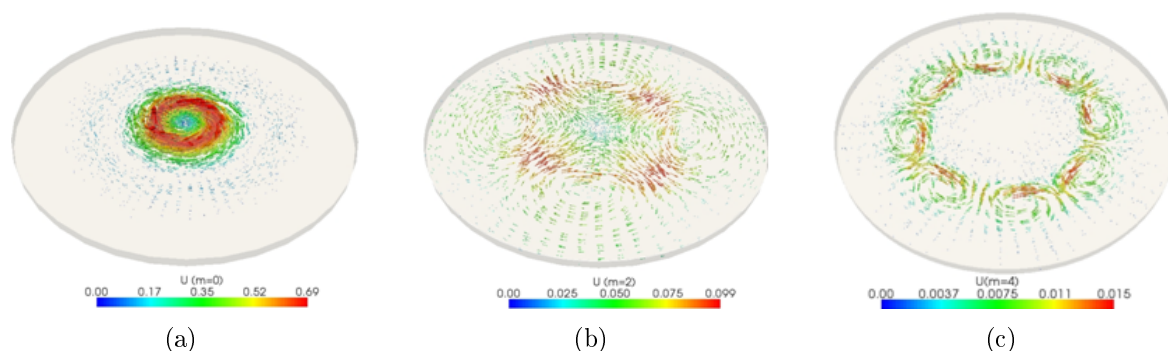


FIG. 5.29 – Visualisation des modes de vitesse $m = 0$ (a), $m = 2$ (b) et $m = 4$ (c) au temps $t = 450$ pour un calcul 3D, $Rm = Re = 700$, avec 16 modes de Fourier.

5.4.2 Cas où les diffusions ohmique et visqueuse diffèrent ($Pm \neq 1$)

Dans cette section, nous avons considéré trois cas : $Rm = 400$, $Re = 800$, soit $Pm = 0.5$, $Rm = 800$, $Re = 400$, soit $Pm = 2$, $Rm = 1600$, $Re = 400$, soit $Pm = 4$. Les résultats de ces trois simulations sont résumés sur les deux figures 5.30 et 5.31.

La figure 5.30 représente l'énergie magnétique des modes impairs (à gauche) et pairs (à droite) au cours du temps, pour les trois nombres de Prandtl $Pm = 0.5$, $Pm = 2$ et $Pm = 4$ respectivement en haut, au centre et en bas. Dans un premier temps, on peut remarquer que tous ces graphes présentent un régime transitoire pendant lequel les modes élevés magnétiques et de vitesse croissent puis diminuent pour un temps inférieur à 300. L'influence du nombre de Prandtl magnétique se fait sentir dans la dynamique suivant cette « bosse » transitoire. Pour Pm inférieur à 4, les modes magnétiques les plus instables sont, tout comme pour le cas $Pm = 1$, les modes pairs. Pour le cas $Pm = 0.5$, on voit que les modes pairs élevés croissent tout comme dans le cas $Pm = 1$ sur un temps d'environ 400. Cependant, ils semblent se maintenir au delà, ce qui n'était pas le cas pour $Pm = 1$. En revanche, dans le cas $Pm = 2$, les modes pairs croissent sur à peine un temps de 200 et diminuent beaucoup plus rapidement ensuite que dans les cas $Pm = 0.5$ et $Pm = 1$.

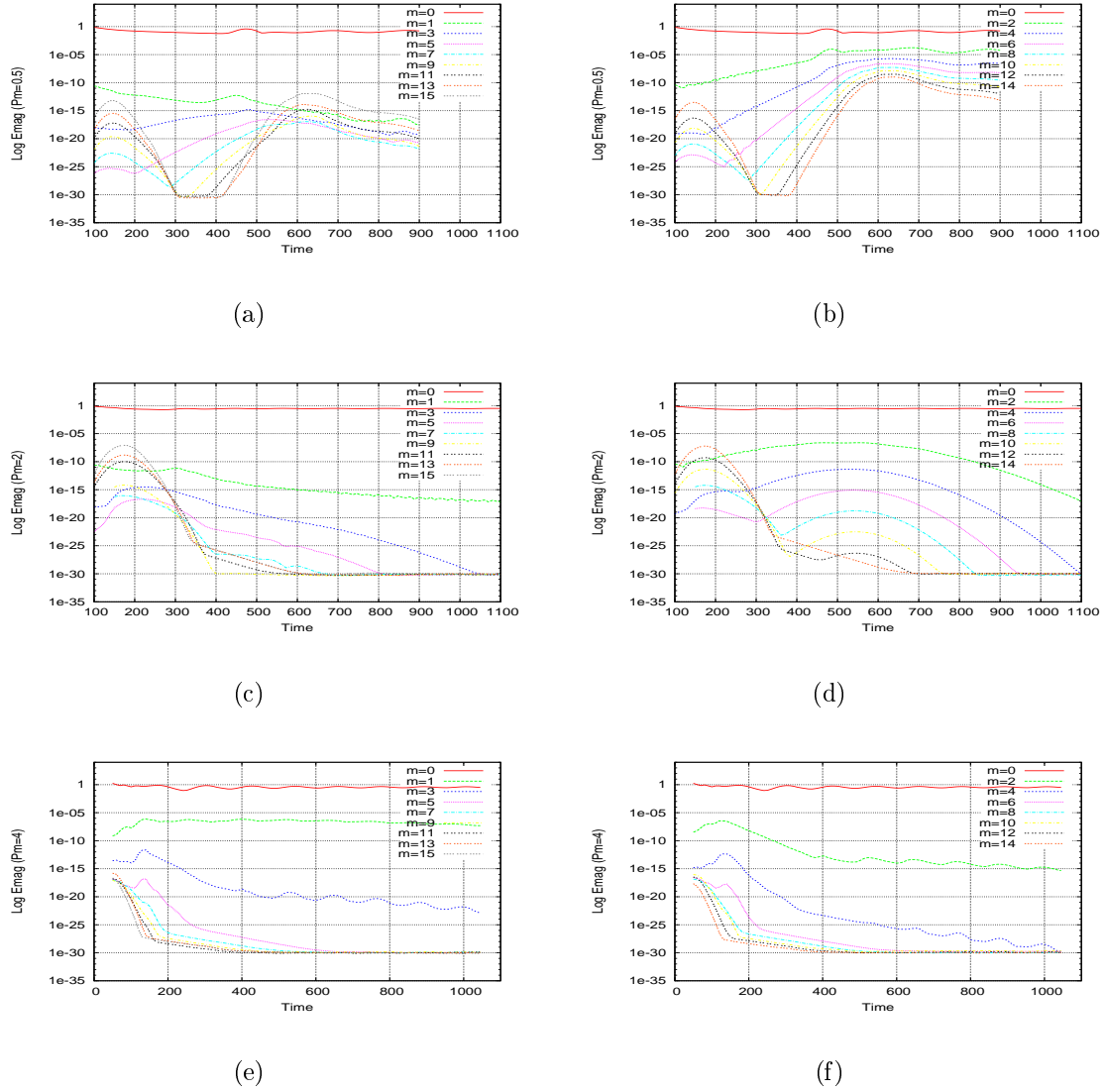


FIG. 5.30 – Simulations 3D à $Rm = 700$, $Ha = 32$ et différents Pm : (a,c,e) : énergie magnétique des modes impairs $m = 1, 3, \dots, 15$ et du mode $m = 0$; (b,d,f) : énergie magnétique des modes pairs $m = 0, 2, \dots, 14$. De haut en bas : $Pm = 0.5$, $Pm = 2$, $Pm = 4$.

Le cas $Pm = 4$ est différent car, contrairement aux autres cas, le mode magnétique le plus instable est le mode $m = 1$, donc un mode impair. On peut remarquer que ce mode croît dès la phase MRI et semble contribuer de façon majoritaire aux fluctuations du mode axisymétrique. Il se maintient au cours du temps. On voit cependant que les modes élevés restent indépendants et ne se couplent toujours pas. La figure 5.31 représente l'énergie cinétique des modes impairs (à gauche) et pairs (à droite) au cours du temps, pour les trois nombres de Prandtl $Pm = 0.5$, $Pm = 2$ et $Pm = 4$ respectivement en haut, au centre et en bas. On peut noter que, dans le cas $Pm = 0.5$, le mode $m = 2$ est presque d'amplitude comparable à celle du mode axisymétrique. On constate un comportement très similaire à celui des énergies magnétiques décrit précédemment. Ceci semble être la trace du couplage des modes par l'intermédiaire de

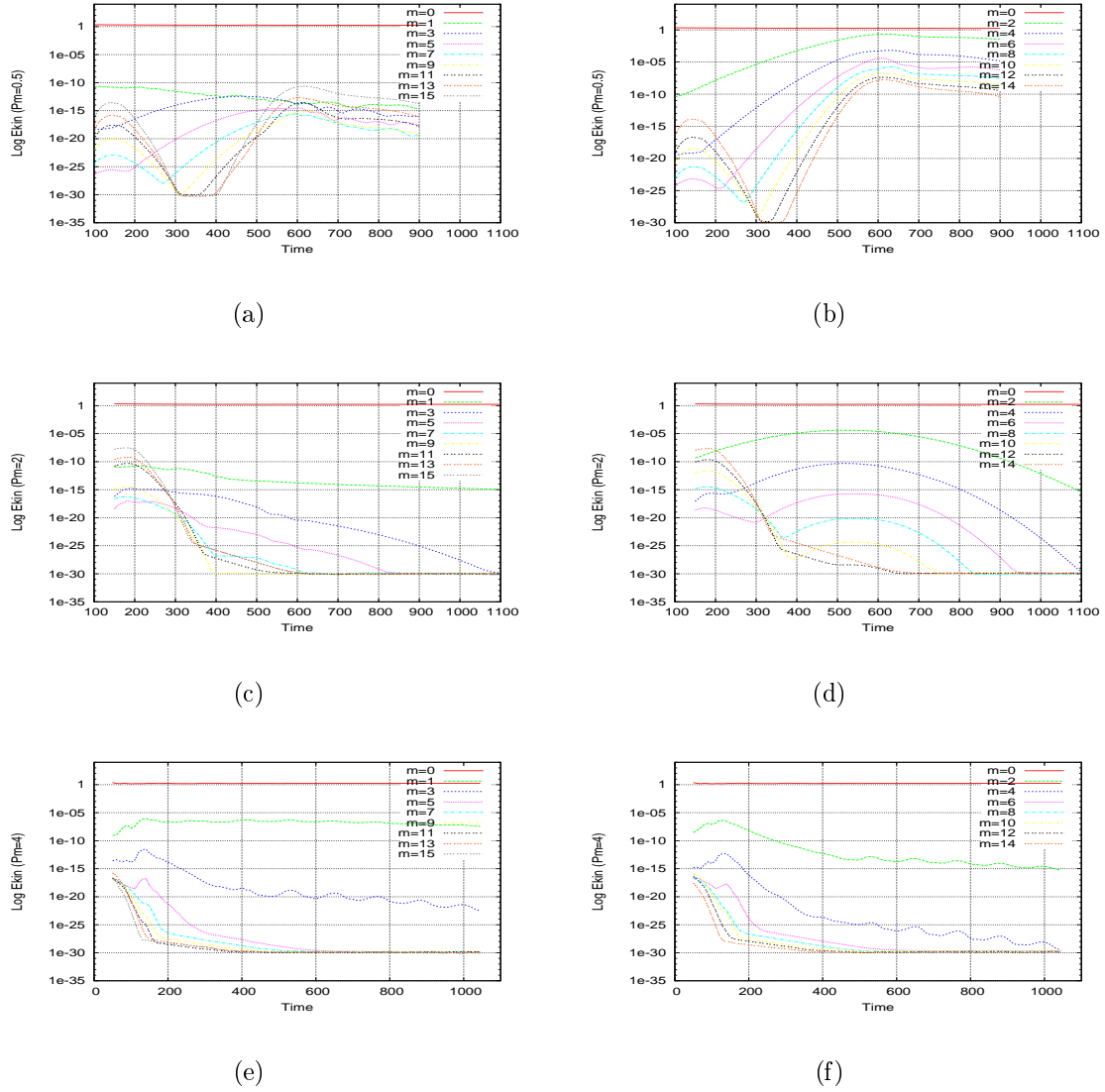


FIG. 5.31 – Comme pour la figure 5.30 mais pour l'énergie cinétique.

l'état de base axisymétrique : la force de Lorentz dans les équations de Navier-Stokes est du type $(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_0$ et le terme de couplage dans l'équation d'induction est du type $\nabla \times (\mathbf{U}_0 \times \mathbf{H}) + \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}_0)$, qui font donc intervenir les perturbations de façon linéaire au premier ordre. Les couplages entre modes sont différents de ceux intervenant dans l'effet dynamo.

Afin d'avoir un couplage entre modes plus important, ils nous faudrait faire des simulations à plus hauts nombres de Reynolds. Jusqu'à présent, ces simulations n'ont pas été envisagées car il nous faudrait augmenter la résolution de nos calculs. Les simulations non axisymétriques réalisées ont montré que la résolution dans la direction azimutale était suffisante (les modes de Fourier élevés restent d'amplitude faible). Cependant, si nous regardons les contours des différentes composantes du champ de vitesse perturbé au niveau du plan équatorial $z = 0$, on peut noter la présence de forts gradients radiaux sur la composante radiale de vitesse (voir 5.32 a) et sur la

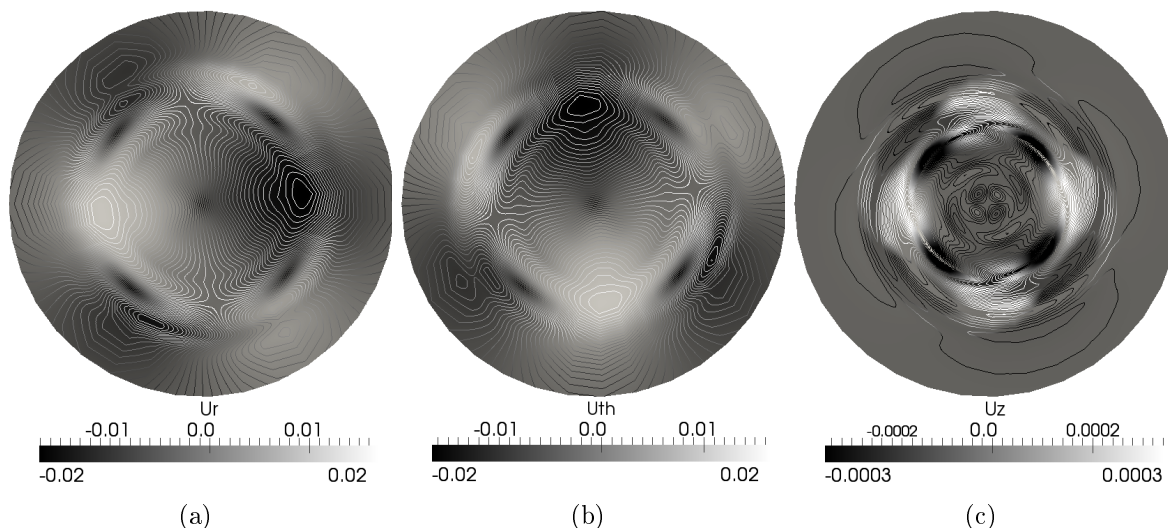


FIG. 5.32 – Contours des composantes de vitesse perturbée dans le plan équatorial en $z = 0$, pour le calcul ($Pm = 0.5$, $Rm = 400$, $Re = 800$, $Ha = 32$, $H_0 = 0.114$) au temps $t = 480$.

composante axiale (voir 5.32 c), dans certaines régions du disque. Dans le cas de nombres de Reynolds plus forts, ces gradients plus importants devraient être résolus. Pour cela, il nous faudrait soit utiliser un maillage plus fin soit régulariser ces gradients.

5.5 Conclusion et perspectives sur les simulations MHD d'un disque képlerien

Les disques sont des objets astrophysiques rencontrés dans une grande variété de situations dont les disques galactiques et les disques circumstellaires sont des exemples typiques visibles sans instrument (voie lactée et système solaire). La configuration de disque apparaît naturellement dans un système avec moment angulaire, autogravitant ou soumis à une force centrale, mais l'état dynamique d'un disque dépend de sa genèse et le profil radial des vitesses ne sera pas en général « képlerien ». Si on prend en compte le champ magnétique observé dans la plupart des disques, il semble encore plus difficile de trouver des propriétés structurales générales pour le champ de vitesse et le champ magnétique, la distribution de densité et température, le flux de masse et le flux de moment angulaire, qui sont les quantités d'intérêt majeur pour connaître l'évolution de ces objets. Nous avons choisi de concentrer cette étude numérique sur un seul thème : le couplage non linéaire du champ de vitesse et du champ magnétique qui pourrait conduire à un état statistiquement stationnaire, dans lequel l'énergie cinétique de la rotation alimenterait la turbulence MHD. On peut dire que, si la simulation numérique d'une telle situation est un objectif majeur, il est loin d'être atteint de façon incontestable.

Dans un but de simplification et afin de réduire le nombre de paramètres physiques

au minimum, nous rappelons les hypothèses adoptées :

(i) le fluide est considéré comme incompressible. Cela peut se justifier en invoquant des fluctuations de vitesse d'amplitude faible par rapport à la vitesse du son. Autrement dit, les ondes acoustiques ont des conséquences dynamiques négligeables. (ii) la densité est uniforme : on néglige les stratifications radiales et axiales en température et en densité. Cette hypothèse, qui n'est pas confortée par les observations, sera justifiée a posteriori si on peut vérifier par exemple que les effets dynamiques MHD se concentrent dans un domaine limité et non dans la totalité du disque. (iii) le fluide occupe un domaine cylindrique borné. Les disques réels sont confinés par la gravitation, qui n'est pas prise en compte dans ce modèle simplifié. (iv) on ajoute un forçage ad hoc en volume de la composante azimutale de la vitesse. En l'absence de ce forçage, la viscosité finie du fluide imposée par la résolution numérique finie, perturbe le champ de vitesse initial et tend à produire une rotation rigide. Comme on s'intéresse essentiellement aux effets MHD susceptibles de perturber un écoulement képlerien, le forçage choisi produit un profil de vitesse képlerien, qui est hydrodynamiquement stable. Le profil initial choisi pourrait évidemment vérifier une autre loi.

Un champ magnétique extérieur uniforme est appliqué parallèlement à l'axe. Cette configuration « académique » a l'avantage de faciliter les prédictions analytiques. On pourrait penser aussi appliquer un champ dipolaire central, qui modéliserait le champ engendré dans un objet central. Comme cette incitation à plus de réalisme demande la définition de paramètres supplémentaires arbitraires, nous n'avons pas suivi cette voie pour l'instant.

Les hypothèses ci-dessus peuvent être comparées à celles qui sont admises dans le cadre de l'approximation « shearing sheet ». L'écoulement est alors décomposé en un flot moyen cisailé fixé ne dépendant que de la variable radiale et les fluctuations cinétiques et magnétiques vérifie les équations non linéaires avec une périodicité axiale (non obligatoire mais souvent appliquée) et ou une périodicité radiale des fluctuations. Cette approximation est numériquement adéquate pour décrire l'instabilité magnéto-rotationnelle. Ce succès partiel ne devrait pas servir à la valider pour une exploitation systématique. Elle est en effet plus délicate à justifier dans le régime saturé, non linéaire, lorsque les structures qui se forment atteignent l'échelle de la boîte, ce qui décrédibilise les hypothèses de périodicité. La configuration de notre état initial est choisie pour produire l'instabilité MRI, qui aboutit à l'excitation des six composantes de vitesse et de champ magnétique. La fin de la phase linéaire se traduit par un pic des énergies fluctuantes, dont l'intensité impose une contrainte sur les nombres de Reynolds accessibles.

Lorsque les fluctuations de vitesse et de champ magnétique sont axisymétriques (cas $m = 0$), nous avons obtenu un état final stable pour des nombres de Reynolds « faibles » ($Rm < 700$). Dans cet état, le profil képlerien est fortement perturbé dans la zone de fort cisaillement $\delta V_\theta \approx 30\%$ et les fluctuations magnétiques exprimées en vitesse d'Alfvén ont une intensité proche de 0.15 alors que le champ magnétique appliqué est de 0.114. Lorsque le nombre de Reynolds est assez grand, on observe un comportement cyclique, qui se prête à une modélisation simple. Le résultat principal est que la durée du cycle est très nettement supérieure à la période de rotation et ne semble pas fortement liée au nombre de Reynolds.

Nous pouvons nous demander si les oscillations obtenues pour le mode $m = 0$ dans

le cadre du modèle numérique simplifié adopté sont observables dans des disques astrophysiques. On connaît par exemple des oscillations quasi-périodiques (QPO) de la luminosité X dans des étoiles binaires de faible masse, ou dans d'autres familles d'objets telles que les variables cataclysmiques. Ces oscillations non expliquées, de période longue par rapport à la période orbitale, pourraient témoigner de l'interaction entre un disque d'accrétion et une magnétosphère (pour une revue des propriétés de certaines QPO, voir par exemple l'article de Van der Klis [17]). La période de rotation de l'étoile centrale (étoile à neutrons) peut être proche de la milliseconde et il s'agit d'expliquer des fréquences d'oscillations entre 5 et 60 Hz, soit entre 200 et 15 périodes de l'objet central. Même si notre modèle montre des cycles analogues, occupant une vingtaine de périodes képlériennes, il est trop simplifié pour tenter un rapprochement quantitatif avec les QPO observées dans la nature. En particulier, il faudrait commencer par comparer les effets de notre force azimutale ad hoc et de l'accrétion pour le temps de restauration du profil képlérien et approfondir l'examen du rôle de la diffusion visqueuse.

En tout cas, les simulations numériques montrent que le couplage non-linéaire des modes axisymétriques du champ de vitesse et du champ magnétique peut avoir des effets observables dans un cadre indépendant de celui de l'effet dynamo. Ce dernier requiert des études non axisymétriques, que nous avons commencé à aborder, mais qui restent cependant jusqu'à présent peu abouties. Nous avons observé que, lorsque les modes azimutaux non axisymétriques sont excités initialement, on constate encore les effets importants du nombre de Reynolds. Si celui-ci est inférieur à 500, le suivi de l'énergie des 16 modes azimutaux montre le déclin des petites échelles par dissipation visqueuse. Il ne reste que le mode axisymétrique $m = 0$ qui retrouve le régime décrit précédemment. Si le nombre de Reynolds augmente, des fluctuations à plus petites échelles sont excitées et il faut diminuer la taille de la grille spatiale et accroître le nombre de modes azimutaux, ce qui augmente le temps de calcul. Le plus grand nombre de Reynolds atteint est $Re = 700$ avec un nombre de modes azimutaux $m = 16$. On constate qu'après une phase quasi-MRI, les fluctuations décroissent et que le système tend vers un état stationnaire pour lequel le mode axisymétrique oscille de la même façon que dans le cas axisymétrique. Il nous faut envisager des modifications d'ordre numérique afin de pouvoir faire des simulations résolues à plus haut Reynolds en un temps de calcul raisonnable. Pour cela nous pouvons soit envisager une parallélisation par domaines, soit l'implémentation d'un filtre LES. La deuxième stratégie a été retenue, la méthode implémentée est une méthode de stabilisation non linéaire de la vitesse, elle se traduit par l'adjonction dans le traitement des équations de Navier-Stokes d'une viscosité entropique semi explicite basée sur la norme du résidu calculé à chaque pas de temps [40].

Les simulations dans une boîte cisailée produisent des régimes quasi-turbulents, mais on peut s'interroger sur la légitimité de cette modélisation, d'autant plus que ces régimes dépendent sensiblement du rapport de forme de la boîte. En ce qui concerne les simulations globales, nous distinguerons deux catégories, une première montre tout comme dans nos simulations des régimes de saturation présentant des oscillations [45]. Une deuxième catégorie de simulations globales repose sur des disques minces possédant des zones d'absorption (zones également appelées zones fantômes où la viscosité cinématique et la diffusivité magnétique sont nulles). Ces simulations sont souvent compressibles, prennent en compte de la stratification (densité volumique variable suivant

la hauteur du disque) et montrent un état de saturation post-MRI turbulent accompagné de transport du moment angulaire vers les bords externes du disque [66],[25]. La majorité des simulations sont réalisées pour des nombres de Reynolds $Re \approx 1000$ mais à très haut nombre de Prandtl environ 8. Il semblerait que, pour des nombres de Prandtl inférieurs, la turbulence observée disparaisse dans les simulations en boîte cisillée.

Chapitre 6

Induction et effet dynamo dans des domaines hétérogènes

6.1 Introduction

Ce chapitre traite de la prise en compte de sauts de perméabilité magnétique dans la résolution de l'équation d'induction. L'aspect théorique ayant été abordé au chapitre 2, nous présentons ici une validation de notre approche sur un cas analytique ainsi qu'une modélisation d'une expérience dynamo basée sur un écoulement de von Kármán utilisant du sodium liquide et dénommée VKS2.

L'hypothèse la plus probable expliquant l'existence d'un champ magnétique sur Terre et sur d'autres planètes est l'existence d'un effet dynamo dans leurs noyaux liquides. Ce principe, tout comme la dynamo de bicyclette, consiste en la conversion d'énergie mécanique en énergie magnétique. La communauté géophysique croit en l'existence d'une dynamo fluide homogène auto-excitée au sein du noyau terrestre. Pour la première fois en octobre 2006, une telle dynamo a été réalisée en laboratoire par l'équipe VKS [63], regroupant des chercheurs de l'École Normale Supérieure de Paris et de Lyon et du Commissariat à l'Énergie Atomique de Saclay et de Cadarache. Cette expérience dont le schéma est représenté en figure 6.1 (a) consiste à générer un écoulement de von Kármán dans une cavité cylindrique, remplie de sodium liquide. Le sodium liquide est mis en mouvement par deux turbines, munies de pales, tournant en exacte contra-rotation. Chaque turbine agit comme une pompe centrifuge : le fluide tourne avec chaque turbine et est expulsé par effet centrifuge (cf. figure 6.1 b). Chaque turbine est munie de huit pales dont la géométrie a été optimisée pour avoir un rapport des vitesses toroïdale sur poloïdale optimum, favorable à la dynamo [61]. Le succès original et inédit de l'expérience a cependant soulevé plusieurs questions au sein de la communauté dynamo. En effet, le champ magnétique obtenu ne présente pas les caractéristiques du champ magnétique attendu. Les expérimentateurs mesurent une même composante azimutale du champ magnétique en différents points du plan équatorial (figure 6.1 b), ce qui suggère que le mode magnétique excité est un mode axisymétrique $m = 0$, alors qu'un mode $m = 1$ de champ magnétique avait été prédit par des simulations de dynamo cinématique (l'équation de l'induction est résolue avec un champ de vitesse axisymétrique moyen donné) [76, 48]. Des simulations récentes de dynamo cinématique ont montré qu'en prenant en compte, en plus de l'écoulement moyen, un effet magnétique causé par des structures tourbillonnaires localisées près des pales [33]

ou par une modélisation de l'effet α [51], le mode magnétique $m = 0$ peut être excité. Cependant, le succès de l'expérience est subordonné à l'utilisation de turbines ferromagnétiques en mouvement (matériaux à très forte perméabilité magnétique) dont le rôle n'est à ce jour pas complètement compris. La motivation de l'utilisation de matériaux ferromagnétiques dans l'expérience était d'écranter le mouvement du fluide derrière les turbines, écoulement qui est apparu comme étant défavorable pour la dynamo dans certaines simulations de dynamo cinématique [76, 48]. L'introduction de ce type de matériaux peut avoir des implications physiques importantes car, d'un point de vue mathématique, les conditions aux limites magnétiques sont modifiées.

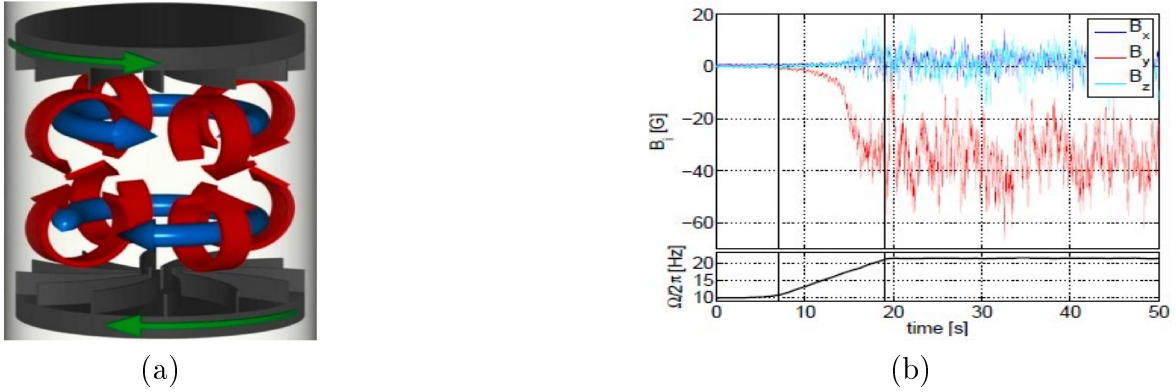


FIG. 6.1 – (a) Représentation schématique d'un écoulement de Von Kármán d'après [61]. (b) Mesure expérimentale des composantes de champ magnétique dans le plan équatorial au cours du temps d'après [63]. La fréquence des turbines contra-rotatives est augmenté au cours du temps, au delà de 20 Hz produit un champ magnétique

Afin de clarifier le rôle des turbines ferromagnétiques, nous avons modifié notre code numérique pour pouvoir prendre en compte dans nos simulations des sauts de perméabilité au sein des domaines conducteurs. Une méthode de pénalisation de type IPG (Interior Penalty Galerkin) déjà utilisée dans l'approximation des équations de Maxwell pour assurer la continuité entre le champ magnétique et le vide [38] a été généralisée (voir chapitre 3). On impose faiblement, sur les interfaces séparant des domaines de perméabilités différentes, la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique \mathbf{H} et de la composante normale de l'induction magnétique $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Cette méthode s'avère être stable et consistante comme l'ont montré les tests analytiques présentés au chapitre 3. Pour se rapprocher de la configuration de l'expérience VKS2, nous étudions également en détails un problème d'induction dans deux turbines ferromagnétiques statiques ou en mouvement de contra-rotation. Nous discutons de l'effet des singularités géométriques présentes dans l'expérience, comme l'existence de coins entrants et d'angle droit. Nous présentons ensuite des résultats de dynamo cinématique et de dynamo non linéaire pour une configuration plus réaliste.

6.2 Induction dans une géométrie cylindrique

Avant de proposer une modélisation réaliste de l'expérience dynamo VKS, nous avons voulu tester la robustesse de notre méthode. Pour cela, on a considéré un pro-

blème d'induction non plus dans une géométrie sphérique comme dans la validation présenté au chapitre 3 mais dans une géométrie cylindrique plus proche de celle de l'expérience. Il est connu que l'approximation avec des éléments finis non conformes que nous utilisons (voir chapitre 3, section §3.3) peut ne pas converger si le domaine conducteur n'est pas suffisamment régulier et s'il est non convexe (Guermond, Kanschat, et Lazarov, communication privée, 2009).

Numériquement, il est toujours possible de régulariser d'éventuels coins entrants, présents dans des dispositifs expérimentaux de géométrie cylindrique. Il nous paraît cependant instructif de voir comment le code SFEMaNS traite ces singularités géométriques. Dans cette optique, on a choisi une configuration comprenant deux disques coaxiaux séparés d'une distance $L = 1.8$. Cette configuration est proche de celle rencontrée dans l'expérience VKS. Nous avons cherché numériquement les solutions stationnaires obtenues lorsque les deux disques sont plongés dans un champ magnétique extérieur constant. Là encore, nous avons étudié deux cas : un premier cas dans lequel les deux disques sont directement entourés de vide et une deuxième configuration où les disques sont entourés d'un domaine conducteur de perméabilité magnétique $\mu = 1$, le tout étant entouré de vide. N'existant ni benchmark, ni solution analytique à ce problème, notre motivation est uniquement de vérifier que les deux approches que nous avons envisagées donnent les mêmes résultats. Dans cette section, les deux disques sont considérés comme étant statiques, le cas où les disques sont mis en rotation sera étudié plus loin.

6.2.1 Cas de deux disques coaxiaux présentant des bords arrondis

Reprenons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Nous voulons calculer les solutions stationnaires de deux disques ferromagnétiques conducteurs coaxiaux, d'axe de révolution Oz , placés dans un champ magnétique uniforme et transverse $\mathbf{H}_0 := H_0 \mathbf{e}_x = H_0(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$. Le rayon et la hauteur des disques sont respectivement 0.75 et 0.2. Les disques sont de conductivité électrique σ_0 et de perméabilité magnétique prise égale à $\mu_d = 200\mu_0$. Ils sont soit entourés d'une sphère de vide de rayon $R_v = 10$ de perméabilité magnétique μ_0 (cas 'HPhi'), soit entourés d'un cylindre conducteur de rayon $R_c = 1$, de hauteur $L_c = 2$ et de perméabilité μ_0 , le tout étant entouré d'une sphère de vide de rayon $R_v = 10$ (cas 'HHPhi') (voir figure 6.2). Au niveau de la frontière de la région de vide Γ_v , on impose une condition limite de Dirichlet indépendante du temps condition $\phi = H_0 x := H_0 r \cos \theta$.

Dans la configuration où le champ magnétique extérieur est transverse à l'axe de révolution des disques, la solution stationnaire est un mode $m = 1$ donné par :

$$\mathbf{H} = H_r(r, z) \cos \theta \mathbf{e}_r + H_\theta(r, z) \sin \theta \mathbf{e}_\theta + H_z(r, z) \cos \theta \mathbf{e}_z.$$

La solution numérique stationnaire avec $H_0 = 1$ est calculée en intégrant l'équation (3.3.15) au cours du temps avec $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0$, jusqu'à ce que le régime stationnaire soit atteint. La figure 6.3 montre la comparaison des profils de chaque composante du champ magnétique dans les deux cas 'HPhi' et 'HHPhi' le long d'une ligne prise sur le bord inférieur du disque. L'abscisse curviligne augmente de $s = 0$ à $s = 0.65 + 0.1\pi/2$. On

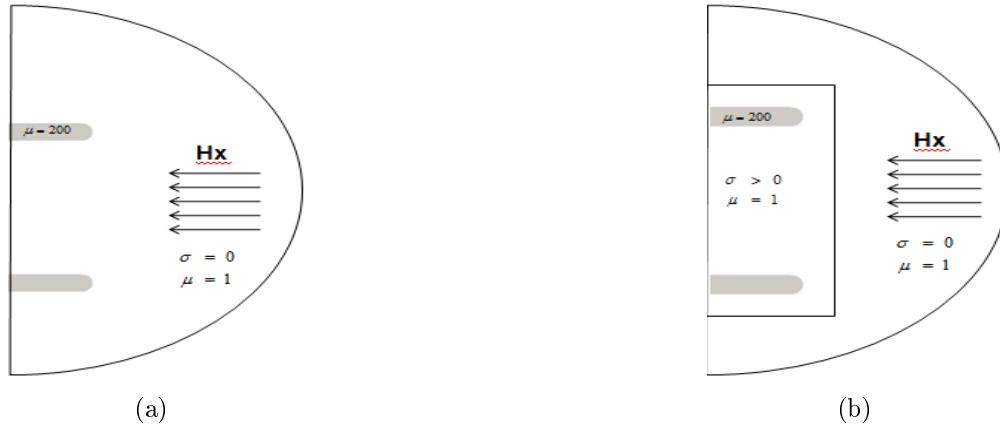


FIG. 6.2 – Schéma de l'induction dans des disques coaxiaux statiques dans le cas 'HPhi' (a) et dans le cas 'HHPHi' (b).

peut observer une différence inférieure à 0.3%. Les deux approches numériques 'HPhi' et 'HHPHi' donnent bien les mêmes solutions stationnaires.

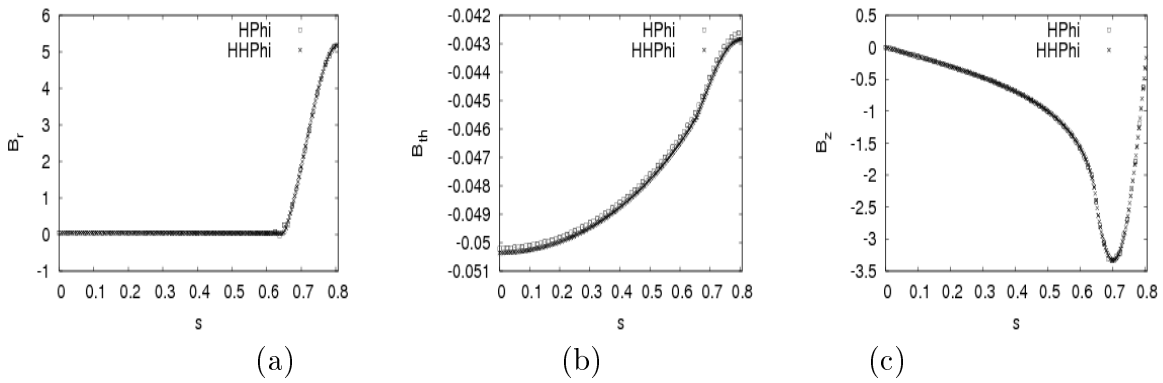


FIG. 6.3 – Solutions stationnaires dans la configuration de deux disques plongés dans un champ magnétique uniforme transverse où $\mu_d = 200\mu_0$ dans le plan méridien $\theta = 0$. Profils de l'induction magnétique en fonction de l'abscisse curviligne le long d'une ligne sur la partie inférieure du disque supérieur pour les cas 'HPhi' et 'HHPHi', où $\mu = \mu_0$ (dans le vide ou dans le matériau non-ferromagnétique) respectivement : (a) $H_r(s)$, (b) $H_\theta(s)$, (c) $H_z(s)$.

6.2.2 Cas de deux disques coaxiaux avec des arêtes arrondies ou droites

Dans cette section, on présente les résultats de simulation de la configuration où les deux disques ferromagnétiques avec $\mu_d = 200\mu_0$ sont entourés de vide. Ce cas est dénoté 'HPhi' comme dans la section précédente. Les disques ont des bords soit droits (cas sharp) soit arrondis (cas smooth). La figure 6.4 montre les lignes de champ magnétique ainsi que la composante radiale H_r du champ magnétique. Lorsque cette composante est normale au disque, sa valeur doit présenter un saut d'amplitude μ_d . Ceci est vérifié sur la figure 6.4 (a) sur le bord externe des disques arrondis et sur la figure 6.4 (b) sur

l'arête verticale des disques droits. Nous pouvons remarquer que les lignes de champ magnétique (a-b) sont très similaires : elles s'incurvent près des disques et arrivent pratiquement perpendiculairement à ces derniers. Dans la limite d'une perméabilité infinie, le champ magnétique tangential doit tendre vers 0, on retrouve les conditions aux limites magnétiques de pseudo-vide évoquées au chapitre 2, (section 2.1.1.4).

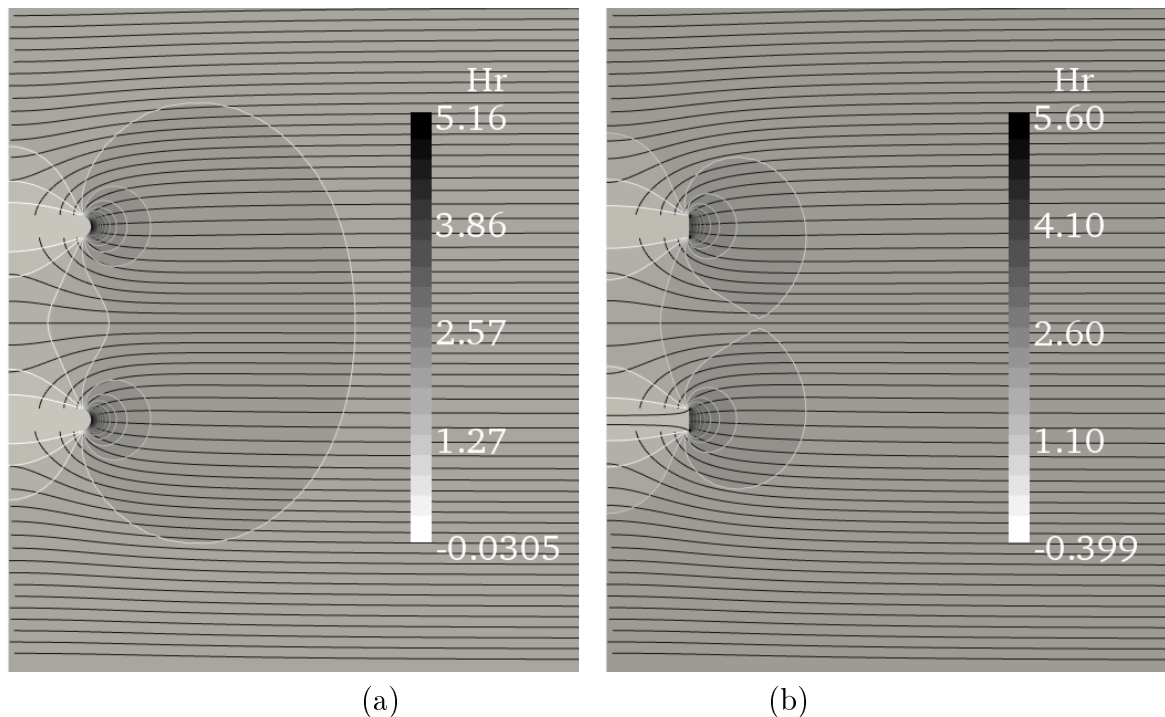


FIG. 6.4 – Solutions stationnaires pour des disques ferromagnétiques ($\mu_d = 200\mu_0$) entourés de vide : lignes de champ magnétique dans le plan méridien $\theta = 0$ et composante H_r pour des disques arrondis (a), pour des disques droits (b).

Le cas 'HHPHi' avec des disques droits n'a pas été traité car il est mathématiquement prouvé que l'algorithme que nous utilisons est incapable de converger vers des solutions stationnaires dans de telles géométries.

En conclusion, nous pouvons dire que l'algorithme que nous avons développé est capable de prendre en compte des sauts de perméabilité de l'ordre de 200. Dans le cas où les bords des disques sont arrondis, les deux approches 'HPhi' et 'HHPHi' donnent des résultats très similaires (moins de 0.3% de différence). Dans la suite, pour les simulations de cas physiques, nous utilisons des disques de bords arrondis ainsi qu'un conteneur cylindrique ne présentant pas de coins entrants.

6.2.3 Induction dans des disques ferromagnétiques en contra-rotation

Afin de mesurer l'impact des disques en fer doux sur la répartition spatiale du champ magnétique, on considère deux disques en contra-rotation, entourés d'un domaine cylindrique conducteur de rayon $R_c = 1$, le tout étant placé dans une sphère de vide de rayon $R_v = 10$ et de perméabilité magnétique μ_0 . Le bord des disques est

arrondi, leur rayon et leur hauteur sont respectivement 0.75 et 0.2, leur conductivité électrique et leur perméabilité magnétique respectives sont $\sigma_0 = 1$ et $\mu = 200$. Les disques sont en exacte contra-rotation telle que $\Omega_{bot} = -\Omega_{top}$. Le conteneur extérieur ne présente pas de coin entrant et sa perméabilité et sa conductivité sont respectivement $\mu_0 = 1$ et $\sigma_0 = 1$. Le tout est soumis à un champ magnétique transverse constant $\mathbf{H}_0 := H_0 \mathbf{e}_x = H_0(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$. Nous avons étudié les solutions stationnaires pour les deux cas suivants : (a) la perméabilité magnétique des disques est $\mu_d = 200\mu_0$ et $\Omega_{bot} = -\Omega_{top} = +1$; (b) la perméabilité magnétique des disques est $\mu_d = \mu_0$ et $\Omega_{bot} = -\Omega_{top} = +200$. Dans ces conditions, nous pouvons définir le même nombre de Reynolds effectif pour chacun des disques $R_m^{disks} = \mu_d \sigma_0 \Omega_{bot} R^2 = 200\mu_0 \sigma_0$ dans les deux cas.

On recherche la solution stationnaire en intégrant l'équation (3.3.15) au cours du temps, avec $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0$, jusqu'à ce que le régime stationnaire soit atteint. Au niveau du bord du domaine de calcul, sur la frontière du vide, Γ_v , on impose une condition de Dirichlet indépendante du temps $\phi = H_0 x := H_0 r \cos \theta$. Le maillage utilisé ne comporte que des éléments de Lagrange de type \mathbb{P}_2 .

Les deux états stationnaires sont très différents comme on peut le voir sur la figure 6.5. Lorsque les disques sont non ferromagnétiques, les lignes de champ en (e) et (g) sont déformées horizontalement de façon à ce que le champ magnétique soit proche de zéro dans chaque disque pour $R_m^{disks} = 200$. Le courant visualisé en (a) est tel qu'il crée un champ induit qui contre le champ imposé. Le champ magnétique ne pénètre sur une épaisseur de peau en $1/\sqrt{Rm}$. Lorsque les disques sont ferromagnétiques, les lignes de champ en (f) et (h) sont déformées dans les disques mais également à l'extérieur de façon à se reconnecter pratiquement perpendiculairement au disque. La répartition du courant en (b) montre une distribution en boucles très compliquées. Les énergies ont des isovaleurs orientées à 90° l'une de l'autre entre le cas (c) et le cas (d). Ces solutions très différentes montrent que ce n'est pas le nombre de Reynolds effectif qui importe.

6.3 Calcul de dynamos en relation avec VKS2

6.3.1 Application à l'expérience VKS2

Comme nous l'avons évoqué en introduction de ce chapitre, le seul dispositif expérimental ayant vu l'instabilité dynamo se développer dans un écoulement de métal liquide non contraint est l'expérience de von Kármán Sodium 2 (VKS2) [28, 79, 63].

La figure 6.6 représente schématiquement le dispositif de l'expérience VKS (en haut), ainsi que la géométrie simplifiée utilisée dans nos simulations numériques (en bas). On peut y voir le type d'écoulement produit entre deux turbines tournant en contra-rotation dans un conteneur cylindrique en inox, cet écoulement sera appelé 'bulk flow'. Les turbines sont des disques minces munis de huit pales courbes qui agissent comme des pompes centrifuges : le fluide est aspiré par chaque turbine et expulsé radialement, tout en étant entraîné par les pales en rotation, ce qui donne naissance à un écoulement hélicoïdal. Les écoulements produits par la rotation de chacune des turbines circulent le long des parois du conteneur pour se rencontrer au niveau du plan équatorial, donnant naissance à une zone de fort cisaillement azimuthal. Un système de refroidissement en

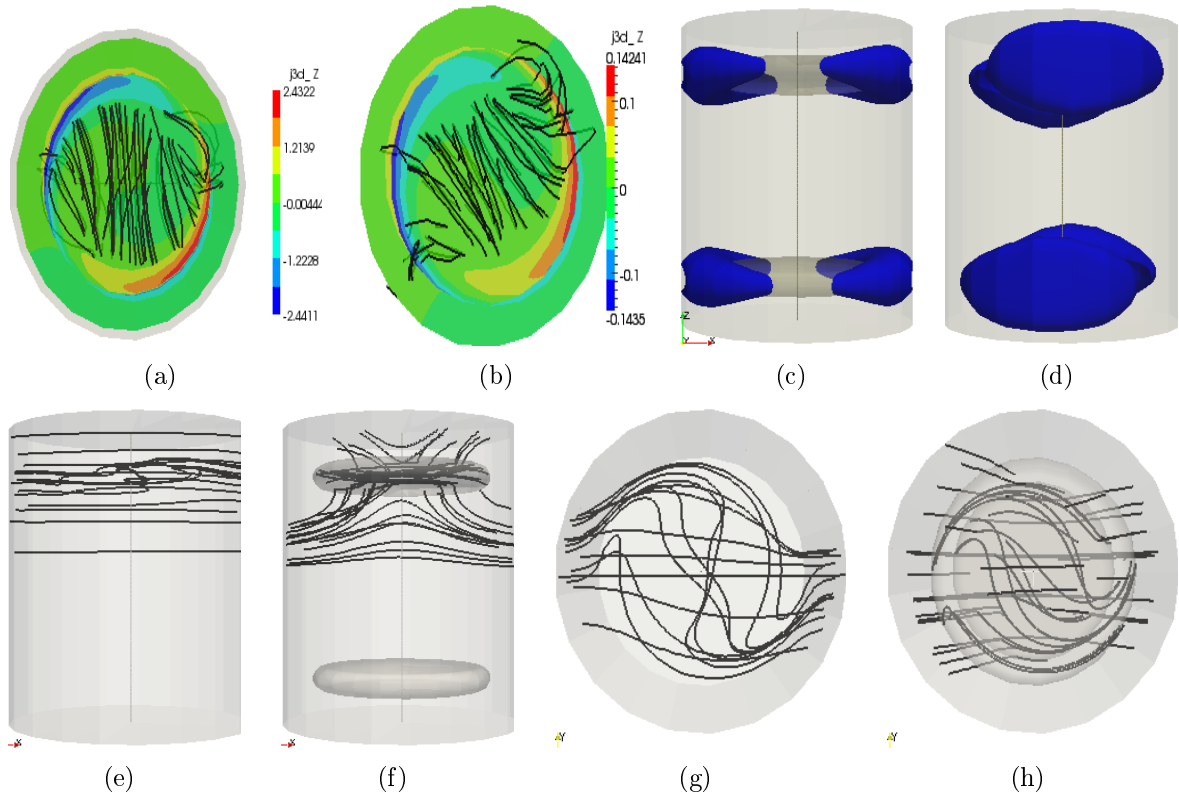


FIG. 6.5 – Solutions stationnaires de deux disques en contra-rotation dans un cylindre conducteur : (a-c-e-g) $\mu_d = \mu_0$ et $\Omega_{bot} = -\Omega_{top} = +200$; (b-d-f-h) $\mu_d = 200\mu_0$ et $\Omega_{bot} = -\Omega_{top} = +1$; (a-b) lignes de courant électrique $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$ et composante axiale j_z dans le plan $z = 0.875$ (demi-hauteur du disque supérieur) ; (c-d) isovaleur de 10% de l'énergie magnétique ; lignes de champ magnétique proches du disque supérieur vues de côté (e-f) et vues de dessus (g-h).

cuire ainsi qu'une couche de sodium au repos entourent le conteneur. On peut également noter que, compte tenu de la géométrie de l'expérience, on a une recirculation à l'arrière des turbines due à l'entraînement visqueux du fluide par le dos des disques, cet écoulement sera appelé 'lid flow'.

En 2006, les turbines anciennement en inox sont remplacées par des turbines en fer doux. Au cours d'une campagne de mesure où les disques sont en contra-rotation, les expérimentateurs mesurent pour la première fois un champ magnétique généré par effet dynamo, sans pour autant avoir augmenté la puissance mécanique injectée dans l'écoulement via les turbines. Le champ mesuré est caractérisé comme un dipôle axial axisymétrique en moyenne, présentant une forte composante azimuthale dans le plan équatorial [63, 62]. Ce résultat est en contradiction avec les géométries du champ magnétique prévues par les différentes simulations de dynamo cinématique basées sur un écoulement axisymétrique de von Kármán moyenné dans le temps [57, 70, 76, 48]. Dans ces simulations, une dynamo stationnaire est excitée par un écoulement axisymétrique, ce qui implique que le champ magnétique généré est obligatoirement non axisymétrique. Jusqu'à présent, l'observation de ce mode magnétique $m = 0$ dans l'expérience demeure incomprise. D'après le théorème de Cowling [16], il y a forcément un mécanisme qui brise l'axisymétrie de l'écoulement.

Un scénario possible est basé sur le fait que l'écoulement étant très turbulent (à

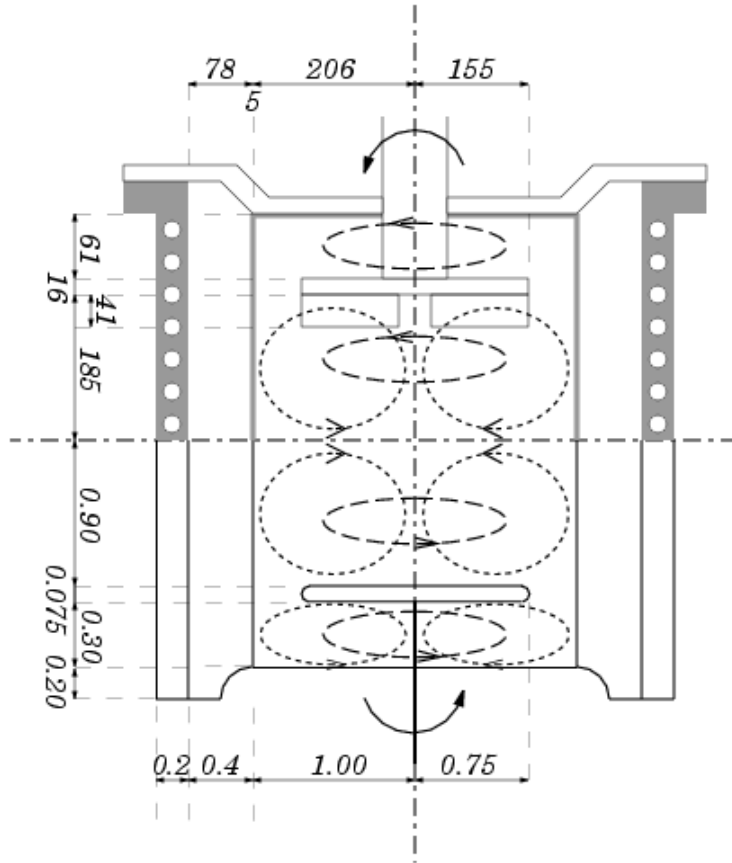


FIG. 6.6 – Schéma de l'expérience VKS et de l'écoulement moyen : (en haut) dimensions et détails techniques de l'expérience. On y voit le conteneur en cuivre, une fine enveloppe de cuivre séparant l'écoulement d'une couche de sodium liquide au repos, les turbines et les bras les entraînant (remerciement à l'équipe VKS). (En bas) schéma simplifié de la géométrie utilisée dans nos simulations numériques, les dimensions apparaissent sans unité. Le disque a un rayon de 0.75 et une hauteur de 0.075, ses coins sont arrondis. Les sauts de conductivité électrique entre les parois du conteneur en cuivre et le sodium au repos sont prises en compte, tout comme les sauts de perméabilités magnétiques entre les disques ferromagnétiques et le sodium liquide.

$Re = 10^6$), il pourrait favoriser la création de champ magnétique poloidal via de l'effet α (voir chapitre 2, section 2.2.1). Dans l'expérience, une source d'effet α peut provenir de l'écoulement très hélicoïdal et très turbulent près des pales [51, 68]. Un autre scénario basé sur les interactions des modes non-axisymétriques du champ de vitesse créés par non-linéarité sur l'induction est proposé dans [34].

Ici nous ne tentons pas d'expliquer la génération de ce champ axisymétrique, nous ne présentons que des résultats concernant les effets liés à la présence des disques ferromagnétiques. Nous montrons en particulier l'impact des propriétés ferromagnétiques des disques sur le seuil du mode $m = 1$ observé dans les simulations cinématiques. L'étude non linéaire est ensuite abordée.

6.3.2 Approche numérique

La géométrie de nos simulations est représentée sur la partie inférieure du schéma de la figure 6.6. Dans les calculs, nous prenons des conductivités électriques et des perméabilités magnétiques en accord avec celles de l'expérience. Les turbines sont modélisées par des disques de faible hauteur, le domaine conducteur est subdivisé en deux régions : une région fluide Ω_{cf} (comprenant le 'bulk flow' et le 'lid flow') et une région solide Ω_{cs} (comprenant les disques, la couche de sodium au repos et la paroi en cuivre) :

$$\overline{\Omega_c} = \overline{\Omega_{cs}} \cup \overline{\Omega_{cf}}, \quad \Omega_{cs} \cap \Omega_{cf} = \emptyset. \quad (6.3.1)$$

La région fluide pour $r \leq R_0$ a la conductivité du sodium liquide σ_0 , tout comme la couche de sodium au repos en $R_0 \leq r \leq R_1$ ($\sigma_1 = \sigma_0$), la conductivité de la paroi de cuivre est de conductivité plus élevée $\sigma_2 = 4.5\sigma_0$. La perméabilité magnétique est prise égale à celle du vide μ_0 , pour tous les éléments sauf les disques. Pour des disques en inox, on choisit une conductivité électrique $\sigma_i = 0.14\sigma_0$ et une perméabilité magnétique $\mu_i = \mu_0$. Pour des disques en fer doux, on choisit une conductivité électrique $\sigma_i = \sigma_0$ et une perméabilité magnétique $\mu_i = 200\mu_0$. Les dimensions de la géométrie utilisée sont reportées sur la figure 6.6. Le rayon des disques est de $R_i = 0.75R_0$, le rayon interne du conteneur est $R_1 = 1.4R_0$, son rayon externe est $R_2 = 1.6R_0$, la hauteur du 'bulk flow' est $H_0 = 1.8R_0$, celle des disques est $H_i = 0.075R_0$, la hauteur du 'lid flow' est $H_l = 0.3R_0$, et enfin la hauteur totale du conteneur vaut $H_2 = 2.95R_0$.

6.3.3 Modélisation proposée

Nous avons considéré deux problèmes de dynamo : un premier problème cinématique où la solution est calculée en résolvant (3.3.15) au cours du temps, avec le champ de vitesse $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ donné (champ de vitesse issu de mesure expérimentale dans un dispositif en eau) ; un deuxième cas de dynamo non linéaire pour lequel nous traitons un problème entièrement non linéaire dans lequel les équations (3.3.11) et (3.3.15) sont intégrées au cours du temps.

6.3.3.1 Écoulement axisymétrique et dynamo cinématique

Le champ de vitesse axisymétrique \mathbf{U}^{kin} est défini dans les différentes parties fluides conductrices de notre domaine de calcul. Pour le 'bulk flow', nous avons utilisé un champ de vitesse axisymétrique \mathbf{U}_0 issu de mesures moyennées au cours du temps dans une expérience en eau [70]. Dans nos simulations, ce champ est interpolé sur les nœuds du maillage éléments finis que nous utilisons et est normalisé par la vitesse euclidienne maximale. Cet écoulement est imposé pour les cas présentés dans le tableau 6.1. Au niveau des disques pour $0 \leq r \leq 0.75R_0$ et $0.9R_0 \leq |z| \leq 0.975R_0$, on impose la valeur de la vitesse expérimentale relue en $z = \pm 0.9R_0$. Le 'lid' flow est modélisé de deux façons : soit par un premier écoulement noté U_θ^{lin} qui correspond à une rotation dont la vitesse décroît linéairement entre la position du disque en $z = \pm 0.95R_0$ et celle de la paroi en $z = \pm 1.275R_0$; soit par un deuxième écoulement composé de U_θ^{lin} auquel on superpose une recirculation poloïdale analytique \mathbf{U}^{pol} [58]. Nous utilisons $\mathcal{L} = R_0$ comme longueur caractéristique et $\mathcal{U} = \max|\mathbf{U}_0| = \mathbf{U}_{\max}$ comme unité de vitesse pour

définir le paramètre sans dimension R_m :

$$R_m = \mu_0 \sigma_0 U_{max} R_0. \quad (6.3.2)$$

D'après le théoreme de Cowling [16], seuls les modes $m \neq 0$ du champ magnétique peuvent être excités à partir d'un champ de vitesse axisymétrique \mathbf{U}^{kin} . De plus, le terme $\nabla \times (\mathbf{U}^{kin} \times \mathbf{H}^c)$ ne peut pas transférer d'énergie entre les modes azimutaux de \mathbf{H}^c , i.e.les modes azimutaux sont découplés. De nombreuses simulations ont montré que le mode $m = 1$ est le plus instable [70, 58, 76, 48]. Nous avons donc étudié seulement le seuil de ce mode de Fourier. L'énergie magnétique du mode $m = 1$, $\frac{1}{2} \int_{\Omega_{2D}} \|\mathbf{H}^c(m = 1)\|^2 d\mathbf{x}$, est enregistrée au cours du temps pour différents $R_m \in [25, 100]$. Le taux de croissance du champ magnétique (i.e. la partie réelle de la valeur propre) pour les différentes simulations est reporté en fonction de R_m . Lorsqu'il est nul, cela définit le nombre de Reynolds critique R_{mc} (cf. tableau 6.1). Le nombre de Reynolds critique

cas	CL sur les disques	mouvement des disques	lid flow	R_{mc}
1	V	no disk	no lid	45
2	FSI $_{\infty}$	no disk	no lid	40
3	S	rigid rotation	U_{θ}^{lin}	85
4	S	rigid rotation	$U_{\theta}^{lin}, 0.1 \times \mathbf{U}^{pol}$	72
5	FSI	rigid rotation	U_{θ}^{lin}	62
6	FSI	rigid rotation	$U_{\theta}^{lin}, 0.1 \times \mathbf{U}^{pol}$	61

TAB. 6.1 – Caractéristiques des simulations cinématiques : V pour la condition aux limites de vide, S pour des disques en inox ou 'stainless steel', FSI pour des disques de 'ferromagnetic soft iron' avec $\mu_i = 200\mu_0$, FSI $_{\infty}$ pour des conditions aux limites magnétiques de perméabilité infinie $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ à $z = \pm 0.9$; 'rigid rotation' est la rotation solide des disques de vitesse angulaire égale à 1; U_{θ}^{lin} représente l'écoulement azimutal du 'lid flow' et \mathbf{U}^{pol} l'écoulement poloïdal du 'lid flow'; R_{mc} est le nombre de Reynolds critique.

R_{mc} dépend fortement de la structure de l'écoulement ainsi que des conditions aux limites magnétiques. Une faible diminution de ce paramètre peut avoir un grand impact d'un point de vue expérimental car la puissance est proportionnelle à $\mathcal{O}(R_m^3)$. C'est pourquoi de nombreuses études d'optimisation ont été réalisées [70]. Ces études, basées sur l'analyse d'écoulements moyennés en temps dans un dispositif expérimental en eau, ont permis d'optimiser la forme des turbines : la courbure des pales, leur nombre, leur hauteur, etc. Des simulations cinématiques ont également montré que l'ajout d'une couche de sodium liquide au repos diminue R_{mc} . Cependant elles ont aussi montré que la présence d'écoulement à l'arrière des pales l'augmente fortement [76, 49, 48]. Enfin, ces études cinématiques ont montré que l'utilisation de conditions aux limites de perméabilité infinie autour du fluide fait baisser R_{mc} [51, 35, 31].

Nos simulations confirment que la présence d'un écoulement à l'arrière des pales augmente R_{mc} (quand $\mu_i = \mu_0$) de 45 à 85, lorsque cet écoulement est purement azimutal. Cet effet a été observé numériquement pour la première fois dans [76]. L'ajout d'un écoulement poloïdal à l'arrière des turbines avec 10% de l'intensité de la recirculation (cas 4) diminue le seuil. Lorsque $\mu_i = 200\mu_0$, on peut remarquer que le seuil est $R_{mc} = 61 \pm 1$ quelle que soit la nature de l'écoulement à l'arrière des pales. La comparaison des seuils pour les cas 3,4 et 5,6 nous permet de déduire que les disques

ferromagnétiques ont pour effet d'écranter l'effet de l'écoulement à l'arrière des turbines.

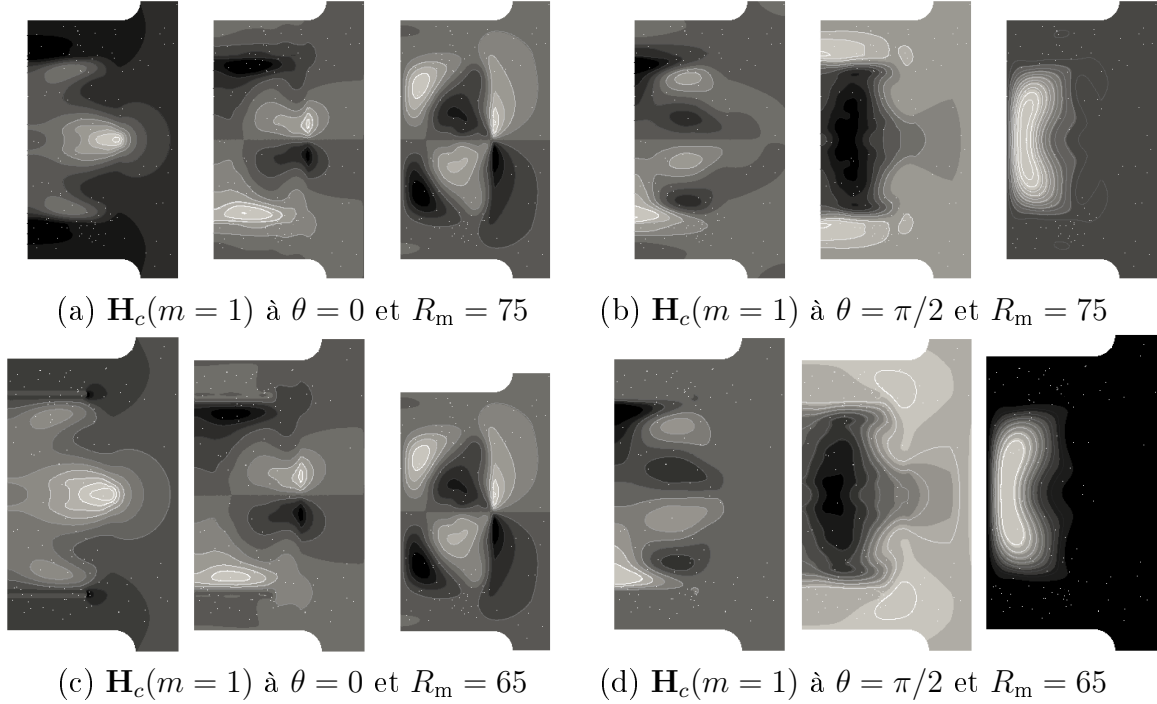


FIG. 6.7 – Dynamo cinématique obtenue en imposant le champ de vitesse \mathbf{U}^{kin} pour les cas 4 et 6 (voir tableau 6.1). (a-b) Champ magnétique $m = 1$, généré par effet dynamo dans deux plans azimutaux pour $R_m = 75 > R_{mc}$ (cas 4); (c-d) champ magnétique $m = 1$, généré par effet dynamo dans deux plans azimutaux pour $R_m = 65 > R_{mc} = 61$ (case 6).

6.3.3.2 Simulation non linéaire de l'expérience

Dans cette section, nous nous intéressons au cas d'une dynamo non linéaire utilisant la même géométrie que le cas cinématique présenté précédemment. L'approche non linéaire de notre code a été validée sur un cas de dynamo Taylor-Couette [38]. Les turbines sont modélisées par un disque mince et par un terme forçage volumique qui met le fluide en mouvement dans les zones où les pales se trouvent (entre $0.7 \leq |z| \leq 0.9$). Contrairement au cas cinématique vu à la section 6.3.3.1, les disques situés en ($0 \leq r \leq 0.75$ et $0.9 \leq |z| \leq 0.975$) sont en rotation solide avec un coefficient d'efficacité de $1/0.6$, afin de prendre en compte la perte entre la puissance appliquée aux turbines et celle transmise au fluide [70].

Le terme de forçage est choisi à divergence nulle et s'écrit :

$$\mathbf{f} = f_\theta(r, z)\mathbf{e}_\theta + \nabla \times (F(r, z)\mathbf{e}_\theta) \quad (6.3.3)$$

La composante azimutale est définie par $f_\theta(r, z) = -A_\theta r^2 \sin(\pi r)$ pour $z > 0$ [11]. F a pour rôle de créer deux rouleaux de recirculation dans la section méridienne et, pour

$z > 0$, est donnée par :

$$f_r(r, z) = -A_r r (1 - r) (ar + b) \left(3cz^2 + 2dz - cz - \frac{1}{2}dh \right) \quad (6.3.4)$$

$$f_z(r, z) = A_z z \left(z - \frac{1}{2}h \right) (cz + d) (-4ar^2 + 3(a - b)r + 2b) \quad (6.3.5)$$

Pour $z < 0$, f_θ et f_z changent de signe, pas f_r . Les constantes A_r , A_θ et A_z sont choisies de façon à engendrer des composantes de vitesse v_r , v_θ et v_z en accord avec l'écoulement de von Kármán \mathbf{U}_0 observé dans les expériences en eau.

Une condition de Neumann est imposée pour le champ de vitesse en $|z| = \pm 0.9$. Nous avons réalisé deux types de simulations : une série à $Re \simeq 112$ pour lequel le champ de vitesse axisymétrique obtenu est stable et stationnaire (voir figure 6.8 a) et une deuxième série à $Re \simeq 312$ pour lequel le champ de vitesse résultant est non axisymétrique et présente des fluctuations en temps de période $T(Re \simeq 312) \approx 17$ (voir figure 6.8 b). Les simulations sont alors réalisées avec 16 modes de Fourier azimutaux, $m = 0, \dots, 15$. Les seuils de dynamo obtenus sont reportés dans le tableau 6.2.

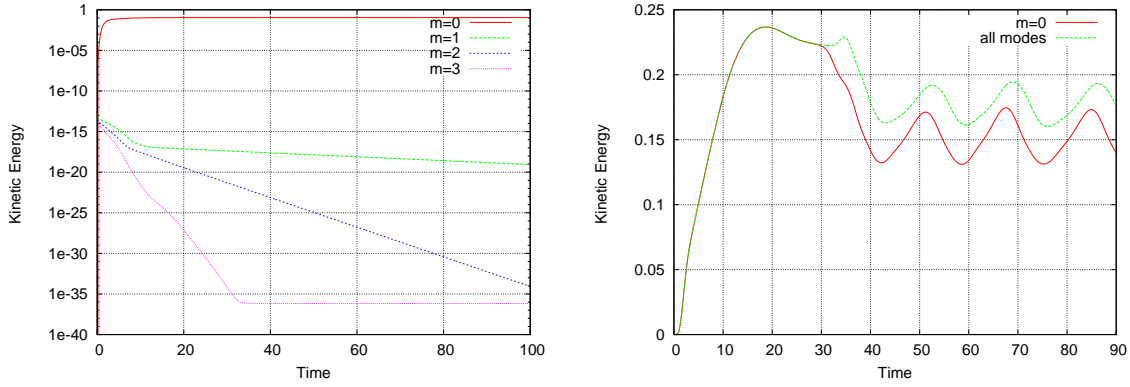


FIG. 6.8 – (a) Energie cinétique en échelle log au cours du temps dans le cas $Re = 112$, pour les 4 premiers modes de Fourier azimutaux. (b) Energie cinétique du mode axisymétrique (en rouge) et de tous les modes (en vert) au cours du temps dans le cas $Re = 312$.

cas	CL sur disques	Re	R_{mc}
a	S	112	111
b	S	312	125
c	FSI	112	86
d	FSI	312	87

TAB. 6.2 – Caractéristiques des simulations non-linéaires : S désigne les disques en inox 'stainless steel', FSI désigne l'utilisation de disques 'ferromagnetic soft iron' de perméabilité $\mu_i = 200$; Re est le nombre de Reynolds cinétique ; R_{mc} est le nombre de Reynolds magnétique critique pour le mode $m = 1$ quand $Re = 112$ et pour l'énergie magnétique totale quand $Re = 312$.

La figure 6.9 compare l'écoulement stable axisymétrique obtenu avec le forçage à $Re = 112$ au champ de vitesse mesuré dans le modèle en eau. Nous pouvons constater qu'il y a de grandes différences entre les deux écoulements, ce qui nous interdit

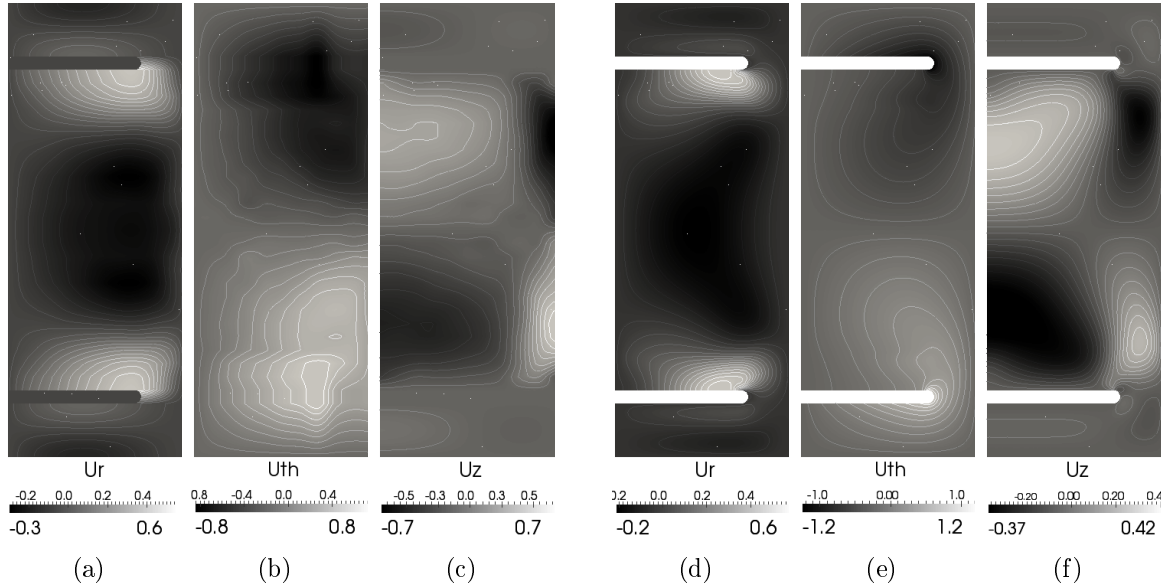


FIG. 6.9 – Comparaison du champ de vitesse cinématique et du champ de vitesse obtenu pour $Re = 112$. (a-c) Visualisation des contours des composantes U_r , U_θ , U_z du mode $m = 0$ de vitesse utilisé dans les simulations de dynamo cinématique. (d-f) Visualisation des contours des composantes U_r , U_θ , U_z du mode $m = 0$ de vitesse obtenue par le forçage présenté précédemment pour $Re = 112$, $A_r = 1$, $A_\theta = 1$, $A_z = 1.7$.

de comparer les seuils obtenus dans le cas non linéaire à ceux calculés précédemment dans le cas cinématique. En effet, nous trouvons un $R_{mc}(m = 1)$ de l'ordre de 111 (voir tableau 6.2) alors que, dans le cas cinématique, nous avons 82. Pour $Re = 312$, lorsqu'on utilise des disques en inox, le seuil déduit par la variation de l'énergie magnétique est augmenté d'environ 10%. Ceci est à contraster avec le fait que le seuil reste le même lorsque les disques sont ferromagnétiques alors que le nombre Reynolds Re des simulations est augmenté. Ici aussi, le rôle des disques ferromagnétiques est d'écranter l'écoulement à l'arrière des pales comme dans le cas cinématique.

La figure 6.12 représente une visualisation tridimensionnelle d'une isosurface du champ magnétique généré par effet dynamo dans le cas d présenté précédemment, ainsi qu'un isosurface du champ de vitesse correspondant. L'isosurface d'énergie magnétique vaut 10^{-4} soit 50 % de l'énergie magnétique totale, cette valeur est faible du fait que nous sommes près du seuil de l'instabilité dynamo.

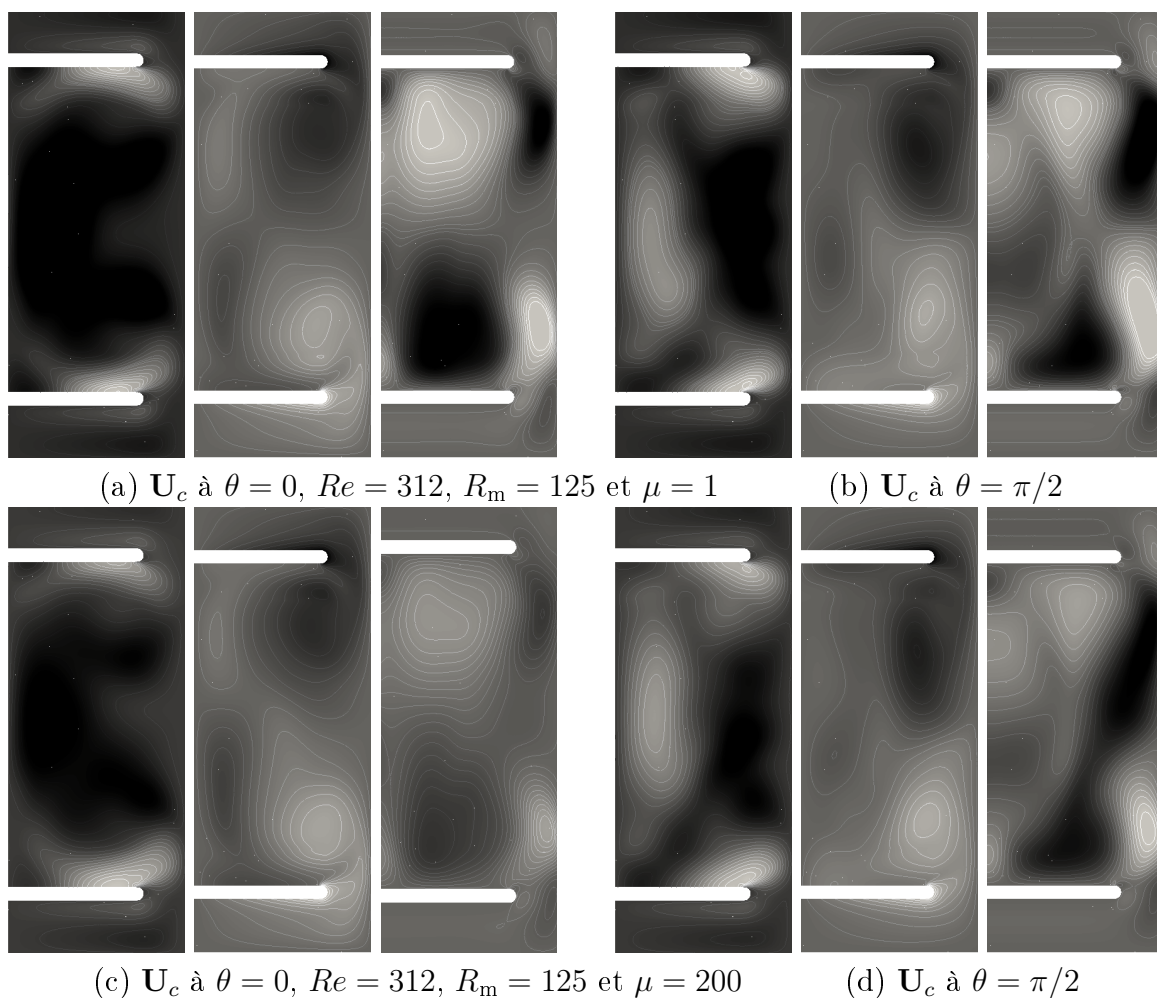


FIG. 6.10 – Dynamo non-linéaire. (a-b) Visualisation des contours des composantes U_r , U_θ et U_z de vitesse dans deux plans azimutaux pour $R_m = 125 \approx R_{mc}$ (cas b); (c-d) idem pour $R_m = 125 > R_{mc}$ (cas d).

6.4 Conclusion et perspectives

L'intérêt de la modélisation que nous proposons est double. Dans un premier temps, elle nous a permis de clarifier le rôle des disques ferromagnétiques. Nous avons pu voir que, dans les cas d'études cinématiques et non linéaires, les disques ferromagnétiques découplent l'écoulement principal de l'écoulement à l'arrière des pales. Cette propriété semble très importante dans l'expérience car l'observation de l'effet dynamo coïncide avec l'utilisation de turbines en fer doux sans pour autant augmenter la puissance injectée dans le fluide. L'apparition d'un mode axisymétrique pour le champ magnétique reste à ce jour mal comprise. Nous pouvons tout de même imaginer que, compte tenu du nombre de Reynolds cinétique de l'expérience (environ 10^6), l'écoulement présente une large gamme d'échelles spatiales et temporelles susceptibles d'exciter un mode $m = 0$ pour le champ magnétique. Pour clarifier ce dernier point, il nous faudrait réaliser des simulations non linéaires à hauts nombres de Reynolds cinétique afin d'avoir un champ de vitesse beaucoup plus fluctuant. Pour cela, nous avons envisagé l'implémentation d'un modèle de sous-maille ou LES (Large Eddy simulation) dans le traitement

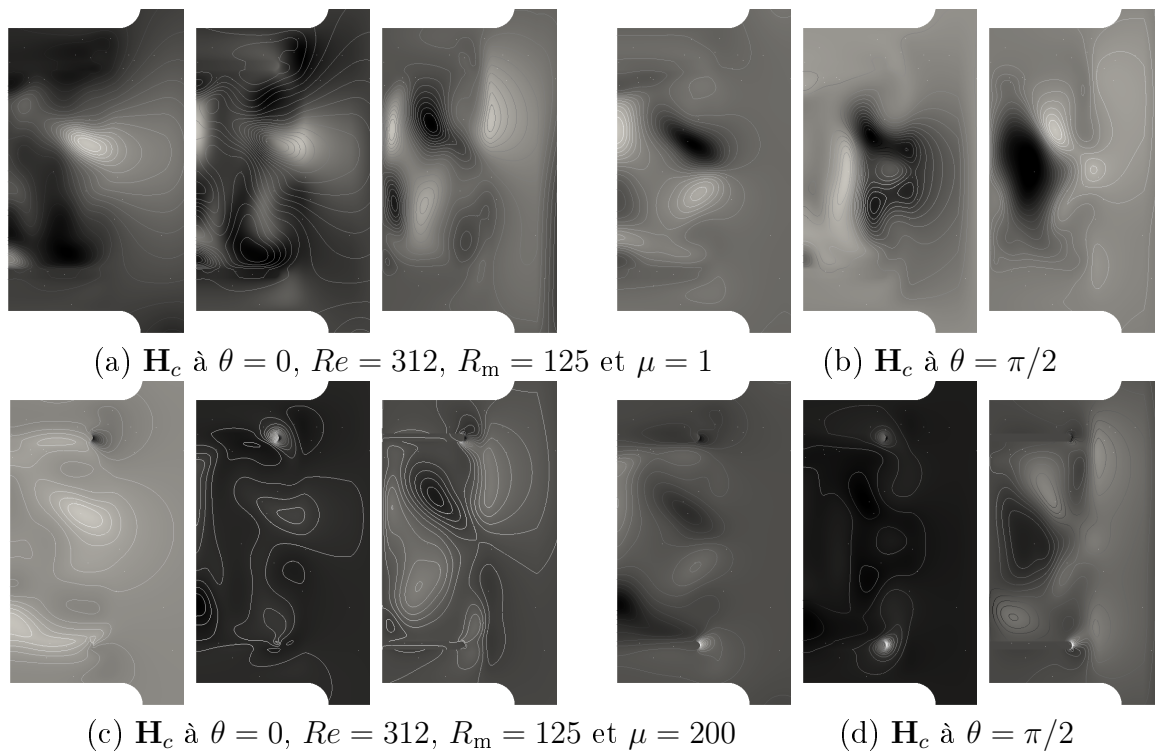


FIG. 6.11 – Dynamo non-linéaire pour les cas b et d (voir tableau 6.2). (a-b) Visualisation des contours des composantes H_r , H_θ et H_z du champ magnétique, généré par effet dynamo dans deux plans azimutaux pour $R_m = 125 \approx R_{mc}$ (cas b). (c-d) idem pour $R_m = 125 > R_{mc}$ cas d

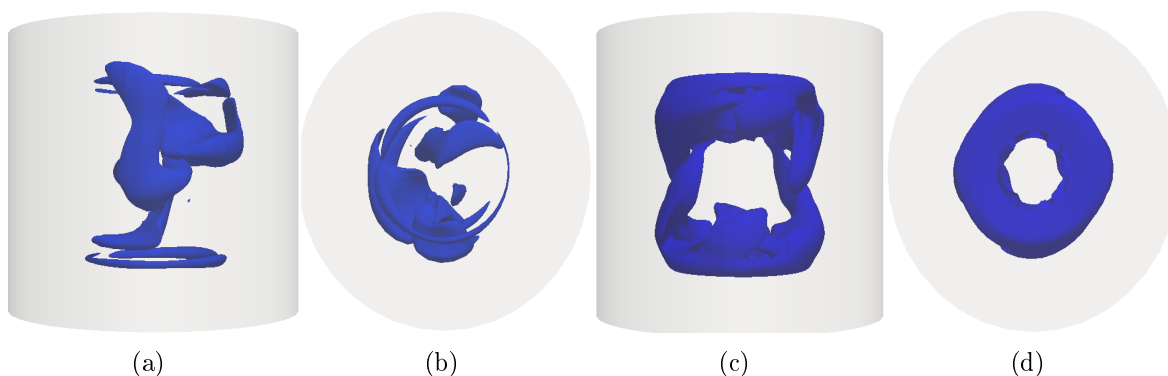


FIG. 6.12 – (a) Isosurface de 50% d'énergie magnétique vue de coté. (b) idem vue du dessus. (c) Isosurface de 50% d'énergie cinétique vue du dessus. (d) Idem vue du dessus (cas d de l'étude dynamo non-linéaire).

des équations de Navier-Stokes. L'objectif est de pouvoir faire des simulations à des nombres de Reynolds cinétiques Re de l'ordre de plusieurs milliers. Des calculs préliminaires à un nombre de Reynolds d'environ 10^4 ont été réalisés et ont montré l'existence du mode axisymétrique magnétique $m = 0$ dans le régime non linéaire, pour un seuil d'environ $R_{mc} = 350$. Ce seuil est très loin du seuil trouvé expérimentalement $R_{mc} = 32$, mais le nombre de Reynolds cinétique de nos simulations reste encore très faible par rapport à celui de l'expérience. Les résultats de ces calculs ne figurent pas dans ce manuscrit car la méthode de filtrage utilisée n'a pas encore été validée. Nous mentionnons

uniquement ces calculs dans le cadre des perspectives futures pour ce sujet.

Enfin, il sera intéressant d'étudier la saturation du champ magnétique dans le régime non linéaire. Au cours des expériences réalisées à Cadarache, les expérimentateurs décrivent des régimes dynamiques de dynamo où le champ magnétique s'inverse de façon aléatoire au cours du temps ou ne s'inverse pas du tout [12]. La finalité de la simulation de l'expérience VKS que nous avons proposée sera de réaliser des simulations capables de rendre compte de ces inversions observées expérimentalement, mais dont le mécanisme reste incompris. Dans le cas de la Terre, des mesures de paléo-magnétisme ont montré des inversions du champ magnétique, dont le dipôle est soit orienté vers le nord soit vers le sud. Le champ magnétique dans sa configuration de dipôle axial orienté nord-sud, s'éteint-il pour se rallumer dans la configuration d'un dipôle axial orienté sud-nord? Ou bien l'angle que fait le dipôle avec le plan équatorial évolue-t-il progressivement de 90 degrés à -90 degrés? Ces deux mécanismes pourront être discriminés par une modélisation réaliste de l'expérience VKS dans un premier temps et éventuellement étendu au cas de la Terre.

Chapitre 7

Conclusion générale

Cette thèse s'inscrit dans le prolongement naturel de la thèse réalisée par Raphaël Laguerre, soutenue en Décembre 2006. Les simulations réalisées avec le code SFEMaNS étaient essentiellement cinématiques : l'équation d'induction décrivant la partie magnétique est intégrée au cours du temps avec un champ de vitesse donné. Ces simulations ont notamment fourni des résultats originaux sur l'étude des seuils de dynamos expérimentales [49, 48]. Des simulations non linéaires de dynamos dans un écoulement de type Taylor-Couette dans un cylindre de dimension fini ont été entreprises et se sont montrées très concluantes [38]. Depuis, nous avons essentiellement réalisé des simulations non-linéaires non-axisymétriques ou axisymétriques. Ces simulations sont très coûteuses en temps de calcul car elles nécessitent d'approximer à chaque pas de temps les équations de Navier-Stokes puis l'équation d'induction, sur l'ensemble des nœuds d'un maillage du plan méridien du domaine de calcul. Lorsque les simulations sont tridimensionnelles, il nous faut considérer plusieurs modes de Fourier azimutaux. Chaque mode de Fourier est traité de façon parallèle par un processeur. Les équations étant couplées, il nous faut à chaque résolution calculer les termes non-linéaires. Chaque terme non-linéaire est calculé grâce à une méthode pseudo-spectrale sans de-aliasing utilisant des sous-routines de transformées de Fourier rapides de la librairie FFTW3 [23]. Cette opération nécessite un échange d'information important entre chaque processeur et est très coûteuse en temps de calcul. Par une implémentation astucieuse, nous sommes parvenus à diminuer considérablement ce temps de communication de façon à avoir de très bons « speed up » (se reporter au tableau 3.6 du chapitre 3). Jusqu'à 64 processeurs, le temps mis pour traiter un mode de Fourier sur un processeur est du même ordre que le temps mis pour un calcul de 64 modes de Fourier traités par 64 processeurs. Cette optimisation nous a permis d'envisager des simulations tridimensionnelles relativement coûteuses d'un point de vue numérique. Actuellement, nous avons également la possibilité de prendre en compte des domaines de perméabilités magnétiques différentes. Cette amélioration notable nous a pris beaucoup de temps mais, après avoir été validée sur un cas analytique, nous avons obtenu des résultats intéressants liés à la présence de matériaux ferromagnétiques dans un environnement magnétique.

Au cours de cette thèse, nous nous sommes essentiellement intéressés à trois phénomènes décrits par les équations de la MHD non-linéaire : l'étude d'ondes d'Alfvén poloïdales axisymétriques dans un cylindre fini plongé dans un champ magnétique extérieur, l'étude des effets magnétohydrodynamiques dans un disque képlerien soumis à un

champ extérieur axial homogène et la modélisation d'une expérience dynamo (VKS2) avec prise en compte de disques ferromagnétiques.

Les modélisations d'ondes d'Alfvén dans un conteneur cylindrique ont permis d'approcher différentes caractéristiques prédites par les approches analytiques dans le régime non dissipatif. Dans un régime d'excitation impulsionnelle et pour une certaine gamme de nombres de Prandtl Pm et de nombres de Lundquist Lu , on a pu observer des ondes électromagnétiques transverses au champ magnétique se propageant le long des lignes du champ magnétique à une vitesse proportionnelle à son amplitude dans deux directions opposées. L'excitation harmonique dans un régime faiblement non linéaire $\epsilon = |\mathbf{h}|/|\mathbf{H}_0| \sim 10^{-2}$ et très peu diffusif nous a également permis d'observer les modes propres de résonance d'un tel système. Dans ce régime on a pu voir que ces ondes ne peuvent exister que dans le cas où la diffusion magnétique est faible devant le temps de propagation des ondes. On a également mis en évidence la différence significative entre la configuration idéale et la configuration de l'expérience Galalfvén. Dans le cas idéal, l'excitation des ondes se fait au contact du fluide, ce qui crée une onde dipolaire en régime impulsionnel alors que, dans le cas expérimental, le fait d'exciter l'onde par une bobine torique externe donne lieu à une onde quadrupolaire. Cette différence engendre des modes de résonance distincts dans les deux configurations étudiées. Dans la configuration idéale, des structures magnétique et hydrodynamique de même longueur d'onde sont observées alors que, dans la configuration expérimentale, des structures magnétique et hydrodynamique différentes sont présentes. Cette différence vient en grande partie du fait que les conditions aux limites sont très différentes pour le champ magnétique et pour le champ de vitesse à la réflexion. Enfin, nous avons vu que la position de la mesure du champ magnétique ou de la fem liée au déplacement des ondes, dans les différents dispositifs expérimentaux étudiés, fournit des courbes de résonance différentes en fonction de la structure de l'onde excitée à la fréquence fondamentale (quadrupolaire ou dipolaire). La corrélation des courbes de résonance obtenues en ces deux positions pourrait nous permettre d'identifier la structure spatiale de l'onde. Étant donné que, pour des métaux liquides, il est très difficile de faire des mesures directes du champ de vitesse, cette méthode pourrait être utilisée expérimentalement pour déterminer la structure spatiale des ondes excitées, et cela uniquement à partir de mesures de la fem en régime harmonique. En perspective de ce sujet, nous projetons de faire des simulations tridimensionnelles d'ondes d'Alfvén dans le régime non-linéaire. Deux configurations sont envisagées. Une première consisterait à mettre en rotation le cylindre, en inclinant l'axe du cylindre (ou le champ magnétique extérieur), de façon à ce que l'angle entre les lignes de champ magnétique extérieur et l'axe de rotation du cylindre soit non nul. Nous espérons pouvoir atteindre un état turbulent, dû aux interactions entre les ondes de Rossby issues de la rotation du fluide entraîné par le cylindre en rotation et les ondes d'Alfvén excitées dans le cylindre. La deuxième configuration consiste à considérer le cylindre statique et à augmenter l'amplitude du courant exciteur (voir 4.4.1) de façon à ce que l'amplitude des perturbations soit de l'ordre du champ magnétique extérieur. Nous avons entrepris des simulations en augmentant l'amplitude du courant azimutal, mais nous avons rencontré des difficultés à résoudre de très fines couches limites apparaissant dans la zone de fluide proche de l'excitation. L'épaisseur de ces couches limites évolue en $1/Re$. Dans les simulations présentées dans ce manuscrit, l'amplitude du courant imposé engendre des vitesses de l'ordre de 0.01,

ce qui nous permet de construire un nombre de Reynolds cinétique effectif $Re = 600$. Si nous appliquons une amplitude de façon à avoir des vitesses perturbées d'ordre de l'unité, le nombre de Reynolds cinétique devient de l'ordre de 60000. Des simulations numériques directes à de tels nombres de Reynolds ne sont pas envisageables, il nous faudrait recourir à une méthode de modélisation de sous-mailles (LES).

Les simulations réalisées concernant l'étude des effets magnétohydrodynamiques dans un disque képlérien ont montré l'établissement d'un régime de saturation oscillant et non pas un état turbulent comme le montrent la plupart des simulations locales dans des boîtes cisillées. Plus récemment, des simulations globales dans des géométries de disque ont également trouvé un état quasi-turbulent. Ces simulations intègrent un grand nombre d'ingrédients dont la pertinence physique n'est pas toujours avérée. Ces ingrédients tels que la compressibilité, la stratification ou autres, peuvent être sources d'instabilités conduisant à de la turbulence. Dans nos simulations, nous avons choisi de concentrer notre étude numérique sur un seul thème : le couplage non-linéaire du champ de vitesse et du champ magnétique qui pourrait conduire à un état turbulent statistiquement stationnaire. L'état que nous avons obtenu dans nos simulations axisymétriques montre des oscillations non-linéaires dont la période est relativement longue par rapport à la période orbitale (environ une trentaine d'orbites). D'autres modèles numériques globaux ont obtenu des états de saturation présentant des oscillations proches des nôtres [45]. Des approches analytiques menées en particulier par E.Knobloch [44] ont également montré la possibilité d'avoir des états de saturation uniquement dus à la rétroaction du champ magnétique produit et entretenus au sein du disque sur l'écoulement hydrodynamique. Nous pouvons nous demander si les oscillations obtenues pour le mode $m = 0$ dans le cadre de notre modèle numérique simplifié ont un fondement physique dans des disques astrophysiques. On connaît par exemple des oscillations quasi-périodiques (QPO) de la luminosité X dans des étoiles binaires de faible masse, ou dans d'autres familles d'objets telles que les variables cataclysmiques. Ces oscillations non expliquées, de période longue par rapport à la période orbitale, pourraient témoigner de l'interaction entre un disque d'accrétion et une magnétosphère. La période de rotation de l'étoile centrale (étoile à neutrons par exemple) peut être proche de la milliseconde et il s'agit d'expliquer des fréquences d'oscillations entre 5 et 60 Hz, soit entre 200 et 15 périodes de l'objet central. Même si notre modèle montre des cycles analogues, occupant une vingtaine de périodes képlériennes, il est sans doute trop simplifié pour tenter un rapprochement quantitatif avec les QPO observées dans la nature. Ils nous faut cependant admettre quelques limitations de notre modèle, notamment le choix retenu de partir d'un état d'équilibre et de le perturber ne garantit pas le maintien d'un profil de vitesse képlérien à tout moment. Nous avons pu voir dans nos simulations que le profil képlérien de base est fortement perturbé par la poussée du champ magnétique, notamment au cours de la phase linéaire de l'instabilité MRI. Pour pallier à cette contrainte, il nous faudrait non pas construire un état d'équilibre ad hoc mais implémenter un terme de forçage représentant l'action des forces d'attraction gravitationnelle. Ce terme permettrait de maintenir un profil képlérien pour tout temps. Notons qu'un tel terme pourrait être source d'instabilité numérique car il faudrait que le potentiel gravitationnel imposé soit rafraîchi à chaque pas de temps ce qui impose une contrainte supplémentaire sur le pas temporel des simulations. Les simulations non-axisymétriques que nous avons menées ont été relativement décevantes. Pour

les nombres de Reynolds que nous avons explorés, nous avons observé que les modes azimutaux non-axisymétriques ne sont pas suffisamment excités pour interagir entre eux et générer un état de saturation statistiquement turbulent. Dans nos simulations, les modes élevés croissent jusqu'à un maximum puis meurent par diffusion visqueuse. Aux temps longs, il ne reste que le mode axisymétrique $m = 0$ et le régime décrit précédemment est de nouveau obtenu. Dans un avenir proche, des simulations à des nombres de Reynolds plus élevés, entraînant une diminution des effets visqueux, sont envisagées. Cependant cela nécessite de diminuer le pas spatial des maillages utilisés et d'accroître le nombre de modes azimutaux, entraînant une augmentation du temps de calcul. Pour garantir des temps de calcul raisonnables, nous envisageons d'implémenter un filtre LES reposant sur une méthode de stabilisation non-linéaire de la vitesse. Elle se traduit par l'adjonction dans le traitement des équations de Navier-Stokes d'une viscosité entropique semi explicite basée sur la norme du résidu calculé à chaque pas de temps [40]. Cette modification va nous permettre d'augmenter significativement le nombre de Reynolds tout en conservant des maillages raisonnables.

Enfin, des simulations relatives à l'étude d'induction et d'effet dynamo dans des domaines hétérogènes ont été permises grâce à l'implémentation d'une méthode de pénalisation de type IPG (Interior Penalty Galerkin). Cette méthode déjà utilisée dans l'approximation des équations de Maxwell pour assurer la continuité du champ magnétique entre un domaine conducteur et le vide [38] a été généralisé. Des tests de convergence réalisés à partir d'un cas analytique (étudiant l'induction magnétique d'une sphère en couches avec des coquilles de perméabilités différentes [19]) se sont avérés très concluants. Les tests d'induction effectués dans des configurations de doubles disques statiques, de forme arrondie ou non, ont montré que la formulation envisagée se comporte bien, même dans des géométries présentant des angles droits. La seule restriction concernant l'aspect géométrique est d'éviter la présence de coins entrants. Il est mathématiquement prouvé que l'algorithme que nous utilisons est incapable de converger vers des solutions stationnaires dans un tel cas. L'étude d'induction dans le cas où les disques sont en contra-rotation a montré des solutions stationnaires bien distinctes en fonction de la nature des disques (en fer ou en acier inoxydable). Enfin, les simulations de l'expérience dynamo (VKS2) avec prise en compte de saut de perméabilité magnétique nous a permis de clarifier un des rôles des disques ferromagnétiques. Nous avons pu voir que, dans les cas d'études cinématiques et non-linéaires, les disques ferromagnétiques découplent l'écoulement principal de l'écoulement à l'arrière des pales. Cet écoulement est apparu très défavorable à la dynamo dans d'autres simulations numériques. Les simulations non-linéaires réalisées avec prise en compte de saut de perméabilité au nombre de Reynolds que nous avons exploré ($Re < 350$) n'ont pas permis d'expliquer la mesure d'un champ magnétique axisymétrique statistiquement stationnaire et auto-entretenu dans l'expérience VKS2. Un scénario avancé dans [51, 68] avance que l'écoulement étant très turbulent (à $Re = 10^6$), il pourrait favoriser la création de champ magnétique poloïdal via de l'effet α (voir chapitre 1). Dans l'expérience, une source d'effet α peut provenir de l'écoulement très hélicoïdal et très turbulent près des pales [51, 68]. Dans l'article [51] et [50], présentés en annexe, en plus d'appliquer des conditions aux limites magnétiques ferromagnétiques sur les disques, on ajoute dans l'équation d'induction un terme de forçage traduisant un effet α limité spatialement près des pales. Dans cette configuration, on voit l'apparition d'un champ magnétique

axisymétrique au même seuil que celui mesuré expérimentalement mais pour une valeur du coefficient α non réaliste. La figure 3 de l'article [51] montre que, pour un effet α d'amplitude absolue de l'ordre de deux fois la vitesse maximale du fluide, il y a croissance d'un champ axisymétrique au seuil $Rm_c \approx 32$. Cette valeur est physiquement impossible étant donné qu'elle excède l'amplitude de la vitesse maximale mesurée dans l'écoulement. Tout en suivant cette direction, d'autres études cinématiques ont été menées en cherchant à optimiser l'effet alpha. Dans d'autres simulations, l'effet α n'est plus uniquement localisé près des pales mais réparti dans l'ensemble de l'écoulement (hypothèse plausible car, dans l'expérience, l'ensemble de l'écoulement est très turbulent). Une autre étude cinématique prenant en compte la perméabilité élevée des disques ferromagnétiques ainsi qu'un effet alpha localisé d'amplitude raisonnable permet de voir croître un champ magnétique axisymétrique à un seuil proche du seuil critique expérimental [32]. Les interrogations liées au seuil et à la nature du mode magnétique mesuré expérimentalement semblent avoir trouvé des réponses grâce aux différentes simulations cinématiques évoquées précédemment. Ils nous semblent intéressant maintenant d'envisager des simulations numériques directes afin d'étudier le régime de saturation non-linéaire. Expérimentalement le régime non-linéaire a montré des inversions assez comparables à celles mesurées pour la Terre.

D'un point de vue plus général, le code SFEMaNS est à l'heure actuelle le seul code académique en coordonnées cylindriques capable de résoudre les équations de la MHD dans leur version non-linéaire tout en intégrant les différentes hétérogénéités au sein du domaine conducteur. Cette caractéristique s'avère être très prometteuse dans la modélisation de l'expérience VKS qui intègre des matériaux de perméabilité magnétique élevée. Le rôle de ce type de matériaux est compris et exploité en magnétostatique depuis longtemps, son impact en MHD reste à évaluer. Toutes les simulations réalisées dans le cadre de cette thèse sont des simulations numériques directes, par conséquent nous avons dû restreindre nos simulations à une gamme de nombres de Reynolds cinétique relativement faibles $Re \approx 1000$. Or les applications auxquelles on s'est intéressé mettent en jeu des métaux liquides dont le nombre de Prandtl magnétique est très faible ($\approx 10^{-6}$). Pour décrire correctement l'hydrodynamique de tels fluides, il nous faudrait envisager d'implémenter une méthode de sous maille "LES" afin de pouvoir réaliser des simulations à des nombres de Reynolds cinétique élevés faisant intervenir des petites échelles hydrodynamiques. L'implémentation d'une telle méthode dans notre code SFEMaNS constituera une réelle avancée dans le domaine de l'étude numérique de problèmes de magnétohydrodynamique. Plus particulièrement pour les trois problèmes étudiés, cet outil nous permettra de proposer des simulations numériques originales. Nous pourrions envisager l'étude d'ondes d'Alfvén en régime turbulent, l'étude du régime non-linéaire post-MRI dans un disque képlerien à hauts nombres de Reynolds ainsi que des simulations en régime turbulent de l'expérience VKS en prenant en compte des turbines ferromagnétiques.

Bibliographie

- [1] T. Alboussière, P. Cardin, F. Debray, H. C. Nataf, F. Plunian, A. Ribeiro, and D. Schmitt. Experimental evidence of Alfvén wave propagation in a gallium alloy. *Submitted to GAFD*, 2010.
- [2] H. Alfvén. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, 150 :405–406, 1942.
- [3] A. Alonso. A mathematical justification of the low-frequency heterogeneous time-harmonic Maxwell equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 9(3) :475–489, 1999.
- [4] R. Arlt and G. Rüdiger. Global accretion disk simulations of magneto-rotational instability. *Astronomy and Astrophysics*, 374 :1035–1048, 2001.
- [5] P. J. Armitage. Turbulence and angular momentum transport in a global accretion disk. *Ap. J. Letters*, 1998.
- [6] D.N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19 :742–760, 1982.
- [7] J. Baerenzung, H. Politano, and Y. Ponty and A. Pouquet. Spectral modeling of turbulent flows and the role of helicity. *Phys. Rev. E*, 77(04303), 2008.
- [8] G.A. Baker. Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. *Math. Comp.*, 31(137) :45–59, 1977.
- [9] S. A. Balbus and J. F. Hawley. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. *Astrophysical Journal*, 376(214), 1991.
- [10] S. A. Balbus and J. F. Hawley. Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Reviews of Modern Physics*, 70(1), 1998.
- [11] R. A. Bayliss, C. B. Forest, M. D. Nornberg, E. J. Spence, and P. W. Terry. Numerical simulations of current generation and dynamo excitation in a mechanically forced turbulent flow. *Phys. Rev. E*, 75 :id. 026303, 2007.
- [12] M. Berhanu, R. Monchaux, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, L. Marié, F. Ravelet, M. Bourgoin, P. Odier, J.-F. Pinton, and R. Volk. Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo. *Europhysics Letters*, 77 :59001, 2007.
- [13] Christine Bernardi, Monique Dauge, and Yvon Maday. *Spectral methods for axisymmetric domains*, volume 3 of *Series in Applied Mathematics (Paris)*. Gauthier-Villars, Éditions Scientifiques et Médicales Elsevier, Paris, 1999. Numerical algorithms and tests due to Mejdî Azaïez.

- [14] A. Bossavit. *Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementary, Edge Elements*, volume 2 of *Electromagnetism*. Academic Press, New York, NY, 1998.
- [15] M. Bourgoïn, L., F. Pétrélis, C. Gasquet, A. Guigon, J.B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, and J.F. Pinton. Magnetohydrodynamics measurements in the von Kármán sodium experiment. *Phys. Fluids*, 14 :3046–3058, 2002.
- [16] T.G. Cowling. The magnetic field of sunspots. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 94 :39–48, 1934.
- [17] Van der Klis. Quasi-periodic oscillations and noise in low-mass x-ray binaries. *Ann. Rev. Astronom. Astrophys*, 27 :517–553, 1989.
- [18] E. Durand. *Electrostatique et Magnétostatique*. Masson, 1953.
- [19] E. Durand. *Magnétostatique*. Masson, Paris, 1968.
- [20] P. Cardin E. Dormy and D. Jault. Mhd flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth and Planetary Science Letters*, 160(15–30), 1998.
- [21] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [22] T. P. Flemming, J. M. Stone, and J. F. Hawley. The effect of resistivity on the non-linear stage of the magnetorotational instability in accretion disks. *Astrophysical Journal*, 530 :464–477, 2000.
- [23] Matteo Frigo and Steven G. Johnson. The design and implementation of FFTW3. *Proc. of the IEEE*, 93(2) :216–231, 2005.
- [24] S. Fromang and R. Nelson. Global mhd simulations of stratified and turbulent protoplanetary discs. II. Dust settling. *Astrophysical Journal*, 496(3) :597–608, 2009.
- [25] S. Fromang and R. P. Nelson. Global MHD simulations of stratified and turbulent protoplanetary discs I. Model properties. *Astron. Astrophys.*, 457 :346–358, 2006.
- [26] S. Fromang and J. Papaloizou. MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. I. The issue of convergence. *Astron. Astrophys.*, 476 :1113–1122, 2007.
- [27] S. Fromang, J. Papaloizou, G. Lesur, and T. Heinemann. Zero net flux mhd simulations of the magnetorotational instability in the shearing box. II. The effect of dissipative coefficients. *The Royal Astron. Soc.*, 70(1), 2007.
- [28] A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement’ev, E. Platacis, and A. Ciferons. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :4365, 2000.
- [29] W. Gekelman. Review of laboratory experiments on Alfvén waves and their relationship to space observations. *Jour. Geophys. Res.*, 104 :14417–14435, 1999.
- [30] Jean-Frédéric Gerbeau, Claude Le Bris, and Tony Lelièvre. *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2006.

- [31] A. Giesecke, F. Stefani, and G. Gerbeth. Kinematic simulations of dynamo action with a hybrid boundary-element/finite-volume method. *Magnetohydrodynamics*, 44(3) :237–252, 2008.
- [32] A. Giesecke, F. Stefani, and G. Gerbeth. Role of soft-iron impellers on the mode selection in the von Kármán–sodium dynamo experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 104(4) :044503, Jan 2010.
- [33] C. Gissinger. A numerical model of the vks experiment. *Euro.Phys.Lett.*, 87 :39002, 2009.
- [34] C. Gissinger, S. Fauve, and E. Dormy. Bypassing Cowling’s theorem in axisymmetric fluid dynamos. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :144502, 2008.
- [35] C. Gissinger, A. Iskakov, S. Fauve, and E. Dormy. Effect of magnetic boundary conditions on the dynamo threshold of von Kármán swirling flows. *EPL*, 82 :29001, 2008.
- [36] P. Goldreich and D. Lynden-Bell. II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities. *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc*, 130(125), 2007.
- [37] J.-L. Guermond, R. Laguerre, J. Léorat, and C. Nore. An interior penalty galerkin method for the MHD equations in heterogeneous domains. *J. Comput. Phys.*, 221(1) :349–369, 2007.
- [38] J.-L. Guermond, R. Laguerre, J. Léorat, and C. Nore. Nonlinear magnetohydrodynamics in axisymmetric heterogeneous domains using a fourierfinite element technique and an interior penalty method. *J. Comput. Phys.*, 221(1) :349–369, 2007.
- [39] J. L. Guermond and Jie Shen. On the error estimates for the rotational pressure-correction projection methods. *Math. Comp.*, 73(248) :1719–1737 (electronic), 2004.
- [40] J.L. Guermond, R. Pasquetti, and B. Popov. Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws. *In press in J. Comput. Phys.*, 2010.
- [41] J. F. Hawley. Global magnetohydrodynamical simulations of accretion tori. *Astrophysical Journal*, 528(462), 2000.
- [42] J. F. Hawley and S. A. Balbus. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. III- Long-term evolution in a shearing sheet. *Ap. J*, 400 :595–621, 1992.
- [43] A. Jameson. A demonstration of Alfvén waves. *Jour. F. Mech.*, 19(513), 1964.
- [44] K. Julien and E. Knobloch. Magnetorotational instability : Recent developments. *Phil. Trans. R. Soc.*, 368 :1607–1633, 2010.
- [45] E. Kersalé, D. W. Hughes, G. I. Ogilvie, and S. M. Tobias. Global magnetorotational instability with inflow. II. The non-linear development of axisymmetric wall modes. *Ap. J*, 638 :382–390, 2006.
- [46] L. L. Kitchatinov and M. V. Mazur. On the global stability of rotating magnetized disks. *Astronomy and Astrophysics*, 324 :821–828, 1997.
- [47] L. L. Kitchatinov and G. Rüdiger. Seed fields for galactic dynamos by the magnetorotational instability. *Astronomy and Astrophysics*, 424 :565–570, 2004.

- [48] R. Laguerre. *Approximation des équations de la MHD par une méthode hybride spectrale-éléments finis nodaux : application à l'effet dynamo*. PhD thesis, University of Paris VI, 2006.
- [49] R. Laguerre, C. Nore, J. Léorat, and J.-L. Guermond. Effects of conductivity jumps in the envelope of a kinematic dynamo flow. *CR Mécanique*, 334 :593, 2006.
- [50] R. Laguerre, C. Nore, A. Ribeiro, J. Léorat, J.-L. Guermond, and F. Plunian. Erratum. impact of impellers on the axisymmetric magnetic mode in the VKS2 dynamo experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 101(10) :219902, 2008.
- [51] R. Laguerre, C. Nore, A. Ribeiro, J. Léorat, J.-L. Guermond, and F. Plunian. Impact of impellers on the axisymmetric magnetic mode in the VKS2 dynamo experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 101(10) :104501, 2008.
- [52] B. Lehnert. Magneto-hydrodynamic waves in liquid sodium. *Phys. Rev.*, 94(4) :815–824, May 1954.
- [53] F. J. Lowes and I. Wilkinson. Geomagnetic dynamo : an improved laboratory model. *Nature*, 219 :717, 1968.
- [54] S. Lundquist. Experimental investigations of magneto-hydrodynamic waves. *Phys. Rev.*, 107 :1805–1809, 1949.
- [55] M. Machida, M. R. Hayashi, and R. Matsumoto. Global simulations of differentially rotating magnetized disks : Formation of low- b filaments. *The Astrophysical Journal Letters*, 2000.
- [56] L. Marié, J. Burguete, F. Daviaud, and J. Léorat. Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von kármán type flows. *Eur. Phys. Journal B*, 33 :469, 2003.
- [57] L. Marié, J. Burguete, F. Daviaud, and J. Léorat. Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von Kármán type flows. *European Physical Journal B*, 33 :469–485, June 2003.
- [58] L. Marié, C. Normand, and F. Daviaud. Galerkin analysis of kinematic dynamos in the von Kármán geometry. *Phys. Fluids*, 18 :017102, 2006.
- [59] L. Marié, F. Pétrélis, M. Bourgoïn, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, and J.-F. Pinton. Open questions about homogeneous fluid dynamos : the VKS experiment. *Magnetohydrodynamics*, 38 :156–169, 2002.
- [60] H.K. Moffatt. *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [61] R. Monchaux. *Mécanique statistique et effet dynamo dans un écoulement de von Kármán turbulent*. PhD thesis, University of Paris VI, 2007.
- [62] R. Monchaux, M. Berhanu, S. Aumaitre, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, F. Ravelet, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, M. Bourgoïn, P. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon, and Volk. The von k'arm'an sodium experiment : Turbulent dynamical dynamos. *Physics of Fluids*, 21(3) :035108–+, March 2009.
- [63] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, Ph. Odier, M. Moulin, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, and F. Ravelet. Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :044502, 2007.

- [64] U. Müller, R. Stieglitz, and S. Horanyi. A two-scale hydromagnetic dynamo experiment. *Journ. of F. Mech.*, 498 :31, 2004.
- [65] V. M. Nakariakov, L. Ofman, E. E. DeLuca, B. Roberts, and J. M. Davila. Trace observation of damped coronal loop oscillations : Implications for coronal heating. *Science*, 285 :862–864, 1999.
- [66] H. Nishikori, M. Machida, and R. Matsumoto. Global three-dimensional MHD simulations of galactic gaseous disks. I. Amplification of mean magnetic fields in an axisymmetric gravitational potential. *Astron. Astrophys.*, 641 :862–877, 2006.
- [67] F. Pétrélis, M. Bourgoin, L. Marié, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, and J.-F. Pinton. Nonlinear magnetic induction by helical motion in a liquid sodium turbulent flow. *Phys. Rev. Letters*, 90 :174.501, 2003.
- [68] F. Pétrélis, N. Mordant, and S. Fauve. On the magnetic fields generated by experimental dynamos. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 101 :289, 2007.
- [69] Y. Ponty, P. D. Mininni, J-P. Laval, A. Alexakis, J. Baerenzung, F. Daviaud, B. Dubrulle, J-F. Pinton, H. Politano, and A. Pouquet. Linear and non linear features of the taylor-green dynamo. *C. R. Physique*, 9(749–756), 2008.
- [70] F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and J. Léorat. Towards an experimental von Kármán dynamo : numerical studies for an optimized design. *Phys. Fluids*, 17 :117104, 2005.
- [71] G. O. Roberts. Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 271 :411, 1972.
- [72] P.H. Roberts. *An introduction to Magnetohydrodynamics*. Longmans, first edition, 1967.
- [73] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Publishing Company, Boston, 1996.
- [74] T. Sano, S. Inutsuka, and S. M. Miyama. A saturation mechanism of magnetorotational instability due to ohmic dissipation. *Ap. J.*, 506 :57–60, 1998.
- [75] Michel Sermange and Roger Temam. Some mathematical questions related to the MHD equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 36(5) :635–664, 1983.
- [76] F. Stefani, M. Xu, G. Gerbeth, F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and J. Léorat. Ambivalent effects of added layers on steady kinematic dynamos in cylindrical geometry : application to the VKS experiment. *Eur. J. Fluid Mech, B*, 25 :894, 2006.
- [77] A. S. Steinacker and J. C. B Papaloizou. Three-dimensional magnetohydrodynamic simulation of an accretion disk with star-disk boundary layer. *Ap. J*, 571(413), 2002.
- [78] R. Stieglitz and U. Muller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids*, 13 :561, 2001.
- [79] R. Stieglitz and U. Müller. Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids*, 13 :561, 2001.
- [80] R. Temam. *Navier–Stokes Equations*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland, 1977.

- [81] A. Tilgner. On models of precession driven core flow. *Studia geoph. et geod.*, 42(232), 1998.
- [82] A. Tilgner. Numerical simulation of the onset of dynamo action in an experimental two-scale dynamo. *Phys. Fluids*, 14 :11, 2002.
- [83] A. Tilgner. Precession driven dynamos. *Phys. Fluids*, 17(034104), 2005.
- [84] A. Tilgner and F. H. Busse. Simulation of the bifurcation diagram of the Karlsruhe dynamo. *Magnétohydrodynamics*, 38 :4092, 2002.
- [85] L.J.P. Timmermans, P.D. Mineev, and F.N. van de Vosse. An approximate projection scheme for incompressible flow using spectral elements. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 22 :673–688, 1996.
- [86] B. T. Tsurutani and C. M. Ho. A review of discontinuities and Alfvén waves in interplanetary space : Ulysses results. *Reviews of Geophysics*, 37 :517–541, 1999.
- [87] J. Voigt. Alfvén wave coupling in the auroral current circuit. *Surveys in Geophysics*, 23 :335–377, 2002.