



**HAL**  
open science

# Modélisation de la courbe de variance et modèles à volatilité stochastique

Sidi Mohamed Ould Aly

► **To cite this version:**

Sidi Mohamed Ould Aly. Modélisation de la courbe de variance et modèles à volatilité stochastique. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1041 . tel-00604530v2

**HAL Id: tel-00604530**

**<https://theses.hal.science/tel-00604530v2>**

Submitted on 14 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

présentée par

Sidi-Mohamed OULD ALY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS-EST

*Spécialité : Mathématiques Appliquées*

---

## Modélisation de la courbe de variance et modèles à volatilité stochastique

---

Soutenue le 16 juin 2011 devant le jury composé des professeurs :

Lorenzo BERGOMI	Examineur
Michel CROUHY	Examineur
Emmanuel GOBET	Rapporteur
Benjamin JOURDAIN	Examineur
Damien LAMBERTON	Directeur de thèse
Peter LAURENCE	Rapporteur
Nizar TOUZI	Examineur

*À ma famille*



# Remerciements

J'aimerais tout d'abord exprimer toute ma gratitude au professeur Damien Lambertson pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. Son œil critique et son respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés m'ont été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Je remercie également Emmanuel Gobet & Peter Laurence pour m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse. Je leur suis très reconnaissant pour leurs précieux remarques et commentaires. Je tiens aussi à remercier Lorenzo Bergomi, Michel Crouhy, Benjamin Jourdain et Nizar Touzi pour m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury.

Je n'oublie pas de remercier l'équipe de recherche quantitative de Natixis, notamment Adil Reghai, Adel Ben Haj Yedder et Marouen Messaoud de m'avoir permis de mieux comprendre les aspects "pratiques" des mathématiques financières et pour tous leurs conseils et encouragements.

Merci à l'ensemble des personnes du laboratoire L.A.M.A de m'avoir si bien accueilli pendant ma thèse. Merci aux doctorants du laboratoire : Mohamed, El-Jadj, Lokman, Ayech, Sébastien, Stefano, Laurent, Quing (pas sûr de l'orthographe, encore moins de la prononciation!!) et aux petits nouveaux Bertrand, Victor, Omar et Pierre. Enfin, merci aussi à l'équipe Inria-Mathfi, notamment Agnès Sulem et Antonino Zanette de m'avoir accueilli les derniers mois de ma thèse.

---

## Résumé

La première partie de cette thèse est consacrée aux problématiques liées à la modélisation markovienne de la courbe de variance forward. Elle est divisée en 3 chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons le cadre général de la modélisation de type HJM-Markov pour la courbe de variance forward. Nous revisitons le cadre affine-markovien modélisation et nous l'illustrons par l'exemple du modèle de Bühler 2006. Dans le deuxième chapitre, nous proposons un nouveau modèle pour la courbe de variance forward qui combine les caractéristiques des deux versions (continue et discrète) du modèle de Bergomi 2008, sans se réduire ni à l'une ni à l'autre. Un des avantages de ce modèle est que les prix des futures et options sur VIX peuvent être exprimés comme des espérances de fonctions déterministes d'une variable aléatoire gaussienne, ce qui réduit le problème de la calibration à l'inversion de certaines fonctions monotones. Dans le troisième chapitre, on propose une méthode d'approximation pour les prix d'options européennes dans des modèles à volatilité stochastique de type multi-factoriels lognormal (comprenant le modèle présenté dans le deuxième chapitre, les modèles de Bergomi et le modèle de Scot 1987). Nous obtenons un développement d'ordre 3 de la densité du sous-jacent par rapport au paramètre de la volatilité de la volatilité. Nous présentons aussi une méthode de réduction de variance de type "variable de contrôle" pour la simulation par la méthode de Monte-Carlo qui utilise l'approximation explicite que nous obtenons de la fonction de répartition de la loi du sous-jacent.

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude des propriétés de monotonie des prix d'options européennes par rapport aux paramètres du CIR dans le modèle de Heston. Elle est divisée en deux chapitres. Dans le premier chapitre (cf. chapitre 4), nous donnons quelques résultats généraux sur le processus CIR. Nous montrons d'abord que les queues de distribution d'une combinaison du CIR et de sa moyenne arithmétique se comporte comme des exponentielles. Nous étudions ensuite les dérivées de la solution de ce processus par rapport aux paramètres de sa dynamique. Ces dérivées sont données comme solutions d'équations différentielles stochastiques, qu'on résout pour obtenir des représentations de ces dérivées en fonction des trajectoires du CIR. Le chapitre 5 est consacré à l'étude de la monotonie du prix d'un Put européen par rapport aux paramètres du CIR et à la corrélation dans le modèle de Heston. Nous montrons que, sous certaines conditions, les prix d'options européenne sont monotones par rapport aux paramètres du drift du CIR. Nous montrons ensuite que le paramètre de la volatilité de la volatilité joue le rôle de la volatilité si on prend la variance réalisée comme sous-jacent. En particulier, les prix d'options convexes sur la variance réalisée sont strictement croissants par rapport à la volatilité de la volatilité. Enfin, nous étudions la monotonie du prix du Put européen par rapport à la corrélation. Nous montrons que le prix du put du Put est croissant par rapport à la corrélation pour les petites valeurs du Spot et décroissant pour les grandes valeurs. Nous étudions ensuite les points de changement de monotonie pour les courtes et longues maturités.

---

## Abstract

The first part of this thesis deals with issues related to the Markov-modeling of the forward variance curve. It is divided into 3 chapters. In the first chapter, we present the general framework of the HJM-type modelling for the forward variance curve. We revisit the Affine-Markov framework, and illustrate by the model proposed by Bühler 2006. In the second chapter, we propose a new model for the forward variance curve that combines features of the continuous and discrete version of Bergomi's model Bergomi (2008), without being reduced to either of them. One of the strengths of this model is that the prices of VIX futures and options can be expressed as expectations of deterministic functions of a Gaussian random variable, which reduces the problem of calibration to the inversion of some monotonic functions. In the third chapter, we propose an approximation method for pricing of European options under some lognormal stochastic volatility models (including the model presented in the second chapter, Bergomi's model2008 and Scot model 1987). We obtain an expansion (with respect to the the volatility of volatility parameters of order 3) of the density of the underlying. We also propose a control variate method to effectively reduce variances of Monte Carlo simulations for pricing European options

The purpose of the second part of this thesis is to study the monotonicity properties of the prices of European options with respect to the CIR parameters under Heston model. It is divided into two chapters. In the first chapter (see Chapter 4), we give some general results related to the CIR process. We first show that the distribution tails of a combination of the CIR and its arithmetic mean behave as exponential. We then study the derivatives of the solution process with respect to the parameters of its dynamics. These data are derived as solutions of stochastic differential equations, which solves for the representations of these derivatives based on trajectories of the CIR. Chapter 5 is devoted to the study of the monotony of the European price of a put with respect to parameters of CIR and correlation in the Heston model. We show that under certain conditions, prices of European options are monotonic with respect to the parameters of the drift of the CIR. We then show that the parameter of the volatility of volatility plays the role of volatility if we take the realized variance as the underlying. In particular, prices of (convex) options on realized variance are strictly increasing with respect to the volatility of volatility. Finally, we study the monotony of the European Put prices with respect to the correlation. We show that the price of the put is increasing with respect to the correlation for small values of Spot and decreasing for large values. We then study the change points of monotonicity for short and long maturities.

---



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Modélisation de la courbe de variance</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>Modélisation markovienne de la courbe de variance</b>	<b>17</b>
1.1	Variance swap et courbe de variance forward . . . . .	17
1.2	Analyse des modèles markoviens . . . . .	19
1.2.1	Exemple : Approche de H. Bühler . . . . .	22
1.2.2	Variables d'état et courbe de variance forward . . . . .	25
1.3	Commentaires . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Forward variance dynamics : Bergomi's model revisited</b>	<b>31</b>
2.1	Introduction . . . . .	31
2.1.1	Variance Swaps and Forward Variance Curve . . . . .	33
2.1.2	Bergomi's model(s) . . . . .	35
2.1.3	Our contribution . . . . .	36
2.2	A dynamic model for forward variance dynamics . . . . .	37
2.2.1	The VIX Index . . . . .	39
2.2.2	Pricing VIX Futures and Options . . . . .	40
2.3	Specifying $\bar{\omega}_1$ . . . . .	41
2.4	Calibrating $\gamma$ , $\beta$ and $\zeta$ . . . . .	44
2.5	Hedging VIX options . . . . .	48
2.6	The dynamics of the underlying asset . . . . .	51
2.7	Conclusion . . . . .	52
2.8	Some proofs . . . . .	53
2.8.1	Proof of proposition 2.3.1 . . . . .	53
2.8.2	Proof of theorem 2.4.1 and theorem 2.5.1 . . . . .	55

<b>3</b>	<b>Calcul approché pour des modèles à volatilité stochastique lognormale</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Modèle à un facteur : Modèle de Scott généralisé . . . . .	64
3.2.1	Une approximation de la transformée de Fourier de la loi de $(X, V)$	66
3.2.2	Analyse de l'approximation (3.2.9) . . . . .	68
3.2.3	Approximation de la densité de $X_t$ . . . . .	70
3.2.4	Résultats numériques : Comparaison avec [50] . . . . .	73
3.3	Le cas multi-dimensionnel : Modèle de Bergomi . . . . .	77
3.4	Applications à la réduction de variance . . . . .	81
3.4.1	La méthode . . . . .	81
3.4.2	Application . . . . .	84
3.4.3	Preuve de la proposition 3.3.1 . . . . .	85
<b>II</b>	<b>Monotonie dans le modèle de Heston</b>	<b>91</b>
<b>4</b>	<b>Quelques propriétés du CIR</b>	<b>93</b>
4.1	Introduction . . . . .	93
4.2	Moments exponentiels du CIR intégré . . . . .	94
4.3	Comportement asymptotique des queues de distribution du CIR intégré .	102
4.4	Dérivées du CIR par rapport à ses paramètres . . . . .	108
4.4.1	Dérivée par rapport à la position initiale . . . . .	108
4.4.2	Dérivée par rapport à $\sigma$ . . . . .	111
4.4.3	Dérivées par rapport à $a$ et $b$ . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Monotonie par rapport aux paramètres de la volatilité</b>	<b>119</b>
5.1	Introduction . . . . .	119
5.2	Préliminaires . . . . .	121
5.2.1	Put européen dans le modèle de Heston . . . . .	123
5.2.2	Un principe du maximum parabolique . . . . .	124
5.3	Monotonie par rapport aux paramètres du drift de la variance . . . . .	126

5.4	Monotonie par rapport à la volatilité de la volatilité . . . . .	131
5.4.1	Options sur variance réalisée . . . . .	131
5.4.2	Monotonie des options européennes . . . . .	134
5.5	Monotonie par rapport à la corrélation . . . . .	139
5.5.1	La dérivée du prix par rapport à $\rho$ . . . . .	140
5.5.2	Signe de $\dot{\mathbf{P}}_\rho$ . . . . .	144
5.5.3	Comportement asymptotique de $s_\rho^\pm(., v)$ . . . . .	153
<b>Bibliography</b>		<b>167</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Introduction

Le fait que la volatilité des actions est non-déterministe a été accepté depuis les années 60 lorsque Mandelbrot a décrit le caractère aléatoire de la variance de la distribution du marché des actions. Le caractère aléatoire de la variance instantanée du processus de prix d'une action est particulièrement important si nous voulons évaluer et couvrir des options fortement dépendantes de la volatilité telles que les options sur la variance réalisée ou des options à Cliquet. Ces produits ne peuvent pas être répliqués correctement dans le modèle de Black-Scholes car leur risque réside dans le mouvement de la volatilité (ou variance) elle-même.

Afin d'expliquer ces écarts empiriques avec le modèle Black-Scholes, diverses tentatives ont été faites dans la littérature. Une façon d'aborder le problème serait d'utiliser les prix de marché des options et d'en déduire la distribution implicite risque-neutre. À cette fin, Dupire [22], [23], Derman et Kani [19], [18] ont résolu complètement le problème de trouver une diffusion à un facteur qui permet de retrouver un continuum de prix du marché. Actuellement, ces modèles sont le moyen le plus populaire de la gestion des risques liés au "smile/skew". Toutefois, comme le souligne Hagan et al [35], la dynamique du smile/skew prédite par les modèles à volatilité locale est exactement à l'opposé du comportement observé sur le marché. Cette contradiction entre le modèle et le marché tend à déstabiliser les couvertures en delta et en vega dans ces modèles, et souvent ces couvertures donnent des résultats moins bons que la couverture "naïve" donnée par le modèle de Black-Scholes.

Certains auteurs, tels que Cox et Ross (CEV) ou Bensoussan, Crouhy et Galai (BCG) ont introduit le concept de volatilité qui dépend du niveau des prix de l'action et d'un aléa exogène. Les modèles CEV représentent une classe de volatilité stochastique où le coefficient de corrélation entre le prix de l'actif sous-jacent et sa volatilité instantanée, est égal à 1,0, ce qui permet aux prix d'actions et les smiles des marchés de bouger dans la

même direction. D'autres modèles d'évaluation d'options ont été proposés, dans lesquels la volatilité instantanée elle-même suit un processus stochastique. Par exemple, le modèle populaire de Heston [38] suppose que la variance instantanée du prix des actions est un C.I.R corrélé avec le cours de l'action. En outre, il existe aussi des modèles qui intègrent les processus de sauts. Le principal inconvénient des modèles à volatilité stochastique et des modèles de saut est qu'ils mènent en soi à des modèles de marché incomplet si seul le stock et les Bonds sont considérés comme des instruments négociables.

Pour remédier à ce problème dans les modèles en continu, un nouveau courant de la littérature s'est développé dans les dernières années. Cette branche novatrice met l'accent sur l'identification de ces sources supplémentaires de l'aléa dans les marchés d'options et donc la nécessité d'un (ou plusieurs) instruments supplémentaires négociés pour être en mesure de couvrir le risque qui en résulte (complétion du marché). Le problème est alors d'identifier les instruments à choisir afin de compléter notre marché.

L'approche la plus efficace a été d'utiliser des dérivés de volatilité, comme proposé par Brenner & Galai [9], [10]. Ces types de contrats ont été jusqu'à récemment limités aux activités des marchés de gré à gré. Toutefois, le Chicago Board Options Exchange (CBOE) a énuméré des contrats à termes sur le VIX en mars 2004 et a commencé avec cela le développement d'un marché de volatilité utilisant le VIX comme sous-jacent. Les options européennes sur VIX étaient le prochain type de dérivés que le CBOE introduisait en février 2006. Le VIX représente l'attente du marché de la volatilité implicite à la monnaie, annualisée, pour la prochaine période de 30 jours, car le VIX et ses options tirent leurs valeurs de la volatilité implicite de l'indice S&P 500. Le VIX et ses options sont attrayants pour les investisseurs qui souhaitent obtenir l'exposition à la volatilité du SP 500, sans prise de position directe dans l'indice et sans nécessité de faire du Delta-Hedging de leurs portefeuilles.

Une nouvelle approche de modélisation proposée par Bergomi [5],[6], [7] (voir aussi Bühler [11]) est celle dans laquelle, au lieu de modéliser la volatilité "instantanée", on commence par préciser la dynamique de toute la courbe de variance forward, tout comme les modèles de type HJM pour les taux d'intérêt, où on commence par la dynamique des

taux forward. La complication supplémentaire dans le cas de la variance forward, est que nous ne voulons pas seulement modéliser le processus du prix du variance-swap, mais nous avons besoin de déduire la dynamique du prix d'une action de manière cohérente avec la modélisation de la variance. Ces modèles se basent sur une modélisation markovienne de la courbe de variance forward avec pour objectif le contrôle du smile des variances forward à partir d'une calibration aux futures et options sur Vix (calibration aux options sur variance réalisée dans le cadre de Bühler [11]). Cependant, le principal défaut de ces modèles, à l'image des modèles à volatilité stochastique généraux, est qu'ils ne permettent pas d'avoir de formules analytiques pour les prix d'options sur la variance, ou VIX, et encore moins pour les options sur le sous-jacent lui-même.

## Première partie

La première partie de cette thèse est consacrée aux problématiques liées à la modélisation markovienne de la courbe de variance forward. Elle est divisée en 3 chapitres.

Le premier chapitre présente une introduction générale de la modélisation de type HJM de la courbe de variance forward. Nous revisitons le cadre affine-markovien de la modélisation et nous l'illustrons par l'exemple du modèle de Bühler [11].

Dans le deuxième chapitre, nous proposons un nouveau modèle pour la courbe de variance forward. Ce modèle combine les caractéristiques des deux versions (continue et discrète) du modèle de Bergomi (cf. [7]), sans se réduire ni à l'une ni à l'autre. En effet, d'une part nous donnons une forme "explicite" des variances forward en termes de variable d'état (comme dans la version continue du modèle de Bergomi) et d'autre part, notre modèle se prête bien à la calibration, comme la version discrète du modèle de Bergomi. Plus précisément, nous pouvons exprimer les prix des futures et options sur VIX comme des espérances de fonctions déterministes d'une variable aléatoire gaussienne. Un des points forts de cette approche de modélisation est qu'elle offre deux niveaux de calibration. Dans la première étape, on calibre les paramètres qui génèrent la courbe de la variance forward pour fitter les futures sur VIX et la volatilité implicite de ses options.

En particulier, notre modèle reproduit les traits stylisés du skew de la volatilité implicite du VIX. À la deuxième étape, nous utilisons les paramètres qui résultent de la première étape et nous calibrons les coefficients de corrélation entre les facteurs et le mouvement brownien qui dirige la dynamique du sous-jacent (S&P500) pour contrôler la structure par terme du skew de l'indice. La première étape du problème de calibration est réduite à l'inversion de certaines fonctions monotones, grâce à la dépendance explicite des prix des futures et options sur VIX par rapport aux paramètres du modèles. La deuxième étape est effectuée en utilisant un algorithme d'optimisation efficace.

Le chapitre 3 est la suite logique du deuxième chapitre. Il est consacré aux problèmes liés à l'évaluation des options de type européen dans des modèles à volatilité stochastique de type multi-factoriels lognormal (comprenant le modèle présenté dans le chapitre 2, les modèles de Bergomi [6],[7] et le modèle de Scott [52]). Nous présentons une méthode d'approximation basée sur le développement de la solution de l'équation de Fokker-Planck par rapport à la volatilité de la volatilité. On obtient un développement à l'ordre 3 de la transformée de Fourier de la loi jointe du sous-jacent avec les facteurs guidant la variance instantanée par rapport au paramètre de la volatilité de la volatilité. On en déduit, par inversion de cette transformée de Fourier, un développement d'ordre 3 de la densité du sous-jacent par rapport au paramètre de la volatilité de la volatilité. Nous présentons aussi une méthode de réduction de variance de type "variable de contrôle" pour la simulation par la méthode de Monte-Carlo qui utilise l'approximation explicite que nous obtenons de la fonction de répartition de la loi du sous-jacent. L'idée est de construire, à partir de la formule d'approximation, un processus fortement corrélé avec les trajectoires du sous-jacent. Nous donnons une estimation du gain en variance en fonction de la volatilité de la volatilité.

## Deuxième partie

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude des propriétés de monotonie des prix d'options européennes par rapport aux paramètres du CIR dans le modèle de Heston.



Elle est divisée en deux chapitres.

Dans le premier chapitre (cf. chapitre 4), nous donnons quelques résultats généraux sur le CIR, défini comme solution de l'EDS

$$dV_t = (a - bV_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t, \quad V_0 = v, \quad (0.0.1)$$

avec  $a, \sigma, v \geq 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Nous donnerons d'abord, un résultat de grandes déviations sur le comportement asymptotique des queues de distribution d'une combinaison de type  $\lambda_1 V_t + \lambda_2 \int_0^t V_u du$ . Nous montrons que la fonction  $y \mapsto \mathbb{P}\left(\lambda_1 V_t + \lambda_2 \int_0^t V_u du > y\right)$  se comporte comme  $e^{-\mu^* y}$ , quand  $y$  tend vers  $+\infty$ , pour  $\lambda_2 > 0$  et  $\lambda_1 < \frac{2(2+bt)\lambda_2}{b^2 t}$ , où  $\mu^*$  est le moment "critique" d'explosion de l'exponentiel de  $\lambda_1 V_t + \lambda_2 \int_0^t V_u du$ . Nous étudions les dérivées de la solution de (0.0.1) par rapport aux paramètres  $(v_0, a, b, \sigma)$ , sous des conditions sur  $a$  et  $\sigma$ , qui varient d'un paramètre à l'autre. Ces dérivées sont données comme solutions d'équations différentielles stochastiques, qu'on résout pour obtenir des représentations de ces dérivées en fonction des trajectoires de  $V$ .

Le chapitre 5 est consacré à l'étude de la monotonie du prix d'un Put européen par rapport aux paramètres du CIR et à la corrélation dans le modèle de Heston. À l'aide d'un principe du maximum parabolique et en utilisant les résultats du chapitre 4 (la dérivabilité par rapport à  $a, b$  et  $v$ ), nous montrons que (sous la condition dite de Feller :  $2a \geq \sigma^2$ ) le prix du Put est strictement croissant par rapport à  $v$  et  $a$  et décroissant par rapport à  $b$ . Nous montrons ensuite que le paramètre  $\sigma$  joue le rôle de la volatilité si on prend la variance réalisée comme sous-jacent. En particulier, les prix d'options convexes sur la variance réalisée sont strictement croissants par rapport à  $\sigma$ . La dernière partie de ce chapitre est consacré à l'étude de la monotonie du prix du Put par rapport à la corrélation. Nous donnons d'abord, une représentation particulière de la dérivée de celui-ci par rapport à  $\rho$  qui nous permet de déterminer son signe, notamment pour les valeurs extrêmes de  $s$  ( $s$  très petit ou trop grand). Plus exactement, cette représentation nous permettra de montrer qu'il existe  $s_\rho^-(t, v) \leq s_\rho^+(t, v)$  tels que  $\frac{\partial P}{\partial \rho}(t, s, v)$  est positive pour  $s \leq s_\rho^-(t, v)$  et négative pour  $s \geq s_\rho^+(t, v)$ . Nous montrons que pour  $\rho = 0$ , on a  $K \leq s_0^-(t, v) \leq s_0^+(t, v) < +\infty$ , grâce notamment au comportement exponentiel des queues de

## TABLE DES MATIÈRES

---

distribution de la variance intégrée. Nous conjecturons que  $0 < s_\rho^-(t, v) \leq s_\rho^+(t, v) < +\infty$ , pour tout  $\rho \in ]-1, 1[$ . Nous étudions ensuite le comportement asymptotique en temps (en temps court-long) des points critiques  $s_\rho^\pm(t, v)$ . Nous montrons que pour  $t$  petit, la monotonie par rapport à  $\rho$  s'inverse autour de la monnaie (croissante pour  $s \leq K$  et décroissante pour  $s > K$ , ce qui veut dire que  $\lim_{t \rightarrow 0} s^\pm(t, v) = K$ ). Pour les longues maturités, nous montrons que le prix est une fonction croissante de  $\rho$ .

## Première partie

### Modélisation de la courbe de variance



# 1 Modélisation markovienne de la courbe de variance

## 1.1 Variance swap et courbe de variance forward

Un variance swap d'échéance  $T$  est un contrat qui verse la variance réalisée du logarithme du sous-jacent à  $T$  moins un strike appelé le taux du variance-swap  $V_0^T$ , déterminée de sorte que la valeur aujourd'hui du contrat soit égale à zéro.

La variance réalisée, annualisée, d'un sous-jacent  $S$  pour la période  $[0, T]$  avec jours ouvrables  $0 = t_0 < \dots < t_n = T$  est généralement définie comme

$$RV^{0,T} := \frac{d}{n} \sum_{i=1}^n \left( \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)^2$$

La constante  $d$  désigne le nombre de jours ouvrables par an et est généralement fixée à 252 de telle sorte que  $\frac{d}{n} \approx \frac{1}{T}$ .

On suppose que le marché est sans arbitrage et que les prix des instruments négociés sont représentés comme des espérances conditionnelles sous une probabilité  $\mathbb{Q}$ , où  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$  est un espace de probabilité complet muni d'une filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  vérifiant les conditions usuelles. Un résultat standard assure que si  $\sup_{i=1, \dots, n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$ , on a

$$\sum_{i=1}^n \left( \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)^2 \rightarrow \langle \log S \rangle_T \quad \text{en probabilité} \quad (1.1.1)$$

dans le cas où  $(S_t)_{t \geq 0}$  est une semi-martingale continue.

Approcher la variance réalisée par la variation quadratique du logarithme du sous-jacent fonctionne très bien pour les variance-swaps, mais il faut être prudent, dans la pratique, si l'on évalue des contrats à court terme, non-linéaires sur la variance réalisée. Dans ce qui suit, on suppose (cf. Bühler [11]) que les variance-swaps sont négociables pour

toutes les maturités et que leur prix est donné sous  $\mathbb{Q}$  par

$$V_t^T = \mathbb{E} \left( \langle \log S \rangle_T \middle| \mathcal{F}_t \right) \quad (1.1.2)$$

On se propose de construire un modèle prenant en compte l'information donnée par les prix des variance-swaps. Plus précisément, on s'attache à modéliser la structure par terme des variance-swaps en s'inspirant de l'approche de Heath Jarrow Morton pour la modélisation de la structure par terme des prix de zéro-coupons.

On suppose que  $T \mapsto V_t^T$  est suffisamment régulière, presque-sûrement, pour tout  $(t, T)$  dans un ensemble  $\mathcal{T} \subset \{0 < t \leq T < \infty\}$ . Dans ce cas, on peut définir la variance forward par

$$\xi_t^T := \partial_T V_t^T, \quad (t \leq T). \quad (1.1.3)$$

Notons que dans le cas où le sous-jacent  $S$  suit un processus de diffusion,  $dS = \mu S dt + \sqrt{\zeta_t} S dW_t$ , avec un processus de variance stochastique générale,  $\zeta$ , cette variance est donnée en fonction de la variance forward par  $\zeta_t = \xi_t^t$ .

**Définition 1.1.1** (Modèle factoriel pour la courbe de variance). *On dit que la courbe de variance forward est donnée par un modèle factoriel s'il existe un processus d'Itô  $Z$  à valeurs dans un ouvert  $D \subset \mathbb{R}^k$  et une fonction  $f^{(Z)}$  définie sur  $\mathcal{T} \times D$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tels que*

$$\xi_t^T = f^{(Z)}(t, T, Z_t). \quad (1.1.4)$$

*Le modèle est dit markovien, si  $Z$  est un processus de Markov. Le modèle est dit affine-markovien, si en plus l'application  $Z \mapsto f^{(Z)}(t, T, Z)$  est affine.*

La dépendance de  $\xi$  par rapport au mouvement brownien, dans un modèle factoriel, se fait uniquement par l'intermédiaire de  $Z$ . Les composantes de  $Z$  sont appelées les facteurs du modèle; elles engendrent la partie de l'état de l'économie qui se rapporte à la courbe de variance. La fonctionnelle  $f$  exprime cette dépendance "mathématiquement".

On suppose que la filtration  $\mathcal{F}$  est générée par un mouvement brownien  $N$ -dimensionnel  $W$ . Dans ce cas, comme le processus  $(\xi_t^T)_{t \leq T}$  est une martingale, il admet donc une

représentation sous la forme

$$\xi_t^T = \xi_0^T + \int_0^t \beta(s, T)^* dW_s, \quad (1.1.5)$$

où  $\beta(t, T)$  est un processus adapté, à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ . La structure par terme de ce modèle est complètement déterminée par sa dimension  $N$ , la courbe initiale de variance forward  $\xi_0^T$  et la volatilité de la variance forward  $\beta(t, T)$ . Ainsi, comme la courbe initiale de variance est complètement donnée par le marché, alors la connaissance de  $\beta$  équivaut à la connaissance de toute la courbe de variance forward.

Tout au long de cette section, on va utiliser la paramétrisation de Muziela (1993), basée sur le paramètre  $x = T - t$ . Avec cette paramétrisation, les quantités fondamentales sont les variances forward de référence  $v_t(x)$  définies par

$$v_t(x) := \xi_t^{t+x} \quad (1.1.6)$$

En utilisant (1.1.5), la dynamique de  $v_t(x)$  est donnée par

$$v_t(x) := \xi_0^{t+x} + \int_0^t \beta(s, t+x)^* dW_s \quad (1.1.7)$$

En différenciant cette égalité par rapport à  $t$ , on peut facilement vérifier que  $v_t(x)$  est solution de l'EDS définie par

$$dv_t(x) = \partial_x v_t(x) dt + \beta(t, t+x)^* dW_t \quad (1.1.8)$$

## 1.2 Analyse des modèles markoviens

Dans cette section nous présentons une approche de modélisation pour la courbe de variance forward, qui peut être vue comme l'analogue d'une classe de modèles de type HJM en théorie des taux d'intérêt, notamment les modèles de Chiarella et Kwon (2001b), Inui & Kijima (1998). Nous donnons des conditions nécessaires sur  $\beta$ , sous lesquelles la courbe admet une réalisation markovienne fini-dimensionnelle.

On suppose que la fonction de volatilité  $\beta$  vérifie les deux conditions suivantes :

**H1**  $\exists m \in \mathbb{N}$ ,  $x_1 < x_2, \dots < x_m \in \mathbb{R}_+$  Tels que  $\beta(t, T)$  est une fonction de  $t$ ,  $T$  et des  $m$ -variance forward de références  $v_t(x_1), v_t(x_2), \dots, v_t(x_m)$

i.e

$$\beta(t, T) = \beta(t, T, v_t(x_1), \dots, v_t(x_m)) \quad (1.2.1)$$

**H2** Pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,  $\beta_n(t, T)$  est différentiable par rapport à la deuxième variable (par rapport  $T$ ) et satisfait l'équation différentielle linéaire

$$\partial_T \beta_n(t, T) = -\kappa_n(T) \beta_n(t, T), \quad n \leq N, \quad t \leq T \quad (1.2.2)$$

et les  $\kappa_n$  sont des fonctions déterministes et, en général, sont positives.

Afin d'établir que le modèle satisfaisant les hypothèses [H1] et [H2] admet une réalisation markovienne finie-dimensionnelle, on doit identifier un nombre fini de variables d'états qui soit capable d'expliquer l'historique de toutes les trajectoires des browniens qui dirigent la courbe de variance. On note

$$\chi_{n,x}(t) := \int_0^t \beta_n(s, t+x) dW_{n,s} \quad (1.2.3)$$

**Théorème 1.2.1.** *On suppose que la volatilité de la variance forward  $\beta(t, T)$  satisfait les hypothèses [H1] et [H2]. Alors le modèle correspondant est markovien par rapport à l'ensemble*

$$\{v_t(x_k), \chi_{n,x_i}(t), \quad 1 \leq n \leq N, \quad 1 \leq i, k \leq m\} \quad (1.2.4)$$

**Preuve** Écrivons d'abord  $v_t(x)$  en fonction de ces variables  $\chi_{n,x}(t)$  :

$$v_t(x) = \xi_0^{t+x} + \underbrace{\sum_{n=1}^N \int_0^t \beta_n(s, t+x) dW_{n,s}}_{\chi_{n,x}(t)}$$

Sous l'hypothèse [H2], et en supposant en plus que les  $\kappa_i$  sont continues, on a par la théorie des équations différentielles ordinaires

$$\forall n \leq N, \quad \beta_n(t, T) = \sigma_n(T) c_n(t); \quad \sigma_n(T) := e^{-\int_0^T \kappa_n(u) du}. \quad (1.2.5)$$



D'où,

$$\chi_{n,x}(t) := \int_0^t \beta_n(s, t+x) dW_{n,s} = \int_0^t \sigma_n(t+x) c_n(s) dW_{n,s} = \sigma_n(t+x) \chi_{n,0}(t).$$

En particulier, pour tout  $x, y$  et  $n$  on a

$$\chi_{n,x}(t) = \frac{\sigma_n(t+x)}{\sigma_n(t+y)} \chi_{n,y}(t)$$

Maintenant, puisque  $v_t(x) = \xi_0^{t+x} + \sum_{n=1}^N \chi_{n,x}(t)$ , alors en choisissant un  $i$ , arbitrairement, entre 1 et  $m$ , on peut écrire  $v_t(x)$  sous la forme

$$v_t(x) = \xi_0^{t+x} + \sum_{n=1}^N \frac{\sigma_n(t+x)}{\sigma_n(t+x_i)} \chi_{n,x_i}(t) \quad (1.2.6)$$

Il reste à démontrer que l'ensemble des variables d'état est markovien : c'est à dire montrer que le vecteur

$$\chi := (v_t(x_1), \dots, v_t(x_m), \chi_{1,x_1}(t), \dots, \chi_{1,x_m}(t), \chi_{2,x_1}(t), \dots, \chi_{N,x_m}(t))^*$$

est markovien.

Pour tout  $k = 1, \dots, m$ , on a

$$dv_t(x_k) = \partial_x v_t(x_k) dt + \beta(t, t+x_k)^* dW_t$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \partial_x v_t(x_k) &= \partial_T \xi_0^{t+x_k} + \sum_{n=1}^N \int_0^t -\kappa_n(t+x_k) \beta_n(s, t+x_k) dW_{n,s} \\ &= \partial_T \xi_0^{t+x_k} - \sum_{n=1}^N \kappa_n(t+x_k) \chi_{n,x_k}(t) \\ &= h(t, x_k, \chi_{1,x_k}(t), \dots, \chi_{N,x_k}(t)) \end{aligned}$$

En utilisant en plus, l'hypothèse [H1], on a pour tout  $k = 1, \dots, m$

$$dv_t(x_k) = h(t, x_k, \chi_{1,x_k}(t), \dots, \chi_{N,x_k}(t)) dt + \beta(t, t+x_k, v_t(x_1), \dots, v_t(x_N))^* dW_t$$

Soient maintenant  $1 \leq n \leq N$  et  $1 \leq k \leq m$ . On a

$$\begin{aligned} d\chi_{n,x_k}(t) &= \left[ \int_0^t -\kappa_n(t+x_k) \beta_n(s, t+x_k) dW_{n,s} \right] dt + \beta_n(t, t+x_k) dW_{n,t} \\ &= -\kappa_n(t+x_k) \chi_{n,x_k} dt + \beta^n(t, t+x_k, v_t(x_1), \dots, v_t(x_N)) dW_{n,t} \end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur  $\chi$  est un processus markovien.

### 1.2.1 Exemple : Approche de H. Bühler

Dans cette section, nous illustrons le cadre général développé dans la section précédente avec un exemple particulier, celui du modèle "double mean reverting" pour la courbe de variance. Ce modèle a été proposé par Bühler dans [11]. Il s'agit d'un modèle affine markovien, où la variance forward est donnée par

$$\xi_t^T = G(Z_t, T - t), \quad (1.2.7)$$

où  $Z = (z_1, z_2, z_3)$  est un processus markovien à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  et  $G$  est donnée par

$$G(z; x) := z_3 x + (z_1 - z_3)e^{-\kappa x} + (z_2 - z_3) \begin{cases} \frac{\kappa}{\kappa - c}(e^{-cx} - e^{-\kappa x}), & \text{si } \kappa \neq c, \\ \kappa x e^{-\kappa x}, & \text{si } \kappa = c. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

On établit les notations  $Z_t = (Z_t^1 := \zeta_t; Z_t^2 := \theta_t; Z_t^3 := m_t)^*$ . Le processus  $Z$  est donné comme solution de l'EDS

$$\begin{cases} d\zeta_t = \kappa(\theta_t - \zeta_t)dt + \nu\zeta_t^{\alpha, \epsilon} d\hat{W}_t^\zeta, \\ d\theta_t = c(m_t - \theta_t)dt + \mu\theta_t^{\beta, \epsilon} d\hat{W}_t^\theta, \\ dm_t = \eta m_t^{\gamma, \bar{m}} d\hat{W}_t^m, \\ dX_t = \sqrt{\bar{\zeta}_t} dB_t, \end{cases}$$

où  $x^{y, \epsilon} := (x^+ + \epsilon)^y - \epsilon^y$

La courbe de variance forward en fonction de  $Z$  est donnée par

$$\xi_t^T := m_t(T - t) + (\zeta_t - m_t)e^{-\kappa(T-t)} + \frac{\kappa}{\kappa - c}(e^{-c(T-t)} - e^{-\kappa(T-t)})(\theta_t - m_t) \quad (1.2.9)$$

Ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$v_t(x) := m_t x + (\zeta_t - m_t)e^{-\kappa x} + \frac{\kappa}{\kappa - c}(e^{-cx} - e^{-\kappa x})(\theta_t - m_t) \quad (1.2.10)$$

Il s'agit donc bien d'une dépendance affine par rapport à  $Z$ . De plus, si on note  $\beta(t, T)$  la volatilité de  $\xi_t^T$ , alors  $\beta$  vérifie les condition [H1] et [H2]. Cela peut se voir en écrivant  $v$

sous la forme

$$v_t(x) = \sum_{n=1}^N \sigma_n(x) \psi_n(t), \quad (1.2.11)$$

où  $\sigma_1(u) := e^{-\kappa u}$ ,  $\sigma_2(u) := e^{-cu}$  et  $\sigma_3(u) := 1$  et les  $\psi_i$  sont données par

$$\begin{cases} \psi_t^1 := \zeta_t - \frac{\kappa}{\kappa-c} \theta_t + \frac{c}{\kappa-c} m_t \\ \psi_t^2 := \frac{\kappa}{\kappa-c} (\theta_t - m_t) \\ \psi_t^3 := m_t \end{cases}$$

Un des avantages de l'écriture de  $v_t(x)$  sous la forme (1.2.11) est que le prix du variance-swap est donné comme fonction affine des  $\psi_i$ . En effet, si on note

$$\mathbb{G}(Z_t, x) := \int_0^x v_t(u) du,$$

alors les prix des variances swap sont donnés en fonction de  $\mathbb{G}$  par

$$\mathbb{G}(Z_t; T-t) = V_t(T) - V_t(t). \quad (1.2.12)$$

En intégrant des deux cotés l'équation (1.2.11) entre 0 et T-t, on obtient

$$\mathbb{G}(Z_t, x) = \sum_{n=1}^3 \gamma_n(x) \psi_n(t), \quad (1.2.13)$$

où  $\gamma_n(x) := \int_0^x \sigma_n(u) du$ . i.e  $\gamma_1(x) := \frac{1-e^{-\kappa x}}{\kappa}$ ,  $\gamma_2(x) := \frac{1-e^{-cx}}{c}$  et  $\gamma_3(x) := x$

On en déduit que pour tout réels  $T_1, T_2, T_3$ , avec  $0 < T_1 < T_2 < T_3 \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix} = \Gamma(t, T_1, T_2, T_3)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{G}(Z_t, T_1 - t) \\ \mathbb{G}(Z_t, T_2 - t) \\ \mathbb{G}(Z_t, T_3 - t) \end{pmatrix}, \quad \forall t < T_1, \quad (1.2.14)$$

où

$$\Gamma(t, T_1, T_2, T_3) := \begin{pmatrix} \frac{1-e^{-\kappa(T_1-t)}}{\kappa} & \frac{1-e^{-c(T_1-t)}}{c} & T_1 - t \\ \frac{1-e^{-\kappa(T_2-t)}}{\kappa} & \frac{1-e^{-c(T_2-t)}}{c} & T_2 - t \\ \frac{1-e^{-\kappa(T_3-t)}}{\kappa} & \frac{1-e^{-c(T_3-t)}}{c} & T_3 - t \end{pmatrix}$$

Notons que cette matrice est inversible si et seulement si  $\kappa$  et  $c$  sont différents et non nuls.

D'autre part, on peut vérifier que

$$Z_t := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\kappa-c}{\kappa} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $Z$  est donné en fonction de  $V_t(T_i)$  par

$$Z_t := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\kappa-c}{\kappa} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma(t, T_1, T_2, T_3)^{-1} \begin{pmatrix} V_t(T_1) - V_t(t) \\ V_t(T_2) - V_t(t) \\ V_t(T_3) - V_t(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t < T_1$$

Ce qui veut dire qu'il existe une fonction  $f$ , telle que pour toute maturité fixée  $T > 0$ , et pour tous  $T_1, T_2, T_3$ , tq  $T < T_1 < T_2 < T_3$ , on a

$$Z_t = f(t, V_t(T_1), V_t(T_2), V_t(T_3), V_t(t)), \quad \forall t < T, \quad (1.2.15)$$

Plus généralement, on peut choisir un nombre quelconque de maturités  $T_1 < T_2 < \dots < T_m$ ;  $m > 3$  tels que  $T < T_{m-2} < T_{m-1} < T_m$  et dans ce cas on a

$$Z_t = f(t, V_t(T_{\varphi(t)}), V_t(T_{\varphi(t)+1}), V_t(T_{\varphi(t)+2}), V_t(t)), \quad \forall t < T,$$

où

$$\varphi(t) := \inf \{i \geq 1 : T_{i-1} \leq t < T_i\}.$$

On peut donc envisager des stratégies de couverture basées sur des ensembles de variance-swaps qui varient au cours du temps. Cela peut être appliqué à la couverture sur le marché construit à partir du stock  $S$  et l'ensemble des variance-swaps sur  $S$ , noté  $\mathbb{F}^{S,V}$ . On note  $\mathcal{F}^S$  la filtration naturelle de  $S$  et  $\mathcal{F}^V$  la filtration engendrée par tous les variance-swap disponibles sur le marché : c'est à dire

$$\mathcal{F}_t^V := \sigma\{V_u(T_1), \dots, V_u(T_m); u \leq t, m \in \mathbb{N}, 0 \leq T_1 < \dots < T_m < \infty\}$$

on note

$$\mathcal{F}^{S,V} := \mathcal{F}^S \vee \mathcal{F}^V$$

Alors ce marché est complet, dans le sens de [11], (cf. [11], chp 4). En particulier, si on considère un actif  $\mathbb{H} \equiv (S_T, Z_T, V_T(T)) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}^{S,V}; \mathbb{P})$  et si on pose

$$H_t := \mathbb{E}(\mathbb{H}(S_T, Z_T, V_T(T)) / \mathcal{F}_t^V),$$

alors, on a

$$\begin{aligned} H_t := h(t, S_t, Z_t, V_t(t)) &= h(t, S_t, f(t, V_t(T_1), V_t(T_2), V_t(T_3), V_t(t))) \\ &\quad \Delta(t, S_t, V_t(T_1), V_t(T_2), V_t(T_3)) \end{aligned}$$

On peut donc répliquer  $H$  par une stratégie sous la forme

$$H_T = H_0 + \int_0^T \partial_S \Delta(u) dS_u + \sum_{n=1}^3 \partial_{v^n} \Delta(u) dV_u(T_n)$$

### 1.2.2 Variables d'état et courbe de variance forward

Revenons maintenant au cadre général. La signification économique des variable d'états  $\chi_{n,x_k}$  introduites précédemment n'est pas tout à fait claire et il n'est pas immédiatement évident si elles sont exprimables en termes de quantités directement observées sur le marché. Le but principal de cette section est d'expliciter le lien entre les variables d'état et la courbe de variance forward pour un modèle vérifiant les hypothèses [H1] et [H2] de la section précédente. Tout d'abord, on rappelle qu'un modèle vérifiant ces hypothèses est Markovien par rapport à  $\chi_{n,x_k}$  et  $v_t(x_i)$ .

On commence par écrire  $\chi$  sous la forme

$$\chi_{n,x}(t) := \sigma_n(t+x)(\psi_n(t) - \psi_n(0)); \quad \psi_n(t) := \psi_n(0) + \int_0^t c_n(s)^* dW_{n,s} \quad (1.2.16)$$

Il s'agit maintenant d'exprimer le lien entre les  $\psi_n$  et la courbe forward de variance, puisqu'ils sont exprimables d'une façon explicite en fonction des  $\chi_{n,\cdot}$ . L'équation (1.2.6) donne la variance forward comme fonction affine des  $\psi_n$ , et ainsi les processus  $\psi_n$  peuvent être exprimés en fonction de la courbe de variance en inversant (1.2.6). Les détails de la procédure de cette inversion et les conditions suffisantes sous lesquelles cette inversion est possible sont données dans le reste de cette section.

Rappelons que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$v_t(x) = \xi_0^{t+x} + \sum_{n=1}^N \frac{\sigma_n(t+x)}{\sigma_n(t+x_i)} \chi_{n,x_i}(t) = \xi_0^{t+x} + \sum_{n=1}^N \sigma_n(t+x)(\psi_n(t) - \psi_n(0))$$

On suppose que la courbe aujourd'hui admet la paramétrisation

$$v(0, x) := \sum_{n=1}^N \sigma_n(x) \psi_n(0). \quad (1.2.17)$$

Dans ce cas,  $v_t(x)$  vérifie l'équation

$$v_t(x) = \sum_{n=1}^N \sigma_n(t+x) \psi_n(t). \quad (1.2.18)$$

**Proposition 1.2.1.** *Pour  $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}_+$ , on définit la matrice  $\Lambda(t, y_1, \dots, y_N)$  par*

$$\Lambda(t, y_1, \dots, y_N) := \begin{pmatrix} \sigma_1(t+y_1) & \dots & \sigma_N(t+y_1) \\ \sigma_1(t+y_2) & \dots & \sigma_N(t+y_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(t+y_N) & \dots & \sigma_N(t+y_N) \end{pmatrix} \quad (1.2.19)$$

*On suppose qu'il existe  $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}_+$  pour lesquels  $\det \Lambda(t, y_1, \dots, y_N) \neq 0$  pour tout  $t$ . Alors la variable d'état  $\chi_n$  peut s'écrire comme fonction affine des variances forward de référence  $v_t(y_1), \dots, v_t(y_N)$ .*

**Remarque 1.2.1.** En général, on prend les  $\kappa_n$  constants, et dans ce cas on a

$$\det \Lambda(t, y_1, \dots, y_N) = \left\{ \prod_{n=1}^N \sigma_n(t) \right\} \times \det \Lambda(0, y_1, \dots, y_N)$$

il suffira juste de trouver des  $y_i$  pour lesquels le  $\det \Lambda(0, y_1, \dots, y_N) \neq 0$  et ce sera le cas pour tout  $t$

**Preuve** En écrivant la formule (1.2.18) pour chacun des  $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}_+$ , on obtient

$$v_t(y_i) = \sum_{n=1}^N \sigma_n(t + y_i) \psi_n(t), \quad 1 \leq i \leq N$$

Ce qui donne le système

$$\begin{pmatrix} v_t(y_1) \\ v_t(y_2) \\ \vdots \\ v_t(y_N) \end{pmatrix} = \Lambda(t, y_1, \dots, y_N) \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix} = \Lambda(t, y_1, \dots, y_N)^{-1} \begin{pmatrix} v_t(y_1) \\ v_t(y_2) \\ \vdots \\ v_t(y_N) \end{pmatrix}$$

**Corollaire 1.2.1.** *Si les conditions de la proposition 1.2.1 sont satisfaites, alors la courbe de variance forward est affine par rapport à un nombre fini de variance forward de référence*

**Preuve** Il suffit d'écrire que

$$v_t(x) = \Lambda(t, x, x, \dots, x) \Lambda(t, y_1, \dots, y_N)^{-1} \begin{pmatrix} v_t(y_1) \\ v_t(y_2) \\ \vdots \\ v_t(y_N) \end{pmatrix}$$

Il en résulte que les variables d'état dans cette classe de modèles peuvent être exprimées comme fonction affine d'un nombre fini de variance forward. Maintenant, en utilisant les hypothèses [H1] et [H2], on peut montrer que les variances forward peuvent être exprimées en fonction d'un nombre fini de variance-swap. Ceci permet en particulier à ces modèles d'être affines par rapport à un nombre fini de variance-swap.

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . On définit

$$\mathbb{V}(t, x) := \frac{1}{x} \int_0^x v_t(u) du = \frac{V_t^{t+x} - V_t^t}{x}$$

: c'est le variance swap forward entre  $t$  et  $t + x$ . Par l'égalité (1.2.18), on a

$$\mathbb{V}(t, x) = \sum_{n=1}^N \gamma_n(t, x) \psi_n(t) \tag{1.2.20}$$

où

$$\gamma_n(t, x) := \frac{1}{x} \int_0^x \sigma_n(t+u) du, \quad n \leq N.$$

**Proposition 1.2.2.** *Pour tout  $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}_+$ , on définit la matrice  $\tilde{\Lambda}(t, y_1, \dots, y_N)$  par*

$$\tilde{\Lambda}(t, y_1, \dots, y_N) := \begin{pmatrix} \gamma_1(t, y_1) & \dots & \gamma_N(t, y_1) \\ \gamma_1(t, y_2) & \dots & \gamma_N(t, y_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1(t, y_N) & \dots & \gamma_N(t, y_N) \end{pmatrix} \tag{1.2.21}$$



On suppose qu'il existe  $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}_+$  pour lesquels  $\det \tilde{\Lambda}(t, y_1, \dots, y_N) \neq 0$ , pour tout  $t$ . Alors la variable d'état  $\chi_n$  peut s'écrire comme fonction affine des variances swap forward de référence  $\mathbb{V}(t, y_1), \dots, \mathbb{V}(t, y_N)$

**Remarque 1.2.2.** Comme nous l'avons évoqué dans une remarque précédente, si les  $\kappa_i$  sont constantes, ce qui est d'ailleurs le cas dans la plus part des modèles qu'on utilise en pratique, alors il suffit de trouver  $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}_+$  pour lesquels  $\det \tilde{\Lambda}(0, y_1, \dots, y_N) \neq 0$  et on aura le résultat pour tout  $t$ .

**Preuve** En utilisant les arguments de la preuve de la proposition 1.2.1, on obtient

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}(t, y_1, \dots, y_N)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{V}(t, y_1) \\ \mathbb{V}(t, y_2) \\ \vdots \\ \mathbb{V}(t, y_N) \end{pmatrix}, \quad \forall t \leq y_1$$

Soit maintenant  $T \leq y_1$ . Alors pour tout  $t \leq T$ , on a

$$V_t^T := V_t^t + (T - t)\mathbb{V}(t, T - t) = V_t(t) + (T - t) \sum_{n=1}^N \gamma_n(t, T - t)\psi_n(t)$$

Donc

$$V_t^T = V_t^T + (T - t)\tilde{\Lambda}(t, T - t, T - t, \dots, T - t)\tilde{\Lambda}(t, y_1, \dots, y_N)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{V}(t, y_1) \\ \mathbb{V}(t, y_2) \\ \vdots \\ \mathbb{V}(t, y_N) \end{pmatrix}.$$

## 1.3 Commentaires

Nous avons présenté un cadre général de la modélisation markovienne de la variance forward, illustré par le modèle de Bühler [11]. Nous avons vu que sous les deux hypothèses

[H1] et [H2], on se ramène à un cadre affine-markovien. Ce genre de modèle a l'avantage de simplifier la dépendance de la courbe de variance forward par rapport aux variables d'état, qui à leur tour peuvent être données en fonction des quantités directement observées sur le marché. L'hypothèse [H1] paraît parfaitement raisonnable, car les maturités pour lesquels les variance-swap sont négociés sont finies, il est donc naturel que la dépendance de  $\beta(t, T)$  par rapport à la maturité se fasse à travers un nombre fini de maturités. Il s'agit donc d'une façon bien réaliste pour modéliser la courbe de variance dans le cas où l'on s'intéresse aux produits qui ne dépendent que de la surface de variance forward. Cependant, la complication supplémentaire, dans le cadre de la modélisation de la variance forward, est que nous avons besoin de déduire la dynamique du prix de l'indice ou l'action dont la variance instantanée est le processus  $\xi_t^t$  (voir [11]). Dans ce contexte, la structure affine de la courbe de variance n'offre d'avantage par rapport aux modèles à volatilité stochastique classiques, d'autant plus qu'il n'existe pas de formules explicites pour l'évaluation des options sur variance, dont le pay-off est non-linéaire (par exemple les Calls sur variance réalisée, futures et options sur VIX).

Or, la motivation principale de la modélisation de la variance forward est d'avoir un moyen de contrôler la dépendance entre l'indice et sa "volatilité", en calibrant certains paramètres de la courbe de variance sur des produits dépendant directement de la volatilité et d'autres paramètres sur les options sur l'indice lui-même, pour être une mesure d'évaluer des produits très sensibles à la dynamique jointe du sous-jacent avec sa volatilité. Dans ce contexte, l'approche de Bergomi [5], [6], [7], apparaît plus pertinente que celle de Bühler, grâce notamment à la forme lognormale des variances forward dans ces modèles. Nous présenterons le modèle de Bergomi et ses avantages dans le chapitre suivant, où nous proposerons une modification de ce modèle qui est facilement "calibrable" aux futures et options sur VIX. Nous présenterons aussi dans le chapitre 3 une méthode d'approximation, très robuste, pour les options sur l'indice (sous-jacent) dans les modèles de type Bergomi.

# 2 Forward variance dynamics :

## Bergomi's model revisited

### Abstract

In this article, we propose an arbitrage-free modeling framework for the joint dynamics of forward variance along with the underlying index, which can be seen as a combination of the two approaches proposed by Bergomi. The difference between our modeling framework and the Bergomi models (2008), is mainly the ability to compute the prices of VIX futures and options by using semi-analytic formulas. Also, we can express the sensitivities of the prices of VIX futures and options with respect to the model parameters, which enables us to propose an efficient and easy calibration to the VIX futures and options. The calibrated model allows to Delta-hedge VIX options by trading in VIX futures, the corresponding hedge ratios can be computed analytically.<sup>1</sup>

**Keywords:** Variance-swap, forward variance, VIX, Options, Implied volatility, Hedging

### 2.1 Introduction

The fact that equity volatility is non-deterministic has been accepted since the '60s when Samuelson (1965) and Mandelbrot described the randomness of the variance of the distribution of the equity market. The randomness of the instantaneous variance of the stock price process is particularly important if we want to price and hedge heavily volatility-dependent exotic options such as options on realized variance or cliquet-type products. Such products cannot be priced correctly in the Black-Scholes model since their very risk lies in the movement of volatility (or variance, for that matter) itself.

---

<sup>1</sup>This research was supported in part by NATIXIS. I am grateful to M. Crouhy, A. Reghai and A. Ben Haj Yedder for their helpful advice and comments. Moreover, thanks to Damien Lambertson for many useful discussions.

In order to explain these empirical deviations from the Black-Scholes model, various attempts have been made in the literature. One way of addressing the problem would be to use the market prices of options and deduce the implied risk-neutral distribution. To this end, Dupire [22], [23], Derman and Kani [19], [18] have completely solved the problem of finding a one-factor diffusion which reproduces a continuum of market prices. Currently, these models are the most popular way of managing smile and skew risk. However, as pointed out by Hagan et al [35], the dynamic behavior of smiles and skews predicted by local volatility models is exactly opposite the behavior observed in the marketplace. This implies that the model makes predictions about the future which are not matched by past market experience. This contradiction between the model and the marketplace tends to destabilize the delta and vega hedges derived from local volatility models, and often these hedges perform worse than the naive Black-Scholes' hedges.

Some authors, such as Cox and Ross (CEV) or Bensoussan, Crouhy and Galai (BCG) introduce the concept of volatility that depends on the level of share price. The CEV models represent a class of stochastic volatility where the coefficient of correlation between the price of the underlying asset and its instantaneous volatility, is equal to 1.0, which allows asset prices and market smiles to move in the same direction. One stochastic volatility models which has gained great popularity with practitioners in particular is the so-called SABR model [35]. This model has the advantage that a closed-form (approximate) formula for the implied volatility is given. However, the SABR option pricing formula is obtained by using an approximation, and as such must be treated with caution.

Another class of option pricing models have been introduced, in which the instantaneous volatility itself follows a stochastic process. Heston's popular model [38] assumes that the instantaneous variance of the stock price is a square-root diffusion whose increments are correlated to the increments of the return of the stock price. In addition, there are also models which incorporate jump processes. The main drawback of stochastic volatility and jump models is that they lead per se to incomplete market models if only the stock and the cash bond are considered as tradable instruments.

To alleviate this problem in continuous models, a new stream of literature has deve-

veloped in the last few years. This innovative branch focuses on the identification of these extra sources of randomness in the option markets and therefore the need for one (or several) additional traded instrument to be able to hedge the resulting risk (completion of the market). However, it is not clear which traded instruments we have to choose to complete our market.

The most efficient approach has been to use volatility derivatives, which were first suggested by Brenner & Galai [9], [10]. These types of contracts were until recently restricted to over-the-counter (OTC) activities. However, the Chicago Board Options Exchange (CBOE) listed futures on the VIX in March 2004 and have with that begun developing a volatility derivative market by using the VIX as the underlying. European options on VIX were the next type of derivative the CBOE introduced in February 2006. The VIX, due to its definition in terms of prices of options on the S&P500 index, represents the market expectation of volatility, annualized, for the next 30 days. VIX futures and options are attractive to investors seeking exposure to the volatility of the S&P500, without taking a direct position in the index and with no need to Delta-Hedge their portfolio.

A new modeling approach, recently proposed by Bergomi [5], [6], [7] is one in which, instead of modeling “instantaneous” volatility, one starts by specifying the dynamics of the entire curve of (forward) variance as a random variable, just as HJM-type interest rate models start from the forward rate curve. The additional complication in the case of forward variance is that we do not only want to model the variance swap price process, but we need to derive the dynamics of a stock price process which is consistent with the modeled variance. Before describing our contribution, we will recall a few facts about variance modelling and Bergomi’s framework.

### 2.1.1 Variance Swaps and Forward Variance Curve

A variance swap with maturity  $T$  is a contract which pays out the realized variance of the logarithmic total returns up to  $T$  less a strike called the variance swap rate  $V_0^T$ , determined in such a way that the contract has zero value today.

The annualized realized variance of a stock price process  $S$  for the period  $[0, T]$  with

business days  $0 = t_0 < \dots < t_n = T$  is usually defined as

$$RV^{0,T} := \frac{d}{n} \sum_{i=1}^n \left( \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)^2.$$

The constant  $d$  denotes the number of trading days per year and is usually fixed to 252 so that  $\frac{d}{n} \approx \frac{1}{T}$ . We assume the market is arbitrage-free and prices of traded instruments are represented as conditional expectations with respect to an equivalent pricing measure  $\mathbb{Q}$ . A standard result gives that as  $\sup_{i=1, \dots, n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$ , we have

$$\sum_{i=1}^n \left( \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)^2 \rightarrow \langle \log S \rangle_T \quad \text{in probability} \quad (2.1.1)$$

when  $(S_t)_{t \geq 0}$  is a continuous semimartingale.

Approximating the realized variance by the quadratic variation of the log returns works very well for variance swaps, but care should be taken in practise if we price short dated non-linear payoffs on realized variance. Denote by  $V_t^T$ , the price at time  $t$  of a variance swap with maturity  $T < \infty$ . It is given under  $\mathbb{Q}$  by

$$V_t^T = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [RV^{0,T}] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [\langle \log S \rangle_T].$$

We define the forward variance curve  $(\xi^T)_{T \geq 0}$  as

$$\xi_t^T := \partial_T V_t^T, \quad T \geq t \geq 0.$$

Note that, if we assume that the S&PX index follows a diffusion process,  $dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$  with a general stochastic volatility process,  $\sigma$ , the forward variance is given by

$$\xi_t^T = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} (\sigma_T^2).$$

It can be seen as the forward instantaneous variance for date  $T$ , observed at  $t$ . In particular

$$\xi_t^t = \sigma_t^2, \quad \forall t \geq 0.$$

The current price of a variance swap,  $V_t^T$ , is given in terms of the forward variances as

$$V_t^T = \langle \log S \rangle_t + \int_t^T \xi_t^u du$$

The models used in practice are based on diffusion dynamics where forward variance curves are given as a functional of a finite-dimensional Markov-process :

$$\xi_t^T = G(T; t, Z_t), \quad (2.1.2)$$

where the function  $G$  and the  $m$ -dimensional Markov-process  $Z$  satisfy some consistency condition, which essentially ensures that for every fixed maturity  $T > 0$ , the forward variance  $(\xi_t^T)_{t \leq T}$  is a martingale.

### 2.1.2 Bergomi's model(s)

In two articles [6], [7] published in 2005 and 2008 in *Risk*, L. Bergomi proposed a new model based on the direct modelling of the forward variance curve. He proposed two versions of this model : a continuous and a discrete one. The discrete version can be seen as the analog of the LIBOR market model for volatility modeling, since it aimed to model forward variance swaps for a discrete tenor of maturities while the second one is Markovian and time homogeneous, where the volatilities of forward variance depend on time-to-maturity only.

Both models allow to match any specified term-structure of the at-the-money implied volatility skew for the short maturities, while being consistent with the market prices for variance swaps and fitting with a good approximation the at-the-money implied volatilities and the at-the-money skews. They also provide better control on the smile of forward variance by calibrating the VIX futures and smiles.

Denote by  $T_0 < T_1 < \dots < T_n$  the tenor structure of the VIX futures. The forward variance curve in the continuous version of the model is given by

$$\xi_t^T = \xi_0^T f^T(x_t^T, t) = \xi_0^T \left( (1 - \gamma_T) e^{\omega_T x_t^T - \frac{\omega_T^2}{2} \mathbb{E}(x_t^T)^2} + \gamma_T e^{\beta_T \omega_T x_t^T - \frac{\beta_T^2 \omega_T^2}{2} \mathbb{E}(x_t^T)^2} \right), \quad (2.1.3)$$

where

$$x_t^T := \sum_n \theta_n e^{-\kappa_n(T-t)} \int_0^t e^{-\kappa_n(t-s)} dW_s^n \quad (2.1.4)$$

The Brownian motions  $W^n$  are correlated with correlation coefficients  $\rho_{i,j}$ . The curves  $\gamma$ ,  $\beta$  and  $\omega$  are taken to be piece-wise constant over the interval  $[T_i, T_{i+1}[$ .

The main drawback for this model is the inability to express explicitly the prices of VIX futures and options in terms of the model parameters ( $\gamma$ ,  $\beta$  and  $\omega$ ). Therefore, the calibration of the model parameters to a set of market option prices becomes very difficult and sometimes impossible.

The forward variance, in the discrete version, is defined over the time interval  $[T_{i-1}, T_i[$  as

$$\xi_t^T = \xi_t^i = \xi_0^i f^i(t, x_t^{T_i}), \quad t \leq T \quad \text{and} \quad T \in [T_{i-1}, T_i[.$$

The calibration to the VIX smiles is exact and fully detailed in Bergomi (2008). However, the functional of the model,  $f^i(t, x_t^{T_i})$ , is not given in advance, but obtained after calibration on a finite number of points, which makes the use of the model difficult to price other types of products. Furthermore, conditionally to  $\mathcal{F}_{T_i}$ ,  $S$  is lognormal over  $[T_i, T_{i+1}[$  : the spot process in the discrete version follows the dynamics

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sqrt{\xi_{T_i}^{i+1}} dW \quad T_i \leq t < T_{i+1},$$

which does not allow much flexibility to match the market prices of the S&P options with 30-days maturity starting from  $T_i$ .

### 2.1.3 Our contribution

In this article, we propose an arbitrage-free modeling framework for the joint dynamics of the forward variance curve along with the underlying index, based on the modelling of the forward variance.

Our model combines features of the discrete and continuous versions of Bergomi's model, without being reduced to either of them. Indeed, as in (3.3.1), we have an explicit form of the forward variance in terms of the state variables. On the other hand, we have a piecewise constant dependence with respect to maturity, as in (2.1.4). This dependence with respect to maturity will allow us to express the VIX futures payoff as a deterministic function of a normal random variable (cf (2.2.3)).



One of the strengths of this modelling approach is that it provides two levels of calibration. In the first step, we calibrate the parameters that generate the forward variance curve to match the VIX futures and the implied volatility of its options. In particular, our model reproduces the stylised features of the skew of the implied volatility of VIX. At the second step, we use the resulting parameters, from the first step, and calibrate the correlation coefficients between the Brownian motion driving the stock price and the factors to control the term structure of the skew of the vanilla smiles. The first step of the calibration problem is reduced to the inversion of some monotonic functions, thanks to the explicit dependence of the prices of VIX futures and Puts with respect to the model parameters. The second step is performed by using an efficient minimization algorithm.

This paper is organized as follows : Section 2 presents a description of the model for the forward variance curve and the pricing of the VIX futures and options. In section 3, we specify the term structure of the curve  $\omega$  (The scale factor of the volatility of the forward variance). The specification of the model is reduced to three parameters for each tenor date and analytic formulas are derived for the prices of VIX futures and options in terms of these parameters. In section 4 we show how to calibrate the model parameters to fit the market prices of VIX futures and options. We also give numerical examples which demonstrate the performances of the model for calibration to market data. Section 5 shows the hedging of VIX options. We will show that any European option on VIX can be hedged by taking position on the VIX future, a variance swap, a Put on VIX and on the skew. The corresponding hedge ratio can be computed analytically. In section 6 we study the dynamics of the underlying asset and show how the model can be calibrated to fit implied volatility of the European options on the S&P index, near-the-money, and finally, we conclude in section 7.

## 2.2 A dynamic model for forward variance dynamics

In this section, we introduce the model which is designed to capture the market prices of volatility derivatives alongside the stock price. Our initial approach is very similar

to Bergomi's approach for the forward variance modeling. We will assume that a set of settlement dates is given

$$T_0 < T_1 < \dots < T_n < \dots$$

and referred to as the tenor structure (we use especially the tenor structure of the VIX futures, but it can be generalized to any tenor structure). Consider an underlying asset whose price  $S$  is modeled as a stochastic process  $(S_t)_{t \geq 0}$  on a filtered probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{Q})$ , where  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  represents the history of the market.

We first specify the dynamics of the forward variance using a log normal specification which allows analytical pricing of European-type VIX derivatives. The dynamics of the forward variance under  $\mathbb{Q}$  is assumed to be

$$\xi_t^T = \xi_0^T e^{\omega_T x_t^{T_i} - \frac{\omega_T^2}{2} \mathbb{E}(x_t^{T_i})^2}, \quad t \leq T \quad \text{and} \quad T \in ]T_{i-1}, T_i] \quad (2.2.1)$$

where  $x_t^T$  is defined by (2.1.4), and the initial values of forward  $\xi_0^T$  are inputs of the model, deduced from the curve of variance-swap prices.

The main difference between our modelling approach and Bergomi's continuous model (3.3.1), in addition to the piecewise dependence with respect to maturity, is that it gives the S&P index as a diffusion process with stochastic-lognormal volatility process, while in Bergomi's model, the variance process is given as a sum of two lognormal processes. However, our model does not reduce to Bergomi's model with  $\gamma_T = 0$ . Indeed, we will see that by choosing a specific parametrization  $\omega$ , we can reproduce the positive skew observed in the VIX options.

The number of factors introduced in this dynamics is the number of degrees of freedom that will be available to calibrate S&P's smiles, therefore a single-factor model would not be precise enough. On the other hand, the computation time in a Monte-Carlo method increases proportionally to the number of factors, therefore a two-factor model offers a good quality/time ratio. Anyway, all the following formulas do not depend on the number of factors.

The parameters of the dynamics (2.1.4),  $\kappa_i$ ,  $\theta_i$  and  $\rho_{i,j}$ , are chosen and will not be calibrated to market data, because they are not directly involved in the pricing of volatility

derivatives. We follow here the approach of Bergomi [7], where he proposes some parameter sets which can be chosen. For example, in the case of 2 factors, Bergomi proposed to set  $\frac{1}{\kappa_1}$  in the order of a few months, which corresponds to  $\kappa_1 \approx 8$ ,  $\frac{1}{\kappa_2}$  in the order of a few years :  $\kappa_2 \approx 0.3$ . The curve  $\omega$  is a deterministic function of  $T$ . It is a scale factor for the volatility of  $\xi$  and it allows to control the term structure of the volatility of volatility by calibrating VIX futures and options.

### 2.2.1 The VIX Index

The VIX Futures maturing at time  $T$  quotes the expected volatility for the next 30 days. So  $VIX^2$  represents 30-day S&P 500 variance swap rate, it is given under the risk neutral measure by

$$VIX_T = \sqrt{\mathbb{E}_T^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{\delta} RV^{T, T+\delta} \right]}, \quad (2.2.2)$$

where  $\delta = \frac{30}{365}$  and  $RV^{T, T+\delta} = RV^{0, T+\delta} - RV^{0, T}$ . In terms of the forward variance curve, the VIX is given by

$$VIX_T = \sqrt{\frac{1}{\delta} \int_T^{T+\delta} \xi_T^u du} = \sqrt{\frac{1}{\delta} \int_T^{T+\delta} \xi_0^u e^{\omega_u x_T^{\tau_u} - \frac{\omega_u^2}{2} \mathbb{E}(x_T^{\tau_u})^2} du},$$

where  $\tau_u = \sum_{i \geq 1} T_i \mathbb{1}_{u \in ]T_{i-1}, T_i]}$ . Note that  $T_{i+1} - T_i = \delta$

We are only interested in maturities on which VIX is traded. This corresponds to the special (typically useful) case where  $T = T_i$  for some  $i = 1, \dots, n$ . Denote by  $VIX_i := VIX_{T_i}$ . Assumed that  $\omega$  is Borel measurable and locally bounded. We have

$$VIX_i = \sqrt{\frac{1}{\delta} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \xi_0^u e^{\omega_u x_{T_i}^{T_{i+1}} - \frac{\omega_u^2}{2} \mathbb{E}(x_{T_i}^{T_{i+1}})^2} du} \equiv \sqrt{g_i(Z)}, \quad (2.2.3)$$

where  $Z$  has the standard normal distribution and the function  $g_i$  is defined as

$$g_i(z) = \frac{1}{\delta} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \xi_0^u e^{z \bar{\omega}_i(u) - \frac{\bar{\omega}_i^2(u)}{2}} du \quad (2.2.4)$$

and

$$\bar{\omega}_i(u) := \omega_u \sqrt{\mathbb{E}(x_{T_i}^{T_{i+1}})^2}. \quad (2.2.5)$$

### 2.2.2 Pricing VIX Futures and Options

In this section, we derive closed form expressions for the prices of the VIX futures and call options. By using (2.2.3), we can evaluate any given European-like claim on  $VIX_i$ , with pay-off function  $f$ , as

$$\mathbb{E}^Q f(VIX_i) = \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{g_i(x)}) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

We can also express the prices of VIX options in terms of Calls and Puts on  $VIX^2$ , by using the following useful representation, which is valid for any twice-differentiable function  $G$  and for any  $k \in \mathbb{R}^+$

$$G(X^2) = G(k) + G'(k)(X^2 - k) + \int_k^\infty G''(K)(X^2 - K)_+ dK + \int_0^k G''(K)(K - X^2)_+ dK$$

This gives in particular the price of Calls and Put on VIX in terms of Calls and Puts on  $VIX^2$ , by extending this formula to the functions  $x \mapsto (\sqrt{x} - k)_+$  and  $x \mapsto (k - \sqrt{x})_+$

$$\mathbb{E}(VIX_i - k)_+ = \frac{1}{2k} \mathbb{E}(VIX_i^2 - k^2)_+ - \int_{k^2}^\infty \frac{1}{4K\sqrt{K}} \mathbb{E}(VIX_i^2 - K)_+ dK \quad (2.2.6)$$

$$\mathbb{E}(k - VIX_i)_+ = \frac{1}{2k} \mathbb{E}(k^2 - VIX_i^2)_+ + \int_0^{k^2} \frac{1}{4K\sqrt{K}} \mathbb{E}(K - VIX_i^2)_+ dK \quad (2.2.7)$$

and by call-put parity, one can express the VIX future price in terms of calls and puts on  $VIX^2$ . For every  $k > 0$ , we have

$$\mathbb{E}(VIX_i) = \frac{k + \mathbb{E}VIX_i^2}{2\sqrt{k}} - \int_0^k \frac{\mathbb{E}(K - VIX_i^2)_+ dK}{4K\sqrt{K}} - \int_k^\infty \frac{\mathbb{E}(VIX_i^2 - K)_+ dK}{4K\sqrt{K}} \quad (2.2.8)$$

In particular, for  $k = \mathbb{E}VIX_i^2$ , we have

$$\mathbb{E}(VIX_i) = \sqrt{\mathbb{E}VIX_i^2} - \int_0^{\mathbb{E}VIX_i^2} \frac{\mathbb{E}(K - VIX_i^2)_+ dK}{4K\sqrt{K}} - \int_{\mathbb{E}VIX_i^2}^\infty \frac{\mathbb{E}(VIX_i^2 - K)_+ dK}{4K\sqrt{K}} \quad (2.2.9)$$

Note that  $\mathbb{E}VIX_i^2 = \frac{1}{\delta} \int_{T_i}^{T_i+1} \xi_0^u du$ .

Now, the price of Calls and Puts on  $VIX_i$  are given by the next proposition

**Proposition 2.2.1.** *If the function  $\bar{\omega}_i$  is positive, then for any nonnegative strike  $K$ , the price of a call on  $VIX_i^2$  with strike  $K$  is given by*

$$\mathbb{E}(VIX_i^2 - K)_+ = \frac{1}{\delta} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \xi_0^u N(-z_i^*(K) + \bar{\omega}_i(u)) du - KN(-z_i^*(K)) \quad (2.2.10)$$

and the price of a Put on  $VIX_i^2$  with strike  $K$  is given by

$$\mathbb{E}(K - VIX_i^2)_+ = KN(z_i^*(K)) - \frac{1}{\delta} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \xi_0^u N(z_i^*(K) - \bar{\omega}_i(u)) du \quad (2.2.11)$$

where  $N$  denotes the standard normal cumulative distribution function and  $z_i^*$  is defined as

$$z_i^*(K) = \inf \left\{ z \in \mathbb{R} \mid g_i(z) \geq K \right\} = g_i^{-1}(K)$$

## Proof

We can write

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(VIX_i^2 - K)_+ &= \mathbb{E}(g_i(Z) - K) \mathbf{1}_{g_i(Z) \geq K} \\ &= \int_{z_i^*(K)}^{\infty} (g_i(x) - K) \frac{e^{-x^2/2} dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \xi_0^u \int_{z_i^*(K)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2} + x\bar{\omega}_i(u) - \frac{\bar{\omega}_i^2(u)}{2}} dx}{\sqrt{2\pi}} du - KN(-z_i^*(K)) \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \xi_0^u N(-z_i^*(K) + \bar{\omega}_i(u)) du - KN(-z_i^*(K)) \quad \square \end{aligned}$$

## 2.3 Specifying $\bar{\omega}_i$

The prices of VIX futures and options depend only on the volatility of volatility specification controlled by the parameter  $\bar{\omega}_i$ . So every assumption made on the structure of  $\bar{\omega}_i$  gives a new modelling approach.

On the other hand, the VIX dynamics is given by

$$\begin{aligned} dVIX_t^2 &= \frac{\xi_t^{t+\delta} - \xi_t^t}{\delta} dt + \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} du \xi_0^u e^{\omega_u x_t^{\tau u} - \frac{1}{2} \omega_u^2 \mathbb{E}(x_t^{\tau u})^2} dx_t^{\tau u} \\ &= \frac{\xi_t^{t+\delta} - \xi_t^t}{\delta} dt + \sum_n \left[ \frac{\theta_n}{\delta} \int_t^{t+\delta} \xi_0^u e^{\omega_u x_t^{\tau u} - \frac{1}{2} \omega_u^2 \mathbb{E}(x_t^{\tau u})^2} e^{-\kappa_n(\tau u - t)} du \right] dW_t^n. \end{aligned}$$

It is easy to check that if the Brownian motions  $W^n$  are positively correlated, the volatility of  $VIX^2$  dynamics is stochastic and positively correlated with the VIX dynamics, for any form of  $\bar{\omega}_i$ . So by Durrleman [24] the model will generate the positive skew observed in the VIX options. Note that in the particular case where  $\bar{\omega}_i$  is constant, the VIX skew generated by the model will be equal to 0.

In this work, we assume that  $\bar{\omega}_i$  takes only two values within interval  $]T_i, T_{i+1}]$ . We will show that in addition to modeling the positive skew observed in the VIX options, we can calibrate, exactly, VIX future as well as "at least" one Put option by maturity.

The function  $\bar{\omega}_i$  is decreasing and does not take more than two values over the time interval  $]T_i, T_{i+1}]$ .

Denote by  $L_i$  the point where it changes its value. The curve  $\bar{\omega}_i$  can then be parametrized as follows :

$$\bar{\omega}_i(t) = \zeta_i \mathbf{1}_{t \in ]T_i, L_i]} + \beta_i \zeta_i \mathbf{1}_{t \in ]L_i, T_{i+1}]}. \quad (2.3.1)$$

where  $\beta_i \in [0, 1]$ .

Under this assumption,  $F^{i2}$  takes the form

$$VIX_i^2 = m_i \left[ (1 - \gamma_i) e^{\zeta_i Z_i - \frac{\zeta_i^2}{2}} + \gamma_i e^{\beta_i \zeta_i Z_i - \frac{\beta_i^2 \zeta_i^2}{2}} \right]$$

where  $m_i := \frac{1}{\delta} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \xi_0^u du$ ,  $\gamma_i = \frac{\frac{1}{\delta} \int_{L_i}^{T_{i+1}} \xi_0^u du}{m_i}$  and the random variable  $Z_i := \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(x_{T_i}^{T_{i+1}})^2}} x_{T_i}^{T_{i+1}}$  has the standard normal distribution.

The price of any VIX future contract is then given as a function of the triplet  $(\gamma_i, \beta_i, \zeta_i)$ . This is given as function of calls and puts on  $VIX_i^2$  by using proposition 2.2.11 and the equalities (2.2.6), (2.2.7) and (2.2.8). Noting that, with this special parametrization of the function  $\bar{\omega}_i$ , the price of call on  $VIX_i^2$  with strike K is given by

$$\mathbb{E}(VIX_i^2 - K)_+ = m_i [(1 - \gamma_i)N(-z_i^*(K) + \zeta_i) + \gamma_i N(-z_i^*(K) + \beta_i \zeta_i)] - KN(-z_i^*(K)) \quad (2.3.2)$$

and the price of put on  $VIX_i^2$  with strike K is given by

$$\mathbb{E}(K - VIX_i^2)_+ = KN(-z_i^*(K)) - m_i [(1 - \gamma_i)N(z_i^*(K) - \zeta_i) + \gamma_i N(z_i^*(K) - \beta_i \zeta_i)] \quad (2.3.3)$$

Prices of VIX futures and options are then given by explicit formulas in terms of parameters  $\gamma_i$ ,  $\beta_i$  and  $\zeta_i$ .

We will study the particular case of VIX future and Put prices. First, to simplify the notation, denote

$$V_i^{\gamma, \beta, \zeta} := m_i \left[ (1 - \gamma) e^{\zeta Z_i - \frac{\zeta^2}{2}} + \gamma e^{\beta \zeta Z_i - \frac{\beta^2 \zeta^2}{2}} \right],$$

for  $(\zeta, \beta, \gamma) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}^+$ . Also, let

$$F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = \mathbb{E} \sqrt{V_i^{\gamma, \beta, \zeta}} \quad \text{and} \quad p_k(\gamma, \beta, \zeta) = \mathbb{E}(k - \sqrt{V_i^{\gamma, \beta, \zeta}})_+,$$

the prices of VIX future and Put on VIX with strike  $k$  respectively.

The next result gives more information about the function giving the price of VIX future and put in terms of the parameters  $\gamma$ ,  $\beta$  and  $\zeta$ . The proof can be found in the appendix

**Proposition 2.3.1.** *The functions  $p_k$  and  $F_{VIX}$  are differentiable and their first partial derivatives are given by*

- $\partial_\zeta F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = - \int_0^\infty \frac{1}{4K\sqrt{K}} [m_i(1 - \gamma)N'(z_i^*(K) - \zeta) + m_i\gamma\beta N'(z_i^*(K) - \beta\zeta)] dK,$
- $\partial_\beta F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = -m_i\omega\gamma \int_0^\infty N'(z_i^*(K) - \beta\zeta) \frac{dK}{4K\sqrt{K}},$
- $\partial_\gamma F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = m_i \int_0^\infty [N(z_i^*(K) - \beta\zeta) - N(z_i^*(K) - \zeta)] \frac{dK}{4K\sqrt{K}},$
- $\partial_\zeta p_k(\gamma, \beta, \zeta) = -m_i(1 - \gamma) \int_{-\infty}^{z_i^*(k^2) - \zeta} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K+\zeta)}} - m_i\beta\gamma \int_{-\infty}^{z_i^*(k^2) - \beta\zeta} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K+\beta\zeta)}},$
- $\partial_\beta p_k(\gamma, \beta, \zeta) = -m_i\zeta\gamma \int_{-\infty}^{z_i^*(k^2) - \beta\zeta} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K+\beta\zeta)}},$
- $\partial_\gamma p_k(\gamma, \beta, \zeta) = m_i \int_{-\infty}^{z_i^*(k^2) - \zeta} \frac{N'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K+\zeta)}} - m_i \int_{-\infty}^{z_i^*(k^2) - \beta\omega} \frac{N'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K+\beta\omega)}}.$

In particular, we have

1.  $\partial_\omega F_{VIX}$  and  $\partial_\beta F_{VIX}$  are negative.
2.  $\partial_\gamma F_{VIX}$ ,  $\partial_\zeta p_k$  and  $\partial_\beta p_k$  are positive.
3. If  $k \leq \sqrt{m_i}$ , then  $\partial_\gamma p_k$  is negative.

## 2.4 Calibrating $\gamma$ , $\beta$ and $\zeta$

A model cannot be used in practise without a reliable and reasonably quick calibration scheme. We therefore describe here how the model can be calibrated using the "explicit dependence" between VIX futures and options prices and the model parameters  $\gamma$ ,  $\beta$  and  $\zeta$  for each maturity  $T_i$ , given by proposition 2.3.1.

### Data

Assume that we observe the Variance-Swap market prices for all maturities. We deduce the initial variance curve  $(\xi_0^T)_{T \geq 0}$  from the market prices of Variance-Swap.

Let us also assume that we observe the VIX future price and a series of Put options on VIX, for each maturity  $T_i$ . Obviously, we will not pretend to be able to calibrate VIX futures and all European options on VIX, nevertheless we will show that for each maturity we can calibrate "exactly" both VIX future price and one Put by leaving free the parameter  $\gamma$  along some interval. This parameter, left free, will serve to calibrate other options and/or to reproduce the VIX skew.

### Phase 1 : Calibrating VIX future

The hedging of VIX options is typically done with trading in VIX futures contracts, we want the model to reproduce the VIX futures prices for each maturity  $T_i$ .

Let's denote by  $F$  the market price of VIX future for some maturity  $T_i$  and denote by  $m = \frac{1}{T_{i+1}-T_i} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \xi_0^u du$ . Note that  $F$  and  $m$  must satisfy the following (no-arbitrage) condition :

$$F \leq \sqrt{m}.$$

The calibration problem of the VIX future is to find a triplet  $(\gamma, \beta, \zeta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}_+$  such that

$$F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = F.$$



In what follows, we will show that for every  $(\gamma, \zeta)$  belonging to some subset of  $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$ , there exists a unique  $\beta \in [0, 1]$ , such that  $F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = F$ .

By Proposition 2.3.1, we know that for  $(\gamma, \zeta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+$ , the function  $\beta \mapsto F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta)$  is continuous, decreasing over  $[0, 1]$ . It is then bijective from  $[0, 1]$  to  $[F_{VIX}(\gamma, \beta = 1, \zeta), F_{VIX}(\gamma, \beta = 0, \zeta)]$ . (Note that  $V^{\beta, 0, \zeta}$  and  $V^{\beta, 1, \zeta}$  are lognormales)

Now, it becomes clear that if the pair  $(\gamma, \zeta)$  is such that  $F_{VIX}(\gamma, 1, \zeta) \leq F$  and  $F_{VIX}(\gamma, 0, \zeta) \geq F$ , then there exists  $\beta \in [0, 1]$  such that  $F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = F$ .

So, for  $\gamma \geq 0$ , consider the function  $\zeta \mapsto F_{VIX}(\gamma, 0, \zeta)$ . From Proposition 2.3.1, we know that it is continuous and decreasing over  $\mathbb{R}^+$  satisfying  $F_{VIX}(\gamma, 0, \zeta = 0) = \sqrt{m\gamma}$  and  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} F_{VIX}(\gamma, 0, \zeta) = 0$ . It allows us to define the function

$$\bar{\zeta}_F : \gamma \in [0, \frac{F^2}{m}) \mapsto \bar{\zeta}_F(\gamma) := F_{VIX}(\gamma, 0, \cdot)^{-1}(F) \quad (2.4.1)$$

This function,  $\bar{\zeta}_F$ , is continuous, increasing over  $[0, \frac{F^2}{m})$  and satisfies

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_F(0) = \zeta_F, \\ \lim_{\gamma \rightarrow \frac{F^2}{m}} \bar{\zeta}_F(\gamma) = +\infty. \end{cases}$$

where

$$\zeta_F := 2\sqrt{\log\left(\frac{m}{F^2}\right)} \quad (2.4.2)$$

Denote

$$\Omega_F = \left\{ (\gamma, \zeta) \in [0, \frac{F^2}{m}) \times \mathbb{R}^+ \mid \zeta \in [\zeta_F, \bar{\zeta}_F(\gamma)] \right\}. \quad (2.4.3)$$

It is easy to check that for every  $(\gamma, \zeta) \in \Omega_F$ , we have  $F_{VIX}(\gamma, 1, \zeta) \leq F$  and  $F_{VIX}(\gamma, 0, \zeta) \geq F$ . This means that the mapping

$$\beta_F : (\gamma, \zeta) \in \Omega_F \mapsto \beta_F(\gamma, \zeta) := F_{VIX}(\gamma, \cdot, \zeta)^{-1}(F) \quad (2.4.4)$$

is well defined. In particular, for every  $(\gamma, \zeta) \in \Omega_F$ , we have  $F_{VIX}(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta), \zeta) = F$   $\square$

## Phase 2 : Calibrating VIX Put

As mentioned above, we choose to calibrate one Put option for each maturity  $T_i$ . Denote by  $P$  the market price of this option and by  $K_0$  its strike. Here we will try to find a family of pairs  $(\gamma, \zeta) \in \Omega_F$ , such that

$$p_{k_0}(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta), \zeta) = P.$$

The map  $(\gamma, \zeta) \mapsto p_{k_0}(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta), \zeta)$  is neither monotonic in  $\gamma$ , nor in  $\zeta$  because of  $\beta_F$ , then we cannot obtain its inverse easily. To address this problem, we proceed as follows.

By using proposition 2.3.1 and in the same way as before we can define

$$\bar{\zeta}_P : \gamma \in [0, \frac{(k_0 - P)^2}{m}) \mapsto \bar{\zeta}_P(\gamma) := p_{k_0}(\gamma, 0, \cdot)^{-1}(P) \quad (2.4.5)$$

In particular,  $\bar{\zeta}_P$  is continuous, increasing over  $[0, \frac{(P-k_0)^2}{m})$  and satisfies

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_P(0) = \zeta_P, \\ \lim_{\gamma \rightarrow \frac{(P-k_0)^2}{m}} \bar{\zeta}_P(\gamma) = +\infty. \end{cases}$$

where

$$\zeta_P = \sup \left\{ \zeta > 0; \mathbb{P}_{BS}(\sqrt{m}e^{-\frac{\zeta^2}{8}}, k_0, \frac{\zeta}{2}) \leq P \right\} \quad (2.4.6)$$

and

$$\mathbb{P}_{BS}(S, k, \sigma) = -SN \left( \frac{-\log(\frac{S}{k}) - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) + kN \left( \frac{-\log(\frac{S}{k}) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right).$$

Denote

$$\Omega_P = \left\{ (\gamma, \zeta) \in [0, \frac{(k_0 - P)^2}{m}) \times [\zeta_P, \bar{\zeta}_P(\gamma)] \right\} \vee \left\{ [\frac{(k_0 - P)^2}{m}, \frac{F^2}{m}) \times [\zeta_P, \infty) \right\}$$

We can define the map

$$\beta_P : (\gamma, \zeta) \in \Omega_P \mapsto \beta_P(\gamma, \zeta) := p_{k_0}(\gamma, \cdot, \zeta)^{-1}(P) \quad (2.4.7)$$

Now to solve the "double" calibration problem of the parameters  $\gamma$ ,  $\beta$  and  $\zeta$  to F and P, it suffices to find  $(\gamma, \zeta) \in \Omega_F \cap \Omega_P$  such that

$$\beta_F(\gamma, \zeta) = \beta_P(\gamma, \zeta).$$

The proof of the next theorem can be found in the appendix.

**Theorem 2.4.1.** *Assume  $\zeta_p \leq \zeta_F$  (where  $\zeta_p$  is defined by (2.4.6) and  $\zeta_F$  by (2.4.2)), then there exists  $\gamma^* < \frac{(k_0-P)^2}{m}$  such that for every  $\gamma \in [\gamma^*, \frac{F^2}{m})$ , there exists  $\zeta_\gamma = \zeta^*(\gamma, k_0, F, P) \geq 0$  such that  $\beta_F(\gamma, \zeta_\gamma) = \beta_P(\gamma, \zeta_\gamma)$ . Furthermore, the map  $\zeta^*$  is differentiable and its derivatives are given by*

- $\partial_\gamma \zeta^*(\gamma, k_0, F, P) = \frac{\partial_\gamma p_{k_0} \times \partial_\beta F_{VIX} - \partial_\beta p_{k_0} \times \partial_\gamma F_{VIX}}{\partial_\zeta F_{VIX} \times \partial_\beta p_{k_0} - \partial_\beta F_{VIX} \times \partial_\zeta p_{k_0}}(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta_\gamma), \zeta_\gamma),$
- $\partial_k \zeta^*(\gamma, k_0, F, P) = \frac{p_{k_0} \times \partial_\beta F_{VIX}}{\partial_\zeta F_{VIX} \times \partial_\beta p_{k_0} - \partial_\beta F_{VIX} \times \partial_\zeta p_{k_0}}(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta_\gamma), \zeta_\gamma),$
- $\partial_F \zeta^*(\gamma, k_0, F, P) = \frac{\partial_\beta p_{k_0}}{\partial_\zeta F_{VIX} \times \partial_\beta p_{k_0} - \partial_\beta F_{VIX} \times \partial_\zeta p_{k_0}}(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta_\gamma), \zeta_\gamma),$
- $\partial_P \zeta^*(\gamma, k_0, F, P) = \frac{-\partial_\beta F_{VIX}}{\partial_\zeta F_{VIX} \times \partial_\beta p_{k_0} - \partial_\beta F_{VIX} \times \partial_\zeta p_{k_0}}(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta_\gamma), \zeta_\gamma).$

**Remark 2.4.1.** With all market data that we have dealt with, the condition  $\zeta_p \leq \zeta_F$  is satisfied for  $k_0 = F$ . For general case, we note that

$$\zeta_p \leq \zeta_F \iff \sigma_{IMP}(k_0) \leq \frac{\zeta_P}{2} \iff \sigma_{IMP}(k_0) \leq \frac{\zeta_F}{2}$$

where  $\sigma_{IMP}(k) = \mathbb{P}_{BS}(F, k_0, \cdot)^{-1}(P)$ . Since "in practice", the implied volatility of VIX options are increasing with respect to the strike, then if  $k_0$  is such that  $\sigma_{IMP}(k_0) \leq \frac{\zeta_F}{2}$ , so the condition is still satisfied if  $k_0$  is replaced by  $k \leq k_0$ .

**Remark 2.4.2.** Thanks to the monotonicity properties of all the functions we have defined, the calculation of  $\gamma^*$  and  $\zeta_\gamma$  are made by using a "special" binary search algorithm. This algorithm will be detailed in the appendix ( see Remark 2.8.1).

### Phase 3 : Calibrating $\gamma$

We can do without this calibration step if we only want to fit the future price and the Put price by choosing any value of  $\gamma$  between  $\gamma^*$  and  $\frac{F^2}{m}$ . Noting that  $\frac{(k_0-P)^2}{m} \in [\gamma^*, \frac{F^2}{m})$ . Otherwise, we can calibrate the VIX skew or another Put option on VIX.

By proposition 2.4.1, we know that by choosing any value of  $\gamma$  in  $[\gamma^*, \frac{F^2}{m})$ , we can find a couple  $(\beta_\gamma, \zeta_\gamma)$  such that the model price of VIX future and Put on VIX with strike  $k_0$  coincides with their market prices. There is therefore a possibility to calibrate  $\gamma$  to match

another VIX future contract. Here we choose to calibrate with the aim to reproduce the skew of VIX at  $k_0$ . i.e the slope of the Put implied volatility of VIX at the point  $k_0$ .

In practice, the skew, at some point  $k$ , is measured as the difference of the implied volatilities of 95% and 105% strike. Now to compute the "skew" from the market data on VIX, we choose  $k_1$  : the nearest strike to  $k_0$ , on which the VIX put is available and we approximate the skew by the difference of the implied volatility of  $k_0$  and  $k_1$ .

This step of calibration reduces to finding  $\gamma$  such that

$$\partial_k p_{k_0}(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta_\gamma); \zeta_\gamma) = \frac{P_1 - P}{k_1 - k_0}.$$

The calibration is thus reduced to minimizing

$$\left\{ \left[ \frac{k_0^2}{m} - \left( (1 - \gamma) e^{\zeta_\gamma Z - \frac{1}{2} \zeta_\gamma^2} + \gamma e^{\zeta_\gamma \beta_F(\gamma, \zeta_\gamma) Z - \frac{1}{2} \zeta_\gamma^2 \beta_F(\gamma, \zeta_\gamma)^2} \right) \right]^2, \quad \gamma \in \left[ \gamma^*, \frac{F^2}{m} \right] \right\}$$

**Remark 2.4.3.** By differentiating the Black-Scholes formula giving the price of Put with strike  $k_0$  with respect to the strike, we can express  $\partial_k p_{k_0}$  in terms of the skew and the implied volatility of P at the point  $k_0$  as

$$\partial_k \mathbb{E}(K - \sqrt{V_i^{\gamma, \beta_P(\gamma, \zeta_\gamma), \zeta_\gamma}})_+ \Big|_{k=k_0} = N(-d_2) + \mathcal{S}_i \times k_0 \sqrt{T_i} N'(-d_2),$$

where  $d_2 = \frac{\log(\frac{F}{k_0}) - \frac{\sigma_{VIX}^2(k_0)}{2} T_i}{\sigma_{VIX}(k_0) \sqrt{T}}$  and  $\sigma_{VIX}(k_0)$  is the implied volatility of the Put on VIX with strike  $k_0$ . We can then synthesize  $\mathbb{E}_t \mathbf{1}_{k \geq VIX}$  by observing continuously the price of Put P, the future price of VIX and the skew.

To illustrate our model, we calibrate it to the VIX options data observed on November 2, 2010. Figure 1 shows that the the near-the-money implied volatilities of VIX. Note that the VIX futures prices are perfectly reproduced by the model. Furthermore, as mentioned in Remark 2.4.1, the calibration is done by using a "special" binary search algorithm. The computation time is of the order of a few seconds.

## 2.5 Hedging VIX options

We have seen in the previous sections, that, for each tenor date  $T_i$ , the price of VIX futures and options are given as a function of the parameters  $\gamma_i$ ,  $\beta_i$  and  $\zeta_i$ . Now, since

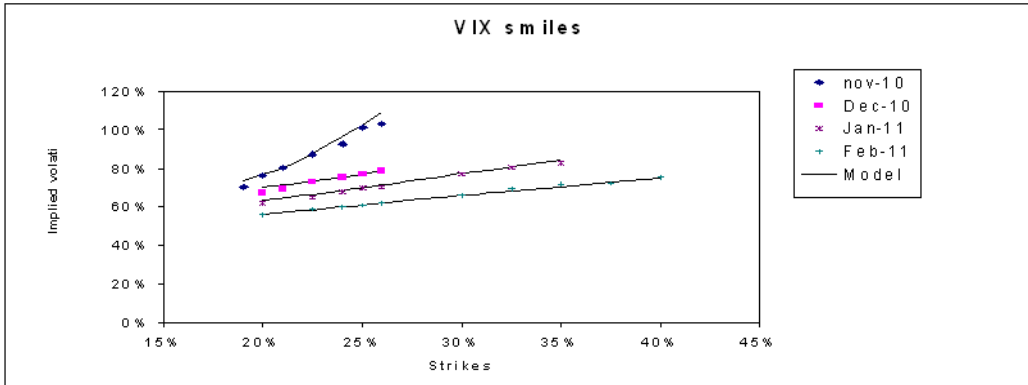


FIGURE 2.1 – Model v.s. Market VIX implied volatility smiles on November 2, 2010

those parameters are calibrated to fit VIX future price and one Put option (with strike  $k_0$ ) for each tenor date, we can hedge any "other" European contract in VIX futures by taking positions in the VIX future and the Put used for the calibration.

**Example :** Fix one maturity  $T = T_i$ , for some  $i \geq 1$ . Assume that until  $T$  we calibrate the model to VIX future price  $(F_t)_{t \leq T}$ , the put on VIX with strike  $(k_0 = k_0(F_t))$  and the skew of VIX at the point  $k_0$ . Consider the hedging strategies implied by this calibrated model for one Put option with strike  $k$ .

According to the previous sections, we know that the price of this options is given as

$$\mathbb{E}(k - VIX_T)_+ = p_k(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta_\gamma), \zeta_\gamma)$$

This option can be hedged by trading, continuously in F, P, D and M. Where  $D_t := \mathbb{E}_t \mathbf{1}_{k_0 \geq VIX_T}$  and  $M_t = \mathbb{E}_t VIX_T^2$ . The hedging strategy is given by the next result

**Theorem 2.5.1.** *For  $t \leq T$ , we have*

$$d[\mathbb{E}_t(k - VIX_T)_+] = \Delta_F(t) \times dF_t + \Delta_P(t) \times dP_t + \Delta_S(t) \times dD_t + \Delta_m \times dM_t \quad (2.5.1)$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_F = \frac{1}{\partial_\beta F_{VIX}} + \partial_F \gamma \left[ \partial_\gamma p_k - \partial_\beta p_k \frac{\partial_\gamma F_{VIX}}{\partial_\beta F_{VIX}} \right] + \Gamma^F \times \left[ \partial_\zeta p_k - \partial_\beta p_k \frac{\partial_\zeta F_{VIX}}{\partial_\beta F_{VIX}} \right], \\ \Delta_P = \partial_P \gamma \left[ \partial_\gamma p_k - \partial_\beta p_k \frac{\partial_\gamma F_{VIX}}{\partial_\beta F_{VIX}} \right] + \Gamma^P \times \left[ \partial_\zeta p_k - \partial_\beta p_k \frac{\partial_\zeta F_{VIX}}{\partial_\beta F_{VIX}} \right], \\ \Delta_S = \frac{\partial_\gamma p_{k_0} + \partial_\gamma \zeta^* \left( \partial_\zeta p_{k_0} - \frac{\partial_\zeta p_{k_0}}{\partial_\beta p_{k_0}} \partial_\beta p_{k_0} \right)}{\partial_{k\gamma} p_{k_0} + \partial_\gamma \zeta^* \left( \partial_{k\zeta} p_{k_0} - \frac{\partial_\zeta p_{k_0}}{\partial_\beta p_{k_0}} \partial_{k\beta} p_{k_0} \right)}, \\ \Delta_m = \frac{p_k - k \partial_k p_k - F \Delta_F - P \Delta_P - k_0 \Delta_{k_0}}{2M_t}. \end{array} \right.$$

With

$$\begin{aligned} \Gamma^F &= \frac{\partial_\beta p_{k_0} + \partial_F \gamma \times (\partial_\gamma p_{k_0} \times \partial_\beta F_{VIX} - \partial_\beta p_{k_0} \times \partial_\gamma F_{VIX}) + k'_0 \partial_k p_{k_0} \times \partial_\beta F_{VIX}}{\partial_\zeta F_{VIX} \times \partial_\beta p_{k_0} - \partial_\beta F_{VIX} \times \partial_\zeta p_{k_0}}, \\ \Gamma^P &= \frac{\partial_\beta F_{VIX} + \partial_F \gamma \times (\partial_\gamma F_{VIX} \times \partial_\beta p_{k_0} - \partial_\beta F_{VIX} \times \partial_\gamma p_{k_0})}{\partial_\zeta p_{k_0} \times \partial_\beta F_{VIX} - \partial_\beta p_{k_0} \times \partial_\zeta F_{VIX}}, \\ \Delta_{k_0} &= \partial_{k_0} \gamma \left[ \partial_\gamma p_k - \partial_\beta p_k \frac{\partial_\gamma F_{VIX}}{\partial_\beta F_{VIX}} \right] + \partial_{k_0} \zeta^* \left[ \partial_\zeta p_k - \partial_\beta p_k \frac{\partial_\zeta F_{VIX}}{\partial_\beta F_{VIX}} \right]. \end{aligned}$$

And the derivatives of  $\gamma$  with respect to  $F$  and  $P$  are directly derived from

$$\begin{aligned} \partial_{kk} p_{k_0} + \partial_{k_0} \gamma \left[ \partial_{k\gamma} p_{k_0} - \frac{\partial_\gamma p_{k_0}}{\partial_\beta p_{k_0}} \partial_{k\beta} p_{k_0} \right] + \partial_{k_0} \zeta^* \left[ \partial_{k\zeta} p_{k_0} - \frac{\partial_\zeta p_{k_0}}{\partial_\beta p_{k_0}} \partial_{k\beta} p_{k_0} \right] &= 0. \\ k'(F) \partial_{kk} p_{k_0} + \partial_F \gamma \left[ \partial_{k\gamma} p_{k_0} - \frac{\partial_\gamma p_{k_0}}{\partial_\beta p_{k_0}} \partial_{k\beta} p_{k_0} \right] + \Gamma^F \times \left[ \partial_{k\zeta} p_{k_0} - \frac{\partial_\zeta p_{k_0}}{\partial_\beta p_{k_0}} \partial_{k\beta} p_{k_0} \right] &= 0. \end{aligned}$$

and

$$\partial_P \gamma \left[ \partial_{k\gamma} p_{k_0} - \frac{\partial_\gamma F_{VIX}}{\partial_\beta F_{VIX}} \partial_{k\beta} p_{k_0} \right] + \Gamma^P \times \left[ \partial_{k\zeta} p_{k_0} - \frac{\partial_\zeta F_{VIX}}{\partial_\beta F_{VIX}} \partial_{k\beta} p_{k_0} \right] = 0.$$

Here  $\beta_F$  is evaluated in  $(\gamma_t, \zeta_{\gamma_t}^*)$  and the derivatives of  $p_k$  and  $F_{VIX}$  are evaluated in  $(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta^*), \zeta^*)$ .

**Remark 2.5.1.** More generally, any claim on a function  $G(VIX)$ , where  $G$  is given as difference of convex functions, can be synthesized using VIX puts and calls at all strikes by the so-called Carr-formula as

$$G(VIX) = G(k) + G'(k)(VIX - k) + \int_k^\infty G''(K)(VIX - K)_+ dK + \int_0^k G''(K)(K - VIX)_+ dK$$

Then, there exist  $g$  and  $\psi$  such that

$$\mathbb{E}G(VIX) = g(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta_\gamma), \zeta_\gamma) = \psi(F, P)$$

## 2.6 The dynamics of the underlying asset

Until now, we have only addressed issues concerning the modelling of the forward variance curve. But, once the dynamics of forward variance has been specified, we obtain the (risk neutral) dynamics of the underlying asset  $(S_t)_{t \geq 0}$  as

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{\xi_t^t} dW_t^S, \quad (2.6.1)$$

where  $r$  is the annualized risk-free interest rate and  $\xi_t^t$  is given by (2.2.1) as

$$\xi_t^t = \xi_0^t e^{\omega_t x_t^{T_i} - \frac{\omega_t^2}{2} \mathbb{E}(x_t^{T_i})^2}, \quad t \in ]T_{i-1}, T_i]$$

and for  $t \leq T$ ,  $x_t^T$  is defined in (2.1.4) as

$$x_t^T = \sum_n \theta_n e^{-\kappa_n(T-t)} \int_0^t e^{-\kappa_n(t-s)} dW_s^n$$

The Brownian motion  $W^S$  is correlated with the factors  $X^n$ , denote by  $\rho_n^S = \frac{d(W^S, X^n)_t}{dt}$ . The number of factors has been discussed in the beginning of this work, it corresponds to the number of degrees of freedom that will be available to fit many different smile shapes.

### Fast calibration of the implied volatility near-the-money

The first step of the calibration is the choice of a method for fitting the implied volatility curve as a function of the level of log-moneyness. We opt for a quadratic polynomial, such that

$$\sigma^2(k, T) = \sigma_0^2(T) + a_1(T)k + a_2(T)k^2 + a_3(T)k^3 \quad (2.6.2)$$

In particular (*cf* p. 140 in Gatheral (2003)) we have

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi_0^u du = \mathbb{E} \frac{1}{T} \int_0^T \xi_u^u du = \int_{-\infty}^{\infty} N'(z) \sigma^2(z) dz = \sigma_0^2(T) + a_2(T)$$

Noting that  $\sigma_0$  is the at-the-money and  $\alpha$  is the slope of the implied variance at-the-money, it is given in terms of the at-the-money skews by

$$a_1 = 2\sigma_0 \mathcal{S}(T).$$

By Backus, Foresi and Wu (1997), the at-the-money forward skews for maturity  $T$ ,  $\mathcal{S}(0, T)$  can be computed by evaluating the skewness of  $x_T = \ln(\frac{S_T}{F_T})$  and using the approximation

$$\mathcal{S}(T) = \frac{s_T}{6\sqrt{T}},$$

where  $F_T$  is the forward price and  $s_T$  is given by  $s_T = \frac{M_3^T}{(M_2^T)^{\frac{3}{2}}}$  where  $M_i^T = \mathbb{E}(x_T - \mathbb{E}x_T)^i$ . Now by Bergomi (2009), at first order in the volatility of volatility, we have

$$M_2^T = \int_0^T \xi_0^t dt \quad \text{and} \quad M_3^T = 3 \sum_n \rho_n^S \theta_n \int_0^T dt \xi_0^t \int_0^t \omega_u e^{-\kappa_n(\tau_u - u)} du$$

where  $\tau_u = \sum_{i \geq 1} T_i \mathbb{1}_{u \in ]T_{i-1}, T_i]}$ . Thus,

$$\mathcal{S}(T) = \sum_n I_n \rho_n^S$$

where

$$I_n = \frac{3\theta_n \int_0^T dt \xi_0^t \int_0^t \omega_u e^{-\kappa_n(\tau_u - u)} du}{6\sqrt{T} (\int_0^T \xi_0^t dt)^{\frac{3}{2}}}$$

Finally, we can specify the correlations  $\rho_n^S$  to match the specified skew and to calibrate the ATM implied volatility  $\sigma_0$  ( we need at least two factors) and if we have more than 2 factors, we can calibrate the parameter  $a_3$ .

## 2.7 Conclusion

We have presented a new model for the joint dynamics of the forward variance curve along with the underlying index, which can be made consistent with both the market prices of the VIX futures and options, and options on the S&P500 index. This model leads to a tractable pricing framework for VIX futures and options, where the prices of such instruments are given by analytical formulas.

We demonstrate how the calibration of the model to VIX futures and options is reduced to a binary search algorithms. This tractability feature distinguishes our model from previous attempts [6], [7] which only allow for full Monte Carlo pricing of VIX options and calibration with a least-square minimisation. The model allows also to Hedge VIX



options by trading on VIX future and one Put option (typically ATM Put), where the corresponding hedge ratio can be computed explicitly.

This model allows also to control the term structure the forward skew of the at-the-money implied volatility as well as the implied volatility near the money of the S&P index. It can therefore be useful in pricing path-dependent options that are sensitive to the forward smiles, such as Cliquet or forward start options, as well as volatility derivatives, since it is consistent with the variance swap curve.

## 2.8 Some proofs

### 2.8.1 Proof of proposition 2.3.1

By using (2.2.10) and (2.2.11), we can easily verify that for every  $(\gamma, \beta, \zeta) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}^+$ , we have

- $\partial_\zeta \mathbb{E}(K - V_i^{\gamma, \beta, \zeta})_+ = m_i(1 - \gamma)N'(z_i^*(K) - \zeta) + m_i\gamma\beta N'(z_i^*(K) - \beta\zeta) > 0,$
- $\partial_\beta \mathbb{E}(K - V_i^{\gamma, \beta, \zeta})_+ = m_i\zeta\gamma N'(z_i^*(K) - \beta\zeta) > 0,$
- $\partial_\gamma \mathbb{E}(K - V_i^{\gamma, \beta, \zeta})_+ = m_i(N(z_i^*(K) - \zeta) - N(z_i^*(K) - \beta\zeta)) < 0.$

Now by using (2.2.7) and by performing an integration by parts of the integral part of (2.2.7), we obtain the partial derivatives of  $p_k$  as

- $\partial_\zeta p_k(\gamma, \beta, \zeta) = -m_i(1 - \gamma) \int_0^{k^2} \partial_K z_i^*(K)(z_i^*(K) - \zeta)N'(z_i^*(K) - \zeta) \frac{dK}{2\sqrt{K}} - m_i\gamma\beta \int_0^{k^2} \partial_K z_i^*(K)(z_i^*(K) - \beta\zeta)N'(z_i^*(K) - \beta\zeta) \frac{dK}{2\sqrt{K}},$
- $\partial_\beta p_k(\gamma, \beta, \zeta) = -m_i\zeta\gamma \int_0^{k^2} \partial_K z_i^*(K)(z_i^*(K) - \beta\zeta)N'(z_i^*(K) - \beta\zeta) \frac{dK}{2\sqrt{K}},$
- $\partial_\gamma p_k(\gamma, \beta, \zeta) = m_i \int_0^{k^2} \partial_K z_i^*(K)(N'(z_i^*(K) - \zeta) - N'(z_i^*(K) - \beta\zeta)) \frac{dK}{2\sqrt{K}}.$

We obtain the results of the theorem by an appropriate change of variables. The partial derivatives of  $F_{VIX}$  can be found in the same way as for  $p_k$ . They are given by

- $\partial_\zeta F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = - \int_0^\infty \frac{1}{4K\sqrt{K}} [m_i(1 - \gamma)N'(z_i^*(K) - \zeta) + m_i\gamma\beta N'(z_i^*(K) - \beta\zeta)] dK,$

- $\partial_\beta F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = -m_i \zeta \gamma \int_0^\infty N'(z_i^*(K) - \beta \zeta) \frac{dK}{4K\sqrt{K}}$ ,
- $\partial_\gamma F_{VIX}(\gamma, \beta, \zeta) = m_i \int_0^\infty [N(z_i^*(K) - \beta \zeta) - N(z_i^*(K) - \zeta)] \frac{dK}{4K\sqrt{K}}$ .

Consider the derivative of  $p_k$  with respect to  $\beta$ . It is given by

$$\partial_\beta p_k(\gamma, \beta, \zeta) = -m_i \zeta \gamma \int_{-\infty}^{z_i^*(k^2) - \beta \zeta} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \zeta)}}.$$

- **If**  $z_i^*(k^2) - \beta \zeta \leq 0$ , then  $\partial_\beta p_k(\gamma, \beta, \zeta) \geq 0$ .
- **If**  $z_i^*(k^2) - \beta \zeta > 0$ , we decompose  $\partial_\beta p_k(\gamma, \beta, \zeta)$  as follows

$$\partial_\beta p_k(\gamma, \beta, \zeta) = m_i \zeta \gamma \left[ - \int_{-\infty}^{-z_i^*(k^2) + \beta \zeta} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \zeta)}} - \int_{-z_i^*(k^2) + \beta \zeta}^{z_i^*(k^2) - \beta \zeta} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \zeta)}} \right]$$

Since  $z_i^*(k^2) - \beta \zeta > 0$ , so that  $-\int_{-\infty}^{-z_i^*(k^2) + \beta \zeta} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \zeta)}} \geq 0$ . It follows

$$\partial_\beta p_k(\gamma, \beta, \zeta) \geq -m_i \zeta \gamma \int_{-z_i^*(k^2) + \beta \zeta}^{z_i^*(k^2) - \beta \zeta} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \zeta)}}.$$

On the other hand, we can decompose this integral as follows

$$\int_{-z_i^*(k^2) + \beta \omega}^{z_i^*(k^2) - \beta \omega} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \omega)}} = \int_{-z_i^*(k^2) + \beta \omega}^0 \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \omega)}} + \int_0^{z_i^*(k^2) - \beta \omega} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \omega)}}.$$

Since  $g_i$  is increasing, we have  $\frac{1}{\sqrt{g_i(K + \beta \zeta)}} \leq \frac{1}{\sqrt{g_i(-K + \beta \zeta)}}$ ,  $\forall K \geq 0$ , so that

$$\int_0^{z_i^*(k^2) - \beta \zeta} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \zeta)}} \leq - \int_{-z_i^*(k^2) + \beta \zeta}^0 \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \zeta)}}$$

Thus

$$\int_{-z_i^*(k^2) + \beta \omega}^{z_i^*(k^2) - \beta \omega} \frac{KN'(K)dK}{2\sqrt{g_i(K + \beta \omega)}} \leq 0.$$

Hence  $\partial_\beta p_k(\gamma, \beta, \zeta) \geq 0$ .

In the same way, we can show that  $\partial_\zeta p_k(\gamma, \beta, \zeta) \geq 0$ .

Consider the derivative of  $p_k$  with respect to  $\gamma$ . It is given by

$$\partial_\gamma p_k(\gamma, \beta, \zeta) = m_i \int_0^{k^2} \partial_K z_i^*(K) (N'(z_i^*(K) - \zeta) - N'(z_i^*(K) - \beta \zeta)) \frac{dK}{2\sqrt{K}}$$

It is easy to check that, on  $[0, k^2]$ ,  $N'(z_i^*(K) - \zeta) - N'(z_i^*(K) - \beta\zeta) \leq 0$  if and only if

$$(z_i^*(K) - \zeta)^2 \geq (z_i^*(K) - \beta\zeta)^2.$$

which is equivalent to

$$z_i^*(K) \leq \frac{\zeta(1 + \beta)}{2} \iff K \leq g_i \left( \frac{\zeta(1 + \beta)}{2} \right) = m_i e^{\frac{\zeta^2 \beta^2}{2}}.$$

In particular, if  $k \leq \sqrt{m_i}$ , we have  $\partial_\gamma p_k(\gamma, \beta, \zeta) \leq 0$ .

### 2.8.2 Proof of theorem 2.4.1 and theorem 2.5.1

**Lemma 2.8.1.** *The mapping  $\beta_P$  is continuous over  $\Omega_P$ . Furthermore, for  $\gamma \in [0, \frac{(P-k_0)^2}{m}]$  the function  $\zeta \mapsto \beta_P(\gamma, \zeta)$  is decreasing and continuously differentiable over  $(\zeta_P, \bar{\zeta}_P(\gamma))$  such that  $\beta_P(\zeta_P) = 1$ ,  $\beta_P(\bar{\zeta}_P(\gamma)) = 0$  and for  $\zeta \in (\zeta_P, \bar{\zeta}_P(\gamma))$ , we have*

$$\partial_\zeta \beta_P(\gamma, \zeta) = - \frac{\partial_\zeta p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta), \zeta)}{\partial_\beta p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta), \zeta)} \quad (2.8.1)$$

Also, for  $\zeta \in (\zeta_P, \bar{\zeta}_P(\gamma))$ , the function  $\gamma \mapsto \beta_P(\gamma, \zeta)$  is increasing and continuously differentiable over  $(0, \frac{(P-k_0)^2}{m})$  such that

$$\partial_\gamma \beta_P(\gamma, \zeta) = - \frac{\partial_\gamma p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta), \zeta)}{\partial_\beta p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta), \zeta)} \quad (2.8.2)$$

### Proof

Let  $(\gamma, \zeta_1), (\gamma, \zeta_2) \in \Omega_P$  such that  $\zeta_1 < \zeta_2$ , then by definition of  $\beta_P$ , we have

$$p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\gamma, \zeta_2), \zeta_2) = P = p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\gamma, \zeta_1), \zeta_1)$$

On the other hand, by proposition 2.3.1, we know that for  $(\gamma, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , the function  $\zeta \mapsto p_{k_0}(\gamma, \beta, \zeta)$  is increasing. Therefore

$$p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\gamma, \zeta_2), \zeta_1) \leq P.$$

This means that  $\beta_P(\gamma, \zeta_2) \in \{\beta \in [0, 1] ; p_{k_0}(\gamma, \beta, \zeta_1) \leq P\}$ . We deduce that  $\beta_P(\gamma, \zeta_2) \leq \beta_P(\gamma, \zeta_1)$ .

Now, for  $\epsilon$  small enough, we have

$$\begin{aligned} p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta + \epsilon), \zeta + \epsilon) &= p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta n), \zeta) + \\ &\quad \epsilon [\partial_\zeta p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta), \zeta) + \partial_\zeta \beta_P(\gamma, \zeta) \partial_\beta p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta), \zeta)] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Note that  $p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta + \epsilon), \zeta + \epsilon) = p_{k_0}(\gamma, \beta_P(\zeta n), \zeta) = P$ , so by letting  $\epsilon$  go to 0 we find (2.8.1).

**Lemma 2.8.2.** *The mapping  $\beta_F$  is continuous over  $\Omega_F$ . Furthermore, for  $\gamma \in [0, \frac{F^2}{m})$  the function  $\zeta \mapsto \beta_F(\gamma, \zeta)$  is decreasing and continuously differentiable over  $(\zeta_F, \bar{\zeta}_F(\gamma))$  such that  $\beta_F(\zeta_F) = 1$ ,  $\beta_F(\bar{\zeta}_F(\gamma)) = 0$  and for  $\zeta \in (\zeta_F, \bar{\zeta}_F(\gamma))$ , we have*

$$\partial_\zeta \beta_F(\gamma, \zeta) = - \frac{\partial_\zeta F_{VIX}(\gamma, \beta_F(\zeta), \zeta)}{\partial_\beta F_{VIX}(\gamma, \beta_F(\zeta), \zeta)}. \quad (2.8.3)$$

Also, for  $\zeta \in (\zeta_F, \bar{\zeta}_F(\gamma))$ , we have

$$\partial_\gamma \beta_F(\gamma, \zeta) = - \frac{\partial_\gamma F_{VIX}(\gamma, \beta_F(\zeta), \zeta)}{\partial_\beta F_{VIX}(\gamma, \beta_F(\zeta), \zeta)}. \quad (2.8.4)$$

### Proof of theorem 2.4.1

Let's consider the maps  $\bar{\zeta}_P$  and  $\bar{\zeta}_F$  defined above and denote by

$$\gamma^* := \sup \left\{ \gamma \in [0, \frac{(P - k_0)^2}{m}) ; \bar{\zeta}_F(\gamma) \geq \bar{\zeta}_P(\gamma) \right\}.$$

Since  $k_0 - F < P$ , then  $\frac{(k_0 - P)^2}{m} < \frac{F^2}{m}$ . In particular  $\bar{\zeta}_F$  is continuous at  $\frac{(P - k_0)^2}{m}$ . In the other hand, we know that  $\lim_{\gamma \rightarrow \frac{(P - k_0)^2}{m}} \bar{\zeta}_P(\gamma) = +\infty$ : This means that  $\exists \gamma_0 < \frac{(P - k_0)^2}{m}$ , such that

$$\forall \gamma \in [\gamma_0, \frac{(P - k_0)^2}{m}), \quad \bar{\zeta}_P(\gamma) > \bar{\zeta}_F(\frac{(P - k_0)^2}{m}) > \bar{\zeta}_F(\gamma).$$

Hence

$$\gamma^* \leq \gamma_0 < \frac{(P - k_0)^2}{m}.$$

In particular, we have

$$\bar{\zeta}_F(\gamma) \leq \bar{\zeta}_P(\gamma), \quad \forall \gamma \in [\gamma^*, \frac{(P - k_0)^2}{m}). \quad (2.8.5)$$

Now let  $\gamma \in [\gamma^*, \frac{(K_0-F)^2}{m})$ . We have  $\bar{\zeta}_F(\gamma) \leq \bar{\zeta}_P(\gamma)$ . i.e  $[\zeta_F, \bar{\zeta}_F(\gamma)] \subset [\zeta_P, \bar{\zeta}_P(\gamma)]$ . This means that both  $\beta_P(\gamma, \cdot)$  and  $\beta_F(\gamma, \cdot)$  are well defined over  $[\zeta_F, \bar{\zeta}_F(\gamma)]$ . In particular, we have

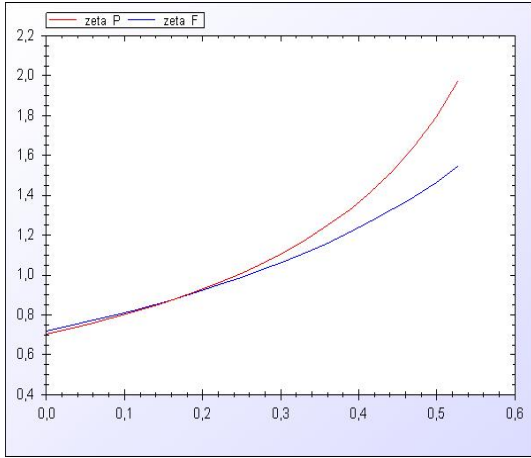
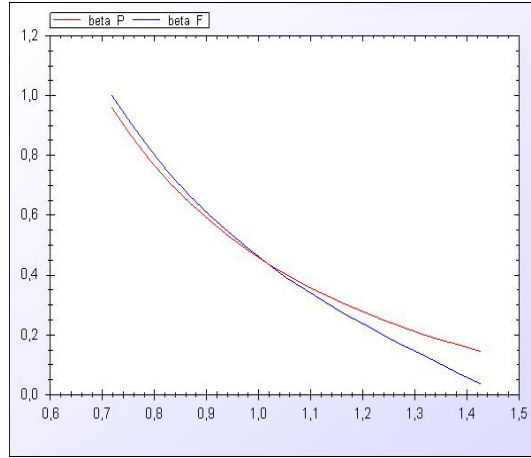
$$\begin{cases} \beta_P(\gamma, \zeta_F) \leq 1 = \beta_F(\gamma, \zeta_F), \\ \beta_P(\gamma, \bar{\zeta}_F(\gamma)) \geq 0 = \beta_F(\gamma, \bar{\zeta}_F(\gamma)). \end{cases}$$

So there exists  $\zeta \in [\zeta_F, \bar{\zeta}_F(\gamma)]$  such that  $\beta_F(\gamma, \zeta) = \beta_P(\gamma, \zeta)$ .

On the other, let  $\gamma \in [\frac{(K_0-F)^2}{m}, \frac{F^2}{m})$ . Both  $\beta_P(\gamma, \cdot)$  and  $\beta_F(\gamma, \cdot)$  are well defined over  $[\zeta_F, \bar{\zeta}_F(\gamma)]$  and satisfy

$$\begin{cases} \beta_P(\gamma, \zeta_F) \leq 1 = \beta_F(\gamma, \zeta_F), \\ \beta_P(\gamma, \bar{\zeta}_F(\gamma)) \geq 0 = \beta_F(\gamma, \bar{\zeta}_F(\gamma)). \end{cases}$$

Hence, there exists  $\zeta = \zeta^*(F, P, \gamma) \in [\zeta_F, \bar{\zeta}_F(\gamma)]$  such that  $\beta_F(\gamma, \zeta) = \beta_P(\gamma, \zeta)$ .


 FIGURE 2.2 –  $\bar{\zeta}_F$  vs  $\bar{\zeta}_P$ 

 FIGURE 2.3 –  $\beta_F$  vs  $\beta_P$ , where  $\gamma = 0.5 > \gamma^*$ 

Now consider the function  $F \mapsto \zeta^*(F, \gamma, \zeta)$ . First, it is easy to check that

$$\partial_F \beta_F(\gamma, \zeta) = \frac{1}{\partial_\beta F_{VIX}(\gamma, \beta_F(\gamma, \zeta), \zeta)},$$

Let's take  $\epsilon$  small enough. The Taylor expansion of  $\beta_F(\zeta)$  with respect to  $F$  gives

$$\beta_{F+\epsilon}(\gamma_{F+\epsilon}, \zeta) = \beta_F(\gamma_F, \zeta) + \frac{\epsilon}{\partial_\beta F_{VIX}|_{(\gamma_F, \beta_F(\gamma_F, \zeta), \zeta)}} + \mathcal{O}_1(\epsilon^2)$$

Now denote by  $\zeta$  and  $\zeta_\epsilon$ , respectively the unique solution of

$$\beta_F(\gamma, \zeta) = \beta_P(\gamma, \zeta) \quad \text{and} \quad \beta_{F+\epsilon}(\gamma, \zeta_\epsilon) = \beta_P(\gamma, \zeta_\epsilon).$$

In particular, we have

$$\beta_P(\gamma, \zeta_\epsilon) = \beta_P(\gamma, \zeta) + \partial_\zeta \beta_P(\gamma, \zeta) \times (\zeta_\epsilon - \zeta) + \mathcal{O}_2(\|(\epsilon, \zeta_\epsilon - \zeta)^T\|^2).$$

On the other hand, we have

$$\beta_{F+\epsilon}(\gamma, \zeta_\epsilon) = \beta_F(\gamma, \zeta) + \epsilon \partial_F \beta_F(\gamma, \zeta) + \partial_\zeta \beta_F(\gamma, \zeta) \times (\zeta_\epsilon - \zeta) + \mathcal{O}_3(\|(\epsilon, \zeta_\epsilon - \zeta)^T\|^2).$$

So by identifying both equalities, we obtain

$$\frac{\zeta_\epsilon - \zeta}{\epsilon} = \frac{\partial_F \beta_F}{\partial_\zeta \beta_P(\gamma, \zeta) - \partial_\zeta \beta_F(\gamma, \zeta)} + \frac{\zeta_\epsilon - \zeta}{\epsilon} \times \mathcal{O}_4(\zeta_\epsilon - \zeta) + \mathcal{O}_5(\epsilon)$$

Thus,  $\zeta^*$  is differentiable with respect to F and its derivative is given by

$$\partial_F \zeta_\gamma = \frac{\partial_F \beta_F}{\partial_\zeta \beta_P(\gamma, \zeta) - \partial_\zeta \beta_F(\gamma, \zeta)}. \quad (2.8.6)$$

We can show the other equalities of the theorem in the same way.

**Remark 2.8.1.** Denote by  $\gamma_* := \inf \left\{ \gamma \in [0, \frac{(P-k_0)^2}{m}) ; \bar{\zeta}_F(\gamma) \leq \bar{\zeta}_P(\gamma) \right\}$ . We conjecture that  $\gamma^* = \gamma_*$  : This means that the curves  $\bar{\zeta}_F$  and  $\bar{\zeta}_P$  intersect only one time in  $[0, \frac{(P-k_0)^2}{m})$ . In particular, for  $\gamma \in [\gamma^* st, \frac{F^2}{m})$  the calibration is performed by using the following algorithm ( noting first that  $\gamma^* st$  can be easily computed using a Binary search )

$$\zeta_{min} = \zeta_F, \quad \zeta_{max} = \bar{\zeta}_F(\gamma)$$

- $\zeta = \frac{\zeta_{min} + \zeta_{max}}{2}$  and compute  $\beta_F(\gamma, \zeta)$  and  $\beta_P(\gamma, \zeta)$  .
- if  $\beta_F(\gamma, \zeta) \geq \beta_P(\gamma, \zeta)$ ,  $\zeta_{min} = \zeta$ , otherwise  $\zeta_{max} = \zeta$ .
- if  $|\beta_F(\gamma, \zeta) - \beta_P(\gamma, \zeta)| \leq \text{ERROR}$ , Break.

## Proof of theorem 2.5.1

The price of the Put is given by

$$\mathbb{E}_t(k - VIX)_+ = p_k(t, \gamma_t, \beta_t, \zeta_t)$$

Now, since the parameters  $\gamma$ ,  $\beta$  and  $\zeta$  are calibrated to fit the future price, the Put price and the skew, the Put price is then given as

$$\mathbb{E}_t(k - VIX)_+ = p_k(t, \gamma_t, \beta_{F_t}(\gamma_t, \zeta^*(\gamma_t), \zeta^*(\gamma_t)))$$

where  $\gamma_t = \gamma(t, F_t, P_t, Q_t)$  is the solution of

$$\partial_k p_{k_0}(t, \gamma_t, \beta_{F_t}(\gamma_t, \zeta^*(\gamma_t), \zeta^*(\gamma_t))) = Q_t.$$

That means that the price of the put is given as a function of the price of the Put with strike  $k_0$ , the future price and  $D$  as

$$\mathbb{E}_t(k - VIX)_+ = \varphi(t, M_t, F_t, P_t, D_t) \quad (2.8.7)$$

where

$$\varphi(M, F, P, D) = p_k(t, M; \beta_F(\gamma, \zeta^*(\gamma(M, F, P, D), F, P)), \zeta^*(M; \gamma(M, F, P, D), F, P))$$

The derivatives of  $\varphi$  with respect to  $F$ ,  $P$  and  $D$  can be easily computed by using the theorem 2.4.1 as

$$\partial_F \varphi = k'_0(F) \partial_k p_k + \partial_F \zeta^* \partial_\zeta p_k + \partial_F \beta_F \partial_\beta p_k + \partial_F \gamma [\partial_\gamma p_k \partial_\gamma \zeta^* (\partial_\zeta p_k + \partial_\zeta \beta_F \partial_\beta p_k)],$$

$$\partial_P \varphi = \partial_P \zeta^* \partial_\zeta p_k + \partial_P \gamma [\partial_\gamma p_k \partial_\gamma \zeta^* (\partial_\zeta p_k + \partial_\zeta \beta_F \partial_\beta p_k)],$$

and the derivatives of  $\gamma$  are obtained by differentiating (2.8.7). We obtain

$$\partial_D \gamma [\partial_\gamma p_{k_0 \gamma} + \partial_\gamma \zeta^* (\partial_\zeta p_{k_0 \gamma} + \partial_\zeta \beta_F \partial_\beta p_{k_0 \gamma})] = 1,$$

$$k'_0(F) \partial_k p_{k_0 \gamma} + \partial_F \zeta^* \partial_\zeta p_{k_0 \gamma} + \partial_F \beta_F \partial_\beta p_{k_0 \gamma} + \partial_F \gamma [\partial_\gamma p_{k_0 \gamma} \partial_\gamma \zeta^* (\partial_\zeta p_{k_0 \gamma} + \partial_\zeta \beta_F \partial_\beta p_{k_0 \gamma})] = 0,$$

$$\partial_P \zeta^* \partial_\zeta p_{k_0 \gamma} + \partial_P \gamma [\partial_\gamma p_{k_0 \gamma} \partial_\gamma \zeta^* (\partial_\zeta p_{k_0 \gamma} + \partial_\zeta \beta_F \partial_\beta p_{k_0 \gamma})] = 0.$$

On the other hand, in addition to P, F and D, the price of VIX Put depends also on  $M_t$  and  $k_0$ . We can easily check that

$$\varphi(M; k, F, P, D, k_0) = \sqrt{M} \varphi(M = 1; \frac{k}{\sqrt{M}}, \frac{F}{\sqrt{M}}, \frac{P}{\sqrt{M}}, D, \frac{k_0}{\sqrt{M}})$$

In particular, we have

$$\partial_M \varphi = \frac{1}{2M} [\varphi - k \partial_k - F \partial_F - P \partial_P - k_0 \partial_{k_0}] \varphi.$$

Finally, by Ito lemma, we know that

$$d[\mathbb{E}_t(k - VIX)_+] = (\dots)dt + \partial_F \varphi dF_t + \partial_P \varphi dP_t + \partial_D \varphi dD_t + \partial_M \varphi dM_t$$

and by the martingale properties of P, F and D, the term (...) is then zero.



# 3 Calcul approché pour des modèles à volatilité stochastique lognormale

## Résumé

Ce chapitre propose une approximation analytique pour évaluer les options européennes dans un cadre de volatilité stochastique lognormale. Cette approximation apparaît comme un développement à l'ordre 3 de la transformée de Fourier par rapport à la "volatilité de la volatilité". On dégage, à l'aide de ces formules, une méthode de réduction de variance pour la simulation des trajectoires du sous-jacent.

### 3.1 Introduction

A la suite du rejet de l'hypothèse de volatilité constante par des travaux empiriques, de nombreux auteurs ont suggéré des modèles tels que les processus de Lévy généralisés, le mouvement brownien fractionnaire, les diffusions avec sauts et les modèles à volatilité stochastique. Melino et Turnbull ont montré dans [46] que l'hypothèse de volatilité stochastique conduit à une distribution du sous-jacent qui est plus proche des observations empiriques que la distribution log-normale.

La question de la volatilité stochastique et ses effets sur les prix des options ont été largement étudiés dans la littérature (citons Johanson et Shanno (87), Hull et White (87), Scott (87), Wiggins (87), Chesney et Scott (89) et Molino et Turnbull (90)). Les modèles développés par ces auteurs nécessitent soit l'utilisation de la simulation Monte-Carlo soit la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles (parabolique dans la plupart des cas) de dimension supérieure ou égale à 2 pour obtenir les prix des options usuelles. Certains de ces modèles nécessitent l'hypothèse "discutable" d'absence de corrélation entre le sous-jacent et sa volatilité. Sous cette hypothèse, Hull et White

### CHAPITRE 3. CALCUL APPROCHÉ POUR DES MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE LOGNORMALE

---

(1987) ont donné une approximation du prix d'une option européenne sous forme d'un développement en série de Taylor ; Stein et Stein (90) fournissent une solution pour les prix des options qui peut être obtenue à l'aide d'une intégration numérique à deux variables. Cependant, leur modèle est développé dans l'hypothèse d'une corrélation nulle entre le sous-jacent et la volatilité. Heston (93) a développé une solution semi-analytique pour les prix des options européennes dans un modèle à volatilité stochastique corrélé.

Plus récemment, on a vu une explosion du nombre de travaux qui proposent des méthodes d'approximation pour les solutions relatives aux options européennes. Par exemple, Alos et al. [1] ont étudié le comportement en temps court de la volatilité implicite dans un modèle à volatilité stochastique en utilisant une extension de la formule d'Ito. Certains auteurs ont proposé des techniques analytiques pour calculer le développement asymptotique de la volatilité implicite pour des maturités très courtes ou très longues, on peut citer Hagan et al. [35], Berestycki et al. [3], [4], Henry-Labordere [36], [4] et Laurence [43], ou encore plus récemment, les travaux de Forde, Jacquier, et Mijatovic [26], [27] sur le développement asymptotique de la volatilité implicite dans le modèle de Heston pour des maturités courtes et longues. D'autres travaux sont apparus, qui se basent sur un développement asymptotique des prix par rapport aux paramètres guidant la dynamique de la volatilité pour les courtes maturités. Par exemple, dans [28], Fouque et al proposent un développement asymptotique par rapport au paramètre de retour à la moyenne. Lewis [45], Benhamou et al [2] proposent des méthodes d'approximation basées sur le développement asymptotique par rapport à la volatilité de la volatilité. Dans tous les travaux cités ci-dessus, le champ d'application est souvent limité et ces résultats ne peuvent être appliqués que dans un cadre bien précis, hors duquel on perd ou bien les formules analytiques ou bien la qualité (précision) de ces formules.

Ce travail se classe dans cette dernière catégorie. On considère d'abord un modèle à volatilité stochastique de type Scott [52] généralisé (paramètres dépendants du temps). Nous proposons une méthode d'approximation basée sur un développement limité à l'ordre 3 de la solution de l'équation de Fokker-Planck par rapport à la volatilité de la volatilité. Cette méthode est inspirée du travail de Perelló, Sircar et Masoliver [50] qui proposent une

méthode d'approximation pour les prix d'options européennes dans ce modèle, basée sur un développement asymptotique par rapport au ratio moyenne/variance de la volatilité. Notons que notre méthode est très différente de celle de [50], car d'une part, nous effectuons un développement par rapport à la volatilité de la volatilité, alors que dans [50], il s'agit d'un développement par rapport au ratio moyenne/variance de la volatilité. D'autre part, nous donnons le "vrai" développement limité, à l'ordre 3, de la transformée de Fourier (et de la densité aussi) du logarithme du sous-jacent, alors que dans [50], il s'agit d'un développement heuristique par rapport au ratio moyenne/variance.

L'approximation de la transformée de Fourier que nous obtenons est donnée sous la forme de la transformée de Fourier d'une gaussienne multipliée par un polynôme. Elle est donc facile à inverser et son inverse est une somme de dérivées successives de la densité gaussienne. On obtient ainsi un développement limité à l'ordre 3 de la densité du sous-jacent par rapport à la volatilité de la volatilité. De plus, vue la forme particulière de cette densité approchée, on obtient facilement des formules similaires pour les prix d'options européennes. Notre approche s'étend à des modèles où la variance est une exponentielle d'une somme d'Ornstein-Uhlenbeck. Elle permet donc d'approcher la densité du sous-jacent dans un modèle de type Bergomi([5], [6], [7]).

Les formules que nous obtenons, notamment celles qui donnent une approximation de la densité ou de la fonction de répartition du sous-jacent, peuvent aussi servir comme moyen de réduction de la variance pour la simulation par la méthode de Monte-Carlo. Dans [29], Fouque et Han utilisent des approximations des prix d'options européennes, obtenues par des techniques de perturbation, pour construire des méthodes de réduction de variance de type "importance sampling" et variable de Contrôle. Dans ce travail nous proposons une nouvelle méthode de réduction de variance de type "Variable de Contrôle" qui utilise l'approximation explicite que nous obtenons de la fonction de répartition de la loi du sous-jacent. L'idée est de construire, à partir de la formule d'approximation, un processus fortement corrélé avec les trajectoires du sous-jacent. Nous donnons une estimation du gain en variance en fonction de la volatilité de la volatilité. Plusieurs expériences numériques sont fournies pour démontrer la performance de cette méthode de réduction de la variance.

Dans les essais numériques, on constate que la variance est divisée par un coefficient allant de 300 à 1000.

### 3.2 Modèle à un facteur : Modèle de Scott généralisé

Dans cette section, on considère une généralisation du modèle proposé par Scott [52]. La dynamique du sous-jacent dans ce modèle est donnée par l'EDS définie par

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = f(t, V_t)dW_t^S, \\ dV_t = -bV_tdt + \omega\sigma_t dW_t^V, \quad d\langle W^S, W^V \rangle_t = \rho_t dt, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

avec  $f^2(t, v) = m_t e^v$ , où  $m$ ,  $\rho$  et  $\sigma$  sont des fonctions déterministes du temps. On suppose  $\omega$ ,  $\sigma \geq 0$ . On suppose aussi que  $V$  est issu de 0, quitte à changer  $m$  par  $m e^{V_0 e^{-bt}}$ .

Dans le cas où les paramètres  $m$ ,  $\rho$  et  $\beta := \omega\sigma$  sont constants et en remplaçant  $f(t, V_t)$  par  $f^2(t, v)$ , on trouve dans [50] une approximation du logarithme de la transformée de Fourier de la loi de  $X_t := \log S_t/S_0$  donnée sous une forme polynomiale. Par inversion de cette transformée de Fourier, on en déduit une approximation de la densité de  $X_t$  à l'aide de la densité gaussienne et de polynômes de Hermite. Cela permet en outre d'obtenir des formules similaires pour les prix d'options européennes. Cette méthode d'approximation est quelque peu liée à l'approximation de Born-Oppenheimer et se résume de la manière suivante : si on note  $p(t, x, v)$  la densité jointe du couple de variables aléatoires  $(X_t, V_t)$ , alors cette densité doit vérifier l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\partial_t p = \partial_v [bvp] + \frac{(\omega\sigma_t)^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + \frac{1}{2} f^2(t, v) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} f^2(t, v) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \rho\omega\sigma_t f(t, v) \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v}.$$

De même, si on considère la transformée de Fourier suivante

$$\varphi(t, \xi, \zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{iv\zeta} p(t, x, v),$$

alors cette transformée de Fourier doit vérifier une équation équivalente. Pour approcher la solution de l'équation relative à la transformée de Fourier, Perelló et al (cf [50]) supposent

que le niveau de la volatilité de la volatilité, en l'occurrence  $\beta$ , est beaucoup plus élevé que sa moyenne " $m$ " (c'est à dire que le paramètre  $\lambda := \frac{\sigma}{m} \gg 1$ ), et ils considèrent la fonction  $\psi_\lambda(t, \xi, \zeta) := \varphi(\frac{t}{\beta^2}, \frac{\xi}{\lambda}, \frac{\zeta}{\lambda})$ . Comme le but est de déterminer la loi de  $S_t$ , et pas forcément sa loi jointe avec  $V_t$ , le problème se ramène donc à calculer  $\psi$  en un couple  $(\xi, \zeta = 0)$ . Pour cela, ils supposent qu'au voisinage de  $\zeta = 0$ ,  $\psi$  s'écrit comme

$$\psi_\lambda(t, \xi, \zeta) = \exp \left( - \left[ A_\lambda(t, \xi) \zeta^2 + B_\lambda(t, \xi) \zeta + C_\lambda(\xi, t) + \mathcal{O}(|\zeta|^3 + \frac{1}{\lambda^2}) \right] \right),$$

où  $A_\lambda, B_\lambda$  et  $C_\lambda$  sont des fonctions explicites. En injectant cette forme particulière de  $\psi$  dans "la transformée de Fourier de l'équation de Fokker-Planck" et en annulant tous les termes faisant apparaître des puissances de  $\frac{1}{\lambda}$  supérieures à 2, les fonction  $A, B$  et  $C$  seront solutions de 3 équations linéaires, faciles à intégrer explicitement, on obtient ainsi une solution approchée (modulo  $\mathcal{O}(\frac{1}{\lambda^2})$ ) de  $\psi$  au voisinage de  $\zeta = 0$  sous la forme énoncée précédemment (voir [50] pour plus de détails).

Dans ce travail, on considère le cadre général du modèle, c'est à dire le cas où les paramètres sont dépendants du temps. Nous proposons une approche différente pour approcher la transformée de Fourier de la densité jointe de  $(X_t, V_t)$ . Cette approximation apparaît comme un développement à l'ordre 3 de  $\varphi(t, \xi, \zeta)$  par rapport au paramètre  $\omega$ , qui mesure la volatilité de la volatilité. Le choix de développer par rapport à la volatilité de la volatilité est particulièrement justifié par le fait que ce paramètre est souvent petit, généralement inférieur à 1. La principale différence entre notre méthode et celle de [50] est que nous obtenons ces approximations en résolvant l'équation en  $\varphi(t, \xi, \zeta) \equiv \varphi(t, \xi, \zeta; \omega)$  pour tout  $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ , en écrivant son développement par rapport à  $\omega$  jusqu'à l'ordre 3, alors que nous avons vu que la méthode proposée dans [50] consiste à effectuer un changement d'échelle et à tronquer ensuite les termes d'ordre supérieur à 2 en  $\frac{1}{\lambda}$ . Nous analyserons plus tard dans cette section, les différences en termes de résultats numériques entre les deux méthodes.

### 3.2.1 Une approximation de la transformée de Fourier de la loi de $(X, V)$

Dans cette section, nous donnons une approximation de la transformée de Fourier de la loi jointe du couple  $(X, V)$ , basée sur un développement "heuristique" par rapport à la volatilité de la volatilité  $\omega$ , l'erreur et le sens de cette approximation seront étudiés dans la section suivante. Cette approximation s'obtient de la manière suivante :

On pose  $\tilde{V}_t = \frac{1}{\omega} V_t$ . En particulier,  $\tilde{V}$  est l'unique solution issue de 0 de l'EDS définie par

$$d\tilde{V}_t = -b\tilde{V}_t dt + \sigma_t dW_t^V$$

On note  $\tilde{p}(t, x, v)$  la densité jointe du couple de variables aléatoires  $(X_t, \tilde{V}_t)$ . Cette densité vérifie l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\partial_t \tilde{p} = \partial_v [bv \tilde{p}] + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial v^2} + \frac{1}{2} f^2(t, \omega v) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{2} f^2(t, \omega v) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \rho_t \sigma_t f(t, \omega v) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x \partial v}. \quad (3.2.2)$$

Avec  $\tilde{p}(0, x, v|0) = \delta_0(x)\delta_0(v)$ .

On considère la transformée de Fourier de  $\tilde{p}$ , définie par

$$\tilde{\varphi}(t, \xi, \zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{iv\zeta} \tilde{p}(t, x, v).$$

Notons que comme  $\tilde{\varphi}(t, \xi, \zeta) := \mathbb{E} e^{i(\xi X_t + \zeta \tilde{V}_t)}$  et comme  $V$  est gaussienne (en particulier  $V_t$  admet des moments exponentiels de tout ordre), alors  $\tilde{\varphi}(t, \xi, \cdot)$  est définie et analytique sur  $\mathbb{C}$ . La fonction  $\tilde{\varphi}$  est donc solution de l'équation suivante

$$\begin{aligned} -\partial_t \tilde{\varphi} &= \frac{\sigma_t^2}{2} \zeta^2 \tilde{\varphi}(t, \xi, \zeta) + b\zeta \partial_\zeta \tilde{\varphi} + m_t \frac{\xi^2 + i\xi}{2} \tilde{\varphi}(t, \xi, \zeta - i\omega) + \\ &\quad \xi \zeta \rho_t \sigma_t \sqrt{m_t} \tilde{\varphi}(t, \xi, \zeta - i\frac{\omega}{2}). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Avec la condition  $\tilde{\varphi}(0, \xi, \zeta) = 1$ .

On cherche une solution de (3.2.3) sous la forme

$$\tilde{\varphi}(t, \xi, \zeta) = \exp \left( - \sum_{n \geq 0} A_n(t, \xi) \zeta^n \right).$$

L'équation (3.2.3) devient donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \partial_t A_n(t, \xi) \zeta^n &= \frac{\sigma_t^2}{2} \zeta^2 - b \sum_{n \geq 1} n A_n(t, \xi) \zeta^n + \\ & m_t \frac{\xi^2 + i\xi}{2} \exp \left( \sum_{n \geq 0} A_n(t, \xi) [\zeta^n - (\zeta - i\omega)^n] \right) + \\ & \xi \zeta \rho_t \sigma_t \sqrt{m_t} \exp \left( \sum_{n \geq 0} A_n(t, \xi) \left[ \zeta^n - \left( \zeta - i \frac{\omega}{2} \right)^n \right] \right). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Comme nous nous intéressons uniquement à la loi de  $X_t$  et pas à celle du couple  $(X_t, V_t)$ , on va chercher à résoudre cette équation pour  $\zeta$  au voisinage de 0. On effectue donc le changement d'échelle  $\zeta = \omega \lambda$ , où on suppose que  $\lambda \in \mathbb{R}$ . En particulier, on a

$$\sum_{n \geq 0} A_n(t, \xi) [\zeta^n - (\zeta - i\omega)^n] = i\omega A_1(t, \xi) + \omega^2 A_2(t, \xi) [2i\lambda + 1] + \mathcal{O}(\omega^3). \quad (3.2.5)$$

On obtient aussi un développement analogue pour  $\sum_{n \geq 0} A_n(t, \xi) [\zeta^n - (\zeta - i\frac{\omega}{2})^n]$ . Ainsi, l'équation (3.2.3), s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \partial_t A_0 + \omega \partial_t A_1 \lambda + \omega^2 \partial_t A_2 \lambda^2 &= -b\omega A_1 \lambda + \omega^2 \left( \frac{\sigma_t^2}{2} - 2bA_2 \right) \lambda^2 + \mathcal{O}(\omega^3) + \\ & \mu_t(\xi) \exp \left( i\omega A_1 + \omega^2 (1 + 2i\lambda) A_2 + \mathcal{O}(\omega^3) \right) + \\ & v\eta_t(\xi) \exp \left( i\frac{\omega}{2} A_1 + \omega^2 \left( \frac{1}{4} + i\lambda \right) A_2 + \mathcal{O}\left(\frac{\omega^3}{8}\right) \right), \end{aligned}$$

où  $\mu_t(\xi) := m_t \frac{\xi^2 + i\xi}{2}$  et  $\eta_t(\xi) = \xi \rho_t \sigma_t \sqrt{m_t}$ . Alors le système précédent devient, en écrivant  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t A_0 + \omega \partial_t A_1 \lambda + \omega^2 \partial_t A_2 \lambda^2 &= -b\omega A_1 \lambda + \omega^2 \left( \frac{\sigma_t^2}{2} - 2bA_2 \right) \lambda^2 + \\ & \mu_t \left( 1 + i\omega A_1 + \omega^2 A_2 - \frac{\omega^2}{2} A_1^2 + 2i\omega^2 A_2 \lambda \right) + \\ & \eta_t \left( 1 + i\frac{\omega}{2} A_1 \right) \omega \lambda + \tilde{\mathcal{O}}(\omega^3). \end{aligned}$$

La solution du système tronqué (sans  $\tilde{\mathcal{O}}(\omega^3)$ ) est donnée par le triplet  $(A_0, A_1, A_2)$ , solution

du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t A_2(t, \xi) = \frac{\sigma_t^2}{2} - 2bA_2(t, \xi), \\ \partial_t A_1(t, \xi) = -(b - i\frac{\omega}{2}\eta_t(\xi))A_1(t, \xi) + 2i\omega\mu_t(\xi)A_2(t, \xi) + \eta_t(\xi), \\ \partial_t A_0(t, \xi) = \mu_t(\xi) \left( 1 + i\omega A_1(t, \xi) + \omega^2 A_2(t, \xi) - \frac{\omega^2}{2} A_1^2(t, \xi) \right), \\ A_0(0, \xi) = A_1(0, \xi) = A_2(0, \xi) = 0. \end{array} \right. \quad (3.2.6)$$

La solution de ce système est donnée par

$$\begin{aligned} A_2(t, \xi) \equiv A_2(t, \xi; \omega) &= \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 e^{-2b(t-s)} ds, \\ A_1(t, \xi) \equiv A_1(t, \xi; \omega) &= \int_0^t (\eta_s + 2i\omega\mu_s A_2(s, \xi)) e^{-(\gamma(t, \xi) - \gamma(s, \xi))} ds, \\ A_0(t, \xi) \equiv A_0(t, \xi; \omega) &= \int_0^t \mu_s \left( 1 + i\omega A_1 + \omega^2 A_2 - \frac{\omega^2}{2} A_1^2 \right)(s, \xi) ds, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

où

$$\gamma(t, \xi) = bt - i\frac{\omega}{2}\xi \int_0^t \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} ds.$$

On obtient donc une approximation de  $\tilde{\varphi}(t, \xi, \omega\lambda)$  qui s'écrit sous la forme

$$\tilde{\varphi}(t, \xi, \omega\lambda) \approx e^{-(A_0(t, \xi; \omega) + A_1(t, \xi; \omega)(\omega\lambda) + A_2(t, \xi; \omega)(\omega\lambda)^2)} \quad (3.2.8)$$

On considère maintenant la transformée de Fourier du couple  $(X_t, V_t)$ , défini par

$$\varphi(t, \xi, \zeta) := \mathbb{E} e^{i\xi X_t + i\zeta V_t} = \tilde{\varphi}(t, \xi, \omega\zeta)$$

$\varphi$  peut donc être approchée par

$$\hat{\varphi}(t, \xi, \zeta) := e^{-(A_0(t, \xi; \omega) + \omega A_1(t, \xi; \omega)\zeta + \omega^2 A_2(t, \xi; \omega)\zeta^2)} \quad (3.2.9)$$

### 3.2.2 Analyse de l'approximation (3.2.9)

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude de l'erreur de l'approximation de la transformée de Fourier de la loi jointe de  $(X, V)$  donnée par (3.2.9). Nous étudions d'abord le lien entre



### 3.2. MODÈLE À UN FACTEUR : MODÈLE DE SCOTT GÉNÉRALISÉ

cette approximation et le "développement de  $\varphi$  par rapport à  $\omega$ ". En effet, il est facile de vérifier que  $\varphi$  est analytique par rapport à  $\omega$  (il suffit de voir  $\varphi$  comme  $\varphi(t, \xi, \zeta) = \tilde{\varphi}(t, \xi, \omega\zeta)$  et  $\tilde{\varphi}$  est analytique par rapport à  $\zeta$ ).

La fonction  $\varphi$  est solution de l'équation

$$\mathcal{L}\varphi(t, \xi, \zeta; \omega) = 0, \quad \forall (t, \xi, \zeta) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (3.2.10)$$

où l'opérateur  $\mathcal{L}$  est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h(t, \xi, \zeta; \omega) = & \partial_t h(t, \xi, \zeta; \omega) + \omega^2 \frac{\sigma_t^2}{2} \zeta^2 h(t, \xi, \zeta; \omega) + b\zeta \partial_\zeta h(t, \xi, \zeta; \omega) + \\ & m_t \frac{\xi^2 + i\xi}{2} h(t, \xi, \zeta - i; \omega) + \xi\zeta \omega \rho_t \sigma_t \sqrt{m_t} h(t, \xi, \zeta - \frac{i}{2}; \omega). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

En différenciant successivement cette équation par rapport  $\omega$ , on en déduit que  $\varphi$  peut s'écrire sous la forme d'un développement par rapport à  $\omega$  de la façon suivante

$$\varphi(t, \xi, \zeta; \omega) = \varphi_0(t, \xi, \zeta) + \omega \varphi_1(t, \xi, \zeta) + \frac{\omega^2}{2} \varphi_2(t, \xi, \zeta) + \dots \quad (3.2.12)$$

où pour tout  $i \geq 0$ ,  $\varphi_i$  est l'unique solution de

$$\mathcal{L}_i \varphi_i(t, \xi, \zeta; \omega) = 0, \quad \forall (t, \xi, \zeta) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

avec

$$\mathcal{L}_0 h(t, \xi, \zeta) = \partial_t h(t, \xi, \zeta) + b\zeta \partial_\zeta h(t, \xi, \zeta) + m_t \frac{\xi^2 + i\xi}{2} h(t, \xi, \zeta - i), \quad (3.2.13)$$

$$\mathcal{L}_1 h(t, \xi, \zeta) = \mathcal{L}_0 h(t, \xi, \zeta) + \xi\zeta \rho_t \sigma_t \sqrt{m_t} \varphi_0(t, \xi, \zeta - \frac{i}{2}), \quad (3.2.14)$$

$$\mathcal{L}_2 h(t, \xi, \zeta) = \mathcal{L}_0 h(t, \xi, \zeta) + 2\xi\zeta \rho_t \sigma_t \sqrt{m_t} \varphi_1(t, \xi, \zeta - \frac{i}{2}) + \sigma_t^2 \zeta^2 \varphi_0(t, \xi, \zeta) \quad (3.2.15)$$

**Définition 3.2.1.** Soit  $h \in \mathcal{C}^{1,2,2,n+1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+)$ . On dit que  $h$  est  $\omega$ -équivalente à  $\varphi$  d'ordre  $n$ , et on note  $h \equiv \varphi [n]$ , pour  $n \geq 0$ , si pour tout  $(t, \xi, \zeta) \in ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , on a

$$\frac{\partial^i h}{\partial \omega^i}(t, \xi, \zeta; 0) = \varphi_i(t, \xi, \zeta), \quad \forall i \leq n. \quad (3.2.16)$$

On considère maintenant l'approximation de  $\varphi$  que nous avons donnée dans le section précédente. L'erreur de cette approximation est caractérisée par le résultat suivant

**Théorème 3.2.1.** *Pour  $t > 0$  et pour tout  $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ , on note  $\varphi(t, \xi, \zeta; \omega) := \mathbb{E} e^{i\xi X_t + i\zeta V_t}$ . On considère la fonction  $\hat{\varphi}$  définie par (3.2.9). Alors, on a*

$$\hat{\varphi} \equiv \varphi \quad [2] \tag{3.2.17}$$

**Remarque 3.2.1.** La démonstration de ce théorème est donnée par la section précédente, car on a effectué un développement à l'ordre 3 par rapport à  $\omega$ . On trouvera en particulier que pour montrer que  $\frac{\partial^j \hat{\varphi}}{\partial \omega^j}(t, \xi, \zeta; \omega)|_{\omega=0} = 0, \forall j = 0, 1, 2$ , il faut que les  $A_i$  vérifient (3.2.6).

### 3.2.3 Approximation de la densité de $X_t$

On considère maintenant l'approximation de la transformée de Fourier de la loi jointe de  $(X_t, V_t)$  donnée par (3.2.9). En prenant le cas particulier  $\zeta = 0$ , on en déduit une approximation de la transformée de Fourier de la loi de  $X_t$ . Cette approximation est donnée par

$$\hat{\varphi}(t, \xi, 0; \omega) = e^{-A_0(t, \xi; \omega)}$$

avec

$$A_0(t, \xi; \omega) = \int_0^t \mu_s(\xi) \left(1 + i\omega A_1 + \omega^2 A_2 - \frac{\omega^2}{2} A_1^2\right)(s, \xi) ds,$$

Nous allons maintenant écrire  $A_0(t, \xi; \omega)$  sous forme d'un développement à l'ordre 3 par rapport à  $\omega$ . Ce qui revient à écrire  $A_1(t, \xi; \omega)$  sous forme d'un développement à l'ordre 2 par rapport à  $\omega$  et  $A_1^2(t, \xi; \omega)$  à l'ordre 1. On écrit

$$\begin{aligned} A_1(t, \xi) &= \int_0^t (\xi \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} + i\omega \mu_s \int_0^s \sigma_u^2 e^{-2b(s-u)} du) e^{-(\gamma(t, \xi) - \gamma(s, \xi))} ds \\ &= \int_0^t \xi \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-(\gamma(t, \xi) - \gamma(s, \xi))} ds + i\omega \int_0^t \mu_s \int_0^s \sigma_u^2 e^{-2b(s-u)} du e^{-(\gamma(t, x) - \gamma(s, x))} ds \\ &= \int_0^t \xi \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(t-s)} \left(1 + i\frac{\omega}{2} \xi \int_s^t \rho_u \sigma_u \sqrt{m_u} du\right) ds + i\omega \int_0^t \mu_s \int_0^s \sigma_u^2 e^{-b(t+s-2u)} du ds \\ &\quad + \mathcal{O}(\omega^2). \end{aligned}$$

De même, on a

$$A_1^2(t, \xi) = \left( \int_0^t \xi \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(t-s)} ds \right)^2 + \mathcal{O}(\omega).$$

### 3.2. MODÈLE À UN FACTEUR : MODÈLE DE SCOTT GÉNÉRALISÉ

Ainsi  $\hat{\varphi}(t, \xi, 0; \omega)$  peut s'écrire sous la forme

$$\hat{\varphi}(t, \xi, 0; \omega) = \exp\left(-i\mu_1(t)\xi - \mu_2(t)\xi^2 + i\mu_3(t)\xi^3 + \mu_4(t)\xi^4 + \mathcal{O}(\omega^3)\right)$$

où

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t m_s ds + \frac{\omega^2}{4} \int_0^t m_s \int_0^s \sigma_u^2 e^{-2b(s-u)} du, \\ \mu_2(t) &= \mu_1(t) + \frac{\omega^2}{4} \int_0^t m_\tau \int_0^\tau m_s \int_0^s \sigma_u^2 e^{-b(\tau+s-2u)} dudsd\tau - \frac{\omega}{2} \int_0^t m_\tau \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} dsd\tau, \\ \mu_3(t) &= -\frac{\omega}{2} \int_0^t m_\tau \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} dsd\tau + \frac{\omega^2}{4} \int_0^t m_\tau \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} \int_s^\tau \rho_u \sigma_u \sqrt{m_u} dudsd\tau \\ &\quad + \frac{\omega^2}{4} \int_0^t m_\tau \left( \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} ds \right)^2 d\tau + \frac{\omega^2}{2} \int_0^t m_\tau \int_0^\tau m_s \int_0^s \sigma_u^2 e^{-b(\tau+s-2u)} dudsd\tau, \\ \mu_4(t) &= \frac{\omega^2}{4} \int_0^t m_\tau \int_0^\tau m_s \int_0^s \sigma_u^2 e^{-b(\tau+s-2u)} dudsd\tau + \frac{\omega^2}{4} \int_0^t m_\tau \left( \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} ds \right)^2 d\tau \\ &\quad + \frac{\omega^2}{4} \int_0^t m_\tau \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} \int_s^\tau \rho_u \sigma_u \sqrt{m_u} dudsd\tau \end{aligned}$$

De même, on obtient, en écrivant que  $e^x = 1 + x + x^2/2 + \dots$ , que  $\hat{\varphi}(t, \xi, 0; \omega)$  s'écrit aussi sous la forme

$$\hat{\varphi}(t, \xi, 0; \omega) = e^{(-i\mu_1(t)\xi - \frac{\nu(t)}{2}\xi^2)} \left( 1 + \sum_{n=2}^6 (-i)^n \nu_n(t) \xi^n + \mathcal{O}(\omega^3) \right), \quad (3.2.18)$$

où  $\nu(t) := 2\mu_1(t)$  et

$$\begin{aligned} \nu_2(t) &= \frac{\omega^2}{4} \int_0^t m_\tau \int_0^\tau m_s \int_0^s \sigma_u^2 e^{-b(\tau+s-2u)} dudsd\tau - \frac{\omega}{2} \int_0^t m_\tau \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} dsd\tau, \\ \nu_3(t) &= \mu_3(t), \quad \nu_4(t) = \mu_4(t) + \frac{\omega^2}{8} \left( \int_0^t m_\tau \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} dsd\tau \right)^2, \\ \nu_5(t) &= \frac{\omega^2}{4} \left( \int_0^t m_\tau \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} dsd\tau \right)^2, \quad \nu_6(t) = \frac{\omega^2}{8} \left( \int_0^t m_\tau \int_0^\tau \rho_s \sigma_s \sqrt{m_s} e^{-b(\tau-s)} dsd\tau \right)^2. \end{aligned}$$

On obtient le résultat suivant

**Théorème 3.2.2.** *On note  $\varphi_X(t, \xi; \omega) := \mathbb{E} e^{i\xi X_t}$ . On considère la fonction  $\psi$ , définie par*

$$\psi(t, \xi; \omega) := e^{(-i\mu_1(t)\xi - \frac{\nu(t)}{2}\xi^2)} \left( 1 + \sum_{n=2}^6 (-i)^n \nu_n(t) \xi^n \right)$$

CHAPITRE 3. CALCUL APPROCHÉ POUR DES MODÈLES À VOLATILITÉ  
STOCHASTIQUE LOGNORMALE

---

Alors, on a

$$\psi \equiv \varphi_X \quad [2]$$

De plus, si on pose  $p_X(t, x; \omega) = \mathbb{P}(X_t \in dx)$  et  $\hat{p}_X(t, x; \omega) := \mathcal{F}^{-1}(\psi)(t, x; \omega)$ , alors on a

$$\hat{p}_X \equiv p_X \quad [2], \quad (3.2.19)$$

où  $\hat{p}_X$  est explicitement donnée par

$$\hat{p}_X(t, x; \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu(t)}} e^{-\frac{(x+\mu_1(t))^2}{2\nu(t)}} \left( 1 + \sum_{n=2}^6 (-1)^n \frac{\nu_n(t)}{\nu^{\frac{n}{2}}(t)} H_n\left(\frac{x + \mu_1(t)}{\sqrt{\nu(t)}}\right) \right) \quad (3.2.20)$$

où les  $H_n$  sont les polynômes de Hermite.

**Preuve:** D'abord, vue la façon dont on a obtenu l'expression de  $\psi(t, \xi; \omega)$  à partir de celle de  $\hat{\varphi}(t, \xi, 0; \omega)$ , il est facile de voir que  $\psi \equiv \hat{\varphi}_X$  [2], où  $\hat{\varphi}_X(t, \xi; \omega) := \hat{\varphi}(t, \xi, 0; \omega)$ . On en déduit donc que  $\psi \equiv \varphi_X$  [2] (car  $\hat{\varphi}_X \equiv \varphi_X$  [2]).

Maintenant, pour montrer que  $\mathcal{F}^{-1}(\varphi_X) \equiv \mathcal{F}^{-1}(\psi)$  [2], il suffit donc de montrer qu'on a le droit de dériver sous le signe intégrale, par rapport à  $\omega$ . c'est à dire que

$$\partial_\omega^i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \varphi_X(t, \xi; \omega) d\xi \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \partial_\omega^i \varphi_X(t, \xi; \omega) \Big|_{\omega=0} d\xi.$$

et

$$\partial_\omega^i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \psi(t, \xi; \omega) d\xi \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \partial_\omega^i \psi(t, \xi; \omega) \Big|_{\omega=0} d\xi.$$

D'abord, pour  $\psi$ , elle est donnée par  $\psi(t, \xi; \omega) := e^{(-i\mu_1(t)\xi - \frac{\nu(t)}{2}\xi^2)} \left( 1 + \sum_{n=2}^6 (-i)^n \nu_n(t) \xi^n \right)$ , où  $\nu(t) > 0$  et les  $\nu_n(t)$  sont des polynômes de degrés 2 en  $\omega$ . On en déduit que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \mapsto \psi(t, \xi; \omega)$  est dérivable et sa dérivée est donnée sous la forme

$$\frac{\partial^j}{\partial \omega^j} \psi(t, \xi; \omega) = Q_\omega^j(t, \xi) e^{(-i\mu_1(t)\xi - \frac{\nu(t)}{2}\xi^2)},$$

où  $Q_\omega^j(t, \cdot)$  est une fonction polynomiale. On en déduit qu'on peut écrire

$$\frac{\partial^j}{\partial \omega^j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \psi(t, \xi; \omega) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial^j}{\partial \omega^j} \psi(t, \xi; \omega) d\xi, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, comme

$$\frac{\partial^j \varphi_X(t, \xi; \omega)}{\partial \omega^j} \Big|_{\omega=0} := \mathbb{E} e^{i\xi X_t} = \frac{\partial^j \psi(t, \xi; \omega)}{\partial \omega^j} \Big|_{\omega=0},$$

Alors, par continuité de ces deux fonctions par rapport à  $\omega$  au point 0, il existe  $\delta > 0$  tel que,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| e^{\xi^2} \left( \frac{\partial^j \varphi_X(t, \xi; \omega)}{\partial \omega^j} - \frac{\partial^j \varphi_X(t, \xi; \omega)}{\partial \omega^j} \right) \right| < 1, \quad \forall \omega < \delta$$

On déduit donc que

$$\frac{\partial}{\partial \omega^j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \varphi_X(t, \xi; \omega) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial}{\partial \omega^j} \varphi_X(t, \xi; \omega) d\xi, \quad \forall j \leq 2.$$

D'où,

$$\frac{\partial^i p_X}{\partial \omega^i}(t, x, 0) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\partial^i \varphi_X}{\partial \omega^i} \right)(t, x, 0) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\partial^i \psi}{\partial \omega^i} \right)(t, x, 0) = \hat{p}(t, x, 0), \quad \forall i \leq 2 \quad \square$$

**Corollaire 3.2.1.** *On considère la fonction  $C : (t, K; \omega) \in R_+^3 \mapsto \mathbb{E}(e^{X_t} - K)_+$ . Alors, on a*

$$\hat{C} \equiv C \quad [2],$$

où  $\hat{C}$  est le prix du Call approchée obtenue en intégrant par rapport à la densité approchée  $\hat{p}_X$ ; De plus,  $\hat{C}$  est explicitement donné par

$$\hat{C}(t, K; \omega) = C_{BS}(S, K, \nu) + \left( \sum_{n=2}^6 \nu_n \right) SN(d_1) + \frac{K}{\sqrt{\nu}} N'(d_2) \left( \sum_{n=0}^4 \frac{z_n}{\nu^{\frac{n}{2}}} H_n(-d_2) \right) \quad (3.2.21)$$

avec  $C_{BS}(S, K, \nu) = SN(d_1) - KN(d_2)$ , avec  $d_1 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + \frac{1}{2}\nu}{\sqrt{\nu}}$ ,  $d_2 = \frac{\log(\frac{S}{K}) - \frac{1}{2}\nu}{\sqrt{\nu}}$  et pour  $n = 0, \dots, 4$ ,  $z_n = \sum_{i=n+2}^6 (-1)^i \nu_i$ .

### 3.2.4 Résultats numériques : Comparaison avec [50]

Nous étudions l'erreur de cette approximation en la comparant avec les résultats obtenus avec la méthode de Monte-Carlo et avec les résultats de Perelló, Sircar et Masoliver [50]. On considère le cas d'un Put européen avec plusieurs strikes et plusieurs maturités. On considère le cas où les paramètres sont constants et on se donne les valeurs suivantes des

### CHAPITRE 3. CALCUL APPROCHÉ POUR DES MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE LOGNORMALE

---

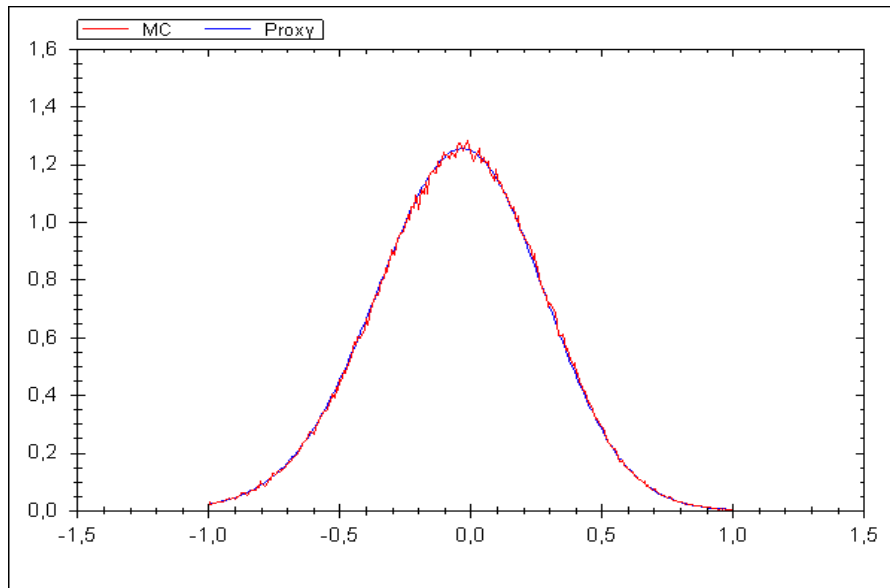


FIGURE 3.1 – Densité empirique de  $X_t$  vs Densité approchée ( $r = 0$ ,  $m = 0,1$ ,  $b = 3$ ,  $\rho = -0,6$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\omega = 30\%$  et  $T = 1$  an)

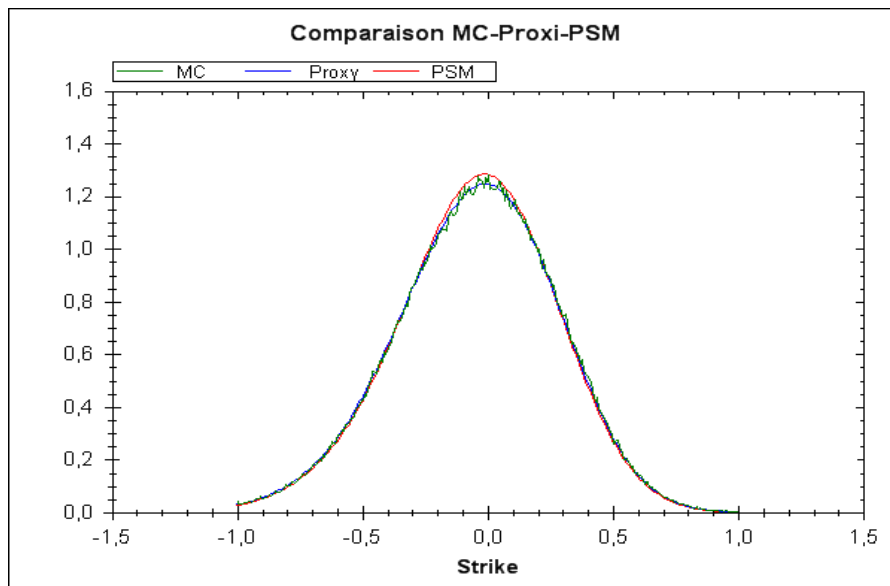


FIGURE 3.2 – Densité empirique de  $X_t$  vs Densité approchée ( $r = 0$ ,  $m = 0,1$ ,  $b = 3$ ,  $\rho = -0,6$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\omega = 60\%$  et  $T = 1$  an)

### 3.2. MODÈLE À UN FACTEUR : MODÈLE DE SCOTT GÉNÉRALISÉ

paramètres du modèle :  $S_0 = 100$ ,  $r = 0$ ,  $m = 0, 1$ ,  $b = 3$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = -0,6$  et on compare les résultats pour  $\omega = 10\%$ ,  $30\%$ ,  $60\%$  et  $T = 1$  mois,  $1$  an,  $5$  ans

On constate que dans tous les cas, nous arrivons parfaitement à "fitter" la densité "empirique" de  $X_t$ , avec l'approximation donnée par (3.2.20), alors que l'approximation donnée dans [50] génère un écart important au fur et à mesure qu'on augmente le niveau de la volatilité et/ou la maturité. Cela explique les résultats suivants pour l'évaluation des Puts sur  $S$  de divers maturités avec des niveaux différents de la volatilité de la volatilité, où l'on constate que pour de courtes maturités et pour des niveaux bas de la volatilité de la volatilité, les deux méthodes (en l'occurrence notre méthode d'approximation et PSM) sont quasiment identiques et donnent les prix à un p.b d'écart, alors que pour des maturités moyennes/longues et pour des niveaux de  $\omega$  élevés, l'erreur relative à notre méthode reste stable et ne dépasse pas 1-2 p.b

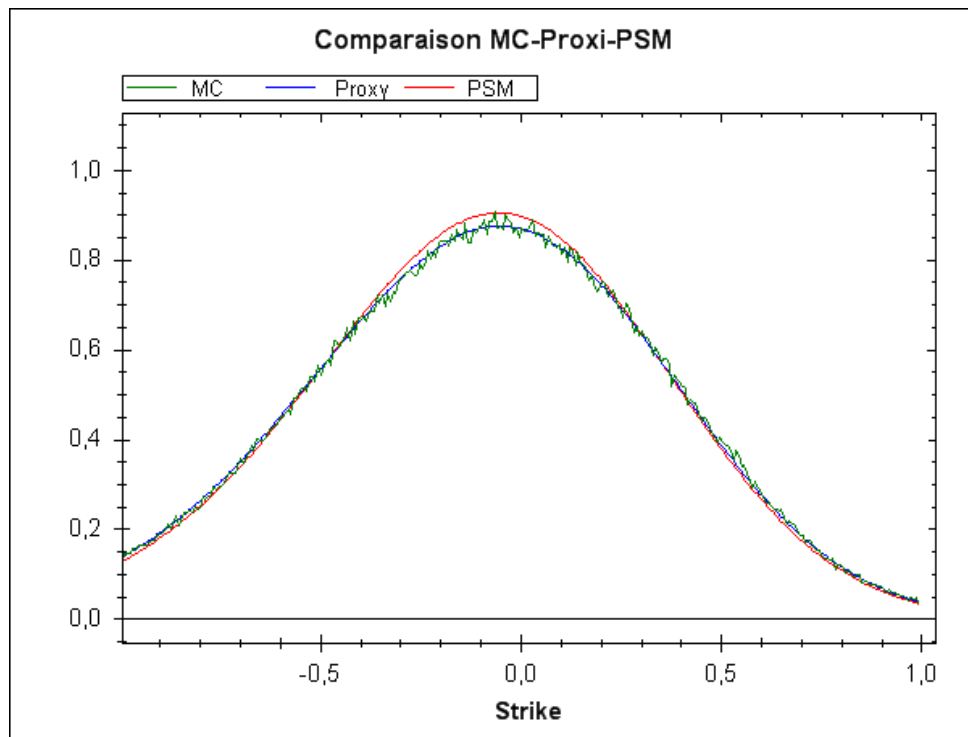


FIGURE 3.3 – Densité empirique de  $X_t$  vs Densité approchée ( $r = 0$ ,  $m = 0, 1$ ,  $b = 3$ ,  $\rho = -0,75$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\omega = 60\%$  et  $T = 2$  an)

CHAPITRE 3. CALCUL APPROCHÉ POUR DES MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE LOGNORMALE

---

Strike	1 mois			1 an		
	MC	Proxy	PSM	MC	Proxy	PSM
80	0,02 $\pm 0.0004$	0,02	0,02	4,06 $\pm 0.003$	4,06	3,96
90	0,55 $\pm 0.003$	0,55	0,55	7,62 $\pm 0.003$	7,63	7,52
100	3,64 $\pm 0.004$	3,63	3,63	12,53 $\pm 0.004$	12,54	12,43
110	10,71 $\pm 0.003$	10,71	10,71	18,63 $\pm 0.004$	18,63	18,59
120	20,07 $\pm 0.002$	20,07	20,07	25,89 $\pm 0.004$	25,9	25,80
130	30 $\pm 0.002$	30	30	33,92 $\pm 0.004$	33,92	33,85

$\omega = 20\%$

Strike	1 an			5 ans		
	MC	Proxy	PSM	MC	Proxy	PSM
80	4,29 $\pm 0.0006$	4,29	3,92	16,28 $\pm 0.015$	16,31	14,70
90	7,77 $\pm 0.007$	7,78	7,36	21,68 $\pm 0.017$	21,70	20,07
100	12,56 $\pm 0.008$	12,57	12,13	27,67 $\pm 0.018$	27,69	26,06
110	18,59 $\pm 0.009$	18,59	18,19	34,19 $\pm 0.02$	34,21	32,61
120	25,69 $\pm 0.009$	25,70	25,35	41,17 $\pm 0.022$	41,19	39,63
130	33,66 $\pm 0.009$	33,67	33,38	48,55 $\pm 0.024$	48,57	47,07

$\omega = 60\%$

**Remarque 3.2.2.** Lors des simulations Monte-Carlo, nous avons utilisé une nouvelle



méthode de réduction de variance (voir section 3.4).

**Remarque 3.2.3.** Il faut être attentif lors qu'on simule des pay-off qui sont non bornés (comme les Calls par exemple) car la variable aléatoire  $e^{X_t}$  n'est pas nécessairement de carré intégrable. Il existe néanmoins des cas où elle l'est, comme par exemple le cas où  $\rho < -\frac{1}{\sqrt{2}}$  (cf Jourdain [40]). D'autre part, d'après [40], le processus  $e^X$  est une martingale si et seulement si la corrélation est négative. En particulier, la parité Call-Put n'est pas vérifiée dans le cas où  $\rho > 0$ .

### 3.3 Le cas multi-dimensionnel : Modèle de Bergomi

Dans cette section, on s'intéresse aux modèles N-dimensionnels de type

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = rdt + f(t, V_t^1, \dots, V_t^N)dW_t^S, \\ dV_t^n = (\alpha_n(t) - \kappa_n V_t^n)dt + \sigma_n(t)dW_t^n, \quad d\langle W^S, W^n \rangle_t = \rho_n^S dt, \quad n = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où  $d\langle W^n, W^m \rangle_t = \rho_{n,m} dt = 0, \forall m, n \leq N$  et la fonction  $f$  est définie par

$$f^2(t, V_1, \dots, V_N(t)) = m_t \exp\left(\omega \sum_{n=1}^N \theta_n V_t^n\right) \quad (3.3.2)$$

Ce modèle est une généralisation du modèle de Bergomi ([5], [6], [7]). Il correspond aussi, en prenant  $\omega$  constante par morceaux, à une autre version du modèle de Bergomi que nous avons proposée dans [49]. Ces modèles sont induits par une modélisation markovienne de la courbe de variance forward. Les "facteurs"  $V^1, \dots, V^N$  permettent de contrôler la dynamique de la volatilité en calibrant les produits dits de volatilité, en l'occurrence futures et options sur VIX dans le cas du S&P 500 ou options sur variance réalisée dans d'autres cas. Le nombre de facteurs N est le nombre de degrés de liberté dont nous avons besoin pour calibrer à la fois les "smiles de la volatilité" et les volatilité implicites du sous-jacent. Bien que ces modèles permettent une bonne calibration de la volatilité de la volatilité, il ont un grand défaut qui est le coût de l'évaluation des options européennes vu que la seule méthode disponible est la simulation Monte-Carlo.

## CHAPITRE 3. CALCUL APPROCHÉ POUR DES MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE LOGNORMALE

---

Dans cette section, nous étendons les résultats de la section précédente au cas multidimensionnel. Nous donnerons une approximation de la transformée de Fourier de la loi jointe de  $(X_t := \log S_t/S_0, V_t^1, \dots, V_t^N)$ , qui apparaît comme un développement d'ordre 3 de celle-ci par rapport au paramètre du niveau de la volatilité " $\omega$ ". Ce qui donne une approximation de la transformée de Fourier de  $X_t$ , puis par inversion de cette transformée de Fourier, on obtient une approximation de la densité de  $X_t$ , qui apparaîtra elle aussi comme un développement d'ordre 3 par rapport à  $\omega$ .

On note

$$\varphi(t, \xi, \zeta_1, \dots, \zeta_N; \omega) := \mathbb{E} \exp \left( i\xi X_t + i \sum_{n=1}^N \zeta_n V_t^n \right)$$

On considère les notation de la section précédente. Le résultat suivant donne une approximation de  $\varphi$

**Proposition 3.3.1.** *On suppose que pour tout  $n, m \leq N$ ,  $\rho_{n,m} = 0$ . On considère la fonction  $\hat{\varphi}$  définie par*

$$\hat{\varphi}(t, \xi, \zeta_1, \dots, \zeta_N; \omega) := \exp \left( -A_0(t, \xi; \omega) - \sum_1^N A_n(t, \xi; \omega) \zeta_n - \sum_1^N C_n(t, \xi; \omega) \zeta_n^2 \right), \quad (3.3.3)$$

où, pour tout  $n = 1, \dots, N$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n(t, \xi; \omega) = \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_n^2(s) e^{-2\kappa_n(t-s)} ds, \\ A_n(t, \xi; \omega) = \int_0^t (\xi \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} - i\alpha_s + 2i\omega \mu_s C_n(s, \xi)) e^{-(\gamma_n(t,\xi) - \gamma_n(s,\xi))} ds, \\ A_0(t, \xi; \omega) = \int_0^t \mu_s \left( 1 + i\omega \sum_{n=1}^M A_n(s, \xi) - \frac{\omega^2}{2} (\sum_{n=1}^M A_n(s, \xi))^2 + \omega^2 \sum_{n=1}^M C_n(s, \xi) \right) ds, \\ \mu_t(\xi) := m_t \frac{\xi^2 + i\xi}{2}, \quad \gamma_n(t, \xi) = \kappa_n t - i\xi \rho_n^S \frac{\omega}{2} \int_0^t \sigma_n(s) \sqrt{m_s} ds. \end{array} \right.$$

Alors, on a

$$\hat{\varphi} \equiv \varphi \quad [2] \quad (3.3.4)$$

La démonstration de cette proposition est très similaire au cas 1 facteur. En conséquence de ce résultat, si on pose

$$\varphi_X(t, \xi; \omega) := \mathbb{E}e^{i\xi X_T} \quad (3.3.5)$$

Alors, si on pose  $\hat{\varphi}_X(t, \xi; \omega) := e^{-A_0(t, \xi; \omega)}$ , on a

$$\hat{\varphi}_X \sim \varphi_X \quad [2] \quad (3.3.6)$$

Maintenant, si on pose  $C(t, \xi; \omega) = \sum_{n=1}^N C_n(t, \xi; \omega)$  et

$$A(t, \xi; \omega) = \sum_{n=1}^N \int_0^t (\xi \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} - i\alpha_n(s) + i\omega \mu_s \int_0^s \sigma_n^2(r, \xi) e^{-2\kappa_n(s-r)} dr) e^{-(\gamma_n(t, \xi) - \gamma_n(s, \xi))} ds,$$

Alors,  $A_0$  s'écrit comme

$$A_0(t, \xi; \omega) = \int_0^t \mu_s(\xi) \left( 1 + i\omega A(s, \xi) - \frac{\omega^2}{2} A^2(s, \xi) + \omega^2 C(s, \xi) \right) ds$$

Écrivons maintenant  $A(t, \xi; \omega)$  sous forme d'un développement d'ordre 2 par rapport à  $\omega$ . On obtient

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^N \int_0^t (x \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} - i\alpha_n(s) + i\omega \mu_s \int_0^s \sigma_n^2(r, x) e^{-2\kappa_n(s-r)} dr) e^{-(\gamma_n(t, x) - \gamma_n(s, x))} ds, \\ &= \sum_{n=1}^N \int_0^t (x \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} - i\alpha_n(s)) e^{-\kappa_n(t-s)} \left( 1 - \frac{i}{2} \omega \rho_n^S x \int_s^t \sigma_n(u) \sqrt{m_u} du \right) ds, \\ &\quad + i\omega \sum_{n=1}^N \int_0^t \mu_s \int_0^s \sigma_n^2(r, x) e^{-\kappa_n(t+s-2r)} dr ds + \mathcal{O}(\omega^2). \end{aligned}$$

De même, on a

$$A^2(t, \xi; \omega) = \left( \sum_{n=1}^N \int_0^t (x \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} - i\alpha_n(s)) e^{-\kappa_n(t-s)} ds \right)^2 + \mathcal{O}(\omega).$$

On en déduit ainsi que  $\varphi_X(T, x; \omega)$  peut s'écrire sous la forme

$$\varphi_X(T, x; \omega) = \exp(-i\mu_1(T, \omega)x - \mu_2(T, \omega)x^2 + i\mu_3(T, \omega)x^3 + \mu_4(T, \omega)x^4 + \mathcal{O}(\omega^3))$$

CHAPITRE 3. CALCUL APPROCHÉ POUR DES MODÈLES À VOLATILITÉ  
STOCHASTIQUE LOGNORMALE

---

où les  $\mu_i$  sont donnés par (3.4.7). De même, on peut écrire  $\varphi_X$  sous la forme

$$\varphi_X(T, x) = e^{(-i\mu_1 x - \frac{\nu}{2} x^2)} (1 - \nu_2(T)x^2 + i\nu_3(T)x^3 + \nu_4(T)x^4 - i\nu_5x^5 - \nu_6x^6 + \mathcal{O}(\bar{\omega}^3)) \quad (3.3.7)$$

où  $\nu := 2\mu_1(T)$  et

$$\begin{aligned} \nu_2(T) &= \mu_2(T) - \mu_1(T), \quad \nu_3(T) = \mu_3(T), \\ \nu_4(T) &= \mu_4(T) + \frac{\omega^2}{8} \left( \sum_{n=1}^N \rho_n^S \int_0^T m_t \int_0^t \sigma_n(s) \sqrt{m_s} e^{-\kappa_n(t-s)} ds \right)^2, \\ \nu_5(T) &= \frac{\omega^2}{4} \left( \sum_{n=1}^N \rho_n^S \int_0^T m_t \int_0^t \sigma_n(s) \sqrt{m_s} e^{-\kappa_n(t-s)} ds \right)^2, \\ \nu_6(T) &= \frac{\omega^2}{8} \left( \sum_{n=1}^N \rho_n^S \int_0^T m_t \int_0^t \sigma_n(s) \sqrt{m_s} e^{-\kappa_n(t-s)} ds \right)^2. \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que si on pose  $\psi(t, \xi; \omega) = e^{(-i\mu_1 x - \frac{\nu}{2} x^2)} (1 + \sum_{n=2}^6 (i)^n \nu_n \xi^n)$ . On déduit donc le résultat suivant

**Proposition 3.3.2.** *On note  $p_X(t, x; \omega) = \mathbb{P}(X_t \in dx)$ , alors on a*

$$p_X \equiv P \quad [2], \quad (3.3.8)$$

où  $P$  est définie par

$$P(t, x; \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu(t)}} e^{-\frac{(x+\mu_1)^2}{2\nu(t)}} \left( 1 + \sum_{n=2}^6 (-1)^n \frac{\nu_n(t)}{\nu^{\frac{n}{2}}} H_n\left(\frac{x + \mu_1(t)}{\sqrt{\nu(t)}}\right) \right) \quad (3.3.9)$$

où les  $H_n$  sont les polynômes de Hermite.

En particulier, si on pose  $C(t, k; \omega) := \mathbb{E}(e^{X_t} - K)_+$ , alors on a

$$C \sim \tilde{C} \quad [2], \quad (3.3.10)$$

où  $\tilde{C}$  est définie par

$$\tilde{C}(t, K; \omega) = C_{BS}(S, K, \nu) + \left( \sum_{n=2}^6 \nu_n \right) SN(d_1) + \frac{K}{\sqrt{\nu}} N'(d_2) \left( \sum_{n=0}^4 \frac{z_n}{\nu^{\frac{n}{2}}} H_n(-d_2) \right), \quad (3.3.11)$$

avec  $C_{BS}(S, K, \nu) = SN(d_1) - KN(d_2)$ , avec  $d_1 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + \frac{1}{2}\nu}{\sqrt{\nu}}$ ,  $d_2 = \frac{\log(\frac{S}{K}) - \frac{1}{2}\nu}{\sqrt{\nu}}$  et pour  $n = 0, \dots, 4$ ,  $z_n = \sum_{i=n+2}^6 (-1)^i \nu_i$ .

### 3.4 Applications à la réduction de variance

Les formules données dans la section précédentes, notamment celles qui donnent l'approximation de la densité et du prix d'un Put européen, peuvent aussi être exploitées autrement. On peut utiliser ces formules comme outil pour réduire la variance lors de la simulation des trajectoires du sous-jacent via la méthode de Monte-Carlo. Dans cette section, nous proposons une méthode de réduction de la variance de type variable de contrôle, basée sur l'utilisation de l'approximation de la fonction de répartition de  $\log S_t$  dans un modèle à volatilité stochastique général. L'idée est de construire un processus  $\hat{S}$  dont la densité, ou la fonction de répartition, est celle donnée par les approximations et qui sera fortement corrélé avec les trajectoires du sous-jacent, ensuite on écrit

$$\mathbb{E} H(S_t) = \mathbb{E} H(S_t) - \mathbb{E} H(\hat{S}_t) + \mathbb{E} H(\hat{S}_t)$$

Comme la loi de  $\hat{S}_t$  est connue, on a juste à simuler  $H(S_t) - H(\hat{S}_t)$  dont la variance va être très petite par rapport à la variance de  $H(S_t)$ .

#### 3.4.1 La méthode

On se place sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  vérifiant les conditions habituelles. On considère un modèle à volatilité stochastique à un facteur général, où on suppose que la dynamique du sous-jacent est modélisée par une EDS sous la forme

$$\frac{dS_t^\epsilon}{S_t^\epsilon} = \sqrt{f(V_t^\epsilon)} \left( \rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right), \quad (3.4.1)$$

où  $V$  est solution forte de

$$dV_t = \alpha(t, V_t)dt + \epsilon \sigma(t, V_t) dW_t^1, \quad (3.4.2)$$

avec  $d\langle W^1, W^2 \rangle_t = 0$ .

**Proposition 3.4.1.** *Pour  $t > 0$ , on note  $F_t^\epsilon(\cdot)$  la fonction de répartition de  $X_t^\epsilon := \log(S_t^\epsilon)$ . On note aussi  $V^0$  l'unique solution issue de  $v$  de*

$$dV_t^0 = \alpha(t, V_t^0)dt$$

Alors la variable aléatoire

$$\hat{X}_t^\epsilon = (F_t^\epsilon)^{-1} \circ N \left( \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^\epsilon) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^\epsilon)} dW_s^2 + \frac{\rho}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^0) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^1 \right) \quad (3.4.3)$$

a la même loi que  $X_t^\epsilon$ .

**Preuve:** Comme  $V^0$  est déterministe, la variable aléatoire  $\int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^1$  est gaussienne. D'autre part, comme  $V^\epsilon$  est solution forte de (3.4.2), alors  $V_s^\epsilon$  est  $\mathcal{F}_s^{W^1}$  mesurable. D'où  $V_s^\epsilon$  est indépendante de  $W^2$  et par conséquent la variable aléatoire  $\frac{1}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^\epsilon) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^\epsilon)} dW_s^2$  est gaussienne centrée réduite. Maintenant les v.a.  $\int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^1$  et  $\frac{1}{\sqrt{\int_0^t f(V_s) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s)} dW_s^2$  sont gaussiennes indépendantes, en effet

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^\epsilon) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^\epsilon)} dW_s^2 \times \int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^1 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left( \frac{1}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^\epsilon) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^\epsilon)} dW_s^2 \mid W_t^1 \right) \times \int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^1 \right] = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la v.a.  $\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^\epsilon) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^\epsilon)} dW_s^2 + \frac{\rho}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^0) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^1$  est gaussienne centrée réduite, ce qui implique la v.a.

$N \left( \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^\epsilon) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^\epsilon)} dW_s^2 + \frac{\rho}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^0) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^1 \right)$  est uniformément distribuée sur  $[0, 1]$ . D'où  $\hat{X}_t^\epsilon$  a la même loi que  $X_t^\epsilon$ .

**Proposition 3.4.2.** *Pour toute fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  à dérivées bornées,  $G$ , on a*

$$\mathbb{E} \left[ \left( G(\hat{X}_t^\epsilon) - G(X_t^\epsilon) - \mathbb{E}\{G(\hat{X}_t^\epsilon) - G(X_t^\epsilon)\} \right)^2 \right] = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.4.4)$$

**Remarque 3.4.1.** Notons que la variance de  $G(X_t^\epsilon)$  est d'ordre 0 en  $\epsilon$ . Cette méthode de réduction de variance permet donc de se débarrasser des termes d'ordre 0 et 1 en  $\epsilon$ . Or nous avons vu dans les sections précédentes que le développement limité à l'ordre 3 des prix était très proche des vrais prix, on en conclut que la variance restante sera très négligeable devant la variance totale.

**Preuve:** On peut d'abord remarquer que  $X_t^0 = \hat{X}_t^0$ . En effet,  $V_t^0$  est déterministe, ce qui veut dire que  $X_t^0$  est normale de moyenne  $-\frac{1}{2} \int_0^t f(V_s^0) ds$  et de variance  $\int_0^t f(V_s^0) ds$ . Ainsi

$$F_t^0(x) = N \left( \frac{x + \frac{1}{2} \int_0^t f(V_s^0) ds}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^0) ds}} \right).$$

On peut donc calculer l'inverse de cette fonction, son inverse est donnée par

$$(F_t^0)^{-1}(y) = N^{-1}(y) \times \sqrt{\int_0^t f(V_s^0) ds} - \frac{1}{2} \int_0^t f(V_s^0) ds.$$

D'où

$$\begin{aligned} \hat{X}_t^0 &= (F_t^0)^{-1} \circ N \left( \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^0) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^2 + \frac{\rho}{\sqrt{\int_0^t f(V_s^0) ds}} \int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^1 \right) \\ &= \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^2 + \rho \int_0^t \sqrt{f(V_s^0)} dW_s^1 - \frac{1}{2} \int_0^t f(V_s^0) ds = X_t^0 \end{aligned}$$

On écrit maintenant le développement de  $X_t$  et de  $\hat{X}_t$  par rapport à  $\epsilon$ . On obtient

$$\begin{cases} X_t^\epsilon = X_t^0 + \epsilon X_t^1 + \frac{\epsilon^2}{2} X_t^2 + \dots, \\ \hat{X}_t^\epsilon = \hat{X}_t^0 + \epsilon \hat{X}_t^1 + \frac{\epsilon^2}{2} \hat{X}_t^2 + \dots \end{cases}$$

avec  $X_t^0 = \hat{X}_t^0$ . De la même façon, on peut écrire

$$\begin{cases} G(X_t^\epsilon) = G(X_t^0) + \epsilon G'(X_t^0) X_t^1 + \dots, \\ G(\hat{X}_t^\epsilon) = G(\hat{X}_t^0) + \epsilon G'(\hat{X}_t^0) \hat{X}_t^1 + \dots \end{cases}$$

Notons que, puisque  $X_t^\epsilon$  et  $\hat{X}_t^\epsilon$  ont la même loi, alors on a

$$\mathbb{E} \left[ \left( G(\hat{X}_t^\epsilon) - G(X_t^\epsilon) - \mathbb{E}\{G(\hat{X}_t^\epsilon) - G(X_t^\epsilon)\} \right)^2 \right] = 2\mathbb{E} \left[ G^2(X_t^\epsilon) - G(X_t^\epsilon) G(\hat{X}_t^\epsilon) \right]$$

D'autre part, en écrivant que  $\mathbb{E}[G^2(X_t)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[G^2(X_t) + G^2(\hat{X}_t)\right]$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left[G^2(X_t) - G(X_t)G(\hat{X}_t)\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[G^2(X^0 + \epsilon X^1) + G^2(\hat{X}^0 + \epsilon \hat{X}^1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right] - \\
 &\quad \mathbb{E}\left[(G(X_t^0) + \epsilon G'(X^0)X^1)(G(\hat{X}^0) + \epsilon G'(\hat{X}^0)\hat{X}^1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right] \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[G^2(X^0) + 2\epsilon GG'(X^0)X^1 + G^2(\hat{X}^0) + 2\epsilon GG'(\hat{X}^0)\hat{X}^1\right] \\
 &\quad - \mathbb{E}\left[(G(X^0)G(\hat{X}^0) + \epsilon G'(X^0)G(\hat{X}^0)X^1 + \epsilon G(X^0)G'(\hat{X}^0)\hat{X}^1)\right] \\
 &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
 &= \mathcal{O}(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

car  $X^0 = \hat{X}^0$ . Plus précisément, on a

$$\mathbb{E}\left[G^2(X_t) - G(X_t)G(\hat{X}_t)\right] = \frac{\epsilon^2}{2}\mathbb{E}\left[(G')^2(X^0)(X^1 - \hat{X}^1)^2\right] + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

### 3.4.2 Application

Dans le cas où la variance instantanée est donnée sous forme exponentielle d'une somme d'Ornstein-Uhlenbeck, on utilise les approximations de la fonction de répartition du sous-jacent données dans les sections précédentes pour construire les variables de contrôle. On considère, par exemple, le cas du modèle à un facteur avec des paramètres  $t = 1$ ,  $r = 0$ ,  $m = 0, 1$ ,  $b = 3$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = -0, 75$ . Dans les tableaux suivants, on compare la variance du prix de  $(K - e^{X_t})_+$  et  $(K - S_t)_+ - (K - e^{\hat{X}_t})_+$  pour plusieurs strikes. On compare aussi la variance de  $e^{X_t}$  avec celle de  $e^{X_t} - e^{\hat{X}_t}$



### 3.4. APPLICATIONS À LA RÉDUCTION DE VARIANCE

	$\epsilon \equiv \omega = 10\%$			$\omega = 30\%$		
Strike	Var	VarDif	$\frac{Var}{VarDif}$	Var	VarDif	$\frac{Var}{VarDif}$
var $S$	10,41%	0,0028%	3668	10,24 %	0,0147%	700
80%	0,68%	0,0013%	537	0,73 %	0,0032 %	228
90%	1,41%	0,0018%	766	1,47%	0,0044%	333
100%	2,40%	0,0022%	1075	2,48%	0,0054%	460
110%	3,58%	0,0024%	1470	3,68%	0,0062%	597
120%	4,81%	0,0025%	1951	4,92%	0,0068%	727
130%	5,97%	0,0024%	2489	6,09%	0,0073%	833

**Remarque 3.4.2.** Notons que la variable aléatoire  $e^{X_t}$  est de carré intégrable, car  $\rho = -0.75 < -\frac{1}{\sqrt{2}}$  (cf. [40]).

#### 3.4.3 Preuve de la proposition 3.3.1

Soit  $p(t, x, v_1, \dots, v_N)$  la densité du vecteur aléatoire  $(X_t, V_1(t), \dots, V_N(t))$ . Cette densité vérifie l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\partial_t p = \sum_n \partial_{v_n} (v_n p) + \frac{\sigma_n^2}{2} \sum_n \frac{\partial^2 p}{\partial v_n^2} + \frac{1}{2} f^2(t; v) (\partial_x + \partial_{xx}) p + \sum_n \rho_n^S \sigma_n f(t; v) \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v_n}$$

On considère la transformée de Fourier multiple, définie par

$$\varphi(t, \xi, \zeta_1, \dots, \zeta_N) := \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_1 e^{i\zeta_1 v_1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_N e^{i\zeta_N v_N} p(t, x, v_1, \dots, v_N).$$

La fonction  $\varphi$  est solution de l'équation suivante

$$\begin{aligned} -\partial_t \varphi &= \sum_n \left( \frac{\sigma_n^2}{2} \zeta_n^2 - i\alpha_n(t)\zeta_n \right) \varphi(t, \xi, \zeta) + \sum_n \kappa_n \zeta_n \partial_{\zeta_n} \varphi \\ &+ m_t \frac{\xi^2 + i\xi}{2} \varphi(t, \xi, \zeta_1 - i\omega, \dots, \zeta_N - i\omega) + \\ &\xi \sqrt{m_t} \sum_n \rho_n^S \sigma_n(t) \zeta_n \varphi(t, \xi, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n - i\frac{\omega}{2}, \zeta_{n+1}, \dots, \zeta_N). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Notons qu'on est uniquement intéressé par la transformée de Fourier de  $X_t$ , ce qui correspond à  $\varphi(t, \xi, 0, \dots, 0)$ . On procède alors comme dans le cas uni-dimensionnel : à l'ordre 3 en  $\omega$  et pour  $(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathcal{D}(0, \omega)^N$ , on a

$$\varphi(t, x; \zeta_1, \dots, \zeta_N) = \exp \left( -A_0 - \sum_{n=1}^M A_n(t, \xi) \zeta_n - \sum_{n \neq m=1}^M B_{n,m}(t, \xi) \zeta_n \zeta_m - \sum_{n=1}^M C_n(t, \xi) \zeta_n^2 \right).$$

Dans ce cas, l'équation (3.4.5) devient

$$\begin{aligned} A'_0 + \sum_{n=1}^M A'_n \zeta_n + \sum_{n \neq m=1}^M B'_{n,m} \zeta_n \zeta_m + \sum_{n=1}^M C'_n \zeta_n^2 &= \mathcal{O}(\omega^3) + \sum_n \left( \frac{\sigma_n^2}{2} \zeta_n^2 - i\alpha_n(t)\zeta_n \right) \\ &- \sum_n \kappa_n A_n \zeta_n - \sum_n \kappa_n \zeta_n \left( \sum_{m=1, m \neq n}^N B_{n,m} \zeta_m \right) - 2 \sum_{n=1}^M \kappa_n C_n(t, \xi) \zeta_n^2 \\ &+ \mu_t \exp \left( i\omega \sum_{n=1}^M A_n + \sum_{n \neq m=1}^M B_{n,m}(\omega^2 + i\omega(\zeta_n + \zeta_m)) + \sum_{n=1}^M C_n(\omega^2 + 2i\omega\zeta_n) \right) \\ &+ \xi \sqrt{m_t} \sum_n \rho_n^S \sigma_n(t) \zeta_n \exp \left( i\frac{\omega}{2} A_n + i\frac{\omega}{2} \sum_{m=1, m \neq n}^N B_{n,m} \zeta_m + C_n \left( \frac{\omega^2}{4} + i\omega\zeta_n \right) \right) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \exp \left( i\omega \sum_{n=1}^M A_n + \sum_{n \neq m=1}^M B_{n,m}(\omega^2 + i\omega(\zeta_n + \zeta_m)) + \sum_{n=1}^M C_n(\omega^2 + 2i\omega\zeta_n) \right) &= \mathcal{O}(\omega^3) + \\ 1 + i\omega \sum_{n=1}^M A_n - \frac{\omega^2}{2} \left( \sum_{n=1}^M A_n \right)^2 + \sum_{n \neq m=1}^M B_{n,m}(\omega^2 + i\omega(\zeta_n + \zeta_m)) + \sum_{n=1}^M C_n(\omega^2 + 2i\omega\zeta_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_n \rho_n^S \zeta_n \exp \left( i\frac{\omega}{2} A_n + i\frac{\omega}{2} \sum_{m=1, m \neq n}^N B_{n,m} \zeta_m + C_n \left( \frac{\omega^2}{4} + i\omega\zeta_n \right) \right) &= \sum_n \rho_n^S \zeta_n \left( 1 + i\frac{\omega}{2} A_n \right) \\ &+ \mathcal{O}(\omega^3) \end{aligned}$$

### 3.4. APPLICATIONS À LA RÉDUCTION DE VARIANCE

La résolution de l'équation (3.4.5) revient donc à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^M C'_n - \frac{\sigma_n^2}{2} + 2\kappa_n C_n = 0, \\ \sum_{n \neq m=1}^M B'_{n,m} + \kappa_n B_{n,m} = 0, \\ \sum_{n=1}^M (A'_n + i\alpha_n(t) + \kappa_n A_n + 2i\mu_t \omega C_n - x\sqrt{m_t} \rho_n^S \sigma_n(t)(1 + i\frac{\omega}{2} A_n)) = 0, \\ A'_0 = \mu_t \left( 1 + i\omega \sum_{n=1}^M A_n - \frac{\omega^2}{2} (\sum_{n=1}^M A_n)^2 + \omega^2 \sum_{n=1}^M C_n \right). \end{array} \right.$$

On peut immédiatement déduire que pour tout  $n, m$ ,  $B_{n,m} = 0$ . On obtient ainsi le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_n - \frac{\sigma_n^2}{2} + 2\kappa_n C_n = 0, \quad \forall n = 1, \dots, N \\ A'_n + i\alpha_n(t) + (\kappa_n - i\frac{\omega}{2} \xi \sqrt{m_t} \rho_n^S \sigma_n(t)) A_n - 2i\mu_t \omega C_n - \xi \sqrt{m_t} \rho_n^S \sigma_n(t) = 1, \quad \forall n \geq 1 \\ A'_0 = \mu_t \left( 1 + i\omega \sum_{n=1}^M A_n - \frac{\omega^2}{2} (\sum_{n=1}^M A_n)^2 + \omega^2 \sum_{n=1}^M C_n \right) \end{array} \right.$$

Ceci équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_n^2(s) e^{-2\kappa_n(t-s)} ds, \quad \forall n = 1, \dots, N \\ A_n = \int_0^t (\xi \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} - i\alpha_s + 2i\omega \mu_s C_n(s, \xi)) e^{-(\gamma_n(t, \xi) - \gamma_n(s, \xi))} ds, \\ A_0(t, \xi) = \int_0^t \mu_s \left( 1 + i\omega \sum_{n=1}^M A_n(s, \xi) - \frac{\omega^2}{2} (\sum_{n=1}^M A_n(s, \xi))^2 + \omega^2 \sum_{n=1}^M C_n(s, \xi) \right) ds; \end{array} \right.$$

où

$$\gamma_n(t, \xi) = \kappa_n t - i\xi \rho_n^S \frac{\omega}{2} \int_0^t \sigma_n(s) \sqrt{m_s} ds \quad (3.4.6)$$

CHAPITRE 3. CALCUL APPROCHÉ POUR DES MODÈLES À VOLATILITÉ  
STOCHASTIQUE LOGNORMALE

---

On en déduit que

$$\varphi_X(T, \xi) := \mathbb{E}e^{i\xi X_T} = e^{-A_0(t, \xi)}$$

On pose  $A(t, x) := \sum_{n=1}^M A_n(s, \xi)$ . En écrivant  $A$  sous forme d'un développement d'ordre 2 par rapport à  $\omega$ , on obtient

$$\begin{aligned} A(t, \xi) &= \sum_{n=1}^N \int_0^t (x \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} - i \alpha_n(s) + i \omega \mu_s \int_0^s \sigma_n^2(r, \xi) e^{-2\kappa_n(s-r)} dr) e^{-(\gamma_n(t, \xi) - \gamma_n(s, \xi))} ds, \\ &= \sum_{n=1}^N \int_0^t (\xi \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} - i \alpha_n(s)) e^{-\kappa_n(t-s)} \left(1 - \frac{i}{2} \omega \rho_n^S x \int_s^t \sigma_n(u) \sqrt{m_u} du\right) ds, \\ &\quad + i \omega \sum_{n=1}^N \int_0^t \mu_s \int_0^s \sigma_n^2(r, \xi) e^{-\kappa_n(t+s-2r)} dr ds + \mathcal{O}(\omega^2). \end{aligned}$$

De même, on a

$$A^2(t, \xi) = \left( \sum_{n=1}^N \int_0^t (\xi \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} - i \alpha_n(s)) e^{-\kappa_n(t-s)} ds \right)^2 + \mathcal{O}(\omega).$$

On en déduit ainsi que  $\varphi_X(T, \xi)$  peut s'écrire sous la forme

$$\varphi_X(T, \xi) = \exp(-i\mu_1(T)\xi - \mu_2(T)\xi^2 + i\mu_3(T)\xi^3 + \mu_4(T)\xi^4 + \mathcal{O}(\omega^3))$$

### 3.4. APPLICATIONS À LA RÉDUCTION DE VARIANCE

$$\begin{aligned}
\mu_1(T) &= \frac{1}{2} \int_0^T m_s ds + \frac{\omega^2}{4} \sum_{n=1}^N \int_0^T m_t \int_0^t \sigma_n^2(s) e^{-2\kappa_n(t-s)} ds + \frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^N \int_0^T m_t \int_0^t \alpha_n(s) e^{-\kappa_n(t-s)} ds \\
&\quad + \frac{\omega^2}{4} \int_0^T m_t \left( \sum_{n=1}^N \int_0^t \alpha_n(s) e^{-\kappa_n(t-s)} ds \right)^2 dt, \\
\mu_2(T) &= \mu_1(T) - \frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^N \rho_n^S \int_0^T m_t \int_0^t \sigma_n(s) \sqrt{m_s} e^{-\kappa_n(t-s)} ds + \\
&\quad \frac{\omega^2}{4} \sum_{n=1}^N \rho_n^S \int_0^T m_t \int_0^t \alpha_n(s) \int_s^t \sigma_n(r) \sqrt{m_r} dr ds + \\
&\quad \frac{\omega^2}{4} \sum_{n=1}^N \int_0^T m_t \int_0^t m_s \int_0^s \sigma_n^2(r, x) e^{-\kappa_n(t+s-2r)} dr ds \\
&\quad + \frac{\omega^2}{2} \sum_{n,m=1}^N \int_0^T m_t \int_0^t \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} \int_0^t \alpha_m(s) e^{-\kappa_m(t-s)} ds dt \\
\mu_3(T) &= -\frac{\omega}{2} \sum_{n=1}^N \rho_n^S \int_0^T m_t \int_0^t \sigma_n(s) \sqrt{m_s} e^{-\kappa_n(t-s)} ds - \\
&\quad \frac{\omega^2}{4} \sum_{n=1}^N (\rho_n^S)^2 \int_0^T m_t \int_0^t \sigma_n(s) \sqrt{m_s} e^{-\kappa_n(t-s)} \int_s^t \sigma_n(r) \sqrt{m_r} dr ds \\
&\quad + \frac{\omega^2}{2} \sum_{n=1}^N \int_0^T m_t \int_0^t m_s \int_0^s \sigma_n^2(s) e^{-\kappa_n(t+s-2u)} du ds dt \\
&\quad - \frac{\omega^2}{4} \int_0^T m_t \left( \sum_{n=1}^N \int_0^t \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} e^{-\kappa_n(t-s)} ds \right)^2 dt \\
&\quad + \frac{\omega^2}{2} \sum_{n,m=1}^N \int_0^T m_t \int_0^t \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} \int_0^t \alpha_m(s) e^{-\kappa_m(t-s)} ds dt, \\
\mu_4(T) &= \frac{\omega^2}{4} \sum_{n=1}^N \int_0^T m_t \int_0^t m_s \int_0^s \sigma_n^2(u) e^{-\kappa_n(t+s-2u)} du ds dt \\
&\quad - \frac{\omega^2}{4} \sum_{n=1}^N (\rho_n^S)^2 \int_0^T m_t \int_0^t \sigma_n(s) \sqrt{m_s} e^{-\kappa_n(t-s)} \int_s^t \sigma_n(u) \sqrt{m_u} du ds \\
&\quad + \frac{\omega^2}{4} \int_0^T m_t \left( \sum_{n=1}^N \int_0^t \rho_n^S \sigma_n(s) \sqrt{m_s} e^{-\kappa_n(t-s)} ds \right)^2 dt. \tag{3.4.7}
\end{aligned}$$

## CHAPITRE 3. CALCUL APPROCHÉ POUR DES MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE LOGNORMALE

---

## Deuxième partie

### Monotonie dans le modèle de Heston





# 4 Quelques propriétés du CIR

## Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions quelques propriétés du CIR, qui seront très utiles pour le chapitre suivant. Nous montrons notamment que si on note  $V^v$  la solution de (4.1.1), issue de  $v$ , alors la fonction  $y \mapsto \mathbb{P}\left(\lambda_1 V_t^v + \lambda_2 \int_0^t V_u^v du > y\right)$  se comporte comme  $e^{-\mu^* y}$ , quand  $y$  tend vers  $+\infty$ , pour  $\lambda_2 > 0$  et  $\lambda_1 < \frac{2(2+bt)\lambda_2}{b^2 t}$ , où  $\mu^*$  est le moment "critique" d'explosion de l'exponentiel de  $\lambda_1 V_t^v + \lambda_2 \int_0^t V_u^v du$ . Nous étudions les dérivées de la solution de (0.0.1) par rapport aux paramètres  $(v_0, a, b, \sigma)$ , sous des conditions sur  $a$  et  $\sigma$ , qui varient d'un paramètre à l'autre. Ces dérivées sont données comme solutions d'équations différentielles stochastiques, qu'on résout pour obtenir des représentations de ces dérivées en fonction des trajectoires de  $V$ .

## 4.1 Introduction

Le processus CIR a été proposé par Cox, Ingersoll et Ross [14] pour modéliser l'évolution du taux d'intérêt. Il s'agit de l'unique solution de l'équation suivante :

$$dV_t = (a - bV_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t, \quad V_0 = v, \quad (4.1.1)$$

avec  $a, \sigma, v \geq 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  (voir [39] pour l'existence et l'unicité de la solution de l'EDS).

La densité de transition de  $V_t$  est connue et est donnée par (cf. [42])

$$P_t(v, x) = \frac{e^{bt}}{c_t} \left(\frac{xe^{bt}}{v}\right)^\nu \exp\left(-\frac{v + xe^{bt}}{2c_t}\right) I_\nu\left(\frac{1}{c_t}\sqrt{vxe^{bt}}\right), \quad (4.1.2)$$

où  $c_t = \frac{(e^{bt}-1)\sigma^2}{4b}$ ,  $\nu = 2a/\sigma^2 - 1$  et  $I_\nu$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $\nu$ . En particulier, on peut remarquer que selon les valeurs de  $\nu$ , cette densité peut être bornée ou non bornée au voisinage de zéro. En plus d'avoir une densité bornée au voisinage de

0, la condition ( $\nu \geq 0$ ) permet aussi de s'assurer que, pour toute valeur initiale  $v > 0$ , le processus  $V$  est strictement positif avec une probabilité 1 (cf. [42]), i.e

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0, T] : V_t^v > 0) = 1.$$

Le processus CIR est aussi utilisé pour modéliser la variance instantanée d'un actif sous-jacent dans le cadre du modèle de Heston [38]. Dans ce modèle, la dynamique du sous-jacent est décrite par l'EDS définie par

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sqrt{V_t} dB_t, \quad d\langle W, B \rangle_t = \rho dt$$

Le modèle de Heston est certainement le plus populaire parmi les modèles à volatilité stochastique. Sa popularité tient principalement au fait que l'on dispose de formules semi-explicites pour les prix d'options européennes sur le sous-jacent en utilisant le fait que la transformée de Laplace de  $X_t = \log(F_t/F_0)$  est donnée explicitement.

## 4.2 Moments exponentiels du CIR intégré

On note  $V_t^{v,a}$  la solution de (4.1.1) issue de  $v$ . On remarque que, si  $(v_1, v_2), (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^2$ , le processus  $V^{v_1+v_2, a_1+a_2}$  a même loi que  $(V_t^{v_1, a_1} + \hat{V}_t^{v_2, a_2})$  où  $\hat{V}^{v,a}$  est solution de (4.1.1) dans laquelle  $W$  est remplacé par un brownien indépendant  $\hat{W}$ . En effet, en posant  $V_t^1 = V_t^{v_1, a_1}$ ,  $\hat{V}_t^2 = \hat{V}_t^{v_2, a_2}$  et  $V_t = V_t^1 + \hat{V}_t^2$ , on a

$$\begin{aligned} V_t &= v_1 + v_2 + \int_0^t [(a_1 + a_2) - bV_s] ds + \sigma \int_0^t \left( \sqrt{V_s^1} dW_s + \sqrt{\hat{V}_s^2} d\hat{W}_s \right) \\ &= v_1 + v_2 + \int_0^t [(a_1 + a_2) - bV_s] ds + \sigma \int_0^t \sqrt{V_s} dB_s, \end{aligned}$$

où  $B$  est le brownien défini par

$$dB_s = \frac{\sqrt{V_s^1}}{\sqrt{V_s^1 + \hat{V}_s^2}} dW_s + \frac{\sqrt{\hat{V}_s^2}}{\sqrt{V_s^1 + \hat{V}_s^2}} d\hat{W}_s.$$

De cette propriété d'additivité en loi, on déduit que, si on pose, pour  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$F_{\lambda_1, \lambda_2}^a(t, v) = \mathbb{E} e^{\lambda_1 V_t^{v,a} + \lambda_2 \int_0^t V_s^{v,a} ds},$$

## 4.2. MOMENTS EXPONENTIELS DU CIR INTÉGRÉ

on a  $F_{\lambda_1, \lambda_2}^{a_1+a_2}(t, v_1 + v_2) = F_{\lambda_1, \lambda_2}^{a_1}(t, v_1)F_{\lambda_1, \lambda_2}^{a_2}(t, v_2)$ . La fonction  $F_{\lambda_1, \lambda_2}^a$  est donc de la forme

$$F_{\lambda_1, \lambda_2}^a(t, v) = e^{a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + v\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t)}.$$

Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont données par le résultat suivant :

**Théorème 4.2.1.** *Pour  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , on note  $\psi_{\lambda_1, \lambda_2}$  la solution maximale de*

$$\begin{cases} \psi'_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{\sigma^2}{2} \left( \psi_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) - 2\frac{b}{\sigma^2}\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + 2\frac{\lambda_2}{\sigma^2} \right), \\ \psi'_{\lambda_1, \lambda_2}(0) = \lambda_1, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

définie sur  $[0, t^*(\lambda_1, \lambda_2)[$  et on note  $\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) := \int_0^t \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(u)du$ . Alors, pour tout  $T < t^*(\lambda_1, \lambda_2)$ , on a

$$\mathbb{E} e^{\lambda_1 V_T^{v,a} + \lambda_2 \int_0^T V_s^{v,a} ds} = e^{a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(T) + v\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(T)} \quad (4.2.2)$$

**Preuve:** On pose

$$F_{\lambda_1, \lambda_2}^a(t, v) = e^{a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + v\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t)}.$$

Alors, la fonction  $F_{\lambda_1, \lambda_2}^a$  est la solution maximale de

$$\begin{cases} \frac{\partial F_{\lambda_1, \lambda_2}^a}{\partial t}(t, v) = \frac{\sigma^2}{2} v \frac{\partial^2 F_{\lambda_1, \lambda_2}^a}{\partial v^2}(t, v) + (a - bv) \frac{\partial F_{\lambda_1, \lambda_2}^a}{\partial v}(t, v) + \lambda_2 v F_{\lambda_1, \lambda_2}^a(t, v), & 0 < t \leq T, \\ F_{\lambda_1, \lambda_2}^a(0, v) = e^{\lambda_1 v}. \end{cases}$$

En effet, ceci est équivalent à ce que les fonctions  $\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}$  et  $\psi_{\lambda_1, \lambda_2}$  vérifient  $\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(0) = 0$ ,  $\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(0) = \lambda_1$  et

$$\begin{aligned} a\varphi'_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + v\psi'_{\lambda_1, \lambda_2}(t) &= \frac{\sigma^2}{2} v \psi_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) + (a - bv)\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + \lambda_1 \lambda_2 v \\ &= a\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + v \left( \frac{\sigma^2}{2} \psi_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) - b\psi(t) + \lambda_2 \right). \end{aligned}$$

## CHAPITRE 4. QUELQUES PROPRIÉTÉS DU CIR

---

Cela équivaut à  $\varphi'_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t)$  et

$$\psi'_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{\sigma^2}{2} \left( \psi_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) - 2\frac{b}{\sigma^2}\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + 2\frac{\lambda_2}{\sigma^2} \right).$$

En particulier, pour tout  $T < t_a^*(\lambda_1, \lambda_2)$ , le processus  $(e^{\lambda_2 \int_0^s V_u^{v,a} du} F_{\lambda_1, \lambda_2}^a(T-s, V_s^{v,a}))_{s \leq T}$  est une martingale locale positive. C'est donc une sur-martingale. En particulier, pour tout temps d'arrêt  $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$ , on a

$$E e^{\lambda_2 \int_0^\tau V_u^{v,a} du} F_{\lambda_1, \lambda_2}^a(T-\tau, V_\tau^{v,a}) \leq F_{\lambda_1, \lambda_2}^a(T, V_0^{v,a})$$

On en déduit que

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} E e^{\lambda_2 \int_0^\tau V_u^{v,a} du + a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-\tau) + V_\tau^{v,a}\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-\tau)} \leq e^{a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(T) + v\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(T)} \quad (4.2.3)$$

Montrons qu'il existe  $p > 1$ , tel que

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} E e^{p(\lambda_2 \int_0^\tau V_u^{v,a} du + a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-\tau) + V_\tau^{v,a}\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-\tau))} < +\infty$$

Notons que  $\psi_{\lambda_1, \lambda_2}$  est croissante par rapport à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . C'est dire que si  $\lambda_1 < \bar{\lambda}_1$  (resp  $\lambda_2 < \bar{\lambda}_2$ ), alors on a  $\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) \leq \psi_{\bar{\lambda}_1, \lambda_2}(t)$ , pour tout  $t < t^*(\bar{\lambda}_1, \lambda_2)$  (resp  $\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) \leq \psi_{\lambda_1, \bar{\lambda}_2}(t)$ , pour tout  $t < t^*(\lambda_1, \bar{\lambda}_2)$ ). En effet, si on pose  $f = \psi_{\bar{\lambda}_1, \lambda_2} - \psi_{\lambda_1, \lambda_2}$  et  $g = \psi_{\lambda_1, \bar{\lambda}_2} - \psi_{\lambda_1, \lambda_2}$ , alors on a d'une part  $f$  est solution de

$$\begin{aligned} f(0) &= \bar{\lambda}_1 - \lambda_2 > 0, \\ f'(t) &= \frac{\sigma^2}{2} \left( \psi_{\bar{\lambda}_1, \lambda_2}^2(t) - \psi_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) - \frac{2b}{\sigma^2}f(t) \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} f(t) \left( \psi_{\bar{\lambda}_1, \lambda_2}(t) + \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) - \frac{2b}{\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

et d'autre part,  $g$  vérifie

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, \\ g'(t) &= \frac{\sigma^2}{2} \left( \psi_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) - \psi_{\lambda_1, \bar{\lambda}_2}^2(t) - \frac{2b}{\sigma^2}g(t) + 2\frac{\bar{\lambda}_2 - \lambda_2}{\sigma^2} \right) \\ &\geq \frac{\sigma^2}{2} g(t) \left( \psi_{\lambda_1, \bar{\lambda}_2}(t) + \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) - \frac{2b}{\sigma^2} \right). \end{aligned}$$

## 4.2. MOMENTS EXPONENTIELS DU CIR INTÉGRÉ

Ce qui implique que  $f$  et  $g$  vérifient  $(fe^A)'(t) = 0$ , avec  $f(0) > 0$  et  $(ge^A)'(t) \geq 0$  avec  $g(0) = 0$ , où  $A'(t) = \frac{\sigma^2}{2} (\psi_{\bar{\lambda}_1, \lambda_2}(t) + \psi_{\lambda_1, \lambda_2} - \frac{2b}{\sigma^2})$ . D'où  $f \geq 0$  et  $g \geq 0$ .

En particulier, on a

$$\psi_{\bar{\lambda}_1, \lambda_2}(t) - \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = (\bar{\lambda}_1 - \lambda_1) e^{bt - \int_0^t (\psi_{\bar{\lambda}_1, \lambda_2} + \psi_{\lambda_1, \lambda_2})(s) ds}, \quad \forall t < t^*(\bar{\lambda}_1, \lambda_2)$$

On en déduit que pour  $T < t_{\lambda_1, \lambda_2}^*$  et pour  $0 < \epsilon$  assez petit, il existe  $\lambda_1^\epsilon > \lambda_1$  tel que

$$(1 + \epsilon)\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) \leq \psi_{\lambda_1^\epsilon, \lambda_2}(t), \quad \forall t \leq T.$$

On en déduit que, pour tout temps d'arrêt  $\tau \in \mathcal{T}_{0, T}$ ,

$$E e^{(1+\epsilon)(\lambda_2 \int_0^\tau V_u^{v,a} du + a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-\tau) + V_\tau^{v,a} \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-\tau))} \leq e^{a_\epsilon \varphi_{\lambda_1^\epsilon, \lambda_2^\epsilon}(T) + v \psi_{\lambda_1^\epsilon, \lambda_2^\epsilon}(T)},$$

où  $a_\epsilon = (1 + \epsilon)a$  et  $\lambda_2^\epsilon = (1 + \epsilon)\lambda_2$ . On en déduit donc que

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T}} E e^{(1+\epsilon)(\lambda_2 \int_0^\tau V_u^{v,a} du + a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-\tau) + V_\tau^{v,a} \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-\tau))} < +\infty \quad (4.2.4)$$

Maintenant, comme  $(M_s := e^{\lambda_2 \int_0^s V_u^{v,a} du} F_{\lambda_1, \lambda_2}^a(T-s, V_s^{v,a}))_{s \leq T}$  est une martingale locale, il existe donc une suite de temps d'arrêt  $\tau_n$ , telle que  $\tau_n \nearrow +\infty$  telle que  $(M_{\tau_n \wedge s})_{s \leq T}$  est une martingale. En particulier  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{\tau_n \wedge s} = M_s$ . Enfin, en utilisant (4.2.4), cette convergence est dans  $\mathcal{L}_1$  (car  $M$  est dans la classe (D)).

D'où

$$E e^{\lambda_2 \int_0^t V_u^{v,a} du + a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-t) + V_t^{v,a} \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(T-t)} = e^{a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(T) + V_t^{v,a} \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(T)}, \quad \forall t \leq T.$$

En particulier, pour  $t = T$ , on a

$$E e^{\lambda_2 \int_0^T V_u^{v,a} du + \lambda_1 V_T^{v,a}} = e^{a\varphi_{\lambda_1, \lambda_2}(T) + V_T^{v,a} \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(T)} \quad \square$$

Notons par ailleurs que  $t_{\lambda_1, \lambda_2}^*$  est donné selon les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  par

$\lambda_2 < \frac{b^2}{2\sigma^2}$ et $\lambda_1 > \frac{b}{\sigma^2} + \sqrt{b^2 - 2\lambda_2\sigma^2}/\sigma^2$	$t_{\lambda_1, \lambda_2}^* = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 2\lambda_2\sigma^2}} \log \left( \frac{\lambda_1 - b/\sigma^2 + \sqrt{b^2 - 2\lambda_2\sigma^2}/\sigma^2}{\lambda_1 - b/\sigma^2 - \sqrt{b^2 - 2\lambda_2\sigma^2}/\sigma^2} \right)$ .
$\lambda_2 < \frac{b^2}{2\sigma^2}$ et $\lambda_1 \leq \frac{b}{\sigma^2} + \sqrt{b^2 - 2\lambda_2\sigma^2}/\sigma^2$	$t_{\lambda_1, \lambda_2}^* = +\infty$ .
$\lambda_2 = \frac{b^2}{2\sigma^2}$	$t_{\lambda_1, \lambda_2}^* = \frac{2}{\sigma^2(\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2})}$ .
$\lambda_2 > \frac{b^2}{2\sigma^2}$	$t_{\lambda_1, \lambda_2}^* = \frac{2}{\sqrt{2\lambda_2\sigma^2 - b^2}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\lambda_1\sigma^2 - b}{\sqrt{2\lambda_2\sigma^2 - b^2}} \right) \right)$ .

D'autre part, la solution de (4.2.1) est donnée sur  $[0, t_{\lambda_1, \lambda_2}^*[,$  selon les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , par

$\lambda_2 < \frac{b^2}{2\sigma^2}$	$\begin{cases} \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{b}{\sigma^2} - \alpha \frac{Ce^{\alpha\sigma^2 t} + 1}{Ce^{\alpha\sigma^2 t} - 1}, & \text{si } \left  \lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} \right  > \alpha, \\ \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{b}{\sigma^2} - \alpha \frac{Ce^{\alpha\sigma^2 t} - 1}{Ce^{\alpha\sigma^2 t} + 1}, & \text{si } \left  \lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} \right  \leq \alpha, \end{cases}$ <p style="text-align: center;">où <math>\alpha = \sqrt{b^2 - 2\lambda_2\sigma^2}/\sigma^2</math> et <math>C = \left  \frac{\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} - \alpha}{\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} + \alpha} \right </math>.</p>
$\lambda_2 = \frac{b^2}{2\sigma^2}$	$\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2}}{1 - \frac{\sigma^2}{2}(\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2})t} + \frac{b}{\sigma^2}.$
$\lambda_2 > \frac{b^2}{2\sigma^2}$	$\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{b}{\sigma^2} + \beta \tan\left(\beta \frac{\sigma^2 t}{2} + \arctan\left(\frac{\lambda_1 \sigma^2 - b}{\beta \sigma^2}\right)\right),$ <p style="text-align: center;">où <math>\beta = \sqrt{2\lambda_2\sigma^2 - b^2}/\sigma^2</math>.</p>

En effet, pour résoudre (4.2.1), on écrit

$$\psi_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) - 2\frac{b}{\sigma^2}\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + 2\frac{\lambda_2}{\sigma^2} = \left(\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) - \frac{b}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\lambda_2\sigma^2 - b^2}{\sigma^4},$$

et on distingue trois cas.

**Cas  $2\lambda_2\sigma^2 < b^2$  :** L'équation (4.2.1) peut alors s'écrire, en posant

$$\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) - \frac{b}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad \alpha = \sqrt{b^2 - 2\lambda_2\sigma^2}/\sigma^2,$$

$$\bar{\psi}'_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{\sigma^2}{2} (\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) - \alpha^2),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(t) - \alpha} - \frac{1}{\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + \alpha} \right) \bar{\psi}'_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

D'où,

$$\log \left| \frac{\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(t) - \alpha}{\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(t) + \alpha} \right| = \alpha\sigma^2 t + \log \left| \frac{\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} - \alpha}{\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} + \alpha} \right|$$

On obtient donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = -\alpha \frac{(Ce^{\alpha\sigma^2 t} + 1)^2}{C^2 e^{2\alpha\sigma^2 t} - 1}, \quad \text{si } \left| \lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} \right| > \alpha, \\ \bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = -\alpha \frac{(Ce^{\alpha\sigma^2 t} - 1)^2}{C^2 e^{2\alpha\sigma^2 t} - 1}, \quad \text{si } \left| \lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} \right| \leq \alpha, \end{array} \right.$$

où  $C = \left| \frac{\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} - \alpha}{\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} + \alpha} \right|$ . D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{b}{\sigma^2} - \alpha \frac{Ce^{\alpha\sigma^2 t} + 1}{Ce^{\alpha\sigma^2 t} - 1}, \quad \text{si } \left| \lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} \right| > \alpha, \\ \psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{b}{\sigma^2} - \alpha \frac{Ce^{\alpha\sigma^2 t} - 1}{Ce^{\alpha\sigma^2 t} + 1}, \quad \text{si } \left| \lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2} \right| \leq \alpha. \end{array} \right.$$

**Cas  $2\lambda_2\sigma^2 = b^2$  :** L'équation (4.2.1) peut alors s'écrire

$$\bar{\psi}'_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{\sigma^2}{2} \bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(0)} - \frac{1}{\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(t)} = \frac{\sigma^2 t}{2},$$

et

$$\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2}}{1 - \frac{\sigma^2}{2}(\lambda_1 - \frac{b}{\sigma^2})t} + \frac{b}{\sigma^2}.$$

**Cas  $2\lambda_2\sigma^2 > b^2$  :** L'équation (4.2.1) peut alors s'écrire, en posant  $\beta = \sqrt{2\lambda_2\sigma^2 - b^2}/\sigma^2$ ,

$$\bar{\psi}'_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{\sigma^2}{2} (\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) + \beta^2).$$

D'où

$$\frac{\bar{\psi}'_{\lambda_1, \lambda_2}(t)}{\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}^2(t) + \beta^2} = \frac{\sigma^2}{2}$$

et

$$\frac{1}{\beta} \arctan(\bar{\psi}_{\lambda_1, \lambda_2}(t)/\beta) = \frac{\sigma^2 t}{2} + Cte.$$

D'où

$$\psi_{\lambda_1, \lambda_2}(t) = \frac{b}{\sigma^2} + \beta \tan \left( \beta \frac{\sigma^2 t}{2} + \arctan \left( \frac{\lambda_1 \sigma^2 - b}{\beta \sigma^2} \right) \right).$$

**Remarque 4.2.1.** Pour  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , on note  $t_{\lambda_1, \lambda_2}^*(\mu) = t_{\mu, \lambda_1, \lambda_2}^*$ . On note aussi  $\mu_-^*(t) = \sup \{ \mu < 0 : t_{\lambda_1, \lambda_2}^*(\mu) = t \}$  et  $\mu_+^*(t) = \inf \{ \mu > 0 : t_{\lambda_1, \lambda_2}^*(\mu) = t \}$  (avec les conventions  $\sup \emptyset = -\infty$  et  $\inf \emptyset = +\infty$ ). Alors, pour tout  $\mu_-^*(t) < \mu < \mu_+^*(t)$ , on a  $\mathbb{E} e^{\mu \lambda_1 V_t + \mu \lambda_2 \int_0^t V_u du} < +\infty$  et

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_{\pm}^*(t)} \mathbb{E} e^{\mu \lambda_1 V_t + \mu \lambda_2 \int_0^t V_u du} = +\infty$$

Ainsi, le moment exponentiel d'ordre  $\mu$  de  $\lambda_1 V_t + \lambda_2 \int_0^t V_u du$  peut exploser pour des valeurs finies de  $\mu$ . Ce phénomène permet en particulier de déterminer des propriétés asymptotiques de la volatilité pour les strikes extrêmes (voir [44]). En particulier, si  $\max(\lambda_1, \lambda_2) > 0$  (resp  $\min(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ ), alors pour tout  $t > 0$ , on a

$$0 < \mu_+^*(t) < +\infty \quad (\text{resp} \quad -\infty < \mu_-^*(t) < 0).$$

Le résultat suivant sera très utile dans la section suivante, quand on étudiera le comportement asymptotique des queues de distribution d'une combinaison du CIR et de son intégrale, qui sera l'objet de la section suivante.

**Proposition 4.2.1.** Si  $\mu_+^*(t) < +\infty$ , alors il existe  $\omega_t^+ > 0$  tel que pour  $\mu$  au proche de  $\mu_+^*(t)$ , on a

$$\log \mathbb{E} e^{\mu \lambda_1 V_t + \mu \lambda_2 \int_0^t V_u du} - \frac{\omega_t^+}{\mu_+^*(t) - \mu} \sim \frac{2a}{\sigma^2} \log \frac{1}{\mu_+^*(t) - \mu} \quad (4.2.5)$$

De même, si  $\mu_-^*(t) > -\infty$ , alors il existe  $\omega_t^- > 0$  tel que pour  $\mu$  au proche de  $\mu_-^*(t)$ , on a

$$\log \mathbb{E} e^{\mu \lambda_1 V_t + \mu \lambda_2 \int_0^t V_u du} - \frac{\omega_t^-}{\mu - \mu_-^*(t)} \sim \frac{2a}{\sigma^2} \log \frac{1}{\mu - \mu_-^*(t)} \quad (4.2.6)$$



**Preuve:** Par définition même de  $\mu_+^*(t)$ , on sait que

$$t_{\lambda_1, \lambda_2}^*(\mu_+^*(t)) = t$$

On distingue 2 cas

**Cas**  $t_{\lambda_1, \lambda_2}^*(\mu_+^*) = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 2\lambda_2\mu_+^*\sigma^2}} \log \left( \frac{\lambda_1\mu_+^* - b/\sigma^2 + \sqrt{b^2 - 2\lambda_2\mu_+^*\sigma^2/\sigma^2}}{\lambda_1\mu_+^* - b/\sigma^2 - \sqrt{b^2 - 2\lambda_2\mu_+^*\sigma^2/\sigma^2}} \right)$  : Dans ce cas, pour  $0 < \epsilon \ll 1$ , on a  $\psi_{\lambda_1(\mu_+^* - \epsilon), \lambda_2(\mu_+^* - \epsilon)}(t) = \frac{b}{\sigma^2} - \alpha \frac{C e^{\alpha\sigma^2 t} + 1}{C e^{\alpha\sigma^2 t} - 1}$ , où  $\alpha = \alpha(\epsilon) = \sqrt{b^2 - 2\lambda_2(\mu_+^* - \epsilon)\sigma^2}/\sigma^2$  et  $C = C(\epsilon) = \frac{\lambda_1(\mu_+^* - \epsilon) - \frac{b}{\sigma^2} - \alpha}{\lambda_1(\mu_+^* - \epsilon) - \frac{b}{\sigma^2} + \alpha}$ . On obtient, en écrivant le développement limité de  $C e^{\alpha\sigma^2 t}$  par rapport à  $\epsilon$ , que  $\psi_{\lambda_1(\mu_+^* - \epsilon), \lambda_2(\mu_+^* - \epsilon)}(t)$  s'écrit sous la forme

$$\psi_{\lambda_1(\mu_+^* - \epsilon), \lambda_2(\mu_+^* - \epsilon)}(t) = \frac{b}{\sigma^2} + \alpha(0) \frac{2 - c_1\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)}{c_1\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)} = \frac{2\alpha(0)/c_1}{\epsilon} + e(\epsilon),$$

où la  $e(\epsilon)$  est bornée.

On en déduit donc que, pour  $\epsilon$  petit, on a

$$\log \mathbb{E} e^{(\mu_+^* - \epsilon)\lambda_1 V_t + (\mu_+^* - \epsilon)\lambda_2 \int_0^t V_u du} - \frac{2v\alpha(0)/c_1}{\epsilon} \sim a\varphi_{\lambda_1(\mu_+^* - \epsilon), \lambda_2(\mu_+^* - \epsilon)}(t).$$

On vérifie de la même façon que  $\varphi_{\lambda_1(\mu_+^* - \epsilon), \lambda_2(\mu_+^* - \epsilon)}(t) \sim \frac{2}{\sigma^2} \log \frac{1}{\epsilon}$

**Cas**  $t_{\lambda_1, \lambda_2}^* = \frac{2}{\sqrt{2\lambda_2\sigma^2 - b^2}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\lambda_1\sigma^2 - b}{\sqrt{2\lambda_2\sigma^2 - b^2}} \right) \right)$ . Dans ce cas, pour  $0 < \epsilon \ll 1$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{\lambda_1(\mu_+^* - \epsilon), \lambda_2(\mu_+^* - \epsilon)}(t) = \frac{b}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{2\lambda_2(\mu_+^* - \epsilon)\sigma^2 - b^2}}{\sigma^2} \tan(g(t, (\mu_+^* - \epsilon))), \\ \varphi_{\lambda_1(\mu_+^* - \epsilon), \lambda_2(\mu_+^* - \epsilon)}(t) = \frac{b}{\sigma^2} t + \frac{2}{\sigma^2} (\log \cos g(0, \mu_+^* - \epsilon) - \log \cos g(t, \mu_+^* - \epsilon)), \end{array} \right.$$

où

$$g(t, \mu) = \frac{\sqrt{2\mu\lambda_2\sigma^2 - b^2}}{2} t + \arctan\left(\frac{\lambda_1\mu\sigma^2 - b}{\sqrt{2\mu\lambda_2\sigma^2 - b^2}}\right) \quad (4.2.7)$$

On obtient facilement que, pour  $\epsilon$  assez petit,

$$\log \mathbb{E} e^{(\mu_+^* - \epsilon)\lambda_1 V_t + (\mu_+^* - \epsilon)\lambda_2 \int_0^t V_u du} - \frac{x\sqrt{2\mu\sigma^2 - b^2}}{\sigma^2 \partial_\mu g(t, \mu_+^*)} \frac{1}{\epsilon} \sim -\frac{2a}{\sigma^2} \log(\epsilon).$$

### 4.3 Comportement asymptotique des queues de distribution du CIR intégré

Dans la section précédente, précisément dans la remarque 4.2.1, nous avons signalé que les moments exponentiels d'ordre  $\mu$  d'une combinaison de la forme  $\lambda_1 V_t + \lambda_2 \int_0^t V_u du$ , peuvent exploser pour une valeur finie de  $\mu$  (négative ou positive selon les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ). Avec ce phénomène d'explosion, on peut espérer donner plus de précision sur l'exposant exponentiel des queues de distribution de la variance intégrée, ou de sa densité, en  $+\infty$ . En effet, ceci serait l'analogie des travaux de Dragulescu et Yakovenko [20], qui montrent à l'aide de l'expression de la fonction caractéristique du logarithme du sous-jacent dans le modèle de Heston,  $X_t$ , que la densité de  $X_t$  se comporte comme  $e^{-c|y|}$  et que pour tout  $p \geq c$ , le moment exponentiel d'ordre  $p$  de  $X$  explose.

Le résultat principal de cette section est de montrer que la fonction  $y \mapsto \mathbb{P}(\lambda_1 V_t + \lambda_2 \int_0^t V_u du > y)$ , peut se comporter comme  $e^{-\mu^* y}$ , selon les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , où  $\mu^*$  est le moment "critique" d'explosion de l'exponentielle de  $\lambda_1 V_t + \lambda_2 \int_0^t V_u du$ . Notons que si  $\lambda_2$  le résultat est assuré par (4.1.2) et si  $\lambda_1 = 0$ , le résultat est donné par [34] (cf. Theorem 2.4)

**Théorème 4.3.1.** *On considère la v.a  $Z_t = \lambda_1 V_t + \lambda_2 \int_0^t V_u du$ . On suppose que  $\max(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ , alors on a*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{P}(Z_t > R)}{R} = -\mu^*, \quad (4.3.1)$$

où  $\mu^* := \sup \{ \mu > 0 : \mathbb{E} e^{\mu Z_t} < \infty \}$ .

**Preuve:** Une simple application l'inégalité de Markov montre que pour tout  $\mu > 0$ ,

$$\mathbb{P}(Z_t > R) = \mathbb{P}(e^{\mu Z_t} > e^{\mu R}) \leq e^{-\mu R} \mathbb{E}[e^{\mu Z_t}].$$

On note

$$\Lambda_t(\mu) := \log \mathbb{E} e^{\mu Z_t} = v\psi_{\lambda_1 \mu, \lambda_2 \mu}(t) + a\varphi_{\lambda_1 \mu, \lambda_2 \mu}(t) \quad (4.3.2)$$

### 4.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES QUEUES DE DISTRIBUTION DU CIR INTÉGRÉ

---

On obtient donc

$$\log \mathbb{P}(Z_t > R) \leq -\mu R + \Lambda_t(\mu)$$

On en déduit que pour tout  $\mu > 0$ , on a

$$\frac{\log \mathbb{P}(Z_t > R) + \mu^* R}{\sqrt{R}} \leq (\mu^* - \mu)\sqrt{R} + \frac{\Lambda_t(\mu)}{\sqrt{R}}$$

Maintenant, on sait, d'après la proposition 4.2.1, que pour  $\mu < \mu^*$  proche de  $\mu^*$ , on a

$$\Lambda_t(\mu) - \frac{\omega}{\mu^* - \mu} \sim \frac{2a}{\sigma^2} \log \frac{1}{\mu_+^*(t) - \mu}. \quad (4.3.3)$$

De même, on peut vérifier que

$$\Lambda_t'(\mu) - \frac{\omega}{(\mu^* - \mu)^2} \sim \frac{2a}{\sigma^2} \frac{1}{\mu_+^*(t) - \mu}. \quad (4.3.4)$$

On pose  $\hat{\mu}(R) = \mu^* - \sqrt{\frac{\omega}{R}}$ . On obtient, en utilisant (4.3.3),

$$\begin{aligned} \frac{\log \mathbb{P}(Z_t > R) + \mu^* R}{\sqrt{R}} &\leq (\mu^* - \hat{\mu}(R))\sqrt{R} + \frac{\Lambda_t(\hat{\mu}(R))}{\sqrt{R}} \\ &= \sqrt{\omega} + \frac{1}{\sqrt{R}} \left[ \sqrt{\omega R} + c \log R \right] \end{aligned}$$

D'où

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{P}(Z_t > R) + \mu^* R}{\sqrt{R}} \leq 2\sqrt{\omega}, \quad (4.3.5)$$

Pour minorer le liminf, nous allons procéder comme suit. Pour tout  $p > 0$  et pour tout  $R > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{pZ_t}) &= \mathbb{E}(e^{pZ_t} \mathbf{1}_{Z_t \leq R}) + \mathbb{E}(e^{pZ_t} \mathbf{1}_{Z_t > R}) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^{Z_t} p e^{pr} dr \mathbf{1}_{Z_t \leq R}\right) + \mathbb{E}(e^{pZ_t} \mathbf{1}_{Z_t > R}) \\ &\leq 1 + \mathbb{E}\left(\int_0^{Z_t} p e^{pr} \mathbf{1}_{0 < r \leq Z_t \leq R} dr\right) + \mathbb{E}(e^{pZ_t} \mathbf{1}_{Z_t > R}) \\ &\leq 1 + \int_0^R p e^{pr} \mathbb{P}(Z_t > r) dr + \mathbb{E}(e^{pZ_t} \mathbf{1}_{Z_t > R}) \end{aligned}$$

On se donne  $0 < p' < p$ . Alors en utilisant l'inégalité de Markov, on obtient

$$\mathbb{P}(Z_t > r) = \mathbb{P}(e^{p'Z_t} > e^{p'r}) \leq e^{-p'r + \Lambda_t(p')}.$$

On en déduit que

$$e^{\Lambda_t(p)} = \mathbb{E} \left( e^{pZ_t} \right) \leq 1 + pe^{\Lambda_t(p')} \int_0^R e^{(p-p')r} dr + \mathbb{E} \left( e^{pZ_t} \mathbf{1}_{Z_t > R} \right). \quad (4.3.6)$$

On se donne maintenant  $\alpha > 0$  et on choisit  $p_\alpha$  de sorte que  $\Lambda_t(p_\alpha) = \alpha R$ . En utilisant (4.3.3), on peut vérifier que pour  $R$  assez grand,  $p_\alpha$  s'écrit sous la forme

$$p_\alpha = \mu^* - \frac{\omega}{\alpha R} (1 + e^{(\mu^* - p_\alpha)}) \quad (4.3.7)$$

où

$$e(\xi) \underset{\xi \rightarrow 0}{\sim} \frac{2a}{\omega \sigma^2} \xi \log \frac{1}{\xi}$$

On retourne maintenant à (4.3.6), on obtient, en remplaçant  $p$  par  $p_\alpha$  et en tenant compte du fait que  $\Lambda_t(p_\alpha) = \alpha R$ ,

$$\mathbb{E} \left( e^{p_\alpha Z_t} \mathbf{1}_{Z_t > R} \right) \geq e^{\alpha R} \left( 1 - e^{-\alpha R} - pe^{\Lambda_t(p')} \frac{e^{(p_\alpha - p' - \alpha)R} - e^{-\alpha R}}{p - p'} \right) \quad (4.3.8)$$

On suppose que  $\alpha$  et  $p'$  sont donnés de sorte que

$$p_\alpha - p' - \alpha + \frac{\Lambda_t(p')}{R} < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} e^{\Lambda_t(p')} \frac{e^{(p_\alpha - p' - \alpha)R}}{p - p'} = 0 \quad (4.3.9)$$

Dans ce cas, on a

$$1 - e^{-\alpha R} - pe^{\Lambda_t(p')} \frac{e^{(p_\alpha - p' - \alpha)R} - e^{-\alpha R}}{p - p'} > 1 - \frac{2p}{p - p'} e^{-(\alpha - p_\alpha + p' - \frac{\Lambda_t(p')}{R})R}$$

D'où, pour  $R$  assez grand, on a

$$\ln \mathbb{E} \left( e^{p_\alpha Y_t} \mathbf{1}_{Y_t > R} \right) \geq \alpha R + \ln \left( 1 - \frac{2p}{p - p'} e^{-(\alpha - p_\alpha + p' - \frac{\Lambda_t(p')}{R})R} \right) \quad (4.3.10)$$

Notons que pour  $R$  assez grand, on a  $\frac{2p}{p - p'} e^{-(\alpha - p_\alpha + p' - \frac{\Lambda_t(p')}{R})R} < 1$ . Alors, en remarquant pour  $x$  au voisinage de 0, on a  $\ln(1 - x) \geq -2x$ , on obtient

$$\ln \mathbb{E} \left( e^{p_\alpha Z_t} \mathbf{1}_{Z_t > R} \right) \geq \alpha R - \frac{4p}{p - p'} e^{-(\alpha - p_\alpha + p' - \frac{\Lambda_t(p')}{R})R} \quad (4.3.11)$$

On considère maintenant  $\mathbb{E} \left( e^{p_\alpha Z_t} \mathbf{1}_{Z_t > R} \right)$ . On a, par l'inégalité de Hölder, pour tout  $q > 1$ ,

$$\mathbb{E} \left( e^{p_\alpha Z_t} \mathbf{1}_{Z_t > R} \right) \leq \left( \mathbb{E} e^{qp_\alpha Z_t} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \mathbb{P}(Z_t > R) \right)^{1 - \frac{1}{q}}.$$

### 4.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES QUEUES DE DISTRIBUTION DU CIR INTÉGRÉ

---

D'où, pour tout  $q > 1$ , on a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln \mathbb{P}(Z_t > R) &\geq \ln \mathbb{E} \left( e^{p_\alpha Z_t} \mathbf{1}_{Z_t > R} \right) - \frac{1}{q} \Lambda_t(qp_\alpha) \\ &\geq \alpha R - \frac{1}{q} \Lambda_t(qp_\alpha) - \frac{4p}{p-p'} e^{-(\alpha - p_\alpha + p' - \frac{\Lambda_t(p')}{R})R}. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

D'abord il faut noter que le mieux c'est de choisir  $q$  :  $qp_\alpha < \mu^*$ , car sinon  $\Lambda_t(qp_\alpha) = +\infty$ .

On va choisir  $q$  sous la forme

$$q(R) = \frac{\Lambda_t^{-1}\left(\frac{1}{\delta_q} \alpha R\right)}{p_\alpha}, \quad \text{avec } \delta_q < 1. \quad (4.3.13)$$

On va choisir  $\delta_q$  sous la forme

$$\delta_q = 1 - \frac{1}{R} \quad (4.3.14)$$

En particulier, on a

$$\Lambda_t(q(R)p_\alpha) = \frac{1}{\delta_q} \alpha R$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{q(R)}{q(R) - 1} \left( \alpha R - \frac{1}{q} \Lambda_t(qp_\alpha) \right) &= \frac{\alpha R \mu^*}{\omega(1 - \delta_q)} \left( \alpha R - \frac{\alpha R}{q(R)\delta_q} \right) \\ &= \frac{q(R)}{q(R) - 1} \left( 1 - \frac{1}{q\delta_q} \right) \alpha R \\ &= \frac{q\delta_q - 1}{\delta_q(q - 1)} \alpha R. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $R$  assez grand, on a

$$\Lambda_t^{-1}\left(\frac{1}{\delta_q} \alpha R\right) = \mu^* - \delta_q \frac{\omega}{\alpha R} (1 + e(\mu^* - qp_\alpha))$$

On en déduit que,

$$\begin{aligned} \frac{q\delta_q - 1}{q - 1} &= \frac{-\mu^*(1 - \delta_q) + \frac{\omega}{\alpha R} (1 - \delta_q^2 + e(\mu^* - qp_\alpha) - \delta_q^2 e(\mu^* - qp_\alpha))}{\delta_q \frac{\omega}{\alpha R} (1 - \delta_q + e(\mu^* - p_\alpha) - \delta_q e(\mu^* - qp_\alpha))} \\ &= \frac{-\mu^* + \frac{\omega}{\alpha R} \left( 1 + \delta_q + e(\mu^* - qp_\alpha)(1 + \delta_q) + \delta_q^2 \frac{e(\mu^* - p_\alpha) - e(\mu^* - qp_\alpha)}{1 - \delta_q} \right)}{\delta_q \frac{\omega}{\alpha R} \left( 1 + e(\mu^* - qp_\alpha) + \delta_q \frac{e(\mu^* - p_\alpha) - e(\mu^* - qp_\alpha)}{1 - \delta_q} \right)} \end{aligned}$$

En utilisant les résultats de la proposition 4.2.1, on obtient que

$$\frac{e(\mu^* - p_\alpha) - e(\mu^* - qp_\alpha)}{1 - \delta_q} = \frac{1}{\delta_q} e(\mu^* - p_\alpha) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha R}\right) \quad (4.3.15)$$

D'où

$$\frac{q(R)}{q(R) - 1} (\alpha R - \frac{1}{q} \Lambda_t(qp_\alpha)) = \frac{-\mu^* + \frac{\omega}{\alpha R} (1 + \delta_q + (1 + 2\delta_q)e(\mu^* - p_\alpha))}{\delta_q \frac{\omega}{\alpha R} (1 + 2e(\mu^* - p_\alpha))} \alpha R$$

On suppose que  $\alpha$  est donné sous la forme

$$\alpha^2 = (1 + \delta_\alpha) \delta_q \frac{\omega}{R} (1 + 2e(\mu^* - p_\alpha)) \quad (4.3.16)$$

Dans ce cas, on a

$$\frac{q(R)}{q(R) - 1} (\alpha R - \frac{1}{q} \Lambda_t(qp_\alpha)) = \left[ -\mu^* + \frac{\omega}{\alpha R} (1 + \delta_q + (1 + 2\delta_q)e(\mu^* - p_\alpha)) \right] \sqrt{(1 + \delta_\alpha) R} \quad (4.3.17)$$

Il reste à vérifier que avec le choix de  $\alpha$  vérifiant (4.3.16), on peut trouver  $p' < p$  tel que

$$p_\alpha - p' - \alpha + \frac{\Lambda_t(p')}{R} < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} e^{\Lambda_t(p')} \frac{e^{(p_\alpha - p' - \alpha)R}}{p - p'} = 0 \quad (4.3.18)$$

On sait d'après (4.3.7) que  $p_\alpha = \mu^* - \frac{\omega}{\alpha R} (1 + e(\mu^* - p_\alpha))$ . En particulier, si on pose

$$p' = \Lambda_t^{-1}(\chi \alpha R), \quad \text{avec } \chi < 1.$$

On est sûr que  $p' < p_\alpha$ . Choisissons maintenant  $\chi < 1$  de sorte que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-\lambda_\alpha R} = 0,$$

où

$$\lambda_\alpha = \alpha - (p_\alpha - p') - \frac{\Lambda_t(p')}{R}$$

Notons que  $p'$  s'écrit sous la forme

$$p' = \mu^* - \frac{\omega}{\chi \alpha R} (1 + e(\mu^* - p')).$$

Avec

$$e(\mu^* - p') = (2 - \chi)e(\mu^* - p_\alpha) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha R}\right).$$

### 4.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES QUEUES DE DISTRIBUTION DU CIR INTÉGRÉ

---

On en déduit que  $\lambda_\alpha$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha &= \alpha + \frac{\omega}{\alpha R} \left( 1 + e(\mu^* - p_\alpha) - \frac{1}{\chi}(2 - \chi)e(\mu^* - p_\alpha) \right) - \chi\alpha \\ &= \alpha \left( 1 + \frac{\omega}{\alpha^2 R} (1 + 2e(\mu^* - p_\alpha)) \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) - \chi \right) \\ &= \alpha \left( 1 + \frac{1}{\delta_q(1 + \delta_\alpha)} \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) - \chi \right)\end{aligned}$$

car  $\alpha^2 = \delta_q(1 + \delta_\alpha(1 + 2e(\mu^* - p_\alpha)))$ . On suppose que  $\frac{1}{\delta_q(1 + \delta_\alpha)} > 1$  et on prend  $\chi = \frac{1}{\sqrt{\delta_q(1 + \delta_\alpha)}}$ . Dans ce cas, on obtient

$$\lambda_\alpha = \alpha \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\delta_q(1 + \delta_\alpha)}} \right)^2 \sim \sqrt{\frac{\omega}{R}} \frac{\delta_\alpha^2}{4} \quad (4.3.19)$$

De même,

$$p_\alpha - p' \sim \frac{\sqrt{\omega} \delta}{\sqrt{R} 2}$$

Finalement, en particulier, si on choisit

$$\delta_\alpha = \frac{1}{\log R} \quad (4.3.20)$$

on obtient que pour tout polynôme  $Q$ , on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} Q(R) e^{-\lambda_\alpha R} = 0. \quad (4.3.21)$$

En particulier, on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{\Lambda_t(p')} \frac{q}{q-1} \frac{e^{(p_\alpha - p' - \alpha)R}}{p - p'} = 0$$

En remarquant que

$$e(\mu^* - p_\alpha) \sim -\frac{2a}{\omega\sigma^2} \sqrt{\frac{\omega}{R}} \log\left(\sqrt{\frac{\omega}{R}}\right)$$

et que

$$\frac{(1 + \delta_q + (1 + 2\delta_q)e(\mu^* - p_\alpha))}{\sqrt{1 + 2e(\mu^* - p_\alpha)}} \sim 2 + \frac{2a}{\sqrt{\omega}\sigma^2} \sqrt{\frac{1}{R}} \log(R)$$

On obtient

$$\frac{q(R)}{q(R) - 1} (\alpha R - \frac{1}{q} \Lambda_t(qp_\alpha)) \sim \left[ -\mu^* R + 2\sqrt{\omega R} + \frac{2a}{\sigma^2} \log(R) \right] \sqrt{1 + \delta_\alpha} \quad (4.3.22)$$

En particulier,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \left[ \frac{q(R)}{q(R) - 1} (\alpha R - \frac{1}{q} \Lambda_t(qp_\alpha)) \right] = -\mu^*. \quad (4.3.23)$$

On déduit, en utilisant (4.3.12), (4.3.21) et (4.3.23) que

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{P}(Z_t > R)}{\sqrt{R}} \geq -\mu^* \quad (4.3.24)$$

D'où le théorème.

## 4.4 Dérivées du CIR par rapport à ses paramètres

On considère l'unique solution de l'équation différentielle stochastique (4.1.1) issue de  $v > 0$ , qu'on note  $V^v$ . On s'intéresse aux propriétés de dérivabilité de  $V^v$  par rapport à sa position initiale (dérivée du flot) et par rapport aux paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$ . La connaissance des ces dérivées est importante si on veut mesurer l'impact des ces paramètres dans l'évolution du prix d'un actif modélisé, ou dont la variance est modélisée, par ce processus. Pour des raisons techniques, nous allons plutôt considérer la racine carrée de  $V^v$ , qu'on notera  $X$ . Dans toute cette section, on suppose que

$$2a \geq \sigma^2 \quad (4.4.1)$$

Sous cette hypothèse, le processus  $X$  est l'unique solution, issue de  $\sqrt{v}$ , de l'EDS définie par

$$dX_t = \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t} - \frac{b}{2} X_t \right) dt + \frac{\sigma}{2} dW_t. \quad (4.4.2)$$

Pour simplifier, on suppose que  $b > 0$ . Notons que les résultats suivants restent valables dans le cas où  $b \leq 0$ .

### 4.4.1 Dérivée par rapport à la position initiale

On commence par l'étude de la dérivabilité de  $X$  par rapport à la position initiale  $v$ , souvent appelée "dérivée du flot de l'EDS". On s'intéresse ici à la dérivabilité au sens  $\mathcal{L}_p$



---

#### 4.4. DÉRIVÉES DU CIR PAR RAPPORT À SES PARAMÈTRES

de la fonction  $v \mapsto X^v$ , où  $X^v$  est l'unique solution de (4.4.2) issue de  $\sqrt{v}$ . C'est à dire l'existence d'un processus  $\dot{X}_v$  tel que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \sup_{s \leq t} \left| \frac{X_s^{v+\epsilon} - X_s^v}{\epsilon} - \dot{X}_v(s) \right| \right\|_p = 0 \quad (4.4.3)$$

**Proposition 4.4.1.** *On suppose que  $4a > 3\sigma^2$ . Alors, l'application  $v \mapsto X^v$  est dérivable au sens  $\mathcal{L}_p$  pour tout  $1 \leq p < \frac{4a-2\sigma}{\sigma}$  et sa dérivée, qu'on note  $\dot{X}_v$ , est donnée par*

$$\dot{X}_v(t) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \exp \left( -\frac{b}{2}t - \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_0^t \frac{du}{(X_u^v)^2} \right) \quad (4.4.4)$$

**Preuve:** Soit  $v > 0$ .  $X^v$  est donnée par

$$X_t^v = \sqrt{v} + \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_0^t \frac{du}{X_u^v} - \frac{b}{2} \int_0^t X_u^v du + \frac{\sigma}{2} W_t$$

Pour  $\epsilon > 0$ , on pose  $R_0^\epsilon(t) = X_t^{v+\epsilon} - X_t^v$ . En particulier,  $R_0^\epsilon$  est solution de

$$dR_0^\epsilon(t) = - \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^{v+\epsilon} X_t^v} + \frac{b}{2} \right) R_0^\epsilon(t) dt, \quad R_0^\epsilon(0) = \frac{\epsilon}{\sqrt{v} + \sqrt{v+\epsilon}}. \quad (4.4.5)$$

On en déduit que  $R_0^\epsilon(t)$  s'écrit sous la forme

$$R_0^\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{\sqrt{v} + \sqrt{v+\epsilon}} e^{-\int_0^t \alpha_u^\epsilon du},$$

où  $\alpha_t^\epsilon := \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^{v+\epsilon} X_t^v} + \frac{b}{2}$ . En particulier, comme  $4a^2 > 3\sigma^2 > \sigma^2$ , alors on a, pour tout  $t > 0$ ,

$$\left\| \sup_{s \leq t} R_0^\epsilon(s) \right\|_p \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{v} + \sqrt{v+\epsilon}}, \quad \forall p > 0.$$

On pose maintenant,

$$\dot{X}_v(t) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \exp \left( -\frac{b}{2}t - \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_0^t \frac{du}{(X_u^v)^2} \right) \quad (4.4.6)$$

Le processus  $\dot{X}_v$  est solution de

$$d\dot{X}_v(t) = - \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{(X_t^v)^2} + \frac{b}{2} \right) \dot{X}_v(t) dt$$

On considère maintenant le processus  $R_1^\epsilon(t) := X_t^{v+\epsilon} - X_t^v - \epsilon \dot{X}_v(t)$ . On déduit de (4.4.5) et (4.4.6) que  $R_1^\epsilon$  est solution de

$$dR_1^\epsilon(t) = \left( -\alpha_t^\epsilon R_1^\epsilon(t) - \epsilon \dot{X}_v(t) \left( \alpha_t^\epsilon - \left[ \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{(X_t^v)^2} + \frac{b}{2} \right] \right) \right) dt$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \alpha_t^\epsilon - \left[ \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{(X_t^v)^2} + \frac{b}{2} \right] &= \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \left( \frac{1}{X^{v+\epsilon} X_t^v} - \frac{1}{(X_t^v)^2} \right) \\ &= - \left( \frac{\alpha_t^\epsilon}{X_t^v} - \frac{b}{2X_t^v} \right) R_0^\epsilon(t) \end{aligned}$$

On en déduit que  $R_1^\epsilon(t)$  s'écrit sous la forme

$$R_1^\epsilon(t) = \epsilon^2 \int_0^t e^{-\int_s^t \alpha_u^\epsilon du} \dot{X}_v(s) \left( \frac{\alpha_s^\epsilon}{X_s^v} - \frac{b}{2X_s^v} \right) \frac{R_0^\epsilon(s)}{\epsilon} ds,$$

On obtient donc, par la même méthode que dans [2], on peut écrire (notamment en utilisant les propriétés  $\dot{X}_v(s) \leq \frac{1}{2\sqrt{v}}$ ,  $e^{-\int_s^t \alpha_u^\epsilon du} \leq 1$ ,  $\forall s \leq t$  et  $\int_0^t \alpha_s^\epsilon e^{-\int_s^t \alpha_u^\epsilon du} ds = 1 - e^{-\int_0^t \alpha_u^\epsilon du} \leq 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{|R_1^\epsilon(t)|}{\epsilon^2} &\leq \sup_{s \leq t} \left\{ \dot{X}_v(s) \frac{|R_0^\epsilon(s)|}{\epsilon} \right\} \times \int_0^t e^{-\int_s^t \alpha_u^\epsilon du} \left( \frac{\alpha_s^\epsilon}{X_s^v} + \frac{b}{2X_s^v} \right) ds \\ &\leq \frac{1 + bt}{2\sqrt{v}(\sqrt{v} + \sqrt{v} + \epsilon)} \times \sup_{s \leq t} \frac{1}{X_s^v}. \end{aligned}$$

La preuve repose sur le lemme suivant (cf. [15], Lemma 2.3.2.)

**Lemme 4.4.1.** *Sous l'hypothèse  $2a > \sigma^2$ , on a, pour tout  $t > 0$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq t} \frac{1}{X_s^p} \right] < +\infty, \quad \forall p < 2 \left( \frac{2a}{\sigma^2} - 1 \right). \quad (4.4.7)$$

En utilisant ce lemme, on déduit finalement que,

$$\left\| \sup_{s \leq t} \frac{|R_1^\epsilon(s)|}{\epsilon} \right\|_p \leq \epsilon C, \quad \forall 1 \leq p < 2 \left( \frac{2a}{\sigma^2} - 1 \right).$$

C'est à dire que

$$\left\| \sup_{s \leq t} \left\| \frac{X_s^{v+\epsilon} - X_s^v}{\epsilon} - \dot{X}_v(s) \right\| \right\|_p \leq \epsilon C, \quad \forall 1 \leq p < 2 \left( \frac{2a}{\sigma^2} - 1 \right).$$

D'où le résultat de la proposition.

**Corollaire 4.4.1.** *On suppose que  $4a > 3\sigma^2$ . Alors l'application  $v \mapsto V^v$  est dérivable au sens  $\mathcal{L}_p$  pour tout  $1 \leq p < \frac{4a-2\sigma^2}{\sigma^2}$  et sa dérivée, qu'on note  $\dot{V}_v$ , est donnée par*

$$\dot{V}_v(t) = \frac{\sqrt{V_t^v}}{\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{b}{2}t - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_0^t \frac{du}{V_u^v}\right) \quad (4.4.8)$$

En particulier,  $\dot{V}_v$  est solution, issue de 1, de l'EDS définie par

$$d\dot{V}_v(t) = -b\dot{V}_v dt + \sigma \frac{\dot{V}_v}{2\sqrt{V_t}} dW_t.$$

**Remarque 4.4.1.** La condition  $4a > 3\sigma^2$  n'est utilisée que dans le but d'assurer que la variable aléatoire  $\sup_{s \leq t} X_s$  admette des moments d'ordre  $p$ , pour un  $p \geq 1$ . Il ne s'agit donc pas d'une condition optimale, par contre nous avons besoin de la condition de Feller ( $2a \geq \sigma^2$ ), car sans cette hypothèse, les trajectoire de  $V$  vont toucher 0 avec une non nulle, ce qui posera des problèmes pour la dérivabilité de sa racine.

#### 4.4.2 Dérivée par rapport à $\sigma$

On s'intéresse maintenant à l'étude de la dérivabilité de  $X$  par rapport à  $\sigma$  en fixant  $a$  et  $b$ . Dans le cas particulier où  $\sigma = 0$ , Benhamou, Gobet et Miri (cf. [2]) montrent que  $\sigma \mapsto X$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage 0. Nous allons montrer que cette application est de classe  $C^1$  sur  $[0, \sqrt{a}[$  au sens  $\mathcal{L}_p$ , et cela en appliquant une méthode similaire à celle utilisée dans [2]

**Proposition 4.4.2.** *Pour tout  $\sigma \in [0, \sqrt{a}[$ , l'application  $\sigma \mapsto X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  au point  $\sigma$  au sens  $\mathcal{L}_p$ , pour tout  $p \in [1, \frac{2a}{\sigma^2} - 1[$  et sa dérivée est solution de l'EDS définie par*

$$d\dot{X}_\sigma(t) = \left( -\frac{\sigma}{4X_t} - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \frac{\dot{X}_\sigma(t)}{X_t} - \frac{b}{2} \dot{X}_\sigma(t) \right) dt + \frac{1}{2} dW_t. \quad (4.4.9)$$

**Preuve:** La preuve est similaire à celle dans le cas où  $\sigma = 0$ , qu'on trouve dans [2]. On note  $X^\epsilon$  l'unique solution, issue de  $\sqrt{v}$ , de l'EDS définie par

$$dX_t^\epsilon = \left( \left(\frac{a}{2} - \frac{(\sigma + \epsilon)^2}{8}\right) \frac{1}{X_t^\epsilon} - \frac{b}{2} X_t^\epsilon \right) dt + \frac{\sigma + \epsilon}{2} dW_t.$$

On utilise les notations de [2]. On pose  $R_0^\epsilon(t) = X_t^\epsilon - X_t$ , alors en remarquant que la dynamique de  $R_0^\epsilon$  est donnée sous la forme

$$\begin{aligned} dR_0^\epsilon(t) &= \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{(\sigma + \epsilon)^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^\epsilon} - \frac{b}{2} X_t^\epsilon - \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t} + \frac{b}{2} X_t \right) dt + \frac{\epsilon}{2} dW_t \\ &= \left( - \left[ \left( \frac{a}{2} - \frac{(\sigma + \epsilon)^2}{8} \right) \frac{1}{X_s^\epsilon X_s} + \frac{b}{2} \right] R_0^\epsilon(t) - \frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8X_t} \right) dt + \frac{\epsilon}{2} dW_t, \end{aligned}$$

on déduit que  $R_0^\epsilon$  s'écrit sous la forme

$$R_0^\epsilon(t) = U_t^\epsilon \int_0^t (U_s^\epsilon)^{-1} \left( -\frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8X_s} ds + \frac{\epsilon}{2} dW_s \right),$$

où  $U^\epsilon$  est donné par

$$U_t^\epsilon = \exp \left( - \int_0^t \alpha_s^\epsilon ds \right), \quad (4.4.10)$$

avec

$$\alpha_s^\epsilon = \left( \frac{a}{2} - \frac{(\sigma + \epsilon)^2}{8} \right) \frac{1}{X_s^\epsilon X_s} + \frac{b}{2}. \quad (4.4.11)$$

En appliquant la formule d'Itô au produit  $(U_t^\epsilon)^{-1} W_t$ , on obtient

$$R_0^\epsilon(t) = -\frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8} U_t^\epsilon \int_0^t (U_s^\epsilon)^{-1} \frac{ds}{X_s} + \frac{\epsilon}{2} W_t + U_t^\epsilon \int_0^t W_s d(U_s^\epsilon)^{-1}$$

En utilisant le fait que  $\alpha^\epsilon \geq \frac{b}{2} > 0$ , *p.s.*, ce qui implique en particulier que  $t \mapsto U_t^\epsilon$  est décroissante et que pour tout  $s \leq t$ , on a  $0 \leq U_t^\epsilon (U_s^\epsilon)^{-1} \leq 1$ , *p.s.*, on déduit que

$$\begin{aligned} |R_0^\epsilon(t)| &\leq \frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8} \int_0^t \frac{ds}{X_s} + \frac{\epsilon}{2} \left( \sup_{s \leq t} W_s + \sup_{s \leq t} W_s (1 - U_t^\epsilon) \right) \\ &\leq \frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8} t \sup_{s \leq t} \frac{1}{X_s} + \epsilon \sup_{s \leq t} W_s. \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant le lemme 4.4.1, que

$$\|R_0^\epsilon\|_p \leq C\epsilon, \quad \forall 1 \leq p < 2 \left( \frac{2a}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (4.4.12)$$

On continue à procéder d'une façon similaire à [2]. On pose

$$\dot{X}_\sigma(t) := U_t^0 \int_0^t (U_s^0)^{-1} \left( -\frac{\sigma}{4X_s} ds + \frac{1}{2} dW_s \right)$$

En particulier, on a  $\|\dot{X}_\sigma\|_p \leq C$ . De plus, on peut vérifier que  $\dot{X}_\sigma$  est solution de l'EDS définie par

$$d\dot{X}_\sigma(t) = - \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^2} + \frac{b}{2} \right) \dot{X}_\sigma(t) dt - \frac{\sigma}{4X_t} dt + \frac{1}{2} dW_t$$

Ensuite, on pose  $R_1^\epsilon(t) = X_t^\epsilon - X_t - \epsilon \dot{X}_\sigma(t)$ . En particulier,  $R_1^\epsilon$  est solution de l'EDS définie par

$$dR_1^\epsilon(t) = \left( -\alpha_t^\epsilon R_1^\epsilon(t) - \epsilon \dot{X}_\sigma(t) \left( \alpha_t^\epsilon - \left[ \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^2} + \frac{b}{2} \right] \right) - \frac{\epsilon^2}{8X_t} \right) dt$$

D'autre part, on peut vérifier que

$$\alpha_t^\epsilon - \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^2} + \frac{b}{2} \right) = - \left( \frac{\alpha_t^\epsilon}{X_t} - \frac{b}{2X_t} \right) R_0^\epsilon(t) - \frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8X_t^2}$$

On en déduit que  $R_1^\epsilon$  peut s'écrire sous la forme

$$R_1^\epsilon(t) = U_t^\epsilon \int_0^t (U_s^\epsilon)^{-1} \left( -\frac{\epsilon^2}{8X_s} ds + \epsilon \dot{X}_\sigma(s) \left( \left( \frac{\alpha_s^\epsilon}{X_s} - \frac{b}{2X_s} \right) R_0^\epsilon(s) + \frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8X_s^2} \right) \right) ds,$$

On obtient donc, par la même méthode que dans [2], on peut écrire (notamment en utilisant les propriétés  $U_t^\epsilon (U_s^\epsilon)^{-1} \leq 1$ ,  $\forall s \leq t$  et  $U_t^\epsilon \int_0^t \alpha_s^\epsilon (U_s^\epsilon)^{-1} ds = 1 - U_t^\epsilon \leq 1$ )

$$\begin{aligned} |R_1^\epsilon(t)| &\leq \int_0^t U_t^\epsilon (U_s^\epsilon)^{-1} \left( \frac{\epsilon^2}{8X_s} ds + \epsilon |\dot{X}_\sigma(s)| \left( \left( \frac{\alpha_s^\epsilon}{X_s} + \frac{b}{2X_s} \right) |R_0^\epsilon(s)| + \frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8X_s^2} \right) \right) ds \\ &\leq \int_0^t U_t^\epsilon (U_s^\epsilon)^{-1} \left( \frac{\epsilon^2}{8X_s} ds + \epsilon |\dot{X}_\sigma(t)| \left( \frac{b}{2X_s} |R_0^\epsilon(s)| + \frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8X_s^2} \right) \right) ds + \\ &\quad \epsilon \int_0^t U_t^\epsilon (U_s^\epsilon)^{-1} \frac{\alpha_s^\epsilon}{X_s} |\dot{X}_\sigma(s)| |R_0^\epsilon(s)| ds \\ &\leq \int_0^t \left( \frac{\epsilon^2}{8X_s} ds + \epsilon |\dot{X}_\sigma(t)| \left( \frac{b}{2X_s} |R_0^\epsilon(s)| + \frac{2\epsilon\sigma + \epsilon^2}{8X_s^2} \right) \right) ds + \epsilon \sup_{s \leq t} \left( \frac{|\dot{X}_\sigma(s)| |R_0^\epsilon(s)|}{X_s} \right) \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme 4.4.1,

$$\|R_1^\epsilon\|_p \leq C\epsilon^2, \quad \forall 1 \leq p < \left( \frac{2a}{\sigma^2} - 1 \right). \quad \square$$

#### 4.4.3 Dérivées par rapport à $a$ et $b$

En procédant de la même façon que précédemment, on peut montrer les résultats suivants

**Proposition 4.4.3.** Soient  $b, \sigma, x \geq 0$ . Pour tout  $a \in ]\sigma^2, +\infty[$ , on note  $X^a$  l'unique solution issue de  $x$  de l'EDS définie par  $dX_t = \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t} - \frac{b}{2} X_t \right) dt + \frac{\sigma}{2} dW_t$ , et soit  $a_0 > \sigma^2$ . Alors la fonction  $a \mapsto X^a$  est dérivable en  $a_0$  au sens  $\mathcal{L}_p$ , pour tout  $1 \leq p \leq \frac{2a_0}{\sigma^2} - 1$  et sa dérivée, qu'on note  $\dot{X}_a$ , est donnée par

$$\dot{X}_a(t) = \int_0^t \frac{1}{2X_s} \exp \left( -\frac{b}{2}(t-u) - \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_s^t \frac{du}{X_u^2} \right) ds \quad (4.4.13)$$

**Preuve :**

On note  $X^\epsilon$  l'unique solution, issue de  $\sqrt{v}$ , de l'EDS définie par

$$dX_t^\epsilon = \left( \left( \frac{a+\epsilon}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^\epsilon} - \frac{b}{2} X_t^\epsilon \right) dt + \frac{\sigma}{2} dW_t.$$

On pose  $R_0^\epsilon(t) = X_t^\epsilon - X_t$ , alors  $R_0^\epsilon$  s'écrit sous la forme

$$R_0^\epsilon(t) = \epsilon U_t^\epsilon \int_0^t (U_s^\epsilon)^{-1} \frac{1}{2X_s} ds,$$

où  $U^\epsilon = \exp \left( -\int_0^t \alpha_s^\epsilon ds \right)$ , avec  $\alpha_t^\epsilon = \left( \frac{a+\epsilon}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_s^\epsilon X_s} + \frac{b}{2}$ . En particulier, en appliquant le lemme 4.4.1, on peut vérifier que

$$\|R_0^\epsilon\|_p \leq C\epsilon, \quad \forall 1 \leq p < 2 \left( \frac{2a}{\sigma^2} - 1 \right).$$

On pose maintenant

$$\dot{X}_a(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{R_0^\epsilon(t)}{\epsilon} = U_t^0 \int_0^t (U_s^0)^{-1} \frac{1}{2X_s} ds$$

En particulier on a  $\|\dot{X}_a\|_p \leq C$ . De plus, on peut vérifier que  $\dot{X}_a$  est solution de l'EDS définie par

$$d\dot{X}_a(t) = - \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^2} + \frac{b}{2} \right) \dot{X}_a(t) dt + \frac{1}{2X_t} dt$$

Ensuite, on pose  $R_1^\epsilon(t) = X_t^\epsilon - X_t - \epsilon \dot{X}_a(t)$ . En particulier,  $R_1^\epsilon$  est solution de l'EDS définie par

$$dR_1^\epsilon(t) = \left( -\alpha_t^\epsilon R_1^\epsilon(t) - \epsilon \dot{X}_a(t) \left( \alpha_t^\epsilon - \left[ \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^2} + \frac{b}{2} \right] \right) \right) dt$$

Remarquons que

$$\alpha_t^\epsilon - \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^2} + \frac{b}{2} \right) = - \left( \frac{\alpha_t^\epsilon}{X_t} - \frac{b}{2X_t} \right) R_0^\epsilon(t) + \frac{\epsilon}{2X_t^2}$$

On en déduit que  $R_1^\epsilon$  peut s'écrire sous la forme

$$R_1^\epsilon(t) = U_t^\epsilon \int_0^t (U_s^\epsilon)^{-1} \left( \dot{X}_a(t) \left( \epsilon \left( \frac{\alpha_t^\epsilon}{X_t} - \frac{b}{2X_t} \right) R_0^\epsilon(t) - \frac{\epsilon^2}{2X_t^2} \right) \right) ds,$$

On obtient ainsi, de la même façon que précédemment et en appliquant le lemme 4.4.1, que

$$\|R_1^\epsilon\|_p \leq C\epsilon^2, \quad \forall 1 \leq p < \frac{2a}{\sigma^2} - 1. \quad \square$$

**Proposition 4.4.4.** *Soient  $x \geq 0$  et  $a$  et  $\sigma$  tels que  $4a > 3\sigma^2$ . Pour tout  $b \geq 0$ , on note  $X^b$  solution issue de  $x$  de l'EDS définie par  $dX_t = \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t} - \frac{b}{2} X_t \right) dt + \frac{\sigma}{2} dW_t$ , et soit  $b_0 \in \mathbb{R}$ . Alors la fonction  $b \mapsto X^b$  est dérivable en  $b_0$  au sens  $\mathcal{L}_p$ , pour tout  $1 \leq p < 2\left(\frac{2a}{\sigma^2} - 1\right)$  et sa dérivée, qu'on note  $\dot{X}_b$ , est donnée par*

$$\dot{X}_b(t) = - \int_0^t \frac{X_s}{2} \exp \left( -\frac{b}{2}(t-u) - \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_s^t \frac{du}{X_u^2} \right) ds \quad (4.4.14)$$

**Preuve :**

On note  $X^\epsilon$  l'unique solution, issue de  $\sqrt{v}$ , de l'EDS définie par

$$dX_t^\epsilon = \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^\epsilon} - \frac{b+\epsilon}{2} X_t^\epsilon \right) dt + \frac{\sigma}{2} dW_t.$$

On pose  $R_0^\epsilon(t) = X_t^\epsilon - X_t$ , alors  $R_0^\epsilon$  s'écrit sous la forme

$$R_0^\epsilon(t) = -\epsilon U_t^\epsilon \int_0^t (U_s^\epsilon)^{-1} \frac{X_s}{2} ds,$$

où  $U^\epsilon = \exp \left( - \int_0^t \alpha_s^\epsilon ds \right)$ , avec  $\alpha_t^\epsilon = \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_s^\epsilon X_s} + \frac{b+\epsilon}{2}$ . En particulier, en utilisant (??), on peut vérifier que

$$\|R_0^\epsilon\|_p \leq C\epsilon, \quad \forall p \geq 1.$$

On pose maintenant

$$\dot{X}_b(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{R_0^\epsilon}{\epsilon}(t) = -U_t^0 \int_0^t (U_s^0)^{-1} \frac{X_s}{2} ds$$

En particulier on a  $\|\dot{X}_b\|_p \leq C$ . De plus, on peut vérifier que  $X_b$  est solution de l'EDS définie par

$$d\dot{X}_b(t) = - \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^2} + \frac{b}{2} \right) \dot{X}_b(t) dt - \frac{X_t}{2} dt$$

Ensuite, on pose  $R_1^\epsilon(t) = X_t^\epsilon - X_t - \epsilon \dot{X}_b(t)$ . En particulier,  $R_1^\epsilon$  est solution de l'EDS définie par

$$dR_1^\epsilon(t) = \left( -\alpha_t^\epsilon R_1^\epsilon(t) - \epsilon \dot{X}_b(t) \left( \alpha_t^\epsilon - \left[ \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^2} + \frac{b}{2} \right] \right) \right) dt$$

On peut vérifier que

$$\alpha_t^\epsilon - \left( \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \frac{1}{X_t^2} + \frac{b}{2} \right) = - \left( \frac{\alpha_t^\epsilon}{X_t} - \frac{b + \epsilon}{2X_t} \right) R_0^\epsilon(t) + \frac{\epsilon}{2}$$

On en déduit que  $R_1^\epsilon$  peut s'écrire sous la forme

$$R_1^\epsilon(t) = U_t^\epsilon \int_0^t (U_s^\epsilon)^{-1} \left( \dot{X}_b(t) \left( \epsilon \left( \frac{\alpha_t^\epsilon}{X_t} - \frac{b + \epsilon}{2X_t} \right) R_0^\epsilon(t) - \frac{\epsilon^2}{2} \right) \right) ds,$$

On en déduit que

$$\|R_1^\epsilon\|_p \leq C\epsilon^2, \quad \forall 1 \leq p < 2\left(\frac{2a}{\sigma^2} - 1\right). \quad \square$$

**Corollaire 4.4.2.** *Sous les hypothèse respectives des propositions 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4, la solution de l'EDS (4.1.1) est dérivable par rapport aux paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$ . On note respectivement  $\dot{V}_a$ ,  $\dot{V}_b$  et  $\dot{V}_\sigma$  ses dérivées respective, alors ces dérivées sont données par*

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(t) &= \sqrt{V}_t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{V}_s} \exp \left( -\frac{b}{2}(t-u) - \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_s^t \frac{du}{V_u} \right) ds, \\ \dot{V}_b(t) &= -\sqrt{V}_t \int_0^t \sqrt{V}_s \exp \left( -\frac{b}{2}(t-u) - \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_s^t \frac{du}{V_u} \right) ds, \\ \dot{V}_\sigma(t) &= \frac{2}{\sigma} V_t - \frac{2}{\sigma} \sqrt{V}_t \left( \sqrt{v} e^{-\frac{b}{2}t - \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_0^t \frac{dr}{V_r}} + a \int_0^t \frac{e^{-\frac{b}{2}(t-u) - \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_u^t \frac{dr}{V_r}}}{\sqrt{V}_u} du \right) \end{aligned} \quad 4.4.15$$

### Preuve

Comme  $V_t = X_t^2$ , alors  $V$  est dérivable par rapport aux paramètres  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$  sous les hypothèse des propositions précédentes. En particulier, la dérivée  $\dot{V}_\sigma$  vérifie

$$d\dot{V}_\sigma(t) = -b\dot{V}_\sigma(t)dt + \sqrt{V}_t dW_t^2 + \sigma \frac{\dot{V}_\sigma(t)}{2\sqrt{V}_t} dW_t, \quad V_\sigma(0) = 0.$$



---

#### 4.4. DÉRIVÉES DU CIR PAR RAPPORT À SES PARAMÈTRES

On remarque que le processus  $Z_t := \dot{V}_\sigma(t) - \frac{2}{\sigma}V_t$  est solution de l'EDS définie par

$$dZ_t = \left( -\frac{2a}{\sigma} - bZ_t \right) dt + \sigma \frac{Z_t}{2\sqrt{V_t}} dW_t^2, \quad Z_0 = -\frac{2}{\eta}x.$$

D'autre part, en appliquant la formule d'Itô au processus  $ZV^\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , on obtient

$$d(ZV^\alpha)(t) = \left( -\frac{2a}{\sigma}V_t^\alpha - b(1+\alpha)Z_tV_t^\alpha + \left(\alpha a + \frac{\alpha^2}{2}\sigma^2\right)Z_tV_t^{\alpha-1} \right) dt + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)Z_tV_t^{\alpha-\frac{1}{2}}dW_t^2.$$

On en déduit que, en choisissant  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , le processus  $Y = ZV^{-\frac{1}{2}}$ ,  $Y$  est à variation finie et est solution de

$$dY_t = \left( -\frac{2a}{\sigma}V_t^{-\frac{1}{2}} - \frac{b}{2}Y_t - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right)\frac{Y_t}{V_t} \right) dt, \quad Y_0 = -\frac{2}{\eta}\sqrt{v}.$$

On peut facilement intégrer cette équation, on obtient

$$Y_t := \frac{V_\sigma(t) - \frac{2}{\sigma}V_t}{\sqrt{V_t}} = -\frac{2}{\sigma}\sqrt{v}e^{-\gamma t} - \frac{2a}{\sigma} \int_0^t \frac{e^{-(\gamma t - \gamma u)}}{\sqrt{V_u}} du, \quad p.s.,$$

où

$$\gamma_t := \frac{b}{2}t + \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_0^t \frac{dr}{V_r}. \quad (4.4.16)$$

D'où

$$\dot{V}_\sigma(t) = \frac{2}{\sigma}V_t - \frac{2}{\sigma}\sqrt{V_t} \left( \sqrt{v}e^{-\frac{b}{2}t - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_0^t \frac{dr}{V_r}} + a \int_0^t \frac{e^{-\frac{b}{2}(t-u) - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_u^t \frac{dr}{V_r}}}{\sqrt{V_u}} du \right), \quad p.s.$$



# 5 Monotonie par rapport aux paramètres de la volatilité

## 5.1 Introduction

La principale attraction du modèle de Black-Scholes est la capacité d'exprimer les prix d'options européennes en fonction d'un paramètre de volatilité. De plus, pour les pay-offs convexes, ces formules sont bijectives, strictement croissantes en fonction du paramètre de volatilité, ce qui permet de couvrir le risque lié à ce paramètre par l'achat ou la vente d'options. Cependant, suite au rejet de l'hypothèse de volatilité déterministe par les études empiriques, les praticiens sont de plus en plus convaincus que la façon la plus réaliste de modéliser le cours d'une action est de considérer un modèle où le processus de la variance instantanée est stochastique.

Dans un modèle à volatilité stochastique général, le prix d'un actif sous-jacent est une fonction du temps, de la valeur courante du sous-jacent et de la valeur aujourd'hui de sa volatilité. La monotonie du prix de cette option par rapport à la variable de la volatilité peut se voir d'une façon intuitive. En effet, augmenter la position initiale du processus de la volatilité va induire une augmentation de la volatilité, trajectoire par trajectoire, ce qui augmentera les prix d'options standards car les fluctuations du prix du sous-jacent vont être plus importantes. Concrètement, la volatilité a un effet positif sur les prix de pay-off convexe. Cet effet a été démontré, par exemple, par Bergman et al. (1996), Hobson (1998), Janson et Tysk (2002), et Kijima (2002), et des résultats similaires peuvent être trouvées dans des contextes similaires (voir, par exemple, Olsen et Stensland 1992, Alvarez 2000, Alvarez et Stenbacka 2004). Dans le cas où la volatilité est stochastique mais bornée entre deux valeurs  $m$  et  $M$ , El Karoui et al (1995) montrent que le prix d'une option est borné entre le prix Black-Scholes avec volatilité  $m$  et  $M$ . Dans [51], Romano et Touzi montrent

que la dérivée de la fonction de valeur d'une option par rapport à la volatilité dans des modèles comme Hull et White (1987) et Scott (1987) a un signe constant et ne touche 0 qu'à la maturité.

Outre sa valeur initiale le processus de la volatilité est souvent donné en fonction d'autres paramètres. Par exemple, dans le modèle de Heston, le processus de la variance instantanée est un C.I.R avec des paramètres  $(a, b, \sigma)$  et corrélé avec les mouvements du sous-jacent avec un coefficient de corrélation  $\rho$ . Les prix d'options sur sous-jacent dépendent donc de la valeur initiale du processus de la volatilité ainsi que des valeurs des paramètres de la diffusion guidant cette volatilité. Ces paramètres sont souvent calibrés sur des produits dérivés, ils ont donc tendance à changer leurs valeurs régulièrement. Il est donc important de savoir l'impact qu'ils ont sur les prix d'options, ne serait-ce que pour faciliter la calibration.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la dépendance du prix d'un Put européen par rapport à la valeur initiale de variance instantanée et par rapport aux paramètres du processus de volatilité dans le modèle de Heston. Ce travail est motivé par les résultats empiriques obtenus par Kurpiel [41], qui a étudié l'impact de ces paramètres sur la frontière libre de l'exercice d'un Put américain dans le modèle de Heston. Nous montrerons notamment que la fonction de valeur de cette option est croissante par rapport à la valeur initiale de la volatilité, ensuite nous établirons des propriétés similaires pour les paramètres du drift de la variance ( $a$  et  $b$ ), en utilisant des techniques de type EDP ainsi que certains des résultats du chapitre précédent. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous étudierons l'impact du paramètre de la volatilité de la volatilité sur les options sur variance réalisée ainsi que sur les options usuelles. Nous montrerons notamment que la volatilité de la volatilité joue le rôle de la volatilité si on prend la variance réalisée comme sous-jacent. Nous donnerons aussi une représentation très pratique de la dérivée du prix du Put par rapport à la volatilité de la volatilité en fonction des trajectoires de la variance. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la monotonie du prix du Put par rapport à la corrélation. Nous donnons d'abord, une représentation particulière de la dérivée de celui-ci par rapport à  $\rho$  qui nous permet de déterminer son

signe, notamment pour les valeurs extrêmes de  $s$  ( $s$  très petit ou trop grand). Plus exactement, cette représentation nous permettra de montrer qu'il existe  $s_\rho^-(t, v) \leq s_\rho^+(t, v)$  tels que  $\frac{\partial P}{\partial \rho}(t, s, v)$  est positive pour  $s \leq s_\rho^-(t, v)$  et négative pour  $s \geq s_\rho^+(t, v)$ . Nous montrons que pour  $\rho = 0$ , on a  $K \leq s_0^-(t, v) \leq s_0^+(t, v) < +\infty$ , grâce notamment au comportement exponentiel des queues de distribution de la variance intégrée. Nous conjecturons que  $0 < s_\rho^-(t, v) \leq s_\rho^+(t, v) < +\infty$ , pour tout  $\rho \in ]-1, 1[$ . Nous étudions ensuite le comportement asymptotique en temps (en temps court-long) des points critiques  $s_\rho^\pm(t, v)$ . Nous montrons que pour  $t$  petit, la monotonie par rapport à  $\rho$  s'inverse autour de la monnaie (croissante pour  $s \leq K$  et décroissante pour  $s > K$ , ce qui veut dire que  $\lim_{t \rightarrow 0} s^\pm(t, v) = K$ ). Pour les longues maturités, nous montrons que le prix est une fonction croissante de  $\rho$ .

## 5.2 Préliminaires

On se place sur un espace de probabilité filtré complet  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  vérifiant les conditions habituelles. On considère un actif  $S$  sur cet espace de probabilité, modélisé par l'EDS définie par

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{V_t}dW_t^1, \\ dV_t = (a - bV_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^2, \quad d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho dt, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

où  $a, b, \sigma > 0$ . On note  $V^v$  la solution de l'équation en  $V$  issue de  $v$ . Dans tout le chapitre, on suppose que

$$2a \geq \sigma^2 \quad (5.2.2)$$

Sous cette hypothèse, on sait que avec probabilité 1,  $V^v$  ne touche pas 0 et n'explose pas non plus, il en est de même pour  $S$  (cf. Ikeda/Watanabe (1989), Example IV.8.2). Notons que la solution de l'équation en  $S$  issue de  $s$  est "explicitement" donnée par

$$S_t = s e^{rt + \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^1 - \frac{1}{2} \int_0^t V_s ds} \quad (5.2.3)$$

En particulier,  $(\tilde{S}_t := e^{-rt}S_t)_{t \geq 0}$  est une martingale locale exponentielle. Dans le résultat suivant, on montre que c'est une vrai martingale. Cela peut s'avérer très utile pour la suite de chapitre, car nous serons amené à prendre  $\tilde{S}_t$  comme processus de densité pour des changements de mesure absolument continus. On trouve un résultat plus général que celui-là dans [47]. Cependant, on va le démontrer ici, car la preuve contient des détails qui seront utiles pour la suite de ce chapitre

**Proposition 5.2.1.** *Le processus  $(e^{-rt}S_t)_{t \geq 0}$  est une martingale.*

**Preuve:** On a, en écrivant  $W_t^1 = \rho W_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \hat{W}_t^2$ , avec  $\hat{W}^2$  brownien indépendant de  $W^2$ ,

$$e^{\int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^1 - \frac{1}{2} \int_0^t V_s ds} = M_t^\rho \times \hat{S}_t^\rho,$$

où

$$M_t^\rho = e^{\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2 - \frac{\rho^2}{2} \int_0^t V_s ds} \quad \text{et} \quad \hat{S}_t^\rho = e^{\sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{V_s} d\hat{W}_s^2 - \frac{1-\rho^2}{2} \int_0^t V_s ds}.$$

Comme  $V$  est adapté à la filtration de  $W^2$ ,  $\hat{S}^\rho$  est une martingale et  $\mathbb{E}(\hat{S}_t^\rho | W^2) = 1$ . Il suffit donc de montrer que  $\mathbb{E}M_t^\rho = 1$ . Soit  $\epsilon > 0$  et  $\tau_\epsilon = \inf\{t \geq 0 \mid V_t \notin [\epsilon, 1/\epsilon]\}$ . Soit  $\mathbb{P}_\epsilon^*$  définie par  $d\mathbb{P}_\epsilon^*/d\mathbb{P} = e^{\rho \int_0^{t \wedge \tau_\epsilon} \sqrt{V_s} dW_s^2 - \frac{\rho^2}{2} \int_0^{t \wedge \tau_\epsilon} V_s ds}$ . Sous  $\mathbb{P}_\epsilon^*$ ,  $W_t^* = W_t^2 - \rho \int_0^{t \wedge \tau_\epsilon} \sqrt{V_s} ds$  est un brownien standard et on a

$$dV_t = (a - bV_t) dt + \sigma \rho V_t \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > t\}} dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^*,$$

de sorte que sur  $[0, \tau_\epsilon]$ ,  $V$  est solution de l'EDS

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \rho V_t dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^*. \quad (5.2.4)$$

On en déduit

$$\mathbb{E} \left( e^{\rho \int_0^{t \wedge \tau_\epsilon} \sqrt{V_s} dW_s^2 - \frac{\rho^2}{2} \int_0^{t \wedge \tau_\epsilon} V_s ds} \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > t\}} \right) = \mathbb{P}_\epsilon^*(\tau_\epsilon > t).$$

Par unicité en loi et non explosion de la solution de (5.2.4), on a  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_\epsilon^*(\tau_\epsilon > t) = 1$ .

D'où

$$\mathbb{E} \left( e^{\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2 - \frac{\rho^2}{2} \int_0^t V_s ds} \right) = 1. \quad (5.2.5)$$

### 5.2.1 Put européen dans le modèle de Heston

On considère un Put européen sur  $S$  de strike  $K$  et de maturité  $t$ . Son prix aujourd'hui est donné pour  $(s, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$  par

$$P(t, s, v) = \mathbb{E} [e^{-rt}(K - S_t)_+ | S_0 = s; V_0 = v]. \quad (5.2.6)$$

La fonction de valeur  $P$  vérifie les propriétés suivantes

- Pour tout  $(t, v) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^+$ , la fonction  $x \mapsto P(t, x, v)$  est décroissante, convexe et sa dérivée vérifie

$$-1 \leq \frac{\partial P}{\partial s}(t, s, v) \leq 0, \quad \forall (t, s, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+.$$

En effet, soit  $\lambda \in [0, 1]$  et soient  $s_1, s_2 > 0$  alors pour tout  $(t, v) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\begin{aligned} P(t, \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2, v) &= \mathbb{E} [e^{-rt}(K - S_t)_+ | S_0 = \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2; V_0 = v] \\ &= \mathbb{E} [e^{-rt}(K - (\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2)S_t)_+ | S_0 = 1; V_0 = v] \\ &\leq \mathbb{E} [e^{-rt}(\lambda(K - s_1 S_t)_+ + (1 - \lambda)(K - s_2 S_t)_+ | S_0 = 1; V_0 = v)] \\ &= \lambda P(t, s_1, v) + (1 - \lambda)P(t, s_2, v). \end{aligned}$$

- $P \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^3) \cap \mathcal{C}^{1,2,2}(\mathbb{R}_+^3)$  (cf. [25] Propositions 3.1 et 3.2) vérifiant,

$$\begin{cases} \mathcal{L}P(t, s, v) = 0, & \forall (t, s, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ P(0, s, v) = (K - s)_+, & \forall (s, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

où

$$\mathcal{L}\varphi = -r\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left( rs \frac{\partial}{\partial s} + (a - bv) \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} s^2 v \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \rho \sigma s v \frac{\partial^2}{\partial v \partial s} \right) \varphi. \quad (5.2.8)$$

**Remarque 5.2.1.** Dans [25], on suppose que la fonction de pay-off est de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $xg'$  et  $x^2g''$  sont bornées. Cependant les proposition 3.1 et 3.1 de [25] sont valables pour des pay-off continues et bornées. Donc pour le Put.

### 5.2.2 Un principe du maximum parabolique

Dans cette section, nous présentons un principe du maximum spécifique à des opérateurs de type (5.2.8), qui sera crucial pour les démonstrations des résultats de la prochaine section. Plus précisément, en appliquant ce principe du maximum, nous pourrions établir la monotonie de la fonction de valeur,  $P$ , par rapport à  $v$ ,  $a$  et  $b$

**Théorème 5.2.1** (Principe du maximum). *Soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur défini par (5.2.8). Soit  $\varphi \in \mathcal{C}^{1,2,2}([0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^3)$  vérifiant*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi(t, s, v) \leq 0 \text{ (resp } < 0), & \forall (t, s, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ \varphi(0, s, v) \geq 0, & \forall (s, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Alors  $\varphi \geq 0$  (resp  $\varphi > 0$ ) sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

#### Preuve

Supposons qu'il existe  $(t, s, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\varphi(t, s, v) < 0$ . On considère  $(S^s, V^v)$  l'unique solution de

$$\begin{cases} \frac{dS_t^s}{S_t^s} = r dt + \sqrt{V_t^v} dW_t^1, \\ dV_t^v = (a - bV_t^v) dt + \sigma \sqrt{V_t^v} dW_t^2, \quad d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho dt, \\ S_0^s = s, \quad V_0^v = v. \end{cases}$$

On définit les  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêts

$$\tau = \inf \left\{ u \in [0, t] : \varphi(t - u, S_u^s, V_u^v) \geq \frac{\varphi(t, s, v)}{2} \right\}$$

et

$$\bar{\tau}_n = \inf \left\{ u \in [0, t] : S_u^s \wedge V_u^v \in \left[ \frac{1}{n}, n \right]^c \right\} \wedge t.$$



En particulier, on a  $\mathbb{P}(\tau < t) = 1$ . On applique la formule d'Itô au processus  $(e^{-ru}\varphi(t - u, S_u^s, V_u^v))_{u \leq t}$  entre 0 et  $\tau \wedge \bar{\tau}_n$ , on obtient

$$\begin{aligned} e^{-r\tau \wedge \bar{\tau}_n} \varphi(t - \tau \wedge \bar{\tau}_n, S_{\tau \wedge \bar{\tau}_n}^s, V_{\tau \wedge \bar{\tau}_n}^v) &= \varphi(t, s, v) + \int_0^{\tau \wedge \bar{\tau}_n} e^{-ru} S_u^s \sqrt{V_u^v} \partial_s \varphi(t - u, S_u^s, V_u^v) dW_u^1 + \\ &\quad \sigma \int_0^{\tau \wedge \bar{\tau}_n} e^{-ru} \sqrt{V_u^v} \partial_v \varphi(t - u, S_u^s, V_u^v) dW_\tau^2 \\ &\quad + \int_0^{\tau \wedge \bar{\tau}_n} e^{-ru} \mathcal{L} \varphi(t - u, S_u^s, V_u^v) du \end{aligned}$$

Comme  $S$  et  $V$  sont dans  $]0, n]$ , on déduit que

$$\begin{aligned} \varphi(t, s, v) &= -\mathbb{E} \int_0^{\tau \wedge \bar{\tau}_n} e^{-ru} \mathcal{L} \varphi(t - u, S_u^s, V_u^v) du + \mathbb{E} [e^{-r\tau \wedge \bar{\tau}_n} \varphi(t - \tau \wedge \bar{\tau}_n, S_{\tau \wedge \bar{\tau}_n}^s, V_{\tau \wedge \bar{\tau}_n}^v)] \\ &\geq \mathbb{E} [e^{-r\tau \wedge \bar{\tau}_n} \varphi(t - \tau \wedge \bar{\tau}_n, S_{\tau \wedge \bar{\tau}_n}^s, V_{\tau \wedge \bar{\tau}_n}^v)] \end{aligned}$$

On peut vérifier que la suite  $\bar{\tau}_n$  est croissante, vérifiant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\tau}_n = t$  (car  $V$  et  $S$  n'explorent pas (cf. Ikeda/Watanabe (1989))). On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau \wedge \bar{\tau}_n = \tau$ . On obtient, en appliquant le lemme de Fatou,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [e^{-r\tau \wedge \bar{\tau}_n} \varphi(t - \tau \wedge \bar{\tau}_n, S_{\tau \wedge \bar{\tau}_n}^s, V_{\tau \wedge \bar{\tau}_n}^v)] \geq \mathbb{E} [e^{-r\tau} \varphi(t - \tau, S_\tau^s, V_\tau^v)] \geq \frac{\varphi(t, s, v)}{2}.$$

Ce qui veut dire que  $\varphi(t, s, v) \geq \frac{\varphi(t, s, v)}{2}$ , d'où la contradiction.

D'où  $\varphi \geq 0$ .

On considère maintenant le cas où l'inégalité est stricte, c'est à dire le cas où  $\mathcal{L} \varphi < 0$ . On se donne  $(t, s, v)$  avec  $t > 0$ . En appliquant la formule d'Itô au processus  $(e^{-ru}\varphi(t - u, S_u^s, V_u^v))_{u \leq t}$  entre 0 et  $t \wedge \bar{\tau}_n$ , on obtient

$$\begin{aligned} e^{-r\frac{t}{2} \wedge \bar{\tau}_n} \varphi(t - \frac{t}{2} \wedge \bar{\tau}_n, S_{\frac{t}{2} \wedge \bar{\tau}_n}^s, V_{\frac{t}{2} \wedge \bar{\tau}_n}^v) &= \varphi(t, s, v) + \int_0^{\frac{t}{2} \wedge \bar{\tau}_n} e^{-ru} S_u^s \sqrt{V_u^v} \partial_s \varphi(t - u, S_u^s, V_u^v) dW_u^1 + \\ &\quad \sigma \int_0^{\frac{t}{2} \wedge \bar{\tau}_n} e^{-ru} \sqrt{V_u^v} \partial_v \varphi(t - u, S_u^s, V_u^v) dW_\tau^2 \\ &\quad + \int_0^{\frac{t}{2} \wedge \bar{\tau}_n} e^{-ru} \mathcal{L} \varphi(t - u, S_u^s, V_u^v) du \end{aligned}$$

On obtient de la même façon que précédemment, que

$$\varphi(t, s, v) \geq -\mathbb{E} \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-ru} \mathcal{L} \varphi(t - u, S_u^s, V_u^v) du > 0$$

On en déduit que  $\varphi(t, s, v) > 0$ .  $\square$

### 5.3 Monotonie par rapport aux paramètres du drift de la variance

Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés de monotonie du prix du Put par rapport aux paramètres qui génèrent la moyenne de la variance instantanée, c'est à dire  $v$ ,  $a$  et  $b$ . On commence par étudier la monotonie de la fonction  $P$  par rapport à  $v$ . On sait que (cf. [25] Théorème 2.3) si  $g$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  avec  $xg'(x)$  et  $x^2g''(x)$  bornées, alors la fonction de valeurs  $u(t, s, v) := \mathbb{E}[g(S_t) | S_0 = s, V_0 = v]$  est une solution classique de l'équation de BS (au sens de [25]). Elle vérifie en particulier,  $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[^3] \cap \mathcal{C}^{1,2,2}([0, +\infty[^3] \cap \mathcal{C}^{1,0,1}([0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[))$ . De plus, nous avons une représentation probabiliste de la dérivée de  $u$  par rapport à  $v$ . En particulier, si  $g$  est convexe, alors  $u$  est strictement croissante par rapport à  $v$ .

Dans cette section, nous allons montrer que  $P$  est  $\mathcal{C}^{1,0,1}([0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[)$  (en plus d'être dans  $\mathcal{C}([0, +\infty[^3] \cap \mathcal{C}^{1,2,2}([0, +\infty[^3))$ ).

**Théorème 5.3.1.** *On a  $P \in \mathcal{C}([0, +\infty[^3] \cap \mathcal{C}^{1,2,2}([0, +\infty[^3] \cap \mathcal{C}^{1,0,1}([0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[))$ .*

*De plus, la dérivée de  $P$  par rapport à la variable  $v$  est donnée par*

$$\frac{\partial P}{\partial v}(t, s, v) = \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-b\tau} h(t - \tau, \hat{S}_\tau^s, \hat{V}_\tau^v) d\tau \right], \quad (5.3.1)$$

où  $h$  est définie sur  $]0, +\infty[^3$ , par

$$h(\tau, x, y) = E_y \left[ \frac{K}{\sqrt{(1 - \rho^2) \int_0^\tau V_u du}} N' \left( \frac{-\log(x/K) - \rho \int_0^\tau \sqrt{V_u} dW_u^2 + \frac{1}{2} \int_0^\tau V_u du}{\sqrt{(1 - \rho^2) \int_0^\tau V_u du}} \right) \right]$$

et  $(\hat{S}^s, \hat{V}^v)$  est l'unique solution issue de  $(s, v)$  de l'EDS définie par

$$\begin{cases} \frac{d\hat{S}_t^s}{\hat{S}_t^s} = \rho\sigma dt + \sqrt{\hat{V}_t^v} dW_t^1, \\ d\hat{V}_t^v = \left( a + \frac{\sigma^2}{2} - b\hat{V}_t^v \right) dt + \sigma\sqrt{\hat{V}_t^v} dW_t^2. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

**Remarque 5.3.1.** Ce théorème est l'extension des propositions 4.1 et 4.1 de [25] au Put européen. La fonction  $h(t, s, v)$  n'est autre que  $s^2 \partial_{ss} P(t, s, v)$ .

**Preuve :**

On procède par une démarche similaire à celle de [25] (cf Proposition 4.1, 4.2). On montre d'abord que la fonction  $(t, s, v) \mapsto \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-b\tau} h(t - \tau, \hat{S}_\tau^s, \hat{V}_\tau^v) d\tau \right]$  est continue sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . Pour cela, on considère une suite  $(t_n, s_n, v_n) \rightarrow (t, s, v)$  et on va montrer que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^{t_n} e^{-b\tau} h(t_n - \tau, \hat{S}_\tau^{s_n}, \hat{V}_\tau^{v_n}) d\tau \right]$  converge vers  $\mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-b\tau} h(t - \tau, \hat{S}_\tau^s, \hat{V}_\tau^v) d\tau \right]$ . Comme  $(\hat{S}_\tau^{s_n}, \hat{V}_\tau^{v_n})$  converge vers  $(\hat{S}_\tau^s, \hat{V}_\tau^v)$  en probabilité, il nous restera juste de majorer  $\int_0^t e^{-b\tau} h(t - \tau, \hat{S}_\tau^s, \hat{V}_\tau^v) d\tau$  par une variable aléatoire intégrable et conclure en appliquant le théorème de convergence dominée.

On commence par chercher une majoration de  $h$ , pour cela on remarque d'abord que

$$h(x, y, t - \tau) \leq E_y \left[ \frac{K}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(1 - \rho^2) \int_0^{t-\tau} V_u du}} \right] =: M(t - \tau, y).$$

Ensuite, par le théorème de comparaison, on a que pour tout  $y_1 \leq y_2$ , on a

$$V^{y_1} \leq V^{y_2}, \quad p.s.$$

On en déduit que pour tout  $0 \leq y_1 \leq y_2$ , on a

$$M(t - \tau, y_1) \geq M(t - \tau, y_2)$$

D'autre part, par le théorème de comparaison, on a que

$$\hat{V}_\tau^v \geq V_\tau^v, \quad p.s.$$

Ce qui implique que

$$M(t - \tau, \hat{V}_\tau^v) \leq M(t - \tau, V_\tau^v), \quad p.s.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ h(\hat{S}_\tau^s, \hat{V}_\tau^v, t - \tau) \right] &\leq \mathbb{E} [M(t - \tau, V_\tau^v)] = \mathbb{E} \left[ E_{V_\tau^v} \left[ \frac{K}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(1 - \rho^2) \int_0^{t-\tau} V_u du}} \right] \right] \\ &= E_v \left[ \frac{K}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(1 - \rho^2) \int_\tau^t V_u du}} \right], \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété de Markov du processus  $V$  dans la deuxième ligne.

On en déduit que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-b\tau} h_v(\hat{S}_\tau^s, \hat{V}_\tau^v, t - \tau) d\tau \right] \leq \int_0^t E_v \left[ \frac{K}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(1 - \rho^2) \int_0^\tau V_u du}} \right] d\tau. \quad (5.3.3)$$

Maintenant, en utilisant les résultats de Dufresne [21], on a  $E_v \left[ \frac{1}{\sqrt{\int_0^\tau V_u du}} \right] < +\infty, \forall \tau > 0$ . De plus, pour tout  $v \geq 0$ , on a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{\frac{2}{3}} E_v \left[ \frac{1}{\sqrt{\int_0^\tau V_u du}} \right] = 0.$$

On en déduit que pour tout  $v \geq 0$ ,

$$\int_0^t E \left[ \frac{1}{\sqrt{\int_0^\tau V_u^v du}} \right] d\tau < +\infty.$$

On montre ainsi, par un argument similaire à celui de la proposition 3.1 de [25] et en utilisant cette majoration, que la fonction  $(t, s, v) \mapsto \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-b\tau} h(\hat{S}_\tau^s, \hat{V}_\tau^v, t - \tau) d\tau \right]$  est continue sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ .

La suite de la preuve est parfaitement identique à la démonstration de la proposition 4.2 de [25]. On prend une approximation croissante et  $\mathcal{C}^\infty$  de la fonction  $f(y) = \sqrt{y}$  telle que  $\frac{1}{n} \leq f_n \leq n$ , ensuite on définit  $S^n, V^n$  et  $P^n$  par :

$$\begin{cases} \frac{dS_t^n}{S_t^n} = e^{-\frac{b}{2}t} f_n(V_t^n) dW_t^1, \\ dV_t^n = a dt + \sigma e^{\frac{b}{2}t} f_n(V_t^n) dW_t^2. \end{cases}$$

et

$$P^n(t, s, v) := \mathbb{E} [(K - S_t^n)_+ | S_0^n = s, V_0^n = v]$$

Ensuite, on considère l'équation parabolique

$$\begin{cases} -\partial_t u + \frac{e^{-bt}}{2} f_n^2(v) s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \rho \sigma f_n(v) s \frac{\partial u}{\partial s \partial v} + \frac{\sigma^2}{2} e^{bt} f_n^2(v) \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + a \partial_v u = 0, & t > 0, \\ u(0, s, v) = (K - s)_+, & \forall (s, v) \in \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

### 5.3. MONOTONIE PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES DU DRIFT DE LA VARIANCE

En écrivant cette équation en terme de  $\log S$ , on obtient une équation uniformément parabolique à coefficients  $\mathcal{C}^\infty$  et bornés. Cette nouvelle équation admet donc une unique solution classique bornée et par le théorème de Feynman-Kac, l'unique solution n'est autre que  $P^n$ . En particulier, on a  $P^n \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{C}^{1,2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$ . D'autre part, on peut montrer que  $P^n(t, s, v) \rightarrow P(t, s, v)$  en tout point de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . Ensuite que  $P_v^n(t, s, v) := \frac{\partial P^n}{\partial v}(t, s, v) \rightarrow \frac{\partial P}{\partial v}(t, s, v)$  en tout point de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . De plus, comme  $P^n$  est solution  $\mathcal{C}^\infty$  de (5.3.4), alors sa dérivée est solution bornée de

$$\begin{cases} -\partial_t P_v^n + \hat{\mathcal{L}}^n P_v^n + \frac{1}{2} \gamma_n(v) s^2 \frac{\partial^2 P_v^n}{\partial s^2} = 0, & t > 0, \\ u(0, s, v) = 0, & \forall (s, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \end{cases}$$

où  $\gamma_n(v) = f_n^{2'}(v)$  et l'opérateur  $\hat{\mathcal{L}}^n$  est défini par

$$\hat{\mathcal{L}}^n u = -bu + \rho \sigma f_n' \partial_s u + \rho \sigma f_n(v) s \frac{\partial u}{\partial s \partial v} + \frac{\sigma^2}{2} f_n^2(v) \frac{\partial^2 u}{\partial^2 v} + (a + \frac{\sigma^2}{2}(1 + \gamma_n(v)) - bv) \partial_v u.$$

On en déduit que (par le théorème de Feynman-Kac)  $P_v^n$  admet une représentation stochastique donnée sous la forme

$$P_v^n(t, s, v) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \int_0^t e^{-b\tau} \gamma_n(\hat{V}_\tau^n) (\hat{S}_\tau^n)^2 \frac{\partial^2 P^n}{\partial s^2}(t - \tau, \hat{S}_\tau^n, \hat{V}_\tau^n) d\tau \right],$$

où  $(\hat{S}_\tau^n, \hat{V}_\tau^n) \rightarrow (\hat{S}_\tau, \hat{V}_\tau)$ . On en déduit, par le théorème de convergence dominée et en servant des majorations de type (5.3.3), que  $\partial_v P$  est bien donnée par (5.3.1).

**Corollaire 5.3.1.** *Pour tout  $t, s > 0$ , la fonction  $v \mapsto P(t, s, v)$  est strictement croissante.*

#### Monotonie par rapport à $a$ et $b$

On s'intéresse maintenant aux propriétés de monotonies du prix du Put par rapport aux paramètres  $a$  et  $b$ . Notons que les trajectoires de la variance sont strictement monotones par rapport aux paramètres  $a$  et  $b$  (croissantes par rapport à  $a$  et décroissantes par rapport à  $b$ ). Ce qui veut dire qu'une augmentation de  $a$  par exemple, génèrera une volatilité

plus importante, ce qui, si on se tient au raisonnement précédent, entraînera une augmentation du prix du Put. Pour vérifier ce raisonnement, on procède comme suit. On fixe les paramètres  $\sigma$  et  $\rho$  et pour  $a, b \geq 0$ , on note

$$P^{a,b}(t, s, v) = \mathbb{E} \left[ e^{-rt} (K - S_t^{a,b})_+ \mid S_0^{a,b} = s; V_0^{a,b} = v \right],$$

où,  $(S^{a,b}, V^{a,b})$  est l'unique solution issue de  $(s, v)$  de l'EDS définie par

$$\begin{cases} \frac{dS_t^{a,b}}{S_t^{a,b}} = rdt + \sqrt{V_t^{a,b}} dW_t^1, \\ dV_t^{a,b} = (a - bV_t^{a,b})dt + \sigma \sqrt{V_t^{a,b}} dW_t^2, \quad d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho dt. \end{cases}$$

On a le résultat suivant

**Proposition 5.3.1.** *On se donne  $a_2 > a_1$  et  $b_1 < b_2$ . Alors, on a*

$$P^{a_1, b}(t, s, v) < P^{a_2, b}(t, s, v), \quad \forall b \geq 0 \text{ et } \forall (t, s, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad (5.3.5)$$

et

$$P^{a, b_1}(t, s, v) > P^{a, b_2}(t, s, v), \quad \forall a \geq \frac{\sigma^2}{2} \text{ et } \forall (t, s, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad (5.3.6)$$

## Preuve

Pour  $a, b \geq 0$ , on note

$$\mathcal{L}^{a,b} \varphi = -r\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left( rs \frac{\partial}{\partial s} + (a - bv) \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{2} s^2 v \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \rho \sigma s v \frac{\partial^2}{\partial v \partial s} \right) \varphi.$$

En particulier, on peut facilement vérifier que

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{a_2, b}(P^{a_2, b} - P^{a_1, b})(t, s, v) = -(a_2 - a_1) \frac{\partial P^{a_1, b}}{\partial v}, & \forall (t, s, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ (P^{a_2, b} - P^{a_1, b})(0, s, v) = 0, & \forall (s, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

De même, on vérifie que

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{a, b_2}(P^{a, b_1} - P^{a, b_2})(t, s, v) = -(b_2 - b_1) v \frac{\partial P^{a, b_1}}{\partial v}, & \forall (t, s, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ (P^{a, b_1} - P^{a, b_2})(0, s, v) = 0, & \forall (s, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de la proposition, les opérateurs  $\mathcal{L}^{a_i, b_j}$  vérifient les conditions du théorème 5.2.1. D'autre part, d'après le théorème 5.3.1, on a  $\frac{\partial P^{a_1, b}}{\partial v} > 0$ , de même que  $\frac{\partial P^{a, b_1}}{\partial v} > 0$ . On déduit donc que  $(P^{a_2, b} - P^{a_1, b}) > 0$  et  $(P^{a, b_1} - P^{a, b_2}) > 0$

## 5.4 Monotonie par rapport à la volatilité de la volatilité

L'impact de la volatilité de la volatilité,  $\sigma$ , est souvent lié à celui du kurtosis de la distribution du sous-jacent. Lorsque  $\sigma$  est égal à 0, la volatilité est déterministe, ce qui ramène au modèle de Black-Scholes. L'augmentation de  $\sigma$  augmentera le kurtosis seulement, créant des queues lourdes des deux côtés. L'effet de modifier le kurtosis a un impact aussi sur la volatilité implicite, notamment sur la forme des smiles des volatilités implicites. Intuitivement, si  $\sigma$  est grand, cela signifie que la volatilité est plus volatile. Cela signifie que le marché a plus de chance de mouvements extrêmes. Ainsi, les prix des Puts vont augmenter et ceux des Calls vont baisser. Ce qui induit un skew plus important.

Une autre façon de voir le rôle de  $\sigma$ , est de considérer les produits appelés "produits dérivés de la volatilité" comme les variance-swap, les options sur variance-réalisée et VIX. Pour ce type de produits, la volatilité de la volatilité,  $\sigma$ , joue un rôle similaire à celui joué par le paramètre de la volatilité dans un modèle classique. On s'attend donc à ce qu'une augmentation de  $\sigma$  entraînera une augmentation des prix d'options européennes standards sur la variance réalisée par exemple.

### 5.4.1 Options sur variance réalisée

La variance réalisée est la quantité

$$VR_t := \int_0^t V_s ds.$$

On considère une option sur cette variance réalisée de maturité  $T$  et de pay-off  $f(VR_T)$ . Son prix aujourd'hui est donné par  $\varphi(T, v, 0)$ . Où

$$\varphi(t, v, y) := \mathbb{E} \left[ e^{-rt} f(y + \int_0^t V_s ds) \right].$$

La fonction  $\varphi$  est solution du système suivant

$$\begin{cases} \mathcal{L}_V \varphi(t, v, y) = 0, & \forall (t, v, y) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi(0, v, y) = f(y), & \forall (v, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

où

$$\mathcal{L}_V u = -ru - \frac{\partial u}{\partial t} + \left( v \frac{\partial \cdot}{\partial y} + (a - bv) \frac{\partial \cdot}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 \cdot}{\partial v^2} \right) (u).$$

Dans le cas où la fonction  $f$  est convexe et monotone (ce qui est le cas des options usuelles Call, Put), alors on peut facilement vérifier que  $\varphi$  a la même monotonie par rapport à  $v$  et par rapport aux valeurs de la variance long-terme "θ" que celle de  $f$ .

**Proposition 5.4.1.** *Si  $f$  est convexe, de classe  $\mathcal{C}^2$  avec des dérivées bornées, alors pour tout  $(t, y) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^+$ , l'application  $v \mapsto \varphi(t, v, y)$  est convexe.*

### Preuve

On a

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}_V \varphi_{vv}(t, v, y) = -2\partial_{vy} \varphi(t, v, y), & \forall (t, v, y) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \varphi_{vv}(0, v, y) = 0, & \forall (v, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_V u = -(r + 2b)u - \frac{\partial u}{\partial t} + \left( v \frac{\partial \cdot}{\partial y} + (a - bv) \frac{\partial \cdot}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 \cdot}{\partial v^2} + \sigma^2 \frac{\partial \cdot}{\partial v} \right) (u).$$

D'autre part, on a

$$\partial_{vy} \varphi(t, v, y) = \mathbb{E} \left[ e^{-rt} \left( \int_0^t \dot{V}_v(s) ds \right) f''(y + \int_0^t V_s^v ds) \right] > 0.$$

On en déduit, par un résultat similaire au théorème 5.2.1, que  $\varphi_{vv} > 0$ .

Pour tout  $(t, v, y) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+$ , on note  $\varphi_\sigma(t, s, v)$  le prix de l'option  $f$  dans le cas où la volatilité de la volatilité est  $\sigma$ .

**Corollaire 5.4.1.** *Pour tout  $(t, v, y) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+$ , la fonction  $\sigma \mapsto \varphi_\sigma(t, v, y)$  est strictement croissante.*



### Preuve

On note  $\partial_\sigma \varphi_\sigma(t, s, v)$  : la dérivée de  $\sigma \mapsto \varphi_\sigma(t, v, y)$ . Elle vérifie le système

$$\begin{cases} \mathcal{L}_V \partial_\sigma \varphi_\sigma(t, v, y) = -\sigma \frac{\partial^2 \varphi_\sigma}{\partial v^2}(t, v, y), & \forall (t, v, y) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\sigma \varphi_\sigma(0, v, y) = 0, & \forall (v, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

En appliquant le principe du maximum, on conclut que  $\partial_\sigma \varphi_\sigma(t, v, y) > 0$ .

Nous avons vu précédemment que le prix d'une option européenne sur le sous-jacent  $S$  est la moyenne sur tous les scénarios de la formule de Black de volatilité  $\sqrt{\int_0^t V_s ds}$  et le forward est  $s e^{\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t V_s ds}$ . En particulier, dans le cas où le mouvement brownien guidant la dynamique de  $S$  et celui guidant la dynamique de variance instantanée sont indépendants, on a le résultat suivant

**Corollaire 5.4.2.** *Pour tout  $(t, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}_*^+$ , l'application  $\sigma \mapsto P_\sigma^{\rho=0}(t, K e^{-rt}, v)$  est décroissante.*

### Preuve

On a

$$P_\sigma^{\rho=0}(t, K e^{-rt}, v) = \mathbb{E} P_{BS}(K e^{-rt}, K e^{-rt}, \int_0^t V_s^v ds)$$

où

$$P_{BS}(s, k, \Sigma) = KN \left( \frac{-\frac{s}{K} + \frac{1}{2}\Sigma}{\sqrt{\Sigma}} \right) - sN \left( \frac{-\frac{s}{K} + \frac{1}{2}\Sigma}{\sqrt{\Sigma}} \right)$$

En particulier, pour  $s = K$  et pour tout  $\Sigma > 0$ , on a

$$\partial_{\Sigma\Sigma} P_{BS}(s, k, \Sigma) = -KN' \left( \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma} \right) \times \left( \frac{1}{4\Sigma\sqrt{\Sigma}} + \frac{1}{8\Sigma} \right) < 0.$$

On en déduit que  $\partial_v P_\sigma^{\rho=0}(t, K e^{-rt}, v) < 0$ . Et par suite que  $\partial_\sigma P_\sigma^{\rho=0}(t, K e^{-rt}, v) < 0$ .

## Futures et options sur VIX

Le VIX de maturité  $t$  est défini par

$$VIX_t = \sqrt{\mathbb{E}_t \left[ \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} V_u du \right]}$$

Dans le modèle de Heston, il est donné par

$$VIX_t = \sqrt{\frac{a}{b} + \left(V_t - \frac{a}{b}\right) \frac{e^{-bt} - e^{-b(t+\delta)}}{b\delta}}$$

On note  $F$  le prix du future sur VIX. Il est donné par

$$F = \mathbb{E}(e^{-rt}VIX_t) \equiv F_\sigma(t, v),$$

où pour tout  $t$ , la fonction  $v \mapsto F_\sigma(t, v)$  est croissante, concave. En particulier, le prix du future sur VIX est décroissant par rapport à la volatilité de la volatilité. De même, pour tout  $k > 0$ , le prix du Call sur VIX de strike  $k$  est décroissant par rapport à  $\sigma$ .

### 5.4.2 Monotonie des options européennes

Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés de monotonie de  $P$  par rapport au coefficient de volatilité de la volatilité  $\sigma$ . Notons que la méthode que nous avons utilisée pour établir la monotonie par rapport à  $v$ ,  $a$  et  $b$  ne peut malheureusement pas s'appliquer ici. En effet, cette méthode consistait à différencier (5.2.7) par rapport au paramètre considéré pour obtenir un système différentiel de type ( $\mathcal{L}u < 0$  sur  $C$  et  $u \geq 0$  sur  $\partial C$ ), ce qui donne le signe de  $u$ , par application du principe du maximum. Alors que si on différencie (5.2.7) par rapport à  $\sigma$ , on obtient le système

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}} \frac{\partial P}{\partial \sigma}(t, s, v) = -\sigma \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} - \rho s v \frac{\partial P}{\partial s \partial v}(t, s, v), & \forall (t, s, v) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ \frac{\partial P}{\partial \sigma}(0, s, v) = 0, & \forall (s, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Cela ne nous permet pas d'appliquer le principe du maximum pour déduire le signe de  $\frac{\partial P}{\partial \sigma}$ , car les signes de  $\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$  et  $\frac{\partial^2 P}{\partial s \partial v}$  ne sont pas forcément constants. En effet, le signe de  $\frac{\partial P}{\partial \sigma}$  n'est pas facile à analyser car il dépend du signe de la corrélation et aussi de la dépendance par rapport à  $\rho$  (qui est le sujet du chapitre suivant). On peut néanmoins analyser son signe dans le cas où la maturité est très courte ou très longue en utilisant les études qui ont été menées sur le comportement asymptotique en temps de  $P$  dans le modèle de Heston.

#### 5.4. MONOTONIE PAR RAPPORT À LA VOLATILITÉ DE LA VOLATILITÉ

On notera  $\dot{P}_\sigma := \frac{\partial P}{\partial \sigma}$ . Dans le résultat suivant, nous donnons une représentation de cette fonction, donnée explicitement en fonction des trajectoires du processus de la variance  $V$ . Cette représentation s'obtient grâce aux propriétés de dérivabilités des trajectoires de  $V$  par rapport au paramètre  $\sigma$ .

**Théorème 5.4.1.** *Pour tout  $0 < \sigma < \sqrt{a}$  et pour tout  $(t, s, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , on a*

$$\dot{P}_\sigma = K e^{-rt} \mathbb{E} \left[ N' \left( \frac{x + A_t}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \left( \frac{-x + B_t}{2I_t \sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \dot{Y}_\sigma + C_t \right) \right], \quad (5.4.1)$$

où  $x := \log(\frac{se^{rt}}{K})$ ,  $I_t := \int_0^t V_s ds$ ,  $A_t := \rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - \frac{1}{2}I_t$ ,  $B_t := -\rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 +$

$(\frac{1}{2} + 2\frac{b\rho}{\sigma} - \rho^2)I_t$ ,  $C_t = \frac{\frac{1}{2}(1-\rho^2) \int_0^t V_\sigma(u) du + \frac{\rho}{\sigma}(V_\sigma^*(t) - V_\sigma(t))}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}}$ ,  $\dot{Y}_\sigma = \int_0^t (\dot{V}_\sigma^*(u) - \dot{V}_\sigma(u)) du$  et  $\dot{V}_\sigma^*$  et

$\dot{V}_\sigma$  sont donnés par

$$\dot{V}_\sigma(t) = \frac{2}{\sigma} V_t - \sqrt{V_t} e^{-\gamma t} \left( \frac{2}{\sigma} \sqrt{v} + \frac{2a}{\sigma} \int_0^t \frac{e^{\gamma u}}{\sqrt{V_u}} du \right), \quad (5.4.2)$$

$$\dot{V}_\sigma^*(t) = \frac{2}{\sigma} V_t - \sqrt{V_t} e^{\frac{\rho\sigma}{2}t - \gamma t} \left( \frac{2}{\sigma} \sqrt{v} + \int_0^t \left( \frac{2a}{\sigma \sqrt{V_u}} - \rho \sqrt{V_u} \right) e^{-\frac{\rho\sigma}{2}u + \gamma u} du \right), \quad (5.4.3)$$

avec

$$\gamma_t := \frac{b}{2}t + \left( \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) \int_0^t \frac{dr}{V_r} \quad (5.4.4)$$

**Preuve:** On sait que  $P(t, s, v)$  est donné sous la forme

$$P(t, s, v) = K e^{-rt} \mathbb{E}(N(d_1)) - s \mathbb{E}M_t^\rho(N(d_2)),$$

où

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\log(\frac{s e^{rt}}{K}) - \rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 + \frac{1}{2} \int_0^t V_u du}{\sqrt{(1-\rho^2) \int_0^t V_u du}}, \\ d_2 &= \frac{-\log(\frac{s e^{rt}}{K}) - \rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - (\frac{1}{2} - \rho^2) \int_0^t V_u du}{\sqrt{(1-\rho^2) \int_0^t V_u du}}. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

et

$$M_t^\rho := e^{\rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - \frac{\rho^2}{2} \int_0^t V_u du} \quad (5.4.6)$$

On écrit  $P(t, s, v)$  en utilisant le probabilité  $\mathbb{P}$  et la probabilité équivalente  $\mathbb{P}^*$  définie par (5.5.7), ce qui donne

$$P(t, s, v) = K e^{-rt} \mathbb{E}(N(d_1)) - s \mathbb{E}^*(N(d_2)),$$

On a donc

$$\dot{P}_\sigma(t, s, v) = K e^{-rt} \frac{\partial}{\partial \sigma} [\mathbb{E}(N(d_1))] - s \frac{\partial}{\partial \sigma} [\mathbb{E}^*(N(d_2))],$$

### Etape1 : Calcul de la dérivée de $d_1$ sous $\mathbb{P}$

On peut écrire  $d_1$  sous la forme

$$d_1 = \frac{-\log\left(\frac{s e^{rt}}{K}\right) - \frac{\rho}{\sigma}(V_t - v - at + bI_t) + \frac{1}{2}I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}}$$

D'autre part, sous  $\mathbb{P}$ ,  $V$  est une fonction dérivable par rapport à  $\sigma$  et sa dérivée vérifie

$$d\dot{V}_\sigma = -b\dot{V}_\sigma(t)dt + \sqrt{V_t}dW_t^2 + \sigma \frac{\dot{V}_\sigma(t)}{2\sqrt{V_t}}dW_t^2, \quad \dot{V}_\sigma(0) = 0. \quad (5.4.7)$$

On en déduit que la dérivée de  $d_1$  sous  $\mathbb{P}$  est donnée par

$$\partial_\sigma d_1 = \frac{\rho}{\sigma^2} \frac{V_t - v - at + bI_t}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}} + \left( \frac{\frac{1}{2} - \frac{b\rho}{\sigma}}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}} - \frac{d_1}{2I_t} \right) \int_0^t \dot{V}_\sigma(u)du - \frac{\rho}{\sigma} \frac{\dot{V}_\sigma(t)}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}} \quad (5.4.8)$$

Rappelons que la solution de (5.4.7) est donnée par

$$\dot{V}_\sigma(t) = \frac{2}{\sigma} V_t - \sqrt{V_t} e^{-\gamma t} \left( \frac{2}{\sigma} \sqrt{v} + \frac{2a}{\sigma} \int_0^t \frac{e^{\gamma u}}{\sqrt{V_u}} du \right)$$

### Etape2 : Calcul de la dérivée de $d_2$ sous $\mathbb{P}^*$

On écrit  $d_2$  en fonction de  $V$  et  $\Sigma$ , on obtient

$$d_2 = \frac{-\log\left(\frac{s e^{rt}}{K}\right) - \frac{\rho}{\sigma}(V_t - v - at + bI_t) + (\rho^2 - \frac{1}{2})I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}}$$

#### 5.4. MONOTONIE PAR RAPPORT À LA VOLATILITÉ DE LA VOLATILITÉ

Sous  $\mathbb{P}^*$ , la dynamique de  $V$  est donnée par

$$dV_t = (a - (b - \rho\sigma)V_t) dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^*$$

On peut donc dériver  $V$  sous  $\mathbb{P}^*$ , on note  $V_\sigma^*$  cette dérivée. D'après les résultats du chapitre précédent, cette dérivée est solution de l'EDS définie par

$$d\dot{V}_\sigma^*(t) = \left( \rho V_t - (b - \rho\sigma)\dot{V}_\sigma^*(t) \right) dt + \sqrt{V_t}dW_t^* + \sigma \frac{\dot{V}_\sigma^*(t)}{2\sqrt{V_t}} dW_t^*, \quad \dot{V}_\sigma^*(0) = 0. \quad (5.4.9)$$

D'après le lemme 5.4.1 ci-dessous, on a

$$\dot{V}_\sigma^*(t) = \frac{2}{\sigma}V_t - \sqrt{V_t}e^{\frac{\rho\sigma}{2}t - \gamma t} \left( \frac{2}{\sigma}\sqrt{v} + \int_0^t \left( \frac{2a}{\sigma\sqrt{V_u}} - \rho\sqrt{V_u} \right) e^{-\frac{\rho\sigma}{2}u + \gamma u} du \right)$$

On peut donc calculer la dérivée de  $d_2$  sous  $\mathbb{P}^*$  en fonction de celle de  $V$ . On obtient

$$\partial_\sigma^* d_2 = \frac{\rho}{\sigma^2} \frac{V_t - v - at + bI_t}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}} + \left( \frac{\rho^2 - \frac{1}{2} - \frac{b\rho}{\sigma}}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}} - \frac{d_2}{2I_t} \right) \int_0^t \dot{V}_\sigma^*(u) du - \frac{\frac{\rho}{\sigma}\dot{V}_\sigma^*(t)}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}} \quad (5.4.10)$$

### Etape3 : Calcul de la dérivée de P

La dérivée de  $P$  est donnée en fonction des dérivées de  $d_1$  sous  $\mathbb{P}$  et de  $d_2$  sous  $\mathbb{P}^*$  par

$$\dot{P}_\sigma = K e^{-rt} \mathbb{E} [N'(d_1) \partial_\sigma d_1] - s \mathbb{E}^* [N'(d_2) \partial_\sigma^* d_2]$$

Maintenant, après avoir dérivé  $d_2$  sous  $\mathbb{P}^*$ , on effectue le changement de probabilité inverse pour retourner sous  $\mathbb{P}$ . Ainsi

$$\dot{P}_\sigma = K e^{-rt} \mathbb{E} [N'(d_1) \partial_\sigma d_1] - s \mathbb{E} [M_t^\rho N'(d_2) \partial_\sigma^* d_2]$$

En utilisant le propriété

$$K N' \left( \frac{-\log(\frac{S}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) = S N' \left( \frac{-\log(\frac{S}{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right), \quad \forall S, K, \sigma > 0, \quad (5.4.11)$$

on peut vérifier que

$$K e^{-rt} N'(d_1) = s M_t^\rho N'(d_2), \quad p.s$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\dot{P}_\sigma &= K e^{-rt} \mathbb{E}[N'(d_1) (\partial_\sigma d_1 - \partial_\sigma^* d_2)] \\ &= K e^{-rt} \mathbb{E}\left[N'(d_1) \left( \left( \frac{\frac{1}{2} - \frac{b\rho}{\sigma}}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} - \frac{d_1}{2I_t} \right) \int_0^t \dot{V}_\sigma(u) du - \left( \frac{\rho^2 - \frac{1}{2} - \frac{b\rho}{\sigma}}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} - \frac{d_2}{2I_t} \right) \int_0^t \dot{V}_\sigma^*(u) du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\rho}{\sigma} \frac{\dot{V}_\sigma^*(t) - \dot{V}_\sigma(t)}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \right]\end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $d_2 = d_1 - \sqrt{(1-\rho^2)I_t}$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned}\dot{P}_\sigma &= K e^{-rt} \mathbb{E}\left[N'(d_1) \left( \left( \frac{\rho^2 - \frac{1}{2} - \frac{\kappa\rho}{\sigma}}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} - \frac{d_2}{2I_t} \right) \int_0^t (\dot{V}_\sigma(u) - \dot{V}_\sigma^*(u)) du + \right. \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{(1-\rho^2) \int_0^t \dot{V}_\sigma(u) du}{2\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} + \frac{\rho}{\sigma} \frac{\dot{V}_\sigma^*(u) - \dot{V}_\sigma(t)}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \right] \\ &= K e^{-rt} \mathbb{E}\left[N'(d_1) \left( \left( \frac{-x - \frac{\rho}{\sigma}(V_t - v - at) - (\rho^2 - \frac{1}{2} - \frac{b\rho}{\sigma})I_t}{2I_t\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \int_0^t (\dot{V}_\sigma^*(u) - \dot{V}_\sigma(u)) du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\frac{1}{2}(1-\rho^2) \int_0^t \dot{V}_\sigma(u) du + \frac{\rho}{\sigma}(\dot{V}_\sigma^*(t) - \dot{V}_\sigma(t))}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \right]\end{aligned}$$

□

**Lemme 5.4.1.** *La solution de (5.4.9) est donnée par*

$$\dot{V}_\sigma^*(t) = \frac{2}{\sigma} V_t - \sqrt{V_t} e^{\frac{\rho\sigma}{2}t - \gamma t} \left( \frac{2}{\sigma} \sqrt{v} + \int_0^t \left( \frac{2a}{\sigma\sqrt{V_u}} - \rho\sqrt{V_u} \right) e^{-\frac{\rho\sigma}{2}u + \gamma u} du \right).$$

### Preuve du lemme 5.4.1

La dérivée  $\dot{V}_\sigma^*$  vérifie

$$d\dot{V}_\sigma^*(t) = -\left(b - \frac{\rho\sigma}{2}\right) \dot{V}_\sigma^*(t) dt + \sqrt{V_t} dW_t^2 + \sigma \frac{\dot{V}_\sigma^*(t)}{2\sqrt{V_t}} dW_t^2, \quad \dot{V}_\sigma^*(0) = 0.$$

On pose  $Z^* := \dot{V}_\sigma^*(t) - \frac{2}{\sigma} V_t$ . On peut vérifier que  $Z^*$  est solution de l'EDS définie par

$$dZ_t^* = \left( -\frac{2a}{\sigma} + \rho V_t - \left(b - \frac{\rho\sigma}{2}\right) Z_t^* \right) dt + \sigma \frac{Z_t^*}{2\sqrt{V_t}} dW_t^2, \quad Z_0^* = -\frac{2}{\sigma} v.$$

On pose  $Y^* = Z^* V^{-\frac{1}{2}}$ .  $Y^*$  est donc l'unique solution de

$$dY_t^* = \left( -\frac{2a}{\sigma} V_t^{-\frac{1}{2}} + \rho\sqrt{V_t} - \frac{b - \rho\sigma}{2} Y_t^* - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \frac{Y_t^*}{V_t} \right) dt, \quad Y_0^* = -\frac{2}{\sigma} \sqrt{v}.$$

D'où

$$Y_t^* = \dot{V}_\sigma^*(t) - \frac{2}{\sigma} V_t \sqrt{V_t} = -\frac{2}{\sigma} \sqrt{v} e^{\frac{\rho\sigma}{2}t - \gamma t} + \int_0^t \left( \rho \sqrt{V_u} - \frac{2a}{\sigma \sqrt{V_u}} \right) e^{\frac{\rho\sigma}{2}(t-u) - (\gamma t - \gamma u)} du \quad \square$$

## 5.5 Monotonie par rapport à la corrélation

Outre les raisons mathématiques, expliquées antérieurement, il y a plusieurs raisons empiriques et économiques pour le choix du modèle de Heston pour modéliser le cours d'un actif boursier (voir [13] pour une analyse statistique-empirique détaillée). Des études empiriques ont par ailleurs montré que la distribution du log-spot est non-gaussienne. Elle est caractérisée par des queues lourdes et des hauts sommets. Il y a aussi des preuves empiriques et des arguments économiques qui suggèrent que les rendements d'un actif boursier sont négativement corrélés avec sa volatilité (ce phénomène est appelé "l'effet levier").

En revanche, le modèle de Heston peut impliquer un certain nombre de distributions différentes selon les valeurs de ses paramètres. Notamment, selon le signe de la corrélation entre le sous-jacent et sa volatilité ( $\rho$ ). Cette corrélation affecte principalement la lourdeur de la queue et l'asymétrie de la distribution et son effet peut se voir d'une façon intuitive. En effet, si  $\rho > 0$ , alors la volatilité augmente à mesure que le prix augmente. Cela va étendre la queue à droite et "presser" la partie gauche de la distribution. Inversement, si  $\rho < 0$ , alors la volatilité augmente lorsque le prix baisse, répandant la queue à gauche et en pressant la queue droite de la distribution et créant ainsi une concentration à gauche de la distribution (Rappelons que dans la pratique, les rendements des actions et de leurs volatilités sont corrélés négativement). Il est connu aussi que l'effet de l'évolution de l'asymétrie de la distribution a aussi des répercussions sur la forme de la surface de volatilité implicite générée par le modèle. Par conséquent,  $\rho$  affecte cela également.

Dans cette section, nous nous intéressons aux propriétés de monotonie du prix d'un Put européen par rapport au coefficient de corrélation  $\rho$ . Notons que la méthode que nous avons utilisée pour établir la monotonie par rapport à  $v$ ,  $a$  et  $b$  ne peut malheureusement pas s'appliquer ici. En effet, cette méthode consistait à différentier (5.2.7) par rapport au

paramètre considéré pour obtenir un système différentiel de type ( $\mathcal{L}u < 0$  sur  $C$  et  $u \geq 0$  sur  $\partial C$ ), ce qui donne le signe de  $u$ , par application du principe du maximum. Alors que si on différencie (5.2.7) par rapport à  $\rho$ , on obtient le système

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}} \frac{\partial P}{\partial \rho}(t, s, v) = -\sigma s v \frac{\partial P}{\partial s \partial v}(t, s, v), & \forall (t, s, v) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ \frac{\partial P}{\partial \rho}(0, s, v) = 0, & \forall (s, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Cela ne nous permet pas d'appliquer le principe du maximum pour déduire le signe de  $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ , car le signe de  $\frac{\partial^2 P}{\partial s \partial v}$  n'est pas forcément constant. Pour analyser l'impact de  $\rho$  dans le prix  $P$ , nous allons utiliser une méthode plus directe, où nous allons étudier le signe de la "dérivée" de  $P$  par rapport à  $\rho$ . Pour cela, nous allons donner une représentation particulière de cette dérivée qui nous permettra de déterminer son signe, notamment pour les valeurs extrêmes de  $s$ . Plus exactement, cette représentation nous permettra de montrer qu'il existe  $s_\rho^-(t, v) \leq s_\rho^+(t, v)$  tels que  $\frac{\partial P}{\partial \rho}(t, s, v)$  est positive pour  $s \leq s_\rho^-(t, v)$  et négative pour  $s \geq s_\rho^+(t, v)$ . Nous montrons que pour  $\rho = 0$ , on a  $K \leq s_0^-(t, v) \leq s_0^+(t, v) < +\infty$ , grâce notamment aux comportements exponentiel des queues de distribution de la variance intégrée. Nous conjecturons que  $0 < s_\rho^-(t, v) \leq s_\rho^+(t, v) < +\infty$ , pour tout  $\rho \in ]-1, 1[$ . Nous étudierons ensuite le comportement asymptotique en temps (en temps court-long) des points critiques  $s_\rho^\pm(t, v)$ . Nous montrerons que pour  $t$  petit, la monotonie par rapport à  $\rho$  s'inverse autour de la monnaie (croissante pour  $s \leq K$  et décroissante pour  $s \geq K$ , ce qui veut dire que  $s^\pm(0^+, v) = K$ ). Pour les longues maturités, nous montrerons que les prix des Puts sont croissants par rapport à la corrélation.

### 5.5.1 La dérivée du prix par rapport à $\rho$

En écrivant  $P$  sous la forme  $P = \mathbb{E} \left( K e^{-rt} - s e^\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2 + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{V_s} d\hat{W}_s^2 - \frac{1}{2} \int_0^t V_s ds \right)_+$ , on peut facilement vérifier que cette quantité est dérivable par rapport à  $\rho$  sur  $] -1, 1[$ . Il faut cependant signaler que l'expression de cette dérivée ne permet pas de déterminer son signe, ce qui est le but de cette section. Nous allons donc procéder autrement, en donnant une représentation de la dérivée du prix par rapport à  $\rho$  qui nous servira dans



la suite pour déterminer son signe. Cette représentation s'obtient en remarquant d'abord que le prix  $P$  s'écrit sous la forme  $P = \mathbb{E} \left( KN(d_1) - se^\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2 - \frac{\rho^2}{2} \int_0^t V_s ds N(d_2) \right)$ , ainsi le calcul de la dérivée de  $P$  par rapport à  $\rho$  revient à dériver les deux quantités  $\mathbb{E}N(d_1)$  et  $\mathbb{E}e^\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2 - \frac{\rho^2}{2} \int_0^t V_s ds N(d_2)$ . Pour la première quantité, on dérive directement sous la probabilité  $\mathbb{P}$  et pour la deuxième, nous effectuons un changement de probabilité  $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = e^\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2 - \frac{\rho^2}{2} \int_0^t V_s ds$ , ensuite on dérive sous la nouvelle probabilité. L'étonnant dans cette démarche est que, comme la dynamique de  $V$  sous la nouvelle probabilité dépend de  $\rho$ , on sera amené à dériver  $V$  par rapport à  $\rho$  sous cette nouvelle probabilité (notons que sous  $\mathbb{P}$ , le processus  $V$  ne dépend pas de  $\rho$ ). Nous allons détailler cela dans la proposition suivante.

**Proposition 5.5.1.** *Pour tout  $\rho \in ]-1, 1[$  et pour tout  $(t, s, v) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , on note  $\dot{P}_\rho = \frac{\partial P_\rho}{\partial \rho}(t, s, v)$ . Alors, on a*

$$\dot{P}_\rho = Ke^{-rt} \mathbb{E} \left[ N' \left( \frac{-x + A_t^v}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \left( \frac{x + B_t^v}{2I_t \sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \dot{I}_\rho^* + \frac{\rho}{\sigma} \frac{\dot{V}_\rho^* - \sigma I_t}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \right], \quad (5.5.1)$$

où  $x := -\log\left(\frac{se^{rt}}{K}\right)$ ,  $I_t := \int_0^t V_s ds$ ,  $A_t^v := \rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - \frac{1}{2}I_t$ ,  $B_t^v := -\rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 +$

$\left(\frac{1}{2} + 2\frac{b\rho}{\sigma} - \rho^2\right)I_t$ ,  $\dot{I}_\rho^* \equiv \dot{I}_\rho^*(t) = \int_0^t \dot{V}_\rho^*(u) du$  et  $V_\rho^*$  est donné par

$$\dot{V}_\rho^*(t) = \sigma \sqrt{V_t} \int_0^t \sqrt{V_u} e^{-\frac{b-\rho\sigma}{2}(t-u) - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_u^t \frac{dr}{V_r}} du. \quad (5.5.2)$$

## Preuve

On a, en écrivant  $W_t^1 = \rho W_t^2 + \sqrt{1-\rho^2} \hat{W}_t^2$ ,

$$\begin{aligned} P_\rho(t, s, v) &= \mathbb{E} \left( e^{-rt} (K - S_t)_+ \mid S_0 = s, V_0 = v \right) \\ &= \mathbb{E} \left( Ke^{-rt} - se^{\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^1 - \frac{1}{2} \int_0^t V_s ds} \right)_+ \\ &= \mathbb{E} \left( Ke^{-rt} - se^{\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2 + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{V_s} d\hat{W}_s^2 - \frac{1}{2} \int_0^t V_s ds} \right)_+ \\ &= \mathbb{E} \left( P_{BS} \left( t, se^{\rho \int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2 - \frac{\rho^2}{2} \int_0^t V_s ds}, \frac{1-\rho^2}{t} \int_0^t V_s ds \right) \right), \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

où

$$P_{BS}(t, x, v) = \mathbb{E} \left( K e^{-rt} - x e^{\sqrt{v} \hat{W}_t^2 - \frac{v}{2} t} \right)_+.$$

On en déduit que  $P_\rho(t, s, v)$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} P_\rho(t, s, v) &= K e^{-rt} \mathbb{E} \left[ N \left( \frac{-\log(\frac{s e^{rt}}{K}) - \rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 + \frac{1}{2} I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}} \right) \right] \\ &\quad - s \mathbb{E} \left[ M_t^\rho N \left( -\frac{\log(\frac{s e^{rt}}{K}) + \rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 + (\frac{1}{2} - \rho^2) I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}} \right) \right], \end{aligned}$$

où  $I_t := \int_0^t V_u du$  et

$$M_t^\rho := e^{\rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - \frac{\rho^2}{2} I_t} \quad (5.5.4)$$

On pose

$$d_1 = \frac{-\log(\frac{s e^{rt}}{K}) - \rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 + \frac{1}{2} I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}}$$

et

$$d_2 = \frac{-\log(\frac{s e^{rt}}{K}) - \rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - (\frac{1}{2} - \rho^2) I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}}.$$

La dérivée de  $P_\rho(t, s, v)$  par rapport à  $\rho$  s'écrit donc comme

$$\dot{P}_\rho(t, s, v) = K e^{-rt} \frac{\partial \mathbb{E} [N(d_1)]}{\partial \rho} - s \frac{\partial \mathbb{E} [M_t^\rho N(d_2)]}{\partial \rho}. \quad (5.5.5)$$

On calcule  $\frac{\partial \mathbb{E} [N(d_1)]}{\partial \rho}$  directement en dérivant sous l'espérance

$$\frac{\partial \mathbb{E} [N(d_1)]}{\partial \rho} = \mathbb{E} \left[ N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \rho} \right] = \mathbb{E} \left[ N'(d_1) \times \left( \frac{-\int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}} + \frac{\rho}{1 - \rho^2} d_1 \right) \right] \quad (5.5.6)$$

Notons que cette dérivation est bien définie car la quantité sous l'espérance est bien intégrable et cela est dû en particulier au fait  $\mathbb{E} [(\Sigma_t^v)^r] < +\infty$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$  (voir Dufresne [21])

Pour calculer  $\frac{\partial \mathbb{E} [M_t^\rho N(d_2)]}{\partial \rho}$ , on la probabilité  $\mathbb{P}^*$  définie par

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = M_t^\rho. \quad (5.5.7)$$

Rappelons que d'après (5.2.5), le processus  $M^\rho$  est bien une martingale (car  $\mathbb{E}M_t^\rho = 1$ ). Sous  $\mathbb{P}^*$ , le processus  $(W_u^*)_{0 \leq u \leq t}$ , où  $W_u^* := W_u - \rho \int_0^u \sqrt{V_\tau} d\tau$  est un mouvement brownien. Par ailleurs, la dynamique de  $V$  sous  $\mathbb{P}^*$  est donnée par

$$dV_t = (a - (b - \sigma\rho)V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^* \quad (5.5.8)$$

On écrit

$$\mathbb{E}[M_t^\rho N(d_2)] = \mathbb{E}^*[N(d_2)].$$

En remplaçant  $\int_0^t \sqrt{V_s} dW_s^2$  par l'expression

$$\int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 = \frac{1}{\eta} (V_t - v - at + aI_t),$$

on obtient,

$$d_2 = \frac{-\log\left(\frac{se^{rt}}{K}\right) + \frac{a\rho t}{\sigma} - \frac{\rho}{\sigma}(V_t - v) - \left(\frac{1}{2} + \frac{b\rho}{\sigma} - \rho^2\right)I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}}.$$

On peut donc calculer  $\frac{\partial \mathbb{E}[M_t^\rho N(d_2)]}{\partial \rho}$  ( $= \frac{\partial \mathbb{E}^*[N(d_2)]}{\partial \rho}$ ) directement, en dérivant la quantité  $d_2$  par rapport à  $\rho$  sous  $\mathbb{P}^*$ . Cependant, il faut prendre en compte le fait que sous  $\mathbb{P}^*$ ,  $V_t$  dépend de  $\rho$ . On note  $\dot{V}_\rho^*$  la dérivé par rapport à  $\rho$  au sens  $\mathcal{L}_\rho$  (voir section 2).  $\dot{V}_\rho^*$  est la solution de l'EDS définie par

$$d\dot{V}_\rho^*(t) = (\sigma V_t - (b - \sigma\rho)\dot{V}_\rho^*(t))dt + \sigma \frac{\dot{V}_\rho^*(t)}{2\sqrt{V_t}} dW_t^*, \quad \dot{V}_\rho^*(0) = 0. \quad (5.5.9)$$

Notons que  $\dot{V}_\rho^*$  n'est autre que  $-\sigma \times$  la dérivée de  $V$  par rapport au paramètre  $b$  au point  $(b - \sigma\rho)$ . Elle est donc donnée, en utilisant (4.4.15), par

$$\dot{V}_\rho^*(t) = \sigma\sqrt{V_t} \int_0^t \sqrt{V_u} e^{-\frac{b-\sigma\rho}{2}(t-u) - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_u^t \frac{dr}{V_r}} du, \quad p.s.$$

On écrit

$$\frac{\partial \mathbb{E}^*[N(d_2)]}{\partial \rho} = \mathbb{E}^*[N'(d_2) \partial_\rho^* d_2],$$

où  $\partial_\rho^* d_2$  la dérivée de  $d_2$  par rapport à  $\rho$  sous  $\mathbb{P}^*$ . Elle est donnée par

$$\begin{aligned} \partial_\rho^* d_2 &= \frac{\frac{a}{\sigma}t - \frac{1}{\sigma}(V_t - v) - \left(\frac{b}{\sigma} - 2\rho\right)I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}} + \frac{\rho}{1 - \rho^2} d_2 - \frac{\rho}{\sigma} \frac{V_\rho^*(t)}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}} \\ &\quad - \left( \frac{\frac{1}{2} + \frac{b\rho}{\sigma} - \rho^2}{\sqrt{(1 - \rho^2)I_t}} + \frac{d_2}{2I_t} \right) \int_0^t V_\rho^*(u) du \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Remarquons que,

$$\mathbb{E}^* [N'(d_2) \partial_\rho^* d_2] = \mathbb{E} [M_t^\rho N'(d_2) \partial_\rho^* d_2]$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E} [M_t^\rho N(d_2)]}{\partial \rho} &= \mathbb{E} \left[ M_t^\rho N'(d_2) \times \left( \frac{\frac{a}{\sigma} t - \frac{1}{\sigma} (V_t - v) - (\frac{b}{\sigma} - 2\rho) I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}} + \frac{\rho}{1 - \rho^2} d_2 \right) \right] - \\ &\mathbb{E} \left[ M_t^\rho N'(d_2) \times \left( \frac{\frac{\rho}{\sigma} V_\rho^*(t)}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}} + \left( \frac{\frac{1}{2} + \frac{b\rho}{\sigma} - \rho^2}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}} + \frac{d_2}{2I_t} \right) I_\rho^* \right) \right] \end{aligned}$$

En remarquant que

$$K N' \left( \frac{-\log(\frac{S}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) = S N' \left( \frac{-\log(\frac{S}{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right), \quad \forall S, K, \sigma > 0, \quad (5.5.11)$$

on obtient

$$K e^{-rt} N'(d_1) = s M_t^\rho N'(d_2), \quad p.s$$

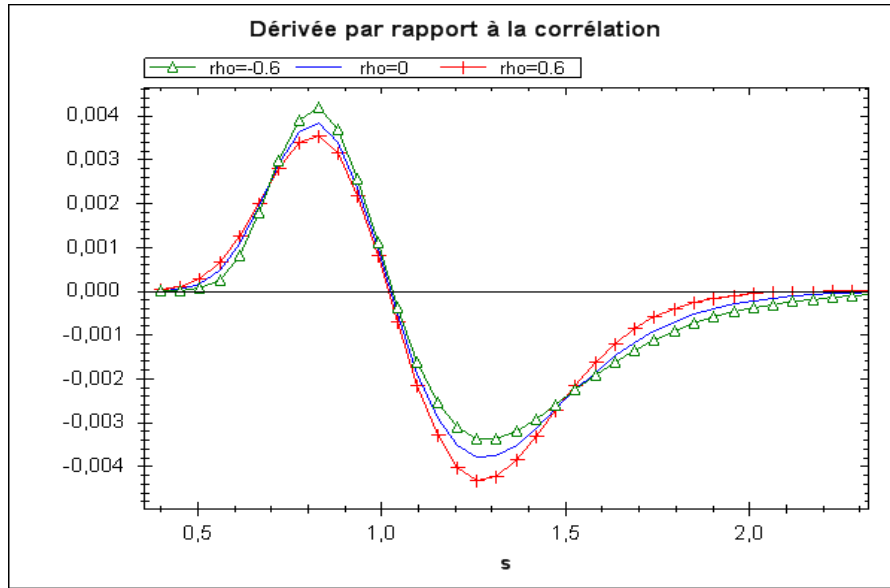
D'où

$$\begin{aligned} s \frac{\partial \mathbb{E} [M_t^\rho N(d_2)]}{\partial \rho} &= K e^{-rt} \mathbb{E} \left[ N'(d_1) \times \left( \frac{\frac{a}{\sigma} t - \frac{1}{\sigma} (V_t - v) - (\frac{b}{\sigma} - 2\rho) I_t}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}} + \frac{\rho}{1 - \rho^2} d_2 \right) \right] \\ &- K e^{-rt} \mathbb{E} \left[ N'(d_1) \times \left( \frac{\frac{\rho}{\sigma} V_\rho^*(t)}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}} + \left( \frac{\frac{1}{2} + \frac{b\rho}{\sigma} - \rho^2}{\sqrt{(1 - \rho^2) I_t}} + \frac{d_2}{2I_t} \right) I_\rho^* \right) \right] \end{aligned}$$

En utilisant (5.5.5), (5.5.6), (5.5.12) et le fait que  $d_1 = d_2 + \sqrt{(1 - \rho^2) I_t}$ , on retrouve facilement l'équation (5.5.1).  $\square$

### 5.5.2 Signe de $\dot{P}_\rho$

On s'intéresse maintenant au signe de  $\dot{P}_\rho$ , qui détermine la monotonie de  $P$  par rapport au coefficient de corrélation  $\rho$ . En observant la représentation de  $\dot{P}_\rho$  donnée par (5.5.1), on peut "intuitivement" remarquer que si  $x$  est très grand,  $\dot{P}_\rho$  est la moyenne d'une variable aléatoire qui est négative "la plupart du temps", et inversement si  $x$  est très petit,  $\dot{P}_\rho$  est la moyenne d'une variable aléatoire qui est positive "la plupart du temps". On s'attend donc à ce que  $\dot{P}_\rho(x)$  converge vers 0 par valeurs positives lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  et par valeurs négatives lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . On définit donc le premier point auquel


 FIGURE 5.1 –  $\dot{P}_\rho$  pour  $(K = 1, v_0 = 0, 1, b = 3, \sigma = 20\%$  et  $t = 6$  mois)

$s \mapsto \dot{P}_\rho(t, \cdot, v)$  prend une valeur négative et le dernier point auquel cette application est positive, pour tout  $(t, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$ , qu'on note respectivement

$$s_\rho^-(t, v) = \inf \left\{ s > 0 : \dot{P}_\rho(t, s, v) \leq 0 \right\} \quad (5.5.13)$$

et

$$s_\rho^+(t, v) = \sup \left\{ s > 0 : \dot{P}_\rho(t, s, v) \geq 0 \right\} \quad (5.5.14)$$

En particulier, pour tout  $(t, v) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_+^*$ , et pour tout  $s_1 < s_\rho^-(t, v)$  (resp  $s_2 > s_\rho^+(t, v)$ ), on a  $\dot{P}_\rho(t, s_1, v) > 0$  (resp  $\dot{P}_\rho(t, s_2, v) < 0$ ). Et par conséquent, l'application  $s \mapsto \dot{P}_\rho(t, s, v)$  est positive sur  $[0, s_\rho^-(\rho; t, v)[$  et négative sur  $]s_\rho^+(\rho; t, v), \infty[$ .

Les points  $s_\rho^-(t, v)$  et  $s_\rho^+(t, v)$ , s'ils sont différents, représentent le premier et le dernier où  $\rho \mapsto P(t, s, v)$  change de monotonie. Le reste de cette section sera consacré à la caractérisation de ces points. On commence par étudier le cas  $\rho = 0$ , c'est à dire la dérivée de P par rapport à  $\rho$  au point  $\rho = 0$ .

**Le cas  $\rho = 0$**

En utilisant les résultats de la proposition 5.5.1,  $\dot{P}_0$  est donnée par

$$\dot{P}_0(t, s, v) := e^{-rt} K \mathbb{E} \left[ N' \left( \frac{\log\left(\frac{sr^{rt}}{K}\right) - \frac{1}{2}I_t}{\sqrt{I_t}} \right) \left( \frac{-\log\left(\frac{sr^{rt}}{K}\right) + \frac{1}{2}I_t}{2I_t\sqrt{I_t}} \dot{I}_0^* \right) \right],$$

où

$$\dot{I}_0^* = \sigma \int_0^t \sqrt{V_\tau} \int_0^\tau \sqrt{V_u} e^{-\frac{b}{2}(\tau-u) - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_u^\tau \frac{dr}{V_r}} du d\tau.$$

On en déduit que pour tout  $(t, v) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $s \leq K e^{-rt}$ , on a  $\dot{P}_0(t, s, v) > 0$ .

D'où

$$K e^{-rt} < s_0^-(t, v) \leq s_0^+(t, v), \quad \forall (t, v) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_+^* \quad (5.5.15)$$

On peut considérer qu'en faisant tendre  $s$  vers  $+\infty$ ,  $\dot{P}_0(t, s, v)$  va tendre vers 0 par valeurs négatives. En effet, si on pose  $y := \log\left(\frac{sr^{rt}}{K}\right)$ , alors on a  $\dot{P}_0(t, s, v) = e^{-rt} K \mathbb{E} J_t(y)$ , où

$$J_t(y) := N' \left( \frac{y - \frac{1}{2}I_t}{\sqrt{I_t}} \right) \left( \frac{-y + \frac{1}{2}I_t}{2I_t\sqrt{I_t}} \dot{I}_0^* \right),$$

Ainsi, pour montrer que  $s_0^+(t, v) < +\infty$ , il suffit de montrer qu'il existe  $y^+$  tel que pour tout  $y > y^+$ ,  $\mathbb{E} J_t(y) < 0$ . Pour cela, il suffit de trouver une fonction positive  $f$  telle que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) \mathbb{E} [(J_t(y))] = -\infty.$$

Le choix de  $f$  est donné par le résultat suivant, qui utilise notamment le comportement asymptotique des queues de distribution de  $I_t$ .

**Théorème 5.5.1.** *Pour tout  $(t, v) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_+^*$ , on a*

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\dot{P}_0(t, K e^{-rt+y}, v)}{\mathbb{P}(I_t > 2y)} = -\infty. \quad (5.5.16)$$

*En particulier, on a*

$$K e^{-rt} < s_0^-(t, v) \leq s_0^+(t, v) < +\infty, \quad \forall (t, v) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_+^*. \quad (5.5.17)$$

**Preuve :**

On pose  $\hat{J}_t(y) := -J_t(y)$ . On va montrer que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} [\hat{J}(y)]}{\mathbb{P}(I_t > 2y)} = +\infty. \quad (5.5.18)$$

Pour cela, on va découper  $\hat{J}_t(y)$  en deux parties comme suit

$$\hat{J}_t(y) = \hat{J}_t(y) \mathbf{1}_{I_t < 2y} + \hat{J}_t(y) \mathbf{1}_{I_t \geq 2y}.$$

Ensuite, on pose  $f(y) = \frac{1}{\mathbb{P}(I_t > 2y)}$  et on va montrer que  $\mathbb{E} [f(y)(\hat{J}_t(y)) \mathbf{1}_{I_t > 2y}]$  est bornée, alors que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [f(y)(\hat{J}_t(y)) \mathbf{1}_{I_t < 2y}] = +\infty$$

On considère d'abord la première partie, c'est-à-dire  $\mathbb{E} [f(y)(\hat{J}_t(y)) \mathbf{1}_{I_t > 2y}]$ . En utilisant le fait que  $|u|e^{-\frac{u^2}{2}} \leq e^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ , on écrit

$$|\hat{J}_t(y)| \mathbf{1}_{I_t > 2y} \leq I_0^* \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2I_t \sqrt{2\pi}} \mathbf{1}_{I_t > 2y}, \quad p.s$$

D'autre part, en utilisant la forme de  $\dot{I}_0^*$ , on écrit

$$\begin{aligned} \dot{I}_0^* &= \sigma \int_0^t \sqrt{V_\tau} \int_0^\tau \sqrt{V_u} e^{-\frac{b}{2}(\tau-u) - (\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}) \int_u^\tau \frac{dr}{V_r}} du d\tau \\ &\leq \sigma \int_0^t \sqrt{V_\tau} \int_0^\tau \sqrt{V_u} du d\tau \quad \left( \text{car } \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8} > 0 \right) \\ &\leq \sigma \int_0^t \sqrt{\tau} \sqrt{V_\tau} \left( \int_0^\tau V_u du \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \sigma \frac{t}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^t V_\tau \int_0^\tau V_u du d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma t}{2} I_t. \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

On en déduit que

$$|\hat{J}_t(y)| \mathbf{1}_{I_t > 2y} \leq \frac{\sigma t}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}_{I_t > 2y}, \quad p.s$$

D'où

$$\left| \mathbb{E} [f(y)(\hat{J}_t(y)) \mathbf{1}_{I_t > 2y}] \right| \leq \mathbb{E} [f(y) |\hat{J}_t(y)| \mathbf{1}_{I_t > 2y}] \leq \frac{\sigma t}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (5.5.20)$$

CHAPITRE 5. MONOTONIE PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES DE LA VOLATILITÉ

On s'intéresse maintenant à  $\hat{J}_t(y)\mathbf{1}_{I_t < 2y}$ . On remarque que l'application  $\lambda \in [0, 2y] \mapsto \frac{y - \frac{1}{2}\lambda}{\sqrt{\lambda}}$  est décroissante de  $+\infty$  vers 0. On peut donc définir pour tout  $\nu > 0$ , les quantités  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  vérifiant

$$\frac{y - \frac{1}{2}\bar{\lambda}}{\sqrt{\bar{\lambda}}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{y - \frac{1}{2}\underline{\lambda}}{\sqrt{\underline{\lambda}}} = \nu y^{\frac{1}{2}},$$

i.e

$$\bar{\lambda} = \left(\sqrt{1 + 2y} - 1\right)^2 \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} = y \left(\sqrt{\nu^2 + 2} - \nu\right)^2.$$

Notons que, à cause du fait que  $1 \ll y$  et que  $\lambda \mapsto \frac{y - \frac{1}{2}\lambda}{\sqrt{\lambda}}$  est strictement décroissante, on a  $\underline{\lambda} < \bar{\lambda}$ . D'autre part, comme  $(\hat{J}_t(y))\mathbf{1}_{\Sigma < 2y}$  est positive, on peut donc écrire

$$\hat{J}_t(y)\mathbf{1}_{I_t < 2y} \geq \hat{J}_t(y)\mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]}, \quad p.s.$$

De plus, en utilisant la décroissance de  $u \mapsto u e^{-u^2}$  sur  $[1, \infty[$  et la décroissance de  $\lambda \mapsto \frac{y - \frac{1}{2}\lambda}{\sqrt{\lambda}}$  sur  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ , on peut écrire

$$\hat{J}_t(y)\mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} \geq \frac{\left(\frac{y - \frac{1}{2}\underline{\lambda}}{\sqrt{\underline{\lambda}}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \frac{1}{2}\underline{\lambda}}{\sqrt{\underline{\lambda}}}\right)^2}}{2\sqrt{2\pi}\bar{\lambda}} \dot{I}_0^* \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} = \frac{\nu\sqrt{y} e^{-\frac{\nu^2 y}{2}}}{2\sqrt{2\pi}\bar{\lambda}} \dot{I}_0^* \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]}, \quad p.s.$$

On va maintenant minorer la quantité  $\mathbb{E} \left[ \dot{I}_0^*(t) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} \right]$ . On remarque que pour tout  $s \leq t$ ,  $\dot{I}_0^*(s) \leq \dot{I}_0^*(t)$ , ainsi

$$\mathbb{E} \left[ \dot{I}_0^*(t) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} \right] \geq \mathbb{E} \left[ \dot{I}_0^*(s) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} \right], \quad \forall s \leq t.$$

D'autre part, en remarquant que pour tout  $s \leq t$ , on a

$$\mathbb{E} \left[ \dot{I}_0^*(s) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} \right] = \mathbb{E} \left[ \dot{I}_0^*(s) \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} \mid V_s \right) \right]$$

on peut montrer le résultat du lemme 5.5.1 ci-dessous, qui assure que

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{E} \left[ \dot{I}_0^*(t) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)]} \right] - \ln \mathbb{P} \left( I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)] \right)}{\underline{\lambda}(y)} \geq 0 \quad (5.5.21)$$

En utilisant ce lemme, on déduit que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $y$  à partir duquel

$$\frac{\mathbb{E} \left[ \dot{I}_0^*(t) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)]} \right]}{\mathbb{P} \left( I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)] \right)} \geq e^{-\epsilon \bar{\lambda}(y)}$$



On pose donc

$$Q_t(y) := \frac{\nu\sqrt{y}}{2\sqrt{2\pi}(\sqrt{1+2y}-1)^2}$$

On écrit finalement que pour  $y$  assez grand, on a

$$\mathbb{E} \left[ \hat{J}_t(y) \mathbf{1}_{I_t < 2y} \right] \geq \frac{1}{2} Q_t(y) e^{-(\epsilon + \nu^2/2)y} \mathbb{P}(I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}])$$

Pour achever la démonstration, on va montrer que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} Q_t(y) e^{-\frac{\nu^2 y}{2}} \frac{\mathbb{P}(I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}])}{\mathbb{P}(I_t \geq 2y)} = +\infty \quad (5.5.22)$$

Pour cela, on utilise les résultats du théorème 4.3.1, qui assure qu'il existe  $\mu^* > 0$  tel que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbb{P}(I_t \geq R)}{R} = -\mu^*$$

En particulier, pour tout  $\mu_1 < \mu^* < \mu_2$ , il existe  $R^*$  tel que

$$-\mu_2 < \frac{\ln \mathbb{P}(I_t \geq R)}{R} < -\mu_1, \quad \forall R \geq R^*. \quad (5.5.23)$$

En appliquant ce résultat à  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$ , qui rappelons-le sont de l'ordre de  $y$ , on obtient

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{P}(I_t > \underline{\lambda}) - \ln \mathbb{P}(I_t \geq \underline{\lambda}) &> \mu_1 \left( 2 + 2\nu^2 - 2\nu\sqrt{2 + \nu^2} \right) - \mu_2 \left( 2 + 2\nu^2 - 2\nu\sqrt{2 + \nu^2} \right) y \\ &\sim 2 \left( \mu_1 - \mu_2 \left( 1 + \nu^2 - \nu\sqrt{2 + \nu^2} \right) \right) y \end{aligned}$$

En particulier, si on choisit  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de sorte que

$$\mu_1 - \mu_2 \left( 1 + \nu^2 - \nu\sqrt{2 + \nu^2} \right) > 0, \quad (5.5.24)$$

alors on obtient

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}(I_t \geq \underline{\lambda}(y))}{\mathbb{P}(I_t \geq \bar{\lambda}(y))} = +\infty \quad (5.5.25)$$

Donc, pour  $y$  assez grand, on a

$$\mathbb{P}(I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}(I_t \geq \underline{\lambda})$$

Ainsi, on a

$$Q_t(y) e^{-\frac{\nu^2 y}{2}} \frac{\mathbb{P}(I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}])}{\mathbb{P}(I_t \geq 2y)} \geq \frac{1}{2} Q_t(y) e^{-\frac{\nu^2 y}{2}} \frac{\mathbb{P}(I_t \geq \underline{\lambda})}{\mathbb{P}(I_t \geq 2y)}$$

En utilisant à nouveau l'équation (5.5.23), on vérifie que

$$\ln \mathbb{P}(I_t > \underline{\lambda}) - \ln \mathbb{P}(I_t \geq 2y) > \left(2\mu_1 - \mu_2 \left(2 + 2\nu^2 - 2\nu\sqrt{2 + \nu^2}\right)\right) y$$

On choisit  $\nu$  de sorte que

$$\zeta := -\frac{1}{2}\nu^2 + 2\mu_1 - 2\mu_2 \left(1 + \nu^2 - \nu\sqrt{2 + \nu^2}\right) > 0 \quad (5.5.26)$$

Notons que si  $\nu$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  vérifient l'équation (5.5.26), alors ils satisferont la condition (5.5.24). Pour montrer l'existence de  $\nu$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  vérifiant (5.5.26) on procède comme suit : On prend  $0 < \nu \ll 1$ . On note  $\gamma(\nu) = -\nu^2 + \nu\sqrt{2 + \nu^2} > 0$  et on pose

$$\zeta = -\frac{1}{2}\nu^2 + 2\mu_1 - 2\mu_2(1 - \gamma)$$

On suppose que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont donnés de sorte que  $\mu_2 = \frac{\mu_1}{1 - \frac{1}{2}\gamma}$  ( il suffit de prendre  $\mu_1 = \mu^* \sqrt{1 - \frac{1}{2}\gamma} < \mu^*$  et  $\mu_2 = \frac{\mu^*}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\gamma}} > \mu^*$ ). Alors on a

$$\zeta = -\frac{1}{2}\nu^2 + \frac{\mu_1\gamma}{1 - \frac{1}{2}\gamma} = \nu \left( -\frac{1}{2}\nu + \frac{\gamma}{\nu} \frac{\mu_1}{1 - \frac{1}{2}\gamma} \right)$$

En utilisant le fait que  $\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\nu} = \sqrt{2}$ , on déduit qu'il existe bien  $\nu > 0$  qui donne  $\zeta > 0$ . D'où finalement, on obtient, en choisissant  $\epsilon = \zeta/2$ ,

$$Q_t(y) e^{-\frac{\nu^2 y}{2}} \frac{\mathbb{P}(I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}])}{\mathbb{P}(I_t \geq 2y)} \geq \frac{1}{2} Q_t(y) e^{\frac{\zeta}{2} y} \longrightarrow +\infty. \quad \square$$

**Lemme 5.5.1.** *On a*

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{E} \left[ I_0^*(t) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)]} \right] - \ln \mathbb{P}(I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)])}{\underline{\lambda}(y)} \geq 0 \quad (5.5.27)$$

**Preuve:** On a, pour  $y$  assez grand, en utilisant la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ I_0^*(t) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} \right] &\geq \mathbb{E} \left[ I_0^*\left(\frac{1}{y}\right) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} \right] = \mathbb{E} \left[ I_0^*\left(\frac{1}{y}\right) \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]} \mid V_{\frac{1}{y}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ I_0^* \Phi_y \left( V_{\frac{1}{y}}, I_{\frac{1}{y}}^v \right) \right], \end{aligned}$$

où

$$\Phi_y(\omega, z) = \mathbb{P}^\omega \left( I_{t-\frac{1}{y}}^\omega + z \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)] \right)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} I_0^*(t) &\geq \sigma e^{-bt/2} e^{-\left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_0^t \frac{dr}{V_r}} \int_0^t \sqrt{V_\tau} \int_0^\tau \sqrt{V_u} du d\tau \\ &= \frac{\sigma}{2} e^{-bt/2} e^{-\left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_0^t \frac{dr}{V_r}} \left[ \int_0^t \sqrt{V_\tau} d\tau \right]^2. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\frac{\sigma}{2t^2} e^{-bt/2} e^{-\left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_0^t \frac{dr}{V_r}} \left[ \int_0^t \sqrt{V_\tau} d\tau \right]^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\sigma v}{2}, \quad p.s$$

D'autre part, on peut vérifier que

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{\Phi_y(V_{\frac{1}{y}}, I_{\frac{1}{y}}^v)}{\mathbb{P}^v (I_t^v \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)])} = 1, \quad p.s$$

En effet, pour tout  $z$

$$\frac{\mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} + z \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)] \right)}{\mathbb{P}^v (I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)])} = \frac{\mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} + z \geq \underline{\lambda}(y) \right) - \mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} + z \geq \bar{\lambda}(y) \right)}{\mathbb{P}^v (I_t \geq \underline{\lambda}(y)) - \mathbb{P}^v (I_t \geq \bar{\lambda}(y))}$$

En utilisant (5.5.25), on sait que, pour tout  $v > 0$ , on a  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}^v (I_t \geq \bar{\lambda}(y))}{\mathbb{P}^v (I_t \geq \underline{\lambda}(y))} = 0$ . De même, on peut vérifier que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} \geq \bar{\lambda}(y) \right)}{\mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} \geq \underline{\lambda}(y) \right)} = 0, \quad p.s$$

Ainsi,

$$\frac{\mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} + z \geq \underline{\lambda}(y) \right) - \mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} + z \geq \bar{\lambda}(y) \right)}{\mathbb{P}^v (I_t \geq \underline{\lambda}(y)) - \mathbb{P}^v (I_t \geq \bar{\lambda}(y))} \sim \frac{\mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} + z \geq \underline{\lambda}(y) \right)}{\mathbb{P}^v (I_t^v \geq \underline{\lambda}(y))}$$

On remarque aussi que

$$\frac{\mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} + z \geq \underline{\lambda}(y) \right)}{\mathbb{P}^v (I_t^v \geq \underline{\lambda}(y))} \geq \frac{\mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} \geq \underline{\lambda}(y) \right)}{\mathbb{P}^v (I_t \geq \underline{\lambda}(y))}$$

En utilisant le fait que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbb{P}^v (I_t \geq \underline{\lambda}(y))}{\underline{\lambda}(y)} = -\mu^*(t)$$

et ceci uniformément en  $v$  ( $\mu^*$  ne dépend pas de  $v$ ). De plus, l'application  $t \mapsto \mu^*(t)$  est continue et strictement croissante. On montre ainsi que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} \geq \underline{\lambda}(y) \right)}{\underline{\lambda}(y)} = -\mu^*(t), \quad p.s.$$

D'où,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mathbb{P}^{V_{\frac{1}{y}}} \left( I_{t-\frac{1}{y}} \geq \underline{\lambda}(y) \right) - \ln \mathbb{P}^v (I_t \geq \underline{\lambda}(y))}{\underline{\lambda}(y)} = 0$$

D'où finalement,

$$\ln \frac{\mathbb{E} [I_0^*(t) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)]}]}{\mathbb{P} (I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)])} \geq \ln \left( \frac{\sigma}{2\frac{1}{y^2}} e^{-\frac{b}{2y}} e^{-\left(\frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{8}\right) \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dr}{V_r}} \left[ \int_0^{\frac{1}{y}} \sqrt{V_\tau} d\tau \right]^2 \frac{\Phi_y(V_{\frac{1}{y}}, I_{\frac{1}{y}}^v)}{\mathbb{P}^v (I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)])} \right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \liminf_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\underline{\lambda}(y)} \ln \frac{\mathbb{E} [I_0^*(t) \mathbf{1}_{I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)]}]}{\mathbb{P} (I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)])} &\geq \liminf_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\underline{\lambda}(y)} \ln \frac{\Phi_y(V_{\frac{1}{y}}, I_{\frac{1}{y}}^v)}{\mathbb{P}^v (I_t \in [\underline{\lambda}(y), \bar{\lambda}(y)])} \\ &= 0. \end{aligned}$$

### Le cas général ( $\rho \neq 0$ )

Dans le cas général, c'est à dire le cas où  $\rho$  est quelconque entre -1 et 1, on a  $\dot{P}_\rho(t, s, v) = K e^{-rt} \mathbb{E} J_t(y)$ , où  $y = -\log\left(\frac{se^{rt}}{K}\right) + \frac{\rho}{\sigma}(v + at)$  et  $J_t(y)$  est défini par

$$J_t(y) := N' \left( \frac{-y + \frac{\rho}{\sigma} V_t + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\rho b}{\sigma}\right) I_t}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \left( \frac{y - \frac{\rho}{\sigma} V_t + \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho b}{\sigma} - \rho^2\right) I_t}{2I_t \sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \dot{J}_\rho^* + \frac{\rho}{\sigma} \frac{\dot{V}_\rho^* - \sigma I_t}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right)$$

On ne peut pas procéder comme on a fait pour le cas  $\rho = 0$ , à cause notamment du terme  $\frac{\rho}{\sigma} \frac{\dot{V}_\rho^* - \sigma I_t}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}}$  dont on ne connaît pas le signe. On peut cependant montrer que pour

$y : |y| \gg 1$ , la quantité  $\mathbb{E} \left[ N' \left( \frac{-y + \frac{\rho}{\sigma} V_t + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\rho b}{\sigma}\right) I_t}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \left( \frac{y - \frac{\rho}{\sigma} V_t + \left(\frac{1}{2} + \frac{\rho b}{\sigma} - \rho^2\right) I_t}{2I_t \sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \dot{J}_\rho^* \right) \right]$  a le même signe que  $y$ , mais cela n'est pas suffisant pour déterminer le signe de  $\dot{P}_\rho$ . On va donc

s'appuyer sur les résultats numériques et sur cette représentation de  $\dot{P}_\rho$  pour conjecturer que pour tout  $(t, v) \in ]0, T] \times \mathbb{R}_+^*$ ,

$$0 < s_\rho^-(t, v) \leq s_\rho^+(t, v) < +\infty \quad (5.5.28)$$

### 5.5.3 Comportement asymptotique de $s_\rho^\pm(\cdot, v)$

Dans cette section, on s'intéresse au comportement asymptotique en  $t$  de  $s_\rho^\pm(t, v)$  pour  $t \sim 0$  et  $t \rightarrow +\infty$ . On considère la représentation de  $\dot{P}_\rho$  donnée sous la forme

$$\dot{P}_\rho = Ke^{-rt} \mathbb{E} \left[ N' \left( \frac{x + A_t^v}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \left( \frac{-x + B_t^v}{2I_t \sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \dot{I}_\rho^* + \frac{\rho}{\sigma} \frac{\dot{V}_\rho^* - \sigma I_t}{\sqrt{(1-\rho^2)I_t}} \right) \right]$$

On remarque que pour  $t$  petit et  $x \neq 0$ , on a  $I_t = vt + o(t)$ ,  $x + A_t^v \sim x$ ,  $x + B_t^v \sim x$ , de même, on a  $\dot{V}_\rho^*(t) = \sigma vt + o(t)$  et  $\dot{I}_\rho^*(t) = \frac{t^2}{2} \eta v + o(t^2)$ . On en déduit donc que pour  $t$  petit,  $J_t(x)$  s'écrit comme

$$\dot{P}_\rho \sim Ke^{-rt} \mathbb{E} \left[ N' \left( \frac{-x}{\sqrt{(1-\rho^2)vt + o(t)}} \right) \left( \frac{-\frac{1}{2}x \eta v}{v \sqrt{(1-\rho^2)v}} \sqrt{t} + o(\sqrt{t}) \right) \right]$$

Cela semble dire, d'une façon formelle, que pour  $t$  proche de 0 et pour tout  $x > 0$ , on a

$$\dot{P}_\rho(t, K e^x, v) < 0 \quad \text{et} \quad \dot{P}_\rho(t, K e^{-x}, v) > 0.$$

Ce qui veut dire que

$$\lim_{t \rightarrow 0} s_\rho^\pm(t, v) = K, \quad \forall v \in \mathbb{R}_+^*.$$

Pour confirmer ces intuitions, nous allons utiliser les résultats qui existent dans la littérature sur le comportement asymptotique, en temps, pour les modèles à volatilité stochastique. Pour les courtes maturités, nous allons utiliser les travaux de Forde, Jacquier (cf. [26]) et pour les longues maturités, nous utiliserons [27]

#### Comportement de $s_\rho^\pm(\cdot, v)$ en temps court

Dans cette section, on s'intéresse au comportement asymptotique de  $s_\rho^\pm$  pour les courtes maturités.. En utilisant les résultats de Forde et Jacquier (cf [26]), on montre le résultat suivant

**Proposition 5.5.2.** *Pour tout  $\rho \in ]-1, 1[$  et pour tout  $v \in \mathbb{R}_*^+$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow 0} s_\rho^\pm(t, v) = K. \quad (5.5.29)$$

### Preuve

D'après Forde et Jacquier (cf [26]), si on considère  $(S, V)$  l'unique solution de (5.3.2) issue de  $(s, v)$ , alors on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \log \mathbb{E}(K - S_t)_+ = -\Lambda^*(\log(\frac{K}{s})), \quad \text{pour } s > K$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \log \mathbb{E}(S_t - K)_+ = -\Lambda^*(\log(\frac{K}{s})), \quad \text{pour } s < K$$

où  $\Lambda^*$  est la transformée de Legendre de la fonction  $\Lambda$  définie par

$$\begin{cases} \Lambda(p) = \frac{vp}{\sigma(\sqrt{1-\rho^2} \cot(\frac{1}{2}\sigma p \sqrt{1-\rho^2}) - \rho)}, & \text{pour } p \in ]p_-, p_+[ , \\ \Lambda(p) = \infty, & \text{pour } p \in \mathbb{R} \setminus ]p_-, p_+[ , \end{cases}$$

où  $p_-$  et  $p_+$  sont donnés par

$$p_- = \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)}{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \mathbf{1}_{\rho < 0} - \frac{\pi}{\sigma} \mathbf{1}_{\rho=0} + \frac{-\pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)}{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \mathbf{1}_{\rho > 0}, \quad (5.5.30)$$

$$p_+ = \frac{\pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)}{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \mathbf{1}_{\rho < 0} + \frac{\pi}{\sigma} \mathbf{1}_{\rho=0} + \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)}{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \mathbf{1}_{\rho > 0}, \quad (5.5.31)$$

La fonction  $\Lambda^*$  est donnée par

$$\Lambda^*(x) = xp^*(x) - \Lambda(p^*(x)), \quad (5.5.32)$$

où  $p^*(x)$  est l'unique solution de

$$x = \Lambda'(p^*(x)),$$

et la dérivée de  $\Lambda$  est donnée par

$$\Lambda'(p) = \frac{v}{\sigma(\sqrt{1-\rho^2} \cot(\frac{1}{2}\sigma p \sqrt{1-\rho^2}) - \rho)} + \frac{\sigma v p (1-\rho^2) \csc^2(\frac{1}{2}\sigma p \sqrt{1-\rho^2})}{2\sigma(\sqrt{1-\rho^2} \cot(\frac{1}{2}\sigma p \sqrt{1-\rho^2}) - \rho)^2}$$

D'autre part, si on note  $\Sigma_t(x)$ , la volatilité implicite pour une option européenne sur  $S_t$ , issu de  $K e^{-x}$  : c'est à dire que  $\Sigma_t(x)$  est l'unique solution de  $P(t, K e^{-x}, v) = P_{BS}(t, K e^{-x}, K; \Sigma_t(x))$ , où  $P_{BS}(t, s, k, \Sigma) = KN(\frac{-\log(s/k)+t\Sigma/2}{\sqrt{t\Sigma}}) - sN(\frac{-\log(s/k)-t\Sigma/2}{\sqrt{t\Sigma}})$ . Alors on a (cf. [26], Theorem 2.4)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Sigma_t(x) = \frac{|x|}{\sqrt{2\Lambda^*(x)}} \quad (5.5.33)$$

En écrivant  $P(t, s, v)$  en fonction de la volatilité implicite  $\Sigma$ , on obtient

$$P(t, s, v) = P_{BS}(t, K e^{-x}, K; \Sigma_t(\log(\frac{K}{s})))$$

En remarquant que la dépendance de  $P_{BS}(t, K e^{-x}, K; \Sigma_t(\log(\frac{K}{s})))$  se fait uniquement à travers  $\Sigma$  et en utilisant le fait que  $v \mapsto P_{BS}(t, K e^{-x}, K; v)$  est strictement croissante, on déduit que  $p(t, s, v)$  et  $\Sigma_t(\log(\frac{K}{s}))$  ont la même monotonie par rapport à la corrélation. C'est à dire que

$$\text{sign } \dot{P}_\rho(t, s, v) = \text{sign } \frac{\partial \Sigma_t(\log(\frac{K}{s}))}{\partial \rho}$$

Notons que  $\Sigma_t(\log(\frac{K}{s}))$  est bien dérivable par rapport à  $\rho$ . De plus, en utilisant le lemme 5.5.2 ci-dessous, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \Sigma_t(x)}{\partial \rho} = \frac{-|x|}{2\Lambda^*(x)\sqrt{2\Lambda^*(x)}} \frac{\partial \Lambda^*(x)}{\partial \rho} \quad (5.5.34)$$

On considère maintenant la dérivée par rapport à  $\rho$  de la quantité  $\Lambda^*(x)$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ .

Cette dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda^*(x)}{\partial \rho} &= x \frac{\partial p^*(x)}{\partial \rho} - \frac{\partial p^*(x)}{\partial \rho} \Lambda'(p^*(x)) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho}(p^*(x)) \\ &= -\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho}(p^*(x)) \quad (\text{car } \Lambda'(p^*(x)) = x) \\ &= \frac{-v p^*(x) \left( \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} [\cot(\theta^*(x)) - (1-\rho^2)\theta^*(x) \csc^2(\theta^*(x))] + 1 \right)}{2\sigma(\sqrt{1-\rho^2} \cot(\theta^*(x)) - \rho)^2}, \end{aligned}$$

où

$$\theta^*(x) := \frac{1}{2}\sigma p^*(x)\sqrt{1-\rho^2}. \quad (5.5.35)$$

En utilisant le lemme 5.5.3 ci-dessous, qui assure que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} (\cot(\theta^*(x)) - (1-\rho^2)\theta^*(x) \csc^2(\theta^*(x))) + 1 > 0, \quad (5.5.36)$$

on déduit, en appliquant le lemme, que

$$\text{sign} \frac{\partial \Lambda^*(x)}{\partial \rho} = \text{sign} (-vp^*(x))$$

et comme  $\text{sign} p^*(x) \equiv \text{sign} x$ , on déduit que pour  $t$  au voisinage de 0

$$\text{sign} \dot{P}_\rho = \text{sign} \frac{\partial \Sigma_t(x)}{\partial \rho} = \text{sign} \frac{\partial \Lambda^*(x)}{\partial \rho} = \text{sign} \left( \log\left(\frac{K}{s}\right) \right)$$

Plus précisément, la suite de fonctions  $\frac{\partial \Sigma_t(\log(\frac{K}{s}))}{\partial \rho}$ , dont le signe est celui de  $\dot{P}_\rho$ , converge vers une fonction strictement positive pour  $s < K$ , et strictement négative pour  $s > K$ . Ainsi, on obtient le résultat de la proposition.  $\square$

Nous avons utilisé les deux lemmes suivant :

**Lemme 5.5.2.** *Pour tout  $x \neq 0$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \Sigma_t(x)}{\partial \rho} = \frac{-|x|}{2\Lambda^*(x)\sqrt{2\Lambda^*(x)}} \frac{\partial \Lambda^*(x)}{\partial \rho} \quad (5.5.37)$$

**Lemme 5.5.3.** *Pour tout  $\rho \in [-1, 1]$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a*

$$\frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} (\cot(\theta^*(x)) - (1-\rho^2)\theta^*(x) \csc^2(\theta^*(x))) + 1 > 0 \quad (5.5.38)$$

**Preuve du lemme 5.5.2 :** Par définition même de la volatilité implicite, le prix du Put  $P$  est donné par

$$P(t, s, v) = KN \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2}\Sigma_t^2}{\sqrt{t}\Sigma_t} \right) - sN \left( \frac{-\log(s/K) - \frac{t}{2}\Sigma_t^2}{\sqrt{t}\Sigma_t} \right)$$

En dérivant cette expression des deux cotés par rapport à  $\rho$ , on obtient

$$\dot{P}_\rho(t, s, v) = KN' \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2}\Sigma_t^2}{\sqrt{t}\Sigma_t} \right) \sqrt{t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial \rho} (-\log(s/K))$$



---

5.5. MONOTONIE PAR RAPPORT À LA CORRÉLATION

Maintenant, d'après (5.5.33), on sait que  $\lim_{t \rightarrow 0} \Sigma_t(x) = \frac{|x|}{\sqrt{2\Lambda^*(x)}}$ , de plus la fonction  $\rho \mapsto \frac{|x|}{\sqrt{2\Lambda^*(x)}}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ . Pour cela, on va montrer que  $\frac{\partial \Sigma_t}{\partial \rho}$  est bornée, pour  $t$  au voisinage de 0. Ceci revient à montrer que  $\frac{\dot{P}_\rho(t, s, v)}{K \sqrt{t} N' \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2} \Sigma_t^2}{\sqrt{t} \Sigma_t} \right)}$  est bornée.

En écrivant  $P$  sous la forme  $P = \mathbb{E} \left[ (K - s e^{\rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - I_t/2})_+ \right]$ , on peut écrire  $\dot{P}_\rho$  sous la forme

$$\dot{P}_\rho(t, s, v) = \mathbb{E} \left[ \left( - \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 \right) S_t \mathbb{1}_{K \geq S_t} \right]$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, avec  $p > 1$ , on obtient

$$\dot{P}_\rho(t, s, v) \leq \left[ \mathbb{E} \left| -S_t \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \frac{S_t \rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 \right|^p \right]^{1/p} \times [\mathbb{P}(K \geq S_t)]^{\frac{p-1}{p}} \quad (5.5.39)$$

où  $\mathbb{P}(K \geq S_t)$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{P}(K \geq S_t) = \frac{\partial P}{\partial K} = N \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2} \Sigma_t^2}{\sqrt{t} \Sigma_t} \right) + K N' \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2} \Sigma_t^2}{\sqrt{t} \Sigma_t} \right) \sqrt{t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial K}$$

D'autre part, pour tout  $y > 0$ , on a

$$N(-y) \leq \frac{1}{y} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

On en déduit que pour  $s > K$  et pour  $t$  assez petit, on a

$$N \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2} \Sigma_t^2}{\sqrt{t} \Sigma_t} \right) \leq \frac{\sqrt{t} \Sigma_t}{\log(s/K) - \frac{t}{2} \Sigma_t^2} N' \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2} \Sigma_t^2}{\sqrt{t} \Sigma_t} \right)$$

D'où, pour  $s > K$ , il existe une constante  $M > 0$ , telle que pour  $t$  assez petit, on a

$$\mathbb{P}(K \geq S_t) \leq M \sqrt{t} N' \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2} \Sigma_t^2}{\sqrt{t} \Sigma_t} \right) \quad (5.5.40)$$

On en déduit que

$$\frac{\dot{P}_\rho(t, s, v)}{\sqrt{t} N' \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2} \Sigma_t^2}{\sqrt{t} \Sigma_t} \right)} \leq M_2 [\mathbb{E}|Y_t|^p]^{1/p} \times \left[ \sqrt{t} N' \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2} \Sigma_t^2}{\sqrt{t} \Sigma_t} \right) \right]^{-\frac{1}{p}}, \quad (5.5.41)$$

où

$$Y_t = \left( - \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 \right) e^{\rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - I_t/2}$$

Pour simplifier les notations, on pose  $x = \log(s/K)$ . Pour  $t$  petit,  $\frac{x + \frac{t}{2}\Sigma_t}{\sqrt{t}\Sigma_t} \sim \frac{-x}{\sqrt{t}\Sigma_t}$ . On se donne  $p$  sous la forme

$$p = p(t) = \frac{c}{t}. \quad (5.5.42)$$

En particulier, on a

$$\left[ \sqrt{t} N' \left( \frac{-\log(s/K) + \frac{t}{2}\Sigma_t^2}{\sqrt{t}\Sigma_t} \right) \right]^{\frac{-1}{p}} \sim M_3 e^{-\frac{t}{c} \left( \log \sqrt{t} - \frac{x^2}{2t\Sigma_t} \right)} \leq M_4 \quad (5.5.43)$$

Nous allons maintenant montrer que  $[\mathbb{E}|Y_t|^p(t)]^{1/p(t)}$  est bornée pour  $t$  au voisinage de 0. Pour cela, on utilise l'inégalité usuelle,

$$|y| \leq e^y + e^{-y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

On obtient

$$|Y| \leq Y_1(t) + Y_2(t),$$

où

$$Y_1(t) = e^{-\int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2} e^{\rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - I_t/2}$$

et

$$Y_2(t) = e^{\int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2} e^{\rho \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - I_t/2}$$

Maintenant,  $Y_1$  et  $Y_2$  s'écrivent sous la forme

$$Y_i(t) = e^{\alpha_i \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \beta_i \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - \frac{1}{2} I_t}, \quad i = 1, 2.$$

En particulier, on a

$$\mathbb{E} Y_i^p = \mathbb{E} e^{\alpha_i p \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \beta_i p \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2 - \frac{p}{2} I_t} = \mathbb{E} e^{\alpha_i p \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \frac{\beta_i^2 p^2 - p}{2} I_t}$$

En utilisant le fait que  $\int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 = (V_t - v - at + bI_t)/\sigma$ , on obtient, en utilisant les résultats du chapitre 4, que pour  $p$  assez grand, on a

$$\mathbb{E} Y_i^p = e^{-\alpha_i p(v+at)/\sigma} e^{a\varphi(t) + v\psi(t)},$$

où

$$\begin{cases} \psi(t) = \frac{b}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{2\lambda_2^i(p)\sigma^2 - b^2}}{\sigma^2} \tan(g(t, p)), \\ \varphi(t) = \frac{b}{\sigma^2}t + \frac{2}{\sigma^2} (\log \cos g(0, p) - \log \cos g(t, p)), \\ g(t, p) = \frac{\sqrt{2\lambda_2^i(p)\sigma^2 - b^2}}{2}t + \arctan\left(\frac{\lambda_1^i(p)\sigma^2 - b}{\sqrt{2\lambda_2^i(p)\sigma^2 - b^2}}\right). \end{cases}$$

Avec  $\lambda_1^i(p) = \alpha_i p / \sigma$  et  $\lambda_2^i(p) = \frac{\beta_i^2 p^2 - p}{2} + \alpha_i b p / \sigma$ .

On en déduit que

$$\left[ \mathbb{E} e^{p \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \alpha p \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2} \right]^{1/p} = e^{-\alpha_i(v+at)/\sigma} e^{a \frac{\varphi(t)}{p} + v \frac{\psi(t)}{p}},$$

En particulier, pour  $p = p(t) = c/t$ , on a, pour  $t$  assez petit,

$$g(t, p(t)) \sim \frac{c\beta_i\sigma}{2} + \arctan\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)$$

De même, on a

$$a \frac{\varphi(t)}{p(t)} + v \frac{\psi(t)}{p(t)} \sim \frac{v\beta_i c}{\sigma} \tan\left(\frac{c\beta_i\sigma}{2} + \arctan\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)\right)$$

Notons que le coefficient  $c$  dans (5.5.42) est choisit de sorte que  $-\pi/2 < \frac{c\beta_i\sigma}{2} + \arctan\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) < \pi/2$ , pour  $i = 1, 1$ .

On obtient finalement que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \mathbb{E} e^{p \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^1 + \alpha p \int_0^t \sqrt{V_u} dW_u^2} \right]^{1/p} = e^{\frac{v\beta_i c}{\sigma} \tan\left(\frac{c\beta_i\sigma}{2} + \arctan\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)\right)} < +\infty, \quad i = 1, 2.$$

On déduit finalement, en utilisant (5.5.41) et (5.5.43), que  $\frac{\hat{P}_\rho(t, s, v)}{K\sqrt{t} N'\left(\frac{-\log(s/K) + \frac{1}{2}\Sigma_t^2}{\sqrt{t}\Sigma_t}\right)}$  est bornée, pour tout  $s > K$ . Le cas  $s < K$  se traite d'une façon similaire, en utilisant le prix du Call  $\square$

**Preuve du lemme 5.5.3 :** On pose

$$\eta(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} (\cot(\theta^*(x)) - (1-\rho^2)\theta^*(x) \csc^2(\theta^*(x))) + 1.$$

On écrit  $\eta(x) = \varphi(\theta^*(x))$ , où  $\varphi$  est définie par

$$\varphi(\theta) = \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left( \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - (1-\rho^2) \frac{\theta}{\sin^2(\theta)} \right) + 1$$

D'autre part, comme  $x \in \mathbb{R}$ ,  $p^*(x) \in [p_-, p_+]$ , alors

$$\underline{\theta}(\rho) := \frac{1}{2}\sigma\sqrt{1-\rho^2} p_- \leq \theta^*(x) \leq \frac{1}{2}\sigma\sqrt{1-\rho^2} p_+ =: \bar{\theta}(\rho), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il suffit donc de montrer que  $\varphi$  est positive sur  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ .

Notons qu'on peut facilement vérifier que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] \setminus \{0\}$ , sa dérivée est donnée par

$$\varphi'(\theta) = \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{(\rho^2 - 2) \sin(\theta) + 2(1-\rho^2)\theta \cos(\theta)}{\sin^3(\theta)}$$

Une simple étude du signe de la fonction  $\theta \mapsto (\rho^2 - 2) + 2(1-\rho^2) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ , montre que celle-ci atteint son maximum sur  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$  au point 0 et ce maximum est égal à  $(-\rho^2) < 0$ .

On en déduit donc que

$$\rho\varphi'(\theta) \leq 0, \quad \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}].$$

On distingue 2 cas

**Cas  $\rho > 0$  :** Dans ce cas, on a

$$\underline{\theta} = -\pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\theta} = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)$$

D'autre part et d'après ce qui précède, la fonction  $\varphi$  est décroissante sur  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ . En particulier, on a pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) \geq \varphi(\bar{\theta}) &= \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left( \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} - (1-\rho^2) \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right) \left(-1 - \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\right) \right) + 1 \\ &= \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} - \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right) \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable suivant

$$0 \leq y = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \iff \rho = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

On obtient donc

$$\varphi(\theta) \geq \varphi(\bar{\theta}) = \frac{1}{y} \left( \frac{2+y^2}{y} - 2 \arctan y \right) > 0$$

car l'inf de la fonction  $y \mapsto \frac{2+y^2}{y} - 2 \arctan y$  est atteint au point  $y_0 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}$  et est égal à  $\approx 0.78$ .

**Cas  $\rho < 0$  :** Dans ce cas, on a

$$\underline{\theta} = \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right) \quad \text{et} \quad \bar{\theta} = \pi + \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right)$$

La fonction  $\varphi$  est croissante sur  $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ . En particulier, on a pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) \geq \varphi(\underline{\theta}) &= \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left( \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} - (1-\rho^2) \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right) \left( -1 - \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \right) \right) + 1 \\ &= \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} - \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right) \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable suivant

$$0 \leq z = -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \iff \rho = \frac{-1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

On obtient donc

$$\varphi(\theta) \geq \varphi(\underline{\theta}) = \frac{1}{z} \left( \frac{2+z^2}{z} - 2 \arctan z \right) > 0 \quad \square$$

### Comportement de $s_\rho^\pm(\cdot, v)$ en temps long

Dans cette section, on s'intéresse au comportement asymptotique de  $s^\pm$  pour les longues maturités. Au lieu d'étudier le signe de la dérivée du prix du Put, on va étudier le signe de la dérivée de sa volatilité implicite, comme dans la section précédente. Il est connu que pour les longues maturités, la courbe de la volatilité implicite dans un modèle à volatilité stochastique s'aplatit et ne dépend plus du strike. Dans le cadre de modèle de Heston, Forde et al [27] ont montré que la volatilité implicite (sous l'hypothèse  $b - \rho\sigma > 0$ ) s'écrit sous la forme

$$\Sigma_t^2(x) = 8V^*(0) + a_1(x)/t + o(t).$$

où  $V^*$  et  $a$  sont donnée ci-dessous.

Dans cette section, au lieu d'étudier les  $s^\pm$ , on va étudier  $x^\pm$ , définis pour  $t, v > 0$  par

$$x_\rho^+(t, v) = \inf \left\{ x \geq 0 : \dot{P}_\rho(t, K e^x, v) \leq 0 \right\} \quad (5.5.44)$$

et

$$x_\rho^-(t, v) = \sup \left\{ x \leq 0 : \dot{P}_\rho(t, K e^{-x}, v) \leq 0 \right\} \quad (5.5.45)$$

Notons que  $\dot{P}_\rho(t, s, v) > 0$  pour tout  $s \in [K e^{-x_\rho^-}, K e^{x_\rho^+}]$ . On a le résultat suivant

**Proposition 5.5.3.** *Pour tout  $\rho \in ]-1, 1[$  tel que  $b - \rho\sigma > 0$  et pour tout  $v > 0$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_\rho^\pm(t, v) = \pm\infty \quad (5.5.46)$$

**Preuve :**

On utilise les notations de Forde-Jacquier-Mijatovic (cf. [27]). Sous l'hypothèse  $b - \rho\sigma > 0$ , on a, pour tout  $p \in ]p_-, p_+[$ ,

$$V(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \mathbb{E} [\exp(p(X_t - x_0))] = \frac{a}{\sigma^2} (b - \rho\sigma p - d(-ip)),$$

avec

$$d(-ip) = \sqrt{(b - \rho\sigma p)^2 + \sigma^2(p - p^2)},$$

où

$$p_\pm := \left( -2b\rho + \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4b^2 - 4b\sigma\rho} \right)$$

On considère la fonction  $p^* : \mathbb{R} \rightarrow ]p_-, p_+[$  définie par

$$p^*(x) := \frac{\sigma - 2b\rho + (a\rho + x\sigma) \left( \frac{\sigma^2 + 4b^2 - 4b\rho\sigma}{x^2\sigma^2 + 2xa\rho\sigma + a^2} \right)^{1/2}}{2\sigma(1 - \rho^2)}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Pour  $t$  assez grand, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , (cf. [27])

$$\frac{1}{S_0} \mathbb{E}(S_t - S_0 e^{-x})_+ = 1 + \frac{A(0)}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(1 - p^*(0))x - V^*(0)t) (1 + O(1/t)),$$

où  $V^*$  est la transformée de Legendre de  $V$ , i.e  $V^*(x) := \sup \{px - V(p), p \in ]p_-, p_+[ \}$  et  $A$  est la fonction définie au voisinage de 0 par

$$A(x) = \frac{-1}{\sqrt{V''(p^*(x))}} \frac{U(p^*(x))}{p^*(x)(1 - p^*(x))},$$

avec

$$U(p) := \left( \frac{2d(-ip)}{b - \rho\sigma p + d(-ip)} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{v}{a}V(p)\right)$$

De même, la volatilité implicite s'écrit comme (cf. [27], Theorem 3.2)

$$\Sigma_t^2(x) = 8V^*(0) + a_1(x)/t + o(t), \quad (5.5.47)$$

où

$$a_1(x) = -8 \log\left(-A(0)\sqrt{2V^*(0)}\right) + 4(2p^*(0) - 1)x$$

En particulier, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Sigma_t^2(x) = 8V^*(0).$$

Maintenant, en écrivant  $P(t, s, v)$  en fonction de la volatilité implicite  $\Sigma$ , on obtient

$$P(t, s, v) = P_{BS}(t, K e^{-x}, K; \Sigma_t(\log(\frac{K}{s})))$$

En remarquant que la dépendance de  $P_{BS}(t, K e^{-x}, K; \Sigma_t(\log(\frac{K}{s})))$  se fait uniquement à travers  $\Sigma$  et en utilisant le fait que  $\nu \mapsto P_{BS}(t, K e^{-x}, K; \nu)$  est strictement croissante, on déduit que  $p(t, s, v)$  et  $\Sigma_t(\log(\frac{K}{s}))$  ont la même monotonie par rapport à la corrélation. C'est à dire que

$$\text{sign } \dot{P}_\rho(t, s, v) = \text{sign } \frac{\partial \Sigma_t(\log(\frac{K}{s}))}{\partial \rho}$$

D'autre part, en utilisant (5.5.47), on montre, d'une façon similaire que pour la démonstration du lemme 5.5.2, que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial \Sigma_t(x)}{\partial \rho} = 8 \frac{\partial V^*(0)}{\partial \rho}. \quad (5.5.48)$$

Comme  $V^*(x) = xp^*(x) - V(p^*(x))$ , alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*(0)}{\partial \rho} &= -\frac{\partial V}{\partial \rho}(p^*(0)) + (x - V'(p^*(0))) \frac{\partial p^*(0)}{\partial \rho} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}(p^*(0)) \\ &= -\frac{a}{\sigma^2} \left( -\sigma p^*(0) + \frac{\sigma p^*(0)(b - \rho \sigma p^*(0))}{\sqrt{(b - \rho \sigma p^*(0))^2 + \sigma^2(p^*(0) - p^*(0)^2)}} \right) \\ &= \frac{-\frac{a}{2\rho} p^*(0)(1 - 2p^*(0))}{\sqrt{(b - \rho \sigma p^*(0))^2 + \sigma^2(p^*(0) - p^*(0)^2)}} \mathbf{1}_{\rho \neq 0} \end{aligned}$$

Où dans la deuxième égalité, on a utilisé le fait que  $V'(p^*(0)) = 0$ , ce qui implique que  $-\rho\sigma + \frac{\rho\sigma(b - \rho\sigma p^*(0)) + \sigma^2(p^*(0) - 1/2)}{\sqrt{(b - \rho\sigma p^*(0))^2 + \sigma^2(p^*(0) - p^*(0)^2)}} = 0$ . Dans le cas où  $\rho = 0$ , on a

$$\left. \frac{\partial V^*(0)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = \frac{-a}{2\sigma} \left( -1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + \sigma^2/4}} \right) (> 0).$$

Le lemme 5.5.4 ci-dessous nous assure que la fonction  $\rho \in ]-1, 1[ \mapsto \varphi(\rho) := \frac{\sigma - 2b\rho + \rho\sqrt{\sigma^2 + 4b^2 - 4b\rho\sigma}}{2\sigma(1 - \rho^2)}$  est strictement croissante. Notons que  $\varphi(\rho) \equiv p^*(0)$ .

Maintenant, comme  $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ , on déduit que pour tout  $\rho \neq 0$ ,  $\varphi(\rho) - 1/2$  a le même signe que  $\rho$ . Ce qui veut dire que  $\frac{\varphi(\rho) - 1/2}{\rho} > 0$ . Par conséquent, on a

$$\frac{\partial V^*(0)}{\partial \rho} > 0, \quad \forall \rho \in [-1, 1].$$

D'où, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial \Sigma_t(x)}{\partial \rho} > 0.$$

Ce qui implique que pour  $t$  grand,  $\dot{P}_\rho(t, s, v) > 0$ . On déduit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_\rho^\pm(t, v) = \pm\infty$$

. □

Nous avons utilisé le lemme suivant

**Lemme 5.5.4.** *La fonction  $\rho \in ]-1, 1[ \mapsto \varphi(\rho) := \frac{\sigma - 2b\rho + \rho\sqrt{\sigma^2 + 4b^2 - 4b\rho\sigma}}{2\sigma(1 - \rho^2)}$  est strictement croissante*



**Preuve:**

La fonction  $\varphi$  est définie, continue sur  $] - 1, 1[$ , par

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\rho) = \frac{\sigma - 2b\rho + \rho\sqrt{\sigma^2 + 4b^2 - 4b\rho\sigma}}{2\sigma(1 - \rho^2)}, \quad \text{si } \rho \in ] - 1, 1[, \\ \varphi(-1) = \frac{\sigma + 4b}{4(\sigma + 2b)}, \\ \varphi(1) = \frac{4b - \sigma}{4(2b - \sigma)}. \end{array} \right.$$

On vérifie aussi qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - 1, 1[$ , et sa dérivée est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'(\rho) = \frac{-2b + \sqrt{\sigma^2 + 4b^2 - 4b\rho\sigma} - \frac{2b\rho\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4b^2 - 4b\rho\sigma}}}{2\sigma(1 - \rho^2)} + \frac{2\rho}{1 - \rho^2} p^*(0), \quad \text{si } \rho \in ] - 1, 1[, \\ \varphi'(-1) = \frac{2b^2\sigma^2}{(\sigma + 2b)^3} + \frac{\sigma^2}{2(\sigma + 2b)}, \\ \varphi'(1) = \left( \frac{2b^2\sigma^2}{(2b - \sigma)^3} + \frac{\sigma^2}{2(2b - \sigma)} \right). \end{array} \right.$$

Montrons que  $\varphi'(\rho) > 0$ , pour tout  $\rho \in ] - 1, 1[$ , pour cela il suffit de remarque  $\varphi'(\rho)$  a le même signe que celui de

$$h(\rho) = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}\sigma - 2b + \sqrt{\sigma^2 + 4b^2 - 4b\rho\sigma} - \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} \frac{2b\rho\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4b^2 - 4b\rho\sigma}}$$

On remarque que  $h(\rho)$  peut s'écrire sous la forme

$$h(\rho) = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma} - \frac{\gamma/2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma}},$$

où

$$\alpha = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}\sigma - 2b, \quad \beta = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}\sigma \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} 4b\rho\sigma.$$

## CHAPITRE 5. MONOTONIE PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES DE LA VOLATILITÉ

---

On en déduit donc que  $h(\rho)$  a le même signe que celui de la quantité

$$\lambda((\alpha, \beta, \gamma) \in \Gamma) = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma/2,$$

où  $\Gamma = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma \geq 0\}$ . Notons que si  $\alpha \geq 0$  et  $\gamma \leq 0$ , alors  $h(\rho) \geq 0$ . Pour étudier le signe dans le cas général, on considère la dérivée de  $\lambda$  par rapport à  $\gamma$ . Elle est donnée par

$$\partial_\gamma \lambda(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma}}{2}$$

On distingue 4 cas

**Cas  $\alpha \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  :** Sur  $\Gamma \cap \{\alpha \geq 0, \gamma \geq 0\}$ , on a

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma) = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma/2 \geq 0$$

**Cas  $\alpha \geq 0$  et  $\gamma \leq 0$  :** Sur  $\Gamma \cap \{\alpha \geq 0, \gamma \leq 0\}$ , on a

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma) = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma} + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma - \gamma/2 \geq 0$$

**Cas  $\alpha \leq 0$  et  $\gamma \leq 0$  :** Dans ce cas, le minimum de  $\lambda$  sur  $\Gamma \cap \{\alpha \leq 0, \gamma \leq 0\}$  est atteint au point  $\gamma = -\beta^2$  et ce minimum est égal à  $\beta^2/2 \geq 0$

**Cas  $\alpha \leq 0$  et  $\gamma \geq 0$  :** Dans ce cas, pour tout  $\beta$ , la fonction  $\gamma \mapsto \lambda(\alpha, \beta, \gamma)$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ . En particulier

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) \geq \lambda(\alpha, \beta, 0) = \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$$

Ainsi, dans tous les cas, on a

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma) > 0, \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \Gamma.$$

On en déduit que,

$$\varphi(\rho) > 0, \quad \forall \rho \in [-1, 1]. \quad \square \tag{5.5.49}$$

# Bibliographie

- [1] Alós, E. and Ewald, C.-O. Malliavin differentiability of the Heston Volatility and applications to option pricing, *Adv. in Appl. Probab.*, vol.40, no.1, pp.144-162, 2008.
- [2] Benhamou, E., Gobet, E. and Miri, M. Times dependant Heston model, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, Vol.1, pp.289-325, 2010
- [3] Berestycki H., Busca, J. et Florent, I. Asymptotics and calibration of local volatility models. *Quantitative Finance* Volume 2, 61-69, 2002.
- [4] Berestycki H., Busca, J. et Florent, I. Computing the Implied Volatility in Stochastic Volatility models. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol LVII 1352-1373, 2004.
- [5] Bergomi, L. Smile dynamics. *Risk*, page 117-123 (September 2004)
- [6] Bergomi, L. Smile dynamics II. *Risk*, page 67-73 (October 2005)
- [7] Bergomi, L. Smile dynamics III. *Risk*, page 90-96 (October 2008)
- [8] Bergomi, L. Smile dynamics IV. *Risk magazine* (Dec 2009)
- [9] Brenner, M. and Galai, D. New Financial Instruments for Hedgning Changes in Volatility, *Financial Analysts Journal* 45, 61–66 (1989)
- [10] Brenner, M. and Galai, D. Hedging Volatility in Foreign Currencies, *Journal of Derivatives* 1, 53–59 (1993)
- [11] Bühler, B. Consistent Variance Curve Models, *Finance and Stochastics*, pp. 178–203 (2006)

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [12] Carr, P. and Madan, D. Towards a theory of volatility trading. In Robert Jarrow (Ed.), Volatility estimation techniques for pricing derivatives, London, *Risk Books*, pp. 417-427 (1998)
- [13] Cont, R. Cont, Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance* 1 , pp. 223–236 2001
- [14] Cox, J, Ingersoll, J, and Ross, J. A Theory of the Term structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53 :385–407, 1985
- [15] De Marco, S. On Probability Distributions of Diffusions and Financial Models with non-globally smooth coefficients, PhD dissertation, Université Paris Est et Scuola Normale Superiore di Pisa, 2010.
- [16] De Marco, S. Smoothness and Asymptotic Estimates of densities for SDEs with locally smooth coefficients and applications to square root-type diffusions. Forthcoming in *Annals of Applied Probability*, 2009.
- [17] Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M and Zou, J. A guide to volatility and variance swaps, *Journal of Derivatives* 6, 9-32 (1999)
- [18] Derman, E. and Kani, I. Stochastic implied trees : Arbitrage pricing with stochastic term and strike structure of volatility, *Int J. Theor Appl Finance*, 1 pp. 61–110 (1998)
- [19] Derman, E. and Kani, I. Riding on a smile, *Risk*, Feb. pp. 32–39 (1994)
- [20] Dragulescu, A. A. and V. M. Yakovenko. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility. *Quantitative Finance*, 2 :443–453, 2002.
- [21] Dufresne, D. The integrated square-root process. Research Paper no. 90, Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne, 2001.
- [22] Dupire, B. Pricing with a smile, *Risk*, Jan. pp. 18–20 (1994)

- 
- [23] Dupire, B. Pricing and hedging with smiles, in Mathematics of Derivative Securities, M.A. H. Dempster and S. R. Pliska, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 103–111 (1997)
- [24] Durrleman, V. From implied to spot volatilities. *Technical report, Stanford University*, 2005.
- [25] Ekström, E. and Tysk, J. The Black–Scholes equation in stochastic volatility models. *J. Math. Anal. Appl.* 368, 498-507. (2010)
- [26] Forde, M. and Jacquier, A. Small-time asymptotics for implied volatility under the Heston model, with A. Jacquier, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Volume 12, issue 6, pp. 861-876, (2009)
- [27] Forde, F, Jacquier, A, and Mijatovic, A. Asymptotic formulae for implied volatility under the heston model. Forthcoming in Proceedings of the Royal Society A, 2009.
- [28] Fouque, J.P, Papanicalaou, G. et Sircar, R. Derivatives in financial Markets with stochastic volatility. Cambridge University Press, 2000.
- [29] Fouque, J.-P. et Han, C.-H. Variance Reduction for Monte Carlo Methods to Evaluate Option Prices under Multi-factor Stochastic Volatility Models, *Quantitative Finance* 4(5), October 2004 (597-606).
- [30] Friz, P, Gerhold, S., Gulisashvili, A. and Sturm, S. On refined volatility smile expansion in the Heston model. To appear in *Quantitative Finance*, 2010.
- [31] Gatheral, J. The volatility surface : A practitioner’s guide. *Wiley Finance*, 2006.
- [32] Gatheral, J and Jacquier, A. Convergence of heston to SVI. Working Paper. Available at SSRN : <http://ssrn.com/abstract=1555251>, 2010
- [33] Glasserman, P., Kim, K.K., Gamma expansion of the Heston stochastic volatility. Forthcoming in *Finance and Stochastics*, 2009

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [34] Gulisashvili, A. and Stein, E. M, Asymptotic behavior of the stock price distribution density and implied volatility in stochastic volatility models, *Applied Mathematics and Optimization*, DOI : 10.1007/ s00245-009-9085-x, also available at [arxiv.org/abs/0906.0392](http://arxiv.org/abs/0906.0392)
- [35] Hagan, P., Kumar, D., Lesniewski, A. and Woodward, D. : Managing smile risk. *Wilmott magazine*, 84–108 (sept 2002)
- [36] Henry-Labord'ere, P. A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models, working paper, 2005
- [37] Henry-Labord'ere, P.(2007), Combining the SABR and LMM models, *Risk*.
- [38] Heston, S. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies* (1993)
- [39] Ikeda, N, and Watanabe, S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. *North-Holland/Kodansha*, 1989.
- [40] Jourdain, B. Loss of martingality in asset price models with lognormal stochastic volatility, *preprint* (2004).
- [41] Kurpiel, A. , American options exercise policy in a stochastic volatility model, Université Montesquieu-Bordeaux IV, GRAPE, *Working Paper* (1999)
- [42] Lamberton, D and Lapeyre, B. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. *Chapman & Hall*, 1997.
- [43] Laurence, P. Implied Volatility, Fundamental solutions, asymptotic analysis and symmetry methods, presentation at Linz, Ricam kick-off Workshop, 2008
- [44] Lee, R. W. The moment formula for implied volatility at extreme strikes. *Mathematical Finance*, 14 :469–480, 2004.

- [45] Lewis, A.L. Option valuation under stochastic volatility with Mathematica code. Finance Press, Newport Beach, California, 2000.
- [46] Melino, A. and Turnbull, S. M. Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility. *Journal of Econometrics*, 45, pp. 239-265. 1990
- [47] Mijatović, A and Urusov, M. On the martingale property of certain local martingales. Accepted in *Probability Theory and Related Fields*, 2010
- [48] Novikov, A. A. A certain identity for stochastic integrals. *Theory Probab. Appl.*, 17 :761–765, 1972.
- [49] Ould-Aly, S.M. Forward variance dynamics : Bergomi’s model revisited (2011), Preprint.
- [50] Perello, J., Sircar, R. et Masoliver, J. Option pricing under stochastic volatility : the exponential Ornstein-Uhlenbeck model. *J. Stat. Mech.* P06010, (2008)
- [51] Romano, M. and Touzi, N. Contingent claims and market completeness in a stochastic volatility model, *Mathematical Finance* 7, 399–412. (1997)
- [52] Scott, L. Option Pricing when the Variance changes randomly : Theory, Estimation, and an Application, *J. Financial and Quantitative Analysis* 22 (1987) 419–438.
- [53] Touzi, N. American Options Exercice Boundary When the Volatility Changes Randomly, *Applied Mathematics and Optimization*, 39, 411-422 (1999)