



HAL
open science

Dynamique d'ions multichargés dans un piège électrostatique

Alexandre Vallette

► **To cite this version:**

Alexandre Vallette. Dynamique d'ions multichargés dans un piège électrostatique. Physique [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT: . tel-00605746v1

HAL Id: tel-00605746

<https://theses.hal.science/tel-00605746v1>

Submitted on 4 Jul 2011 (v1), last revised 27 Jul 2011 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de doctorat
présentée par

Alexandre Vallette

pour obtenir le grade de docteur de
l'Université Pierre et Marie Curie.

Sujet de la thèse:

Dynamique d'ions multichargés dans un piège électrostatique

Soutenue le 22 juin 2011 devant le jury composé de:

M. Gilles Ban,	Rapporteur
M. Samuel Guibal,	Examineur
M. Paul Indelicato,	Directeur de thèse
Mlle Emily Lamour,	Examinatrice
M. David Lunney,	Rapporteur
M. Francis Penent,	Président du jury

Table des matières

1 Piéger des particules chargées	1
1.1 Introduction aux pièges de particules chargées	1
1.1.1 Histoire	1
1.1.2 Découvertes	2
1.1.3 Futur et applications	2
1.2 Conception du piège EIBT	2
1.2.1 Barrières et lentilles électrostatiques	2
1.2.2 Méthode des matrices	3
1.2.3 Modélisation numérique	4
1.2.4 Théorème de Earnshaw	5
1.3 Spécificité du piège électrostatique de type EIBT	5
1.3.1 Avantages et inconvénients	5
1.3.2 Premières applications	6
1.3.3 Première singularité : la synchronisation	7
1.3.4 Autres pièges électrostatiques	7
1.4 Réalisation pratique	10
1.4.1 Source d'ions multichargés	10
1.4.2 Ligne du faisceau	12
1.4.3 Piège et système de mesure	13
1.5 Objectifs scientifiques	13
1.6 Conclusion	13
2 Potentiel analytique par transformation conforme	15
2.1 Introduction et motivations	15
2.1.1 Le piège de Paul comme ligne directrice	15
2.1.2 Limites du numérique	15
2.1.3 Motivations	16
2.2 Calcul du potentiel électrostatique	16
2.2.1 Méthodes existantes	16
2.2.2 La méthode de Bertram	17
2.2.3 Généralisation à N électrodes	20
2.2.4 Résumé	21
2.3 Généralisation de la méthode à tout polygone	21
2.3.1 Idée générale	21
2.3.2 La transformation de Schwarz-Christoffel	23
2.3.3 Cas analytique	24
2.3.4 Cas non-analytique	28
2.3.5 Performances	29
2.4 Limites et résumé de la méthode	31
2.4.1 Cas d'application	31
2.4.2 Conclusion	32

TABLE DES MATIÈRES

3	Dynamique linéaire dans le piège	33
3.1	Introduction	33
3.1.1	Importance du mouvement radial	33
3.1.2	L'équation de Mathieu pour le piège de Paul	33
3.2	Théorie de Floquet et stabilité	35
3.2.1	L'équation de Hill de l'EIBT	35
3.2.2	Systèmes linéaires à coefficients périodiques	36
3.2.3	Théorie de Floquet	37
3.2.4	Comparaison expérimentale	38
3.2.5	Influence de la charge d'espace et de la friction	43
3.3	Résonance paramétrique	45
3.3.1	Observation expérimentale	45
3.3.2	Applications de la résonance paramétrique	45
3.4	Etude du mouvement radial	46
3.4.1	Spectre radial et paramètre de stabilité β	46
3.4.2	Oscillations bétatron	47
3.4.3	Observation expérimentale	47
3.5	Synchronisation naturelle	49
3.5.1	Modèles existants	49
3.5.2	Données expérimentales	50
3.5.3	Equation de Hill de la synchronisation	51
3.5.4	Résonances synchrones-radiales	52
3.5.5	Analyse des expériences du Max-Planck Institute	53
3.6	Conclusion	58
4	Dynamique non linéaire dans le piège	59
4.1	Résonances non linéaires dans le système autonome	60
4.1.1	Théorie	60
4.1.2	Apparition de nouvelles fréquences	60
4.1.3	Effet stabilisant des résonances non linéaires	63
4.2	Bifurcation vers le chaos	64
4.2.1	Bifurcation par doublement de période	64
4.2.2	Chaos et fractales dans l'EIBT	65
4.3	Synchronisation forcée	69
4.3.1	Influence de l'excitation sur les sections de Poincaré	69
4.3.2	Influence de la phase	69
4.3.3	Résonances anharmoniques	72
5	Applications et perspectives	77
5.1	Physique atomique	77
5.1.1	Mesure de sections efficaces	77
5.1.2	Durée de vie d'états métastables	78
5.1.3	Optimisation des paramètres de piégeage	79
5.1.4	Astrophysique de laboratoire	80
5.2	Refroidissement	80
5.2.1	Refroidissement résistif	81

TABLE DES MATIÈRES

5.2.2	Refroidissement par rétroaction	82
5.2.3	Vers une nouvelle technique de refroidissement	82
5.2.4	Compression radiale par “rotating wall”	84
5.3	Physique théorique	84
5.3.1	Contrôle du chaos	84
5.3.2	Mécanique quantique dans le piège	85
5.4	Spectroscopie de masse	87
5.4.1	Comparaison avec les solutions actuelles	87
5.4.2	Améliorations possibles	90
5.4.3	Application en médecine	90
5.5	Conclusion	90

Remerciements

En amont de cette thèse il y a une passion pour la physique que certains professeurs ont sut faire naître : Frédérique Massias, Mme Lemarque, Joël Bailli, M. El-Mamlouk, Mme Piétri. Ces professeurs restent souvent dans l'ombre et leur ferveur en est d'autant plus admirable.

La satisfaction personnelle qui émane de se travail vient surtout du fait qu'il contient les principaux éléments d'une démarche scientifique et cet démarche a été personnelle. Ceci n'aurait pas été possible sans la confiance que m'a témoigné mon directeur de thèse, Paul Indelicato, qui m'a laissé une grande latitude tout étant toujours disponible dès qu'un problème se présentait.

Je remercie également Eric-Olivier Le Bigot qui m'a énormément appris particulièrement en programmation et qui a consacré du temps à m'aider sur certains problèmes mathématiques et à donner son avis sur mes présentations.

Dominique Delande a relu mon manuscrit en détail, a repris des points d'expression et m'a éclairé sur les termes et les concepts de la théorie du chaos. Je suis honoré qu'il ait pris cette peine.

Merci à Marie-Anne Bouchiat de son soutien et de ses conseils.

Je remercie l'atelier d'électronique (Jean-Pierre Okpiz, Brigitte Delamour et Mohammed Boujrad), l'atelier de mécanique (Jean-Michel Isac, Pascal Travers, Gaël Coupin et Arnaud Leclercq), Serge Bégon du service informatique Monique Granon et Laetitia Morel de l'administration pour leur aide.

Merci aux membre de mon jury pour leur disponibilité et leurs remarques.

Je remercie les membres du laboratoire avec lesquels j'ai passé de bons moments de camaraderie : Jean-Michel Isac et l'équipe de la mécanique, Stéphane Boucard, Rym Bouchendira, Antoine Canaguier-Durant et Eric Olivier Le Bigot.

Enfin, merci à mes parents et à mon entourage (Malvika, Axel, Cédric, Guillaume, Antoine et Perrine, Alexandre et tous mes amis) qui m'ont soutenu pendant ces trois années.

Résumé

Cette thèse est dédiée à l'étude de la dynamique de particules chargées dans un piège électrostatique de type EIBT (Electrostatic Ion Beam Trap). S'inspirant du Fabry-Perrot, ce piège a été conçu par l'équipe de D. Zajfman à l'Institut Weizmann. Le principe est simple : deux barrières de potentiel, formant des miroirs électrostatiques, confinent les particules selon une direction longitudinale. Le confinement radial est assuré par deux lentilles de Einzel. L'injection des particules se fait lorsqu'une moitié du piège est mise à la masse pendant un court instant. Le paquet d'ions effectue ensuite des aller-retours pendant toute la durée du piégeage qui dépend principalement du vide dans l'enceinte.

Depuis son invention, l'EIBT a permis un grand nombre d'expériences scientifiques. Nous pouvons citer la mesure de photo-dissociation moléculaire, la spectroscopie de masse, la mesure de sections efficaces et l'étude des états vibrationnels de molécules. Un phénomène tout à fait inattendu a donné suite à quelques publications de premier plan. En effet, les chercheurs de l'Institut Weizmann se sont rendu compte que pour certaines valeurs des potentiels, les ions, au lieu de se repousser, se regroupent en paquets. Ce phénomène a été baptisé synchronisation.

Les avantages de l'EIBT, sont multiples : il est peu cher, il est peu encombrant, il peut être refroidi à des températures cryogéniques, il est simple à mettre en œuvre, les ions se déplacent selon une direction bien déterminée, il possède une large zone dépourvue de champ, il n'y a aucun champ magnétique et il n'y a pas de borne supérieure à la masse des particules piégées. Le principal inconvénient de ce piège est le grand nombre de potentiels qu'il faut régler pour obtenir un piégeage stable. L'absence de modélisation précise de son fonctionnement oblige les expérimentateurs à utiliser des méthodes d'essai et d'erreur pour trouver des paramètres de fonctionnement satisfaisants.

Le travail effectué dans cette thèse peut se diviser en trois parties.

Dans un premier temps, j'ai développé une méthode permettant d'obtenir le potentiel analytique à l'intérieur de l'EIBT. Cette méthode, peut-être appliquée à tout assemblage d'électrodes creuses à symétrie cylindrique. Elle s'inspire d'une ancienne méthode présentée par Bertram permettant de calculer le potentiel créé par des électrodes ayant toutes le même rayon. Afin de pouvoir appliquer cette méthode à un assemblage d'électrodes de dimensions variées, j'ai utilisé une transformation conforme qui permet de passer d'une géométrie quelconque à une géométrie adaptée à la méthode de Bertram. Cette technique, appliquée à l'EIBT, donne une formule analytique dépendant des cinq valeurs des potentiels à appliquer aux électrodes.

Dans un deuxième temps, j'ai utilisé ce potentiel analytique pour écrire les équations de la dynamique des particules dans le piège. En se limitant aux termes linéaires, il est possible de montrer que la stabilité du mouvement est régie par une équation de Hill. Cette équation, appartient à la même famille que l'équation de Matthieu, ce qui démontre qu'il existe un parallèle entre l'EIBT et le piège de Paul. L'interprétation physique de cette parenté peut être énoncée de la manière suivante : dans le référentiel des particules oscillant entre les deux miroirs, le

TABLE DES MATIÈRES

potentiel selon l'axe radial varie périodiquement et, pour certaines valeurs des paramètres de piégeage, ce potentiel oscillant a un effet moyen confinant. Dans le piège de Paul, on applique une tension périodique aux électrodes pour obtenir un potentiel effectif confinant. Dans l'EIBT, c'est le mouvement longitudinal des ions qui joue le rôle de fréquence d'excitation. En utilisant la théorie de Floquet, il est possible de prédire la stabilité des trajectoires dans l'EIBT, de tracer des cartes de stabilité (équivalentes au diagramme d'Ince-Strutt) très commodes pour les utilisateurs du piège et de comprendre les modes du mouvement radial. Tous ces résultats ont pu être vérifiés expérimentalement avec des ions Ne^{5+} produits par la Source d'Ions Multichargés de Paris (SIMPA).

Dans une dernière étape, j'ai pris en compte les non-linéarités du piège ce qui a permis d'expliquer des oscillations gênantes pour la détection des ions ainsi que de montrer que, dans certains régimes, le mouvement des ions dans l'EIBT est chaotique. Une modélisation de la synchronisation montre qu'une excitation périodique sur une électrode permet d'induire une synchronisation forcée où les particules se regroupent en paquets au lieu de se disperser par répulsion coulombienne.

Les applications de ce travail sont multiples. La méthode de détermination du potentiel peut être appliquée aux autres pièges électrostatique ayant une symétrie cylindrique, mais aussi aux assemblages d'électrodes utilisées pour manipuler les faisceaux de particules chargées (lentilles, déflecteurs, ralentisseurs etc). La carte de stabilité de ce type de piège permet de trouver rapidement les paramètres optimaux de piégeage ce qui représente un gain de temps non négligeable pour les expérimentateurs. En outre, la stabilité ne dépendant pas de la masse des particules piégées, les résonances paramétriques observées expérimentalement dans le piège en font un spectromètre de masse nouvelle génération ayant une gamme de masse infinie. D'autre part, la mise en évidence des modes du mouvement radial nous a permis de proposer deux techniques de refroidissement à l'intérieur de l'EIBT, ce qui pourrait jouer un rôle important dans l'expérience "Gbar" (collaboration internationale comprenant, entre autres, le CEA, le CERN et le LKB) visant à tester le principe d'équivalence d'Einstein sur de l'anti-hydrogène refroidi. Finalement, la compréhension des paramètres de contrôle de la stabilité et de la synchronisation dans le piège, va permettre de mener des expériences de physique atomique, dont la mesure de durée de vie d'états métastables des ions multichargés produits par SIMPA. Ces mesures, ont pour objectif de tester l'électrodynamique quantique relativiste.



Piéger des particules chargées

1.1 Introduction aux pièges de particules chargées

1.1.1 Histoire

La *physique* des particules chargées consiste à étudier le mouvement de particules suspendues dans le vide par des champs électromagnétiques. L'utilisation de l'électricité et du magnétisme pour confiner des particules atomiques et subatomiques, plutôt que des collisions avec des parois matérielles, permet de remplir deux objectifs fondamentaux en science moderne. Premièrement l'isolation thermique qui permet de piéger des particules ayant des température extrêmement basses (nK) ou extrêmement hautes (10^6 K). Deuxièmement, la possibilité de maintenir des objets exotiques tels que les ions multichargés ou l'anti-matière qui disparaîtraient au premier contact avec la matière usuelle.

Traditionnellement, on distingue le *confinement* des particules chargées du *piégeage*. Le premier terme se référant plutôt à une physique impliquant de hautes énergies où l'on cherche à confiner des plasmas à très hautes température pour étudier des réactions thermo nucléaires (ITER) ou des particules ayant une très grande énergie cinétique qui tournent dans des anneaux de stockage pour réaliser des collisions (CERN). Le second terme, piégeage, est plutôt employé pour l'autre côté de l'échelle, celui des basses énergies où l'on cherche à isoler peu de particules chargées dans le vide, proche du zéro absolu. Comme nous le verrons, bien qu'elle ait des répercussions dans la compréhension du confinement, cette étude se situe à la frontière du piégeage.

C'est dans les années cinquante que Wolfgang Paul mit au point le piège quadripolaire [1], auquel nous ferons désormais référence sous le nom de piège de Paul. Il obtint le prix Nobel en 1989 pour cette découverte, prix Nobel partagé avec HG Dehmelt, inventeur du piège de Penning. Les deux applications principales sont la mesure des masses (spectroscopie de masse) et la mesure des grandeurs fondamentales dans les atomes (niveaux d'énergie, facteur de Landé, moments magnétiques nucléaires etc.) avec la spectroscopie atomique.

CHAPITRE 1. PIÉGER DES PARTICULES CHARGÉES

1.1.2 Découvertes

Les implications de ces découvertes dans les deux branches sont gigantesques. D'un côté, la spectroscopie de masse, a permis de distinguer les particules, de tester les théories de la science moderne comme la relativité (qui prédit des écarts de masse infimes entre le noyaux et ses constituants pris séparément par la formule célèbre $E = mc^2$ [2]), de détecter les différents constituants des molécules, sonnant une nouvelle ère dans le domaine de la biologie et de la médecine. De l'autre côté, la spectroscopie atomique, a permis l'essor de la mécanique quantique et de toutes les technologies qui y sont maintenant associées.

1.1.3 Futur et applications

Bien que la physique des particules chargées dans un champ soit étudiée depuis de nombreuses années, elle représente encore un domaine actif de la recherche. Elle concerne aussi bien des projets internationaux de très grande envergure (ITER, CERN etc.) que des pièges de taille plus modeste comme celui qui va nous occuper. Les problèmes que nous allons traiter, les méthodes que nous allons mettre au point, parce qu'ils s'inscrivent dans ce cadre, pourraient avoir des applications plus larges qu'il n'y paraîtrait au premier abord.

1.2 Conception du piège EIBT

1.2.1 Barrières et lentilles électrostatiques

Cette thèse est dédiée à l'étude du piège électrostatique baptisé EIBT pour Electrostatic Ion Beam Trap. S'inspirant du Fabry-Perrot, ce piège a été conçu par l'équipe de D. Zajfman au Weizmann Institut [3, 4, 5]. Le principe est simple, deux barrières de potentiel, formant des miroirs électrostatiques, confinent les particules selon une direction longitudinale. Le confinement radial est réalisé par deux lentilles de Einzel. Ces dernières sont constituées de trois cylindres creux, les deux extérieurs étant à la masse et celui du centre a un potentiel positif.

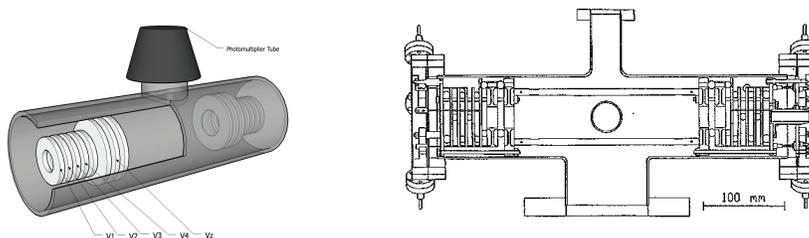


FIGURE 1.1 – Plan d'ensemble du piège EIBT : de chaque côté un empilement d'électrodes (vues de profil) et au centre une large zone sans champ.

1.2. CONCEPTION DU PIÈGE EIBT

Les particules chargées sont produites à l'extérieur du piège et accélérées par une différence de potentiel électrique. Pendant un court instant, on abaisse le potentiel des électrodes d'entrée, laissant les particules pénétrer dans le piège. Ces dernières rebondissent contre le miroir de sortie et, avant qu'elles n'aient eu le temps de ressortir, on remonte les potentiels d'entrée. Les ions effectuent ainsi des aller-retour pendant toute la durée du piégeage qui dépend principalement du vide dans l'enceinte. Sur la Fig. 1.1 on peut voir les différentes électrodes présentes à chaque extrémités : trois d'entre elles représentent la lentille et les autres le miroir électrostatique. Le détail du câblage est donnée par la Fig. 1.2.

1.2.2 Méthode des matrices

La juxtaposition de deux miroirs et de deux lentilles n'est pas une condition suffisante pour obtenir le confinement de particules chargées. Il est nécessaire que la distance focale des lentilles soit réglée de manière à ce que le point focal (le point où les ions convergent sur l'axe) et le point de rebroussement du miroir soient confondus. Une méthode issue de l'optique paraxiale consiste à modéliser chaque élément par une matrice pour obtenir le chemin optique total en multipliant les matrices constituant l'ensemble du montage. Le piège peut

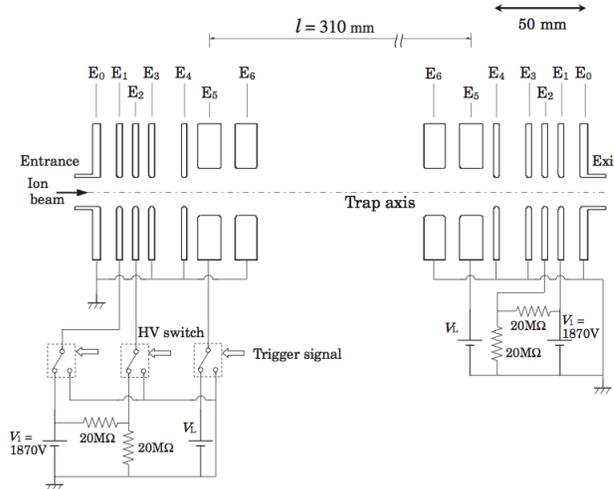


FIGURE 1.2 – Schéma du piège et de l'électronique haute tension associée. Les interrupteurs haute tension utilisés (Behlke) permettent des variations brusque du champ électrostatique.

être modélisé [6] par une zone sans champ de taille l , deux lentilles convergentes de distance focale f séparées de s par rapport aux deux miroirs de distance focale

CHAPITRE 1. PIÉGER DES PARTICULES CHARGÉES

f' . La matrice de transfert associée au système est donc le produit suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & l \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{zone sans champ}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{lentille}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{lentille-miroir}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{miroir}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{lentille-miroir}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{lentille}}$$

La stabilité d'une trajectoire est assurée si et seulement si la valeur absolue de la trace est inférieure à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire :

$$0 \leq \left(1 - \frac{s}{f}\right) \left(1 - \frac{l}{2f}\right) - \frac{1}{4f'} \left(1 - \frac{s}{f}\right) \left(2s + l - \frac{ls}{f}\right) \leq 1.$$

Cette équation permet de mieux comprendre le système étudié, mais l'intérêt pratique d'une telle formule reste limité. En effet, il est difficile de relier les distances focales, aux potentiels appliqués aux électrodes. Néanmoins, les quelques expressions empiriques qui existent dans la littérature permettent d'obtenir une idée grossière des réglages nécessaires pour obtenir un piégeage stable. Finalement, rappelons que l'approximation paraxiale sur laquelle est basée la méthode matricielle précédente, ne permet pas d'explorer les comportements éloignés de l'axe, ce qui, comme nous le verrons par la suite, a une grande importance.

1.2.3 Modélisation numérique

Les limitations de la méthode précédente ne peuvent être dépassées que par la détermination précise du potentiel sur l'axe et hors axe. Jusqu'à présent ceci n'a été réalisé que par des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (Finite Element Method) ou encore la méthode des éléments frontières (Boundary Element Method). Ces deux méthodes sont basées sur l'inversion d'une matrice. Malgré l'utilisation d'algorithmes appropriés (matrices creuses, décompositions LU), calculer le potentiel électrostatique par ces méthodes est coûteux en temps et en ressources. En outre, la solution obtenue est particulière au choix des potentiels initiaux. Il faut recommencer le calcul pour chaque nouveau jeu de potentiels. Dans une configuration symétrique, il faut être capable de régler cinq valeurs de potentiel. Explorer de manière extensive l'espace des paramètres par une méthode éléments finis, est hors de portée.

Il est toutefois utile de tracer des trajectoires dans un potentiel obtenu par une méthode numérique afin de se familiariser avec les principaux paramètres et leur influence sur le mouvement. C'est ce qu'ont fait les concepteurs du piège. En utilisant un logiciel commercial comme CPO ou SIMION [7], il est possible de simuler la trajectoire d'un ion pendant plusieurs dizaines d'aller-retour [8]. Il a été noté cependant, que la conservation de l'énergie n'est plus respectée au-delà de la centaine de microsecondes, ce qui limite considérablement l'utilisation de ces outils pour l'étude la stabilité des trajectoires ou l'étude des sections de Poincaré (qui doivent être tracées à énergie constante). Plus encore, il est impossible d'étudier l'évolution de la forme d'un paquet d'ions car l'erreur sur l'énergie induit une erreur sur la position et cette erreur sur la position atteint très rapidement la taille du piège.

1.3. SPÉCIFICITÉ DU PIÈGE ÉLECTROSTATIQUE DE TYPE EIBT

1.2.4 Théorème de Earnshaw

Il est un point délicat, que nous n'avons encore pas mentionné, et qui apparaît déjà dans la dénomination de notre piège : piège électrostatique. Cette expression est un oxymore pour physiciens, car il est impossible de piéger des particules chargées dans un piège électrostatique en l'absence de champ magnétique. En effet, le champ électrostatique obéit à l'équation de Laplace, qui impose au champ de n'être confinant que dans une direction de l'espace à la fois. Il est souvent fait référence à ce résultat sous le nom de théorème d'Earnshaw. L'EIBT, de par sa conception, semble violer ce théorème. La subtilité réside dans une hypothèse de ce théorème qui impose de se placer dans le référentiel des particules. Dans notre cas, les particules sont en mouvement. Si nous nous plaçons dans le référentiel des particules, nous voyons un potentiel qui varie dans le temps, laissant ainsi la possibilité d'un confinement dans les trois directions de l'espace.

C'est cette remarque qui est à l'origine de l'établissement de l'équation maîtresse de l'EIBT qui sera présentée au Chap. 3.

1.3 Spécificité du piège électrostatique de type EIBT

Il est intéressant de placer les diverses méthodes de piégeage de particules sur l'échelle énergétique. Les particules chargées de faible énergie (quelques électronvolts) peuvent être confinées dans des pièges de Penning ou des pièges de Paul. À l'autre côté de l'échelle, les particules accélérées ayant une énergie de l'ordre du méga électronvolt voir téra électronvolts, seront piégées dans des anneaux de stockage. Ce n'est que très récemment, que les pièges du milieu de la gamme, c'est-à-dire le kilo électronvolt, ont vu le jour. Parmi eux l'EIBT a été conçu en 1997 [3].

1.3.1 Avantages et inconvénients

Les avantages de l'EIBT, sont multiples :

- Il est *peu cher* : celui du LKB a pu être réalisé, à partir des plans fournis par l'Institut Weisman, dans l'atelier de mécanique grâce au travail de Jean-Michel Isac et de Pascal Travers. Les boîtiers hautes tensions ont été conçus en interne dans l'atelier d'électronique par Jean-Pierre Opkitz et Brigitte Delamour en utilisant des interrupteurs de marque Behlke. Outre la fabrication, les composants nécessaires à la construction du piège sont bon marché comparés aux investissements usuels de ce type de physique.
- Il est *peu encombrant*. Cela présente les avantages d'organisation auquel on pense immédiatement mais un piège de petite taille présente un autre avantage : il peut être refroidi. Pour mesurer les durées de relaxation d'états vibrationnels ou rotationnels de molécules il est nécessaire de s'affranchir le plus possible du rayonnement du corps noir. En effet, les radiations thermiques du piège lui-même peuvent être un facteur limitant dans de telles mesures. Contrairement à un anneau de stockage, un tel piège

CHAPITRE 1. PIÉGER DES PARTICULES CHARGÉES

peut-être refroidi à des températures cryogéniques [9, 10, 11]. Dans ce cas, l'argument du faible coût devient discutable.

- Il est *simple à mettre en fonctionnement*.
- Il permet l'*introduction de particules chargées créées hors du piège*. Ceci n'est pas compris depuis si longtemps (Fisher [12] : " Introduire des ions de l'extérieur vers l'intérieur du piège est impossible") et présente de multiples avantages : il est possible de créer des particules exotiques (ions très chargés, antimatière etc.) qui nécessitent des machines conséquentes ne pouvant évidemment pas être incorporées à l'intérieur d'un piège. Cela permet en outre de trier ou de préparer les particules avant de les piéger. Pour nous, la préparation se limite à la séparation des ions en leur rapport charge sur masse, mais pour des manipulations plus complexes, il peut s'agir de préparer les atomes dans différents états quantiques grâce à des lasers, pour favoriser certaines interactions.
- Les *ions ont une direction bien déterminée* ce qui permet une détection extrêmement précise car il suffit d'optimiser la détection dans une seule direction. En outre, cette direction bien déterminée et très attractive pour les expériences impliquant des lasers ou des impacts sur des cibles.
- Il présente une *large zone dépourvue de champ*.
- Il n'y a *aucun champ magnétique* ce qui peut être fondamental pour certaines expériences de physique atomique où l'effet Zeeman peut s'avérer gênant.
- Le fait de n'utiliser que des champs électrostatiques présente l'avantage d'avoir un piégeage qui ne dépend que de la charge et de l'énergie (contrairement aux anneaux de stockage où la rigidité magnétique des aimants limite la masse maximale des ions qui peuvent y être stockées). En pratique, *il n'y pas de borne supérieure à la masse des particules piégées*.

Le principal inconvénient de ce piège est le grand nombre de potentiels qu'il faut régler pour obtenir un piégeage stable. L'absence de modélisation précise de son fonctionnement oblige les expérimentateurs à utiliser des méthodes d'essai et d'erreur pour trouver des paramètres de fonctionnement satisfaisant. C'est ainsi, que les inventeurs du piège cherchent, de manière numérique, ce qu'ils appellent une estimation initiale des potentiels ("initial guess for the potentials" [3]). Avec cinq valeurs qui varient continûment de 0 à 10kV et avec un piégeage dont la sensibilité est de l'ordre de la dizaine de volts, ce n'est pas une tâche aisée.

1.3.2 Premières applications

Depuis son invention, l'EIBT a permis un grand nombre d'expériences scientifiques. Nous pouvons citer la mesure de photo-dissociation moléculaire [3], la spectroscopie de masse [13], la mesure de sections efficaces [5] et l'étude des états vibrationnels de molécules [6].

1.3. SPÉCIFICITÉ DU PIÈGE ÉLECTROSTATIQUE DE TYPE EIBT

1.3.3 Première singularité : la synchronisation

Bien que la dynamique des particules à l'intérieur de ce piège n'ait pas été étudiée de manière extensive, un phénomène tout à fait inattendu a donné suite à quelques publications de premier plan [14, 13] traitant du mouvement des charges dans ce champ électrostatique. En effet, les chercheurs de l'Institut Weisman se sont rendus compte que pour certaines valeurs des potentiels, les ions, au lieu de se repousser, se regroupent en paquets. Ce phénomène a été baptisé synchronisation [14, 15, 13, 16, 17].

L'intérêt majeur de la synchronisation réside dans le fait que le piège, dans ce mode, peut être utilisé comme un spectromètre de masse de haute résolution. La résolution (10^6) annoncée par les articles précédemment cités [13, 17], est comparable à celle des techniques les plus avancées de spectroscopie de masse comme la FTICR. La différence majeure avec de telles techniques est la simplicité de la mise en place : pas besoin d'aimants supraconducteurs et de tout le système cryogénique associé. Une miniaturisation aisée laisse envisager un essor industriel de ce type de piège, tout spécialement dans le milieu médical.

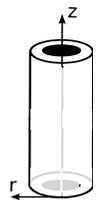
D'autre part, le phénomène de synchronisation est en lui-même très intéressant et concerne presque toutes les branches de la physique [18] : dès qu'il y a des systèmes oscillants et qu'une interaction, même infime, est possible, il peut avoir un phénomène de synchronisation. C'est le cas des neurones de certaines parties du cortex de malades atteints de la maladie de Parkinson [19] ou des flagelles (cellules capables de se mouvoir grâce au battement d'une petite queue) qui sont couplées par le fluide dans lequel elles nagent [20].

1.3.4 Autres pièges électrostatiques

Il existe d'autres pièges qui s'approchent de l'EIBT. Nous en donnerons une brève comparaison ainsi que les références nécessaires.

Piège de Kingdon

Le piège de Kingdon [21, 22] est intéressant de par sa simplicité. Il s'agit d'un fil de petit diamètre placé au centre d'un cylindre creux. On applique un potentiel électrostatique entre les deux, et l'on ajoute deux électrodes en haut et en bas à des potentiels fixés. Les ions sont injectés orthogonalement au fil et grâce à leur moment angulaire, ils tournent autour du fil décrivant des orbites plus ou moins excentriques. Comme l'EIBT, le principal inconvénient de ce piège réside dans la difficulté d'obtenir un potentiel analytique pour étudier la trajectoire des particules (proche du fil le potentiel est approximativement logarithmique mais cela constitue une restriction trop forte pour une bonne utilisation). Des expériences de mesures de durée de vie d'états métastables sur des ions très chargés ont été réalisées grâce à ce piège [23]. Finalement, l'ajout d'une tension sinusoïdale entre le filament et le cylindre permet plus de contrôle sur le mouvement des ions mais aboutit à des trajectoires chaotiques [24].



CHAPITRE 1. PIÉGER DES PARTICULES CHARGÉES

L'Orbitrap

L'Orbitrap est une amélioration du piège de Kingdon dans le but déclaré de faire de la spectroscopie de masse de très haute résolution. Pour cela, en gardant en tête le principe du piège de Kingdon, Makarov [25, 26] a cherché la forme des électrodes permettant de maximiser le volume de piégeage, la résistance à la charge d'espace tout en ayant une formule analytique du potentiel. En observant la fréquence d'oscillation des ions selon l'axe du piège et en connaissant la formule du potentiel, on remonte aisément au rapport charge sur masse. La forme des électrodes est décrite par l'équation suivante avec une symétrie cylindrique :

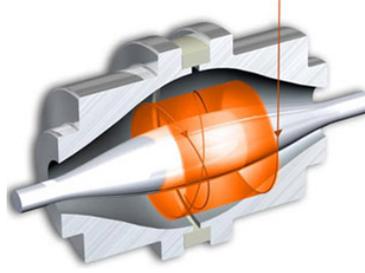


FIGURE 1.3 – Description de l'orbitrap : l'injection se fait orthogonalement à l'axe des deux électrodes dont la forme est décrite par (1.1).

$$z_{1,2} = \sqrt{\frac{r^2}{2} - \frac{R_{1,2}^2}{2} + R_m^2 \log\left(\frac{R_{1,2}}{r}\right)}.$$

où R_1 et R_2 sont les rayons des électrodes interne et externe et R_m est le rayon caractéristique. Ceci permet d'avoir un potentiel analytique de la forme :

$$U(r, z) = \frac{k}{2} \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right) + \frac{k}{2} R_m^2 \log\left(\frac{R_{1,2}}{r}\right) + C. \quad (1.1)$$

où k et C sont des constantes. Ce champ est la superposition d'un champ logarithmique et d'un champ quadrupolaire. Il faut cependant noter que la réalisation précise de ce genre d'électrodes n'est pas aussi facile que pour l'EIBT.

Ce type de piège a rempli son objectif car il permet une spectroscopie de masse avec une résolution de l'ordre du million [27, 28].

Pièges électrostatiques anharmoniques

Un type de piège très récent [29, 30], utilise un champ anharmonique créé par deux électrodes pour piéger des ions. Ces derniers sont créés à l'intérieur de la cuvette de potentiel par impact avec des électrons. La simplicité de ce piège a été poussée au maximum car l'objectif est de réaliser un spectromètre de masse de taille minimale. En contrepartie, la dynamique des particules dans un tel piège est beaucoup moins riche que dans l'EIBT et donne lieu à moins d'applications.

1.3. SPÉCIFICITÉ DU PIÈGE ÉLECTROSTATIQUE DE TYPE EIBT

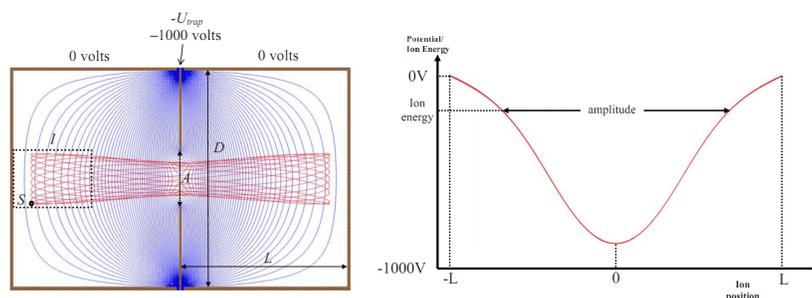


FIGURE 1.4 – Le piège anharmonique : a gauche, deux électrodes permettent de créer une cuvette de potentiel : l'électrode de périphérie est à la masse tandis que sur l'électrode centrale est appliquée une tension négative. A droite, la cuvette de potentiel ainsi formée.

Le ConeTrap

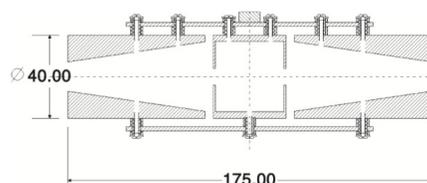


FIGURE 1.5 – Les électrodes du ConeTrap. Les distances sont données en mm [31].

Le ConeTrap [31, 32, 11] fonctionne essentiellement comme l'EIBT, à la différence qu'on a substitué une seule électrode de forme conique à la place des quatre électrodes cylindriques constituant le miroir de l'EIBT. Ceci permet de recréer une variation linéaire du potentiel dans le miroir en ayant qu'une seule valeur à fixer mais, en contrepartie, les réglages fins sont difficiles. Les résultats des chapitres 3 et 4 s'appliquent directement à ce piège.

Le anneaux de stockage électrostatiques

Il existe des anneaux de stockage purement électrostatiques de taille importante comme ELISA [33] et d'autres miniaturisés comme le Miniring [34]. Le Miniring, développé à Lyon, fonctionne lui aussi comme l'EIBT. Il est constitué de deux miroirs électrostatiques et de quatre déflecteurs permettant d'incurver la trajectoire des ions tout en les refocalisant. Le fonctionnement est totalement équivalent à celui de l'EIBT, à la différence que le faisceau ne revient pas sur ses pas. On peut voir l'EIBT comme un mini ring replié sur lui-même.

Finalement, le Weitzmann Institute a construit un piège à mi-chemin entre l'EIBT et le mini ring, baptisée "bent EIBT" [35], qui consiste à placer un

CHAPITRE 1. PIÉGER DES PARTICULES CHARGÉES

défecteur sur l'axe de l'EIBT, pour que la trajectoire des ions forme un "V". Ceci constitue une amélioration par rapport à l'EIBT, car tout en conservant une large zone sans champ, permettant l'interaction avec un laser, cette géométrie permet de capturer séparément les fragments neutres et les particules encore chargées. Ceci est particulièrement utile pour l'étude de la compétition entre la fragmentation et l'ionisation des agrégats d'aluminium après irradiation par un pulse laser [35].

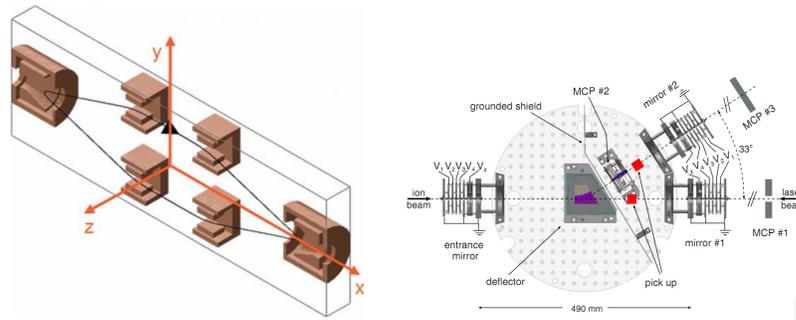


FIGURE 1.6 – A gauche, description du MiniRing [34] et à droite, du "bent EIBT" [35].

Conclusion

Nous arrêterons là notre passage en revue des différents types de pièges électrostatiques. Celui-ci avait pour but, de montrer la variété des pièges nés de l'assemblage de miroirs, de défecteur et de lentilles. D'autres montages peuvent être imaginés à partir de ceux déjà présentés, dans le but d'améliorer l'efficacité de tel ou tel processus utile à une expérience particulière. Finalement, nous aimerions insister sur le fait que les développements présentés dans cette thèse, bien que dédiés à l'EIBT, peuvent s'appliquer à certains de ces pièges électrostatiques.

1.4 Réalisation pratique

Dans cette section, nous allons présenter le montage expérimental dans son ensemble permettant d'effectuer les expériences présentées par la suite. Les principaux constituants de ce montage sont une source d'ions, la ligne guidant le faisceau et finalement le piège.

1.4.1 Source d'ions multichargés

La Source d'Ions Multichargés de Paris (SIMPA) [36] est située dans les sous-sols de l'université Pierre et Marie Curie, place Jussieu. Il s'agit d'une source

1.4. RÉALISATION PRATIQUE

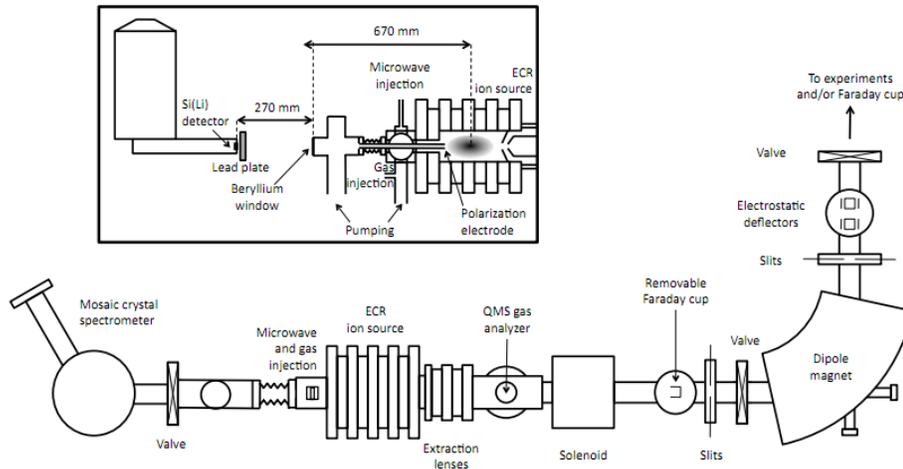


FIGURE 1.7 – Description de la source SIMPA [36].

de type ECRIS (Electron Synchrotron Resonance Ion Source). Dans ce type de source, un plasma est confiné avec un champ magnétique intense obtenu à l'aide d'une structure multipolaire et de bobines de Helmholtz (ou aimants permanents). Cet assemblage donne une configuration dite "en champ minimum" le long de l'axe. La structure en champ minimum confine les électrons longitudinalement en créant une bouteille magnétique alors que l'hexapôle assure le confinement radial (voir Fig. 1.8). Un klystron [37] est capable de produire des ondes radio fréquence (dans la gamme 2.2-28GHz) qui sont guidées jusque dans l'hexapôle. Ce champ radiofréquence accordé à la fréquence cyclotron est utilisé pour chauffer les électrons du plasma qui peuvent acquérir des énergies de plusieurs dizaines de keV et ioniser fortement des atomes introduits dans la source (ionisation par impact d'électrons). Ces ions très chargés sont alors extraits à l'aide d'une haute tension. Cette source permet d'une part l'étude des rayons X issus des basses couches d'ions multichargés et, d'autre part de produire un faisceau d'ions d'une énergie cinétique pouvant aller jusqu'à 10keV/charge. Un schéma global de l'expérience est présenté par la Fig. 1.7. Plus de détails concernant ce montage se trouvent dans les thèse de Dina Attia [8] et de Martino Trassinelli [38].

Pour illustrer l'éventail d'ions qui peuvent être produits avec cette source, la Fig. 1.9 est un spectre des états de charges obtenus lorsque le gaz injecté dans l'hexapôle est de l'argon. La principale difficulté dans l'utilisation de cette source d'ions et de réussir à optimiser les paramètres de réglage pour une espèce voulue. Ces réglages sont : le rapport entre le gaz principal et le gaz porteur (en plus du gaz d'argon par exemple, on ajoute un gaz de support (souvent l'oxygène) dont le rôle est de fournir suffisamment d'électrons au plasma), la puissance du klystron, la tension appliquée à l'électrode de polarisation (cette portion négative permet de fournir des électrons au plasma ce qui a une influence déterminante sur le

CHAPITRE 1. PIÉGER DES PARTICULES CHARGÉES

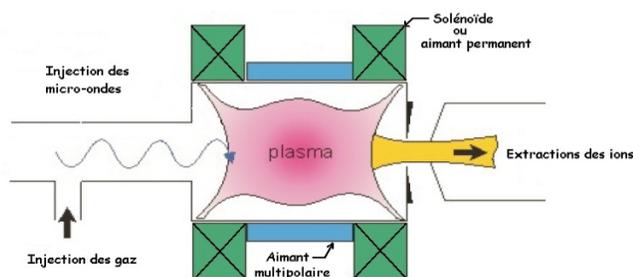


FIGURE 1.8 – Schéma de principe d'une source ECRIS [8].

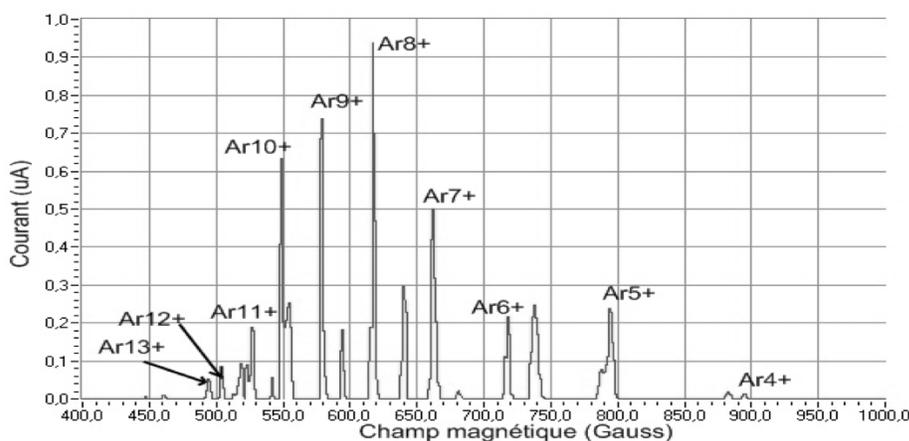


FIGURE 1.9 – Spectre des états de charge de l'argon obtenu avec une puissance de 72W et une tension d'accélération de 4.2kV.

courant et sur sa stabilité) et le piston d'accord entre la haute fréquence et le plasma. Une tension réglable appliquée aux deux extrémités de la source permet d'extraire les ions en les accélérant de 2 à 10kV/charge.

1.4.2 Ligne du faisceau

Les ions extraits sont ensuite focalisés avec un solénoïde puis séparés selon le rapport charge sur masse grâce à un dipôle pour être finalement injectés dans le piège. Le vide dans la ligne se situe aux alentours de 10^{-6} mbar. Le vide dans le piège est quant à lui bien meilleur puisqu'on atteint parfois les 10^{-10} mbar. Il y a donc deux paramètres supplémentaires pour optimiser le courant : la valeur de la tension d'extraction ainsi que la valeur du courant dans le solénoïde qui permet de régler le point de focalisation du faisceau.

1.4.3 Piège et système de mesure

L'injection dans le piège ne se fait pas de manière continue, mais par paquets dont la taille est réglable. Pour mesurer le passage du paquet et ses caractéristiques, on utilise un anneau appelé "pick-up" qui encercle la zone centrale du piège. Lors du passage du paquet, on peut mesurer un courant induit dans cet anneau. En théorie, la largeur du pic obtenu est proportionnelle à la taille du paquet tandis que la surface du pic représente le nombre d'ions dans le paquet.

Il est difficile de modéliser convenablement le courant induit dans le "pickup" par le passage des ions. Nous n'avons pas réussi à étalonner le signal, nous contentant d'une analyse qualitative. Il semble de toute manière que cet étalonnage soit difficile, comme en témoignent les essais infructueux rapportés par l'équipe d'Orsay [39]. Un article récent [40] propose une solution pour résoudre ce problème.

Il m'a paru fondamental, pour tester les développements théoriques mis au point dans les chapitres suivants, de pouvoir avoir une idée du nombre d'ions piégés à l'intérieur de l'EIBT. Pour cela, avec l'aide de Jean-Pierre Opkitz, j'ai monté un petit boîtier analogique permettant d'ouvrir le piège après une durée réglable allant de $2\mu\text{s}$ à 10ms. Les ions sont arrêtés dans la coupe de Faraday située derrière le piège et le signal est amplifié pour avoir une idée du nombre d'ions piégés dans la configuration étudiée.

1.5 Objectifs scientifiques

Ce type de piège a été installé au LKB dans le but premier de mesurer la durée de vie d'états métastables d'ions très chargés, comme nous le verrons dans le dernier chapitre. La large zone d'espace sans champ est aussi très attractive pour utiliser des lasers et exciter les ions multichargés. L'association de ce piège avec une source ECRIS est unique et nous sommes les seuls à utiliser l'EIBT avec des ions aussi chargés.

Les expériences de physique atomique proprement dite n'ont pu être effectuées jusqu'à présent car il est nécessaire de comprendre la dynamique des particules chargées dans ce piège avant de pouvoir interpréter les spectres photoniques obtenus. Comme nous le verrons dans le chapitre 5, la compréhension de cette dynamique ouvre des perspectives plus larges que celles qui étaient envisagées lors de l'installation.

1.6 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de décrire l'état actuel des recherches concernant les pièges électrostatiques de type EIBT. Nous avons décrit brièvement les techniques de calculs qui ont permis la mise au point d'un tel piège ainsi que son utilisation actuelle. Le reste de cette thèse s'articule en quatre parties : dans le chapitre 2 nous mettrons au point une méthode de calcul du potentiel analytique dans l'EIBT, dans le chapitre 3, nous utiliserons cette formule pour étudier la

CHAPITRE 1. PIÉGER DES PARTICULES CHARGÉES

dynamique des ions, de manière linéaire d'abord, puis, dans le chapitre 4, en prenant en compte les non-linéarités. Finalement, le chapitre 5 essaie de faire les premiers pas sur les différentes nouvelles pistes ouvertes par ce travail.

2

Potentiel analytique par transformation conforme

2.1 Introduction et motivations

Après avoir codé une méthode numérique basée sur les éléments finis, je me suis rendu compte que pour rendre ce nouveau type de piège attrayant pour la communauté, il faut avoir une formule analytique du potentiel qui dépende directement des valeurs des potentiels d'électrodes.

2.1.1 Le piège de Paul comme ligne directrice

Comme je l'ai mentionné dans le premier chapitre, les pièges de Paul et de Penning (piège quadripolaire) ont joué un rôle déterminant dans le développement de la physique moderne. Outre le prix Nobel accordé à leurs inventeurs, les découvertes fondamentales qui ont pu être faites en utilisant ces pièges sont innombrables (voir chapitre précédent). Si ce type de piège s'est imposé parmi les physiciens, c'est parce que le mouvement des particules à l'intérieur de ces pièges est bien compris malgré sa complexité. Cette dynamique, n'a pu être élucidée que par le fait que le potentiel a une forme analytique. Une formule analytique, ne présente pas seulement l'avantage de la quasi-instantanéité du calcul, mais elle permet surtout de mettre en évidence les termes ou les paramètres fondamentaux qui régissent la dynamique du système. Dans notre cas, le calcul est difficile car contrairement au piège de Paul, nous ne partons pas de la formule du potentiel pour trouver la forme des électrodes, mais d'un piège existant dont il faut trouver le potentiel.

2.1.2 Limites du numérique

Un argument à l'encontre de l'approche analytique, pourrait être que ces dernières années ont vu les physiciens se doter d'ordinateurs si puissants que la résolution d'une équation compliquée en éléments finis est à la portée de tous. Mais, même en oubliant le recul que peut donner une formule analytique, le calcul d'un potentiel électrostatique par la méthode des éléments finis, est

CHAPITRE 2. POTENTIEL ANALYTIQUE PAR TRANSFORMATION CONFORME

toujours plusieurs ordre de grandeur plus long à calculer que l'évaluation d'une fonction analytique. Ceci, peut paraître ridicule, lorsqu'il s'agit de comparer microseconde à une milliseconde. Lorsqu'on étudie un système à plus de cinq paramètres, l'espace des phases, a une taille qui croit en n^5 . Un rapide calcul mental prouvera au lecteur les limites des calculs numériques [41].

2.1.3 Motivations

Ce piège à été construit (dans notre laboratoire) dans l'objectif de faire de la physique atomique. D'abord pour observer la décroissance des photons émis par des ions très chargés et ainsi déterminer la durée de vie des états métastables (voir dernier chapitre). Ensuite, pour faire de la spectroscopie laser. Dans les deux cas, il est indispensable de comprendre la stabilité des trajectoires mais aussi leur forme, leurs fréquences caractéristiques (qui, comme nous le verrons, sont multiples) afin de pouvoir interpréter les mesures et mettre au point des protocoles expérimentaux.

2.2 Calcul du potentiel électrostatique

2.2.1 Méthodes existantes

Dans l'objectif de trouver une formule analytique dépendant des cinq potentiels d'électrodes de l'EIBT, je me suis penché sur les méthodes existantes. Je mentionnerai en particulier la méthode de la fonction de Green, ainsi que son amélioration, ainsi que la méthode des anneaux ("ring method" qui s'apparente à la Boundary Element Method BEM).

Fonctions de Green

La méthode des fonctions de Green permet parfois d'obtenir un résultat analytique car elle réduit l'obtention d'une solution du problème de Dirichlet au calcul des intégrales suivantes :

$$V(M_0) = -\epsilon_0 \int_S U_S(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS,$$

où M_0 est le point où le potentiel est évalué, ϵ_0 est la perméabilité du vide, n paramétrise la direction orthogonale à la surface, $U_S(M)$ est la distribution de potentiel sur la surface S et G est la fonction de Green. Hélas les fonctions de Green ne sont connues que sur des géométries simples. Une généralisation très intéressante, baptisée "quasi-Green function" a récemment été mise au point [42]. L'idée générale est de diviser une géométrie complexe en des sous-ensembles plus simples. L'inconvénient majeur de cette méthode est que la solution est donnée par une série infinie dont les coefficients n'ont pas de forme fermée. En pratique, la solution calculée est beaucoup plus compliquée que celle que nous obtiendrons à la fin de ce chapitre.

2.2. CALCUL DU POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

Méthode des anneaux

Une autre méthode de très intéressante, et celle des anneaux ("ring method"), qui est beaucoup plus algébrique [43, 44, 45, 46]. La formulation intégrale de l'équation de Laplace est appliquée à N anneaux, répartis sur toute la géométrie. Si N est suffisamment grand, nous obtenons un système d'équations linéaires $\Phi = A Q$, où Φ est le potentiel appliqué aux anneaux, Q est la charge induite sur chaque anneau et A est une matrice qui ne dépend que de la géométrie. Une fois l'inverse de A déterminée, la charge sur chaque anneau est connue et l'on peut obtenir le potentiel par la formule :

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 s_i} \int_{s_i} \frac{d\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

où s_i est la surface de l'anneau i . Quelques centaines d'anneaux permettent d'obtenir une précision relative de l'ordre de 10^{-4} ce qui est un l'ordre de grandeur meilleur que notre méthode. Néanmoins, la méthode des anneaux est dix fois plus lente que la nôtre : bien qu'il ne faille calculer qu'une seule fois l'inverse de la matrice A (si la géométrie reste inchangée), les N^2 intégrales qui sont nécessaires à la construction de A sont longues à calculer, beaucoup plus que l'évaluation de simples fonctions analytiques. D'autres part, cette approche algébrique fait perdre les avantages de l'analyse (calcul des dérivées selon n'importe quel paramètre etc.). En conclusion, cette méthode est plus adaptée à un calcul qui privilégie la précision à la vitesse.

2.2.2 La méthode de Bertram

Présentation de la méthode

Hormis les deux approches précédentes, je n'ai trouvé aucune méthode récente pour calculer un potentiel de manière analytique. Ceci me semble résulter de l'explosion du calcul numérique favorisée d'une part par la puissance des ordinateurs et d'autres pas par la facilité de prise en main des calculs d'éléments finis (par exemple COMSOL Multiphysics®). Le dernier espoir consiste à chercher en amont de la révolution informatique.

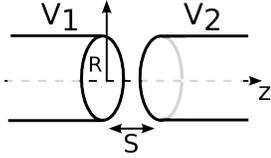
Dans les années cinquante, S. Bertram mit au point *une méthode analytique permettant de calculer le potentiel sur l'axe de deux tubes infinis portés à des potentiels différents* [47, 48, 49]. On part de l'équation de Laplace dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (2.1)$$

où $V = V(r, z)$ est le potentiel à une distance r de l'axe et à une distance z du centre du piège. En utilisant la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire

CHAPITRE 2. POTENTIEL ANALYTIQUE PAR TRANSFORMATION CONFORME

en injectant $V(r, z) = R(r)Z(z)$ dans (2.1), on obtient [50] :



$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z &= 0 \\ r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + r^2 k^2 R &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

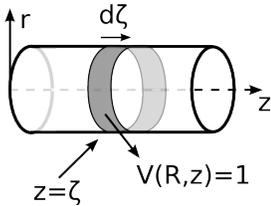
où k est une constante. (2.2) est un cas particulier de l'équation de Bessel [51], dont la solution est une fonction de Bessel de première espèce $J_0(kr)$. Une solution générale consiste donc à prendre une combinaison linéaire de ce type de fonction, comme par exemple cette solution du type Fourier-Bessel :

$$V(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) J_0(kr) e^{ikz} dk. \quad (2.3)$$

Le problème est de déterminer $a(k)$ et de pouvoir intégrer. On suppose qu'on connaît le potentiel sur les électrodes, $V(R, z)$, ce qui permet d'écrire, par transformée inverse :

$$a(k) J_0(ikR) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(R, z) e^{-ikz} dz. \quad (2.4)$$

Ce problème étant difficile, on applique un précepte du père de la science, Descartes : " nous ramenons graduellement les propositions compliquées et obscures à des propositions plus simples" [52]. On découpe ainsi le cylindre en tranches dont chacune apporte la contribution $U(R, \zeta) d\zeta$ créé par un potentiel nul partout sauf en $z = \zeta$ où $V(R, z) = 1$. Calculons $a(k)$ pour cette tranche :



$$a(k) J_0(ikR) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(R, \zeta) d\zeta e^{-ikz} dz = \int_{\zeta}^{\zeta+d\zeta} e^{-ikz} dz = \frac{i}{k} (e^{-ik(\zeta+d\zeta)} - e^{-ik\zeta}).$$

Comme $d\zeta \rightarrow 0$, $e^{-ikd\zeta} \rightarrow 1 - ikd\zeta$, on obtient :

$$a(k) = \frac{e^{-ik\zeta}}{J_0(ikR)} d\zeta. \quad (2.5)$$

Ainsi le potentiel créé par une tranche est :

$$U(r, z) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik\zeta}}{J_0(ikR)} d\zeta J_0(kr) e^{ikz} dk. \quad (2.6)$$

Supposons maintenant que nous soyons sur l'axe, $r = 0$:

$$U(0, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(z-\zeta)}}{J_0(ikR)} dk \stackrel{\xi=z-\zeta}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\xi}}{J_0(ikR)} d\xi. \quad (2.7)$$

En exprimant toutes les dimensions en terme de R pour que $R = 1$ et en développant $\frac{1}{J_0(ik)}$ en série de Fourier :

$$\frac{1}{J_0(ik)} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{nk}{2}\right) \quad -2\pi < k < 2\pi \quad (2.8)$$

2.2. CALCUL DU POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

et en remplaçant dans (2.7) et en limitant l'intervalle d'intégration à $[-2\pi, 2\pi]$, nous obtenons :

$$U(0, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{nk}{2}\right) (\cos(k\xi) + i \sin(k\xi)) dk. \quad (2.9)$$

Bien que $1/J_0$ ne soit plus égale qu'à $1/90^\circ$ de sa valeur maximale en 2π , le fait de tronquer l'intégrale constitue une **première approximation**. La partie imaginaire est nulle car on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0. En utilisant les formules usuelles de trigonométrie et en intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} U(0, z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n (-1)^n \sin(2\pi\xi) \left(\frac{1}{\xi + n/2} + \frac{1}{\xi - n/2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi(n/2 + \xi))}{n/2 + \xi} + \frac{\sin(2\pi(n/2 - \xi))}{n/2 - \xi} \\ &= \frac{\xi}{\pi} \sin(2\pi\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A_n}{\xi^2 - n^2/4}. \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\sin(2\pi(\xi \pm \frac{n}{2})) = (-1)^n \sin(2\pi\xi)$. Finalement, **une deuxième approximation consiste à prendre**

$$U(0, z) = \frac{\omega}{2} \operatorname{sech}^2(\omega z) \quad (2.10)$$

avec $\omega = 4A_0 \simeq 1.32$ (les deux fonctions ont été tracées sur la Fig. 2.1).

Nous pouvons maintenant considérer les deux cylindres comme un ensemble de petites tranches et nous obtenons :

$$V(0, z) = \frac{\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V(1, \zeta) \operatorname{sech}^2(\omega\zeta) d\zeta. \quad (2.11)$$

Pour revenir au cas $R \neq 1$, il suffit de remplacer ω par $\frac{\omega}{R}$. La **dernière approximation**, qui va nous permettre de définir $V(1, \zeta)$, consiste à prendre une variation linéaire du potentiel entre les électrodes :

$$V(1, \zeta) = \begin{cases} V_1 & \zeta < 0 \\ V_1 + \left(\frac{V_2 - V_1}{S}\right) \zeta & 0 < \zeta < S \\ V_2 & \zeta > S, \end{cases}$$

où S est l'écart entre les deux cylindres L'équation (2.11) est intégrable et on obtient :

$$V(0, z) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2\omega S} \log \left(\frac{\cosh(\omega z)}{\cosh(\omega(z - S))} \right). \quad (2.12)$$

CHAPITRE 2. POTENTIEL ANALYTIQUE PAR TRANSFORMATION CONFORME

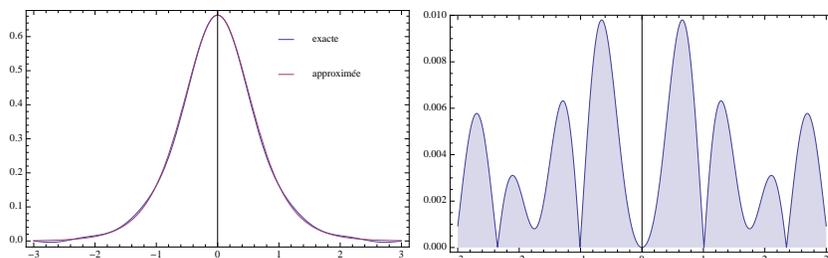


FIGURE 2.1 – Comparaison de la fonction $U(0, z) = \frac{\xi}{\pi} \sin(2\pi\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(-1)^n}{\xi^2 - n^2/2}$ à son approximation $U(0, z) = \frac{\omega}{2} \operatorname{sech}^2(\omega\xi)$. A gauche, les deux fonctions, à droite, la valeur absolue de la différence.

Il peut sembler inutile d'obtenir la solution du potentiel uniquement sur l'axe, mais le respect de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques impose aux solutions d'avoir la forme suivante :

$$V(r, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^{2n}} r^{2n} V^{(2n)}(0, z), \quad (2.13)$$

ce qui montre que l'on peut obtenir le potentiel hors axe par cette méthode.

Retour sur les approximations

La première approximation consiste à limiter l'intervalle d'intégration de $\frac{1}{J_0}$ à $[-2\pi, 2\pi]$ pour obtenir $\omega = 1.31835$. En utilisant Mathematica [53], nous pouvons calculer l'intégrale surtout le domaine. Nous obtenons $\omega = 1.32623$, ce qui ne change pas grand-chose au potentiel sur l'axe (moins d'un pour mille).

La deuxième approximation est illustrée par la Fig. 2.1 : elle aussi a peu d'incidence sur le résultat final (moins d'un pour mille).

La troisième approximation est la plus gênante, car c'est elle qui est responsable de la plus grande partie de l'erreur. En effet, dans la partie vide entre les électrodes, le potentiel ne varie pas linéairement. Ceci crée une erreur de l'ordre de 1 %, mais c'est à ce prix que l'équation est intégrable. Nous verrons par la suite qu'il est possible d'améliorer cette approximation.

2.2.3 Généralisation à N électrodes

Il sera pratique pour la suite de généraliser cette méthode à un nombre quelconque d'électrodes. En prenant un potentiel sur les électrodes défini par morceaux comme condition au limites :

$$V(R, z) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i} (\zeta - x_i) + V_i \right) \Pi(x_i \rightarrow x_{i+1}) \quad (2.14)$$

2.3. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE À TOUT POLYGONE

(où les x_i sont les positions des électrodes), la formule du potentiel sur l'axe est :

$$V(0, z) = \frac{\omega}{2} \sum_{i=0}^N \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i} (-x_i) + V_i \right) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \operatorname{sech}^2(\omega\xi) d\xi$$

$$+ \frac{\omega}{2} \sum_{i=0}^N \frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \xi \operatorname{sech}^2(\omega\xi) d\xi.$$

La première partie se calcule en sachant que \tanh est une primitive de sech^2 et la deuxième partie peut se réduire à des intégrales de sech^2 par une double intégration par partie. Nous obtenons, après un calcul un peu fastidieux,

$$V(0, z) = \sum_{i=0}^N - \frac{1}{2} \frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i} (x_{i+1} \tanh(\omega(z - x_{i+1})) - x_i \tanh(\omega(z - x_i)))$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i} x_i - V_i \right) \frac{2 \sinh(\omega(z - x_{i+1}))}{\cosh(\omega(2z - x_{i+1} - x_i)) + \cosh(\omega(x_{i+1} - x_i))}$$

$$- \frac{1}{2\omega} \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \log \left(\frac{\cosh \omega(z - x_{i+1})}{\cosh \omega(z - x_i)} \right).$$

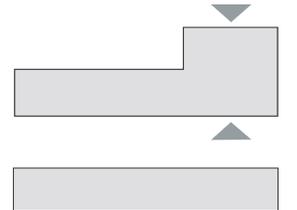
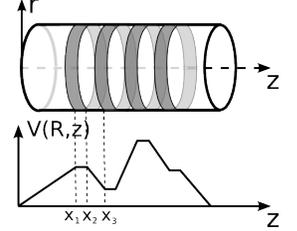
2.2.4 Résumé

Dans notre cas, si toutes les électrodes avaient le même rayon, nous pourrions utiliser directement cette méthode, en prenant $V(R, \zeta)$ comme une fonction définie par morceaux dépendant des potentiels $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_z\}$. Toutefois, le rayon des électrodes des miroirs $R = 8mm$ est différent de celui des lentilles Einzel $R_z = 13mm$, ce qui rend cette méthode caduque dans la zone de changement de rayon. Nous avons essayé de contourner le problème de plusieurs manières en prenant, par exemple, un changement polynomial de R selon z , sans résultat comme on peut le voir sur la Fig. 2.2. Nous butons donc sur la principale limitation de cette méthode, qui tient au fait qu'elle n'est adaptée qu'à des électrodes de même rayon.

2.3 Généralisation de la méthode à tout polygone

2.3.1 Idée générale

Notre objectif est de pouvoir faire comme si le polygone \mathcal{A} de la Fig. 2.3 était un rectangle. Si l'espace était élastique, il suffirait d'étirer la partie gauche ou d'écraser la partie droite. Nous aurions ainsi une configuration où toutes les électrodes auraient le même rayon et nous pourrions appliquer la méthode précédente. C'est ce que nous allons faire mathématiquement en utilisant un outil bien connu des physiciens, la transformation conforme.



CHAPITRE 2. POTENTIEL ANALYTIQUE PAR TRANSFORMATION CONFORME

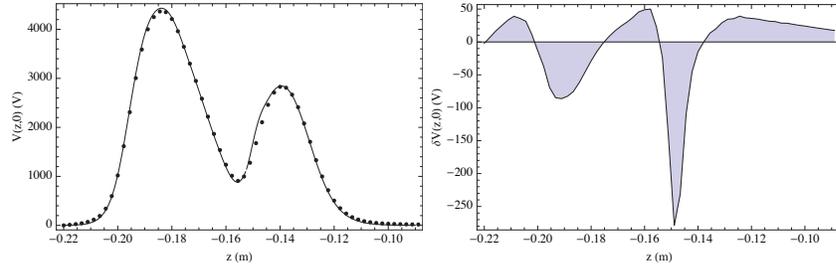
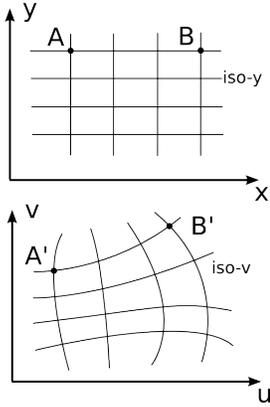


FIGURE 2.2 – Tentative d’adaptation de la méthode de Bertram à la géométrie du piège en remplaçant R par une fonction polynomiale variant lentement de R_z à R . Gauche : la ligne représente la fonction analytique et les points la solution numérique obtenue par éléments finis en utilisant COMSOL Multiphysics® . Droite : la différence entre les deux solutions. L’erreur est grande, (-258V) près de $z = -0.15$, où la transition a lieu.

La transformation conforme est la bonne manière d’exprimer mathématiquement l’idée d’un espace déformable, car elle constitue un changement de métrique qui conserve certaines propriétés essentielles de l’espace. Considérons un espace Z repéré par (x, y) une transformation conforme (i.e. une fonction holomorphe) qui à tout point $z = x + iy$ associe un point $w = u + iv$ d’un autre espace W . Un promeneur qui suit une le chemin (dit "iso- y ") du point A au point B, doit voir le même environnement lorsqu’il parcourt l’iso- v correspondante dans W (chemin de A' à B'). Les chemins perpendiculaires à AB doivent être transformés en chemins perpendiculaires à $A'B'$. C’est justement cette propriété que vérifient les fonctions holomorphes : la variation ∂u dans l’espace W lorsque x varie de ∂x dans l’espace Z est égale à la variation ∂v lorsque y varie de ∂y . Ce qui s’exprime par :



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.16)$$

qui sont les formules de Cauchy-Riemann. En dérivant les formules précédentes et en utilisant la formule d’interversion de Schwartz, on obtient que le Laplacien est conservé par transformation conforme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.17)$$

Ainsi toute fonction harmonique (solution de l’équation de Laplace) $\phi(x, y)$ dans l’espace Z est une fonction harmonique $\psi(u, v) = \phi(u(x, y), v(x, y))$ dans l’espace transformé.

Mon premier contact avec la transformation conforme a été la transformation de Joukowski [54], qui permet de réduire l’étude de l’écoulement autour d’un

2.3. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE À TOUT POLYGONE

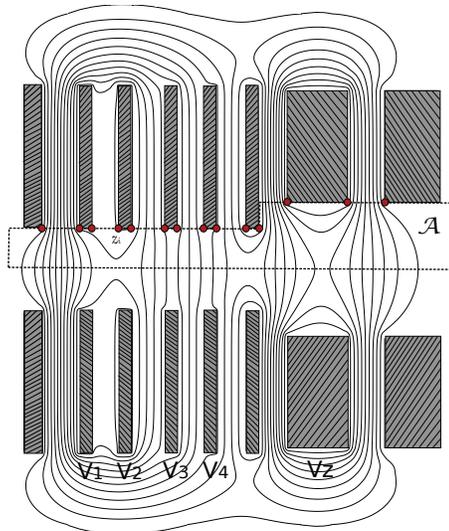


FIGURE 2.3 – Section d'un moitié du piège : les rectangles hachurés représentent les électrodes, le domaine \mathcal{A} est entouré d'une ligne pointillée, les points rouges z_i nous serviront à définir nos conditions aux limites et les lignes courbes sont les équipotentielles obtenues une fois le calcul achevé.

profil quelconque à l'étude de l'écoulement autour d'un cylindre. Les applications se retrouvent dans tous les domaines de la physique et de la chimie [55, 56] et il existe déjà des exemples de détermination de potentiel électrostatique grâce à la transformation conforme [41, 57, 58, 55, 56, 59, 60, 61]. Cependant, il a toujours été question de déterminer le potentiel électrostatique dans deux dimensions, en supposant que la troisième était infinie. Ici, nous allons utiliser la transformation conforme pour déterminer le potentiel électrostatique d'une géométrie cylindrique.

2.3.2 La transformation de Schwarz-Christoffel

Notre objectif est de trouver la fonction holomorphe qui à tout point du domaine \mathcal{A} , décrit sur la Fig. 2.3, associe un point d'un rectangle. Pour trouver cette fonction, nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel [62] qui permet de transformer tout polygone en la partie supérieure du plan complexe défini par $Im(t) = s > 0$. Cette technique, bien qu'elle soit encore un sujet de recherche actif en mathématiques [63], date de la fin du XIXe siècle et a déjà été utilisée en physique [64, 65]. Sans rentrer dans les détails mathématiques, nous nous contenterons de présenter la procédure qui se divise en quatre étapes et qui permet de trouver la forme intégrale de la transformation. Il faut :

1. Nommer (A, B, C etc.) chaque sommet du polygone dans l'espace Z . À

CHAPITRE 2. POTENTIEL ANALYTIQUE PAR TRANSFORMATION CONFORME

chaque sommet assigner un angle extérieur ϕ_j (il s'agit de l'angle dont il faut tourner lorsqu'on est sur la frontière du polygone pour y rester). Vérifiez que la somme des ϕ_j est égale 2π .

2. Sur l'espace image T , définir des points de l'axe notés t_j . Il est judicieux de choisir parmi eux $-1, 0, 1$ et les sommets avec des angles de 2π ou de π conviennent mieux au point $-\infty$ et 0 .
3. Écrire la formule de Schwartz-Christoffel :

$$z(t) = C_1 \int_{t_0}^t \prod_{j=1}^n (t - t_j)^{\frac{-\phi_j}{\pi}} dt + C_2,$$

en laissant de côté les points qui correspondent à $\pm\infty$.

4. Exprimer les distances entre les différentes arêtes en termes de conditions initiales pour déterminer les positions des points t_j sur l'axe de l'espace T .

L'application $z(t)$ associe à tout point de la frontière du polygone dans l'espace Z , un point de l'axe des réels dans l'espace T et les points à l'intérieur du polygone sont associés de manière univoque à des point du demi plan supérieur.

2.3.3 Cas analytique

Utilisons d'abord cette transformation pour passer du domaine \mathcal{A} , paramétrisé par $z = x + iy$ sur le plan complexe $t = r + is$, comme illustré sur la Fig. 2.4. Nous avons

$$\frac{dz}{dt} = f'(t) = K_1 t^{-1} (t - a)^{1/2} (t - b)^{-1/2},$$

donc

$$z = f(t) = K_1 \int_0^t \frac{(t' - a)^{1/2}}{t'(t' - b)^{1/2}} dt' + K_2$$

où K_1 , K_2 , a et b sont des constantes à déterminer. En choisissant judicieusement l'origine ($f(0) = 0$), nous avons $K_2 = 0$. Pour K_1 , nous utilisons les conditions aux limites : passer du point A au point E dans l'espace Z (voir la Fig.2.4) revient à décrire un large demi cercle entre $\rho \rightarrow +\infty$ et θ allant de 0 à π dans le plan T :

$$iR_z = K_1 \int_0^\pi \frac{(\rho e^{i\theta} - a)^{1/2}}{\rho e^{i\theta} (\rho e^{i\theta} - b)^{1/2}} i \rho e^{i\theta} d\theta.$$

En passant à la limite $\rho \rightarrow +\infty$, :

$$iR_z = K_1 \int_0^\pi \frac{(\rho e^{i\theta})^{1/2}}{\rho e^{i\theta} (\rho e^{i\theta})^{1/2}} i \rho e^{i\theta} d\theta = K_1 i\pi,$$

2.3. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE À TOUT POLYGONE

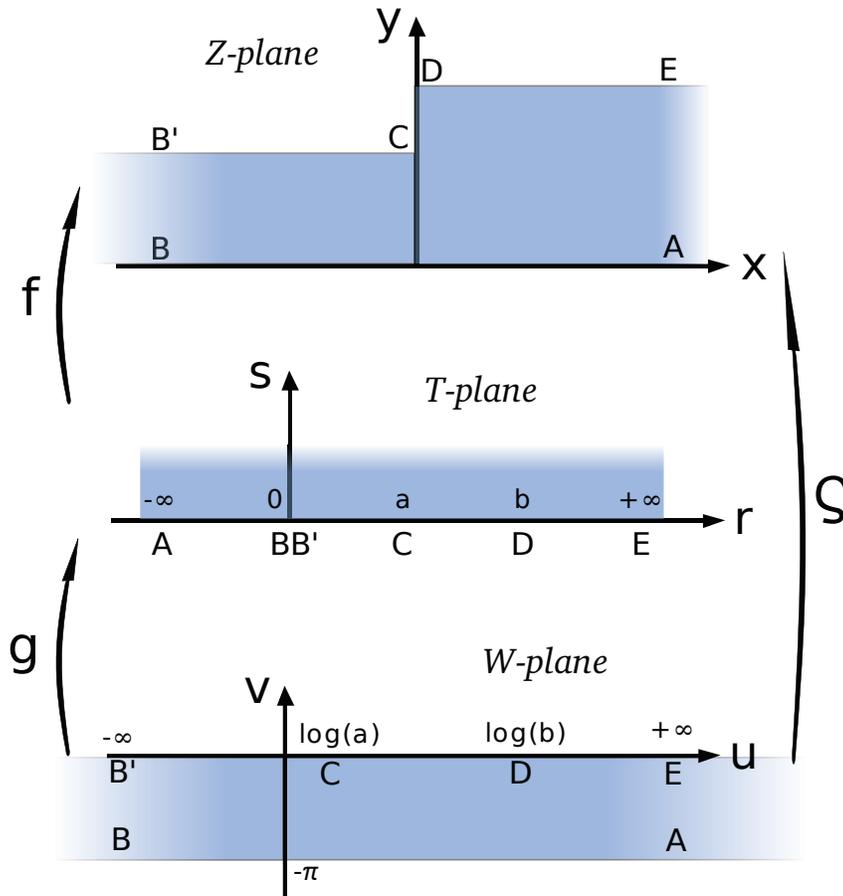


FIGURE 2.4 – Les trois espaces utilisés pour trouver la transformation de \mathcal{A} en un rectangle : l'espace Z est l'espace physique contenant \mathcal{A} , l'espace T est un intermédiaire de calcul dû au fait que la transformation de Schwarz-Christoffel transforme tout polygone en le demi plan supérieur et l'espace W est le plan où nous pourrions utiliser la méthode de Bertram car tous les rayons y sont identiques.

CHAPITRE 2. POTENTIEL ANALYTIQUE PAR TRANSFORMATION CONFORME

et donc $K_1 = R_z/\pi$. La deuxième conditions aux limites s'exprime de la même manière : passer de B à B' dans Z , s'exprime par l'intégrale sur BB' avec $\rho \rightarrow 0$ et θ de 0 à π :

$$\begin{aligned} iR &= \frac{R_z}{\pi} \int_0^\pi \frac{(\rho e^{i\theta} - a)^{1/2}}{\rho e^{i\theta} (\rho e^{i\theta} - b)^{1/2}} i \rho e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{R_z}{\pi} \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^\pi i d\theta \\ &= iR_z \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

Prenant $a = 1$ ne fait que fixer l'origine dans l'espace T , et implique $\sqrt{b} = \frac{R_z}{R}$. Finalement, en faisant la substitution :

$$p = \sqrt{\frac{t' - 1}{t' + 1}}$$

l'intégrale donne :

$$z(p) = \frac{R_z}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{\sqrt{bp} - 1}{\sqrt{bp} + 1} + \ln \frac{1+p}{1-p} \right).$$

La transformation de T à W est beaucoup plus simple :

$$w = g(t) = \log(t)$$

et nous relient finalement l'espace Z à l'espace W par :

$$\begin{aligned} z &= f(g^{-1}(w)) \\ &= \frac{R_z}{\pi} \left(\log \left(\frac{\sqrt{e^w - b} + \sqrt{e^w - 1}}{\sqrt{e^w - b} - \sqrt{e^w - 1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{b}} \log \left(\frac{\sqrt{b}(e^w - 1) - \sqrt{e^w - b}}{\sqrt{b}(e^w - 1) + \sqrt{e^w - b}} \right) \right) \\ &= \zeta(w), \end{aligned} \tag{2.18}$$

La transformation $z = \zeta(w)$ associe à chaque point de Z un point de W et c'est une transformation conforme comme composée de deux transformations conformes. Comme ζ n'est pas inversible analytiquement on peut trouver une bonne approximation de l'inverse, en s'intéressant à trois segments :

$$\zeta^{-1}(z) = \begin{cases} -\log \frac{(1-b)(\exp[-\sqrt{b}(\frac{\pi z}{R_z} - \log \frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{b-1}})] + 1 + b)}{4b} & z < -z_0 \\ P(z) & -z_0 \leq z \leq z_0, \\ \log \frac{1-b}{4} (\exp[\frac{\pi z}{R_z} - \frac{1}{\sqrt{b}} \log \frac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}}] + \frac{1+b}{1-b}) & z_0 < z, \end{cases}$$

2.3. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE À TOUT POLYGONE

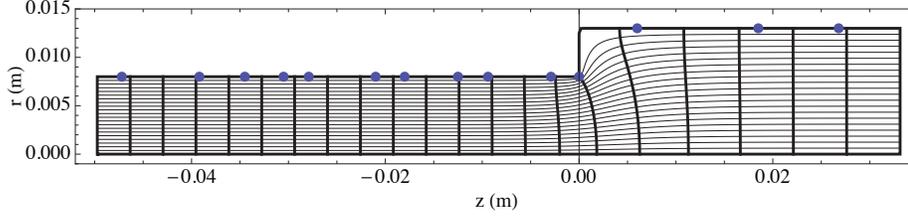


FIGURE 2.5 – Image par $\zeta(w)$ du rectangle défini par $w = u + iv$ with $-20 < u < 8$ et $-\pi < v < 0$. Les points indiquent les positions des points z_i .

où $z_0 = 0.007mm$ and $P(z)$ est un polynôme d'ordre 6 qui relie les deux développements asymptotiques dont le point $\pm z_0$ représente la limite de validité.

Il reste encore une chose à faire avant de pouvoir résoudre dans W . La Fig. 2.5 montre l'image du rectangle défini par $w = u + iv$ avec $-20 < u < 8$ et $-\pi < v < 0$. Les lignes verticales en gras sont les iso- u . On voit que les iso- u sont déformées près de 0. Ainsi la distance entre les points $w_i = \zeta^{-1}(z_i)$ n'est pas la même que celle entre les points z_i : la métrique n'est pas conservée sur la frontière. En conséquence, la largeur des électrodes près de C dans W n'est pas la largeur physique, ce qui aboutit à des erreurs dans le potentiel. Pour changer la métrique sur la frontière nous devons d'abord appliquer la fonction :

$$\beta(z) = \zeta(\zeta^{-1}(z) - i\pi) \quad (2.19)$$

aux points z_i pour que leurs images aient la même distance entre eux dans W et dans Z . Cette fonction est déterminée par le fait que sur l'axe, la métrique n'est pas modifiée. C'est la même idée que dans [58] où un coefficient dépendant de l'espace est utilisé pour prendre ne compte que l'espace physique est déformé pour s'adapter à W . Dans la suite, nous utiliserons la notation : $\tilde{z}_i = \beta(z_i)$.

Nous pouvons maintenant appliquer la méthode de Bertram dans l'espace W où les rayons des électrodes sont tous identiques. Sur la frontière du domaine, nous avons :

$$V_W(\pi, u) = \sum_{i=1}^{13} \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{u_{i+1} - u_i} (u - u_i) + V_i \right) \Pi(u_i \rightarrow u_{i+1}),$$

avec $u_i = \zeta^{-1}(\tilde{z}_i)$, où $\tilde{z}_i = \beta(z_i)$. z_i sont les positions des points sur la Fig. 2.3, V_i est la valeur du potentiel à z_i . $\Pi(u_i \rightarrow u_{i+1})$ est une fonction nulle partout sauf entre u_i et u_{i+1} où elle vaut l'unité. En remplaçant dans (2.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_W(0, u) = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{13} \left[Q_i(\phi_{i+1}(u) - \phi_i(u)) \right. \\ & + (Q_i u_i - V_i) \chi_i(u) \\ & \left. + \frac{\pi Q_i}{\omega} \psi_i(u) \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

CHAPITRE 2. POTENTIEL ANALYTIQUE PAR TRANSFORMATION CONFORME

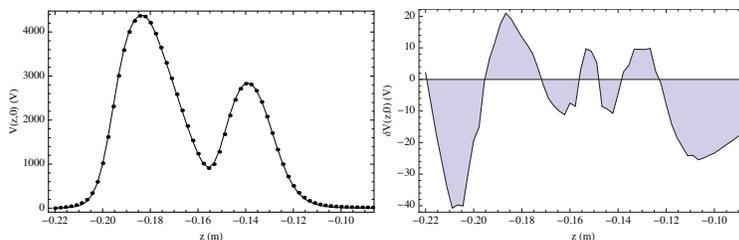


FIGURE 2.6 – Haut : la ligne est la solution analytique obtenue par la combinaison de la méthode de Bertram et de la transformation conforme et les points représentent la solution numérique. Bas : différence entre les deux courbes précédentes. On voit que l'erreur est de l'ordre de 1% et qu'elle est bien répartie sur tous le domaine, contrairement à la Fig. 2.2 où l'erreur était concentrée sur la transition entre R et R_z . L'erreur est due à l'approximation linéaire entre les électrodes.

où :

$$\begin{aligned}
 Q_i &= \frac{V_{i+1} - V_i}{u_{i+1} - u_i} \\
 \phi_i(u) &= u_i \tanh \frac{\omega}{\pi} (u - u_i) \\
 \chi_i(u) &= \frac{2 \sinh \frac{\omega}{\pi} (u_{i+1} - u_i)}{\cosh \frac{\omega}{\pi} (2u - u_{i+1} - u_i) + \cosh \frac{\omega}{\pi} (u_{i+1} - u_i)} \\
 \psi_i(u) &= \log \left(\frac{\cosh \frac{\omega}{\pi} (u - u_{i+1})}{\cosh \frac{\omega}{\pi} (u - u_i)} \right).
 \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons V_W , le potentiel dans Z est donné par :

$$V_Z(0, z) = V_W(\zeta^{-1}(z))$$

quand $w = \zeta^{-1}(z)$ évolue entre les points B et A .

2.3.4 Cas non-analytique

Dans la partie précédente, nous avons pu obtenir la transformation de Schwartz-Christoffel de manière analytique parce que la géométrie du domaine est relativement simple. Toutefois, cette approche atteint rapidement ses limites. Considérons le cas d'un polygone défini par n points du plan Z repérés par les nombres complexes $z_k = x_k + iy_k$. La transformation de Schwartz-Christoffel qui transpose l'intérieur du polygone sur le demi-plan complexe, s'écrit :

$$z(t) = C_1 \int_{t_0}^t \prod_{j=1}^n (t - t_j)^{\frac{\phi_j}{\pi}} dt + C_2 \quad (2.21)$$

où ϕ_j est l'angle extérieur du sommet z_j . On peut toujours prendre $z(0) = 0$ ce qui donne $C_2 = 0$, mais les inconnues C_1, t_1, \dots, t_n se déterminent en exprimant

2.3. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE À TOUT POLYGONE

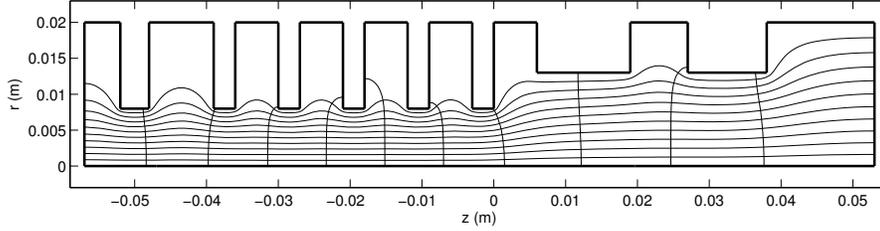


FIGURE 2.7 – Exemple d’une transformation conforme obtenue numériquement. Ceci permet, par exemple de contourner l’approximation linéaire entre les électrodes imposée par Bertram.

les conditions aux limites :

$$|z_m - z_l| = C_1 \int_{t_l}^{t_m} \prod_{j=1}^n (t - t_j)^{\frac{\phi_j}{\pi}} dt, \quad (2.22)$$

ce qui aboutit à un système d’équations non linéaires couplées. C’est dans la résolution d’un tel système que se trouve la difficulté de la méthode de Schwartz-Christoffel. Ceci est numériquement possible en utilisant un algorithme d’optimisation local (moindres carrés, gradient conjugués etc.) ou global (recuit simulé, algorithme génétique etc.). Une librairie MATLAB écrite par T. Driscoll [62, 66] est capable de mettre en équation et de résoudre un tel problème.

L’approche numérique donne l’avantage de pouvoir complexifier le domaine à transformer. Ainsi, au lieu de considérer que les espaces vides entre les électrodes sont représentés par une variation linéaire du potentiel, on peut ajouter un espace vide du domaine, ce qui améliore d’un ordre de grandeur la précision du résultat final.

Un point nécessite d’être précisé : utiliser une approche numérique pour déterminer la transformation conforme n’enlève rien à l’analyticité du potentiel en terme des paramètres V_1, V_2 etc. La fonction numérique permettant de passer de Z à W peut être calculée une seule fois pour une géométrie donnée et interpolée sur l’axe par un polynôme (il en va de même pour l’inverse) et injecté dans la formule analytique de Bertram.

2.3.5 Performances

Précision

Avec l’approche analytique, la précision de cette méthode est de l’ordre de 1% comme on le voit sur la Fig. 2.6. Il y a deux causes principales de cette erreur : d’une part, la décroissance du champ avant et après l’ensemble d’électrodes et d’autre part l’hypothèse de variation linéaire des potentiels entre les électrodes. Ces deux sources d’erreur sont représentées sur la Fig. 2.8, où l’on compare la solution numérique obtenue par éléments finis à la solution analytique mais sur la frontière.

CHAPITRE 2. POTENTIEL ANALYTIQUE PAR TRANSFORMATION CONFORME

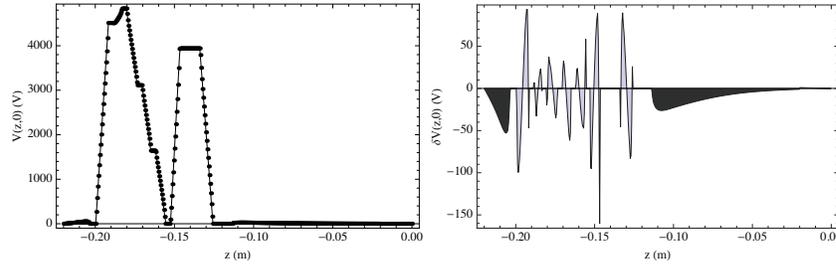


FIGURE 2.8 – Gauche : la ligne représente les conditions aux limites utilisées pour la solution analytique, les points sont le résultat d'un calcul éléments finis qui permet d'apprécier la décroissance du champ entre les électrodes. Droite : différence entre les deux courbes précédentes. Bien que l'écart soit important sur la frontière (100V), le fait que cette erreur oscille permet une compensation et l'erreur est faible sur l'axe (20V).

La première cause d'erreur peut être annulée en ajoutant une électrode à la masse en amont et en aval de celles déjà utilisées. La seconde a été améliorée analytiquement par le passé [48], mais il semble plus facile de procéder numériquement en tenant compte de l'espace entre les électrodes comme illustré sur la Fig. 2.7. Finalement, on peut affirmer, pour fixer les idées, que le cas analytique nous permet une précision de l'ordre de 1% tandis que le cas numérique permet d'atteindre 0.1%.

Vitesse

Si la précision de notre méthode n'est pas aussi bonne que les techniques citées dans l'introduction, sa vitesse, en revanche est imbattable. Une fois implémentée dans un code écrit en C++ utilisant la librairie GSL, nous pouvons calculer la trajectoire d'une particule sur un millier d'allers-retours (correspondant approximativement à 2ms) en moins de 3s. Cette vitesse est inenvisageable pour la méthode des anneaux : à titre d'exemple, SIMION qui utilise cette méthode, met beaucoup plus de temps pour faire le calcul de la trajectoire sur $500\mu\text{s}$ et l'énergie n'est pas conservée comme on peut le voir sur la Fig. 2.9. Grâce à cette rapidité de calcul, nous pouvons vérifier à chaque pas d'intégration que l'énergie et le moment cinétique sont bien conservés et ainsi, justifier la pertinence de nos simulations. Il est à noter que le système étant hamiltonien on pourrait mettre en œuvre un algorithme symplectique pour assurer une conservation exacte de l'énergie sans limite de temps.

2.4. LIMITES ET RÉSUMÉ DE LA MÉTHODE

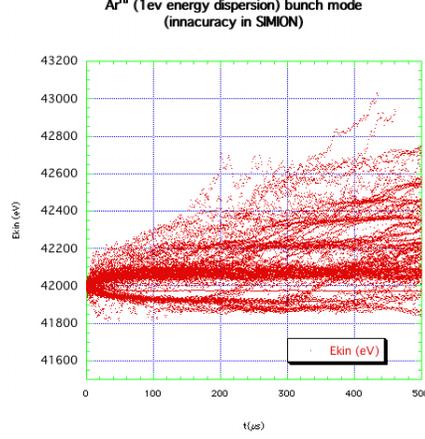


FIGURE 2.9 – Evolution de l'énergie pour des trajectoires calculées avec SIMION. Au bout de $500\mu\text{s}$, l'énergie peut avoir dérivé jusqu'à 2.5%.

2.4 Limites et résumé de la méthode

2.4.1 Cas d'application

Néanmoins cette méthode souffre d'une limitation provenant d'un point théorique subtil qui a été mis en avant après sa publication. En physique l'expression "la transformation conforme conserve le laplacien" est souvent employée mais le laplacien évoqué est le laplacien défini dans le cadre de l'analyse complexe qui coïncide avec le laplacien des coordonnées cartésiennes mais pas avec le laplacien des coordonnées cylindriques. Le terme en $\frac{1}{r}$ de l'équation (2.1) n'est pas invariant par transformation conforme. Pour tenter de quantifier cette erreur et de comprendre pourquoi la méthode semble fonctionner dans le cas de notre géométrie, reprenons quelques points d'analyse complexe.

$\phi(x, y)$ est une fonction harmonique du plan Z et son gradient complexe est $\nabla_c \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y}$. En utilisant cette définition et les règles de dérivation en chaîne, on peut relier le gradient complexe de ϕ à celui de $\psi(u(x, y), v(x, y))$ du plan W par la relation :

$$\nabla_c \phi = \overline{f'(z)} \nabla_c \psi. \quad (2.23)$$

où f est la transformation conforme définie par $u + iv = f(x + iy)$. La même procédure appliquée aux dérivées de ϕ et l'emploi des relations de Cauchy (2.15) permet d'établir :

$$\Delta \phi = |f'(z)|^2 \Delta \psi. \quad (2.24)$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le laplacien des coordonnées cartésiennes. Cette dernière égalité montre que si ϕ est harmonique dans Z , ψ est harmonique dans W . En coordonnées cylindriques, le laplacien s'écrit $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \phi}{\partial y}$. On réarrange le

CHAPITRE 2. POTENTIEL ANALYTIQUE PAR TRANSFORMATION CONFORME

laplacien pour isoler le terme d'erreur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) |f'(z)|^2 + \frac{1}{\text{Im}(z)} \text{Im}(\nabla_c \phi) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial v} E \right) |f'(z)|^2 \end{aligned}$$

où E vaut :

$$E = \frac{\text{Im} \left[\frac{\nabla_c \psi}{f'(z)} \right] \text{Im}[f(z)]}{\text{Im}[z] \text{Im}[\nabla_c \psi]} \quad (2.25)$$

et doit être égal à 1 pour que la méthode soit exacte.

Dans notre cas, $E - 1 \ll 1$ ce qui explique que la méthode donne de bons résultats. De manière plus générale, l'expression précédente montre que la méthode fonctionne tant qu'aucune des électrodes ne s'approche trop de l'axe (par rapport aux autres). Il existe une autre façon de voir (2.25). En écrivant,

$$\begin{aligned} \rho &= \epsilon_0 (1 - E) \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ &= \epsilon_0 \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \left(\frac{\text{Im}[\nabla_c \psi]}{\text{Im}[f(z)]} - \frac{\text{Im} \left[\frac{\nabla_c \psi}{f'(z)} \right]}{\text{Im}[z]} \right), \end{aligned}$$

on définit une charge d'espace fictive qui apparaît à cause du terme non invariant. L'équation de Laplace cylindrique se transforme donc en une équation de Poisson par transformation conforme. Notre méthode est valable tant que la charge fictive reste petite comparée à la charge des électrodes. Dans le cas contraire, on pourrait penser à une méthode itérative qui corrigerait un paramètre jusqu'à ce que la solution soit satisfaisante.

2.4.2 Conclusion

Après avoir présenté la méthode de Bertram permettant de calculer le potentiel entre deux cylindres de même rayon, j'ai d'abord généralisé la méthode à un nombre quelconque de cylindres, puis, en utilisant la transformation de Schwarz Christoffel, j'ai pu appliquer cette méthode à un ensemble d'électrodes ayant des rayons différents. Bien qu'il y ait des cas où la méthode ne fonctionne pas (cas peu nombreux, car dans les applications de physique des particules chargées, les électrodes coupent rarement l'axe de propagation), elle nous a permis d'établir une formule analytique du potentiel de l'EIBT qui dépend des cinq potentiels des électrodes. Cette formule va maintenant nous permettre d'étudier, d'un point de vue inédit, les caractéristiques du mouvement des ions dans un tel piège.

3

Dynamique linéaire dans le piège

3.1 Introduction

3.1.1 Importance du mouvement radial

Grâce aux résultats du chapitre précédent, nous allons pouvoir étudier le mouvement des ions en prenant en compte le degré de liberté radial. Ceci va nous permettre d'étudier la stabilité des trajectoires et la synchronisation tout en mettant en exergue une physique très riche.

3.1.2 L'équation de Mathieu pour le piège de Paul

Puisque nous ferons de nombreuses fois référence à la dynamique dans le piège de Paul, nous allons rapidement présenter les équations du mouvement des particules chargées dans un piège quadripolaire. A la différence de notre piège dont le potentiel a été déterminé après la conception, le piège de Paul a été conçu à partir d'une formule analytique. Pour piéger des particules dans un espace à trois dimensions, l'objectif est de créer une force qui converge vers un point. En outre, pour avoir le mouvement le plus simple possible, on cherche une force dépendant linéairement de la distance, c'est-à-dire qui dérive d'un potentiel quadratique :

$$U(x, y, z) = \frac{\phi_0}{2d^2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2). \quad (3.1)$$

L'équation de Laplace $\Delta U = 0$ impose $A+B+C = 0$. Cette égalité peut être vue comme l'expression mathématique du théorème de Earnshaw qui stipule qu'il est impossible de créer un minimum du potentiel avec des champs statiques : le piégeage peut être effectué selon x et y mais pas selon z ou selon z mais pas selon x et y . En effet, comme nous pouvons le voir sur la Fig. 3.1, le potentiel a toujours la forme d'une selle. Le cas $A = B = 1, C = -2$ est intéressant car il présente une symétrie cylindrique par rapport à z . Ce potentiel peut être créé par l'assemblage de deux électrodes de forme hyperbolique comme représentées sur la Fig. 3.1.

CHAPITRE 3. DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

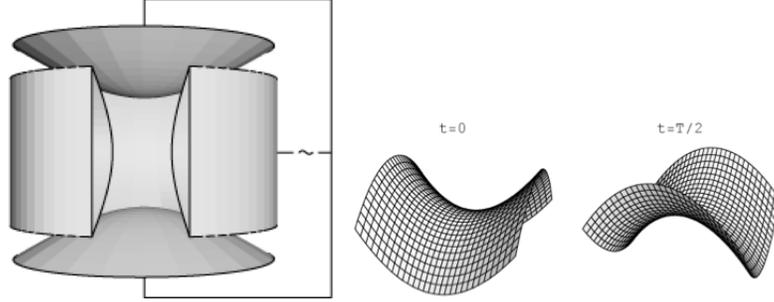


FIGURE 3.1 – Gauche : les deux électrodes hyperboliques constituant le piège de Paul. Une tension sinusoïdale est appliquée entre les deux parties. Droite : potentiel à l’intérieur du piège à deux instants différents. Ce potentiel peut être vu comme une selle tournant sur elle même.

Pour effectuer un piégeage selon toutes les directions, l’astuce consiste à faire tourner la selle à très haute fréquence. En ajustant correctement l’amplitude du potentiel et la fréquence de rotation, on parvient à créer un potentiel moyen en cuvette créant une force qui confine dans les trois directions de l’espace. Pour cela, il suffit de choisir un potentiel de la forme

$$\Phi(x, y, z) = \frac{U_0 + V_0 \cos(\Omega t)}{2d^2} (x^2 + y^2 - 2z^2). \quad (3.2)$$

qui peut être créé en appliquant une tension sinusoïdale entre les deux électrodes du piège de Paul. Avec cette formule, les équations du mouvement selon les trois directions, obéissent à une équation de Mathieu de la forme :

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + (a - 2q \cos(2\tau))u(\tau) = 0 \quad (3.3)$$

où les coefficients a , q et τ s’expriment directement en fonction des tensions U_0 et V_0 et $u = x, y$ ou z . L’équation (3.3) est le point de départ de toute l’étude du piège de Paul et son apparente simplicité n’est pas étrangère à l’engouement pour ce type de piège.

L’introduction précédente avec le piège de Paul est fondamentale pour bien comprendre les mécanismes qui sont à l’œuvre dans l’EIBT. Il y a en effet, *une analogie conceptuelle entre les deux pièges*. Pour comprendre la stabilité radiale dans notre piège, il faut nous placer dans le référentiel des particules, et imaginer que le potentiel varie autour de nous. Au lieu d’un potentiel quadratique tournant, nous voyons un potentiel quadratique qui évolue à cause de la translation longitudinale. Au moment où nous sommes dans un creux du potentiel selon l’axe longitudinal, le potentiel selon l’axe radial est déstabilisant, il tend à nous pousser hors de l’axe. À l’inverse lorsque nous sommes au sommet d’une bosse du potentiel longitudinal, le potentiel radial tend à nous rapprocher de l’axe z . Ainsi nous ne sommes pas dans une selle qui tourne sur elle-même

3.2. THÉORIE DE FLOQUET ET STABILITÉ

mais bien plutôt sur une selle dont le pommeau et le troussequin montent et descendent successivement. Contrairement au piège de Paul, où on utilise un champ qui varie périodiquement, la stabilité radiale dans l'EIBT vient du mouvement périodique longitudinal des ions dans un champ statique.

3.2 Théorie de Floquet et stabilité

3.2.1 L'équation de Hill de l'EIBT

Pour déterminer l'équation du mouvement des ions dans notre piège, nous partons de la formule analytique du potentiel déterminée dans le chapitre précédent, et nous nous limitons au deuxième ordre. Cette approximation est justifiée par la décroissance rapide des termes de la série, ainsi que par la faible extension radiale que nous allons utiliser.

$$V(r, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^{2n}} r^{2n} V^{(2n)}(0, z) \simeq V(z) - \frac{1}{4} r^2 \frac{d^2 V(z)}{dz^2}. \quad (3.4)$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, nous obtenons les équations suivantes qui régissent le mouvement selon les deux degrés de liberté :

$$\begin{aligned} \frac{m}{q} \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{dV(z)}{dz} + \frac{1}{4} r^2 \frac{d^3 V(z)}{dz^3} \\ \frac{m}{q} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{1}{2} r \frac{d^2 V(z)}{dz^2}. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir des équations sans dimension, nous effectuons les substitutions suivantes : $z \rightarrow \frac{z}{L}$, $r \rightarrow \frac{r}{L}$, $t \rightarrow \frac{t}{\tau}$, $V_i \rightarrow \frac{V_i}{E}$ où L est la moitié de la taille du piège (22cm), $v_0 = \sqrt{\frac{2qE}{m}}$, E est la tension d'accélération et $\tau = \frac{L}{v_0}$. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \left(-\frac{dV(z)}{dz} + \frac{1}{4} r^2 \frac{d^3 V(z)}{dz^3} \right) \quad (3.5a)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2} r \frac{d^2 V(z)}{dz^2} \quad (3.5b)$$

Il s'agit d'un système couplé non linéaire dont l'étude va s'avérer ardue. Pour commencer, nous allons, dans tout ce chapitre, faire une *approximation linéaire*. Elle va nous permettre de réduire ce système à une équation linéaire non autonome du deuxième ordre. Pour cela, nous allons découpler le mouvement longitudinal du mouvement radial, en résolvant d'abord le mouvement sur l'axe z et en injectant la solution obtenue dans l'équation radiale. Avec les conditions initiales suivantes, $z(0) = 0$, $\frac{dz}{dt} = 1$ et en restant sur l'axe $r = 0$, (3.5a) nous permet de calculer le mouvement sur l'axe $z(t)$, qui est périodique de période

CHAPITRE 3. DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

T. En substituant dans (3.5b), nous obtenons une équation dite de Hill [67] :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2 V(z)}{dz^2} \Big|_{z(t)} \right)}_{\Psi(t)} r = 0. \quad (3.6)$$

L'équation de Hill, bien qu'elle paraisse simple, représente déjà un défi mathématique. L'équation de Mathieu en est un cas particulier, où $\Psi(t) = a - 2q \cos(t)$. Son étude est assez ancienne par le fait que cette équation décrit un grand nombre de phénomènes comme par exemple l'évolution du périégée de la Lune en mécanique céleste [67] ou plus généralement le mouvement des systèmes périodiques forcés. Avant même la résolution de cette équation, il est intéressant de noter que nous avons établi une filiation entre notre piège et les pièges quadri-polaires. Cette filiation, est très intéressante car elle va nous permettre d'étudier l'EIBT suivant le chemin des développements des pièges quadripolaires.

3.2.2 Systèmes linéaires à coefficients périodiques

La méthode généralement utilisée pour étudier l'équation de Hill repose sur le calcul de déterminants infinis [68, 69, 70] ou sur l'approche de Whittaker [71] mais nous aborderons le problème sous autre angle.

L'équation de Hill peut être mise sous la forme d'un système linéaire à deux dimensions que nous écrivons sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (3.7)$$

où \mathbf{A} est une matrice 2×2 . Dans notre cas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Psi(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Commençons par rappeler des définitions et des résultats s'avéreront utiles par la suite.

Définition 1 Si $\mathbf{x}_1(t)$ et $\mathbf{x}_2(t)$ sont deux solutions de (3.7) alors la matrice $\mathbf{X}(t)$ dont les colonnes sont $\mathbf{x}_1(t)$ et $\mathbf{x}_2(t)$ est une solution dite matricielle, et si $\det[\mathbf{X}(t)] \neq 0 \quad \forall t$, alors $\mathbf{x}_2(t)$ est une solution matricielle fondamentale. Une solution matricielle fondamentale qui vérifie $\mathbf{X}(0) = I_d$ est appelée solution matricielle principale.

Théorème 1 (i) Si $\mathbf{X}(t)$ est solution fondamentale de (3.7) à l'instant t , alors elle l'est $\forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $\mathbf{X}(t)$ est une solution de (3.7) avec $\det[\mathbf{X}(t)] \neq 0$, alors la solution $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ qui vérifie $\phi(t_0, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ est donnée par

$$\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{X}(t)[\mathbf{X}(t_0)]^{-1}\mathbf{x}_0.$$

3.2. THÉORIE DE FLOQUET ET STABILITÉ

Théorème 2 (Formule de Liouville) : si $\mathbf{X}(t)$ est solution fondamentale de (3.7) alors

$$\det [\mathbf{X}(t)] = \det [\mathbf{X}(t_0)] \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Tr} \mathbf{A}(s) ds \right).$$

La preuve de ce théorème se trouve dans tout bon livre sur les équations différentielles (comme par exemple [72]). Supposons maintenant que $\mathbf{A}(t)$ soit périodique, c'est-à-dire $\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t)$. Si $\mathbf{X}(t)$ est une solution principale, alors $\mathbf{X}(t+T)$ est aussi une solution principale et il existe une matrice constante C telle que :

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)C \quad (3.9)$$

D'autre part, si $\mathbf{x}(t)$ est une solution telle que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{x}_0 \quad (3.10)$$

donc une solution arbitraire est le produit d'une solution fondamentale et d'une constante et

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{X}(t+T)\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(t)C\mathbf{x}_0. \quad (3.11)$$

On obtient donc les valeurs successives à chaque période en multipliant par C , qui peut être vue comme la matrice qui fait passer d'une section de Poincaré à la suivante. En utilisant la formule de Liouville, nous obtenons en outre :

$$\det [C] = \exp \left(\int_0^T \text{Tr} \mathbf{A}(s) ds \right)$$

Il est intéressant de noter que dans notre cas $\text{Tr} [\mathbf{A}(t)] = 0$, ce qui implique que $\det [C] = 1$. Si on se souvient que le déterminant peut être vu comme la surface du parallélogramme compris entre les deux vecteurs colonnes formant la matrice, le résultat précédent indique que les surfaces sont conservées lors du passage d'une section de Poincaré à l'autre.

3.2.3 Théorie de Floquet

L'outil adapté le à l'étude de l'équation de Hill est la théorie de Floquet. Elle consiste à étudier les valeurs propres de la matrice C . En effet, d'après (3.11), $\mathbf{x}(n) = C^n \mathbf{x}_0$. Pour que la solution soit stable, il faut que le rayon spectral de C soit inférieur à 1. C'est l'idée exprimée par le théorème de Floquet. Commençons par construire une solution principale

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, t_0) & \psi_2(t, t_0) \\ \dot{\psi}_1(t, t_0) & \dot{\psi}_2(t, t_0) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

où $\psi_1(t, t_0)$ est solution de (3.6) avec les conditions initiales $\psi_1(t_0, t_0) = 1$ et $\dot{\psi}_1(t_0, t_0) = 0$ et $\psi_2(t, t_0)$ avec $\psi_2(t_0, t_0) = 0$ et $\dot{\psi}_2(t_0, t_0) = 1$. D'après la remarque précédente, comme $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 0$, la formule de Liouville donne

$$\det [\mathbf{X}(t, t_0)] = 1 \quad (3.13)$$

CHAPITRE 3. DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

et ainsi l'équation caractéristique de la matrice de monodromie [73, 74] $\mathbf{X}(t_0+T)$ est donnée par :

$$x^2 - 2\Delta x + 1 = 0 \quad (3.14)$$

où

$$\Delta = \text{Tr}(M(t_0 + T)) = \frac{\psi_1(t_0 + T, t_0) + \dot{\psi}_2(t_0 + T, t_0)}{2}. \quad (3.15)$$

En appliquant le théorème de Floquet [69], nous savons que si $\Delta^2 > 1$, une des deux solutions est non bornée, tandis que si $\Delta^2 < 1$ il y a deux solutions du type :

$$r(t) = e^{\pm i \frac{\pi}{T} \beta t} p_{\pm}(t) \quad (3.16)$$

avec $p_{\pm}(t + T) = p_{\pm}(t)$ et $\Delta = \cos(\pi\beta)$. β est souvent appelé ‘‘paramètre de stabilité’’ [75]. Les solutions stables de l'équation de Hill peuvent donc s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier :

$$r(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{\pi}{T}(\beta+2n)t} \quad (3.17)$$

En conclusion, l'équation de Hill est stable et les particules sont piégées si et seulement si $|\Delta| < 1$, ce qui est équivalent à $0 + 2k\pi < \beta < 1 + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

3.2.4 Comparaison expérimentale

L'objectif est de vérifier les prédictions du modèle théorique précédent concernant la stabilité. Pour cela nous avons réglé la source d'ions pour avoir le maximum d'ions produits et un faisceau stable au cours du temps. Ensuite, nous avons fait varier deux des potentiels du piège et pour chaque réglage, nous avons déterminé le nombre d'ions piégés. Ceci nous a permis de tracer une carte de stabilité, inspirée du diagramme d'Ince-Strutt du piège de Paul, pour vérifier les prédictions théoriques.

Le protocole expérimental mis en place est décrit par la Fig. 3.2. Un faisceau d'ions est créé par la source ECR décrite dans le chapitre précédent et accéléré à $E = 5.2\text{keV}/\text{charge}$. Le dipôle magnétique permet une sélection des ions selon leur rapport $\frac{q}{m}$ et un hacheur de faisceau (chopper) aurait dû donner la possibilité d'injecter des paquets d'ions de taille déterminée (de 20ns à 100 μs). Hélas celui-ci ne fonctionnait pas durant la période des expériences. Dès que le paquet dépasse les électrodes d'entrée, initialement à la masse, celles-ci se voient appliquer leur potentiel nominal avant que le paquet, réfléchi par les électrodes de sortie n'ait le temps de revenir. Les ions oscillent ainsi entre les deux miroirs. Ces oscillations peuvent être observées par la charge d'influence du paquet d'ion sur l'électrode du pickup reliée à un oscilloscope et à un analyseur de spectre par l'intermédiaire d'un préamplificateur de charge (PAC 07 fabriqué par l'IPN d'Orsay).

Au bout d'un temps déterminé (typiquement 500 μs), les électrodes de sortie peuvent être mises à la masse, laissant les ions encore piégés s'arrêter dans la coupe de Faraday placée derrière le piège. Cette dernière est reliée à un

3.2. THÉORIE DE FLOQUET ET STABILITÉ

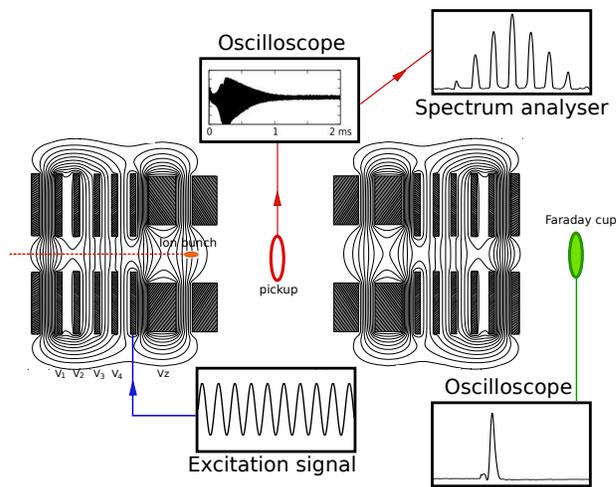


FIGURE 3.2 – Description de l’expérience. Les électrodes d’entrée, représentées par les rectangles hachurés, sont initialement à la masse pour l’injection du paquet (orange). Avant que le paquet ait le temps de revenir, on leur applique un potentiel suffisant pour que les ions oscillent entre deux barrières de potentiel. Au centre du piège, se trouve une électrode appelée “pickup” (en rouge) qui permet d’observer les oscillations en amplifiant la charge induite par le passage des ions à travers l’anneau. A l’arrière du piège, une coupe de Faraday (vert) permet d’obtenir une idée du nombre d’ions piégés. Une tension sinusoïdale peut être appliquée à une électrode initialement à la masse.

CHAPITRE 3. DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

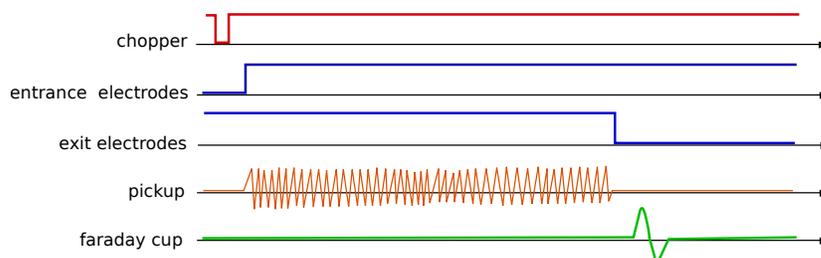


FIGURE 3.3 – Chronologie d’un cycle de piégeage. Le faisceau continu provenant de la source est dévié de manière intermittente par le chopper auquel on applique une tension constante qui dévie les ions sauf lorsqu’on décide d’injecter en le mettant à la masse. La tension des électrodes de sortie est appliquée avant que le paquet n’ait eu le temps de revenir et on commence à observer les oscillations sur le pickup. Après une mise à la masse des électrodes de sortie, on observe un signal du type de ceux indiqués par la Fig. 3.4 sur la coupe de Faraday.

préamplificateur de charge puis à un amplificateur C460. Les signaux ainsi recueillis (illustrés par la Fig. 3.4), ont une hauteur proportionnelle au nombre d’ions piégés dans cette configuration. L’erreur sur le nombre d’ions est de l’ordre de 10% mais ces signaux fournissent néanmoins, une bonne idée du nombre d’ions restant dans le piège. Un résumé chronologique se trouve sur la Fig. 3.3. Finalement, une tension d’excitation $V_{ex} \sin(\omega_{ex} t)$ où V_{ex} et ω_{ex} sont réglables, peut-être appliquée à une des électrodes initialement à la masse. V_{ex} ne dépassant pas 10V, il s’agit d’une petite excitation, mais qui peut, comme nous le verrons par la suite, déstabiliser complètement le mouvement. Dans la suite, les expériences ont été réalisées avec du Ne^{5+} à 5.2kV/charge. Seuls les potentiels V_1 et V_z sont variables, V_2 , V_3 et V_4 sont fixés à des valeurs constantes, respectivement 5.85kV, 4.15kV et 1.65kV.

La Fig. 3.5 est une comparaison de la théorie et de l’expérience. Les contours sont les ligne de niveau de $|\Delta| - 1$. La région de stabilité est définie par $|\Delta| - 1 < 0$. Le dégradé de couleur est proportionnel au nombre de particules encore piégées après $500\mu\text{s}$ dans la configuration (V_z, V_1) . Pour chaque point, nous avons moyenné plusieurs cycles décrit dans la Fig. 3.3. La résolution est 10V selon V_z et de 50V selon V_1 .

Limites de l’approximation linéaire

Toutes les zones où le piégeage est observable expérimentalement sont bien comprises dans les vallées de stabilité calculées avec notre modèle. Toutefois, comme on peut le voir sur la Fig. 3.5, il existe des endroits (comme par exemple le point C) où le piégeage est possible théoriquement mais n’a pas été observé expérimentalement. En complément de notre approche analytique, nous avons développé un programme de calcul en C++ qui utilise la bibliothèque GSL [76] permettant une conservation de l’énergie et du moment cinétique irréprochable

3.2. THÉORIE DE FLOQUET ET STABILITÉ

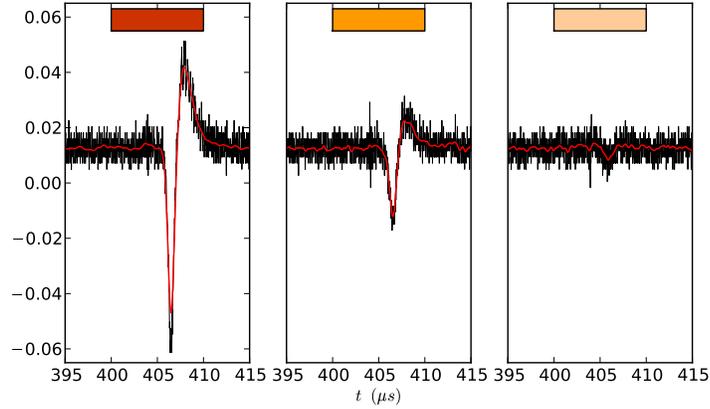


FIGURE 3.4 – Trois signaux caractéristiques provenant de la coupe de Faraday et donnant une information quantitative (après étalonnage) sur le nombre d’ions piégés. Les rectangles illustrent la couleur adoptée pour représenter chaque signal sur la Fig. 3.5.

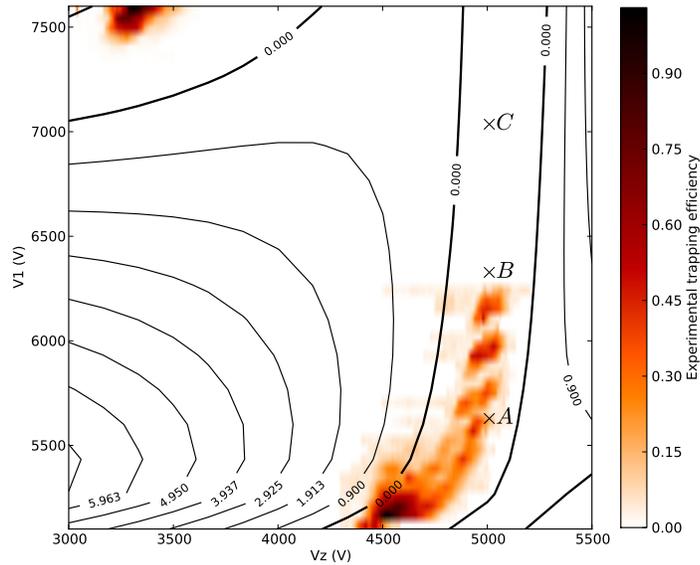


FIGURE 3.5 – Diagramme de stabilité : les lignes de niveau représentent des valeurs constantes de $|\Delta| - 1$ calculées avec notre modèle théorique. Le piégeage est théoriquement possible dans les zones où $|\Delta| - 1 < 0$. Le dégradé de couleur est proportionnel au nombre d’ions observé expérimentalement pour chaque point de fonctionnement (V_1, V_z) . Pour chaque point, nous avons fait plusieurs cycles décrit dans la Fig. 3.3 et fait la moyenne. La résolution est 10V selon V_z et de 50V selon V_1 .

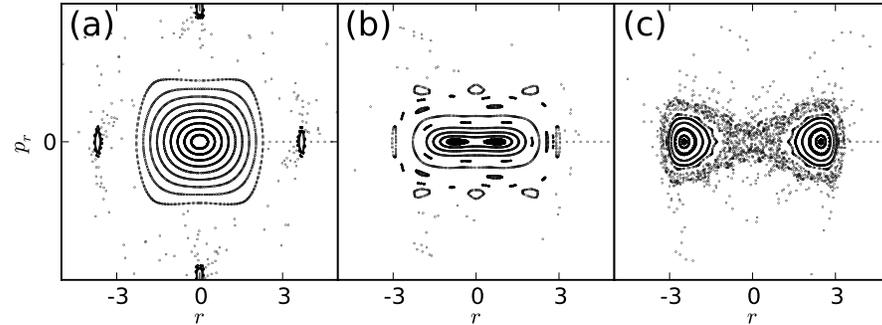


FIGURE 3.6 – Les trois sections de Poincaré correspondant respectivement aux points A , B et C de la Fig. 3.5. La position radiale est en abscisses et la quantité de mouvement radiale en ordonnées. On observe une transition vers le chaos par dédoublement de période (ce qui est confirmé par le fait que l'écart entre les deux îlots croît avec la racine carrée du paramètre).

sur plusieurs milliers de périodes. Basées sur notre potentiel analytique, cet outil est plus rapide et précis de plusieurs ordres de grandeur que les logiciels commerciaux comme Simion [7] (voir 2.3.5).

Avec ce programme performant nous avons pu tracer les sections de Poincaré de la Fig. 3.6 correspondant aux trois croix A , B et C de la Fig. 3.5. Les équation du mouvement (3.5) ont été intégrées en prenant en compte le terme quadratique r^2 de (3.5a), conduisant à un système d'équation non linéaires couplées. Les non-linéarités sont à l'origine de résonances non linéaires sur lesquelles nous reviendrons dans le chapitre suivant mais aussi d'un phénomène responsable de l'absence de piégeage en C . On observe que le point B se situe à la frontière d'une transition entre un cas où le portrait de phase est centré sur l'origine et un autre cas où le portrait de phase se divise en deux îlots dont l'écart augmente avec la racine carrée de V_1 . Il s'agit d'une bifurcation par dédoublement de période. Ceci démontre, que le piégeage est possible dans toute la zone prédite par la théorie de Floquet, mais qu'il est sans doute plus difficile à observer après la bifurcation.

Dans un autre régime

Pour confirmer les bons résultats précédents, nous présentons le diagramme de stabilité à 4.2keV/charge obtenu avec les mêmes ions et avec V_2 , V_3 et V_4 sont fixés à des valeurs constantes, respectivement 4.85kV, 3.15kV et 1.65kV.

3.2. THÉORIE DE FLOQUET ET STABILITÉ

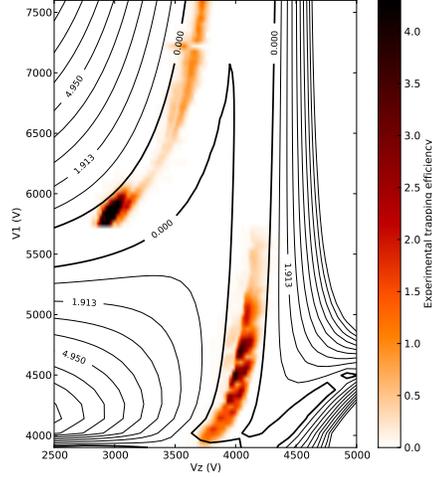


FIGURE 3.7 – Diagramme de stabilité à 4.2keV/charge : les lignes de niveau représentent des valeurs constantes du paramètre de stabilité β et le dégradé de couleur est proportionnel au nombre d'ions observé (moyenné sur vingt cycles) pour un point de fonctionnement (V_1, V_z) de la carte.

3.2.5 Influence de la charge d'espace et de la friction

Pour prendre en compte la charge d'espace, nous utiliserons une hypothèse de champ moyen : nous considérerons une particule au milieu de N autres particules identiques rassemblées dans une sphère de densité ρ à l'intérieur de laquelle le potentiel est :

$$U(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0},$$

où ϵ_0 la perméabilité du vide et r est la distance par rapport au centre de la sphère. L'équation de Hill (3.6) devient :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \left(\alpha + \frac{1}{2} \frac{d^2 V(z)}{dz^2} \Big|_{z(t)} \right) r = 0, \quad (3.18)$$

avec

$$\alpha = \frac{\rho L^2}{6\epsilon_0} \frac{1}{E}$$

qui est le rapport entre l'énergie cinétique et potentielle. L'équation (3.18) est exactement la même équation que (3.6) et se résout exactement de la même manière. L'influence de α est décrite dans la Fig. 3.8 : les vallées de stabilité sont plus fines et sont légèrement décalées vers la droite. La charge d'espace, comme on pouvait s'y attendre, a donc un effet déstabilisant.

En suivant l'exemple de [77, 78], nous ajoutons en termes de frottement dans l'équation du mouvement afin de prendre en compte la friction avec un

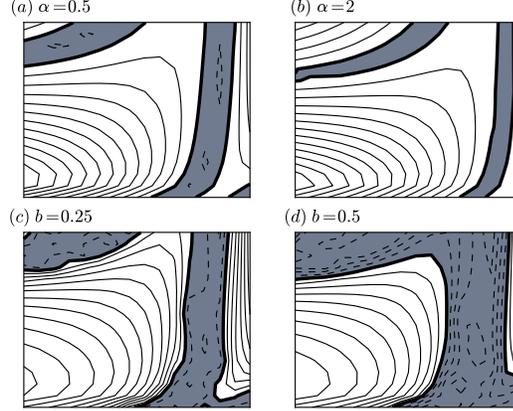


FIGURE 3.8 – En haut : influence de la charge d’espace sur le diagramme de stabilité : les zones stables sont réduites et décalées. En bas : influence du vide (de la friction) : les zones stables sont élargies. L’échelle est partout identique à celle de la Fig. 3.5.

gaz résiduel. Nous supposons que la loi de Stokes $\vec{F}_{stokes} = -6\pi\kappa R\vec{v}$ s’applique (voir [77] pour une justification de cette expression). R est le rayon de la section efficace, κ est la viscosité du milieu \vec{v} et la vitesse des ions. Cette friction permet une modélisation de l’interaction des particules entre elles par répulsion coulombienne. L’ajout de ce nouveau terme conduit à l’équation suivante :

$$\frac{d^2r}{dt^2} + b\frac{dr}{dt} - \left(\alpha + \frac{1}{2} \frac{d^2V(z)}{dz^2} \Big|_{z(t)} \right) r = 0,$$

avec

$$b = \frac{6\pi\kappa RT}{m}.$$

Le changement de variable $r(t) = \chi(t)e^{-\frac{bt}{2}}$ donne de nouveau une équation de Hill :

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} - \left(\alpha + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{d^2V(z)}{dz^2} \Big|_{z(t)} \right) \chi = 0, \quad (3.19)$$

pour prendre en compte le changement de variable lors du tracé du diagramme de stabilité, il faut prendre en compte b . En effet, si $\Delta^2 < 1$ la trajectoire est toujours stable mais si $\Delta^2 > 1$ alors $\chi(t) = e^{\pm i\pi\frac{\beta}{T}t} p_{\pm}(t)$ donc $r(t) = e^{(-b \pm i\pi\frac{\beta}{T})t} p_{\pm}(t)$ qui est stable si $b > i\pi\frac{\beta}{T}$. Le diagramme de stabilité s’obtient en traçant $i\pi\frac{\beta}{T} - b$. L’influence de b est décrite dans la Fig. 3.8 : les vallées stabilité sont plus larges. Les frottements ont un effet stabilisateur, comme c’est le cas dans le piège de Paul [77]. Nos expériences étant réalisées dans des vides excellents (10^{-10} mbar) avec des paquets d’ions relativement petits, nous n’avons pas été en mesure d’observer l’un ou l’autre de ces effets.

3.3. RÉSONANCE PARAMÉTRIQUE

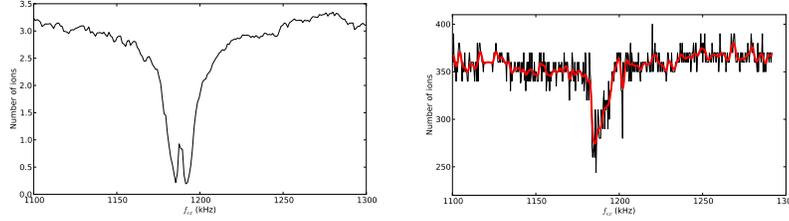


FIGURE 3.9 – Résonance paramétrique dans l’EIBT au niveau de f_z . A droite : observation expérimentale de la résonance avec Ne^{5+} à 5.2keV. A gauche : simulation avec 80 ions après 400 oscillations.

3.3 Résonance paramétrique

3.3.1 Observation expérimentale

La solution (3.17) de l’équation de Hill montre qu’il existe différentes fréquences de résonance du système. De la même manière qu’un pendule, excité à une fréquence proche de sa fréquence naturelle, va voir son amplitude augmenter à chaque cycle, les ions vont être déstabilisés si on les excite à une fréquence proche de leur fréquence de résonance. C’est dans ce but que nous avons connecté un générateur de signal à une des électrode (V_4) comme indiqué sur la Fig. 3.2. De la même manière que pour tracer les diagrammes de stabilité, nous avons fait plusieurs cycles de piégeage pour chaque valeur de la fréquence d’excitation pour obtenir la Fig. 3.9. Cette résonance a pu être simulée avec notre code de calcul mais la structure en double pic n’a pas pu être reproduite dans ce cas car les ions simulés ont tous le même déphasage par rapport à l’excitation. Nous reviendrons en détails sur ce point dans le chapitre suivant. La figure précédente a été obtenu en excitant les ions avec une fréquence proche de f_z . Nous avons aussi observé des résonances paramétriques aux fréquences $\frac{f_z}{2}$, $\frac{3f_z}{2}$ et $2f_z$.

3.3.2 Applications de la résonance paramétrique

La détection de résonance paramétrique a suscité beaucoup d’intérêt dans le cadre de l’étude des pièges quadripolaires [79, 80, 81]. En effet, elle est à la base d’une technique de spectroscopie de masse qui consiste à éjecter successivement les différentes espèces. En effet, chaque espèce possédant sa propre fréquence de résonance f_z qui est proportionnelle à $\sqrt{q/m}$, un balayage en fréquence d’excitation permet d’obtenir un spectre de masse. Nous aurons l’occasion de revenir plus en détail sur la spectroscopie de masse dans le dernier chapitre. D’autre part, une méthode récente [82], baptisée “kick-out selection technique”, propose de sélectionner les différentes espèces piégées simultanément dans le piège (lorsque celui n’est pas placé derrière un dipôle comme le nôtre) en faisant une boucle de rétroaction qui consiste à détecter puis exciter pour sélectionner les particules. Bien que cette technique fonctionne, il nous semble plus simple de

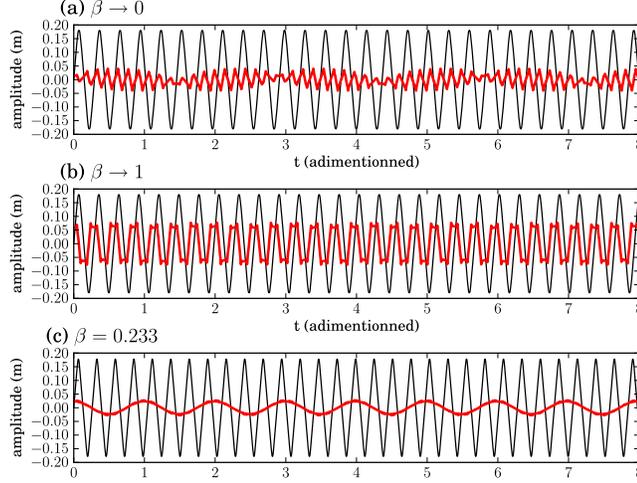


FIGURE 3.10 – Trajectoires longitudinales $z(t)$ (en noir, fin) et trajectoires radiales $r(t)$ (en rouge, épais, dont l’amplitude a été multipliée par 10) pour trois valeurs du paramètre de stabilité β . (a) ($V_2 = 5.2\text{kV}$, $V_z = 4.97\text{kV}$) (b) ($V_2 = 5.2\text{kV}$, $V_z = 4.45\text{kV}$) (c) ($V_2 = 7.6\text{kV}$, $V_z = 3.258\text{kV}$)

sélectionner les espèces en ajoutant une superposition d’excitations sinusoïdales sur l’une des électrodes, chaque sinusoïde ayant une fréquence d’oscillations d’une espèce que l’on veut éjecter hors du piège.

3.4 Etude du mouvement radial

3.4.1 Spectre radial et paramètre de stabilité β

L’analogie entre le piège de Paul et l’EIBT nous permis de tracer le diagramme de stabilité de la Fig. 3.5 qui est le pendant du diagramme de Ince-Strutt [75]. L’analogie peut être complétée en interprétant le paramètre de stabilité β en terme de mouvement radial. En effet, d’après l’équation (3.17), le spectre du mouvement radial contient les fréquences :

$$f_r = (\beta + 2n)f_z. \quad (3.20)$$

Nous pouvons calculer numériquement les trajectoires d’un ion pour différentes valeurs des potentiels, correspondantes différentes valeurs du paramètre β . La Fig. 3.10 représente le mouvement longitudinal $z(t)$ en noir et le mouvement radial $r(t)$ en rouge (ce mouvement à été multiplié par un facteur 10 pour clarifier la superposition des courbes). On remarque que le mouvement radial est modulé avec une période d’autant plus grande que β tend vers zéro. Ce cas correspond à l’approximation adiabatique : le mouvement radial peut être vu comme la

3.4. ETUDE DU MOUVEMENT RADIAL

TABLE 3.1 – Différentes valeurs de β calculées par deux méthodes indépendantes.

$V_1(V)$	$V_z(V)$	β numérique	β analytique
5200	4450	1.0	0.977
5200	4950	0.10	0.102
7600	3258	0.25	0.233

superposition d'un mouvement rapide (ayant la fréquence d'oscillation des ions) et d'un mouvement séculaire correspondant aux battements. Dans cette approximation, il est possible de montrer [75] qu'une solution approximative du mouvement s'écrit :

$$u(t) = C_1 (1 - C_2 \cos(\omega_z t)) \cos(\omega_r t) \quad (3.21)$$

où les C_i sont des constantes déterminées par les conditions initiales. C'est effectivement le type de solution qui est illustrée en haut de la Fig. 3.10. En calculant le rapport des périodes radiale et longitudinale, on obtient facilement le paramètre β . Ceci constitue une approche numérique du calcul de β . La comparaison avec les résultats analytiques prévus par la théorie de Floquet est illustrée dans le tableau Tab. 3.1, démontrant encore la pertinence des résultats donnés par cette approche.

3.4.2 Oscillations bétatron

Les oscillations radiales que nous avons décrites précédemment ont souvent été observées dans les anneaux de stockage, où elles ont été nommées oscillations bétatron [83]. Le rapport des fréquences d'oscillation longitudinale (dans le cas des anneaux de stockage il s'agit de la fréquence de rotation) et radiale (oscillations bétatron) joue un rôle très important dans la stabilité du faisceau. Ce nombre, appelé "tune parameter", dépend des conditions initiales, c'est-à-dire des conditions d'injection du faisceau. Il est bien connu des expérimentateurs utilisant des anneaux de stockages, que lorsque ce paramètre est un nombre rationnel, le faisceau est systématiquement déstabilisé. La Fig. 3.11 est un agrandissement de la Fig. 3.5 où nous avons représenté (ligne pointillée) les lignes de niveau de β où cette grandeur est constante égale à un nombre rationnel. On constate effectivement que le piégeage est moins efficace sous ces lignes, ce qui constitue une preuve indirecte de l'existence de ces oscillations bétatron ainsi que la validité de la détermination de leur valeur grâce à la théorie de Floquet.

3.4.3 Observation expérimentale

Le mouvement radial décrit précédemment a pu être mis en évidence expérimentalement. Avec le même protocole que pour exciter la résonance paramétrique,

CHAPITRE 3. DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

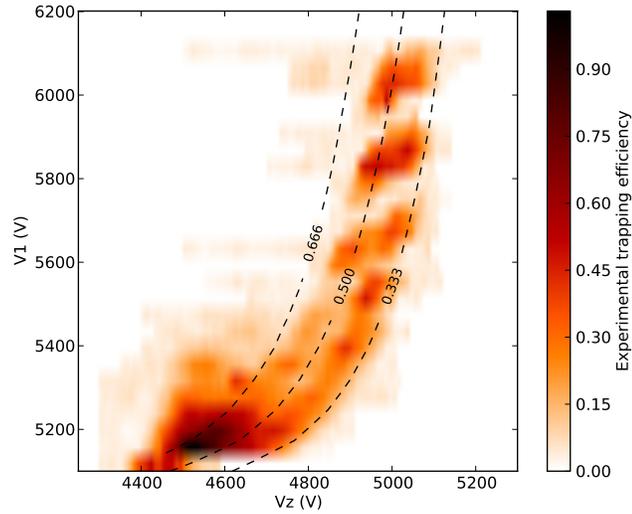


FIGURE 3.11 – Agrandissement du coin inférieur droit de la Fig. 3.5 où les lignes verticales représentent des valeurs rationnelles du rapport $\frac{f_r}{f_z}$: on constate que le nombre d'ions piégés est moindre sous ces lignes à cause du couplage entre le mouvement longitudinal et le mouvement radial.

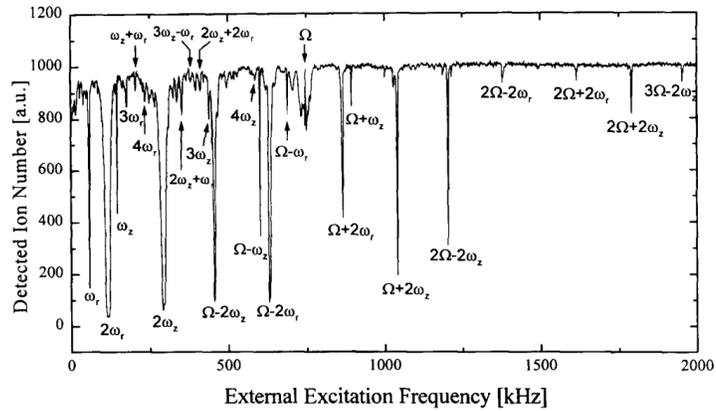


FIGURE 3.12 – Observation des résonances paramétriques dans le piège de Paul [84].

3.5. SYNCHRONISATION NATURELLE

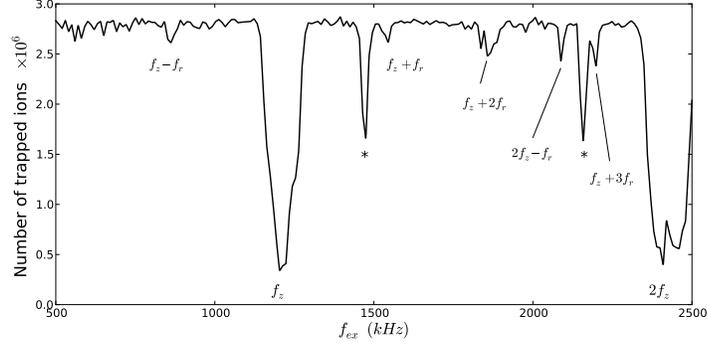


FIGURE 3.13 – Observation des résonances combinées entre le mouvement radial et le mouvement longitudinal dans l'EIBT.

nous avons pu exciter les résonances combinées du mouvement longitudinal et du mouvement. Cela avait été fait dans un piège de Paul [84] comme le montre la Fig. 3.12. Ces résonances apparaissent lorsque la fréquence d'excitation est une combinaison des fréquences radiales et longitudinales qui vérifie :

$$n f_z + m f_r = k f_{ex} \quad (n, m, k) \in \mathbb{Z}^3 \quad (3.22)$$

La Fig. 3.13 présente les résultats expérimentaux : nous avons effectué plusieurs balayages en fréquence pour confirmer la positions des pics d'absorption obtenus. La principale difficulté de cette manipulation réside dans la nécessité d'avoir un faisceau d'intensité constante pendant tout le balayage qui peut prendre plusieurs dizaines de minutes. Les pics de résonances où le piégeage est déstabilisé correspondent bien au position prédites par la théorie de Floquet par l'intermédiaire du paramètre β qui permet de calculer la fréquence radiale.

3.5 Synchronisation naturelle

La synchronisation, que nous avons déjà mentionné au premier chapitre, est un phénomène contre intuitif découvert il y a déjà une dizaine d'années et qui n'est toujours pas bien compris. Nous allons commencer par une présentation rapide des modèles théoriques existants, puis nous allons montrer comment des mesures récentes mettent en défaut ces deux modèles. Nous présenterons finalement notre modèle de la synchronisation, qui, par une coïncidence tout à fait heureuse, repose lui aussi sur une équation de Hill.

3.5.1 Modèles existants

Rapidement après la publication de l'observation expérimentale de la synchronisation du mouvement des ions dans l'EIBT [14], un modèle théorique

CHAPITRE 3. DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

unidimensionnel a été proposé [13]. Ce modèle considère le mouvement d'une particule test (repérée par z_a) par rapport à un paquet de N autres particules identiques (repéré par z_b) à l'intérieur d'un potentiel unidimensionnel décrit par V . Le Hamiltonien de ce système à deux corps s'écrit :

$$H = \frac{p_1^2}{2Nm} + \frac{p_2^2}{2m} + NqV(z_b) + qV(z_a) + qU(z_a - z_b) \quad (3.23)$$

où $U(x) = -\frac{\rho x^2}{6\epsilon_0}$ représente l'interaction entre le paquet et la particule séparés de x et p_i sont les quantités de mouvement. Les auteurs ne cherchent pas à résoudre les équations du mouvement qui découle d'un tel Hamiltonien. Fidèles à la méthode des matrices issue de l'optique géométrique, propre à la communauté de l'EIBT, ils définissent une matrice M_T qui représente l'évolution du système dans l'espace de phase (x, p) , et une matrice M_I représentant une interaction entre les particules. x et p sont les coordonnées relatifs du problème à deux corps. Ces deux matrices s'écrivent :

$$M_T = \begin{pmatrix} -1 & \frac{T}{m^*} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\rho q}{3\epsilon_0} T & 1 \end{pmatrix}$$

où T est la demi période du mouvement, $m^* = -m \frac{t_s + t_f}{t_s - t_f}$ est la masse effective (t_s et t_f sont respectivement les temps passés dans la zone sans champ et dans les miroirs). Les conditions de synchronisation se déduisent du fait que $|Tr[M_T M_I]| < 2$ pour que le mouvement soit stable d'une part et que la déviation de x soit inférieure au rayon R_0 du paquet d'autre part, afin que l'expression du champ d'interaction reste valable. De ces deux contraintes se déduisent les deux conditions suivantes :

$$0 < -\frac{\rho q}{3\epsilon_0} \frac{T^2}{m^*} < 4, \quad \rho > \frac{4(t_s - t_f)\epsilon_0 p_0^2}{mq(t_s + t_f)R_0^2}. \quad (3.24)$$

Le principal intérêt de ce modèle est de prédire l'existence d'une charge d'espace critique au-dessous de laquelle la synchronisation n'est pas possible.

Le second modèle théorique mentionné [13], produit par la même équipe, ne présente pas de différence essentielle dans l'approche, hormis la prise en compte des déformations du paquet d'ions. Toujours avec la méthode des matrices, les auteurs proposent une autre formule du nombre minimal d'ions nécessaires à la synchronisation :

$$N_{min} = \frac{3\sqrt{2\pi} d^{3/2} F^{3/2}}{\mathcal{I} \sqrt{mq}} \Delta T_i, \quad (3.25)$$

où d est le diamètre du faisceau, F est le gradient de champ dans les miroirs, ΔT_i est la dispersion spatiale du paquet et \mathcal{I} est une constante donnée par une intégrale.

3.5.2 Données expérimentales

Les prédictions des modèles précédents n'ont pu être mises à l'épreuve que très récemment [10]. En effet, il est très difficile, dans un EIBT, de distinguer

3.5. SYNCHRONISATION NATURELLE

les différents phénomènes : la décroissance du nombre d'ions et la diminution du signal par désynchronisation se manifestent de manière concomitante. Dans ces conditions, déterminer le temps de synchronisation naturelle est quasiment impossible. Le seul moyen consiste à augmenter le temps de piégeage ainsi que le temps d'observation et de améliorer le vide dans le piège pour accroître le rapport signal sur bruit. Ces deux objectifs sont remplis par l'EIBT cryogénique développé au Max Planck Institute (MPI) de Heidelberg [9]. Ce piège, qui permet des temps de piégeage de plusieurs ordres de grandeur supérieurs à ce à quoi nous sommes habitués (jusqu'à 600s), nécessite une infrastructure importante car il est refroidi à l'hélium liquide. Ceci explique que les observations concernant le temps de synchronisation naturelle soient si récentes.

En comparant les temps de synchronisation naturelle de deux espèces et en connaissant le nombre initial d'ions injectés on peut tester les prédictions théoriques concernant la charge d'espace minimale nécessaire à la synchronisation. Le N_2^+ est piégé à 7.1keV avec un nombre initial d'ions à l'intérieur du paquet de 10^7 tandis que Al_2^- est piégé à 6keV avec des paquets de $2 \cdot 10^7$ ions. Le temps de synchronisation est de $\tau_{N_2^+} = 5s$ dans le premier cas et de $\tau_{Al_2^-} = 2.5s$ dans le second.

Il est clair que ces résultats sont en contradictions avec les deux modèles théoriques cités précédemment car :

- le premier modèle prévoit $\frac{\tau_{N_2^+}}{\tau_{Al_2^-}} \simeq 0.7$
- le second modèle prévoit $\frac{\tau_{N_2^+}}{\tau_{Al_2^-}} \simeq 0.6$

comparé à la valeur expérimentale de $\frac{\tau_{N_2^+}}{\tau_{Al_2^-}} \simeq 2.0 \pm 1.0$. Cette différence dans les résultats ne peut pas être expliquée par des phénomènes de pertes dues aux collisions car le vide est tel (10^{-14} mbar) que ces effets peuvent être complètement négligés.

3.5.3 Equation de Hill de la synchronisation

Nous proposons ici une approche théorique différente de la synchronisation naturelle. Nous partons des mêmes bases que le modèle précédent : une particule test repérée par z_a et un paquet de N ions en z_b . Nous noterons $\zeta = z_b - z_a$ l'écart entre les deux positions. En écrivant le principe fondamental de la dynamique pour les deux objets et en soustrayant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} &= \ddot{z}_b - \ddot{z}_a = \left(\frac{F_{a \rightarrow b}}{m_b} - \frac{F_{b \rightarrow a}}{m_a} \right) - \frac{Nq}{m_b} V'(z_b) + \frac{q}{m_a} V'(z_a) \\ &= \frac{F_{a \rightarrow b}}{\mu} - \frac{q}{m} (V'(z_b) - V'(z_a)) \end{aligned}$$

où $\mu = \frac{Nm^2}{N+m} \simeq m$ (car $N \gg 1$) est la masse réduite et $F_{a \rightarrow b}$ est la force d'interaction de a sur b . En notant Z le centre de masse de ce système ($z_b =$

CHAPITRE 3. DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

$Z + \frac{\zeta}{N+1}$ et $z_a = Z - \frac{N\zeta}{N+1}$), nous obtenons, en supposant que $\zeta \ll Z$:

$$\begin{aligned} V'(z_b) - V'(z_a) &= V' \left(Z + \frac{\zeta}{N+1} \right) - V' \left(Z - \frac{N\zeta}{N+1} \right) \\ &\simeq V'(Z) + \frac{\zeta}{N+1} V''(Z) - V'(Z) + \frac{N\zeta}{N+1} V''(Z) \\ &= \zeta V''(Z) \end{aligned}$$

Finalement, avec $F_{a \rightarrow b} = \frac{\rho q}{3\epsilon_0} \zeta$,

$$\ddot{\zeta} = \left(\frac{\rho q}{3\epsilon_0 m} - \frac{q}{m} \frac{d^2 V}{dz^2} \Big|_{z(t)} \right) \zeta$$

qui est une équation de Hill. En utilisant les mêmes changements de variable que dans les sections précédentes, cette équation devient :

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \left(\alpha - \frac{d^2 V}{dz^2} \Big|_{z(t)} \right) \zeta. \quad (3.26)$$

Avec les outils qui nous ont permis de prédire la stabilité du mouvement radial, nous allons pouvoir étudier l'écart ζ entre la particule et le paquet. Lorsque cet écart ne diverge pas, il y a synchronisation. Il faut noter que la synchronisation de deux oscillateurs de van de Pol avaient déjà été étudiée grâce à une équation de Hill [85].

3.5.4 Résonances synchrones-radiales

Il est difficile d'étudier la synchronisation de manière expérimentale avec notre piège. D'une part, à cause d'un vide qui pourrait être meilleur ainsi qu'une électronique sans doute trop bruyante, il nous est difficile de piéger pendant plus de quelques dizaines de millisecondes. D'autre part, les amplificateurs de charges ne sont pas suffisamment rapides pour fournir une information pertinente sur la longueur du paquet. Il y a pourtant un phénomène observable, qui nécessiterait de plus amples investigations, et qui semble montrer la présence de la synchronisation dans la zone prédite par la théorie de Floquet. La Fig. 3.14 est une superposition des cartes de stabilité de l'équation de Hill radiale (noir) et de l'équation de Hill de la synchronisation (bleu). Comme le montre cette figure, la synchronisation n'est possible que dans la zone inférieure droite de la carte de stabilité. En outre, dans cette zone à la fois stable et synchrone, nous avons tracé les lignes pour lesquelles

$$n\beta_r + m\beta_s = k \quad \forall (n, m, k) \in \mathbb{Z}^3 \quad (3.27)$$

où β_r et β_s sont les paramètres de stabilité respectifs du mouvement radial et du mouvement de synchronisation. Ces lignes semblent coïncider dans les deux cas avec des zones où le piégeage est moins efficace. Cette observation est le pendant des vallées souvent appelées "black holes" de la carte de stabilité du piège de

3.5. SYNCHRONISATION NATURELLE

Paul [86, 87, 88]. Une étude précise de ces résonances, ainsi qu'un meilleur protocole expérimental, permettrait sans doute d'intéressantes découvertes dans le domaine de la spectroscopie de masse en utilisant la technique décrite par [88, 87].

3.5.5 Analyse des expériences du Max-Planck Institute

Stabilité

Les dimensions précises du piège cryogénique du MPI sont données dans [10]. J'ai ainsi pu modifier mon code de calcul pour l'adapter à ce type d'EIBT. Commençons par regarder les diagramme de stabilité correspondants aux paramètres utilisées pour les expérience décrites précédemment. M. Froese, auteur de [10] nous dit que les meilleurs paramètres de piégeage sont donnés par les ratios des potentiels sur la tension d'accélération $\{1.303, 1.067, 0.666, 0.357, 0.923\}$ pour $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_z\}$ respectivement. Sur la Fig. 3.15, on voit que les paramètres choisis empiriquement (point rouge) correspondent effectivement aux paramètres optimaux prévus par la théorie de Floquet. Dans la suite, nous noterons avec un indice $_s$ les grandeurs se rapportant à l'équation de Hill de la synchronisation et avec un indice $_r$ celles qui se rapportent à l'équation de Hill du mouvement radial.

Durées de synchronisation

Avec les données concernant la taille du paquet fournies par le MPI, nous pouvons estimer que dans leurs expériences $\alpha_{Ne_2^+} = 0.344$ et $\alpha_{Al_2^-} \simeq 2\alpha_{Ne_2^+}$. En traçant les cartes de stabilité, nous voyons que les points de fonctionnement sont hors de la zone stable de synchronisation, les solutions de l'équation de Hill de la synchronisation prévoient donc une croissance exponentielle de la taille du paquet ζ , mais la proximité avec la frontière laisse présager un croissance lente. D'après le modèle développé dans la section précédente, la taille $\zeta(t)$ du paquet au cours du temps varie comme :

$$\zeta(t) = \zeta_0 e^{\gamma_s t} \quad (3.28)$$

où ζ_0 est la longueur du paquet à l'injection (que nous avons calculé en multipliant la vitesse des ions par la durée temporelle du paquet) et

$$\gamma_s = \frac{1}{T} \ln \left[\Delta_s + \sqrt{\Delta_s^2 + 1} \right] \quad (3.29)$$

est le coefficient de la synchronisation calculé à partir de l'équation de Hill (3.26). Si γ_s est imaginaire pur alors le paquet oscille longitudinalement (ce qui peut aboutir aux résonances évoquées précédemment) et si γ_s a une partie réelle positive, la taille du paquet augmente. Nous pouvons alors définir un temps de synchronisation τ_s comme :

$$\tau_s = \frac{1}{\gamma_s} \ln \left(\frac{L}{\zeta_0} \right) \quad (3.30)$$

CHAPITRE 3. DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

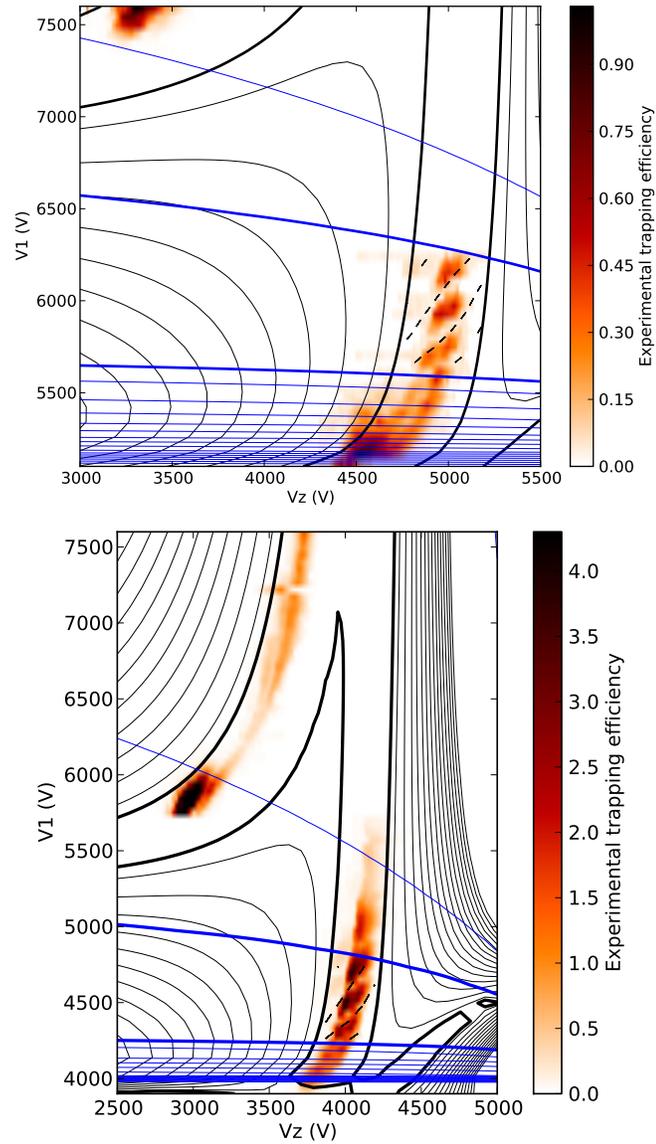


FIGURE 3.14 – Superposition de la carte de stabilité radiale (noir) et de la carte de la synchronisation naturelle (bleu). Dans la zone stable et synchrone, les lignes où le piégeage semble moins efficace coïncident avec les lignes où $n\beta_r + m\beta_s = k \quad \forall (n, m, k) \in \mathbb{Z}^3$. Il y a donc un couplage entre le mouvement radial et la synchronisation.

3.5. SYNCHRONISATION NATURELLE

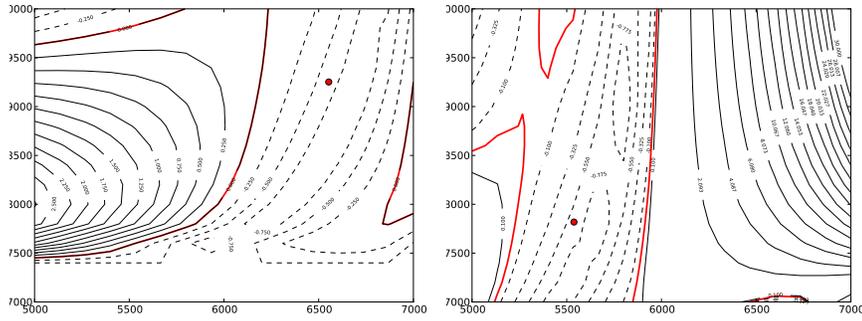


FIGURE 3.15 – Cartes de stabilité radiale avec le piège du MPI (gauche : pour N_2^+ , droite : pour Al_2^-). Les point rouges sont les points utilisés par M. Froese ; ils correspondent effectivement aux optimum prédit par la théorie de Floquet.

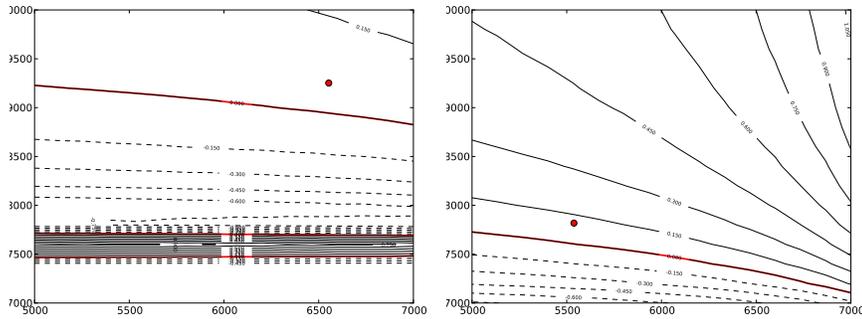


FIGURE 3.16 – Cartes de synchronisation avec le piège du MPI en prenant en compte la charge d'espace ($\alpha_0 = 0.344$ et le double) (gauche : pour N_2^+ , droite : pour Al_2^-). Les point rouges sont les points utilisés par M. Froese.

CHAPITRE 3. DYNAMIQUE LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

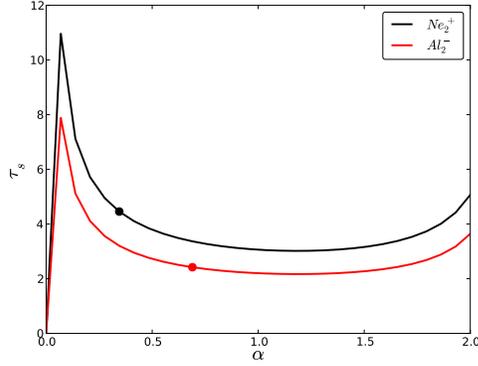


FIGURE 3.17 – Durée de la synchronisation pour les deux espèces en fonction de α .

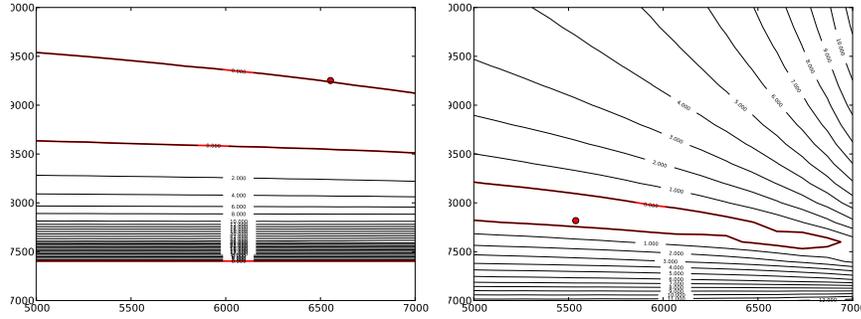


FIGURE 3.18 – Cartes de synchronisation avec le piège du MPI en prenant en compte une plus grande charge d'espace ($\alpha_0 = 2$ et le double) (gauche : pour N_2^+ , droite : pour Al_2^-). Les points rouges sont les points utilisés par M. Froese.

qui correspond au temps nécessaire pour que le paquet atteigne la taille L du piège. Avec les données fournies dans [10], nous calculons $\zeta_0(Ne_2^+) = 0.44m$ et $\zeta_0(Al_2^-) = 0.58m$. La Fig. 3.17 montre la durée de synchronisation prévue par la théorie de Floquet. Les ronds sur les courbe représentent les points de fonctionnement : en effet on injecte deux fois plus d'ions Al_2^- que d'ions Ne_2^+ alors que les paquets ont la même taille, ce qui implique $\alpha_{Al_2^-} \simeq 2\alpha_{Ne_2^+}$. Nous trouvons des valeurs parfaitement cohérentes avec les résultats expérimentaux du MPI ($\tau_{Ne_2^+} = 4.8s$ et $\tau_{Al_2^-} = 2.4s$). Il est intéressant de tracer les diagrammes de stabilité de la synchronisation pour des charges d'espace plus élevées comme sur la Fig. 3.18. Dans ce cas, le point de fonctionnement est (pour Al_2^-) dans la zone de stabilité de la synchronisation et celle-ci n'est donc pas limitée en temps.

3.5. SYNCHRONISATION NATURELLE

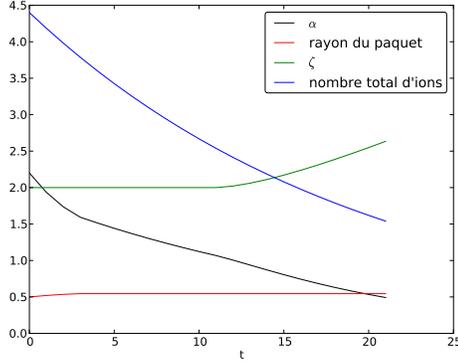


FIGURE 3.19 – Simulation des différentes grandeurs lors du piégeage. On constate que la décroissance initiale du nombre d’ions peut s’expliquer par un accroissement du rayon du paquet.

Décroissance initiale

M. Froese cherche à expliquer la décroissance rapide du nombre d’ion en début d’injection par la diffusion ion-ion interne au paquet. Sans succès (cf [10]). Je pense que cette perte rapide en début de piégeage est due à une charge d’espace initialement trop importante, qui fait sortir le point de fonctionnement de la zone de stabilité et qui engendre une perte exponentielle du nombre d’ions (dictée par le coefficient de Floquet $\gamma_r = \frac{1}{T} \ln [\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 1}]$). Cette perte s’arrête lorsque la charge d’espace est suffisamment faible pour que le point de fonctionnement se retrouve à l’intérieur de la zone de stabilité radiale. Si on considère que le paquet est un cylindre uniformément chargé de longueur ζ et de rayon r contenant N particules, nous avons :

$$\alpha = \frac{N(t)}{\text{Volume}} = \frac{N(t)}{\pi r_0^2 e^{2\gamma_r t} \zeta_0 e^{\gamma_s t}}$$

En prenant une décroissance exponentielle lente pour $N(t)$ (les processus de perte ont toujours lieu quoique très lentement) et en discrétisant en temps ($t_n = nT$), nous pouvons calculer α_{n+1} en fonction de α_n . Connaissant α_{n+1} nous obtenons r_{n+1} et ζ_{n+1} et en déduire α_{n+2} ainsi de suite. Le résultat de cette discrétisation est donné par la Fig. 3.19. On remarque qu’après injection, il y a une augmentation du rayon du paquet liée à une diminution de α . C’est ce phénomène qu’essayait d’expliquer M. Froese par la diffusion et qui est dû à la stabilité des trajectoires radiales. Il est intéressant de noter que la synchronisation (qui se manifeste par la constance de ζ) dure jusqu’à ce que les pertes négligeables finissent par faire passer α sous la valeur critique de synchronisation. A partir de ce moment, la taille du paquet augmente rapidement.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tiré profit de la formule analytique développée dans le chapitre précédent pour écrire les équations de la dynamique des particules chargées dans l'EIBT. La stabilité des trajectoires est régie par une équation de Hill dont l'étude a été entreprise en utilisant la théorie de Floquet. En plus d'avoir pu mettre en évidence une analogie entre les pièges électrostatiques de type EIBT avec les pièges quadripolaires, cette étude analytique nous a permis d'étudier la stabilité et les phénomènes liés au mouvement radial. L'accord entre la théorie analytique, les résultats numériques et l'expérience témoigne de la pertinence de cette nouvelle approche. Finalement, nous avons pu montrer que le phénomène de synchronisation naturelle est lui aussi régi par une équation de Hill. C'est ainsi que grâce à une seule équation différentielle linéaire nous avons pu expliquer la quasi-totalité des phénomènes observés dans notre piège et donner une interprétation aux expériences récentes du Max Planck Institute qui réfutent les modèles développés précédemment.

4

Dynamique non linéaire dans le piège

Introduction

L'aspect le plus déroutant de la mécanique quantique vient de ses prédictions probabilistes alors que la théorie est déterministe. Ceci résulte d'une perte d'information lors d'un processus de mesure qui se traduit par la projection sur un espace de Hilbert. L'étude de la dynamique de particules chargées dans un champ électromagnétique peut paraître un problème relativement simple en comparaison de la mécanique quantique. Néanmoins, la présence de chaos dans le piège est un phénomène nouveau et tout aussi inattendu. En effet, le chaos peut surgir dans un système déterministe et deux trajectoires avec des conditions initiales quasi-identiques divergent l'une de l'autre à cause de l'influence des termes non-linéaires.

La théorie du chaos, indissociable de la dynamique dite "non linéaire", est née des travaux de Henri Poincaré. En étudiant le problème à trois corps de la mécanique céleste (étude du mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement par attraction gravitationnelle), ce dernier pu mettre en évidence l'existence de trajectoires très complexes et imprévisibles désormais qualifiées de chaotiques. Par la suite, d'autres mathématiciens de renom (Birkhoff, Kolmogorov, Arnold, Moser, Cartwright etc.) poursuivirent sur cette voie mais leurs travaux, de par l'approche formelle des mathématiques, restèrent hors de portée des physiciens jusqu'à récemment. C'est l'ordinateur qui, en offrant la possibilité de modéliser et de simuler des systèmes trop complexes pour être étudiés de manière analytique, démontra la présence du chaos dans bon nombre d'expériences (pendules excités, écoulements de Rayleigh-Benard etc.). C'est seulement alors que les travaux des mathématiciens furent exploités pour donner des bases solides à cette branche de la physique.

Ce chapitre est l'occasion de montrer la diversité et la complexité apportés par les non-linéarités. L'ajout d'un seul terme quadratique dans les équations du mouvement donne naissance à tout une grande variété de résonances non linéaires et de comportements chaotiques. Nous verrons ensuite que l'ajout d'un champ d'excitation sinusoïdal sur une des électrodes fait de L'EIBT un oscillateur non linéaire forcé où ces prédictions mathématiques prennent vie.

4.1 Résonances non linéaires dans le système autonome

4.1.1 Théorie

Le chapitre précédent, a permis de poser les bases de la compréhension de la dynamique dans l'EIBT en tronquant les équations du mouvement pour obtenir un système linéaire. Comme nous l'avons déjà remarqué pour expliquer certaines parties du diagramme de stabilité (Fig. 3.5), certains phénomènes ne peuvent être envisagés que dans un cadre plus large, comprenant les termes non linéaires des équations différentielles du mouvement. Dans ce chapitre, nous allons étudier le système d'équations non linéaires couplées suivant :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \left(-\frac{dV(z)}{dz} + \frac{1}{4} r^2 \frac{d^3 V(z)}{dz^3} \right) \quad (4.1a)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2} r \frac{d^2 V(z)}{dz^2}. \quad (4.1b)$$

Il s'agit d'un système autonome d'ordre quatre, qui peut être réduit à l'ordre deux par l'utilisation de deux intégrales premières du mouvement qui se déduisent de la conservation de l'énergie et de la conservation du moment cinétique.

4.1.2 Apparition de nouvelles fréquences

Un des problèmes rencontrés avec le fonctionnement du piège fut l'apparition de modulation du signal du pick-up [8, 89]. Non seulement ce signal était très instable mais en plus la modulation était difficilement explicable par des phénomènes connus. Après avoir testé toutes les hypothèses aussi bien expérimentales (stabilité des potentiels des électrodes, alignement correct du piège et du faisceau, influence d'autres systèmes sur l'électronique de détection etc.) que théoriques (orbites particulières des ions, mouvement interne du paquet dû à la charge d'espace etc.), il a fallu se tourner vers la physique non linéaire. La difficulté de la compréhension de ces oscillations, vient aussi du fait que nous avons très peu de sources d'information sur ce qui se passe dans le piège. Avant que j'installe un retardateur permettant d'ouvrir la sortie du piège au bout d'un temps déterminé pour savoir s'il restait encore des ions dans le piège, la seule information venait du signal du pickup. Il est difficile de comprendre des phénomènes complexes concernant des particules invisibles lorsque leur présence ne se manifeste que par le biais d'un signal créé par passage d'une charge à travers un anneau ; ce signal étant déformé par une électronique complexe.

Le seul paramètre qui semblait avoir une influence sur ces oscillations était le potentiel appliqué à la lentille de Einzel V_z . J'ai donc enregistré une série de spectres (transformé de Fourier du signal du pickup) pendant que je faisais varier V_z . Tous les potentiels sont fixés pour être dans la zone de stabilité du coin supérieur gauche de la Fig. 3.5 et V_z prends les valeurs successives indiquées

4.1. RÉSONANCES NON LINÉAIRES DANS LE SYSTÈME AUTONOME

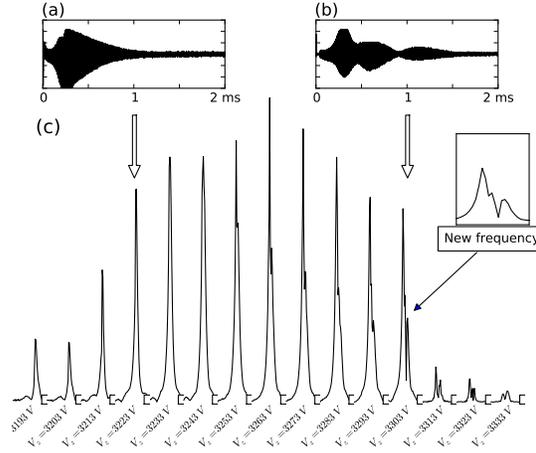


FIGURE 4.1 – (a) représente une succession de spectres, tous centrés sur f_z avec le même intervalle (350kHz) pour différentes valeurs de V_z . Les autres potentiels étant fixés ($\{V_1 = 7600V, V_2 = 5850V, V_3 = 4150V, V_4 = 1650V, V_z\}$). (b) est le signal temporel observé sur le pickup pour $V_z = 3223V$. (c) est le signal du pickup pour $V_z = 3303V$. On remarque bien l'apparition de la modulation d'enveloppe due à l'apparition de nouvelles fréquences.

en bas de chaque spectres de la Fig. 4.1. Les modulations du pickup (encadrés supérieurs) sont reflétées par de petits pics apparaissant à quelques kHz de f_z qui disparaissent en s'agrégeant au pic central.

En pratique, ceci démontre qu'un réglage fin de V_z permet de supprimer ces modulations. En théorie, ces observations semblent révéler l'existence d'un phénomène physique, associé au mouvement des ions eux-mêmes.

L'origine de l'apparition de ces fréquences peut être expliquée en observant l'évolution des sections de Poincaré lorsque l'on fait varier V_z . Ces sections de Poincaré montrent bien la richesse du mouvement non linéaire. En effet, on voit apparaître des îlots dans les sections de Poincaré. Ces îlots sont dûs à une résonance entre le mouvement longitudinal et le mouvement radial et c'est ce phénomène que nous appelons *résonance non linéaire* car il n'est possible que dans le cas où nous prenons en compte les termes non linéaires des équations du mouvement.

Dans le cas linéaire exposé au chapitre précédent, la section de Poincaré du système n'a pas été présentée car elle n'est constituée que de cercles concentriques (elle est obtenue aisément par l'itération de la matrice C donnée par l'équation (3.9)). La Fig. 4.3 est une comparaison entre le cas linéaire et le cas non linéaire. Avec des équations linéaires, il n'y a pas d'îlots. (En fait, ils sont de mesure nulle et ils correspondent au cas où β est rationnel, on parle alors de tore dégénéré.)

Dans le cas non linéaire, nous pouvons voir l'apparition de résonances

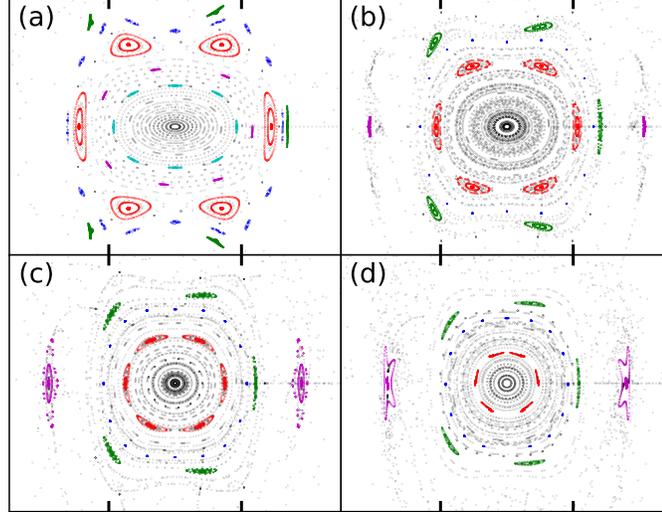


FIGURE 4.2 – Sections de Poincaré pour différentes valeurs de V_z : (a) $V_z = 3200\text{V}$, (b) $V_z = 3280\text{V}$, (c) $V_z = 3330\text{V}$ et (d) $V_z = 3360\text{V}$. Les couleurs permettent de repérer les îlots (g_8 en turquoise, g_7 en mauve, g_6 en rouge, g_5 en vert et g_2 en violet.) On observe la naissance et la disparition des différents groupes d'îlots de résonances non linéaires. Les tirets en haut et en bas de chaque figure représentent le diamètre du pickup.

non linéaires sur la Fig. 4.2 correspondant à des îlots de stabilité. Ces îlots apparaissent en nombre entier et ont chacun une fréquence longitudinale différente. Nous désignerons par g_i le groupe des i îlots et noterons f_z^i la fréquence associée. Ces résonances non linéaires ne sont possibles que parce qu'une importante quantité d'énergie peut être transférée entre le mouvement radial et le mouvement longitudinal.

La Fig. 4.2 montre l'évolution des résonances non linéaires en fonction de V_z . Lorsque V_z augmente, on constate que les îlots de g_6 se resserrent vers le centre, pour finalement y disparaître. Sur la dernière section, les îlots de g_5 apparaissent et commencent à converger vers le centre. Les quatre tirets en haut et en bas de chaque section représentent le diamètre de l'électrode du pickup. On constate donc que les îlots rentrent successivement dans la zone de mesure.

Tab. 4.1 présente le calcul de la différence entre f_z^0 (correspondant à une particule se propageant le long de l'axe) et la fréquence f_z^i d'une particule appartenant au groupe g_i . L'accord est assez satisfaisant avec ce qui peut être observé expérimentalement (Tab. 4.2) car l'erreur sur la mesure expérimentale est de 500Hz à cause de l'instabilité du signal. Notre interprétation est donc que chaque nouvelle pic de la Fig. 4.1 correspond à l'entrée dans le rayon limité du pickup, d'un nouveau groupe de résonances non linéaires. Ceci semble

4.1. RÉSONANCES NON LINÉAIRES DANS LE SYSTÈME AUTONOME

TABLE 4.1 – Différence calculée entre f_z^0 et f_z^i .

V_z (V)	δf_z^8 (kHz)	δf_z^7 (kHz)	δf_z^6 (kHz)	δf_z^5 (kHz)
3200	1.258	1.791	2.269	2.776
3230	0.771	1.404	2.144	2.474
3280			1.540	1.894
3300			1.022	
3330			0.662	1.320
3360			0.298	

TABLE 4.2 – Différence observée entre f_z^0 et f_z^i . L’erreur est de l’ordre de 500Hz.

V_z (V)	δf_z^8 (kHz)	δf_z^7 (kHz)	δf_z^6 (kHz)	δf_z^5 (kHz)
3200	0.93	1.40	2.17	3.02
3230	0.41	1.06		2.37
3280		0.7	1.6	
3300		0.46	1.26	1.98
3330			0.70	1.410

être confirmé par le fait que les instabilités peuvent être supprimées (ainsi que les pics intempestifs du spectre) par une diminution du diamètre des fentes en amont du piège. Des expériences plus précises avec un piégeage plus long, et même l’installation d’un système de visualisation du faisceau permettraient de confirmer ces premiers résultats.

4.1.3 Effet stabilisant des résonances non linaires

Le terme “non linéaire” est souvent associé à la notion d’instabilité. En réalité, ils peuvent être stabilisants et on parle de “criticité”. Le meilleur exemple pour illustrer cela est celui d’une réaction nucléaire en chaîne : dans une centrale nucléaire on veut que les termes non linéaires aillent dans le sens opposé de l’instabilité linéaire pour éviter un trop grand relâchement d’énergie ; pour une bombe nucléaire on veut que les effets non linéaires aillent dans le même sens que l’instabilité linéaire. De manière contre intuitive, on dit qu’une centrale nucléaire est “surcritique” et une bombe “sous-critique”.

Dans le cas de notre piège il suffit de tracer les sections de Poincaré avec et sans les termes non linéaires des équations du mouvement pour se rendre compte que les non-linéarités ont un effet stabilisant et permettent une plus grande admissibilité radiale dans le piège comme le montre la Fig. 4.3. En contrepartie, cette plus grande admissibilité amène une plus grande instabi-

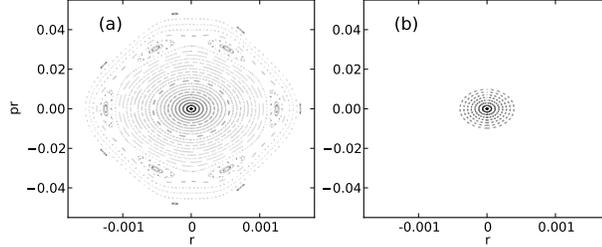


FIGURE 4.3 – Section de Poincaré des 200 dernières oscillations (sur 400 au total) pour des ions O^{4+} à 4.2kVcharge avec les termes non linéaires (gauche) et sans (droite). Les ions partent avec la même énergie en $z = 0$ avec un rayon compris dans $[0, 0.0016]$. On constate que les non linéarités autorisent des trajectoires excentriques alors que dans le cas linéaire, les ions ayant une distance de l’axe supérieure à 0.0005 ne sont pas piégés.

lité, comme nous l’avons montré avec la présence des résonances non linéaires discutées précédemment. Cette stabilisation a déjà été discutée auparavant [90].

4.2 Bifurcation vers le chaos

Nous allons maintenant montrer que, dans certaines conditions, les trajectoires des ions dans l’EIBT peuvent devenir chaotiques. Nous qualifions de chaotique une trajectoire qui change complètement d’aspect si on modifie très légèrement ses conditions initiales. Le terme communément employé est celui de “sensibilité aux conditions initiales”.

4.2.1 Bifurcation par doublement de période

La transition vers le chaos peut s’effectuer de différentes manières, mais nous nous attacherons à en décrire une en particulier. La bifurcation vers le chaos par dédoublement de fréquence, présente l’avantage d’être bien étudiée mathématiquement et observable physiquement dans de nombreux systèmes [91] et même dans un piège de Kingdon [24].

Le paragon de cette bifurcation est la transformation de Verhulst aussi appelée transformation logistique. Elle consiste à étudier l’évolution d’un système à une dimension décrit par la suite :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (4.2)$$

où r est un paramètre variable. Le comportement de ce système, apparemment simple, présente une grande diversité. Pour les faibles valeurs de r ($r < 3$), il existe un point fixe, comme illustré sur la Fig. 4.4. Pour une valeur légèrement supérieure à 3, on assiste à une alternance entre deux points fixes : il s’agit du premier dédoublement de période. Puis en augmentant la valeur du paramètre,

4.2. BIFURCATION VERS LE CHAOS

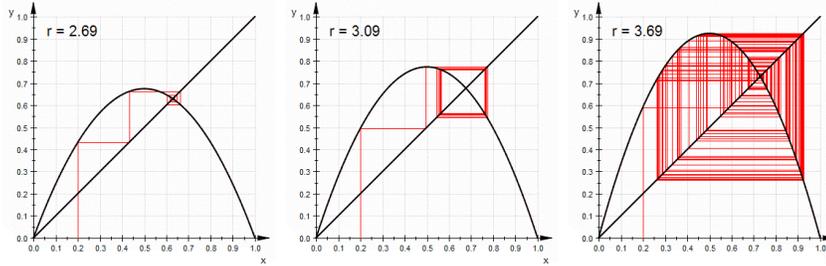


FIGURE 4.4 – Etude de la dynamique de la transformation logistique pour différentes valeurs du paramètre r . Pour $r < 3$, il y a un point fixe, puis, pour des valeurs de r plus élevées, il y a “deux points fixes” entre lesquels la système oscille, puis quatre etc. Les dédoublements successifs de période aboutissent au chaos.

chaque cycle se scinde en deux et ceci à l’infini aboutissant au chaos. Dans ce système, lorsque rr est suffisamment grand, le choix du point de départ aboutit à des solutions complexes dissemblables. La Fig. 4.5 représente ce phénomène en détails : chaque fourche correspond à un dédoublement de fréquence. Cette petite introduction unidimensionnelle prépare le terrain pour la section suivante qui étudiera la transformation bidimensionnelle d’une section de Poincaré à une autre. Il faut noter cependant que la transformation logistique est dissipative, ce qui n’est pas le cas du mouvement des particules dans le piège qui est hamiltonien.

4.2.2 Chaos et fractales dans l’EIBT

Revenons maintenant à notre piège. Nous allons étudier une transformation qui à un point (x_n, y_n) de la section de Poincaré du système après n oscillations, associe le point (x_{n+1}, y_{n+1}) . Le paramètre variable est la tension V_z appliquée à la lentille de Einzel.

Sur la Fig. 4.6, nous avons représenté, pour chaque valeur du potentiel d’électrode, la position radiale des points x_n constituant une section de Poincaré. On constate, une dynamique encore plus complexe que celle évoquée dans la section précédente (on pouvait s’y attendre car nous sommes en dimension plus élevée) présentant des successions de bifurcations de l’ordre vers le chaos et du chaos vers l’ordre. Dans les zones claires, les points sont attirés au même endroits indépendamment de leur conditions initiales tandis que dans les zones sombres, une petite variation des conditions initiales modifie énormément la trajectoire.

Ceci, prouve non seulement que la dynamique des particules dans un piège électrostatique est chaotique mais en plus, démontre que ce piège est un terrain d’expérimentation pratique pour l’étude de la physique non linéaire, car le paramètre de la bifurcation, au lieu d’être un objet abstrait, est une grandeur physique que l’on peut faire varier à souhait.

CHAPITRE 4. DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

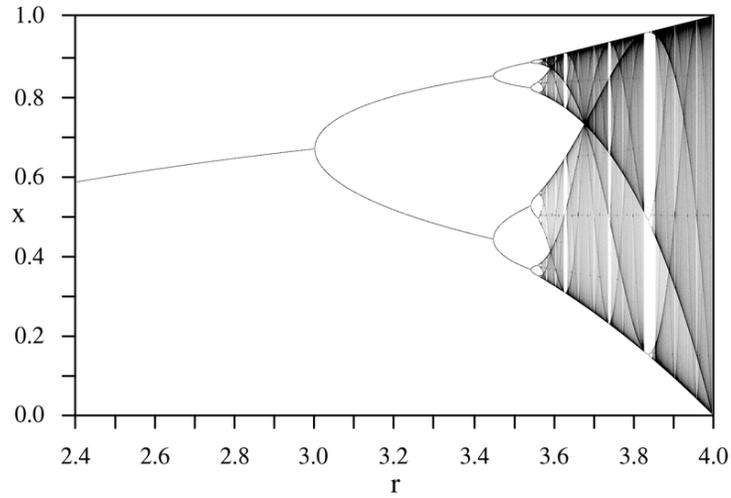


FIGURE 4.5 – Bifurcation vers le chaos de la transformation logistique par dédoublement infini de période : chaque fourche correspond à un dédoublement de fréquence

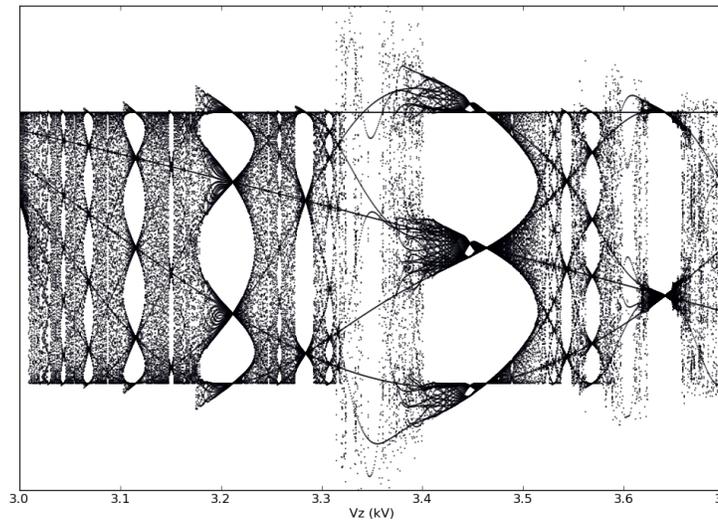


FIGURE 4.6 – Diagramme de bifurcation dans l'EIBT. Pour chaque valeur de V_z , on simule le mouvement d'une particule qui part de $z = 0$ et $r = 0.0056\text{m}$ pendant 100 aller-retours, puis on trace sur la ligne verticale correspondant à la valeur de V_z la distribution discrète des rayons de passage au centre du piège. Chaque formation d'un groupe g_i correspond à une transition chaos-ordre.

4.2. BIFURCATION VERS LE CHAOS

Des transitions similaires ont été observées dans les pièges de Paul [92, 93] et de Penning [94].

Contrairement à la dimension un, qui a pu être étudiée, et pour laquelle nous disposons de grandeurs bien déterminées (constante de Feigenbaum [72]), il existe très peu de résultats concernant l'étude du chaos en dimension supérieure. Aux frontières de ce monde encore inexploré, même les mathématiciens se contentent pour l'instant de l'expérimentation (numérique) et tentent de reconnaître, au milieu de ces objets protéiformes (sections de Poincaré, diagrammes de bifurcation, attracteurs etc.), des objets connus. Il existe de nombreux résultats dans le cas non dissipatif. Sans aller trop loin dans cette jungle, il est intéressant d'essayer de caractériser la structure du diagramme de bifurcation de la Fig. 4.6.

Les parties claires de ce diagramme correspondent à des intervalles d'accrochage de fréquence (pour ces valeurs de potentiel on assiste à la formation d'îlots de résonances non linéaires). Dans le cas linéaire, ces intervalles se réduisaient au points où β prenait une valeur rationnelle. Il semble donc que les non-linéarités transforment un ensemble de mesure nulle en un espace de mesure finie.

Au XIX^{ème} siècle, un mathématicien, Georg Cantor, montre qu'il est possible de construire une fonction partout dérivable, dont la dérivée est nulle mais qui pourtant "croît" de 0 à 1. En effet, si on prend $f_0(x) = x$ et qu'on définit f_1 comme la fonction affine par morceau qui vaut 0 en 0, 1 en 1 et $\frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, on peut construire une suite de fonction f_n où f_{n+1} est obtenue en remplaçant f_n sur chaque intervalle $[u, v]$ où elle n'est pas constante par la fonction linéaire par morceaux valant

$$\frac{f_n(u) + f_n(v)}{2} \quad \text{sur} \quad \left[\frac{2u+v}{3}, \frac{2v+u}{3} \right].$$

On montre que la fonction limite f va de 0 à 1 sur l'intervalle $[0, 1]$ tout en ayant une dérivée nulle sur un ensemble complémentaire d'un ensemble de mesure nulle, c'est à dire une fonction qui ne "croît" jamais ! La représentation graphique de cette fonction, illustrée sur la Fig. 4.7, porte le nom d'*escalier du diable*, car on "monte" de 0 à 1 avec une dérivée presque partout nulle. Cette fonction constitue un contre exemple qui a permis de faire avancer la théorie de la mesure de Lebesgue.

En physique, l'escalier du diable peut être considéré comme un canular mathématique destiné à réfuter un théorème et, pourtant, le diagramme de bifurcation de la Fig. 4.6, qui est le reflet d'un phénomène physique, possède une structure cantorienne. On peut distinguer la structure fractale mais pour mettre en évidence cette propriété, il est plus facile de la représenter sur une courbe.

La Fig. 4.8 représente la variance de la positions des points x_n de la Fig. 4.6. On constate une structure récurrente qui se répète de manière *self-similaire* sur chaque intervalle à mesure que l'on zoome sur la courbe. Il s'agit d'une fractale de la même espèce que l'escalier du diable et cette structure est présente dans la physique de l'EIBT.

CHAPITRE 4. DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

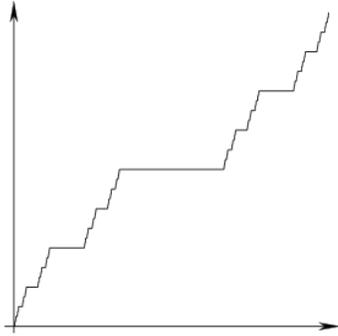


FIGURE 4.7 – Représentation graphique de la fonction limite f , souvent appelée *escalier du diable*.

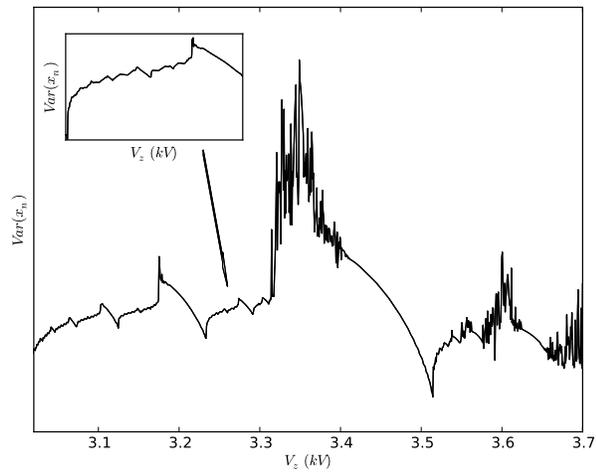


FIGURE 4.8 – Variance des positions sur la section de Poincaré en fonction du potentiel. On remarque une structure constituée d'une bouffée chaotique et d'une décroissance régulière. Cette structure se répète de manière self similaire, comme l'itération de la fonction de Cantor.

4.3. SYNCHRONISATION FORCÉE

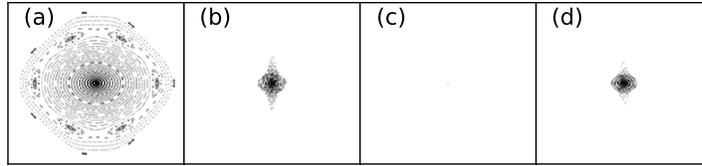


FIGURE 4.9 – Diagramme de phase après 400 oscillations dans le piège : (a) sans excitation, (b) avec $\omega_{ex} \preceq \omega_z$, (c) avec $\omega_{ex} = \omega_z$ et (d) avec $\omega_{ex} \succeq \omega_z$. Les résonances non linéaires ont disparu.

4.3 Synchronisation forcée

Dans cette partie, nous ajoutons une excitation sinusoïdale sur une des électrodes, créant ainsi un oscillateur non linéaire forcé. Cette excitation a une grande influence sur le mouvement des particules, aussi bien dans le plan radial que dans le plan longitudinal. Dans le plan radial et permet de modifier la structure des diagrammes de phase (on ne parle plus de sections de Poincaré car il n’y a plus conservation de l’énergie) et dans le plan longitudinal, elle permet de forcer une synchronisation (que nous appelleront “synchronisation forcée”), dont la durée temporelle n’est pas limitée, contrairement à la synchronisation naturelle. Cette synchronisation forcée peut être suggérée par nos expérience mais elle a été mis en évidence de manière remarquable au Max Planck Institute de Heidelberg [10] comme nous le verrons dans la suite de cette section.

4.3.1 Influence de l’excitation sur les sections de Poincaré

Il est très instructif de regarder les diagrammes de phase pour différentes valeurs de la fréquence d’excitation (on ne parle plus de sections de Poincaré car l’énergie n’est plus conservée). La Fig. 4.9 présente quatre sections : sans excitation, avec une excitation de fréquence inférieure à la fréquence de résonance, à la résonance, avec une excitation de fréquence supérieure à la fréquence de résonance. Comme on peut le constater, lorsque la fréquence d’excitation est comprise dans la largeur du pic (sans être exactement à la résonance paramétrique qui déstabilise quasiment entièrement le mouvement), les résonances non linéaires sont supprimées.

4.3.2 Influence de la phase

Le déphasage entre le signal d’excitation et le mouvement des ions joue un rôle important dans la dynamique. Cette dépendance en phase est confirmée par les résultats expérimentaux du MPI comme illustré sur la partie droite de la Fig. 4.10 où le temps de piégeage dépend de la phase choisie. Dans notre cas, nous ne pouvons pas voir directement l’influence de la phase à cause de l’absence d’un hacheur efficace. La taille de notre paquet est déterminée par la montée brusque des électrodes d’entrée qui coupent une bonne partie du faisceau continu

CHAPITRE 4. DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

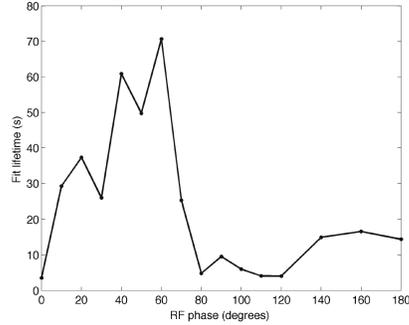


FIGURE 4.10 – Durée expérimentale de la synchronisation forcée en fonction de la phase. Pour une valeur de la phase fixée, plusieurs cycles de piégeage ont été effectués et la durée de la synchronisation a été reporté en ordonnées. D’après [10].

qu’on injecte dans le piège. Nous estimons que notre paquet fait initialement une vingtaine de centimètres. Il est donc difficile de définir une phase car chaque partie du paquet voit un déphasage différent.

En revanche, notre modèle numérique permet de montrer l’influence de la phase sur la synchronisation. La Fig. 4.11 montre que l’ajout d’une excitation périodique induit une modulation du mouvement longitudinal. Cette modulation étant deux ordres de grandeur plus faible que l’amplitude du mouvement lui-même, il est plus clair de représenter la quantité de mouvement p_z à chaque traversée de la surface définie par $z = 0$. Pour tracer la partie gauche de cette figure, nous avons simulé cinq particules ayant les mêmes conditions initiales (et $z = 0$) excepté les écarts à l’axe longitudinal qui sont répartis sur $[0, 0.0016]$. Pour la partie droite, nous avons augmenté le nombre d’ions à 100 pour obtenir plus de statistique et tracer les histogrammes. Comme on peut le voir sur la Fig. 4.11, sans excitation la quantité de mouvement en $z = 0$ est constante sur le millier d’oscillations simulées. Dès que V_{ex} augmente, p_z oscille autour de sa valeur moyenne avec une fréquence qui dépend à la fois de V_{ex} et de ψ , ψ étant le déphasage initial entre les ions et l’excitation. L’encadré est un agrandissement montrant la répartition des points (t_i, p_{z_i}) constitutifs des courbes. A droite, l’histogramme représente la répartition des temps de passage en $z = 0$ au bout de 1000 oscillations pour 100 particules. Sans excitation, il y a une diffusion lente due à la légère différence de conditions initiales. Avec excitation, certaines valeurs du déphasage (cas central) séparent complètement les trajectoires tandis que d’autres (cas du bas) empêchent toute diffusion. Ce dernier cas est le cas de la synchronisation forcée (RF-bunching).

L’expérimentation numérique précédente permet de montrer d’une part l’existence de la *synchronisation forcée* qui dépend fortement du déphasage entre l’excitation et les ions et, d’autre part, que la présence d’un potentiel d’excitation périodique est synonyme d’une modulation de l’amplitude du mouvement lon-

4.3. SYNCHRONISATION FORCÉE

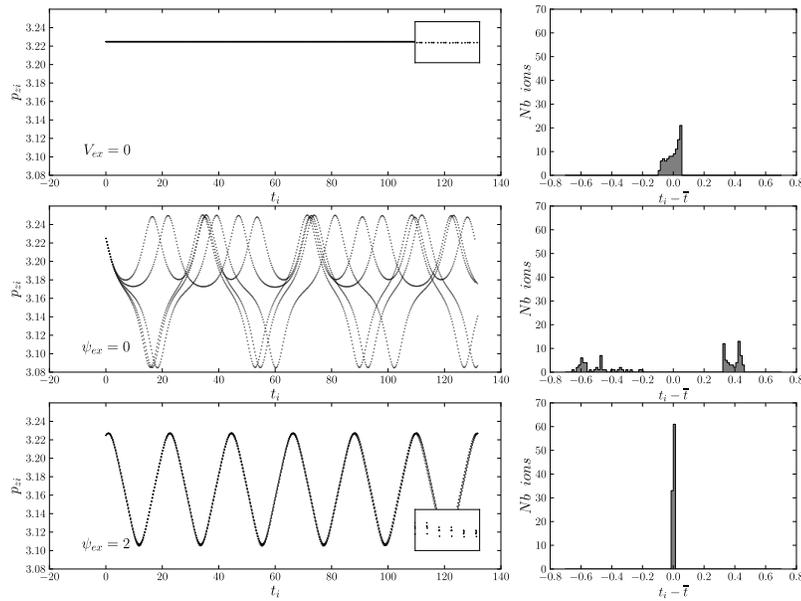


FIGURE 4.11 – A gauche, chaque point représente (t_i, p_{z_i}) , temps et quantité de mouvement au i ème passage à travers le plan $z = 0$ pour différentes valeurs de l’amplitude d’excitation et de phase pour 5 particules lancées avec différentes positions radiales. A droite, les histogrammes représentent la dispersion des temps du 100ème passage à travers le plan $z = 0$ pour 100 particules. On observe une diffusion lente sans excitation, une diffusion rapide avec une excitation n’ayant pas la bonne phase et un phénomène de verrouillage de phase (“phase-locking”) avec un bon choix des paramètres d’excitation.

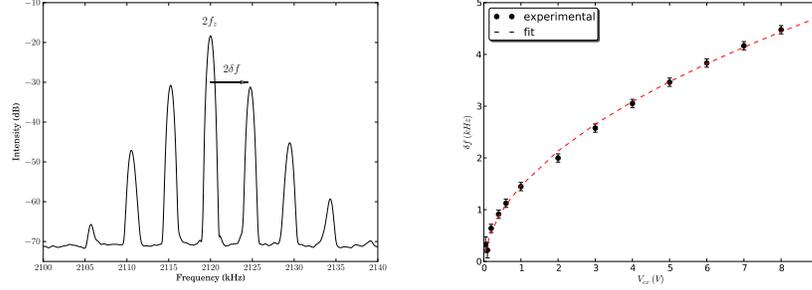


FIGURE 4.12 – Gauche : spectre expérimental représentant le peigne de fréquence que nous obtenons lorsque l’excitation est quasi résonante. Droite : variation de δf avec l’amplitude de l’excitation V_{ex} .

itudinal. Cette modulation a pu être observée expérimentalement : lorsqu’on excite les ions à une fréquence voisine de leur fréquence de résonance et qu’on observe la seconde harmonique du signal de pickup, on observe un peigne de fréquence comme représenté sur la Fig. 4.12. Ce phénomène n’est pas un artefact dû à l’influence du signal d’excitation car δf ne dépend pas des légères variations de f_{ex} autour de f_z . Ce spectre et la signature d’un mouvement périodique de fréquence f_z couplé à un mouvement périodique plus lent de fréquence δf . L’influence de V_{ex} sur δf est facilement mesurable et on observe que $\delta f \sim \sqrt{V_{ex}}$, comme illustré par la Fig. 4.12.

4.3.3 Résonances anharmoniques

Dans cette partie nous allons donner une interprétation de la structure particulière des résonances paramétriques qui présentent une structure en double pics comme ceux de la Fig. 3.9. Le modèle analytique dont nous allons nous servir est comparable à celui d’un oscillateur non linéaire forcé. Un tel système a pu être étudié de manière très précise [95] et paraît un bon exemple pour mettre en évidence certaines caractéristiques liées aux non-linéarités.

Modèle analytique

Un petit modèle analytique, va nous permettre de mieux saisir la physique sous-jacente. En première approximation, nous allons considérer un mouvement unidimensionnel longitudinal d’une particule dans un champ anharmonique (c’est-à-dire un champ présentant des termes non linéaires en z , ce qui est bien le cas vu la forme de $V(z)$). La prise en compte de la forme exacte de $V(z)$ ne permettrait pas une résolution analytique du problème. Mais les phénomènes que nous voulons mettre en avant apparaissent dès lors qu’il y a des termes non linéaires en z . Considérons donc le mouvement d’une particule décrit par une

4.3. SYNCHRONISATION FORCÉE

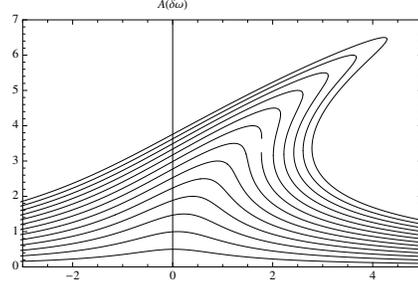


FIGURE 4.13 – Résonance anharmonique : l'amplitude A est calculée en fonction de $\delta\omega$ pour $K = 0.1$ et $F \in [[1, 13]]$.

équation du type :

$$m\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_z^2(z + Kz^3) = F \cos(\omega_{ex}t), \quad (4.3)$$

où γ est un terme de frottement, ω_z la pulsation d'aller-retour dans ce potentiel, K une constante permettant de contrôler l'anharmonicité du potentiel. Le terme $F \cos(\omega_{ex}t)$ représente une force périodique appliquée aux ions, qui simule l'ajout du champ radio fréquence. Une solution approchée de cette équation peut être cherchée sous la forme suivante [96, 97] :

$$z(t) = A(t) \cos(\omega_{ex}t + \phi).$$

Puisque dans nos expériences nous balayons un domaine de pulsations proches de ω_z , nous pouvons écrire $\omega_{ex} = \omega_z + ct$ où c représente la vitesse de balayage. Il est clair, vu le protocole expérimental, que $ct \ll \omega_z$ est donc que nous pouvons nous contenter du premier ordre en c . En remplaçant cette solution dans l'équation différentielle nous obtenons le système suivant :

$$\dot{A}(t) = -\frac{\gamma A(t)}{2} - \frac{F \cos(\phi)}{2(\omega_{ex} + \dot{\phi})} \quad (4.4)$$

$$\dot{\phi} = \omega_z - \omega_{ex} + \frac{3}{8}\omega_z K A^2(t) + \frac{F \sin(\phi)}{2A(t)\omega_z}. \quad (4.5)$$

Lorsque le régime stationnaire est atteint ($\dot{A}(t) \rightarrow 0$ et $\dot{\phi} \rightarrow 0$), l'écart entre la fréquence d'oscillation ω_z et la fréquence d'excitation ω_{ex} s'écrit

$$\delta\omega = \sqrt{\left(\frac{F}{2A\omega_z}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} - \frac{3}{8}\omega_z K A^2. \quad (4.6)$$

Cette équation nous permet de trouver l'amplitude A des oscillations (il s'agit d'une équation cubique en A^2) en fonction de l'écart de fréquence comme le montre la Fig. 4.13. Encore une fois, les non linéarités provoquent un phénomène essentiellement nouveau dans la résonance : pour des amplitudes d'excitation

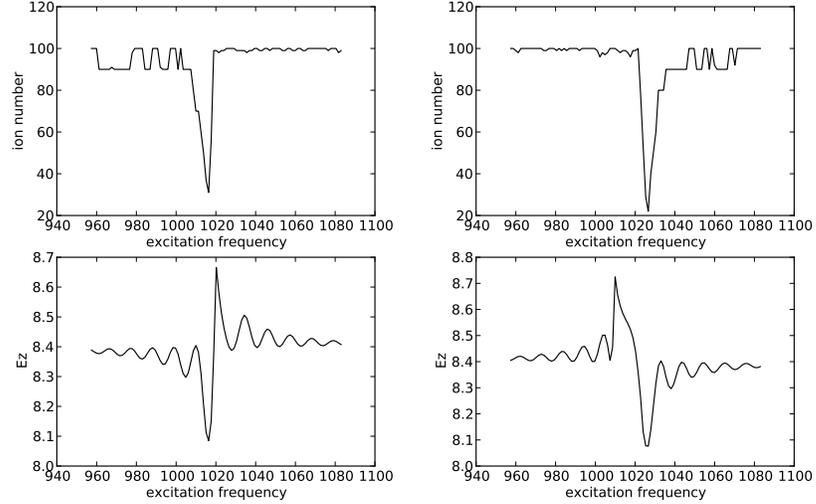


FIGURE 4.14 – Déstabilisation des particules en fonction de ω_{ex} : à gauche, nous avons tracé le nombre de particule piégées pendant $500\mu s$ avec une excitation de 10V et avec un déphasage de $\psi = 2$. Toutes les particules partent de $z = 0$ avec différents écart par rapport à l’axe. A droite, il s’agit du même calcul pour $\psi = 2\pi - 2$. En dessous nous avons tracé l’énergie cinétique moyenne des particules selon l’axe z .

F suffisamment grandes, le pic de résonance est dissymétrique (montée progressive et descente abrupte) et donne lieu à un phénomène d’hystérésis : exciter avec une fréquence croissante ne donne pas le même pic de résonance que lorsque la fréquence est décroissante. Ce phénomène a put être mis en évidence expérimentalement dans le piège de Paul [92]. Dans notre cas, effectuer un balayage de fréquence à un rythme constant est impossible car aucun système n’est installé (chaque valeur de la fréquence d’excitation est réglée à la main et un spectre est enregistré sur l’oscilloscope). En revanche, pour une valeur fixée de la fréquence d’excitation, nous pouvons faire un parallèle entre le sens de balayage et le déphasage : exciter proche de la résonance en venant d’un sens ou d’un autre revient à exciter avec un déphasage de ψ ou de $2\pi - \psi$.

De tels comportements ont déjà été prédits et observés dans les pièges de Paul [98, 99, 84] et de Penning [100] mais jamais dans l’EIBT.

Prédictions numériques

Numériquement, on retrouve à la fois des pics très dissymétriques et un phénomène d’hystérésis : chaque point de la Fig. 4.14 est le nombre de particules encore piégées après 200 aller-retour pour une valeur fixée de la fréquence

4.3. SYNCHRONISATION FORCÉE

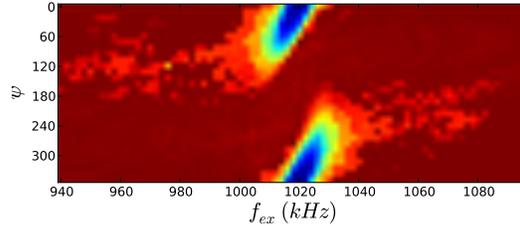


FIGURE 4.15 – Résonance non linéaire en fonction de la phase et de ω_{ex} .

d'excitation. Une centaine de particules sont lancées de $z = 0$ avec la même énergie mais des rayons légèrement différents. En bas de la Fig. 4.14, nous avons tracé l'énergie totale des particules sur les dix dernières oscillations, afin de mieux constater la dissymétrie des deux situations. Finalement, en reproduisant les courbes précédentes pour chaque valeur de la phase, nous obtenons la représentation de la Fig. 4.15, qui avec la Fig. 4.10 donne une vision plus claire de l'influence des trois paramètres d'excitation V_{ex} , ω_{ex} et ψ .

Observation expérimentale

Comme nous l'avons déjà mentionné, notre hacheur étant mal dimensionné, il ne remplit pas son rôle qui est de pouvoir injecter des paquets de longueurs déterminées. Nous estimons que nos paquets ont une longueur d'une vingtaine de centimètres, c'est-à-dire la moitié de la taille du piège. Dans ces conditions, nous ne pouvons pas observer les dissymétries évoquées précédemment car notre paquet, de par sa longueur, s'étale sur une large plage de phase. En revanche, si nous sommes les courbes du type de la Fig. 4.14 pour un panel de phase correspondant à un paquet de vingt centimètre, nous obtenons une courbe à deux pics très proche des doubles pics inexplicables de nos résonances paramétriques comme présenté sur la Fig. 4.16. Sur la Fig. 3.9, qui est la courbe expérimentale comparable à la Fig. 4.16 mais avec des ions de 5.2kV, nous pouvons clairement distinguer la montée progressive du pic et sa décroissance abrupte, symptôme des résonances non linéaires.

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mettre en avant la richesse de la dynamique dans l'EIBT. Nous avons pu mettre en évidence les résonances non linéaires du système libre ainsi que celles, dites "anharmoniques", dues au forçage. La présence de ces structures ainsi que leur bifurcation vers le chaos font de ce piège un outils d'expérimentation idéal pour les théories non linéaires et l'étude du chaos.

CHAPITRE 4. DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DANS LE PIÈGE

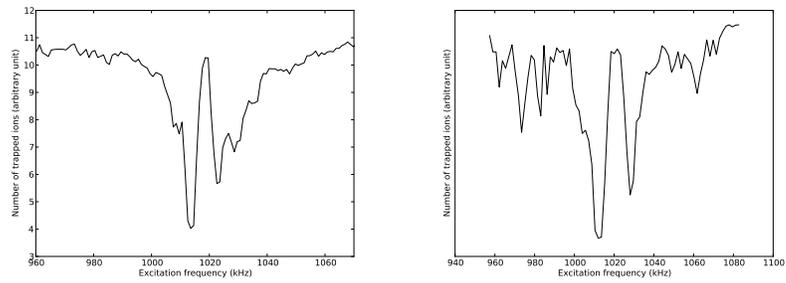


FIGURE 4.16 – Gauche : résonance paramétrique observée expérimentalement sur des ions O^{4+} à 4.2kV/charge. Droite : somme, sur un intervalle de phase, des courbes de résonances obtenues numériquement pour les mêmes paramètres.

5

Applications et perspectives

Dans ce qui précède, nous avons établi les fondements théoriques du fonctionnement de l'EIBT et vérifié expérimentalement la théorie. Ce chapitre, est divisé en plusieurs sections, chacune représentant une direction vers un nouveau champ de recherche. Ces ouvertures ont pour but de préparer le terrain pour de nouvelles investigations dans différents domaines de la physique en utilisant l'EIBT.

5.1 Physique atomique

5.1.1 Mesure de sections efficaces

Jusqu'à présent, nous avons étudié la stabilité dynamique des particules chargées dans le piège. Mais les particules peuvent être perdues alors que la stabilité dynamique est assurée par un choix judicieux des paramètres du piège. En effet, l'évolution de la population d'ions dans le piège dépend de trois autres processus de perte. Les particules piégées peuvent interagir avec un atome neutre ou une molécule (provenant du gaz résiduel dans le piège). Lors de cette interaction, un ion peut soit capturer un électron, soit diffuser hors du piège par un gain ou une perte d'énergie cinétique. Finalement, les ions peuvent aussi interagir entre eux et se déstabiliser. Ces trois processus peuvent être écrits de la façon suivante [5, 101] :

- (1) $I^{q+} + R \longrightarrow I^{(q-1)+} + R^+$
- (2) $I_{vi}^{q+} + R \longrightarrow I_{vf}^{q+} + R$
- (3) $I_{v1}^{q+} + I_{v2}^{q+} \longrightarrow I_{v3}^{q+} + I_{v4}^{q+}$

où I^{q+} représente un ion de charge q , R une particule du gaz résiduel et v_i la vitesse de l'ion. La probabilité pour qu'un ion soit perdu au cours d'une oscillation par un des trois processus notés n peut s'écrire :

$$P_n = 1 - e^{-\lambda_n^{q+}} \quad (5.1)$$

CHAPITRE 5. APPLICATIONS ET PERSPECTIVES

avec pour les deux premiers processus :

$$\lambda_{(1),(2)}^{q+} = n_{\text{résiduel}} \int_T \sigma_{(1),(2)}(v) v dt \quad (5.2)$$

et pour le troisième :

$$\lambda_{(3)}^{q+} = \int_T n_I \sigma_{(3)}(\delta v) \delta v dt \quad (5.3)$$

où $n_{\text{résiduel}}$ est la densité du gaz résiduel, n_I est la densité d'ion, T représente une période de révolution, δv est la vitesse relative des ions qui interagissent et $\sigma_{(i)}$ sont les différentes sections efficaces. En mesurant précisément le vide dans le piège on peut estimer $n_{\text{résiduel}}$. De même, un étalonnage précis (prenant en compte l'ouverture des fentes, la taille du paquet d'ions injectés et le courant de sortie de la source ECR) donnerait une estimation de n_I . Un spectromètre d'ions ou un "Multi Chanel Plate analyser" (MCP), permet de compter le nombre d'ions et de neutres qui sortent du piège, laissant comme seules inconnues les sections efficaces $\sigma_{(i)}$. La principale difficulté réside dans le fait que ces trois processus ont lieu simultanément ce qui impose de tester trois modélisations des sections efficaces en même temps.

Outre l'intérêt de pouvoir mettre une valeur sur les sections efficaces, et de pouvoir tester les différents modèles, ces mesures sont fondamentales pour estimer les durées de vie d'états métastables.

5.1.2 Durée de vie d'états métastables

La connaissance de la durée de vie d'états métastables a des implications majeures dans la compréhension des objets astrophysiques ainsi que dans la modélisation des plasmas (et par conséquent dans l'étude de la fusion) mais c'est surtout pour la métrologie que nous nous y intéressons ici. Il s'agit d'un domaine actif de recherche [102, 103, 104, 105, 106, 107]. En effet, la mesure de cette durée de vie permet d'obtenir des informations précises sur la structure atomique des ions à quelques atomes qui représentent des systèmes suffisamment simples pour être traités théoriquement. C'est un des intérêts majeurs des ions multichargés pour la physique atomique : peu d'électrons orbitent proches du noyau et ils sont relativistes. Construire une théorie d'un tel système est un travail de longue haleine qui se base sur l'électrodynamique quantique (QED) relativiste. Les mesures récentes concernant l'énergie de la transition interdite $1s^2 2s^2 2p^2 P_{1/2} - ^2 P_{3/2}$ dans l'Ar¹³⁺ [107] ne permettent pas de trancher entre les différentes théories existantes. En effet, les contributions QED ne sont que de 0,5 % et seule une mesure très précise de la durée de vie des états métastables de l'Ar¹³⁺ et de l'Ar⁹⁺ permettraient de bien comprendre les probabilités de transitions interdites qui testent la fonction d'onde à courte distance du noyau.

Cette mesure s'effectue en comptant le nombre de photons émis par la désexcitation des ions initialement dans l'état $^2 P_{3/2}$ vers l'état $^2 P_{1/2}$. On note N_{q+}^* le nombre d'ions qui sont dans l'état métastable, N_{q+}^0 le nombre d'ions qui

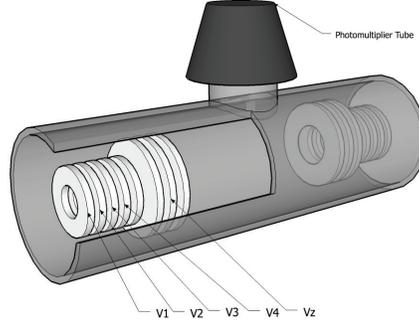


FIGURE 5.1 – Vue en perspective du piège et du photomultiplicateur.

sont dans l'état fondamental et $\alpha = N_{q+}^*/N_{q+}^0$ le rapport entre les deux. Au cours d'une période, la population d'ions dans l'état métastable varie de :

$$dN_{q+}^* = (-\lambda_{(1)}^{q+} - \lambda_{(2)}^{q+} - \lambda_{(3)}^{q+} - \lambda_*^{q+})N_{q+}^* dt \quad (5.4)$$

où λ_*^{q+} est l'inverse de la durée de vie de l'état métastable. La population de l'ion dans l'état fondamental ne varie que par les processus de perte :

$$dN_{q+}^0 = (-\lambda_{(1)}^{q+} - \lambda_{(2)}^{q+} - \lambda_{(3)}^{q+})N_{q+}^0 dt \quad (5.5)$$

et la solution de ce système d'équation est :

$$N_{q+}^* = \alpha N_{q+}^0(0) e^{-(\lambda_{(1)}^{q+} + \lambda_{(2)}^{q+} + \lambda_{(3)}^{q+} + \lambda_*^{q+})t} \quad (5.6)$$

$$N_{q+}^0 = \alpha N_{q+}^0(0) e^{-(\lambda_{(1)}^{q+} + \lambda_{(2)}^{q+} + \lambda_{(3)}^{q+})t} (1 - (1 - \alpha) e^{-\lambda_*^{q+}t}) \quad (5.7)$$

Une mesure de la décroissance exponentielle du nombre de photons permet de remonter à λ_*^{q+} donc à la durée de vie de l'état métastable.

En pratique, le photomultiplicateur est monté au-dessus de la zone sans champ du piège comme illustré sur la Fig. 5.1. Les résultats établis précédemment devraient jouer un rôle déterminant dans l'interprétation des spectres de photons car il est clair que la durée de piégeage (donc la décroissance du nombre de photons) qui est fonction du paramètre de stabilité, aura un rôle dans l'analyse des données. On peut aussi penser que si les paramètres du piège sont tels qu'il y ait synchronisation naturelle, nous n'aurons pas les mêmes signaux sur le photomultiplicateur que dans le cas où les ions sont étalés sur toute la longueur du piège.

5.1.3 Optimisation des paramètres de piégeage

Dans les expériences de spectroscopie atomique, comme celle que nous venons de présenter, un des points essentiels est d'avoir *le rapport signal sur bruit le plus grand possible*. La seule façon d'augmenter le rapport signal sur bruit

dans les expériences de spectroscopie et de trouver les paramètres optimaux qui maximisent la densité d'ions. Ceci a été fait dès 1976 [108], pour le piège de Paul où l'optimum ne dépend que de deux paramètres (les paramètres a et q de l'équation de Matthieu). Obtenir les meilleurs paramètres de piégeage pour augmenter le nombre d'ions piégés a encore été mis en avant récemment par G. Werth [109] comme un élément clé de la spectroscopie des ions super lourds. Dans le cas de l'EIBT, ce travail n'avait jamais été entrepris. D'une part, car nous ne disposons pas du paramètre de stabilité et d'autre part, parce qu'il s'agit d'un problème d'optimisation globale à cinq dimensions très complexe. Les expérimentateurs utilisant ce piège ont pris l'habitude d'utiliser une décroissance linéaire entre l'électrode V_1 et l'électrode V_4 , mais rien ne prouve que cette configuration donne la plus grande zone de stabilité ou le paramètre de stabilité le plus négatif. Je pense qu'il serait très instructif d'utiliser un algorithme d'optimisation globale (par recuit simulé ou mieux encore un algorithme génétique) pour déterminer le jeu de potentiels qui maximise la densité d'ions piégés. Dans le cas de l'algorithme génétique, on pourrait utiliser le module python *Pyevolve* [110] pour créer une population mono chromosomique dont les gènes seraient les valeurs à appliquer à chacune des électrodes. La "fonction coût" à optimiser serait la surface ou la profondeur des vallées de stabilité.

5.1.4 Astrophysique de laboratoire

Les ions, qui sont des entités rares dans notre environnement, sont le principal constituant des objets astrophysiques. La connaissance des sections efficaces et des durées de vie de leurs différents états, est fondamentale dans la modélisation de ces objets. En observant les processus atomiques, et les raies d'émission et d'absorption des ions très chargés en laboratoire, les physiciens sont capables de comprendre certains phénomènes qui se déroulent à des années-lumières et dans un passé lointain. C'est pour cette raison que de nombreux travaux d'astrophysique, comme par exemple l'étude de l'univers primordial et des nébuleuses planétaires [111], sont totalement dépendants des données obtenues en laboratoire grâce aux pièges ioniques. De même qu'en physique atomique les données obtenues par les ions permettent de vérifier les fondements théoriques de l'électrodynamique quantique, l'observation des processus atomiques dans les quasars permet de confirmer ou d'infirmer les théories cosmologiques comme la théorie du big-bang [112]. Parfois même, ce sont les observations astrophysiques qui permettent de confirmer les valeurs obtenues sur Terre avec des techniques inopérantes dans notre environnement [113]. Cette parenthèse, pour montrer l'interaction de ces deux branches de la physique.

5.2 Refroidissement

Le refroidissement des ions piégés a plusieurs conséquences intéressantes [114]. Premièrement il augmente le temps de piégeage. Deuxièmement, il permet d'atteindre une plus grande précision dans les mesures de masse, de mo-

5.2. REFROIDISSEMENT

ment magnétique et de spectre optique (notamment en réduisant l'effet Doppler). Troisièmement, des structures ordonnées (comme des cristaux coulombiens) peuvent être formées à très basses températures [115].

Une des techniques les plus efficaces pour le refroidissement est le refroidissement par laser [116] qui a permis d'atteindre des températures bien en dessous du kelvin. Néanmoins, puisque cette méthode repose sur une structure particulière des niveaux d'énergie des ions piégés, elle n'est applicable qu'à un nombre limité d'espèces. Dans la suite, nous nous concentrerons sur des méthodes qui peuvent s'appliquer à toutes les espèces d'ions. Avant de commencer, j'insiste sur le fait qu'il s'agit de refroidir le degré de liberté radial des ions, car une diminution de l'énergie cinétique longitudinale détruirait le piégeage lui-même.

5.2.1 Refroidissement résistif

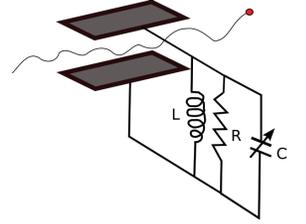
Le refroidissement résistif consiste à connecter les électrodes du piège à un système électronique externe afin que l'énergie des ions puisse s'y dissiper. Un modèle relativement simple [117], permet d'estimer le temps nécessaire au refroidissement. On considère un ion de masse m et de charge q qui oscille entre deux plaques parallèles séparées de $2r_0$ (dans notre cas, ces deux plaques seront placées parallèlement l'axe du piège). L'oscillation radiale ω_r de l'ion est perpendiculaire aux plaques et sa vitesse v_r induit un courant $i = \frac{B_1 q v_r}{2r_0}$ où B_1 est une constante qui dépend de la géométrie des plaques et peut être approchée analytiquement [118] ou calculée numériquement [119]. Nous prendrons $B_1 = 1$. Ces deux plaques parallèles forment une capacité C qui est reliée à une résistance R . L'énergie totale (cinétique et potentielle) du mouvement radial E_r diminue à cause des dissipations par effet Joule, ce qui peut s'écrire :

$$-\frac{dE_r}{dt} = Ri^2 = \frac{q^2 R E_r}{4mr_0^2}$$

d'où l'on déduit immédiatement le temps de refroidissement :

$$\tau = \frac{4mr_0^2}{q^2 R}. \quad (5.8)$$

En pratique, pour que le temps de refroidissement soit le plus court possible, il faut que r_0 soit petit, R et $\frac{q}{m}$ grands. Prenons $r_0 = 0.5\text{cm}$, $m = 40u.a.$ et $q = 10e$. Pour avoir une grande résistance, on branche une inductance L en parallèle avec la résistance. Si le circuit LC ainsi formé est en résonance avec le mouvement radial ($\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) alors, la valeur effective de la résistance devient $\frac{Q}{\omega_r C}$, où Q est le facteur de qualité du circuit. Typiquement $Q \simeq 200$ pour les circuits classiques et $Q \simeq 25000$ pour un circuit supraconducteur [120]. Pour des plaques parallèles de surface $S = 2.5\text{cm}^2$, nous obtenons $C = 2.8\text{pF}$. Finalement, comme nous l'avons montré dans le chapitre 2, ω_r dépend cruciallement des potentiels employés (car $\omega_r = \beta\omega_z$, où β est le paramètre de stabilité de l'équation (3.6)). Il est donc nécessaire d'utiliser une inductance variable qui s'adapte au point de fonctionnement du piège. La table 5.1 illustre les temps de refroidissement du mouvement radial dans différentes conditions.



CHAPITRE 5. APPLICATIONS ET PERSPECTIVES

TABLE 5.1 – Temps de refroidissement τ obtenu avec la méthode du refroidissement résistif pour différent points de fonctionnement correspondants à celles de la table 3.1.

$V_1(V)$	$V_z(V)$	β	τ (ms)	τ supra. (ms)
5200	4450	1.0	6.7	0.054
5200	4950	0.10	0.67	0.0054
7600	3258	0.25	1.68	0.013

5.2.2 Refroidissement par rétroaction

Le refroidissement par rétroaction (“feedback cooling” en anglais) consiste à enregistrer le signal induit par le mouvement d’un ion et à le restituer en opposition de phase [121]. On peut considérer que le “stochastic cooling” [122] en est un cas particulier, propre aux anneaux de stockage. Ce type de refroidissement a donné de très bons résultats dans les anneaux de stockage, car le déplacement d’un ion peut être enregistré d’un côté de l’anneau, et être répercuté à une position diamétralement opposée (la vitesse du signal électronique étant plus rapide que celle des ions et la distance plus courte). Dans le cas des pièges de petite taille, cette méthode est beaucoup plus difficile à mettre en place car les électrodes qui doivent enregistrer le signal sont nécessairement les mêmes qui doivent appliquer la rétroaction. Dans ce cas, il est très difficile de distinguer les signaux induits par les ions des signaux induits par la rétroaction elle-même. En outre, cette méthode est limitée par le bruit électronique dans le circuit de refroidissement. Elle est donc plus adaptée au refroidissement de particules très énergétiques car alors le rapport signal sur bruit est élevé et la diminution de température jusqu’à la limite du bruit électronique est importante. Bien que ce soit vers cette méthode que se tournent la plupart des expérimentateurs utilisant l’EIBT [123], je n’y crois pas personnellement, car elle semble déjà très difficile à mettre en place dans le piège de Paul [124, 125] et ce sera encore plus difficile dans l’EIBT car les énergies du mouvement radial sont de deux ordres de grandeur plus faibles que celles du mouvement longitudinal et il sera très difficile de découpler les deux.

5.2.3 Vers une nouvelle technique de refroidissement

Comme nous l’avons montré au chapitre 3, un ion se déplaçant dans le piège voit un champ radial

$$V(r, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^{2n}} r^{2n} V^{(2n)}(z(t))$$

5.2. REFROIDISSEMENT

où $z(t)$ représente le mouvement périodique longitudinal. En notant ω_z la pulsation de ce mouvement, on peut effectuer une décomposition en série de Fourier :

$$V(r, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k(r) \cos(k\omega_z t) + b_k(r) \sin(k\omega_z t))$$

où $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T V(r, t) dt$ et

$$a_k(r) = \frac{2}{T} \sum_n \frac{(-1)^n}{n! 2^{2n}} r^{2n} \int_0^T V^{(2n)}(z(t)) \cos(k\omega_z t) dt$$

$$b_k(r) = \frac{2}{T} \sum_n \frac{(-1)^n}{n! 2^{2n}} r^{2n} \int_0^T V^{(2n)}(z(t)) \sin(k\omega_z t) dt$$

pour $k \in \mathbb{N}^*$.

En se plaçant dans une zone du diagramme de stabilité où $\beta \rightarrow 0$, la modulation du mouvement radial est lente par rapport au mouvement longitudinale et on peut appliquer la méthode du potentiel effectif [126, 127] qui nous dit que le mouvement peut être décomposé en une partie rapide de pulsation ω_z et une partie séculaire régie par le potentiel suivant :

$$U_{eff}(r) = a_0 + \frac{1}{4m\omega_z^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k(r)^2 + b_k(r)^2}{k^2}. \quad (5.9)$$

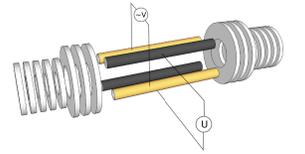
Ceci montre que le potentiel effectif, proche de l'axe, est de la forme $U_{eff}(r) = C + Br^4$. Dans les zone stables de Fig. 3.5, $B > 0$ et $B < 0$ dans les zones instables.

Supposons qu'on ajoute maintenant un champ quadripolaire sur les quatre barreaux parallèles à l'axe qui maintiennent les électrodes (ce champ peut être crée en appliquant un signal sinusoïdal déphasés de $\frac{\pi}{2}$ sur ces barres métalliques qu'on aura préalablement isolées avec du Téflon). Si la fréquence du champ radio fréquence est suffisamment élevée, on peut appliquer la méthode du potentiel effectif et on obtient un potentiel quadratique [75]. Ainsi la superposition des deux potentiels effectifs peut s'écrire :

$$U_{eff}(r) = C + Ar^2 + Br^4 \quad (5.10)$$

où A est une constante dépendant uniquement des paramètres du piège quadripolaire et B est une constante ne dépendant que des réglages de l'EIBT.

En se plaçant dans une zone légèrement déstabilisante du diagramme de stabilité, on peut créer un potentiel en cuvette tel que le présente la figure Fig. 5.2. Ce genre de configuration est particulièrement adaptée à la méthode du refroidissement évaporatif ("evaporative cooling") qui fut d'abord consacrée aux atomes [128] pour former des condensats de Bose-Einstein et ensuite aux particules chargées [129]. Cette méthode consiste à abaisser les barrières de la cuvette afin de laisser s'échapper les particules les plus énergétiques. Si on



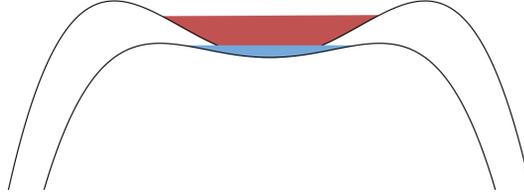
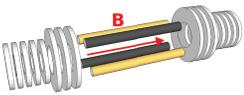


FIGURE 5.2 – Potentiel effectif radial utilisé pour l’“evaporative cooling”. En se plaçant dans une zone déstabilisante du diagramme de stabilité et en ajoutant un champ quadripolaire dans la zone centrale du piège on arrive à cette configuration. On faisant varier les tensions du piège quadripolaire, les barrières de la cuvette peuvent être abaissées progressivement pour faire du refroidissement par évaporation. Les zones de couleur représentent une distribution de particules.

suppose une répartition gaussienne de la température, ceci revient à couper la queue correspondant aux hautes énergies de la gaussienne. On laisse ensuite les particules interagir pour qu’elles se thermalisent, reformant une gaussienne dont la moyenne correspond à une température plus basse. Puis on recommence le processus. Cette technique a récemment permis de refroidir des antiprotons à 9K [130].

5.2.4 Compression radiale par “rotating wall”

Nous proposons dans cette section, une nouvelle technique de compression du mouvement radial inspirée en partie par la technique baptisée ‘rotating wall’ [131]. Il s’agit de mettre un champ magnétique \mathbf{B} le long du piège (ce qui semble le plus commode car il suffit d’enrouler le cylindre constituant le piège par un solénoïde) et d’ajouter un champ tournant créé par des électrodes séparées disposées dans l’axe et formant un cylindre. Le mouvement longitudinal des ions ne sera pas modifié par la présence du champ magnétique ($\mathbf{v}_z \wedge \mathbf{B} = 0$), mais le mouvement longitudinal sera forcé d’être tournant autour de l’axe avec une fréquence de rotation égale à la fréquence de Larmor f_l . En appliquant un champ sinusoïdal déphasé à chacune des plaques, il est possible de créer un champ tournant avec une fréquence réglable f_w . Comme il a été mis en évidence dans [131], en fonction de la valeur de l’écart de fréquence $\Delta f = f_w - f_l$, on assiste à un réchauffement ou un refroidissement radial des ions.



5.3 Physique théorique

5.3.1 Contrôle du chaos

Lorsque les physiciens prirent conscience de l’existence physique du chaos, un énorme travail fut entrepris pour classifier les différents phénomènes dans des classes dites “universelles” [132]. Ces structures mises en place, une nou-

velle avancée eut lieu, celle du contrôle du chaos [133]. L'idée, consiste à ajouter une petite excitation par l'intermédiaire d'un paramètre de contrôle, pour contraindre le système à rester (ou à passer) dans un état choisi à l'avance. Avec le même principe, de nombreuses alternatives pour le contrôle du chaos ont été proposées et certaines [134] sont plus adaptées aux systèmes hamiltoniens.

Récemment, les algorithmes de contrôle du chaos ont atteint de nouvelles frontières [135] : ils sont applicables à des systèmes de grande (voire très grande) dimension, ce qui est nécessaire en physique statistique et en astrophysique et même dans notre cas, où nous avons un système à N corps.

Dans le chapitre 3, nous avons pu montrer que le système (un ion unique dans le potentiel de l'EIBT) présente un caractère chaotique. En outre, l'ajout d'une excitation paramétrique, nous rapproche fortement du protocole expérimental des expériences de contrôle du chaos [136, 137]. Je pense qu'il est possible d'aller plus loin, en implémentant un schéma de contrôle par feedback (la mise en place expérimentale a déjà été réalisée avec la méthode du "delta-kick selection technique" [82]) qui permettrait, en suivant les indications des articles [136, 137], de mettre en place un schéma de sélection des orbites nominales. Par orbite nominale, j'entends des orbites du piège qui pourraient avoir un intérêt particulier si elles étaient les seules peuplées. Par exemple, on pourrait imaginer peupler individuellement les différents îlots des résonances non linéaires ce qui pourrait déboucher sur le piégeage simultané de plusieurs espèces avec des espaces des phases qui ne se chevauchent pas.

5.3.2 Mécanique quantique dans le piège

Nous commençons ici une étude de l'EIBT sous l'angle de la mécanique quantique, bien que cela puisse être considéré comme très en amont, car les éventuelles manifestations quantiques ne pourront être observées que lorsqu'on maîtrisera le refroidissement et le piégeage de quelques particules. Nous ne considérerons que le degré de liberté radial d'un ion de masse M dans l'EIBT. Cet ion vérifie l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{2}k(t)r^2\psi \quad (5.11)$$

avec $k(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dz^2} |_{z(t)}$. Il s'agit de l'équation de l'oscillateur quantique paramétrique [75]. En posant

$$q = \sqrt{\frac{M\omega_z}{2\hbar}}z, \quad \tau = \frac{\omega_z t}{2},$$

on obtient l'équation suivante

$$i \frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{1}{2}g(\tau)q^2\psi, \quad (5.12)$$

CHAPITRE 5. APPLICATIONS ET PERSPECTIVES

où $g(\tau) = \frac{4k(t)}{M\omega_z^2}$ est une fonction de période π . On peut chercher une solution de (5.12) sous forme d'un paquet d'onde gaussien

$$\psi(q, t) = \pi^{-1/4} \exp \left[-\frac{1}{2}(aq^2 - 2bq + c) \right]$$

où a , b et c sont des fonctions complexes de τ . En injectant dans (5.12), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} i \frac{da}{d\tau} &= a^2 - g(\tau) \\ i \frac{db}{d\tau} &= ab \\ i \frac{dc}{d\tau} &= b^2 - a. \end{aligned}$$

La première équation est une équation de Riccati vérifiée par :

$$a = -\frac{i}{w} \frac{dw}{d\tau}$$

où w est une solution de l'équation de Hill

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} + g(\tau)w = 0. \quad (5.13)$$

D'après ce que nous avons déjà vu pour ce genre d'équation, la solution s'écrit sous la forme $w = \rho e^{i\gamma}$. Les deux équations précédentes peuvent être résolues [138] et nous obtenons :

$$b = \sqrt{2a_1}\alpha \exp(-i\gamma), \quad c = \alpha^2 \exp(-2i\gamma) - \frac{1}{2} \log(a_1) + i\gamma$$

où α est un paramètre complexe. Finalement, le paquet gaussien peut s'écrire

$$\begin{aligned} \psi(q, \tau, \alpha) &= \left(\frac{a_1}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{1}{2}(a_1 q^2 + i\gamma) \right] \\ &\quad \times \exp \left[\sqrt{(2a_1)\alpha} q \exp(-i\gamma) - \frac{1}{2}\alpha^2 \exp(-2i\gamma) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(q, \tau) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la fonction génératrice des polynômes de Hermite et où

$$\psi_n(q, \tau) = a_1^{1/4} \phi_n(\sqrt{a_1}q) \exp \left[-\frac{i}{2}(a_2 q^2 + (2n+1)\gamma) \right] \quad (5.14)$$

qui est une base de fonctions orthonormales de (5.11) (ϕ_n est une fonction de Hermite normalisée). Dans le cas où nous sommes dans la zone de stabilité de

5.4. SPECTROSCOPIE DE MASSE

l'équation (5.13), $w = v \exp(i\beta\tau)$ où β est le coefficient de stabilité et on peut réécrire

$$\psi_n(q, \tau) = \left(\frac{\sqrt{\delta}}{\rho}\right)^{1/2} \phi_n\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\rho}q\right) \exp\left[-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta\tau\right] \exp\left(\frac{i}{2\rho}\frac{d\rho}{d\tau}q^2\right) \quad (5.15)$$

et donc

$$\psi_n(q, \tau + \pi) = \exp\left[-i\pi\beta\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \psi_n(q, \tau) \quad (5.16)$$

où les fonctions ψ_n sont associées aux énergies $\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta$. On voit donc que l'équation de Hill et sa résolution est tout aussi fondamentale dans le cas quantique que dans le cas classique.

Pour une résolution complète prenant en compte les deux degrés de liberté, il faut d'abord calculer le potentiel effectif longitudinal [139, 140, 141, 142] puis appliquer la même démarche.

Si cette approche est approfondie, on peut espérer qu'un jour des expériences mettront en évidence des comportements quantiques tels que ceux observés dans les pièges quadripolaires (oscillations de Rabi, création d'états comprimés, reconstruction d'états etc.) [143], avec la *différence majeure que les ions sont dans un référentiel accéléré*.

On peut même envisager une étude regroupant les deux sections précédentes (contrôle du chaos et mécanique quantique) en suivant [144].

5.4 Spectroscopie de masse

Dans cette section, nous voulons montrer que l'étude de l'EIBT que nous avons entrepris ouvre de nouvelles perspectives dans le domaine de la spectrométrie de masse. Ceci pourrait avoir des répercussions dans des domaines assez éloignés a priori, comme par exemple, la médecine.

5.4.1 Comparaison avec les solutions actuelles

Comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre 1, les pièges de particules chargées peuvent être utilisés comme spectromètres de masse. La masse étant une quantité fondamentale pour caractériser un objet matériel, sa mesure a de multiples implications dans les diverses branches de la physique. Néanmoins chacune de ces applications requiert une plus ou moins grande résolution comme illustré dans la table 5.2.

L'idée principale pour faire de la spectroscopie de masse en utilisant le piège de Paul consiste à augmenter progressivement et simultanément les deux paramètres a et q , tous deux proportionnels au rapport masse sur charge, afin de faire sortir successivement les différentes espèces de leur zone de stabilité et donc du piège. Pour obtenir un signal proportionnel au nombre d'ions, ces derniers sont accélérés pour induire un courant sur un détecteur (multiplicateur d'électrons ou coupe de Faraday).

CHAPITRE 5. APPLICATIONS ET PERSPECTIVES

TABLE 5.2 – Tableau récapitulatif des résolutions nécessaires pour l’utilisation de la spectroscopie de masse dans différents domaines. [145]

Application	$\frac{\delta M}{M}$	résolution
Physique générale et chimie (séparation des isobares)	$< 10^{-5}$	10^4
Physique nucléaire	10^{-6}	10^5
Astrophysique (séparation des isomères)	$< 10^{-6}$	10^6
Métrologie	$< 10^{-9}$	10^8
QED sur les ions multi chargés (séparation des états atomiques)	$< 10^{-11}$	10^{10}

La spectroscopie de masse utilisant un piège de Penning repose sur une idée différente héritée du principe du spectromètre à temps de vol (TOF “time of flight spectrometer”). Il s’agit d’enregistrer, le plus longtemps possible, le signal induit par le mouvement cyclotron des ions dans le champ magnétique. Le rapport de la fréquence du mouvement cyclotron, pour deux espèces différentes, donne le rapport de masse.

Le piège de Paul, outre sa simplicité, permet une analyse plus rapide mais moins précise que le piège de Penning. Un tableau récapitulatif des différents avantages et inconvénients des spectromètres de masse (Tab. 5.3), permet de choisir la bonne solution pour un objectif donné.

TABLE 5.3 – Tableau comparatif des avantages et inconvénients des différents spectromètres de masse. La colonne “vitesse” correspond à la vitesse d’acquisition, la colonne “linéarité” indique si le signal enregistré est proportionnel au nombre d’ions (capacité à faire de l’analyse quantitative), la colonne “gamme” correspond à la gamme de masse qu’il est possible de détecter, la colonne “taille” fait référence à l’encombrement et la colonne “simplicité” correspond à la mise en place d’une telle technique.

technique	résolution	vitesse	linéarité	gamme	taille	simplicité
Aimant dipolaire	+	+++	++	+	-	-
Piège de Paul	++	+	+++	++	+++	++
Piège de Penning	+++	-	+++	++	+	+
Quadrupole linéaire	++	+++	++	++	+++	+++
EIBT	++	++	-	+++	+++	+++

L’EIBT a déjà été utilisé comme un spectromètre de masse [13] : en prenant la transformée de Fourier du signal du pickup pendant 300ms, on obtient un

5.4. SPECTROSCOPIE DE MASSE

spectre avec des pics ayant une résolution de 4Hz comme illustré sur la Fig. 5.3. De ce point de vue, l'EIBT peut être vu comme un spectromètre TOF extraor-

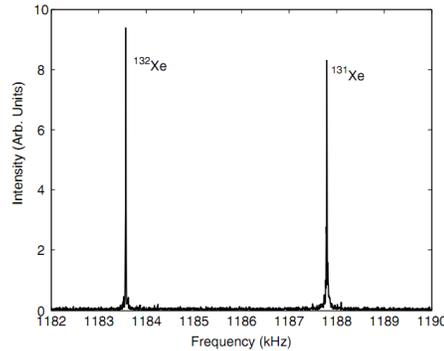


FIGURE 5.3 – Transformée de Fourier du signal du pickup montrant deux isotopes du Xe. Seuls les septièmes harmoniques sont présentées [13, 146].

dinairement long, replié sur lui-même.

Après les résultats du chapitre 3, nous pouvons proposer une nouvelle méthode de spectroscopie de masse avec l'EIBT qui se rapproche plus de celle employée dans le piège de Paul et qui présente deux avantages inédits.

Le diagramme de stabilité de l'EIBT présenté au chapitre 3 ne dépend que de la tension d'accélération et des tensions appliquées aux électrodes du piège, pas de la charge ni de la masse de la particule piégée. Ce qui signifie qu'il est possible de piéger simultanément toute la gamme des particules chargées. D'autre part, la fréquence d'oscillation dans le piège est proportionnelle à $\sqrt{q/m}$ donc un balayage en fréquence d'une excitation sinusoïdale va exciter successivement les résonances paramétriques de chaque espèce. Autrement dit, il s'agit du premier spectromètre de masse avec un intervalle admissible en masse infini.

Il y a encore un autre avantage majeur à cette technique : on n'utilise pas le signal du pickup (on compte seulement les particules qui s'échappent du piège) ce qui fait qu'on n'a pas besoin (contrairement à ce qui se fait dans la Ref. [13]) de se placer dans un régime de synchronisation. Ceci présente un double avantage : d'une part, le temps d'observation n'est plus limité au temps de synchronisation mais au temps de piégeage (qui est beaucoup plus long (voir [10])) et d'autre part, on évite le phénomène de "fusion de pics" ("peak-coalescence") [147] qui vient du fait que les particules de rapport charge sur masse légèrement différent se retrouvent verrouillées dans le même paquet par la synchronisation.

Nous avons voulu déposer un brevet pour protéger cette technique. Une équipe travaillant sur des pièges électrostatiques aux Etats-Unis [29, 30] a déposé un brevet juste avant (US 2010/0084549 A1) qui recouvre notre nouvelle technique. C'est d'autant plus regrettable qu'ils ne pouvaient pas se rendre compte des deux avantages mentionnés précédemment à cause de la sur-simplification de leur montage expérimental et de l'absence de modèle théorique.

5.4.2 Améliorations possibles

Le concept exposé dans la partie précédente est fondamentalement nouveau mais il peut bénéficier des mêmes améliorations que les techniques liées au piège de Paul.

Pour optimiser la collecte des ions qui s'échappent parce qu'ils sont déstabilisés, on peut imaginer mettre une plaque collectrice autour de la zone sans champ à un potentiel négatif pour attirer les ions. On devra trouver l'optimum de position et de potentiel qui ne déstabilise pas le piègeage tout en permettant de capturer un maximum d'ions.

Pour optimiser le signal, on peut raisonnablement espérer que les techniques de refroidissement du mouvement radial présentées dans la section 5.2 auront les mêmes conséquences bénéfiques que pour le piège de Paul [148]. En effet, les non-linéarités, qui rentrent en jeu lorsque les trajectoires ont une grande amplitude, radiale réduisent la résolution. Le refroidissement, en limitant l'extension radiale des trajectoire devrait permettre de gagner au moins un ordre de grandeur dans la résolution.

Finalement, un piège cryogénique comme celui du MPI de Heidelberg [11, 10], de part la réduction du bruit et l'augmentation du temps de piégeage (jusqu'à 600s) devrait permettre à l'EIBT avec cette technique d'atteindre une résolution comparable à celle du piège de Penning.

5.4.3 Application en médecine

Les applications de spectroscopie de masse étant innombrables, j'ai choisis de me pencher plus en détails sur celles qui concernent la recherche médicale. Les avancées concernant la spectroscopie de masse se répercutent presque immédiatement dans le domaine médical où elle joue un rôle déterminant dans l'analyse des constituants de la matière vivante, dans la compréhension des interactions entre protéines [149], dans le séquençage du génome [150] et surtout dans la fabrication de nouveaux médicaments. C'est ainsi, qu'une étude détaillée, a pu, grâce à la spectrométrie de masse, identifier les protéines du parasite de la malaria. Ces protéines identifiées, des études de bio informatique ont permis de sélectionner différentes cibles pour lesquelles de nouveaux traitements pourraient être mis au point [151].

5.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de montrer la diversité des directions de recherche ouvertes par la compréhension de la dynamique dans l'EIBT. Chacune des sections présentées dans ce chapitre mériteraient plus d'investigations.

Conclusion

Dans cette thèse, j'ai posé les bases théoriques de l'utilisation et de la compréhension des phénomènes dans l'EIBT. Ce piège permet de confiner les ions ayant une énergie de plusieurs keV. Des ions très chargés, produits par une source ECR ont pu être piégés. Les trois étapes de ma démarche peuvent se résumer de la manière suivante.

Dans le chapitre 2, j'ai mis au point une méthode basée sur une technique due à Bertram [47] et sur la transformation conforme permettant d'obtenir une formule analytique du potentiel dans le piège.

Dans le chapitre 3, j'ai utilisé cette formule analytique pour établir l'équation du mouvement des ions dans le piège. En exprimant l'idée que les ions sont confinés parce que le potentiel électrostatique est un potentiel périodique dans leur référentiel, j'ai pu montrer que la stabilité est régie par une équation de Hill. Ceci présente l'avantage de faire entrer l'EIBT dans la même catégorie que le piège de Paul (dont la dynamique est gouvernée par une équation de Mathieu, cas particulier de l'équation de Hill) et par conséquent de pouvoir suivre la longue liste des développements réalisés durant les dernières décennies sur ce type de piège.

Le chapitre 4 dépasse le cadre du chapitre 2 en prenant en compte les termes non linéaires. Ceci permet d'expliquer les modulations du signal dont l'apparition était incompréhensible au début de ma thèse et de montrer l'apparition possible du chaos dans la dynamique des particules.

Finalement, dans le chapitre 5, j'ai essayé d'indiquer des pistes intéressantes de recherche que je n'ai pas eu le temps d'approfondir, telles que le refroidissement du mouvement radial, la mesure de durée de vie d'états métastables, la mécanique quantique, le contrôle du chaos ou encore la spectroscopie de masse.

Mot de la fin

Pourquoi s'intéresser à un piège de particules? Au bout de trois années à travailler sur le sujet, il est légitime de se poser la question.

La première façon de répondre, consiste à mettre en avant toutes les avancées scientifiques dont les pièges de particules chargées sont à l'origine. On pourrait citer la spectroscopie de masse et la mise au point de nouveaux médicaments, la spectroscopie atomique qui permet de vérifier les grandes théories de la physique, l'étude des objets astrophysiques qui permet de comprendre, ou au moins d'essayer de comprendre l'origine de la vie. La liste pourrait encore être allongée car piéger des particules est une étape primordiale dans le travail du physicien moderne.

Mais, aussi bizarre que cela puisse paraître, ces applications ne sont pas à l'origine de mon intérêt pour une telle étude. Ma passion de la science est née de la démarche du physicien. Il y a quelque chose de fascinant à observer un phénomène, à le modéliser avec des formules mathématiques et à pouvoir prévoir son comportement. Le fait que des symboles mathématiques soient un langage de la nature est une des plus belles énigmes humaines. C'est peut-être la dernière chose de notre monde qui conserve un peu de magie. Ce travail, n'est pas celui d'un ingénieur ayant un problème à résoudre, mais plutôt d'un chercheur dont la curiosité se porte sur la nature, non pas pour la dompter, mais bien plutôt parce qu'elle constitue le seul miroir dans lequel il puisse s'observer lui-même.

Seule compte la démarche. Car c'est elle qui dure et non le but qui n'est qu'une illusion du voyageur quand il marche de crête en crête comme si le but atteint avait un sens.

Antoine de Saint-Exupéry *Citadelle*

Table des figures

1.1	Plan d'ensemble du piège EIBT : de chaque côté un empilement d'électrodes (vues de profil) et au centre une large zone sans champ.	2
1.2	Schéma du piège et de l'électronique haute tension associée. Les interrupteurs haute tension utilisés (Behlke) permettent des variations brusque du champ électrostatique.	3
1.3	Description de l'orbitrap : l'injection se fait orthogonalement à l'axe des deux électrodes dont la forme est décrite par (1.1).	8
1.4	Le piège anharmonique : a gauche, deux électrodes permettent de créer une cuvette de potentiel : l'électrode de périphérie est à la masse tandis que sur l'électrode centrale est appliquée une tension négative. A droite, la cuvette de potentiel ainsi formée.	9
1.5	Les électrodes du ConeTrap. Les distances sont données en mm [31].	9
1.6	A gauche, description du MiniRing [34] et à droite, du "bent EIBT" [35].	10
1.7	Description de la source SIMPA [36].	11
1.8	Schéma de principe d'une source ECRIS [8].	12
1.9	Spectre des états de charge de l'argon obtenu avec une puissance de 72W et une tension d'accélération de 4.2kV.	12
2.1	Comparaison de la fonction $U(0, z) = \frac{\xi}{\pi} \sin(2\pi\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(-1)^n}{\xi^2 - n^2/2}$ à son approximation $U(0, z) = \frac{\omega}{2} \operatorname{sech}^2(\omega\xi)$. A gauche, les deux fonctions, à droite, la valeur absolue de la différence.	20
2.2	Tentative d'adaptation de la méthode de Bertram à la géométrie du piège en remplaçant R par une fonction polynomial variant lentement de R_z à R . Gauche : la ligne représente la fonction analytique et les points la solution numérique obtenue par éléments finis en utilisant COMSOL Multiphysics®. Droite : la différence entre les deux solutions. L'erreur est grande, (-258V) près de $z = -0.15$, où la transition a lieu.	22
2.3	Section d'un moitié du piège : les rectangles hachurés représentent les électrodes, le domaine \mathcal{A} est entouré d'une ligne pointillée, les points rouges z_i nous servons à définir nos conditions aux limites et les lignes courbes sont les équipotentielles obtenues une fois le calcul achevé.	23
2.4	Les trois espaces utilisés pour trouver la transformation de \mathcal{A} en un rectangle : l'espace Z est l'espace physique contenant \mathcal{A} , l'espace T est un intermédiaire de calcul dû au fait que la transformation de Schwarz-Christoffel transforme tout polygone en le demi plan supérieur et l'espace W est le plan où nous pourrons utiliser la méthode de Bertram car tous les rayons y sont identiques.	25

TABLE DES FIGURES

2.5 Image par $\zeta(w)$ du rectangle défini par $w = u + iv$ with $-20 < u < 8$ et $-\pi < v < 0$. Les points indiquent les positions des points z_i 27

2.6 Haut : la ligne est la solution analytique obtenue par la combinaison de la méthode de Bertram et de la transformation conforme et les points représentent la solution numérique. Bas : différence entre les deux courbes précédentes. On voit que l'erreur est de l'ordre de 1% et qu'elle est bien répartie sur tous le domaine, contrairement à la Fig. 2.2 où l'erreur était concentrée sur la transition entre R et R_z . L'erreur est due à l'approximation linéaire entre les électrodes. 28

2.7 Exemple d'un transformation conforme obtenue numériquement. Ceci permet, par exemple de contourner l'approximation linéaire entre les électrodes imposée par Bertram. 29

2.8 Gauche : la ligne représente les conditions aux limites utilisées pour la solution analytique, les points sont le résultat d'un calcul éléments finis qui permet d'apprécier la décroissance du champ entre les électrodes. Droite : différence entre les deux courbes précédentes. Bien que l'écart soit important sur la frontière (100V), le fait que cette erreur oscille permet une compensation et l'erreur est faible sur l'axe (20V). 30

2.9 Evolution de l'énergie pour des trajectoires calculées avec SIMION. Au bout de $500\mu s$, l'énergie peut avoir dérivé jusqu'à 2.5%. 31

3.1 Gauche : les deux électrodes hyperboliques constituant le piège de Paul. Une tension sinusoïdale est appliquée entre les deux parties. Droite : potentiel à l'intérieur du piège à deux instants différents. Ce potentiel peut être vu comme une selle tournant sur elle même. 34

3.2 Description de l'expérience. Les électrodes d'entrée, représentées par les rectangles hachurés, sont initialement à la masse pour l'injection du paquet (orange). Avant que le paquet ait le temps de revenir, on leur applique un potentiel suffisant pour que les ions oscillent entre deux barrières de potentiel. Au centre du piège, se trouve une électrode appelée "pickup" (en rouge) qui permet d'observer les oscillations en amplifiant la charge induite par le passage des ions à travers l'anneau. A l'arrière du piège, une coupe de Faraday (vert) permet d'obtenir une idée du nombre d'ions piégés. Une tension sinusoïdale peut être appliquée à une électrode initialement à la masse. 39

TABLE DES FIGURES

3.3	Chronologie d'un cycle de piégeage. Le faisceau continu provenant de la source est dévié de manière intermittente par le chopper auquel on applique une tension constante qui dévie les ions sauf lorsqu'on décide d'injecter en le mettant à la masse. La tension des électrodes de sortie est appliquée avant que le paquet n'ait eu le temps de revenir et on commence à observer les oscillations sur le pickup. Après une mise à la masse des électrodes de sortie, on observe un signal du type de ceux indiqués par la Fig. 3.4 sur la coupe de Faraday.	40
3.4	Trois signaux caractéristiques provenant de la coupe de Faraday et donnant une information quantitative (après étalonnage) sur le nombre d'ions piégés. Les rectangles illustrent la couleur adoptée pour représenter chaque signal sur la Fig. 3.5.	41
3.5	Diagramme de stabilité : les lignes de niveau représentent des valeurs constantes de $ \Delta - 1$ calculées avec notre modèle théorique. Le piégeage est théoriquement possible dans les zones où $ \Delta - 1 < 0$. Le dégradé de couleur est proportionnel au nombre d'ions observé expérimentalement pour chaque point de fonctionnement (V_1, V_z) . Pour chaque point, nous avons fait plusieurs cycles décrit dans la Fig. 3.3 et fait la moyenne. La résolution est 10V selon V_z et de 50V selon V_1	41
3.6	Les trois sections de Poincaré correspondant respectivement aux points <i>A</i> , <i>B</i> et <i>C</i> de la Fig. 3.5. La position radiale est en abscisses et la quantité de mouvement radiale en ordonnées. On observe une transition vers le chaos par dédoublement de période (ce qui est confirmé par le fait que l'écart entre les deux îlots croît avec la racine carrée du paramètre).	42
3.7	Diagramme de stabilité à 4.2keV/charge : les lignes de niveau représentent des valeurs constantes du paramètre de stabilité β et le dégradé de couleur est proportionnel au nombre d'ions observé (moyenné sur vingt cycles) pour un point de fonctionnement (V_1, V_z) de la carte.	43
3.8	En haut : influence de la charge d'espace sur le diagramme de stabilité : les zones stables sont réduites et décalées. En bas : influence du vide (de la friction) : les zones stables sont élargies. L'échelle est partout identique à celle de la Fig. 3.5.	44
3.9	Résonance paramétrique dans l'EIBT au niveau de f_z . A droite : observation expérimentale de la résonance avec Ne^{5+} à 5.2keV. A gauche : simulation avec 80 ions après 400 oscillations.	45
3.10	Trajectoires longitudinales $z(t)$ (en noir, fin) et trajectoires radiales $r(t)$ (en rouge, épais, dont l'amplitude a été multipliée par 10) pour trois valeurs du paramètre de stabilité β . (a) ($V_2 = 5.2\text{kV}$, $V_z = 4.97\text{kV}$) (b) ($V_2 = 5.2\text{kV}$, $V_z = 4.45\text{kV}$) (c) ($V_2 = 7.6\text{kV}$, $V_z = 3.258\text{kV}$)	46

TABLE DES FIGURES

3.11 Agrandissement du coin inférieur droit de la Fig. 3.5 où les lignes verticales représentent des valeurs rationnelles du rapport $\frac{f_r}{f_z}$: on constate que le nombre d'ions piégés est moindre sous ces lignes à cause du couplage entre le mouvement longitudinal et le mouvement radial. 48

3.12 Observation des résonances paramétriques dans le piège de Paul [84]. 48

3.13 Observation des résonances combinées entre le mouvement radial et le mouvement longitudinal dans l'EIBT. 49

3.14 Superposition de la carte de stabilité radiale (noir) et de la carte de la synchronisation naturelle (bleu). Dans la zone stable et synchrone, les lignes où le piégeage semble moins efficace coïncident avec les ligne où $n\beta_r + m\beta_s = k \quad \forall(n, m, k) \in \mathbb{Z}^3$. Il y a donc un couplage entre le mouvement radial et la synchronisation. 54

3.15 Cartes de stabilité radiale avec le piège du MPI (gauche : pour N_2^+ , droite : pour Al_2^-). Les point rouges sont les points utilisés par M. Froese ; ils correspondent effectivement aux optimum prédit par la théorie de Floquet. 55

3.16 Cartes de synchronisation avec le piège du MPI en prenant en compte la charge d'espace ($\alpha_0 = 0.344$ et le double) (gauche : pour N_2^+ , droite : pour Al_2^-). Les point rouges sont les points utilisés par M. Froese. 55

3.17 Durée de la synchronisation pour les deux espèces en fonction de α 56

3.18 Cartes de synchronisation avec le piège du MPI en prenant en compte une plus grande charge d'espace ($\alpha_0 = 2$ et le double) (gauche : pour N_2^+ , droite : pour Al_2^-). Les points rouges sont les points utilisés par M. Froese. 56

3.19 Simulation des différentes grandeurs lors du piégeage. On constate que la décroissance initiale du nombre d'ions peut s'expliquer par un accroissement du rayon du paquet. 57

4.1 (a) représente une succession de spectres, tous centrés sur f_z avec le même intervalle (350kHz) pour différentes valeurs de V_z . Les autres potentiels étant fixés ($\{V_1 = 7600V, V_2 = 5850V, V_3 = 4150V, V_4 = 1650V, V_z\}$). (b) est le signal temporel observé sur le pickup pour $V_z = 3223V$. (c) est le signal du pickup pour $V_z = 3303V$. On remarque bien l'apparition de la modulation d'enveloppe due à l'apparition de nouvelles fréquences. 61

4.2 Sections de Poincaré pour différentes valeurs de V_z : (a) $V_z = 3200V$, (b) $V_z = 3280V$, (c) $V_z = 3330V$ et (d) $V_z = 3360V$. Les couleurs permettent de repérer les îlots (g_8 en turquoise, g_7 en mauve, g_6 en rouge, g_5 en vert et g_2 en violet.) On observe la naissance et la disparition des différents groupes d'îlots de résonances non linéaires. Les tirets en haut et en bas de chaque figure représentent le diamètre du pickup. 62

TABLE DES FIGURES

4.3 Section de Poincaré des 200 dernières oscillations (sur 400 au total) pour des ions O^{4+} à 4.2kV charge avec les termes non linéaires (gauche) et sans (droite). Les ions partent avec la même énergie en $z = 0$ avec un rayon compris dans $[0, 0.0016]$. On constate que les non linéarités autorisent des trajectoires excentriques alors que dans le cas linéaire, les ions ayant une distance de l'axe supérieure à 0.0005 ne sont pas piégés. 64

4.4 Etude de la dynamique de la transformation logistique pour différentes valeurs du paramètre r . Pour $r < 3$, il y a un point fixe, puis, pour des valeurs de r plus élevées, il y a "deux points fixes" entre lesquels la système oscille, puis quatre etc. Les dédoublements successifs de période aboutissent au chaos. 65

4.5 Bifurcation vers le chaos de la transformation logistique par dédoublement infini de période : chaque fourche correspond à un dédoublement de fréquence 66

4.6 Diagramme de bifurcation dans l'EIBT. Pour chaque valeur de V_z , on simule le mouvement d'une particule qui par de $z = 0$ et $r = 0.0056m$ pendant 100 aller-retours, puis on trace sur la ligne verticale correspondant à la valeur de V_z la distribution discrète des rayons de passage au centre du piège. Chaque formation d'un groupe g_i correspond à une transition chaos-ordre. 66

4.7 Représentation graphique de la fonction limite f , souvent appelée *escalier du diable*. 68

4.8 Variance des positions sur la section de Poincaré en fonction du potentiel. On remarque une structure constituée d'une bouffée chaotique et d'une décroissance régulière. Cette structure se répète de manière self similaire, comme l'itération de la fonction de Cantor. 68

4.9 Diagramme de phase après 400 oscillations dans le piège : (a) sans excitation, (b) avec $\omega_{ex} \preceq \omega_z$, (c) avec $\omega_{ex} = \omega_z$ et (d) avec $\omega_{ex} \succeq \omega_z$. Les résonances non linéaires ont disparu. 69

4.10 Durée expérimentale de la synchronisation forcée en fonction de la phase. Pour une valeur de la phase fixée, plusieurs cycles de piégeage ont été effectués et la durée de la synchronisation a été reporté en ordonnées. D'après [10]. 70

4.11 A gauche, chaque point représente (t_i, pz_i) , temps et quantité de mouvement au i ème passage à travers le plan $z = 0$ pour différentes valeurs de l'amplitude d'excitation et de phase pour 5 particules lancées avec différentes positions radiales. A droite, les histogrammes représentent la dispersion des temps du 1000 ème passage à travers le plan $z = 0$ pour 100 particules. On observe une diffusion lente sans excitation, une diffusion rapide avec une excitation n'ayant pas la bonne phase et un phénomène de verrouillage de phase ("phase-locking") avec un bon choix des paramètres d'excitation. 71

TABLE DES FIGURES

4.12	Gauche : spectre expérimental représentant le peigne de fréquence que nous obtenons lorsque l'excitation est quasi résonante. Droite : variation de δf avec l'amplitude de l'excitation V_{ex}	72
4.13	Résonance anharmonique : l'amplitude A est calculée en fonction de $\delta\omega$ pour $K = 0.1$ et $F \in [[1, 13]]$	73
4.14	Déstabilisation des particules en fonction de ω_{ex} : à gauche, nous avons tracé le nombre de particule piégées pendant $500\mu s$ avec une excitation de $10V$ et avec un déphasage de $\psi = 2$. Toutes les particules partent de $z = 0$ avec différents écart par rapport à l'axe. A droite, il s'agit du même calcul pour $\psi = 2\pi - 2$. En dessous nous avons tracé l'énergie cinétique moyenne des particules selon l'axe z	74
4.15	Résonance non linéaire en fonction de la phase et de ω_{ex}	75
4.16	Gauche : résonance paramétrique observée expérimentalement sur des ions O^{4+} à $4.2kV$ /charge. Droite : somme, sur un intervalle de phase, des courbes de résonances obtenues numériquement pour les mêmes paramètres.	76
5.1	Vue en perspective du piège et du photomultiplicateur.	79
5.2	Potentiel effectif radial utilisé pour l'“evaporative cooling”. En se plaçant dans une zone déstabilisante du diagramme de stabilité et en ajoutant un champ quadripolaire dans la zone centrale du piège on arrive à cette configuration. On faisant varier les tensions du piège quadripolaire, les barrières de la cuvette peuvent être abaissées progressivement pour faire du refroidissement par évaporation. Les zones de couleur représentent une distribution de particules.	84
5.3	Transformée de Fourier du signal du pickup montrant deux isotopes du Xe. Seuls les septièmes harmoniques sont présentées [13, 146].	89

Bibliographie

- [1] Wolfgang Paul. Electromagnetic traps for charged and neutral particles. *Rev. Mod. Phys.*, 62(3) :531–540, Jul 1990.
- [2] M. Block, D. Ackermann, K. Blaum, C. Droese, M. Dworschak, S. Eliseev, T. Fleckenstein, E. Haettner, F. Herfurth, F. P. Heßberger, S. Hofmann, J. Ketelaer, J. Ketter, H. J. Kluge, G. Marx, M. Mazzocco, Yu. N. Novikov, W. R. Plaß, A. Popeko, S. Rahaman, D. Rodríguez, C. Scheidenberger, L. Schweikhard, P. G. Thirolf, G. K. Vorobyev, and C. Weber. Direct mass measurements above uranium bridge the gap to the island of stability. *Nature*, 463(7282) :785–788, 02 2010.
- [3] M. Dahan, R. Fishman, O. Heber, M. L. Rappaport, N. Altstein, D. Zajfman, and W. J. van der Zande. A new type of electrostatic ion trap for storage of fast ion beams. *Review of Scientific Instruments*, 69(1) :76, 1997.
- [4] D. Zajfman, O. Heber, L. Vejby-Christensen, I. Ben-Itzhak, M. Rappaport, R. Fishman, and M. Dahan. Electrostatic bottle for long-time storage of fast ion beams. *Phys. Rev. A*, 55(3) :R1577–R1580, Mar 1997.
- [5] H. B. Pedersen, D. Strasser, O. Heber, M. L. Rappaport, and D. Zajfman. Stability and loss in an ion-trap resonator. *Phys. Rev. A*, 65(4) :042703, Mar 2002.
- [6] Tetsuo Ota, Manabu Saito, Atsushi Yokota, and Yoichi Haruyama. Design and test of a lens and reflector system of an electrostatic ion trap for molecular physics. *Japanese Journal of Applied Physics*, 45(6A) :5263–5268, 2006.
- [7] D. A. Dahl, J. E. Delmore, and A. D. Appelhans. Simion pc/ps2 electrostatic lens design program. *Review of Scientific Instruments*, 61(1) :607–609, jan. 1990.
- [8] Dina Attia. *Piégeage d’ions très chargés pour la mesure de durée de vie d’états métastables*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 10 2007.
- [9] M. Lange, M. Froese, S. Menk, J. Varju, R. Bastert, K. Blaum, J. R. Crespo Lopez-Urrutia, F. Fellenberger, M. Grieser, R. von Hahn, O. Heber, K.-U. Kühnel, F. Laux, D. A. Orlov, M. L. Rappaport, R. Repnow, C. D. Schroter, D. Schwalm, A. Shornikov, T. Sieber, Y. Toker, J. Ullrich, A. Wolf, and D. Zajfman. A cryogenic electrostatic trap for long-time storage of keV ion beams. *Review of Scientific Instruments*, 81(5) :055105, 2010.
- [10] Michael Froese. A cryogenic electrostatic ion trap and first experiments on delayed emission of aluminum anion clusters and self-bunching, 2010.
- [11] P. Reinhard, A. Orbán, J. Werner, S. Rosén, R. D. Thomas, I. Kashperka, H. A. B. Johansson, D. Misra, L. Brännholm, M. Björkhage, H. Cederquist, and H. T. Schmidt. Precision lifetime measurements of he^- in a

BIBLIOGRAPHIE

- cryogenic electrostatic ion-beam trap. *Phys. Rev. Lett.*, 103(21) :213002, Nov 2009.
- [12] E. Fischer. *Z. Phys.*, 156 :26, 1959.
- [13] D. Strasser, T. Geyer, H. B. Pedersen, O. Heber, S. Goldberg, B. Amarant, A. Diner, Y. Rudich, I. Sagi, M. Rappaport, D. J. Tannor, and D. Zajfman. Negative mass instability for interacting particles in a 1d box : Theory and application. *Phys. Rev. Lett.*, 89(28) :283204, Dec 2002.
- [14] H. B. Pedersen, D. Strasser, S. Ring, O. Heber, M. L. Rappaport, Y. Rudich, I. Sagi, and D. Zajfman. Ion motion synchronization in an ion-trap resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 87(5) :055001, Jul 2001.
- [15] H. B. Pedersen, D. Strasser, B. Amarant, O. Heber, M. L. Rappaport, and D. Zajfman. Diffusion and synchronization in an ion-trap resonator. *Phys. Rev. A*, 65(4) :042704, Mar 2002.
- [16] Tihamer Geyer and David J Tannor. A mapping approach to synchronization in the 'zajfman trap' : stability conditions and the synchronization mechanism. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 37(1) :73, 2004.
- [17] Tihamer Geyer and David J Tannor. A mapping approach to synchronization in the 'zajfman trap' : ii. the observed bunch. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 38(18) :3423, 2005.
- [18] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, and Jurgen Kurths. *Synchronization : A Universal Concept in Nonlinear Science*. 2002.
- [19] P. Tass, M. G. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler, and H.-J. Freund. Detection of $n : m$ phase locking from noisy data : Application to magnetoencephalography. *Phys. Rev. Lett.*, 81(15) :3291–3294, Oct 1998.
- [20] Nariya Uchida and Ramin Golestanian. Generic conditions for hydrodynamic synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 106(5) :058104, Feb 2011.
- [21] K. H. Kingdon. A method for the neutralization of electron space charge by positive ionization at very low gas pressures. *Phys. Rev.*, 21(4) :408–418, Apr 1923.
- [22] R. H. Hooverman. Charged particle orbits in a logarithmic potential. *Journal of Applied Physics*, 34(12) :3505–3508, 1963.
- [23] D. P. Moehs, D. A. Church, and R. A. Phaneuf. Kingdon trap apparatus and technique for precise measurement of the lifetimes of metastable levels of ions. *Review of Scientific Instruments*, 69(5) :1991–1995, 1998.
- [24] R. Blümel. Dynamic kingdon trap. *Phys. Rev. A*, 51(1) :R30–R33, Jan 1995.
- [25] A. Makarov. Electrostatic Axially Harmonic Orbital Trapping : A High-Performance Technique of Mass Analysis. *Analytical Chemistry*, 72(6) :1156–1162, 2000.

-
- [26] Q. Hu, R. J. Noll, H. Li, A. Makarov, M. Hardman, and R. G. Cooks. The Orbitrap : a new mass spectrometer. *Journal of Mass Spectrometry*, 40(4) :430–443, 2005.
- [27] Qizhi Hu, Robert J. Noll, Hongyan Li, Alexander Makarov, Mark Hardman, and R. Graham Cooks. The orbitrap : a new mass spectrometer. *Journal of Mass Spectrometry*, 40(4) :430–443, 2005.
- [28] Alexander Makarov, Eduard Denisov, Alexander Kholomeev, Wilko Bal-schun, Oliver Lange, Kerstin Strupat, and Stevan Horning. Performance evaluation of a hybrid linear ion trap/orbitrap mass spectrometer. *Analytical Chemistry*, 78(7) :2113–2120, 2006.
- [29] A. V. Ermakov and B. J. Hinch. An electrostatic autoresonant ion trap mass spectrometer. *Review of Scientific Instruments*, 81(1) :013107–8, 2010.
- [30] G. A. Brucker and G. J. Rathbone. Autoresonant Trap Mass Spectrometry (ART MS) for remote sensing applications. *International Journal of Mass Spectrometry*, 295(3) :133–137, 2010.
- [31] Henning T. Schmidt, Henrik Cederquist, Jens Jensen, and Afshin Fardi. Conetrapp : A compact electrostatic ion trap. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B : Beam Interactions with Materials and Atoms*, 173(4) :523 – 527, 2001.
- [32] J. Bernard, S. Martin, L. Chen, H. Cederquist, A. Salmoun, and R. Brédy. A single ion (Ar^{q+} $q=1,3$ or C_{60}^{3+}) in a conic electrode electrostatic trap. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B : Beam Interactions with Materials and Atoms*, 205 :196 – 200, 2003. 11th International Conference on the Physics of Highly Charged Ions.
- [33] S. P. Møller. ELISA, and electrostatic storage ring for atomic physics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 394(3) :281–286, 1997.
- [34] J. Bernard, G. Montagne, R. Bredy, B. Terpend-Ordaciere, A. Bourgey, M. Kerleroux, L. Chen, H. T. Schmidt, H. Cederquist, and S. Martin. A “tabletop” electrostatic ion storage ring : Mini-Ring. *Review of Scientific Instruments*, 79(7) :075109, 2008.
- [35] O. Aviv, Y. Toker, M. Errit, K. G. Bhushan, H. B. Pedersen, M. L. Rap-paport, O. Heber, D. Schwalm, and D. Zajfman. A bent electrostatic ion beam trap for simultaneous measurements of fragmentation and ionization of cluster ions. *Review of Scientific Instruments*, 79(8) :083110, 2008.
- [36] A. Gumberidze, M. Trassinelli, N. Adrouche, C. I. Szabo, P. Indelicato, F. Haranger, J.-M. Isac, E. Lamour, E.-O. Le Bigot, J. Mérot, C. Prigent, J.-P. Rozet, and D. Vernhet. Electronic temperatures, densities, and plasma x-ray emission of a 14.5 ghz electron-cyclotron resonance ion source. *Review of Scientific Instruments*, 81(3) :033303, 2010.
- [37] Russell H. Varian and Sigurd F. Varian. A high frequency oscillator and amplifier. *Journal of Applied Physics*, 10(5) :321–327, 1939.
-

BIBLIOGRAPHIE

- [38] Martino Trassinelli. *Tests d'Électrodynamique Quantique et Étalons de Rayons-X à l'Aide des Atomes Pioniques et des Ions Multichargés*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 12 2005.
- [39] Valéria Lepère. *Dynamique de photofragmentation de petits agrégats d'Argon et de molécules biologiques : nouvel outil par piégeage et corrélation vectorielle*. PhD thesis, Université Paris Sud - Paris XI, 09 2006.
- [40] Qi Sun, Li Ding, and Changxin Gu. Modeling and optimization of dual-cylinder image current detector in electrostatic ion beam trap for mass spectrometry. *International Journal of Mass Spectrometry*, 282(1-2) :38 – 44, 2009.
- [41] A. J. H. Boerboom. How far the computer can be avoided in mass spectrometer design. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes*, 100 :15–29, 1990.
- [42] J. Verdu. Calculation of electrostatic fields using quasi-green's functions : application to the hybrid penning trap. *New Journal of Physics*, 10 :103009, Jun. 2008.
- [43] D. R. Cruise. A numerical method for the determination of an electric field about a complicated boundary. *Journal of Applied Physics*, 34(12) :3477–3479, 1963.
- [44] A Renau, F H Read, and J N H Brunt. The charge-density method of solving electrostatic problems with and without the inclusion of space-charge. *Journal of Physics E : Scientific Instruments*, 15(3) :347, 1982.
- [45] D. Preikszas and H. Rose. Correction properties of electron mirrors. *Journal of Electron Microscopy*, 46(1) :1–9, 1997.
- [46] W. Wan, J. Feng, H. A. Padmore, and D. S. Robin. Simulation of a mirror corrector for peem3. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 519(51-2) :5222 – 229, 2004. Proceedings of the Sixth International Conference on Charged Particle Optics.
- [47] S. Bertram. Determination of the axial potential distribution in axially symmetric electrostatic fields. *Proceedings of the IRE*, 28(9) :418–420, Sept. 1940.
- [48] Sidney Bertram. Calculation of axially symmetric fields. *Journal of Applied Physics*, 13(8) :496–502, 1942.
- [49] A. B. El-Kareh and M. A. Sturans. Analysis of the 3-tube asymmetrical electrostatic unipotential lens. *Journal of Applied Physics*, 42(12) :4902–4907, 1971.
- [50] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*, volume 2009. Wiley, 1998.
- [51] M. Abramowitz and I. A. Stegun. Handbook of mathematical functions. page 1046. Dover, New York, 1965.
- [52] René Descartes. *Règles pour la direction de l'esprit*. 1996.
- [53] Inc. Wolfram Research. *Mathematica Edition : Version 8.0*. 2010.

-
- [54] Ichiro Tani. The wing section theory of kutta and zhukovski. *Muller*, pages 511–516, 1979.
- [55] C. Amatore, A. Oleinick, and I. Svir. Simulation of diffusion at micro-ring electrodes through conformal mapping. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 564 :245–260, 2004.
- [56] A. Oleinick, C. Amatore, and I. Svir. Efficient quasi-conformal map for simulation of diffusion at disk microelectrodes. *Electrochemistry Communications*, 6(6) :588–594, 2004.
- [57] A. J. Reuben, G. B. Smith, P. Moses, A. V. Vagov, M. D. Woods, D. B. Gordon, and R. W. Munn. Ion trajectories in exactly determined quadrupole fields. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes*, 154(1-2) :43–59, 1996.
- [58] C. Amatore, A. I. Oleinick, and I. B. Svir. Simulation of the double hemicylinder generator-collector assembly through conformal mapping technique. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 553 :49–61, 2003.
- [59] J. H. Wesenberg. Electrostatics of surface-electrode ion traps. *pra*, 78(6) :063410–12, 2008.
- [60] H.H. Meinke, K.P. Lange, and J.F. Ruger. Te- and tm-waves in waveguides of very general cross section. *Proceedings of the IEEE*, 51(11) :1436 – 1443, 1963.
- [61] Michael M. Tilleman. Analysis of electrostatic comb-driven actuators in linear and nonlinear regions. *International Journal of Solids and Structures*, 41(18-19) :4889 – 4898, 2004.
- [62] Patricio A.A. Laura Roland Schinzinger. *Conformal Mapping : Methods and Applications*. Dover Publications, 2003.
- [63] D.G. Crowdy. Conformal mappings from annuli to canonical doubly connected bell representations. *J. Math. Anal. Appl.*, 340(1) :669–674, 2007.
- [64] T.C. O’Connell and P.T. Krein. The schwarz-christoffel analytical method applied to electric machine slot shape optimization. In *Electric Machines Drives Conference, 2007. IEMDC '07. IEEE International*, volume 1, pages 341 –346, May 2007.
- [65] T. Sun, N. G. Green, and H. Morgan. Electric field analysis using Schwarz-Christoffel mapping. *Journal of Physics : Conference Series*, 142 :012029, 2008.
- [66] Tobin A. Driscoll and Stephen A. Vavasis. Numerical conformal mapping using cross-ratios and delaunay triangulation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19(6) :1783–1803, 1998.
- [67] G. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, 8(1) :1–36, 12 1886/12/13/.
- [68] H. Poincaré. Sur les déterminants d’ordre infini. *Bulletin de la Société Math matique de France*, 14 :77–90, 1886.
-

BIBLIOGRAPHIE

- [69] W. Magnus and S. Winkler. *Hill's Equation*. 1979.
- [70] Bruno Rossetto. *Détermination des exposants de Floquet de l'équation de Hill d'ordre n : applications = Determination of Floquet exponents for the n order Hill equation : applications*. PhD thesis, Université Toulon, 1983.
- [71] E. T. Whittaker. On the general solution of mathieu's equation. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 32 :75–80, 1913.
- [72] Jack K. Hale and Huseyin Kocak. *Dynamics and bifurcations*, volume 3. Springer, 1991.
- [73] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations And Dynamical Systems*. unpublished, 2008.
- [74] N. V. Kononkov, M. Sudakov, and D. J. Douglas. Matrix methods for the calculation of stability diagrams in quadrupole mass spectrometry. *Journal of the American Society for Mass Spectrometry*, 13(6) :597 – 613, 2002.
- [75] F. G. Major, V. N. Gheorghe, and G. Werth. *Charged Particle Traps*. Springer, 2005.
- [76] M. Galassi et al. *GNU Scientific Library Reference Manual (3rd Ed.)*.
- [77] Michael Nasse and Christopher Foot. Influence of background pressure on the stability region of a paul trap. *European Journal of Physics*, 22(6) :563, 2001.
- [78] T. Hasegawa and K. Uehara. Dynamics of a single particle in a paul trap in the presence of the damping force. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 61 :159–163, 1995. 10.1007/BF01090937.
- [79] X. Zhao, V. L. Ryjkov, and H. A. Schuessler. Parametric excitations of trapped ions in a linear rf ion trap. *Phys. Rev. A*, 66(6) :063414, Dec 2002.
- [80] M. A. N. Razvi, X. Z. Chu, R. Alheit, G. Werth, and R. Blümel. Fractional frequency collective parametric resonances of an ion cloud in a paul trap. *Phys. Rev. A*, 58(1) :R34–R37, Jul 1998.
- [81] M. Sudakov, N. Kononkov, D. J. Douglas, and T. Glebova. Excitation frequencies of ions confined in a quadrupole field with quadrupole excitation. *Journal of the American Society for Mass Spectrometry*, 11(1) :10 – 18, 2000.
- [82] Y Toker, N Altstein, O Aviv, M L Rappaport, O Heber, D Schwalm, D Strasser, and D Zajfman. The kick-out mass selection technique for ions stored in an electrostatic ion beam trap. *Journal of Instrumentation*, 4(09) :P09001, 2009.
- [83] Mario Serio. Transverse betatron tune measurements. 343 :65–93, 1989.
- [84] X. Z. Chu, M. Holzki, R. Alheit, and G. Weitha. Observation of high-order motional resonances of an ion cloud in a paul trap. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes*, 173(1-2) :107 – 112, 1998.
- [85] Paul Woaf and Roberto A. Kraenkel. Synchronization : Stability and duration time. *Phys. Rev. E*, 65(3) :036225, Mar 2002.

-
- [86] R. Alheit, Th. Gudjons, S. Kleineidam, and G. Werth. Some observations on higher-order non-linear resonances in a paul trap. *Rapid Communications in Mass Spectrometry*, 10(5) :583–590, 1996.
- [87] R. Alheit, S. Kleineidam, F. Vedel, M. Vedel, and G. Werth. Higher order non-linear resonances in a paul trap. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes*, 154(3) :155 – 169, 1996.
- [88] Y. Wang, J. Franzen, and K. P. Wanczek. The non-linear resonance ion trap. part 2. a general theoretical analysis. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes*, 124(2) :125 – 144, 1993.
- [89] A Gumberidze, D Attia, C I Szabo, P Indelicato, A Vallette, and S Carmo. Trapping of highly charged ions with an electrostatic ion trap. *Journal of Physics : Conference Series*, 163(1) :012110, 2009.
- [90] Anatoli Verentchikov, Alexander Berdnikov, and Mikhail Yavor. Stable ion beam transport through periodic electrostatic structures : linear and non-linear effects. *Physics Procedia*, 1(1) :87 – 97, 2008. Proceedings of the Seventh International Conference on Charged Particle Optics (CPO-7).
- [91] Carson Jeffries and Jose Perez. Observation of a pomeau-manneville intermittent route to chaos in a nonlinear oscillator. *Phys. Rev. A*, 26(4) :2117–2122, Oct 1982.
- [92] J. Hoffnagle, R. G. DeVoe, L. Reyna, and R. G. Brewer. Order-chaos transition of two trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 61(3) :255–258, Jul 1988.
- [93] R. Blümel, C. Kappler, W. Quint, and H. Walther. Chaos and order of laser-cooled ions in a paul trap. *Phys. Rev. A*, 40(2) :808–823, Jul 1989.
- [94] David Farrelly and James E. Howard. Double-well dynamics of two ions in the paul and penning traps. *Phys. Rev. A*, 49(2) :1494–1497, Feb 1994.
- [95] D. D’Humieres, M. R. Beasley, B. A. Huberman, and A. Libchaber. Chaotic states and routes to chaos in the forced pendulum. *Phys. Rev. A*, 26(6) :3483–3496, Dec 1982.
- [96] Anita Gupta and Pushpa Rao. Numerical calculations of potential distribution in non-ideal quadrupole trap and simulations of anharmonic oscillations. *Pramana*, 70 :457–470, 2008. 10.1007/s12043-008-0061-9.
- [97] Alexander A. Makarov. Resonance ejection from the paul trap : A theoretical treatment incorporating a weak octapole field. *Analytical Chemistry*, 68(23) :4257–4263, 1996.
- [98] Fernande Vedel and Michel Vedel. Nonlinear effects in the detection of stored ions. *Phys. Rev. A*, 41(5) :2348–2351, Mar 1990.
- [99] R. Alheit, X. Z. Chu, M. Hofer, M. Holzki, G. Werth, and R. Blümel. Nonlinear collective oscillations of an ion cloud in a paul trap. *Phys. Rev. A*, 56(5) :4023–4031, Nov 1997.
- [100] G. Tommaseo, P. Paasche, C. Angelescu, and G. Werth. Subharmonic excitation of the eigenmodes of charged particles in a penning trap. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 28 :39–48, 2004. 10.1140/epjd/e2003-00296-0.
-

BIBLIOGRAPHIE

- [101] L H Andersen, O Heber, and D Zajfman. Physics with electrostatic rings and traps. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 37(11) :R57, 2004.
- [102] Lisheng Yang, D. A. Church, Shigu Tu, and Jian Jin. Measured lifetimes of selected metastable levels of ar^{q+} ions ($q=2, 3, 9$, and 10) stored in an electrostatic ion trap. *Phys. Rev. A*, 50(1) :177–185, Jul 1994.
- [103] J. P. Marques, F. Parente, and P. Indelicato. Hyperfine quenching of the $1s^2 2s 2p^3 p_0$ level in berylliumlike ions. *Phys. Rev. A*, 47(2) :929–935, Feb 1993.
- [104] A. Lapierre, J. R. Crespo López-Urrutia, J. Braun, G. Brenner, H. Bruhns, D. Fischer, A. J. González Martínez, V. Mironov, C. Osborne, G. Sikler, R. Soria Orts, H. Tawara, J. Ullrich, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and A. Volotka. Lifetime measurement of the ar xiv $1s^2 2s^2 2p^2 p_{3/2}^o$ metastable level at the heidelberg electron-beam ion trap. *Phys. Rev. A*, 73(5) :052507, May 2006.
- [105] D. P. Moehs and D. A. Church. Magnetic dipole transition rates from measured lifetimes of levels of be-like and b-like argon ions. *Phys. Rev. A*, 58(2) :1111–1114, Aug 1998.
- [106] E. Trabert, P. Beiersdorfer, S. B. Utter, G. V. Brown, H. Chen, C. L. Harris, P. A. Neill, D. W. Savin, and A.J. Smith. Experimental m1 transition rates of coronal lines from ar x, ar xiv, and ar xv. *The Astrophysical Journal*, 541(1) :506, 2000.
- [107] A. Lapierre, U. D. Jentschura, J. R. Crespo López-Urrutia, J. Braun, G. Brenner, H. Bruhns, D. Fischer, A. J. González Martínez, Z. Harman, W. R. Johnson, C. H. Keitel, V. Mironov, C. J. Osborne, G. Sikler, R. Soria Orts, V. Shabaev, H. Tawara, I. I. Tupitsyn, J. Ullrich, and A. Volotka. Relativistic electron correlation, quantum electrodynamics, and the lifetime of the $1s^2 2s^2 2p^2 p_{3/2}^o$ level in boronlike argon. *Phys. Rev. Lett.*, 95(18) :183001, Oct 2005.
- [108] R Ifflander and G Werth. Optical detection of ions confined in a rf quadrupole trap. *Metrologia*, 13(3) :167, 1977.
- [109] G. Werth. Optical spectroscopy in ion traps. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 45 :121–124, 2007. 10.1140/epjd/e2007-00149-x.
- [110] Christian S. Perone. Pyevolve, a complete python genetic algorithm framework.
- [111] Kate P Kirby. Ionic processes in astrophysics. *Physica Scripta*, 1995(T59) :59, 1995.
- [112] P. Jakobsen, A. Boksenberg, J. M. Deharveng, P. Greenfield, R. Jedrzejewski, and F. Paresce. Detection of intergalactic ionized helium absorption in a high-redshift quasar. *Nature*, 370(6484) :35–39, 07 1994.
- [113] Tomas Brage, Philip G. Judge, and Charles R. Proffitt. Determination of hyperfine-induced transition rates from observations of a planetary nebula. *Phys. Rev. Lett.*, 89(28) :281101, Dec 2002.

-
- [114] Wayne M Itano, J C Bergquist, J J Bollinger, and D J Wineland. Cooling methods in ion traps. *Physica Scripta*, 1995(T59) :106, 1995.
- [115] S. L. Gilbert, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland. Shell-structure phase of magnetically confined strongly coupled plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, 60(20) :2022–2025, May 1988.
- [116] Stig Stenholm. The semiclassical theory of laser cooling. *Rev. Mod. Phys.*, 58(3) :699–739, Jul 1986.
- [117] H.G. Dehmelt. Radiofrequency spectroscopy of stored ions ii : Spectroscopy. volume 5 of *Advances in Atomic and Molecular Physics*, pages 109 – 154. Academic Press, 1969.
- [118] W. Shockley. Currents to conductors induced by a moving point charge. *Journal of Applied Physics*, 9(10) :635–636, 1938.
- [119] Earl C. Beaty. Calculated electrostatic properties of ion traps. *Phys. Rev. A*, 33(6) :3645–3656, Jun 1986.
- [120] Eric A. Cornell, Robert M. Weisskoff, Kevin R. Boyce, Robert W. Flanagan, Gregory P. Lafyatis, and David E. Pritchard. Single-ion cyclotron resonance measurement of $m(\text{co}^+)/m(n_2^+)$. *Phys. Rev. Lett.*, 63(16) :1674–1677, Oct 1989.
- [121] Hans Dehmelt, Warren Nagourney, and Jon Sandberg. Self-excited mono-ion oscillator. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 83(16) :5761–5763, 1986.
- [122] S. van der Meer. Stochastic cooling and the accumulation of antiprotons. *Rev. Mod. Phys.*, 57(3) :689–697, Jul 1985.
- [123] S. Goldberg, D. Strasser, O. Heber, M. L. Rappaport, A. Diner, and D. Zajfman. Phase-space manipulation of stored ions using the δ -kick method. *Phys. Rev. A*, 68(4) :043410, Oct 2003.
- [124] Guang-Cai Zhang, Jing-Ling Shen, Jian-Hua Dai, and Hong-Jun Zhang. Cooling charged particles in a paul trap by feedback control. *Phys. Rev. A*, 60(1) :704–707, Jul 1999.
- [125] Zhang Guang-Cai and Zhang Hong-Jun. Control method of cooling a charged particle pair in a paul trap. *Chinese Physics Letters*, 20(11) :1924, 2003.
- [126] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mechanics*, volume 1. Pergamon Press Ltd., 1960.
- [127] Babar Ahmad. Stabilization of kapitza oscillator by symmetric periodical forces. *Nonlinear Dynamics*, 62 :499–506, 2010. 10.1007/s11071-010-9736-0.
- [128] Harald F. Hess. Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen. *Phys. Rev. B*, 34(5) :3476–3479, Sep 1986.
- [129] G. Gabrielse, X. Fei, L. A. Orozco, R. L. Tjoelker, J. Haas, H. Kalinowsky, T. A. Trainor, and W. Kells. Cooling and slowing of trapped antiprotons below 100 mev. *Phys. Rev. Lett.*, 63(13) :1360–1363, Sep 1989.
-

BIBLIOGRAPHIE

- [130] G. B. Andresen, M. D. Ashkezari, M. Baquero-Ruiz, W. Bertsche, P. D. Bowe, E. Butler, C. L. Cesar, S. Chapman, M. Charlton, J. Fajans, T. Friesen, M. C. Fujiwara, D. R. Gill, J. S. Hangst, W. N. Hardy, R. S. Hayano, M. E. Hayden, A. Humphries, R. Hydromako, S. Jonsell, L. Kurchaninov, R. Lambo, N. Madsen, S. Menary, P. Nolan, K. Olchanski, A. Olin, A. Povilus, P. Pusa, F. Robicieux, E. Sarid, D. M. Silveira, C. So, J. W. Storey, R. I. Thompson, D. P. van der Werf, D. Wilding, J. S. Wurtele, and Y. Yamazaki. Evaporative cooling of antiprotons to cryogenic temperatures. *Phys. Rev. Lett.*, 105(1) :013003, Jul 2010.
- [131] X.-P. Huang, F. Anderegg, E. M. Hollmann, C. F. Driscoll, and T. M. O’Neil. Steady-state confinement of non-neutral plasmas by rotating electric fields. *Phys. Rev. Lett.*, 78(5) :875–878, Feb 1997.
- [132] Gemunu H. Gunaratne, Paul S. Linsay, and Michael J. Vinson. Chaos beyond onset : A comparison of theory and experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 63(1) :1–4, Jul 1989.
- [133] Edward Ott, Celso Grebogi, and James A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64(11) :1196–1199, Mar 1990.
- [134] Julyan H. E. Cartwright, Marcelo O. Magnasco, and Oreste Piro. Bailout embeddings, targeting of invariant tori, and the control of hamiltonian chaos. *Phys. Rev. E*, 65(4) :045203, Apr 2002.
- [135] Julien Tailleur and Jorge Kurchan. Probing rare physical trajectories with lyapunov weighted dynamics. *Nat Phys*, 3(3) :203–207, 03 2007.
- [136] Ricardo Lima and Marco Pettini. Suppression of chaos by resonant parametric perturbations. *Phys. Rev. A*, 41(2) :726–733, Jan 1990.
- [137] Noboru Sakamoto. Floquet-based chaos control for continuous-time systems with stability analysis. *Physics Letters A*, 356(4-5) :316 – 323, 2006.
- [138] A. M. Perelomov and V. S. Popov. *Teor. Mat. Fiz.*, 1 :360, 1969.
- [139] M. Sudakov. Effective potential and the ion axial beat motion near the boundary of the first stable region in a nonlinear ion trap. *International Journal of Mass Spectrometry*, 206(1-2) :27 – 43, 2001.
- [140] Dieter Gerlich. *Inhomogeneous RF Fields : A Versatile Tool for the Study of Processes with Slow Ions*. John Wiley Sons, Inc., 2007.
- [141] M. Drewsen and A. Brøner. Harmonic linear paul trap : Stability diagram and effective potentials. *Phys. Rev. A*, 62(4) :045401, Sep 2000.
- [142] Saar Rahav, Ido Gilary, and Shmuel Fishman. Time independent description of rapidly oscillating potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 91(11) :110404, Sep 2003.
- [143] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland. Quantum dynamics of single trapped ions. *Rev. Mod. Phys.*, 75(1) :281–324, Mar 2003.
- [144] Wenhua Hai, Qiongtao Xie, and Jianshu Fang. Quantum chaos and order based on classically moving reference frames. *Phys. Rev. A*, 72(1) :012116, Jul 2005.

BIBLIOGRAPHIE

- [145] F. G. Major, V. N. Gheorghe, and G. Werth. *Charged Particle Traps II, Applications*. Springer, 2009.
- [146] D. Zajfman, Y. Rudich, I. Sagi, D. Strasser, D. W. Savin, S. Goldberg, M. Rappaport, and O. Heber. High resolution mass spectrometry using a linear electrostatic ion beam trap. *International Journal of Mass Spectrometry*, 229(1-2) :55 – 60, 2003. Mass Spectrometry Contributions to Nanosciences and Nanotechnology.
- [147] Alan G. Marshall, Christopher L. Hendrickson, and George S. Jackson. Fourier transform ion cyclotron resonance mass spectrometry : A primer. *Mass Spectrometry Reviews*, 17(1) :1–35, 1998.
- [148] G.C. Stafford Jr., P.E. Kelley, J.E.P. Syka, W.E. Reynolds, and J.F.J. Todd. Recent improvements in and analytical applications of advanced ion trap technology. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes*, 60(1) :85 – 98, 1984.
- [149] Ruedi Aebersold and Matthias Mann. Mass spectrometry-based proteomics. *Nature*, 422(6928) :198–207, 03 2003.
- [150] Kermit K. Murray. Dna sequencing by mass spectrometry. *Journal of Mass Spectrometry*, 31(11) :1203–1215, 1996.
- [151] Edwin Lasonder, Yasushi Ishihama, Jens S. Andersen, Adriaan M. W. Vermunt, Arnab Pain, Robert W. Sauerwein, Wijnand M. C. Eling, Neil Hall, Andrew P. Waters, Hendrik G. Stunnenberg, and Matthias Mann. Analysis of the plasmodium falciparum proteome by high-accuracy mass spectrometry. *Nature*, 419(6906) :537–542, 10 2002.

Cette thèse a pour objectif de comprendre la dynamique des ions piégés dans un EIBT (Electrostatic Ion Beam Trap). J'ai commencé par mettre au point une méthode de calcul basée sur des transformations conformes pour obtenir une formule analytique du potentiel dans ce type de piège. Grâce à cette expression, on peut écrire les équations du mouvement, démontrant la parenté de l'EIBT et du piège de Paul. Ce parallèle permet, en utilisant la théorie de Floquet, de prédire les zones de stabilité du piège et le spectre du mouvement radial. J'ai pu vérifier ces prédictions avec des ions Ne^{5+} produits par la source SIMPA. En prenant en compte les termes non-linéaires du mouvement, j'ai pu démontrer la présence de chaos pour certains paramètres de fonctionnement, ce qui a permis de mieux comprendre les signaux de détection. Finalement, en utilisant le même formalisme, un modèle simple du phénomène de synchronisation des ions dans ce type de piège a pu être proposé et a donné des premières prédictions en accord avec les expériences.

La compréhension de la dynamique permet de nombreuses applications intéressantes dans des domaines variés. En physique atomique, l'EIBT permet de mesurer des durées de vie d'états métastables. En biologie et en médecine, ce piège peut être considéré comme un spectromètre de masse ayant une gamme en masse infinie. Enfin, pour des expériences de métrologie, il semble possible de refroidir le mouvement transverse par refroidissement résistif ou évaporatif.

The aim of this work is to understand the dynamics of ions trapped in an EIBT (Electrostatic Ion Beam Trap), which is a ion trap made of two electrostatic mirrors. We start by presenting a mathematical method, based on conformal mapping, which enables us to find the analytical formula of the potential inside the trap. With this expression, it is possible to write the equation of the movement, demonstrating the kinship of the EIBT with the canonical quadrupole trap (Paul trap). We then study the stability of the trapping using the Floquet theory and present a stability map, equivalent to the Ince-Strutt diagram. These theoretical predictions have been confirmed by experiments made with ions from the SIMPA ECR source. Taking the non-linear terms of the potential into account, we show that a chaotic regime exists. Finally, a simple model of the synchronization phenomena (where ions stay bunched despite of the coulomb repulsion) is proposed and seems in good agreement with experiments.

The understanding of the dynamics of ions in the EIBT has a lot of applications in various domains. In atomic physics, this trap can be used to measure metastable state lifetimes. In biology and in medicine, it can be used as mass spectrometer of infinite mass. Finally, for metrology experiments, it seems possible to cool down the radial motion.